目 录

主要符号表

$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$	实数域, 复数域, 有理数域, 整数 (环), 自然数集
i	虚数单位 $\sqrt{-1}$
$\mathrm{Re}(\lambda)$	复数 λ 的实部
$\mathrm{Im}(\lambda)$	复数 λ 的虚部
$\bar{\lambda}$	复数 λ 的共轭
$\Longleftrightarrow$	充分必要条件
$\forall$	对所有 (任意)
$\exists$	存在有
$\square$	证毕
$\partial f(x)$	多项式 $f(x)$ 的次数
A^{-1}	矩阵 A 的逆矩阵
$A^{\dagger}$	矩阵 A 的 Moore-Penrose 广义逆矩阵
A^i	矩阵 A 的 i 次方或矩阵 A 的第 i 行
A_j	矩阵 A 的第 j 列
$A^{(i,j)}$	矩阵 A 的 $\{i,j\}$ 广义逆
$\mathrm{vec}(A)$	矩阵 A 的列展开
$\mathrm{rvec}(A)$	矩阵 A 的行展开
A^T	矩阵 (或向量)A 的转置
A^*	矩阵 (或向量)A 的共轭转置
$A > 0$	矩阵 A 为正定矩阵或 A 为正矩阵即 A 的所有元素均大于零
$A \geq 0$	矩阵 A 为半正定矩阵或 A 为非负矩阵即 A 的所有元素均非负
$A \otimes B$	矩阵 A 与 B 的张量积 (也称为 Kronecker 积)
$\mathrm{adj}\, A$	矩阵 A 的伴随矩阵
$r(A)$	矩阵 A 的秩
$\mathrm{tr}\, A$	矩阵 A 的迹
$\sigma(A)$	矩阵 A 的谱
$\rho(A)$	矩阵 A 的谱半径
$\\|A\\|$	矩阵 A 的范数
$\\|A\\|_1$, $\\|A\\|_2$, $\\|A\\|_\infty$	矩阵 A 的 l_p 范数 $(p = 1, 2, \infty)$
$\vert A\vert$	复数 A 的模或矩阵 A 的行列式 (偶尔也表示 A 的绝对值矩阵) 或集合 A 的元数
C_n^r	从 n 个不同元素中取出 r 个元素的组合数
$d_k(\lambda)$	矩阵的 k 阶不变因子
δ_{ij}	Kronecker 符号, 即 $\delta_{ij} = 1$ 如果 $i = j$; $\delta_{ij} = 0$ 如果 $i \neq j$
$\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$	对角线元为 $\lambda_1, ..., \lambda_n$ 的对角矩阵
e_i^T	$(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ 第 i 个分量为 1 的基本行向量
e_j	$(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)^T$ 第 j 个分量为 1 的基本列向量
E_{ij}	在 (i,j) 处为 1 其余位置为零的矩阵
H_A	矩阵 A 的 Hermite 标准形
I, I_m	单位矩阵, m 阶单位矩阵
J	矩阵的 Jordan 标准形
$J_k(\lambda)$	对角线为 λ 的 k 阶标准 Jordan 块
$N(A)$	矩阵 A 的零空间
$N(A^T)$	矩阵 A 的左零空间 (矩阵 A^* 的零空间)
$R(A)$	矩阵 A 的列空间 (像空间)
$R(A^T)$	矩阵 A 的行空间 (矩阵 A^* 的像空间)

(x,y)	向量 x 与向量 y 的内积
$x \perp y$	向量 x 与向量 y 正交 (垂直)
$\mathbb{R}^n$	实数域上 n 维有序数组构成的线性空间
$\mathbb{C}^n$	复数域上 n 维有序数组构成的线性空间
$\mathbb{F}^n$	数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维有序数组构成的线性空间
$M_n,\ M_n(\mathbb{F})$	数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵全体构成的线性空间
$\mathbb{R}^{m\times n}$	全体 $m \times n$ 阶实矩阵构成的线性空间
$\mathbb{C}^{m\times n}$	全体 $m \times n$ 阶复矩阵构成的线性空间
$\mathbb{F}^{m\times n}$	数域 $\mathbb{F}$ 上全体 $m \times n$ 阶矩阵构成的线性空间
$C[a,b]$	区间 $[a,b]$ 上全体实变量连续函数构成的线性空间
$\mathrm{Span}\{\alpha_1,...,a_k\}$	由向量 $\alpha_1,...,\alpha_k$ 生成的子空间
$U \oplus W$	子空间 (或矩阵)U 与 W 的直和
$\sum_{i=1}^{s} \oplus U_i$	子空间 (或矩阵)$U_1,\cdots,U_s$ 的直和
V/U	线性空间 V 关于子空间 U 的商空间
1_V	线性空间 V 上的恒等变换 (单位变换)
0_V	线性空间 V 上的零变换
$\dim V$	线性空间 V 的维数
$r(\sigma)$	线性变换 σ 的秩
$\eta(\sigma)$	线性变换 σ 的零度
σ^*	线性变换 σ 的伴随变换
$\mathrm{Im}\,(\sigma)$	线性变换 σ 的像空间
$\mathrm{Ker}\,(\sigma)$	线性变换 σ 的核空间
$\mathrm{Hom}(V,W)$	由线性空间 V 到 W 的线性变换全体构成的集合
V^*	线性空间 V 的对偶空间
$\mathrm{End}\,V$	由线性空间 V 到自身的线性变换全体构成的集合
$W^{\perp}$	子空间 W 的正交补
V_λ	由对应于特征值 λ 的特征向量生成的特征子空间
P_U	子空间 U 上的正交投影变换 (矩阵)
$\mathrm{Proj}_U\alpha$	向量 α 在子空间或向量 U 上的投影向量
$\sigma\vert_U$	线性变换 σ 在子空间 U 上的限制
$\sum_{i=1}^{s} \oplus \sigma_i$	线性变换 $\sigma_1,\cdots,\sigma_s$ 的直和
$U \otimes V$	线性空间 U 与 V 的张量积
$\sigma \otimes \tau$	线性变换 σ 与 τ 的张量积
$\mathrm{E}\{x\}$	随机变量 x 的数学期望
E_x	特征值 x 的广义特征子空间或随机变量 x 的能量

第一章“矩阵”补充习题

1. 计算:

$$(1)\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}^n;\quad (2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n;\quad (3)\begin{pmatrix} a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & a & 1 & \\ & & & a & 1 \\ & & & & a \end{pmatrix}^n.$$

2. 证明: 与任意 n 阶方阵可交换的矩阵必是纯量矩阵 λI.

3. 利用初等变换求 $A^{-1}B$ 及 CA^{-1}, 其中

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 10 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 9 & -3 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

4. 设 $A,B\in M_n$, 证明: $\operatorname{adj}(AB)=\operatorname{adj}(B)\operatorname{adj}(A)$.

5. 证明: 对任意矩阵 A, 有 $r(A^*A)=r(AA^*)=r(A)$.

6. 证明: 对任意 n 阶矩阵 A, 有 $r(A^n)=r(A^{n+1})$.

7. 设 ω 是 n 次本原单位根 (可设 $\omega=e^{2\pi i/n}=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$), 试求 Fourier [1]矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

的逆矩阵.

8. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是可逆的对称实矩阵. 证明: 二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n \\ -x_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -x_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的矩阵是 A 的伴随矩阵.

9. 证明矩阵秩的 Frobenius[2] 不等式: $r(AB)+r(BC)\le r(B)+r(ABC)$.

10. 证明行初等变换不改变矩阵的列向量之间的线性关系.

11. 设 A 是 n 阶矩阵, 对任意 $x\in\mathbb{F}^n$ 均有 $Ax\neq x$, 证明 $I-A$ 可逆并求其逆.

12. 设 n 阶矩阵 A 可逆, x 与 y 是 n 维列向量. 如果 $(A+xy^*)^{-1}$ 可逆, 证明 **Sherman-Morrison**[3] 公式:

$$(A+xy^*)^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1}xy^*A^{-1}}{1+y^*A^{-1}x}.$$

[1] J.Fourier(1768-1830), 著名法国数学家与物理学家, 发现了三角级数, Fourier 变换, 热传导方程, 热传导定律和温室效应.

[2] F.G.Frobenius(1849-1917), 德国著名数学家.

[3] J.Shermann(1927-2007) 和 W.Morrison(1910-1961) 均为美国统计学家, 该公式发表于 1949 年.

(提示: 可用上题的结论.)

13. 设 n 阶矩阵 A 可逆, B,C,D 分别是 $n\times m, m\times n, m\times m$ 矩阵. 证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D-CA^{-1}B|.$$

14. (1) 设矩阵 A,C 均可逆, 求分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

(2) 设矩阵 A 可逆, $D-CA^{-1}B$ 也可逆, 证明分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 可逆并求其逆.

15. 设矩阵 A 与 $A-BC$ 均可逆, 试用 A, A^{-1}, B, C 表示 $(A-BC)^{-1}$.(提示: 研究分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & I \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.)

16. 设 $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ 为 $2n$ 阶分块矩阵. 一个 $2n$ 阶复矩阵 M 称为是**辛矩阵**如果 $M^T\Omega M = \Omega$. 证明:

(1) $2n$ 阶辛矩阵的全体构成一个群, 即辛矩阵的逆矩阵仍是辛矩阵, 两个辛矩阵的乘积仍是辛矩阵;

(2) 任何辛矩阵的行列式均为 1. (提示: 利用分块矩阵.)

17. 证明第三种初等矩阵 (即 $I+aE_{ij}$, $i\neq j$, $a\neq 0$) 彼此相似. 又, 第一种初等矩阵是否彼此相似?

18. 设矩阵 A 满足方程 $A^2-A+2I=0$, 问 A 可以对角化吗? 为什么? 将本题一般化.

19. 证明:(1) Hermite 矩阵的特征值均为实数, 且属于不同特征值的特征向量彼此正交.

(2) Hermite 矩阵 A 是正定矩阵 $\iff$ 存在可逆下三角矩阵 L 使得 $A=LL^*$.

