

# Modelamiento de ondas largas con pequeñas amplitudes unidireccionales

Antonio Vásquez, Joel

joel.antonio@ucsp.edu.pe

**Asesor:** Prof. Dr. Paúl Dugán Nina Ortiz

Universidad Católica San Pablo  
Arequipa- Perú

12-10-17

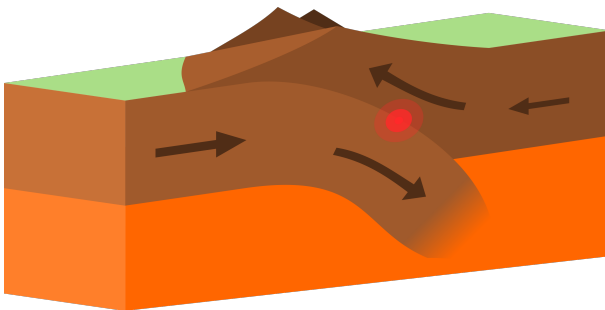
# Outline

- 1 Introducción
- 2 Marco Teórico y Propuesta
  - Discretización
- 3 Pruebas y Resultados
  - Primera Prueba
  - Segunda Prueba
  - Tercera Prueba
  - Prueba Gráfica
  - Océano caótico
- 4 Conclusiones

# Motivación

## ¿Qué es un onda?

Es el resultado de un impulso que viaja a través de un espacio (e.g. ondas del mar, actividad eléctrica del corazón, etc).



# Onda producida por un impulso

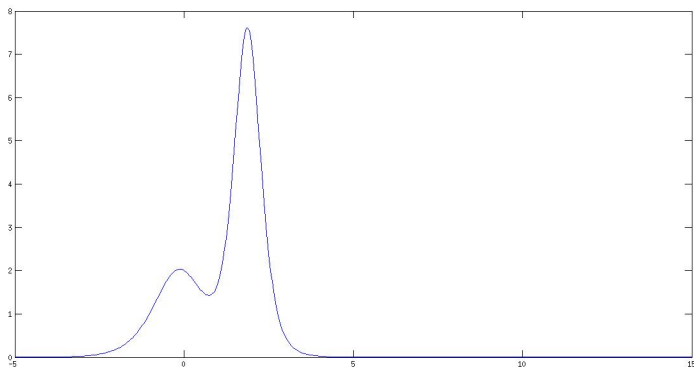


Figure 1: Onda producida por un impulso.

# Aplicaciones

El modelado de ondas nos pueden ayudar a obtener las siguientes aplicaciones:

- Predecir la intensidad con la que va a llegar un tsunami.
- Calcular el tiempo que puede durar un movimiento sísmico según el impulso recibido.

# Objetivo

Análisis numérico de la ecuación

$$u_t + \epsilon uu_x + \mu uu_{xxx} = 0. \quad (1)$$

propuesta por L. Rosier en el 2016.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>L. Rosier, *On the Benjamin-Bona-Mahony equation with a localized damping*. Journal Math. **49** Study (2016), 195-204

# Espacio

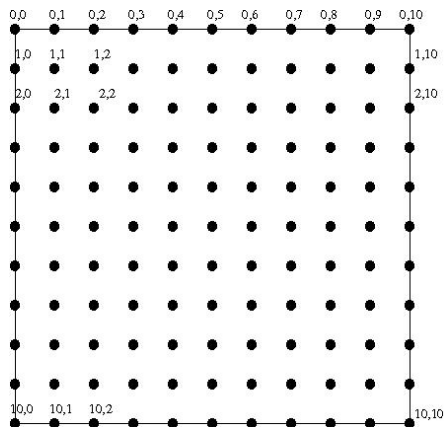


Figure 2: Malla donde la onda se desplaza.

# Método de Elementos Finitos

**Desafío:** La cantidad de puntos necesarios para calcular la predicción del siguiente punto, es de 8 puntos.

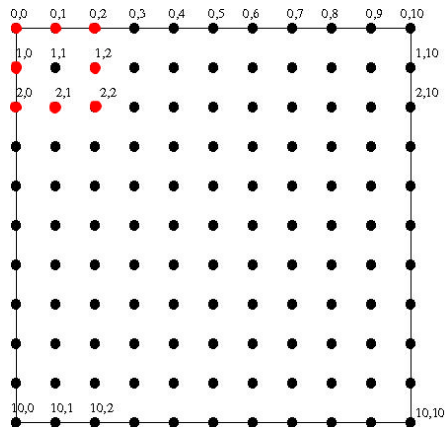


Figure 3: Malla con la discretización inicial.



