专题一：勾股定理与三大变换

1.公式

海伦公式：根据三边计算三角形面积（AB为a，BC为b，AC为c）

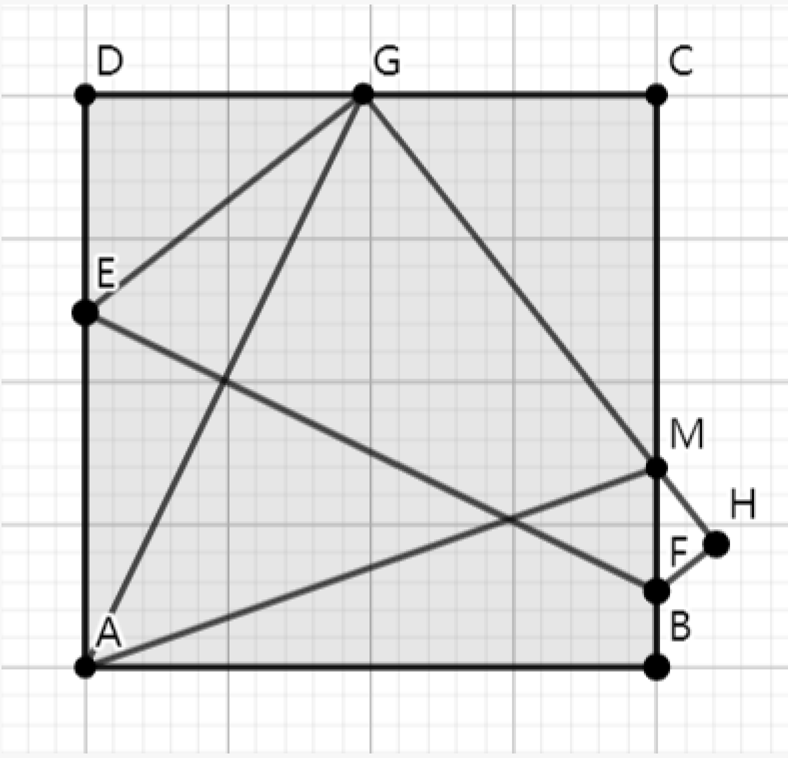
$$S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad p=\frac{a+b+c}{2}$$

2.三大变换：翻折模型

定理

1.折痕垂直平分对应点之间连线
2.相似三角形思维：比例计算

例题1

> 边长为 8 的正方形ABCD中，E，F分别与AD，BC上的点，将正方形ABCD沿EF翻折，点B刚好落在DC边上的G点，点B刚好与点H重合，如图所示。
>
> 
>

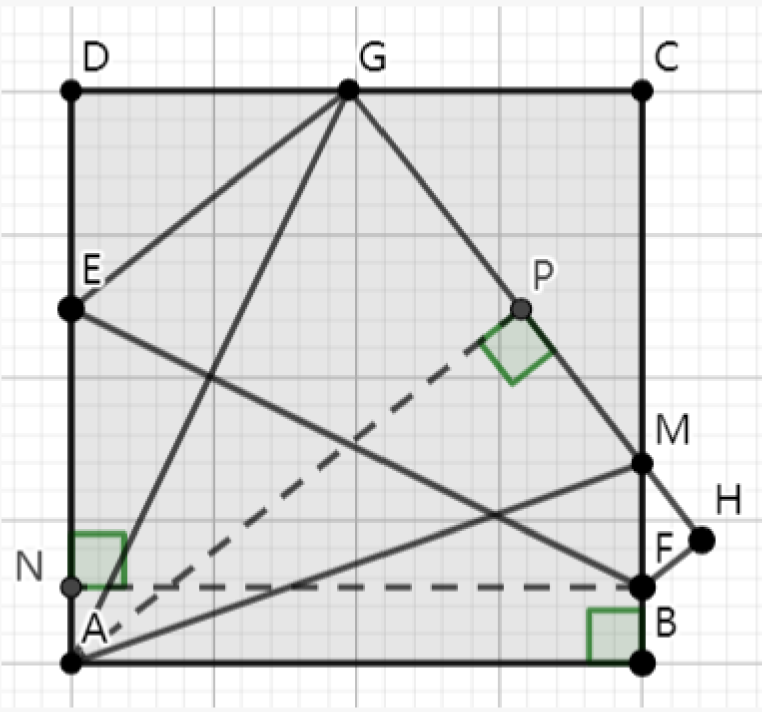
(1)当G恰为CD中点时，求：
①$DE:DG:EG$；
②$CM:BM$；
③EF的长度；

