Unidad de aprendizaje 1: semejanza, circunferencia, áreas y volúmenes.

Tema 1. Proporcionalidad y semejanza

Subtema 1. Razones y proporciones con sus propiedades básicas

Razón:

Es el **cociente o división** entre dos cantidades (geométricas).

$\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ Que se leen: $\boxed{\text{“}\boldsymbol{a} \text{ es a } \boldsymbol{b}\text{”, “}\boldsymbol{c} \text{ es a } \boldsymbol{d}\text{”,}}$

Una **proporción** (geométrica) es una igualdad o *“comparación”* entre ***dos razones*** (geométricas).

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ “ ***a*** es a ***b*** como ***c*** es a ***d*** ”

Se dice que las dos razones son iguales. (*en una proporción intervienen **cuatro** cantidades*).

Definición: en: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ a y d se llaman extremos, b y c se llaman medios

En $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ c y f son los extremos, d y e son los medios.

Interpretación: la expresión **“**a es a b como 3 es a 2”

Significa que: $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ y también que:

"La razón entre a y b" es $3/2$

"La razón entre b y a" es $2/3$

"a y b están en razón de 3 a 2"

"a y b son proporcionales con 3 y 2"

"a y 3 son proporcionales con b y 2"

En "$\boldsymbol{a}$ es a $\boldsymbol{b}$ como **3** es a **2**" a y b podrían ser, por ejemplo; 6 y 4, 60 y 40, 45 y 30, 1.5 y 1

Puesto que al dividirlos el resultado es equivalente a dividir 3 entre 2.

Otra consecuencia es que: $2\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{b}$

Subtema 2. Axiomas sobre proporcionalidad de segmentos y teorema de Tales

Propiedades de las proporciones: (igual que con fracciones).

Dadas las proporciones: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ se cumplirá:

1. $ad = bc$ . . . . "Producto de extremos igual a producto de medios".

2. $\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \frac{f}{e}$. . . . También se tiene la proporción entre las razones inversas.

3. $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ . . . . Se pueden intercambiar medios (y /o extremos).

4. $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$. . . . También se cumple con resta.

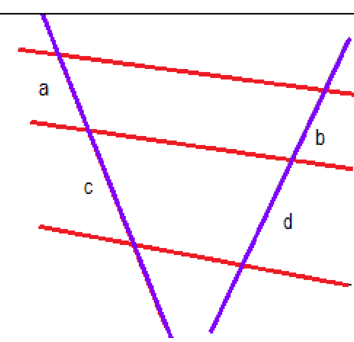
Otras formas serán: $\dfrac{a+b}{a} = \dfrac{c+d}{c}$ $\qquad$ $\dfrac{a+b}{c+d} = \dfrac{a}{c}$

5. $\dfrac{a+c+e}{b+d+f} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \cdots$ generalización de 4.

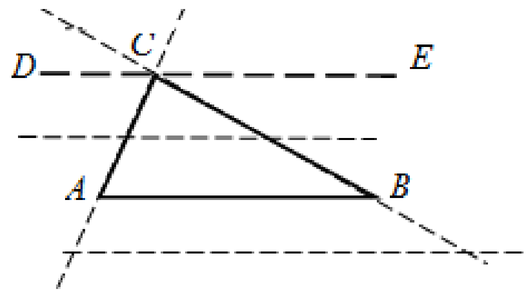
TEOREMA DE TALES:

Si varias paralelas cortan a dos secantes, éstas quedan divididas en segmentos proporcionales.

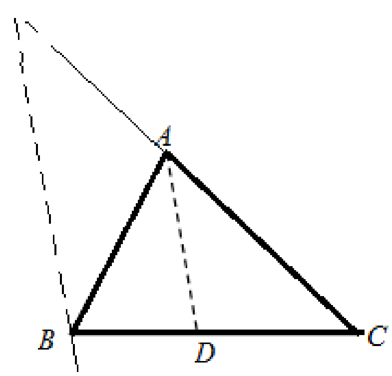
$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$	$\dfrac{d}{b} = \dfrac{c}{a}$	$\dfrac{a}{a+b} = \dfrac{c}{c+d}$	$\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d}$



TEOREMA: toda paralela a uno de los lados de un triángulo determina sobre los otros dos lados segmentos proporcionales.

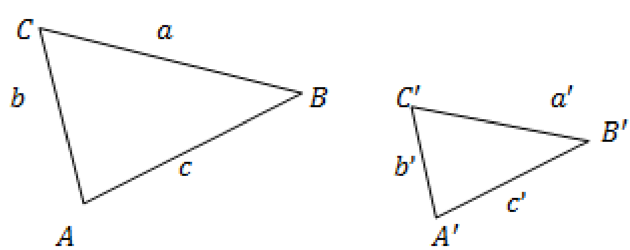
Demostración: Se traza por el vértice C, opuesto al lado AB, al cual se traza la paralela, una tercera paralela DE y por el teorema de TALES se puede concluir.	

TEOREMA: (proporcionalidad por la bisectriz): toda bisectriz del ángulo interior de un triángulo determina sobre el lado opuesto segmentos proporcionales a los otros dos lados.

Demostración: Se traza una paralela a la bisectriz AD por uno de los otros dos vértices ($B\ por\ ejemplo$), hasta cortar la prolongación del otro lado. En el triángulo grande que se forma se tienen los requerimientos para aplicar el teorema anterior. Finalmente se recurre al hecho de ser isósceles el triángulo exterior que se construyó, con esto se puede completar la demostración.	

Subtema 3. Semejanza de triángulos y teoremas relacionados

Definición: dos triángulos se llaman <u>semejantes</u> si tienen los tres ángulos respectivamente iguales (los pares de ángulos iguales se llaman homólogos) y los tres lados respectivamente proporcionales (los lados que se oponen a los ángulos homólogos se llaman homólogos).



$\measuredangle A = \measuredangle A',\ \measuredangle B = \measuredangle B',\ \measuredangle C = \measuredangle C'$

Se llaman **á**ngulos **h**omólogos (son de igual medida).

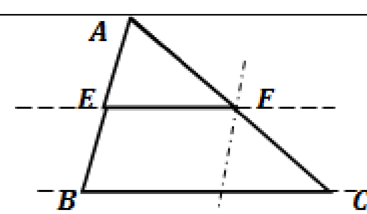
---

a, b y c son **L**ados **H**omólogos con a', b' y c' , respectivamente;

Son Proporcionales; $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

(T.F.S) Teorema fundamental de la semejanza (de triángulos):

Toda paralela a un lado de un triángulo determina (con los otros dos lados) un triángulo semejante al original.

