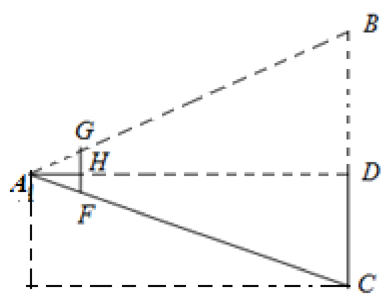
Actividades complementarias: proporciones, semejanza, circunferencia, áreas y volúmenes.

Tema 1. Proporcionalidad y semejanza.

1. Demuestre que las Mediatrices Homólogas de dos triángulos semejantes son proporcionales con los Lados Homólogos de los triángulos, . . . y por tanto proporcionales entre sí.

NOTA: Cada una de las demostraciones se pueden hacer tomando solo una pareja de Alturas Homólogas (dos medianas, dos bisectrices o dos mediatrices) entre los triángulos semejantes.

2. **Ejercicio** práctico para su análisis (Trabajo Independiente)

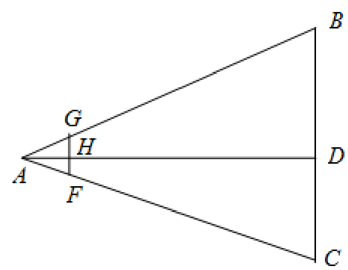


Tome un lápiz o una barrita, ubíquela verticalmente frente a sus ojos o "visual", de tal forma que sus extremos coincidan con las intersecciones de la pared con el techo el piso. Tome las medidas de: el nivel de su visual al extremo inferior del objeto usado (HF), la distancia del nivel de su visual al piso (DC), y la distancia de su ojo al objeto. ¿Podría, con los datos encontrados, hallar por medio de Proporcionalidad (de triángulos) la distancia desde usted a la pared?

Justifique su respuesta bien sea afirmativa o negativa. ¿En caso de requerir otro dato cuál sería?

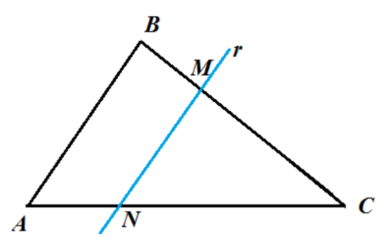
¿Con las medidas conocidas, podría hallar la altura de la pared, o qué datos adicionales requeriría?

3. A continuación, analice la siguiente situación:

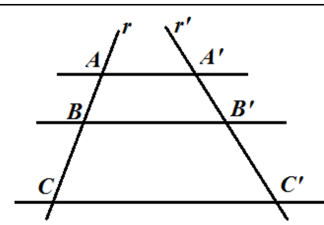


Los dos triángulos grande y pequeño, ADC y AHF son semejantes; pues el lápiz y la pared se suponen paralelos (ambas verticales), si se conocen las medidas AH, HF y DC, ¿podemos obtener a AD?. Conocidas AD, AH (las alturas) y GF, ¿podemos conocer BC?

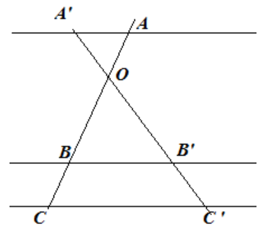
4. En el triángulo $\triangle ABC$:
$AB = 16\ cm$, $AC = 24\ cm$.
Si $MC = 14\ cm$ ¿A qué distancia de C debe cortar $\boldsymbol{r}$ a AC, para que los segmentos CN y NA sean proporcionales a CM y MB?



5. Supóngase que AA', BB' y CC' son paralelas, r y r' son dos transversales, con:
$AB = 2\ m.$, $BC = 6\ m.$, $A'B' = 5\ m.$ Hallar las medidas de $B'C'$ y $A'C'$

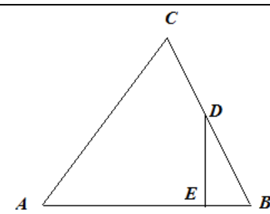


6. Supóngase que AA', BB' y CC' sonparalelas, con:
$A = \frac{1}{3}OB = \frac{1}{2}BC$ y $A'C' = 48$, hallar las medidas de OA', OB' y $B'C'$



