Simulación para Riesgos

Tipos de Dependencia
Cópulas

Jorge de la Vega Góngora

Departamento de Estadística,
Instituto Tecnológico Autónomo de México

Viernes 10 de noviembre de 2017

2.4 Dependencia

Introducción

- En sesiones anteriores hemos visto cómo generar muestras aleatorias de varias familias de distribuciones de probabilidad.

Introducción

- En sesiones anteriores hemos visto cómo generar muestras aleatorias de varias familias de distribuciones de probabilidad.
- Una característica de estas muestras es que son aleatorias, es decir, son independientes e idénticamente distribuidas.

Introducción

- En sesiones anteriores hemos visto cómo generar muestras aleatorias de varias familias de distribuciones de probabilidad.
- Una característica de estas muestras es que son aleatorias, es decir, son independientes e idénticamente distribuidas.
- Sin embargo, en algunas aplicaciones la dependencia de las variables es importante y requiere ser modelada.

Introducción

- En sesiones anteriores hemos visto cómo generar muestras aleatorias de varias familias de distribuciones de probabilidad.
- Una característica de estas muestras es que son aleatorias, es decir, son independientes e idénticamente distribuidas.
- Sin embargo, en algunas aplicaciones la dependencia de las variables es importante y requiere ser modelada.
- La dependencia es un concepto mucho más complejo que la independencia y mucho más difícil de modelar adecuadamente.

Dependencia

- Imaginen que quieren generar un par de variables aleatorias (va's) X y Y, con distribución conjunta $F(X,Y)$ y con marginales F_X y F_Y. Además, quieren que tenga cierta estructura de dependencia.
- ¿Qué debemos entender por dependencia (estocástica)? La definición usual es en términos de la función de distribución conjunta y sus marginales:

$$F(X,Y) = F(X|Y)F_Y(Y) = F(Y|X)F_X(X)$$

- Otra manera es pensar en la correlación. ¿Es la dependencia entre variables su correlación? No, la dependencia es un concepto es mucho más complicado.

Dependencia: ejemplo

- En los mercados financieros, la correlación se aplica para medir el riesgo de un portafolio de inversión.

Dependencia: ejemplo

- En los mercados financieros, la correlación se aplica para medir el riesgo de un portafolio de inversión.
- Sin embargo, sólo es apropiada cuando dos rendimientos tienen una distribución conjunta elíptica. De otra forma, puede ser engañoso la medición de la dependencia real entre éstos.

Dependencia: ejemplo

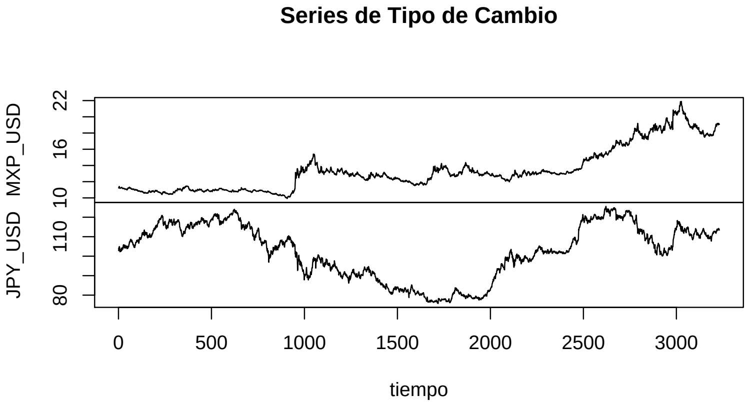
- En los mercados financieros, la correlación se aplica para medir el riesgo de un portafolio de inversión.
- Sin embargo, sólo es apropiada cuando dos rendimientos tienen una distribución conjunta elíptica. De otra forma, puede ser engañoso la medición de la dependencia real entre éstos.
- En los modelos financieros clásicos, se asume que los rendimientos son iid normales multivariados, pero no se justifica empíricamente. Se puede alcanzar mayor exactitud permitiendo que las distribuciones marginales de los rendimientos sean no normales o incluso tendiendo diferentes distribuciones.

Dependencia: ejemplo

- En los mercados financieros, la correlación se aplica para medir el riesgo de un portafolio de inversión.
- Sin embargo, sólo es apropiada cuando dos rendimientos tienen una distribución conjunta elíptica. De otra forma, puede ser engañoso la medición de la dependencia real entre éstos.
- En los modelos financieros clásicos, se asume que los rendimientos son iid normales multivariados, pero no se justifica empíricamente. Se puede alcanzar mayor exactitud permitiendo que las distribuciones marginales de los rendimientos sean no normales o incluso tendiendo diferentes distribuciones.
- Por ejemplo, los rendimientos de un activo pueden ser t de Student y los rendimientos de otro instrumento pueden ser gamma. Pero en este contexto la correlación pierde sentido.

Ejemplo

```
mxpusd <- read.csv("~/Dropbox/Public/RiesgosS17-II/data/mxpusd.csv")
jpyusd <- read.csv("~/Dropbox/Public/RiesgosS17-II/data/jpyusd.csv")
n <- length(mxpusd[,1])
plot.ts(cbind(MXP_USD = mxpusd[n:1,2], JPY_USD = jpyusd[n:1,2]),
                  main = "Series de Tipo de Cambio", xlab = "tiempo")
```

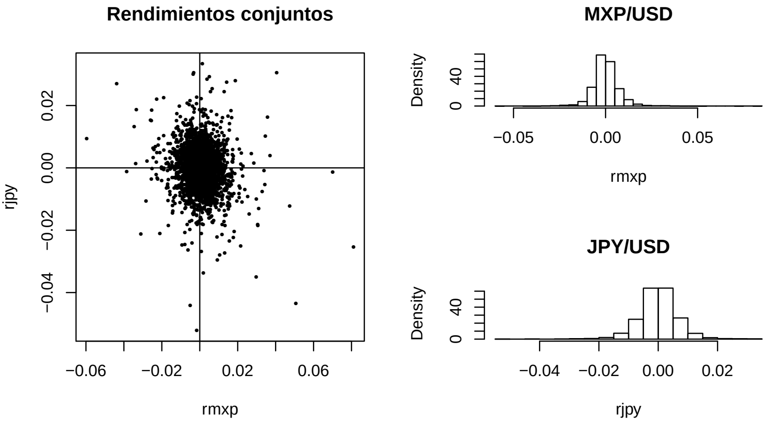


Ejemplo I

Supongamos que las variables aleatorias son los rendimientos del tipo de cambio en el periodo considerado.

```
rmxp <- diff(log(mxpusd[n:1,2]))
rjpy <- diff(log(jpyusd[n:1,2]))
layout(matrix(c(1,2,1,3), nrow = 2, byrow = T))
plot(rmxp, rjpy, pch = 16, cex = 0.5, main = "Rendimientos conjuntos")
abline(h = 0)
abline(v = 0)
cor(rmxp,rjpy)

[1] -0.1286718

hist(rmxp, breaks = 30, prob = T, main = "MXP/USD")
hist(rjpy, breaks = 30, main = "JPY/USD", prob = T)
```

Ejemplo II


Rendimientos conjuntos
rjpy
0.02
0.00
−0.02
−0.04
−0.06
−0.02
0.02
0.06
rmxp
MXP/USD
Density
0
40
−0.05
0.00
0.05
rmxp
JPY/USD
Density
0
40
−0.04
−0.02
0.00
0.02
rjpy

Dependencia

- La correlación es un concepto de **dependencia lineal** y por lo tanto no captura dependencias no lineales.
- Aplica naturalmente en distribuciones elípticas (multivariadas normal, t, doble exponencial, uniforme).
- Recordar que si $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \implies \rho(X_1, X_2) = 0$, pero la conversa no es cierta en general. Sólo es cierta en la distribución normal.
- Por otra parte si $\rho(X_1, X_2) = \pm 1 \implies X_2 = \alpha \pm \beta X_2$.
- Muy importante: **¡Correlación no es causalidad!**
- La correlación es una medida limitada de dependencia, y en finanzas su estimación falta de robustez (considerando el tiempo).

Ejemplo I

Obtener una muestra de un vector normal multivariado de orden 3: $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3) \sim \mathcal{N}_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ donde $\boldsymbol{\Sigma}$ es una matriz de covarianzas que induce una estructura de dependencia entre las variables componentes.

Solución.

Este problema se puede resolver estandarizando. Para estandarizar, necesitamos descomponer la matriz de covarianzas en su "raíz cuadrada": tenemos que encontrar $\mathbf{B} \ni \mathbf{B}\mathbf{B}' = \boldsymbol{\Sigma}$.
Entonces

$$\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p) \implies \mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

Por ejemplo, si $\boldsymbol{\mu} = (1, 2, 3)'$ y $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2.5 & 0.75 & 0.175 \\ 075 & 0.7 & 0.135 \\ 0.175 & 0.135 & 0.43 \end{pmatrix}$.

Entonces la estructura de dependencia en esta distribución está contenida en B. A partir de normales independientes podemos encontrar las variables que nos interesan.
El siguiente script muestra como obtener B con diagonalización:

Ejemplo II

```
Sigma <- matrix(c(2.5, 0.75, 0.175,
                  0.75, 0.7, 0.135,
                  0.175, 0.135, 0.43),byrow=T,nrow=3)
e <- eigen(Sigma)
v <- e$vectors
B <- v %*% diag(sqrt(e$values)) %*% t(v)
B

           [,1]       [,2]       [,3]
[1,] 1.54657939 0.32165372 0.06805199
[2,] 0.32165372 0.76821450 0.07990852
[3,] 0.06805199 0.07990852 0.64728939

# Ahora generamos una muestra aleatoria de X:
Z <- matrix(rnorm(300),nrow=100,ncol=3,byrow=T)
X <- c(1,2,3) + Z %*% B
head(X,4)

          [,1]      [,2]     [,3]
[1,] 1.7733936 2.1577820 2.687509
[2,] 2.8404200 3.1320366 1.121571
[3,] 4.5706906 0.7622802 2.437533
[4,] 0.8774145 2.7375190 3.147638
```

□

Esta solución no es generalizable a otras distribuciones que no sean elípticas.

