

Ada et les Nombres

Julien Siebert

10 avril 2024

Pour Oscar, joyeux Noël.

Chapitre 0

Voici Ada. Aujourd'hui elle a décidé d'aller jouer dehors avec ses craies. Elle a envie de dessiner les chiffres qu'elle vient d'apprendre à l'école. Ils sont rigolos avec leurs formes et leurs noms bizarres. Tout d'abord, Ada trace une ligne. Elle part de la maison et traverse la cour, jusqu'au jardin. Ce sera bien pour poser les chiffres dessus. Il ne faudrait pas qu'ils tombent ! Ada commence par dessiner un rond près de sa maison. C'est le 0. Ce sera le point de départ. Ensuite, elle fait un pas vers le jardin en suivant la ligne. Ada dessine maintenant un 1. C'est facile, il ressemble à une barre verticale. Un deuxième pas vers le jardin et elle dessine un 2. Celui-là est un peu plus compliqué : ça tourne, ça monte et ça descend. Et bien sûr, il ne faut pas oublier la petite barre horizontale du dessous. Encore un pas et Ada dessine un 3. Deux arrondis et c'est fini. Ensuite viennent

le 4 (tout en lignes droites), le 5 (un mélange de droites et d'arrondi), le 6 (tout en arrondi), le 7 (comme un zigzag pas fini), le 8 (comme deux ronds) et le dernier : le 9 (attention à ne pas le confondre avec un 6). Ada est maintenant au milieu de la cour. Elle recule d'un pas et passe du 9 au 8. Elle recule encore et la voici au 7, puis au 6, au 5, au 4, au 3, au 2, au 1, et au 0, juste devant la porte de la maison. C'est rigolo, se dit-elle, quand j'avance d'un pas vers le jardin, je marche sur le chiffre plus grand. Et quand je recule, je marche sur le chiffre plus petit. Voyons ce qui se passe si j'avance de trois pas. Ada se place sur le 0 et compte en marchant : 1, 2, et 3 ! Encore trois pas : 4, 5, et 6 ! Et encore une fois : 7, 8, et 9 !

« Et maintenant, dit Ada, dans l'autre sens ! Voyons ce qui se passe si je recule de deux pas :

8 et 7 !

6 et 5 !

4 et 3 !

2 et 1 ! »

Me voici presque arrivée, pense Ada.

Chapitre 1

Addition et soustraction

À ce moment, la tante d'Ada, Émilie, sort de la maison.
«Bonjour Ada, dit Émilie, comment vas-tu ?

—Émilie ! crie Ada. »

Ada aime beaucoup Émilie. C'est une de ses tantes préférées. Émilie est trop forte, elle a déjà beaucoup voyagé et parle trois langues différentes. En plus, son travail c'est de fabriquer des fusées !

«Regarde Émilie, je joue aux chiffres ! explique Ada. J'ai dessiné tous les chiffres de 0 à 9. Et quand j'avance d'un pas, je passe au suivant. Et quand je recule d'un pas, je reviens au précédent. »

Émilie explique alors à Ada, que quand elle avance d'un

pas, elle ajoute un au chiffre sur lequel elle était et qu'on dessine $+1$. Lorsqu'elle recule d'un pas, elle soustrait un au chiffre sur lequel elle était et on dessine -1 . Ada a maintenant deux nouveaux symboles qu'elle peut utiliser : le plus $(+)$ pour l'addition et le moins $(-)$ pour la soustraction. Elle les trouve amusants ces deux nouveaux. Ada et Émilie décident de jouer ensemble. En partant du 0, Ada avance de trois pas $(+3)$ puis recule d'un pas (-1) . La voilà arrivée sur le 2. Émilie sort un carnet et un stylo et montre à Ada comment dessiner son trajet : $0 + 3 - 1$. Et comme Ada est maintenant sur le 2, Émilie lui explique qu'il y a un symbole nommé égal $(=)$ qu'on utilise pour dire qu'elle est arrivée sur le 2 : $0 + 3 - 1 = 2$. Ada pense que cela ressemble à une formule magique. Elle a très envie de recommencer.

«Allez tata, maintenant tu écris les chiffres et les drôles de symboles dans ton carnet magique et moi je me déplace sur la ligne ».

Émilie lui montre son carnet où est écrit : $4 + 3 - 2$. Ada réfléchit.

«Il faut commencer sur le 4, avancer de 3 pas et reculer de 2, c'est ça ?

—C'est ça ! répond Émilie. »

Alors Ada se met en route. En partant du 4, elle avance de trois pas et arrive sur le 7. Puis elle se retourne et fait deux pas dans l'autre sens. Ada est maintenant sur le 5.

Émilie note alors $4 + 3 - 2 = 5$.

«À moi, maintenant ! s'écrie Ada. »

Émilie lui donne alors carnet et stylo, puis Ada écrit : $1 + 7 - 3$. Émilie regarde la feuille, se lève et marche vers le 5.

«Voilà ! dit Émilie et elle inscrit $1 + 7 - 3 = 5$ dans le carnet.

—Quoi ? demande Ada. Tu triches ! il faut partir du 1 avancer de 7 pas et reculer de 3 ».

