

FÍSICA I

Diego Alejandro Torres Galindo¹
Físico Universidad Nacional de Colombia.

2004

¹datorresg@unal.edu.co

Índice general

Introducción	xv
0.1. Presentación	xvii
0.2. Objetivos generales	xvii
0.3. Objetivos específicos	xvii
0.4. Explicación metodológica	xvii
1. Cinemática	1
1.1. Introducción	1
1.2. Evaluación de conceptos previos	1
1.3. Vectores	2
1.3.1. Definición de vector y operaciones	2
1.3.2. Algebra de vectores	4
1.3.3. Componentes de un vector y sistemas de coordenadas	9
1.4. El concepto razón de cambio	13
1.5. Velocidad y aceleración	16
1.5.1. Definición de velocidad y aceleración	18
1.6. Movimiento en una dimensión	21
1.6.1. Movimiento a velocidad constante	22
1.6.2. Movimiento a aceleración constante	25
1.7. Movimiento en dos o mas direcciones	35
1.7.1. Movimiento circular uniforme	42
1.8. Algunas aplicaciones	46
1.9. Taller experimental: Cinemática del movimiento unidimensional.	53
1.9.1. Cuestionario	53
1.9.2. La experiencia	54
1.10. Resumen y glosario	56
1.11. Evaluación	57
1.12. Información de retorno	59

2. Leyes de Newton	
(Primera parte)	67
2.1. Introducción	67
2.2. Evaluación de conocimientos previos	68
2.3. Primera ley: La inercia.	69
2.4. Segunda ley: La fuerza.	73
2.4.1. La masa	74
2.4.2. La fuerza	75
2.5. La tercera ley: Acción y reacción	79
2.6. Unidades de medida	83
2.6.1. Medidas de longitud	83
2.7. Taller experimental: Segunda ley de Newton	85
2.7.1. Cuestionario	85
2.7.2. La experiencia	86
2.8. Resumen y glosario	88
2.9. Evaluación	89
2.10. Información de retorno	90
3. Leyes de Newton	
(Segunda parte)	95
3.1. Introducción	95
3.2. Evaluación de conocimientos previos	95
3.3. ¿Como analizar problemas con ayuda de las leyes de Newton?	96
3.4. Fuerza gravitacional, peso y campo gravitatorio	102
3.4.1. Fuerza gravitatoria de una esfera	105
3.5. Máquinas y fuerzas de fricción	108
3.5.1. Movimiento de un tren con tres vagones	108
3.5.2. Movimiento de un tren con N vagones	110
3.5.3. Fuerza de fricción	111
3.5.4. Fuerzas elásticas	117
3.6. Algunas aplicaciones de las leyes de Newton	119
3.6.1. Máquina de Atwood	119
3.6.2. Dinámica de las gotas de lluvia	121
3.6.3. La suma de fuerzas	123
3.7. Taller experimental: Carácter vectorial de las fuerzas.	124
3.7.1. Cuestionario	124
3.7.2. La experiencia	125
3.8. Resumen y glosario	126

3.9. Evaluación	128
3.10. Información de retorno	130
4. Momentum lineal	137
4.1. Introducción	137
4.2. Evaluación de conocimientos previos	138
4.3. Momentum lineal	138
4.4. El centro de masa	144
4.4.1. Cálculo del centro de masa	149
4.5. Conservación de momentum lineal	151
4.6. Las coordenadas del centro de masa	152
4.7. Choques en una dimensión	153
4.8. El impulso	155
4.9. Taller experimental: Choque en dos dimensiones.	156
4.9.1. Cuestionario	157
4.9.2. La experiencia	157
4.10. Resumen y glosario	161
4.11. Evaluación	163
4.12. Información de retorno	164
5. Trabajo y energía	169
5.1. introducción	169
5.2. Evaluación de conocimientos previos	170
5.3. Solución de la ecuación $m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ en una dimensión	170
5.4. El trabajo y la energía	173
5.5. Trabajo debido a una fuerza constante	174
5.6. Potencia	177
5.7. Trabajo debido a una fuerza variable	179
5.8. La energía y sus transformaciones	181
5.9. Energía mecánica	182
5.9.1. Energía cinética	182
5.9.2. Energía potencial	183
5.10. Fuerzas conservativas	188
5.11. Fuerzas no conservativas y conservación de la energía	191
5.12. Taller experimental: Conservación de la energía cinética	192
5.13. Resumen y glosario	193
5.14. Evaluación	195
5.15. Información de retorno	197

6. Momentum angular	205
6.1. Introducción	205
6.2. Evaluación de conocimientos previos	206
6.3. Momentum angular de una partícula	206
6.3.1. Calculo del momentum angular de una partícula que se mueve en el plano (x,y)	207
6.4. Torque	209
6.5. El momento de inercia	211
6.6. Cinemática rotacional	217
6.7. Trabajo y energía en un movimiento rotacional	222
6.7.1. Energía cinética rotacional	223
6.7.2. Movimiento de rotación y translación simultáneos . . .	224
6.8. Taller experimental: Determinación de los momentos de Inercia	225
6.9. Resumen y glosario	229
6.10. Evaluación	231
6.11. Información de retorno	232
7. Movimiento periódicos	235
7.1. Introducción	235
7.2. Evaluación de conocimientos previos	235
7.3. Movimiento armónico simple	236
7.3.1. Descripción del movimiento armónico por medio de la función seno	237
7.3.2. Velocidad y aceleración en un movimiento periódico .	239
7.4. Energías cinética y potencial en el movimiento armónico simple	241
7.5. Movimiento circular uniforme	242
7.6. Oscilaciones en un péndulo simple	244
7.7. Oscilaciones amortiguadas	248
7.8. Oscilaciones forzadas	251
7.9. Movimiento Ondulatorio	252
7.9.1. Tipos de ondas	253
7.9.2. Aplicaciones en Colombia:	254
7.10. Taller experimental: El péndulo físico	255
7.11. Resumen y glosario	259
7.12. Evaluación	260
7.13. Información de retorno	261

8. Calor y temperatura	267
8.1. Introducción	267
8.2. Evaluación de conocimientos previos	268
8.3. Calor y temperatura	268
8.3.1. Ley cero de la termodinámica	270
8.3.2. ¿Como medimos la temperatura?	270
8.4. Calor específico y capacidad calorífica	274
8.5. Fusión y vaporización	276
8.6. Transferencia de calor	276
8.7. Combustibles y alimentos	278
8.8. Aplicaciones	279
8.9. Taller experimental: Dilatación lineal.	280
8.10. Evaluación	282
8.11. Información de retorno	283
8.12. Evaluación	285
9. Fluidos	289
9.1. Introducción	289
9.2. Evaluación de conocimientos previos	290
9.3. Propiedades básicas de los fluidos	290
9.3.1. Presión	290
9.3.2. Densidad	292
9.3.3. Gravedad específica ó densidad relativa	293
9.3.4. El peso específico	293
9.3.5. La Viscosidad	293
9.3.6. Tensión Superficial y Capilaridad	295
9.3.7. Capilaridad	297
9.3.8. Presión en un fluido	299
9.4. Estática de Fluidos	301
9.4.1. Principio de Arquímedes	303
9.5. Dinámica de fluidos	304
9.5.1. ¿Cómo se mide el flujo?	305
9.6. Taller experimental	308
9.7. Resumen y glosario	309
9.8. Evaluación final	311
9.9. Información de retorno	312

A. Estadística y manejo de datos	315
A.1. Introducción	315
A.2. Evaluación de conocimientos previos	316
A.3. Procesos y variables aleatorias	316
A.3.1. Función densidad y distribuciones discretas.	319
A.3.2. Función densidad y distribuciones continuas	322
A.3.3. Valor medio y desviación estándar	323
A.4. Distribuciones teóricas	325
A.4.1. Distribución binomial	326
A.4.2. Distribución de Poisson	329
A.4.3. Distribución Gaussiana o normal	331
A.5. Distribuciones experimentales	334
A.5.1. Histogramas	335
A.5.2. Muestreo y estimación de parámetros	337
A.5.3. La desviación estándar de los promedios	340
A.6. Errores en las mediciones	340
A.6.1. Propagación de errores	341
A.7. El promedio ponderado	347
A.8. Comparación de valores experimentales	350
A.9. Ajuste de curvas: método de los mínimos cuadrados	350
A.10. Taller experimental: Histogramas y Distribución de Gauss	354
A.10.1. Materiales	354
A.10.2. La experiencia	354
A.11. Resumen y glosario	356
A.12. Evaluación	357
B. Magnitudes y unidades de medida	359
B.1. Factores de conversión de unidades	361
C. Notación científica	365

Índice de cuadros

1.1. Relaciones útiles al estudiar movimientos acelerados.	46
8.1. Calor específico de algunas sustancias a 25° y a presión atmosférica normal. Nótese el gran valor de calor específico para el agua líquida.	275
8.2. Poder calorífico de algunos combustibles y alimentos.	279
A.1. 100 mediciones de voltaje realizadas con el mismo equipo dentro de la universidad.	336
A.2. Conversión de datos de la tabla A.1 a una tabla de frecuencias, se ha hecho x = voltaje, la tabla se ha representado gráficamente en la figura A.6.	337
A.3. Tiempos de caída obtenidos en la determinación del momento de inercia.	346
A.4. Datos tomados de un experimento en el que se pretende determinar la vida media del muón.	349
B.1. Unidades físicas del sistema internacional (SI), las cantidades con el símbolo * hacen referencia a magnitudes suplementarias.	360
B.2. Múltiplos y submúltiplos utilizados en las unidades de medida.	360

Índice de figuras

1.1.	Signo de la aceleración de acuerdo a la elección del sistema de coordenadas, el cero del sistema se ha situado en el suelo. En (a) el sistema de coordenadas está de tal forma que aumenta hacia arriba y disminuye hacia abajo, de esta forma la aceleración, que siempre apunta hacia abajo, tiene el signo negativo. En (b) el sistema de coordenadas aumenta hacia abajo y disminuye hacia arriba, en este caso la aceleración tiene el signo positivo.	33
1.2.	Gráfico que muestra la posición inicial y final del objeto, el desplazamiento se realiza hacia los valores negativos del eje Z , y la gravedad es negativa.	51
1.3.	Disposición del experimento a realizar. El timbre es una rueda giratoria con un determinado tiempo de giro que posee un piñon que deja una muestra cada vez que presiona la cinta contra el papel carbón. El carrito se desliza libremente por el plano inclinado halando la cinta. No hay presión alguna entre el timbre y la cinta. exceptuando cuando se deja la marca por la presión del carbón.	54
2.1.	Dos elementos para simular sistemas aislados, (a) colchón de aire bidimensional, (b) colchon de aire unidimensional, denominado también riel de aire	73
2.2.	Montaje experimental para el experimento de segunda ley de Newton. Se tienen 2 masas diferentes en la cual M_1 se encuentra sobre una mesa y está unida a la masa M_2 por medio de una cuerda inextensible y de masa despreciables. La masa M_2 se encuentra bajo la acción de la gravedad y le transmite la fuerza a la masa M_1 por medio de la cuerda.	86

- 2.3. Montaje experimental para el experimento de segunda ley de Newton. Ahora se ha agregado el timbre con el objetivo de medir la aceleración. 87

- 3.1. Máquina de Atwood. (a) muestra el esquema de la máquina, esta consiste en una polea fija la cual sostiene dos masas diferentes por medio de una cuerda inextensible. En (b) se muestran los diagramas de fuerza sobre las dos masas. La fuerza de tensión es igual sobre las dos masas, sin embargo la fuerza de gravedad es diferente en cada masa, lo que origina que se tenga una fuerza neta diferente de cero y por lo tanto un movimiento de las masas. 119
- 3.2. Mesa de Fuerzas: consta de una mesa con un tornillo en el centro, el cual es concéntrico con marcas sobre la mesa que permiten medir el ángulo de las masas que penden de ellas. Cuando el anillo central está en equilibrio sin tocar el tornillo, podemos decir que el sistema se encuentra en equilibrio. El número de masas mínimo a utilizar es de dos. 125

- 4.1. El movimiento de una bola se hace alrededor de su centro de masa, su centro de masa describe un movimiento parabólico a pesar que las esferas individuales efectúan un movimiento muy complicado para ser descrito fácilmente. 146
- 4.2. Montaje del experimento de conservación del momentum. La esfera incidente golpea a la esfera blanco y esta última cae sobre el papel carbo que deja una huella sobre el papel blanco, de manera que podemos medir la distancia de desplazamiento. 158

- 6.1. Diversos ejemplos de como se puede tener diferentes valores de la fuerza y el torque sobre una rueda de radio R 212
- 6.2. Torque para una partícula que gira alrededor del eje z con una velocidad \mathbf{v}_j a una distancia \mathbf{R}_j del eje z , y con una masa m_j . 213
- 6.3. Movimiento de rotación de una partícula en un plano. Los vectores radial \mathbf{I}_r y acimutal \mathbf{I}_θ son mostrados en la figura, los dos vectores son mutuamente perpendiculares, y es por ello que el vector acimutal describe el movimiento de rotación alrededor del eje, mientras en vector radial describe el movimiento de la partícula alejándose del eje. 218

6.4.	Montaje experimental para el taller de medición del momento de inercia. Sobre un tambor rotante de radio r se encuentra un objeto con momento de inercia I . Un extremo de la cuerda se encuentra arrollada alrededor del tambor. En el otro extremo de la cuerda se encuentra atado un objeto de masa m . Cuando el objeto cae por acción de la gravedad hace que el disco rote junto con el objeto que tenga sobre él.	226
7.1.	Diagrama de distancia contra tiempo en un movimiento periódico de la forma $x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$	239
7.2.	Velocidad contra tiempo en un movimiento periódico, el periodo T es el mismo que en la gráfica de posición contra tiempo.	240
7.3.	Aceleración contra tiempo en un movimiento periódico.	241
7.4.	Diagrama de fuerzas del péndulo simple. La longitud de la cuerda es l y la masa es m , θ es el ángulo de desplazamiento. La tensión de la cuerda \mathbf{T} y la componente del peso $mg \cos(\theta)$ son iguales, de lo contrario el péndulo tendría una cuerda que se estiraría, lo cual no es la suposición inicial. En el texto se muestra como en este sistema se encuentra una ecuación de la forma $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta$ que corresponde a un movimiento armónico simple para pequeñas oscilaciones.	245
7.5.	Propagación de una onda como un pulso transversal en una cuerda en (a). Y como un pulso longitudinal en un resorte en (b).	254
7.6.	Péndulo físico: la masa M se puede desplazar a lo largo de la varilla, lo cual hace que el centro de masa del sistema entero cambie. La varilla tiene una masa m	258
8.1.	Montaje experimental para determinar el coeficiente de dilatación lineal del cobre, cada vez que la varilla se dilata y hace contacto con el tornillo micrométrico, se cierra el circuito y se enciende el bombillo.	282

- 9.1. Principio de Pascal. Las fuerzas que actúan sobre una parte del fluido se transmiten al interior del mismo y al recipiente que lo contiene. En este caso el embolo ejerce una fuerza F sobre el área determinada por el contacto entre el embolo y el fluido, esto define una presión, esta presión es transmitida a todas las partes del fluido y a las paredes del recipiente. 292
- 9.2. Montaje para la medición de la viscosidad de un fluido, P_1 y P_2 son las presiones de entrada y salida en los extremos del tubo. Las flechas representan la velocidad de las moléculas del líquido dentro del tubo, en los extremos la velocidad es menor que en el centro del tubo. 294
- 9.3. Tensión superficial en una gota de agua. La gota puede ser vista como un agregado de moléculas de agua que se atraen unos a otros, al lado derecho hemos tomado 3 moléculas representativas, las dos que se encuentran en el interior soportan iguales fuerzas por todos los costados, de tal manera que la suma total de estas fuerzas es cero, pero la molécula 3 que se encuentra en la superficie no siente estas fuerzas, la diferencia de fuerzas hace que se genere una tensión en la superficie, de tal forma que para que la sumatoria de fuerzas sea igual a cero la única opción que tiene el sistema es ocupar el mínimo posible de volumen. 296
- 9.4. Capilaridad. El comportamiento capilar del agua y del mercurio es diferente, esto es debido a la diferencia en la tensión superficial de los dos fluidos y las fuerzas de adhesión entre el fluido y el material. En los dos casos la superficie del líquido se curva, en el agua la fuerza de cohesión entre sus moléculas es menor que la fuerza de adhesión en la superficie de contacto entre el agua y el vidrio, lo que da lugar a una forma cóncava. En el caso contrario, el mercurio tiene una fuerza de cohesión entre sus moléculas mayor que la fuerza de cohesión entre la superficie mercurio y vidrio, lo cual da lugar a una forma convexa. 298
- 9.5. Parámetros que intervienen en la capilaridad. En ángulo β es el formado por la curvatura del agua dentro del tubo, h es la altura que alcanza la columna del líquido y r el radio del capilar. 299

9.6.	La presión de un fluido en el fondo de un recipiente es igual a $P = \rho gh$, obsérvese que la presión es independiente del área del fondo del recipiente, solamente depende de la profundidad h del líquido, de la densidad y la gravedad.	300
9.7.	La presión que se ejerce sobre un fluido se transmite por igual a todo el fluido y a las paredes del recipiente que lo contienen, esto permite la creación del elevador hidráulico, que utiliza este principio de la siguiente forma: a la derecha una persona se para sobre el sistema en la zona en la cual el área del elevador es muy pequeña, el peso de la persona y la pequeña área producen una presión muy grande, la cual es transmitida a la zona en la cual se encuentra la casa, en esta zona el área es muy grande, y como la presión es la misma, la fuerza resultante será la suficiente para levantar la casa. El único inconveniente es que el desplazamiento es pequeño. Este principio se utiliza en los denominados <i>gatos</i> hidráulicos.	302
9.8.	Sobre un elemento de líquido, de volumen hA (h es la altura y A el área de la sección transversal), contenido en un recipiente de altura $H = h+y$, las fuerzas que actúan sobre este elemento son la fuerza producida por la presión superior p_0 , es decir p_0A , la fuerza de la presión inferior pA , y el peso mg	303
9.9.	Representación grafica de un esquema de flujo a través de un tubo cuya sección transversal A varia de A_1 hasta A_2 . P_1 , V_1 , ΔX_1 son la presión, la velocidad y la distancia inicial tomadas como parametros de entrada. P_2 , V_2 y ΔX_2 son las mismas cantidades pero en la salida.	305
9.10.	Tanque con sus dimensiones para el problema 43	307
A.1.	Ejemplo de dos dados uno perfecto (a) y otro cargado de manera exagerada (b).	319
A.2.	La figura de la izquierda corresponde a una distribución binomial para 15 intentos con una probabilidad de exito de 0.2. A la derecha se observa una distribución binomial para 15 intentos con una probabilidad de exito de 0.5. Notese como el valor mas probable, la media, se ha desplazado al aumentar la probabilidad, esto debido a que el valor medio es igual a Np	327

- A.3. Dos distribuciones de Poisson con medias diferentes, en la mas alta tenemos una media de 3, mientras que en la mas baja tenemos una media de 5. 330
- A.4. **Arriba:** Distribución Gaussiana, la relación entre la desviación estándar (σ) y el FWHM (Full Width at Half-Maximun), note que el FWHM es mayor que el σ . **Abajo:** se muestran tres diferentes distribuciones Gaussianas, la de color negro corresponde a $\sigma = 0,3$, la de color rojo corresponde a $\sigma = 0,5$ y la de color azul corresponde a $\sigma = 1$, note como la desviación estándar determina el ancho de la distribución. 332
- A.5. Área bajo la curva de la distribución Gaussiana entre diferentes límites, en **(a)** el área se encuentra entre $\mu + \sigma$ y $\mu - \sigma$, esta región bajo la curva corresponde a un 68.3 % del área total. Para **(b)** el área se encuentra entre $\mu + 2\sigma$ y $\mu - 2\sigma$, esto corresponde a un área efectiva de aproximadamente el 95.5 %. Para **(c)** el área se mide entre $\mu + 3\sigma$ y $\mu - 3\sigma$ que corresponde a un área total del 99.7 %. Notese como la mayor parte del área se encuentra entre los límites $\mu + \sigma$ y $\mu - \sigma$ 334
- A.6. Histograma de frecuencias de la tabla A.2. 338
- A.7. Línea recta que tiene como ecuación $y(x) = mx + b$, m se denomina la pendiente, y b es el valor de $y(0) = 0$. Los puntos alrededor de la recta son los puntos experimentales. 351

Introducción

Por **Física** se entiende el estudio de la naturaleza, este concepto es bastante amplio, ya que se ha descubierto que no se pueden trazar fronteras claras entre ciencias como la física y la química, por ejemplo. Sin embargo empezaremos afirmando que en realidad la física es el estudio de la naturaleza.

Históricamente la física empieza de manera formal con Galileo, el cual halló relaciones matemáticas en los comportamientos físicos, descubre por ejemplo que la caída de un cuerpo es proporcional al tiempo elevado al cuadrado. Años mas tarde Isaac Newton con ayuda de una muy poderosa herramienta, el cálculo, plantearía las tres leyes de Newton, *la inercia, fuerza igual a la variación temporal del momentum y la ley de acción y reacción*. Sin embargo ya en la antigüedad se habían realizado intentos por sistematizar los conocimientos, los filósofos de la antigua Grecia iniciaron sus estudios tratando de comprender el funcionamiento de la naturaleza, y Arquímedes planteo una serie de principios, el más conocido el de la palanca, para crear herramientas.

Sin lugar a dudas la historia de las ciencias es muy apasionante, y es además una guía de la historia y evolución de la sociedad. Cuando Sir. Isaac Newton escribió su libro “**Principios matemáticos de la filosofía natural**”. Se inicia una revolución técnica sin precedentes en la historia, el hombre empezó a adquirir conocimiento a un ritmo muy acelerado, y desde esa época no se ha detenido la producción de conocimientos a un ritmo tan acelerado. Se crean los ingenios, máquinas con principios físicos altamente optimizadas, y se desarrolla una rama de conocimientos denominada *Ingeniería*, (creación de ingenios). Es por lo tanto muy importante el plantear una distinción fundamental pero no rigurosa entre la ciencia y la ingeniería, la ciencia busca conocimientos novedosos y básicos, tratando de comprender el funcionamiento de la naturaleza. La ingeniería busca utilizar estos

conocimientos para mejorar la calidad de vida y el bienestar de la sociedad.

A principios del siglo pasado se inicia una nueva revolución científica denominada “mecánica cuántica”, que de la mano con la teoría de la relatividad le dan un nuevo aire a nuestro conocimiento de la naturaleza. También se inicia una gran revolución técnica, una gran mayoría de los equipos que usamos a diario utilizan principios cuánticos, teléfonos celulares, televisores, relojes y hasta los nuevos materiales con los cuales se construyen las gafas y lentes de contacto, o el laser con el cual ahora se realizan operaciones quirúrgicas, las radioterapias para el cáncer que utilizan materiales radiactivos, o la resonancia magnética nuclear en la exploración del cuerpo. La revolución tecnológica apenas empieza, nos encontramos en un mundo en continua construcción. Esta es sin lugar a dudas una época interesante.

En la actualidad la física se ha diversificado en áreas altamente especializadas, entre las cuales tenemos:

- Óptica.
- Óptica cuántica.
- Materia condensada.
- Estado sólido.
- Física nuclear.
- Física de partículas elementales.
- Teoría del caos.

Y muchas mas de las cuales trataremos de hablar a lo largo del presente texto.

A pesar de los avances técnicos y del conocimiento adquirido, los principios básicos de la física continúan intactos. Conceptos como conservación de la energía, momentum angular y lineal, se siguen usando tanto en la denominada física clásica como en la física moderna. El objeto de el presente texto es dar una introducción a estos conceptos, los cuales al ser aprendidos de manera firme y correcta servirán como herramientas fundamentales en el desarrollo de ingenios y soluciones a la sociedad.

0.1. Presentación

El texto que tiene en sus manos es un texto original, creado para las carreras de ingeniería de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia (UNAD). Por ser la educación a distancia un reto para la enseñanza se ha realizado un esfuerzo por crear un material que facilite y estimule el autoaprendizaje. Se espera que además el material sea una referencia a lo largo de su carrera y su vida profesional.

Encontrará al inicio de cada capítulo una lista de objetivos principales, una autoevaluación inicial el texto principal y finalmente una autoevaluación de lo visto en el capítulo. No se preocupe si no es capaz de responder las preguntas de control iniciales, lo que realmente se busca es que usted este en capacidad de contestarlas cuando termine el capítulo respectivo.

Como objetivos del presente texto tenemos:

0.2. Objetivos generales

1. Introducir conceptos fundamentales de la física para poder ser aplicados a la vida profesional.
2. Motivar el aprendizaje y uso de la física como herramienta vital en el desarrollo de soluciones en la vida práctica.
3. Comprobar experimentalmente algunas leyes físicas.

0.3. Objetivos específicos

1. Dotar al estudiante de herramientas lógicas, tanto físicas como matemáticas, para el desarrollo de problemas.
2. Motivar al estudiante a presentar de manera clara, rigurosa y concisa informes de laboratorio, y reportes de trabajo en los cuales utilice la física como herramienta.

0.4. Explicación metodológica

A lo largo de cada uno de los capítulos encontrará el siguiente esquema:

1. Introducción: En ella se da una justificación de la existencia del capítulo, además de los conceptos que se aprenderán en el mismo. A pesar de ser corta se ha buscado que sea lo suficientemente concisa para que tenga una idea clara de lo que se está buscando.
2. Evaluación de conocimientos previos: Se realizan en esta parte una serie de preguntas de control, para averiguar que grado de conocimiento se posee previamente del tema. Además sirve como guía de los conceptos que se aprenderán a lo largo del capítulo.
3. Desarrollo del tema: en esta parte se desarrollara el tema correspondiente al capítulo. Se hará especial énfasis en el desarrollo de técnicas matemáticas, además de ejemplos cotidianos para explicar los conceptos. Es muy importante que usted se de cuenta de la importancia de las matemáticas para la física, es una herramienta, y muy poderosa como se tratará de hacer ver.
4. Taller experimental: el taller tiene como propósito el aplicar los conceptos aprendidos en una experiencia de laboratorio. Los talleres van aumentando de dificultad a medida que avanza el texto, se espera que al final del trabajo usted este en capacidad de crear un taller experimental ideal. Es por eso que último capítulo dedicado a los fluidos tiene como taller experimental un taller que usted debe crear siguiendo unas pautas dadas. Lo mas importante es que usted utilice su imaginación para realizar este taller, la imaginación es mas importante que el conocimiento¹.
5. Evaluación: en esta sección se evalúan los conocimientos teóricos aprendidos, y su capacidad de emplearlos en la solución de problemas. Los problemas presentados requieren que usted halla leído cuidadosamente el material inicial, se espera que usted pueda solucionarlos todos. Puede darse el caso de que usted no logre solucionar un problema, en ese caso es muy importante que tenga en claro el por qué no ha podido solucionarlo y busque ayuda. Cuando no se tiene solución a un problema se debe tener en claro que es lo que dificulta su solución, y luego buscar ayuda en los recursos con que se cuenta, personas, libros, internet. En ocasiones se piensa que por encontrarse en un sitio aislado del mundo

¹Frase de Albert Einstein

no es posible solucionar los problemas, nuevamente la imaginación es la solución.

Para el aprendizaje de los conceptos se utilizan como herramientas fundamentales la matemática y la experimentación. La matemática involucrada en el texto se ha desarrollado de tal forma que a la par con el curso de física se este tomando un curso de calculo fundamental. Conceptos como derivación e integración, fundamentales para el desarrollo de la física, serán muy importantes a lo largo del texto, por lo cual se recomienda dar una mirada a los textos de matematicas que ha visto en cursos anteriores o actuales. En la bibliogarfia la referencia [1] encontrará un manual muy completo de formulas y tablas matemáticas.

Es muy importante que como estudiante se de cuenta desde el principio de la herramienta que es la matemática, en especial el calculo y la estadística. Se ha desarrollado un apéndice sobre estadística, es algo extenso, pero muy importante para su vida profesional, y ha sido desarrollado pensando en alumnos que se enfrenta por primera vez a los conceptos estadísticos.

Los ejemplos desarrollados han tratado de ser explicados en detalle, especialmente los pasos matemáticos, sin embargo es importante que se desarrollen de manera independiente los cálculos y los análisis desarrollados a lo largo del texto.

Al final de cada capítulo encontrará una pequeña sección de *palabras claves para búsqueda en Internet*, estas palabras claves se pueden digitar en un buen buscador de Internet, por ejemplo <http://www.google.com>, el cual es el buscador que yo recomiendo. La lista de paginas y textos será extensa, sin embargo es un buen ejercicio que busque algunas paginas y las abra. Actualmente internet proporciona una buena guia acerca de un tópico, sin embargo es solo una guia, y es por ello que usted deberá discriminar y tomar la información. Es un buen ejercicio.

Además de las palabras claves de Internet al final del capítulo usted encontrará una bibliografía de textos escritos que podrá consultar al final del texto. Una parte de la bibliografía se encuentra en ingles, otra parte es en español. Es importante que empiece a consultar algunos textos en ingles, ya que esto formará una parte muy importante en su ejercicio profesional. Una parte de los textos en español son textos como [9] y [20] son textos producidos en la Universidad Nacional de Colombia.

Cualquier observación acerca del libro se puede realizar al correo electrónico datorresg@universia.net.co. El proceso de escritura y reunión de

conceptos es una tarea ardua, y el lograr un texto final perfecto tiene como base una interacción constante entre las personas que utilizan el texto y el autor. Es por eso que espero que esta interacción se dé, y a partir de ella se obtengan beneficios para las futuras ediciones. El beneficio será triple, yo aprenderé usted aprenderá y los que utilicen el texto en el futuro aprenderán.

Diego Alejandro Torres.
Bogotá, Colombia.

Capítulo 1

Cinemática

1.1. Introducción

La cinemática se encarga de estudiar el movimiento sin preocuparse por sus causas, fue desarrollada desde la antigüedad, sin embargo los aportes mas importantes a la cinemática fueron dados por Galileo Galilei e Isaac Newton. El primero empezó a matematizar los resultados de sus observaciones llegando a conclusiones como que la distancia de caída de un cuerpo es proporcional al cuadrado del tiempo de caída. Newton creó el cálculo, junto con Leibnitz, y también encuentra las fórmulas matemáticas que rigen los movimientos.

El corazón de la física es la mecánica, por ello para poder entender de manera mucho mas amplia los conceptos físicos, es importante tener una herramienta muy poderosa, la matemática, por ello al inicio de esta unidad lo que haremos es desarrollar rápidamente algunas herramientas matemáticas que sin lugar a dudas usará a lo largo de su vida profesional.

1.2. Evaluación de conceptos previos

1. ¿Como se puede definir **movimiento**?
2. ¿Qué es una magnitud escalar y una vectorial?
3. ¿En donde se utilizan los velocímetros?
4. ¿Qué es acelerar?
5. ¿Qué es frenar?

1.3. Vectores

Utilizando los vectores las leyes de la física pueden ser escritas en una forma mas compacta, para ello vamos a ver la famosa segunda ley de Newton, en la notación corriente se puede escribir

$$\begin{aligned} F_x &= ma_x \\ F_y &= ma_y \\ F_z &= ma_z. \end{aligned} \tag{1.1}$$

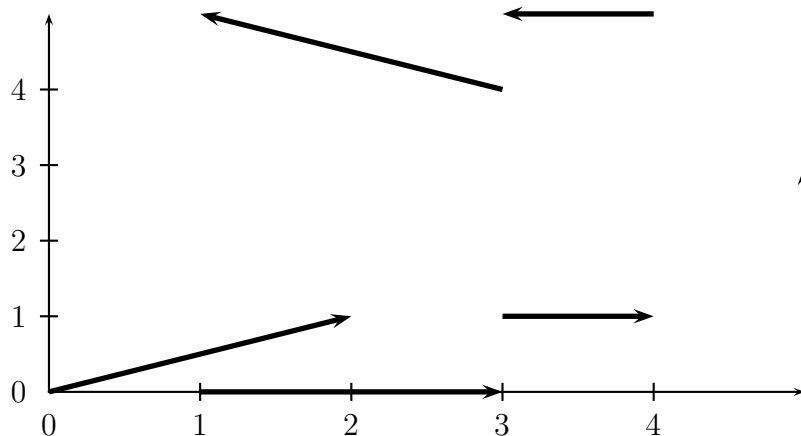
En notación de vectores simplemente escribimos

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a},$$

en donde las letras en negrilla simbolizan los vectores. La principal razón por la cual se introducen los vectores es por que simplifica la notación, mas adelante se vera que son útiles también por sus propiedades.

1.3.1. Definición de vector y operaciones

Un vector es un ente matemático que posee **magnitud y dirección** , además posee propiedades como la suma, resta, multiplicación por un escalar y dos tipos de producto el interno y el producto cruz. Un vector puede ser representado por un segmento de recta, o una flecha, en un espacio. Por ejemplo las flechas mostradas a continuación representan vectores.



Algo ha notar en la figura anterior es que se han ubicado los vectores dentro de un **sistema de coordenadas**, esto nos permite identificar su magnitud y su dirección. Es usual notar los vectores o por letras en negrilla (**A**), o por la letra y encima un símbolo de flecha \vec{A} , en este texto utilizaremos las negrillas para identificar vectores.

Los vectores tienen en común ciertas propiedades con los números naturales, por ejemplo en la suma, sin embargo son un poco más completos para describir ciertas características físicas. Cuando hablamos de los vectores como entes matemáticos nos referimos a que con ellos podemos efectuar operaciones. Por ejemplo la suma y la resta de vectores nos da otro vector, el producto interno nos da por el contrario un número real, y el producto cruz nos da otro vector. Las dos características más importantes de un vector son su magnitud y su dirección.

Magnitud: Es la longitud del vector, o la flecha. La magnitud de un vector **A** se indica por $|\mathbf{A}|$. Si la magnitud de **A** es $\sqrt{3}$ entonces se dice que $|\mathbf{A}| = \sqrt{3}$. La magnitud de un vector es un número real.

Dirección: Se refiere hacia donde apunta la flecha del vector, norte-sur, oriente-occidente, etc..

Es usual agregar otra característica denominada **sentido**, que se refiere a la línea recta sobre la cual se encuentra el vector, sin embargo desde el punto de vista físico solo nos interesa la magnitud y la dirección.

Si deseamos describir claramente una cantidad vectorial, debemos decir su magnitud y su dirección. Por ejemplo la velocidad es una magnitud **vectorial**, y para describirla debemos decir su magnitud (700 km/h por ejemplo), y su dirección (norte-sur por ejemplo); es por ello que los aviones tienen un **velocímetro**, que indica la velocidad del avión con respecto a la tierra y su dirección, por el contrario los carros no poseen velocímetro, solo poseen **rapidómetro** que es el que mide la rapidez, es decir la magnitud de la velocidad.

Dos vectores son iguales si tienen la misma magnitud y dirección. Esto se representa por,

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} \quad (1.2)$$

Si la longitud de un vector es igual a la unidad, entonces se dice que este vector es unitario, un vector unitario se nota como $\hat{\mathbf{A}}$. Además se dice que para un vector **A** existe un vector unitario paralelo $\hat{\mathbf{A}}$, tal que

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}, \quad (1.3)$$

es decir que se puede encontrar un vector unitario a partir de cualquier vector, simplemente es dividir por su magnitud. Y de manera inversa todo vector \mathbf{A} puede ser expresado como la multiplicación de su magnitud $|\mathbf{A}|$ por un vector unitario en la misma dirección $\hat{\mathbf{A}}$.

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}| \hat{\mathbf{A}}. \quad (1.4)$$

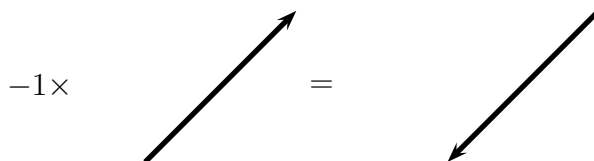
1.3.2. Algebra de vectores

Multiplicación por un escalar

Como vimos en la última parte un vector puede ser multiplicado por una cantidad escalar, una magnitud real en este caso. Es decir sea un vector cualquiera \mathbf{A} y una cantidad escalar d , podemos crear otro vector tal que

$$\mathbf{C} = d|\mathbf{A}| \quad (1.5)$$

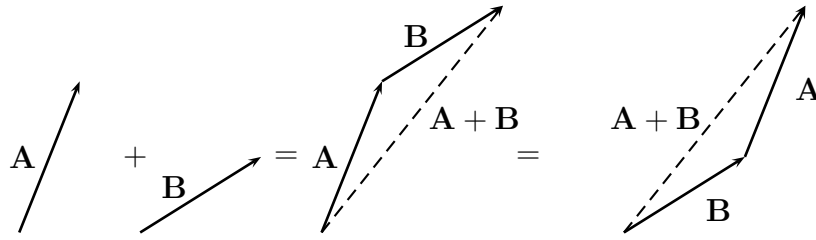
Un caso interesante es multiplicar el vector por -1, en este caso el resultado es otro vector con la misma magnitud pero dirección opuesta (antiparalela) al vector original. En el siguiente diagrama expresamos lo anterior



Si el escalar por el cual se multiplica es negativo y diferente de -1, entonces lo que se está cambiando es tanto la magnitud como la dirección. Solamente los escalares negativos pueden cambiar la dirección de un vector.

Suma de vectores

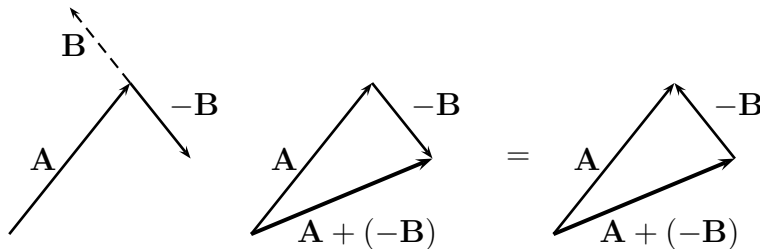
La suma de vectores posee una interpretación geométrica simple, si se tienen dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} , la suma $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ es equivalente a colocar en la punta del vector \mathbf{A} la cola del vector \mathbf{B} , o colocar en la punta del vector \mathbf{B} la cola del vector \mathbf{A} , y unir la cola del primer vector con la punta del segundo. Esto se muestra en el siguiente diagrama.



A la propiedad según la cual $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ se le denomina **conmutatividad**.

Resta de vectores

Para la resta de vectores podemos utilizar las dos operaciones antes vistas, la multiplicación por -1 y la suma, ya que cuando hacemos $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$, y la interpretación es que del vector \mathbf{A} estamos substrayendo el vector \mathbf{B} . En este caso lo que se hace es colocar la cabeza del vector \mathbf{B} con la cabeza del vector \mathbf{A} , y finalmente unir las dos colas. Lo anterior se muestra a continuación.



Como se ha visto hasta ahora se pueden utilizar argumentos geométricos para comprobar las operaciones vectoriales. Las siguientes leyes también pueden ser probadas geométricamente, y se dejarán como ejercicio al estudiante.

$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$	Ley conmutativa	(1.6)
$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$	Ley asociativa	(1.7)
$c(d\mathbf{A}) = (cd)\mathbf{A}$	Ley asociativa	(1.8)
$(c + d)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + d\mathbf{B}$	Ley distributiva	(1.9)
$c\mathbf{A} + \mathbf{B} = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$	Ley distributiva	(1.10)

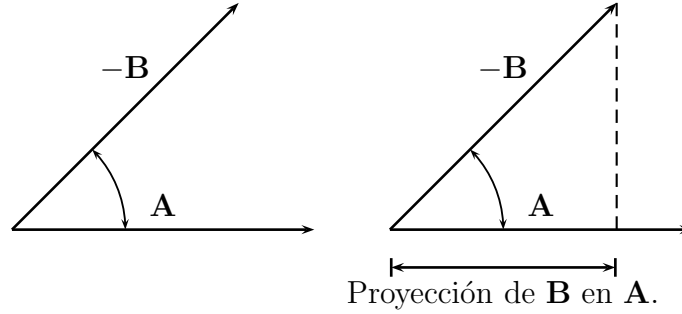
Producto escalar

Como ya habíamos mencionado existen dos tipos de productos, el escalar y el cruz. El producto escalar también es llamado producto punto. Este tipo de producto se denota $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, y es definido por

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos(\theta_{AB}). \quad (1.11)$$

Aquí $\cos(\theta_{AB})$ es el coseno del ángulo que forman los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} .

La cantidad $|\mathbf{B} \cos(\theta_{AB})|$ se puede interpretar como la proyección del vector \mathbf{B} a lo largo de la dirección del vector \mathbf{A} , es decir que es una medida de que parte del vector \mathbf{B} se encuentra en la misma dirección del vector \mathbf{B} , como se muestra en los siguientes diagramas.



Si $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$, significa que ó $\mathbf{A} = 0$, ó $\mathbf{B} = 0$, ó que los dos vectores son **perpendiculares**, es decir que el ángulo que forman es de 90° , ya que $\cos(90) = 0$.

Otro resultado importante es que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{B}|^2$. Es importante resaltar que el resultado del producto interno de dos vectores es siempre un escalar.

Ejemplo 1 *La ley de los cosenos:* Esta ley tiene una demostración muy simple con ayuda del producto interno.

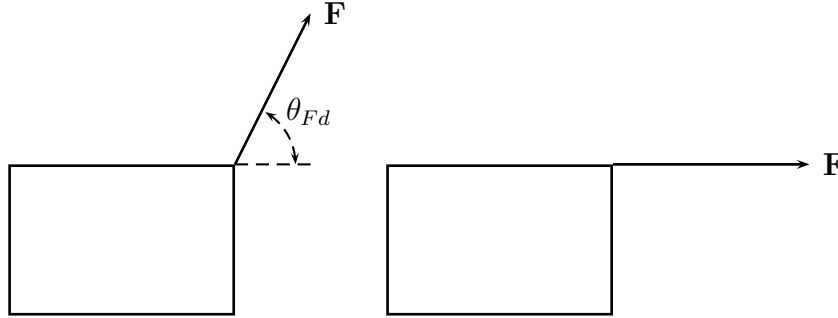
$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{A} + \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \cdot \mathbf{C} &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \\ |\mathbf{C}|^2 &= |\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{B}|^2 + 2|\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos(\theta_{AB}) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Ejemplo 2 *El trabajo como producto interno:* El concepto de trabajo es definido a partir del producto interno entre dos vectores, que representan

cantidades físicas, la fuerza y el desplazamiento. Cuando empujamos una caja por medio de una cuerda con una fuerza \mathbf{F} a lo largo de un trayecto que puede ser descrito por un vector \mathbf{d} , por ejemplo un camino de un metro en línea recta, la fuerza actuará según el ángulo que exista entre la fuerza aplicada y la dirección de movimiento. De esta forma el trabajo \mathbf{W} se define

$$\mathbf{W} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = |\mathbf{F}||\mathbf{d}| \cos(\theta_{Fd}) \quad (1.13)$$

Este trabajo es igual a la energía que se emplea en mover la caja, por ello para mover la caja de una manera mas eficiente es preferible empujarla en la misma dirección del movimiento, ya que en este caso $\cos(0) = 1$.



En el anterior diagrama se ve que es preferible efectuar la fuerza para arrastrar la caja en la misma dirección del desplazamiento que en otra dirección.

El producto Cruz

Este es el segundo tipo de producto entre vectores, a diferencia del producto punto el resultado de este producto es otro vector. Se denota como

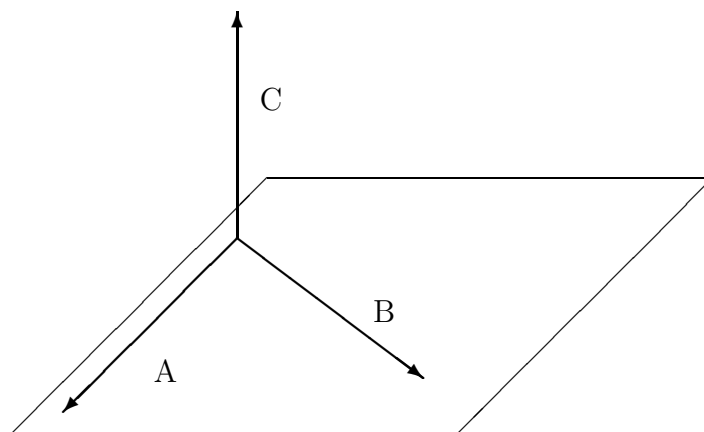
$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (1.14)$$

La magnitud de este nuevo vector es definida como

$$|\mathbf{C}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin(\theta_{AB}) \quad (1.15)$$

En donde θ_{AB} es el ángulo entre los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} . Para eliminar problemas en la definición de este ángulo, θ siempre se toma como el ángulo mas pequeño que 180° ó π radianes.

Geométricamente los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} forman un plano, y al colocarlos cola con cola el vector resultante $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es perpendicular al plano formado por los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} . Como se observa en el siguiente diagrama.



De la definición de producto cruz tenemos que,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (1.16)$$

Es decir que *el producto cruz no es conmutativo*, cuando se tiene que el producto tiene signo contrario al invertir los factores se dice que es *anticonmutativo*.

Si los dos vectores forman un ángulo de 0° , entonces el producto es un vector nulo, por ejemplo el producto cruz de un vector consigo mismo es nulo, ya que los dos vectores forman un ángulo de cero.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0. \quad (1.17)$$

Ejemplo 3 El producto cruz en física: Una importante aplicación del producto cruz es la descripción del movimiento de una partícula cargada eléctricamente en un campo magnético. La fuerza es proporcional a la carga eléctrica de la partícula, que denotamos como q , al campo magnético el cual está descrito por medio de un vector \mathbf{B} , y a la velocidad que está descrita por un vector \mathbf{v} . Se ha encontrado que esta fuerza es proporcional al seno del ángulo que forman los vectores velocidad y campo magnético, por lo cual se describe como

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (1.18)$$

De la ecuación (1.18) podemos extraer información muy importante:

- La fuerza es proporcional a la carga eléctrica, por lo tanto una partícula que no tenga carga no siente algún tipo de efecto por esta fuerza.

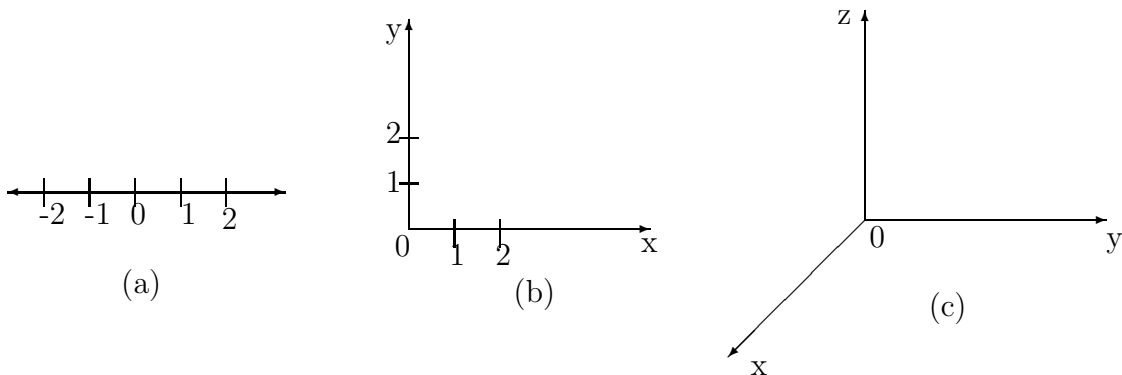
- *La fuerza se hace presente cuando hay una velocidad diferente de cero y un campo magnético.*
- *El movimiento se realiza en tres dimensiones, ya que la velocidad \mathbf{v} y el campo magnético \mathbf{B} forman un plano, y la fuerza es perpendicular a el plano formado.*

Es muy importante el empezar a realizar este tipo de análisis físico sobre las ecuaciones, ya que de esta forma podemos extraer mucha información utilizando poco espacio de papel.

1.3.3. Componentes de un vector y sistemas de coordenadas

Hasta el momento hemos introducido los vectores sin hacer referencia a un sistema de coordenadas, es decir no los hemos ubicado dentro de un sistema que facilite saber su dirección y magnitud. Ahora realizaremos esta introducción, ya que los sistemas de coordenadas son los que nos permiten aplicar toda la herramienta de los vectores a los casos físicos reales.

Un sistema de coordenadas puede ser unidimensional (de una dimensión como la línea recta), bidimensional (un plano) o tridimensional (el espacio). Existen sistemas de coordenadas mas complejos de una mayor cantidad de dimensiones, hablaremos de ellos en una corta sección de física moderna, sin embargo en la ingeniería corriente es suficiente con sistemas de hasta tres dimensiones. A continuación mostramos ejemplos de sistemas de coordenadas de una dimensión (a), dos dimensiones (b) y tres dimensiones (c).



En los diagramas anteriores se observa que cada eje está rotulado con el nombre del eje principal, x , y o z , y además tiene marcas que indican la distancia al origen. Un vector se suele colocar en algún tipo de sistema de coordenadas, la cola del vector se coloca en el origen, y la punta en algún lugar del sistema donde sea conveniente. De esta forma para un vector bidimensional tenemos solamente que indicar las coordenadas de la punta de la forma

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y), \quad (1.19)$$

y en el caso de un vector tridimensional

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z). \quad (1.20)$$

De esta forma estamos dando información acerca de la dirección del vector. La magnitud del vector la podemos hallar por medio de las formulas

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \rightarrow \text{Sistema bidimensional} \quad (1.21)$$

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \rightarrow \text{Sistema tridimensional.} \quad (1.22)$$

Y de esta forma damos información de la magnitud del vector.

Decimos que dos vectores son iguales si

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{B} \\ (A_x, A_y, A_z) &= (B_x, B_y, B_z), \end{aligned}$$

es decir que $A_x = B_x$, $A_y = B_y$ y $A_z = B_z$. **Dos vectores son iguales si lo son componente a componente.**

La multiplicación por un escalar es de la forma

$$c\mathbf{A} = (c \cdot A_x, c \cdot A_y) \rightarrow \text{Caso bidimensional} \quad (1.23)$$

$$c\mathbf{A} = (c \cdot A_x, c \cdot A_y, c \cdot A_z) \rightarrow \text{Caso tridimensional.} \quad (1.24)$$

La suma de vectores se realiza sumando componente a componente,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y) \rightarrow \text{Caso bidimensional} \quad (1.25)$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z) \rightarrow \text{Caso tridimensional.} \quad (1.26)$$

El producto punto es de la forma

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_x \cdot B_x, A_y \cdot B_y) \rightarrow \text{Caso bidimensional} \quad (1.27)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_x \cdot B_x, A_y \cdot B_y, A_z \cdot B_z) \rightarrow \text{Caso tridimensional.} \quad (1.28)$$

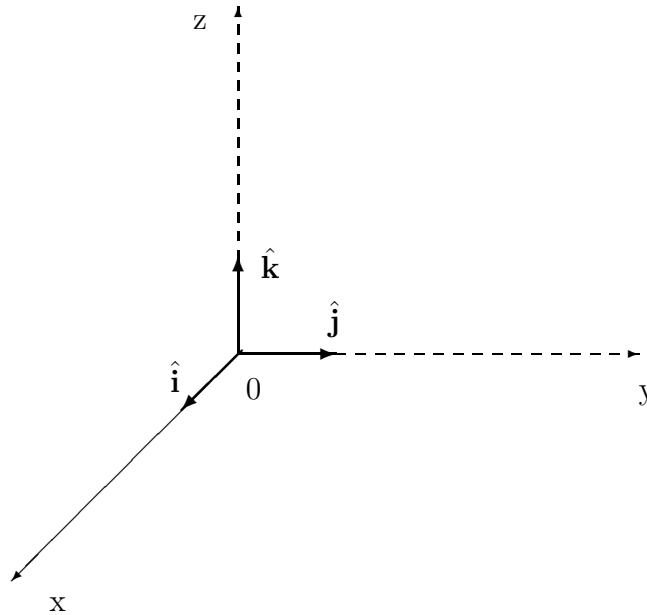
Para definir el producto cruz vamos primero a definir los vectores base. Estos vectores base son un conjunto de vectores ortogonales, es decir que su producto punto es igual a cero, unitarios, es decir que su longitud es igual a la unidad, y que se encuentran en las direcciones de cada eje.

A lo largo del eje x se le nota como $\hat{\mathbf{i}} = (1, 0, 0)$, a lo largo del eje y se le nota como $\hat{\mathbf{j}} = (0, 1, 0)$ y a lo largo del eje z se le nota como $\hat{\mathbf{k}} = (0, 0, 1)$.

De esta forma los vectores base tienen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} &= \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1 \\ \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} &= \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0 \\ \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} &= \hat{\mathbf{k}} \\ \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} &= \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} &= \hat{\mathbf{j}}.\end{aligned}\tag{1.29}$$

Una representación gráfica de los vectores base la vemos a continuación.



Cualquier vector lo podemos escribir en términos de los vectores base,

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= (A_x, A_y, A_z) \\ \mathbf{A} &= A_x \hat{\mathbf{i}} + A_y \hat{\mathbf{j}} + A_z \hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{A} &= A_x(1, 0, 0) + A_y(0, 1, 0) + A_z(0, 0, 1)\end{aligned}$$

Si queremos encontrar la magnitud de una componente del vector, solamente tenemos que realizar el producto punto entre el vector y el vector base a lo largo de esa componente,

$$\begin{aligned}
 A_z &= \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{k}} \\
 A_z &= (A_x, A_y, A_z) \cdot (0, 0, 1) \\
 A_z &= (A_x \cdot 0) + (A_y \cdot 0) + (A_z \cdot 1) \\
 A_z &= A_z
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

Con los vectores base es fácil definir el producto cruz,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x \hat{\mathbf{i}} + A_y \hat{\mathbf{j}} + A_z \hat{\mathbf{k}}) \times (B_x \hat{\mathbf{i}} + B_y \hat{\mathbf{j}} + B_z \hat{\mathbf{k}}) \\
 &= \hat{\mathbf{i}}(A_y B_z - A_z B_y) - \hat{\mathbf{j}}(A_x B_z - A_z B_x) + \hat{\mathbf{k}}(A_x B_y - A_y B_x) \\
 &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

La última matriz es una forma de notar el producto interno.

Ejemplo 4 Álgebra de vectores: Sean los vectores $(1, 3, 6)$ y $(3, -2, 4)$, ubíquelos en un diagrama tridimensional, obtenga la suma, la resta, el producto interno, y los vectores posibles por medio del producto cruz.

- El diagrama tridimensional lo puede realizar el lector muy fácilmente.
- La suma vectorial es para la convención de vectores $\mathbf{a} = (1, 3, 6)$ y $\mathbf{b} = (3, -2, 4)$, de la forma

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (1, 3, 6) + (3, -2, 4) \\
 &= (4, 1, 10) \\
 \mathbf{b} + \mathbf{a} &= (3, -2, 4) + (1, 3, 6) \\
 &= (4, 1, 10)
 \end{aligned}$$

De manera que $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.

- La resta es de la forma

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} - \mathbf{b} &= (1, 3, 6) - (3, -2, 4) \\
 &= (-2, 5, 2) \\
 \mathbf{b} - \mathbf{a} &= (3, -2, 4) - (1, 3, 6) \\
 &= (2, -5, -2)
 \end{aligned}$$

De esta forma se ve que $\mathbf{a} - \mathbf{b} = -(\mathbf{b} - \mathbf{a})$, el resultado es un vector de igual magnitud, pero que apunta en dirección contraria, observe el signo menos

- El producto interno es de la forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (1, 3, 6) \cdot (3, -2, 4) \\ &= 3 + (-6) + 24 = 21 \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} &= (3, -2, 4) \cdot (1, 3, 6) \\ &= 3 + (-6) + 24 = 21\end{aligned}$$

- El producto cruz es de la forma

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (12 - (-12))\hat{\mathbf{i}} - (4 - 18)\hat{\mathbf{j}} + (-2 - 9)\hat{\mathbf{k}} \\ &= 24\hat{\mathbf{i}} + 14\hat{\mathbf{j}} - 11\hat{\mathbf{k}} \\ &= (24, 14, -11) \\ \mathbf{b} \times \mathbf{a} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} \\ &= (-12 - 12)\hat{\mathbf{i}} - (18 - 4)\hat{\mathbf{j}} + (9 - (-2))\hat{\mathbf{k}} \\ &= -24\hat{\mathbf{i}} - 14\hat{\mathbf{j}} + 11\hat{\mathbf{k}} \\ &= (-24, -14, 11)\end{aligned}$$

El vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es diferente al $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, apuntan en direcciones opuestas, como se ve del signo menos.

1.4. El concepto razón de cambio

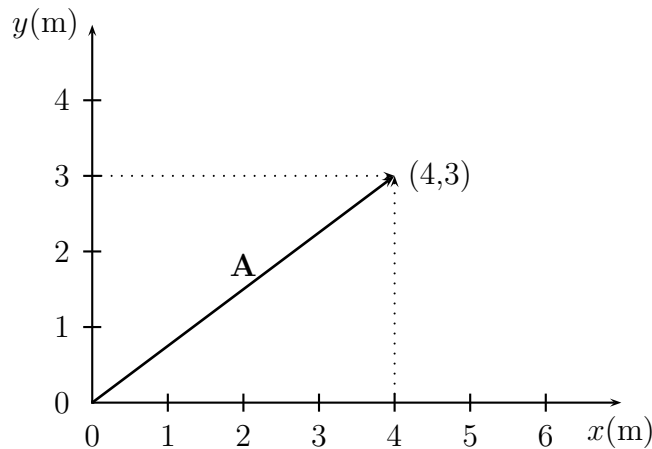
En nuestra vida cotidiana vemos como los eventos transcurren en el tiempo, la caída de las hojas, el movimiento de los carros, el movimiento de las manecillas del reloj. Todos estos fenómenos implican movimiento, y para que

este movimiento se realice es importante que transcurra un tiempo determinado. El concepto de cambio, ya sea en la posición, o en el estado de algo, está íntimamente ligado a que el tiempo transcurra.

Se define la razón de cambio de una cantidad cualquiera, como la división del cambio en la cantidad sobre el tiempo transcurrido en realizar el cambio,

$$\text{Razón de cambio de una cantidad} = \frac{\text{Cambio de la cantidad}}{\text{Tiempo transcurrido en el cambio}} \quad (1.32)$$

Supongamos que una persona se mueve en una plaza desde el punto (0,0) hasta el punto (5,3) en 10 segundos, vamos a suponer que estas medidas están en metros y que el movimiento lo realiza en línea recta. De esta forma la distancia total recorrida puede ser representada por un vector desplazamiento de la siguiente forma



La magnitud del desplazamiento es

$$|A| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ metros} \quad (1.33)$$

Este desplazamiento se realizó en 10 segundos, y nosotros deseamos conocer **la razón de cambio de la distancia**, es decir la velocidad promedio,

$$\begin{aligned} \text{Velocidad promedio} &= \frac{\text{Cambio en la posición}}{\text{Tiempo transcurrido en cambiar la posición}} \\ &= \frac{5 \text{ metros}}{10 \text{ segundos}} = 0,5 m/s. \end{aligned} \quad (1.34)$$

El concepto razón de cambio es uno de los más importantes en la física. Ya vimos cómo la razón de cambio del desplazamiento es la velocidad, de

la misma forma la razón de cambio de la velocidad es la denominada **aceleración**. A lo largo del texto haremos mención a otras importantes razones de cambio, lo importante es tener en claro que toda magnitud que cambia en el tiempo tiene asociada una razón de cambio.

La razón de cambio de una magnitud nos esta dando una medida de como esta cantidad está cambiando en el tiempo. Para el ejemplo de la velocidad promedio, vemos como si el tiempo empleado hubiese sido menor, por ejemplo 5 segundos, la velocidad hubiese sido mayor,

$$V = \frac{5m}{5s} = 1m/s.$$

O si por ejemplo hubiésemos recorrido el doble de distancia en el mismo tiempo, también hubiésemos necesitado una velocidad mayor para lograr esto.

De esta forma la razón de cambio nos da una medida de como está evolucionando una cantidad en el tiempo, y nos permite comparar con cantidades similares. Por ejemplo cuando se están realizando mediciones de el peso de dos niños que nacieron el mismo día, es muy conveniente mirar la manera como aumenta el peso a lo largo del tiempo. De esta manera podemos definir

$$\text{Evolución del peso} = \frac{\text{Cambio en el peso}}{\text{Tiempo empleado en cambiar el peso}}. \quad (1.35)$$

Se puede observar que el niño que tenga una mayor medida en la *evolución del peso*, pesará mas a medida que transcurra el tiempo.

Se suele notar los cambios en magnitudes por medio de la letra griega (Δ). Por ejemplo la razón de cambio de la posición, la velocidad promedio, se suele notar como,

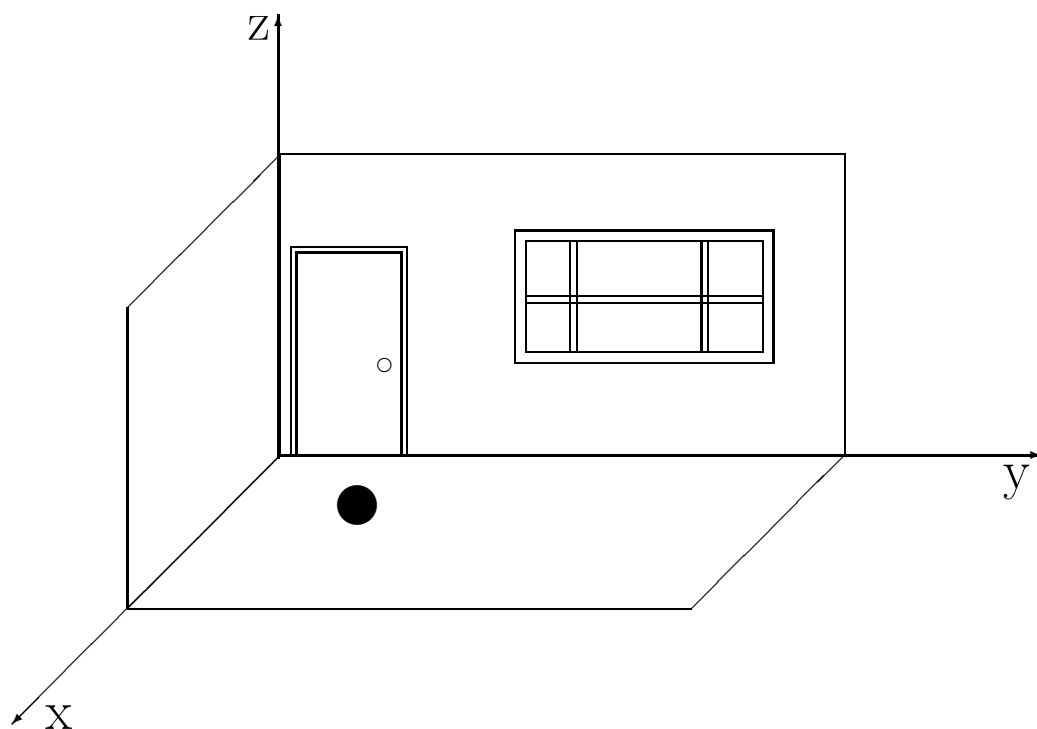
$$\begin{aligned} \text{Velocidad promedio} &= \frac{\text{Cambio en la posición}}{\text{Tiempo transcurrido en cambiar la posición}} \\ &= \frac{\mathbf{x}(t_2) - \mathbf{x}(t_1)}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{\Delta x}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

En donde $\mathbf{x}(t_1)$ se refiere a la ubicación del vector posición en el tiempo t_1 , $\mathbf{x}(t_2)$ se refiere a la ubicación del vector posición en el tiempo t_2 . Se ha realizado la resta de los dos vectores, lo cual da como resultado otro vector, y se ha dividido este nuevo vector por un escalar, el intervalo de tiempo transcurrido. De esta forma vemos como la velocidad es también un vector.

Ahora podemos pasar a estudiar dos conceptos muy importantes, la velocidad y la aceleración.

1.5. Velocidad y aceleración

Como ya hemos visto el desplazamiento de un objeto puede ser descrito por un vector, y para ello nos valemos de un sistema de coordenadas. Este sistema de coordenadas lo vamos a elegir en tres dimensiones, con ejes x , y , z . Y vamos a colocar este sistema de coordenadas de tal manera que describa un **Sistema de referencia**, por ejemplo colocamos nuestro sistema de coordenadas dentro de una habitación en donde realizamos nuestros experimentos, de esta forma podemos describir el mundo físico, ubicando sistemas de coordenadas adecuadamente dentro de los sistemas de referencia que deseamos estudiar. Por ejemplo podemos estudiar el movimiento de una pelota negra dentro de un cuarto, como se muestra en el siguiente dibujo.



En física se ubican los sistemas de referencia convenientemente, dentro de un átomo, dentro de un automóvil, en una galaxia, etc... de manera que

podamos estudiar de manera mas fácil el comportamiento de la naturaleza. ¿Puede el lector imaginar como describir un movimiento sin un sistema de referencia?.

La ubicación de la pelota dentro del cuarto puede describirse por medio de tres coordenadas (x_1, y_1, z_1) , y si esta se desplaza se necesitan otras tres coordenadas para describir el movimiento (x_2, y_2, z_2) , de esta manera el vector desplazamiento comienza en (x_1, y_1, z_1) y termina en (x_2, y_2, z_2) . Para hallar la distancia total recorrida tenemos que restar la posición final menos la posición inicial,

$$(x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \quad (1.37)$$

La magnitud del desplazamiento es la magnitud del anterior vector

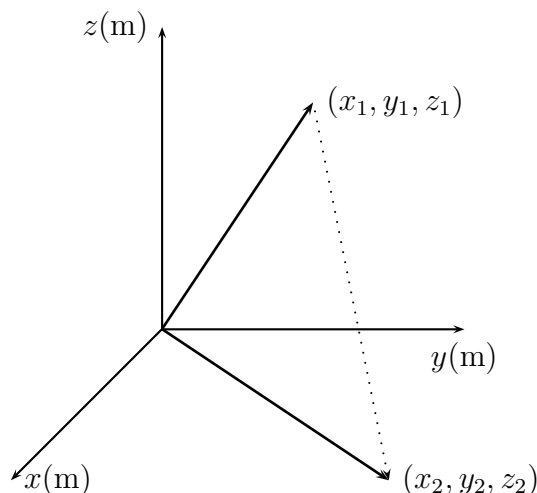
$$\begin{aligned} \text{Desplazamiento} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \\ \mathbf{S} &= \mathbf{A}_{Final} - \mathbf{A}_{Inicial}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

De manera que podemos definir el desplazamiento como¹:

El desplazamiento es la diferencia entre la posición inicial y la final.

En la siguiente figura se notan los vectores implicados en el desplazamiento, el vector con líneas de puntos es el vector desplazamiento resultante, la magnitud del vector desplazamiento resultante dividido por el tiempo que dura el desplazamiento es denominada *rapidez*. La rapidez es la magnitud del vector velocidad.

¹Se suele notar el desplazamiento por la letra **s**, la velocidad por la letra **v** y la aceleración por la letra **a**.



De esta forma hemos visto la importancia de definir un sistema de referencia para realizar un estudio sobre un sistema físico. En el caso de la tierra esta se mueve con respecto al sol, sin embargo para efectos prácticos los experimentos en la tierra toman como sistema de referencia la tierra misma, y suponen que esta se encuentra en reposo.

Cuando estudiamos sistemas en movimiento es importante definir un sistema de referencia tal que se vea claramente el movimiento que el objeto bajo estudio describe.

1.5.1. Definición de velocidad y aceleración

Podemos definir la velocidad como

La velocidad es la razón de cambio del desplazamiento.

Es decir que la velocidad nos está dando información acerca de que tan rápido está cambiando un objeto su posición en el espacio. La velocidad es una cantidad vectorial, por lo tanto tiene magnitud y sentido. A la magnitud de la velocidad se le denomina **rapidez**.

La **velocidad promedio** \bar{v} de un punto que se mueve entre los tiempos t_1 y t_2 es definida por²

$$\bar{v} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (1.39)$$

La **velocidad instantánea** v es el límite de la velocidad promedio cuando el intervalo de tiempo se aproxima a cero.

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t_1 + \Delta t) - \mathbf{x}(t_1)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{s}}{dt}. \quad (1.40)$$

En los cursos de cálculo a esta cantidad se le denomina la *derivada del desplazamiento con respecto al tiempo*, y se le nota como $\frac{ds}{dt}$. Por ello se dice que la velocidad es la derivada del desplazamiento con respecto del tiempo.

Existe una diferencia entre la velocidad promedio y la velocidad instantánea. la velocidad promedio es la velocidad que en “**promedio**” tiene un cuerpo despues de realizar un recorrido cualquiera, por ejemplo si dos pueblos están separados 2 kilometros y una persona invierte 20 minutos en ir de un pueblo al otro decimos que la velocidad promedio de la persona fue

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{2km}{20minuto} = 0,1km/minuto = 100metros/minuto, \quad (1.41)$$

ya que un kilómetro son mil metros. Sin embargo durante el trayecto es posible que la persona se haya detenido unos minutos a descansar, o halla corrido un poco, la *velocidad instantánea* se refiere a la velocidad que lleva esa persona en un instante determinado. Una buena aproximación a la velocidad instantánea es el rapidómetro del carro, el cual nos marca la velocidad en un instante determinado del trayecto.

Las unidades de la velocidad son $\frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$, y se suele medir en *metros/segundo* = m/s , *kilómetros/hora* = km/h , etc... de acuerdo a las medidas mas convenientes. Es muy importante realizar un análisis de unidades en las ecuaciones, para verificar que se están realizando correctamente los cálculos, por ejemplo si se encuentra que la velocidad se está midiendo en m/s^2 , entonces las unidades están mal, por lo que hay que revisar los cálculos.

De manera similar podemos definir la **aceleración** como:

La aceleración es la razón de cambio de la velocidad.

²Se suele utilizar la barra, \bar{f} , para indicar el promedio de una cantidad.

La aceleración nos está dando información de como cambia la velocidad con respecto al tiempo. Una gran aceleración significa que se obtiene una mayor velocidad en menor cantidad de tiempo.

Se define la **aceleración instantánea** como el limite cuando el intervalo de tiempo tiende a cero.

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t_1 + \Delta t) - \mathbf{v}(t_1)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (1.42)$$

De nuevo en cálculo se dice que la aceleración es la derivada de la velocidad con respecto del tiempo, y se denota por $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$.

Las unidades de la aceleración son $\frac{\text{velocidad}}{\text{tiempo}} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}^2}$, y se suelen utilizar las unidades m/s^2 ó km/h^2 .

Si el movimiento se realiza en una sola dirección, podemos ubicar nuestro sistema de coordenadas con el eje x a lo largo de esta dirección, y tratar el movimiento de una forma unidimensional. Este será el tema de la siguiente subsección.

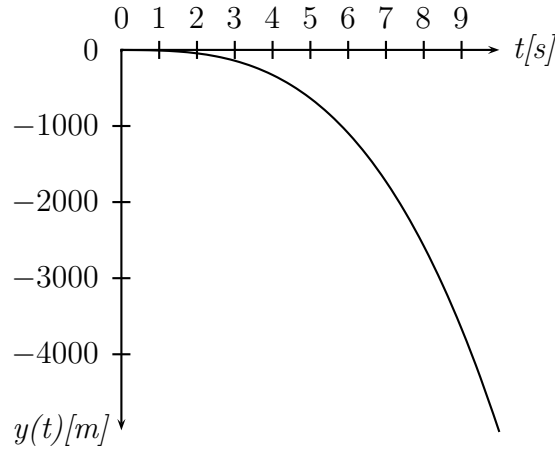
Ejemplo 5 *Una gota de agua se desprende de una nube y dos segundos despues lleva una velocidad de 28 m/s. ¿Cuál es la aceleración media durante ese periodo?.*

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{(v_f - v_i)}{t_f - t_i} \hat{\mathbf{k}} \\ &= \frac{-28m/s - 0m/s}{2s - 0s} \hat{\mathbf{k}} \\ &= -14m/s^2 \end{aligned}$$

El signo negativo indica que la dirección de la aceleración es dirigida hacia abajo.

Ejemplo 6 *Un cuerpo se lanza hacia abajo. Su posición en función del tiempo está dada por $y(t) = -1 - 2t - 5t^3$, en donde $y(t)$ está en metros y t está en segundos.*

Una gráfica de posición contra tiempo se observa a continuación.



El movimiento se efectúa siempre hacia el lado negativo del eje y .

La velocidad en función del tiempo se encuentra mediante la derivada:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{df(t)}{dt} \\ &= -2 - 15t^2 \end{aligned} \tag{1.43}$$

La aceleración en función del tiempo se encuentra por medio de la derivada de la velocidad.

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{dv(t)}{dt} \\ &= -30t \end{aligned} \tag{1.44}$$

Es una aceleración negativa, lo que indica que el cambio en la aceleración se produce en la misma dirección que el cambio en la velocidad. De manera similar la posición y la aceleración poseen el mismo signo.

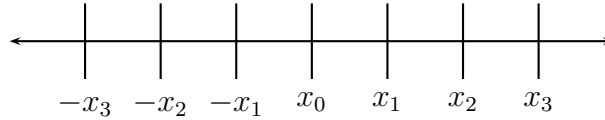
1.6. Movimiento en una dimensión

Hasta el momento hemos visto el movimiento de una forma general, ubicándolo en un sistema tridimensional. Ahora estudiaremos la forma mas simple de movimiento, el movimiento a lo largo de una línea recta. Una línea recta posee una sola dimensión, es por esto que es usual denominar al movimiento en una dimensión *movimiento lineal*.

Existen dos tipos principales de movimiento, con velocidad constante y con aceleración constante, lo que no significa que no existan mas, sin embargo el estudio de estos dos nos permitirá entender una diversidad de fenómenos físicos.

1.6.1. Movimiento a velocidad constante

Este movimiento se realiza a lo largo de una linea recta como la siguiente,



Cuando decimos que un movimiento se efectúa con velocidad constante, estamos afirmando que la magnitud y la dirección de la velocidad no cambian con el tiempo. Es muy importante notar el hecho que la velocidad cambia cuando cambia ó su rapidez ó su dirección. Vamos a calcular la razón de cambio de la velocidad, es decir la aceleración, de un movimiento a velocidad constante.

$$a = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{v(t_1) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{0}{t_2 - t_1} = 0. \quad (1.45)$$

Por lo tanto podemos afirmar que:

Un movimiento es a velocidad constante si su aceleración es igual a cero.

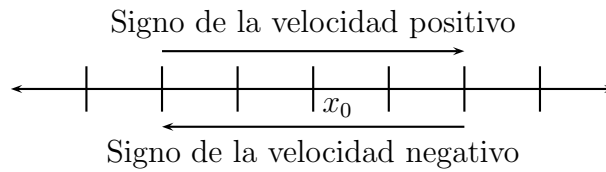
¿Cómo podemos predecir la posición de un cuerpo que se mueve a velocidad constante?, para ello utilizamos la definición de velocidad.

$$\begin{aligned} v &= \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0} \\ v &= \frac{x(t_1) - x(t_0)}{\Delta t} \\ v\Delta t &= x(t_1) - x(t_0) \\ v\Delta t + x(t_0) &= x(t_1) \end{aligned}$$

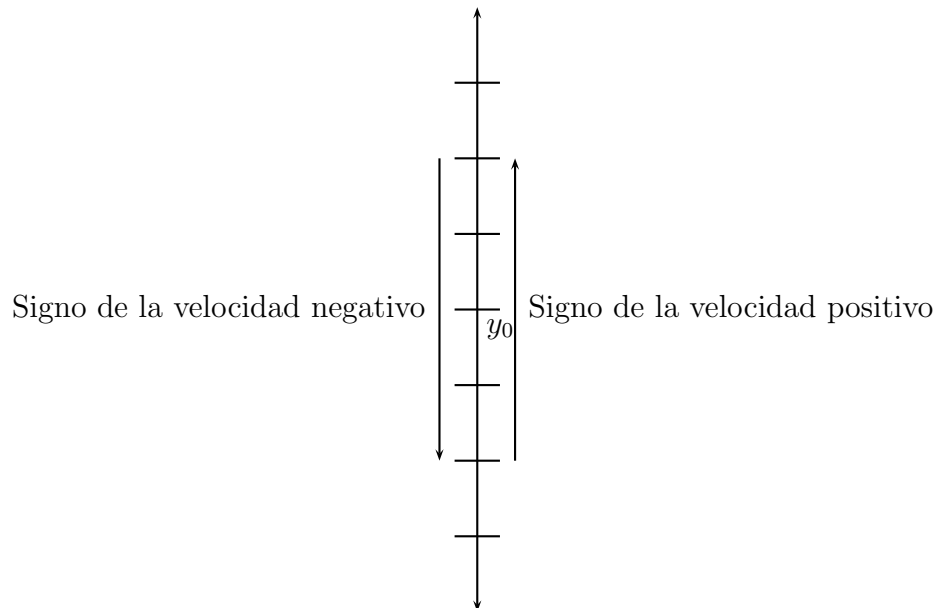
Generalmente el tiempo inicial t_0 se toma como cero, el tiempo final t_1 se toma como t y la posición inicial se nota como x_0 . De esta forma llegamos a una de las ecuaciones de la cinemática, la ecuación de desplazamiento a velocidad constante

$$\boxed{x(t) = x_0 + vt} \quad (1.46)$$

- La ecuación (1.46) es una función del desplazamiento como función del tiempo, y la velocidad v nos dice la razón de cambio de la distancia con respecto al tiempo.
- El signo de la velocidad en la ecuación (1.46) nos indica la dirección de movimiento, por convención si el movimiento se realiza a lo largo de una recta horizontal el signo es positivo si la dirección del movimiento es de izquierda a derecha, y es negativo si el movimiento es de derecha a izquierda.



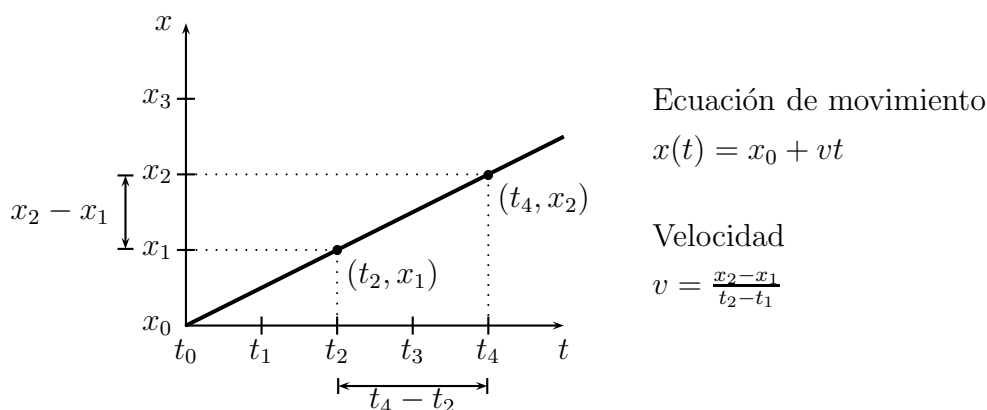
De la misma forma por convención si el movimiento se realiza verticalmente, la velocidad es positiva si la dirección del movimiento es de abajo para arriba, y negativa si la dirección del movimiento es de arriba para abajo.



En este caso es usual notar a los movimientos verticales con la letra y . Estas convenciones también son aplicables a la aceleración.

- Si la velocidad $v = 0$, entonces tenemos que la posición inicial es igual a la posición final, $x(t) = x_0$, esto es lógico, un objeto que no posee velocidad no se mueve y permanecerá en su posición inicial durante todo el tiempo.
- El termino x_0 hace referencia a la posición inicial del cuerpo en un tiempo $t = 0$, este termino es constante y se suele tomar como cero, es decir que se ubica el origen de coordenadas en el sitio exacto donde se inicia el movimiento. De esta forma la ecuación de movimiento es $x(t) = vt$. Esta ecuación es bastante usada a diario, cuando vamos en un carro y vemos el **rapidómetro**³ del carro marcar 60 km/h, generalmente pensamos que en una hora habremos recorrido 60 kilómetros.

Gráficamente un movimiento a velocidad constante puede ser representado en un diagrama de *Desplazamiento (x) contra tiempo (t)* de la siguiente forma.



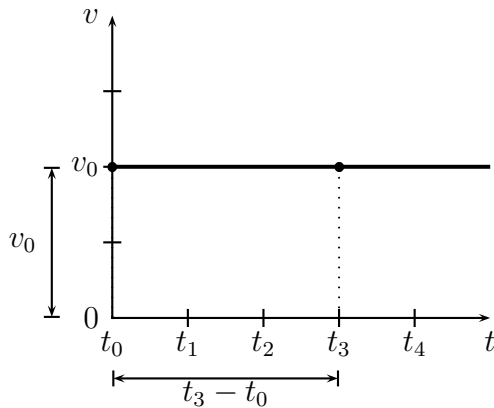
Algunas observaciones con respecto a la gráfica son:

- En el plano *Desplazamiento contra Tiempo*, si el movimiento es a velocidad constante, la gráfica es una línea recta.
- En el gráfico hemos colocado en el tiempo inicial t_0 la ubicación inicial x_0 , es decir el punto (t_0, x_0) , es usual colocar estos puntos como $(t_0, x_0) = (0, 0)$.

³Recordemos que los carros tienen rapidómetro y no velocímetro, ya que ellos miden la magnitud de la velocidad pero no su dirección.

- **En una gráfica de distancia contra tiempo la pendiente de la recta es la *velocidad*.** Cuando la gráfica es una línea recta, esta pendiente es independiente de la forma como la medimos, esto se debe a que el movimiento se realiza a velocidad constante.

Ya vimos que la aceleración en un movimiento a velocidad constante es igual a cero, ahora veamos la gráfica de velocidad contra tiempo.



Ecuación de movimiento

$$v(t) = v_0$$

Aceleración

$$a = \frac{v_0 - v_0}{t_3 - t_0} = 0$$

En la gráfica anterior tenemos

- **La pendiente de la curva de velocidad contra tiempo es la aceleración.**
- La velocidad permanece constante en la gráfica, v_0 , por esto la pendiente es cero, es decir que la aceleración es cero.
- El área bajo la curva desde t_0 hasta t_3 es igual a,

$$\text{área} = v_0 \times (t_3 - t_0),$$

de manera general el área es igual a $v_0 \Delta t = v_0 t$, es decir que salvo la posición inicial, que podemos hacer igual a cero, **el área bajo la curva de la gráfica de velocidad contra tiempo es igual al desplazamiento.**

1.6.2. Movimiento a aceleración constante

Para comenzar esta parte es importante notar lo siguiente:

Siempre que hay un cambio en la velocidad hay una aceleración diferente de cero.

Todo cambio en la velocidad implica un cambio en la aceleración. El movimiento uniformemente acelerado es el mas simple de estudiar en cuanto a aceleración, sin embargo la aceleración también puede variar, y es importante saberlo, a la razón de cambio de la aceleración se le denomina *hertz*, aunque es una cantidad poco usada.

¿Como podemos predecir la velocidad de un cuerpo a partir de su aceleración?, para ello nuevamente utilizamos la definición de aceleración,

$$\begin{aligned} a &= \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0} \\ a(t_1 - t_0) &= v(t_1) - v(t_0) \\ a(t_1 - t_0) + v(t_0) &= v(t_1). \end{aligned} \tag{1.47}$$

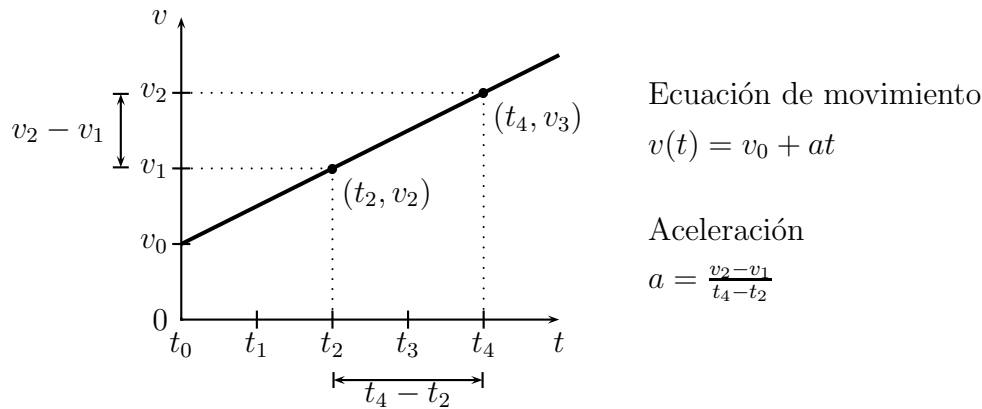
Como el tiempo es un parámetro podemos hacer la cantidad $t_0 = 0$, $t_1 = t$ y $v(t_1) = v(t)$. La velocidad inicial la podemos tomar como $v(t_0) = v_0$, de esta forma llegamos a otra importante ecuación de la cinemática,

$$\boxed{v(t) = v_0 + at} \tag{1.48}$$

- La ecuación (1.48) es una función de la velocidad como función del tiempo, y la aceleración a nos dice la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo, que tan rapido está cambiando la velocidad y en que dirección. Recordemos que la aceleración también es un vector.
- Al igual que la velocidad, el signo de la aceleración nos indica en que dirección está cambiando la velocidad. La convención es la misma que se vió en la sección anterior.
- Si la aceleración $a = 0$, entonces tenemos que la velocidad inicial es igual a la velocidad final, $v(t) = v_0$, un objeto con aceleración igual a cero mantiene su velocidad constante.
- El término v_0 hace referencia a la velocidad inicial del cuerpo en un tiempo $t = 0$, éste es constante y se puede tomar como cero, sin embargo este término usualmente es muy importante, ya que determina si el sistema de referencia usado se mueve a velocidad constante o se encuentra en un reposo tal que se observa una velocidad inicial del objeto bajo estudio.

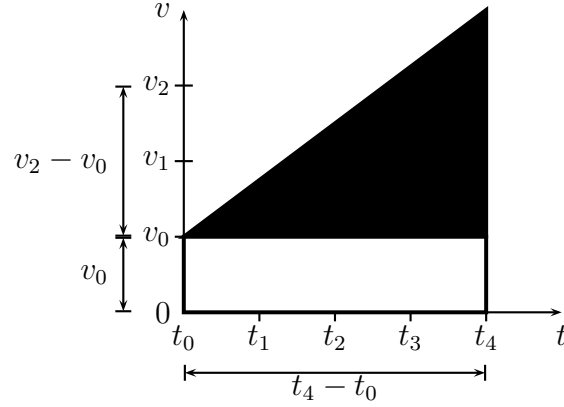
- Cuando hacemos $v_0 = 0$ la ecuación de movimiento toma la forma $v(t) = at$. Sin embargo la ecuación mas usada y general posible es la (1.48).

