

Vilniaus universitetas  
Fizikos fakultetas  
Teorinės fizikos ir astronomijos institutas

Justas Kvedaravičius

**ERDVINIO RINKĖJO MODELIO SU KONKURUOJANČIA DINAMIKA  
APROKSIMAVIMAS VIENMATE FOKERIO-PLANKO LYGTIMI**

Magistro studijų baigiamasis darbas

Teorinės fizikos ir astrofizikos programa

Studentas  
Leista gintis  
Darbo vadovas  
Instituto atstovas

Justas Kvedaravičius  
2024-05-22  
dr. Aleksejus Kononovičius  
prof. dr. Egidijus Anisimovas

Vilnius 2024

# Turinys

<b>1 Ivadas</b>	<b>3</b>
<b>2 Literatūros apžvalga</b>	<b>4</b>
2.1 Izingo modelis . . . . .	4
2.1.1 Izingo modelio paradigma . . . . .	4
2.1.2 Glauber ir Kawasaki dinamika . . . . .	5
2.1.3 Konkuruojanti dinamika Izingo modelyje . . . . .	6
2.2 Rinkėjo modelis . . . . .	9
2.2.1 Klasikinis rinkėjo modelis . . . . .	9
2.2.2 Erdvinis rinkėjo modelis ir konkuruojanti dinamika . . . . .	12
2.2.3 Rangų dinamika erdviniaiame rinkėjo modelyje . . . . .	13
2.3 Vienmatis stochastinis procesas . . . . .	15
2.3.1 Aprašymas Fokerio-Planko lygtimi . . . . .	15
2.3.2 Pirmojo kirtimo ir grįžimo laikai . . . . .	16
<b>3 Tyrimo metodika</b>	<b>19</b>
3.1 Gillespie algoritmas stochastinių vyksmų modeliavimui . . . . .	19
3.2 Naivus Beta binominio skirstinio aproksimacijos algoritmas . . . . .	19
3.3 Aproksimacija vienmačiu stochastiniu procesu . . . . .	20
<b>4 Rezultatai</b>	<b>22</b>
4.1 Agentų populiacijos skirstiniai nekonkuruojančios dinamikos atveju . . . . .	22
4.2 Agentų populiacijos skirstinių priklausomybė nuo modelio spartų konkuruojančios dinamikos atveju . . . . .	23
4.3 Kramers-Moyal koeficientų verčių nustatymas . . . . .	27
4.4 Konkuruojančios dinamikos erdviniaiame rinkėjo modelyje aproksimacija vienmačiu stochastiniu procesu . . . . .	29
4.5 Erdvinio rinkėjo modelio rango-dydžio skirstiniai . . . . .	32
4.6 Erdvinio rinkėjo modelio rangų dinamikos aproksimacija vienmačiu stochastiniu procesu . . . . .	33
4.7 Pirmojo grįžimo laikai konkuruojančios ir rangų dinamikos atvejais . . . . .	35
<b>5 Išvados</b>	<b>37</b>
<b>6 Pristatymai konferencijoje ir parama tyrimui</b>	<b>38</b>
<b>Santrauka</b>	<b>39</b>
<b>Summary</b>	<b>40</b>
<b>Literatūra</b>	<b>41</b>

# 1 Įvadas

Fiziniai socialinių sistemų modeliai siekia aprašyti realius socialinius procesus panaudodami agentais paremtą modeliavimą. Jeigu daromos prielaidos apie socialinių agentų esmines savybes yra pernelyg reduktyvios - modelio rezultatų palyginimas su empiriniais duomenimis tampa kebilus. Dauguma dabartinių nuomonių dinamikos modelių nėra validuoti empiriniais duomenimis [1]. Rezultatų palyginamumui pagerinti kai kurie autorai sėkmingai pritaikę idėją vietoje laikinio sistemos modeliavimo pasitelkti erdvinį modeliavimą [2, 3], pavyzdžiui, migraciją arba kasdienį mobiliumą. Empiriniai duomenys pasižymi didesne erdvinių vienetų įvairove ir skyra (apylinkės, miestai, gatvės ir pan.) lyginant su laikinių vienetų įvairove. Pavyzdžiui, reguliarūs rinkimai vyksta viso labo kas kelerius metus ir tokios laiko eilutės turi tik iki keliolikos taškų.

Poreikis validuoti modelius remiantis empiriniais duomenis sukelia iššukių dėl duomenų įvairovės problemos. Nuomonių dinamika pasireiškia sistemoje, kurios tarpusavyje nėra paprastai palyginamos, pavyzdžiui, demokratiniuose procesuose, socialiniuose tinkluose, Eurovizijos balsavimuose ir panašiai. Nors šiose sistemoje naudojami įverčiai (dydžiai) tiesiogiai nesilygina, iš daugelio dalykų galima sudaryti palyginamus rango-dydžio sąrašus. Jei rangai kinta laike - galima analizuoti jų laikinę dinamiką [4, 5]. Kai kuriems empiriniams duomenims rangų dinamiką galima modeliuoti kaip vienmatį stochastinį procesą - vieno rango kitimas laike gali suteikti pakankamai informacijos apibūdinti visos sistemos dinamikai.

Šiame tyime išplečiamas ir analizuojamas erdvinis rinkėjo modelis su dviem fundamentaliais fiziniais nuomonių dinamikos procesais - būsenos kitimo ir vietų apsikeitimo vyksmais. Modelį yra sudėtinga modeliuoti skaitmeniškai, todėl yra prasminga ieškoti jo aproksimacijų. **Šio tyrimo tikslas** - Erdvinio rinkėjo modelio su konkuruojančia dinamika aproksimavimas vienmačiu Markovo procesu. Tikslui įgyvendinti keliami uždaviniai:

1. Nustatyti erdvinio rinkėjo modelio su konkuruojančia dinamika stacionarųjį skristinį absoliučios ir santykinės populiacijų atžvilgiu.
2. Nustatyti kada erdvinio rinkėjo modelio su konkuruojančia dinamika stacionarus skirstinys gali būti aproksimuojamas Beta arba Beta-binominiu skirstiniu.
3. Nustatyti vienmatės Fokerio-Planko lyties formą, kuri galėtų būti naudojama kaip erdvinio rinkėjo modelio su konkuruojančia dinamika aproksimacija.
4. Patikrinti ar erdvinio rinkėjo modelio su konkuruojančiu dinamika pirmo grįžimo laikų skirstinys turi panašią formą kaip visi vienmatės difuzijos procesai.

## 2 Literatūros apžvalga

### 2.1 Izingo modelis

#### 2.1.1 Izingo modelio paradigma

Izingo modelio paradigma yra plačiai panaudota formuluojant pagrindinius sociofizikos modeilius [6] - sukiniai ir jų sąveika yra paprasčiausia sudėtingesnių agentų sistemos aproksimacija. Paties modelio koncepcija yra nesudėtinga - tai sukiniai, galinčiai įgyti dvi vertes, gardelė  $d$  dimensijose. Nustatant, kad sukiniai vertės gali būti lygios  $s_i = \pm 1$ , galima apibrėžti sistemos Hamiltonianą:

$$H = -J \sum_{\{i,j\}} s_i s_j, \quad (1)$$

čia sumavimas vyksta per artimiausių kaimynų rinkinį. Dydis  $J$  šiuo atveju yra sukiniai sąveikos energijos konstanta ir jos ženklas nulemia ar sukiniai sąveika yra feromagnetinė, ar antiferomagnetinė.

Šis paprastas sąveikos mechanizmas Izingo modeliui suteikia trijų tipų dinamikas - superkritinę, subkritinę ir kritinę [7]. Superkritinė dinamika modelis pasižymi aukštesnėje nei kritinės temperatūros srityje  $T > T_C$  ir sistema būna nuostolioje netvarkingoje konfigūracijoje. Subkritinė dinamika vyksta esant  $T < T_C$  ir yra kokybiškai panaši į tvarkingą sistemos būseną nulinėje temperatūroje. O tuo tarpu kritinė dinamika pasireiškia tik vienoje temperatūroje  $T = T_C$ . Feromagnetinėms medžiagoms kritinės temperatūros taškas žinomas Kiuri temperatūros pavadinimu.

Kritinės temperatūros taške sistemoje pasireiškia skalės invariantiškumas [8]. Sistemos tvarkos parametru vertės, pavyzdžiui, vidutinė magnetizacija, šioje srityje kinta kaip laipsninės funkcijos:

$$m = \frac{M}{N} \propto (T_C - T)^\gamma, \quad (2)$$

čia  $m$  žymi sistemos sukinio vidutinę magnetizaciją,  $M$  žymi absoliučią magnetizaciją,  $N$  yra sukiniai skaičius,  $T_C$  yra kritinio taško temperatūros vertė, o  $\gamma$  yra kritinė eksponentė. Skalės invariantiškumas reiškia tai, jog pakeitus sistemos mastelių (stebėjimo skyra) tvarkos parametru vertės nepakinta.

Kritiniame taške esant skalės invariantiškumui susiformuoja įvairių dydžių domenai, priešingu negu  $T \neq T_C$  atvejais. Superkritiniu (feromagnetinių sąveikų) atveju susidaro vienas didelis domenas, o subkritiniu atveju dideli domenai nesusiformuoja dėl triukšmingo sukiniai verčių kitimo. Dažnai norint įvertinti susidarančių domenų dydį skaičiuojama koreliacijos funkcija [7–9]. Ši funkcija įvertina sukiniai verčių tarpusavio priklausomybę, o tai iš esmės yra statistinis domenų dydžio įvertinimas.

Verta pastebėti, kad toliau aprašoma dinamikų implementacija Monte Carlo skaitiniu metodu yra apibendrinama kaip diskretaus laiko simuliacija ir skirsis nuo kito (Gillespie) metodo naudojamo modeliuoti erdiniam rinkėjo modeliui. Pastarasis yra vadinamas tolydaus laiko metodu.

### 2.1.2 Glauber ir Kawasaki dinamika

Izingo modelį analitiškai spręsti yra sudėtinga (ir aukštesnėms dimensijoms neįmanoma), todėl modelio dinamika dažniau simuliujama skaitmeniškai. Vienas būdų tai atlikti - Monte Carlo skaitmeniniu eksperimentu pagal Glauber, Metropolio, Kawasaki, Wolff, Swendsen-Wang ar kitą algoritmą [9]. Glauber (Metropolio) ir Kawasaki algoritmai yra tiesioginiai būsenos kitimo ir vietų apsikeitimo algoritmų apibrėžimai, todėl norint nagrinėti tokį procesą konkuruojančią dinamiką verta juos pristatyti detaliau.

Siekiant gauti sistemos būsenų pasiskirstymą atitinkantį Boltzmann dėsnį (šiuo atveju dėl to, kad nagrinėjama Izingo modelio sistema yra šiluminė), būtina nustatyti ergodiškumo ir detalaus balanso sąlygas [9]. Ergodiškumo sąlyga nurodo, jog bet kuri sistemos konfigūracija turi būti pasiekiamai per baigtinį Monte Carlo žingsnių skaičių. Detalus balansas yra sistemos būvimo pusiausvyroje sąlyga:

$$p_\mu P(\mu \rightarrow \nu) = p_\nu P(\nu \rightarrow \mu), \quad (3)$$

kur  $\mu, \nu$  žymi dvi skirtinges būsenas,  $p$  tų būsenų tikimybę, o  $P$  žymi šuolių tarp nurodytų būsenų tikimybes. Tai taip pat galima interpretuoti kaip tikimybės srovių būsenų erdvėje tvermės dėsnį [7]. Kadangi sistemos modeliavimui aktualu įvertinti šuolių tarp būsenų tikimybes, laikykime jas susidedančias iš sukinio parinkimo (angl. *selection*)  $g$  ir šuolio priėmimo (angl. *acceptance*)  $A$  tikimybių:

$$P(\mu \rightarrow \nu) = g(\mu \rightarrow \nu)A(\mu \rightarrow \nu). \quad (4)$$

Metropolio algoritme perėjimas iš vienos būsenos į kitą atliekamas taip: su tikimybe  $g$  pasirenkamas gardelės sukinys ir įvertinama jo sąveikos energiją su artimiausiais kaimyniniais sukiniais. Jeigu sukinio vertės pakeitimais sumažintų sistemos energija, toks žingsnis visuomet priimamas. Kitu atveju pokytis priimamas su perėjimo tikimybe proporcinga Boltzmanno skirstiniui [9]:

$$A(\mu \rightarrow \nu) = \begin{cases} e^{-\beta(E_\nu - E_\mu)} & \text{jeigu } E_\nu - E_\mu > 0, \\ 1 & \text{priešingu atveju.} \end{cases} \quad (5)$$

Metropolio algoritmo atveju yra parinktos efektyviausios šuolio tarp būsenų priėmimo tikimybės vertės skaitmeninei simuliacijai. Dažnai literatūroje analiziniam nagrinėjimui naudojamos Glauber šuolių tarp būsenų priėmimo tikimybės vertės [7, 8, 10]:

$$A(\mu \rightarrow \nu) = \frac{1}{2} \left( 1 - \tanh \frac{\beta(E_\nu - E_\mu)}{2} \right). \quad (6)$$

Ši išraiška gaunama iš detalaus balanso lygties (3) iš ją įstačius Boltzmanno tikimybės būti atitinkamose  $\mu$  ir per vienu žingsniu skirtą  $\nu$  būsenas [7]. Eksponentinė šios išraiškos forma yra tokia:

$$A(\mu \rightarrow \nu) = \frac{e^{-\beta(E_\nu - E_\mu)}}{1 + e^{-\beta(E_\nu - E_\mu)}}. \quad (7)$$

Abiem pavienio sukinio apvertimo (angl. *single spin-flip*) dinamikos atvejis sukinio pasirinkimo

tikimybę galima nustatyti nepriklausomą nuo konfigūracijos. Tokiu atveju kiekvienam gardelės sukinui parinkimo tikimybė lygi:

$$g(\mu \rightarrow \nu) = \frac{1}{N}, \quad (8)$$

kur  $N$  žymi sukinių skaičių gardelėje. Tokiu atveju (4) lygtį ištačius į (3) lyties detalaus balanso sąlygą šuolių tarp būsenų tikimybių santykis priklausys tik nuo (5) ir (6) lygčių išraiškų.

Priešingai negu iki šiol nagrinėtas sukino vertę keičiantis sąveikos mechanizmas, Kawasaki dinamika skirta modeliuoti kitokio pobūdžio reiškinius, pavyzdžiui, stiklines (angl. *glassy*) sistemas arba gardelėje esančias dujas (angl. *lattice gas*) [9]. Pagrindinis tokų sistemų skirtumas nuo Izingo pagal Glauber ar Metropolio interpretaciją yra tai, kad dalelės nekeičia savo būsenos (pvz., magnetinėje sistemoje įmagnetėjimas išliktų pastovus). Sukiniai nekeičia savo verčių, bet priešingų verčių sukiniai susikeičia vietomis.

Panašiai kaip Glauber dinamikos atveju, šiai dinamikai galima sukonstruoti šuolių tarp būsenų tikimybes pagal (6) lyties formą, tačiau su papildomu nariu leidžiančiu sąveiką tik tarp skirtinges vertes turinčių sukinių [7]. Vienmačiu atveju:

$$A(\mu \rightarrow \nu) = \frac{1}{2} \left( 1 - (s_{i-2}s_{i-1} + s_i s_{i+1}) \cdot \tanh \frac{\beta(E_\nu - E_\mu)}{2} \right) \cdot \frac{1}{2}(1 - s_{i-1}s_i), \quad (9)$$

kur  $s_i$  ir  $s_{i+1}$  žymi du kaimyninius sukinius, tarp kurių vyksta sąveika. Ieškant modeliavimui patogiu Metropolio tipo šuolių tarp būsenų išraiškų, galima naudoti (5) lygtje žinomas išraiškas.

Paprasčiausiu atveju Kawasaki dinamika gali vykti tarp dviejų kaimyninių sukinių. Tačiau tokio difuzinio proceso modeliavimas pakankamai lėtas, tad kitas būdas yra kiekvieno Monte Carlo žingsnio metu pasirinkti bet kuriuos du skirtinges verčių sukinius ir pagal tas pačias šuolių tarp būsenų priėmimo tikimybes įvykdyti apkeitimą. Sukinių pasirinkimo tikimybės tokiu atveju išlieka identiškos šuoliui į ir iš būsenos, tad ergodiškumo sąlyga lieka išpildyta [9].

Kawasaki interpretacijoje magnetizacija, kaip ir temperatūra, laikoma modelio parametru. Todėl ši interpretacija dar yra vadinama pastovaus tvarkos parametru (angl. *conserved-order-parameter*) Izingo modeliu.

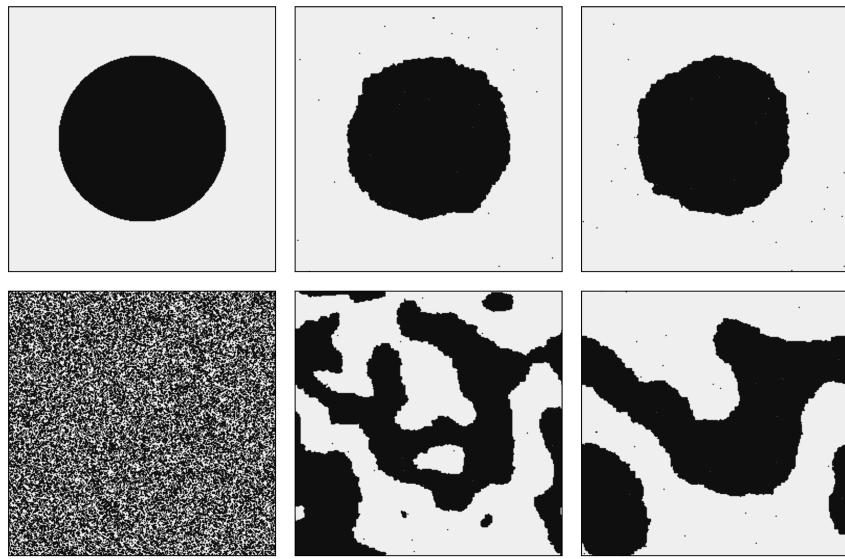
### 2.1.3 Konkuruojanti dinamika Izingo modelyje

Praeitame skyriuje nagrinėtos Metropolio ir (lokali) Kawasaki dinamikos Izingo modelyje apsiribojo sąveika tarp artimiausių sukinių gardelėje. Izingo modelio dinamika pasikeičia išskaitant sukino sąveiką su antrais artimiausiais kaimynais gardelėje. Šitoks modelio pakeitimasis kartais literatūroje pavadinamas konkuruojančios dinamikos Izingo modeliu, o jo Hamiltonianas gaunamas papildžius sąveikos narj:

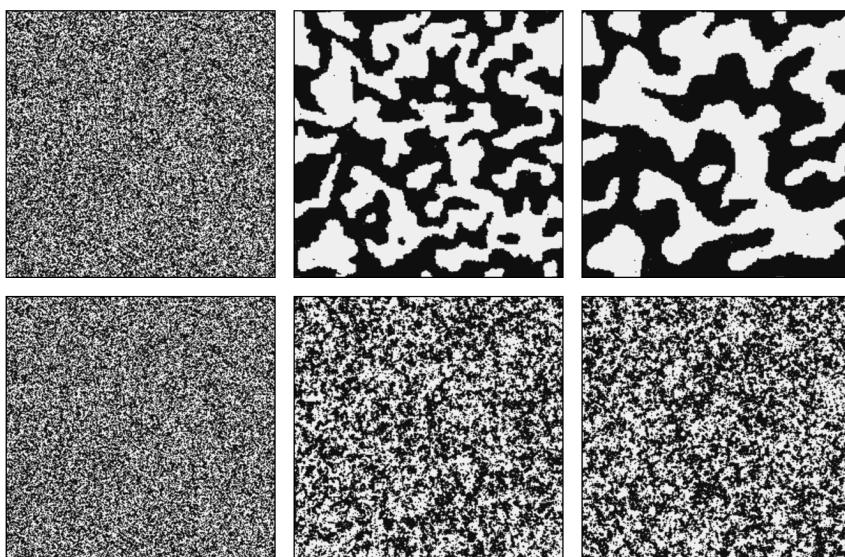
$$H = -J_1 \sum_{\{i,j\}} s_i s_j - J_2 \sum_{\{i,k\}} s_i s_k, \quad (10)$$

kur  $J_1$  žymi sąveikos energiją tarp artimiausių sukinių, o  $J_2$  tarp antrų artimiausių sukinių. Sumavimas atitinkamai vyksta tarp pirmos arba antros eilės artimiausių kaimynų.

