Tenemos k números, cuya suma total es de C. Es decir, $x_1+x_2+...+x_k = C$.

El objetivo es calcular el valor de esos números, de tal manera que el producto de éstos sea máximo:

$MAX(k, C) = x_1 \times x_2 \times ... \times x_k$

De tal forma,

- $MAX(k, 0) = 0 \quad \forall k \geq 0$
- $MAX(1, C) = C \quad si\ C > 0$

Para que el problema se pueda resolver con PD, debe tener naturaleza n-etápica y cumplir el Principio de Optimalidad de Bellman. Además se debe poder plantear una ecuación de recurrencia que represente la forma de ir lobrando etapa por etapa la solución optimal, hasta encontrar la solución.

Sabemos que es un problema n-etápico, ya que tenemos:

- $MAX(k, C)$ como el máximo producto alcanzable
- x como el valor de el número que al sumarse con las partes restantes, resulte C
- $(C - x)$ como el valor de la suma de las $(n - 1)$ partes restantes

Si seguimos el POB, la ecuación que describe el problema es:

- $MAX(k, C) = Máximo_{1 \leq x \leq C}\{xMAX(k - 1, C - x)\}$, siendo $k \geq 1$y $C > 0$

Vamos a empezar a resolver desde el caso más pequeño, $k = 1$.

$MAX(1, C) = C$

Para $k = 2$:

$MAX(2, C) = Máximo_{1 \leq x \leq C}\{xMAX(1, C - x)\}$

Como sabemos que $MAX(1, C) = C$:

$MAX(2, C) = Máximo_{1 \leq x \leq C}\{x(C - x)\}$

Vamos a sacar ese máximo derivando la función $f(x) = x(C - x)$ e igualándola a 0.

$f'(x) = C - 2x$

$C - 2x = 0$, por lo que $x = \frac{C}{2}$

Sustituyendo, $MAX(2, C) = \frac{C}{2}MAX(1, \frac{C}{2})$, es decir, $MAX(2, C) = \frac{C}{2} \cdot \frac{C}{2} = (\frac{C}{2})^2$, con soluciones $\{\frac{C}{2}, \frac{C}{2}\}$

Para $k = 3$:

$MAX(3, C) = Máximo_{1 \leq x \leq C}\{xMAX(2, C - x)\}$

Como sabemos que $MAX(2, C) = (\frac{C}{2})^2$, $MAX(2, C - x) = (\frac{C-x}{2})^2$.

Por lo que $MAX(3, C) = Máximo_{1 \leq x \leq C}\{x(\frac{C-x}{2})^2\}$

Vamos a sacar ese máximo derivando la función $f(x) = x(\frac{C-x}{2})^2$ e igualándola a 0.

$f'(x) = \frac{(C-x)^2}{2} - x(C - x)$

$\frac{(C-x)^2}{2} - x(C - x) = 0$; $C - x = 2x$; por lo que $x = \frac{C}{3}$

Sustituyendo, $MAX(3,C) = \frac{C}{3} \cdot (\frac{C-\frac{C}{3}}{2})^2 = \frac{C}{3} \cdot \frac{2C}{3} = (\frac{C}{3})^3$

Las soluciones son $\{\frac{C}{3}, \frac{C}{3}, \frac{C}{3}\}$ ya que$MAX(3,C) = \frac{C}{3} \cdot MAX(2, C - \frac{C}{3})$, y $MAX(2, C - \frac{C}{3})$ es bi-etápico, con soluciones $\{\frac{C}{3}, \frac{C}{3}\}$

Ya que tenemos solucionado cuando $k = 1$, $k = 2$ y $k = 3$, vamos a probar por inducción podemos llegar a la conclusión de que $MAX(i,C) = (C/i)^i$ con soluciones $\{\frac{C}{i}, \frac{C}{i}, \frac{C}{i}, ..., \frac{C}{i}\}$, tomando esta hipótesis como cierta.

De acuerdo con el POB, tenemos que:

$MAX(i+1,C) = Máximo_{1 \leq x \leq C}\{xMAX(i, C-x)\} = Máximo_{1 \leq x \leq C}\{x \cdot \frac{(C-x)^i}{i}\}$

Ésto nos lleva a que $x = \frac{C}{i+1}$, siendo el máximo valor del producto, $MAX(i+1, C) = (\frac{c}{i+1})^{i+1}$

Una vez demostrado por inducción, podemos llegar a la conclusión de que si tomamos como soluciones $\{\frac{C}{n}, \frac{C}{n}, \frac{C}{n}, ..., \frac{C}{n}\}$ alcanzamos el valor máximo, el cual es $(\frac{C}{n})^n$.