Gráficamente un movimiento a aceleración constante puede ser representado en un diagrama de *Velocidad contra tiempo* de la siguiente forma.



Algunas observaciones con respecto a la anterior gráfica son:

- En el plano *Velocidad contra Tiempo*, si el movimiento es a aceleración constante, la gráfica es una línea recta.
- En el gráfico hemos colocado en el tiempo inicial t_0 la velocidad inicial v_0 , es decir el punto (t_0, v_0) . No necesariamente la velocidad inicial es cero.
- **La pendiente de la recta en una gráfica de velocidad contra tiempo es la *aceleración*.** Si esta gráfica es una línea recta, su pendiente es independiente de la forma como la medimos, esto se debe a que el movimiento se realiza a aceleración constante.
- **El área bajo la curva de velocidad contra tiempo es igual a la distancia recorrida**, vamos a calcular esta área desde el tiempo t_0 hasta t_4 . El área esta compuesta por dos figuras, un triángulo y un rectángulo, el área del triángulo es $\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$ y el del rectángulo es $\text{lado1} \times \text{lado2}$. Las figuras las mostramos a continuación.



El área de la región oscura es igual a $v_0 \times (t_4 - t_0)$, el área de la región clara es $\frac{(t_4 - t_0) \times (v_2 - v_0)}{2}$, de esta forma la distancia total recorrida desde t_0 hasta t_4 es,

$$\begin{aligned}
 x(t_4 - t_0) &= v_0 \times (t_4 - t_0) + \frac{(t_4 - t_0) \times (v_2 - v_0)}{2} \\
 x(t_4 - t_0) &= v_0 \times (t_4 - t_0) + \frac{(t_4 - t_0) \times (v_2 - v_0)}{2} \times \frac{(v_2 - v_0)}{(v_2 - v_0)} \\
 x(t_4 - t_0) &= v_0 \times (t_4 - t_0) + \frac{(t_4 - t_0)^2}{2} \times \frac{v_2 - v_0}{t_4 - t_0} \\
 x(t_4 - t_0) &= v_0 \times (t_4 - t_0) + \frac{(t_4 - t_0)^2}{2} \times a.
 \end{aligned}$$

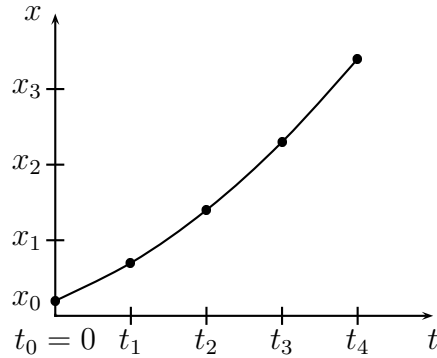
Si suponemos $t_0 = 0$ y $t_4 = t$, obtenemos la ecuación del desplazamiento para el movimiento uniformemente acelerado,

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \quad (1.49)$$

si suponemos una posición inicial de x_0 , la ecuación mas general posible es de la forma,

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2} \quad (1.50)$$

Una gráfica muy interesante es la de posición (x) contra tiempo (t) en un movimiento uniformemente acelerado, esta es de la forma.



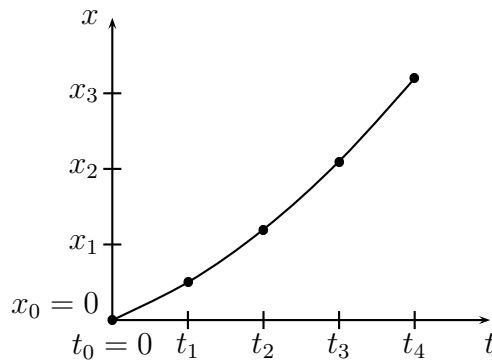
Ecuación de movimiento

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Ecuación de velocidad

$$v(t) = v_0 + a t$$

- En el plano de *Desplazamiento contra tiempo* un movimiento uniformemente acelerado se ve como una **parábola**.
- El punto x_0 nos indica el origen del movimiento, si $x_0 = 0$ la grafica y las ecuaciones toman la forma,



Ecuación de movimiento

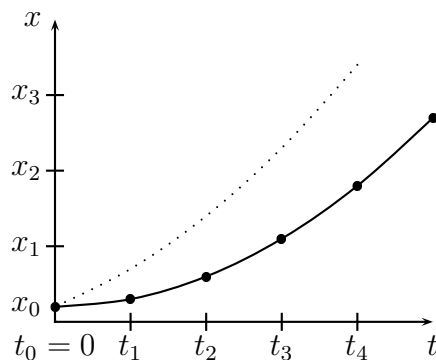
$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Ecuación de velocidad

$$v(t) = v_0 + a t$$

se observa como el origen de coordenadas es el origen del movimiento, la posición inicial no afecta la velocidad.

- Cuando la velocidad inicial es igual a cero $v_0 = 0$, la forma de la gráfica y las ecuaciones de movimiento ahora son

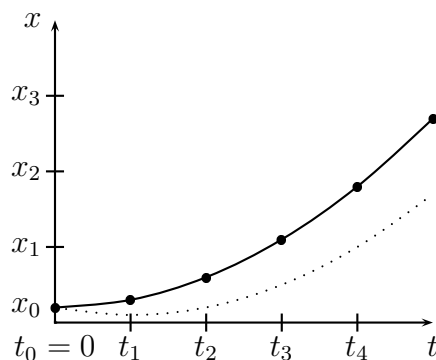


Ecuación de movimiento curva continua
 $x(t) = x_0 + \frac{1}{2}at^2$

Ecuación de movimiento curva a puntos
 $x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$

La curva punteada corresponde a la curva con una velocidad $v_0 \neq 0$, y la curva continua corresponde a una curva con $v_0 = 0$ y positiva, de esta forma se ve como la velocidad inicial afecta la manera como se mueve un objeto, una velocidad inicial diferente de cero y en la misma dirección del movimiento indica que el objeto se moverá mas rápido. En una carrera de carros tiene mas ventaja el que acelera con una velocidad inicial que aquel que parte del reposo.

- Si la velocidad inicial fuera negativa, la curva punteada aumentaría mas lentamente que la curva continua, como se muestra a continuación.



Ecuación de movimiento curva continua
 $x(t) = x_0 + \frac{1}{2}at^2$

Ecuación de movimiento curva a puntos
 $x(t) = x_0 - v_0t + \frac{1}{2}at^2$

Si se fijan con cuidado la línea a puntos arranca hacia el lado negativo del eje x , ya que su velocidad inicial era negativa, y luego se detiene cerca a t_1 y empieza a crecer hacia el lado positivo del eje x , esto debido a que la aceleración al ser positiva hace que la velocidad aumente hacia el lado positivo del eje.

Ahora veremos un caso muy sencillo de aplicación del movimiento uniformemente acelerado, la caída libre.

Ejemplo 7 : Movimiento bajo la acción de la fuerza de gravedad.

La fuerza gravedad en la tierra tiene el efecto de atraer hacia ella los cuerpos que poseen masa, además tiene una característica interesante, la aceleración producida por la fuerza de la gravedad se mantiene casi constante sobre la superficie. A nivel del mar la fuerza de la gravedad tiene un valor de 9.80665 m/s^2 [18], para efectos prácticos se suele tomar este valor como 9.8 m/s^2 , e inclusive para cálculos sencillos se toma hasta de 10 m/s^2 , y se representa por la letra g .

La fuerza de la gravedad en un sistema de referencia como la tierra actúa de arriba hacia abajo, es decir que la dirección de la aceleración es de la forma,

$$\mathbf{a} = -g\hat{\mathbf{k}}. \quad (1.51)$$

Esta ecuación tiene bastante información

- El movimiento se realiza a lo largo de la dirección $\hat{\mathbf{k}}$, es decir el eje y , a lo largo de los otros ejes no actúa la aceleración de la gravedad.
- El signo negativo nos indica que la dirección del vector aceleración es de arriba hacia abajo, ó mejor aún, del lado positivo del eje y al lado negativo.
- La magnitud del vector aceleración de la gravedad es $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

De esta forma las ecuaciones más generales que gobiernan el movimiento bajo la acción de la gravedad son,

$$\boxed{y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2,} \quad (1.52)$$

$$\boxed{v_y(t) = v_{0y} - gt.} \quad (1.53)$$

De nuevo las ecuaciones (1.52) y (1.53) contienen mucha información y las vamos a describir cuidadosamente,

- No hemos utilizado la notación vectorial, es decir el vector $\hat{\mathbf{k}}$, para indicar la dirección de movimiento. En lugar de ello hemos usado de forma explícita la posición en función del tiempo $y(t)$, y la velocidad en función del tiempo $v_y(t)$. Este es una notación muy común cuando se está hablando de movimientos a lo largo de un eje determinado.

- En la ecuación (1.52) el termino y_0 es la posición inicial, es decir la ubicación que tenía el objeto que estamos estudiando en un tiempo $t = 0$. Esta posición puede ser cero, por ejemplo cuando tomamos como origen del sistema de coordenadas el suelo para estudiar el movimiento de un cohete. O puede ser diferente de cero cuando estudiamos la caída de un paracaidista desde un avión.
- El termino v_{0y} es la velocidad inicial del movimiento, dependiendo de la situación estudiada este termino puede ser cero o no ser cero. Por ejemplo cuando estudiamos el lanzamiento de un cohete espacial la velocidad inicial es cero, ya que el cohete parte del reposo. Pero si estudiamos el movimiento del mismo cohete pero tomamos el tiempo inicial $t = 0$ en un momento cuando el cohete ya ha iniciado su movimiento, entonces su velocidad inicial será diferente de cero.
- El signo negativo en el término que afecta la aceleración nos está diciendo que la dirección de la aceleración se hace de arriba para abajo, en un marco de referencia en el cual el eje y aumenta hacia arriba y disminuye hacia abajo. El inicio del sistema de coordenadas se suele colocar en el piso.
- La magnitud de la aceleración es $g = 9,8\text{m/s}^2$, sin embargo se ha utilizado el símbolo g , esto hace que nuestras ecuaciones de movimiento y velocidad sean muy generales, si deseamos describir el movimiento en otro planeta, basta con conocer la aceleración de la gravedad y colocar su valor adecuado en g .
- El signo de la gravedad $-g$, depende de la elección del sistema de coordenadas. En este caso elegimos un sistema en el cual la gravedad apunta hacia abajo y el sistema de coordenadas aumenta hacia arriba. En la figura 1.1 se aclara lo anterior.

Ejemplo 8 : Caída libre.

Vamos a suponer que dejamos caer una piedra desde una altura inicial de 10 metros, ¿cuál es la ecuación que describe el movimiento?, ¿cuál es la ecuación que describe la velocidad?, ¿cuanto tiempo demora en caer la piedra? y al llegar al suelo ¿cuál es la velocidad de caída?. Haga una gráfica de velocidad contra tiempo y desplazamiento contra tiempo.

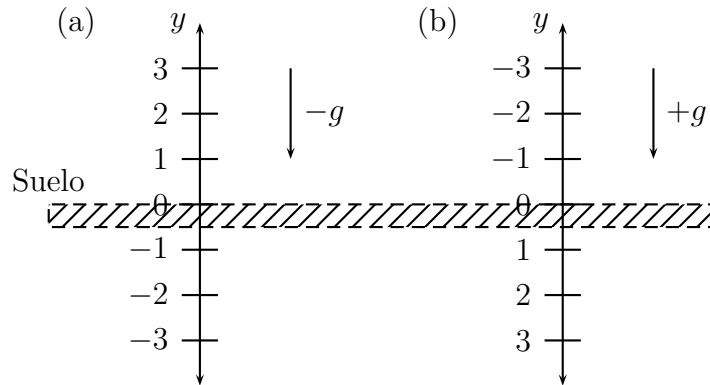


Figura 1.1: Signo de la aceleración de acuerdo a la elección del sistema de coordenadas, el cero del sistema se ha situado en el suelo. En (a) el sistema de coordenadas está de tal forma que aumenta hacia arriba y disminuye hacia abajo, de esta forma la aceleración, que siempre apunta hacia abajo, tiene el signo negativo. En (b) el sistema de coordenadas aumenta hacia abajo y disminuye hacia arriba, en este caso la aceleración tiene el signo positivo.

Para hallar la ecuaciones de movimiento utilizamos (1.52) y (1.53). Siempre que trabajemos con la gravedad vamos a elegir un sistema de coordenadas como el de la figura 1.1 en el lado (a), es decir que la gravedad es negativa.

Para elaborar correctamente las ecuaciones realizamos el siguiente análisis:

1. La gravedad posee un signo negativo, es decir $-g = -9,8\text{m/s}^2$.
2. La posición inicial se encuentra a 10 metros sobre el suelo, es decir que $y_0 = 10$. Vamos a utilizar unidades de metros.
3. La velocidad inicial es cero, es decir $v_{0,y} = 0$.

Con lo anterior nuestras ecuaciones de movimiento toman la forma,

$$y(t) = 10 - \frac{1}{2}gt^2 = 10 - \frac{9,8}{2}t^2 \quad (1.54)$$

$$v_y(t) = -gt = -9,8t. \quad (1.55)$$

Para hallar el tiempo de caída utilizamos la ecuación (1.54), ya que sabemos que cuando caiga la piedra se encontrará en el suelo, es decir $y(t) = 0$,

de esta forma de (1.54) despejamos el tiempo,

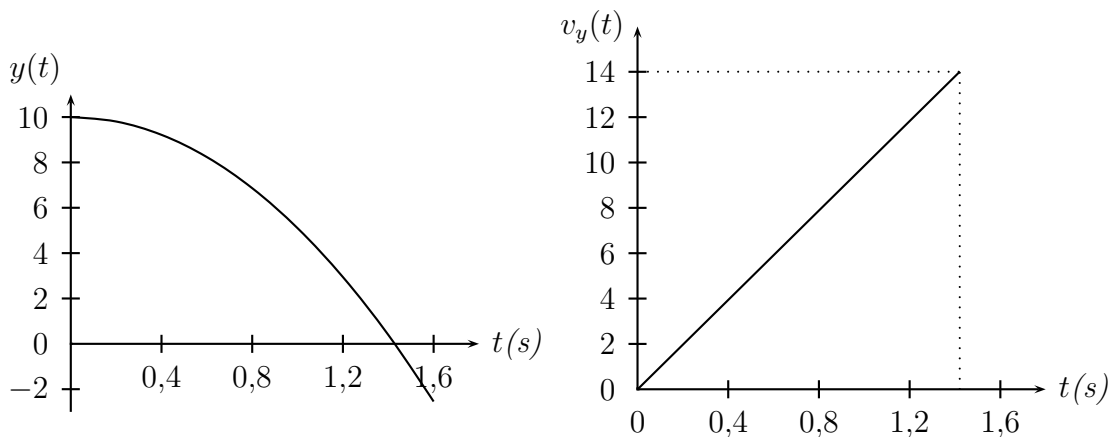
$$\begin{aligned} 0 &= 10 - \frac{9,8}{2}t^2 = 10 - 4,9t^2 \\ 10 &= 4,9t^2 \\ \frac{10}{4,9} &= t^2 \\ t &= \sqrt{\frac{10}{4,9}} = 1,42 \text{ (s)}, \end{aligned}$$

de esta forma el tiempo de caída es de 1.42 segundos. Con este tiempo podemos hallar la velocidad con la que el objeto llega al suelo, utilizando la ecuación (1.55),

$$v(t = 0,7s) = -9,8(m/s^2) \times 1,42(s) = -14(m/s). \quad (1.56)$$

El signo negativo nos indica que la velocidad se dirige hacia abajo. En esta última parte hemos incluido entre paréntesis las dimensiones de las cantidades involucradas, para ver que al final las unidades de la velocidad son las correctas, es decir metros sobre segundo.

Las gráficas que se obtiene para el desplazamiento y la velocidad se muestran a continuación.



A la izquierda tenemos la gráfica de desplazamiento contra tiempo, como se espera de un movimiento uniformemente acelerado, la gráfica es una parábola. El movimiento comienza en 10 metros, y es cero en $t = 1,4$ segundos, a partir de allí los valores en la posición son negativos, ya que se encuentra en

la región negativa del eje de coordenadas, en principio esto no tiene sentido ya que en $y = 0$ es el piso y la piedra es allí donde se detiene, por lo tanto la parte negativa de la curva no existe. A la derecha se observa la gráfica de velocidad contra tiempo, esta corresponde a una línea recta, debido a que el movimiento es uniformemente acelerado. Solo se ha graficado la velocidad hasta el tiempo $t = 1,42$ segundos, ya que allí la piedra choca contra el suelo y se detiene.

Hasta el momento hemos estudiado el movimiento en una dimensión, ahora vamos a estudiar el movimiento en dos o mas direcciones, y para ello haremos uso de la notación vectorial aprendida.

1.7. Movimiento en dos o mas direcciones

En la vida real el movimiento de un objeto se realiza en un plano, y de manera mas general en el espacio. Para una partícula moviéndose en el plano debemos especificar su posición mediante dos coordenadas

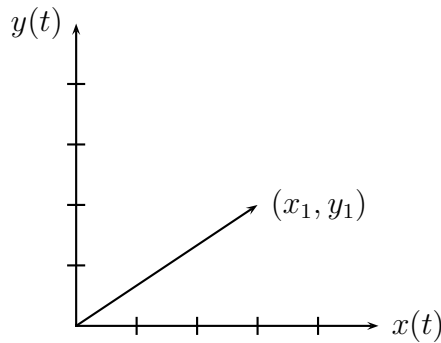
$$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t)] \quad \text{ó} \quad \mathbf{r} = (x, y). \quad (1.57)$$

En tres coordenadas lo que tenemos es un vector de tres componentes,

$$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)] \quad \text{ó} \quad \mathbf{r} = (x, y, z). \quad (1.58)$$

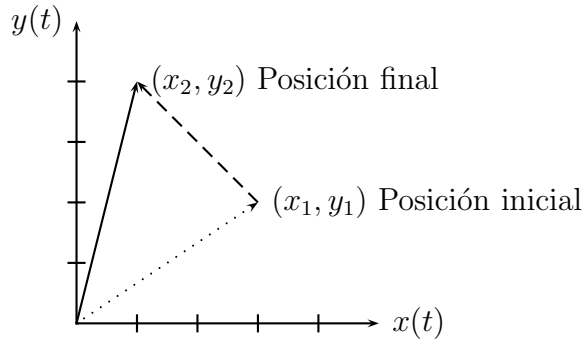
Esta notación es lo que se denomina **parametrizació**, en la cual un conjunto de variables, (x, y) en este caso, es puesto en terminos de otra variable, (t) .

Para un sistema bidimensional, un plano, tenemos una representación de la siguiente forma



Esta vez estamos graficando de manera simultanea los ejes x e y , se debe tener mucho cuidado en no confundir esta representación con la de distancia contra tiempo. En este caso lo que tenemos es ya una representación del movimiento que puede efectuar un cuerpo sobre el plano x contra y . En este caso nuestro vector indica que la posición en la que se encuentra nuestro objeto bajo estudio está a 3 unidades en el eje x y 2 unidades en el eje y .

Ahora vamos a suponer que el objeto se mueve a la posición $(1,4)$, gráficamente esto se puede representar como,



El vector punteado representa la posición inicial, el vector continuo representa la posición final, la distancia recorrida se representa por el vector con líneas discontinuas, este vector es la resta del vector posición final menos el vector posición inicial,

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_{final} - \mathbf{r}_{inicial} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1). \quad (1.59)$$

La distancia total recorrida es,

$$|\Delta \mathbf{r}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1.60)$$

Lo anterior es equivalente a tomar dos ecuaciones independientes, una para el eje x y la otra para el eje y ,

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_2 - x_1 = x(t_2) - x(t_1) \\ \Delta y &= y_2 - y_1 = y(t_2) - y(t_1). \end{aligned}$$

Ya empezamos a ver por que es importante el estudio del movimiento en una dimensión, ya que los movimientos en múltiples dimensiones se pueden descomponer en movimientos unidimensionales.

Si el movimiento se realiza en un tiempo Δt , la velocidad en un movimiento bidimensional es de la forma,

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \\ \mathbf{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t} \right)\end{aligned}\quad (1.61)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \\ \mathbf{v} &= (v_x, v_y).\end{aligned}\quad (1.62)$$

Nuevamente fijemonos que el vector velocidad está compuesto por las dos ecuaciones escalares,

$$\begin{aligned}v_x &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ v_y &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}\end{aligned}$$

De la misma manera podemos generalizar para un vector en tres coordenadas. De manera general obtenemos para la velocidad,

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= v_x && \text{Espacio unidimensional.} \\ \mathbf{v} &= (v_x, v_y) && \text{Espacio bidimensional.} \\ \mathbf{v} &= (v_x, v_y, v_z) && \text{Espacio tridimensional.}\end{aligned}\quad (1.63)$$

Utilizando los vectores unitarios el vector velocidad tridimensional es de la forma,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{k}}. \quad (1.64)$$

De la ecuación (1.64) se observa que es mas cómodo escribir $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, que cualesquiera de las ecuaciones (1.63). Cuando se está trabajando en espacios multidimensionales, los vectores proporcionan una muy cómoda forma de efectuar cálculos y notaciones.

De la misma forma la aceleración simplemente es,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= a_x = \frac{dv_x}{dt} && \text{Espacio unidimensional.} \\ \mathbf{a} &= (a_x, a_y) = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt} \right) && \text{Espacio bidimensional.} \\ \mathbf{a} &= (a_x, a_y, a_z) = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right) && \text{Espacio tridimensional.}\end{aligned}\quad (1.65)$$

Ó en una notación mas reducida,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dv_z}{dt}\hat{\mathbf{k}}. \quad (1.66)$$

El movimiento en tres dimensiones es una generalización del movimiento en una dimensión. Para un sistema uniformemente acelerado tenemos tres ecuaciones para el desplazamiento en función del tiempo,

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_xt^2, \\ y(t) &= y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_yt^2, \\ z(t) &= z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}a_zt^2. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Las cuales pueden ubicarse en un vector desplazamiento de la forma $(x(t), y(t), z(t))$.

Y tenemos tres ecuaciones para la velocidad en función del tiempo,

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{0x} + a_xt, \\ v_y(t) &= v_{0y} + a_yt, \\ v_z(t) &= v_{0z} + a_zt. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Las cuales pueden ubicarse en un vector velocidad de la forma $(v_x(t), v_y(t), v_z(t))$.

El movimiento unidimensional es una clase particular del movimiento tridimensional, en el cual el vector desplazamiento puede ser de la forma $(x(t), 0, 0)$, y el vector velocidad puede ser de la forma $(v_x, 0, 0)$. En este caso es mas cómodo solo tratar las componentes diferentes de cero, como se vió en la sección anterior.

A continuación desarrollaremos un ejemplo mas general de movimiento bajo un campo gravitatorio.

Ejemplo 9 : Movimiento en un campo gravitatorio

De manera general el movimiento gravitatorio se efectúa en tres dimensiones. Vamos a colocar nuestro sistema de coordenadas con los siguientes requisitos,

- *El eje z estará dirigido hacia arriba, de manera que el vector aceleración sea de la forma,*

$$\mathbf{a} = -g\hat{\mathbf{k}} = (0, 0, -g). \quad (1.69)$$

- *El origen de nuestro sistema de coordenadas esta en el suelo.*
- *El objeto posee una posición inicial dada por el vector*

$$\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) \quad (1.70)$$

- *El objeto es lanzado con en un tiempo $t = 0$, con una velocidad inicial,*

$$\mathbf{v} = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}), \quad (1.71)$$

es decir que posee componentes de velocidad en los tres ejes.

Bajo las anteriores condiciones las ecuaciones de movimiento en los tres ejes son,

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{0x}t \\ y(t) &= y_0 + v_{0y}t \\ z(t) &= z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned}$$

Uno de los hechos mas notables es ver que el movimiento se puede descomponer por componentes, las cuales son fácilmente tratables.

Sin perder generalidad podemos hacer $\mathbf{r}_0 = (0, 0, 0)$, y suponer que la velocidad $v_{0y} = 0$, de esta forma las ecuaciones de movimiento son ahora,

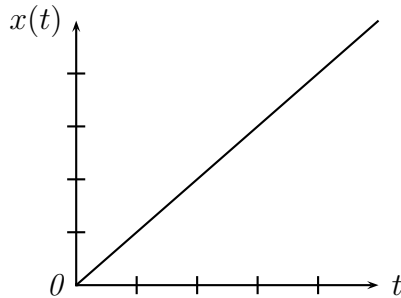
$$x(t) = v_{0x}t \quad (1.72)$$

$$z(t) = v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (1.73)$$

Es decir que el movimiento se realiza en el plano xz ⁴.

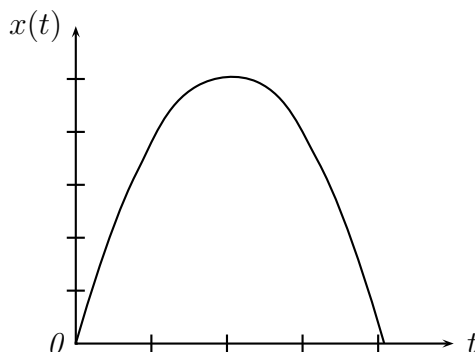
Respecto a las ecuaciones de movimiento podemos decir que,

- *En el eje x el movimiento es a velocidad constante, la grafica de distancia contra tiempo es de la forma*



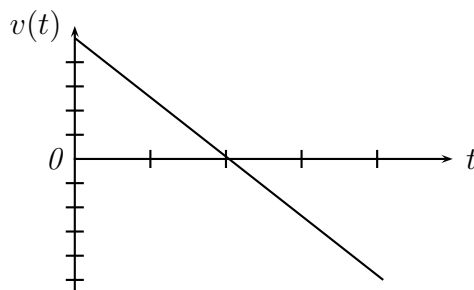
⁴Cuando estamos trabajando en un sistema de tres dimensiones, es normal que a la vertical se le denomine eje z y a la horizontal eje x .

- En el eje z el movimiento es uniformemente acelerado, y la gráfica de desplazamiento contra tiempo es de la forma,



En el eje z el objeto parte con una velocidad diferente de cero y sube, pero la fuerza de la gravedad lo va frenando, hasta que llega un punto en el cual comienza a bajar, y su velocidad cambia de dirección, retornando de nuevo al suelo. Esto no ocurre en el movimiento en el eje x , en el cual el objeto siempre se aleja del origen.

- A continuación vamos a graficar la velocidad del objeto



Se observa que en todo momento la velocidad está disminuyendo, hasta que llega un punto en el cual la velocidad es cero, este punto es precisamente el punto en el cual el objeto alcanza la altura máxima, a partir de allí la velocidad se vuelve negativa, es decir que hay un cambio en la dirección de la velocidad, desde cuando el objeto es lanzado hasta que alcanza su altura máxima la velocidad es positiva, es decir que el objeto se dirige hacia arriba. Cuando alcanza su altura máxima la velocidad es cero, y el objeto empieza a caer haciendo que ahora la dirección de movimiento sea hacia el lado negativo, por lo cual la velocidad es negativa.

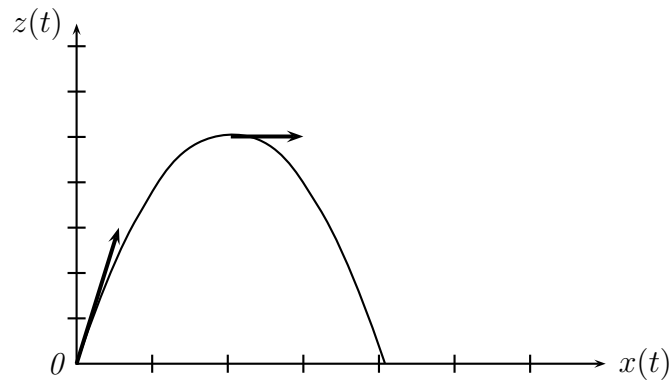
- ¿Como es el movimiento del objeto?, el movimiento resultante, es decir el que nosotros vemos, es una combinación del movimiento en el eje x y z . Para ello utilizamos las ecuaciones (1.72) y (1.73), de (1.72) despejamos el tiempo y obtenemos

$$t = \frac{x(t)}{v_{0x}},$$

y con el anterior resultado substituimos el tiempo en la ecuacion (1.73), y obtenemos el desplazamiento en el eje z como función del desplazamiento en el eje x ,

$$z = \frac{v_{0z}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2. \quad (1.74)$$

Esta es la ecuación de una parábola, y su gráfica es de la forma,



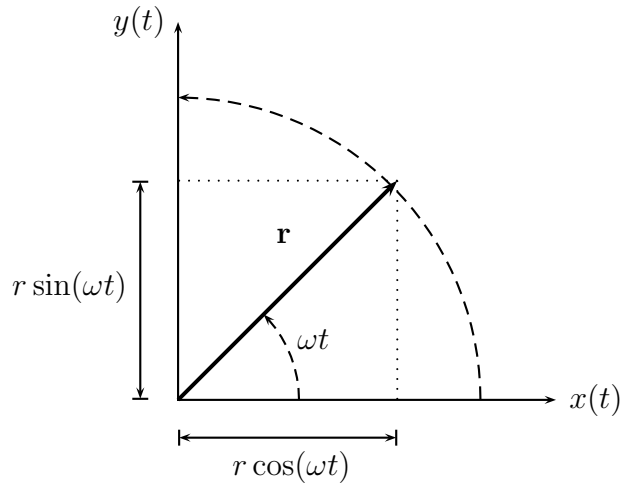
Es muy importante realizar las siguientes observaciones:

- La ecuación (1.74) hace que el lanzamiento en un campo gravitatorio sea también llamado movimiento parabólico.
- Una ecuación como la (1.74) es denominada ecuación de **trayectoria**, ya que nos está indicando como es el movimiento en el espacio real. Es ampliamente utilizada como primera aproximación en balística y en la descripción de movimiento de proyectiles libres de fricción del aire.
- No se deben confundir las gráficas de trayectoria con las de desplazamiento contra tiempo, a pesar de que las dos dan parábolas la información física es distinta. En una gráfica de desplazamiento

contra tiempo estamos representando la evolución del movimiento en un eje con respecto al tiempo. En un gráfica de trayectoria estamos representando las posiciones que seguiría un objeto en el espacio físico real. Es muy diferente la información de la ecuación (1.74) de la de la ecuación (1.73).

1.7.1. Movimiento circular uniforme

Existe un caso especial de movimiento en dos dimensiones, es el movimiento circular uniforme, este es frecuente verlo en los juegos mecánicos que giran sin parar alrededor de un centro fijo, y que suelen causar nauseas a algunos de los que tratan de disfrutar de ellos. En este tipo de movimientos la *rapi-*dez permanece constante, pero la velocidad varia, ya que la dirección del movimiento hace que se describa siempre una curva cerrada, como la que se muestra a continuación.



Las componentes x e y son obtenidas por trigonometría.

Considérese una partícula moviéndose en el plano xy , de acuerdo a la ecuación vectorial

$$\mathbf{r} = r (\cos(\omega t), \sin(\omega t)) = r (\cos(\omega t)\hat{\mathbf{i}} + \sin(\omega t)\hat{\mathbf{j}}), \quad (1.75)$$

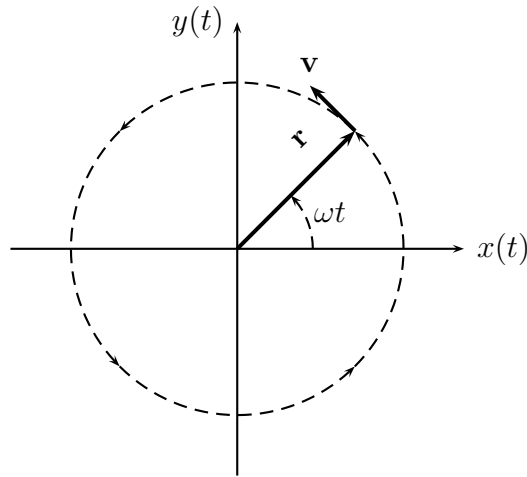
en donde r y ω son constantes y t es el tiempo. ¿Qué significan r y ω ?, para verlo primero encontremos la magnitud del vector,

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{r}| &= \sqrt{(r \cos(\omega t))^2 + (r \sin(\omega t))^2} \\
 |\mathbf{r}| &= \sqrt{r^2(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))} \\
 |\mathbf{r}| &= r\sqrt{(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))} \\
 |\mathbf{r}| &= r\sqrt{1} \\
 |\mathbf{r}| &= r.
 \end{aligned} \tag{1.76}$$

En donde hemos utilizado la identidad $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$. El resultado obtenido nos indica que **en un movimiento circular la magnitud del vector permanece constante**. Por lo tanto r es la magnitud del vector posición, y es además el radio del movimiento circular.

Para ω vamos a realizar el siguiente análisis,

- La cantidad ωt debe ser adimensional, es decir que no debe tener dimensión alguna ya que debe ser un ángulo y por definición las medidas angulares no tienen unidades. Como t tiene unidades de tiempo, entonces ω debe tener unidades de $\frac{1}{\text{tiempo}}$.
- En el siguiente diagrama ilustramos el movimiento circular,



Como ωt es positivo, esto nos indica que el movimiento se realiza en el sentido contrario de las manecillas del reloj, como se indica en el

diagrama anterior. Además se ve claramente el significado de ωt , es el ángulo que el movimiento tiene en un instante t .

- El tiempo \mathbf{T} que tarda la partícula en dar una vuelta completa, es el tiempo que tarda en recorrer un ángulo de 2π , es decir $360^{\circ 5}$.

$$\begin{aligned}\omega \mathbf{T} &= 2\pi \\ \omega &= \frac{2\pi}{\mathbf{T}}.\end{aligned}\tag{1.77}$$

De la ecuación (1.77) vemos claramente el significado de ω , es **la razón de cambio del ángulo en un movimiento circular**. Es decir que ω nos está dando la denominada **velocidad angular**, es decir que tanto está cambiando el ángulo con el tiempo, y se mide en radianes sobre segundo..

- \mathbf{T} , es el tiempo requerido en dar una vuelta, o completar un ciclo, y es llamado **periodo** y tiene unidades de tiempo como es lógico.
- El inverso del periodo es denominado **frecuencia**,

$$\text{Frecuencia} = \frac{1}{\text{Periodo}} = \frac{1}{\mathbf{T}}.\tag{1.78}$$

- En la gráfica también podemos ver el vector velocidad, en un movimiento circular este vector siempre es tangente a la dirección de movimiento. Para obtener el vector velocidad utilizamos la derivada del vector posición con respecto al tiempo.

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}(r \cos(\omega t), r \sin(\omega t)) \\ &= r\omega(-\sin(\omega t), \cos(\omega t)).\end{aligned}\tag{1.79}$$

La magnitud del vector velocidad es,

$$\begin{aligned}|\mathbf{v}| &= \sqrt{(r\omega)^2(-\sin(\omega t))^2 + (r\omega)^2(\cos(\omega t))^2} \\ |\mathbf{v}| &= r\omega\sqrt{\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)} \\ |\mathbf{v}| &= \omega r\end{aligned}\tag{1.80}$$

⁵Las medidas angulares en física se dan en radianes, π radianes equivale a un ángulo de 180° .

Esta velocidad es la velocidad tangente al movimiento, no es la velocidad angular. Y es proporcional al radio y a la velocidad angular. Por esto en el movimiento circular se tiene mas velocidad si se está en el extremo que si se encuentra cerca al centro.

- Para mostrar que el vector velocidad es tangente a la trayectoria podemos utilizar el producto punto vectorial, haciendo $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} &= (-r\omega \sin(\omega t), r\omega \cos(\omega t)) \cdot (r \cos(\omega t), r \sin(\omega t)) \\ &= -r^2\omega \sin(\omega t) \cos(\omega t) + r^2\omega \sin(\omega t) \cos(\omega t) \\ &= 0.\end{aligned}\tag{1.81}$$

Este resultado es general, independiente de los valores de ω y r , por lo tanto en todo movimiento circular la velocidad es tangente al movimiento.

- De la misma manera podemos hallar la **aceleración**, derivando la velocidad,

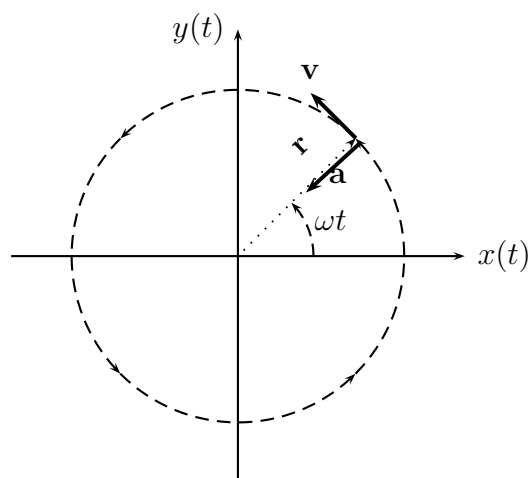
$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ \mathbf{a} &= \frac{d}{dt} [r\omega (-\sin(\omega t), \cos(\omega t))] \\ \mathbf{a} &= r\omega^2 (-\cos(\omega t), -\sin(\omega t)) \\ \mathbf{a} &= -\omega^2 \mathbf{r}\end{aligned}\tag{1.82}$$

Nuevamente esta ultima ecuación nos da información muy importante,

- El termino $-\mathbf{r}$ nos indica que la aceleración es proporcional a el vector posición, pero apunta en la dirección contraria a este. La aceleración hace que la velocidad cambien continuamente de dirección hacia el centro del circulo que forma el movimiento.
 - La aceleración es proporcional a ω^2 , lo que significa que aumentar dos veces la frecuencia de rotación es equivalente a aumentar cuatro veces la aceleración.
- En el siguiente diagrama mostramos la dirección de los vectores posición, velocidad y aceleración del movimiento circular.

relación	parámetro no involucrado
$x - x_0 = \frac{v_0 + v}{2}t$	a = aceleración
$v = v_0 + at$	$x - x_0$ = desplazamiento
$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	v velocidad final
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	t = intervalo de tiempo

Cuadro 1.1: Relaciones útiles al estudiar movimientos acelerados.



El vector posición ha sido dibujado con una línea de puntos, para poder ver la dirección de vector aceleración.

1.8. Algunas aplicaciones

Existen una serie de relaciones muy útiles a la hora de estudiar la cinemática de movimientos acelerados. Estas relaciones se muestran en la tabla 1.1

Ejemplo 10 *Disparo de una bala*

Una bala se dispara verticalmente hacia arriba alcanzando una altura de 1900 metros.

1. *¿Cuál es la velocidad inicial de la bala?*
2. *¿Cuanto tiempo permanece la bala en el aire?*

3. ¿A qué altura se encuentra la bala 30 segundos después del lanzamiento?
1. La bala esta sometida a la acción de la gravedad; cuando llega a la máxima altura posible su velocidad es cero. Utilizando una de las relaciones de la tabla 1.1 obtenemos con $a = -g$,

$$\begin{aligned}
 1900 \text{ m} &= \frac{0^2 - v_0^2}{2(-9,8 \text{ m/s}^2)} \\
 v_0^2 &= 2(-9,8 \text{ m/s}^2)(1900 \text{ m}) \\
 v_0 &= 193 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

En la vida real la velocidad inicial de un proyectil está por encima de los 600 m/s, para que pueda alcanzar esa altura, cual es la razón. Lo anterior se debe a que se ha despreciado el efecto de la fricción sobre la bala. Mas adelante se verá que la fuerza de fricción ejerce una muy importante acción sobre el movimiento de una bala. Sin embargo en los cálculos la despreciamos.

2. Para encontrar el tiempo de vuelo del proyectil se puede considerar un movimiento en caída libre, y se intentará averiguar el tiempo que tarda el proyectil en caer 1900 metros, luego este tiempo se multiplicará por dos, ya que el tiempo de subida es igual al tiempo de bajada.

$$y = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \quad (1.83)$$

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \times (-1900 \text{ m})}{-9,8 \text{ m/s}^2}} = 19,7 \text{ s} \quad (1.84)$$

por lo tanto el tiempo de vuelo del proyectil es dos veces el tiempo de caída libre.

$$t_v = 39,4 \text{ s.}$$

En la ecuación (1.83) se ha puesto a la velocidad inicial v_0 , sin embargo como hemos considerado un movimiento de caída libre, en el cual en un instante inicial la velocidad $v_0 = 0$. En la ecuación (1.84) hemos substituido hemos utilizado valores negativos para la distancia, -1900 ,

y para la aceleración $-9,8 \text{ m/s}^2$, esto se debe al sistema de referencia que hemos escogido, para analizar nuestro movimiento, el movimiento de caída libre se inicia en cero para el eje y y luego cae hacia valores negativos hasta -1900 metros, de la misma forma el valor negativo en la aceleración se debe a que la aceleración tiene como efecto hacer que los objetos caiga, es decir que se vayan hacia valores negativos del eje Y .

3. Para hallar la altura alcanzada 30 segundos después del disparo utilizamos la velocidad inicial, $v_0 = 193 \text{ m/s}$, la cual corresponde a un vector dirigido en sentido positivo del eje y .

$$\begin{aligned} y &= v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \\ &= (193 \text{ m/s}) (30 \text{ s}) + \frac{1}{2} (9,8 \text{ m/s}^2) (30 \text{ s})^2 \\ &= 1380 \text{ m} \end{aligned} \tag{1.85}$$

A los treinta segundos el cuerpo está cayendo, después de alcanzar su altura máxima.

Ejemplo 11 Una partícula en el plano (x, y) , describe un movimiento tal que su posición \mathbf{r} en metros en función del tiempo está dada por

$$\mathbf{r} = (2 + 3t)\hat{\mathbf{i}} + (3t - 5t^2)\hat{\mathbf{j}} = ((2 + 3t), (3t - 5t^2)). \tag{1.86}$$

Hallar

1. Su velocidad en un tiempo t .
2. Su aceleración en un tiempo t .
3. posición, velocidad y aceleración iniciales.
4. Posición, velocidad y aceleración, 5 segundos después de iniciado el movimiento.

Para el desarrollo de las anteriores preguntas tenemos:

1. La velocidad de la partícula es

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &= 3\hat{\mathbf{i}} + (3 - 10t)\hat{\mathbf{j}} \\ &= (3, 3 - 10t)m/s\end{aligned}$$

Nótese que en el eje x la velocidad es constante, mientras que en el eje y la velocidad varía con el tiempo.

2. La aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo.

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ &= -10\hat{\mathbf{k}} \\ &= (0, -10)\end{aligned}$$

En este caso la aceleración es una constante en el eje y , y es aproximadamente igual a la aceleración de la gravedad y va dirigida hacia el eje negativo de y .

3. La posición, velocidad y aceleración iniciales se determinan para $t = 0$,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(0) &= 2\hat{\mathbf{i}} = (2, 0)m \\ \mathbf{v}(0) &= 3\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} = (3, 3)m/s \\ \mathbf{a} &= -10\hat{\mathbf{j}} = (0, -10)m/s^2\end{aligned}$$

4. La posición, velocidad y aceleración para $t = 5$ s,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(5) &= 17\hat{\mathbf{i}} - 110\hat{\mathbf{j}} = (17, -110)m \\ \mathbf{v}(5) &= 3\hat{\mathbf{i}} - 47\hat{\mathbf{j}} = (3, -47)m/s \\ \mathbf{a} &= -10\hat{\mathbf{j}} = (0, -10)m/s^2\end{aligned}$$

Ejemplo 12 La polea de un molinete tiene un diámetro de 20 cm y gira con una frecuencia de 10 revoluciones/minuto.

1. ¿Cuál es su velocidad angular?
2. ¿Qué ángulo ha barrido al cabo de 10 segundos?

3. Si hala una carga ¿cuánto cable ha recogido al cabo de 10 segundos?

La solución a las anteriores preguntas está dada por:

1. La velocidad angular es:

$$\begin{aligned}\omega &= 2\pi f \\ &= 2\pi \frac{10 \text{ rev}}{60 \text{ s}} \\ &= 1,047 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\end{aligned}\tag{1.87}$$

2. Al cabo de 10 segundos barre un angulo dado por:

$$\begin{aligned}\theta &= \omega t \\ &= 1,047 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \times 10 \text{ s} \\ &= 10,47 \text{ rad}\end{aligned}\tag{1.88}$$

3. Al halar la cuerda se ha aproximado un distancia, D :

$$\begin{aligned}D &= r\theta \\ &= 10 \text{ cm} \times 10,47 \text{ rad} = 1047 \text{ cm} = 10,47 \text{ m}\end{aligned}\tag{1.89}$$

Recordemos que la formula (1.89) proviene de la definición de radian, en la cual

$$\text{Radian } (\theta) = \frac{\text{Perímetro } (D)}{\text{Radio } (r)}$$

El perímetro es precisamente la cantidad que estamos interesados en averiguar.

Ejemplo 13 Describir el movimiento de un cuerpo que inicialmente está en reposo y luego se deja caer libremente. En la figura (1.2) se muestra el grafico que podemos asignar para este ejemplo.

La velocidad inicial del cuerpo es nula, y vamos a despreciar los efectos de resistencia del aire. Vamos a suponer que el cuerpo se encuentra inicialmente en el origen del sistema de coordenadas, y de esta forma al caer lo hace hacia la dirección negativa del eje z . Vamos a realizar las siguientes observaciones:

- La velocidad inicial es $v_{0z} = 0$.

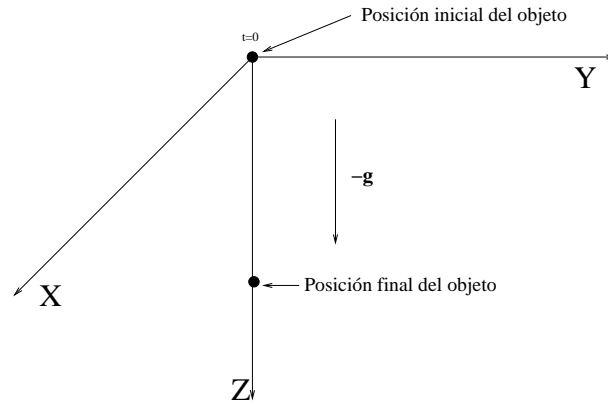


Figura 1.2: Gráfico que muestra la posición inicial y final del objeto, el desplazamiento se realiza hacia los valores negativos del eje Z , y la gravedad es negativa.

- En los otros ejes, (x, y) no hay movimiento, ya que este es una caída libre simple. Por lo tanto no nos interesará el movimiento a lo largo de otros ejes.
- La posición inicial $z_0 = 0$.
- Las ecuaciones de movimiento que podemos utilizar son.

$$v_z = -gt \quad (1.90)$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 \quad (1.91)$$

$$v_z^2 = -2gz \quad (1.92)$$

Estas ecuaciones permiten evaluar la posición z y la velocidad v_z , para cada tiempo.

- utilizando $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ obtenemos la siguiente tabla

Tiempo (s)	Distancia (m)	Velocidad (m/s)
0	0	0
1	-4.9	-9.8
2	-19.6	-19.6
3	-44.1	-29.4
4	-78.4	-39.2
5	-122.5	-49.
6	-176.4	-58.8
7	-240.1	-68.6
8	-313.6	-78.4
9	-396.9	-88.2
10	-490.	-98.

- Los signos negativos en los valores de desplazamiento y velocidad en la anterior tabla se deben a que el vector velocidad posee una dirección negativa, como ya se ha indicado.

Ejemplo 14 Un lanzador de béisbol puede impartir una velocidad máxima a una bola de 120 km/h. Determinar la máxima altura a la que puede lanzar verticalmente la bola.

Para la solución de este problema el primer paso es convertir la velocidad a unidades que podamos manejar fácilmente, para ello hacemos un cambio a metros/segundo.

$$\begin{aligned}
 120 \frac{\text{km}}{\text{h}} &= 120 \frac{1000 \text{ metros}}{3600 \text{ segundos}} \\
 &= 33,3 \text{ m/s.}
 \end{aligned}
 \tag{1.93}$$

Ahora podemos utilizar las ecuaciones de movimiento. Cuando la bola alcance su altura máxima la velocidad de la misma será cero. Utilizando una de las ecuaciones del anterior problema, ecuación (1.92), tenemos

$$\begin{aligned}
 v_{0z}^2 &= 2gz \\
 z &= \frac{v_{0z}^2}{2g} \\
 z &= \frac{(33,3 \text{ m/s})^2}{2 \times 9,8 \text{ m/s}^2} \\
 z &= 56,5 \text{ m.}
 \end{aligned}
 \tag{1.94}$$

Entonces la altura máxima que alcanzará una bola al ser lanzada verticalmente hacia arriba es igual a 56.5 metros.

1.9. Taller experimental: Cinemática del movimiento unidimensional.

El movimiento mas simple conocido es el unidimensional, y es el primer movimiento estudiado. Las cantidades de velocidad y aceleración son las primeras que podemos medir de forma inmediata. Durante el desarrollo del capítulo se introdujo el concepto de razón de cambio por medio de la evolución en el tiempo de la posición.

En esta practica se persiguen dos objetivos:

1. Familiarizar al estudiante con unidades de manejo de tiempo diferente al segundo.
2. Registrar con la ayuda de cintas para la obtención de datos que permitan graficar las cantidades de desplazamiento y velocidad como función del tiempo.
3. Determinar el tipo de movimiento del objeto bajo estudio.

1.9.1. Cuestionario

1. ¿Cómo se suele medir el tiempo en las carreras de formula 1?.
2. ¿Cómo es usual medir la distancia en un carro?.
3. ¿Cuáles son las unidades de medida para la distancia, la velocidad y la aceleración mas utilizadas en Colombia?.
4. ¿Por qué es importante unificar las unidades de medida a nivel mundial?.
5. Cuando dejamos rodar un carro por una pendiente ¿Como es el movimiento a velocidad constante ó acelerado?.

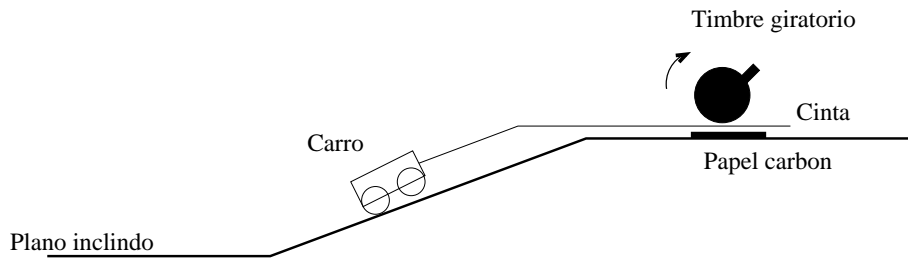


Figura 1.3: Disposición del experimento a realizar. El timbre es una rueda giratoria con un determinado tiempo de giro que posee un piñón que deja una muestra cada vez que presiona la cinta contra el papel carbón. El carrito se desliza libremente por el plano inclinado halando la cinta. No hay presión alguna entre el timbre y la cinta, exceptuando cuando se deja la marca por la presión del carbón.

1.9.2. La experiencia

Los materiales a utilizar serán

- Timbre registrador.
- Cinta de papel o de tela de 2 cm de grosor y de aproximadamente 2.5 metros de largo..
- Papel carbón.
- Plano inclinado.
- Carrito de juguete.

La disposición de los materiales se muestra en la figura 1.3 Deje caer el carro por el plano inclinado a la vez que enciende el motor del timbre, el cual le dará la medida de tiempo. Observe el registro que obtiene en la cinta y conteste:

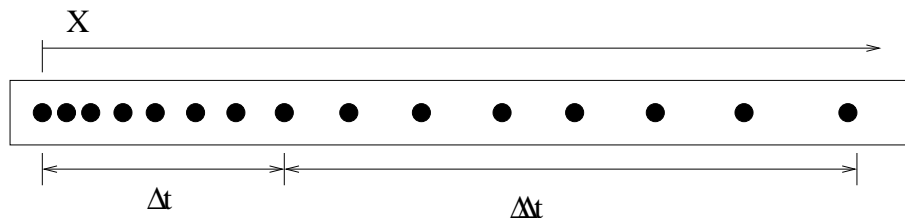
1. ¿Se encuentran todos los puntos igualmente espaciados?, ¿por qué?.
2. ¿Qué significa que todos los puntos se encuentren igualmente espaciados?.

1.9. TALLER EXPERIMENTAL: CINEMÁTICA DEL MOVIMIENTO UNIDIMENSIONAL.55

3. ¿Qué significa que todos los puntos se encuentren no igualmente espaciados?.
4. ¿Permite el registro que se obtuvo en la cinta hacer una gráfica de posición contra tiempo?. Utilice como tiempo el dado en unidades de las marcas del timbre.
5. Haga la gráfica del punto anterior y describa el movimiento en cada parate de la gráfica.
6. ¿Cómo fue el movimiento en su parte inicial?.
7. ¿Cómo fue el movimiento en su parte final?.

Para hacer mas precisión acerca del método de medición vamos a hacer lo siguiente:

- Escoja como intervalo de tiempo Δt de 8 a 10 marcas consecutivas del timbre sobre la cinta. Esto ya lo ha hecho anteriormente pero solo con dos marcas consecutivas. Lo que va a obtener es algo como lo que mostramos a continuación:



- Con lo anterior haga una tabla de distancia contra tiempo.
- Utilizando la anterior tabla realice una gráfica de distancia contra tiempo.
- Haga una tabla de velocidad contra tiempo partiendo de las mediciones directas sobre la cinta.
- Observe las dos gráficas obtenidas y concluya acerca del tipo de movimiento presentado, distancia recorrida, velocidades y aceleraciones posibles.

Haga un análisis del movimiento utilizando lo estudiado en este capítulo.

1.10. Resumen y glosario

- La cinemática se encarga de estudiar el movimiento sin preocuparse por sus causas.
- Los vectores son entes matemáticos mas complejos que los números, ya que poseen magnitud y dirección.
- Las operaciones que se pueden realizar sobre los vectores son la suma, la resta, la multiplicación por una cantidad escalar, el producto punto entre dos vectores el cual da como resultado una magnitud escalar, y el producto cruz entre vectores la cual da como resultado otro vector perpendicular a los dos vectores iniciales.
- Un sistema coordenado es un ente matemático en el cual realizamos las operaciones de vectores de sistemas físicos reales.
- La razón de cambio es la división de una cantidad que cambia en el tiempo por el tiempo empleado en realizar ese cambio.

$$\text{Razón de cambio de } x = \frac{\text{Cambio en } x}{\text{tiempo empleado en el cambio}}$$

- La velocidad es la razón de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo.
- La aceleración es la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo.
- Para el caso de movimiento unidimensional con **aceleración constante** se pueden aplicar las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + a_x t \\ x &= x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ v_x^2 &= v_{0x}^2 + 2a_x x \end{aligned}$$

En donde v_{0x} es la velocidad inicial, x_0 es la posición inicial, y a_x es la aceleración, la cual es una constante. Estas ecuaciones **no son válidas cuando la aceleración varía en el tiempo**.

- El movimiento de proyectiles es bidimensional, con uno de los ejes a velocidad constante, generalmente la gravedad para el caso de la tierra ($g = 9,8m/s^2$), y el otro eje a velocidad constante.
- El movimiento circular es otro ejemplo de movimiento bidimensional. En el **movimiento circular uniforme**, la velocidad de rotación es constante y el vector aceleración está dirigido radialmente hacia adentro con una magnitud de

$$\frac{v}{r} = r\omega^2.$$

- La velocidad angular ω es un vector dirigido según el eje de rotación, cuya magnitud está dada por

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}.$$

- El vector aceleración angular α se define como la variación temporal del vector velocidad angular, y su magnitud es

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}.$$

1.11. Evaluación

1. ¿Cual es la diferencia entre velocidad y rapidez?.
2. ¿Puede un cuerpo mantener su velocidad constante si cambia de dirección?.
3. ¿Puede un cuerpo mantener su rapidez constante si cambia de dirección?.
4. ¿Puede un cuerpo tener el vector velocidad en una dirección y el de aceleración en otra?
5. ¿Cuando camino desde mi casa hasta la tienda de la esquina tengo que moverme con aceleración?.
6. ¿Sobre la tierra la velocidad de caída de un objeto depende de su peso?.

7. ¿Desde que altura tiene que ser soltado un objeto para que demore 1 segundo cayendo?.
8. Un automóvil viaja en línea recta a una velocidad de 72 km/h, se le aplican los frenos para reducir su velocidad de manera que la aceleración sea constante hasta 18 km/h en 5 segundos. Hallar:
 - a) La aceleración del automóvil.
 - b) La distancia recorrida en los 5 segundos que dura frenando.
 - c) La distancia recorrida en los dos primeros segundos que dura frenando.
 - d) ¿En cuanto tiempo recorre 30 metros a partir del instante en el cual se le aplican los frenos?.
9. La lectura del velocímetro indica:
 - a) El módulo de la velocidad.
 - b) El módulo de la velocidad instantánea.
 - c) El vector velocidad.
 - d) El desplazamiento.
10. Con la lectura del cuentakilómetros de un automóvil se puede determinar:
 - a) Su desplazamiento.
 - b) La distancia total recorrida.

Además, si se conoce el tiempo transcurrido entre la lectura inicial y la final del cuentakilómetros se puede determinar:
 - c) Su desplazamiento.
 - d) Su rapidez.
11. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?:
 - a) Dos cuerpos que recorren la misma distancia, efectúan el mismo desplazamiento.
 - b) La distancia recorrida por un cuerpo es igual a la longitud de su trayectoria.

- c) La velocidad instantánea y la velocidad media tienen la misma dirección.
 - d) La velocidad se define como espacio recorrido sobre tiempo.
 - e) La aceleración se define como la velocidad sobre el tiempo.
12. Una hormiga se mueve sobre una superficie plana con una aceleración constante $\mathbf{a} = (2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}})cm/s^2 = (2, -1)cm/s^2$. En $t = 0$ la hormiga se encuentra en el punto $(-2, 1)cm$ con respecto al punto considerado como origen y lleva una velocidad $v_0 = -3\hat{\mathbf{j}}cm/s$.
- a) ¿Cuales son las ecuaciones vectoriales de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo?.
 - Halle la posición, velocidad y aceleración de la hormiga 5 segundos después de iniciado el movimiento.
13. El movimiento de un cuerpo que se desplaza en linea recta está dado por la ecuación

$$x = \frac{1}{2}t^2 - 5t + 1,$$

x está dado en metros y t en segundos.

- a) Halle las ecuaciones para la velocidad y la aceleración en función del tiempo.
- b) Halle la posición, velocidad y aceleración del cuerpo en $t=0$.
- c) ¿Se puede afirmar que se trata de un movimiento uniformemente acelerado?.
- d) Haga una gráfica de distancia contra tiempo, velocidad contra tiempo y aceleración contra tiempo. ¿Qué puede concluir al respecto?.

1.12. Información de retorno

A continuación encontrará respuestas a las preguntas y ejercicios planteados en la parte inicial, evaluación de conceptos previos, y final del capítulo, evaluación. Las respuestas pueden ser ampliadas por usted y la solución a los ejercicios no es única. Se busca que usted amplíe la respuesta, la mejore y encuentre otros métodos de solución a los ejercicios.

Conceptos previos

1. ¿Como se puede definir **movimiento**?

podemos definir movimiento como el cambio de posición de un objeto con respecto al tiempo. Es claro que la primera magnitud con la que podemos caracterizar el movimiento es la posición y después la velocidad.

2. ¿Qué es una cantidad escalar y una vectorial?

Una magnitud escalar es aquella que puede ser representada por un número real, por ejemplo el peso de un objeto, ó la altura de una persona. Una cantidad escalar es aquella que posee magnitud, dirección y sentido, por ejemplo la velocidad de un avión tiene que dar no solamente la rapidez del movimiento sino también dar información sobre la dirección que sigue y el recorrido realizado.

3. ¿En donde se utilizan los velocímetros?

En los aviones es muy común el uso del velocímetro, ya que es necesario dar una orientación y una magnitud de la velocidad.

4. ¿Qué es acelerar?

Acelerar es aumentar la velocidad de un cuerpo.

5. ¿Qué es frenar?

Frenar es equivalente a desacelerar, es decir, reducir la velocidad de un cuerpo.

Evaluación

1. ¿Cual es la diferencia entre velocidad y rapidez?

la velocidad es un vector que indica la razón de cambio de la distancia con respecto al tiempo. La rapidez es la magnitud del vector velocidad.

2. ¿Puede un cuerpo mantener su velocidad constante si cambia de dirección?

No, ya que si la dirección de un cuerpo de un cuerpo cambia, el vector velocidad tambien cambia.

3. ¿Puede un cuerpo mantener su rapidez constante si cambia de dirección?.

Si, por ejemplo en el movimiento circular uniforme, la rapidez de un cuerpo es la misma pero su dirección cambia de manera continua.

4. ¿Puede un cuerpo tener el vector velocidad en una dirección y el de aceleración en otra?

Si, por ejemplo en el movimiento circular, la aceleración va dirigida hacia el centro del movimiento, pero la velocidad es tangencial al círculo descrito por el movimiento.

5. ¿Cuando camino desde mi casa hasta la tienda de la esquina tengo que moverme con aceleración?.

Si, ya que siempre que halla un cambio en la velocidad va a existir una aceleración.

6. ¿Sobre la tierra la velocidad de caída de un objeto depende de su peso?.

No, la velocidad de caída de un objeto depende solo de la aceleración de la gravedad, la cual es una constante.

7. ¿Desde que altura tiene que ser soltado un objeto para que demore 1 segundo cayendo?.

Utilizando la ecuación (1.52) de un movimiento bajo la acción de la gravedad:

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$$

Tomamos como punto de inicio del movimiento $y_0 = 0$, y como el objeto se suelta desde el reposo la velocidad inicial es igual a cero $v_{0y} = 0$, la aceleración es igual a $g = 10 \text{ m/s}^2$, y $t = 1 \text{ s}$, por lo cual tenemos:

$$\begin{aligned} y(1) &= -\frac{1}{2}gt^2 \\ &= -\frac{1}{2}10(\text{m/s}^2)1^2(\text{s}^2) \\ &= -5\text{m} \end{aligned}$$

El objeto tiene que ser lanzado desde una distancia de 5 metros, el signo negativo hace referencia a que nuestro objeto fue lanzado desde

el punto $y_0 = 0$ y la gravedad va orientada a la dirección negativa del eje y .

8. Un automóvil viaja en línea recta a una velocidad de 72 km/h, se le aplican los frenos para reducir su velocidad de manera que la aceleración sea constante hasta que alcanza una velocidad de 18 km/h en 5 segundos. Hallar:

- a) La aceleración del automóvil.

Utilizamos la definición de aceleración instantánea (1.42)

$$\begin{aligned} a &= \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} \\ &= \frac{18 \text{ (km/h)} - 72 \text{ (km/h)}}{5 \text{ s} - 0 \text{ s}} \\ &= -10,8 \text{ (km/h}^2\text{)} \\ &= -3 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

El signo negativo se refiere a que el automóvil está desacelerando. Note que la aceleración final se ha dado en metros sobre segundo al cuadrado, esto se hace por comodidad.

- b) La distancia recorrida en los 5 segundos que dura frenando.

Utilizamos la ecuación (1.50) y la aceleración encontrada en el punto anterior, $t = 5 \text{ s}$, $v_0 = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$ y $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ &= 0 + 20 \text{ (m/s)} 5 \text{ (s)} - \frac{1}{2} 3 \text{ (m/s}^2\text{)} 5^2 \text{ (s}^2\text{)} \\ &= 62,5 \text{ m} \end{aligned}$$

El automóvil recorre 62.5 metros en los 5 segundos que dura la frenada hasta alcanzar los 28 km/h. Nótese la gran distancia que recorre un carro frenando.

- c) La distancia recorrida en los dos primeros segundos que dura frenando.

Puede utilizar el mismo procedimiento del punto anterior para mostrar que la distancia recorrida los primeros 2 segundos de frenado es igual a 34 metros.

- d) ¿En cuanto tiempo recorre 30 metros a partir del instante en el cual se le aplican los frenos?.

Utilizando la ecuación (1.50) para despejar el tiempo t obtenemos una ecuación cuadrática:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}at^2 + v_0t - x &= 0 \\ -\frac{1}{2}3t^2 + 20t - 3 &= 0 \\ -\frac{3}{2}t^2 + 20t - 3 &= 0\end{aligned}$$

La solución a la anterior ecuación se puede encontrar en cualquier texto de álgebra, y es $t = 1,7$ segundos.

9. La lectura del velocímetro indica:
- a) El módulo de la velocidad.
 - b) El módulo de la velocidad instantánea.
 - c) El vector velocidad.
 - d) El desplazamiento.

La lectura del velocímetro nos indica el módulo o magnitud de la velocidad instantánea.

10. Con la lectura del cuentakilómetros de un automóvil se puede determinar:
- a) Su desplazamiento.
 - b) La distancia total recorrida.
Además, si se conoce el tiempo transcurrido entre la lectura inicial y la final del cuentakilómetros se puede determinar:
 - c) Su desplazamiento.
 - d) Su rapidez media.

Se puede determinar tanto la distancia total recorrida como la rapidez media del recorrido.

11. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?:

- a) Dos cuerpos que recorren la misma distancia, efectúan el mismo desplazamiento.
- b) La distancia recorrida por un cuerpo es igual a la longitud de su trayectoria.
- c) La velocidad instantánea y la velocidad media tienen la misma dirección.
- d) La velocidad se define como espacio recorrido sobre tiempo.
- e) La aceleración se define como la velocidad sobre el tiempo.

Solamente la afirmación b) es verdadera.

12. Una hormiga se mueve sobre una superficie plana con una aceleración constante $\mathbf{a} = (2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}})cm/s^2 = (2, -1)cm/s^2$. En $t = 0$ la hormiga se encuentra en el punto $(-2, 1)cm$ con respecto al punto considerado como origen y lleva una velocidad $v_0 = -3\hat{\mathbf{j}}cm/s$.

- a) ¿Cuales son las ecuaciones vectoriales de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo?

Las ecuaciones son:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= (-2 + t^2)\hat{\mathbf{i}} + \left(1 - 3t - \frac{1}{2}t^2\right)\hat{\mathbf{j}} = \left(-2 + t^2, 1 - 3t - \frac{1}{2}t^2\right)m \\ \mathbf{b} &= 2t\hat{\mathbf{i}} + (-3 - t)\hat{\mathbf{j}} = (2t, -3 - t)m/s \\ \mathbf{a} &= 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}\end{aligned}$$

- Halle la posición, velocidad y aceleración de la hormiga 5 segundos después de iniciado el movimiento.

Solo se debe reemplazar el tiempo, $t = 5$ segundos, en las anteriores ecuaciones.

13. El movimiento de un cuerpo que se desplaza en línea recta está dado por la ecuación

$$x = \frac{1}{2}t^2 - 5t + 1,$$

x está dado en metros y t en segundos.

- a) Halle las ecuaciones para la velocidad y la aceleración en función del tiempo.

Para la velocidad debemos derivar la ecuación de movimiento con respecto al tiempo, lo que nos da:

$$v = t - 5(m/s)$$

y para hallar la aceleración debemos derivar la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = 1(m/s^2)$$

- b) Halle la posición, velocidad y aceleración del cuerpo en $t=0$.
- c) ¿Se puede afirmar que se trata de un movimiento uniformemente acelerado?.

Si, ya que la derivada de la aceleración con respecto al tiempo es igual a cero.

- d) Haga una gráfica de distancia contra tiempo, velocidad contra tiempo y aceleración contra tiempo. ¿Qué puede concluir al respecto?.

Este ejercicio se le deja al lector, lo importante es que pueda utilizar las graficas de movimiento estudiadas en este capítulo para poder ver que el movimiento tiene una aceleración constante.

Palabras claves para búsqueda en Internet

A continuación se presentará una serie de palabras útiles para la búsqueda en Internet, las palabras se han probado en el buscador

<http://www.google.com>

no tienen ortografía dado que el buscador es universal, y en por que en ocasiones va a tener que utilizar teclados que no tienen tildes o eñes.

curso cinematica, curso fisica, experimentos fisica, vectores matematica, conversion de unidades, experimentos fisica.

Bibliografía recomendada:

Se puede consultar al final del texto, el número que encuentra al final de la referencia es el número correspondiente al texto en la bibliografía final.

- Formulas y tablas matemáticas en general [1].
- Mediciones y experimentos en cinemática [2].
- Conversión de unidades [18].
- Cinemática general [7, 8, 14, 19, 20, 21].

Capítulo 2

Leyes de Newton (Primera parte)

2.1. Introducción

En esta sección nos encargaremos del estudio de la **dinámica** y la **estática**, las cuales son las partes de la física que se encargan del estudio del movimiento buscando las causas que lo generan, ó que lo impiden.

Para ello estudiaremos las **leyes de movimiento de Newton**. Estas leyes son tres:

1. ley: La inercia.
2. ley: $\text{Fuerza} = \text{masa} \times \text{aceleración}$.
3. ley: Acción y reacción.

En su libro *Principios matemáticos de la filosofía natural*, Isaac Newton expone y desarrolla las tres leyes, sin embargo el lenguaje allí utilizado es poco claro, y no fue sino hasta 200 años después de publicado que Ernst Mach[19] traslada los argumentos del libro de Newton de manera mas lógica y clara. En general en la física moderna se utiliza el enfoque de Mach.

Las leyes de Newton son una introducción directa a la mecánica clásica, y es bueno mencionar que existen otras aproximaciones. Una de estas aproximaciones es la formulación de **Lagrange** y otra la de **Hamilton**, en las cuales es importante el concepto de energía en lugar de el de fuerza. Sin

embargo todas las formulaciones son equivalentes, dan lugar a idénticos resultados y conclusiones. En el presente texto no haremos énfasis en algún tipo de formulación, nuestro interés se centrará en la obtención de resultados a partir de las tres leyes de Newton.

La validez de la mecánica Newtoniana depende de los sistemas bajo estudio, en general es válida en un amplio margen de sistemas, desde movimientos de galaxias hasta choques de bolas de cristal. Sin embargo cuando los sistemas bajo estudio se mueven a velocidades comparables a la de una onda electromagnética en el vacío, $3 \times 10^8 m/s$ debemos usar un refinamiento denominado **teoría de la relatividad**¹. O cuando los sistemas son muy pequeños, comparables a las distancias atómicas, debemos usar **mecánica cuántica**. La falla de la mecánica clásica en estos dos aspectos proviene de las definiciones de espacio, tiempo en el caso de la relatividad, y de la medición en el caso de la cuántica.

Muchos de los conceptos de la física moderna proviene de manera directa de la mecánica clásica. Es por esto que el estudio de la mecánica es muy importante, ya que una gran parte de los conceptos de la física provienen directamente de la mecánica.

2.2. Evaluación de conocimientos previos

1. ¿Por qué cuando vamos dentro de un autobús y este frena bruscamente nosotros somos *empujados* hacia adelante?.
2. ¿Que hace cambiar la velocidad?.
3. ¿Cuál es la diferencia entre masa y peso?.
4. ¿Por qué es mas difícil mover un objeto que pese una tonelada que uno que pese una libra?.
5. ¿Por qué se mueven los planetas sin que nada los detenga?.
6. ¿Qué es fuerza?.
7. ¿Qué es inercia?.

¹La luz es una onda electromagnética, por esto también se le denomina “velocidad de la luz”.

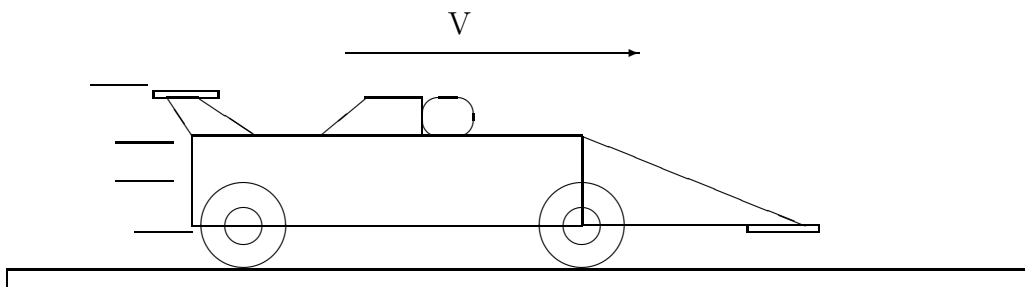
8. ¿Como se podría diseñar un dispositivo para medir el tiempo?
9. ¿Qué pasaría en la tierra si en este preciso momento deja de emitir energía y calor el sol?
10. Describa como un caballo es capaz de halar una carreta.

2.3. Primera ley: La inercia.

Una parte de las leyes de Newton proviene de la observación y otra parte de definiciones. Nosotros haremos una aproximación por medio de *experimentos mentales*, es decir experimentos que haremos con nuestra imaginación.

Cuando vamos en un autobús y este frena nosotros somos empujados hacia adelante, o por lo menos esa es nuestra percepción. Revisemos que es lo que entendemos por movimiento. En general siempre que decimos que algo se mueve implícitamente estamos diciendo *este objeto se mueve con respecto a este otro objeto*. Por ejemplo cuando observamos una carrera de autos el movimiento se realiza con respecto a la pista, la cual según nuestra impresión permanece inmóvil. Sin embargo la pista también se mueve, ¿como es posible que la pista de autos se mueva si yo la veo quieta?, bueno en realidad la pista y nosotros nos movemos con respecto al sol, hemos elegido la pista como sistema de referencia por que nosotros estamos quietos con respecto a ella. Y con este **sistema de referencia** es que estudiamos el movimiento y definimos velocidad, aceleración y todas estas cosas.

Cuando estamos observando una carrera de autos elegimos un sistema de referencia conveniente, de tal forma que sea fácil para nosotros medir los desplazamientos y velocidades involucradas en el sistema de estudio. Cuando decimos que un auto va a 150 km/h, estamos afirmando que esta velocidad es con respecto a la pista, no con respecto al sol.



El sistema de referencia es un sistema de coordenadas que hemos elegido apropiadamente, si por el contrario nosotros fuéramos dentro de carro de carreras, estaríamos interesados en sobrepasar a nuestros rivales. Entonces nuestro interés sería saber cual es la diferencia de velocidades entre el carro de adelante y el mío, si la velocidad de el es mayor que la nuestra, es obvio que no lo vamos a poder rebasar, pero por el contrario si nuestra velocidad es mayor lo lograremos sobrepasar.

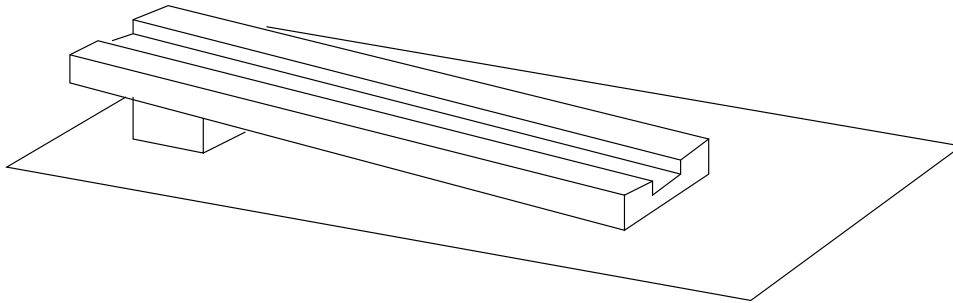
¿Qué pasa cuando el conductor frena bruscamente?. El espectador lo que ve es que la cabeza del conductor del carro de carreras sigue hacia adelante, y si pudiera medir la velocidad con la que sigue se daría cuenta de que va a la misma velocidad a la que iba el carro antes de frenar, por supuesto el piloto tiene que hacer un esfuerzo grande para mantener la cabeza en su sitio y no perder la concentración. Pero si nosotros fuéramos los pilotos de lo que sentiríamos es un fuerte empujón hacia adelante.

Lo que sucede es que cuando se va a velocidad constante hay una tendencia del cuerpo a seguir manteniendo esta velocidad, por lo tanto cuando tratamos de detener el cuerpo vamos a encontrar dificultad en pararlo. Por esta razón cuando vamos en un autobús y este frena, nuestro cuerpo tiene la tendencia a seguir en estado de movimiento en el cual se encontraba, como nuestro sistema de referencia es el autobús, cuando este frena nosotros **sentimos** que somos empujados hacia adelante, sin embargo en realidad lo que sucede es que continuamos en nuestro estado de movimiento, y somos nosotros mismos con ayuda de las sillas de adelante y nuestros brazos y piernas los que nos detenemos.

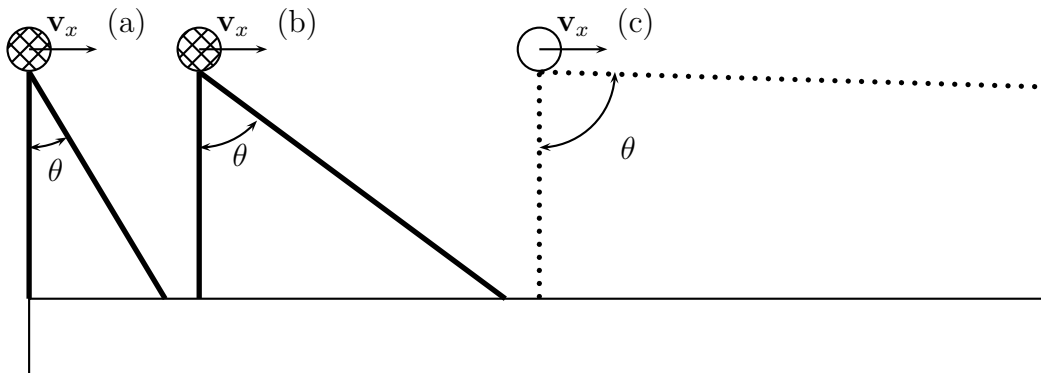
¿Cuando se detiene un cuerpo?, nuestra experiencia diaria nos muestra que todo cuerpo se detiene después de estar en movimiento. Cuando un carro se deja rodar sin acelerarlo este se detiene, cuando dejamos rodar por el suelo bolas de cristal estas terminan deteniéndose. Entonces ¿si todos los cuerpos se detienen es cierta la ley de la inercia?, es decir que un cuerpo tiene la tendencia a mantenerse en movimiento.

En realidad si nos fijamos mas detalladamente un cuerpo es detenido por influencias externas, el carro sufre una fricción con el pavimento y su maquinaria interna. Las bolas de cristal son detenidas por múltiples choques con las deformaciones del suelo.

Ahora realizaremos el siguiente experimento: supóngase que se tiene una bola de cristal, y un plano inclinado como el de la siguiente figura.



El plano inclinado lo pulimos muy bien, de tal forma que aminoramos los choques de la bola con imperfecciones de la superficie. Le damos una pequeña velocidad en la dirección x , de manera que la bola rodara hasta llegar al final, y entre mas largo sea el plano, el ángulo de inclinación será menor y la bola rodara mas. ¿Qué pasará si el plano inclinado se hace infinitamente largo?, ¿se detendrá la bola de cristal si la superficie es perfectamente lisa y libre de fricción?. En los siguientes dibujos mostramos la situación.



En (a) el ángulo θ es menor que en (b), y en (c) suponemos un plano casi horizontal, de tal forma que $\theta \approx \pi/2$. Y a todas las bolas les damos una velocidad inicial solamente en el eje x .

La respuesta a nuestras dos preguntas es sorprendente, si el plano inclinado se pone horizontal y se le da una pequeña velocidad inicial **¡la bola nunca se detendrá!**, y seguirá con la misma velocidad inicial. Lo anterior sucederá si logramos eliminar completamente la fricción entre la bola y el plano.

¿Qué pasará si no le damos una velocidad inicial a la bola?, pues que la bola nunca se moverá, a menos que el plano deje de estar inclinado o algo lo empuje. Este experimento fue realizado por Galileo Galilei, y fue él la primera

persona que expresó esa sorprendente propiedad de los cuerpos denominada **inercia**.

Ley de la inercia: Todo cuerpo tiene la tendencia a permanecer en reposo, o a continuar en su movimiento a velocidad constante.

Como ya vimos el movimiento depende del sistema de referencia, si fuéramos en un vagón de tren y observáramos la bola de cristal en el plano inclinado fuera del tren, y la bola y el tren se movieran a la misma velocidad, es decir con la misma dirección y la misma magnitud, podríamos decir que la bola está quieta con respecto al tren, o que se está moviendo con respecto al suelo. Por lo tanto podemos afirmar que

Para un cuerpo aislado que se mueve a velocidad constante siempre vamos a encontrar un sistema de referencia en el cual veamos el cuerpo en estado de reposo.

Esta es la esencia de la ley de la inercia, para un cuerpo aislado, es decir libre de cualquier influencia externa, siempre va a existir un sistema de referencia en el cual veamos el cuerpo en reposo. Un sistema de referencia que se mueva a velocidad constante es denominado **sistema de referencia inercial**.

Los sistemas de referencia inerciales, es decir aquellos que se mueven a velocidad constante, o se encuentran en reposo, son los mas importantes de la física, ya que la validez de las leyes físicas están sobre la base que se están estudiando sistemas inerciales. La tierra es el principal sistema inercial conocido, esta se mueve a aproximadamente 30 m/s, con respecto al sol, sin embargo nosotros no sentimos ese movimiento, debido a que es casi un sistema inercial. Sobre la tierra podemos realizar experimentos y demostrar la validez de las leyes físicas, por que podemos considerar a la tierra como un sistema inercial, aunque no aislado.

Ahora surge la pregunta ¿qué es un sistema aislado?, en principio un sistema aislado es un sistema libre de cualquier tipo de influencia externa, es decir es un sistema en el cual un cuerpo **nunca** cambia su velocidad, es decir es un sistema en el cual la aceleración es siempre cero para un objeto. ¿Existen realmente sistemas aislados?, esta respuesta la dejaremos para la siguiente sección.

Para terminar queremos hacer notar que la ley de la inercia actúa sobre cuerpos que tengan masa, dejaremos para mas adelante una explicación mas profunda al respecto.

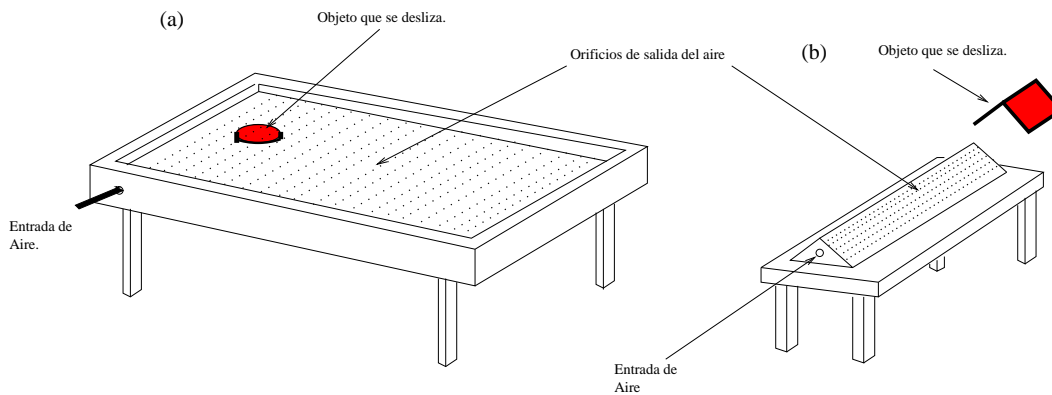


Figura 2.1: Dos elementos para simular sistemas aislados, (a) colchón de aire bidimensional, (b) colchon de aire unidimensional, denominado también **riel de aire**.

2.4. Segunda ley: La fuerza.

El espacio exterior es un buen ejemplo de un sistema casi aislado, los astronautas flotan en el espacio libre de fricción de casi cualquier tipo, y logran trabajar en sistemas, en muy buena aproximación, aislados. Cuando un astronauta arroja un objeto con una determinada velocidad, este continúa casi sin variar su velocidad salvo por influencias externas como la gravedad de otros planetas y cuerpos con masa.

Sin embargo realizar experimentos en el espacio es un poco costoso², sin embargo tenemos métodos muy ingeniosos para lograr aproximaciones a sistemas aislados. Uno de ellos es mediante un colchón de aire para mover objetos en una o dos dimensiones o en una dimensión. En la figura 2.1 vemos dos ejemplos de colchones de aire bidimensionales y tridimensionales.

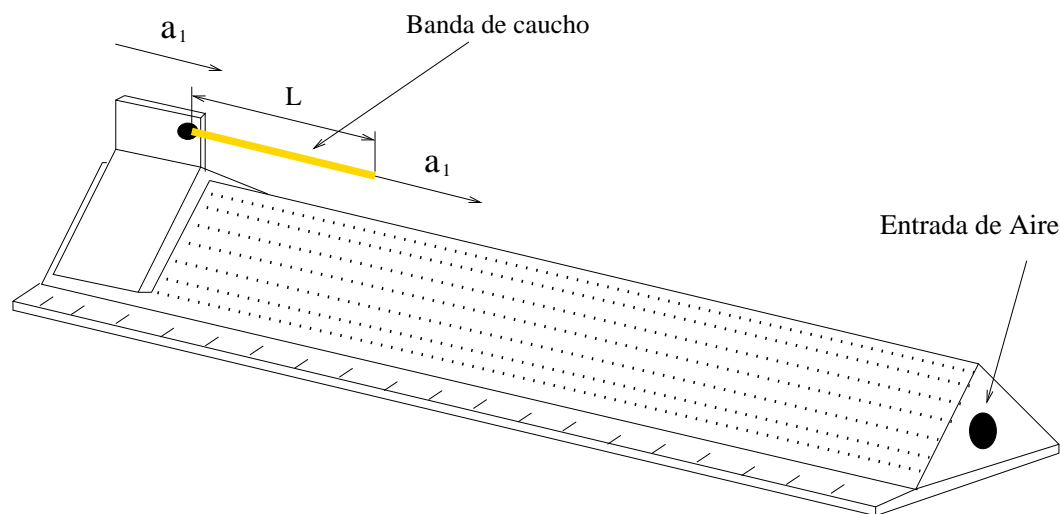
Ahora la pregunta es ¿qué hace cambiar la velocidad?, ya sabemos que para cambiar la velocidad necesitamos variar o su dirección, o su magnitud o ambas características al tiempo, y también sabemos que la razón de cambio de la velocidad es la aceleración. Pero exactamente ¿qué debemos hacer para que un objeto cambie su velocidad?. Para responder a esta pregunta debemos primero definir que es la **masa**.

