

ریاضیات اول  
برائے گیارہویں اور بارہویں جماعت

طلبہ و طالبات

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk



## عنوان

1	محد، نقطے اور خط	1
2	1.1 دو نقطوں کے بیچ کا فاصلہ	1.1
3	1.2 قطع لکیر کا وسط	1.2
4	1.3 قطع خط کا ڈھلاؤ	1.3
9	1.4 ایک سیدھی لکیر یا خط کی مساوات سے کیا مراد ہے؟	1.4
9	1.5 لکیر کی مساوات	1.5
10	1.6 لکیر کی مساوات کی پہچان	1.6
10	1.7 مساوات $ax + by + c = 0$	1.7
11	1.8 دو لکیروں کا مشترک نقطہ	1.8
14	1.9 عمودی لکیروں کا ڈھلاؤ	1.9
19	2 غیر ناطق جذر اور طاقتیں	2
19	2.1 اعداد کی اقسام	2.1
20	2.2 نامعقولے اور ان کی خصوصیات	2.2
26	2.3 طاقتوں کا استعمال	2.3
28	2.4 صفر اور منفی طاقت	2.4
32	2.5 کسری طاقتیں	2.5
41	3 تفاعل اور خم	3
42	3.1 ایک تفاعل کی تعریف	3.1
42	3.2 ترسیم، عملی میدان اور سعت	3.2
47	3.3 $x$ کی طاقتوں کے ترسیم	3.3
47	3.3.1 مثبت صحیح عددی طاقتیں	3.3.1
48	3.3.2 منفی صحیح عددی طاقتیں	3.3.2
49	3.3.3 کسری صورت میں طاقتیں	3.3.3
50	3.4 ایک عدد کا مقیاس	3.4
53	3.5 مساوات $y = ax^2 + bx + c$ کے ترسیم	3.5

54	3.6	مساوات $y = ax^2 + bx + c$ سے بنے تریسوں کی اشکال . . . . .
55	3.7	دو تریسوں کا مشترکہ نقطہ . . . . .
58	3.8	اجزاء کی مدد سے تریسمات بنانا . . . . .
58	3.9	مثال 3.8.1 . . . . .
59	3.10	ترسیم سے مساوات کا اندازہ لگانا . . . . .
67	4	دو درجی مساوات
67	4.1	دو درجی الجبرا . . . . .
68	4.2	2.4-کامل مربعی صورت . . . . .
69	4.3	مثال نمبر 1.2.4 . . . . .
69	4.4	مثال نمبر 2.2.4 . . . . .
69	4.5	4.3 مربع مکمل کرنا . . . . .
69	4.6	مثال نمبر 4.3.1 . . . . .
71	4.7	مثال نمبر 4.3.2 . . . . .
71	4.8	مثال نمبر 4.3.3 . . . . .
71	4.9	مثال نمبر 4.3.4 . . . . .
72	4.10	مثال نمبر 4.3.5 . . . . .
72	4.11	مشق نمبر 4(A) . . . . .
73	4.12	4.4 دو درجی مساوات کو حل کرنا . . . . .
74	4.13	مثال نمبر 4.4.1 . . . . .
76	4.14	مشق نمبر 4B . . . . .
77	4.15	4.6 ہمزاو مساوات . . . . .
77	4.16	مثال نمبر 4.6.1 . . . . .
77	4.17	مثال نمبر 4.6.2 . . . . .
78	4.18	4-6.3 مثال نمبر . . . . .
78	4.19	دو درجی مساوات میں قابل تخفیف مساوات 4.7 . . . . .
78	4.20	دو درجی مساوات میں قابل تخفیف مساوات . . . . .
78	4.21	4.7.1 مثال نمبر . . . . .
78	4.22	4.7.2 مثال نمبر . . . . .
79	4.23	مشق نمبر 4C . . . . .
79	4.24	متفرق مشق 4 . . . . .
83	5	عدم مساوات
83	5.1	عدم مساوات کے اشارے . . . . .
84	5.2	لکیری عدم مساوات کا حل کرنا . . . . .
84	5.3	دونوں اطراف میں ایک یثعداد میں اضافہ یا گھٹانا . . . . .
84	5.4	ایک مثبت تعداد کے ذریعے دونوں اطراف سے ضرب کرنا . . . . .
85	5.5	دونوں اطراف کو منفی تعداد سے ضرب کرنا . . . . .
85	5.6	عدم مساوات پر آپریشن کا خلاصہ . . . . .
89	6	تفرق

89	خط مماس کا ڈھلاؤ معلوم کرنا	6.1
101	تفریق کے کچھ اصول	6.2
106	دو درجی ترسیم کے ڈھلاؤ کا کلیہ	6.3
110	چند مزید تفاعل کے ڈھلاؤ کے کلیے	6.4
115	تفرق کے استعمال	7
116	تفرقات پر صورت تفاعلات	7.1
117	بڑھتے ہوئے اور گھٹتے ہوئے تفاعلات	7.2
119	زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم نقطے	7.3
124	متفرقات، تبدیلی کی شرح کے موافق	7.4
135	ترتبیات	8
137	اکراچی کا مسئلہ ثنائی	9
139	تکوینات	10
139	$\cos \theta^0$ کی ترسیم	10.1
141	$\sin \theta^0$ اور $\tan \theta^0$ کی ترسیم	10.2
142	چند مشق تفاعل کی درست قیمتیں	10.3
145	$\cos \theta^0$ , $\sin \theta^0$ اور $\tan \theta^0$ کی تراجم کی تفاکل کی خصوصیات	10.4
147	مشقی تفاعل کی مساوات کا حل	10.5
151	مشقی تفاعل کے باہمی روابط	10.6
161	تفاعل کا مجموعہ اور تفاعل کا الٹ	11
163	وسعت تفرق	12
165	سمتیات	13
167	ہندی ترتبیات	14
187	دہرا تفرقات	15
199	تکمل	16
201	تجم جسم طواف	17
201	انقلاب کی جلدیں	17.1
203	y-محور کے گرد انقلاب کی جلدیں	17.2
207	ریڈیئن	18



# باب 1

## محدد، نقطے اور خط

اس سبق میں ہم محدّد کی مدد سے نقطوں اور خط کی دو ابعادی میں تعریف کریں گے۔ یہ سبق پڑھ لینے کے بعد آپ اس قابل ہوں گے کہ :

- دو نقطوں کے بیچ کا فاصلہ معلوم کریں۔
- کسی خط کے انتہائی نقطوں کے محدّد معلوم ہوں تو اس خط کا درمیانی نقطہ معلوم کر سکیں۔
- کسی خط کے انتہائی نقطوں کے محدّد معلوم ہوں تو اس خط کی ڈھلوان معلوم کریں۔
- ایک خط کی ڈھلوان سے اسکی مساوات معلوم کریں۔
- دو نقطوں کو ملانے والی لکیر کی مساوات معلوم کریں۔
- لکیروں میں تفریق کریں مختلف طرح کی مساوات سے۔
- دو لکیریوں کے مشترک نقاط معلوم کریں۔
- ڈھلوان سے معلوم کریں کہ لکیریوں عمودی ہیں یا متوازی ہیں۔

## 1.1 دو نقطوں کے بیچ کا فاصلہ

جب آپ مہذا چن لیتے ہیں تو صفحے پے افقی سمت میں x محدد بنائیں۔ اور عمودی خط میں y محدد بنائیں، اور اس طرح آپ ایک نظام محدد بنا رہے ہیں۔ اور اس نظام محدد کو کارٹیزی نظام محدد کہیں گے، اور یہ نام سترھویں صدی کے ایک فرانسیسی ریاضی دان رین ڈیکارٹس<sup>1</sup> کے نام پر رکھا گیا شکل 1.1 میں دو نقطے ہیں A اور B۔ A کے محدد (4, 3) ہیں اور B کے (10, 7) محدد ہیں۔ خط کا وہ حصہ جو A اور B کے درمیان واقع ہو اسے لکیری قطع کہیں گے۔ لکیری قطع کی لمبائی دو نقطوں کے بیچ کا فاصلہ ہے۔ شکل 1.1 میں ایک نقطہ C بھی شامل کر لیا گیا ہے اور اس طرح ایک قائمہ الزاویہ مثلث وجود میں آتی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ C کا محدد x-B جیسا ہے جبکہ A اور C کا محدد y-ایک ہی ہے۔ اور یوں کے C محدد (10, 3) ہیں۔ یہ بہت واضح ہے کہ کی AC لمبائی 10 - 4 = 6 ہے اور CB کی لمبائی 7 - 3 = 4 ہے۔ فیثاغورث کے کلیے کو استعمال کرتے ہوئے مثلث ABC سے یہ واضح ہے کہ قطع خط AB کی لمبائی

$$\sqrt{(10-4)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$$

آپ اعداد کی مدد لے سکتے ہیں اور یوں آپ کے پاس نتیجہ 7.21 آئے گا لیکن بہتر یہی ہے کہ آپ اسے جذر کی صورت میں ہی رہنے دیں۔ محدد جیومیٹری کی تجویز اس لیے پیش کی گئی کہ حساب کتاب کے لیے الجبرا کا استعمال کیا جاسکے، جیسے اگر A اور B کوئی بھی دو نقطے ہوں اور شکل 1.1 والے نہ ہوں تو بھی ہمارے لیے کافی مددگار ہوتا ہے کہ صرف محدد دیکھ کر یہ پتہ چل جائے کہ کس نقطے کی بات ہو رہی ہے۔ اسکا ایک طریقہ یہ ہے کہ علامات استعمال کی جائیں جیسے پہلے نقطے کے محدد (x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>) اور دوسرے نقطے کے محدد (x<sub>2</sub>, y<sub>2</sub>) ہوں گے۔ جبکہ x<sub>1</sub> دراصل پہلے نقطے کا محدد x ہے۔ شکل 1.2 میں ایک عام مثلث بنائی گئی ہے اور آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نقطہ C کے محدد اب (x<sub>2</sub>, y<sub>1</sub>) ہیں اور یہ کہ اب AC = x<sub>2</sub> - x<sub>1</sub> اور CB = y<sub>2</sub> - y<sub>1</sub>۔ فیثاغورث کے کلیے کے مطابق:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ایک اور فائدہ الجبرا استعمال کرنے کا کہ مثلث کی جیسی بھی شکل ہو اور وہ جس بھی جگہ ہو یہ کلیہ کام کرتا ہے شکل 1.3 میں A کے محدد منفی ہیں اور شکل 1.4 میں لکیر کی ڈھلوان نیچے کی طرف ہے بجائے اوپر کی طرف ہونے کے جیسے آپ بائیں سے دائیں جانب چلتے ہیں۔ شکل 1.3 اور شکل 1.4 میں اپنے طور پر AB کی لمبائی معلوم کرنے کی کوشش کریں۔ اور پھر آپ کلیہ استعمال کر سکتے ہیں اپنے جواب کی پڑتال کرنے کے لیے۔ شکل 1.3 کے لیے x<sub>2</sub> - x<sub>1</sub> = 3 - (-2) = 3 + 2 = 5 اور y<sub>2</sub> - y<sub>1</sub> = 5 - (-1) = 5 + 1 = 6

$$AB = \sqrt{(3 - (-2))^2 + (5 - (-1))^2} = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61}$$

اور شکل 1.4 میں x<sub>2</sub> - x<sub>1</sub> = 6 - 1 = 5 اور y<sub>2</sub> - y<sub>1</sub> = 2 - 5 = -3

$$AB = \sqrt{(6-1)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

ایک اور بات اس سے فرق نہیں پڑتا کہ آپ نقطوں کو کس ترتیب میں رکھتے ہیں، اگر آپ B کو پہلا نقطہ تصور کریں یوں کہ (x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>) اور A کو دوسرا نقطہ (x<sub>2</sub>, y<sub>2</sub>) تو کلیے پر اسکا کوئی اثر نہیں ہوگا۔ شکل 1.1 کے لیے یہ

$$BA = \sqrt{(4-10)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$$



دو نقطوں  $(x_1, y_1)$  اور  $(x_2, y_2)$  کا درمیانی فاصلہ (یا اس قطع کلیئر کی لمبائی جو ان دونوں کو جوڑ رہا ہے)؛

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

## 1.2 قطع کلیئر کا وسط

آپ محدود کی مدد سے بھی ایک قطع کلیئر کا درمیانی قطع معلوم کر سکتے ہیں۔ شکل 1.5 میں ایک قطع کلیئر دکھایا گیا ہے جیسا کہ شکل 1.1 میں تھا لیکن اب اس میں درمیانی نقطہ  $M$  بھی شامل کیا گیا ہے۔  $M$  سے گزرتی ہوئی محدود  $y$  کے مساوی خط  $AC$  کو چھوئے گا اور اس نقطے کو ہم نام دیں گے  $D$ ، اور یوں مثلث  $ADM$  کے اطراف کی لمبائی  $ACB$  کے اطراف کی لمبائی سے آدھی ہیں، اور اسی لیے؛

$$AD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}(10 - 4) = \frac{1}{2}(6) = 3,$$

$$DM = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}(7 - 3) = \frac{1}{2}(4) = 2$$

نقطے  $M$  اور  $D$  کے محدود  $x$  ایک ہی ہیں جو کہ؛

$$4 + AD = 4 + \frac{1}{2}(10 - 4) = 4 + 3 = 7$$

نقطے  $M$  کا محدود  $y$  جو کہ؛

$$3 + MD = 3 + \frac{1}{2}(7 - 3) = 3 + 2 = 5$$

الغہ درمیانی نقطے  $M$  کے محدود (75) ہیں شکل 1.6 میں شکل 1.2 ہی ہے لیکن اب اس میں دو نقطے  $M$  اور  $D$  شامل کیے گئے ہیں

$$AD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}(x_2 - x_1), \quad DM = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}(y_2 - y_1)$$

الغہ نقطے  $M$  کا محدود  $x$  ہے؛

$$\begin{aligned} x_1 + AD &= x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1 \\ &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2). \end{aligned}$$

اور اسی طرح نقطے  $M$  کا محدود  $y$  ہے؛

$$\begin{aligned} y_1 + DM &= y_1 + \frac{1}{2}(y_2 - y_1) = y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_1 \\ &= \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2). \end{aligned}$$

دو نقطوں  $(x_1, y_1)$  اور  $(x_2, y_2)$  کو ملانے والے قطع کثیر کے درمیانی حصے کے محدود ہیں؛

$$\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right)$$

اور اب چونکہ آپ کے پاس وسطی نقطہ  $M$  کے محدود کے لیے الجبرائی کلیہ موجود ہے، آپ اسے کسی بھی دو نقطوں کے لیے استعمال کر سکتے ہیں، مثال کے طور پر شکل 1.3 کے لیے  $AB$  کا درمیانی نقطہ؛

$$\left(\frac{1}{2}((-2) + 3), \frac{1}{2}((-1) + 5)\right) = \left(\frac{1}{2}(1), \frac{1}{2}(4)\right) = \left(\frac{1}{2}, 2\right).$$

اور شکل 1.4 کے لیے  $\left(\frac{1}{2}(1 + 6), \frac{1}{2}(5 + 2)\right) = \left(\frac{1}{2}(7), \frac{1}{2}(7)\right) = \left(3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$  نہیں ہوگا کہ آپ کس نقطے کو پہلا نقطہ کہتے ہیں اور کسے دوسرا، شکل 1.5 میں اگر آپ  $(10, 7)$  کو  $(x_1, y_1)$  جبکہ  $(4, 3)$  کو  $(x_2, y_2)$  تصور کر لیں تو درمیانی نقطہ  $(7, 5) = \left(\frac{1}{2}(10 + 4), \frac{1}{2}(7 + 3)\right)$  جو کہ پہلے والا جواب ہی ہے۔

### 1.3 قطع خط کا ڈھلاؤ

کسی کثیر کا ڈھلاؤ دراصل بتاتا ہے کہ کوئی کثیر کتنی ترچھی ہے، کثیر جتنی زیادہ ترچھی ہوگی اتنا زیادہ ڈھلاؤ ہوگا۔ فاصلے اور درمیانی نقطے کے برعکس ڈھلاؤ پوری کثیر کی خصوصیت ہے نہ کہ صرف ایک قطع کثیر کی۔ اگر آپ کثیر کے کوئی سے بھی دو نقطے چنتے ہیں اور آپ محسوس کرتے ہیں کہ محدود  $x$ -محدود  $y$  کی قیمتیں بڑھ رہی ہیں جیسے جیسے آپ ایک نقطے سے دوسرے کی طرف جاتے ہیں، جیسا کہ شکل 1.7 میں دکھایا گیا ہے تو کسر کچھ ایسا بنتا ہے،

$$\frac{\text{قدم } y}{\text{قدم } x}$$

اور یہ بدلتا نہیں ہے آپ جو بھی نقطے چنتے ہیں۔ اور یہی ایک کثیر کا ڈھلاؤ ہے۔ کلیے پر کوئی اثر نہیں پڑتا محدود مثبت ہوں یا منفی، شکل 1.3 میں مثال کے طور پر  $AB$  کا ڈھلاؤ  $\frac{6}{5} = \frac{5+1}{3+2} = \frac{5-(-1)}{3-(-2)}$  ہے لیکن اس بات کا خیال رکھیں کہ شکل 1.4 میں ڈھلاؤ  $-\frac{3}{5} = \frac{-3}{5} = \frac{2-5}{6-1}$ ، منفی ڈھلاؤ کا مطلب ہے کہ جب آپ بائیں سے دائیں جانب چل رہے ہوں تو ترچھاؤ نیچے کی طرف ہو۔ باقی کلیوں کی طرح یہاں بھی اس بات سے فرق نہیں پڑتا کہ کس محدود کو ایک کہیں گے اور کسے دو، شکل 1.1 میں آپ ڈھلاؤ کہہ سکتے ہیں کہ  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{7-3}{10-4}$  یا ہم ایسے بھی کہہ سکتے ہیں  $\frac{2}{3} = \frac{-4}{-6} = \frac{3-7}{4-10}$  اگر دو کثیروں کا ڈھلاؤ برابر ہے تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ یہ دونوں کثیریں متوازی یا مساوی ہیں۔

مثال 1.1: ایک کثیر کے انتہائی نقطے  $(p - q, p + q)$  اور  $(p + q, p - q)$  ہیں اس کثیر کی لمبائی، ڈھلاؤ اور درمیانی نقطے کے محدود معلوم کریں۔ لمبائی اور ڈھلاؤ معلوم کرنے کے لیے آپکو حساب لگانا ہوگا۔

$$x_2 - x_1 = (p + q) - (p - q) = p + q - p + q = 2q$$

$$y_2 - y_1 = (p - q) - (p + q) = p - q - p - q = -2q$$

اور

لمبائی.  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2q)^2 + (-2q)^2} = \sqrt{4q^2 + 4q^2} = \sqrt{8q^2}$  لمبائی  
ڈھلاؤ  $-1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2q}{2q}$  درمیانی نقطے کے لیے

$$x_1 + x_2 = (p - q) + (p + q) = p - q + p + q = 2p$$

$$y_1 - y_2 = (p + q) + (p - q) = p + q + p - q = 2p \quad \text{اور}$$

لہذا درمیانی نقطہ  $\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right) = \left(\frac{1}{2}(2p), \frac{1}{2}(2p)\right) = (p, p)$  ہے۔ کوشش کریں کہ آپ خود سے شکل بنائیں مثال کے نتیجے کو ظاہر کرنے کے لیے۔ □

مثال 1.2: ثابت کریں کہ ان نقطوں  $D(-1, 2)$ ,  $C(3, 0)$ ,  $B(5, 3)$ ,  $A(1, 1)$  سے ایک متوازی الاضلاع شکل بنتی ہے۔ آپ اس مثال کو کئی طریقوں سے حل کر سکتے ہیں لیکن جو بھی طریقہ چنیں گے اس میں شکل بنانا لازمی ہے، جو کہ شکل 1.8 میں دکھائی گئی ہے۔ پہلی ترکیب (لمبائی کا استعمال کرتے ہوئے)

اس طریقے میں مخالف سمتوں کی لمبائی معلوم کریں، اگر مخالف سمتوں کی لمبائی برابر ہے تو دیے گئے نقطے ایک متوازی الاضلاع شکل بنائیں گے۔

$$AB = \sqrt{(5 - 1)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{20}$$

$$DC = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (0 - (-2))^2} = \sqrt{20}$$

$$CB = \sqrt{(5 - 3)^2 + (3 + 0)^2} = \sqrt{13}$$

$$DA = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (1 - (-2))^2} = \sqrt{13}$$

اسی لیے  $AB = DC$  اور  $CB = DA$  اور ثابت ہو گیا کہ دیے گئے نقطے ایک متوازی الاضلاع شکل بناتے ہیں طریقہ 2 (درمیانی نقطوں کے مدد سے) اس طریقے میں، اخترن AC اور BD کے درمیانی نقطے معلوم کریں۔ اگر یہ نقطے ایک ہی ہیں تو اس کا مطلب اخترن ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں لہذا یہ بند شکل ایک متوازی الاضلاع شکل ہوگی۔ اخترن AC کا درمیانی نقطہ  $\left(\frac{1}{2}(1 + 3), \frac{1}{2}(1 + 0)\right)$  جو کہ  $\left(2, \frac{1}{2}\right)$  ہے، اخترن BD کا درمیانی نقطہ  $\left(\frac{1}{2}(5 + (-1)), \frac{1}{2}(3 + (-2))\right)$  اور یہ بھی  $\left(2, \frac{1}{2}\right)$  لہذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ دیے گئے نقطے ایک متوازی الاضلاع شکل بناتے ہیں۔ طریقہ 3 (ڈھلاؤ کے مدد سے) اس طریقہ کار میں مخالف سمتوں کے ڈھلاؤ معلوم کریں، اگر آئے سامنے کے دونوں خط متوازی ہوں تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ ABCD ایک متوازی الاضلاع شکل ہوگی۔ خط AB اور DC کے ڈھلاؤ  $\frac{0 - (-2)}{3 - (-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$  اور  $\frac{3 - 1}{5 - 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$  ہیں، لہذا AB اور DC متوازی لکیریں ہیں، لکیروں DA اور CB کے ڈھلاؤ برابر  $\frac{3}{2}$  ہے، اسی لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ DA اور CB متوازی ہیں اور یوں یہ ثابت ہوتا ہے کہ ABCD ایک متوازی الاضلاع شکل ہے۔ □

اعداد کا استعمال نہ کریں اور جہاں مناسب ہو اپنے جواب کو جذر کی صورت میں لکھیں۔ سوال 1: درج ذیل نقطوں کو جوڑنے والے قطع لکیر کی لمبائی معلوم کریں۔ جز (e) اور (h) میں فرض کریں کہ  $a > 0$  جبکہ جز (i) اور (j) میں  $p > q > 0$  ہے۔

$$ا. (2, 5), (7, 1) \quad د. (a + 1, 2a + 3), (a - 1, 2a - 1)$$

$$ب. (-3, 2), (1, -1) \quad ز. (2, 9), (2, -14)$$

$$ج. (4, -5), (-1, 0) \quad ح. (12a, 5b), (3a, 5b)$$

$$د. (-3, -3), (-7, 3) \quad ط. (p, q), (q, p)$$

$$ه. (2a, a), (10a, -14a) \quad ي. (p + 4q, p - q), (p - 3q, p)$$

سوال 2: ثابت کریں کہ نقطے  $(1, -2)$ ,  $(6, -1)$ ,  $(9, 3)$ ,  $(4, 2)$  ایک متوازی الاضلاع شکل بناتے ہیں۔

سوال 3: ثابت کریں کہ نقطوں  $(-3, -2)$ ,  $(2, -7)$ ,  $(-2, 5)$  سے بننے والی مثلث ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔

سوال 4: ثابت کریں کہ نقطے  $(7, 12)$ ,  $(-3, -12)$ ,  $(14, -5)$  ایک دائرے کا حصہ ہیں جس کا رداس  $(2, 0)$  ہے۔

سوال 5: درج ذیل نقطوں کو جوڑنے والے قطع لکیر کا وسطی نقطی معلوم کریں۔

$$ا. (2, 11), (6, 15) \quad ب. (p + 2, 3p - 1), (3p + 4, p - 5)$$

$$ب. (5, 7), (-3, 9) \quad د. (p + 3, q - 7), (p + 5, 3 - 1)$$

$$ج. (-2, -3), (1, 6) \quad ز. (p + 2q, 2p + 13q), (5p - 2q, -2p - 7q)$$

$$د. (-3, 4), (-8, 5) \quad ح. (a + 3, b - 5), (a + 3, b + 7)$$

سوال 6: نقطے  $A(-2, 1)$ ,  $(6, 5)$  ایک دائرے کے قطر کے دو انتہائی نقطے ہیں۔ قطر کے درمیانی نقطے کے محدود معلوم کریں۔

سوال 7: ایک نقطے  $A(3, 4)$  اور  $B$  کو جوڑنے والے قطع لکیر کا درمیانی نقطہ  $M(5, 7)$  ہے۔ نقطہ  $B$  کے محدود معلوم کریں

سوال 8: نقطے  $A(1, -2)$ ,  $B(6, -1)$ ,  $C(9, 3)$ ,  $D(4, 2)$  ایک متوازی الاضلاع شکل کے کونے ہیں۔ ثابت کریں کہ وتر  $AC$  اور  $BD$  ایک ہی نقطے پر ٹکراتے ہیں۔

سوال 9: درج ذیل محدود  $A(5, 2)$ ,  $B(6, -3)$ ,  $C(4, 7)$  میں سے ایک باقی دو کا وسطی نقطہ ہے اسے تلاش کریں۔ دو فاصلوں کو معلوم کر کے آپ اپنا جواب ثابت کر سکتے ہیں۔

سوال 10: درج ذیل نقاط کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔

$$(p+3, p-3), (2p+4, -p-5) \text{ ا. } (3, 8), (5, 12)$$

$$(p+3, q-5), (q-5, p+3) \text{ ب. } (1, -3), (-2, 6)$$

$$(p+q-1, q+p-3), (p-q+1, q-p+3) \text{ ج. } (-4, -3), (0, -1)$$

$$(7, p), (11, p) \text{ د. } (-5, -3), (3, -9)$$

سوال 11: کلیر دوں AB اور BC کا ڈھلاؤ معلوم کریں جبکہ  $A(3, 4), B(7, 6), C(-3, 1)$ ۔ ان تینوں نقطوں کے بارے میں اپنی رائے کا بھی اظہار کریں۔

سوال 12: نقطہ  $P(x, y)$  ایک سیدھی کلیر کا حصہ ہے جس کے انتہائی نقطے  $(5, 6), A(3, 0)$  ہیں۔ کلیر AP اور PB کے ڈھلاؤ کے لیے ریاضیاتی بیانیہ معلوم کریں۔ اور یہ مساوات  $y = 3x - 8$  بنا کے دکھائیں۔

سوال 13: ایک کلیر جو کہ مثلث کے ایک کونے کو مخالف طرف کے درمیان سے ملاتی ہے اسے اوسط کہتے ہیں۔ اسی اوسط AM کی لمبائی معلوم کریں جب مثلث کے کونے  $A(-1, 1), B(0, 3), C(4, 7)$  ہوں۔

سوال 14: ایک مثلث کے کونے  $A(-2, 1), B(3, -4), C(5, 7)$  ہیں۔

ا. کلیر AB کا وسطی نقطہ N اور کلیر AC کا وسطی نقطہ M معلوم کریں

ب. ثابت کریں کہ MN کے BC متوازی ہے

سوال 15: نقطے  $A(2, 1), B(2, 7), C(-4, -1)$  ایک مثلث بناتے ہیں۔

ا. کلیر دوں MN اور BC کی لمبائی معلوم کریں ب. ثابت کریں کہ  $BC = 2MN$

سوال 16: ایک چوکور شکل ABCD کے کونے  $A(1, 1), B(7, 3), C(9, -7), D(-3, -3)$  ہیں۔ نقطے P ، Q ، R اور S بالترتیب BC ، AB ، CD اور DA کے وسطی نقطے ہیں۔

ا. شکل PQRS کی تمام اطراف کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔ ب. یہ چوکور شکل PQRS دراصل کیسی شکل ہے؟

سوال 17: مبدا O اور نقطے  $P(4, 1), Q(5, 5), R(1, 4)$  ایک چوکور شکل بناتے ہیں۔

- ا. ثابت کریں کہ  $OR$  اور  $PQ$  متوازی ہیں۔  
 ج. ثابت کریں کہ  $OP = OR$ ۔  
 ب. ثابت کریں کہ  $OP$  اور  $RQ$  متوازی ہیں۔  
 د. چھار طرفہ  $OPQR$  کی اصل شکل کیا ہے؟

سوال 18: مہدا  $O$  اور نقطے  $L(-2, 3)$ ,  $M(4, 7)$ ,  $N(6, 4)$  مل کے ایک چھار طرفہ بناتے ہیں۔

- ا. ثابت کریں  $ON = LM$ ۔  
 ج. ثابت کریں کہ  $OM = LN$ ۔  
 ب. ثابت کریں کہ  $ON$  اور  $LM$  متوازی ہیں۔  
 د. چھار طرفہ  $OLMN$  کس شکل کا ہے؟

سوال 19: ایک چھار طرفہ کے کونے  $P(1, 2)$ ,  $Q(7, 0)$ ,  $R(6, -4)$ ,  $S(-3, -1)$  ہیں

- ا. ایک چھار طرفہ کے چاروں طرف کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔  
 ب. ایک چھار طرفہ  $PQRS$  کی شکل کیا ہوگی؟

سوال 20: ایک چھار طرفہ کے کونے  $T(3, 2)$ ,  $U(2, 5)$ ,  $V(8, 7)$ ,  $W(6, 1)$  ہیں۔ لکیروں  $UV$  اور  $VW$  کے وسطی نقطے بالترتیب  $M$  اور  $N$  ہیں۔ ثابت کریں کہ مثلث  $TMN$  ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔

سوال 21: ایک چھار طرفہ کے کونے  $D(3, -2)$ ,  $E(0, -3)$ ,  $F(-2, 3)$ ,  $G(4, 1)$  ہیں۔

- ا. چھار طرفہ کی تمام اطراف کی لمبائی معلوم کریں۔  
 ب. چھار طرفہ  $DEFG$  کس طرح کی شکل ہے؟

سوال 22: نقطے  $A(2, 1)$ ,  $B(6, 10)$ ,  $C(10, 1)$  ایک مساوی الساقین مثلث ہے اور اس میں  $AB$  اور  $BC$  کی لمبائی برابر ہے۔ نقطہ  $G$  کے محدود  $(6, 4)$  ہیں

- ا. لکیر  $AC$  کے وسطی نقطے  $M$  کے محدود لکھیں۔  
 ج. لکیر  $BC$  کے وسطی نقطے  $N$  کے محدود لکھیں۔

ب. ثابت کریں کہ  $BG = 2GM$  اور یہ کہ  $BGM$ ۔  
 د. ثابت کریں کہ  $AG = 2GN$  اور یہ کہ  $AGN$ ۔  
 ایک سیدھی لکیر ہے۔  
 ایک سیدھی لکیر ہے۔

## 1.4 ایک سیدھی لکیر یا خط کی مساوات سے کیا مراد ہے؟

اگر آپ کو فیصلہ کرنا ہو تو آپ یہ کیسے اندازہ لگائیں گے کہ نقطہ  $(3, 7)$  اور  $(1, 5)$  خم  $y = 3x^2 + 27$  پر موجود ہیں؟ اس کا جواب ہے آپ ان محدود کو مساوات میں ڈالیں اور دیکھیں کہ کیا مساوات درست ثابت ہوتی ہے؟ اگر ہم محدود  $(3, 7)$  کو مساوات میں ڈالتا چاہیں تو مساوات کی دائیں جانب  $29 = 2 + 3 \times 3^2$  جبکہ بائیں جانب 7 ہوگی، لہذا مساوات درست ثابت نہیں ہوتی اور یوں یہ بات ثابت ہوتی ہے کہ نقطہ  $(3, 7)$  بتائے گئے خم کا حصہ نہیں ہے۔ اگر محدود  $(1, 5)$  پر غور کیا جائے تو مساوات کے دونوں اطراف کا جواب 5 آئے گا اور یوں یہ مساوات درست ثابت ہوتی ہے اور یہ بھی ثابت ہوتا ہے کہ نقطہ  $(1, 5)$  خم کا حصہ ہے۔ ایک سیدھی لکیر یا خم کی مساوات دراصل ایک اصول ہے جو اس بات کا تعین کرتا ہے کہ دیے گئے محدود بتائی گئی لکیر یا خم کا حصہ ہوں گے یا نہیں۔ لکیر یا خم کی مساوات کو دیکھنے کا یہ نظریہ بہت اہمیت کا حامل ہے۔

## 1.5 لکیر کی مساوات

مثال 1.3: ایک لکیر جس کا ڈھلاؤ 2 ہے اور جو محدود  $(2, 1)$  سے گزرتی ہے ایسی لکیر کی مساوات تلاش کریں۔ شکل 1.9 میں ایک لکیر دکھائی گئی ہے جس کا ڈھلاؤ 2 ہے اور یہ محدود  $A(2, 1)$  سے بھی گزر رہی ہے۔ جبکہ ایک اور نقطہ  $P(x, y)$  بھی اس لکیر پر موجود ہے۔ نقطہ  $P$  اس لکیر پر موجود ہوگا صرف اور صرف اس صورت میں اگر لکیر  $AP$  کا ڈھلاؤ 2 ہوگا۔ لکیر  $AP$  کا ڈھلاؤ  $\frac{y-1}{x-2}$  ہے۔ یہ ترکیب چونکہ 2 کے برابر ہے  $\frac{y-1}{x-2} = 2$  جس کا نتیجہ یہ نکلتا ہے کہ  $y - 1 = 2x - 4$  اور  $y = 2x - 3$  عام طور پر لکیر کی مساوات معلوم کرتے ہیں جس کا ڈھلاؤ  $m$  ہو اور جو نقطہ  $A$  سے گزرتی ہو جبکہ  $A$  کے محدود  $(x_1, y_1)$  ہوں شکل 1.10 میں یہ لکیر اور ایک نقطہ  $P$  دکھائے گئے ہیں جس کے محدود  $(x, y)$  ہیں۔ لکیر  $AP$  کا ڈھلاؤ  $\frac{y-y_1}{x-x_1}$  ہے اور چونکہ ڈھلاؤ  $m$  کے برابر ہوتا ہے

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = m, \quad y - y_1 = m(x - x_1)$$

ایک لکیر جو  $(x_1, y_1)$  سے گزرے اور جس کا ڈھلاؤ  $m$  ہو اس کی مساوات  $y - y_1 = m(x - x_1)$  ہوگی۔ یہ بات ذہن نشین کر لیں کہ نقطہ  $A$  کے محدود  $(x_1, y_1)$  کی قیمت سے یہ مساوات درست ثابت ہوتی ہے۔

مثال 1.4: ایک لکیر کی مساوات معلوم کریں جس کا ڈھلاؤ -1 ہو جو نقطہ  $(-2, 3)$  سے گزرتی ہو۔ مساوات  $y - y_1 = m(x - x_1)$  کو استعمال کرتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ  $y - 3 = -1(x - (-2))$  جو کہ  $y - 3 = -x - 2$  یا  $y = -x + 1$  ہے۔ مساوات کی درستی کا تعین کرنے کے لیے محدود  $(-2, 3)$  کو مساوات کے دونوں اطراف استعمال کریں اگر مساوات کے دونوں اطراف کا جواب برابر ہے تو یہ نقطہ دراصل اسی لکیر پر ہوگا جس کی ہم نے مساوات معلوم کی ہے۔

مثال 1.5: ایک لکیر کی مساوات معلوم کریں جو کہ دو نقطوں کو جوڑنے سے بنی ہے، نقطوں کے محدود بالترتیب  $(3, 4)$  اور  $(-1, 2)$  ہیں۔ مساوات معلوم کرنے کے لیے، پہلے آپ اس لکیر کا ڈھلاؤ معلوم کریں اور پھر آپ کلیہ  $y - y_1 = m(x - x_1)$  کا استعمال کر سکتے ہیں۔ لکیر جو کہ نقطہ  $(3, 4)$  کو  $(-1, 2)$  سے جوڑتی ہے اس کا ڈھلاؤ ہوگا  $\frac{2-4}{-1-3} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$  لہذا نقطہ  $(3, 4)$  سے گزرنے والی لکیر جس کا ڈھلاؤ  $\frac{1}{2}$  ہے اس کی مساوات  $y - 4 = \frac{1}{2}(x - 3)$  ہوگی۔ اس مساوات کو سادہ شکل میں دیکھا جائے تو یہ کچھ ایسی

دیکھ گئے۔  $2y - 8 = x - 3$  یا  $2y = x + 5$ ۔ اس مساوات کی درستی کو دیکھنے کے لیے اس میں دیگر فرضی نقطوں کے محدود بھی ڈال کے دیکھیں۔

□

## 1.6 کلیئر کی مساوات کی پہچان

مثالوں 1.5.1 سے 1.5.3 تک سب کے جوابات مساوات  $y = mx + c$  کی صورت میں لکھے جاسکتے ہیں جبکہ  $m$  اور  $c$  اعداد ہیں۔ ایسی کسی بھی مساوات کو سیدھی کلیئر کی مساوات ثابت کرنا نہایت ہی آسان ہے۔ اگر  $y = mx + c$  تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ

$$\frac{y - c}{x - 0} \quad (x \neq 0)$$

یہ مساوات ہمیں بتاتی ہے کہ تمام نقطوں کے لیے کہ جنکے محدود  $(x, y)$  ہوں گے، وہ کلیئر جو نقطہ  $(0, c)$  کو جوڑے گی  $(x, y)$  سے، اسکا ڈھلاؤ  $m$  ہوگا۔ لب لباب یہ کہ  $(x, y)$  اس کلیئر کا حصہ ہوگا جسکا ڈھلاؤ  $m$  ہوگا اور جو نقطہ  $(0, c)$  سے گزرتی ہوگی۔ نقطہ  $(0, c)$  محور  $y$ -پر موجود ہے۔ اس ہندسے  $c$  کو قطع دانے کہیں گے۔ قطع ایکس معلوم کرنے کے لیے مساوات میں  $y = 0$  یہ ڈالیں، اور یوں آپکو ملے گا  $x = -\frac{c}{m}$ ، لیکن یہ بات ذہن نشین کر لیں کہ آپ یہ تقسیم نہیں کر سکتے اگر  $m = 0$  ہو۔ ایسی صورت حال میں یہ کلیئر محور  $x$ -کے متوازی ہو جاتی ہے اور اسکا کوئی قطع ایکس نہیں ہوتا۔ جب ایسی صورت حال ہو کہ ڈھلاؤ کی قیمت صفر ہو جائے تو ایسی کلیئر پر موجود تمام نقاط کے محدود  $(c, \text{کچھ بھی})$  کچھ ایسے ہوں گے۔ لہذا نقاط  $(0, 0), (5, 2), (-1, 2), (1, 2)$  سب ایک ہی سیدھی کلیئر پر موجود ہیں جو کہ  $(y = 2)$  ہے اور (شکل 1.11) میں دکھائی بھی گئی ہے۔ ایک خاص صورت اس میں یہ بھی ہے کہ محور  $x$ -کی مساوات  $y = 0$  ہے۔ ایسے ہی ایک سیدھی کلیئر جو کہ محور  $y$ -کے متوازی ہے، اسکی مساوات  $x = k$  ایسی ہوگی۔ اس کلیئر پر موجود تمام نقاط کے محدود  $k$  کچھ ایسے ہوں گے۔ لہذا یہ تمام نقاط  $(0, 0), (3, 4), (3, 2), (3, 0)$  ایک کلیئر پر موجود ہیں اور وہ کلیئر  $x = 3$  ہے اور (شکل 1.12) میں یہی کلیئر دکھائی گئی ہے۔ یہاں  $y$  محور کی اپنی مساوات  $x = 0$  ہے۔ کلیئر  $x = k$  کا کوئی ڈھلاؤ نہیں ہے، دراصل اسکا ڈھلاؤ متعین نہیں کیا جاسکتا۔ اور اسکی مساوات  $y = mx + c$  ایسے نہیں لکھی جاسکتی۔

## 1.7 مساوات $ax + by + c = 0$

فرض کریں کہ آپکے پاس ایک مساوات ہے  $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ ۔ یہ آسان ہے کہ اس مساوات کو 3 سے ضرب دیں اور یوں مساوات  $3y = 2x + 4$  سادہ ہو جائے گی۔ اور اسکی ترتیب تھوڑی بدلیں تو مساوات کچھ ایسا روپ دھار لے گی،  $2x - 3y + 4 = 0$ ۔ مساوات عام طور پر  $ax + by + c = 0$  ایسی ہوتی ہے جہاں  $a, b$  اور  $c$  مستقل ہیں۔ اس بات کا خیال رکھیں کہ مساوات  $y = mx + c$  اور  $ax + by + c = 0$  دونوں میں عدد  $c$  موجود ہے لیکن اس کا مطلب دونوں مساوات میں مختلف ہے۔ مساوات  $y = mx + c$  میں  $c$  قطع دانے ہے لیکن مساوات  $ax + by + c = 0$  میں ایسا کوئی معاملہ نہیں ہے۔ مساوات  $ax + by + c = 0$  کا ڈھلاؤ معلوم کرنے کا ایک طریقہ یہ بھی ہے کہ مساوات کو  $\dots$  کی شکل میں لکھا جائے، آگے چل کے ہم اسکی کچھ مثالیں حل کریں گے۔

