Análisis de Fourier

Transformada de Fourier Discreta

Marina Estévez
Andrés Herrera
Adrián Segura
Santiago Navarro
David Moya
Juan Luis Suárez

Índice

1. Introducción

Al parecer Gauss ya sacó muchas de estas cosas (incluso FFT) pero no las publicó. Buscar cosas al respecto para motivar al zeñó Payá.

2. Transformada de Fourier Discreta

Sea $f \in L_1(\mathbb{R})$ recordamos que la transformada de Fourier de f viene definida como:

$$\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-its} f(s) ds \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Como nuestra función está en $L_1(\mathbb{R})$ esto nos dice que $f(x) \longrightarrow 0$ cuando $|x| \longrightarrow \infty$, es claro que la integral en un intervalo compacto $[a, b]$ para $a < 0, \quad b > 0$ y $|a|, |b|$ suficientemente grandes se aproxima al valor de la integral en este intervalo:

$$\int_a^b e^{-its} f(s) ds$$

Entonces la idea para definir la transformada de Fuorier discreta viene dada por aproximar esta integral por métodos numéricos. Si hacemos una partición para tener un proceso similar al de las sumas de Riemann a la hora de construir su integral nos encontramos con el problema de que necesitamos un intervalo compacto y es por esto la discusión anterior. Por tanto lo que haremos es:

$$\widehat{f}(\omega) \approx \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-i\omega t_k} \Delta t$$

Sea ahora $t_0 = a < t_1 < ... < t_{N-1} = b$, una partición con espaciado uniforme del intervalo $[a, b]$. Tenemos por tanto que $\Delta t = \dfrac{b-a}{N}$ y $t_k = a + k\Delta t$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$ y llamando ϕ a la aproximación de $\widehat{f}$ anterior tenemos:

$$\phi(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-i\omega t_k} \Delta t = e^{i\omega a} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-i\omega k(b-a)/N} \Delta t$$

Por último llamando $\omega_n = \dfrac{2\pi n}{b-a}$ tenemos que

$$\phi(\omega_n) = e^{i\omega_n a} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-i2\pi nk/N} \Delta t,$$

lo que nos da pie a hacer la siguiente definición.

Dada $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función se define $Df : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ donde,

$$Df(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-i2\pi nk/N},$$

o para simplificar, si llamamos $w = e^{2\pi i/N}$ reescribimos lo anterior como:

$$Df(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) w^{-nk}$$

Nótese que estamos tratando solo con un número finito de valores de f y por tanto nuestra función se puede tratar como una n-upla de números complejos, es decir para nuestras ecuaciones $f \equiv$ Nótese que la matriz de la DFT es una matriz de vandermonde.

3. Transformada de Fourier Discreta Multidimensional

4. Convolución

5. Transformada de Fourier Rápida

Rader's FFT algorithm - https://en.wikipedia.org/wiki/Rader%27s_FFT_algorithm

https://dsp.stackexchange.com/questions/15822/how-to-choose-a-fft-algorithm

6. Aplicaciones en la teoría de algoritmos

Richard Baraniuk - "FFTs are run billions of times a day"

Gilbert Strang - "FFT is the most important numerical algorithm of our lifetime"

6.1. Convolución

Determining optimal time translations!

Convolution neural networks!

6.1.1. Producto de polinomios

A Multiplication Algorithm for integers!

6.1.2. 2D

6.2. Matrices circulares

aplicaciones de las matrices circulares...

https://math.stackexchange.com/questions/2246941/book-recommendation-for-dft-fft

One important part of the discrete fourier transform is that it diagonalizes circulant operators (i.e. circular convolution). And circular convolution is related to linear convolution, which is what a linear time invariant system does (convolves its impulse response with the input). Thus, the basis provided by the DFT is a special one (it's not an arbitrary orthonromal basis).

Circular graphs...

Toeplitz and Circulant Matrices: A review

2012 - Matrix operations

6.3. Quantum computation. Schor's algorithm

7. Aplicaciones en procesamiento de señales e imágenes

https://www.quora.com/What-are-the-major-applications-of-the-Fast-Fourier-Transform-FFT-to-algorithm

https://www.youtube.com/watch?v=aqa6vyGSdos

7.1. Señales...

K dominant coefficients of the DFT.... Applications to compression. Sparse Fourier transform, citations.

Escáner (resonancia magnética - medicina). Estas máquinas calculan los coeficientes de Fourier de la señal gracias a determinadas propiedades físicas. La transformada de fourier recupera la señal. En principio, la señal es continua. Sin embargo, en la práctica solo podemos medir un número finito de coeficientes, razón por la cual se utiliza la DFT.

Our brains appliy the Fourier transform all the time when listening!

7.1.1. Compresión: MP3...

7.2. Imágenes

7.2.1. Compresión

MPEG.

7.2.2. Gaussian Blur

7.2.3. Marcas de agua

7.2.4. Convolución de imágenes