Aufgabe 1 (Mengensysteme)

1. Ist der Schnitt zweier Semialgebren wieder eine Semialgebra ?
2. Sei $\mathcal{A}$ eine Semialgebra. Geben Sie $\alpha(\mathcal{A})$ an.
3. Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ beliebig. Geben Sie $\alpha(\mathcal{E})$ an.
4. Erläutern Sie die Beweistechnik des Good-Set-Principles anhand eines selbstgewählten Beispiels.
5. Skizzieren Sie kurz den Zusammenhang zwischen den folgenden Begriffen: Semialgebra, Algebra, σ-Algebra, Dynkin-System, monotones System.
6. Wieso benötigen wir so viele verschiedene Arten von Mengesystemen?
7. Was ist eine Borel-σ-Algebra?
8. Geben Sie einen Erzeuger der Borelschen σ-Algebra im $\mathbb{R}^k$ an und skizzieren Sie den Beweis.

Aufgabe 2 (Messbare Funktionen)

1. Wann ist eine Abbildung messbar ?
2. Unter welcher Voraussetzung kann man diese Bedingung ggf. äbschwächen"?
3. Was ist eine initiale σ-Algebra ?
4. Was besagt das Faktorisierungslemma ?
5. Skizzieren Sie das allgemeine Vorgehen bei einem Beweis per algebraischer Induktion

Aufgabe 3 (Produkträume)

1. Definieren Sie das kartesische Produkt von Mengen Ω_i, $i \in I \neq \emptyset$.
2. Wie ist das Produkt von σ-Algebren definiert?
3. Nennen Sie einen durchschnittstabilen Erzeuger der Produkt-σ-Algebra.
4. Betrachte die Mengen

$$A_1 := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| < C\ \}, C \in (0,\infty)$$
$$A_2 := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \text{f besitzt keine Nullstelle } \}$$
$$A_3 := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \text{f ist stetig } \}.$$

   Sind diese Mengen in $\bigotimes_{t\in[0,1]} \mathcal{B}$ enthalten? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe 4 (Konstruktion von Maßen)

1. Was ist der Unterschied zwischen einem Inhalt und einem Prämaß ? Was unterscheidet ein Maß von einem Prämaß?
2. Sei μ ein endlicher Inhalt. Geben sie vier zur folgenden Aussage äquivalente Aussagen an: μ ist σ-sub-additiv.
3. Wie lässt sich ein auf einer Algebra $\mathcal{A}$ definiertes Prämaß μ zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{A})$ fortsetzen?
4. Welche Rolle spielt die $/sigma$-Endlichkeit bei der Fortsetzung von Prämaßen?
5. Sei das Maß ν absolutstetig bzgl. dem Maß μ. Besitzt ν dann eine μ-Dichte? (Gegenbeispiel + zusätzliche Bedingung)
6. Was ist die Vervollständigung eines Maßraums?
7. In welchem Kontext benötigt man den Begriff der kompakten Approximierbarkeit?
8. Skizzieren Sie die Konstruktion des k-dimensionalen Lebesgue-Maßes.

Aufgabe 5 (Maßintegral & fast-überall Eigenschaften)

1. Definieren Sie das Maßintegral für eine messbare Funktion
2. Skizzieren sie die Beweisidee des Satzes von Beppo Levi
3. Was versteht man unter einer "fast überallËigenschaft ?
4. Seien $f, g \in \mathcal{F}(\Omega, \mathcal{A})$. Geben Sie eine möglichst schwache Bedingung dafür an, dass $f \leq g$ fast überall.
5. Was besagt der Satz von Radon-Nikodym? Wie sieht es bei nicht σ-endlichen Maßen aus? Gegenbeispiel?
6. Was ist eine σ-additive-Mengenfunktion und was versteht man unter einer Jordan-Zerlegung? Ist diese eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort.
7. Was versteht man unter einer Hahn-Zerlegung?
8. Wann ist ein Maß singulär bzgl. einem anderen Maß ?
9. Was ist die Lebesgue-Zerlegung eines Maßes ?
10. Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ messbarer Raum und seien μ_1, μ_2 Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{A}$. Begründen Sie, dass dann auch $\mu := \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{A}$ ist und zeigen Sie, dass μ_i absolutstetig bzgl. μ ist.

11. Sei μ das Zählmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto \frac{(-1)^n}{n}$$

nicht μ-integrierbar ist.