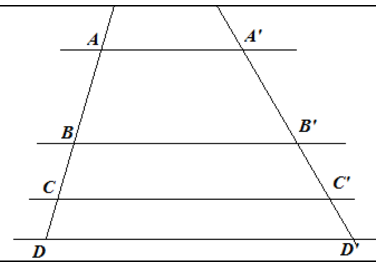
---

7. En el triángulo $\triangle ABC$:
$AC = BC$, Si D es el punto mediode BC y $DE \perp AB$, probar que $BE = {}^{1}/_{4}\, AB$



---

8. Si AA', BB', CC' y DD' son paralelas, con:
$AC = 6, AB + CD = 10, B'C' = 3, A'C' = 9,$
$A'D' = 18.$ Hallar AB, BC, CD $A'B'$ y $C'D'$.



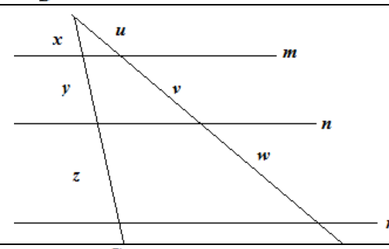
---

9. Supóngase que m, n y r son paralelas, con:

$$x + y + z = 14, u + v + w = 21,$$
$$v - y = 1, w = 4v$$

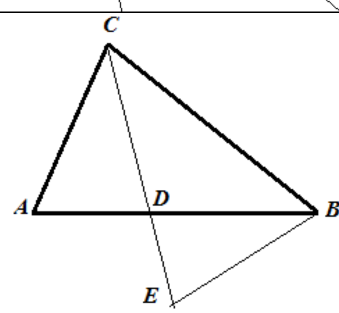
Hallar las medidas de los seis segmentos;

$$x, y, z, u, v, w.$$



---

10. En el triángulo $\triangle ABC$: $C - D - E$ son colineales sobre la bisectriz de $\measuredangle C$, $\measuredangle ABE = \measuredangle ACD$. Demostrar que
$\triangle ACD \sim \triangle BDE$ y $\triangle ADC \sim \triangle CEB$, finalmente escribe las proporciones respectivas.



11. Los lados de un triángulo miden $30\ un$, $24\ un$ y $32\ un$. Calcular la medida de los segmentos determinados en el lado de $32\ un$ por la bisectriz de su ángulo opuesto.

12. Los lados de un triángulo miden $AB = 48\ cm, BC = 38\ cm$ y $AC = 24\ cm$. Calcular la medida de los segmentos determinados en el lado AC por la bisectriz de su ángulo opuesto.

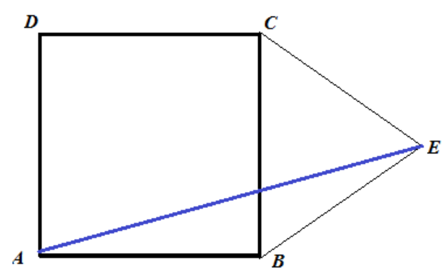
13. Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide *50 cm* y su proyección sobre la hipotenusa *14 cm*. Hallar la medida de la hipotenusa del triángulo, del otro cateto y de la altura.

14. Los lados iguales de un trapecio isósceles miden 25 cm cada uno, y sus bases miden 24 cm y 10 cm. Hallar la medida de la altura del trapecio.

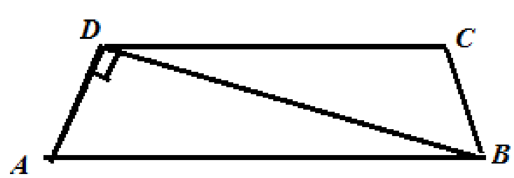
15. Se unen, con segmentos de recta, los puntos medios de un cuadrado de 24 m. de lado, A su vez, igualmente se unen los puntos medios de ese nuevo cuadrado. Hallar la medida del lado del cuadrado más interno.

16. Los lados del triángulo $\triangle ABC$ miden $a = 34, b = 16$ y $c = 36\ un.$ se trazan AN y BM medianas, siendo G su punto de corte. Calcular la medida de segmento GP perpendicular a $AB; P \in AB.$

17. Sobre el lado BC del cuadrado $ABCD$ de 12 m. de lado se construye el triángulo Equilátero $\triangle BCE.$ Hallar la longitude de AE



18. En el trapecio isósceles $ABCD,$ la diagonal BD es perpendicular al lado AD; Si $AB = 50$ y $AD = 14$, encuentre la medida del perímetro del trapecio:$(AB + BC + CD + DA)$ y de su altura.