(2)证明：
①$EF=AG$；
②$AE=DG+BF$

(3)利用(2)中的结论，求解：
①若$EF=10$，求CG的长；
②若$DG=\frac{1}{3}CG$，求$\frac{BF}{AE}$的值；
③若$DG=\frac{1}{n}CG$，求$\frac{BF}{AE}$的值；
④若设$AG=x$，四边形$CDEF$的面积为y，求y与x的关系式，并求出x的最大值；

(4)证明：
①ΔGMC周长为定值；
②$DG+BM=AE+BF=GM$；
③$\angle GMC=45^\circ$

解法：



(1).①

设DE为x,

$EG = AE = 8 - x$

$x^2 + 4^2 = (8 - x)^2$

$x = 3 = DE$

$DE : DG : EG = 3 : 4 : 5$

②

K字型证相似:

$\Delta DEG \sim \Delta CGM$

$CM : DG = CG : DE$

$CM = \frac{16}{3}$

$BM = \frac{8}{3}$

$CM : BM = 2 : 1$

③

根据蝴蝶模型证

$\angle DAG = \angle EFN$

进而证

$\Delta NEF \cong \Delta DGA(\rightarrow (2).①②)$

$DG = BN = 4$

勾股定理求EF

(2)见(1).③

(3).①

$EF = AG = 10$,

$AD = 8$,

根据勾股定理知 $DG = 6$

②

易证 $DG = 2, CG = 6$

设 $EG = x, DE = 8 - x$

$CF = BN, BE = AG + CF$(省略计算😊)

③

注意：思路与②小题相同，只是数据变了

设 $CG=nx,DG=x$

$x+nx=8$

$x=\frac{8}{n+1}=DG$

设 $EG=b,DE=8-b$

根据勾股定理知 $b=\frac{4}{(n+1)^2}+4$

$BF=\frac{4}{(n+1)^2}-\frac{8}{n+1}+4\rightarrow$ 完全平方公式

$BF=(\frac{2}{n+1}+2)^2=(\frac{-2n}{n+1})^2=\frac{4n^2}{(n+1)^2}$

$AE=b=\frac{4}{(n+1)^2}+4=\frac{4(n+1)^2+4}{(n+1)^2}$

$\frac{BF}{AE}=\frac{4n^2\times(n+1)^2}{(n+1)^2\times[4(n+1)^2+4]}=\frac{n^2}{(n+1)^2+1}$

④ 典型题目

$y=64-S_{\square CDEF}=64-4(AE+BF)$

$DG=x,DE=8-c,EG=c=AE$

$x^2+(8-c)^2=c^2$

$c=BE=\frac{x^2}{16}+4$

$CF=\frac{x^2}{16}-x+4$

$y=64-4(\frac{x^2}{16}+4-x+\frac{x^2}{16}+4)=-\frac{x^2}{2}+4x+32$

最大值：平方为负数$-x^2$

$y=-\frac{1}{2}(x^2-8x+16)+40=frac(x-4)^22+40\rightarrow$ 40为最大值

(4).

