Probabilidade!
Teoria dos conjuntos

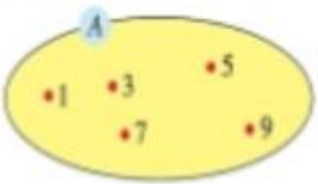
CONJUNTOS – NOÇÕES BÁSICAS

- A Teoria dos Conjuntos foi formulada no fim do século XIX pelo matemático russo **Georg Cantor.**

CONJUNTO: Lista de objetos (coleção, agrupamento, classe, sistema) enumeráveis e descritivos.

CONCEITOS PRIMITIVOS: (Noções Intuitivas)

Exemplo



- **CONJUNTO**; (espaço observado)
- **ELEMENTO**; (objeto (s) do conjunto)
- **Nº CARDINAL**; (nº de elementos do conjunto)
- **PERTINÊNCIA**; (relações entre os elementos e os conjuntos)
- **INCLUSÃO**; (relações entre conjuntos)
- **SÍMBOLOS**; (servem para simplificar as relações)

REPRESENTAÇÃO:

- Para escrever um conjunto usam-se chaves. Os elementos de um conjunto são escritos separados por vírgula e a ordem em que são escritos é irrelevante (Não importa). Por exemplo, $\{5, 1\} = \{1, 5\}$
- Elementos repetidos contam só uma única vez. Por exemplo:

  A={a,l,g,a,z,a,r,r,a} = {a,l,g,z,r}

Ex1: Conjunto dos estados da Região Sudeste:

S= { Rio de Janeiro, São Paulo, Minas Gerais, Espírito Santo}

Ex2: Conjunto de todos os números naturais.

N={0,1,2,3, ...}

Ex3: Conjunto de todos os números reais tal que $x^2-4=0$.

R={ 2, -2}

TIPOS DE CONJUNTOS

- Finito
- Infinito
- Unitário
- Vazio
- Universo
- das Partes

CONJUNTO UNITÁRIO E CONJUNTO VAZIO

❖ Conjunto Unitário: É aquele que possui apenas um único elemento

Exemplo:

A={5} ou B={x | x é capital da França}

❖ Conjunto Vazio: É um conjunto que não possui nenhum elemento. Ele é representado pelo símbolo $\varnothing$ ou por A={ }

Exemplo:

C= {x | x é conjunto das cidades mineiras que possuem praia} = $\varnothing$

D= $\{x \mid x \neq x\} = \varnothing$

Questão 1

Observe os conjuntos abaixo e identifique aqueles que foram unitários ou vazios:

$A=\{x \mid x=1 \text{ e } x=3\}$

$B=\{x \mid x \text{ é um número primo e par}\}$

$C=\{x \mid 0< x <5 \text{ e } \frac{3x+5}{2} = 4\}$

$D=\{x \mid x \text{ é capital da Bahia}\}$

$E=\{x \mid x \text{ é mês com letra inicial p}\}$

$F=\{x \mid \frac{2}{x} = 0\}$

CONJUNTO UNIVERSO

Em matemática, principalmente na teoria dos conjuntos e nos fundamentos da matemática, um **Universo** é uma **classe** (conjunto) que contém (como elementos) todas as **possibilidades** que se deseja considerar em uma certa situação problema.

Símbolo U= { ? }

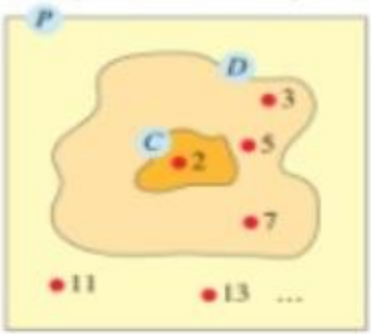
Se meus elementos pertencem ao conjunto dos números naturais meu conjunto Universo de trabalho serão os números naturais. U= {ℕ}

Exemplo:

U={x ∈ ℕ} = {0,1,2,3, ...}

U= {x é número primo} = {2,3,5,7,11,13,...}

P: conjunto dos números primos



Questão 1

Considerando os diferentes conjuntos universos, resolver a equação $x + 3 = 0$

a) U é o conjunto dos números naturais:

$S = \varnothing$

b) U é o conjuntos dos números inteiros:

$S = \{-3\}$

Questão 2

Enumere os seguintes conjuntos, considerando os conjuntos universos:

$A = \{-10 < x < 10\}$ sendo U o conjunto dos números naturais:

$B = \{-10 < x < 10\}$ sendo U o conjunto dos números inteiros:

SÍMBOLOS LÓGICOS MATEMÁTICOS

+	SOMA
-	SUBTRAÇÃO
x ou *	MULTIPLICAÇÃO ou PRODUTO
/	DIVISÃO ou QUOCIENTE ou RAZÃO
>	MAIOR QUE
<	MENOR QUE
≥	MAIOR OU IGUAL
≤	MENOR OU IGUAL
< e >	COMPARAÇÃO (MENOR QUE E MAIOR QUE)
...	OUTROS ELEMENTOS ou INFINITO A = {5, 50, 51, 52, ... , 100} H = {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...}

L={ , }	CONJUNTO
{ } ou ø	CONJUNTO VAZIO
∞	LEMINSCATA (INFINITO)
∀x	PARA TODO OU QUALQUER QUE SEJA **Ex:** $x > 0, \forall x$ é positivo
| ou /	TAL QUE Ex: $\mathbb{R}^{+} = \{x \in R \mid x \geq 0\}$
∴	PORTANTO

Questão 1

Liste todos os elementos dos conjuntos abaixo:

a) A={x | x é vogal do alfabeto}

b) B={x | x é continente do planeta Terra}

c) C={x | x é n° par positivo menor que 100}

d) D={x | x é número primo}

e) E={x | x é n° impar maior que 6 e menor que 17 }

Questão 2

Liste todos os elementos dos conjuntos abaixo:

a) $A=\{x \mid x$ é um número, tal que $x^2 = 1\}$

b) $B=\{x \mid x$ é um número inteiro positivo menor que $12\}$

c) $C=\{x \mid x$ é o quadrado de um número inteiro e $x < 100\}$

d) $D=\{x \mid x$ é um número inteiro positivo, tal que $x^2 = 2\}$

SÍMBOLOS DE PERTINÊNCIA

Pertinência é a característica associada **a um elemento** que faz parte **de um conjunto** ($e \Rightarrow C = \{e_1, e_2, e_3\}$)

OBS: Um conjunto pode ser elemento de um conjunto. Ex: $\{\emptyset\}$, $\{\mathbb{N}\}$

$\in$	**PERTENCE (é elemento de)**
$\notin$	**NÃO PERTENCE (não é elemento de)**

$\exists x$	**EXISTE x** Ex: $\exists x \in \mathbb{Z} \mid x > 3$
$\nexists x$	**NÃO EXISTE x** Ex: $\nexists x \in \mathbb{N} \mid x < 0$

EXEMPLOS: Seja o conjunto $C = \{1,3,5,7,9\}$

a) 1 ____ C

b) {1} ____ C

c) 2 ____ C

VAMOS VER SE ENTENDI?

