Algunos aspectos topológicos de las matrices

Adrian Ricardo Gómez Plata*
Universidad Militar NuevaGranada

Julio 28 de 2006
X Encuentro de Matemática y sus aplicaciones
Quito

Abstract

Es bien conocido que las matrices Unitarias $\mathcal{U}$, Ortogonales $\mathcal{O}$, Normales $\mathcal{N}$ pertenecen al grupo lineal general $\mathcal{GL}_n$ y se puede demostrar que dicho grupo es un abierto en las matrices de cuadradas $\mathcal{M}$. En la literatura se puede encontrar de forma dispersa, algunos resultados topólogicos relacionados con estos subconjuntos de matrices y en algunas partes aisladas del análisis numérico, se muestran algunas aplicaciones de dichos aspectos.

Se presentará en esta ponencia, respuesta a ciertas preguntas topo lógicas asociadas con las matrices como:
Las matrices unimodulares $\mathcal{SL}_n$ y GL_n son compactos ?
Las matrices unitarias $\mathcal{U}$ es un cerrado o un abierto, es acotado ?
Las matrices ortogonales $\mathcal{O}$ es un compacto?
Las matrices $\mathcal{D}$ son densas, el grupo lineal general $\mathcal{GL}_n$ es denso?
Las matrices normales $\mathcal{N}$ son acotadas, conexas, que forma tienen?

Palabras Claves: subvariedad estratificada, forma de estrella, matrices: unitarias, ortogonales, normales, diagonales, no singulares.

*Investigador del grupo Matrix Universidad Militar Nueva Granada. mail:adrian.gomez@umng.edu.co

1 Introducción

1.1 Notación de la Teoría de Matrices

Se toma como referencia el conjunto de las matrices cuadradas de orden n denotadas con $\mathcal{M}$ y con entradas en los números complejos $\mathbb{C}$ y alli consideramos:

Matrices Normales	$\mathcal{N}$=$\{A \in \mathbb{C}^{n\times n}; AA^* = A^*A\}$
Matrices Unitarias	$\mathcal{U}$=$\{U \in \mathbb{C}^{n\times n}; UU^* = U^*U = I\}$
Matrices Ortogonales	$\mathcal{O}$=$\{A \in \mathbb{R}^{n\times n}; AA^t = A^tA = I\}$
Matrices Diagonales	$\mathcal{D}$=$\{D \in \mathbb{C}^{n\times n}; D = diag\,(d_1, ..., d_n)\}$
Matrices no singulares	$\mathcal{GL}_n$= $\{A \in \mathbb{C}^{n\times n}; detA \neq 0\}$.
Matrices unimodulares	$\mathcal{SL}_n$= $\{A \in \mathbb{C}^{n\times n}; detA = 1\}$.

Teorema 1. *(Teorema Espectral) Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. A es normal

2. A es unitariamente diagonalizable o lo mismo es unitariamente similar a una matriz diagonal, es decir existe una matriz unitaria U y una matriz diagonal Λ tal que $A = U\Lambda U^*$

2 Topológia en las matrices

Proposición 1. *El determinante $det : \mathcal{M} \to \mathbb{C}^n$ es una función continua.*

Proposición 2. *$\mathcal{GL}_n$$\subset$ $\mathcal{M}$ es un subconjunto abierto y $\mathcal{SL}_n$$\subset$ $\mathcal{M}$ es un subconjunto cerrado.*

Demostración. La función determinante es continua, entonces

$$\mathcal{GL}_n = \mathcal{M} \text{ - } det^{-1}\{0\}$$

es un abierto porque $\{0\}$ y las matrices de determinate cero son cerradas ya que el determinante por ser continua envia cerrados en cerrados. Similarmete

$$\mathcal{SL}_n{=}det^{-1}\left\{1\right\}{\subseteq}\mathrm{GL}_n$$

es cerrado en $\mathcal{M}$ y $\mathcal{GL}_n$ ya que el conjunto $\{1\}$ es un cerrado en $\mathbb{C}$. $\square$

Definición 1. *Para $A \in \mathcal{M}$ considere el conjunto*

$$\delta_A = \left\{ \frac{|Ax|}{|x|} : 0 \neq x \in \mathbb{C}^n \right\}$$

Entonces la función norma $\| \ \|: \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ definida como $\|A\| = \max \delta_A$ es llamada la norma del supremo en $\mathcal{M}$.