Demostración: La igualdad de los ángulos es inmediata (¿Por qué?). Por el teorema de la paralela, a uno	

de los lados de un triángulo se tiene una de las proporciones. Por uno de los puntos de corte de la paralela trace otra al tercer lado y por paralelogramo y por sustitución de segmentos se tendrá la otra proporción requerida. Intente hacerlo.	$\boldsymbol{AE}$ y $\boldsymbol{AF}$ son proporcionales con $\boldsymbol{AB}$ y $\boldsymbol{AC}$

Criterios para semejanza de triángulos

Para tener la semejanza de dos triángulos bastará (como en congruencia) garantizar solo algunas particularidades, como se muestra en el siguiente teorema;

TEOREMA: dos triángulos serán semejantes en cada uno de los siguientes casos:

(A-A)	Si tienen **dos ángulos** respectivamente iguales… el tercero también lo será.
(L-A-L)	Si tienen **un ángulo** igual entre **lados** respectivamente **proporcionales**.
(L-L-L)	Si tienen **los tres lados proporcionales**, respectivamente.

Corolario (Casos especiales)

Dos triángulos ***isósceles*** serán semejantes si tienen igual el **ángulo del vértice** (entre los lados iguales).

Dos triángulos serán semejantes si tienen sus lados respectivamente perpendiculares (o también paralelos).

Dos triángulos rectángulos serán semejantes si tienen:

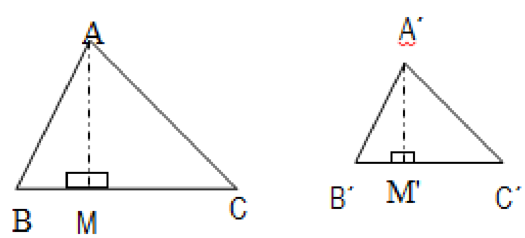
a. Un ángulo agudo igual. **b.** Sus catetos proporcionales.

Otras Conclusiones importantes de semejanza entre dos triángulos son:

Ejemplo (1 hora):

Demuestre que las alturas homólogas (es decir relativas a lados homólogos) de dos triángulos semejantes son proporcionales con los lados homólogos de los triángulos, . . . y por tanto proporcionales entre sí.

Se muestra cómo sería para el caso de las alturas (igual sería para los siguientes ejercicios).

AM y $A'M'$ **alturas** en dos triángulos semejantes ΔABC y $\Delta A'B'C'$ 	Se garantiza, mediante el criterio adecuado, que dos de los nuevos triángulos formados son semejantes y establezca las proporciones entre los lados homólogos de estos. Luego, considerando la proporcionalidad de los lados de los triángulos originales se podrá concluir lo pedido.

Ejercicios de práctica (2 horas)

1. Demuestre que las Medianas Homólogas de dos triángulos semejantes son proporcionales con los Lados Homólogos de los triángulos, . . . y por tanto proporcionales entre sí.

“Sugerencia: considere mitades de lados proporcionales”.

2. Demuestre que las Bisectrices Homólogas de dos triángulos semejantes son proporcionales con los Lados Homólogos de los triángulos, . . . y por tanto proporcionales entre sí.

Cada una de las demostraciones se pueden hacer tomando solo una pareja de Alturas Homólogas (dos medianas, dos bisectrices o dos mediatrices) entre los triángulos semejantes.

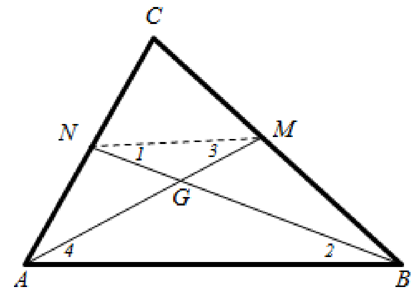
Mediante semejanza de triángulos se puede demostrar también que:

Las medianas en todo triángulo se cortan en un mismo punto, distante de cada vértice los 2/3 de la longitud de la mediana respectiva.

Se considera un triángulo de vértices A, B y C.

Se traza dos medianas AM y BN que se cortan en G para demostrar el teorema. Para otro par de medianas es análoga la demostración.

Demostración:



Usando el teorema de la base media se tendrán las dos primeras premisas:

(1) $NM // AB$ y

(2) $2. NM = AB$

Además,

(3) $\hat{1} = \hat{2}$ . . . Alt. Int. en //s

(4) $\hat{3} = \hat{4}$ . . . Alt. Int. en //s

(5) $\Delta MNG \sim \Delta ABG$ . . . A – A . . . (3) y (4)

(6) $\frac{AG}{GM} = \frac{BG}{GN} = \frac{AB}{NM}$ . . . Ls Hs (lados homólogos) en (4).

(7) $\frac{AG}{GM} = \frac{BG}{GN} = \frac{2\,NM}{NM} = 2$ . . . (2) en (6).

(8) $\frac{AG}{GM} = \frac{BG}{GN} = 2$ . . . simplificar en (7).

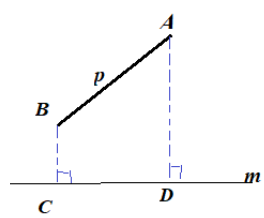
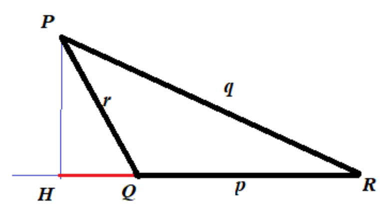
(9) $\begin{cases} AG = 2\,GM \quad , \quad AG = 2\,(AM - AG) \\ BG = 2\,GN \quad , \quad BG = 2\,(BN - BG) \end{cases}$, . . . de (6)

(10) $\begin{cases} AG = 2\,AM - 2\,AG \;\leftrightarrow\; AG = \frac{2}{3}AM \\ BG = 2\,BN - 2\,BG \;\leftrightarrow\; BG = \frac{2}{3}BN \end{cases}$, . . . de (7)

$\therefore AM \ y \ BN$ se cortan en G distante de cada vértice los $\frac{2}{3}$ de la longitud de la mediana respectiva.

Subtema 4. Proyecciones sobre una recta y relaciones métricas en triángulos rectángulos y no rectángulos

Proyecciones de un segmento sobre otro (o sobre la recta que contiene al otro)

Al bajar las perpendiculares desde los extremos del segmento que se proyecta, sobre el segmento al que es proyectado (o recta que lo contiene) se obtiene sobre este último un nuevo segmento, al cual se le llama ***proyección.***	 CD: Proy(p/m)  HQ = Proy(r/p) HR = Proy(q/p)

Otros resultados para demostrar:

<table>
<tr>
<td>
Se traza la altura en un triángulo rectángulo

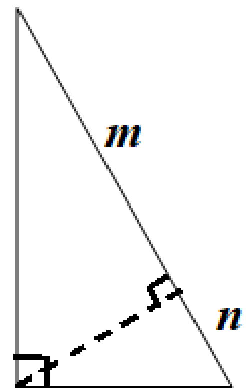
a. Se demuestra que se forman dos triángulos que son semejantes al original y por lo tanto semejantes entre sí.

b. Escriba las proporciones que se derivan de las tres semejanzas.

c. De las proporciones de b. se concluye, tomando las proporciones adecuadas:

i. El cuadrado de la altura es igual al producto de los segmentos en que quedó dividida la hipotenusa [estos dos segmentos se llaman proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa].

ii. El cuadrado de cada cateto es igual al producto entre la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre la hipotenusa.