Et Ada lui montre. Elle se place sur le 1, avance de sept pas (elle arrive alors au 8) puis recule de trois pas, pour arriver exactement là où est Émilie, sur le chiffre 5. Émilie explique alors à Ada que grâce au carnet et au stylo, on n'a pas toujours besoin d'avancer et de reculer. On peut calculer le résultat des opérations (c'est comme ça qu'Émilie appelle les formules magiques avec les chiffres, les + et les -) et connaître le résultat (ce qui vient derrière le =) sans même bouger. Ada est sceptique. Elle demande à Émilie un autre exemple. Émilie se place sur le 0 et note $2 + 4 - 5 + 2 - 3$ dans le carnet. Ada se place sur le 2, avance de quatre pas, puis en fait cinq dans l'autre sens, se retourne de nouveau pour avancer de deux pas et recule de trois pas. Ouf ! Elle en aurait presque la tête qui tourne. Émilie, elle, n'a pas bougé. Ada regarde alors sous ses pieds et voit le 0. Émilie lui sourit et note $2 + 4 - 5 + 2 - 3 = 0$.

«Tu vois, dit-elle, je savais qu'on allait se retrouver toutes

les deux ici sur le 0, avant même que tu ne te mettes en route.

—C'est vrai, dit Ada, c'est pratique pour les formules très longues qui donnent le tournis. Mais moi, je trouve ça plus amusant de voyager pour de vrai ! ».

Chapitre 2

À court de chiffres

Ada continue de jouer aux additions et aux soustractions. Émilie lui a laissé son carnet et son stylo, puis elle est partie cueillir des fleurs dans le jardin. Après quelques parties, Ada a un problème. Elle n'a plus assez de chiffres ! Elle a noté $4 + 5 + 2 - 3$ dans le carnet, s'est placée sur le 4, a avancé de cinq pas et la voilà coincée. Elle est maintenant sur le 9, le dernier chiffre de la ligne. Ada doit encore avancer de deux pas puis faire trois pas dans l'autre sens. Mais voilà, après 9, Ada n'a rien dessiné. Elle pourrait avancer puis reculer sur la ligne sans chiffres ou poser ses pieds. Mais comment saura-t-elle si elle arrive au bon endroit ? Elle sait qu'il existe des choses après 9. Elle

a déjà entendu parler des nombres, comme vingt-et-un, soixante-trois, trente-six, ou encore quinze. Seulement, Ada ne sait pas comment les dessiner, ni même dans quel ordre. Qui vient avant ? vingt-et-un ou quinze ? soixante-trois ou trente-six ? La voilà bien préoccupée. Que faire ? Demander à sa tante Émilie ? Non, Émilie est certainement très occupée et puis Ada sent qu'elle peut y arriver toute seule. Alors elle réfléchit. Elle se dit qu'elle pourrait inventer de nouveaux chiffres. Il n'y a qu'à dessiner de nouveaux symboles et leur trouver des nouveaux noms. Plus facile à dire qu'à faire. Après 4 nouveaux chiffres, "ga", "bu", "zo" et "meu"¹, Ada est à court d'idées. Ce n'est pas si facile. Il faut trouver des nouveaux noms et imaginer de nouveaux symboles à dessiner (d'ailleurs qui a inventé les chiffres de 0 à 9 ? se demande Ada). Et puis, c'est difficile de retenir des choses pareilles. Déjà retenir les noms des chiffres de 0 à 9 lui avait donné du fil à retordre, alors imaginez si elle devait retenir un nouveau nom et un nouveau symbole à chaque nouveau nombre. C'est qu'il peut y en avoir plein des nombres ! Alors, non, Ada décide qu'inventer des nouveaux chiffres ce n'est peut-être pas une si bonne idée après tout. Que faire ? Ada, toujours debout sur le 9, doit

1. Note de l'auteur : ces chiffres n'ont pas été inventés par Ada, mais proviennent d'une série de dessins animés appelée Les Shadoks, voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Les_Shadoks.

encore avancer de deux pas et reculer de trois. Elle réfléchit de nouveau. Peut-être qu'elle peut réutiliser les chiffres ? Après 9, on peut écrire de nouveau 0, 1, 2, etc. Comme ça, pas besoin d'apprendre de nouveaux symboles. C'est bien, se dit Ada, mais le problème c'est qu'on peut se perdre. Comment saurais-je à quelle distance de la maison je me trouve ? Si je me trouve sur un 5, suis-je sur le premier 5 - celui juste à côté de la maison, suis-je sur le deuxième ? le troisième ? Comment faire pour se repérer, se demande Ada. Elle réfléchit encore. Et si elle utilisait de la couleur ? Une couleur pour la première série de chiffres de 0 à 9, par exemple le vert. Puis une autre couleur, disons le jaune, pour la deuxième série de chiffres, ensuite du rouge, puis du bleu. Hmm, est-ce que le bleu est plus grand que le rouge ? Ou est-ce qu'il vaudrait mieux utiliser le bleu pour la troisième série et le rouge pour la quatrième ? Et quelle couleur pour la cinquième ? Ada se dit que cette solution pose plus de problèmes qu'elle n'en résout. Les couleurs, ce n'est peut-être pas la bonne solution mais tout cela lui donne une autre idée. Ada va noter le nombre de fois qu'elle utilise tous les chiffres. Elle part de la maison : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Après 9, Ada recommence la série de chiffres. Elle note 0. Et pour ne pas oublier qu'elle vient d'utiliser toute la série de chiffres une première fois, elle note un 1 à sa gauche. Ada obtient alors 1 0 ("un-zéro"). Et elle continue, après elle note 1 1 ("un-un"), 1 2 ("un-deux"), 1 3