Jeigu (10) lygtje sąveika tarp abiejų eilių kaimynų išlieka feromagnetinė, modelio dinamika yra



1 pav. Izingo modelio pagal Metropolio interpretaciją konfigūracijos laiko t momentais 1, 256 ir 1024 (atitinkamai 1, 2 ir 3 stulpeliai). Gardelės dydis  $256 \times 256$ , vienas laiko momentas lygus  $256^2$  įvykių, per kuriuos gali pasikeisti vieno sukinio vertė. Pirmoje eilutėje pavaizduota Izingo modelio pradinės lašo būsenos optimizacija link minimalios energijos. Antroje eilutėje pavaizduota evoliucija nuo atsitiktinės konfigūracijos. Sistemos temperatūra  $T = T_0$ . Čia  $T_0 = J/k_B$ ,  $J$  yra sąveikos energija, o  $k_B$  yra Bolcmano konstanta.



2 pav. Izingo modelio pagal Kawasaki interpretaciją konfigūracijos laiko momentais  $t = 1, 256$  ir 1024 (atitinkamai 1, 2 ir 3 stulpeliai). Pirmoje eilėje konfigūracijos, kai temperatūra  $T = T_0$  ir  $T = 3T_0$  antroje eilėje. Čia  $T_0 = J/k_B$ ,  $J$  yra sąveikos energija, o  $k_B$  yra Bolcmano konstanta.

kokybiškai panaši į (2.1.2) skyriuje aprašytą, t.y. pasižymi perėjimu iš feromagnetinės būsenos į paramagnetinę didėjant temperatūrai. Kitais atvejais, bent vienai iš sąveikų esant antiferomagnetinei, sistemos dinamika kinta ir galimi skirtingų konfigūracijų energijų minimumai, atskirti laisvosios energijos barjerais [11]. Tokios sistemos stabilių ir metastabilių būsenų skaičius didėja įtraukiant sukinių sąveikas su vis didesnių eilių kaimynais.

Šiame modelyje konkuruojanti dinamika vis dar yra vieno - Glauber ar Metropolio - tipo. Tikslesnis jos pavadinimas gali būti konkuruojančios sąveikos Izingo modeliu, kadangi konkuruoja skirtingų eilių sąveikos, o ne skirtingi savo fizikine prasme procesai. Siekiant į modelį įvesti Kawasaki tipo dinamiką toks formalizmas nepatogus, taigi dažniau sutinkamas konkuruojančių dinamikų būdas. Šiuo būdu pasirenkama tikimybė  $p$ , su kuria sistemos gardelė atnaujinama pagal vieną (pavyzdžiui, Metropolio) dinamiką, ir tikimybė  $1 - p$ , su kuria gardelė atnaujinama pagal antrają dinamiką. Tikimybės  $p$  ir dinamikų tipų pasirinkimas iš esmės nulemia modelio fazinę erdvę ir pusiausvyrumą [12–15].

Taip sudarytų dviejų konkuruojančių dinamikų varomos sistemos evoliucija gali būti nagrinėjama pagrindine kinetine lygtimi:

$$\frac{d}{dt} S(\nu, t) = \sum_{\mu'} (S(\mu', t) P_t(\mu' \rightarrow \nu) - S(\nu, t) P_t(\nu \rightarrow \mu')), \quad (11)$$

kur  $S(\nu, t)$  žymi tikimybę laiko momentu  $t$  sistemą rasti konfigūracijoje  $\nu$ , o  $P_t(\mu' \rightarrow \nu)$  žymi šuolių iš būsenos  $\mu'$  į būseną  $\nu$  tikimybę per laiko vienetą. Šioje lygtysteje sumavimas yra per visas galimas sistemos būsenas. Dydis  $P_t$  susideda iš dviejų pasirinktų konkuruojančių dinamikų:

$$P_t(\nu \rightarrow \mu') = p P_{t,A}(\nu \rightarrow \mu') + (1 - p) P_{t,B}(\nu \rightarrow \mu'), \quad (12)$$

čia  $A$  ir  $B$  gali žymėti tokio pačio tipo dinamikas, pavyzdžiui, Glauber ir Glauber, [12] arba skirtingo tipo, Glauber ir Kawasaki [13–15]. Nors  $A$  ir  $B$  būtų tos pačios dinamikos, tačiau tai vis tiek skirtūsi nuo konkuruojančių sąveikų Izingo modelio. Konkuruojančios dinamikos modelio savybės yra nulemiamos (12) lygtysteje apibrėžtu šuolių tarp būsenų tikimybių greičių  $P_{t,A}$  ir  $P_{t,B}$  išraiškomis. Vieną iš šių dydžių galima nustatyti tokį, kuris atitinką pasirinktą dinamiką prie begalinės temperatūros. Iš esmės tai vieną iš procesų paverčia energijos šaltiniu, o pati sistema su šiuo šaltiniu veikia kaip su begalinės šiluminės talpos termostatu. Begalinės temperatūros Kawasaki dinamikos atveju šis procesas įneša energiją į sistemą ir nekeičia tvarkos parametru (magnetizacijos).

Tokios nepusiausvyros feromagnetinės sistemos fazinė erdvė pasikeičia priklausomai nuo to ar energiją įnešančio proceso šuolio tarp būsenų tikimybės priklauso nuo tikimybės  $p$ . Šiemis dydžiams esant priklausomiems, kritinio sistemos temperatūros taško vertė yra priklausoma nuo dinamikos pasirinkimo tikimybės  $p$  [14]. Atitinkamai nuo šios tikimybės vertės kritiniame taške vyksta pirmos arba antros eilės fazinis virsmas.

Platesnis šios fazinės erdvės ištýrimas antiferomagnetinės ir feromagnetinės sukinių sąveikos modeliams yra atliktas [13] autorų darbe. Šiame tyryme įvedamas santykis tarp tikimybių pasirinkti

Glauber ar Kawasaki žingsį, kurį čia žymėsime  $R$ , o jo matematinė forma:

$$R = \frac{1-p}{p}, \quad (13)$$

kur  $p$  žymi tikimybę pasirinkti Metropolio žingsnį. Feromagnetinio Izingo modelio fazinė erdvė pagal  $T$  ir  $R$  vaizduoja slenkantį kritinės temperatūros tašką bei nykstančią feromagnetinę sritį. Kai  $R$  vertė šiek tiek didesnė už 1 ( $p > 0.5$ ), feromagnetinę sritį pakeičia paramagnetinė sistemos būsena. Kita vertus  $R$  reikšmei esant lygiai 2 ( $p \approx 0.33$ ) sistemos konfigūracija visoms temperatūros vertėms pavirsta antiferomagnetine.

Antiferomagnetinio konkuruojančios dinamikos Izingo modelio fazinė erdvė kinta panašiai, tačiau būsenas skiriančios kreivės skiriasi kokybiškai. Esant labai mažoms  $R$  vertėms antiferomagnetinės būsenos sritis išnyksta ir modelis yra paramagnetinėje būsenoje.

Sistemos konfigūraciją apibūdinančios būsenos priklausomybė nuo  $p$  kartu reiškia, jog šis dydis nulemia ir sukinių koreliaciją. Panašus rezultatas gaunamas nagrinėjant Izingo modelio pagrindinę kinetinę lygtį kvantiniame aprašyme ir įskaitant tolimąją sukinių sąveiką [15]. Šiuo atveju tai reiškia, jog sukinių sąveika neatmetama ir tolimesniems nei tik tarp artimiausiuju kaimynų. Tokio uždavinio sprendimu gaunama, jog koreliacijos funkcija ir tvarkos parametras (magnetizacija) priklauso nuo  $p$ . Šis rezultatas gautas dydžiams  $T$  ir  $p$  esant nepriklausomiems.

## 2.2 Rinkėjo modelis

### 2.2.1 Klasikinis rinkėjo modelis

Originalus rinkėjo modelis buvo pasiūlytas [16] kaip konkurencijos tarp dviejų rūsių modelis. Vėliau panašus modelis buvo pasiūlytas [17] ekonominėms sistemoms modeliuoti, bet vedant analogiją su skruzdžių kolonijos elgsena. Dėka šių darbų šiuo metu rinkėjo modelį labiausiai tikėtina sutikti sociofizikos arba statistinės fizikos literatūroje [6, 7]. Statistinės fizikos literatūroje pabrėžiama Izingo paradigma - sąveikos tarp sukinių mechanizmas [6–8]. Ši modelį galima įsivaizduoti kaip Izingo modelį gardelėje su šiek tiek pakeistomis (atsitiktinio pobūdžio) sąveikos taisyklėmis, taigi modelį galima skaitmeniškai modeliuoti diskretaus laiko algoritmais, kaip ir Izingo modelio atveju. Kita vertus sociofizikoje sutinkama rinkėjo modelio dinamika yra aprašoma šuolių tarp būsenų spartomis, pavyzdžiui, [3, 18–20]. Su tokiu aprašymu patogu atsiriboti nuo išskirtinai lokalių sąveikų ir specifinės gardelės geometrijos, galima simuliuoti modelio dinamiką tolydaus laiko eksperimentu. Šiame skyriuje toliau pateiksime abudu aprašymo būdus.

Sukininio rinkėjo modelio sąveikos taisyklės panašios į ląstelinio automato sistemos (angl. *cellular automaton*) taisykles. Perėjimas iš vienos sistemos būsenos į kitą atliekamas taip: iš pradžių gardelėje pasirenkamas atsitiktinis sukinys ir vienas iš jo artimiausiu kaimynu. Tuomet pirmasis pasirinktas sukinys nusikopijuoja pasirinkto kaimyno būseną. Taigi pirmasis sukinys gali pakeisti savo būseną į priešingą arba likti toje pačioje. Bendru atveju įvykio, kurio metu būsena pakeičiamas

į priešingą, intensyvumas išreiškiamas taip:

$$P(s_k \rightarrow -s_k) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{s_k}{z} \sum_{\{j\}} s_j \right), \quad (14)$$

čia  $s_k$  žymi nagrinėjamos būsenos sukinio vertę,  $z$  žymi artimiausiu kaimynų skaičių, o sumavimas  $\{j\}$  atliekamas per artimiausius  $z$  kaimynų.

Sistemos būsenai apibūdinti galima įvesti porą makroskopinių tvarkos parametrų [8]. Vienas dydis yra skirtinges sukinio būsenas turinčių kaimynų skaičiaus santykis su visomis kaimynų poromis. Šis dydis savo prasme panašus į sistemos bendrą energiją. Kitas dydis, panašus į magnetėjimą, yra santykinių populiacijos dydžių turinčių skirtumus. Modelyje atlikus vieną žingsnį magnetizacijos vertė pakinta, tačiau sukiniių populiacijoms esant vienodo dydžio vidutiniškai per daugelį žingsnių ji nesikeičia [7].

Verta pastebėti, jog rinkėjo modelyje vienkryčių sukiniių domenų plėtimasis (angl. *coarsening*) yra skirtinges negu Izingo modelyje. Tai parodoma modeliuojant lašo formos vienodų sukiniių vertės regioną aplink esant priešingiems sukiniams (kaip Izingo modelio atveju, žr. 1 pav.) [6, 8]. Bėgant laikui regiono perimetras plinta, tačiau statistiškai lašo radiusas nesikeičia. Fizikine prasme tai reiškia, jog domeno plėtimasis kinta ne dėl paviršiaus įtempimo jėgos veikimo ir sistemos bandymo atsidurti mažiausios energijos būsenoje [6].

Visgi aptartas rinkėjo modelis neturi triukšmo savybės, pavyzdžiui, (14) lygtis nepriklauso nuo temperatūros ar kitokio parametru. I modelį galima įvesti triukšmą, kuris bet kuriam pasirinktam sukinui leidžia neprilausomai nuo kaimynų pakeisti savo vertę. Vienas paprasčiausiu būdų tai padaryti - prie (14) pridėti konstantą [7]. Triukšmas lemia tai, jog sistema lieka į paramagnetinę panašioje būsenoje ir nesuvienodina visų savo sukiniių [6]. Taip veikiantis modelis dažnai vadinas rinkėjo modeliu su triukšmu (angl. *noisy voter model*) [21]. Remiantis detalaus balanso sąlyga galima parodyti, jog tokiam rinkėjo modeliui tikimybė pasiskirstymas aprašomas ne Boltzmano skirstiniu, tačiau pagal Beta skirstinį [22].

Kitas būdas aprašyti rinkėjo modelį (su triukšmu) yra įsivedant šuolių tarp būsenų spartas. Tariant, kad kiekvienas populiacijos agentas gali būti vienoje iš dviejų būsenų, o jų populiacijos yra atitinkamai  $X$  ir  $N - X$ . Galima įvesti šuolių į ir iš šių būsenų spartas, kurios buvo pasiūlytas Kirmano modelyje [17]. Toks formalizmas dar žinomas kaip vieno žigsnio (angl. *one-step*) procesų aprašymas:

$$\begin{aligned} p(X \rightarrow X + 1) &= \pi^+ \Delta t = (N - X) \mu_{12}(X, N) \Delta t, \\ p(X \rightarrow X - 1) &= \pi^- \Delta t = X \mu_{21}(N - X, N) \Delta t, \end{aligned} \quad (15)$$

čia  $\pi^-$ ,  $\pi^+$  žymi vieno žigsnio spartas,  $\Delta t$  yra pakankamai trumpas laiko intervalas, per kurį turėtų būti tikėtinės įvykti tik vienas šuolis tarp būsenų. Šios lygtys aprašo rinkėjo modelį tuomet, kai parenkamos specifinės  $\mu_{12}$ ,  $\mu_{21}$  spartų išraiškos [18, 23]:

$$\begin{aligned}\mu_{12} &= \sigma + \frac{hX}{N}, \\ \mu_{21} &= \sigma + \frac{h(N-X)}{N},\end{aligned}\tag{16}$$

čia  $\sigma$  yra savaiminj agentų judėjimą tarp būsenų aprašantis parametras, pramenantis triukšmą (pagal originalų apibrėžimą straipsnyje [21]), o  $h$  yra aplinkos nulemtas (angl. *peer-pressure*) judėjimas tarp būsenų. Pastarasis taip pat aprašo ir aplinkos poveikio spartą, todėl jį galima ištraukti į  $\Delta t$  nari. Tuomet išraišką galima suprastinti įsivedant apibendrintą parametrą  $\epsilon = \sigma/h$ , kuris priklausomai nuo to ar yra didesnis (mažesnis) už 1 nusako, kuris agentų šuolių tipas dominuoja. Tokiu būdu gaunamos bendresnės šuolių tarp dviejų būsenų spartų išraiškos:

$$\begin{aligned}\pi^+ &= (N-X)(\epsilon + X), \\ \pi^- &= X(\epsilon + [N-X]).\end{aligned}\tag{17}$$

Galutinė spartų forma gaunama darant prielaidą, jog sistema yra termodinaminėje riboje ( $x \rightarrow X/N$ ), tuomet:

$$\begin{aligned}\pi^+ &= (1-x)\left(\frac{\epsilon}{N} + x\right), \\ \pi^- &= x\left(\frac{\epsilon}{N} + [1-x]\right).\end{aligned}\tag{18}$$

Taip pat reikalingas ir laiko skalės pakeitimas, taigi (18) spartos susiejamos su vieno žingsnio operatoriais šitaip:

$$p(X \rightarrow X \pm 1) = N^2 \pi^\pm(x) \Delta t.\tag{19}$$

Vieno žingsnio, arba paprasčiau pavadinant šuolių į ir iš būsenos (angl. *entry-exit*), spartos gali būti modifikuojamos įvedant į modelį (ne)ekstensyvumą [19, 24]:

$$\begin{aligned}\pi^+ &= (N-X)\left(\epsilon + \frac{X}{N^\alpha}\right), \\ \pi^- &= X\left(\epsilon + \frac{[N-X]}{N^\alpha}\right),\end{aligned}\tag{20}$$

kur  $\alpha$  yra parametras aprašo kokį svorį savo aplinkai suteikia rinkėjas. Priklasomai nuo parametro vertės  $\alpha$  gaunami ekstensyvūs arba neekstensyvūs modelio atvejai. Neekstensyviu atveju ( $\alpha = 0$ ) modelio verčių skirstinys nepriklauso nuo visos populiacijos dydžio  $N$ , o ekstensyviu ( $\alpha = 1$ ) atveju - priklauso. Rinkėjo modeliui su triukšmu (t.y. parinkus (16) lygtyste  $\sigma \neq 0$ ) gaunamas stacionarus verčių skirstinys yra pasiskirstęs pagal Beta skirstinį [20, 22]:

$$p_{st}(x) = \frac{\Gamma(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{\Gamma(\epsilon_1)\Gamma(\epsilon_2)} x^{\epsilon_1-1} (1-x)^{\epsilon_2-1},\tag{21}$$

kur  $\Gamma$  žymi Gama funkciją, o  $\epsilon_1, \epsilon_2$  žymi (skirtingas) šuolių spartas į pirmą ir antrają būsenas.

## 2.2.2 Erdvinis rinkėjo modelis ir konkuruojanti dinamika

Kadangi nemažai empirinių duomenų pasižymi pasiskirstymais pagal Beta skirstinį (pavyzdžiui, žr. nuorodas [20] straipsnyje), todėl rinkėjo modelis yra tendencingai išplėtotas įtraukiant sudėtingesnius sąveikos mechanizmus [6, 25]. Modelio patobulinimai daugiausia sutelkti į sąveikų tarp agentų (ar jų būsenų) tikslinimą. Sistemos būsenos kitimą galima asocijuoti ne tik su agentų vidinių savybių kaita (pavyzdžiui, nuomonės), bet ir su agentų judėjimu erdvėje, pavyzdžiui, atsižvelgiant į migraciją arba kasdienį keliavimą į ar iš darbo [2]. Nuomonių dinamikos požiūriu didelio masto (pvz., prezidento pozicijai užimti) rinkimai vyksta retai, tačiau turi didelį detalu-mą erdviniu požiūriu. Atsižvelgimas į tokius reiškinius iš principo įveda į modelį naują dinamiką, kuri analogiškai atitinka Izingo modelio Kawasaki dinamiką. Modelis su tokio tipo dinamika yra pasiūlytas [3] ir vadinasi erdviniu rinkėjo modeliu.

Erdviniame rinkėjo modelyje modeliuojama  $N$  agentų populiacija pasiskirsčiusi per  $M$  erdvinį vienetą, kuriame kiekvienas agentas gali būti  $T$  skirtinį tipą. Kiekvienas erdvinis vienetas turi bendrą agentų talpą  $C$ . Tokiam modeliui parenkamos šuolių tarp būsenų spartos, kurios leidžia agentui pakeisti jo erdvinį vienetą (bet ne tipą):

$$\nu_{i \rightarrow j}^{k \rightarrow m} = \begin{cases} X_i^{(k)} (\epsilon^{(m)} + X_j^{(m)}) & i \neq j, k = m, N_j < C \\ 0 & \text{kt. atvejais,} \end{cases} \quad (22)$$

kur  $\nu_{i \rightarrow j}^{k \rightarrow m}$  žymi  $k$  tipo agentų šuolio spartą iš  $i$  erdvinio vieneto į  $j$ , o  $X_i^{(k)}$  žymi  $k$  tipo agentų populiacija  $i$  erdviname vienete. Visos spartos  $\epsilon^{(k)}$  yra vienodos tam pačiam agentų tipui. Ši išraiška yra tokia pati kaip ir (17) lygtynė, todėl modelį galima laikyti rinkėjo modelio išplėtimu, o modelio erdvinio vieneto pasirinktam tipui populiacijos  $X_i^{(k)}$  skirstinys yra pasiskirtęs pagal Beta binominį skirstinį [3].

Šio modelio šuolio į ir iš būsenų spartos gaunamos atsižvelgiant į visas galimybes patekti į pasirinktą erdvinį vienetą ir išeiti iš jo:

$$\nu_{i+}^{(k)} = \sum_{j=1}^M \nu_{j \rightarrow i}^{(k)} = (N^{(k)} - X_i^{(k)}) (\epsilon^{(k)} + X_i^{(k)}), \quad (23)$$

$$\nu_{i-}^{(k)} = \sum_{j=1}^M \nu_{i \rightarrow j}^{(k)} = X_i^{(k)} ((M-1)\epsilon^{(k)} + (N^{(k)} - X_i^{(k)})). \quad (24)$$

Šio modelio spartos  $\epsilon^{(k)}$  ir  $(M-1)\epsilon^{(k)}$ , kaip ir rinkėjo modelio atveju lygytyje (21), charakterizuoją agentų populiacijos Beta binominio skirstinio parametrus  $\alpha$  ir  $\beta$ . Šios išraiškos visai modelio dinamikai atitinka rinkėjo modelio  $\pi^\pm(x)$  spartas lygtynėje (17).