²En el año 2002 un multimillonario pagó 20 millones de dólares por una corta travesía de una semana en el espacio.

2.4.1. La masa

Supóngase que en el riel de aire, figura 2.1 (b), colocamos el móvil para que flote libremente, y luego le atamos una banda de caucho, de tal forma que al tirar del bloque por medio de la banda de caucho, esta banda mantenga una longitud constante. Si pudiéramos medir la velocidad durante el recorrido nos daríamos cuenta que esta velocidad aumenta uniformemente con el tiempo, es decir que el movimiento se realiza a aceleración constante.

En la siguiente figura mostramos el experimento que planteamos en el anterior párrafo.



Es muy importante mantener la distancia de la banda de caucho siempre constante, es decir L .

Ahora colocamos mayor masa en el objeto que se mueve sobre el riel de aire. Y nuevamente movemos el objeto con la ayuda de la banda de caucho, procurando mantener la misma distancia de alargamiento en la banda de caucho. Lo primero que notamos es que es mas difícil de mover el objeto, por que tiene mas materia y por la ley de la inercia ahora podemos afirmar que entre mas materia tenga un cuerpo mas difícil será cambiar su velocidad, es decir será mas difícil acelerarlo.

La aceleración depende de una propiedad del objeto que llamaremos **masa**, y que está relacionada con la cantidad de materia que tiene un cuerpo. Nuestro objetivo es obtener una definición y una medida de lo que denominamos masa. Vamos a decir que el primer objeto sobre el riel posee una masa

que llamaremos m_1 , y va a ser nuestro patrón de medida, y a esa masa le vamos a asignar la aceleración producida cuando se tira con nuestra banda de caucho manteniendo estirada la banda una distancia determinada L .

Ahora tomaremos el segundo objeto sobre el riel que posee una cantidad diferente de materia, diremos que tiene una masa m_2 , y la compararemos con el primer objeto, para ello tomamos de nuevo nuestra banda y movemos el objeto de manera que la distancia en la banda sea la misma distancia que utilizamos en el primer objeto. Medimos la aceleración producida sobre el objeto, a_2 , y de esta forma *definimos* la masa del objeto como,

$$\boxed{m_2 = m_1 \frac{a_1}{a_2}}. \quad (2.1)$$

De la anterior definición de masa podemos decir:

- Para obtener esta definición necesitamos una masa patrón m_1 .
- Lo que distingue a una masa de otra es la razón $\frac{a_1}{a_2}$, ya que el experimento podría realizarse utilizando diferentes medidas en el caucho, y sin embargo la razón de estas dos aceleraciones permanece igual. Es decir que **la masa es independiente de la interacción externa, es una característica de los objetos.**
- La función del caucho es realizar una interacción cuyo objetivo es cambiar la velocidad del objeto bajo estudio. Por lo tanto una interacción puede cambiar la velocidad de un objeto³.
- La definición de masa es una definición operacional, es decir que se debe a experimentos, y no a abstracciones. Sin embargo tácitamente estamos asumiendo que sabemos que es distancia y que es tiempo.

2.4.2. La fuerza

Ahora podemos definir que es una fuerza, y para ello diremos que la razón por la cual la banda de caucho acelera un objeto es por que esta realizando una fuerza sobre el, es decir que:

³En términos generales una interacción es un concepto mas amplio, en la interacción debil por ejemplo, la función de una interacción es cambiar una partícula por otra.

La función de una fuerza es cambiar la velocidad de un objeto.

Por lo tanto siempre que un objeto cambia de velocidad es por que sobre el actua una fuerza. También por los razonamientos de la anterior sección podemos decir que:

La masa de un objeto es independiente de la fuerza que sobre el se ejerza.

De esta manera la fuerza tiene dos componentes importantes:

1. La masa del cuerpo al cual se le está cambiando la velocidad.
2. La aceleración, ya que la función de la fuerza es cambiar la velocidad del objeto.

Sabemos también que la fuerza que necesito para mover un objeto muy masivo es mayor que para uno con baja masa, por lo tanto la fuerza es proporcional a la masa.

$$\text{Fuerza} \sim \text{masa}. \quad (2.2)$$

Y entre mas masa tenga un objeto, al utilizar la misma fuerza, la aceleración es menor. Es decir que la masa es inversamente proporcional a la aceleración producida por una misma fuerza.

$$\frac{\text{Fuerza}}{\text{Aceleración}} \sim \text{Masa}. \quad (2.3)$$

De esta forma llegamos a nuestra definición de fuerza, para una masa m a la cual se le está cambiando su velocidad con una aceleración \mathbf{a} , se le está ejerciendo una fuerza de,

$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}} \quad (2.4)$$

De la ecuación (2.4) podemos decir,

- La fuerza es un vector, ya que es el producto de una cantidad escalar, la masa, y una cantidad vectorial, la aceleración.
- La fuerza es directamente proporcional a la aceleración, un objeto acelerado a $2\mathbf{a}$ necesita una fuerza 2 veces mayor que la del mismo objeto acelerado por \mathbf{a} .

- Las unidades estándar de la fuerza en newtons (N), la masa se mide en kilogramos (kg) y la aceleración en m/s^2 , por lo cual $1N = \frac{m \times kg}{s^2}$. Un newton es la fuerza requerida para mover un kilogramo de materia a una aceleración de 1 metro sobre segundo al cuadrado ($1m/s^2$).
- Al ser la fuerza una cantidad vectorial obedece al denominado **principio de superposición**. Si varias fuerzas actúan sobre un cuerpo, la fuerza total es la suma vectorial de estas fuerzas. Nuevamente se ve el poder de los vectores, cuando tengamos un problema en el cual se vean involucradas muchas fuerzas podemos estudiar cada una de las fuerzas por separado sin que esto cambie el resultado real del problema.

La fuerza es mas que una definición o un concepto abstracto, la fuerza proviene de interacciones entre los sistemas, y nunca se ha encontrado la existencia de una aceleración sin una interacción. Cuando hablamos en la sección anterior de *sistema aislado*, nos referíamos realmente a un sistema libre de cualquier tipo de interacción y fuerza. En el capítulo siguiente estudiaremos fuerzas que son muy importantes, la fuerza de la gravedad y la de Coulomb (fuerza eléctrica), la fuerza de fricción, entre otras.

Ejemplo 15 *Un vehículo de transporte tiene 6000 kilogramos de masa, y se mueve con una aceleración de $4 m/s^2$. La magnitud de la fuerza necesaria para lograr dicha aceleración es,*

$$\begin{aligned} F &= m \times a \\ &= (6000kg) \times (4m/s^2) \\ &= 24000N \end{aligned}$$

Ejemplo 16 *Se deja caer un coco de 1 kg desde una altura de 12 metros, y la masa se detiene después de penetrar en la tierra una distancia de 0.12 metros.*

- a) *¿Qué fuerza actúa sobre el coco durante la caída?*
- b) *¿Cuál es el valor de la aceleración necesaria para detener el coco?, se le denomina desaceleración cuando el resultado neto de la aceleración es dejar el cuerpo en reposo.*
- c) *¿Cual es el valor de la fuerza de frenado?*

Vamos a tomar $a = -g = 9,8 \text{ m/s}^2$, de esta forma

a) La caída es libre, y no tomaremos en cuenta el efecto de la fricción.

$$\begin{aligned} F &= m \times a \\ &= (1 \text{ kg}) \times (-9,8 \text{ m/s}^2) \\ &= -9,8 \text{ N}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

El signo menos indica que la dirección de la fuerza es dirigida hacia abajo.

b) La velocidad de caída de la masa es de,

$$\begin{aligned} v_y^2 &= v_{0_y}^2 - 2g(y - y_0) \\ &= 2 \times (-9,8 \text{ m/s}^2)(0 - 12) \text{ m} \\ &= 235,2 \text{ m/s}^2 \\ v_y &= 15,3 \text{ m/s} \end{aligned}$$

La desaceleración que experimenta la masa es,

$$\begin{aligned} a &= \frac{-v_y^2}{2(y - y_0)} \\ &= \frac{-235,2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2(-0,12 - 0) \text{ m}} \\ &= 980 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

c) La fuerza retardante ó de frenado es:

$$\begin{aligned} F_r &= m \times a \\ &= 1 \text{ kg} \times 980 \text{ m/s}^2 \\ &= 980 \text{ N} \end{aligned}$$

La fuerza de frenado es 100 veces mas grande que la fuerza ejercida por la tierra durante su caída. Esto se debe a que la masa tiene una velocidad inicial diferente de cero, lo que hace que se necesite mas fuerza para detener la masa.

Ahora sabemos que una interacción es el resultado de la existencia de una fuerza entre dos sistemas. Supongamos que estamos estudiando una fuerza producida por otro sistema, por ejemplo imaginemos que estamos estudiando el movimiento de un pedazo de hierro por un imán, ¿qué le pasa al imán?, en general la pregunta es: ¿cuando dos sistemas interactúan entre si que les pasa de manera simultanea?. Esta es la pregunta que trataremos de responder en la siguiente sección.

2.5. La tercera ley: Acción y reacción

La gran mayoría de nosotros hemos jugado a jalar por equipos una cuerda en sentidos contrarios hasta que alguno de los dos equipos suelta la cuerda y el equipo ganador cae estrepitosamente en la dirección en la que estaban ejerciendo una fuerza. Hay momentos antes de la caída del equipo ganador en los cuales a pesar de que los equipos están haciendo fuerzas contrarias simplemente no hay movimiento, pero hay fuerza, la razón de lo anterior nos la dan los vectores, dos fuerzas de igual magnitud pero de sentido contrario dan como resultado una fuerza total igual a cero.



Ahora supongamos que en lugar de dos equipos, solo tenemos un equipo y la cuerda está atada a un poste, el cual se encuentra firmemente clavado al suelo, nuevamente la cuerda está quieta, pero el equipo está realizando una fuerza. Concluimos que el poste ejerce también una fuerza contraria que impide que la cuerda se mueva.

Todo cambio en la velocidad es producido por una fuerza, y a su vez esta fuerza es producida por la interacción entre dos sistemas. La tercera ley de Newton establece que las fuerzas siempre aparecen en pares, si un sistema a ejerce una fuerza \mathbf{F}_a sobre un sistema b , el sistema b reacciona con una fuerza \mathbf{F}_b sobre el sistema a de tal forma que las fuerzas cumplen

$$\mathbf{F}_a = -\mathbf{F}_b. \quad (2.6)$$

De la ecuación (2.6) podemos apreciar,

1. Las fuerzas son iguales en magnitud,

$$|\mathbf{F}_a| = |-\mathbf{F}_b|$$

2. Poseen direcciones contrarias, como se observa por el signo menos.
3. No tienen ninguna dependencia con el tiempo, por lo cual podemos asegurar que la reacción del sistema b es instantánea. Esta última apreciación no se cumple en la teoría de la *relatividad*, en donde toda interacción tiene una velocidad finita de propagación. Según la tercera ley de Newton una interacción se propaga de manera instantánea.
4. Las fuerzas siempre aparecen en pares, es decir que al tener una acción realizada por una fuerza, de manera inmediata se produce una reacción, que es una fuerza en sentido contrario a la que se está ejerciendo.

La tercera ley de Newton es muy importante, ya que nos permite definir claramente cuando tenemos una interacción sobre un sistema. Suponga que tenemos una partícula aislada, es decir libre de interacciones e influencias externas, de pronto esta partícula empieza a acelerarse, podemos concluir por medio de la tercera ley, que existe otro sistema que está ejerciendo una fuerza sobre nuestra partícula. La tercera ley permite definir y encontrar nuevos tipos de interacciones.

Podemos enunciar la tercera ley como sigue.

Cuando sobre un objeto se está realizando la acción de acelerarlo por medio de una fuerza F_a , el objeto reacciona de manera inmediata ejerciendo una fuerza de igual magnitud y opuesta.

Se empezará a pensar que lo que asegura la tercera ley es que no existe movimiento, ya que cuando la sumatoria de fuerzas es igual entonces el objeto se encuentra inmóvil. Sin embargo vale la pena resaltar algunas observaciones al respecto,

- El movimiento depende del sistema de referencia desde el cual se estudie.
- La segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, es válida para sistemas inerciales, es decir sistemas que se mueven a velocidad constante con respecto a un observador.
- La tierra es un buen sistema inercial para las observaciones que hacemos a diario.

Sin embargo vamos a aclarar que la tercera ley depende del sistema inercial que elijamos, y en ocasiones es algo difícil seleccionar un buen sistema inercial, inclusive en ocasiones se trabaja bajo sistemas que no son necesariamente inerciales. Para ampliar los conceptos al respecto de las tres leyes de Newton vamos a mostrar algunos ejemplos importantes en el próximo capítulo.

Las leyes de Newton están expresadas de manera muy simple, pero su significado es profundo, es importante que se empiece a pensar de manera diaria en las observaciones realizadas en este capítulo. Para concluir mostraremos un ejemplo clásico entre la comunidad de físicos acerca de las tres leyes de Newton.

Ejemplo 17 : *¿Cómo hacer para que un caballo tire de una carreta?*

Esta es la historia de un campesino y un caballo con enormes conocimientos de física. Un día el campesino ató una carreta al caballo, y le pidió al caballo que fuera al pueblo. El caballo se negó a avanzar diciendo:

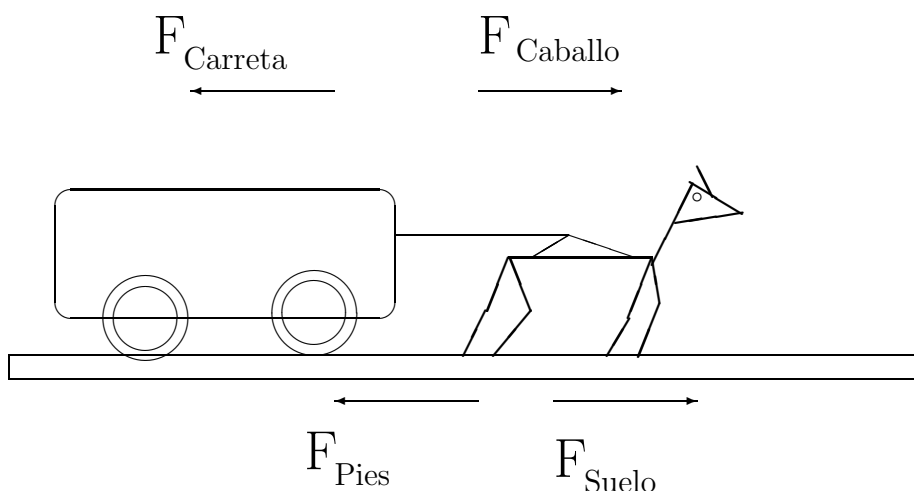
- Si yo ejerzo hacia adelante una fuerza $\mathbf{F}_{\text{caballo}}$, la carreta reaccionara de inmediato y ejercerá sobre mí una fuerza $-\mathbf{F}_{\text{carreta}}$, de tal manera,

$$\mathbf{F}_{\text{caballo}} = -\mathbf{F}_{\text{carreta}}$$

y por lo tanto yo no avanzare nada.

El campesino sorprendido se puso a reflexionar deprisa y llegó a la conclusión que el caballo tenía razón, sin embargo todos los días veía a otros campesinos con sus caballos tirando de sus respectivas carretas, lo cual lo intrigaba, ya que si el caballo tenía razón entonces los demás caballos violaban las leyes de Newton.

Sin embargo después de un poco de reflexión le llevo el siguiente dibujo al caballo.



Y le dijo:

- Efectivamente tu haces una fuerza sobre la carreta y esta te responde con una fuerza opuesta, pero la fuerza que tu haces la hacen tus piernas sobre el suelo, esta fuerza F_{pies} es dirigida hacia atrás, y de manera instantánea el suelo ejerce una fuerza hacia adelante de la misma magnitud pero en dirección contraria, F_{suelo} , como el suelo está firmemente atado a la tierra tu tratas de empujar a la tierra hacia atrás, y a su vez la tierra te empuja hacia adelante. Como la tierra tiene una gran masa, posee también una gran inercia y va a ser muy difícil que la muevas, pero como tu masa es tan pequeña, comparada con la de la tierra, tu si te moverás, debido a que la tierra te empuja hacia adelante.

Por lo tanto te vas a mover tu y la carreta por efecto de que la tierra te empuja, te vas a mover con respecto a la tierra, que es lo que me interesa. Y tu movimiento será por que la tierra te empuja hacia adelante, por lo tanto no te preocupes que la que te esta empujando es la tierra.

El granjero llegó a la conclusión que las leyes de Newton si se cumplen, pero que debe tener especial cuidado de seleccionar un sistema inercial.

El ejemplo anterior es interesante, por que muestra como a diario cuando caminamos estamos **empujando** la tierra hacia atrás, pero dada la magnitud de la masa de la tierra es ella la que termina empujándonos a nosotros hacia adelante. ¿Te imaginas que pasaría si la naturaleza no respetara la tercera ley?.

2.6. Unidades de medida

Es importante aclarar algunos conceptos respecto a las unidades de medida que utilizamos en física. Lo primero que diremos es que medir es **comparar** con un patrón que hemos definido. Para galileo Galilei el objetivo de la física era “*medir lo que se pueda medir, y lo que no se pueda se debe hacer medible*”.

Las principales unidades de medida son la longitud, la masa y el tiempo. Estas unidades han sido definidas a partir de estándares que ha fijado la comunidad científica. Uno de los objetivos principales que se busca con la fijación de estos estándares es lograr una mayor precisión a la hora de realizar experimentos y reproducirlos. Y a la vez proporcionar una definición acerca de que es una cantidad física determinada.

Las cantidades físicas están definidas en términos de mediciones, y se trata de construir medidas que sean reproducibles casi que en cualquier parte del universo. En la antigüedad se definía la medida de longitud llamada *pie* como la longitud del pie del rey de turno, de tal forma que cuando se moría el rey, su sucesor daba una nueva unidad, y esto dificultaba el comercio con otros países. Ahora se ha tratado de adoptar el *sistema internacional de medidas*, se usa en la gran mayoría de países y sus unidades fundamentales son el **metro, kilogramo y segundo**, se le conoce como **sistema MKS** por sus siglas. Sin embargo algunos países aún usan unidades de medida como *la yarda*, el *pie* (convenientemente definido ahora) o la *milla*. Se usa mas por costumbre que por efectos prácticos, y seguramente en el futuro cuando aumente el intercambio comercial estas unidades desaparezcan.

En los laboratorios es ampliamente usado el sistema *MKS*, y en este libro lo usaremos, ya que va a ser el sistema con el cual en su vida profesional van a trabajar ampliamente.

2.6.1. Medidas de longitud

El metro fue primero definido como el tomar la distancia del ecuador al polo a lo largo de una línea que pasaba por las ciudades de Dunkirk-Barcelona y dividir esta distancia por 10 millones, obviamente la distancia no ha sido medida de manera exacta. Después en 1889 se definió el metro por medio de un patrón, el cual consistía en la distancia entre dos muescas en una barra de platino-iridio, esta barra aun es preservada en el “Oficina Internacional de Pesos y Medidas”, en la ciudad de Sèvres en Francia. En 1960 el metro fue

redefinido con ayuda de la *mecánica cuántica* como 1.650.763.73 longitudes de onda de la emisión naranja-roja del kriptón 86. La precisión de esta medida es de una pocas partes en $10^8 = 100,000,000$.

Actualmente el metro se define como la longitud de espacio atravesada por un rayo de luz en el vacío durante un intervalo de tiempo de $\frac{1}{299792458}$ segundos [18]. Su símbolo es el **m**.

El tiempo

Para Isaac Newton el tiempo era “*absoluto, verdadero y matemático en sí mismo, y por su naturaleza, fluye uniformemente sin relación a nada externo*”. Como se ve esta es una definición muy metafísica. Tradicionalmente fue medido por medio de la rotación de la tierra, aunque esta rotación sufre cambios a lo largo del año. Hasta 1956 el segundo, la unidad básica, fue definida como $\frac{1}{86,400}$ el año solar medio.

Actualmente el segundo es definido como el tiempo empleado en realizar 9,192,631,770 ciclos de una transición hiperfina en cesio 133. El grado de precisión es de unas partes en 10^{12} . El tiempo y el espacio son las medidas mas exactamente definidas. El segundo se nota como **s**, es un error colocarlo como “sg”.

La masa

De las tres unidades fundamentales, la masa es la única que aún se mide por medio de un patrón. Antiguamente un kilogramo equivalía a la masa de 1,000 centímetros cúbicos de agua pura a una temperatura de 4°. Debido a la dificultad en la obtención de agua pura, se definió el kilogramo en términos de un patrón, y en 1889 el kilogramo fue definido como la masa de un cilindro de iridio-platino que se encuentra actualmente en la oficina internacional de pesas y medidas en Francia. Sin embargo este peso no se usa, a partir de el se han sacado otros patrones que tienen una exactitud de una parte en 10^9 . Su símbolo es el **kg**.

Seria mas conveniente utilizar una medida mas natural como el numero de átomos en una región del espacio, sin embargo existen problemas a la hora de contar efectivamente los tomos.

Sistema de unidades

Como sistemas de unidades ampliamente usados tenemos.

- **Sistema Internacional:** Es denominado **SI** o **MKS**, sus unidades patrón son el metro, el kilogramo y el segundo. Es el estándar internacional mas usado y de mayor conveniencia para los experimentos.
- **CGS:** Es un derivado del MKS, sus unidades son el centímetro, el gramo y el segundo.
- **Sistema Ingles:** No se utiliza en mediciones científicas, pero es utilizado ampliamente en Inglaterra y Estados Unidos, sin embargo Inglaterra ha comenzado un proceso para cambiar al sistema MKS.

En uno de los apéndices mostraremos las relaciones mas útiles entre sistemas.

2.7. Taller experimental: Segunda ley de Newton

Toda aceleración es producida por una fuerza. Es decir que si observamos un movimiento acelerado podemos afirmar que allí tenemos una fuerza que actúa sobre el objeto que estamos estudiando. Los objetivos que busca este taller experimental es

1. Verificar el cumplimiento de la segunda ley de Newton mediante el montaje experimental mostrado.
2. Efectuar mediciones de aceleración mediante el montaje experimental.

2.7.1. Cuestionario

1. ¿Qué es aceleración?.
2. ¿Qué dice la ley de Newton con respecto a un movimiento acelerado?.
3. ¿Qué es una fuerza?.
4. ¿Cómo se mide la rapidez el rapidómetro de un carro?.

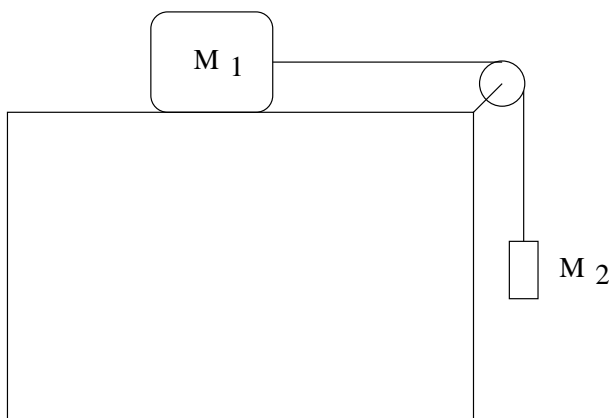


Figura 2.2: Montaje experimental para el experimento de segunda ley de Newton. Se tienen 2 masas diferentes en la cual M_1 se encuentra sobre una mesa y está unida a la masa M_2 por medio de una cuerda inextensible y de masa despreciables. La masa M_2 se encuentra bajo la acción de la gravedad y le transmite la fuerza a la masa M_1 por medio de la cuerda.

2.7.2. La experiencia

El montaje experimental es mostrado en la figura 2.2.

1. Para comenzar a realizar la experiencia tome la figura y dibuje sobre ella las fuerzas que actúan, utilice flechas para representar los vectores.
2. Utilizando la segunda ley de Newton obtener que la aceleración que experimentan las dos masas, \mathbf{a} , es igual a

$$\mathbf{a} = \frac{g}{\left(1 + \frac{M_1}{M_2}\right)} \quad (2.7)$$

en donde g es la aceleración de la gravedad.

3. En la figura 2.3 se encuentra el montaje real, las masas están unidas por una cinta y hay un timbre marcador, tal como en el experimento del capítulo anterior. De esta manera el objetivo es calibrar el timbre para que efectue las marcxas cada segundo y usted pueda utilizar la experiencia del capítulo anterior en la medición experimental de la aceleración.

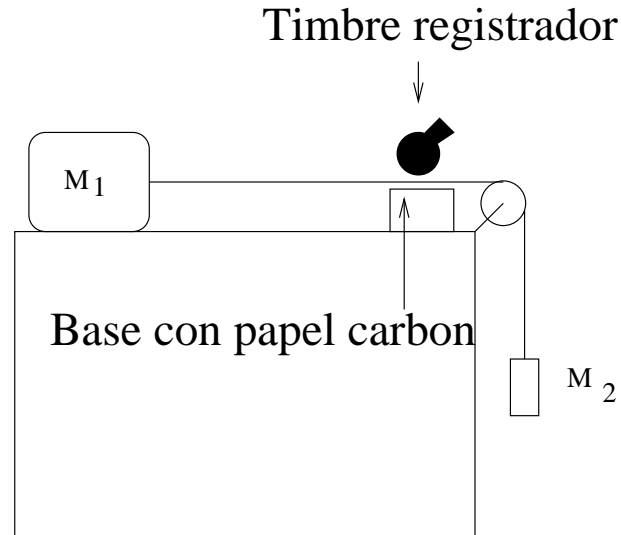


Figura 2.3: Montaje experimental para el experimento de segunda ley de Newton. Ahora se ha agregado el timbre con el objetivo de medir la aceleración.

4. Mida las masas M_1 y M_2 . M_2 es una masa que usted debe poder cambiar.
5. Llene la siguiente tabla:

Masa M_2 (gm)	Aceleración $_{Exp.}$	Aceleración $_{Teo.}$	Diferencia %

Para llenar la tabla anterior debe dejar constante la masa M_1 y variar la masa M_2 , a cada valor de M_2 le va a corresponder un valor de aceleración experimental, **Aceleración** $_{Exp.}$, el cual se mide por medio de la cinta y el timbre marcador; para calcular el valor de la aceleración teórico, **Aceleración** $_{Teo.}$, se debe utilizar la formula (2.7). La diferencia % se define como

$$\text{Diferencia \%} = \frac{\text{Aceleración}_{Exp.} - \text{Aceleración}_{Teo.}}{\text{Aceleración}_{Teo.}} \times 100 \quad (2.8)$$

6. ¿Qué puede concluir al respecto de la dependencia de la aceleración con la masa?
7. ¿Por qué cree que los resultados teórico y experimental no son exactamente iguales?

2.8. Resumen y glosario

- La dinámica y la estática se encargan del estudio del origen del movimiento ó reposo de un cuerpo con respecto a un sistema de referencia.
- Se conocen como leyes de Newton tres enunciados que explican el origen del movimiento ó reposo de un cuerpo, estas leyes son:
 1. ley: La inercia.
 2. ley: $\text{Fuerza} = \text{masa} \times \text{aceleración}$.
 3. ley: Acción y reacción.
- La inercia es la dificultad que tiene un cuerpo que posee masa de detenerse cuando se encuentra en un movimiento a velocidad constante, o de colocarse en movimiento cuando esta en reposo.
- La fuerza es la encargada de hacer variar la velocidad en un cuerpo que posee masa. Siempre que encontremos un objeto que está cambiando su velocidad con respecto al tiempo es por que existe una aceleración, y la aceleración es producida por una fuerza. Todo movimiento acelerado es producido por una fuerza.
- En mecánica clásica la masa de un objeto es una constante, la cual es independiente de la fuerza que se ejerza sobre el.
- Una fuerza actúa sobre objetos que tengan masa. Sobre un objeto que posea masa igual a cero no podemos aplicar el concepto de fuerza.
- Cuando sobre un objeto se está aplicando una fuerza cualquiera, de manera inmediata se ejerce sobre el una fuerza en dirección contraria y de igual magnitud a la fuerza ejercida. Este fenómeno es conocido como la tercera ley de Newton, ley de acción y reacción.

- El rango de aplicabilidad de la mecánica clásica depende de los sistemas que estamos estudiando. Cuando los sistemas bajo estudio se mueven con una velocidad cercana a la velocidad de la luz, aproximadamente 3×10^8 m/s debemos utilizar teoría de la relatividad, y para sistemas de distancias iguales y menores a las distancias atómicas debemos utilizar la teoría cuántica.
- Todas las definiciones de posición, velocidad, aceleración, proviene de tener el concepto de *sistema de referencia*. Todas las definiciones y posibles mediciones en los sistemas físicos son válidas por que se tiene un sistema de referencia en el cual podemos efectuar mediciones.
- Para un cuerpo aislado que se mueve a velocidad constante, siempre vamos a encontrar un sistema de referencia en el cual veamos al cuerpo en estado de reposo. Por ejemplo si estamos quietos y vemos un tren en movimiento a velocidad constante, podemos montarnos en el tren y observar que dentro del tren estamos en un sistema de referencia en reposo. Las leyes de la física son igualmente válidas para el sistema que se mueve a velocidad constante y el que se encuentra en reposo.

2.9. Evaluación

1. Plantee un método para contar átomos. Es importante que se entere cual es la medida de un átomo, y como hacemos para observarlos.
2. Supóngase que se ha descubierto experimentalmente que existen los fantasmas, estos tienen varias características interesantes, pueden atravesar paredes, siempre se hallan a la misma temperatura del lugar en el cual se encuentra, no poseen masa, no tienen colores visibles.
 - a) ¿Podemos empujar a un fantasma de manera que este se acelere?, ¿Por qué?
 - b) ¿A la luz de las leyes de Newton como podemos ver a un fantasma?, entiendase por *ver* a toda acción mediante la cual podamos detectar al fantasma.
3. ¿Por qué cuando nos encontramos en un ascensor y subimos en él a un nivel superior sentimos que subimos de peso?. Haga un diagrama

de fuerzas sobre el sistema, y trate de explicar lo anterior utilizando el diagrama.

2.10. Información de retorno

A continuación encontrará respuestas a las preguntas y ejercicios planteados en la parte inicial, evaluación de conceptos previos, y final del capítulo, evaluación. Las respuestas pueden ser ampliadas por usted y la solución a los ejercicios no es única. Se busca que usted amplíe la respuesta, la mejore y encuentre otros métodos de solución a los ejercicios.

Conceptos previos

1. ¿Por qué cuando vamos dentro de un autobús y este frena bruscamente nosotros somos *empujados* hacia adelante?.

En realidad no somos empujados, creemos ser empujados por que al encontrarnos dentro del autobus este se vuelve nuestro sistema de referencia, cuando el bus frena nuestro cuerpo tiene la tendencia a seguir en movimiento, inercia, y es por eso que nos da la impresión de que somos empujados.

2. ¿Que hace cambiar la velocidad?.

Una fuerza hace cambiar la velocidad. Un fuerza es la responsable de hacer que un objeto con masa adquiera una aceleración, y por esto es que una fuerza cambia la velocidad.

3. ¿Cuál es la diferencia entre masa y peso?.

La masa es la cantidad de materia que posee un cuerpo, el peso es la fuerza gravitatoria que ejerce la tierra sobre una masa determinada.

4. ¿Por qué es mas difícil mover un objeto que pese una tonelada que uno que pese una libra?.

Por la inercia que poseen los cuerpos, un cuerpo que tenga una mayor masa tendra también una mayor inercia, al tener una mayor inercia será mas difícil moverlo.

5. ¿Por qué se mueven los planetas sin que nada los detenga?.

Precisamente por que nada los puede detener, no hay una fuerza de fricción en el universo que sea capaz de detener esas enormes masas conocidas como planetas. los planetas poseen una inercia tan grande que es muy difícil detenerlos. Para el caso de la tierra los mares efectúan una fuerza que trata de oponerse al movimiento, sin embargo esta fuerza es tan pequeña, que es como colocar un cabello en el camino de una bala de cañon.

6. ¿Qué es fuerza?.

La fuerza es el cambio del momentum con respecto al tiempo, cuando hay un cambio en la velocidad es por que existe un cambio de momentum y este es producido por una fuerza.

7. ¿Qué es inercia?.

La inercia es la dificultad que posee un cuerpo para moverse cuando se encuentra en reposo, o para detenerse cuando se encuentra moviendose a velocidad uniforme.

8. ¿Como se podría diseñar un dispositivo para medir el tiempo?.

Esta es una pregunta para que desarrolle su imaginación, trate de utilizar un fenómeno que ocurra de manera periódica.

9. ¿Qué pasaría en la tierra si en este preciso momento deja de emitir energía y calor el sol?.

En principio no pasaría nada, por que se necesitan alrededor de 8 minutos para que sintamos los efectos de este cambio tan drastico. Sin embargo es importante que se pregunte ¿cuánto es el tiempo que dura una interacción, como la fuerza gravitatoria, en manifestarse?.

10. Describa como un caballo es capaz de halar una carreta.

Este punto ha sido descrito en detalle en uno de los ejemplos del capítulo.

Evaluación

1. Plantee un método para contar átomos. Es importante que se entere cual es la medida de un átomo, y como hacemos para observarlos.

Un átomo puede ser considerado como una esfera de radio aproximado de 1 Angstrom, 10^{-10}cm . Para medirlo se utilizan técnicas indirectas por medio de microscopios de alta resolución.

2. Supóngase que se ha descubierto experimentalmente que existen los fantasmas, estos tienen varias características interesantes, pueden atravesar paredes, siempre se hallan a la misma temperatura del lugar en el cual se encuentra, no poseen masa, no tienen colores visibles.

- a) ¿Podemos empujar a un fantasma de manera que este se acelere?, ¿Por qué?.

No podemos acelerar un fantasma, ya que este no posee masa, y esto hace imposible el acelerarlo. Las leyes de Newton actúan para cuerpos que poseen masa. Además los fantasmas pueden atravesar paredes, lo que hace imposible el lograr algún tipo de contacto e interacción con nuestro fantasma.

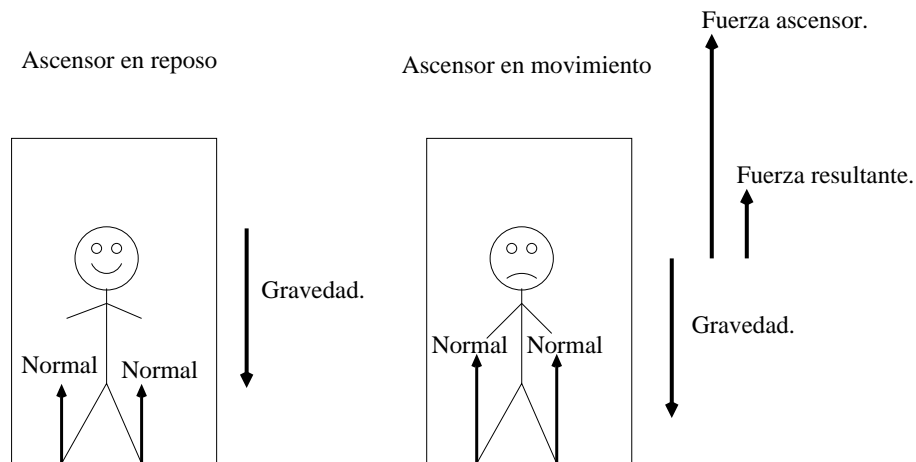
- b) ¿A la luz de las leyes de Newton como podemos ver a un fantasma?, entiendase por *ver* a toda acción mediante la cual podamos detectar al fantasma.

Al no poder ejercer un tipo de interacción con un fantasma, no lo podemos detectar, por lo tanto con el conocimiento en física que hemos estudiado hasta el momento en este libro no podemos detectar nada. De hecho los estudios alrededor de espectros utilizan los conocimientos en electricidad y magnetismo, y teoría cuántica, infortunadamente los resultados no han sido concluyentes. mientras los espectros no puedan interaccionar de alguna manera con nosotros no nos tenemos que preocupar de ellos.

3. ¿Por qué cuando nos encontramos en un ascensor y subimos en él a un nivel superior sentimos que subimos de peso?. Haga un diagrama de fuerzas sobre el sistema, y trate de explicar lo anterior utilizando el diagrama.

La aceleración normal de $1g$ está dirigida hacia abajo, nuestro cuerpo está adaptado a esta aceleración, y por tercera ley de Newton el suelo crea una fuerza de reacción en dirección opuesta a la fuerza de gravedad, esta fuerza se denomina normal, y es la razón por la cual nos mantenemos sobre la tierra con los pies pegados al suelo de manera estable. La fuerza normal es la que sienten nuestros pies, y cuando

nos pesamos en una bascula pegada al suelo, en realidad medimos la fuerza normal. En el caso del ascensor en reposo, como se muestra en el siguiente dibujo en el lado izquierdo, la fuerza neta es igual a cero, ya que la normal compensa la fuerza de gravedad. Cuando nos encontramos dentro del ascensor y este se mueve hacia arriba, el ascensor se debe acelerar para poder vencer la fuerza de la gravedad, la fuerza neta ahora será diferente de cero, como se muestra en el lado derecho de la figura, el resultado es que la fuerza normal también aumenta, por acción y reacción, y tenemos la sensación de aumentar de peso. Existen estándares en la fabricación de ascensores para que esta terrible sensación sea leve.



Palabras claves para búsqueda en Internet

A continuación se presentará una serie de palabras útiles para la búsqueda en Internet, las palabras se han probado en el buscador

<http://www.google.com>

no tienen ortografía dado que el buscador es universal, y en por que en ocasiones va a tener que utilizar teclados que no tienen tildes o eñes.

leyes de newton, inercia, fuerza, unidades de medicion, conversion de unidades.

Bibliografía recomendada:

Se puede consultar al final del texto, el número que encuentra al final de la referencia es el número correspondiente al texto en la bibliografía final.

- Formulas y tablas matemáticas en general [1].
- Mediciones y experimentos alrededor de leyes de Newton [2, 13].
- Dinámica general [7, 8, 14, 19, 20, 21].

Capítulo 3

Leyes de Newton (Segunda parte)

3.1. Introducción

Una de las grandes ventajas que trajeron las leyes de Newton fue el desarrollo de aplicaciones, lo que ha derivado en el desarrollo de tecnología que ha permitido elevar el nivel de vida de las naciones. En la actualidad las leyes de Newton se siguen utilizando ampliamente en diversos campos, y gran parte del avance social conseguido por países industrializados se debe a un uso intensivo de la ciencia y la tecnología.

En esta sección se estudiarán diversos ejemplos en los cuales se emplean a fondo las leyes de Newton. Haciendo énfasis en fuerzas muy particulares y de gran importancia, como son: la gravedad, las fuerzas de fricción y las fuerzas restauradoras. Se estudiarán los conceptos de campo gravitatorio, fuerza gravitatoria y peso, los cuales son vitales para el desarrollo de conceptos más elaborados en física.

3.2. Evaluación de conocimientos previos

1. ¿Por qué es más fácil mover un tren de 1 vagón, que un tren de más de un vagón?.
2. ¿Cuál es la diferencia entre masa y peso?.
3. ¿Por qué al frotarnos las manos estas se calientan?.

4. Describa las fuerzas que actúan sobre una carreta que es tirada por un caballo.
5. ¿Cuál es la fuerza gravitatoria que ejerce una esfera perfecta de masa M sobre un punto de masa m ?
6. ¿Qué es un diagrama de fuerzas?

3.3. ¿Como analizar problemas con ayuda de las leyes de Newton?

En su vida profesional se va a ver abocado a realizar análisis del comportamiento de un sistema, el flujo del agua, el movimiento de una máquina, la manera como debe simular el movimiento de un objeto. En general deberá siempre apelar al uso de las leyes de Newton. En esta sección trataremos de dar una serie de indicaciones de como puede atacar problemas por medio de estas leyes. Sin embargo esta no es una manera estricta de resolver los problemas, existen muchas formas y entre mas conozca mejor será la solución a los problemas.

Una primera recomendación es que lea frecuentemente acerca de problemas, si lo desea trate de que sea un pasatiempo, lea problemas resueltos y poco a poco comience a resolverlos. En su vida profesional se va a encontrar con que los problemas no tienen una solución exacta, pero pueden ser aproximados por medio de otros que si la tienen.

Las leyes de Newton están expresadas por medio de ecuaciones matemáticas simples, ó por medio de expresiones también simples, sin embargo sus significados son profundos. Vamos a enunciarlas de nuevo a continuación:

1. Todo objeto que posea masa tiene una tendencia natural a permanecer en reposo o mantener su velocidad constante.
2. Un objeto cambia su velocidad por efecto de una fuerza, que es proporcional a su masa.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

3. Toda acción que cambie la velocidad de un cuerpo, la cual es causada por otro sistema, tiene como efecto inmediato producir una reacción en

3.3. ¿COMO ANALIZAR PROBLEMAS CON AYUDA DE LAS LEYES DE NEWTON?97

sentido opuesto sobre el sistema que produce la acción.

$$\mathbf{F}_{\text{Sobre el objeto}} = -\mathbf{F}_{\text{sobre el sistema producida por el objeto}}. \quad (3.1)$$

Recordemos que las leyes de Newton son válidas en sistemas inerciales, es decir sistemas que se encuentran en reposo o a velocidad constante con respecto a un observador.

Ahora vamos a enunciar tres pasos básicos en la solución de un problema.

1. Tome el sistema y mentalmente divídalo en pequeños subsistemas que pueda tratar como puntos con masa. Las leyes de Newton son válidas para estos puntos con masa, y el dividir el sistema le ayudará a entender mejor el problema.

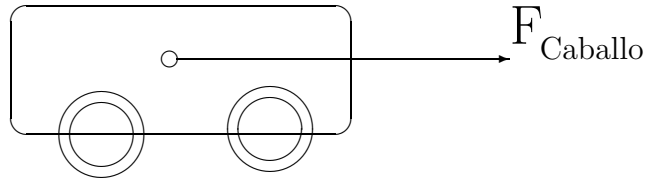
Con sistema nos referimos a los objetos bajo estudio, por ejemplo en el problema final del capítulo anterior sobre el caballo y la carreta, nuestro sistema era el camino, el caballo y la carreta. Y se puede dividir el tres subsistemas, el camino, el caballo y la carreta. El caballo empuja la carreta, que a su vez tira del caballo, y el caballo empuja al suelo, que a su vez empuja al caballo hacia adelante. Cada uno de los elementos que ejerce una fuerza puede ser representado por medio de un vector, que actúa sobre un punto.

También es importante no realizar demasiadas subdivisiones, por el contrario se debe elegir un número tal que haga que entendamos el problema, y que a su vez sea manejable matemáticamente. En el ejemplo del caballo y la carreta no nos fijamos en la acción de las correas que unen al caballo con la carreta, ni en la fuerza de fricción de las ruedas sobre el camino. Por que estas podían ser tomadas como parte del sistema, como en el caso de las cuerdas), o ser despreciadas (como en el caso de la fricción de las ruedas).

2. Dibuje el diagrama de fuerzas para cada punto de masa. El diagrama de fuerzas le ayudará a entender el problema, siempre haga un diagrama.
 - a) Represente al cuerpo por un simple punto o un símbolo.
 - b) Dibuje un vector de fuerzas en la masa por cada fuerza actuando en el. Solamente dibuje las fuerzas actuando sobre el cuerpo, no las fuerzas que el cuerpo ejerce sobre otros cuerpos. De acuerdo a las leyes de Newton únicamente las fuerzas actuando sobre el cuerpo son las que realizan el movimiento.

Como ejemplo de este punto vamos a seguir utilizando el ejemplo del caballo. Como nuestro interés es el movimiento de la carreta, entonces únicamente nos fijaremos en el movimiento de esta. Un ejemplo posible es el siguiente.

Fuerzas sobre la carreta



Dado que no existe una fuerza contraria lo que podemos deducir es que el movimiento siempre se realizara a velocidad constante, ya que la fuerza es constante. En la vida real existe una fuerza de fricción tal que se opone al movimiento, y se obtiene una fuerza total menor. Cuando se equilibran la fuerza del caballo con la fuerza de fricción se obtiene una fuerza total nula, es decir que la carreta se mueve a velocidad constante.

3. Introducir un sistema de coordenadas. El sistema de coordenadas en el cual se coloquen los puntos y vectores debe ser inercial, en el caso del caballo podemos elegir como sistema inercial el suelo, y atamos un sistema de coordenadas a este.

Se realiza la suma de fuerzas sobre el cuerpo y se iguala a,

$$\boxed{\mathbf{F}_{\text{Total}} = \sum_i^n \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}_{\text{resultante}}}. \quad (3.2)$$

En donde:

- $\mathbf{F}_{\text{Total}}$ es la fuerza total sobre el cuerpo.
- Cada F_i es cada una de las fuerzas que *actúan* sobre el cuerpo.
- m es la masa del cuerpo.
- \mathbf{a} es la aceleración total producida sobre el cuerpo.

3.3. ¿COMO ANALIZAR PROBLEMAS CON AYUDA DE LAS LEYES DE NEWTON?99

Como el resultado es un vector podemos estudiar componente por componente, y observar el movimiento en cada uno de los ejes.

4. Si dos cuerpos se encuentran en un mismo sistema, y ellos interactúan entre si, siempre se debe tener presente la tercera ley de Newton. Es decir que si dos cuerpos interactúan en un mismo sistema la fuerza entre ellos es de igual magnitud, pero de dirección opuesta. Esta relación debe ser puesta de manera explícita.
5. En ocasiones los cuerpos están restringidos a moverse en direcciones particulares, por ejemplo en un movimiento circular, o en una dimensión. Esto da lugar a la aparición de ecuaciones de ligadura, las cuales aparecen desde el mismo planteamiento del problema.

Por ejemplo en el caso de movimiento unidimensional sabemos que las aceleraciones de los otros dos ejes son iguales a cero, ya que el cuerpo no se mueve en las otras dos direcciones, en este caso,

$$\mathbf{a}_x = 0 \quad \mathbf{a}_y = 0$$

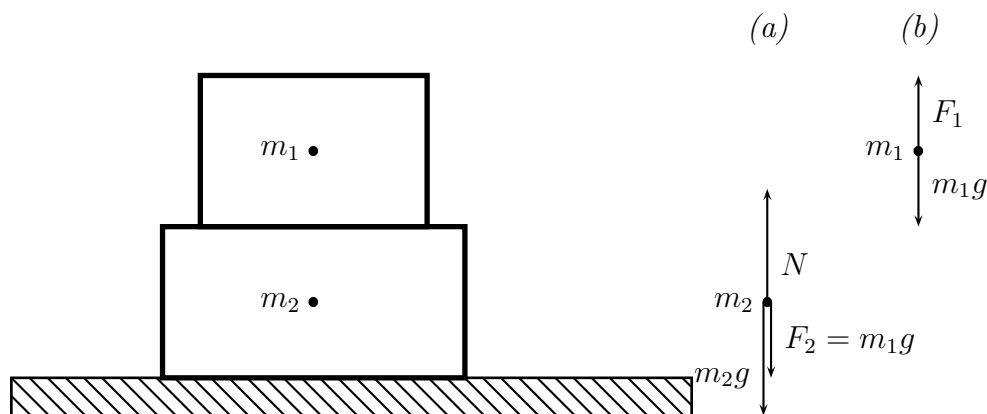
6. Por último cuando tenemos todas las ecuaciones, tenemos que verificar que el numero de ecuaciones sea igual al número de incógnitas. Este es un teorema del álgebra que se aprende en la secundaria, pero una forma de verlo es que para atrapar a un ladrón necesitamos que el numero de preguntas generadas para atraparlo, ¿donde está?, ¿con quien esta?, ¿hace cuanto salió de la escena del crimen?. Sea igual al numero de pistas que dejó el ladrón, es decir sus huellas, la violencia de la puerta, las pisadas en la escena, etc...

La física tiene mucho que ver con resolver enigmas, cada experimento que se realiza es una pregunta que se le hace a la naturaleza, debemos formular las preguntas precisas, para obtener respuestas que nos den una buena idea de como se comporta la naturaleza.

La mejor forma de aprender a utilizar los conceptos anteriores es mediante ejemplos, los cuales vamos a desarrollar a continuación.

Ejemplo 18 : *Diagrama de fuerzas sobre dos bloques.*

Se tienen dos bloques de madera, uno de masa m_1 y el otro de masa m_2 , tales que $m_1 < m_2$. Los bloques están uno sobre el otro tal y como se muestran a continuación. El bloque inferior se encuentra en el suelo.



A la derecha del dibujo de los bloques hemos colocado el diagrama de fuerzas de cada uno de los objetos, en (a) tenemos el diagrama para el bloque de masa m_2 y en (b) tenemos el diagrama para el bloque de masa m_1 . Hemos reemplazado los bloques por puntos, y hemos tratado de ubicar los puntos exactamente en el denominado centro de masa¹, es un sitio en donde yo puedo modelar el movimiento del cuerpo como si toda la masa estuviese concentrada en un punto.

Vamos a realizar una serie de observaciones respecto a la figura.

- El movimiento real es en tres dimensiones, pero solamente estamos graficando en una dimensión. Ya que solo nos interesa el movimiento vertical, también podríamos haber dibujado las fuerzas en los otros dos ejes, pero de lo que nos daríamos cuenta es que las fuerzas son cero, ya que las aceleraciones en los respectivos ejes x e y son $\mathbf{a}_x = 0$ y $\mathbf{a}_y = 0$, estas son las ecuaciones de ligadura del problema.
- El sistema inercial de referencia es el suelo, ya que con respecto a este es que se están analizando los movimientos realizados por los bloques.
- Para el diagrama de fuerzas (a) tenemos que sobre el bloque de masa m_2 actúa la fuerza de la gravedad, $F_2 = m_2g$, la cual va en dirección negativa.
- La otra fuerza que actúa sobre el bloque m_2 es el peso² del bloque de masa m_1 , este hace una fuerza dada por $F_2 = m_1g$, y es también en di-

¹El concepto centro de masa será tratado en un capítulo posterior.

²El **peso** se define como la fuerza que ejerce la fuerza de la gravedad en la tierra sobre un objeto con masa, se suele denota por $p = mg$, o por la letra W (weight en inglés).

3.3. ¿COMO ANALIZAR PROBLEMAS CON AYUDA DE LAS LEYES DE NEWTON? 101

rección negativa. De esta forma hacia abajo el bloque m_2 está haciendo una fuerza total sobre el suelo de,

$$F_{\text{Total de } m_2 \text{ sobre el suelo}} = m_1 \mathbf{g} + m_2 \mathbf{g} = (m_1 + m_2) \mathbf{g}. \quad (3.3)$$

Hemos notado el vector gravedad de la forma $\mathbf{g} = -9,8 \text{ m/s}^2 \hat{\mathbf{k}}$, es decir de una magnitud de 9.8 m/s^2 y en dirección negativa del eje z , hacia abajo.

- Como el bloque m_2 se encuentra en reposo, por la tercera ley de Newton el suelo ejerce una fuerza de igual magnitud y en sentido contrario al de esta fuerza, esta es la llamada **fuerza normal**, que es una reacción del suelo sobre los objetos. La fuerza normal suele ser denotada por la letra \mathbf{N} , de manera que la fuerza normal es

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= -(m_1 + m_2) \mathbf{g} \\ \mathbf{N} &= (m_1 + m_2) |\mathbf{g}| \hat{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

Es decir que la fuerza normal tiene un valor de $(m_1 + m_2) \times 9,8 \text{ m/s}^2$, y una dirección positiva en el eje z , apunta hacia arriba, por lo cual se opone al peso de los dos bloques.

- Al realizar la suma de fuerzas sobre el bloque de masa m_2 tenemos,

$$\begin{aligned} \text{Suma total de fuerzas sobre } m_2 &= \text{Masa total} \times \text{aceleración} \\ m_1 \mathbf{g} + m_2 \mathbf{g} + \mathbf{N} &= (m_1 + m_2) \mathbf{a}_z \\ (m_1 + m_2) \mathbf{g} + \mathbf{N} &= (m_1 + m_2) \mathbf{a}_z \\ (m_1 + m_2) \mathbf{g} - (m_1 + m_2) \mathbf{g} &= (m_1 + m_2) \mathbf{a}_z \\ 0 &= \mathbf{a}_z (m_1 + m_2). \end{aligned} \quad (3.4)$$

La aceleración para el bloque de masa m_2 es igual a cero, como ya lo sabíamos ya que se encuentra en reposo.

- El diagrama de fuerzas (b) de la figura es para el bloque de masa m_1 , sobre el actúa su peso $m_1 \mathbf{g}$ hacia abajo, y la fuerza F_1 que hace el bloque de masa m_2 sobre (m_1) como reacción por esta fuerza, es decir,

$$\mathbf{F}_1 = -m_1 \mathbf{g}. \quad (3.5)$$

\mathbf{F}_1 tiene la misma magnitud del peso de la masa m_1 , $m_1 g$, pero dirección contraria, es decir va hacia arriba.

- Como el cuerpo se encuentra en reposo tenemos que la suma total de fuerzas es,

$$\begin{aligned} m_1 \mathbf{g} + \mathbf{F}_1 &= m_1 a_y \\ m_1 \mathbf{g} - m_1 \mathbf{g} &= m_1 a_y \\ 0 &= \mathbf{a}_y(m_1) \end{aligned} \tag{3.6}$$

- Las ecuaciones (3.6) y (3.4) son las denominadas **ecuaciones de movimiento de los cuerpos**, estas nos indican que respecto a un sistema inercial de referencia los bloques de madera tienen una velocidad constante, o nula en nuestro caso.

Siempre recuerde que estamos trabajando con vectores, es decir cantidades que nos indican una magnitud y una dirección, por eso insistimos en el uso de las negrillas en la aceleración. En algunos textos es usual encontrar que al trabajar en una dimensión no usan la notación explícita de los vectores, sin embargo utilizan los signos, siempre es importante recordar que los signos provienen del hecho de provenir de unos vectores. En ejemplos posteriores utilizaremos una notación libre de vectores, sin embargo no se debe olvidar que las cantidades estudiadas son vectores.

3.4. Fuerza gravitacional, peso y campo gravitatorio

La mas conocida y usual de las fuerzas es la gravitatoria. La fuerza de la gravedad actúa sobre cuerpos que poseen masa, y es atractiva. Newton formuló la ley de la gravedad en el año 1666, el mismo año que publico sus leyes de movimiento. La gravedad fue el primer gran triunfo de las leyes de movimiento de Newton. Además, por medio de las leyes de Newton se pudo derivar las leyes de Kepler sobre el movimiento de los planetas en el espacio.

De acuerdo con la ley de gravedad de Newton, **dos partículas se atraen mutuamente con una fuerza dirigida a lo largo de una línea que pasa por sus centros. La magnitud de la fuerza es directamente proporcional al producto de las masas de las partículas, e inversamente proporcional al cuadrado de las distancias que separan las partículas.**

3.4. FUERZA GRAVITACIONAL, PESO Y CAMPO GRAVITATORIO 103

El anterior párrafo tiene una expresión matemática simple, para una partícula b , de masa m_b , la magnitud de la fuerza $|\mathbf{F}_b|$ que siente por la atracción de una partícula a , con masa m_a

$$|\mathbf{F}_b| = \frac{G m_a m_b}{r^2} \quad (3.7)$$

Los términos involucrados en la anterior ecuación son,

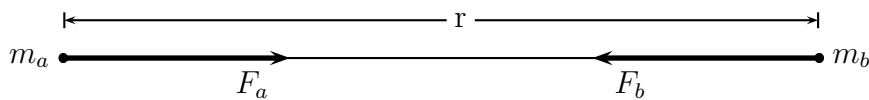
$|\mathbf{F}_b|$: Magnitud de la fuerza de atracción sobre la partícula b .

G : Constante universal de proporcionalidad y es llamada *constante gravitacional*, posee un valor $G = 6,673(10) \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$, reportada en la bibliografía [18], el numero entre paréntesis hace referencia al error, como se muestra en el apéndice de estadística y tratamiento de errores.. La primera medición experimental la hizo Cavendish en 1771 usando una balanza de torsión. Se ha encontrado experimentalmente que esta constante es igual para todos los materiales conocidos, por esta razón se le denomina universal.

m_a : Masa de la partícula a , la cual ejerce la atracción.

m_b : Masa de la partícula b , la cual es atraída.

r : Es la distancia que hay entre los centros de las partículas.



Hasta ahora solo hemos hablado de la magnitud de la fuerza, ahora hablaremos de su dirección. La fuerza gravitacional entre dos partículas es de carácter *central* (a lo largo de la línea recta que une los centros) y *atractiva*, como se muestra en el dibujo anterior. Por convención se introduce el vector \mathbf{r}_{ab} , que representa un vector que va desde la partícula que ejerce la fuerza, la partícula a , hasta la partícula que experimenta la fuerza, la partícula b . De manera que se cumple que,

$$|\mathbf{r}_{ab}| = r. \quad (3.8)$$

Usando el vector unitario,

$$\hat{\mathbf{r}}_{ab} = \frac{\mathbf{r}_{ab}}{r}, \quad (3.9)$$

tenemos

$$\boxed{\mathbf{F}_b = -\frac{G m_a m_b}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{ab}}. \quad (3.10)$$

Esta es la expresión mas general que describe la fuerza de la gravedad. El significado de la ecuación (3.10) es el siguiente:

- La fuerza que siente una partícula b , atraída por una partícula a , es una fuerza de carácter vectorial, notada de la forma $|\mathbf{F}_b|$.
- La fuerza se realiza sobre la línea que une las dos partículas, como lo indica el vector unitario $\hat{\mathbf{r}}_{ab}$.
- El signo menos indica que la fuerza es de carácter atractivo, ya que se realiza apuntando hacia la partícula a . Esto lo muestra el termino $-\hat{\mathbf{r}}_{ab}$.
- La fuerza es proporcional a la multiplicación de las masas m_a y m_b , como se indica por $m_a m_b$. Entre mayor sean las masas involucradas mayor será la fuerza de atracción.
- La fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa las masas, a medida que la distancia es menor la fuerza que siente un objeto es mayor. Pero a distancias muy grandes la fuerza es tan pequeña que es prácticamente cero. Si la distancia aumenta el doble, la fuerza se vuelve cuatro veces mas pequeña.

La fuerza gravitacional tiene un aspecto muy interesante, que la hace única y diferente a las demás fuerzas conocidas. Es que la aceleración de la gravedad es independiente de la masa de la partícula. Para ver esto nuevamente tomemos la atracción sufrida por una partícula b debido a una masa m_a , e igualemos esto a $\mathbf{F}_b = m_b \mathbf{a}_b$,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_b &= -\frac{G m_a m_b}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{ab} \\ m_b \mathbf{a}_b &= -\frac{G m_a m_b}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{ab} \\ \mathbf{a}_b &= -\frac{G m_a}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{ab}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

En la ecuación (3.11) se observa como la aceleración \mathbf{a}_b que experimenta una partícula b debido a una fuerza producida por una masa m_a es **independiente de su masa**. Solo depende de la distancia entre las partículas, la masa de la partícula que ejerce la atracción, la constante G , y el vector unitario $\hat{\mathbf{r}}_{ab}$. Por esta razón la fuerza de la gravedad a nivel del mar es una constante, y en general se toma una constante en los lugares en los cuales habita el hombre, aunque existen muy pequeñas variaciones debido a la cercanía a montañas o grandes masas.

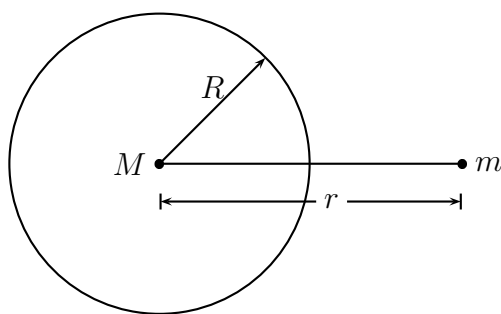
La *masa gravitatoria* que se mide bajo la acción de un campo gravitatorio es diferente a la *masa inercial* que se mide por medio de la segunda ley de Newton. La masa inercial es proporcional a la gravitacional, y su constante es tomada como uno,

$$m_{\text{inercial}} \simeq m_{\text{gravitacional}}. \quad (3.12)$$

En general se toman las dos masas como uno. La razón por la cual estas dos masas son aproximadamente iguales es un misterio. La proporcionalidad se ha demostrado hasta en una parte en 10^{11} .

3.4.1. Fuerza gravitatoria de una esfera

La ley de gravitación universal es válida para dos puntos que posean masa, sin embargo sabemos que un objeto que posee masa ocupa una región en el espacio que es mucho mayor que un punto. En esta parte vamos a mostrar por que es válido tomar el centro de una esfera, como el origen de toda su atracción gravitatoria.



Como ya hemos visto las fuerzas obedecen el principio de superposición, y la ley de gravitación también obedece el principio de superposición. Mas

adelante mostraremos un cálculo formal de la fuerza gravitatoria producida por una esfera de masa M y radio R sobre una partícula de masa m , el resultado es,

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= -G \frac{Mm}{r^2} \quad \text{si } r > R \\ \mathbf{F} &= 0 \quad r < R.\end{aligned}\tag{3.13}$$

En donde r es la distancia del centro de la esfera a la partícula. Podemos realizar dos observaciones importantes:

- Cuando la partícula se encuentra dentro de la esfera, la fuerza que sobre ella actúa es equivalente a tener toda la masa de la esfera concentrada en su centro. Por ello es válido para la tierra efectuar los cálculos de la atracción que ella ejerce sobre un satélite, tomando como distancia inicial el centro de la tierra.
- Cuando la partícula se encuentra dentro de la esfera no siente ninguna fuerza, esto parece sorprendente pero se entiende si se observa que todos los puntos ejercen una fuerza dentro de la esfera, cuando se realiza el cálculo se encuentra que la suma de fuerzas es igual a cero.

De esta forma para la fuerza gravitatoria producida por la tierra en su superficie tenemos,

$$\mathbf{F} = -\frac{G M_e m}{R_e^2}$$

En donde M_e es la masa de la tierra, y R_e es el radio de la tierra.

Lo que nosotros denominamos como \mathbf{g} es un vector que va dirigido directamente al centro de la tierra, y el cual está dado por,

$$\boxed{\mathbf{g} = -\frac{GM_e}{R_e^2} \hat{\mathbf{r}}}\tag{3.14}$$

La tierra no es exactamente una esfera, en realidad se encuentra achatada en los polos, y es allí en donde es mayor su valor, aunque el cambio no es realmente significativo. La variación del valor de la aceleración del ecuador a los polos es de aproximadamente el 5 %.

El peso

Se define el peso como la fuerza que siente una masa cerca de la superficie de la tierra. De esta forma el peso de una masa m cerca de la superficie tiene la forma funcional,

$$\mathbf{F} = -\frac{G M_e m}{R_e^2} = m\mathbf{g}$$

La unidad del peso es el **newton** en el sistema internacional (MKS), un newton es la fuerza que siente una masa de un kilogramo acelerada 1 metro sobre segundo al cuadrado.

$$\boxed{1 \text{ newton} = 1kg \frac{1m}{1s^2} = 1 \frac{kg m}{s^2}} \quad (3.15)$$

El campo gravitatorio

La fuerza gravitatoria en una partícula b debida a una partícula a es,

$$\mathbf{F} = -\frac{G m_a m_b}{r^2}$$

La razón

$$\frac{\mathbf{F}}{m_b} = -G \frac{m_a}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{ab} = \mathbf{G}_a, \quad (3.16)$$

es llamada *campo gravitatorio* debido a m_a . Este campo está definido en todo el espacio, de forma que la fuerza de gravedad en un punto está dada por,

$$\mathbf{F} = M\mathbf{G}. \quad (3.17)$$

Las dimensiones del campo gravitatorio son de aceleración. Y se puede ver de la anterior ecuación que la aceleración producida por un punto con masa m_a está dada por,

$$\mathbf{a} = \mathbf{G} \quad (3.18)$$

La definición de campo es matemáticamente conveniente, ya que elimina la pregunta de acerca cuál objeto está produciendo una aceleración o fuerza, ya lo único que nos interesa es ver, medir, los efectos del campo sobre una partícula o un objeto. Además los campos poseen una característica muy interesante, pueden transportar energía y momentum, cantidades que estudiaremos mas adelante. Actualmente el campo gravitatorio ha adquirido un

interés especial, por el estudio de los denominados *agujeros negros*, puntos del espacio en los cuales la fuerza que se ejerce sobre un objeto es muy grande, lo suficiente para curva el denominado espacio-tiempo, y no permitir que un rayo de luz escape de ellos.

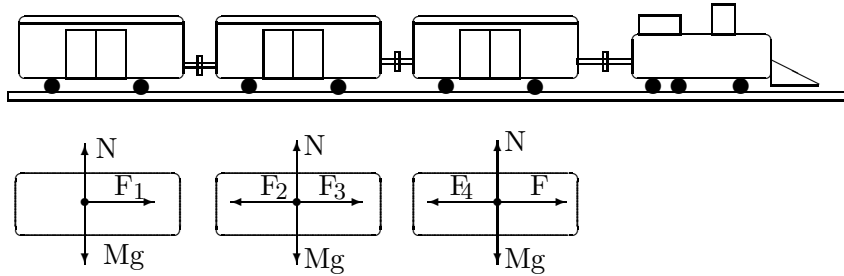
3.5. Máquinas y fuerzas de fricción

Una de las preguntas mas frecuentes para el ingeniero es “¿y eso para qué sirve?”, el objetivo de esta parte es desarrollar algunos ejemplos útiles. Obviamente no desarrollaremos los infinitos ejemplos posibles, pero vamos a resaltar algunos muy importantes.

3.5.1. Movimiento de un tren con tres vagones

Tres carros de masa M cada uno son empujados por una fuerza F proporcionada por una locomotora, se desprecia la fricción de las ruedas de los vagones y la locomotora. Encuentre la fuerza sobre cada vagón.

A continuación tenemos un dibujo del tren y un diagrama de fuerzas sobre cada vagón.



Nuestro sistema solamente serán los tres vagones, nos olvidaremos de la locomotora, y simplemente reemplazamos esta por la fuerza F sobre el primer carro. Vamos a analizar punto por punto el problema.

- Como todos los vagones se encuentran juntos, ellos están limitados a tener la misma aceleración en la dirección horizontal, eje x . Es decir,

$$a_x = \frac{F}{3M} \quad (3.19)$$

- En el eje vertical, eje y , cada vagón tiene como fuerzas su peso, Mg dirigido hacia abajo, y por tercera ley existe una respuesta del suelo, la normal N . La suma total de fuerzas da cero, ya que no existe movimiento a lo largo de este eje.

$$Mg - N = 0 \quad \rightarrow \quad Mg = N$$

- En el primer vagón de la izquierda, en la dirección horizontal, solo actúan una fuerza, la proporcionada por el vagón de adelante, el cual tira con una fuerza F_1 . De esta forma

$$\begin{aligned} F_1 &= Ma_x \\ F_1 &= M \left(\frac{F}{3M} \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$F_1 = \frac{F}{3}. \quad (3.21)$$

La fuerza que siente el último vagón, es un tercio de la fuerza total ejercida por la locomotora.

- Ahora vamos a mirar las componentes horizontales del carro del medio. La fuerza que siente el vagón es la fuerza ejercida por el vagón de adelante, F_3 , menos la fuerza ejercida por la reacción del vagón de atrás, F_2 . Esta fuerza es igual a Ma_x , que es la ecuación de movimiento.

$$F_3 - F_2 = Ma_x. \quad (3.22)$$

Por tercera ley de Newton la fuerza $F_2 = F_1 = \frac{F}{3}$ en magnitud, no olvidemos que los signos son determinados por la dirección de las fuerzas. Y al despejar de (3.22) la fuerza F_3 , tenemos,

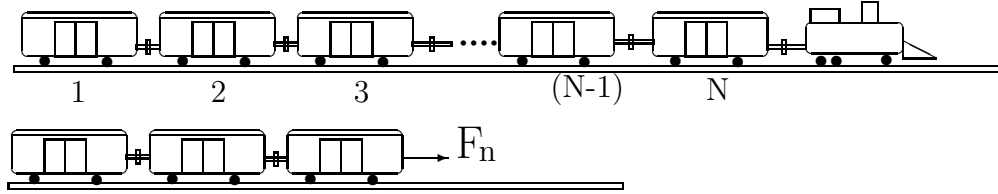
$$\begin{aligned} F_3 &= F_2 + Ma_x \\ F_3 &= \frac{F}{3} + M \frac{F}{3M} \\ F_3 &= \frac{F}{3} + \frac{F}{3} \\ F_3 &= \frac{2F}{3} \end{aligned}$$

- Y por ultimo, el primer vagón de la derecha experimenta una fuerza de F . Por lo tanto tenemos que cada vagón experimenta una fuerza de $\frac{F}{3}$ hacia la derecha.

La fuerza se distribuye de manera uniforme en cada uno de los carros.

3.5.2. Movimiento de un tren con N vagones

Ahora vamos a tomar el problema de tener no tres, sino un numero cualquiera de vagones, el numero de vagones lo denotaremos por la letra N , la masa de cada vagón por M , y la fuerza ejercida por la locomotora la denotaremos por F .



Del desarrollo del problema anterior sabemos que la aceleración que sufre cada vagón está dada por,

$$a_x = \frac{F}{(N \times M)} \quad (3.23)$$

Para encontrar la fuerza F_n , es decir la fuerza con la que es halado el vagón n , se debe notar que cuando tengamos el vagón n la masa que es halada hacia la derecha es $M \times n$, y como la aceleración es constante, es decir (3.23), entonces la fuerza ejercida hacia la derecha será de,

$$\begin{aligned} F_n &= \text{Masa vagones} \times \text{Aceleración} \\ F_n &= Mn \frac{F}{NM} \\ F_n &= \frac{n}{N} F \end{aligned} \quad (3.24)$$

Debe notar que existe una diferencia entre N , el número total de vagones, y n , el vagón que estamos estudiando específicamente.

De esta forma la fuerza es proporcional al numero de carros que son tirados. Una forma muy útil de verificar el sentido de nuestra ecuación es estudiar los casos extremos.

1. La fuerza sobre el vagón numero 1, es decir el primer vagón a la izquierda, y que se encuentra mas lejos de la locomotora. En este caso $n = 1$, y al reemplazar en la ecuación (3.24) tenemos,

$$F_1 = \frac{F}{N}, \quad (3.25)$$

que corresponde correctamente a la fuerza en el caso de tres vagones, $N = 3$.

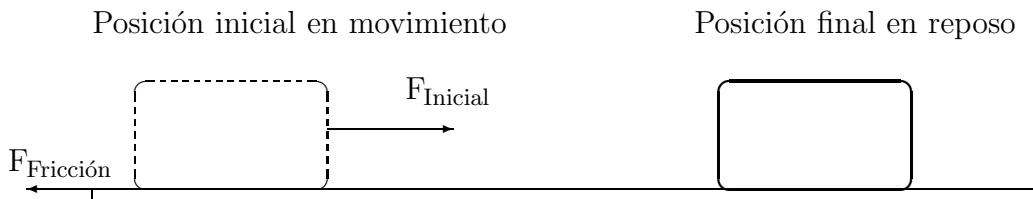
2. La fuerza ejercida por la locomotora sobre el vagón que se encuentra junto a ella es para $n = N$.

$$F_N = F \quad (3.26)$$

tal y como se espera.

3.5.3. Fuerza de fricción

La fuerza de fricción es una fuerza que se opone al movimiento de los cuerpos que se encuentran en contacto con una superficie, y es denominada fuerza de contacto. Por ejemplo al lanzar un bloque de madera sobre una mesa, el bloque se detiene después de cierta distancia recorrida. Esto se debe a que el movimiento del bloque sobre la mesa origina una fuerza en dirección contraria al movimiento, como resultado final tenemos la detención del cuerpo.



Las fuerzas de rozamiento entre el objeto y la superficie provienen de interacciones intermoleculares entre las dos superficies, y su descripción exacta es complicada. En la realidad todos los objetos están formados por moléculas, que son agregados de átomos, y la frontera de las superficies nunca es perfecta, sino que por el contrario presenta a nivel molecular pequeñas rugosidades. De manera que cuando dos superficies se unen lo que tenemos es que su real superficie de contacto corresponde a pequeñas rugosidades provenientes de las deformaciones moleculares. Cuando dos superficies se tocan están intercambiando continuamente moléculas y átomos, de forma que cuando ocurre un *deslizamiento* entre las superficies, lo que está pasando es que moléculas y átomos se están intercambiando continuamente entre las superficies.

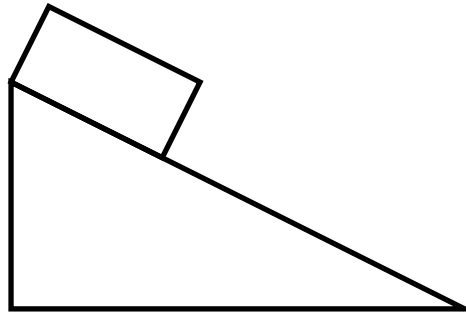
Debido a que el área efectiva de contacto es tan pequeña, la presión es muy grande. Se define presión como,

$$\text{Presión} = \frac{\text{Fuerza}}{\text{Área}}, \quad (3.27)$$

de la anterior ecuación podemos decir que la presión es grande debido a que la fuerza ejercida es el peso del objeto que se desliza, mientras que el área corresponde a las pequeñas regiones intermoleculares que se encuentran en contacto físico real. Estas regiones forman un área relativamente pequeña. Como se ve la descripción real de la fuerza de fricción es compleja, sin embargo es sencillo mostrar como actúan las fuerzas de fricción sin necesidad de recurrir a mecanismos complejos.

Experimentalmente se ha comprobado que la fuerza de fricción depende de la manera como se encuentra el cuerpo, y tenemos dos estados posibles,

1. **Fuerza de fricción estática:** La cual se presenta cuando el cuerpo se halla en reposo, y explica la dificultad de que un cuerpo ruede por un plano inclinado, como por ejemplo la figura que se muestra a continuación.



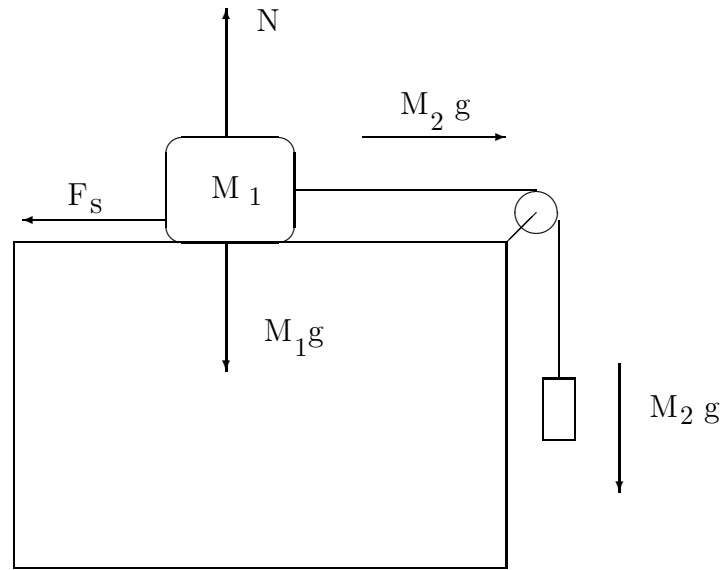
Experimentalmente se ha mostrado que la fuerza de fricción estática es directamente proporcional a la fuerza normal, \mathbf{N} , que es la fuerza que ejerce la superficie sobre el cuerpo, y es perpendicular a la superficie de contacto. Matemáticamente se expresa como,

$$\boxed{\mathbf{F}_{\text{fricción estática máxima}} = \mu_s \mathbf{N}}. \quad (3.28)$$

μ_s es llamado el **coeficiente de fricción estática**, su valor depende de los materiales que se encuentren en contacto, y es adimensional, es decir que no tiene unidades.

¿Como medir el coeficiente de fricción estática?, siempre que actúe la fuerza (3.28) el cuerpo se mantendrá en reposo, y al aplicarle gradualmente una fuerza que aumente, en el momento justo en el cual el bloque se empiece a mover, tenemos que ya no actúa la fuerza de fricción estática. Este será el valor limite para la fuerza, y podemos substituir esta fuerza en (3.28), y despejar de allí el valor, conociendo previamente el valor de la fuerza normal \mathbf{N} .

Un montaje experimental frecuentemente usado para ello es el siguiente,



En él se convierte la fuerza de gravedad vertical sobre un objeto de masa M_2 , en una fuerza horizontal que actúa sobre el objeto de masa M_1 , la masa M_2 se va variando paulatinamente, por ejemplo colocando mas pesos, hasta que el objeto se mueve. Cuando esto ultimo ocurre, podemos igualar la fuerza F_s , que es la fuerza de fricción, con la fuerza M_2g , de tal forma que,

$$\begin{aligned}
 F_s &= M_2g \\
 N\mu_s &= M_2g \\
 M_1g\mu_s &= M_2g \\
 \mu_s &= \frac{M_2g}{M_1g} \\
 \mu_s &= \frac{M_2}{M_1}
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Este valor es una característica de las superficies que entran en contacto. El valor real de la fuerza de fricción es menor o igual al valor F_s , este es el valor limite al cual la fuerza de fricción estática es superada y el cuerpo empieza a moverse, si le aplicamos una fuerza inferior el objeto no se moverá.

2. **Fuerza de fricción dinámica:** Esta se presenta durante el movimiento de los cuerpos que se deslizan sobre una superficie. También se le suele llamar fuerza de fricción cinética. La fuerza de fricción actúa en el plano de la superficie de contacto en la cual se mueve el objeto. De nuevo la forma funcional de la fuerza es proporcional a la fuerza normal, de forma que,

$$\boxed{\mathbf{F}_{\text{fricción dinámica}} = \mu_d \mathbf{N}} \quad (3.30)$$

Se ha observado experimentalmente que la fuerza de fricción dinámica que actúa sobre un cuerpo que se desliza, es menor que la máxima fuerza de fricción estática que puede soportar un cuerpo, \mathbf{F}_s . Es decir,

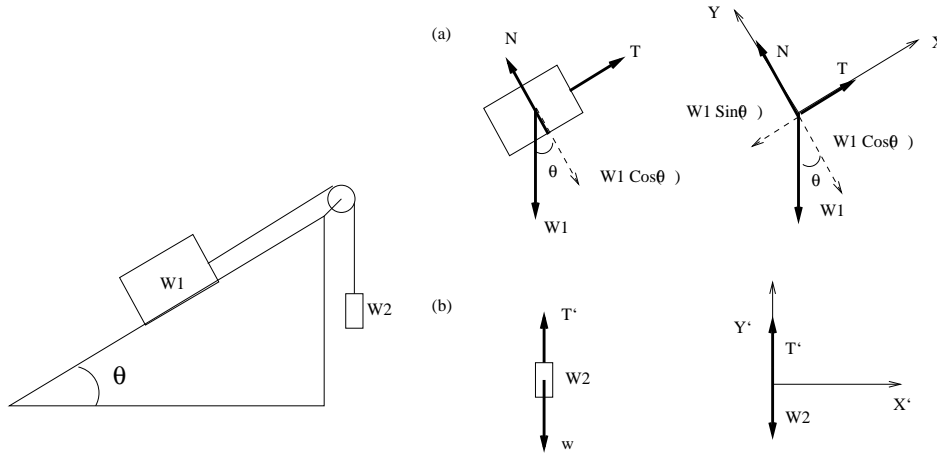
$$\boxed{\mathbf{F}_d < \mathbf{F}_s}. \quad (3.31)$$

El coeficiente de fricción dinámica es también independiente de la velocidad de deslizamiento. Aunque en realidad esto no es tan cierto si se utiliza un rango muy amplio de velocidades, sin embargo la aproximación de que es independiente de la velocidad es muy buena en caso de que se tenga un rango moderado de velocidades.

Ejemplo 19 : *Equilibrio en un plano inclinado*

Un objeto de peso W_1 se sostiene en equilibrio en un plano inclinado que forma un ángulo de θ con la horizontal, con ayuda de un cuerpo suspendido de peso W_2 , una cuerda y una polea, como se muestra en la siguiente figura³.

³No se debe confundir la masa de un cuerpo con el peso, la masa es la cantidad de materia de un cuerpo, el peso es la fuerza que siente ese cuerpo en la gravedad de la tierra, es decir mg .



Encontrar a) la reacción normal \mathbf{N} del plano inclinado contra el cuerpo de peso $W1$, y el peso del cuerpo $W2$ necesario para mantener el sistema en equilibrio.

En el lado derecho de la figura se muestran los sistemas en los cuales se ha subdividido el sistema principal. Tenemos **(a)** el sistema con el bloque de peso $W1$, este sistema se encuentra inclinado un ángulo θ con respecto a la horizontal. En **(b)** tenemos el bloque de peso $W2$. Tanto en **(a)** como en **(b)** se ha dibujado el sistema de referencia a utilizar, el sistema de **(a)** se ha puesto inclinado de tal forma que el bloque quede horizontal, se hace solo para efectos prácticos, y los resultados son iguales en cualquier sistema de coordenadas, ya que son sistemas inerciales.

Vamos a describir cada una de las fuerzas que actúan en cada diagrama.

(a) En este diagrama tenemos:

$W1$ El peso del objeto el cual es en magnitud $W1$. Y la cual tiene componentes en los ejes X e Y , dadas por,

$$W1_x = -W1 \sin(\theta)$$

$$W1_y = -W1 \cos(\theta)$$

El signo menos proviene de la dirección de las componentes. En el diagrama solo hemos colocado la magnitud de las componentes.

N La fuerza normal producto de la respuesta del plano inclinado sobre el objeto. Esta fuerza es perpendicular al plano, y solamente la componente del peso perpendicular al plano será la que defina

la normal. Como en este eje el objeto se encuentra en reposo la suma de las fuerzas es igual a cero,

$$\begin{aligned} -W1 \cos(\theta) + N &= 0 \\ N &= W1 \cos(\theta) \end{aligned}$$

Esta es la magnitud de la fuerza normal.

T La tensión, es decir la fuerza que ejerce la cuerda sobre el objeto, y que depende del peso del objeto que se encuentra colgado. Como el cuerpo está en reposo en el eje Y , por lo tanto la suma de fuerzas debe ser igual a cero y se encuentra que la magnitud de la tensión debe ser igual a la componente X del peso del objeto.

$$\begin{aligned} T - W1 \sin(\theta) &= 0 \\ T &= W1 \end{aligned}$$

Esta es la magnitud de la tensión.

(b) En este diagrama tenemos:

T' La tensión ejercida por la cuerda sobre el objeto de peso w . La cuerda se supone inextensible, es decir que no es un caucho y no se deforma con el peso del objeto. Además no existe fricción de ningún tipo ni en el plano ni en la polea, de manera que la magnitud de la fuerza de tensión sobre los dos cuerpos es la misma, es decir,

$$\begin{aligned} T' &= T \\ T' &= W1 \sin(\theta) \end{aligned} \tag{3.32}$$

Y esta es la magnitud de la fuerza de tensión en el objeto de peso w .

W2 El peso del objeto. Como el objeto se encuentra en reposo tenemos que la suma de fuerzas debe ser igual a cero, por lo tanto,

$$\begin{aligned} T' - W2 &= 0 \\ W1 \sin(\theta) &= W2 \\ W1 \sin(\theta) &= m_{W2}g \\ \frac{W1 \sin(\theta)}{g} &= m_{W2} \end{aligned}$$

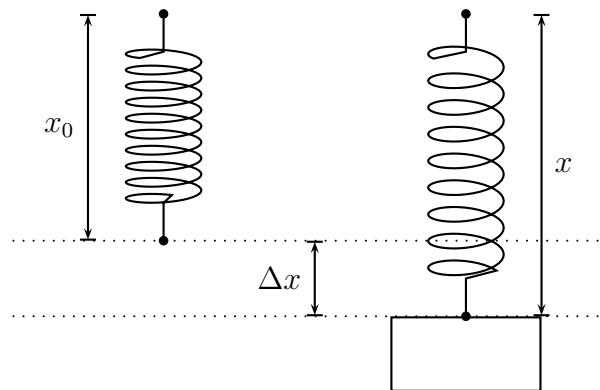
En donde M_{W2} es la masa del objeto de peso $W2$. Esta es la masa necesaria para mantener el objeto en reposo.

Este es un sistema muy ideal, por lo cual vamos a darle una justificación a nuestra aproximaciones.

- *Se ha supuesto una cuerda sin masa e inextensible, lo cual en la vida real no es cierto, sin embargo la aproximación es buena dado que la masa de la cuerda puede ser pequeña comparada con las masas involucradas. Y el pequeño alargamiento de la cuerda puede ser despreciado, ya que puede en realidad llegar a ser muy pequeño.*
- *Se ha despreciado la fricción generada por la polea, esto también es razonable si se piensa que existen poleas con diseños que minimizan la fricción causada por el movimiento, y son muy livianas y resistentes, mas adelante se verá que esto es muy importante por que los objetos tiene una tendencia a oponerse a un movimiento de rotación.*

3.5.4. Fuerzas elásticas

Un resorte suspendido tiene una longitud x_0 cuando esta libre y alcanza una longitud x cuando se le cuelga una masa m , tal y como se muestra a continuación,



Si al quitar la masa m el resorte vuelve a su posición original se dice que tuvo un comportamiento elástico, y por lo tanto puede ejercer una fuerza elástica sobre cualquier objeto que se fije a su extremo.

En un resorte la fuerza elástica es proporcional a su deformación. La descripción de la fuerza está dada en términos de la ley de Hooke

$$\boxed{F = -k(x - x_0) = -k\Delta x.} \quad (3.33)$$

k es la denominada **constante de elasticidad** y su magnitud es igual a la fuerza necesaria para alargarlo o comprimirlo una longitud, es decir

$$k = \frac{F}{\Delta x} \quad (3.34)$$

El signo menos en (3.33) indica que la dirección en la cual se efectúa la fuerza se opone al movimiento.

Como la fuerza es proporcional al alargamiento se puede utilizar este principio para medir la magnitud de una fuerza, un aparato como el descrito se denomina dinamómetro.

