

ریاضیات اول  
برائے گیاریوں اور بارویں جماعت

طلبہ و طالبات

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk



# عنوان

1	محدد، نقطے اور خط	1
2	1.1 دو نقطوں کے بیچ کا فاصلہ	1.1
3	1.2 قطع لکیر کا وسط	1.2
4	1.3 قطع خط کا ڈھلاؤ	1.3
9	1.4 ایک سیدھی لکیر یا خط کی مساوات سے کیا مراد ہے؟	1.4
9	1.5 لکیر کی مساوات	1.5
10	1.6 لکیر کی مساوات کی پہچان	1.6
10	1.7 مساوات $ax + by + c = 0$	1.7
11	1.8 دو لکیروں کا مشترک نقطہ	1.8
14	1.9 عمودی لکیروں کا ڈھلاؤ	1.9
19	2 غیر ناطق جذر اور طاقتیں	2
19	2.1 اعداد کی اقسام	2.1
20	2.2 نامعقولے اور ان کی خصوصیات	2.2
26	2.3 طاقتوں کا استعمال	2.3
28	2.4 صفر اور منفی طاقت	2.4
32	2.5 کسری طاقتیں	2.5
41	3 تفاعل اور ترسیما	3
43	4 دو درجی مساوات	4
52	4.1 مشتق نمبر 4B	4.1
65	5 عدم مساوات	5
67	6 تفرق	6
69	7 تفرق کے استعمال	7
70	7.1 تفرقات بہ صورت تفاعلات	7.1

74	7.2	بڑھتے ہوئے اور گھٹتے ہوئے تفاعلات
81	7.3	زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم نقطے
92	7.4	متفرقات، تبدیلی کی شرح کے موافق
123	8	ترتیبات
125	9	انکراجی کا مسئلہ ثنائی
127	10	تکوینیات
128	10.1	$\cos \theta^0$ کی ترسیم
133	10.2	$\sin \theta^0$ اور $\tan \theta^0$ کی ترسیم
134	10.3	چند مشعلق تفاعل کی درست قیمتیں
140	10.4	$\cos \theta^0$ , $\sin \theta^0$ اور $\tan \theta^0$ کی تراشیم کی تشاکل کی خصوصیات
145	10.5	مشاعلی تفاعل کی مساوات کا حل
155	10.6	مشاعلی تفاعل کے باقی روابط
175	11	تفاعل کا مجموعہ اور تفاعل کا الٹ
177	12	وسعت تفرق
179	13	سمتیات
181	14	ہندی ترتیبات
183	15	دہرا تفرقات
213	16	تکمل
215	17	جیم جسم طواف
215	17.1	انقلاب کی جلدیں
220	17.2	$y$ -محور کے گرد انقلاب کی جلدیں
229	18	ریڈیئن
263		جوابات

## باب 1

### محدد، نقطے اور خط

اس سبق میں ہم محدّد کی مدد سے نقطوں اور خط کی دو ابعادی میں تعریف کریں گے۔ یہ سبق پڑھ لینے کے بعد آپ اس قابل ہوں گے کہ :

- دو نقطوں کے بیچ کا فاصلہ معلوم کریں۔
- کسی خط کے انتہائی نقطوں کے محدّد معلوم ہوں تو اس خط کا درمیانی نقطہ معلوم کر سکیں۔
- کسی خط کے انتہائی نقطوں کے محدّد معلوم ہوں تو اس خط کی ڈھلوان معلوم کریں۔
- ایک خط کی ڈھلوان سے اسکی مساوات معلوم کریں۔
- دو نقطوں کو ملانے والی لکیر کی مساوات معلوم کریں۔
- لکیروں میں تفریق کریں مختلف طرح کی مساوات سے۔
- دو لکیریوں کے مشترک نقاط معلوم کریں۔
- ڈھلوان سے معلوم کریں کہ لکیریوں عمودی ہیں یا متوازی ہیں۔

## 1.1 دو نقطوں کے بیچ کا فاصلہ

جب آپ مہیا چن لیتے ہیں تو صفحے پے افقی سمت میں x محدد بنائیں۔ اور عمودی خط میں y محدد بنائیں، اور اس طرح آپ ایک نظام محدد بنا رہے ہیں۔ اور اس نظام محدد کو کارٹیزی نظام محدد کہیں گے، اور یہ نام سترھویں صدی کے ایک فرانسیسی ریاضی دان رین ڈیکارٹس<sup>1</sup> کے نام پر رکھا گیا شکل 1.1 میں دو نقطے ہیں A اور B۔ A کے محدد (4, 3) ہیں اور B کے (10, 7) محدد ہیں۔ خط کا وہ حصہ جو A اور B کے درمیان واقع ہو اسے لکیری قطع کہیں گے۔ لکیری قطع کی لمبائی دو نقطوں کے بیچ کا فاصلہ ہے۔ شکل 1.1 میں ایک نقطہ C بھی شامل کر لیا گیا ہے اور اس طرح ایک قائمہ الزاویہ مثلث وجود میں آتی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ C کا محدد x-B جیسا ہے جبکہ A اور C کا محدد y-ایک ہی ہے۔ اور یوں کے C محدد (10, 3) ہیں۔ یہ بہت واضح ہے کہ کی AC لمبائی 10 - 4 = 6 ہے اور CB کی لمبائی 7 - 3 = 4 ہے۔ فیثاغورث کے کھلے کو استعمال کرتے ہوئے مثلث ABC سے یہ واضح ہے کہ قطع خط AB کی لمبائی

$$\sqrt{(10-4)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$$

آپ اعداد کی مدد لے سکتے ہیں اور یوں آپ کے پاس نتیجہ 7.21 آئے گا لیکن بہتر یہی ہے کہ آپ اسے جذر کی صورت میں ہی رہنے دیں۔ محدد جیومیٹری کی تجویز اس لیے پیش کی گئی کہ حساب کتاب کے لیے الجبرا کا استعمال کیا جاسکے، جیسے اگر A اور B کوئی بھی دو نقطے ہوں اور شکل 1.1 والے نہ ہوں تو بھی ہمارے لیے کافی مددگار ہوتا ہے کہ صرف محدد دیکھ کر یہ پتہ چل جائے کہ کس نقطے کی بات ہو رہی ہے۔ اسکا ایک طریقہ یہ ہے کہ علامات استعمال کی جائیں جیسے پہلے نقطے کے محدد (x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>) اور دوسرے نقطے کے محدد (x<sub>2</sub>, y<sub>2</sub>) ہوں گے۔ جبکہ x<sub>1</sub> دراصل پہلے نقطے کا محدد x ہے۔ شکل 1.2 میں ایک عام مثلث بنائی گئی ہے اور آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نقطہ C کے محدد اب (x<sub>2</sub>, y<sub>1</sub>) ہیں اور یہ کہ اب AC = x<sub>2</sub> - x<sub>1</sub> اور CB = y<sub>2</sub> - y<sub>1</sub>۔ فیثاغورث کے کھلے کے مطابق:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ایک اور فائدہ الجبرا استعمال کرنے کا کہ مثلث کی جیومیٹری بھی شکل ہو اور وہ جس بھی جگہ ہو یہ کلیہ کام کرتا ہے شکل 1.3 میں A کے محدد منفی ہیں اور شکل 1.4 میں لکیر کی ڈھلوان نیچے کی طرف ہے بجائے اوپر کی طرف ہونے کے جیسے آپ بائیں سے دائیں جانب چلتے ہیں۔ شکل 1.3 اور شکل 1.4 میں اپنے طور پر AB کی لمبائی معلوم کرنے کی کوشش کریں۔ اور پھر آپ کلیہ استعمال کر سکتے ہیں اپنے جواب کی پڑتال کرنے کے لیے۔ شکل 1.3 کے لیے x<sub>2</sub> - x<sub>1</sub> = 3 - (-2) = 3 + 2 = 5 اور y<sub>2</sub> - y<sub>1</sub> = 5 - (-1) = 5 + 1 = 6

$$AB = \sqrt{(3 - (-2))^2 + (5 - (-1))^2} = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61}$$

اور شکل 1.4 میں x<sub>2</sub> - x<sub>1</sub> = 6 - 1 = 5 اور y<sub>2</sub> - y<sub>1</sub> = 2 - 5 = -3

$$AB = \sqrt{(6-1)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

ایک اور بات اس سے فرق نہیں پڑتا کہ آپ نقطوں کو کس ترتیب میں رکھتے ہیں، اگر آپ B کو پہلا نقطہ تصور کریں یوں کہ (x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>) اور A کو دوسرا نقطہ (x<sub>2</sub>, y<sub>2</sub>) تو کھلے پر اسکا کوئی اثر نہیں ہوگا۔ شکل 1.1 کے لیے یہ

$$BA = \sqrt{(4-10)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$$

دو نقطوں  $(x_1, y_1)$  اور  $(x_2, y_2)$  کا درمیانی فاصلہ (یا اس قطع کلیئر کی لمبائی جو ان دونوں کو جوڑ رہا ہے)؛

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

## 1.2 قطع کلیئر کا وسط

آپ محدود کی مدد سے بھی ایک قطع کلیئر کا درمیانی قطع معلوم کر سکتے ہیں۔ شکل 1.5 میں ایک قطع کلیئر دکھایا گیا ہے جیسا کہ شکل 1.1 میں تھا لیکن اب اس میں درمیانی نقطہ  $M$  بھی شامل کیا گیا ہے۔  $M$  سے گزرتی ہوئی محدود  $y$  کے مساوی خط  $AC$  کو چھوئے گا اور اس نقطے کو ہم نام دیں گے  $D$ ، اور یوں مثلث  $ADM$  کے اطراف کی لمبائی  $ACB$  کے اطراف کی لمبائی سے آدھی ہیں، اور اسی لیے؛

$$AD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}(10 - 4) = \frac{1}{2}(6) = 3,$$

$$DM = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}(7 - 3) = \frac{1}{2}(4) = 2$$

نقطے  $M$  اور  $D$  کے محدود  $x$  ایک ہی ہیں جو کہ؛

$$4 + AD = 4 + \frac{1}{2}(10 - 4) = 4 + 3 = 7$$

نقطے  $M$  کا محدود  $y$  جو کہ؛

$$3 + MD = 3 + \frac{1}{2}(7 - 3) = 3 + 2 = 5$$

الغہ درمیانی نقطے  $M$  کے محدود (75) ہیں شکل 1.6 میں شکل 1.2 ہی ہے لیکن اب اس میں دو نقطے  $M$  اور  $D$  شامل کیے گئے ہیں

$$AD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}(x_2 - x_1), \quad DM = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}(y_2 - y_1)$$

الغہ نقطے  $M$  کا محدود  $x$  ہے؛

$$\begin{aligned} x_1 + AD &= x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1 \\ &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2). \end{aligned}$$

اور اسی طرح نقطے  $M$  کا محدود  $y$  ہے؛

$$\begin{aligned} y_1 + DM &= y_1 + \frac{1}{2}(y_2 - y_1) = y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_1 \\ &= \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2). \end{aligned}$$

دو نقطوں  $(x_1, y_1)$  اور  $(x_2, y_2)$  کو ملانے والے قطع کثیر کے درمیانی حصے کے محدود ہیں؛

$$\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right)$$

اور اب چونکہ آپ کے پاس وسطی نقطہ  $M$  کے محدود کے لیے الجبرائی کلیہ موجود ہے، آپ اسے کسی بھی دو نقطوں کے لیے استعمال کر سکتے ہیں، مثال کے طور پر شکل 1.3 کے لیے  $AB$  کا درمیانی نقطہ؛

$$\left(\frac{1}{2}((-2) + 3), \frac{1}{2}((-1) + 5)\right) = \left(\frac{1}{2}(1), \frac{1}{2}(4)\right) = \left(\frac{1}{2}, 2\right).$$

اور شکل 1.4 کے لیے  $\left(\frac{1}{2}(1 + 6), \frac{1}{2}(5 + 2)\right) = \left(\frac{1}{2}(7), \frac{1}{2}(7)\right) = \left(3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$  نہیں ہوگا کہ آپ کس نقطے کو پہلا نقطہ کہتے ہیں اور کسے دوسرا، شکل 1.5 میں اگر آپ  $(10, 7)$  کو  $(x_1, y_1)$  جبکہ  $(4, 3)$  کو  $(x_2, y_2)$  تصور کر لیں تو درمیانی نقطہ  $(7, 5) = \left(\frac{1}{2}(10 + 4), \frac{1}{2}(7 + 3)\right)$  جو کہ پہلے والا جواب ہی ہے۔

### 1.3 قطع خط کا ڈھلاؤ

کسی کثیر کا ڈھلاؤ دراصل بتاتا ہے کہ کوئی کثیر کتنی ترچھی ہے، کثیر جتنی زیادہ ترچھی ہوگی اتنا زیادہ ڈھلاؤ ہوگا۔ فاصلے اور درمیانی نقطے کے برعکس ڈھلاؤ پوری کثیر کی خصوصیت ہے نہ کہ صرف ایک قطع کثیر کی۔ اگر آپ کثیر کے کوئی سے بھی دو نقطے چنتے ہیں اور آپ محسوس کرتے ہیں کہ محدود  $x$ -محدود  $y$  کی قیمتیں بڑھ رہی ہیں جیسے جیسے آپ ایک نقطے سے دوسرے کی طرف جاتے ہیں، جیسا کہ شکل 1.7 میں دکھایا گیا ہے تو کسر کچھ ایسا بنتا ہے،

$$\frac{\text{قدم } y}{\text{قدم } x}$$

اور یہ بدلتا نہیں ہے آپ جو بھی نقطے چنتیں۔ اور یہی ایک کثیر کا ڈھلاؤ ہے۔ کلیے پر کوئی اثر نہیں پڑتا محدود مثبت ہوں یا منفی، شکل 1.3 میں مثال کے طور پر  $AB$  کا ڈھلاؤ  $\frac{5}{9} = \frac{5+1}{3+2} = \frac{5-(-1)}{3-(-2)}$  ہے لیکن اس بات کا خیال رکھیں کہ شکل 1.4 میں ڈھلاؤ  $-\frac{3}{5} = \frac{-3}{5} = \frac{2-5}{6-1}$ ، منفی ڈھلاؤ کا مطلب ہے کہ جب آپ بائیں سے دائیں جانب چل رہے ہوں تو ترچھاؤ نیچے کی طرف ہو۔ باقی کلیوں کی طرح یہاں بھی اس بات سے فرق نہیں پڑتا کہ کس محدود کو ایک کہیں گے اور کسے دو، شکل 1.1 میں آپ ڈھلاؤ کہہ سکتے ہیں کہ  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{7-3}{10-4}$  یا ہم ایسے بھی کہہ سکتے ہیں  $\frac{2}{3} = \frac{-4}{-6} = \frac{3-7}{4-10}$  اگر دو کثیروں کا ڈھلاؤ برابر ہے تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ یہ دونوں کثیریں متوازی یا مساوی ہیں۔

مثال 1.1: ایک کثیر کے انتہائی نقطے  $(p - q, p + q)$  اور  $(p + q, p - q)$  ہیں اس کثیر کی لمبائی، ڈھلاؤ اور درمیانی نقطے کے محدود معلوم کریں۔ لمبائی اور ڈھلاؤ معلوم کرنے کے لیے آپکو حساب لگانا ہوگا۔

$$x_2 - x_1 = (p + q) - (p - q) = p + q - p + q = 2q$$

$$y_2 - y_1 = (p - q) - (p + q) = p - q - p - q = -2q$$

اور



لمبائی.  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2q)^2 + (-2q)^2} = \sqrt{4q^2 + 4q^2} = \sqrt{8q^2}$  لمبائی ڈھلاؤ  $-1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2q}{2q}$  کے لیے

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= (p - q) + (p + q) = p - q + p + q = 2p \\ y_1 - y_2 &= (p + q) + (p - q) = p + q + p - q = 2p \end{aligned} \quad \text{اور}$$

لہذا درمیانی نقطہ  $\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right) = \left(\frac{1}{2}(2p), \frac{1}{2}(2p)\right) = (p, p)$  ہے۔ کوشش کریں کہ آپ خود سے شکل بنائیں مثال کے نتیجے کو ظاہر کرنے کے لیے۔ □

مثال 1.2: ثابت کریں کہ ان نقطوں  $D(-1, 2)$ ,  $C(3, 0)$ ,  $B(5, 3)$ ,  $A(1, 1)$  سے ایک متوازی الاضلاع شکل بنتی ہے۔ آپ اس مثال کو کئی طریقوں سے حل کر سکتے ہیں لیکن جو بھی طریقہ چنیں گے اس میں شکل بنانا لازمی ہے، جو کہ شکل 1.8 میں دکھائی گئی ہے۔ پہلی ترکیب (لمبائی کا استعمال کرتے ہوئے)

اس طریقے میں مخالف سمتوں کی لمبائی معلوم کریں، اگر مخالف سمتوں کی لمبائی برابر ہے تو دیے گئے نقطے ایک متوازی الاضلاع شکل بنائیں گے۔

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(5 - 1)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{20} \\ DC &= \sqrt{(3 - (-1))^2 + (0 - (-2))^2} = \sqrt{20} \\ CB &= \sqrt{(5 - 3)^2 + (3 + 0)^2} = \sqrt{13} \\ DA &= \sqrt{(1 - (-1))^2 + (1 - (-2))^2} = \sqrt{13} \end{aligned}$$

اسی لیے  $AB = DC$  اور  $CB = DA$  اور ثابت ہو گیا کہ دیے گئے نقطے ایک متوازی الاضلاع شکل بناتے ہیں طریقہ 2 (درمیانی نقطوں کے مدد سے) اس طریقے میں، اخترن AC اور BD کے درمیانی نقطے معلوم کریں۔ اگر یہ نقطے ایک ہی ہیں تو اس کا مطلب اخترن ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں لہذا یہ بند شکل ایک متوازی الاضلاع شکل ہوگی۔ اخترن AC کا درمیانی نقطہ  $\left(\frac{1}{2}(1 + 3), \frac{1}{2}(1 + 0)\right)$  جو کہ  $\left(2, \frac{1}{2}\right)$  ہے، اخترن BD کا درمیانی نقطہ  $\left(\frac{1}{2}(5 + (-1)), \frac{1}{2}(3 + (-2))\right)$  اور یہ بھی  $\left(2, \frac{1}{2}\right)$  لہذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ دیے گئے نقطے ایک متوازی الاضلاع شکل بناتے ہیں۔ طریقہ 3 (ڈھلاؤ کے مدد سے) اس طریقہ کار میں مخالف سمتوں کے ڈھلاؤ معلوم کریں، اگر آئے سامنے کے دونوں خط متوازی ہوں تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ ABCD ایک متوازی الاضلاع شکل ہوگی۔ خط AB اور DC کے ڈھلاؤ  $\frac{3-1}{5-1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$  اور  $\frac{0-(-2)}{3-(-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$  ہیں، لہذا AB اور DC متوازی لگیں ہیں، لکیروں DA اور CB ایک دوسرے کا ڈھلاؤ برابر  $\frac{3}{2}$  ہے، اسی لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ DA اور CB متوازی ہیں اور یوں یہ ثابت ہوتا ہے کہ ABCD ایک متوازی الاضلاع شکل ہے۔ □

اعداد کا استعمال نہ کریں اور جہاں مناسب ہو اپنے جواب کو جذر کی صورت میں لکھیں۔ سوال 1: درج ذیل نقطوں کو جوڑنے والے قطع لکیر کی لمبائی معلوم کریں۔ جز (e) اور (h) میں فرض کریں کہ  $a > 0$  جبکہ جز (i) اور (j) میں  $p > q > 0$  ہے۔

$$ا. (2, 5), (7, 1) \quad د. (a + 1, 2a + 3), (a - 1, 2a - 1)$$

$$ب. (-3, 2), (1, -1) \quad ز. (2, 9), (2, -14)$$

$$ج. (4, -5), (-1, 0) \quad ح. (12a, 5b), (3a, 5b)$$

$$د. (-3, -3), (-7, 3) \quad ط. (p, q), (q, p)$$

$$ه. (2a, a), (10a, -14a) \quad ي. (p + 4q, p - q), (p - 3q, p)$$

سوال 2: ثابت کریں کہ نقطے  $(1, -2)$ ,  $(6, -1)$ ,  $(9, 3)$ ,  $(4, 2)$  ایک متوازی الاضلاع شکل بناتے ہیں۔

سوال 3: ثابت کریں کہ نقطوں  $(-3, -2)$ ,  $(2, -7)$ ,  $(-2, 5)$  سے بننے والی مثلث ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔

سوال 4: ثابت کریں کہ نقطے  $(7, 12)$ ,  $(-3, -12)$ ,  $(14, -5)$  ایک دائرے کا حصہ ہیں جس کا رداس  $(2, 0)$  ہے۔

سوال 5: درج ذیل نقطوں کو جوڑنے والے قطع لکیر کا وسطی نقطی معلوم کریں۔

$$ا. (2, 11), (6, 15) \quad ب. (p + 2, 3p - 1), (3p + 4, p - 5)$$

$$ب. (5, 7), (-3, 9) \quad د. (p + 3, q - 7), (p + 5, 3 - 1)$$

$$ج. (-2, -3), (1, 6) \quad ز. (p + 2q, 2p + 13q), (5p - 2q, -2p - 7q)$$

$$د. (-3, 4), (-8, 5) \quad ح. (a + 3, b - 5), (a + 3, b + 7)$$

سوال 6: نقطے  $A(-2, 1)$ ,  $(6, 5)$  ایک دائرے کے قطر کے دو انتہائی نقطے ہیں۔ قطر کے درمیانی نقطے کے محدود معلوم کریں۔

سوال 7: ایک نقطے  $A(3, 4)$  اور  $B$  کو جوڑنے والے قطع لکیر کا درمیانی نقطہ  $M(5, 7)$  ہے۔ نقطہ  $B$  کے محدود معلوم کریں

سوال 8: نقطے  $A(1, -2)$ ,  $B(6, -1)$ ,  $C(9, 3)$ ,  $D(4, 2)$  ایک متوازی الاضلاع شکل کے کونے ہیں۔ ثابت کریں کہ وتر  $AC$  اور  $BD$  ایک ہی نقطے پر ٹکراتے ہیں۔

سوال 9: درج ذیل محدود  $A(5, 2)$ ,  $B(6, -3)$ ,  $C(4, 7)$  میں سے ایک باقی دو کا وسطی نقطہ ہے اسے تلاش کریں۔ دو فاصلوں کو معلوم کر کے آپ اپنا جواب ثابت کر سکتے ہیں۔

سوال 10: درج ذیل نقاط کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔

$$(p+3, p-3), (2p+4, -p-5) \text{ ا. } (3, 8), (5, 12)$$

$$(p+3, q-5), (q-5, p+3) \text{ ب. } (1, -3), (-2, 6)$$

$$(p+q-1, q+p-3), (p-q+1, q-p+3) \text{ ج. } (-4, -3), (0, -1)$$

$$(7, p), (11, p) \text{ د. } (-5, -3), (3, -9)$$

سوال 11: کلیر دوں AB اور BC کا ڈھلاؤ معلوم کریں جبکہ  $A(3, 4), B(7, 6), C(-3, 1)$ ۔ ان تینوں نقطوں کے بارے میں اپنی رائے کا بھی اظہار کریں۔

سوال 12: نقطہ  $P(x, y)$  ایک سیدھی کلیر کا حصہ ہے جس کے انتہائی نقطے  $(5, 6)$ ،  $A(3, 0)$  ہیں۔ کلیر AP اور PB کے ڈھلاؤ کے لیے ریاضیاتی بیانیہ معلوم کریں۔ اور یہ مساوات  $y = 3x - 8$  بنا کے دکھائیں۔

سوال 13: ایک کلیر جو کہ مثلث کے ایک کونے کو مخالف طرف کے درمیان سے ملاتی ہے اسے اوسط کہتے ہیں۔ اسی اوسط AM کی لمبائی معلوم کریں جب مثلث کے کونے  $A(-1, 1), B(0, 3), C(4, 7)$  ہوں۔

سوال 14: ایک مثلث کے کونے  $A(-2, 1), B(3, -4), C(5, 7)$  ہیں۔

ا. کلیر AB کا وسطی نقطہ N اور کلیر AC کا وسطی نقطہ M معلوم کریں

ب. ثابت کریں کہ MN کے BC متوازی ہے

سوال 15: نقطے  $A(2, 1), B(2, 7), C(-4, -1)$  ایک مثلث بناتے ہیں۔

ا. کلیر دوں MN اور BC کی لمبائی معلوم کریں

ب. ثابت کریں کہ  $BC = 2MN$

سوال 16: ایک چوکور شکل ABCD کے کونے  $A(1, 1), B(7, 3), C(9, -7), D(-3, -3)$  ہیں۔ نقطے P ، Q ، R اور S بالترتیب BC ، AB ، CD اور DA کے وسطی نقطے ہیں۔

ا. شکل PQRS کی تمام اطراف کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔

ب. یہ چوکور شکل PQRS دراصل کیسی شکل ہے؟

سوال 17: مبدا O اور نقطے  $P(4, 1), Q(5, 5), R(1, 4)$  ایک چوکور شکل بناتے ہیں۔

- ا. ثابت کریں کہ  $OR$  اور  $PQ$  متوازی ہیں۔  
 ج. ثابت کریں کہ  $OP = OR$ ۔  
 ب. ثابت کریں کہ  $OP$  اور  $RQ$  متوازی ہیں۔  
 د. چھار طرفہ  $OPQR$  کی اصل شکل کیا ہے؟

سوال 18: مہدا  $O$  اور نقطے  $L(-2, 3)$ ,  $M(4, 7)$ ,  $N(6, 4)$  مل کے ایک چھار طرفہ بناتے ہیں۔

- ا. ثابت کریں  $ON = LM$ ۔  
 ج. ثابت کریں کہ  $OM = LN$ ۔  
 ب. ثابت کریں کہ  $ON$  اور  $LM$  متوازی ہیں۔  
 د. چھار طرفہ  $OLMN$  کس شکل کا ہے؟

سوال 19: ایک چھار طرفہ کے کونے  $P(1, 2)$ ,  $Q(7, 0)$ ,  $R(6, -4)$ ,  $S(-3, -1)$  ہیں

- ا. ایک چھار طرفہ کے چاروں طرف کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔  
 ب. ایک چھار طرفہ  $PQRS$  کی شکل کیا ہوگی؟

سوال 20: ایک چھار طرفہ کے کونے  $T(3, 2)$ ,  $U(2, 5)$ ,  $V(8, 7)$ ,  $W(6, 1)$  ہیں۔ کیروں  $UV$  اور  $VW$  کے وسطی نقطے بالترتیب  $M$  اور  $N$  ہیں۔ ثابت کریں کہ مثلث  $TMN$  ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔

سوال 21: ایک چھار طرفہ کے کونے  $D(3, -2)$ ,  $E(0, -3)$ ,  $F(-2, 3)$ ,  $G(4, 1)$  ہیں۔

- ا. چھار طرفہ کی تمام اطراف کی لمبائی معلوم کریں۔  
 ب. چھار طرفہ  $DEFG$  کس طرح کی شکل ہے؟

سوال 22: نقطے  $A(2, 1)$ ,  $B(6, 10)$ ,  $C(10, 1)$  ایک مساوی الساقین مثلث ہے اور اس میں  $AB$  اور  $BC$  کی لمبائی برابر ہے۔ نقطہ  $G$  کے محدود  $(6, 4)$  ہیں

- ا. کیر  $AC$  کے وسطی نقطے  $M$  کے محدود لکھیں۔  
 ج. کیر  $BC$  کے وسطی نقطے  $N$  کے محدود لکھیں۔

ب. ثابت کریں کہ  $BG = 2GM$  اور یہ کہ  $BGM$ ۔  
 د. ثابت کریں کہ  $AG = 2GN$  اور یہ کہ  $AGN$ ۔  
 ایک سیدھی کیر ہے۔  
 ایک سیدھی کیر ہے۔

## 1.4 ایک سیدھی لکیر یا خط کی مساوات سے کیا مراد ہے؟

اگر آپ کو فیصلہ کرنا ہو تو آپ یہ کیسے اندازہ لگائیں گے کہ نقطہ  $(3, 7)$  اور  $(1, 5)$  خم  $y = 3x^2 + 27$  پر موجود ہیں؟ اس کا جواب ہے آپ ان محدود کو مساوات میں ڈالیں اور دیکھیں کہ کیا مساوات درست ثابت ہوتی ہے؟ اگر ہم محدود  $(3, 7)$  کو مساوات میں ڈالتا چاہیں تو مساوات کی دائیں جانب  $29 = 2 + 3 \times 3^2$  جبکہ بائیں جانب 7 ہوگی، لہذا مساوات درست ثابت نہیں ہوتی اور یوں یہ بات ثابت ہوتی ہے کہ نقطہ  $(3, 7)$  بنائے گئے خم کا حصہ نہیں ہے۔ اگر محدود  $(1, 5)$  پر غور کیا جائے تو مساوات کے دونوں اطراف کا جواب 5 آئے گا اور یوں یہ مساوات درست ثابت ہوتی ہے اور یہ بھی ثابت ہوتا ہے کہ نقطہ  $(1, 5)$  خم کا حصہ ہے۔ ایک سیدھی لکیر یا خم کی مساوات دراصل ایک اصول ہے جو اس بات کا تعین کرتا ہے کہ دیے گئے محدود بتائی گئی لکیر یا خم کا حصہ ہوں گے یا نہیں۔ لکیر یا خم کی مساوات کو دیکھنے کا یہ نظریہ بہت اہمیت کا حامل ہے۔

## 1.5 لکیر کی مساوات

مثال 1.3: ایک لکیر جس کا ڈھلاؤ 2 ہے اور جو محدود  $(2, 1)$  سے گزرتی ہے ایسی لکیر کی مساوات تلاش کریں۔ شکل 1.9 میں ایک لکیر دکھائی گئی ہے جس کا ڈھلاؤ 2 ہے اور یہ محدود  $A(2, 1)$  سے بھی گزر رہی ہے۔ جبکہ ایک اور نقطہ  $P(x, y)$  بھی اس لکیر پر موجود ہے۔ نقطہ  $P$  اس لکیر پر موجود ہوگا صرف اور صرف اس صورت میں اگر لکیر  $AP$  کا ڈھلاؤ 2 ہوگا۔ لکیر  $AP$  کا ڈھلاؤ  $\frac{y-1}{x-2}$  ہے۔ یہ ترکیب چونکہ 2 کے برابر ہے  $\frac{y-1}{x-2} = 2$  جس کا نتیجہ یہ نکلتا ہے کہ  $y - 1 = 2x - 4$  اور  $y = 2x - 3$  عام طور پر لکیر کی مساوات معلوم کرتے ہیں جس کا ڈھلاؤ  $m$  ہو اور جو نقطہ  $A$  سے گزرتی ہو جبکہ  $A$  کے محدود  $(x_1, y_1)$  ہوں شکل 1.10 میں یہ لکیر اور ایک نقطہ  $P$  دکھائے گئے ہیں جس کے محدود  $(x, y)$  ہیں۔ لکیر  $AP$  کا ڈھلاؤ  $\frac{y-y_1}{x-x_1}$  ہے اور چونکہ ڈھلاؤ  $m$  کے برابر ہوتا ہے

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = m, \quad y - y_1 = m(x - x_1)$$

ایک لکیر جو  $(x_1, y_1)$  سے گزرے اور جس کا ڈھلاؤ  $m$  ہو اس کی مساوات  $y - y_1 = m(x - x_1)$  ہوگی۔ یہ بات ذہن نشین کر لیں کہ نقطہ  $A$  کے محدود  $(x_1, y_1)$  کی قیمت سے یہ مساوات درست ثابت ہوتی ہے۔

مثال 1.4: ایک لکیر کی مساوات معلوم کریں جس کا ڈھلاؤ -1 ہو جو نقطہ  $(-2, 3)$  سے گزرتی ہو۔ مساوات  $y - y_1 = m(x - x_1)$  کو استعمال کرتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ  $y - 3 = -1(x - (-2))$  جو کہ  $y - 3 = -x - 2$  یا  $y = -x + 1$  ہے۔ مساوات کی درستی کا تعین کرنے کے لیے محدود  $(-2, 3)$  کو مساوات کے دونوں اطراف استعمال کریں اگر مساوات کے دونوں اطراف کا جواب برابر ہے تو یہ نقطہ دراصل اسی لکیر پر ہوگا جس کی ہم نے مساوات معلوم کی ہے۔

مثال 1.5: ایک لکیر کی مساوات معلوم کریں جو کہ دو نقطوں کو جوڑنے سے بنی ہے، نقطوں کے محدود بالترتیب  $(3, 4)$  اور  $(-1, 2)$  ہیں۔ مساوات معلوم کرنے کے لیے، پہلے آپ اس لکیر کا ڈھلاؤ معلوم کریں اور پھر آپ کلیہ  $y - y_1 = m(x - x_1)$  کا استعمال کر سکتے ہیں۔ لکیر جو کہ نقطہ  $(3, 4)$  کو  $(-1, 2)$  سے جوڑتی ہے اس کا ڈھلاؤ ہوگا  $\frac{2-4}{-1-3} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$  لہذا نقطہ  $(3, 4)$  سے گزرنے والی لکیر جس کا ڈھلاؤ  $\frac{1}{2}$  ہے اس کی مساوات  $y - 4 = \frac{1}{2}(x - 3)$  ہوگی۔ اس مساوات کو سادہ شکل میں دیکھا جائے تو یہ کچھ ایسی

دیکھ گئے۔  $2y - 8 = x - 3$  یا  $2y = x + 5$ ۔ اس مساوات کی درستی کو دیکھنے کے لیے اس میں دیگر فرضی نقطوں کے محدود بھی ڈال کے دیکھیں۔ □

## 1.6 کلیئر کی مساوات کی پہچان

مثالوں 1.5.1 سے 1.5.3 تک سب کے جوابات مساوات  $y = mx + c$  کی صورت میں لکھے جاسکتے ہیں جبکہ  $m$  اور  $c$  اعداد ہیں۔ ایسی کسی بھی مساوات کو سیدھی کلیئر کی مساوات ثابت کرنا نہایت ہی آسان ہے۔ اگر  $y = mx + c$  تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ

$$\frac{y - c}{x - 0} \quad (x \neq 0)$$

یہ مساوات ہمیں بتاتی ہے کہ تمام نقطوں کے لیے کہ جنکے محدود  $(x, y)$  ہوں گے، وہ کلیئر جو نقطہ  $(0, c)$  کو جوڑے گی  $(x, y)$  سے، اسکا ڈھلاؤ  $m$  ہوگا۔ لب لباب یہ کہ  $(x, y)$  اس کلیئر کا حصہ ہوگا جسکا ڈھلاؤ  $m$  ہوگا اور جو نقطہ  $(0, c)$  سے گزرتی ہوگی۔ نقطہ  $(0, c)$  محور  $y$ -پر موجود ہے۔ اس ہندسے  $c$  کو قطع دانے کہیں گے۔ قطع ایکس معلوم کرنے کے لیے مساوات میں  $y = 0$  یہ ڈالیں، اور یوں آپکو ملے گا  $x = -\frac{c}{m}$ ، لیکن یہ بات ذہن نشین کر لیں کہ آپ یہ تقسیم نہیں کر سکتے اگر  $m = 0$  ہو۔ ایسی صورت حال میں یہ کلیئر محور  $x$ -کے متوازی ہو جاتی ہے اور اسکا کوئی قطع ایکس نہیں ہوتا۔ جب ایسی صورت حال ہو کہ ڈھلاؤ کی قیمت صفر ہو جائے تو ایسی کلیئر پر موجود تمام نقاط کے محدود  $(c, \text{کچھ بھی})$  کچھ ایسے ہوں گے۔ لہذا نقاط  $(0, 0), (5, 2), (-1, 2), (1, 2)$  سب ایک ہی سیدھی کلیئر پر موجود ہیں جو کہ  $(y = 2)$  ہے اور (شکل 1.11) میں دکھائی بھی گئی ہے۔ ایک خاص صورت اس میں یہ بھی ہے کہ محور  $x$ -کی مساوات  $y = 0$  ہے۔ ایسے ہی ایک سیدھی کلیئر جو کہ محور  $y$ -کے متوازی ہے، اسکی مساوات  $x = k$  ایسی ہوگی۔ اس کلیئر پر موجود تمام نقاط کے محدود  $k$  کچھ ایسے ہوں گے۔ لہذا یہ تمام نقاط  $(0, 0), (3, 4), (3, 2), (3, 0)$  ایک کلیئر پر موجود ہیں اور وہ کلیئر  $x = 3$  ہے اور (شکل 1.12) میں یہی کلیئر دکھائی گئی ہے۔ یہاں  $y$  محور کی اپنی مساوات  $x = 0$  ہے۔ کلیئر  $x = k$  کا کوئی ڈھلاؤ نہیں ہے، دراصل اسکا ڈھلاؤ متعین نہیں کیا جاسکتا۔ اور اسکی مساوات  $y = mx + c$  ایسے نہیں لکھی جاسکتی۔

## 1.7 مساوات $ax + by + c = 0$

فرض کریں کہ آپکے پاس ایک مساوات ہے  $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ ۔ یہ آسان ہے کہ اس مساوات کو 3 سے ضرب دیں اور یوں مساوات  $3y = 2x + 4$  سادہ ہو جائے گی۔ اور اسکی ترتیب تھوڑی بدلیں تو مساوات کچھ ایسا روپ دھار لے گی،  $2x - 3y + 4 = 0$ ۔ مساوات عام طور پر  $ax + by + c = 0$  ایسی ہوتی ہے جسمیں  $a, b$  اور  $c$  مستقل ہیں۔ اس بات کا خیال رکھیں کہ مساوات  $y = mx + c$  اور  $ax + by + c = 0$  دونوں میں عدد  $c$  موجود ہے لیکن اس کا مطلب دونوں مساوات میں مختلف ہے۔ مساوات  $y = mx + c$  میں  $c$  قطع دانے ہے لیکن مساوات  $ax + by + c = 0$  میں ایسا کوئی معاملہ نہیں ہے۔ مساوات  $ax + by + c = 0$  کا ڈھلاؤ معلوم کرنے کا ایک طریقہ یہ بھی ہے کہ مساوات کو  $\dots$  کی شکل میں لکھا جائے، آگے چل کے ہم اسکی کچھ مثالیں حل کریں گے۔

مثال 1.6: مساوات  $2x + 3y - 4 = 0$  کا ڈھلاؤ معلوم کریں، مساوات کو اس  $y = \dots$  شکل میں لکھیں اور پھر اس اصول کو استعمال کریں کہ مساوات  $y = mx + c$  میں  $m$  ڈھلاؤ کو ظاہر کرتا ہے۔ مساوات  $2x + 3y - 4 = 0$  میں آپ دیکھیں گے

کہ  $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$  اور  $3y = -2x + 4$  لہذا اس مساوات کا اگر اس مساوات  $y = mx + c$  سے تقابل کیا جائے تو ہم اس نتیجے پر پہنچیں گے کہ ڈھلاؤ  $-\frac{2}{3}$  ہے

□

مثال 1.7: متوازی الاضلاع کی ایک طرف ایک سیدھی لکیر  $3x - 4y - 7 = 0$  کے ساتھ موجود ہے، نقطہ  $(2, 3)$  متوازی الاضلاع کا ایک کونہ ہے، دوسری طرف کی مساوات معلوم کریں۔ لکیر  $3x - 4y - 7 = 0$  اور  $y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$  ایک ہی ہیں لہذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ ڈھلاؤ  $\frac{3}{4}$  ہے۔ لکیر جو کہ نقطہ  $(2, 3)$  سے گزر رہی ہے اور جس کا ڈھلاؤ  $\frac{3}{4}$  ہے، اسکی مساوات  $y - 3 = \frac{3}{4}(x - 2)$  یا  $3x - 4y + 6 = 0$  ہے

□

## 1.8 دو لکیروں کا مشترک نقطہ

فرض کریں کہ آپکے سامنے دو لکیریں ہیں جنکی مساوات  $2x - y = 4$  اور  $3x + 2y = -1$  ہیں، آپ ان دونوں لکیروں کے مشترک نقطے کے محدود کیسے معلوم کریں گے؟ دراصل آپ کو ایک نقطہ  $(x, y)$  کی تلاش ہے جو کہ دونوں لکیروں پر موجود ہو، لہذا اس نقطے کے محدود ایسے ہونے چاہئیں کہ دونوں مساوات درست ثابت ہوں، اسی لیے آپ کو ان دونوں مساوات کو ایک ساتھ حل کرنا ہوگا۔ ان دو مساوات سے، آپ معلوم کر سکیں گے کہ  $x = 1$  اور  $y = -2$ ، لہذا مشترک نقطہ  $(1, -2)$  ہے۔ یہ طریقہ ہر سیدھی لکیر پر لاگو ہو سکتا ہے بشرطیکہ یہ متوازی نہ ہوں، مشترک نقطہ معلوم کرنے کے لیے لکیروں کی مساوات حل کریں، یہ طریقہ نمودوں میں مشترک نقطے معلوم کرنے کے لیے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔ سوال 1: دیکھیں کہ کیا دیے گئے نقطے، بتائی گئی مساوات کی لکیر پر موجود ہیں یا نہیں؟

$$(1, 2), y = 5x - 3 \quad \text{ا.} \quad (5p, \frac{5}{p}, y = \frac{5}{x} \quad \text{د.}$$

$$(3, -2), y = 3x - 7 \quad \text{ب.}$$

$$(3, -4), x^2 + y^2 = 25 \quad \text{ج.} \quad (p, (p-a)^2 + 1), y = x^2 - 2x + 2 \quad \text{ز.}$$

$$(2, 2), 3x^2 + y^2 = 40 \quad \text{د.}$$

$$(1, 1\frac{1}{2}), y = \frac{x+2}{3x-1} \quad \text{ح.} \quad (t^2, 2t), y^2 = 4x \quad \text{چ.}$$

سوال 2: بتائے گئے نقطوں سے بنی اور درج ذیل ڈھلاؤ والی سیدھی لکیر کی مساوات معلوم کریں۔ آپکے جواب کسر کی صورت میں نہیں ہونا چاہئے۔

$$(2, 3), 5 \quad \text{ا.} \quad (-2, 1), -\frac{3}{8} \quad \text{د.} \quad (-5, -1), -\frac{3}{4} \quad \text{ز.} \quad (3, 4), -\frac{1}{2} \quad \text{ی.}$$

$$(1, 2), -3 \quad \text{ب.} \quad (0, 0), -3 \quad \text{ہ.} \quad (-3, 0), \frac{1}{2} \quad \text{ج.} \quad (2, -1), -2 \quad \text{یا.}$$

$$(0, 4), \frac{1}{2} \quad \text{ج.} \quad (3, 8), 0 \quad \text{د.} \quad (-3, -1), \frac{3}{8} \quad \text{ط.} \quad (-2, -5), 3 \quad \text{یب.}$$

$$\text{ج. } (0, -4), 7 \quad \text{یہ. } (3, -2), -\frac{5}{8} \quad \text{ز. } (d, 0), 7 \quad \text{بط. } (0, c), 3$$

$$\text{بط. } (0, 2), -1 \quad \text{ز. } (3, 0), -\frac{3}{5} \quad \text{ج. } (0, 4), m \quad \text{ک. } (c, 0)$$

سوال 3: درج ذیل نقاط کو جوڑ کر بننے والی لکیروں کی مساوات معلوم کریں۔ آپکے جواب میں کسر موجود نا ہوں اور آپکا جواب  $y = mx + c$  یا  $ax + by + c = 0$  کی صورت میں ہونا چاہیئے۔

$$\begin{array}{lll} \text{ا. } (1, 4), (3, 10) & \text{ج. } (2, 0), (5, -1) & \text{یہ. } (0, 0), (5, -3) \\ \text{ب. } (4, 5), (-2, -7) & \text{ط. } (-4, 2), (-1, -3) & \text{ی. } (0, 0), (p, q) \\ \text{ج. } (3, 2), (0, 4) & \text{ی. } (-2, -1), (5, -3) & \text{ز. } (p, q), (p+3, q-1) \\ \text{د. } (3, 7), (3, 12) & \text{یا. } (-3, 4), (-3, 9) & \text{ج. } (p, -q), (p, q) \\ \text{ه. } (10, -3), (-5, -12) & \text{یب. } (-1, 0), (0, -1) & \text{بط. } (p, q), (p+2, q+2) \\ \text{و. } (3, -1), (3, -4), 20 & \text{ج. } (2, 7), (3, 10) & \text{ز. } (2, -3), (11, -3) \\ \text{ز. } (p, 0), (0, q), k & \text{ید. } (-5, 4), (-2, -1) & \end{array}$$

سوال 4: درج ذیل لکیروں کا ڈھلاؤ معلوم کریں؛

$$\begin{array}{lll} \text{ا. } 2x + y = 7 & \text{د. } y = 5 & \text{ز. } x + y = -3 \quad \text{ی. } 3(y - 4) = 7x \\ \text{ب. } 3x - 4y = 8 & \text{ه. } 3x - 2y = -4 & \text{ج. } y = 3(x + 4) \quad \text{یا. } y = m(x - d) \\ \text{ج. } 5x + 2y = -3 & \text{و. } 5x = 7 & \text{ط. } 7 - x = 2y \quad \text{یب. } px + qy = pq \end{array}$$

سوال 5: ایک لکیر، جو کہ نقطہ  $(-2, 1)$  سے گزرتی ہے اور  $y = \frac{1}{2}x - 3$  کے متوازی ہے، کی مساوات معلوم کریں۔

سوال 6: ایک لکیر کی مساوات معلوم کریں جو کہ  $(4, -3)$  سے گزرتی ہے اور ایک دوسری لکیر  $y + 2x = 7$  کے مساوی ہے۔

سوال 7: ایک لکیر جو کہ نقطہ  $(1, 2)$  سے گزر رہی ہے، یہ لکیر ایک دوسری لکیر کے متوازی ہے جو کہ نقطہ  $(3, -1)$  اور  $(-5, 2)$  سے مل کر بنی ہے۔



سوال 8: ایک لکیر کی مساوات معلوم کریں جو کہ نقطہ  $(3, 9)$  سے گزر رہی ہے اور مساوی ہے ایک لکیر کے جو نقطہ  $(-3, 2)$  اور  $(2, -3)$  سے مل کر بنی ہے۔

سوال 9: لکیر کی مساوات معلوم کریں جو کہ  $(1, 7)$  سے گزرتی ہے اور  $x$ -محور کے متوازی ہے

سوال 10: ایک لکیر کی مساوات معلوم کریں جو کہ  $(d, 0)$  سے گزرتی ہے اور ایک دوسری لکیر  $y = mx + c$  کے متوازی ہے۔

سوال 11: درج ذیل سیدھی لکیریوں کی مساوات معلوم کریں۔

$$2x + 3y = 7, 6x + 9y = 11 \quad \text{ن.}$$

$$3x + 4y = 33, 2y = x - 2 \quad \text{ا.}$$

$$3x + y = 5, x + 3y = -1 \quad \text{ج.}$$

$$y = 3x + 1, y = 4x - 1 \quad \text{ب.}$$

$$y = 2x + 3, 4x - 2y = -6 \quad \text{ط.}$$

$$2y = 7x, 3x - 2y = 1 \quad \text{ج.}$$

$$ax + by = c, y = 2ax \quad \text{ی.}$$

$$y = 3x + 8, y = -2x - 7 \quad \text{د.}$$

$$y = mx + c, y = -mx + d \quad \text{یا.}$$

$$x + 5y = 22, 3x + 2y = 14 \quad \text{ھ.}$$

$$ax - by = 1, y = x \quad \text{یب.}$$

$$2x + 7y = 47, 5x + 4y = 50 \quad \text{و.}$$

سوال 12: فرض کریں کہ  $p$  جبکہ محدود  $(p, q)$  ہیں اور یہ خم  $y = mx + c$  کا ایک مستقل نقطہ ہے اور ایسے ہی ایک نقطہ  $Q$  ہے جسکے محدود  $(r, s)$  ہیں اور یہ بھی مساوات  $y = mx + c$  کے خم کا ایک مستقل نقطہ ہے۔ یہ بات ثابت شدہ ہے کہ نقطوں  $p$  اور  $Q$  کے محدود سے مساوات  $y = mx + c$  درست ٹھہرتی ہے، ثابت کریں کہ خط  $PQ$  کا ڈھلاؤ  $m$  ہوگا نقطہ  $Q$  کی تمام حالتوں کے لیے۔

سوال 13: نقاط  $a, b, c$  کی چند ایک قیمتوں کے لیے مساوات  $ax + by + c = 0$  ایک سیدھی لکیر کی نہیں رہتی۔ ایسی چند قیمتیں معلوم کریں۔

## 1.9 عمودی لکیروں کا ڈھلاؤ

(حصہ 1.3) میں یہ بتایا گیا ہے کہ دو لکیریں متوازی ہوتی ہیں اگر ان کے ڈھلاؤ برابر ہوں۔ لیکن اگر دو لکیریں عمودی ہوں تو ان کے ڈھلاؤ کیسے ہوں گے۔ اگر ایک لکیر جس کا ڈھلاؤ مثبت ہو تو عمودی لکیر کا ڈھلاؤ منفی ہوگا، اور اس کا الٹ بھی درست ہوگا، لیکن آپ سے زیادہ بہتر اندازہ لگا سکتے ہیں (شکل 1.3) میں یہ دکھایا گیا ہے کہ خط  $PB$  کا ڈھلاؤ  $m$  ہو تو ایک ڈھلاؤ مثلث  $PAB$  بنائی جاسکتی ہے جسمیں  $PA$  کی لمبائی ایک اکائی ہے اور خط  $AB$  کی لمبائی  $m$  اکائیاں ہے۔ (شکل 1.14) میں ڈھلاؤ مثلث  $PAB$  کو گھمایا گیا ہے ایک قائمہ زاویہ سے اور اب مثلث  $P'A'B'$  ہے کچھ یوں کہ خط  $P'B'$  عمودی ہے خط  $PB$  پر۔ اس مثلث کا محدود  $x$   $-m$  ہے جبکہ محدود  $x$   $1$  ہے، اور یوں؛

$$PB' \text{ ڈھلاؤ} = \frac{y \text{ قدم}}{x \text{ قدم}} = \frac{1}{-m} = -\frac{1}{m}$$

اور اسی لیے خط  $PB$  کے عمودی لکیر کا ڈھلاؤ  $-\frac{1}{m}$  ہے۔ اور پس اگر دو عمودی لکیروں کا ڈھلاؤ بالترتیب  $m_1$  اور  $m_2$  ہو اور پھر  $m_1 m_2 = -1$  بھی ہو تو یہ سچ ہے کہ دونوں لکیروں کے ڈھلاؤ بالترتیب  $m_1$  اور  $m_2$  ہوں گے اور اگر  $m_1 m_2 = -1$  بھی ہو تو یہ دونوں لکیریں عمودی ہیں۔ اس بات کے ثبوت کے لیے آخر میں موجود مشق کا سوال 22 دیکھیں۔ دو لکیریں جن کا ڈھلاؤ بالترتیب  $m_1$  اور  $m_2$  ہو، یہ دونوں لکیریں عمودی ہوں گی اگر

$$m_1 m_2 = -1, \quad m_1 = -\frac{1}{m_2}, \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