Konkurujančios dinamikos įvedimas į tokiu būdu spartomis aprašytą modelį nereikalauja įsivesti papildomo tikimybės kintamojo (kaip sukininio modelio atveju), kadangi modeliuojama sistema yra tolydaus laiko. Jeigu naujai įvesta (būsenos kitimo) sparta taip pat yra palyginama savo dydžiu su esama migracijos sparta formulėje (22), tuomet modelį galima sėkmingai modeliuoti su Gillespie algoritmu. Natūraliausias būdas papildyti modelį yra su tokios pačios formos kaip ir lygtynėje (16)

spartomis:

$$\lambda_{i \rightarrow j}^{k \rightarrow m} = \begin{cases} X_i^k \left( \mu^{(m)} + X_j^{(m)} \right) & i = j, k \neq m \\ 0 & \text{kt. atvejais.} \end{cases} \quad (25)$$

Šiuo atveju nereikia taikyti erdvino vieneto talpos apribojimo, kadangi keičiantis agentų tipui bendras agentų skaičius esantis viename erdviname vienete nesikeičia. Modelio schema detalizuojant abiejų tipų šuolius tarp būsenų pavaizduota 3 paveiksle.

Modelio su konkuruojančia dinamika šuolių  $i$  ir iš būsenų spartos gaunamos tokiu pačiu būdu kaip ir erdviname rinkėjo modelyje. Šuoliui  $i$  agento tipą  $k$  erdvės vienete  $i$  išraiška:

$$\begin{aligned} {}^+ \eta_i^k &= \sum_{j=1}^M v_{j \rightarrow i}^{k \rightarrow k} + \sum_{m=1}^T \lambda_{i \rightarrow i}^{m \rightarrow k} \\ &= \left( N^{(k)} - X_i^{(k)} \right) \left( \epsilon^{(k)} + X_i^{(k)} \right) + \left( N_i - X_i^{(k)} \right) \left( \mu^{(k)} + X_i^{(k)} \right), \end{aligned} \quad (26)$$

kur  $N^{(k)}$  žymi sistemoje esančių  $k$  tipo agentų skaičių ir  $N_i$  žymi  $i$ -ojo erdvės vieneto agentų skaičių. Atitinkamo atvejo šuolio iš būsenos sparta lygi:

$$\begin{aligned} {}^- \eta_i^k &= \sum_{j=1}^M v_{i \rightarrow j}^{k \rightarrow k} + \sum_{m=1}^T \lambda_{i \rightarrow i}^{k \rightarrow m} \\ &= X_i^{(k)} \left( (M-1)\epsilon^{(k)} + (N^{(k)} - X_i^{(k)}) \right) + X_i^{(k)} \left( \sum_{m \neq k}^T \mu^{(m)} + (N_i - X_i^{(k)}) \right). \end{aligned} \quad (27)$$

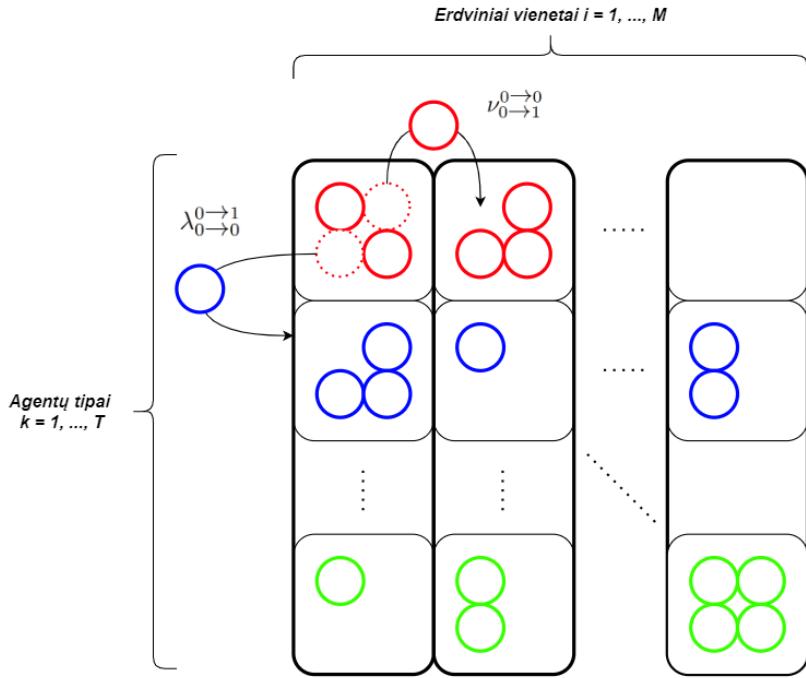
Šios formos išraiškos skiriasi nuo gaunamų erdviname rinkėjo modelyje - jų nesigauna apibendrinti į (23) ir (24) lygčių formą. Norint išraišką sutraukti reikėtų daryti prielaidą apie sąryšį tarp narių  $N^{(k)} - X_i^{(k)}$  (agentų skaičius kituose erdviniuose vienetuose) ir  $N_i - X_i^{(k)}$  (kito tipo agentų skaičius tame pačiame vienete), tačiau vienareikšmiam sąryšiui surasti tarp šių narių dabartinės prielaidos nepadeda.

Gautos spartų išraiškos (26) ir (27) atskleidžia kitą analizės kampą - kaip kinta agentų populiacijos atsižvelgus į su migracija susijusią populiaciją  $N^{(k)}$  bei su būsenos kitimu susijusią populiaciją  $N_i$ . Tiesiogiai tai išanalizuojama žvelgiant į dydžių  $X_i^{(k)} / N^{(k)}$  ir  $X_i^{(k)} / N_i$  tikimybės tankio skirstinius.

### 2.2.3 Rangų dinamika erdviname rinkėjo modelyje

Greta stacionarių agentų populiacijos tikimybės tankio skirstinių [3] autorius taip pat pristato ir rango-dydžio skirstinius. Rango-dydžio analizė yra dažnai sutinkamas empirinių dėsnų apibendrinimas susiejant sistemos įvertį (metriką, dydį) su jos rangu, t.y. eilės numeriu rikiuojant įverčius didėjimo ar mažėjimo tvaka. Vienas žinomiausiai pavyzdžių yra Zipf dėsnis, pagal kurį sąrašo elemento rangas ir įvertis (dydis) yra susiję laipsniniu dėsniu [26]. Pagal [3] rango-dydžio skirstiniai erdviniam rinkėjo modeliui nebūtinai yra laipsninės funkcijos, tačiau yra praktiškai stacionarūs.

Nors skirstinai yra stacionarus, tačiau pasirinkto erdvinio vieneto rangas ir įvertis laikui bėgant



3 pav. Konkuruojančios dinamikos erdvinio rinkėjo modelio šuolių tarp erdvinių vienetų ir agentų tipų vizualizacija. Tik vienas iš pavaizduotų šuolių vyksta vienu laiko momentu, šuolio metu pakinta išskirtinai tik agento tipas arba agento erdvinis vienetas. Juodai apibrėžti stulpeliai žymi erdvinį vienetą, kuriam taikomos talpos parametras  $C$ , vienodos visiems erdviniams vienetams. Agentų tipų skaičiui viename erdviniame vienete talpa nėra ribojama.

gali kisti. Tokiu atveju atsiranda prasmė kalbėti apie rangų laikinę dinamiką [4,5]. Dauguma realių sistemų pasižymi rango kitimu bėgant laikui, tai gali priklausyti nuo laiko skalės - miestų populiacijos dydžiai kinta per šimtmečius, o klausomiausią dainų, interneto svetainių lankomumo, ligų sergamumo rodikliai gali keistis gerokai greičiau. Tokios ranginių sistemų savybės yra apibendrinamos keliomis charakteristikomis - sistemų atvirumu ir ranginio sąrašo atsinaujinimo sparta [4], rango arba įverčio stabilumu laiko eilutėje [5].

Pagal empirinius duomenis yra pasiūlyti du modeliai apibendrinti laikinei rangų dinamikai - vienas remiasi rango tikimybės tankio aproksimavimu pagal Fokerio-Planko lygtį [5], kitas rango kitimo trajektorijas aproksimuoją pagal Lanževeno tipo lygtį [5]. Bendras abiejų modelių vardiklis yra tas, jog empirinių duomenų rangų dinamikai aprašyti galima rasti vieno kintamojo stochastinę diferencialinę lygtį, kuri tikimybiniu požiūriu aprašo rango kitimą laikui bėgant neatsižvelgiant į įvertį. Šiuo požiūriu galima pastebeti, jog empirinių duomenų rango-dydžio skirtiniai yra gerai aproksumojami vienmačiu Markoviniu procesu, kadangi lygčiai užrašyti pakanka vienos dimensijos kintamojo, neatsižvelgiant į likusią sistemos konfigūraciją. Tai yra neintuityvus rezultatas vertinant tai, jog toks matas kaip rangas yra labiau priklausomas nuo likusios sistemos konfigūracijos negu sistemos įvertis.

## 2.3 Vienmatis stochastinis procesas

### 2.3.1 Aprašymas Fokerio-Planko lygtimi

Analizuoti erdvinį rinkėjo modelį žvelgiant iš mikroskopinio modelio perspektyvos yra sudėtinga - didėjant erdvinių vienetų ir agentų tipų skaičiui sistemą aprašančią lygčių skaičius būtų pernelyg didelis, jog modelis būtų išsprendžiamas analitiškai. Todėl optimaliau sistemą užrašyti makroskopinių lygčių pavidalu, Fokerio-Planko lygtimi, kaip tai padaroma [18] pagal gimimimo-mirties aprašymą. Jeigu įmanoma Fokerio-Planko lygtį užrašyti vienam kintamajam, tai yra vienam agentų tipui erdviniame vienete, tuomet tai yra stochastiniu pavidalu aprašomas vienmatis procesas.

Pagal [27] stochastiniai vyksmai gali būti aprašomi bendresne diferencialine Čapmano-Kolmogorovo lygtimi, kuri įskaito trijų tipų stochastinius vyksmus - šuolius, dreifą ir difuziją. Daugamačiu atveju dreifas yra vektorinis, o difuzija - tensorinis dydis. Fokerio-Planko lygtis gaunama atvejais kai nevyksta šuoliai, tačiau pasireiškia dreifas ir difuzija, tokia lygtimi aprašomos kintamujų tikimybės tankio trajektorijos yra tolydžios. Darant prielaidą, kad analizuojamas erdvinis rinkėjo modelis yra nagrinėjamas termodinaminėje riboje, agentų populiacijos dalies kintamasis  $x = X/N$  yra tolydus, o šuolių procesai šioje riboje nevyksta, kadangi pagal (15) vyksmų (šuolių tarp būsenų) spartas vykstantis pokytis pakeičia agentų tipo erdviniame vienete populiacija per 1 agentą.

Fokerio-Planko lygtis iš esmės yra agentų tipo populiacijos erdviniame vienete tikimybės tankio skirstinio judėjimo lygtis [28]. Erdviniame rinkėjo modelyje ji gali būti išvedama iš pagrindinės kinetinės lyties, užrašant ją per vieno žingsnio operatorių formalizmą [18]:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = N^2 \left[ (\mathbf{E} - 1)(\pi^-(x)p(x, t)) + (\mathbf{E}^{-1} - 1)(\pi^+(x)p(x, t)) \right], \quad (28)$$

kur  $x$  žymi agentų populiacijos dalį,  $t$  žymi sistemos laiką,  $p(x, t)$  žymi tikimybės tankį,  $\pi^\pm(x)$  yra šuolių į ir iš būsenas operatoriai (pavyzdžiui, kaip (18) lygtyste), o  $\mathbf{E}$  ir  $\mathbf{E}^{-1}$  žymi vieno žingsnio operatorius. Narys  $N^2$  randasi dėl to, jog pereinama nuo diskrečių šuolių tarp būsenų spartų prie tolydžių [18]. Pasinaudojant jų apibrėžimu ir juos išskleidus baigtiniu Teiloro eilutės skleidiniu:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} [f(x)] &= f(x + \Delta x) \approx f(x) + \Delta x \frac{d}{dx} f(x) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} f(x), \\ \mathbf{E}^{-1} [f(x)] &= f(x - \Delta x) \approx f(x) - \Delta x \frac{d}{dx} f(x) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} f(x), \end{aligned} \quad (29)$$

o šiuos skleidinius pritaikius pagrindinėje kinetinėje lygtyste (28) gaunama nauja jos išraiška:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = -N \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\pi^+(x) - \pi^-(x))p(x, t) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ (\pi^+(x) + \pi^-(x))p(x, t) \right], \quad (30)$$

pagal kurią dreifo ir difuzijos nariai yra lygi:

$$\begin{aligned} D^{(1)}(x) &= N(\pi^+(x) - \pi^-(x)) \\ D^{(2)}(x) &= \pi^+(x) + \pi^-(x). \end{aligned} \quad (31)$$

Šių narių išraiškos erdviniam rinkėjo modeliui su ir be konkuruojančios dinamikos gaunamos

pasinaudojant šuolių tarp būsenų išraiškomis (23) - (27) lygtyste. Erdviniam rinkėjo modeliui dreifo ir difuzijos nariai įgyja formą:

$$\begin{aligned}
 D^{(1)}(X_i^{(k)}) &= N \left[ \nu_{i+}^{(k)} - \nu_{i-}^{(k)} \right] = \\
 &= N \left[ \epsilon^{(k)} \left( N^{(k)} - X_i^{(k)} M \right) \right], \\
 D^{(2)}(X_i^{(k)}) &= \nu_{i+}^{(k)} + \nu_{i-}^{(k)} = \\
 &= \epsilon^{(k)} N^{(k)} + X_i^{(k)} \left( 2N^{(k)} + \epsilon^{(k)} (M - 2) \right) - 2 \left( X_i^{(k)} \right)^2.
 \end{aligned} \tag{32}$$

Kaip ir klasikinio rinkėjo modelio atveju dreifas yra tiesiskai priklausantis dydis, o difuzija - antros eilės polinomas. Konkuruojančios dinamikos atveju išraiškos keblesnės:

$$\begin{aligned}
 D^{(1)}(X_i^{(k)}) &= N \left[ {}^+ \eta_i^k - {}^- \eta_i^k \right] = \\
 &= N \left[ \left( \epsilon^{(k)} N^{(k)} + \mu^{(k)} N_i \right) - X_i^{(k)} \left( \sum_{l=1}^M \epsilon^{(l)} + \sum_{l=1}^T \mu^{(l)} \right) \right], \\
 D^{(2)}(X_i^{(k)}) &= {}^+ \eta_i^k + {}^- \eta_i^k = \\
 &= \left( \epsilon^{(k)} N^{(k)} + \mu^{(k)} N_i \right) - X_i^{(k)} \left( \sum_{l=1}^M \epsilon^{(l)} + \sum_{l=1}^T \mu^{(l)} - 2 \left( N^{(k)} - N_i \right) \right) - 4 \left( X_i^{(k)} \right)^2,
 \end{aligned} \tag{33}$$

tačiau matyti, jog difuzija ir dreifas vis vien yra 1-os ir 2-os eilės polinomai. Priklausomai nuo savaiminių šuolių spartų  $\epsilon$  ir  $\mu$  parinkimo, simetriniu atveju nariai  $\sum_{i=1}^M \epsilon^{(i)}$  ir  $\sum_{i=1}^T \mu^{(i)}$  pavirsta į  $M\epsilon$  ir  $T\mu$ .

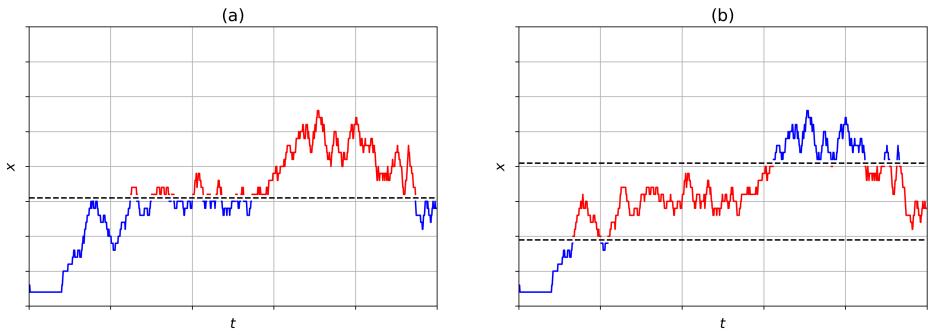
Fokerio-Planko lygtis yra patogus pavidalas analitinams tyrinėjimams, tačiau  $N^{(k)}$  ir  $N_i$  narius išprastinti analitiškai kebloka. Tokiu atveju galima užsiimti skaitmeniniu modeliavimu, o tam patogiau turėti stochastinę diferencialinę lygtį. Ši transformacija yra atliekama remiantis Ito formulė, kuri nusako kokia lygtimi yra aprašoma funkcijos stochastinė diferencialinė lygtis. Pagal šią lygtį gaunamas rezultatas, jog difuzijos ir dreifo nariais aprašomas procesas yra ekvivalentus stochastinėms diferencialinėms lygties ir Fokerio-Planko lygties formose [27], tokia transformacija naudojama skaitmeniniuose rinkėjo modelio simuliacijoje [19, 20]. Stochastinė diferencialinė lygtis yra pavidalo:

$$dx = D^{(1)}(x)dt + \sqrt{D^{(2)}(x)}dW, \tag{34}$$

kur  $A(x)$  žymi dreifo koeficientą,  $B(x)$  žymi difuzijos koeficientą, o  $dW$  yra Wiener'io procesas, atitinkantis atsitiktinio triukšmo kintamajį (žr. 3.3 skyrelį).

### 2.3.2 Pirmojo kirtimo ir grįzimo laikai

Paprasčiausias vienmačio stochastinio (o kartu ir Markovinio) proceso pavyzdys yra atsitiktinis klaidžojimas vienoje dimensijoje. Diskrečiu atveju atsitiktinio klaidžojimo pavyzdys yra šuoliaivimo procesas (angl. *hopping-process*). Tieki diskrečiu, tiek tolydžiu vienos ar daugiau dimensijų



4 pav. Kintamojo  $x$  laiko  $t$  eilutė. (a) paveikslė dalyje vaizduojami pirmojo grįžimo laikai  $\Delta t_i$  - kai kintamojo vertė kerta arba yra lygi ribinei vertei (žymima juoda brūkšniuota linija). (b) paveikslė dalyje vaizduojami pirmojo kirtimo laikai - laikas  $\Delta t_i$ , per kurį kintamojo vertė nuo vienos ribinės vertės pereina prie kitos (žr. juodas brūkšniuotas linijas).

atveju galima parodyti, jog asymptotiskai šio klaidžiojimo pirmo kirtimo ar grįžimo laikai turi spesifinės formos skirtinių [29]. Pirmojo kirtimo ir grįžimo situacijos vizualiai pateikiamais 4 paveiksle.

Atsitiktinį šuoliavimą (diskretų klaidžiojimą) vienoje dimensijoje galima apibrėžti šitaip:

$$P(x, t+1) = pP(x-1, t) + qP(x+1, t), \quad (35)$$

kur  $P(x, t)$  žymi tikimybę dalelei būti vietoje  $x$  laiko momentu  $t$ , o  $p$  ir  $q$  žymi spartas šuoliui į vieną ar kitą kryptį. [29] parodoma, jog nepriklausomai nuo šuolio proceso detalių, tikimybės tankio skirtinys tokiems procesams yra Gauso skirtinio formos. Simetriniu šuolių spartų atveju:

$$P(x, t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi t \langle x^2 \rangle}} e^{-(x-\langle x \rangle)^2 / 2t \langle x^2 \rangle}. \quad (36)$$

Tai yra rezultatas atsirandantis dėl centrinės ribinės teoremos. Rezultatas galioja su vienintele sėlyga, jog dydžiai  $\langle x^2 \rangle$  ir  $\langle x \rangle$  yra baigtiniai. Visi šie procesai gali būti ilgo laiko riboje apibūdinami kaip difuziniai procesai [29].