20. 设 $f(x,y)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的对称**双线性函数** (即 $f(x,y)=f(y,x)$ 且关于两个变元 x 与 y 均是线性的).

(1) 给出 $f(x,y)$ 的一般表达式;

(2) 证明方程 $f(x,x)=0$ 总有非零解;

(3) 设 $f(x,y)$ 非退化 (即若 $f(x,\alpha)=0, \forall x\in\mathbb{C}^n$, 则 $\alpha=0$), 证明存在线性无关的向量 α,β 使得 $f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)=0$ 且 $f(\alpha,\beta)=1$.

22. 设 x 是矩阵 A 的一个特征向量 x, 证明相应于 x 的特征值为 x^*Ax/x^*x(此商称为 **Rayleigh[4] 商** , 是研究特征值的重要工具). 据此研究 n 元二次型 x^*Ax 与 A 的特征值的关系.

23. Vandermonde (范德蒙德)[5] 行列式对应的矩阵称为 Vandermonde 矩阵. 研究 Vandermonde 矩阵是否可以对角化.

24. 设 $I=I_2$, 试求整数矩阵方程 $X^2=\pm I$ 的所有解. 试一般地讨论方程 $X^n=I_n$ 的解 (这样的整数矩阵称为周期矩阵), 其中 n 为某自然数. (提示: 利用特征多项式.)

[4]Rayleigh 爵士, 全名 J.Strutt(1842-1919), 英国数学家.

[5]A.Vandermonde(1735-1796), 法国数学家.

第二章“线性空间与线性变换”补充习题

1. 设 $V = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. 利用普通加法和普通乘法定义 V 上的加法“$\diamond$”如下:

$$a \diamond b = a + b + ab.$$

证明 $\diamond$ 满足线性空间的加法的全部条件. 进一步, 构造实数与 V 中向量的一个“数乘”$\heartsuit$, 使得 $(V, \diamond, \heartsuit)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 请给出该线性空间的一组基.

2. 请将上题的集合 $V = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ 做一适当调整, 使其在加法“$\clubsuit$”下成为加群, 其中“$a \clubsuit b = a + b + xab$”, x 是某固定的实数. 试设计一个与加法“$\clubsuit$”和谐的数乘运算“$\spadesuit$”, 使得 $(V, \clubsuit, \spadesuit)$ 构成实线性空间. 请给出该线性空间的一组基.

3. 设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 是非空有限集合.

(1) 证明: $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^A = n$;

(2) 求 $\mathbb{F}^A$ 的一组基;

(3) 描述函数空间 $\mathbb{F}^A$ 的结构并推广到 A 是无限集合的情形.

4. 证明线性空间的替换定理: 设 $J = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$ 与 $K = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\}$ 是 n 维线性空间 V 的两个向量组, 其中 J 线性无关. 如果每个 $\alpha_j \in J$ 都可由 K 线性表示, 则 $s \le t$; 且可将 K 中的某 s 个向量换成 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, 使得新的向量组生成的子空间与 K 生成的子空间相同.

5. 证明有限维线性空间的任意两个基所含向量的个数相同.

6. 证明过渡矩阵必是可逆矩阵.

7. 证明 $1, x-1, (x-1)^2, \cdots, (x-1)^n$ 是 $\mathbb{R}[x]_{n+1}$ 的一组基, 并求多项式 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ 在该组基下的坐标.

8. 设 V 是有限维线性空间. 证明并解释下面的维数公式:

$$\dim V = \max\{m \,|\, 0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{m-1} \subset V_m = V,\ V_i \text{ 是 } V_{i+1} \text{ 的真子空间}\}$$

9. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

求 A 的四个相关子空间.

10. 设 V 是所有 n 阶实数矩阵按矩阵的加法和数乘作成的实线性空间, U 是 V 中所有迹为零的矩阵的集合. 证明 U 是 V 的子空间, 并求 U 的维数和一个补空间.

11. 设 A 是 n 阶方阵. 证明

(1) A 可以唯一地表示成一个对称矩阵和一个反对称矩阵的和. 试用子空间的直和分解理论解释这一结果;

(2) A 可以唯一地表示成一个Hermite矩阵和一个反Hermite矩阵的和. 试用子空间的直和分解理论解释这一结果;

(3) 解释定义域为 $\mathbb{R}$ 的任意实函数可以唯一地表示成一个偶函数与一个奇函数的和;

(4) 请举一个类似于上面 (1)-(3) 的例子并解释之.

12. 证明数域 $\mathbb{F}$ 上的一元多项式的欧几里德带余除法: 设 $f(x), g(x)$ 是任意两个多项式, 其中 $g(x)\neq 0$, 则存在唯一一对多项式 $q(x)$ 与 $r(x)$ 使得

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$$

其中 $r(x)=0$ 或 $\partial\, r(x)<\partial g(x)$. 试用线性空间的理论解释这一结果.

13. (1) 设 f 是定义在实数域上的加性函数. 证明: 如果 f 是连续的, 则它一定是齐次的, 从而是线性变换;

(2) 试将 (1) 中的结论推广到一般情形.

14. 若 $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \cdots, \sigma(\alpha_s)$ 线性相关, 证明或否定 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 也线性相关.

15.(1) 设 $\sigma\in \mathrm{Hom}(U, V)$ 是可逆线性变换, 证明其逆唯一, 且若 $\tau=\sigma^{-1}$, 则 $\sigma=\tau^{-1}$;

(2) 计算 2 维实线性空间 $\mathbb{C}$ 的所有自同构.

16. 设 $\sigma\in \mathrm{End}V$ 是两个不同的线性变换. 设 σ 在某组基下的矩阵为 A. 证明或否定: 存在 $\tau\in \mathrm{End}V, \tau\neq\sigma$, 使得 τ 在另一组基下的矩阵也是 A.

17. 习题 1 与 2 中的实线性空间各是几维的? 试分别建立它们与某 $\mathbb{R}^n$ 之间的同构变换.

18. 设 U 与 V 均是有限维线性空间, 证明 $\dim_{\mathbb{F}}\mathrm{Hom}(U,V)=(\dim_{\mathbb{F}}U)(\dim_{\mathbb{F}}V)$.

19. 分别求导数运算 $\partial: f(x)\mapsto f'(x)$ 在标准基 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ 与基 $1, (x-a), (x-a)^2, \cdots, (x-a)^{n-1}$ 下的矩阵. 问 ∂ 的行列式与迹是多少? 解释之.

20. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵全体, σ 是将 V 中任意元素的严格下三角部分变为 0 的映射. 判断 σ 是否为 V 的线性变换. 若是, 求其核与像; 并任选 V 的一组基, 求 σ 在该组基下的矩阵.

21. (1) 设 $\sigma,\tau\in \mathrm{End}V$ 分别是线性空间 V 的同构变换和幂零变换, 证明 $\sigma+\tau$ 是 V 的同构变换;

(2) 设 A, D 是可逆矩阵, B, C 是幂零矩阵, 证明分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 可逆.

22. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵全体, A 是 V 中一个固定元素, P 是 V 中一个固定的可逆矩阵, σ 是左乘 A 的映射, τ 是左乘 P 逆右乘 P 的映射. 判断 σ 与 τ 是否为 V 的线性变换. 若是, 求其核与像. 并任选 V 的一组基, 计算 σ 与 τ 在该组基下的矩阵.

23. 设 $V=\mathbb{R}^3$, $\sigma(x,y,z)=(x+2y-z, y+z, x+y-2z)$. 求

(1) σ 的核与像空间的基与维数;

(2) σ 的行列式与迹.

24. 设 V 是 n 维内积空间, U 是 V 的子空间. 令 $W=\{\alpha\in V\,|\,(\alpha,\beta)=0, \forall\,\beta\in U\}$. 证明 W 是 V 的子空间且 $V=U\oplus W$.

25. 设 $V=\mathbb{R}[x]_n$, 其上的内积为

$$(f(x), g(x))=\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

设 $U=\{f(x)\in V\,|\,f(0)=0\}$.

(1) 证明 U 是 V 的一个 $n-1$ 维子空间, 并求 U 的一组基;

(2) 当 $n=3$ 时, 求 U 的正交补 $U^{\perp}$.

26. 在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中求一个超平面 W, 使得向量 e_1+e_2 在 W 中的最佳近似向量为 e_2.

37. 证明: 函数 $f(x)$ 的Fourier级数中的系数 $a_n, b_n\,(n>0)$ 恰好是 $f(x)$ 与诸基向量 $\cos nx$, $\sin nx$ 的内积.

28. 试任意构造维数大于5的一个线性空间 V 以及 V 的一个线性映射 σ, 使得 σ 的核的维数等于5. 进一步, 试将 V 改造成内积空间, 求 $\mathrm{Im}\sigma$ 的正交补空间. 再构造一个线性变换 τ, 使得 $\mathrm{Ker}\tau=\mathrm{Im}\sigma$, $\mathrm{Im}\tau=\mathrm{Ker}\sigma$.

29. 设 α_0 是欧氏空间 V 中的单位向量, $\sigma(\alpha)=\alpha-2(\alpha,\alpha_0)\alpha_0$, $\alpha\in V$. 证明

(1) σ 是线性变换;

(2) σ 是正交变换.

30. 证明: 欧氏空间 V 的线性变换 σ 是反对称变换 (即 $(\sigma(\alpha),\beta)=-(\alpha,\sigma(\beta))$) $\Longleftrightarrow$ σ 在 V 的标准正交基下的矩阵是反对称矩阵.

31. 设 σ 是实平面 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换, 其关于标准基的矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix}$$

其中 $c^2+s^2=1$. 证明 σ 是反射变换, 并计算其对称轴.

32. 设 $\sigma\in\mathrm{End}\mathbb{R}^2$. 记单位正方形 $S=\{(x,y):0\le x,y\le 1\}$ 在 σ 下的图形为 $G=\sigma(S)=\{\sigma(x,y):(x,y)\in S\}$. 回答下列问题:

(1) 列出 G 所有可能的形状;

(2) 如果 G 仍为正方形, σ 应满足什么条件?

