Transferencia de Calor 2D - Smith Hutton

Juan David Argüello Plata

Universidad Industrial de Santander

Escuela de Ingeniería Mecánica

1. Planteamiento del Problema

Se busca analizar, mediante métodos *numéricos*, el problema de transferencia de calor desarrollado por Smith Hutton, como se observa en la Figura 1.

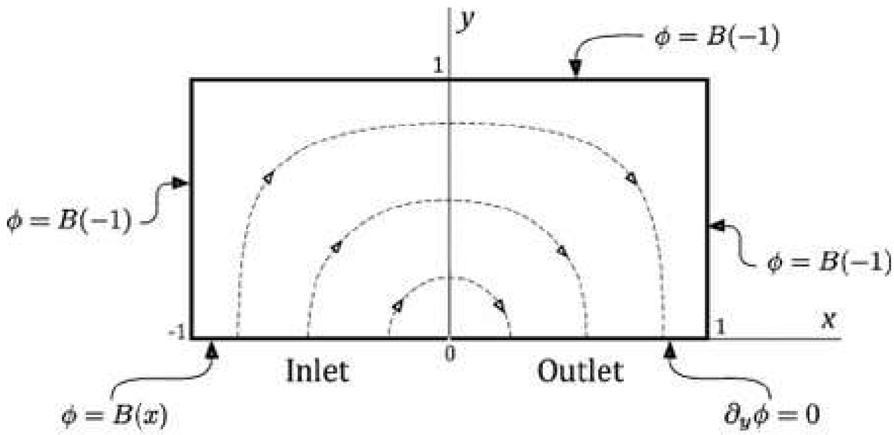


Figura 1. Geometría del problema.

Se toman las siguientes suposiciones:

- Conductividad térmica constante.
- Conducción 2D.
- Sin generación.
- Campo de velocidades conocido.
- Transferencia de calor transitoria.

2. Datos

Los datos del problema se pueden especificar a continuación.

[1]:
```
from App.Data import *
datos = Datos()
datos
```

Geometría | Propiedades

W

2

H

3. Mallado

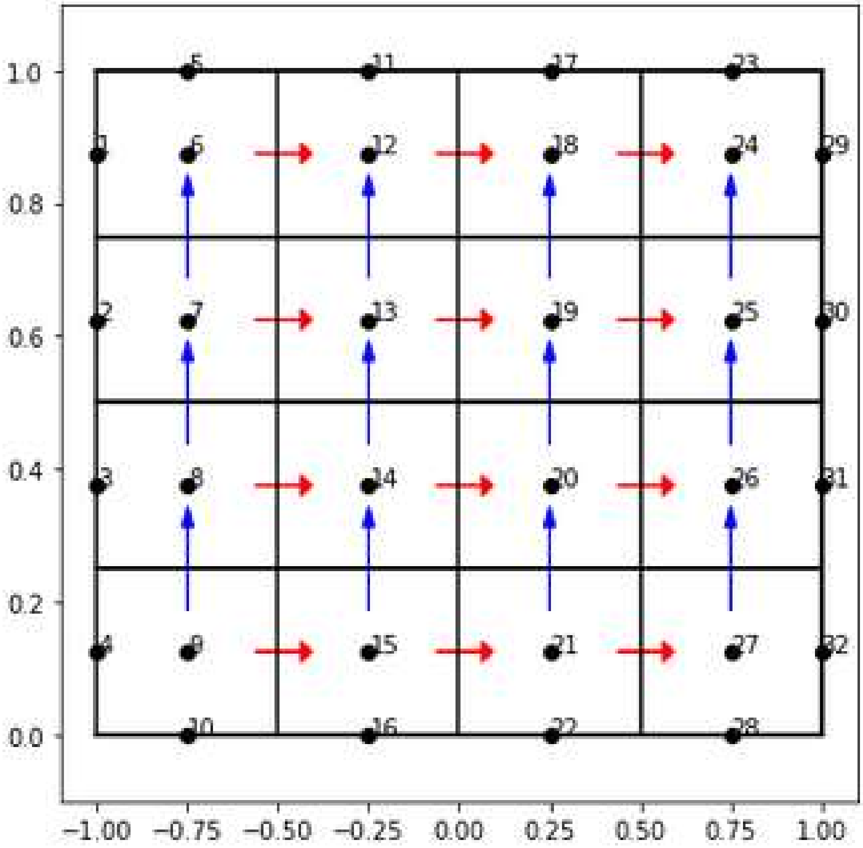
La formulación del mallado se realiza a partir de una *malla escalonada*, donde las variables escalares (presión y temperatura) son datos que se almacenan en los nodos, mientras que las velocidades se localizan en las caras de los elementos. Esto se puede apreciar ligeramente en la discretización del dominio desarrollada a través de la ejecución del siguiente algoritmo:

```
    #Conexion con base de datos
    con = sql.connect('App/data.db')
    text = ["SELECT * FROM ", " ORDER BY ", " DESC LIMIT 1"]
    n =  con.execute(text[0]+' nodes '+text[1]+' NodeID '+text[2]).fetchall()
    el = con.execute(text[0]+' elements '+text[1]+' ElID '+text[2]).fetchall()
    con.close()
    display(HTML("Número de nodos: " + str(n[0][0])))
    display(HTML("Número de elementos: " + str(el[0][0])))
    return data['Geometría']['W']/xsub, data['Geometría']['H']/ysub, xsub, ysub
data = Read(datos)
ElData = interactive(Mesh,
                     xsub=IntSlider(value=4, max=14, min = 4, step=2),
                     ysub=IntSlider(value=4, max=14, min = 4, step=2),
                     numN = False,
                     continous_update=False)
display(ElData)
```

