

Ada und die Zahlen

Julien Siebert

15. Februar 2024

Pour Oscar, joyeux Noël.

Kapitel 0

Das ist Ada. Heute hat sie beschlossen, draußen mit ihren Kreiden zu spielen. Sie möchte die Zahlen zeichnen, die sie gerade in der Schule gelernt hat. Sie sind lustig mit ihren seltsamen Formen und Namen. Als Erstes zieht Ada eine Linie. Sie geht vom Haus über den Hof in den Garten. Das wäre gut, um die Zahlen darauf zu legen. Sie dürfen nicht herunterfallen! Ada zeichnet zunächst einen Kreis in der Nähe ihres Hauses. Das ist der 0. Das ist der Startpunkt. Dann macht sie einen Schritt in Richtung Garten und folgt der Linie. Ada zeichnet nun eine 1. Das ist einfach, es sieht aus wie ein senkrechter Balken. Ein zweiter Schritt in Richtung Garten und sie zeichnet eine 2. Diese ist etwas komplizierter: Sie dreht sich, geht nach oben und nach unten. Und natürlich darf der kleine waagerechte Balken darunter nicht fehlen. Noch ein Schritt und Ada

zeichnet einen 3. Zwei Kurven und fertig. Es folgen 4 (ganz gerade), 5 (eine Mischung aus Geraden und Rundungen), 6 (ganz rund), 7 (wie ein unfertiger Zickzack), 8 (wie zwei Rundungen) und die letzte: 9 (Achtung, nicht mit einer 6 verwechseln).

Ada steht jetzt in der Mitte des Hofes. Sie geht einen Schritt zurück und kommt von der 9 auf die 8. Noch einen Schritt zurück und schon ist sie auf der 7, dann auf der 6, der 5, der 4, der 3, der 2, der 1 und der 0, direkt vor der Haustür.

»Das ist lustig«, denkt sie, »wenn ich einen Schritt in Richtung Garten mache, trete ich auf die größere Zahl. Und wenn ich einen Schritt zurück mache, trete ich auf die kleinere Zahl. Mal sehen, was passiert, wenn ich drei Schritte vorwärts gehe.«

Ada stellt sich auf die 0 und zählt im Gehen: »1, 2 und 3!«
Wieder drei Schritte: »4, 5 und 6!«

Und noch einmal: »7, 8 und 9!«

»Und jetzt«, sagte Ada, »in die andere Richtung!« Mal sehen, was passiert, wenn ich zwei Schritte zurücktrete :

»8 und 7 !«

»6 und 5 !«

»4 und 3 !«

»2 und 1 !«

»Ich bin fast da«, denkt Ada.

Kapitel 1

Addition und Subtraktion

In diesem Moment kommt Adas Tante Emilie aus dem Haus.

»Hallo Ada«, sagt Emilie, »wie geht es dir?«

»Emilie !« ruft Ada.

Ada liebt Emilie sehr. Sie ist eine ihrer Lieblingstanten. Emilie ist so stark, sie ist viel gereist und spricht drei verschiedene Sprachen. Außerdem baut sie Raketen!

»Schau mal, Emilie, ich spiele mit Zahlen«, erklärt Ada.

»Ich habe alle Zahlen von 0 bis 9 gezeichnet. Und wenn ich einen Schritt vorwärts gehe, komme ich zur nächsten.

Und wenn ich einen Schritt zurück gehe, bin ich wieder bei der vorherigen.«

Emilie erklärt Ada nun, dass wenn sie einen Schritt vorwärts geht, addiert sie 1 zu der Zahl, auf der sie steht, und zeichnet $+1$. Wenn sie einen Schritt zurück geht, subtrahiert sie eins von der Zahl, auf der sie stand, und zeichnet -1 . Ada hat jetzt zwei neue Symbole, die sie benutzen kann: das Plus ($+$) für die Addition und das Minus ($-$) für die Subtraktion. Sie findet die beiden neuen Symbole lustig. Ada und Emilie beschließen, zusammen zu spielen. Von der 0 aus geht Ada drei Schritte vorwärts ($+3$) und dann einen Schritt zurück (-1). Jetzt steht sie auf der 2. Emilie nimmt ein Notizbuch und einen Stift und zeigt Ada, wie sie ihren Weg zeichnen soll: $0 + 3 - 1$. Als Ada auf der 2 angekommen ist, erklärt Emilie ihr, dass es ein Symbol namens Gleich ($=$) gibt, mit dem man sagen kann, dass man auf der 2 angekommen ist: $0 + 3 - 1 = 2$. Ada findet, dass sich das wie eine Zauberformel anhört. Sie will es unbedingt noch einmal versuchen.

»Komm schon, Tante, jetzt schreibst du die Zahlen und die lustigen Symbole in dein magisches Notizbuch und ich bewege mich auf der Linie.«

Emilie zeigt ihr ihr Notizbuch, in dem steht: $4 + 3 - 2$. Ada überlegt.

»Man muss auf der 4 beginnen, drei Schritte nach vorne und zwei zurückgehen, richtig?«

» Das ist richtig!« antwortet Emilie.

Dann macht sich Ada auf den Weg. Von der 4 aus geht sie drei Schritte nach vorne und kommt auf die 7. Dann dreht sie sich um und macht zwei Schritte in die andere Richtung. Ada steht nun auf der 5. Emilie schreibt nun $4 + 3 - 2 = 5$ auf.

»Jetzt bin ich dran!«, ruft Ada.

Dann gibt Emilie ihr das Notizbuch und den Stift, und Ada schreibt: $1 + 7 - 3$. Emilie schaut sich das Blatt an, steht auf und geht zur 5.

»Voilà !« sagt Emilie und trägt $1 + 7 - 3 = 5$ in das Notizbuch ein.