Dependencia

Algunos problemas adicionales de la correlación como medida de dependencia son los siguientes:

- *La correlación no es invariante bajo transformación de variables.* Por ejemplo:

$$cor(X_1, X_2) \neq cor(\log(X_1), log(X_2))$$

Dependencia

Algunos problemas adicionales de la correlación como medida de dependencia son los siguientes:

- *La correlación no es invariante bajo transformación de variables.* Por ejemplo:

$$cor(X_1, X_2) \neq cor(\log(X_1), log(X_2))$$

- *Valores factibles para la correlación dependen de las distribuciones marginales.* Por ejemplo si X_1 y X_2 son lognormales, entonces ciertos valores de la correlación son imposibles.

Dependencia

Algunos problemas adicionales de la correlación como medida de dependencia son los siguientes:

- *La correlación no es invariante bajo transformación de variables.* Por ejemplo:

$$cor(X_1, X_2) \neq cor(\log(X_1), log(X_2))$$

- *Valores factibles para la correlación dependen de las distribuciones marginales.* Por ejemplo si X_1 y X_2 son lognormales, entonces ciertos valores de la correlación son imposibles.
- *Una dependencia lineal perfecta no implica una correlación de 1.*

Dependencia

Algunos problemas adicionales de la correlación como medida de dependencia son los siguientes:

- *La correlación no es invariante bajo transformación de variables.* Por ejemplo:

$$cor(X_1, X_2) \neq cor(\log(X_1), log(X_2))$$

- *Valores factibles para la correlación dependen de las distribuciones marginales.* Por ejemplo si X_1 y X_2 son lognormales, entonces ciertos valores de la correlación son imposibles.
- *Una dependencia lineal perfecta no implica una correlación de 1.*
- En general, *Correlación 0 no implica independencia.*

Dependencia

Algunos problemas adicionales de la correlación como medida de dependencia son los siguientes:

- *La correlación no es invariante bajo transformación de variables.* Por ejemplo:

$$cor(X_1, X_2) \neq cor(\log(X_1), log(X_2))$$

- *Valores factibles para la correlación dependen de las distribuciones marginales.* Por ejemplo si X_1 y X_2 son lognormales, entonces ciertos valores de la correlación son imposibles.
- *Una dependencia lineal perfecta no implica una correlación de 1.*
- En general, *Correlación 0 no implica independencia.*
- Entonces necesitamos una nueva medida de dependencia, y ésta se definirá a través de la función cópula.

2.5 Cópulas

Definición de cópula

Cópulas

Una cópula es una función de distribución conjunta $C[0,1]^n \to [0,1]$ cuyas distribuciones marginales son todas $\mathcal{U}(0,1)$.

Dada la definición, podemos construir una cópula de la siguiente manera:

- Consideren dos variables aleatorias (X_1, X_2) con distribución conjunta F y marginales $F_1(x_1)$ y $F_2(x_2)$.
- Definan
$$C(u,v) = F(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)) \quad \forall\, u,v \in [0,1]$$

Entonces C es una cópula:

$$\begin{aligned} C(u,v) &= F(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)) \\ &= P(X \leq F_1^{-1}(u), Y \leq F_2^{-1}(v)) \\ &= P(F_1(X) \leq u, F_2(Y) \leq v) \\ &= P(U \leq u, V \leq v) \end{aligned}$$

Y claramente las marginales son uniformes.

Cópulas y sus propiedades

- Consideremos por simplicidad $n = 2$.

Cópulas y sus propiedades

- Consideremos por simplicidad $n = 2$.
  - $C(u, 1) = u$ y $C(1, v) = v \ \forall u, v \in [0, 1]$.

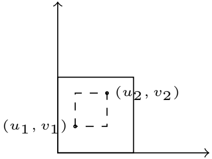
Cópulas y sus propiedades

- Consideremos por simplicidad $n = 2$.
  - $C(u, 1) = u$ y $C(1, v) = v \ \forall u, v \in [0, 1]$.
  - $C(u, 0) = C(0, v) = 0 \ \forall u, v \in [0, 1]$.

Cópulas y sus propiedades

- Consideremos por simplicidad $n = 2$.
  - $C(u, 1) = u$ y $C(1, v) = v \; \forall u, v \in [0, 1]$.
  - $C(u, 0) = C(0, v) = 0 \; \forall u, v \in [0, 1]$.
  - El área (volumen si $n > 2$) de un cuadrado (cubo) en el cuadro unitario (hipercubo) es positiva: si $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in [0, 1]^2$ y $u_2 \geq u_1$, $v_2 \geq v_1$ entonces

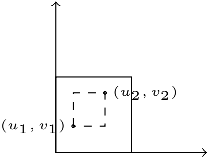
$$C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \geq 0$$



Cópulas y sus propiedades

- Consideremos por simplicidad $n = 2$.
  - $C(u,1) = u$ y $C(1,v) = v \; \forall u, v \in [0,1]$.
  - $C(u,0) = C(0,v) = 0 \; \forall u, v \in [0,1]$.
  - El área (volumen si $n > 2$) de un cuadrado (cubo) en el cuadro unitario (hipercubo) es positiva: si $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in [0,1]^2$ y $u_2 \geq u_1$, $v_2 \geq v_1$ entonces

$$C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \geq 0$$

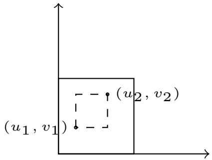


  - Una cópula es invariante bajo transformaciones estrictamente crecientes de las distribuciones marginales.

Cópulas y sus propiedades

- Consideremos por simplicidad $n = 2$.
  - $C(u,1) = u$ y $C(1,v) = v\ \forall u, v \in [0,1]$.
  - $C(u,0) = C(0,v) = 0\ \forall u, v \in [0,1]$.
  - El área (volumen si $n > 2$) de un cuadrado (cubo) en el cuadro unitario (hipercubo) es positiva: si $(u_1,v_1),(u_2,v_2) \in [0,1]^2$ y $u_2 \geq u_1$, $v_2 \geq v_1$ entonces

$$C(u_2,v_2) - C(u_1,v_2) - C(u_2,v_1) + C(u_1,v_1) \geq 0$$



  - Una cópula es invariante bajo transformaciones estrictamente crecientes de las distribuciones marginales.
- Las propiedades anteriores caracterizan a las cópulas.

Cópulas

- Sabemos que $F(X) \sim \mathcal{U}(0,1)$ para cualquier v.a. X. Entonces, por definición, la función $C(F_1(x_1), F_2(x_2))$ es una cópula.
- Noten que como C es una distribución y haciendo $u = F_1(x_1)$ y $v = F_2(x_2)$:

$$\begin{aligned} C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = C(u,v) &= P(U \leq u, V \leq v) \\ &= P(F_1(X_1) \leq u, F_2(X_2) \leq v) \\ &= P(X_1 \leq F_1^{-1}(u), X_2 \leq F_2^{-1}(v)) \\ &= F_X(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)) = F_X(x_1, x_2) \end{aligned}$$

  Esto es, $F_X(x_1,x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$. De este modo, F_X se "descompone" en dos partes: una cópula C que contiene información de las dependencias de $X = (X_1, X_2)$, y las marginales.
- Lo anterior se puede resumir en el teorema de Sklar (1959).

Teorema de Sklar (1959)

Teorema (Sklar, 1959)

Sea F una función de distribución conjunta con marginales $F_1, \ldots, F_p$. Entonces $\exists$ una cópula $C : [0,1]^p \to [0,1] \ni \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$

$$F(x_1, \ldots, x_p) = C(F_1(x_1), \ldots, F_p(x_p))$$

Además, si las marginales son continuas, entonces C es única. Conversamente, si C es una cópula y $F_1, \ldots, F_p$ son funciones de distribución, entonces F como se definió arriba, es una distribución con marginales $F_1, \ldots, F_p$.

Uso de las cópulas

- En resumen, usamos las cópulas para especificar una distribución conjunta en un proceso de dos etapas:
  1. Especificamos el tipo de distribuciones marginales que se desea conjuntar
  2. Especificamos la distribución cópula.
- Como las cópulas sólo especifican la estructura de la dependencia, diferentes cópulas producen diferentes distribuciones conjuntas cuando se aplican a las mismas marginales.

Observaciones a la definición de cópula

- La cópula es una *distribución* conjunta.
- La *densidad* de la cópula está dada por

$$c(u,v) = \frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v}$$

  y para una distribución conjunta $F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$, la densidad conjunta de X_1 y X_2 es:

$$f(x_1, x_2) = c(F_1(x_1), F_2(x_2)) f(x_1) f(x_2)$$

- Sklar dice que la parte de la dependencia entre variables aleatorias está dada por la cópula.
- Cada distribución conjunta con marginales definidas genera su cópula (que se puede llamar **cópula implícita**):

$$C(u,v) = F(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v))$$

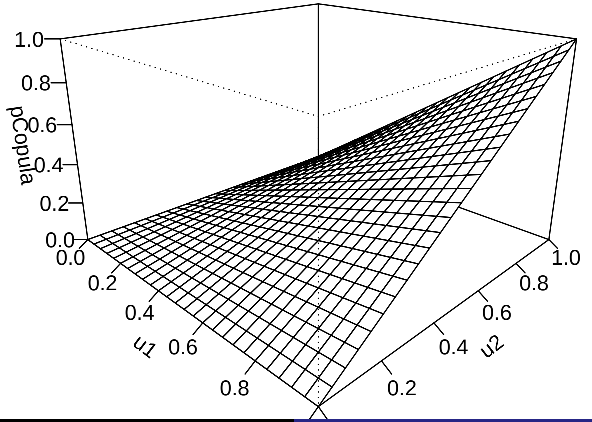
  La cópula Gaussiana y la t de Student son dos ejemplos de estas cópulas implícitas
- Combinaciones lineales convexas de cópulas son cópulas también: para C_0 y C_1 cópulas, entonces $\alpha C_0 + (1-\alpha)C_1$ son cópulas para $\alpha \in [0,1]$.

