Simulación ITAM
31 de agosto de 2018 2018-II

Tarea 2.

La fecha de entrega es el **13 de septiembre de 2018**.

Lecturas

- Robert & Casella Cap.2 sección 2.1.1
- Dagpunar Cap.2
- Good random number generators are (not so) easy to find

Problemas

1. Probar por inducción matemática que para un GLC,

$$Z_i \equiv \left[a^i Z_0 + c\frac{a^i - 1}{a - 1}\right] \mod m$$

2. ¿Qué se puede decir del periodo de $Z_i \equiv 630,360,016 Z_{i-1} \mod 2^{31} - 1$?

3. Sin calcular ninguna Z_i, determinar cuál de los siguientes GLC's mixtos tienen periodo completo.

   (a) $Z_i \equiv [13 Z_{i-1} + 13] \mod 16$.

   (b) $Z_i \equiv [12 Z_{i-1} + 13] \mod 16$.

   (c) $Z_i \equiv [13 Z_{i-1} + 12] \mod 16$.

   (d) $Z_i \equiv [Z_{i-1} + 12] \mod 13$.

   (e) El glc con parámetros: $a = 2,814,749,767,109$, $c = 59,482,661,568,307$, $m = 2^{48}$.

4. Mostrar que el promedio de las U_i's tomadas de un ciclo completo de un GLC de periodo completo es $\frac{1}{2} - \frac{1}{2m}$.

5. Generar 10,000 números con $\mathcal{U}(0,1)$ de Excel. Hacer un breve estudio para probar la calidad de los generadores; aplicar las pruebas de uniformidad e independencia a cada conjunto de datos. Resumir resultados en NO MAS de 2 cuartillas, incluyendo gráficas. De acuerdo a tus resultados, ¿cómo calificarías al generador de Excel?

6. Probar que la parte fraccional de la suma de uniformes en [0,1]: $U_1 + U_2 + \cdots + U_k$ es también uniforme en el intervalo [0,1].

7. Un generador de Fibonacci obtiene X_{n+1} a partir de X_n y X_{n-1} de la siguiente forma:

$$X_{i+1} \equiv (X_i + X_{i-1}) \mod m$$

donde X_0 y X_1 están especificados.

Supongan que $m = 5$. Sólo dos ciclos son posibles. Encontrarlos, así como su respectivo periodo.

8. Genera 10,000 números con una semilla de $Z_0 = 1$ usando el generador $Z_n = 7^5 Z_{n-1} \mod (2^{31} - 1)$ Clasifica los números en 10 celdas de igual tamaño y prueben por uniformidad usando la prueba χ^2 con un nivel de confianza del 90 %. Aplicar también la prueba de rachas.

9. Aplicar a los datos del ejercicio las pruebas de correlación, gaps y poker.

10. Generar 1500 números del generador RANDU. Hacer una prueba de Kolmogorov-Smirnov al 95 % de confianza.

11. La página The number e to one million digits (https://apod.nasa.gov/htmltest/gifcity/e.1mil) contiene el primer millón de dígitos de e (pueden usar cualquier otra página). Considerando estos dígitos:

    - Realizar un histograma y verificar la hipótesis de que los dígitos corresponden a una distribución uniforme discreta.
    - Verificar independencia de los dígitos, considerando las pruebas de gaps, de poker y de rachas.

      Una idea de ver los datos está en la siguiente imagen (esta está hecha para π):

12. Escriban un programa que utilice el método de la transformación inversa para generar números de la densidad siguiente: $f(x) = \frac{1}{x^2} I(x \geq 1)$. Para probar su programa, hagan un histograma de $10{,}000$ números junto con la densidad f. Verificar la hipótesis de que la muestra sigue la distribución teórica dada y hacer un $qq-$plot e interpretar.

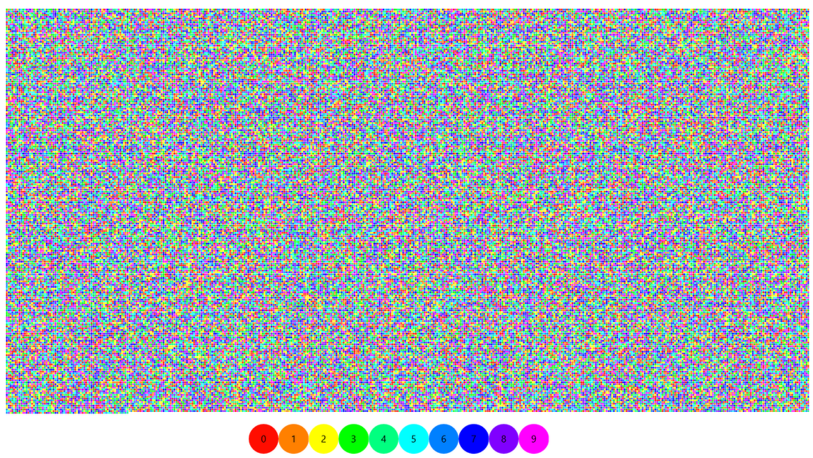

Figura 1: Cómo se ven los primeros 100,000 dígitos de π.