(3) 如果 σ 可逆, 则 G 是什么形状?

33. (1) 设 $\sigma\in\mathrm{End}\mathbb{R}^2$. 设 C 是一个二次曲线 (即抛物线, 椭圆或双曲线). 计算 $\sigma(C)$ 所有可能的形状 (可设 C 的方程均为标准方程);

(2) 设 P 是一个平面 n 次代数曲线 (即 C 的方程是 n 次多项式), 计算 $\sigma(Q)$ 所有可能的形状;

(3) 分别对指数函数, 对数函数, 三角函数研究其曲线在 σ 下的图像;

(4) 设 $\sigma\in\mathrm{End}\mathbb{R}^3$. 设 Q 是一个二次曲面. 计算 $\sigma(Q)$ 所有可能的形状 (可设 Q 的方程均为标准方程).

34. (1) 如何在酉空间中定义Hermite矩阵对应的Hermite变换? 导出Hermite变换的一个判断准则;

(2) 在酉空间中定义伴随变换与自伴变换, 并导出伴随变换的基本性质.

35. 设 A, B 均为 n 阶矩阵. 设 σ 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上的一个线性变换, 其中

$$\sigma:\ X\mapsto\sigma(X)=AXB^T.$$

证明 σ 关于标准基 $E_{11},\cdots,E_{1n},E_{21},\cdots,E_{2n},E_{n1},\cdots,E_{nn}$ 的矩阵是 $B\otimes A$.

36. (复数,位似与旋转矩阵) 设 σ 是 $\mathbb{C}$ 到自身的线性变换, 其定义为

$$\sigma:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\mapsto A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

其中
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$
将 $(x\,,y)^T$ 记为普通复数 $x+y\mathrm{i}$, 证明 $\sigma((x,y)^T)=(a+b\mathrm{i})(x+y\mathrm{i})$. 请解释之.

37. 设 $\sigma: X\mapsto AX+XB$ 是 $M_n(\mathbb{C})$ 的线性变换. 证明 σ 是同构 $\iff$ A 和 $-B$ 没有相同的特征值.

38. 设 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$. 对任意 $x\in\mathbb{F}^m, y\in\mathbb{F}^m$, 定义
$$f(x,y)=x^TAy.$$
则 $f(x,y)$ 称为 $\mathbb{F}$ 上的一个 $m\times n$ 维的双线性函数, A 称为该双线性函数的矩阵. $\mathbb{F}$ 上的 $m\times n$ 维双线性函数的全体记为 $\mathcal{B}(m,n)$.

(1) 证明 $\mathcal{B}(m,n)$ 按照普通加法与数乘运算构成 $\mathbb{F}$ 上的线性空间;(对照第一章第五节思考题 6)

(2) 计算 $\mathcal{B}(m,n)$ 的维数与一组基.

39. 设 U 与 W 是线性空间 V 的两个子空间, $\alpha,\beta\in V$. 记 $\alpha+U=\{x\in V\,|\,x=\alpha+u,\exists u\in U\}$. 证明:

(1) $\alpha+U=P_{U^\perp}(\alpha)+U$;

(2) $(\alpha+U)+(\beta+W)=(\alpha+\beta)+(U+W)$;

(3) $(\alpha+U)\cap(\beta+W)\neq\emptyset \iff \alpha-\beta\in U+W$.

第三章“内积空间、等距变换”补充习题

1. 设 $a_i, 1 \le i \le n$ 是正实数, x_i, y_i 是任意实数, 证明或否定 $(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i y_i)^2 \le (\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i^2)(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i y_i^2)$.

2. 复数域 $\mathbb{C}$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的 2 维线性空间. 是否存在 $\mathbb{C}$ 上的一个内积, 使得 i 与 $1+i$ 成为 $\mathbb{C}$ 的一组标准正交基, 为什么?

3. 试构造实线性空间 $\mathbb{R}^3$ 上的一个内积, 使得向量组 $e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e+3$ 是一组标准正交基. 问此时 e_2 与 e_3 的长度各是多少? 它们的夹角又是多少?

4. 试尽可能一般性地讨论上面的问题 2 与 3.

5. 设 $V = \{$ 所有正实数 $\}$, 由第二章习题 1(教材第 45 页) 知 V 在” 加法” $x \oplus y = xy$ 与” 数乘” $k \bullet x = x^k$ 下作成一个实线性空间. 试构造 V 上的内积使其成为欧氏空间. 证明你构造的欧氏空间与 $\mathbb{R}^1$ 同构.

6. 称两个欧氏空间 U 与 V 同构, 如果存在同构线性变换 $\sigma \in Hom(U,V)$ 使得 $(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta)$. 试证明两个欧氏空间同构当且仅当它们有相同的维数, 即两个欧氏空间同构当且仅当它们作为实线性空间同构. 因此有限维实线性空间上的任何两个内积都是” 一样” 的.

7. 设 $\alpha = (1,-2,-4)^T \in \mathbb{R}^3$. 试求 α 在子空间 $W = \{x = (x_1,x_2,x_3)^T \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$ 中的最佳近似.

8. 设 $z = f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个曲面. 现有如下观测值:

$$f(1,1) = -1.1, \quad f(2,1) = 0.2, \quad f(3,1) = 0.9 f(1,2) = 0.9, \quad f(2,2) = 2.0, \quad f(3,2) = 3.1.$$

试求 $z = f(x,y)$ 的平面最小二乘近似 (即求形如 $z = ax+by+c$ 的近似).(使用 Matlab 较快.)

9. 求方程组 $Ax = b$ 的最小二乘解, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

10. 正交变换保持内积与长度. 以”$\times$” 记 $\mathbb{R}^3$ 中两个向量的外积. 试问 $\mathbb{R}^3$ 上的正交变换保持外积吗? 即是否有 $\sigma(\alpha \times \beta) = \sigma(\alpha) \times \sigma(\beta)$?

11. 设 V 是次数小于 3 的实多项式作成的实线性空间, 定义其上的内积为

$$(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x) g(x) dx.$$

试构造 V 到 $\mathbb{R}^3$ 的一个保持内积的线性变换.

12. 证明欧氏空间中的平行四边形法则:

$$(u+v)^2 + (u-v)^2 = 2(u^2+v^2).$$

13. 验证: 若 $(\alpha,\beta)_1$ 与 $(\alpha,\beta)_2$ 是欧氏空间 V 的两个不同的内积, 则 $(\alpha,\beta) = (\alpha,\beta)_1 + (\alpha,\beta)_2$ 也是 V 的一个内积. 试创造一种新办法再构造 V 的一种内积.

14. 对 $x = (x_1,x_2)^T$, $y = (y_1,y_2)^T$, 规定

$$(x,y) = a x_1 y_1 + b x_1 y_2 + b x_2 y_1 + c x_2 y_2.$$

证明 (x,y) 是 $\mathbb{R}^2$ 的内积 $\iff$ $a > 0$, $ac > b^2$.

15. 设 $V=\{a\cos t+b\sin t,\ 其中\, a,b\, 为任意实数\}$ 是实二维线性空间. 对任意 $f,g\in V$, 定义

$$(f,g)=f(0)g(0)+f(\frac{\pi}{2})g(\frac{\pi}{2}).$$

证明 (f,g) 是 V 上的内积, 并求 $h(t)=3\cos(t+7)+4\sin(t+9)$ 的长度.

16. 设欧氏空间 $\mathbb{R}[x]_2$ 中的内积为

$$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx.$$

(1) 求基 $1,t,t^2$ 的度量矩阵;
(2) 用矩阵乘法形式计算 $f(x)=1-x+x^2$ 与 $g(x)=1-4x-5x^2$ 的内积.

17. 设 $a_i, 1\le i\le n$ 是正实数, x_i,y_i 是任意实数, 证明或否定不等式

$$(\sum_{i=1}^{n}a_ix_iy_i)^2\le(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^2)(\sum_{i=1}^{n}a_iy_i^2).$$

18. (1) 复数域 $\mathbb{C}$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的 2 维线性空间. 是否存在 $\mathbb{C}$ 上的一个内积, 使得 i 与 $1+\mathrm{i}$ 成为 $\mathbb{C}$ 的一组标准正交基, 为什么?

(2) 试构造实线性空间 $\mathbb{R}^3$ 上的一个内积, 使得向量组 $e_1,e_1+e_2,e_1+e_2+e_3$ 是一组标准正交基. 问此时 e_2 与 e_3 的长度各是多少? 它们的夹角又是多少?

19. 试尽可能一般性地讨论习题 18 中的问题.

20. 在欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 中, 求三个向量 $\alpha_1=(1,0,1,1)^T$, $\alpha_2=(2,1,0,-3)^T$ 和 $\alpha_3=(1,-1,1,-1)^T$ 所生成的子空间的一个标准正交基.

21. 定义任意内积空间 V 中两个向量 α 与 β 的距离为

$$d(\alpha,\beta)=\|\alpha-\beta\|.$$

证明如上定义的函数 $d(\alpha,\beta)$ 确实定义了 V 上一个距离, 即满足下列三个条件:
(d1) 对称性: $d(\alpha,\beta)=d(\beta,\alpha)$;
(d2) 非负性: $d(\alpha,\beta)\ge 0$, 且等号成立 $\iff$ $\alpha=\beta$;
(d3) 三角不等式: $d(\alpha,\beta)+d(\beta,\gamma)\ge d(\alpha,\gamma)$.

22. 设 2 维欧氏空间 V 的一组基为 α_1,α_2, 其度量矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}.$$

试求 V 的一个标准正交基到 α_1,α_2 的过渡矩阵.

23. 设 n 维内积空间 V 的一个基为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 该基的度量矩阵为 A. 设 $\alpha,\beta\in V$ 在该基下的坐标分别为 x 与 y.
(1) 证明 $(\alpha,\beta)=x^TA\bar{y}$. 特别, 当 V 为欧氏空间时, $(\alpha,\beta)=x^TAy$.
(2) 证明 (1) 中内积的矩阵乘法形式与选取的基无关.

