Aufgabe 1 (Mengensysteme)

1. Ist der Schnitt zweier Semialgebren wieder eine Semialgebra?
2. Ist die Vereinigung zweier σ-Algebren wieder eine σ-Algebra?
3. Sei $\mathcal{A}$ eine Semialgebra. Geben Sie $\alpha(\mathcal{A})$ an.
4. Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ beliebig. Geben Sie $\alpha(\mathcal{E})$ an.
5. Geben Sie ein monotones System an, dass keine σ-Algebra ist.
6. Erläutern Sie die Beweistechnik des Good-Set-Principles anhand eines selbstgewählten Beispiels.
7. Skizzieren Sie kurz den Zusammenhang zwischen den folgenden Begriffen: Semialgebra, Algebra, σ-Algebra, Dynkin-System, monotones System.
8. Wieso benötigen wir so viele verschiedene Arten von Mengesystemen?
9. Was ist eine Borel-σ-Algebra?
10. Geben Sie einen nicht-trivialen Erzeuger der Borelschen σ-Algebra im $\mathbb{R}^k$ an und skizzieren Sie den Beweis der beiden Inklusionen.

Aufgabe 2 (Messbare Funktionen)

1. Wann ist eine Abbildung messbar?
2. Unter welcher Voraussetzung kann man diese Bedingung ggf. äbschwächen?̈
3. Sind stetige Abbildungen im Allgemeinen messbar?
4. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $X_n \in \mathcal{F}(\Omega, \mathcal{A})$. Beurteilen Sie ob es sich bei den Folgenden Mengen um messbare Mengen handelt:

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{\omega \in \Omega : \{X_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\} \text{ liegt dicht in } \mathbb{R}\}, \\ A_2 &:= \{\omega \in \Omega : (X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert in } \mathbb{R}\}, \\ A_3 &:= \{\omega \in \Omega : \sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n| \leq C\}, C > 0. \end{aligned}$$

5. Was ist eine initiale σ-Algebra?
6. Was besagt das Faktorisierungslemma?
7. Skizzieren Sie das allgemeine Vorgehen bei einem Beweis per algebraischer Induktion.

Aufgabe 3 (Produkträume)

1. Definieren Sie das kartesische Produkt von Mengen Ω_i, $i \in I \neq \emptyset$.
2. Wie ist das Produkt von σ-Algebren definiert?
3. Nennen Sie einen durchschnittstabilen Erzeuger der Produkt-σ-Algebra.
4. Betrachte die Mengen

$$A_1 := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| < C\ \}, C \in (0,\infty)$$
$$A_2 := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \text{f besitzt keine Nullstelle}\ \}$$
$$A_3 := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \text{f ist stetig}\ \}.$$

   Sind diese Mengen in $\bigotimes_{t\in[0,1]} \mathcal{B}$ enthalten? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe 4 (Konstruktion von Maßen)

1. Was ist der Unterschied zwischen einem Inhalt und einem Prämaß ? Was unterscheidet ein Maß von einem Prämaß?
2. Geben Sie ein Beispiel für einen Inhalt, der kein Maß ist.
3. Sei μ ein endlicher Inhalt. Geben sie vier zur folgenden Aussage äquivalente Aussagen an: μ ist σ-sub-additiv.
4. Wie lässt sich ein auf einer Algebra $\mathcal{A}$ definiertes Prämaß μ zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{A})$ fortsetzen?
5. Welche Rolle spielt die σ-Endlichkeit bei der Fortsetzung von Prämaßen?
6. Sei das Maß ν absolutstetig bzgl. dem Maß μ. Besitzt ν dann eine μ-Dichte? (Gegenbeispiel + zusätzliche Bedingung)
7. Was ist die Vervollständigung eines Maßraums?
8. In welchem Kontext benötigt man den Begriff der kompakten Approximierbarkeit?
9. Skizzieren Sie die Konstruktion des k-dimensionalen Lebesgue-Maßes.

Aufgabe 5 (Maßintegral & fast-überall Eigenschaften)

1. Definieren Sie das Maßintegral für eine messbare Funktion. Welche elementaren Eigenschaften des Maßintegrals kennen Sie?
2. Skizzieren sie die Beweisidee des Satzes von Beppo Levi.

3. Seien $X, X_1, X_2, ...$ Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Lässt sich der Satz von der dominierten Konvergenz auch anwenden, wenn die punktweise Konvergenz durch stochastische Konvergenz ersetzt wird?