De ii. Se deduce el teorema de Pitágoras (enúncielo si lo recuerda, de lo contrario consulte su enunciado) ______________________________. (40 min)
</td>
<td>


m y n son las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.
</td>
</tr>
</table>

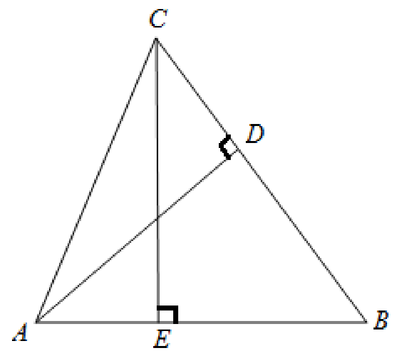
Ejercicio para práctica (40 minutos):

Demuestre que en un triángulo $\triangle ABC$, al trazar las alturas AD y CE se tiene que ellas son proporcionales con los inversos de los lados respectivos (a los cuales caen):

$$\frac{CE}{AD} = \frac{1/_{AB}}{1/_{BC}}$$

Para ello escriba la proporcionalidad entre dos triángulos que resultan ser semejantes, y obtenga primero:

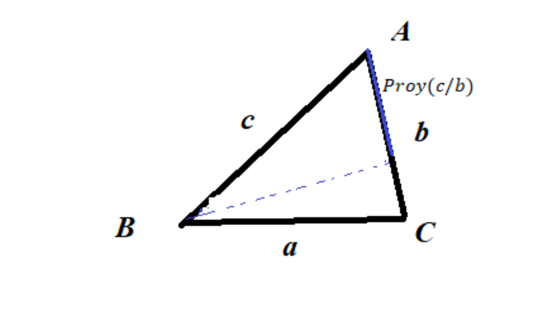
$$CE.AB = AD.BC$$

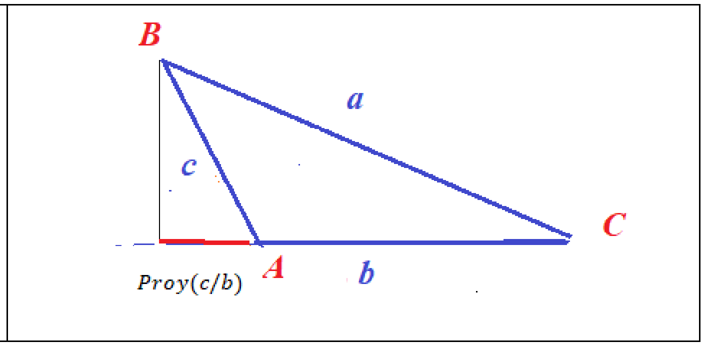


Relaciones métricas en triángulos no rectángulos ("Ley del coseno").

TEOREMA: en un triángulo, el cuadrado del lado a opuesto a un ángulo $\angle A$ agudo (obtuso) es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos (más) el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él, es decir:

$\angle \boldsymbol{A}$ Agudo	$\angle \boldsymbol{A}$ Obtuso
$a^2 = b^2 + c^2 - 2b\,Proy(c/b)$ O también $a^2 = b^2 + c^2 - 2c\,Proy(b/c)$	$a^2 = b^2 + c^2 + 2b\,Proy(c/b)$ O también $a^2 = b^2 + c^2 + 2c\,Proy(b/c)$





Interpretación de una proyección desde la trigonometría, en la primera gráfica:

$Proy(c/b) = \boldsymbol{c}.cos(\angle \boldsymbol{A})$

Para la demostración de cada uno de ellos recurra al teorema de Pitágoras (dos veces).

Para demostrarlo hay que tener muy en cuenta que se determina la medida de un lado relacionándolo con la medida de su ángulo opuesto, se realiza la demostración para el caso $\angle \boldsymbol{A}$ agudo:

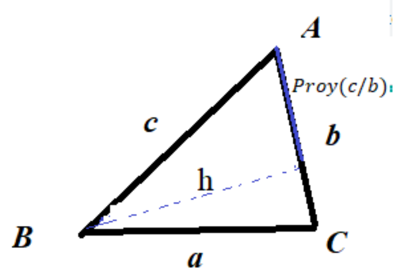
(1) Se considera una de las proyecciones; de b sobre c, o de $c$sobre b. En este caso se tomará $Proy(c/b)$.

(2) $a^2 = (b - proy(c/b))^2 + h^2$ Por el Teorema de Pitágoras en el triángulo inferior.

(3) $h^2 = c^2 - proy(c/b)^2$ Por el Teorema de Pitágoras en el triángulo superior.

(4) $a^2 = b^2 - 2b\,proy(c/b) + \cancel{proy(c/b)^2} + c^2 - \cancel{proy(c/b)^2}$ (3) en (2)

(5) $a^2 = b^2 - 2b\,proy(c/b) + c^2$ Que es la **tesis.**



NOTA: relaciones que amplían el teorema de Pitágoras:

TEOREMA: dado un triángulo ΔABC de lados a, b y c, entonces**:**

1. $\angle \boldsymbol{A}$ es agudo $\Leftrightarrow$ $a^2 < b^2 + c^2$
2. $\angle \boldsymbol{A}$ es recto $\Leftrightarrow$ $a^2 = b^2 + c^2$
3. $\angle \boldsymbol{A}$ es obtuso $\Leftrightarrow$ $a^2 > b^2 + c^2$

(Geltner, 1998).

Primera sesión virtual (1 hora)

*Evaluación 1 semejanza (2 horas) *

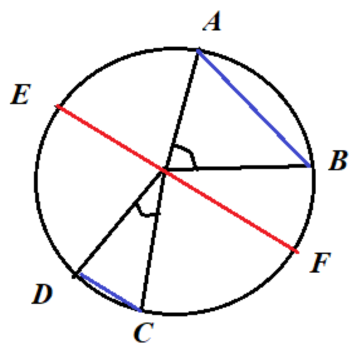
Tema 2. Circunferencia

Subtema 1. Definiciones, notaciones y relaciones entre los elementos notables.

Definiciones

Circunferencia: dados un punto O en un plano y un número real positivo $\boldsymbol{r}$, al conjunto de todos los puntos P del plano, que tienen una distancia $\boldsymbol{r}$ al punto O; $OP = r$ se llama "circunferencia de centro O y radio r", se acostumbra a nombrar con "$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{O};\ \boldsymbol{r})$",

Radio: como **cantidad**, es la distancia del centro $\boldsymbol{O}$ a cualquier punto $\boldsymbol{P}$ de la circunferencia; también puede ser considerado como el **segmento** que une el centro con un punto de la circunferencia, por ejemplo: $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}, \overline{OE},$ y $\overline{OF}$. (Geltner, 1998).