یہ بات ذہن نشین کر لیں کہ یہ خصوصیت بے کار ہوگی اگر لکیریں محور کے متوازی ہوں گی۔ لیکن آپ آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ ایک لکیر مستقل  $x =$  ایک دوسری لکیر مستقل  $y =$  کے عمودی ہی ہوگی۔

مثال 1.8: ثابت کریں کہ نقاط  $(5, 0)$ ,  $(4, 7)$ ,  $(-1, 2)$ ,  $(0, 5)$  مجموعی طور پر ایک رومبس بناتے ہیں۔ آپ اس مسئلے کو کئی طریقوں سے حل کر سکتے ہیں، اس حل میں ہم نے ثابت کیا کہ یہ نقاط ایک متوازی الاضلاع چکل بنا رہے ہیں اور یہ کہ اس کے وتر عمودی ہیں تو یہ ایک رومبس کہلائے گی۔ وتر کے درمیانی نقاط  $\left(\frac{1}{2}(0+4), \frac{1}{2}(-5+7)\right)$  اور  $(2, 1)$  ہیں اور چونکہ یہ دونوں ایک ہی نقطہ ہیں اور بتائی گئی شکل ایک متوازی الاضلاع شکل ہے۔ اب اگر ڈھلاؤ کو دیکھا جائے تو  $\frac{12}{4} = 3$  اور  $\frac{7-(-5)}{4-0} = \frac{12}{4} = 3$  اور  $\frac{0-2}{5-(-1)} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$  ہے اسی لیے وتر عمودی ہیں اور یوں ثابت ہوا کہ یہ نقاط مل کر ایک رومبس کو جنم دیتے ہیں۔ □

مثال 1.9: عمودی لکیر کی بنیاد کے محدود معلوم کریں جبکہ  $A(-2, -4)$  جڑا ہوا ہے نقاط  $B(0, 2)$  اور  $C(-1, 4)$  کے ساتھ۔ لکیر کی مدد سے۔ سب سے پہلے ایک شکل بنائیں جیسے کہ (شکل 1.15) ہے اس پر پیمانے کی ضرورت نہیں ہے۔ عمودی لکیر کی بنیاد دراصل وہ مشترک نقطہ  $P$  ہے جہ کہ لکیر  $BC$  پر موجود ہے اور ساتھ ہی ساتھ  $A$  سے گزرنی والی عمودی لکیر  $BC$  پر بھی موجود ہے۔ سب سے پہلے خط  $BC$  کا ڈھلاؤ اور اس کی مساوات معلوم کریں۔ □

خط  $BC$  کا ڈھلاؤ  $-\frac{2}{1} = -2$  ہے۔ خط  $BC$  کی مساوات  $y - 2 = -2(x - 0)$  ہے جو کہ سادہ ہو کر  $2x + y = 2$  ایسی صورت اختیار کر لے گی۔ لکیر جو کہ  $A$  سے گزرتی ہے اور خط  $BC$  کے عمودی ہے اس کا ڈھلاؤ  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  ہے۔

ہے۔ اس لکیر کی مساوات

$$y - (-4) = \frac{1}{2}(x - (-2)), \quad x - 2y = 6$$

یا  $x - 2y = 6$  ہے۔ یہ لکیریں نقطہ  $P$  پر ملتی ہیں جن کے محدد مساوات  $2x + y = 2$  اور  $x - 2y = 6$  کو درست ثابت کرتے ہیں۔ اس نقطے کے محدد  $(2, -2)$  ہیں سوال 1: ہر حصے میں خط کا ڈھلاؤ معلوم کریں جو کہ ایک دوسری لکیر کے عمودی ہے جس کا ڈھلاؤ دیا گیا ہے۔

ا. 2	ج. $\frac{3}{4}$	د. -1	ه. $-\frac{1}{m}$	ط. $\frac{p}{q}$	یا. $-m$
ب. -3	د. $-\frac{5}{6}$	و. $1\frac{3}{4}$	ج. $m$	ی. 0	یب. $\frac{a}{b-c}$

سوال 2: ہر حصے میں خط کی مساوات معلوم کریں جو کہ بتائی گئی لکیریوں کے عمودی ہیں۔ آپکا جواب کسر کی صورت میں نہیں ہونا چاہیئے۔

ا. $(2, 3), y = 4x + 3$	ه. $(-1, 4), 2x + 3y = 8$	ط. $(0, 0), y = mx + c$
ب. $(-3, -1), y = 1\frac{1}{2}x + 3$	د. $(4, 3), 3x - 5y = 8$	ی. $(a, b), y = mx + c$
ج. $(2, -5), y = -5x - 2$	ز. $(5, -3), 2x = 3$	یا. $(c, d), ny - x = p$
د. $(7, -4), y = 2\frac{1}{2}$	ج. $(0, 3), y = 2x - 1$	یب. $(-1, -2), ax + by = c$

سوال 3: ایک خط کی مساوات معلوم کریں جو کہ نقطہ  $(-2, 5)$  سے گزرتی ہے اور لکیر  $y = 3x + 1$  کے عمودی ہے، ان دونوں لکیریوں کا مشترک نقطہ بھی معلوم کریں۔

سوال 4: ایک خط کی مساوات معلوم کریں جو کہ نقطہ  $(1, 1)$  سے گزرتی ہے اور یہ خط  $2x - 3y = 12$  کے عمودی ہے، ان دونوں لکیریوں کا مشترک نقطہ بھی معلوم کریں۔

سوال 5: ایک لکیر جو مثلث کے ایک کونے سے گزرے اور مخالف سمت کے عمودی ہو، اس لکیر کو اونچائی کا نام دیتے ہیں۔ اس لکیر کی مساوات معلوم کریں جو کہ مثلث  $ABC$  کے کونے  $A$  سے گزرتی ہے نقاط کے محدد بالترتیب  $A(2, 3), B(1, -7), C(4, -1)$  ہوں گے۔

سوال 6: نقاط  $P(2, 5), Q(12, 5), R(8, -7)$  مل کے ایک مثلث بناتے ہیں

ا. اونچائی کی مساوات تلاش کریں جو کہ نقطہ  $R$  اور پھر نقطہ  $Q$  ثابت کریں کہ نقطہ  $P$  سے گزرنے والی اونچائی اس مشترک سے گزرے۔

ب. ان دونوں اونچائیوں کا مشترک نقطہ معلوم کریں

سوال 7: ثابت کریں کہ نقاط  $(5, 9)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(-2, 5)$  سے بننے والی ایک مثلث قائمہ زاویہ مثلث ہے۔

سوال 8: لکھیں  $2x + y = 3$  اور  $3x + 5y - 1 = 0$  کا مشترک نقطہ معلوم کریں

سوال 9: نقاط  $A(-1, 3)$ ,  $B(5, 7)$ ,  $C(0, 8)$  کو ملانے سے ایک مثلث بنتی ہے۔

1. ثابت کریں کہ زاویہ  $ACB$  ایک قائمہ زاویہ ہے۔

2. اس نقطے کے محدود معلوم کریں جہاں  $B$  سے آنے والی خط  $AC$  کے متوازی لکیر محور  $x$  کا بنتی ہے۔

سوال 10: ایک مربع شکل ہے جسکے دو کونے  $A(7, 2)$ ,  $C(1, 4)$  ہیں

ا. وتر  $BD$  کی لمبائی معلوم کریں ب. نقاط  $B$  اور  $D$  کے محدود معلوم کریں

سوال 11: نقاط  $A(-3, 2)$ ,  $B(4, 3)$ ,  $C(9, -2)$ ,  $D(2, -3)$  کو ملانے سے ایک چوکور شکل بنتی ہے۔

ا. ثابت کریں کہ چاروں سمتوں کی لمبائی برابر ہے۔ ب. ثابت کریں کہ شکل  $ABCD$  ایک مربع نہیں ہے۔

سوال 12:  $P$  ایک نقطہ ہے جبکہ  $I_1$  ایک لکیر ہے جسکی مساوات  $3x + 4y = 16$  ہے۔

ا. ایک لکیر  $I_2$  کی مساوات معلوم کریں جو کہ نقطہ  $P$  سے گزرتی ہے۔ ب. دونوں لکیروں کا مشترک نقطہ معلوم کریں ہے اور لکیر  $I_1$  کے عمودی ہو۔

ج. نقطے  $P$  سے خط  $I_1$  کا عمودی فاصلہ معلوم کریں

سوال 13: ثابت کریں کہ مثلث جس کے کونے  $(11, 8)$ ,  $(3, 20)$ ,  $(-2, 8)$  ہیں ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔ اسکا حدود اربعہ معلوم کریں

سوال 14: تین سیدھی لکیریں  $4x + y = 60$ ,  $7y = 2x$ ,  $y = x$  ایک مثلث بناتی ہیں۔ اسکے کونوں کے محدود معلوم کریں۔

سوال 15: ایک لکیر کی مساوات معلوم کریں جو کہ نقطہ  $(1, 3)$  سے گزرتی ہے اور یہ لکیر متوازی ہے ایک دوسری لکیر کے جس کی مساوات  $2x + 7y = 5$  ہے۔ یاد رکھیں اُپکا جواب کچھ اس  $ax + by = c$  صورت میں ہونا چاہیئے۔

سوال 16: نقاط  $(-4, 3)$ ,  $(2, -5)$  کو ملانے سے بننے والی لکیر کی عمودی دوڑک کی مساوات معلوم کریں۔

سوال 17: نقاط جن کے محدود  $A(1, 2)$ ,  $B(3, 5)$ ,  $C(6, 6)$  ہیں اور نقطہ  $D$  مل کر ایک متوازی الاضلاع شکل بناتے ہیں۔ خط  $AC$  کے درمیانی نقطے کے محدود معلوم کریں، اور اس جواب کو استعمال کرتے ہوئے نقطہ  $D$  کے محدود معلوم کریں۔

سوال 18: ایک خط  $y = 3x$  پر ایک نقطہ  $A(0, 3)$  سے ایک عمودی لکیر پر نقطہ  $P$  عمودی خط کا بنیادی خط ہے۔

- ا. خط  $AP$  کی مساوات معلوم کریں۔  
 ج. نقطہ  $A$  کا خط  $y = 3x$  سے عمودی فاصلہ معلوم کریں۔  
 ب. نقطہ  $P$  کے محدود معلوم کریں

سوال 19: وہ نقاط جو ایک ہی لکیر پر موجود ہوں انہیں ہم پلہ نقاط کہتے ہیں، ثابت کریں کہ نقاط  $(-1, 3)$ ,  $(4, 7)$ ,  $(-11, -5)$  ہم پلہ ہیں۔

سوال 20: سیدھی لکیر کی مساوات معلوم کریں کہ نقطہ  $(-2, 2)$ ,  $(3, -1)$  سے گزرتی ہے، اور اپنا جواب  $ax + by + c = 0$  کی صورت میں لکھیں۔ محور  $x$  اور اس لکیر کا مشترک نقطہ معلوم کریں۔

سوال 21: نقاط  $A$  اور  $B$  کے محدود بالترتیب  $(3, 2)$  اور  $(4, -5)$  ہیں، خط  $AB$  کے درمیانی نقطے کے محدود معلوم کریں نیز خط  $AB$  کا ڈھلاؤ بھی معلوم کریں۔ اور خط  $AB$  کے عمودی دوزی کی مساوات بھی معلوم کریں، آپکا جواب  $ax + by + c = 0$  کی صورت میں ہونا چاہیئے جس میں  $a$ ,  $b$  اور  $c$  اعداد صحیح ہیں۔

- سوال 22: خم  $y = 1 + \frac{1}{2+x}$  محور  $x$  کو نقطہ  $A$  پہنچتا ہے جبکہ محور  $y$  کو نقطہ  $B$  پہنچتا ہے۔  
 ا. نقاط  $A$  اور  $B$  کے محدود معلوم کریں  
 ج. خط  $AB$  اور مساوات  $3y = 4x$  کی لکیر کا مشترک نقطہ معلوم کریں۔  
 ب. خط  $AB$  کی مساوات معلوم کریں

سوال 23: ایک سیدھی لکیر  $P$  ایک نقطے  $(10, 1)$  سے گزرتی ہے اور یہ لکیر عمودی ہے ایک دوسری لکیر  $r$  کے جسکی مساوات  $2x + y = 1$  ہے۔ آپ لکیر  $P$  کی مساوات معلوم کریں۔ دونوں لکیروں کا مشترک نقطہ بھی معلوم کریں جبکہ نقطے  $(10, 1)$  کا لکیر  $r$  سے عمودی فاصلہ بھی معلوم کریں۔

- سوال 24: حساب کتاب سے ثابت کریں کہ نقاط  $P(0, 7)$ ,  $Q(6, 5)$ ,  $R(5, 2)$ ,  $S(-1, 4)$  ایک مستطیل بناتے ہیں  
 سوال 25: لکیر  $3x - 4y = 8$  محور  $x$  کو نقطہ  $A$  پہنچتا ہے، نقطہ  $C$  کے محدود  $(-2, 9)$  ہیں، نقطہ  $C$  سے گزرنے والی لکیر ایک دوسری لکیر  $3x - 4y = 8$  پر عمودی ہے۔ مثلث  $ABC$  کا حدود اربعہ معلوم کریں۔  
 سوال 26: نقاط  $A(-3, -4)$ ,  $C(5, 4)$  ایک رومبس  $ABCD$  کے وتر کے انتہائی نقطہ ہیں  
 ا. وتر  $BD$  کی لمبائی معلوم کریں  
 ب. اگر یہ مان لیا جائے کہ خط  $BC$  کا ڈھلاؤ  $\frac{5}{3}$  ہے تو آپ نقاط  $B$  اور  $D$  کے محدود معلوم کریں

سوال 27: وسطانیہ کی مساوات معلوم کریں اگر مثلث کے کونے  $(4, 4)$ ,  $(6, 0)$ ,  $(0, 2)$  ہیں یہ بھی ثابت کریں کہ تمام وسطانیہ ایک ہی نقطے سے گزرتے ہیں۔

سوال 28: دو لکیروں کی مساوات بالترتیب  $y = m_1x + c_1$  اور  $y = m_2x + c_2$  ہیں جبکہ  $m_1m_2 = -1$  ثابت کریں کہ لکیریں عمودی ہیں۔



## باب 2

### غیر ناطق جذر اور طاقتیں

اس باب کا پہلا حصہ مربع اور مکعب جذر والی تراکیب کے بارے میں اور دوسرا حصہ طاقتی بیانیوں کے بارے میں ہے۔ اس کو مکمل کرنے کے بعد آپ کو اس قابل ہو جانا چاہیے کہ۔

- مربع، مکعب اور دیگر جذروں والی تراکیب کو سادہ بنا سکیں
- طاقت کے قوانین جانتے ہوں
- منفی، صفر، اور کسری طاقتوں کا مطلب جانتے ہوں
- طاقت کی حامل تراکیب کو سادہ کر سکیں

### 2.1 اعداد کی اقسام

آغاز میں اعداد فقط گنتی کے لیے استعمال ہوتے تھے اور 1, 2, 3, ... ہماری اس ضرورت کے لیے کافی تھے۔ یہ طبعی اعداد یا مثبت صحیح عدد کہلاتے ہیں۔

آہستہ آہستہ ہمیں معلوم ہوا کہ اعداد پیمائش اور تجارتی مقاصد کے لیے بھی ضروری ہیں، اور اس کے لیے ہمیں کسروں کی ضرورت بھی پڑنے لگی۔ صحیح عدد اور کسروں کو ملا کر منطقی اعداد بنائے گئے۔ یہ وہ اعداد ہیں کہ جنہیں  $\frac{p}{q}$  کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔ جب کہ  $p$  اور  $q$  دونوں صحیح اعداد ہیں اور  $q$  صفر نہیں ہو گا۔ یونانی ریاضی دانوں کی بے شمار شاندار دریافتوں میں سے ایک دریافت یہ بھی تھی کہ ایسے اعداد موجود ہیں جنہیں اس ہیئت میں نہیں لکھا جاسکتا۔ ایسے اعداد کو غیر منطقی اعداد کہا جاتا ہے۔ پہلا ایسا عدد جو دریافت کیا گیا  $\sqrt{2}$  تھا، جو فیثاغورس کے قانون کے مطابق

ایک ایسے مربع کے وتر کی لمبائی بنتی ہے جس کی ہر طرف کی لمبائی 1 ہو۔ یونانیوں نے جس دلیل سے ثابت کیا کہ  $\sqrt{2}$  کو کسری صورت میں نہیں لکھا جاسکتا، اسی دلیل سے یہ بھی ثابت کیا جاسکتا ہے کہ کوئی بھی جزر، مربع، مکعب یا کوئی بھی، یا تو صحیح عدد ہوگی یا غیر منطقی عدد۔ اب ہم بہت سے غیر منطقی اعداد جان چکے ہیں جن میں سب سے مشہور  $\pi$  ہے۔

منطقی اور غیر منطقی اعداد مل کر حقیقی اعداد بناتے ہیں۔ اعداد صحیح، منطقی، غیر منطقی اور حقیقی اعداد مثبت، منفی یا صفر ہو سکتے ہیں۔

جب کسی منطقی عدد کو اعشاریہ کی صورت میں لکھا جائے تو یا تو اعشاریہ کے ایک درجے تک رک جاتے ہیں یا ہندسوں کی ایک مخصوص وضع یا ترتیب میں بار بار دہرایا جانے لگتا ہے۔ مثال کے طور پر۔

$$\frac{7}{10} = 0.7, \quad \frac{7}{11} = 0.6363 \dots, \quad \frac{7}{12} = 0.5833 \dots, \quad \frac{7}{13} = 0.53846153846153 \dots$$

$$\frac{7}{14} = 0.5, \quad \frac{7}{15} = 0.466 \dots, \quad \frac{7}{16} = 0.4375, \quad \frac{7}{17} = 0.411764705882352941176 \dots$$

اس کا معکوس بھی درست ہے، یعنی اگر ایک اعشاری عدد رک جائے یا محدود بار دہرایا جائے تو وہ منطقی عدد کہلائے گا۔ لہذا اگر ایک غیر منطقی عدد کو اعشاری صورت میں لکھا جائے تو آپ جتنا مرضی پھیلا لیں، اس کے ہندسوں کی ترتیب کبھی دہرائی نہیں جائے گی۔

## 2.2 نامعقولیے اور ان کی خصوصیات

آج سے پہلے جب ہم  $\sqrt{2}$ ،  $\sqrt{8}$  یا ایسی کسی ترکیب کو دیکھتے تھے تو ہم کیلکولیٹر کی مدد سے اسے اعشاری صورت میں بدل کر لکھ لیا کرتے تھے۔ مثلاً کچھ اس طرح

$\sqrt{2} = 1.414 \dots$  یا  $\sqrt{2} = 1.414$  تین اعشاری ہندسوں تک درست یا  $\sqrt{2} \approx 1.414$  لیکن  $\sqrt{2} = 1.414$  خود یہ ترکیب کیوں درست نہیں ہے؟  $\sqrt[3]{9}\sqrt{2}$  ایسی ترکیب کو نامعقولیہ کہا جاتا ہے۔ اس جزو میں ہم انہی نامعقولیوں سے حساب کرنا سیکھیں گے۔ آپ کو یاد رکھنا ہو گا کہ  $\sqrt{x}$  ہمیشہ  $x$  کی مثبت مربع جذر (یا  $x = 0$  ہونے کی صورت میں صفر) کے معنوں میں لکھا جاتا ہے۔ نامعقولیوں کی اہم خاصیتیں، جو ہم بار بار استعمال کریں گے، یہ ہیں:

$$(\sqrt{x} \times \sqrt{y}) \times (\sqrt{x} \times \sqrt{y}) = (\sqrt{x} \times \sqrt{y})^2 = x \times y = \sqrt{x \times y}$$

$$\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

درج ذیل مثالیں ان خصوصیات کو سمجھنے میں مدد دے سکتی ہیں۔



$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}; \quad \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3};$$

$$\sqrt{18} \times \sqrt{2} = \sqrt{18 \times 2} = \sqrt{36} = 6; \quad \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3.$$

اس حساب کو اپنے کیلکولیٹر سے دوبارہ کر کے دیکھنا شاید آپ کے یقین میں اضافے کا باعث ہو۔

مثال 2.1: سادہ کریں (i)  $\sqrt{28} + \sqrt{63}$  (ب)  $\sqrt{5} \times \sqrt{10}$  ان کا حل متبادل طریقے سے بھی نکالا جاسکتا ہے، جیسے جزوب کے لیے نکالا گیا ہے۔ (i)

$$\sqrt{28} + \sqrt{63} = (\sqrt{4} \times \sqrt{7}) + (\sqrt{9} \times \sqrt{7}) = 2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = 5\sqrt{7}$$

(ب) پہلا طریقہ:  $\sqrt{5} \times \sqrt{10} = \sqrt{5 \times 10} = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$  دوسرا طریقہ:  $\sqrt{5} \times (\sqrt{5} \times \sqrt{2}) = (\sqrt{5} \times \sqrt{5}) \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$  بعض اوقات کسر کے نسب نما سے نامعقولیوں کو ہٹا دینا مفید ہوتا ہے جیسے  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  کے نسب نما سے نامعقولیہ ہٹانے کے لیے ہم اوپر نیچے دونوں کو  $\sqrt{2}$  سے ضرب دے سکتے ہیں۔  $\frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  □

کچھ نتائج جو اکثر ہماری مدد کریں گے۔  $\sqrt{x} = \frac{x}{\sqrt{x}}$  اور اسی کا بالعکس  $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$  غیر معقول کو نسب نما سے ہٹا دینا نسب نما کو معقول بنانا کہلاتا ہے۔

مثال 2.2: درج ذیل ترکیب میں نسب نما کو معقول بنائیں۔

$$\frac{6}{\sqrt{2}} \quad (i)$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{10}} \quad (ب)$$

$$\text{حل: } \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{3 \times 2}{\sqrt{2}} = 3 \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \quad (i)$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{3 \times \sqrt{2}}{\sqrt{5} \times \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \quad (ب)$$

□ مربع جذر کے لیے استعمال ہونے والے قوانین ہی کعب جذر اور اس سے بالائی جذروں کے لیے استعمال ہوتے ہیں۔

مثال 2.3: شکل 2.1 میں ایک عمارت کی چھت کا قطع عمودی کو ایک قائم مثلث ABC کی صورت میں دکھایا گیا ہے۔ جس میں  $AB = 15m$  ہے۔ چھت کی بلندی BD 10m ہے۔ x اور y معلوم کریں۔ ہم مثلث ABD سے شروع کرتے ہیں۔ فیثا غورس کے قانون کے مطابق ہم جانتے ہیں کہ  $z^2 + 10^2 = 15^2$  لہذا  $z^2 = 225 - 100 = 125$  ہو گا۔

$$z = \sqrt{125} = \sqrt{25 \times 5} = 5\sqrt{5}$$

توجہ کیجیے کہ مثلث ABC اور ABD مماثل ہیں۔ اس مماثلت کو بہتر طور پر سمجھنے کے لیے ہم شکل 2.2 میں ABD کو الٹا کر دکھاتے ہیں۔ اب ABC اور ABD دونوں مثلثوں کی طرفیں ایک ہی تناسب میں ہوں گی۔ لہذا  $\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{15}{z}$

$$x = 15 \times \frac{3\sqrt{5}}{5} = 9\sqrt{5} \quad \frac{15}{z} = \frac{15}{5\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$y = 10 \times \frac{3\sqrt{5}}{5} = 6\sqrt{5}$$

آپ فیثاغورس کے قانون سے مثلث ABC میں  $x^2 = 15^2 + y^2$  کی تصدیق کر سکتے ہیں۔ □

سوال 1: کیکیولیٹر استعمال کیے بغیر ان تراکیب کو سادہ کریں۔

$$\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5} \quad .13$$

$$5\sqrt{3} \times \sqrt{3} \quad .7$$

$$\sqrt{3} \times \sqrt{3} \quad .1$$

$$2\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} \quad .8$$

$$\sqrt{10} \times \sqrt{10} \quad .2$$

$$(2\sqrt[4]{3})^4 \quad .14$$

$$3\sqrt{6} \times 4\sqrt{6} \quad .9$$

$$\sqrt{16} \times \sqrt{10} \quad .3$$

$$(2\sqrt[3]{2})^6 \quad .15$$

$$2\sqrt{20} \times 3\sqrt{5} \quad .10$$

$$\sqrt{8} \times \sqrt{2} \quad .4$$

$$(2\sqrt{7})^2 \quad .11$$

$$\sqrt{32} \times \sqrt{2} \quad .5$$

$$4\sqrt{125} \times 4\sqrt{5} \quad .16$$

$$(3\sqrt{3})^2 \quad .12$$

$$\sqrt{3} \times \sqrt{12} \quad .6$$

سوال 2: درج ذیل تراکیب کو کیکیولیٹر استعمال کیے بغیر سادہ کریں۔

$$\sqrt{54} \quad .9$$

$$\sqrt{40} \quad .5$$

$$\sqrt{18} \quad .1$$

$$\sqrt{72} \quad .10$$

$$\sqrt{45} \quad .6$$

$$\sqrt{20} \quad .2$$

$$\sqrt{175} \quad .11$$

$$\sqrt{48} \quad .7$$

$$\sqrt{24} \quad .3$$

$$\sqrt{675} \quad .12$$

$$\sqrt{50} \quad .8$$

$$\sqrt{32} \quad .4$$

سوال 3: درج ذیل تراکیب کو کیکیولیٹر استعمال کیے بغیر سادہ کریں۔

1.  $\sqrt{8} + \sqrt{18}$  7.  $\sqrt{99} + \sqrt{44} + \sqrt{11}$
2.  $\sqrt{3} + \sqrt{12}$  8.  $8\sqrt{2} + 2\sqrt{8}$
3.  $\sqrt{20} - \sqrt{5}$  9.  $2\sqrt{20} + 3\sqrt{45}$
4.  $\sqrt{32} - \sqrt{8}$  10.  $\sqrt{52} - \sqrt{13}$
5.  $\sqrt{50} - \sqrt{18} - \sqrt{8}$  11.  $20\sqrt{5} - 5\sqrt{20}$
6.  $\sqrt{27} + \sqrt{27}$  12.  $\sqrt{48} + \sqrt{24} - \sqrt{75} + \sqrt{96}$

سوال 4: درج ذیل تراکیب کو سیکولیٹر استعمال کیے بغیر سادہ کریں۔

- ا.  $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$  ج.  $\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}}$  ہ.  $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$  ز.  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{48}}$
- ب.  $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$  د.  $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$  و.  $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}$  ح.  $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{200}}$

سوال 5: درج ذیل تراکیب کو سیکولیٹر استعمال کیے بغیر سادہ کریں

- ا.  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  ہ.  $\frac{11}{\sqrt{11}}$  ط.  $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$  یب.  $\frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$  یہ.  $\frac{9\sqrt{12}}{2\sqrt{18}}$
- ب.  $\frac{1}{\sqrt{5}}$  و.  $\frac{2}{\sqrt{8}}$  ی.  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$  ج.  $\frac{7\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$
- ج.  $\frac{4}{\sqrt{2}}$  ز.  $\frac{12}{\sqrt{3}}$  یا.  $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$  ید.  $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$  یو.  $\frac{2\sqrt{18}}{9\sqrt{12}}$
- د.  $\frac{6}{\sqrt{6}}$  ح.  $\frac{14}{\sqrt{7}}$

سوال 6: درج ذیل تراکیب سادہ بنائیں اور ہر ایک کا جواب  $k\sqrt{3}$  کی شکل میں لکھیں۔

$$ا. \sqrt{75} + \sqrt{12} \quad ه. \sqrt{2} \times \sqrt{8} \times \sqrt{27}$$

$$ب. \sqrt{6} + \sqrt{3}(4 - 2\sqrt{3}) \quad د. (3 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) - \sqrt{3} \times \sqrt{27}$$

$$ج. \frac{12}{\sqrt{3}} - \sqrt{27} \quad ز. AB = 4\sqrt{5}cm$$

$$ح. \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \quad ح. BC = \sqrt{10}$$

سوال 7:  $ABCD$  ایک چوکور ہے، جس میں  $AB = 4\sqrt{5}cm$  اور  $BC = \sqrt{10}$ ۔ درج ذیل سوال کا جواب سادہ غیر معقول جذر کی شکل میں لکھیں۔ (i) چوکور کا رقبہ معلوم کریں (ب) وتر  $AC$  کی لمبائی معلوم کریں

سوال 8: درج ذیل تراکیب سادہ بنائیں اور ہر ایک کا جواب  $k\sqrt{2}$  کی شکل میں لکھیں۔

$$1. x\sqrt{2} = 10 \quad 3. z\sqrt{32} - 16 = z\sqrt{8} - 4$$

$$2. 2y\sqrt{2} - 3 = \frac{5y}{\sqrt{2}} + 1$$

سوال 9: درج ذیل تراکیب کو  $k\sqrt[3]{3}$  کی شکل میں لکھیں۔

$$1. \sqrt[3]{24} \quad 3. (\sqrt[3]{3})^4$$

$$2. \sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{3} \quad 4. \sqrt[3]{3000} - \sqrt[3]{375}$$

سوال 10: درج ذیل قائم مثلثوں کی تیسری نامعلوم طرف معلوم کریں۔ اپنے جواب کو سادہ غیر معقول کی شکل میں لکھیں

سوال 11: آپ کو بتایا جائے کہ اعشاریے کے بارہ ہندسوں تک لکھیے، مثلاً  $\sqrt{26} = 5.099\ 019\ 513\ 593$

1.  $\sqrt{104}$  کی ایسی قیمت معلوم کریں جو دس اعشاری ہندوس تک درست ہو۔

2.  $\sqrt{650}$  کی ایسی قیمت معلوم کریں جو دس اعشاری ہندوسوں تک درست ہو۔

3.  $\frac{13}{\sqrt{26}}$  کی ایسی قیمت معلوم کریں جو دس اعشاری ہندوس تک درست ہو۔

سوال 12: دی گئی ایک وقت مساواتوں کو حل کریں،  $9\sqrt{5}y = 7x - (3\sqrt{5})y$  اور  $(2\sqrt{5})x + y = 34$

سوال 13: درج ذیل کو سادہ بنائیں

$$\begin{aligned} \text{ا. } (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) & \quad \text{د. } (2\sqrt{2} + 1)(2\sqrt{2} - 1) \quad \text{ن. } (4\sqrt{7} - 5)(4\sqrt{7} + 5) \\ \text{ب. } (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) & \quad \text{ھ. } (4\sqrt{3} - 2)(4\sqrt{3} + 2) \\ \text{ج. } (\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3}) & \quad \text{و. } (10 + \sqrt{5})(10 - \sqrt{5}) \quad \text{ز. } \frac{(2\sqrt{6} - 3\sqrt{3})(2\sqrt{6} + 3\sqrt{3})}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

سوال 14: سوال نمبر 13 میں ہر جواب ایک عدد صحیح، نقل کر کے درج ذیل کو مکمل کریں

$$\begin{aligned} \text{ا. } (\sqrt{3} - 1)(\quad) &= 2 \quad \text{د. } (2\sqrt{7} + \sqrt{3})(\quad) = 25 \\ \text{ب. } (\sqrt{5} + 1)(\quad) &= 4 \quad \text{ھ. } (\sqrt{11} + \sqrt{10})(\quad) = 1 \\ \text{ج. } (\sqrt{6} - \sqrt{2})(\quad) &= 4 \quad \text{و. } (3\sqrt{5} - 2\sqrt{6})(\quad) = 21 \end{aligned}$$

سوال نمبر 15 اور 16 میں دی گئی مثالیں ہمیں نسب نما کو منطقی بنانے کے طریقے کی طرف متوجہ کرتی ہیں، جو سوال نمبر 5 کی ترکیبوں سے زیادہ پیچیدہ ہوں۔ سوال 15: (i) وضاحت کریں  $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \times \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$  اور ثابت کریں  $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$

$$\text{(ب) ثابت کریں } \frac{1}{2\sqrt{3}+3} = \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5}$$

سوال 16: نسب نما کو معقول بنا کر درج ذیل کسروں کو سادہ کریں

$$\text{ج. } \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{6}+3\sqrt{2}}$$

$$\text{ب. } \frac{1}{3\sqrt{5}-5}$$

$$\text{ا. } \frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

## 2.3 طاقتوں کا استعمال

سولہویں صدی میں جب ریاضی کی کتب چھپنے لگیں، تو ریاضی دان مکعب اور مربع مساواتوں کا حل ڈھونڈ رہے تھے۔ انھیں لگا کہ  $xxx$  اور  $xxxx$  کو  $x^3$  اور  $x^4$  لکھنا زیادہ آسان اور مفید رہے گا۔

طاقت نویسی کا آغاز تو اس انداز میں ہوا تھا لیکن وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ اندازہ ہوا کہ یہ صرف مختصر نویسی ہی کا ایک انداز نہیں تھا، بلکہ اس انداز سے لکھنا مستقبل میں اہم دریافتوں کا باعث بنا اور ریاضی کی موجودہ شکل اس انداز کے بغیر مبہم اور ناقابلِ استفہام ہوتی۔ آپ نے اس انداز بیان کی سادہ مثالیں تو استعمال کی ہی ہوں گی۔ عام طور پہ علامت  $a^m$ ،  $a$  کو  $m$  بار ضرب دینے کے لیے لکھی جاتی ہے، اس کو یوں سمجھا جاسکتا ہے۔

$$a^m = \overbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}^{\text{ان کی تعداد } m \text{ ہے}}$$

اس میں  $a$  کو اساس کہا جاتا ہے اور  $m$  کو طاقت کہا جاتا ہے۔ یہاں توجہ دلانا ضروری ہے کہ  $a$  کسی بھی قسم کا عدد ہو سکتا ہے لیکن  $m$  لازمی طور پر مثبت عدد صحیح ہی ہو گا۔ اسکو عام طور پہ  $a$  کی طاقت  $m$  کہا جاتا ہے۔ طاقتی بیانیوں میں لکھی جانے والی تراکیب کو درج ذیل سادہ قوانین سے آسان بنایا جاسکتا ہے۔ ان میں سے ایک ضرب کا قانون ہے۔

$$a^m \times a^n = \overbrace{a \times a \times \dots \times a}^{m \text{ تعداد}} \times \overbrace{a \times a \times \dots \times a}^{n \text{ تعداد}} = \overbrace{a \times a \times \dots \times a}^{m+n \text{ تعداد}} = a^{m+n}$$

یہ بہت سی جگہوں پہ استعمال ہوتا ہے، مثلاً ایسے مکعب کا حجم معلوم کرنے کے لیے جس کی ہر طرف کی لمبائی  $a$  ہو۔ ہم جانتے ہیں کہ اساس کے رقبے کو بلندی سے ضرب دے کر حجم دریافت کیا جاتا ہے۔  $a^3 = a^{2+1} = a^2 \times a = a^2 \times a$

اس سے ملتا جلتا تقسیم کا قانون

$$\begin{aligned} a^m \div a^n &= \overbrace{(a \times a \times \dots \times a)}^{m \text{ تعداد}} \div \overbrace{(a \times a \times \dots \times a)}^{n \text{ تعداد}} \\ &= \overbrace{a \times a \times \dots \times a}^{m-n \text{ تعداد}} \\ &= a^{m-n} \end{aligned}$$

اسی طرح طاقت پہ طاقت کا قانون ہے

$$\begin{aligned}
 (a^m)^n &= \overbrace{a \times a \times \dots \times a}^{m \text{ تعداد}} \times \overbrace{a \times a \times \dots \times a}^{m \text{ تعداد}} \times \dots \times \overbrace{a \times a \times \dots \times a}^{m \text{ تعداد}} \\
 &= \overbrace{a \times a \times \dots \times a}^{m \times n \text{ تعداد}} = a^{m \times n}
 \end{aligned}$$

ایک اور قانون جو جز کا قانون ہے کہ جس میں دو اساسیں اور ایک طاقت ہوتی ہے۔

$$\begin{aligned}
 (a \times b)^m &= \overbrace{(a \times b) \times (a \times b) \times \dots \times (a \times b)}^{m \text{ تعداد}} \\
 &= \overbrace{a \times a \times \dots \times a}^{m \text{ تعداد}} \times \overbrace{b \times b \times \dots \times b}^{m \text{ تعداد}} \\
 &= a^m \times b^m
 \end{aligned}$$

ان قوانین کو بیان کرنے کے لیے ضرب کی علامت استعمال کی گئی ہے، لیکن الجبرا کے دیگر حصوں میں اگر غلطی کی گنجائش نہ ہو تو یہ ہٹا دی جاتی ہے۔ اسے مکمل کرنے کے لیے یہاں یہ قوانین دوبارہ دیے جا رہے ہیں۔ ضرب کا قانون  $a^m \times a^n = a^{m+n}$  تقسیم کا قانون  $a^m \div a^n = a^m - n$  طاقت پہ طاقت کا قانون  $(a^m)^n = a^{m \times n}$  جز کا قانون  $(a \times b)^m = a^m \times b^m$

مثال 2.4: دی گئی ترکیب کو سادہ بنائیں۔  $(2a^2b)^3 \div (4a^4b)$

حل:

$$\begin{aligned}
 (2a^2b)^3 \div (4a^4b) &= (2^3(a^2)^3b^3) \div (4a^4b) \\
 &= (8a^{2 \times 3}b^3) \div (4a^4b) \\
 &= (8 \div 4) \times (a^6 \div a^4) \times (b^3 \div b^1) \\
 &= 2a^{6-4}b^{3-1} \\
 &= 2a^2b^2
 \end{aligned}$$

□

## 2.4 صفر اور منفی طاقت

پچھلے حصے میں ہم نے ترکیب  $a^m$  کی تعریف بیان کی جس میں ہم  $m$  مرتبہ ضرب دیتے ہیں، لیکن اگر  $m$  صفر یا منفی ہو تو یہ تعریف اپنے معنی کھودیتی ہے۔ ہم کسی بھی چیز کو  $-3$  یا صفر مرتبہ ضرب نہیں دے سکتے۔ لیکن  $a^m$  کے معنی کو وسعت دے کر دیکھا جائے تو صفر یا منفی طاقت کی صورت میں بھی نہ صرف یہ کہ یہ معنی درست ہے بلکہ مفید بھی ہے۔ اس کے ساتھ اہم بات یہ کہ مثبت طاقت کے تمام قوانین منفی اور صفر طاقتوں کے لیے بھی درست ہیں۔ اس تسلسل پہ غور کریں۔

دائیں سمت پہ اساس ہمیشہ 2 ہے جب کہ طاقت ہر مرتبہ ایک کم ہوتی جا رہی ہے۔ جبکہ بائیں طرف عدد آدھے ہوتے جا رہے ہیں۔ لہذا اس تسلسل کو یوں بڑھایا جاسکتا ہے۔

اور ہم اس طرح لا محدود حد تک جاسکتے ہیں۔ اب ان کا آپس میں موازنہ کریں

یوں لگتا ہے جیسے  $2^m$  کو  $\frac{1}{2^m}$  لکھنا چاہیے، اور صفر کی طاقت کے لیے ایک خصوصی قیت  $1 = 2^0$  رکھنی چاہیے۔ ہم اپنے پہلے مشاہدے کو صفر کے علاوہ تمام اساسوں اور کسی بھی مثبت عدد صحیح  $m$  کے لیے پھیلائیں تو منفی طاقت کے قوانین تک پہنچ سکتے ہیں۔

منفی طاقت کا قانون

ہم یہاں کچھ مثالوں سے ثابت کریں گے کہ مثبت طاقتوں کے لیے بنائے گئے قوانین منفی طاقتوں کے لیے بھی درست ہیں۔ اسی طرح آپ اپنے لیے بہت سی اور مثالیں بھی بنا سکتے ہیں۔

ضرب کا قانون:

طاقت پہ طاقت کا قانون:

جز کا قانون:

مثال 2.5: اگر  $a = 5$  ہے تو کی قیت معلوم کریں۔ یہاں اہم نکتہ یہ ہے کہ طاقت  $-2$  صرف  $a$  کے ساتھ ہے، یعنی  $4$  پہ نہیں ہے۔ لہذا  $4a^{-2}$  کا مطلب ہے  $4 \times \frac{1}{25} = 4a^{-2}$ ، اب جب کہ  $a = 5$  ہے،  $4 \times \frac{1}{25} = 4a^{-2}$  □

مثال 2.6: ان تراکیب کو سادہ کریں

$$(b) 4a^2b \times (i)$$

(i) پہلا طریقہ ہر چیز کو مثبت طاقت میں لے آئیں

دوسرا طریقہ مثبت اور منفی دونوں طاقتوں کے لیے قوانین استعمال کر لیں۔



(ب) زیر نظر مثال میں میکینکس کا ایک استعمال دیکھیے۔ لزوجیت، (M,L,T) کی پیمائش کے لیے ماس، لمبائی اور وقت کی جہتیں ہیں۔ بریکس کو الگ الگ کر کے

منفی طاقتوں کو بہت چھوٹے اعداد لکھنے کے لیے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ یقیناً آپ بہت بڑے اعداد کو معیاری شکل یا سائنسی بیانیے میں لکھنا جانتے ہوں گے، مثلاً روشنی کی رفتار کو 300 000 000 میٹر فی سیکنڈ لکھنے کی بجائے  $3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$  لکھا جاتا ہے۔ بالکل اسی طرح سرخ روشنی کا طول موج جو تقریباً 0.000 000 75 میٹر ہے، کو بھی آسانی سے  $7.5 \times 10^{-7} \text{ m}$  لکھا جاسکتا ہے۔ کمپیوٹر اور سیکولیز میں لوگوں کے لیے سائنسی اعتبار سے لکھنے کا امکان موجود ہوتا ہے اور اگر کوئی عدد عام عدد سے زیادہ بڑا یا زیادہ چھوٹا ہو جائے تو وہ اسے معیاری شکل میں بدل دیتا ہے۔ مثلاً یا - علامت (E) ایکسپونینٹ کے لیے استعمال ہوتی ہے جو طاقت ہی کے لیے استعمال ہونے والا دوسرا لفظ ہے □

مثال 2.7: اس ترکیب  $G = \frac{gR^2}{M}$  سے کشش ثقل کے مستقل  $G$  کا حساب لگائیں، جبکہ  $g \approx 9.81$ ،  $R \approx 6.37 \times 10^6$  اور  $M \approx 5.97 \times 10^{24}$ ۔  $M$  اور  $R$  زمین کا رداس اور ماس ہے، اور  $g$  کشش ثقل کے سبب پیدا ہونے والا اسراع ہے۔

$$G \approx \frac{9.81 \times (6.37 \times 10^6)^2}{5.97 \times 10^{24}} = \frac{9.81 \times (6.37)^2}{5.97} \times \frac{(10^6)^2}{10^{24}}$$

$$\approx 66.7 \times \frac{10^{12}}{10^{24}} = 6.67 \times 10^1 \times 10^{-12} = 6.67 \times 10^{-11} = 6.67 \times 10^{-11}$$

□

سوال 1: درج ذیل تراکیب کو سادہ کریں

یا $(4x^2y)^2 \times (2xy^3)^3$	و $(x^3y^2)^2$	ا $a^2 \times a^3 \times a^7$
ب $(6ac^3)^2 \div (9a^2c^5)$	ز $5g^5 \times 3g^3$	ب $(b^4)^2$
ج $(3m^4n^2)^3 \times (2mn^2)^2$	ح $12h^{12} \div 4h^4$	ج $c^7 \div c^3$
د $(49r^3s^2)^2 \div (7rs)^3$	ط $(2a^2)^3 \times (3a)^2$	د $d^5 \times d^4$
یہ $(2xy^2z^3)^2 \div (2xy^2z^3)$	ی $(p^2q^3)^2 \times (pq^3)^3$	ه $(e^5)^4$

سوال 2: درج ذیل تراکیب کو سادہ کریں، ہر جواب  $2^n$  کی ہیئت میں لکھیں۔

$$\frac{2^7 \times 2^8}{2^{13}} \text{ ہ۔}$$

$$2^{11} \times (2^5)^3 \text{ ا۔}$$

$$\frac{2^2 \times 2^3}{(2^2)^2} \text{ و۔}$$

$$(2^3)^2 \times (2^2)^3 \text{ ب۔}$$

$$4^2 \div 2^4 \text{ ز۔}$$

$$4^3 \text{ ج۔}$$

$$2 \times 4^4 \div 8^3 \text{ ح۔}$$

$$8^2 \text{ د۔}$$

سوال 3: درج ذیل تراکیب کو صحیح عدد یا کسر کی صورت میں لکھیں

$$6^{-3} \text{ یا۔}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \text{ ج۔}$$

$$10^{-4} \text{ ہ۔}$$

$$2^{-3} \text{ ا۔}$$

$$\left(2\frac{1}{2}\right)^{-1} \text{ ط۔}$$

$$1^{-7} \text{ و۔}$$

$$4^{-2} \text{ ب۔}$$

$$5^{-1} \text{ ج۔}$$

$$\left(1\frac{1}{3}\right)^{-3} \text{ یب۔}$$

$$2^{-7} \text{ ی۔}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \text{ ز۔}$$

$$3^{-2} \text{ د۔}$$

سوال 4:  $x = 2$  کے ساتھ درج ذیل میں سے ہر ایک کی قیمت معلوم کریں

$$(4 \div x)^{-3} \text{ ہ۔}$$

$$\frac{1}{4}x^{-3} \text{ ج۔}$$

$$4x^{-3} \text{ ا۔}$$

$$(x \div 4)^{-3} \text{ و۔}$$

$$\left(\frac{1}{4}x\right)^{-3} \text{ د۔}$$

$$(4x)^{-3} \text{ ب۔}$$

سوال 5:  $y = 5$  کے ساتھ درج ذیل میں سے ہر ایک کی قیمت معلوم کریں

$$\frac{1}{(2y)^{-1}} \text{ ہ۔}$$

$$\left(\frac{1}{2}y\right)^{-1} \text{ ج۔}$$

$$(2y)^{-1} \text{ ا۔}$$

$$\frac{2}{(y^{-1})^{-1}} \text{ و۔}$$

$$\frac{1}{2}y^{-1} \text{ د۔}$$

$$2y^{-1} \text{ ب۔}$$

سوال 6: درج ذیل تراکیب کو ممکنہ سادہ ترین شکل میں لکھیں

$$\begin{array}{lll}
\text{ا. } a^4 \times a^{-3} & \text{ز. } 12g^3 \times (2g^2)^{-2} & \text{ج. } (4m^2)^{-1} \times 8m^3 \\
\text{ب. } \frac{1}{b^{-1}} & \text{ح. } (3h^2)^{-2} & \text{ی. } (3n^{-2})^4 \times (9n)^{-1} \\
\text{ج. } (c^{-2})^3 & \text{ط. } (3i^{-2})^{-2} & \text{یہ. } (2xy^2)^{-1} \times (4xy)^2 \\
\text{د. } d^{-1} \times 2d & \text{ی. } \left(\frac{1}{2}j^{-2}\right)^{-3} & \text{ی. } (5a^3c^{-1})^2 \div (2a^{-1}c^2) \\
\text{ه. } e^{-4} \times e^{-5} & \text{یا. } (2x^3y^{-1})^3 & \text{یز. } (2q^{-2})^{-2} \div \left(\frac{4}{q}\right)^2 \\
\text{و. } \frac{f^{-2}}{f^3} & \text{یب. } (p^2q^4r^3)^{-4} & \text{ج. } (3x^{-2}y)^2 \div (4xy)^{-2}
\end{array}$$

سوال 7: درج ذیل تراکیب کو حل کریں

$$\begin{array}{lll}
\text{ا. } 3^x = \frac{1}{9} & \text{ج. } 2^z \times 2^{z-3} = 32 & \text{ه. } 4^y \times 2^y = 8^{120} \\
\text{ب. } 5^y = 1 & \text{د. } 7^{3x} \div 7^{x-2} = \frac{1}{49} & \text{و. } 3^t \times 9^{t \div 3} = 27^2
\end{array}$$

سوال 8: ایک مکعب کی ہر طرف کی لمبائی  $3 \times 10^{-2}$  میٹر ہے۔ (ا) مکعب کا حجم معلوم کریں (ب) مکعب کا کل سطحی رقبہ معلوم کریں

سوال 9: ایک کھلاڑی  $7.5 \times 10^{-3}$  گھنٹے میں  $2 \times 10^{-1}$  km کلومیٹر کا فاصلہ طے کرتا ہے۔ اس کی اوسط رفتار کلومیٹر فی گھنٹہ معلوم کریں۔

سوال 10: ایک  $L$  لمبائی رکھنے والی تار کا حجم  $V m^3$  یوں بیان کیا گیا ہے۔ جبکہ اس کے عمودی تراش کا رداس  $r$  ہے۔ (ا) 80 میٹر لمبائی اور  $2 \times 10^{-3} m$  عمودی تراش کے رداس کی تار کا حجم معلوم کریں۔

(ب) ایک اور تار جس کی عمودی تراش کا رداس  $5 \times 10^{-3} m^3$  اور حجم  $8 \times 10^{-3} m^3$  ہے، کی لمبائی معلوم کریں۔

(ج) ایک تار جس کی لمبائی 60m اور حجم  $6 \times 10^{-3} m^3$  ہے۔ اس کی عمودی تراش کا رداس معلوم کریں۔

سوال 11: ایک مساوات جو موج کو سمجھتے ہوئے سامنے آتی ہے یہ ہے۔  $y = \frac{\lambda d}{a}$

(ا)  $y$  معلوم کریں، جبکہ  $\lambda = 7 \times 10^{-7}$ ،  $d = 5 \times 10^{-1}$  اور  $a = 8 \times 10^{-4}$  ہے۔

(ب)  $\lambda$  معلوم کریں، جبکہ  $y = 10^{-3}$ ،  $d = 0.6$  اور  $a = 2.7 \times 10^{-4}$  ہے۔

سوال 12: حل کریں

$$\frac{3^{5x+2}}{9^{1-x}} = \frac{27^{4+3x}}{729}$$

## 2.5 کسری طاقتیں

گزشتہ حصے میں آپ دیکھ چکے ہیں کہ طاقت کے قوانین صحیح اعداد  $m$  اور  $n$  کی مثبت اور منفی دونوں طاقتوں کے لیے ٹھیک کام کرتے ہیں۔ لیکن اگر  $m$  اور  $n$  اعداد صحیح ہی نہ ہوں تو کیا ہو گا۔ اگر ہم طاقت پہ طاقت کے قانون میں  $m = \frac{1}{2}$  اور  $n = 2$  مانیں تو ہم اس نتیجے پہ پہنچیں گے

$$(x^{\frac{1}{2}})^2 = x^{\frac{1}{2} \times 2} = x^1 = x$$

$x^{\frac{1}{2}} = y$  سمجھئے سے یہ مساوات  $y^2 = x$  بن جائے گی۔ لہذا  $y = \sqrt{x}$  یا  $y = -\sqrt{x}$  جس سے  $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$  یا  $x^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{x}$ ۔  
 $x^{\frac{1}{2}}$  کو  $x$  کی مثبت جذر ماننے سے ہمیں  $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$  ملے گا۔ اسی طرح اگر ہم  $m = \frac{1}{3}$  اور  $n = 3$  رکھیں تو ہم ظاہر کر سکتے ہیں کہ  $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$  اس سے زیادہ وسیع طریقے سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ  $m = \frac{1}{n}$ ، ہم دیکھیں گے  $x^{\frac{1}{n} \times n} = x^1 = x$  جو ہمیں ایک بڑا نتیجہ دے گا جو کہ