24. 设 $V=M_n(\mathbb{R})$ 或 $M_n(\mathbb{C})$. 设 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})\in V$.
(1) 证明 $(A,B)=\mathrm{tr}(AB^*)$ 是 V 的一个内积;
(2) 按 (1) 的内积, 矩阵 A 的长度是多少? 哪些是单位向量?
(3) 证明或否定: 基本矩阵 $E_{ij},1\le i,j\le n$ 是 V 的一组标准正交基;
(4) 求 $M_2(\mathbb{R})$ 的一组由可逆矩阵构成的标准正交基.

25. 设线性空间 $V=\mathbb{R}^2$ 是欧氏空间 (未必是通常的欧氏空间). 设 $\alpha_1=(1,1)^T,\alpha_2=(1,-1)^T$ 与 $\beta_1=(0,2)^T,\beta_2=(6,12)^T$ 是 V 的两组基. 设诸 α_j 与 β_k 的内积分别为

$$(\alpha_1,\beta_1)=1,(\alpha_1,\beta_2)=15,(\alpha_2,\beta_1)=-1,(\alpha_2,\beta_2)=3.$$

(1) 求两组基的度量矩阵;
(2) 求 V 的一个标准正交基.

26. 设 n 维欧氏空间 V 的一组基为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$. 证明：存在正定矩阵 C, 使得由

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)C$$

确定的向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 V 的一个标准正交基.

27. 设 A 是**反对称**实矩阵 (即 $A^T=-A$), 证明:
(1) A 的特征值为 0 或纯虚数;
(2) 设 $\alpha+\beta\mathrm{i}$ 是 A 的属于一个非零特征值的特征向量, 其中 α,β 均为实向量, 则 α 与 β 正交.

28. 设 A 是 Hermite 矩阵. 如果对任意向量 x 均有 $x^*Ax=0$, 则 $A=0$.

29. 设 $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$. 定义 $\mathbb{R}^2$ 上的二元 (向量) 函数 $<x,y>$ 如下:

$$<x,y>=x^TAy.$$

此二元函数与普通内积的差别是什么? 以此二元函数为基础, 建立相应的长度, 角度等概念, 研究其中的正交与平行的定理.

第四章“特征值与特征向量”补充习题

1. 计算 A^n, 其中 A 分别是

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

并由第一个计算结果推出 Fibonacci 数列的通项公式.

2. 设 4 阶矩阵 A 的特征值为 5, 3 和 -2, 并且已知对应 λ 的特征子空间是 2 维的, 能否判断 A 是可对角化的? 为什么?

3. 设 5 阶矩阵 A 有 2 个特征值, 且相应的两个特征子空间分别是 2 维与 3 维的, 能否判断 A 是可对角化的? 为什么?

4. 对任意 n 阶方阵, 试尽可能一般性地讨论上面的问题 2 与 3.

5. 证明, 若 n 阶矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量, 则 A^T 也有 n 个线性无关的特征向量.

6. 设 $V = F[x]_3$ 是次数小于 3 的多项式全体作成的线性空间, 问求导运算作为线性变换是否可以对角化?

7. 证明 Hermite 矩阵的特征值均为实数, 特别, 实对称矩阵的特征值均为实数.

8. 证明, Hermite 矩阵可以酉对角化, 而实对称矩阵可以正交对角化.

9. 判断矩阵 A 是否可以对角化, 其中

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}.$$

10. 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 证明存在 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 和实数 $\alpha_1, a_2, \cdots, a_n$, 使得

$$A = a_1\alpha_1\alpha_1^T + a_2\alpha_2\alpha_2^T + \cdots + a_n\alpha_n\alpha_n^T.$$

11. 设 $\alpha = (a_1, \cdots, a_n)^T$, $\beta = (b_1, \cdots, b_n)^T, x$ 为任意常数, $A = xI_n + \alpha\beta^T$.

(1) 直接计算行列式 $|A|$;

(2) 利用 Sylvester 降幂公式计算行列式 $|A|$;

(3) 利用特征值计算行列式 $|A|$.

12. 设 A 的特征值为 0, 1, 对应的特征向量为 $(1, 2)^T, (2, -1)^T$. 判断 A 是否为对称矩阵并求 A.

13. 求下列矩阵的最小多项式并指出其中可以对角化的矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

14. 试构造两个同阶矩阵, 使得它们

(1) 具有相同的特征多项式与不同的最小多项式;

(2) 具有相同的最小多项式与不同的特征多项式;

(3) 证明矩阵的最小多项式存在且唯一.

15. 设 n 阶矩阵 A 的特征值均为实数. 证明:

(1) A 的特征多项式的 $n-k$ 次项的系数等于 A 的所有 k 阶主子式之和;

(2) 若 A 的所有一阶主子式之和与所有二阶主子式之和都等于零, 则 A 是幂零矩阵.

16. 设 n 阶矩阵 A 的主对角元全是 1, 且其特征值均为非负数, 证明 $|A| \leq 1$.

17. 设 $AB = BA$, 证明 A 与 B 有公共的特征向量. 该结论的逆命题成立吗?

19. 设 A 是实三对角矩阵 (即 $a_{ij} = 0$ 如果 $|i-j| > 1$), 且对所有 $i = 1, 2, \cdots, n-1$ 有 $a_{i,i+1}a_{i+1,i} > 0$. 证明 A 的特征值均为实数.

19. 由盖尔园定理证明严格对角占优矩阵是可逆矩阵.

20. 证明谱半径估计的一般形式 (请自行写成另一种等价形式):

$$\rho(A) \leq \min_{p_1, p_2, \cdots, p_n > 0} \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{n} p_j |a_{ij}|.$$

第五章“λ- 矩阵与 Jordan 标准形”补充习题

1. 设 $\alpha \neq \beta$, 试求矩阵

$$\begin{pmatrix} \alpha & a & b & c \\ 0 & \alpha & d & e \\ 0 & 0 & \beta & x \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

的相似分块对角矩阵.

2. 证明实数域上的 Schur 三角化定理: 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, 则存在正交矩阵 Q 使得

$$Q^T AQ = \begin{pmatrix} A_1 & & * & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & A_k \end{pmatrix}$$

其中每个 A_i 或者是 1 阶实矩阵或者是形如 $\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$ 的 2 阶实矩阵 $(b_i \neq 0)$.

(提示: 首先, 如果 λ 是 A 的非实数特征值, $Ax = \lambda x$, 则 $A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$, 由此可知 x 与 $\bar{x}$ 线性无关, 进而 $\mathrm{Re}x$ 与 $\mathrm{Im}x$ 线性无关, 将其正交化后构造正交矩阵, 再利用归纳法.)

3. 设 a 是复常数, $V = \{e^{ax}f(x) \mid f(x) \in \mathbb{C}_n[x]\}$ 是 n 维复线性空间.
(1) 证明求导运算 $\partial : \alpha \mapsto \frac{\mathrm{d}\,\alpha}{\mathrm{d}\,x}$ 是 V 上的线性变换;
(2) 求 ∂ 的 Jordan 标准形.

4. 设 σ 是 $\mathbb{R}^3$ 的线性变换, 设 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, $\sigma(x) = (-2x_2 - 2x_3, -2x_1 + 3x_2 - x_3, -2x_1 - x_2 + 3x_3)^T$. 试求 $\mathbb{R}^3$ 的一个基, 使得 σ 在该基下的矩阵尽可能简单.

5. 已知 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 线性空间 $V = \{X = (x_{ij}) \in M_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}\, X = 0\}$ 的线性变换 σ 为 $\sigma(X) = B^T X - X^T B,\ X \in V$. 试求 V 的一个基, 使得 σ 在该基下的矩阵尽可能简单.

6. 设 A 的特征值为 0, 1, 对应的特征向量为 $(1,2)^T, (2,-1)^T$. 判断 A 是否为对称矩阵并求 A.

7. 利用矩阵的 Jordan 标准形定理证明 **Fitting[6] 引理**(对照第二章公式 (**??**)):
设 V 为 n 维线性空间, $\sigma \in \mathrm{End}V$, 则 $V = \mathrm{Im}(\sigma^n) \oplus \mathrm{Ker}(\sigma^n)$.

8. 两个矩阵的和与积的 Jordan 标准形是否等于它们的 Jordan 标准形的和与积?

下面的 9-12 题展示了如何利用广义特征子空间来得到矩阵的 Jordan 标准形, 其中设 $|\lambda I - A| = \prod\limits_{i=1}^{s}(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$ 是 n 阶矩阵 A 的特征多项式, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s\}$, g_i 为 λ_i 的几何重数.

9. 证明广义特征子空间 $E_{\lambda_i} = \{x \in \mathbb{C}^n \mid (A - \lambda I)^{n_i} x = 0\}$.

10. 证明 $\dim_{\mathbb{C}} E_{\lambda_i} = n_i$, 从而 $\mathbb{C}^n = \sum\limits_{\lambda \in \sigma(A)} \oplus E_\lambda$.(此即“谱定理”.)

[6] H. Fitting(1906-1938), 德国数学家.

11. 证明存在 $\alpha_j \in E_{\lambda_i}, 1 \le j \le g_i$, 使得 $\cup_{1\le j\le g_i}\{\alpha_j, (A-\lambda_i I)\alpha_j, \cdots, (A-\lambda_i I)^{m_j-1}\alpha_j\}$ 构成 E_{λ_i} 的一组基 (称为由诸向量 α_j 生成的循环基), 从而 E_{λ_i} 是 A 的不变子空间.

12. 由每个广义特征子空间的循环基构成的 $\mathbb{C}^n$ 的基称为Jordan基. 证明 A 在 $\mathbb{C}^n$ 的Jordan基下的矩阵是其Jordan标准形 (即将 A 看成是线性变换 $x \mapsto Ax$).