Cuerda: segmento cuyos extremos son puntos de la circunferencia, por ejemplo: $\overline{AB}, \overline{CD}$.

Diámetro: cuerda que pasa por el centro de la circunferencia, por ejemplo: $\overline{EF}$. También dos radios.

Ángulo Central: ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia, por ejemplo: $\angle AOB, \angle DOC$.

Arco: subconjunto (o tramo) de la circunferencia limitado por dos puntos de ella, por ejemplo: $\widehat{AB}$. Si son extremos de un diámetro, los arcos se llaman semicircunferencias, por ejemplo: $\widehat{EAF}$ y $\widehat{EDF}$.

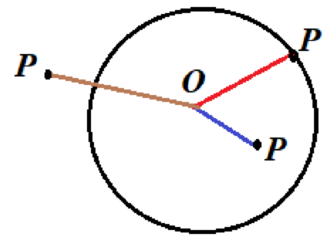
Hay que buscar un “arco” para las expresiones en amarillo.

Circunferencias concéntricas: las que tienen el mismo centro.

Corolario: en una circunferencia, todos los radios son congruentes; todos los diámetros son congruentes; el diámetro es el doble del radio y el diámetro es la mayor cuerda. (Geltner, 1998).

Posiciones relativas entre un punto y una circunferencia

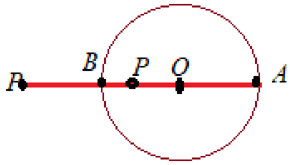
En un plano, dada una $\boldsymbol{C(O;\ r)}$ y un punto ***P***:

1. **P** es **interior** a $C(O;\ r)$, si $\boldsymbol{OP < r}$. 2. **P** está **sobre** la $C(O;\ r)$, si $\boldsymbol{OP = r}$. 3. **P** es **exterior** a $C(O;\ r)$, si $\boldsymbol{OP > r}$.	

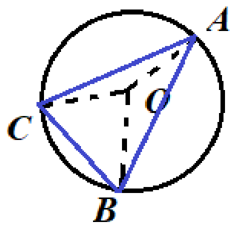
Distancia de un punto a una circunferencia

Dada una circunferencia $C(O;\ r)$ y dado un punto P en su plano, entonces los extremos del diámetro $\overline{AB}$, contenido en la recta $\overleftrightarrow{OP}$, son los puntos de la circunferencia que están a la *menor y a la mayor* distancia del punto P dado. (Geltner, 1998).

La distancia del punto P a la $C(O;\ r)$ es la distancia entre P y el extremo de dicho diámetro que esté *más próximo* a P, en la gráfica por ejemplo es $\overline{PB}$. (Geltner, 1998).



Circunferencias que pasan por tres puntos no alineados dados

	**TEOREMA:** por tres puntos A, B y C <u>no alineados</u>, pasa una y sólo una circunferencia que tiene por centro el circuncentro del $\triangle\ ABC$.

Subtema 2. Relaciones entre circunferencias, sus ángulos, arcos y cuerdas

Posiciones relativas entre una recta y una circunferencia

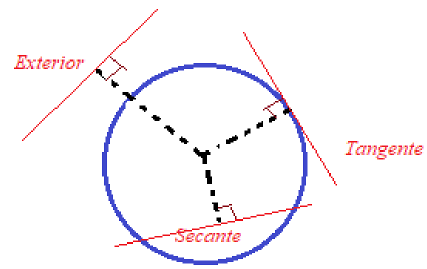
1. Una recta es **exterior** a una circunferencia si no tiene puntos comunes con ella.

2. Una recta es **tangente** a una circunferencia si tiene exactamente un punto común con ella, llamado punto de tangencia.

3. Una recta es **secante** a una circunferencia si tiene exactamente dos puntos comunes con ella.

TEOREMA: si una recta es tangente a una circunferencia entonces, es perpendicular al radio que llega al punto de tangencia. (Studylib, 2019).

TEOREMA: dadas una recta y una circunferencia $C(O;\ r)$, si $\underline{\boldsymbol{d}}$ es la distancia del centro a la recta, entonces: (Geltner, 1998).

1. La recta es secante a la circunferencia si y sólo si $d < r$. 2. La recta es tangente a la circunferencia si y sólo si $d = r$. 3. La recta es exterior a la circunferencia si y sólo si $d > r$.	

Posiciones relativas entre dos circunferencias

Dos circunferencias son:

Leer los enunciados y proceder a ejemplificarlos gráficamente. (30 minutos)

1. **Exteriores:** si todos los puntos de una de ellas son exteriores a la otra.

2. **Tangentes exteriores:** si tienen un punto común y los demás puntos de cada una de ellas son exteriores a la otra.

3. **Secantes:** si tienen exactamente dos puntos comunes.

4. **Tangentes interiores:** si tienen un punto común y los demás puntos de una de ellas son interiores a la otra, entonces la primera es tangente interior a la segunda.

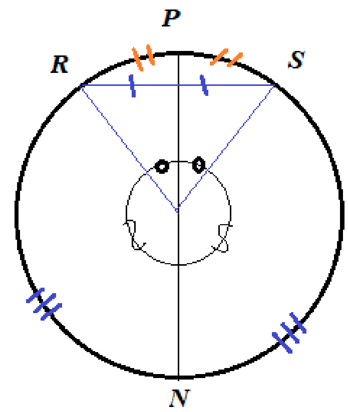
5. **Interiores:** si no tienen puntos comunes y todos los puntos de una de ellas son interiores a la otra, entonces la primera es interior a la segunda. (Studylib, 2019).

TEOREMA: si dos circunferencias no concéntricas tienen un punto común exterior a la recta de los centros entonces son secantes y recíprocamente. (Studylib, 2019).

TEOREMA: si dos circunferencias son secantes entonces el segmento entre sus centros es la mediatriz de su cuerda común y es la bisectriz de los ángulos centrales subtendidos por la cuerda. (Studylib, 2019).

TEOREMA: si dos circunferencias son tangentes entonces los centros y su punto de tangencia son colineales y recíprocamente. Además, las tangentes a las circunferencias en el punto de tangencia coinciden. (Geltner, 1998).

Arcos y Cuerdas

Circunferencias congruentes: dos circunferencias son congruentes si sus radios tienen igual medida. **Arcos congruentes:** dos arcos de una misma circunferencia o de circunferencias congruentes son congruentes si subtienden ángulos centrales congruentes. **Arcos desiguales:** dos arcos de una misma circunferencia o de circunferencias congruentes son desiguales si subtienden ángulos centrales desiguales y será mayor el que subtienda mayor ángulo central.	