Ejemplos

1 **Cópula de independencia.**
Definamos $C : [0,1]^2 \to [0,1]$ como $C(u_1, u_2) = u_1 u_2$. Entonces, Si F_1 y F_2 son distribuciones,

$$C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = F_1(x_1)F_2(x_2) = F(x_1, x_2)$$

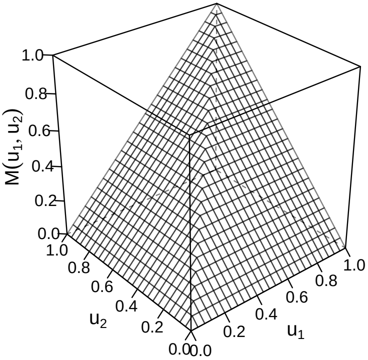
Entonces $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$.



Ejemplos

2 **Cópula de co-monotonicidad** (mutuamente completamente independientes). Si $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ y $\mathbf{U} = (U, U)$ (dos copias de U)

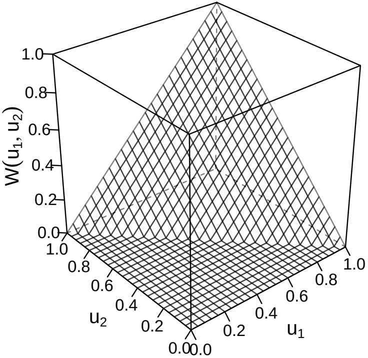
$$C^M(u_1, u_2) = P(U \leq u_1, U \leq u_2) = P(U \leq \text{mín}\{u_1, u_2\}) = \text{mín}\{u_1, u_2\}$$



Ejemplos

3 **Cópula de contra-monotonicidad**. Si $\mathbf{U} = (U, 1-U)$ (dos copias de U)

$$C^{CM}(u_1, u_2) = P(U \leq u_1, 1-U \leq u_2) = P(1-u_2 \leq U \leq u_1) = \max\{u_1+u_2-1, 0\}$$



Cotas para cópulas

Un resultado importante es que estas dos cópulas (co- y contra-monotonicidad) son los extremos que cualquier cópula puede tomar (es decir, son cotas mínima y máxima):

Cotas inferior y superior de Féchet-Hoeffing

Dada una cópula C, $\forall u_1, \ldots, u_n \in [0,1]$:

$$max\{u_1 + \cdots + u_n - n + 1, 0\} \leq C(u_1, \ldots, u_n) \leq min\{u_1, \ldots, u_n\}$$

Cópula Gaussiana I

- Cada distribución conjunta con marginales dadas genera su cópula (que se puede llamar **cópula implícita**):

$$C(u, v) = F(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v))$$

- En particular, si $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, entonces la cópula $C_{\mathbf{Y}}$ depende sólo de las dependencias entre las variables componentes de $\mathbf{Y}$ y no de las marginales, así que $C_{\mathbf{Y}}$ depende sólo de la matriz de covarianzas de $\mathbf{Y}$, $\boldsymbol{\Sigma}$.
- De este modo, hay una correspondencia uno a uno entre matrices de covarianzas $\boldsymbol{\Sigma}$ y cópulas Gaussianas. Para la cópula Gaussiana, podemos concentrarnos en la normal multivariada estándar y matrices de correlación:

Cópula Gaussiana II

Cópula Gaussiana

Una cópula Gaussiana se obtiene de la cópula implícita de la distribución normal multivariada estándar y de normales marginales estándar:

$$C_{\boldsymbol{\Sigma}}(u_1, \ldots, u_p) = \boldsymbol{\Phi}(\Phi^{-1}(u_1), \ldots, \Phi^{-1}(u_p))$$

donde $\boldsymbol{\Sigma}$ es la matriz de correlaciones.

- Notemos que esta es la definición de la distribución, y por lo tanto es una integral que no tiene forma cerrada.
- En este caso es más fácil trabajar con la cópula densidad que está dada por:

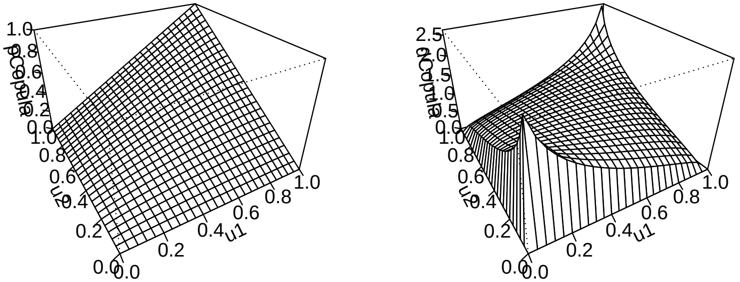
$$c(u_1, \ldots, u_p) = |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} exp(-\frac{1}{2}\xi'(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \mathbf{I})\xi)$$

donde $\xi = (\Phi^{-1}(u_1), \ldots, \Phi^{-1}(u_p))$

Cópula Gaussiana III

Por ejemplo, para una correlación de $\rho = 0.4$ y $p = 2$:

Cópula Gaussiana IV



Cópula t-Student

Similar a la cópula Gaussiana, se puede derivar una cópula t con la t multivariada y la cópula implícita:

$$C_{v,\boldsymbol{\Sigma}}(u_1, \ldots, u_p) = \mathbf{t}(t_v^{-1}(u_1), \ldots, t_v^{-1}(u_p))$$

donde v son los grados de libertad y $\boldsymbol{\Sigma}$ es la matriz de correlaciones.

Familia Arquimediana de Cópulas

Cópulas Arquimedianas

Una cópula Arquimediana con generador ϕ tiene la forma:

$$C(u_1,\ldots,u_p) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \cdots + \phi(u_1))$$

donde ϕ satisface:

1. $\phi : [0,1] \to [0,\infty]$ es continua y estrictamente decreciente.
2. $\phi(0) = \infty$
3. $\phi(1) = 0$

Diferentes generadores generan diferentes cópulas. Algunas de las más comunes son las que siguen a continuación.

Cópula de Frank I

- La cópula de Frank tiene función generadora: $\phi^{Fr}(u) = -log\{\frac{e^{-\theta u}-1}{e^{-\theta}-1}\}, \theta \in \mathbb{R}$
  - $\phi^{Fr}(0) = -log\{\frac{1-1}{e^{-\theta}-1}\} = -log(0) = \infty$
  - $\phi^{Fr}(1) = -log\{\frac{e^{-\theta}-1}{e^{-\theta}-1}\} = -log(1) = 0$
- Si $y = -log\{\frac{e^{-\theta u}-1}{e^{-\theta}-1}\}$, entonces

$$\begin{aligned} e^{-y} &= \frac{e^{-\theta u}-1}{e^{-\theta}-1} \\ (e^{-\theta}-1)e^{-y}+1 &= e^{-\theta u} \\ u &= -\frac{1}{\theta} log\left\{(e^{-\theta}-1)e^{-y}+1\right\} \end{aligned}$$

- Por lo tanto: ${\phi^{Fr}}^{-1}(y) = -\frac{1}{\theta} log\left\{(e^{-\theta}-1)e^{-y}+1\right\}$
- Con ambas funciones ${\phi^{Fr}}^{-1}$ y ϕ^{Fr}, hay que resolver la ecuación:

$${\phi^{Fr}}^{-1}[\phi^{Fr}(u_1)+\phi^{Fr}(u_2)]$$

Cópula de Frank II

La cópula que se obtiene (en el caso bidimensional) es la siguiente:

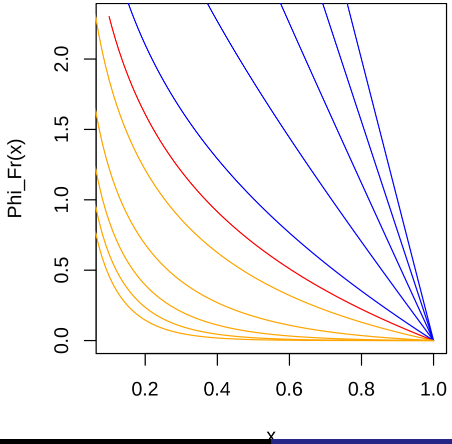
$$C^{Fr}(u_1, u_2) = -\frac{1}{\theta} \log \left(1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right)$$

Cabe notar que con diferentes valores de los parámetros, la familia de Frank contiene a las cópulas límite y a la de independencia:

- Para $\theta \to 0$, $C^{Fr}(u, v) \to uv$
- Para $\theta \to \infty$ $C^{Fr}(u, v) \to \text{mín}(u, v)$
- Para $\theta \to -\infty$ $C^{Fr}(u, v) \to \text{máx}(0, u + v - 1)$