»Was?«, fragt Ada. »Du schummelst! Du musst von 1 aus 7 Schritte nach vorne und 3 zurück gehen.«

Und Ada zeigt es ihr. Sie stellt sich auf die 1, geht sieben Schritte vorwärts (dann ist sie bei der 8) und drei Schritte zurück, um genau dort anzukommen, wo Emilie steht, bei der 5. Emilie erklärt Ada nun, dass man mit dem Notizbuch und dem Stift nicht immer vor und zurück gehen muss. Man kann das Ergebnis von Operationen (so nennt Emilie die magischen Formeln mit den Zahlen, + und -) berechnen und das Ergebnis (was hinter dem = steht) erfahren, ohne sich zu bewegen. Ada ist skeptisch. Sie bittet Emilie um ein weiteres Beispiel. Emilie stellt sich auf die 0 und schreibt $2 + 4 - 5 + 2 - 3$ in ihr Notizbuch. Ada stellt sich auf die 2, geht vier Schritte vor, dann fünf Schritte

in die andere Richtung, dreht sich wieder um, geht zwei Schritte vor und drei Schritte zurück. Puh! Ihr wird fast schwindelig. Emilie dagegen hat sich nicht bewegt. Dann schaut Ada unter ihre Füße und sieht die 0. Emilie lächelt und schreibt $2 + 4 - 5 + 2 - 3 = 0$.

»Siehst du«, sagte sie, »ich wusste, dass wir beide hier auf der 0 landen würden, schon bevor du dich auf den Weg gemacht hast.«

»Das stimmt«, sagt Ada, »das ist praktisch bei sehr langen Formeln, bei denen einem schwindelig wird. Aber ich finde es viel lustiger, wirklich zu reisen!«.

Kapitel 2

Zu wenig Zahlen

Ada spielt weiter mit Additionen und Subtraktionen. Emilie hat ihr ihr Heft und ihren Stift dagelassen und ist dann in den Garten gegangen, um Blumen zu pflücken. Nach einigen Spielrunden hat Ada ein Problem. Sie hat nicht genug Zahlen! Sie hat $4 + 5 + 2 - 3$ im Notizbuch notiert, sich auf die 4 gestellt, fünf Schritte vorwärts gemacht und schon sitzt sie in der Klemme. Sie steht nun auf 9, der letzten Zahl in der Reihe. Ada muss noch zwei Schritte nach vorne gehen und dann drei Schritte in die andere Richtung machen. Aber siehe da: Nach 9 hat Ada nichts mehr gezeichnet! Sie könnte auf der Linie vor- und zurückgehen, ohne Zahlen zu haben, wo sie ihre Füße hinsetzen soll. Aber

woher weiß sie, ob sie an der richtigen Stelle ankommt? Sie weiß, dass es Dinge nach 9 gibt. Sie hat schon von Zahlen gehört, z. B. einundzwanzig, dreiundsechzig, sechsunddreißig oder fünfzehn. Nur weiß Ada nicht, wie man sie zeichnet, und auch nicht, in welcher Reihenfolge. Wer kommt zuerst? einundzwanzig oder fünfzehn? dreiundsechzig oder sechsunddreißig? Sie ist sehr besorgt. Was soll sie tun? Soll sie ihre Tante Emilie fragen? Nein, Emilie hat bestimmt viel zu tun, und Ada spürt, dass sie es auch allein schaffen kann. Also denkt sie nach. Sie überlegt, ob sie sich nicht neue Zahlen ausdenken könnte. Sie müsste nur neue Symbole zeichnen und ihnen neue Namen geben. Leichter gesagt als getan. Nach 4 neuen Zahlen, “ga”, “bu”, “zo” und “meu”¹, gehen Ada die Ideen aus. Das ist gar nicht so einfach. Man muss neue Namen finden und sich neue Symbole zum Zeichnen ausdenken (wer hat übrigens die Zahlen von 0 bis 9 erfunden? fragt sich Ada). Außerdem ist es schwierig, sich solche Dinge zu merken. Schon das Merken der Namen der Zahlen von 0 bis 9 hatte ihr Schwierigkeiten bereitet, stellt euch vor, wenn sie sich für jede neue Zahl einen neuen Namen und ein neues Symbol merken müsste. Es könnte ja jede Menge Zahlen geben! Also, nein, Ada be-

¹ Anm. des Autors: Diese Zahlen wurden nicht von Ada erfunden, sondern stammen aus einer französischen Zeichentricksreihe namens Les Shadoks, siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Die_Shadoks.

schließt, dass es vielleicht doch keine so gute Idee ist, neue Zahlen zu erfinden. Was ist zu tun? Ada, die immer noch auf dem 9 steht, muss noch zwei Schritte nach vorne und drei rückwärts gehen. Sie überlegt noch einmal. Vielleicht kann sie die Zahlen wieder benutzen? Nach 9 kann man wieder 0, 1, 2 usw. schreiben. So muss man keine neuen Symbole lernen. Das ist gut, denkt Ada, aber das Problem ist, dass man sich verlaufen kann. Woher weiß ich, wie weit ich von zu Hause entfernt bin? Wenn ich auf einem 5 bin, bin ich dann auf dem ersten 5 - dem direkt neben dem Haus - bin ich dann auf dem zweiten? dem dritten? Wie soll ich mich orientieren, fragt sich Ada. Sie denkt weiter. Was wäre, wenn sie Farbe benutzen würde? Eine Farbe für die erste Zahlenreihe von 0 bis 9, z. B. grün. Dann eine andere Farbe, sagen wir Gelb, für die zweite Zahlenreihe, dann Rot, dann Blau. Hmm, ist Blau größer als Rot? Oder wäre es besser, Blau für die dritte Zahlenreihe und Rot für die vierte zu verwenden? Und welche Farbe für die fünfte? Ada denkt, dass diese Lösung mehr Probleme aufwirft als sie löst. Die Farben sind vielleicht nicht die richtige Lösung, aber all das bringt sie auf eine andere Idee. Ada notiert, wie oft sie alle Zahlen verwendet. Sie beginnt von zu Hause aus: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9. Nach 9 beginnt Ada die Zahlenreihe erneut. Sie notiert 0. Und damit sie nicht vergisst, dass sie gerade die ganze Zahlenreihe zum ersten Mal benutzt hat, notiert sie links von sich einen 1. Ada erhält