(“un-trois”), 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 1 8 et 1 9. Arrivée là, Ada prolonge la ligne des chiffres sur le chemin du jardin. Puisqu’elle a utilisé toute la série de chiffres une deuxième fois, elle va maintenant noter 2 0 (“deux-zéro”) et continuer : 2 1 (“deux-un”), 2 2 (“deux-deux”), 2 3, 2 4, 2 5. Ada s’arrête un instant pour regarder sa solution. Cela lui plaît. Tout d’abord, on est jamais perdu, pense-t-elle (on sait toujours si on est loin ou proche de la maison), et puis on peut dessiner les chiffres dans la couleur que l’on veut ! Émilie, qui revient du jardin à ce moment-là, lui dit :

«Tiens, que fais-tu sur le vingt-cinq ?.

—le vingt-cinq, demande Ada, le “deux-cinq” s’appelle en fait vingt-cinq ?

—Eh oui, répond Émilie, tous les nombres ont des noms.

—Les nombres ? demande Ada.

—Oui, dit Émilie, c’est comme ça qu’on les appelle. Les chiffres sont les symboles : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Il n’y en a que dix. Avec les chiffres on peut écrire des nombres : comme, par exemple, vingt-cinq avec un deux et un cinq : 25.

—Et comment il s’appelle celui avec un un et un quatre ? demande Ada.

—Il s’appelle quatorze.

—Et lui là ? le bizarre avec un 1 et un 7 ?

—Lui, c’est dix-sept. »

Émilie apprend alors à Ada, le nom des nombres : “dix”

(10), “onze” (11), “douze” (12), etc. jusqu’à 25, là où Ada s’était arrêtée. Ada se demande bien qui décide du nom des nombres. Émilie lui explique que les chiffres ont beaucoup voyagé : Chine, Inde, Moyen-Orient, Asie Centrale, Afrique du nord, Europe. Les chiffres tels qu’on les connaît sont utilisés partout dans le monde. Ada pense que c’est bien pratique. Elle imagine un monde où les chiffres changent de forme lorsque l’on passe d’un pays à l’autre. Comme ce serait compliqué !

Chapitre 3

Infini

Ada reprend son jeu là où elle s'était arrêtée. Elle prend le carnet et lit $4+5+2-3$. Ada se place sur le 4 et avance de cinq pas. Elle est maintenant sur le 9. Elle avance de deux pas. La voilà sur le 11. Ada se retourne et fait 3 pas dans l'autre sens et s'arrête sur le 8. Enfin ! Ada peut maintenant écrire $4+5+2-3=8$ dans son carnet. Elle se tourne vers Émilie et lui demande :

« Dis tata, c'est qui le plus grand nombre ? »

Émilie la regarde en souriant. « Pour l'instant le plus grand nombre que tu as dessiné sur ta ligne c'est vingt-cinq.

— Non ! réplique Ada, tu sais bien, le plus grand de TOUS les nombres. Après 25, je peux écrire 26 (Ada prononce

alors “deux-six” et Émilie lui indique son nom : “vingt-six”), et 2 7 (“deux-sept”, “vingt-sept”), 28, 29. Après, j’écris 30, pour dire que j’ai utilisé trois fois tous les chiffres de 0 à 9. Et je continue : j’écris 31, 32, 33 et ainsi de suite. Tu vois, si la ligne continue dans le jardin, chez les voisins, si elle traverse la rue, je devrais même pouvoir écrire 99. S’il y a encore de la place sur la ligne (et si maman me laisse aller chez les voisins, traverser la rue et continuer sur la ligne), je dois encore pouvoir avancer d’un pas, ajouter 1, pas vrai ?

—C’est vrai, répond Émilie, on peut toujours avancer d’un pas, c’est-à-dire ajouter 1. Après 99 vient 100, après 999 vient 1000, après 9999 vient 10000.

—Alors, demande Ada, c’est qui le nombre le plus grand ? Parce que si on peut toujours ajouter 1, cela veut dire qu’il y a toujours un nombre plus grand et encore un plus grand que le plus grand des plus grand. Ça ne finit jamais ! »

Ada en aurait presque le vertige.

«C’est vrai, explique Émilie, tu as raison. Ça ne finit jamais. On dit qu’il y a une infinité de nombres et on écrit ∞ .

—Comme un huit couché ?

—Oui, comme un huit couché. Mais attention, l’infini n’est pas un nombre. Comme tu l’as dit avant, on peut toujours trouver un nombre plus grand, et un autre encore plus grand, et encore un plus grand que le plus grand des

plus grands, sans jamais s'arrêter. C'est ce qu'on veut dire quand on écrit ∞ . »

Ada observe ce nouveau venu. En le regardant, elle voit comme un chemin qui ne finit pas. Elle se dit qu'elle pourrait voyager très loin au pays des nombres.