Tema 2. Circunferencia.

1. En una $C(O;r)$ se trazan un diámetro $\overline{AB}$ y un radio $\overline{OC}$ perpendicular a $\overline{AB}$; se prolonga $\overline{AB}$ a cada lado y en el exterior de la circunferencia en longitudes iguales $AE = BD$; se trazan $\overline{CE}$ y $\overline{CD}$ que cortan a la circunferencia en F y G. Probar que: $\angle OFC = \angle OGC$.

Los triángulos $\triangle COD$ y $\triangle COE$ serán congruentes por lo tanto sus ángulos en C. pero los ángulos $\angle OFC$ y $\angle OGC$ son iguales por ser opuestos a lados iguales (radios) …

---

2. Un $\triangle ABC$ está inscrito en una $C(O;\ r)$; sus alturas se cortan en H. Demostrar que la recta que une el punto medio N de $\overline{AH}$ con el punto medio P de $\overline{AB}$ es paralela a la recta que une O con el punto medio Q de$\overline{AC}$. Demostrar que $OPNQ$ es un paralelogramo.

$NP//BH$, por base media y y $BH//OQ$ por ser ambas perpendiculares a AC …

---

3. Desde el vértice A de un $\triangle ABC$ equilátero, se traza el arco menor de la circunferencia que pasa por B y C; se toma sobre este arco el punto D y se trazan $\overline{BD}$ y $\overline{DC}$. Demostrar que la recta que une el punto medio del radio $\overline{AB}$ con el punto medio de $\overline{DC}$ es perpendicular a la recta que une el punto medio $\overline{AC}$ con el punto medio de$\overline{BD}$.

Muestre que $PQMN$ es un rombo. Los cuatro lados son las mitades del radio, …

---

4. En una $C(O;r)$ un diámetro $\overline{AB}$ y una cuerda $\overline{AC}$ forman un ángulo de 30°; se traza la tangente en el punto C que corta al diámetro prolongado en el punto D. Demostrar que el $\triangle\, ACD$ es isósceles.

El arco CO es el doble del ángulo; 60°, el arco restante hasta A será 120°, y por ángulo exterior concluya, …

---

5. En una semicircunferencia de radio dado R inscribir una circunferencia de radio dado $\boldsymbol{r}$. ¿Cuál condición deben cumplir los radios R y r para que exista una única solución?, ¿Para dos soluciones?

El diámetro mayor posible será el radio R, sacar conclusiones

---

6. En una $C(O;r)$ se trazan por los extremos de un diámetro $\overline{AB}$ dos cuerdas paralelas $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Probar que $\angle ACO = \angle BDO$.

Los dos triángulos $\triangle\, ACO$ y $\triangle\, BDO$ serán congruentes (por LAL)

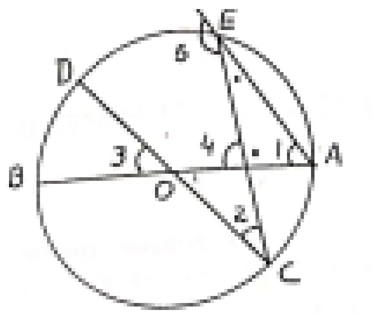
---

7. Por el punto medio O de un segmento $\overline{AB}$ se traza una recta cualquiera $\overline{XY}$; se toma B' simétrico de B con respecto a $\overline{XY}$ y se traza $\overline{B'N} \perp \overline{OB'}$ con el punto N sobre $\overline{XY}$. Probar que $\overline{NB}$ es tangente a la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$.

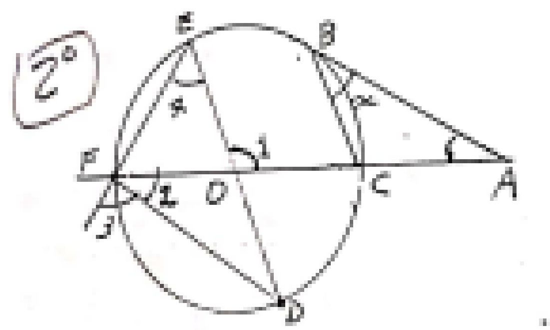
Por congruencia de triángulos tendremos que lo ángulos $\angle OBN$ y $\angle OB'N$ serán iguales asi entonces OB y NB son perpendiculares, po lo tanto …