1 0 (“eins-null”). Und sie fährt fort, nachdem sie 1 1 (“eins-eins”), 1 2 (“eins-zwei”), 1 3 (“eins-drei”), 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 1 8 und 1 9 notiert hat. Dort angekommen, verlängert Ada die Linie der Zahlen auf dem Weg zum Garten. Da sie die gesamte Zahlenreihe ein zweites Mal verwendet hat, notiert sie nun 2 0 (“zwei-null”) und fährt fort: 2 1 (“zwei-eins”), 2 2 (“zwei-zwei”), 2 3, 2 4, 2 5. Ada hält einen Moment inne und schaut sich ihre Lösung an. Es gefällt ihr. Erstens ist man nie verloren, denkt sie (man weiß immer, ob man weit weg oder nah am Haus ist), und zweitens kann man die Zahlen in jeder beliebigen Farbe zeichnen! Emilie, die in diesem Moment aus dem Garten zurückkommt, sagt zu ihr:

»Na, was machst du denn da auf der Fünfundzwanzig?«
 »Die fünfundzwanzig ?«, fragt Ada, »heißt die “zwei-fünf” eigentlich fünfundzwanzig?«

»Ja«, antwortet Emilie, »alle Zahlen haben Namen.«

»OK, und wie heißt die mit einer Eins und einer Vier?«
 fragt Ada.

»Sie heißt vierzehn.«

»Und die da? Die seltsame mit einer 1 und einer 7?«

»Diese Zahl heißt siebzehn.«

Emilie bringt Ada die Namen der Zahlen bei: “zehn” (10), “elf” (11), “zwölf” (12), usw. bis 25, wo Ada aufgehört hatte. Ada fragt sich, wer über die Namen der Zahlen entscheidet. Emilie erklärt ihr, dass die Zahlen weit gereist sind:

China, Indien, Mittlerer Osten, Zentralasien, Nordafrika, Europa. Die Zahlen, wie wir sie kennen, werden überall auf der Welt verwendet. Ada findet das sehr praktisch. Sie stellt sich eine Welt vor, in der die Zahlen ihre Form ändern, wenn man von einem Land in ein anderes reist. Wie kompliziert das wäre!

Kapitel 3

Unendlich

Ada macht dort weiter, wo sie aufgehört hat. Sie nimmt das Notizbuch und liest $4 + 5 + 2 - 3$. Ada stellt sich auf 4 und geht fünf Schritte vorwärts. Sie steht jetzt auf dem 9. Sie geht zwei Schritte weiter. Jetzt steht sie auf 11. Ada dreht sich um und geht 3 Schritte in die andere Richtung und bleibt auf 8 stehen. Endlich! Ada kann nun $4 + 5 + 2 - 3 = 8$ in ihr Heft schreiben. Sie wendet sich Emilie zu und fragt sie:

»Sag mal, Tante, wer ist die größte Zahl?«

Emilie schaut sie an und lächelt. »Bisher ist die größte Zahl, die du auf deiner Linie gezeichnet hast, fünfundzwanzig.«

»Nein«, erwidert Ada, »du weißt schon, die größte aller Zahlen. Nach der 25 kann ich 2 6 schreiben (Ada spricht dann “zwei-sechs” und Emilie nennt ihren Namen: “sechszwanzig”), und 2 7 (“zwei-sechs”, “siebenundzwanzig”), 28, 29. Danach schreibe ich 30, um zu zeigen, dass ich alle Zahlen von 0 bis 9 dreimal verwendet habe. Dann schreibe ich weiter: 31, 32, 33 und so weiter. Siehst du, wenn die Linie weiter in den Garten, zu den Nachbarn oder über die Straße führt, sollte ich sogar 99 schreiben können. Wenn auf der Linie noch Platz ist (und Mama mich zu den Nachbarn gehen, die Straße überqueren und auf der Linie weitergehen lässt), müsste ich immer noch einen Schritt weitergehen und 1 hinzufügen können, oder?«

» Das stimmt«, antwortet Emilie, »man kann immer einen Schritt weitergehen, also 1 addieren. Nach 99 kommt 100, nach 999 kommt 1000, nach 9999 kommt 10000.«

»Also«, fragt Ada, »wer ist die größte Zahl? Denn wenn man immer 1 addieren kann, bedeutet das, dass es immer eine Zahl gibt, die größer ist, und noch eine, die größer ist als die größte der größten Zahlen. Das hört nie auf!«

Ada wurde fast schwindelig.

»Das stimmt«, erklärt Emilie, »du hast Recht. Es hört nie auf. Wir sagen, dass es unendlich viele Zahlen gibt, und schreiben ∞ .«

»Wie eine liegende Acht?«

»Ja, wie eine liegende Acht. Aber Vorsicht, die Unendlich-

keit ist keine Zahl. Wie du schon vorher gesagt hast, kann man immer eine größere Zahl finden, und eine noch größere, und noch eine, die größer ist als die größte der größten, ohne jemals aufzuhören. Das meinen wir, wenn wir ∞ schreiben.«

Ada schaut auf das neue Symbol. Sie sieht darin etwas wie einen Weg, der kein Ende hat. Sie glaubt, dass sie im Land der Zahlen sehr weit reisen kann.

Kapitel 4

Negative Zahlen

Ada ist stolz, denn sie hat herausgefunden, wie man Zahlen größer als 9 schreibt, und sie hat unendlich viele Zahlen entdeckt. Aber Ada ist auch ein bisschen traurig, denn auf ihrem Hof kann sie nur mit ein paar Zahlen spielen. Und die sind auch noch klein: Die meisten haben nur zwei Ziffern! Als Emilie das sieht, fragt sie sie, ob sie noch mit Addieren und Subtrahieren spielen will. Aber das macht Ada nicht mehr so viel Spaß. Sie hat das Gefühl, dass es nichts mehr zu entdecken gibt. Emilie schlägt vor, einen Snack zu holen. Aber bevor sie geht, schreibt sie noch eine neue Formel ins Heft: $3 - 5 =$ und zeigt sie Ada. So eine kleine Formel, denkt Ada, das kann doch nicht so kompliziert sein. Ich

werde sie lösen (sagt Emilie), bevor Emilie zurückkommt. Ada stellt sich auf den 3 und beginnt rückwärts zu gehen: ein Schritt, zwei Schritte, drei Schritte und...