xsub 4

ysub 4

numN



Número de nodos: 32

Número de elementos: 16

4. Planteamiento y solución del sistema matricial

El planteamiento matricial se desarrolla con base en las siguietes relaciones matemáticas:

$$a_pT_p = a_ET_E + a_WT_W + a_NT_N + a_ST_S + b \tag{3}$$
$$u = 2y\left(1 - x^2\right)$$
$$v = -2x\left(1 - y^2\right)$$
$$T_{izq} = 1 + tanh(10)(2x + 1)$$

Dónde b es la generación de calor y:

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + a_{p0} + (F_E - F_W + F_N - F_S)$$
$$F_E = F_W = \rho u \Delta y$$
$$F_N = F_S = \rho v \Delta x$$
$$D_E = D_W = K\frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$D_N = D_S = K\frac{\Delta x}{\Delta y}$$
$$a_{p0} = \rho\frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}$$
$$b = a_{p0}T_p^0 + Q_g\Delta x\Delta y$$
$$a_E = D_E A_{pE} + max\left(-F_E, 0\right)$$
$$a_W = D_W A_{pW} + max\left(F_W, 0\right)$$
$$a_N = D_N A_{pN} + max\left(-F_N, 0\right)$$
$$a_S = D_S A_{pS} + max\left(F_S, 0\right)$$
$$A_{pi} = 1 - 0.5 \mid P_i \mid \rightarrow \text{Diferencias centradas}$$
$$A_{pi} = 1 \rightarrow \text{Upwind}$$
$$A_{pi} = max\left(0, 1 - 0.5 \mid P_i \mid\right) \rightarrow \text{Híbrido}$$
$$P_i = \frac{F_i}{D_i} = \frac{\rho u A_j}{K}$$
$$A_x = \Delta x \Delta z$$
$$A_y = \Delta y \Delta z$$
$$\frac{\rho}{K} = 10^6 \; o \; 10^3 \; o \; 10$$

Para la malla mostrada anteriormente, el sistema de ecuaciones general es el siguiente:

```
from sympy import init_session
init_session(use_latex=True)
```

IPython console for SymPy 1.4 (Python 3.7.4-32-bit) (ground types: python)

Reemplazando las ecuaciones anteriores en la Ecuación 3, se obtiene la siguiente relación matemática para la temperatura centroidal:

[4]:

```python
from sympy.functions import Min, Max
#Creación de símbolos generales
a_p, a_S, a_N, a_E, a_W, T_p, T_S, T_N, T_E, T_W, u, v, x, y, a_p0, b, F_S, F_N, F_E, F_W, D_S, D_N, D_E, D_W, Q_g
    symbols("a_p, a_S, a_N, a_E, a_W, T_p, T_S, T_N, T_E, T_W, u, v, x, y, a_{p0}, b, F_S, F_N, F_E, F_W, D_S, D_N
Dx, Dy, Dt, T_p0 = Symbol("\\Delta x"), Symbol("\\Delta y"), Symbol("\\Delta t"), Symbol("T_p ^0")
rho, A, K = symbols("\\rho, A, K")
A_pE, A_pW, A_pN, A_pS = symbols("A_{pE}, A_{pW}, A_{pN}, A_{pS}")

#Ecuaciones
a_p0 = rho*(Dx*Dy)/Dt
D_E = K*(Dy/Dx)
D_W = D_E
D_N = K*(Dx/Dy)
D_S = D_N
F_E = rho*u*Dy
F_W = rho*u*Dy
F_N = rho*v*Dx
F_S = rho*v*Dx
u = 2*y*(1-x**2)
v = -2*x*(1-y**2)
b = a_p0*T_p0 + Q_g*Dx*Dy
a_E = D_E*A_pE+Max(-F_E,0)
a_W = D_W*A_pW+Max(F_W,0)
a_S = D_S*A_pS+Max(F_S,0)
a_N = D_N*A_pN+Max(-F_N,0)
a_p = a_E+a_W+a_S+a_N+a_p0+(F_E-F_W+F_N-F_S)
Ec = Eq(T_p, (1/a_p)*(a_E*T_E + a_W*T_W + a_N*T_N + a_S*T_S + b))
Ec
```