截长补短证

$\Delta DAG\cong\Delta PAG,\Delta BAM\cong\Delta PAM,GM=DG+BM$

$\angle DAG=\angle PAG,\angle BAM=\angle PAM$

①

$l_{\Delta GMC}=GM+CG+CM=CD+BC=16$

②

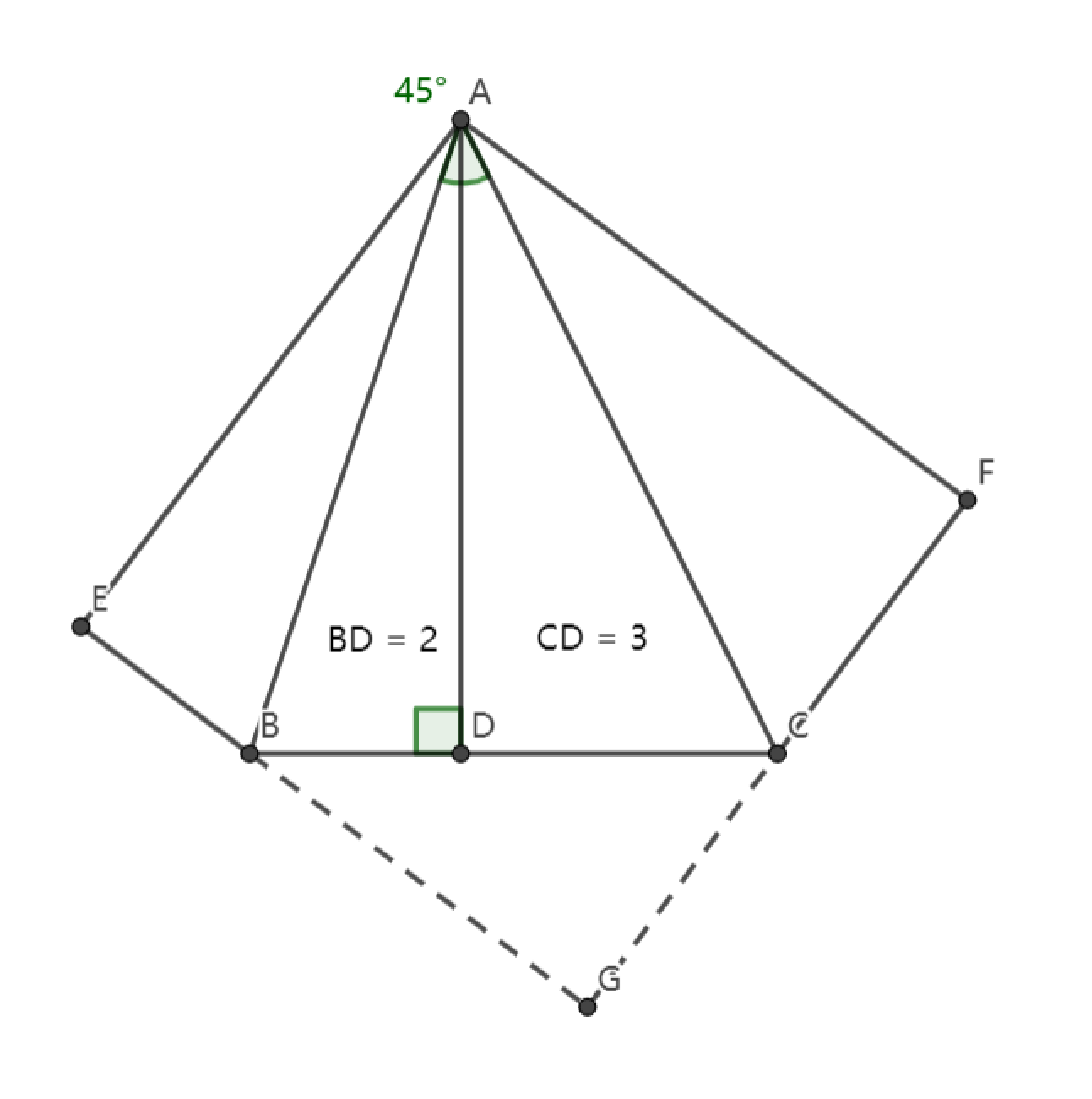
$AE+FM=AN+NE+FM=BG+BF+FM=AG+CM=GM$

③

$\angle GAM=\frac{1}{2}\angle ABC=45^\circ$

例题2

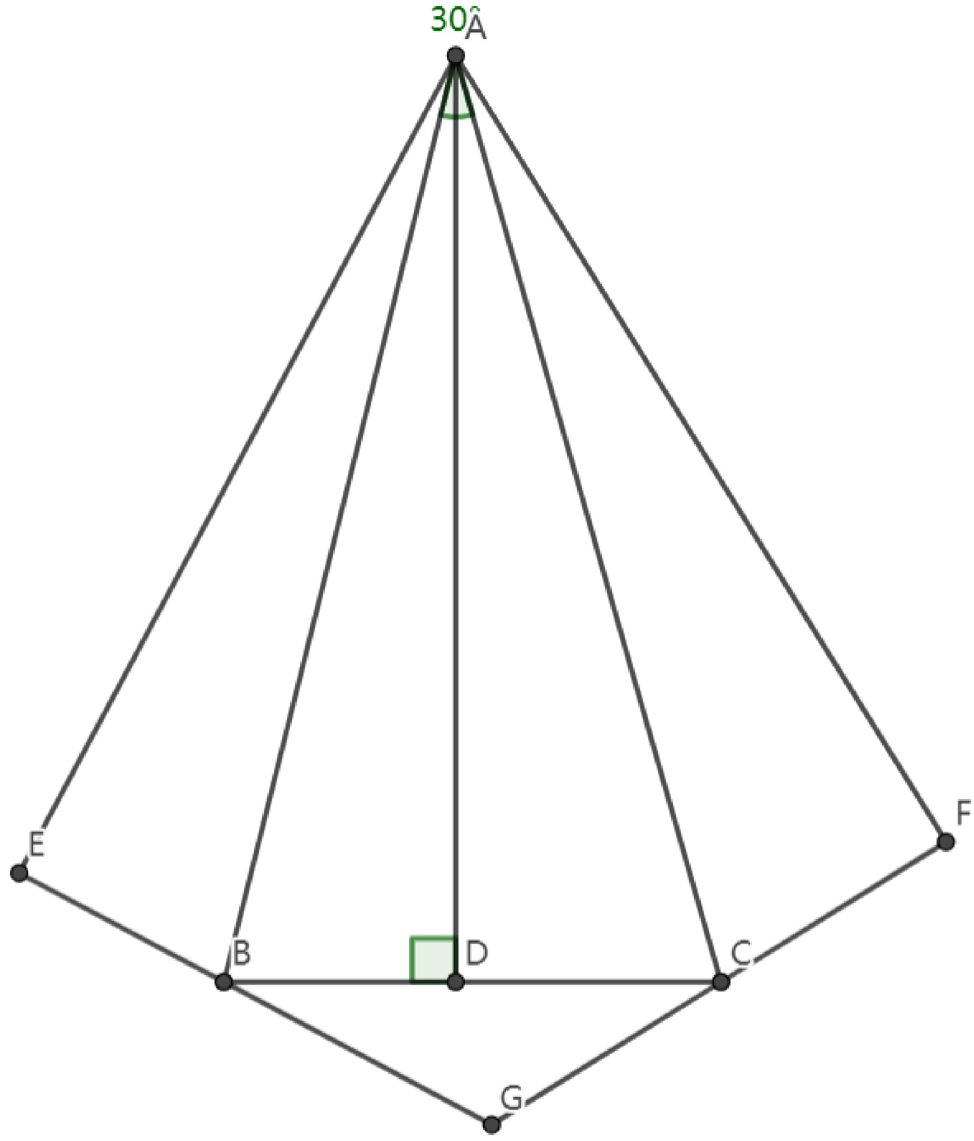
如图，在 ΔABC 中，已知 $\angle BAC=45^{\circ}$ ，$AD\perp BC$ 于 D ，$BD=2$ ，$CD=3$ ，求 AD 的长。
小平同学灵活运用轴对称知识，将四边形翻折变换为下图，她分别以 AB、AC为对称轴，画出 ΔABD、ΔACD 的轴对称图形，D点的对称点为E、F，延长 BE、CF相交于G点，得到四边形 $AEFG$，设$AD=x$，利用勾股定理，建立关于 x 的方程模型，求出 x 的值



(1) 请帮小平求出 x 的值

(2) 请参照小平的思路，探究并解决新问题：

如下图，在 ΔABC 中，$\angle BAC=30^\circ$，$AD\perp BC$ 于 D，$AD=4$，请你按照小平的思路，画出四边形 $ADEF$，求 ΔBGC 的周长（字母一一对应）



(1).

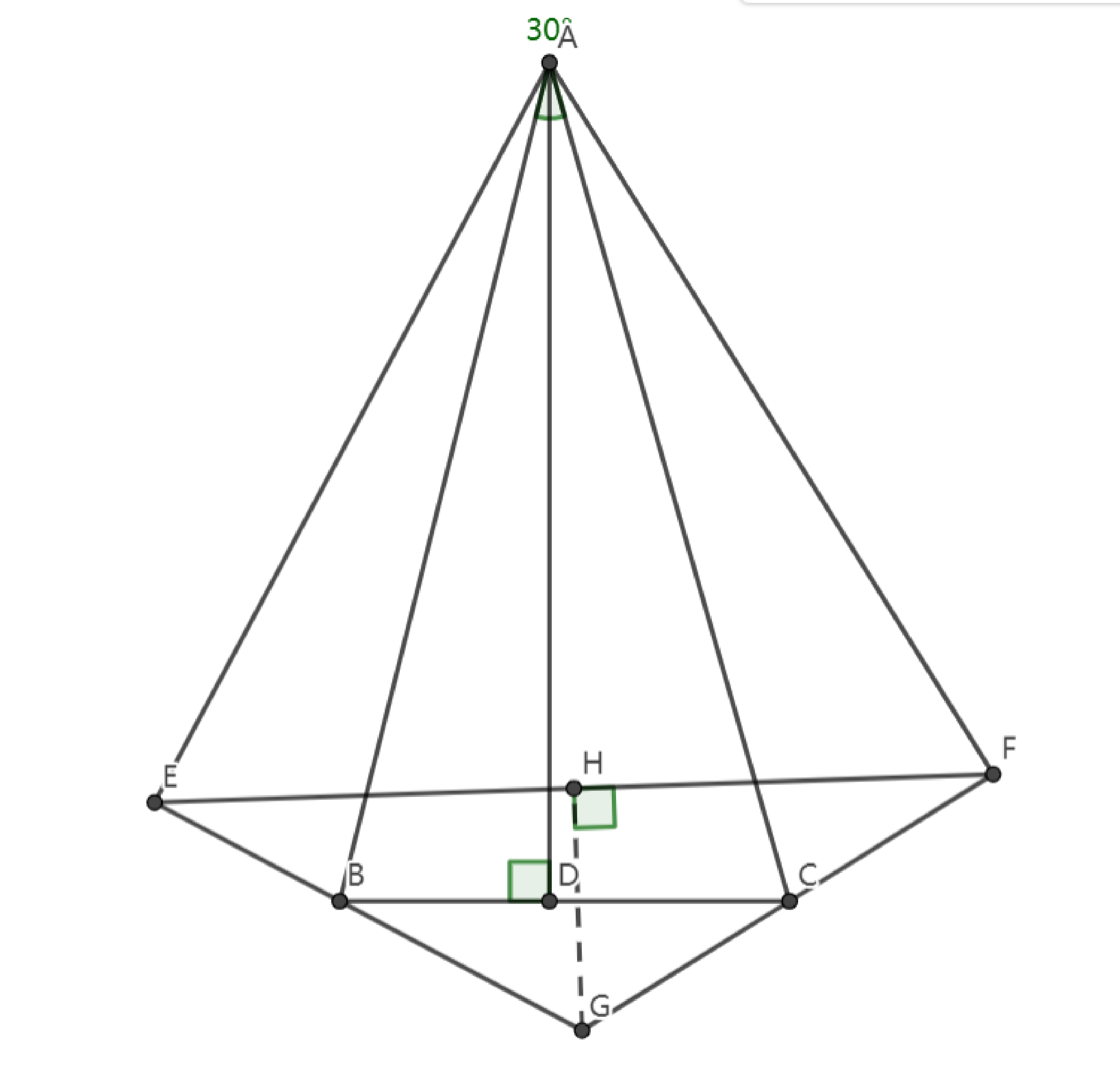
设 $AD=x=AE=AF$，$BE=BD=2$, $CD=CF=3$

则 $BG=x-2$, $CG=x-3$，

在 $Rt\Delta BCG$ 中：$(x-2)^2+(x-3)^2=(2+3)^2$（自己做了哈☺）

(2).

解图:



连接 EF，过 G 作 $GH\perp EF$ 于 H

$AE=AD=AF=4$

易证 正ΔAEF ，则 $\angle FEA=\angle EFA=60^\circ$

$\because \angle AEG=\angle AFG=90^\circ$

$\therefore \angle FEG=\angle EFG=30^\circ$

$\therefore EG=FG$

设 $BD=BE=a$，$CD=CF=b$，$BG=c$，$CG=d$

则 $a+c=b+d$

$EG^2-GH^2=(\frac{1}{2}EF)^2=4$，$EG=2GH$

则 $EG=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$GH=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$l_{\Delta EFG}=4+a+b+c+d=4+2(a+c)=4+2EG=\frac{8\sqrt{3}}{3}$

详图：