13. 求下列矩阵的Jordan标准形:

$$(1)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix};\quad (2)\ \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix};\quad (3)\ \begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}$$
$$(4)\ \begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix};\quad (5)\ \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix};\quad (6)\ \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

14. 求下列矩阵的Jordan标准形, 并求变换矩阵 P 使 $P^{-1}AP = J$:

$$(1)\ \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix};\ (2)\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix};\ (3)\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

15. 试判断下面4个矩阵, 哪些是相似的:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -7 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

16. (1) 证明不等于零的幂零矩阵一定不相似于对角矩阵;

(2) 设 A 具有唯一特征值但 A 不是对角矩阵. 证明 A 一定不相似于对角矩阵.

17. 证明任何复矩阵 A 可唯一地分解为 $A = D + N$, 其中 D 为可对角化矩阵, N 是幂零矩阵, 且 $DN = ND$.(此称为矩阵的Jordan-Chevalley[7] 分解.) 以此解释上题的结论.

18. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的特征值及 A^{100};

(2) A 的 Jordan-Chevalley 分解是什么?

19. 设 $p(\lambda) = (-1)^n[\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - a_{n-2}\lambda^{n-2} - \cdots - a_1\lambda - a_0]$. 称矩阵

$$C = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

为多项式 $p(\lambda)$ 的友矩阵. 设 n 阶矩阵 A 的特征多项式为 $(-1)^n p(\lambda)$.

(1) 计算 C 的特征多项式;

(2) 研究 C 与 A 是否相似.

[7] C.Chevalley(1909-1984), 著名法国数学家, 生于南非, 拥有美法两国国籍, 对当代数学的众多分支有重要贡献.

20. 设 V 是由函数 e^x, xe^x, x^2e^x, e^{2x} 的线性组合生成的线性空间. 定义 V 的一个线性算子如下: $T(f)=f'$. 求 T 的 Jordan 标准形及 Jordan 基.

21. 如果矩阵 A 的特征多项式和最小多项式相同, 问 A 的 Jordan 标准形有何特点?

22. (酉矩阵与离散 Fourier 变换) 设 σ 是 $\mathbb{C}^n$ 的循环位移变换, 即 $\sigma((x_1,x_2,\cdots,x_n)^T)=(x_2,x_3,\cdots,x_n,x_1)^T$. 证明:

(1)σ 的特征值恰好为方程 $\lambda^n=1$ 的所有根 $\lambda_j=e^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}j}, 1\le j\le n$;

(2)σ 的属于特征值 λ_j 的特征向量为 $\alpha_j=(\lambda_j,\lambda_j^2,\cdots,\lambda_j^n)^T$, 且 $\|\alpha_j\|=\sqrt{n}$;

(3)$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的一组正交基;

(4) 任何向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 均是 σ 的特征向量 α_j 的线性组合 $x=\sum\limits_{j=1}^n a_j\alpha_j$, 即 $x_k=\sum\limits_{j=1}^n a_je^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}j}$;

(5) 上面的系数 $a_j=(x,\alpha_j)/n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n x_ke^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}jk}$;

(6) 研究 σ 与第一章习题 7 中的 Fourier 矩阵的关系, 并由此再求该矩阵的逆.

24. 证明 **Hadamard**[8] **不等式**：对任意 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 有 $|A|\le\prod\limits_{i=1}^n(\sum\limits_{i=1}^n|a_{ij}|^2)^{1/2}$. 并由此证明:

(1) 若 A 是正定矩阵, 则 $|A|\le\prod\limits_{i=1}^n a_{ii}$;

(2) 设 C 是非负实数, 若 $|a_{ij}|\le C, 1\le i,\ j\le n$, 则 $|A|\le C^nn^{n/2}$;

(3) 设 $a_{ij}=\pm1, 1\le i,\ j\le n$, 则由 (2) 可知 $|A|\le n^{n/2}$. 如果等号成立, 则称 A 是一个 **Hadamard 矩阵**. 证明 A 是 **Hadamard 矩阵** $\iff$ $A^TA=nI_n$ $\iff$ A 的列两两正交.

25. 设数列 $a_0=0, a_1=1, a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 满足条件 $a_{n+1}=xa_{n-1}+a_n, n\ge1$, 试求 a_n 的通项公式, 其中 x 为实参数. (当 $x=1$ 时, 此数列即为 **Fibonacci**[9] **数列** .)

26. 设 A 是 n 阶矩阵, 称满足条件 $y^TA=\lambda y^T$ 的向量 y 为 A 的属于特征值 λ 的左特征向量. 证明: A 的相应于特征值 λ 的左特征向量与相应于特征值 μ 的特征向量正交 $(\lambda\ne\mu)$.

27. (无限维线性空间的线性变换的特征值与特征向量) 无限次可导的实函数全体构成一个无限维实线性空间, 记为 C^∞. 定义 C^∞ 上的线性变换 $\partial=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$:

$$\partial:\quad f(x)\mapsto f'(x).$$

试求 ∂ 的谱 $\sigma(\partial)$ 与特征向量. 比较你的结论与有限维线性空间的相应结论.

28. 设 A 是非负矩阵, 证明方程 $(I-A)P=\gamma$ 对任何非负向量 γ 总有正向量解 P $\iff$ $\rho(A)<1$.(提示: 如果 $(I-A)^{-1}\ge0$, 则 $\rho(A)<1$.)

---

[8] J.Hadamard(1865-1963), 著名法国数学家, 对数学的诸多分支有重要贡献, 组合学中有著名的 **Hadamard 猜想**: 对每个正整数 k, 均存在 $4k$ 阶的 Hadamard 矩阵.

[9] Leonardo Pisano 或 Leonardo Bonacci(1170-1250), 意大利数学家, 被称为中世纪最具天赋的西方数学家.

第六章“特殊矩阵”补充习题

1. 判断下列矩阵能否酉对角化, 如能, 则求一个酉矩阵 U, 使 U^*AU 为对角形:

$$(1)\ A=\begin{pmatrix}-1 & \mathrm{i} & 0\\ -\mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i}\\ 0 & \mathrm{i} & -1\end{pmatrix};\ (2)\ A=\begin{pmatrix}0 & \mathrm{i} & 1\\ -\mathrm{i} & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix};\ (3)\ A=\begin{pmatrix}\mathrm{i} & \mathrm{i} & 0\\ \mathrm{i} & 1 & 0\\ 0 & \mathrm{i} & \mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

2. 证明正规矩阵与其共轭转置具有相同的化零空间. 该结论一般地成立吗?

3. 证明两个正规矩阵相似的充要条件是特征多项式相同.

4. 设 A 是 n 阶正规矩阵, x 是任意复数. 证明
(1)$A-xI$ 也是正规矩阵;
(2) 对于任何向量 x, 向量 Ax 与 A^*x 的长度相同;
(3)A 的任一特征向量都是 A^* 的特征向量;
(4)A 的属于不同特征值的特征向量正交.

5. 设 A 是正规矩阵, 证明
(1) A 是Hermite矩阵 $\iff$ A 的特征值全为实数;
(2) A 是酉阵 $\iff$ A 的特征值的模都是1;
(3) A 是幂等阵 $\iff$ A 的特征值只能是0与1;
(4) 若 A 的全部特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, 则 AA^* 与 A^*A 的全部特征值为 $|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2, ..., |\lambda_n|^2$. 此结论对非正规矩阵成立吗?

6. 设 A 是正规矩阵, 证明
(1) 若 A 是幂等阵, 则 A 是Hermite矩阵;
(2) 若 $A^3=A^2$, 则 $A^2=A$;
(3) 若 A 又是Hermite阵, 而且也是一个幂幺阵 (即 $A^k=I$), 则 A 是对合阵 (即 $A^2=I$).

7. 证明特征值的极大极小定理: 设 A 是Hermite矩阵, 其全部特征值为 $\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$, 则:

$$\lambda_k=\min_{\substack{w_i\in\mathbb{C}^n\\1\le i\le n-k}}\ \max_{\substack{0\ne x\perp w_i\\1\le i\le n-k}}\frac{x^*Ax}{x^*x}=\max_{\substack{w_i\in\mathbb{C}^n\\1\le i\le n-k}}\ \min_{\substack{0\ne x\perp w_i\\1\le i\le n-k}}\frac{x^*Ax}{x^*x}.$$

特别地,

$$\lambda_{\max}=\lambda_n=\max_{x\ne0,x\in\mathbb{C}^n}\frac{x^*Ax}{x^*x}=\max_{x^*x=1}x^*Ax,$$

$$\lambda_{\min}=\lambda_1=\min_{x\ne0,x\in\mathbb{C}^n}\frac{x^*Ax}{x^*x}=\min_{x^*x=1}x^*Ax.$$

8. (1) 计算2阶实正规矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ 将哪些正方形变为了矩形?
(2) 证明矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ 是非正规矩阵, 说明它不能将任何正方形变为矩形;
(3) 试给出3阶实正规矩阵的几何意义.

9. 设 P, Q 各为 m 阶及 n 阶方阵, 证明: 若 $m+n$ 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}P & B\\ 0 & Q\end{pmatrix}$ 是酉矩阵, 则 P, Q 也酉矩阵, 且 B 是零矩阵.

10. 证明 **Sylvester 惯性定律**, 即两个 Hermite 矩阵合同 $\Longleftrightarrow$ 它们具有相同的惯性指标, 即相同的正负特征值 (因此 0 特征值) 的个数.

11. 已知正交矩阵 $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 表示一个旋转, 求其旋转轴与旋转角.

12. 若 3×3 矩阵 S 表示一个反射, 则存在一个正交矩阵 C, 使得 $C^{-1}SC=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 当 $S=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ 时, 求这样的矩阵 C.

13. 设 $A, B\in \mathbb{C}^{m\times n}$. 证明: $A^*A=B^*B \Longleftrightarrow$ 存在酉矩阵 U 使得 $B=UA$.

14. 设变换 $\sigma: \sigma x = x - a(x,w)w$, $\forall\, x\in\mathbb{R}^n$, 其中 w 为长度为 1 的向量, 问 a 取何值时, σ 为正交变换? 如果 w 是任意向量, 你的结论又如何?