Ejemplo 20 *Al colgar una masa de 100 g de un resorte suspendido del techo, este se deforma 1 cm con respecto a su posición original. Halle la constante k del resorte. Calcule el estiramiento producido al colgar dos kilos de arroz.*

La constante del resorte es

$$\begin{aligned} k &= \frac{F}{\Delta x} \\ &= \frac{100g \times 9,8m/s^2}{1cm} \\ &= \frac{0,1Kg \times 9,8m/s^2}{0,01m} \\ &= 98N/m \end{aligned} \quad (3.35)$$

Por lo cual la ecuación de la fuerza es

$$F = 98(N/m) \times \Delta x \quad (3.36)$$

Al colgarse una masa de 2 kilos el resorte se va a estirar una cantidad

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{F}{k} \\ &= \frac{2kg \times 9,8m/s^2}{98N/m} \\ &= 0,1m = 10cm \end{aligned} \quad (3.37)$$

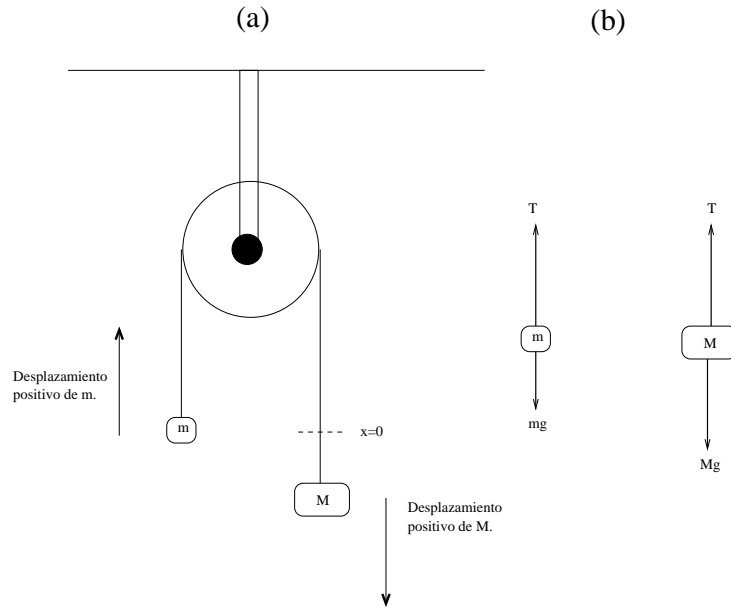


Figura 3.1: Máquina de Atwood. (a) muestra el esquema de la máquina, esta consiste en una polea fija la cual sostiene dos masas diferentes por medio de una cuerda inextensible. En (b) se muestran los diagramas de fuerza sobre las dos masas. La fuerza de tensión es igual sobre las dos masas, sin embargo la fuerza de gravedad es diferente en cada masa, lo que origina que se tenga una fuerza neta diferente de cero y por lo tanto un movimiento de las masas.

3.6. Algunas aplicaciones de las leyes de Newton

3.6.1. Máquina de Atwood

Dos masas M y m están unidas mediante una cuerda que pasa sobre una polea, como se muestra en la figura 3.1. Supóngase que M es mayor que m , que la cuerda no tiene masa y es inextensible, y que se puede despreciar la fricción y la inercia de la polea. Describir el movimiento del sistema y la tensión T de la cuerda.

Se considerará la dirección vertical hacia arriba como la dirección positiva del desplazamiento para m , y la dirección opuesta a la anterior como la dirección positiva de desplazamiento de M , es decir, para la masa pequeña

m hacia arriba es el signo positivo, mientras que para la masa mayor M el valor positivo es hacia abajo. Lo anterior parece una complicación, pero se hace con el objetivo de que exista concordancia entre el movimiento de la masa pequeña y la grande, de tal forma que cuando las masas se muevan tengan el mismo signo. Tal y como se muestra en la figura 3.1.

Como la cuerda es inextensible, la rapidez con la cual se mueve la masa m es igual a la rapidez de movimiento de la masa M , en caso contrario la cuerda se alargaría o acortaría. Si la rapidez de las dos masas es igual, el valor de sus aceleraciones también lo será. Aplicando la segunda ley de Newton al diagrama mostrado en la figura 3.1 tenemos,

$$T - mg = ma \quad (3.38)$$

y también

$$-T + Mg = Ma \quad (3.39)$$

En donde a es la aceleración común de movimiento de las dos masas, podemos sumar estas dos ecuaciones para eliminar la tensión T .

$$\begin{aligned} (M - m)g &= (M + m)a \\ a &= \left(\frac{M - m}{m + M} \right) g \end{aligned} \quad (3.40)$$

Y al substituir este valor en (3.38) ó (3.39) se obtiene

$$T = m \left(\frac{M - m}{m + M} \right) g + mg \quad (3.41)$$

El aparato descrito se le conoce por *máquina de Atwood* y se utiliza para determinar con exactitud la aceleración de la gravedad. Objetos en caída libre recorren distancias fácilmente medibles en laboratorios, en intervalos de tiempo muy cortos que son muy difíciles de medir con precisión. Por lo tanto para realizar medidas precisas de g se debe diseñar una máquina que permita realizar las medidas de manera fácil, este equipo es la máquina de Atwood, si M y m son casi iguales, de la ecuación (3.40) se puede ver que la aceleración a puede hacerse tan pequeña como se desee.

Si $M = m$ entonces $a = 0$, como se puede ver de la ecuación (3.40). En la practica los valores de M y m se eligen de tal forma que el valor final de la aceleración a sea fácilmente medible. La razón $\frac{M-m}{M+m}$ se puede determinar pesando cuidadosamente los objetos. La aceleración se determina

cuidadosamente observando el tiempo que emplea una de las masas en salir del reposo y caer una distancia h , de manera que la aceleración se determina con ayuda de la ecuación,

$$\boxed{h = \frac{1}{2}at^2} \quad (3.42)$$

3.6.2. Dinámica de las gotas de lluvia

El estudio de la manera como las gotas de lluvia se forman y caen al suelo es importante en la agricultura. En general una gota de lluvia se condensa en el cielo y cae atraída por la fuerza gravitatoria terrestre. Un modelo inicial de movimiento supondría que la gota cae con una aceleración constante, de 9.8 m/s^2 , sin embargo la caída de la gota de lluvia se ve afectada por una fuerza en contra, la fricción producida por el aire.

Finalmente la caída se realizará a velocidad constante, ya que existe un punto en el cual la fuerza de gravedad y la fuerza de fricción se igualan. Es por ello que los paracaidistas disfrutan de una larga caída, y utilizan la fuerza de fricción del aire para amortiguar su caída aun mas.

Un modelo caída de gotas de lluvia en el que se asume que la velocidad al cabo de determinado tiempo será una constante, muestra que la velocidad de la gota de agua como función del tiempo es de la forma

$$v(t) = v_{ter}[1 - e^{-t/\tau}]$$

En donde

v_{ter} Velocidad límite, o de velocidad final de caída.

τ Constante de tiempo, se define como m/γ , en donde m es la masa y γ es la constante de amortiguamiento, que depende de la forma de la gota y de la viscosidad del aire. Para velocidades muy bajas y para una gota en forma de esfera perfecta, $\gamma = 6\pi R\eta$ en la que R es el radio de la gota y η es la viscosidad.

Cuando la gota alcanza la velocidad constante el diagrama de fuerzas se equilibra, y la ecuación de las fuerzas actuando sobre la gota es

$$\sum F_\gamma = mg - F_f = 0$$

en donde F_f es la fuerza de fricción que se opone al movimiento de la gota, esta fuerza es proporcional a la velocidad, y se puede escribir como

$$F_f = \gamma v.$$

Asumiendo que la viscosidad del aire seco a 18°C es de $182 \times 10^{-6} \frac{\text{g}}{\text{cm} \cdot \text{s}}$, ¿cuál es el valor del amortiguamiento?, ¿cuál es el valor de la velocidad?, ¿correspondería este último valor al valor de su velocidad terminal?, ¿qué observaciones son necesarias para obtener una explicación más próxima a la realidad?. ¿qué diferencias se pueden anotar en relación con el tamaño de la gota para explicar diferencias en las velocidades de llegada?, las velocidades de llegada suelen ser de 1.7 m/s para gotas de 0.5 mm de diámetro, y 9.3 m/s para gotas de 0.5 cm de diámetro.

Es muy posible que las gotas de menor tamaño se originen cerca de la superficie, mientras que las gotas de gran tamaño lo hacen lejos de la superficie. Las gotas grandes tienen una posibilidad de romperse antes de llegar a la superficie y formar de esta forma gotas más pequeñas. Antes de romperse, las gotas grandes cambian su forma, debido a que la fricción con el aire hace que la parte inferior sufra un achatamiento. Cuando el golpe con las pequeñas moléculas de aire es tal que la fuerza generada supera la tensión superficial de la gota, esta se rompe. La siguiente tabla muestra las velocidades de caída de una gota en función de su diámetro.

D(mm)	v(m/s)	D(mm)	v(m/s)
0.5	1.7	1.25	4.9
1.5	5.5	2.0	6.6
3.0	8.1	4.0	8.9
5.0	9.3	6.0	9.3

Otras investigaciones han mostrado que la velocidad se mantiene constante los últimos 20 segundos. Si se asume que la fuerza de fricción para las gotas de agua es de la forma

$$F_f = \gamma v_{ter}.$$

se podría aplicar la fórmula de Stokes que se refiere al descenso de pequeñas esferas en un fluido de densidad ρ' bajo la acción de la gravedad. En este caso, las esferas serán las gotas de agua con la densidad ρ del agua, el fluido será el aire con densidad ρ' .

$$F_f = 6\pi R\eta v_{ter}$$

Aplicando la ecuación resultante del análisis de cuerpo libre se obtiene:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g \left(1 - \frac{\rho'}{\rho}\right) = 6\pi R \eta v_{ter}$$

Teniendo en cuenta que la gota de agua en el aire sufre un “empuje de flotación” relacionado con el término $\left(1 - \frac{\rho'}{\rho}\right)$. Lo anterior conduce a:

$$v_{ter} = \frac{2R^2(\rho - \rho')g}{9\eta}.$$

Esta ecuación es también usada en procesos de sedimentación, y se le denomina **velocidad de sedimentación**. Asignando valores numéricos para gotas de lluvia de $R=1$ mm:

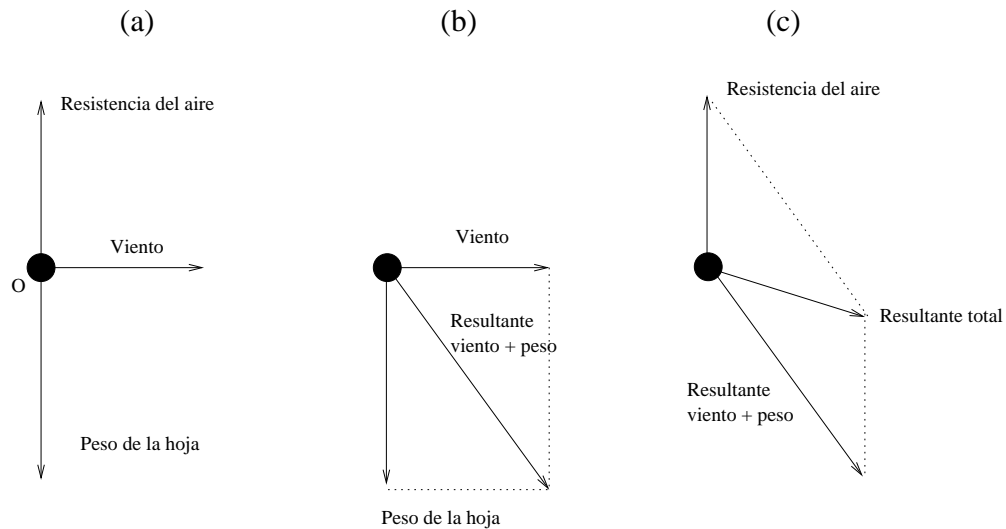
$$v_{ter} = \frac{2(1 \times 10^{-6}m^2)(1000kg/m^3 - 1,2kg/m^2)9,8m/s^2}{9(182,7 \times 10^{-6})} = 12,1 m/s. \quad (3.43)$$

Como se observa, el valor encontrado (12.1 m/s), es mas razonable que el obtenido con un modelo mucho mas simple. Las posibles diferencias de este cálculo están en los valores de la viscosidad y densidad del aire (¿por qué?), y en el hecho de que las gotas de agua no son esferas verdaderas, en general se achatan.

3.6.3. La suma de fuerzas

En la naturaleza es una constante que sobre un cuerpo actúe mas de una fuerza, al mismo tiempo. Por ejemplo en una hoja de papel que cae la gravedad atrae hacia el suelo, y el viento la puede arrastrar de un lado para otro. La resistencia del aire ejerce una fuerza contraria al movimiento, por lo general hacia arriba.

En las siguientes figuras mostramos como utilizamos la descomposición vectorial de fuerzas para estudiar el efecto neto sobre la caída de una hoja.



En (a) observamos las fuerzas totales que actúan sobre el sistema, el peso, la fuerza del viento, y la resistencia del aire. En (b) sumamos únicamente 2 de las fuerzas, el peso y la fuerza generada por el viento, y en (c) la resultante de las sumas del peso y el viento es sumada a la resistencia a la caída. El resultado neto final es una fuerza con componentes tanto horizontales como verticales.

Es importante anotar que el modelo estudiado es bastante simple, ya que supone que la resistencia del aire tiene un valor constante, lo cual en general no es cierto.

3.7. Taller experimental: Carácter vectorial de las fuerzas.

Como se vió en el presente capítulo, las fuerzas se componen como vectores, es decir cantidades que poseen dirección, magnitud y sentido. Durante este taller experimental tendremos como objetivo:

1. Verificar el comportamiento vectorial de las fuerzas.

3.7.1. Cuestionario

1. ¿Qué es un vector?.

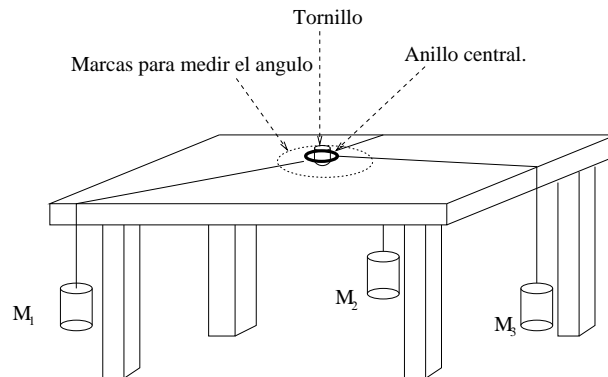


Figura 3.2: Mesa de Fuerzas: consta de una mesa con un tornillo en el centro, el cual es concéntrico con marcas sobre la mesa que permiten medir el ángulo de las masas que penden de ellas. Cuando el anillo central está en equilibrio sin tocar el tornillo, podemos decir que el sistema se encuentra en equilibrio. El número de masas mínimo a utilizar es de dos.

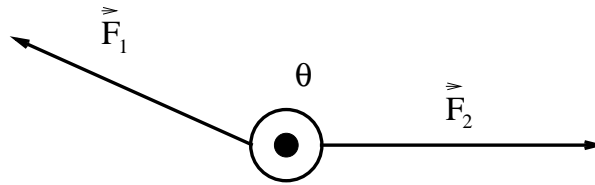
2. ¿Por qué decimos que la fuerza es una cantidad vectorial?.
3. ¿Qué entiende por *carácter vectorial de una fuerza*?.

3.7.2. La experiencia

En la figura 3.2 se describe el montaje experimental.

Utilizando la mesa de fuerzas, aplique al anillo central por medio de las poleas y pesas dos fuerzas que se hallen en equilibrio. Juegue con las magnitudes de las masas y las direcciones de las fuerzas hasta que el centro del anillo coincida con el tornillo central de la mesa, sin que estos se toquen. Cuide que las prolongaciones de las líneas de acción de las fuerzas se corten en el mismo centro.

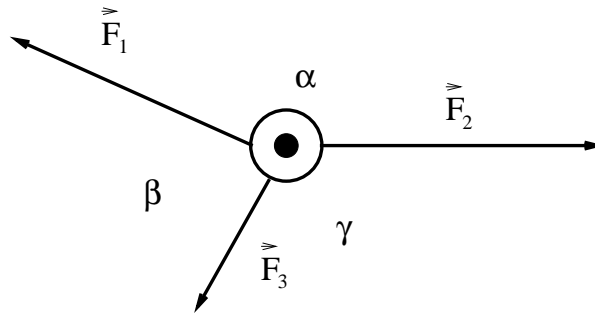
Realice el procedimiento primero para dos masas, recuerde que la fuerza que cada masa está ejerciendo es mg , en donde g es la gravedad. Un diagrama de fuerzas posible para este primer experimento se muestra a continuación:



Una vez logrado el equilibrio mida el ángulo y las magnitudes de las fuerzas. Llene la siguiente tabla utilizando las unidades que crea convenientes, puede por ejemplo utilizar Newtons para la fuerza, ó convertirlo a dinas como se muestra en uno de los apéndices finales.

$F_1()$	$F_2()$	$\theta()$

Repita el procedimiento anterior pero ahora utilizando tres fuerzas, es decir tres masas. Y complete la tabla correspondiente.



$F_1()$	$F_2()$	F_3	$\alpha()$	$\beta()$	$\gamma()$

Repita el procedimiento utilizando 4 y mas masas. Realice los diagramas de fuerza y haga la suma de fuerzas vectorial de tal forma que pueda comparar los resultados teóricos obtenidos sobre el papel, con los resultados obtenidos en la mesa de fuerzas. Concluya acerca de si se cumple el carácter vectorial de las fuerzas.

3.8. Resumen y glosario

- La segunda ley de Newton puede ser usada para describir los sistemas en los cuales actúan muchas fuerzas, de tal forma que al final solamente se estudiará una fuerza resultante.

- Cuando la suma total de fuerzas sobre un cuerpo es igual a cero, el cuerpo se encuentra en **reposo**, o a velocidad constante.
- Las leyes de Newton son válidas para cuerpos en sistemas de referencia inerciales, es decir libres de fuerzas externas.
- Cuando un cuerpo se encuentra acelerado es por que sobre el existe una fuerza. Si conocemos todas las fuerzas que actúan sobre el sistema podemos encontrar la aceleración resultante, para ello se debe aplicar la suma vectorial de la totalidad de las fuerzas en cada uno de los ejes para hallar su respectiva fuerza resultante, y luego se divide por la masa del objeto para hallar su aceleración resultante.
- Los diagramas de fuerzas son representaciones abstractas de un sistema físico, y sirven para dar solución a los problemas físicos con ayuda de las leyes de Newton.
- La gravedad es una fuerza que actúa sobre objetos que poseen masa, es directamente proporcional a la masa de los objetos, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa los dos objetos. Siempre dos objetos que tengan masa van a tener la tendencia a atraerse, para el caso de la tierra y una manzana, la tierra posee una masa mucho mayor, lo que hace que la inercia de la tierra sea mucho mayor que la de la manzana, de tal manera lo que vemos es en realidad la manzana cayendo hacia la tierra y no la tierra cayendo hacia la manzana, aunque en realidad suceden las dos cosas.
- Las leyes de Newton han permitido el desarrollo de maquinaria, y el desarrollo tecnológico en varios campos. Un conocimiento de ellas permite el conocer los límites naturales en el diseño e implementación de equipos y maquinaria.
- La fuerza de fricción es una fuerza que se opone al movimiento de un cuerpo, y que solo depende de las superficies de contacto de los cuerpos.
- Las fuerzas elásticas, también conocidas como fuerzas restauradoras, son fuerzas que dependen de la distancia y son contrarias a la dirección de movimiento, un ejemplo de ello es un resorte.
- Una fuerza restauradora puede ser descrita por medio de la ley de Hooke.

3.9. Evaluación

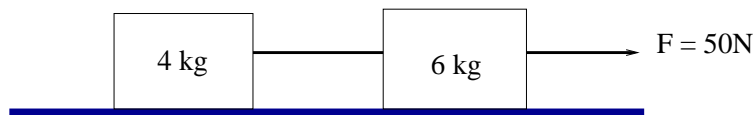
1. Conteste falso (F) o verdadero (V):
 - a) Cuando un cuerpo está en reposo no hay fuerzas actuando sobre él ().
 - b) Cuando un cuerpo sube con velocidad constante por la acción de una cuerda que lo hala: la tensión de la cuerda es mayor que el peso del cuerpo. ()
 - c) Una persona se encuentra de pie sobre una báscula en un ascensor, el ascensor baja a velocidad constante, ignore el momento en el cual el ascensor comienza a descender o comienza a detenerse. El valor que se lee en la báscula es:
 - un peso menor que el peso real ().
 - un peso mayor que el peso real ().
 - un peso igual al peso real. ().
 - d) La aceleración de la gravedad ejercida por la tierra sobre un cuerpo de 10 kilogramos es mayor que sobre un cuerpo de 100 kilogramos. ()
 - e) La fuerza de la gravedad es mayor en un cuerpo que pesa 100 kilogramos que en uno que pesa 10 kilogramos. ()
 - f) En un cuerpo que se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal, la fuerza de reacción a la tercera ley de Newton a la fuerza normal ejercida por la superficie es igual a su peso. ()
 - g) Si la suma de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es cero, entonces el cuerpo se encontrara en equilibrio estático. ()
2. Escoja la afirmación correcta: Cuando se acelera un cuerpo
 - a) Nunca cambia su dirección.
 - b) Su rapidez siempre aumenta.
 - c) Siempre actúa una fuerza externa.
3. Con ayuda de la ecuación (3.7) calcule el valor de la aceleración de la gravedad g con ayuda de los siguientes datos, m_b = masa suya, $r = 6,378140 \times 10^{24}m$, $G = 6,673(10) \times 10^{-11}m^3kg^{-1}s^{-2}$. Respuesta:

se considera la masa de la tierra como $m_{tierra} = 5,974(9) \times 10^{24} kg$. Recuerde que $|\mathbf{F}| = m_b g$.

4. Determine la tensión de una cuerda que hala un objeto de 10 kg en los siguientes casos
 - a) hacia arriba con una aceleración de $3 m/s^2$.
 - b) Hacia abajo con una aceleración de $2 m/s^2$.
 - c) Sube a velocidad constante.

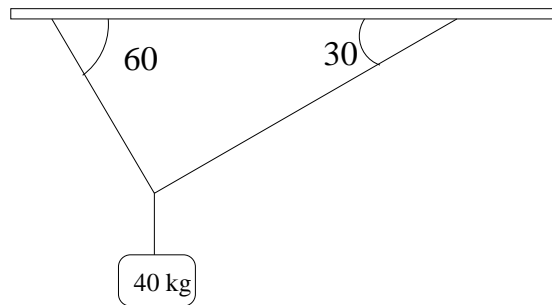
Para simplificar sus cálculos utilice $g = 10 m/s^2$. (Respuestas: a) 130 N, b) 80 N, c) 100 N).

5. Para arrastrar una carreta de 60 kg sobre el piso horizontal con rapidez constante se necesita una fuerza horizontal de 100 N. Halle el coeficiente de fricción entre el piso y la carreta. Si ahora se aumenta la fuerza de 100 N a 120 N, ¿cuál es la aceleración de la carreta?.
6. Halle la aceleración de cada uno de los bloques de la siguiente figura



¿Cuál es la tensión de la cuerda que los une? (suponga inicialmente que la fricción entre los bloques y el piso es cero). Repita el problema suponiendo que el coeficiente de fricción entre los bloques y el piso es $\mu_c = 0,2$.

7. Un cuerpo de 40 kilogramos está suspendido por dos cuerdas con las inclinaciones que se indican en la siguiente figura. ¿Cuál es el valor de las tensiones de las cuerdas?. Si se aumentan las inclinaciones de las cuerdas ¿es posible que las tensiones sean mayores que el peso del cuerpo?.



8. Un ciclista pedalea a lo largo de una carretera recta y llana a 36 km/h de manera constante. Cuando deja de pedalear alcanza a recorrer 150 m antes de detenerse. Si la masa del ciclista con la bicicleta es de 80 kg, hallar:
- a) Su aceleración mientras se desplaza pedaleando.
 - b) Su aceleración mientras se desplaza sin pedalear.
 - c) La fuerza de fricción.
 - d) El coeficiente de rozamiento de la rodadura.
9. Si a un resorte suspendido en el techo se le cuelga una masa de 5 kg, se estira 10 cm con respecto a su posición de equilibrio.
- a) ¿Cuál es su constante de elasticidad?.
 - b) ¿Cuánto varía la longitud del resorte cuando se le cuelga una masa de 50 kg.?
 - c) ¿Cuánta masa se le debe colgar al resorte para que varíe su longitud en 20 cm?.

3.10. Información de retorno

A continuación encontrará respuestas a las preguntas y ejercicios planteados en la parte inicial, evaluación de conceptos previos, y final del capítulo, evaluación. Las respuestas pueden ser ampliadas por usted y la solución a los ejercicios no es única. Se busca que usted amplíe la respuesta, la mejore y encuentre otros métodos de solución a los ejercicios.

Conceptos previos

1. ¿Por qué es mas fácil mover un tren de 1 vagón, que un tren de mas de un vagon?.

Por la inercia. Un tren de tres vagones posee mas masa, y por lo tanto mas inercia, que un tren de un vagon.

2. ¿Cuál es la diferencia entre masa y peso?.

La masa es la cantidad de materia que posee un cuerpo, m . El peso es igual a la fuerza gravitacional que ejerce la gravedad sobre un cuerpo, mg .

3. ¿Por qué al frotarnos las manos estas se calientan?.

Por la fricción, al frotarnos las manos las moleculas que se encuentran en ellas comienzan a chocar unas contra otras, el resultado global es que lo que se denomina energía cinética aumenta, y lo notamos como un aumento de la temperatura en nuestras manos.

4. Describa las fuerzas que actúan sobre una carreta que es tirada por un caballo.

Este punto ha sido discutido en detalle en el capítulo anterior, sin embargo es importante que lo repase otra vez para tratar de entender cada vez mas la tercera ley de Newton.

5. ¿Cuál es la fuerza gravitatoria que ejerce una esfera perfecta de masa M sobre un punto de masa m ?.

Si suponemos que las masas están lo suficientemente separadas como para no tocarse, esta fuerza es igual a:

$$F = G \frac{M m}{r^2}$$

6. ¿Qué es un diagrama de fuerzas?.

Es una representación gráfica de las fuerzas que están actuando sobre un sistema. Es muy útil en el desarrollo de problemas físicos.

Evaluación

1. Conteste falso (F) o verdadero (V):

- a) Cuando un cuerpo está en reposo no hay fuerzas actuando sobre él ().

Falso, en realidad podemos decir que la suma total de fuerzas es cero, pero no necesariamente que sobre él no existen fuerzas actuando. En la vida real siempre hay una fuerza actuando sobre un objeto, la gravedad por ejemplo siempre está presente en el universo.

- b) Cuando un cuerpo sube con velocidad constante por la acción de una cuerda que lo hala: la tensión de la cuerda es mayor que el peso del cuerpo. ()

Falso, la aceleración es igual, ya que si la velocidad es constante significa que no existe una aceleración neta sobre el cuerpo, y eso indicaría que la sumatoria de fuerzas en todos los ejes es igual a cero, llevando a una igualdad entre la tensión y el peso del cuerpo.

- c) Una persona se encuentra de pie sobre una báscula en un ascensor, el ascensor baja a velocidad constante, ignore el momento en el cual el ascensor comienza a descender o comienza a detenerse. El valor que se lee en la báscula es:

- un peso menor que el peso real ().
- un peso mayor que el peso real ().
- un peso igual al peso real. ().

El valor que se lee es igual al peso real, ya que no hay ningún tipo de aceleración que modifique el valor real del peso.

- d) La aceleración de la gravedad ejercida por la tierra sobre un cuerpo de 10 kilogramos es mayor que sobre un cuerpo de 100 kilogramos. ()

Falso, la aceleración sobre la faz de la tierra es independiente de la masa del objeto que se está midiendo. Recordemos que la fuerza gravitatoria es igual a mg , en donde $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ es una constante.

- e) La fuerza de la gravedad es mayor en un cuerpo que pesa 100 kilogramos que en uno que pesa 10 kilogramos. ()

Verdadero, nuevamente recordemos que $F_{gravitatoria} = mg$.

- f) En un cuerpo que se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal, la fuerza de reacción a la tercera ley de Newton a la fuerza normal ejercida por la superficie es igual a su peso. ()

Verdadero. En lo correspondiente a fuerza de fricción estática se estudió un diagrama de fuerzas en donde se observa que la fuerza normal ejercida por el plano sobre el objeto, es igual al peso del objeto. Esto hace que el objeto se encuentre en equilibrio.

- g) Si la suma de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es cero, entonces el cuerpo se encontrara en equilibrio estático. ()

Verdadero. Si la suma de las fuerzas sobre un cuerpo es cero, esto implica que la aceleración es también cero, lo que implica que el cuerpo se encuentra a velocidad igual a cero o a velocidad constante.

2. Escoja la afirmación correcta: Cuando se acelera un cuerpo

- a) Nunca cambia su dirección.
- b) Su rapidez siempre aumenta.
- c) Siempre actúa una fuerza externa.

Una aceleración es un cambio en la velocidad, la velocidad es un vector, por lo tanto cambia al variar su magnitud, su dirección y su sentido. Al acelerar un cuerpo lo que podemos asegurar con toda certeza es que sobre él actúa una fuerza, sin embargo no podemos asegurar totalmente que nunca halla un cambio en la dirección ó su rapidez aumente.

3. Con ayuda de la ecuación (3.7) calcule el valor de la aceleración de la gravedad g con ayuda de los siguientes datos, m_b = la masa que usted tiene, $r = 6,378140 \times 10^{24}m$, $G = 6,673(10) \times 10^{-11}m^3kg^{-1}s^{-2}$, se considera la masa de la tierra como $m_{tierra} = 5,974(9) \times 10^{24}kg$. Recuerde que $|\mathbf{F}| = m_bg$.

Este es un ejercicio de cálculo simple, debe tener en cuenta que lo que se le está preguntando es la aceleración de la gravedad, esta aceleración es independiente de su masa, el valor final deberá ser alrededor de $10 m/s^2$.

4. Determine la tensión de una cuerda que hala un objeto de 10 kg en los siguientes casos

- a) hacia arriba con una aceleración de 3 m/s^2 .
- b) Hacia abajo con una aceleración de 2 m/s^2 .
- c) Sube a velocidad constante.

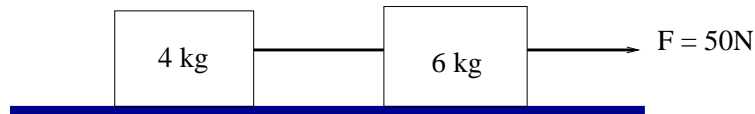
Para simplificar sus cálculos utilice $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Respuestas: a) 130 N, b) 80 N, c) 100 N). Para hacer este ejercicio comience por realizar el diagrama de fuerzas del sistema.

5. Para arrastrar una carreta de 60 kg sobre el piso horizontal con rapidez constante se necesita una fuerza horizontal de 100 N. Halle el coeficiente de fricción entre el piso y la carreta. Si ahora se aumenta la fuerza de 100 N a 120 N, ¿cuál es la aceleración de la carreta?.

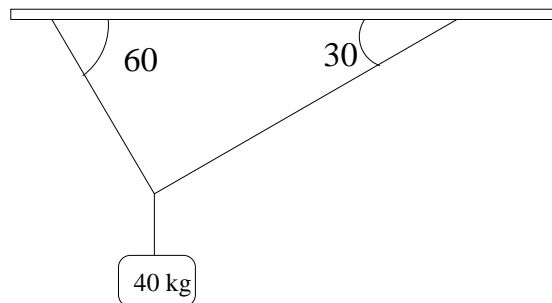
Respuesta $\mu_c = 0,17$ y $a = 0,33 \text{ m/s}^2$.

6. Halle la aceleración de cada uno de los bloques de la siguiente figura



¿Cuál es la tensión de la cuerda que los une? (suponga inicialmente que la fricción entre los bloques y el piso es cero). Repita el problema suponiendo que el coeficiente de fricción entre los bloques y el piso es $\mu_c = 0,2$. *Respuesta 5 m/s^2 ; 20 N ; 3 m/s^2 y 12 N.*

7. Un cuerpo de 40 kilogramos está suspendido por dos cuerdas con las inclinaciones que se indican en la siguiente figura. ¿Cuál es el valor de las tensiones de las cuerdas?. Si se aumentan las inclinaciones de las cuerdas ¿es posible que las tensiones sean mayores que el peso del cuerpo?.



Respuesta $T1= 345.63$ Newton, $T2 = 198.61$ Newton, Sí es posible que las tensiones puedan ser mayores que el peso, como se observa de las respuestas.

8. Un ciclista pedalea a lo largo de una carretera recta y llana a 36 km/h de manera constante. Cuando deja de pedalear alcanza a recorrer 150 m antes de detenerse. Si la masa del ciclista con la bicicleta es de 80 kg, hallar:

- a) Su aceleración mientras se desplaza pedaleando.

Respuesta: Es cero ya que la velocidad es constante.

- b) Su aceleración mientras se desplaza sin pedalear.

Respuesta: 0.33m/s^2 , para hallar el tiempo que demoró en la desaceleración

$$\begin{aligned} v_x^2 &= v_{0x}^2 + 2a_x x \\ a &= \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2x} \\ a &= \frac{36^2 - 0^2(\text{km/h})^2}{2 \times 0,15(\text{km})} \\ a &= 0,33 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

- c) La fuerza de fricción.

Respuesta -24.4 Newton.

- d) El coeficiente de rozamiento de la rodadura.

Respuesta 0.033

9. Si a un resorte suspendido en el techo se le cuelga una masa de 5 kg, se estira 10 cm con respecto a su posición de equilibrio.

- a) ¿Cuál es su constante de elasticidad?.

Respuesta 500 N/m . Para la solución de este problema utilice la formula de la ley de hooke

$$F = -kx$$

con $F = mg = 5(\text{kg}) \times 10(\text{m/s}^2) = 50 \text{ N}$, y $x = 0,1 \text{ m}$.

- b) ¿Cuánto varía la longitud del resorte cuando se le cuelga una masa de 50 kg.?

Respuesta: 1 metro

- c) ¿Cuánta masa se le debe colgar al resorte para que varíe su longitud en 20 cm.?

Respuesta 10 kg.

Palabras claves para búsqueda en Internet

A continuación se presentará una serie de palabras útiles para la búsqueda en Internet, las palabras se han probado en el buscador

<http://www.google.com>

no tienen ortografía dado que el buscador es universal, y en por que en ocasiones va a tener que utilizar teclados que no tienen tildes o eñes.

leyes de newton, inercia, fuerza, unidades de medicion, gravitacion, friccion, experimentos fisica.

Bibliografía recomendada:

Se puede consultar al final del texto, el número que encuentra al final de la referencia es el número correspondiente al texto en la bibliografía final.

- Formulas y tablas matemáticas en general [1].
- Mediciones y experimentos alrededor de leyes de Newton [2, 13].
- Conversión de unidades [18].
- Dinámica general [7, 8, 14, 19, 20, 21, 10].

Capítulo 4

Leyes de Conservación I: Momentum lineal.

4.1. Introducción

La existencia de cantidades físicas conservadas es una de las herramientas mas poderosas para la física, la conservación de la energía limita nuestras capacidades para dar saltos de longitud infinita, o para llegar fácilmente a otros planetas. El estudio de los choques puede realizarse mas fácilmente con ayuda de la conservación del momentum lineal. A lo largo de los siguientes capítulos desarrollaremos las tres cantidades conservadas mas importantes, momentum lineal, momentum angular y energía. Y las asociaremos con ejemplos de la vida diaria y profesional.

Existen, como ya hemos mencionado, fundamentalmente tres cantidades que se conservan en la mecánica, *el momentum lineal, la energía y el momentum angular*. Cada una de estas tres leyes proviene de la existencia de simetrías en los sistemas. Por ejemplo cuando un sistema es invariante ante translaciones, es decir que el sistema permanece idéntico a pesar de existir una translación espacial, obtenemos la conservación del momentum lineal. Cuando un sistema permanece invariante ante un desplazamiento temporal, es decir que el sistema permanece idéntico cuando el tiempo pasa, obtenemos la ley de conservación de la energía. Y cuando un sistema permanece invariante ante rotaciones, por ejemplo una esfera que cuando rota alrededor de su centro permanece idéntica, decimos que el sistema conserva el momentum angular.

4.2. Evaluación de conocimientos previos

- ¿Qué es una ley de conservación?.
- ¿Qué es centro de masa?.
- Cuando lanzo una bola al aire el movimiento es de tipo parabólico, ¿cómo es el movimiento de un bastón cuando lo mando al aire?.
- ¿Que es un impulso?.

4.3. Momentum lineal

Hasta el momento se han tratado los objetos en física como simples puntos que poseen masa, esta es una simplificación, el tratar cuerpos reales como puntos en lugar de verdaderos objetos. En algunas ocasiones estas aproximaciones son justificadas, por ejemplo en el movimiento planetario, el tamaño de algunos planetas es pequeño comparado con las dimensiones del sistema solar. O por ejemplo en el caso de las partículas elementales que se encuentran en movimiento dentro de los aceleradores, y cuyo tamaño es del orden de $10^{-14}m$.

Sin embargo en el caso de los cohetes, el movimiento es mucho mas complicado, ya que los cohetes están perdiendo masa, y en este caso aplicar la segunda ley de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ es mas complicado.

Una forma mas general de escribir la segunda ley de Newton es,

$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})}. \quad (4.1)$$

Para una partícula Newtoniana la masa se mantiene constante, de manera que lo que obtenemos de la ecuación (4.1) es,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \\ \mathbf{F} &= m\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \\ \mathbf{F} &= m\mathbf{a} \end{aligned}$$

Que es la segunda ley de Newton tal y como la conocemos. La cantidad $m\mathbf{v}$ de la ecuación (4.1) es muy importante en la física, y se denomina *momentum lineal*, o simplemente momentum. De esta forma

El momentum lineal se define como el producto de la masa de un objeto m y su vector velocidad \mathbf{v} , y se suele denotar por medio de la letra \mathbf{p} .

Es decir,

$$\boxed{\mathbf{p} = m\mathbf{v}.} \quad (4.2)$$

De lo anterior podemos afirmar:

- El momentum es una cantidad vectorial, producto de la multiplicación de un escalar, la masa m , y un vector, la velocidad \mathbf{v} .
- Con la definición de momentum de la ecuación (4.2) la segunda ley de Newton toma la forma,

$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}} \quad (4.3)$$

La razón de cambio del momentum lineal es la fuerza. La ecuación (4.3) fue la verdadera ecuación que postuló Newton para su segunda ley. Y es muy útil por que puede ser generalizada para sistemas muy complejos. Además el momentum constituye algo aun mas fundamental que la masa y la velocidad por separado.

Si la fuerza que actúa sobre un sistema es nula, entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= 0 \\ \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$(4.5)$$

La única función cuya derivada es cero es una constante, por lo tanto podemos afirmar.

El momentum lineal de un sistema se conserva cuando la fuerza externa sobre él es igual a cero.

Este es un resultado muy importante, e indica que la cantidad denominada momentum lineal se conserva cuando no existen fuerzas sobre el sistema. Esta es la primera de las tres grandes cantidades que se conservan. Es muy importante notar que esta cantidad se conserva si la suma de las fuerzas totales provenientes del exterior del sistema es cero, es decir que pueden existir muchas fuerzas sobre el sistema, y seguramente de forma individual ellas son

diferentes de cero, sin embargo lo que nos importa es que la suma vectorial total sea igual a cero. La conservación de momentum lineal sera estudiada en detalle a lo largo de la presente sección.

¿Por qué es útil la definición de momentum?, la razón es que permite el estudio de la dinámica de una sistema de partículas. Considere un sistema de partículas que interactúan, por ejemplo el sistema solar visto desde muy lejos puede considerarse como un sistema de partículas interactuantes, en el cual las partículas corresponden a los planetas y el sol. Todas las partículas se atraen unas a otras, y a su vez el sistema entero esta sujeto a las atracciones que sufran del exterior del sistema.

Sin embargo vamos a considerar que el sistema solar es aislado, es decir que vamos a despreciar las interacciones provenientes del exterior. De esta forma la fuerza total externa al sistema es cero, y las únicas interacciones posibles se dan entre los planetas y el sol. En este caso podemos aplicar la conservación del momentum lineal, ya que al ser un sistema aislado la fuerza exterior a él es cero, y el momentum total del sistema se conserva.

Para hacer nuestro argumento mas general suponga un sistema de N partículas que interactúan entre si. Vamos a considerar que estas particulas poseen masas m_1, m_2, \dots, m_n . La posición de la partícula j -ésima¹ es \mathbf{r}_j , la fuerza que actúa sobre esta partícula es \mathbf{f}_j , y su momentum es $\mathbf{p}_j = m_j \dot{\mathbf{r}}_j = m_j \frac{d\mathbf{r}_j}{dt}$. La ecuación de movimiento de la partícula j -ésima es

$$\mathbf{f}_j = \frac{d\mathbf{p}_j}{dt} \quad (4.6)$$

La fuerza de la partícula j se puede dividir en dos términos, la suma de las fuerzas internas mas la suma de las fuerzas externas,

$$\mathbf{f}_j = \mathbf{f}_j^{internas} + \mathbf{f}_j^{externas}. \quad (4.7)$$

Las fuerzas internas se refieren a las fuerzas que actúan dentro del sistema debido a las otras partículas, en el caso del sistema solar la partícula j corresponde a un planeta, y las fuerzas internas se refieren a las fuerzas ejercidas por los planetas del sistema solar y el sol.

¹Cuando hablamos de la partícula j -ésima nos referimos a que j es un numero menor o igual a N .

²Es usual denotar $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, esta es la notación de Newton para las derivadas con respecto al tiempo.

- El segundo término es $\sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^{\text{externas}}$ es la suma de todas las fuerzas externas actuando sobre las partículas. *La suma total es la fuerza total actuando sobre el sistema*, y se puede representar por

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^{\text{externas}} \equiv \mathbf{F}_{\text{externas}} \quad (4.12)$$

- De esta forma la ecuación (4.10) se simplifica,

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}. \quad (4.13)$$

El lado derecho de (4.13) puede ser escrito como

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \frac{d\mathbf{P}}{dt}. \quad (4.14)$$

En donde $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i$ es el momentum total del sistema.

- Con los anteriores razonamientos llegamos a una muy importante conclusión,

$$\boxed{\mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}} \quad (4.15)$$

La fuerza externa total aplicada a un sistema es igual a la razón de cambio del momentum del sistema.

Esta afirmación es verdad independiente del tipo de interacción que se lleve a cabo sobre el sistema. La fuerza externa \mathbf{F}_{ext} puede ser una simple fuerza actuando sobre un sistema, o un conjunto de fuerzas que actúan de manera simultánea sobre todas las partículas del sistema.

Es importante también notar que lo que influye en el cambio de momentum de un sistema son las fuerzas externas, y no las fuerzas internas. Un cambio en el momentum se da por cambios en la velocidad, cambios en la masa ó cambios en ambas cantidades. Esto también nos lleva a una observación muy importante,

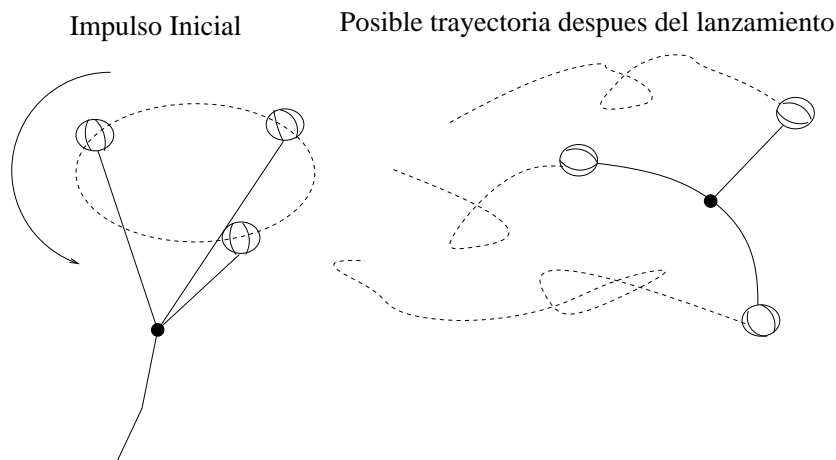
Siempre que exista un cambio en la velocidad existirá una aceleración, y una aceleración siempre es producida por una fuerza.

Por último tenemos que hacer ver que el concepto de razón de cambio es verdaderamente importante en la física. A continuación mediante un ejemplo muy sencillo vamos a mostrar por que es tan importante el poder reducir sistemas de muchas partículas a sistemas en los cuales solo nos interesa el movimiento de un punto del sistema.

Ejemplo 21 : La bola.

La bola es un arma usada por los gauchos Argentinos cuando desean atrapar algunos animales en la pampa Argentina. Esta consiste en la unión de tres bolas de piedra o acero conectadas por medio de cuerdas. El gaucho gira las bolas en el aire y las lanza a los pies del animal, enredándolo. Se requiere algo de práctica pero después de algún tiempo se adquiere sin problemas³.

En el siguiente dibujo mostramos la bola y una posible trayectoria.



¿Nos permite la física describir este movimiento aparentemente tan complicado?. Para comenzar podemos considerar la bola como un sistema de tres masas m_1 , m_2 y m_3 . Las bolas están siendo afectadas por las cuerdas que las amarran y la gravedad. Sería ideal poder describir el movimiento de cada una de las bolas en cada instante, y este movimiento depende del movimiento de

³No estamos sugiriendo que el lector practique, sin embargo es interesante fabricar el artefacto y comprobar las afirmaciones que se hacen a lo largo del ejemplo.

las otras bolas, y realmente en principio no podemos reducir el problema al del movimiento de una sola bola.

Lo interesante es que el momentum total obedece a una sola ecuación, ya que el momentum depende es de las fuerzas externas, las fuerzas debidas a el amarre de las esferas es una fuerza interna al sistema, y como ya vimos estas fuerzas son cero, la única fuerza externa al sistema es la gravedad.

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{P}}{dt} &= \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{f}_1^{ext} + \mathbf{f}_2^{ext} + \mathbf{f}_3^{ext} \\ \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= m_1\mathbf{g} + m_2\mathbf{g} + m_3\mathbf{g} \\ \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= (m_1 + m_2 + m_3)\mathbf{g} \\ \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= M\mathbf{g}\end{aligned}$$

En donde M es la masa total. Esta ecuación representa un importante avance en la descripción del movimiento, la ecuación es idéntica a la de una partícula de masa M con momentum \mathbf{P} . De manera que el movimiento es equivalente al de una sola partícula que es lanzada, y esto lo sabe instintivamente el gaucho, que al usar la bola sabe que el movimiento que va a seguir es similar al lanzamiento de una piedra.

El movimiento seguido por la piedra será el mismo movimiento ya estudiado en el caso de movimiento bajo la acción de la gravedad, sin embargo la pregunta es ¿cómo es posible que el movimiento complicado de la bola sea igual al de una piedra lanzada?, es decir que cuando hablamos acerca de que la bola se mueve igual que una partícula de masa M ¿cual es la partícula que se mueve si en realidad tenemos tres masas?. Estas preguntas serán contestadas en la próxima sección.

4.4. El centro de masa

El concepto de centro de masa es tambien central en el desarrollo de los conceptos de física clásica, ya que muchos problemas aparentemente complejos del movimiento de cuerpos, pueden ser reducidos a el movimiento del centro de masa del objeto.

Como ya vimos en la ecuación (4.15),

$$\mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}.$$

Esta ecuación es idéntica a la del movimiento de una partícula aislada, si hacemos

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{ext} &= \frac{d\mathbf{P}}{dt} \\ \mathbf{F}_{ext} &= M\ddot{\mathbf{R}}\end{aligned}$$

En donde M es la masa total del sistema que puede ser definida como la suma de todas las masas de las partículas individuales,

$$\boxed{M = \sum_{i=1}^N m_i} \quad (4.16)$$

El vector $\ddot{\mathbf{R}}$ es la aceleración de un vector que vamos a definir a continuación⁴. Podemos hacer,

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N m_j \ddot{\mathbf{r}}_j = \mathbf{F}_{ext}, \quad (4.17)$$

lo cual es cierto si definimos

$$\boxed{\mathbf{R}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_j \mathbf{R}_j} \quad (4.18)$$

El vector \mathbf{R} es un vector que sale del origen y se dirige a un punto en el sistema denominado **centro de masa**, el sistema se comporta como si toda la masa estuviera concentrada en este centro de masa. Para el ejemplo de la bola es respecto a este centro de masa que la *bola* efectúa su movimiento como una partícula independiente bajo la influencia de la gravedad. En la figura 4.1 se muestra una representación del movimiento de la bola bajo la influencia de la gravedad.

Objetos muy complicados pueden ser estudiados con ayuda del centro de masa, lo importante para utilizarlo es que debemos tomar el objeto a estudiar como un sistema de partículas que se encuentran firmemente ligadas unas a otras por medio de fuerzas internas muy fuertes. De esta forma cuando estudiamos la influencia de una fuerza externa sobre el sistema, este se va a

⁴Esta es la notación de Newton para indicar una segunda derivada con respecto al tiempo.

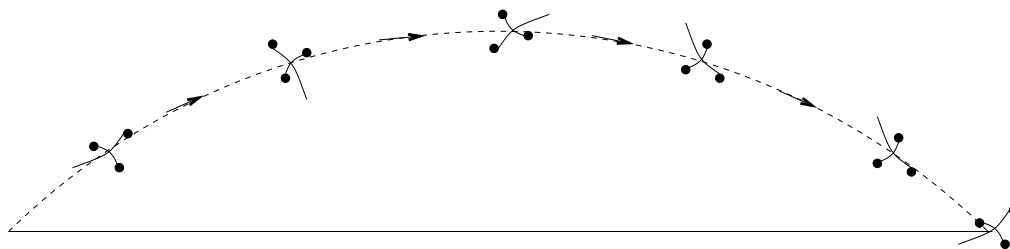


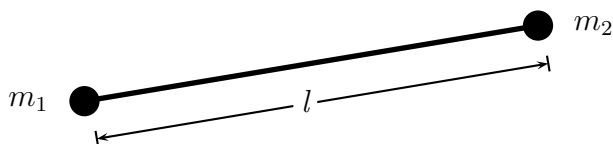
Figura 4.1: El movimiento de una bola se hace alrededor de su centro de masa, su centro de masa describe un movimiento parabólico a pesar que las esferas individuales efectúan un movimiento muy complicado para ser descrito fácilmente.

comportar como si se tratara de un punto moviéndose bajo la influencia de una fuerza. Este es el significado de la ecuación (4.17)

La ecuación (4.17) $\mathbf{F} = M\ddot{\mathbf{R}}$ solamente describe el movimiento del centro de masa únicamente, es decir el movimiento de translación del cuerpo. No habla nada de la orientación del objeto en el espacio. Ahora vamos a realizar una precisión, la ecuación (4.17) nos habla del movimiento del centro de masa de un agregado de partículas., y no se aplica estrictamente a objetos compuestos por partículas que se mantienen unidas de manera rígida, lo importante es que en el objeto que estudiamos podamos definir el centro de masa. Esto lo aclararemos con ejemplos a lo largo del presente capítulo.

Ejemplo 22 : *El bastón de mando*

En las bandas de guerra es usual observar que la banda es encabezada por una persona que tiene un bastón de mando, El bastón le indica a la banda las tonadas a tocar, y en ocasiones es lanzado al aire para adornar la presentación. El bastón es la unión de dos masas aproximadamente iguales por medio de una barra de metal delgado de longitud l . Tal y como representamos a continuación.



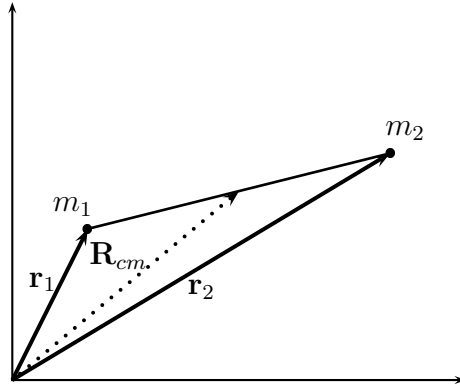
El problema consiste en encontrar el centro de masa del sistema, y el movimien-

to del centro de masa. Para poder ayudarle a el bastonero a realizar las acrobacias con el bastón.

Para solucionar el problema primero vamos a ubicar en un sistema de referencia las masas m_1 y m_2 , y las trataremos como puntos de masa. Para las masas tenemos los vectores \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 . Mediante la definición del centro de masa de la ecuación (4.18) y (4.16)⁵,

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{cm} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^2 \mathbf{r}_i m_i \\ \mathbf{R}_{cm} &= \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}\end{aligned}\quad (4.19)$$

Hemos despreciado la masa de la barra que une las masas de los extremos. Y el centro de masa se encuentra en un punto entre la línea que une las masas m_1 y m_2 . En el siguiente gráfico mostramos los vectores hasta ahora involucrados, el vector centro de masa se ha dibujado con líneas de puntos.



Vamos a estudiar dos casos extremos de la ecuación (4.19):

1. De la ecuación (4.19) vemos que si $m_1 = m_2$ obtenemos que el centro de masa se encuentra exactamente en la mitad de la línea que une las masas m_1 y m_2 . Por esta razón el bastonero siempre trata de tomar el bastón en una región cercana al centro de masa. En centro de masa para este caso es,

$$\mathbf{R}_{cm} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \quad (4.20)$$

⁵De ahora en adelante el vector centro de masa lo notaremos como \mathbf{R}_{cm}

2. Si por el contrario la masa m_1 es mucho mayor que la masa m_2 , esto lo podemos escribir como $m_1 \gg m_2$. Entonces el centro de masa estará mas cerca a la masa m_1 , claro está que la posición tambien dependerá de la magnitud de los vectores posición \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 , sin embargo vamos a suponer que esta magnitud es pequeña comparada con la masa, es decir que estamos viendo el objeto muy cerca. En este caso podemos suponer que $m_2 \approx 0$,

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{cm} &= \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \mathbf{R}_{cm} &= \frac{m_1\mathbf{r}_1 + 0\mathbf{r}_2}{m_1 + 0} \\ \mathbf{R}_{cm} &\approx \frac{m_1\mathbf{r}_1}{m_1} \\ \mathbf{R}_{cm} &\approx \mathbf{r}_1\end{aligned}$$

Asumiendo que la fricción del aire es despreciable, la única fuerza externa que actúa sobre el bastón es la gravedad, y además actúa únicamente sobre las dos masas, ya que hemos despreciado la masa de la barra. La fuerza externa sobre el bastón es,

$$\mathbf{F}_{ext} = m_1\mathbf{g} + m_2\mathbf{g}.$$

Como habíamos visto en la ecuación (4.17) la ecuación de movimiento del centro de masa es,

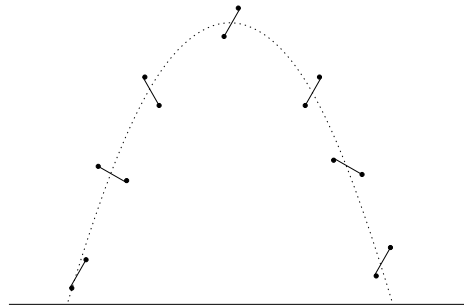
$$(m_1 + m_2)\ddot{\mathbf{R}}_{cm} = (m_1 + m_2)\mathbf{g}.$$

Lo que quiere decir que

$$\ddot{\mathbf{R}}_{cm} = \mathbf{g}.$$

La solución del problema nos da una orientación sorprendentemente útil, que podemos aplicar a cualquier tipo de sistemas de partículas.

El centro de masa del sistema sigue una trayectoria parabólica de un punto de masa en un campo gravitatorio uniforme.



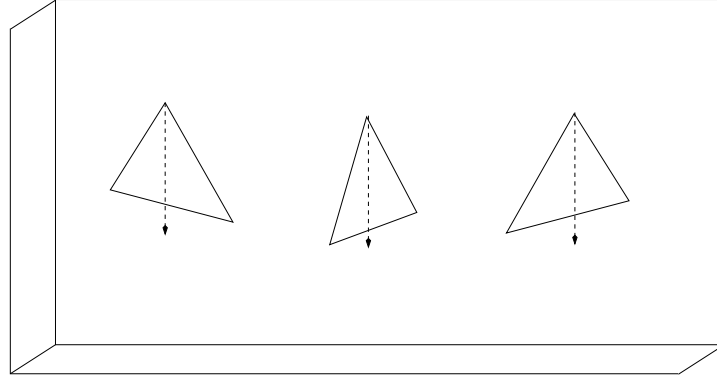
De esta forma el bastonero puede hacer muchas peripecias con el bastón, mientras que pueda tomarlo por el centro de masa, ya que esta es la trayectoria que debe seguir el bastón a lo largo de su recorrido.

4.4.1. Cálculo del centro de masa

El centro de masa de un objeto es muy importante de calcular, ya que el movimiento de su centro de masa nos dice mucho del movimiento del cuerpo en el espacio. Experimentalmente podemos hallar el centro de masa de un cuerpo sabiendo que toda la masa del cuerpo puede ser modelada como si estuviese concentrada en un punto, y sobre este punto es que la gravedad ejercerá una fuerza.

Supongamos que tenemos un triángulo de cartón, y deseamos ubicar su centro de masa, para ello realizamos el siguiente procedimiento:

- Atravesamos con un alfiler cada una de las puntas del triángulo, y suspendemos el triángulo con el alfiler pegado a una pared, tal y como se muestra en el dibujo al final de las instrucciones.
- colgamos un cuerda con una pequeña masa del final del alfiler, y trazamos una línea sobre el triángulo de cartón por donde pasa la cuerda.
- La intersección de las líneas es precisamente el centro de masa del sistema.



En la anterior figura mostramos como en un triángulo de cartón colgado a una pared podemos colgar ubicar el centro de masa utilizando un peso y una cuerda. En general la técnica funciona para objetos planos sobre la tierra.

Sin embargo también podemos tener casos en los cuales la distribución de masa del objeto no sea uniforme, o el objeto no sea plano. Por lo cual en ocasiones el encontrar el centro de masa de un cuerpo no es tan evidente. Para el calculo del centro de masa de un cuerpo lo primero que haremos es dividir el cuerpo en N elementos de masa, de tal forma que cada elemento posea una masa constante. Si \mathbf{r}_j es la posición del elemento numero j y m_j es su masa, entonces el centro de masa como en la ecuación (4.18)

$$\mathbf{R}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{r}_j. \quad (4.21)$$

El resultado no es del todo cierto ya que en realidad los elementos de masa no son partículas. Sin embargo en el limite cuando el numero de elementos N se aproxima a infinito, es decir que hacemos las subdivisiones muy finas,, la aproximación se vuelve exacta. Este limite define la integral para el calculo del centro de masa

$$\mathbf{R}_{cm} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{r}_j = \int \mathbf{r} dm. \quad (4.22)$$

En donde dm es un elemento diferencial de masa. En general para cuerpos continuos podemos expresar la masa como el producto de la densidad de materia ρ por el volumen V , de tal forma que el elemento de masa toma la

forma $dm = \rho dV$. Y nuestra integral (4.22) ahora toma la forma

$$\boxed{\mathbf{R}_{cm} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} \rho dV} \quad (4.23)$$

Esta integral es llamada “*integral de volumen*” y es muy importante para conocer el centro de masa de un cuerpo rígido.

4.5. Conservación de momentum lineal

En las secciones anteriores habíamos mostrado que la fuerza total externa al sistema está relacionada con el momentum total del sistema por medio de la ecuación

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}.$$

Ahora vamos a considerar las implicaciones que esto tiene en un sistema sobre el cual no actúa ninguna fuerza, es decir un sistema aislado. En este caso

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0.$$

No existe una variación del momentum a lo largo del tiempo, esto significa que

Para un sistema libre de fuerzas externas, aislado, el momentum lineal total se conserva.

Esta es la denominada *ley de conservación del momentum lineal*. Esta ley tan simple tiene muy interesantes e importantes implicaciones para la descripción de sistemas muy complejos.

Ejemplo 23 : *El disparo de un rifle.*

Un rifle que pesa 6 kilos dispara una bala que pesa 1/10 kilos, a una velocidad inicial de 1200 m/s. Calcular la velocidad de retroceso del arma cuando la bala sale del cañon, y decir por que esta velocidad no le hace daño al que la dispara.

Al principio la velocidad inicial del sistema es cero. Inmediatamente sale la bala por el cañon, esta sale hacia adelante y el cañon en respuesta sale

hacia atrás. Consideramos el sistema bala rifle como aislado. De esta forma tenemos

$$\begin{aligned}
 \text{Momentum inicial} &= \text{Momentum final} \\
 \text{Momentum inicial} &= \text{Momentum bala} + \text{momentum rifle} \\
 \text{Masa total} \times \text{Velocidad inicial} &= m_b \mathbf{v}_b + m_r \mathbf{v}_r \\
 0 &= m_b v_b - m_r v_r
 \end{aligned}
 \tag{4.24}$$

El signo menos de la velocidad del rifle v_r se debe a que mientras la bala sale hacia adelante, el rifle retrocede, al ser direcciones contrarias las de la velocidad elegimos como positiva la dirección de la bala y negativa la dirección de retroceso del rifle.

Despejando a la velocidad del retroceso v_r , tenemos

$$\begin{aligned}
 v_r &= v_b \frac{m_b}{m_r} \\
 &= 1200 \text{m/s} \times \frac{1/10k}{6k} \\
 &= 20 \text{m/s}
 \end{aligned}$$

Nótese la enorme diferencia de velocidades entre la bala y el rifle. Entre mayor sea la masa del rifle, menor será la velocidad de retroceso, sin embargo mas difícil sera cargar un rifle muy pesado que uno liviano.

4.6. Las coordenadas del centro de masa

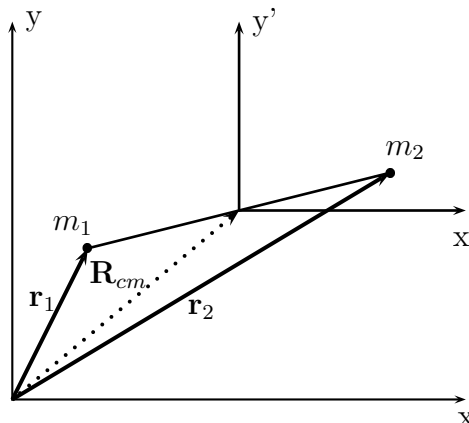
Muchos de los problemas que se estudian pueden ser simplificados con ayuda de las coordenadas del centro de masa, como se vió en ejemplos anteriores el centro de masa del sistema sigue una trayectoria que corresponde al de una partícula simple, mientras que las diferentes partes del sistema pueden efectuar movimientos muy complejos. Para la solución de problemas complejos es muy útil situar nuestro origen del sistema de coordenadas en el centro de masa del sistema, y desde allí estudiar el comportamiento de las diferentes partes del sistema.

En el ejemplo 22 mostramos la forma de hallar las coordenadas del centro de masa para un sistema compuesto por dos cuerpos unidos fuertemente a

una distancia fija. Su centro de masa estaba dado por

$$\mathbf{R}_{cm} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

La idea es trasladar el origen de coordenadas a un nuevo sistema que tenía por origen el centro de masa, tal como se muestra a continuación.



Vamos a pasar de un sistema (x, y) a un sistema (x', y') . De esta forma las coordenadas de las dos partículas vistas desde el sistema centro de masa son

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_{cm} \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}_{cm}\end{aligned}$$

Las coordenadas de centro de masa son las coordenadas naturales para un sistema aislado de dos cuerpos.

4.7. Choques en una dimensión

Una muy útil aplicación de la conservación del momentum es el estudio de choques, en los cuales intervienen dos cuerpos. Vamos a estudiar choques que se presentan en una sola dimensión, es decir objetos que se mueven en una línea recta. Se supondrá que sobre estos cuerpos no actúan fuerzas externas, y las únicas fuerzas presentes aparecen durante la colisión entre los cuerpos.

Un ejemplo es el de dos bolas de billar que chocan de frente, y los centros de masa se mueven sobre la misma línea. La colisión puede ser **perfectamente elástica**, es decir que las masas de los objetos no cambian durante el choque; ó **perfectamente inelástica** que las masas que chocan quedan unidas después de la colisión y continúan como un solo objeto.

En un capítulo posterior veremos que en un choque elástico además de conservarse la cantidad de movimiento, también se conserva la denominada **energía cinética**, la cual para un cuerpo de masa m que se mueve a velocidad v se define como:

$$\text{Energía cinética} = \frac{1}{2}mv^2 \quad (4.25)$$

Vamos a llamar a las cantidades involucradas en un choque de dos cuerpos de la siguiente forma:

m_1 Masa del objeto 1.

m_2 Masa del objeto 2.

$v1_0$ Velocidad inicial del objeto de masa m_1 .

$v1_f$ Velocidad final del objeto de masa m_1 .

$v2_0$ Velocidad inicial del objeto de masa m_2 .

$v2_f$ Velocidad final del objeto de masa m_2 .

Utilizando las reglas de conservación de momentum y energía se puede llegar a que las velocidades finales involucradas en el choque son

$$v1_f = \frac{m_1 - em_2}{m_1 + m_2}v1_0 + \frac{(1+e)m_2}{m_1 + m_2}v2_0 \quad (4.26)$$

y

$$v2_f = \frac{(1+e)m_1}{m_1 + m_2}v1_0 + \frac{m_2 - em_1}{m_1 + m_2}v2_0 \quad (4.27)$$

El termino e se denomina coeficiente de restitución, y nos dice si la colisión fue elástica o inelástica. Y es de la forma

$$e = \frac{v2_f - v1_f}{v1_0 - v2_0} \quad (4.28)$$

- Cuando $e = 1$ el choque es perfectamente elástico, y de (4.28) se obtiene

$$v2_f - v1_f = -(v2_0 - v1_0)$$

En donde $v2_0 - v1_0$ es la velocidad de la partícula 2 con respecto al cuerpo 1 antes del choque. Y $v2_f - v1_f$ representa la velocidad relativa correspondiente después del impacto.

- Cuando $e = 0$ el choque es completamente inelástico.
- En la vida real, por ejemplo choques de autos, los choques no son completamente elásticos o inelásticos, son mas bien una combinación de los dos. Esto proporciona un coeficiente de restitución entre 0 y 1. Este coeficiente nunca podrá ser mayor que 1 o menor que 0.

Los choques en mas de una dimensión no varían esencialmente de los choques de una dimensión, sin embargo la matemática involucrada se vuelve algo compleja. Lo importante es recordar que en general se va a conservar el momentum en cada uno de los ejes estudiados.

4.8. El impulso

La relación entre fuerza y momentum es

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Como un teorema del cálculo toda ecuación que se pueda expresar en forma diferencial, se puede también expresar en forma integral. La forma integral de la relación fuerza momentum es

$$\boxed{\int_0^t \mathbf{F} dt = \mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(0)} \quad (4.29)$$

El significado de esta ecuación es el siguiente, el cambio de momentum de un sistema esta dado por la integral de la fuerza sobre el sistema con respecto al tiempo. Es decir que para que se registre un cambio del momentum es necesario que la integral posea un valor diferente de cero.

La integral $\int \mathbf{F} dt$ es llamada **impulso**, cambios en el momentum dependen solamente de esta integral.

Ejemplo 24 *Un auto de 2000 N de peso choca contra una barrera fija, a la velocidad inicial de 1.5 m/s. Su extremo delantero se comprime y su centro de masa queda en reposo a una distancia de 1.2 m. Suponiendo que la desaceleración del centro de masa es constante, utilizar el teorema del impulso y de la cantidad de movimiento para determinar la fuerza promedio en el tiempo que actúa sobre el auto durante el impacto.*

Si la desaceleración durante el choque es constante, el tiempo requerido para que el auto se detenga puede calcularse como

$$\begin{aligned} v^2 - v_0^2 &= 2ax \\ a &= \frac{v^2 - v_0^2}{2x} \\ &= \frac{0^2 - 15^2}{2 \times 1,2} = -93,75 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

De esta forma el tiempo puede calcularse por medio de

$$\begin{aligned} v - v_0 &= at \\ t &= \frac{v - v_0}{a} \\ &= \frac{0 - 15}{-93,75} = 0,16 \text{ s} \end{aligned}$$

De acuerdo con el teorema del impulso y la cantidad de movimiento

$$p_f - p_i = \bar{F}(t_2 - t_1)$$

El intervalo de tiempo $(t_2 - t_1)$ es el tiempo durante el cual ocurre la colisión. Los valores de los momenta respectivos son $p_i = 0$ y $p_f = mv_0$, de esta forma la fuerza promedio \bar{F} es

$$\begin{aligned} 0 - mv_0 &= \bar{F}t \\ \bar{F} &= -\frac{mv_0}{t} \\ &= -\left(\frac{2000 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}{9,8 \text{ m/s}^2} \left(\frac{15 \text{ m/s}}{0,16 \text{ s}}\right)\right) = -19132 \text{ N}. \quad (4.30) \end{aligned}$$

El signo indica que si el auto viaja en la dirección x , la fuerza actúa en dirección contraria. Nótese la gran fuerza necesaria para detener el auto.

4.9. Taller experimental: Choque en dos dimensiones.

Una de las mas importantes aplicaciones de la ley de conservación del momentum lineal es el estudio de choques de cuerpos. Juegos como el billar o los bolos pueden ser descritos con una buena aproximación con ayuda de leyes de conservación. El objetivo primordial de esta practica es:

4.9. TALLER EXPERIMENTAL: CHOQUE EN DOS DIMENSIONES.157

1. Verificar la ley de conservación del momentum lineal para un choque en dos dimensiones.

4.9.1. Cuestionario

1. ¿Qué dice la ley de conservación de momentum lineal?.
2. ¿Es el momentum lineal una cantidad vectorial?.
3. ¿Por que es mas peligroso el golpe de un camión de 50 toneladas a 20 kilómetros por hora que el de una moto de 50 kilogramos a 20 kilómetros por hora?.

4.9.2. La experiencia

Dado un cuerpo de masa \mathbf{m} que tiene una velocidad instantánea $\tilde{\mathbf{V}}$ su momentum lineal se define como $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{m}\tilde{\mathbf{V}}$. Cuando dos o mas cuerpos interactúan se cumple la ley de conservación del momentum lineal **total** de los cuerpos interactuantes. El momentum lineal de todos los cuerpos que interactúan es igual antes y después de la interacción.

En este experimento la interacción es el choque entre dos esferas, en un caso de masas iguales y en el otro de masas diferentes. En los dos casos tendremos un esfera incidente que desciende por el canal y golpea a la otra que se encuentra en reposo al final del canal sobre el tornillo. El gráfico del montaje se muestra en la figura 4.2 Para determinar las velocidades antes y después del choque utilizaremos el movimiento de un proyectil. La velocidad a lo largo del eje X deberá ser constante, ya que no hay influencia de la gravedad sobre este eje.

Determinación de la velocidad de la esfera incidente

Siempre soltaremos la esfera incidente desde la parte superior de la rampa, de tal forma que obtengamos siempre la máxima velocidad horizontal. Para obtener el valor de la velocidad de salida utilizamos la formula

$$V_0 = \frac{x_0}{\sqrt{\frac{2h}{g}}}. \quad (4.31)$$

En donde h es la altura a la cual la esfera incidente comienza el movimiento horizontal completamente. Y X_0 se obtiene como la distancia horizontal

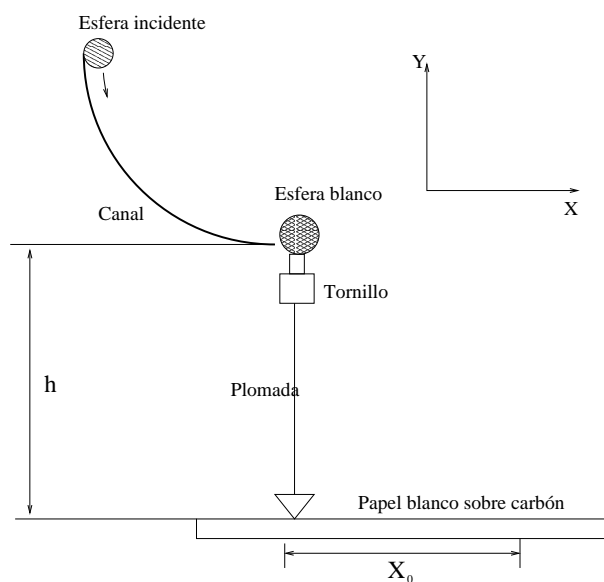


Figura 4.2: Montaje del experimento de conservación del momentum. La esfera incidente golpea a la esfera blanco y esta última cae sobre el papel carbo que deja una huella sobre el papel blanco, de manera que podemos medir la distancia de desplazamiento.

4.9. TALLER EXPERIMENTAL: CHOQUE EN DOS DIMENSIONES.159

recorrida por la esfera incidente cuando cae libremente sin golpear nada. Es decir que primero usted debe obtener esta velocidad, V_0 , dejando caer la esfera libremente y midiendo X_0 . Tenga en cuenta que debe asegurarse que la bola siempre inicie su recorrido en el mismo punto de la rampa.

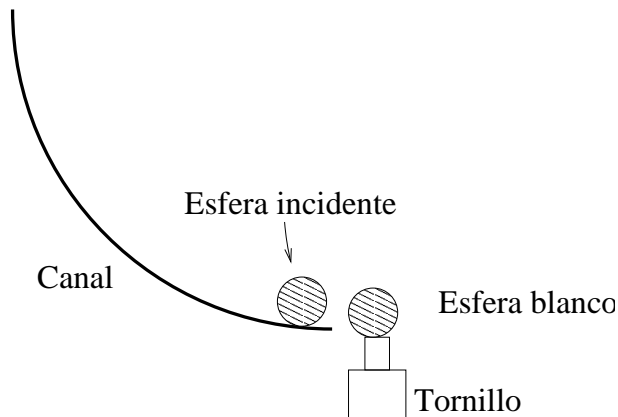
Llene la siguiente tabla:

h (cm)	X_0 (cm)	V_0 (cm/s)

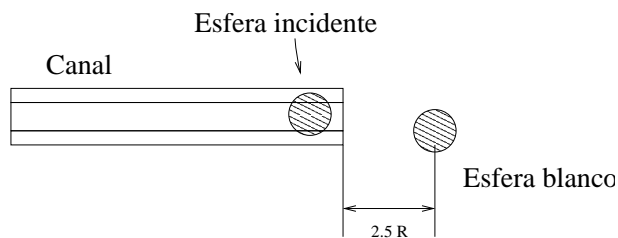
Choque de dos esferas de masas iguales

Disponga el tornillo base de la esfera de modo que se cumplan cuatro condiciones:

1. La altura a la que está la esfera blanco sea igual a la altura en que la esfera incidente abandona el canal, tal y como se muestra a continuación.



2. Disponga de tal manera las esferas para que se produzca un choque lateral, una vista superior del choque se muestra a continuación.



3. Haga que la distancia entre el eje del tornillo y el canal sea al menos 2.5 veces el radio de la esfera blanco con el fin de evitar perturbaciones por el rebote de la esfera incidente sobre el canal. Tal y como se muestra en la gráfica anterior.
4. Verifique que el tornillo quede lo suficientemente firme como para que el experimento se pueda repetir varias veces.

Para la colisión que estamos estudiando esperamos que se cumpla la conservación del momentum lineal, por lo tanto se deberá cumplir que

$$m\vec{V}_1 = m\vec{V}'_1 + m\vec{V}'_2 \quad (4.32)$$

En donde

\vec{V}_1 se determinó en la primera parte, y hace referencia a la velocidad de la esfera incidente antes de la colisión.

\vec{V}'_1 es la velocidad de la esfera incidente inmediatamente después del choque.

\vec{V}'_2 velocidad de la esfera blanco inmediatamente después de la colisión.

m es la masa de las esferas.

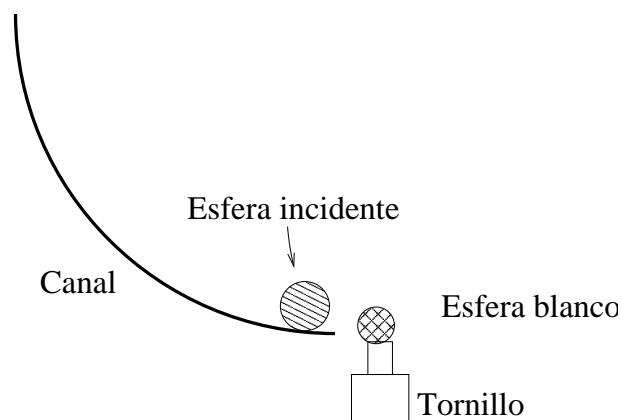
De la ecuación (4.32) Las velocidades \vec{V}'_1 y \vec{V}'_2 se determinan sobre el papel por la distancia del punto donde está la plomada hasta el punto de caída de las esferas. Es muy importante que usted note que lo que se conserva es el momentum lineal total del sistema, y que la velocidad es una cantidad vectorial, por lo que usted deberá realizar la suma vectorial de las velocidades.

Repita 5 veces el experimento, y haga a una escala reducida un diagrama en donde muestre las tres velocidades como vectores, indicando la magnitud y la dirección claramente, es decir, grafique \vec{V}_1 , \vec{V}'_1 y \vec{V}'_2 . responda:

1. ¿Qué diferencia porcentual existe entre las dos magnitudes?.
2. ¿Qué ángulo forman los dos vectores?.

Choque de dos esferas de masas diferentes

En este caso la esfera incidente es la misma esfera de la experiencia anterior, soltada desde el mismo punto, pero la esfera blanco posee una masa inferior m' .



Tome nuevamente las cuatro condiciones del experimento anterior y asegúrese que se cumplan rigurosamente.

Como ahora las masas son diferentes esperamos que la conservación del momentum lineal sea de la forma:

$$m\vec{V}_1 = m\vec{V}'_1 + m'\vec{V}'_2 \quad (4.33)$$

Dividiendo por m tenemos

$$\vec{V}_1 = \vec{V}'_1 + \left(\frac{m'}{m}\right) \vec{V}'_2 \quad (4.34)$$

La relación (4.34) es la que vamos a verificar. Ya sabemos como determinar las velocidades. Para determinar la razón (m'/m) es necesario pesar las esferas. Indique por lo tanto los valores de las dos masas m y m' .

Una vez realizadas las mediciones necesarias haga un dibujo a escala y examine la validez de la relación (4.34). Naturalmente no debe olvidarse que \vec{V}'_2 debe multiplicarse por el factor (m'/m) .

Repita los diagramas de la sección anterior y escriba sus conclusiones.

4.10. Resumen y glosario

1. La cantidad de momentum lineal es una cantidad vectorial que se define como, $\mathbf{P} = m\mathbf{v}$, en la cual m es la masa de la partícula y \mathbf{v} su velocidad.
2. Al momentum también se le conoce como cantidad de movimiento.
3. El plural de momentum **NO** es momentos, es *momenta*.

4. La segunda ley de Newton para una partícula se puede escribir de la forma $\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{p}}{dt}$, por lo tanto la fuerza es la razón de cambio del momentum lineal.
5. Para un sistema de partículas la cantidad de movimiento es igual a la suma vectorial de los momenta involucrados.
6. Las fuerzas que actúan sobre un sistema de partículas se puede dividir en dos, las fuerzas externas del sistema, y las fuerzas internas producidas por la interacción entre las partículas.
7. Las fuerzas internas no tienen incidencia en el momentum total del sistema. Cuando no hay fuerzas externas sobre un sistema el *momentum total se conserva*.
8. Cuando hay fuerzas externas diferentes de cero el momentum cambia con el tiempo.
9. La segunda ley de Newton para un sistema de partículas sujeta a una fuerza externa se puede escribir de la forma $\mathbf{F}_{ext} = m \frac{d\mathbf{p}}{dt}$, por lo tanto la fuerza externa es la razón de cambio del momentum lineal total.
10. La fuerza externa sobre un sistema es la suma vectorial de todas las fuerzas externas existentes.
11. La cantidad de movimiento total de un sistema puede representarse como su masa total multiplicada por la velocidad con la cual se mueve su **centro de masa**.
12. La cantidad de movimiento siempre se conserva en los procesos de colisión.
13. Existen fundamentalmente dos tipos principales de colisión, la completamente elástica, en la cual los objetos chocan y luego se separan sin cambiar su masa. Y la completamente inelastica, en la cual los objetos intercambian su masa. En la vida real las colisiones son una combinación de los dos tipos.
14. En las colisiones completamente elásticas hay conservación de una cantidad denominada energía cinética, la cual se estudiará en el siguiente capítulo.

15. El **impulso** de una fuerza \mathbf{F} que actúa en un intervalo de tiempo entre t_1 y t_2 se define como $\int_{t_1}^{t_2} F(t) dt$. Según el teorema del impulso y la cantidad de movimiento, esta cantidad debe ser igual al cambio en la cantidad de movimiento del cuerpo sobre el que actúa la fuerza durante ese lapso.
16. Cuando se aplica una fuerza durante un lapso de tiempo $t_1 \rightarrow t_2$, la fuerza media es igual a el impulso dividido entre el intervalo de tiempo.

4.11. Evaluación

1. Escriba las ecuaciones (4.26) y (4.27) cuando
 - a) Para un choque completamente inelástico.
 - b) Para un choque elástico.
 - c) Para $e = 1/2$.

¿Qué significan cada uno de los casos estudiados?.
2. Dos masas puntuales m y $2m$ tienen exactamente en mismo valor de momentum ¿por qué?.
3. Una esfera sólida de masa M gira con una velocidad angular ω , ¿cuál es el valor del momentum lineal de la esfera?.
4. Suponga que usted corre a una velocidad de 13 km/h, calcule la cantidad de movimiento que usted posee y compárela con la cantidad de movimiento de otros compañeros.
5. Dos objetos chocan en el aire. ¿Se conservan las cantidades de momentum en todos los ejes?.
6. ¿Es cierto que las fuerzas internas no afectan la velocidad del centro de masa de un sistema?.
7. Un carro que pesa 2250 Newtons y que se mueve a una velocidad constante de 60 Km/h:
 - a) Determine su cantidad de momentum.

- b) Determine la velocidad a la cual deberá moverse un carro que solo pese 1350 N para tener el mismo valor de momentum.
 - c) Calcule la energía cinética en los dos caso. Recuerde que $E_c = \frac{1}{2}mv^2$.
8. Un hombre conduce un automóvil a 12/s golpea directamente a la parte trasera del auto de una mujer que esta esperando que el semáforo cambie a verde para poder avanzar. El auto pequeño es empujado con una velocidad de 12 m/s y el auto grande sigue detrás con una velocidad v . La masa total del auto del hombre es tres veces mayor que la masa del auto de la mujer y su conductora..
- ¿Es el choque completamente elástico o inelástico?.
 - Halle la velocidad v del auto del hombre inmediatamente después de la colisión.
 - ¿Se conserva la energía cinética?.
 - Calcule la energía cinética de los dos carros antes y después de la colisión, suponiendo que el carro grande es de masa 2700 N.

4.12. Información de retorno

A continuación encontrará respuestas a las preguntas y ejercicios planteados en la parte inicial, evaluación de conceptos previos, y final del capítulo, evaluación. Las respuestas pueden ser ampliadas por usted y la solución a los ejercicios no es única. Se busca que usted amplíe la respuesta, la mejore y encuentre otros métodos de solución a los ejercicios.

Conceptos previos

- ¿Qué es una ley de conservación?.

Una ley de conservación es una regla general de la naturaleza que se cumple siempre, y es inviolable, por ello se le dice ley conservación. La más conocida es la de la conservación de la energía.

- ¿Qué es centro de masa?.

Es un lugar geométrico en el cual podemos modelar el movimiento de un cuerpo como si toda la masa se encontrara concentrada allí. Un

aspecto importante del centro de masa es que los cuerpos que rotan lo hacen por un eje que pasa por su centro de masa.

- Cuando lanzo una bola al aire el movimiento es de tipo parabólico, ¿cómo es el movimiento de un bastón cuando lo mando al aire?.

El movimiento de un baston es muy complejo para ser descrito de una manera perfecta, sin embargo podemos describir el movimiento del centro de masa del bastón, que es igual a el movimiento parabólico de la pelota.

- ¿Que es un impulso?.

El impulso es igual al cambio en la cantidad de movimiento de un cuerpo sobre el cual actúa una fuerza durante un tiempo determinado

Evaluación

1. Escriba las ecuaciones (4.26) y (4.27) en los siguientes casos:

- a) Para un choque completamente inelástico.

En este caso el coeficiente $e=0$.

$$\begin{aligned} v1_f &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}v1_0 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}v2_0 \\ &= \frac{m_1v1_0 + m_2v1_0}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} v2_f &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}v1_0 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}v2_0 \\ &= \frac{m_1v1_0 + m_2v1_0}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

- b) Para un choque completamente elástico.

En este caso $e=1$.

$$v1_f = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2}v1_0 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v2_0$$

y

$$v2_f = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v1_0 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v2_0$$

c) Para $e = 1/2$.

$$v1_f = \frac{m_1 + \frac{1}{2}m_2}{m_1 + m_2}v1_0 + \frac{\frac{3}{2}m_2}{m_1 + m_2}v2_0$$

y

$$v2_f = \frac{\frac{3}{2}m_1}{m_1 + m_2}v1_0 + \frac{m_2 - \frac{1}{2}m_1}{m_1 + m_2}v2_0$$

¿Qué significan cada uno de los casos estudiados?.

2. Dos masas puntuales m y $2m$ tienen exactamente en mismo valor de momentum ¿por qué?.

Por que su velocidad es la misma, es decir su rapidez, dirección y sentido.

3. Una esfera sólida de masa M gira con una velocidad angular ω , ¿cuál es el valor del momentum lineal de la esfera?. *Es cero ya que no hay momentum lineal al no existir translación a lo largo de una recta. Formalmente el tipo de momentum que tiene es momentum angular, pero esto lo veremos en otro capítulo.*

4. Suponga que usted corre a una velocidad de 13 km/h, calcule la cantidad de movimiento que usted posee y compárela con la cantidad de movimiento de otros compañeros.

Este ejercicio deberá poder realizarlo una vez que halla medido la masa que usted posee, y la de sus compañeros.

5. Dos objetos chocan en el aire. ¿Se conservan las cantidades de momentum en todos los ejes?.

El momentum lineal total del sistema se conserva, antes y despues del choque.

6. ¿Es cierto que las fuerzas internas no afectan la velocidad del centro de masa de un sistema?.