Asimptotinis Markovo proceso pirmojo grįžimo laikų skirtinys išvedamas pasinaudojant išgyvenimo tikimybės ir generuojančia funkcijomis. Generuojančios funkcijos apytikslė forma [29]:

$$P(0, z) \approx \int_0^\infty P(0, t) z^t dt \propto \int_0^\infty (4\pi D t)^{-d/2} z^t dt, \quad (37)$$

kur  $P(0, z)$  yra generuojanti funkcija, o  $z$  yra kintamasis gaunamas po Laploso transformacijos. Kadangi daroma prielaida, jog tikimybės tankio skirtinys lemiamas difuzijos, procesui galima parinkti norimą dimensiją  $d$ . Generuojanti funkcija savyje turi visą informaciją apie sistemos asymptotinį veikimą ir ją galima susieti su išgyvenimo tikimybę - tai yra tikimybė  $S(t)$ , kad iki laiko momento  $t$  dalelė nepasiekia barjero arba grįžimo taško. Gaunamas tikimybės tankio skirtinys skirtingo matiškumo stochastiniams procesams [29]:

$$F(0, t) = -\frac{\partial S(t)}{\partial t} \propto \begin{cases} t^{d/2-2} & d < 2 \\ \frac{1}{t \ln^2 t} & d = 2 \\ t^{-d/2} & d > 2 \end{cases} \quad (38)$$

Iš čia matyti, kad vienos dimensijos atveju gaunamas  $t^{-3/2}$  proporcijumas. Rezultatai pirmojo kirtimo (grįžimo) laikų vidurkiui gauti taip pat yra aptariami ir [27, 28, 30], kadangi tai yra panašaus pobūdžio uždavinys lyg sprendžiant Fokerio-Planko lygtį.

### 3 Tyrimo metodika

#### 3.1 Gillespie algoritmas stochastinių vyksmų modeliavimui

Skaitinis eksperimento modeliavimas yra atliekamas remiantis Gillespie algoritmu [31]. Algoritmas remiasi stochastiniu pastovios spartos proceso modeliavimu. Šiame darbe Gillespie algoritmas įgyvendinamas remiantis tiesioginiu metodu (angl. *direct method*), kuris buvo pasiūlytas [31].

Pats algoritmas veikia su prielaida, jog tolydžioje laiko skalėje vyksta diskretūs įvykiai su pastoviomis spartomis tarp šių įvykių - tokiu būdu modeliuojami Puasono šuolių procesai (angl. *Poisson jump processes*) [32]. Naudojamas tiesioginis metodas remiasi Puasono procesams galiojančia superpozicijos savybe. Tai reiškia, jog tarpusavyje sąveikaujančių šuolio procesų rinkiniui  $i \in \{1, 2, \dots, K\}$ , čia  $i$  žymi procesą, o  $K$  žymi procesų skaičių, galioja savybė:

$$\Lambda = \sum_{i=1}^K \lambda_i, \quad (39)$$

kur  $\lambda_i$  žymi  $i$ -ojo proceso spartą, o  $\Lambda$  žymi procesų ansamblio spartą.

Pagal ši metodą įgyvendinti algoritmo žingsniui (vienam įvykiui) tereikia sugeneruoti du tolydžiai pasiskirsčiusius dydžius intervale  $[0, 1)$ . Vienas panaudojamas sugeneruoti laikui iki kito įvykio pagal atvirkštinę rinkinių sudarymo metodą (angl. *inverse sampling method*):

$$\tau = \frac{-\ln u}{\Lambda}, \quad (40)$$

kur  $\tau$  žymi laiką iki kito įvykio,  $u$  yra tolygiai pasiskirstęs atsitiktinis dydis. Kitas atsitiktinis dydis reikalingas apspresti procesui  $i$ , kuris sugeneravo šį įvykį:

$$\Pi_i = \frac{\lambda_i}{\Lambda}, \quad (41)$$

čia  $\Pi$  žymi tikimybę įvykti procesui  $i$ . Tolygaus atsitiktinio dydžio verčių intervalą suskaidžius proporcingai pagal  $\Pi_i$  vertes galima pagal atsitiktinio dydžio vertę nuspriesti, kuris procesas sugeneravo įvykį po laiko  $\tau$ .

Programos kodas skaitiniams eksperimentams atliglioti buvo pritaikytas pagal erdvino rinkėjo modelio autorių kodą [3]. Skaičiavimų paspartinimui ir tikslumui pagerinti modelio parametru vertės yra diskrečios (sveiko skaičiaus) - modelio spartos sugeneruojamos kaip diskretūs skaičiai siekiant išvengti su trupmeninių skaičių skaičiavimais susijusių netikslumų.

#### 3.2 Naivus Beta binominio skirstinio aproksimacijos algoritmas

Konkuruojančios dinamikos modelio spartos (26) ir (27) neleidžia nuspėti ar agentų populiacijos skirstinys atitinka Beta binominį skirstinį. O tokiu atveju jei skirstinys atitinka - kokios parametru  $\alpha$  ir  $\beta$  vertės. Iš erdvino rinkėjo modelio žinoma, jog  $\alpha$  ir  $\beta$  vertės yra tiesiogiai susijusios su tiesinės migracijos sparta  $\epsilon$ . Skirstinio prielaidai esant teisingai konkuruojančios dinamikos atveju galima nustatyti sąryšį tarp formos parametru ir  $\epsilon$  su  $\mu$ .

Šiame darbe nėra tikrinama Beta binominio skirstinio hipotezė (kurią galima patikrinti remiantis neparametriniu Kolmogorovo-Smirnovo testu), tačiau pasinaudojant Beta binominio skirstinio savybėmis yra įvertinami galimi formos parametrai. Žinoma, jog Beta binominio skirstinio momentai (pavyzdžiu, vidurkis) ir variacija yra susiję su formos parametrais  $\alpha$ ,  $\beta$  ir bandymų skaičiumi  $N$ . Šių dydžių išraiškos:

$$\mu_{vid} = Np, \quad (42)$$

$$\sigma^2 = Np(1-p)\frac{\alpha + \beta + N}{\alpha + \beta + 1}, \quad (43)$$

kur  $p$  yra lygus:

$$p = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}. \quad (44)$$

Šiuos du dydžius nesudėtinga nustatyti iš skaitinio eksperimento gaunamų rezultatų. Taigi išsprendus dviejų lygčių sistemą gaunamos išraiškos formos parametrams:

$$\alpha = \frac{N\mu_{vid}^2 - \mu_{vid}^3 - \mu_{vid}\sigma^2}{\mu_{vid}^2 - N\mu_{vid} - N\sigma^2}, \quad (45)$$

$$\beta = \alpha \left( \frac{N}{\mu_{vid}} - 1 \right). \quad (46)$$

Tokiu būdu gaunama  $\alpha$  vertė atitinkų spartą "j" būseną, o parametru  $\beta$  vertė - spartą "iš" būsenos. Šitokia aproksimacija yra tiksliai tik tais atvejais kai prielaida, jog skirstinys atitinka Beta binominį, yra teisingas.

### 3.3 Aproksimacija vienmačiu stochastiniu procesu

Klasikiniame rinkėjo modelyje, aprašomame spartomis (16), galima pastebeti, jog egzistuoja dvi būsenos - viena apibūdinama agentų populiacija  $X$ , o kita yra likusi būsena užimta agentų  $N - X$ . Tokiai sistemai stochastinis aprašymas yra tikslus vienmačiu atveju, tai reiškia užtenka žinoti vienos būsenos agentų populiaciją ir, nepriklausomai nuo likusios sistemos detalios konfigūracijos (klasikiniam rinkėjo modeliui ji žinoma kaip  $N - X$ ), galima pilnai aprašyti procesą. Erdvinio rinkėjo modelio atveju ši savybė išlieka - pagal (23 - 24) lygtis galima pastebeti, jog šuolių į būseną ir iš jos įgyja ekvivalenčią formą rinkėjo modeliui. Ši forma leidžia likusių sistemos konfigūracija apibūdinti dėl  $\epsilon$  spartų simetrijos. Kita vertus, erdviniame rinkėjo modelyje su konkuruojančia dinamika dėl skirtinė tipo ir erdviniu vieneto populiacijų dydžių šios spartos nebėra klasikinio rinkėjo modelio formos.

Norint nustatyti ar konkuruojančios dinamikos rinkėjo modelis tiksliai aprašomas vienmačiu stochastiniu procesu jam sukonstruojama atitinkama Fokerio-Planko (arba ekvivalenti stochastinė diferencialinė) lygtis. Tai atliekama suskaičiuojant Kramers-Moyal skleidinio koeficientus, kurie yra begalinės Fokerio-Planko arba stochastinės diferencialinės lygties koeficientai, atitinkantys dreifą, difuziją ar aukštesnių eilių narius [28]:

$$D^{(n)}(X) = \frac{1}{n! \Delta t} \langle [x(t + \Delta t) - x(t)]^n \rangle |_{x(t)=X}, \quad (47)$$

čia  $X$  žymi nagrinėjamą kintamąjį,  $x(t)$  yra jo realizacija laiko momentu  $t$ ,  $D^{(n)}(X)$  yra  $n$ -tos eilės Kramers-Moyal koeficientas. Jeigu nagrinėjamas stochastinis procesas yra aprašomas baigine Kolmogorovo (pvz., Fokerio-Planko) lygtimi, tuomet jo dinamikai aprašyti užteks išskaityti tik pirmus du, dreifo ir difuzijos, narius [33].

Jeigu dinamikoje pasireikštų difuzijos ir šuolio procesai, pavyzdžiui, šuolinės-difuzijos lygtys, pilnam proceso aprašymui reikėtų atsižvelgti į aukštesnės eilės narius, pavyzdžiui iki 6-os ar aukštesnių eilių [34]. Pastarajame straipsnyje pateikiamas metodas išreikšti gaunamo skirstinio momentus  $M_i$  per Kramers-Moyal skleidinio koeficientus (ir atvirkščiai). Pavyzdžiui, šuolinei difuzijos lygčiai:

$$dX = -aXdt + bdW(t) + cdJ(t), \quad (48)$$

antros eilės momentas (variacija) būtų gaunama pagal lygtį:

$$M_2 = 2\Delta t D^{(2)} + \Delta t^2 (D^{(1)})^2, \quad (49)$$

o atitinkamas šios eilės Kramers-Moyal koeficientas gaunamas:

$$D^{(2)} = \frac{2}{n! \Delta t} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [M_2 - M_1^2] \quad (50)$$

Bendros formos išraiška Kramers-Moyal koeficientams parodoma [34] pasitelkus Bell polinomus:

$$D^{(n)}(X, \Delta t) = \frac{1}{n! \Delta t} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (k-1)! B_{n,k}(M_1, M_2, \dots, M_{n-k+1}), \quad (51)$$

kur  $B_{n,k}$  žymi Bell polinomą.

Radus šiuos koeficientus, toliau reikia spręsti stochastinę diferencialinę lygtį, kokia užrašyta (34) išraiškoje. Vienas būdų lygčiai spręsti yra Eulerio-Marujamos metodas detaliau aprašytas [35]. Tai paprasčiausias Teiloro aproksimacijos su stipriu konvergavimu sprendinys. Diferencialinė lygtis (34) pakeičiama į tokios formos skirtuminę lygtį:

$$Y_{n+1} = Y_n + a\Delta t + b\Delta W, \quad (52)$$

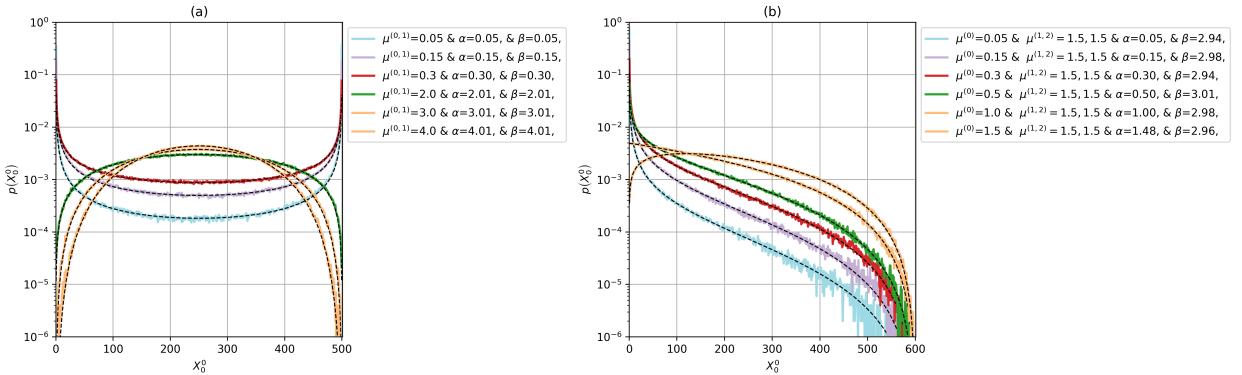
kur  $Y_n$  yra modeliuojamos eilutės vertė,  $\Delta t$  atitinka diskretizuotą laiko intervalą, o  $W$  yra Wiener'io procesas, kuris kai kuriuose darbuose vadinamas standartiniu Brauno judėjimu - jo pokyčių vidurkis lygus 0 ir standartinis nuokrypis yra  $\sqrt{\Delta t}$ .

## 4 Rezultatai

### 4.1 Agentų populiacijos skirstiniai nekonkuruojančios dinamikos atveju

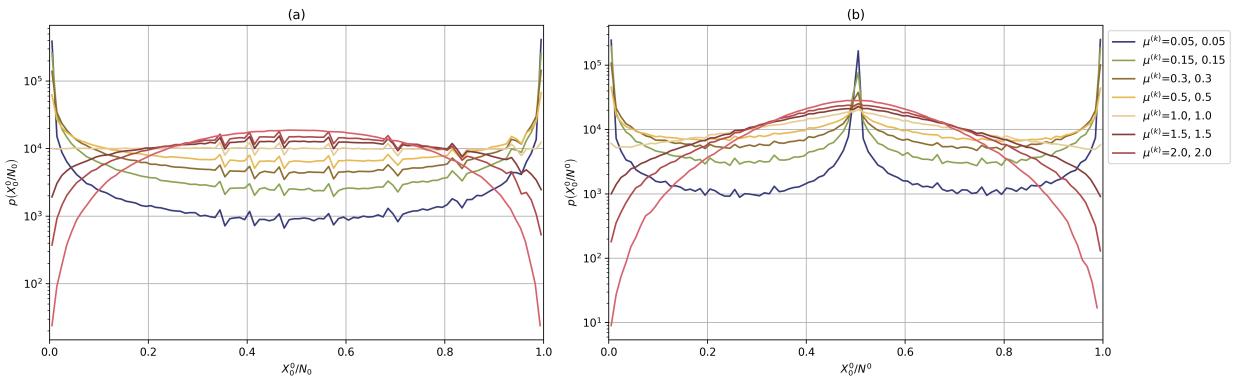
Erdvinis rinkėjo modelis be konkuruojančios dinamikos pasižymi pagrindinėmis klasikinio rinkėjo modelio savybėmis - jų stacionarus skirstinys yra tas pats ar stebint rinkėjo modelio būseną ar vieną erdvinį vienetą erdviniame rinkėjo modelyje. Erdvinio modelio atveju agentų populiacijos tikimybės tankio skirstinys atitinka Beta binominį skirstinį ir jo formos parametrai  $\alpha$  ir  $\beta$  priklauso nuo spartos  $\epsilon$ . Prieš papildant modelį konkuruojančia dinamika, galima analizuoti kokį poveikį turėtų migracijos proceso pakeitimai analogiškai apbirėžtu būsenos kitimo procesu pagal (25) lygtį. Modeliui su būsenos kitimo procesu gaunamas analogiškas rezultatas -  $\beta$  formos parametro vertė priklauso nuo pastovių būsenos kitimo spartų  $\mu$ . Ši priklausomybė matoma (27) išraiškoje ir pavaizduota 5 paveiksle.

Spartos iš būsenos migracijos pasižymi tokia pačia interpretacija būsenos kitimo atveju. Migracijos atveju sparta yra suminė sparta agentui persikelti į kitą erdvinį vienetą. Kadangi persikeliant į erdvinį vienetą agento tipas  $k$  nepakinta, ši sparta įgyja tik proporcionalumo koeficientą, ji lygi  $(M - 1)\epsilon^{(k)}$ . Kita vertus būsenos kitimu atveju - tai suminė sparta agentui pakeisti tipą. Ši suma priklauso nuo agentų tipų  $T$  skaičiaus ir kiekvienam agentų tipui parinktų proporcinių spartų  $\mu^{(m)}$ , kur  $m \neq k$ . Taip įvestos būsenos kitimo spartos yra vienodos erdviniams vienetams, bet skiriasi agentų tipams, kaip ir migracijos spartos.



5 pav. Pirmo agentų tipo pirmajame erdviniame vienete populiacijos tikimybės tankio skirstinys. Modelis tik su būsenos keitimo dinamika (migracijos spartos prilyginamos nuliui). (a) paveiksle pavaizduotas atvejis su modelio parametrais  $T = M = 2, N = C = 1000$ , (b) paveiksle pavaizduotas atvejis  $T = 3, M = 2, N = C = 1200$ . Kiekviena kreivė atitinka eksperimentus su skirtingomis  $\mu$  vertėmis (žr. legendą), juodos brūkšniuotos kreivės atitinka naivaus modelio aproksimaciją (formos parametrai pateikiami legendoje). Sparta iš būsenos kokybiškai atitinka  $\sum_{m \neq k}^T \mu^{(m)}$  vertę.

Vieno agento tipo erdviniame vienete ( $X_0^{(0)}$ ) skirstinys tinkamas aprašyti bendras modelio savybes, tačiau jis neparankus atskleisti skirtumą tarp migracijos ir būsenos kitimo dinamikų. 5 paveikslėlė vaizduojamos kreivės gali būti gaunamos modeliui su migracija parinkus panašius parametrus. Kyla natūralus klausimas - koks skirtumas tarp migracijos ir būsenos kitimo procesų? Šiuos procesus aprašančią spartų formą itin panaši (žr. išraiškas (22) ir (25)) bei tokie skirstiniai kaip 5 paveikslėlė atkartojami abiejų procesų atvejais.



6 pav. Normuoti pirmo agentų tipo pirmajame erdviniame vienete skirstiniai. Modelis tik su būsenos keitimo dinamika (migracijos spartos prilyginamos nuliui). Visos kreivės su eksperimento parametrais  $T = M = 2$ ,  $N = C = 1000$ , būsenos kitimo spartos dviem agentų tipams pateiktos legendoje. (a) paveiksle pavaizduotas normavimo į erdvinį vieneto populiaciją atvejis (b) paveiksle pavaizduotas normavimo į agento tipo populiaciją atvejis.

Skirtumus įžvelgti galima analizuojant kitokio tipo skirstinius -  $X_0^{(0)}/N^{(0)}$  ir  $X_0^{(0)}/N_0$ . Šiuos skirstinius atitinkančios kreivės pateikiamos 6 ir 7 paveiksluose. Ryškiausiai pastebima šių skirstinių savybė - priklausomai nuo proceso pobūdžio vienas skirstinys įgyja formą, kurią įgusty Beta binominis skirstynis agentų populiacijai, o kitas pasižymi sudėtingesne forma - su papildomu iškilimui ties 0.5 vertė. Pavyzdžiui 6 paveiksle (būsenos kitimo atvejis) normavimo į erdvinį vienetą atvejis atitinka agentų populiacijos ( $X_0^{(0)}$ ) skirstinio formą, o normavimas į agentų tipo populiaciją turi kitokią formą.