15. 证明矩阵 A 可以对角化 $\Longleftrightarrow$ 存在 Hermite 正定矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 是正规矩阵.

16. 设 $A, B\in \mathbb{C}^{m\times n}$. 证明: $x\in N(A)\cap N(B) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0$.

第七章“矩阵分析初步”补充习题

1. 设 $\|\cdot\|$ 是酉空间 $\mathbb{C}^n$ 的向量范数, 证明向量范数的下列基本性质:

(1) 零向量的范数为零;

(2) 当 x 是非零向量时: $\left\|\dfrac{x}{\|x\|}\right\| = 1$;

(3)$\|-x\| = \|x\|$;

(4) $|\,\|x\| - \|y\|\,| \le \|x - y\|$.

2. 证明: 若 $x \in \mathbb{C}^n$, 则

(1) $\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2$; (2) $\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$; (3) $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$.

3. (1) 试构造 $\mathbb{R}^2$ 上的一个向量范数, 使得该范数不是任何 p- 范数;

(2) 画出你构造的范数的单位圆;

(3) 试对 $\mathbb{R}^3$ 做 (1) 与 (2), 并比较你的单位球与1- 范数和 ∞- 范数的单位球;

(4) 证明当 $0 < p < 1$ 时, l_p 范数仍然满足向量范数的前两个条件, 但不满足三角不等式. 在平面上画出 $p = 1/2, 3/2$ 时的单位圆, 并就 $p < 1$ 与 $p \ge 1$ 的一般情形作比较.

4. 证明 Minkowski 不等式

$$\left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p\right)^{1/p}, \quad p \ge 1.$$

5. (1) 证明由内积诱导的向量范数满足**平行四边形恒等式** 或**极化恒等式**

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

(2) 解释上式的意义;

(3) 证明: 如果一个向量范数满足平行四边形恒等式, 则该范数一定是由某内积诱导的范数;

(4) 由 (3) 的结论判断哪些 l_p 范数是由内积诱导的, 并给出一个由内积诱导的新范数.

6. 设 $V = C[0,1]$ 是闭区间 $[0,1]$ 上全体实连续函数组成的无限维实线性空间. 证明

$$\|f\|_\infty = \max_{0 \le x \le 1} |f(x)|$$

与

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$$

均是 V 中的范数. 它们等价吗? 为什么?

7. 证明赋范线性空间中的单位球均为凸集, 即若 x, y 属于单位球, 则 $\alpha x + \beta y$ 也属于单位球, 其中 α, β 为正数且 $\alpha + \beta = 1$. 解释这种现象.

8. 验证矩阵的极大列和范数与极大行和范数均满足次乘性.

9. 设矩阵 A 的F- 范数等于 a, U 是酉矩阵, 问 AU 与 UA 的F- 范数各是多少? 请总结你的计算.

10. 证明矩阵的 1- 范数, 2- 范数和 ∞- 范数分别是向量的 1- 范数, 2- 范数和 ∞- 范数的诱导范数 (因此与之相容).

11. 证明: (1) 矩阵仿照向量的 1- 范数是矩阵范数, 但与向量的 1- 范数不相容, 试求与其相容的向量范数;

(2) 矩阵仿照向量的 ∞- 范数是向量范数但不是矩阵范数.

12. (1) 证明 $\|A\|_2 = (\rho(A^*A))^{1/2}$ 定义了一个矩阵范数, 称为 A 的**谱范数**;

(2) 试求一个与矩阵的谱范数相容的向量范数;

(3) 证明若 A 是正规矩阵, 则 A 的谱范数就是其谱半径 $\rho(A)$;

(4) 设 V 是由全体 Hermite 矩阵构成的复线性空间, 证明谱半径给出 V 上的一个向量范数. 该范数是矩阵范数吗?

13. 试构造两种矩阵范数使得一个矩阵 A 的两种范数分别为 2 与 $1/3$. 能否使所有非零矩阵的两种范数之积等于 1?

14. (1) 证明向量范数的代数性质: 有限种向量范数的任意正线性组合仍是向量范数;

(2) 设 $\|\cdot\|_\alpha$ 与 $\|\cdot\|_\beta$ 是两种向量范数或矩阵范数, $p > 0$. 判断

$$[(\|\cdot\|_\alpha)^p + (\|\cdot\|_\beta)^p]^{1/p}$$

是否为向量范数或矩阵范数?

(3) 判断矩阵范数是否有与向量范数相同的代数性质 (1)?

15. 利用特征值的定义直接证明矩阵 A 的谱半径不超过矩阵 A 的任何一种矩阵范数. 此结论可以换成矩阵的任何一种向量范数吗?

16. 设 T 为正交矩阵, 又 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 证明:

(1) $\|T\|_2 = 1$;

(2) $\|A\|_2 = \|TA\|_2$;

(3) 试解释上面的两个结果.

17. 设 A, B 为 n 阶矩阵, 其中 A 可逆而 B 不可逆, 设 $\|\cdot\|$ 是任何一种矩阵范数. 定义 A 的条件数 $Cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$. 证明: $\|A - B\| \geq 1/\|A^{-1}\|$. 解释这个结果.

18. 设 U, V 是任意维实或复赋范线性空间, $\sigma \in \mathrm{Hom}(U, V)$. 证明公式

$$\|\sigma\| = \sup_{0\neq x\in U} \frac{\|\sigma(x)\|}{\|x\|}$$

定义了线性空间 $\mathrm{Hom}(U, V)$ 上的一个与 U 中向量范数相容的向量范数.

19. 设 U, V 是任意赋范线性空间 (不必有限维), $\sigma \in \mathrm{Hom}(U, V)$. 证明: σ 连续 $\iff$ σ 有界.

20. 设 $A_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{k^2} & \frac{k^2+k}{k^2+1} \\ 2 & (1-\frac{2}{k})^k \end{pmatrix}$, 求 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k$.

21. 设 $\lim_{k\to\infty} A_k = A$.

(1) 如果 A_k 均为正定矩阵, 问 A 有何特点?

(2) 如果 A_k 均为正规矩阵, 问 A 有何特点?

(3) 如果 A_k 均为可逆矩阵, 问 A 有何特点?

22. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = B$, 则 B 为幂等矩阵.

23. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, 求 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{2^k}$.

24. 设 $A = \begin{pmatrix} -0.6 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ -0.6 & 1 & 0.8 \end{pmatrix}$. 试判断 A 是否幂收敛.

25. (1) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, 求 $e^A,\ \sin A,\ \cos A$;

(2) 已知 $J = \begin{pmatrix} -2 & & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$, 求 $e^J,\ \sin J,\ \cos J$.

26. 对下列方阵 A, 求矩阵函数 e^{At}:

$$(1)\, A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix},\quad (2)\, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{pmatrix},\quad (3)\, A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

27. 求下列两类矩阵的矩阵函数: $\cos A,\ \sin A,\ e^A$:
(1)A 为幂等矩阵;
(2)A 为对合矩阵 (即 $A^2 = I$).

28. 设函数矩阵 $A(t) = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t & t \\ \frac{\sin t}{t} & e^t & t^2 \\ 1 & 0 & t^3 \end{pmatrix}$, 其中 $t \neq 0$. 计算 $\lim\limits_{t\to 0} A(t),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}A(t),\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,t^2}A(t)$.

29. 设函数矩阵 $A(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^t & t^2 \\ e^{-t} & 2e^{2t} & 0 \\ 3t & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 计算 $\int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}\,t$ 和 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\int_0^{t^2} A(s)\,\mathrm{d}\,s$.

30. 证明: (1) 若 A 为实反对称矩阵, 则 e^A 为正交矩阵;
(2) 若 A 为 Hermite 阵, 则 $e^{\mathrm{i}A}$ 为酉矩阵.

31. 证明 Lagrange 插值公式并利用线性空间的直和分解理论解释之.

32. (1) 设 $J_n(\lambda)$ 是一个 n 阶 Jordan 块, 求 $\sin Jt, \cos Jt$;
(2) 对任意 n 阶矩阵 A, 导出 $\sin At$ 与 $\cos At$ 的一般表达式.

33. (1) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $e^{At}, \sin At, \cos At$;

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 求 $e^{At}, \sin At, \cos At$.

34. 设 N 是 n 阶幂零块, 验证 $\frac{\mathrm{d}e^{Nt}}{\mathrm{d}t} = Ne^{Nt}$ 并计算 $\int_0^t e^{Ns}\mathrm{d}s$.

35. (1) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 计算积分 $\int_0^t e^{As}\mathrm{d}s$;

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 计算 e^A 与 e^{At};

(3) 设 $A^2 = A$, 计算 e^{At} 与 $\int_0^t e^{As}\mathrm{d}s$.

36. 设 $A^2 - A + 2I = 0$, 计算 e^{At} 与 $\int_0^t e^{As}\mathrm{d}s$.

第八章“矩阵函数的应用”补充习题

1. 求下列微分方程组的通解：

$$(1)\ x'(t)=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}x(t);\qquad (2)\ x'(t)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}x(t).$$

2. 求下列微分方程组 $x'(t)=Ax(t)$ 满足初始条件 $x(0)$ 的解：

$$(1)\ A=\begin{pmatrix}1&12\\3&1\end{pmatrix},\ x(0)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix};\qquad (2)\ A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&-1&1\\2&0&1\end{pmatrix},\ x(0)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

3. (1) 求解微分方程组

$$x'(t)=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-2\\3&2&1\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^{2t}.$$

(2) 求 $x'(t)=Ax(t)+Bu(t)$ 满足初始条件 $x(0)$ 的解, 其中

$$A=\begin{pmatrix}-6&1&0\\-11&0&1\\-6&0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2\\6\\2\end{pmatrix},\ u(t)=1,\ x(0)=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

4. 求方程 $y'''+6y''+11y'+6y=e^{-t}$ 满足 $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$ 的解.

5. (1) 证明微分方程 $x'(t)=Ax(t)+\gamma e^{at}$ 有形如 $x(t)=\beta e^{at}$ 的解 $\iff$ $(\alpha I-A)\beta=\gamma$, 其中 β, γ 都是 n 维向量, $a\in\mathbb{C}$;

(2) 解 $x'(t)=Ax(t)+e^{2t}C$, 其中

$$A=\begin{pmatrix}3&1\\2&2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix},\ x(0)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

6. (1) 设定常系统的系统矩阵 A 是对角矩阵, 试给出该系统可控性的一个判断准则;

(2) 设定常系统的系统矩阵 A 是一个 Jordan 块, 试给出该系统可控性的一个判断准则;

(3) 设单输入定常系统的系统矩阵 A 是 Frobenius 标准形 (即首一多项式的友矩阵形式), 而其控制矩阵 B 为标准向量 e_n, 证明该系统是可控的. 这样的定常系统称为可控标准形.

7. 根据你在上题中给出的判断准则, 研究下面几个定常系统的可控性.

(1)$A=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B=(1,1)^T$; (2)$A=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B=(1,0)^T$;

(3)$A=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$, $B=(c,d)^T$; (4)$A=\begin{pmatrix}a&1\\0&a\end{pmatrix}$, $B=(c,d)^T$.

8. (1) 设定常系统的系统矩阵 A 是对角矩阵, 试给出该系统可测性的一个判断准则;

(2) 设定常系统的系统矩阵 A 是一个 Jordan 块, 试给出该系统可测性的一个判断准则;

(3) 设定常系统的系统矩阵 A 是 Frobenius 标准形的转置矩阵, 而其输出矩阵 C 为标准行向量 e_n^T, 证明该系统是可测的. 这样的定常系统称为可测标准形.

9. 根据你在上题中给出的判断准则, 研究下面几个定常系统的可测性.

(1)$A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $C=(c,d)^T$; (2)$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $C=(c,d,f)^T$.

第九章“矩阵的分解”补充习题

1. 设 $A = LU$, 其中 L 与 U 分别为下三角矩阵与上三角矩阵, 证明存在单位下三角矩阵 L' 与上三角矩阵 U' 使得 $A = L'U'$.

2. 证明矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 不存在三角分解.

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$.

(1) 求 $R(A)$ 的标准正交基;

(2) 写出 A 的 QR 分解;

(3) 求 $Ax = b$ 的最小二乘解;

(4) 证明 $u_1 = (0, 1, 0)^T$, $u_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$, 也是 $R(A)$ 的标准正交基, 其中 $R(A)$ 为 A 的列空间.

4. 求下列矩阵的 QR 分解:

$$(1)\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};\quad (2)\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; (3)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. 设 $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. 证明矩阵分解引理: $A^*A = B^*B \Longleftrightarrow$ 存在酉矩阵 U 使得 $B = UA$.

6. 计算第 4 题中各矩阵的奇异值分解和相应的四个子空间.

7. 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 证明:

$$\sigma_{\min}(A) = \min\{(x^*A^*Ax)^{1/2}, x^*x = 1\}, \quad \sigma_{\max}(A) = \max\{(x^*A^*Ax)^{1/2} : x^*x = 1\}.$$

8. 设变换 $\sigma : \sigma x = x - a(x, w)w, \forall x \in \mathbb{R}^n$, 其中 w 为长度为 1 的向量, 问 a 取何值时, σ 为正交变换? 如果 w 是任意向量, 你的结论又如何?

9. 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 的秩为 $r > 0$, A 的奇异值分解为 $A = U\,\mathrm{diag}(s_1, ..., s_r, 0, ..., 0)V^*$, 求矩阵 $B = \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}$ 的奇异值分解.

10. (1) 证明矩阵的极分解的唯一性;

(2) 计算 Jordan 块 $J_n(\lambda)$ 的极分解.

11. 证明任意 n 阶矩阵 A 均可表示成 $A = Pe^{\mathrm{i}H}$, 其中 P 是半正定矩阵, H 是 Hermite 矩阵. 研究这种分解的唯一性.

12. 试对任意矩阵定义其极分解, 并由此计算任意向量 $x \in \mathbb{C}^n$ 的极分解.

13. 设 $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{C}^n$, 且 $x^*y = \alpha^*\beta = 0$. 设 $A = x\alpha^* + y\beta^*$, 求 A 的 F- 范数.

14. 证明矩阵 A 可以对角化 $\Longleftrightarrow$ 存在 Hermite 正定矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 是正规矩阵.

15. 研究正交三角分解, 谱分解, 极分解和奇异值分解之间的关系.

16. 设 $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. 证明: $x \in N(A) \cap N(B) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0$.

17. 证明奇异值的极大极小定理: 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 的奇异值为 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n$, 则:

$$\sigma_k = \min_{\substack{w_i \in \mathbb{C}^n \\ 1\leq i\leq n-k}} \max_{\substack{0\neq x\perp w_i \\ 1\leq i\leq n-k}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max_{\substack{w_i \in \mathbb{C}^n \\ 1\leq i\leq n-k}} \min_{\substack{0\neq x\perp w_i \\ 1\leq i\leq n-k}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}.$$

特别地,

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \max_{x\neq 0, x\in\mathbb{C}^n} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max_{x^*x=1} \|Ax\|_2,$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_n = \min_{x\neq 0, x\in\mathbb{C}^n} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \min_{x^*x=1} \|Ax\|_2.$$

18. 证明: 对任意同阶矩阵 A, B 均有 $\sigma_{\max}(A+B) \leq \sigma_{\max}(A) + \sigma_{\max}(B)$.

19. (矩阵的低秩近似) 设矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩为 r, 其奇异值分解为 $A = UDV^*, U = (u_1, \cdots, u_m), V = (v_1, \cdots, v_n)$. 对任意 $k < r$, 定义矩阵

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^*, k < r.$$

证明:

$$\min_{r(B)=k} |\!|\!|A - B|\!|\!|_1 = |\!|\!|A - A_k|\!|\!|_1 = \sigma_{k+1}, k < r$$

以及

$$\min_{r(B)=k} |\!|\!|A - B|\!|\!|_F^2 = |\!|\!|A - A_k|\!|\!|_F^2 = \sigma_{k+1}^2 + \sigma_{k+1}^2 + \cdots + \sigma_r^2.$$

20. (同时奇异值分解) 设 A, B 是两个 $m\times n$ 矩阵. 证明存在酉矩阵 U, V 以及非负对角矩阵 D, Λ 使得 $A = UDV^*$, $B = U\Lambda V^* \Longleftrightarrow A^*B$ 与 AB^* 均是正规矩阵. 该结论对三个或更多的矩阵成立吗?

第十一章“矩阵的广义逆”补充习题

1. 设 P 是投影矩阵, 证明 P^*, $I-P, T^{-1}PT$(T 为任意一个非奇异矩阵) 均为投影矩阵.

2. 设 P_1, P_2 均为投影矩阵, 证明:
(1) $P=P_1+P_2$ 是投影矩阵 $\iff$ $P_1P_2=P_2P_1=0$;
(2) $P=P_1-P_2$ 是投影矩阵 $\iff$ $P_1P_2=P_2P_1=P_2$.

3. 设 $\mathbb{R}^3$ 的子空间 L 由向量 $e=(1,0,0)^T$ 生成.
(1) 若子空间 M 由 $\alpha=(1,1,0)^T$ 和 $\beta=(1,1,1)^T$ 生成, 求投影矩阵 $P_{L,M}$ 和向量 $x=(2,3,1)^T$ 沿着 M 到 L 上的投影;
(2) 求正交投影矩阵 P_L 和向量 $x=(2,3,1)^T$ 在 L 上的正交投影.

4. 证明 $\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}^{\dagger}=(A^{\dagger},0)$.

5. 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 又 $U\in\mathbb{C}^{m\times m}$ 和 $V\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 均为酉矩阵. 证明 $(UAV)^{\dagger}=V^*A^{\dagger}U^*$.

6. 设 H 为幂等 Hermite 矩阵, 证明 $H^{\dagger}=H$.

7. 证明 $A^{\dagger}=A \iff A^2$ 为幂等 Hermite 矩阵且 $r(A^2)=r(A)$.

8. 证明: 若 A 是正规矩阵, 则 $A^{\dagger}A=AA^{\dagger}$, 且 $(A^n)^{\dagger}=(A^{\dagger})^n$, 其中 n 为正整数.

9. 计算基本矩阵 E_{ij} 的 Moore-Penrose 广义逆和 1- 广义逆.

10. (1) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $m\times r$ 矩阵, 则等式 $AA^{-}B=B \iff$ 存在矩阵 D 使 $B=AD$;
(2) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $r\times m$ 矩阵, 则等式 $BA^{-}A=B \iff$ 存在矩阵 D 使 $B=DA$.

11. 证明:(1) 如果矩阵 A 的左逆唯一, 则 A 必是可逆矩阵, 于是左逆等于右逆;
(2) 设矩阵 A 存在左逆但不唯一, 则 A 有无穷多个左逆. 类似地, 如果存在两个右逆, 则必存在无穷多个右逆.

12. 证明: $(AB)^{\dagger}=B^{\dagger}A^{\dagger} \iff A^{\dagger}ABB^*A^*=BB^*A^*$ 与 $BB^{\dagger}A^*AB=A^*AB$ 同时成立.

13. 计算下列矩阵的 $\{1,2\}$- 逆:

$$(1)\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad (2)\quad A=\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. 计算下列矩阵的 $\{1,3\}$- 逆:

$$(1)\quad A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad (2)\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

15. 计算下列矩阵的 $\{1,4\}$- 逆:

$$(1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};\ (2)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

16. (1) 哪些矩阵的 $\{1,2\}$- 逆等于它的转置矩阵?
(2) 哪些矩阵的 $\{1,4\}$- 逆等于它的转置矩阵?

17. 试求一个计算秩为 1 的矩阵的各种广义逆的公式.

18. 不可逆的方阵可否有可逆的 $\{1,2\}$- 逆或 $\{1,3\}$- 逆或 $\{1,4\}$- 逆?

19. 哪些不可逆的方阵有唯一的 $\{1,2\}$- 逆或 $\{1,3\}$- 逆或 $\{1,4\}$- 逆?