# Método de Elementos Finitos

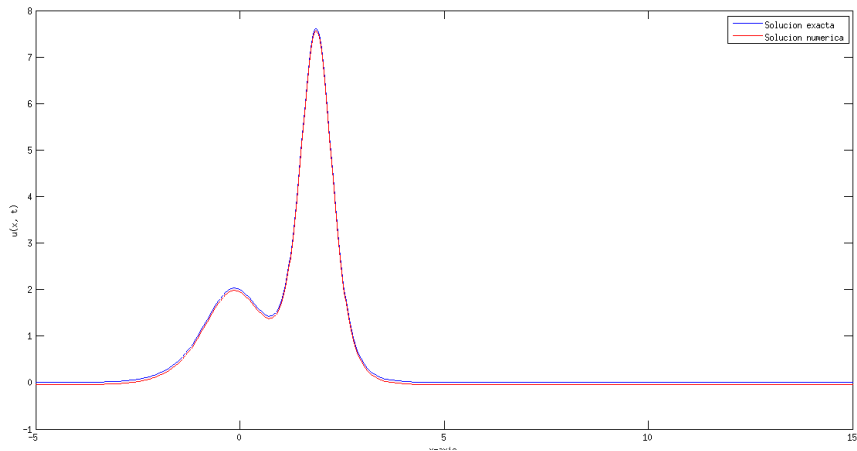


Figure 4: Onda discretizada, con muchos cálculos.

# Diferencia divididas

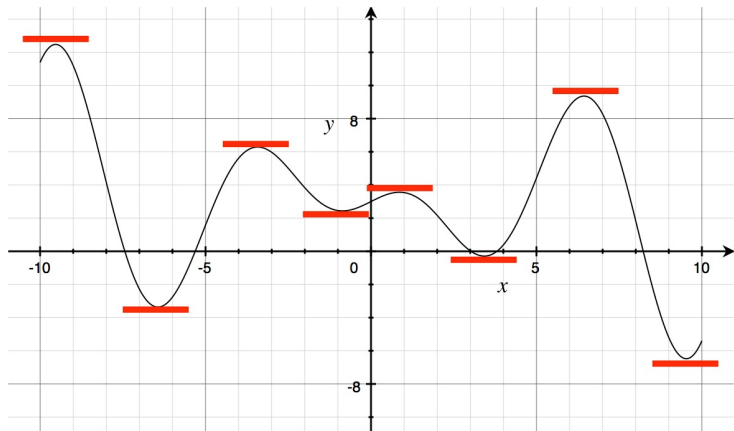


Figure 5: Derivada con valor 0 en un punto de la función.

¿Y si aprovechamos los cambios de las curvas para realizar menos cálculos?

# Diferencia divididas

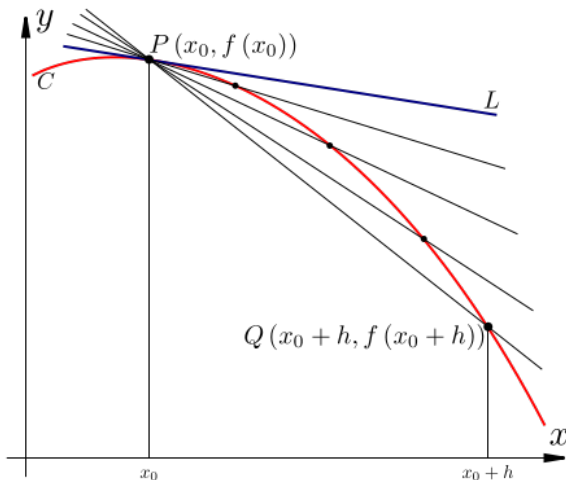


Figure 6: Derivada con valor distinto a 0 en un punto de la función.

# Diferencia divididas

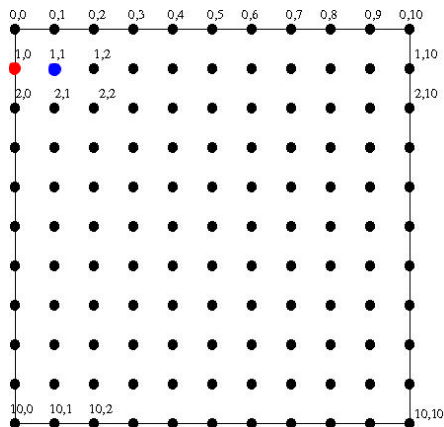


Figure 7: Malla para hallar un punto con la nueva discretización.