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

توجہ کیجیے کہ  $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$  کی صورت میں لازمی طور پہ  $x \leq 0$  ہو گا، لیکن  $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$  کی صورت میں لازمی طور پہ  $x \leq 0$  کی ضرورت نہیں ہو گی، کیونکہ ہم کسی منفی نمبر کا مکعب جذر تو بہر حال لے سکتے ہیں۔  $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$  کو ذرا سا بڑھا کر دیکھیں تو ہم دیکھ سکتے ہیں کہ  $x^{\frac{2}{3}}$  کی قسم کی تراکیب کو کیسے حل کرنا ہے۔ اس کے دو متبادل ہو سکتے ہیں۔

$$x^{\frac{2}{3}} = x^{2 \times \frac{1}{3}} = (x^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x^2} \text{ اور } x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{3} \times 2} = (\sqrt[3]{x})^2$$

(اگر  $x$  کی قطعی مکعب جذر ہو تو اس کے لیے پہلی شکل بہتر ہے، ورنہ دوسری قسم بہتر ہے) عمومی طور پہ یہی منطق ہمیں کسری طاقتوں کے اصولوں تک لے جاتی ہے۔

جذری طاقت کا قانون

$$x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$$

جذری طاقتوں کو  $x^{1/2}$ ،  $x^{m/n}$  بھی لکھا جاسکتا ہے اور اسی طرح مزید بھی۔

$$\text{مثال 2.8: سادہ کریں۔ (ا) } 9^{\frac{1}{2}}, \text{ (ب) } 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}}, \text{ (ج) } 16^{-\frac{3}{4}}$$

$$\text{حل: (ا) } 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{(ب) } 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = 3^2 = 9$$

$$\text{(ج) پہلا طریقہ } 16^{-\frac{3}{4}} = (2^4)^{-\frac{3}{4}} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

□

$$16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{(\sqrt[4]{16})^3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

طاقت کے معنی حل کرنے کے لیے بہت سے متبادل طریقے بھی موجود ہیں اور آپ کو ان کا بھی تجربہ کرنا چاہیے۔ بہت سے لوگ مثبت طاقت میں سوچنا آسان سمجھتے ہیں لہذا وہ منفی طاقت کو مثبت بنا کر آسانی سے حل کر سکتے ہیں، اگر آپ بھی ایسے ہی ہیں تو آپ پہلا مرحلہ  $16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{3}{4}}}$  یوں لکھ سکتے ہیں، بالکل جیسے ہم نے دوسرے طریقے میں دیکھا۔

$$\text{مثال 2.9: سادہ کریں (i) } (2\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}, \text{ (ب) } 2x^{\frac{1}{2}} \times 3x^{-\frac{5}{2}}, \text{ (ج) } \frac{(2x^2y^2)^{-\frac{1}{2}}}{(2xy^{-2})^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{حل: (i) } (2\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}} = (\frac{9}{4})^{-\frac{1}{2}} = (\frac{4}{9})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{(ب) } 2x^{\frac{1}{2}} \times 3x^{-\frac{5}{2}} = 6x^{\frac{1}{2}-\frac{5}{2}} = 6x^{-2} = \frac{6}{x^2}$$

$$\text{(ج) پہلا طریقہ } (2x^2y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(2x^2y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{(2x^2y^2)^{-\frac{1}{2}}}{(2xy^{-2})^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}y^{-3}} = \frac{1}{2^2x^2y^{-2}} = \frac{y^2}{4x^2}$$

$$\text{دوسرا طریقہ } (2xy^{-2})^{\frac{3}{2}} \text{ سے تقسیم کرنا ایسا ہی ہے جیسا } (2xy^{-2})^{-\frac{3}{2}} \text{ سے ضرب دینا۔}$$

$$\frac{(2x^2y^2)^{-\frac{1}{2}}}{(2xy^{-2})^{\frac{3}{2}}} = (2x^2y^2)^{-\frac{1}{2}}(2xy^{-2})^{-\frac{3}{2}} = (2^{-\frac{1}{2}}x^{-1}y^{-1})(2^{-\frac{3}{2}}x^{-\frac{3}{2}}y^3) = 2^{-2}x^{\frac{5}{2}}y^2$$

جز ج میں ایک نکتہ قابل توجہ ہے اور وہ یہ کہ دونوں طریقوں سے جواب مختلف آ رہا ہے، اور ہم سمجھ سکتے ہیں کہ مساوات کا سادہ ہونا ہر ایک کے مزاج کے مطابق مختلف ہو سکتا ہے۔

□

سوال 1:

کیکولیٹر کی مدد کے بغیر درج ذیل تراکیب کا مساوی لکھیں

باب 2. غیر مناطق جذر اور طاقستیں

ا. $25^{\frac{1}{2}}$	د. $32^{\frac{1}{5}}$	ز. $16^{-\frac{1}{4}}$	ی. $(-27)^{\frac{1}{3}}$
ب. $8^{\frac{1}{3}}$	ھ. $81^{\frac{1}{4}}$	ح. $49^{-\frac{1}{2}}$	یا. $64^{\frac{2}{3}}$
ج. $36^{\frac{1}{2}}$	و. $9^{-\frac{1}{2}}$	ط. $1000^{-\frac{1}{3}}$	یب. $(-125)^{-\frac{4}{3}}$

سوال 2:

کیلکولیٹر کی مدد کے بغیر درج ذیل ترکیب کا مساوی لکھیں

ا. $4^{\frac{1}{2}}$	ج. $(\frac{1}{4})^{-2}$	ھ. $(\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}$	ز. $4^2$
ب. $(\frac{1}{2})^2$	د. $4^{-\frac{1}{2}}$	و. $(\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$	ح. $((\frac{1}{4})^{\frac{1}{4}})^2$

سوال 3:

کیلکولیٹر کی مدد کے بغیر درج ذیل ترکیب کا مساوی لکھیں

ا. $8^{\frac{2}{3}}$	د. $27^{\frac{4}{3}}$	ز. $4^{2\frac{1}{2}}$	ی. $(3\frac{3}{8})^{\frac{2}{3}}$
ب. $4^{\frac{3}{2}}$	ھ. $32^{\frac{2}{5}}$	ح. $10\,000^{-\frac{3}{4}}$	
ج. $9^{-\frac{3}{2}}$	و. $64^{-\frac{5}{6}}$	ط. $(\frac{1}{125})^{-\frac{4}{3}}$	یا. $(2\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}$

سوال 4: درج ذیل مساواتوں کو سادہ بنائیں

$$\begin{array}{ll}
 \text{ا. } a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{5}{3}} & \text{ب. } 3b^{\frac{1}{2}} \times 4b^{-\frac{3}{2}} \\
 \text{ج. } (4m^3n)^{\frac{1}{4}} \times (8mn^3)^{\frac{1}{2}} & \text{د. } (2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}})^6 \times (\frac{1}{2}x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}})^4 \\
 \text{ه. } (24e)^{\frac{1}{3}} \div (3e)^{\frac{1}{3}} & \text{و. } (6c^{\frac{1}{4}}) \times (4c)^{\frac{1}{2}} \\
 \text{ز. } \frac{(5p^2q^4)^{\frac{1}{3}}}{(25pq^2)^{-\frac{1}{3}}} & \text{ح. } (d^2)^{\frac{1}{3}} \div (d^{\frac{1}{3}})^2 \\
 \text{ط. } \frac{(2x^2y^{-1})^{-\frac{1}{4}}}{(8x^{-1}y^2)^{-\frac{1}{2}}} &
 \end{array}$$

سوال 5: درج ذیل مساواتوں کو حل کریں

$$\begin{array}{llll}
 \text{ا. } x^{\frac{1}{2}} = 8 & \text{ب. } x^{\frac{1}{3}} = 3 & \text{ج. } x^{\frac{2}{3}} = 4 & \text{د. } x^{\frac{2}{3}} = 27 \\
 \text{ه. } x^{-\frac{3}{2}} = 8 & \text{و. } x^{-\frac{2}{3}} = 9 & \text{ز. } x^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{x} & \text{ح. } x^{\frac{3}{2}} = x\sqrt{2}
 \end{array}$$

سوال 6:  $L$  میٹر لمبائی کی ایک لنکن کو ایک گردش مکمل کرنے کے لیے  $T$  وقت درکار ہے، جسے یوں لکھا جائے گا۔  $T = 2\pi l^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}$  جبکہ  $g \approx 9.81 \text{ ms}^{-2}$  ایک  $0.9$  میٹر لمبی لنکن کا وقت  $T$  دریافت کریں۔ (ب) ایک ایسی لنکن کی لمبائی معلوم کریں کہ جسے ایک گردش کے لیے تین سیکنڈ کا وقت درکار ہے۔

سوال 7: ایک کرے کے رداس  $rcm$  اور حجم  $Vcm^3$  کے درمیان تعلق  $r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$  بتا ہے۔ ایک ایسے کرے کا رداس معلوم کریں جس کا حجم  $1150cm^3$  ہو۔

سوال 8: درج ذیل مساواتوں کو حل کریں

$$\begin{array}{llll}
 \text{ا. } 4^x = 32 & \text{ب. } 9^y = \frac{1}{27} & \text{ج. } 16^z = 2 & \text{د. } 100^x = 1000 \\
 \text{ه. } 8^y = 16 & \text{و. } 8^z = \frac{1}{128} & \text{ز. } (2t)^3 \times 4^{t-1} = 16 & \text{ح. } \frac{9^y}{27^{2y+1}} = 81
 \end{array}$$

سوال 9: سادہ کریں۔

$$ج. (\sqrt{5} - 2)^2 + (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)$$

$$ا. 5(\sqrt{2} + 1) - \sqrt{2}(4 - 3\sqrt{2})$$

$$د. (2\sqrt{2})^5$$

$$ب. (\sqrt{2})^4 + (\sqrt{3})^4 + (\sqrt{4})^4$$

سوال 10: سادہ کریں.

$$ج. \sqrt{100000} + \sqrt{1000} + \sqrt{10}$$

$$ا. \sqrt{27} + \sqrt{12} - \sqrt{3}$$

$$د. \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16}$$

$$ب. \sqrt{63} - \sqrt{28}$$

سوال 11: درج ذیل کے نسب نما کو ناطق بنائیں

$$د. \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{15}}$$

$$ج. \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{10}}$$

$$ب. \frac{1}{5\sqrt{5}}$$

$$ا. \frac{9}{2\sqrt{3}}$$

سوال 12: سادہ کریں

$$ج. \frac{1}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2} - 1) + \sqrt{2}(1 - \sqrt{8})$$

$$ا. \frac{4}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{8}}$$

$$د. \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}}$$

$$ب. \frac{10}{\sqrt{5}} + \sqrt{20}$$

سوال 13:  $\frac{5}{\sqrt{7}}$  کو  $k\sqrt{7}$  شکل میں بنا کر دکھائیں، جبکہ  $k$  ایک ناطق عدد ہے۔

سوال 14: اس نتیجے کو درست ثابت کریں  $\sqrt{12} \times \sqrt{75} = 30$

(i) غیر معقول اعداد کو استعمال کرتے ہوئے (ب) کسری طاقستیں استعمال کرتے ہوئے

سوال 15: اس شکل میں زاویہ  $ABC$  اور  $ACD$  قائم زاویے ہیں۔ اگر ہم جانتے ہوں کہ  $AB = CD = 2\sqrt{6}$  اور  $BC = 7cm$  تو ظاہر کریں کہ  $AD$  کی لمبائی  $4\sqrt{6}$  اور  $7\sqrt{2}$  کے درمیان ہے۔



سوال 16: مثلث  $PQR$  میں  $Q$  ایک قائمہ زاویہ ہے۔  $PQ = (6 - 2\sqrt{2})cm$  اور  $QR = (6 + 2\sqrt{2})cm$  (i) مثلث کا رقبہ دریافت کریں (ب) ظاہر کریں کہ  $PR$  کی لمبائی  $2\sqrt{22}cm$  ہے۔

سوال 17: ترکیب  $\sqrt{27} \times \sqrt[6]{\frac{4}{3}} \times \sqrt[3]{36}$  کے ہر جز کو طاقت میں لکھ کر سادہ بنائیں

سوال 18: ایک مثلث  $ABC$  میں،  $AB = 4\sqrt{3}cm$ ،  $BC = 5\sqrt{3}cm$  اور زاویہ  $B$   $60^\circ$  ہے۔ کوسائن قاعدے کی مدد سے  $AC$  کی لمبائی سادہ غیر معقول اعداد میں نکالیں۔

سوال 19: درج ذیل ہمزاد مساواتوں کو حل کریں  $5x - 3y = 41$  اور  $7\sqrt{2}x + (4\sqrt{2})y = 82$

سوال 20: اپنے کیلکولیٹر پہ موجود طاقت بنائیں والا بٹن استعمال کرتے ہوئے 5 معین اعداد تک جواب ڈھونڈیں (i)  $\frac{1}{3.7^5}$  (ب)  $\sqrt[5]{3.7}$

سوال 21: نقاط  $A$  اور  $B$  کے محدد، بالترتیب  $(2, 3)$  اور  $(4, -3)$  ہیں۔  $AB$  کی لمبائی اور اس کے درمیانی نقطے کے محدد معلوم کریں۔

سوال 22: (i) ایک خط  $l$  کی مساوات دریافت کریں، جو نقطہ  $A(2, 3)$  سے ڈھلوان  $\frac{-1}{2}$  کے ساتھ گزر رہی ہو۔ (ب) ظاہر کریں کہ نقطہ  $P$  جس کے محدد  $(2 + 2t, 3 - t)$  ہیں، ہمیشہ  $l$  پر رہے گا، پھلے  $t$  کی قیمت کچھ بھی ہو۔ (ج)  $t$  کی قیمت دریافت کریں، ایسے کہ  $AP$  کی لمبائی 5 رہے۔ (د)  $t$  کی قیمت دریافت کریں جب کہ  $l$   $OP$  کے عمودی ہے۔  $O$  کو نقطہ آغاز مانتے ہوئے  $OL$  عمودی خط کی لمبائی معلوم کریں

سوال 23:  $P$  اور  $Q$  ایک خط کے انقطاع کے نقطے ہیں اور  $x$  اور  $y$  محور بالترتیب یہ ہیں۔

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

$PQ$  کا درمیانی فاصلہ 20 ہے اور اس کی ڈھلوان -3 ہے۔ اس سب کے ساتھ  $a$  اور  $b$  کی قیمت معلوم کریں۔

سوال 24: ایک چوکور کی اطراف ان خطوط پر موجود ہیں  $5 = x + y$ ،  $13 = 2x - y$ ،  $4 = 2x - y$  اور  $-4 = x + y$ ۔ اس کی ایک سمت اور اس کے متوازی سمت کا درمیانی فاصلہ معلوم کریں۔ نیز اس چوکور کا رقبہ بھی دریافت کریں۔

سوال 25: درج ذیل کو عدد کی مدد کے بغیر حل کریں

$$\begin{array}{llll}
 \text{ا.} & + & \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} & \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \\
 \text{ب.} & 32^{-\frac{4}{5}} & & \\
 \text{ج.} & \left(4^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}} & & \\
 \text{د.} & \left(1\frac{7}{9}\right)^{1\frac{1}{2}} & & 
 \end{array}$$

سوال 26: ترکیب  $(9a^4)^{-\frac{1}{2}}$  کو الجبرائی کسرے کی شکل میں لکھ کر سادہ بنائیں

سوال 27:  $y = x^{\frac{1}{3}}$  سمجھتے ہوئے،  $x$  کی قیمت معلوم کریں، جس کے لیے  $x^{\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}} = 1$

سوال 28: مساوات  $4^{2x} \times 8^{x-1} = 32$  کو حل کریں

سوال 29: ترکیب  $\frac{1}{(\sqrt{a})^{\frac{4}{3}}}$  کو  $a^n$  کی شکل میں لکھیں اور  $n$  کی قیمت بتائیں۔

سوال 30: سادہ کریں۔

$$\begin{array}{ll}
 \text{ا.} & (4p^{\frac{1}{4}}q^{-3})^{\frac{1}{2}} \\
 \text{ج.} & (2x^6y^8)^{\frac{1}{4}} \times (8x^{-2})^{\frac{1}{4}} \\
 \text{ب.} & \frac{(5b)^{-1}}{(8b^6)^{\frac{1}{3}}} \\
 \text{د.} & (m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{2}})^2 \times (m^{\frac{1}{6}}n^{\frac{1}{3}})^4 \times (mn)^{-2}
 \end{array}$$

سوال 31: یہ نظر میں رکھتے ہوئے کہ معیاری شکل میں  $3^{236} \approx 4 \times 10^{112}$  اور  $3^{-376} \approx 4 \times 10^{-180}$ ، درج ذیل ترکیب کے لیے معیاری شکل میں اندازے معلوم کریں

$$\begin{array}{llll}
 \text{ا.} & 3^{376} & \text{ب.} & 3^{612} \\
 \text{ج.} & (\sqrt{3})^{236} & \text{د.} & (3^{-376})^{\frac{5}{2}}
 \end{array}$$

سوال 32: ذیل میں دیا گیا جدول تین سیاروں کا سورج سے اوسط فاصلہ اور ایک گردش کے لیے درکار وقت بتا رہا ہے

(i) دکھائیں کہ  $T^{-2} \propto r^3$  تینوں سیاروں کے لیے تقریباً ایک سی قیمت رکھتا ہے۔ (ب) زمین سورج کے گرد ایک چکر مکمل کرنے میں ایک سال لگاتی ہے، زمین کے مدار کا اوسط رداس معلوم کریں

سوال 33: سادہ کریں

(i)  $2^{\frac{3}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{3}{2}}$ ، اپنے جواب کو  $k\sqrt{2}$  کی شکل میں لکھیں۔

(ب)  $(\sqrt{3})^3 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^1 + (\sqrt{3})^0 + (\sqrt{3})^{-1} + (\sqrt{3})^{-2} + (\sqrt{3})^{-3}$ ، اپنے جواب کو  $a + b\sqrt{3}$  کی شکل میں لکھیں۔

سوال 34: درج ذیل میں سے ہر ایک کو  $2^n$  کی شکل میں ظاہر کریں

ا.  $2^{70} + 2^{70}$       د.  $2^{100} - 299$

ب.  $2^{-400} + 2^{-400}$

ج.  $8^{0.1} + 8^{0.1} + 8^{0.1} + 8^{0.1} + 8^{0.1} + 8^{0.1} + 8^{0.1} + 8^{0.1}$

ج.  $2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$

سوال 35: مساوات کو حل کریں  $\frac{125^{3x}}{5^{x+4}} = \frac{25^{x-2}}{3125}$

سوال 36: ایک کرے کے سطحی رقبے اور ہجم کے لیے بالترتیب  $S = 4\pi r^2$  اور  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  ہیں۔ جبکہ  $r$  کرے کا رداس ہے۔ درج ذیل کے لیے موزوں ترائیڈ بنائیے۔

(i) سطحی رقبے کو ہجم کے ذریعے لکھیں

(ب) ہجم کو سطحی رقبے کے ذریعے لکھیں

سوال 37:  $mKg$  وزن کے حامل اور  $vms^{-1}$  رفتار سے حرکت کرنے والے ایک جسم کی حرکی توانائی  $K$  کے لیے  $K = \frac{1}{2}mv^2$  ہے۔ اس کلیے کو مد نظر رکھتے ہوئے  $2.5 \times 10^{-2}kg$  وزن رکھنے والی اور  $8 \times 10^2ms^{-1}$  رفتار سے حرکت کرنے والی گولی کی حرکی توانائی معلوم کریں۔



## باب 3

### تفاعل اور ترسیمات



## باب 4

### دو درجی مساوات

#### دو درجی الجبرا

یہ باب  $ax^2 + bx + c$  کی طرز دو درجی الجبرائی عبارت اور ترسیمات سے متعلق ہے، اسکے اختتام پر آپ مندرجہ ذیل معلومات حاصل کر چکے ہوں گے کہ

- (1) دو درجی الجبرائی عبارت کا مربع کیسے لیا جاتا ہے
- (2) دو درجی الجبرائی ترمیم  $y = ax^2 + bx + c$  کے راس اور محور تشاکل کو کیسے معلوم کیا جاتا ہے
- (3) دو درجی مساوات کو کیسے حل کیا جاتا ہے
- (4) ہمزاو مساوات کا حل جس میں ایک دو درجی مساوات اور دوسری خطی مساوات ہو
- (5) اُل مساوات کی شناخت اور حل جنکی دو درجی مساوات میں تحفیف ترکیب بدل کر کی جاسکتی ہو

4.1۔ دو درجی عبارات

آپ جانتے ہیں  $y = bx + c$  کہ کا ترسیم خط مستقیم ہے  $y = bx + c$  خطی مساوات کہلاتی ہیں۔ باب سوم میں آپ نے سیکھا کہ اگر اس میں  $ax^2$  جمع کریں تو مساوات  $y = ax^2 + bx + c$  حاصل ہوگی جس کا ترسیم قطع مکانی ہے یہ عبارت  $ax^2 + bx + c$  کہ جسمیں  $a, b, c$  مستقل ہیں۔ دو درجی عبارت کہلاتی ہے۔ مثلاً  $x^2 - 6x + 4, x^2 - 3x + 2, x^2 - 5 - 3x^2$ ۔ دو درجی مساوات ہیں آپ کسی بھی دو درجی کیلئے  $ax^2 + bx + c$  کی طرح لکھ سکتے ہیں جسمیں  $a, b, c$  مستقل ہیں۔  $b$  اور  $c$  آپ کی پسند کے کوئی بھی اعداد ہو سکتے ہیں مشمول '0'، لیکن  $a$  قطعاً '0' نہیں ہو سکتا ہے۔ (عبارت دو درجی نہیں رہے گی) اعداد  $a, b, c$  عددی سر کیلاتے ہیں:  $x^2$  کا عددی سر  $a, x$  کا عددی سر  $b$  اور  $c$  عمومی طور پر مستقل جزو کہلاتا ہے  $4 + x - 2x^2$  میں  $x$  اور  $x^2$  کے عددی سر بالترتیب 1 اور 2 ہیں جبکہ جزو 4 ہے۔

## 2.4- کامل مربعی صورت

آپ ایک دودرجی الجبرائی عبارت،  $x^2 - 6x + 8$  کو بہت سے طریقوں سے لکھ سکتے ہیں جنہیں جزوی صورت  $(x - 4)(x - 2)$  (2) شامل ہے جو کہ افقی محور پر قطع مکانی  $y = x^2 - 6x + 8$  کا مقام انقطاع معلوم کرنے کیلئے استعمال کی جاسکتی ہے۔ جیسا کہ تصویر..... میں دیکھایا گیا ہے۔ جبکہ صورت، قطع مکانی کے راس کی ناندھی کیلئے اور تفاعل  $f(x) = x^2 - 6x + 8$  کی حدود معلوم کرنے کیلئے استعمال کی جاسکتی ہے۔ جیسا کہ مثال میں دی گئی تصویر میں دکھایا گیا ہے۔ یاد رہے کہ آپ ہمیشہ دودرجی عبارت کو جزوی صورت میں نہیں لکھ سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر  $x^2 + 2x + 3$



اگر آپ تربی مساوات  $y = x^2 - 6x + 8$  کو  $y = (x - 3)^2 - 1$  کی صورت میں لکھیں تو آپ باآسانی محور تشاکل اور اس کی نشانہی کر سکتے ہیں۔ کیونکہ  $(x - 3)^2$  ایک کامل مربع ہے۔ لہذا اسکی قیمت ہمیشہ 0 یا اس سے زیادہ ہوگی اور 0 صرف تب جب  $x = 3$  ہو یعنی  $(x - 3)^2 \geq 0$  ہو اور چونکہ  $y = (x - 3)^2 - 1$  ہے تو  $y \geq 1$  ہوگا۔ جیسے کہ  $(x - 3)^2 = 0$  جب  $x = 3$  ہو لہذا نقطہ راس  $(3, -1)$  ہے اور محور تشاکل خط  $x = 3$  ہے۔  
 $(x - 3)^2 - 1$  کو کامل مربع صورت کہتے ہیں۔ ذیل میں اسکے استعمال کی کچھ مزید مثالیں دی گئی ہیں۔

### مثال نمبر 1.2.4

دورجی تربی  $y = 3 - 2(x + 2)^2$  کے راس اور تشاکل کی نشانہی کریں۔ چونکہ  $2(x + 2)^2 \geq 0$  اور  $2(x + 2)^2 = 0$  جب  $x = -2$ ، تربی کا راس وہ نقطہ جسے محدود  $(-2, 3)$  ہیں،  $y$  کی سب سے بڑی قیمت 3 ہے۔ اور محور تشاکل  $x = -2$  ہے۔

### مثال نمبر 2.2.4

مساوات کو حل کریں۔

$$3(x - 2)^2 - 2 = 0, \quad 3(x - 2)^2 = 2, \quad 3(x - 2)^2 = \frac{2}{3} \quad \text{چنانچہ} \quad (x - 2)^2 = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad x = 2 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

### 4.3 مربع مکمل کرنا

جب دورجی عبارت کو کامل مربع کی صورت میں لکھنے کی کوشش کرتے ہیں۔ اس نقطہ پر توجہ کریں کہ جب آپ  $\frac{1}{2}b$  کو  $x$  کا مربع ہیں تو آپ کو  $\left(x + \frac{1}{2}b\right)^2 = x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2 = x^2 + bx = \left(x + \frac{1}{2}b\right)^2 - \frac{1}{4}b^2$  حاصل ہوگا لہذا۔  
 اب  $c$  کو طرفیں میں جمع کریں

### مثال نمبر 4.3.1

۔  $x^2 + 10x + 32$  کو کامل مربع صورت میں لکھیں۔

$$x^2 + 10x + 32 = (x^2 + 10x) + 32 = (x + 5)^2 - 25 + 32 = (x + 5)^2 + 7$$

۔  $ax^2 + bx = \left(x + \frac{1}{2}b\right)^2 - \frac{1}{4}b^2$  کو ذہن نشین کرنے کی کوشش نہ کریں۔ یہ سیکھ لیں کہ آپ  $x$  کے عددی سر کا نصف کریں اور لکھیں  $ax^2 + bx = \left(x + \frac{1}{2}b\right)^2 - \frac{1}{4}b^2$  پھر اس میں مساوات کے دونوں جانب  $c$  جمع کریں۔ اگر آپ نے  $ax^2 +$

$bx + c$  کو کامل مربع صورت میں لکھنا ہو لیکن  $x^2$  کا عددی سر  $a$  کی قیمت 1 نہ ہو تو کے پہلے دو جزو میں سے جزو ضربی  $a$  کو باہر نکال کر لکھ سکتے ہیں:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + xc$$

تب دو درجی عبارت کے مربع کو قوسین میں مکمل کریں۔

### مثال نمبر 4.3.2

-  $2x^2 + 10x + 7$  کو کامل مربع صورت میں لکھیں  
جن جزو میں  $x$  موجود ہے ان میں سے جزو ضربی کو ابتداءً باہر نکال لیں

$$2x^2 + 10x + 7 = 2(x^2 + 5x) + 7.$$

قوسین میں موجود جزو کو حل کرتے ہوئے۔

$$x^2 + 5x = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4},$$

$$2x^2 + 10x + 7 = 2\left(x^2 + 5x\right) + 7 = 2\left\{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right\} + 7$$

$$= 2\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{2} + 7 = 2\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{11}{2}.$$

اس مقام پر ذہنی طور پر نتیجہ کو پرکھنا قابل قدر ہے۔ اگر  $x^2$  کا عددی سر منفی ہو تو بھی بنیادی طریقہ کار یہی ہے۔ جیسا مثال نمبر 4.3.3 میں دکھایا گیا ہے۔

### مثال نمبر 4.3.3

-  $3 - 4x - 2x^2$  کو کامل مربع صورت میں ظاہر کریں۔  
جن جزو میں  $x$  موجود ہے ابتداءً ان میں سے جزو ضربی 2- کو باہر نکال لیں۔ قوسین میں موجود جزو کو حل کرتے ہوئے۔

### مثال نمبر 4.3.4

-  $12x^2 - 7x - 12$  کو کامل مربع صورت میں ظاہر کریں اور نتائج کو استعمال کرتے ہوئے۔ اس کا جزو ضربی معلوم کریں۔

$$12x^2 - 7x - 12 = 12\left(x^2 - \frac{7}{12}x\right) - 12 = 12\left\{\left(x - \frac{7}{24}\right)^2 - \frac{49}{576}\right\} - 12$$

$$12\left\{\left(x - \frac{7}{24}\right)^2 - \frac{625}{576}\right\} = 12\left\{\left(x - \frac{7}{24}\right)^2 - \left(\frac{25}{24}\right)^2\right\}$$

اب آپ کلیے،  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$  کو استعمال کر سکتے ہیں، قوسین میں موجود مساوات کی تجزی کیلئے  $a$  کو بطور  $\frac{7}{24}$   $x =$  اور بطور  $\frac{25}{24}$  لیں۔

## مثال نمبر 4.3.5

-  $x^2 - 8x + 12$  کو کامل مربع کی صورت میں ظاہر کریں۔ اپنے نتائج کو استعمال کرتے ہوئے تعامل  $f(x) = x^2 - 8x + 12$  کی حدود معلوم کریں۔ جو کہ  $x$  کی تمام حقیقی قیمتوں کیلئے تعریف شدہ ہے۔

$$x^2 - 8x + 12 = (x - 4)^2 - 4$$

جیسا کہ  $x$  کی تمام قیمتوں کیلئے  $-4 < y$  ہے۔

$$f(x) = x^2 - 8x + 12 = (x - 4)^2 - 4 \leq -4$$

-  $y$  کو بطور  $f(x)$  لکھیں تو حد  $-4 \leq y$  ہے۔

## مشق نمبر 4(A)

- 1- مندرجہ ذیل ترسیلات کا (i) راس اور (ii) خط تساکل کی مساوات معلوم کریں۔
- 2- مندرجہ ذیل دو درجی عبارت کی (i) کم سے کم (اگر مناسب) ہو تو زیادہ سے زیادہ قیمت اور (ii)  $x$  کی وہ قیمت میں کیلئے یہ ہے۔
- 3- مندرجہ ذیل دو درجی عبارت کو حل کریں۔ غیر معقول اعداد جواب کا حصہ رہنے دیں۔
- 4- مندرجہ ذیل کو کامل مربع صورت میں ظاہر کریں۔
- 5- کامل مربع صورت کو استعمال کرتے ہوئے ذیل میں دیئے گئی ہر ایک عبارت کی کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ مناسب قیمت معلوم کریں اور  $x$  کی وہ قیمت میں کیلئے یہ ہے۔

7- ذیل میں دیئے گئے ہر ایک تفاعل،  $x$  کی حقیقی قیمتوں کیلئے تعریف شدہ ہے۔ مربع مکمل کرتے ہوئے  $f(x)$  کو کے طور پر لکھیں اور انکی حدود معلوم کریں۔

8- مربع مکمل کرتے ہوئے (i) راس اور (ii) ذیل میں دیئے گئے ہر ایک قطع مکانی کے خط تفاعل کی مساوات معلوم کریں۔

9- ذیل میں دیئے گئے ہر ایک تفاعل کا دائرہ کار تمام مثبت حقیقی اعداد پر محیط ہے۔ ہر تفاعل کی سعت معلوم کریں۔

#### 4.4 دو درجی مساوات کو حل کرنا

یقیناً آپ  $x^2 - 6x - 8$  صورت کی دو درجی مساوات کے بذریعہ تجزی  $x^2 - 6x + 8$  سے  $(x - 2)(x - 4)$  میں حل سے واقف ہیں اور تب بذریعہ استدلال اگر ----- تب یا تو ----- یا ----- لہذا  $x = 4$  یا  $x = 2$  مساوات  $x^2 - 6x + 8$  کا حل  $x = 4$  یا  $x = 2$  ہے۔ اعداد 2 اور 4 مساوات کے جز ہیں اگر آپ دو درجی عبارت کا جز یا آسانی معلوم کر سکتے ہوں تو یقیناً یہ مساوات کے حل کا تیز تر طریقہ ہے۔ تاہم، ممکن ہے کہ عبارت کے جز نہ ہوں یا انہیں معلوم کرنا مشکل ہو مثلاً  $30x^2 - 11x - 30$  کے جز معلوم کرنے کی کوشش کریں

اگر آپ مساوات کو حل کرنے کیلئے ایک دو درجی عبارت کی تجزی نہیں کر سکتے ہوں تب دو درجی کلیہ استعمال کریں،  $ax^2 + bx + c = 0$  کا حل جہاں  $a \neq 0$  ہے

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

یہ جاننا مفید ہے کہ کیسے کامل مربع صورت،  $ax^2 + bx + c$  سے یہ کلیہ اخذ کیا گیا ہے ابیداء مساوات کے دونوں اطراف کو  $a$  سے تقسیم کریں ( $a$  کی قیمت 0 نہیں ہو سکتی ہے۔ ورنہ یہ دو درجی مساوات نہیں رہے گی)

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

بائیں طرف عبارت کا مربع مکمل کرنے سے آپ کو معلوم ہوگا کہ

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

لہذا آپ مساوات کے حل کو جاری رکھ سکتے ہیں۔

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

یہاں دو ممکنات ہیں۔  $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  یا  $x + \frac{b}{2a} = +\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  مساوات  $ax^2 + bx + c = 0$  کے دو جز ہوں گے۔

یہ ظاہر کرتا ہے کہ اگر  $ax^2 + bx + c = 0$  اور  $a \neq 0$  تو  $x = -b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

#### مثال نمبر 4.4.1

مساوات کے حل کیلئے دو درجی کلیہ استعمال کریں (a) اس کا  $ax^2 + bx + c$  کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے،  $a = 2$ ،  $b = 3$  اور  $c = 4$  درج کریں تو

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times (-4)}}{2 \times 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 32}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{4}$$

آپ سے بعض اوقات ضرر کو غیر معقول صورت میں رہنے دینا متوقع ہوگا۔ بعض دیگر اوقات آپ سے ضرر  $\frac{3 - \sqrt{41}}{4} = -0.85$  کی صورت میں درکار ہوگا۔ مساوات میں ان اعداد کی ترکیب بدلی کے نتائج ملاحظہ کریں۔

(b)  $a = 2$ ،  $b = 3$  اور  $c = 4$  درج کرنے سے

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times (4)}}{2 \times 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 32}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{-23}}{4}$$

لیکن 23- کا جذر اطلاق ممکن نہیں ہے اس کا مطلب یہ ہے کہ مساوات  $2x^2 - 3x + 4 = 0$  کا کوئی جذر نہیں ہے۔

$y = 2x^2 - 3x + 4$  کی کامل مربعی صورت میں تحویل کی کوشش کریں۔ آپ  $y = 2x^2 - 3x + 4$  کے ترمیم سے کیا اخذ کرتے ہیں؟

(c)  $30 = 11a = b$  اور  $c = 30$  درج کرنے سے  
 تیسری مثال کی تجزی تو ہوتی ہے لیکن جزر معلوم کرنا مشکل ہے۔ تاہم اگر مساوات کے جزر  
 معلوم ہو جائیں تو آپ اخذ کر سکتے ہیں کہ  $(5x - 6)(6x + 5) - 11x + 30 = 4.5x^2 - 4ac$  میز اگر آپ واپس  
 مثال نمبر 1-4 پر نظر ڈالیں تو آپ دیکھیں گے کہ جزو (a) کی مساوات کے  
 جزر میں غیر معقول اعداد بھی وابستہ ہیں جزو (b) میں جزر نہیں تھا اور جزو (c) میں جزر کسور  
 تھیں۔ جزو اطراف کی علامت کے نیچے موجود عبارت  $b^2 - 4ac$  کی قیمت کے حساب سے آپ  
 پیش گوئی کر سکتے ہیں کہ کونسا معاملہ پیش آئے گا۔ اور دو درجی کلے  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  پر اس کے تجزیہ سے  
 • اگر  $b^2 - 4ac$  ایک کامل مربع ہے تو جزر عدد صحیح پاکسور ہوں گے۔  
 • اگر  $b^2 - 4ac > 0$  تو مساوات  $ax^2 + bx + c = 0$  کے دو جزر ہوں گے

• اگر  $b^2 - 4ac > 0$  تو کوئی جزو نہیں ہوگا۔  
 • اگر  $b^2 - 4ac = 0$  ہو تو جزر  $x = \frac{-b}{2a}$  سے حاصل ہوں گے۔ دراصل ایک ہی جزر ہوگا  
 بعض اوقات کہا جاتا ہے کہ دو موافق جزر یا ایک دہرا جزر ہے کیونکہ جزر کی قیمتیں  
 $\frac{-b+0}{2a}$  اور  $\frac{-b-0}{2a}$  برابر ہیں۔  
 $b^2 - 4ac$  دو درجی عبارت  $ax^2 + bx + c$  کا میز کہلاتا ہے کیونکہ اسکی قیمت کی مدد سے مساوات  $ax^2 + bx + c = 0$  کے  
 حل کی اقسام میں تمیز کی جاتی ہے۔  
 مثال نمبر 1-5-4

مندرجہ ذیل مساوات کے دو درجی اجزاء کے میز کی قیمتوں سے آپ کیا  
 اخذ کر سکتے ہیں؟  
 (a) جیسے کہ  $a = 2$  — — — میز مثبت ہے لہذا مساوات  $2x^2 - 3x - 4 = 0$  کے دو جزر ہیں  
 مزید جیسا کہ "41" کامل مربع نہیں ہے تو جزر ناطق ہیں۔  
 (b) میز مثبت ہے لہذا مساوات  $2x^2 - 3x - 5 = 0$  کے دو جزر ہیں اور چونکہ 49 کامل مربع ہے۔  
 لہذا جزر ناطق ہے۔  
 (c) کیونکہ میز منفی ہے اسلئے مساوات  $2x^2 - 4x + 5 = 0$  کا کوئی جزر نہ۔

(d) چونکہ میز صفر ہے اسلئے مساوات  $2x^2 - 4x + 2 = 0$  کا صرف ایک (دہرا) جذر ہے۔

مثال نمبر 2-5-4

مساوات  $kx^2 - 2x - 7 = 0$  کے دو حقیقی جذر ہیں، آپ مستقل  $k$  کی قیمت کے بارے

میں کیا اخذ کر سکتے ہیں؟

میز  $k$   $4 + 28k = (-7)(k) - 4(-2)^2$  ہے۔ مساوات کے دو حقیقی جذر ہیں لہذا میز کی قیمت

مثبت ہوگی۔ بس  $4 + 28k > 0$  اور  $k > -\frac{1}{7}$ ۔

مثال نمبر 3-5-4

اگر  $0 = 4ac - b$  ہو تو ہی مساوات کے دہرے جذر ہوتے ہیں۔ یعنی اگر  $0 = 43k - 2^2$  اس سے  $k$  کی قیمت  $1/3$  حاصل ہوگی۔

مشاہدہ کریں کہ کیسے مندرجہ ذیل بالا میں دو درجی مساوات کو حل کرنے ضرورت ہی پیش نہیں آئی۔ آپ کو جو بھی معلوم کرنا ہو کر سکتے ہیں۔

## 4.1 مشق نمبر 4B

1 مندرجہ ذیل مساوات کو حل کرنے کے لیے دو درجی کلیہ استعمال کریں۔ غیر ناطق جوابات کو غیر معقول صورت میں چھوڑ دیں۔ اگر حل ممکن نہیں تو بھی بتائیے۔ اپنے جوابات کو سوال نمبر 8 میں استعمال کیلئے محفوظ رکھیں۔

2 میز  $0 = 4ac - b^2$  کی قیمت کو استعمال کرتے ہوئے معلوم کریں کہ مندرجہ ذیل مساوات کے جذر کتنے ہیں (ایک ہے، دو ہیں یا کوئی نہیں) (i) اور (ii) میں  $p$  اور  $q$  کی قیمتیں مثبت ہیں۔

3 مندرجہ ذیل پر مساوات کا ایک دہرہ جذر ہے۔ ہر معاملے میں  $k$  کی قیمت معلوم کریں۔ اپنے جوابات کو عدد صحیح، مکمل کسور یا غیر معقول صورت میں رہنے دیں۔

4 مندرجہ ذیل مساوات کے جذر کی تعداد می. دی گئی ہے۔ جس قدر ممکن ہو  $k$  کی قیمت اخذ کریں۔

5 میز کی قیمت کو استعمال کرتے ہوئے محور  $x$  پر مندرجہ ذیل ترمیمات کے نقاط انقطاع کی تعداد معلوم کریں۔

6 اگر  $a$  اور  $c$  دونوں مثبت ہوں تو ترمیم  $y = ax^2 + bx + c$  سے متعلق کیا بیان کر سکتے ہیں؟

7 اگر  $a$  منفی اور  $c$  مثبت ہو تو ترمیم  $y = ax^2 + bx + c$  سے آپ کیا بیان کر سکتے ہیں؟

8 آپ کو سوال نمبر 1 کے جوابات ناطق یا غیر معقول صورت میں درکار ہوں گے نہ کہ اعشاریہ۔ سوال نمبر 1 (a)، (b) اور (c) کیلئے جذر کی (i) جمع اور (ii) ضرب کریں۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ اگر صرف ایک ہی (دہرا) جذر ہو تو کیا ہو گا؟



(B) دوسری مساوات  $x^2 + bx + c = 0$  کے جذر  $\alpha$  اور  $\beta$ ،  $x^2 + bx + c$  کے اجزائے ضرب  $x - \alpha$  اور  $x - \beta$  سے ہی اخذ ہوں گے۔ آپ مساوات  $x^2 + bx + c = 0$  کے جذر واضح کریں جنکی جمع "b اور ضرب c ہو۔

c جز B کو طول دیتے ہوئے جز a, b اور c مشتمل مساوات  $x^2 + bx + c = 0$  کے جذر کی (i) جمع اور (ii) ضرب کیلئے عبارات معلوم کریں۔

## 4.6: ہمزاد مساوات

یہ جزو ظاہر کرے گا کہ  $y = x^2$  اور  $5x + 4y = 21$  جیسے ہمزاد مساواتوں کے جوڑوں کو کیسے حل کیا جاتا ہے اس میں جزو 3.7 کے مقدمات کو مزید آگے بڑھایا جائے

### مثال نمبر 4.6.1

ہمزاد مساوات  $x + y = 6$ ،  $y = x^2$  کو حل کریں۔ عمومی طور پر ان مساوات کو حل کرنے کا بہترین طریقہ یہ ہے کہ ایک مساوات سے x یا y کیلئے عبارت معلوم کر کے دوسری مساوات میں درج کر دی جائے۔ یہاں y کی قیمت کیلئے پہلی مساوات کو استعمال کرتے ہوئے دوسری مساوات میں ترکیب بدلی نسبتاً آسان ہے جسکا ماحصل  $x^2 + x - 6 = 0$  ہے۔ اسے مرتب کرنے سے  $x^2 + x - 6 = 0$  - لہذا  $(x - 2)(x + 3) = 0$  یعنی  $x = 2$  یا  $x = -3$ ۔ آپ y کی متعلقہ قیمتیں مساوات  $y = x^2$  سے معلوم کر سکتے ہیں۔ جو کہ بالترتیب  $y = 4$  اور  $y = 9$  ہیں۔ لہذا اسکا حل  $x = 2, y = 4$  یا  $x = -3, y = 9$  ہے۔ جانچ لیں کہ قیمتوں کے ہر جوڑے کیلئے  $x + y = 6$  - توجہ رہے کہ جوابات باہم جوڑوں کی شکل میں ہیں۔ جوابات کو  $x = 2, x = -3$ ،  $y = 4, y = 9$  کی صورت میں لکھنا غلط ہے کیونکہ جوڑے  $x = 2, y = 9$  اور  $x = -3, y = 4$  اصل مساوات کو ثابت نہیں کرتے ہیں۔ آپ یہ تب ملاحظہ کر سکتے ہیں اگر سوال کی تشریح ترسیمات  $y = x^2$  اور  $x + y = 6$  کے نقاط انقطاع معلوم کرنے کیلئے کریں جیسے کہ شکل 4.2 میں۔

### مثال نمبر 4.6.2

ہمزاد مساوات  $2x^2 - 2xy + 3y^2 = 6$  اور  $2x - 3y = 3$  کو حل کریں۔ پہلی مساوات x یا y کیلئے عبارت معلوم کرنا مشکل ہے لہذا دوسری مساوات سے ابتدا کریں۔ اگر آپ کسور سے گریز کریں تو غلطی کے امکانات کم ہوں گے۔ دوسری مساوات سے مساوات  $2x = 3 + 3y$  حاصل ہوئی لہذا اسکا مربع لینے سے

$$4x^2 = (3 + 3y)^2 = 9 + 18y + 9y^2$$

اب آپ کے پاس  $4x^2$  اور  $2x$  کیلئے عبارت موجود ہیں لہذا اب آپ پہلی مساوات میں ترکیب بدل سکتے ہیں۔ پہلی مساوات کو 4 س ضرب دینا مددگار ہے گا۔ لہذا یہ  $9y^2 - 15y + 15 = 0$  میں تخفیف ہو جاتا ہے اور اسے 3 سے تقسیم کریں تو  $3y^2 + 2y - 5 = 0$  - اس مساوات کو حل کرنے سے  $(y - 1)(3y + 5) = 0$  حاصل ہوا لہذا  $y = 1$  یا  $y = -5/3$ ۔

دوسری مساوات میں ترکیب بدلنے سے x کی قیمت بالترتیب  $x = 3$  اور  $x = -1$  حاصل ہوگی۔ لہذا حل  $x = 3, y = 1$  اور  $x = -1, y = 3$  ہے۔

## 4.6.3 مثال نمبر

کتنے نقاط پر خط  $x + 2y = 3$  منحنی  $2x + y^2 = 4$  کو منقطع کرتا ہے؟  $x + 2y = 3$  لہذا  $x = 3 - 2y$  کی ترکیب  $2x^2 + y = 4$  میں درج کرنے سے  $2(3 - 2y)^2 + y^2 = 4$  لہذا  $(9 - 12y + 4y^2) + y^2 = 4$  کی تہتقیق سے مساوات  $y^2 - 24y + 14 = 0$  حاصل ہوئی۔ اس مساوات کا میز  $72 - 504 = 576 - 4 * 9 * 14 = 24^2$  ہے۔ کیونکہ میز مثبت ہے۔ اس لیے مساوات کے دو حل ہوں گے، معلوم ہوا کہ خط منحنی کو دو نقاط پر منقطع کرتا ہے۔

## 4.7 دودرجی مساوات میں قابل تحقیف مساوات

بعض	اوقات	آپکا	سامنا
ایسی	مساوات	سے	ہوگا
جو	دودرجی	نہیں	ہوں
گی۔	درست	تریب	میں
بدلی	کے	ذریعے	انہی
دودرجی	مساوات	میں	تہدیل
کرنا	ممکن	ہے۔	

## 4.7.1 مثال نمبر

مساوات	$t^4 - 13t^2 + 36 = 0$	کو	حل
کریں۔	جزو	$t^4$	کی
موجودگی	کے	ہامٹ	یہ
ایک	دودرجی	مساوات	ہے
لیکن	اگر	کو	بطور
$t^4$	لیں	$x$	مساوات
$x^2 - 13x + 36 = 0$	گی	تو	ہو
جائے	دودرجی	میں	$x$
کی	$(x - 4)(x + 9) = 0$	مساوات	ہے۔
تو	$x = 9$	لہذا	$x = 4$
یا	درج	کرنے	واپس
$x = t^2$	یا	$t^2 = 9$	سے
$t^2 = 4$	$t = \pm 2$	یا	یعنی
نتیجہ			$-t = + - 3$

## 4.7.2 مثال نمبر

مساوات حل	کریں۔	$\sqrt{x}$ کو	$\sqrt{x}$ کو	$\sqrt{x}$ کو	$\sqrt{x}$ کو
(a)۔	y استعمال	کرتے	کرتے	کرتے	کرتے
کیلئے۔	مساوات	کی	کی	کی	کی
(b)۔	مربع	لینے	لینے	لینے	لینے
کا	$\sqrt{x}$ درج	سے	سے	سے	سے
(a)۔	،	کی	کی	کی	کی
y	درج	کرنے	کرنے	کرنے	کرنے
مساوات	میں	$y = 6 - y^2$	$y = 6 - y^2$	$y = 6 - y^2$	$y = 6 - y^2$
$y^2 + y = 6$	ہے۔	تھیل	تھیل	تھیل	تھیل
جاتی	چونکہ	لہذا	لہذا	لہذا	لہذا
پس	$y = 2$	یا	یا	یا	یا
لیکن	قطعاً	$y = \sqrt{x}$	$y = \sqrt{x}$	$y = \sqrt{x}$	$y = \sqrt{x}$
$\sqrt{x}$	سکتا	منفی	منفی	منفی	منفی
ہو	$y = 2$	ہے۔ تو	ہے۔ تو	ہے۔ تو	ہے۔ تو
حل	سے	ہی	ہی	ہی	ہی
جس		$x = 4$	$x = 4$	$x = 4$	$x = 4$
ہوا۔					

طرفین کا	مرتب	لینے	سے
$(6-x)^2 = 36 - 12x + x^2$	یا	$(x-4)(x-9) = 0$	$x^2 - 13x + 16 = 0$
ماحول	جوابات	تو	تو
$x = 9$	معلوم	ہوتا	$x = 4$
مسوات جب	مسوات جب	$x = 4$	درست
ہوتی	ہوتی	ہے	لیکن
$x = 9$	$x = 9$	ہو	تو
$\sqrt{2}x = 3$	$\sqrt{2}x = 3$	اور	$6 - x = -3$
یعنی	یعنی	پس	$x = 9$
جفر	جفر	جفر	لہذا
$x = 4$	واحد	ہے	ہے۔
آپ	اہم	کہ	اگر
مرتب	مسوات	تو	کا
جزر	لیں	وہ	کے
آپ	سمیت	معلوم	جو
چاہ	اصلا	تھے	کرنا
کریں	رہے	تابلور	معلوم
کہ	گئے۔	تو	ہے
مسوات	$x = 4$	درست	اس
کرتا	کو	$x = 9$	ثابت
کرتا۔ نتیجہ	ہے۔ لیکن	ہے	نہیں
جب	یہ	کسی	کہ
کو	آپ	کرتے	مسوات
اس	حل	لیں	ہوے
ضروری	کا	کہ	تو
جوابات	ہے	جانب	اپنے
	کو		لیں۔

## مشق نمبر 4C

مندرجہ	ذیل	ہمزاد	مسوات
1. کے	جوڑوں	کو	حل
کریں۔			

2. خط کے محرد مستقیم نقاط معلوم اور انقطاع کریں۔  
منحنی کے
3. مندرجہ خط کے تعداد مندرجہ ذیل مستقیم نقاط معلوم اور انقطاع کریں۔  
منحنی میں منحنی کی
4. مندرجہ حل میں مندرجہ ذیل کریں۔ غیر دیں۔ مساوات ناطق معلوم مساوات
5. مندرجہ حل معملات سے قابل مندرجہ ذیل کریں۔ میں ضربے مہم مساوات (زیادہ مناسب مساوات بناوے مساوات
6. مندرجہ حل مندرجہ ذیل کریں۔ مساوات