Es cierto, ya que para un sistema aislado el momentum lineal se conserva independiente de las fuerzas internas.

7. Un carro que pesa 2250 Newtons y que se mueve a una velocidad constante de 60 Km/h:

- a) Determine su cantidad de momentum.

Para determinar el momentum necesitamos saber $P = mv$, la cantidad de masa estará dada por $m = \frac{2250 \text{ N}}{10 \text{ (m/s}^2\text{)}} = 225 \text{ kg}$, ahora debemos pasar la velocidad a metros por segundo.

$$v = 60 \frac{1000}{3600} = 16,6 \text{ m/s}$$

De esta forma $P = 3750 \text{ kg m/s}$

- b) Determine la velocidad a la cual deberá moverse un carro que solo pese 1350 N para tener el mismo valor de momentum.

Para ello tenemos que hacer $v = \frac{P}{m} = \frac{3750}{135} = 27,7 \text{ m/s}$

- c) Calcule la energía cinética en los dos caso. Recuerde que $E_c = \frac{1}{2}mv^2$.

So debe remplazar en la ecuación, lo importante es que compare las energías cinéticas de los dos cuerpos, y explique el por qué son iguales o diferentes.

8. Un hombre conduce un automóvil a 12/s golpea directamente a la parte trasera del auto de una mujer que esta esperando que el semáforo cambie a verde para poder avanzar. El auto pequeño es empujado con una velocidad de 12 m/s y el auto grande sigue detrás con una velocidad v . La masa total del auto del hombre es tres veces mayor que la masa del auto de la mujer y su conductora..

- ¿Es el choque completamente elástico o inelástico?.

El choque es completamente elástico.

- Halle la velocidad v del auto del hombre inmediatamente después de la colisión.

La velocidad es 8 m/s.

- ¿Se conserva la energía cinética?.

Sí, la energía siempre se conserva en choques completamente elásticos.

- Calcule la energía cinética de los dos carros antes y después de la colisión, suponiendo que el carro grande es de masa 2700 N.

Palabras claves para búsqueda en Internet

A continuación se presentará una serie de palabras útiles para la búsqueda en Internet, las palabras se han probado en el buscador

<http://www.google.com>

no tienen ortografía dado que el buscador es universal, y en por que en ocasiones va a tener que utilizar teclados que no tienen tildes o eñes.

momentum lineal, experimentos fisica, centro de masa, conservacion del momentum.

Bibliografía recomendada:

Se puede consultar al final del texto, el número que encuentra al final de la referencia es el número correspondiente al texto en la bibliografía final.

- Formulas y tablas matemáticas en general [1].
- Mediciones y experimentos en transferencia de momentum [2, 13].
- Momentum [7, 8, 14, 19, 20, 21, 10].
- Conversión de unidades [18].

Capítulo 5

Leyes de conservación II: Trabajo y energía

5.1. introducción

¿Podemos predecir el comportamiento de un sistema si conocemos las interacciones que ocurren en él?. En la sección anterior vimos como en objetos o sistemas complejos podemos predecir el movimiento del centro de masa, siempre teniendo en claro que las fuerzas externas del sistema son nulas. Ahora nuestro interés se centrará en dos conceptos muy importantes el **trabajo** y la **energía**.

Cuando conocemos las fuerzas que actúan sobre un sistema utilizamos la segunda ley de Newton para hallar su aceleración, y a partir de allí podemos deducir su velocidad y su posición, con la inclusión de las condiciones iniciales de velocidad y posición. El anterior procedimiento se hace por medio de la integración, lo complicado es que debemos conocer las fuerzas que actúan como función del tiempo. Algunas fuerzas que conocemos son función en realidad del espacio, por ejemplo la fuerza de un resorte o la fuerza gravitatoria. De esta forma el usar la segunda ley de Newton no es tan simple como se piensa, ya que en general los físicos están interesados en el estudio de interacciones que varían con la posición, y no necesariamente que varían con el tiempo.

Para un sistema cuya masa es constante la primera segunda ley de Newton lleva a una ecuación de movimiento de la forma,

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad (5.1)$$

De la anterior ecuación podemos decir que

- $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ es una función conocida de la posición.
- El problema puede ser solucionado si conocemos la evolución temporal del vector velocidad \mathbf{v} .

La solución de la ecuación anterior es fácil en una dimensión, en mas de una dimensión esta solución es mas compleja, sin embargo nos va a permitir estudiar la relación de *trabajo-energía* en física.

La energía es una palabra que se menciona mucho en nuestra sociedad, pero su verdadero valor e importancia se ve en la física, en donde es muy útil en la solución de múltiples problemas en sistemas. En el capítulo anterior se hizo mención a la energía cinética, en este capítulo se le dará una explicación formal, y se mostraran otros tipos de energía.

5.2. Evaluación de conocimientos previos

- Cuando corremos y llegamos agotados decimos que hemos gastado mucha energía, ¿por qué?.
- ¿Donde ha escuchado el termino potencia?.
- ¿Por qué los mecánicos dicen que un auto tiene una gran potencia?
- ¿Qué conoce usted como trabajo?.

5.3. Solución de la ecuación $m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ en una dimensión

Una gran cantidad de problemas pueden ser reducidos a un movimiento en una sola dimensión, en donde solo necesitamos una variable para describir este movimiento. El oscilador armónico unidimensional es un muy buen ejemplo de esto. Al tener este tipo de problemas la ecuacion de movimiento se reduce a

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$$

ó

$$m \frac{dv}{dt} = F(x). \quad (5.2)$$

La ecuación (5.2) puede ser resuelta fácilmente por medio de un truco matemático. Primero integraremos formalmente esta ecuación con respecto a x , desde el punto x_a hasta el punto x_b ,

$$m \int_{x_a}^{x_b} \frac{dv}{dt} dx = \int_{x_a}^{x_b} F(x) dx.$$

La integral de la derecha puede ser evaluada, ya que conocemos la forma funcional de la fuerza con respecto a la distancia, por ejemplo en el caso del resorte tenemos $F(x) = -kx$, y en el caso de la atracción gravitatoria unidimensional tenemos $F(x) = \frac{Gm_1m_2}{x^2}$. Sin embargo la ecuación de la izquierda parece intratable, pero podemos cambiar de variable de x a t , mediante un truco conocido en cálculo como regla de la cadena y cambio de variable.

$$\begin{aligned} dx &= \left(\frac{dx}{dt} \right) dt \\ &= v dt. \end{aligned}$$

De esta forma la ecuación (5.2) toma la forma,

$$\begin{aligned} m \int_{x_a}^{x_b} \frac{dv}{dt} dx &= m \int_{x_a}^{x_b} \frac{dv}{dt} v dt \\ &= m \int_{x_a}^{x_b} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m v^2 \Big|_{t_a}^{t_b} \\ &= \frac{1}{2} m v_b^2 - \frac{1}{2} m v_a^2. \end{aligned}$$

En donde $x_a \equiv x(t_a)$, $x_b \equiv x(t_b)$, $v_a \equiv v(t_a)$, $v_b \equiv v(t_b)$. Es decir las posiciones en los tiempos t_a y t_b , y sus respectivas velocidades en los mismos tiempos.

El resultado final es de la forma,

$$\frac{1}{2} m v_b^2 - \frac{1}{2} m v_a^2 = \int_{x_a}^{x_b} F(x) dx. \quad (5.3)$$

Y colocando el limite $x_b = x$, es decir como indefinido, o que puede tomar cualquier valor, obtenemos en general

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = \int_{x_a}^x F(x)dx.} \quad (5.4)$$

En la ecuación (5.4) nos da información de como la velocidad v varía con la distancia x . Si hacemos $v = \frac{dx}{dt}$ podemos resolver la ecuación anterior integrando con respecto y encontrar $x(t)$. Vamos a estudiar lo anterior por medio de un ejemplo.

Ejemplo 25 Lanzamiento de una masa hacia arriba en un campo gravitatorio

Vamos a suponer que lanzamos una masa m verticalmente hacia arriba, y vamos a despreciar los demás ejes en los cuales el movimiento es a velocidad constante. ¿Cual es la altura máxima a la cual puede llegar la masa despreciando la fricción del aire?.

Para comenzar vamos a tomar el eje vertical como el eje z , la aceleración de la gravedad será negativa por lo cual la fuerza se puede expresar de la forma,

$$F = -mg. \quad (5.5)$$

La ecuación (5.4) toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 &= \int_{z_1}^{z_2} F dz \\ &= -mg \int_{z_1}^{z_2} dz \\ &= -mg(z_2 - z_1). \end{aligned} \quad (5.6)$$

La altura máxima se alcanza cuando la velocidad final sea igual a cero, es decir $v_2 = 0$, de esta forma al despejar z_1 de la ecuación (5.6)

$$\boxed{z_2 = z_1 + \frac{v_1^2}{2g}.} \quad (5.7)$$

La ecuación (5.7) nos da información de la altura máxima que alcanza un cuerpo, libre de la fricción del aire, que es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_1 y una posición inicial z_1 . Es interesante que la solución no hace referencia al tiempo, es decir que para averiguar la altura máxima alcanzada no necesitamos saber el tiempo de vuelo.

5.4. El trabajo y la energía

De la ecuación (5.7) vamos a describir los términos involucrados en ella:

- A la cantidad $\frac{1}{2}mv^2$ es llamada **energía cinética**, y se suele notar con la letra K . De manera que el término

$$\frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = K_b - K_a$$

- A la cantidad $\int_{x_a}^{x_b} F(x)dx$ se le denomina **trabajo** realizado por la fuerza $F(a)$ al desplazar un objeto desde el punto a hasta el punto b , y se denota como W_{ba} . De manera que

$$\boxed{W_{ba} = K_b - K_a} \quad (5.8)$$

- **El trabajo realizado por una fuerza al desplazar un sistema es igual al cambio en la energía cinética del sistema.**

La ecuación (5.8) es conocida como el teorema de trabajo y energía en una dimensión. Este puede ser ampliado a mas de una dimensión al generalizar la ecuación de la forma

$$\boxed{\int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2} \quad (5.9)$$

En donde la multiplicación de escalares $F(x)dx$ se ha substituido por una multiplicación mas general por medio del producto punto $\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ entre dos funciones vectoriales. Esta es llamada la integral de linea. Esta es una generalización del caso en una dimensión, en donde la velocidad al cuadrado es de la foma

$$v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2. \quad (5.10)$$

La energía es una cantidad escalar, es decir que es un numero real. Las unidades de la energía en el sistema internacional es llamada **joule** y se nota con la letra j . En el sistema internacional las unidades del joule son

$$1J = 1kg \cdot m^2/s^2. \quad (5.11)$$

En el sistema *cgs* la unidad de energía es el *ergio*

$$1erg = 1gm \cdot cm^2/s^2. \quad (5.12)$$

James Clerk Maxwell definía el trabajo como **el acto de producir un cambio en la configuración de un sistema, venciendo las fuerzas que se oponen a dicho cambio**. La persona, animal o máquina que ejerza un trabajo sobre un cuerpo debe aplicar una fuerza y mover el objeto. La fuerza no necesariamente es constante, lo importante es que la fuerza debe aplicarse en la dirección de desplazamiento.

Del teorema de trabajo y energía vemos que el trabajo produce un cambio en la energía cinética, además que un trabajo es producido por una fuerza que mueve un objeto a lo largo de un camino. Por lo tanto cuando un objeto se mueve de forma acelerada sobre el actúa una fuerza, y por el movimiento se puede afirmar que se está realizando un trabajo y se está realizando un cambio en la energía cinética. Es realmente impresionante como se puede extraer tanta información con solo determinar si un cuerpo se mueve con aceleración.

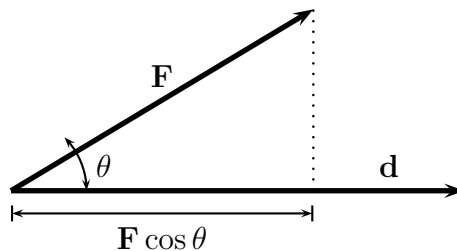
Algo también importante para anotar es que lo que nos importa es el cambio en la energía, no el valor mismo de la energía en un punto. Cuando medimos el trabajo realizado por una fuerza estamos midiendo el cambio en la energía y no la energía misma.

5.5. Trabajo debido a una fuerza constante

El trabajo que es realizado sobre un cuerpo por una fuerza constante \mathbf{F} al ser desplazado una distancia \mathbf{r} se puede definir como,

$$\boxed{W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = F r \cos(\theta)}. \quad (5.13)$$

En donde $\cos(\theta)$ es el coseno del ángulo que forman los vectores fuerza y desplazamiento. Como se muestra en el siguiente dibujo.



En una dimensión el vector \mathbf{r} se puede reemplazar por la distancia d , y de esta forma en una dimensión el trabajo realizado es de la forma,

$$\boxed{W = F \cdot d}. \quad (5.14)$$

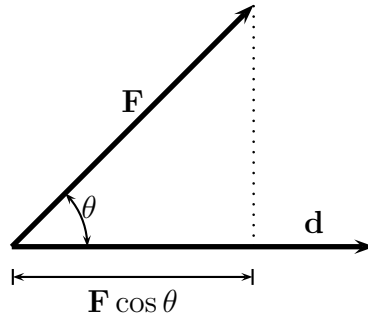
EL trabajo es una cantidad escalar, es decir que solo posee magnitud, pero no hace referencia a ninguna dirección o sentido.

Ejemplo 26 : Trabajo sobre un bloque que es arrastrado.

EL trabajo que se realiza por una fuerza constante \mathbf{F} a lo largo de una línea recta una distancia \mathbf{d} , se define como

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} \quad (5.15)$$

Como ya vimos $\mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$ es el producto punto entre dos vectores, la fuerza \mathbf{F} y el desplazamiento \mathbf{d} ¹, de las propiedades del producto punto tenemos que el trabajo es igual a la multiplicación de la magnitud de los vectores por el coseno del ángulo que forman los dos vectores. Como se observa en la siguiente figura,



De esta forma el trabajo puede ser expresado como

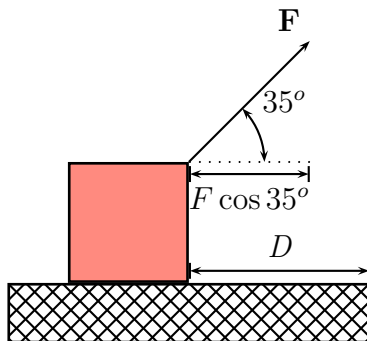
$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = d(F \cos \theta) \quad (5.16)$$

La única parte que efectúa un trabajo de la fuerza es la que se proyecta sobre la dirección del movimiento. De la ecuación (5.16) también se puede ver que cuando el ángulo entre la fuerza y la dirección de movimiento es de 90° entonces no se efectúa trabajo, y por lo tanto no hay cambio en la energía cinética.

¹Hemos cambiado la notación para el desplazamiento, antes utilizábamos \mathbf{r} , sin embargo ahora usamos \mathbf{d} para notar el desplazamiento total.

Ejemplo 27 : Movimiento de un bloque.

Un hombre tira de un bloque de madera de masa m sobre el suelo a velocidad constante, el hombre tira por medio de una cuerda que forma un ángulo de 35° con el plano horizontal y desplaza el bloque una distancia D . Realice el análisis del movimiento.



EL trabajo que hace el hombre sobre la masa es de

$$W_{\text{hombre}} = Fd \cos 35^\circ$$

Y es positivo, por que todas las cantidades involucradas son positivas.

Como el bloque se mueve a velocidad constante entonces la aceleración sobre el bloque será cero. Esto significa que la fuerza total sobre el bloque es cero, por lo tanto deberá existir una fuerza que contrarreste la fuerza realizada por el hombre, esta es la fuerza de fricción producida por el contacto entre el suelo y el bloque.

La magnitud de la fuerza de fricción es de

$$W_{\text{fricción}} = -Fd \cos 35^\circ.$$

De forma que el trabajo neto será igual a cero, ya que

$$\begin{aligned} W_{\text{total}} &= W_{\text{hombre}} + W_{\text{fricción}} \\ &= Fd \cos 35^\circ - Fd \cos 35^\circ \\ &= 0. \end{aligned}$$

Es muy importante anotar lo siguiente: **Cuando un cuerpo se mueve a velocidad constante, por ejemplo en el espacio exterior, sobre él no se efectúa trabajo, ya que no hay una aceleración ni una fuerza de fricción que mueva el bloque.**

5.6. Potencia

El termino potencia se utiliza para expresar la rapidez con la cual se efectuó un trabajo. En consecuencia a una cantidad de trabajo dado el cual se efectúa en un intervalo de tiempo muy largo le correspondería una potencia baja. La potencia la podemos definir como

$$P(t) = \frac{\frac{\text{Trabajo infinitesimal}}{\text{realizado}}}{\frac{\text{tiempo infinitesimal}}{\text{en el que se hace}}} \quad (5.17)$$

La razón de cambio del trabajo con respecto al tiempo se denomina **potencia**. La potencia nos indica con que rapidez se está realizando un trabajo. En el caso de un carro de carreras esta cantidad es la mas importante, por que indica que tan rápido puede el motor desplazar la masa del mismo carro.

Matemáticamente la potencia se define como,

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (5.18)$$

Si la rapidez con la cual cambia el trabajo realizado es uniforme en el tiempo, entonces podemos escribir la potencia como,

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad (5.19)$$

¿Que significa una gran potencia?, significa que puede efectuarse una mayor cantidad de trabajo en una menor cantidad de tiempo. En un auto de carreras lo importante es que la fuerza del motor mueva el auto una distancia mayor, en una cantidad de tiempo menor, de esta forma el auto puede ganar una carrera. Un gran trabajo significa ó un mayor desplazamiento ó una mayor fuerza, pero el efecto neto total final será mover el auto de forma acelerada una distancia mayor.

La unidad de potencia en el sistema internacional se denomina **watt**, y se denota con la letra W . Un watt es equivalente a mover una masa de 1 kilogramo una distancia de un metro a una aceleración de $1m/s^2$ durante un segundo.

$$1 \text{ watt} = \frac{1kg \times m^2/s^2}{s} = \frac{1kg \times m^2}{s^3} \quad (5.20)$$

Ejemplo 28 *Un hombre de 60 kg salta 50 cm para alcanzar una manzana de un árbol. El consumo de energía que el hombre realizó se puede determinar calculando el trabajo realizado al alcanzar la manzana. La fuerza media empleada es igual a su propio peso, de esta forma el trabajo neto es*

$$F = mg = 60(\text{kg}) \times 9,8(\text{m/s}^2) \times 0,5\text{m} = 294\text{J}.$$

Si el salto dura aproximadamente 0.6 segundos, la altura máxima la alcanza en la mitad de ese tiempo, es decir 0.3 segundos. La potencia media desarrollada es

$$P = \frac{W}{t} = \frac{294\text{J}}{0,3\text{s}} = 980\text{W}.$$

Ejemplo 29 *Se utiliza un motor para subir carga desde el suelo hasta la cima de un edificio a 30 metros del suelo, la potencia del motor es de 1 kW = 1000 W.*

a) *¿En cuanto tiempo sube una carga de 50 kg?*

$$\begin{aligned} P = \frac{W}{t} \quad \rightarrow \quad t &= \frac{W}{P} = \frac{mgh}{P} \\ t &= \frac{50\text{kg} \times 9,8\text{m/s}^2 \times 30\text{m}}{1000\text{J/s}} = 14,7\text{s}. \end{aligned} \tag{5.21}$$

b) *¿Qué carga puede subir en 5 segundos?*

$$\begin{aligned} P = \frac{W}{t} \quad \rightarrow \quad m &= \frac{Pt}{gh} \\ m &= \frac{1000\text{J/s} \times 5\text{s}}{9,8\text{m/s}^2 \times 30\text{m}} \approx 17\text{kg} \end{aligned} \tag{5.22}$$

De la ecuación (5.21) se puede ver que el tiempo empleado en subir una masa es inversamente proporcional a la potencia, es decir a mayor potencia menor será el tiempo utilizado en subir un objeto. De la ecuación (5.22) se observa que la masa que puede subir en una cantidad determinada de tiempo es directamente proporcional a la potencia, por lo tanto para subir una masa mayor durante el mismo tiempo necesitamos mas potencia.

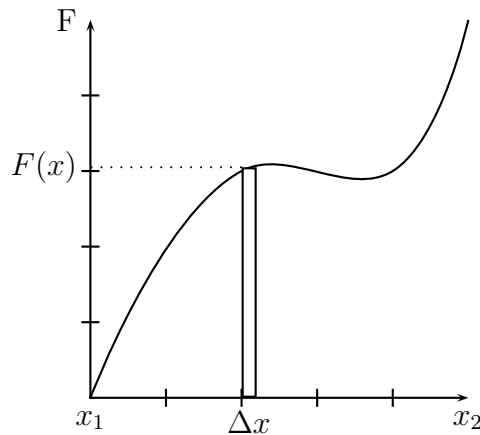
Si la fuerza que se realiza sobre una carga determinada es constante, la potencia que se desarrolla para subir la carga es,

$$\boxed{P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot d}{t} = F \cdot v} \quad (5.23)$$

Generalmente la potencia en un motor es constante, por lo cual la velocidad con la cual se desplaza una carga es inversamente proporcional a su peso.

5.7. Trabajo debido a una fuerza variable

No necesariamente una fuerza es constante a lo largo de una trayectoria, esta puede variar con el tiempo o con la distancia. Vamos a estudiar que le sucede a una fuerza que varía con la distancia, como la que se muestra en la siguiente figura.



Podemos subdividir el intervalo recorrido en pequeños tramos de longitud δx , de esta forma el valor del trabajo en ese pequeño tramo es

$$\Delta W = F(x) \Delta x$$

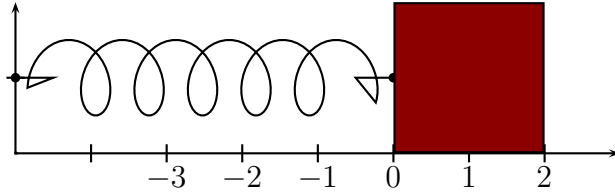
Cuando los tramos son tan pequeños que podemos hacer tratamiento de diferenciales, el trabajo se convierte en una integral, y el trabajo total será de la forma,

$$\boxed{W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx} \quad (5.24)$$

El trabajo es el área bajo la curva de la gráfica de Fuerza contra desplazamiento.

Ejemplo 30 : Trabajo realizado por un resorte.

Un resorte es un objeto que ejerce una fuerza sobre una masa la cual es proporcional a la distancia. A mayor longitud de elongación del resorte mayor será la fuerza de el resorte en dirección contraria a la del movimiento.



La ley de Hooke determina que la ecuación que describe la fuerza ejercida por un resorte es de la forma,

$$\boxed{F(x) = -kx,} \quad (5.25)$$

en donde

- k es la constante de proporcionalidad del resorte, la cual determina como cambia la fuerza con relación a la distancia.
- x es la distancia recorrida a partir de su posición de equilibrio, en $x=0$ la fuerza ejercida por el resorte es cero.
- El signo menos en la ecuación (5.25) se refiere a que la fuerza se opone a la dirección del movimiento.

El trabajo que realiza esta fuerza en desplazarse del punto x_1 al punto x_2 se puede calcular utilizando la ecuación (5.24),

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} -kx dx \\ &= -k \int_{x_1}^{x_2} x dx \\ &= \frac{k}{2}(x_1^2 - x_2^2) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Al termino $\boxed{\frac{1}{2}kx^2}$ se le denomina **energía potencial de un resorte** .

El termino $\frac{k}{2}(x_1^2 - x_2^2)$ de la ultima ecuación corresponde a la diferencia de energía potencial al desplazar un resorte desde x_1 hasta x_2 . Es muy importante recordar que el interes en toda medición de energía es la diferencia de energía, nunca podemos medir el valor absoluto de la energía, sino sus diferencias con respecto a un punto de referencia.

5.8. La energía y sus transformaciones

¿Que es lo que se consume cuando se realiza un trabajo?, ya hemos visto que lo que se gasta al realizar un trabajo es la energía. La energía sufre transformaciones que hacen posible la realización de un trabajo. Al comer diariamente estamos transformando la energía de los alimentos en diversas formas de energía como calor y movimiento. El calor será estudiado en un capítulo posterior, por ser una forma importante de energía con características bien diferentes. El movimiento se expresa en trabajo, realizado por la acción de una fuerza.

En general se afirma que la energía no se crea ni se destruye, solamente se transforma. Este concepto tiene hondas repercusiones en los sistemas, no podemos extraer energía eléctrica de una pila por un tiempo infinito, de la misma forma en que no podemos hacer ejercicio durante horas sin reponer por medio de líquidos y alimento la energía que hemos transformado en trabajo y calor. La existencia de la vida depende fuertemente de la existencia de un gran deposito de energía como el sol, este mediante radiación electromagnética, luz y calor entre otras, mantiene a la vida en un ciclo de continuas transformaciones de energía.

La energía contenida en un determinado combustible (energía química) se transforma en movimiento (energía cinética), en calor (energía térmica) y en electricidad (energía eléctrica). En palabras del genial J. C. Maxwell *el trabajo es la transferencia de energía de un sistema a otro*.

La energía del universo es una constante, y lo que a diario se limita es la capacidad de transformación de una forma específica de energía en trabajo. Al agotar recursos hídricos ya no podemos transformar la energía cinética del agua en movimiento en energía eléctrica.

Algunas de las formas mas importantes de energía son: electromagnética, presente en las ondas de luz y las ondas de radio; química, presente en

combustibles fósiles como el petróleo; térmica, presente en procesos de combustión como la quema de carbón y petróleo; mecánica, presente en el movimiento en general de algún sistema; eléctrica, de uso muy común actualmente; nuclear, utiliza la energía que mantiene unido al núcleo atómico para la realización de un trabajo, países como Brasil poseen plantas termonucleares, es decir que convierten la energía nuclear en energía térmica y esta a su vez en energía mecánica por medio de vapor, para la generación de electricidad.

5.9. Energía mecánica

Desde el punto de vista de la mecánica existen dos formas principales de energía, la **cinética** y la **potencial**.

5.9.1. Energía cinética

La energía cinética es la energía que tiene un cuerpo cuando se encuentra en movimiento, tiene como expresión general

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2. \quad (5.27)$$

De la ecuación (5.27) podemos decir,

1. La energía cinética es proporcional a la velocidad al cuadrado, esto implica que aumentar la velocidad el doble tiene como efecto aumentar cuatro veces la energía cinética de un cuerpo. A velocidad cero la energía cinética es igual a cero.
2. La energía cinética es proporcional a la masa, lo que implica que un cuerpo que tenga mayor masa tendrá mayor energía cinética a la misma velocidad. Para la mecánica un objeto que no posea masa no puede tener energía mecánica.

Ya habíamos visto que el trabajo es igual al cambio en la energía cinética de un cuerpo, este es el teorema de trabajo y energía.

$$W = F \cdot d = \frac{1}{2}mv_{final}^2 - \frac{1}{2}mv_{inicial}^2 = \Delta E_c \quad (5.28)$$

Ejemplo 31 : Energía cinética de una atleta. Un atleta de 70 kg recorre los 100 metros planos en un tiempo de 10 segundos, al final tiene una velocidad promedio de

$$v = \frac{d}{t} = \frac{100m}{10s} = 10m/s.$$

De esta manera su energía cinética es,

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}70kg \times \left(10\frac{m}{s}\right)^2 = 3500 \text{ joules}$$

Si suponemos que el atleta tarda 4 segundos en adquirir desde la arrancada la velocidad de 10m/s, entonces la potencia desarrollada a lo largo de este tiempo es de

$$P = \frac{\Delta E_c}{\Delta t} = \frac{E_f - E_i}{4s} = \frac{3500J}{4s} = 875W = 1,17Hp.$$

Ahora vamos a comparar la anterior situación con la siguiente, una bala de 5 gramos es disparada con una velocidad de 500 m/s, y demora en alcanzar esta velocidad 0.1 segundo. Su energía cinética es

$$E_c = \frac{1}{2}5 \times 10^3kg (500m/s)^2 = 625J.$$

Y su potencia será

$$P = \frac{625J}{0,1s} = 6250W.$$

Nótese que a pesar de que la energía cinética es mayor para el caso del atleta, la potencia de la bala es mucho mayor, esto debido a que la bala alcanza su velocidad muy rápido debido al efecto de la pólvora.

5.9.2. Energía potencial

La energía potencial es aquella que guardan los sistemas, y es muy importante por que esta energía permite caracterizar un sistema físico de manera muy precisa. La energía potencial se transforma en energía cinética, y por medio del teorema de conservación de la energía obtenemos,

$$\boxed{\text{Energía total} = \text{Energía cinética} + \text{Energía potencial}} \quad (5.29)$$

La ecuación (5.29) es muy útil en la solución de problemas de la vida diaria, y es conocida como el teorema de conservación de la energía, el cual puede enunciarse de la siguiente forma:

La energía total de un sistema aislado se mantiene constante.

Note la palabra *aislado*, la cual ha sido utilizada a lo largo del texto para describir sistemas que no tienen contacto con el mundo exterior.

Las ecuaciones (5.28), teorema de trabajo y energía, y (5.29) conservación de la energía, son dos herramientas muy poderosas en la solución de problemas técnicos. Y serán usadas ampliamente a lo largo de su vida profesional.

Como ya hemos dicho la energía potencial caracteriza un sistema de manera única, y determina el comportamiento dinámico de los mismos. La energía potencial gravitatoria describe la fuerza de gravedad para objetos que posean masa. El potencial eléctrico y el potencial nuclear hacen lo mismo en partículas cargadas y en núcleos atómicos.

En el ejemplo del resorte estudiamos la energía potencial del resorte, la cual está dada por,

$$E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2 \quad (5.30)$$

y se denomina **energía potencial elástica**, para una ampliación de este tema puede ver al ejemplo 31.

Es corriente utilizar la letra U cuando se hace referencia a la energía potencial.

En general la energía potencial cumple una relación con la fuerza muy importante, para una fuerza ejercida entre los puntos x_1 y x_2 , el cambio en la energía potencial

$$U(x_1) - U(x_2) = - \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx \quad (5.31)$$

Y por medio de un teorema de calculo integral también se cumple que,

$$F(x) = - \frac{dU}{dx}. \quad (5.32)$$

Conocer la forma funcional de una fuerza implica conocer su energía potencial, de la misma forma conocer la forma funcional de la energía potencial con la distancia implica conocer la forma funcional de la fuerza.

Ejemplo 32 : Energía potencial gravitatoria.

Vamos a tratar el ejemplo del campo gravitatorio cerca de la superficie de la tierra, en donde la fuerza de la gravedad posee una aceleración constante. Para una partícula de masa m , la fuerza debida a un campo gravitatorio uniforme es de la forma

$$\mathbf{F} = -mg\hat{\mathbf{k}} \quad (5.33)$$

En donde m es la masa de la partícula, g es la aceleración debida a la gravedad que puede tomarse como $9,8\text{m/s}^2$ en la tierra, el signo $\hat{\mathbf{k}}$ indica que la fuerza es un vector con una dirección a lo largo del eje Z , y el signo negativo nos indica que la fuerza va dirigida hacia abajo, la partícula es atraída por la tierra.

Podemos trabajar en una sola dimensión, ya que el trabajo solo es realizado por el movimiento a lo largo del eje Z , de esta manera la fuerza es de la forma $F = mg$, el cambio en la energía potencial por mover la partícula desde un punto z_a hasta un punto z_b es de la forma

$$\begin{aligned} U_b - U_a &= - \int_{z_a}^{z_b} (-mg)dz \\ &= mg(z_b - z_a) \\ &= mgh. \end{aligned}$$

A la cantidad $(z_b - z_a)$ le denominamos generalmente h , haciendo referencia a la palabra en ingles *height* que significa altura. Por lo tanto la energía potencial en el campo gravitatorio es,

$$\boxed{U = mgh + C} \quad (5.34)$$

en donde C es una constante que depende del sistema de referencia elegido, y puede ser igual a cero. Por ejemplo si lo que deseamos es estudiar la caída libre de un objeto hasta el suelo, podemos tomar como referencia el suelo, y tomar como energía potencial inicial la de la altura inicial del objeto.

Ejemplo 33 : Velocidad de un objeto lanzado verticalmente.

Supongamos que lanzamos un objeto de masa m verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial de $\mathbf{v} = v_0\mathbf{k}$, es decir que solo hay componente en la dirección Z . ¿Cuál es la velocidad del objeto al alcanzar una altura h ?

Para ello utilizamos la conservación de la energía, la energía cinética inicial la notaremos como K_0 y es

$$K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Vamos a tomar como el origen de coordenadas el suelo, de esta forma la energía potencial inicial U_0 es para $y=0$,

$$U_0 = mgz = 0.$$

De esta forma la energía total inicial E_0 es,

$$E_0 = K_0 + U_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Esta energía debe ser igual en toda la trayectoria de objeto, y al subir el objeto va adquiriendo energía potencial, la energía total para cada punto en z es,

$$E = \frac{1}{2}mv_z^2 + mgz$$

Hemos notado v_z como la velocidad del cuerpo a una altura z .

En un punto de altura $z = h$ la energía inicial es igual a la energía en este punto, de manera que,

$$\begin{aligned} E_0 &= E_h \\ \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}mv_h^2 + mgh \end{aligned}$$

De la anterior ecuación podemos despejar v_h que es la velocidad que nos interesa,

$$\boxed{v_h = \sqrt{v_0^2 - 2gh.}} \quad (5.35)$$

Ejemplo 34 : Energía potencial para fuerzas proporcionales a $\frac{1}{r^2}$.

Un ejemplo de una fuerza proporcional a $\frac{1}{r^2}$ es la gravedad, la cual tiene la forma de,

$$\boxed{\mathbf{F}(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.} \quad (5.36)$$

En donde

- m_1 y m_2 son las masas de las partículas que se atraen mutuamente.
- G es la constante gravitatoria, que actualmente posee un valor de $6,673(10) \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$.
- El signo menos indica que la fuerza es de carácter atractivo entre las partículas.

- El vector $\hat{\mathbf{r}}$ indica que la dirección de la fuerza es a lo largo de la línea que une las dos partículas.
- La fuerza es proporcional al inverso de la distancia al cuadrado, $\frac{1}{r^2}$, que es una característica de esta fuerza.

La fuerza electromagnética entre partículas cargadas posee la misma forma funcional de (5.36), lo que cambia es que esta fuerza actúa sobre partículas con carga eléctrica en vez de masa, y la constante de proporcionalidad también cambia.

Para una fuerza que en general tiene la forma funcional $F = \frac{A}{r^2}$, en donde A es una constante. La diferencia de energía potencial es

$$\begin{aligned} U_b - U_a &= - \int_{r_a}^{r_b} \frac{A}{r^2} dr \\ &= \frac{A}{r_b} - \frac{A}{r_a}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Para obtener el resultado general podemos reemplazar r_b por la variable radial r , entonces

$$\boxed{U(r) = \frac{A}{r} + C.} \quad (5.38)$$

La constante C no posee un significado físico, simplemente cambia el nivel de referencia desde el cual medimos la energía, como lo que realmente nos interesa son las diferencias de energía podemos hacer $C = 0$, que corresponde al caso $U(\infty) = 0$. Con esta convención tenemos para la energía potencial

$$U(r) = \frac{A}{r}.$$

En el caso de la energía potencial gravitatoria tenemos,

$$\boxed{U(r) = G \frac{m_1 m_2}{r}} \quad (5.39)$$

Ejemplo 35 : Energía potencial de un resorte.

Los resortes son casos de especial interés, ya que producen fuerzas restauradoras que permiten la descripción de una enorme cantidad de fenómenos físicos. En un resorte la fuerza está determinada por la ecuación

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -k(r - r_0)\hat{\mathbf{r}}.$$

esta es la denominada ley de Hooke, y es mas general que la mostrada en la ecuación (5.25) del ejemplo 30. En esta ecuación el movimiento es a lo largo de un eje cualquiera, demarcado por la dirección radial $\hat{\mathbf{r}}$, y la posición de equilibrio es el punto r_0 .

La energía potencial del sistema es,

$$\begin{aligned} U(x_f) - U(a) &= - \int_a^{x_f} -k(r - r_0) dr \\ &= \frac{1}{2}k(r - r_0)^2 + C. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Por convención se suele elegir la constante $C = 0$, de manera que la energía potencial de un resorte toma la forma

$$\boxed{U(r) \frac{1}{2}k(r - r_0)^2.} \quad (5.41)$$

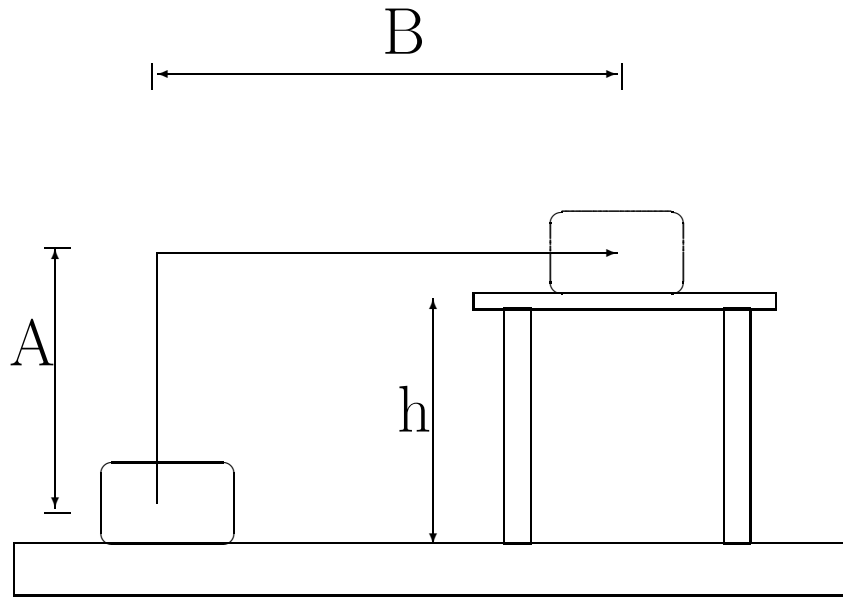
Esta es una ecuación mas general que la ecuación (5.30).

5.10. Fuerzas conservativas

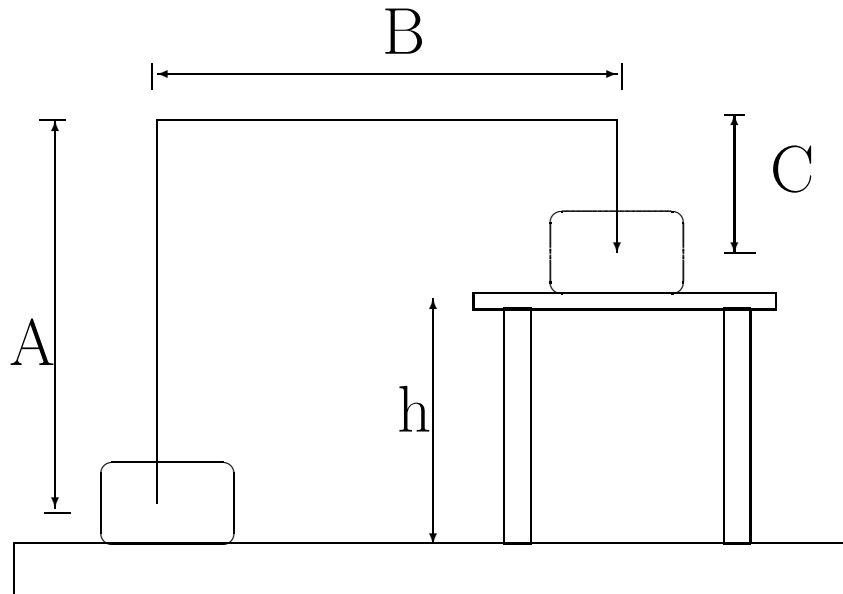
Las fuerzas conservativas son de gran interés en física, ya que permiten el estudio simplificado del comportamiento de un sistema. Para comenzar esta sección daremos una definición de fuerza conservativa.

Una fuerza se denomina conservativa cuando el trabajo realizado para mover una masa entre dos puntos no depende de la trayectoria.

Las fuerzas estudiadas hasta ahora son conservativas, con excepción de la fricción la cual es la fuerza no conservativa mas conocida. Para explicar el significado de lo que es una fuerza conservativa vamos a tomar como ejemplo la gravedad. Suponga que se tiene una mesa y se desea elevar un objeto de masa m al borde de la mesa, como lo muestra la siguiente figura.



Existen varias trayectorias para subir el objeto hasta la mesa, pero la pregunta es ¿por cual camino se realiza la menor cantidad de trabajo?, para responder esto vamos a tomar dos trayectorias. La primera es la mostrada en la figura, en la segunda vamos a realizar el siguiente recorrido.



Las letras A , B , C , indican los desplazamientos realizados, en el caso de la primera figura el trabajo realizado se puede dividir en la suma de dos

trabajos por dos caminos, de la forma siguiente

$$\begin{aligned}
 W_{total} &= W_A + W_B \\
 &= F_y \cdot A + F_x B \\
 &= mgA + 0 \times B \\
 &= mgh
 \end{aligned}$$

En la anterior trayectoria la fuerza en la dirección Y es la debida a la gravedad, en dirección X no hay fuerzas (no hay gravedad en este eje), por lo cual no se efectúa trabajo a lo largo de esta dirección. El trabajo realizado en llevar el objeto hasta la mesa es igual al de levantar la caja una altura H.

Para la segunda figura tenemos que el trabajo es de la forma

$$\begin{aligned}
 W_{total} &= W_A + W_B + W_C \\
 &= F_y \cdot A + F_x B - F(y) \cdot C \\
 &= mgA + 0 \times B - mg \times C \\
 &= mg(A - C) \\
 &= mgh
 \end{aligned}$$

El signo negativo en la trayectoria C se debe a la dirección de movimiento, la cual se hace en dirección contraria a la del movimiento en A, por lo cual el signo es contrario.

Como se ve el trabajo realizado es independiente del camino seguido, es decir que para el caso de las fuerzas conservativas, como la gravedad, lo único que realmente nos interesa es la ubicación de los puntos inicial y final de movimiento. Esto simplifica enormemente el desarrollo de determinado numero de problemas.

El trabajo realizado por una fuerza conservativa en una trayectoria cerrada es igual a cero, cuando subimos las escaleras y volvemos a bajar al punto inicial, el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad es igual a cero, aunque nuestro organismo haya invertido energía en realizar el desplazamiento en contra de la fuerza de la gravedad.

La manera como en matemáticas se nota el trabajo realizado a lo largo de una trayectoria cerrada, por medio de una integral, es

$$W = \oint \mathbf{F}(r) \cdot d\mathbf{r} \quad (5.42)$$

Es decir que el punto final e inicial son iguales, lo que puede cambiar es la trayectoria a lo largo de la cual se realiza esta integral. Cuando el valor de esta integral es igual a cero se dice que la fuerza $\mathbf{F}(r)$ es conservativa. Cuando el valor de esta integral es diferente de cero se dice que la fuerza posee un carácter no conservativo.

5.11. Fuerzas no conservativas y conservación de la energía

Una fuerza no conservativa disipa energía por medio de calor, por ejemplo la fuerza de fricción, y en este caso el teorema de conservación de la energía es válido, sin embargo se le debe hacer una pequeña modificación.

Supongamos que tenemos una fuerza total igual a la suma de una fuerza conservativa (\mathbf{F}^c) y una no conservativa (\mathbf{F}^{nc}),

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^c + \mathbf{F}^{nc}$$

El trabajo total en mover una partícula desde a hasta b por el camino S , por esta fuerza está dado por

$$\begin{aligned} W_{ab}^{total} &= \int_S \mathbf{F} \cdot d\hat{\mathbf{r}} \\ &= \int_S \mathbf{F}^c \cdot d\hat{\mathbf{r}} + \int_S \mathbf{F}^{nc} \cdot d\hat{\mathbf{r}} \\ &= -\Delta U + W_{ab}^{nc} \end{aligned}$$

En donde $-\Delta U = -U_b + U_a$, es la diferencia de energía potencial asociada a la fuerza conservativa, y W_{ab}^{nc} es el trabajo realizado por la fuerza no conservativa. Como el teorema de trabajo y energía nos dice que el trabajo realizado es igual a la diferencia de energía cinética del sistema, entonces $W_{ab}^{total} = K_b - K_a$, y de esta forma la ecuación es,

$$\begin{aligned} -U_b + U_a + W_{ab}^{nc} &= K_b - K_a \\ (K_b + U_b) - (K_a + U_a) &= W_{ab}^{nc} \end{aligned} \tag{5.43}$$

Podemos definir la energía mecánica total como $E = K + U$, de esta forma llegamos a la forma mas general del teorema de conservación de la energía.

$$\boxed{E_b - E_a = W_{ab}^{nc}} \tag{5.44}$$

Este trabajo realizado por las fuerzas no conservativas será estudiado mas adelante, es el denominado calor, una forma de energía que no puede ser transformada totalmente en trabajo. En una parte de los problemas de física se suelen despreciar los efectos de las fuerzas no conservativas sobre los sistemas, sin embargo su estudio es muy importante en las aplicaciones industriales tales como el diseño de pastillas de frenos.

5.12. Taller experimental: Conservación de la energía cinética

En un choque completamente elástico tenemos que la energía cinética total del sistema se conserva. En el taller experimental del capítulo anterior mostramos como en un choque de tipo elástico de masas del mismo tamaño, el momentum lineal total se conserva. Nuestro taller experimental de esta sección es una continuación del anterior. Este taller tiene como objetivo:

1. comprobar la conservación de la energía cinética en un choque completamente elástico.

Cuestionario

1. ¿Qué es un choque completamente inelástico?.
2. ¿Qué es un choque completamente elástico?.
3. ¿Puede dar ejemplos de la vida real de un choque completamente elástico y uno completamente inelástico?.

La experiencia

El experimento consiste básicamente en repetir el experimento de la sección anterior de un choque de dos bolas de igual masa en uno de los casos, y de masas diferentes en el otro caso. Llamaremos al choque de dos esferas de igual masa el caso I, y al choque de las dos esferas de diferente masa el caso II. Realice el mismo montaje experimental y revise las observaciones realizadas en su informe o bitácora del experimento.

Verifique que en el caso I se cumple

$$\frac{1}{2}m\vec{V}_1^2 = \frac{1}{2}m\vec{V}_1'^2 + \frac{1}{2}m\vec{V}_2'^2 \quad (5.45)$$

lo cual significa que

$$\vec{V}_1^2 = \vec{V}_1'^2 + \vec{V}_2'^2 \quad (5.46)$$

Verifique que la ecuación (5.46) se cumple y diga si este choque puede considerarse completamente elástico. ¿Podemos en la vida real tener choques completamente elásticos?.

Ahora realice el montaje experimental para el caso II, haga las mediciones con masas diferentes. En este caso esperamos comprobar que

$$\frac{1}{2}m\vec{V}_1^2 = \frac{1}{2}m\vec{V}_1'^2 + \frac{1}{2}m'\vec{V}_2'^2 \quad (5.47)$$

lo cual significa

$$\vec{V}_1^2 = \vec{V}_1'^2 + \left(\frac{m'}{m}\right) \vec{V}_2'^2 \quad (5.48)$$

¿Es el choque completamente elástico?. Concluya acerca de la utilidad de las dos leyes de conservación estudiadas, la del momentum lineal y la de la energía cinética.

¿Cuáles son sus conclusiones?.

5.13. Resumen y glosario

1. El trabajo dW efectuado por una fuerza \mathbf{F} en un desplazamiento infinitesimal $d\mathbf{r}$ es

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F \cos(\theta) dr$$

En donde θ es el ángulo que forman los vectores fuerza y desplazamiento.

2. En un desplazamiento finito el trabajo se determina a partir de integrar la anterior expresión, de manera que

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

3. La energía es lo que se invierte o se gasta al realizar un trabajo, siempre que realicemos un trabajo estamos invirtiendo energía.
4. La potencia es el trabajo realizado por unidad de tiempo, se puede definir como $P = \frac{dW}{dt}$.

5. También se puede definir potencia como $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$, en donde \mathbf{v} es la velocidad.
6. La energía cinética de un cuerpo que tiene una masa m y se mueve a velocidad \mathbf{v} se define como

$$K = \frac{1}{2}mv^2.$$

7. El teorema de trabajo y energía expresa que el trabajo realizado por la fuerza resultante que actúa sobre un sistema es igual al cambio en la energía cinética del mismo. Para un sistema de masa m lo anterior significa que

$$W_{12} = \Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2.$$

En donde v_f es la velocidad final y v_i la velocidad inicial.

8. El termino energía se refiere en general a la capacidad de realizar trabajo que tiene un sistema.
9. La energía potencial de un sistema hace referencia a la energía que se tiene por encontrarse en determinada posición o poseer un determinado desplazamiento.
10. Ejemplos de energía potencial mecaniza son la energía potencial gravitatoria que posee un cuerpo por encontrarse a determinada altura, o la energía elástica que posee un cuerpo por la deformación de un resorte.
11. Las fuerzas no conservativas son aquellas en las cuales la energía potencial no se almacena, una de las fuerzas no conservativas mas conocida es la de la fricción, la cual libera energía, que no puede ser recuperada en forma de trabajo, la energía liberada por la fricción se da en forma de calor.
12. Una fuerza conservativa posee la siguiente característica: El trabajo efectuado contra la fuerza para alterar la configuración del sistema se puede recuperar completamente como trabajo efectuado por el sistema cuando vuelve a su estado inicial.
13. No hay forma de asociar una energía potencial a una fuerza no conservativa.

14. Se denominan sistemas conservativos aquellos en los cuales solo actúan fuerzas conservativas.
15. El trabajo efectuado por una fuerza conservativa, al mover un sistema desde el punto A hasta un punto B es independiente del camino tomado para llegar a los puntos.
16. En sistemas conservativos la energía mecánica total, que es la suma de la energía cinética mas la potencial, se conserva. Es decir que es una constante en cualquier instante.
17. En un sistema no conservativo la energía también se conserva, sin embargo parte de la energía es convertida en calor, que es una forma de energía que no puede ser convertida en trabajo.

5.14. Evaluación

1. En un juego de tirar la cuerda, dos equipos halan hacia lados contrario una cuerda hasta que alguno de los dos se deja arrastrar por el otro, diga si el equipo que pierde ejerce una cantidad positiva o negativa de trabajo.
2. Si se ha realizado un trabajo negativo en el anterior caso, ¿cómo se conciliaría este resultado con el esfuerzo que se ha realizado?.
3. Una fuerza constante que actúa sobre un objeto no produce potencia, ¿por qué?.
4. La masa de un cuerpo es una propiedad intrínseca del mismo cuerpo, es decir que es una característica inherente a él e independiente de cualquier evento externo. ¿Podría decirse que la energía cinética es también una propiedad intrínseca?.
5. Cuando un objeto se desliza sobre una superficie aspera la fricción efectúa una cantidad negativa de trabajo. Explique lo anterior en términos del teorema de trabajo y energía.
6. Una carreta de 500 kg de masa es arrastrada por un caballo a una velocidad constante sobre un terreno horizontal a lo largo de una distancia de 1000 metros. Para ello el caballo ejerce una fuerza de 2000 N y emplea un tiempo de 50 minutos.

- a) ¿Qué trabajo ha realizado el caballo?
- b) ¿En que se ha convertido ese trabajo?
- c) ¿Cuál es el trabajo resultante ejercido sobre la carreta?
- d) Con qué potencia el caballo desplazó a la carreta?
- e) ¿Qué fuerza debería ejercer el caballo sobre la carreta si esta se moviera con una aceleración de 0.1 m/s^2 ?
- f) ¿Qué trabajo neto hace el caballo sobre la carreta en este último caso?
- g) ¿En cuanto varia la energía cinética de la carreta?
- h) ¿Qué trabajo neto se hace sobre la carreta cuando esta se mueve con una aceleración de 0.1 m/s^2 ?
- i) ¿Qué trabajo hizo la fuerza de fricción?

7. Si en el problema anterior

- W = Trabajo hecho por la fuerza de tracción.
- ΔE_c = Incremento de la energía cinética.
- W_f = trabajo para vencer las fuerzas disipativas.

¿Es correcta la expresión: $W = \Delta E_c + W_f$?, explique su respuesta.

- 8. Utilizando la ecuación (5.7) y la ecuación del desplazamiento para un movimiento uniformemente acelerado, halle el tiempo empleado por un objeto de masa m en llegar a la altura máxima.
- 9. Si el módulo de la rapidez de un cuerpo se duplica, ¿en qué factor se multiplica su energía cinética?
- 10. Demuestre que la unidad MKS de la energía es el Joule.
- 11. Demuestre que $1\text{kw-h} = 3.6 \text{ MJ}$.
- 12. Si un resorte tiene una ecuación para la fuerza $F = -kx$, en donde k es la constante del resorte y x es el desplazamiento a partir del punto de equilibrio, demuestre que la cantidad $\frac{1}{2}kx^2$ tiene unidades de energía.

13. Una bola de boliche que pesa 500 kg se deja caer desde un edificio a 10 metros de altura del suelo. Suponga que durante el último segundo, antes de llegar al suelo, tiene una velocidad constante de 10 m/s. Cuál es el trabajo realizado durante el último segundo por:
- a) La fuerza resultante que actúa sobre la bola.
 - b) La fuerza gravitatoria.
 - c) La fuerza de fricción con el aire.
 - d) Evalúe la potencia en cada caso. ¿Qué significado tiene?.
14. Mediante un cable de una grúa se arrastra un tronco sobre el suelo horizontal de un bosque a una velocidad constante de 2 m/s. Si la potencia desarrollada por el cable es de 940 W.
- a) ¿Cuál es la tensión del cable?.
 - b) ¿Cuál es el trabajo resultante sobre el tronco en un minuto?.
 - c) ¿Cuál es el trabajo hecho por el cable sobre el tronco en un minuto?.
 - d) ¿Qué energía es disipada por efecto de la fricción en cada segundo?.

5.15. Información de retorno

A continuación encontrará respuestas a las preguntas y ejercicios planteados en la parte inicial, evaluación de conceptos previos, y final del capítulo, evaluación. Las respuestas pueden ser ampliadas por usted y la solución a los ejercicios no es única. Se busca que usted amplíe la respuesta, la mejore y encuentre otros métodos de solución a los ejercicios. Algunas preguntas no se encuentran contestadas ya que su respuesta puede variar de una persona a otra.

Conceptos previos

- Cuando corremos y llegamos agotados decimos que hemos gastado mucha energía, ¿por qué?.

Es algo que se dice de manera universal para hacer referencia a que estamos cansados. Estrictamente hablando en cualquiera de nuestras actividades diarias invertimos energía al mover nuestro cuerpo, por haber

realizado un trabajo. Esta energía es proporcionada por los alimentos, y transformada en trabajo por medio de un complejo mecanismo altamente especializado en nuestro organismo.

- ¿Dónde ha escuchado el término potencia?.

Eso depende de la región en la cual se vive, pero en general los motores hacen una gran referencia al término de potencia.

- ¿Por qué los mecánicos dicen que un auto tiene una gran potencia?

Hacen referencia a la capacidad de realizar trabajo por unidad de tiempo en un carro, un carro con una gran potencia implica que puede realizar una gran cantidad de trabajo en un tiempo muy corto, claro está a expensas de un enorme gasto en combustible y tecnología.

- ¿Qué conoce usted como trabajo?.

Evaluación

1. En un juego de tirar la cuerda, dos equipos halan hacia lados contrario una cuerda hasta que alguno de los dos se deja arrastrar por el otro, diga si el equipo que pierde ejerce una cantidad positiva o negativa de trabajo.

El equipo que pierde ha perdido también energía, pero en general se ha dejado arrastrar por una fuerza externa, es decir que ellos han recibido energía, lo que implica que han realizado un trabajo negativo.

2. Si se ha realizado un trabajo negativo en el anterior caso, ¿cómo se conciliaría este resultado con el esfuerzo que se ha realizado?.

De manera general el sistema que nos interesa es el de los dos equipos, los dos han realizado un esfuerzo, pero el resultado neto es que un equipo ha tenido más energía que ha gastado en convertirla en trabajo para ganarle al otro equipo, los dos han gastado energía, pero uno de los equipos ha gastado más que el otro. Finalmente todos los equipos gastan energía.

3. Una fuerza constante que actúa sobre un objeto no produce potencia, ¿por qué?.

La potencia para una fuerza constante entre los puntos x_i hasta x_f , en el intervalo de tiempo Δt se define como

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{f(\cdot x_f - \cdot x_i)}{\Delta t} = 0$$

La única forma en que lo anterior es cero es por que $x_f - x_i = 0$, es decir que la fuerza no logre realizar un desplazamiento.

4. La masa de un cuerpo es una propiedad intrínseca del mismo cuerpo, es decir que es una característica inherente a él e independiente de cualquier evento externo. ¿Podría decirse que la energía cinética es también una propiedad intrínseca?

No se puede afirmar que la energía cinética es una propiedad intrínseca del cuerpo, para que un objeto tenga una energía cinética debe tener una velocidad, la velocidad va a depender del sistema de referencia en el cual se mueva el objeto. por el contrario la masa no depende del sistema de referencia, salvo que estemos hablando de velocidades cercanas a las de la luz como en la teoría de la relatividad, sin embargo este no es nuestro caso.

5. Cuando un objeto se desliza sobre una superficie aspera la fricción efectúa una cantidad negativa de trabajo. Explique lo anterior en términos del teorema de trabajo y energía.

Cuando efectuamos un trabajo sobre el bloque, aparece una fuerza que se opone al movimiento, la fuerza de fricción, esta fuerza tiene un signo contrario a la fuerza que mueve el bloque, como se efectúa un desplazamiento se realiza un trabajo, y como el signo de la fuerza de fricción es contrario al signo de la fuerza que mueve el objeto, entonces el trabajo efectuado por la fuerza de fricción es de signo negativo.

6. Una carreta de 500 kg de masa es arrastrada por un caballo a una velocidad constante sobre un terreno horizontal a lo largo de una distancia de 1000 metros. Para ello el caballo ejerce una fuerza de 2000 N y emplea un tiempo de 50 minutos.

- a) ¿Qué trabajo ha realizado el caballo?. *Utilizando la definición de trabajo:*

$$\begin{aligned} W &= 2000 (N) \times 1000 (m) \\ &= 3 \times 10^6 (J) \end{aligned}$$

- b) ¿En que se ha convertido ese trabajo?.

El desplazamiento se ha realizado a velocidad constante, eso se debe a que ha tenido que vencer las fuerzas de fricción del suelo, finalmente el trabajo se ha convertido en calor por fricción.

- c) ¿Cuál es el trabajo resultante ejercido sobre la carreta?.

La fuerza ejercida sobre el sistema es cero, ya que todo el movimiento se realizó a velocidad constante, por lo tanto no hubo aceleración, al no existir aceleración la fuerza total es cero y el trabajo realizado también es cero.

- d) Con qué potencia el caballo desplazó a la carreta?.

Utilizando la definición de potencia:

$$\begin{aligned} P &= \frac{2000 \text{ (N)} \times 1000 \text{ (m)}}{3000 \text{ (s)}} \\ &= 666,6 \text{ (W)} \end{aligned}$$

- e) ¿Qué fuerza debería ejercer el caballo sobre la carreta si esta se moviera con una aceleración de 0.1 m/s^2 ?

Ya sabemos que para moverse a velocidad constante la fuerza que debe ejercer el caballo sobre la carreta es de 2000 N , si desea que el movimiento sea acelerado deberá imprimirle mayor fuerza, la fuerza adicional será

$$F_{\text{adicional}} = 500 \text{ (kg)} \times 0,1 \text{ (m/s}^2\text{)} = 50 \text{ N}$$

Por lo cual la fuerza final será $F = 2050 \text{ N}$.

- f) ¿Qué trabajo neto hace el caballo sobre la carreta en este último caso?. *Este cálculo es equivalente a repetir el primer cálculo del problema, el resultado es 2050000 Joules .*

- g) ¿En cuanto varia la energía cinética de la carreta?.

El cambio en la energía cinética es igual a la diferencia de trabajo, por lo cual el cambio es de 50000 joules .

- h) ¿Qué trabajo neto se hace sobre la carreta cuando esta se mueve con una aceleración de 0.1 m/s^2 ?

El trabajo neto es de los mismos 50000 joules , ya que esto se hace con una aceleración, y ya no a velocidad constante.

i) ¿Qué trabajo hizo la fuerza de fricción?

El trabajo realizado por la fuerza de fricción es de -2×10^6 joules.

7. Si en el problema anterior

- W = Trabajo hecho por la fuerza de tracción.
- ΔE_c = Incremento de la energía cinética.
- W_f = trabajo para vencer las fuerzas disipativas.

¿Es correcta la expresión: $W = \Delta E_c + W_f$?, explique su respuesta.

La expresión es correcta, ya que el trabajo realizado no solamente debe tener en cuenta la diferencia en la energía cinética, sino también el trabajo realizado por las fuerzas disipativas, como las fuerzas de fricción.

8. Utilizando la ecuación (5.7) y la ecuación del desplazamiento para un movimiento uniformemente acelerado, halle el tiempo empleado por un objeto de masa m en llegar a la altura máxima.

Las ecuaciones a utilizar son:

$$\begin{aligned} z_2 &= z_1 + v_1 t + \frac{1}{2} g t^2 \\ z_2 &= z_1 + \frac{v_1^2}{2g} \end{aligned}$$

de las anteriores ecuaciones podemos restarlas y obtener:

$$-\frac{v_1^2}{2g} + v_1 t + \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

la anterior ecuación es cuadrática, la solución se encuentra en cualquier texto de álgebra.

9. Si el módulo de la rapidez de un cuerpo se duplica, ¿en qué factor se multiplica su energía cinética?

Si la velocidad se duplica la energía cinética aumenta cuatro veces.

10. Demuestre que la unidad MKS de la energía es el Joule.

Se le deja al lector.

11. Demuestre que $1\text{kw}\cdot\text{h} = 3.6 \text{ MJ}$.
Se le deja al lector.
12. Si un resorte tiene una ecuación para la fuerza $F = -kx$, en donde k es la constante del resorte y x es el desplazamiento a partir del punto de equilibrio, demuestre que la cantidad $\frac{1}{2}kx^2$ tiene unidades de energía.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2}kx^2 \right| &= \frac{1}{2} \frac{\text{fuerza}}{\text{distancia}} \times (\text{distancia})^2 \\ &= \frac{1}{2}(\text{fuerza}) \times (\text{distancia}) \\ &= \text{Trabajo.} \end{aligned}$$

13. Mediante un cable de una grúa se arrastra un tronco sobre el suelo horizontal de un bosque a una velocidad constante de 2 m/s. Si la potencia desarrollada por el cable es de 940 W.
- a) ¿Cuál es la tensión del cable?
La tensión del cable es de 470 Newton.
- b) ¿Cual es el trabajo resultante sobre el tronco en un minuto?
La velocidad es constante, por lo cual es trabajo es cero.
- c) ¿Cuál es el trabajo hecho por el cable sobre el tronco en un minuto?
El trabajo realizado por el cable en un minuto es de 56400 Joules.
- d) ¿Qué energía es disipada por efecto de la fricción en cada segundo?
La energía disipada es de 940 Joules.

Palabras claves para búsqueda en Internet

A continuación se presentará una serie de palabras útiles para la búsqueda en Internet, las palabras se han probado en el buscador

<http://www.google.com>

no tienen ortografía dado que el buscador es universal, y en por que en ocasiones va a tener que utilizar teclados que no tienen tildes o eñes.

energia, energia cinetica, energia potncial, curso de fisica, trabajo y energia, conversion de unidades.

Bibliografía recomendada:

Se puede consultar al final del texto, el número que encuentra al final de la referencia es el número correspondiente al texto en la bibliografía final.

- Formulas y tablas matemáticas en general [1].
- Mediciones y experimentos en conservación de la energía [2, 13].
- Trabajo y energía [7, 8, 14, 19, 20, 21, 10].
- Sobre la teoría de la relatividad [12].
- Conversión de unidades [18].

Capítulo 6

Leyes de conservación III: Momentum angular

6.1. Introducción

Hemos hablado de movimientos en línea recta hasta el momento, y hemos tocado solamente de manera superficial movimientos curvos. Sin embargo un movimiento real se hace de manera general a lo largo de una curva, una recta puede ser considerada un segmento corto de una curva con un radio de curvatura muy grande.

Nuestro interés en general a lo largo de este capítulo será el estudio de la dinámica de rotación por medio de las leyes de Newton, y daremos a conocer una muy importante cantidad la cual es el **momentum angular**. A su vez estudiaremos importantes conceptos como momento de inercia y aceleración angular, los cuales son importantes para estudiar la denominada dinámica del cuerpo rígido.

En general cualquier movimiento puede ser descrito como la composición de una rotación y una traslación, lo que hace que el estudio de este capítulo sea muy importante para el desarrollo de la comprensión de fenómenos físicos.

Veremos en este capítulo que la segunda ley de Newton, también es aplicable para cuerpos en rotación. Y esta es caracterizada por una cantidad denominada **momento de inercia**.

6.2. Evaluación de conocimientos previos

1. ¿Qué es el momentum lineal?
2. Cuando una bola de billar rota sin desplazarse ¿tiene momentum lineal?
3. ¿Un cuerpo que rota tiene energía cinética?
4. La ley de la inercia nos dice que todo cuerpo que se este moviendo en linea recta con velocidad constante tiene una dificultad a detenerse o a moverse si esta quieto. Para un cuerpo que está rotando ¿Existirá una dificultad a rotar o a detener su rotación?

6.3. Momentum angular de una partícula

El momentum angular es una cantidad equivalente a la velocidad, pero aplicada al movimiento circular, se denota con la letra **L**, y como veremos mas adelante es una cantidad vectorial. El momentum angular expresa el comportamiento de un cuerpo que se mueve a rapidez constante, pero no en una linea recta, sino en una trayectoria circular.

El momentum angular **L** de una partícula con momentum **P** = $m\mathbf{v}$ y vector posición **r** con respecto a un sistema de coordenadas se define como,

$$\boxed{\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p}} \quad (6.1)$$

Las unidades del momentum angular son $kg \cdot m^2/s$ en el sistema internacional. No existe un nombre especial para estas unidades. De la ecuación (6.1) podemos decir,

- El momentum angular es una cantidad vectorial, es decir que posee magnitud, dirección y sentido. La magnitud del vector momentum angular es igual a,

$$|\mathbf{L}| = |\mathbf{r}||\mathbf{p}| \sin(\theta) \quad (6.2)$$

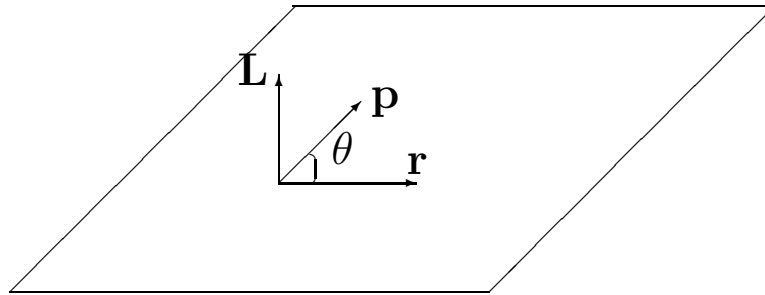
esta magnitud proviene del significado del producto cruz vectorial, el cual forma otro vector y no una magnitud escalar como lo hace el producto punto. El ángulo θ es el formado por los dos vectores **r** y **p**.

Es importante anotar que el orden del producto se debe mantener, ya que

$$\mathbf{p} \times \mathbf{r} = -\mathbf{r} \times \mathbf{p} = -\mathbf{L}.$$

Es decir que el cambiar el orden invierte la dirección del vector.

- Los vectores \mathbf{r} y \mathbf{p} determinan un plano tal y como se muestra a continuación,



Si los vectores \mathbf{r} y \mathbf{p} se encuentran sobre el plano x, y , entonces el vector momentum angular apunta hacia el eje z .

- La definición de momentum angular solamente es posible en un espacio tridimensional como el que trabajamos a diario. Y plantea un gran problema en la física teórica avanzada, en la cual se trata de describir el comportamiento de ciertos sistemas como los de partículas elementales, en espacios de mas de tres dimensiones.
- La definición es dada para una partícula con una masa m , no para cuerpos extensos compuestos de muchas partículas.
- La ecuación (6.1) de momentum angular posee su ecuación análoga que es la ecuación (4.2) del momentum lineal. Sin embargo esto se verá de manera clara mas adelante, con la introducción del concepto de momento de inercia.

6.3.1. Cálculo del momentum angular de una partícula que se mueve en el plano (x,y)

De la ecuación (6.1) se observa que el valor del momentum angular depende tanto del radio \mathbf{r} como del momentum de la partícula, \mathbf{p} . Existen varios

metodos para calcular y visualizar el momentum angular de una partícula que se mueve sobre el plano (x,y), vamos a mostrar el metodo de calculo mas general, el cual puede ser usado bajo cualquier dirección de los vectores, se encuentren o no situados sobre el plano (x,y).

Calculo general del momentum angular

Sean los dos vectores \mathbf{r} y \mathbf{p} , cuyas componentes podemos escribirlas como,

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= (r_x, r_y, r_z) = r_x \hat{\mathbf{i}} + r_y \hat{\mathbf{j}} + r_z \hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{p} &= (p_x, p_y, p_z) = p_x \hat{\mathbf{i}} + p_y \hat{\mathbf{j}} + p_z \hat{\mathbf{k}}.\end{aligned}$$

El momentum angular se define como

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ r_x & r_y & r_z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} \\ &= (r_y p_z - r_z p_y) \hat{\mathbf{i}} - (r_x p_z - r_z p_x) \hat{\mathbf{j}} + (r_x p_y - r_y p_x) \hat{\mathbf{k}}\end{aligned}\tag{6.3}$$

La notación usada en (6.3) es una convención, y se puede mostrar que en el caso del movimiento en el plano (x,y) para los vectores \mathbf{r} y \mathbf{p} la resultante para el momentum angular es un movimiento en el eje z .

Ejemplo 36 : Momentum angular de una partícula que se mueve en un plano.

Una partícula de masa $m = 3\text{kg}$ se mueve en el plano (x,y) con una velocidad dada por el vector,

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) = (2, 3, 0) \text{ m/s}\tag{6.4}$$

Calcule el valor del momentum lineal con respecto al centro del sistema de referencia, en el momento en el cual la partícula se encuentra en el punto

$$\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z) = (2, 2, 0) \text{ m}\tag{6.5}$$

De las ecuaciones (6.4) y (6.5) podemos ver que el movimiento se realiza en el plano (x,y), ya que la velocidad y la distancia con respecto al origen solo

tienen componentes en los ejes (x, y) . De la ecuación (6.4) podemos calcular el momentum angular

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m(v_x, v_y, v_z) = 3 \text{ kg} \cdot (2, 3, 0) \text{ m/s} = (6, 9, 0) \text{ m} \cdot \text{kg/s}.$$

Ahora podemos calcular el valor del momentum angular con ayuda de la definición (6.3),

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 2 & 2 & 0 \\ 6 & 9 & 0 \end{vmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \\ \mathbf{L} &= \left[(2 \cdot 0 - 0 \cdot 9)\hat{\mathbf{i}} - (2 \cdot 0 - 0 \cdot 6)\hat{\mathbf{j}} + (2 \cdot 9 - 2 \cdot 6)\hat{\mathbf{k}} \right] \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \\ \mathbf{L} &= (18 - 12)\hat{\mathbf{k}} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \\ \mathbf{L} &= 6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \end{aligned} \tag{6.6}$$

6.4. Torque

El torque es una nueva cantidad, equivalente a la fuerza pero aplicada a movimiento circular, esta cantidad se denota como τ y como veremos mas adelante es una cantidad vectorial.

El torque debido a una fuerza \mathbf{F} que actúa sobre una partícula de que se encuentra en una posición \mathbf{r} se define como,

$$\boxed{\tau \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F}} \tag{6.7}$$

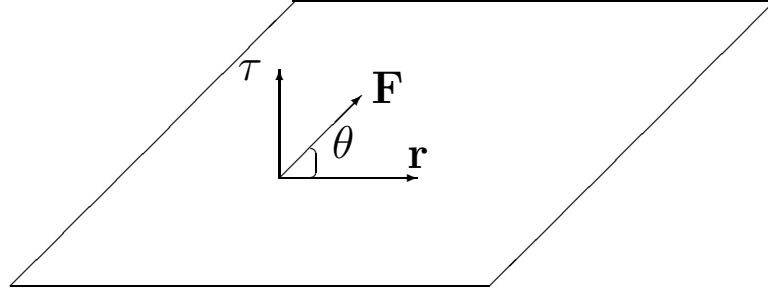
De la definición (6.7) podemos decir,

- El torque es una cantidad vectorial, ya que esta compuesta de dos cantidades vectoriales por medio del producto cruz, el cual da origen a otro vector. Por lo tanto el torque posee magnitud dirección y sentido.
- La magnitud del torque es

$$|\tau| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}| \sin(\theta) \tag{6.8}$$

De nuevo el ángulo θ es el formado por los vectores \mathbf{r} y \mathbf{F} .

- El vector torque es perpendicular a los vectores fuerza, \mathbf{F} , y distancia \mathbf{r} . Por lo cual si los vectores \mathbf{F} y \mathbf{r} se encuentran en el plano (x, y) , el vector torque apuntara en la dirección del eje z .



- Para una fuerza determinada por el vector

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) = F_x \hat{\mathbf{i}} + F_y \hat{\mathbf{j}} + F_z \hat{\mathbf{k}}.$$

Y una posición dada por el vector,

$$\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z) = r_x \hat{\mathbf{i}} + r_y \hat{\mathbf{j}} + r_z \hat{\mathbf{k}}.$$

Se puede calcular el torque producido por medio de la definición de producto cruz

$$\begin{aligned} \tau &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ &= (r_y F_z - r_z F_y) \hat{\mathbf{i}} - (r_x F_z - r_z F_x) \hat{\mathbf{j}} + (r_x F_y - r_y F_x) \hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (6.9)$$

- El torque es muy importante porque se encuentra relacionado con el cambio de momentum angular, en general el torque es igual a la razón de cambio del momentum angular, de manera que

$$\boxed{\tau = \frac{d\mathbf{L}}{dt}} \quad (6.10)$$

- De la ecuación (6.10) también obtenemos una conclusión muy importante:

Cuando el torque es igual a cero podemos afirmar que el momentum angular es una constante, $\mathbf{L} = \text{constante}$, y por lo tanto el momentum angular se conserva.

De esta forma se observa como el torque es al momentum angular, lo que la fuerza es al momentum lineal. Esta es nuestra tercera cantidad conservada, que junto con el momentum lineal y la energía constituyen poderosas herramientas para el estudio de los sistemas físicos.

- La ecuación (6.10) posee su análoga para el caso del momentum lineal, es la ecuación (4.3), de esta manera la razón de cambio del momentum lineal es la fuerza, y la razón de cambio del momentum angular es el torque.

Existen sin embargo diferencias importantes entre el torque y la fuerza.

1. El torque es una cantidad física que depende del origen de coordenadas que se ha escogido. Por el contrario la fuerza no depende del origen de coordenadas escogido.
2. De la definición de torque $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, se ve que τ y \mathbf{F} son vectores los cuales siempre son perpendiculares. Por lo tanto cuando un objeto este rotando por efecto de una fuerza, el vector torque producido permanece perpendicular a la dirección en la cual se aplica esta fuerza.
3. Pueden existir sistemas en los cuales con fuerza total igual a cero pero el torque diferente de cero. También puede existir un sistema con fuerza total diferente de cero y el torque igual a cero. Y obviamente también existe el caso en el cual el torque y la fuerza total son diferentes de cero. Para ilustrar los tres casos anteriores vamos a ilustrarlos por medio de una rueda de radio R a la cual le aplicamos la misma fuerza f en diferentes puntos de la misma. Esto se puede ver en la figura 6.1.

6.5. El momento de inercia

De las leyes de Newton, y mas específicamente de la primera ley, sabemos que existe una dificultad para mover o detener cuerpos con masa, esta característica es denominada inercia. Para un objeto que tenga una gran masa es mas difícil moverlo en línea recta si se encuentra en reposo, y de la misma forma es difícil detenerlo cuando se esta en movimiento, por ello un camión cargado que rueda por una pendiente leve es difícil de detener por una sola persona.

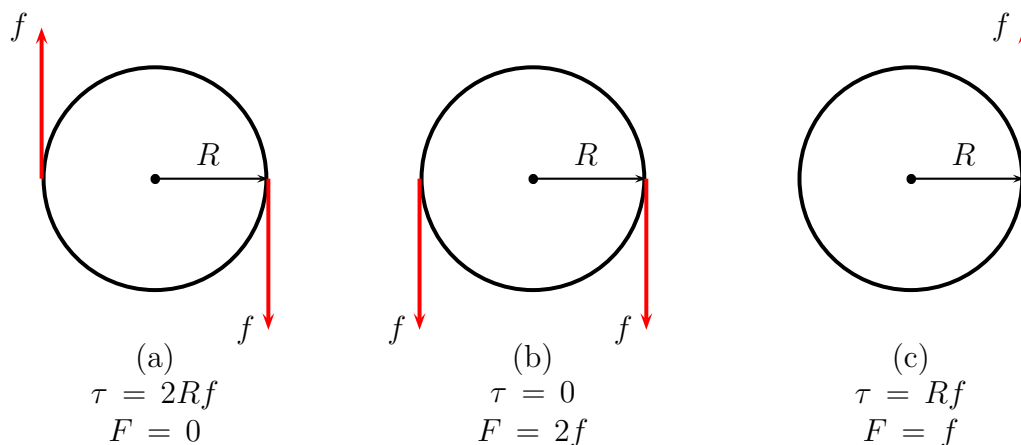


Figura 6.1: Diversos ejemplos de como se puede tener diferentes valores de la fuerza y el torque sobre una rueda de radio R .

De la misma forma existe una dificultad para poner a rotar a los cuerpos con masa alrededor de un eje. Esta dificultad es expresada por medio de la cantidad llamada **momento de inercia**, y nos permite el estudio del momentum angular para cuerpos diferentes a partículas puntuales con masa.

Para el estudio del momento de inercia vamos a introducir el concepto de *eje de rotación fijo*, el cual se refiere a que un cuerpo rígido rota alrededor de un eje que no cambia con el tiempo. El concepto de **cuerpo rígido** es simple, es un cuerpo que no cambia su forma y masa a lo largo del tiempo. Por ejemplo la rueda de un carro es un buen ejemplo de un cuerpo rígido que rota alrededor de un eje fijo.

Cuando un cuerpo rígido rota todas las partículas que componen el cuerpo permanecen a la misma distancia del eje independiente de la velocidad de rotación y el tiempo. Por lo tanto en cada partícula que compone un cuerpo rígido, la distancia al centro siempre se mantiene constante, es decir $|\mathbf{r}| = \text{constante}$.

En la figura 6.2 observamos las cantidades involucradas, \mathbf{r}_j es la distancia del eje de coordenadas a la partícula, \mathbf{R}_j es la distancia del eje z a la partícula, es decir $R_j = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$. La distancia \mathbf{R}_j se mantiene constante y es perpendicular a la velocidad \mathbf{v}_j . La velocidad \mathbf{r} se mantiene en el plano (x,y) , y puede ser escrita como,

$$v_j = \omega R_j$$

La velocidad tangencial es igual a la velocidad angular por el radio, La ve-

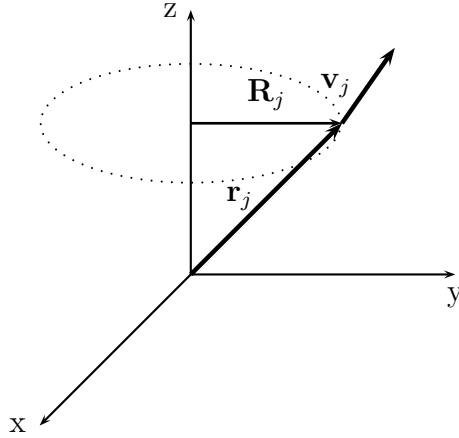


Figura 6.2: Torque para una partícula que gira alrededor del eje z con una velocidad \mathbf{v}_j a una distancia \mathbf{R}_j del eje z , y con una masa m_j .

locidad angular ω es la misma para todas las partículas del cuerpo rígido. Al calcular el momentum angular para la partícula j tenemos,

$$L_z(j) = m_j \cdot R \cdot v_j = m_j R_j^2 \omega$$

El momentum angular total del cuerpo será la suma de todos los momentos angulares de las partículas que lo componen, además el momentum angular será un vector a lo largo del eje z . Por el momento solo nos interesa calcular su magnitud

$$\begin{aligned} L_z &= \sum_j L_z(j) \\ &= \sum_j m_j R_j^2 \omega \\ &= \omega \sum_j R_j^2 m_j \end{aligned} \tag{6.11}$$

Definimos el momento de inercia como

$$\boxed{I \equiv \sum_j R_j^2 m_j} \tag{6.12}$$

Y de esta forma el momentum angular alrededor del eje z toma la forma

$$\boxed{L_z = \omega I} \quad (6.13)$$

De la ecuación (6.13) podemos decir,

- Esta ecuación es equivalente a la ecuación de momentum lineal $\mathbf{P} = m\mathbf{v}$, pero esta vez el término inercial de la masa m es reemplazado por el *momento de inercia*, y la velocidad lineal \mathbf{v} por la velocidad angular.
- El momento de inercia I es una cantidad escalar que depende de la manera como está distribuida la masa y del eje de rotación alrededor del cual se está efectuando el movimiento.
- Para una cantidad de masa continuamente distribuida la suma (6.12) se puede reemplazar por una integral

$$\begin{aligned} \sum_j m_j R_j^2 &\rightarrow \int R^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm \\ &= \int R^2 \rho dV \end{aligned} \quad (6.14)$$

En donde $dm = \rho dV$, la cantidad ρ es la densidad de masa, y el elemento dV es el diferencial de volumen.

- Como habíamos visto el momentum angular se relaciona con el torque por medio de la ecuación $\tau = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$. Para un cuerpo rígido esta relación es de la forma

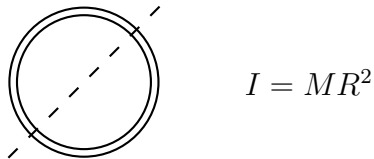
$$\boxed{\tau = I \frac{d\omega}{dt} = I\dot{\omega} = I\alpha} \quad (6.15)$$

A la cantidad $\dot{\omega} = \alpha$ se le denomina aceleración angular, y de esta forma podemos decir que el torque es igual a el momento de inercia por la aceleración angular. Similar a la fuerza, la cual habíamos definido como masa por aceleración.

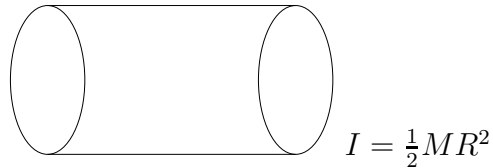
El calculo de momentos de inercia en general no es sencillo, y en la siguiente parte presentaremos algunos resultados para cuerpos simples, la mayoría de las mediciones de momentos de inercia se hacen de manera experimental.

Momentos de inercia de objetos simples.

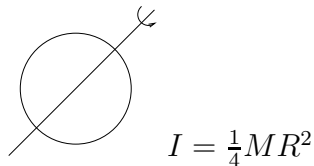
- a. Anillo delgado uniforme de masa M y radio R , rotando alrededor de un eje que pase por su centro y toque al anillo.



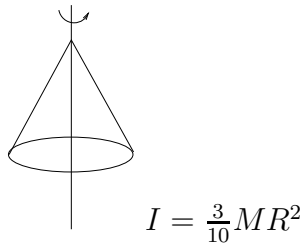
- b. Cilindro de radio R y masa M respecto de su eje de simetría.



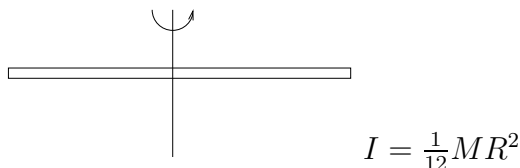
- c. Disco circular que rota por un eje que pasa por el centro del disco y se encuentra sobre el plano que forma el disco.



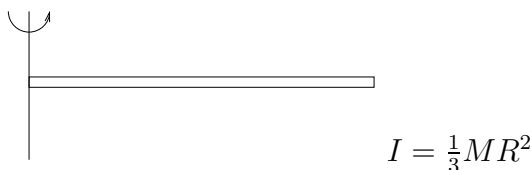
- d. Cono con base de radio R y masa M que gira con respecto a su eje de simetría.



- e. Varilla uniforme de masa M , y longitud L que gira a través de un eje que pasa por la mitad de la varilla y es perpendicular a la misma.



- e. Varilla uniforme de masa M , y longitud L que gira a través de un eje que pasa por la mitad de la varilla y es perpendicular a la misma.



- f. Esfera uniforme de radio R y masa M la cual gira por un eje que pasa por su centro.

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

El teorema de ejes paralelos

Los objetos que se han estudiado hasta ahora poseen un momento de inercia que ha sido calculado con base en una rotación a lo largo de un eje de simetría, el cual por lo general pasa por el centro de masa del sistema, ¿podemos calcular momentos de inercia para ejes diferentes a aquellos que pasan por el centro de masa?. La respuesta es si, y la manera de calcular estos momentos de inercia se hace por medio del teorema de ejes paralelos.

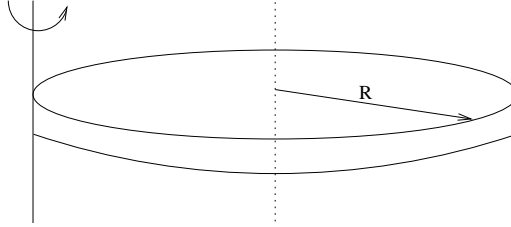
Este teorema establece que para un cuerpo de masa M que gira alrededor de un eje cualquiera, el momento de inercia I es igual a

$$\boxed{I = I_0 + Ml^2} \quad (6.16)$$

En donde

- I_0 es el momento de inercia alrededor de un eje que pasa por el centro de masa y que es paralelo al eje con respecto al cual deseamos medir el momento de inercia.
- l es la distancia entre el eje que pasa por el centro de masa del sistema y el eje que deseamos medir.

Para ver la utilidad de este teorema supongamos que deseamos medir el momento de inercia a un disco de masa M y radio R , pero este momento de inercia se desea medir con respecto a un eje que pasa por el borde del disco, como se muestra a continuación.



