Inducción matemática

2. Método de demostración por inducción matemática.

Ejercicios: (1 hora)

Analice si es verdadera (V) o falsa (F), cada una de las siguientes afirmaciones. En caso de considerarla falsa, busque un contraejemplo, y en caso de considerarla verdadera trate de demostrarla mediante inducción matemática.

a. $(\forall n \in \mathbb{N})\ (P_n: 1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) = ½\ (3n^2 - n))$
b. $(\forall n \in \mathbb{N})\ (P_n: 2^{2n} - 1\ es\ múltiplo\ de\ 4\ )$
c. $(\forall n \in \mathbb{N})\ (P_n: 1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + ... + n(n + 2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}\ )$
d. "La suma de tres enteros consecutivos es siempre divisible por 3"

NOTA: Tres enteros consecutivos: "$n + (n + 1) + (n + 2)$"

Solución del primer enunciado como ejemplo

a. $(\forall n \in \mathbb{N})\ (Pn: 1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) = ½\ (3n^2 - n) = \frac{3n^2 - n}{2})$

Paso 1

P1: $1 = \frac{3(1)^2 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

P2: $1 + 4 = \frac{3(2)^2 - 2}{2} = \frac{12 - 2}{2} = 5$

Efectivamente se cumple.

Paso 2

Se supone verdadero P_k: para los primeros k términos.

$1 + 4 + 7 + ... + (3k - 2) = \frac{3k^2 - k}{2}$

Paso 3

Se demuestra que es verdadero P_{k+1}: para los primeros k + 1 términos.

1 + 4 + 7+. . . +(3 (k + 1) − 2) = $\frac{3(k+1)^2-(k+1)}{2}$

Se reescribe la suma indicando hasta el término k y se le suma el siguiente k + 1 se muestra;

1 + 4 + 7+. . . + (3k − 2) + (3(k + 1) − 2) = $\frac{3(k+1)^2-k-1}{2}$

Se sustituye por la hipótesis del Paso 2

$$\frac{3k^2-k}{2}+\ +(3(\mathrm{k}\ +\ 1)-\ 2)=\frac{3\ (\mathrm{k}\ +\ 1)^2\ -\ \mathrm{k}\ -\ 1}{2}$$

$$\frac{3k^2-k}{2}+(3k+3-2)=\frac{3\ (\mathrm{k}^2+2\mathrm{k}+1)\ -\ \mathrm{k}\ -\ 1}{2}$$

$$\frac{3k^2\ -\ \mathrm{k}}{2}+(3\mathrm{k}+1)\ 1\ =\frac{3\ \mathrm{k}^2+5\mathrm{k}+2}{2}$$

$$\frac{(3k^2\ -\ \mathrm{k})+(6\mathrm{k}+2)}{2}=\frac{3k^2+5\mathrm{k}+2}{2}$$

Efectivamente son iguales:

$$\frac{3k^2+6k-k+2}{2}=\frac{3k^2+5k+2}{2}$$

Paso 4

Conclusión: $(\forall n \in \mathbb{N})(Pn$: 1 + 4 + 7 + ⋯ + (3$n$ − 2) = ½ (3n^2 − n))