# Pruebas

Para realizar nuestras pruebas y comparar nuestros resultados, consideramos la ecuación

$$u(x) = 12 \left( \frac{3 + 4 \cosh(2x) + \cosh(4x)}{(3 \cosh(x) + \cosh(3x))^2} \right), \quad (2)$$

que cumple las características de nuestra Ecuación (1), obtenida de M. L. Xiao et al.<sup>2</sup>

---

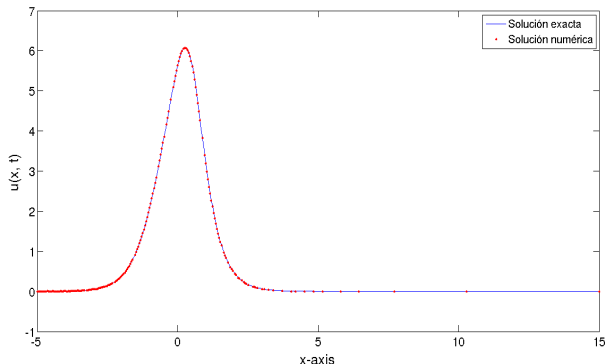
<sup>2</sup>M. L. Xiao, R. H. Wang and C. G. Zhu, *Applying Multiquadric Quasi-Interpolation to Solve KdV Equation*. Journal of Mathematical Research & Exposition (2011) 191-201.

## Primera Prueba

Con una malla de  $a = -5$  hasta  $b = 15$ , con  $t = 0.01$

Tiempo = 0.01			
x	Númerica	Exacta	Error
-3	0.054469	0.054477	0.00008
-2	0.382932	0.382934	0.00002
-1	2.084132	2.084133	0.00001
0	5.638239	5.638245	0.00006
1	3.192963	3.192964	0.00001
2	0.478487	0.478495	0.00008
3	0.064511	0.064520	0.00009
4	0.008720	0.008723	0.00003
5	0.001178	0.001180	0.00002

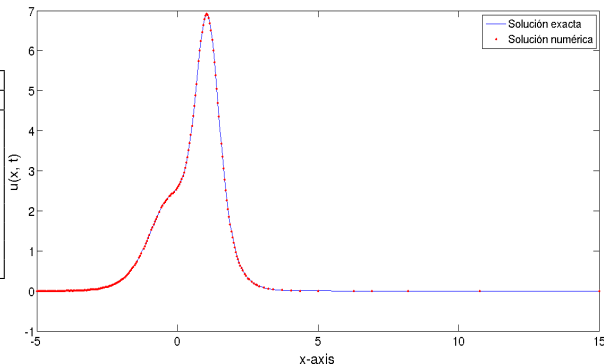
Error = Exacta - Numérica



Con una malla de  $a = -5$  hasta  $b = 15$ , con  $t = 0.05$

Tiempo = 0.05			
x	Númerica	Exacta	Error
-3	0.039507	0.039507	0.00000
-2	0.275310	0.275315	0.00005
-1	1.390937	1.390946	0.00009
0	2.574822	2.574829	0.00007
1	6.881606	6.881609	0.00003
2	1.207018	1.207024	0.00006
3	0.100947	0.100955	0.00008
4	0.012238	0.012239	0.00001
5	0.001624	0.001630	0.00006

Error = Exacta - Numérica



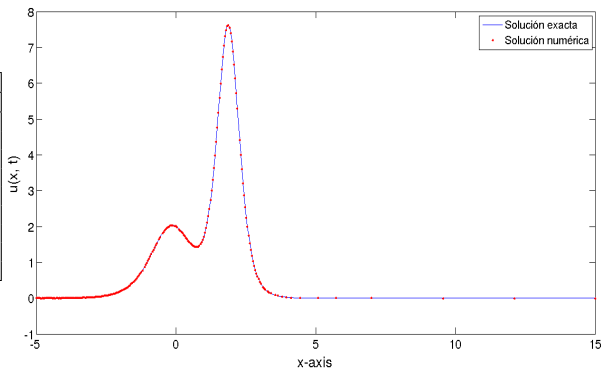


## Primera Prueba

Con una malla de  $a = -5$  hasta  $b = 15$ , con  $t = 0.1$

Tiempo = 0.1			
x	Númerica	Exacta	Error
-3	0.026545	0.026554	0.00009
-2	0.188155	0.188162	0.00007
-1	1.045965	1.045967	0.00002
0	2.000569	2.000572	0.00003
1	1.717096	1.717101	0.00005
2	7.171392	7.171392	0.00000
3	0.464295	0.464299	0.00004
4	0.024306	0.024308	0.00002
5	0.002538	0.002542	0.00004

