Évaluation de Performance – Quick

Arnaud Legrand

12 mars 2020

Conseils et consignes importantes

- Le barème est donné à titre purement indicatif afin de vous aider à répartir votre temps ainsi que d'avoir une idée de la difficulté de la question ou du niveau de détail attendu.
- À part les livres, tout type de document (manuscrit, imprimé) est autorisé.

Exercice 1 : Comparaison de systèmes (4 pts)

On souhaite comparer deux algorithmes de transmission de trames. Des mesures préliminaires montrent que l'algorithme A perd environ 0.8% des trames tandis que l'algorithme B en perd en moyenne 0.7%. On souhaite faire une nouvelle expérience pour vérifier la supériorité de l'algorithme B.

▶ **Q1.1. (4 points)** Combien faut-il transmettre de trames pour observer avec 95% de confiance que l'algorithme B est meilleur que l'algorithme A ?
Indication : on calculera les intervalles de confiance et on s'assurera qu'ils ne se chevauchent pas.

Exercice 2 : Autour de la loi de Poisson

2.1 Loi de l'inverse

▶ **Q2.1. (2 pt)** On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ. Calculer $\mathbb{E}$ [1/(N+1)]

2.2 Calcul du régime stationnaire d'un processus de naissance et de mort particulier

On s'intéresse à la chaîne de Markov $\{X_n\}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie de la façon suivante :

- $\mathbb{P}[X_{n+1} = k+1 | X_n = k] = \frac{p}{k+1}$
- $\mathbb{P}[X_{n+1} = k-1 | X_n = k] = q$
- $\mathbb{P}[X_{n+1} = k \quad | X_n = k] = 1 - \frac{p}{k+1} - q$ (avec $p + q < 1$)

▶ **Q2.2. (1pts)** Tracer le graphe de transition associé à cette chaîne.

▶ **Q2.3. (3pts)** Calculer la probabilité asymptotique de chacun des états en fonction de p et q.
Quelle loi reconnaissez vous ?

Exercice 3 : Modélisation par Chaîne de Markov

3.1 Modèle sans attente

Un réparateur d'ascenseurs dispose d'une seule équipe dont tous les membres travaillent sur le même chantier. Les demandes d'installations des clients qui lui parviennent peuvent être réparties en 2 catégories :

— travaux de moyenne importance, durant une semaine (catégorie A).
— travaux plus importants durant 3 semaines (catégorie B).

L'installateur ne reçoit pas de demandes de travaux qui n'entrent pas dans cette classification. **Il n'y a pas de liste d'attente**. Les demandes d'installation parviennent à l'entrepreneur au début de chaque semaine. Une observation statistique a montré que les probabilités pour recevoir un lundi donné, au moins une demande de travaux de catégorie A, ou au moins une demande de travaux de catégorie B valent respectivement $p = 0.6$ et $q = 0.7$. Ces demandes arrivent de façon indépendante.
Certaines semaines, des travaux sont refusés, l'équipe étant déjà occupée sur une installation de catégorie B : dans ce cas le client s'adresse à un concurrent. D'autres semaines l'équipe reste inactive faute de demande d'installation. Lorsque l'installateur reçoit simultanément 2 demandes : une de catégorie A et une de catégorie B, il donne systématiquement suite à celle de catégorie B.
L'installation de catégorie A procure un bénéfice de 4 000€, celle de catégorie B un bénéfice de 15 000€, et l'inactivité de l'équipe pendant une semaine engendre une perte de 2 500€.

▶ **Q3.1. États (1 pt)** Modéliser par une chaîne de Markov $\{X_n\}$ l'évolution de l'activité de l'équipe d'une semaine sur l'autre. Quel est son espace d'états ?

▶ **Q3.2. Graphe (4 pts)** Tracer le graphe de transition associé à cette chaîne en étiquetant bien chaque transition par sa probabilité en fonction des paramètre p et q.

▶ **Q3.3. Probabilités d'états (4pts)** Calculer probabilité asymptotique de chacun des états en fonction de p et q. En donner une valeur numérique approchée.

Conseil : Si un même terme revient dans chacune de vos équations, utilisez le pour exprimer une variable en fonction d'une autre.

Indication : Si je ne me suis pas trompé, la probabilité que l'équipe soit inactive est de $\frac{1}{20}$.

▶ **Q3.4. Rentabilité (1 pt)** En déduire l'espérance du gain relatif à une semaine de fonctionnement en régime stationnaire (faire l'application numérique).

Rappels mathématiques divers

— On rappelle que $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.
— On rappelle que N suit une loi de Poisson de paramètre λ si $\forall k \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}[N = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$