---

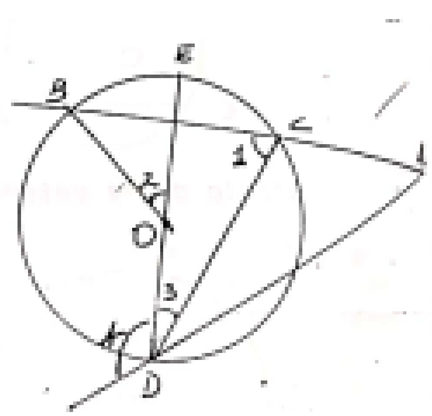
8. En la figura $\widehat{AB}\ y\ \widehat{CD}$ con diámetro $\widehat{AC} = 48°,\ \widehat{DE} = 60°$. Hallar los ángulos $\hat{1},\ \hat{2},\ \hat{3},\ \hat{4},\ \hat{5}$



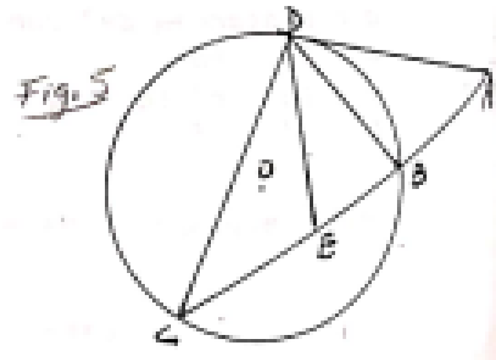
9. La recta $\overline{AF}$ pasa por el centro. $\overline{DE}$ es un diámetro paralelo a $\overline{CB}$ y a $\overline{AB}$ tangente. Si a=40°; hallar los ángulos $\hat{A},\ \hat{1},\ \hat{2},\ \hat{3},\ \hat{4}$



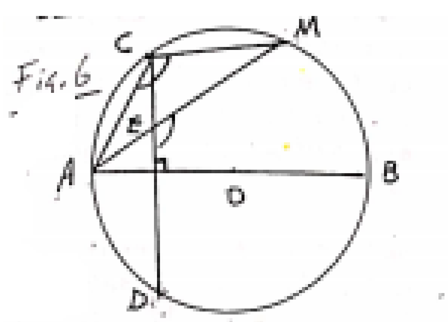
10. El diámetro DE es perpendicular a la secante $\overline{AB}$. Si $\hat{A} = 38°$ y $\widehat{BD} = 128°$; hallar los ángulos $\hat{1},\ \hat{2},\ \hat{3},\ \hat{4}$



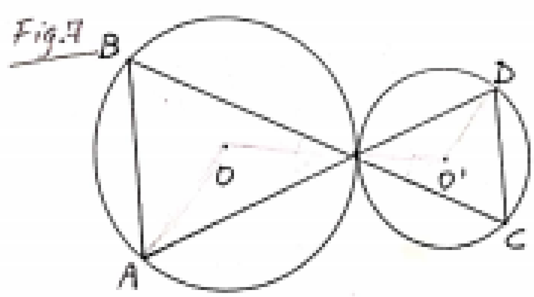
11. Dado el punto A se han trazado la tangente $\overline{AD}$ y la secante $\overline{AC}$ a la circunferencia así como las cuerdas $\overline{CD}\ y\ \overline{BD}.\ Si\ \overline{DE}$ es la bisectriz de ángulo CDB; demostrar que el triángulo ADE es isósceles.



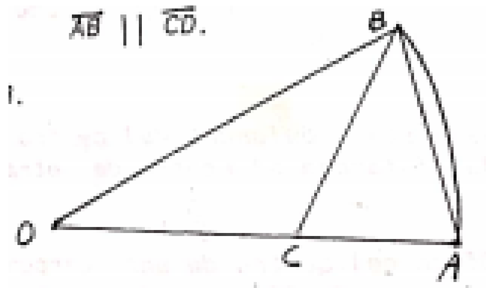
12. La cuerda $\overline{CD}$ es perpendicular al diámetro $\overline{AB}$ y M es un punto cualquiera del arco $\widehat{BC}$. Si se trazan $\overline{AM}, \overline{AC}\ y\ \overline{CM}$, demostrar que $\widehat{DEM} = \widehat{ACM}$.