[4]:

$$T_p = \frac{Q_g \Delta x \Delta y + T_E \left(\frac{A_{pE} K \Delta y}{\Delta x} + \max\left(0, -\Delta y \rho u\right)\right) + T_N \left(\frac{A_{pN} K \Delta x}{\Delta y} + \max\left(0, -\Delta x \rho v\right)\right) + T_S \left(\frac{A_{pS} K \Delta x}{\Delta y} + \max\left(0, \Delta x \rho v\right)\right) + T_W \left(\frac{A_{pW} K \Delta y}{\Delta x} + \max\left(0, \Delta y \rho u\right)\right) + \frac{T_p^0 \Delta x \Delta y \rho}{\Delta t}}{\frac{A_{pE} K \Delta y}{\Delta x} + \frac{A_{pN} K \Delta x}{\Delta y} + \frac{A_{pS} K \Delta x}{\Delta y} + \frac{A_{pW} K \Delta y}{\Delta x} + \max\left(0, -\Delta x \rho v\right) + \max\left(0, \Delta x \rho v\right) + \max\left(0, -\Delta y \rho u\right) + \max\left(0, \Delta y \rho u\right) + \frac{\Delta x \Delta y \rho}{\Delta t}}$$

5. Resultados → Postprocesamiento

Los resultados obtenidos se pueden evidenciar a continuación:

[5]:
```python
%matplotlib inline
from ipywidgets import *
from App.Solver import Solve
#Constantes Generales
Cons = {}
Cons[Dx], Cons[Dy], Cons["xsub"], Cons["ysub"] = ElData.result
Cons[K], Cons[Q_g] = data['Propiedades']['K'], data['Propiedades']['Q_g']
Cons[Dt] = data['Propiedades']['Dt']
Ec = Ec.subs(Cons)

def Solver(Tipo, Peclet, Iteraciones):
    Solve(Ec, Tipo, Peclet, data, Cons[Dx], Cons[Dy], Iteraciones,
          (data['Geometría']['W'], data['Geometría']['H']), (Cons["ysub"],Cons["xsub"]))

ss = interactive(Solver,
                Tipo = RadioButtons(options=['Upwind', 'Diferencias Centradas', 'Híbrido'], value='Híbrido'),
                Peclet = RadioButtons(options=[10.0, 1000.0, 10E6], value=10),
                Iteraciones = IntText(value=10))
display(ss)
```