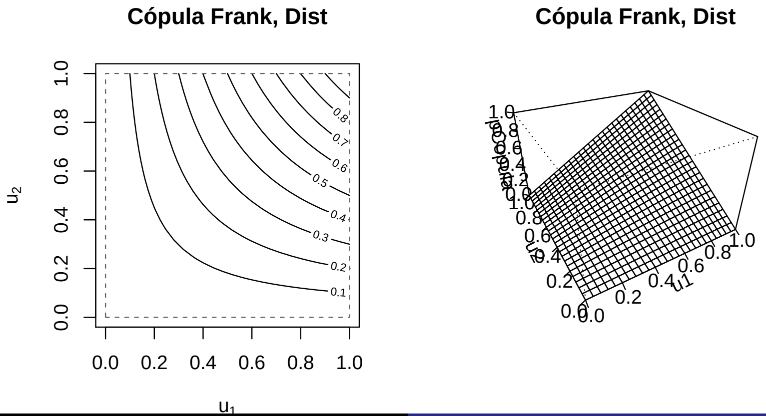
Frank: función generadora

```
par(mar=c(10,2,0,2))
par(pty="s") #gráfica cuadrada
Phi_Fr <- function(u,theta=0.0001)-log((exp(-theta*u)-1)/(exp(-theta)-1))
unitario <- seq(0,1,by=0.1)

curve(Phi_Fr,from=0.1,to=1,col="red")
for(theta in seq(-10,10,length=10)){
  curve(Phi_Fr(x,theta=theta),from=0.001,to=1,add=T,col=ifelse(theta<0,"blue","orange"))
}
```



Frank: curvas de nivel de cópula

```
library(copula)
CFr <- frankCopula(param=0.5,dim=2)
par(mfrow = c(1,2), pty="s")
contour(CFr, pCopula, main = "Cópula Frank, Dist" )
persp(CFr, pCopula, main = "Cópula Frank, Dist")
```

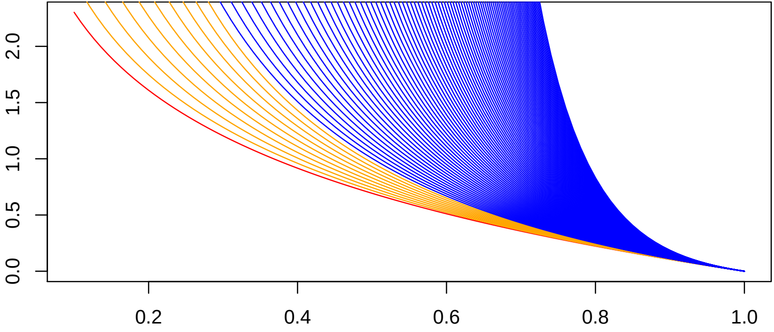


Cópula de Clayton

La cópula de Clayton tiene función generadora: $\phi^C(u) = \frac{u^{-\theta}-1}{\theta}, \theta > 0$ y de aquí se obtiene la ecuación de la cópula:

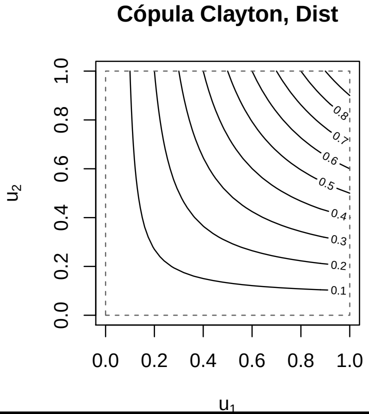
$$C^C(u_1, u_2) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$$

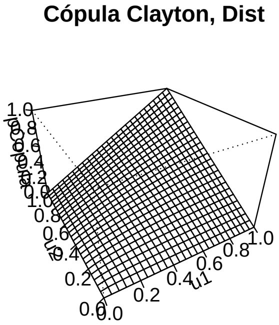
```
Phi_C <- function(u,theta=0.0001)(u^(-theta)-1)/theta
unitario <- seq(0,1,by=0.1)

curve(Phi_C,from=0.1,to=1,col="red")
for(theta in seq(0,10,length=100)){curve(Phi_C(x,theta=theta),from=0.001,to=1,add=T,
    col = ifelse(theta > 1,"blue","orange"))}
```



Clayton: curvas de nivel de cópula

```
library(copula)
Cl <- claytonCopula(param=0.5,dim=2)
par(mfrow = c(1,2), pty="s")
contour(Cl, pCopula, main = "Cópula Clayton, Dist" )
persp(Cl, pCopula, main = "Cópula Clayton, Dist")
```



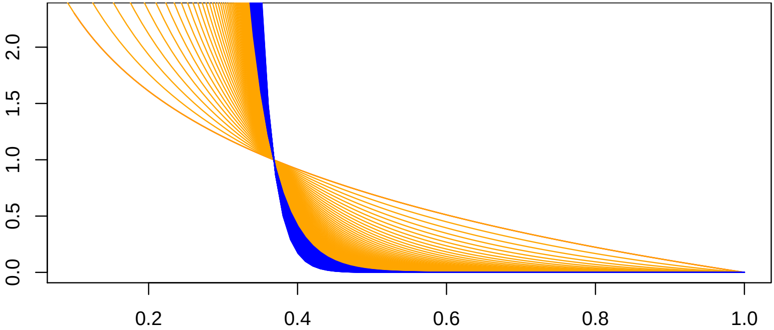


Cópula de Gumbel

La función generadora de la cópula de Gumbel tiene la forma: $\phi^G(u) = (-\log u)^\theta$ para $\theta \geq 1$ y la ecuación de la cópula queda de la siguiente manera:

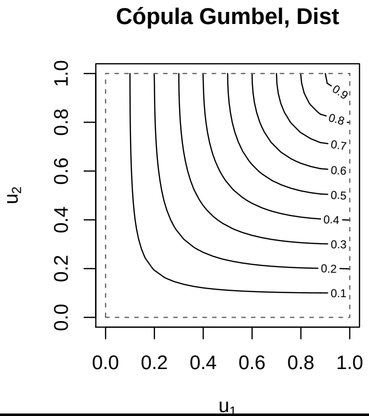
$$C^G(u_1, u_2) = \exp\{-[(-\log u_1)^\theta + (-\log u_2)^\theta]\}, \theta \geq 1$$

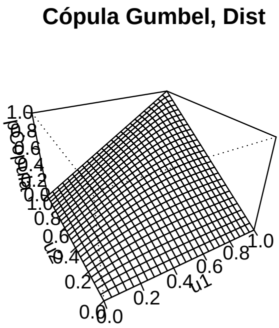
```
Phi_G <- function(u,theta=1)(-log(u))^theta

curve(Phi_G,from=0.1,to=1,col="red")
for(theta in seq(1,20,length=100)){
                curve(Phi_G(x,theta=theta),from=0.001,to=1,add=T,
                     col = ifelse(theta > 10,"blue","orange"))}
```



Gumbel: curvas de nivel de cópula

```
library(copula)
Gu <- gumbelCopula(param=2,dim=2)
par(mfrow = c(1,2), pty="s")
contour(Gu, pCopula, main = "Cópula Gumbel, Dist" )
persp(Gu, pCopula, main = "Cópula Gumbel, Dist")
```



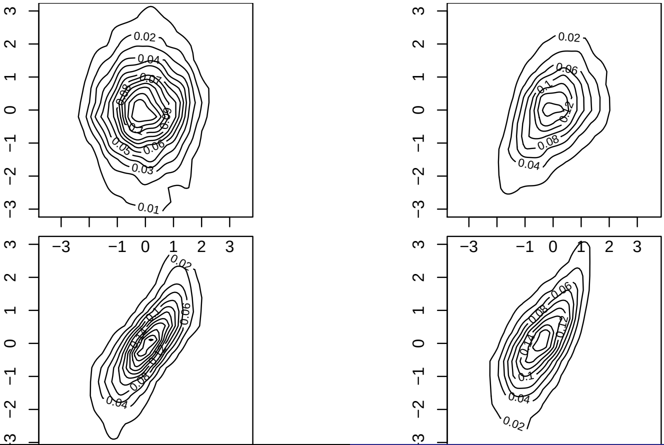


Ejemplo de estructuras de dependencia I

- Usando diferentes cópulas, encontrar las densidades conjuntas de una variable normal estándar y una variable t_3.
- En este ejercicio, usaré la cópula gaussiana (con $\rho = 0$), la cópula de Clayton con $\theta = 0.9$, la de Frank con $\theta = 8$ y la de Gumbel con $\theta = 2$.
- Para la cópula gaussiana, seguimos este procedimiento:
  1. Generamos un vector $(z_1, z_2) \sim N(0, \Sigma)$
  2. Obtenemos un vector $(u, v) = (\Phi(z_1), \Phi(z_2))$ Entonces u y v tienen distribución uniforme con la estructura de dependencia propuesta.
  3. Obtenemos $(x_1, x_2) = (F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v))$ Los números x_1 y x_2 tienen la marginal deseada y la estructura de dependencia dada.
- El procedimiento es similar para los otros tipos de cópulas, por lo que necesitamos muestras de esas cópulas en particular.

```r
library(copula) #Define el objeto cópula a generar, en este caso es una normal param dado
library(MASS) #para la estimación de las densidades kde2d
n <- 5000 #tamaño de muestra

copula_normal2 <- normalCopula(0,dim=2,dispstr="un")
set.seed(10) #fija una semilla
U <- rCopula(n,copula_normal2) #Genera la mues
W1 <- cbind(qnorm(U[,1]),qt(U[,2],3)) #Genera(0,1) las muestras normal y t(3)

#Ahora generemos de una cópula de Clayton con theta=0.9
copula_clayton <- claytonCopula(0.9,dim=2)
U <- rCopula(n,copula_clayton)
W2 <- cbind(cbind(qnorm(U[,1]),qt(U[,2],3)))

#Ahora generemos de una cópula de Frank con theta=8
copula_frank <- frankCopula(8,dim=2)
U <- rCopula(n,copula_frank)
W3 <- cbind(cbind(qnorm(U[,1]),qt(U[,2],3)))

#Cópula Gumbel con theta= 2
copula_gumbel <- gumbelCopula(2,dim=2)
U <- rCopula(n,copula_gumbel)
W4 <- cbind(cbind(qnorm(U[,1]),qt(U[,2],3)))
```

```r
par(mfrow=c(2,2))
par(pty="s")
par(mar=c(1,1,0,1))
#de la muestra obtenida, estimamos la densidad
z1 <- kde2d(W1[,1],W1[,2],n=100)
contour(z1,ylim=c(-3,3))
z2 <- kde2d(W2[,1],W2[,2],n=100)
contour(z2,ylim=c(-3,3))
z3 <- kde2d(W3[,1],W3[,2],n=100)
contour(z3,ylim=c(-3,3))
z4 <- kde2d(W4[,1],W4[,2],n=100)
contour(z4,ylim=c(-3,3))
```



2.6 Medidas de dependencia

Rango de una variable aleatoria

- Se mencionó que la correlación de Pearson
$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}\,(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$
es una medida de dependencia limitada, ya que depende tanto de la distribución conjunta como de las marginales.
- La *correlación basada en rangos* son medidas escalares que dependen sólo de la cópula de la distribución bivariada y no de las marginales.