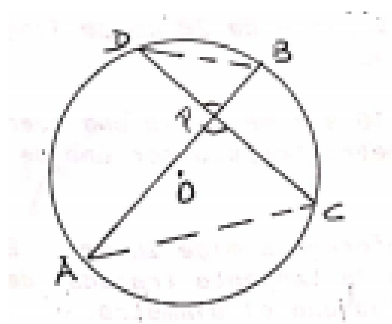
13. Si por el punto de contacto T de dos circunferencias tangentes exteriormente se trazan los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$; demostrar que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.



14. Si O es el centro del $\widehat{AB}$ de 36° y $\overline{BC}$ es la bisectriz de ángulo OBA. Demostrar que $\overline{OC}$ es medio proporcional entre $\overline{OA}\ y\ \overline{AC}$.

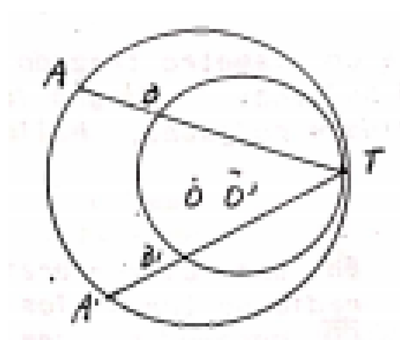


15. Si $\overline{AB}\ y\ \overline{CD}$ son dos secantes que se cortan en P. Probar que $\triangle APC \sim \triangle DPB$



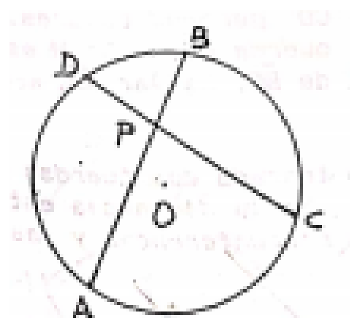
16. Si por el punto de tangencia T de dos circunferencias tangentes interiores se trazan secantes a la circunferencia mayor, demostrar que los segmentos determinados en las secantes por ambas circunferencias son proporcionales, es decir:

$$\frac{\overline{TB}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{TB'}}{\overline{B'A'}}$$

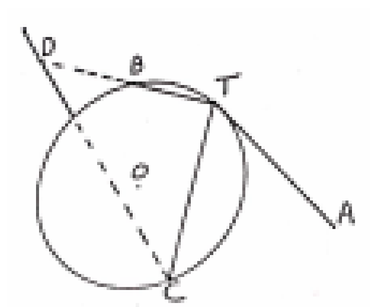


17. Demostrar que si dos secantes $\overline{AB}\ \ y\ \overline{CD}$ a una circunferencia tienen un punto común P, se verifica:

$$\overline{PA}\ x\ \overline{PB} = \overline{PC}\ x\ \overline{PD}$$



18. Por el punto T de tangencia de una tangente $\overline{AT}$ se trazan las cuerdas $\overline{TB}\ y\ \overline{TC}$ desiguales y por C se traza una paralela a la tangente que corta en D a la prolongación de la cuerda menor $\overline{TB}$. Demostrar que $\overline{TC}$ es media proporcional entre $\overline{TB}\ y\ \overline{TD}$.



19. Una cuerda de 48 pulgadas dista 7 pulgadas del centro de una circunferencia. Hallar la distancia al centro de otra cuerda de 40 pulgadas.

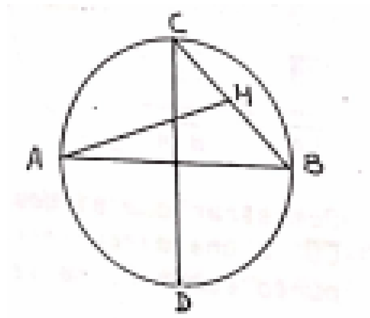
20. Desde un punto distante 35 cm del centro de una circunferencia se ha trazado a esta una tangente de 28 cm de longitud. Hallar el radio de la circunferencia.

21. En una circunferencia de 16.9 m de radio una cuerda de 13 m se ha proyectado sobre el diámetro trazado por uno de sus extremos. Hallar la proyección.