Chapitre 4

Nombres négatifs

Ada se sent fière, elle a trouvé comment écrire les nombres plus grand que 9 et elle a aussi découvert une infinité de nombres. Mais Ada est aussi un peu triste, car dans sa cour elle ne peut jouer qu'avec quelques nombres. Et en plus ils sont petits : la plupart n'ont que deux chiffres ! Voyant cela, Émilie lui demande si elle veut encore jouer aux additions et aux soustractions. Mais cela n'amuse plus trop Ada. Elle à l'impression qu'il ne reste plus rien à découvrir. Émilie propose d'aller chercher un goûter. Mais avant de partir, elle note dans le carnet une nouvelle formule : $3 - 5 =$ et la tend à Ada. Une si petite formule se dit Ada, ce ne doit pas être bien compliqué. Je vais la résoudre (c'est comme

ça que dit Émilie) avant qu'Émilie ne revienne. Ada se place sur le 3 et commence à reculer : un pas, deux pas, trois pas et... Oh non, voilà que ça recommence ! Ada est maintenant sur le 0, devant la porte de la maison, au début de la ligne. Il lui reste deux pas à faire pour finir sa formule mais la ligne s'arrête. Ada prend alors ses craies et continue la ligne derrière la maison jusqu'au garage. Elle voit bien qu'elle doit pouvoir reculer de deux pas afin de finir sa formule. Il y a assez de place pour faire encore au moins vingt pas, pense Ada. Le problème c'est qu'il n'y a pas de nombre de ce côté-ci de la ligne.

Ada réfléchit. Elle se dit qu'elle pourrait réutiliser les nombres qu'elle connaît déjà. En partant de devant la maison (0), elle recule de un pas et note 1, elle recule de deux pas et note 2. Le problème, se dit Ada, c'est qu'on ne peut pas faire la différence entre le 1 de derrière la maison et le 1 qui est devant, dans la cour. Elle se dit qu'elle pourrait utiliser de la couleur. Vert pour devant et Orange pour derrière. La couleur c'est bien, mais Ada trouve un autre problème. Quand elle recule, c'est-à-dire quand elle enlève un, les nombres deviennent de plus en plus grands. Et quand elle avance, c'est-à-dire quand elle ajoute un, les nombres deviennent de plus en plus petits. C'est l'inverse d'avant ! On ne peut pas avoir des règles pour un côté de la maison et d'autres règles pour l'autre côté. On va finir par tout mélanger, se dit Ada. Elle réfléchit encore, regarde

son carnet avec toutes ses formules et pense : quand c'est écrit -1 , cela veut dire que j'enlève un et que je recule d'un pas. Quand c'est écrit -2 , cela veut dire que j'enlève deux et que je recule de deux pas. Quand c'est écrit -3 , cela veut dire que j'enlève trois et que je recule de trois pas. Ada se place de nouveau devant la maison, sur le 0. Elle recule d'un pas et note par terre -1 (j'ai reculé d'un pas depuis zéro). Elle recule encore d'un pas et note alors -2 (j'ai reculé de deux pas depuis zéro). Puis, elle continue à énumérer les pas et écrit par terre : -3 , -4 , -5 , etc. Jusqu'à arriver au garage où Ada inscrit -21 . À ce moment, Émilie revient avec le goûter.

«Tiens Ada, tu as découvert les nombres négatifs ! s'étonne sa tante. »

Ada est fière d'elle. Émilie lui explique que les nombres négatifs ont eux aussi beaucoup voyagé et qu'ils ont longtemps été considérés comme des nombres bizarres. Ada se dit qu'ils n'ont rien de bizarre et puis maintenant, grâce à eux, elle peut finir la formule d'Émilie. Ada se place sur le 3 et recule de cinq pas. La voilà arrivée sur le -2 .

«Voilà, dit Ada, $3 - 5 = -2$. Et maintenant, est-ce qu'on peut goûter ? »

Chapitre 5

Multiplication

Charles, le petit frère d'Ada est venu rejoindre sa soeur et Émilie pour le goûter. Après avoir mangé quelques gâteaux, Ada demande à Émilie :

«Dis, tata, est-ce que tu sais sauter à pieds joints ? Comme ça regarde ! »

Ada se place sur le 0, fait un premier saut et arrive sur le 2. Un deuxième et la voilà sur le 4. Encore un et Ada atterrit sur le 6.

«Regarde, Émilie, à chaque saut j'avance de deux ! Allez à toi, maintenant ! »

Émilie se place elle aussi sur le 0, fait un premier saut et arrive sur le 3. Encore un et la voilà sur le 6 elle aussi.

«À moi ! s'écrie Charles. »

Et lui aussi se met à sauter. Depuis le 0, il atterrit sur le 1. Puis sur le 2 et le 3, etc. jusqu'à arriver, après six sauts, avec Émilie et Ada sur le 6. Ada se demande alors où elle atterrirait si elle faisait 10 sauts d'affilée. Elle recommence depuis le début (0). Après trois sauts, la voilà sur le 6. Elle fait un quatrième saut et arrive sur le 8. Après un cinquième, la voilà sur le 10. Elle continue ainsi en comptant le nombre de sauts et arrive, après dix sauts, sur le 20.

«C'est à toi maintenant, dit Ada à Émilie. »

Émilie se place sur le 0 et fait un saut (elle atterrit sur le 3), puis un deuxième (la voilà sur le 6) et un troisième (sur le 9), etc. Après le dixième saut, la voilà bien plus loin qu'Ada, au nombre 30. Ada est étonnée, elle et Émilie ont fait chacune dix sauts. Mais comme les sauts d'Émilie sont plus grands que ceux d'Ada, Émilie est arrivée bien plus loin qu'elle.