Tipo
- ○ Upwind
- ○ Diferencias Centradas
- ● Híbrido

Peclet
- ● 10.0
- ○ 1000.0
- ○ 10000000.0

Iteraciones 10

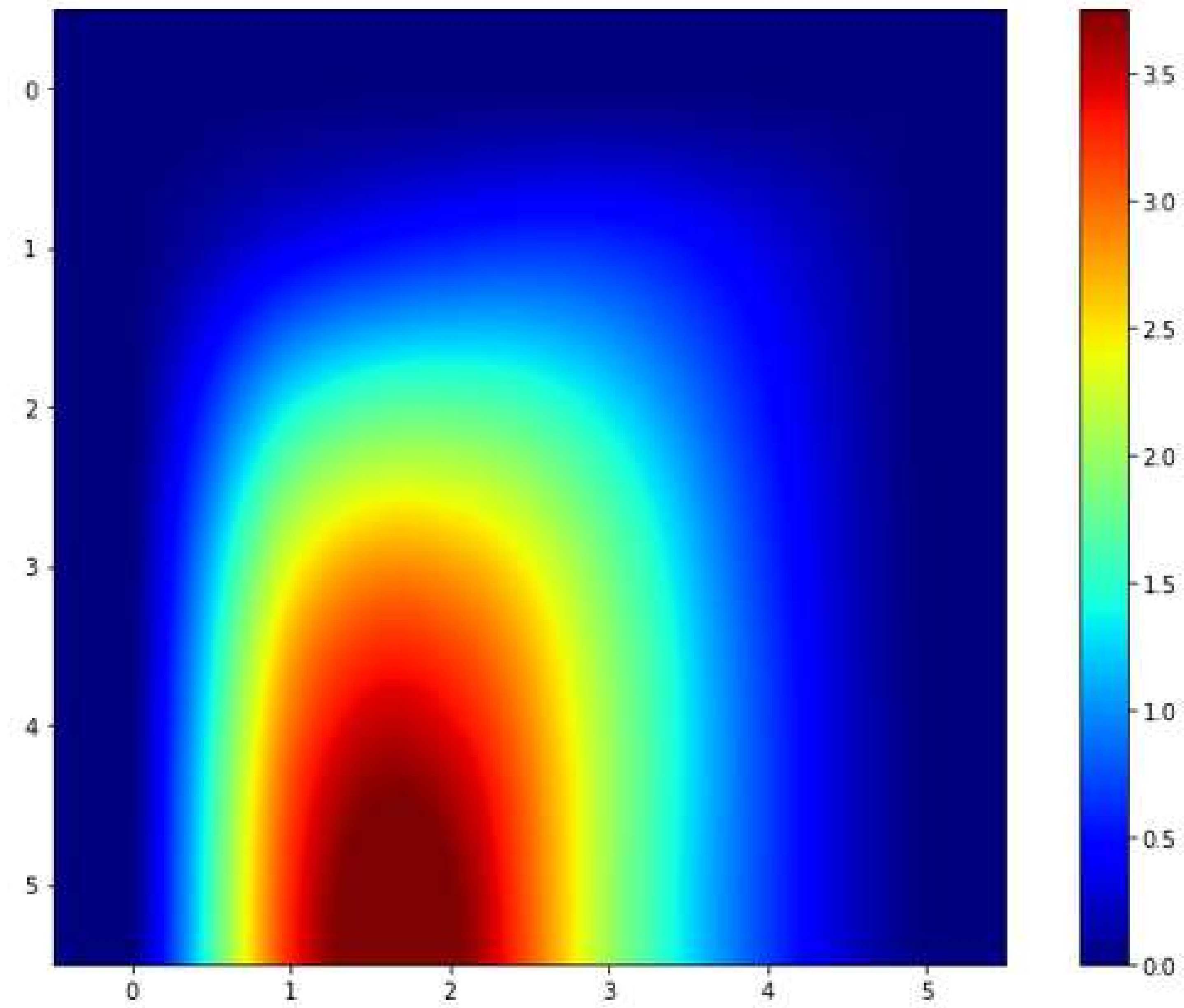
Tipo
- ( ) Upwind
- ( ) Diferencias Centradas
- (•) Híbrido

Peclet
- (•) 10.0
- ( ) 1000.0
- ( ) 10000000.0

Iteraciones: 10

Progreso...

Resultados:



A continuación, se pueden apreciar **todos** los resultados...

A continuación, se pueden apreciar **todos** los resultados...

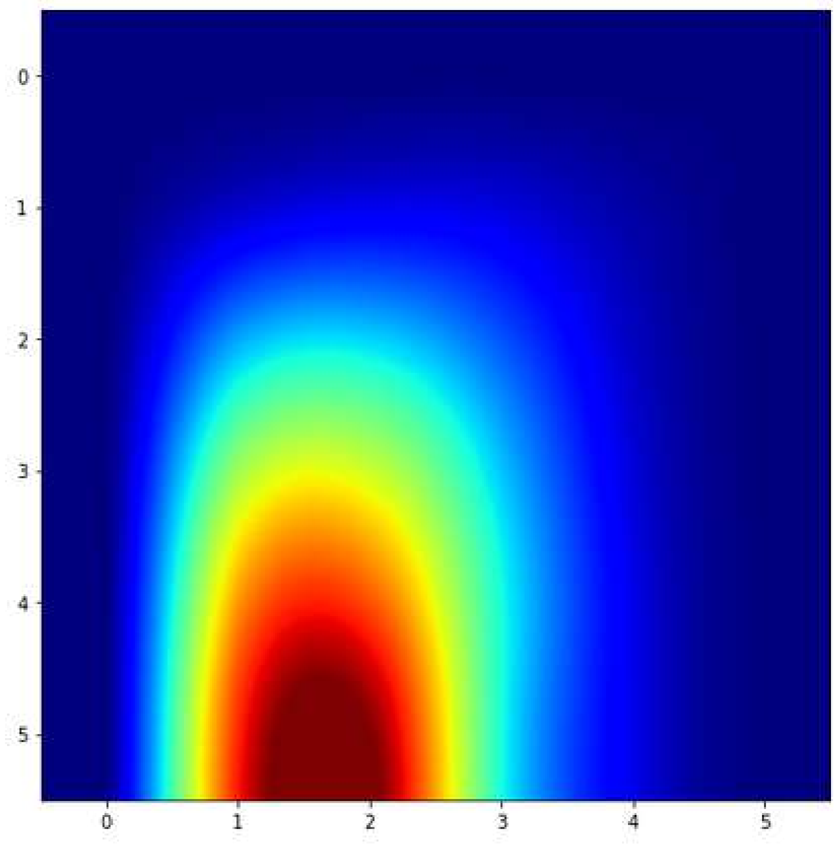
[6]:
```
%matplotlib inline
from IPython.display import display, Markdown, HTML
from ipywidgets import *
from App.Solver import Solve

#Constantes Generales
Cons = {}
Cons[Dx], Cons[Dy], Cons["xsub"], Cons["ysub"] = ElData.result
Cons[K], Cons[Q_g] = data['Propiedades']['K'], data['Propiedades']['Q_g']
Cons[Dt] = data['Propiedades']['Dt']
Ec = Ec.subs(Cons)

for Tipo in ['Upwind', 'Diferencias Centradas', 'Híbrido']:
    display(HTML('<h1 align="center"><strong>Resultados tipo ' + Tipo + "</strong></h1>"))
    for Peclet in [10.0, 1000.0, 10E6]:
        fig = plt.figure(figsize=(12,8))
        ax = fig.add_subplot(111)
        display(Markdown("## _Peclet:_ " + str(Peclet)))
        Solve(Ec, Tipo, Peclet, data, Cons[Dx], Cons[Dy], 5,
          (data['Geometría']['W'], data['Geometría']['H']), (Cons["ysub"],Cons["xsub"]),
             fig=(False,ax,fig))
```