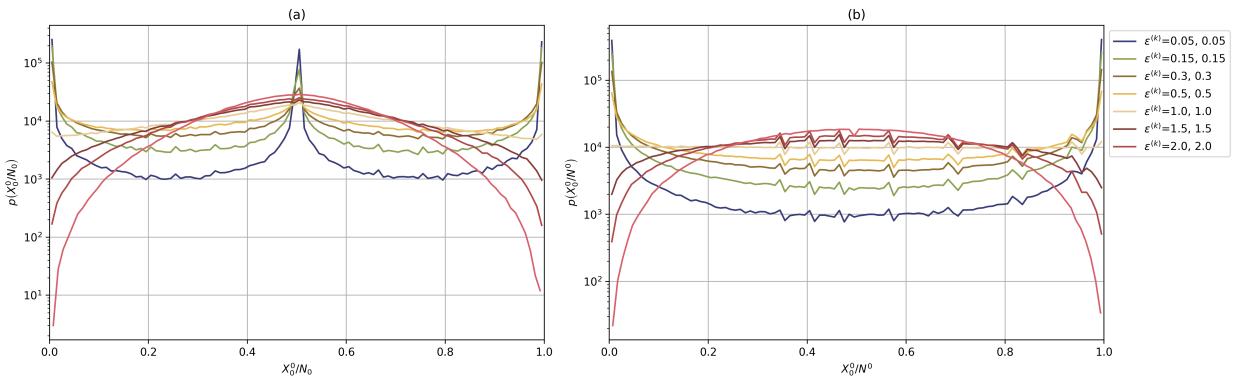
Skirstinių formos pakinta dėl to, jog, priklausomai nuo proceso, erdvės arba tipo populiacija įgyja fiksuotą reikšmę. Būsenos kitimo dinamikos atveju agentų populiacija erdviniame vienete  $N_0$  nekinta, taigi atitinka Beta binominio skirstinio atvejį, kai  $N_0 = N/M$ . Toks pats argumentas galioja migracijos atveju - populiacija vienam agentų tipui nekinta ir lygi  $N^{(0)} = N/T$ .

Iškilusios linijos atsiradimas yra susijęs su tuo, jog vienam iš populiacijos dydžiui (pavyzdžiui, erdvinio vieneto) nekintant, dydžiai  $X_0^{(0)}$  ir  $X_0^{(1)}$  yra tarpusavyje nepriklausomi. Iškilusi sritis padalija skirstinį į dvi simetriškas dalis. Pradinėje būsenoje atvejui  $T = M = 2$  tiek erdvinio vieneto, tiek agentų tipo populiacijos požiūriu agentai pasiskirstę lygiai, todėl rezonansinė linija matyti ties 0.5 vertė. Kintant  $T$  dydžiui, papildomos linijos atsirastų ties  $1/t$ , kiekvienai vertei  $t \in \{2, 3, \dots, T\}$ . Analogiškas rezultatas galioja  $M$  parametru.

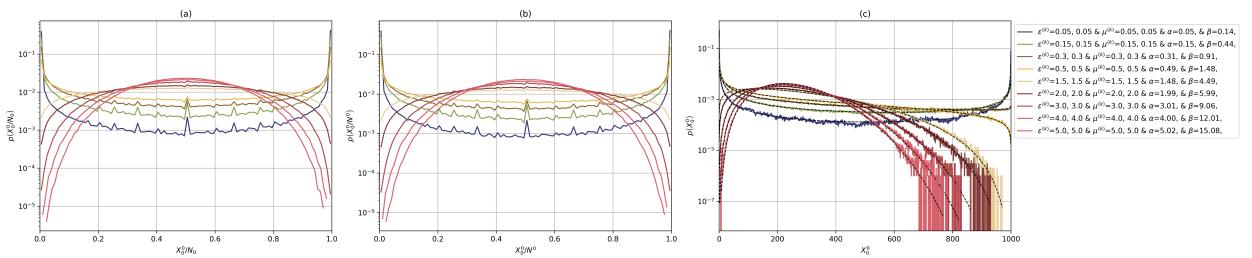
Pati iškilimo forma yra nulemta būsenos kitimo ar migracijos spartų dydžių - kuo spartos didesnės, tuo dažnesni atvejai kai daugiau agentų palieka pradinį erdvinį vienetą ar tipą. Nuo spartų priklauso kraštutinių atvejų, kai didžioji dalis agentų užima vieną erdvinį vienetą arba tipą, dažnumas.

## 4.2 Agentų populiacijos skirstinių priklausomybė nuo modelio spartų konkurujančios dinamikos atveju

Analizuojant konkurujančios dinamikos atvejus galima pradėti nuo simetrinio atvejo - parinkus parametrus  $T = M = 2$  bei  $\mu^{(k)} = \epsilon^{(k)}$ . Šiuo atveju matyti, jog normalizuoti agentų populiacijos



7 pav. Normuoti pirmo agentų tipo pirmajame erdviniame vienete skirstiniai. Modelis tik su migracijos dinamika (migracijos spartos prilyginamos nuliui). Visos kreivės su eksperimento parametrais  $T = M = 2$ ,  $N = C = 1000$ , migracijos spartos dviem agentų tipams pateiktos legendoje. (a) paveiksle pavaizduotas normavimo į erdvino vieneto populiaciją atvejis (b) paveiksle pavaizduotas normavimo į agento tipo populiaciją atvejis.

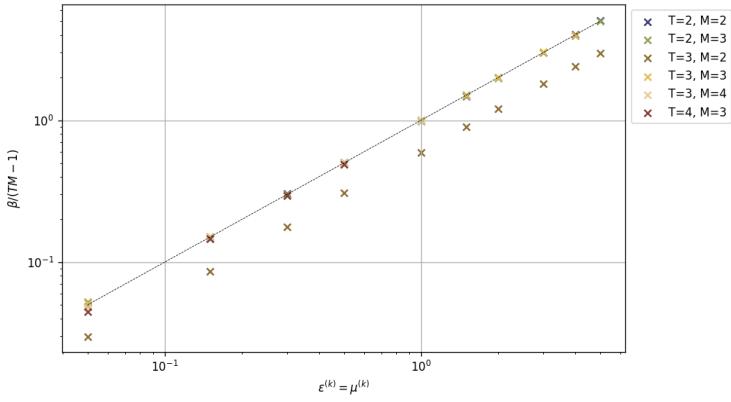


8 pav. Normuoti (a, b) ir nenormuoti (c) pirmo agentų tipo pirmajame erdviniame vienete skirstiniai. Simetrinių spartų atvejis modeliui su konkuruojančia dinamika. Visos kreivės su eksperimento parametrais  $T = M = 2$ ,  $N = C = 1000$ , migracijos ir būsenos kitimo spartos pateiktos legendoje. Juodos brūkšninės linijos (c) grafike atitinka naivaus modelio aproksimacija Beta binominiu skirstiniu.

skirstiniai yra vienodi nepriklausomai nuo normalizavimo į  $N_0$  ar  $N^{(0)}$  (žr. 8 paveikslėlo (a) ir (b)). Kita vertus to paties paveikslėlo (c) dalyje pateikto  $X_0^{(0)}$  skirstinio forma skiriasi nuo pastarųjų - šios maksimumas pasislinkęs į mažesnių verčių sritį. Įvertinus Beta binominį skirstinį naivios aproksimacijos modeliu gaunama eksperimento rezultatus kokybine prasme atitinkanti aproksimacija. Iš gautų verčių pastebima, jog formos parametras  $\beta$  pasižymi proporcingumu  $TM - 1$  vertei. Šis daugiklis - tai suminis "kitų" agentų tipų ir erdvinių vienetų kombinacijų skaičius. Formos parametras  $\beta$  yra lemiamas šuolių į kitas būsenas spartos, tokis proporcingumas rodo efektinę šuolio spartą į kitas būsenas lygią bet kuriai pasirinktai būsenai. Tai neintuityvus rezultatas, nes apibrėžtos šuolių spartos lygtys (22) ir (25) tokį šuolių neleidžia. Įvertinus šį proporcingumą kitoms  $T$  ir  $M$  verčių kombinacijoms galima pastebėti, jog simetriškų spartų verčių formos parinkimas lemia agentų verčių pasiskirtymą pagal Beta binominį skirstinį. Ši priklausomybė pavaizduota 9 paveikslėlė.

Kita vertus įdomu išsiaiškinti kokį poveikį skirstiniams turi skirtinę  $\epsilon$  ir  $\mu$  verčių parinkimas pagal agento tipą. Viena vertus galima laikyti pastovias  $\epsilon$  vertes ir keisti visas  $\mu$  vertes (žr. 11 pav.), kita vertus galima keisti  $\mu$  priklausomai nuo agento tipo (žr. 10 pav.).

Iš šių pavyzdžių galima pastebėti, jog keičiant  $\mu$  vertes pagrindinis pokytis įvyksta  $X_0^{(0)}/N_0$  skirstinyje, kaip ir buvo pastebėta nekonkuruojančios dinamikos atveju. Atvejais, kai  $\mu^{(0)} \neq \mu^{(1)}$



9 pav. Naivaus modelio aproksimacijos formos parametru  $\beta$  verčių priklausomybės nuo spartų  $\mu^{(k)} = \epsilon^{(k)}$  dydžio. Būsenos kitimo ir migracijos spartos simetriškos ir atitinka pateiktas 8 paveikslė. Legendėje pateiktos skirtinės kreives atitinkančios  $T$  ir  $M$  eksperimento parametrų vertės. N vertės kiekvienai kreivei lygios  $25 \cdot T \cdot M$ . Logaritminės ašys skirtos pabrėžti santykiniamis nuokrypiams nuo  $y = x$  atvejo, kuris pateiktas juoda brūkšnine linija.

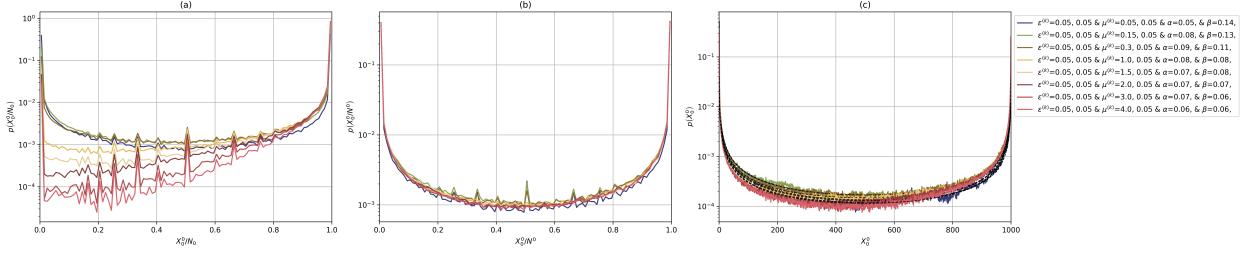
Šis pokytis keičiasi - pavyzdžiu, agentų tipui su didesne būsenos pakitimo į šį tipą sparta skirtinys įgyja didesnes tikimybes aukštesnių verčių skirstyje. Dėl didesnės santykinės spartos tarp agentų tipų pirmojo agentų tipo būsena yra dažniau pasirenkama. Šį efektą galima pastebėti 10 (a) paveikslė.

Padidinus  $\epsilon$  vertes ir tokiu pačiu būdu keičiant  $\mu$  (t.y. išlaikant  $\mu$  tarpusavyje nevienodas) - stebimas pokytis kito tipo normuotame skirtinėje ( $X_0^{(0)}/N^{(0)}$ ) (žr. 12 paveikslė (b) dalį). Tačiau to paties paveikslė (a) dalis yra vis dar yra kokybiškai panaši į 10 paveikslė (a) dalimi.

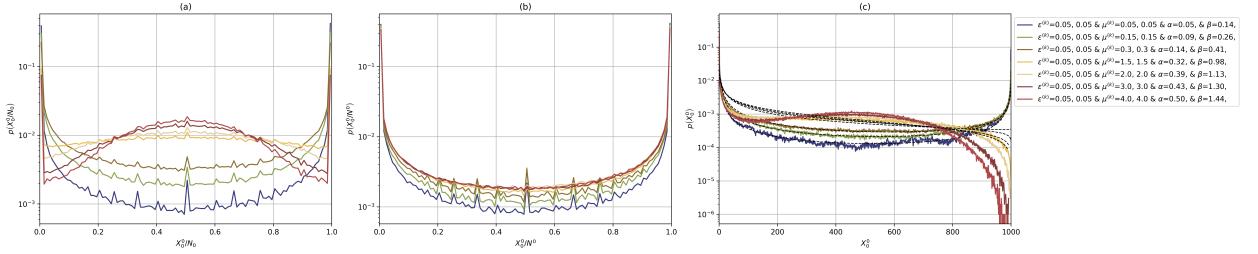
Kitais atvejais keičiant  $\epsilon$  vertes vietoje  $\mu$  gaunami kokybiškai tokie patys rezultatai, tačiau vietoje grafikų (a) dalyse stebimų pokyčių (t.y. skirtinėje  $X_0^{(0)}/N_0$ ), pokytis yra stebimas (b) dalyje ( $X_0^{(0)}/N^{(0)}$  skirtinėje). Be to, esant tarpusavyje skirtingoms  $\epsilon^{(k)}$  ir  $\mu^{(k)}$  vertėms naivaus aproksimacijos modelis nebeduoda tikslią aproksimaciją. Aproksimacijos netikslumas paneigia prielaidą, jog skirtinys atitinka Beta binominį skirtinį.

Kai kurių grafikų  $X_0^{(0)}/N_0$  ir  $X_0^{(0)}/N^{(0)}$  skirtiniuose galima pastebėti artefaktus primenančiu rezonansinių linijų. Šių linijų intensyvumas kai kuriais gaunamais atvejais yra priklausomas nuo sistemos dydžio parinkimo, pavyzdžiu, viso agentų skaičiaus  $N$ . Dar tiksliau - nuo agentų skaičiaus tenkančio vienam agentų tipo erdviniam vienetui, t.y.  $N/(TM)$ . Šios linijos sutinka su tokų trupmenų kaip 2/3 ar 3/4 ir pan. vertėmis.

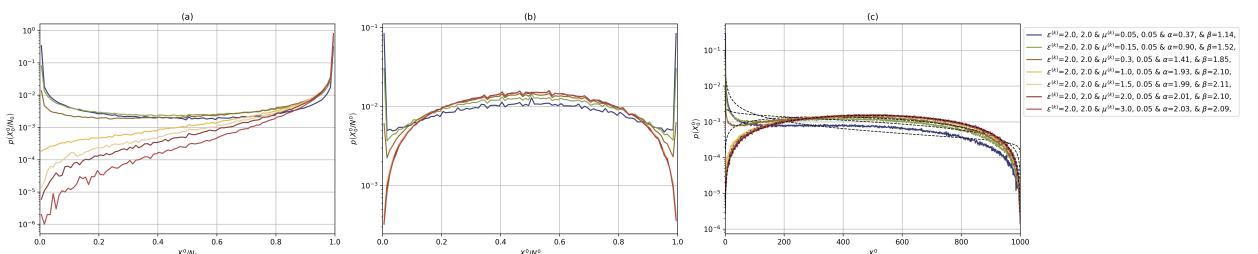
Migracijos ir būsenos kitimo spartų formose (22) ir (25) bei tiesinio nario egzistuoja ir netiesinis narys - priklausantis nuo "iš" būsenos populiacijos ir "i" būsenos populiacijos dydžių. Šio nario poveikį galima pastebėti 11 (b) ar 12 (b) paveiksluose. Nors atitinkamos tiesinės spartos  $\epsilon$  vertės nekinta, tačiau stebimas skirtinės pokytis. Tai gali būti lemiamas dėl netiesinio nario poveikio migracijos spartoms - dėl būsenos kitimo sukurtos didelės populiacijos erdviniuose vietuose vyksta dažnesnė migracija į šiuos vienetus.



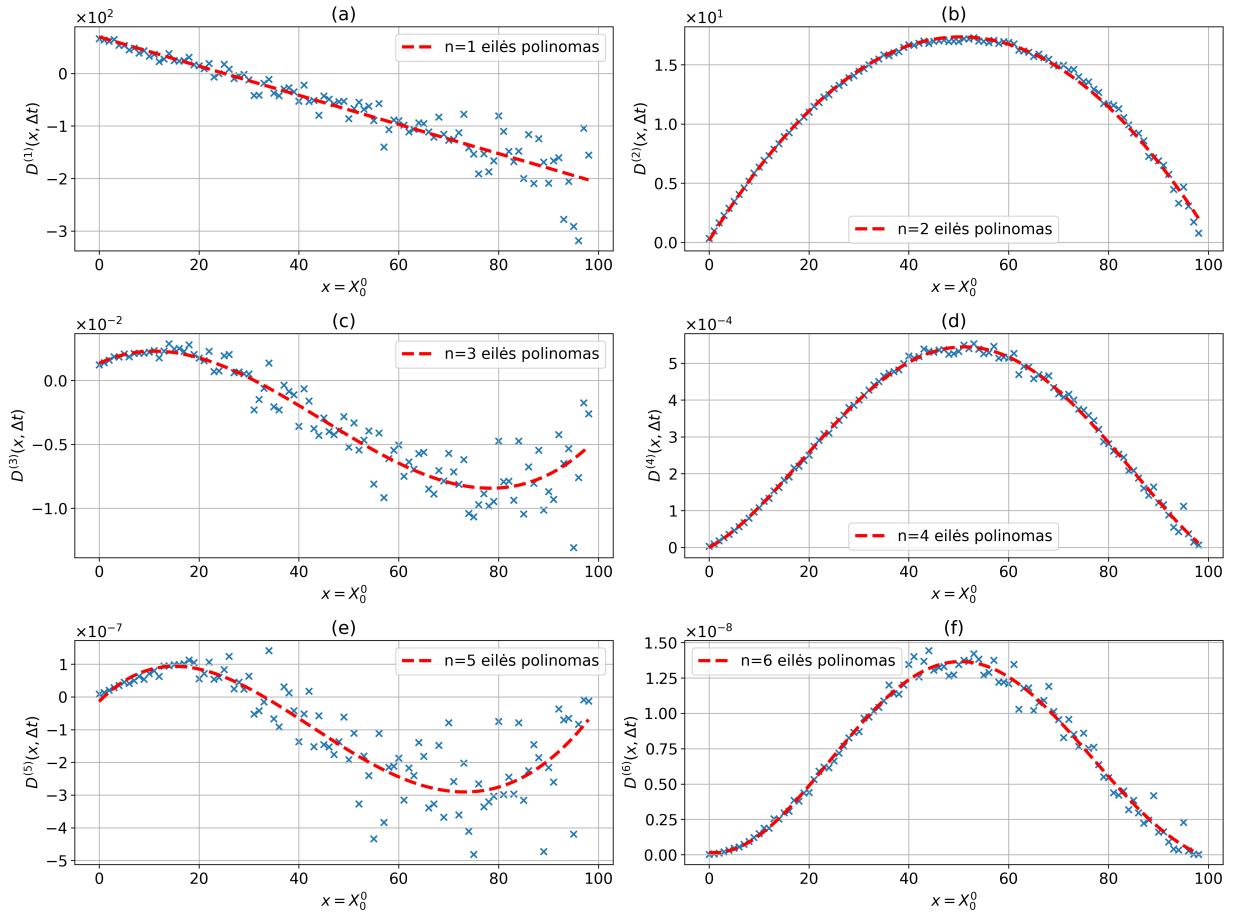
10 pav. Normuoti (a, b) ir nenormuoti (c) pirmo agentų tipo pirmajame erdviniame vienete skirstiniai. Pastovių  $\epsilon$  verčių su nevienodomis  $\mu$  vertėmis atvejis modeliui su konkuruojančia dinamika. Visos kreivės su eksperimento parametrais  $T = M = 2$ ,  $N = C = 1000$ , migracijos ir būsenos kitimo spartos pateiktos legendoje. Juodos brūkšninės linijos (c) grafike atitinka naivaus modelio aproksimacija Beta binominiu skirstiniu.



11 pav. Normuoti (a, b) ir nenormuoti (c) pirmo agentų tipo pirmajame erdviniame vienete skirstiniai. 10 atvejis su padidintomis  $\epsilon$  vertėmis. Modelis su konkuruojančia dinamika. Visos kreivės su eksperimento parametrais  $T = M = 2$ ,  $N = C = 1000$ , migracijos ir būsenos kitimo spartos pateiktos legendoje. Juodos brūkšninės linijos (c) grafike atitinka naivaus modelio aproksimacija Beta binominiu skirstiniu.



12 pav. Normuoti (a, b) ir nenormuoti (c) pirmo agentų tipo pirmajame erdviniame vienete skirstiniai. Modelis su konkuruojančia dinamika. Visos kreivės su eksperimento parametrais  $T = M = 2$ ,  $N = C = 1000$ , migracijos ir būsenos kitimo spartos pateiktos legendoje. Juodos brūkšninės linijos (c) grafike atitinka naivaus modelio aproksimacija Beta binominiu skirstiniu.