«Et maintenant à toi Charles ! dit Ada à son frère. »

Et Charles se met à sauter dix fois de suite. En partant du 0, il arrive finalement au 10. Ada veut se souvenir de tous ces nombres. Elle prend son carnet et note :

$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 20$ pour elle,

$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 30$ pour Émilie et

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 10$ pour Charles.

Comme c'est long et compliqué, pense Ada. Imaginez, si

on devait faire 50 sauts ou encore 100, il n'y aurait pas la place de tout écrire ! Il faudrait un moyen plus rapide d'écrire qu'on a fait 10 fois la même chose. On n'aurait alors besoin que de deux nombres : par exemple, le nombre de sauts (10) et la taille de chaque saut (2). Ce serait quand même plus pratique. Ada montre alors son carnet à Émilie et lui demande s'il n'existerait pas une manière plus simple d'écrire que $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 20$. Émilie lui présente alors un nouveau symbole : une petite croix qui s'appelle "fois" et se dessine comme cela : \times . Émilie lui montre que $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 20$ peut s'écrire $10 \times 2 = 20$ et qu'on dit dix fois deux. Ada regarde ce nouveau venu puis écrit $10 \times 3 = 30$ dans son carnet.

«C'est quand même plus pratique que d'écrire $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 30$, dit-elle, et c'est exactement ce dont j'avais besoin. Et pour toi, Charles, on écrit $10 \times 1 = 10$. »

Mais quelque chose préoccupe Ada. «Dis Émilie, demande-t-elle, tu m'as dit que quand on écrit $+$, on fait une addition. Quand on écrit $-$, on fait une soustraction. On fait quoi quand on écrit \times ?

—Cela s'appelle une multiplication, répond Émilie, on dit qu'on multiplie deux nombres entre eux.

—Alors si je fait 50 sauts j'arriverais à quel nombre ?

—Au cent, car $50 \times 2 = 100$.

—Et si j'en fait 100 ?

—Au deux cents, car $100 \times 2 = 200$. »

Ada imagine qu'elle serait très fatiguée à force de sauter autant.

Chapitre 6

Division

Ada a encore un peu faim. Il n'y a plus de gâteau mais, heureusement, Émilie a rapporté des framboises du jardin. Il y en a douze. Ada se demande comment les partager. C'est qu'Émilie et Charles aiment aussi les framboises. Ada réfléchit. Je vais commencer par en donner une pour Charles, une pour Émilie et une pour moi. Il en reste (Ada compte les framboises à haute voix) neuf. En voilà une deuxième pour Charles, une deuxième pour Émilie et une deuxième pour moi. Il n'en reste plus que six. Alors en voici une troisième pour Charles, Émilie et moi. Il n'en reste maintenant plus que trois. Pour finir Ada, donne une quatrième framboise à chacun. Et voilà les douze fram-

boises partagées.

«Qui a encore faim ? Qui veut des framboises ? demande Ada. Regardez, on en a tous quatre.

—Bravo, dit Émilie, tu connais aussi la division !

—La quoi ? s'étonne Ada.

—La division, explique Émilie. C'est ce que tu viens de faire pour partager les framboises. La division, c'est la copine de la multiplication, de la soustraction et de la multiplication.

—Ah bon ? répond Ada, la bouche pleine de fruits. Et on la dessine comment ?

—On utilise souvent un trait pour montrer qu'on divise (on coupe) un nombre par un autre.

—On coupe les nombres ! s'écrie Ada. »

Ada imagine des nombres coupés en deux. Un 8 ayant perdu sa moitié haute (8), un 4 sans pied (4) ! Bizarre.

«Et ça ne leur fait pas mal ?

—Mais non, la rassure Émilie. Tiens regarde. »

Émilie prend le carnet et note : $12/3 = 4$.

«Douze framboises partagées en trois égalent 4 framboises par personne. On peut aussi écrire comme cela. »

Émilie tend le carnet à Ada et lui montre :

$$\frac{12}{3} = 4$$

Ada la trouve plutôt jolie la division. Elle se demande si ça marche pour tous les nombres et pas juste pour les framboises. Elle aimerait savoir combien font 7 divisé par 3. Comment faire ? Pour les framboises, c'était facile, il suffisait de les distribuer. Une pour Ada, une pour Charles, une pour Émilie, deux pour Ada, deux pour Charles, deux pour Émilie, etc. jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de framboises. Mais, Ada n'a plus de framboises pour essayer. Ada réfléchit. Elle a une idée. Elle va utiliser ses craies de couleur et des cailloux. Ada se lève et prend trois craies : une verte, une orange et une violette. Puis elle dessine trois ronds par terre : un vert, un orange et un violet. Ensuite, elle ramasse sept cailloux. Elle en met d'abord un dans le rond vert, un dans le orange et un dans le violet. Voilà, c'est comme pour les framboises, sauf que là, Ada distribue les cailloux. Ada continue. Il lui reste quatre cailloux. Elle en met un dans le rond vert, un dans le orange et un dans le violet. Chaque rond à maintenant deux cailloux. Ada regard dans sa main. Il ne reste qu'un seul cailloux à distribuer. Plus assez pour en déposer un dans chaque rond de couleur ! Ça ne va pas aller. «Émilie ? Ta division, elle ne fonctionne pas.