مثال 1.6: مساوات  $2x + 3y - 4 = 0$  کا ڈھلاؤ معلوم کریں، مساوات کو اس  $y = \dots$  شکل میں لکھیں اور پھر اس اصول کو استعمال کریں کہ مساوات  $y = mx + c$  میں  $m$  ڈھلاؤ کو ظاہر کرتا ہے۔ مساوات  $2x + 3y - 4 = 0$  میں آپ دیکھیں گے



کہ  $3y = -2x + 4$  اور  $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$  لہٰذا اس مساوات کا اگر اس مساوات  $y = mx + c$  سے تقابل کیا جائے تو ہم اس نتیجے پر پہنچیں گے کہ ڈھلاؤ  $-\frac{2}{3}$  ہے

□

مثال 1.7: متوازی الاضلاع کی ایک طرف ایک سیدھی لکیر  $3x - 4y - 7 = 0$  کے ساتھ موجود ہے، نقطہ  $(2, 3)$  متوازی الاضلاع کا ایک کونہ ہے، دوسری طرف کی مساوات معلوم کریں۔ لکیر  $3x - 4y - 7 = 0$  اور  $y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$  ایک ہی ہیں لہٰذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ ڈھلاؤ  $\frac{3}{4}$  ہے۔ لکیر جو کہ نقطہ  $(2, 3)$  سے گزر رہی ہے اور جس کا ڈھلاؤ  $\frac{3}{4}$  ہے، اسکی مساوات  $y - 3 = \frac{3}{4}(x - 2)$  یا  $3x - 4y + 6 = 0$  ہے

□

## 1.8 دو لکیروں کا مشترک نقطہ

فرض کریں کہ آپکے سامنے دو لکیریں ہیں جنکی مساوات  $2x - y = 4$  اور  $3x + 2y = -1$  ہیں، آپ ان دونوں لکیروں کے مشترک نقطے کے محدود کیسے معلوم کریں گے؟ دراصل آپ کو ایک نقطہ  $(x, y)$  کی تلاش ہے جو کہ دونوں لکیروں پر موجود ہو، لہٰذا اس نقطے کے محدود ایسے ہونے چاہئیں کہ دونوں مساوات درست ثابت ہوں، اسی لیے آپ کو ان دونوں مساوات کو ایک ساتھ حل کرنا ہوگا۔ ان دو مساوات سے، آپ معلوم کر سکیں گے کہ  $x = 1$  اور  $y = -2$ ، لہٰذا مشترک نقطہ  $(1, -2)$  ہے۔ یہ طریقہ ہر سیدھی لکیر پر لاگو ہو سکتا ہے بشرطیکہ یہ متوازی نہ ہوں، مشترک نقطہ معلوم کرنے کے لیے لکیروں کی مساوات حل کریں، یہ طریقہ نموں میں مشترک نقطے معلوم کرنے کے لیے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔ سوال 1: دیکھیں کہ کیا دیے گئے نقطے، بتائی گئی مساوات کی لکیر پر موجود ہیں یا نہیں؟

$$(1, 2), y = 5x - 3 \quad \text{ا.} \quad (5p, \frac{5}{p}, y = \frac{5}{x} \quad \text{ب.}$$

$$(3, -2), y = 3x - 7 \quad \text{ج.}$$

$$(p, (p - a)^2 + 1), y = x^2 - 2x + 2 \quad \text{د.}$$

$$(3, -4), x^2 + y^2 = 25 \quad \text{ه.}$$

$$(2, 2), 3x^2 + y^2 = 40 \quad \text{و.}$$

$$(t^2, 2t), y^2 = 4x \quad \text{ز.} \quad (1, 1\frac{1}{2}), y = \frac{x+2}{3x-1} \quad \text{ح.}$$

سوال 2: بتائے گئے نقطوں سے بنی اور درج ذیل ڈھلاؤ والی سیدھی لکیر کی مساوات معلوم کریں۔ آپکے جواب کسر کی صورت میں نہیں ہونا چاہیئے۔

$$(2, 3), 5 \quad \text{ا.} \quad (-2, 1), -\frac{3}{8} \quad \text{ب.} \quad (-5, -1), -\frac{3}{4} \quad \text{ج.} \quad (3, 4), -\frac{1}{2} \quad \text{د.}$$

$$(1, 2), -3 \quad \text{ا.} \quad (0, 0), -3 \quad \text{ب.} \quad (-3, 0), \frac{1}{2} \quad \text{ج.} \quad (2, -1), -2 \quad \text{د.}$$

$$(0, 4), \frac{1}{2} \quad \text{ا.} \quad (3, 8), 0 \quad \text{ب.} \quad (-3, -1), \frac{3}{8} \quad \text{ج.} \quad (-2, -5), 3 \quad \text{د.}$$

$$\text{ج. } (0, -4), 7 \quad \text{یہ. } (3, -2), -\frac{5}{8} \quad \text{ز. } (d, 0), 7 \quad \text{بط. } (0, c), 3$$

$$\text{بط. } (0, 2), -1 \quad \text{ز. } (3, 0), -\frac{3}{5} \quad \text{ج. } (0, 4), m \quad \text{ک. } (c, 0)$$

سوال 3: درج ذیل نقاط کو جوڑ کر بننے والی لکیروں کی مساوات معلوم کریں۔ آپکے جواب میں کسر موجود نا ہوں اور آپکا جواب  $y = mx + c$  یا  $ax + by + c = 0$  کی صورت میں ہونا چاہیئے۔

$$\begin{array}{lll} \text{ا. } (1, 4), (3, 10) & \text{ج. } (2, 0), (5, -1) & \text{یہ. } (0, 0), (5, -3) \\ \text{ب. } (4, 5), (-2, -7) & \text{ط. } (-4, 2), (-1, -3) & \text{ی. } (0, 0), (p, q) \\ \text{ج. } (3, 2), (0, 4) & \text{ی. } (-2, -1), (5, -3) & \text{ز. } (p, q), (p+3, q-1) \\ \text{د. } (3, 7), (3, 12) & \text{یا. } (-3, 4), (-3, 9) & \text{ج. } (p, -q), (p, q) \\ \text{ه. } (10, -3), (-5, -12) & \text{یب. } (-1, 0), (0, -1) & \text{بط. } (p, q), (p+2, q+2) \\ \text{و. } (3, -1), (3, -4), 20 & \text{ج. } (2, 7), (3, 10) & \text{ز. } (2, -3), (11, -3) \\ \text{ک. } (p, 0), (0, q) & \text{ید. } (-5, 4), (-2, -1) & \end{array}$$

سوال 4: درج ذیل لکیروں کا ڈھلاؤ معلوم کریں؛

$$\begin{array}{lll} \text{ا. } 2x + y = 7 & \text{د. } y = 5 & \text{ز. } x + y = -3 \quad \text{ی. } 3(y - 4) = 7x \\ \text{ب. } 3x - 4y = 8 & \text{ه. } 3x - 2y = -4 & \text{ج. } y = 3(x + 4) \quad \text{یا. } y = m(x - d) \\ \text{ج. } 5x + 2y = -3 & \text{و. } 5x = 7 & \text{ط. } 7 - x = 2y \quad \text{یب. } px + qy = pq \end{array}$$

سوال 5: ایک لکیر، جو کہ نقطہ  $(-2, 1)$  سے گزرتی ہے اور  $y = \frac{1}{2}x - 3$  کے متوازی ہے، کی مساوات معلوم کریں۔

سوال 6: ایک لکیر کی مساوات معلوم کریں جو کہ  $(4, -3)$  سے گزرتی ہے اور ایک دوسری لکیر  $y + 2x = 7$  کے مساوی ہے۔

سوال 7: ایک لکیر جو کہ نقطہ  $(1, 2)$  سے گزر رہی ہے، یہ لکیر ایک دوسری لکیر کے متوازی ہے جو کہ نقطہ  $(3, -1)$  اور  $(-5, 2)$  سے مل کر بنی ہے۔

سوال 8: ایک کلیر کی مساوات معلوم کریں جو کہ نقطہ  $(3, 9)$  سے گزر رہی ہے اور مساوی ہے ایک کلیر کے جو نقطہ  $(-3, 2)$  اور  $(2, -3)$  سے مل کر بنی ہے۔

سوال 9: کلیر کی مساوات معلوم کریں جو کہ  $(1, 7)$  سے گزرتی ہے اور  $x$ -محور کے متوازی ہے

سوال 10: ایک کلیر کی مساوات معلوم کریں جو کہ  $(d, 0)$  سے گزرتی ہے اور ایک دوسری کلیر  $y = mx + c$  کے متوازی ہے۔

سوال 11: درج ذیل سیدھی کلیروں کی مساوات معلوم کریں۔

$$2x + 3y = 7, 6x + 9y = 11 \quad \text{ا.}$$

$$3x + 4y = 33, 2y = x - 2 \quad \text{ب.}$$

$$3x + y = 5, x + 3y = -1 \quad \text{ج.}$$

$$y = 3x + 1, y = 4x - 1 \quad \text{د.}$$

$$y = 2x + 3, 4x - 2y = -6 \quad \text{ه.}$$

$$2y = 7x, 3x - 2y = 1 \quad \text{و.}$$

$$ax + by = c, y = 2ax \quad \text{ز.}$$

$$y = 3x + 8, y = -2x - 7 \quad \text{ح.}$$

$$y = mx + c, y = -mx + d \quad \text{ط.}$$

$$x + 5y = 22, 3x + 2y = 14 \quad \text{ڈ.}$$

$$ax - by = 1, y = x \quad \text{ڈب.}$$

$$2x + 7y = 47, 5x + 4y = 50 \quad \text{ڈی.}$$

سوال 12: فرض کریں کہ  $p$  جبکہ محدود  $(p, q)$  ہیں اور یہ خم  $y = mx + c$  کا ایک مستقل نقطہ ہے اور ایسے ہی ایک نقطہ  $Q$  ہے جسکے محدود  $(r, s)$  ہیں اور یہ بھی مساوات  $y = mx + c$  کے خم کا ایک مستقل نقطہ ہے۔ یہ بات ثابت شدہ ہے کہ نقطوں  $p$  اور  $Q$  کے محدود سے مساوات  $y = mx + c$  درست ٹھہرتی ہے، ثابت کریں کہ خط  $PQ$  کا ڈھلاؤ  $m$  ہوگا نقطہ  $Q$  کی تمام حالتوں کے لیے۔

سوال 13: نقاط  $a, b, c$  کی چند ایک قیمتوں کے لیے مساوات  $ax + by + c = 0$  ایک سیدھی کلیر کی نہیں رہتی۔ ایسی چند قیمتیں معلوم کریں۔

## 1.9 عمودی لکیروں کا ڈھلاؤ

(حصہ 1.3) میں یہ بتایا گیا ہے کہ دو لکیریں متوازی ہوتی ہیں اگر ان کے ڈھلاؤ برابر ہوں۔ لیکن اگر دو لکیریں عمودی ہوں تو ان کے ڈھلاؤ کیسے ہوں گے۔ اگر ایک لکیر جس کا ڈھلاؤ مثبت ہو تو عمودی لکیر کا ڈھلاؤ منفی ہوگا، اور اس کا الٹ بھی درست ہوگا، لیکن آپ سے زیادہ بہتر اندازہ لگا سکتے ہیں (شکل 1.3) میں یہ دکھایا گیا ہے کہ خط  $PB$  کا ڈھلاؤ  $m$  ہو تو ایک ڈھلاؤ مثلث  $PAB$  بنائی جاسکتی ہے جسمیں  $PA$  کی لمبائی ایک اکائی ہے اور خط  $AB$  کی لمبائی  $m$  اکائیاں ہے۔ (شکل 1.14) میں ڈھلاؤ مثلث  $PAB$  کو گھمایا گیا ہے ایک قائمہ زاویہ سے اور اب مثلث  $P'A'B'$  ہے کچھ یوں کہ خط  $P'B'$  عمودی ہے خط  $PB$  پر۔ اس مثلث کا محدود  $x$   $-m$  ہے جبکہ محدود  $x$   $1$  ہے، اور یوں؛

$$PB' \text{ ڈھلاؤ} = \frac{y \text{ قدم}}{x \text{ قدم}} = \frac{1}{-m} = -\frac{1}{m}$$

اور اسی لیے خط  $PB$  کے عمودی لکیر کا ڈھلاؤ  $-\frac{1}{m}$  ہے۔ اور پس اگر دو عمودی لکیروں کا ڈھلاؤ بالترتیب  $m_1$  اور  $m_2$  ہو اور پھر  $m_1 m_2 = -1$  بھی ہو تو یہ سچ ہے کہ دونوں لکیروں کے ڈھلاؤ بالترتیب  $m_1$  اور  $m_2$  ہوں گے اور اگر  $m_1 m_2 = -1$  بھی ہو تو یہ دونوں لکیریں عمودی ہیں۔ اس بات کے ثبوت کے لیے آخر میں موجود مشق کا سوال 22 دیکھیں۔ دو لکیریں جن کا ڈھلاؤ بالترتیب  $m_1$  اور  $m_2$  ہو، یہ دونوں لکیریں عمودی ہوں گی اگر

$$m_1 m_2 = -1, \quad m_1 = -\frac{1}{m_2}, \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

یہ بات ذہن نشین کر لیں کہ یہ خصوصیت بے کار ہوگی اگر لکیریں محور کے متوازی ہوں گی۔ لیکن آپ آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ ایک لکیر مستقل  $x =$  ایک دوسری لکیر مستقل  $y =$  کے عمودی ہی ہوگی۔

مثال 1.8: ثابت کریں کہ نقاط  $(5, 0)$ ,  $(4, 7)$ ,  $(-1, 2)$ ,  $(0, 5)$  مجموعی طور پر ایک رومبس بناتے ہیں۔ آپ اس مسئلے کو کئی طریقوں سے حل کر سکتے ہیں، اس حل میں ہم نے ثابت کیا کہ یہ نقاط ایک متوازی الاضلاع چکل بنا رہے ہیں اور یہ کہ اس کے وتر عمودی ہیں تو یہ ایک رومبس کہلائے گی۔ وتر کے درمیانی نقاط  $\left(\frac{1}{2}(0+4), \frac{1}{2}(-5+7)\right)$  اور  $(2, 1)$  ہیں اور چونکہ یہ دونوں ایک ہی نقطہ ہیں اور بتائی گئی شکل ایک متوازی الاضلاع شکل ہے۔ اب اگر ڈھلاؤ کو دیکھا جائے تو  $\frac{12}{4} = 3$  اور  $\frac{7-(-5)}{4-0} = \frac{12}{4} = 3$  اور  $\frac{-2}{5-(-1)} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$  ہے اسی لیے وتر عمودی ہیں اور یوں ثابت ہوا کہ یہ نقاط مل کر ایک رومبس کو جنم دیتے ہیں۔ □

مثال 1.9: عمودی لکیر کی بنیاد کے محدود معلوم کریں جبکہ  $A(-2, -4)$  جڑا ہوا ہے نقاط  $B(0, 2)$  اور  $C(-1, 4)$  کے ساتھ۔ لکیر کی مدد سے۔ سب سے پہلے ایک شکل بنائیں جیسے کہ (شکل 1.15) ہے اس پر پیمانے کی ضرورت نہیں ہے۔ عمودی لکیر کی بنیاد دراصل وہ مشترک نقطہ  $P$  ہے جہ کہ لکیر  $BC$  پر موجود ہے اور ساتھ ہی ساتھ  $A$  سے گزرنی والی عمودی لکیر  $BC$  پر بھی موجود ہے۔ سب سے پہلے خط  $BC$  کا ڈھلاؤ اور اس کی مساوات معلوم کریں۔ □

خط  $BC$  کا ڈھلاؤ  $-\frac{2}{1} = -2$  ہے۔ خط  $BC$  کی مساوات  $y - 2 = -2(x - 0)$  ہے جو کہ سادہ ہو کر  $2x + y = 2$  ایسی صورت اختیار کر لے گی۔ لکیر جو کہ  $A$  سے گزرتی ہے اور خط  $BC$  کے عمودی ہے اس کا ڈھلاؤ  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  ہے۔

ہے۔ اس لکیر کی مساوات

$$y - (-4) = \frac{1}{2}(x - (-2)), \quad x - 2y = 6$$

یا  $x - 2y = 6$  ہے۔ یہ لکیریں نقطہ  $P$  پر ملتی ہیں جن کے محدد مساوات  $2x + y = 2$  اور  $x - 2y = 6$  کو درست ثابت کرتے ہیں۔ اس نقطے کے محدد  $(2, -2)$  ہیں سوال 1: ہر حصے میں خط کا ڈھلاؤ معلوم کریں جو کہ ایک دوسری لکیر کے عمودی ہے جس کا ڈھلاؤ دیا گیا ہے۔

ا. 2	ج. $\frac{3}{4}$	د. -1	ه. $-\frac{1}{m}$	ط. $\frac{p}{q}$	یا. $-m$
ب. -3	د. $-\frac{5}{6}$	و. $1\frac{3}{4}$	ج. $m$	ی. 0	یب. $\frac{a}{b-c}$

سوال 2: ہر حصے میں خط کی مساوات معلوم کریں جو کہ بتائی گئی لکیریوں کے عمودی ہیں۔ آپکا جواب کسر کی صورت میں نہیں ہونا چاہیئے۔

ا. $(2, 3), y = 4x + 3$	ه. $(-1, 4), 2x + 3y = 8$	ط. $(0, 0), y = mx + c$
ب. $(-3, -1), y = 1\frac{1}{2}x + 3$	د. $(4, 3), 3x - 5y = 8$	ی. $(a, b), y = mx + c$
ج. $(2, -5), y = -5x - 2$	ز. $(5, -3), 2x = 3$	یا. $(c, d), ny - x = p$
د. $(7, -4), y = 2\frac{1}{2}$	ج. $(0, 3), y = 2x - 1$	یب. $(-1, -2), ax + by = c$

سوال 3: ایک خط کی مساوات معلوم کریں جو کہ نقطہ  $(-2, 5)$  سے گزرتی ہے اور لکیر  $y = 3x + 1$  کے عمودی ہے، ان دونوں لکیریوں کا مشترک نقطہ بھی معلوم کریں۔

سوال 4: ایک خط کی مساوات معلوم کریں جو کہ نقطہ  $(1, 1)$  سے گزرتی ہے اور یہ خط  $2x - 3y = 12$  کے عمودی ہے، ان دونوں لکیریوں کا مشترک نقطہ بھی معلوم کریں۔

سوال 5: ایک لکیر جو مثلث کے ایک کونے سے گزرے اور مخالف سمت کے عمودی ہو، اس لکیر کو اونچائی کا نام دیتے ہیں۔ اس لکیر کی مساوات معلوم کریں جو کہ مثلث  $ABC$  کے کونے  $A$  سے گزرتی ہے نقاط کے محدد بالترتیب  $A(2, 3), B(1, -7), C(4, -1)$  ہوں گے۔

سوال 6: نقاط  $P(2, 5), Q(12, 5), R(8, -7)$  مل کے ایک مثلث بناتے ہیں

ا. اونچائی کی مساوات تلاش کریں جو کہ نقطہ  $R$  اور پھر نقطہ  $Q$  ثابت کریں کہ نقطہ  $P$  سے گزرنے والی اونچائی اس مشترک سے گزرے۔

ب. ان دونوں اونچائیوں کا مشترک نقطہ معلوم کریں

سوال 7: ثابت کریں کہ نقاط  $(5, 9)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(-2, 5)$  سے بننے والی ایک مثلث قائمہ زاویہ مثلث ہے۔

سوال 8: لکھیں  $2x + y = 3$  اور  $3x + 5y - 1 = 0$  کا مشترک نقطہ معلوم کریں

سوال 9: نقاط  $A(-1, 3)$ ,  $B(5, 7)$ ,  $C(0, 8)$  کو ملانے سے ایک مثلث بنتی ہے۔

1. ثابت کریں کہ زاویہ  $ACB$  ایک قائمہ زاویہ ہے۔

2. اس نقطے کے محدود معلوم کریں جہاں  $B$  سے آنے والی خط  $AC$  کے متوازی لکیر محور  $x$  کا بنتی ہے۔

سوال 10: ایک مربع شکل ہے جسکے دو کونے  $A(7, 2)$ ,  $C(1, 4)$  ہیں

ا. وتر  $BD$  کی لمبائی معلوم کریں ب. نقاط  $B$  اور  $D$  کے محدود معلوم کریں

سوال 11: نقاط  $A(-3, 2)$ ,  $B(4, 3)$ ,  $C(9, -2)$ ,  $D(2, -3)$  کو ملانے سے ایک چوکور شکل بنتی ہے۔

ا. ثابت کریں کہ چاروں سمتوں کی لمبائی برابر ہے۔ ب. ثابت کریں کہ شکل  $ABCD$  ایک مربع نہیں ہے۔

سوال 12:  $P$  ایک نقطہ ہے جبکہ  $I_1$  ایک لکیر ہے جسکی مساوات  $3x + 4y = 16$  ہے۔

ا. ایک لکیر  $I_2$  کی مساوات معلوم کریں جو کہ نقطہ  $P$  سے گزرتی ہے۔ ب. دونوں لکیروں کا مشترک نقطہ معلوم کریں ہے اور لکیر  $I_1$  کے عمودی ہو۔

ج. نقطے  $P$  سے خط  $I_1$  کا عمودی فاصلہ معلوم کریں

سوال 13: ثابت کریں کہ مثلث جس کے کونے  $(11, 8)$ ,  $(3, 20)$ ,  $(-2, 8)$  ہیں ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔ اسکا حدود اربعہ معلوم کریں

سوال 14: تین سیدھی لکیریں  $4x + y = 60$ ,  $7y = 2x$ ,  $y = x$  ایک مثلث بناتی ہیں۔ اسکے کونوں کے محدود معلوم کریں۔

سوال 15: ایک لکیر کی مساوات معلوم کریں جو کہ نقطہ  $(1, 3)$  سے گزرتی ہے اور یہ لکیر متوازی ہے ایک دوسری لکیر کے جس کی مساوات  $2x + 7y = 5$  ہے۔ یاد رکھیں اُپکا جواب کچھ اس  $ax + by = c$  صورت میں ہونا چاہیئے۔

سوال 16: نقاط  $(-4, 3)$ ,  $(2, -5)$  کو ملانے سے بننے والی لکیر کی عمودی دوڑک کی مساوات معلوم کریں۔

سوال 17: نقاط جن کے محدود  $A(1, 2)$ ,  $B(3, 5)$ ,  $C(6, 6)$  ہیں اور نقطہ  $D$  مل کر ایک متوازی الاضلاع شکل بناتے ہیں۔ خط  $AC$  کے درمیانی نقطے کے محدود معلوم کریں، اور اس جواب کو استعمال کرتے ہوئے نقطہ  $D$  کے محدود معلوم کریں۔

سوال 18: ایک خط  $y = 3x$  پر ایک نقطہ  $A(0, 3)$  سے ایک عمودی لکیر پر نقطہ  $P$  عمودی خط کا بنیادی خط ہے۔

- ا. خط  $AP$  کی مساوات معلوم کریں۔  
 ج. نقطہ  $A$  کا خط  $y = 3x$  سے عمودی فاصلہ معلوم کریں۔  
 ب. نقطہ  $P$  کے محدود معلوم کریں

سوال 19: وہ نقاط جو ایک ہی لکیر پر موجود ہوں انہیں ہم پلہ نقاط کہتے ہیں، ثابت کریں کہ نقاط  $(-1, 3)$ ,  $(4, 7)$ ,  $(-11, -5)$  ہم پلہ ہیں۔

سوال 20: سیدھی لکیر کی مساوات معلوم کریں کہ نقطہ  $(-2, 2)$ ,  $(3, -1)$  سے گزرتی ہے، اور اپنا جواب  $ax + by + c = 0$  کی صورت میں لکھیں۔ محور  $x$  اور اس لکیر کا مشترک نقطہ معلوم کریں۔

سوال 21: نقاط  $A$  اور  $B$  کے محدود بالترتیب  $(3, 2)$  اور  $(4, -5)$  ہیں، خط  $AB$  کے درمیانی نقطے کے محدود معلوم کریں نیز خط  $AB$  کا ڈھلاؤ بھی معلوم کریں۔ اور خط  $AB$  کے عمودی دوزی کی مساوات بھی معلوم کریں، آپکا جواب  $ax + by + c = 0$  کی صورت میں ہونا چاہیئے جس میں  $a$ ,  $b$  اور  $c$  اعداد صحیح ہیں۔

- سوال 22: خم  $y = 1 + \frac{1}{2+x}$  محور  $x$  کو نقطہ  $A$  پہنچتا ہے جبکہ محور  $y$  کو نقطہ  $B$  پہنچتا ہے۔  
 ا. نقاط  $A$  اور  $B$  کے محدود معلوم کریں  
 ج. خط  $AB$  اور مساوات  $3y = 4x$  کی لکیر کا مشترک نقطہ معلوم کریں۔  
 ب. خط  $AB$  کی مساوات معلوم کریں

سوال 23: ایک سیدھی لکیر  $P$  ایک نقطے  $(10, 1)$  سے گزرتی ہے اور یہ لکیر عمودی ہے ایک دوسری لکیر  $r$  کے جسکی مساوات  $2x + y = 1$  ہے۔ آپ لکیر  $P$  کی مساوات معلوم کریں۔ دونوں لکیروں کا مشترک نقطہ بھی معلوم کریں جبکہ نقطے  $(10, 1)$  کا لکیر  $r$  سے عمودی فاصلہ بھی معلوم کریں۔

- سوال 24: حساب کتاب سے ثابت کریں کہ نقاط  $P(0, 7)$ ,  $Q(6, 5)$ ,  $R(5, 2)$ ,  $S(-1, 4)$  ایک مستطیل بناتے ہیں  
 سوال 25: لکیر  $3x - 4y = 8$  محور  $x$  کو نقطہ  $A$  پہنچتا ہے، نقطہ  $C$  کے محدود  $(-2, 9)$  ہیں، نقطہ  $C$  سے گزرنے والی لکیر ایک دوسری لکیر  $3x - 4y = 8$  پر عمودی ہے۔ مثلث  $ABC$  کا حدود اربعہ معلوم کریں۔  
 سوال 26: نقاط  $A(-3, -4)$ ,  $C(5, 4)$  ایک رومبس  $ABCD$  کے وتر کے انتہائی نقطہ ہیں  
 ا. وتر  $BD$  کی لمبائی معلوم کریں  
 ب. اگر یہ مان لیا جائے کہ خط  $BC$  کا ڈھلاؤ  $\frac{5}{3}$  ہے تو آپ نقاط  $B$  اور  $D$  کے محدود معلوم کریں

سوال 27: وسطانیہ کی مساوات معلوم کریں اگر مثلث کے کونے  $(4, 4)$ ,  $(6, 0)$ ,  $(0, 2)$  ہیں یہ بھی ثابت کریں کہ تمام وسطانیہ ایک ہی نقطے سے گزرتے ہیں۔

سوال 28: دو لکیروں کی مساوات بالترتیب  $y = m_1x + c_1$  اور  $y = m_2x + c_2$  ہیں جبکہ  $m_1m_2 = -1$  ثابت کریں کہ لکیریں عمودی ہیں۔





## باب 2

### غیر ناطق جذر اور طاقتیں

اس باب کا پہلا حصہ مربع اور مکعب جذر والی تراکیب کے بارے میں اور دوسرا حصہ طاقتی بیانیوں کے بارے میں ہے۔ اس کو مکمل کرنے کے بعد آپ کو اس قابل ہو جانا چاہیے کہ۔

- مربع، مکعب اور دیگر جذروں والی تراکیب کو سادہ بنا سکیں
- طاقت کے قوانین جانتے ہوں
- منفی، صفر، اور کسری طاقتوں کا مطلب جانتے ہوں
- طاقت کی حامل تراکیب کو سادہ کر سکیں

### 2.1 اعداد کی اقسام

آغاز میں اعداد فقط گنتی کے لیے استعمال ہوتے تھے اور  $1, 2, 3, \dots$  ہماری اس ضرورت کے لیے کافی تھے۔ یہ طبعی اعداد یا مثبت صحیح عدد کہلاتے ہیں۔

آہستہ آہستہ ہمیں معلوم ہوا کہ اعداد پیمائش اور تجارتی مقاصد کے لیے بھی ضروری ہیں، اور اس کے لیے ہمیں کسروں کی ضرورت بھی پڑنے لگی۔ صحیح عدد اور کسروں کو ملا کر منطقی اعداد بنائے گئے۔ یہ وہ اعداد ہیں کہ جنہیں  $\frac{p}{q}$  کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔ جب کہ  $p$  اور  $q$  دونوں صحیح اعداد ہیں اور  $q$  صفر نہیں ہو گا۔ یونانی ریاضی دانوں کی بے شمار شاندار دریافتوں میں سے ایک دریافت یہ بھی تھی کہ ایسے اعداد موجود ہیں جنہیں اس ہیئت میں نہیں لکھا جاسکتا۔ ایسے اعداد کو غیر منطقی اعداد کہا جاتا ہے۔ پہلا ایسا عدد جو دریافت کیا گیا  $\sqrt{2}$  تھا، جو فیثاغورس کے قانون کے مطابق

ایک ایسے مربع کے وتر کی لمبائی بنتی ہے جس کی ہر طرف کی لمبائی 1 ہو۔ یونانیوں نے جس دلیل سے ثابت کیا کہ  $\sqrt{2}$  کو کسری صورت میں نہیں لکھا جاسکتا، اسی دلیل سے یہ بھی ثابت کیا جاسکتا ہے کہ کوئی بھی جزر، مربع، مکعب یا کوئی بھی، یا تو صحیح عدد ہوگی یا غیر منطقی عدد۔ اب ہم بہت سے غیر منطقی اعداد جان چکے ہیں جن میں سب سے مشہور  $\pi$  ہے۔

منطقی اور غیر منطقی اعداد مل کر حقیقی اعداد بناتے ہیں۔ اعداد صحیح، منطقی، غیر منطقی اور حقیقی اعداد مثبت، منفی یا صفر ہو سکتے ہیں۔

جب کسی منطقی عدد کو اعشاریہ کی صورت میں لکھا جائے تو یا تو اعشاریہ کے ایک درجے تک رک جاتے ہیں یا ہندسوں کی ایک مخصوص وضع یا ترتیب میں بار بار دہرایا جانے لگتا ہے۔ مثال کے طور پر۔

$$\frac{7}{10} = 0.7, \quad \frac{7}{11} = 0.6363 \dots, \quad \frac{7}{12} = 0.5833 \dots, \quad \frac{7}{13} = 0.53846153846153 \dots$$

$$\frac{7}{14} = 0.5, \quad \frac{7}{15} = 0.466 \dots, \quad \frac{7}{16} = 0.4375, \quad \frac{7}{17} = 0.411764705882352941176 \dots$$

اس کا معکوس بھی درست ہے، یعنی اگر ایک اعشاری عدد رک جائے یا محدود بار دہرایا جائے تو وہ منطقی عدد کہلائے گا۔ لہذا اگر ایک غیر منطقی عدد کو اعشاری صورت میں لکھا جائے تو آپ جتنا مرضی پھیلا لیں، اس کے ہندسوں کی ترتیب کبھی دہرائی نہیں جائے گی۔

## 2.2 نامعقولیے اور ان کی خصوصیات

آج سے پہلے جب ہم  $\sqrt{2}$ ،  $\sqrt{8}$  یا ایسی کسی ترکیب کو دیکھتے تھے تو ہم کیلکولیٹر کی مدد سے اسے اعشاری صورت میں بدل کر لکھ لیا کرتے تھے۔ مثلاً کچھ اس طرح

$\sqrt{2} = 1.414 \dots$  یا  $\sqrt{2} = 1.414$  تین اعشاری ہندسوں تک درست یا  $\sqrt{2} \approx 1.414$  لیکن  $\sqrt{2} = 1.414$  خود یہ ترکیب کیوں درست نہیں ہے؟  $\sqrt[3]{9}\sqrt{2}$  ایسی ترکیب کو نامعقولیہ کہا جاتا ہے۔ اس جزو میں ہم انہی نامعقولیوں سے حساب کرنا سیکھیں گے۔ آپ کو یاد رکھنا ہو گا کہ  $\sqrt{x}$  ہمیشہ  $x$  کی مثبت مربع جذر (یا  $x = 0$  ہونے کی صورت میں صفر) کے معنوں میں لکھا جاتا ہے۔ نامعقولیوں کی اہم خاصیتیں، جو ہم بار بار استعمال کریں گے، یہ ہیں:

$$(\sqrt{x} \times \sqrt{y}) \times (\sqrt{x} \times \sqrt{y}) = (\sqrt{x} \times \sqrt{y})^2 = x \times y = \sqrt{x \times y}$$

$$\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

درج ذیل مثالیں ان خصوصیات کو سمجھنے میں مدد دے سکتی ہیں۔

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}; \quad \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3};$$

$$\sqrt{18} \times \sqrt{2} = \sqrt{18 \times 2} = \sqrt{36} = 6; \quad \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3.$$

اس حساب کو اپنے کیلکولیٹر سے دوبارہ کر کے دیکھنا شاید آپ کے یقین میں اضافے کا باعث ہو۔

مثال 2.1: سادہ کریں (i)  $\sqrt{28} + \sqrt{63}$  (ب)  $\sqrt{5} \times \sqrt{10}$  ان کا حل متبادل طریقے سے بھی نکالا جاسکتا ہے، جیسے جزو ب کے لیے نکالا گیا ہے۔ (i)

$$\sqrt{28} + \sqrt{63} = (\sqrt{4} \times \sqrt{7}) + (\sqrt{9} \times \sqrt{7}) = 2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = 5\sqrt{7}$$

(ب) پہلا طریقہ:  $\sqrt{5} \times \sqrt{10} = \sqrt{5 \times 10} = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$  دوسرا طریقہ:  $\sqrt{5} \times (\sqrt{5} \times \sqrt{2}) = (\sqrt{5} \times \sqrt{5}) \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$  بعض اوقات کسر کے نسب نما سے نامعقولیوں کو ہٹا دینا مفید ہوتا ہے جیسے  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  کے نسب نما سے نامعقولیہ ہٹانے کے لیے ہم اوپر نیچے دونوں کو  $\sqrt{2}$  سے ضرب دے سکتے ہیں۔  $\frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  □

کچھ نتائج جو اکثر ہماری مدد کریں گے۔  $\sqrt{x} = \frac{x}{\sqrt{x}}$  اور اسی کا بالعکس  $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$  غیر معقول کو نسب نما سے ہٹا دینا نسب نما کو معقول بنانا کہلاتا ہے۔

مثال 2.2: درج ذیل ترکیب میں نسب نما کو معقول بنائیں۔

$$\frac{6}{\sqrt{2}} \quad (i)$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{10}} \quad (ب)$$

$$\frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{3 \times 2}{\sqrt{2}} = 3 \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \quad (i) \text{ حل}$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{3 \times \sqrt{2}}{\sqrt{5} \times \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \quad (ب)$$

□ مربع جذر کے لیے استعمال ہونے والے قوانین ہی کعب جذر اور اس سے بالائی جذروں کے لیے استعمال ہوتے ہیں۔

مثال 2.3: شکل 2.1 میں ایک عمارت کی چھت کا قطع عمودی کو ایک قائم مثلث ABC کی صورت میں دکھایا گیا ہے۔ جس میں  $AB = 15m$  ہے۔ چھت کی بلندی BD 10m ہے۔ x اور y معلوم کریں۔ ہم مثلث ABD سے شروع کرتے ہیں۔ فیثا غورس کے قانون کے مطابق ہم جانتے ہیں کہ  $z^2 + 10^2 = 15^2$  لہذا  $z^2 = 225 - 100 = 125$  ہو گا۔

$$z = \sqrt{125} = \sqrt{25 \times 5} = 5\sqrt{5}$$

توجہ کیجیے کہ مثلث  $ABC$  اور  $ABD$  مماثل ہیں۔ اس مماثلت کو بہتر طور پر سمجھنے کے لیے ہم شکل 2.2 میں  $ABD$  کو اٹا کر دکھاتے ہیں۔ اب  $ABC$  اور  $ABD$  دونوں مثلثوں کی طرفیں ایک ہی تناسب میں ہوں گی۔ لہذا  $\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{15}{z}$

$$x = 15 \times \frac{3\sqrt{5}}{5} = 9\sqrt{5} \quad \frac{15}{z} = \frac{15}{5\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$y = 10 \times \frac{3\sqrt{5}}{5} = 6\sqrt{5}$$

آپ فیثاغورس کے قانون سے مثلث  $ABC$  میں  $x^2 = 15^2 + y^2$  کی تصدیق کر سکتے ہیں۔ □

سوال 1: کیکیولیٹر استعمال کیے بغیر ان تراکیب کو سادہ کریں۔

$$\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5} \quad .13$$

$$5\sqrt{3} \times \sqrt{3} \quad .7$$

$$\sqrt{3} \times \sqrt{3} \quad .1$$

$$2\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} \quad .8$$

$$\sqrt{10} \times \sqrt{10} \quad .2$$

$$(2\sqrt[4]{3})^4 \quad .14$$

$$3\sqrt{6} \times 4\sqrt{6} \quad .9$$

$$\sqrt{16} \times \sqrt{10} \quad .3$$

$$(2\sqrt[3]{2})^6 \quad .15$$

$$2\sqrt{20} \times 3\sqrt{5} \quad .10$$

$$\sqrt{8} \times \sqrt{2} \quad .4$$

$$(2\sqrt{7})^2 \quad .11$$

$$\sqrt{32} \times \sqrt{2} \quad .5$$

$$4\sqrt{125} \times 4\sqrt{5} \quad .16$$

$$(3\sqrt{3})^2 \quad .12$$

$$\sqrt{3} \times \sqrt{12} \quad .6$$

سوال 2: درج ذیل تراکیب کو کیکیولیٹر استعمال کیے بغیر سادہ کریں۔

$$\sqrt{54} \quad .9$$

$$\sqrt{40} \quad .5$$

$$\sqrt{18} \quad .1$$

$$\sqrt{72} \quad .10$$

$$\sqrt{45} \quad .6$$

$$\sqrt{20} \quad .2$$

$$\sqrt{175} \quad .11$$

$$\sqrt{48} \quad .7$$

$$\sqrt{24} \quad .3$$

$$\sqrt{675} \quad .12$$

$$\sqrt{50} \quad .8$$

$$\sqrt{32} \quad .4$$

سوال 3: درج ذیل تراکیب کو کیکیولیٹر استعمال کیے بغیر سادہ کریں۔

1.  $\sqrt{8} + \sqrt{18}$  7.  $\sqrt{99} + \sqrt{44} + \sqrt{11}$
2.  $\sqrt{3} + \sqrt{12}$  8.  $8\sqrt{2} + 2\sqrt{8}$
3.  $\sqrt{20} - \sqrt{5}$  9.  $2\sqrt{20} + 3\sqrt{45}$
4.  $\sqrt{32} - \sqrt{8}$  10.  $\sqrt{52} - \sqrt{13}$
5.  $\sqrt{50} - \sqrt{18} - \sqrt{8}$  11.  $20\sqrt{5} - 5\sqrt{20}$
6.  $\sqrt{27} + \sqrt{27}$  12.  $\sqrt{48} + \sqrt{24} - \sqrt{75} + \sqrt{96}$

سوال 4: درج ذیل تراکیب کو سیکولیٹر استعمال کیے بغیر سادہ کریں۔

- ا.  $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$  ب.  $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$  ج.  $\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}}$  د.  $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$  ه.  $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$  و.  $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}$  ز.  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{48}}$  ح.  $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{200}}$

سوال 5: درج ذیل تراکیب کو سیکولیٹر استعمال کیے بغیر سادہ کریں

- ا.  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  ب.  $\frac{1}{\sqrt{5}}$  ج.  $\frac{4}{\sqrt{2}}$  د.  $\frac{6}{\sqrt{6}}$  ه.  $\frac{11}{\sqrt{11}}$  و.  $\frac{2}{\sqrt{8}}$  ز.  $\frac{12}{\sqrt{3}}$  ح.  $\frac{14}{\sqrt{7}}$  ط.  $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$  ی.  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$  یب.  $\frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$  یج.  $\frac{7\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$  ید.  $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$  یه.  $\frac{9\sqrt{12}}{2\sqrt{18}}$  یو.  $\frac{2\sqrt{18}}{9\sqrt{12}}$  یا.  $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$  ید.  $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$  یه.  $\frac{9\sqrt{12}}{2\sqrt{18}}$  یو.  $\frac{2\sqrt{18}}{9\sqrt{12}}$