## متفرق مشق 4

1. ہمزاد  $x^2 + 2y^2 = 11$  مساوات کو اور کریں۔  
 $X + Y = 2$  حل عبارت
2. دو درجی کو کرتے واضح کو کلکٹیں۔ لہذا  $x^2 - 10x + 17$  ظاہر کو  $f(x)$  میں لیے ممکن کے قیمت
- کثیر رکنی  $f(x)$  ہیں۔ طاقی کرتے  $(x - a)^2 + b$   $fx$  سے اور  $x$  کریں۔  
عبارت سے قیمتوں ہوئے صورت کے کم اس کی

3. ہمزاد مساوات کو حل کریں۔  
 $2x + y = 3$  اور  $2x^2 - xy = 10$

4.  $k$  کے لیے مساوات کی رکھتی ہے؟  
 $2x^2 - kx + 8 = 0$

5.  $f$  کا تعادل  
 $f(x) = (2x + 4)(x - 4)$  میں  $f$  کی صورت کے تحت معلوم کریں۔

6. مساوات کو حل کریں  
 $x^4 - (6\sqrt{3})x^2 + 24 = 0$  حاصل ممکن غیر ہے۔

(b) مساوات چاروں جوابات تک ظاہر کریں  
 $y = 3x - 3$  اور  $y = (3x + 1)(x + 2)$

(8)  $9x^2 - 36x + 52$  کی صورت جبکہ  $C$  یا  $9x^2 - 36x + 52$  کا مجموعہ دو درست منہی کریں۔

(9)  $y = x^2 - 3x - 1$  کے لیے  $x$  کی صورت میں  $y = 6x^2 + 4x - 3$  کے نقاط معلوم کریں۔

(10)  $9x^2 + 12x + 7(a)$  کو  $(ax + b)^2 + c$  کے

ظاہر c	میں اور	صورت b, a	کی کریں، یہاں مشتقل معلوم
قیمتیں	جتنی	ہیں	(b) $\frac{1}{9x^2+12x+7}$
x	مقصود	کرنا	کی
کا	درست،	کیئے	مجموع
$8x^4 - 8x^2 + 1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$	قیمتوں	حقیقی	(11)
معلوم	کریں۔	معلوم	کے
خیز	جزر	مساوات	کریں
قیمتوں	معنی	تمام	اعداد
معلوم	درست	تین	x(12)
پہ	تمام	تک	کیئے
نقطہ	مشتقل a, b اور c	کی	کریں۔
کم	کیئے ترمیم	درست	لہذا
زیادہ	قیمت	کم	سب
راس	معلوم	محدود	کے
اور	سے	سب	(یادداشت:
نقاط	نقاط	والے	اور
کی	قوس	قوس	قیمت
مشتقل	کے	خط	ہیں۔)
راس	کریں۔	معلوم	(13)
صورت	قوس	$y = ax^2 - 2bx + c$	$y = 9 - x$
ہے	اور	ہے c	انقطاع
خط،	a > 0	جبکہ	(14)
اور	کے	قوس	مساوات a, b اور
عبارت	کو a, b اور c کی	محدود	ہیں
ظاہر	کریں۔	معلوم ہمیں	(a)
تمام	معلوم	قوس	کے
کے	راس	کا	میں
میں	ہے۔ c کیلئے a	پہ	(b)
	میں	صورت	کہ
	بھی	کریں۔ یہ	$y = x$
	کی b	کیئے	کی b
	$c \leq \frac{1}{4a}$	اور	معلوم
	$y = kx^2$	کو	کریں
	تصویر		قیمتوں
			(15) $y = x - 1(a)$
			ترسیمات

جہاں	ہے	گیا	دکھایا
ہے ترسیمات	مستقل	مثبت	ایک
A اور	نقاط	متفرق	دو
دوسرے	ایک	پہ	B
ہیں۔ A اور B کیلئے x	کرتے	منقطع	کو
مساوات	درجی	دو	کیلئے
ظاہر	اور	کریں	تحریر
	$K < \frac{1}{4}$	کہ	کریں
معملات	ذیل	مندرجہ	(b)
$y = kx^2$	اور	$y = x - 1$	ہیں ترسیمات
کو	تعلق	باہمی	کے
		کریں۔	واضح
		$k > \frac{1}{4}(2)$	$k = \frac{1}{4}(1)$
اور	کسی	یا	(c)
کریں	ثابت	ترمیم	دلیل
مستقل	منفی k	سے	کہ
$x - 1 = kx^2$	مساوات	جب	ہو
جزر	حقیقی	تو	کے
0 اور 1	جزر	دو	ہوتے
	ہوگا۔	ہیں، ایک	کے
		درمیان	



مساوات درج خط (1, 2) سے	عمودی بغیر سے نقطہ کم معلوم	کے کے طریقہ اور درمیان فاصلہ	$y = 3x + 5$ معلوم ذیل $y = 3x + 5$ کے کم
ایک کریں اس $d^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2$ ہو	پہ ہے، ظاہر سے حاصل	خط نقطہ فاصلہ 'd' ذریعے	(a) $(x, y)$ عمومی کہ کا کے گاہ
مساوات ظاہر کہ	کی کے $d^2 = (x - 1)^2 + (3x + 3)^2$ کریں	خط حل کہ ظاہر	(b) کو کریں (c) $d^2 = 10x^2 + 16x + 10$
متجلیں کریں ممکن	کی ظاہر کم	مربع ذریعے کم	(d) کے کہ فاصلہ
کو	ترکیب ہوئے۔ $y = 2x + 1$ معلوم $y = -2x + 5$ معلوم $3x + 4y + 7 = 0$ معلوم	16 کی کرتے کا فاصلہ کا فاصلہ کا فاصلہ	(17) سوا نمبر استعمال (a) $(2, 3)$ عمودی (b) $(1, 3)$ عمودی (c) $(2, -1)$ عمودی
دو انقطاع '0' ہے؛ سے مشرک جانب سے رفتار ہے میٹر کی بڑھ	قائم نقطہ شمال دوسری کی مغرب جانب 20m/s کی رہی 80 جنوب سے	پر کا سڑک اور مغرب کے 100 میٹر کی بڑھ گاڑی (B) نقطہ 0 کے سے رفتار	(18) نوے درجے سڑکوں ایک جنوب سے ہے۔ گاڑی (A) نقطہ 0 مشرقی سے اور شمال جانب 20m/s کی

رہی	ہے۔	کریں	کہ 't' وقت
(a)	ظاہر	انکا	باہمی
کے	بعد		
فاصلہ 'd' ہو گا۔			
(b)	ظاہر	کریں	کہ
باسکی	تحقیق	کے	نتیجہ
میں			
(c)	ظاہر	کریں	کہ
دونوں	گاڑیوں	کا	کم
سے	کم	ہے	فاصلہ
$10\sqrt{2}$	میٹر		
(19) نوے	درجے	پہ	قائم
دو	سڑکوں	کا	نقطہ '0' انقطاع
ہے؛	ایک	سڑک	شمال
سے	جنوب	اور	دوسری
مشرک	سے	مغرب	کی
جانب	ہے۔ دونوں	موٹر	بائیک
A اور B	کے	درمیان	کم
سے	کم	فاصلہ	معلوم
کریں	جو	کہ	ابتدائی
طور	پہ	نقطہ '0' کی	جانب
مندرجہ	ذیل	صورتوں	میں
گامزن	ہیں		
(a)	دونوں	موٹر بائیک '0' سے	10
میٹر	کے	فاصلہ	پہیں
A	20m/s	اور	B
10m/s	سے سفر	کر	رہا
ہے			
A(b)	'0' سے	120	میٹر
کے	فاصلہ	پہ	اور
اسکی	رفتار	20m/s	ہے
جبکہ	'0', B	سے	80
میٹر	پہ	ہے اور	اسکی
رفتار	10m/s	ہے۔	
A(c)	'0' سے	120	میٹر
کے	فاصلہ	پہ	اور
اسکی	رفتار	20m/s	جبکہ
'0', B	سے	60	پہ
ہے اور	اسکی	رفتار	10m/s
			ہے۔

$24 + 8x + x^2$	اور	(a)	$2 - 4x - x^2$
صورت	مربع	کامل	کو
	کریں۔	ظاہر	میں
مساوات	کہ	ظاہر	(b)
$24 + 8x + x^2$	کریں		$y = 2 - 4x - x^2$
دوسرے	اور	ترسیات	کے
کرتے	ایک	منقطع	کو
	نہیں		ہیں۔
کے	مثال	ایک	(c)
کہ	کریں	ظاہر	ڈالے
$y = B - (x - b)^2$	اور		$y = A - (x - a)^2$
ذریعے	کے	مساوات	جیسی
جاسکتا	کیا	معلوم	ترسیم
دوسرے	ایک	جو کہ	ہے
کرتے	نہیں	منقطع	کو
			ہیں۔
نکدنگا	"ریا	ایک	(21)
مقامات	مختلف	"	فرم
جمع	ڈبے	دھاتی	سے
انہیں	اور	ہے	کرتی
واپس	دھات	کر	پیں
چق	کو	کار	صنعت
1	ہفتہ	ہیں۔ ہر	دیتے
سے	ڈبوں	دھاتی	ٹ
ہے۔	ہوتا	منافع	p
			$p = 100 - \frac{1}{2}t^2 - 200$
معلوم	سے	مربع	بیمیل
زیادہ	فرم	کہ	کریں
منافع	کیناہشتوار	زیادہ	سے
اور	ہے	کرتی	حاصل
اور	حاصل	منافع	اتنا
حاصل	منافع	ہفتہ	ہر
لتے	لیے	کے	کرنے
اکٹھا	ڈبے	دھاتی	ٹ
	ہوں	بیچنا	کر کے
گے؟			



## باب 5

### عدم مساوات



باب 6

تفرق





## باب 7

### تفرق کے استعمال

آپ تفریق اور تفاعلات جانی آپ تفریق خاکہ دنیاوی کرنے استعمال جب کمل	میں کہ ہے۔ کے میں کہ کی حقیقی حل کیسے ہے۔ کو	کیا کیسے	باب سیکھا اقسام باب گئے ترسیمات اور کو لیے جاتا	معنی تفریق	گزشتہ نے کا کی کی ہے۔ اس دیکھیں کو نگاری معمول کے کیا آپ کریں
چاہیے۔	باب آپکو	اس تو	اس تو	اس تو	اس تو
سمجھنا کا ہوتا	کو تفاعل تفاعل	بات کسی بھی	بات کسی بھی	اس کہ تفرق ہے	اس کہ تفرق ہے
ضرر اہمیت کرنہ۔	اور کی دانی	منفی تفرقات قدر	منفی تفرقات قدر	منفی تفرقات قدر	منفی تفرقات قدر

• زیادہ کم کو کی	سے سے ترسیم قابل	زیادہ کم پ ہونا	اور نقطوں بٹھانے
• اس کہ تشریح دوسرے کی سکتے	ہات آپ ایک کے شرح ہیں۔	کو تفریق متغیرہ متعلق سے	جاننا کسی میں تبدیلی کر
• تفریق کی ہونا	کے علامت	لیے سے	$\frac{dy}{dx}$ واقف
• ان حقیقی حل استعمال ہونا۔	طریقہ دنیاوی کرنے کرنے	کاروں معمول کے کے	کو کو لیے قابل

## 7.1 تفرقات بہ صورت تفاعلات

باب کر	6 میں کے	آپ	متعدد کو	جب تو میں تفریق گیا 6 5 تفاعل کے کے مماسہ بارے کے تھا۔ وہ جنہیں آپ
سے تھا۔ الف میں	متعارف مثلاً کے آپ	کی	کروایا مشق سوال سے ترسیم	
$f(X) = x^2 - 2$	نقطوں ڈھلوان اندازہ پاچھا 7.1 موجود کرنے		پ کے لگانے گیا میں ہیں کی	
مختلف کے میں لیے جدول نتائج حاصل سے	توقع	تھی۔		

اس	سے	ظاہر	ہوتا	ہے
کہ	مما سے	کا	ہو	ڈھلوان
بھی		$x$		کا
تفاعل	ہے۔	$2x$	جو	کہ
قاعدہ		ہے۔	باب	میں
دیا	گیا			6
میں	اسی	قاعدے		کو
متفرق	کہا	گیا		ہے۔ لیکن
جب	آپ	اسکی		قیمت
کو	کسی	مخصوص		$x$
کے	لیے	استعمال		کرنے
کے	بجائے	اسے		ایک
تفاعل	خیال	کر		رہے
ہوتے	ہیں،	تو		بعض
اوقات	اسے	مشتق		تفاعل
کہا	جاتا	ہے۔		اسے
$f'(x)$	سے	ظاہر	اس	کیا
جاتا	ہے۔	اور		مثال
میں	یہ	$f'(x) = 2x$		ہے۔
مزید	برآں	جس		طرح
آپ	تفاعل	$f(x)$		کی
ترسیم	سازی	کر		سکتے
ہیں۔	اسی	طرح		مشتق
تفاعل	$f'(x)$	کی		ترسیم
سازی	بھی	ممکن		ہوتی
ہے۔	انہی	دو		ترسیمات
کو	صفحے	ایک		دوسرے
کے	اوپر	ایک		قطار
میں	دکھانا	بہت		دلچسپ
معلوم	ہوتا	ہے۔		جس
طرح	سے	سورت		7.2
میں	دکھایا	گیا		ہے۔
ترسیم	کے	بائیں		جانب
جہاں	$x < 0$	ہے		$f'(x)$
کا	ترسیم	$x$		
کے	محور	سے		نیچے
موجود	ہے۔	جو		ظاہر
کرتا	ہے	کہ		$f(x)$

کا  
دائیں  
 $f(x)$   
وہاں  
 $x$   
اوپر

ڈھلاوان  
جانب  
کا  
 $f'(x)$   
موجود

منفی  
جہاں  
ثبت  
کا  
محور

ہے۔  
ڈھلاوان  
ہے،  
ترسیم  
کے

ہے۔

جو  
بارے  
وہ  
کی  
سکتے

آپ  
میں  
آپ  
صورت  
ہیں۔؛

تفریق  
جانتے  
مشتق  
میں

کت  
ہیں  
تفاعل  
لکھ

اگر  
 $n$   
تو  
 $f'(x) = nx^{n-1}$   
 $f(x) + g(x)$   
 $f'(x) + g'(x)$   
 $cf(x)$   
جہاں  
 $cf'(x)$ ، ہے

$f(x) = x^n$   
ناطق  
اسکا  
ہوگا  
کا  
ہوگا۔  
گا  
 $c$   
ہوگا۔

ہو،  
عدد  
مشتق  
مشتق  
مشتق  
 $c$

جہاں  
ہو  
تفاعل  
تفاعل  
تفاعل  
مستقل

مثال  
کا  
کریں۔ اوپر  
کے  
ہوتا  
گئے  
تفاعل  
3-7  
تفاعل  
تفاعل  
شکل  
بتائی  
بعض  
ہیں،  
 $f(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^3$   
ڈھلاوان

مشتق  
بتائے  
استعمال  
ہے  
تفاعل  
 $f'(x) = 2x - x^2$   
؟؟  
 $f(x)$   
 $f'(x)$   
شکل  
گی  
نقات  
جب  
منفی

7.1: مساوات

تفاعل  
گئے  
سے  
کہ  
کا  
ہے۔  
میں  
اور  
کی  
7.3  
ہیں۔  
غور  
 $x < 0$   
ترسیمات  
ہے،

$f(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^3$

معلوم  
نتائج  
معلوم  
پوچھے  
مشتق  
مثال  
موجود  
مشتق  
ترسیمات  
میں  
یہاں  
طلب  
تفاعل  
کی  
اور

مشتق	تفاعل	$f'(x)$	کی
قیمتیں	بھی	منفی	ہیں۔
جب	$x = 0$	،	$f(x)$
کا	ڈھلوان	0	
ہے،	اور	$f'(0)$	کی
قیمت	بھی	صفر	ہے۔
$x = 0$	اور	$x = 2$	کے
درمیان	$f(x)$	کا	ڈھلوان
مثبت	ہے	اور	$f'(x)$
کا	بھی	مثبت	ہے۔
جب	$x = 2$	،	$f(x)$
کا	ڈھلوان	0	
ہے،	اور	$-f'(2) = 0$	جب
$x > 2$	$f(x)$	کا	ڈھلوان
منفی	ہے،	اور	مشتق
تفاعل	منفی	کی	قیمتیں
بھی		ہیں۔	□

سوال	1:	مندرجہ
ذیل	میں	سے
ہر	کے	لیے
تفاعل	اور	مشتق
تفاعل	کی	ترسیمات
بنائیں۔	ان	ترسیمات
کا	کریں۔	
موازنہ		

$$f(x) = x^2 + 4x \quad \text{ج.}$$

$$f(x) = x^2 \quad \text{ب.}$$

$$f(x) = 4x \quad \text{ا.}$$

$$f(x) = 3x^2 - 6x \quad \text{د.}$$

$$f(x) = 5 - x^2 \quad \text{ب.}$$

$$f(x) = 3 - 2x \quad \text{ا.}$$

مندرجہ	سوال	2:
سے	ذیل	میں
لیے	ہر	کے
مشتق	تفاعل	اور
ترسیمات	تفاعل	کی
کا	بنائیں	ترسیمات
	موازنہ	کریں

$$f(x) = \sqrt{x} \quad x \geq 0 \quad \text{ا.}$$

$$f(x) = x^4 \quad \text{ب.} \quad f(x) = (2+x)(4-x) \quad \text{ج.}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad x \neq 0 \quad \text{د.}$$

$$f(x) = x^2(x-2) \quad \text{ه.}$$

$$f(x) = (x+3)^2 \quad \text{و.}$$

سوال

دی

مشق

کو

$$y = f(x)$$

بنائیں۔

3:

میں

$$y = f'(x)$$

ترسیم

ہے۔

ترسیم

حصے

سوال

ہر

شکل

کی

کرتی

ممکنہ

کے

گی

تفاعل

ظاہر

کی

## 7.2 بڑھتے ہوئے اور گھٹتے ہوئے تفاعلات

تفاعل

اس

تفاعلات

دائرہ

(مسلل)

میں

شامل

تک

لیکن

چیسے

حصہ

جو کہ

اعداد

ہیں

ترسیم

شکل

دکھایا

موجود

لے

مراد

وہ

اپنے

استثاری

اس

تفاعلات

ابھی

ہیں،

تفاعلات

کسری

ہیں

حقیقی

وضع

کی

کہ

میں

چکولے

سے

آپ

کا

جیسا

کے

لفظ

میں

جو

میں

ہیں۔

تمام

جو

چکے

میں

نہیں

ثبت

لے

ان

7.4

ہے،

آسانی

کے

باب

ہیں

کار

ہوتے

وہ

ہیں

دیکھ

اس

x

شامل

تمام

کے

لیکن

میں

شکل

گیا

ہیں۔

اسکی

کرنے

اس

کو

وضع

آپ

ترسیم

سے

لے

کسی

مساوات

کے

تصور	کو	جسکے	مطابق
کسی	تفاعل	کا	متفرق
بھی	تفاعل	ہوتا	ہے،
استعمال	کر	سکتے	ہیں۔

اگر	آپ	خط	منحنی	پہ
بائیں	سے	دائیں	جانب	جانب
آگے	کو	بڑھ	رہے	رہے
ہوں	اور	جیسے	بی	گزر
آپ	$x = 3$	سے	ثابت	ہو
چکیں،	ڈھلوان	اور	توس	بلند
جانے	گا	گاتاہم	کے	جتنا
ہونے	لگے			قریب
آپ	$x = 3$			
ہوں	گے،			
کی	قیمت			
بڑی	ہوگی۔			
پس	آپ	کہہ	سکتے	ہیں
کہ	تفاعل	$f(x)$		$x \geq 3$ ،
کے	لیے	بڑھتا		ہوا
ہے،	اسی	طرح		$x \leq 3$ کے
لیے	گھٹتا	ہوا		ہے۔
آپ	مثال	مثال 7.2.1	کسی	میں
موجود	توجیہ	کو	لیے	بھی
تفاعل	کے		ہیں۔	استعمال
کر	سکتے			صورت
شکل 7.6	تفاعل	$y = f(x)$		کی
ترسیم	کو	ظاہر		کرتی
ہیں۔	جس	کا		متفرق
وقفہ	$p \leq x \leq q$	میں		ثابت
ہے۔	آپ	دیکھ		سکتے
ہیں	کہ			
کی	بڑی	قیمتیں		$x$
کی	بڑی	قیمتوں		کے
ساتھ	منسلک	ہیں۔		بعینہ
طور	پر	اگر		اور
$x_2$	وقفہ	$p \leq x \leq q$		میں
$x$		دو		قیمتیں
ہوں	اور	اگر		$x_2 > x_1$
ہو	تو	$f(x_2) > f(x_1)$		ہوگا۔
اس	خصوصیت	کے		حامل
تفاعل	کو	وقفہ		$p \leq x \leq q$



پہلے	سے	بڑھتا	ہوا	کہا
جاتا	ہے۔	اگر		$f'(x)$
منفی	ہو	،		وقفہ
$p \leq x \leq q$	میں	جیسا		کہ
صورت	شکل 7.7	میں		ہے،
تو	تفاعل	کی		خصوصیت
برعکس	ہوگی؛	اگر		$x_2 > x_1$
ہو	تو،	$f(x_2) < f(x_1)$		ہوگا۔ اس
خصوصیت	کے	حامل		تفاعل
کو	وقفہ	$p \leq x \leq q$		پہ
گھٹتا	ہوا	کہا		جاتا
ہے۔	اگر $f'(x) > 0$ ہو	وقفہ		$p \leq x \leq q$
میں	تو	$f(x)$		وقفہ
$p \leq x \leq q$	میں	بڑھتا		ہوا
ہوگا۔	اگر	$f'(x) < 0$		ہو
وقفہ	$p < x < q$	میں		،
تو	$f(x)$	وقفہ		$p \leq x \leq q$
میں	گھٹتا	ہوا		ہوگا۔

اس	بات	کو	دھیان	میں
رکھیں	کہ	تفاعل		$f(x)$
کو	وقفہ	$p \leq x \leq q$		میں
بڑھتا	ہوا	ہونے		کے
لیے	مشتق	تفاعل		$f'(x)$
کے	ڈھلوان	کا		وقفہ
کے	خاتمے	پہ		جہاں
$x = p$ یا	$x = q$ ہے،	مثبت		ہونا
لازمی	ہے،	ان		نقطوں
پہ	یہ	صفر		بالکل
غیر	واضح	ہوگا۔		یہ
شاید	ایک	خفیف		تفاوت
لگے	لیکن	اسکے		بہت
اہم	نتائج	ہیں۔		یہ
صرف	استمراری	تفاعلات		کے
ساتھ	کام	کرنے		کے
ذیلے	کا	انجام		تھا۔

وقفہ	کا	لفظ	صرف	قیوتوں
$x$		کی	ان	

کے	لیے	استعمال	نہیں
ہوتا	جو کہ	محدود	انتہاؤں
کے	درمیان	ہوتی	ہیں۔
بلکہ		$x$	کی
ان	قیمتوں	کے	لیے
بھی	استعمال	ہوتا	ہے،
جو	عدم	مساواتوں	$x > p$
یا	$x < q$	کو	باور
کرواتی	ہیں۔		

مثال	7.3:	تفاعل
$f(x) = x^4 - 4x^3$	کے	لیے
معلوم	کریں،	وہ
جس	میں	$f(x)$
ہوا	ہو،	وہ
جس	میں	گھٹتا

شروع	کرتے	ہیں	$f'(x)$
کو	اجزائے	ضروری	میں
بیان	کرتے	ہوئے	،
جیسے		$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$	جیسا
کہ		ہمیشہ	مثبت
ہے، (صرف $x = 0$ )	کے	علاوہ)	یہ
معلوم	کرنے	کے	لیے
کہ	کس	جگہ $f'(x) > 0$	ہے۔۔
آپ	کو	عمل	مساوات
$x - 3 > 0$	کا	حل	$x > 3$
ہے؛	لیکن	یہ	معلوم
کرنے	کے	لیے	کہ
کہاں	$f'(x) < 0$	ہے،	آپ
کو	$x = 0$	کو	خارج
کرنا	پرے	گا	تاکہ
$f'(x) < 0$	ہو۔	اگر	$x < 0$
یا	$0 < x < 3$	ہو۔	اس
لیے	$f(x)$	وقفہ	$x \leq 3$
اور	وقفہ	$0 \leq x \leq 3$	میں
گھٹتا	ہوا	ہے۔	

تاہم	پچھلے	دو	وقفوں
میں	$x = 0$	کی	قیمت

مشتک	ہے۔	اس	طرح
آپ	ان	کو	بی
وقفے	$x \leq 3$	میں	کیجا
کر	سکتے	ہیں۔	سے
$f(x)$	نتیجہ	نکلتا	کہ
گھٹتا	وقفہ	$x \leq 3$	میں
	ہوا	ہے۔	□

اس	بات	کو	نظر
رکھیں	کہ	$f'(x) = 0$	ہے
جب	$x = 0$	اور	$x = 3$
ہیں۔	آپ	صورت	شکل 7.8
میں	دکھائی	گی	$y = f(x)$
کی	ترسیمہ	سے	ان
تمام	خصوصیات	کی	پڑتال
کر	سکتے	ہیں۔ مثال	مثال 7.2.2
سے	ظاہر	ہوتا	کہ،
اوپر	دہے	گئے	اصول
(	جو	کہ	$f'(x)$
کی	علامت	کو	$f(x)$
کی	خصوصیت	سے	جو کہ
بڑھتا	ہوا	یا	ہوا
ہے	ہے،	جو	دیتا
(ہے۔)	کو	ذرا	کشادہ
کیا	جا	سکتا	ہے۔

اگر	$f'(x) > 0$	ہو	وقفہ
$p < x < q$	میں	سوائے	ان
علیحدہ	نقطوں	پہ	جہاں
$f'(x) = 0$	ہے۔ تو	$f(x)$	وقفہ
$p \leq x \leq q$	میں	بڑھتا	ہوا
ہوگا۔	اگر	$f'(x) < 0$	ہو
وقفہ	$p < x < q$	میں	سوائے
ان	علیحدہ	نقطوں	پہ
جہاں	$f'(x) = 0$	،	تو
$f(x)$	وقفہ	$p \leq x \leq q$	میں
گھٹتا	ہوا	ہوگا۔	

اگلی کے جس کی ہے۔)۔ اوقات ہیں کچھ منفی ہوتے مثال معلوم کام

مثال بارے میں طاقت  $x < 0$  کمزور مشکلات کیونکہ

اس میں  $x$  شامل ہے بعض کرتی میں  $x$  وضع اس جزر الکعب مشکل

اس میں  $x$  طاقتیں پیدا ان غیر لیکن صرف کوئی ہے۔

مثال وقتوں جن بڑھتا میں

کو میں ہوا گھٹتا

7.4: معلوم

ان کریں  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(1-x)$  جن اور ہو۔

تفاعل ہو،

تفریق تفاعل طرح

کرنے  $f(x)$  لکھیں۔

کے کو

لیے اس

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}$$

تاکہ

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$$

جس بھی

کو لکھ

آپ

اس

طرح ہیں۔

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(2-5x)$$

اس  $x^{-\frac{1}{3}}$  مثبت اور  $2-5x-x < 0$

آکری ہوگا منفی جزر ضربی

فقرے جب ہوگا

مچت

میں  $x > 0$  جب ہوگا

جب منفی	$x < 0.4$ ہوگا	جب	ہو	اور	$x > 0.4$
صورت ہوتا	شکل 7.9 ہے	سے	کہ؛	ظاہر	$f(x)$
وقفہ ہوا	$0 \leq x \leq 0.4$ ہے۔	میں		بڑھتا	
$f(x)$	وقفہ	$x \geq 0$	گھٹتا	اور	
$x \geq 0.4$ ہے۔	میں			ہوا	

□

## 7.3 زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم نقطے

مثال	مثال 7.2.1 سے	ظاہر	ہوا
کہ	تفاعل $f(x) = x^2 - 6x + 4$		$x \leq 3$ ،
کے	لیے	گھٹتا	ہوا
ہے،	اور	$x \geq 3$	کے
لیے	بڑھتا	ہوا	ہے۔ بڑھتے
ہوئے	اور	گھٹتے	ہوئے
تفاعلات	کی	تعریف	سے
معلوم	ہوتا	ہے	اگر
$x_1 < 3$	ہو	تو	$f(x_1) > f(3)$
ہوگا۔	اور	یہ	اگر
$x_2 > 3$	ہو	تو	$-f(x_2) > f(3)$
یعنی	$x$	کے	کی
3		علاوہ	ہر
قیمت	کے	لیے	تفاعل،
$f(3) = -5$	سے	بڑا	ہوگا۔
آپ	کہہ	سکتے	ہیں
کہ	$f(3)$	$f(x)$	کی
کم	سے	کم	ہے
اور	یہ	کہ	$y = f(x)(5-3)$
کی	ترسیمہ	کا	سے
کم	نقطہ	ہے۔	

ضروری سے	کم سب بلکہ جوار ہوتا	نہیں	نقطہ سے یہ میں ہے۔	کہ کل کمر اپنے سے	کم ترسیم نقطہ قرب کمر
صورت سے نقطہ حقیقت ہے $x < 1$ کے، جب	ایک ہے؛	شکل 7.9 سے	کم یہ	میں سے بات	$(0, 0)$ کم اس ہوتی ہے، عدد $x = 0$ $f(x) < 0$
یہ کی ہے؛ شکل 7.10 گیا کا، اگر ہو موجود ہو، ہر $q$ زیادہ ہوگا، $x$ کے $q$ نقطہ سے زیادہ چنانچہ کا	ایک طرف جو میں ہے۔ $x = q$ کم ایسا جس قیمت سے اگر لیے $(q, f(q))$ کم زیادہ مثال کم	وضاحت رہنمائی کہ ظاہر تفاعل پر نقطہ وقفہ میں $x$ کے۔ کی کے لیے زیادہ وقتے ہر سوائے کو یا کہا میں 7.2.3 کم	وضاحت رہنمائی کہ ظاہر تفاعل پر نقطہ وقفہ میں $x$ کے۔ کی کے لیے زیادہ وقتے ہر سوائے کو یا کہا میں 7.2.3 کم	وضاحت رہنمائی کہ ظاہر تفاعل پر نقطہ وقفہ میں $x$ کے۔ کی کے لیے زیادہ وقتے ہر سوائے کو یا کہا میں 7.2.3 کم	(تاریف) کرتا صورت کیا $f(x)$ کم ہوگا، $p < x < r$ $q$ $f(x) > f(q)$ کی سوائے کا نقطہ میں قیمت $f(x) > f(q)$ ہو۔ کم زیادہ جاتا $f(x)$ نقطہ

دھیان	رہے	اگرچہ	شکل
7.8	میں	ایک	اور
نقطہ	بھی	ہے	جہاں
ڈھلوان	صفر	ہے	جو
کہ	نو	کم	سے
نقطہ	ہے	زیادہ	سے
زیادہ۔ مثلاً	نقطہ	ترسیہ	پر
وہ	نقطہ	جہاں	ڈھلوان

صفر کہلاتا اس کرنی نقطہ زیادہ ہو سکتا میں نہیں  
 ہو ہے۔ 7.8 حقیقت ہیں کم سے ہے سے ہو  
 ساکن اسی اور کو کہ کم زیادہ یا کوئی  
 نقطہ طرح 7.9 واضح ساکن یا نقطہ دونوں بھی

کم سے کم زیادہ فیصلہ طریقہ علامت دونوں ہے۔ شکل ترسیمات کرنا دوبارہ ہو  
 سے زیادہ کرنے ڈھلوان کو طرف تفصیلات کی آپ سے  
 کم اور نقطے کا  $f'(x)$  معلوم کے 7.10 طرف کے مددگار  
 زیادہ میں ایک کسی کے کرنا لیے رجوع لیے ثابت

اگر  $p < x < q$  ہو تو سے  
 $f'(x) < 0$  میں وقفہ  $(q, f(q))$  کم  
 ہو، اور  $q < x < r$  ایک نقطہ  
 وقفہ  $f'(x) > 0$  میں

اگر  $q < x < r$  زیادہ  
 $f'(x) > 0$  میں ایک نقطہ  
 ہو، وقفہ ہو، زیادہ ہوگا۔

آپ بنا کرتے ہوں  
 ترسیمات پر ہوئے گے،  
 اس لیکن  
 کی شائد یہ  
 شہادت کی قبول خوش ان



بیانات ہو	سکتا	ہے	بھی	ثابت کا
سامنا	آپ	چکا	سے	پہلے
ہی	ہو			ہے۔
فرض	کریں		$x_1$	وقفہ
$p < x < q$	میں		ایک	عدد
ہے، تو،	(چونکہ)		$f'(x) > 0$	ہے اس
وقفہ	میں،		ضمن	7.2
سے	معلوم		ہوتا	ہے
کہ	$f(x_1) > f(q)$		ہوگا۔	
اب	فرض		کریں،	$x_2$
وقفہ	$q < x < r$		میں	ایک
عدد	ہے چونکہ		اس	وقفہ
میں	$f'(x) > 0$ ہے، $f(q) < f(x_2)$ ہوگا۔			
اس	سے		یہ	ظاہر
ہوتا	ہے		کہ	
$x$			وقفہ	$p < x < r$
میں			$q$	کے
علاوہ	کوئی		بھی	عدد
ہو	تو		$p < x < r$	ہوگا۔
تعریف	کے		مطابق	اس
کا	مطلب		ہے کہ	$f(x)$
کا	کم		سے	نقطہ
$x = q$	پر		ہے۔	
ان	تمام		نتائج	ایک
طریقہ	کار		کی	شکل
میں	جمع		جا	سکتا
ہے۔				
مساوات	$y = f(x)$		کی	ترسیم
پر	کم		کم	اور
زیادہ	سے		نقطوں	کو
معلوم	کرنے		کے	لیے؛
ا. وہ	دائرہ		کار	طے
کریں	جس		سے	آپ
کو	سروکار		ہو۔	

ب. $f'(x)$ ریاضیاتی	کے بیان	لیے معلوم	ایک کریں
ج. دائرہ ان قیمتوں جن پر یا غیر	کار کو کے تو واضح	$x$ میں درج لیے صفر ہو۔	موجود کی کریں $f'(x)$ یا
د. ان کی ہر باری کے اور $f'(x)$ کریں۔	تمام قیمتوں ایک لیتے قریب بائیں کی	$x$ میں کو ہوئے، اسی ترین وقفوں علامت	سے باری قیمت دائیں میں معلوم
ه. گر ترتیب ہوں ہاں نقطہ مثبت ہوں زیادہ بدل اور تو کوئی	یہ منفی تو کم ہوگا۔ اور تو نقطہ نہ ایک دونوں بھی	علائقہ اور ترتیب سے اگر پھر زیادہ ہوگا۔ اگر رہی جیسی میں نہیں	علی مثبت کے کم منفی سے علائقہ ہوں ہوں سے ہوگا۔
و. قیمت کہ زیادہ $f(x)$	$x$ کے کم سے معلوم	کی لیے کم زیادہ کریں۔	ہر جو یا ہے
مثال $y = \sqrt{x} + \frac{4}{x}$	کی	7.5: ترتیب	مساوات پر

کم معلوم	سے کریں۔	--	کم فرض کریں	نقطہ
$y = f(x) = \sqrt{x} + \frac{4}{x}$				
درجہ	الف--		جیسا	کہ
$\sqrt{x}$	،		$x \geq 0$	کے
لیے	وضع		ہے،	لیکن
$\frac{1}{x}$	$x = 0$		کے	لیے
غیر	وضع		ہے۔	اس
لیے	سب		سے	بڑا
ممکنہ	دائرہ		کار	$f(x)$
کے	لیے		ثبت	حقیقی
اعداد	ہوگا۔		درجہ	ب-- متفرق
$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 4x^{-2}$		اس	طرح	بھی
لکھا	جا	سکتا	ہے	چیسے
$f'(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}} - 8}{2x^2}$		درجہ	ج--	متفرق
تمام	حقیقی		اعداد	کے
لیے	واضح		ہے	جب
$x^{\frac{3}{2}} = 8$	ہو		تو	صفر
ہے	دونوں		اطراف	کو
طاقت	$\frac{2}{3}$		تک	اٹھانے
اور	طاقت		در	طاقت
کے	اصول		کو	استعمال
کرنے	کے	بعد		$-x = (x^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}} = 4$
--	درجہ	د--	تو	$0 < x < 4$ اگر
ہو	،		کسر	کے
نیچے	والا		فقہہ	$2x^2$
ثبت	ہوگا، اور			$x^{\frac{3}{2}} - 8 < 4^{\frac{3}{2}} - 8 = 8 - 8 = 0$
ہوگا، نتیجہً	$f'(x) < 0$		ہوگا۔	اگر
$xg4$	ہو		تو	$2x^2$
برابر	چمکت		ہی	رہے
گا،	لیکن			ہوگا،
اور	نتیجہً			ہوگا۔
درجہ	علامت		--	$f'(x)$
کی			4	
کے	بائیں		جانب	منفی
ہے	اور		دائیں	جانب
ثبت	،		اس طرح	تفاعل

کا  $x = 4$  سے کم ہوگا۔  $f(4) = \sqrt{4} + \frac{4}{4} = 2 + 1 = 3$  نکال  $(4, 3)$  □

نقطہ ی۔۔ کرنے نقطہ ہے۔

کم سے کم درجہ حساب کم آتا

اگر شمار استعمال کو کے جس بنا گئے لیں کم کم ارد گرد یہ بہت کہ ٹھیک

آپ کتنہ کر  $y = \sqrt{x}$  ساتھ سے ہے، گا۔ گے سے بہت بتانا مشکل کم کہاں

کے ہو پاس تو کے اور اکٹھے یہ بہت آپ کہ کم نقطے ہموار آنکھوں کام واقع

ترسیم اسے  $y = f(x)$   $y = \frac{4}{x}$  دکھانا تفاعل دلچسپ جان  $y = f(x)$  کے ہے۔ سے ہوگا نقطہ ہے۔

اس میں نظریہ کی کے راستہ 7.3.1 جیکا ہے، سعت

بات رکھیے آپکو سعت لیے، فراہم کے دائرہ  $y \geq 3$

کو بعض معلوم کوئی کرتا تفاعل کار ہوگی۔

دھیان یہ تفاعلات کرنے اور ہے۔ مثال کی  $xg0$

سوال ذیل کا اور کریں برہتا

ہر متفرق وہ جس ہوا

1: تفاعل  $f(x)$  معلوم وقفہ میں ہو۔

مندرجہ  $f(x)$  کریں، معلوم  $f(x)$

ا.  $x^2 - 5x + 6$  ۔  $5x - \frac{3x^2}{7}$  ۔  $2$

ب.  $x^2 + 6x - 4$

ج.  $7 - 3x - x^2$  ۔  $3x - 5x^2$  ۔  $(f)7 - 4x - 3x^2$

سوال  
ذیل  
سے  
 $f'(x)$   
وہ  
جس  
ہوا

تفاعلات  
معلوم  
وقفہ  
میں  
ہو۔

2:  
 $f(x)$   
کا  
کریں  
معلوم  
 $f(x)$

مندرجہ  
میں  
متفرق  
اور  
کریں  
گھٹتا

ا.  $x^2 + 4x - 9$  ۔  $5 - 3x + x^2$  ۔  $4 + 7x - 2x^2$  ۔

ب.  $x^2 - 3x - 5$  ۔  $2x^2 - 8x + 7$  ۔  $3 - 5x - 7x^2$  ۔

مندرجہ  
میں  
متفرق  
اور  
معلوم  
 $f(x)$   
میں  
صحیح

سوال  
ذیل  
سے  
 $f'(x)$   
کوئی  
کریں،  
گھٹتا

تفاعلات  
معلوم  
سا  
جس  
ہوا

3:  
 $f(x)$   
کا  
کریں،  
وقفہ  
میں  
ہو۔ جز (و)  
عدد

نہ۔

ا.  $x^3 - 12x$  ۔  $x^3 - \frac{3x^2}{4} + 3x + 3x - x^3$  ۔

ب.  $2x^3 - 18x + 5$  ۔  $x^4 - 2x^2$  ۔  $2x^5 - \frac{5x^4}{10} + 7$  ۔

ج.  $2x^3 - 9x^2 - 24x + 7$  ۔  $x^4 + 4x^3$  ۔  $3x + x^3$  ۔

مندرجہ ذیل کا اور کریں بڑھتا	سوال	4:	مندرجہ
متفرق ہر وہ جس ہوا	تفاعل $f(x)$ معلوم وقفہ میں ہو۔	$f(x)$ کریں معلوم $f(x)$	

ا.  $x^3 - 27x \text{ for } x \geq 0$  د.  $12x - 2x^3$  ز.  $36x^2 - 2x^4$

ب.  $2x^3 + 3x^2 - 36x - 5$  ہ.  $2x^3 + 3x^2 - 36x - 5$  ح.  $2x^5 - 5x$

ج.  $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$  و.  $3x^4 - 20x^3 + 12$  ط.  $x^n - nx (n > 1)$

مندرجہ ذیل سے	سوال	تفاعلات	ایک	مندرجہ ذیل
متفرق کریں، معلوم $f(x)$ وہ بڑھتا	تفاعل اور کریں گھٹتا وقفہ میں بڑھتا	$f(x)$ وہ جن ہو جن ہو	ایک	$f(x)$ کا معلوم وقفہ میں ہو۔ اور میں ہو۔

ا.  $x^{\frac{3}{2}}(x-1)$  ج.  $x^{\frac{2}{3}}(x+2)$  ہ.  $x + \frac{3}{x} \text{ for } x \neq 0$

ب.  $x^{\frac{3}{4}} - 2x^{\frac{7}{4}} \text{ for } x > 0$  د.  $x^{\frac{3}{5}}(x^2 - 13)$  و.  $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}, x > 0$

مندرجہ ترسیات ایک	سوال	تفاعلات $f(x)$ سے	کی
ساکن کے معلوم	ذیل میں کے	لے	ہر
ب. دلیل	نقطوں ب. دلیل	آپا	یہ
محدود	ساتھ	بنا	سے
کریں	دیں	کہ	یا

کم	سے	میکمیل	مربع	د. ان	قیمتوں
کم	نقطہ	کے	قاعدے	کی	سعت
ہے۔		کو	استعمال	بیان	کریں
		کر	کے	جن	قیمتوں
ج. اس	معلوم	اپنے	جواب	کو	تفاعل
کرنے	کے	کی	پڑتال	لے	سکتا
لیے	،	کریں	ہے۔		

ا.  $x^2 - 8x + 4$  ج.  $5x^2 + 6x + 2$  د.  $x^2 + 6x + 9$

ب.  $3x^2 + 12x + 5$  د.  $4 - 6x - x^2$  و.  $1 - 4x - 4x^2$

مندرجہ	سوال	تفاعلات	7:
ترسیمات	ذیل	ساکن	کی
کے	پر	نقطے	نقطوں
کریں،	ہم	معلوم	معلوم
کہ	آیا	نقاط	کریں
زیادہ	نقاط	ہیں	سے
سے	کم	نقاط	کم
		ہیں	
ا. $2x^3 + 3x^2 - 72x + 5$	و. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$	یا. $\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}$	

ب.  $x^3 - 3x^2 - 45x + 7$  ز.  $x + \frac{1}{x}$  یب.  $x^{\frac{1}{3}}(4 - x)$

ج.  $3x^4 - 8x^3 + 6x^2$  ح.  $x^2 + \frac{54}{x}$  ج.  $x^{\frac{1}{5}}(x + 6)$

د.  $3x^5 - 20x^3 + 1$  ط.  $x - \frac{1}{x}$  ید.  $x^4 - 8x^2$

ه.  $2x + x^2 - 4x^3$  ی.  $x - \sqrt{x}, for x > 0$  یہ.  $x^2 - \frac{16}{x} + 5$

تفاعلات	سوال	8:	ان
کریں،	کی	سعتیں	معلوم
بڑے	جو کہ	سب	سے
واضع	مکانہ	دائرہ کاروں	میں
	ہوں		

ج.  $x + \frac{1}{x}$

ب.  $x^4 - 8x^2$

ا.  $x^2 + x + 1$

## 7.4 متفرقات، تبدیلی کی شرح کے موافق

تعلق	$y = f(x)$	میں	موجود
$x$	اور		$y$
کی	مقداروں	کو	بسا
اوقات	متغیرات	کہا	جاتا
ہے،	کیونکہ	$x$	کوئی
دائرہ کاروں	میں	موجود	اور
بھی	عدد	ہوتا	موجود
$y$	بھی	سعت	سکتا
کوئی	جب	آپ	ترسیم
ہے۔	ہیں	کے	$x$
بناتے	قیمتوں	ہوتے	چناؤ
کی	آزاد		ہیں۔
میں	پھر	وضع	کی
اور	کو		کرتے
قیمتوں	اس	لیے	$x$
ہیں۔	آزاد	اور	$y$
کو	تایع	متغیرہ	جاتا
کو		کہا	
ہے۔			
طبعی	تغیرات	بسا	اوقات
کو	یا	معاشی	مقداروں
پھر	ظاہر	ہیں	اور
استعمال	دیگر	حروف	کو
مقداروں	کرنا،	جو کہ	ان
بتاتے	کے	بارے	میں
لگتا	ہیں،	بہت	معقول
کے	ہے۔	مثلاً	وقت
،	حجم	لیے	
$V$	لیے	کے	لیے
$c$	دائم،	آبادی،	کے



لیے وغیرہ	وغیرہ۔	$p$	اور
یہ وضع کہ کو کیوں گیا۔ عمودی کے استعمال	بات کی حرف گہرائی استعمال حرف سمت لیے ہوتا	بہت جائے کے نہیں میں زیادہ ہے۔	جلد گی، لیے کیا فاصلے تر
تابع ہے، ناپا غوطہ دباؤ جو لگ جوں نیچے بڑھتا گہرائیوں اس جڑے	متغیر جسے جاتا خور محسوس کہ بھگ جوں اترنا جاتا پر مساوات ہوئے	دباؤ، بارس ہے۔ صرف کرتا بار ہوتا غوطہ جاتا ہے۔ متغیرات کے ہوتے	$p$ میں پر ہوائی ہے، کے لیکن خور ہے دباؤ ساحلی تقریباً ذریعے $p = 1 + 0.1z$ ہیں۔
ترسیم ( $z, p$ ) ہے، 7.11 ہے۔ مستقل مساوات مقدار دباؤ کی بڑھ کی تبدیلی	کا ایک جس میں عدد میں ہے ہر لمبائی جاتا گہرائی کی	ہم خط طرح دکھائی 0.1 موجود، جس اضافی کے کے ہے۔ شرح	نقطہ مستقیم شکل گی وہ سے گہرائی لیے دباؤ متعلق ہے۔

اگر	نقطہ	خور	$\delta z$
بمیز	کے	فاصلے	تک
نیچے	اترتا	ہے	دباؤ
$\delta p$ مقدار	تک	بڑھتا	جائے
گا۔	یہ	تبدیلی	شرح
$\frac{\delta p}{\delta z}$ ہے۔	یہ	ترسیمہ	کے
ڈھلوان	سے	ظاہر	کیا
گیا	ہے۔	لیکن	سمندر
کی	گہرائیوں	میں	ترسیمہ
$(z, p)$ مزید	خط	منتظم	نہیں
رہتی،	بلکہ	اسکی	شکل
شکل 7.12	والی	بن	جاتی
ہے۔ مقدار $\frac{\delta p}{\delta z}$	اب، اضافی	گہرائی	$\delta z$ میں
تبدیلی	کی	متوسط	شرح
کو	ظاہر	کرتی	ہے۔
صورت	شکل 7.12	میں	وتر
کا	ڈھلوان	اسی	کو
ظاہر	کرتا	ہے۔	گہرائی
کے	متعلق	دباؤ	کی
تبدیلی	کی	شرح، $\frac{\delta p}{\delta z}$	کی
حد	ہے، (جیسے)	ہی	$\delta z$ صفر
کو	بڑھتا	(ہے)	
تفریق $f'()$ کی	علامت	جیسے	اب
تک	اس	حد	لیے
استعمال	کیا	گیا	ہے،
معیاری	نہیں	ہے،	کیونکہ
اس	میں	$p$	
کا	تکررہ	نہیں	ہے،
ایک	ایسی	علامت	کا
ہونا	ضروری	ہے،	جس
میں	متغیرات	کے	لیے
استعمال	کیے	گئے	دونوں
حروف	موجود	ہیں۔ ایک	متبادل
علامت	$\frac{\delta p}{\delta z}$ وضع	کیا	جاتا
ہے،	جسے	متوسط	شرح
میں	حرف	$\delta$ کو	حد
میں		$d$	سے

بدل جا	کر سکتا	حاصل ہے۔	کیا
باقاعدہ	طور پر،		

$$\frac{dp}{dz} = \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{\delta p}{\delta z}$$

یہاں نہیں	کوئی ہے۔	نیا یہ	تصور صرف میں کی لئے اک کہ استعمال جا کبھی تقابلی میں کو
باب دیے تعریف مختلف	تفرق گئے کو انداز طریقہ	متفرق ایک میں ہے۔	
کا مختلف	فائدہ کے	یہ اسے	ہے کو ملا یا جب میں ان شرح
کر سکتا دو تعلق تبدیلی بیان	متغیرات ہو، کی کرنے	کے	لیے۔

اگر $y$ اور کسی ،	علی تابع تقابلی تو	$x$ ترتیب متغیرات تعلق متفرق،	اور ،
-------------------	--------------------	-------------------------------	-------

$$\frac{dp}{dz} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta p}{\delta z}$$

متغیر کے شرح اگر	$y$ متعلق کی	کی تبدیلی ناپتا	$x$ کی ہے۔

$$y = f(x) \text{ تو } \frac{dy}{dx} = f'(x) \text{ ہوگا۔}$$

ہر کسر	چند لگتا	کہ ہے، فی	ایک $\frac{dy}{dx}$ احوال
--------	----------	-----------	---------------------------

آپ متفق کرنا	کو	اسے	ایک	غیر خیال چار افقی ہو۔
حروف	علامت چاہیے اور	بنایا	جیسا جو ایک	مغنی
لیکیر جو ہیں، نہیں آپ بعض $\frac{dy}{dx}$ پیش علامت ایک	سے وہ رکھتے کو	آپ معلوم	dx اور کوئی (بعد میں کسر ہے۔ اوپر	dy میں، گڑ کہ علامت کی طرح یہ (f' کی اسکا
	اور	فائدہ	ہے)	
اس معنوں جا کے ہوئے آگ منٹ مربع $\frac{dA}{dt}$ اس ہے، مربع کے رنی کی نقطے x کو میٹر تو نقشے کو	علامت میں سکتا طور گھاس لگنے بعد میٹر جس میٹر حساب ہو۔ سطح پر، نقشے سے $\frac{dy}{dx}$ کے	پہرے کے	کو استعمال ہے۔ اگر کا A $m^2$ کو سے فہ سے اگر موجود میدان کے کیا نقطے	وسیع کیا مثال طے رقبہ t تو ناپتا آگ منٹ پھیل زمین کسی میں فاصلے لا جائے پر (درجے)
				ہے۔