Resultados tipo Upwind

Peclet: 10.0

Progreso...

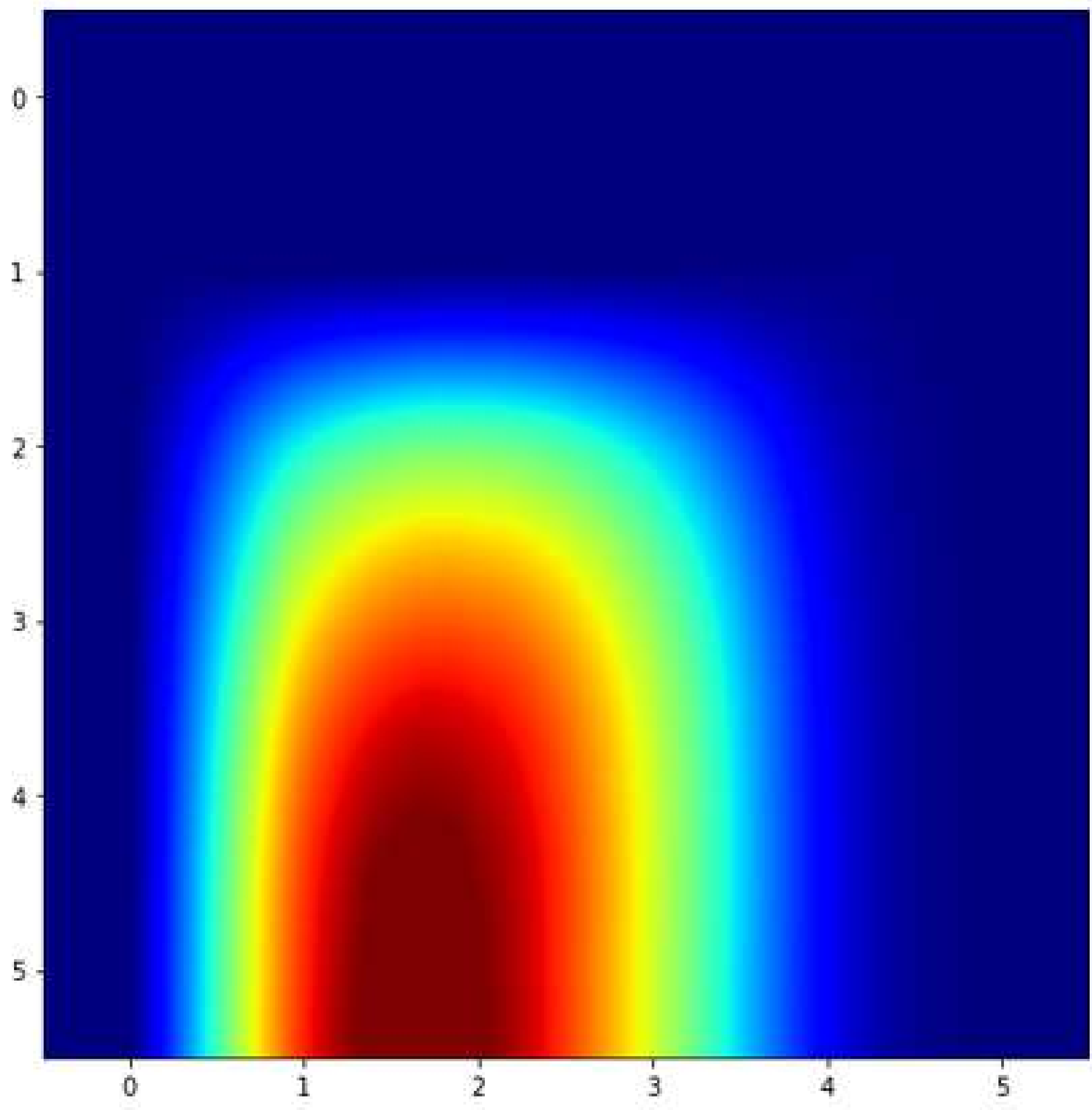
Resultados:



Peclet: 1000.0

Progreso...

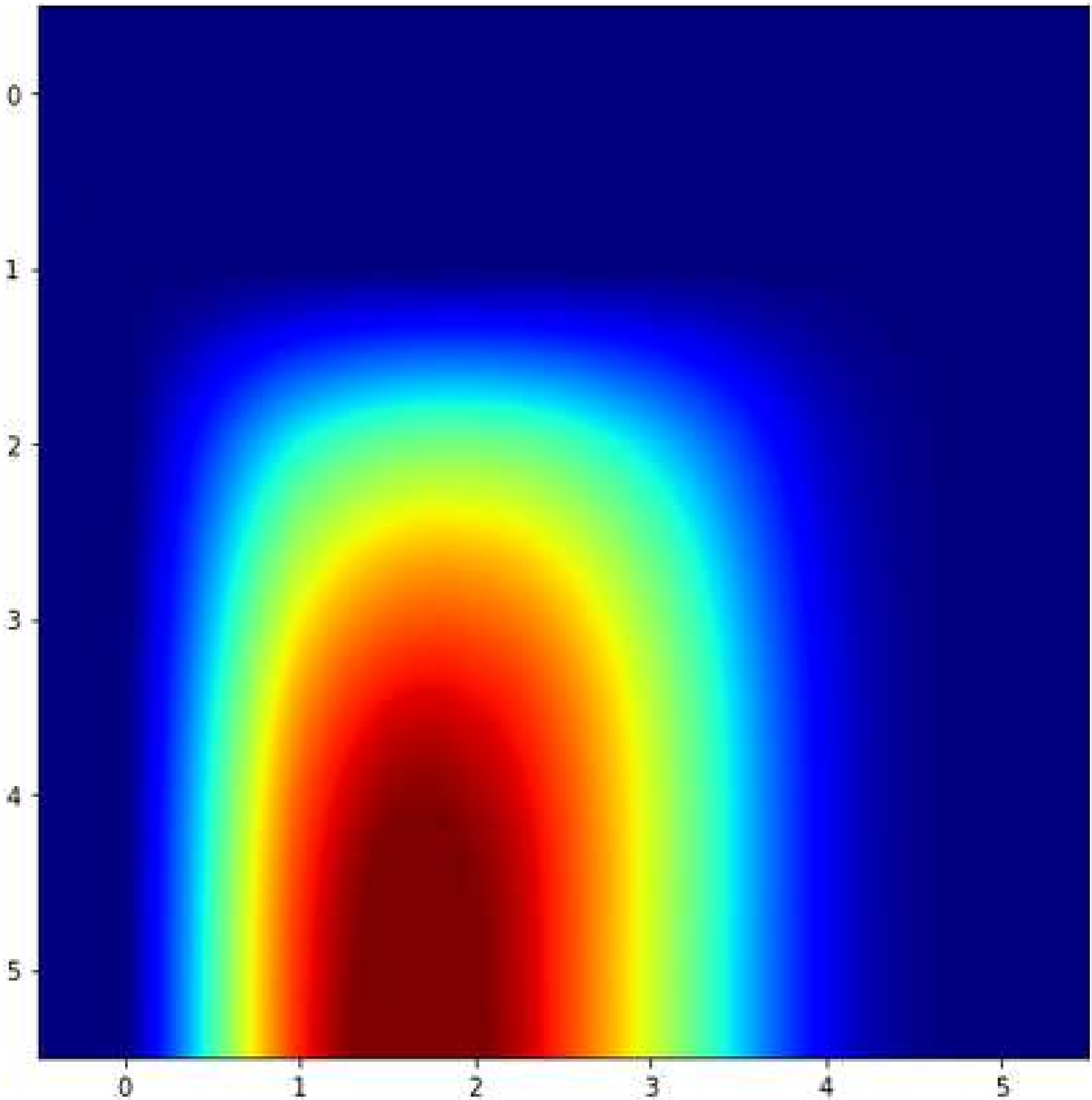
Resultados:



Peclet: 10000000.0

Progreso...