22. El diámetro de una circunferencia mide 20 cm. En cuanto habla que prolongarlo para que la tangente trazada desde el punto obtenido tenga igual longitud que el diámetro.

23. El segmento perpendicular a un diámetro trazado desde un punto de la circunferencia mide 6 pulgadas. Si uno de los segmentos que determina el diámetro mide 4 pulgadas. Hallar el radio de la circunferencia.

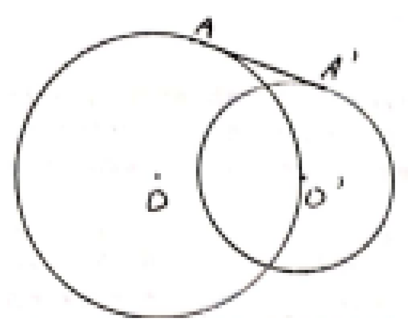
24. En una circunferencia de 8 cm de radio se trazan los diámetros $\overline{AB}\ y\ \overline{CD}$ perpendiculares, así como la cuerda $\overline{BC}.$ Si M es el punto medio de $\overline{BC},$ hallar $\overline{AM}.$



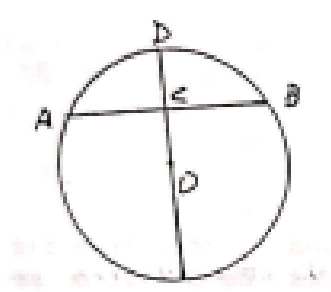
25. En una circunferencia se han trazado dos cuerdas paralelas; una mide 12 cm y la otra 20 cm. Si la distancia entre ellas es de 4 cm; hallar el radio de la circunferencia y las distancias de estas cuerdas al centro.

26. Los radios de dos circunferencias concéntricas miden 26 cm y 10 cm respectivamente. Hallar la longitud de una cuerda de la circunferencia mayor que sea tangente a la menor.

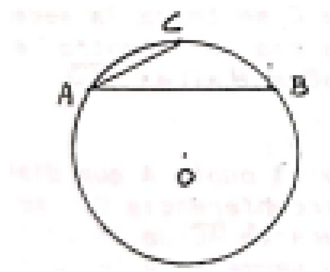
27. Las circunferencias O y O' tienen 12 cm y 6 cm de radio respectivamente, y el centro de la menor está en la mayor. Hallar la longitud de la tangente $\overline{AA'}$ común.



28. La cuerda $\overline{AB}$ mide 18 cm y la distancia $\overline{CD}$ de su punto medio al punto medio del $\widehat{AB}$ mide 3 cm. Hallar el radio de la circunferencia.



29. La cuerda $\overline{AB}$ tiene 30 cm de longitud y dista 8 cm del centro de la circunferencia. Si C es el punto medio del arco $\widehat{AB}$. Hallar la distancia de $\overline{AC}$ al centro.

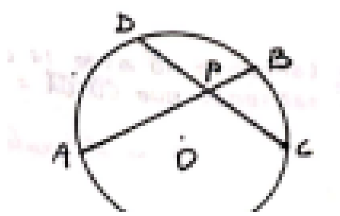


30. Un punto dista 8 pulgadas del centro de una circunferencia de 18 pulgadas de radio. Calcular la longitud de la mayor cuerda que puede pasar por ese punto, así como la longitud de la menor.

31. Lo radios de dos circunferencias miden 10 y 4 cm respectivamente. Si la distancia entre sus centros es de 20 cm. Hallar la longitud de sus tangentes comunes exteriores.