De la anterior sección sabemos que el momento de inercia para un disco de masa M y radio R con respecto a una rotación sobre el eje de simetría es igual a $\frac{1}{2}MR^2$, de esta manera la rotación alrededor del nuevo eje con ayuda del teorema de ejes paralelos nos da,

$$I = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3MR^2}{2}. \quad (6.17)$$

6.6. Cinemática rotacional

Al igual que en el movimiento rectilíneo, el movimiento de rotación tiene ecuaciones bien definidas para su desplazamiento, velocidad y aceleración angular. Se denominan **desplazamiento angular** (θ), **velocidad angular**, (ω), y **aceleración angular**, (α).

Para una partícula que se mueve en un plano habíamos visto que se puede describir su movimiento por medio de coordenadas polares, de forma que

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (r \cos(\theta))\hat{\mathbf{i}} + (r \sin(\theta))\hat{\mathbf{j}} \\ &= (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \\ &= \mathbf{I}_r r \end{aligned} \quad (6.18)$$

En donde r es la longitud del radio de rotación.

En la figura 6.3 se observa el movimiento de una partícula que gira alrededor de un centro, con un radio constante de r , y su descomposición en cada uno de los ejes. Al vector $(\cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}) = \mathbf{I}_r$ se le denomina **vector radial**, el cual es un vector que se dirige del eje de rotación hacia la partícula que está rotando. Es un vector compuesto por la suma de otros dos vectores.

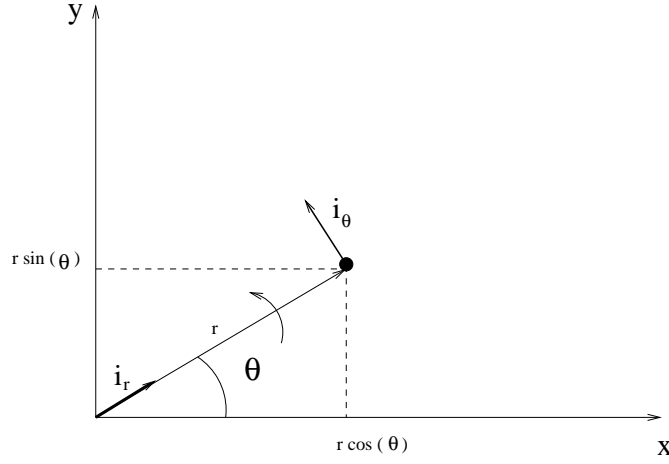


Figura 6.3: Movimiento de rotación de una partícula en un plano. Los vectores radial \mathbf{I}_r y acimutal \mathbf{I}_θ son mostrados en la figura, los dos vectores son mutuamente perpendiculares, y es por ello que el vector acimutal describe el movimiento de rotación alrededor del eje, mientras el vector radial describe el movimiento de la partícula alejándose del eje.

La velocidad de rotación a partir de la ecuación (6.18) es

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \left(-\sin\theta \frac{d\theta}{dt} \right) r \hat{\mathbf{i}} + \left(\cos\theta \frac{d\theta}{dt} \right) r \hat{\mathbf{j}} \\ &= [(-\sin\theta)\hat{\mathbf{i}} + (\cos\theta)\hat{\mathbf{j}}] r \frac{d\theta}{dt} \end{aligned} \quad (6.19)$$

Al termino $[(-\sin\theta)\hat{\mathbf{i}} + (\cos\theta)\hat{\mathbf{j}}] = \mathbf{I}_\theta$ se le denomina **vector acimutal** el cual es un vector tangente a la dirección de movimiento de la partícula. De esta forma

$$\frac{d\mathbf{I}_r}{dt} = \omega \mathbf{I}_\theta \quad (6.20)$$

En donde definimos la velocidad angular por medio de

$$\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}} \quad (6.21)$$

Las unidades de la velocidad angular son radianes/segundo.

Recordemos nuevamente los vectores radiales y azimutales, los cuales tiene un significado que se puede entender claramente en la figura 6.3:

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_r &= \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}} && \text{radial} \\ \mathbf{I}_\theta &= -\sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}} && \text{acimutal}\end{aligned}$$

Todo movimiento circular se puede describir en términos de los vectores radial y acimutal.

La velocidad tangencial del movimiento es de la forma

$$\boxed{\mathbf{v} = \left(r \frac{d\theta}{dt} \right) \mathbf{i}_\theta = (r\omega) \mathbf{i}_\theta.} \quad (6.22)$$

Esta velocidad se obtiene de la definición de radian

$$\theta \text{ (radianes)} = \frac{\text{Arco}}{r}$$

de manera que podemos derivar con respecto al tiempo a lado y lado de la ecuación y obtenemos

$$\dot{\theta} = \frac{\text{velocidad tangencial}}{r}$$

y al despejar v obtenemos la ecuación (6.22).

La magnitud de la velocidad tangencial es

$$\boxed{v = r\omega.} \quad (6.23)$$

Podemos de manera similar obtener para la aceleración angular

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\omega \mathbf{i}_\theta) = r \frac{d}{dt}(\omega \mathbf{i}_\theta) \quad (6.24)$$

Desarrollando la anterior ecuación se obtiene

$$\boxed{\mathbf{a} = (r\alpha) \mathbf{i}_\theta - (r\omega^2) \mathbf{i}_r} \quad (6.25)$$

En donde se define la aceleración angular como

$$\boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}.} \quad (6.26)$$

Las unidades de la aceleración angular son radianes/segundo², es decir que la velocidad angular nos habla de cuantos radianes recorre una partícula en un segundo. La magnitud de la componente tangencial de la aceleración es

$$\boxed{a_\theta = r\alpha}, \quad (6.27)$$

la magnitud de la componente radial es de la forma

$$\boxed{a_r = -r\omega^2 = -\frac{v^2}{r}}, \quad (6.28)$$

El signo negativo nos indica que la aceleración radial siempre está dirigida hacia el centro del movimiento, esta aceleración radial produce una fuerza denominada **fuerza centrípeta**, la cual es la que genera una trayectoria cerrada y circular.

Podemos también derivar las ecuaciones cinemáticas mas usadas para el movimiento circular uniformemente acelerado, las cuales son análogas a las del movimiento rectilíneo.

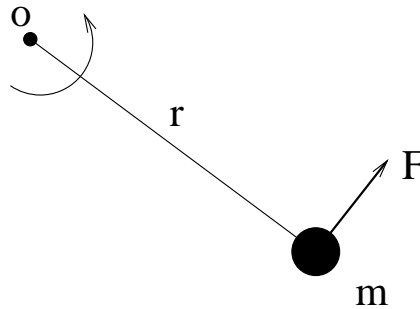
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (6.29)$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad (6.30)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\omega \quad (6.31)$$

Ejemplo 37 : *Momento de inercia de una masa puntual*

Una bola de masa $m = 5\text{kg}$ gira alrededor de un punto O con un radio $r = 1,5\text{m}$ como se muestra en la siguiente figura, la rotación se realiza sin ningún tipo de fricción.



Suponiendo que el objeto es tan pequeño que su comportamiento es el de una partícula de masa concentrada en un punto, y que la masa de la barra que la une al centro es tan pequeña que simplemente la despreciamos, encontrar

1. *la aceleración angular producida por una fuerza constante de 8 N en la dirección tangencial que muestra la flecha.*
2. *el tiempo necesario para acelerar el sistema desde el reposo hasta una velocidad rotacional de 10 revoluciones por segundo (rps).*
3. *El número de revoluciones efectuadas antes de alcanzar esta rotación.*

El momento de rotación I y la aceleración angular α están relacionados por la segunda ley de Newton para sistemas en rotación

$$\tau = I\alpha$$

En el caso de una masa puntual el momento de inercia está dado por

$$I = mr^2$$

1. *De esta forma la aceleración angular es*

$$\begin{aligned}\tau &= I\alpha \\ \alpha &= \frac{F \times r}{m \times r^2} = \frac{\tau}{I} \\ \alpha &= \frac{8 \text{ N} \times 1,5 \text{ m}}{5 \text{ kg} \times (1,5 \text{ m})^2} \\ \alpha &= 1,067 \text{ rad/s}^2\end{aligned}$$

2. *Como el momento de rotación es constante, también la aceleración angular será constante. La velocidad angular puede determinarse como*

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

Para nuestro ejemplo la velocidad angular inicial $\omega_0 = 0$, la velocidad final es de $\omega = 10 \text{ rps} = 10 \times 2\pi \text{ rad/s} = 62,8 \text{ rad/s}$, despejando t de la

anterior ecuación obtenemos.

$$\begin{aligned}\omega &= \alpha t \\ t &= \frac{\omega}{\alpha} \\ &= \frac{62,8 \text{ rad/s}}{1,067 \text{ rad/s}^2} \\ &= 58,8 \text{ s}\end{aligned}$$

3. Otro resultado mostrado anteriormente de la cinemática de la rotación es que

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta \quad (6.32)$$

en el cual θ es el desplazamiento angular medido desde el punto de partida. Para nuestro ejemplo $\omega_0 = 0$, $\omega = 62,8 \text{ rad/s}$ y $\alpha = 1,067 \text{ rad/s}^2$, la despejar θ obtenemos

$$\begin{aligned}\omega^2 &= 2\alpha\theta \\ \theta &= \frac{\omega^2}{2\alpha} \\ &= \frac{(62,8 \text{ rad/s})^2}{2,134 \text{ rad/s}} \\ &= 1848 \text{ rad} = \frac{1848}{2\pi} \\ &= 294 \text{ revoluciones}\end{aligned}$$

6.7. Trabajo y energía en un movimiento rotacional

El trabajo dW realizado por una fuerza que produce un torque τ , y que hace que un elemento se desplace un ángulo $d\theta$, es de la forma

$$\boxed{dW = \tau d\theta} \quad (6.33)$$

De forma que cuando el desplazamiento se realiza entre los ángulos θ_i y θ_f tenemos

$$\boxed{W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta} \quad (6.34)$$

Sin embargo el torque τ puede variar al cambiar el ángulo, por lo cual la integral solo puede ser evaluada si se conoce esta variación. Cuando el torque es una constante la ecuación (6.34) se convierte en

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta = \tau(\theta_f - \theta_i). \quad (6.35)$$

La ecuación (6.34) posee su análoga en el movimiento rectilíneo en la ecuación (5.4), de esta manera para producir un trabajo a partir de una fuerza es necesario producir un desplazamiento, y para producir trabajo a partir de un torque es necesario producir una rotación.

6.7.1. Energía cinética rotacional

Ya hemos hablado de la cinemática rotacional, con sus dos cantidades mas importantes el momentum angular y el torque. Ahora hablaremos de la dinámica rotacional, específicamente para el movimiento de rotación alrededor de un eje, sin considerar la translación del cuerpo.

Para un cuerpo que gira con una velocidad angular constante ω alrededor de un eje que se encuentra sobre el eje z , tenemos que la componente z del momentum angular es igual a

$$L_z = I\omega.$$

En un sistema aislado este momentum angular se conserva, por ejemplo en los planetas esta cantidad se conserva y es por esto que siempre giran a la misma velocidad sobre su propio eje. Cuando se aplica una fuerza sobre un sistema y este comienza a rotar se produce un torque, para el caso que estamos estudiando un torque externo producido por una fuerza que actúa sobre el plano (x,y) tiene como valor,

$$\tau_z = \frac{d(I\omega)}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha.$$

En donde α es la velocidad angular del sistema.

La energía cinética producida por esta rotación tiene la forma

$$\boxed{K_r = \frac{1}{2}I\omega^2} \quad (6.36)$$

La ecuación (6.36) es equivalente a la energía cinética producida por un cuerpo que se mueve en línea recta, $\frac{1}{2}mv^2$, en donde la masa se ha reemplazado por el momento de inercia I y la velocidad lineal se ha reemplazado por la velocidad angular ω .

Al igual que en el movimiento lineal, en el movimiento translacional existe un teorema de trabajo y energía el cual dice

El trabajo efectuado por el torque resultante que actúa sobre un sistema es igual al aumento en la energía cinética rotacional del sistema.

Lo anterior puesto en ecuaciones quiere decir que

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 = \Delta K_r \quad (6.37)$$

Lo que significa que cuando yo efectuó un torque sobre un sistema y lo desplazo un ángulo, efectué un trabajo, el cual cambia la energía cinética rotacional del sistema.

6.7.2. Movimiento de rotación y translación simultáneos

El movimiento mas general posible es el de rotación y traslación simultáneos, por ejemplo una pelota de béisbol se mueve en línea recta hacia el bateador, pero simultáneamente rota, lo que hace que su energía cinética total no sea simplemente $\frac{1}{2}mv^2$, sino que se tenga que realizar el calculo con la rotación de la bola al dirigirse hacia el bateador. Antes de continuar debemos realizar la siguiente afirmación,

El movimiento mas general posible que puede tener un cuerpo rígido es el de la translación de su centro de masa, mas la rotación del objeto alrededor de su centro de masa

La energía cinética total de un sistema que se mueve y rota simultáneamente es de la forma,

$$\boxed{K_{total} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2} \quad (6.38)$$

El significado de la ecuación (6.38) puede expresarse como

Siempre puede considerarse a la energía proveniente del movimiento de un cuerpo rígido como la energía cinética de translación del centro de masa del cuerpo, mas la energía cinética rotacional alrededor de un eje de rotación que pasa por el centro de masa del cuerpo.

Este enunciado destaca la importancia del centro de masa en la dinámica de los objetos rígidos. Ya que esta separación tan clara entre energías cinemáticas rotacionales y traslacionales no ocurre para ningún otro punto del cuerpo rígido. Sin embargo la elección de un eje de rotación es muy complicado, y este además puede variar con el tiempo, por lo cual la dinámica de rotación del cuerpo rígido se vuelve muy compleja. No es nuestro interés abordar este tema, ya que requeriría un tiempo mucho mayor y una enorme cantidad de herramientas matemáticas novedosas.

6.8. Taller experimental: Determinación de los momentos de Inercia

El momento de inercia nos indica la dificultad que tiene un cuerpo para efectuar un movimiento de rotación. en el presente taller experimental determinaremos el momento de inercia para algunos cuerpos con ayuda de un montaje experimental que será explicado detalladamente mas adelante. Como objetivo del presente taller tendremos

1. Determinar el momento de inercia de varios cuerpos con ayuda del principio de conservación de la energía.

Cuestionario

1. ¿Qué afirma el teorema de ejes paralelos o teorema de Steiner?. Muestrelo haciendo un dibujo.
2. ¿Cuál es la expresión para el momento de inercia de los siguientes cuerpos sólidos, todos de masa m ?.
 - Disco de radio r .
 - Anillo de radio interior r_1 y radio exterior r_2 .
 - Cilindro de altura h y radio r .

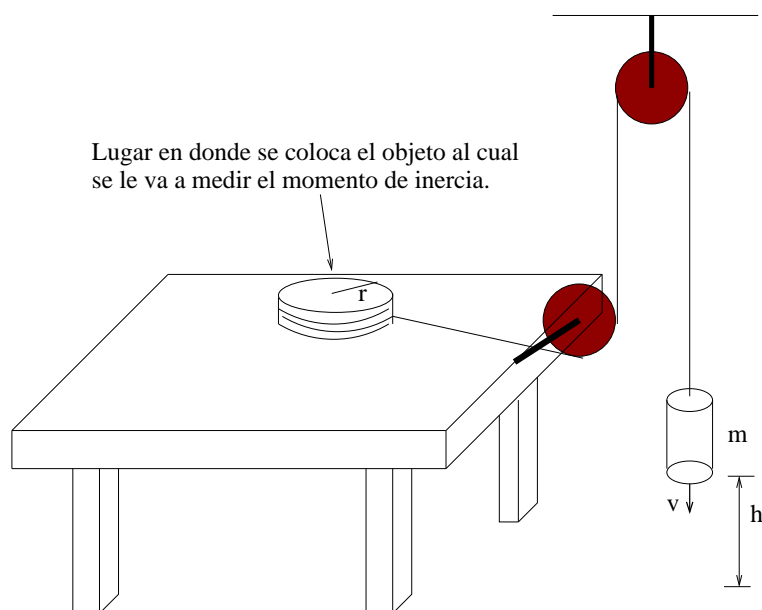


Figura 6.4: Montaje experimental para el taller de medición del momento de inercia. Sobre un tambor rotante de radio r se encuentra un objeto con momento de inercia I . Un extremo de la cuerda se encuentra arrollada alrededor del tambor. En el otro extremo de la cuerda se encuentra atado un objeto de masa m . Cuando el objeto cae por acción de la gravedad hace que el disco rote junto con el objeto que tenga sobre él.

3. tenemos un disco, un anillo y un cilindro, todos de la misma masa $m = 500$ gr. El disco y el cilindro tienen el mismo radio $r = 10$ cm, mientras el anillo tiene radios $r_1 = 9,8$ cm y $r_2 = 10$ cm. Calcule el momento de inercia para cada uno de estos cuerpos y expréselos tanto en unidades *cgs* como *MKS*. ¿En qué unidades le parece más cómodo?.

La experiencia

El montaje experimental se muestra en la figura 6.4. Queremos encontrar una relación entre el momento de inercia del objeto rotante, el tiempo t tomado por la masa para llegar al suelo desde una altura inicial h . Por conservación de la energía, y despreciando pérdidas por fricción, en el instante

en que la masa m llega al suelo, se cumple:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2 = mgh. \quad (6.39)$$

En donde:

v_f es la velocidad final de la masa m .

ω_f velocidad angular final del tambor.

I es el momento de inercia de sistema que está rotando.

La velocidad v_f es exactamente la misma velocidad lineal que tienen los puntos del borde del tambor. Es decir que:

$$v_f = r\omega_f \quad (6.40)$$

en donde r es el radio del tambor. de esta forma la ecuación (6.39) se transforma en:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}I\frac{v_f^2}{r^2} = mgh \quad (6.41)$$

Al despejar el momento de inercia I tenemos:

$$I = mr^2 \left(\frac{2gh}{v_f^2} - 1 \right) \quad (6.42)$$

La velocidad final de la masa m depende de la aceleración a con la cual caiga la masa, y del tiempo t que dure hasta llegar al suelo desde la altura h . esta aceleración NO es la aceleración de la gravedad como se vio en capítulos anteriores en la máquina de Atwood.. No conocemos a , necesitamos despejarla de:

$$v_f = at \text{ y } v_f^2 = 2ah \\ a = \frac{v_f}{t} \rightarrow v_f^2 = \frac{2v_f h}{t} \rightarrow v_f = \frac{2h}{t}$$

Reemplazando v_f en la ecuación (6.42) tenemos:

$$I = mr^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right) \quad (6.43)$$

Ahora realice el siguiente procedimiento:

1. Determine experimentalmente por medio de la ecuación (6.43) el momento de inercia del sistema tambor + soporte. Escoja una altura superior a 1.5 metros para poder tomar un tiempo fiable.
Elija una masa m tal que con un leve impulso el sistema empiece a caer. Tome 5 valores diferentes del tiempo de caída.
¿Cómo puede compensar la fricción cuando la plataforma está rotando?. Incluya este efecto en su análisis.
2. Coloque el disco sobre el tambor, de tal manera que el centro del anillo coincida con el eje del tambor. Determine el momento de inercia del disco con una altura h constante y variando la masa m . Tome 5 valores de t . Recuerde que ahora el momento de inercia del sistema rotante es el disco+soporte+tambor.
3. Reemplace el disco por el anillo y repita el proceso anterior.
4. Coloque simultáneamente el disco y el anillo. por el proceso anterior encuentre el momento de inercia del sistema disco+anillo.
5. Coloque un cilindro verticalmente sobre el centro del disco y determine el momento de inercia del cilindro.
6. Usando el teorema de ejes paralelos demuestre **experimentalmente** el teorema de los ejes paralelos para el momento de inercia.

Realizados los anteriores pasos realice los siguientes análisis:

1. Grafique el momento de inercia de cada uno de los cuerpos estudiados: disco, anillo, cilindro, como función de la masa del objeto que cae. Usted va a obtener tres gráficas. En cada una de las gráficas muestre el valor teórico y el valor experimental en la misma gráfica. El valor experimental debería ser independiente del valor de la masa m que cae. ¿Qué observa?, ¿es el valor experimental el mismo para diferentes masas?. Trate de explicar por qué.
2. Dé un único valor para el momento de inercia como función de la masa y compárelo con el valor teórico.
3. Recuerde que lo que ha obtenido es una colección de valores para el momento de Inercia como función de la masa m . Explique su criterio para dar un valor único en el punto anterior.

4. Experimentalmente ¿qué tan buena es la afirmación de que?:

$$I_{disco+anillo} = I_{disco} + I_{anillo} \quad (6.44)$$

y

$$I_{disco+cilindro} = I_{disco} + I_{cilindro} \quad (6.45)$$

5. Compare el valor esperado teóricamente para el resultado de la verificación del teorema de los ejes paralelos.
6. Entregue los resultados de los puntos anteriores tanto en unidades *cgs* como en *MKS*. ¿En cuál sistema de unidades es mas cómodo trabajar?, ¿por qué?.

6.9. Resumen y glosario

1. La ley de Newton para el movimiento rotacional se puede expresar en la forma

$$\tau = I\alpha$$

en donde τ es el torque producido por una fuerza, I es el momento de inercia del objeto que es puesto a rotar, y α es la velocidad angular.

2. El momento de inercia I es una cantidad similar a la masa, y expresa la dificultad que posee un cuerpo para rotar cuando se encuentra detenido, o para detenerse una vez que está rotando a velocidad constante.
3. El momento de inercia para una partícula simple de masa m que está rotando con respecto a un eje con un radio r es igual a $I = mr^2$.
4. Para un sistema de masa puntuales el momento de inercia se obtiene como la suma total de los momentos de inercia individuales.
5. Para un cuerpo rígido el momento de inercia se puede obtener por medio de la integración sobre todos los elementos de masa, de forma que

$$dI = r^2 dm \rightarrow I = \int_v r^2 dm.$$

6. El momento de inercia no solamente depende de la masa del sistema, sino también de la forma como esta la masa distribuida en el cuerpo.

7. Si se conoce el momento de inercia I_0 de un cuerpo alrededor de un eje que pasa por el centro de masa del cuerpo, se puede encontrar el momento de inercia I alrededor de cualquier eje paralelo a éste utilizando el teorema de ejes paralelos, que expresa que

$$I = I_0 + mR^2$$

en donde R es la distancia entre los dos ejes.

8. Un torque da origen a un movimiento rotacional y produce un trabajo dado por

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta$$

9. La energía cinética de rotación es de la forma

$$K_r = \frac{1}{2} I \omega^2$$

10. El teorema de trabajo y energía para sistemas rotacionales expresa que cuando un torque efectúa un trabajo sobre un sistema, este trabajo realizado es igual al cambio en la energía cinética del sistema.
11. Para el caso de cuerpos que posean simultáneamente movimientos de rotación y translación, su energía cinética puede expresarse como la suma de la energía cinética de rotación mas la de translación.
12. La cantidad de momentum angular es un vector definido por

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}.$$

13. La cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas es la suma vectorial de las cantidades de movimiento angular individuales.
14. Para un cuerpo rígido con momento de inercia I que gira con una velocidad angular ω la cantidad de momentum angular puede expresarse como

$$\mathbf{L} = I\omega.$$

15. la segunda ley de Newton para el movimiento rotacional puede expresarse como

$$\tau_{ext} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

16. Para el caso en el cual el torque externo es cero $dL/dt = 0$ y entonces el momentum angular se conserva.
- 17.

6.10. Evaluación

1. Indique si las manecillas de los segundos en un reloj se encuentran en equilibrio rotacional o translacional.
2. Determinada fuerza actuó sobre un cuerpo rígido. ¿Podría provocar un cambio en sus energías de rotación y translación?.
3. Un estudiante calcula la energía cinética de un cuerpo rígido en función únicamente de la energía de rotación, ¿implica esto que el centro de masa no este en movimiento?.
4. Determinado cuerpo rígido posee el mismo valor de momento de inercia para tres ejes mutuamente perpendiculares que pasan por su centro, ¿qué puede decirse de la forma del objeto?.
5. ¿Puede sobre un cuerpo existir varios torque y el cuerpo no estar rotando?.
6. Se golpea una bola de billar en un punto muy por encima del centro, de manera que se verifica inicialmente la condición $R\omega_0 > v_0$ ¿en qué dirección actuara la fuerza de fricción hasta que la bola comience a rodar?.
7. Se golpea una bola de billar exactamente a la altura del centro. Explique por qué la bola no puede rodar inicialmente.
8. ¿Qué se necesita para que cambie la velocidad de rotación de la tierra?.
9. Estime la cantidad de energía rotacional que tiene la tierra por girar sobre su propio eje.
10. Se le proporciona una esfera y un plano inclinado. Explique como podría determinar si la esfera es hueca o no.

6.11. Información de retorno

A continuación encontrará respuestas a las preguntas y ejercicios planteados en la parte inicial, evaluación de conceptos previos, y final del capítulo, evaluación. Las respuestas pueden ser ampliadas por usted y la solución a los ejercicios no es única. Se busca que usted amplíe la respuesta, la mejore y encuentre otros métodos de solución a los ejercicios. Algunas preguntas no se encuentran contestadas ya que su respuesta puede variar de una persona a otra.

Conceptos previos

1. ¿Qué es el momentum lineal?

El momentum lineal se define como la multiplicación de la masa de un cuerpo por su velocidad. En un sistema aislado el momentum lineal total se conserva.

2. Cuando una bola de billar rota sin desplazarse ¿tiene momentum lineal?

No, solamente tiene momentum angular.

3. ¿Un cuerpo que rota tiene energía cinética?

Si, es energía cinética rotacional.

4. La ley de la inercia nos dice que todo cuerpo que se este moviendo en linea recta con velocidad constante tiene una dificultad a detenerse o a moverse si esta quieto. Para un cuerpo que está rotando ¿Existirá una dificultad a rotar o a detener su rotación?

Si, existe una dificultad a detener un cuerpo que rota, o a ponerlo a rotar si se encuentra detenido. Esta propiedad se puede medir por el momento de inercia.

Evaluación

1. Indique si las manecillas de los segundos en un reloj se encuentran en equilibrio rotacional o translacional.

Podemos ubicar el centro de masa del reloj, en el mejor de los casos este centro de masa puede coincidir con el eje de las manecillas, si esto

ocurre el reloj se encuentra en equilibrio translacional en el centro de masa pero no en equilibrio rotacional.

2. Determinada fuerza actuó sobre un cuerpo rígido. ¿Podría provocar un cambio en sus energías de rotación y translación?.

Si, depende de la manera como se aplique la fuerza.

3. Un estudiante calcula la energía cinética de un cuerpo rígido en función únicamente de la energía de rotación, ¿implica esto que el centro de masa no este en movimiento?.

Si, si el estudiante fue lo suficientemente riguroso el calculo de la energía cinética es la suma de las energías de translación del centro de masa y de rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa, si el termino de translación no aparece es seguramente por qué el cuerpo está rotando unicamente.

4. Determinado cuerpo rígido posee el mismo valor de momento de inercia para tres ejes mutuamente perpendiculares que pasan por su centro, ¿qué puede decirse de la forma del objeto?.

El objeto es una esfera.

5. ¿Puede sobre un cuerpo existir varios torque y el cuerpo no estar rotando?.

Si, como se ve en la figura 6.1.

6. Se golpea una bola de billar en un punto muy por encima del centro, de manera que se verifica inicialmente la condición $R\omega_0 > v_0$ ¿en qué dirección actuara la fuerza de fricción hasta que la bola comience a rodar?.

Como sugerencia por favor realice el experimento en un billar.

7. Se golpea una bola de billar exactamente a la altura del centro. Explique por qué la bola no puede rodar inicialmente.

Por que se golpea exactamente en un eje que pasa por el centro de masa, de esta forma no es posible que la bola rote.

8. ¿Qué se necesita para que cambie la velocidad de rotación de la tierra?.

Que una gran fuerza efectué un torque sobre la tierra.

9. Estime la cantidad de energía rotacional que tiene la tierra por girar sobre su propio eje.

Este ejercicio se deja para el estudiante, como datos de entrada debe saber que la velocidad angular de la tierra es de $\omega = \frac{2\pi}{24 \text{ horas}}$, utilice la ecuación (6.36) y para el momento de inercia utilice el de una esfera perfecta con la masa de la tierra y el radio de la tierra.

10. Se le proporciona una esfera y un plano inclinado. Explique como podría determinar si la esfera es hueca o no.

Una esfera hueca rueda mas rápido por un plano inclinado que una esfera no hueca.

Palabras claves para búsqueda en Internet

A continuación se presentará una serie de palabras útiles para la búsqueda en Internet, las palabras se han probado en el buscador

<http://www.google.com>

no tienen ortografía dado que el buscador es universal, y en por que en ocasiones va a tener que utilizar teclados que no tienen tildes o eñes.

momentum angular, curso de fisica, torque, momento, conversion de unidades, masa de la tierra, radio de la tierra.

Bibliografía recomendada:

Se puede consultar al final del texto, el número que encuentra al final de la referencia es el número correspondiente al texto en la bibliografía final.

- Formulas y tablas matemáticas en general [1].
- Mediciones y experimentos en conservación del momentum angular [2, 13, 9].
- Momentum angular [7, 8, 14, 19, 20, 21, 10, 9].
- Conversión de unidades, radio y masa de la tierra [18].

Capítulo 7

Movimiento periódico: oscilatorio y ondulatorio

7.1. Introducción

Uno de los mas importantes movimientos que se presentan en la naturaleza es el movimiento periódico, en general ligado a oscilaciones. En nuestra vida cotidiana existen eventos que suceden de forma rutinaria, la salida del sol cada día, las estaciones, el movimiento de una lámpara que cuelga del techo de una iglesia, etc...

El movimiento periódico constituye una parte muy interesante e importante para la física. En este capítulo vamos a estudiar las propiedades del movimiento periódico, ya hemos visto las definiciones de periodo y frecuencia, las estudiaremos con mas detalle y ampliaremos las herramientas utilizadas en su estudio.

7.2. Evaluación de conocimientos previos

- ¿Qué se entiende por la palabra armónico?.
- De un ejemplo de un movimiento oscilatorio.
- Por que puede utilizarse un péndulo para medir el tiempo.
- ¿Cual es la ecuación que gobierna el movimiento de un péndulo?.

- ¿Cuál es la ecuación que gobierna el movimiento de un resorte?
- ¿En qué se parecen los movimientos de un péndulo y un resorte?

7.3. Movimiento armónico simple

Un movimiento armónico siempre ocurre cuando tenemos una fuerza que es opuesta y proporcional a la distancia de desplazamiento. Un ejemplo de ello es un resorte, el cual ejerce una fuerza opuesta a el movimiento del resorte, denominada **fuerza restauradora**, en una dimensión esta fuerza tiene una expresión simple

$$\boxed{F_x = -kx} \quad (7.1)$$

Esta ecuación es conocida como ley de Hooke, o ecuación del resorte. Como $F_x = ma_x$, la ecuación (7.1) toma la forma,

$$\begin{aligned} ma_x &= -kx \\ a_x &= -\frac{k}{m}x \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega^2x \end{aligned} \quad (7.2)$$

De la ecuación (7.2) podemos realizar las siguientes observaciones,

- La aceleración $\frac{d^2x}{dt^2}$ es proporcional al desplazamiento, el valor de la constante de proporcionalidad es $-\omega^2 = -k/m$.
- Siempre que una ecuación de movimiento sea de la forma (7.2) el movimiento será de tipo oscilatorio.
- La solución a la ecuación es de la forma,

$$\boxed{x(t) = A \sin(\omega t + \delta)} \quad (7.3)$$

en donde A y δ son constantes que expresan el desplazamiento máximo para A , y el punto del ciclo en el cual comienza el movimiento para δ .

Vamos a mostrar que la ecuación (7.3) es solución de la ecuación (7.2). Para ello basta derivar dos veces con respecto al tiempo la posición, la primera derivada es igual a la velocidad

$$v_x = \frac{d}{dt}(A \sin(\omega t + \delta)) = A\omega \cos(\omega t + \delta) \quad (7.4)$$

La segunda derivada es igual a la aceleración.

$$a_x = \frac{d^2}{dt^2}(A \sin(\omega t + \delta)) = \frac{d}{dt} A \omega \cos(\omega t + \delta) = -A \omega^2 \sin(\omega t + \delta) \quad (7.5)$$

Ahora simplemente reemplazamos los resultados en la ecuación (7.2)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\omega^2 x \\ -A \omega^2 \sin(\omega t + \delta) &= -\omega^2 A \sin(\omega t + \delta) \\ -A \omega^2 \sin(\omega t + \delta) &= -A \omega^2 \sin(\omega t + \delta) \end{aligned}$$

El movimiento es de tipo senoidal, es decir que es descrito por una función seno, la cual es una ecuación armónica. El movimiento descrito por la ecuación (7.2) es denominado **movimiento armónico simple**.

7.3.1. Descripción del movimiento armónico por medio de la función seno

Vamos a realizar una descripción del movimiento armónico simple, para comenzar la solución (7.3), $x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$, tiene tres parámetros importantes,

- A , describe la máxima amplitud alcanzada en el movimiento, ya que la función seno oscila entre los valores 1 y -1. Este término es denominado **amplitud** del movimiento.
- ω especifica la rapidez con la cual se realiza un ciclo completo. o de una mejor manera, el numero de ciclos de movimiento que se realiza por unidad de tiempo medida por lo general en segundos.

Cuando $t = 0s$ el ángulo $(\omega t + \delta) = \delta$ indica el momento en el cual se inicia el movimiento, como se indica en la figura 7.1, ya que en este punto la posición es de $A \sin(\delta)$.

Al transcurrir un segundo, $t = 1s$, el ángulo a evolucionado a $(1\omega + \delta) = (\omega + \delta)$. Es decir que el ángulo aumenta en ω radianes. Y en este punto la posición es igual a $A \sin(\omega + \delta)$.

- El número de oscilaciones, o ciclos de movimiento, que tiene lugar en un segundo recibe el nombre de **frecuencia**, es fácil definirla a partir de la frecuencia f

$$f = \frac{\text{Número de oscilaciones}}{\text{tiempo empleado (s)}} \quad (7.6)$$

La frecuencia está relacionada con ω mediante la relación

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{ó} \quad \omega = 2\pi f \quad (7.7)$$

A ω se le denomina **frecuencia angular**, y su unidad es *radianes/segundo*. La unidad de la frecuencia es *ciclos/segundo* = c/s , es también denominada **hertz**, un hertz es equivalente a la realización de un ciclo completo en un segundo. A ω también se le denomina **velocidad angular**, ya que es la velocidad en la cual se recorre un ángulo de 2π .

- El ángulo $(\omega t + \delta)$ se denomina **ángulo de fase**.
- Se denomina **periodo** de movimiento (T) a el tiempo en el cual se efectúa un ciclo completo, o de manera mas general,

$$\text{Periodo} = \frac{\text{Tiempo empleado}}{\text{Numero de ciclos}} \quad (7.8)$$

La relación entre el periodo y la frecuencia está dado por,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}. \quad (7.9)$$

El periodo es el inverso de la frecuencia.

- A la cantidad δ se le denomina **constante de fase**. Este ángulo determina en que punto del ciclo empieza el movimiento, como ya se había mencionado. Cuando $\delta = \pi/2$, podemos hacer $A \sin(\omega t + \pi/2) = A \cos(\omega t)$, por las propiedades de las funciones seno y coseno.
- En la figura 7.1 se ven gráficamente las cantidades anteriormente descritas.

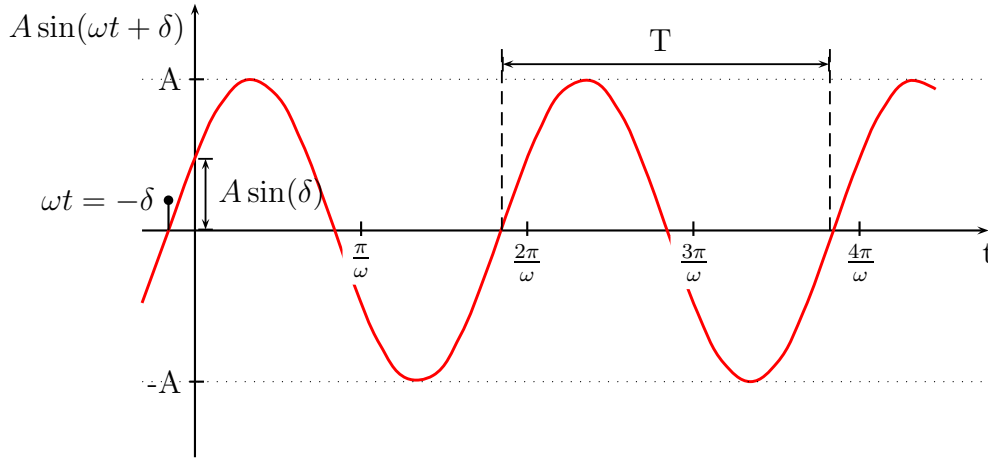


Figura 7.1: Diagrama de distancia contra tiempo en un movimiento periódico de la forma $x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$

7.3.2. Velocidad y aceleración en un movimiento periódico

En un movimiento periódico la ecuación de movimiento es de la forma

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta). \quad (7.10)$$

La anterior ecuación tiene como gráfica la figura 7.1. Para obtener la aceleración debemos derivar la ecuación de movimiento con respecto al tiempo.

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{dx(t)}{dt} \\ v(t) &= \frac{d}{dt} A \sin(\omega t + \delta) \\ v(t) &= A\omega \cos(\omega t + \delta) \end{aligned} \quad (7.11)$$

La ecuación (7.11) tiene como representación gráfica la siguiente:

En la figura 7.2 hemos representado la velocidad, en $t = 0$ la velocidad inicial es $A\omega \cos(\delta)$, el periodo de la velocidad es exactamente el mismo que el del desplazamiento. La velocidad máxima alcanzada es igual a $A\omega$. Nótese que la velocidad máxima es igual a la amplitud máxima multiplicada por ω , la frecuencia angular o **velocidad angular**.

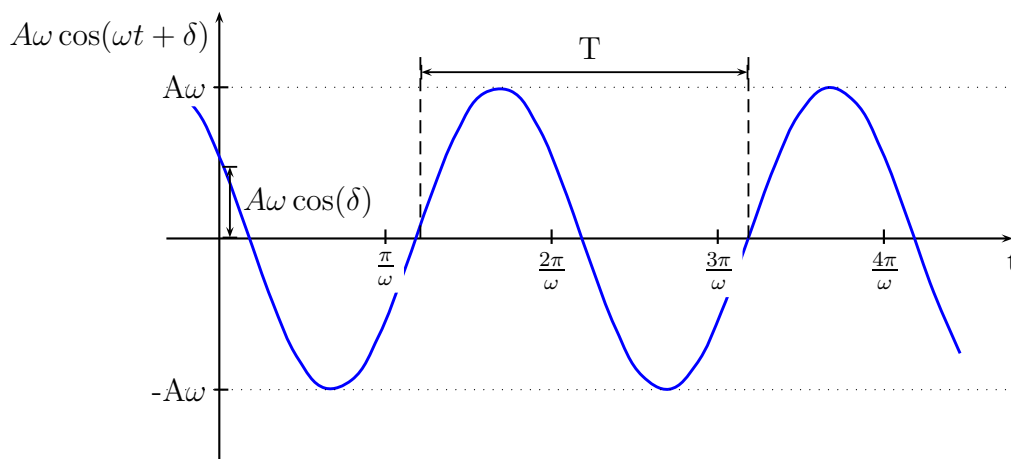


Figura 7.2: Velocidad contra tiempo en un movimiento periódico, el periodo T es el mismo que en la gráfica de posición contra tiempo.

Las ecuaciones (7.10) y (7.11) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, δ y A . En donde suponemos que conocemos la frecuencia de movimiento. Las ecuaciones están completamente determinadas si se conocen las constantes A , ω y δ .

Para calcular la aceleración del movimiento periódico debemos derivar la velocidad con respecto al tiempo.

$$\begin{aligned}
 a(t) &= \frac{dv(t)}{dt} \\
 a(t) &= \frac{d}{dt} A\omega \cos(\omega t + \delta) \\
 a(t) &= -A\omega^2 \sin(\omega t + \delta)
 \end{aligned} \tag{7.12}$$

La ecuación (7.12) tiene como gráfica la mostrada en la figura 7.3

La gráfica es igual a la del desplazamiento, solo que la amplitud máxima es ahora de la forma $A\omega^2$, y la función seno se encuentra multiplicada por un menos.

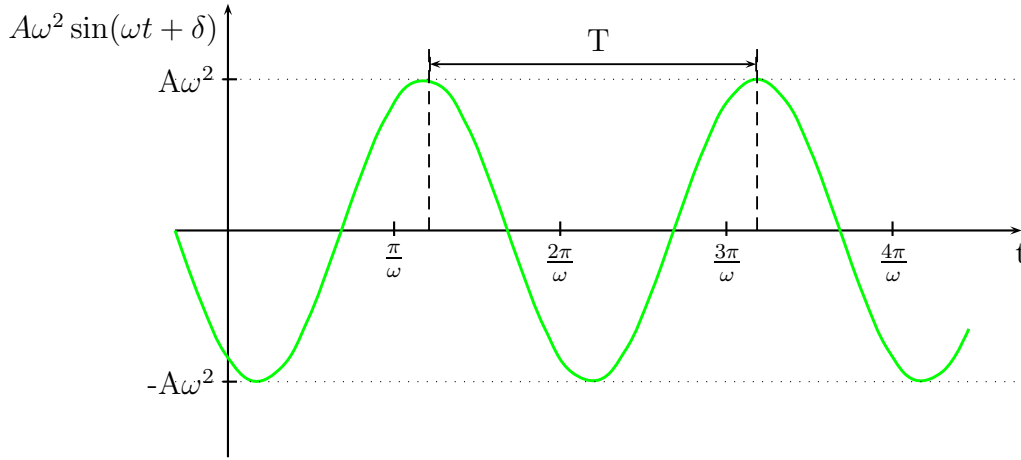


Figura 7.3: Aceleración contra tiempo en un movimiento periódico.

7.4. Energías cinética y potencial en el movimiento armónico simple

La ecuación de la fuerza para un movimiento periódico unidimensional es de la forma,

$$F_x = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega^2 x \quad (7.13)$$

En el caso del sistema masa y resorte la ecuación es de la forma $F_x = -kx$, de donde se obtiene que $\omega^2 = k/m$. La energía potencial de este sistema es igual a menos el trabajo realizado cuando el sistema se mueve desde una posición inicial $x_0 = 0$ hasta una posición final x , de esta forma la energía potencial es de la forma

$$\begin{aligned} U_p &= - \int_0^x F_x dx \\ &= m\omega^2 \int_0^x x dx \\ &= \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \end{aligned}$$

La energía potencial para un movimiento armónico simple es de la forma

$$U_p = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (7.14)$$

Para el caso del sistema masa resorte la anterior ecuación es de la forma

$$U_p = \frac{1}{2}kx^2 \quad (7.15)$$

La energía total del sistema es igual a la suma de la energía cinética mas la energía potencial, la cual es una constante en un sistema aislado.

$$E_{total} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \text{constante} \quad (7.16)$$

La ecuación (7.16) expresa el principio de conservación de la energía para un movimiento armónico simple.

La máxima amplitud de oscilación en un movimiento armónico es igual a A , y cuando en un resorte o un péndulo se alcanza esta máxima oscilación la energía cinética del movimiento es igual a cero, y su energía potencial es máxima. De esta forma la energía potencial en ese punto será igual a $U_p = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$, y esta será a su vez igual a la energía total de oscilación, al igualar a la energía total de la ecuación (7.16) obtenemos,

$$\frac{1}{2}m\omega^2 A = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (7.17)$$

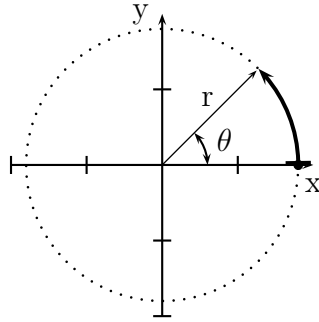
De la ecuación (7.17) podemos despejar la velocidad en cualquier punto,

$$v_x = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} \quad (7.18)$$

En la expresión (7.18) se puede observar que cuando $x = A$, la velocidad es cero, lo cual es cierto dado que esta distancia corresponde al máximo desplazamiento permitido.

7.5. Movimiento circular uniforme

Hasta ahora hemos estudiado el movimiento armónico simple en una sola dimensión, ahora vamos a estudiar un tipo de movimiento muy interesante denominado **movimiento circular uniforme**, el cual se efectúa en un plano por una partícula de masa m que gira alrededor de un eje manteniendo la distancia fija, la velocidad angular del movimiento es una constante.



¿Como describir matemáticamente este movimiento?, podemos situar la partícula de masa m en un plano de coordenadas rectangulares (x,y) , sin embargo notaremos de la anterior figura podemos observar que es mas facil utilizar un sistema de coordenadas polares (r, θ) , por las siguientes razones:

- El radio de rotación permanece constante, $r = r_0$, esto es la característica fundamental de todo movimiento circular.
- El ángulo de rotación θ está cambiando de forma constante a una velocidad angular dada por

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}. \quad (7.19)$$

- La aceleración angular es cero, $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0$, por esta razón el movimiento recibe el nombre de *circular uniforme*.
- Por la ecuación (7.20) el ángulo en función del tiempo es

$$\theta = \omega t \quad (7.20)$$

y las coordenadas se pueden expresar como

$$x(t) = r_0 \cos(\omega t) = r_0 \sin(\omega t + \pi/2) \quad (7.21)$$

$$y(t) = r_0 \sin(\omega t) \quad (7.22)$$

De la forma de las ecuaciones (7.21) y (7.22) podemos ver que el movimiento circular uniforme es un tipo de movimiento armónico simple en dos dimensiones, en la cual en el eje x el ángulo de fase $\delta = \pi/2$. Además la amplitud del movimiento r_0 es una constante.

En realidad lo que se observa es que la proyección del movimiento sobre cada uno de los ejes es un movimiento armónico simple. En resumen:

El movimiento armónico simple de velocidad angular ω puede considerarse como la descomposición en componentes rectangulares de un movimiento circular uniforme de velocidad angular ω .

Y desde el punto de vista opuesto puede decirse que:

El movimiento circular uniforme es la suma vectorial de dos oscilaciones armónicas simples y mutuamente perpendiculares, de igual amplitud y frecuencia, pero cuyas fases difieren en $\pi/2$ radianes.

7.6. Oscilaciones en un péndulo simple

Otro ejemplo muy interesante de movimiento armónico simple es el de un péndulo. El péndulo es una masa m que cuelga de una cuerda tan ligera que se considera sin masa, la cuerda se encuentra atada de un extremo. Además no existe fricción en las partes móviles del péndulo, de manera que no pierde energía por disipación de calor. Un objeto como el anteriormente descrito se denomina **péndulo ideal**.

En la figura 7.4 vemos el diagrama de fuerzas sobre el péndulo simple. El péndulo es sostenido por una cuerda de longitud l , esta longitud es medida hasta el centro de masa del péndulo, la masa del péndulo es m . Las fuerzas ejercidas sobre el sistema son

- La fuerza de gravedad sobre la masa, que posee una magnitud de mg y una dirección hacia abajo. Esta fuerza se puede descomponer para todo ángulo en dos componentes,

$$F_y = mg \cos(\theta) \quad \text{Fuerza sobre el eje Y.} \quad (7.23)$$

$$F_x = mg \sin(\theta) \quad \text{Fuerza sobre el eje X.} \quad (7.24)$$

- La tensión \mathbf{T} que la cuerda ejerce sobre la masa, esta fuerza se encuentra dirigida hacia el punto de apoyo del péndulo, como lo muestra la figura 7.4. Esta fuerza es igual a la fuerza en la misma dirección ejercida por la gravedad, es decir

$$T = mg \cos(\theta) \quad (7.25)$$

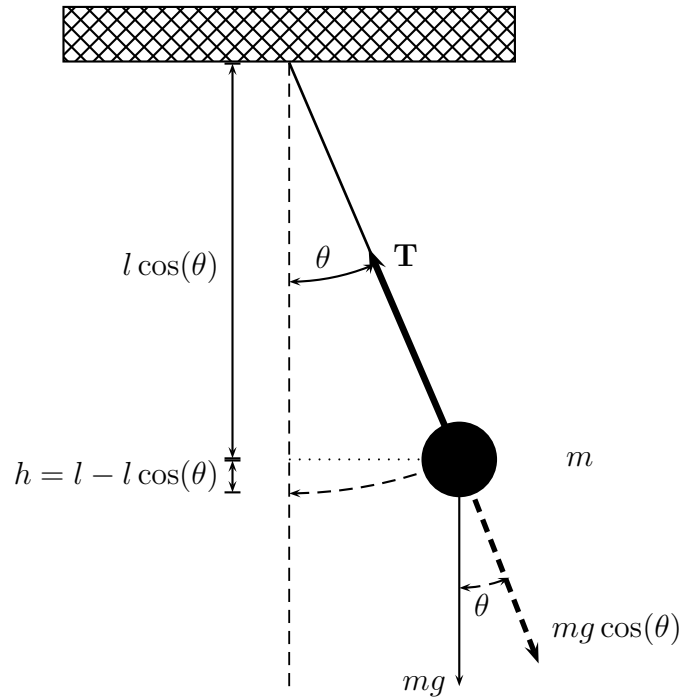


Figura 7.4: Diagrama de fuerzas del péndulo simple. La longitud de la cuerda es l y la masa es m , θ es el ángulo de desplazamiento. La tensión de la cuerda T y la componente del peso $mg \cos(\theta)$ son iguales, de lo contrario el péndulo tendría una cuerda que se estiraría, lo cual no es la suposición inicial. En el texto se muestra como en este sistema se encuentra una ecuación de la forma $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta$ que corresponde a un movimiento armónico simple para pequeñas oscilaciones.

Para pequeñas oscilaciones, es decir para un ángulo θ muy pequeño, el ángulo varía según la ecuación,

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta} \quad (7.26)$$

La ecuación (7.26) tiene la misma forma de una ecuación de movimiento armónico simple, y la frecuencia es de la forma

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}} \quad (7.27)$$

El periodo de movimiento es¹

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} \quad (7.28)$$

De esta forma vemos como el péndulo simple es un ejemplo de movimiento armónico en su movimiento angular. La aproximación a pequeños ángulos es válida para $\theta \ll 1$ radian.

Cuando el ángulo de oscilación, θ , es muy grande, la aproximación no puede ser usada. Y el movimiento se convierte en **inarmónico**. En este tipo de movimiento el periodo depende del ángulo que barre el péndulo. Nótese que en el periodo encontrado para el oscilador armónico, ecuación (7.28), no depende del ángulo, solo depende del valor de la gravedad y de la longitud del péndulo.

Las leyes de movimiento no pudieron ser enunciadas correctamente hasta que los conceptos de tiempo y distancia fueron puestos en claridad. El descubrimiento del movimiento pendular permitió la creación de relojes para medir tiempos de manera mas precisa. Los relojes sencillos de pared y cuerda aun funcionan mediante estos mecanismos, ya que la ecuación (7.28) permite medir el tiempo mediante un péndulo en un sitio de gravedad g con un péndulo de longitud l .

Ejemplo 38 *El reloj del abuelo:*

¹No se debe confundir el periodo T con la tensión \mathbf{T} , la tensión es un vector originado como respuesta a una fuerza. El periodo es el tiempo empleado por un sistema en realizar un ciclo cualquiera.

En general todos hemos visto los relojes que utilizan un péndulo para obtener tanto energía como una medida del tiempo. Suponga que usted desea reparar el reloj del abuelo, el cual tiene un sistema como estos, el problema es que se ha perdido la masa del péndulo, y se desea reemplazar por otra masa tal que suspendida dure en cada oscilación un tiempo de 5 segundos.

Para comenzar se debe notar que de la ecuación (7.28) el tiempo de oscilación idealmente no depende de la masa involucrada. Sin embargo en la práctica se tiene la fricción del aire, que hace detener fácilmente masas pequeñas debido a la baja inercia de las mismas. Por lo tanto es aconsejable utilizar una masa grande, claro esta que se debe utilizar una masa acorde con las capacidades de resistencia del reloj. Nuestro problema por lo tanto será calibrar el tiempo del reloj.

Vamos a tomar como medida de gravedad $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. De esta forma de (7.28) despejamos l .

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \\ l &= \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{g} \\ l &= \left(\frac{5 \text{ s}}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{9,8 \text{ m/s}^2} \\ l &= 0,064 \text{ m} = 6,4 \text{ cm.} \end{aligned} \tag{7.29}$$

Ejemplo 39 *Energía en un péndulo simple:*

Estudiar el movimiento del péndulo simple desde el punto de vista de la conservación de la energía.

Haciendo referencia a la figura 7.4, se puede calcular la energía potencial gravitatoria, en donde el cero de energía potencial es el punto mas bajo de oscilación. Es decir mgl , cuando el péndulo se eleva un ángulo θ ha cambiado su altura por $mgl \cos(\theta)$. La diferencia de energía potencial es de la forma

$$\begin{aligned} U_p &= mgh \\ &= mgl - mgl \cos(\theta) \\ &= mgl(1 - \cos(\theta)) \end{aligned} \tag{7.30}$$

La fuerza de tensión \mathbf{T} es siempre perpendicular a la dirección de movimiento, por lo tanto no efectúa trabajo sobre la masa, y no aporta ningún cambio a la energía potencial.

La energía cinética es de la forma

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \end{aligned} \quad (7.31)$$

Ya que recordemos que la velocidad tangencial v es el producto de la velocidad angular por el radio, $v = l \frac{d\theta}{dt}$.

Cuando el péndulo se halla en el extremo de la oscilación, a un ángulo θ_0 , la velocidad es cero, y la energía potencial será igual a la energía total del sistema. Es decir,

$$E_{total} = U_p(\theta_0) = mgl(1 - \cos(\theta_0)). \quad (7.32)$$

Por conservación de la energía la suma de las energías cinética y potencial debe ser igual a (7.32), por lo tanto

$$\boxed{mgl(1 - \cos(\theta_0)) = mgl(1 - \cos(\theta)) + \frac{1}{2}ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2} \quad (7.33)$$

De la anterior ecuación podemos despejar la velocidad angular en función del desplazamiento, obteniendo.

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{g}{l} (\cos(\theta) - \cos(\theta_0)). \quad (7.34)$$

Recordemos que θ_0 es un ángulo fijo que corresponde a la máxima oscilación posible.

7.7. Oscilaciones amortiguadas

En la vida diaria observamos fuerzas de carácter disipativo, también llamadas resistivas, cuyo efecto es oponerse al movimiento. La fuerza de fricción es una de ellas. Este tipo de fuerzas actúan continuamente en un sistema hasta que hace que este se detenga. Por ejemplo cuando dejamos que un carro ruede libremente sin acelerarlo, este termina por detenerse debido a una enorme cantidad de fuerzas de fricción que actúan sobre él, en las llantas, los engranajes internos, etc...

Nuestro interés es mostrar el efecto de una fuerza de fricción sobre un sistema que oscila libremente. Por ejemplo un resorte que sujeta una masa y es sumergido en aceite, o un péndulo dentro del agua. Para el caso del resorte la ecuación de la fuerza es de la forma

$$\begin{aligned} m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) &= -kx \\ \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) &= - \left(\frac{k}{m} \right) x \\ \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) &= -\omega^2 x. \end{aligned}$$

Una fuerza resistiva se opone al movimiento del sistema, por lo cual actúa en dirección opuesta a el movimiento. Es usual representar esta fuerza como proporcional a la velocidad, si suponemos un movimiento sobre el eje X, la ecuación es de la forma.

$$\boxed{F_r = -bv_x} \quad (7.35)$$

En la cual b es una constante de proporcionalidad que nos indica la magnitud de la fuerza. El signo menos nos indica que esta fuerza se opone a la dirección del movimiento. La ecuación de movimiento para el caso del resorte que se mueve sobre el eje x ahora toma la forma,

$$\boxed{m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega^2 x + F_r = -m\omega^2 x - b \frac{dx}{dt}} \quad (7.36)$$

La ecuación (7.36) la podemos escribir como,

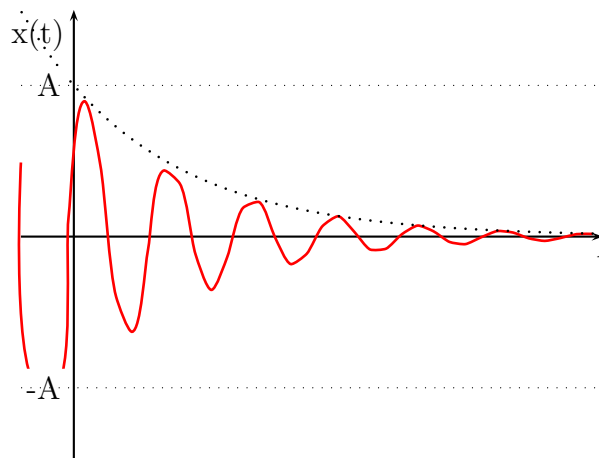
$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{b}{m} \left(\frac{dx}{dt} \right) - \omega^2 x. \quad (7.37)$$

La solución de este tipo de ecuaciones se logra mediante técnicas matemáticas de ecuaciones diferenciales, nosotros no nos preocuparemos por desarrollar estas técnicas, nos limitaremos a dar solución a la ecuación (7.37).

$$\boxed{x(t) = A \exp \left[-\frac{b}{2m} t \right] \sin \left[\sqrt{\omega^2 - \frac{b^2}{4m^2}} t + \delta \right]} \quad (7.38)$$

La anterior solución es válida si $b < 2m\omega$, ya que si lo anterior no se cumple el valor dentro de la raíz cuadrada es imaginario, una solución imaginaria en principio no es posible en física, ya que las cantidades que medimos son reales. De la ecuación (7.38) podemos decir

- A es la amplitud del movimiento de oscilaciones libres, sin fuerza de amortiguamiento. Además es la máxima amplitud de oscilación del movimiento.
- δ es el ángulo de fase inicial, es decir que nos indica la posición inicial del movimiento cuando $t = 0$.
- El movimiento amortiguado tiene un aspecto como el que mostramos a continuación.



- La frecuencia del movimiento amortiguado no es ω , es

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \frac{b^2}{4m^2}} \quad (7.39)$$

Esta frecuencia es menor que la frecuencia del resorte libre ω , cuando el término $\frac{b^2}{4m^2}$ es pequeño, indica que el amortiguamiento es bajo, ya sea por que el material en el cual se encuentra inmerso el resorte presenta una baja fricción contra la masa.

- Este tipo de movimiento recibe el nombre de **movimiento armónico amortiguado**. Se presenta también en circuitos eléctricos, debido a la oposición de un material al paso de una corriente, **resistencia**.

7.8. Oscilaciones forzadas

Todo sistema que experimenta una fuerza proporcional a su desplazamiento oscila, y cada oscilación está caracterizada por una frecuencia ω . Hasta el momento hemos estudiado dos sistemas con sus frecuencias características,

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \text{Sistema masa resorte.} \\ \omega &= \sqrt{\frac{g}{l}} \rightarrow \text{Péndulo simple}\end{aligned}\tag{7.40}$$

¿Qué sucede cuando se le aplica una fuerza externa a un oscilador armónico?, por ejemplo un sistema masa resorte al cual se le coloca un motor que hace oscilar la masa a una frecuencia ω' diferente a la frecuencia natural de oscilación. En este caso la fuerza se puede expresar como función del tiempo como,

$$F_{ext}(t) = F_0 \sin(\omega' t)\tag{7.41}$$

La fuerza expresada por (7.41) modifica la ecuación de la segunda ley de Newton para un resorte de manera que ahora tenemos,

$$\begin{aligned}m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -m\omega^2 x + F_0 \sin(\omega' t) \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\omega^2 x + \frac{F_0}{m} \sin(\omega' t)\end{aligned}\tag{7.42}$$

La solución a la ecuación (7.42) es,

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \sin(\omega' t).\tag{7.43}$$

De la ecuación (7.43) podemos afirmar que,

- El sistema oscilará a una frecuencia ω' que es la frecuencia dada por la fuerza externa, no por la frecuencia natural del resorte.
- La amplitud del movimiento es de la forma,

$$\frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)},$$

que indica que la oscilación es proporcional a la fuerza externa F_0 . La parte interesante es que cuando la frecuencia natural de oscilación ω es igual a la frecuencia externa del sistema ω' , se presenta el fenómeno conocido como **resonancia**, el resorte tiene una amplitud infinita y termina rompiéndose el sistema.

Asociados a la resonancia hay fenómenos físicos que se pueden explicar, cuando nos encontramos en un columpio lo podemos hacer oscilar si estando sobre él movemos nuestro cuerpo a la frecuencia natural de oscilación. Cuando un contingente de soldados va a pasar sobre un puente, se les ordena detener la marcha que llevan, ya que pueden hacer que el puente entre en resonancia y quebrarlo. Cuando se fabrican motores y otras máquinas que vibran, se diseñan de tal forma que sus oscilaciones internas no destruyan la maquinaria por efectos de resonancia.

En el año de 1940, un enorme puente colgante ubicado en Tacoma Narrows, cerca a Washington, fue destruido debido al efecto de la fuerza del viento que hacia que el puente entrara en resonancia con sus frecuencias internas.

7.9. Movimiento Ondulatorio

Las olas del mar, las cuales van y vienen con un periodo casi constante, es uno de los mejores ejemplos de lo que es un movimiento ondulatorio. Las olas del mar se originan a miles de kilómetros de la playa, y en su recorrido mantienen una velocidad casi constante sin transportar agua ni desechos.

Cuando se mete un corcho dentro de una vasija de agua y se tira una piedra a la vasija, el agua comienza a formar **ondas**, las cuales hacen que el corcho suba y baje sin que este se desplace. Existen otros ejemplos, el sonido se propaga por el aire gracias a un movimiento ondulatorio del mismo. Cuando tensamos una sabana y la golpeamos en el centro podemos ver ondas que se alejan del sitio del impacto.

Podemos definir una onda como *una perturbación de un medio que se propaga de un lugar a otro, pero que no produce el transporte del medio durante su viaje. Una onda puede transportar energía a grandes distancias, pero no puede transportar la materia misma del medio.*

El mundo esta lleno de ondas. Sin las ondas electromagnéticas provenientes del sol, que transportan miles de miles de millones de energía, no existiría la vida en la tierra. Es mas, la existencia misma de la vida se debe a

que tenemos una reserva casi ilimitada de energía que permite que organismos vivos la conviertan en trabajo de manera coherente.

Los fenómenos ondulatorios son una de las esencias mismas de la realidad física y son esenciales para la descripción de menos a escala atómica y subatómica. Los físicos han estudiado las ondas a niveles macroscópico y microscópico, y sus estudios han demostrado ser de considerable importancia para el desarrollo de la civilización. El presente capítulo no pretende ser una extensa disertación sobre el tema de ondas, el cual ocupa volúmenes enteros en los cursos de física. Solo se tratará de dar los conceptos básicos y su utilidad.

7.9.1. Tipos de ondas

Las ondas más conocidas son las sonoras, estas necesitan de un medio, el aire, para propagarse. Las ondas sísmicas necesitan de la tierra para propagarse. Existen otro tipo muy especial de ondas, las electromagnéticas, que tienen la muy interesante propiedad de propagarse en el vacío. Esta cualidad de propagarse en el vacío es la que ha permitido que la radiación en el universo sea el medio más utilizado para el transporte de energía.

Un tipo de onda muy común es el de una cuerda que está fija a un extremo de un poste, y sujeta por una mano nuestra en el otro extremo. Cuando movemos nuestra mano de arriba para abajo, la cuerda sufre un tipo de movimiento ondulatorio. Este tipo de movimiento ondulatorio se denomina **transversal**, y da origen a las denominadas *ondas transversales*, tal y como se muestra en la figura 7.5. Otro tipo de onda son las **longitudinales**, existen cuando el desplazamiento de las partículas que sufren la perturbación son *paralelos* a la dirección de propagación de la onda. En la figura 7.5 (b) se observa este tipo de ondas para el movimiento de un resorte.

El desplazamiento de una onda puede ser descrito por medio de dos variables, el espacio (x en el caso unidimensional y un vector \mathbf{x} en el caso tridimensional, y el tiempo t).

Cuando no hay fricción en el medio de propagación, la onda se desliza con una velocidad constante y nada la detiene hasta que finaliza el medio en el cual se transporta. La dirección y rapidez del movimiento define un vector denominado *velocidad de la onda*.

Un ejemplo de ondas bidimensionales es cuando se arroja una piedra a un estanque, se forman ondas que viajan alejándose del sitio de impacto de la piedra, el movimiento se hace sobre el plano de la superficie del agua.

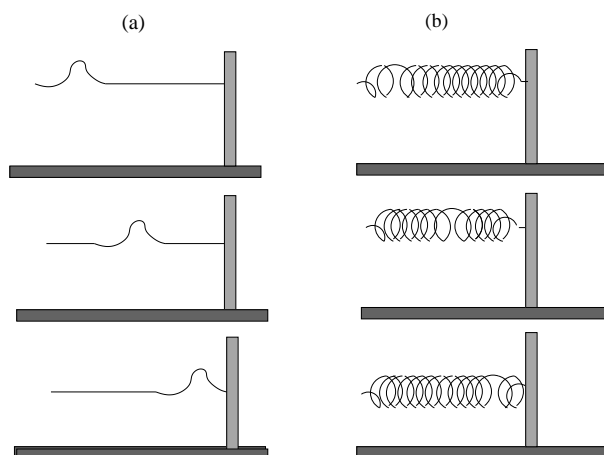


Figura 7.5: Propagación de una onda como un pulso transversal en una cuerda en (a). Y como un pulso longitudinal en un resorte en (b).

Para el caso de las ondas tridimensionales tenemos el sonido, el cual viaja formando una onda esférica, cuando el objeto que produce la onda se encuentra quieto en un sistema de referencia.

7.9.2. Aplicaciones en Colombia:

Para la fecha en la cual se escribe este texto, 2004, ya se ha iniciado por parte del gobierno Colombiano un ambicioso plan de estudio y monitoreo de las oscilaciones de los puentes. El proyecto se ha comenzado en Bogotá y es posible que se extienda mas regiones de Colombia.

Mediante la ayuda de equipos de telemetría, que efectúan mediciones de aceleración, velocidad y desplazamiento de los puentes, se han empezado a caracterizar estos en cantidades como la frecuencia natural de oscilación. El conocimiento de esta cantidad puede evitar que en el futuro, incidentes como el de Tacoma en los Estado Unidos se repitan en Colombia.

El proyecto fue iniciado por el Instituto Nacional de Vias, y aplicado a gran escala por el Instituto de Desarrollo Urbano de Bogotá (IDU), el desarrollo y montaje del sistema fue realizado por el Grupo de Física Aplicada del Centro Internacional de Física.

7.10. Taller experimental: El péndulo físico

Preguntas iniciales

El momento de inercia, alrededor de un eje, que llamaremos O , se denota como I_O , y fue visto en una de las secciones anteriores. Se define el **radio de giro** k_O como una distancia tal que si toda la masa m del cuerpo estuviese concentrada a una distancia k_O del eje de giro, su momento de inercia sería

$$I = mk_O^2$$

Cuál es el radio de giro de:

1. varilla de longitud r girando alrededor de su punto medio.
2. varilla de longitud r girando alrededor de un punto extremo.
3. disco de radio r girando alrededor de su centro.

Introducción

La ecuación mas general para un movimiento oscilatorio en un péndulo en la dirección angular θ es:

$$F_\theta = -mg \sin(\theta) \quad (7.44)$$

Cuando tomamos pequeñas oscilaciones tenemos que $\sin(\theta) \approx \theta$. Y en este caso la ecuación toma la forma

$$F_\theta = -mg\theta. \quad (7.45)$$

Nuestro interés es estudiar el movimiento del péndulo en términos de su momento de inercia, el cual es $I = ml^2$, en donde m es la masa del péndulo y l su longitud. Para ello multiplicamos la anterior ecuación por l

$$\begin{aligned} ml^2 \ddot{\theta} &= -mgl\theta \\ &= -mgl\theta \end{aligned}$$

En donde la anterior ecuación es igual a la ecuación (7.26) para el movimiento de un pendulo, es decir que $\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ es la aceleración angular.

Obtenemos la ecuación

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgl}{I}\theta \quad (7.46)$$

Esta es una ecuación de movimiento armonico con una frecuencia

$$\omega^2 = \frac{mgl}{I} \quad (7.47)$$

En la anterior ecuación al reemplazar por el momento de inercia obtenemos $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

El sistema conocido como **péndulo físico** la masa no se encuentra concentrada en un punto, que es una característica esencial en un péndulo simple, sino que se encuentra distribuida. Esto hace que este sea un péndulo mas real que un péndulo simple.

Para estudiar este sistema utilizamos algo que ya hemos estudiado, el centro de masa. El momento total de la fuerza de gravedad sobre un cuerpo es el mismo que si la fuerza gravitatoria estuviese siendo aplicada al centro de gravedad del mismo. Si el eje de giro es diferente al eje alrededor del cual se efectúa el movimiento, entonces el cuerpo oscilará como un péndulo simple. En este caso la ecuación para pequeñas oscilaciones es de la forma

$$I\ddot{\theta} = -mgh\theta \quad (7.48)$$

En la cual h es la distancia desde el eje de giro hasta el centro de masa. Como no conocemos el momento de inercia, I , del cuerpo utilizamos el concepto de radio de giro, segun el cual existe una distancia desde el eje de giro, llamada k_O , desde la cual el momento de inercia es $I = mk_O^2$. De esta forma la ecuación anterior será

$$mk_0^2\ddot{\theta} = -mgh \quad (7.49)$$

la última ecuación la podemos escribir como

$$\ddot{\theta} = -\frac{gh}{k_0^2} \quad (7.50)$$

la frecuencia de oscilación al cuadrado será

$$\omega^2 = \frac{gh}{k_0^2} \quad (7.51)$$

y el periodo de oscilación será

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k_0^2}{gh}} \quad (7.52)$$

Según el teorema de ejes paralelos (teorema de Steiner) el momento de inercia respecto a un eje que pase por el punto O es igual al momento de inercia respecto a un eje que pase por el centro de masa G mas mh^2 .

También para el momento de inercia respecto al eje que pasa por G debe existir un radio de giro k_g tal que

$$I_G = mk_G^2 \quad (7.53)$$

Por lo tanto tenemos

$$k_0^2 = k_G^2 + h^2 \quad (7.54)$$

reemplazando k_O obtenemos para el periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k_G^2 + h^2}{gh}} \quad (7.55)$$

La experiencia

En nuestro caso el péndulo físico se muestra en la figura 7.6, es una varilla homogénea de masa m con orificios iguales a distancias regulares. La distancia entre cada orificio determina un h diferente. Antes de iniciar sus medidas reflexione acerca del cuidado a tener con la cuchilla en la cual se debe suspender el péndulo físico.

- Para cada h tome 5 valores del periodo de oscilación.. Utilice un valor de $\theta < 10^\circ$. Para ángulos muy grandes la oscilación no es armónica y la teoría descrita no es aplicable. Haga una gráfica de *periodo contra h*.
- Observar que se tiene un valor mínimo del periodo T_{min} para cierto h , que denominaremos h_{min} . Demuestre analíticamente que

$$g = \frac{8\pi^2 h_{min}}{T_{min}^2} \quad (7.56)$$

Con la igualdad (7.56) calcule la aceleración de la gravedad a partir de sus datos.

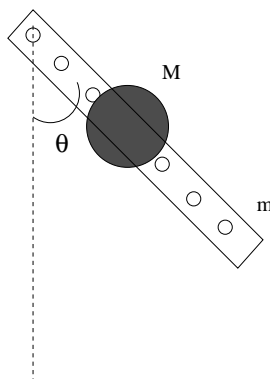


Figura 7.6: Pendulo físico: la masa M se puede desplazar a lo largo de la varilla, lo cual hace que el centro de masa del sistema entero cambie. La varilla tiene una masa m .

- Evalúe sus errores.
- Observe que también se cumple

$$T^2 h = \frac{4\pi^2}{g} h^2 + \frac{4\pi^2 k_G^2}{g} \quad (7.57)$$

Lo cual implica que una gráfica de $T^2 h$ contra h^2 es una línea recta. ¿Cuál es la pendiente de esa gráfica?. ¿Cuál es el valor de la intersección de la recta con el eje y ?. Haga esta gráfica y obtenga un valor para g y para k_G .

- Compare los errores obtenidos por los dos métodos. Dé una razón de por que los errores son mayores en un método que en otro.
- Determine la masa de la varilla m y calcule el valor teórico de k_G . Compárelo con el valor experimental.
- Trabaje todas las mediciones y cálculos en el sistema MKS.
- Qué condiciones se le debe exigir a un péndulo físico para que oscile igual que un péndulo ideal, si:
 - La masa “puntual” tiene la masa de la varilla.

- La longitud del péndulo simple es igual a h .
- Dibuje en las gráficas la barra de error, es decir el σ de la variable correspondiente.

7.11. Resumen y glosario

- El movimiento periódico es aquel que ocurre en ciclos repetitivos exactamente iguales.
- El movimiento oscilatorio es un movimiento periódico que se efectúa en una dimensión, por ejemplo el efectuado por un resorte.
- Un movimiento armónico simple es un tipo de movimiento oscilatorio, en el cual hay un cambio en el ángulo o el desplazamiento, dado por la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

La variable x puede ser un desplazamiento lineal ó un desplazamiento angular θ .

- La anterior ecuación satisface una ecuación de movimiento de la forma,

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$$

en el cual A y δ son constantes que caracterizan el movimiento. A es el máximo desplazamiento permitido y recibe el nombre de Amplitud. El ángulo $(\omega t + \delta)$ recibe el nombre de ángulo de fase. La cantidad δ se denomina constante de fase, representa el valor del ángulo de fase para un tiempo $t = 0$.

- Las constantes A y δ se pueden evaluar de conocer el desplazamiento y la velocidad inicial.
- La velocidad y la aceleración asociadas al movimiento armónico simple son

$$\begin{aligned} v_x &= A\omega \cos(\omega t + \delta) \\ a_x &= -A\omega^2 \sin(\omega t + \delta) = -\omega^2 x \end{aligned}$$

- La frecuencia f se refiere a el número de ciclos de movimiento que ocurren en un segundo, y es igual a $f = \frac{\omega}{2\pi}$.
- El periodo T se define como el tiempo que se requiere para realizar un ciclo u oscilación completa. Es el inverso de la frecuencia $T = 1/f = 2\pi/\omega$.
- Existen también movimiento anarmónicos, que producen oscilaciones que no tienen un periodo y frecuencias fijo, sino que pueden variar con el tiempo o con la amplitud del movimiento.
- El movimiento circular uniforme es un tipo especial de movimiento armónico simple que se realiza en dos dimensiones. Sobre el plano (x,y).
- Cuando tenemos fuerzas de fricción directamente proporcionales a la velocidad, el movimiento armónico simple presenta un comportamiento en el cual su amplitud de oscilación va decayendo con el tiempo hasta que es nulo.
- Las oscilaciones forzadas ocurren en un sistema que es obligado a oscilar a una frecuencia diferente de su frecuencia natural de oscilación.
- El fenómeno de resonancia se presenta cuando a un sistema con una frecuencia natural de oscilación ω' le aplicamos una fuerza externa con la misma frecuencia de oscilación, lo que origina que el sistema tenga una amplitud de oscilación infinita y termine por romperse.
- Una onda es una perturbación periódica de un medio. Una onda es capaz de transportar momentum y energía.
- Existen dos tipos principales de ondas, las longitudinales en la cual el medio que las produce se mueve en dirección longitudinal a la propagación de la onda. El otro tipo de onda es la transversal, en la cual las partículas del medio se propagan perpendicularmente a la dirección de movimiento de la onda.

7.12. Evaluación

1. Con base en razonamientos dimensionales, demuestre que la frecuencia de oscilación de una masa unida a un resorte debe ser proporcional a $\sqrt{k/m}$.

2. Si se lleva un reloj de péndulo de la tierra a la luna ¿cambia la frecuencia de oscilación?.
3. Si se cambia la masa que pende de un péndulo, ¿cambia su frecuencia de oscilación?.
4. Un objeto experimenta un movimiento armónico simple, si se cambia la amplitud del movimiento ¿qué sucede con la frecuencia y la energía total?.
5. Es muy poco probable que un sistema realice un movimiento armónico simple perfecto ¿por qué?.
6. De algunos ejemplo de movimientos que son aproximadamente armónicos simples.
7. Como puede determinarse el valor de una masa con un reloj y un resorte cuya constante es conocida.
8. Cuando se tiene una fuerza proporcional a la velocidad, ¿es posible que la fuerza sea conservativa?.
9. Nombre dos ejemplos de ondas longitudinales.
10. Nombre dos ejemplos de ondas transversales.
11. ¿Por qué las ondas de luz no necesitan un medio para propagarse?.

7.13. Información de retorno

A continuación encontrará respuestas a las preguntas y ejercicios planteados en la parte inicial, evaluación de conceptos previos, y final del capítulo, evaluación. Las respuestas pueden ser ampliadas por usted y la solución a los ejercicios no es única. Se busca que usted amplíe la respuesta, la mejore y encuentre otros métodos de solución a los ejercicios. Algunas preguntas no se encuentran contestadas ya que su respuesta puede variar de una persona a otra.

Conceptos previos

- ¿Qué se entiende por la palabra armónico?.

Con lo visto a lo largo del capítulo podemos decir que armónico significa algo periódico.

- De un ejemplo de un movimiento oscilatorio.

Se le deja al estudiante.

- Por que puede utilizarse un péndulo para medir el tiempo.

Por qué su movimiento periódico es útil para medir el tiempo.

- ¿Cual es la ecuación que gobierna el movimiento de un péndulo?.

El movimiento lo podemos estudiar observando la variación angular, en este caso la ecuación es de la forma $m \frac{d^2\theta}{dt^2} = -k_\theta \theta$.

- ¿Cuál es la ecuacion que gobierna el movimiento de un resorte?.

Para este caso lo que nos interesa estudiar es su movimiento a lo largo de un eje, en este caso es de la forma $F = m \frac{d^2x}{dt^2} = -k_x x$

- ¿En qué se parecen los movimientos de un péndulo y un resorte?.

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un péndulo y de un resorte poseen la misma forma funcional, lo que cambian es que en el resorte medimos el desplazamiento a lo largo de un eje, y en el pendulo lo que medimos es el cambio en el ángulo.

Evaluación

1. Con base en razonamientos dimensionales, demuestre que la frecuencia de oscilación de una masa unida a un resorte debe ser proporcional a $\sqrt{k/m}$.

La solución a la ecuación del resorte $F = -kx$ es de la forma $x(t) =$

$A \sin(\omega t + \phi)$, si reemplazamos en la ecuación de movimiento

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -kx \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{k}{m}x \\ -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi) &= -\frac{k}{m}A \sin(\omega t + \phi) \\ \omega^2 &= \frac{k}{m} \end{aligned}$$

2. Si se lleva un reloj de péndulo de la tierra a la luna ¿cambia la frecuencia de oscilación?.

En un péndulo simple la frecuencia es igual a $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ en donde g es la gravedad del sitio en el cual está el pendulo, la gravedad de la tierra es diferente a la gravedad de la luna, por lo tanto la frecuencia de oscilación también es diferente.

3. Si se cambia la masa que pende de un péndulo, ¿cambia su frecuencia de oscilación?.

No, la frecuencia de oscilación en un péndulo simple ideal solo depende de la longitud de la cuerda y de la gravedad.

4. Un objeto experimenta un movimiento armónico simple, si se cambia la amplitud del movimiento ¿qué sucede con la frecuencia y la energía total?.

La frecuencia de un resorte está dada por $\sqrt{\frac{k}{m}}$, por lo tanto la amplitud no cambia la frecuencia. La energía es de la forma

$$E_{total} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

por lo tanto al cambiar la amplitu cambia el valor de $x(t)$ y tambien cambiará la energía.

5. Es muy poco probable que un sistema realice un movimiento armónico simple perfecto ¿por qué?.

Por que existe la fricción, esta fuerza disipativa hace que la amplitud disminuya a medida que pasa el tiempo.

6. De algunos ejemplo de movimientos que son aproximadamente armónicos simples.

Se deja al estudiante.

7. Como puede determinarse el valor de una masa con un reloj y un resorte cuya constante es conocida.

Podemos poner a oscilar la masa en el resorte, y con ayuda del reloj medir la frecuencia de oscilación ω , como conocemos el valor de la constante k podemos despejar $m = \frac{k}{\omega^2}$.

8. Cuando se tiene una fuerza proporcional a la velocidad, ¿es posible que la fuerza sea conservativa?.

No, una fuerza proporcional a la velocidad es disipativa, por ejemplo la fricción.

9. Nombre dos ejemplos de ondas longitudinales.

Se deja al estudiante.

10. Nombre dos ejemplos de ondas transversales.

Se deja al estudiante.

11. ¿Por qué las ondas de luz no necesitan un medio para propagarse?.

La radiación electromagnética se propaga en el vacío, y la luz es radiación electromagnética.

Palabras claves para búsqueda en Internet

A continuación se presentará una serie de palabras útiles para la búsqueda en Internet, las palabras se han probado en el buscador

<http://www.google.com>

no tienen ortografía dado que el buscador es universal, y en por que en ocasiones va a tener que utilizar teclados que no tienen tildes o ñes.

movimiento armonica, oscilaciones, ondas, movimiento circular uniforme, conversion de unidades.

Bibliografía recomendada:

Se puede consultar al final del texto, el número que encuentra al final de la referencia es el número correspondiente al texto en la bibliografía final.

- Formulas y tablas matemáticas en general [1].
- Momentum angular [7, 8, 20, 21, 10].
- Conversión de unidades [18].

Capítulo 8

Calor y temperatura

8.1. Introducción

Desde la antigüedad es conocido el concepto intuitivo de calor, y se suele confundir con el de temperatura. En una noche fría es normal que frotemos nuestras manos y de esta manera *calentemos* nuestras manos. Sin embargo ¿cuál es la diferencia entre calor y temperatura?. Esta es una de las preguntas que aclararemos a lo largo de este capítulo. El calor es considerado uno de los elementos mas importantes en las actividades del hombre, y su estudio y comprensión ha permitido la creación de máquinas como la de vapor y las neveras. Los avances técnicos crearon la necesidad de cuantificar el calor y la temperatura. A mediados del siglo XV se diseñaron experimentos los cuales se median estas propiedades con base en cambios en la presión o el volumen de los gases o los líquidos. En 1593 Galileo inventa el termoscopio, y Newton unos años mas tarde utilizaría el punto de fusión de diversos materiales como la cera y el plomo, para estudiar los efectos del calor sobre los cuerpos. En 1742, Anders Celsius construye un termómetro con la escala diseñada por él y que lleva su nombre. En la actualidad esta es la escala mas usada, y se le suele llamar escala de grados centígrados.

La historia de la evolución de los conceptos de calor y temperatura son muy interesantes, la diferencia entre calor y temperatura fue algo que tardó siglos, desde Galileo, en entenderse. En 1798 el conde de Rumford, mas conocido como Benjamin Thompson, demostró experimentalmente que existía una relación entre el calor generado por el movimiento mecánico de unas aspas dentro de un recipiente lleno de agua. En 1803 Joseph Black publica

unas notas en la que describe el **calórico**, en el cual describe al calor como una sustancia sin masa que fluye libremente a través de los cuerpos, y de esta forma un cuerpo caliente le transmite su calor a uno mas frío. A mediados del siglo XIX, Hermann Von Helmholtz y Robert Mayer demuestran que el calor es una forma de energía, y en 1878 Sir James Joule estableció de forma experimental la equivalencia entre calor y trabajo mecánico.

Los resultados de la termodinámica son esencialmente empíricos, es decir que han sido obtenidos por medio de la observación y la realización de experimentos. Sin embargo a finales del siglo XIX y comienzos del XX, Boltzman inicia una nueva era en la termodinámica, y funda la denominada **mecánica estadística**, la cual le da un sustento teórico a todos los resultados empíricos de la termodinámica, y aumenta sus resultados ya que permite empezar a estudiar sistemas fuera del equilibrio, ya que la termodinámica solo se encarga de estudiar sistemas en equilibrio. Nuestro interés se centrará en el estudio de la termodinámica, si preocuparnos por justificaciones teóricas del nivel de la mecánica estadística.

8.2. Evaluación de conocimientos previos

1. ¿Qué es calor?.
2. ¿Que es temperatura?.
3. ¿Por qué decimos que en un día cálido nos da mas calor?
4. ¿Por que al tocar una barra de metal y una de madera sentimos que la de metal está mas fría?.
5. ¿Por que se calienta tan rápido el metal?.
6. ¿Como medimos la temperatura en el sol?.
7. ¿De donde sacan energía los seres vivos?.

8.3. Calor y temperatura

Como ya vimos con el ejemplo de las manos que frotamos, podemos mostrar intuitivamente que el trabajo y el calor están relacionados, ya que

al mover las manos estamos realizando una fuerza y efectuando a la vez un desplazamiento de nuestras manos debido a esta fuerza, por lo tanto transformamos energía en movimiento, pero además elevamos la temperatura. ¿Por qué se genera ese cambio en la temperatura?. En este punto es bueno introducir nuestro primer concepto importante,

Todo cambio en la temperatura es producido por el calor.

A nivel microscópico lo que está pasando es que los átomos y moléculas que conforman las palmas de nuestras manos se empiezan a mover más rápidamente, y de esta forma empiezan a chocar unas con otras aumentando su energía cinética. Nuestro organismo siente este aumento en la energía¹

7 cinética promedio con la sensación que denominamos calor. Pero en realidad lo que sentimos es un aumento de la temperatura.

En todos los cuerpos un aumento de la temperatura implica un aumento en la energía cinética promedio de las partículas que componen un cuerpo, sean átomos o moléculas. Si tuviésemos un microscopio lo suficientemente bueno como para poder ver las moléculas individuales que componen el agua¹, a temperatura ambiente veríamos a las moléculas de agua saltar alegremente de un lado a otro y al medirles su velocidad promedio encontraríamos una velocidad que podríamos asociar a su temperatura externa. Al calentar el agua notaríamos que las moléculas empiezan a moverse un poco más rápido y que su velocidad promedio también aumenta, aumentando con ella su energía cinética y su temperatura. Además al moverse más rápido las moléculas también empiezan a necesitar más espacio para poder moverse, por lo que el volumen total del objeto aumenta de forma paulatina. A una temperatura suficientemente alta, 100° a nivel del mar, las moléculas empiezan a necesitar tanto espacio que salen disparadas en todas direcciones, y a nivel macroscópico lo que observamos es que el agua se evapora.