Tambien se puede considerar la norma TRAZA denotada por $\|A\|_T$ e inducida por el producto interno para $A, B \in \mathcal{M}$

$$\langle A, B \rangle = Tr\left(B^* A\right)$$

es decir

$$\|A\|_T = Tr\left(A^* A\right)$$

Corolario 1. *$\mathcal{GL}_n$ y $\mathcal{SL}_n$ no son compactos si $n \geq 2$*

Demostración. Cosideremos las siguiente matriz diagonal de $n \times n$

$$A_k{=}diag\left(k, \tfrac{1}{k}, 1, ..., 1\right) \qquad (k \geq 1)$$

Aqui el $detA_k{=}1$ y a su vez $A_k \in \mathcal{SL}_n{\subset}\ \mathcal{GL}_n$. Aqui $\|A_k\| = k$ pero $k \to \infty$, luego esta sucesión es no acotada. $\square$

Corolario 2. *$\mathcal{O}$ y $\mathcal{U}$ son compactos.*

Demostración. El subconjunto $\mathcal{O}$=$\{A \in \mathbb{R}^{n\times n}; AA^t - I = 0\}$ es acotado para toda $A \in \mathcal{O}$, $\|A\| = 1$. Es tambien cerrado porque si tomamos una sucesión $A_r \in \mathcal{O}$ que converja a $A \in \mathcal{M}$ entonces

$$A^tA - I = A_r^tA_r - I = 0 \;\text{ cuando }\; r \to \infty$$

Asi $\mathcal{O}$ es compacto y la demostración para el subconjunto de las unitarias se da con un argumento similar.

□

Se pueden demostrar en forma sencilla el corolario 2 usando la norma TRAZA y la teoria de matrices.

Proposición 3. *Sean $t_1, ..., t_n \in \mathbb{C}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Entonces existe una colección de escalares $d_1, ..., d_n \in \mathbb{C}$ tal que $|d_i| < \alpha$ y $t_1 + d_1, ..., t_n + d_n$ son todos distintos.*

Teorema 2. *Sea $A \in \mathcal{M}$ para todo $\epsilon > 0$, existe una matriz $A_\epsilon \in \mathcal{M}$, tal que tiene n valores propios distintos (es diagonalizable) y además*

$$\|A - A_\epsilon\| < \epsilon$$

es decir el conjunto de las matrices diagonalizables $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{M}$

Demostración. Sean $A \in \mathcal{M}$ y $\epsilon > o$. Por el teorema de Schur existe una matriz unitaria $U \in \mathcal{M}$ tal que $U^*AU = T$, donde T es una matriz triangular superior. Usando la proposición 6, existen escalares $d_1, ..., d_n$ tales que

$$|d_i| \leq \sqrt{\tfrac{\epsilon}{n}}$$

y que $t_1 + d_1, ..., t_n + d_n$ son todos distintos.