Rango

El rango de una variable es la posición de sus valores ordenados de menor a mayor:
$$\mathrm{rango}(X_i) = \sum_{j=1}^{n} I(X_j \leq X_i)$$
Para los empates, el valor del ranking es igual para todos los empates, pero en el promedio del rango.

- Los rangos no cambian por transformaciones estríctamente monótonas.

Ejemplo

Considerar la muestra 50, 10, 50, -20, 20, 60, 10, 0, 90, 50. Entonces ordenando los valores se tiene: -20, 0, 10, 10, 20, 50, 50, 50, 60, 90. Los rangos son entonces:

Valor	50	10	50	-20	20	60	10	0	90	50
rango	7	3.5	7	1	5	9	3.5	2	10	7

τ de Kendall

τ de Kendall

Sea (X, Y) un vector aleatorio y (X^*, Y^*) una vector con la misma distribución e independiente de (X, Y) (es una copia de (X, Y)). Entonces (X, Y) y (X^*, Y^*) son pares *concordantes* (*discordantes*) si $(X - X^*)(Y - Y^*) > 0$ ($(X - X^*)(Y - Y^*) < 0$).
La τ de Kendall es la diferencia de probabilidades de par concordante y de par discordante:

$$\begin{aligned} \rho_\tau(X, Y) &= P((X - X^*)(Y - Y^*) > 0) - P((X - X^*)(Y - Y^*) < 0) \\ &= E(sgn\{(X - X^*)(Y - Y^*)\}) \end{aligned}$$

La τ de Kendall muestral está dada por:

$$\hat{\rho}_\tau = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \le i \le j \le n} sgn\{(X_i - X_j^*)(Y_i - Y_j^*)\} = \frac{C - D}{C + D} = \frac{C - D}{\binom{n}{2}}$$

donde C son los pares concordantes y D son los pares discordantes.

Ejemplo

1. Para la muestra de parejas $(2,3),(3,4),(1,5),(5,2),(4,8),(9,6),(6,8),(4,3),(2,1),(10,10)$ calcular la τ de Kendall.

```
muestra <- cbind(c(2,3,1,5,4,9,6,4,2,10),c(3,4,5,2,8,6,8,3,1,10))
cor(muestra,method="kendall")

          [,1]      [,2]
[1,] 1.0000000 0.3953488
[2,] 0.3953488 1.0000000

# La correlación de Pearson usual
cor(muestra)

          [,1]      [,2]
[1,] 1.0000000 0.6440133
[2,] 0.6440133 1.0000000
```

2. Consideren X =rango de calificación del examen 1 y Y =rango de calificación del examen 2. Calcular la τ de Kendall de manera manual.

```
X <- c(1,2,3,4,5,6,7)
Y <- c(1,3,6,2,7,4,5)
```

ρ_S de Spearman

Correlación de Spearman

La correlación de Spearman es la correlación de Pearson sobre los valores evaluados en los rangos inducidos por las distribuciones marginales de los datos:

$$\rho_S(X,Y) = cor(F_1(X), F_2(Y))$$

- Podemos ver que la correlación de Spearman es la correlación de la cópula de (X,Y).
- La ρ_S muestral está dada por:

$$\hat{\rho}_S(X,Y) = \frac{12}{n(n^2-1)} \sum_{i=1}^{n} \left(\text{rango}(X_i) - \frac{n+1}{2}\right)\left(\text{rango}(Y_i) - \frac{n+1}{2}\right)$$

Ejemplo

1. Para la muestra de parejas $(2,3),(3,4),(1,5),(5,2),(4,8),(9,6),(6,8),(4,3),(2,1),(10,10)$ calcular la ρ_S de Spearman

```r
muestra <- cbind(c(2,3,1,5,4,9,6,4,2,10),c(3,4,5,2,8,6,8,3,1,10))
cor(muestra,method="spearman")

          [,1]      [,2]
[1,] 1.0000000 0.5613497
[2,] 0.5613497 1.0000000

#Para efectos comparativos
cor(muestra,method="kendall")

          [,1]      [,2]
[1,] 1.0000000 0.3953488
[2,] 0.3953488 1.0000000

# La correlación de Pearson usual
cor(muestra)

          [,1]      [,2]
[1,] 1.0000000 0.6440133
[2,] 0.6440133 1.0000000
```

Medidas de dependencia en términos de cópulas

- Las medidas de concordancia aún toman valores entre -1 y 1.
- $\rho_\tau = \rho_S = 0$ para variables independientes (pero la conversa no es cierta en general).
- $\rho_\tau = \rho_S = 1$ cuando X y Y son comonótonas.
- $\rho_\tau = \rho_S = -1$ cuando X y Y son contramonótonas.
- En términos de cópulas, se puede ver que:

$$\rho_\tau = 4\int_0^1\int_0^1 C(u,v)dC(u,v) - 1$$

y

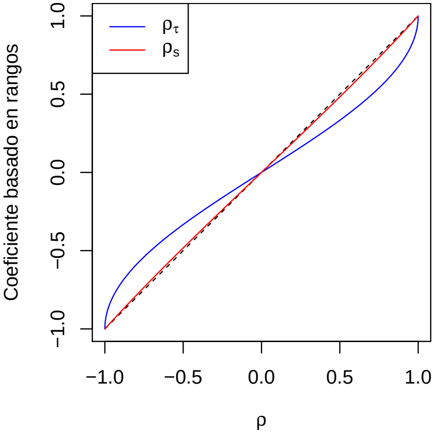
$$\rho_S = 12\int_0^1\int_0^1 (C(u,v) - uv)dudv$$

- Aunque en la práctica estas fórmulas no son muy útiles, salvo en el caso normal.

Relación de medidas de dependencia en el caso normal

En el caso de la normal bivariada, hay una relación biyectiva entre las medidas no paramétricas y el coeficiente de correlación:

$$\rho_\tau = \frac{2}{\pi} arcsin(\rho) \text{ y } \rho_s = \frac{6}{\pi} arcsin(\rho/2)$$



2.7 Simulación con cópulas

Simulación con cópulas

- A continuación veremos cómo se pueden usar las cópulas para generar muestras de variables aleatorias con una estructura de dependencia dada.
- Por ejemplo con la cópula Gaussiana $C_{\mathbf{\Sigma}}$ podemos encontrar una distribución conjunta en donde las marginales pueden ser cualquier distribución.
- Sin embargo, como la correlación no se preserva, es necesario hacer una calibración posterior para obtener la relación de dependencia deseada, usando la τ de Kendall o ρ_S.
- La calibración se realiza utilizando la relación entre la cotrelación de Pearson y las correlaciones basadas en rangos (Kendall o Spearman).

Método para construir variables dependientes (simulación)

Usando una cópula Gaussiana.
Se puede dar un método general para construir variables dependientes con distribuciones generales: $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$.

1. Generar $(Z_1, Z_2) = \mathbf{Z} \sim \mathcal{N}_2(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$. Entonces Z_1 y Z_2 están relacionadas, $cor(Z_1, Z_2) = \rho$.
2. Obtener $(u_1, u_2) = \mathbf{u} \sim (\Phi(Z_1), \Phi(Z_2))$.[1]
3. Obtener $(X_1, X_2) = \mathbf{X} \sim (F^{-1}(u_1), G^{-1}(u_2))$

X_1 y X_2 son dependientes. Sin embargo, $cor(X_1, X_2) \neq \rho$.

[1] Notar que la cópula normal se usa en este punto, ya que $C(u_1, u_2) = \Phi(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)) = \Phi(\Phi^{-1}(\Phi(Z_1)), \Phi^{-1}(\Phi(Z_2)) = \Phi(Z_1, Z_2) = \mathcal{N}_2(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$.

Ejemplo práctico

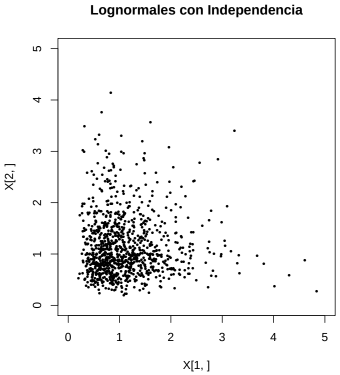
- Queremos estudiar el comportamiento conjunto de los precios de dos instrumentos en el mercado financiero. Cada precio puede tener su propio comportamiento, originado por las diferentes fuentes de variación.
- Por ejemplo, si ambos instrumentos son derivados sobre el mismo subyacente, puede ser que su comportamiento se deba las mismas fuerzas del mercado. Sin embargo, si los subyacentes son de diferentes mercados (hipotecario y de tasas de interés) entonces pueden responder a diferentes fuentes de variación. Supongamos:
  - Los precios se comportan como dos lognormales de manera independiente.
  - Se desea simular el comportamiento que han tenido en los pasados 1,000 días.
  - Para generar lognormales, generamos 1,000 pares de variables normales independientes, y las exponenciamos.
  - Asumimos una variabilidad de los precios conocida de $\sigma = 0.5$.