1) Utilizar os símbolos $\in$ e $\notin$, relacionando os elementos com os conjuntos $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{b, c, d, f, g\}$.

a) a ….. A b) u ….. B c) c ….. B d) d ….. A e) f …… b

QUANTIFICADORES E PROPOSIÇÕES

Os quantificadores $\forall x$ (para todo ou qualquer que seja) , $\exists x$ (existe pelo menos um) e $\exists | x$ (existe apenas um) servem para transformar sentenças abertas em proposições, ou seja, atribuem um valor lógico verdadeiro ou falso a proposição;

O Quantificador Universal: $\forall x$

Símbolo: $\forall$ (para todo ou qualquer que seja)

Exemplo:

Diga se as proposições são verdadeiras (V) ou falsas(F):

- A=$\{\forall x | x + 1 = 7\}$ (**F**) Lê-se: qualquer que seja o nº x, temos que x + 1=7
- B=$\{\forall a | (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1\}$ (**V**)
- C=$\{\forall y | y^2 + 1 > 0\}$ (**V**)
- D=$\{\forall x | x^3 = 2x^2\}$ (**V**) ; x=o ou x=2; mas x≠1

O Quantificador Existencial: ∃x

Símbolo: ∃x (existe pelo menos um) Obs.: Um no mínimo, mas podem ser mais. Só não podem ser todos.

Exemplo:

Diga se as proposições são verdadeiras (V) ou falsas(F):

- A={∃x| x +1 = 7} (V) Lê-se: qualquer que seja o nº x, temos que x + 1=7
- B={∃y| y^2+ 1 > 0} (**F**)
- C={∃x| $x^3 = 2x^2$} (**V**) ; x=o ou x=2; mas x≠1

Obs: O Quantificador ∀**x é negado** (~) **pelo** ∃x , ou seja (∀x) ↔ ~(∃x) e vice- versa

Exemplo

Sentença: Todo (∀**x**) losango é quadrado (sentença falsa)

Negação: Existe pelo menos um (∃x) losango que (~)**não** é quadrado (sentença verdadeira)

O Quantificador Existencial: $\exists|x$

Símbolo: $\exists|x$ (existe apenas um ou existe um e somente um) Obs.: É só provar que há duas possibilidades para x que a proposição será falsa.

Exemplo:

Diga se as proposições são verdadeiras (V) ou falsas(F):

- A={$\exists|x$ | $x+1=7$} (V) Lê-se: existe apenas um nº x, tal que $x+1=7$
- B={$\exists|y$ | $y^2+1>0$} (**F**)
- C={$\exists|x$ | $x^3=2x^2$} (**F**) ; x=o ou x=2; mas x≠1

IGUALDADE DE CONJUNTOS (= e ≠)

Dois conjuntos são iguais quando todo elemento do conjunto A **pertence** ao conjunto B.

$$A=B \Leftrightarrow (\forall x)\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Exemplos:

- Se A={a,b,c} e B={b,c,a} , temos que A=B
- Se A={x|x-2=5} e B={7} , temos que A=B

Pense nisso:

Será que o conjunto formado pela palavra garra é igual ao da palavra agarrar ?

Se A={g,a,r,r,a} e B={a,g,a,r,r,a,r} , temos que A=B ?

Se C={x|x é letra da palavra matemática} e D={m,a,t,e,á}, temos que C≠D ?

SÍMBOLOS DE DESIGUALDADE

=	**IGUALDADE**
≠	**DIFERENÇA**

1) RELACIONE OS CONJUNTOS UTILIZANDO OS SÍMBOLOS = OU ≠.

A = {1, 3, 5, 7} .... B = {X | X É UM NÚMERO ÍMPAR, MENOR QUE 9}

A = {VERDE, AMARELO} .... B = {X | X É UMA COR DA BANDEIRA DO BRASIL}

A = {0, -1, -2, -3} .... B = {X | X É UM NÚMERO POSITIVO}

A = {O, H} .... B = {X | X É ELEMENTO QUE COMPÕE A MOLÉCULA DA ÁGUA}

AS 4 REPRESENTAÇÕES

1) **POR EXTENSO ou TABULAR**, enumerando elemento por elemento

LETRA MAIÚSCULA = { elementos separados por vírgulas }

Ex: Os elementos do conjunto A são divisores positivos de 24.
A representação entre chaves pode ser feita:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

2) ABREVIADAMENTE

Destacando uma **propriedade comum** apenas aos seus elementos.

$$A = \{ x \mid x \text{ tem a propriedade } p \}$$

Lê-se: A, é o conjunto de todos os elementos x, tal que x tem a propriedade p

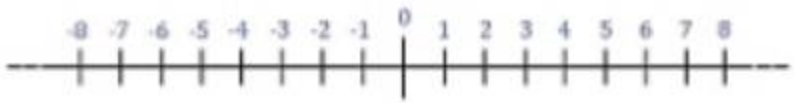
Ex:

$$A = \{ x \mid x > 0 \}$$

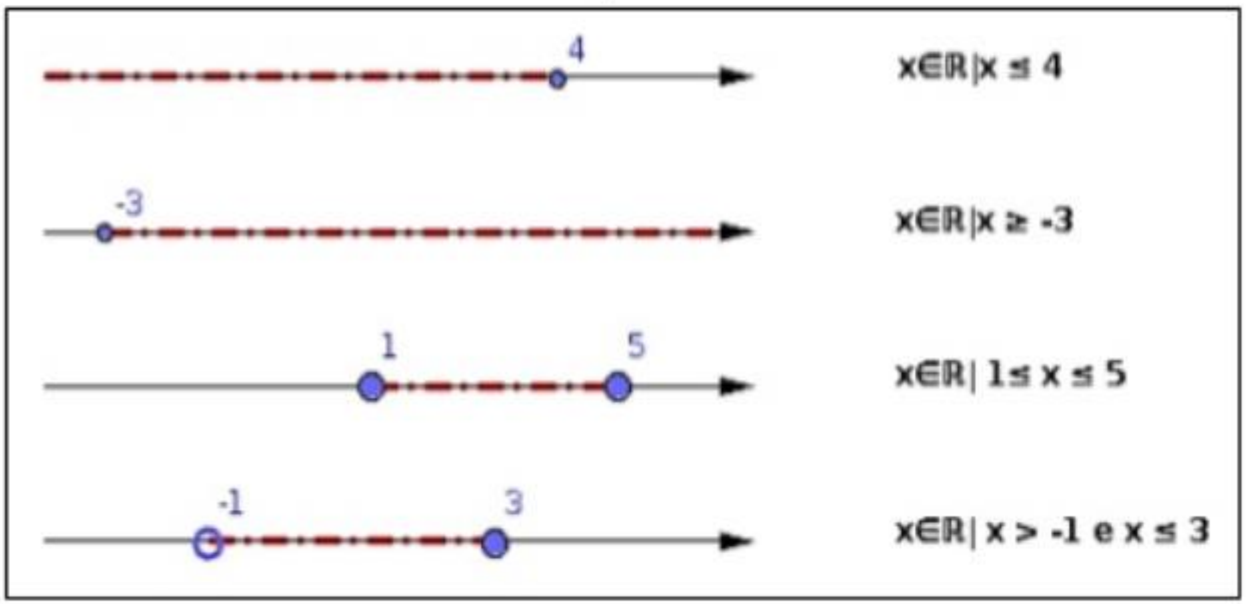
$$A = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

3) POR INTERVALO REAL (GEOMETRIA)

Destacando uma **região comum** apenas aos seus elementos.

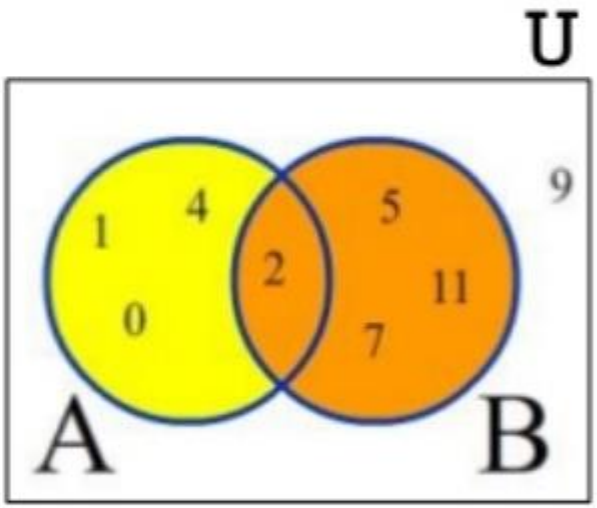


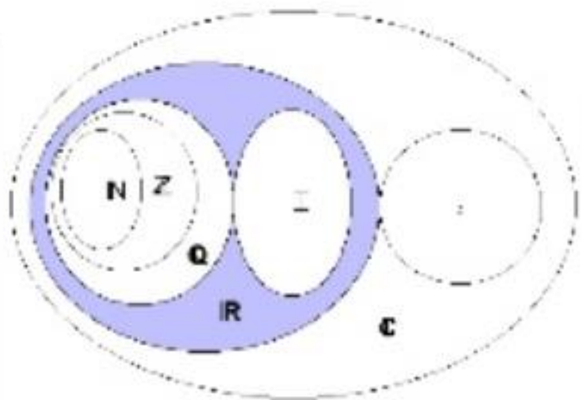
Ex:

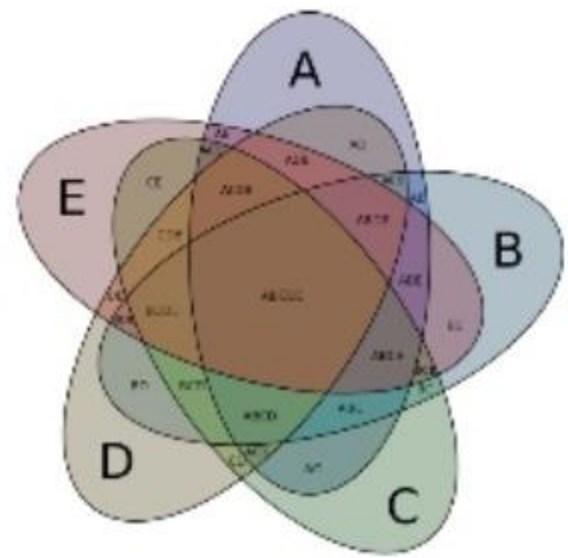


4) DIAGRAMA DE VENN-EULER

3) É a representação de um conjunto com auxílio de uma linha fechada e não-entrelaçada. Permite simbolizar graficamente as relações de pertinência entre conjuntos e seus elementos.





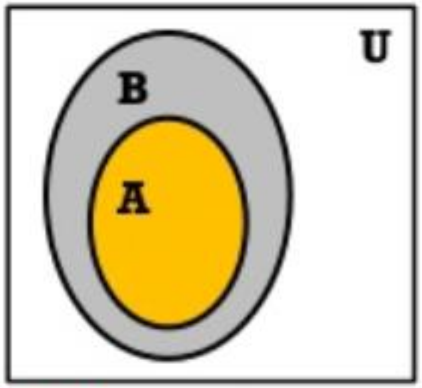


SUBCONJUNTOS (UM CONJUNTO FEITO A PARTIR DE UM CONJUNTO ORIGINAL)

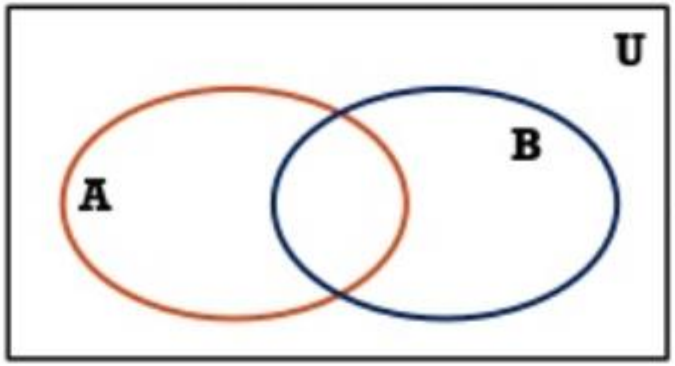
Imagine 2 conjuntos A e B. Se todo elemento de A for também elemento de B, então A é subconjunto de B.