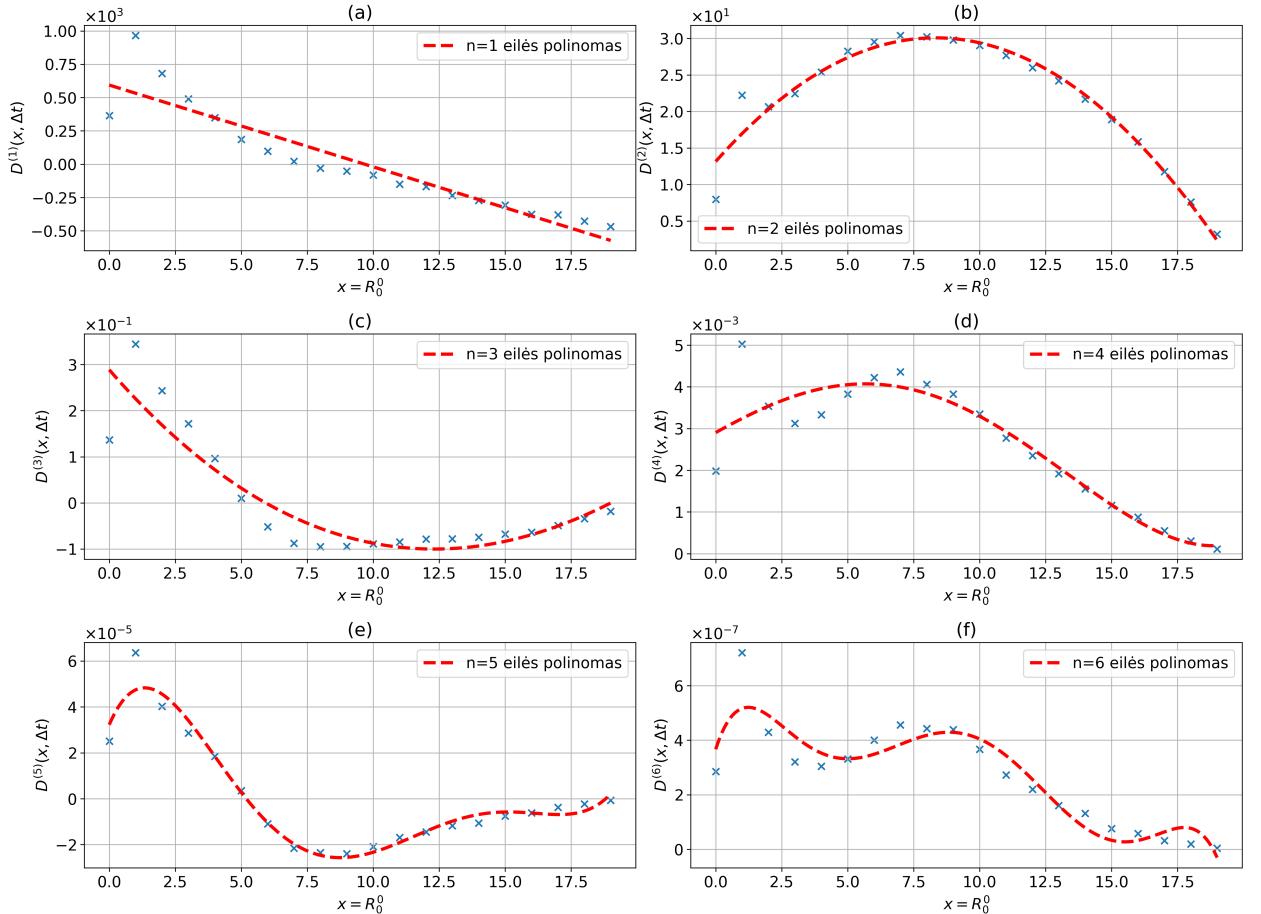


13 pav. Kramers-Moyal koeficientų priklausomybė nuo pirmo tipo agentų pirmame erdviniame vienete populiacijos. Grafikai vaizduoja skirtingų eilių Kramers-Moyal koeficientų kreives. Konkuruojančios dinamikos modelio parametrai  $N = C = 100$ ,  $T = M = 2$ ,  $\epsilon = \mu = 1$ . Vertės gautos laiko eilutei su skyra lygia vidutinei šuolių tarp būsenų trukmei  $\Delta t = 2.4 \cdot 10^{-6}$ . Kreives aproksimuojančio polinomo eilė priklauso nuo Kramers-Moyal koeficiente eilės.

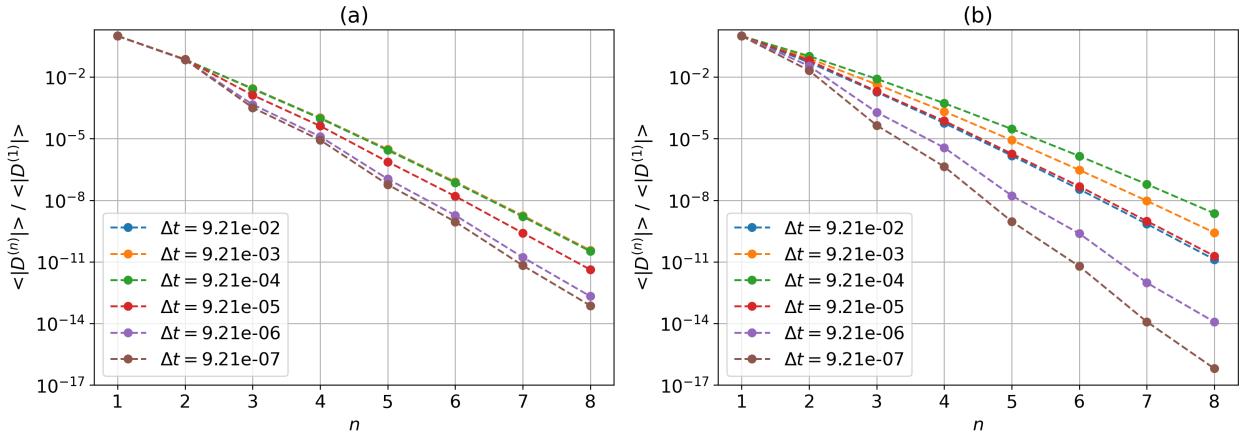
### 4.3 Kramers-Moyal koeficientų verčių nustatymas

Atliekant skaitinį modeliavimą naudojant Gillespie algoritmą gaunama laiko eilutė su įvairiu verčių laiko intervalais. Kadangi laiko intervalai atrenkami pagal atvirkštinį rinkinių sudarymo metodą, šio kintamojo vertė kiekvienam įvykiui yra skirtinė. Siekiant suskaičiuoti Kramers-Moyal koeficientų priklausomybę nuo agentų tipo erdviniame vienete populiacijos dydžio (pvz.,  $X_0^{(0)}$ ) ar rango kintamojo ši laiko eilutė performuojama į vienodo intervalo tarpų laiko eilutę, tai reiškia, jog susvienodinama eilutės laiko skyra. Suvienodinta rezoliucija yra parenkama lygi šuolių tarp būsenų intervalų vidutinei vertei.

Erdvinio rinkėjo modelio su populiacija Kramers-Moyal koeficientų kreivių formos priklauso nuo koeficiente eilės. Pavyzdžiui, lyginės eilės koeficientai yra parabolinės formos erdviniam rinkėjo modeliui, o pirmos eilės - tiesinis. Antros eilės koeficientas atitinka difuzijos narj Fokerio-Planko lygtynę. Pagal šio koeficiente kreivės formą galima teigti, jog difuzijos poveikis yra didžiausias vidutinių verčių srityje ir difuzija veikia silpniausiai populiacijos vertei esant kraštutinei. Pirmų 6 eilių Kramers-Moyal koeficientų kreivės ir jas aproksimuojantys atitinkamos eilės polinomai yra pateikiami 13 paveiksle.



14 pav. Kramers-Moyal koeficientų priklausomybė nuo pirmo tipo agentų pirmame erdviniame vienete rango. Grafikai vaizduoja skirtingų eilių Kramers-Moyal koeficientų kreives. Nekonkurujančios dinamikos modelio su **rango** kintamuoju parametrai  $N = C = 100$ ,  $M = 20$ ,  $T = 1$ ,  $\epsilon = 1$ . Vertės gautos laiko eilutei su skyra lygia vidutinei šuolių tarp būsenų trukmei  $\Delta t = 9.2 \cdot 10^{-7}$ . Kreives aproksimuojančio polinomo eilė priklauso nuo Kramers-Moyal koeficiente eilės.



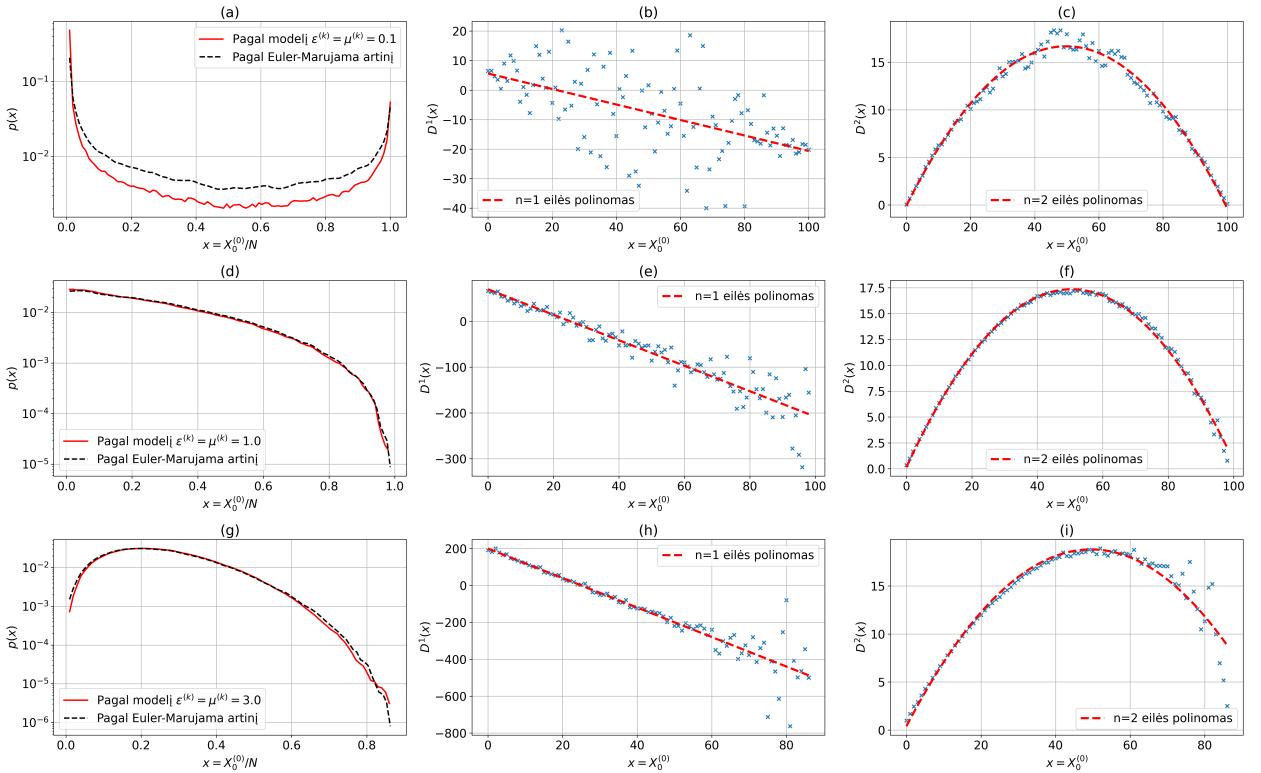
15 pav. Normalizuotų Kramers-Moyal koeficientų kreivių absoliučių verčių vidurkių priklausomybė nuo koeficiente eilės  $n$  (sveikiems skaičiams, brūkšniuota tiesė skirta vizualizavimui). Verčių skalė sunormuota į pirmos eilės Kramers-Moyal koeficientą  $n = 1$ . Kairiame (a) grafike pateikiama aproksimacija erdviniams rinkėjo modeliui su rango kintamuoju, dešiniame (b) grafike pateikiama aproksimacija modeliui su populiacijos kintamuoju. Modelio parametrai  $N = C = 100$ ,  $M = 2$ ,  $T = 1$ ,  $\epsilon = 1$  Vertės gautos laiko eilutėms su skirtina skyra  $\Delta t$  (žr. legenda). Rango kintamojo (a) atveju aukštesnių koeficientų ( $n > 2$ ) įtaka kinta mažiau lyginant su kitu atveju (b).

Kita vertus Kramers-Moyal koeficientų kreivių formos skiriasi erdviniams rinkėjo modeliui pagal rango kintamajį. Šiuo atveju koeficientų kreivių vertes galima interpretuoti kaip dreifo, difuzijos ar šuolių įtaką aukšto arba žemo rango erdviniams vienetui. Dreifo ir difuzijos nariai turi aproksimacijas artimas kaip ir įprastiniams erdvinio rinkėjo modeliui su populiacija, bet aukštesnių negu 2-os eilės kreivių forma skirasi (žr. 14 paveiksle).

Pagal (47) galima pastebeti, jog laiko eilutės skyra  $\Delta t$  lemia Kramers-Moyal koeficientų tikslumą aproksimuojant stochastinį procesą. Koeficientų pokytis priklausomai nuo laiko eilutės skyros pateikiamas 15 paveiksle. Galima pastebeti, jog riboje  $\Delta t \rightarrow 0$  aukštesnių eilių ( $n > 2$ ) koeficientai savo verčių amplitude sumažėja lyginant su pirmu dviejų eilių koeficientais. Rango atveju (15 (a) pav.) ši priklausomybė mažesnė negu populiacijos kintamojo atveju (15 (b) pav.). Jeigu šis mažėjimas nebūtų stebimas tai reikštų, jog aukštesnių koeficientų eilių įtaka dinamikai nepriklauso nuo proceso tolydumo prielaidos, tačiau turi pastovu indėlį į proceso dinamiką. Šio darbo apimtyje buvo sugeneruota ir laiko eilutė, kuriai gaunamos kreivės 15 paveiksle nepriklauso nuo eilutės skyros  $\Delta t$ .

#### 4.4 Konkuruojančios dinamikos erdviniame rinkėjo modelyje aproksimacija vienmačiu stochastiniu procesu

Pagal prieš tai buvusiame skyrelyje aptartas Kramers-Moyal koeficientų kreives ir pasinaudodant (52) lygtimi Eulerio-Marujamos metodu yra sugeneruojama laiko eilutė su skyra  $\Delta t$ . Ši skyra parenkama tokia kaip nurodyta skyrelyje prieš tai. Erdviniam rinkėjo modeliui su konkuruojančia dinamika įdomu patikrinti du atvejus - savaiminių spartų  $\epsilon^{(k)}$  ir  $\mu^{(k)}$  vertėms esant tarpusavyje lygioms bei asimetriinius atvejus, kai vertės nėra tarpusavyje lygios. Pastarajam atvejui 4.2 skyrelyje buvo pastebėta, jog agentų tipo erdviniame vienete populiacijos skirstiniai nėra gerai aproksimuojami.



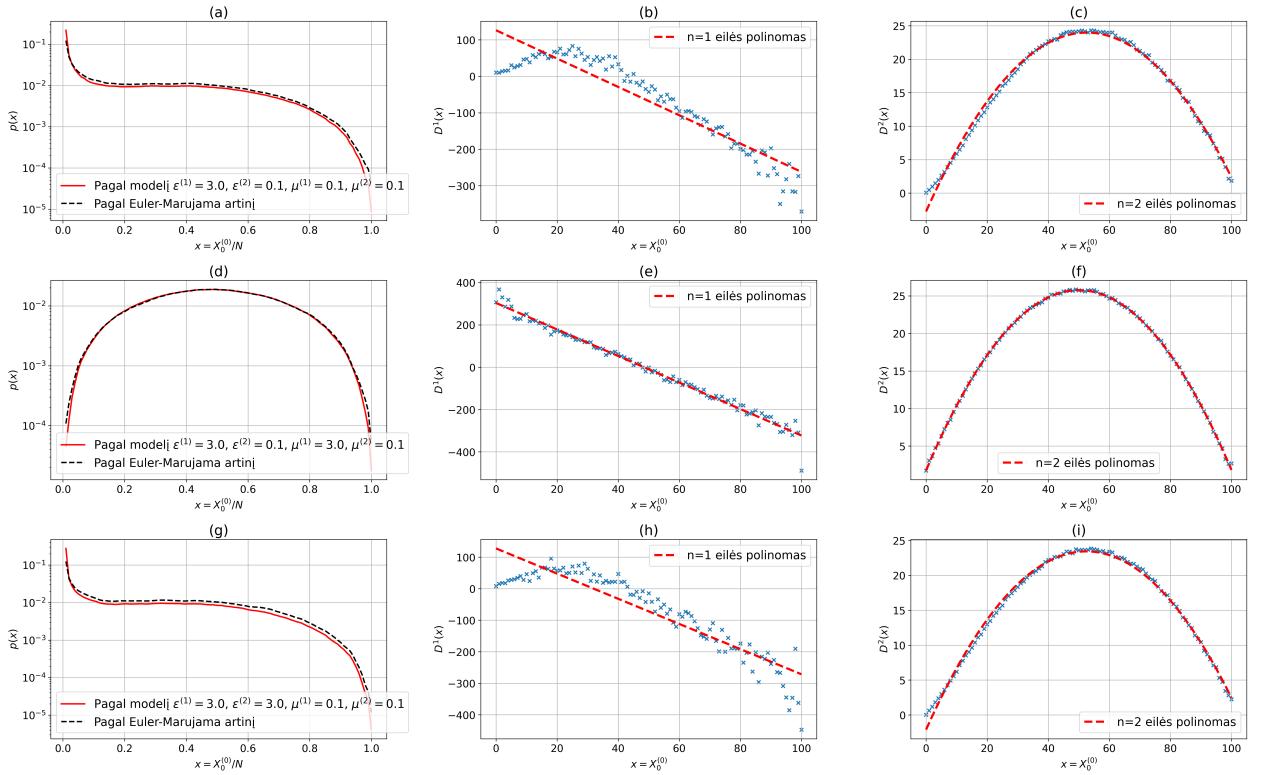
16 pav. (a), (d) ir (g) pateikiama pirmo tipo agentų pirmajame erdviniame vienete normalizuotos populiacijos tikimybės tankio skirstinys. Raudonos kreivės žymi modelio rezultatus, o juodos žymi vienmačio stochastinio proceso artinį (savaiminės spartos **simetrinės**, žr. legendą). (b), (e) ir (h) pateikiami 1-os eilės, o (c), (f) ir (i) 2-os eilės Kramers-Moyal koeficientų kreivės ir jų atitinkamos eilės polinominės aproksimacijos. Modelio parametrai  $T = M = 2$ ,  $N = C = 100$ ,  $\epsilon^{(k)}$  ir  $\mu^{(k)}$  vienodi paveikslams vienoje eilėje (žr. kairiausio paveikslo legendą).

jami Beta binominiu skirstiniu.

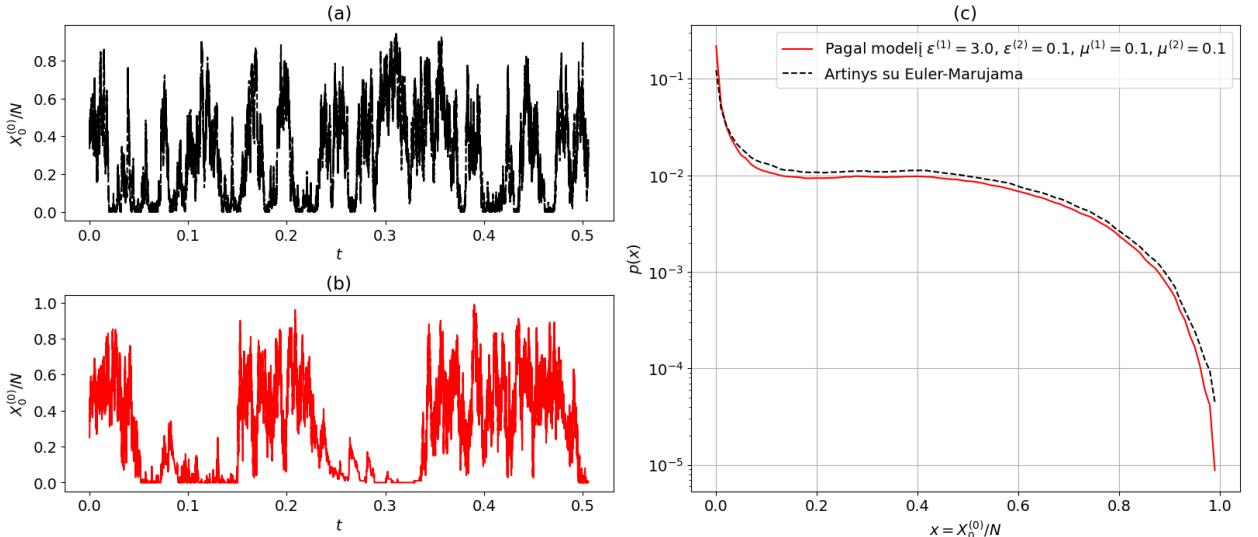
Simetrinio atvejo aproksimacijos yra pateikiamos 16 paveiksle ir nesimetrinio - 17 paveiksle. Visiems atvejams aproksimuojant vienmačiu stochastiniu procesu gauti skirstiniai sutampa arba yra artimi skirstiniams gautiems iš tiesioginio modelio. Vienas iš pasireiškiančių nesutapimų yra mažų (0.1) simetrinių spartų verčių atvejo skirstinių nesutapimas (žr. 16 (a) pav.) Taip pat galima pastebėti, jog šiam atvejui 1-os eilės Kramers-Moyal koeficiente vertės (b) yra išsibarsčiusios nesutampančios skirstinio srities vietoje. Tikėtina, jog šis nesutapimas yra dėl skaitmeninio netikslumo - modeliui su šiais parametrais erdviniuose vietuose vyrauja mažos arba didelės populiacijos vertės, o dėl tarpinių verčių stokos gauta prasta 1-os eilės Kramers-Moyal aproksimacija. Šis efektas nežymiai pastebimas ir 2-os eilės Kramers-Moyal koeficiente vertėse (c).