سوال 6: درج ذیل تراکیب سادہ بنائیں اور ہر ایک کا جواب  $k\sqrt{3}$  کی شکل میں لکھیں۔

باب 2. غیر ناطق جذر اور طاقستیں

$$ج. \sqrt{2} \times \sqrt{8} \times \sqrt{27} \quad ا. \sqrt{75} + \sqrt{12}$$

$$ب. \sqrt{6} + \sqrt{3}(4 - 2\sqrt{3}) \quad د. (3 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) - \sqrt{3} \times \sqrt{27}$$

$$ج. \frac{12}{\sqrt{3}} - \sqrt{27} \quad ز. AB = 4\sqrt{5}cm$$

$$د. \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \quad ح. BC = \sqrt{10}$$

سوال 7: ABCD ایک چوکور ہے، جس میں  $AB = 4\sqrt{5}cm$  اور  $BC = \sqrt{10}$ ۔ درج ذیل سوال کا جواب سادہ غیر معقول جذر کی شکل میں لکھیں۔ (i) چوکور کا رقبہ معلوم کریں (ب) وتر AC کی لمبائی معلوم کریں

سوال 8: درج ذیل تراکیب سادہ بنائیں اور ہر ایک کا جواب  $k\sqrt{2}$  کی شکل میں لکھیں۔

$$1. x\sqrt{2} = 10 \quad 3. z\sqrt{32} - 16 = z\sqrt{8} - 4$$

$$2. 2y\sqrt{2} - 3 = \frac{5y}{\sqrt{2}} + 1$$

سوال 9: درج ذیل تراکیب کو  $k\sqrt[3]{3}$  کی شکل میں لکھیں۔

$$1. \sqrt[3]{24} \quad 3. (\sqrt[3]{3})^4$$

$$2. \sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{3} \quad 4. \sqrt[3]{3000} - \sqrt[3]{375}$$

سوال 10: درج ذیل قائم مثلثوں کی تیسری نامعلوم طرف معلوم کریں۔ اپنے جواب کو سادہ غیر معقول کی شکل میں لکھیں

سوال 11: آپ کو بتایا جائے کہ اعشاریے کے بارہ ہندسوں تک لکھیے، مثلاً  $\sqrt{26} = 5.099\ 019\ 513\ 593$

1.  $\sqrt{104}$  کی ایسی قیمت معلوم کریں جو دس اعشاری ہندوس تک درست ہو۔

2.  $\sqrt{650}$  کی ایسی قیمت معلوم کریں جو دس اعشاری ہندوسوں تک درست ہو۔

3.  $\frac{13}{\sqrt{26}}$  کی ایسی قیمت معلوم کریں جو دس اعشاری ہندوس تک درست ہو۔

سوال 12: دی گئی ایک وقت مساواتوں کو حل کریں،  $9\sqrt{5}y = 7x - (3\sqrt{5})y$  اور  $(2\sqrt{5})x + y = 34$

سوال 13: درج ذیل کو سادہ بنائیں

$$\begin{aligned} \text{ا. } (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) & \quad \text{د. } (2\sqrt{2} + 1)(2\sqrt{2} - 1) \quad \text{ن. } (4\sqrt{7} - 5)(4\sqrt{7} + 5) \\ \text{ب. } (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) & \quad \text{ھ. } (4\sqrt{3} - 2)(4\sqrt{3} + 2) \\ \text{ج. } (\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3}) & \quad \text{و. } (10 + \sqrt{5})(10 - \sqrt{5}) \quad \text{ز. } \frac{(2\sqrt{6} - 3\sqrt{3})(2\sqrt{6} + 3\sqrt{3})}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

سوال 14: سوال نمبر 13 میں ہر جواب ایک عدد صحیح، نقل کر کے درج ذیل کو مکمل کریں

$$\begin{aligned} \text{ا. } (\sqrt{3} - 1)(\quad) &= 2 \quad \text{د. } (2\sqrt{7} + \sqrt{3})(\quad) = 25 \\ \text{ب. } (\sqrt{5} + 1)(\quad) &= 4 \quad \text{ھ. } (\sqrt{11} + \sqrt{10})(\quad) = 1 \\ \text{ج. } (\sqrt{6} - \sqrt{2})(\quad) &= 4 \quad \text{و. } (3\sqrt{5} - 2\sqrt{6})(\quad) = 21 \end{aligned}$$

سوال نمبر 15 اور 16 میں دی گئی مثالیں ہمیں نسب نما کو منطقی بنانے کے طریقے کی طرف متوجہ کرتی ہیں، جو سوال نمبر 5 کی ترکیبوں سے زیادہ پیچیدہ ہوں۔ سوال 15: (i) وضاحت کریں  $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \times \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$  اور ثابت کریں  $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$

$$\text{(ب) ثابت کریں } \frac{1}{2\sqrt{3}+3} = \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5}$$

سوال 16: نسب نما کو معقول بنا کر درج ذیل کسروں کو سادہ کریں

$$\text{ج. } \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{6}+3\sqrt{2}}$$

$$\text{ب. } \frac{1}{3\sqrt{5}-5}$$

$$\text{ا. } \frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

## 2.3 طاقتوں کا استعمال

سولہویں صدی میں جب ریاضی کی کتب چھپنے لگیں، تو ریاضی دان مکعب اور مربع مساواتوں کا حل ڈھونڈ رہے تھے۔ انھیں لگا کہ  $xxx$  اور  $xxxx$  کو  $x^3$  اور  $x^4$  لکھنا زیادہ آسان اور مفید رہے گا۔

طاقت نویسی کا آغاز تو اس انداز میں ہوا تھا لیکن وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ اندازہ ہوا کہ یہ صرف مختصر نویسی ہی کا ایک انداز نہیں تھا، بلکہ اس انداز سے لکھنا مستقبل میں اہم دریافتوں کا باعث بنا اور ریاضی کی موجودہ شکل اس انداز کے بغیر مبہم اور ناقابل استنبہام ہوتی۔ آپ نے اس انداز بیان کی سادہ مثالیں تو استعمال کی ہی ہوں گی۔ عام طور پہ علامت  $a^m$ ،  $a$  کو  $m$  بار ضرب دینے کے لیے لکھی جاتی ہے، اس کو یوں سمجھا جاسکتا ہے۔

$$a^m = \overbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}^{\text{ان کی تعداد } m \text{ ہے}}$$

اس میں  $a$  کو اساس کہا جاتا ہے اور  $m$  کو طاقت کہا جاتا ہے۔ یہاں توجہ دلانا ضروری ہے کہ  $a$  کسی بھی قسم کا عدد ہو سکتا ہے لیکن  $m$  لازمی طور پر مثبت عدد صحیح ہی ہو گا۔ اسکو عام طور پہ  $a$  کی طاقت  $m$  کہا جاتا ہے۔ طاقتی بیانیوں میں لکھی جانے والی تراکیب کو درج ذیل سادہ قوانین سے آسان بنایا جاسکتا ہے۔ ان میں سے ایک ضرب کا قانون ہے۔

$$a^m \times a^n = \overbrace{a \times a \times \dots \times a}^{m \text{ تعداد}} \times \overbrace{a \times a \times \dots \times a}^{n \text{ تعداد}} = \overbrace{a \times a \times \dots \times a}^{m+n \text{ تعداد}} = a^{m+n}$$

یہ بہت سی جگہوں پہ استعمال ہوتا ہے، مثلاً ایسے مکعب کا حجم معلوم کرنے کے لیے جس کی ہر طرف کی لمبائی  $a$  ہو۔ ہم جانتے ہیں کہ اساس کے رقبے کو بلندی سے ضرب دے کر حجم دریافت کیا جاتا ہے۔  $a^3 = a^{2+1} = a^2 \times a^1 = a^2 \times a = a^3$

اس سے ملتا جلتا تقسیم کا قانون

$$\begin{aligned} a^m \div a^n &= \overbrace{(a \times a \times \dots \times a)}^{m \text{ تعداد}} \div \overbrace{(a \times a \times \dots \times a)}^{n \text{ تعداد}} \\ &= \overbrace{a \times a \times \dots \times a}^{m-n \text{ تعداد}} \\ &= a^{m-n} \end{aligned}$$



اسی طرح طاقت پہ طاقت کا قانون ہے

$$\begin{aligned}
 (a^m)^n &= \overbrace{a \times a \times \dots \times a}^{m \text{ تعداد}} \times \overbrace{a \times a \times \dots \times a}^{m \text{ تعداد}} \times \dots \times \overbrace{a \times a \times \dots \times a}^{m \text{ تعداد}} \\
 &= \overbrace{a \times a \times \dots \times a}^{m \times n \text{ تعداد}} = a^{m \times n}
 \end{aligned}$$

ایک اور قانون جو جز کا قانون ہے کہ جس میں دو اساسیں اور ایک طاقت ہوتی ہے۔

$$\begin{aligned}
 (a \times b)^m &= \overbrace{(a \times b) \times (a \times b) \times \dots \times (a \times b)}^{m \text{ تعداد}} \\
 &= \overbrace{a \times a \times \dots \times a}^{m \text{ تعداد}} \times \overbrace{b \times b \times \dots \times b}^{m \text{ تعداد}} \\
 &= a^m \times b^m
 \end{aligned}$$

ان قوانین کو بیان کرنے کے لیے ضرب کی علامت استعمال کی گئی ہے، لیکن الجبرا کے دیگر حصوں میں اگر غلطی کی گنجائش نہ ہو تو یہ ہٹا دی جاتی ہے۔ اسے مکمل کرنے کے لیے یہاں یہ قوانین دوبارہ دیے جا رہے ہیں۔ ضرب کا قانون  $a^m \times a^n = a^{m+n}$  تقسیم کا قانون  $a^m \div a^n = a^m - n$  طاقت پہ طاقت کا قانون  $(a^m)^n = a^{m \times n}$  جز کا قانون  $(a \times b)^m = a^m \times b^m$

مثال 2.4: دی گئی ترکیب کو سادہ بنائیں۔  $(2a^2b)^3 \div (4a^4b)$

حل:

$$\begin{aligned}
 (2a^2b)^3 \div (4a^4b) &= (2^3(a^2)^3b^3) \div (4a^4b) \\
 &= (8a^{2 \times 3}b^3) \div (4a^4b) \\
 &= (8 \div 4) \times (a^6 \div a^4) \times (b^3 \div b^1) \\
 &= 2a^{6-4}b^{3-1} \\
 &= 2a^2b^2
 \end{aligned}$$

□

## 2.4 صفر اور منفی طاقت

پچھلے حصے میں ہم نے ترکیب  $a^m$  کی تعریف بیان کی جس میں ہم  $m$  مرتبہ ضرب دیتے ہیں، لیکن اگر  $m$  صفر یا منفی ہو تو یہ تعریف اپنے معنی کھودیتی ہے۔ ہم کسی بھی چیز کو  $-3$  یا صفر مرتبہ ضرب نہیں دے سکتے۔ لیکن  $a^m$  کے معنی کو وسعت دے کر دیکھا جائے تو صفر یا منفی طاقت کی صورت میں بھی نہ صرف یہ کہ یہ معنی درست ہے بلکہ مفید بھی ہے۔ اس کے ساتھ اہم بات یہ کہ مثبت طاقت کے تمام قوانین منفی اور صفر طاقتوں کے لیے بھی درست ہیں۔ اس تسلسل پہ غور کریں۔

دائیں سمت پہ اساس ہمیشہ 2 ہے جب کہ طاقت ہر مرتبہ ایک کم ہوتی جا رہی ہے۔ جبکہ بائیں طرف عدد آدھے ہوتے جا رہے ہیں۔ لہذا اس تسلسل کو یوں بڑھایا جا سکتا ہے۔

اور ہم اس طرح لا محدود حد تک جا سکتے ہیں۔ اب ان کا آپس میں موازنہ کریں

یوں لگتا ہے جیسے  $2^m$  کو  $\frac{1}{2^m}$  لکھنا چاہیے، اور صفر کی طاقت کے لیے ایک خصوصی قیت  $1 = 2^0$  رکھنی چاہیے۔ ہم اپنے پہلے مشاہدے کو صفر کے علاوہ تمام اساسوں اور کسی بھی مثبت عدد صحیح  $m$  کے لیے پھیلائیں تو منفی طاقت کے قوانین تک پہنچ سکتے ہیں۔

منفی طاقت کا قانون

ہم یہاں کچھ مثالوں سے ثابت کریں گے کہ مثبت طاقتوں کے لیے بنائے گئے قوانین منفی طاقتوں کے لیے بھی درست ہیں۔ اسی طرح آپ اپنے لیے بہت سی اور مثالیں بھی بنا سکتے ہیں۔

ضرب کا قانون:

طاقت پہ طاقت کا قانون:

جز کا قانون:

مثال 2.5: اگر  $a = 5$  ہے تو کی قیت معلوم کریں۔ یہاں اہم نکتہ یہ ہے کہ طاقت  $-2$  صرف  $a$  کے ساتھ ہے، یعنی  $4$  پہ نہیں ہے۔ لہذا  $4a^{-2}$  کا مطلب ہے  $4 \times \frac{1}{25} = 4a^{-2}$ ، اب جب کہ  $a = 5$  ہے،  $4 \times \frac{1}{25} = 4a^{-2}$  □

مثال 2.6: ان تراکیب کو سادہ کریں

$$(b) 4a^2b \times (i)$$

(i) پہلا طریقہ ہر چیز کو مثبت طاقت میں لے آئیں

دوسرا طریقہ مثبت اور منفی دونوں طاقتوں کے لیے قوانین استعمال کر لیں۔

(ب) زیر نظر مثال میں میکینکس کا ایک استعمال دیکھیے۔ لزوجیت، (M,L,T) کی پیمائش کے لیے ماس، لمبائی اور وقت کی جہتیں ہیں۔ بریکس کو الگ الگ کر کے

منفی طاقتوں کو بہت چھوٹے اعداد لکھنے کے لیے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ یقیناً آپ بہت بڑے اعداد کو معیاری شکل یا سائنسی بیانیے میں لکھنا جانتے ہوں گے، مثلاً روشنی کی رفتار کو 300 000 000 میٹر فی سیکنڈ لکھنے کی بجائے  $3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$  لکھا جاتا ہے۔ بالکل اسی طرح سرخ روشنی کا طول موج جو تقریباً 0.000 000 75 میٹر ہے، کو بھی آسانی سے  $7.5 \times 10^{-7} \text{ m}$  لکھا جاسکتا ہے۔ کمپیوٹر اور سیکولویٹر میں لوگوں کے لیے سائنسی اعتبار سے لکھنے کا امکان موجود ہوتا ہے اور اگر کوئی عدد عام عدد سے زیادہ بڑا یا زیادہ چھوٹا ہو جائے تو وہ اسے معیاری شکل میں بدل دیتا ہے۔ مثلاً یا - علامت (E) ایکسپونینٹ کے لیے استعمال ہوتی ہے جو طاقت ہی کے لیے استعمال ہونے والا دوسرا لفظ ہے □

مثال 2.7: اس ترکیب  $G = \frac{gR^2}{M}$  سے کشش ثقل کے مستقل G کا حساب لگائیں، جبکہ  $g \approx 9.81$ ،  $R \approx 6.37 \times 10^6$  اور  $M \approx 5.97 \times 10^{24}$ ۔  $M$  اور  $R$  زمین کا رداس اور ماس ہے، اور  $g$  کشش ثقل کے سبب پیدا ہونے والا اسراع ہے۔

$$G \approx \frac{9.81 \times (6.37 \times 10^6)^2}{5.97 \times 10^{24}} = \frac{9.81 \times (6.37)^2}{5.97} \times \frac{(10^6)^2}{10^{24}}$$

$$\approx 66.7 \times \frac{10^{12}}{10^{24}} = 6.67 \times 10^1 \times 10^{-12} = 6.67 \times 10^{-11} = 6.67 \times 10^{-11}$$

□

سوال 1: درج ذیل تراکیب کو سادہ کریں

یا $(4x^2y)^2 \times (2xy^3)^3$	و $(x^3y^2)^2$	ا $a^2 \times a^3 \times a^7$
ب $(6ac^3)^2 \div (9a^2c^5)$	ز $5g^5 \times 3g^3$	ب $(b^4)^2$
ج $(3m^4n^2)^3 \times (2mn^2)^2$	ح $12h^{12} \div 4h^4$	ج $c^7 \div c^3$
د $(49r^3s^2)^2 \div (7rs)^3$	ط $(2a^2)^3 \times (3a)^2$	د $d^5 \times d^4$
یہ $(2xy^2z^3)^2 \div (2xy^2z^3)$	ی $(p^2q^3)^2 \times (pq^3)^3$	ه $(e^5)^4$

سوال 2: درج ذیل تراکیب کو سادہ کریں، ہر جواب  $2^n$  کی ہیئت میں لکھیں۔

$$\frac{2^7 \times 2^8}{2^{13}} \text{ ہ۔}$$

$$2^{11} \times (2^5)^3 \text{ ا۔}$$

$$\frac{2^2 \times 2^3}{(2^2)^2} \text{ و۔}$$

$$(2^3)^2 \times (2^2)^3 \text{ ب۔}$$

$$4^2 \div 2^4 \text{ ز۔}$$

$$4^3 \text{ ج۔}$$

$$2 \times 4^4 \div 8^3 \text{ ح۔}$$

$$8^2 \text{ د۔}$$

سوال 3: درج ذیل تراکیب کو صحیح عدد یا کسر کی صورت میں لکھیں

$$6^{-3} \text{ یا۔}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \text{ ج۔}$$

$$10^{-4} \text{ ہ۔}$$

$$2^{-3} \text{ ا۔}$$

$$\left(2\frac{1}{2}\right)^{-1} \text{ ط۔}$$

$$1^{-7} \text{ و۔}$$

$$4^{-2} \text{ ب۔}$$

$$5^{-1} \text{ ج۔}$$

$$\left(1\frac{1}{3}\right)^{-3} \text{ یب۔}$$

$$2^{-7} \text{ ی۔}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \text{ ز۔}$$

$$3^{-2} \text{ د۔}$$

سوال 4:  $x = 2$  کے ساتھ درج ذیل میں سے ہر ایک کی قیمت معلوم کریں

$$(4 \div x)^{-3} \text{ ہ۔}$$

$$\frac{1}{4}x^{-3} \text{ ج۔}$$

$$4x^{-3} \text{ ا۔}$$

$$(x \div 4)^{-3} \text{ و۔}$$

$$\left(\frac{1}{4}x\right)^{-3} \text{ د۔}$$

$$(4x)^{-3} \text{ ب۔}$$

سوال 5:  $y = 5$  کے ساتھ درج ذیل میں سے ہر ایک کی قیمت معلوم کریں

$$\frac{1}{(2y)^{-1}} \text{ ہ۔}$$

$$\left(\frac{1}{2}y\right)^{-1} \text{ ج۔}$$

$$(2y)^{-1} \text{ ا۔}$$

$$\frac{2}{(y^{-1})^{-1}} \text{ و۔}$$

$$\frac{1}{2}y^{-1} \text{ د۔}$$

$$2y^{-1} \text{ ب۔}$$

سوال 6: درج ذیل تراکیب کو ممکنہ سادہ ترین شکل میں لکھیں

$$\begin{array}{lll}
\text{ا. } a^4 \times a^{-3} & \text{ز. } 12g^3 \times (2g^2)^{-2} & \text{ج. } (4m^2)^{-1} \times 8m^3 \\
\text{ب. } \frac{1}{b^{-1}} & \text{ح. } (3h^2)^{-2} & \text{ی. } (3n^{-2})^4 \times (9n)^{-1} \\
\text{ج. } (c^{-2})^3 & \text{ط. } (3i^{-2})^{-2} & \text{یہ. } (2xy^2)^{-1} \times (4xy)^2 \\
\text{د. } d^{-1} \times 2d & \text{ی. } \left(\frac{1}{2}j^{-2}\right)^{-3} & \text{ی. } (5a^3c^{-1})^2 \div (2a^{-1}c^2) \\
\text{ه. } e^{-4} \times e^{-5} & \text{یا. } (2x^3y^{-1})^3 & \text{یز. } (2q^{-2})^{-2} \div \left(\frac{4}{q}\right)^2 \\
\text{و. } \frac{f^{-2}}{f^3} & \text{یب. } (p^2q^4r^3)^{-4} & \text{ج. } (3x^{-2}y)^2 \div (4xy)^{-2}
\end{array}$$

سوال 7: درج ذیل تراکیب کو حل کریں

$$\begin{array}{lll}
\text{ا. } 3^x = \frac{1}{9} & \text{ج. } 2^z \times 2^{z-3} = 32 & \text{ه. } 4^y \times 2^y = 8^{120} \\
\text{ب. } 5^y = 1 & \text{د. } 7^{3x} \div 7^{x-2} = \frac{1}{49} & \text{و. } 3^t \times 9^{t \div 3} = 27^2
\end{array}$$

سوال 8: ایک مکعب کی ہر طرف کی لمبائی  $3 \times 10^{-2}$  میٹر ہے۔ (ا) مکعب کا حجم معلوم کریں (ب) مکعب کا کل سطحی رقبہ معلوم کریں

سوال 9: ایک کھلاڑی  $7.5 \times 10^{-3}$  گھنٹے میں  $2 \times 10^{-1}$  km کلومیٹر کا فاصلہ طے کرتا ہے۔ اس کی اوسط رفتار کلومیٹر فی گھنٹہ معلوم کریں۔

سوال 10: ایک  $L$  لمبائی رکھنے والی تار کا حجم  $V m^3$  یوں بیان کیا گیا ہے۔ جبکہ اس کے عمودی تراش کا رداس  $r$  ہے۔ (ا) 80 میٹر لمبائی اور  $2 \times 10^{-3} m$  عمودی تراش کے رداس کی تار کا حجم معلوم کریں۔

(ب) ایک اور تار جس کی عمودی تراش کا رداس  $5 \times 10^{-3} m^3$  اور حجم  $8 \times 10^{-3} m^3$  ہے، کی لمبائی معلوم کریں۔

(ج) ایک تار جس کی لمبائی 60m اور حجم  $6 \times 10^{-3} m^3$  ہے۔ اس کی عمودی تراش کا رداس معلوم کریں۔

سوال 11: ایک مساوات جو موج کو سمجھتے ہوئے سامنے آتی ہے یہ ہے۔  $y = \frac{\lambda d}{a}$

(ا)  $y$  معلوم کریں، جبکہ  $\lambda = 7 \times 10^{-7}$ ،  $d = 5 \times 10^{-1}$  اور  $a = 8 \times 10^{-4}$  ہے۔

(ب)  $\lambda$  معلوم کریں، جبکہ  $y = 10^{-3}$ ،  $d = 0.6$  اور  $a = 2.7 \times 10^{-4}$  ہے۔

سوال 12: حل کریں

$$\frac{3^{5x+2}}{9^{1-x}} = \frac{27^{4+3x}}{729}$$

## 2.5 کسری طاقتیں

گزشتہ حصے میں آپ دیکھ چکے ہیں کہ طاقت کے قوانین صحیح اعداد  $m$  اور  $n$  کی مثبت اور منفی دونوں طاقتوں کے لیے ٹھیک کام کرتے ہیں۔ لیکن اگر  $m$  اور  $n$  اعداد صحیح ہی نہ ہوں تو کیا ہو گا۔ اگر ہم طاقت پہ طاقت کے قانون میں  $m = \frac{1}{2}$  اور  $n = 2$  مانیں تو ہم اس نتیجے پہ پہنچیں گے

$$(x^{\frac{1}{2}})^2 = x^{\frac{1}{2} \times 2} = x^1 = x$$

$x^{\frac{1}{2}} = y$  سمجھئے سے یہ مساوات  $y^2 = x$  بن جائے گی۔ لہذا  $y = \sqrt{x}$  یا  $y = -\sqrt{x}$  جس سے  $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$  یا  $x^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{x}$ ۔  
 $x^{\frac{1}{2}}$  کو  $x$  کی مثبت جذر ماننے سے ہمیں  $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$  ملے گا۔ اسی طرح اگر ہم  $m = \frac{1}{3}$  اور  $n = 3$  رکھیں تو ہم ظاہر کر سکتے ہیں کہ  $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$  اس سے زیادہ وسیع طریقے سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ  $m = \frac{1}{n}$ ، ہم دیکھیں گے  $x^{\frac{1}{n} \times n} = x^1 = x$  جو ہمیں ایک بڑا نتیجہ دے گا جو کہ

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

توجہ کیجیے کہ  $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$  کی صورت میں لازمی طور پہ  $x \leq 0$  ہو گا، لیکن  $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$  کی صورت میں لازمی طور پہ  $x \leq 0$  کی ضرورت نہیں ہو گی، کیونکہ ہم کسی منفی نمبر کا مکعب جذر تو بہر حال لے سکتے ہیں۔  $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$  کو ذرا سا بڑھا کر دیکھیں تو ہم دیکھ سکتے ہیں کہ  $x^{\frac{2}{3}}$  کی قسم کی تراکیب کو کیسے حل کرنا ہے۔ اس کے دو متبادل ہو سکتے ہیں۔

$$x^{\frac{2}{3}} = x^{2 \times \frac{1}{3}} = (x^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x^2} \text{ اور } x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{3} \times 2} = (\sqrt[3]{x})^2$$

(اگر  $x$  کی قطعی مکعب جذر ہو تو اس کے لیے پہلی شکل بہتر ہے، ورنہ دوسری قسم بہتر ہے) عمومی طور پہ یہی منطق ہمیں کسری طاقتوں کے اصولوں تک لے جاتی ہے۔

جذری طاقت کا قانون

$$x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$$

جذری طاقتوں کو  $x^{1/2}$ ،  $x^{m/n}$  بھی لکھا جاسکتا ہے اور اسی طرح مزید بھی۔

$$\text{مثال 2.8: سادہ کریں۔ (ا) } 9^{\frac{1}{2}}, \text{ (ب) } 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}}, \text{ (ج) } 16^{-\frac{3}{4}}$$

$$\text{حل: (ا) } 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{(ب) } 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = 3^2 = 9$$

$$\text{(ج) پہلا طریقہ } 16^{-\frac{3}{4}} = (2^4)^{-\frac{3}{4}} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

□

$$16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{(\sqrt[4]{16})^3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

طاقت کے معنی حل کرنے کے لیے بہت سے متبادل طریقے بھی موجود ہیں اور آپ کو ان کا بھی تجربہ کرنا چاہیے۔ بہت سے لوگ مثبت طاقت میں سوچنا آسان سمجھتے ہیں لہذا وہ منفی طاقت کو مثبت بنا کر آسانی سے حل کر سکتے ہیں، اگر آپ بھی ایسے ہی ہیں تو آپ پہلا مرحلہ  $16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{3}{4}}}$  یوں لکھ سکتے ہیں، بالکل جیسے ہم نے دوسرے طریقے میں دیکھا۔

$$\text{مثال 2.9: سادہ کریں (i) } (2\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}, \text{ (ب) } 2x^{\frac{1}{2}} \times 3x^{-\frac{5}{2}}, \text{ (ج) } \frac{(2x^2y^2)^{-\frac{1}{2}}}{(2xy^{-2})^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{حل: (i) } (2\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}} = (\frac{9}{4})^{-\frac{1}{4}} = (\frac{4}{9})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{(ب) } 2x^{\frac{1}{2}} \times 3x^{-\frac{5}{2}} = 6x^{\frac{1}{2}-\frac{5}{2}} = 6x^{-2} = \frac{6}{x^2}$$

$$\text{(ج) پہلا طریقہ } (2x^2y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(2x^2y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{(2x^2y^2)^{-\frac{1}{2}}}{(2xy^{-2})^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}y^{-3}} = \frac{1}{2^2x^2y^{-2}} = \frac{y^2}{4x^2}$$

$$\text{دوسرا طریقہ } (2xy^{-2})^{\frac{3}{2}} \text{ سے تقسیم کرنا ایسا ہی ہے جیسا } (2xy^{-2})^{-\frac{3}{2}} \text{ سے ضرب دینا۔}$$

$$\frac{(2x^2y^2)^{-\frac{1}{2}}}{(2xy^{-2})^{\frac{3}{2}}} = (2x^2y^2)^{-\frac{1}{2}}(2xy^{-2})^{-\frac{3}{2}} = (2^{-\frac{1}{2}}x^{-1}y^{-1})(2^{-\frac{3}{2}}x^{-\frac{3}{2}}y^3) = 2^{-2}x^{\frac{5}{2}}y^2$$

جز ج میں ایک نکتہ قابل توجہ ہے اور وہ یہ کہ دونوں طریقوں سے جواب مختلف آ رہا ہے، اور ہم سمجھ سکتے ہیں کہ مساوات کا سادہ ہونا ہر ایک کے مزاج کے مطابق مختلف ہو سکتا ہے۔

□

سوال 1:

کیکولیٹر کی مدد کے بغیر درج ذیل تراکیب کا مساوی لکھیں

باب 2. غیر مناطق جذر اور طاقستیں

ا. $25^{\frac{1}{2}}$	د. $32^{\frac{1}{5}}$	ز. $16^{-\frac{1}{4}}$	ی. $(-27)^{\frac{1}{3}}$
ب. $8^{\frac{1}{3}}$	ھ. $81^{\frac{1}{4}}$	ح. $49^{-\frac{1}{2}}$	یا. $64^{\frac{2}{3}}$
ج. $36^{\frac{1}{2}}$	و. $9^{-\frac{1}{2}}$	ط. $1000^{-\frac{1}{3}}$	یب. $(-125)^{-\frac{4}{3}}$

سوال 2:

کیلکولیٹر کی مدد کے بغیر درج ذیل ترکیب کا مساوی لکھیں

ا. $4^{\frac{1}{2}}$	ج. $(\frac{1}{4})^{-2}$	ھ. $(\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}$	ز. $4^2$
ب. $(\frac{1}{2})^2$	د. $4^{-\frac{1}{2}}$	و. $(\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$	ح. $((\frac{1}{4})^{\frac{1}{4}})^2$

سوال 3:

کیلکولیٹر کی مدد کے بغیر درج ذیل ترکیب کا مساوی لکھیں

ا. $8^{\frac{2}{3}}$	د. $27^{\frac{4}{3}}$	ز. $4^{2\frac{1}{2}}$	ی. $(3\frac{3}{8})^{\frac{2}{3}}$
ب. $4^{\frac{3}{2}}$	ھ. $32^{\frac{2}{5}}$	ح. $10\,000^{-\frac{3}{4}}$	
ج. $9^{-\frac{3}{2}}$	و. $64^{-\frac{5}{6}}$	ط. $(\frac{1}{125})^{-\frac{4}{3}}$	یا. $(2\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}$

سوال 4: درج ذیل مساواتوں کو سادہ بنائیں



$$\begin{array}{ll}
 \text{ا. } a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{5}{3}} & \text{ب. } 3b^{\frac{1}{2}} \times 4b^{-\frac{3}{2}} \\
 \text{ج. } (4m^3n)^{\frac{1}{4}} \times (8mn^3)^{\frac{1}{2}} & \text{د. } (2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}})^6 \times (\frac{1}{2}x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}})^4 \\
 \text{ه. } (24e)^{\frac{1}{3}} \div (3e)^{\frac{1}{3}} & \text{و. } (6c^{\frac{1}{4}}) \times (4c)^{\frac{1}{2}} \\
 \text{ز. } \frac{(5p^2q^4)^{\frac{1}{3}}}{(25pq^2)^{-\frac{1}{3}}} & \text{ح. } (d^2)^{\frac{1}{3}} \div (d^{\frac{1}{3}})^2 \\
 \text{ط. } \frac{(2x^2y^{-1})^{-\frac{1}{4}}}{(8x^{-1}y^2)^{-\frac{1}{2}}} &
 \end{array}$$

سوال 5: درج ذیل مساواتوں کو حل کریں

$$\begin{array}{llll}
 \text{ا. } x^{\frac{1}{2}} = 8 & \text{ب. } x^{\frac{1}{3}} = 3 & \text{ج. } x^{\frac{2}{3}} = 4 & \text{د. } x^{\frac{2}{3}} = 27 \\
 \text{ه. } x^{-\frac{3}{2}} = 8 & \text{و. } x^{-\frac{2}{3}} = 9 & \text{ز. } x^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{x} & \text{ح. } x^{\frac{3}{2}} = x\sqrt{2}
 \end{array}$$

سوال 6:  $L$  میٹر لمبائی کی ایک لنکن کو ایک گردش مکمل کرنے کے لیے  $T$  وقت درکار ہے، جسے یوں لکھا جائے گا۔  $T = 2\pi l^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}$  جبکہ  $g \approx 9.81 \text{ ms}^{-2}$  ایک  $0.9$  میٹر لمبی لنکن کا وقت  $T$  دریافت کریں۔ (ب) ایک ایسی لنکن کی لمبائی معلوم کریں کہ جسے ایک گردش کے لیے تین سیکنڈ کا وقت درکار ہے۔

سوال 7: ایک کرے کے رداس  $rcm$  اور حجم  $Vcm^3$  کے درمیان تعلق  $r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$  بتا ہے۔ ایک ایسے کرے کا رداس معلوم کریں جس کا حجم  $1150cm^3$  ہو۔

سوال 8: درج ذیل مساواتوں کو حل کریں

$$\begin{array}{llll}
 \text{ا. } 4^x = 32 & \text{ب. } 9^y = \frac{1}{27} & \text{ج. } 16^z = 2 & \text{د. } 100^x = 1000 \\
 \text{ه. } 8^y = 16 & \text{و. } 8^z = \frac{1}{128} & \text{ز. } (2t)^3 \times 4^{t-1} = 16 & \text{ح. } \frac{9^y}{27^{2y+1}} = 81
 \end{array}$$

سوال 9: سادہ کریں۔

$$ج. (\sqrt{5} - 2)^2 + (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)$$

$$ا. 5(\sqrt{2} + 1) - \sqrt{2}(4 - 3\sqrt{2})$$

$$د. (2\sqrt{2})^5$$

$$ب. (\sqrt{2})^4 + (\sqrt{3})^4 + (\sqrt{4})^4$$

سوال 10: سادہ کریں۔

$$ج. \sqrt{100000} + \sqrt{1000} + \sqrt{10}$$

$$ا. \sqrt{27} + \sqrt{12} - \sqrt{3}$$

$$د. \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16}$$

$$ب. \sqrt{63} - \sqrt{28}$$

سوال 11: درج ذیل کے نسب نما کو ناطق بنائیں

$$د. \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{15}}$$

$$ج. \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{10}}$$

$$ب. \frac{1}{5\sqrt{5}}$$

$$ا. \frac{9}{2\sqrt{3}}$$

سوال 12: سادہ کریں

$$ج. \frac{1}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2} - 1) + \sqrt{2}(1 - \sqrt{8})$$

$$ا. \frac{4}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{8}}$$

$$د. \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}}$$

$$ب. \frac{10}{\sqrt{5}} + \sqrt{20}$$

سوال 13:  $\frac{5}{\sqrt{7}}$  کو  $k\sqrt{7}$  شکل میں بنا کر دکھائیں، جبکہ  $k$  ایک ناطق عدد ہے۔

سوال 14: اس نتیجے کو درست ثابت کریں  $\sqrt{12} \times \sqrt{75} = 30$

(i) غیر معقول اعداد کو استعمال کرتے ہوئے (ب) کسری طاقتیں استعمال کرتے ہوئے

سوال 15: اس شکل میں زاویہ  $ABC$  اور  $ACD$  قائم زاویے ہیں۔ اگر ہم جانتے ہوں کہ  $AB = CD = 2\sqrt{6}$  اور  $BC = 7cm$  تو ظاہر کریں کہ  $AD$  کی لمبائی  $4\sqrt{6}$  اور  $7\sqrt{2}$  کے درمیان ہے۔

سوال 16: مثلث  $PQR$  میں  $Q$  ایک قائمہ زاویہ ہے۔  $PQ = (6 - 2\sqrt{2})cm$  اور  $QR = (6 + 2\sqrt{2})cm$  (i) مثلث کا رقبہ دریافت کریں (ب) ظاہر کریں کہ  $PR$  کی لمبائی  $2\sqrt{22}cm$  ہے۔

سوال 17: ترکیب  $\sqrt{27} \times \sqrt[6]{\frac{4}{3}} \times \sqrt[3]{36}$  کے ہر جز کو طاقت میں لکھ کر سادہ بنائیں

سوال 18: ایک مثلث  $ABC$  میں،  $AB = 4\sqrt{3}cm$ ،  $BC = 5\sqrt{3}cm$  اور زاویہ  $B$   $60^\circ$  ہے۔ کوسائن قاعدے کی مدد سے  $AC$  کی لمبائی سادہ غیر معقول اعداد میں نکالیں۔

سوال 19: درج ذیل ہمزاد مساواتوں کو حل کریں  $5x - 3y = 41$  اور  $7\sqrt{2}x + (4\sqrt{2})y = 82$

سوال 20: اپنے کیلکولیٹر پہ موجود طاقت بنائیں والا بٹن استعمال کرتے ہوئے 5 معین اعداد تک جواب ڈھونڈیں (i)  $\frac{1}{3.7^5}$  (ب)  $\sqrt[5]{3.7}$

سوال 21: نقاط  $A$  اور  $B$  کے محدد، بالترتیب  $(2, 3)$  اور  $(4, -3)$  ہیں۔  $AB$  کی لمبائی اور اس کے درمیانی نقطے کے محدد معلوم کریں۔

سوال 22: (i) ایک خط  $l$  کی مساوات دریافت کریں، جو نقطہ  $A(2, 3)$  سے ڈھلوان  $\frac{-1}{2}$  کے ساتھ گزر رہی ہو۔ (ب) ظاہر کریں کہ نقطہ  $P$  جس کے محدد  $(2 + 2t, 3 - t)$  ہیں، ہمیشہ  $l$  پر رہے گا، پھلے  $t$  کی قیمت کچھ بھی ہو۔ (ج)  $t$  کی قیمت دریافت کریں، ایسے کہ  $AP$  کی لمبائی 5 رہے۔ (د)  $t$  کی قیمت دریافت کریں جب کہ  $l$   $OP$  کے عمودی ہے۔  $O$  کو نقطہ آغاز مانتے ہوئے  $OL$  عمودی خط کی لمبائی معلوم کریں

سوال 23:  $P$  اور  $Q$  ایک خط کے انقطاع کے نقطے ہیں اور  $x$  اور  $y$  محور بالترتیب یہ ہیں۔

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

$PQ$  کا درمیانی فاصلہ 20 ہے اور اس کی ڈھلوان  $-3$  ہے۔ اس سب کے ساتھ  $a$  اور  $b$  کی قیمت معلوم کریں۔

سوال 24: ایک چوکور کی اطراف ان خطوط پر موجود ہیں  $5 = x + y$ ،  $13 = 2x - y$ ،  $4 = 2x - y$  اور  $-4 = x + y$ ۔ اس کی ایک سمت اور اس کے متوازی سمت کا درمیانی فاصلہ معلوم کریں۔ نیز اس چوکور کا رقبہ بھی دریافت کریں۔

سوال 25: درج ذیل کو عدد کی مدد کے بغیر حل کریں

$$\begin{array}{llll}
 \text{ا.} & + & \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} & \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \\
 \text{ب.} & 32^{-\frac{4}{5}} & & \\
 \text{ج.} & \left(4^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}} & & \\
 \text{د.} & \left(1\frac{7}{9}\right)^{1\frac{1}{2}} & & 
 \end{array}$$

سوال 26: ترکیب  $(9a^4)^{-\frac{1}{2}}$  کو الجبرائی کسرے کی شکل میں لکھ کر سادہ بنائیں

سوال 27:  $y = x^{\frac{1}{3}}$  سمجھتے ہوئے،  $x$  کی قیمت معلوم کریں، جس کے لیے  $x^{\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}} = 1$

سوال 28: مساوات  $4^{2x} \times 8^{x-1} = 32$  کو حل کریں

سوال 29: ترکیب  $\frac{1}{(\sqrt{a})^{\frac{4}{3}}}$  کو  $a^n$  کی شکل میں لکھیں اور  $n$  کی قیمت بتائیں۔

سوال 30: سادہ کریں۔

$$\begin{array}{ll}
 \text{ا.} & (4p^{\frac{1}{4}}q^{-3})^{\frac{1}{2}} \\
 \text{ج.} & (2x^6y^8)^{\frac{1}{4}} \times (8x^{-2})^{\frac{1}{4}} \\
 \text{ب.} & \frac{(5b)^{-1}}{(8b^6)^{\frac{1}{3}}} \\
 \text{د.} & (m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{2}})^2 \times (m^{\frac{1}{6}}n^{\frac{1}{3}})^4 \times (mn)^{-2}
 \end{array}$$

سوال 31: یہ نظر میں رکھتے ہوئے کہ معیاری شکل میں  $3^{236} \approx 4 \times 10^{112}$  اور  $3^{-376} \approx 4 \times 10^{-180}$ ، درج ذیل ترکیب کے لیے معیاری شکل میں اندازے معلوم کریں

$$\begin{array}{llll}
 \text{ا.} & 3^{376} & \text{ب.} & 3^{612} \\
 \text{ج.} & (\sqrt{3})^{236} & \text{د.} & (3^{-376})^{\frac{5}{2}}
 \end{array}$$

سوال 32: ذیل میں دیا گیا جدول تین سیاروں کا سورج سے اوسط فاصلہ اور ایک گردش کے لیے درکار وقت بتا رہا ہے

(i) دکھائیں کہ  $T^{-2} \propto r^3$  تینوں سیاروں کے لیے تقریباً ایک سی قیمت رکھتا ہے۔ (ب) زمین سورج کے گرد ایک چکر مکمل کرنے میں ایک سال لگاتی ہے، زمین کے مدار کا اوسط رداس معلوم کریں

سوال 33: سادہ کریں

(i)  $2^{\frac{3}{2}} + 2^{-\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{3}{2}}$ ، اپنے جواب کو  $k\sqrt{2}$  کی شکل میں لکھیں۔

(ب)  $(\sqrt{3})^3 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^1 + (\sqrt{3})^0 + (\sqrt{3})^{-1} + (\sqrt{3})^{-2} + (\sqrt{3})^{-3}$ ، اپنے جواب کو  $a + b\sqrt{3}$  کی شکل میں لکھیں۔

سوال 34: درج ذیل میں سے ہر ایک کو  $2^n$  کی شکل میں ظاہر کریں

ا.  $2^{70} + 2^{70}$       د.  $2^{100} - 299$

ب.  $2^{-400} + 2^{-400}$       ج.  $2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$

ح.  $8^{0.1} + 8^{0.1} + 8^{0.1} + 8^{0.1} + 8^{0.1} + 8^{0.1} + 8^{0.1} + 8^{0.1}$

سوال 35: مساوات کو حل کریں  $\frac{125^{3x}}{5^{x+4}} = \frac{25^{x-2}}{3125}$

سوال 36: ایک کرے کے سطحی رقبے اور ہجم کے لیے بالترتیب  $S = 4\pi r^2$  اور  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  ہیں۔ جبکہ  $r$  کرے کا رداس ہے۔ درج ذیل کے لیے موزوں ترائیڈ بنائیے۔

(i) سطحی رقبے کو ہجم کے ذریعے لکھیں

(ب) ہجم کو سطحی رقبے کے ذریعے لکھیں

سوال 37:  $mKg$  وزن کے حامل اور  $vms^{-1}$  رفتار سے حرکت کرنے والے ایک جسم کی حرکی توانائی  $K$  کے لیے  $K = \frac{1}{2}mv^2$  ہے۔ اس کلیے کو مد نظر رکھتے ہوئے  $2.5 \times 10^{-2}kg$  وزن رکھنے والی اور  $8 \times 10^2ms^{-1}$  رفتار سے حرکت کرنے والی گولی کی حرکی توانائی معلوم کریں۔



## باب 3

# تفاعل اور خم

اس سبق میں تفاعل کی بات کی گئی ہے اور ان تفاعل سے جلے ترسیمات کا جائزہ لیا گیا ہے۔ اس سبق کو مکمل کر چکنے کے بعد آپ اس قابل ہونے چاہئیں کہ :

• تفاعل کو لکھنے کے طریقوں سے آگاہ ہوں ، اور سعت اور میدان عمل سے آگاہی حاصل کریں۔

•  $x$  کی طاقتوں کے لیے ترسیمات کی شکلوں سے آگاہ ہوں۔

• مساوات  $f(x) = ax^2 + bx + c$  کے ترسیمات کی شکلیں سمجھ سکیں۔

• ایسے تفاعل اور ترسیمات کی مساوات بنانے کے قابل ہو جائیں۔

• یہ سیکھ سکیں کہ اجزاء کے استعمال سے ترسیمات کیسے بنائے جاتے ہیں۔

• دو تفاعل کے مشترک نقاط معلوم کر سکیں۔

اگر آپ کے پاس ایک ترسیم بنانے والا اعداد ہے یا آپ کے کمپیوٹر میں کوئی ایسا پروگرام ہے جس کی مدد سے آپ ترسیم بنا سکیں تو آپ ذاتی طور پر تقابل کر سکتے ہیں اپنے پیاس بننے والے ترسیمات کا کتاب میں بنائے گئے ترسیمات سے۔

### 3.1 ایک تفاعل کی تعریف

آپ کلیوں سے پہلے ہی آگاہ ہیں جو کہ حساب کتاب کو بہت کم کر دیتے ہیں اور جن کو اکثر استعمال کرنا پڑتا ہے۔ مثال کے طور پر:

ایک دائرہ جس کا رداس  $x$  ہوگا اس کا حدود اربعہ  $\pi x^2$  مربع میٹر ہوگا۔  
ایک مکعب جس کی ایک طرف کی لمبائی  $x$  میٹر ہے، اس کا حدود اربعہ  $x^3$  مکعب میٹر ہوگا۔  
اگر ہم  $x$  کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے سفر کر رہے ہوں گے تو،  $k$  کلومیٹر فاصلے طے کرنے کے لیے،  $\frac{k}{x}$  گھنٹے کا وقت درکار ہوگا۔

اکثر آپ نے ان کلیوں میں  $x$  کے بجائے دیگر حروف بھی دیکھے ہوں گے جیسے کہ رداس کے لیے  $r$ ، رفتار کے لیے  $s$  لیکن اس سبق میں ہم ہمیشہ  $x$  ہی استعمال کریں گے ان کلیوں میں۔ اور جو مقدار آپ کو معلوم کرنا ہوگی اس کے لیے ہم  $y$  استعمال کریں گے۔ ذرا غور کریں کہ ان کلیوں میں بعض اوقات دیگر حروف یا علامات بھی ہوتی ہیں، انہیں ہم مستقل اعداد کہتے ہیں، یہ یا تو  $\pi$  کی طرح کا کوئی عدد ہو سکتی ہیں جو کہ غیر ناطق ہوں اور آپ انکی پوری عددی قیمت نہیں لکھ سکتے، لیکن ان کی قیمت ایک مستقل ہے جسے بدلا نہیں جاسکتا۔ یا تو کوئی ایسی مقدار ہو سکتی ہے جسے آپ خود بیان کریں گے جیسے کہ فاصلہ  $k$ ، جس کی قیمت آپ نے خود سے طے کرنی ہے کہ آپ نے کتنا فاصلہ طے کیا۔

ریاضیاتی بیانیے جیسا کہ  $\pi x^2$ ،  $x^3$  اور  $\frac{k}{x}$  انہیں ہم  $x$  کے تفاعل کہہ سکتے ہیں۔  $x$  کی ایک قیمت، جو بھی آپ چاہیں، کے لیے آپ کو  $y$  کی ایک قیمت ملے گی۔

عموماً تفاعل لکھنے کے طریقوں پر زیادہ توجہ دی جاتی ہے، بجائے چند مخصوص تفاعل کی مثال دینے کے، تفاعل کے لیے جو علاقے استعمال کی جاتی ہے وہ ہے  $f(x)$ ، جسے یوں پڑھا جائے گا (ایف آف ایکس یا بعض اوقات صرف ایف ایکس کہنا بھی کافی ہوگا)۔ ایف  $f$  تفاعل کے لیے استعمال ہوتا ہے جبکہ  $x$  وہ مقدار ہے جس کے لیے تفاعل کا استعمال کرنا ہے۔

اگر آپ  $x$  کی کسی قیمت کے لیے تفاعل کی کسی قیمت کی طرف اشارہ کرنا چاہتے ہیں، کہہ لیں کہ  $X = 2$  کے لیے تفاعل کی قیمت کیا ہوگی تو آپ اسے  $f(2)$  ایسے لکھیں گے۔ اور اگر آپ کا تفاعل  $F(X) = X^3$  ہے تو آپ کہہ سکتے ہیں کہ  $f(2) = 2^3 = 8$  اگر کسی مثال میں ایک سے زیادہ تفاعل استعمال ہو رہے ہوں تو آپ ان تمام تفاعل کے لیے مختلف حروف استعمال کر سکتے ہیں۔ جیسا کہ  $f(x)$  اور  $g(x)$ ۔

یہ لازمی نہیں کہ ہمیشہ ایک الجبرائی کلیہ ہی تفاعل کو بیان کرے، بعض اوقات ایک جملہ، ایک عملی خاکہ یا ایک کمپیوٹر کا پروگرام ایک تفاعل کو زیادہ بہتر طور پر کر سکتا ہے۔ آپ تفاعل کو کیسے بھی بیان کریں بس اس بات کا خیال رکھیں کہ  $x$  کی ایک قیمت کے لیے  $y$  کی ایک ہی قیمت اور وہ بھی نایاب قیمت آئے۔

### 3.2 ترسیم، عملی میدان اور سعت

آپ جانتے ہیں کہ ترسیم کیسے بنائے جاتے ہیں۔ آپ کارتیسی نظام محدد کے لیے محدود چنتے ہیں۔ اور پھر افقی اور عمودی محوروں کے لیے بیانیے بناتے ہیں۔

یہ محور پرچے یا کاغذ کو چار حصوں میں تقسیم کر دیتے ہیں، جیسا کہ شکل ?? میں دکھایا گیا ہے۔ پہلے خانے میں  $x$  اور  $y$  دونوں مثبت ہیں، دوسرے خانے میں  $x$  منفی اور  $y$  مثبت ہے، تیسرے خانے میں  $x$  اور  $y$  دونوں منفی ہیں جبکہ چوتھے خانے میں  $x$  مثبت اور  $y$  منفی ہے۔



مثال 3.1: کس خانے میں  $xy > 0$ ؟

اگر دو اعداد کا ضرب مثبت ہے تو اسکا مطلب یہ ہوا کہ یا تو دونوں اعداد مثبت ہیں یا دونوں منفی ہیں، لہذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ  $x > 0$  اور  $y > 0$  یا  $x < 0$  اور  $y < 0$ ، لہذا ہم دو ثوق سے کہہ سکتے ہیں کہ نقطہ  $(x, y)$  یا تو پہلے خانے میں ہے یا تیسرے خانے میں۔ □

اکثر  $y$  - محور کو عمودی محور کہہ دیا جاتا ہے اور اسی طرح  $x$  - محور کو افقی محور کہہ دیا جاتا ہے۔ لیکن اگر آپ ترسیم ایک افقی سطح جیسا کہ ایک میز یا ایک کاغذ پر بنا رہے ہیں تو اوپر بتایا گیا بیان سو فیصد درست نہیں ہوگا۔

ایک تفاعل  $f(x)$  کی ترسیم بنانے میں ان تمام نقطوں کو استعمال کیا جاتا ہے جنکے محدود  $(x, y)$ ، ہماری مساوات  $y = f(x)$  کو درست ثابت کریں۔ جب آپ ہاتھ سے ترسیم بنا رہے ہوتے ہیں تو آپ  $x$  کی قیمتیں چنتے ہیں اور انکے لیے  $y = f(x)$  کو حل کرتے ہیں۔ اور پھر آپ ان نقطوں پر نشان لگا دیتے ہیں جن کے محدود  $(x, y)$  ہونگے اور ان نقطوں کو جوڑنے سے آپ کا ترسیم بن جائے گا۔ اگر آپ نے یہ صحیح سے کیا ہے تو اس ترسیم پر موجود دوسرے نقطوں کے محدود بھی اس مساوات کو درست ثابت کریں گے جس کے لیے آپ نے ترسیم بنایا ہے۔ کمپیوٹر اور ترسیمی اعداد بھی اسی طرح سے ہی ترسیم بناتے ہیں لیکن وہ زیادہ نقطوں کی مدد سے کم وقت میں ترسیم بنانے کے قابل ہوتے ہیں۔

چند مساوات جیسے کہ  $y = mx + c$  اور  $y = x^2$  کے ترسیمات پوری طرح سے نہیں بنائے جاسکتے، آپ پیمانہ جتنا بھی چھوٹا کر لیں اور کاغذ جتنا بھی بڑا کر لیں ترسیم کناروں سے باہر نکلے گا۔ اور ایسا اس لیے ہو رہا ہے کہ ایسے ترسیمات میں  $x$  کوئی بھی حقیقی عدد ہو سکتا ہے جتنا برا آپ سوچ سکیں دونوں مثبت اور منفی محوروں میں تو ایسے ترسیم کو کاغذ میں مقید کر پانا بہت مشکل ہے، بلکہ ناممکن ہے۔ اب ایسے ترسیمات بنانے ہوں تو آپکی مہارت کا سوال ہے کیونکہ آپ نے  $x$  کی وہ قیمتیں چننی ہیں کہ ترسیم کے سارے نمایاں حدود خال واضح ہو جائیں۔

آپ کا چند ایسے تفاعل سے بھی پلا پڑا ہوگا جو کہ تمام حقیقی اعداد پر معین نہیں ہیں۔ پچال کے طور پر  $\frac{1}{x}$ ، جسکا کوئی مطلب نہیں ہے جب  $x$  صفر ہوگا، اسی طرح سے  $\sqrt{x}$  جسکا کوئی مطلب نہیں ہے جب  $x$  منفی ہوگا۔ ہم ایک اور مثال دیکھیں گے اور اس مثال میں  $x$  کی قیمت پر پابندی بھی لگائی گئی ہے۔

مثال 3.2: مساوات  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$  کا مکمل ترسیم بنائیں۔

آپ اس تفاعل کی جوابی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں بشرطیکہ  $x$  کی قیمت  $-2$  اور  $2$  کے درمیان ہو۔ اگر  $x > 2$  یا  $x < -2$  تو تفاعل  $x^2 - 4$  کی ایک منفی قیمت آئے گی اور منفی قیمت کا جذر نہیں لیا جاسکتا۔

تفاعل  $y = f(x)$  کبھی بھی منفی نہیں ہو سکتا (جزر ہمیشہ مثبت ہوتے ہیں یا صفر ہوتے ہیں) اور یہ  $2$  سے بڑا بھی نہیں ہو سکتا۔ لہذا تفاعل  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$  کا ترسیم، جیسا کہ شکل ?? میں دکھایا گیا ہے، افقی محور پر  $2$  اور  $-2$  کے درمیان ہوگا جبکہ عمودی محور میں اسکی بلندی صفر سے لے کر  $2$  تک ہوگی۔ □

اگر آپ ایسا تفاعل بھی استعمال کر رہے ہوں جو کہ تمام حقیقی  $x$  کے لیے معین ہو، آپ اس میں صرف اسی وقت دلچسپی لیں گے جب  $x$  پر کسی قیمت کی پابندی لگی ہوئی ہو۔ مثال کے طور پر ایک کعب کے حجم کا کلیہ  $V = x^3$  ہے، اگرچہ آپ  $x$  کی قیمت کسی بھی حقیقی عدد کے لیے معلوم کر سکتے ہیں لیکن ایسا آپ صرف  $x$  کی مثبت قیمتوں کے لیے کرتے ہیں۔

اب ہم ایک ایسی مثال حل کرتے ہیں جس میں  $x$  کو ایک متناہی فاصلے کے لیے پابند کیا گیا ہے۔

مثال 3.3: ایک تار جسکی لمبائی 4 میٹر ہے اسے دو حصوں میں کاٹا گیا ہے، اور ہر حصے کو موڑ کر ایک مربع بنایا گیا ہے، اس تار کو کس طرح سے کاٹا جائے کہ دونوں مربع بیوقوف،

ا. کم سے کم حدود اربعہ رکھتے ہوں

ب. زیادہ سے زیادہ حدود اربعہ رکھتے ہوں

فرض کریں دونوں ٹکڑوں کی لمبائی  $x$  میٹر اور  $(4 - x)$  میٹر ہے۔ اگر لمبائیاں یہ فرض کر لی جائیں تو دونوں مربعوں کا حدود اربعہ، جیسا کہ شکل ?? میں دکھایا گیا ہے،  $\left(\frac{1}{4}x\right)^2$  اور  $\left(\frac{1}{4}(4 - x)\right)^2$  ہوگا۔ لہذا کل حدود اربعہ جسے  $y$  سے ظاہر کیا جائے گا ہوگا:

$$y = \frac{1}{16}(x^2 + (16 - 8x + x^2)) = \frac{1}{8}(x^2 - 4x + 8)$$

غور کریں کہ کیونکہ  $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ ، ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ  $y = \frac{1}{8}((x - 2)^2 + 4)$ ۔ آپ اس ریاضاتی بیانیے کی قیمت کسی بھی  $x$  کے لیے معلوم کر سکتے ہیں، لیکن اگر مسئلہ کو سمجھیں تو ہمیں صرف  $0 < x < 4$  کے درمیان کی کسی قیمت کے لیے بیانیے کو حل کرنا ہے۔ شکل ?? میں اسی کا ایک ترسیم بنایا گیا ہے، کیونکہ  $(x - 2)^2 \geq 0$ ، حدود اربعہ کم سے کم ہے جب  $x = 2$  ہے اور اس نقطے پر حدود اربعہ 0.5 مربع میٹر ہے۔

ترسیم دیکھنے سے ایسا معلوم ہوتا ہے کہ زیادہ سے زیادہ حدود اربعہ یعنی 1 مربع میٹر اس وقت ملے گا جب  $x = 0$  یا  $x = 4$  ہو، لیکن ہم ان قیمتوں کو اس لیے اہمیت نہیں دے رہے کہ سوال میں بتایا گیا تھا تار کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کرنے کا اگر ہم  $x$  کی یہ قیمتیں لیں تو تار کئی ہی نہیں۔ اس لیے زیادہ سے زیادہ حدود اربعہ کے مربع بنا ہی نہیں، یا ہم یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ زیادہ سے زیادہ حدود اربعہ کا مربع حدود اربعہ ہم معلوم نہیں کر سکتے۔ □

ایک تفاعل  $x$  کی کسی بھی قیمت کے لیے معین کیوں نہیں ہوگا اسکی دو وجوہات ہو سکتی ہیں۔

ا. تفاعل  $f(x)$  کو بیان کرنے والا بیانیہ صرف ایک یا چند  $x$  کی قیمتوں کے لیے کوئی معنی رکھتا ہوگا یا معین ہوگا۔

ب. جن معنی میں یہ تفاعل لیا جا رہا ہے ان میں صرف چند  $x$  ہی کام کے ہوں گے

تفاعل  $x$  کی جن حقیقی قیمتوں کے لیے معین ہوتا ہے اور کوئی جواب بھی دیتا ہے ان تمام قیمتوں کو تفاعل کا میدان عمل کہا جاتا ہے۔ مثلاً مثال  $0 < x < 4$  میں تفاعل کا میدان عمل  $0 < x < 4$  تھا۔ تفاعل  $\frac{1}{x}$  کا وسیع ترین میدان عمل تمام حقیقی اعداد ہیں سوائے صفر کے، لیکن اگر اس تفاعل کو کسی عام مسئلے میں استعمال کیا جا رہا ہوگا تو آپ اس کا قدرے چھوٹا میدان عمل استعمال کریں گے جیسے کہ تمام مثبت حقیقی اعداد۔

ایک بار آپ نے ایک تفاعل  $f(x)$  کا میدان عمل طے کر لیا تو اب نیا سوال یہ اٹھتا ہے کہ میدان عمل کی قیمتوں کے جواب میں کونسی قیمتیں آئیں گی؟ کسی تفاعل کے میدان عمل کی جوابی قیمتوں کو اس تفاعل کی سعت کہا جاتا ہے۔ مثلاً مثال  $0 \leq y \leq 2$  میں تفاعل کی سعت  $0 \leq y \leq 2$  تھی، اور اسی طرح مثال  $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$  تھی۔ غور کریں کہ قیمت  $y = \frac{1}{2}$  آتی ہے جب  $x = 2$  ہو، لیکن قیمت  $y = 1$  نہیں حاصل کی جاسکتی اگر  $0 < x < 4$ ۔ تفاعل  $f(x) = \frac{1}{x}$  جس کا میدان عمل تمام حقیقی اعداد ہیں سوائے صفر کے تو اسکی سعت بھی تمام حقیقی اعداد ہیں سوائے صفر کے۔

سوال 1: ہمیں بتایا گیا ہے کہ تفاعل  $f(x) = 2x + 5$  ہے، درج ذیل کی قیمتیں معلوم کریں،

ا.  $f(3)$  ج.  $f(-4)$

ب.  $f(0)$  د.  $f(-2\frac{1}{2})$

سوال 2: ہمیں بتایا گیا ہے کہ تفاعل  $f(x) = 3x^2 + 2$  ہے، درج ذیل کی قیمتیں معلوم کریں،

ا.  $f(4)$  ج.  $f(\pm 3)$

ب.  $f(\pm 1)$  د.  $f(3)$

سوال 3: ہمیں بتایا گیا ہے کہ تفاعل  $f(x) = x^2 + 4x + 3$  ہے، درج ذیل کی قیمتیں معلوم کریں،

ا.  $f(2)$  ج.  $f(\pm 1)$

ب.  $f(\frac{1}{2})$  د.  $f(\pm 3)$

سوال 4: ہمیں بتایا گیا ہے کہ  $g(x) = x^3$  اور  $h(x) = 4x + 1$  ہے۔ درج ذیل معلوم کریں۔

ا.  $g(2) + h(2)$  ج.  $g(5) = h(31)$

ب.  $3g(-1) - 4h(-1)$  د.  $h(g(2))$

سوال 5: ہمیں بتایا گیا ہے کہ  $f(x) = x^n$  اور  $f(3) = 81$ ،  $n$  کی قیمت معلوم کریں۔

سوال 6: ہمیں بتایا گیا ہے کہ  $f(x) = ax + b$  اور  $f(2) = 7$  اور  $f(3) = 12$ ،  $a$  اور  $b$  کی قیمت معلوم کریں۔

سوال 7: درج ذیل تفاعل کا وسیع ترین میدان عمل بیان کریں۔

ا.  $\sqrt{x}$       د.  $\sqrt{4-x}$       ز.  $\sqrt{x^2 - 7x + 12}$       ی.  $\frac{1}{\sqrt{x-2}}$

ب.  $\sqrt{-x}$       ہ.  $\sqrt{x(x-4)}$       ج.  $\sqrt{x^3 - 8}$       یا.  $\frac{1}{1+\sqrt{x}}$

ج.  $\sqrt{x-4}$       و.  $\sqrt{2x(x-4)}$       ط.  $\frac{1}{x-2}$       یب.  $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$

سوال 8: درج ذیل تفاعل کا میدان عمل تمام حقیقی اعداد ہیں، انکی سعت معلوم کریں۔

ا.  $f(x) = 2x + 7$       ج.  $f(x) = 3x - 1$       ہ.  $f(x) = (x + 2)^2 - 1$

ب.  $f(x) = -5x$       د.  $f(x) = x^2 - 1$       و.  $f(x) = (x - 1)^2 + 2$

سوال 9: درج ذیل تمام تفاعل کی سعت معلوم کریں، تمام تفاعل  $x$  کی تمام حقیقی قیمتوں کے لیے معین ہیں۔

ا.  $f(x) = x^2 + 4$       د.  $f(x) = -(1 - x)^2 + 7$

ب.  $f(x) = 2(x^2 + 5)$       ہ.  $f(x) = 3(x + 5)^2 + 2$

ج.  $f(x) = (x - 1)^2 + 6$       و.  $f(x) = 2(x + 2)^4 - 1$

سوال 10: دیے گئے تمام تفاعل بتائے گئے عملی میدان کے لیے معین ہیں، ان تمام تفاعل کی سعت معلوم کریں۔

ا.  $f(x) = 2x$  اور  $0 \leq x \leq 8$       ج.  $f(x) = x^2$  اور  $-1 \leq x \leq 4$

ب.  $f(x) = 3 - 2x$  اور  $-2 \leq x \leq 2$       د.  $f(x) = x^2$  اور  $-5 \leq x \leq -2$

سوال 11: درج ذیل تمام تفاعل کی سعت معلوم کریں، تمام تفاعل  $x$  کے عملی میدان کی بڑی سے بڑی قیمتوں کے لیے معین ہیں۔

$$\begin{array}{llll}
 \text{ا. } f(x) = x^8 & \text{ب. } f(x) = x^{11} & \text{ج. } f(x) = \frac{1}{x^3} & \text{د. } f(x) = \frac{1}{x^4} \\
 \text{ه. } f(x) = (x)^4 + 5 & \text{و. } f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} & \text{ز. } f(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}} & \text{ح. } f(x) = \sqrt{4-x}
 \end{array}$$

سوال 12: تار کا ایک ٹکڑا جو کہ 24 سینٹی میٹر لمبا ہے، اور ایک مستطیل کی شکل کا ہے۔ ہمیں بتایا گیا ہے کہ اسکی چوڑائی  $w$  سینٹی میٹر ہے۔ ثابت کریں کہ حدود اربعہ  $A$  مربع سینٹی میٹر تقابل  $A = 36 - (6 - w)^2$  کے برابر ہے۔ اس تقابل کے عملی دائرے کی سب سے بڑی قیمت کا پتہ لگائیں اور ساتھ میں اس کی اسی قیمت پے سعت کا بھی۔

سوال 13: تقابل  $y = x(8 - 2x)(22 - 2x)$  کی ترسیم بنائیں۔ ہمیں بتایا گیا ہے کہ اس مکعب کا حجم  $y$  مکعب سینٹی میٹر ہے اگر اسکی بلندی  $x$  سینٹی میٹر ہو، لمبائی  $(22 - 2x)$  اور چوڑائی  $(8 - 2x)$  ہو تو۔ اوپر بتائے گئے تقابل کے لیے عملی دائرہ بھی بتائیں۔

### 3.3 $x$ کی طاقتوں کے ترسیم

#### 3.3.1 مثبت صحیح عددی طاقتیں

تقابل  $f(x) = x^n$  کی طرح کے ترسیم کو ذہن میں لائیں، جبکہ  $n$  ایک مثبت عدد ہے۔ غور کریں  $(0, 0)$  اور  $(1, 1)$  سے تقابل  $y = x^n$  معین ہوتا ہے  $n$  کی تمام قیمتوں کے لیے، اور اسی وجہ سے تمام ترسیمات میں  $(0, 0)$  اور  $(1, 1)$  نقطے لازمی موجود ہیں۔

پہلے ترسیم کو دیکھیں جب  $x$  مثبت ہے، تب  $x^n$  بھی مثبت ہے اور ترسیم پورے کا پورا پہلے خانے میں آ جاتا ہے۔ شکل ?? میں  $n = 1, 2, 3$  اور 4 کے لیے ترسیمات دکھائے گئے ہیں جن میں  $x$  کی قیمت صفر سے 1 کے بیچ رہ رہی ہے۔

خیال رکھنے کے نقطے یہ ہیں کہ؛

- اگر  $n = 1$  ہو تو یہ ایک مخصوص معاملہ ہے اور جسکی ترسیم  $y = x$  والی بنتی ہے، جو کہ مبدا سے گزرتی ہے اور دونوں محوروں کے ساتھ  $45^\circ$  درجے کو زاویہ بناتی ہے۔

- اگر  $n > 1$  تو افقی محور مبدا پہ ترسیم کا خط مماس بن جائے گا، اور یہ اس لیے کہ جب  $x$  کی قیمت چھوٹی ہو تو  $x^n$  بھی چھوٹا ہوگا، مثال کے طور پر  $(0.1)^4 = 0.0001$ ,  $(0.1)^3 = 0.001$ ,  $(0.1)^2 = 0.01$

- طاقت  $n$  میں ہونے والی ہر بڑھوتری کے ساتھ، ترسیم افقی محور کے قریب ہی رہتا ہے  $x = 0$  اور  $x = 1$  کے درمیان، لیکن پھر  $x = 1$  کے بعد بہت کم ڈھلوان کے ساتھ بلندی کی طرف بڑھتا ہے۔ اور یہ اس لیے ہوتا ہے کہ  $x^{n+1} = x \times x^n$  اسی لیے  $x^{n+1} < x^n$  جب  $0 < x < 1$  اور  $x^{n+1} > x^n$  جب  $x > 1$

اگر  $x$  منفی ہو تو آگے کیا ہوگا یہ منحصر ہوتا ہے کہ آیا  $n$  جفت ہے یا طاق۔ فرض کریں کہ  $x = -a$  جبکہ  $a$  ایک مثبت عدد ہے۔

اگر طاقت  $n$  جفت ہے تو  $f(-a) = (-a)^n = a^n = f(a)$ ، یعنی ترسیم پر  $y$  کی قیمت وہی رہے گی مساوات  $x = -a$  اور  $x = a$  کے لیے۔ یعنی ہمارا ترسیم عمودی محور کے ساتھ تشاکل کی خصوصیت رکھتا ہے۔ یہی بات شکل ?? میں ترسیمات  $y = x^2$  اور  $y = x^4$  کے لیے بیان کی گئی ہے۔ وہ تقابل جن میں  $a$  کی تمام قیمتوں کے لیے یہ خصوصیت ہو کہ  $f(-a) = f(a)$  تو ایسے متا تقابل کو جفت تقابل کہا جائے گا۔

اگر  $n$  تک ہوگا تو،  $-f(a) = (-a)^n = -a^n = -f(a)$  کے لیے  $y$  کی قیمت  $x = a$  کی قیمت کے برابر ہے لیکن ایک منفی کی علامت کے ساتھ۔ غور کریں کہ نقاط جن کے محدد  $(a, a^n)$  اور  $(-a, -a^n)$  ہیں مبدا کے دونوں اطراف تشاکل کی خصوصیت پر عمل پیرا ہوتے ہوئے موجود ہیں۔ اسکا منقلب یہ پوری ترسیم مبدا کے ساتھ تشاکل میں ہے۔ یہ شکل ?? میں  $y = x^3$  اور  $y = x^5$  کے ترسیمات کے لیے واضح کی گئی ہے۔ تقابل جن میں یہ خصوصیت ہو کہ  $f(-a) = -f(a)$  تو ایسے تقابل کو تاک تقابل کہا جاتا ہے۔

### 3.3.2 منفی صحیح عددی طاقتیں

آپ کسی بھی منفی عدد صحیح  $n$  کو  $-m$  لکھ سکتے ہیں جبکہ  $m$  ایک مثبت عدد صحیح ہے۔ اور یوں  $x^n$  بن جائے گا  $x^{-m}$  یا  $\frac{1}{x^m}$ ۔ ایک مرتبی پھر ہم ابد کریں گے ترسیم کے مثبت یعنی سادہ حصے سے، یعنی جب  $x$  مثبت ہوگا، ایسی صورت حال میں  $\frac{1}{x^m}$  بھی مثبت ہوگا اور ترسیم پہلے خانے میں بنے گا۔ بالکل ایسے ہی جیسے کہ  $n$  مثبت ہو نقطہ  $(1, 1)$  ترسیم پر ہی موجود ہوگا لیکن اگر  $x = 0$  ہو تو ایک بڑا فرق ہوگا، کیونکہ  $x^m = 0$  ہو جائے گا اور ایسی صورت حال میں  $\frac{1}{x^m}$  غیر معین ہوگا، لب لباب ساری بات کا یہ ہے کہ ہمارے ترسیم پے کوئی بھی ایسا نقطہ نہیں ہوگا جسکے لیے  $x = 0$  ہو۔ اس پر اگر مزید گہری نگاہ ڈالی جائے،  $x$  کی کوئی قیمت فرض کریں جو کہ صفر کے قریب ہو جیسے کہ  $0.01$ ، تب اگر  $n = -1$  ہو تو  $Y$  کی قیمت  $100 = \frac{1}{0.01} = \frac{1}{0.01^1} = 0.01^{-1}$  ہوگی اور اسی طرح  $n = -2$  کے لیے  $10000 = \frac{1}{0.0001} = \frac{1}{0.01^2} = 0.01^{-2}$  اگر آپ بہت چھوٹا پیمانہ بھی استعمال کریں تو  $x^n$  کا ترسیم صفحے کے اوپری حصے سے بالکل غائب ہو جائے گا جیسے جیسے  $x$  کی قیمت کو صفر کے مزید قریب لایا جائے گا۔

کیا ہوگا اگر  $x$  بہت بڑا ہو؟ مثال کے طور پے فرض کر لیں کہ  $x = 100$  پھر  $n = -1$  کے لیے  $y$  کی قیمت  $0.01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{100^1} = 100^{-1}$  ہوگی۔ اور اگر  $n = -2$  کر دیا جائے تو یہ  $0.0001 = \frac{1}{10000} = \frac{1}{100^2} = 100^{-2}$  ہو جائے گی۔ لہذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ جیسے جیسے  $x$  کی قیمت کم ہوتی ہے ترسیم افقی محور کے قریب تر آتا جاتا ہے۔

اب ترسیم کے اس حصے پر غور کریں جس کے لیے  $x$  منفی ہے۔ ہم نے اوپر دیکھا کہ مثبت  $n$  کے لیے، انحصار اس بات پر ہوتا ہے کہ آیا  $n$  جفت ہے یا طاق۔ اور اگر  $n$  منفی ہو تب بھی یہی بات درست ہے اور اسی وجہ سے درست ہے۔ اگر  $n$  جفت ہے تو  $x^n$  ایک جفت تقابل ہے اور اسکا ترسیم عمودی محور کے ساتھ تشاکل میں ہوگا۔ اور اگر  $n$  طاق ہوگا تو تقابل  $x^n$  بھی طاق ہوگا اور یہ مبدا کے ساتھ تشاکل میں ہوگا۔

شکل ?? میں ترسیم  $y = x^n$  دکھایا گیا ہے اور اس میں  $n = -1$  اور  $n = -2$  کو مد نظر رکھتے ہوئے یہ ترسیم بنائے گئے ہیں۔

## 3.3.3 کسر کی صورت میں طاقتیں

جب  $n$  کسر کی صورت میں ہو، تقابل  $x^n$ ،  $x$  کی منفی قیمتوں کے لیے معین ہو بھی سکتا ہے اور نہیں بھی ہو سکتا۔ مثال کے طور پر  $x^{\frac{1}{3}}$  اور  $x^{-\frac{4}{5}}$  معین ہیں جب  $x < 0$ ، لیکن  $x^{-\frac{1}{2}}$  اور  $x^{-\frac{3}{4}}$  کے ساتھ ایسا معاملہ نہیں ہے۔ ب شک  $x^n$  کسی منفی  $x$  کے لیے معین بھی ہو لیکن زیادہ تر اعداد اور کمپیوٹر انہیں حل نہیں کرتے۔ لہذا ہمارے لیے زیادہ بہتر ہے کہ ہم اس سارے بیانے کو  $x \geq 0$  تک مختصر کر لیں۔ ان تقابل کے ترسیمات بنانے کا سب سے آسان طریقہ ہے کہ ان کا تقابل کیا جائے اعداد صحیح کے ترسیمات سے۔ ذیل میں اسکی دو مثالیں دی گئی ہیں۔

تقابل  $y = x^{\frac{5}{2}}$  کی ترسیم کو کہیں نا کہیں  $y = x^2$  اور  $y = x^3$  کی ترسیم کے درمیان میں موجود ہونا چاہیے۔

تقابل  $y = x^{-\frac{1}{2}}$  کی ترسیم غیر معین ہو جاتی ہے جب  $x = 0$  ہو تو۔ اسکی ترسیم تقابل  $y = x^{-1}$  کی ترسیم سے ملتی جلتی ہے لیکن یہ اس سے نیچے بنتی ہے جب  $x < 1$  اور اوپر بنتی ہے جب  $x > 1$

اگر آپ کے پاس ترسیم بنانے والا اعداد ہے تو آپ خود بھی اس چیز کا تجربہ کر سکتے ہیں کسر کی صورت میں طاقت رکھنے والے تقابل کی ترسیم بنا کر، اگر آپ ایسا کر لیں تو آپ بھی مندرجہ ذیل نتائج تک پہنچیں گے۔

• تقابل  $x^n$  کے ترسیم میں ابھی بھی نقطہ  $(1, 1)$  موجود ہے۔

• اگر  $n$  مثبت ہے تو ترسیم میں ایک اور نقطہ  $(0, 0)$  بھی لازمی موجود ہوگا

• اگر  $n > 1$  ہے تو افقی محور ترسیم کا خط مماس بن جائے گی، اگر  $0 < n < 1$  تو عمودی محور ترسیم کا خط مماس بن جائے گی۔  
(اسے زیادہ بہتر طور پر دیکھ جانے کے لیے آپ کو ترسیم کے مبداء کے قریبی حصے کو بڑا کر کے دیکھنا ہوگا۔)

ان تمام ترسیمات میں سب سے زیادہ اہمیت کے حامل  $y = x^{\frac{1}{2}}$  اور  $y = \sqrt{x}$  کے ترسیم ہیں۔ اس ترسیم کی شکل کیسی ہوگی / یہ معلوم کرنے کے لیے ذرا سوچیں کہ اگر  $y = x^{\frac{1}{2}}$  تب  $x = y^2$ ، یعنی ترسیم  $y = x^2$  کی ہی بنانی ہے لیکن مصوروں کو آپس میں اولہ بدلی کر کے یعنی افقی محور کو عمودی محور بنا دیں اور عمودی محور کو افقی محور بنا دیں۔ اور یوں ہمارا ترسیم اوپر کی جانب کھلا ہونے کے بجائے دائیں جانب کھلا ہوا ہے۔

لیکن ابھی داستان مکمل نہیں ہوئی، کہ داستان مکمل ہوتے ہوتے ہوگی، اگر  $x = y^2$  تب یا تو  $y = +\sqrt{x}$  یا پھر  $y = -\sqrt{x}$  اور چونکہ آپ ان میں سے پہلے معاملے کے ساتھ ہی خوش ہیں تو آپ کو تقابل  $x = y^2$  کی ترسیم کا ایک حصہ، جو کہ افقی محور کے نیچے کا ہے اسے متنا دینا ہوگا، صرف اوپری حصے کو باقی رہنے دینا ہے جیسا کہ شکل ?? میں دکھایا گیا ہے تقابل  $y = \sqrt{x}$  یا  $y = x^{\frac{1}{2}}$  کا ترسیم۔

## 3.4 ایک عدد کا مقیاس

فرض کریں آپ دو لوگوں کی بلندیوں میں فرق کو ماپنا چاہتے ہیں، عددی معلومات مہیا کی گئی ہوں تو جواب سیدھا سا ہوگا، اگر انکی بلندیاں 90 سینٹی میٹر اور 100 سینٹی میٹر ہیں تو آپکا جواب ہوگا 10 سینٹی میٹر، اور اگر انکی بلندیاں 100 اور 90 سینٹی میٹر ہوتیں تب بھی آپ کا جواب 10 سینٹی میٹر ہی ہوتا۔ لیکن نکلیا ہو اگر انکی بلندیاں  $H$  سینٹی میٹر اور  $h$  سینٹی میٹر ہوں، اسکا جواب اس بات پر منحصر ہوگا کہ کونسی قیمت بڑی ہے اگر  $Hgh$  ہو تو آپکا جواب ہوگا  $(H - h)$  سینٹی میٹر۔ اگر  $hgH$  ہو تو آپکا جواب ہوگا  $(h - H)$ ، اور اگر  $(h = H)$  ہو تو آپکا جواب ہوگا صفر سینٹی میٹر، جو کہ یا تو  $(h - H)$  سینٹی میٹر ہے یا  $(H - h)$  سینٹی میٹر ہے۔

اس طرح کے سوالات جن کے جوابات ہمیشہ مثبت یا منفی ہوتے ہیں مقیاس کی ضرورت کا بڑھا دیتے ہیں۔

$x$  کا مقیاس جیسے یوں  $|x|$  لکھا جاتا ہے اور اسے "ماڈیکس" پڑھا جاتا ہے، اسکی تعریف کچھ یوں ہے۔

$$|x| = x \quad x \geq 0$$

$$|x| = -x \quad x < 0$$

مقیاس کئی علامت استعمال کرتے ہوئے آپ اب بلندی کو  $|H - h|$  لکھ سکتے ہیں جس میں  $hgH$  یا  $hH$  یا  $h = H$  ہو سکتے ہیں۔

ایک اور صورتحال جس میں معیار یا مقیاس کارآمد ہوتا ہے وہ ہے جب کوئی ہندسہ عددی اعتبار میں تو بہت بڑا ہو، لیکن منفی ہو جیسا کہ  $-1000$  یا  $-1000000$ ، ایسے اعداد کو آپ بڑے مقیاس والے منفی اعداد کہہ سکتے ہیں۔

مثال کے طور پر  $x$  کی قیمت جوں جوں بڑھے گی،  $\frac{1}{x}$  کی قیمت گھٹتی جائے گی یہاں تک کہ یہ صفر کے قریب ترین پہنچ جائے گی۔ اور  $x$  کے بڑے مقیاس والی منفی قیمتوں کے لیے بھی یہ بات درست ہے۔ اور اسی لیے آپ کہہ سکتے ہیں کہ جب  $|x|$  بڑا ہوگا تو  $\left|\frac{1}{x}\right|$  صفر کے قریب ترین ہوگا۔ اور اگر عددی مثال دیکھیں تو جب  $|x| > 1000$  تو  $\left|\frac{1}{x}\right| < 0.001$  ہوگا۔ شکل ?? دیکھیں۔

کچھ حساب کتاب کے آلات میں ایک بٹن موجود ہوتا ہے جو کسی بھی عدد کا مقیاس بتاتا ہے۔ اس بٹن پر اکثر  $[ABS]$  درج ہوتا ہے جو کہ مقیاس قیمت کا مآخذ ہے۔

اگر آپ کے پاس ترسیم بنانے والا اعداد ہے تو آپ سوالات ??، سوال ??، سوال ?? کی ترسیم بھی بنا کر دیکھیں۔

سوال 1: درج ذیل مساوات کی ترسیم بنائیں۔

ج.  $y = x^{10}$

ا.  $y = x^5$

د.  $y = x^{15}$

ب.  $y = x^6$



سوال 2: تین ترسیم جنکی مساوات بالترتیب  $(r) y = x^{-4}$   $(q) y = x^{-3}$   $(p) y = x^{-2}$  ہیں۔ ایک کثیر  $A$  جسکی مساوات  $x = k$  ہے، ان تینوں ترسیموں کو نقاط  $P$ ،  $Q$  اور  $R$  پر آپس میں ملائی ہے۔ ان تینوں نقاط  $P$ ،  $Q$  اور  $R$  کو بالترتیب (نیچے سے اوپر) لکھیں جبکہ  $k$  درج ذیل قیمتیں لے گا۔

ا.  $\frac{-1}{2}$  ج.

ب.  $\frac{1}{2}$  د.  $-2$

سوال 3:  $x$  کی کن قیمتوں کے لیے درج ذیل عدم مساوات صحیح ثابت ہوں گی؟ اپنے جوابات کی وضاحت کے لیے ترسیم بھی بنائیں۔

ا.  $0 < x^{-3} < 0.001$  ج.  $x^{-4} \geq 100$

ب.  $x^{-2} < 0.0004$  د.  $8x^{-4} < 0.00005$

سوال 4: درج ذیل مساوات کی ترسیم بنائیں، اس شرط کے ساتھ کہ  $x > 0$ ۔

ا.  $y = x^{\frac{3}{2}}$  ج.  $y = -2x^{\frac{1}{2}}$  د.  $y = x^{-\frac{4}{3}}$

ب.  $y = x^{\frac{1}{3}}$  د.  $y = 4x^{-\frac{1}{4}}$  و.  $y = x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{2}{3}}$

سوال 5: درج ذیل مساوات کی ترسیم بنائیں، جہاں ضرورت پڑے  $x$  کی منفی قیمتیں بھی استعمال کریں۔

ا.  $y = x^{\frac{2}{3}}$  ج.  $y = x^{\frac{4}{5}}$  د.  $y = x^{\frac{4}{3}}$

ب.  $y = x^{\frac{3}{4}}$  د.  $y = x^{-\frac{1}{3}}$  و.  $y = x^{-\frac{3}{2}}$

سوال 6: درج ذیل مساوات کے ساتھ ترسیم بنائیں۔

ا.  $y = x^2 + x^{-1}$  ج.  $y = x^2 - x^{-1}$  د.  $y = x^{-2} - x^{-3}$

ب.  $y = x + x^{-2}$  د.  $y = x^{-2} - x^{-1}$  و.  $y = x^{-2} - x^{-4}$

سوال 7: درج ذیل تفاعل میں سے ایک جفت ہے اور دوتاک ہیں، آپ معلوم کریں کہ کونسا تفاعل جفت اور کونسے تاک ہیں؟

$$y = x^7 \quad \text{ا.} \quad y = x^4 + 3x^2 \quad \text{ب.} \quad y = x(x^2 - 1) \quad \text{ج.}$$

سوال 8: درج ذیل کی قیمتیں معلوم کریں۔

$$\begin{array}{lll} \text{ا.} & |-7| & \text{ج.} & |9 - 4| \\ \text{ب.} & \left| -\frac{1}{200} \right| & \text{د.} & |4 - 9| \\ & & \text{و.} & |\pi - 4| \end{array}$$

سوال 9: مقیاس  $|x - x^2|$  کی قیمت معلوم کریں، جبکہ  $x$  کی قیمتیں درج ذیل میں سے ہوں۔

$$\begin{array}{lll} \text{ا.} & 2 & \text{ج.} & 1 \\ \text{ب.} & \frac{1}{2} & \text{د.} & -1 \\ & & \text{و.} & 0 \end{array}$$

سوال 10: آپ کو بتا دیا گیا ہے کہ  $y = \frac{1}{x^2}$ ، آپ  $y$  کے بارے میں کیا کہیں گے اگر:

$$\text{ا.} \quad |x| > 100 \quad \text{ب.} \quad |x| < 0.01$$

سوال 11: آپ کو بتا دیا گیا ہے کہ  $y = \frac{1}{x^3}$ ؛

$$\text{ا.} \quad \text{آپ } y \text{ کے بارے میں کیا کہیں گے اگر ب.} \quad \text{آپ } y \text{ کے بارے میں کیا کہیں گے اگر} \quad |x| < 1000 \quad \text{absy} > 1000$$

سوال 12: ایک فٹبال کا میچ دیکھنے آئے تماشائیوں کی تعداد  $N$  قریب ترین ہزار میں 37000 گنی گئی۔ اس بیان کو مقیاس کی علامت استعمال کرتے ہوئے ایک عدم مساوات کی صورت میں لکھیں۔

سوال 13: دو جڑوں  $m$  اور  $n$  کا فرق کبھی بھی 5 سے زیادہ نہیں ہوا۔ اس بیان کو مقیاس کی علامت استعمال کرتے ہوئے ایک عدم مساوات کی صورت میں لکھیں۔

سوال 14: ایک کلیر کی لمبائی  $x$  سینٹی میٹر ہے، آپ کو بتایا گیا ہے کہ  $|x - 5.23| < 0.005$ ، اس کو ایک بیان کی صورت میں کیسے بتائیں گے۔

3.5 مساوات  $y = ax^2 + bx + c$  کے ترسیم

سبق ?? میں آپ نے سیدھی لکیروں کے ترسیم بنانا سیکھے، اور آپ نے یہ بھی جاننا کہ مساوات  $y = mx + c$  میں مستقل  $m$  اور  $c$  کا کیا مطلب ہے۔

مشق ?? میں آپ کو موقع ملے گا  $y = ax^2 + bx + c$  کے جیسی مساوات کے ترسیمات بنانے کا۔

اگر آپ کے پاس ترسیم بنانے والا اعداد ہے تو اسے بروئے کار لاتے ہوئے تمام سوالات حل کریں ورنہ ایک گروپ کی شکل میں دیگر لوگوں کے ساتھ مل کر سوالات حل کریں۔

اہم نقاط کا تذکرہ مشق حل کرنے کے بعد کریں گے۔

سوال 1: ایک ہی نظام محدود میں درج ذیل مساوات کے ترسیم بنائیں۔

ا.  $y = x^2 - 2x + 5$       ب.  $y = x^2 - 2x + 1$       ج.  $y = x^2 - 2x$

سوال 2: ایک ہی نظام محدود میں درج ذیل مساوات کے ترسیم بنائیں۔

ا.  $y = x^2 + x - 4$       ب.  $y = x^2 + x - 1$       ج.  $y = x^2 + x + 2$

سوال 3: دی گئی شکل میں مساوات  $y = ax^2 - bx$  کی ترسیم بنائی گئی ہے، اسی شکل پر درج ذیل مساوات کی ترسیم بنائیں۔

ا.  $y = ax^2 - bx + 4$       ب.  $y = ax^2 - bx - 6$

سوال 4: مساوات  $y = ax^2 + bx + c$  کے ترسیم میں  $c$  کی قیمت کو تبدیل کرنے سے ترسیم پر کیا فرق پڑے گا؟

سوال 5: درج ذیل مساوات کے ترسیم بنائیں۔

ا.  $y = x^2 - 4x + 1$       ج.  $y = x^2 + 1$   
ب.  $y = x^2 - 2x + 1$       د.  $y = x^2 + 2x + 1$

سوال 6: مساوات  $y = 2x^2 + bx + 4$  کی ترسیم بنائیں لیکن  $b$  کی مختلف قیمتوں کے لیے،  $b$  کی قیمتوں کو بدلنے سے مساوات  $y = ax^2 + bx + c$  پر کیا فرق پڑے گا۔

سوال 7: درج ذیل مساوات کی ترسیم بنائیں۔

$$ج. y = -3x^2 + 1$$

$$ا. y = x^2 + 1$$

$$د. y = -x^2 + 1$$

$$ب. y = 3x^2 + 1$$

سوال 8: درج ذیل مساوات کی ترسیم بنائیں۔

$$ج. y = x^2 + 3x + 1$$

$$ا. y = -4x^2 + 3x + 1$$

$$د. y = 4x^2 + 3x + 1$$

$$ب. y = -x^2 + 3x + 1$$

سوال 9: مساوات  $y = ax^2 + bx + c$  میں  $a$  تبدیل کرنے سے مساوات کی ترسیم پر کیا فرق پڑے گا؟

سوال 10: شکل میں ایک ترسیم دکھائی گئی ہے۔ معلوم کریں کہ درج ذیل مساوات میں سے کون سی مساوات اس ترسیم کی ہے؟

$$ج. y = x^2 + 2x + 5$$

$$ا. y = x^2 - 2x + 5$$

$$د. y = -x^2 + 2x + 5$$

$$ب. y = -x^2 - 2x + 5$$

سوال 11: شکل میں ایک ترسیم دکھائی گئی ہے۔ معلوم کریں کہ درج ذیل مساوات میں سے کون سی مساوات اس ترسیم کی ہے؟

$$ج. y = x^2 + 3x + 4$$

$$ا. y = -x^2 + 3x + 4$$

$$د. y = -x^2 - 3x + 4$$

$$ب. y = x^2 - 3x + 4$$

### 3.6 مساوات $y = ax^2 + bx + c$ سے بنے ترسیموں کی اشکال

مشق حل کرتے ہوئے آپ نے کئی نتائج حاصل کیے ہوں گے، ان تمام نتائج کا مندرجہ ذیل میں بیان کیا گیا ہے۔

تمام ترسیم کی شکل لگ بھگ ایک جیسی تھی اور اس شکل کو قطع مکانی یا پیرابولا کہا جاتا ہے۔ ان تمام قطع مکانی کی محور تشاکل عمودی ہے۔ جس نقطے پر ایک قطع مکانی اپنے محور تشاکل سے ملتا ہے اس نقطے کو اس کہتے ہیں۔ اگر  $c$  کی قیمت بدلی جائے تو ترسیم عمودی محور پر اوپر نیچے حرکت کرتی ہے، جبکہ  $a$  بدلنے سے محور تشاکل افقی محور میں آگے پیچھے حرکت کرتی ہے۔ اگر  $a$  اور  $b$  کے ساتھ موجود ریاضیاتی علامات ایک جیسی ہیں یعنی دونوں کے ساتھ جمع یا منفی کی علامت ہے تو محور تشاکل عمودی محور کے بائیں جانب ہوگی اور اگر  $a$  اور  $b$  کے ساتھ مخالف ریاضیاتی علامات ہوں تو محور تشاکل عمودی محور کے دائیں جانب ہوگی۔

اگر  $a$  مثبت ہے تو اس ترسیم کے سب سے نیچے حصے پر موجود ہوگا اور اگر  $a$  منفی ہے تو اس ترسیم کے سب سے بلند حصے پر موجود ہوگا۔  $|a|$  جتنا بڑا ہوگا ترسیم اتنی ہی لمبوتری ہوگی، یعنی عمودی محور میں لمبی۔

## 3.7 دو ترسیموں کا مشترکہ نقطہ

دو ترسیموں کا مشترکہ نقطہ معلوم کرنے کا بھی وہی طریقہ ہے جو کہ دو سیدھی کلیروں کا مشترکہ نقطہ معلوم کرنے کا طریقہ ہے۔ فرض کریں کہ آپ کے پاس دو ترسیم ہیں، جن کی مساوات  $y = f(x)$  اور  $y = g(x)$  ہیں۔ آپ کو ایک نقطے  $(x, y)$  کی تلاش ہے جو کہ دونوں ترسیموں میں موجود ہو، اسکا مطلب محدود  $(x, y)$  سے دونوں مساوات درست ثابت ہوں گی۔ یہاں سے یہ بات سامنے آتی ہے کہ ہمیں ایک ایسا  $x$  چاہیے جس کے لیے  $f(x) = g(x)$ ۔

مثال 3.4: کلیر  $y = 2$  اور ترسیم  $y = x^2 - 3x + 4$  کا مشترکہ نقطہ معلوم کریں۔ دونوں مساوات کو ایک ساتھ حل کرنے سے ہمیں حاصل ہوا  $x^2 - 3x + 4 = 2$  اور ہمیں اسے یوں بھی لکھ سکتے ہیں:  $x^2 - 3x + 2 = 0$  اس مساوات کو حل کرنے سے اسکے اجزاء ملے جن سے اس مساوات کا حل نکالا جاسکتا ہے جو کہ یہ ہیں:  $x = 1$  اور  $x = 2$  ان قیمتوں کو کسی ایک مساوات میں ڈال کر  $y$  معلوم کرنا یقیناً نہایت آسان ہے، اور یوں ہمیں جو مشترکہ نقاط ملے ہیں وہ  $(1, 2)$  اور  $(2, 2)$  ہیں۔ □

مثال 3.5: کلیر جسکی مساوات  $y = 2x - 1$  ہے، اس کلیر اور ترسیم  $y = x^2$  کا مشترکہ نقطہ معلوم کریں۔ دونوں مساوات کو حل کریں تو  $x^2 = 2x - 1$  ملتا ہے، جو کہ دراصل  $x^2 - 2x + 1 = 0$  ہے اور اسکے اجزاء معلوم کیے جائیں تو  $(x - 1)^2 = 0$  ملے گا جہاں سے  $x = 1$  ملے گا۔  $x$  کی اس قیمت کو دونوں مساوات میں سے ایک میں ڈالیں تو ہمیں  $y$  کی قیمت مل جائے گی، اور یوں ہمیں اس نقطے کے محدود معلوم ہو جائیں گے جو کہ کلیر اور ترسیم میں مشترک ہے، اس سوال میں وہ نقطہ  $(1, 1)$  ہے۔ یہاں مشترکہ نقطہ صرف ایک ہی ہے اور اسکی وجہ یہ ہے کہ یہ کلیر ترسیم کا خط مماس ہے، اور خط مماس ایک ترسیم کو ایک ہی نقطے پر چھوتی ہے، اگر آپ کے پاس ترسیم بنانے والا اعداد ہے تو آپ اس بیان کی تصدیق بھی کر سکتے ہیں۔ □

مثال 3.6: ترسیم  $y = x^2 - 2x - 6$  اور ترسیم  $y = 12 + x - 2x^2$  کا مشترکہ نقطہ معلوم کریں۔

دونوں مساوات کو حل کریں تو  $x^2 - 2x - 6 = 12 + x - 2x^2$  ملتا ہے، جو کہ دراصل  $3x^2 - 3x - 18 = 0$  ہے اسے 3 سے تقسیم کریں تو ہمیں ملے گا  $x^2 - x - 6 = 0$  اور اسکے اجزاء معلوم کیے جائیں تو  $(x + 2)(x - 3) = 0$  ملے گا جہاں سے  $x = -2$  اور  $x = 3$  ملے گا۔

$x$  کی ان قیمتوں کو کسی بھی ایک مساوات میں ڈال کر  $y$  کی دو قیمتیں معلوم کی جاسکتی ہیں، اور اس طرح سے ہمارے پاس دو نقاط کے محدود ہوں گے جو کہ  $(-2, 2)$  اور  $(3, -3)$  ہیں □

سوال 1: درج ذیل سوالات میں بتائی گئی کلیروں اور ترسیمات کے مشترکہ نقاط معلوم کریں

ا.  $x = 3$  اور  $y = x^2 + 4x - 7$  ج.  $y = 8$  اور  $y = x^2 + 2x$

ب.  $y = 3$  اور  $y = x^2 - 5x + 7$  د.  $y + 3 = 0$  اور  $y = 2x^2 + 5x - 6$

سوال 2: درج ذیل سوالات میں بتائی گئی لکیروں اور ترسیمات کے مشترک نقاط معلوم کریں

ا.  $y = x + 1$  اور  $y = x^2 - 3x + 4$  د.  $y = 4x + 1$  اور  $y = 9 + 4x - 2x^2$

ب.  $y = 2x + 3$  اور  $y = x^2 + 3x - 9$

ج.  $y = 3x + 11$  اور  $y = 2x^2 + 2x + 5$  ہ.  $3x + y - 1 = 0$  اور  $y = 6 + 10x - 6x^2$

سوال 3: درج ذیل سوالوں میں یہ ثابت کریں کہ ترسیم اور لکیر ایک ہی نقطے پر ملتی ہیں، اور وہ مشترک نقطہ بھی معلوم کریں۔

ا.  $y = 2x + 2$  اور  $y = x^2 - 2x + 6$

ب.  $y = -2x - 7$  اور  $y = x^2 + 4x + 2$

سوال 4: ترسیم  $y = x^2 - x$  اور ذیل میں دی ہوئی لکیروں کے مشترک نقاط معلوم کریں۔

ا.  $y = x$

ب.  $y = x - 1$

اگر آپ کے پاس ترسیم بنانے والا اعداد ہے تو دیکھیں کہ ترسیم اور لکیر کا باہمی رشتہ یا تعلق کیا ہے؟

سوال 5: ترسیم  $y = x^2 + 5x + 18$  اور ذیل میں دی ہوئی لکیروں کے مشترک نقاط معلوم کریں۔

ا.  $y = -3x + 2$

ب.  $y = -3x + 6$

اگر آپ کے پاس ترسیم بنانے والا اعداد ہے تو دیکھیں کہ ترسیم اور لکیر کا باہمی رشتہ یا تعلق کیا ہے؟

سوال 6: لکیر، جسکی مساوات  $y = x + 5$  ہے، اور ذیل میں دیے گئے دو ترسیمات کا الگ الگ، مشترک نقطہ معلوم کریں

ا.  $y = 2x^2 - 3x - 1$

$$y = 2x^2 - 3x + 7 \text{ ب.}$$

اگر آپ کے پاس ترسیم بنانے والا اعداد ہے تو دیکھیں کہ ترسیم اور لکیر کا باہمی رشتہ یا تعلق کیا ہے؟

سوال 7: درج ذیل مساوات سے بننے والے ترسیمات کے مشترک نقاط معلوم کریں۔

$$y = x^2 + 3x + 11 \text{ اور } y = x^2 + 5x + 1 \text{ ا.}$$

$$y = x^2 + x + 1 \text{ اور } y = x^2 - 3x - 7 \text{ ب.}$$

$$y = 7x^2 - 4x + 1 \text{ اور } y = 7x^2 + 4x + 1 \text{ ج.}$$

سوال 8: درج ذیل مساوات سے بننے والے ترسیمات کے مشترک نقاط معلوم کریں۔

$$y = 1 - \frac{1}{2}x^2 \text{ اور } y = \frac{1}{2}x^2 \text{ ا.}$$

$$y = x^2 + 6x + 2 \text{ اور } y = 2x^2 + 3x + 4 \text{ ب.}$$

$$y = 1 - 3x - x^2 \text{ اور } y = x^2 + 7x + 13 \text{ ج.}$$

$$y = x^2 + 7x + 1 \text{ اور } y = 6x^2 + 2x - 9 \text{ د.}$$

$$y = (x - 5)^2 + 1 \text{ اور } y = (x - 2)(6x + 5) \text{ ه.}$$

$$y = x(x + 2) \text{ اور } y = 2x(x - 3) \text{ و.}$$

سوال 9: ذیل میں دی گئی مساوات کی جوڑیوں کے ترسیمات بنائیں اور ان کے مشترک نقاط بھی معلوم کریں۔

$$y = 8x^2, y = 8x^{-1} \text{ ا.}$$

$$y = x^{-1}, y = 3x^{-2} \text{ ب.}$$

$$y = x, y = 4x^{-3} \text{ ج.}$$

$$y = 8x^{-2}, y = 2x^{-4} \text{ د.}$$

$$y = 9x^{-3}, y = x^{-5} \text{ ه.}$$

$$y = \frac{1}{4}x^4, y = 16x^{-2} \text{ و.}$$

## 3.8 اجزاء کی مدد سے ترسیمات بنانا

کچھ تقابل جیسا کہ  $f(x) = ax^2 + bx + c$  کے ترسیمات ایسے ہوتے ہیں کہ ان کے اجزاء کی مدد سے بھی ترسیم بنایا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر ذیل میں دیے گئے تقابل ہی کو کچھ لیں

$$f(x) = x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5)$$

$$g(x) = 12x - 4x^2 = -4x(x - 3)$$

پہلے جسے میں  $f(1) = 0$  اور  $f(5) = 0$  کے لیے نقاط  $(1, 0)$  اور  $(5, 0)$  پہلے تقابل کی ترسیم پر ہی موجود ہیں۔ یہ شکل ?? میں دکھایا گیا ہے۔ اسی طرح  $g(0) = g(3) = 0$  کے لیے  $(0, 0)$  اور  $(3, 0)$  دوسرے تقابل کی ترسیم پر موجود ہیں۔ یہ شکل ?? میں دکھایا گیا ہے۔ آپ ایسے کسی بھی تقابل کا ترسیم بنا سکتے ہیں جو کچھ اس طرح سے اجزاء میں بٹے،  $-a(x - r)(x - s)$

پہلے یہ ذہن نشین کر لیں کہ یہ افقی محور کو  $(r, 0)$  اور  $(s, 0)$  پر کاٹے گا، مستقل  $a$  کی علامت آپکو یہ بتائے گی کہ آیا ترسیم اوپر کی طرف مڑے گی یا نیچے کی جانب۔

## 3.9 مثال 3.8.1

مندرجہ ذیل ترسیم کا خاکہ بنائیں  $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$  آپ اس مساوات کی تجزیہ اس طرح نکال سکتے ہیں۔  $f(x) = (3x + 1)(x - 1)$  مگر اجزائے ضربی سے حل کرنے کے لیے ہمیں اس طرح سے لکھنا ہوگا۔

$$f(x) = 3(x + \frac{1}{3})(x - 1)$$

اس سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ ترسیم نکات  $(-\frac{1}{3}, 0)$  اور  $(1, 0)$  سے گزرتی ہے۔ مستقل قیمت 3 سے معلوم ہوتا ہے کہ خاکہ کس قدر بڑھا ہوا ہے۔

اس سے ہمیں یقینی معلومات ملتی ہے کہ ہم ترسیم کی شکل کا اندازہ کر سکتے ہیں اور آپ میں خاکہ دیکھ سکتے ہیں۔ اگر ہم غور کریں تو  $f(0) = -1$  جس سے معلوم ہوتا ہے کہ ترسیم  $(0, 1)$  پر y-axis کو جا ملتی ہے۔

اگر غور کریں کہ خاکے پر محور کے خلاف نشانات نہیں ہیں، سوائے یہ کہنے کے کہاں ترسیم ان کو کاٹتی ہے۔ اجزائے ضربی کے طریقے کو استعمال کرتے ہوئے ہم دو سے زیادہ اجزاء کے لیے لکھ سکتے ہیں۔

$$f(x) = a(x - r)(x - s)(x - t)$$

یہ تقابل کسی ایسی ترسیم کی وضاحت کرتا ہے جس کی مساوات، جب ضرب ہو جاتی ہے  $.... - ax^3 = f(x)$  کے ساتھ شروع ہوتی ہے۔ یہ ترسیم نکات  $(s, 0)$ ،  $(r, 0)$  اور  $(t, 0)$  سے گزرتی ہے۔ مستقل  $a$  سے معلوم ہوتا ہے کہ  $x$  کی بڑی قیمتوں کے لیے ترسیم (کار تیزی نزام محدود کے تہد) اول اور چوتھے خانے موجود میں ہوگی۔ غور کریں کہ figure 3.17 میں اجزاء  $x - 1$  کا مربع (کار تیزی نزام محدود کے تہد) x- محور پر پلوگا۔



## 3.10 ترسیم سے مساوات کا اندازہ لگانا

اجراء ضربی کا استعمال کرتے ہوئے ہم ترسیم کی مساوات کا باخوبی اندازہ لگا سکیے ہیں۔  $f(x) = ax^2 + bx + c$  اگر وہ نقطے معلوم ہوں جہاں کو ترسیم افقی محور پر کاٹتی ہے اور کم از کم ایک نقطے کی جگہ معلوم ہو۔

ایک ایسی مساوات بنائیں جو  $y = ax^2 + bx + c$  سے تعلق رکھتی ہو۔ افقی محور کو دو جگہوں پر کاٹتا ہے جو  $(1, 0)$  اور  $(4, 0)$ ۔ جبکہ نکتے کو  $(3, -4)$  پر کاٹتا ہے۔  
چونکہ دکر محور کو  $(1, 0)$  اور  $(4, 0)$  پر کاٹتا ہے۔  
مساوات کچھ اس طرح کی ہوگی۔

$$y = a(x - 1)(x - 4)$$

جیسے کہ نکتہ  $(3, -4)$  دکر میں آتا ہے۔  $-4 = a(3 - 1)(3 - 4)$  جس سے ہمیں ملتا ہے۔  $-4 = -2aa = 2$   
دکر کی مساوات یہ بنتی ہے۔  $y = 2(x - 1)(x - 4) = 2x^2 - 10x + 8$

1. مندرجہ ذیل ترسیمات کا خاکہ بنائیں۔

$$1. (a) y = (x - 2)(x - 4)$$

$$ب. y = (x + 3)(x - 1)$$

$$ج. y = x(x - 2)$$

$$د. y = (x + 5)(x + 1)$$

$$ه. y = x(x + 3)$$

$$و. y = 2(x + 1)(x - 1)$$

2. مندرجہ ذیل ترسیمات کا خاکہ بنائیں۔

$$1. y = 3(x + 1)(x - 5)$$

$$ب. y = -2(x - 3)(x - 1)$$

$$ج. y = -(x + 3)(x + 5)$$

$$د. y = 2(x + \frac{1}{2})(x - 3)$$

$$ه. y = -3(x - 4)^2$$

$$و. y = -5(x - 1)(x + \frac{4}{5})$$

3. پہلے ضرب کریں پھر ترسیمات کا خاکہ بنائیں۔

$$ا. \quad y = x^2 - 2x - 8$$

$$ب. \quad y = x^2 - 2x$$

$$ج. \quad y = x^2 + 6x + 9$$

$$د. \quad y = 2x^2 - 7x + 3$$

$$ه. \quad y = 4x^2 - 1$$

$$و. \quad y = -(x^2 - x - 12)$$

$$ز. \quad y = -x^2 - 4x - 4$$

$$ح. \quad y = -(x^2 - 7x + 12)$$

$$ط. \quad y = 11x - 4x^2 - 6$$

4. مساوات بنائیں جو  $y = x^2 + bx + c$  قطع مکانی کی صورت پر مبنی ہو۔

ا.  $(5, 0)$  کو مہور عمودی اور  $(2, 0)$  جو ہے کاٹنا پر جگہوں دو کو مہور افقی

ب.  $(-10, 0)$  کو مہور عمودی اور  $(-7, 0)$  جو ہے کاٹنا پر جگہوں دو کو مہور افقی

ج.  $(3, 0)$  کو مہور عمودی اور  $(-5, 0)$  جو ہے کاٹنا پر جگہوں دو کو مہور افقی

د.  $(1, -16)$  کو مہور عمودی اور  $(-3, 0)$  جو ہے کاٹنا پر جگہوں دو کو مہور افقی

5. مندرجہ ذیل تریسمات کا خاکہ بنائیں۔

$$ا. \quad y = (x + 3)(x - 2)(x - 3)$$

$$ب. \quad y = x(x - 4)(x - 6)$$

$$ج. \quad y = x^2(x - 4)$$

$$د. \quad y = x^2(x - 4)^2$$

$$y = -x(x+4)(x+6)(x+2) \quad \text{ھ۔}$$

$$y = -3(x+1)(x-3)^2 \quad \text{و۔}$$

6. مساوات بنائیں جو  $y = ax^2 + bx + c$  قطع مکانی کی صورت پر مبنی ہو۔

ا۔ ہے کاتنا پ (0, 15) کو مہور عمودی اور (5, 0) (1, 0) جو ہے کاتنا پ جگہوں دو کو مہور آئنی

ب۔ ہے کاتنا پ (0, -56) کو مہور عمودی اور (7, 0) (-2, 0) جو ہے کاتنا پ جگہوں دو کو مہور آئنی

ج۔ ہے کاتنا پ (0, -6) کو مہور عمودی اور (-2, 0) (-6, 0) جو ہے کاتنا پ جگہوں دو کو مہور آئنی

د۔ ہے کاتنا پ (1, 16) کو مہور عمودی اور (2, 0) (-3, 0) جو ہے کاتنا پ جگہوں دو کو مہور آئنی

ھ۔ ( ہے کاتنا پ (8, 90) کو مہور عمودی اور (7, 0) (-10, 0) جو ہے کاتنا پ جگہوں دو کو مہور آئنی

سوال 1: درج ذیل ترسیمات بنائیں؛

$$y = 2x^2 - 9x + 10 \quad \text{د۔} \quad y = x^2 - 4x - 5 \quad \text{ا۔}$$

$$y = -(x^2 - 4x + 9) \quad \text{ھ۔} \quad y = 4x^2 - 4x + 1 \quad \text{ب۔}$$

$$y = 3x^2 + 9x \quad \text{و۔} \quad y = -x^2 - 3x + 18 \quad \text{ج۔}$$

سوال 2: ذیل میں 9 قطع مکانی کی مساوات ہیں،

$$y = x^2 + 2x + 1 \quad \text{ن۔} \quad y = x(3 - x) \quad \text{د۔} \quad y = (x - 3)(x - 8) \quad \text{ا۔}$$

$$y = x^2 + 8x + 12 \quad \text{ج۔} \quad y = (x + 2)(x - 7) \quad \text{ھ۔} \quad y = 14 + 5x - x^2 \quad \text{ب۔}$$

$$y = x^2 - 25 \quad \text{ط۔} \quad y = -3(x + 3)(x + 7) \quad \text{و۔} \quad y = -x^2 - 3x + 18 \quad \text{ج۔}$$

درج ذیل سوالات کے جواب دیں بغیر ترسیمات بنائے۔

• کونسا قطع مکانی عمودی محور سے  $y$  کی مثبت قیمت پر سے گزرتا ہے؟

- کس قطع مکانی کا راس ترسیم کے بلند ترین مقام پر موجود ہے؟
  - کس قطع مکانی کا راس عمودی محور کے بائیں جانب ہے؟
  - کونسا قطع مکانی مبدا سے گزرتا ہے؟
  - کونسا قطع مکانی افقی محور کو  $x$  کی دو الگ الگ قیمتوں سے نہیں کاٹتا۔
  - کس قطع مکانی کے لیے عمودی محور تشاکلی محور کا کام کر رہی ہے؟
  - کونسے دو قطع مکانی کی ایک ہی تشاکلی محور ہے؟
  - کس قطع مکانی کا راس چوتھے کانے میں ہے؟
- سوال 3: درج ذیل میں دیے گئے ترسیمات کے لیے مناسب مساوات بتائیں۔

سوال 4:

ایک تفاعل کی تعریف کچھ یوں ہے،  $f(x) = 7x - 4$ ا. تفاعل  $f(7)$ ،  $f(\frac{1}{2})$  اور  $f(-5)$  کی قیمت معلوم کریں۔ب.  $x$  کی قیمت معلوم کریں جبکہ  $f(x) = 10$ ج.  $x$  کی قیمت معلوم کریں جبکہ  $f(x) = x$ د.  $x$  کی قیمت معلوم کریں جبکہ  $f(x) = f(37)$ سوال 5: ایک تفاعل  $f(x) = x^2 - 3x + 5$  کے لیے  $x$  کی دو قیمتیں معلوم کریں جن کے لیے  $f(x) = f(4)$ سوال 6: شکل میں مساوات  $y = x^n$  کا ترسیم بنایا گیا ہے، جس میں  $n$  ایک عدد صحیح ہے۔ ہمیں بتایا گیا ہے کہ ترسیم نقاط  $(2, 200)$  اور  $(2000, 2)$  میں سے گزرتا ہے۔  $n$  کی قیمت معلوم کریں۔سوال 7: دو ترسیمات  $f(x) = x^2 - 7x + 5$  اور  $y = 1 + 2x - x^2$  کا مشترک نقطہ معلوم کریں۔سوال 8: خط مستقیم  $y = 2x + 3$  اور ترسیم  $y = 2x^2 + 3x - 7$  کا مشترک نقطہ معلوم کریں۔سوال 9: اس نقطے کے محدود معلوم کریں جس پر خط مستقیم  $3x + y - 2 = 0$  اور ترسیم  $y = (4x - 3)(x - 2)$  آپس میں ملتے ہیں۔سوال 10: ترسیم  $y = (x - 4)(x - 2)$  اور  $y = x(2 - x)$  کے مشترک نقطے کے محدود معلوم کریں اور دونوں ترسیمات کو بنا کے انکا آپسی تعلق بھی بیان کریں۔سوال 11: ہمیں بتایا گیا ہے کہ  $k$  ایک مثبت مستقل عدد ہے، درج ذیل کے ترسیمات بتائیں۔

$$ج. \quad y = x(x - k)(x - 5k)$$

$$ا. \quad y = (x + k)(x - 2k)$$

$$د. \quad y = (x + k)(x - 2k)^2$$

$$ب. \quad y = (x + 4k)(x + 2k)$$

سوال 12: تفاسل  $f$  کی مساوات  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ہے۔ ہمیں بتایا گیا ہے کہ  $f(0) = 6$ ,  $f(-1) = 15$  اور  $f(1) = 1$ ، آپ  $a$ ،  $b$  اور  $c$  کی قیمتیں معلوم کریں۔

سوال 13: خط  $y = 3 - 4x$  اور ترسیم  $y = 4(4x^2 + 5x + 3)$  کا مشترک نقطہ معلوم کریں۔

سوال 14: درج ذیل کی ترسیمات بنائیں

$$ا. \quad y = (x + 4)(x + 2) + (x + 4)(x - 5)$$

$$ب. \quad y = (x + 4)(x + 2) + (x + 4)(5 - x)$$

سوال 15: تفاسل  $f$  کی مساوات  $f(x) = ax + b$  ہے۔ ہمیں بتایا گیا ہے کہ  $f(-2) = 27$  اور  $f(1) = 15$ ، آپ  $x$  کی قیمتیں معلوم کریں جب  $-f(x) = -5$ ۔

سوال 16: ایک ترسیم جسکی مساوات  $y = ax^2 + bx + c$  ہے، افقی محور کے نقطوں  $(-4, 0)$  اور  $(9, 0)$  سے گزرتا ہے، ایک اور نقطہ  $(1, 120)$  سے بھی گزرتا ہے۔ یہ ترسیم عمودی محور کے کس نقطے سے گزرے گا؟

سوال 17: ایک ترسیم جسکی مساوات  $y = ax^2 + bx + c$  ہے، اور یہ نقطوں  $(-1, 22)$ ،  $(1, 8)$ ،  $(3, 10)$ ،  $(-2, p)$  اور  $(q, 17)$  سے گزرتا ہے  $p$  اور  $q$  کی قیمتیں معلوم کریں۔

سوال 18: ترسیمات  $y = 2x^2 + 5x$ ،  $y = x^2 + 4x + 12$  اور  $y = 3x^2 + 4x - 6$  میں ایک نقطہ مشترک ہے، اس نقطے کے محدود معلوم کریں۔

سوال 19: ترسیمات  $y = x^2 - 3x + c$  اور  $y = k - x - x^2$  ایک نقطہ  $(-2, 12)$  پر ملتے ہیں،  $c$  اور  $k$  کی قیمت معلوم کریں اور وہ دوسرا نقطہ بھی معلوم کریں جو ان میں مشترک ہے۔

سوال 20: اگر ترسیمات  $y = x^2 + 3x + 14$ ،  $y = x^2 + 2x + 11$  اور  $y = px^2 + px + p$  میں ایک مشترک نقطہ ہے، آپ  $p$  کی قیمت معلوم کریں۔

سوال 21: ایک سیدھی لکیر  $y = x - 1$  ایک ترسیم  $y = x^2 - 5x - 8$  سے ملتی ہے نقاط  $A$  اور  $B$  پر۔ ایک اور ترسیم  $y = p + qx - 2x^2$  بھی انہی نقاط سے گزرتا ہے۔  $p$  اور  $q$  کی قیمت معلوم کریں۔

سوال 22: لکیر  $y = 10x - 9$  ایک ترسیم  $y = x^2$  سے ملتی ہے۔ دونوں کے مشترک نقطے کے محدود معلوم کریں۔

سوال 23: ذیل میں دیے گئے ترسیمات کے لیے مساوات تجویز کریں۔

سوال 24: ترسیمات  $y = x^2 - 5x - 3$  اور  $y = x^2 - 5x - 3$  میں ایک نقطہ مشترک ہے، اس نقطے کو معلوم کریں اور جزر کی شک میں لکھیں۔

سوال 25: ایک لکیر  $y = 6x + 1$  ایک ترسیم  $y = x^2 + 2x + 3$  سے ملتی ہے اور ان میں دو نقاط مشترک ہیں۔ ثابت کریں کہ ایک نقطے کے محدود  $(2 - \sqrt{2}, 13 - 6\sqrt{2})$  ہیں، جبکہ دوسرے نقطے کے محدود معلوم کریں۔

سوال 26: ثابت کریں کہ ترسیمات  $y = 2x^2 - 7x + 14$  اور  $y = 2 + 5x - x^2$  صرف ایک ہی نقطے پر ملتے ہیں۔ مزید حساب کتاب کیے بغیر اور ترسیمات بنائے بغیر بتائیں کہ درج ذیل ترسیمات میں کتنے مشترک نقاط ہیں؟

ا.  $y = 2 + 5x - x^2$  اور  $y = 2x^2 - 7x + 12$

ب.  $y = 1 + 5x - x^2$  اور  $y = 2x^2 - 7x + 14$

ج.  $y = 22 + 5x - x^2$  اور  $y = 2x^2 - 7x + 34$

سوال 27: آپ  $\frac{|x|}{x}$  کے بارے میں کیا رائے رکھتے ہیں اگر؛

ا.  $x > 0$

ب.  $x < 0$





## باب 4

### دو درجی مساوات

#### 4.1 دو درجی الجبرا

یہ باب  $ax^2 + bx + c$  کی طرز دو درجی الجبرائی عبارت اور ترسیمات سے متعلق ہے، اسکے اختتام پر آپ مندرجہ ذیل معلومات حاصل کر چکے ہوں گے کہ

- (1) دو درجی الجبرائی عبارت کا مربع کیسے لیا جاتا ہے
- (2) دو درجی الجبرائی ترمیم  $y = ax^2 + bx + c$  کے راس اور محور تشاکل کو کیسے معلوم کیا جاتا ہے
- (3) دو درجی مساوات کو کیسے حل کیا جاتا ہے
- (4) ہمزاہ مساوات کا حل جس میں ایک دو درجی مساوات اور دوسری خطی مساوات ہو
- (5) اُل مساوات کی شناخت اور حل جنکی دو درجی مساوات میں تحفیف ترکیب بدل کر کی جاسکتی ہو

4.1- دو درجی عبارات

آپ جانتے ہیں  $y = bx + c$  کہ کا ترسیم خط مستقیم ہے  $y = bx + c$  خطی مساوات کہلاتی ہیں۔ باب سوم میں آپ نے سیکھا کہ اگر اس میں  $ax^2$  جمع کریں تو مساوات  $y = ax^2 + bx + c$  حاصل ہوگی جس کا ترسیم قطع مکانی ہے یہ عبارت  $ax^2 + bx + c$  کہ جسمیں  $a, b, c$  مستقل ہیں۔ دو درجی عبارت کہلاتی ہے۔ مثلاً  $x^2 - 6x + 4, x^2 - 3x + 2, x^2 - 5 - 3x^2$  دو درجی مساوات ہیں آپ کسی بھی دو درجی کیلئے  $ax^2 + bx + c$  کی طرح لکھ سکتے ہیں جسمیں  $a, b, c$  مستقل ہیں۔  $b$  اور  $c$  آپ کی پسند کے کوئی بھی اعداد ہو سکتے ہیں مشمول '0'، لیکس  $a$  قطعاً '0' نہیں ہو سکتا ہے۔ (عبارت دو درجی نہیں رہے گی) اعداد  $a, b, c$  عددی سر کیلاتے ہیں:  $x^2$  کا عددی سر  $a, x$  کا عددی سر  $b$  اور  $c$  عمومی طور پر مستقل جزو کہلاتا ہے  $4 + x - 2x^2$  میں  $x$  اور  $x^2$  کے عددی سر بالترتیب 1 اور 2 ہیں جبکہ جزو 4 ہے۔

## 4.2 2.4-کامل مربعی صورت

آپ ایک دودرجی الجبرائی عبارت،  $x^2 - 6x + 8$  کو بہت سے طریقوں سے لکھ سکتے ہیں جنہیں جزوی صورت  $(x - 4)(x - 2)$  (2) شامل ہے جو کہ افقی محور پر قطع مکانی  $y = x^2 - 6x + 8$  کا مقام انقطاع معلوم کرنے کیلئے استعمال کی جاسکتی ہے۔ جیسا کہ تصویر..... میں دیکھایا گیا ہے۔ جبکہ صورت، قطع مکانی کے راس کی ناندھی کیلئے اور تفاعل  $f(x) = x^2 - 6x + 8$  کی حدود معلوم کرنے کیلئے استعمال کی جاسکتی ہے۔ جیسا کہ مثال میں دی گئی تصویر میں دکھایا گیا ہے۔ یاد رہے کہ آپ ہمیشہ دودرجی عبارت کو جزوی صورت میں نہیں لکھ سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر  $x^2 + 2x + 3$

اگر آپ تریبی مساوات  $y = x^2 - 6x + 8$  کو  $y = (x - 3)^2 - 1$  کی صورت میں لکھیں تو آپ باآسانی مجوز تشاکل اور اس کی نشاندہی کر سکتے ہیں۔ کیونکہ  $(x - 3)^2$  ایک کامل مربع ہے۔ لہذا اسکی قیمت ہمیشہ 0 یا اس سے زیادہ ہوگی اور 0 صرف تب جب  $x = 3$  ہو یعنی  $(x - 3)^2 \geq 0$  ہو اور چونکہ  $y = (x - 3)^2 - 1$  ہے تو  $y \geq 1$  ہوگا۔ جیسے کہ  $(x - 3)^2 = 0$  جب  $x = 3$  ہو لہذا نقطہ راس  $(3, -1)$  ہے اور محور تشاکل خط  $x = 3$  ہے۔  
 $(x - 3)^2 - 1$  کو کامل مربع صورت کہتے ہیں۔ ذیل میں اسکے استعمال کی کچھ مزید مثالیں دی گئی ہیں۔

### 4.3 مثال نمبر 1.2.4

دوررجی ترسیم  $y = 3 - 2(x + 2)^2$  کے راس اور تشاکل کی نشاندہی کریں۔ چونکہ  $2(x + 2)^2 \geq 0$  اور  $2(x + 2)^2 = 0$  جب  $x = -2$ ، ترسیم کا راس وہ نقطہ جسکے محدد  $(-2, 3)$  ہیں،  $y$  کی سب سے بڑی قیمت 3 ہے۔ اور محور تشاکل  $x = -2$  ہے۔

### 4.4 مثال نمبر 2.2.4

مساوات کو حل کریں۔  
 $(x - 2) = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$  چنانچہ  $(x - 2)^2 = \frac{2}{3}$  اور  $3(x - 2)^2 = 2$ ،  $3(x - 2)^2 - 2 = 0$  جیسے  
 $x = 2 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$

### 4.5 4.3 مربع مکمل کرنا

جب دوررجی عبارت کو کامل مربع کی صورت میں لکھنے کی کوشش کرتے ہیں۔ اس نقطہ پر توجہ کریں کہ جب آپ  $x + \frac{1}{2}b$  کا مربع ہیں تو آپ کو  $(x + \frac{1}{2}b)^2 = x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2 = x^2 + bx = (x + \frac{1}{2}) - \frac{1}{4}b^2$  حاصل ہوگا لہذا۔  
 اب c کو طرفیں میں جمع کریں

### 4.6 مثال نمبر 4.3.1

۔  $x^2 + 10x + 32$  کو کامل مربع صورت میں لکھیں۔

$$x^2 + 10x + 32 = (x^2 + 10x) + 32 = (x + 5)^2 - 25 + 32 = (x + 5)^2 + 7$$

۔  $ax^2 + bx = (x + \frac{1}{2}b)^2 - \frac{1}{4}b^2$  کو ذہن نشین کرنے کی کوشش نہ کریں۔ یہ سیکھ لیں کہ آپ x کے عددی سر کا نصف کریں اور لکھیں  $ax^2 + bx = (x + \frac{1}{2}b)^2 - \frac{1}{4}b^2$  پھر اس میں مساوات کے دونوں جانب c جمع کریں۔ اگر آپ نے  $ax^2 +$

$bx + c$  کو کامل مربع صورت میں لکھنا ہو لیکن  $x^2$  کا عددی سر  $a$  کی قیمت 1 نہ ہو تو کے پہلے دو جزو میں سے جزو ضربی  $a$  کو باہر نکال کر لکھ سکتے ہیں:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + xc$$

تب دو درجی عبارت کے مربع کو قوسین میں مکمل کریں۔

## 4.7 مثال نمبر 4.3.2

-  $2x^2 + 10x + 7$  کو کامل مربع صورت میں لکھیں  
جن جزو میں  $x$  موجود ہے ان میں سے جزو ضربی کو ابتداءً باہر نکال لیں

$$2x^2 + 10x + 7 = 2(x^2 + 5x) + 7.$$

توسین میں موجود جزو کو حل کرتے ہوئے۔

$$x^2 + 5x = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4},$$

$$2x^2 + 10x + 7 = 2\left(x^2 + 5x\right) + 7 = 2\left\{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right\} + 7$$

$$= 2\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{2} + 7 = 2\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{11}{2}.$$

اس مقام پر ذہنی طور پر نتیجہ کو پرکھنا قابل قدر ہے۔ اگر  $x^2$  کا عددی سر منفی ہو تو بھی بنیادی طریقہ کار یہی ہے۔ جیسا مثال نمبر 4.3.3 میں دکھایا گیا ہے۔

## 4.8 مثال نمبر 4.3.3

-  $3 - 4x - 2x^2$  کو کامل مربع صورت میں ظاہر کریں۔  
جن جزو میں  $x$  موجود ہے ابتداءً ان میں سے جزو ضربی 2- کو باہر نکال لیں۔ توسین میں موجود جزو کو حل کرتے ہوئے۔

## 4.9 مثال نمبر 4.3.4

-  $12x^2 - 7x - 12$  کو کامل مربع صورت میں ظاہر کریں اور نتائج کو استعمال کرتے ہوئے۔ اس کا جزو ضربی معلوم کریں۔

$$12x^2 - 7x - 12 = 12\left(x^2 - \frac{7}{12}x\right) - 12 = 12\left\{\left(x - \frac{7}{24}\right)^2 - \frac{49}{576}\right\} - 12$$

$$12\left\{\left(x - \frac{7}{24}\right)^2 - \frac{625}{576}\right\} = 12\left\{\left(x - \frac{7}{24}\right)^2 - \left(\frac{25}{24}\right)^2\right\}$$

اب آپ کلیے،  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$  کو استعمال کر سکتے ہیں، توسین میں موجود مساوات کی تجزی کیلئے  $a$  کو بطور  $x = \frac{7}{24}$  اور بطور  $-\frac{25}{24}$  لیں۔

## 4.10 مثال نمبر 4.3.5

-  $x^2 - 8x + 12$  کو کامل مربع کی صورت میں ظاہر کریں۔ اپنے نتائج کو استعمال کرتے ہوئے تعامل  $f(x) = x^2 - 8x + 12$  کی حدود معلوم کریں۔ جو کہ  $x$  کی تمام حقیقی قیمتوں کیلئے تعریف شدہ ہے۔

$$x^2 - 8x + 12 = (x - 4)^2 - 4$$

جیسا کہ  $x$  کی تمام قیمتوں کیلئے  $y > -4$  ہے۔

$$f(x) \leq -4 \text{ لہذا } x^2 - 8x + 12 = (x - 4)^2 - 4 \leq -4$$

-  $y$  کو بطور  $f(x)$  لکھیں تو حد  $y \leq -4$  ہے۔

## 4.11 مشق نمبر 4(A)

- 1- مندرجہ ذیل ترسیلات کا (i) راس اور (ii) خط تساکل کی مساوات معلوم کریں۔
- 2- مندرجہ ذیل دو درجی عبارت کی (i) کم سے کم (اگر مناسب) ہو تو زیادہ سے زیادہ قیمت اور (ii)  $x$  کی وہ قیمت میں کیلئے یہ ہے۔
- 3- مندرجہ ذیل دو درجی عبارت کو حل کریں۔ غیر معقول اعداد جواب کا حصہ رہنے دیں۔
- 4- مندرجہ ذیل کو کامل مربع صورت میں ظاہر کریں۔
- 5- کامل مربع صورت کو استعمال کرتے ہوئے ذیل میں دیئے گئی ہر ایک عبارت کی کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ مناسب قیمت معلوم کریں اور  $x$  کی وہ قیمت میں کیلئے یہ ہے۔

7- ذیل میں دیئے گئے ہر ایک تفاعل،  $x$  کی حقیقی قیمتوں کیلئے تعریف شدہ ہے۔ مربع مکمل کرتے ہوئے  $f(x)$  کو کے طور پر لکھیں اور انکی حدود معلوم کریں۔

8- مربع مکمل کرتے ہوئے (i) اس اور (ii) ذیل میں دیئے گئے ہر ایک قطع مکانی کے خط تفاعل کی مساوات معلوم کریں۔

9- ذیل میں دیئے گئے ہر ایک تفاعل کا دائرہ کار تمام مثبت حقیقی اعداد پر محیط ہے۔ ہر تفاعل کی سعت معلوم کریں۔

## 4.12 4.4 دودرجی مساوات کو حل کرنا

یقیناً آپ  $x^2 - 6x - 8$  صورت کی دودرجی مساوات کے بذریعہ تجزی  $x^2 - 6x + 8$  سے  $(x - 2)(x - 4)$  میں حل سے واقف ہیں اور تب بذریعہ استدلال اگر ----- تب یا تو ----- یا ----- لہذا  $x = 4$  یا  $x = 2$  مساوات  $x^2 - 6x + 8$  کا حل  $x = 4$  یا  $x = 2$  ہے۔ اعداد 2 اور 4 مساوات کے جز ہیں اگر آپ دودرجی عبارت کا جز یا آسانی معلوم کر سکتے ہوں تو یقیناً یہ مساوات کے حل کا تیز تر طریقہ ہے۔ تاہم، ممکن ہے کہ عبارت کے جز نہ ہوں یا انہیں معلوم کرنا مشکل ہو مثلاً  $30x^2 - 11x - 30$  کے جز معلوم کرنے کی کوشش کریں

اگر آپ مساوات کو حل کرنے کیلئے ایک دودرجی عبارت کی تجزی نہیں کر سکتے ہوں تب دودرجی کلیہ استعمال کریں،  $ax^2 + bx + c = 0$  کا حل جہاں  $a \neq 0$  ہے

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

یہ جاننا مفید ہے کہ کیسے کامل مربع صورت،  $ax^2 + bx + c$  سے یہ کلیہ اخذ کیا گیا ہے ابیداء مساوات کے دونوں اطراف کو  $a$  سے تقسیم کریں ( $a$  کی قیمت 0 نہیں ہو سکتی ہے۔ ورنہ یہ دودرجی مساوات نہیں رہے گی)

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

بائیں طرف عبارت کا مربع مکمل کرنے سے آپ کو معلوم ہوگا کہ

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

لہذا آپ مساوات کے حل کو جاری رکھ سکتے ہیں۔

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

یہاں دو ممکنات ہیں۔  $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  یا  $x + \frac{b}{2a} = +\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$

مساوات  $ax^2 + bx + c = 0$  کے دو جز ہوں گے۔  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

یہ ظاہر کرتا ہے کہ اگر  $ax^2 + bx + c = 0$  اور  $a \neq 0$  تو  $x = -b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

#### 4.13 مثال نمبر 4.4.1

مساوات کے حل کیلئے دو درجی کلیہ استعمال کریں (a)  $ax^2 + bx + c$  کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے،  $a = 2$ ،  $b = 3$  اور  $c = 4$  درج کریں تو

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times (-4)}}{2 \times 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 32}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{4}$$

آپ سے بعض اوقات ضرر کو غیر معقول صورت میں رہنے دینا متوقع ہوگا۔ بعض دیگر اوقات آپ سے ضرر  $\frac{3 - \sqrt{41}}{4} = -0.85$  کی صورت میں درکار ہوگا۔ مساوات میں ان اعداد کی ترکیب بدلی کے نتائج ملاحظہ کریں۔

(b)  $a=2$ ،  $b=3$  اور  $c=4$  درج کرنے سے

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times (4)}}{2 \times 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 32}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{-23}}{4}$$

لیکن 23- کا جذر اطلاق ممکن نہیں ہے اسکا مطلب یہ ہے کہ مساوات  $2x^2 - 3x + 4 = 0$  کا کوئی جذر نہیں ہے۔

$y = 2x^2 - 3x + 4$  کی کامل مربعی صورت میں تحویل کی کوشش کریں۔ آپ  $y = 2x^2 - 3x + 4$  کے ترمیم سے کیا اخذ کرتے ہیں؟



تیسری مثال کی تجزی تو ہوتی ہے لیکن جزر معلوم کرنا مشکل ہے۔ تاہم اگر مساوات کے جزر معلوم ہو جائیں تو آپ اخذ کر سکتے ہیں کہ  $(5x - 6)(6x + 5) - 11x + 300 = 4.530x^2 - 4ac$  میز اگر آپ واپس مثال نمبر 1-1-4 پر نظر ڈالیں تو آپ دیکھیں گے کہ جزو  $(a)$  کی مساوات کے جزر میں غیر معقول اعداد بھی وابستہ ہیں جزو  $(b)$  میں جزر نہیں تھا اور جزو  $(c)$  میں جزر کسور تھیں۔ جزو اطراف کی علامت کے نیچے موجود عبارت  $b^2 - 4ac$  کی قیمت کے حساب سے آپ پیش گوئی کر سکتے ہیں کہ کونسا معاملہ پیش آئے گا۔ اور دو درجی کلمے  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  پر اسکے تجزیہ سے

- اگر  $b^2 - 4ac$  ایک کامل مربع ہے تو جزر عدد صحیح پاکسور ہوں گے۔
- اگر  $b^2 - 4ac > 0$  تو مساوات  $ax^2 + bx + c = 0$  کے دو جزر ہوں گے

- اگر  $b^2 - 4ac > 0$  تو کوئی جزو نہیں ہوگا۔
- اگر  $b^2 - 4ac = 0$  ہو تو جزر  $x = \frac{-b}{2a}$  سے حاصل ہوں گے۔ دراصل ایک ہی جزر ہوگا

بعض اوقات کہا جاتا ہے کہ دو موافق جزر یا ایک دہرا جزر ہے کیونکہ جزر کی قیمتیں  $\frac{-b+0}{2a}$  اور  $\frac{-b-0}{2a}$  برابر ہیں۔

$b^2 - 4ac$  دو درجی عبارت  $ax^2 + bx + c$  کا میز کہلاتا ہے کیونکہ اسکی قیمت کی مدد سے مساوات  $ax^2 + bx + c = 0$  کے حل کی اقسام میں تمیز کی جاتی ہے۔

مثال نمبر 1-5-4

مندرجہ ذیل مساوات کے دو درجی اجزاء کے میز کی قیمتوں سے آپ کیا اخذ کر سکتے ہیں؟

(a) جیسے کہ  $a = 2$  — — — میز مثبت ہے لہذا مساوات  $2x^2 - 3x - 4 = 0$  کے دو جزر ہیں مزید جیسا کہ "41" کامل مربع نہیں ہے تو جزر ناطق ہیں۔

(b) میز مثبت ہے لہذا مساوات  $2x^2 - 3x - 5 = 0$  کے دو جزر ہیں اور چونکہ 49 کامل مربع ہے۔ لہذا جزر ناطق ہے۔

(c) کیونکہ میز منفی ہے اسلئے مساوات  $2x^2 - 4x + 5 = 0$  کا کوئی جزر نہ۔

(d) چونکہ میز صفر ہے اسلئے مساوات  $2x^2 - 4x + 2 = 0$  کا صرف ایک (دہرا) جذر ہے۔

مثال نمبر 2-5-4

مساوات  $kx^2 - 2x - 7 = 0$  کے دو حقیقی جذر ہیں، آپ مستقل  $k$  کی قیمت کے بارے

میں کیا اخذ کر سکتے ہیں؟

میز  $k$   $4 + 28k = (-7)(-2) - 4(k) = 14 - 4k$  ہے۔ مساوات کے دو حقیقی جذر ہیں لہذا میز کی قیمت

مثبت ہوگی۔ بس  $4 + 28k > 0$  اور  $k > -\frac{1}{7}$ ۔

مثال نمبر 3-5-4

اگر  $0 = 4ac - b$  ہو تو ہی مساوات کے دہرے جذر ہوتے ہیں۔ یعنی اگر  $0 = 43k - 2^2$  اس سے  $k$  کی قیمت  $1/3$  حاصل ہوگی۔

مشاہدہ کریں کہ کیسے مندرجہ ذیل بالا میں دو درجی مساوات کو حل کرنے ضرورت ہی پیش نہیں آئی۔ آپ کو جو بھی معلوم کرنا ہو کر سکتے ہیں۔

#### 4.14 مشق نمبر 4B

1 مندرجہ ذیل مساوات کو حل کرنے کے لیے دو درجی کلیہ استعمال کریں۔ غیر ناطق جوابات کو غیر معقول صورت میں چھوڑ دیں۔ اگر حل ممکن نہیں تو بھی بتائیے۔ اپنے جوابات کو سوال نمبر 8 میں استعمال کیلئے محفوظ رکھیں۔

2 میز  $0 = 4ac - b^2$  کی قیمت کو استعمال کرتے ہوئے معلوم کریں کہ مندرجہ ذیل مساوات کے جذر کتنے ہیں (ایک ہے، دو ہیں یا کوئی نہیں) جز (i) اور (ii) میں  $p$  اور  $q$  کی قیمتیں مثبت ہیں۔

3 مندرجہ ذیل پر مساوات کا ایک دہرہ جذر ہے۔ ہر معاملے میں  $k$  کی قیمت معلوم کریں۔ اپنے جوابات کو عدد صحیح، مکمل کسور یا غیر معقول صورت میں رہنے دیں۔

4 مندرجہ ذیل مساوات کے جذر کی تعداد می. دی گئی ہے۔ جس قدر ممکن ہو  $k$  کی قیمت اخذ کریں۔

5 میز کی قیمت کو استعمال کرتے ہوئے محور  $x$  پر مندرجہ ذیل ترمیمات کے نقاط انقطاع کی تعداد معلوم کریں۔

6 اگر  $a$  اور  $c$  دونوں مثبت ہوں تو ترمیم  $y = ax^2 + bx + c$  سے متعلق کیا بیان کر سکتے ہیں؟

7 اگر  $a$  منفی اور  $c$  مثبت ہو تو ترمیم  $y = ax^2 + bx + c$  سے آپ کیا بیان کر سکتے ہیں؟

8 آپ کو سوال نمبر 1 کے جوابات ناطق یا غیر معقول صورت میں درکار ہوں گے نہ کہ اعشاریہ۔ سوال نمبر 1 (a)، (b) اور (c) کیلئے جذر کی (i) جمع اور (ii) ضرب کریں۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ اگر صرف ایک ہی (دہرا) جذر ہو تو کیا ہو گا؟

(B) دوسری مساوات  $x^2 + bx + c = 0$  کے جذر  $\alpha$  اور  $\beta$ ،  $x^2 + bx + c$  کے اجزائے ضرب  $x - \alpha$  اور  $x - \beta$  سے ہی اخذ ہوں گے۔ آپ مساوات  $x^2 + bx + c = 0$  کے جذر واضح کریں جنکی جمع "b اور ضرب c ہو۔

c جز B کو طول دیتے ہوئے جز a, b اور c پر مشتمل مساوات  $x^2 + bx + c = 0$  کے جذر کی (i) جمع اور (ii) ضرب کیلئے عبارات معلوم کریں۔

## 4.15 4.6 ہمزاد مساوات

یہ جزو ظاہر کرے گا کہ  $y = x^2$  اور  $5x + 4y = 21$  جیسے ہمزاد مساواتوں کے جوڑوں کو کیسے حل کیا جاتا ہے اس میں جزو 3.7 کے مقدمات کو مزید آگے بڑھایا جائے

### 4.16 مثال نمبر 4.6.1

ہمزاد مساوات  $x + y = 6$ ،  $y = x^2$  کو حل کریں۔ عمومی طور پر ان مساوات کو حل کرنے کا بہترین طریقہ یہ ہے کہ ایک مساوات سے x یا y کیلئے عبارت معلوم کر کے دوسری مساوات میں درج کر دی جائے۔ یہاں y کی قیمت کیلئے پہلی مساوات کو استعمال کرتے ہوئے دوسری مساوات میں ترکیب بدلی نسبتاً آسان ہے جکا ما حاصل  $x^2 + x - 6 = 0$  ہے۔ اسے مرتب کرنے سے  $x^2 + x - 6 = 0$  - لہذا  $(x - 2)(x + 3) = 0$  یعنی  $x = 2$  یا  $x = -3$ ۔ آپ y کی متعلقہ قیمتیں مساوات  $y = x^2$  سے معلوم کر سکتے ہیں۔ جو کہ بالترتیب  $y = 4$  اور  $y = 9$  ہیں۔ لہذا اسکا حل  $x = 2, y = 4$  یا  $x = -3, y = 9$  ہے۔ جانچ لیں کہ قیمتوں کے ہر جوڑے کیلئے  $x + y = 6$  - توجہ رہے کہ جوابات باہم جوڑوں کی شکل میں ہیں۔ جوابات کو  $x = 2, x = -3$ ، یا  $y = 4, y = 9$  کی صورت میں لکھنا غلط ہے کیونکہ جوڑے  $x = 2, y = 9$  اور  $x = -3, y = 4$  اصل مساوات کو ثابت نہیں کرتے ہیں۔ آپ یہ تب ملاحظہ کر سکتے ہیں اگر سوال کی تشریح ترسیمات  $y = x^2$  اور  $x + y = 6$  کے نقاط انقطاع معلوم کرنے کیلئے کریں جیسے کہ شکل 4.2 میں۔

### 4.17 مثال نمبر 4.6.2

ہمزاد مساوات  $x^2 - 2xy + 3y^2 = 6$  اور  $2x - 3y = 3$  کو حل کریں۔ پہلی مساوات x یا y کیلئے عبارت معلوم کرنا مشکل ہے لہذا دوسری مساوات سے ابتدا کریں۔ اگر آپ کسور سے گریز کریں تو غلطی کے امکانات کم ہوں گے۔ دوسری مساوات سے مساوات  $2x = 3 + 3y$  حاصل ہوئی لہذا اسکا مربع لینے سے

$$4x^2 = (3 + 3y)^2 = 9 + 18y + 9y^2$$

اب آپ کے پاس  $4x^2$  اور  $2x$  کیلئے عبارت موجود ہیں لہذا اب آپ پہلی مساوات میں ترکیب بدل سکتے ہیں۔ پہلی مساوات کو 4 س ضرب دینا مددگار ہے گا۔ لہذا یہ  $9y^2 - 6y - 15 = 0$  میں تخفیف ہو جاتا ہے اور اسے 3 سے تقسیم کریں تو  $3y^2 + 2y - 5 = 0$  - اس مساوات کو حل کرنے سے  $(y - 1)(3y + 5) = 0$  حاصل ہوا لہذا  $y = 1$  یا  $y = -5/3$ ۔

دوسری مساوات میں ترکیب بدلنے سے x کی قیمت بالترتیب  $x = 3$  اور  $x = -1$  حاصل ہوگی۔ لہذا حل  $x = 3, y = 1$  اور  $x = -1, y = 3$  ہے۔

## 4.18 4-6.3 مثال نمبر

کتنے نقاط پر خط  $x + 2y = 3$  منحنی  $2x + y^2 = 4$  کو منقطع کرتا ہے؟  $x + 2y = 3$  لہذا  $x = 3 - 2y$  کی ترکیب  $2x^2 + y = 4$  میں درج کرنے سے  $2(3 - 2y)^2 + y^2 = 4$  لہذا  $(9 - 12y + 4y^2) + y^2 = 4$  کی تہتقیق سے مساوات  $y^2 - 24y + 14 = 0$  حاصل ہوئی۔ اس مساوات کا ممیز  $24^2 - 4 * 9 * 14 = 576 - 504 = 72$  ہے۔ کیونکہ ممیز مثبت ہے۔ اس لیے مساوات کے دو حل ہوں گے، معلوم ہوا کہ خط منحنی کو دو نقاط پر منقطع کرتا ہے۔

## 4.19 دودرجی مساوات میں قابل تخفیف مساوات 4.7

## 4.20 دودرجی مساوات میں قابل تخفیف مساوات

بعض اوقات آپکا سامنا ایسی مساوات سے ہوگا جو دودرجی نہیں ہوں گی۔ درست ترتیب میں بدلی کے ذریعے انہی دودرجی مساوات میں تبدیل کرنا ممکن ہے۔

## 4.21 4.7.1 مثال نمبر

مساوات  $t^4 - 13t^2 + 36 = 0$  کو حل کریں۔ جزو  $t^4$  کی موجودگی کے باعث یہ ایک دودرجی مساوات ہے لیکن اگر  $x$  کو بطور  $t^4$  لیں تو یہ مساوات  $x^2 - 13x + 36 = 0$  میں تبدیل ہو جائے گی جو کہ  $x$  کی دودرجی مساوات ہے۔ تو  $(x - 4)(x - 9) = 0$  لہذا  $x = 4$  یا  $x = 9$ ۔ واپس  $x = t^2$  درج کرنے سے  $t^2 = 4$  یا  $t^2 = 9$  یعنی نتیجہ  $t = \pm 2$  یا  $t = \pm 3$ ۔

## 4.22 4.7.2 مثال نمبر

مساوات  $\sqrt{x} = 6 - x$  کو حل کریں۔

-(a)  $y = \sqrt{x}$  کیلئے استعمال کرتے ہوئے۔

-(b) مساوات کی طرف سے  $y$  پر مربع لینے سے۔

-(a)  $y = \sqrt{x}$  کی جگہ  $y$  درج کرنے سے مساوات،  $y^2 = 6 - y$  یا  $y^2 + y = 6$  میں تبدیل ہو جاتی ہے۔ لہذا  $(y + 3)(y - 2) = 0$

پس  $y = 2$  یا  $y = 3$  لیکن چونکہ  $y = \sqrt{x}$  جبکہ  $\sqrt{x}$  قطعاً منفی نہیں ہو سکتا ہے۔ تو واحد حل  $y = 2$  ہی ہے جس سے  $x = 4$  حاصل ہوا۔

طرفین کا مربع لینے سے  $x^2 - 13x + 16 = 0$  یا  $(6 - x)^2 = 36 - 12x + x^2$  لہذا  $(x - 4)(x - 9) = 0$  حاصل  $x = 4$  یا  $x = 9$  ہے۔ جوابات کو جانچنے سے معلوم ہوتا ہے کہ جب  $x = 4$  ہو تو مساوات  $\sqrt[2]{x} = 6 - x$  درست ثابت ہوتی ہے لیکن جب  $x = 9$  ہو تو،  $\sqrt[2]{x} = 3$  اور  $6 - x = -3$  یعنی  $x = 9$  پس  $x = 9$  جڑ نہیں ہے لہذا  $x = 4$  واحد جڑ ہے۔ یہ اہم ہے کہ اگر آپ مساوات  $\sqrt[2]{x} = 6 - x$  کا مربع لیں تو اس کے جڑ سمیت وہ جڑ جو آپ اصلاً معلوم کرنا چاہ رہے تھے معلوم کریں گے۔ قابض ہے کہ  $x = 4$  تو اس مساوات کو درست ثابت کرتا ہے۔ لیکن  $x = 9$  نہیں کرتا۔ نتیجہ یہ ہے کہ جب آپ کسی مساوات کو حل کرتے ہوئے اس کا مربع لیں تو ضروری ہے کہ اپنے جوابات کو جانچ لیں۔

## 4.23 مشتق نمبر 4C

1. مندرجہ ذیل ہمزاد مساوات کے جوڑوں کو حل کریں۔
2. خط مستقیم اور منحنی کے نقاط انقطاع کے محدد معلوم کریں۔
3. مندرجہ ذیل سوالات میں خط مستقیم اور منحنی کے نقاط انقطاع کی تعداد معلوم کریں۔
4. مندرجہ ذیل مساوات کو حل کریں۔ غیر ناطق جوابات، غیر معلوم صورت میں دیں۔
5. مندرجہ ذیل مساوات کو حل کریں۔ (زیادہ تر معملات میں مناسب عبارت سے ضربے مساوات کو قابل مہم بنادے گی۔
6. مندرجہ ذیل مساوات کو حل کریں۔

## 4.24 متفرق مشتق 4

1. ہمزاد مساوات  $X + Y = 2$  اور  $x^2 + 2y^2 = 11$  کو حل کریں۔
2. دودرجی کثیر رکنی عبارت  $x^2 - 10x + 17$  کو  $f(x)$  سے ظاہر کرتے ہیں۔ طاقی قیمتوں کو واضح کرتے ہوئے  $f(x)$  کو  $(x - a)^2 + b$  صورت میں لکھیں۔ لہذا  $f(x)$  کے لیے کم سے کم ممکن قیمت اور اس کے موافق  $x$  کی قیمت معلوم کریں۔
3. ہمزاد مساوات  $2x + y = 3$  اور  $2x^2 - xy = 10$  کو حل کریں۔
4.  $k$  کی کن قیمتوں کے لیے مساوات  $2x^2 - kx + 8 = 0$  دہرا جڑ رکھتی ہیں؟
5. تفاعل  $f(x) = (2x + 4)(x - 4)$  کو کامل مربعی صورت میں ظاہر کر کے تفاعل  $f(x)$  کی سعت معلوم کریں۔
6. مساوات کو حاصل کر کے جواب ہر ممکن صد تک متفق اور غیر معقول صورت میں ہے۔

- (b) مساوات  $x^4 - (6\sqrt{3})x^2 + 24 = 0$  کے چاروں ممکنہ حل کے جوابات دو درجہ اعشاریہ تک دیں۔
- (7) ظاہر کریں کہ خط  $y = 3x - 3$  اور منحنی  $y = (3x + 1)(x + 2)$  ایک دوسرے کو منقطع نہیں کرتے ہیں۔
- (8)  $(Ax^2 + Bx)^2 + C = 9x^2 - 36x + 52$  کی صورت میں ظاہر کریں جبکہ  $A, B, C$  عدد صحیح ہیں لہذا یا دوسری صورت میں  $9x^2 - 36x + 52$  کی حقیقی قیمتوں کا مجموعہ معلوم کریں۔
- (9) دو درجہ اعشاریہ تک درست محدود دیتے ہوئے منحنی  $y = 6x^2 + 4x - 3$  اور  $y = x^2 - 3x - 1$  کے نقاط انقطاع معلوم کریں۔
- (10)  $(ax + b)^2 + c = 9x^2 + 12x + 7$  کی صورت میں ظاہر کریں، یہاں  $a, b, c$  مستقل ہیں جبکہ قیمتیں معلوم کرنا مقصود ہیں۔
- (b)  $\frac{1}{9x^2 + 12x + 7}$  کیلئے درست،  $x$  کی حقیقی قیمتوں کا مجموعہ معلوم کریں۔
- (11) مساوات  $8x^4 - 8x^2 + 1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$  کے تمام جزر معلوم کریں جو تین معنی خیز اعداد تک درست ہوں۔
- (12)  $x$  کی تمام قیمتوں کیلئے درست مستقبل  $a, b, c$  معلوم کریں۔
- لہذا  $y = 3x^2 - 5x + 1$  کیلئے ترمیم پر سب سے کم قیمت نقطہ کے محدود معلوم کریں۔
- (یادداشت: سب سے کم اور سب سے زیادہ قیمت والے نقاط اس ہیں۔)
- (13) قوس  $xy = 6$  اور  $y = 9 - x$  خط کے نقاط انقطاع معلوم کریں۔
- (14)  $y = ax^2 - 2bx + c$  قوس کی مساوات  $a, b, c$  اور ہے  $c$  اور مستقبل ہیں جبکہ  $a > 0$ ۔
- (a) قوس کے اس کے محدود  $a, b, c$  کی صورت میں معلوم کریں۔
- (b) ہمیں معلوم ہے کہ قوس کا اس خط،  $x = y$  پر ہے۔  $c$  کیلئے  $a$  اور  $b$  کی صورت میں عبارت معلوم کریں۔ یہ بھی ظاہر کریں کہ  $b$  تمام قیمتوں کیلئے  $c \leq \frac{-1}{4a}$ ۔
- (15)  $y = x - 1$  اور  $y = kx^2$  کے ترسیمات کو تصویر میں دکھایا گیا ہے جہاں ایک مثبت مستقل ہے ترسیمات دو متفرق نقاط اور  $A$  پر ایک دوسرے کو منقطع کرتے ہیں۔  $A$  اور  $B$  کیلئے  $x$  کیلئے دو درجی مساوات تحریر کریں اور ظاہر کریں کہ  $K < \frac{1}{4}$ ۔
- (b) مندرجہ ذیل معاملات ہیں ترسیمات  $y = x - 1$  اور  $y = kx^2$  کے باہمی تعلق کو واضح کریں۔
- (1)  $k > \frac{1}{4}$
- (c) ترمیم یا کسی اور دلیل سے ثابت کریں کہ جب منفی  $k$  مستقل ہو تو مساوات  $x - 1 = kx^2$  کے دو حقیقی جزر ہوتے ہیں، ایک جزر 0 اور 1 کے درمیان ہوگا۔

$y = 3x + 5$  کے عمود کی مساوات معلوم کے بغیر درج ذیل طریقہ سے خط  $y = 3x + 5$  اور نقطہ  $(1, 2)$  کے درمیان کم سے کم فاصلہ معلوم کریں۔

(a) خط پر ایک عمومی نقطہ ہے، ظاہر کریں کہ نقطہ  $(1, 2)$  سے اس کا فاصلہ 'd'،  $d^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2$  کے ذریعے حاصل ہو گا۔

(b) خط کی مساوات کو حل کر کے ظاہر کریں کہ  $d^2 = (x - 1)^2 + (3x + 3)^2$

(c) ظاہر کریں کہ  $d^2 = 10x^2 + 16x + 10$

(d) مربع کی تکمیل کے ذریعے ظاہر کریں کہ کم سے کم ممکن فاصلہ

(17) سوال نمبر 16 کی ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے۔

(a)  $(2, 3)$  کا  $y = 2x + 1$  سے عمودی فاصلہ معلوم کریں۔

(b)  $(1, 3)$  کا  $y = -2x + 5$  سے عمودی فاصلہ معلوم کریں۔

(c)  $(2, -1)$  کا  $3x + 4y + 7 = 0$  سے عمودی فاصلہ معلوم کریں۔

(18) نوے درجے پر قائم دو سڑکوں کا نقطہ انقطاع 'O' ہے؛ ایک سڑک شمال سے جنوب اور دوسری مشرق سے مغرب کی جانب ہے۔ گاڑی (A) نقطہ O کے 100 میٹر مغرب سے مشرق کی جانب 20m/s کی رفتار سے بڑھ رہی ہے اور گاڑی (B) نقطہ O کے 80 میٹر شمال سے جنوب کی جانب 20m/s کی رفتار سے بڑھ رہی ہے۔

(a) ظاہر کریں کہ 't' وقت کے بعد انکا باہمی فاصلہ 'd' ہو گا۔

$$d^2 = (100 - 20t)^2 + (80 - 20t)^2$$

(b) ظاہر کریں کہ باہمی تحقیق کے نتیجہ میں  $d^2 = 400(5 - t^2) + (4 - t^2)$

(c) ظاہر کریں کہ دونوں گاڑیوں کا کم سے کم باہمی فاصلہ  $10\sqrt{2}$  میٹر ہے

(19) نوے درجے پر قائم دو سڑکوں کا نقطہ 'O' انقطاع ہے؛ ایک سڑک شمال سے جنوب اور دوسری مشرق سے مغرب کی جانب ہے۔ دونوں

موٹر بائیک A اور B کے درمیان کم سے کم فاصلہ معلوم کریں جو کہ ابتدائی طور پر نقطہ 'O' کی جانب مندرجہ ذیل صورتوں میں گامزن ہیں

(a) دونوں موٹر بائیک 'O' سے 10 میٹر کے فاصلہ پر ہیں 20m/s A اور 10m/s B سے سفر کر رہا ہے

(b) A، 'O' سے 120 میٹر کے فاصلہ پر ہے اور اسکی رفتار 20m/s ہے جبکہ B، 'O' سے 80 میٹر پر ہے اور اسکی رفتار 10m/s ہے۔

(c) A، 'O' سے 120 میٹر کے فاصلہ پر ہے اور اسکی رفتار 20m/s ہے جبکہ B، 'O' سے 60 میٹر پر ہے اور اسکی رفتار 10m/s ہے۔

$x^2 - 4x - 2$  (a) اور  $x^2 + 8x + 24$  کو کامل مربع صورت میں ظاہر کریں۔

(b) ظاہر کریں کہ مساوات  $y = 2 - 4x - x^2$  اور  $y = 24 + 8x + x^2$  کے ترسیمات ایک دوسرے کو منقطع نہیں کرتے ہیں۔

(c) ایک مثال کے ذریعے ظاہر کریں کہ  $y = A - (x - a)^2$  اور  $y = B - (x - b)^2$  جیسی مساوات کے ذریعے ترسیم معلوم

کیا جاسکتا ہے جو کہ ایک دوسرے کو منقطع نہیں کرتے ہیں۔

(21) ایک "ریبا ٹنگا فرم" مختلف مقامات سے دھاتی ڈبے جمع کرتی ہے اور انہیں پیس کر دھات واپس صنعت کار کو بیچ دیتے ہیں۔ ہر ہفتہ 1 ٹن

$$p = 100 - \frac{1}{2}t^2 - 200$$

دھاتی ڈبوں سے p منافع ہوتا ہے۔ فرم زیادہ سے زیادہ کیتنا ہفتہ وار منافع حاصل کرتی ہے اور اتنا منافع حاصل اور ہر ہفتہ منافع حاصل کرنے کے لیے

لتنے ٹن دھاتی ڈبے اکٹھا کر کے بیچنا ہوں گے؟





## باب 5

### عدم مساوات

یہ باب عدم مساوات کا تعلق اور عدم مساوات کے حل کے بارے میں ہے۔ اس باب کے مکمل ہوتے ہی آپ یہ چیزیں سیکھ جائیں گے۔

- عدم مساوات کی علامتوں کے ساتھ کام کرنے کے اصول سیکھ جائیں گے۔
- لکیری عدم مساوات کو حل کرنے کے قابل ہو جائیں گے۔
- چوکور عدم مساوات کو حل کرنے کے قابل ہو جائیں گے۔

#### 5.1 عدم مساوات کے اشارے

آپ اکثر ایک نمبر کا دوسرے سے موازنہ کرنا چاہتے ہیں اور کہتے ہیں کہ کون سا بڑا ہے۔ یہ عدم مساوات کی  $<$  ،  $>$  علامتوں کے لیے استعمال ہوتے ہیں۔ اور آپ پہلے ہی عدم مساوات کو اباب 3 اور 4 میں ہڑھ چکے ہیں۔

علامت  $>$  کا مطلب یہ ہے کہ  $a$  بڑا ہے  $b$  سے۔ آپ اسکی جغرافیائی طور پر تصویر بنائیں۔ جیسا کہ تصویر 1.5 ظاہر کرتی ہے کہ تین عدم لکیریوں جو  $a$  اور  $b$  کی طرف ظاہر کرتی ہے۔

نوٹ کریں کہ اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا کہ  $a$  اور  $b$  مثبت ہیں یا منفی۔  $O$  کی پوزیشن  $a$  اور  $b$  کے سلسلے میں لکیر پر غیر متعلقہ ہے۔ تینوں لکیر پر --- کے طور پر 6 نیچے اور لکیر پر 7-4----- اسی طرح علامت --- کا مطلب ہے کہ  $ab$  سے کم ہے۔ آپ اس کا تصور کر سکتے ہیں کہ جغرافیائی طور پر  $b$  بائیں طرف ہے  $a$  کے۔ یہ چار تاثرات برابر ہیں۔  $a$  بڑا ہے  $b$  سے کم ہے  $a$  سے علامت --- کا مطلب ہے کہ --- بڑا ہے --- سے پر پھر --- برابر ہے --- کے لیکن --- سے کم نہیں ہے۔

یہ تاثرات برابر ہیں۔

ب.  $b$  کم ہے  $a$  سے یا  $b$  برابر ہے  $a$  کے

## 5.2 لکیری عدم مساوات کا حل کرنا

### 5.3 دونوں اطراف میں ایک پتعداد میں اضافہ یا گھٹانا

چونکہ C جمع کرنا C شامل کرنی کے مترادف ہے، لہذا آپ یہ بھی کر سکتے ہیں کہ دونوں اطراف سے ایک ہی تعداد کو گھٹائیں۔

اس مثال میں --- کو دونوں طرف سے گھٹائیں۔

#### 5.4 ایک مثبت تعداد کے ذریعے دونوں اطراف سے ضرب کرنا

مثال کے طور پر آپ مثبت نمبر 7 (دونوں کے ضرب) کے ذریعے دونوں اطراف تقسیم کر سکتے ہیں۔----- یہاں قدم کا جواز پیش کیا گیا ہے اگر  $O$ ،  $\diamond$  اور  $---$  پر لکیر پر ہے۔

جیسا کہ --- اور --- کے عہدوں کی توسیع --- اور --- کے مطابق --- ہے۔ تصویر 5.3 ظاہر کرتا ہے کہ چاہیے --- اور --- مثبت ہوں یا منفی --- دائیں طرف ہے --- کہ تو۔

## 5.5 دونوں اطراف کو منفی تعداد سے ضرب کرنا

اگر --- اور آپ دونوں اطراف سے  $a + b$  کو منفی کریں۔ اور --- کو حاصل کریں۔ جو --- جیسا ہے۔ یہ ایسا ظاہر کرتا ہے کہ 1۔ عدم مساوات کو دونوں اطراف ظاہر کرتا ہے۔ اور آپ عدم مساوات کی سمت تبدیل کر دیں۔ اور فرض کریں آپ --- کو 2۔ عدم مساوات سے ضرب دینا چاہتے ہیں تو یہ ایک جیسا ہے۔ --- کو 2۔ سے ضرب دیں تو --- آپ 2۔ سے ضرب لگانے کے بارے میں سوچ سکتے ہیں۔ جیسے  $a$  اور  $b$  اصل میں ہیں پھر ایک توسیع پزیر کے طور پر 2 سے ضرب کریں۔ آپ یہ کہہ کر خلاصہ کر سکتے ہیں کہ اگر آپ ضرب (یا تقسیم) عدم مساوات کو دونوں اطراف سے منفی تعداد سے کریں تو آپ کو عدم مساوات کی سمت تبدیل کرنی ہو گئی۔ اگر --- اور --- تو

## 5.6 عدم مساوات پر آپریشن کا خلاصہ

- آپ عدم مساوات کی دونوں جانب کسی ہندسے کو جمع یا تفریق کر سکتے ہیں۔
- آپ عدم مساوات کو کسی مثبت ہندسے سے ضرب یا تقسیم کر سکتے ہیں۔
- آپ عدم مساوات کو کسی منفی ہندسے سے ضرب یا تقسیم کر سکتے ہیں مگر آپ کو عدم مساوات کی سمت تبدیل کرنا ہوگی۔

عدم مساوات کو حل کرنا محض ان تین قاعدوں کا درست استعمال ہے۔

مثال

عدم مساوات کو حل کریں۔ اس مثال میں آپ کو دونوں اطراف کو تقسیم کرنے کی ضرورت ہے۔ تبدیل کرنے کیلئے یاد رکھنا عدم مساوات کی سمت ----- بن جاتی ہے۔

مثال

----- عدم مساوات کو حل کریں۔

ترتیب میں دونوں اطراف سے ضرب کرنے کے لیے ایک مثبت تعداد سے ضرب لگانے کے بارے میں قاعدہ کا استعمال کریں۔ حل کرتے ہوئے کسور کو صاف کریں۔ ایک وجہ ہے کہ ایک ہی آپریشن کیا جاسکتا ہے۔ جو عدم مساوات کو متاثر کرتی ہے۔

----- اس قسم کی عدم مساوات کو حل کرنے کے مترادف ہے۔ تاہم آپ ضرب لگاتے ہیں یا کسی عدد کو تقسیم کرتے ہیں۔ اگر تعداد منفی ہو تو عدم مساوات کو ختم کرنا ضروری ہے۔ -----

سوال:- عدم مساوات کو حل کریں۔-----

چوکور عدم مساوات 5.3 چوتھے باب میں آپ نے دیکھا ہے کہ ایک چوکور دک تقریب میں سے تین سے ایک شکل ہو سکتی ہے۔ معمول کی شکل  
----- عرصہ کی شکل ----- مکمل مربع فارم -----

اگر آپ ----- کو چوکور عدم مساوات کو حل کرنے کی ضرورت ہے۔ اب تک استعمال کرنے میں سب سے آسان فارم عرصہ  
کی شکل ہے۔ یہاں کچھ ایسی مثالیں ہیں جو چوکور عدم مساوات کو حل کرنے کے طریقے دکھاتی ہے۔

### مثال 5.3.1

----- عدم مساوات کو حل کریں۔ طریقہ 1:- ----- ترسیم کا خاکہ بنائیں۔ ترسیم ----- اور ----- پر کاٹتا ہے  
----- کی قابلیت ثبت ہے۔ قطع مکانی اوپر موڑتا ہے۔ جیسا تصویر 5.5 میں دکھایا گیا ہے۔ آپ کو ----- کی اقدار تلاش کرنے کی ضرورت ہے  
جیسے ----- ترسیم سے دیکھ سکتے ہیں کہ 4 اور 2 درمیان میں ہے۔ تو ----- اور ----- یہ یاد رکھنا ----- بھی ----- جیسا ہے۔ تو آپ دیکھ سکتے  
ہیں۔ اسکا مطلب ہے  $x$  بڑا ہے 2 سے اور کم ہے 4 سے۔ جب آپ ----- اور ----- قسم کی مساوات لکھتے ہیں ----- کی شکل  
میں ہے اور ضروری ہے کہ ----- لکھنا کوئی معنی رکھتا۔ اسی طرح  $x$  دونوں سے زیادہ ہو سکتا ہے -----  
کو وقفہ کہا جاتا ہے۔ طریقہ 2:- ----- کی اقدار تلاش کریں۔ جس کے لئے ----- اور ----- اقدار کو عدم مساوات کے  
لیے اہم اقدار کہا جاتا ہے۔ موضوع میں عوامل کی علامت کو ظاہر کرنے کے لیے ایک انظال بنائیں -----

مثال 5.3.2:- ----- عدم مساوات کو حل کریں۔ تصویر ----- کی ترسیم دکھاتا ہے۔ جیسا کہ ----- کی قابلیت  
منفی ہے۔ قطع مکانی کی چوٹی اوپر کی طرف ہے۔ تو ----- جب کہ ----- اور ----- ہے۔ نوٹ کریں کہ اس معاملے میں عدم  
مساوات بھی اہم اقدار ----- اور ----- بھی ربط سے مطعون ہے۔

مثال ----- جہاں ----- ہے۔ عدم مساوات کو حل کریں۔ یہ ----- اور ----- کے جیسا ہے۔ ----- اور ----- کی اہم اقدار ہے۔  
انظال ----- انظال ----- سے پتی چلتا ہے اگر ----- کو ----- یہ ----- اور ----- جیسا دکھتا ہے۔ مثال ----- کا نتیجہ اہم ہے۔ آپ اسے  
مزید لکھ سکتے ہیں اگر ----- ہے یہ بیانات مساوی ہیں۔ ----- جغرافیائی یا انظال کے طریقوں سے استعمال کر کے عدم  
مساوات کو حل کرنا سب سے آسان ہے۔ آپ اس خاکہ کو کامل کرنے کے لئے جغرافیائی حساب و کتاب کے آلہ کو استعمال کر سکتے ہیں۔ اور یہ  
عمل سب سے آسان ہے۔ مثال ----- ظاہر کرتا ہے کہ کس طرح عدم مساوات کے دلائل کو زیادہ الجبری شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ مثال  
الف ----- ب ----- عدم مساوات کو حل کریں۔ اگر دو عوامل کی پیداوار منفی ہے تو ان میں سے ایک منفی ہونا ضروری ہے۔ اور  
دیگر مثبت کو غور کرنے کے لیے دو امکانات ہیں۔ اگر ----- منفی ہے تو ----- مثبت ہے تو ----- اور ----- ہے۔ جو کہ نا ممکن ہے۔ لیکن اگر  
----- مثبت اور ----- منفی ہے تو ----- اور ----- ممکن ہوتا ہے۔ ب اگر دو عوامل کی مصنوع مثبت ہے تو دونوں مثبت ہیں تو یہ دونوں منفی  
ہیں۔ اگر ----- اور ----- مثبت ہے تو ----- اور ----- بنتا ہے۔

مثال ----- الف ----- ب ----- الگ الگ طور پر عدم مساوات کو حل کریں۔ مربع مکمل کریں۔ -----  
کی سب سے چھوٹی اقدار ----- ہے اور یہ اس وقت ہوتا ہے جب ----- تو ----- کی کوئی اقدام نہیں ہوتی۔ (ب) ----- الف مندرجہ

متنوع دوہرائی سوال الف عدم مساوات کو حل کریں ب عدم مساوات کو حل کریں ج عدم مساوات کو حل کریں د عدم مساوات کو حل کریں

کی اقدار کو اس طرح تلاش کریں کہ لکیر مساوات کے ساتھ وکر سے مل سکے۔۔۔۔۔ صرف ایک بار۔

اور۔۔۔۔۔ مساوات کے ساتھ ایک ہی محور پر منفی خطوط ظاہر کریں اور چورہا کے ان نقاط کو ظاہر کریں۔

----- کے ذریعے سیدھی لکیر کی مساوات تلاش کریں جو لکیر پر ہے۔ ----- اور ----- نقاط سے گزرتا ہے۔ مثلث --- کے علاقے کو تلاش کریں۔ آپ کا جواب آسان تر شکل میں ہونا چاہیے۔

عدم مساوات کو حل کریں۔ الف۔ ب۔ ج

چوکور مساوات ----- کی ایک جڑ دہرائی ہوتی ہے۔  $P$  کی ایک ممکن اقدار تلاش کریں۔

بیک وقت مساوات کو حل کریں۔

کے عدم مساوات کو حل کریں۔ دہرائی کی مشق ۱) ایک لکیر ان نقطوں میں سے گزرتی ہے۔۔۔۔۔ اور۔۔۔۔۔ ہے۔ جو ایک  
مساوات ظاہر کرتی ہے۔ لکیر۔۔۔۔۔ کو۔۔۔۔۔ پر کاغذی ہے۔ جس کی مساوات۔۔۔۔۔ ہے۔۔۔۔۔ پر۔۔۔۔۔ کے نقاط تلاش کریں۔ (۲) یہ ظاہر کریں  
مساوات کی کوئی بھی جڑ۔۔۔۔۔ کی جڑ ہے اور۔۔۔۔۔ کی جڑ ہے اور ظاہر کریں۔۔۔۔۔ کا کوئی حل نہیں (۳)۔۔۔۔۔ کو۔۔۔۔۔ کو  
اور۔۔۔۔۔ کی مقدار تلاش کریں۔ الف۔۔۔۔۔ کی سب سے کم اقدار لکھیں اور۔۔۔۔۔ کی تلاش کریں ب)۔۔۔۔۔ کی  
۔۔۔۔۔ اسان کریں (۵) عدم مساوات کو حل کریں۔ الف ب ج ۶) دکھائیں کہ مساوات کو۔۔۔۔۔ کو۔۔۔۔۔ کی  
شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔ لہذا۔۔۔۔۔ کی قیمتی تلاش کریں جو مساوات کو پورا کریں

یہ ثابت کریں کہ نقاط-----اور-----پر کونے والے مثلث دائیں کونے میں ہیں۔ اور اسکے علاقے کا حساب لگائیں۔ یہ معلوم کریں کہ لکیر-----منفی خطوط سے ملتا ہے۔ مساوات میں-----کو کسی چیز سے کٹوتی کر سکتے ہیں۔-----اور-----رومبس میں مخالف راس ہیں۔ اسکے وتر کی مساوات تلاش کریں۔ دوسری عمودی حصوں میں سے ایک-----ہے۔ چوتھا محور تلاش کریں۔ نقاط-----کے وسطہ نقطہ لکھیں۔-----کے فاصلہ کا حساب لگائیں۔ نقطہ-----دائرے پر ہے۔-----کے قطر ہے اور-----نقاط ہے۔ جہاں-----مثبت ہے۔-----کے اقدار کا حساب لگائیں۔ عدم مساوات کو حل کریں۔ مثلث کے دونوں اطراف کی لمبائی-----سنیٹی میٹر اور-----سنیٹی میٹر ہے اور اسکے درمیان-----کا زاویہ ہے۔ تیسرے پہلو کا حساب لگائیں اور جواب-----کی فارم میں ہونا چاہئے۔

..... ایک مثلث کے راس ہیں۔-----کے عمودی تنصیف کی مساوات جبکہ-----کا عمودی تنصیف معلوم کریں۔-----کے محدود معلوم کریں جہاں یہ خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اور-----سے-----تک کا فاصلہ معلوم کریں۔-----کا رقبہ معلوم کریں۔-----سے-----تک عمود کی لمبائی معلوم کریں اور-----اخز کریں کہ-----کا زاویہ-----ہے۔ ایک چوکود میں-----کے راس اور لمبائی دو عمود-----اور-----کی مساوات لکھیں۔-----قدر معلوم کرنے کے لیے-----تبادل-----استعمال کریں۔ جو مساوات کو پورا کرتی ہے۔-----چوکود کی تقریب-----ہے۔-----کی اقدار تلاش کریں۔ ظاہر کریں۔ اور اس کی وضاحت کے لیے-----کے قریب کریں۔ حساب و کتاب کا آلہ استعمال کیئے بغیر۔-----کی جڑ لکھیں۔-----کو-----اور-----کی شکل میں لکھیں۔

اشاریہ اشارے میں اضافی اشارے میں

## باب 6

### تفرق

یہ سبق کسی بھی ترسیم پر موجود نقطے کے ڈھلاؤ یا خط مماس معلوم کرنے کے بارے میں ہے۔ جب آپ یہ سبق مکمل کر لیں گے، آپ کو عبور حاصل ہوگا کہ:

آپ ایک سمتی مقدار پر ایک نقطہ پر ڈھلاؤ معلوم کرنے کے لئے ایک کلیہ کا حساب لگائیں، اس کی مساوات بنائیں مربعی اور دیگر قسم کے خم پر ایک نقطہ پر عین مطابق ڈھلاؤ کا حساب لگائیں

اس سبق کو دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ پہلے حصے میں حصہ ?? تا حصہ ?? میں آپ تجربے کی بنیاد پر نتائج اخذ کرتے ہوئے خط مماس سے ترسیم تک کے مسائل حل کریں گے۔ دوسرے حصے میں حصہ ?? تا حصہ ?? تجربے کی بنیاد پر اخذ نتائج کو ثابت کریں گے۔ آپ اگر چاہیں تو سبق کے دوسرے حصے کو نظر انداز کر سکتے ہیں لیکن آپ کو چاہیئے کہ سبق کے اختتام پر موجود مشق کو حل کریں۔

#### 6.1 خط مماس کا ڈھلاؤ معلوم کرنا

ایک سادہ سے خم کے بارے میں سوچیں جیسے  $y = x^2$  کی ترسیم۔ جیسے جیسے آپ کی نظر  $x$  محور کی سمت بڑھتی ہے، کیا آپ بیان کر سکتے ہیں، ریاضی کی زبان میں، خم کی سمت کس طرح سے تبدیل ہوتی ہے۔

جیسے ایک سیدھی کلیئر کا ایک عددی ڈھلاؤ ہے، لہذا کوئی بھی خم، بشرطیکہ وہ کافی حد تک (سموتھ) ہو ایک ڈھلوان یا ڈھلاؤ رکھتا ہے جو کہ کسی بھی ایک نقطہ پر ماپا جاسکتا ہے۔ فرق صرف اتنا ہے کہ خم کے لیے ڈھلاؤ کی سمت بھی بدلتی ہے جیسے جیسے آپ اس کے ساتھ چلتے ہیں۔ ریاضی دان اس ڈھلاؤ کی مدد سے خم کی سمت کا تعین کرتے ہیں۔

سبق?? میں آپ سیکھ چکے ہیں کہ اگر آپ کے پاس ایک سیدھی کثیر کے دو نقطوں کے محدود دستیاب ہوں تو آپ کیسے اس کا ڈھلاؤ معلوم کر سکتے ہیں۔ آپ اس طریقے کو براہ راست خم پہ استعمال نہیں کر سکتے کیونکہ وہ ایک سیدھی کثیر نہیں ہے۔ آپ اس خط مماس کا ڈھلاؤ معلوم کرتے ہیں جو کہ خم کے کسی بھی دو نقطوں کی مدد سے بنایا جائے گا۔ (جیسا کہ آپ تصویر?? میں دیکھ رہے ہیں) کہ ایک نقطے پر خط مماس اور ڈھلاؤ کی ڈھلان برابر ہے۔ تاہم یہاں ایک نیا مسئلہ کھڑا ہو گیا ہے، وہ یہ کہ آپ ایک کثیر کا ڈھلاؤ صرف تب ہی معلوم کر سکتے ہیں جب آپ کو اس کے دو نقطوں کے محدود پتہ ہوں۔

تصویر?? میں ہم آہنگ کثیریں (سیدھی کثیریں جو خم کے دو نقطوں میں سے گزریں) دکھائی گئی ہیں جو خط مماس کے قریب تر ہوتی جا رہی ہیں، لہذا بہتر یہی ہے کہ ہم ان ہم آہنگ کثیروں کی ڈھلان معلوم کرنے سے ابتدا کریں، کیونکہ اس طریقے کو پہلے سبق میں سیکھ چکے ہیں۔

مثال 6.1: ایک ہم آہنگ کثیر کی ڈھلان اور مساوات معلوم کریں جو کہ  $y = x^2$  کے خم کے دو نقطوں کو جوڑتی ہے، ان دو نقطوں کے محدود ہیں (0.4, 0.16) اور (0.7, 0.16)

حصہ ?? میں ہم آہنگ کثیر کی ڈھلان معلوم کرنے کے نسخہ کے مطابق:

$$\frac{0.49 - 0.16}{0.7 - 0.4} = \frac{0.33}{0.3} = 1.1$$

حصہ ?? میں ہم آہنگ کثیر کی مساوات معلوم کرنے کے نسخہ کے مطابق:

$$y - 0.16 = 1.1(x - 0.4),$$

جو کہ:

$$y = 1.1x - 0.28$$

□

یہاں مددگار ہو گا کہ ہم کچھ فی علامات سیکھیں، بڑھوتری کے لئے ہم یونانی علامت  $\delta$  (ڈیلٹا) کا استعمال کرتے ہیں۔ لہذا  $x$  میں بڑھوتری کو  $\delta x$  اور  $y$  میں بڑھوتری کو  $\delta y$  سے ظاہر کرتے ہیں۔ ان مقداروں کو حصہ ?? میں (x-step) اور (y-step) کہا گیا ہے۔ لہذا مثال ?? میں ہم آہنگ کثیر کے ایک سرے سے دوسرے (x-step)  $0.7 - 0.4 = 0.3$  جبکہ (y-step)  $0.49 - 0.16 = 0.33$  ہے۔ لہذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ:

$$\delta x = 0.3, \quad \delta y = 0.33$$

اس علامت نویسی سے آپ کسی ہم آہنگ کثیر کی ڈھلان کو  $\frac{\delta y}{\delta x}$  سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

ایک طبقہ  $\delta$  کی بجائے  $\Delta$  استعمال کرتا ہے، دونوں ہی صحیح ہیں۔ اس بات کا خیال رکھیں کہ اس  $\frac{\delta y}{\delta x}$  میں آپ دونوں  $\delta$  کو آپس میں کاٹ نہیں سکتے کیونکہ یہ اعداد نہیں ہیں۔ اب جبکہ ہم علامت کو استعمال کر رہے ہیں تو آپ عادت بنا لیں اسکو بڑھوتری کی شرح کہنے کی،



اس طرح آپ اسکو الجبرا کی عام علامت نا سمجھیں۔ یاد رکھیں کہ  $\delta x$  یا  $\delta y$  منفی ہو سکتے ہیں، اور ایسی صورت میں (y-step) اور (x-step) کم ہونگے۔

اگر ہم اس طریقے کو بروئے کار لاتے ہوئے ہم آہنگ کلیروں کے ڈھلاؤ کو معلوم کریں تو مثال ?? کچھ ایسی دکھے گی؛

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{0.49 - 0.16}{0.7 - 0.4} = \frac{0.33}{0.3} = 1.1$$

مثال 6.2: خم  $y = x^2$  کے دو نقطوں کو جوڑنے والی ہم آہنگ کلیر کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔ جسکے  $x$  محدود 0.4 اور 0.41 ہیں۔ سب سے پہلے آپکوں دونوں نقطوں پہ  $y$  - محدود معلوم کرنا ہوگا جو کہ  $0.4^2 = 0.16$  اور  $0.41^2 = 0.1681$  ہیں۔

اس مثال کو بھی مثال ?? کی طرح حل کریں گے۔  $\delta x = 0.41 - 0.4 = 0.01$  اور  $\delta y = 0.1681 - 0.16 = 0.0081$  تاہم ہم آہنگ کلیر کا ڈھلاؤ ہے؛

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{0.0081}{0.01} = 0.81$$

□

مثال ?? میں ہم آہنگ کلیر اور ?? محدود 0.4 پہ موجود خط مماس کو الگ پہچاننا مشکل ہے، یہاں ہمیں ایک طریقہ ملتا ہے کہ ہم محدود  $x$  6.4 پہ خط مماس کا ڈھلاؤ کس طرح معلوم کر سکتے ہیں۔ مثال 6.1.3 میں یہ نقطے مزید قریب آگے ہیں۔

مثال 6.3: خم  $y = x^2$  کے دو نقطوں کو جوڑنے والی ہم آہنگ کلیر کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔ جسکے  $x$  محدود 0.4 اور 0.40001 ہیں۔ دونوں نقطوں کے محدود  $(0.4, 0.4^2)$  اور  $(0.40001, 0.40001^2)$  ہیں

$$\delta x = 0.40001 - 0.4 = 0.00001 \quad \delta y = 0.40001^2 - 0.4^2 = 0.0000080001$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{0.0000080001}{0.00001} = 0.80001$$

کا ڈھلاؤ ہے؛

یہ نتیجہ چونکہ 0.8 کے بہت قریب ہے لہذا ایسا نظر آ رہا ہے کہ  $y = x^2$  کے خم پہ محدود  $x$  0.4 پہ موجود خط مماس کا ڈھلاؤ 0.8 ہے۔ لیکن اس سے یہ ثابت نہیں ہوتا کیونکہ آپ ابھی تک دو نقطوں کو ملانے والی خط مماس کی مساوات معلوم کر رہے ہیں، قطعی نظر اسکے کہ یہ نقطے کتنے قریب ہیں۔ □

سوال نمبر 2 اور 3 میں سوالوں کو مختلف حصوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے، لہذا طلباء کی جماعت اکٹھے کام کرتے ہوئے ان تمام سوالوں کے جوابات حاصل کر لیں گے، اور پھر ان جوابات کو جمع کیا جاسکتا ہے،

سوال 1: سیدھی کلیر کی ایک مساوات بنائیں جو  $y = x^2$  کے خم پہ دو نقطوں کو ملانے والی  $x$  کی قیمت 1 اور 2 ہو۔

سوال 2: اس سوال کے ہر حصے میں  $y = x^2$  کے خم پہ درج ذیل  $x$  محدود کے دو نقطوں سے بننے والی ہم آہنگ کلیروں کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔

- ا. 1 اور 1.001 د. 2 اور 1.999  
 ب. 1 اور 0.9999 ہ. 3 اور 3.000001  
 ج. 2 اور 0.002 و. 3 اور 2.99999

سوال 3: اس سوال کے ہر حصے میں،  $y = x^2$  کے خم پہ درج ذیل نقطے اور اسکے قریبی نقطے کی مدد سے بنی ہم آہنگ لکیر کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔ بتائے گئے نقطے اور اسکے قریبی نقطے کے مابین فاصلے کو تبدیل کر کے اسی عمل کو دہرائیں، اس بات کا خیال رکھیں کہ کچھ نقطے بتائے گئے نقطے کی بائیں طرف بھی ہوں۔

- ا.  $(-11)$  ب.  $(-24)$  ج.  $(10100)$

سوال 4: سوال نمبر 2 اور 3 سے حاصل شدہ تجربے کی بنیاد  $y = x^2$  کے خم پہ موجود کسی بھی نقطے پہ خط مماس کے ڈھلاؤ کا اندازہ کریں۔

سوال 5: جزا

سوال نمبر 2 سے 4 تک استعمال شدہ طریقے کی مدد سے  $y = x^2 + 1$  اور  $y = x^2 - 2$  کے خم پہ موجود کسی بھی نقطے پہ بنی خط مماس کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔ جڑے حصہ ?? میں حاصل شدہ تجربے کی بنیاد پہ  $y = x^2 + c$ ، جبکہ  $c$  ایک حقیقی عدد ہے، کے خم پہ بنی کسی بھی خط مماس کے ڈھلاؤ کو معلوم کرنے کا ایک عالمگیر اصول وضع کریں

خط مماس کا ڈھلاؤ جو کہ  $y = x^2 + c$  کے خم پہ بنی ہو۔

اگر آپ مشتق 6A کے نتائج کو جمع کریں تو آپکو یہ شبہ گزرے گا کہ کسی بھی نقطے پر  $y = x^2$  کے خم پہ بنی خط مماس کا ڈھلاؤ  $x$  محدود کا دو گنا ہے، لب لہاب یہ ہے کہ  $y = x^2$  کے خم کے ڈھلاؤ کا کلیہ  $2x$  ہے

مثال کے طور پر،  $y = x^2$  کے خم پہ ایک نقطے  $(-3, 9)$  کا ڈھلاؤ  $-6 = 2 \times (-3)$  ہے، اسکا مطلب یہ ہوا کہ اس نقطے پہ بنی خط مماس کا ڈھلاؤ  $-6$  ہوگا اور یہ نقطہ  $(-3, 9)$  سے گزرے گی۔ اس خط مماس کی مساوات معلوم کرنے کے لیے آپ ضمیمہ 1.5 کا سہارا لے سکتے ہیں۔ لکیر کی مساوات ہوگی؛

$$y - 9 = -6(x - (-3)),$$

جو کہ:  $y = -6x - 9$  یا  $y = 6x - 18$  ہے۔

نور کریں کہ ڈھلاؤ کا کلیہ خم  $y = x^2 + c$  پر بھی لاگو ہو رہا ہے، جبکہ  $c$  مستقل ہے۔  $x$  پہ بھی ڈھلاؤ  $2x$  ہی ہے۔ اسکی وجہ سادہ سی ہے کہ  $y = x^2 + c$  کا خم بھی  $y = x^2$  کے خم جیسا ہی ہے بس صرف  $y$  محور کی سمت تھوڑا منتقل ہو گیا ہے۔

ایک ثانیے کے لیے یہ مان لیں کہ ان نتائج کو ثابت کیا جاسکتا ہے۔ آپکو ثبوت مل جائے گا حصہ ?? میں۔

خم کے کسی نقطے پر عمودی لکیر۔

وہ لکیر جو خم اور خط مماس کے باہمی ملاپ کے نقطے سے کچھ اس طرح گزرے کہ خط مماس کے ساتھ  $90^\circ$  کا زاویہ بنائے اس نقطے پر خم کی عمودی لکیر کہلاتی ہے۔

$90^\circ$

اگر آپکو کسی ایک نقطے پر خط مماس کا ڈھلاؤ معلوم ہے تو آپ حصہ ?? کے نتیجے سے عمودی خط کا ڈھلاؤ معلوم کر سکتے ہیں۔ اگر خط مماس کا ڈھلاؤ  $m$  ہے تو عمودی لکیر کا ڈھلاؤ  $-\frac{1}{m}$  ہوگا، بشرطیکہ  $m \neq 0$

مثال 6.4:  $y = x^2$  کے خم پہ عمودی لکیر کی ایک مساوات معلوم کریں جبکہ اس نقطے پہ:  $x = -3$  اور  $x = 0$  ہے۔

حصہ ?? میں ہم نے  $(-3)$  پہ خط مماس کا ڈھلاؤ معلوم کیا تھا جو کہ  $-6$  تھا۔ اسی طرح عمودی خط کا ڈھلاؤ  $\frac{1}{6} = -\frac{1}{-6}$  اور یہ بھی  $(-3)$  سے ہی گزرتا ہے۔ لہذا عمودی خط کی مساوات،  $y - 9 = \frac{1}{6}(x - (-3))$  جسکی سادہ شکل  $6y = x + 57$  ہے۔

نقطے  $(0, 0)$  پر خط مماس کا ڈھلاؤ  $0$  ہے۔ لہذا خط مماس  $x$  محور کے مساوی بڑھتی رہے گی۔ اسی وجہ سے عمودی خط  $y$  محور کے مساوی بڑھتی رہے گی۔ اسکی مساوات کچھ یوں ہے۔  $x = 0$  جب عمودی خط  $(0, 0)$  سے گزرتی ہے تو اسکی مساوات ہوگی  $x = 0$  □

اگر آپکے پاس ترسیم کاری کا آلہ موجود ہے تو، آپ  $y = x^2$  کے خم کو،  $y = -6x - 9$  کے خط مماس کو،  $6y = x + 57$  کے عبوری خط کا مشاہدہ کریں، آپ نتائج سے حیران ضرور ہوں گے۔

آپکو یہ بات سمجھنی ہوگی کہ اگر آپ ایک ہی نقطے پر خم، خط مماس اور خط عمودی کشید کریں تو خط عمودی صرف اسی صورت  $90^\circ$  زاویے پر ہوگا جب  $x$  اور  $y$  محور دونوں پہ پیمانہ ایک سا ہو، خط مماس پر کوئی فرق نہیں پڑے گا۔

اس موقع پر آپکو سمجھنا ہوگا کہ آپکو اس نتیجے کو دیگر مساوات کے لئے بھی علمگیر کرنا ہوگا۔ ضمیمہ 6.2 میں آپ نے دیکھا کہ  $y = x^2 + c$  کے خم میں کسی بھی  $x$  پہ موجود خط مماس کا ڈھلاؤ  $2x$  کے برابر ہوگا۔

## مشق 6

سوال نمبر 9 سے 12 میں سوالوں کو مختلف حصوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے، لہذا طلباء کی جماعت اکٹھے کام کرتے ہوئے ان تمام سوالوں کے جوابات حاصل کر لیں گے، اور پھر ان جوابات کو جمع کیا جاسکتا ہے،

درج ذیل  $x$  محدود  $x$  سے  $y = x^2$  کے خم پہ بننے والے خط مماس کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔

ا. 1

ب. 4

ج. 0

د. -2

ه. -0.2

و. -3.5

ز. p

ح. 2p

درج ذیل  $x$  محدود کی مدد سے  $x^2 = y - 2$  کے خم پہ بننے والے خط مماس کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔

ا. 1

ب. 4

ج. 0

د. -2

ه. -0.2

و. -3.5

ز. p

ح. 2p

خم  $x^2 = y + 5$  پہ ایک نقطے  $p$  کا  $y$  محدود 9 ہے۔ اسی نقطے پہ خط مماس کے ڈھلاؤ کی دو ممکن مقداریں معلوم کریں۔

بتائے گئے خم کے دیئے گئے  $x$  یا  $y$  محدود سے معرض وجود میں آئے نقطے پر بنی خط مماس کی مساوات معلوم کریں۔

ا.  $y = x^2$  جبکہ  $x = 2$

ب.  $x = 2 + 2$  جبکہ  $x = -1$

ج.  $x = 2 - 2$  جبکہ  $y = -1$

د.  $x = 2 - 2$  جبکہ  $y = -2$

بتائے گئے خم کے دیئے گئے  $x$  یا  $y$  محدود سے معرض وجود میں آئے نقطے پر بننے عمودی خط کی مساوات معلوم کریں

ا.  $y = x^2$  جبکہ  $x = 1$

ب.  $y = x^2 + 1$  جبکہ  $x = -2$

ج.  $y = x^2 + 1$  جبکہ  $x = 0$

د.  $y = x^2 + c$  جبکہ  $x = \sqrt{c}$

خم  $y = x^2$  کے ایک نقطے  $p$  پر خط مماس کا ڈھلاؤ 3 ہے۔ اس نقطے  $p$  پر عمودی خط کی مساوات بتائیں۔

خم  $y = x^2 + 1$  کے ایک نقطے  $P$  پر عمودی خط کا ڈھلاؤ -1 ہے۔ اس نقطے  $p$  پر خط مماس کی مساوات بتائیں۔ خم  $y = x^2$  میں محدود  $(2, 4)$  پہنچنے والا عمودی خط دوبارہ اس خم سے گزرتا ہے، اس نقطے کی نشاندہی کریں۔

سوال کے ہر حصے میں درج ذیل خم کو بروئے کار لاتے ہوئے  $y = 2x^2$ ،  $y = 3x^2$  اور  $y = -x^2$  بتائے گئے  $x$  محدود سے بننے والے نقطوں سے معرض وجود میں آنے والی ہم آہنگ کلیئر کا ڈھلاؤ معلوم کریں

د. 2 اور 1.999

ا. 1 اور 1.001

ھ. 3 اور 3.000001

ب. 1 اور 0.9999

و. 3 اور 2.99999

ج. 2 اور 0.002

اس سوال کے ہر حصے میں،  $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$  اور  $y = \frac{1}{2}x^2$  کے خم پہ درج ذیل  $x$  محدود سے بننے والے نقطے اور اسکے قریبی نقطے کی مدد سے بنی ہم آہنگ کلیئر کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔ بتائے گئے نقطے اور اسکے قریبی نقطے کے مابین فاصلے کو تبدیل کر کے اسی عمل کو دہرائیں، اس بات کا خیال رکھیں کہ کچھ نقطے بتائے گئے نقطے کی بائیں طرف بھی ہوں۔

ا. -1

ب. -2

ج. 10

سوال نمبر 9 اور 10 سے حاصل شدہ تجربے کی بنیاد  $y = ax^2 + c$  اور  $y = ax^2 + c$  جبکہ ایک حقیقی عدد ہے، کے خم پر موجود کسی بھی نقطے پر خط مماس کے ڈھلاؤ کا اندازہ کریں۔

سوال 6: حصہ سوال نمبر 9 سے 11 تک استعمال شدہ طریقے کی مدد سے  $y = x^2 + 3x$  اور  $y = x^2 - 2x$  کے خم پر موجود کسی بھی نقطے پر بنی خط مماس کا ڈھلاؤ معلوم کرنے کا طریقہ وضع کریں۔ حصہ جے حصہ (i) میں حاصل شدہ تجربے کی بنیاد پر  $y = x^2 + bx$  جبکہ  $b$  ایک حقیقی عدد ہے، کے خم پر بنی کسی بھی خط مماس کے ڈھلاؤ کو معلوم کرنے کا ایک عالمگیر اصول وضع کریں

دو درجی ترسیم کے ڈھلاؤ کا کلیہ؛ سبق؟؟ میں عام دو درجی ترسیم کا تذکرہ کیا گیا، جسکی مساوات کچھ ایسی  $y = ax^2 + bx + c$  ہے، جبکہ،  $a$ ،  $b$  اور  $c$  مستقل ہیں۔ ایسے خم کی خط مماس کے ڈھلاؤ کے بارے میں آپکا کیا خیال ہے؟

مشق؟؟ کے سوالات کے حل سے آپکو اندازہ ہوا ہوگا  $y = ax^2$  کے ڈھلاؤ کا کلیہ  $2ax$  ہے۔ اسکا مطلب، مثال کے طور پر،  $y = 3x^2$  کے خم کا ڈھلاؤ  $x$  کی ہر مقدار پر تین گناہ زیادہ ہوگا اگر اس کے مقابل خم  $y = x^2$  کا ہو۔ آپنے اس بات کا بھی مشاہدہ کیا ہوگا کہ  $y = x^2 + bx$  کے ڈھلاؤ کا کلیہ  $2x + b$  ہے، لب لباب تمام کلام کا یہ ہے کہ  $y = x^2 + 4x$  کے ڈھلاؤ کا کلیہ  $2x + 4$  ہے۔ جو کہ  $4x$  اور  $x^2$  کے ڈھلاؤ کے کلیوں کے جمع کے برابر ہے۔

آپکو اس بات کا پہلے سے ہی علم ہے کہ  $y = x^2$  اور  $y = x^2 + c$  دونوں کے ڈھلاؤ کا کلیہ ایک ہی ہے،  $c$  کی مقدار جتنی بھی ہو اس سے فرق نہیں پڑتا۔

لہذا اس بات میں کوئی بعید نہیں ہے کہ؛

مساوات  $y = ax^2 + bx + c$  کے خم کے ڈھلاؤ کا کلیہ  $2ax + b$  ہے،

یہ نتیجہ اس طرح بھی اہم ہے کہ ہم ایک ایسے تفاعل کا ڈھلاؤ معلوم کر سکتے ہیں جو کی حصوں پر مشتمل ہو، اور ایسا کرنے کے لیے ہم ان تمام حصوں کے ڈھلاؤ کو باہمی طور پر جمع کر دیتے ہیں۔ آپ ایک ایسے تفاعل کا ڈھلاؤ بھی معلوم کر سکتے ہیں جسکے ساتھ کوئی مستقل عدد ضرب کھا رہا ہو، اور ایسا کرنے کے لیے ہمیں اس تفاعل کے ڈھلاؤ کو بھی اسے عدد سے ضرب دینی ہوگی۔

حصہ؟؟ میں ہم اس بات کا مشاہدہ کریں گے کہ ہم ان نتائج کو ثابت کر سکتے ہیں، وقت ضائع نہ کرتے ہوئے یہاں ان کے استعمال کی چند مثالیں دی گئی ہیں، لیکن اس سے قبل ہمیں علامت نویسی کو دیکھنا ہوگا۔

مان لیں کے ایک خم کی مساوات  $y = f(x)$  ہے، اسکے ڈھلاؤ کا کلیہ  $f'(x)$  ہوگا، اور اسکو  $f$  ڈیٹش  $x$  پڑھا جائے گا۔

کسی بھی خم کے خط مماس کے ڈھلاؤ کو معلوم کرنا تفریق کاری کہلاتا ہے، اور جب ہم اس عمل کو انجام دے رہے ہوتے ہیں تو دراصل ہم تفریق کاری کر رہے ہوتے ہیں۔

جیسے  $f(2)$  سے مراد وہ مقدار ہے جب  $x = 2$  ہو، اسی طرح  $f^{-1}(2)$  اس ڈھلاؤ کے لیے استعمال ہوتا ہے جب  $y = f(x)$  اور  $x = 2$  ہو۔ لہذا (ڈیٹس) جو  $f^{-1}(x)$  پہ بنی ہے ہمیں تفریق کا بتاتی ہے، اس علامت کو دیکھتے ہی آپ جس  $x$  پہ ڈھلاؤ معلوم کرنا چاہتے اسکے  $x$  کے متبادل سے  $x$  کو بدل دیتے ہیں۔

مقدار  $f^{-1}(2)$  کو تقابل  $f(x)$  کا تفریق کہا جائے گا جب  $x = 2$  ہوگا۔

پس جب بھی ہمیں مساوات  $y=f(x)$  کے خم کا  $x = 2$  پہ ڈھلاؤ معلوم کرنا ہو، ہم  $f^{-1}(x)$  معلوم کریں گے اور پھر  $x$  کو اسکے متبادل مقدار یعنی یہاں 2 سے بدل دیں گے، نتیجے کے طور پر ہمیں  $f^{-1}(2)$  ملے گا۔

مثال 6.5: مساوات  $3x^2 - 2x + 5$  کو تفریق کریں۔ خم  $3x^2 - 2x + 5$  کے خط مماس اور عمودی خط کے ڈھلاؤ کی مساوات بنائیں، جبکہ اس نقطے پر  $x = 1$  ہو۔

مان لیں کہ  $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ ، اس تقابل کے مطابق  $a = 3$ ،  $b = -2$  اور  $c = 5$  ہے۔ اس تقابل کا اگر تفریق معلوم کریں،  $f^{-1}(x) = 2 \times 3 \times x - 2 = 5x - 2$