Medida angular de un arco: la medida angular de un arco es la medida del ángulo central que subtiende. (Studylib, 2019)

TEOREMA: en una misma circunferencia o en circunferencias congruentes:

1. Dos ángulos centrales son congruentes si subtienden cuerdas congruentes.

2. Dos cuerdas son congruentes si subtienden arcos congruentes.

3. La menor de dos cuerdas desiguales subtiende un arco menor y un ángulo central menor y recíprocamente.

4. Dos cuerdas congruentes equidistan del centro y recíprocamente.

5. La mayor de dos cuerdas desiguales está más próxima al centro y recíprocamente. (Geltner, 1998).

Propiedades de un diámetro perpendicular a una cuerda

TEOREMA: dada una cuerda, si otra cuerda secante a ella cumple dos de las siguientes propiedades entonces, se dice que las cumple todas:

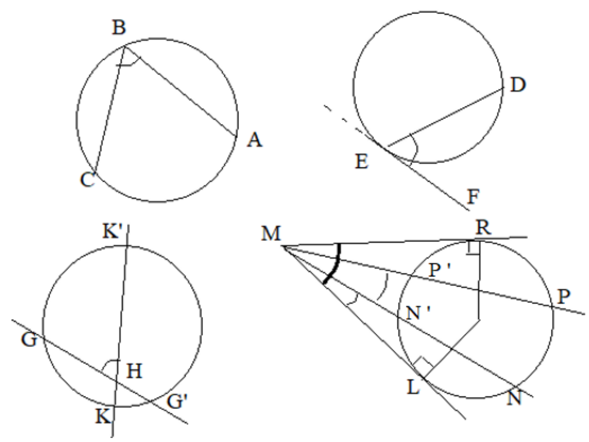
1. Es diámetro.
2. Es perpendicular a la cuerda.
3. Pasa por el punto medio de la cuerda.
4. Pasa por el punto medio del arco menor.
5. Pasa por el punto medio del arco mayor.
6. Es bisectriz del ángulo central que la cuerda subtiende. (Geltner, 1998).

Arcos y paralelas:

TEOREMA: dos arcos o dos cuerdas comprendidos entre dos rectas paralelas son congruentes.

TEOREMA: (criterio de paralelismo): si en una circunferencia dos cuerdas o dos arcos son congruentes entonces sus extremos determinan un par de rectas paralelas. (Geltner, 1998).

Ángulos relacionados con la circunferencia

1. **Ángulo inscrito:** el vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son dos semirrectas secantes a la circunferencia, por ejemplo, el $\angle ABC$. 2. **Ángulo semiinscrito:** el vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son dos semirrectas una tangente y la otra secante a la circunferencia, por ejemplo, el $\angle DEF$. 3. **Ángulo interior:** el vértice es punto interior a la circunferencia y sus lados son dos semirrectas secantes a la circunferencia, por ejemplo, el $\angle GHK$.	

4. **Ángulo exterior:** el vértice es punto exterior a la circunferencia y sus lados son semirrectas tangentes y/o secantes a la circunferencia, por ejemplo, el $\angle LMR$, el $\angle LMN$ y el $\angle NMP$.	

(Geltner, 1998).

TEOREMA: en una circunferencia, en medidas angulares:

1. Un ángulo inscrito mide la mitad del arco comprendido entre sus lados, por ejemplo, $\angle ABC_{inscrito} = \frac{\widehat{AC}}{2}$.

2. Un ángulo semiinscrito mide la mitad del arco comprendido entre sus lados, por ejemplo $\angle DEF_{semiinscrito} = \frac{\widehat{DE}}{2}$.

3. Un ángulo interior mide la semisuma del arco comprendido entre sus lados y el arco comprendido entre las prolongaciones de ellos, por ejemplo, $\angle GHK_{interior} = \frac{\widehat{GK}+\widehat{G'K'}}{2}$.

4. Un ángulo exterior mide la semidiferencia de los arcos mayor y menor comprendidos entre sus lados, por ejemplo:

$\angle LMR_{exterior} = \frac{\widehat{LNR}-\widehat{LN'R}}{2}$, $\angle LMN_{exterior} = \frac{\widehat{LN}-\widehat{LN'}}{2}$, $\angle NMP_{exterior} = \frac{\widehat{NP}-\widehat{N'P'}}{2}$

Corolarios:

1. Todos los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco son congruentes.

2. Todos los ángulos inscritos en una semicircunferencia son rectos. (Geltner, 1998).

Cuestionario ejercicios

Evaluación 2 circunferencia (2 horas)

Tema 3. Áreas y volúmenes

Subtema 1. Fórmulas básicas de áreas de figuras planas

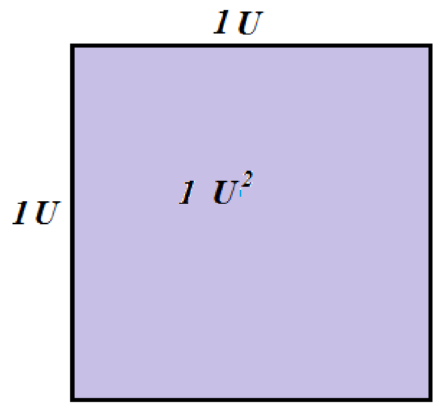
Al hablar sobre área, se habla también de superficie o extensión. Donde el área es la medida de un espacio delimitado por un perímetro. Para dar un poco de claridad al término, perímetro de una figura geométrica es la longitud que tiene su contorno o borde.

El área de una figura plana es independiente de su posición y sólo depende de su tamaño y de su forma.

Para hacer referencia al área de una región, se usa como unidad la equivalente a una unidad de longitud al cuadrado; tomando así el área correspondiente a un cuadrado de lados $1\ U\ x\ 1\ U$.

$1\ U^2 = 1\ U\ x\ 1\ U$ "unidad de área".

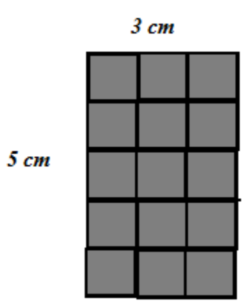
Por ejemplo:

$1\,cm \times 1\,cm = 1\,cm^2$ $1\,m \times 1\,m = 1\,m^2$ $1\,Km \times 1\,Km = 1\,Km^2$ $1\,pulg \times 1\,pulg = 1\,pulg^2$ $1\,pié \times 1\,pié = 1\,pié^2$ $100\,m \times 100\,m = (100\,m)^2 = 10.000\,m^2$ $= 1\,ha$; una **hectárea** o hectómetro cuadrado.	

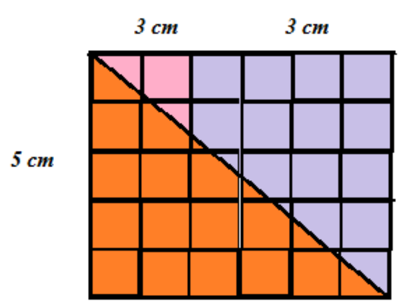
El área de una región del plano es el número de unidades cuadradas que contenga, o que estén contenidas en ella.