Nesimetrinį atvejų aproksimacijoms pastebimas 1-os eilės Kramers-Moyal koeficientų verčių netiesiškumas - tiesiškai aproksimacija 17 (b) ir (h) vertės neaproksimuojamos. Tai yra neintutytvus rezultatas, kadangi (33) lygtyste kitokios eilės proporcingumas nėra numatomas.

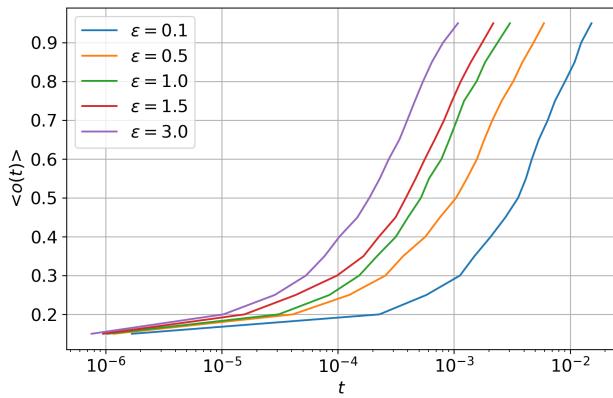
Iš gautų skirstinių aproksimacijų galima apibendrinti, jog aproksimacijos yra tikslios ir atkar-toja visus kokybinius bruožus nepriklausomai nuo savaiminių spartų parinkimo simetriškumo ar asimetriškumo. Galima manyti, jog tai yra vienmačio Markovinio proceso atvejai net ir tuomet kai gauti skirstiniai nėra aproksimuojami Beta-binominiu skirstiniu. Detalesnis vaizdas į modelio ir Eulerio-Marujamos metodu sugeneruotas laiko eilutes yra pateikiamas 18 paveiksle.



17 pav. (a), (d) ir (g) pateikiama pirmo tipo agentų pirmajame erdviniame vienete normalizuotos populiacijos tikimybės tankio skirstinys. Raudonos kreivės žymi modelio rezultatus, o juodos žymiai vienmačio stochastinio proceso artinį (savaiminės spartos **nesimetrinės**, žr. legendą). (b), (e) ir (h) pateikiami 1-os eilės, o (c), (f) ir (i) 2-os eilės Kramers-Moyal koeficientų kreivės ir jų atitinkamos eilės polinominės aproksimacijos. Modelio parametrai  $T = M = 2$ ,  $N = C = 100$ ,  $\epsilon^{(k)}$  ir  $\mu^{(k)}$  vienodi paveikslams vienoje eilėje (žr. kairiausio paveikslo legendą).



18 pav. (c) pateikiami pirmo agentų tipo pirmame erdviniame vienete normalizuotos populiacijos tikimybės tankio skirstinys. (a) ir (b) pateikiamos modelio ir artinio laiko eilučių iškarpos, normalizuotos populiacijos priklausomybė nuo sistemos laiko  $t$ . Modelio parametrai  $T = M = 2$ ,  $N = C = 100$ , savaimines spartas žr. (c) paveikslo legendoje.



19 pav. Sistemos dalies, kuri yra atsidūrusi sistemos ranginiame sąraše (TOP 2), priklausomybė nuo vidutinio laiko, per kurį ši sistemos dalis yra patekusi į sąrašą. Rezultatai erdviniams rinkėjo modeliui su rangų kintamuoju, modelio parametrai  $T = 1$ ,  $M = 20$ ,  $N = 100$ , skirtinges kreivės pagal  $\epsilon$  (žr. legendą).

## 4.5 Erdvinio rinkėjo modelio rango-dydžio skirstiniai

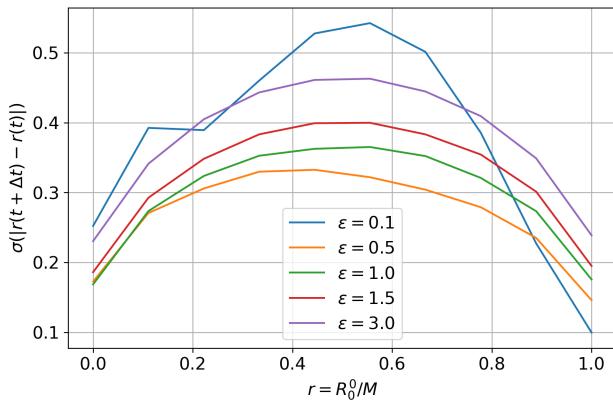
Vienas iš [3] pasiūlytų būdų analizuoti agentų populiacijos skirstinius erdviniame rinkėjo modelyje - per rango-dydžio kreives, kurios savo interpretacija panašios į sudėtinio tikimybės tankio funkcijas. Šiam modeliui rango-dydžio skirstiniai, kaip ir tikimybės tankio skirstiniai, yra stacionarūs. Stacionarumas nereiškia, jog agento tipo erdviniame vienete populiacija nekinta laike - šis pokytis vyksta išlaikant pastovios formos rango-dydžio skirstinį. Prieš nustatant (nekonkuruojančios dinamikos) erdvino rinkėjo modelio su rango kintamuju aprašymo vienmačių stochastiniu procesu galimumą, pradžioje verta detaliau pasigilinti į rangų dinamikos savybes modelyje.

Rangų dinamika pasižyminčios sistemos yra nagrinėjamos [4, 5] darbuose, kur analizuojami iš medicininių, socialinių ir panašių sistemų gauti empiriniai duomenys. Empirinių sistemų rangų laikinei dinamikai analizuoti pasitelkiama keletas statistikų - rango (įverčio) stabilumo kriterijus bei rango sąrašo atsinaujinimas.

Ranginio sąrašo atsinaujinimo laikas empirinėse sistemoje apibūdina vidutinį laiką, per kurį sistema atnaujina savo ranginį sąrašą naujais elementais (pavyzdžiu, TOP 10). Rodiklio vertė būtų 0.2 tuomet, kai 20 proc. sistemos elementų iki laiko  $t$  yra buvę ranginiame sąraše. [4] darbe analizuojamos empirinės sistemos skiriasi savo atvirumu dėl sąrašo atsinaujinimo laiko formos - uždaresnėms sistemoms šios kreivės pasižymi skirtingu tiesiniu polinkio kampu negu atviresnės. Kreivės nebūtinai tiesinės, tas ypač pasireiškia atviresnėms sistemoms, kuriose dalis elementų gali sparčiau patekti į ranginį sąrašą negu kiti.

Erdvinio rinkėjo modelio atveju sparta  $\epsilon$  yra ranginio sąrašo atsinaujinimą kontroliuojantis parametras. Parametro vertė lemia spartesnį aukštesnių sąrašo verčių atsinaujinimą, o žemesnes vertes veikia nežymiai (žr. 19 pav.). Tai skirtinges rezultatas nuo empirinių sistemų rezultatų pagal [4], kur skirtinges sistemos pasižymi skirtingo proporcijumo tiesėmis. Šiuo požiūriu erdvinis rinkėjo modelis gali aprašyti tik vienokio tipo ranginę sistemą, o ne daugelį skirtinį.

Rango (įverčio) stabilumo kriterijus yra matuojamas kaip absolucių verčių standartinis nuokrypis pasirinktoms rango (įverčio atveju - populiacijos) vertėms. Šis dydis yra labai panašus į Kramers-Moyal koeficientą, kuriam vietoje standartinio nuokrypio yra vertinamas  $n$ -os eilės skirtumų



20 pav. Rango stabilumo priklausomybė nuo normalizuoto rango vertės. Rezultatai erdviniams rinkėjo modeliui su rangų kintamuoju, modelio parametrai  $T = 1$ ,  $M = 20$ ,  $N = 100$ , skirtinės kreivės pagal  $\epsilon$  (žr. legendą). 1 atitinka aukščiausio įverčio (populiacijos) rangą (rango viršus), 0 atitinka žemiausio įverčio (populiacijos) rangą.

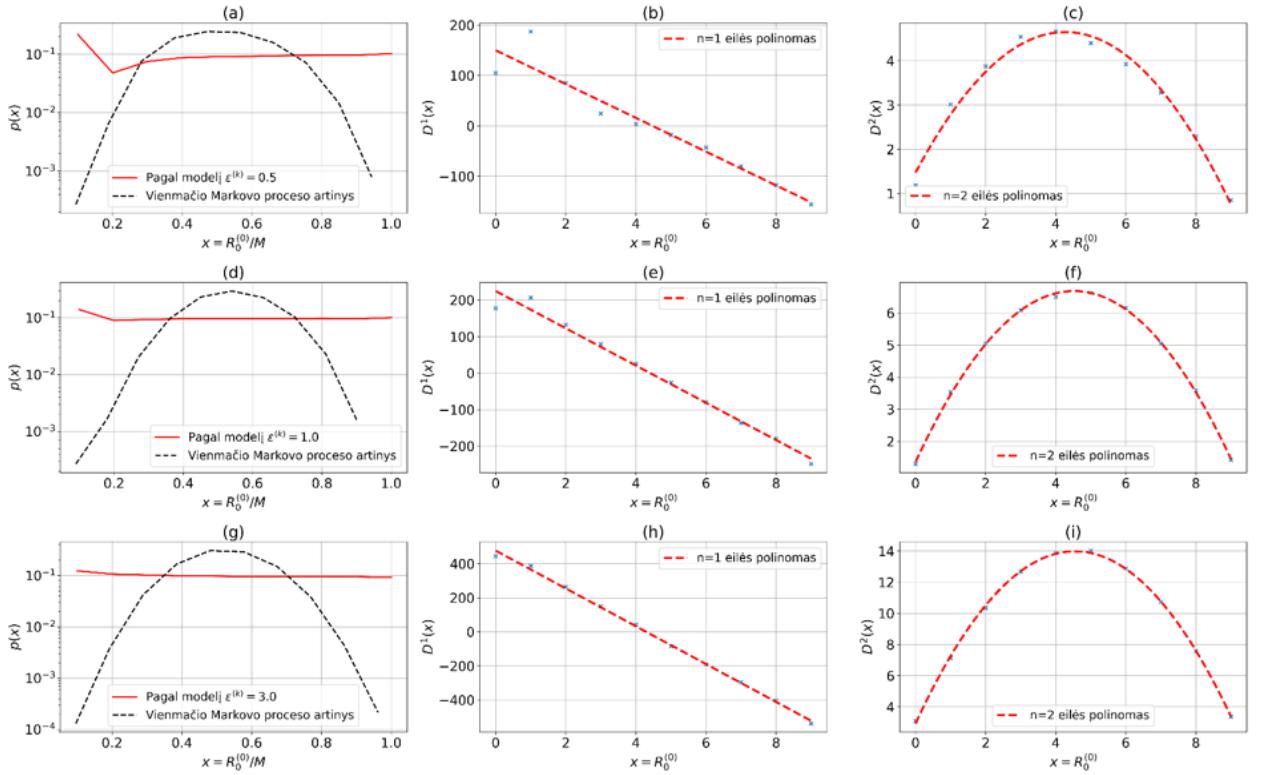
vidurkis. Empirinėms sistemoms šis dydis kinta pagal laipsninį dėsnį [5], o erdviniams rinkėjo modeliui šis rezultatas panašus į rezultatus gautus Kramers-Moyal koeficientų kreivėms (žr. 20 paveikslą). Verta pastebėti, kad, priešingai negu empiriniams duomenims, rinkėjo modelis pasižymi stabiliu rango stabilumu žemo įverčio nariams (žemiausio įverčio nariai, o kartu ir rango - ties 0). Laipsninės funkcijos, arba empirinių duomenų, atveju žemiausi rangai pasižymėtų nestabilumu.

#### 4.6 Erdvinio rinkėjo modelio rangų dinamikos aproksimacija vienmačiu stochastiniu procesu

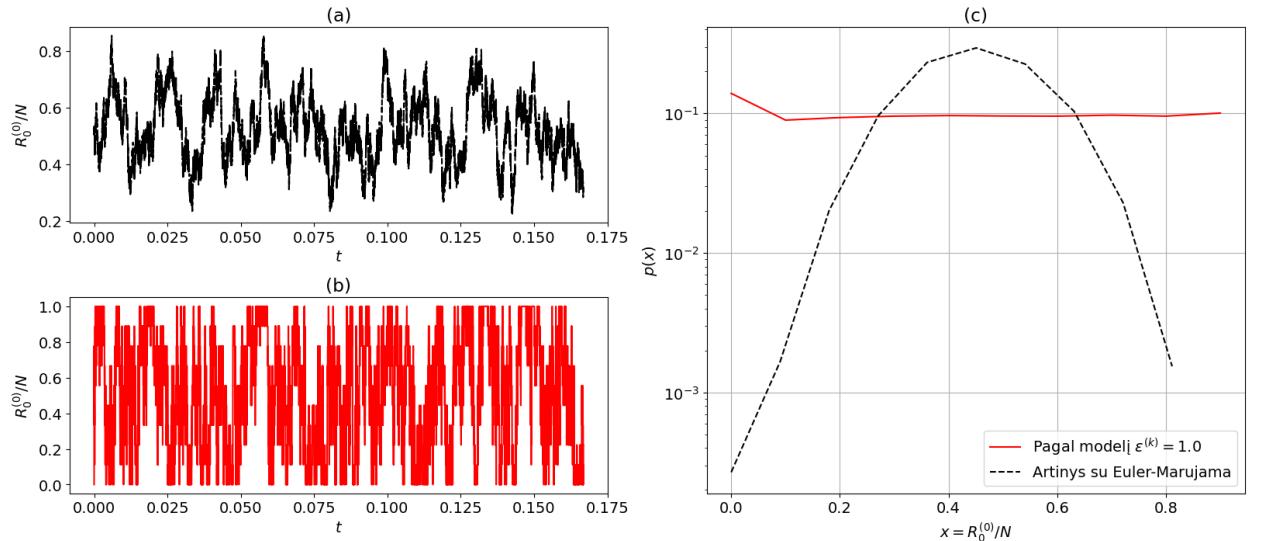
Erdvinio rinkėjo modelio rangų dinamikai įgyvendinami tie patys žingsniai kaip ir 4.4 skyrelyje su vieninteliu pakeitimui - vietoje populiacijos erdviniuose vienetuose analizuojamas erdviniams vienetui priskiriamas rangas. Tokiu būdu gaunamos vienmačio stochastinio proceso aproksimacijos yra netikslios. Šie rezultatai apibendrinami 21 ir 22 paveiksluose.

Iš skaitmeninio modelio laiko eilučių gaunami rango tikimybės tankio skirstiniai primena tolydūjį (angl. *uniform*) skirstinį. Viena vertus, toks rezultatas yra tikėtinis ir įprastai gaunamas atvejais kai atsitiktinis klaidžojimas vyksta ne begalinėje, o apribotoje erdvėje, šiuo atveju tarp normalizuotų rango verčių 0 ir 1. Tačiau pagal artinį modeliuotos eilutės skirstinys panašesnis į normalujį skirstinį ir neatitinka modelio erdvino rinkėjo modelio rezultatų (žr. 21 (a), (d) ir (g) paveikslus).

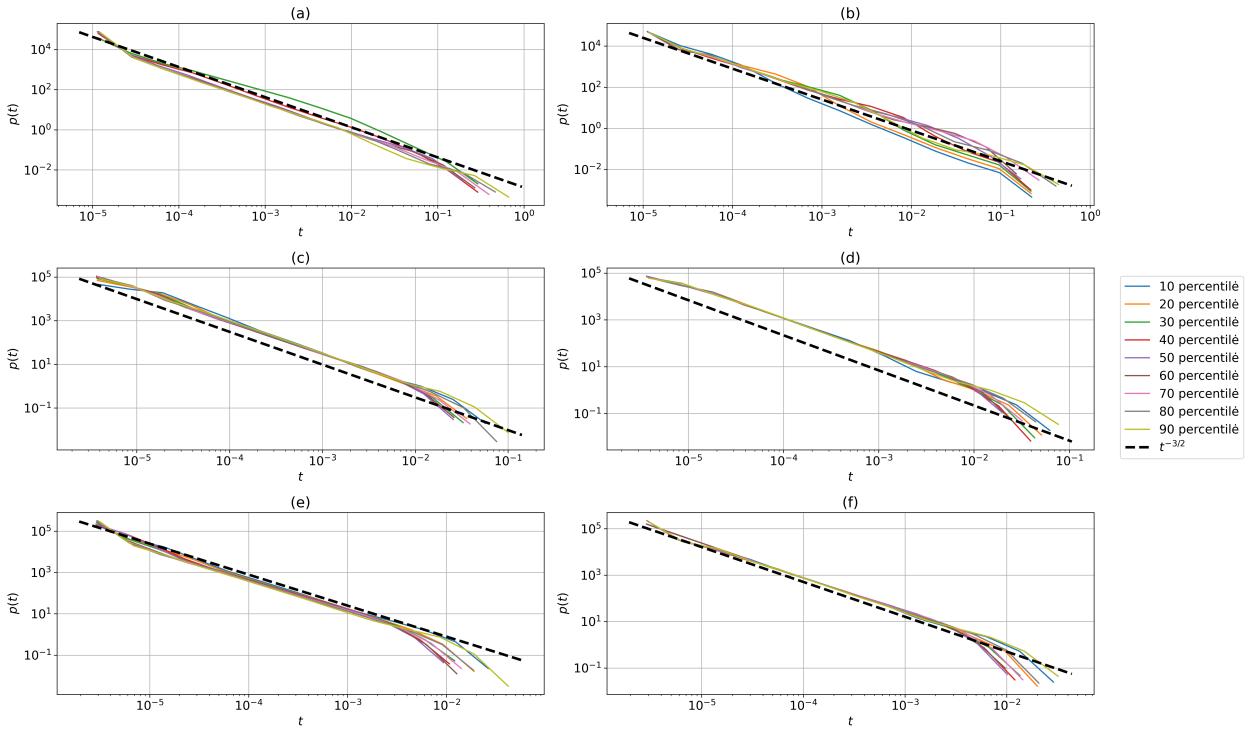
Vienas iš tokio skirtumo aiškinimų gali būti susijęs su tuo, jog vis dėlto pirmų dviejų Kramers-Moyal koeficiente verčių nepakanka pilnai atkartoti rangų dinamikai. Taip pat tai reiškiasi, jog rangų dinamikos aproksimacija Fokerio-Planko lygtimi nėra pakankama ir verta būtų įskaityti aukštėnius narius arba naudoti diferencialinę Kolmogorovo-Čapmano lygtį [27] išskaitant šuolius arba naudojant šuolinę-difuzinę lygtį [34]. Rango kintamojo atveju yra įmanomas pakitimas, kuomet rangas pakinta daugiau negu per 1-ą vertę per vieną Gillespie modeliavimo žingsnį. Modelio ir artinio laiko eilutės yra pateikimos 22 (a) ir (b) paveiksluose.