Exemplo:

Dados os conjuntos **A = {1, 3, 5}** e **B = {0, 1, 2, 3, 4, 5}**



A é subconjunto de B



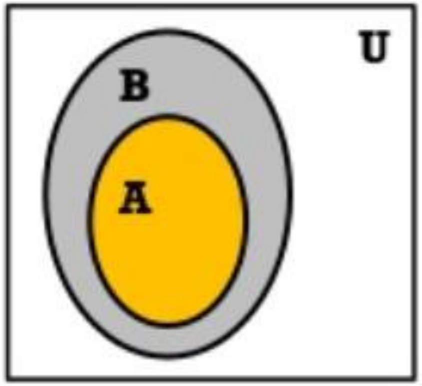
A não é subconjunto de B

OBS: O Conjunto U é o conjunto Universo (um conjunto que possui todos os elementos que você deseja). **Ex:** O conjunto dos Inteiros

SÍMBOLOS DE INCLUSÃO

Inclusão é a característica associada **a um conjunto** que faz parte **de um conjunto** (A = { } ➡ B= { })

$\subset$	**Está Contido (é subconjunto de)**
$\not\subset$	**Não Está Contido (não é subconjunto de)**
$\supset$	**B Contém A**
$\not\supset$	**A Não Contém B**



EXEMPLOS: Dados os conjuntos A = {1, 3, 5} e B = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, temos $\{1, 3, 5\} \subset \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ou $A \subset B$.

A RELAÇÃO DE INCLUSÃO POSSUI 4 PROPRIEDADES:

- O Conjunto Vazio C={ } ou Ø é subconjunto de todo conjunto;
- $A \subset A$, isto é, todo conjunto é sempre subconjunto dele mesmo;
- Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$;
- Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

CONJUNTO DAS PARTES

O conjunto de todos os subconjuntos de um conjunto dado A é chamado de **CONJUNTO DE PARTES;**

Se A é o conjunto de três elementos {x, y, z} a lista completa de subconjuntos de A é:

{ } (o conjunto vazio);

{x};

{y};

{z};

{x, y};

{x, z};

{y, z};

{x, y, z};

e portanto o conjunto de partes de A é o conjunto de 8 elementos:

P(A) = {{ }, {x}, {y}, {z}, {x, y}, {x, z}, {y, z}, {x, y, z}}.

Fórmula:

$$P(A) = 2^{n(A)}$$

, onde

- P(A)= é o conjunto das partes de A
- n(A) = é o nº de elementos de A

CONECTIVOS LÓGICOS MATEMÁTICOS

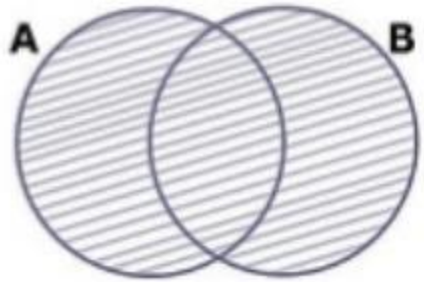
OPERAÇÃO	CONECTIVO	ESTRUTURA LÓGICA	EXEMPLO
NEGAÇÃO	não (~)	**não p**	A bicicleta **NÃO** é azul.
CONJUNÇÃO	e (^)	**p e q**	Vou a praia **E** cinema. Vou ganhar bicicleta **E** videogame
DISJUNÇÃO INCLUSIVA	ou (v)	**p ou q**	Vai me dar uma calça **OU** uma camisa Vai me dar o documento carimbado **OU** assinado
DISJUNÇÃO EXCLUSIVA	ou ... ou ($\underline{\vee}$)	**ou p ou q**	**Ou** irei jogar basquete **ou** irei à casa de João
CONDICIONAL (implicação)	se... então (⇒)	**Se p então q**	**Se** nasci em Salvador , **então** sou Baiano. **Se** sou inteligente, **então** passarei de série.
BICONDICIONAL (equivalência)	se e somente se (⇔)	**p se e somente se q**	4 é maior que 2 **se e somente se** 2 for menor que 4 .

OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

1)UNIÃO DE CONJUNTOS:

O conjunto união de **A** em **B** é formado pelos elementos que pertencem ou a **A**, ou a **B** ou a **ambos**.

$$\boxed{A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}}$$

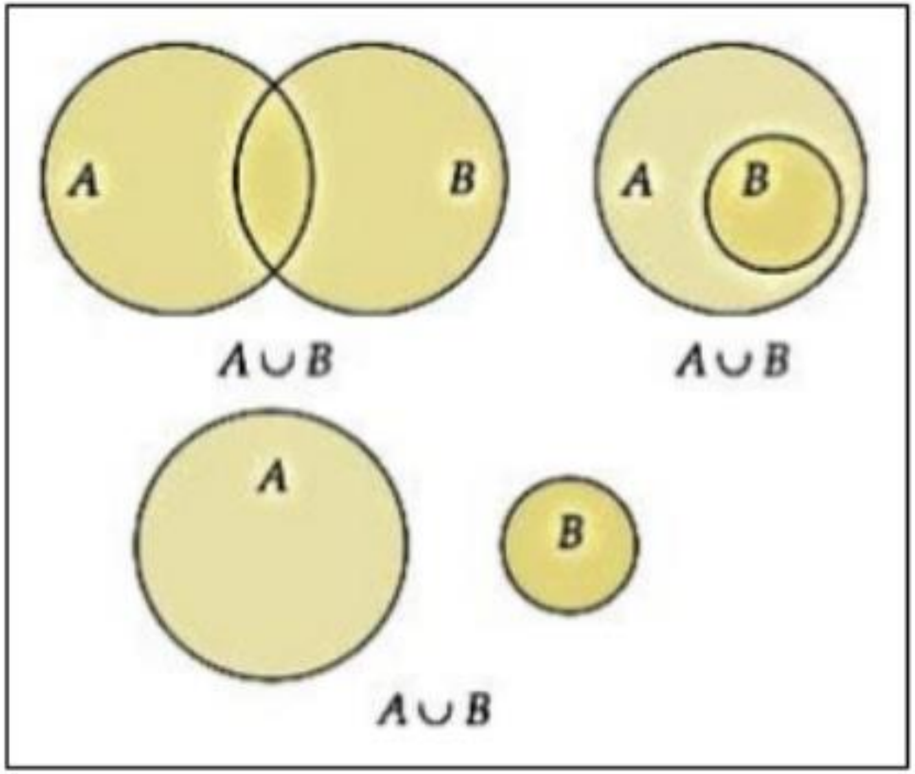


***Exemplo*:**

Dados os conjuntos A = {-3, -2, -1, 0} e B = {-1, 0, 1}, temos:

$A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$

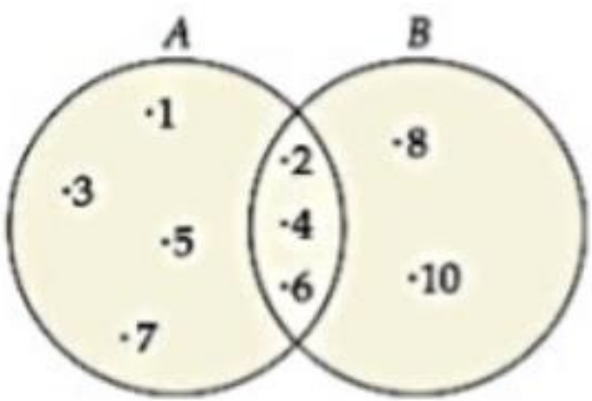
CASOS POSSÍVEIS DE UNIÃO NO DIAGRAMA DE VENN-EULER



Exemplo
Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, calcular $A \cup B$:

Resolução
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$

Graficamente, teremos



PROPRIEDADES

Sejam A, B e C conjuntos. Então são válidas as seguintes propriedades:

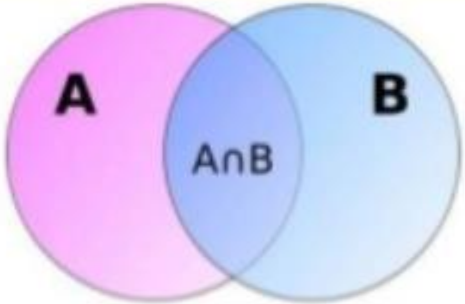
- $A \cup B = B \cup A$ (Comutatividade)
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Associatividade)
- $A \cup A = A$
- $A \cup \emptyset = A$ (elemento neutro)
- $A \cup U = U$

OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

1)INTERSECÇÃO DE CONJUNTOS:

O conjunto intersecção de **A** com **B** é formado pelos elementos comuns a **A** e a **B**

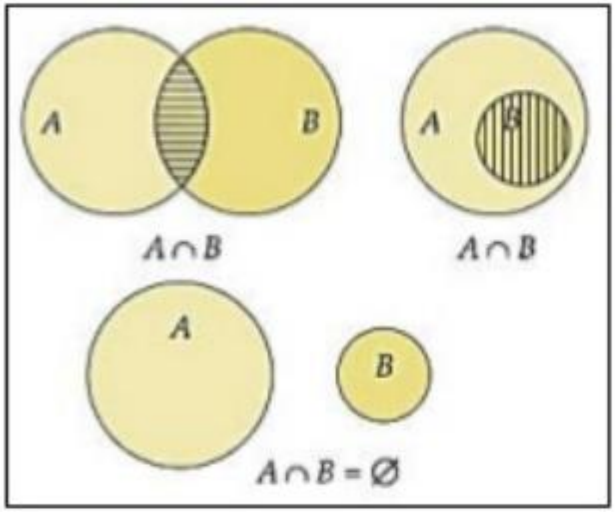
$$\boxed{A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}}$$



Exemplo: **Dados os conjuntos A = {-3, -2, -1, 0} e B = {-1, 0, 1}, temos:**

A ∩ B = {-1, 0}

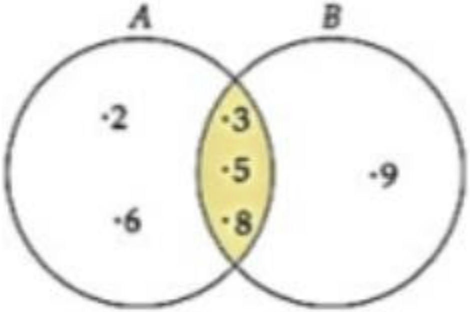
CASOS POSSÍVEIS DE INTERSECÇÃO NO DIAGRAMA DE VENN-EULER



Exemplos

a) Sendo $A = \{2, 3, 5, 6, 8\}$ e $B = \{3, 5, 8, 9\}$ determinar $A \cap B$:

Resolução:
$A \cap B = \{3, 5, 8\}$, apenas os elementos comuns a A e B.



OBS: $A \cap B = \emptyset$, são denominados conjuntos disjuntos

PROPRIEDADES DAS INTERSECÇÕES

Sejam A, B e C conjuntos. Então são válidas as seguintes propriedades:

$A \cap B = B \cap A$ (Comutatividade)

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Associatividade)

$A \cap A = A$

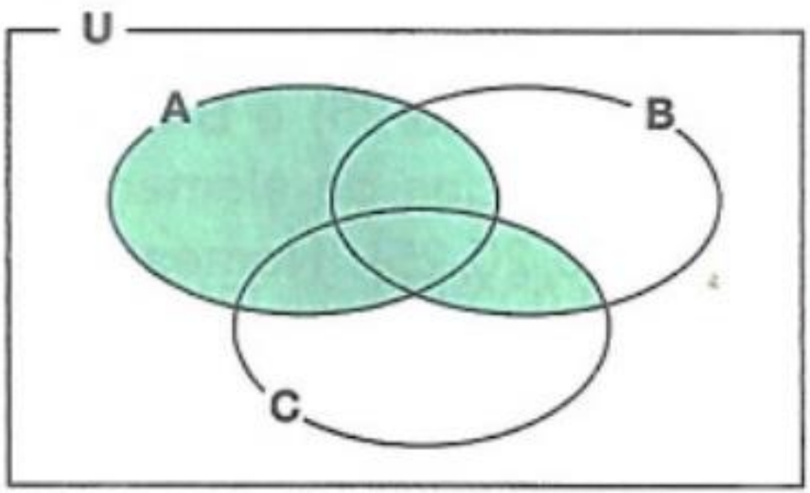
$A \cap \emptyset = \emptyset$

$A \cap U = A$ (elemento neutro)

PROPRIEDADES DAS UNIÕES E INTERSECÇÕES

Propriedades Comuns à União e à Interseção Sejam A, B e C conjuntos. Então são válidas as seguintes propriedades:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