دوڑ	،	میں	ایک	تیز
دوڑنے	والی		36	
میٹر	طے	کرنے		کے
بعد،	اپنی	بلند		ترین
رفتار		12		میٹر
فی	سیکنڈ	پر	پہنچ	جاتی
ہے،	اس	فاصلے		تک
،	اسکی	رفتار	طے	کے
سے	فاصلے	کی		جذر
	متناسب	ہے۔		
یہ	ثابت	کریں		کہ
جب	تک	وہ		آخری
رفتار	تک	نہیں		پہنچ
جاتی،	اس	کی	رفتار	میں
فاصلے	سے	متعلق	اسکی	تبدیلی
کی	شرح	،		رفتار
کے	بالعکس	متناسب		ہے۔
فرض	کریں	کہ		$x$
میٹر	دوڑنے	کے		بعد
اسکی	رفتار	$S$		میٹر
فی	سیکنڈ	ہوتی		ہے۔
آپکو	کہا	گیا	ہے	کہ
$36 = x$ میٹر	تک	رفتار		$S = k\sqrt{x}$ ہوگی،
اور	یہ	بھی	کہ	جب
$12 = S$ ہوگا	تو	$x = 36$		ہوگی۔
تو،				
		$12 = k\sqrt{36}$		
جو کہ	$k$	کی		قیمت
دے	گا،			
		$k = \frac{12}{6} = 2$		
لہذا $(x, S)$	کا	تعلق؛		$0 < x < 36$
کے	لیے	$S = 2\sqrt{x}$ ہوگا۔		
فاصلے	سے	متعلق		رفتار
میں	تبدیلی	کی		شرح،
متفرق $\frac{dS}{dx}$ ہوگی،	اور $\sqrt{x}$	کا		متفرق

(حصہ)  
ہے۔

حصہ 6.5

(ے)

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

اس

لیے،

$$\frac{dS}{dx} = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

چونکہ  $\frac{2}{5}$  لکھا

تبدیلی

لیے،

بالعکس

(بجی)

کے

بلند

رکھتی

برقرار

رفتار

نسبت

0

گی،

شکل

کرتی

(چونکہ)

کو

جیسے

بڑھتی

ہوتا

صفر

بلند

پہنچ

$$\sqrt{x} = \frac{S}{2}$$

جا

کی

اسکی

متناسب

(ہوئی)

لیے

ترین

ہے،

رکھتی

میں

تبدیلی

36xg کے

7.13

ہے

تبدیلی

ظاہر

ہی

جائے

جائے

ہوگا۔

ترین

جائے

$$\frac{dS}{dx}$$

سکتا

شرح،

رفتار

ہے۔

دوڑ

وہ

رفتار

تو

ہے،

فاصلے

کی

گر

لیے

کہ

کی

(ہے)

اسکی

گی،

گا، اور

جونہی

رفتار

گی۔

کو

ہے۔

اس

کے

باقی

تک

اپنی

برقرار

رفتار

تو

کی

شرح

جائے

صورت

ظاہر

ڈھلوان

شرح

،

رفتار

چھوٹا

پھر

وہ

پ

□

7.7:

قطار

کوئی

ایک

ہر

لبی

رفتار

مثال

کی

میں

میٹر

مستقل

کاروں

جس

5

ایک

S

کلو میٹر	نی	گھنٹہ	کے
حساب	سے	ایک	کھلی
سڑک	پہ	سفر	ری
ہے۔	کاروں	کی	ہر
جوڑی	کے	درمیان	ایک
تجویز	کردہ	فاصلہ	ہے
جو	کہ	قاعدہ $(0.18S + 0.006S^2)$ میٹر	میں
دیا	گیا	ہے،	سڑک
میں	گنجائش	کے	مطابق
کاروں	کی	تعداد	کو
بڑھانے	کے	لیے	رفتار
کاروں	کو	کس	،
سے	سفر	کرنا	چاہیے؟

فاصلے	کے	قاعدے	کو
$(aS + bS^2)$ کی	شکل	میں	لکھنا،
ایک	اچھا	تصور	ہے،
جہاں	$a = 0.18$ اور	$b = 0.006$ ہیں۔	یہ
ایک	صاف	قاعدہ	دیتا
ہے،	اور	عددی	سروں
کو	قاعدے	میں	تبدیل
کرنے	سے	قاعدے	پہ
پڑنے	والے	اثر	کو
بھی	کھوجنے	کے	قابل
بنانا	ہے۔	لیکن	یہ
یاد	رہے،	جب	آپ
$a$	اور	$b$	تو
کا	تفرق	ہیں	اعداد
وہ	محض	مستقل	
ہوتے	ہیں۔	لیتے	

ایک	ہاڑ	جو	کہ	کار
کی	لمبائی	کا	ہے	اور
اس	کے	سامنے	علیحدگی	کا
فاصلہ	سڑک	کے		$5 + aS + cS^2$ m
میٹر	یا	$\frac{5+aS+cS^2}{1000}$ km	کو	کو
گھیر	لیتا	ہے،	ایک	ایک
کھینچنے	میں	ایک	نگرانی	سے
کرنے	والے	مقام		

گزرنے سے والے لیے سب کے گزرنے سے گزرنے (گھنٹوں) ہو س کر

کی تعداد ہلاک سے ممکن کم ہلاک گھنٹہ حرکت

بلاکس بڑی ایک پوسٹ وقت کم چونکہ فی سے

،

سے چیک کا (میں) کے چاہیے۔ کلو میٹر حساب رہا

ہے۔

$$TS = \frac{5}{S} + aS + cS^2$$

$$T = \frac{5}{S} + aS + cS^2$$

$$T = 0.001(5S^{-1} + a + bS)$$

اب کم معلوم کار

سے کرنے کی

T کم

قیمت کے

کی طریقہ کو کریں۔

ا. چونکہ ہونی دائرہ

رہتا چاہیے، کار

کو اس Sg0

مثبت لیے ہوگا۔

$$\frac{dT}{dS} = 0.001(5S^{-2} + a + b)$$

ج. یہ میں ہے

متفرق ہر ،

دائرہ جگہ اور صفر

کار واضح جب ہے۔

آتا

$S = \sqrt{\frac{5}{b}}$

تو

ہوگا،

ب. تفرق

$-\frac{5}{S^2} + b = 0$

جس ہے

د. ونی ہے اس

چونکہ  $\frac{dT}{dS}$  صفر

S

5/S<sup>2</sup> کم لیے

ہوتا

$-\frac{5}{S^2} +$

بڑھتی ہے،

ہے،

آتا

$S = \sqrt{\frac{5}{b}}$

جب



اور علامت	جب $S < \sqrt{\frac{5}{b}}$ منفی ہے	تو	$\frac{dT}{dS}$ کی
جب علامت	$S > \sqrt{\frac{5}{b}}$ مثبت ہے	ہے	اور
		ہے	تو
		ہے۔	
ہے، ورنہ	$\frac{dT}{dS}$ منفی	سے	مثبت
تک	تبدیل	ہوتا	ہے،
$T$	کم	سے	کم
ہوگا،	جب	$Sg\sqrt{\frac{5}{b}}$	ہوگا۔

اور $a = 0.18$	$b = 0.006$	کو	متبادل
استعمال	کرنے	پر	$S = \sqrt{\frac{5}{0.006}} \approx 28.87$ آتی
ہے	اور		کم
سے	کم		کم
آتا	ہے۔		پر
		نقطے	$T \approx 0.0005264$

اس	سے	ظاہر	ہوتا	ہے
کہ	کاروں	کی	فی	حرکت
29	رقبہ	پہ		گھنٹہ
کی	بہتر	ہوگی۔ (ہر)		سب
سے	تقریباً			بلاک
پھر	یا			0.000526
گھنٹہ			1.89	
سیکنڈز	لے	گا،		(پیک)
پوائنٹ	سے	گزرنے		کے
(لیے)	نتیجہ	ایک		گھنٹے
میں	گزرنے	والی		کاروں
کی	تعداد	تقریباً		$\frac{1}{0.000526} \approx 1900$
ہوگی۔)				□

مثال	مخروط	7.8:	ایک
خالی	کا	رہا	کی
تہ	میز	اور	$a$
ستہنی	میز	میز	اونچائی
$b$	میز	پہ	ہیں،
ایک		پہ	ہوا

ہے۔ بیلن اس کا سب سے بڑے ہوگا، چھپایا جائے جسے اس کے سکتا ہو؟

رد اس میٹر کے  $V$  اور بیلن کا  $r$  اونچائی کا ہے،  $h$  سینٹی میٹر جو کہ

$$V = \pi r^2 h$$

آپ سے  $h$  بڑا لیکن متغیرات پابند مخروط پورا کرنا چاہیے کہ اس کے پائے اپنی بڑا، سکتے سوال اقتضا بیلن میں ہوگا۔

زیادہ معلوم کار سے پہلے کی ضرورت حد کو کرتی ہے۔ زیادہ کا پیروی آپ کی بندی  $h$  کیسے ہے۔

صورت ایک کو عمودی شکل 7.14 ظاہر کرتی ہے، صورت ہے،

شکل 7.15 ایک جو کہ

$$\frac{h}{a-r} = \frac{b}{a}$$

$$h = \frac{b(a - r)}{a}$$

$$V = \frac{\pi r^2 b(a-r)}{a} = \frac{\pi b}{a}(ar^2 - r^3)$$

یہ	بات	دھیان	میں
رہے	کہ	V	کے
ابتدائی	ریا	ضیاتی	فقرے
میں	دو	آزاد	متغیرات
r	اور	h	
موجود	ہیں۔	متبادل	استعمال
کرنے	کے	نتیجے	میں
آزاد	متغیرات	کی	تعداد
کم	ہو	ایک	رہ
جائگی،	h		غائب
ہو	ہے	اور	صرف
r	باقی	رہتا	ہے۔
یہ	طریقہ	کار	کو
استعمال	کر	کے	زیادہ
سے	زیادہ	قیّت	معلوم
کرنے	کو	ممکن	بنانا

مستقل	طبیعی	اس	ہے۔
مطلب	حقیقی	کوئی	کا
اس	لہذا	ہوگا جب $a < r < 0$ ہو،	تب
کے	تفاعل	کو	وقفے
پے	طور	کے	دائرہ
کے	اصول	لیں۔ عمومی	لے
کے	کر	تفریق	مطابق
	$\pi$	کہ	(یاد
$b$	اور	رہے	)
معلوم	(ہیں)	اعداد	$a$
		ہے،	مستقل
			ہوتا

$$\frac{dV}{dr} = \left( \frac{\pi b}{a} \right) (2ar - 3r^2)$$

$$= \left( \frac{\pi b}{a} \right) r(2a - 3r)$$

موجود	میں	کار	دائرہ
وہ	صرف	کی	$r$
لیے	کے	جس	قیت
اس	$\frac{2}{3}a$ ہے۔	ہے	$\frac{dV}{dr} = 0$
پڑتا	جانچ	کی	بات
کے	علامت $0 < r < \frac{2}{3}a$	کہ	کرنا
کے	ہے۔ اور $\frac{2}{3}a < r < a$	مثبت	لیے
بہت	ہے،	منفی	لیے
،	لہذا	ہے۔	آسان
جم	زیادہ	سے	زیادہ
رد اس $\frac{2}{3}a$ ہوگا،	کا	بیلن	کے
اور	ہوگی	$\frac{1}{3}b$	اونچائی
□	ہوگا۔	$\frac{4}{27}\pi a^2 b$	جم

سوال	1:	ہے	سوال
ہر	میں	کو	کے
کریں	ظاہر	کی	تفرق
سے	نسبت	میں	فلاں
کی	تبدیلی	میں	فلاں
کی	اس	میں	شرح
	بیان	اہمیت	طبعی
کریں۔			

ا. معلوم	کریں	$\frac{dh}{dx}$	جبکہ
$h$	بلندی،	سطح	سمندر
سے		اور	
$x$	پہ	طے	سیدھی
سڑک	افقی	فاصلہ	کیا
گیا			ہے۔
ب. معلوم	کریں $\frac{dN}{dt}$	وقت	جبکہ
$N$	اسٹڈیم	$t$	کا
پہ	کے	بعد	ہے۔
کھلنے	تعداد		
کی			
ج. معلوم	کریں $\frac{dM}{dr}$	قوت	جبکہ
$M$		$r$	مقتناطیس
فاصلے			ہے۔
مقتناطیس			
د. معلوم	کریں	ایک	جبکہ
$v$	ہے	زیر	$\frac{dv}{dt}$
رفتار		جو	
$t$	سیدھی	کے	
ایک	کر	لکیر	
حرکت		رہا	ہے۔
ه. معلوم	کریں $\frac{dq}{ds}$	گاڑی	جبکہ
$q$	ہونے	والے	
استعمال	شرح	ہے،	
کی	میں	کلومیٹر	
$S$	ہے۔	گاڑی	
گھنٹہ			
رفتار			
ذیل	سوال	2:	درج
موزوں	تمام	جملوں	کو
کا	اکائیوں	اور	علامات
متفرق	استعمال	کرتے	ہوئے
لکھیں۔	کی	شکل	میں

بلنری  
فضائی  
کی

سے  
سے  
تبدیلی

سمندر  
نسبت  
میں

1. سطح  
کی  
دباؤ  
شرح

کی  
حرارت  
شرح

وقت  
درجہ  
کی

کے  
سے  
تبدیلی

2. دن  
نسبت  
میں

جوار  
شرح

ساتھ  
کی

کے  
بڑھنے

3. وقت  
میں

نہجے  
وزن  
شرح

پہلے  
کے  
کی

کے  
بچے  
اضافے

4. زندگی  
میں  
میں

3:

سوال

$$z = 3t^2 + 7t - 5 \text{ جبکہ } \frac{dz}{dt}$$

ا. معلوم

$$\theta = x - \sqrt{x} \text{ جبکہ } \frac{d\theta}{dx}$$

ب. معلوم

$$x = y + \frac{3}{y^2} \text{ جبکہ } \frac{dx}{dy}$$

ج. معلوم

$$r = t^2 + \frac{1}{\sqrt{t}} \text{ جبکہ } \frac{dr}{dt}$$

د. معلوم

$$m = (t + 3)^2 \text{ جبکہ } \frac{dm}{dt}$$

ه. معلوم

$$f = 2s^6 - 3s^2 \text{ جبکہ } \frac{df}{ds}$$

و. معلوم

$$w = 5t \text{ جبکہ } \frac{dw}{dt}$$

ز. معلوم

$$R = \frac{1-r^3}{r^2} \text{ جبکہ } \frac{dR}{dr}$$

ح. معلوم

سوال	ذره	حرکت	$x$	4:	ایک کے ہے۔ وقت کی
$t$	منتقلی	پہلے	پہلے	اس	کرتا
$x = 6t - t^2$					
ا. $\frac{dx}{dt}$ ہے؟	کیا	ظاہر	کرتا		
ب. $x = 4$ ہے؟	یا	کم	بڑھ	$x = 1$	رہا
ج. ذرے بڑی کریں۔ کس کے جواب ہے؟	کی مثبت اور پہلے سے	سب منتقلی بتائیں یہ حصے جڑا	معلوم کے آپ کے ہوا		

5:

سوال

مندرجہ	ہر شکل کے وضع	ذیل ایک میں مناسب کریں۔	میں کو ڈھالنے علامت	ریاضیاتی کے نویسی
ا. موڑوے فاصلہ بڑھ	مستقل رہا	پہلے	طے شرح ہے۔	کردہ سے
ب. سیونگ اضافے کی تناسب	پینک کی گئی ہے۔	ڈپانٹ شرح رقم	میں جمع کے	

ج. درجہ  
کے  
تین  
ہے۔

حرارت  
متناسب  
کا

کے  
درخت  
قطر

تفاعل  
کے  
برہمستا

گاڑی  
کے  
کلو میٹر  
پر  
کلو میٹر  
استعمال

سوال  
ہر  
لے  
فی  
چلتے

ایک  
گھنٹہ  
ہوئے

:6

کلو  
S  
کی

ایک  
میٹر  
رفتار  
 $y$   
پیٹرول

کرتی فی

-6-

لیٹر

جبکہ

$$y = 5 + \frac{1}{5}S - \frac{1}{800}S^2$$

وہ جس خرچ طے

کے  
رفتار  
میں  
کریں۔

لے

معلوم  
زیادہ

کریں  
کم  
فاصلہ

گیند  
اوپر  
گئی۔  
پر  
 $h$   
دونوں  
اس  
ہے۔  
سے  
زیادہ

سوال  
عمودی  
کی

وقت اس

ہے کی

$h = 20t - 5t^2$  مساوات  
 گیند  
 اوپر  
 بلندی

:7

طور  
طرف

$t$   
بلندی  
اور  
کا  
سے

ایک  
چھینکی پر

ان  
تناسب  
ملتا  
زمین  
سے

معلوم  
کی  
زیادہ

کریں۔

حقیقی  
اور  
مجموعہ  
اس  
زیادہ  
معلوم

سوال  
اعداد

$$y_{12}$$

ضرب  
سے  
کریں۔

$xy$   
زیادہ

:8

 $x$ 

”

کی قیمت کا ہے۔



سوال  
حقیقی  
اور  
ضرب  
کے  
کم

مثبت  
جمع  
قیمت

اعداد  
 $y$   
20  
کی  
معلوم

9:  
کم  
کریں۔

دو  
 $x$   
کا  
ہے۔ ان  
سے

سوال  
سلیمنز  
کلیہ  
 $V$   
بڑی  
چھوٹی

کے  
 $V = \pi r^2 h$   
اور  
قیمت

کی  
معلوم

10:  
جم  
ہے،  
سب  
سب  
معلوم

ایک  
کا  
جم  
سے  
سے  
کریں۔

سوال  
رسی  
سینٹی  
سے  
ہیں،  
میں  
ایک  
 $x$   
اس  
قیمت  
خیال  
اس  
بڑے

جو  
میٹر  
دائرے  
اس  
مخالف  
جوڑے

سینٹی  
 $x$

11:  
کہ  
لمبی  
بنائے  
مربعی  
سمتوں  
کی  
میٹر  
کریں  
ہوئے  
کا  
بڑا

ایک  
1  
ہے،  
گئے  
دائرے  
کے  
لمبائی  
ہے۔  
کی  
یہ  
کہ  
رقبہ  
ہوگا۔

سوال  
کے  
کی  
رکاؤٹ  
باقی

12:  
مستطیل  
سمت  
گی  
تین

ایک  
ایک  
لگائی  
کی

بھیڑوں  
بازے  
میں  
ہے

ستوں	میں	مستطیل	ہاڑ	لگائی	گئی
ہے۔				کی	لمبائی
$x$			میٹر	ہے؛	
120		میٹر		جنگلا	دستیاب
ہے۔					

ا. ظاہر	کریں	کے مستطیل	کا
رقبہ $\frac{1}{2}x(120 - x)m^2$	ہے۔		

ب. بھیڑ	کے	ہاڑے	کا
زیادہ	سے	زیادہ	رقبہ
معلوم	کریں۔		

دھات	سوال	ایک	13:
کلوے	کے	لمبائی	مستطیل
سینٹی	کی	اور	50
40	میٹر	میٹر	چوڑائی
ہر	سینٹی	کونے	ہے۔
لمبائی	ایک		سے
میٹر	کے		سینٹی
کاٹے	اور		مربع
گئے۔	اب		دیے
ایک	تہ		کو
$x$			
کی	ایک		
گئی۔	$x$		
قیمتوں	کا		
ہے؟	ٹرے		
یا	جہم		
زیادہ	بنانے		
کی	قیمت		

مربع	سوال	14:	ایک
کرتے	بنیاد	کا	استعمال
مستطیل	ہوئے	ایک	کھلا
جہم	بنانا	ہے	کا
کیوب	4000	سینٹی	میٹر
	ہے۔	اس	بنیاد

کی معلوم بنانے مواد استعمال  
ایک کریں کے کو میں  
سہت کم لایا  
کی جب لیے سے جائے۔  
لبائی مستطیل درکار کم

بیلن ٹوکری،  $r$  اور سیٹھنی سطح مربع  
سوال کار جس سیٹھنی  
15: ردی کا میٹر  $V$  سیٹھنی کیوب رقبہ میٹر  
ایک کی رداس ہے 5000 ہے۔  
سکت میٹر کا سیٹھنی  
کہ کریں  
ا. ثبات  
ب. ٹوکری زیادہ  
سیٹھنی  
کے

$$V = \frac{1}{2}r(5000 - \pi r^2)$$

ب. ٹوکری زیادہ  
سیٹھنی  
کے

رداس کے ایک ہوا زیادہ کا  
سوال 10 کرہ گعل ہے۔ سے حساب  
16: میٹر اندر پڑا کے حجم  
سیٹھنی کی اسطوانہ اسطوانہ زیادہ لگائیں۔  
زیادہ معلوم

سوال کا وکر نقطوں کریں۔  
استعمال پر کے  
17: کرتے غیر محدود  
تفرق ہوئے متحرک تلاش

$$y = x + \frac{4}{x}$$

اور ہر  
دریافت غیر  
کریں متحرک  
کے نقطہ

زیادہ	سے	کم	زیادہ	نقطہ
ہے	یا ہے۔	کم	سے	کم
نقطہ			$x$	
کے	اقدار	کا		مجموعہ
تلاش	کریں	جس		کے
لئے				بڑھتا
ہے	جیسے	$y$		$x$
کی	قیمت	جیسے	بڑھتی	ہے۔

سوال	مادہ	18:	ایک
تاہکار	شرح،	کے	سڑنے
کی	بچے	اس	وقت
تک	متناسب	ہوئے	مادہ
کے		سمجھا	چاہتا
ہے۔	اگر	وقت	$t$
پر،	بچا	ہوا	
$m$		ہے،	اس
کا	مطلب	ہے	
$m$		اور	$t$
مساوات	کو	پورا	کرتے
ہیں۔			

$$\frac{dm}{dt} = -km$$

جبکہ	$k$	کرتی	ایک
مثبت		ہے۔ (منفی)	نشان
مادہ		گٹھے	کی
نشانہی		ہے۔)	اسی
طرح		مساوات	بنائیں
جو		ذیل	بیانات
کی	نمائندگی	ہوں۔	

۱. بیکٹیریا	کی	آبادی	نرہنے
کی	شرح،	بیکٹیریائی	موجودہ
آبادی	میں	موجود	بیکٹیریا
کی	تعداد		
کے	متناسب	ہے	
		$n$	

ب. جب ایک رکھا، حرارت کی حرارت	گرم پیالہ جانے $\theta^0 C$ شرح کے	سوپ فریزر تو کے موجودہ متناسب	کا میں، درجہ گھٹنے درجہ ہے۔
--------------------------------	------------------------------------	-------------------------------	-----------------------------

ج. ایک درجہ کی درجہ کافی درجہ کے	کافی حرارت شرح، حرارت کے ساتھ	کپ $\theta^0 C$ کمرے اور پیالے میں متناسب	کا گھٹنے کے اس کے فرق ہے
----------------------------------	-------------------------------	---	--------------------------

گاڑی تیز چھوڑا رفتار اور پر رفتار تو طے کرتے گاڑی یہ کی ہے۔	سوال نے رفتار اس وقت جب بڑھانا کیا ہوئے کی ظاہر تیز	ایک $u$ اس $x$ تفرق کریں	19: ٹرک سے کی شروع ہے، دکھائیں رفتار $x = ut + kt^2$ ہے، کہ رفتار	ایک پچھلے ابتدائی ہے، نے کی فاصلہ جبکہ استعمال کہ اور اس مستقل
---	---	--------------------------	---	--

ڈرائیور بریک $20ms^{-1}$ چل لگنے سینڈز	سوال نے لگنے کی رہی کے بعد	20: گاڑی رفتار تھی۔ $t$ گاڑی	جب کے گاڑی سے بریک مزید
--	----------------------------	------------------------------	-------------------------

$x$  میٹرز کا  
 طے کر چکی  
 $-x = 20t - 20t^2$  تفریق وقت  
 سے اس اور بھی  
 رفتار کریں۔ یہ کہ  
 لاگو ہوں  
 فاصلہ  
 تھی۔ جبکہ  
 مدد  
 کی  
 معلوم  
 کریں  
 تک

ایک سوال  
 کی لڑکا  
 اوچی چوٹی  
 ہے۔ وہ  
 جانب ایک  
 ہے ،  
 کا فاصلہ  
 میٹر ،  
 چوٹی سے  
 کی مدد  
 کیا جا  
 ایک  
 کی  
 اوچی  
 ہے۔  
 جانب  
 ہے  
 کا  
 میٹر  
 چوٹی  
 کی  
 کیا  
 21:  
 پہاڑ  
 میٹر  
 کھڑا  
 کی  
 پھینکا  
 پتھر  
 اس  
 چٹان  
 مساوات  $h = 20t - 5t^2$   
 معلوم  
 ہے۔  
 ایک  
 60  
 پر  
 سیدھا  
 کہ  
 اس  
 اس  
 سے  
 سکتا

ا. پہاڑ کی اونچائی کے زیادہ معلوم  
 ب. پتھر کی سا سے ہے، وقت ساحل  
 پہاڑ تھوڑا چوٹی جاتا وہ پتھر  
 اور سے کر کر کریں جب نکرائے گا۔  
 ج. وہ جس سمندر رفتار سے

کریں  
 ساحل  
 معلوم  
 پتھر  
 نکرایا۔

سوال  $x^2 + y^2$  کی قیمت  $x + y = 10$  کی کم معلوم ہو۔  
 مساوات سے کریں

سوال قائمہ دو لمبائی سینٹی کریں؛  
 زاویہ چھوٹی کا میٹر  
 23: مثلث اطراف ہے، مجموعہ  
 ایک کی 18 معلوم کریں

ا. ڈھلوان کم  
 کی لمبائی۔  
 ب. مثلث زیادہ  
 کا ممکنہ  
 کم زیادہ رقبہ

24:

سوال

ا. مساوات  $y = 12x + 3x^2 - 2x^3$  کے نقطے خاکہ تلاش بنائیں۔  
 پچ کریں اور

ب. پچ گاہ کے حل  
 خاکہ کے صرف ہیں۔  
 کیسے مساوات  $12x + 3x^2 - 2x^3 = 0$  دیکھائے  
 تین حقیقی

ج. اپنے کرتے کہ بھی حل  
 خاکہ ہوئے اس صرف ہیں۔  
 کو واضح مساوات  $12x + 3x^2 - 2x^3 = -5$  کے حقیقی  
 استعمال کریں تین

د. مساوات  $k$  کے شرائط

لے پوری

کن کی

درج کریں

گے؟

$$12x + 3x^2 - 2x^3 = k$$

ا. بالکل

تین

حقیقی

حل؟

ب. صرف

ایک

حقیقی

حل؟

مساوات کے کریں، بنائیں۔

ساکن نیز

سوال

$y = x^3 - 12x - 12$

کے

نقاط خم

25: خم معلوم بھی

قیمتیں جن  $k$  کے حقیقی

معلوم کے

ایک

لیے

کریں

کی

وہ کہ مساوات زیادہ

مساوات پے معلوم اور وہ کریں مساوات حقیقی

موجود کریں، تمام جن  $k$  کے

سوال

$y = x^3 - 12x - 12$

کے

ساکن خم

قیمتیں کے

26: خم

نقاط بنائیں کی معلوم لیے تین

موجود

ہوں۔

مساوات خم معلوم بنائیں، کن مساوات

کے کریں

قیمتوں

کے

سوال

$y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 10$

کے

ساکن

27: کے

نقاط خم کی لیے کے

3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 10 = k



ا. چار گے	حقیقی	حل	ہوں
ب. دو گے	حقیقی	حل	ہوں

مسادات کے محدود خم کی ایک کا حل	سوال $y = x(x-1)^2$ ساکن معلوم بنائیں۔ حقیقی سیٹ لیے صرف ہو۔	کے نقاط کریں تیموں بنائیں مساوات ایک	28: خم کے ' کا جن $x(x-1)^2 = k$ حقیقی
---------------------------------	---	---	---

جسم ایک اور میں رداس اور ایک $x$ $r$ ہوا	سوال کا چوتھائی جیساک دکھایا مستطیل	29: درمیانی دائرہ کہ چوتھائی جسکی اونچائی سے	کسی حصہ ہے، شکل اسکا ہے دائرہ لمبائی جڑا
--	---	---	--

ا. اس دیوار رقبہ ہیں۔ $r$ کی اور کریں	حصے ان اور نسبت یہ کہ	کی $P$ $A$ دونوں $x$ سے بھی $-A = \frac{1}{2}Pr - r^2$	باہری اور کو لکھیں، ثابت
--	-----------------------------	---	--------------------------

ب. فرض	کریں	کہ	باہر
دیوار	کی	لبائی	مستقل
ہے،			معلوم
کریں			نسبت
ے،			کے
لیے			رقبہ
A			زیادہ
ہو۔			کریں
کہ			کی
اس			لیے
A			زیادہ
ہے			سم
ے			
	کم۔		

ایک	سوال	کی	30:
$y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$	ختم	متفرق	مساوات
مدد	ہے۔	ختم	کی
ساکن	سے	اس	کے
معلوم	نقاط	اور	محد
معلوم	کریں	کے	مبھی
نقاط	زیادہ	کہ	ساکن
قیمت	کے	سے	زیادہ
ہیں	یا	حامل	نقاط
قیمت	کے	حامل	سم
ہیں۔	اسی	سے	نقاط
حاصل	کریں	وگرہ	ذیل
میں	دیے	گئے	دونوں
خموں	کے	ساکن	نقاط
کے	محد	معلوم	کریں۔

$$y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 5 \text{ ا.}$$

$$y = \frac{2}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} \text{ ب.}$$

سوچ	سوال	31:	ایک
اکثر	مارکیٹ	کا	منیجر
	اوقات		20

فیصد	منافع	رکھتا	ہے
ان	تمام	پر	جو
کہ	وہ	ہے۔	وہ
یہ	تسلیم	ہے	کہ
$F$		کچے	گاہک
ہیں	اور	وہ	اپنا
منافع			فیصد
تک	لے	تو	وہ
$k(20 - x)$ مزید	گاہوں	کی	توجہ
اپنی	طرف	کر	سکے
گا۔	ہر	خریدار	جو
اس	سے	سلمان	خریدتے
ہیں	انکی	تھوک	کے
حساب	سے	قیمت	$A$
یورو	ہے۔	ثابت	کریں
کہ	منافع	$x$	مینجر
فیصد	ہونے	پر	منافع
کو	ہفتہ	وار	یہ
$\frac{1}{100}Ax((F + 20k) - kx)$		ہوگا۔	کہ
بھی	ثابت	کریں	اپنا
اگر	چہ	مینجر	فیصد
منافع		20	وہ
سے	کم	کر	یہ
منافع	سما	سکتا	رکھتے
بات	ذہن	میں	پاس
ہوئے	کہ	اسکے	ہوگا۔
گاہوں	کا	اضافہ	
سوال			
کمپنی	جو	32:	ایک
چڑھنے	والے	کہ	چڑھائی
ہے	اسکے	جوتے	بنائی
اخراجات	ہیں۔	طرح	کے
(پودوں،	قیمتوں	مستقل	اخراجات،
کے	اخراجات)	اور	دفتر
یورو	فی	ہفتہ۔	2000
بنانے	کی	لاگت،	مصنوعات
اور	مزدوروں	پر	(مواد
والی	لاگت)	20	آنے
یورو	فی	جوڑا۔	مارکیٹ

پرتی	کی	گی	تحقیق	یہ
30	ہے	کہ	اگر	جوتا
بیچا	جائے	پورو	فی	بٹختے
میں	500	جوڑے	تو	جوتے
کے	کمیں	گے۔	لیکن	میں
55	جوتا	پوروں	بھی	نہیں
ایک	گا۔	اور	ان	کے
تکے	بنائی	گی	اور	ترسم
درمیان	کہ	بکری	وہ	قیمت
جو	مابین	ہے	ہے۔	ایک
کے	کلیر	ایک	x	اگر
سیدھی	والے	دیں	،	جوڑے
کمپنی	قیمت	کریں		تو
کی	لگا			لے
پورو	ذیل			
درض	معلوم			
مساوات				
ا. ہفتہ	وار	بکری		
ب. ہفتہ	وار	رسیدیں		
ج. ہفتہ	وار	لاگت		
یہ	بھی	ثابت		کریں
کہ	ہفتہ	وار	منافع	اس
مساوات	جا	$P = -20x^2 + 1500x - 24000$	ہے	حاصل
کیا		سکتا	بھی	اور
وہ	قیمت	جس	سے	معلوم
کریں	کہ			پے
بوٹ	بیچنے	منافع		زیادہ
سے	زیادہ			ہوگا۔
جفت	سوال	33:	خم	ایک
جکا	تفاعل	کا	پر	بنائیں
لینا	ہر	نقطے	ہے۔	تفرق
کریں	ممکن	خم	پے	فرض
	اسی			

$P$	کوئی	نقطہ	ہے
جیکہ	$x = p$	بشرطیکہ	$p > 0$
اسی	ختم	نقطہ	خط
$P$	پے	ایک	خط $P$ پر
مماس	بنائیں۔	نقطہ	بنائیں
بھی	خط	مماس	$x = -p$
جس	کے	لیے	
ا. نقطہ	$P$	میں	اور
$P$ کی	ڈھلوانوں	ان	کیا
تعلق	ہے۔	متفرق	دونوں
نقاط	کے	باہمی	$f'(p)$
اور	$f(p)$ میں	کریں۔	تعلق
بھی	معلوم	ایک	یہ
تعلق	آپکو	متفرق	جفت
تفاعل	کے	کیا	کے
بارے	یہ	رہا	تفصیلات
فراہم	کر		ہے۔
ب. ثابت	کریں	کہ	کسی
بھی	تاک	تفاعل	کا
متفرق	جفت	ہوتا	ہے۔



باب 8

ترتیبات





باب 9

الکراجی کا مسئلہ ثنائی



## باب 10

### تکو نیات

اس سائن ٹینجینٹ پڑھیں تھے ہوں	سبقت ' کے گئے	میں کوسائن بارے جب اس کے	ہم اور میں آپ لیں قابل
1. تمام سائن ٹینجینٹ شکل	زاویوں ' کے پہچانیں	کے کوسائن ترسیوں	لیے اور کی
2. خاص سائن ٹینجینٹ ہوں کا	زاویوں ' کی یا طریقہ	کے کوسائن قیمتیں معلوم آتا	لیے اور معلوم کرنے ہو۔
3. سادہ کر	مثالی سکین	مساوات	حل
4. $\sin \theta^0, \cos \theta^0, \tan \theta^0$ کا	استعمال	کی آتا	مماثل ہو۔

10.1  $\cos \theta^0$  کی ترسیم

زاویے طور کے جاتے سبق اور کریں	پہ خط ہیں، میں $\phi$ گے۔	کی اکثر	علامت یونانی استعمال ہم $\theta$ (فائی)	کے زبان کیے اس (تصدینا) استعمال
غالباً پہلے زاویوں ہوئے کہ بڑا تھا۔ کسی استعمال زاویہ اگر ترسیم کتاب آپ یہ ہی جیسی میں تعاریف ہر کے مثبت	آپ قائم کا استعمال جب اور اور اور کیا $0 < \theta < 180$ آپکے بنانے کا دیکھیں $\cos \theta^0$ ترسیم کہ بنی حصہ بیان طرح لیے ہوں	زاویہ 90 پھر آلہ	نے مثبت حساب کیا صفر سے آپنے مثبت ہوگا تھا۔ پاس والا ہے گے کی بناتا شکل ہوئی $\cos \theta^0$ کرتا کے پیشک یو	cos $\theta^0$ میں لگاتے ہوگا، سے چھوٹا اسے میں جب تاہم ایک حساب تو کہ ایسی ہے 10.3 ہے۔ کی ہے زاویوں وہ منفی۔
شکل دائرہ جسکا ہے پہ	10.1 دکھایا رداس اور ہے۔	جسکا x	میں گیا 1 مبدأ محد	ایک ہے اکائی O پہ

ایک	زاویہ	بتانے	ہوئے
ایک	خط	OP	کھینچیں
کہ	یہ	دائرے	کی
حد	کو	چھو	اور
اس	نقطے	P	کہہ
دیں۔	سے	P	ایک
عمودی	خط	کھینچیں	کہ
وہ	OA	پا	لے
اور	جس	پ	وہ
خط	OA	کو	چھوئے
اس	نقطے	N	کہہ
دیں	-	کریں	کہ
ON=x	ہے	اور	NP=y
ہے	جبکہ	P	کے
محدد	(x,y)	ہیں۔	

مثالث	ONP	کو	دیکھیں،
تعریف	استعمال	کرتے	ہوئے
$\cos \theta = \frac{ON}{OP}$	اور	ہمیں	معلوم
ہوتا	ہے	کہ	$-\cos \theta = \frac{x}{1} = x$

نتیجہ	$\cos \theta^0 = x$	دراصل	$\cos \theta^0$
کی	تعریف	کے	طور
پ	استعمال	رہا	ہے
زاویے	کی	تمام	قیمتوں
کے	لیے۔		

آپ	اس	تعریف	کی
اثرات	دیکھیں	گے	جب
زاویہ	90	کا	مضرب
ہوگا۔			

مثال	$\cos \theta^0$	10.1:	مثالی
تناسب	کریں	کی	قیمت
معلوم		جب	.

2.  $\theta = 270$

1.  $\theta = 180$



کا المذہ	x	محدد	منفی	منفی	ہے ہوگا۔
حساب آلہ قیمت کی اگر بنانے کا قیمتوں ہوئے بنائیں دکھے شکل آ	آپکو کے قیمت آپکے والا آلہ کو $\cos \theta^0$ وہ گی 10.3 رہی	زاویے	کا لیے دے پاس حساب استعمال کی ایسی جیسی میں	کی	ایک ہر $\cos \theta^0$ گا۔ ترسیم کتاب ان کرتے ترسیم ہی کہ نظر
اگر ترسیم آپ کے $y = \cos x$ یہ حساب ڈگری	آپ بنانا کو آلے ڈالنی بھی کتاب موڈ	چاہتے	$\cos \theta^0$ حساب میں ہوگی رکھیں کا میں	ہیں	کی تو کتاب مساوات اور کہ آلہ ہے۔
کوسائن خود تفاعل کو ہیں۔ کا کم کے کو کوسائن دور اور کو	تفاعل کو کی دوری اور دور وقفہ لے دہراتا کے 360 خصوصیت دوری	دہراتی	کی اس خصوصیت ان کم تفاعل ہے۔ اسی تفاعل درجے خصوصیت	رہتی	ترسیم ہے۔ خصوصیت کہتے تفاعل سے جس خود لے کا ہے۔ $\cos(\theta \pm 360)^0 = \cos \theta^0$ کہیں

گے۔ بھی ہیں۔ خصوصیات استعمال کی دوری اور سمجھنے تفاعل کیا قدرتی خصوصیت اکثر کے جاتا رہجانات دکھاتے انکی لیے ہی ہے۔

مثال بندرگاہ گہرائی جاتی کو ہے ماسپے میں میٹرز اور کا 10.2: پانی میں اس کا  $d = 6 + 3 \cos 30t^0$  کیہ وقت جو جائے بعد ایک کی ناپی گہرائی ہے۔ کے گھنٹوں گا سے۔ جبکہ لیے میں دوپہر معلوم کرے؛

1. رات کی پانی کرے معلوم پے کرے

2. پانی کم زیادہ کس کی اور گہرائی وقت کم زیادہ اور ہوگی۔ سے سے یہ

1. رات تاکہ اسی گہرائی اور معنی ہونا کے 9.45 جب  $t = 9.75$   $d = 6 + 3 \cos(30 + 9.75) = 6 + 3 \cos 292.5 = 7.148 \dots$  لیے 7.15 آپکا خیز چاہیے۔ پانی میٹرز جواب ہندسوں کی ہے۔ 3 تک

2. مستقل زیادہ ہو تفاعل ہے۔ d سے گی کی کی زیادہ جب قیمت قیت اسی قیمت تب کوسائن 1 لیے



طرح	اسی	-	6 + 3 \times 1 = 9	کم
قیمت	کم	سے		بھی
سے	زیادہ	$6 + 3 \times (-1) = 3$		زیادہ
میٹر	9	گہرائی		اور
کم	سے	کم		گہرائی
ہے	میٹر	3		پہلی
دوپہر	جب	دفعہ		میں
وقوع	واقع	یہ		پنیر
اور	$30t = 360$	ہوگا	$30t = 180$	رات
مطلب	جسکا	کا		شام
اور	درمیان	کے		ہے۔
بجے	6			

□

## 10.2 $\sin \theta^0$ اور $\tan \theta^0$ کی ترسیم

کوسائن	نے	ہم	چیسے
لیے	کے	تفاعل	کے
بنائی	10.1	شکل	ایک
کرتے	استعمال	کو	اسی
تعریف	کی	سائن	ہوئے
	گی۔	یوں	کچھ

$$\sin \theta = \frac{NP}{OP} = \frac{y}{1} = y$$

کی	ترسیم	کی	کوسائن
ترسیم	کی	سائن	طرح
ہے،	دوری	(10.4)	(شکل)
درجے	360	دورانیہ	جسکا
بھی	ترسیم	اسکی	ہے۔ اور
درمیان	کے	1	1-
	ہے۔	اور	ہی
		رہتی	

10.1	شکل	آپ	اگر
آپ	تو	لوٹیں	کی
		طرف	

دیکھیں	گے	کہ	$\tan \theta = \frac{NP}{OP} = \frac{y}{x}$	کی
اور	اسے			لیا
تعریف	کی		$\tan \theta^0$	کے
جاتا	ہے۔		$\tan \theta^0$	وہ
میدان	عمل		میں	ہیں
زاویے	شامل		نہیں	صفر
جن	کے	لیے	x	
ہو۔	جیسا	کہ		$-\theta = \pm 90, \pm 270 \dots$
شکل	10.5		میں	$\tan \theta^0$
کی	ترسیم		دکھائی	گی
ہے۔				

سائن	اور	کوسائن	کی
ترسیم	کی	طرح	ٹینجنٹ
کی	ترسیم	بھی	دوری
ہے	لیکن	اسکا	دورانیہ
180	ہے	، اسی	لیے
$\tan(\theta \pm 180) = \tan \theta$			

تعریف	:	ہم	جانتے
ہیں	کہ	$\cos \theta^0 = x, \sin \theta^0 = y$	ہے
اور	ہم	یہ	جانتے
ہیں	کہ	$\tan \theta^0 = \frac{y}{x}$	ان
تمام	حقائق	ہے	کر
یں	تو	کو	سکتے
ہیں	کہ	ہم	،
$\tan \theta^0$	$\tan \theta^0 = \frac{\sin \theta^0}{\cos \theta^0}$	آپ	تعریف
کے	کی	مقابلہ	استعمال
کر	طور	پر	
	سکتے	ہیں۔	

□

### 10.3 چند مشلق تفاعل کی درست قیمتیں

تعریف	:	صرف	چند
ہی	ایسے	زاویے	ہیں
جن	کی	درست	قیمت

عدو کے	صحیح ہے	اور	جن
آپ ہیں۔	درست ان	معلوم زاویوں	کر سکتے ہیں
30°	60°	45°	45°
اور	زیادہ	معلوم	زاویے کی
ہیں۔	تساوی کے	ایک	کرنے
مثالی	لیے	سلتھ	قائمہ
کے	تساوی کے	بتائیں	مساوی
زاویہ	تساوی کے	اطراف	کی
الفاظ	کی	اکائی	جیسا
جس	شکل	6	میں
لمبائی	وتر	10-	لمبائی--
کہ	گی۔	تب	
ھے			
ھو			

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan 45^\circ = 1$$

اگر استوائی	آپ بنائیں	نسب	نما	کو
60°	درجے	معلوم	کی	مثالی
تساوی	ایک	جس	کرنے	کے
لیے	اکائیوں	جیسے	یک طرفہ	مثلاً (تکون)
بنائیں	میں	راس	جتنی	اطراف
2	عمودی	قائدہ	کہ	لمبی
ہیں۔	میں	اس	دکھایا	شکل
10-7	میں	اس	سے	گیا
ہے۔	عمودی	قائدہ	خط	ایک
خط	میں	اس	تقسیم	کھینچیں
جو	میں	اس	عمودی	مساوی
حصوں	میں	اس	خط	کر
دے۔	میں	اس	خط	خط

کی  
ہیں۔  
نے  
برابر  
کر

لمبائی  
اس  
راس  
حصوں  
دیا

کو

عمودی  
بھی  
میں  
ہے۔

اکائیاں  
خط  
دو  
تقسیم

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan 60^\circ = \sqrt{3};$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

آپ  
ہونے

کو

یہ

نتائج

ازبر

چاہئیں۔

□

مثال  
ذیل  
معلوم

کی  
کریں۔

10.3:  
درست

مندرجہ  
قیمتیں

$$\cos 135^\circ \quad ; \quad \sin 120^\circ \quad ; \quad \tan 495^\circ$$

--  
مطابق  
4-10  
شکل

شکل

کے

10-5

10-3  
--  
مطابق  
کے

کے  
شکل

--  
مطابق

$$\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos 495^\circ = \tan(495 - 360)^\circ = \tan 135^\circ = -\tan 45^\circ = -1$$

□

### مشق 10-1

1) ذیل  
 $\theta$   
اعشاری  
قیمت  
کی

میں  
زاویوں  
نقطوں  
معلوم  
مساوات

دیے  
تک  
کریں (تمام  
یہاں

لے

گئے  
4  
درست  
سوالات

لکھیں)

$\tan \theta^0$  iii

$\sin \theta^0$  ii

$\cos \theta^0$  i

124.9 ز

325 د

25 ا

554 ح

-250 ط

125 ب

225 ط

67.4 و

225 ج

گئے  
اور  
معلوم  
شرح  
کم  
معلوم  
آپ

دیے  
کم  
کی  
قیمت  
کی  
کم  
بھی  
پے  
کریں

میں  
تفاعل  
ترین  
نیز---  
وہ  
قدر  
جس  
معلوم

(2) ذیل  
تمام  
زیادہ  
کریں۔  
کی  
مثبت  
کریں  
قیمتیں

گے۔

د  $\frac{8}{\sin x^0}$

ا  $2 + \sin x^0$

ط  $9 + \sin(4x - 20)^0$

ب  $7 - 4 \cos x^0$

و  $\frac{30}{11 - 5 \cos \left( \frac{1}{2}x - 45 \right)^0}$

ج  $5 + 8 \cos 2x^0$

کے  
کتاب  
کا  
سوال  
میں  
تفاعل  
باقی  
کریں  
ساتھ  
گئے  
تفاعل  
کے  
کے  
ہے

سوال  
و  
آلے  
کریں  
جسے  
مثالی  
ہیں  
معلوم  
کے  
کیے  
مثالی  
تفاعل  
مثال  
گیا

(اس  
حساب  
کسی  
نہ  
ہر  
کے  
گئے  
اعداد  
معلوم  
کا  
گئے  
ہو۔  
پراگر  $\sin 80^0$  دیا  
ہمارا  
کیونکہ

(3  
لیے  
کے  
استعمال  
کے  
اعداد  
دیے  
تمام  
 $0 \leq x \leq 360$  اس  
کہ  
اعداد  
دیے  
مساوی  
طور  
تو  
چاہیے

$x = 100$  ہونا

جواب  $-\sin 100^0 = \sin 80^0$

$\sin 20^\circ$ ا	$\sin 130^\circ$ د	$\sin 400^\circ$ ز	$\sin(-260)^\circ$ ے
$\cos 40^\circ$ ؛	$\cos 140^\circ$ ھ	$\cos(-30)^\circ$ ح	$\cos(-200)^\circ$ یا
$\tan 60^\circ$ ج	$\tan 160^\circ$ و	$\tan 430^\circ$ ط	$\tan 1000^\circ$ ٲ

(4)	(اس)	سوال	کے
لیے	مجھی	حساب	و
کتاب	کے	کسی	آلے
کا	استعمال	نہ	کریں)
سوال	کے	ہر	میں
اعداد	کے	مثبتی	تفاعل
دیے	گئے	ہیں'	باقی
تمام	اعداد	معلوم	کریں،
$x$	$x, -180 \leq x \leq 180$	بشرطیکہ	کہ
معلوم	کیے	گئے	اعداد
کا	مثبتی	تفاعل	دیے
گئے	تفاعل	کے	مساوی
ہو۔	مثال	کے	پر
اگر $80^\circ$ sin	دیا	جواب	ہے
تو	ہمارا	کیونکہ	$x = 100$
ہونا	چاہیے		$\sin 100^\circ = \sin 80^\circ$

$\sin 20^\circ$ ا	$\sin 130^\circ$ د	$\sin 400^\circ$ ز	$\sin(-260)^\circ$ ے
$\cos 40^\circ$ ؛	$\cos 140^\circ$ ھ	$\cos(-30)^\circ$ ح	$\cos(-200)^\circ$ یا
$\tan 60^\circ$ ج	$\tan 160^\circ$ و	$\tan 430^\circ$ ط	$\tan 1000^\circ$ ٲ

(5)	حساب	و	کتاب
آلہ	استعمال	کیے	کے
درج	ذیل	کریں۔	بغیر
قیمیت	معلوم		درست
$\sin 135^\circ$ ا	$\sin(-30)^\circ$ ج	$\cos 225^\circ$ ھ	$\cos 900^\circ$ ز
$\cos 120^\circ$ ؛	$\tan 240^\circ$ د	$\tan(-330)^\circ$ و	$\tan 510^\circ$ ح

$$\begin{array}{llll} \cos(-120)^\circ & \text{یہ} & \sin 210^\circ & \text{بج.} \\ \sin 1260^\circ & \text{یو} & \tan 675^\circ & \text{ید} \\ \sin(-315)^\circ & \text{یہ} & \cos 630^\circ & \text{یہ} \end{array}$$

(6) حساب آله کا بغیر معلوم مساوات وہ کریں کہ ہو دی ترین کیے استعمال و کتاب کے زاویہ گنی جائیں۔

$$\begin{array}{llll} \cos \theta^\circ = \frac{1}{2} & \text{ا} & \tan \theta^\circ = -\sqrt{3} & \text{ج} \\ \tan \theta^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3} & \text{ب} & \sin \theta^\circ = -\frac{1}{2} & \text{ز} \\ \sin \phi^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \text{؛} & \cos \theta^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3} & \text{د} \\ \tan \phi^\circ = -1 & \text{و} & \cos \theta^\circ = 0 & \text{ح} \end{array}$$

(7) حساب آله طبیعات کم کریں ہو زاویہ کو استعمال مقباس ترین کہ جائیں۔ ہوں (چنیں)۔ کتاب کے کا زاویہ مساوات (اگر تو کتاب کے بغیر حاصل معلوم برابر دو مثبت

$$\begin{array}{llll} \cos \theta^\circ = -\frac{1}{2} & \text{ا} & \sin \theta^\circ = -1 & \text{ج} \\ \sin \phi^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3} & \text{ب} & \sin \phi^\circ = -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \text{ز} \\ \tan \phi^\circ = \sqrt{3} & \text{؛} & \cos \theta^\circ = -1 & \text{د} \\ \tan \theta^\circ = -\frac{1}{3}\sqrt{3} & \text{و} & \tan \phi^\circ = 0 & \text{ح} \end{array}$$