Ejemplo: Primer caso: independencia

La siguiente gráfica muestra el comportamiento conjunto de estas dos variables independientes.

```
set.seed(1)
n <- 1000
sigma <- 0.5 # asumida
#Matriz de covarianzas
Sigma <- sigma^2 * diag(2)
Sigma

     [,1] [,2]
[1,] 0.25 0.00
[2,] 0.00 0.25

#Genera las muestras de dos normales
z <- matrix(rnorm(2*n),nrow=2)
#Transforma para escalar las variables
Y <- sigma*diag(2) %*% z
X <- exp(Y) #X tiene distribución lognormal
dim(X)

[1]    2 1000

X[1:2,1:3]

         [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 0.731084 0.6584845 1.1791029
[2,] 1.096169 2.2202957 0.6634948
```

```
par(pty="s") #gráfico cuadrado
plot(X[1,], X[2,], xlim=c(0,5), ylim=c(0,5), pch=16,
cex=0.5, main="Lognormales con Independencia")
```



Segundo caso: Introducción de dependencia lineal.

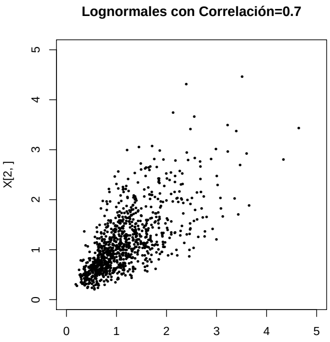
Podemos introducir dependencia entre las variables a través de un coeficiente de correlación en las normales bivariadas. En este caso se puede observar que valorea mayores o menores de las dos variables tienden a estar más asociados que en el caso anterior.

```
rho = 0.7 #correlación
Sigma <- sigma^2*matrix(c(1,rho,rho,1),nrow=2)
Sigma
```

```
      [,1]  [,2]
[1,] 0.250 0.175
[2,] 0.175 0.250
```

```
# Obten la matriz raíz cuadrada B de la matriz

# definida positiva Sigma
e <- eigen(Sigma)
v <- e$vectors
B <- v %*% diag(sqrt(e$values)) %*% t(v)
z <- matrix(rnorm(2*n),nrow=2)
Y <-  B %*% z #Transforma para escalar las variables
X <- exp(Y)
```

```
par(pty="s") #haz el gráfico cuadrado
plot(X[1,], X[2,], xlim=c(0,5), ylim=c(0,5), pch=16, cex=0.5,
main="Lognormales con Correlación=0.7")
```

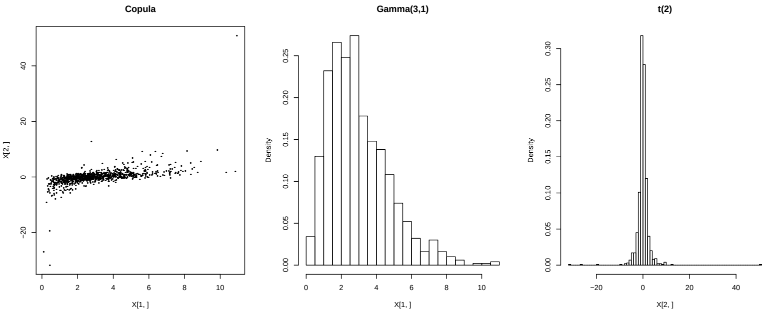


Caso más general: diferentes familias de distribuciones

- En el ejemplo anterior se puede incluir diferentes lognormales, haciendo la transformación de y a X de la manera apropiada.
- Pero ¿si las distribuciones de los precios de los activos no es la misma? Por ejemplo, uno de los activos puede provenir del mercado cambiario, presentado mayor volatilidad y con colas pesadas en sus variaciones. En este caso, más que la distribución lognormal, podría ser más importante una distribución de colas pesadas, como la distribución t.
- Una siguiente extensión es aplicar la cópula gaussiana. Partimos de los mismos supuestos de correlación, pero ahora supondremos que un precio es $\mathcal{G}\left(3,1\right)$ y el otro es $t_{(2)}$. Ahora tenemos que obtener uniformes a partir de Z y luego tomar las inversas de las distribuciones marginales.

Generación de variables aleatorias usando cópula gaussiana

```
set.seed(3)
z <- matrix(rnorm(2*n),nrow=2)
Y <-  B %*% z #Transforma para escalar las variables
U <- pnorm(Y,sd=0.5)
X <- rbind(qgamma(U[1,],3,1),qt(U[2,],2))
par(mfcol=c(1,3))
plot(X[1,],X[2,],pch=16,cex=0.5,main="Copula")
hist(X[1,],main="Gamma(3,1)",breaks=30,prob=T)
hist(X[2,],main="t(2)",breaks=100,prob=T)
```

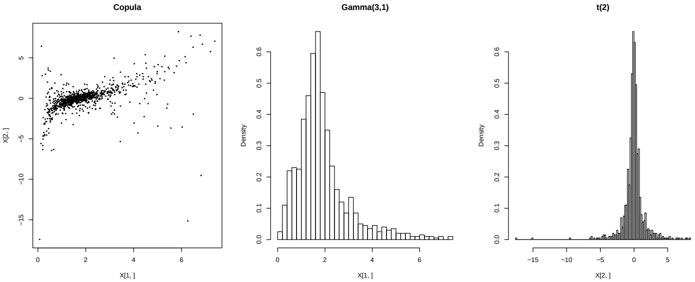



```
cor(X[1,],X[2,])

[1] 0.5327403
```

Generación de variables aleatorias usando cópula t

¿Qué pasa si hacemos el mismo ejercicio pero con una cópula diferente? Consideremos ahora la cópula t que también se puede parametrizar con la correlación y con los grados de libertad.

```r
library(mvtnorm) #para generar t multivariada
set.seed(3)
TT <- t(rmvt(n=1000,sigma=Sigma,df=1)) #genera una dist. t(1)
U  <- pt(TT, df = 1) #distribución t(1) para uniformes
X <- rbind(qgamma(U[1,],2,1), qt(U[2,],2))
par(mfcol=c(1,3))
plot(X[1,], X[2,], pch=16, cex=0.5, main="Copula")
hist(X[1,], main="Gamma(3,1)",breaks=30,prob=T)
hist(X[2,], main="t(2)",breaks=100,prob=T)
```




```r
cor(X[1,],X[2,])

[1] 0.4727318
```

Método para construir variables dependientes

Cópula t.
Si sustituimos a $Z = (Z_1, Z_2)$ por una variable bivariada $T_{(\mathbf{\Sigma},n)} = (t_1, t_2)$ donde n son los grados de libertad, podemos construir la cópula C^* del mismo modo que en el ejercicio previo.

- ¿Cuál es la diferencia entre usar una cópula Gaussiana y una cópula t? Ambas tienen la misma correlación.

Método para construir variables dependientes

Cópula t.
Si sustituimos a $Z = (Z_1, Z_2)$ por una variable bivariada $T_{(\mathbf{\Sigma},n)} = (t_1, t_2)$ donde n son los grados de libertad, podemos construir la cópula C^* del mismo modo que en el ejercicio previo.

- ¿Cuál es la diferencia entre usar una cópula Gaussiana y una cópula t? Ambas tienen la misma correlación.
- la diferencia está en la estructura de la dependencia, lo cual

Método para construir variables dependientes

Cópula t.
Si sustituimos a $Z = (Z_1, Z_2)$ por una variable bivariada $T_{(\boldsymbol{\Sigma},n)} = (t_1, t_2)$ donde n son los grados de libertad, podemos construir la cópula C^* del mismo modo que en el ejercicio previo.

- ¿Cuál es la diferencia entre usar una cópula Gaussiana y una cópula t? Ambas tienen la misma correlación.
- la diferencia está en la estructura de la dependencia, lo cual
  - comprueba que la estructura de la dependencia es mucho más que la simple covarianza, y

Método para construir variables dependientes

Cópula t.
Si sustituimos a $Z = (Z_1, Z_2)$ por una variable bivariada $T_{(\boldsymbol{\Sigma},n)} = (t_1, t_2)$ donde n son los grados de libertad, podemos construir la cópula C^* del mismo modo que en el ejercicio previo.

- ¿Cuál es la diferencia entre usar una cópula Gaussiana y una cópula t? Ambas tienen la misma correlación.
- la diferencia está en la estructura de la dependencia, lo cual
  - comprueba que la estructura de la dependencia es mucho más que la simple covarianza, y
  - se requiere poder estimar una cópula específica a las estructuras de dependencia, y por eso hay *familias de cópulas*:

Método para construir variables dependientes

Cópula t.
Si sustituimos a $Z = (Z_1, Z_2)$ por una variable bivariada $T_{(\boldsymbol{\Sigma},n)} = (t_1, t_2)$ donde n son los grados de libertad, podemos construir la cópula C^* del mismo modo que en el ejercicio previo.

- ¿Cuál es la diferencia entre usar una cópula Gaussiana y una cópula t? Ambas tienen la misma correlación.
- la diferencia está en la estructura de la dependencia, lo cual
    - comprueba que la estructura de la dependencia es mucho más que la simple covarianza, y
    - se requiere poder estimar una cópula específica a las estructuras de dependencia, y por eso hay *familias de cópulas*:
        - Cópulas elípticas: Gaussianas, Student.