—Ah bon ? s'étonne Émilie.

—Oui, reprend Ada, je voulais diviser 7 par 3. J'ai trois paquets : un vert, un orange et un violet. J'ai mis deux cailloux dans chaque paquet. Mais il me reste encore un

partager pour finir et je ne peux pas le couper en trois !

—C'est normal, explique Émilie, tous les nombres ne se laissent pas toujours diviser entièrement. Quelquefois, il y a un reste.

—Un reste ?

—Oui un reste, c'est comme ça que ça s'appelle. Dans ton cas, 7 divisé par 3 égale 2 et il reste 1. On peut aussi dire que 7 égale 3 paquets de 2 plus 1. C'est pareil. Et on peut le noter comme cela : $7 = 3 \times 2 + 1$.

—Hein ? s'exclame Ada. Elle est passée où ma division ? Tu triches encore, tata !

—Mais bien sûr que non, la multiplication et la division sont tellement copine que l'on peut changer l'une en l'autre. On dit que la division est l'inverse de la multiplication. » Ada la regarde stupéfaite. Puis après quelques temps elle dit :

«D'accord, alors s'il te plaît, est-ce que tu peux nous chercher six bonbons ? Deux chacun ? Parce que $6 = 3 \times 2$ et $6/3 = 2$, n'est-ce pas ? »

Chapitre 7

Fractions

Émilie est retournée dans la maison. Ada s'est assise sur un muret et réfléchit. Elle trouve bizarre que l'on ne puisse pas entièrement diviser certains nombres. Pendant ce temps, Charles s'amuse sur la ligne des nombres.

«Sept ! deux ! neuf ! zéro ! huit ! six ! trois ! cinq ! un ! trois ! Regardez, Charles le dompteur de nombres !

—Charles, arrête de faire n'importe quoi. Tu ne marches même pas correctement sur la ligne ! se plaint Ada. »

Ne pouvant se concentrer, Ada regarde Charles jouer sur la ligne des nombres. Elle se rend compte qu'il lui faut faire deux pas pour passer du 0 au 1, puis encore deux pour passer du 1 au 2, etc. Ada réalise que Charles fait des demi-pas

(des moitiés de pas d'Ada). C'est vrai, se dit Ada, il y a plein de choses qui sont 1 mais qu'on peut couper en deux : par exemple, une pomme ou un paquet de cartes. Et il y a des choses qui sont 1 et qu'on ne peut pas couper en deux : par exemple un caillou ou un crayon. Ada remarque alors un moineau qui sautille dans le jardin. Il fait des pas encore plus petits que ceux de Charles. Peut-être qu'il fait dix pas pour faire un pas d'Ada. Sur le muret où elle est assise, Ada remarque des fourmis. Elles doivent faire au moins cent pas pour faire l'équivalent d'un pas d'Ada. Cela lui donne une idée. Si Charles doit faire deux pas quand Ada en fait un, alors un pas de Charles est égal à un pas de Ada coupé en deux : $1/2$. Un pas de moineaux est égal à un pas de Ada coupé en dix : $1/10$. Et un pas de fourmis égale un pas de Ada coupé en cent ! $1/100$. Ada prend son carnet et écrit $2 \times \text{Charles} = 1 \times \text{Ada}$. Ada imagine deux Charles. Deux petits frères ! Oh non, un petit frère c'est déjà beaucoup alors deux, bonjour les dégâts. Ada écrit alors $1 \times \text{Charles} = \text{Ada}/2$. Ada s'imagine coupée en deux. Cette idée ne la réjouit pas non plus. En plus, elle se demande si elle a le droit de mélanger les nombres avec les lettres. À ce moment, Charles l'appelle :

«Ada ! J'ai attrapé tous les nombres ! J'en veux des nouveaux ! »

Ada se lève, prend ses craies et se dirige vers la ligne des nombres. «Regarde Charles, je vais te dessiner tes nombres

à toi. »

Ada dessine $1/2$ entre le 0 et le 1. Ensuite Ada compte. Pour arriver au 1, Charles doit faire deux pas. Deux demis-pas d'Ada : $2/2 = 1$. Pas besoin de le dessiner celui-là, alors Ada continue. Pour arriver entre le 1 et le 2, Charles doit faire trois pas. Ada écrit $3/2$. Pour arriver sur le deux, Charles doit faire quatre pas : $4/2 = 2$. Encore un, qu'Ada n'a pas besoin de dessiner. Entre le 2 et le 3, Ada écrit $5/2$ et ainsi de suite. Entre le 3 et le 4, $7/2$. Entre le 4 et le 5, $9/2$. Ada continue jusqu'à 10. Charles est ravi.

«Des nombres rien que pour moi, merci Ada ! Et comment ils s'appellent ? »

Ada réfléchit. Charles fait des demi-pas.