»Oh nein, schon wieder!«

Ada steht nun auf dem 0, vor der Haustür, am Anfang der Linie. Sie muss noch zwei Schritte gehen, um ihre Formel zu beenden, aber die Linie bleibt stehen. Ada nimmt ihre Kreide und setzt die Linie hinter dem Haus bis zur Garage fort. Sie sieht, dass sie zwei Schritte zurückgehen muss, um ihre Formel zu beenden. Es ist genug Platz, um mindestens zwanzig Schritte weiter zu gehen, denkt Ada. Das Problem ist, dass auf dieser Seite der Linie keine Zahl steht.

Ada denkt nach. Sie überlegt, ob sie die Zahlen, die sie schon kennt, wieder verwenden kann. Ausgehend von vor dem Haus (0) geht sie einen Schritt zurück und notiert 1, dann geht sie zwei Schritte zurück und notiert 2. Das Problem ist, denkt Ada, dass man den Unterschied zwischen 1 hinter dem Haus und 1 vor dem Haus im Hof nicht erkennen kann. Sie überlegt, dass sie Farbe benutzen könnte. Grün für vorne und orange für hinten. Farbe ist gut, aber Ada hat noch ein anderes Problem. Wenn sie rückwärts geht, d.h. wenn sie eins wegnimmt, werden die Zahlen immer größer. Und wenn sie vorwärts geht, d.h. wenn sie eins addiert, werden die Zahlen immer kleiner. Das ist genau umgekehrt! Wir können nicht auf der einen Seite des Hauses Regeln haben und auf der anderen Seite

andere. Am Ende bringen wir alles durcheinander, denkt Ada. Sie überlegt weiter, schaut in ihr Heft mit all den Formeln und überlegt: Wenn -1 draufsteht, heißt das, dass ich einen Schritt zurück mache. Wenn -2 steht, dann nehme ich zwei weg und gehe zwei Schritte zurück. Wenn -3 steht, bedeutet das, dass ich drei wegnehme und drei Schritte zurück gehe. Ada steht wieder vor dem Haus bei 0 . Sie geht einen Schritt zurück und schreibt auf den Boden -1 (Ich bin von Null einen Schritt zurückgegangen). Sie geht wieder einen Schritt zurück und schreibt -2 (Ich bin seit Null zwei Schritte zurückgegangen). Dann zählt sie die Schritte weiter und schreibt auf den Boden: -3 , -4 , -5 usw. Bis sie schließlich bei der Garage ankommt, wo Ada -21 aufschreibt. In diesem Moment kommt Emilie mit dem Snack zurück.

»Na, Ada, du hast die negativen Zahlen entdeckt«, staunt ihre Tante.

Ada ist stolz auf sich. Emilie erklärt ihr, dass auch die negativen Zahlen weit gereist sind und dass sie lange Zeit als seltsame Zahlen galten. Ada denkt sich, dass sie gar nicht seltsam sind, und dann kann sie jetzt dank ihnen Emilies Formel beenden. Ada stellt sich auf den 3 und geht fünf Schritte zurück. Jetzt ist sie auf -2 angekommen.

»So«, sagt Ada, » $3 - 5 = -2$. Dürfen wir jetzt essen?«

Kapitel 5

Multiplikation

Charles, Adas kleiner Bruder, ist zu seiner Schwester und Emilie zum Snack gekommen. Nachdem sie ein paar Kekse gegessen haben, fragt Ada Emilie:

»Sag mal, Tante, kannst du eigentlich hüpfen? Schau mal!«

Ada stellt sich auf der 0, macht einen ersten Sprung und kommt auf der 2. Ein zweiter und sie landet auf der 4. Ein weiterer und Ada landet auf der 6.

»Schau, Emilie, bei jedem Sprung komme ich zwei Schritte weiter! Jetzt bist du dran!«

Emilie stellt sich ebenfalls auf der 0, macht einen ersten Sprung und kommt auf der 3. Ein weiterer Sprung und sie ist ebenfalls auf der 6.

»Jetzt bin ich dran!«, rief Charles.

Und auch er beginnt zu springen. Von der 0 aus landet er auf der Zahl 1. Dann auf der 2 und 3 usw., bis er nach sechs Sprüngen mit Emilie und Ada auf der Zahl 6 landet. Ada fragt sich nun, wo sie landen würde, wenn sie zehn Sprünge hintereinander machen würde. Sie beginnt wieder von vorne (0). Nach drei Sprüngen landet sie wieder auf der 6. Nach einem vierten Sprung landet sie auf der 8. Nach einem fünften Sprung ist sie wieder auf der 10. Sie macht so weiter und zählt die Anzahl der Sprünge und kommt nach zehn Sprüngen auf 20 an.

»Jetzt bist du dran«, sagt Ada zu Emilie.

Emilie steht auf der Zahl 0 und macht einen Sprung (sie landet auf der 3), dann einen zweiten (sie ist auf der 6) und einen dritten (auf der 9) usw. Nach dem zehnten Sprung ist sie viel weiter weg als Ada, nämlich bei der Zahl 30. Ada ist erstaunt, denn sie und Emilie haben jeweils zehn Sprünge gemacht. Da Emilies Sprünge aber größer sind als Adas, ist Emilie viel weiter gekommen als Ada.

»Und nun bist du dran, Charles!«, sagte Ada zu ihrem Bruder.

Und Charles beginnt, zehnmal hintereinander zu springen. Ausgehend von der 0 kommt er schließlich zur 10. Ada möchte sich alle diese Zahlen merken. Sie nimmt ihr Notizbuch und schreibt auf:

$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 20$ für sie,

$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 30$ für Emilie und

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 10$ für Charles.