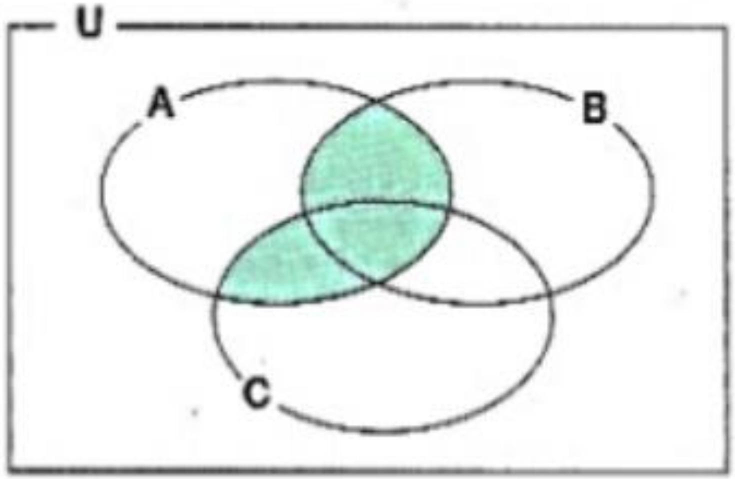


A parte destacada corresponde à $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

PROPRIEDADES DAS UNIÕES E INTERSECÇÕES

Propriedades Comuns à União e à Interseção Sejam A, B e C conjuntos. Então são válidas as seguintes propriedades:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

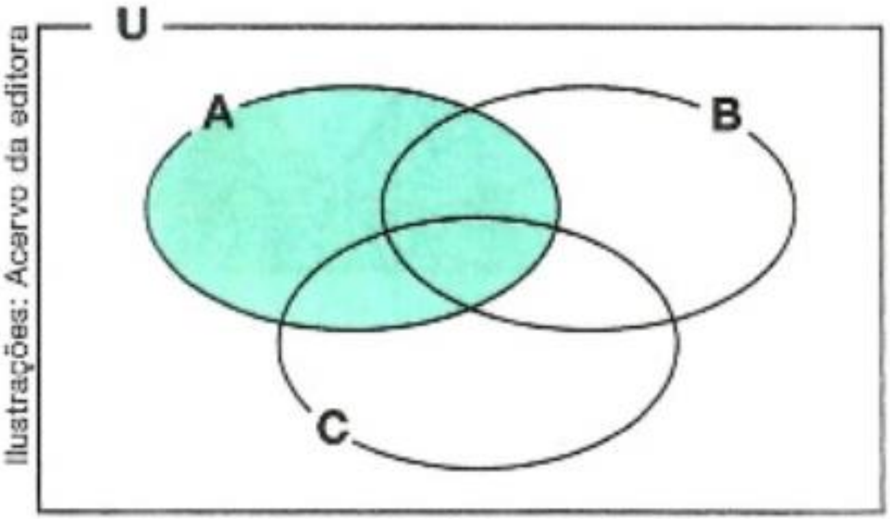


A parte destacada corresponde à $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

PROPRIEDADES DAS UNIÕES E INTERSECÇÕES

Propriedades Comuns à União e à Interseção Sejam A, B e C conjuntos. Então são válidas as seguintes propriedades:

$$(A \cup B) \cap A = A \cap (B \cup A) = A$$



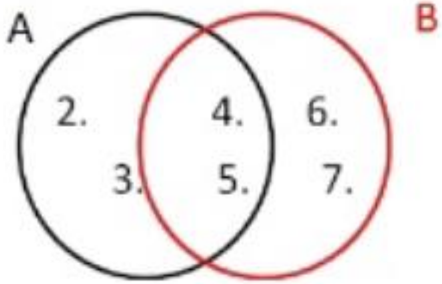
A parte destacada corresponde à $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$.

NÚMERO DE ELEMENTOS DE UM CONJUNTO

O número de elementos da união de :

2 conjuntos A e B será:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$



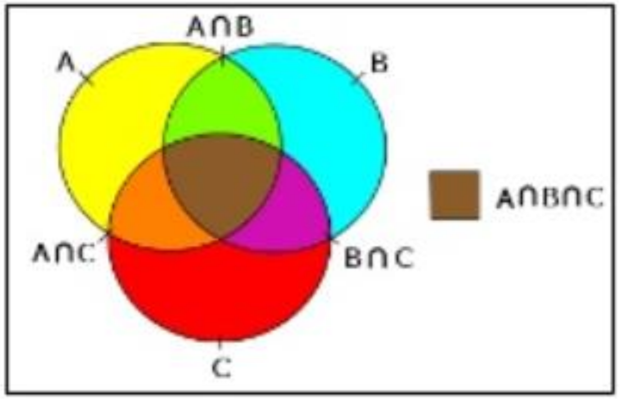
$n(A \cup B) = 4 + 4 - 2 = 6$

NÚMERO DE ELEMENTOS DE UM CONJUNTO

O número de elementos da união de :

3 conjuntos A, B e C será:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

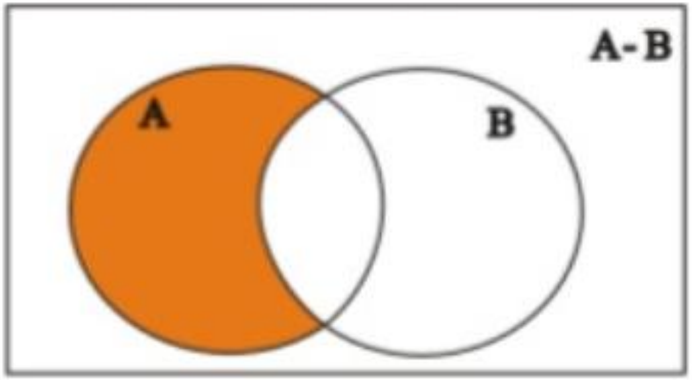


OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

1) DIFERENÇA DE CONJUNTOS:

O conjunto diferença de A e B é formado por elementos de A que não pertencem a B.