Método para construir variables dependientes

Cópula t.
Si sustituimos a $Z = (Z_1, Z_2)$ por una variable bivariada $T_{(\boldsymbol{\Sigma},n)} = (t_1, t_2)$ donde n son los grados de libertad, podemos construir la cópula C^* del mismo modo que en el ejercicio previo.

- ¿Cuál es la diferencia entre usar una cópula Gaussiana y una cópula t? Ambas tienen la misma correlación.
- la diferencia está en la estructura de la dependencia, lo cual
  - comprueba que la estructura de la dependencia es mucho más que la simple covarianza, y
  - se requiere poder estimar una cópula específica a las estructuras de dependencia, y por eso hay *familias de cópulas*:
    - Cópulas elípticas: Gaussianas, Student.
    - Cópulas Arquimedianas: Frank, Clayton, Gumbel

Método para construir variables dependientes

Cópula t.
Si sustituimos a $Z = (Z_1, Z_2)$ por una variable bivariada $T_{(\boldsymbol{\Sigma},n)} = (t_1, t_2)$ donde n son los grados de libertad, podemos construir la cópula C^* del mismo modo que en el ejercicio previo.

- ¿Cuál es la diferencia entre usar una cópula Gaussiana y una cópula t? Ambas tienen la misma correlación.
- la diferencia está en la estructura de la dependencia, lo cual
  - comprueba que la estructura de la dependencia es mucho más que la simple covarianza, y
  - se requiere poder estimar una cópula específica a las estructuras de dependencia, y por eso hay *familias de cópulas*:
    - Cópulas elípticas: Gaussianas, Student.
    - Cópulas Arquimedianas: Frank, Clayton, Gumbel
    - Cópulas de valores extremos.

Ejemplo de simulación 1 I

1. Generar 1,000 observaciones de un vector aleatorio $W = (X, Y, Z)$ donde $X \sim N(4, 25)$, $Y \sim t_4$ y $Z \sim Binom(25, 0.4)$, considerando las siguientes restricciones: $\tau(X, Y) = 0.7$, $\tau(X, Z) = 0.3$ y $\tau(Y, Z) = 0.4$.

Solución.

La primera alternativa es usar una cópula Gaussiana para construir nuestra muestra, incorporando la restricción de la dependencia. El procedimiento que se utilizará es el siguiente:

1. Transformar las τ de Kendall a la correlación para construir la matriz de correlaciones necesaria Σ. Para transformar los valores usamos la fórmula conocida para la distribución normal: $\rho = sin(\frac{\pi * \tau}{2})$. Entonces la matriz Σ tiene la forma

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.8910065 & 0.4539905 \\ 0.8910065 & 1 & 0.5877853 \\ 0.4539905 & 0.5877853 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Obtener un vector $Z \sim N(0, \Sigma)$
3. Obtener un vector $U \sim (\Phi(Z_1), \Phi(Z_2), \Phi(Z_3))$, donde $\Phi(x)$ es la función de distribución normal estándar

Ejemplo de simulación 1 II

4. Obtener un vector $W \sim (F_1^{-1}(U_1), F_2^{-1}(U_2), F_3^{-1}(U_3))$, donde las F_i son las distribuciones deseadas. Entonces W tiene la composición deseada.

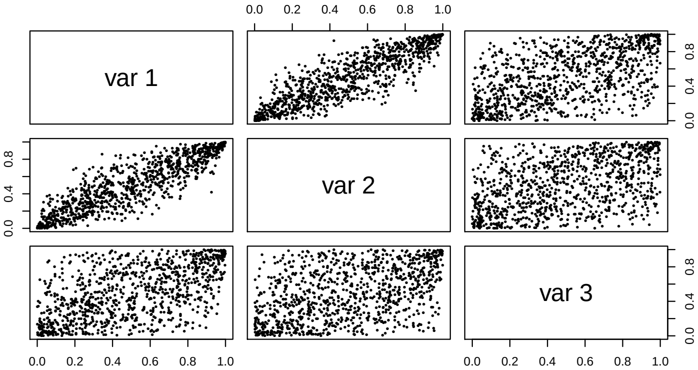
Justo los pasos 2 y 3 son los que corresponden a obtener una muestra aleatoria de una cópula, en este caso una cópula gaussiana. Entonces podemos escribir un código ligeramente más sencillo:

```
library(copula)
# Define el objeto cópula a generar, en este caso es una normal con correlaciones
# dadas
# El argumento dispstr se refiere a la estructura a la matriz de covarianza que caracteriza a
# la cópula. "un" es para indicar que no tiene estructura.
# ver detalle en https://www.jstatsoft.org/index.php/jss/article/view/v021i04/v21i04.pdf

copula_normal_3 <- normalCopula(c(sin(0.7*pi/2), sin(0.4*pi/2), sin(0.3*pi/2)),
                               dim = 3, dispstr = "un")
set.seed(1) #fija una semilla
U <- rCopula(1000,copula_normal_3) #Genera la muestra aleatoria
```

Con el código previo, se realizan los primeros tres pasos de la simulación. Antes de continuar, podemos ver cómo se ven las muestras generadas por pares, y podemos ver si tenemos la condición establecida como restricción sobre las covarianzas. La matriz de tau de Kendall está dada por:

```
pairs(U, pch=16, cex=0.5)
```

Ejemplo de simulación 1 III



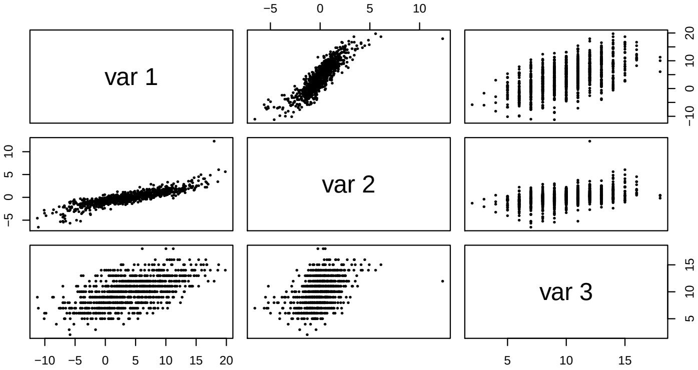

```
round(cor(U, method = "kendall"), 2)

     [,1] [,2] [,3]
[1,]  1.0 0.70 0.40
[2,]  0.7 1.00 0.31
[3,]  0.4 0.31 1.00
```

Ejemplo de simulación 1 IV

Ahora procedemos al paso 4, para generar nuestro vector y hacemos los histogramas para ver si tienen el comportamiento deseado, y se muestra un ejemplo de los valores generados:

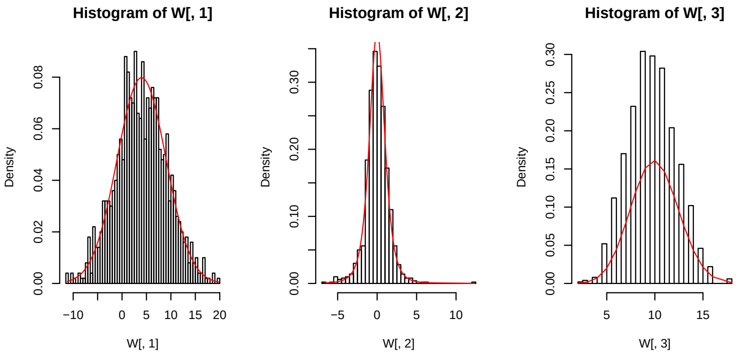
```
W <- cbind(qnorm(U[,1], mean = 4, sd = 5), qt(U[,2],4), qbinom(p = U[,3], size = 25, prob = 0.4))
head(W)

           [,1]       [,2] [,3]
[1,]  0.7309371 -0.3298744    8
[2,] 10.1533194  1.0724875    9
[3,]  8.6763724  1.1030629   12
[4,]  7.1542507  1.3971491   11
[5,] -2.5502408 -2.8445479   11
[6,]  5.1196326  0.1351939   12

pairs(W, pch = 16, cex = 0.5)
```

Ejemplo de simulación 1 V



Ejemplo de simulación 1 VI

```
#Grafica los histogramas y agrega densidades con las distribuciones deseadas para ver
#la aproximación
par(mfrow = c(1,3))
hist(W[,1], probability = T,breaks=50);
points(sort(W[,1]),dnorm(sort(W[,1]),4,5),type="l",col="red")
hist(W[,2], probability = T,breaks=50);
points(sort(W[,2]),dt(sort(W[,2]),4),type="l",col="red")
hist(W[,3], probability = T,breaks=50); points(sort(W[,3]),dbinom(sort(W[,3]),25,0.4),type="l",col="red")
```



Podemos corroborar que alcanzamos la medida de dependencia requerida

Ejemplo de simulación 1 VII

```
cor(W, method = "kendall")

          [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 1.0000000 0.7016657 0.4205345
[2,] 0.7016657 1.0000000 0.3287594
[3,] 0.4205345 0.3287594 1.0000000
```

□

Ajuste de cópulas

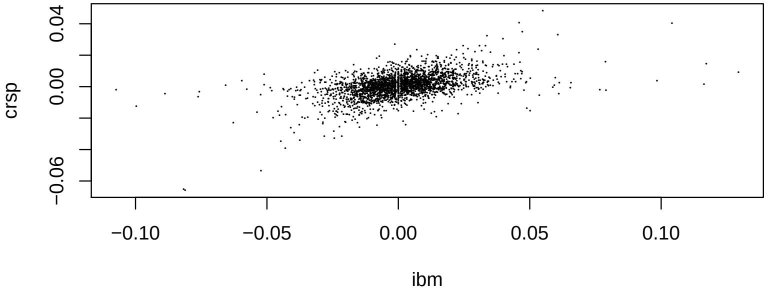
Ajuste de cópulas

- En esta sección abordaremos la estimación de una cópula a través de un ejemplo.
- En este ejercicio ajustaremos una cópula a un conjunto de rendimientos. Los datos se encuentran en el paquete `Ecdat` (data sets for econometrics).
- Para ajustar una cópula se requieren muchos paquetes para diferentes partes de la estimación.
- Se usan los datos del Center for Research in Security Prices (CRSP)

Ajuste de cópulas I

```
suppressPackageStartupMessages(library(Ecdat)) #fuente de datos
library(copula)
suppressPackageStartupMessages(library(fGarch)) #uso de la función de densidad t estandarizada
library(MASS) #usa las funciones fitdistr y kde2d
#funciones adicionales de copula (pempiricalCopula y ellipticalCopulaFit)
suppressPackageStartupMessages(library(fCopulae))

data(CRSPday,package="Ecdat")
ibm  <- CRSPday[,5]
crsp <- CRSPday[,7]
n <- length(ibm) #número de observaciones
plot(ibm,crsp,cex=0.2,pch=16) #grafica los rendimientos de los dos instrumentos
```

Ajuste de cópulas II



A continuación se ajustará una distribución t a cada una de las variables. Los valores que se guardan corresponden a los valores estimados de las distribuciones t marginales. Cada distribución marginal puede ajustar diferentes grados de libertad.