Wie lang und kompliziert, denkt Ada. Wenn wir 50 oder 100 Sprünge machen müssten, hätten wir nicht genug Platz, um alles aufzuschreiben! Wir bräuchten einen schnelleren Weg, um aufzuschreiben, dass wir zehnmal das Gleiche gemacht haben. Dann bräuchten wir nur zwei Zahlen: z.B. die Anzahl der Sprünge (10) und die Größe jedes Sprungs (2). Das wäre noch praktischer. Ada zeigt Emilie ihr Notizbuch und fragt sie, ob es nicht einen einfacheren Weg gäbe, $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 20$ zu schreiben. Emilie zeigt ihm ein neues Symbol, einen kleinen Punkt, das "mal" heißt und so geschrieben wird: \cdot . Emilie zeigt ihr, dass $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 20$ als $10 \cdot 2 = 20$ geschrieben werden kann und dass man zehnmal zwei sagt. Ada schaut den Neuankömmling an und schreibt $10 \cdot 3 = 30$ in ihr Heft.

»Das ist immer noch praktischer, als $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 30$ zu schreiben«, sagt sie, »und das ist genau das, was ich gebraucht habe. Und für dich, Charles, schreiben wir $10 \cdot 1 = 10$.«

Etwas beunruhigt Ada jedoch. »Emilie«, fragt sie, »du hast mir gesagt, wenn man $+$ schreibt, macht man eine Additi-

on. Wenn wir $-$ schreiben, machen wir eine Subtraktion.
Was machen wir, wenn wir \cdot schreiben?

»Das nennt man Multiplikation«, antwortet Emilie, »man sagt, dass man zwei Zahlen miteinander multipliziert.

»Wenn ich also 50 Sprünge mache, auf welche Zahl komme ich dann?«

»Auf der Zahl 100, denn $50 \cdot 2 = 100$.«

»Was ist, wenn ich 100 mache?«

»Auf der Zahl 200, denn $100 \cdot 2 = 200$.«

Ada stellt sich vor, dass sie sehr müde wäre, wenn sie so viel springen würde.

Kapitel 6

Division

Ada hat noch ein bisschen Hunger. Es gibt keine Kekse mehr, aber zum Glück hat Emilie Himbeeren aus dem Garten mitgebracht. Es sind zwölf Stück. Ada überlegt, wie sie sie aufteilen soll. Denn auch Emilie und Charles mögen Himbeeren. Ada überlegt. Ich gebe zuerst eine für Charles, eine für Emilie und eine für mich. Es bleiben (Ada zählt laut die Himbeeren) neun übrig. Hier ist eine für Charles, eine für Emilie und eine für mich. Jetzt sind nur noch sechs übrig. Hier ist eine dritte für Charles, eine für Emilie und eine für mich. Jetzt sind nur noch drei übrig. Zum Schluss gibt Ada jedem noch eine vierte Himbeere. Jetzt sind alle zwölf Himbeeren aufgeteilt.

»Wer hat noch Hunger? Wer will Himbeeren?«, fragt Ada.

»Schau, wir haben alle vier.«

»Bravo", sagte Emilie, "du kennst auch die Division!«

»Die was?«, wundert sich Ada.

»Die Division«, erklärt Emilie. »Das hast du gerade gemacht, um die Himbeeren zu teilen. Die Division ist die Freundin der Multiplikation, der Subtraktion und der Multiplikation.«

»Ach ja?«, antwortet Ada mit dem Mund voller Früchte.

»Und wie zeichnet man die?«

»Oft wird ein Strich verwendet, um zu zeigen, dass man eine Zahl durch eine andere teilt (schneidet).«

»Wir schneiden die Zahlen ab!«, schreit Ada.

Ada stellt sich Zahlen vor, die in zwei Hälften geteilt sind. Ein 8, der seine obere Hälfte verloren hat (8) oder eine 4 ohne Fuß (4). Komisch!«

»Und das tut ihnen nicht weh?«

»Aber nein«, beruhigt Emilie sie. »Hier, schau mal.«

Emilie nimmt das Heft und notiert: $12/3 = 4$.

»Zwölf Himbeeren, die durch drei geteilt werden, entsprechen vier Himbeeren pro Person. Man kann es auch so schreiben.«

Emilie reicht Ada das Heft und zeigt ihr:

$$\frac{12}{3} = 4$$

Ada findet die Division sehr schön. Sie fragt sich, ob es für alle Zahlen funktioniert und nicht nur für Himbeeren. Sie möchte wissen, wie viel 7 geteilt durch 3 ergibt. Wie macht man das? Bei den Himbeeren war es ganz einfach: Man musste sie nur aufteilen. Eine für Ada, eine für Charles, eine für Emilie, zwei für Ada, zwei für Charles, zwei für Emilie und so weiter, bis keine Himbeeren mehr übrig waren. Aber Ada hat keine Himbeeren mehr. Vielleicht hat sie keine Himbeeren mehr, aber sie hat ihre Kreide und einen Strich aus Zahlen, der sich über den ganzen Hof und Garten zieht, also denkt Ada nach. Das ist es! Sie hat eine Idee. Sie wird ihre Farben benutzen. Ada steht auf und nimmt drei Kreiden: eine grüne, eine orange und eine violette. Dann stellt sie sich auf 0, geht drei Schritte nach vorne und umkreist 1 grün, 2 orange und 3 violett. Es ist wie bei den Himbeeren: ein Schritt für grün, ein Schritt für orange und ein Schritt für lila. Jetzt geht sie drei Schritte weiter und umkreist 4 grün, 5 orange und 6 grün. Jetzt hat jede Farbe zwei Schritte. Ada will wieder drei Schritte gehen, aber irgendetwas stimmt nicht. Sie bleibt stehen und schaut. Es ist nur noch ein Schritt bis zum 7. Nicht genug, um jeder Farbe einen zu geben! Das geht nicht. »Emilie? Deine Division, sie funktioniert nicht.«

»Wirklich?«, wundert sich Emilie.