«Le premier, $1/2$, s'appelle un demi. Ensuite, le $3/2$, c'est trois demi. $5/2$, cinq demi, etc. »

Charles s'applique maintenant à poser un pas sur chacun de ses nombres à lui. Ada se demande comment on appelle un 1 coupé en trois ($1/3$), ou un 1 coupé en quatre ($1/4$). Et les autres ? $1/5$, $1/6$, $1/7$, $1/8$ et $1/9$? Pour Ada, $1/10$ s'appellera désormais un moineau. Et $1/100$, une fourmi. Ces nouveaux nombres sont étrange, pense Ada, quand on coupe 1 par un plus grand nombre, le résultat devient plus petit. $1/100$ est plus petit que $1/10$. $1/1000$ est plus petit que $1/100$. $1/100000$ est encore plus petit ! Ada s'imagine partir à la chasse du plus petit nombre et qu'elle devient minuscule, plus petite qu'un moineau, plus petite qu'une

fourmi, infiniment petite.

Chapitre 8

Équations

Émile est maintenant de retour. Malheureusement sans bonbons. C'est dommage, pense Ada, mais peu importe, Ada doit d'abord montrer des choses à Émilie. Pour les bonbons, on verra plus tard.

«Regarde Émilie, dit Ada, Charles fait des demi-pas. Quand je fais un pas, il doit en faire deux.

—Ah oui ? Et combien vaut un pas d'Émilie en pas d'Ada, demande sa tante ?

—Je ne sais pas, mais on a qu'à essayer, répond Ada. J'ai une idée. On se met l'une à côté de l'autre, on marche ensemble et on regarde combien de pas on doit faire pour arriver au même endroit.»

Ada et Émilie s'installent toutes les deux devant la maison, sur le 0. Ada fait un pas et arrive sur le 1. Émilie fait également un pas mais ses pas sont plus grands et elle est coincée entre le 1 et le 2. Ada fait un deuxième pas et passe devant Émilie. Émilie fait un deuxième pas et arrive sur le 3. Ada doit faire un troisième pas pour rejoindre Émilie. Ada note alors dans son carnet $3 \text{ Ada} = 2 \text{ Émilie}$. Trois pas d'Ada valent deux pas d'Émilie. Cela paraît bien compliqué se dit Ada. J'aimerais mieux savoir combien un de mes pas fait en pas d'Émile. Si trois de mes pas font deux pas d'Émilie, alors en coupant en trois, j'obtiens un pas d'Ada égal deux pas d'Émilie coupés en trois. Ada note $1 \text{ Ada} = \frac{2}{3} \text{ Émilie}$. Émilie regarde le carnet et s'exclame : « Oh les belles équations ! »

— Les équations ? s'étonne Ada.

— Les équations, reprend Émilie. Ce sont les formules que tu viens de noter. C'est comme ça qu'on les appelle. Elles sont comme des recettes qui nous disent comment transformer des choses.

— Je le savais, dit Ada, on peut mélanger les chiffres et les lettres.

— Oui, du moment que le compte est bon.

— Je me demande combien de pas tu dois faire si j'avance jusqu'au 12, dit Ada.

— Et bien, on pourrait essayer, répond Émilie. Je me place sur le 0. J'avance de un, deux pas et je suis sur le 3. Après

trois et quatre pas, me voici sur le 6. Cinq et six pas, sur le 9. Sept et huit pas. Et voilà ! J'arrive sur le 12. Huit pas, voilà ta réponse Ada.

—Hé ! ne me laissez pas tout seul ! crie soudain Charles depuis la maison.

—Tu n'es pas tout seul, répond Ada, et en plus, tu n'es même pas loin.

—Si je suis très loin, au moins cent cinquante huit !

—N'importe quoi, dit Ada, nous sommes au 12 et tu es sur le 0. Puisque tu fais des demi-pas, tu dois faire le deux fois plus de pas que moi. C'est-à-dire deux paquets de 12 et ça fait..., Ada calcule dans sa tête, vingt-quatre, pas vrai Émilie ?

—Oui c'est ça, allez viens Charles, tu vois ce n'est pas si loin que ça.»

Charles court les rejoindre.

«Et maintenant, dit Émilie, je dois aller chercher de la salade dans le jardin. Qui vient avec moi ?

—Moi ! s'écrie Charles !

—Et toi, tu viens Ada ?

—Je ne sais pas, les salades sont au fond du jardin et ça, ça me paraît loin. Ce qui serait bien, continue Ada, c'est d'avoir une méthode qui permette de savoir combien de pas je dois faire pour te rejoindre. Le mieux, ce serait d'avoir la réponse tout de suite en regardant, sans calculer.

—Je peux te dessiner les équations, propose Émilie.

—Les dessiner ? reprend Ada, mais je les ai déjà écrites dans mon carnet !

—Non, regarde.»

Emilie dessine deux lignes dans le carnet : une première horizontale pour ses pas à elle et une deuxième verticale pour les pas d'Ada. Émilie note alors 0 à l'endroit où les lignes se croisent, puis elle ajoute des chiffres de 1 à 9 sur chacune. Elle montre à Ada comment dessiner l'équation. Quand Émilie fait deux pas, Ada doit en faire trois. Émilie pose le stylo sur le numéro 2 de la ligne horizontale et monte jusqu'au niveau du numéro 3 de la ligne verticale. Là, elle marque un premier point. Quand Émilie fait quatre pas, Ada doit en faire six. De la même manière Émilie marque un deuxième point. Quand Émilie fait six pas, Ada doit en faire neuf. Finalement Émilie marque un troisième point sur la feuille. Ensuite, elle trace une ligne reliant tous les points.