Ajuste de cópulas III

```
est.ibm <- as.numeric(fitdistr(ibm,"t")$estimate) #parámetros t: media, escala,gl
est.crsp <- as.numeric(fitdistr(crsp,"t")$estimate)
#Convierte los parámetros de escala a desviaciones estándar en el caso de la t
est.ibm[2] <- est.ibm[2]*sqrt(est.ibm[3]/(est.ibm[3]-2))
est.crsp[2] <- est.crsp[2]*sqrt(est.crsp[3]/(est.crsp[3]-2))
#Grados de libertad para cada caso:
est.ibm[3]

[1] 4.276156

est.crsp[3]

[1] 3.473982
```

Para estimar una t-cópula por máxima verosimilitud, se requiere una estimación de la correlación y y un valor inicial adecuado. Se usarán las densidades t estimadas como valores iniciales. Se define la cópula t con 2 grados de libertad

```
tau <- cor(ibm,crsp,method = "kendall")
omega <- 2/pi*asin(tau)
c(tau,omega)

[1] 0.3308049 0.2146404

copula2 <- tCopula(omega, dim = 2, dispstr = "un",df = 2)
```

Ajuste de cópulas IV

Ahora hay que ajustar la copula a los datos uniformes transformados:

```
#La función pstd es la distribución estándar t
#por el método de máxima verosimilitud
d1 <- cbind(pstd(ibm, mean = est.ibm[1], sd=est.ibm[2],nu=est.ibm[3]),
pstd(crsp, mean = est.crsp[1], sd=est.crsp[2],nu=est.crsp[3]))

fit1 <- fitCopula(copula2,method="ml",optim.method="L-BFGS-B",data=d1,
start=c(omega,5),lower=c(0,2.5),upper=c(0.5,15) )
fit1

Call: fitCopula(copula, data = data, method = "ml", start = ..3, lower = ..4,
    upper = ..5, optim.method = "L-BFGS-B")
Fit based on "maximum likelihood" and 2528 2-dimensional observations.
Copula: tCopula
 rho.1     df
0.4937 9.8537
The maximized loglikelihood is 362
Optimization converged
```

Para efectos de comparación, consideremos ahora el ajuste de otras cópulas a los datos:

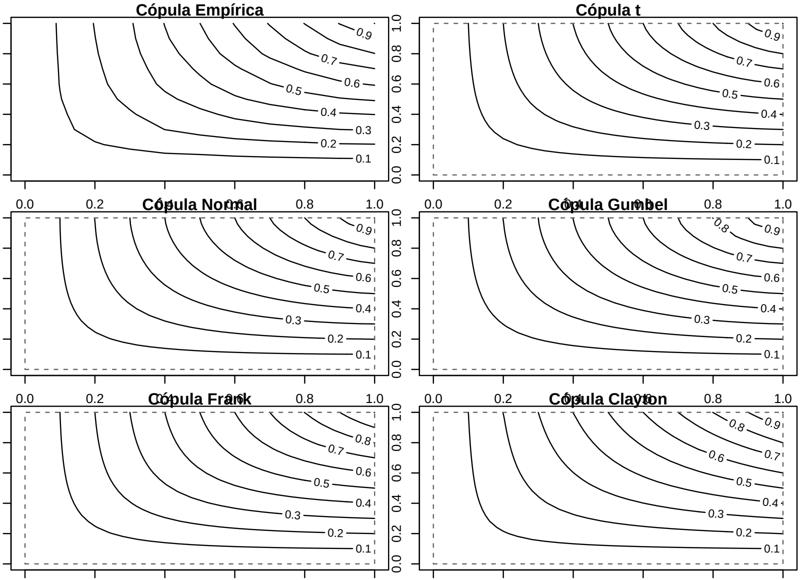
Ajuste de cópulas V

```
#Ajusta copula normal
fnorm <- fitCopula(data=d1,copula=normalCopula(-0.3,dim=2),
method="ml",optim.method="BFGS",start=0.5)
#Ajusta Gumbel
fgumbel <- fitCopula(data=d1,copula=gumbelCopula(3,dim=2),
method="ml",optim.method="BFGS",start=2)
#Ajusta Frank
ffrank <- fitCopula(data=d1,copula=frankCopula(3,dim=2),
method="ml",optim.method="BFGS",start=2)
#Ajusta Clayton
fclayton <- fitCopula(data=d1,copula=claytonCopula(3,dim=2),
method="ml",optim.method="BFGS",start=2)
```

Las copulas estimadas se compararán contra la cópula empírica y se verá si hay alguna estimación que quede cerca a la cópula que se obtiene de los datos.

```
u <- d1
dem <- pempiricalCopula(u[,1], u[,2])
par(list(mfrow = c(3,2),mar=c(1,1,1,1)))
contour(dem$x, dem$y, dem$z, main = "Cópula Empírica")
contour(tCopula(fit1@estimate[1],df = round(fit1@estimate[2],0)), pCopula, main = "Cópula t")
contour(normalCopula(fnorm@estimate), pCopula, main = "Cópula Normal")
contour(gumbelCopula(fgumbel@estimate), pCopula, main = "Cópula Gumbel")
contour(frankCopula(ffrank@estimate), pCopula, main = "Cópula Frank")
contour(claytonCopula(fclayton@estimate), pCopula, main = "Cópula Clayton")
```

Ajuste de cópulas VI

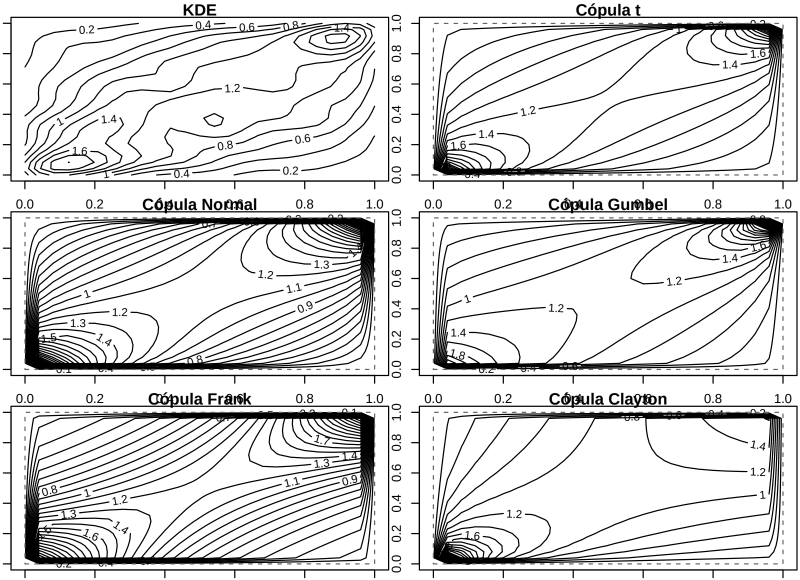


Ajuste de Cópulas I

En el siguiente conjunto de gráficas se comparará la estimación de la densidad bivariada entre las diferentes estimaciones paramétricas

```
par(list(mar=c(1,1,1,1),mfrow = c(3,2)))
contour(kde2d(u[,1], u[,2]), main = "KDE")
contour(tCopula(fit1@estimate[1], df = fit1@estimate[2]), dCopula,
main = "Cópula t", nlevels = 25)
contour(normalCopula(fnorm@estimate), dCopula, main = "Cópula Normal", nlevels = 25)
contour(gumbelCopula(fgumbel@estimate), dCopula, main = "Cópula Gumbel", nlevels = 25)
contour(frankCopula(ffrank@estimate), dCopula, main = "Cópula Frank", nlevels = 25)
contour(claytonCopula(fclayton@estimate), dCopula, main = "Cópula Clayton", nlevels = 25)
```

Ajuste de Cópulas II



Ajuste de Cópulas

Por último, podemos comparar los AIC. Recuerden que AIC = Criterio de Información de Akaike.

```
#AIC Normal
2*length(fnorm@estimate) - 2*fnorm@loglik

[1] -692.3688

#AIC Gumbel
2*length(fgumbel@estimate) - 2*fgumbel@loglik

[1] -624.4514

#AIC frank
2*length(ffrank@estimate) - 2*ffrank@loglik

[1] -648.5734

#AIC Clayton
2*length(fclayton@estimate) - 2*fclayton@loglik

[1] -584.2204

#AIC t
2*length(fit1@estimate) - 2*fit1@loglik

[1] -719.9693
```