»Ja«, sagte Ada, »ich wollte 7 durch 3 teilen. Ich habe drei Päckchen: ein grünes, ein oranges und ein lilafarbenes. Ich

habe in jedem Paket zwei Schritte gemacht. Aber ich muss noch einen Schritt machen, um fertig zu werden, und den kann ich nicht durch drei teilen!«

»Das ist normal«, erklärt Emilie, »nicht alle Zahlen lassen sich immer vollständig teilen. Manchmal gibt es einen Rest.«

»ein Rest?«

»Ja ein Rest, so nennt man das. In deinem Fall ist 7 geteilt durch 3 gleich 2 und es bleibt ein Rest von 1. Man kann auch sagen, dass 7 gleich 3 Pakete aus 2 plus 1 sind. Das ist das Gleiche. Und wir können es so notieren: $7 = 3 \cdot 2 + 1$.«

»Hä?«, ruft Ada aus. »Wo ist meine Abteilung hin? Du schummelst schon wieder, Tante!«

»Aber natürlich nicht, die Multiplikation und die Division sind so gute Freunde, dass man das eine in das andere umwandeln kann. Man sagt auch, dass die Division die Umkehrung der Multiplikation ist.«

Ada schaut sie erstaunt an. Nach einiger Zeit sagt sie:

»Okay, also bitte, kannst du uns sechs Bonbons holen? Zwei für jeden? Denn $6 = 3 \cdot 2$ und $6/3 = 2$, richtig?«

Kapitel 7

Bruchzahlen

Emilie ist wieder ins Haus gegangen. Ada hat sich auf eine kleine Mauer gesetzt und denkt nach. Sie findet es seltsam, dass man manche Zahlen nicht vollständig teilen kann. In der Zwischenzeit spielt Charles auf der Zahlenlinie.

»Sieben! zwei! neun! null! acht! sechs! drei! fünf! eins! drei! Seht her, Charles, der Zahlendompieur!«

»Charles, hör auf mit dem Quatsch. Du kannst ja nicht mal richtig auf der Linie laufen«, beschwerte sich Ada.

Da Ada sich nicht konzentrieren kann, schaut sie Charles zu, wie er auf der Zahlenlinie spielt. Sie bemerkt, dass sie zwei Schritte machen muss, um von 0 auf 1 zu kommen, dann wieder zwei Schritte, um von 1 auf 2 zu kom-

men usw. Ada erkennt, dass Charles halbe Schritte macht (die Hälfte von Adas Schritten). Stimmt, denkt Ada, es gibt viele Dinge, die 1 sind, die man aber halbieren kann: zum Beispiel einen Apfel oder einen Stapel Karten. Und es gibt viele Dinge, die 1 sind, die man aber nicht halbieren kann: zum Beispiel einen Stein oder einen Bleistift. Dann bemerkt Ada einen Spatz, der im Garten herumhüpft. Er macht kleinere Schritte als Charles. Vielleicht macht er zehn Schritte mehr als Ada. Auf dem Mäuerchen, auf dem sie sitzt, bemerkt Ada Ameisen. Sie müssen mindestens hundert Schritte machen, um Adas Schrittlänge zu erreichen. Das bringt ihn auf eine Idee. Wenn Charles zwei Schritte gehen muss, wenn Ada einen geht, dann ist ein Schritt von Charles gleich einem Schritt von Ada, geteilt durch zwei: $1/2$. Ein Schritt der Spatzen ist gleich einem Schritt von Ada geteilt durch zehn: $1/10$. Und ein Schritt der Ameisen entspricht einem Schritt von Ada geteilt durch hundert: $1/100$! Ada nimmt ihr Notizbuch und schreibt $2 \cdot \text{Charles} = 1 \cdot \text{Ada}$. Ada stellt sich zwei Charles vor. Zwei kleine Brüder! Oh nein, ein kleiner Bruder ist schon zu viel, aber zwei sind noch schlimmer. Ada schreibt $1 \cdot \text{Charles} = \text{Ada}/2$. Ada stellt sich vor, wie sie in zwei Hälften geteilt wird. Auch diese Vorstellung macht sie nicht glücklich. Außerdem fragt sie sich, ob sie die Zahlen mit den Buchstaben vermischen darf. In diesem Moment ruft Charles sie an:

»Ada! Ich habe alle Zahlen gefangen! Ich will neue!«

Ada steht auf, nimmt ihre Kreide und geht zur Zahlenlinie.

»Schau, Charles, ich zeichne dir deine eigenen Zahlen.«

Ada zeichnet $1/2$ zwischen die Zahl 0 und die Zahl 1. Ada fängt dann an zu zählen. Um die Zahl 1 zu erreichen, muss Charles zwei Schritte machen. Zwei halbe Schritte von Ada: $2/2 = 1$. Diese muss nicht gezeichnet werden, also macht Ada weiter. Um zwischen 1 und 2 anzukommen, muss Charles drei Schritte machen. Ada schreibt $3/2$. Um zur 2 zu kommen, muss Charles vier Schritte machen: $4/2 = 2$. Ein weiterer Schritt, den Ada nicht zeichnen muss. Zwischen 2 und 3 schreibt Ada $5/2$ usw. Zwischen 3 und 4 steht $7/2$. Zwischen 4 und 5 steht $9/2$. Ada schreibt weiter bis 10. Charles ist begeistert.

»Zahlen nur für mich, danke Ada! Und wie heißen sie?«

Ada denkt nach. Charles macht halbe Schritte.

»Die erste Zahl, $1/2$, heißt eine halbe. Danach folgt $3/2$, das sind drei Halbe. $5/2$, das sind fünf Halbe usw.«

Charles bemüht sich nun, einen Schritt auf jede seiner eigenen Zahlen zu setzen. Ada fragt sich, wie man 1 in drei ($1/3$) oder 1 in vier ($1/4$) geteilt nennt. Was ist mit den anderen: $1/5$, $1/6$, $1/7$, $1/8$ und $1/9$? Für Ada wird $1/10$ nun ein Spatz genannt. Und $1/100$ eine Ameise. Diese neuen Zahlen sind seltsam, denkt Ada, denn wenn man 1 durch eine größere Zahl schneidet, wird das Ergebnis kleiner. $1/100$ ist kleiner als $1/10$. $1/1000$ ist kleiner als $1/100$. $1/100000$

ist noch kleiner! Ada stellt sich vor, dass sie auf die Jagd nach der kleinsten Zahl geht und dabei winzig klein wird, kleiner als ein Spatz, kleiner als eine Ameise, unendlich klein.