Una región de 15 cm^2 de área es aquella región que contiene 15 unidades de $1\,cm^2$

Por ejemplo:



El rectángulo



Cada triángulo

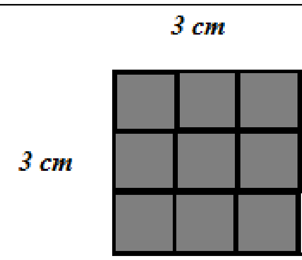
La unidad de área está relacionada directamente con la unidad de distancia que se defina; dependiendo del sistema de unidades que cada uno escoja, arbitrariamente.

Así, si la distancia está en centímetros, el área se medirá en centímetros cuadrados; si la distancia está en metros, el área se medirá en metros cuadrados, y en general para cualquier unidad ($\boldsymbol{U}$) de distancia, el área se medirá en la correspondiente unidad cuadrada ($\boldsymbol{U^2}$).

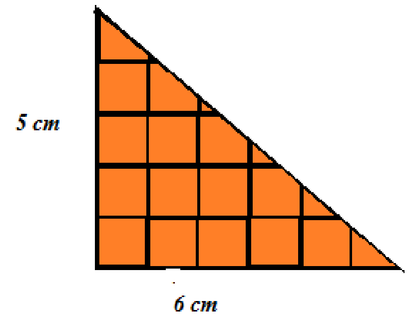
Área de un polígono

Como se mostraba anteriormente, un polígono es una figura geométrica de forma cerrada que posee más de tres vértices, ángulos y lados. Para calcular el área, se puede de diferentes modos y esto depende de los lados del polígono como se muestra a continuación:

- **Área de un cuadrado:** como un cuadrado se caracteriza por tener sus lados iguales y perpendiculares, para hallar el área **s**e eleva al cuadrado la longitud de cualquiera de los lados (L) de la figura.

$A = L^2$ $A = (3\ cm)^2 = 3^2\ cm^2 = 9\ cm^2$	

- **Área de un triángulo:** el área de un triángulo se puede determinar de dos formas: primero, se puede multiplicar la base por la altura y dividir entre dos (se debe recordar que la altura es el segmento que une el vértice con su lado opuesto formando un ángulo de 90º), así como en la figura del ejemplo anterior:

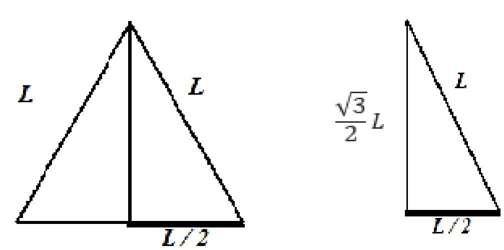
$A = \dfrac{b \times h}{2}$ $A = \dfrac{(6\ cm)(5\ cm)}{2} = 15\ cm^2$ o $A = \dfrac{(6)(5)}{2}\ cm^2 = 15\ cm^2$	

Otra forma es con la fórmula de Herón, siendo a, b y c las medidas de los lados de un triángulo, y s es el semiperímetro:

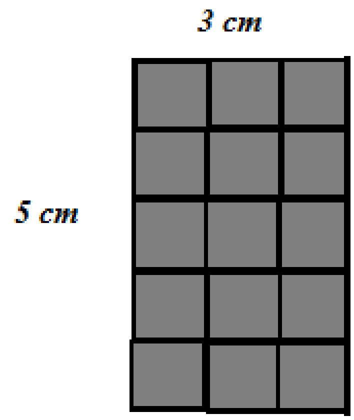
$$s = \frac{P}{2} = \frac{a+b+c}{2}$$

$$A = \sqrt{s \times (s-a) \times (s-b) \times (s-c)}$$

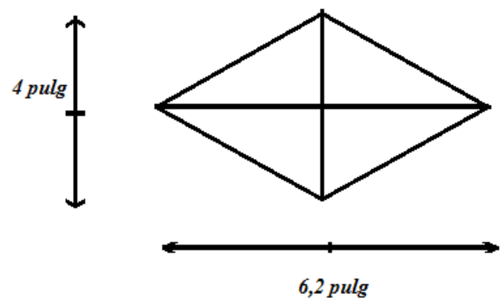
- **Área de un triángulo equilátero de lado** L**:** el área de un triángulo sabemos que se puede determinar multiplicando la base por la altura y dividir entre dos (se debe recordar que, recurriendo al teorema de Pitágoras, la altura es $\frac{\sqrt{3}}{2}L$), así se tiene:

$A = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}L \times L}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}L^2$	

- **Área de un rectángulo:** se multiplican las longitudes de dos lados contiguos de la figura los cuales son distintos entre sí. En este caso sería ancho por alto o lado por lado.

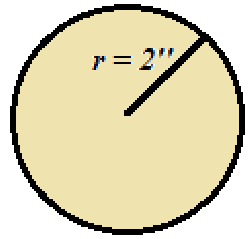
$A = a \times b$ $A = (3\ cm)(5\ cm) = 15\ cm^2$ o $A = 3 \times 5\ \ cm^2 = 15\ cm^2$	

- **Área de un rombo:** en este caso se multiplican las diagonales de la figura teniendo en cuenta su diagonal mayor y menor y se divide entre dos:

$A = \frac{D \times d}{2}$ $A = \frac{6{,}2\ pulg\ \ \times 4\ pulg}{2}$ O $A = \frac{6{,}2 \times 4}{2}\ \ pulg^2$	

- **Área de un círculo:**

El área de un círculo puede calcularse con la siguiente fórmula:

$A = \pi \times r^2$ O simplemente $A = \pi r^2$ $\quad$ $A = \pi(2\ pulg)^2$ o $A = \pi(2^2)\ pulg^2$ $= 4\pi\ pulg^2 \approx 12{,}566\ pulg^2$	

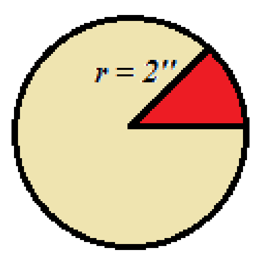
- **Área de un sector circular:**

El área de un sector circular o porción de círculo puede calcularse con la fórmula para el círculo completo multiplicada por la “parte” del círculo a la cual corresponde;

Por ejemplo, para medio círculo: $A = \pi r^2 \left(\frac{1}{2}\right)$

Por ejemplo, para la cuarta parte de círculo: $A = \pi r^2 \left(\frac{1}{4}\right)$