Sea $D = diag\,(d_1, ..., d_n)$, observemos que $T + D$ y $T + UDU^*$ son similares y tiene n valores propios distintos $t_1+d_1, ..., t_n+d_n$. Llamemos $A_\epsilon = A+UDU^*$ y notese que esta matriz es diagonalizable entonces:

$$\|A - A_\epsilon\|_T^2 = \|UDU^*\|_T^2 = Tr\,((UDU^*)^*(UDU^*)) = Tr(D^*D) = \textstyle\sum_{i=1}^n |d_i|^2 \leq \epsilon.$$

□

Corolario 3. *El conjunto $\mathcal{GL}_n$ es denso en $\mathcal{M}$.*

Proof. Dada una matriz diagonal $D_{(\epsilon)} = diag(d_1, ..., d_n)$, existe una matriz diagonal $E_{(\epsilon)} = diag(e_1, ..., e_n)$ tal que todos sus elementos e_i son no nulos y distintos y para el cúal se tiene

$$\|D - E\|_T < \tfrac{\epsilon}{2} \quad \text{para } \epsilon > 0$$

Sea $A \in \mathcal{M}$ y $\epsilon \geq 0$, tomemos $d_1, ..., d_n$ como en la proposición 6 tal que

$$|d_i| \leq \sqrt{\tfrac{\epsilon}{2n}}$$

Usemos el teorema de triangularización de Schur sobre A y similaridad sobre $T + E_{(\epsilon)}$ y hagamos $C_{(\epsilon)} = A + UE_{(\epsilon)}U^*$, entonces aplicando el teorema 4 y la desigualdad triangular tenemos

$$\left\|A - C_{(\epsilon)}\right\|_T \leq \left\|A - A_{(\epsilon)}\right\|_T + \left\|A_{(\epsilon)} - C_{(\epsilon)}\right\|_T \leq \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$\square$

Tambien se puede probar que para $n \geq 1$, $\mathcal{GL}_n$ y $\mathcal{U}$ son caminos conexos y por tanto conexos, pero para esto se requiere el uso de la teoría de Grupos de Lie. En [4] Baker expone algunos aspectos topologicos de las matrices desde esta perspectiva.

3 Variedades

Se daran algunas definiciones utiles de variedades para mostrar dos subvariedades de matrices.

3.1 Dos Subvariedades de Matrices

Definición 2. *Sea M un espacio topológico de Hausdorff separable. Si $U \subset M$ y $V \subseteq \Re^n$ son subconjuntos abiertos, un homeomorfismo $f : U \longrightarrow V$ es llamado una $n-carta$ para U.*

Definición 3. *Si $\Omega = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ es un cubrimiento de M y $F = \{f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha\}$ es una colección de $n-cartas$, F es llamado un atlas para M si dado que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces $f_\beta \circ f_\alpha^{-1} : f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es un difeomorfismo.*

Definición 4. *Un atlas es denotado por* (M, Ω, F) *y se refiere a una variedad suave de dimensión* n.

Un ejemplo sencillo de variedad lo proporciona el mismo espacio de $\Re^n$, ya que para todo $x \in \Re^n$ se puede tomar U como $\Re^n$. Obviamente $\Re^n$ es homeomorfico a el mismo. Un subconjunto M de $\Re^2$ formado por las rectas $y = x$ e $y = -x$ no es una variedad ya que no es posible establecer un homeomorfismo entre $V_{(0,0)} \bigcap M$ y $V((0, 0))$.

Proposición 4. *Si* M_1 *y* M_2 *son variedades de dimensión* n_1 *y* n_2*, respectivamente, entonces* $M_1 \times M_2$ *es una variedad de dimensión* $n_1 + n_2$*. En particular el espacio producto de* n *circulos unitarios* $S^1 \times ... \times S^1$ *(con* n *factores) es una variedad de dimensión* n

Definición 5. *Sea* (M, Ω, F) *una variedad de dimensión* n*. Un subconjunto* $N \subseteq M$ *es una subvariedad de dimensión* k *si para todo* $p \in N$ *existe una vecindad abierta* $U \subset M$ *de* p *y una* $n - carta$ $f : U \longrightarrow V$ *tal que*

$$p \in f^{-1}(V \cap \Re^k) = N \cap U.$$

Corolario 4. *El subconjunto*

$$M = \{(A, b) \in \mathcal{M}(\Re) \times \Re : b\, detA = 1\} \subseteq \mathcal{M}(\Re) \times \Re$$

es una subvariedad cerrada de $\mathcal{M}(\Re) \times \Re$.