«Tu vois, dit Émilie, cette ligne que je viens de tracer c'est elle qui représente mon équation. Si tu veux savoir combien de pas tu dois faire pour me rejoindre, il te suffit de suivre cette ligne.

—Suivre la ligne ?

—Oui, regarde. Si je fais huit pas, la ligne me dit que tu dois en faire douze.

—Ça je le savais déjà ! répond Ada.

—Si je fais dix pas, tu dois en faire quinze.

—Et si tu n'en fais que cinq ? demande Ada, elle nous dit quoi la ligne ?

—Elle nous dit que tu dois en faire sept et demi.»

Ada regarde le dessin dans son carnet. Cela lui plaît bien, après les formules magiques et les recettes, voici une carte au trésor.

Chapitre 9

Multiplication des nombres négatifs

Pendant qu'Émilie cueille de la salade, Ada et Charles jouent ensemble à "Ada a dit". Le but est simple : Ada donne des ordres à Charles et celui-ci ne doit les exécuter que si Ada a prononcé la formule "Ada a dit".

«Ada a dit, recule de trois pas!»

Charles recule effectivement de trois pas.

«Bravo! Ada a dit, saute à cloche-pied!»

Charles se met sur un pied et commence à sauter.

«Maintenant, avance de cinq pas en courant!»

N'y tenant plus, Charles se met à courir vers Ada.

«Perdu ! Je n'ai pas dit "Ada a dit".

—Oh non ! Allez c'est à moi ! Charles a dit $3 \times (-2)$!

— $3 \times (-2)$! ? s'étonne Ada. Attend un peu... Ada réfléchit et dit : -2 ça veut dire qu'on recule de deux pas, donc $3 \times (-2)$ ça veut dire qu'on recule trois fois de deux pas.»

Ada recule de six pas.

«Charles a dit $(-2) \times 3$!»

Ada recule de nouveau de six pas.

«Hé tu triches ! s'écrie Charles.

—Comment-ça je triche ? réplique Ada.

—Ben oui ! Avant c'était $3 \times (-2)$ et maintenant c'est $(-2) \times 3$, c'est pas pareil donc ça ne peut pas faire la même chose.

— $(-2) \times 3$ c'est reculer de deux pas trois fois, c'est comme reculer trois fois de deux pas. $3 \times (-2) = (-2) \times 3$.»

À ce moment Émilie arrive avec une salade dans chaque main.

«Ada a raison. La multiplication est commutative.

—Commuta-quoi ? demandent en chœur les frère et soeur.

—Commutatif. Cela veut dire que l'on peut changer de place les nombres autour du signe \times : $5 \times 4 = 4 \times 5$, $7 \times 3 = 3 \times 7$, ou encore $3 \times (-2) = (-2) \times 3$. Cela marche aussi pour l'addition : $1 + 3 = 3 + 1$, $5 + 2 = 2 + 5$.

—Et la soustraction et la division ? demande Ada.

—Elles, elles ne sont pas commutatives. On ne peut pas déplacer les nombres comme on veut : $3 - 2$ n'est pas égal

à $2 - 3$ et $6/3$ n'est pas égal à $3/6$. »

Ada regarde Charles.

«Ça veut dire que j'ai gagné!

—Non, encore un! Charles a dit $(-4) \times (-3)$!

Ada réfléchit. Elle n'a encore jamais multiplié deux nombres négatifs

«Quand on avance de deux pas, on écrit 2 et quand on recule de deux pas on écrit (-2) . Si on avait $4 \times (-3)$, quatre paquets de (-3) , on reculerait quatre fois de trois pas.»

Ada calcule.

«On reculerait de 12 pas. Et comme on a $(-4) \times (-3)$, on fait la même chose dans l'autre sens. On avance de 12 pas.»

Ada demande à Émilie.

«Dis tata, est-ce que $(-4) \times (-3)$ ça fait 12?

—Bravo Ada, répond Émilie, quand on fait des multiplications avec des nombres positifs et négatifs on doit jongler avec les signes.

—Jongler avec les signes? Ça a l'air difficile.

—Non, tu viens de le faire. Multiplier deux nombres positifs ensemble ou deux nombres négatifs ensemble donne toujours un résultat positif. Multiplier un nombre positif avec un nombre négatif donne un résultat négatif.»

Soudain depuis la maison, une voix appelle les enfants :

«Ada, Charles! Il est l'heure de rentrer!

—On arrive! répondent à l'unisson les frère et soeur.»

Chapitre 10

Épilogue

C'est le soir. Alors que Charles dort déjà, Ada demande à Émilie de lui raconter une histoire. Émilie raconte alors l'histoire de nombres qui voyagent, qui avancent et reculent, sautent et s'additionnent. L'histoire d'une petite fille qui s'interroge, qui réfléchit et qui joue avec les symboles. Enfin l'histoire de nombres qui s'écrivent avec des lettres, se dessinent et jonglent avec leurs signes tel un grand cirque. Et sous son chapiteau se jouent bien d'autres spectacles : un nombre i qui fait tourner les têtes, des infinis multiples plus grands les uns que les autres et bien d'autres choses qui portent des noms étranges : logarithme, cosinus et racines cubiques... Mais cela est une autre histoire, car

maintenant, chut ! Ada s'est endormie. Bonne nuit !

FIN