Resultados:

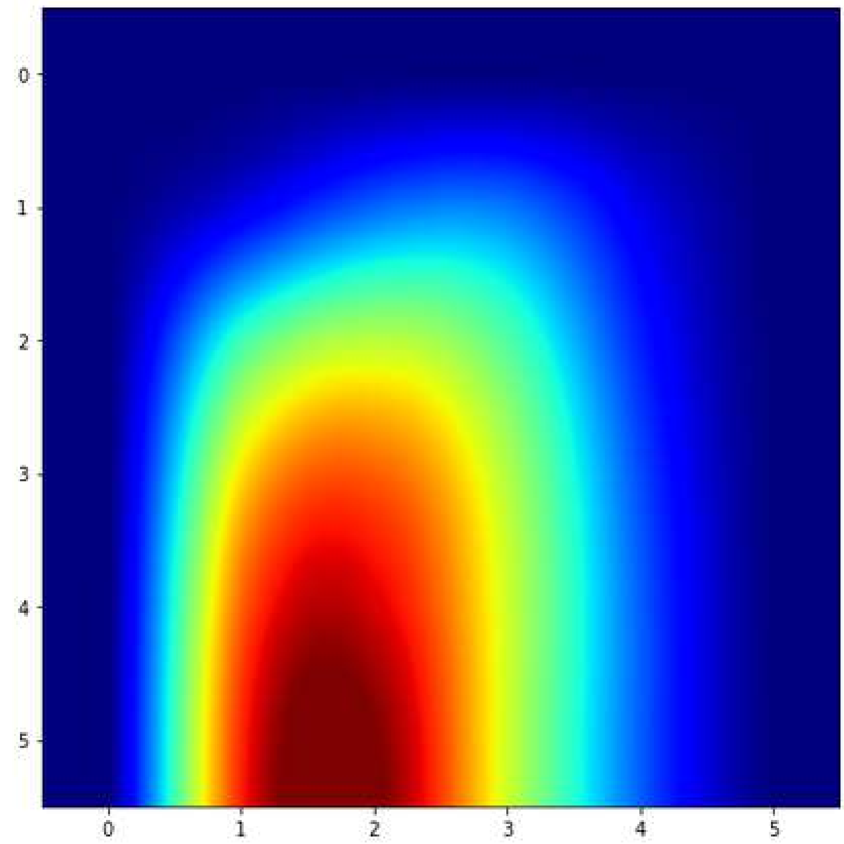


Resultados tipo Diferencias Centradas

Peclet: 10.0

Progreso...