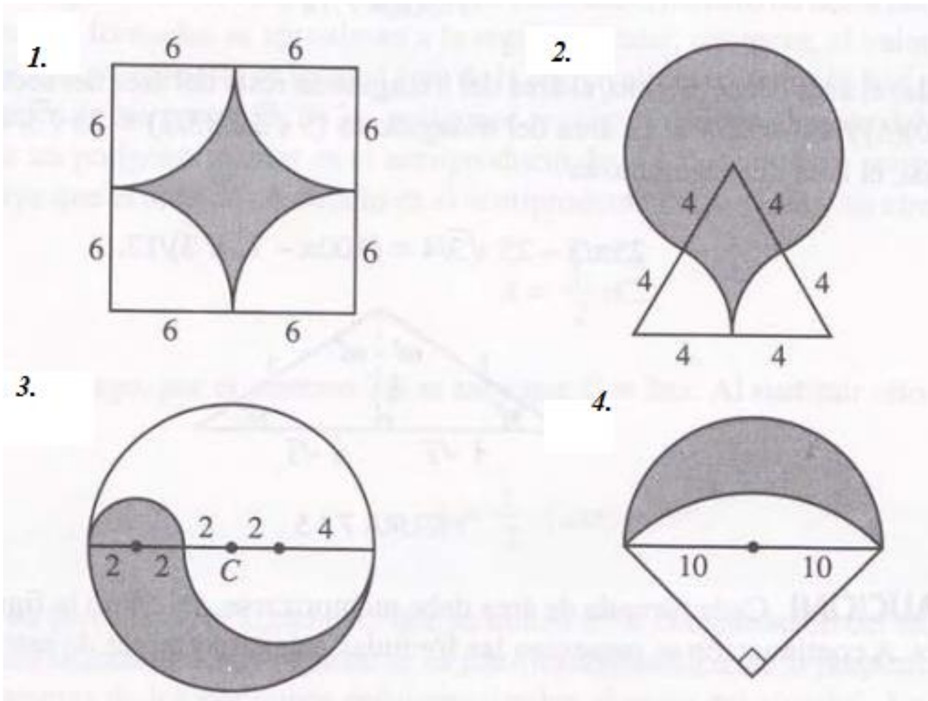
32. Un punto P dista 3 cm del centro de una circunferencia de 5 cm de radio. Hallar el producto de los segmentos de toda cuerda que pase por ese punto.

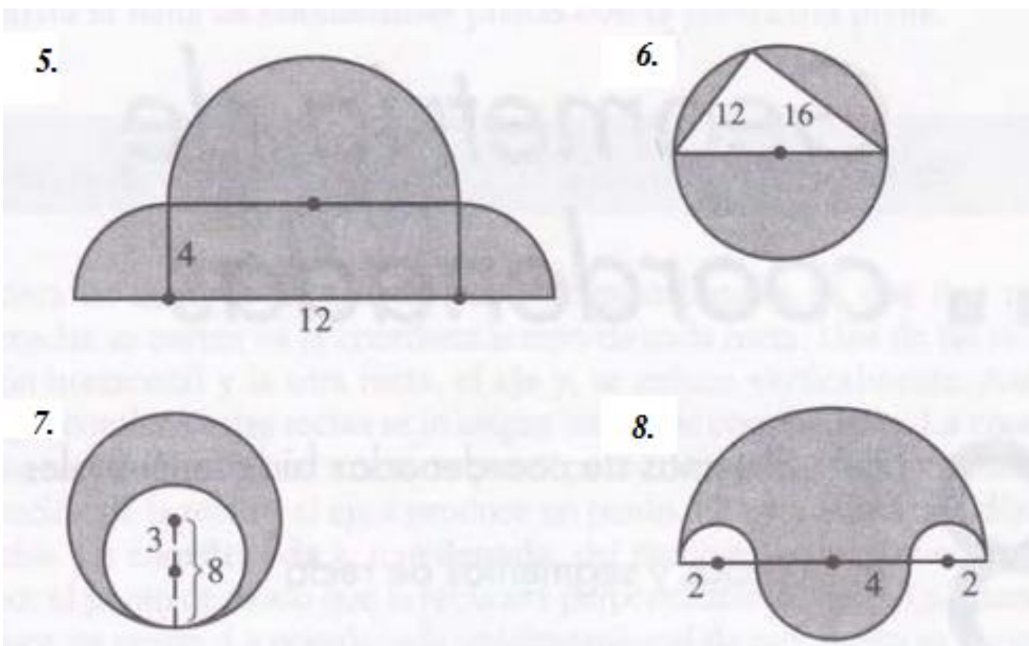
33. Si $\overline{AB}$ es un diámetro y $\overline{DC} \perp \overline{AB}$. Hallar $\overline{CD}$ sabiendo que $\overline{OP} = 5\ cm$ y $\overline{OA} = 13\ cm.$



Tema 3. Áreas y volúmenes.

Encuentra el área de cada una de las regiones sombreadas:


1.
6 6
6 6
6 6
6 6
2.
4 4
4 4
4 4
3.
2 2 4
2 2
C
4.
10 10


5.
4
12
6.
12 16
7.
3
8
8.
2 4 2