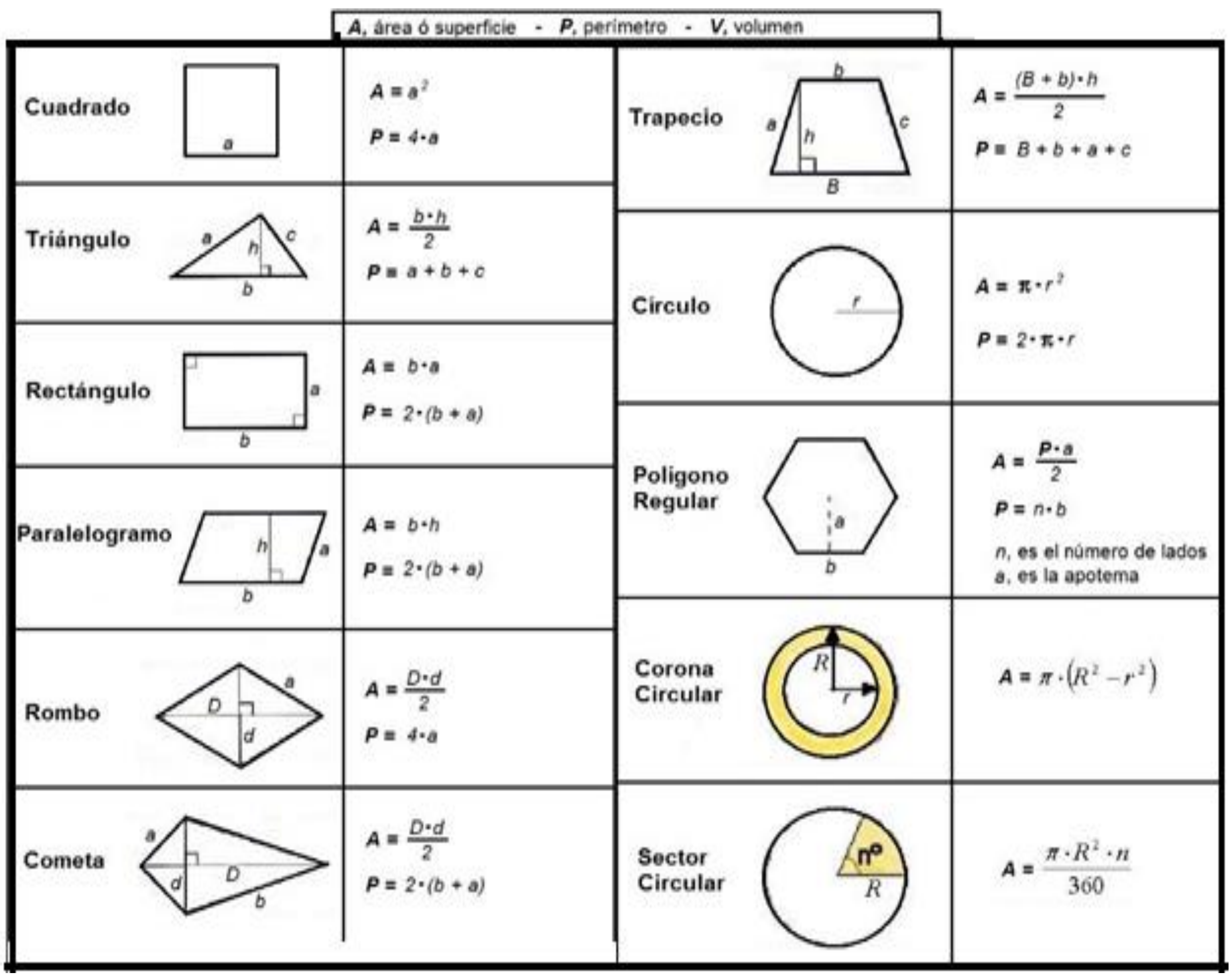
También si se considera como el ángulo en grados al cual corresponde ($n°$); la “parte” de círculo será $\frac{n°}{360}$: media $\frac{180°}{360} = \frac{1}{2}$ la cuarta parte $\frac{90°}{360} = \frac{1}{4}$.

$A = \pi r^2\ \times$(fracción de la circunferencia) $A = \pi r^2 \left(\frac{n°}{360}\right)$ O simplemente $\quad$ $A = \frac{\pi r^2\ n°}{360}$ $A = \frac{\pi(2^2)\ 45°}{360}\ pulg^2$ $= \frac{4\pi}{8}\ pulg^2 \approx \frac{\pi}{2}\ pulg^2 \approx 1{,}5708$	 La octava parte: $n° = 45°$

NOTA: si se trata de un anillo, por ejemplo, con un radio mayor y un radio menor, simplemente se hace la diferencia de las áreas; “mayor – menor”.

La idea es no memorizar muchas fórmulas (con las fórmulas básicas es suficiente si se hacen las combinaciones adecuadas).

Ahora, como resumen en el siguiente cuadro, se establecen las fórmulas que permiten calcular el área de las figuras básicas:



Ejemplo 1

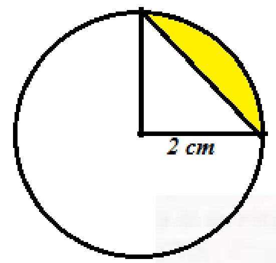
Para hallar el área de un "segmento" circular correspondiente a un ángulo recto:

Al área del sector circular se le resta el área del triángulo;

$$A = \left(A_{Sector} - A_{Triángulo}\right) cm^2$$

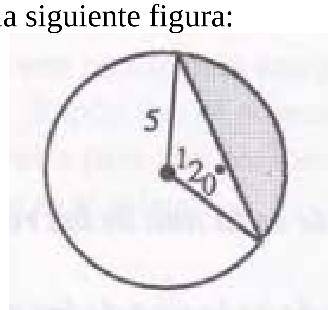
La cuarta parte del círculo de radio 2 menos
la mitad del cuadrado de lado 2.

$$A = \left(\frac{1}{4}\pi(2^2) - \frac{1}{2}(2^2)\right)\ cm^2$$



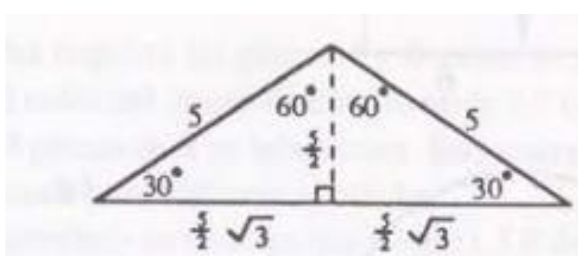
Ejemplos de geltner-peterson-geometria-3era-edicion

Ejemplo*:*
Encuentra el área del segmento de la siguiente figura:



Solución:

Para hallar el área del segmento, el área del triángulo se resta del área del sector. El área del sector es $\pi(120)\frac{(5)^2}{360} = \frac{25\pi}{3}$. El área del triángulo es $\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25\sqrt{3}}{4}$. Observe la figura siguiente. Así, el área del segmento es: $\frac{25\pi}{3} - \frac{25\sqrt{3}}{4} = (100\pi - 75\sqrt{3})/12$.