Aufgabe 6 (Maßkerne & Produktmaße)

1. Was ist ein Maßkern ? Welche Eigenschaften von Maßkernen haben wir in der Vorlesung kennengelernt ?
2. Wie ist das Produktmaß eines σ-endlichen Maßes μ mit einem σ-endlichen Maßkern K definiert. Welche charakterisierende Eigenschaft besitzt es? Wie zeigt man die Eindeutigkeit ?
3. Was versteht man unter der Standardfortsetzung einer Funktion? Wofür wird sie gebraucht?
4. Formulieren sie den Satz von Fubini für Maßkerne.
5. Erläutern Sie ein Anwendungsbeispiel des Satzes von Ionescu-Tulcea.
6. Inwiefern kann der Satz von Cavalieri bei der Berechnung von Erwartungswerten behilflich sein?

Aufgabe 7 (Verteilungen & Verteilungsfunktionen)

1. Nennen Sie die charakterisierenden Eigenschaften einer Verteilungsfunktion.
2. Formulieren sie den Transformationssatz für Bildmaße.
3. Was ist überhaupt ein Bildmaß ?
4. Wann besitzen zwei messbare Abbildungen das gleiche Bildmaß ? Gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 8 (Fast sicher, stochastische & Verteilungskonvergenz)

1. Definieren Sie fast sichere Konvergenz und geben Sie hinreichende und notwendige Bedingungen an.
2. Formulieren Sie die Cauchy-Kriterien für fast-sichere und für stochastische Konvergenz.
3. Was besagt das Lemma von Pratt? Wo wird es verwendet?
4. Welche Konvergenzform ist die ßtärkste"? Welche Implikationen gelten?

5. Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass aus stochastischer Konvergenz im Allgemeinen nicht auch fast sichere Konvergenz folgt.

6. Was können Sie über die Eindeutigkeit fast-sicherer/stochastischer Grenzwerte sagen? Wie schaut es bei Verteilungskonvergenz aus?

7. Charakterisieren Sie die Konvergenz in Verteilung.

8. Was besagt der Satz von Skorohod?

9. Was ist stochastische Äquivalenz ?

Aufgabe 9 (Konvergenz im p-ten Mittel & gleichgradige Integrierbarkeit)

1. Was ist die Minkowski-Ungleichung ? Wozu wird Sie verwendet?

2. Worin unterscheiden sich die Vektorräume L_p und $\mathcal{L}_p$?

3. Wieso betrachten wir ausschließlich $p \geq 1$?

4. Unter welcher zusätzlichen Voraussetzung impliziert fast sichere Konvergenz die Konvergenz im (ersten) Mittel (L_1-Konvergenz)?

5. Definieren Sie gleichgradige Integrierbarkeit und geben Sie eine Charakterisierung an.

6. Unter welcher zusätzlichen Bedingung folgt aus stochastischer Konvergenz auch die Konvergenz im p-ten Mittel?

Aufgabe 10 (Unabhängigkeit & 0-1-Gesetze)

1. Definieren Sie die Unabhängigkeit von Zufallsvariablen.

2. Geben Sie eine möglichst schwache Bedingung für die Unabhängigkeit zweier Zufallsvariablen an.

3. Zeigen oder widerlegen Sie: Sind X, Y Zufallsgrößen mit $P^{(X,Y)} = P^X \times P^Y$, dann sind X, Y unabhängig.

4. Wann sind zwei Zufallsvariablen X, Y unkorreliert? Sind X, Y dann auch unabhängig?

5. Welche Modellierung bietet sich meist an, um eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit gegebener Verteilung zu modellieren?

6. Definieren Sie die Faltung zweier Wahrscheinlichkeitsmaße.

7. Formulieren Sie das Lemma von Borel-Cantelli

8. Skizzieren Sie die Beweisidee des 0-1-Gesetzes.

9. Sei $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ eine $\mathcal{A}_\infty/\bar{\mathcal{B}}$-messbare Abbildung. Was gilt dann fast sicher?

Aufgabe 11 (Gesetze der großen Zahlen)

1. Nennen Sie hinreichende und notwendige Kriterien für die Konvergenz zufälliger Reihen.

2. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine iid Folge von Zufallsgrößen und $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Nennen Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz der zufälligen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n$.

3. Formulieren sie zwei Versionen des Starken Gesetz der Großen Zahlen (SLLN).