(8) گودی سطح (تقریباً) چکر اس گہرائی کی بعد اور  $D = A + B \sin 30t^\circ$  ہے، یہاں ظاہر کی اس A اور ہے۔ مستقل پانی کھنڈے ہے مساوات D کرتا اکائی D t میں 12 دہرائی کی یہاں اور ہیں۔

وقت	ہے	-	جیسے	کہ
گھنٹوں	میں		ناپا	جائے
گا	اور	یہ	کام	صبح
کے	8:00		بجے	کے
بعد	ہے		شروع	ہوا
ہے۔	ہمیں		معلوم	ہوا
کہ	پانی	کی	زیادہ	سے
زیادہ	7.60	سے	میٹر	ہے
جبکہ	سم		سم	گہرائی
2.2	میٹر		ہے۔	B اور
A	کی		قیمت	معلوم
کریں'	دوپہر		کے	وقت
گودمی	میں	پانی	کی	ایک
گہرائی	ہو	گی۔	آپ	کا
جواب	سینٹی		میٹر	کی
حد	تک	درست	بتائیں۔	

#### 10.4 $\sin \theta^0$ , $\cos \theta^0$ اور $\tan \theta^0$ کی ترانیم کی تشاکل کی خصوصیات

تعریف	:	اگر	آپ
$\cos \theta^0, \sin \theta^0$	اور	$\tan \theta^0$	کی
ترانیم	کا	بغور	جائزہ
لیں	تو	آپ	میں
سے	تشاکل	کی	خصوصیات
شکل	دستیاب	پائیں	کے۔
کی	10-5	میں	$\cos \theta^0$
ہے۔ $\cos \theta^0$	ترسیم	دکھائی	گئی
خط	کی	ترنیم	عمودی
میں	کے	ساتھ	تشاکل
مطلب	ہے۔	اس	کا
کو	ہے	آپ	$\theta$
دیں	$-\theta$	سے	بدل
اثر	تو	ترسیم	کوئی
	نہیں	پڑے	گا۔

$$\cos(-\theta)^0 = \cos \theta^0$$

اس	کا	مطلب	$\cos \theta^0$
کی	ترنیم	$\theta$	ایک



جفت	تفاعل	ہے۔	(جیسا
کہ	حصہ	3-3	میں
بیان	کیا	گیا	ہے)
تشکل	کی	دیگر	خصوصیات
بھی	ہیں'	مثال	کے
طور	پر	شکل	10-8
میں	آپ	دیکھ	سکتے
ہیں	کہ	اگر	آپ
تفاعل	میں	180	درجے
جمع	یا	منفی	تو
آپ	کے	تفاعل	کا
نشان	بدل	جائے	گا۔
یعنی	اگر	تفاعل	ثبت
تھا	تو	منفی	جائے
گا	جبکہ	منفی	تفاعل
ثبت	ہو	جائے	گا۔

$$\cos(\theta - 180)^0 = -\cos \theta^0$$

ہم	اسے	مستقیم	حرقت
کی	خصوصیات	کہتے	ہیں۔

□

یہاں	ایک	مزید	کار آمد
خصوصیات	بھی	موجود	ہیں۔
چیسے	ہم	جفت	اور
اور	مستقیم	حرکت	کی
خصوصیات	کے	ملاپ	سے
وجود	میں	لائے۔	

$$\cos(180 - \theta)^0 = \cos(\theta - 180)^0 = -\cos \theta^0$$

مثلاً	میں $\cos \theta^0$	کا	کلیے
استعمال	کرتے	ہوئے	آپ
کا	اس	خصوصیت	سے
وا-سطہ	پڑا	گا	-
$\sin \theta^0$	کی	ترمیم	جو
شکل	10-9	میں	دکھائی

گنی	ہے، کے	لیے	بھی
ایسی	ہی	خصوصیات	ہیں۔
مشق	10--	کے	ایک
سوال	میں	آپ	ان
خصوصیات	کے	وجود	کو
ثابت	گے۔	ان	کو
ثابت	کرنے	کا	طریقہ۔۔
کی	خصوصیات	کو	ثابت
کرنے	کے	طریقے	سے
مماثلت	رکھنا	ہے۔	$\cos \theta^0$
اور	$\sin \theta^0$	کے	تفاعل
کے	خصوصیات	درج	ذیل
ہیں۔			

تواثر کی خصوصیات  $\sin(-\theta)^0 = -\sin \theta^0$ ,  $\cos(-\theta)^0 = \cos \theta^0$

تاک کی  $\sin(\theta - 180)^0 = -\sin \theta^0$ ,  $\cos(\theta - 180)^0 = -\cos \theta^0$  خصوصیات

مستقیم حرکت کی خصوصیات

$$\cos(\theta \pm 360)^0 = \cos \theta^0$$

$$\cos(180 - \theta)^0 = -\cos \theta^0$$

$$\sin(\theta \pm 360)^0 = \sin \theta^0$$

$$\sin(180 - \theta)^0 = \sin \theta^0$$

اگر	آپ	شکل	10.5 میں
$\tan \theta^0$ کی	ترسیم	کا	حوالہ
لیں	اور $\sin \theta^0$ اور $\cos \theta^0$ کی	ترسیم	کے
انداز	میں	بھی	جائزہ
لیں	تو	آپ	$\sin \theta^0$ کو
اور $\cos \theta^0$	جیسے ہی	جوابات	ملیں
گے۔	$\tan \theta^0$ کے	تفاعل	کی



مشق	10B	میں	ایک
اور	خصوصیت	جو	آپ
کو	ثابت	کرنی	ہوگی
وہ	$\sin(90 - \theta)^o = \cos \theta^o$		

مشق	10.1:	سوال
1:	$\cos \theta^o$	اور $\tan \theta^o$
کی	اور	تواتر
کی	استعمال	کرتے
ہوئے	ذیل	نتائج
اخز	مندر جہ	
	کریں۔	

$$\tan(\theta - 180)^o = \tan \theta^o \quad \text{ھ۔}$$

$$\sin(90 - \theta)^o = \cos \theta^o \quad \text{ا۔}$$

$$\cos(180 - \theta)^o = \cos(180 + \theta)^o \quad \text{و۔}$$

$$\sin(270 + \theta)^o = -\cos \theta^o \quad \text{ب۔}$$

$$\tan(360 - \theta)^o = -\tan(180 + \theta)^o \quad \text{ز۔}$$

$$\sin(90 + \theta)^o = \cos \theta^o \quad \text{ج۔}$$

$$\sin(-90 - \theta)^o = -\cos \theta^o \quad \text{ح۔}$$

$$\cos(90 + \theta)^o = -\sin \theta^o \quad \text{د۔}$$

سوال	2:
اور	کی
بنائیں	انہی
پر	کریں
$y = \tan \theta^o$	
توسیم	
عور	
کہ $-\tan(90 - \theta)^o = \frac{1}{\tan \theta^o}$	

سوال	3:
ذیل	مساوات
$\alpha$ کی	قیمتیں
کریں	جن
درج	مساوات
ثابت	جائیں۔
مندرجہ	
کیلے	
معلوم	
سے	
درست	

$$\sin(\theta + 2\alpha)^0 = \cos(\alpha - \theta)^0 \quad \text{د.}$$

$$\cos(\alpha - \theta)^0 = \sin \theta^0 \quad \text{ا.}$$

$$\cos(2\alpha - \theta)^0 = \cos(\theta - \alpha)^0 \quad \text{ه.}$$

$$\sin(\alpha - \theta)^0 = \cos(\alpha + \theta)^0 \quad \text{ب.}$$

$$\sin(5\alpha + \theta)^0 = \cos(\theta - 3\alpha)^0 \quad \text{و.}$$

$$\tan \theta^0 = \tan(\theta + \alpha)^0 \quad \text{ج.}$$

## 10.5 مثلثی تفاعل کی مساوات کا حل

حل	کا	مساوات	$\cos \theta^0 = k$ کی
کرنے	حل	مساوات	$\cos \theta^0 = k$ کے
کریں	فرض	لے	کہ
اس $k$	اگر	$-1 \leq k \leq 1$	شرط
اترے	پورا	پہ	تو
کوئی	کا	مساوات	حل
شکل	ہوگا۔	نہیں	10.10
منفی	کی	میں $k$	قیمت
ہے۔	گنی	دکھائی	یاد
360	ہر	رکھیں	درجے
میں	وقفے	کے	$\cos \theta^0 = k$ کے
ہوتے	جزر	دو	ہیں
$k = \pm 1$ ہو۔	جب	سوائے	
آلے	کے	کتاب	حساب
تو	دباہیں	$[\cos^{-1}]$ کا	پہ
گا	طے	بٹن	آپکو
درست	مساوات	وہ	جس
کچھ	گی۔	سے	ثابت
کوسائن	الٹ	ہو	آلات
لیکن	ہوگا۔	پہ	کا
طریقہ	اس	بٹن	بد قسمتی
ایک	صرف	سے	میں
عموما	گا۔	ہمیں	جزر
		طے	

آپ میں حاصل  
 $\cos \theta^0 = k$  دیے  
 گئے تمام  
 وقفے جزر  
 چاہتے ہیں۔

$\cos \theta^0 = k$  کی  
 کرنے  
 مساوات کے  
 حل 3  
 لیے  
 ہیں:-

ا.  $[\cos^{-1} k]$  معلوم کریں۔

ب. تفاضل کی  
 کرتے ہوئے  
 جزر حاصل  
 کی خصوصیت  
 $\cos(-\theta)^0 = \cos \theta^0$   
 استعمال ایک  
 تفاضل کریں۔  
 ہے یہ

ج.  $\cos(\theta \pm 360)^0 = \cos \theta^0$  کی  
 تواتر  
 کرتے ہوئے  
 معلوم کریں۔  
 استعمال ایک  
 جزر مزید

:10.5

مثال

مساوات  
 اور  
 تمام  
 نقطہ  
 کریں۔  
 $\cos \theta^0 = \frac{1}{3}$   
 $0 \leq \theta \leq 360$  میں  
 جزر  
 تک  
 حل  
 آنے  
 ایک  
 درست  
 کریں  
 والے  
 اعشاری  
 معلوم

ا. حساب  
 استعمال  
 کریں  
 گئے  
 جزر  
 کتاب  
 کے  
 کریں  
 کہ  
 وقفے  
 ہے۔  
 آئے  
 اور  
 $\cos^{-1} \frac{1}{3} = 70.52...^\circ$   
 معلوم  
 بتائے  
 پہلا  
 یہ  
 کا

ب. تفاضل کی  
 استعمال  
 خصوصیت  
 کریں  
 جزر  
 بتائے  
 حصہ  
 $\cos(-\theta)^0 = \cos \theta^0$   
 اس  
 حاصل  
 دوسرا  
 یہ  
 کا  
 اور  
 آپ  
 70.52-  
 لیکن  
 وقفے  
 ہے۔  
 کی  
 کریں  
 سے  
 گئے  
 ہے۔  
 گئے  
 نہیں

ج. تواتر	کی	خصوصیت	$\cos(\theta \pm 360)^\circ = \cos \theta^\circ$	اور
اس	سے		آپ	کو
طے	گـ	$289.47 = 360 + \text{---} 70.52$	اور	یہ
جزر	بتائے		گئے	وقفے
میں	ہی	ہے۔		

70.52	میں	وقفے	اور $0 \leq \theta \leq 360$ اس
اعشاری	ایک	289.5	نقطے
جوابات	درست	نک	ہیں۔

☐

مساوات	میں	کے	$-180 \leq \theta \leq 180$
جز	تمام		$\cos 3\theta^\circ = -\frac{1}{2}$
مثال	یہ	کریں۔	معلوم
جیسی	مثال	پچھلی	بھی
اتنا	صرف	فرق	ہے۔
دو	میں	اس	ہے
ایک	ہیں	اقدام	فالتو
ایک	اور	میں	ابتداء
کریں	فرض	پہ۔	انتہا
مساوات	اب	$3\theta = \phi$	کہ
کرنا	حل	کو	$\cos \phi^\circ = -\frac{1}{2}$
یہ	اور اب	گا	مساوات
تک	حد	کافی	سادہ
-	ہے	چکی	لیکن
ہے	$3\theta = \phi$	اگر	تو
لیے	اسی	$\times (-180) \leq 3\theta \leq \times 180$	اب
$-540 \leq \phi \leq 540$	وقفہ	نیا	صو
طرح	اس	گا	ہم
آ	تک	اصل	پچھے
$\cos \phi^0 = -\frac{1}{2}$	کہ	ہیں	کی
کرتی	حل	مساوات	ہے
کہ	طرح	کچھ	جوابات
میں	وقفے	اسی	ہوں (آپ
جز	6	تقریباً	

کے پہلا لیے قدم تیار رہیں)

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120$$

دوسرا جز : قدم ہو گا : دوسرا جز -120

تیسرا کی مطابق جز اور تیسری کی صیت معلوم 360 : منفی میں دونوں کرتے ہوئے

$$-120 - 360 = -480, -120 + 360 = 240, 120 - 360 = -240$$

$$120 + 360 = 480$$

لسرزا میں دیئے  $\cos \phi^\circ = -\frac{1}{2}$  گئے کے 480 وقفے جز یہ ہیں

اصل لوٹے مساوات کی طرف ہوئے

اور مد نظر جز گے یہ رکھتے  $\theta = \frac{1}{3}\phi$  حقیقت اصل ہوں 160 -160, -80, -40, 40, 80

$\sin \theta^\circ = k$  حل کی مساوات کا

$\sin \theta^\circ = k$  دیئے ہو ہی صرف  $\sin \theta^\circ$  کی گئے تو حل اتنا کے مساوات وقفے طریقے ہو ہے لیے اگر میں سے گافرق کے تشاکل





224.42... - 360 = -135.57...  
 گئے یہ میں ہے وقفے  
 حاصل بنائے ہیں  
 کریں گئے شامل

10-5-4

:

مثال

0 ≤ θ ≤ 360  
 میں حل جز: کو تمام اور کریں معلوم  
 : sin  $\frac{1}{3}(\theta - 30)^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\frac{1}{3}(\theta - 30) = \phi$   
 فرض کریں کہ دی سادہ ہم کے گئے  
 اور مساوات گئی  
 اور مساوات کریں  
 : sin  $\phi^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 60$   
 قدم 1 : گئے جزر پہلا میں  
 حصہ ہے

2: دو سرا مس یہ لیکن وقفے  
 قدم 120 = 180 - 60  
 جزر بتائے نہیں آتا۔

3: 360 جمع بھی میں نہیں  
 قدم مضرب کرنے اس مزید گئے  
 کو سے وقفے جزر

اسی کا ایک  
 وجہ وقفہ ہی  
 سے جز: -10 ≤ φ ≤ 110  
 مساوات sin  $\phi^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$  میں اور ہے

وہ مساوات ہوئے ہیں مساوات  $\theta = 210$  ہے کی جبکہ کہ کا ہو

60 طرف ہم  $\theta = 3\phi + 30$  اصل گا

اصل لوٹتے جاتے تو جزر

$\tan \theta^\circ = k$  کرتے کی ہوئے

حل مساوات

$\tan \theta^\circ = k$  ویسے چیسے مثلی کو یہ ہر وقفے ہی مزید ہمیں کا

ہی حل بات 180 میں جزر جزر تواتر سہارا

کی ہم تناسب

حل کیا اہم ملے لینا

مساوات نے کی

ہو - ہے

درجے صرف گے کی پڑتے

بھی گی باقی مساوات یہاں کہ کے ایک اور لیے خصوصیت کا

قدم کریں  $\tan^{-1} k$  :1 معلوم

قدم کی کا دیگر  $\tan (180 + \theta)^\circ = \tan \theta^\circ$  : تواتر

خصوصیت استعمال جزر

کرتے تلاش کریں

سوال کی قیمتیں جن ذیل ہوں۔ اعشاری ہونا

دو معلوم کے مساوات آپکا نقطے چاہیے۔

کم سے کم کریں لیے درست جواب تک

:1 زاویے کم کہ درج ثابت ایک درست

ا.  $\cos \frac{1}{2}\theta^\circ = \frac{2}{3}$  ج.  $\sin \frac{1}{4}\theta^\circ = -\frac{1}{4}$  ہ.  $\tan \frac{3}{4}\theta = 0.5$

ب.  $\tan \frac{2}{3}\theta^\circ = -3$  د.  $\cos \frac{1}{3}\theta^\circ = \frac{1}{3}$  و.  $\sin \frac{2}{3}\theta^\circ = -0.3$

سوال  
حساب  
آلے  
درج  
وقفہ  
)  
معلوم

2:  
کتاب  
مدد  
مساوات  
میں  
ہیں

و  
ذیل  
 $0 \leq t \leq 360$   
اگر  
کریں۔

بغیر  
کے  
لیے  
کے  
جذر  
(تو)

ا.  $\sin (2t - 30)^\circ = \frac{1}{2}$  د.  $\tan \left(\frac{3}{2}t - 45\right)^\circ = -\sqrt{3}$  ج.  $\cos \left(\frac{1}{5}t - 50\right)^\circ = 0$

ب.  $\tan (2t - 45)^\circ = 0$  ہ.  $\cos (2t - 50)^\circ = -\frac{1}{2}$  و.  $\tan (3t - 180)^\circ = -1$

ج.  $\cos (3t + 135)^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$  د.  $\sin \left(\frac{1}{2}t + 50\right)^\circ = 1$  ط.  $\sin \left(\frac{1}{4}t - 20\right)^\circ = 0$

سوال  
اعشاری  
تمام  
'  
میں  
درست  
تمام

نقطے  
قیمتیں  
بشرطیکہ  
دی  
ثابت  
قیمتیں

3:  
تک  
معلوم  
ذیل  
گی  
ہوں  
اس  
ہوں۔

z

ایک  
شے  
کریں  
میں  
مساوات  
اور  
وقفے

ا.  $\sin z^\circ = -0.16$  ج.  $(1 - \tan z^\circ) \sin z^\circ = 0$  ہ.  $\cos (45 + z)^\circ = 0.832$

ب.  $\cos z^\circ (1 + \sin z^\circ) = 0$  د.  $\sin z^\circ = 0.23$  و.  $\tan (3z - 17)^\circ = 3$

سوال  
ذیل  
زاویے  
معلوم

4:  
موجود  
کے  
کی

میں  
مساوات  
 $\theta$   
کریں۔

وقفہ  
درج  
لیے  
قیمت

$$0 \leq \theta \leq 360$$

ا.  $\sin 2\theta^\circ = \cos 36^\circ$       ب.  $\cos 5\theta^\circ = \sin 70^\circ$       ج.  $\tan 3\theta^\circ = \tan 60^\circ$

5:

سوال

وقفے کی کریں ہو۔  
 $0 \leq \theta \leq$  تمام جگے  
 $\sin \theta^\circ \cos \theta^\circ = \frac{1}{2} \tan \theta^\circ$   
 میں قیثیں لیے درست  
 زاویے معلوم مساوات ثابت

6:

سوال

ذیل مشابہتی اور مثال طرح قیث خود  
 قیثوں تفاعل ٹینجٹ بنائیں کے پے  
 کے سائن، کی اور بنائی یہ  
 درجہ لیے کوسائن ایک اس گئی تفاعل  
 دہراتا ہو۔

720 ہ۔

ج. 48

ا. 90

و. 600

د. 120

ب. 20

7:

سوال

وقفے ذیل ہر تفاعل بھی  
 درجہ میں کا  
 میں بنائیں  
 ترسیم  
 $0 \leq \phi \leq 360$  کی ایک کے بتائیں  
 سوال دو رائے

ن.  $y = \sin (3\phi - 20)^\circ$

د.  $y = \tan \frac{1}{3}\phi^\circ$

ا.  $y = \sin 3\phi^\circ$

ج.  $y = \tan 2\phi^\circ$

ہ۔  $y = \cos \frac{1}{2}\phi^\circ$

ب.  $y = \cos 2\phi^\circ$

ط.  $y = \tan \left(\frac{1}{2}\phi + 90\right)^\circ$

و.  $y = \sin \left(\frac{1}{2}\phi + 30\right)^\circ$

ج.  $y = \sin 4\phi^\circ$

سوال کے  
کے  
میں تمام گھنٹے  
کا  
A, B مستقل  
دن بعد  
ت  
موسم کے  
ثابت  
جسمیں  
کرنے  
روشن  
کے  
علاقے  
شمالی

8: ایک  
پورے دنوں  
d  
کلیہ  
اور ہیں  
وقت کے  
میں سے۔

قطب  
مخصوص  
سال  
میں  
معلوم  
 $d = A + B \sin kt^\circ$   
k  
اور  
ہے  
بدلاؤ

1. یہ کہ گھنٹوں 365 کو  
- کریں 3 درست  
تصور دن کی دنوں دہرائی کی آپ اعشاری ہو۔

کرتے  
میں  
عددی  
بعد  
ہے  
قیمت  
کا  
نقطوں

ہوئے  
روشن  
قیمت  
خود  
k  
معلم  
جواب  
تک

2. یہ کہ دن روشن لمبے روشن کی سال میں ہوگا میں ہوئے نیا اس دن  
بتایا سب میں جبکہ دن گھنٹے قیمت کے روشن گھنٹوں بتائیں کہ دن تبدیلی پہلے

گیا سے 6 سب میں ہیں معلوم نے وقت اور یہ سال موسموں سے آتا

چھوٹے گھنٹے  
سے  
18  
A اور B  
کریں۔  
دن  
کتنا  
منٹوں  
مانتے  
کا  
کی  
80  
ہے۔

3. اسی قصبہ  
علاقے  
ہے  
میں  
جہاں  
ایک  
کے

لوگ	سال	میں	سو
دفعہ	تہوار	مناتے	ہیں
اور	ان	دونوں	دن
روشن	دن	10	گھنٹے
کا	ہوتا	ہے۔	موسموں
کے	تغیر	کو	مد
نظر	رکھتے	ہوئے	بتائیں
کہ	یہ	کوئے	دو
دن	ہیں		

## 10.6 مشائی تفاعل کے باہمی روابط

الجبرا	میں	مساوات	حل
کرنا	آپ	کی	عادت
بن	جانی	ہے،	جن
میں	ہم	ایک	نا
معلوم	غیر	مستقل	مقدار
،	جسے	عموماً	$x$
،	کہتے	ہم	کی
قیمت	معلم	ہیں	ہیں
چیسے	اس	کرتے	میں
$2x + 3 - x - 6 = 7$		مساوات	الجبرائی
مساوات	کو	سادہ	کرنے
میں	بھی	میار	رکھتے
ہیں	جیسے	مساوات	$2x + 3 - x - 6$
سادہ	ہو	کے	$x - 3$
بن	جانی	ہے،	آپ
کو	اندازہ	نہیں	ہوا
لیکن	یہ	دونوں	بالکل
الگ	طریقہ	کار	ہیں۔
جب	آپ	مساوات	$2x + 3 - x - 6 = 7$
کو	حل	کرتے	تو
آپ	کو	معلوم	ہوتا
ہے	کہ	اسکا	صرف
ایک	ہی	حل	ہے
$x = 10$	،	لیکن	$x - 3$

اور  
چیسے  
قیمتوں  
اوقات  
کی  
کرنا

ہیں  
2x + 3 - x - 6  
x  
کے  
ان  
صورتحال  
ضروری

بالکل  
کی  
لیے،  
دونوں  
میں  
ہوتا

ایک  
تمام  
بعض  
طرح  
فرق  
ہے۔

اگر  
کی  
ایک  
تو  
بہو  
اور  
ظاہر  
(  
کی  
پڑھا  
برابر

دو  
ہر  
سا  
ایسی  
برابر  
ایسی  
کرنے  
(  
جانی  
جائے  
ہے۔"

قیمت  
تراکیب  
کہا  
تراکیب  
کے  
علامت  
ہے  
گا  
یہ

تراکیب  
کے  
جواب  
کو  
جائے  
اور  
"ہو  
جملہ

x  
لیے  
دیں  
ہو  
گا۔  
کو  
لیے  
استعمال  
اسے  
بہو

$$2x + 3 - x - 6 = x - 3$$

ایک  
لغزہ  
ایک  
جو x  
کے

x  
مماثل  
ایسی  
کی  
لیے

میں  
ایک  
مساوات  
تمام  
درست

کہلائے  
ایک  
مساوات  
تمام  
درست

گا۔  
مماثل  
ہے  
قیمتوں  
ہے۔

مثابی  
ایسا  
حصہ  
میں  
تھا  
cos θ° ≠ 0

تناسب  
ہی  
10.2  
یہ  
کہ

میں  
ہوتا  
کے  
دیکھا  
tan θ° =  $\frac{\sin \theta^\circ}{\cos \theta^\circ}$

بھی  
ہے،  
آخر  
گیا  
بشرطیکہ

$$\tan \theta^\circ = \frac{\sin \theta^\circ}{\cos \theta^\circ}$$

مماثل  
کی  
جانی

علامت  
ہے

استعمال  
تب



بھی	جگہ	قوت	نمائ
قیمتیں	موجود	ہوں	جکے
لیے	دونوں	اطراف	معین
نہ	ہوں،	دہ	مثال
میں	اگر	زاویہ	90
کا	تاک	مضرب	تو
کوی	بھی	طرف	معین
نہیں	ہے	لیکن	مماش
کی	علامت	وہاں	موجود
ہے۔			

حصہ	10.1	اور	10.2
میں	کی	گی	$\cos \theta^\circ = x$
اور	$\sin \theta^\circ = y$	کی	تعریف
سے	ایک	اور	تعلق
فوراً	سے	ذہن	میں
آتا	ہے	P	ایک
اکائی	کے	ایک	دائرے
کی	باہری	بندی	پہ
موجود	ایک	نقطہ	ہے
-	فیثا	غورث	کے
قانون	کے	مطابق	$x^2 = y^2 = 1$
ہے	یا	ہم	کتے
ہیں	کہ		$(\cos \theta^\circ)^2 + (\sin \theta^\circ)^2 = 1$

غلط	العالم	میں	ہم
$(\cos \theta^\circ)^2$	کو	$\cos^2 \theta^\circ$	کہتے
ہیں	اور	ایسے	ہی
$(\sin \theta^\circ)^2$	کو	$\sin^2 \theta^\circ$	کہتے
ہیں	کے	کی	ہر
قیمت	اسے	$-\cos^2 \theta^\circ + \sin^2 \theta^\circ \equiv 1$	اوقات
ہم	کا	بعض	کا
مثلثیات	بھی	فیثا غورث	ہیں۔
کلیہ		کہتے	

زاویے	کی	ہر	قیمت
کے	لیے؛	$\tan \theta^\circ \equiv \frac{\sin \theta^\circ}{\cos \theta^\circ}$	شرطیکہ
$\cos \theta^\circ \neq 0$			

$$\cos^2 \theta^\circ + \sin^2 \theta^\circ \equiv 1$$

غلط	عام	$\cos^n \theta^\circ$	جسکا
ہم	نے	ذکر	یہ
مثبت	طاقتوں	کی	حد
تک	تو	بہترین	-
کسی	بھی	صورت	میں
$n = -1$	استعمال	نہیں	کیا
جا	سکتا	کیونکہ	یہاں
ایک	خطرہ	ہے	آپ
اسے	یہ	$\cos^{-1} x$	سمجھ
سکتے	ہیں،	جبکہ	یہ
ان	زاویوں	کے	لیے
استعمال	ہوتا	ہے	چکنے
cosine	کی	قیمت	x
ہوتی	ہے۔	اگر	آپ
ٹیک	میں	گرفتار	ہوں
تو	$(\cos \theta^\circ)^n$	یا	$(\cos \theta)^{-n}$
استعمال	کریں	کیونکہ	انکا
ایک	ہی	مطلب	ہے
جو	واضح	ہے	
آپ	اس	مساوات	$\cos^2 \theta + \sin \theta \equiv 1$
کو	استعمال	کرتے	ہوئے
کسی	بھی	مثالث	کے
کوسائن	کیلے	کو	ثابت
کر	سکتے	ہیں۔	
فرض	کریں	ABC	ایک
مثالث	ہے	جسکی	اطراف
،	CA=b	،BC=a	اور
AB=c	ہیں	-	فرض
کریں	کہ	نقطہ	A
کارٹیسی	نظام	محدد	کے
مبدأ	پے	ہے۔	اور
AC	ایک	خط	جو
کہ	x	محدد	x
کی	سمت	میں	-

10.11

جیسا میں دیکھا یا کہ شکل گیا ہے۔

نقطہ (b,0) کے ہیں، محدود، جبکہ (c cos A, c sin A) کے لیے، فاصلے کرتے ہوئے۔

$$\begin{aligned} a^2 &= (b - c \cos A)^2 + (c \sin A)^2 \\ &= b^2 - 2bc \cos A + c^2 \cos^2 A + c^2 \sin^2 A \\ &= b^2 - 2bc \cos A + c^2 (\cos^2 A + \sin^2 A) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \end{aligned}$$

اب کا آخر استعمال میں کرتے ہوئے۔

مثال گیا اور حساب آئے کی 10.6: کہ منفردیہ کتاب پر ہیئت اور معلوم ہے زاویہ و سے  $\cos \theta^0$  قیمت بتایا  $\sin \theta = \frac{3}{5}$  ہے۔ کے کرتے  $\tan \theta^0$  کریں۔

جیسا اور گا ہم منفردیہ لہذا، کہ اس  $-\cos \theta = \pm \frac{4}{5}$  جانتے ہے  $\cos \theta^0$  اسی لیے  $-\cos \theta = -\frac{4}{5}$  ہمیں جیسا ہیں منفی

جیسا کہ  $\sin \theta = \frac{3}{5}$  اور  $\cos \theta = -\frac{4}{5}, \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}$

□



1. فیثا کا تیسری معلوم  
غورث استعمال سمت کریں۔  
کے کریں کی  
کلیے اور لسانی

2.  $\sin \theta^0$  کی کریں  
 $\cos \theta^0$ ، درست -  
اور قیمتیں  
 $\tan \theta^0$  معلوم

2:

سوال

1. یہ کہہ منفرجیہ  
بتایا زاویہ  
گیا A  
ہے  
آپ قیمت  
ہے ایک اور  
 $\sin A = \frac{5}{14}\sqrt{3}$  درست  
کے کریں۔

2. ہمیں ہے ہیں  
وقفہ اور کہ  
ہم  
 $180B \leq 360$   
 $\tan B = -\frac{21}{20}$  قیمت  
معلوم جانتے آپ معلوم  
 $\cos B^0$  کریں۔

3.  $\sin C^0$  قیمتیں کے  
کی معلوم لیے  
وہ کریں  
 $\cos C = \frac{1}{2}$

4. کی معلوم لیے میں درست  
وہ کریں اس مساوات ثابت  
تمام جن وقفے ہو۔  
قیمتیں کے  
 $-180 < D < 180$   
 $\tan D = 5 \sin D$

سوال	3:	اور
اس	$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \equiv 1$	اور
اس	$\tan \theta \equiv \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$	استعمال
کریں	$\cos \theta \neq 0$	نیچے
دی	بشرطیکہ 0	کو
ثابت	کریں۔	مساوات

$$\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta \equiv \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \quad \text{ج.}$$

$$\frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\tan \theta} \equiv \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{ا.}$$

$$\frac{\tan \theta \sin \theta}{1 - \cos \theta} \equiv 1 + \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{د.}$$

$$\frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} \equiv 1 + \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{ب.}$$

سوال	4:	دی
تمام	مساوات	کو
کی	قیمت	کے
حل	میں	اور
$0 \leq \theta \leq 360$	دیں	زاویے
جوابات	خیال	اس
کو	آپکے	رکھتے
کہ	قریب	جوابات
کے		ترین
ہوں۔		

$$10 \sin^2 \theta - 5 \cos^2 \theta + 2 = 4 \sin \theta \quad \text{ج.}$$

$$4 \sin^2 \theta - 1 = 0 \quad \text{ا.}$$

$$4 \sin^2 \theta \cos \theta = \tan^2 \theta \quad \text{د.}$$

$$\sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta = 2 \quad \text{ب.}$$

سوال	5:	دیے
وقتے	$-180 \leq \theta \leq 180$	میں
کی	قیمتیں	معلوم
کہ	جن	کے
$-2 \tan \theta - 3 = \frac{2}{\tan \theta}$		لیے

سوال  
ذیل  
معلوم  
کی  
کریں  
دہرائی  
:6  
کا  
درج  
نقطہ

ا.  $\sin x$  ب.  $\tan 2x$

سوال  
کی  
میں  
پھر  
کی  
:7  
کو  
ہوئے  
کو  
میں  
ترسیم  
رکھتے  
ذیل  
صورت  
درج  
کھیں  
 $y = \cos x^0$   
 $\cos x^0$

ا.  $\cos(360 - x)$  ب.  $\cos(x + 180)$

سوال  
کی  
وقتے  
کی  
ان  
بھی  
جن  
اور  
گا۔  
مساوات  
ذیل  
کے  
آپکا  
میں  
کہ  
محد  
کریں۔  
زاویے  
اور  
کاٹے  
 $y = \cos \frac{1}{2}\theta$   
اور  
ث  
کاٹے  
پے  
واضع  
نقطوں  
قیمت  
 $-360 \leq \theta \leq 360$   
ترسیم  
محد  
مساوات  
بنائیں  
میں  
معلوم  
کے  
کریں  
ترسیم  
کو

سوال  
مساوات  
لیے  
جواب  
ہونا  
:9  
کو  
حل  
وقتے  
چاہیے  
درج  
زاویے  
.  
 $0 \leq \theta \leq 360$

ا.  $\tan \theta = 0.4$  ب.  $\sin 2\theta = 0.4$

سوال  
کو  
:10  
حل  
مساوات  
کریں  
 $3 \cos 2x = 2$

اور تمام آپکے قریب	وقتے جوابات ترین	$0 \leq \theta \leq 180$ تحریر 0.1 ہونے	میں کریں۔ کے چاہئیں۔
--------------------	------------------	--	----------------------

:11

سوال

1. ایک کی ہر خود	ایسے مثال 180 کو	مثالی دیں درجے دہراتا	تفاعل جو بعد ہو۔
------------------	------------------	-----------------------	------------------

2. مساوات $\sin 3x = 0.5$ میں کے کریں۔	وقتے والے جوابات	کو تمام آنے	وقتے والے جوابات
--	------------------	-------------	------------------

وقتے کی معلوم کے درست	سوال $0 \leq \theta \leq 360$ وع کریں لیے ثابت	میں تمام کہ مساوات ہو۔	زاویے قیمتیں جن $2 \cos(\theta + 30)$
-----------------------	--	------------------------	---------------------------------------

:13

سوال

1. مساوات کسی کی	ایک صورت	مثالی میں	کو تفاعل لکھیں۔
------------------	----------	-----------	-----------------

2. وقتے تمام	$0 \leq x \leq 360$ $\sin 2x + \cos(90 - 2x) = -1$ قیمتیں	میں x معلوم	مساوات کی کریں۔
--------------	--	-------------	-----------------

سوال A قیمت جس	کی معلوم کے	وہ	کم کریں لیے	زاویہ ترین کہ
----------------	-------------	----	-------------	---------------



دونوں

ج. اور  
منفی منفی  
 $\cos A = \sin A$   
ہوں۔

ا.  $\sin A = 0.2$   
 $\cos A$   
ہوں۔

اور

ج. اور  
منفی منفی  
 $\sin A = -0.2275$   
 $-A > 360$

ب.  $\tan A = -0.5$   
 $\sin A$   
ہوں۔

15:  
کو

مماثل

سوال  
ذیل  
کریں۔

درج  
ثابت

ج.  $\frac{1}{\tan \theta} + \tan \theta \equiv \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$

ا.  $\frac{1}{\sin \theta} - \sin \theta \equiv \frac{\cos \theta}{\tan \theta}$

د.  $\frac{1 - 2 \sin^2 \theta}{\cos \theta + \sin \theta} \equiv \cos \theta - \sin \theta$

ب.  $\frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \equiv \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta}$

16:  
کے  
ترین  
قمتیں  
ترین  
کریں  
یہ  
ہوں۔

تفاعل  
کم  
ترین  
کم  
معلوم  
لیے  
ثابت  
کی  
کی  
کے

سوال  
ذیل  
y  
زیادہ  
x  
قیمت  
جس  
درست

درج  
لیے  
اور  
جبکہ  
ثابت  
کہ  
تفاعل

ھ.  $y = \frac{12}{3 + \cos x}$

ا.  $y = 1 + \cos 2x$

ب.  $y = 5 - 4 \sin(x + 30)$

ج.  $y = 29 - 20 \sin(3x - 45)$

د.  $y = 8 - 3 \cos^2 x$

و.  $y = \frac{60}{1 + \sin^2(2x - 15)}$

17:  
کو

مساوات

سوال  
ذیل

درج

زاویے کریں اس دیں۔  
 کے اور وقفے .  
 لیے آپنا  
 حل جواب میں  
 $0 \leq x \leq 360$

$$\tan^2 \theta - 2 \tan \theta = 1 \quad \text{ج.}$$

$$\sin \theta = \tan \theta \quad \text{ا.}$$

$$\sin 2\theta - \sqrt{3} \cos 2\theta = 0 \quad \text{د.}$$

$$2 - 2 \cos^2 \theta = \sin \theta \quad \text{ب.}$$

سوال کا  
 تفاعل  
 18:  $t(x) = \tan 3x$   
 ہے۔  
 خود  
 1. تفاعل کو  
 کب دہرائے  
 2. وقفے مساوات  
 $0 \leq x \leq 180$   
 $t(x) = \frac{1}{2}$   
 لیے کریں  
 حل  
 3. درج لیے مثبت  
 ذیل کم حل  
 مساوات سے تلاش  
 کے کم کریں۔

$$t(x) = -\frac{1}{2} \quad (ا)$$

$$t(x) = 2 \quad (ب)$$

سوال ذیل ہر مثالی سے حال  
 مسائل ایک  
 19: میں لیے  
 کے  
 ہو  
 پانی سے ایک جس صورت  
 سکے۔

1. ایک کی کم زیادہ میٹر ہوتی گھنٹے  
 نمبر گہرائی 3.6 سے کے رہتی کے  
 میں کم میٹر زیادہ درمیان ہے اوقات  
 پانی سے اور 6 تبدیل 24 میں۔

3. دائرہ	قطب	شمالی	کے
جنوب	کے	کچھ	قصبوں
میں	روشن	دن	2
سے	22	گھنٹوں	کا
ہوتا	ہے	360	دنوں
کے	ایک	مدار	میں۔

:20

1. سب اور وقوع	سے کس پہرے	زیادہ وقت ہوگا۔	ہٹاؤ یہ
2. ایک لیے گا۔	مکمل کتنا	چکر وقت	کے لگے

3. ایک دائرے فولادی	سیکنڈ مکمل دو شاخے	میں کرے کا	کتے گ ارتعاش۔
4. پہلے دوران کہ کا رکی 0.06 ہے۔	مکمل وہ جب دو سرا ہوئی سیٹی	دائرے وقت فلا دی سرا حالت میٹر	کے بتائیں دو شاخے اپنی سے ہوتا

:22

سوال

ایک ایک سے جبکہ رہا پڑ گیند اس کو جاتا دیا بال دار مرتعش گیند سے بعد سے ہے	چلک کنارہ باندھا دوسرا ہے۔ ایک بندھی لگتی تھوڑا ہے جاتا اس رستے ہو کی d اس معلوم	دار سا اور ہے، پڑ وقت کیلے کی	رسی ایک گیا سرا کھلے چھوٹی ہوئی ہوئی نیچے پھر اس اوپر جاتی گہرائی t کی جا	کا چوکھٹ ہے لٹک سرے سی ہے۔ گیند کھینچا چھوڑ سے چلک نیٹے ہے۔ چوکھٹ کے مدد سکتی
معلوم کریں کہ؛				

$$d = 100 + 10 \cos 500t$$

1. گیند زیادہ کم	کی اور گہرائی	زیادہ کم	سے سے
------------------	---------------	----------	-------

2. وہ اپنے پے	وقت اونچے ہوگی۔	جب ترین	گیند مقام
3. ایک لیے	مکمل درکار	ارتعاش وقت۔	کے
4. ایک کا جسکے لمبائی سے	ارتعاش وہ لیے 99 کم	میں حصہ رسی سینٹی رہتی	وقت کہ کی میٹر ہے

مرتوش	سوال	23:	ایک
y	ذریعہ ہے،	کا	ہٹاؤ
میں جسکے	ماپا لیے جسمیں	جو کہ	میٹرز
ہے۔	جانتا	ہے	اور
میں	تفاعل	a	$y = a \sin(kt + \alpha)$
میں	وقت k	t اور	میٹرز سینڈز
میں	جبکہ مستقل	ہیں	$\alpha$
دونوں	مکمل وقت معلوم	ارتعاش T	کے
ایک لیے ہے۔		کریں	سینڈز کہ؛

1. مستقل کی	k	کو	T
2. ایک ہونے k	ایکائیوں	میں	مکمل ارتعاش، میں۔
	سینڈز والی کی	میں دائروں اکائیوں	

سوال	24:	ایک	ایک
جزیرے	پے	پرنڈوں	خاص کی
قسم	کے	تبدیل	ہوتی
آبادی	P		

یہ	اور	ہے،	رہتی
ان	ہے	کرتی	مختصر
موسم	ہجرت،	خوراک،	کی
ایک	پر۔	شکار	اور
ان	جو	ارضیات	ماہر
تھا	رہا	تحقیق	پر
انکی	میں	سال	انے
ایک	لپے	کے	آبادی
		بنایا	کلیہ

$$P = N - C \cos \omega t,$$

N، C	میں	کیلے	اس
ہیں۔	مستقل	$\omega$	اور
جسکی	ہے	وقت	جبکہ
رکھی	ہفتہ	ایک	اکاے
وقت	یہ	ہے	گی
رہا	ہو	شروع	صفر
جنوری	کیم	یعنی	ہے
سے۔	بجے	12	رات

تفاعل	کہ	کریں	1. فرض
ہفتوں	50	کو	خود
$\omega$	ہے	دہراتا	بعد
کریں	معلوم	قیمت	کی

کریں	استعمال	کا	2. مساوات
کی	C	اور N	اور
دیں	جواب	میں	اکائیوں

میں	شروع	کے	(i) سال
کتے	کے	نسل	اس
ہیں	جاتے	پائے	پرندے

پندوں	کے	نسل	(ب) اس
آبادی	سے	ذیادہ	کی
کے	سال	یہ	اور
پائی	میں	جھے	کس
		گی	جائے

25:	سوال	صحرا
ایک	کے	جزیرے
والی	تک	سڑک
سے	اکثر	ڈھکی
سمندر	ہوتی	کا
سڑک	پانی	کے
ہے	برابر	تو
جانی	سڑک	ہے۔
دن	ایک	پانی
سمندر	کی	سے
میٹرز	بلندی	ہے۔
بلندی	لہر	h
کی	بیان	لیے
کلیہ	یہ	استعمال
ہے۔	کیا	وقت
کیا	t	گیا
وہ	ہے	وقت
شروع	ہے	ہوتا
کے	کے	آنے
سے۔	یہ	اور
میں	ہے	آیا
لہر	گھٹنے	12
ایک	آتی	بار
	ہے۔	

قیمت	k	1. مستقل معلوم
کی	کریں	2. اسی
ایک	دن	لگا
گئی	دی	سڑک
گھٹے	تین	لیے
ہے	بند	تعم
ہوئے	مانتے	،
درست	نامہ	سمندر
کی	سڑک	کریں
اونچائی	سے	دو
آپکا	اور	درست
نقطوں	اعشاری	
چاہیے	ہونا	

3. دراصل	سڑک	کی	بحالی
کے	کام	میں	اسکی
سطح	بڑھی	ہے،	اب
سڑک	صرف	2	گھٹنے
40	منٹ	کے	پے
بند	ہوئی	ہے	،
یہ	بتائیں	کہ	سڑک
کی	سطح	کتی	بلند
ہوئی۔			

سوال	بننے	26:	سمندر
میں	لیے	والی	لہروں
کے	نظریہ	سب	سے
سادہ	سورج	یہ	کہ
یہ	ثقل	اور	کی
کشش	وجود	کی	سے
معرض	چاند	میں	آتی
ہیں۔	سورج	کی	کشش
ثقل	گناہ	کی	نسبت
9	کی	فیادہ	ہے۔
سورج	والا	وجہ	سے
ہونے	دُنوں	تغیر	کو
360	جبکہ	بعد	دہراتا
ہے	سلسلہ	چاند	زیر
اثر	خود	کو	دُنوں
بعد	لہروں	کی	ہے
-	وقت	کی	h
،	جسکی	اکائی	t
ہے	ہے	اور	لیا
گیا			تفاعل

$$h = A \cos \alpha t + B \cos \beta t,$$

ہے۔	اس	تفاعل	میں
$A \cos \alpha t$	یہ	سورج	کے
اثر	کے	لیے	ہے
جبکہ	کلیے	کا	دوسرا



کی	چاند	$B \cos \beta t$	حصہ
پیدا	سے	شکل	کشش
کے	لہروں	والی	ہونے
بتایا	ہمیں	ہے۔	لیے
$h=5$	کہ	ہے	گیا
آپ	$t=0$	اور	ہے
$\beta$	اور	$\alpha A$	،B،
کریں۔	معلوم	قیمت	کی



## باب 11

### تفاعل کا مجموعہ اور تفاعل کا الٹ



باب 12

وسعت تفرق



## باب 13

### سمتیات





## باب 14

### ہندسی ترتیبات



## باب 15

### دھراتفرقات

اگلے	کے	مشتق	سبق
کرتا	پیش	کو	تصور
کو	سبق	اس	ہے۔
بعد	کے	کرنے	مکمل
کے	ہاتوں	آپ	،
اور	ساخت	ہو جائیگے۔	اہل
میں	دُنیا	کی	ترسیماں
دو	،	کے	اُن
افادیت	کی	مشتق	اطلاق
نقطہ	اور	سمجھنا۔	درجی
درمیان	کے	عظمت	کو
سمجھنے	کو	اقلیت	نقطہ
درجی	دو	فرق	اُتیازی
کرنہ۔	استعمال	لئے	کے
دو درجی	پہ	کو	مشتق
کے	ہو جانے	کے صفر	نقطہ
اور	تیار	کو	مشتق
میں	7	منہوم	تصور
		نمبر	15.1 ترسیماں
			اُنکے
			سبق

حاصل	کسی ہونے	والے	نتائج کی
خصوصیات	اور	تفاعل مشتق	کی
قیمتوں	کے	درمیانی	تعلق،
صرف	اُن	تفاعل	تک
ہی	محدود	تھے	کہ
اپنے	اپنے	دائرہ	کار
میں	مسل	ہوتے	تھے۔
اُن	تمام	نتائج	میں
اِس	بات	کو	استعمال
کیا	گیا	تھا	ترسیم
کے	کسی	خاص	پہ
مشتق	نقطے	پر	صرف
اُس	ہی	وہ	کرتا
پیکش	بلکہ	جاتا	ایک
تفاعل	کے	میں	پہ
تصور	کیا	پابندی	ہمیں
اِس	سبق	چکنے	لگانی
مزید	ایک	تبدیلی	اُن
پڑے	گی	اُن	ترسیم
تفاعل	پر	تفاعل	نہیں
میں	اچانک	یعنی	تفاعل
ہوتی	ہے،	،	کہا
کو	ہموار	کے	مثال
جاتا	ہے۔	اُس	ایک
کے	طور	پہ	لئے
تفاعل	$x^{\frac{3}{2}}(1-x)$	کو	کے
،	آپ	میں	سے
دائرہ	کار	جو کہ	نکال
نقطہ	عجب	مبدا	اِس
دینا	ہوگا،	سے	-
مثال	میں	کی	(
(مثال	7.2.3	ہوتا	شرط
ہموار	ہونے	،	ہے
سے	ظاہر	تفاعل	جو کہ
کہ	مشتق	اِس	ہے،
خود	ایک	اور	کا
مسل	ہے		

تفرق اُس درجی ہے۔ $f''(x)$ جاتا سے بھی مثال کے وقفوں جہاں	لیا کے اُسے ہے۔ اُسے ظاہر	نتیجے عام کرتے $y = f(x) = x^3 - 3x^2$ ترسیم کی $f'(x)$	جاسکتا کہا ظاہر اسی $\frac{d^2y}{dx^2}$ میں، شناخت	کو طور ہیں۔ 15.1.1 اُن کیجئے	ہے۔ دو جاتا پہ کیا طرح سے
$f(x)$ ہوتے ترسیکی	اور ہوں، مفہوم	بیان	$f''(x)$ اُن	ثبت کا کیجئے۔	

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = 6x - 6$$

خاکہ تفاعل اور ترسیمات اُس ہوتا $f(x) = x^2(x - 3)$ $x > 3$ ہوتا تمام ترسیم، اوپر اسی $f'(x) = 3x(x - 2)$ $x > 2$ تب کی	15.1 ' دوسرے دکھائی خاکہ ہے ہو ہے۔ قیوتوں - حاصل طرح یا ہوتا ترسیم	میں تب کی کیلئے محور x ہوتی سے میں یا ہو تب کی	میں اُسے مشتق گئی سے کہ ' تب کی x کیلئے محور x ہوتی سے میں ہے۔ میں،	پہلے مشتق کی ہیں۔ ظاہر تفاعل جب $f(x) > 0$ ان کی کے ہے۔ تفاعل جب ہو $f(x)$ اِس	اِس پہلے مشتق کی ہیں۔ ظاہر تفاعل جب $f(x) > 0$ ان کی کے ہے۔ تفاعل جب ہو $f(x)$ اِس
---	--	---	--	---	--

وقتے	میں	تفاوت	کی
قیمت	مثبت	ہوتی	ہے،
تاکہ	$f(x)$	کی	قیمت
بڑھتی	جائے۔		
آخر	میں،	تفاعل	$f''(x) = 6(x-1)$
میں،	جب	$x > 1,$	ہو
تب	$f''(x) > 0$	ہوتا	ہے۔
ایسا	ظاہر	ہوتا	کہ
اس	وقتے	میں	$f(x)$
کی	ترسیم	اوپر	کی
جانب	منحرف	ہوتی	ہوئی
دکھائی	دیتی	ہے۔	
"اوپر"	کی	جانب	منحرف
ہونے"	کے	اس	تصور
کو	آسانی	سے	کیلئے
،	تفاوت	کرتے	حرف g
کو	استعمال	ہوتا	ہیں
یعنی	$g = f'(x)$	سے	ہے۔
اسی	طرح	جو	$f''(x) = \frac{dg}{dx}$
ہوتا	ہے،	کہ x	کی
مناسبت	سے	تفاوت	کی
تبدیلی	کی	شرح	کو
ظاہر	کرتا	ہے۔	جس
وقتے	میں	$f''(x) > 0$	ہوتا
ہے،	وہاں	تفاوت	کی
قیمت	بڑھتی	جاتی	ہے،
جیسے	جیسے	x	قیمت
بڑھنے	لگتی	ہے۔	
درج	بالا	خاکہ	15.1
میں	درمیانی	ترسیم	میں
اسے	دیکھا	جاسکتا	ہے،
جو	کہ	ایک	مربعی
ترسیم	ہے	جس	نقطہ
راس	$((1, 1))$	3-	ہے۔
اسی	لئے	اس	کے
بائیں	جانب	تفاوت	کی
قیمت	نقطہ	$(2, -1)$	پہ
بڑھتے	ہوئے	-3	ہو جاتی
ہے۔	نقطہ	اقلیت	$(4, -2)$

