## INFO4-EP

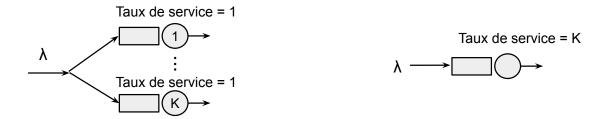
## Jonatha ANSELMI

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes avec une loi exponentielle de paramètre  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , respectivement. Montrer que  $\min(X,Y)$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda_1 + \lambda_2$  et que  $P(\min(X,Y) = X) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ .

**Exercice 2.** Soit  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  une chaîne de Markov à temps continu, à espace d'états  $\mathbb{S} = \{0, 1, \dots, N\}$  et telle que X(0) = 0. Soit  $Q = (q_{i,j})$  la matrice de transition de X ou  $q_{i,j} = 1$  if |i - j| = 1 et  $q_{i,j} = 0$  if |i - j| > 1.

- 1. Trouver la loi de la variable aleatoire  $t_1 = \inf\{t \ge 0 : X(t) > 0\}$ .
- 2. Pour tous  $i \in \mathbb{N}$ , trouver  $P(t_1 = i)$ .
- 3. Est-ce que X est irreducible? Recurrent positive? Pourquoi?
- 4. Calculer la probabilité stationnaire de X.
- 5. Est-ce que  $(X_t^2)_{t\geq 0}$  est une chaîne de Markov? Si oui, donner son espace d'états et sa matrice de transition.
- 6. Soit  $(Y_t)_{t\geq 0}$  une chaîne de Markov à temps continu indépendant de X mais avec la même matrice de transition. Est-ce que  $(X_t, Y_t)_{t\geq 0}$  est une chaîne de Markov? Si oui, donner son espace d'états et sa matrice de transition.
- 7. Soit  $Z_t = |X_t Y_t|$ . Est-ce que  $(Z_t)_{t \geq 0}$  est une chaîne de Markov? Si oui, donner son espace d'états et sa matrice de transition.

Exercice 3. On souhaite comparer les deux architectures de files d'attente suivantes: une architec-



ture parallel distribuée (gauche) vs une architecture centralisé (droite). On suppose que les clients arrivent selon un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$  et que leur tailles sont de variables aleatoires exponentielle de paramètre 1. Donc, les temps de service dans une file du systeme a gauche resp. droite sont Exp(1) resp. Exp(K). Pour chaque systeme, déterminer la condition de stabilité et comparer le temps de réponse moyen en régime stationnaire.