4. Lässt sich durch jede nicht negative messbare Funktion ein Maß definieren? Lässt sich jedes Maß bezüglich eines anderen Maßes so darstellen?

5. Was versteht man unter einer fast überall Eigenschaft?

6. Seien $f, g \in \mathcal{F}(\Omega, \mathcal{A})$. Geben Sie eine möglichst schwache Bedingung dafür an, dass $f \leq g$ fast überall.

7. Was besagt der Satz von Radon-Nikodym? Wie sieht es bei nicht σ-endlichen Maßen aus? Gegenbeispiel?

8. Was ist eine σ-additive-Mengenfunktion und was versteht man unter einer Jordan-Zerlegung? Ist diese eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort.

9. Was versteht man unter einer Hahn-Zerlegung?

10. Wann ist ein Maß singulär bzgl. einem anderen Maß?

11. Was ist die Lebesgue-Zerlegung eines Maßes?

12. Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ messbarer Raum und seien μ_1, μ_2 Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{A}$. Begründen Sie, dass dann auch $\mu := \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{A}$ ist und zeigen Sie, dass μ_i absolutstetig bzgl. μ ist.

13. Sei μ das Zählmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto \frac{(-1)^n}{n}$$

nicht μ-integrierbar ist.

14. Sei μ das Zählmaß auf $\mathcal{B}$ und ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß, dass eine μ-Dichte f besitzt. Kann f stetig sein?

15. Betrachte für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ den Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = ([a, b], \mathcal{B} \cap [a, b], \lambda_{\mathcal{B} \cap [a,b]})$ und sei $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Zeigen Sie, dass dann die Abbildung

$$g : (a, b) \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_{[a,x]} f(y)\lambda(dy)$$

stetig ist.

Aufgabe 6 (Maßkerne & Produktmaße)

1. Was ist ein Maßkern? Welche Eigenschaften von Maßkernen haben wir in der Vorlesung kennengelernt?

2. Wie ist das Produktmaß eines σ-endlichen Maßes μ mit einem σ-endlichen Maßkern K definiert. Welche charakterisierende Eigenschaft besitzt es? Wie zeigt man die Eindeutigkeit ?

3. Was versteht man unter einer Standardfortsetzung? Wofür wird sie gebraucht?

4. Formulieren sie den Satz von Fubini für Maßkerne. Lassen sich die iterierten Integrale vertauschen?

5. Skizzieren Sie die Beweisidee des Satzes von Ionescu-Tulcea.

6. Erläutern Sie ein Anwendungsbeispiel des Satzes von Ionescu-Tulcea.

7. Inwiefern kann der Satz von Cavalieri bei der Berechnung von Erwartungswerten behilflich sein?

Aufgabe 7 (Verteilungen & Verteilungsfunktionen)

1. Nennen Sie die charakterisierenden Eigenschaften einer Verteilungsfunktion.

2. Jede Zufallsgröße definiert eine Verteilungsfunktion. Lässt sich dann auch für eine gegebene Verteilungsfunktion eine Zufallsgröße mit dieser dadurch definierten Verteilung konstruieren?

3. Formulieren sie den Transformationssatz für Bildmaße.

4. Was ist überhaupt ein Bildmaß?

5. Wann besitzen zwei messbare Abbildungen das gleiche Bildmaß? Gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 8 (Fast sicher, stochastische & Verteilungskonvergenz)

1. Definieren Sie fast sichere Konvergenz und geben Sie hinreichende und notwendige Bedingungen an.

2. Formulieren Sie die Cauchy-Kriterien für fast-sichere und für stochastische Konvergenz.

3. Was besagt das Lemma von Pratt?

4. Welche Konvergenzform ist die stärkste? Welche Implikationen gelten?

5. Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass aus stochastischer Konvergenz im Allgemeinen nicht auch fast sichere Konvergenz folgt.

6. Was können Sie über die Eindeutigkeit fast-sicherer/stochastischer Grenzwerte sagen? Wie schaut es bei Verteilungskonvergenz aus?

7. Charakterisieren Sie die Konvergenz in Verteilung.

8. Was besagt der Satz von Skorohod? Geben Sie die im Beweis verwendete Konstruktion explizit an.

9. Was ist stochastische Äquivalenz? Zeigen Sie, dass dadurch eine Äquivalenzrelation definiert ist.

10. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsgrößen und gelte $\sum_{n=1}^{\infty} E(|X_n|^p) < \infty$ für ein $p > 0$. Zeigen Sie: $P[lim_{n\to\infty} X_n = 0] = 1$.

11. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und betrachte die Abbildung:

$$d : \mathcal{F}(\Omega, \mathcal{A}) \times \mathcal{F}(\Omega, \mathcal{A}) \to [0, \infty], (X, Y) \mapsto E(\frac{|X - Y|}{1 + |X - Y|})$$

Zeigen Sie, dass eine Folge von Zufallsgrößen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ genau dann stochastisch gegen eine Zufallsgröße X konvergiert, wenn $\lim_{n\to\infty} d(X, X_n) = 0$.

Aufgabe 9 (Konvergenz im p-ten Mittel & gleichgradige Integrierbarkeit)

1. Was ist die Minkowski-Ungleichung? Wozu wird Sie verwendet?

2. Worin unterscheiden sich die Vektorräume L_p und $\mathcal{L}_p$?

3. Wieso betrachten wir ausschließlich $p \geq 1$?

4. Zeigen Sie, dass durch die Abbildung

$$p : L_p(\Omega, \mathcal{A}, P) \to [0, \infty), X \mapsto (E(|X|^p))^{\frac{1}{p}}$$

eine Norm definiert wird. Ist der resultierende normierte Vektorraum vollständig?

5. Unter welcher zusätzlichen Voraussetzung impliziert fast sichere Konvergenz die Konvergenz im (ersten) Mittel (L_1-Konvergenz)?

6. Definieren Sie gleichgradige Integrierbarkeit und geben Sie eine Charakterisierung an.

7. Geben Sie ein Beispiel für eine nicht gleichgradig integrierbare Folge von Zufallsgrößen.

8. Unter welcher zusätzlichen Bedingung folgt aus stochastischer Konvergenz auch die Konvergenz im p-ten Mittel?

Aufgabe 10 (Unabhängigkeit & 0-1-Gesetze)

1. Definieren Sie die Unabhängigkeit von Zufallsvariablen.
2. Geben Sie eine möglichst schwache Bedingung für die Unabhängigkeit zweier Zufallsvariablen an.
3. Zeigen oder widerlegen Sie: Sind X, Y Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $P^{(X,Y)} = P^X \times P^Y$, dann sind X, Y unabhängig.
4. Zeigen oder widerlegen Sie: Sind X, Y Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $P^{X+Y} = P^X * P^Y$, dann sind X, Y unabhängig.
5. Wann sind zwei Zufallsvariablen X, Y unkorreliert? Sind X, Y dann auch unabhängig?
6. Ist eine Familie paarweise unabhängiger Zufallsvariablen unabhängig?
7. Welche Modellierung bietet sich meist an, um eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit gegebener Verteilung zu modellieren?
8. Definieren Sie die Faltung zweier Wahrscheinlichkeitsmaße.
9. Seien μ_1 und μ_2 zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{B}$. Sei ferner μ_1 absolutstetig bezüglich λ. Besitzt das Faltungsprodukt $\mu_1 * \mu_2$ dann ebenfalls eine λ-Dichte? Geben Sie diese an oder konstruieren Sie ein Gegenbeispiel.
10. Formulieren Sie das Lemma von Borel-Cantelli. Gelten auch die Umkehrungen?
11. Was ist die terminale σ-Algebra bzgl. einer Folge von Zufallsgrößen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Kennen Sie Mengen, die in $\mathcal{A}_\infty$ enthalten sind?
12. Skizzieren Sie die Beweisidee des 0-1-Gesetzes.
13. Sei $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ eine $\mathcal{A}_\infty/\bar{\mathcal{B}}$-messbare Abbildung. Was gilt dann fast sicher?
14. Geben Sie eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ an, sodass die assoziierte terminale σ-Algebra Ereignisse A mit $0 < P(A) < 1$ enthält.

Aufgabe 11 (Gesetze der großen Zahlen)

1. Nennen Sie hinreichende und notwendige Kriterien für die Konvergenz zufälliger Reihen.

2. Formulieren sie den Kolmogorovschen Drei-Reihen-Satz. Gilt die Rückrichtung auch, falls die Bedingung nur für ein $c \in (0, \infty)$ erfüllt ist?

3. Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine iid Folge von Zufallsgrößen und $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Nennen Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz der zufälligen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n$.

4. Formulieren sie beide Versionen des Starken Gesetz der Großen Zahlen (SLLN).

5. Ist die in der ersten Version des SLLN gegebene Bedingung nicht nur hinreichend sondern auch notwendig?

6. Geben Sie ein Beispiel für eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen, die nicht dem Starken Gesetz der Großen Zahlen genügt.
   (D.h. $P(\{lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - E(X_i)) = 0\}) < 1$).