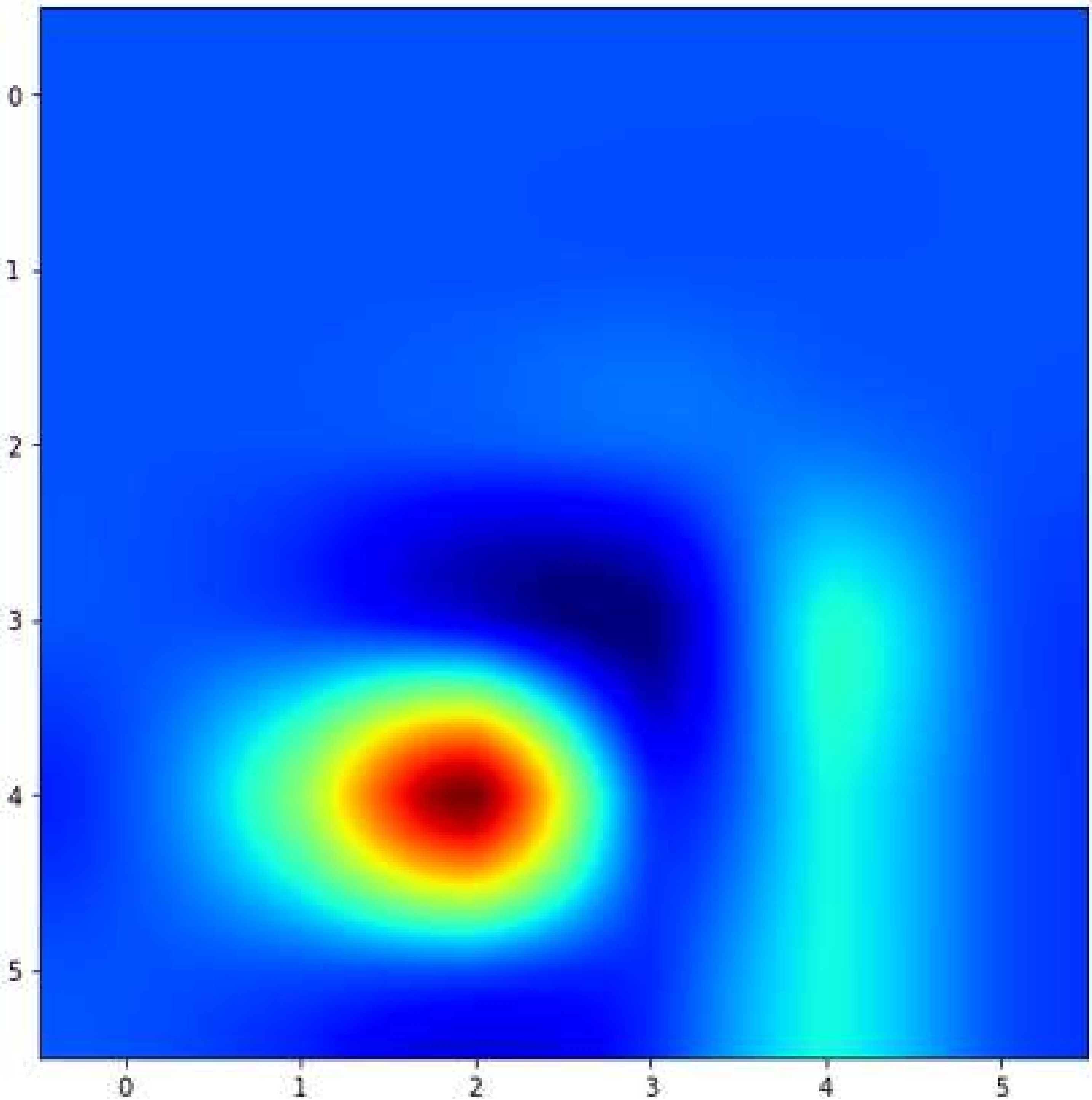
Resultados:



Peclet: 1000.0

Progreso...

Resultados:

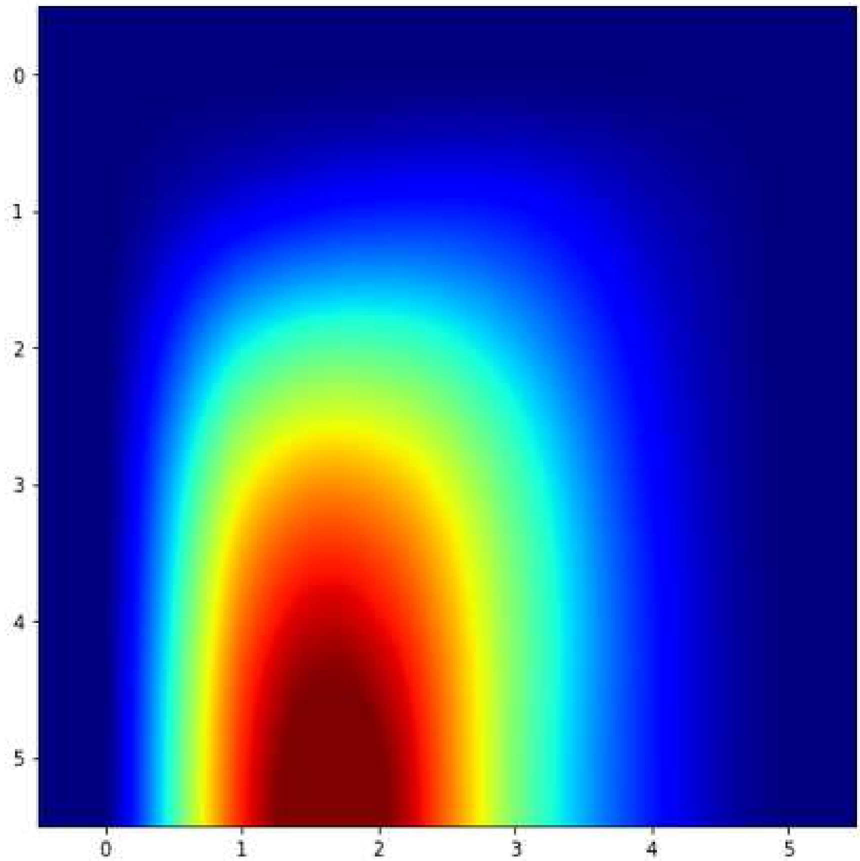


Resultados tipo Híbrido

Peclet: 10.0

Progreso...

Resultados:



Peclet: 1000.0

Progreso...

Resultados: