# The Fourier Transform

This example demonstrates, that the Fourier transform can be used for two different kinds of data sets.

Author: Ronny Bergmann Created: 2013-08-15

Last Changed: 2015-01-04 (Optimization Review)

# License

# Loading the Library

The MPAWL is located in the parent directory (see MPAWL.m) in order to load the library, we add its path to **\$Path**.

```
In[i]:= $Path = Join[$Path, {ParentDirectory[NotebookDirectory[]]}];
    SetDirectory[NotebookDirectory[]];(*Set to actual directory*)
    Needs["MPAWL`"];
```

# The data set as a matrix

Let's look at a matrix having more than one cycle (in contrast to the matrix from Example 1). For

```
\label{eq:ln4} $$ \ln[4]:= \mbox{ mM = } \{\{\mbox{16, 4}\}, \{\mbox{0, 16}\}\}; \mbox{ MatrixForm}[\mbox{mM}] $$ Out[4]/\mbox{MatrixForm}= $$ \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$ $$
```

We have

In[5]:= patternDimension[mM]

Out[5]= 2

and

In[6]:= {v<sub>1</sub>, v<sub>2</sub>} = patternBasis[mM]

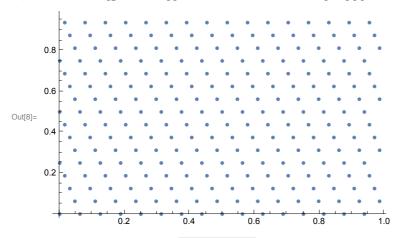
Out[6]= 
$$\left\{ \left\{ 0, \frac{1}{4} \right\}, \left\{ \frac{1}{64}, -\frac{1}{16} \right\} \right\}$$

where the elementary divisors are

```
ln[7]:= \{ \epsilon_1, \epsilon_2 \} = Diagonal[IntegerSmithForm[mM, ExtendedForm <math>\rightarrow False]]
Out[7]:= \{ 4, 64 \}
```

and hence

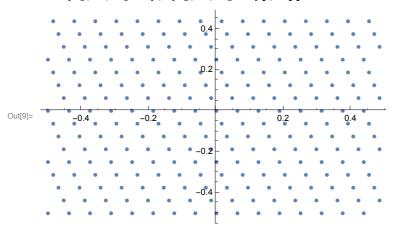
# ${}_{ln[8]:=} \textbf{ ListPlot[pattern[getPatternNormalform[mM]]]}$



is the same as (where Flatten[...,1] is used to get a vector of points instead of a matrix)

# In[9]:= ListPlot[

Flatten[Table[modM[k<sub>1</sub> \* v<sub>1</sub> + k<sub>2</sub> v<sub>2</sub>, IdentityMatrix[2], Target → "Symmetric"],  $\{k_1, 0, \epsilon_1 - 1\}, \{k_2, 0, \epsilon_2 - 1\}], 1]]$ 



If we think of these points as sampling points and scale them onto the torus  $[-\pi, \pi)^2$ , i.e. by multiplying them with 2  $\pi$ ,

we obtain a matrix of dimension  $\epsilon_1 \times \epsilon_2 = 4 \times 64$  of sampling values, for example

```
\ln[10] = b = Table[If[(k_1 == 0) \&\& (k_2 == 0), 1, 0], \{k_1, 0, \epsilon_1 - 1\}, \{k_2, 0, \epsilon_2 - 1\}]
```

We obtain its Fourier Transform with respect to mM by

#### 

#### FourierTransformTorus[mM, b]

Perform the Fourier transform on the pattern with respect to mM. b is either a vector of length m=Abs[Det[mM]] or addressing the points with respect to the basis of the pattern, i.e. the cycles having the length of the elementary divisors.

#### **Options**

#### Validate → True | False

whether to perform a check (via isMatrixValid) on the matrix mM and the check, whether the Origin is in Range.

#### Compute → "Numeric" | "Exact"

Providing numerical data, the Fourier method is used to perform the transform using FFT techniques. If all entries of mM and b are given exact, the "Exact" computation can be used to obtain the exact transform

## In[12]:= hatb = FourierTransformTorus[mM, b]

```
\texttt{Out}[12] = \left\{ \left\{ 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.062
                                                      0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                      0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                      0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                      0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.06
                                                      0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0
                                                      0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                 {0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                      0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.06
                                                      0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                      0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                      0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                      0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                      0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625\}
                                                 {0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                      0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                      0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                      0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.06
                                                      0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0
                                                      0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                      0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625\}
                                                 {0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                      0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                      0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                      0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                      0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                      0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                      0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625\}
```

which can also be switched to exact computations

```
ln[13]:= hatb = FourierTransformTorus[mM, b, Compute → "Exact"]
Out[13]= \left\{ \left\{ \frac{1}{16}, \frac{1}{16},
                                                                                                                                                   \frac{7}{16}, \frac{1}{16}
                                                                                                                                                                                                                                    , _
16
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            16
                                                                                                                                                                                                                                                                                 , _
16
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            \frac{7}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  16
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        16
                                                                             \frac{1}{16}, \frac{1}{16}
                                                                                                                                             \frac{1}{16}, \frac{1}{16}
                                                                                                                                                                                                                                    <u>16</u>, <u>16</u>
                                                                             <u>16</u>, <u>16</u>
                                                                             \frac{1}{16}, \frac{1}
                                                                  \left\{\frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{
                                                                             <u>16</u>, <u>16</u>
                                                                             (\frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16})
                                                                                                                                               16
                                                                                                                                                                                         16
                                                                                                                                                                                                                                    , <u>—</u>
                                                                                                                                                                                                                                                                               , <u>—</u>
                                                                                                                                                                                         16
                                                                                                                                                                                                                                    , <del>16</del>, <del>16</del>
                                                                                                                                                               \frac{-}{16}, \frac{-}{16}, \frac{-}{16}
                                                                                                                                                                                                                                                                                              <u>16</u>, ...
                                                                                                                                                                                                                                             16
                                                                                                                                                                                                                                                                                16
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            \frac{16}{16}, \frac{16}{16}, \frac{16}{16}, \frac{16}{16}, \frac{16}{16}
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}
```

Of course now, the values correspond to the same order used above with respect to the basis of the generating set

 $\overline{16}', \overline{16}', \overline{16}'$ 

this is of course the unitary version of the Fourier transform and hence

## ln[16]:= FourierTransformTorus[mM, hatb, Compute → "Exact"]

But we could also reshape the data to be a vector by ordering the indices {0, 0}, ..., {3, 63} lexicographically, i.e. {0, 0}, {0, 1}, ..., {1, 0}, {1, 1}, ... {3, 62}, {3, 63}. For details see [1].

## In[17]:= ? reshapeData

## reshapeData[M,data,direction]

Perform a reshape of data, where direction denotes

True: From vector to matrix False: The other way around

#### **Options**

Validate → True | False

whether to perform a check (via isMatrixValid) on the matrix mM and the check, whether the Origin is in Range.

## in[18]:= b2 = reshapeData[mM, b, False]

## In[19]:= hatb2 = FourierTransformTorus[mM, b2]

```
\mathsf{Out}_{[19]} = \{0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625,
                                                            0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.06
                                                            0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                            0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.06
                                                            0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                            0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.06
                                                            0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                            0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                            0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                            0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                            0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                            0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                            0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                            0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                            0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                            0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                            0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                            0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.0625, \, 0.06
                                                            0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0
                                                            0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.06
                                                            0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0.0625,\, 0
                                                            0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                            0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                            0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                            0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                            0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                            0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625,
                                                            0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625
```

again using the above ordering of the indices but now with respect to the generating set of Trans. **pose[mM]**. Of course the inverse transform yields again

#### In[20]:= FourierTransformTorus[mM, hatb2]

but of course this works if and only if the ordering of the elements in the vector is as just explained. Notice that while the input shape is analyzed automatically, i.e. whether its a vector or a matrix of data, the usual computation is always done numerically and the exact computation must be activated by the option Compute-> . Also the exact computation yields \$Failed if any numeric number is given as does the numeric one if any element is not a number.

## Literature

[1] R.Bergmann, The fast Fourier transform and fast wavelet transform for patterns on the torus,

Appl. Comp. Harmon. Anal. 35 (2013) 39–51, doi: 10.1016/j.acha .2012 .07 .007.