Kapitel 8

Gleichungen

Emile ist wieder da. Leider ohne Süßigkeiten. Das ist schade, denkt Ada, aber egal, Ada muss Emilie erst einmal etwas zeigen. Das mit den Süßigkeiten werden wir später sehen.

»Sieh mal, Emilie«, sagt Ada, »Charles macht halbe Schritte. Wenn ich einen Schritt mache, muss er zwei machen.«

»Ach ja? Und wie viel ist ein Schritt von Emilie in Schritten von Ada wert, fragt ihre Tante?«

»Ich weiß es nicht, aber wir müssen es einfach versuchen«, antwortet Ada. »Ich habe eine Idee. Wir stellen uns nebeneinander, gehen zusammen und schauen, wie viele Schritte wir machen müssen, um an denselben Ort zu kommen.«

Ada und Emilie setzen sich beide vor das Haus auf 0. Ada macht einen Schritt und kommt auf 1. Emilie macht ebenfalls einen Schritt, aber ihre Schritte sind größer und sie ist zwischen 1 und 2 eingeklemmt. Ada macht einen zweiten Schritt und geht an Emilie vorbei. Emilie macht einen zweiten Schritt und kommt auf 3. Ada muss einen dritten Schritt machen, um zu Emilie zu gelangen. Ada notiert nun in ihrem Notizbuch $3 \text{ Ada} = 2 \text{ Emilie}$. Drei Schritte von Ada sind zwei Schritte von Emilie. Das hört sich kompliziert an, denkt Ada. Ich möchte lieber wissen, wie viele Schritte ein Schritt von mir in Emilys Schritten macht. Wenn drei meiner Schritte zwei Schritte von Emilie ergeben, dann erhalte ich durch Dreiteilung einen Schritt von Ada, der zwei Schritte von Emilie entspricht, wenn ich ihn dreiteile. Ada notiert $1 \text{ Ada} = \frac{2}{3} \text{ Emilie}$. Emilie schaut auf das Notizbuch und ruft aus:

»Oh, die schönen Gleichungen!«

»Die Gleich-was?«, wunderte sich Ada.

»Die Gleichungen«, fährt Emilie fort. »Das sind die Formeln, die du gerade aufgeschrieben hast. So werden sie genannt. Sie sind wie Rezepte, die uns sagen, wie wir Dinge umwandeln können.«

»Ich wusste es«, sagte Ada, »man kann Zahlen und Buchstaben mischen.«

»Ja, man kann«

»Ich frage mich, wie viele Schritte du machen musst, wenn

ich bis zur 12 gehe«, sagte Ada.

»Naja, wir könnten es versuchen«, antwortet Emilie. »Ich stelle mich auf den 0. Ich gehe ein, zwei Schritte weiter und stehe auf 3. Nach drei und vier Schritten stehe ich auf 6. Fünf und sechs Schritte sind auf 9. Sieben und acht Schritte. Und das war's! Ich bin auf 12. Acht Schritte, das ist deine Antwort, Ada.«

»He, lasst mich nicht allein!«, rief Charles plötzlich aus dem Haus.«

»Du bist nicht allein«, antwortet Ada, »und außerdem bist du nicht einmal weit weg.«

»Doch, ich bin sehr weit weg, mindestens hundertachtundfünfzig!«

»Unsinn«, sagt Ada, »wir sind bei 12 und du bist auf 0. Da du halbe Schritte machst, musst du die doppelte Anzahl an Schritten machen wie ich. Ada rechnet im Kopf, vierundzwanzig, stimmt's, Emilie?«

»Ja, das ist richtig. Komm, Charles, es ist nicht so weit weg.«

Charles rennt zu ihnen.

»Und jetzt«, sagte Emilie, »muss ich in den Garten gehen, um Salat zu holen. Wer kommt mit mir?«

»Ich!«, ruft Charles.

»Und du, kommst du mit, Ada?«

»Ich weiß nicht, der Salat ist ganz hinten im Garten und das kommt mir weit weg vor. Es wäre schön«, fährt Ada

fort, »wenn wir eine Methode hätten, mit der wir wissen, wie viele Schritte ich machen muss, um dich zu erreichen. Am besten wäre es, wenn ich die Antwort sofort bekäme, wenn ich einfach nur schaue, ohne zu rechnen.«

»Ich kann dir die Gleichungen zeichnen«, schlägt Emilie vor.

»Aber ich habe sie schon in mein Notizbuch geschrieben!«

»Nein, schau.«

Emilie zeichnet zwei Linien in das Heft: eine horizontale für ihre eigenen Schritte und eine vertikale für Adas Schritte. Emilie notiert dann 0 an der Stelle, an der sich die Linien kreuzen, und fügt dann auf jeder Linie Zahlen von 1 bis 9 hinzu. Sie zeigt Ada, wie sie die Gleichung zeichnen soll. Wenn Emilie zwei Schritte macht, muss Ada drei Schritte machen. Emilie legt den Stift auf die Nummer 2 der waagerechten Linie und steigt bis zur Nummer 3 der senkrechten Linie. Dort markiert sie einen ersten Punkt. Wenn Emilie vier Schritte macht, muss Ada sechs Schritte machen. Auf die gleiche Weise macht Emilie einen zweiten Punkt. Wenn Emilie sechs Schritte macht, muss Ada neun Schritte machen. Schließlich markiert Emilie einen dritten Punkt auf dem Blatt. Dann zieht sie eine Linie, die alle Punkte verbindet.