سے	تی	گزرتے	ہوئے	اور	صفر
ہو جا	کر	ہے	ثبت		پھر
بڑھ	اس		کے		ہو جاتی
ہے۔	x	<	لگاتار	2	بعد
جب	تو				ہوتا
ہے	ہے۔				بڑھنے
لگتی					
درج	ہے۔	بالا	خاکہ		15.2
میں	تین		منحنی		دکھائے
گئے	ہیں۔		اگر		$f''(x) > 0$
ہو تو	اوپر		کی		جانب
انحراف	ہوتا		ہے		اور
اگر	$f''(x) < 0$		ہو تو		نیچے
کی	جانب		انحراف		ہوتا
ہے۔	یہاں		یہ		بات
نہایت	اہمیت		کی		حاصل
ہے	کہ		یہ		خاصیت
ہمیشہ	تفاوت		کی		علامت
پر	منحصر		نہیں		ہوتی
ہے۔	ایک		منحنی		اوپر
کی	جانب		منحرف		ہو سکتی
ہے	اگر	اُس	کا		تفاوت
ثبت	ہو	یا	منفی		ہو
یا	صفر نمبر	ہو۔			
مثال		15.1.2			
اگر	y	=	f(x)	اور	جہاں
$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}, x > 0$		ہو	کار		اُس
کا	دائرہ		f		$x > 0$
ہو۔	تفاضل		کیجئے۔		(x)
کی	تفقیض		تفاضل		$f(x)$
دیئے	گئے	یا	تو		$\frac{x-1}{x^2}$
کو	آپ				
اس	طرح		سے		یا
$x^{-1} - x^{-2}$					
اس	طرح		سے		لکھ
سکتے	ہیں۔				

اسی

لئے

،

$$f'(x) = -x^{-2} + 2x^{-3} = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{-x + 2}{x^3}$$

اور

$$f''(x) = 2x^{-3} - 6x^{-4} = \frac{2}{x^3} - \frac{6}{x^4} = \frac{2(x-3)}{x^4}$$

ہوتے

ہیں۔

دیئے

گئے

دائرہ

کار

میں،

ایسا

لگتا

ہے

کہ

$$\begin{array}{ll} f(x) < 0, x < 1 & \text{and } f(x) > 0, x > 1; \\ f'(x) > 0, x < 2 & \text{and } f'(x) < 0, x > 2; \\ f''(x) < 0, x < 3 & \text{and } f''(x) > 0, x > 3 \end{array}$$

اس

لئے

اس

کی

ترسیم

محور

کے

نیچے

ہوتی

ہے

اگر

$$0 < x < 1$$

ہو

اور

محور

کے

اوپر

ہوتی

ہے

اگر

$$x > 1$$

ہو۔

اور

یہ

ترسیم

محور

کو

نقطہ

پر

قطع

کرتی

ہے۔

اس

کی

تفاوت

مثبت

ہوتی

ہے

اگر

$$0 < x < 2$$

ہوتی

ہے

اگر

$$x > 2$$

ہو۔

اس

دوران

اُس

کا

نقطہ

عظمت

$$(2, \frac{1}{4})$$

ہوتا

ہے۔

اور

یہ

ترسیم

$$0 < x < 3$$

کیلئے

نیچے

کی

جانب

منحرف

ہوتی

ہے

اور

$$x > 3$$

کیلئے

اوپر

کی

جانب

منحرف

ہوتی

ہے۔

معلومات

کافی

یہ

تمام

کے

ذریعے،

ہیں

جن

گئے

دقت

کی

فاصل

قیمتوں

کیلئے

ترسیم

کی

ساخت

کا

تصور

سمجھا

جاسکتا

ہے۔



لیکن کیلئے ہے اور کیلئے اس تخصیب	تفتیش یہ کہ بہت ترسیم کیلئے کرنا	مکمل ضروری بہت بڑی کیسی درج چاہئے	کرنے ہو جانا چھوٹی قیمتوں ہوگی۔ ذیل
$f(0.01) = 100 - 10000 = -9900$			
اور اس ہے قیمت تب کیساتھ اور بڑی x مثبت نوٹ:- دی استعمال اس کوشش کے کار کر کے ترسیم ترسیم یہ نقاط جن معنی 15.1.2 توجہ جہاں قطع نقطہ ترسیم	$f(100) = 0.01 - 0.0001 = 0.0099.$ سے کہ چھوٹی منفی جب بہت عدد اس گئی کر کے کی یکجے۔ پاس ہو تو اپنے کی تیار صلاحیت کے رکھتے میں کا ترسیم کرتی $(2, \frac{1}{4})$ کا	جب بہت y y چھوٹا مثال معلومات آپ بنانے اگر ترسی اُسے بنائے جانچ کرنے دراصل محدود ہوں۔ نقطہ ہوتا محور ہے جو کہ نقطہ	x ظاہر ہوتی بڑی ہوتی کی ہے مثلاً
لیکن تب لیکن میں کا خود کی آپ تخصیب استعمال ہوئے کی اُن ہے کچھ مثال ہماری ہے کو اور اس عظمت	ہے قدر ہے۔ قیمت تب لیکن ہے۔ میں کا خود کی آپ تخصیب استعمال ہوئے کیجئے۔	مثلاً	مثلاً

ہوتا	ہے۔	ایک	اور
دلچسپ	نقطہ	$(3, \frac{2}{9})$	بھی
ہے	جہاں	ترسیم	نیچے
کی	جانب	انحراف	سے
تبدیل	ہو کر	اوپر	کی
جانب	انحراف	میں	تبدیل
ہو جاتا	ہے۔	یہاں	نوٹ
کیجئے	کہ	اسی	پر
$f''(x)$	کی	قیمت	بھی
منفی	سے	مثبت	ہو رہی
ہے،	اور	$f''(3) = 0$	ہوتا
ہے۔			
کسی	بھی	ترسیم	کا
ایسا	نقطہ	،	جہاں
ترسیم	ایک	جانب	انحراف
سے	تبدیل	ہو کر	دوسری
جانب	انحراف	دکھاتا	ہے
اُسے	اُس	ترسیم	کا
نقطہ	موڑ	کہتے	ہیں۔
اگر	کسی	ترسیم	میں
نقطہ	$p \cdot f(q)$	ہوتا	ہے۔
،	نقطہ	موڑ	طور
پر	موجود	ہو	اُس
نقطہ	پر	ہوتا	ہے۔
215 دو	درجی	مشتق	کا
عملی	استعمال	میں	کئی
حقیقی	دنیا	دو	درجی
حالتوں	میں	اہم	ہوتے
مشتق	کافی	ان	کے
ہیں	،	پہلے	سے
ذریعے	ہم	کی	راہیں
ہی	مستقبل	ہیں۔	مثال
متعین	کر سکتے	،	پچھلے
کے	طور	پر	کمپیوٹروں
کئی	وقتوں	سے	کافی
کو	گھریلو	استعمال	کمپیوٹر
بڑھ	رہا	ہے۔	کارخانہ
تیار	کرنے	والے	سالوں
داروں	نے	t	

تیار - وقت تعداد ہونے تفاوت لیکن کی بھی کم معلوم داروں قیمت گا۔ کھپت حاصل نے کوالٹی اس میں اثر طرح موسمیات ہوا قیمت یقین نہیں منفی انہیں بھی وہ کہہ موسم رونما پہلی کی کر کے اگر	کمپیوٹرس کیا میں کی تیار کی ہوگی۔ کرنے آگے یا اسے کارخانہ کی پڑے کی منفی داروں کی ہوگا۔) حالات کافی اسی محکمہ میں کی p زیادہ معلومات اگر اگر قیمت تو ساتھ کہ تہدیلیاں مشتق استعمال کیجئے۔	تخمینہ ہے کرنا کا جائے میں ہیں۔ مشتق استعمال کیجئے۔	H کا حالت کمپیوٹرس درمیان ترسیم مثبت تیار شرح رہی ہے کیلئے $\frac{d^2H}{dt^2}$ کرنا کمپیوٹرس شرح کارخانہ کمپیوٹرس غور قیمت ہے۔ اگر وقت t دباؤ ذریعے ساتھ سکتے لیکن کی مل کے ہیں زبردست والی مشق دوسری کو تیار	میں کرنے ایسی اور کے والے $\frac{dH}{dt}$ کمپیوٹرس یہ بڑھ ہو رہی کرنے کو معلوم (اگر کی ہو تو اپنے پچ طرح کی پڑتا سے والے کے کے کے دے ہو۔ $\frac{dp}{dt^2}$ منفی یقین سکتے میں ہونے اس اور معلومات ترسیم
---	--	--	--	---

آپ	ترسیم	تیار	کر لیتے
ہیں	تو	ترسی	کو
استعمال	کر کے	اپنی	ترسیم
کی	جانچ	کیجئے۔	
-1	$f(x) = x^3 - x$	=	$f(x)$
جہاں	پہ	غور	کے
ترسیم	حقیقت	کو	کیجئے۔
اس	معلوم	ترسیم	استعمال
کر کے	کو	کرتا	کہ
محور x-	قطع	ترسیم	کس
نقطہ	کا		ہے؟
اس			بھی
بنائے۔	$f(x) = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$	(b)	$y = f'(x)$
معلوم	کیجئے	اور	$y = f'(x)$
کی	ترسیم	بنائے۔	
(c)	$y = f''(x)$	معلوم	کیجئے
اور	$y = f''(x)$	کی	ترسیم
بنائے۔	(d)	اپنے	تیار
کئے	گئے	ترسیمات	کی
مستقل	مزاجی	معلوم	کیجئے۔
مثال	کے	طور	پہ، y
=	$f(x)$	کے	ترسیم
کی	جانچ	کیجئے	اگر
ہو تو	ترسیم	اوپر	کی
جانب	منحرف	ہوتی	ہے۔
-2			

$$y = x^3 + x$$

کی	ترسیم	کے	لئے،
(a)	اجزائے	ضروری	کو
استعمال	کر کے	ثابت	کیجئے
کہ	ترسیم	محور	کو
صرف	ایک	بار	قطع
کرتا	ہے۔		
(b)	$\frac{dy}{dx}$	اور	$\frac{d^2y}{dx^2}$
کی	تینیں	معلوم	کیجئے۔
(c)	وہ	وقفہ	معلوم

کیجئے  
کی  
جانب  
ترسیم  
مخرف  
اوپر  
ہوری  
(d)

$$y = x^3 + x$$

کی  
ہونے  
استعمال  
3-  
ترسیم  
لئے  
استعمال  
کیجئے  
والی  
ترسیم  
کیجئے  
= f(x)  
کے  
معلومات  
کی  
جہاں  
(نوٹ)  
3-  
کہ  
4-  
ترسیمات  
نقاط  
جہاں  
کے  
محدود  
اور  
معلوم  
اور  
ذیل  
اور  
ہوں۔

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 9$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 9 = (x - 3)(x^2 + 3)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$y = x + \frac{4}{x^2} \text{ ا.}$$

$$y = x + \frac{1}{x} \text{ ب.}$$

$$y = x^4 - 4x^2 \text{ ج.}$$

$$y = x - \frac{4}{x^2} \text{ د.}$$

$$y = x - \frac{1}{x} \text{ ه.}$$

$$y = x^3 + x^2 \text{ و.}$$

5-  
ترسیم  
وقت  
تیار  
بڑھ  
ترسیم  
ظاہر  
کی  
کیا  
(b)  
میں  
قیمتیں  
(a)  
قیمت  
(t)  
کی  
زر  
رہی  
میں  
کرتا  
قیمت  
کہا  
ترسیم  
دکھایا  
بڑھ  
گئی  
کی  
ہے  
جاسکتا  
گیا  
ہو  
رہی  
ہے؟  
اس  
کیا  
اُس  
متعلق  
جس  
کہ  
ہیں۔

لیکن	افراط	زیر	کی
شرح	کم	ہوتی	جاری
ہے	جس	کا	مکمل
اضافہ	20	کی	طرف
جاری	ہے۔		
-	y	=	f(x)
ترسیات	کے	لئے	f
$\hat{x}$	اور	یا	$\hat{x}$
کی	ثبت	(e)	منفی
علائقہ	لکھئے۔	کو	اور
میں (f)	آپ	حالت	متعلقہ
وقفے	کی	پڑے	کی
بھی	ضرورت	ذیل	گی۔
-	درج	کے	ترسیم
ایک	کمپنی	S	شیرس
کی	قیمتیں		دکھاتے
ہیں۔			
(a)	اس	ترسیم	کے
ہر	مرحلے	کے لئے	$\frac{dS}{dt}$
اور	$\frac{d^2S}{dt^2}$	کے	متعلق
اظہار		خیال	کیجئے۔
(b)	تکنیکی	الفاظ	میں
غیر	کیجئے	کہ	اس
وضاحت	میں	واقع	ہو رہا
ترسیم	8-	کولین	اپنی
ہے؟	کے	لئے	نکل
اسکول	ہے،	جو	اُس
چکا	گھر	سے	800 میٹر
کے	پر	واقع	ہے۔
فاصلے	کی	رفتار،	باقی
اُس	ہوئے	فاصلے	کے
بچے	راست	تناسب	میں
ساتھ	ہے۔	فرض	کریں
ہوتی	میٹرس	کا	فاصلہ
کہ x	نے	طے	کر لیا
اُس	اور لا	میٹرس	کا
ہے	ابھی	باقی	ہے۔
فاصلہ			

اور کے	t t	بالمقابل بالمقابل بنائے $\frac{dx}{dt}$ $\frac{d^2y}{dt^2}$ ہو گئی؟	(a)X y ترسیمات (b) اور کیا 9- کے ' t موجود کے N میں (a) اس کرنے مساوات t بنائے۔ علامت
$\frac{dy}{dt}$ علا متیں	$\frac{d^2x}{dt^2}$ کی	ایک انحطاط دیئے	
عصر شرح وقت میں تعداد تناسب	تاہم نی گئے اُس کی راست ہے۔	پہ ' جوہروں ساتھ ہوتی	
ظاہر ایک بالمقابل N ترسیم کی	کو لئے (b) لئے $\frac{d^2N}{dt^2}$ ہوتی ہے؟	معلومات کے لکھئے۔ کے (c) کیا	
تمام y کے خاکے کے آپ قریب ترسیم کیونکہ x نہیں	ذیل لئے ترسیمات کے (مثال) میں، کے کی ہیں ہیں۔	درج کے f(x) کی حصوں کیجئے۔ (a) پہ مور -y جسے سکتے دگر گئی	10- معاملات = مختلف تیار طور صرف والے بنا کی دی

$$f(0) = -3, f'(0) = 0, f''(0) = 3 \text{ ج.}$$

$$f(0) = 3, f'(0) = 2, f''(0) = 1 \text{ ا.}$$

$$f(5) = -2, f'(5) = -2, f''(5) = -2 \text{ ب.}$$

ثانی	نظر	پر	قیمتوں
آپ	میں	مشتق	پچھلی
پہ	مقامات	کچھ	نے
معلومات	کہ	ہوگا	دیکھا
آپس	تکڑے	مختلف	کے
ہیں۔	ہوتے	منضبط	میں
طور	خاص	بات	یہ
بالکل	نقاط	اُن	پر
ہے	ہوتی	ثابت	صحیح
قیمت	کی	ترسیم	جہاں
یا	اعظم	تو	یا
آپ	اگر	ترین۔	اقل
ہوگی	کی	نشاندہی	نے
f	نقطے	اقلیتی	کہ
تبدیل	علامت	کی	(x)
آپ	تب	ہے،	ہوتی
ہوگا	دیکھا	یہ	نے
ترسیم	سے	(x)	کہ f
منحرف	جانب	کی	اوپر
		ہے۔	ہوتی
ایک	میں	215.	خاکہ
ہے:	گیا	نتیجہ	عام
$f''(q) > 0$	اور	$f'(q) = 0$	اگر
پہ	$x = q$	تب	ہوں
حاصل	نقطہ	ترین	اقل
			ہوگا۔
$f''(q) < 0$	اور	$f'(q) = 0$	اگر
پہ	$x = q$	تب	ہوں
حاصل	نقطہ	ترین	اعظم
			ہوگا۔
نہایت	اوقات	اکثر	اسے
کیا	استعمال	سے	آسانی
اس	بجائے	ہے	جاسکتا
کہ	دیکھنا	یہ	کے
علامت	کی	پر	جس
وہاں	ہے	ہوتی	تبدیل
اقل	یا	کا	ترسیم
	ہوتا	نقطہ	ترین
ہے۔			



دفعہ	7.3	میں	کو	دکھائے
گئے	طریقہ	کار	انداز	،
درج	ذیل	جاسکتا	ہے۔	میں
ترسیم	کیا	ترسیم	یا	کے
$y = f(x)$	کی	نقطہ	کرنا۔	اقل
لئے	اعظم	معلوم		اُس
ترین	نقطہ	(1):۔		متعین
مرحلہ	نمبر	کو		آپ
دائرہ	کار	میں		
کھینچے	جس	ہوں۔		
دلچسپی	رکھتے	(2):۔		f
مرحلہ	نمبر	لئے		ایک
$(x)$	کے	معلوم		کھینچے۔
فقہ	(Expression)	(3):۔		اُس
مرحلہ	نمبر	میں x		کی
دائرہ	کار	فہرست		بنائیے
قیوتوں	کی	f		$(x)$
جن	کے	لئے		ہو۔
کی	قیمت	صفر		ہونے
(اگر	وہاں	حاصل		f
والی	قیوتوں	کے		ہو،
$(x)$	غیر	معروف		میں
تب	دفعہ	7.3		کار
دکھائے	گئے	طریقہ		(
کو	استعمال	کریں۔		f
مرحلہ	نمبر	(4):۔		ایک
$(x)$	کے	لئے		کھینچے۔
فقہ	(Expression)	معلوم		مرحلہ
مرحلہ	نمبر	(5):۔		x کی
نمبر	(3)	میں،		لئے
ہر	قیمت	کے		معلوم
f	کی $(x)$	علامت		مثبت
کھینچے۔	اگر	علامت		اقل
ہو	تو	ترسیم		اور
ترین	نقطہ	ہوگا		تو
اگر	علامت	منفی		نقطہ
ترسیم	کا	اعظم		کی $(x)$
ہوگا۔	(اگر	f		ہو جائے
قیمت	صفر	حاصل		

تو کیا مرحلہ ہم اعظم نقطہ	نہا جائے نمبر قیمت یا دیتی	طریقہ گا۔ (6):۔ لئے، اقل محسوب $f(x)$	( استعمال کی جو کہ ترین کریں۔
نوٹ کار منقسم اول طریقہ کی کار آمد اسی پروف معروف استعمال دوم f ہوں پروف تو ترین اسے $f(x) = x^3$ موازنہ	کیجئے ' ہوتا یہ صرف ترسیما ثابت لئے f ہو نہیں	کہ دو ہے۔ کہ ہموار کے ہوتا جن (x) وہاں کیا	طریقہ میں تفاعل لئے ہے۔ نقاط غیر اسے جاسکتا۔ اگر 0 = = قیمت یا دونوں 0 $g(x) = x^4$ جاسکتا
آپ دیکھ (0) 0 g لیکن x g(x) ترین وہاں	آسانی سکتے = اور (0) = کی ہوتی f(x)	کے ہیں f g = 0 قیمت ہے نا تو	ساتھ f = = - پروف اقل جبکہ اعظم



$$x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm 1$$

دوسرے  
درج

کا  
مشق

اس  
کا  
ہو گا۔

درجہ  
فیل

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

2- اگر	قیمت	کی	اس	حاصل
	ہے	1-	=	x
2	قیمت	کی	اس	اور
=	x	اگر	ہے	ہوتی
0)	لئے	اس	-	1
عظیم	نقطہ	ایک		(-1،
(1	(4،	اور		ہوگا
یہاں	نقطہ۔	اقلیتی		ایک
،	قیمت	ترین		اقل
بڑی	سے	قیمت		اعظم
کیسے	یہ	ہوئی۔		حاصل
		ہوا؟		ممکن
اور	تفاعل	ذیل		درج
پر	ترسیمات	کی		مساواتوں
کو	نقاط	ساکن		موجود
وضاحت	اور	کرنے		پاٹ
اور	پہلے	کیلئے		کرنے
مشتق	کی	درجہ		دوسرے
یہ	اگر	کیجئے۔	استعمال	کا
ثابت	ناکام		کار	طریقہ
علامت	کی	$\frac{dy}{dx}$	تو	ہو
کو	ہونے		تبدیل	کے
نقطہ،	اعظم		کر کے	استعمال
اور	نقطہ	ترین	موڑ	اقل
	کیجئے۔	معلوم		نقطہ

$$f(x) = 3x - x^3$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

$$f(x) = 3x^4 + 1$$

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$$

$$f(x) = \frac{2}{x^4} - \frac{1}{x}$$

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 24x + 6$$

$$y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 - 3$$

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$$

$$y = 16x - 3x^3$$

$$y = \frac{4}{x^2} - x$$

$$y = \frac{4+x^2}{x}$$

$$y = \frac{x-3}{x^2}$$

$$y = 2x^5 - 7$$

$$y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 1$$

4	منطقی	امتیازات	دیکھا	ہے
آپ	نے		تفاعل	کی
کہ	ہموار		لئے،	یہ
ترسیما	کے	ہے	کہ	اگر
صحیح	ہوتا		نقطہ	عظمہ
$(q, f(q))$	ایک	نقطہ	ہو	تب
یا	اقلیتی			
$f(q)=0$	ہے۔			
لیکن	اس		کا	معکوس
بیان	،		کہ	اگر
$f(q)=0$	ہو		تب	$(q, f(q))$
ایک	نقطہ	ہوگا	عظمہ	یا
اقلیتی	نقطہ		،	یہ
بیان	غلط	ہوتا		ہے۔
آپ	اُسے		غلط	ثابت
کر سکتے	ہیں		ایک	متضاد
مثال	کو		استعمال	کر کے،
مثلاً	ایک		تفاعل	جس
کے	لئے		"اگر"	"-----"
والا	حصہ	تو	موجود	ہو
لیکن	"تب"		"-----"	والا
حصہ	موجود	نا	تفاعل	ہو۔
ایسا	ایک	میں	چونکہ	$f(x) = x^3$
ہے	جس			$=$
0	ہے۔			$f'(x) = 3x^2$
ہے	f	$(x)$		0
اور	لیکن	(0,0)	تو	اس
ہے،	کیلئے	نا	نا	اعظم
تفاعل	ہے	اور		ہی
نقطہ	ترین	نقطہ۔		
اقل				

اسی نقطہ بھی تفاعل صحیح	ہوتا	ہے	کے	صورت کے ہے۔ لئے	حال ساتھ ہموار یہ اگر نقطہ (p) لیکن کے (p) نقطہ نقطہ بات
(p,	ہو	تب	f	ایک	
=	0	ہے۔	معلوس f	ہے۔	
اس مطابق،	0	ہو	تب	ایک	
=	ہوتا	ہے،	یہ	ہے۔	
(p,	ہوتی	معالے مثال،	میں x	تفاعل	ایک = f(x) = x^4 چونکہ
موڑ	لئے	ہو سکتی	ہے۔		

کیلیے 0 ایک f(x) = x^4 نا اعلیٰ مسائل کے جاتا ایسے کے ثابت فیثا غورث جیسا تھا، معلوس بہت کہ	f'(x) = 12x^2	ہوتا	ہے	(0)'' لیکن اقلیت ترسیم	جس = (0,0) ہے میں، موڑ۔
کہ	کے	نقطہ	نقطہ	میں مخصوص استعمال بہت ہیں بھی ہیں، مسئلہ۔	عام تفاعل کیا سے مسئلے جن صحیح مثلاً لیکن، میں کا یہ ہے مسئلہ ہیں
ریاضیات کو لئے ہے۔ ہوتے معلوس ہوتے کا	کہ اگر غلط اہم	اوپر کسی ہو، ہو جا	مثال مسئلہ تب تا	(صحیح) کر رہے	

ناکہ	(غلط)	معکوس	سنتیبتن	کو۔	کی
15.5	$f(x) = x^4$				
توسیع					
حالانکہ	$f(x) = x^4$		بذات		خود
ایک	علامت		ہے،		اسی
لئے	اسے		اجزا		میں
تقسیم	نہیں		کرنا		چاہیئے
لیکن	کئی		مرتبہ		اسے
y	کو		الگ		کر کے
لکھنے	کے		کئی		فائدے
ہوتے	ہیں۔		یعنی		اسے
$\frac{d}{dx} y$	اس		طرح		لکھا
جاتا	ہے۔		اسی		لئے
اگر	y	=	f(x)		ہو تو
آپ	اسے		اس		طرح
لکھ	سکتے		ہیں،		

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

ایک	نہایت	قابل	استعمال
مختفی	انداز	ہے۔	مثال
کے	طور	پر	اگر
$y = x^4$	ہو	تب	$\frac{dy}{dx} = 4x^3$
ہو گا۔			
اسے	مختفی	انداز	میں
طرح	لکھ	سکتے	ہیں،
			اس

$$\frac{d}{dx} x^4 = 4x^3$$

آپ	$\frac{d}{dx}$	کو	علامتی
ہدایت	سمجھ	سکتے	ہیں
جس	کے	عمل	بعد
مشتق	حاصل	ہو جاتا	ہے۔
آپ	نے	ایسے	تخصیب
کار	دیکھے	ہو گئے	جو
تخصیبی	عمل	کے	علاوہ
الجبرا	بھی	کرتے	ہیں۔
ان	میں،	اگر	آپ
ایک	تفاعل	مثلاً	$x^4$



لیں	اور	اُسے	تب	مشتق
کا	حکم	دیں	ت	وہ
آپ	کو	ماحصل		کے
طور	پر	$4x^3$		پیش
کرے گا۔	علامت	$\frac{d}{dx}$		کو
کبھی	کبھی	مشتقی		عامل
بھی	کہا	ہے۔		اس
طرح		علامت		مشتق
کے	عمل	لگانے		جیسا
ہی	انداز	کرتی		دوسرے
ایسی	کی	میں		میں
درجہ	یہی	مشتق		کو
بھی	کیا	سکیتے		
استعمال	درجہ	جاسکتا		مشتق
دوسرے	$\frac{dy}{dx}$	کا		مشتق
یعنی	جسے	عام		پر
لینا		کے		طور
ہم	$\frac{d}{dx} \frac{dy}{dx}$	ہیں۔		اگر
پر	اس	اصطلاح		کو
آپ	کر	ایک		اصطلاحات
سیٹ	اوپری	حصہ		میں
تو	ہوگا	اور		نچلے
$d^2y$	میں	$(dx)^2$		ہوگا۔
حصہ	وحدانی	خطوط		کو
یہاں	کر	لکھیں		یہ
ہٹا	بن	جاتا		ہے۔
$\frac{d^2y}{dx^2}$	اعلیٰ	درجہ		مشتق
15.6	درجہ	مشتق		پر
دو	کرنے	یا		رک
اکٹھا	کی	کوئی		خاص
جانے	نہیں	ہے۔		چونکہ
وجہ	بذات	خود		بھی
$\frac{d^2y}{dx^2}$	تفاعل	ہے،		اگر
ایک	ایک	ہموار		تفاعل
وہ	اُسکا	مزید		مشتق
ہو تو	جاسکتا	ہے		کہ
لیا		جو		

سہ	درجی	مشتق	ہوگا۔
اس	عمل	کو	مسل
جاری	رکھنے	پہ	اعلیٰ
مشتقوں	کا	ایک	سلسلہ
مل	جاتا	ہے۔	
$\frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \frac{d^5y}{dx^5}$	غیرہ	وغیرہ۔	تفالی
انداز	میں	اسے	اس
طرح	لکھا	جاتا	ہے

$$f'''(x), f^{(4)}(x), f^{(5)}(x),$$

یہاں	آپ	نوٹ	کیجئے
کہ	تیرے	درجہ	تک
مشتق	کو	ظاہر	کرنے
کیلئے	،	dashes	،
کو	استعمال	کیا	گیا
لیکن	چوتھے	مشتق	سے
آگے	کیلئے	وحدانی	خطوط
میں	عدد	لکھ	اُس
مشتق	کے	درجے	کا
اظہار	کیا	گیا	ہے۔
مشتقیں،	تمام	اعلیٰ	درجی
یا	حقیقی	دُنیا	میں
میں	ترسیات	کی	تیاری
کردار	کوئی	خاص	تفہیمی
ہیں۔	نہیں	ادا	کرتے
میں	لیکن	کچھ	معاملات
ہوتے	یہ	اہم	بھی
تحسب	ہیں۔	مثلاً	تقریبی
وار	میں	اور	سلسلہ
کے	تفاعل	کے	اظہار
استعمال	لئے	ان	اہم
-	ہوتا	ہے۔	کا
$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$	مندرجہ	ذیل	معلوم
	اور	$\frac{d^4y}{dx^4}$	

$$y = x^2 + 3x - 7$$

$$y = 2x^3 + x + \frac{1}{x}$$

$$y = x^4 - 2$$

$$y = \sqrt{x}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y = x^{\frac{1}{4}}$$

کیلئے  
'  
کے۔

ذیل  
f'(x)  
معلوم

f(4)(x)

مندرجہ  
'

اور

-2  
f'(x)  
f''(x)

$$y = x^2 - 5x + 2$$

$$y = 2x^5 - 3x^2$$

$$y = \frac{1}{x^4}$$

$$y = x^2(3 - x^4)$$

$$y = x^{\frac{3}{4}}$$

$$y = x^{\frac{3}{8}}$$

3-	اگر	$y = x^n$	ہو
تو	$\frac{d^n y}{dx^n}$	معلوم	کیجئے
جہاں	n	ایک	مثبت
عدد	ہے۔		
4-	اگر	$y = x^{n+2}$	ہو
تو	$\frac{d^n y}{dx^n}$	معلوم	کیجئے
جہاں n	ایک	مثبت	عدد
ہے۔			
5-	اگر	$y = x^m$	ہو
تو	$\frac{d^n y}{dx^n}$	معلوم	کیجئے
جہاں	m	ایک	مثبت
عدد	ہے	n	<
m			
متفرق	مشق		
15	1-	$x^3 - 6x^2 + 9x + 6$	کی
اعظم	قیمت	اور	اقل
قیمت	معلوم	کیجئے،	ساتھ
ہی	ساتھ	یہ	بھی
بتائیے	کہ	آپ	نے
انہیں	کیسے	معلوم	کیا؟
2-	تفاعل	$f(x) = 16x + \frac{1}{x^2}$	کیلئے
اعظم	قیمت	اور	اقل
قیمت	معلوم	کیجئے،	ساتھ
ہی	ساتھ	یہ	بھی
بتائیے	کہ	آپ	نے
اعظم	اور	اقل	نقطہ
کیسے	متعین	کیا۔	
3-	تفاعل	$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{30 - 5x}$	میں
اعظم	قیمت	اور	اقل
قیمت	معلوم	کیجئے	اور
کی x	متعلقہ	قیمتیں	بھی
دیجئے۔			
4-	تفاعل	$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-4x}$	کی
ترسیم	میں	اعظم	نقطہ
اور	اقلیتی	نقطہ	کے
محدد	لکھئے۔	کی	کافی
5-	نسرین	ہونے	کی
کے	سرد		

شرح،  
حرار  
ماحول  
 $\alpha$   
ساتھ  
کافی  
ت  
کے  
کے  
تساوب  
میں  
کے  
 $\theta$   
درجہ  
اور  
حرارت  
کے  
ہے۔

$\theta$   
ترسیم  
پر  
اور  
ت  
اگر  
ہو  
بنائے۔  
 $\alpha = 20$   
درمیان  
 $t=0$   
اور

$\theta = 95$   
ہو  
اور  
تو  
ہو۔  
 $\theta$   
اگر  
کی  
 $t > 0$   
 $\theta, \frac{d\theta}{dt}$

$\frac{d^2\theta}{dt^2}$   
-  
ہوائی  
مزاحمت  
ہے  
کہا  
مخصوص  
رفتاروں  
رگرڈ  
کی  
اڈان  
جہازوں  
محسوس  
جسے  
جاتا  
جہاز  
کے  
کی  
علاقیہ  
کے  
میں  
کی  
ہوائی  
ہے۔  
کیلیے،  
لئے،  
قیمت  
بتائیں۔  
دوران،  
ایک  
جانی  
رگرڈ  
ایک  
سم  
ہوائی

$kS^2$   
جہاں  
ہے  
ضریب  
جہاز  
اگر  
جائے  
ساتھ  
قیمت  
ہے۔  
S  
ترسیم  
(آواز  
قربانی  
عام  
کے  
k  
جسے  
کی  
ہے  
رفتاروں  
تو  
ساتھ  
بھی  
اور  
تیار  
درج  
کی  
قیمتوں والے  
طور  
برابر  
ایک  
ہوائی  
اور S  
رفتار  
کو  
رفتار  
k  
بڑھتی  
k  
ہونے  
ذیل  
رفتار  
علاقے  
پر  
مستقل  
کا  
اُس  
ہے۔  
بڑھایا  
کے  
کی  
جانی  
بالمقابل  
والی  
ہے۔  
کے  
کو  
سمعی

رکاوٹ	کہا	جاتا	(ہے۔)	تینوں
(a)	ترسیم	میں،		اور
علاقوں	میں	$\frac{dk}{dS}$	بتائیے۔	
$\frac{d^2k}{dS^2}$	کی	علائقہ		میں
(b)	کس			
k	قیمت	نہایت		تیزی
کی	تبدیل	ہو رہی		ہے؟
سے	بہت	زیادہ		تیز
(c)	کیلئے	k		
رفتاروں	قیوتوں	سے	کیا	نتیجہ
کی				ہے؟
اخذ	کیا	جاسکتا		کا
7-	ایک	کھڑکی		نما
نچلا	حصہ	مستطیل		حصہ
ہے	اور	اوپری		ہے۔
نیم	دائرہ	نما		حصے کو
نچلے	مستطیل	نما		گیا
ABCD	سے	دکھایا		چوڑائی
ہے	جس	کی		اوجھائی
2x	ہے	اور		دائرہ
y-ہے	اوپری	نیم		AB
نما	حصہ	نیم		دائرے
ہے،	یعنی	قطر		
کا	نصف			
کھڑکی	کا	مجموعی		محیط
10	میٹرس	ہے۔ x		اور
$\pi$	کی	شکل		میں
کھڑکی	کے	مجموعی		رقبے
کے	لئے	فقہہ		حاصل
کیجئے۔	ساتھ	ہی		ساتھ
x کی	وہ	قیمت		معلوم
کیجئے	جس	کے		لئے
رقبہ	کی	قیمت		اعظم
ہوگی۔	x کی	اُس		مخصوص
قیمت	کو	معلوم		کرنے
کیلئے	$\frac{d^2y}{dx^2}$	کی		قیمت
کا	استعمال	کیجئے۔		تو
-	اگر	a>0	ہو	

تفاعل  
اقلیت

ذیل  
اور

کہئے

درج  
اعظم  
تفیش

کیلئے  
کی

$$x^2(x - a)$$

$$x^3(x - a)$$

$$x^2(x - a)^2$$

$$x^3(x - a)^2$$

تفاعل

$$x^n(x - a)^m$$

انکے

لئے

کہئے

ہو۔

ایک  
کے  
تیار  
ذیل

کیلئے  
 $f^n(x)$   
فقرہ  
درج

بنائیے۔

ایک  
جہاں  $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

\*10  
کی  
موڑ

درج  
منحنیوں

کے

محدود

ذیل  
کیلئے

معلوم

مساواتوں  
نقطہ  
کہئے۔

$$y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 4$$

$$y = x^2 - \frac{1}{x} + 2$$





باب 16

تکميل



## باب 17

### حجم جسم طواف

یا تلاش انضمام بارے کو جاتا باب گے لا ایک انقلاب کے	حجم کو لیے کے جس کہا اس کر لیں اور کسی میں کرنے	کسی x سے تلاش جائیں	باب حجم کے استعمال ہے۔ رد عمل آپ مکمل آپ میں بارے حجم ہو	یہ ٹھوس کرنے کے میں ٹھوس ہے۔ جب کو تو محور کے کا قابل
--	--	---------------------------------	--	---

گے۔

### 17.1 انقلاب کی جلدیں

پہ مہدا لکیر میں OA اور	لکیر ایک ایک 17.11 ہے۔ لائن	ایک O اور OA کی جیسا تصور گیا	O ہے ہے۔ بنائیں۔ دکھایا
-------------------------------------	---	---	-------------------------------------

دار خطے آپ گرد گھماتے ٹھوس ہے۔ اس ہونے کا ہے۔ ٹھوس کو کا	سایہ والے کریں۔ اگر ذریعے ایک دیتا میں تعبیر انقلاب جاتا حجم انقلاب جاتا	کے غور خطے کے تو، یہ نکال تصور سے شکل کہا کے اوقات کہا	$x$ -محور دکھائے پر اس $360^0$ ہیں شیک 2-17 طرح والی ٹھوس انقلاب بعض حجم
منحنی کتاب متعدد کے یکساں کی سے	کے حساب لئے انقلاب لگانا اس مثال ہے۔	خط کے کے سے کا ' ایک جاسکتی	ایک خطوط کرنے طریقوں حجم ہے مثال دی
کے سے کے تصویر جا کے ٹھوس گھمایا پر سوال کرنا V بھی کے ہے۔	$y = \sqrt{x}$ $x = 1$ ترسیم علاقے کو دکھا $x$ -محور کا لیے طور عام شروع حجم کسی قدر ٹھوس	کریں اور کے کے میں ہے، انقلاب کے ہے۔ کلیدی اور کر اسکا $x = 1$ سے کی کا	فرض ترسیم $x = 4$ درمیان 3-17 سکتا گرد بنانے جاتا ایک پوچھ ہے۔ ہے۔ قدر انقلاب



طرح

اسی

$$V = \frac{1}{2}\pi x^2 - \frac{1}{2}\pi$$

کرنے

تلاش

$$x = 4$$

حجم

کے

V

لیے

کے

$$x = 4$$

لیے

کے

اظہار

حجم

تو

لیں۔

جگہ

کی

ہے۔

$$\frac{1}{2}\pi \times 4^2 - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi(16 - 1) = \frac{15}{2}\pi$$

کو

3-16

حصہ

آپ

آخری

کے

کے

استعمال

کریں

متعارف

کے

حصے

مختصر

اسے

اور

گے

گے۔

کریں

$$V = \int_1^4 \pi y^2 dx = \int_1^4 \pi x dx = \left[ \frac{1}{2}\pi x^2 \right]_1^4 = \frac{1}{2}\pi \times 16 - \frac{1}{2}\pi \times 1 = \frac{15}{2}\pi$$

مثال

کے

کریں

نوٹ

جو

میں

شروع

کے

گیا

کیا

استعمال

اسدلال

طور

مکمل

وہ

ہے۔

کسی

اور

عام

پہ

کی

تھا

بھی

طرح

نہیں

انحصار

پہ

مساوات

اور

$$x = a$$

تھا۔ جب

کرتا

$$y = f(x)$$

درمیان

کے

$$x = b$$

تو

ہے

ترسیم

کا

x-محور

$$a < b$$

خطہ

تحت

جاتا

گھمایا

گرو

کے

ٹھوس

کا

انقلاب

ہے۔

ہے۔

ہوتا

حجم

کا

$$\int_a^b \pi(f(x))^2 dx \quad \int_a^b \pi y^2 dx$$

$$x = -1$$

:17.1

$$x = 1$$

مثال

x-محور

کو

اور

کے	گرد	چار	دائیں
زاویہ	سے	کھمایا	چلتا
ہے۔	اور	جسم	$y = 1 + x^2$ کے
ترسیم	کے	نیچے	ہوتا
ہے۔ اسکا	جسم	تلاش	کریں۔
چار	دائیں	زاویوں	کا
فقرہ	بعض	اوقات $360^0$	کی
جگہ	پڑے	مکمل	بیان
کرنے	کے	لیے	استعمال
ہوتا	ہے۔	اور	$x$ -محور
کے	گرد	گردش	کرتا
ہے۔ تو	مطلوبہ	جسم	$V$
ہے۔	جہاں		

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-1}^1 \pi y^2 dx = \int_{-1}^1 \pi (1 + 2x^2 + x^4) dx \\
 &= \left[ \pi \left( x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right) \right]_{-1}^1 \\
 &= \pi \left\{ \left( 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) - \left( (-1) + \frac{2}{3}(-1)^3 + \frac{1}{5}(-1)^5 \right) \right\} = \frac{56}{15} \pi
 \end{aligned}$$

ہے	بات	کی	معمول	نتیجہ
عین	کے	کے	$\pi$	مطابق
طور	اعداد	ہے۔ اہم	متعدد	پڑ
و	اشاری		دیا	نثار
جگہوں	گنی		یا	کی
تعداد کا	دیں۔		دی	سیج
اور	کہ		جواب	ثابت
بنیاد	ایک		ساتھ	کے
ششک	دراس	$V$	جسم	کا
$r$		$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$	اوپر کی	اور
یے۔	لیے		دینے کے	ششک
گھومنے	تصویر		مثلاً	والا
17.6	گیا		دکھایا	میں
ہے۔	پورے		اوپر کی	جسکی
صفہ	گنی	کی	تیار	پڑ
ہے۔				





مثال  $y = x^3$  درمیان ہوا حجم  $y$ -محور اور  $y = 8$  کے  $y$ -محور جاتا ہے۔  
 17.2: اس سے پیدا کریں۔ درمیان کو گرد  
 خطہ کے چڑا شدہ اور  $y = 1$   $360^0$  گھمایا

$$V = \int_1^8 \pi y^{\frac{2}{3}} dy = \pi \left[ \frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} \right]_1^8 = \pi \left( \frac{3}{5} \times 8^{\frac{5}{3}} \right) - \pi \left( \frac{3}{5} \times 1^{\frac{5}{3}} \right)$$

$$= \pi \left( \frac{3}{5} \times 32 \right) - \pi \left( \frac{3}{5} \times 1 \right) = \frac{93}{5} \pi$$

□

مشق مشق کو  $\pi$  طور  
 17.1: تمام جوابات ضرب لکھیں۔  
 اس سوالات میں کے  
 1. جب  $y = f(x)$  خطہ کے ہوتا تلاش کے گرد ہے؟  
 درمیان کے تب  $x = b$   $x$ -محور جاتا  
 $x = a$  ترسیم ہے۔ کرے ذریعے گھمایا

$$f(x) = x^3; \quad a = 2, \quad b = 6 \quad \text{ج.}$$

$$f(x) = x; \quad a = 3, \quad b = 5 \quad \text{ا.}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}; \quad a = 1, \quad b = 4 \quad \text{د.}$$

$$f(x) = x^2; \quad a = 2, \quad b = 5 \quad \text{ب.}$$

اور  
ترسیم  
کئے  
لگائیں۔  
x-محور  
چاتا

$x = a$   
درمیان  
بنائے  
پتہ  
360°  
گھمایا

ب. جب  
 $y = f(x)$   
کے  
جسم  
 $x = b$   
کے  
ہے۔

$$f(x) = \sqrt{x+1}; \quad a = 0, \quad b = 3 \quad \text{ج.}$$

$$f(x) = x+3; \quad a = 3, \quad b = 9 \quad \text{ا.}$$

$$f(x) = x(x-2); \quad a = 0, \quad b = 2 \quad \text{د.}$$

$$f(x) = x^2+1; \quad a = 2, \quad b = 5 \quad \text{ب.}$$

اور  
کے  
ہو۔  
جسم  
 $y = c$   
کثیر  
گرد  
تا  
نکالا

y-محور  
ترسیم  
ہوا  
شدہ  
اور  
کی  
کے  
ہے۔  
رستہ

ج. جب  
 $y = f(x)$   
ساتھ  
تب  
تلاش  
اور  
کو  
گھمایا  
کہ  
جا  
خط  
کے  
جڑا  
پیدا  
کریں۔  
 $y = d$   
y-محور  
چاتا  
ٹھوس  
ہو۔

$$f(x) = \sqrt{9-x}; \quad c = 0, d = 3 \quad \text{ھ.}$$

$$f(x) = x^2; \quad c = 1, d = 3 \quad \text{ا.}$$

$$f(x) = x^2+1; \quad c = 1, d = 4 \quad \text{د.}$$

$$f(x) = x+1; \quad c = 1, d = 4 \quad \text{ب.}$$

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}; \quad c = 1, d = 5 \quad \text{ن.}$$

$$f(x) = \sqrt{x}; \quad c = 2, d = 7 \quad \text{ج.}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}+2; \quad c = 3, d = 5 \quad \text{ح.}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}; \quad c = 2, d = 5 \quad \text{د.}$$

خط  
خطوط

مین  
منحنی

معاملے  
ذیل

د. ہر  
مندرجہ

درمیان منسلک  
کے  
ذریعے  
کا

کے  
x-محور  
کے  
ٹھوس  
کریں۔

x-محور  
ہے۔  
360°  
کردہ  
تلاش

اور  
ہوتا  
گرد  
پیدا  
جسم

$$y = x^2 - 5x + 6 \quad \text{ج.}$$

$$y = (x + 1)(x - 3) \quad \text{ا.}$$

$$y = x^2 - 3 \quad \text{د.}$$

$$y = 1 - x^2 \quad \text{ب.}$$

کے  
منسلک  
ذریعے  
تو  
ہے،

$y = x^2$   
درمیان  
کے  
ہے  
ہوتا  
کریں۔

اور  
کے  
R  
جاتا  
جسم  
تلاش

$y = x$  ہ.  
ترسیوں  
خطے  
گھمایا  
جو  
اسے

کے

کے ب. y-محور  
گرد

ا. x-محور  
گرد

کے  
منسلک  
ذریعے  
تو  
ہے،

$y = 4x$   
درمیان  
کے  
ہے  
ہوتا  
کریں۔

اور  
کے  
R  
جاتا  
جسم  
تلاش

$y = x^2$  و.  
ترسیوں  
خطے  
گھمایا  
جو  
اسے

کے

کے ب. y-محور  
گرد

ا. x-محور  
گرد

کے  
منسلک  
ذریعے  
تو  
ہے،

$y = x^2$   
درمیان  
کے  
ہے  
ہوتا  
کریں۔

اور  
کے  
R  
جاتا  
جسم  
تلاش

$y = \sqrt{x}$  ز.  
ترسیوں  
خطے  
گھمایا  
جو  
اسے

کے

کے ب.  $y$ -محور  
گردا.  $x$ -محور  
گرد $y$ -محور  
ماپیں  
گرد  
دیاپیالہ  
کے  
کے  
تفکیککا  
ترسیوں  
علاقے  
ہوئے  
ہے۔ج. گلاس  
کے  
اس  
گھماتے  
جاتاپیالے  
مقدار $y = x^3$   
کیاور  
شیشے  
کریں۔ $y = x^2$   
میں  
مرلوممحوروں  
لکیر

$$y = \frac{1}{8}x^2 + 2$$

گیا  
کے  
کادونوں  
ہے۔  
وکرگھمایا  
بنانے  
ٹھوس  
کریں۔خط  
منسلک  
اور  
ارد گرد  
محور  
 $y$ -محور  
تلاشط. یہ  
سے  
 $x = 2$   
کے  
ہے۔ ایک  
لیے  
حجم

مشق

17.2:

$$y = x^2 + 1$$
$$x = 2$$

ہے۔  
گھمایا  
اور  
سے  
کاوکر  
لکیر  
ہوا  
گرد  
 $\pi$   
رہا  
ٹھوس  
کریں۔خط  
اور  
جڑا  
کے  
ہے۔  
کے  
شدہ  
تلاشا. یہ  
 $x$ -محور  
سے  
 $x$ -محور  
گیا  
 $\pi$   
تفکیک  
حجم

ب. یہ	نقاط	وضاحت	کریں	کے
مطمئن	$x^2 + y^2 = a^2$	$x, y$	مرکزہ	ایک
-محور		دراس	کی	مساوات
اوپر		کت	نشانہی	کریں۔
360 <sup>0</sup> ہے۔		دائرہ	نیم	کے
کو		کے	گھمایا	جاتا
کا		گھمایا	ذریعے	-محور
وضاحت		دائرہ	چاتا	ہے۔ دراس
حجم	$V$	کریں۔ اضاحت	$a$	کی
اس	دائرہ	کیوں	کریں	کے
مز جانب	دیا	کا	گیا	ہے۔
				$V$

$$V = 2\pi \int_0^a a(a^2 - x^2)dx.$$

یہ	ثابت	کریں	$V = \frac{4}{3}\pi a^3$
ج. مساوات	والا	بیضوی	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
تصویر	میں	دکھایا	گیا
ہے۔	اور	$b$	کا
محور	ایک	بی	ہے۔
$a^2$	اور	$b^2$	بہضوی
شکل	بنانے	کے	لیے
-محور	کے	گرد	گھمایا
جاتا	ہے۔ اس	بیضوی	کا
حجم	تلاش	کریں۔	$b$
بناتے	ہوئے	بیضوی	کی
مقدار	کم	کریں۔	اور
$y$ -محور	کے	گرد	گھمایا
جائے۔			

د. تصویر	میں	$y = x^{-\frac{2}{3}}$	نکر
دکھایا	گیا	ہے۔	
(1) دکھائیں	کے	سایہ	دار
علاقہ	$A$	لا محدود	ہے۔
(ب) رنگیں	علاقہ	$B$	تلاش
کریں۔			

گرد  
گھمایا  
تلاش

کے  
ذر لیے  
جسم

رقبہ  
کے  
ہے۔  $x$ -محور

$A$  (ج)  
 $360^0$   
چاتا  
کریں۔

کے  
ہے۔  
کریں۔

$360^0$   
چاتا  
تلاش

$B$   
گھمایا  
جسم

(د) علاقہ  
ذر لیے  
 $y$ -محور

4  
ہے۔  
علاقوں  
تعلقات

سوال  
گیا  
مساوی  
کی

کا علاقہ  
دیا  
کی  
جلدوں

۱. مساوات  
میں  
ان  
اور  
کریں۔

$$(i) \quad y = x^{-\frac{3}{5}},$$

$$(ii) \quad y = x^{-\frac{1}{4}}.$$

نقاط  
وکر  
بنائیں۔  
چو  
نقطہ  
خطوط  
ہے۔  
کے  
ہے۔

اور  
ہوئے  
خاکہ  
ساتھ  
محدود  
منحنی  
ہوتا  
 $R$   
ہوتا

موڑ  
بتائے  
کا  
کے  
یے۔  
میں  
مشتمل  
 $x$ -محور  
ظاہر

۲. نقطہ  
کے  
 $y = 9 - x^2$   
محور  
رہا  
جس  
پر  
اور  
ذر لیے

تلاش  
وجہ  
میں

رقبہ  
اسی  
صورت  
کریں۔

کا  
اور  
دوسری  
تلاش

$R$  (۱)  
کریں  
سے  
---

$360^0$   
چاتا  
کی  
انتخاب  
کے

کو  
گھمایا  
حاصل  
ٹھوس  
 $x$ -محور  
کریں۔

$R$   
ذر لیے  
تو  
والی  
جسم  
تلاش

(ب) جب  
کے  
یے،  
جانے  
کا  
گرد

360<sup>0</sup>

جاتا  
جانے  
کا  
گرد

کو  
گھمایا  
کی  
انقلاب  
کے

R  
ذریعے  
حاصل  
ٹھوس  
y-محور  
کریں۔

(ج) جب  
کے  
یے، تو  
والی  
جسم  
تلاش

خطوط

جس

ہے۔

ساتھ

کریں۔

سے

کا

ہوتا

گرد

گھمایا

منحنی  
ہے۔  
 $2 \leq x \leq 4$   
کے  
تلاش  
لہاظ  
ٹھوس  
R  
کے  
سے

کو  
 $y = (x - 2)^{\frac{3}{2}}$   
یے  
x-محور  
 $x = 4$   
کے  
کردہ  
جب  
x-محور  
زاویوں  
ہے۔