21 pav. (a), (d) ir (g) pateikiama pirmo tipo agentų pirmajame erdviniame vienete normalizuoto rango tikimybės tankio skirstinys. Raudonos kreivės žymi modelio rezultatus, o juodos žymiai vienmačio stochastinio proceso artinj (savaiminės spartos  $\epsilon$  skiriasi paveikslams eilėje, žr. legendą). (b), (e) ir (h) pateikiami 1-os eilės, o (c), (f) ir (i) 2-os eilės Kramers-Moyal koeficientų kreivės ir jų atitinkamos eilės polinominės aproksimacijos. Modelio parametrai  $T = 1$ ,  $M = 10$ ,  $N = C = 100$ ,  $\epsilon$  vienodi paveikslams vienoje eilėje (žr. kairiausio paveikslo legendą).



22 pav. (c) pateikiami pirmo agentų tipo pirmame erdviniame vienete normalizuoto rango tikimybės tankio skirstinys. (a) ir (b) pateikiamos modelio ir artinio laiko eilučių iškarpos, normalizuoto rango priklausomybė nuo sistemos laiko  $t$ . Modelio parametrai  $T = 1$ ,  $M = 10$ ,  $N = C = 100$ , savaimines spartas žr. (c) paveikslo legendoje.



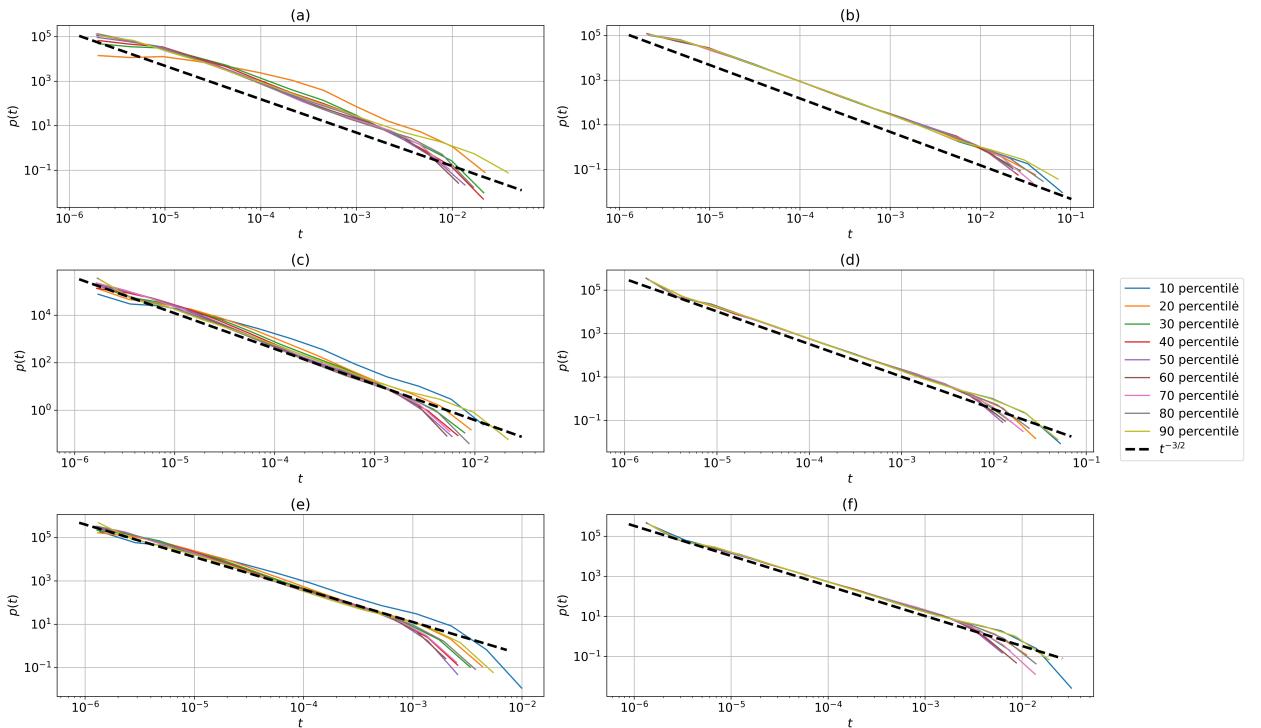
23 pav. Konkuruojančios dinamikos erdviniame rinkėjo modelyje pirmojo grįžimo laikų tikimybės tankio skirstiniai. (a), (c) ir (e) pateikiami skirstiniai gauti modeliui pagal spartas, o (b), (d) ir (f) pateikiami skirstiniai gauti vienmačio stochastinio proceso artiniui. Skirtingos kreivės atitinka atvejus, kai grįžimo riba nustatyta į populiacijos skirstinio percentilines vertes (žr. legendą). Modelio parametrai  $T = M = 2$ ,  $N = C = 100$ , spartos simetrinės ir pagal eilę atitinka spartas iš 16 paveikslolo.

## 4.7 Pirmojo grįžimo laikai konkuruojančios ir rangų dinamikos atvejais

Konkuruojančiai dinamikai ir rangų dinamikai erdviniame rinkėjo modelyje gaunami skirtinį aproksimacijos į vienmatį stochastinį procesą rezultatai. Remiantis pirmojo kirtimo laikų aprašymu, tai galima panaudoti kaip dar vieną testą nustatyti ar procesas iš tiesų yra vienmatis stochastinis (kartu ir Markovinis) procesas.

Abiejų dinamikų pirmojo grįžimo laikų kreivės pateiktos 23 pav. (konkuruojančiai dinamikai) ir 24 pav. (rangų dinamikai). Bendrai galima pastebėti, jog pirmojo kirtimo laikų skirstiniai artiniamas pagal Eulerio-Marujamos metodą yra labai tiksliai pasiskirstę pagal literatūroje pateikiamą  $t^{-3/2}$  dėsnį. Rezultatas intuityvus, kadangi toks artinys pagal savo apibrėžimą yra vienmatis Markovinis procesas. Kita vertus skirtingos grįžimo vertės pasirinkimas, grafikuose tai atitinka skirtingas skirstinio percentilines vertes, neturi reikšmingo kokybinio pokyčio apskaičiuotiems grįžimo laikų skirstiniams.

Lyginant abiejų dinamikų pirmojo grįžimo laikus tarpusavyje konkrečias išvadas daryti sudėtinga - abiems dinamikoms dėsnis yra panašus arba artimas  $t^{-3/2}$ , jis neįgyja kategoriskai kitokio proporcinqumo. Tačiau rangų dinamikai priklausomai nuo  $\epsilon$  parametruo vertės atsiranda grįžimo kreivių išlinkimas, kuris nėra panašus į griežtą Eulerio-Marujamos atveju gaunama proporcinqumą. Todėl galima manyti, jog rangų dinamika pasižymi nukrypimu ir skirtingais, o ne vienu, proporcinqais skirstinio srityse.



24 pav. Rangų dinamikos erdviniame rinkėjo modelyje pirmojo grįžimo laikų tikimybės tankio skirstiniai. (a), (c) ir (e) pateikiami skirstiniai gauti modeliui pagal spartas, o (b), (d) ir (f) pateikiami skirstiniai gauti vienmačio stochastinio proceso artiniui. Skirtingos kreivės atitinka atvejus, kai grįžimo riba nustatyta į populiacijos skirstinio percentilines vertes (žr. legendą). Modelio parametrai  $T = 1$ ,  $M = 10$ ,  $N = C = 100$ , savaiminės spartos pagal eilę atitinka spartas iš 21 paveikslo.

## 5 Išvados

1. Konkuruojančios dinamikos erdvino rinkėjo modelio agentų populiacijos skirstiniai yra pa-siskirstę pagal Beta binominį skirstinį tik simetriniu savaiminių migracijos ir būsenos spartų atvejais ( $\epsilon^{(k)} = \mu^{(k)}$ ).
2. Konkuruojančios dinamikos modelis yra tiksliai aproksimuojamas vienmačiu Markovo procesu esant simetrinėms ir asimetrinėms savaiminių migracijos ir būsenos kitimo spartų vertėms.
3. Erdvinio rinkėjo modelio rangų dinamikos aproksimacija vienmačiu Markovo procesu nau-dojant tik pirmą dviejų eilių Kramers-Moyal koefcientus nėra tiksliai.
4. Pirmojo grįžimo laikų skirstiniai konkuruojančios dinamikos atveju atitinka gaunamus vien-mačiams difuzijos procesams, o nekonkuruojančios rangų dinamikos atveju pasireiškia pri-klausomybė nuo ribos į kurią grįžtamą vertės ir savaiminių migracijos šuolių  $\epsilon$ .

## 6 Pristatymai konferencijose ir parama tyrimui

Šio tyrimo rezultatai buvo pristatyti stendiniai ir žodiniai pranešimai tarptautinėse ir nacionalinėse mokslinėse konferencijose:

- J. Kvedaravičius, A. Kononovičius, “**Erdvinio rinkėjo modelio rangų dinamikos aprašymas Fokerio-Planko lygtimi**“, LMT studentų konferencija, Vilnius, Lietuva. Žodinis pranešimas, gegužės 16 - 17 dienomis, 2024.
- J. Kvedaravičius, A. Kononovičius, “**Rank dynamics in compartmental voter model**“. Konferencija DPG Meeting of the Condensed Matter Section, 2024, Berlynas, Vokietija. Stendinis pranešimas, kovo 17-22 dienomis, 2024.
- J. Kvedaravicius, A. Kononovicius, “**Competing dynamics in compartmental voter model**“, Konferencija Open Readings, 2024, Vilnius, Lietuva. Stendinis pranešimas, balandžio 18 – 21 dienomis, 2024.
- J. Kvedaravicius, A. Kononovicius, “**Scaling index to measure spatial patterns in competing dynamics Ising model**“. Konferencija International Conference of Young Scientists and Post-Graduate Students, Užhorodas, Ukraina. Žodinis pranešimas, gegužės 15 – 18 dienomis, 2023.
- J. Kvedaravicius, A. Kononovicius, “**Spatial diversity in competing dynamics Ising model**“. Konferencija Open Readings, 2023, Vilnius, Lietuva. Žodinis pranešimas, balandžio 18 – 21 dienomis, 2023.

Dalis tyrimo rezultatų gauti įgyvendinant Lietuvos mokslų tarybos remiamą studentų tyrimų semestro metu projektą Nr. S-ST-23-122, pavadinimu "Rangų dinamika erdviniame rinkėjo mode lyje".

**ERDVINIO RINKĖJO MODELIO SU KONKURUOJANČIA DINAMIKA  
APROKSIMAVIMAS VIENMATE FOKERIO-PLANKO LYGTIMI**

**Santrauka**

Fiziniai socialinių sistemų modeliai siekia aprašyti realius socialinius procesus panaudodami agentais paremtą modeliavimą. Jeigu daromos prielaidos apie socialinių agentų esmines savybes yra pernelyg reduktyvios - modelio rezultatų palyginimas su empiriniais duomenimis tampa kebillus. Dauguma dabartinių nuomonių dinamikos modelių nėra validuoti empiriniais duomenimis. Rezultatų palyginamumui pagerinti kai kurie autorai sėkmingai pritaikę idėją vietoje laikinio sistemos modeliavimo pasitelkti erdinį modeliavimą, pavyzdžiui, migraciją arba kasdienį mobilumą.

Poreikis validuoti modelius remiantis empiriniais duomenis sukelia iššūkių dėl duomenų įvairovės problemos. Nuomonių dinamika pasireiškia sistemoje, kurios tarpusavyje nėra paprastai palyginamos, pavyzdžiui, demokratiniuose procesuose, socialiniuose tinkluose, Eurovizijos balsavimuose ir panašiai. Nors šiose sistemoje naudojami įverčiai (dydžiai) tiesiogiai nesilygina, iš daugelio dalykų galima sudaryti palyginamus rango-dydžio sąrašus. Jei rangai kinta laike galima analizuoti jų laikinę dinamiką. Kai kuriems empiriniams duomenims rangų dinamiką galima modeliuoti kaip vienmatį stochastinį procesą - vieno rango kitimas laike gali suteikti pakankamai informacijos apibūdinti visos sistemos dinamikai.

Šiame tyryme išplečiamas ir analizuojamas erdinis rinkėjo modelis su dviem fundamentaliais fiziniais nuomonių dinamikos procesais - būsenos kitimo ir vietų apsikeitimo vyksmais. Šio tyrimo tikslas - Erdvinio rinkėjo modelio su konkurojančia dinamika aproksimavimas vienmačiu Markovo procesu. Pagrindiniai darbo rezultatai yra šie:

1. Konkurojančios dinamikos erdinio rinkėjo modelio stacionarus populiacijos dalies skirstinys nevisais atvejais aprašomas Beta binominiu skirstiniu. Pagal šį skirstinį erdinio vieneto populiacija yra pasiskirsčiusi tik simetrinių savaiminių šuolių tarp būsenų spartų atvejais.
2. Konkurojančios dinamikos erdinis rinkėjo modelis yra gerai aprašomas vienmate Fokerio-Planko lygtimi, todėl yra tikliai aproksimuojamas kaip vienmatis Markovinis procesas. Kita vertus, rangų dinamikai aproksimuoti vienmačiu Markoviniu procesu nepakanka atsižvelgti į pirmų dviejų Kramers-Moyal koeficientų vertes.
3. Modelio rangų dinamikos pirmojo grįžimo laikų skirstiniai kinta priklausomai nuo savaiminės šuolių tarp būsenų spartos ir neatitinka laikinio  $t^{-3/2}$  proporcijumo. Rango kintamasis gali kisti netolydžiai todėl būtų tiksliau aprašomas šuoline-difuzijos lygtimi, o Fokerio-Planko lygtyste į šuolinius procesus neatsižvelgiama.

## APPROXIMATION OF COMPETING DYNAMICS COMPARTMENTAL VOTER MODEL TO ONE-DIMENSIONAL FOKKER-PLANCK EQUATION

### Summary

Models in sociophysics aim to describe real social processes with the use of agent based modeling. If the underlying assumptions of the model are too reductive, the empirical validation becomes difficult. Most of the currently developed models lack empirical validation. Some overcame this issue by accounting for spatial dynamics, i.e. migration or commuting.

The need to validate with empirical data also poses challenges regarding the diversity of data. Opinion dynamics are concerned with data which are intrinsically difficult to compare, e.g. democratic elections, interactions in social networks, Eurovision voting, etc. Even though scores in these systems are uncomparable, the ranking (rank-size distributions) provide a general framework to compare such data. If ranks vary in time, rank dynamics can be analyzed. For some empirical data rank dynamics can be modelled as one-dimensional Markov processes - change of one rank over long enough period of time is enough to describe dynamics of the system.

In this research we extend compartmental voter model to competing dynamics case by introducing state change and space exchange processes. The goal of this thesis is to approximate compartmental voter model with competing dynamics to one-dimensional Markov process. The main results are these:

1. Competing dynamics compartmental voter models stationary distribution of population in compartment is not necessarily distributed by Beta-binomial distribution. It is only the case for symmetric choice of idiosyncratic transition rates between states.
2. Competing dynamics compartmental voter model is well approximated by one-dimensional Fokker-Planck equation thus being a one-dimensional Markov processes. For rank dynamics, however, accounting for first two orders of Kramers-Moyal coefficients is not enough to approximate to one-dimensional Markov process.
3. First return times of ranking dynamics in the model depend on idiosyncratic transition rates and do not necessarily follow the power law of  $t^{-3/2}$ . Rank variable can change discontinuously thus leading to a jump-diffusion process, where as Fokker-Planck equation does not account for jump processes.

# Literatūra

- [1] A. F. Peralta, J. Kertész, G. Iñiguez, Opinion dynamics in social networks: From models to data (2022).
- [2] J. Fernández-Gracia, K. Suchecki, J. J. Ramasco, M. Miguel, V. Eguíluz, Is the voter model a model for voters?, *Physical Review Letters* **112**, 158701 (2014).
- [3] A. Kononovicius, Compartmental voter model, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* **2019**, 103402 (2019).
- [4] G. Iñiguez, C. Pineda, C. Gershenson, A.-L. Barabási, Dynamics of ranking, *Nature Communications* **13**, 1646 (2022).
- [5] N. Blumm, G. Ghoshal, Z. Forró, M. Schich, G. Bianconi, J.-P. Bouchaud, A.-L. Barabasi, Dynamics of ranking processes in complex systems, *Physical Review Letters* **109** (2012).
- [6] C. Castellano, S. Fortunato, V. Loreto, Statistical physics of social dynamics, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 591–646 (2009).
- [7] P. Krapivsky, S. Redner, E. Ben-Naim, *A Kinetic View of Statistical Physics* (Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2010, 2010).
- [8] B. K. C. Parongama Sen, *Sociophysics: An Introduction* (Oxford university Press, 2014).
- [9] M. E. J. Newman, G. T. Barkema, *Monte Carlo Methods in Statistical Physics* (Clarendon Press, Oxford, 1999).
- [10] H. Jang, M. Grimson, T. Woolf, Stochastic dynamics and the dynamic phase transition in thin ferromagnetic films, *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics* **70**, 047101 (2004).
- [11] D. Landau, K. Binder, *A Guide to Monte Carlo Simulation in Statistical Physics* (Cambridge University Press, 2005).
- [12] T. Tome, M. J. de Oliveira, M. A. Santos, Non-equilibrium ising model with competing glauber dynamics, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **24**(15), 3677 (1991).
- [13] W. Figueiredo, B. Grandi, Competing spin dynamics in ising systems, *Brazilian Journal of Physics* **30** (2000).
- [14] J. Gonzalez-Miranda, P. Garrido, J. Marro, J. Lebowitz, Nonequilibrium phase diagram of ising model with competing dynamics, *Physical Review Letters* **59** (1987).
- [15] S. Artz, S. Trimper, Competing glauber and kawasaki dynamics, *International Journal of Modern Physics B* **23** (1998).
- [16] P. Clifford, A. Sudbury, A model for spatial conflict, *Biometrika* **60**(3), 581–588 (1973).

- [17] A. Kirman, Ants, rationality, and recruitment, *The Quarterly Journal of Economics* **108**(1), 137–156 (1993).
- [18] A. Kononovicius, *Applications of Statistical Physics in Modeling of Financial Markets and Social Processes*, Ph.D. thesis, Vilnius university (2015).
- [19] A. Kononovicius, Supportive interactions in the noisy voter model, *Chaos Solitons Fractals* **143**, 110627 (2021).
- [20] R. Kazakevičius, A. Kononovicius, Anomalous diffusion in nonlinear transformations of the noisy voter model, *Physical Review E* **103** (2021).
- [21] B. L. Granovsky, N. Madras, The noisy voter model, *Stochastic Processes and their Applications* **55**(1), 23–43 (1995).
- [22] S. Mori, M. Hisakado, K. Nakayama, Voter model on networks and the multivariate beta distribution, *Physical Review E* **99**(5) (2019).
- [23] A. Kononovicius, Noisy voter model for the anomalous diffusion of parliamentary presence, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* **2020**, 063405 (2020).
- [24] A. Kononovicius, J. Ruseckas, Continuous transition from the extensive to the non-extensive statistics in an agent-based herding model, *The European Physical Journal B* **87**, 169 (2014).
- [25] D. Stauffer, A biased review of sociophysics, *Journal of Statistical Physics* **151** (2012).
- [26] M. E. J. Newman, Power laws, pareto distributions and zipf's law, *Contemporary Physics - CONTEMP PHYS* **46** (2004).
- [27] C. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods* (Springer Berlin, Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009).
- [28] H. Risken, *Fokker-Planck Equation* (Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1996), 63–95.
- [29] S. Redner, *A Guide to First-Passage Processes* (Cambridge University Press, 2001).
- [30] N. Van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, North-Holland Personal Library (Elsevier, Amsterdam, 2007), third edition edition.
- [31] D. T. Gillespie, A general method for numerically simulating the stochastic time evolution of coupled chemical reactions, *Journal of Computational Physics* **22**, 403–434 (1976).
- [32] N. Masuda, C. L. Vestergaard, *Gillespie Algorithms for Stochastic Multiagent Dynamics in Populations and Networks*, Elements in the Structure and Dynamics of Complex Networks (Cambridge University Press, 2023).

- [33] A. Kononovicius, J. Ruseckas, Stochastic dynamics of n correlated binary variables and non-extensive statistical mechanics, Physics Letters A **380**, 1582–1588 (2016).
- [34] L. Rydin Gorjão, D. Witthaut, K. Lehnertz, P. G. Lind, Arbitrary-order finite-time corrections for the kramers–moyal operator, Entropy **23**(5) (2021).
- [35] E. P. Peter E. Kloeden, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations* (Springer Berlin, Heidelberg, 1999).