Demsotración. Definamos la siguiente función

$$F : M_n(\Re) \times \Re \to \Re \ ; \ F(A, b) = b\, detA - 1.$$

Esta es función es suave y $M = F^{-1}0 \subset \mathcal{M}(\Re)$ es un subconjunto cerrado. La derivada del mapeo $d = d_{(A,b)}$ en un punto $(A, b) \in F^{-1}0$ tiene la forma

$$d(X, v) = (detA)v + d\, det_A(X)$$

donde la identificación natural de $T_{(A,b)}\mathcal{M}(\Re)\times(\Re) = \mathcal{M}(\Re)\times(\Re)$ y $T_t(\Re) = (\Re)$, para todo $t \in \Re$. El $detA \neq 0$ es sobreyectivo. Aqui $M \subseteq \Re \times \Re$ es una subvariedad suave de dimensión igual a la $dim\ \mathcal{M}(\Re) = n^2$. □

Otro ejemplo se encuentra en el conjunto de matrices normales. Una matriz $N \subset \mathcal{M}$ se dice que es normal si $NN^* = N^*N$. Ahora una matriz diagonal $D \in \mathcal{D}$ se dice que es similar unitariamente a una matriz $N \in \mathcal{N}$ si existe una matriz unitaria $U \in \mathcal{M}$ tal que

$$D = U^*NU.$$

de donde se tiene $UDU^* = UU^*NUU^*$ es decir que el conjunto de matrices normales se puede ver como

$$N = UDU^*$$

Esto sugiere que el conjunto de matrices normales $\mathcal{N}$ sea pueda obtener por medio de la siguiente función

$$\begin{aligned} F : \mathcal{M} \times \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{N} \\ (U, D) &\mapsto UDU^* \end{aligned}$$

Esta función es suave y $G = (F^{-1})(UDU^*) \subset \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ es tal que $N \subset \mathcal{M} \times \mathcal{M} \subseteq \Re^{2n^2}$ ya que conjuntos compactos tienen preimagenes compactas.

3.2 Forma de estrella de las matrices normales

Se definirá las variedades en forma de estrella y se mostrará que las matrices normales tienen forma de estrella.

Definición 6. *Una variedad M es llamada contraible a un punto $p_0 \in M$ si existe una función*

$$H : M \times [0, 1] \longrightarrow M$$

tal que

$$H(p, 1) = p,\ H(p, 0) = p_0 \textit{ para } p \in M$$

Mas generalmente, $U \in \Re^{2n^2}$ es contraible a un un punto $p_0 \in U$ si U tiene la propiedad de que si $p \in U$ esto implica que $p_0 + t(p - p_0) \in U$ para $0 \leq t \leq 1$. Tal region se le dice que tiene forma de estrella con respecto de p_0.

Por ejemplo $\mathcal{N}$ es contraible a la matriz *cero*. Para ver esto definamos la siguiente función

$$H : \mathcal{M} \times [0, 1] \longrightarrow \mathcal{M}$$

Definiendo

$$H(p, t) = tN$$

podemos ver que $H(N, 1) = N$, $H(N, 0) = 0$. Esto implica que $\mathcal{N}$ tiene forma de estrella.

4 Espacios estratificados

Se definirá que es un espacio estratificado y se mostrará el conjunto de matrices normales como una subavariedad estratificad

4.1 Estratificación de las Matrices Normales

Definición 7. *Sea W un espacio topólogico de Hausdorff localmente compacto con bases contables. Una estratificación en W es una partición $\sum$ en conjuntos cerrados localmente tal que :*

i) Todo $X \in \sum$ es una variedad de dimensión finita con frontera.
ii) $\sum$ es finita localmente.
iii) Si $X, Y \in \sum$ y $X \bigcap \widetilde{Y} \neq \emptyset$ entonces $X \subseteq \widetilde{Y}$.
iv) Si $X, Y \in \sum$ y $X \subseteq \widetilde{Y}$ con $X \neq Y$ entonces $dimX < dimY$

Los conjuntos de la partición de los elementos de $\sum$ son llamados el estrato. El par $(W, \sum)$ es llamado un espacio estratificado.