ز. خطے  
وکر  
کے  
جو  
ہے۔  
 $\pi$   
حاصل  
جسم  
ہے۔  
چار  
جاتا





## باب 18

### ریڈمین

مرکز	کا	دائرے	ایک
سم	6	اور	0
خط	مستقیم	ایک	ہے۔
لبائی	کی	جس	PG
میں	اس	سم	8
ہے۔	بناتا	قطع	ایک
اور	احاطہ	قطے	اس
آپکا	کریں۔	دریافت	رقبہ
ہندسوں	نمایاں	تین	جواب
	ہو۔	درست	تک
مسائل	کے	طرح	اس
ہے	ہوتا	یہ	میں
لیے	کے	آغاز	کہ
دکھائے	میں	18.3	شکل
کی	ضلع	تاریک	نیم
OPQ	احاطے	پورے	بجائے
	جائے۔	غور	پر
دو	احاطہ	قطع	اس
ہے۔	مشتمل	پر	حصوں
سیدھا	والا	سم	8
منحنی	خط	اور	حصہ
حصہ	منحنی	حصہ۔	والا

کی	لمبائی	معلوم	کرنے
کے	لیے	زاویہ	POQ
کو	جاننے	کی	ضرورت
ہو	گی۔	کو	آپ
اس	زاویے	دے	لیں۔
$\theta$	کا	نام	مساوی
چونکہ	یہ	ایک	(برابر)
الفاظ	(دو)	اعلاع	مرکز
تکون	ہے۔	لسزہ	تک
0	سے	خط	خط
کھینچا	گیا	ایک	اور
سے	خط	PQ	دو
زاویہ	POQ	دونوں	تقسیم
برابر	حصوں	میں	
ہو	جاتے	ہیں۔	

$$\sin \frac{1}{2}\theta = \frac{4}{6} = 0.666...$$

لمذا	$\frac{1}{2}\theta = 0.7297...$	اور	$\theta = 1.459...$
اپنے	عداد	کو	ریڈیٹن
انداز	میں	کر	اب
اس	کا	احاطہ	$d = 8 + 6\theta = 16.756...$
ٹھہرتا	ہے۔	اسکا	احاطہ
16.8	سم	ہے	جو کہ
تین	ہندسوں	تک	درست
ہے	قطعے	کا	رقبہ
مذکورہ	کرنے	کے	لیے
معلوم	حلقہ	OPQ	کا
آپکو	معلوم	ہو	گا
رقبہ	اس	رقبہ	سے
پھر	OPQ	کا	رقبہ
مثلاً	کرنا	ہو	گا۔
نفی	ہم	کسی	تکون
اگر	کے	لیے	استعمال
رتبے	کو	$\frac{1}{2}r^2 \sin \theta$	تاریک
$\frac{1}{2}bc \sin A$	تو	نیم	
لائیں	رقبہ		
کا	لمذا		
گا۔			



تک	درست	ہے۔	r	مان
(1)	رد اس	کو		
لیں۔				
اکر	ہم	مثال		18.2.1
میں	استعمال	کردی		طریقہ
سے	فائدہ	اٹھائیں		تو
اس	حصے	کا	رقبہ	درج
ذیل	ہو	گا		

$$1/2r^2\theta - 1/2r^2 \sin \theta$$

یہ	دائرے	کے		کل
رہتے	کا	1/3		تب
قرار	پائے	گا	جب	

$$1/2r^2\theta - 1/2r^2 \sin \theta = 1/3\pi r^2$$

اس	مساوات	کو		2
سے	ضرب	دیں		اور
$r^2$	سے	تقسیم		کر
دیں	تو	آپکو	درج	زیل
نتیجہ	حاصل	ہو	گا	

$$\theta - \sin \theta = 2/3\pi$$

(ب)	اگر	ہم		مساوات
$f(\theta) = \theta \sin \theta$	میں	$\theta$		کی
قیمت	2.61	لگائیں		تو
$f(2.61) = 2.103$	بنے	گا		جو
2.094	کے	بہت		قریب

ہے۔	سے	ہمیں	یہ	اندازہ
اس	ہے	کہ	$\theta$	کی
ہوتا				بہت
قیمت	2.61	کے		یہ
قریب	ہے۔	لیکن		تک
دع	اعشاری	نقطوں		کو
درست	2.61	بیان		لیے
ثابت	کرنے	کے		مقصد
ناکافی	ہے	اس		ثابت
کے	لیے	آپکو	یہ	$\theta$
کرنا	پڑے	گا	تہ	اور
کی	قیمت			

$$2.605$$

2.165	شکل	کے	درمیان	ہے۔
0	ہے	18.5	سے	عیاں
ہے	اود	$\theta$	کی	قیت
ہے	اور	$\pi$	کے	درمیان
ہے		$\theta$	کے	بڑھنے
بھی	نیم	تاریک	حصہ	ہے۔
چنانچہ	بڑھ	جاتا		دکھانا
ہے	آپکو	یہ	$\theta = 2.605$	ہونے
ہے	کہ	حصہ		بہت
چھوٹا	یہ	جاتا	ہے	جگہ
$\theta = 2.515$	ہو	ہونے	سے	بہت
بڑا	ہو	جاتا	ہے۔	

$$f(2.605) = 2.605 - \sin 2.605 = 2.093 \dots$$

اور

$$f(2.615) = 2.615 - \sin 2.615 = 2.112 \dots$$

پہلا	جواب	$2/3\pi = 2.094 \dots$	سے
چھوٹا	ہے	جگہ	دوسرا
جواب	بڑا	ہے۔	اس
سے	یہ	ثابت	ہے
کہ	مساوات	کا	جزر
2.605	اور	2.615	کے
درمیان	ہے۔	لہذا	جزر
دو	اعشاری	نقطوں	تک
درست	2.61	ہے	
مشق	18		
درج	ذیل	میں	سے
زاویے	کو	ریڈین	میں
کریں۔	آپ	جواب	کو
کے	مضرب	چھوڑ	سکتے

90

135

45

30

72

			18		
			120		
			22.5		
			720		
			600		
			270		
			1		
مندرجہ ریڈیئن استعمال درجوں	ذیل میں کیے میں	تمام ہیں۔ بغیر تبدیل	زاویے عداد انہیں کریں۔		
			$(1/3)\pi$		
			$(1/20)\pi$		
			$(1/5)\pi$		
			$(1/8)\pi$		
			$(1/9)\pi$		
			$(2/3)\pi$		
			$(5/8)\pi$		
			$(3/5)\pi$		
			$(1/45)\pi$		
			$(6)\pi$		
			$(-1/2)\pi$		
			$(5/18)\pi$		
عداد مندرجہ درست	استعمال ذیل قیمتیں	کیے کو لکھیں۔	بغیر عین		
			$\sin(1/3)\pi$		
			$\cos(1/4)\pi$		
			$\tan(1/6)\pi$		

				$\cos(3/2)\pi$			
				$\sin(7/4)\pi$			
				$\cos(7/6)\pi$			
				$\tan(5/3)\pi$			
				$\sin^2(2/3)\pi$			
شکل	اس	مساواتیں	زیریں				
جکد	ہیں	حوالے	کے				
رداس	کا	دارے	R				
		ہے	(سم)				
لبائی	کی	قوس	S				
		ہے	(سم)				
رقبہ	کا	ضلعے	A				
		ہے	$\theta$				
جئے	پر	مرکز	جکد				
میں	(ریڈیئن)	زاویہ	والا				
			ہے				
ہے	$\theta = 1.2$	اور	$r = 7$				
قیمتیں	کی	A	S				
		اور	معلوم				
ہے	$\theta = 2.1$	کریں۔	$r = 3.5$				
قیمتیں	کی	A	S				
		اور	معلوم				
ہے	$r = 8$	کری	$s = 12$				
قیمتیں	کی	A	$\theta$				
		اور	معلوم				
ہے	$\theta = 0.7$	کریں	$s = 14$				
قیمتیں	کی	A	r				
		اور	معلوم				
ہے	$r = 5$	کریں	$A = 30$				
قیمتیں	کی	A	$\theta$				
		اور	معلوم				
ہے	$s = 16$	کری	$A = 64$				
قیمتیں	کی	A	$\theta$				
		اور	معلوم				
ہے	$s = 10$	کریں۔	$A = 30$				
معلوم	قیمتیں	کی	$\theta$				
			کریں۔				

درج	ذیل	ہر	صورت
میں	نیم	تاریک	جسے
کا	رقبہ	دریافت	کریں
$r = 5$	$\theta = (1/3)\pi$		
$r = 3.1$	$\theta = (2/5)\pi$		
$r = 28$	$\theta = (5/6)\pi$		
$r = 6$	$s = 9$		
$r = 9.5$	$s = 4$		
ایک	دائرے	کا	رداس
13	سم	ہے۔	10
سم	لمبا	ایک	مستقیم
خط،	اس	کا	جو
حصہ	قطع	ہے	اس
کا	رقبہ	معلوم	کریں۔
ایک	دائرہ	جس	کا
رداس	25	سم	ہے،
4	سم	ایک	مستقیم
خط	اس	ہے	کو
منقطع	کرتا	احاطہ	اس
جسے	کا		دریافت
کریں	مستقیم	خط	دائرے
ایک	اس	طرح	منقطع
کو	ہے	کہ	مرکزہ
کرتا	زاویہ	$\theta$	بنائے
پہ	منقطع	جسے کا	رقبہ
اور	کے	کل	رتبہ
دائرہ	$(1/4)$	بناتا	ہے
کا	وضع	کریں	کہ
(i)			
$\theta - \sin \theta = (1/2)\pi$	ثابت	کریں	کہ
(ب)	جبکہ	یہ	قیث
$\theta = 2\pi$	اعشاری	نقطوں	تک
دو	ہو۔	جن	کے
درست	دائرے	سم	24
دو	5	جزوی	پہ
رداس	ہیں	اور	کوئے
سم	دوسرے	طور	مرکز
ایک	ان	کے	دور
ہیں۔	13	سم	
باہم			



مشترب	میں	دونوں	ہیں۔
دو	میں	معلوم	رقبہ
گئے	دکھائے	شکل	اس
دوسرے	ایک	دائرے	ایسے
ہیں۔	کرتے	جو	ہیں
6	رداس	قطع	کو
ہیں	سم	کے	دائروں
7	فاصلہ	4	سم
میں	دائروں	کے	جبکہ
کا	جسے	درمیانی	مرکز
کریں۔	معلوم	دونوں	سم
		تاریک	مشترب
		رقبہ	احاطہ
کا	کرتے	کے	سورج
کے	چاند	حصہ	10%
جائے	ڈھک	سے	کرتے
سورج	10%	اسے	تو
ایک	ہیں	کہتے	گرہن
کروں	دو	اس	بچہ
کشی	تصویر	مدد	کی
کا	کرتے	ہے	کرتا
ہے	cm	r	رداس
دکھایا	یہاں	کہ	جیسا
کروں	دونوں	ہے۔	گیا
درمیانی	کے	ان	1۔
r	پیمائش	مرکز	کے
	سے	کی	فاصلے
کروں	دو	حوالے	کے
درمیانی	کے	انہی	2۔
80%	پیمائش	مرکز	کے
مطابق	کے	کی	فاصلے
کے	افعال	گرہن	سورج
کی	زاویہ	کیجیے۔	بھی
جائے	ناپا	مشابہتی	18.3
اور	$y = \sin \theta$	کسی	ترسیے
		میں	اگر
		$y = \cos \theta$	ریڈیئن
			تو

وہی	اشکال	کی	$y = \tan \theta$
جیسی	گی	ہوں	ہی
اور	$y = \sin \theta$	$y = \cos \theta$	کہ
گی	ہوں	کی	$y = \tan \theta$
ہوگا	فرق	یہ	صرف
ان	ساتھ	مخوف	کہ
	مختلف	پیانہ	کا
میں	ریڈیمنٹ	کو	$\theta$
$y = \sin \theta$	$y = \cos \theta$	کر	رکھ
ترسیات	کے	$y = \tan \theta$	اور
اور	18.7ء	18.6ء	اشکال
ہیں۔	گئے	میں	18.8

جات	حصہ	آپ	اگر
والے	10.2	اور	10.1
میں	سمت	ہر	ترسیات
کے	پینشن	جیسی	ایک
وہ	تو	بنائیں	ساتھ
ترسیات	گئے	دکھائے	یہاں
بہت	میں	مقابلے	کے
چپے	اور	چوڑے	زیادہ
		گئے۔	ہوں
آپ	اگر	حقیقت	در
اور	$y = \sin \theta$	$y = \cos \theta$	کو
دریافت	ترسیات	کے	$y = \tan \theta$
اس	تو	ہوں	کرنے
ہمیشہ	تقریباً	لئے	کے
کئے	استعمال	ہی	ریڈیمنٹ
ترسیات	ان	ہیں	جاتے
وہی	کی	توازن	میں
ہیں	ہوتی	موجود	خصوصیات
$y = \sin \theta^0$	$y = \cos \theta^0$	کہ	جو
ہوتی	میں	$y = \tan \theta^0$	اور
	خصوصیات:	دور عا	ہیں۔

$$\cos(\theta \pm 2\pi) = \cos \theta \quad .1$$

$$\sin(\theta \pm 2\pi) = \sin \theta \quad .2$$

$$\tan(\theta \pm 2\pi) = \tan \theta \quad .3$$

طارق/ہفت : خصوصیات:

$$\tan(\theta \pm 2\pi) = \tan \theta \quad .1$$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta \quad .2$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta \quad .3$$

خصوصیات:

کی

حرکت

مستقیم

$$\cos(\theta - \pi) = -\cos \theta \quad .1$$

$$\sin(\theta - \pi) = -\sin \theta \quad .2$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta \quad .3$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta \quad .4$$

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta \quad .5$$

$$y = \cos \theta$$

ترسیمات

یہ

اس

خانے

cosine

tangent

کی

کر

نتائج

-1

کے

کے

$$\sin(\frac{1}{2}\pi - \theta) = \cos \theta$$

اور

اوپر

گئی

اور

توازن

استعمال

ذیل

کے

18 ب

$$y = \sin \theta$$

کر

کہ

خصوصیت

ساتھ

دی

sine

کی

کو

مندرجہ

ثابت

مشتق

اور

استعمال

دکھائے

اس

کے

میں

افعال

خصوصیات

کے

کو

$$\cos\left(\frac{1}{2}\pi + \theta\right) = -\sin \theta$$

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = -\cos \theta$$

$$\sin\left(-\theta - \frac{1}{2}\pi\right) = -\cos \theta$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi + \theta\right) = -\cos \theta$$

استعمال  
اور  
بنائیں۔  
کہ

کو  
 $y = \tan \theta$   
خاکے  
دکھائیں

محوروں  
ہوئے  
کے  
یہ

اپنی  
کرتے  
 $y = \frac{1}{\tan \theta}$   
نیز

$$\tan\left(\frac{1}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta}$$

از  
کریں

کم

ایسی  
تلاش  
لے

کی  
قیمت  
کے

$\alpha$   
کم  
جس

$$\cos(\alpha - \theta) = \sin \theta \quad .1$$

$$\sin(\alpha - \theta) = \cos(\alpha + \theta) \quad .2$$

$$\tan \theta = \tan(\theta + \alpha) \quad .3$$

$$\sin(\theta + 2\alpha) = \cos(\alpha - \theta) \quad .4$$

$$\cos(2\alpha - \theta) = \cos(\theta - \alpha) \quad .5$$

$$\sin(5\alpha + \theta) = \cos \theta - 3\alpha \quad .6$$

بار  
 $\cos^{-1}$   
دیکھ  
اب  
آپ  
تفاعل (تفاعلات)  
تعریف

کئی

تفاعل

تک

،  
کو  
گے۔

کہ

یکونی  
جامع

کیا

18.3

ہیں

جائے۔

سے  
کہ

تکوینیاتی  
اب  
 $\sin^{-1}$   
 $\tan^{-1}$   
ہوں  
آگیا  
الٹ  
ایک  
آگاہ

الٹ  
آپ  
علامات  
،  
چکے  
وقت  
کو  
کی  
سے  
آپ  
دیکھ

حصہ  
دیکھتے

$\sin x$	،	$\cos x$	تفاعل
ایک	ایک	$\tan x$	اور
11.6	حصہ	ہوتے۔	نہیں
جا	نکالا	یہ	سے
تک	جب	ہے	سکتا
کے	تعریف	کی	ان
محدود	کو	کار	دائرہ
کے	ان	کر	نہ
یہاں	ہوتے۔	نہیں	الٹ
کا	رہیں	فرض	ہم
کو	اکائی	ریڈ	آپ
	رہے	کر	استعمال
ہم	سے	18.9	شکل
کہ	ہیں	سکتے	دیکھ
کے	تعریف	کی	$\cos^{-1}$
کے	تفاعل	cosine	لیے
$0 \leq x \leq \pi$	کو	کار	دائرہ
ہے۔	گیا	محدود	تک
دیکھیں	پھر	بار	ایک
ترسیم	کی	$y = \sin x$	کہ
$y = x$	حصہ	موٹا	کا
عکس	کا	$y = \sin^{-1} x$	میں
بھی	الٹ	اس	ہے۔
		ہے۔	درست
سے	1	سوالات	مشق
حساب	آلہء	میں	5
	کریں	نہ	استعمال
		کریں	دریافت

1.  $\cos^{-1} \frac{1}{2} \sqrt{3}$

2.  $\tan^{-1} 11$

3.  $\cos^{-1} 0$

4.  $\sin^{-1} \frac{1}{2} \sqrt{3}$

5.  $\tan^{-1} 1 - \sqrt{3}$

$$\sin^{-1} 1 = 1 \quad .6$$

$$\tan^{-1} 1 = 1 \quad .7$$

$$\cos^{-1} 1 = 1 \quad .8$$

ریاضت کریں

$$\cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad .1$$

$$\sin^{-1} 0.5 \quad .2$$

$$\cos^{-1} 0.5 \quad .3$$

$$\tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} \quad .4$$

$$\tan^{-1} \sqrt{3} \quad .5$$

دریاضت کریں

$$\sin(\sin^{-1} 0.5) \quad .1$$

$$\cos(\cos^{-1}(-1)) \quad .2$$

$$\tan(\tan^{-1} \sqrt{3}) \quad .3$$

$$\cos(\cos^{-1} 0) \quad .4$$

دریاضت کریں

$$\cos^{-1}(\cos \frac{3}{2}\pi) \quad .1$$

$$\sin^{-1}(\sin \frac{13}{6}\pi) \quad .2$$

$$\tan^{-1}(\tan \frac{1}{6}\pi) \quad .3$$

$$4. \cos^{-1}(\cos 2\pi)$$

دریافت کریں

$$1. \sin(\cos^{-1} \frac{1}{2} \sqrt{3})$$

$$2. \frac{1}{\tan(\tan^{-1} 12)}$$

$$3. \cos(\sin^{-1}(-0.5))$$

$$4. \tan(\cos^{-1} \frac{1}{2} \sqrt{2})$$

کوئی استعمال	ی کر	تربسی کے	طریقہ مساوات کریں۔
$\cos x = \cos^{-1} x$	کو	حل	3
آپ اشاری ہو۔	کا درجوں	جواب تک	درست تر
مساوات ہے؟	یہ	واحد	جزر
ریڈ نہیں ہوئے	کو	استعمال	کرتے
حل بعض کو	تکو نیاتی کرنا	مساواتوں	کو
آپ ریڈ نہیں چاہیں اصول جو	اوقات حل کسی میں گئے۔ وہی آپ میں کام استعمال تفاعل	زاویے تلاش اس ہوں نے درجوں کرنے کیے	مساواتوں ہوئے کو کرنا کے گئے حصہ (درجات) کے تھے۔
10.5 میں لیے تاہم	اور	$\cos^{-1}$	،
$\sin^{-1}$ معانی انہیں تفویض	وہی	$\tan^{-1}$	کے جو میں
حصہ کیے	ہوں	گئے	تھے۔
		18.4	

مثال					
مساوات حل	$\cos \theta = -0.7$	کواس	طرح		
$0 \leq \theta \leq 2\pi$	کریں	کا	وقفہ		
دو	میں	تمام	جزر		
درست	اشاری	نقطوں	تک		
آہیں۔					
قدم	1				
$\cos^{-1}(-0.7) = 2.346...$		پہ	وقفہ		
$0 \leq \theta \leq 2\pi$	میں	ایک	جزر		
ہے					
قدم	2				
$\cos(-\theta) = \cos \theta$	کی	تفائل	کی		
خصوصیت	کو	استعمال	کر		
کہ	یہ	دکھائیں	کہ		
$....2.346-$	ایک	اور	جزر		
ہے۔	توجہ	کریں	کہ		
$....2.346-$	مطلوبہ	وقفے	میں		
نہیں	ہے۔				
قدم	3				
دوری	خصوصیت				
کے	استعمال	سے			
کریں	$-2.346.... + 2\pi = 3.936...$	ایک			
وقفے	میں				
ہے۔					
وقفہ	$0 \leq \theta \leq 2\pi$	میں	مساوات		
$\cos(\theta) = -0.7$	کے	جزر	2.35		
اور	3.94	ہیں	جو		
کہ	دو	اشاری	نقطوں		
تک	درست	ہیں۔			
مثال					
مساوات	$\sin \theta = (-0.2)$	کو	اس		
طرح	حل	کریں	کہ		
وقفہ	$-\pi \leq \theta \leq \pi$	میں	دو		
اشاری	نقطوں	تک	درست		
ہوں۔					
قدم	1				
$\sin^{-1} 0.2 = -0.201$		وقفے	میں		
مذکورہ	بالا				
ایک	جزر	ہے۔			
قدم	2				



ایک ہے۔ وقفہ	کا $\pi - (-0.201 \dots) = 3.342$ مطلوبہ ہے۔	مساوات یہ نہیں 3	اس جزر تاہم میں قدم $2\pi$ سے ہوتا $-\pi \leq \theta \leq \pi$ جزر لہذا کے 0.20- اشاری ہیں۔ مثال مساوات طرح وقفہ جزر تک
کرنے حاصل وقفہ اور	تفریق 2.490- یہ ایک	کو ہمیں ہے۔	لہذا کے 0.20- اشاری ہیں۔ مثال مساوات طرح وقفہ جزر تک
$\sin \theta = (-0.2)$ اور دو درست	میں 2.94- جو تک	$-\pi \leq \theta \leq \pi$ جزر ہیں نقطوں	لہذا کے 0.20- اشاری ہیں۔ مثال مساوات طرح وقفہ جزر تک
اس کہ تمام نقطوں	کو کریں میں اشاری ہوں۔	$\cos 3\theta - 0.1) = 0.3$ حل $-\pi \leq \theta \leq \pi$ دو درست	مساوات طرح وقفہ جزر تک
فرض کہ $\cos \phi = 0.3$ $\theta$ آتا وقفہ آئے	$\phi$ تا شکل چونکہ میں $\phi = 3\theta - 0.1$ میں $-9.524... \leq \phi \leq 9.324$	کو لیں کی جائے۔ $-\pi \leq \theta \leq \pi$ لہذا $-3\pi - 0.1 \leq \phi \leq 3\pi - 0.1$ جو کہ	$3\theta - 0.1 =$ کر مساوات ہو وقفہ ہے گا
پہلا کہ کر حاصل	کا ہے حل	مسئلے یہ کو جائے۔ 1	اس حصہ $\cos \phi = 0.3$ کہ کیا قدم 1
وقفہ جزر	یہ ایک	میں میں	$\cos^{-1} 0.3 = 1.266...$ $-9.524.. \leq \phi \leq 9.324...$ ہے۔ قدم 2

اس cosine اور ہے۔	حقیقت تفاعل ایک	کے جفت جزر	مطابق ہے 1.266...
درج سکتے یہ درجی - آپ میں البرائی کر	ذیل ہیں $\sin \theta$ البرائی اسے درج کیلے کے	صورت $\sin^2 \theta + \sin \theta - 1 = 0$ میں ایک مساوات حصہ دو کو حل	دے اب دو ہے 4.4 درجی استعمال سکتے
ہیں جس $\sin \theta = -1.618$ - ہے۔ اسی جزر $\sin \theta$ استعمال ہے۔ $-1 \leq \sin \theta \leq 1$	سے ایک $\sin \theta = 0.618...$ وقفے $\pi - 0.666 \dots = 2.475 \dots$ کے سے چونکہ خصوصیت اس	کر $\sin \theta = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2}$ $\sin \theta = 0.618$ ہوتا ہے $\sin^{-1} 0.618 \dots = 0.666 \dots$ کے میں ہے تفائل حاصل $\sin \theta$ ہے لیے مساوات	یا ہے $\sin^{-1} 0.618 \dots = 0.666 \dots$ لیے دوسرا جو کے ہوتا کی کہ مساوات
$\sin \theta = -1.618$ نہیں جزر ہیں نقطوں مشق اعشاری $\theta$ کم کریں	کا ہے۔ 0.67 جو تک 18 نقطوں کی مثبت جن	کوئی لہذا اور دو درست ریڈیئن تک کم قیمتیں کے	جزر مطلوبہ 2.48 اعشاری ہیں۔ میں، دو درست، از تلاش لیے

$$\sin \theta = 0.12 \quad .1$$

$$\sin \theta = -0.86 \quad .2$$

$$\sin \theta = 0.925 \quad .3$$

$$\cos \theta = 0.81 \quad .4$$

$$\cos \theta = -0.81 \quad .5$$

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad .6$$

$$\tan \theta = 4.1 \quad .7$$

$$\tan \theta = -0.35 \quad .8$$

$$\tan \theta = 0.17 \quad .9$$

$$\sin(\pi + \theta) = 0.3 \quad .10$$

$$\sin(2\pi + \frac{1}{3}) = 0.123 \quad .11$$

$$\sin(\frac{1}{6} - \theta) = 0.5 \quad .12$$

$$\cos(3\theta - \frac{2}{3}\pi) = 0 \quad .13$$

$\theta$	میں	$-\pi \leq \theta \leq \pi$	وقفہ
قیمتیں	تمام	وہ	کی
مندرجہ	جو	کریں	تلاش
سکیں۔	کر	حل	ذیل
جتنا	جوابات	کو	آپ
اعشاری	دو	کے	ممکن
چاہئیں۔	ہونے	ہو	نقطوں
		درست	تک

$$4 \sin \theta = 3 \cos \theta \quad \text{ز}$$

$$\sin \theta = -0.73 \quad \text{د}$$

$$\sin \theta = 0.84 \quad \text{ا}$$

$$3 \sin \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{ح}$$

$$\cos \theta = -0.15 \quad \text{ھ}$$

$$\cos \theta = 0.27 \quad \text{ب}$$

$$3 \sin \theta = \tan \theta \quad \text{ط}$$

$$4 \tan \theta + 5 = 0 \quad \text{و}$$

$$\tan \theta = 1.9 \quad \text{ج}$$

مساواتوں

$$0 < x \leq 2\pi$$

نکالنے

ذیل

وقفہ  
حل

مندرجہ

لیے  
تمام

.3

کے  
میں

$\cos 2x = \frac{1}{4}$ ا	$\sin 2x = -0.62$ ج	$\tan 2x = 0.5$ د
$\tan 3x = 3$ ب	$\cos 4x = -\frac{1}{5}$ د	$\sin 3x = -0.45$ ،

4. وقفہ  
میں  
مساواتوں کے  
مندرجہ  
ذیل  
جزر  
تلاش  
تمام  
کریں۔  
 $-\pi < t \leq \pi$

$\cos 3t = \frac{3}{4}$ ا	$\sin 3t = -0.32$ ج	$\tan 5t = 0.7$ د
$\tan 2t = -2$ ب	$\cos 2t = 0.264$ د	$\sin 2t = -0.42$ ،

5. وقفہ  
میں  
مساواتوں کے  
مندرجہ  
ذیل  
جزر  
تلاش  
تمام  
کریں۔  
 $-\pi < \theta \leq \pi$

$\cos \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{3}$ ا	$\sin \frac{1}{5}\theta = -\frac{1}{5}$ ج	$\tan \frac{2}{3}\theta = 0.5$ د
$\tan \frac{2}{3}\theta = -5$ ب	$\cos \frac{1}{3}\theta = \frac{1}{2}$ د	$\sin \frac{2}{5}\theta = -0.4$ ،

6. استعمال  
ذیل  
عزاد  
کریں  
-  
میں  
 $\pi$   
وقفہ  
آپ  
کے  
مضربوں  
میں  
 $0 < \theta \leq 2\pi$   
حساب  
بغیر  
مساواتوں  
جزر  
کوئی  
کے  
کتاب،  
مندرجہ  
کے  
تلاش  
ہوں  
جواب  
میں  
ہوں۔

$\sin(2\theta - \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}$ ا	$\tan(\frac{3}{2}\theta - \frac{1}{6}\pi) = -\sqrt{3}$ د	$\cos(\frac{1}{5} - \frac{5}{18}\pi) = 0$ ج
$\tan(2\theta - \frac{1}{6}\pi) = 0$ ب	$\cos(2\theta - \frac{5}{18}\pi) = -\frac{1}{2}$ د	$\tan(3\theta - \pi) = -1$ ج
$\cos(3\theta + \frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ج	$\sin(\frac{1}{2}\theta + \frac{5}{18}\pi) = 1$ ،	$\sin(\frac{1}{4}\theta - \frac{1}{9}\pi) = 0$ ب

7. لیے تلاش مندرجہ وقفہ کریں  
 ذیل  
 $-\pi < \theta \leq \pi$   
 اگر  
 مساواتوں میں کوئی  
 کے جزر ہوں۔

$\tan \theta = 2 \cos \theta$  ا  
 $\sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta$  ج  
 $2 \sin \theta = \tan \theta$  د  
 $\sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1$  د  
 $\tan^2 \theta = 2 \cos^2 \theta$  ،  
 $\sin^2 \theta = 2 \cos \theta$  ب

18

1. متفرق  
 آپ کا گیا  
 O ہے۔  
 قیمت  
 قوس اور  
 رقبہ  
 2. کا  
 O کے  
 میں  
 $\theta$   
 احاطہ  
 قوس کے  
 ہے۔  
 تلاش  
 3. ایک  
 مرکز  
 r  
 دکھایا  
 کی  
 احاطے  
 r  
 اس

مشق  
 اس کو  
 ایک  
 ہے  
 اور  
 زاویہ  
 0.6  
 PQ  
 احاطہ  
 معلوم  
 ایک  
 رداس  
 ہے۔  
 ایک  
 $\angle AOB$   
 ریڈیئن  
 AOB  
 AB  
 مرتب  
 $\theta$   
 کریں۔  
 اس  
 دائرے،  
 O  
 ہے،  
 گیا  
 لمبائی  
 کا  
 کو  
 حلقے

18  
 خاکے  
 ایک  
 حلقہ  
 جس  
 رداس  
 POQ  
 ریڈیئن  
 کی  
 POQ  
 کریں  
 دائرہ  
 اور  
 اس  
 خطے  
 کی  
 ہے۔  
 کا  
 کی  
 کا  
 کی  
 شکل  
 جس  
 اور  
 ایک  
 ہے۔  
 حلقے  
 نصف  
 مان  
 رقبہ

میں  
 دائرے  
 دکھایا  
 مرکز  
 6cm  
 کی  
 ہے۔  
 لمبائی  
 کا  
 جس  
 مرکز  
 دائرے  
 OAB  
 قیمت  
 رقبہ  
 لمبائی  
 دوگنا  
 قیمت  
 میں  
 کا  
 رداس  
 حلقہ  
 قوس  
 کے  
 ہے۔  
 کر  
 معلوم

کریں	-	اس	شکل	میں
4.	کو	گئے	دو	دائرے
آپ	مرکز	ہیں۔	ہیں	جن
دکھائے	دوسرے	اور	$A$	اور
کے	اور	ان	یہ	دائرے
$B$	مقطع	مقطع	کو	نقاط
ایک	کا	مقطع	$D$	اس
$C$	محیط	محیط	پر	ہیں
طرح	دائرے	دائرے	کرتے	ہر
کہ	اکائی	اکائی	مرکز	دوسرے
ایک	$CAD$	$CAD$	آتا	ہے۔
کے	کریں۔	کریں۔	ہے۔	رداس
ہر	شکل	شکل	کی	قیمت
ایک	تاریک	تاریک	میں	ایک
زاویہ	کی	کی	علاقہ	ہے
معلوم	اور	اور	حدود	قوس
اس	ہیں۔	ہیں۔	عمودی	خط
نیم	رقبہ	رقبہ	اس	علاقہ
جس	واضح	واضح	دریافت	کریں۔
$CBD$	دونوں	دونوں	کریں	کہ
$CD$	واقع	واقع	دائروں	کے
کا	رقبہ	رقبہ	مشترکہ	علاقہ
نیز	رتبے	رتبے	ہر	دائرے
ان	39	39	کا	و
اندر	اس	اس	فیصد	ہے۔
کا	کو	کو	خاکے	میں
کے	قوس	قوس	ایک	دائرے
بیش	ہے۔	ہے۔	$ABC$	دکھائی
5-	$O$	$O$	دائرے	کا
آپ	سم	سم	اور	رداس
کی	اور	اور	ہے۔	خطوط
گئی	$A$	$A$	$CD$	بالترتیب
مرکز	دائرے	دائرے	$C$	پر
5cm	زاویہ	زاویہ	اور	tangents
$AD$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	کے	کی
نقاط	$AD$	$AD$	$AOC$	ہے۔
اس			$DC$	اور
ہیں۔				
قیمت				
خطوط				

اندر  
رقبہ  
کا  
ہندسوں

چاہئے۔

میں  
قیمتیں  
درج  
تسلی  
آپ  
دو  
درست  
کے

ہوں۔

کے  
کا  
آپ

نمایاں

ہونا

$$-\pi < x \leq \pi$$

تمام

جو

کے

ہوں۔

یا

تک

$\pi$

میں

پھر

$ABC$

علاقے  
کریں۔

دو

درست

وقفہ

کی

کریں

مساواتوں

جواب

جواب

نقطوں

یا

مضربوں

قوس

محدود

معلوم

جواب

تک

6.

$x$

دریافت

ذیل

بخش

کے

اعشاری

ہوں

مکمل

$$\sin x = -0.16 \quad 1.$$

$$\cos x(1 + \sin x) = 0 \quad 2.$$

$$(1 - \tan x) \sin x = 0 \quad 3.$$

$$\sin 2x = 0.23 \quad 4.$$

$$\cos\left(\frac{3}{4}\pi - x\right) = 0.832 \quad 5.$$

$$\tan(3x - 17) = 3 \quad 6.$$

میں  
c  
مساواتوں  
کیا

سیکنڈوں  
اظہار

دریافت  
میں  
کریں۔

تار  
amperes

ذیل

واضح

ہے۔

t

کا

جہاں

عرصہ

سیکنڈ  
معلوم

ایک  
تعداد

ایک

رو،

مندرجہ

ذریعے

سکتا

$$c = 5 \sin(100\pi t + \frac{1}{6}\pi)$$

وقت

ہے۔

کا

ہر  
کی

7.

برقی

کو

کے

جا

میں

کرتا

ارتعاش

کریں۔

ارتعاشات

کی	کے	لے	پہلی	تین
ثبت	قیمتیں	3	تلاش	کریں
جن	2	ہو۔	c	کی
قیمت	جوابات	درست		آپ
کے	تک			اعشاری
نظروں	ہیں۔			ہونے
چا	ذره	جو		ارتعاش
ایک	ہے،	کا	ہٹاؤ	y
میں	ہے	جہاں	y	کی
میٹر	$y = a \sin(kt + \alpha)$		سے	ہوتی
وضاحت	جبکہ	$\alpha$	کی	پیمائش
ہے	میں	ہے		اور
میٹروں	کی	پیمائش		سیکنڈوں
t	ہوتی	ہے	پہ	h
میں	$\alpha$	مستقلات		ہیں۔
اور	ارتعاش	کی		قیمت
ایک	سیکنڈ	ہے۔		تلاش
T	ذیل	جوابات		
مندرجہ	-	قیمت	T	کی
کریں	کی	اکائی	مان	کر
h	ہیں۔			مکمل
اکائیوں	کو	میں		کی
h	سیکنڈ	ارتعاشات		
ایک	والے			آپ
ہونے	شکل	میں		دکھایا
قیمت	ایک	دائرہ	کا	مرکز
اس	ہے	جس	ہے۔	نیز
کو	رداس	r		AB
گیا	خط	0		ایک
0	مرکز	بنایا	پہ	جس
ایک	$\theta$			میں
جو	پیمائش	ریڈیٹن		دائرہ
دائرہ	خط	مستقیم		تاریک
کی	ایک	نیم		کر
ہے۔	کی	حد	بندی	
کے	ہے۔	تاریک	حصے	کا
حصے	نیم			
رہا				
اس				



رقبہ اکائیوں	r	اور	معلوم	$\theta$	کی
یہ	متعین	ہے		کے	کریں۔
جسے	کا		رقبہ		اس
AOB	کے		رقبہ		تکون
ایک	تہائی		ہے۔		کا
کی	روشنی		میں		اس
کریں	کہ				واضح
$3\theta - 4 \sin \theta = 0$	کی	وہ	ثابت		قیمت
$\theta$	کریں	اندر	جو		0.1
تلاش	کے		ثابت		$3\theta - 4 \sin \theta = 0$
ریڈیئن	درست		کے		کریں۔
کو	مقصد		قیمتوں		لئے
اس	کی		دوران		کا
$3\theta - 4 \sin \theta = 0$	بنائیں۔ اس	تبدیلی	یا		میں
جدول	کی	توجہ	آپ		عدم
علامت	پر	میں	دکھائے		دیں۔
تبدیلی	شکل		کے		کو
اس	دائرے		ہیں		گئے
دو	جن		C		مرکز
ہیں	اور	B	کو		اور
A	دائرے	نقطہ	دائرے		پر
یہ	دوسرے		ہے۔		چھوٹے
ایک	ہر		ایک		کا
ہیں۔	r		اس		دونوں
رد اس	پر	E	ACB		نقطہ
دائروں	یا	ہے			طرح
D	واقع				خط
سے	خط				کہ
DE	ہے۔				
متوازی	DAC		اور		EBC
زاویوں	سے		ہر		ایک
میں	کی		قیمت		$\theta$
زاوے	ہے۔ جبکہ		$0 < \theta < \pi$		متعین
ریڈیئن					
ہے۔					
خط	DE	کی	لمبائی		r
اور	$\theta$	کی	اکائیوں		میں
واضح	کریں	-	خط		DE
کی	لمبائی		دو		توسوں

میں لمبائی ثابت	سے کے کریں	کسی برابر کہ	کی ہے۔	بھی
$0 < \theta < 1/2\pi$		کے لئے	$y = \cos \theta$	$\theta - 2 \cos \theta - 2 = 0$
ترسیم	کھینچیں۔	اپنے		ترسیم
پہ	ایک	موزوں		سیدھا
خط	کھینچ	کر،	جس	کی
مساوات	بیان	کرنا		لازمی
ہے۔	یہ	واضح		کریں
کہ	مساوات		$\theta + 2 \cos \theta - 2 = 0$	کا
وقفہ	$0 < \theta < 1/2\pi$	میں		صرف
ایک	جزو	ہے۔		
حساب	کرتے	تصدیق	کی	کریں
کہ	$\theta$	قیمت		1.10
اور	1.11	کے		درمیان
ہے۔				
اس	شکل	میں		ایک
دائرے	کی	قوس		ABC
دکھائی	گئی	ہے		جبکہ
دائرے	کا	مرکز		0
اور	رداس	ہے		اور
AC	خط	مستقیم		ہے۔
زاویہ	AOC	کی		قیمت
$\theta$	ریڈیئن	ہے۔		
جبکہ	قوس	ABC		کی
لمبائی	S	ہے۔		
$\theta$	کی	وضاحت		اور
S	کی	اکائیوں		میں
کریں۔	پہ	یہ		کر
کے	دکھائیں	کہ		مثبت
AOC	کے	رقبے		کا
اظہار	مندرج	ذیل		انداز
میں	کیا	جا		ہے۔

$$\frac{1}{2}r^2 \sin \left( 2\pi - \frac{s}{r} \right)$$

کوئی	ترسیمی	استدلال	استعمال
کرتے	ہوئے	جس	کی
بنیاد	$y = \sin x$	کے	خانے

پہلے سے	یا	کسی	اور	طریقہ
$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$	یہ	جہاں	دکھائیں	کہ
زاویوں	میں	کی	سے	تینوں
بھی	زاویے	کی	کی	کسی
ریڈین	میں	ہے۔	روشنی	قیمت
تعیین	کی	AOC	حلقے	اس
کہ	تکون	کا	یہ	میں
رقبہ	بڑے	یہ	دکھائیں	کا
کے	رقبہ	یہ	دکھائیں	OABC
حصہ	ہے۔	یہ	دکھائیں	پانچواں
نکال	کر	یہ	دکھائیں	نتیجہ

$$\frac{s}{r} + 5 \sin\left(\frac{s}{r}\right) = 0$$

کوئی	تربسی	یا	طریقہ	استعمال
کر	کے	یہ	ان	اور
طریقہ	تعیین	کیجئے۔	کسی	مماثلات
کا				

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x \equiv \frac{1}{2}$$

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} \left( \frac{1}{x} \right) \equiv \frac{1}{2} \pi \text{ or } -\frac{1}{2} \pi$$

اس	شکل	میں	آپ
کو	ایک	دائرے	ایک
غوس	دکھائی	گئی	ہے۔ اس
دائرے	کا	مرکز	ہے
اور	رداس	r	ہے۔ جبکہ
قوس	کا	خط	مستقیم
AB	ہے۔ خط	AB	دائرے
کے	مرکز	0	$\theta$
ریڈین	کا	زاویہ	بتاتا ہے
اس	شکل	میں	آپ
کو	آپک	مرلع	ABCD
بھی	دکھایا	گیا	یہ
متعین	ہے	کہ	نیم



نقاط	انقطاع	پر	ان	کے
محددات	کا	حساب	کے	لگائیں
-	دونوں	ترسیمات	کے	کے
درمیان	واقع	ممکنہ	کے	خطے
کا	رقبہ	دریافت	کے	ترسیم
(2)	$y = x^3 - 3x + 3$			کے
پر	ساکن	حساب	نقاط	لگائیں۔
محددات	کا	کے	کے	محدد
(ب) اس	نقطے	لگائیں	$\frac{d^2y}{dx^2}$	جس
کا	حساب			
کے	لیے	پر	پر	واقع
(ج)	منحنی		منحنی	کی
اس	نقطے	پر	عمودی	اور
قیمت	$x = 2$		دریافت	خط
اس	کے			کریں۔
کی	مساوات	محور	$x$	اور
(د)	قوس			$x = 2$
خطوط	$x = 0$		اور	واقع
کی	حدود		میں	
رقبہ	تلاش		کریں۔	کیے
(3)	عداد		استعمال	خاکہ
بغیر	$y = x^4 - x^5$		کا	مقامات
بنائے	اور		ان	جن
کی	نشان دہی		کریں	مثبت
کے	لئے		$\frac{d^2y}{dx^2}$	لیے
ہے	نیز	جن	کے	
منحنی	ہے۔		صحیح	عدد
(4)	8	ایک	اور	$y = x^{\frac{1}{n}}$
ہے۔	$y = x^n$		بنائیں	اور
کے	ترسیمات		رقبہ	معلوم
اس	خطے	کا	کے	اندر
کریں	جو	ان		
محدود	ہے			
(5)	ایک		منحنی	ایک
ایسی	مساوات		کی	حائل
ہے	جو		$\frac{d^2y}{dx^2} = 5$	کے
تقاضے	پورے		کرتی	ہے
-	یہ		منحنی	نقطہ

ہے	گزرتی	سے	(0, 4)
اس	نقطے	اس	-
3	تدریج	کی	tangent
اکائی	کو	x	ہے۔
قیمت	کی	y	بنا
	- منحنی	کریں	تلاش
$y = kx^2$	ایک	ایک	(6)
مستقل	$y = 1$	k	جہاں
		کا،	ہے

درمیانی	کا	$y = 3$	اور
کے	محور	y	حصہ
جاتا	گھمایا	360	گرد
یقین	اس	-	ہے
پیدا	کہ	ساتھ	کے
ہے	$12\pi$	جسم	شده
کریں۔	دریافت	قیمت	k

قیمت	کی	$\int_1^3 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) dx$	دریافت
نتیجے	اپنے	کریں	کی
تشریح	پر	طور	کریں۔
خطے	ایک	-	R
درج	بندی	حد	ذیل
ہے	ہوتی	کی	(i)x
خط	(ii)	سے	$x = 16$
منحنی	ایک	محور	$y = 6 - \sqrt{x}$
	$0 \leq x \leq 36$	اور	اس
کا	طواف	جسم	جسم
جو	کریں	معلوم	اس
ہوتا	پیدا	وقت	ہے
x	کو	جب	مصور
ایک	گرد	کے	چکر
ہے۔	جاتا	دے	9-
میں	اول	ربع	ایک
اطراف	کی	خطے	محوروں
منحنی	ایک	اور	جس
$y = \sqrt{9 - x}$	مساوات	کی	ہیں۔
رقبہ	کا	خطے	اس

منحنی	ایک	بالا	کریں۔	تلاش
سے	$x = 1$	کے	-	10
کی	حصے	تک	کے	$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$
رقبہ	کشی	رے	خطے	$x = 4$
اس	کا	R	خطے	تصو
اس	جبکہ	محو	کریں	-
ر	اطراف	x	کی	دریافت
ر	او	$x = 1$	x	خطے
ہیں۔	مشتل	پ	ترجے	منحنی
پروں	افق	بھڑ	متوازی	خطوط
horizon	کی	افقی	کیا	$x = 4$
جگہ	بنے	ساتھ	کی	ایک
ہے	م	ریڈیئن	سے	کے
والے	مراد	اس	ایک	کے
سادات	بھ	دفعہ	کرتے	استعمال
جبکہ	سیکنڈ	ارکعاش	کرتے	کے
سیکنڈ	کرتے	کرتے	کرتے	زاویے
ڑکے	کرتے	کرتے	کرتے	$0.4 \sin 600t$
میں	کرتے	کرتے	کرتے	اس
ہیں؟	کرتے	کرتے	کرتے	ہیں۔
نقطہ	آیا	کہ	کریں	کتنی
پ	خط	جو	اس	ط
$(3, 1, 2)$	سے	سے	5, 0, 5)	$(1, 2, -1)$
گزرتا	میں	شکل	-	واقع
ایک	کا	دائرے	گیا	اور
حصہ	جس	ہے	0	ہے
کا	رداس	اور	نقاط	اس
r	A, B, C	پ	ہیں	ایسے
اس	اس	کا	زاویے	دکھایا
طرح	کہ	ریڈیئن	کی	مرکز
A, B	قطر	کی	ہے	ہے۔
ہے	کی	ہے	کی	دائرے
قیمت	ہے	کی	کی	واقع
زاویہ	قیمت	کی	کی	دائرے
$\theta$	قیمت	کی	کی	جبکہ
				$\theta$
				AOC

دریافت  
OAC

قائدہ  
 $AC^2$

کی

کریں۔

سمجھ  
لبائی  
تحریر  
نتیجہ  
دکھائیں

قیمتوں  
کا

کو  
 $x=3$

ہے۔  
 $2\pi$

ہے۔  
دریافت

سے  
کو  
کریں۔

ہے  
تکون

کا

کہ

$\theta$

واضح

کو

کی

میں

یہ

کہ

$$y = \frac{9}{2x+3}$$

ثبت

9

2x+3

ہے

اور

واقع

گرد

جاتی

جم

حوالے

تفاعلات

میز

اکائی  
اور

cosine  
کر

r

میں

ABC

AC

اور

اور

کر

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

کی

لے

بنائے۔

کے

$x=0$

درمیان

نور

دی

کا

ک

ذیل

دوسرے

$$(x^3 + 2x - 1)^3$$

$$\sqrt{\frac{1}{x^2 + 1}}$$

کو

استاد

کے

کل

ملی

مستقبل

تخمینہ

کہ

950

مستقل

کہ

اس

اس

اس

اس

پہلے

متنخواہ

اس

کی

بنیاد

کی

پاؤنڈ

اضافہ

کی

کی  
سال

12800

نے

متنخواہ

پہ

متنخواہ

سالانہ

ہوگا

متنخواہ

ایک  
ملازمت

کی

پاؤنڈ

اپنی

کا

لگایا

میں

کا

حتمہ



کی	سالانہ	پاؤنڈ	20400
حد	زیادہ	سے	زیادہ
گی۔	جائے	پہنچ	کو
کے	ملازمت	مدت	اپنی
کی	اس	سال	پانچویں
کس	ہوگی۔	کتنی	کمانی
بار	پہلی	میں	سال
متنخواہ	زیادہ	سے	زیادہ
حساب	گا۔	کرے	وصول
مدت	اپنی	کہ	لگائیں
سال	nth	کے	ملازمت
کل	وہ	آخر	کے
چکا	کر	رقم	کتنی
کون	کہ	لکھیں	ہوگا۔
کس	کی	رقم	سی
ہے۔	مطابق	کے	قیمت
جڑواں	کی	استاد	مذکورہ
اسی	جی	نے	بہن
میں	شعبہ	اپنے	سال
کیا	آغاز	کام	اپنے
کی	سال	کی	اس
تھی	پاؤنڈ	13500	متنخواہ
میں	کا	اس	جبکہ
اضافہ	طریقہ	5%	مستقلاً
استعمال	کریں	تھا۔	ہونا
کہ	کے	موزوں	کوئی
nth	کی	کہ	کر
متنخواہ	کے	ملازمت	اپنی
اپنی	کے	اس	سال
سال	چوتھے	ہوگی۔	کتنی
اپنے	آمدن	کریں	ثابت
پہنچ	میں	کے	ملازمت
کی	بھائی	کی	اس
سے	بھائی	سے	بھائی
عقائد	میسرائی	پہلی	کس
	؟	اپنے	کر
		ہوگی	آمون
		جیو	زیادہ
			ایک

کا	پہلا	جزو	6	اور
مشترک	نسبت		0.75	ہے۔
اس	عقائد		کے	پہلے
دس	اجزاء		کا	مجموعہ
دریافت	کریں۔		آپ	کا
جواب	دو		اعشاری	نقطوں
تک	درست	ہونا		چاہی۔
اکائی	کے	اس	جال	پر
دو	سمتیں	$\alpha$	اور	$\beta$
دکھائی	گئی	ہیں		
$ \alpha + \beta $	دریافت	کریں		
$\alpha, \beta$	دریافت	کریں		
$\alpha$	اور	$\beta$		کا
درمیانہ	زاویہ	دریافت	کریں	-

## جوابات