Error = Exacta - Numérica

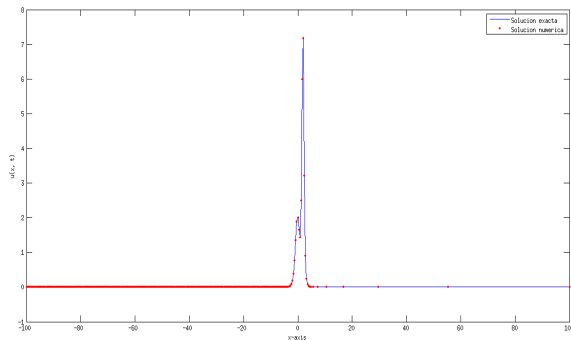


Con una malla de  $a = -100$  hasta  $b = 100$ , con  $t = 0.01$

Tiempo = 0.1

x	Númerica	Exacta	Error
-2	0.274830	0.275315	0.0010
-1	1.390190	1.390946	0.0008
0	2.574214	2.574829	0.0006
1	6.881440	6.881609	0.0002
2	1.206954	1.207024	0.0010
3	0.100736	0.100955	0.0002
4	0.011516	0.012239	0.0001
5	0.000841	0.001630	0.0010
6	0.000194	0.000220	0.0001

$$\text{Error} = \text{Exacta} - \text{Númerica}$$



¿Será posible utilizar un conjunto de ondas para **predecir movimientos reales** de un océano?

# Océano en $t = 50$

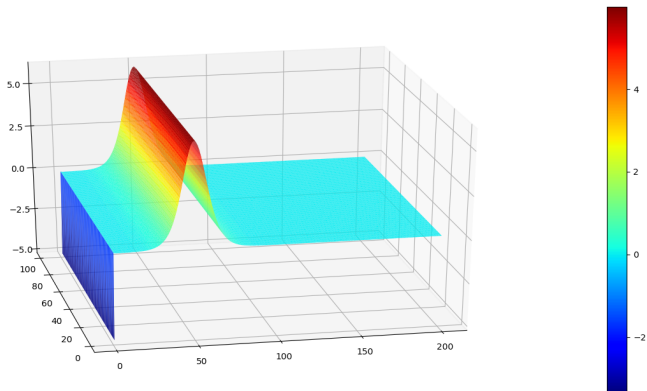


Figure 8: Curva del océano en un punto fijo.

