REKURZIVNE ENAČBE

Homogene: $a_n = p_1(n)\cdot\lambda_1^n + \dots + p_k(n)\cdot\lambda_k^n$,

λ_i ničla karakt. pol. kratnosti s_i, $1 \le i \le k$

$p_i(n)$ polinom stopnje $\le s_i - 1$

Splošna: $a_n = h_n + p_n$

homogena, partikularna: če $f(n) = f_1(n) + \dots + f_\ell(n) \Rightarrow$ je vsota rešitev $\dots = f_i(n)$

Če $f(n) = p(n)\cdot\alpha^n$; p pol. stopnje $r \ge 0$

α ničla karakt. pol. kratnosti $s \ge 0$

$\Rightarrow \boxed{p_n = n^s\cdot q(n)\cdot\alpha^n}$; q pol. stopnje r

Kompleksne ničle $(\lambda, \bar\lambda)$:

$\lambda = |\lambda|\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$

$\Rightarrow \boxed{a_n = |\lambda|^n (A\cdot\cos n\varphi + B\cdot\sin n\varphi)}$ (zajame λ in $\bar\lambda$)

Rodovne funkcije:

$1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n\ge0} x^n = \frac{1}{1-x}$ $\qquad 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}$

$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ ... Fibonaccijevo zap.

Množenje: $A(x)\cdot B(x) = \sum_{n\ge0} c_n x^n$; $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Rekurzivne enačbe:

- enačba $/\cdot x^n$ na najvišjo potenco (indeks pri a_n)
- $/\sum_{n\ge0}$
- poenostaviš in izraziš $A(x)$
- parcialni ulomki, določiti predznaka, razvoj v vrsto
- izraziš z $\frac{1}{1-x}$ in podobno
- preberes a_n

$(1+ax)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n\ge0}\binom{\frac{1}{2}}{n} a^n$

Catalanova števila:

$\overset{C_0}{1}, \overset{C_1}{1}, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \dots$

$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$

$C_0 = 1$ in $C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i\, C_{n-i-1}$ za $n \ge 0$

$C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2}\cdot C_n$

- št. permutacij $[n]$ brez naraščajočega podzap. 3 členi
- množ. n členi glede na vrstni red množenja
- št. dvojiških dreves s korenom na n vozliščih
- št. načinov za Δ pravilnega n-kotnika
- poti $\rightarrow\uparrow$ pod diagonalo na $n\times n$ kvadratu

$M_0 = 1$ in $M_{n+1} = M_n + \sum_{i=0}^{n-1} M_i\cdot M_{n-i-1} = \qquad M(x) = \frac{1-x-\sqrt{1-2x-3x^2}}{2x^2}$

$= \frac{2n+3}{n+3} M_n + \frac{3n}{n+3} M_{n-1}$

- št. načinov na katere lahko narišemo tetive na krogu med n točkami, da se nobeni 2 ne sekata
- $(0,0) \rightarrow (n,0)$ nad x-osjo z $\rightarrow \nearrow \searrow$
- št. zaporedij dolžine n iz $\mathbb{N}$, zač. in lok. z 1 ali 2, razlike sosednjih pa -1, 0 ali 1

GRAFI

- Lema o rokovanju: $2\cdot|E(G)| = \sum_{v\in V(G)} \deg(v)$
- št. lihih vozlišč je sodo
- $|V(G)| \ge 2$: G ima vsaj 2 vozlišči iste stopnje
- $f: V(G) \to V(H)$ izomorfizem, če: • bijekcija
  • $uv \in E(G) \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E(H)$
- $f: V(G) \to V(H)$ homomorfizem, če $uv \in E(G) \Rightarrow f(u)f(v) \in E(H)$
- Lastnosti za neizomorfnost:
  - št. vozlišč, št. povezav, stopnje
  - št. Δ, št. ciklov dolžine 4, ...
  - podgraf, ki ga inducirajo točke stopnje 4
  - dvodelnost
  - vsaka povezava leži na kakšnem 4-ciklu
  - $G \cong H \Leftrightarrow \bar G \cong \bar H$
- u,v-sprehod v $G \Rightarrow \exists u,v$-pot v G
- Komplement grafa $G = (V, E)$:

  $V(\bar G) = V$, u sosed v v $\bar G \Leftrightarrow u$ ni sosed v v G

  $|V(G)| = |V(\bar G)| = n$

  $\binom{n}{2} = |E(G)| + |E(\bar G)|$

  $\deg_G(v) + \deg_{\bar G}(v) = n-1$ ← stopnje se morajo ujemati!
- $G \cong \bar G \Rightarrow n \equiv 0$ ali $1 \pmod 4$
- $G \cong H \Leftrightarrow \bar G \cong \bar H$

- Dvodelnost:
  $V(G) = (X, Y)$: $u, v \in E(G) \Rightarrow u \in X$ in $v \in Y$ ali obratno
  - G je dvodelen $\Leftrightarrow$ ne premore lihega cikla
  - $G(n,k)$ dvodelen $\Leftrightarrow$ n sod in k lih
- Povezanost:
  - G povezan $\Leftrightarrow$ premore vpeto drevo
  - G graf $\Rightarrow$ G povezan ali $\overline{G}$ povezan
  - $|V(G)| = n$, $\delta(G) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \Rightarrow$ G povezan
- Euler:
  - Povezan graf G je Eulerjev $\Leftrightarrow$ vsa vozlišča sode stopnje.
    G ima Eulerjev sprehod $\Leftrightarrow$ 2 vozlišči lihe stopnje, ostala sode.
- Hamilton:
  - $S \subset V(G)$ neprazna: Če ima $G \setminus S$ več kot $|S|$ komponent
    $\Rightarrow$ ni Hamiltonov.
    Če več kot $|S|+1 \Rightarrow$ nima niti H. poti.
  - G graf s vsaj 3 točkami: $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2} \Rightarrow$ G Hamiltonov
  - Za vsak par nesosednjih točk $u, v \in V(G)$ velja
    $\deg(u) + \deg(v) \geq |V(G)| \Rightarrow$ G Hamiltonov
  - G dvodelen, $G = (X, Y)$ bipartija
    $|X| \neq |Y| \Rightarrow$ G ni Hamiltonov
- Drevesa:
  - Vsako drevo na vsaj 2 vozliščih premore vsaj 2 listka.
  - Ekvivalentno: (i) G je drevo
    (ii) Vsak par vozlišč je povezan z enolično potjo
    (iii) G povezan in $|E(G)| = |V(G)| - 1$
    (iv) G povezan in vsaka njegova povezava je most.
  - T drevo: n... št. vozlišč
    n_i... št. vozlišč stopnje i
    m... št. povezav
    - $m = n - 1$
    - $2m = \sum \deg(v) = \sum_{i=1}^{\Delta(G)} i \cdot n_i$
  - $n_1 = \sum_{i=2}^{k} ((i-2) n_i) + 2$
  - Vsako drevo ima vsaj $\Delta(T)$ listov.
  - V vsakem drevesu obstaja vozlišče, ki leži na vsaki najdaljši poti drevesa.

- Ravninski grafi in Eulerjeva formula:
  - Kuratowski: G je ravninski $\Leftrightarrow$ ne vsebuje subdivizije $K_{3,3}$ ali K_5
  - Wagner: G je ravninski $\Leftrightarrow$ ne vsebuje $K_{3,3}$ ali K_5 kot minor.
  - G ravninski graf z n vozlišči, m povezavami, f lici:
    $n - m + f = 2$
  - G ravninski z $n \geq 3$ vozlišči in m povezavami
    $\Rightarrow m \leq 3n - 6$.
    Če nima Δ: $m \leq 2n - 4$.
  - Splošno: g = ožina grafa = je dolžina najkrajšega cikla
    $\Rightarrow m \leq \frac{g}{g-2}(n-2)$
  - povezava meji na 1 ali 2 lici
    v je lahko na $1, \dots, \deg(v)$ licih
  - n... št. vozlišč
    m... št. povezav
    f... št. lic
    n_i... št. vozlišč st. i
    f_i... št. lic dolžine i

    $n - m + f = 2$
    $\sum i n_i = 2m$
    $\sum i f_i = 2m$
  - $cr(G)$... prekrižno št. = najmanjše možno št. presečišč, ko graf narišemo v ravnino
    (Ideja: k... najmanjše št. povezav, kijih moramo odstraniti, da bo G ravninski
    $cr(G) \geq k$
  - Vsak enostaven, pov., ravninski graf ima vsaj 1 vozlišče stopnje največ 5.

C-S: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

V r-regularni graf z $2r+1$ točkami je Hamiltonov.

AVTOR: VESNA RŠIČ