Si pudiéramos enfriar el agua casi hasta una temperatura de 273° bajo cero grados centígrados, nos daríamos cuenta que las moléculas casi no se mueven. Si lográramos llegar a una temperatura de 273.16° grados centígrados bajo cero las moléculas se quedarían quietas, sin embargo este punto es imposible de alcanzar debido a que lo prohíben las leyes de la termodinámica.

De esta forma podemos decir que,

¹Ahora mediante la mecánica cuántica sabemos que no podemos tener un microscopio lo suficientemente bueno como para poder ver en un sitio exacto a las moléculas y medirles su velocidad al mismo tiempo.

La temperatura es una medida de la energía cinética promedio de las moléculas que componen un cuerpo.

También se puede definir la temperatura como *la fracción de energía interna que se puede manifestar en forma de calor*. En la práctica la temperatura es una medida de que tan caliente o frío está un cuerpo.

Si calentamos agua y aceite en las mismas cantidades y por espacio del mismo tiempo y luego medimos su temperatura, nos percatamos que al final del proceso la temperatura del aceite es mayor que la del agua, por esta razón es más rápido freír un huevo en aceite que ponerlo en agua a cocinar. En general otra observación importante es que,

Si se le suministra la misma cantidad de calor a dos sustancias diferentes bajo las mismas condiciones, en general la temperatura alcanzada por las dos sustancias será diferente.

8.3.1. Ley cero de la termodinámica

Cuando calentamos agua hasta cierta temperatura y luego sumergimos un cubo de madera dentro del agua, después de cierto tiempo la temperatura del cubo y del agua se habrán equilibrado, y en este momento se dice que los cuerpos se encuentran en equilibrio termodinámico. A esto se le denomina ley cero de la termodinámica.

8.3.2. ¿Cómo medimos la temperatura?

Cuando un metal se calienta lo suficiente este se comienza poco a poco a poner rojo, y se calienta lo suficiente se puede poner blanco, con un poco más de calor puede llegar a fundirse. En general las propiedades físicas de los cuerpos cambian cuando cambian su temperatura. El agua pasa de sólido a líquido, y con suficiente temperatura se convierte en gas. Los metales cambian propiedades como la conductividad eléctrica, y los gases cambian su presión ante cambios de temperatura.

Este cambio en las propiedades es usado para medir la temperatura de los cuerpos, y se denominan *propiedades termométricas*. El aparato con el cual medimos la temperatura se denomina **termómetro**, y es un aparato que utiliza las propiedades termométricas de ciertos materiales para efectuar mediciones sobre la temperatura. Los termómetros más usados son:

1. **Termómetros de líquido:** Se utilizan las variaciones de volumen de un líquido para evaluar los cambios en la temperatura. Antigüamente se utilizaba agua coloreada o alcohol, este último sigue siendo utilizado en la industria. Actualmente es muy común el termómetro de mercurio, sobre todo por los médicos, el mercurio es un metal que a temperatura ambiente es líquido, los metales tienen la propiedad de ser excelentes conductores de calor, y además de variar su volumen muy rápido ante cambios de temperatura.
2. **Termómetros de resistencia eléctrica:** Estos utilizan el cambio en la resistencia eléctrica para medir cambios en la temperatura. Pueden ser desde dispositivos de estado sólido semiconductores conocidos como termistores hasta resistencias metálicas simples hechas de platino. Los termistores son muy buenos para efectuar este tipo de mediciones.
3. **Termómetros de pares termoelectrónicos o termocuplas:** Existe un fenómeno interesante cuando se juntan dos metales diferentes en una punta y se cambia la temperatura, se produce una diferencia de potencial eléctrico que cambia con la temperatura, esta diferencia de potencial puede ser medida y de esta manera se le puede asociar una temperatura. Son de gran uso industria y tienen una enorme precisión al medir ligeros cambios de temperatura.
4. **Termómetros de cintas bimetalicas:** Se conocen como de bimetálico, utilizan el efecto de dilatación diferencial, en el cual dos metales diferentes se dilatan de manera diferente ante un mismo cambio en la temperatura. Los metales son dos cintas que se encuentran unidas entre sí de manera que con la dilatación forman un arco.
5. **Termómetros ópticos:** Utilizan el principio del cambio de color cuando cambia la temperatura en los objetos. Como en el caso del metal se sabe que cuando se encuentra a una temperatura determinada este adquiere determinadas tonalidades de acuerdo a su temperatura, se utiliza para medir temperaturas mayores a 500° centígrados.
6. **Termómetros de espectro de emisión:** Para temperaturas muy altas, superiores a 3000° , se utiliza la radiación electromagnética emitida por los objetos, esta radiación tiene una relación directa con la temperatura de los objetos. Mediante esta técnica se puede medir una amplia

gamma de temperaturas, desde temperaturas por debajo de los cero grados centígrados hasta temperaturas como la de la superficie solar.

En general todos los termómetros mencionados solamente dan variaciones de temperatura, ya que es necesario una variación en esta para que alguna propiedad física cambie. ¿Cómo hacemos para medir la temperatura?, para ello efectuamos un proceso de calibración mediante algún fenómeno físico que permanezca invariante. Este proceso de calibración es muy importante, ya que la única forma de asegurar que un proceso de medición es realizado correctamente es asegurando que el equipo usado es el adecuado y se encuentra midiendo de manera correcta. En Colombia el ente encargado de la calibración de pesos y medidas es la Superintendencia de industria y comercio, la cual cuenta con laboratorios altamente especializados en la medición de parámetros importantes para la industria y la ciencia en Colombia, entre ellos la temperatura.

Para determinar la escala de un termómetro se sumerge en agua destilada, hasta alcanzar el punto triple, en el cual coexisten de manera simultanea la fase líquida, sólida y gaseosa del agua, y que se da a unas condiciones de temperatura y presión específicas. El otro punto se halla a partir de la temperatura de ebullición a una presión atmosférica igual a la del nivel del mar.

Escalas de temperatura

En la actualidad es muy común el uso de los grados centígrados, y en el ámbito científico se utiliza la escala de grados Kelvin. En los países anglosajones es común el uso de la escala Fahrenheit. Estas son las tres mas importantes escalas utilizadas en la actualidad, en el futuro se espera la unificación a una sola escala de temperatura. La descripción de cada una de las escalas la haremos a continuación.

1. **Escala Kelvin:** Es denominada así en honor a William Thompson "Lord Kelvin" (1824-1907). Utiliza como unidad de medida el grado kelvin, que se denota como **K**. El cero absoluto se considera el inicio de la temperatura, 0 K , el cual corresponde al punto de menor energía interna de un sistema. 273.16 K corresponden a el punto de fusión del agua y 373.16 K corresponden al punto de ebullición del agua a presión atmosférica. Es la unidad usada en los laboratorios a nivel mundial.

2. **Escala Celsius:** Llamada de esta forma en honor a Anders Celsius, (1701-1744). Tiene como unidad de medida el grado centígrado, el cual se denota por $^{\circ}C$. Al punto de fusión del agua le asigna una temperatura de $0^{\circ}C$, y al punto de ebullición se le asigna un valor de $100^{\circ}C$. En esta escala un grado centígrado es equivalente a un grado Kelvin. Es la unidad mas corrientemente usada. En esta escala el cero absoluto corresponde a $-273.16^{\circ}C$.
3. **Escala Fahrenheit:** Se denomina de esta forma en honor a Gabriel Fahrenheit (1686-1736), tiene como unidad de medida el grado Fahrenheit, el cual se denota como $^{\circ}F$. Al punto de fusión del hielo se le asigna un valor de $32^{\circ}F$ y al punto de ebullición del agua un valor de $212^{\circ}F$ de tal forma que entre los dos puntos de referencia hay en total $180^{\circ}F$. Un grado centígrado o kelvin equivale a $9/5^{\circ}F$. El cero absoluto equivale a $-460^{\circ}F$. Es una unidad muy usada en países anglosajones.

Las relaciones entre las escalas de temperatura se pueden determinar fácilmente con ayuda de las anteriores descripciones, así:

$$\boxed{K = ^{\circ}C + 273} \quad (8.1)$$

$$\boxed{{}^{\circ}F = \frac{9^{\circ}}{5} C + 32} \quad (8.2)$$

Ejemplo 40 ¿A cuantos grados centígrados equivale una variación de temperatura de $18^{\circ}F$?

$$1^{\circ}F = \frac{5^{\circ}}{9}C \text{ por lo tanto } F = \frac{5^{\circ}}{9}C = 10^{\circ}C.$$

Ejemplo 41 Convertir $50^{\circ}C$ a Fahrenheit.

$$\begin{aligned} {}^{\circ}F &= \frac{9^{\circ}}{5} C + 32 \\ &= \frac{9}{5} 50 + 32 = 122^{\circ}F. \end{aligned} \quad (8.3)$$

8.4. Calor específico y capacidad calorífica

Cuando un cuerpo varía su temperatura en general lo hace por que o se le ha suministrado calor o se le ha sacado calor. Cuando tomamos un jugo y lo enfriamos por medio de hielo lo que en realidad estamos haciendo es calentando el hielo, extrayendo el calor del jugo por medio del hielo que se encuentra a una temperatura inferior. El jugo calienta el hielo no el hielo enfría el jugo como se piensa. Esta es la dirección en la cual se propaga el calor, de los objetos mas calientes a los mas fríos, y no en dirección contraria.

Si a dos cuerpos de igual masa pero diferente material se les suministra la misma cantidad de calor, durante el mismo periodo de tiempo, la temperatura final será en general diferente para los dos cuerpos, esto se debe a que los cuerpos compuestos de materiales diferentes absorben a una rapidez diferente el calor suministrado. La propiedad que caracteriza este comportamiento se denomina **calor específico**.

La cantidad de calor Q que se le suministra a un cuerpo de masa m y de calor específico c para elevar su temperatura una cantidad ΔT será

$$\boxed{Q = mc\Delta T} \quad (8.4)$$

De la ecuación (8.4) podemos decir,

- El calor Q tiene unidades de energía (Joule), sin embargo para el caso específico del calor se utilizan unidades especiales como la caloría o la unidad térmica inglesa, las cuales serán explicadas mas adelante.
- mc recibe el nombre de **capacidad calorífica** del cuerpo, se suele denotar por la letra C , mayúscula. Y es la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura del cuerpo de masa m en un grado kelvin.

Un ejemplo claro de como el calor específico actúa en diferentes cuerpos es por medio del siguiente experimento, coloque un termómetro sobre dos objetos del mismo tamaño, uno de metal y otro de madera, se dará cuenta que los dos se encuentran a la misma temperatura, ahora toque los dos objetos, al tocarlos el objeto de metal se siente mas frío que el de madera ¿por qué?. La razón de esto es el calor específico, el metal posee por lo general una capacidad calorífica baja lo que implica que para quedar a la misma temperatura de nuestra piel deberá absorber mayor calor, como consecuencia al absorber el calor de nuestro cuerpo sentiremos el metal frío. El metal le roba calor a nuestro cuerpo de manera muy rápida, es por esto que los metales se calientan tan deprisa.

Substancia	Calor específico $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
Aluminio	910
Cobre	386
Hierro	447
Plomo	128
Mercurio	140
Tungsteno	136
Helio	520
Nitrógeno	1040
Oxígeno	920
Carbono (Diamante)	509
Agua	4180
Hielo (-10^0)	2100
Alcohol	2500
Vidrio	67
Tierra (suelo)	104
Madera (Valor normal)	167

Cuadro 8.1: Calor específico de algunas sustancias a 25° y a presión atmosférica normal. Nótese el gran valor de calor específico para el agua líquida.

8.5. Fusión y vaporización

Existen tres estados principales para la materia, el sólido, el líquido y el gaseoso. Durante el proceso conocido como **cambio de fase** o **transición de fase**, los elementos cambian de sólido a líquido, de líquido a gaseoso ó de gaseoso a sólido y viceversa.

Cuando un elemento cambia de sólido a líquido se denomina **fusión**, cuando cambia de líquido a sólido se denomina **solidificación**, al cambiar de sólido a gaseoso se denomina **sublimación**. Al cambiar de líquido a gaseoso se denomina **vaporización**.

El calor absorbido durante la transición de una fase a la otra se denomina **calor de transformación** ó **calor latente L** . Durante el proceso de cambio de fase el calor absorbido no da lugar a un cambio en la temperatura, lo cual se utiliza para calibrar termómetros, por que se sabe que a cero grados centígrados el agua y el hielo coexisten simultáneamente y no hay cambio de temperatura, a presión atmosférica.

Si un pedazo de materia tiene masa m y calor latente L en una transformación de fase, el calor absorbido por la sustancia en una transición de fase es,

$$Q = mL \quad (8.5)$$

Podemos definir los calores latentes como

- El calor latente de fusión L_f es la cantidad de calor necesaria para que la unidad de masa de una sustancia pase de fase sólida a la fase líquida a temperatura y presión constantes.
- El calor latente de vaporización L_v es la cantidad de calor que requiere la unidad de masa de una sustancia para pasar de la fase líquida a la fase gaseosa.
- El calor latente de sublimación L_s es la cantidad de calor por unidad de masa que requiere una sustancia para pasar de la fase sólida a la fase de vapor.

8.6. Transferencia de calor

El calor es una forma de transferencia de energía entre un cuerpo y el medio que lo rodea, pero esta energía no puede ser convertida en trabajo,

se expresa por medio de un cambio en la temperatura de los cuerpos, o una transición de fase. El flujo de calor se establece de la zona de mayor temperatura a la de menor temperatura.

La transferencia de calor puede ocurrir por medio de tres procesos físicos diferentes.

1. **Conducción:** Se da cuando existe un medio que transporte calor, por ejemplo el aire o un metal pueden conducir calor. Cuando calentamos una varilla de metal en un extremo, en corto tiempo la varilla se calienta, sin que el aire se caliente igual de rápido. Esto sucede por que los metales son buenos conductores de calor, y facilitan el intercambio de calor.

Existen materiales que son mejores conductores térmicos que otros. Los metales son mejores conductores térmicos que los gases y los líquidos. En la construcción de maquinaria, la conductividad térmica es un parámetro fundamental a tener en cuenta en su diseño. El aire es un muy buen aislante térmico, es por ello que las neveras de plástico tienen un espacio vacío, en el cual hay aire que suple la existencia de un aislante.

La conductividad térmica se presenta por que las partículas que componen un medio, vibran con facilidad o dificultad cuando se les agrega calor. De esta forma el aislante térmico perfecto es el vacío, ya que en él no hay partículas que mover.

2. **Convección:** En la convección el calor se transporta por que el material que está caliente se mueve a zonas de material mas frío. Por ejemplo al calentar agua, el líquido que se encuentra depositado en el fondo de la olla se calienta y su densidad disminuye, de forma que este líquido caliente sube y lleva calor al líquido que se encuentra arriba, el cual se encuentra mas frío, además el líquido frío baja a la parte mas caliente y continua el proceso. Para que pueda darse este fenómeno es importante la existencia de la gravedad. En general para darse transporte de calor por convección es necesario que exista un flujo de material.
3. **Radiación:** Entre la tierra y el sol hay una enorme zona vacía. entonces ¿como hace el sol para calentar a la tierra?. Es por la radiación solar. Las ondas electromagnéticas transportan energía, y esta energía

es repartida a la tierra. Esta es la principal fuente de energía en la tierra, y es la responsable de la existencia de la vida sobre la tierra.

Las ondas electromagnéticas viajan a $3 \times 10^8 m/s$ y se caracterizan por tener una longitud de onda (λ) y una frecuencia (f). Las ondas electromagnéticas comprendidas entre $0.38 \mu m$ (luz violeta) y $0.72 \mu m$ (luz roja), constituye la región visible del espectro; por encima de la luz roja existe una porción denominada infrarroja, este es el lado del espectro de luz solar que produce en nosotros la sensación de calor, aunque en realidad lo que hace es aumentar la energía cinética de nuestra piel, y elevar su temperatura.

Cuando un cuerpo empieza a transferir calor a otro, este proceso se hace hasta que los dos cuerpos alcanzan el equilibrio térmico. Es decir hasta que alcanzan la misma temperatura. Un ejemplo de ello es el enfriar una gaseosa con hielo, el proceso real es que el hielo y la bebida inicialmente se encuentran a diferentes temperaturas. Por la diferencia de temperatura empieza a existir una transferencia de calor, del cuerpo mas caliente, la bebida, al cuerpo mas frío, el hielo. Durante este proceso el cuerpo mas caliente se enfría, y el cuerpo mas frío se calienta, hasta que llegan a un punto en el cual pueden coexistir. Estrictamente hablando la gaseosa calienta al hielo, y por ello se enfría.

8.7. Combustibles y alimentos

La cantidad de calor producido al quemarse una unidad de masa o de combustible, se denomina **poder calorífico**. Este poder calorífico se mide en unidades de calor por unidad de masa (kcal/kg) para materiales solidos, o en unidades de calor por unidad de volumen (kcal/l ; Btu/gl) para elementos gaseosos o líquidos.

La manera como obtenemos energía los seres vivos es mediante la combustión controlada de alimentos, que contienen carbono e hidrógeno. Esta quema controlada se realiza por mecanismos extraordinariamente complejos, y generan trabajo, movimiento tanto interno como externo, y calor, que se manifiesta en la diferencia de temperatura entre nuestro cuerpo y el medio que nos rodea. Es extraordinaria la forma en que los seres vivos aprovechan los minerales y los ciclos del carbono y el agua, entre otros, para realizar diferentes actividades.

Sustancia	Poder calorífico (kcal/kg)
Madera seca	2500 - 3800
Carbón	6000 - 8500
Carbón vegetal	7500
Grasa animal	9200
Glucosa	3750
Almidón	4220
Sacarosa	4000
petroleo crudo	6700 (kcal/l)
Alcohol	5300 (kcal/l)
Gasolina	8000 (kcal/l)

Cuadro 8.2: Poder calorífico de algunos combustibles y alimentos.

En la tabla 8.2 se muestran algunos valores del poder calorífico (PCB) de algunos combustibles y alimentos.

8.8. Aplicaciones

Sin lugar a dudas la comprensión de los fenómenos relacionados con el calor y la temperatura, le dieron origen a la revolución industrial. La máquina de vapor es una consecuencia directa del conocimiento que se tenía del comportamiento físico de los sistemas.

Existen innumerables ejemplos en los cuales el calor y la temperatura son la base de las máquinas, los motores de combustión interna, el diseño de pavimentos, la investigación en nuevos materiales para el diseño de maquinaria mas resistente a golpes térmicos.

La medición de la temperatura también se ha convertido en pilar fundamental de los procesos de producción. En Colombia el grupo de *Física Aplicada y Desarrollo Tecnológico* del Centro Internacional de Física, ha desarrollado un equipo que permite la medición de baldosas de piso dentro de hornos del horno de cocción, el cual se encuentra a aproximadamente 600° . El equipo desarrollado ha permitido tener un control mayor sobre el proceso de producción de las baldosas, ya que cerca a los 570° estas sufren un cambio interno en la estructura y se rompen si el cambio en la temperatura es muy brusco.

Actualmente los problemas de control de temperatura en los procesos industriales es objeto de estudio, ya que incide directamente sobre variables como la humedad y la velocidad de un proceso entre otros. El grupo de física aplicada ha desarrollado soluciones a problemas industriales en los cuales la medición de temperatura ha sido la clave para la optimización de procesos.

8.9. Taller experimental: Dilatación lineal.

Existe una cantidad denominada **coeficiente de dilatación lineal**, el cual mide la dilatación de un cuerpo como función de los cambios de temperatura. Cuando calentamos un cuerpo este empieza a dilatarse, y al enfriarse este se contrae. Este comportamiento es normal a casi todas las sustancias, con la notable excepción del agua, la cual se expande cuando se encuentra bajando de cuatro a cero grados centígrados.

El objetivo de este taller es medir el coeficiente de dilatación lineal de una varilla de algún material con buena conductividad térmica, preferiblemente un metal como el cobre.

Para el desarrollo del siguiente taller se recomienda una mirada a la referencia [21].

Cuestionario

1. ¿Cuáles son las unidades del coeficiente de dilatación lineal α ?, ¿cuáles son sus unidades en el sistema cgs?.
2. ¿Qué significa un coeficiente de dilatación grande?.
3. Busque en la literatura valores de α para el cobre, oro, plata, vidrio. ¿Cuál de ellos es el mas grande?, ¿Cuál es el mas pequeño?. Compárelos con el del mercurio líquido.
4. ¿En cuanto cambia la longitud de una barra de cobre al ser calentada dos grados centígrados, de 20°C a 22°C , si su longitud inicial a 20°C es de un metro?
5. Haga los cálculos del punto anterior, pero esta vez para el aluminio, acero y el plomo.

Introducción

La relación entre la longitud L de una varilla metálica y la temperatura T a la cual se encuentra está dada por

$$L = L_0 (1 + \alpha \cdot (T - T_0)). \quad (8.6)$$

En donde

- L_0 la longitud de la varilla a la temperatura T_0 .
- α es el coeficiente de dilatación lineal del material que compone la varilla.

De la ecuación (8.6) debemos hacer dos anotaciones importantes

1. α no es simplemente la relación entre T y L , es una relación entre los cambios $\Delta L = L - L_0$ y $\Delta T = T - T_0$.
2. El coeficiente de dilatación lineal α no es la relación entre el cambio de longitud y el cambio de temperatura, es decir

$$\alpha \neq \frac{\Delta L}{\Delta T}. \quad (8.7)$$

en realidad es igual a esta ultima cantidad dividida por la longitud inicial.

$$\alpha = \frac{1}{L} \frac{\Delta L}{\Delta T}. \quad (8.8)$$

Esto hace que las verdaderas unidades de α sean el inverso de la temperatura. Es decir que las unidades de α son $(^{\circ}C)^{-1}$.

La experiencia

Determine el coeficiente de dilatación lineal, α , de una barra de cobre.

El montaje a utilizar se muestra en la figura 8.1.

Caliente el agua y haga que el vapor circule por toda la extensión de la varilla. El vapor va a elevar la temperatura de la varilla, tome la temperatura por medio de un termómetro.

Debido a que los cambio de longitud son muy pequeños para ser observados a simple vista, el cambio en la longitud ΔL se determina por medio de

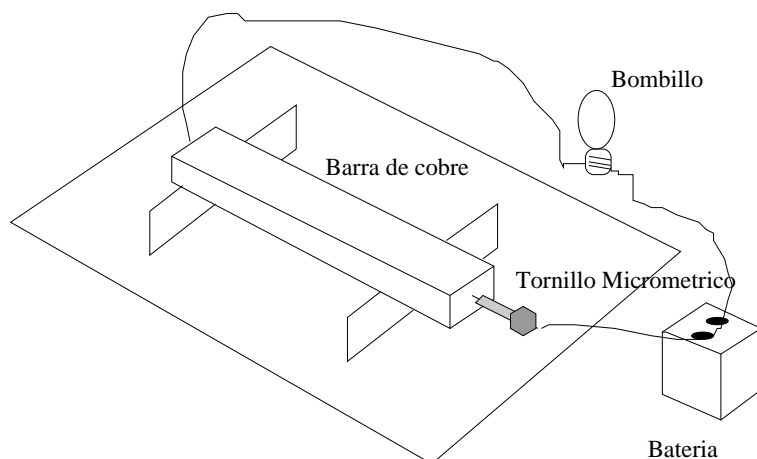


Figura 8.1: Montaje experimental para determinar el coeficiente de dilatación lineal del cobre, cada vez que la varilla se dilata y hace contacto con el tornillo micrométrico, se cierra el circuito y se enciende el bombillo.

un tornillo micrométrico. La varilla misma se usa como parte de un circuito eléctrico: siempre que la varilla este en contacto con el tornillo micrométrico se encenderá un bombillo.

Antes de empezar a tomar las mediciones determine L_0 y T_0 , y calibre el disco del tornillo micrométrico, es decir, determine la distancia que recorre cuando da una vuelta el tornillo.

Respecto al tratamiento de los datos ¿cuál de las siguientes gráficas es mas útil?

1. L contra T .
2. ΔL contra T .

Determine el coeficiente de dilatación lineal, haga tratamiento de errores y compárelo con el que encuentra en la literatura.

8.10. Evaluación

1. ¿Tiene sentido hablar de una temperatura en una región del espacio donde existe un vacío perfecto, como el espacio interestelar?.

2. Cuando es muy difícil destapar una botella de salsa de tomate, en ocasiones para abrirla con facilidad lo que se hace es calentar la región de la tapa ¿por qué se hace esto?.
3. En función de la temperatura, ¿que implica que un cuerpo se encuentre en equilibrio térmico con el medio que lo rodea?.
4. Una botella denominada “termo” consiste en un recipiente de vidrio con doble pared, y en el cual existe un vacío entre las paredes. Las dos superficies internas del vidrio son plateadas. Explique la manera en que este dispositivo reduce la pérdida de calor por conducción, convección y radiación.
5. Los pies desnudos sienten mas frío cuando se encuentran sobre un piso de mármol, que sobre una alfombra ¿por qué?.
6. ¿podríamos preparar chocolate en el espacio exterior?.
7. En determinado día se llega a una temperatura de 40° , sin embargo el cuerpo humano se mantiene a 37° , ¿cómo se logra esto?.
8. Mediante una agitación se puede lograr que se eleve la temperatura de un líquido, ¿se ha realizado trabajo sobre el liquido cuando se ha agitado?, ¿se ha agregado calor al sistema?, ¿por qué se eleva la temperatura del líquido?.
9. ¿Qué opina de la siguiente afirmación?, *“todo instrumento graduado o calibrado que responda a cambios de temperatura es un buen termómetro”*.
10. ¿Podría usted construir un termómetro?. ‘¿Cómo?.

8.11. Información de retorno

A continuación encontrará respuestas a las preguntas y ejercicios planteados en la parte inicial, evaluación de conceptos previos, y final del capítulo, evaluación. Las respuestas pueden ser ampliadas por usted y la solución a los ejercicios no es única. Se busca que usted amplíe la respuesta, la mejore y encuentre otros métodos de solución a los ejercicios. Algunas preguntas no se encuentran contestadas ya que su respuesta puede variar de una persona a otra.

Conceptos previos

1. ¿Qué es calor?.

Es una forma de energía que no puede ser transformada en trabajo, se manifiesta por un cambio de temperatura en el sistema estudiado.

2. ¿Que es temperatura?.

Es una medida de la energía cinética media de las partículas que componen un medio.

3. ¿Por qué decimos que en un día cálido nos da mas calor?

Se deja al lector.

4. ¿Por que al tocar una barra de metal y una de madera sentimos que la de metal está mas fría?.

En realidad lo que sentimos al tocar la barra es la manera como el metal o la madera absorben el calor, los dos cuerpos se encuentran en equilibrio térmico (a la misma temperatura), pero el calor específico es diferente en los dos, de esta forma nosotros nos encontramos a aproximadamente $35^{\circ} C$, y los objetos se encuentran a temperatura ambiente, muchas veces esta última temperatura es menor que la temperatura de nuestro cuerpo. Cuando tocamos la barra de metal y la de madera nuestro cuerpo empieza a calentar los dos objetos, pero la velocidad a la cual absorbe calor el metal es mayor en el metal, por lo cuál lo sentimos mas frio por que absorbe mas rápidamente calor de nuestro cuerpo. Por el contrario la madera es un buen aislante, lo que logra que la transferencia de calor no sea tan rápida, por ello la sensación de que la temperatura de la madera es mayor.

5. ¿Por que se calienta tan rápido el metal?.

La explicación ha sido explicada en la anterior respuesta.

6. ¿Como medimos la temperatura en el sol?.

Por medio de un termómetro de emisión.

7. ¿De donde sacan energía los seres vivos?.

De los alimentos que consumen, los cuales en el caso de las plantas sacan la energía del sol.

Evaluación**8.12. Evaluación**

1. ¿Tiene sentido hablar de una temperatura en una región del espacio donde existe un vacío perfecto, como el espacio interestelar?.

No, para hablar de temperatura necesitamos un medio, y en un vacío perfecto no hay materia para elevar su energía cinética interna.

2. Cuando es muy difícil destapar una botella de salsa de tomate, en ocasiones para abrirla con facilidad lo que se hace es calentar la región de la tapa ¿por qué se hace esto?.

Para que la tapa se expanda y se pueda abrir mas facilmente.

3. En función de la temperatura, ¿que implica que un cuerpo se encuentre en equilibrio térmico con el medio que lo rodea?.

Que la temperatura es la misma en el cuerpo y el ambiente que lo rodea.

4. Una botella denominada “termo” consiste en un recipiente de vidrio con doble pared, y en el cual existe un vacío entre las paredes. Las dos superficies internas del vidrio son plateadas. Explique la manera en que este dispositivo reduce la perdida de calor por conducción, convección y radiación.

El vidrio y el vacío son malos conductores de calor, el líquido dentro del termo está en reposo, por lo cual no hay movimiento para que halla flujo de calor por convección. En lo que se refiere a la radiación no existe un aislante perfecto contra la radiación electromagnética.

5. Los pies desnudos sienten mas frío cuando se encuentran sobre un piso de mármol, que sobre una alfombra ¿por qué?.

Se deja al estudiante.

6. ¿podríamos preparar chocolate en el espacio exterior?.

Si, pero no se calentaría por convección. Tendríamos que agitar constantemente el chocolate.

7. En determinado día se llega a una temperatura de 40° , sin embargo el cuerpo humano se mantiene a 37° , ¿cómo se logra esto?.

El cuerpo debe invertir una enorme cantidad de energía para mantener la diferencia termica, para ello utiliza recursos como sudar.

8. Mediante una agitación se puede lograr que se eleve la temperatura de un líquido, ¿se ha realizado trabajo sobre el líquido cuando se ha agitado?, ¿se ha agregado calor al sistema?, ¿por qué se eleva la temperatura del líquido?.

Al agitar tenemos que realizar un trabajo sobre el elemento agitador, este trabajo se convierte parte en trabajo sobre el sistema y otra parte en calor por la agitación de las moléculas que componene el líquido.

9. ¿Qué opina de la siguiente afirmación?, “todo instrumento graduado o calibrado que responda a cambios de temperatura es un buen termómetro”.

Se deja al estudiante.

10. ¿Podría usted construir un termómetro?. ‘¿Cómo?.

Se deja al estudiante. Trate de buscar un material que responda a cambios de calor y que esta respuesta sea constante y repetitiva.

Palabras claves para búsqueda en Internet

A continuación se presentará una serie de palabras útiles para la búsqueda en Internet, las palabras se han probado en el buscador

<http://www.google.com>

no tienen ortografía dado que el buscador es universal, y en por que en ocasiones va a tener que utilizar teclados que no tienen tildes o eñes.

calor, temperatura, curso de fisica, energia cinetica, termodinamica, conversion de unidades.

Bibliografía recomendada:

Se puede consultar al final del texto, el número que encuentra al final de la referencia es el número correspondiente al texto en la bibliografía final.

- Formulas y tablas matemáticas en general [1].

- Mediciones y experimentos en termodinámica [9].
- Termodinámica y calor [7, 8, 20, 21, 9, 11].
- Conversión de unidades [18].

Capítulo 9

Fluidos

9.1. Introducción

Los fluidos son sustancias que se pueden escurrir o fluir, mediante una aplicación apropiada de fuerzas. En términos generales podemos clasificar los fluidos en dos grandes grupos,

1. **líquidos:** Son prácticamente incompresibles, por lo que se puede considerar que su volumen es constante aunque su forma puede cambiar.
2. **gases:** Son altamente compresibles, por lo cual no poseen un volumen característico. Sencillamente se expanden o se dilatan ocupando cualquier recipiente que los contenga.

¿Por qué un fluido fluye?, por que experimenta fuerzas normales ó tangenciales, y la reacción a estas fuerzas es escurrirse, o fluir. Una condición para que un fluido se encuentre en equilibrio es que en todas sus fronteras se experimenten simultáneamente fuerzas normales.

A nivel microscópico la diferencia entre un sólido, un líquido y un gas se puede atribuir por completo a la interacción entre las fuerzas de atracción que existe entre los átomos, iones y moléculas individuales. En un solido sus constituyentes se encuentran fuertemente ligados, hasta tal punto que poseen una baja libertad para moverse, esto hace que se formen materiales con características bien definidas de forma y dureza. Cuando elevamos la temperatura o cambiamos la presión disminuyéndola, las partículas empiezan a moverse mas libremente, y el material se funde, es decir que pasa a líquido, ya que aumenta la energía cinética de las partículas que lo componen. Cuando se

eleva suficientemente la temperatura sus partículas son libres, hasta el punto de pasar a un estado gaseoso en cual sus partículas se mueven libremente, en este caso decimos que se evapora.

9.2. Evaluación de conocimientos previos

1. ¿El vidrio es un sólido o un fluido?.
2. ¿Cómo hace una puntilla para penetrar en una pared?.
3. ¿Cuál es la diferencia entre un líquido y un gas?.
4. ¿Un gel para el cabello es un líquido o un sólido?.

9.3. Propiedades básicas de los fluidos

A continuación vamos a presentar un listado de las propiedades y características básicas de los fluidos. Para comenzar diremos que los líquidos son prácticamente incompresibles, es decir que por grande que sea la presión que se ejerza sobre ellos, su cambio de volumen es prácticamente imperceptible.

Algunos conceptos importantes dentro del estudio de los fluidos son la presión, la densidad y la gravedad específica.

9.3.1. Presión

La presión se define como la fuerza que se ejerce por unidad de área.

$$\boxed{\text{Presión} = \frac{\text{Fuerza}}{\text{Área}}} \quad (9.1)$$

Formalmente es una derivada de la fuerza con respecto al área.

$$\boxed{P = \frac{dF}{da}} \quad (9.2)$$

De las ecuaciones (9.1) y (9.2) vemos que para obtener una gran presión podemos hacer tres cosas

1. Producir una gran fuerza F .

2. Ejercer la fuerza en una área muy pequeña a .
3. Por último podemos hacer los dos procedimientos anteriores simultáneamente, es decir, ejercer una gran fuerza en un área muy pequeña. Un ejemplo de ello es el funcionamiento de una puntilla, para que esta trabaje eficientemente se tiene que la punta de la puntilla debe ser muy aguda, y la fuerza ejercida por el martillo sobre la puntilla es muy fuerte. Por esto funciona una puntilla.

Para el caso de un líquido, este ejerce una presión sobre las paredes del recipiente que lo contiene, al igual que un gas, cuando el recipiente es tan débil que no puede soportar la presión este simplemente deja escapar el líquido.

La atmósfera ejerce una presión sobre nosotros, y el agua de una piscina también lo hace. Cuando nadamos bajo el agua, al sumergirnos demasiado el agua entra al interior de nuestros oídos, esto ocurre por que la presión interior del aire que se encuentra dentro de los oídos es menor que la del agua que trata de entrar, y el agua entra finalmente. En el diseño de submarinos la presión juega un papel muy importante, ya que si el submarino se sumerge demasiado la presión del agua ejerce una gran fuerza sobre las paredes del submarino, lo que hace que la presión sea muy grande, a demasiada profundidad un submarino ya no resiste y simplemente es aplastado debido a la enorme presión del agua.

La presión en el sistema internacional se mide en N/m^2 y es denominada pascal. Otra unidad utilizada en los países anglosajones es la baria, la cual es din/cm^2 . El *bar* que equivale a $10^6 din/cm^2$ y la *atmósfera normal ó estándar*, la cual equivale a 1.033 kilogramos-fuerza/ cm^2 , la atmósfera ejerce una gran presión sobre nosotros.

Las propiedades de un fluido en equilibrio pueden expresarse por medio del principio de **Pascal**, enunciado por primera vez por Blaise Pascal (1623 - 1662) matemático y filósofo francés.

La presión aplicada a un fluido se transmite sin disminución alguna a todas las partes del fluido y a las paredes del recipiente que lo contiene.

En la figura 9.1 se observa el principio de Pascal aplicado a la presión de un émbolo sobre un fluido.

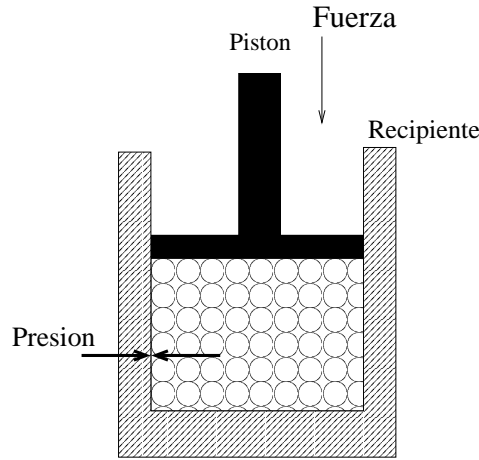


Figura 9.1: Principio de Pascal. Las fuerzas que actúan sobre una parte del fluido se transmiten al interior del mismo y al recipiente que lo contiene. En este caso el embolo ejerce una fuerza F sobre el área determinada por el contacto entre el embolo y el fluido, esto define una presión, esta presión es transmitida a todas las partes del fluido y a las paredes del recipiente.

9.3.2. Densidad

Los líquidos son prácticamente incompresibles, es decir que por grande que sea la presión ejercida sobre ellos, su cambio de volumen es mínimo.

La densidad (ρ) de una masa homogénea se define como la relación entre su masa (m) y el volumen (V) ocupado por ésta:

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad (9.3)$$

sus unidades son el kg/m^3 o el g/cm^3 .

Para una masa no homogénea, por ejemplo una esponja llena de agua posee partes que contienen mayor cantidad de agua, esto hace que la densidad de unas partes cambie, y en general no es uniforme. Para este tipo de casos la densidad se define como,

$$\rho' = \frac{dm}{dV} \quad (9.4)$$

en donde dm se refiere a la masa infinitesimal que ocupa un volumen dV .

9.3.3. Gravedad específica ó densidad relativa

La gravedad específica, la cual se denota como ρ_g , es la relación entre la masa de un cuerpo sólido o líquido y la masa de un volumen igual de agua a 4°C, o a otra temperatura especificada.

$$\rho_g = \frac{\text{Masa de una sustancia}}{\text{Masa de un volumen igual de agua}} = \frac{\text{Densidad de la sustancia}}{\text{Densidad del agua a 4°C}} \quad (9.5)$$

A la gravedad específica se le suele llamar “**densidad relativa**”, por que hace referencia a la densidad de un cuerpo con respecto a la densidad del agua. Esta cantidad es adimensional, cuando es mayor que la unidad significa que el cuerpo posee una densidad mayor que la del agua, cuando es menor que la unidad significa que el cuerpo posee una densidad menor que la del agua.

Es importante al reportar esta cantidad especificar la temperatura a la cual se está realizando la medición, ya que la densidad de los cuerpos se ve afectada por la temperatura.

9.3.4. El peso específico

El peso específico de una sustancia se define como la relación entre el peso (mg) y el volumen (V) ocupada por ésta. Se denota como γ

$$\gamma = \frac{mg}{V} = \rho g \quad (9.6)$$

El peso específico es la misma densidad multiplicada por la gravedad, por lo tanto este valor va a depender del valor de g , el cual cambia con la altitud, o con el planeta sobre el cual se esta midiendo.

El peso específico se expresa en N/m^3 ó $kg - f/m^3$.

9.3.5. La Viscosidad

La viscosidad es una medida de la resistencia a fluir de los líquidos. Se presenta básicamente por la fuerza de fricción entre las moléculas que componen un líquido. Este fenómeno es evidente cuando se trata de desocupar simultáneamente dos botellas del mismo volumen, pero una esta llena de miel

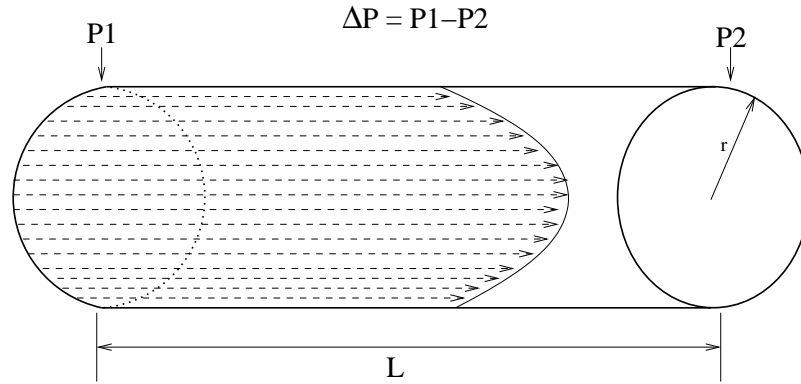


Figura 9.2: Montaje para la medición de la viscosidad de un fluido, P_1 y P_2 son las presiones de entrada y salida en los extremos del tubo. Las flechas representan la velocidad de las moléculas del líquido dentro del tubo, en los extremos la velocidad es menor que en el centro del tubo.

y la otra de agua líquida. El agua sale con mucha mas facilidad y mas rápido que la miel, la miel es mas viscosa que el agua.

Podemos hacer que la miel salga mas rápido si aumentamos la temperatura de ésta, el efecto de la temperatura es el de reducir la viscosidad, aumentando la fluidez.

La viscosidad se mide con un viscosímetro. Un método general para la medida de la viscosidad se basa en determinar el volumen que se puede recoger dividido por el tiempo empleado en recogerlo, cuando el líquido fluye a lo largo de un tubo de longitud L y radio r bajo una diferencia de presión Δp entre los dos extremos, como se muestra en la figura 9.2

Bajo las anteriores condiciones, la viscosidad absoluta (η) se determina por medio de la ecuación de Poiseuille:

$$Q = \frac{\pi \Delta p r^4}{L \eta} \quad (9.7)$$

De la ecuación (9.7) podemos decir

- Q es el volumen del líquido recogido por unidad de tiempo, se mide en cm^3/s . Nos indica el volumen que pasa por el tubo en una unidad de tiempo determinada.

- a mayor diferencia de presiones Δp , mayor será el volumen del líquido recogido por unidad de tiempo.
- entre mayor sea el radio del tubo, mayor será el volumen recogido, esto es claro ya que pasa una mayor cantidad de líquido por un tubo de mayor diámetro que por uno de menor diámetro.
- la cantidad η es la viscosidad, y se mide en países (P), un P equivale a una pascal por segundo. Entre mayor sea la viscosidad del líquido menor será el volumen de éste que pase por la abertura, y por lo tanto pueda ser recogido.

Otra forma de medir la viscosidad absoluta se basa en la fricción, imagínese una bolita de vidrio que es arrojada dentro de un recipiente lleno de agua, esta cae mas lentamente que dentro del aire. Ahora imagínese la misma bolita arrojada dentro de un recipiente lleno de miel, la bolita caerá mas lentamente que en el recipiente de agua, y mucho mas lentamente que el aire. Del anterior experimento mental podemos concluir que la viscosidad de la miel es mayor que la del agua, y a su vez la viscosidad del agua es mayor que la del aire, por lo tanto la viscosidad del aire es menor que la viscosidad de la miel, en ecuaciones:

$$\eta_{aire} < \eta_{agua} < \eta_{miel}$$

Se considera que la viscosidad absoluta es proporcional a la fricción, para una esfera de radio r que se mueve dentro de un fluido, la esfera experimenta una amortiguación ζ dada por la ecuación

$$\zeta = 6\pi r\eta \quad (9.8)$$

En donde ζ es el coeficiente de amortiguación del fluido. La ecuación (9.8) se conoce como **ley de Stokes**.

9.3.6. Tensión Superficial y Capilaridad

La tensión superficial se puede definir como la *tendencia que tiene un líquido a disminuir su superficie*. Las moléculas dentro de un líquido actúan de tal forma que todas se unen entre si, de manera que en el interior de un líquido, si pudiéramos ver una molécula, observaríamos que todas las demás moléculas la atraen con igual fuerza, el resultado es que la fuerza total sobre la molécula es igual a cero. Pero para una molécula que se encuentre en la

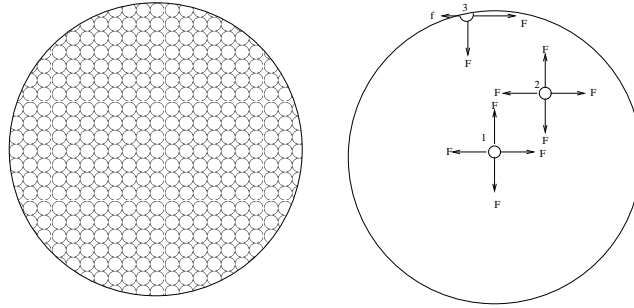


Figura 9.3: Tensión superficial en una gota de agua. La gota puede ser vista como un agregado de moléculas de agua que se atraen unos a otros, al lado derecho hemos tomado 3 moléculas representativas, las dos que se encuentran en el interior soportan iguales fuerzas por todos los costados, de tal manera que la suma total de estas fuerzas es cero, pero la molécula 3 que se encuentra en la superficie no siente estas fuerzas, la diferencia de fuerzas hace que se genere una tensión en la superficie, de tal forma que para que la sumatoria de fuerzas sea igual a cero la única opción que tiene el sistema es ocupar el mínimo posible de volumen.

superficie de un líquido tenemos que encima de ella no existe fuerza alguna, por lo cual hay una diferencia de fuerzas que hacen que en general la cantidad total del líquido tienda a ocupar la menor cantidad de volumen posible.

Cuando se deja caer una gota de agua, se puede observar que esta forma una esfera casi perfecta, esto es debido a que la tendencia a ocupar el mínimo volumen posible hace que la fuerza en la superficie del agua forma una esfera casi perfecta. En el espacio exterior la esfera formaría una bola perfecta. En la figura 9.3 se explica este fenómeno.

Cualquier cambio en la forma de la superficie implica la realización de una fuerza y un desplazamiento, lo que genera un trabajo, para realizar este trabajo se debe invertir energía, por lo cual hay un cambio en la energía del sistema, en este caso un cambio en la energía de la gota.

La tensión superficial se define como la razón entre el cambio de la energía ΔE y el cambio en el área ΔA .

$$\Gamma = \frac{\Delta E}{\Delta A} \quad (9.9)$$

La tensión superficial tiene unidades de J/m^2 .

Cuando un líquido entra en contacto con un sólido, aparece en las superficies de contacto una interacción, la cual se manifiesta como una adherencia entre las superficies. Cuando nos lavamos las manos con agua es difícil secarnos solamente con sacudirnos las manos, esto se debe a esa fuerza de adherencia. Esta fuerza depende de las sustancias que se encuentran en contacto, por ejemplo el teflón y el aceite tienen menos adherencia que el aluminio y el aceite, es por ello que algunos utensilios de cocina tienen un recubrimiento de teflón para facilitar su limpieza.

Se debe tener especial cuidado en notar que la tensión superficial de una sustancia es constante, lo que cambia es la fuerza de adherencia cuando se coloca en contacto con otros materiales.

9.3.7. Capilaridad

La **capilaridad** es un fenómeno relacionado con la tensión superficial, este fenómeno se manifiesta por el desplazamiento de un líquido dentro de un tubo muy delgado llamado *capilar*, o dentro de un medio poroso, por ejemplo si se toma un cubo de azúcar y se moja levemente la parte inferior del cubo en un café oscuro, se puede observar como el café asciende rápidamente por el cubo. En la figura 9.4 se muestra el efecto de la capilaridad sobre un capilar

Al colocar un tubo capilar de radio r , el cual permanece parcialmente sumergido en un líquido, éste asciende hasta una altura h , la cual depende de las características del líquido y del diámetro del capilar. La tensión superficial será de $2\pi r\Gamma$; la magnitud de la tensión superficial se debe igualar con el peso de la columna, tal y como se muestra en la figura 9.5

La componente vertical es de magnitud $2\pi r\Gamma \cos \beta$, esta componente se deberá equilibrar con el peso de la columna para que el sistema se encuentre en equilibrio. De esta forma obtenemos la ecuación,

$$\boxed{h = \frac{2\Gamma \cos \beta}{\rho g r}} \quad (9.10)$$

El ángulo β es el ángulo que ofrece la curvatura del agua dentro del tubo debido al efecto de capilaridad, este ángulo puede ser muy pequeño, como ocurre en el caso del agua, de manera que podemos hacer $\cos \beta \approx 1$, de manera que la ecuación (9.10) toma la forma

$$\boxed{h = \frac{2\Gamma}{\rho g r}} \quad (9.11)$$

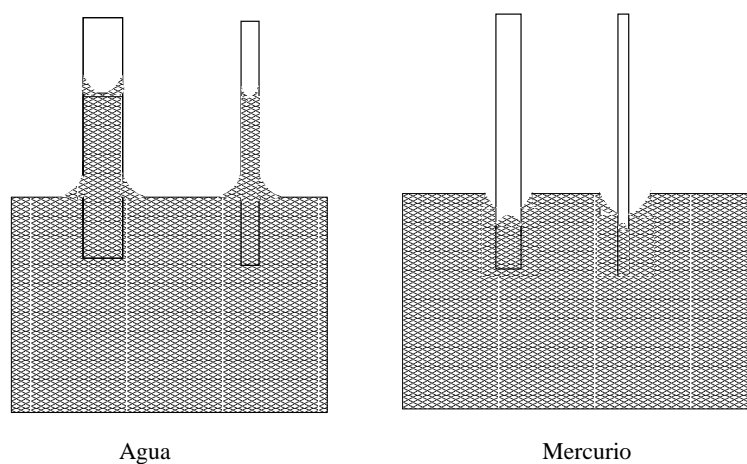


Figura 9.4: Capilaridad. El comportamiento capilar del agua y del mercurio es diferente, esto es debido a la diferencia en la tensión superficial de los dos fluidos y las fuerzas de adhesión entre el fluido y el material. En los dos casos la superficie del líquido se curva, en el agua la fuerza de cohesión entre sus moléculas es menor que la fuerza de adhesión en la superficie de contacto entre el agua y el vidrio, lo que da lugar a una forma cóncava. En el caso contrario, el mercurio tiene una fuerza de cohesión entre sus moléculas mayor que la fuerza de cohesión entre la superficie mercurio y vidrio, lo cual da lugar a una forma convexa.

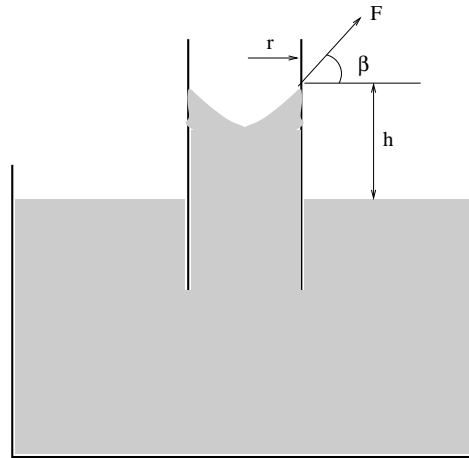


Figura 9.5: Parámetros que intervienen en la capilaridad. En ángulo β es el formado por la curvatura del agua dentro del tubo, h es la altura que alcanza la columna del líquido y r el radio del capilar.

Sobre las ecuaciones (9.10) y (9.11) podemos decir que

- La altura (h) a la cual asciende el fluido es directamente proporcional a la tensión superficial Γ , una alta tensión superficial proporciona un mayor nivel en la columna de líquido.
- El nivel en la columna es inversamente proporcional al radio r del tubo, es por ello que el fenómeno de capilaridad se presenta especialmente en tubos con un radio muy pequeño.
- La altura a la cual asciende la columna es también inversamente proporcional a la densidad ρ del fluido.

9.3.8. Presión en un fluido

Al nadar nos hemos dado cuenta que el agua ejerce una presión sobre nosotros, y esta presión es mayor a medida que nos sumergimos mas. Llega un punto en el cual la presión del agua hace que penetre líquido dentro de nuestros oídos, ocasionándonos una sensación molesta.

Un fluido ejerce una presión, tanto sobre el recipiente que lo contiene, como sobre los objetos que se hallan dentro de él. Esta presión es proporcional

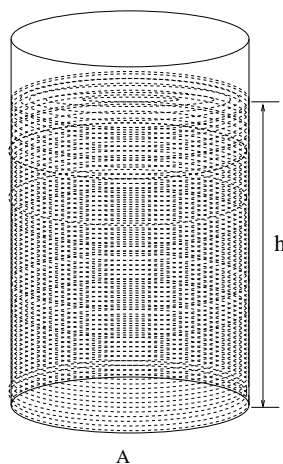


Figura 9.6: La presión de un fluido en el fondo de un recipiente es igual a $P = \rho gh$, obsérvese que la presión es independiente del área del fondo del recipiente, solamente depende de la profundidad h del líquido, de la densidad y la gravedad.

a la altura a la cual se mida, a mayor profundidad mayor presión, a menor profundidad menor presión.

En un tubo de sección transversal, o área $A = 2\pi r$, la presión que ejerce el líquido sobre el fondo del tubo se puede obtener por medio de la siguiente ecuación,

$$\boxed{P = \rho gh} \quad (9.12)$$

en donde P es la presión, ρ es la densidad del fluido, g es la gravedad y h la profundidad a la cual se encuentra el fluido, como se observa en la figura 9.6

Es muy importante notar que la presión no depende del área sobre la cual actúa, en el caso de un submarino que se encuentra a gran profundidad en el mar, tiene que soportar una enorme fuerza, ya que la presión del agua salada es muy grande, y el área de interacción también es muy grande, lo que hace que la fuerza resultante sea enorme finalmente.

Ejemplo 42 Una columna de mercurio que se encuentra en un tubo, posee

una altura de 76 cm, la presión que ejerce sobre el fondo del tubo es igual a:

$$\begin{aligned} P &= \left(13,6 \frac{g}{cm^3}\right) \left(980 \frac{cm}{s^2}\right) (76cm) \\ &= 1012928 \frac{dinas}{cm^2} \\ &= 101,30kPa \end{aligned}$$

9.4. Estática de Fluidos

Se dice que un fluido es estático si no fluye, es decir si no hay desplazamiento de sus moléculas de manera contante a través del tiempo; La **hidrostática** es la parte de la física encargada del estudio de los fluidos en reposo.

Un líquido es considerado en general incompresible, de tal forma que cuando se aplica una presión, ésta se transmite con igual intensidad a todas las partes del fluido, y a las paredes del recipiente que lo contiene. Una utilidad de este principio se muestra en la figura 9.7.

En la figura 9.8 vemos como sobre un elemento de líquido de masa m , y volumen hA , en donde h es su altura y A el área de la sección transversal; se efectúan las fuerzas debidas a las presiones superior e inferior, y la del peso mismo del elemento de volumen, como el sistema está en equilibrio la sumatoria total de fuerzas es igual a cero, de manera que

$$\begin{aligned} pA - p_0A - mg &= 0 \\ (p - p_0)A &= mg \end{aligned}$$

La masa del elemento estudiado es igual a la densidad por el volumen, $m = \rho V = \rho Ah$, de manera que la ecuación toma la forma

$$\boxed{(p - p_0) = \rho gh.} \quad (9.13)$$

En la ecuación (9.13) p es la presión inferior, p_0 es la presión superior, la diferencia $(p - p_0)$ es la denominada presión manométrica, y es la que se mide con un manómetro en dicho punto.

Como $h = H - y$, podemos escribir la ecuación (9.13) como

$$\boxed{(p - p_0) = \rho g(H - y).} \quad (9.14)$$

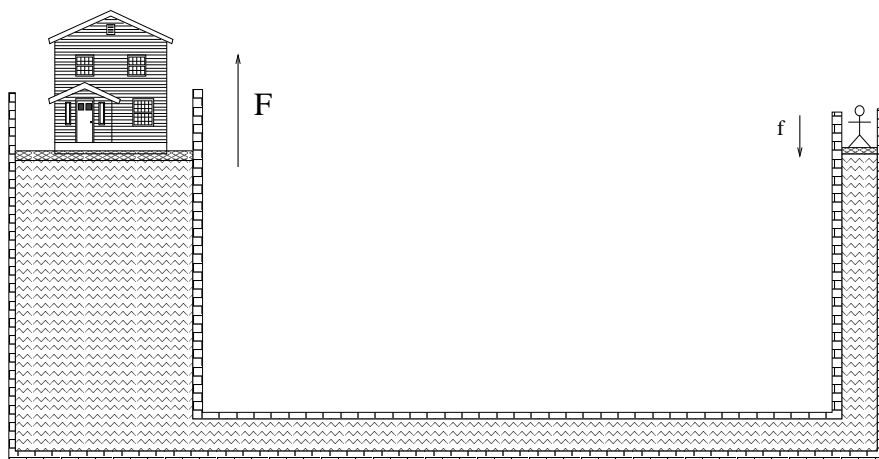


Figura 9.7: La presión que se ejerce sobre un fluido se transmite por igual a todo el fluido y a las paredes del recipiente que lo contienen, esto permite la creación del elevador hidráulico, que utiliza este principio de la siguiente forma: a la derecha una persona se para sobre el sistema en la zona en la cual el área del elevador es muy pequeña, el peso de la persona y la pequeña área producen una presión muy grande, la cual es transmitida a la zona en la cual se encuentra la casa, en esta zona el área es muy grande, y como la presión es la misma, la fuerza resultante será la suficiente para levantar la casa. El único inconveniente es que el desplazamiento es pequeño. Este principio se utiliza en los denominados *gatos* hidráulicos.

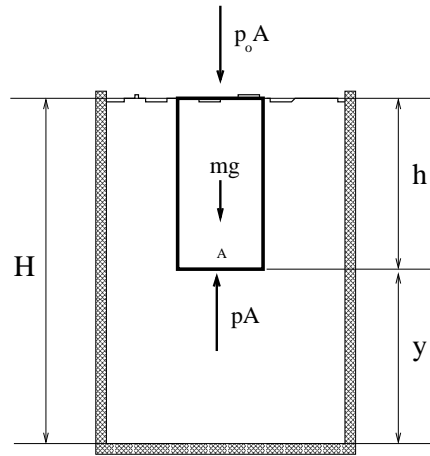


Figura 9.8: Sobre un elemento de líquido, de volumen hA (h es la altura y A el área de la sección transversal), contenido en un recipiente de altura $H = h + y$, las fuerzas que actúan sobre este elemento son la fuerza producida por la presión superior p_0 , es decir $p_0 A$, la fuerza de la presión inferior pA , y el peso mg .

Estas ecuaciones lo que nos indican es que la diferencia de presiones es una función simplemente de la profundidad a la cual se mide y la densidad del fluido estudiado.

9.4.1. Principio de Arquímedes

Todos hemos visto como una masa de acero se hunde fácilmente en el agua, mientras que un globo lleno de aire permanece flotando, ¿cómo se puede explicar esto?. Para ello recordemos el concepto de densidad relativa o gravedad específica, que es la relación entre la masa de una sustancia y la masa de un volumen igual de agua a una temperatura determinada.

Podemos también definir una densidad relativa con respecto a cualquier fluido, sin embargo vamos a suponer que nos referimos al agua, en este caso

$$\rho_g = \frac{\text{Masa de una sustancia}}{\text{Masa de un volumen igual de agua}} = \frac{\text{Densidad de la sustancia}}{\text{Densidad del agua}} \quad (9.15)$$

Tenemos básicamente tres casos

1. $\rho_g > 1$, la densidad del objeto es mayor que la del agua y el objeto tendrá la tendencia a hundirse.
2. $\rho = 1$, la densidad del objeto es igual a la densidad del agua y de esta forma el objeto tendrá una tendencia a mantenerse en una posición de equilibrio en el punto en el cual se encuentre.
3. $\rho < 1$ la densidad del objeto es menor que la del agua, de manera que el objeto flota.

El principio de Arquímedes expresa lo anterior de la siguiente forma “**Si un cuerpo está parcial o totalmente inmerso en un fluido, el fluido ejercerá una fuerza vertical hacia arriba sobre el cuerpo, igual al peso del fluido desalojado o desplazado**”. La fuerza que ejerce el fluido se denomina empuje, y es la razón por la cual los barcos no se hunden

$$\boxed{\text{empuje} = \text{peso del líquido desalojado} = V_c \rho_l g} \quad (9.16)$$

Siendo V_c el volumen del cuerpo, y ρ_l la densidad del líquido.

9.5. Dinámica de fluidos

En el caso de la dinámica de fluidos lo que nos interesa es un fluido que se mueve a través de una tubería, o un cauce. Para ello es importante el concepto de **flujo**, el cual hace referencia al desplazamiento de un líquido en un punto del espacio.

Si la velocidad de un fluido es constante en el tiempo en cualquier punto, se dice que el flujo es estacionario. Este tipo de flujo es muy común en movimiento de fluidos a bajas velocidades. Cuando no hay un desplazamiento relativo de los elementos de masa del fluido, es decir cuando todos se mueven a la misma velocidad, se dice que el flujo es laminar.

En un flujo no estacionario la velocidad de las partículas, o de los elementos del fluido, varían en función del tiempo. Cuando un flujo cambia en forma muy brusca se dice que es turbulento.

Los conceptos básicos de la dinámica de fluidos se han planteado para flujos estacionarios, incompresibles y no viscosos.

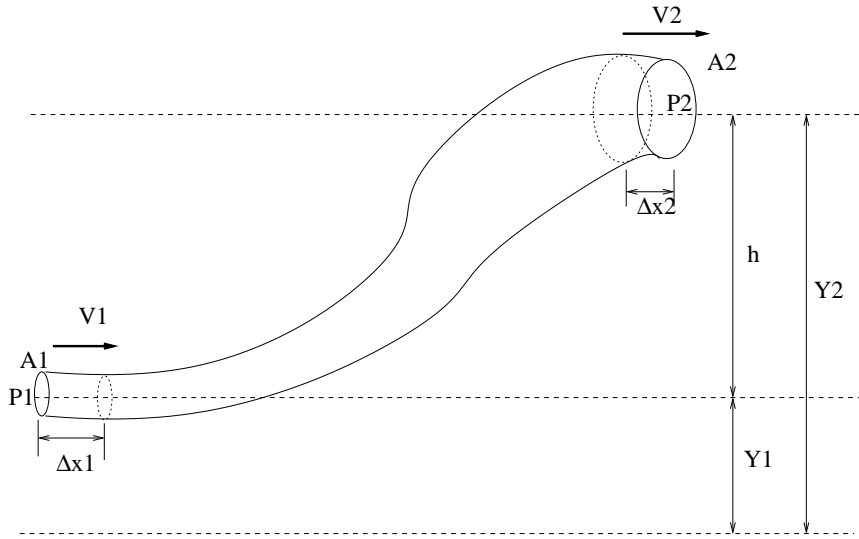


Figura 9.9: Representación grafica de un esquema de flujo a través de un tubo cuya sección transversal A varia de $A1$ hasta $A2$. $P1$, $V1$, $\Delta X1$ son la presión, la velocidad y la distancia inicial tomadas como parametros de entrada. $P2$, $V2$ y $\Delta X2$ son las mismas cantidades pero en la salida.

9.5.1. ¿Cómo se mide el flujo?

Los fluidos se pueden mover en sistemas cerrados como tuberías o en sistemas abiertos como ríos y canales, en los cuales existe una superficie libre. A partir del principio de conservación de la masa, se puede determinar la cantidad de masa por unidad de tiempo que pasa por un punto, de manera que no hayan sumideros, zonas que se lleven materias, ni fuentes, zonas que agreguen materia.

En la figura 9.9 se ha considerado un ducto por donde circula un fluido de densidad ρ , la cual es constante, este fluido va desde una sección transversal $A1$ a una velocidad $V1$, hasta una sección transversal $A2$ con velocidad $V2$.

En un tiempo Δt , la masa que entra por la sección transversal de área $A1$ es igual a la cantidad de masa que sale por el área $A2$, de manera que

$$A1(\Delta x1)\rho = A2(\Delta x2)\rho \quad (9.17)$$

$\Delta x1$ y $\Delta x2$, son respectivamente $\Delta x1 = V1\Delta t$ y $\Delta x2 = V2\Delta t$, de manera

que

$$\boxed{A_1 V_1 = A_2 V_2} \quad (9.18)$$

La ecuación (9.18) se conoce como ecuación de continuidad. De ella se deduce que cuando el ducto es mas estrecho el fluido deberá ir mas rápido para compensar la cantidad de líquido que sale a una velocidad determinada. Esta ecuación es correcta para los líquidos ideales, en los cuales no hay viscosidad ni fricción con las paredes del ducto.

Utilizando el principio de conservación de la energía para la figura 9.9 tenemos que

$$\boxed{P_1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta m_1 V_1^2}{Volumen_1} + \frac{\rho g Y_1}{Volumen_1} = P_2 + \frac{1}{2} \frac{\Delta m_2 V_2^2}{Volumen_2} + \frac{\rho g Y_2}{Volumen_2}} \quad (9.19)$$

Y utilizando la ecuación de continuidad llegamos a la ecuación de Bernoulli.

$$\boxed{P_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 + \rho g Y_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 + \rho g Y_2} \quad (9.20)$$

Esta ecuación es la mas importante para la mecánica de fluidos. Para su explicación detallada debemos volver a la figura 9.9. Esta ecuación me relaciona la diferencia de presiones entre los extremos de un tubo por el cual circula un fluido con una densidad ρ . Detrás de esta ecuación se encuentra la conservación de la energía, pero nosotros trataremos de dar una explicación un poco simple a su significado:

Las cantidades que se encuentran a la izquierda de la ecuación (9.20) hacen referencia a las cantidades que se encuentran en el extremo inferior del tubo, es decir la presión inferior P_1 , la velocidad del fluido en el punto inferior V_1 y la altura a la cual se encuentra el fluido y desde la cual empezamos a medir Y_1 . g es la gravedad. Las cantidades que se encuentran al lado derecho de la ecuación (9.20) hacen referencia al extremo superior del tubo, su presión superior P_2 , la velocidad del fluido en la parte superior V_2 y la altura a la que se encuentra el fluido en ese punto Y_2 .

Todo diseño de tuberías y sistemas de drenaje debe tener en cuenta la ecuación de Bernoulli.

Ejemplo 43 *El tanque de agua del pueblo.* *Un tanque cilíndrico de 4 metros de alto y 2.4 metros de diámetro está sobre una torres de 10 metros. Inicialmente el tanque está completamente lleno de agua hasta el topa. En*

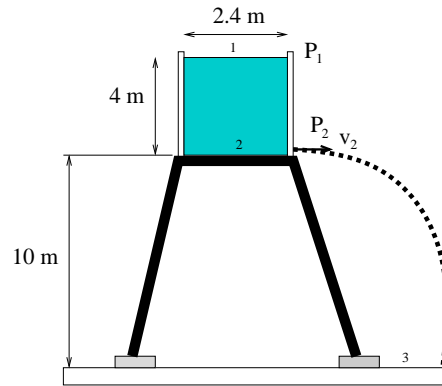


Figura 9.10: Tanque con sus dimensiones para el problema 43

la base hay un orificio de 10 cm^2 de área el cual se encuentra tapado. ¿Cuál será la rapidez de salida del agua una vez que se retire el tapón?

Solución:

En la figura 9.10 se puede observar la representación del problema, p_1 es la presión en la parte superior del tanque, y es igual a la presión atmosférica. p_2 es la presión en la parte inferior del tanque, esta presión es aproximadamente igual a la atmosférica, por lo tanto dejamos este valor, es decir que hasta el momento tenemos $p_1 = p_2$.

La rapidez con la cual desciende inicialmente el nivel del agua dentro del tanque está relacionada con la rapidez de salida del agua del orificio, para ello utilizamos la ecuación (9.18), de esta forma la velocidad v_2 con la cual sale el agua en la parte inferior está relacionada con la velocidad a la cual desciende el líquido v_1 por

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{A_1 v_1}{A_2} \\ &= \frac{\pi(1.2 \text{ m})^2 v_1}{10 \times 10^{-4} \text{ m}^2} \\ &= 4523 v_1. \end{aligned}$$

En donde A_1 es el área en la parte superior del tanque, y A_2 es el área del orificio. El resultado muestra que la velocidad a la cual comienza a disminuir el nivel del agua es 4523 veces mas lenta que la velocidad con la cual sale el agua por el agujero. Debido a la enorme diferencia en la velocidad podemos decir que la cantidad $\frac{1}{2}\rho v_1^2$ en la ecuación de Bernoulli (9.20).

Tenemos hasta el momento como resultados

$$p_1 = p_2 \quad (9.21)$$

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 = 0 \quad (9.22)$$

$$g = 10\text{m/s}^2 \quad \text{gravedad} \quad (9.23)$$

De esta forma en la ecuación de Bernoulli podemos despejar la velocidad v_2 para obtener:

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{2g(y_1 - y_2)} \\ &= \sqrt{2gh_0} \\ &= \sqrt{2 \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) (4 \text{ m})} \\ &= 8,9 \text{ m/s} \end{aligned}$$

en este ejemplo hemos encontrado la cantidad $\sqrt{2g(y_1 - y_2)}$, esto corresponde a la velocidad a la cual sale un **fluido ideal** por un orificio y es similar a la velocidad de caída libre de un cuerpo sometido a la misma a la misma diferencia de altura. Esto se conoce como **principio de Torricelli**.

9.6. Taller experimental

Este es el último taller experimental del presente texto, y lo que se busca es que con lo aprendido a lo largo del escrito usted sea capaz de crear un taller experimental cuyo tema central sean los fluidos. A continuación daremos unas pautas para que usted lo haga:

- Tome un tópico específico del tema fluidos, por ejemplo densidad ó presión, y busque como objetivo principal el afianzar el concepto utilizando como herramienta el taller.
- No trate de abarcar todo el capítulo, haga énfasis en un solo tema y aprendalo bien, defina que cantidad desea medir. De esta forma defina un objetivo claramente.
- El experimento debe tener como resultado el valor numérico de una cantidad. Este valor debe usted poderlo compara con un valor experimental. Un buen ejemplo de ello es el laboratorio de medición del

momento de inercia. Al final del experimento usted deberá poder comparar la cantidad que usted midió con la cantidad teórica que obtuvo.

- Haga un dibujo del montaje experimental inicial para verificar que cuenta con todos los materiales, después realice el montaje y compruebe que funciona.
- Haga un bosquejo de la metodología a emplear, es decir, diga claramente como hacer el experimento, que cantidades medir y como comparar los resultados con ayudas de gráficos o tablas.
- Escriba una pequeña descripción del experimento de no mas de tres paginas, en las que deberá incluir el bosquejo del experimento.
- Cite bibliografía en donde se pueda buscar información del tema estudiado.
- por ultimo asegúrese que los demás entienden lo que usted desea hacer, para ello reparta el material escrito y haga que otras personas realicen el experimento.

A lo largo del texto se ha intentado lograr progresivamente seguir el esquema presentado anteriormente. Sin embargo es deseable que usted lo haga como a usted le parece mejor, lo importante es que al final otras personas deben hacer el experimento y aprender de él.

9.7. Resumen y glosario

1. Los fluidos son sustancias que pueden escurrir o fluir.
2. Los líquidos son fluidos prácticamente incompresibles.
3. Los gases son fluidos altamente compresibles.
4. Tenemos como estados de la materia el sólido, el líquido y el gaseoso, y una serie de estados intermedios como el coloide, un estado intermedio entre el fluido y el líquido.
5. El cambio de la materia de un estado a otro se conoce como **transición de fase**.

6. La presión se define como la fuerza por unidad de área que ejerce un fluido sobre una superficie determinada.
7. La presión aplicada a un fluido se transmite sin disminución alguna a todas las partes del fluido y de las paredes del recipiente que lo contiene. Esto es conocido como **principio de Pascal**.
8. La densidad se define como la cantidad de materia sobre unidad de volumen de un elemento cualquiera, esta cantidad es de especial utilidad en la descripción de las propiedades de los fluidos.
9. La gravedad específica se define como la relación entre la masa de un cuerpo sólido ó líquido y la masa de un volumen igual de agua destilada a una temperatura de 4°C.
10. El peso específico se define como la relación entre el peso de la sustancia mg y el volumen que la sustancia ocupa V .
11. La viscosidad es una medida de la resistencia a fluir de los líquidos. A mayor viscosidad la resistencia a fluir es mayor, un ejemplo de una enorme viscosidad es el vidrio, el cual posee una viscosidad tan grande que es considerado prácticamente un sólido. Sin embargo existen catedrales en Europa en donde en la parte inferior de sus viejos vidrios se puede observar que son mas anchos que en la parte superior, lo que muestra el muy lento fluir del vidrio.
12. La tensión superficial es la tendencia que posee un líquido a disminuir su superficie.
13. La capilaridad está relacionada con la tensión superficial, este fenómeno se expresa por el fluir de un líquido por un tubo muy delgado llamado capilar.
14. El principio de Arquímedes puede ser expresado de la siguiente forma: Si un cuerpo está totalmente o parcialmente sumergido dentro de un fluido, el fluido ejercerá una fuerza vertical hacia arriba sobre el cuerpo, igual al peso del fluido desalojado o desplazado. Este principio es la base de la construcción de barcos de metal.
15. La ecuación mas importante de la dinámica de fluidos es la de Bernoulli.

9.8. Evaluación final

1. A nivel del mar la densidad del aire seco a 0°C es 1.29 kg/m^3 y a 30°C es 1.16 kg/m^3 . Cuántos kilogramos de aire hay en un aula de clase cuya dimensiones son $5\text{m}\times 6\text{m}\times 3\text{m}$.
 - a) ¿Cuándo la temperatura ambiente es de 0°C ?
 - b) ¿Cuándo la temperatura ambiente es de 30°C ?
 - c) ¿En qué porcentaje varía la masa de aire cuando la temperatura pasa de 0°C a 30°C ?
2. ¿A qué altura sobre el nivel del agua en donde está sumergido, subiría por capilaridad el agua en un pitillo de 4 mm de diametro?
3. Un trozo de metal pesa 50 N en el aire y 30 N cuando se sumerge completamente en el agua. Calcule la gravedad específica del metal suponiendo que el metal tiene una gravedad específica uniforme.
4. Un objeto que pesa en el aire 50 N, 30 N al sumergirlo en el agua y 40 N cuando se sumerge en un líquido de una densidad desconocida. ¿Podría usted calcular la densidad del líquido desconocido?, si la respuesta es si calcule la densidad.
5. Un recipiente que contiene agua se coloca en el plato de una balanza; la lectura de la balanza es w_0 . Otro cuerpo de peso w_c sostenido por una cuerda de masa despreciable se sumerge completamente en el recipiente con agua pero sin que toque el fondo del recipiente, ¿cuál será la nueva lectura de la balanza?. Si el cuerpo descansa completamente en el fondo de la balanza ¿cuál será la lectura de la balanza?
6. El 30 % del volumen de un objeto flota sobre el agua. ¿Cuál es la densidad media del objeto?
7. ¿Cuál será la presión estática en el extremo inferior de una tubería de conducción de agua que se halla 1000 metros mas arriba?. ¿Qué papel desempeña la presión atmosférica si el extremo inferior del tubo se rompe?
8. ¿Cuál es la diferencia de presión atmosférica entre los pies y la cabeza de una persona de 1.8 metros de altura?

9. ¿Cuánto pesan 2m^3 de cobre, cuya gravedad específica es de 8.82?

9.9. Información de retorno

A continuación encontrará respuestas a las preguntas y ejercicios planteados en la parte inicial, evaluación de conceptos previos, y final del capítulo, evaluación. Las respuestas pueden ser ampliadas por usted y la solución a los ejercicios no es única. Se busca que usted amplíe la respuesta, la mejore y encuentre otros métodos de solución a los ejercicios. A las preguntas de la evaluación final solo se han colocado las respuestas, se espera que al nivel que ha llegado busque la forma de llegar a estos resultados.

Conceptos previos

1. ¿El vidrio es un sólido o un fluido?
El vidrio es un fluido, con una densidad muy alta.
2. ¿Cómo hace una puntilla para penetrar en una pared?
Lo hace por medio de la presión, el área de la punta es muy pequeña, y la fuerza que se ejerce es muy grande, el resultado final es que la presión que ejerce la puntilla sobre la pared es grande y es por ello que logra penetrar la pared.
3. ¿Cuál es la diferencia entre un líquido y un gas?
La viscosidad, la tensión superficial y la capilaridad son algunas propiedades que solamente se presentan en lo líquido.
4. ¿Un gel para el cabello es un líquido o un sólido?
Es un estado intermedio entre el líquido y el sólido.

Evaluación

1. A nivel del mar la densidad del aire seco a 0°C es 1.29 kg/m^3 y a 30°C es 1.16 kg/m^3 . Cuántos kilogramos de aire hay en un aula de clase cuya dimensiones son $5\text{m} \times 6\text{m} \times 3\text{m}$.

a) ¿Cuándo la temperatura ambiente es de 0°C ?
Respuesta: 116.1 kg.

b) ¿Cuándo la temperatura ambiente es de 30°C ?

Respuesta: 104.4 kg .

c) ¿En qué porcentaje varía la masa de aire cuando la temperatura pasa de 0°C a 30°C ?

respuesta: 9.82 .

2. ¿A qué altura sobre el nivel del agua en donde está sumergido, subiría por capilaridad el agua en un pitillo de 4 mm de diametro?

Respuesta: 7.4 mm

3. Un trozo de metal pesa 50 N en el aire y 30 N cuando se sumerge completamente en el agua. Calcule la gravedad específica del metal suponiendo que el metal tiene una gravedad específica uniforme.

Respuesta: 2.5

4. Un objeto que pesa en el aire 50 N, 30 N al sumergirlo en el agua y 40 N cuando se sumerge en un líquido de una densidad desconocida. ¿Podría usted calcular la densidad del líquido desconocido?, si la respuesta es si calcule la densidad.

Respuesta: Si. 500 kg/m^3

5. Un recipiente que contiene agua se coloca en el plato de una balanza; la lectura de la balanza es w_0 . Otro cuerpo de peso w_c sostenido por una cuerda de masa despreciable se sumerge completamente en el recipiente con agua pero sin que toque el fondo del recipiente, ¿cuál será la nueva lectura de la balanza?. Si el cuerpo descansa completamente en el fondo de la balanza ¿cuál será la lectura de la balanza?.

Respuesta: $L = w_0 + w_c + T$ T es la tensión de la cuerda. $L = w_0 + w_c$.

6. El 30 % del volumen de un objeto flota sobre el agua. ¿Cuál es la densidad media del objeto?.

Respuesta: 666.6kg/m^3 .

7. ¿Cuál será la presión estática en el extremo inferior de una tubería de conducción de agua que se halla 1000 metros mas arriba?. ¿Qué papel desempeña la presión atmosférica si el extremo inferior del tubo se rompe?.

Respuesta: 9800000 Pa .

8. ¿Cuál es la diferencia de presión atmosférica entre los pies y la cabeza de una persona de 1.8 metros de altura?.

Respuesta: 18900 Pa.

9. ¿Cuánto pesan 2m^3 de cobre, cuya gravedad específica es de 8.82?.

respuesta: 17640 kg.

Palabras claves para búsqueda en Internet

A continuación se presentará una serie de palabras útiles para la búsqueda en Internet, las palabras se han probado en el buscador

<http://www.google.com>

no tienen ortografía dado que el buscador es universal, y en por que en ocasiones va a tener que utilizar teclados que no tienen tildes o eñes.

fluidos, curso de fisica, ley de los gases, gas ideal, pascall, bernoulli, arquimedes principio, conversion de unidades.

Bibliografía recomendada:

Se puede consultar al final del texto, el número que encuentra al final de la referencia es el número correspondiente al texto en la bibliografía final.

- Formulas y tablas matemáticas en general [1].
- Mediciones y experimentos en fluidos y gases [2, 13, 9].
- Fluidos y gases [7, 8, 20, 21, 11].
- Conversión de unidades [18].

Apéndice A

Estadística y manejo de datos

Objetivo general

Dotar al estudiante de las herramientas matemáticas en el manejo estadístico de datos aplicado al tratamiento de errores y la entrega de informes.

Objetivos específico

1. Dominar los conceptos de procesos aleatorios y probabilidad, y su uso en la física.
2. Manejar el uso de cifras significativas y redondeo.
3. Manejar adecuadamente los errores que se presentan en los informes.

A.1. Introducción

Suponga que se encuentra usted en un juego de dados con un grupo de personas, y lógicamente usted desea ganar, el juego consiste en sacar el mayor número posible usando dos dados. se tiene desde el número dos, hasta 12 como posibles cantidades a obtener. Si los dados son perfectos el numero que se obtenga en un dado o en otro puede ser cualquiera. En la primera parte de este capítulo vamos a mostrar como se puede utilizar la estadística para aumentar la posibilidad de ganar en el juego de dados.

La estadística es la rama de las matemáticas encargada del estudio de procesos aleatorios, es decir procesos en los cuales al efectuar una medición,

el valor de la misma cambia constantemente. En este caso se debe entender por medición el proceso de determinar durante un periodo de tiempo el valor de la variable. Como el valor de los dados en los lanzamientos.

Los conceptos de **probabilidad**, **densidad de probabilidad**, **variable aleatoria**, entre otros, serán el objeto de estudio de esta primera parte. En el trabajo profesional serán usados con mucha frecuencia, además son parte primordial para la realización y justificación de informes. Por lo cual se van a convertir en una herramienta muy útil a lo largo del ejercicio profesional.

A.2. Evaluación de conocimientos previos

1. ¿Qué se entiende por estadística?.
2. ¿Que es un promedio?.
3. ¿Que se entiende por *aleatorio*?.
4. ¿Qué es una variable?.
5. ¿Qué se entiende por probabilidad?
6. ¿Qué es una función?.
7. ¿Que es un error?, ¿se puede medir un error?.

A.3. Procesos y variables aleatorias

Los procesos aleatorios están descritos en términos de variables aleatorias. Un ejemplo de una variable aleatoria es el de el valor de la cara superior de un dado, en el juego de dados. Cuando el dado es perfecto, al tirar el dado se observa que puede salir cualquier valor, y es difícil predecir cual será el siguiente valor. De esta forma se puede definir una **densidad de probabilidad**, cuya función es mostrar la frecuencia con la cual sale un determinado valor en la variable.

La **estadística**, es la rama de las matemáticas encargada del estudio de los procesos aleatorios. Y los procesos aleatorios son descritos en términos de una densidad de probabilidad.

Para estudiar los primeros conceptos de la probabilidad usaremos como primera aproximación el juego de dados en su forma mas simple, la de un

solo dado. Los valores de la variable aleatoria x_i (el valor de la cara superior del dado) para un dado perfecto, y el correspondiente valor de su densidad de probabilidad $P(x)$ son,

$$\begin{aligned} x &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} && \text{Variable} \\ P(x) &= \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right\} && \text{Densidad de probabilidad.} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Se dice que la variable x_i posee una **distribución** $P(x_i)$. La manera como se puede interpretar esta distribución es la siguiente: supongamos que se realiza un experimento, en el se toma un dado y se lanza un número N de veces, al cabo de cierta cantidad de lanzamientos se notará que *aproximadamente* el número de veces que sale una determinada cantidad del dado es $\frac{1}{6}$ del número total de lanzamientos. Si llenáramos la siguiente tabla¹,

Número en la cara del dado	Número de veces que salió
1	N_1
2	N_2
3	N_3
4	N_4
5	N_5
6	N_6
Suma de N_i	N

En donde cada N_i ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$) es el número de veces que salió el valor i en la cara del dado, e hiciéramos el cociente $\frac{N_i}{N}$ obtendríamos aproxima-

¹Es recomendable que el estudiante haga el experimento para que se convenza del resultado

mente el siguiente resultado

$$\begin{aligned}
 \frac{N_1}{N} &= \frac{1}{6} \approx 1,666... \\
 \frac{N_2}{N} &= \frac{1}{6} \\
 \frac{N_3}{N} &= \frac{1}{6} \\
 \frac{N_4}{N} &= \frac{1}{6} \\
 \frac{N_5}{N} &= \frac{1}{6} \\
 \frac{N_6}{N} &= \frac{1}{6}
 \end{aligned}
 \tag{A.2}$$

Si el dado fuera perfecto y realizáramos un número infinito de lanzamientos obtendríamos el valor exacto de $1/6$. Sin embargo en la práctica en cualquier experimento solo podemos realizar un número finito de intentos. ¡Imagínese el trabajo de tener que lanzar el dado mas de un millón de veces!.

Una característica de las variables aleatorias es que pueden ser **discretas**, es decir el valor es un número entero como en el caso del dado; o **continuas**, es decir que toman cualquier valor de la recta real.

Si la variable aleatoria es discreta, la función $P(x_i)$ tiene el significado de “la frecuencia con la cual ocurre el fenómeno con variable aleatoria x_i ”, en el caso del dado significa el porcentaje total en el cual sale un número determinado. Si la variable aleatoria es continua entonces no podemos encontrar una interpretación similar a la anterior para la función $P(x)$ ², en este caso se habla de la **probabilidad** de encontrar un valor de la variable x entre el intervalo x y $x + dx$ (en este caso dx significa un intervalo muy pequeño con respecto al valor de x). En el caso de un dado de caras desiguales tenemos que la función densidad de probabilidad es diferente, ya que la frecuencia con la cual sale un número es diferente a la de otro número. Pensemos en un jugador de dados que posee un dado cargado, es decir un dado que tiene una tendencia a salir mas de un lado que de otro. Una manera de lograr esto es colocando un mayor peso en el lado opuesto del número que se desea, este

²Nótese que cuando se habla de una variable discreta la denotamos x_i , mientras que una variable continua solo la denotamos por x .

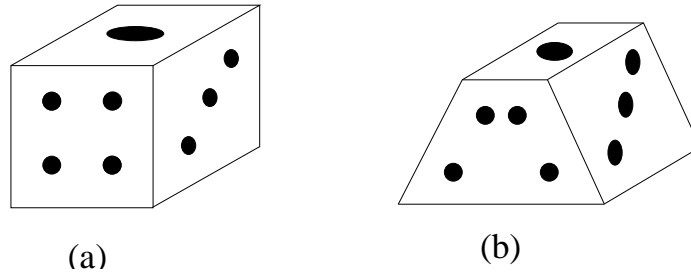


Figura A.1: Ejemplo de dos dados uno perfecto (a) y otro cargado de manera exagerada (b).

es el denominado dado cargado. Otra forma es la de limar el dado de tal manera que ya no sea un cubo perfecto como se ve en la figura A.3. Vamos a suponer una función densidad para un dado cargado. Si suponemos que la probabilidad en este tipo de dados depende del área del lado opuesto, podemos suponer una densidad de probabilidad para el dado (b) de la figura A.3 dada por:

$$\begin{aligned}
 x &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} && \text{Variable} \\
 P(x) &= \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12} \right\} && \text{Densidad de probabilidad.}
 \end{aligned}
 \tag{A.3}$$

A.3.1. Función densidad y distribuciones discretas.