# Océano en $t = 50$

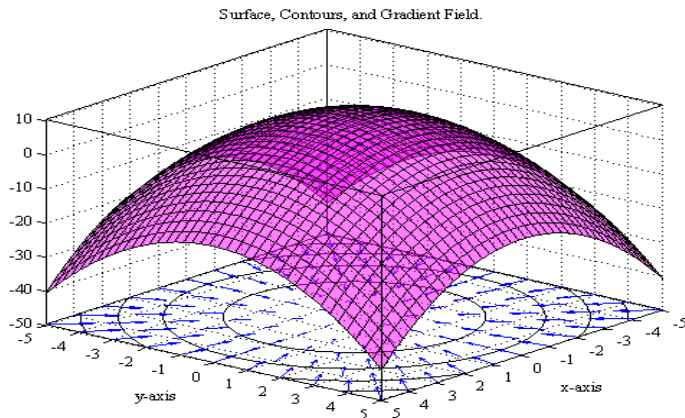


Figure 9: Área a analizar

# Océano en $t = 50$

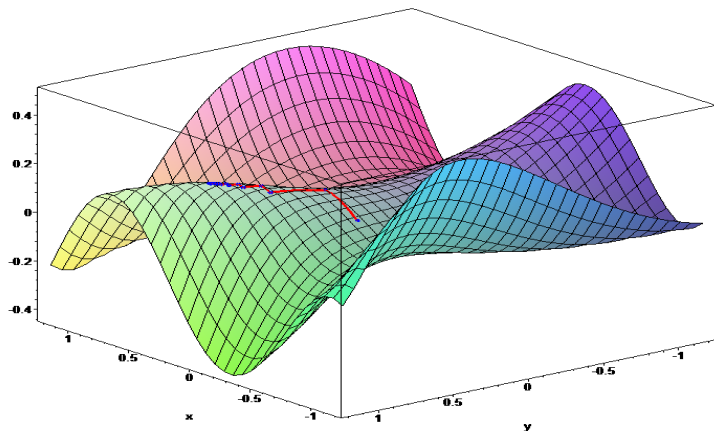


Figure 10: Área a analizar

# Gráfico del campo de vectores

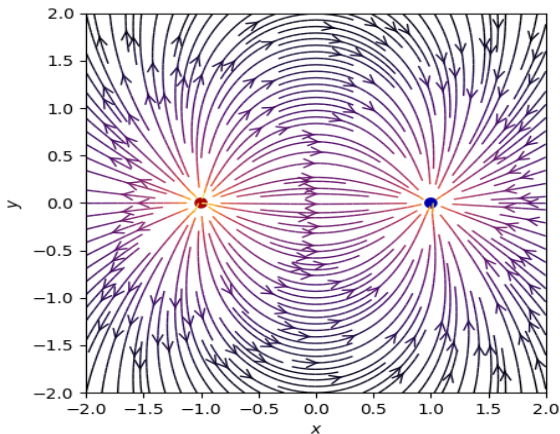


Figure 11: Aproximación de campo de vectores entre los océanos.

¿Qué sucede si aumentamos el número de ondas de manera considerable?



Un océano de 1000 ondas, con  $a = -100$  y  $b = 100$ .



Figure 12: El aumento de olas muestra el aumento del caos en un océano.

# Conclusiones

- Se puede realizar menos cálculos aprovechando la curvaturas de la onda.
- Se puede predecir la posición de la onda sin la necesidad de pasar por cada punto de la función.
- Los errores en cada onda varía entre  $\pm 0.0001$ , lo que nos asegura la precisión de los resultados.
- El campo de vectores de la Figura (11) comprueba gráficamente la aproximación del océano numérico y real.

# Conclusiones

- Se puede realizar menos cálculos aprovechando la curvaturas de la onda.
- Se puede predecir la posición de la onda sin la necesidad de pasar por cada punto de la función.
- Los errores en cada onda varía entre  $\pm 0.0001$ , lo que nos asegura la precisión de los resultados.
- El campo de vectores de la Figura (11) comprueba gráficamente la aproximación del océano numérico y real.
- Al aumentar el número de ondas de forma considerable, nos acercamos a una simulación de un océano más real.

# Conclusiones

- Se puede realizar menos cálculos aprovechando la curvaturas de la onda.
- Se puede predecir la posición de la onda sin la necesidad de pasar por cada punto de la función.
- Los errores en cada onda varía entre  $\pm 0.0001$ , lo que nos asegura la precisión de los resultados.
- El campo de vectores de la Figura (11) comprueba gráficamente la aproximación del océano numérico y real.
- Al aumentar el número de ondas de forma considerable, nos acercamos a una simulación de un océano más real.
- La simulación del océano de la Figura (12) y el campo de vectores de la Figura (11) confirman la precisión y la veracidad de las predicciones de las Tablas 15, 16 y 17.

# Cronograma

Actividad	Fecha	Logrado al:
Crear el espacio de Banach para las funciones	25-03-2017	100%
Hallar las diferentes derivadas analíticas	08-04-2017	100%
Discretización de la ecuación en el tiempo	17-04-2017	100%
Discretización de la ecuación en el espacio	19-04-2017	100%
Aproximar $u_{xxx}$ usando diferencia divididas	26-04-2017	100%
Programación del método en un espacio de malla regular	15-06-2017	100%
Crear el espacio de Banach para las funciones	14-07-2017	100%
Hallar la series de convergencia de las funciones en	22-07-2017	100%
Hacer y pruebas y comparar resultados	14-08-2017	100%
Realizar el banlanceo de carga de datos	19-08-2017	100%
Paralelizar el algoritmo	02-09-2017	100%
Hacer pruebas con el algoritmo paralelizado	15-09-2017	100%
Ver la diferencia de curvaturas entre las soluciones exactas y numéricas del océano	15-10-2017	100%
Crear un ambiente que simule un tsunami creado por un impulso	22-11-2017	100%

# Trabajos Futuro

- Realizar la discretización en un espacio con periodos (e.g. Torus).
- Disminuir el nivel de *libertad* de la onda.

# Modelamiento de ondas largas con pequeñas amplitudes unidireccionales

Antonio Vásquez, Joel

joel.antonio@ucsp.edu.pe

**Asesor:** Prof. Dr. Paúl Dugán Nina Ortiz

Universidad Católica San Pablo  
Arequipa- Perú

12-10-17