»Siehst du«, sagte Emilie, »diese Linie, die ich gerade gezogen habe, ist meine Gleichung. Wenn du wissen willst, wie viele Schritte du gehen musst, um mich zu erreichen,

musst du nur dieser Linie folgen.«

»Der Linie folgen?«

»Ja, schau dir das an. Wenn ich acht Schritte mache, sagt mir die Linie, dass du zwölf Schritte machen musst.«

»Das wusste ich schon!«, antwortet Ada.

»Wenn ich zehn Schritte mache, musst du fünfzehn machen.«

»Und wenn du nur fünf machst?«, fragt Ada.

»Sie sagt, du musst siebeneinhalb machen.«

Ada schaut sich die Zeichnung in ihrem Heft an. Das gefällt ihr gut. Nach den Zaubersprüchen und Rezepten ist das hier eine Schatzkarte.

Kapitel 9

Multiplikation negativer Zahlen

Während Emilie Salat pflückt, spielen Ada und Charles zusammen “Ada sagt”. Das Ziel ist einfach: Ada gibt Charles Befehle, die dieser nur ausführen darf, wenn Ada die Formel “Ada sagt” ausspricht.

»Ada sagt, geh drei Schritte zurück!«

Charles tritt tatsächlich drei Schritte zurück.

»Bravo! Ada sagt, hüpf!«

Charles stellt sich auf einen Fuß und beginnt zu springen.

»Jetzt laufe fünf Schritte vorwärts!«

Er hält es nicht mehr aus und rennt zu Ada.

»Verloren! Ich habe nicht gesagt Äda sagt".«

»Oh nein! Jetzt bin ich dran! Charles sagt $3 \cdot (-2)$!«

» $3 \cdot (-2)$!?«, wundert sich Ada. »Moment mal...«, Ada denkt nach und sagt: » -2 bedeutet, dass wir zwei Schritte zurückgehen, also bedeutet $3 \cdot (-2)$, dass wir dreimal zwei Schritte zurückgehen.«

Ada geht sechs Schritte zurück.

»Charles sagt $(-2) \cdot 3$!«

Ada geht wieder sechs Schritte zurück.

»Hey, du schummelst!«, ruft Charles.

»Was soll das heißen, ich schummle?«, erwiderte Ada.

»Ja, das stimmt! Früher war es $3 \cdot (-2)$ und jetzt ist es $(-2) \cdot 3$, das ist nicht das Gleiche, also kann es nicht dasselbe sein.«

» $(-2) \cdot 3$ ist, zwei Schritte zurückzugehen dreimal, ist wie dreimal zwei Schritte zurückzugehen. $3 \cdot (-2) = (-2) \cdot 3$.«
In diesem Moment kommt Emilie mit einem Salat in jeder Hand.

»Ada hat recht. Die Multiplikation ist kommutativ.«

»Kommuta-was?«, fragten die Geschwister im Chor.«

»Es ist kommutativ. Das bedeutet, dass wir die Zahlen um das Zeichen *cdot* herum umstellen können: $5 \cdot 4 = 4 \cdot 5$, $7 \cdot 3 = 3 \cdot 7$, oder $3 \cdot (-2) = (-2) \cdot 3$. Das funktioniert auch bei der Addition: $1 + 3 = 3 + 1$, $5 + 2 = 2 + 5$.«

»Was ist mit Subtraktion und Division?«, fragt Ada.

»Sie, sie sind nicht kommutativ. Man kann die Zahlen nicht

beliebig verschieben: $3 - 2$ ist nicht gleich $2 - 3$ und $6/3$ ist nicht gleich $3/6$.«

Ada schaut Charles an.

»Das heißt, ich habe gewonnen!«

»Nein, noch einer! Charles sagt: $(-4) \cdot (-3)$!«

Ada denkt nach. Sie hat noch nie zwei negative Zahlen multipliziert. » Wenn man zwei Schritte vorwärts geht, schreibt man 2 und wenn man zwei Schritte rückwärts geht, schreibt man (-2) . Wenn wir $4 \cdot (-3)$, vier Packungen (-3) , hätten, würden wir viermal drei Schritte zurückgehen.«

Ada rechnet nach.

»Wir würden 12 Schritte zurückgehen. Und da wir $(-4) \cdot (-3)$ haben, machen wir das Gleiche in die andere Richtung. Also gehen wir 12 Schritte vorwärts.«

Ada fragt Emilie.

»Sag mal, Tante, ist $(-4) \cdot (-3)$ gleich 12?

»Bravo Ada«, antwortet Emilie, »wenn man mit positiven und negativen Zahlen multipliziert, muss man mit den Plus- und Minuszeichen jonglieren.«

»Mit Zeichen jonglieren? Das klingt schwierig.«

»Nein, das hast du gerade getan. Zwei positive Zahlen miteinander oder zwei negative Zahlen miteinander zu multiplizieren, ergibt immer ein positives Ergebnis. Die Multiplikation einer positiven Zahl mit einer negativen Zahl führt zu einem negativen Ergebnis.«

Plötzlich ruft eine Stimme aus dem Haus nach den Kin-

dern:

»Ada, Charles! Es ist Zeit, nach Hause zu gehen!«

»Wir kommen!“, antworteten die Geschwister einstimmig.«

Kapitel 10

Epilog

Es ist Abend. Als Charles schon schläft, bittet Ada Emilie, ihr eine Geschichte zu erzählen. Emilie erzählt daraufhin die Geschichte von Zahlen, die reisen, vor- und zurückspringen, springen und sich addieren. Die Geschichte eines kleinen Mädchens, das Fragen stellt, nachdenkt und mit Symbolen spielt. Und schließlich die Geschichte von Zahlen, die mit Buchstaben geschrieben, gezeichnet und mit ihren Zeichen jongliert werden wie ein großer Zirkus. Und in seinem Zirkuszelt finden noch viele andere Aufführungen statt: eine Zahl i , die die Köpfe verdreht, unendlich viele Zahlen, von denen eine größer als die andere ist, und viele andere Dinge, die seltsame Namen tragen: Logarith-

mus, Kosinus und Kubikwurzeln... Aber das ist eine andere Geschichte, denn jetzt, pssst! Ada ist eingeschlafen. Gute Nacht!

ENDE