20. 是否存在矩阵其 $\{1,2\}$- 逆或 $\{1,3\}$- 逆或 $\{1,4\}$- 逆不唯一但只有有限个?

21. 设正规矩阵 A 仅有一个非零特征值 λ.
(1) 证明 $A^\dagger = \lambda^{-2}A$;
(2) 试求 A 的 $\{1,2\}$- 逆, $\{1,3\}$- 逆及 $\{1,4\}$- 逆的表达式;
(3) 根据 (1) 与 (2) 计算矩阵 $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ 的各种广义逆.

22. 设 L, M 是 $\mathbb{C}^n$ 的子空间. 证明:
(1) $P_{L+M} = (P_L + P_M)(P_L + P_M)^\dagger = (P_L + P_M)^\dagger (P_L + P_M)$;
(2) $P_{L\cap M} = 2P_L(P_L + P_M)^\dagger P_M = 2P_M(P_L + P_M)^\dagger P_L$.

23. 证明: $A^\dagger = A^{(1,4)}AA^{(1,3)}$.

24. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. 求 $Ax = b$ 的最小范数解.

25. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. 求矛盾方程组 $Ax = b$ 的最小二乘解.

25. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
(1) 当 $b = (1,1,1,1)^T$ 时, 方程组 $Ax = b$ 是否相容?
(2) 当 $b = (1,0,1,0)^T$ 时, 方程组 $Ax = b$ 是否相容?
若方程组相容, 求其通解和最小范数解; 若方程组不相容, 求其最小范数的最小二乘解.

26. 证明线性方程组 $Ax = b$ 有解 $\iff AA^\dagger b = b$. 这里 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$.

27. 判断矩阵方程 $AXB = C$ 是否有解, 有解时求其解, 其中
(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

28. 相容方程组 $Ax = a$ 的通解 $x = A^\dagger a + (I - A^\dagger A)y (\forall y)$ 还可以表示为 $A^\dagger a + N(A)$ 的陪集形式. 证明:
(1) 这个表示是**正交表示**, 即向量 $A^\dagger b$ 与向量 $(I - A^\dagger A)y$ 正交, $\forall y$;

(2) 方程组 $Ax=a$ 与 $Bx=b$ 有公共解 $\iff A^\dagger a - B^\dagger b \in N(A)+N(B)$;

(3) 设方程组 $Ax=a$ 与 $Bx=b$ 有公共解. 试用陪集形式表示其解.

29. 设 A,B,C,D 均为 n 阶矩阵, 且矩阵方程 $AX=B$ 与 $XC=D$ 均有解. 证明:

(1) 两个方程有公共解 $\iff AD=BC$;

(2) 设两个方程有公共解. 试利用广义逆矩阵表示它们的公共通解.(提示: 可先研究齐次方程.)

30. 证明约束优化问题 $\min\{x^Tx\}, Ax=b$ 具有唯一解, 并求该解.

31. 证明约束优化问题 $\min\{\mathrm{tr}(X^TX)-2\mathrm{tr}(X)\}, XA=0$ 的解为 $\hat{X}=I-AA^\dagger$.

32. 设 U 与 W 是线性空间 V 的两个子空间, $\alpha,\beta\in V$. 设 $(\alpha+U)\cap(\beta+W)\neq\emptyset$. 证明:

(1) $(\alpha+U)\cap(\beta+W)=\alpha+P_U(P_U+P_W)^\dagger(\beta-\alpha)+(U\cap W)$;

(2) $(\alpha+U)\cap(\beta+W)=\alpha+(P_{U^\perp}+P_{W^\perp})^\dagger P_{W^\perp}(\beta-\alpha)+(U\cap W)$;

(3) $(\alpha+U)\cap(\beta+W)=\alpha+(I-P_WP_U)^\dagger P_{W^\perp}(\beta-\alpha)+(U\cap W)$.

(提示: 参考第二章补充习题 39.)

附　　录

上海交通大学 2009-2010 学年第一学期《矩阵理论》试卷

姓名________　　学号_____________　　矩阵理论分班号_____　　成绩______

本试卷共四道大题, 总分 100 分. 其中 A^* 表示矩阵 A 的共轭转置.

一. 单项选择题 (每题 3 分, 共 15 分)

1. 设有 $\mathbb{R}^3$ 上的两个子空间

$U=\{(x,y,z)^T\in\mathbb{R}^3\,|\,x+y+z=0\}, W=\{(x,y,z)^T\in\mathbb{R}^3\,|\,x=y=\frac{z}{-2}\}$.

则 $\dim(U+W)-\dim U=($　　$)$

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

2. 设 U,W 是欧氏空间 V 的两个子空间. 给出下列四个等式:

甲.$(U+W)^\perp=U^\perp+W^\perp$;

乙.$(U+W)^\perp=U^\perp\cap W^\perp$;

丙.$(U\cap W)^\perp=U^\perp+W^\perp$;

丁.$(U\cap W)^\perp=U^\perp\cap W^\perp$.

则上述等式成立的是 (　　)

(A) 甲与丙　　(B) 甲与丁　　(C) 乙与丙　　(D) 乙与丁

3. 设两个 4 阶矩阵 A 与 B 的最小多项式分别为 $(x-1)^2(x-2)$ 与 $(x-1)(x-2)^2$, 则矩阵 $\begin{pmatrix} A & A-B \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 的最小多项式为 (　　)

(A)$(x-1)^2(x-2)$　　(B)$(x-1)(x-2)^2$　　(C)$(x-1)^2(x-2)^2$　　(D)$(x-1)^3(x-2)^3$

4. 设 A 为 n 阶可逆矩阵, $\rho(A)$ 是其谱半径, $\|\bullet\|$ 是一种矩阵范数, 则必有 (　　)

(A)$\|A^{-1}\|=1/\|A\|$　　(B)$\|A^5\|\le\|A\|^5$　　(C)$\|A^5\|\ge\|A\|^5$　　(D)$\|A\|\ge\rho(A^*A)$

5. 设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 的特征值与奇异值分别为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 与 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$, 则必有 (　　)

(A)$\sum\limits_{i=1}^n|\lambda_i|=\sum\limits_{i=1}^n|\sigma_i|$　　(B)$\sum\limits_{i=1}^n|\lambda_i|^2=\sum\limits_{i=1}^n|\sigma_i|^2$

(C)$\sum\limits_{i=1}^n|\lambda_i|^2=\sum\limits_{i,j=1}^n|a_{ij}|^2$　　(D)$\sum\limits_{i=1}^n|\sigma_i|^2=\sum\limits_{i,j=1}^n|a_{ij}|^2$

二. 填空题 (每题 3 分, 共 15 分)

6. 设 $(x,y,z)^T\in\mathbb{R}^3$, $\sigma((x,y,z)^T)=(2x-y,2x)^T$, 则 σ 关于标准基 - 标准基的矩阵为__________.

7. 线性方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ 的最小范数的最小二乘解为__________.

8. 设 $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, 则正交变换 $x\mapsto Ax$ 的旋转轴上的单位向量为__________.

9. 设 A 为3阶矩阵, $e^{At}=\begin{pmatrix} e^t & te^t & te^t \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$, 则矩阵 $\lambda E-A$ 的初等因子为__________.

10. 设 A 是秩为 $r\geq 1$ 的 n 阶正交投影矩阵, $B=E-\cos A$, 则 B 的特征多项式为__________.

三. 计算题 (每题15分, 共60分)

11. 设 $V=\mathbb{R}[x]_n$ 是次数小于 n 的全体实系数多项式构成的实线性空间. 定义 V 上的线性变换 σ 如下:

$$\sigma: f(x)\mapsto xf'(x)-f(x), \quad \forall f(x)\in V.$$

(1) 求 σ 的特征值与特征向量;
(2) 求 σ 的核空间 $\mathrm{Ker}(\sigma)$ 与像空间 $\mathrm{Im}(\sigma)$ 的各一组基;
(3) 判断 $V=\mathrm{Ker}(\sigma)\oplus\mathrm{Im}(\sigma)$ 是否成立? 说明理由.

12. 设 $V=\mathbb{R}^2$ 是实线性空间, $(x,y)^T\in V$, $e_1=(1,0)^T, e_2=(0,1)^T$.
(1) 求 V 上的一个内积 $(\bullet,\bullet)$ 使得向量组 e_1, e_1+e_2 是一组标准正交基;
(2) 在该内积下, 计算 e_2 与 e_1-e_2 的长度;
(3) 设 σ 是 V 的一个等距变换, $\sigma(e_1)=e_1+e_2$. 求 $\sigma((x,y)^T)$? 这样的等距变换唯一吗?

13. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
(1) 求 A 的Jordan标准形 J(不必计算变换矩阵 P);
(2) 设 $n\geq 3$, 计算 A^n-A^{n-2} 与 A^2-E;
(3) 求 $\int_0^t (E-A^{-2})e^{As}ds$.

14. 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的秩为 $r>0$, A 的奇异值分解为 $A=U\mathrm{diag}(\sigma_1,...,\sigma_r,0,...,0)V^*$, 其中 $\sigma_1>\cdots>\sigma_r, U=(u_1,\cdots,u_n), V=(v_1,\cdots,v_n)$ 是两个酉矩阵, $u_i,v_i\in\mathbb{C}^n, 1\leq i\leq n$. 设矩阵 $B=\begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}$.
(1) 求 B 的奇异值分解;
(2) 求 B^*B 的谱分解;
(3) 求 B^*B 的Moore-Penrose广义逆.

四. 证明题 (每题10分, 共10分)

15. 设 σ 是 $\mathbb{C}^6$ 上的线性变换, 其特征多项式为 $(\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-3)^3$. 证明:
(1) 存在 σ 的三个不变子空间 U_i, 使得 $\dim U_i=i$, $i=1,2,3$, 且 $\mathbb{C}^6=U_1\oplus U_2\oplus U_3$;
(2) 对有限维线性空间上的任意线性变换, 推广 (1) 中的结论.