Ejemplos. Algunos conjuntos importantes que admiten estratificación son:

1. Variedades con frontera donde $\sum = \{Int(M), \partial M\}$.En particular se puede mencionar las matrices cuadradas $\mathcal{M}$.
2. Variedades algebraicas y espacios analíticos en $\Re$ o C.
3. Conjuntos analíticos y subanalíticos. En particular las matrices normales $\mathcal{N}$ son un conjunto subanalitico de las matrices $\mathcal{M}$ ya que si se toma el conjunto imagen de la función

$$\begin{aligned} F : \mathcal{M} \times \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{N} \\ (U, D) &\mapsto UDU^* \end{aligned}$$

Por el teorema espectral

$$z \in \mathcal{N} \Leftrightarrow Z = UDU^*$$

y de esta manera $\mathcal{N} = Im(F)$, luego F es analítica. Ademas F es propia (imagen inversa de compactos es compacto) ya que como estamos en un espacio metrico la noción de conjunto compacto equivale a que el conjunto sea cerrado y acotado. Para esto sea $B \in \mathcal{N}$ compacto y mostremos que $F^{-1}(B)$ es cerrado y acotado:

Dado que F es continua, por ser analítica, y que B es cerrado entonces $F^{-1}(B)$ es cerrado. Por otra parte tenemos que:

$$F^{-1}(B) = \{(U, D) \in \mathcal{U} \times \mathcal{D} : F(U, D) \in B\}$$

teniendo en cuenta que estamos en un espacio metrico de dimensión finita, todas las normas son equivalentes y en particular tenemos que para una constante k

$$\|(U, D)\|_{\mathcal{U}\times\mathcal{D}} \leq k \max_{(U,D)\in F^{-1}(B)} \{\|U\|_T, \|D\|_T\}$$

pero $\|U\|_T = (tr(UU^*))^{\frac{1}{2}} = (tr(I))^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$

y $\|D\|_T = \|UDU^*\|_T = \|F(U, D)\| \leq k$ pues B es acotado.

Así $F^{-1}(B)$ es acotado. Luego de todo lo anterior tenemos que $F^{-1}(B)$ es compacto y de esta manera propia.

4. Variedades con esquinas.

Un teorema relacionado con los conjuntos subanaliticos que admiten estratificación es presentado por Robert.M. Hard. en [2] y dice textualmente:

Teorema 3. *For any locally finite family ϑ of semianalytic (resp.,subanalityc) subsets of a paracompact real analytic manifold M there is a semianalytic stratification of M compatible with ϑ.*

El anterior teorema es conocido como el Terorema de Estratificación y una consecuencia de este es que las matrices Normales $\mathcal{N}$ son una subvariedad estratificada de $\Re^{2n^2}$ que sumado con el hecho de que la matrices normales tienen forma de estrella caracteriza estas matrices en un ambiente topológico mas claro.

Una aplicación de esta temática la hace Huhtanen en [2] para realizar aproximaciones de valores y vectores propios donde intervienen matrices normales.

5 Bibliografia.

[1] M.HUTHANEN. A Stratification of the set of normal matrices,SIAM J, Matrix Anal. Appl. Vol 23,N.2,pp349-367,2001.
[2] R.M.HARD. Topological properties of subanalytic sets, Trans. AMS,211:57-70, 1975.
[3] A. GOMEZ. A strata of normal matrices. Ciencia e Ingenieria Neogranadina,15: 6-11,2005.
[4]a. BAKER. Matrix Group, An Introdution to Lie Group Theory. Springer Undergraduate Mathematics Series.2001