

Inducción matemática

2. Método de demostración por inducción matemática.

Ejercicios: (1 hora)

Analice si es verdadera (V) o falsa (F), cada una de las siguientes afirmaciones. En caso de considerarla falsa, busque un contraejemplo, y en caso de considerarla verdadera trate de demostrarla mediante inducción matemática.

- a. $(\forall n \in \mathbb{N}) (P_n: 1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{1}{2} (3n^2 - n))$
- b. $(\forall n \in \mathbb{N}) (P_n: 2^{2n} - 1 \text{ es múltiplo de } 4)$
- c. $(\forall n \in \mathbb{N}) \left(P_n: 1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + \dots + n(n + 2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6} \right)$
- d. “La suma de tres enteros consecutivos es siempre divisible por 3”

NOTA: Tres enteros consecutivos: “ $n + (n + 1) + (n + 2)$ ”

Solución del primer enunciado como ejemplo

a. $(\forall n \in \mathbb{N}) (P_n: 1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{1}{2} (3n^2 - n) = \frac{3n^2 - n}{2})$

Paso 1

P1: $1 = \frac{3(1)^2 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

P2: $1 + 4 = \frac{3(2)^2 - 2}{2} = \frac{12 - 2}{2} = 5$

Efectivamente se cumple.

Paso 2

Se supone verdadero P_k : para los primeros k términos.

$$1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2) = \frac{3k^2 - k}{2}$$

Paso 3

Se demuestra que es verdadero P_{k+1} : para los primeros $k + 1$ términos.

$$1 + 4 + 7 + \dots + (3(k + 1) - 2) = \frac{3(k + 1)^2 - (k + 1)}{2}$$

Se reescribe la suma indicando hasta el término k y se le suma el siguiente $k + 1$ se muestra;

$$1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2) + (3(k + 1) - 2) = \frac{3(k + 1)^2 - k - 1}{2}$$

Se sustituye por la hipótesis del Paso 2

$$\frac{3k^2 - k}{2} + (3(k + 1) - 2) = \frac{3(k + 1)^2 - k - 1}{2}$$

$$\frac{3k^2 - k}{2} + (3k + 3 - 2) = \frac{3(k^2 + 2k + 1) - k - 1}{2}$$

$$\frac{3k^2 - k}{2} + (3k + 1) = \frac{3k^2 + 5k + 2}{2}$$

$$\frac{(3k^2 - k) + (6k + 2)}{2} = \frac{3k^2 + 5k + 2}{2}$$

Efectivamente son iguales:

$$\frac{3k^2 + 6k - k + 2}{2} = \frac{3k^2 + 5k + 2}{2}$$

Paso 4

Conclusión: $(\forall n \in \mathbb{N})(P_n: 1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{1}{2} (3n^2 - n))$