Subtema 2. Fórmulas básicas de volúmenes de figuras tridimensionales

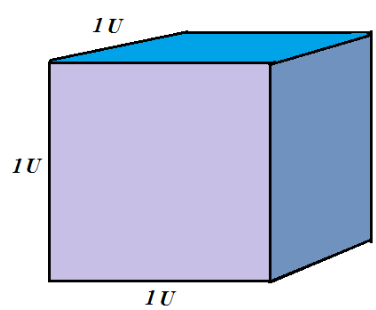
Al hablar sobre volumen, se habla también de capacidad o espacio. Donde el volumen es la medida de un espacio que ocupa (o delimitado) por una figura en tres dimensiones. Para dar un poco de claridad es el espacio contenido por una superficie cerrada, que hace las veces de borde o frontera.

El volumen de una figura tridimensional es independiente de su posición y sólo depende de su tamaño y de su forma.

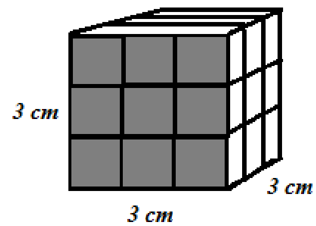
Para referirnos al volumen de una región del espacio, usamos como unidad la equivalente a una unidad de longitud al cubo; tomando así el área correspondiente a un ***cubo*** (***cubo:*** figura encerrada o delimitada por seis caras cuadradas congruentes o iguales que se interceptan perpendicularmente; sus caras son paralelas) de lados una unidad;

$$1\,U \times 1\,U \times 1\,U = 1\,U^3 \text{ “unidad de volumen”.}$$

Por ejemplo:

$1\,cm \times 1\,cm \times 1\,cm = 1\,cm^3$ $= 1\,cc = 1\,ml = 0{,}001\,litros = \frac{1}{1000}\,litros$ $10\,cm \times 10\,cm \times 10\,cm = 1\,dm^3$ Un decímetro cúbico $= 1000\,cc = 1\,litro$ $1\,m \times 1\,m \times 1\,m = 1\,m^3$ $1\,pulg \times 1\,pulg \times 1\,pulg = 1\,pulg^3$ $1\,pié \times 1\,pié \times 1\,pié = 1\,pié^3$	$1\,U^3$ 

- **Volumen de un cubo:** como un cubo se caracteriza por tener sus lados, también llamados aristas, iguales y perpendiculares, para hallar el volumen se eleva al cubo la longitud de cualquiera de los lados (L) de la figura.

$V = L^3$ Su área superficial será la suma de las áreas: $S = 6\,L^2$ $V = (3\ cm)^3 = 3^3\ cm^3 = 27\ cm^3$ $S = 6 \times 9\ cm^2 = 54\ cm^2$	

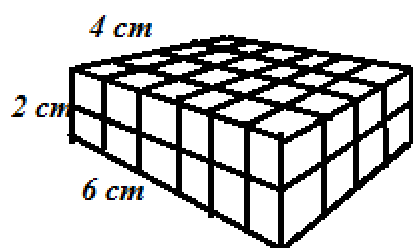
Paralelepípedo: figura encerrada o delimitada por seis caras rectangulares que se interceptan perpendicularmente; sus caras son paralelas. Su volumen será la cantidad de unidades cúbicas que contiene; es el producto de sus tres lados o dimensiones.

$$V = (ancho \times alto \times largo\,)U^2$$

$$V = 4\ cm \times 2\ cm \times 6\ cm = 48\ cm^3$$
O
$$V = (4\ \times 2 \times 6)\ cm^3 = 48\ cm^3$$

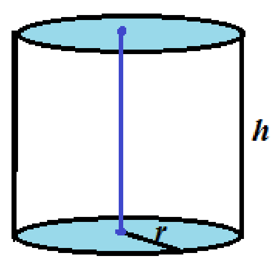
Su área superficial será la suma de las áreas de las 6 caras.

$$S = 2(6 \times 2) +\ 2(4 \times 2) + 2(6 \times 4)\ cm^2$$
$$S = 88\ cm^2$$



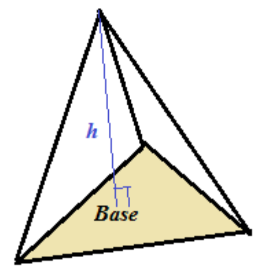
Cilindro circular recto: figura encerrada o delimitada por dos “tapas” circulares paralelas y una pared lateral de altura h, perpendicular a ellas; su volumen será:

$$V = (A_{Base} \times altura)\ U^3$$
$$V = \pi\, r^2\, h\ \ U^3$$



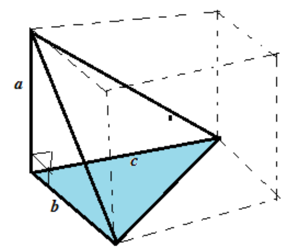
Su área superficial será la suma de las áreas de la base $A_{Base} = \pi r^2$ y el lateral $A_{lateraal} = 2\pi r h$.

$$A = (\pi\, r^2 + 2\pi r h)\; U^2$$



Pirámide de base triangular: figura encerrada o delimitada por cuatro caras triangulares. Su volumen será la cantidad de unidades cúbicas que contiene; El volumen es la tercera parte del producto entre el área de la base y su altura.

$$V = (A_{Base} \times altura\;) U^3$$

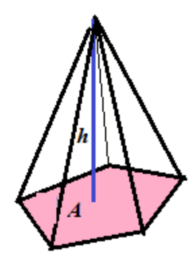


$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{a \times b}{2} \times c\right) U^3$$

Su área superficial será la suma de las áreas de las 4 caras.

$$S = A_{Base} + A_{cara\;1} + A_{cara\;2} + A_{cara\;3}$$

Análogamente para ***Pirámides de base con área A y altura h:***



$$V = \frac{1}{3}(A_{Base} \times altura)\; U^3$$

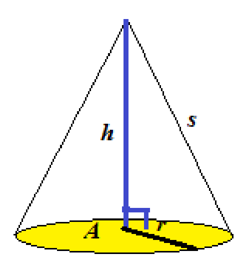
Su área superficial será la suma de las áreas de las caras.

$$A = (A_{Base} + 5\; áreas\; laterales)\; U^2$$

Igualmente, para un cono circular recto:

$$V = \frac{1}{3}(A_{Base} \times altura)\; U^3$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\, r^2\, h\;\; U^3$$



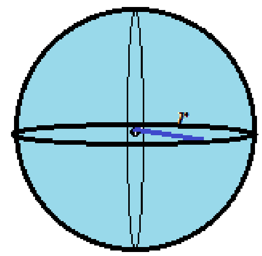
Su área superficial será la suma de las áreas de la base $A_{Base} = \pi r^2$ y el área lateral $A_{lateraal} = \pi r s$.

$$A = (A_{Base} + A_{lateraal})\ U^2$$

Esfera: figura tridimensional que contiene todos los puntos del espacio cuya distancia a un punto fijo, llamado centro, es menor o igual a una distancia constante $\boldsymbol{r}$, llamada radio:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3\ U^3$$

Su área superficial será: $A = 4\pi r^2\ U^2$



FIN SEMEJANZA, CIRCUNFERENCIA, ÁREAS Y VOLÚMENES.