¿Cuál es la labor de la función densidad de probabilidad?. Para responder esta pregunta inicialmente solo nos concentraremos en una función densidad de probabilidad discreta, y para ello vamos a usar el ejemplo del dado, nuevamente.

En algunos casos no solo nos interesa saber la probabilidad de encontrar un determinado valor, sino la probabilidad de que el dado caiga, por ejemplo, en una serie de valores. Para mostrar esto supongamos que deseamos saber la probabilidad de que en una serie de lanzamientos de dados tengamos la probabilidad de que este caiga entre los valores 2 y 4, incluyendo los valores 2 y 4, en el caso de los dados iguales esto se puede escribir matemáticamente

como

$$\begin{aligned}
 P(2 \leq x_i \leq 4) &= P(2) + P(3) + P(4) = \sum_{x_i=2}^{x_i=4} P(x_i) \\
 &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Es decir “**la probabilidad de que en un dado perfecto obtengamos los valores 2 ó 3 ó 4 es igual a $\frac{1}{2}$** ”.

Vamos a realizar un análisis cuidadoso de la ecuación A.4.

- El símbolo $\sum_{x_i=2}^{x_i=4} P(x_i)$ significa que vamos a sumar los elementos $P(x_i)$ de manera sucesiva desde $x_i = 2$ hasta $x_i = 4$. Al símbolo $\sum_{x_i}^{x_f}$ se le denomina *sumatoria* desde x_i hasta x_f , y se le usa de manera frecuente en ingeniería y matemáticas. En ocasiones se omite la variable superior en la sumatoria y simplemente se escribe $\sum_{x_i=2}^4$
- El resultado de la sumatoria es $\frac{1}{2}$, este resultado nos está indicando que de un número N de lanzamientos, la mitad de ellos caerán **en 1 o en 2 o en 3**.
- Un dado tiene seis caras, y los números 1, 2 y 3, ocupan tres de estas caras, como todas las caras poseen igual probabilidad de caer, entonces se espera que la mitad de los lanzamientos caigan precisamente en estos tres números.
- Para un jugador de dados es mejor apostarle a tres números que a un solo número. En este caso si le apuesta a un solo número la probabilidad es de solo $\frac{1}{6}$, mientras que si le apuesta a tres números la probabilidad de que gane es de $\frac{1}{2}$.
- Se suele multiplicar esta probabilidad por el número 100, para obtener los valores mas conocidos de porcentaje, indicado con el símbolo %. En este caso la probabilidad de que salgan los números 2, 3 y 4, en un dado de caras iguales es del $\frac{1}{2} \times 100 \% = 50 \%$. Y la probabilidad de que salga solo el número 1 es del $\frac{1}{6} \times 100 \% = 16,66 \%$.

Una característica importante de la función densidad de probabilidad es que ella se encuentra **normalizada**, es decir que el valor de la suma total de todos los valores posibles de la función es 1. Esto se puede ver de las funciones densidad de probabilidad (A.1) y (A.3). Para el caso del dado perfecto³:

$$\begin{aligned}\sum_{x_i=1}^{x_i=6} P(x_i) &= P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6), \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}, \\ &= 1.\end{aligned}\tag{A.5}$$

Para el caso del dado cargado

$$\begin{aligned}\sum_{x_i=1}^{x_i=6} P(x_i) &= P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6), \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}, \\ &= 1.\end{aligned}\tag{A.6}$$

¿Cuál es el significado del anterior resultado?, significa que la probabilidad de que en N intentos yo obtenga un valor para los dados entre 1 y 6, es decir que obtenga o 1, o 2, o 3, o 4, o 5, o 6. Es igual esta probabilidad a 1, o mejor al $1 \times 100\% = 100\%$. En cualquier lanzamiento yo puedo afirmar que voy a obtener un número del 1 al 6 y no otro diferente, ya que el dado solo tiene 6 lados. La necesidad de que la función densidad de probabilidad esté normalizada es una cuestión de convención ya que es muy útil el manejar cantidades entre 0 y 1. ¡Si quiere ganar en el juego de los dados apuéstele a todos los números!.

Otra característica importante de la función densidad de probabilidad es que sus valores se encuentran entre $0 \leq P(x) \leq 1$. Algo que se intuye de la condición de normalización. Es importante notar que esta función nunca toma valores negativos, es por esto que en las encuestas no escuchamos hablar que un candidato tiene -20% de posibilidades de ganar, y de la misma forma tampoco escuchamos decir técnicamente que existe una probabilidad de mas del 100% .

³Es un buen ejercicio que el estudiante se convenza de la verdad de estos cálculos, por ello recomendamos que los repita.

Ejemplo 44 *Determine la probabilidad de que en un lanzamiento del dado cargado de la figura A.3 yo obtenga 2 o 3, en la cara superior del dado. Y después calcule la probabilidad de obtener los números 1 o 6.*

Para la solución de la primera parte del problema tenemos que sumar $P(x_i)$ desde $x_i = 2$ hasta $x_i = 3$, esto lo podemos escribir como

$$\begin{aligned}
 P(2 \leq x_i \leq 4) &= \sum_{i=2}^3 P(x_i) \\
 &= P(x_2) + P(x_3) \\
 &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\
 &= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}
 \tag{A.7}$$

Es decir una probabilidad del 33,3 %. Para el siguiente calculo la sumatoria hace que se tomen los valores $x_i = 1, 6$.

$$\begin{aligned}
 P(1 \text{ o } 6) &= P(x_1) + P(x_6) \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Es decir una probabilidad del 25 %. Se ve que es mayor la probabilidad de que el dado caiga en 2 o en 3, que la probabilidad de que caiga en 1 o 6.

A.3.2. Función densidad y distribuciones continuas .

Como ya hemos visto si $P(x)$ es la densidad de probabilidad de la variable x , se dice que x está **distribuida** como $P(x)$. Por esta razón cuando estudiamos probabilidades tambien hablamos de **distribuciones de probabilidad**.

Dependiendo del fenómeno la variable x_i puede ser discreta, como en el caso

de los dados, o puede ser continua, o considerada continua si es, aunque finita, en la practica no numerable, por ejemplo las velocidades de las moléculas que componen un gas (el número de moléculas en un gas es del orden de 10^{23}).

‘¿Como interpretamos una densidad de probabilidad continua?. Si x es ahora continua definitivamente no podemos interpretar $P(x)$ como la frecuencia de ocurrencia de un fenómeno. Para comenzar, cuando tenemos una variable continua no podemos hablar de la frecuencia con la cual una variable asume un valor fijo. Por ejemplo suponga que usted va en un carro, y le pregunta al conductor cual es la velocidad promedio a la cual realiza determinado trayecto. En principio el conductor puede decirle que el va a 40km/h , pero en realidad el una gran parte del tiempo va conduciendo a una velocidad alrededor de los 40km/h , pero el no va a esta velocidad exacta.

Del ejemplo anterior vemos el problema al tratar con variables continuas, ya no podemos hablar de un valor específico, solo hablamos de un intervalo de valores, y en ocasiones hacemos este intervalo tan pequeño para hablar de un valor específico. Pero nunca se debe olvidar que al tratar de realizar mediciones de variables continuas de lo que hablamos es de un intervalo de medición.

De esta manera al tratar a x como una variable continua decimos que “la distribución $P(x)$ es una **densidad de probabilidad continua**” tal que la probabilidad de encontrar a x' en un intervalo entre x y $x + dx$ es $P(x)dx$. Este dx es una cantidad muy pequeña comparada con el valor de x .

Y ahora al hablar de **probabilidad** podemos generalizar las ecuaciones (A.4). La probabilidad de encontrar a x entre x_1 y x_2 se expresa como la integral

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} P(x)dx \quad (\text{A.8})$$

La integral es una generalización de una sumatoria para variables continuas, en el momento no nos preocuparemos por el proceso de integración, ya que utilizaremos tablas de integrales para la mayoría de los problemas propuestos. En sus cursos de cálculo aprenderán a utilizar esta poderosa herramienta. Para una completa tabla de formulas matemáticas se puede ver la referencia [16].

A.3.3. Valor medio y desviación estándar

Los conceptos de valor medio y desviación estándar son los más ampliamente utilizados en los campos de las ciencias aplicadas y puras. Ya que estos

valores son los encargados de validar las mediciones realizadas, o prever algún fenómeno de interés que se este estudiando.

Valor Esperado

El valor esperado de una variable aleatoria x , o de una función aleatoria $f(x)$, se define con ayuda de la densidad de probabilidad $P(x)$ asociada a esa variable:

1. Para una variable aleatoria continua x el valor esperado se define

$$E[x] \equiv \int xP(x)dx \quad (\text{A.9})$$

La integración se realiza sobre todos los valores posibles de x .

2. Para una variable aleatoria discreta x_i el valor esperado se define

$$E[x_i] \equiv \sum_i x_i P(x_i) \quad (\text{A.10})$$

La suma se realiza sobre todos los valores posibles de x_i .

3. De manera similar para una función continua $f(x)$ que tiene una densidad de probabilidad asociada $P(x)$, tenemos

$$E[f(x)] \equiv \int f(x)P(x)dx \quad (\text{A.11})$$

Nótese que el caso discreto se obtiene de cambiar las integrales por sumatorias.

Cuando se habla de valor esperado de una variable, nos referimos al valor que **en promedio** va a salir después de realizar un numero muy grande de experimentos. Otra manera de definir este valor promedio es el decir que este es el valor de la variable aleatoria que tiene la probabilidad mas alta de salir al realizar un experimento.

Momentos de una distribución. La media y la varianza

Una densidad de probabilidad, o distribución de probabilidad como tambien se le llama, esta caracterizada por sus momentos. De manera general se

habla de momento j -ésimo de una distribución sobre un punto x_0 se define por el valor esperado de $(x - x_0)^j$, y se suele notar como $E[(x - x_0)^j]$. Por ejemplo

- El primer momento alrededor de cero ($x_0 = 0$ y $j = 1$), es el valor medio

$$\mu \equiv E[x] = \sum_{i=1}^n x_i P(x_i) \rightarrow \int x P(x) dx \quad (\text{A.12})$$

- El segundo momento alrededor del valor medio es denominado **varianza** ($x_0 = \mu = E[x]$ y $j = 2$)

$$\sigma^2 \equiv E[(x - \mu)^2] = \int (x - \mu)^2 P(x) dx \rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 P(x_i) \quad (\text{A.13})$$

- En física los mas importantes son estos dos primeros momentos. A la raíz cuadrada de la varianza se le denomina desviación estándar, una cantidad muy importante en la teoría de errores como veremos mas adelante.

$$\sigma : \quad \text{Desviación estándar} \quad (\text{A.14})$$

La varianza es el promedio de la desviación cuadrática del valor medio de x , como se ve en (A.13). La desviación estándar nos da una idea de como fluctua la variable aleatoria x alrededor de la media. Es decir que tanto cambia alrededor de este valor, de aqui se empieza a observar la importancia de esta cantidad en la teoría de errores.

A.4. Distribuciones teóricas

Es lógico el pensar que existen un numero inmensamente grande de funciones distribución de probabilidad. Sin embargo una enorme cantidad de problemas en física están descritos por un numero muy reducido de distribuciones teóricas. A continuación presentaremos las mas sobresalientes e importantes, con sus características y propiedades matemáticas.

A.4.1. Distribución binomial

Muchos procesos que se estudian en la naturaleza hacen referencia a procesos en donde la única respuesta posible es *sí* o *no*, *cara* o *sello*, *blanco* o *negro*. Este tipo de procesos es bien descrito por una distribución binomial.

Vamos a suponer que en un proceso determinado solo pueden haber *aciertos* y *fallas*, por ejemplo el tirar una moneda al aire y ver si sale cara o no. Y deseamos conocer la probabilidad de que en N intentos tengamos n_1 aciertos (o n_2 fallas), es importante notar que el número de aciertos mas el número de fallas es igual al número total de lanzamientos, debido a que no existe ninguna otra posibilidad, es decir:

$$N = n_1 + n_2. \quad (\text{A.15})$$

La probabilidad del fenómeno está descrita por la distribución binomial

$$P(r) = \frac{N!}{n_1!(N - n_1)!} p^{n_1} (1 - p)^{N - n_1}, \quad (\text{A.16})$$

en donde p es la probabilidad de acierto del fenómeno.

Vamos a realizar una serie de observaciones a la ecuación (A.16)⁴:

1. La ecuación (A.16) corresponde a una distribución discreta, en la cual los únicos valores posibles para las variables son un acierto o una falla.
2. Como la probabilidad total está normalizada podemos afirmar que si la probabilidad de un acierto es igual a p , entonces la probabilidad de una falla es igual a $1 - p$, de tal manera que la suma de las dos probabilidades es 1.

$$\begin{aligned} \text{Probabilidad de un acierto} + \text{probabilidad de una falla} = \\ p + (1 - p) = 1, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

de esta manera se muestra que la probabilidad está normalizada.

3. en la ecuación (A.16) el primer termino es de la forma

$$\frac{N!}{n_1!(N - n_1)!} \quad (\text{A.18})$$

En donde ya habíamos mostrado que el termino $(N - n_1)$ es igual a el número de veces que ocurre una falla, es decir n_2 .

⁴El termino $N!$ significa $N! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times N$, y se conoce como N factorial

4. de manera similar se puede ver que la probabilidad de que se produzca una falla es $(p - 1)$, y este es precisamente el termino que se encuentra como $(p - 1)^{N-n_1}$, en la ecuación (A.16).
5. La media y la varianza para esta distribución están dadas por:

$$\mu = \sum_n nP(n) = Np \quad \rightarrow \text{Media.} \quad (\text{A.19})$$

$$\sigma^2 = \sum_{n=0}^N (n - \mu)^2 P(n) = Np(1 - p) \quad \rightarrow \text{Varianza.} \quad (\text{A.20})$$

6. La distribución se encuentra normalizada, como se muestra en la sección de problemas.
7. En la figura A.2 se observan dos distribuciones binomiales generadas a partir del programa *mathematica*©.

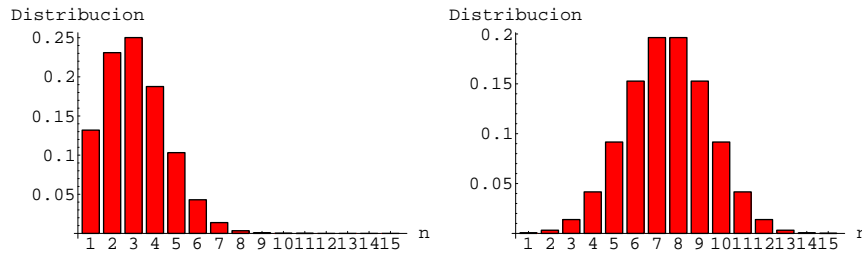


Figura A.2: La figura de la izquierda corresponde a una distribución binomial para 15 intentos con una probabilidad de éxito de 0.2. A la derecha se observa una distribución binomial para 15 intentos con una probabilidad de éxito de 0.5. Notese como el valor mas probable, la media, se ha desplazado al aumentar la probabilidad, esto debido a que el valor medio es igual a Np .

A continuación presentaremos el código fuente con el cual fue generada la figura A.2, este fue realizado en el programa *mathematica*©, y es muy útil para la realización de cálculos que requieren algo de complejidad, además de la generación de gráficas. Las herramientas computacionales serán muy importantes a lo largo de su carrera profesional, por lo cual se considera importante que empiece a tener un contacto directo con ellas.

En el programa se ve como este puede calcular todas aquellas cantidades de las cuales hemos hablado en esta sección. El programa ha sido realizado en **mathematica 4.0**, bajo el sistema operativo Linux.

Ejemplo 45 : Código fuente en mathematica para el estudio de la distribución binomial

```
(*paquetes iniciales*)

In[1]:= <<Statistics`DiscreteDistributions`;

In[2]:= << Graphics`Graphics`;

(*Distribucion binomial con 15 intentos y una probabilidad de
exito de 0.5*)

In[3]:= bdist = BinomialDistribution[15, 0.2]

Out[3]= BinomialDistribution[15, 0.2]

(*Lista con "n"desde 1 hasta 15*)

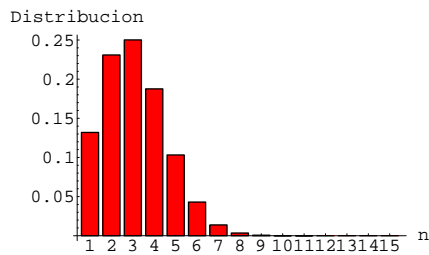
In[4]:= list2 = Table[PDF[bdist, n], {n, 1, 15}]

Out[4]= {0.1319413953331201', 0.2308974418329602', 0.2501388953190402',
0.18760417148928016', 0.1031822943191041', 0.04299262263296003',
0.013819057274880014', 0.0034547643187200034', 0.0006717597286400005',
0.0001007639592960001', 0.000011450449920000011', 9.542041600000008'*10^-7,
5.5050240000000005'*10^-8, 1.9660800000000015'*10^-9, 3.276800000000003'*10^-11}

(*Grafica de la distribucion*)

In[5]:= BarChart[list2, AxesLabel -> {"n", "Distribucion"},
PlotRange -> All];

Out[5]:=
```



(*Media, varianza y desviacion estandar de la distribucion*)

```
In[6]:= Mean[bdist]
```

```
Out[6]= 3.
```

```
In[7]:= Variance[bdist]
```

```
Out[7]= 2.4
```

```
In[8]:= StandardDeviation[bdist]
```

```
Out[8]= 1.54919
```

Es importante recalcar que la distribución binomial es una distribución discreta, es decir que es una función que actúa sobre números enteros. Además es muy útil en la descripción de fenómenos como el lanzamiento de dados, o de monedas. Es altamente utilizada en la descripción de juegos de azar, en los cuales lo que tenemos son ganadores y perdedores.

Como veremos mas adelante también existen distribuciones continuas, las cuales actúan sobre números reales, las cuales pueden ser deducidas a partir de la distribución binomial.

A.4.2. Distribución de Poisson

La distribución de *Poisson* se encuentra en el limite de la distribución binomial en el cual la probabilidad $p \rightarrow 0$ y el número de intentos $N \rightarrow \infty$ ⁵, respetando la condición de que la media de la distribución binomial $\mu = Np$, permanezca con un valor finito. Al tomar estos limites la probabilidad de

⁵Se considera a la probabilidad p pequeña si ($p \leq 0,05$), y el número N se considera grande si $N > 30$.

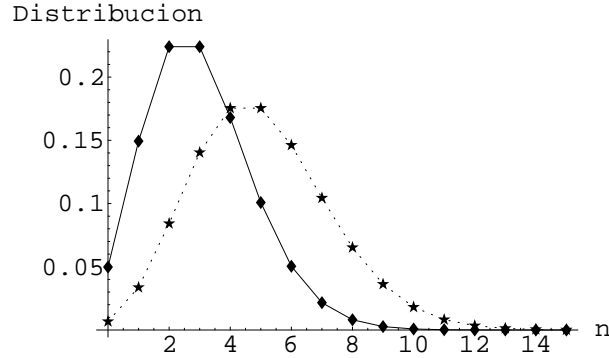


Figura A.3: Dos distribuciones de Poisson con medias diferentes, en la mas alta tenemos una media de 3, mientras que en la mas baja tenemos una media de 5.

observar n eventos favorables se reduce a

$$P(n) = \frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!}, \quad (\text{A.21})$$

en donde $\mu = Np$.

Como en el caso de la distribución binomial la distribución de *Poisson* es también discreta. Es útil cuando se desean describir procesos en los cuales la probabilidad de que ocurran sea muy baja, pero se tengan un número muy elevado de intentos, o de experimentos.

Otro detalle importante es que esta distribución solo posee un parámetro, μ , este parámetro determina el valor medio y la desviación estandar de la distribución por medio de las formulas (A.9), (A.10) y (A.11):

$$E[n] = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!} = \mu \rightarrow \text{Media de la distribución.} \quad (\text{A.22})$$

$$\sigma^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n - \mu)^2 P(n) = \mu \rightarrow \text{Varianza} \quad (\text{A.23})$$

$$\sigma = \sqrt{\mu} \rightarrow \text{Desviación estándar.} \quad (\text{A.24})$$

En la figura A.3 se observan dos distribuciones de Poisson con medias diferentes, se puede apreciar el corrimiento en el pico, y también como el ancho de la distribución también cambia.

Este tipo de distribuciones es altamente usado en física de partículas elementales o nuclear, en la cual tenemos que la probabilidad de encontrar determinada partícula o estado es muy baja, pero se intenta tener un muestreo muy grande de manera que tengamos mas posibilidades de encontrarlo.

A.4.3. Distribución Gaussiana o normal

La distribución Normal o Gaussiana es fundamental en los procesos físicos, ya que es este tipo de distribuciones el que suelen seguir los errores debidos a las mediciones. Los errores instrumentales son descritos en términos de esta probabilidad, e inclusive se suele usar como aproximaciones a problemas que no se rigen por comportamientos Gaussianos.

La distribución Gaussiana es una distribución **continua**, lo que marca la principal diferencia entre las distribuciones Binomial y de Poisson. La otra característica importante es que esta distribución es simétrica alrededor de la media. La densidad de probabilidad está dada por:

$$P_G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \text{Exp} \left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) \quad (\text{A.25})$$

Los dos parámetros μ y σ corresponden a la media y la varianza de las distribuciones. Un parámetro que también se suele nombrar es el **FWHM**, (ancho máximo a la mitad de la altura por sus siglas en ingles), el cual se relaciona con el σ por

$$FWHM = 2\sigma\sqrt{2 \ln 2}, \quad (\text{A.26})$$

en la figura A.4 se observa una comparación entre el FWHM y el σ .

La densidad de probabilidad Gaussiana está normalizada, es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_G(x) dx = 1, \quad (\text{A.27})$$

esta es la razón por la cual en la figura A.4 las gráficas de las Gaussianas con σ mas pequeño tienen máximos mas altos. Siempre se debe tener cuidado que toda Gaussiana normalizada incluye el cociente $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Sin embargo la integral de la densidad de la distribución Gaussiana no puede ser calculada analíticamente, por lo cual se requiere la utilización de metodos numéricos para su solución. Otra manera es transformar la gaussiana a un tipo particular, en la que la media es igual a cero ($\mu = 0$) y la varianza es igual a 1 ($\sigma^2 = 1$), y luego buscar el valor de la integral en una tabla de

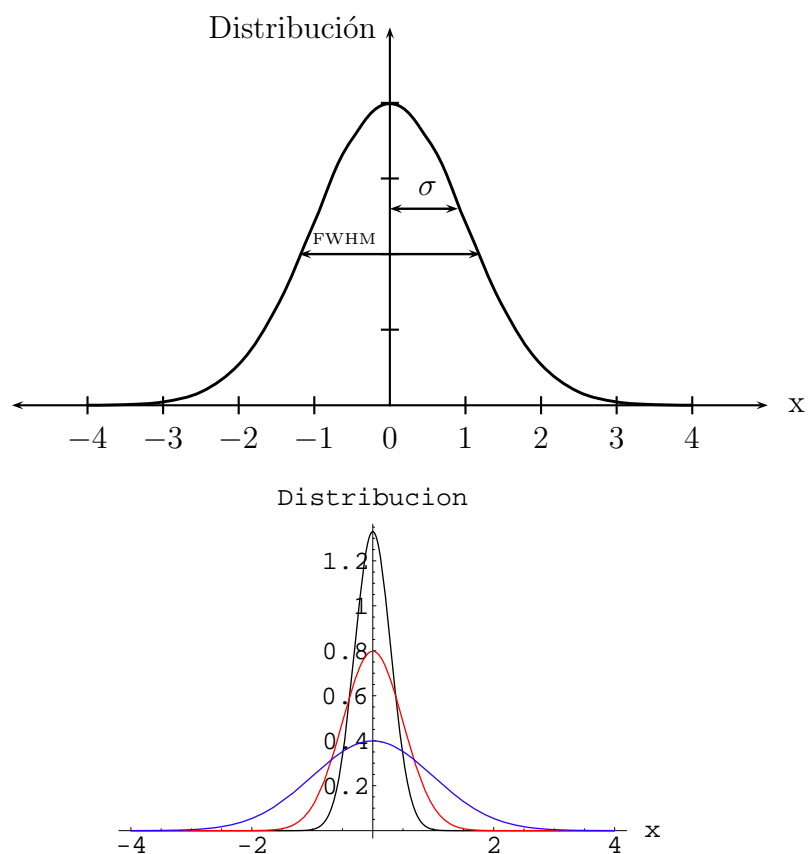


Figura A.4: **Arriba:** Distribución Gaussiana, la relación entre la desviación estándar (σ) y el FWHM (Full Width at Half-Maximum), note que el FWHM es mayor que el σ . **Abajo:** se muestran tres diferentes distribuciones Gaussianas, la de color negro corresponde a $\sigma = 0,3$, la de color rojo corresponde a $\sigma = 0,5$ y la de color azul corresponde a $\sigma = 1$, note como la desviación estándar determina el ancho de la distribución.

integrales[16]. Toda Gaussiana puede ser transformada a una integral de este tipo realizando un cambio de variables

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (\text{A.28})$$

¿Qué significa el σ ?

El sigma nos muestra la anchura de la distribución, nos esta dando una medida de la dispersión de nuestros datos alrededor de la media. El σ corresponde a la anchura de la distribución a aproximadamente el 60 % de la altura del máximo.

El uso practico de la distribución Gaussiana aplicada al manejo de errores es debida a la manera como estos se presentan. En una medición x el resultado final es de la forma

$$x \pm \sigma, \quad (\text{A.29})$$

la manera como se interpreta esto es la siguiente, cuando se toma como error un σ estamos afirmando que el valor verdadero de la medición tiene aproximadamente un 68 % de probabilidad de encontrarse entre los valores $x + \sigma$ y $x - \sigma$, cuando damos en resultado como $x \pm 2\sigma$ estamos afirmando que el valor real tiene un 95 % de probabilidades de encontrarse entre $x + 2\sigma$ y $x - 2\sigma$. Es decir que al aplicar la ecuación (A.8) para hallar la probabilidad tenemos

$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} P_G(x)dx = 0,683 \quad (\text{A.30})$$

¿Qué significa lo anterior?, que si queremos ver la probabilidad de que determinada variable se encuentre entre el rango $(x - \sigma, x + \sigma)$, y esta probabilidad se encuentra regida por la distribución Gaussiana, tenemos un 68 % de probabilidades de que el valor central de esta variable se encuentre en este intervalo.

Podemos interpretar la integral como el área bajo la curva de una Gaussiana, en ese caso el área total es 1, cuando integramos de $-\infty$ a ∞ , pero cuando nuestro intervalo de integración, o el área que deseamos medir se encuentra alrededor de la media, nos damos cuenta que casi toda el área se encuentra allí reunida. En la figura A.5 se encuentra una comparación del área de un Gaussiana medida para diferentes regiones.

Ahora bien como es mejor presentar un resultado, bueno esta decisión depende tanto del tipo de experimento como del equipo instrumental usado.

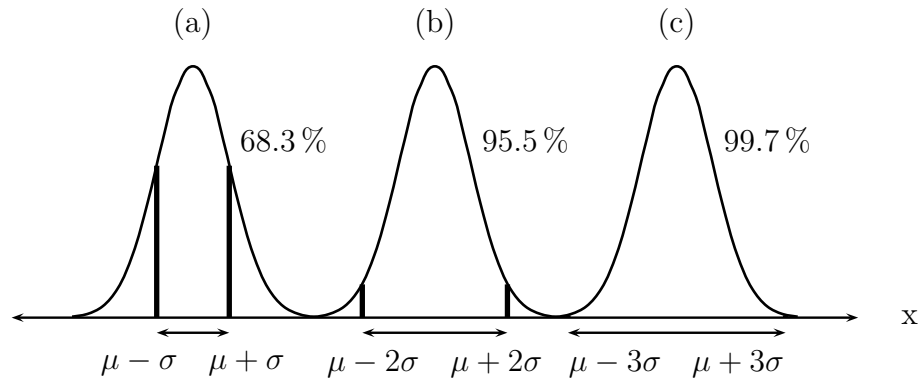


Figura A.5: Área bajo la curva de la distribución Gaussiana entre diferentes límites, en **(a)** el área se encuentra entre $\mu + \sigma$ y $\mu - \sigma$, esta región bajo la curva corresponde a un 68.3 % del área total. Para **(b)** el área se encuentra entre $\mu + 2\sigma$ y $\mu - 2\sigma$, esto corresponde a un área efectiva de aproximadamente el 95.5 %. Para **(c)** el área se mide entre $\mu + 3\sigma$ y $\mu - 3\sigma$ que corresponde a un área total del 99.7 %. Notese como la mayor parte del área se encuentra entre los límites $\mu + \sigma$ y $\mu - \sigma$.

Para el caso de mediciones corrientes en ingeniería lo ideal es presentar un resultado con el menor grado de error posible, el error siempre existe, no hay una medición *exacta*, una medición puede ser mas *precisa* que otra, pero nunca exacta.

Los datos experimentales y la distribución de Gauss

La distribución de Gauss es de un gran interés debido a que parece describir correctamente las distribuciones aleatorias para la mayoría de los experimentos.

Existen una serie de derivaciones de la distribución de Gauss de primeros principios, pero ninguna es tan interesante como el hecho de que es *razonable* a la hora de realizar mediciones, tiene una forma matemática muy simple y es aceptada por convención a nivel mundial.

A.5. Distribuciones experimentales

Una distribución teórica proviene de un análisis matemático, y es una función continua, la podemos dibujar sobre un papel sin levantar la mano del mismo. Sin embargo en la vida real lo que tenemos son experimentos, y

conjuntos *discretos* de datos. Por ejemplo, suponga un grupo de estudiantes va a realizar la medición de una baldosa del piso, todos con la misma regla, pero cada uno de manera independiente, y llenan la siguiente tabla

Alumno	Medida (cm)

Después de comparar se darán cuenta que cada uno realiza una medición diferente, o considero el valor ligeramente diferente de la de otra persona, y la estimación dependerá del grado de *precisión* del instrumento de medida.

Para representar estos datos de medición se requiere una forma apropiada, para ello se utilizan los **histogramas**.

A.5.1. Histogramas

Vamos a tomar como ejemplo las mediciones de un voltaje de salida en 20 enchufes diferentes de las paredes de una universidad, vamos a utilizar para medir un voltímetro con una precisión de hasta milésima de voltio, es decir que mide por ejemplo $110,034v$, no puede tener una resolución mayor, y por lo tanto no podemos ni quitarle ni añadirle más cifras al anterior resultado.

Nuestro interés es saber cual es el voltaje más probable, o frecuente, dentro de la universidad, es decir que si yo realizo una medición en cualquiera de estos veinte enchufes cual es el valor que con más probabilidad me saldrá como resultado en el voltímetro.

En la tabla A.1 mostramos los resultados obtenidos de una serie de 100 mediciones con el mismo equipo, es muy importante recalcar que el equipo no se cambia a lo largo de las mediciones, ya que cada equipo posee un error sistemático interno diferente. Una parte importante del trabajo es la construcción de la *tabla de frecuencias* la cual es la escogencia del rango, es decir la anchura de la barra del histograma, en nuestro ejemplo esa anchura es de 5 voltios. La decisión se toma por razones prácticas: un ancho que produzca solamente grupos de datos no resulta interesante, por ejemplo 60 voltios produce un histograma que comienza en 80 voltios y termina en 140 lo cual cubre todo el intervalo. Un ancho demasiado angosto no puede recoger suficientes datos para poder analizar el comportamiento del sistema, por ejemplo si tomamos solamente un ancho de voltaje de 0.5 voltios, no vamos

Voltaje [V]				
101.631	108.277	111.871	126.154	108.232
116.531	104.536	111.941	119.257	122.043
125.306	96.444	110.515	120.202	97.783
117.085	118.717	102.103	113.321	112.056
108.306	106.816	107.044	115.223	87.689
112.583	109.122	93.532	112.868	113.000
121.039	117.427	108.424	104.023	116.598
109.672	121.651	99.520	118.178	95.927
115.192	102.666	113.253	109.571	101.285
117.716	110.099	101.052	103.506	109.913
128.773	85.214	93.163	102.357	111.457
112.213	133.968	129.113	126.961	118.080
137.875	110.275	111.048	127.801	112.976
114.684	111.910	121.966	127.505	122.775
100.464	85.473	127.344	101.908	105.425
110.333	102.324	106.262	119.115	105.470
98.532	111.827	127.545	120.397	122.333
109.585	92.126	96.356	109.136	109.165
116.286	119.079	97.415	117.680	105.799
105.184	104.644	93.575	117.843	112.524

Cuadro A.1: 100 mediciones de voltaje realizadas con el mismo equipo dentro de la universidad.

x_i [V]	x_2 [V]	Número de datos con Frecuencia $\equiv x_i \leq x < x_{i+1}$
80	85	0
85	90	3
90	95	4
95	100	7
100	105	13
105	110	18
110	115	20
115	120	16
120	125	8
125	130	9
130	135	1
140	145	0

Cuadro A.2: Conversión de datos de la tabla A.1 a una tabla de frecuencias, se ha hecho $x = \text{voltaje}$, la tabla se ha representado gráficamente en la figura A.6.

a ver gran cosa del comportamiento del sistema. La tabla de frecuencias es mostrada a en la tabla A.2.

La distribución de la figura A.2 no parece una gaussiana, pero en realidad si tomáramos mas datos, esta poco a poco se ira pareciendo a una. Ahora la pregunta a contestar es ¿Cuál es el mejor estimativo para la media de los datos y el error?. Es decir que deseamos **estimar** el valor de los parámetros μ (la media) y σ (la varianza). Para ello debemos realizar un muestreo y a continuación estimar los parámetros.

A.5.2. Muestreo y estimación de parámetros

El muestreo es el método experimental mediante el cual se obtiene la información acerca de los parámetros de una distribución desconocida. Es decir los valores experimentales. La clave de un buen muestreo es el **no obtener muestras sesgadas**. Es decir muestras de dudosa procedencia por no conocer la verdadera resolución del equipo de medida, o por el cambio en las condiciones experimentales. Por ejemplo en el caso de la medición del

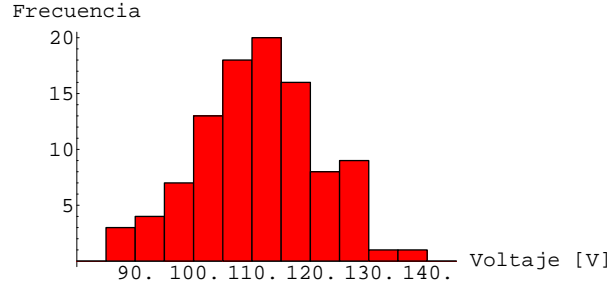


Figura A.6: Histograma de frecuencias de la tabla A.2.

voltaje en la universidad no deberíamos cambiar de equipos de medición, y al hacerlo debemos establecer claramente los errores que un nuevo equipo pueden involucrar en el muestreo.

Una vez obtenidos los datos el paso siguiente es determinar los verdaderos parámetros de la muestra. ¿Cuáles son esos parámetros?, en el caso de la distribución gaussiana son la media y la desviación estándar, y para las otras distribuciones ya se han mencionado en las secciones anteriores los parámetros a estimar. Hablamos de estimar ya que no podemos obtener con certeza el valor exacto de estos parámetros, ya que necesitaríamos un número infinito de datos, y como no los tenemos tomamos una muestra grande o representativa.

Vamos a mostrar la estimación de parámetros de la distribución de gauss para el ejemplo de la medición de voltaje de la universidad. El resultado de la teoría de estimación de parámetros dice que para un conjunto de n datos x_1, x_2, \dots, x_n :

- El mejor estimativo de la media es $\mu \equiv \hat{\mu}$.

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (\text{A.31})$$

Es decir que el mejor estimativo es lo que conocemos como el promedio $\hat{\mu} = \bar{x}$.

- El mejor estimativo de $\sigma^2 \equiv \hat{\sigma}^2$.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (\text{A.32})$$

Note que la varianza se ha dividido por $n-1$, esta es una conveniencia matemática y se debe a el numero finito de datos que podemos tomar.

Ejemplo 46 : Media y desviación estándar en la medición de voltaje de la universidad.

Vamos a tomar los datos de la tabla A.1 para sacar los valores de media y varianza por medio de las ecuaciones (A.31) y (A.32). Para ello realizamos los siguientes calculos,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{100} x_i &= 10098,2 \\ \hat{\mu} &= \frac{1}{100} 10098,2 = 110,982 \\ \sum_{i=1}^{100} (\hat{\mu} - x_i)^2 &= \sum_{i=1}^{100} (110,982 - x_i)^2 = 10951,7 \\ \sigma^2 &= \frac{1}{100-1} 10951,7 = 110,623 \\ \sigma &= 10,518 \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Las respuestas a las preguntas realizadas son:

1. ¿Cuál es el mejor estimativo de voltaje?

$$\hat{\mu} = \bar{x} = 110,982$$

2. ¿Cuál es el la desviación estándar de la distribución de los datos?

$$\hat{\sigma} = 10,518$$

A.5.3. La desviación estándar de los promedios

Si suponemos que nuevamente realizamos otros experimentos, de 100 datos cada uno, y a cada uno de estos experimentos le calculamos la media y la desviación estándar, y al unir estos resultados ¿qué valores se puede obtener para el promedio?, ¿podría obtenerse un promedio de 89 voltios o de 140 voltios?, la respuesta a esta ultima pregunta es que no, o mejor aun, la probabilidad de obtener un promedio lejos de 110 voltios es muy pequeña, el evento es posible pero no probable.

Si realizamos por ejemplo 10 experimentos de 100 datos cada uno difícilmente la media cambiara, por el contrario la distribución gaussiana se va volviendo cada vez mas pequeña. La teoria de errores nos dice que cuando se hace un numero infinito de experimentos con n datos cada uno, el error de la media es de la forma

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}. \quad (\text{A.34})$$

De esta forma llegamos a un resultado muy importante,

Una cantidad física (experimental) se da (reporta)

$$\boxed{\bar{x} \pm \sigma(\bar{x})} \quad (\text{A.35})$$

Nótese que cuando el numero de muestras n de la ecuación (A.34) tiende a infinito, el error tiende a cero.

Ejemplo 47 *De nuestro ejemplo de la toma de voltajes en la universidad podemos reportar el resultado final como*

$$\text{Voltaje} = 110,982 \pm 0,105$$

A.6. Errores en las mediciones

Existen dos tipos de errores al realizar un proceso de medida:

1. **Error sistemático:** Son errores producidos por influencias permanentes en la medida. Estas generalmente ocasionadas por una mala calibración en los equipos. Por ejemplo un termómetro que no tenga el punto de fusión del agua a cero grados sino a tres grados, va a tomar

medidas corridas tres grados cada vez que se utilice. Otro ejemplo es un metro mal calibrado.

No existe un método matemático para tratar este tipo de errores, ya que dependen de las características del instrumento de medida y su adecuado uso a lo largo del proceso de medición. Su identificación se logra con base en la experiencia, ya que al realizar una medida se debe tratar de tener en claro cual es el resultado que se espera, para poder detectar este tipo de errores.

2. **Error aleatorio o estadístico:** Este es el tipo de error del que trata la teoría de errores hasta el momento estudiada. Se produce por que al realizar cada nueva medida el valor resultante fluctúa, o cambia, sin importar el resultado anterior.

El origen de este tipo de errores se debe a imprecisiones instrumentales, ya que cada instrumento de medida posee un tipo de resolución, por ejemplo en los equipos electrónicos al realizar dos mediciones seguidas de una cantidad, las ultimas cifras cambiaran un poco debido a la naturaleza misma del equipo.

Ahora podemos decir cual es la labor de un experimentador al realizar una medición. Todo proceso de medida es un proceso de muestreo:

El experimentador intenta determinar los parámetros de una población o distribución demasiado grande - para ser medida completamente -, tomando una **muestra aleatoria** de **tamaño finito** y usa los parámetros de la muestra para encontrar una **estimación** de los parámetros verdaderos.

A.6.1. Propagación de errores

Medidas indirectas

Una medida indirecta es aquella medida en la cual para determinar el valor de una variable y tenemos que determinar el valor de la variable x , la cual si se puede medir, y relacionar las dos mediante una función f tal que

$$y = f(x) \tag{A.36}$$

La pregunta que surge es, ¿si medimos x cuál será el error obtenido en y ?. Un ejemplo de ello es la determinación del área de un cuadrado, para una

medida de un lado l , el área del cuadrado es $A = l \times l$. Si medimos esta longitud l con una regla de 30 cm, la medida mas corta que podemos medir es de 1 mm, ¿cual será el error en el área?.

Podemos distinguir tres tipos de errores los cuales estudiaremos en detalle:

1. de escala.
2. estadístico.
3. sistemáticos.

El error que nos interesa es el error total, el cual es de la forma

$$\epsilon_{\text{total}} = \epsilon_{\text{escala}} + \epsilon_{\text{estadístico}} \quad (\text{A.37})$$

El error sistemático no es incluido, ya que en los cálculos realizados el error sistemático solo aporta un corrimiento constante al resultado, pero no afecta los errores aleatorios y de escala.

Error de escala

Si la cantidad mas pequeña que detecta una escala de medida es Δx , por ejemplo 1 milímetro en una regla de 30 cm, decimos que al medir existe un 100 % de probabilidad de encontrar el valor real de la magnitud en el intervalo $x + \Delta x$ y $x - \Delta x$. Ya hemos visto en la sección de errores en distribuciones gaussianas, que σ significa que existe un 68 % de encontrar el valor real en el intervalo $\{\mu + \sigma, \mu - \sigma\}$. Para obtener un valor del error de escala que tenga el mismo significado probabilístico que el error estadístico, vamos a tomar

$$\text{error de escala} \equiv \epsilon_{\text{escala}}(x) \equiv \frac{2}{3}\Delta x \approx 0,68\Delta x. \quad (\text{A.38})$$

De esta forma para una medida indirecta $y = f(x)$ el error de escala de y será:

$$\epsilon_{\text{escala}}(f(x)) = \left| \frac{df(x)}{dx} \right| \epsilon_{\text{escala}}(x) = \left| \frac{df(x)}{dx} \right| \cdot \frac{2}{3} |\Delta x|. \quad (\text{A.39})$$

Errores estadístico

Para una variable x aleatoria que se puede medir de manera directa, el error estadístico se calcula mediante un muestreo como se mostro en la ecuación (A.35), la cual es

$$\epsilon_{\text{estadístico}}(x) = \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (\text{A.40})$$

Para una variable z que se determina por medio de una medición indirecta, en la cual debemos medir las variables (x, y) , es decir que tenemos

$$z = f(x, y)$$

mediante técnicas de cálculo diferencial en dos variables tenemos que el incremento Δz , es de la forma:

$$\begin{aligned} \Delta z &= \frac{df(x, y)}{dx} \Delta x + \frac{df(x, y)}{dy} \Delta y \\ \Delta z^2 &= \left(\frac{df(x, y)}{dx} \Delta x \right)^2 + \left(\frac{df(x, y)}{dy} \Delta y \right)^2 + 2 \frac{df(x, y)}{dx} \frac{df(x, y)}{dy} \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

En términos de probabilidades la anterior ecuación es de la forma

$$\sigma^2 \bar{z} = \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \sigma^2(\bar{x}) + \left(\frac{df}{dy} \right)^2 \sigma^2(\bar{y}) + 2 \text{cov}(x, y) \frac{df}{dx} \frac{df}{dy} \quad (\text{A.41})$$

En la anterior ecuación el término $\text{cov}(x, y)$ se denomina **covariancia**, y es un indicador de que tanto una variable afecta a la otra, es decir que tanto el modificar x puede modificar y . Vamos a suponer que la covariancia es igual a cero, es decir que las variables no están correlacionadas. Definimos

$$\epsilon_{\text{est.}}(z) = \sigma(\bar{z}), \quad \epsilon_{\text{est.}}(x) = \sigma(\bar{x}), \quad \epsilon_{\text{est.}}(y) = \sigma(\bar{y}) \quad (\text{A.42})$$

De esta forma los errores en x y en y se propagan a $z = f(x, y)$ cuadráticamente,

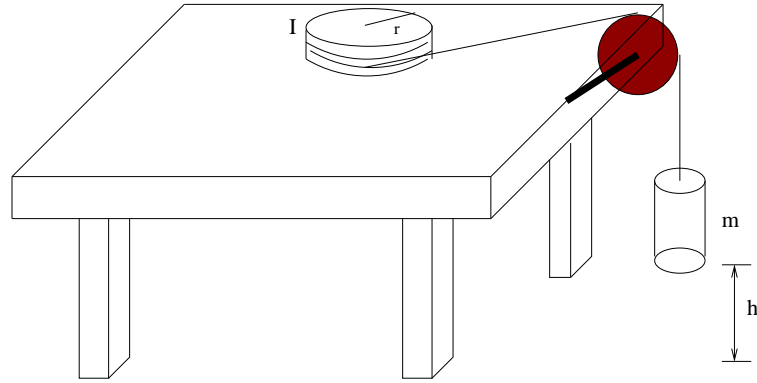
$$\boxed{\epsilon_{\text{estadístico}} = \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \epsilon_{\text{est.}}^2(x) + \left(\frac{df}{dy} \right)^2 \epsilon_{\text{est.}}^2(y).} \quad (\text{A.43})$$

Error sistemático

Los errores sistemáticos son incontrolables, por lo general, solo al final de un experimento se puede llegar a saber o detectar la existencia de un error sistemático. Si nos damos cuenta del error este es corregido a lo largo de experimento, o realizando otro ensayo. Si el error no es detectado, no sabemos que existió y por lo tanto no lo incluimos en el experimento. Es por esto que finalmente los errores sistemáticos no se incluyen dentro del error total.

Ejemplo 48 Errores de escala

En cierto experimento se debe medir el tiempo t en el que cierta masa m cae una distancia h , para determinar el momento de inercia I de cierto objeto puesto a rotar sobre un tambor de radio r , tal y como muestra la siguiente figura.



La expresión resultante para el momento de Inercia es,

$$I = mr^2 \left[\frac{gt^2}{2h} - 1 \right] \quad (\text{A.44})$$

Si la escala mas pequeña que es capaz de medir un cronometro es $\Delta t = 0,01$ segundo, el error de escala producido por el error de medición en el tiempo es

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{escala}}(t) &= \frac{2}{3}\Delta t \\ \epsilon_{\text{escala}}(I) &= \left| \frac{\partial I}{\partial t} \right| \left| \frac{2}{3}\Delta t \right| \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = 2 \frac{mr^2 g}{2h} t = \frac{mr^2 g}{h} t. \quad (\text{A.46})$$

Ahora vamos a suponer que las cantidades involucradas en la primera medición son:

$$\begin{aligned} m &= 4,8 \text{ kg} \\ h &= 1 \text{ m} \\ g &= 9,8 \text{ m/s}^2 \\ r &= 0,03 \text{ m} \\ t &= 3,1 \text{ s} \\ \Delta t &= 0,01 \text{ s} \end{aligned}$$

Además vamos a suponer que solo se realizó una medida, por lo tanto no existe error estadístico. De esta forma el error en la determinación del momento de inercia proveniente del error de escala en la medición en el tiempo es

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{escala}}(I) &= \frac{mr^2g}{h}t \cdot \frac{2}{3}\Delta t \\ &= \frac{4,8 \text{ g} \cdot (0,03)^2 \text{ m}^2 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 3,1 \text{ s}}{1 \text{ m}} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,01 \text{ s} \\ &= 0,00087 \text{ gm}^2 \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

Como solo hemos realizado una medición, el error de escala es el único que contribuye a la medida final del error total. El valor del momento de inercia calculándolo por medio de la ecuación (A.44) es:

$$I = 0,19910 \pm 0,00087 \text{ g} \cdot \text{m}^2 \quad (\text{A.48})$$

En el reporte del error se deben dar tantas cifras como tengamos en la medida, es decir que si tenemos 5 cifras significativas en la cantidad reportada, debemos tener 5 cifras significativas en el error, de manera que redondeamos el resultado de manera que tenemos

$$I = 0,1991 \pm 0,0009 \text{ g} \cdot \text{m}^2 \quad (\text{A.49})$$

otra manera de presentar el error es

$$I = 0,1991(9) \text{ g} \cdot \text{m}^2 \quad (\text{A.50})$$

De manera que solo escribimos entre paréntesis el dígito que modifica la última cifra.

i	t_i [s]	i	t_i [s]
1	2.78	6	3.53
2	3.29	7	2.93
3	3.29	8	3.66
4	4.01	9	3.80
5	3.11	10	3.30

Cuadro A.3: Tiempos de caída obtenidos en la determinación del momento de inercia.

Ejemplo 49 *Error estadístico*

Supongamos ahora que no se realiza un solo arreglo experimental sino una secuencia de 10 arreglos, todos exactamente iguales, y en los cuales vamos a medir el tiempo de caída con lo cual obtenemos los resultados de la tabla A.3.

¿Cuál es el procedimiento para calcular ahora el error?, el procedimiento **no** es calcular el momento de inercia para cada tiempo y luego sacar el promedio. **El procedimiento correcto es calcular el promedio del tiempo y la desviación estandar del promedio, y con tales valores calcular el momento de inercia y su error por propagación de errores.** De la tabla A.3 y con ayuda de las ecuaciones (A.31) y (A.32) obtenemos,

$$\begin{aligned}\bar{t} &= 3,352 \text{ s} \\ \sigma(\bar{t}) &= \epsilon_{\text{estadístico}} = 0,1245 \text{ s.}\end{aligned}\tag{A.51}$$

Con las cifras significativas correctas obtenemos

$$\bar{t} = 3,4 \pm 0,1 \equiv 3,4(1)$$

Ahora determinaremos el momento de inercia con el tiempo promedio calculado,

$$I(t = 3,4 \text{ s}) = 0,24038 \text{ g} \cdot \text{m}^2$$

¿Cómo se calcula el error en I ?, para ello utilizamos propagación de errores

por medio de la derivada, la cual ya fue calculada anteriormente.

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{esta.} &= \frac{dI}{dt} \sigma(\bar{t}) \\
 &= \frac{mr^2 g}{h} \cdot \sigma(\bar{t}) \\
 &= \frac{4,8g \cdot (0,03^2)m^2 \cdot 9,8m/s^2 \cdot 3,4s}{1m} \cdot 0,1s \\
 &= 0,01439 g m^2
 \end{aligned}$$

Ahora tenemos que calcular el erro de escala, al cual fue hecho en el anterior ejemplo, sin embargo al calcularlo esta vez utilizamos el tiempo promedio calculado \bar{t} , en lugar de el error de una sola muestra t .

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{escala}(I) &= \frac{mr^2 g}{h} \bar{t} \frac{2}{3} \Delta t \\
 &= \frac{4,8g \cdot (0,03)^2 m^2 \cdot 9,8 m/s^2}{1 m} (3,4s) \frac{2}{3} \cdot 0,01s \\
 &= 0,00096 g \cdot m^2
 \end{aligned}$$

El error de escala es dos ordenes de magnitud mas pequeño que el error estadístico. De todas formas el error resultante es de la forma,

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{total} &= \epsilon_{esta.} + \epsilon_{escala} \\
 &= (0,01439 + 0,00096)g m^2 \\
 &= 0,01535 s m^2
 \end{aligned}$$

El resultado final será

$$I = 0,24038 \pm 0,01535 g m^2 = 0,24 \pm 0,02 g m^2.$$

En unidades MKS, las cuales son las mas aconsejables de usar,

$$I = (0,24 \pm 0,02) \times 10^{-3} kg m^2 \equiv 0,24(2) \times 10^{-3} kg m^2.$$

A.7. El promedio ponderado

Si lo que se tiene es un conjunto de datos $\{x_i\} = x_1, x_2, \dots, x_N$, cada uno de los cuales proviene de una distribución gaussiana con el mismo promedio μ , pero cada uno con diferente valor de desviación estándar σ , el mejor

estimativo de valor medio es

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N 1/\sigma_i^2} \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i}. \quad (\text{A.52})$$

De la ecuación se ve:

- entre mayor es el error σ_i de cierto dato se tiene una menor precisión, y menos se tiene en cuenta el dato.
- cuando su error es mas pequeño se tiene mayor precisión, y el dato tiene mas importancia.

Por las dos anteriores razones a la ecuación (A.52) se le denomina **promedio ponderado**. El error en este promedio ponderado se obtiene por medio de propagación de errores y su resultado es,

$$\sigma(\hat{\mu}) = \frac{1}{\sum_{i=1}^N 1/\sigma_i^2} \quad (\text{A.53})$$

Ejemplo 50 *La vida media del muón*

Una de las partículas exóticas encontradas por los físicos durante la década de los setenta es denominado muón. Tiene la misma carga de un electrón pero pesa alrededor de setenta veces mas que el electrón. Una de las razones por las cuales ha sido tan difícil de descubrir es por que se transforma en otras partículas, proceso que se denomina decaimiento, como electrones. Se produce en aceleradores de partículas y en la atmósfera al ser atravesada por rayos cósmicos, protones o partículas cargadas altamente energéticas.

*Una vez que se crea un muón este decae por un proceso estadístico, es decir que algunos decaen al instante y otros pueden durar años en decaer, y cada decaimiento es independiente del decaimiento anterior. Sin embargo todos tiene en promedio una **vida media**, que es el tiempo que en promedio dura una partícula antes de decaer. Esta vida media es una característica de la partícula, y es muy importante su medición, ya que permite diferenciarla de otros tipos de partículas similares.*

En un experimento para determinar la vida del muón⁶ se ha tomado una serie de datos con su correspondiente error, los datos son mostrados en la tabla A.4

Con los datos obtenidos de la tabla A.4 podemos calcular las siguientes cantidades:

⁶Mediciones de la vida media del muón se han realizado en la universidad de los Andes.

$\tau_i(\mu s) \pm \sigma_i(\mu s)$	$\tau_i(\sigma_i)$
$2,198 \pm 0,001$	2,198(1)
$2,197 \pm 0,005$	2,197(5)
$2,1948 \pm 0,0010$	2,1948(10)
$2,203 \pm 0,004$	2,203(4)
$2,198 \pm 0,001$	2,198(1)
$2,202 \pm 0,003$	2,202(3)
$2,1966 \pm 0,0020$	2,1966(20)

Cuadro A.4: Datos tomados de un experimento en el que se pretende determinar la vida media del muón.

1. **Promedio simple:**

$$\begin{aligned}
 \bar{\tau} &= \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 \tau_i \\
 &= \frac{1}{7} (2,198 + 2,197 + 2,1948 + \cdots + 2,1966) \\
 &= 2,1984 \mu s
 \end{aligned} \tag{A.54}$$

2. **Promedio ponderado:** El cual es el mejor promedio,

$$\begin{aligned}
 \bar{\tau} &= \frac{\sum_{i=1}^7 \tau_i / \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^7 1 / \sigma_i^2} \\
 &= \frac{\frac{2,198}{(0,001)^2} + \frac{2,197}{(0,005)^2} + \frac{2,1948}{(0,0010)^2} + \cdots + \frac{2,1966}{(0,0020)^2}}{\frac{1}{(0,001)^2} + \frac{1}{(0,005)^2} + \frac{1}{(0,0010)^2} + \cdots + \frac{1}{(0,0020)^2}} \\
 &= 2,19696 \mu s
 \end{aligned} \tag{A.55}$$

3. **El error:**

$$\begin{aligned}
 \sigma^2(\bar{\tau}) &= \frac{1}{\sum_{i=1}^7 1 / \sigma_i^2} \\
 &= \frac{\frac{1}{(0,0020)^2}}{\frac{1}{(0,001)^2} + \frac{1}{(0,005)^2} + \frac{1}{(0,0010)^2} + \cdots + \frac{1}{(0,0020)^2}} \\
 &= 3,721 \times 10^{-7} \mu s
 \end{aligned} \tag{A.56}$$

4. **La desviación estándar de los datos:**

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{7-1}} \sqrt{\sum_{i=1}^7 (\tau_i - \bar{\tau})^2} = 0,00296 \mu s \quad (\text{A.57})$$

5. **El dato reportado es:**

$$\tau = (2,1970 \pm 0,0006) \mu s = 2,1970(6) \mu s \quad (\text{A.58})$$

A.8. Comparación de valores experimentales

En ocasiones se puede comparar un valor experimental, obtenido en un laboratorio bajo condiciones controladas, con un valor predicho por la teoría, es decir un valor que se ha calculado a partir de la teoría que describe el montaje experimental. Un ejemplo de ello fueron los cálculos que realizó Halley, a partir de la teoría de Newton, para predecir el periodo del cometa que lleva su nombre.

Se acostumbra realizar una comparación de las cantidades teóricas y experimentales en términos del porcentaje: Si x_{teo} es la cantidad teóricamente obtenida, y x_{exp} es la cantidad experimentalmente medida, se denomina **diferencia porcentual** a la cantidad:

$$\text{Diferencia porcentual} = \left| \frac{x_{teo} - x_{exp}}{x_{teo}} \right| \times 100. \quad (\text{A.59})$$

Esta cantidad no es un error, sin embargo nos permite saber que tan de acuerdo o en desacuerdo se encuentra una teoría con una medición realizada para corroborarla. La comparación no necesariamente se debe hacer con la teoría, sino que también puede hacerse con datos experimentales que ya han sido tomados y reportados en la literatura, por ejemplo capacidades caloríficas, coeficientes de expansión, densidades de compuestos, etc...

A.9. Ajuste de curvas: método de los mínimos cuadrados

Hemos visto a lo largo del capítulo como el manejar una gran cantidad de datos es útil para estudiar el comportamiento físico de un sistema. Sin embargo a medida que los datos van aumentando, se va volviendo más difícil el

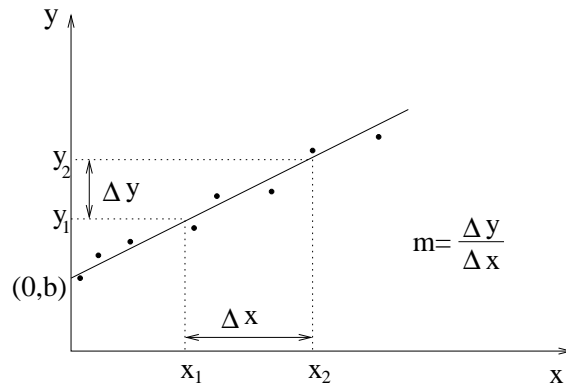


Figura A.7: Línea recta que tiene como ecuación $y(x) = mx + b$, m se denomina la pendiente, y b es el valor de $y(0) = 0$. Los puntos alrededor de la recta son los puntos experimentales.

estudiar de manera rápida el sistema. Para estudiar una enorme cantidad de datos se utilizan las gráficas. La gráfica permite visualizar el comportamiento y encontrar relaciones matemáticas entre las variables consideradas.

Para obtener una buena gráfica se debe tener en cuenta el escoger adecuadamente la escala de coordenadas a utilizar, esta escala puede ser de coordenadas rectangulares uniformes, coordenadas polares, y de escala logarítmica y semilogarítmica.

Si los puntos muestran una tendencia lineal, la pregunta es ¿cuál es la mejor línea recta que se ajusta a esa curva?. Para responder a esta pregunta se recurre al método de los mínimos cuadrados.

Supongamos que se realiza un experimento en el cual tenemos un conjunto con parejas de datos (x_i, y_i) , y al realizar la gráfica obtenemos algo como lo mostrado en la figura A.7, la relación matemática que une a los puntos es la de una línea recta:

$$\boxed{y(x) = mx + b,} \quad (\text{A.60})$$

m se denomina la pendiente de la recta, y b es el punto de corte con el eje y , o mejor aun, el valor de la recta cuando $x = 0$. ¿Cuáles son los mejores valores de m y b que se ajustan a una recta?, la respuesta se obtiene por el método de mínimos cuadrados. Supongamos que tenemos un conjunto de datos por parejas $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)\}$, las relaciones para obtener m y b son las siguientes:

$$m = \frac{N \sum_{i=1}^N (x_i \cdot y_i) - \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2} \quad (\text{A.61})$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N (x_i \cdot y_i)}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2} \quad (\text{A.62})$$

En el caso mas general en realidad tenemos un conjunto de datos con su respectivo error, lo que también va a producir un error en m y b . Para un conjunto de datos de la forma $\{(x_1, y_1, \sigma_1), (x_2, y_2, \sigma_2), \dots, (x_N, y_N, \sigma_N)\}$, los mejores valores para m y b son:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2} \quad (\text{A.63})$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2} \quad (\text{A.64})$$

El error en la pendiente m es:

$$\sigma^2(m) = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2}. \quad (\text{A.65})$$

Y el error de el punto de corte b es:

$$\sigma^2(b) = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2}. \quad (\text{A.66})$$

Ejemplo 51 *Fuente radiactiva*

Una sustancia radiactiva es aquella que se transforma en otra emitiendo radiación de alguna clase, especialmente protones y partículas alfa, estas ultimas son núcleos de helio. Al proceso de dejar de ser una sustancia determinada se le denomina **decaimiento**.

A.9. AJUSTE DE CURVAS: MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS 353

La lectura del número de decaimientos detectados cada 15 segundos en una material cualquiera se muestra a continuación,

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_i = t(s)$	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135
$y_i = N(\text{cuentas})$	106	80	98	75	74	73	49	38	37	22
σ_i	10	9	10	9	9	9	7	6	6	5

El decaimiento sigue una función exponencial, por lo cual la función a ajustar es:

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau} \quad (\text{A.67})$$

De esta función podemos decir que:

- $N(t)$: es el número de átomos de la sustancia radiactiva que existen en un tiempo t .
- N_0 : es el número de núcleos presentes en $t = 0$.
- τ : Es la vida media de la sustancia, de manera formal es el tiempo que tarda una cantidad cualquiera de material radiactivo original, en decaer hasta una cantidad que sea aproximadamente el 37% de la sustancia original.
- La ecuación (A.67) no es lineal. Pero se puede linealizar por medio de la función logaritmo natural \ln :

$$\ln N(t) = \ln N_0 - \frac{t}{\tau} \quad (\text{A.68})$$

en donde $\ln N_0$, es igual a el punto de corte b de la recta, y $-1/\tau = m$ la pendiente de la recta.

- Por medio de las ecuaciones A.63 al A.66, podemos obtener cada una de las cantidades involucradas.
- La obtención del error de N_0 se utiliza propagación de errores.

$$\sigma(b) = \sigma^2(\ln N_0) = \left[\frac{\partial(\ln N_0)}{\partial N_0} \right]^2 \sigma^2(N_0) = \left[\frac{1}{N_0} \right]^2 \sigma^2(N_0).$$

- Para la obtención del error en τ nuevamente hacemos propagación de errores.

$$\sigma^2(\tau) = \frac{1}{m^4} \sigma^2(b)$$

Al realizar todos los calculos obtenemos:

<i>parámetro</i>	<i>valor</i>	σ^2		<i>Cantidad</i>	<i>valor</i>	σ^2
b	4.721	0.064	\rightarrow	$N_0(\text{cuentas})$		
m	-0.008999	0.001		$\tau[s]$		

La tabla de la derecha debe ser completada.

A.10. Taller experimental: Histogramas y Distribución de Gauss

A.10.1. Materiales

1. Semillas.
2. Tornillo micrométrico.
3. Bitácora.

A.10.2. La experiencia

1. Determinar experimentalmente el diámetro de 10 semilla (alverjas, o garbanzos) con ayuda de un tornillo micrométrico.
2. Determine experimentalmente el diámetro de 100 semillas, utilizando el mismo procedimiento del punto anterior.
3. Para cada uno de los casos anteriores elabore un histograma escogiendo para ambos el mismo ancho del intervalo. Utilice un criterio que crea conveniente para elegir el ancho del intervalo y anótelos en la bitácora.
4. ¿Qué puede concluir de la comparación entre los dos histogramas?.
5. Estime los parámetros de la distribución de Gauss para cada uno de los histogramas.

A.10. TALLER EXPERIMENTAL: HISTOGRAMAS Y DISTRIBUCIÓN DE GAUSS 355

6. Con los parámetros encontrados en el punto anterior, calcule y dibuje la correspondiente distribución de Gauss sobre la misma gráfica de cada histograma.
7. ¿Qué hay que hacer para ajustar la gaussiana al histograma?, es decir, a partir de la Gaussiana normalizada, ¿qué hay que hacer para que al dibujarla ésta coincida con el mayor número de datos de la distribución experimental?. Una vez contestada la pregunta trace la gaussiana.
8. Expresé el radio de experimental de las semillas para cada una de las medidas.
9. ¿Existió algún método de medición o de muestreo para lograr disminuir la desviación estándar de la distribución de radios?.
10. ¿Qué tiene que hacer para disminuir la desviación estándar del promedio de los radios?.
11. En el caso del histograma con 100 semillas, escoja un ancho de intervalo la mitad, y el otro el doble del que eligió en el paso 3 y dibuje el correspondiente histograma. ¿Qué observa?.
12. Sugiera tres experimentos mas, que no sean con semillas, en los que pueda realizar una medida simple similar a la realizada en esta experiencia, y que por lo menos una se pueda realizar en el salón.
13. ¿Qué información se puede obtener de máximo de la curva gaussiana y del área bajo esta curva?.
14. ¿Qué mediciones puede usar para obtener un promedio ponderado del radio de las semillas que usted midió?. Anote el valor de tales mediciones y determine el promedio ponderado y su error.
15. Mencione algunos fenómenos de la naturaleza cuyas variables características estén distribuidas según una distribución gaussiana.
16. En el caso de los granos, ¿el histograma podría presentar dos máximos?. Justifique su respuesta.

A.11. Resumen y glosario

Para ampliar los conocimientos en esta materia se pueden ver los textos [2, 3, 4, 5, 6]

- El proceso de realizar una medida es un proceso **aleatorio**.
- Un proceso aleatorio está descrito por una distribución de probabilidad, la cual da cuenta de la manera como se distribuyen los resultados en un numero infinito de muestras.
- Los resultados de una medición son **muestras** de aquella distribución.
- En un error sistemático cada medición está corrida o desplazada la misma cantidad. Para este tipo de errores no hay forma teórica de realizar un Análisis.
- En un error estadístico o aleatorio cada medición individual fluctúa y cambia de manera independiente a las otras mediciones.
- La medición de errores estadísticos solo puede ser realizada con un gran numero de datos, al realizar una sola medición no podemos calcular un error estadístico.
- Una medida indirecta es aquella en la cual para medir el valor de una cantidad y , necesitamos medir un valor x y asociarlo a la cantidad medida mediante una función $f(x) = y$.
- Los errores de escala y los errores sistemáticos son independientes del numero de mediciones.
- Los errores accidentales se eliminan aumentando el numero de mediciones.
- Cuando se tiene una serie de datos x_i cada uno proveniente de una distribución gaussiana con el mismo promedio μ , pero con diferentes valores para la desviación estandar $\{\sigma_i\}$, el mejor estimativo de $\hat{\sigma}$ y su error se da por medio del promedio ponderado.
- El promedio ponderado se calcula por medio de la ecuacion A.52, y su error por medio de A.53.

- μ : Es el promedio de una muestra infinita.
- σ : Es la desviación estandar de una muestra infinita, nos dice que tanto un grupo de datos se aleja de la media.
- n : Número de datos de la muestra infinita.
- $\hat{\mu} = \hat{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$: Estimación de μ .
- $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$: Estimación de σ .
- $\sigma(\bar{x}) = \frac{\hat{\sigma}}{n}$: Desviación estandar promedio.
- $E = \left| \frac{x_{teo} - x_{exp}}{x_{exp}} \right| \times 100$: Diferencia porcentual.
- Para un conjunto de puntos que deseamos linealizar podemos utilizar las ecuaciones A.61 a A.66. Que nos da los mejores ajustes a una linea recta.

A.12. Evaluación

1. Muestre que la distribución binomial, ecuación (A.16), está normalizada, es decir que

$$\sum_{n=0}^N P(r) = 1. \quad (\text{A.69})$$

Para ello desarrolle los primeros y los últimos términos de la serie, y muestre que son de la forma

$$x^N + Nx^{N-1}y + \frac{N(N-1)}{2!}x^{N-2}y^2 + \frac{N(N-1)(N-2)}{3!}x^{N-3}y^3 + \dots + y^N = [x+y]^N$$

la cual es llamada la formula del binomio, reemplace convenientemente x e y por $(p-1)$ y p , y diga el porque la sumatoria total es igual a 1.

2. Diga cual es la media, varianza y desviación estandar de las distribuciones mostradas en la figura A.3.

3. Muestre que las formulas A.22, A.23 y A.24, son correctas. (Ayuda: Busque apoyo en la bibliografía).
4. Transforme la Gaussiana

$$P(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-3)}{50}\right), \quad (\text{A.70})$$

en una Gaussiana con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ utilizando la transformación A.28.

5. De un ejemplo de una medición precisa y una medición exacta.
6. Desarrolle completamente el ejemplo 51.

Palabras claves para búsqueda en Internet

A continuación se presentará una serie de palabras útiles para la búsqueda en Internet, las palabras se han probado en el buscado **<http://www.google.com>**, no tienen ortografía dado que el buscador es universal, y en ocasiones va a tener teclados que no tienen tildes o eñes.

estadistica, variables aleatorias, densidad de probabilidad, probabilidad, distribucion estadistica, histograma, desviacion estandar, errores.

Bibliografía recomendada:

Se puede consultar al final del texto, el número que encuentra al final de la referencia es el número correspondiente al texto en la bibliografía final.

- Formulas y tablas matemáticas en general [1].
- Técnicas experimentales y análisis de datos [3, 4, 5, 9].

Apéndice B

Magnitudes y unidades de medida

Las normas internacionales de metrología suelen clasificar las magnitudes físicas como básicas, suplementarias y derivadas[20].

Magnitudes básicas: Son la longitud, la masa y el tiempo.

Magnitudes suplementaria: Son aquella que poseen un carácter geométrico, el anulo plano y el ángulo solido. Junto con las medidas fundamentales sirven para la descripción de fenomenos físicos.

Magnitudes derivadas: Son aquellas que se pueden expresar como función de las magnitudes derivadas. Por ejemplo la rapidez, la cual es definida como *distancia/tiempo*.

En las siguientes tablas se dan relaciones bastante útiles entre unidades de medida y convenciones.

Cantidad física	Unidad	Símbolo	Dimensión
Longitud	metro	m	L
Masa	kilogramo	kg	M
Tiempo	segundo	s	T
Intensidad de corriente	amperio	A	I
Cantidad de sustancia	mol	mol	mol
Ángulo plano*	radián	rad	rad
Ángulo solido	sterradian	sr	sr

Cuadro B.1: Unidades físicas del sistema internacional (SI), las cantidades con el símbolo * hacen referencia a magnitudes suplementarias.

Abreviatura	Prefijo	Factor
T	tera	10^{12}
G	giga	10^9
M	mega	10^6
k	kilo	10^3
c	centi	10^{-2}
m	mili	10^{-3}
μ	micro	10^{-6}
n	nano	10^{-9}
p	pico	10^{-12}
f	femto	10^{-15}

Cuadro B.2: Múltiplos y submúltiplos utilizados en las unidades de medida.

B.1. Factores de conversión de unidades

Longitud

- $1 \text{ m} = 100 \text{ cm} = 1000 \text{ mm} = 10^6 \mu\text{m} = 10^9 \text{ nm}$
- $1 \text{ km} = 1000 \text{ m} = 0.6214 \text{ millas}$
- $1 \text{ m} = 3.281 \text{ pies} = 39.37 \text{ pulgadas}$
- $1 \text{ cm} = 0.3937 \text{ pulgadas}$
- $1 \text{ pulgada} = 2.54 \text{ cm}$
- $1 \text{ milla} = 5280 \text{ pies} = 1609 \text{ metros}$
- $1 \text{ Angstrom} = 10^{-10} \text{ m} = 10^{-8} \text{ cm} = 10^{-1} \text{ nm}$
- $1 \text{ yarda} = 0.9144 \text{ m} = 3 \text{ pies} = 36 \text{ pulgadas}$
- $1 \text{ vara} = 0.80 \text{ m}$
- $1 \text{ pie} = 0.3048 \text{ m} = 12 \text{ pulgadas}$
- $1 \text{ año luz} = 9.43 \times 10^{15} \text{ m}$
- $1 \text{ braza} = 6 \text{ pies}$
- $1 \text{ milla náutica} = 1852 \text{ m}$

Área

- $1 \text{ cm}^2 = 0.155 \text{ pulgadas}^2$
- $1 \text{ m}^2 = 10^{-4} \text{ cm}^2 = 10.76 \text{ pies}^2$
- $1 \text{ pulgada}^2 = 6.452 \text{ cm}^2$
- $1 \text{ pie}^2 = 144 \text{ pulgadas}^2 = 0.0929 \text{ m}^2$
- $1 \text{ hectárea} = 10000 \text{ m}^2$
- $1 \text{ fanegada} = 6400 \text{ m}^2$
- $1 \text{ acre} = 4046.71 \text{ m}^2 = 4840 \text{ yardas}^2$
- $1 \text{ milla}^2 = 640 \text{ acres}$

Volumen

- 1 litro = $1000 \text{ cm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3 = 0.0351 \text{ pie}^3 = 61.02 \text{ pulgadas}^3$
- $1 \text{ pie}^3 = 0.02832 \text{ m}^3 = 28.31 \text{ litros} = 7.477 \text{ galones}$
- 1 galon = 4.543 litros

Tiempo

- 1 minuto = 60 segundos
- 1 hora = 3600 segundos
- 1 día = 86400 segundos
- 1 año = $3.156 \times 10^7 \text{ s}$

Velocidad

- $1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} = 0.03281 \text{ pie} \cdot \text{s}^{-1}$
- $1 \text{ pie} \cdot \text{s}^{-1} = 30.48 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$
- $1 \text{ mi} \cdot \text{min}^{-1} = 60 \text{ mi} \cdot \text{h}^{-1} = 88 \text{ pies} \cdot \text{s}^{-1}$
- $1 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 0.2778 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 88 \text{ pies} \cdot \text{s}^{-1}$
- $1 \text{ mi} \cdot \text{h}^{-1} = 0.4470 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- 1 nudo = $1852 \text{ m/h} = 1 \text{ milla náutica/h}$

Masa

- $1 \text{ kg} = 10^3 \text{ g}$
- $1 \text{ g} = 6.85 \times 10^{-5} \text{ slug}$
- $1 \text{ slug} = 14.59 \text{ kg}$
- 1 libra inglesa = $453.598 \text{ g} = 16 \text{ onzas}$
- 1 onza = 28.35 g

- 1 arroba = 25 libras inglesas
- 1 quintal = 4 arrobas
- 1 tonelada inglesa = 20 quintales
- 1 tonelada métrica = 1000 kg
- 1 tonelada americana = 907 kg
- 1 tonelada inglesa = 1016 kg
- 1 uma (Unidad de masa atómica) = 1.660×10^{-27} kg

Fuerza

- 1 N = 10^5 dinas
- 1 kg-f = 9.8 N
- 1 lb = 4.45 N = 4.45×10^5 dinas

Presión

- 1 Pa (Pascal) = $1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} = 1.451 \times 10^4 \text{ lb} \cdot \text{pulg}^{-1} = 0.209 \text{ lb} \cdot \text{pie}^{-2}$
- $1 \text{ dina} \cdot \text{cm}^{-2} = 0.1 \text{ Pa}$
- $1 \text{ lb} \cdot \text{pulg}^{-2} (\text{psi}) = 6891 \text{ Pa}$
- $1 \text{ lb} \cdot \text{pie}^{-2} = 47.85 \text{ Pa}$
- 1 atmósfera (atm) = $1.013 \times 10^5 \text{ Pa} = 14.7 \text{ lb} \cdot \text{pulg}^{-2} = 2117 \text{ lb} \cdot \text{pie}^{-2}$
- 1 mm de Hg (Milímetro de mercurio) = $133.3 \text{ Pa} = 1.316 \times 10^{-3} \text{ atm}$
- 1 pulg de agua = $249.1 \text{ Pa} = 2.458 \times 10^{-3} \text{ atm}$
- 1 bar = 0.98 atm

Energía

- $1 \text{ J} = 10^7 \text{ ergios} = 0.239 \text{ cal}$
- $1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J}$
- $1 \text{ pie}\cdot\text{libra} = 1.356 \text{ J}$
- $1 \text{ Btu} = 1055 \text{ J} = 252 \text{ cal}$
- $1 \text{ ev} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$
- $1 \text{ kWh} = 3.6 \times 10^6 \text{ J}$
- $1 \text{ caballo a vapor} \cdot \text{hora} = 2.685 \times 10^6 \text{ J} = 0.7457 \text{ kWh}$
- $1 \text{ BEP (Barril equivalente de petroleo)} = 5.712 \times 10^9 \text{ J}$
- $1 \text{ TEP (Tonelada equivalente de petroleo)} = 7.33 \text{ BEP}$

Potencia

- $1 \text{ W} = 1 \text{ j}\cdot\text{s}^{-1}$
- $1 \text{ hp} = 746 \text{ W} = 550 \text{ pies}\cdot\text{s}^{-1}$
- $1 \text{ cal}\cdot\text{s}^{-1} = 4.186 \text{ W} = 14.29 \text{ Btu}\cdot\text{s}^{-1}$

Temperatura

- $\text{K} = 273.15 + ^\circ\text{C}$
- $^\circ\text{C} = \frac{5}{9}(\text{F}-32)$
- $^\circ\text{F} = \frac{9}{5}^\circ\text{C} + 32$

Ángulo

- $1 \text{ radián} = 57.3^\circ$
- $2\pi \text{ radianes} = 360^\circ$

Apéndice C

Notación científica

En física e ingeniería es normal el tratar con números que son bastante grandes o pequeños para ser escritos en un papel, es por ello que se ha ideado una manera de escribir este tipo de cifras de una manera cómoda y accesible, esta notación se denomina *notación científica*. Esta consiste en escribir la cifra como una cifra comprendida entre 1 y 10, y luego multiplicarla por la potencia de 10 mas adecuada.

Para comprender un poco mejor esto veamos los siguientes ejemplos:

Cantidad	Notación corriente	Notación científica
Longitud de onda de la luz de sodio	0.0000005893 metros	5.893×10^{-7} m.
Distancia aproximada del sol a la tierra.	149500000000 metros	1.495×10^{11} m.

Ejemplo 52 Utilice la notación científica para calcular $\frac{0,0015}{3000000}$ y $6000 \times 0,000012$:

1. $\frac{0,0015}{3000000} = \frac{1,5 \times 10^{-3}}{3 \times 10^6} 0,5 \times 10^{-9} = 5 \times 10^{-10}$

2. $6000 \times 0,000012 = \frac{6 \times 10^3}{1,2 \times 10^{-5}} = 72 \times 10^{-2} = 7,2 \times 10^{-1} = 0,72$

A partir del anterior ejemplo ¿podría usted deducir una regla general para la multiplicación y la división utilizando la notación científica?.

Bibliografía

- [1] Murray R., Spiegel. *Manual de formular y tablas matematicas*, serie schaum, McGraw-Hill, 1968.
- [2] D. C. Baird. *Experimentación. Una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos*. Prentice-Hall Hispanoamerica, S. A., 1991.
- [3] W.Leo. *Techniques for nuclear and particle physics experiments*. Springer-Verlag. 1987.
- [4] J. P. Holman. *Experimental methods for engineers*. McGraw-Hill, 6th edition, 1994.
- [5] Phillip R. Bevington. *Data reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*. McGraw-Hill Book Company, 1969.
- [6] PASCO Scientific. *Instruction Manual and Experiment Guide for the PASCO Scientific Models ME-9279A and ME-9280, Rotational Dynamics Apparatus*, 1990.
- [7] Física, Alonzo y Finn. Addison-Wesley, 1992.
- [8] Física I y II. P. Tipler.
- [9] F. Cristancho. F. Fajardo. *Notas de clase, física experimental II*. U. Nacional. 2003.
- [10] D. Kleppner and R. Kolenkow. *An introduction to mechanics*, Mac-Hill. 1973.
- [11] D. A. McQuarrie. *Statistical Mechanics*. HarperCollins Publisher. 1973.

- [12] ¿Qué es la teoría especial de la relatividad?. A. Einstein. Dover. 1945.
- [13] J. Priest. Problems of our physical experiments. Addison-Wesley. 1973.
- [14] American Journal Of Physics. Serie de revistas de la APS sobre enseñansa de la física.
- [15] Hecht-Zajac. Óptica. Addison-Wesley, 1998.
- [16] Murray R. Spiegel. Manual de formulas y tablas matemáticas. Serie Schaum. McGraw-Hill 1981.
- [17] M. Mladjenović, The history of early nuclear physics, Word Scientific, 1991.
- [18] Particle Data Group, July 2002. Sacado de *Review of Particle Physics* K. Hagiwara et al., Phisycal Review **D 66**, 010001 (2002).
- [19] The science of Mechanics, (1883).
- [20] H. Leal, J. González, A. Hernández, *Fundamento de física para las ciencias agricolas*, facultad de ciencias, universidad nacional, 2002.
- [21] Raymond A. Serway, *Física*, volumen 1. McGraw-Hill, 1996.

Índice alfabético

- ángulo
 - de fase, 238
 - unidades, 364
- aceleración, 15
 - instantánea , 20
- aceleración , 18
- desviación
 - estándar , 323
- desviación estándar , 325
- distribución
 - binomial , 326
 - de Poisson , 329
 - Gaussiana , 331
- energía
 - cinética , 182
 - mecánica , 182
 - potencial, 182
 - potencial de un resorte, 181
- fricción
 - estática , 112
- fricción , 111
- mecánica
 - cuántica, 68
- presión , 112
- relatividad
 - teoría, 68
- aceleración
 - circular, 45
- agujeros negros, 108
- amplitud, 237
- anticonmutativo, 8
- Atwood
 - máquina, 120
- calórico, 268
- calor
 - específico, 274
 - latente
 - de fusión , 276
 - de sublimación , 276
 - de vaporización , 276
 - transformación
 - latente, 276
- calor específico, 274
- campo
 - gravitatorio, 107
- capacidad
 - calorífica, 274
- capilaridad, 295, 297
- centro de masa, 144
- cinemática, 1
- coeficiente
 - de fricción estática , 112
- conducción
 - de calor, 277
- conservación
 - de la energía , 191
- constante
 - de fase, 238

- gravitacional, 103
- convección, 277
- covariancia, 343
- cuerpo
 - rígido, 212
- decaimiento, 352
- densidad
 - de probabilidad, 316
 - de probabilidad continua, 323
 - de probabilidad normalizada, 321
 - relativa, 293
- diferencia
 - porcentual, 350
- dinámica, 67
 - rotacional, 223
- distribución, 317
- distribucion
 - experimental , 334
- distribuciones
 - continuas, 322
 - de probabilidad, 322
 - discretas, 319
- elasticidad
 - constante, 118
- energía, 169
 - cinética, 173
 - potencial elástica, 184, 188
 - potencial gravitatoria, 184, 187
 - unidades, 364
- error
 - estadístico , 341
 - aleatorio, 341
 - de escala, 342
 - sistematizo, 340
- errores
 - estadísticos, 343
- estática, 67
- estadística, 315, 316
- estimación
 - de parámetros , 337
- fluido
 - ideal, 308
- frecuencia, 44, 238
 - angular, 238
- fricción
 - dinámica, 114
- fuerza
 - centrípeta, 220
 - gravedad, 102
 - normal, 101
 - restauradora, 236
- fuerzas
 - conservativas, 188
 - disipativas, 248
- fusión, 276
- FWHM, 331
- gases, 289
- gravedad
 - específica, 293
- hidrostática, 301
- histogramas, 335
- impulso, 155
- inercia, 72
- integral
 - de volumen, 151
- joule, 173
- líquidos, 289
- leyes
 - de Newton, 67

- mínimos
 - cuadrados, 351
- masa, 74
 - gravitatoria, 105
 - inercial, 105
 - total de un sistema, 145
- mecánica
 - estadística, 268
- media, 324
 - de la distribución binomial, 327
- medición, 316
- metro, 84
- momenta, 161
- momento
 - de inercia, 205, 211, 213
- momentos
 - de una distribución , 324
- momentum
 - angular, 205
 - lineal, 138
- movimiento
 - armónico amortiguado, 250
 - armónico simple, 237
 - bidimensional, 37
 - circular uniforme, 42, 242
 - inarmónico, 246
- muón, 348
- muestreo, 337
- newton
 - unidad de peso, 107
- ondas, 252
 - longitudinales, 253
 - transversales, 253
- péndulo
 - físico, 256
 - ideal, 244
- pascal, 291
- periodo, 44, 238
- peso, 100
 - específico, 293
- porcentaje
 - símbolo, 320
- potencia, 177
 - unidades, 364
- presión
 - unidades, 363
- principio
 - de superposición, 77
 - de Torricelli, 308
- probabilidad, 318
- proceso
 - aleatorio, 315
- procesos
 - aleatorios, 316
- producto
 - cruz, 11
 - punto, 6, 10
- promedio
 - ponderado, 348
- radiación, 277
- radio
 - de giro, 255
- rapidez, 17
- relatividad
 - teoría, 199
- resonancia, 252
- segundo, 84
- sistema
 - de referencia, 69
 - inercial, 72
- sistema de coordenadas, 3
- solidificación, 276

- Stokes
 - ley, 295
- sublimación, 276
- sumatoria, 320
- tabla
 - de frecuencias, 335
- temperatura, 270
 - unidades, 364
- tensión
 - superficial, 295
- teorema
 - de conservación de la energía, 183
 - trabajo y energía, 182
- termómetro, 270
- torque, 209
- trabajo, 6, 169, 173
- trayectoria, 41
- valor
 - esperado, 324
 - medio, 323
- vaporización, 276
- variable
 - aleatoria, 316
- variables
 - continua, 318
 - discreta, 318
- varianza, 324
 - de la distribución binomial, 327
- vector
 - acimutal, 218
 - radial, 217
- vectores
 - base, 11
 - perpendiculares, 6
- velocidad, 18
 - angular, 44, 238, 239
 - instantánea, 19
 - promedio, 14, 19
- vida
 - media, 348
- viscosímetro, 294
- viscosidad, 293
- watt, 177