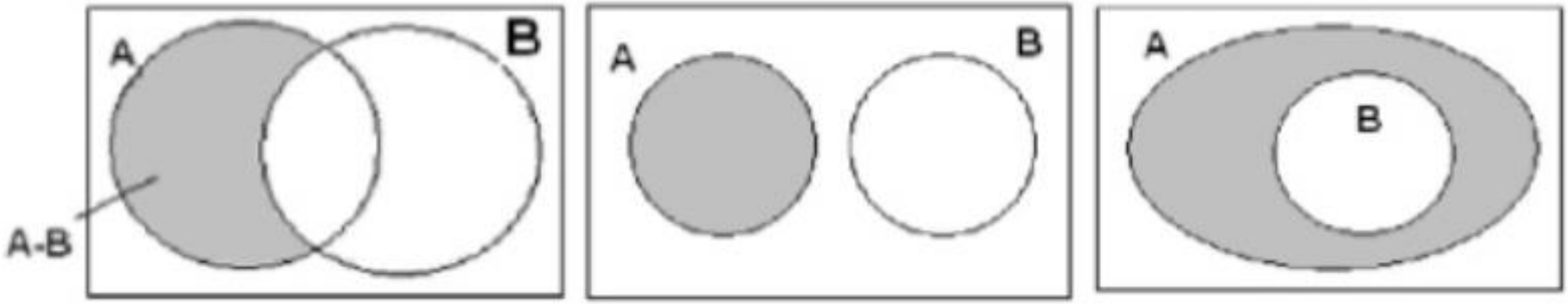
$$\boxed{A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}}$$



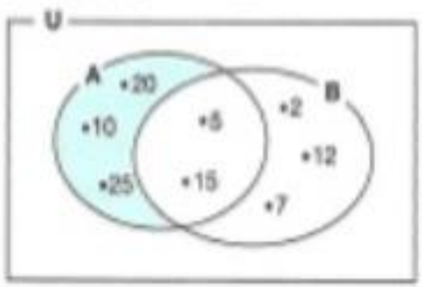
Exemplo: Dados os conjuntos A = {-4, -3, -2, -1, 0} e B = {-2, -1, 0, 1}, temos:

A – B = {-4, -3}

CASOS POSSÍVEIS DE DIFERENÇA NO DIAGRAMA DE VENN-EULER

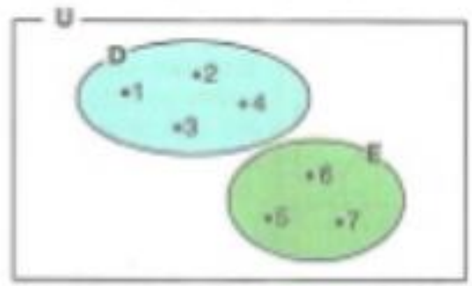


$A = \{5, 10, 15, 20, 25\}$ e $B = \{2, 5, 7, 12, 15\}$.



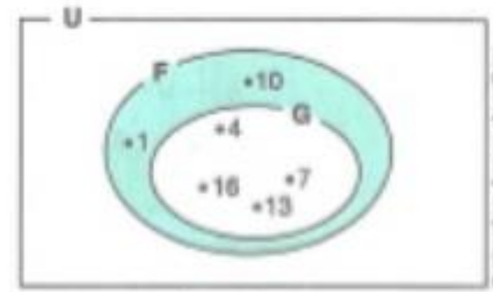
$A - B = \{20, 20, 25\}$

• $D = \{1, 2, 3, 4\}$ e $E = \{5, 6, 7\}$



$D - E = \{1, 2, 3, 4\}$ e $E - D = \{5, 6, 7\}$

• $F = \{1, 4, 7, 10, 13, 16\}$ e $G = \{4, 7, 13, 16\}$



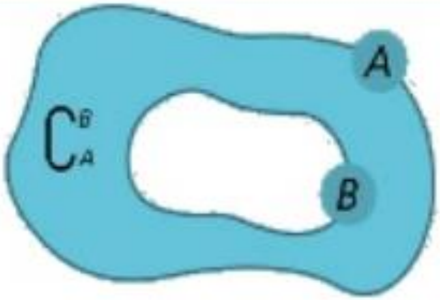
$F - G = \{1, 10\}$ e $G - F = \varnothing$

OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

4) COMPLEMENTAR DE CONJUNTOS: O conjunto complementar de A em relação a B é dado pelos elementos que faltam ao conjunto B para que ele fique igual ao conjunto A.

$\complement_A^B$ ou $\complement_A B$ =Lê-se Complementar de **A** em relação a **B.**

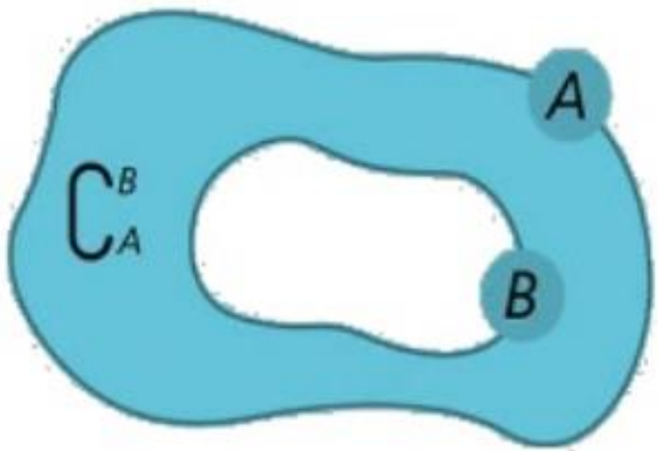
$$\complement_A^B = A - B \text{ , com } B \subset A \qquad \complement_A^B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



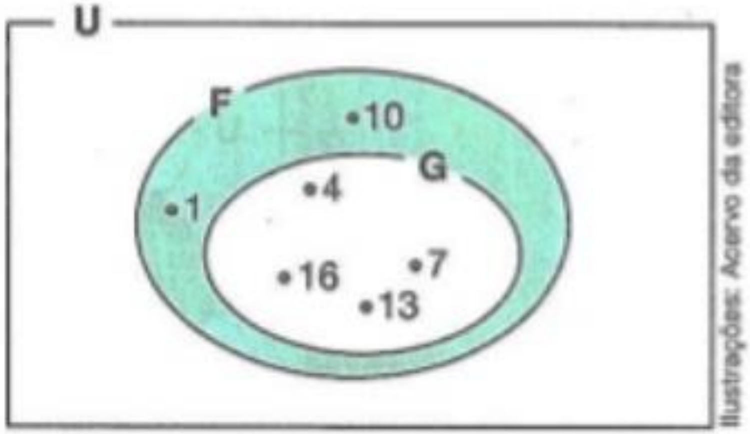
***Exemplo*:** Dados os conjuntos A = {-4, -3, -2, -1, 0} e B = {-2, -1, 0}, temos:

$\complement_A^B = A - B = \{-4, -3\}$

CASOS POSSÍVEIS DO COMPLEMENTAR NO DIAGRAMA DE VENN-EULER



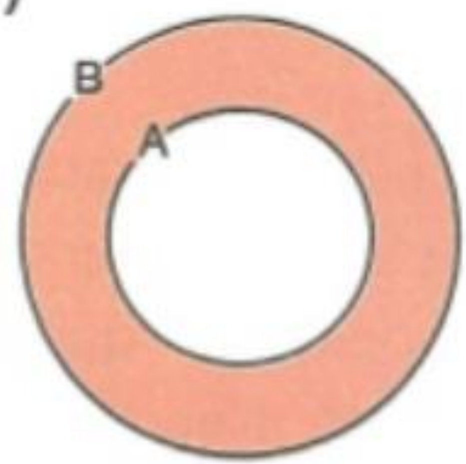
■ $F = \{1, 4, 7, 10, 13, 16\}$ e $G = \{4, 7, 13, 16\}$



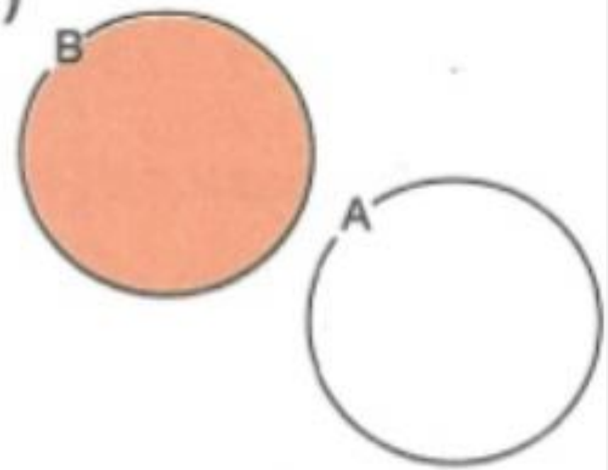
$F - G = \{1, 10\}$ e $G - F = \varnothing$

Em qual item a parte destacada representa $\complement_B^A$.

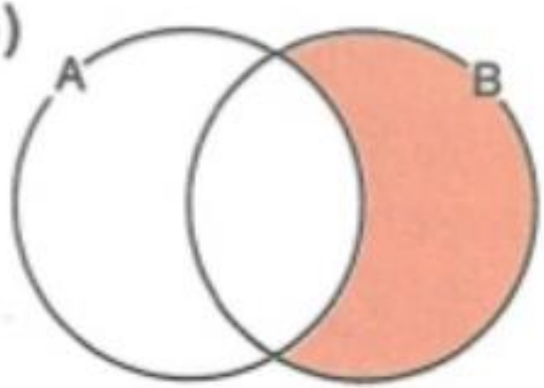
a)



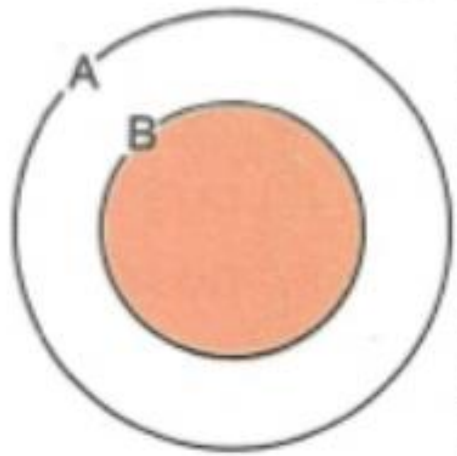
c)



b)



d)



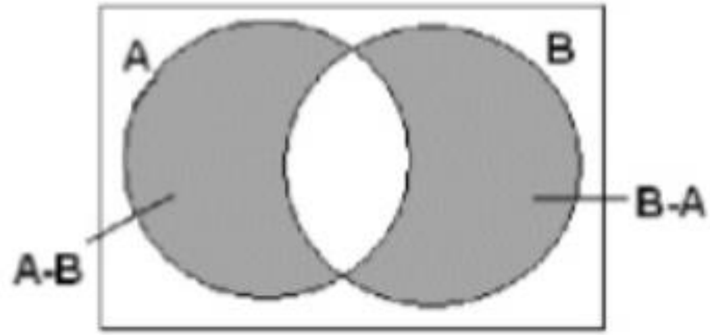
Ilustrações: Acervo da editora

OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

5) DIFERENÇA SIMÉTRICA: a diferença simétrica entre os conjuntos A e B, é o conjunto dos elementos que pertencem a A e não pertencem a B ou, os elementos que pertencem a B e não pertencem A.

Indicaremos a diferença simétrica entre A e b por: $A \Delta B$.

$$\boxed{A \Delta B \ \{x \mid x \in A - B \text{ ou } x \in B - A\} = (A - B) \cup (B - A)}$$

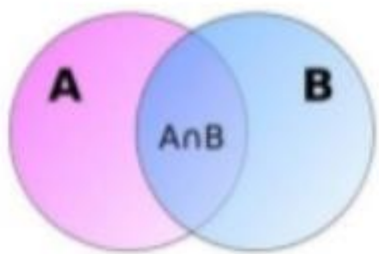


Exemplo: Sejam A = { 1, 2, 3 } e B = { 2, 3, 4 }. Então A Δ B = { 1 } $\cup$ { 4 }

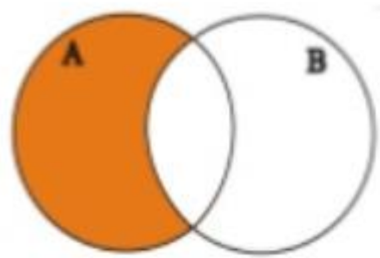
OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

UNIÃO

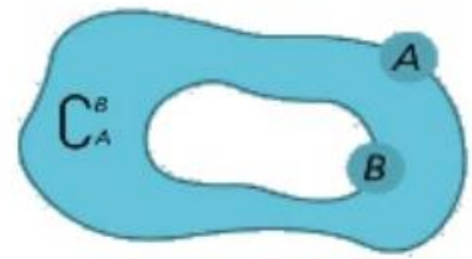
INTERSECÇÃO



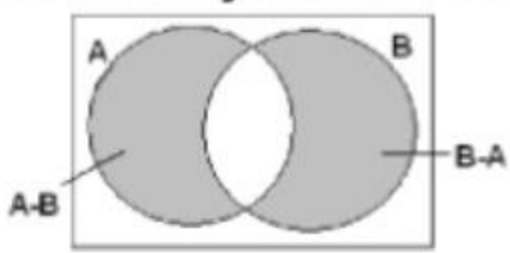
DIFERENÇA



COMPLEMENTAR



DIFERENÇA SIMÉTRICA



Lista de Exercícios!

Ver PDF da lista!

Atividade Quizizz!

Atividade que vale ponto para ML!

Espere que o professor passe o código do jogo e libere o jogo! → Have fun!