وہ نقطہ جس پہ  $x = 1$  اسکا  $y$  محدود برابر ہوگا  $3 - 2 + 5 = 6$

جب  $x = 1$  ہوگا تو خط مماس کا ڈھلاؤ ہوگا،  $f^{-1}(1) = 6 \times 1 - 2 = 4$

اسی لیے خط مماس کی مساوات کچھ یوں بنے گی،  $y - 6 = 4(x - 1)$  یا  $y = 4x + 2$

عمودی خط، خط مماس کے ساتھ عمودی ہوتا ہے اس لیے اسکا ڈھلاؤ  $-\frac{1}{4}$  ہوگا، اسی لیے عمودی خط کے ڈھلاؤ کی مساوات  $y - 6 = -\frac{1}{4}(x - 1)$  ہوگی جسکی سادہ شکل کچھ یوں  $x + 4y = 25$  ہے۔

□

مثال 6.6: درج ذیل تقابل کا تفریق معلوم کریں۔

$$f(x) = 2(x^2 - 3x - 2), \text{ ا.}$$

$$g(x) = (x + 2)(2x - 3) \text{ ب.}$$

طریقہ اولیٰ کو سین کو ضرب دینا  

$$f'(x) = 4x - 6 \text{ تاہم } f(x) = 2(x^2 - 3x - 2) = 2x^2 - 6x - 4$$
 طریقہ دوم

اگر بتایا گیا تفاعل کسی مستقل عدد کے ساتھ ضرب کھا رہا ہو تو، اس تفاعل کا ڈھلاؤ بھی اسی عدد کا مضرب ہوگا۔ اس مثال میں وہ عدد 2 ہے،  

$$f'(x) = 2(2x - 3)$$
 اسی لیے

سوال کے دوسرے حصے  $g(x) = (x + 2)(2x - 3)$  کے لیے پہلے حصے میں بتایا گیا طریقہ دوم کارآمد نہیں ہوگا۔ کیونکہ مضرب ایک مستقل عدد نہیں ہے، لیکن آپ کو سین کو حل کر کے ایک دو درجی مساوات حاصل کر سکتے ہیں جسے بعد میں متفرق کیا جاسکتا ہے،  

$$g'(x) = 4x + 1$$
 اسی لیے  $g(x) = (x + 2)(2x - 3) = 2x^2 + x - 6$  جیسے:  
 اگر آپ اپنی یادداشت میں آنے والے اصولوں کے تحت ایک تفاعل کا تفرق معلوم کرنے میں ناکام ہو رہے ہیں تو آپ اس تفاعل کو کسی بھی سادہ شکل میں ڈھال کے اس کا تفرق معلوم کر سکتے ہیں۔  
 □

مثال 6.7: مساوات  $y = x^2 - 4x + 2$  کے خم پے ایک  $x$  - محور کے متوازی بننے خط مماس کی مساوات معلوم کریں۔  
 حصہ ?? میں ہم سیکھ چکے ہیں کہ عددی  $x$  - محور کے متوازی لکیر کا ڈھلاؤ صفر ہوتا ہے۔ فرض کریں کہ  $f(x) = x^2 - 4x + 2$  اور یوں  

$$-f'(x) = 2x - 4$$

$x$  معلوم کرنے کے لیے کہ جب ڈھلاؤ صفر ہوگا ہمیں مساوات  $2x - 4 = 0$  کو حل کرنا ہوگا۔ اور اس سے ہمیں  $x = 2$  حاصل ہوگا۔  
 جب  $x = 2$  تو  $y = 2^2 - 4 \times 2 + 2 = -2$  ہوگا۔

حصہ ?? میں ہم نے دیکھا کہ عددی  $x$  - محور کے متوازی لکیر کی مساوات  $y = c$  جیسی ہوتی ہے، تاہم ہمارے خط مماس کی مساوات بھی  

$$y = -2$$
 ہے۔  
 □

چار سوالات 13 تا 16 میں سوالات کے حصوں کو طلباء کے مابین بانٹا جاسکتا ہے، تاکم طلباء جو کہ ایک ساتھ کام کر رہے ہیں انکے پاس تمام سوالات کے حل موجود ہوں۔ سوال 7: درج ذیل تمام تفاعل کے لیے ڈھلاؤ کلیہ معلوم کریں۔

ا.  $x^2$  ج.  $4x^2$  ہ.  $2 - 3x$  ز.  $2 + 4x - 3x^2$   
 ب.  $x^2 - x$  د.  $3x^2 - 2x$  و.  $x - 2 - 2x^2$  ح.  $\sqrt{2}x - \sqrt{3}x^2$

سوال 8: درج ذیل میں دیے گئے تمام تفاعل  $f(x)$  کے متفرق  $f'(x)$  معلوم کریں۔ کچھ حصوں میں آپ کو تفاعل کی ترتیب بدلنا ہو گی قبل انکا متفرق معلوم کرنے کے۔



ا.  $3x - 1$  ج. 4 ہ.  $x^2 - 2x^2$  ز.  $2x(1 - x)$   
 ب.  $2 - 3x^2$  د.  $1 + 2x + 3x^2$  و.  $3(1 - 2x - x^2)$  ح.  $x(2x + 1) - 1$

سوال 9: درج ذیل تمام تقاطع  $f(x)$  کا  $x = -3$  پر تفرق معلوم کریں

ا.  $-x^2$  ج.  $x^2 + 3x$  ہ.  $2x^2 + 4x - 1$  ز.  $-x(2 + x)$   
 ب.  $3x$  د.  $-x^2$  و.  $-(3 - x^2)$  ح.  $(x - 2)(2x - 1)$

سوال 10: درج ذیل تمام تقاطع  $f(x)$  کے لیے  $x$  کی ایسی قیمت معلوم کریں کہ تفرق  $f'(x)$  کی بتائی ہوئی قیمت آجائے۔

ا.  $2x^2$  ج.  $3x + 0$  ہ.  $1 + 2 + 2 + 3x + x^2$  ز.  $10$   
 ب.  $-1$  د.  $x^2 + 4x - 1$  و.  $(x - 2)(x - 1)$  ح.  $(3x - 2)$

سوال 11: بتائی گئی مساوات کے خم پے ایک نقطے کا  $x$  - محدود بتایا گیا ہے۔ اس نقطے پر بننے والی خط مماس کی مساوات معلوم کریں۔

ا.  $y = x^2$  ج.  $x = -1$  ہ.  $y = 1 - x^2$  ز.  $x = -3$   
 ب.  $y = 3x^2 - 2x - 1$  د.  $x = 1$  و.  $y = x(2 - x)$  ح.  $x = 1$   
 ج.  $y = x^2 - 2x + 3$  د.  $x = 2$  و.  $y = (x - 1)^2$  ح.  $x = 1$

سوال 12: بتائی گئی مساوات کے خم پے ایک نقطے کا  $x$  - محدود بتایا گیا ہے۔ اس نقطے پر بننے والے عمودی خط کی مساوات معلوم کریں۔

ا.  $y = -x^2$  ج.  $x = 1$  ہ.  $y = 1 - x^2$  ز.  $x = 0$   
 ب.  $y = 3x^2 - 2x - 1$  د.  $x = 1$  و.  $y = 2(2 + x + x^2)$  ح.  $x = -1$   
 ج.  $y = 1 - 2x^2$  د.  $x = -2$  و.  $y = (2x - 1)^2$  ح.  $x = \frac{1}{2}$

سوال 13: خم  $y = x^2$  پے بننے والی خط مماس، جو کہ مساوات  $y = x$  کے متوازی ہے، کی مساوات معلوم کریں۔

سوال 14: خم  $y = x^2$  پر بننے والی خط مماس، جو کہ  $x$  - محور کے متوازی ہے، کی مساوات معلوم کریں۔

سوال 15: خم  $y = x^2 - 2x$  پر بننے والی خط مماس، جو کہ مساوات  $y = x - 1$  کے عمودی ہے، کی مساوات معلوم کریں۔

سوال 16: خم  $y = 3x^2 - 2x - 1$  پر بننے والے عمودی خط، جو کہ مساوات  $y = x - 3$  کے متوازی ہے، کی مساوات معلوم کریں۔

سوال 17: خم  $y = (x - 1)^2$  پر بننے والے عمودی خط، جو کہ  $y$  - محور کے متوازی ہے، کی مساوات معلوم کریں۔

سوال 18: خم  $y = 2x^2 + 3x + 4$  پر بننے والے عمودی خط، جو کہ مساوات  $y = 7x - 5$  کے عمودی ہے، کی مساوات معلوم کریں۔

سوال 19: سوال ?? اور ?? میں استعمال کیے گئے طریقے کو استعمال کرتے ہوئے مساوات  $y = x^3$  اور  $y = x^4$  کے ڈھلاؤ کے کئے معلوم کریں۔

سوال 20: اس سوال کے ہر حصے میں، مساوات  $y = \sqrt{x}$  کے خم کے دو نقطوں کو جوڑنے والی ہم آہنگ کلیئر کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔ دونوں نقاط کے  $x$  - محدود بتائے گئے ہیں۔

ا. 1 اور 1.001	ج. 4 اور 4.002	د. 0.25 اور 0.250001
ب. 1 اور 0.9999	د. 4 اور 3.999	د. 0.25 اور 0.249999

سوال 21: اس سوال کے ہر حصے میں خم  $y = \frac{1}{x}$  پر بننے والی دو نقاط کو جوڑنے والی ہم آہنگ کلیئر کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔ یاد رہے ایک نقطے کے محدود ذیل میں بتائے گئے ہیں اور دوسرا نقطہ آپ کوئی بھی چن لیں لیکن وہ بتائے گئے نقطے کے قریب ترین ہو۔ اب چنے گئے نقطے اور بتائے گئے نقطے کا فاصلہ تبدیل کر کے ڈھلاؤ معلوم کریں، اور اس بات کا خیال رکھیں کہ آپ کچھ نقاط بتائے گئے نقطے کے دائیں طرف چنیں جبکہ کچھ نقاط بائیں طرف۔

ا.  $(-1, -1)$       ب.  $(-2, -0.5)$       ج.  $(10, 0.1)$

16-  $y = \sqrt{x}$  اور  $y = \frac{1}{x}$  کے ترسیمات پر کسی بھی مقام پر خط مماس کے ڈھلوان کے بارے میں اندازہ لگانے کے لئے سوالات؟؟ اور؟؟ کے نتائج کا استعمال کریں

## 6.2 تفریق کے کچھ اصول

اگر  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ہے، پھر  $f'(x) = 2ax + b$  ہو گا۔

اگر آپ دو تفاعل کو جمع کرتے ہیں تو پھر تفریق کی جمع تفریق کی جمع ہو گی؛ جیسا کہ اگر  $f(x) = g(x) + h(x)$  ہے تو پھر  $f'(x) = g'(x) + h'(x)$  ہو گا۔

اگر آپ تفاعل کو کسی، مستقل سے مضرب کرتے ہیں تو آپ کو تفریق کو بھی اسی مستقل سے مضرب کرنا پڑے گا۔ جیسا کہ اگر  $f(x) = ag(x)$  ہے تو  $f'(x) = ag'(x)$  ہو گا۔

مشق؟؟ کے سوال نمبر؟؟ سے آپکو پتہ لگ جائے گا کہ  $f(x) = x^3$  کا تفریق  $f'(x) = 3x^2$  ہے اور  $f(x) = x^4$  کا تفریق  $f'(x) = 4x^3$  ہے۔ آپ پہلے سے جانتے ہیں کہ اگر  $f(x) = x^2$  ہے تو  $f'(x) = 2x$  یا  $f'(x) = 2x^1$  ہو گا۔

اگر  $f(x) = x^n$ ، (جہاں  $n$  ایک مثبت عدد صحیح ہے)، تو  $f'(x) = nx^{n-1}$  ہو گا۔

مثال 6.8:  $y = x^3 - 3x^2 - 4x + 2$  کی ترسیم پر نقطہ کے نقاط (coordinates) معلوم کریں جس پر ڈھلوان 5 ہے

فرض کریں کہ  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 2$ ، تو پھر  $f'(x) = 3x^2 - 6x - 4$  ہو گا۔ جب  $f'(x) = 5$  تو ڈھلوان بھی 5 ہے، اس طرح جب  $3x^2 - 6x - 4 = 5$  ہے تو یہ دو درجی الجبرائی مساوات  $3x^2 - 6x - 9 = 0$  دیتا ہے جو تسہیل ہو کہ  $x^2 - 2x - 3 = 0$  بن جاتی ہے

جز و ضربی کی صورت میں  $(x+1)(x-3) = 0$  ہے تو اس طرح  $x = -1$  یا  $x = 3$  ہو گا۔

ہم پہلے کہ نقطہ معلوم کرنے کے لیے ان اقدار کو  $y = x^3 - 3x^2 - 4x + 2$  میں متبادل کرنا ہو ہے اس طرح آپ کو  $y = 3^3 - 3 \times 3^2 - 4 \times (-1) + 2 = -1 - 3 + 4 + 2 = 2$  اور  $y = (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 - 4 \times 3 + 2 = -1 - 3 - 12 + 2 = -10$  حاصل ہو گا۔

□

اس لئے مطلوبہ نکات کے ہم پہلے  $(-1, 2)$  اور  $(3, -10)$  ہیں

مشق؟؟ کے سوال نمبر؟؟ سے؟؟ تک دو مزید اصول تجویز کرتے ہیں۔ اگر  $f(x) = \sqrt{x}$  تو  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  ہو گا اگر  $f(x) = x^{-1}$  تو  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$  ہو گا۔

اشاریہ اشارے میں، یہ نتائج اس طرح شکل اختیار کرتے ہیں کہ: اگر  $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$  تو  $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$  ہو گا اگر  $f(x) = x^{-1}$  تو  $f'(x) = -x^{-2} = (-1)x^{-2}$  ہو گا،

یہ مندرجہ ذیل اصول تجویز کرتا ہے

$$\text{اگر } f(x) = x^n \text{ (جہاں } n \text{ ایک ناطق عدد ہے)، تو } f'(x) = nx^{n-1} \text{ ہو گا۔}$$

مثال 6.9:

$y = 2\sqrt{x}$  کی ترسیم پر بننے والے خط مماس کی مساوات معلوم کریں جہاں  $x = 9$  ہو

فرض کریں کہ  $f(x) = 2\sqrt{x} = 2x^{\frac{1}{2}}$  ہے

تو، خانے میں دیے گئے نتائج کو استعمال کرتے ہوئے

$$f'(x) = 2 \times \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}}$$

ہو گا

$$\text{جب } x = 9 \text{ ہے، تو } f'(9) = 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

جب مماس نقطہ  $(9, 2\sqrt{9}) = (9, 6)$  سے گزرے گی، تو یہ مساوات بنے گی

$$y - 6 = \frac{1}{3}(x - 9)$$

یا

$$3y - x = 9$$

□

مثال 6.10:

دیے گئے ہر تفاعل کو تفریق کریں

$$۱. x(1+x^2)$$

$$۲. (1+\sqrt{x})^2$$

$$۳. \frac{x^2+x+1}{x}$$

۱۔ فرض کریں کہ  $f(x) = x(1+x^2)$  ہے، پھر  $f(x) = x + x^3$  ہو گا، اور  $f'(x) = 1 + 3x^2$  ہو گا

۲۔ فرض کریں کہ  $f(x) = (1+\sqrt{x})^2$  ہے، پھر  $f(x) = 1 + 2x^{\frac{1}{2}} + x$  ہو گا، اور  $f'(x) = 2 \times \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 1 = x^{-\frac{1}{2}} + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1$  ہو گا۔

۳۔ فرض کریں کہ  $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x}$  ہے، پھر تقسیم کے لحاظ سے  $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$  ہو گا، اور  $f'(x) = 1 + (-1)x^{-2} = 1 - \frac{1}{x^2}$  ہو گا۔  
□

مثال 6.11:

نقطہ  $(8, 2)$  پر  $y = \sqrt[3]{x}$  سے بننے والے خط مماس کی مساوات معلوم کریں۔

اشاریہ اشارہ میں  $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$  ہے، تو اصول کے مطابق اس کا تفریق  $\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}$  یا  $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$  ہو گا۔

جو اضافی اشارے میں اس طرح لکھا جائے گا  $-\frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}$ ۔ نقطہ  $(8, 2)$  پر، یہ اس طرح لکھا جائے گا  $-\frac{1}{3(\sqrt[3]{8})^2} = -\frac{1}{12}$ ۔

اس طرح خط مماس کی مساوات  $y - 2 = -\frac{1}{12}(x - 8)$  یا  $y - 2 = 0$  یا  $x - 12y + 16 = 0$  ہے  
□

اس حصے میں بیان کردہ نتائج کو اس کتاب کے باقی حصے کے لئے سمجھا جاسکتا ہے۔ ان میں سے کچھ حصہ ?? اور ?? میں ثابت ہیں، لیکن اگر آپ چاہتے ہیں تو آپ ان آخری حصوں کو چھوڑ سکتے ہیں اور، مشق ?? کے ذریعے کام کرنے کے بعد، براہ راست متفرق مشق ?? میں جاسکتے ہیں۔

سوال 1: مندرجہ ذیل تفاعل کو تفریق کریں۔

$$۱. x^3 + 2x^2$$

$$۲. 1 - 2x^3 + 3x^2$$

$$۳. x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

$$د. \quad 2x^3 - 3x^2 + x$$

$$ه. \quad 2x^2(1 - 3x^2)$$

$$د. \quad (1 - x)(1 + x + x^2)$$

سوال 2: مندرجہ ذیل میں دیئے گئے ہر تفاعل  $f(x)$  کے لیے  $f'(-2)$  معلوم کریں۔

$$ا. \quad 2x - x^3$$

$$ب. \quad 2x - x^2$$

$$ج. \quad 1 - 2x - 3x^2 + 4x^3$$

$$د. \quad 2 - x$$

$$ه. \quad x^2(1 + x)$$

$$د. \quad (1 + x)(1 - x + x^2)$$

سوال 3: مندرجہ ذیل میں دیئے گئے ہر تفاعل  $f(x)$  کے لیے  $x$  کی رقم معلوم کریں، اس طرح کے  $f'(x)$  دیئے گئے عدد کے برابر ہو۔

$$ا. \quad 12 \quad x^3$$

$$ب. \quad 8 \quad x^3 - x^2$$

$$ج. \quad 108 \quad 3x - 3x^2 + x^3$$

$$د. \quad -1 \quad x^3 - 3x^2 + 2x$$

$$ه. \quad 0 \quad x(1 + x)^2$$

$$د. \quad 2 \quad x(1 - x)(1 + x)$$

سوال 4: مندرجہ ذیل میں دیئے گئے تفاعل کو تفریق کریں۔

$$1. 2\sqrt{x}$$

$$2. (1 + \sqrt{x})^2$$

$$3. x - \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

$$4. x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$$

$$5. x - \frac{1}{x}$$

$$6. \frac{x^3 + x^2 + 1}{x}$$

$$7. \frac{(x+1)(x+2)}{x}$$

$$8. \left(\frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}\right)$$

سوال 5: مساوات  $y = x^3 + x$  کی ترسیم پر بننے والے خط مماس کی مساوات معلوم کریں، ایسے نقطہ پہ جہاں  $x = -1$  ہو

سوال 6: مساوات  $y = 4x - x^3$  کے ساتھ خط منحنی کی ایک خط مماس میں سے ایک مساوات  $y = x - 2$  کی لکیر ہے۔ دوسرے خط مماس کی مساوات تلاش کریں جو  $y = x - 2$  کے متوازی ہو۔

سوال 7: مساوات  $y = \sqrt{x}$  کے ساتھ خط منحنی پہ دیئے ہوئے نقطہ  $(4, 2)$  پر خط مماس کی مساوات تلاش کریں

سوال 8: مساوات  $y = \frac{1}{x}$  کے ساتھ خط منحنی پہ دیئے ہوئے نقطہ  $(2, \frac{1}{2})$  پر خط مماس کی مساوات تلاش کریں

سوال 9:  $y = x + \frac{1}{x}$  کی ترسیم پر عمودی مساوات نقطہ  $(1, 2)$  پر معلوم کریں

سوال 10: مساوات  $y = x^2 - 2x$  اور  $y = x^3 - 3x^2 - 2x$  کے ترسیمات، دونوں مبدا میں سے گزر رہیں ہیں، ثابت کریں کہ یہ ایک ہی خط مماس کا اشتراک کریں گے۔

سوال 11: ایک ترسیم یا خم کی مساوات  $y = x^3 - 3x^2 - 2x - 6$  ہے، اس خم پر بننے والی خط مماس کی مساوات معلوم کریں اس نقطے پر کہ جہاں یہ عمودی محور کو کاٹتا ہے۔

سوال 12: ایک ترسیم یا خم کی مساوات  $y = x(x-a)(x+a)$  ہے جس میں  $a$  مستقل ہے، اس خم پر بننے والی خط مماس کی مساوات معلوم کریں اس نقطے پر کہ جہاں یہ عمودی محور کو کاٹتا ہے۔

سوال 13: اس مشترک نقطے کے محدود معلوم کریں جو کہ ترسیم  $y = x^2$  کے خط مماس اور ایک خط مستقیم  $y = x + 2$  کے درمیان ہے۔

سوال 14: دیئے گئے تمام تفاعل کے متفرق معلوم کریں۔ جس طرح سے سوال دیا گیا ہے ویسی ہی شکل میں جواب دیں لیکن جذر اور منفی علامت کے بغیر۔

$$\begin{array}{lll}
\text{ا. } \frac{1}{4x} & \text{و. } \frac{4}{\sqrt{x}} & \text{ی. } \frac{1}{\sqrt[3]{8x}} \\
\text{ب. } \frac{3}{x^2} & \text{ز. } \frac{3}{x} + \frac{1}{3x^3} & \text{یا. } \frac{x-2}{x^2} \\
\text{ج. } x^0 & \text{ح. } \sqrt{16x^5} & \\
\text{د. } \sqrt[4]{3} & & \\
\text{ه. } 6\sqrt[3]{x} & \text{ط. } x\sqrt{x} & \text{یب. } \frac{1+x}{\sqrt[4]{x}}
\end{array}$$

سوال 15: ترسیم  $y = \sqrt[3]{x^2}$  کی خط مماس اور عمودی خط کی مساوات معلوم کریں نقطہ  $(8, 4)$  پر۔

سوال 16: ترسیم  $y = \frac{1}{x^2}$  کے نقطہ  $(\frac{1}{2}, 4)$  پر بنی خط مماس محور کو نقطہ  $P$  اور  $Q$  پر چھوتی ہے، ان دونوں نقطوں کے محدود معلوم کریں۔

### 6.3 دو درجی ترسیم کے ڈھلاؤ کا کلیہ

اگر آپ چاہیں تو آپ ان آخری کے حصوں کو چھوڑ کر سیدھا آخری مشتق پے جا سکتے ہیں۔ اس حصے کا مقصد صرف اتنا ہے کہ آپ دو درجی ترسیم کا ڈھلاؤ معلوم کر سکیں وہ بھی اندازے لگائے بغیر۔

مثال 6.12: ترسیم  $y = x^2$  کے راگ (کارڈ) کا ڈھلاؤ معلوم کریں، جس کے افقی محدود  $P$  اور  $p + h$  ہیں۔ اس نقطہ کے عمودی محدود ہوں گے  $p^2$  اور  $(p + h)^2$ ۔

$$\delta x = h, \delta y = (p + h)^2 - p^2 = p^2 + 2ph + h^2 - p^2 = 2ph + h^2 = h(2p + h)$$

اور یوں ڈھلاؤ ہوگا:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{h(2p + h)}{h} = 2p + h$$

اس بات پر غور کریں کے مثالوں ?? سے ?? کے ڈھلاؤ اس جواب کے خاص معاملے تھے۔ جیسا کہ ٹیبل ?? میں دکھایا بھی گیا ہے۔ □

الہرا کے استعمال سے آپ کو یہ فائدہ ہوگا کہ ڈھلاؤ معلوم کرتے وقت آپ کو ہر بار شروع سے کام نہیں کرنا پڑے گا۔ ذیل میں دیا گیا ٹیبل  $p = 0.4$  کے لیے چند مزید جوابات، جن میں چند منفی اور چند مثبت ہیں، دکھاتا ہے جب  $h$  کی قیمت مسلسل تبدیل کی جاتی ہے۔



آگر آپ کے پاس ایک تریسی اعداد ہے، یا کوئی کمپوٹر کا ایسا پروگرام جو کہ ترسیم بنا سکتا ہو تو یہ نہایت دلچسپ ہوگا مساوات  $y = x^2$  کا ترسیم بنایا جائے اور اس ترسیم کے دو نقاط  $(0.4, 0.16)$  کو ملانے والی راگ کا ڈھلاؤ دیکھا جائے۔ آپ مشاہدہ کریں گے کہ جب  $x$  صفر کے بہت قریب ہوگا، یعنی راگ کے دونوں کناروں کے درمیان کا فاصلہ بہت کم ہوگا، تو یہ تقریباً ناممکن سا ہو جائے گا خط مماس اور راگ کو الگ الگ سے پہچاننا۔ اور آپ ٹیبل  $??$  اور  $??$  میں ان راگوں کے لیے دیکھ سکتے ہیں کہ ان کا ڈھلاؤ  $0.8$  کے کس قدر قریب ہے۔

حقیقت میں  $h$  کو صفر کے قریب لانے سے آپ اس راگ کا ڈھلاؤ  $0.8$  کت قریب لاسکتے ہیں جتنا آپ چاہیں۔ مثال  $??$  اس راگ کا ڈھلاؤ  $(0.8 + h)$  تھا، یعنی اگر آپ چاہتے ہیں کہ نقاط  $(0.4, 0.16)$  سے گزرنے والی خط مماس کا ڈھلاؤ  $0.799999$  یا  $0.800001$  ہو تو آپ کو  $h$  کی قیمت  $-0.000001$  اور  $+0.000001$  کے درمیان کہیں رکھنی پڑے گی۔ ایک ایسی قیمت جو آپ  $h$  کے لیے نہیں لے سکتے وہ صفر خود ہی ہے۔ تاہم آپ کہہ سکتے ہیں کہ؛

حد میں جیسے جیسے  $h$  صفر کے قریب تر ہوتا جاتا ہے، راگ کا ڈھلاؤ  $0.8$  کے قریب ترین ہوتا جاتا ہے۔

اس بیان کو لکھنے کا عام اور زیادہ مقبول طریقہ یہ ہے کہ؛

$$\lim_{h \rightarrow 0} = \lim_{h \rightarrow 0} (0.8 + h) = 0.8$$

$p$  کی قیمت  $0.4$  لینے سے کچھ بھی خاص نہیں ہوگا، اور آپ  $p$  کی کسی بھی اور قیمت کے لیے بھی یہی رائے رکھیں گے۔ مثال  $??$  یہ بتاتی ہے کہ راگ کا ڈھلاؤ جو کہ جوڑ رہی ہے  $(p, p^2)$  کو  $(p + h, (p + h)^2)$  سے،  $2p + h$  ہوگا۔ اگر آپ  $p$  کی قیمت کو مستقل کر دیں اور  $h$  کی قیمتوں کو مسلسل تبدیل کریں تو جیسا ہم نے اوپر بیان کیا تھا،

$$\lim_{h \rightarrow 0} \square \text{ راگ کا ڈھلاؤ } = \lim_{h \rightarrow 0} (2p + h) = 2p$$

اور اسی ترسیم  $y = x^2$  کے لیے نقطہ  $(p, p^2)$  پر راگ کا ڈھلاؤ  $2p$  ہے۔

اس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ؛

ترسیم  $y = x^2$  کے لیے ڈھلاؤ کا کلیہ  $2x$  ہے۔

کسی بھی ترسیم کے لیے یہی طریقہ لاگو ہوگا اگر آپ کو اسکی مساوات کا پتہ ہے۔

شکل  $??$  میں ایک ترسیم دکھایا گیا ہے جسکی مساوات  $y = f(x)$  ہے، یعنی یہ کسی بھی تفاعل کا ترسیم ہے۔ فرض کریں کہ آپ کو نقطہ  $p$  پر خط مماس کے ڈھلاؤ کی قیمت معلوم کرنی ہے جسکے محدد  $(p, f(p))$  ہیں۔ اس نقطے کو کسی بھی دوسرے نقطے  $(p + h, f(p + h))$  سے ملانے والی راگ کے لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ؛

$$\delta x = h, \delta y = f(p + h) - f(p)$$

یعنی اسکا ڈھلاؤ ہوگا:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

اور اب ذرا  $h$  کی قیمت تبدیل کریں تاکہ نقطہ  $Q$  ترسیم میں کسی اور جگہ چلا جائے، تب اگر  $Q$  نقطہ  $P$  کے قریب ہوگا یعنی  $h$  صفر کے قریب ہوگا، تو نقطہ  $P$  پر راگ کا ڈھلاؤ اسی نقطے پر بننے والی خط مماس کے ڈھلاؤ کے قریب ترین ہوگا، جبکہ  $x = p$ ، حد میں جب  $h$  صفر کی طرف بڑھتا ہے تو یہ بیانیہ  $f'(p)$  کی طرف بڑھتا ہے۔

اگر خم، ترسیم  $y = f(x)$  کا نقطہ  $(p, f(p))$  پر خط مماس ہے تو، اسکا ڈھلاؤ

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

ہوگا۔

اس قیمت کو تقابل  $f(x)$  کا تفرق بھی کہا جاتا ہے اور علامت  $f'(p)$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اور چونکہ  $P$ ،  $x$  کئی کسی بھی قیمت کے لیے درست ہوگی تو ہم لکھ سکتے ہیں کہ،

$$\text{تقابل } f(x) \text{ کا } x \text{ کی کسی بھی قیمت پر تفرق } f'(p) \text{ ہوگا، } \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

مثال 6.13: تقابل  $f(x) = 4x - 5$  کا تفرق معلوم کریں۔

$$\text{تفرق کی تعریف کو مد نظر رکھتے ہوئے، } \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

کسر کی اوپری سطر کے مطابق:

$$f(x+h) - f(x) = (4(x+h) - 5) - (4x - 5) = 4x + 4h - 5 - 4x + 5 = 4h$$

اسی لیے:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{4h}{h} = 4$$

اور پھر حد میں جب  $h$  صفر کے قریب تر ہوتا جاتا ہے،

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 4 = 4$$

یقیناً آپ کو اندازہ تھا کہ نتیجہ کیا ہوگا، پہلے ہی سبق میں ہم نے سیکھا تھا کہ  $f(x) = 4x - 5$  کی ترسیم ایک خط مستقیم ہے جسکا ڈھلاؤ 4 ہے۔ تو یہ کوئی اچھے کی بات نہیں ہوئی چاہیے کہ مساوات  $f(x) = 4x - 5$  کا تفرق 4 ہے۔

□ اسی طرح سے تقابل  $f(x) = mx + c$  جو کہ ایک سیدھی لکیر ہے کا تفرق  $m$  ہوگا۔

مثال 6.14: تقابل  $f(x) = 3x^2$  کا تفرق معلوم کریں۔ اس تقابل کے لیے  $f(x+h) = 3(x+h)^2 = 3x^2 + 6xh + 3h^2$  اسی لیے

$$f(x+h) - f(x) = (3x^2 + 6xh + 3h^2) - 3x^2 = 6xh + 3h^2 = h(6x + 3h)$$

اور  $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{h(6x+3h)}{h} = 6x + 3h$  اور پھر حد میں جب  $h$  صفر کے قریب تر ہوتا جاتا ہے،

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h) = 6x$$

غور کریں کہ تقابل  $f(x) = x^2$  کا تفرق  $2x$  ہے، اور تقابل  $f(x) = 3x^2$  کا تفرق  $6x$  ہے، جو کہ  $3 \times 2x$  ہے۔ یہ حصہ ?? میں بتائے گئے اصولوں میں سے پہلے کی مثال ہے۔

□ اگر آپ ایک تقابل کو ایک عدد سے ضرب دیں تو اس تقابل کا تفرق بھی اسی عدد سے ضرب کھائے گا۔

مثال 6.15: تقابل  $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$  کا تفرق معلوم کریں۔ تقابل  $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$  کے لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ:

$$f(x+h) = 3(x+h)^2 + 4(x+h) - 5 = 3x^2 + 6xh + 3h^2 + 4x + 4h - 5$$

اس لیے؛

$$(6.1) \quad f(x+h) - f(x) = (3x^2 + 6xh + 3h^2 + 4x + 4h - 5) - (3x^2 + 4x - 5)$$

$$(6.2) \quad = 3x^2 + 6xh + 3h^2 + 4x + 4h - 5 - 3x^2 - 4x + 5$$

$$(6.3) \quad = 6xh + 3h^2 + 4h = h(6x + 3h + 4)$$

$$(6.4) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h(6x + 3h + 4)}{h} = 6x + 3h + 4$$

اور پھر اس حد میں، جیسے جیسے  $h$  صفر کے قریب جاتا ہے؛

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h + 4) = 6x + 4$$

□

مثالیں ?? اور ?? ایک اور عام اصول کی وضاحت کرتی ہیں۔ مثال ?? میں جو تقابل دیا گیا تھا وہ دراصل مثال ?? اور مثال ?? میں دیے گئے تقابل کا مجموعہ ہے۔ اور اسی نسبت سے مثال ?? میں آنے والی ڈھلاؤ کی قیمت مثال ?? اور مثال ?? میں آنے والی ڈھلاؤ کی قیمتوں کا مجموعہ ہے۔ عام قانون کے مطابق؛

تعریف: اگر آپ دو تفاعل کو جمع کرتے ہیں، تو آپ اس نئے تفاعل کا تفرق معلوم کرنا چاہتے ہیں تو، آپ کو دونوں تفاعل، جن کا یہ تفاعل مجموعہ ہے، کے تفرق کو جمع کرنا ہوگا۔

□

#### 6.4 چند مزید تفاعل کے ڈھلاؤ کے کیلئے

چند تفاعل کے لیے حصہ ?? میں بتایا گیا طریقہ آپکو مشکل الجبرا میں ڈال سکتا ہے، اور یہ آسان ہے کہ آپ ایک دوسری علامت استعمال کریں۔ دو نقطوں، جن میں ایک نقطہ  $p$  جو کہ  $x$  - محور پر موجود ہے جبکہ دوسرا نقطہ  $p+h$  (یا  $x$  اور  $x+h$ )، کو جوڑنے والی ہم آہنگ لکیر کا ڈھلاؤ معلوم کرنے کے بجائے آپ مختلف طرح کے محدود چن سکتے ہیں، جیسے کہ  $(p, f(p))$  یا  $(q, f(q))$  (یا  $(q, f(q))$ ) رکھنے کے لیے نقاط لے سکتے ہیں، اس طرح کے  $q-p = \delta x$  اور

$$\delta y = f(q) - f(p)$$

$$\text{تو پھر ڈھلوان یہ } \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(q)-f(p)}{q-p} \text{ ہو گی۔}$$

یہ دیکھنے کے لیے کے یہ کس طرح کام کرتا ہے، یہاں مثال 3-6 میں اس کا استعمال ہوا ہے۔

مثال 6.16:

$$p = x \text{ پر تفاعل } f(x) = 3x^2 \text{ کا تفرق معلوم کریں۔}$$

$$\text{اس تفاعل کے لیے، } f(q) - f(p) = 3q^2 - 3p^2 = 3(q^2 - p^2) = 3(q-p)(q+p) \text{ ہے۔}$$

□

$$\text{لہذا } \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(q)-f(p)}{q-p} = \frac{3(q-p)(q+p)}{q-p} = 3(q+p) \text{ ہو گا۔}$$

اب اس طریقہ میں  $q$  نے  $p+h$  کی جگہ لی ہے، چنانچہ آپ ایک حد میں  $h$  کی قیمت کو 0 (صفر) لینے کے بجائے، آپ  $q$  کی قیمت کو  $p$  لے سکتے ہیں۔ یہ دیکھنا کافی آسان ہے کہ جب  $q$  کی قیمت  $p$  کی طرف جاتی ہے تو  $3(q+p)$  کی قیمت  $3(p+p) = 6p$  کی طرف جائے گی۔

لہذا، اگر  $f(x) = 3x^2$  تو  $f'(p) = 6p$  ہو گا۔ چونکہ یہ  $p$  کی ہر قیمت کے لیے کارآمد ہے، لہذا آپ  $f'(x) = 6x$  لکھ سکتے ہیں۔

اس اشارے میں، تفرق کی تعریف یہ شکل اختیار کرتی ہے:  $x = p$  پر  $f(x)$  کا تفرق یہ  $\frac{f(q)-f(p)}{q-p}$  ہے  $f'(p) = \lim_{q \rightarrow p}$  ہے۔  $x = p$  پر تفاعل  $f(x) = x^4$  کا تفرق معلوم کریں۔  $x = p$  پر  $f(p) = p^4$  ہے اور  $x = q$  پر  $f(q) = q^4$  ہے۔

خط مستقیم جو  $(p, p^4)$  اور  $(q, q^4)$  کو ملاری ہے اس کے لیے  $\delta x = q - p, \delta y = q^4 - p^4$  ہے۔

دھیان دیں کہ آپ  $\delta y$  کو  $(p^2)^2 - (q^2)^2$  لکھ سکتے ہیں۔

$$\delta y = (q^2 - p^2)(q^2 + p^2) = (q - p)(q + p)(q^2 + p^2)$$

حاصل کرنے کے لیے، آپ دو مربع کے فرق کو دو بار استعمال کر سکتے ہیں

لہذا،

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{(q - p)(q + p)(q^2 + p^2)}{q - p} = (q + p)(q^2 + p^2)$$

ہے۔

پھر ایک حد میں جب  $q$  کی قیمت  $p$  ہوگی تو

$$f'(p) = \lim_{q \rightarrow p} \frac{f(q) - f(p)}{q - p} = \lim_{q \rightarrow p} ((q + p)(q^2 + p^2)) = 2p(2p^2) = 4p^3$$

ہوگا۔

مثال 6.17:  $x = p$  پر قائل  $f(x) = \sqrt{x}$  کا تفرق معلوم کریں۔  $x = p$  پر  $f(p) = \sqrt{p}$  اور  $x = q$  پر  $f(q) = \sqrt{q}$  ہے۔ خط مستقیم جو  $(p, \sqrt{p})$  اور  $(q, \sqrt{q})$  کو ملاری ہے اس کے لیے  $\delta x = q - p, \delta y = \sqrt{q} - \sqrt{p}$  ہے۔ دھیان دیں کہ آپ  $\delta x$  کو دو مربع کے فرق کے طور پر اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\delta x = q - p = (\sqrt{q})^2 - (\sqrt{p})^2 = (\sqrt{q} - \sqrt{p})(\sqrt{q} + \sqrt{p})$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\sqrt{q} - \sqrt{p}}{(\sqrt{q} - \sqrt{p})(\sqrt{q} + \sqrt{p})} = \frac{1}{\sqrt{q} + \sqrt{p}},$$

پھر ایک حد میں جب  $q$  کی قیمت  $p$  ہوگی تو

$$f'(p) = \lim_{q \rightarrow p} \frac{f(q) - f(p)}{q - p}$$

$$= \lim_{q \rightarrow p} \frac{1}{\sqrt{q} + \sqrt{p}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{q} + \sqrt{p}} = \frac{1}{2\sqrt{p}} = \frac{1}{2}p^{-\frac{1}{2}}$$

ہو گا۔

دھیان دیں کہ جب  $p = 0$  ہو گا تب یہ کام نہیں کرے گا کیونکہ اس صورت میں  $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{\sqrt{q}}$  ہو گا، جس کی کوئی حد نہیں ہے چونکہ  $q \rightarrow 0$  ہے۔ آپ شکل 6-10 میں  $y = \sqrt{x}$  کے ترسیم سے دیکھ سکتے ہیں کہ  $x = 0$  پر خط مماس  $y$ -محور پر ہے، جس کی کوئی ڈھلوان نہیں ہے۔ □

مثال 6.18:

$x = p$  پر  $f(x) = \frac{1}{x}$  کا تفرق معلوم کریں۔

$$f(p) = \frac{1}{p} \text{ اور } f(q) = \frac{1}{q} \text{ ہے۔}$$

جو خط مستقیم  $(p, \frac{1}{p})$  اور  $(q, \frac{1}{q})$  کو ملاتی ہے اس کے لیے  $\frac{p-q}{qp} = -\frac{q-p}{qp}$ ،  $\delta y = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} = \frac{p-q}{qp}$ ،  $\delta x = q - p$  ہے۔

اور

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{-\left(\frac{q-p}{qp}\right)}{q-p} = -\frac{1}{qp}$$

لہذا، ایک حد میں جب  $q$  کی قیمت  $p$  ہوگی تو

$$f'(p) = \lim_{q \rightarrow p} \frac{f(q) - f(p)}{q - p} = \lim_{q \rightarrow p} \left( -\frac{1}{qp} \right) = -\frac{1}{p^2} = -p^{-2}$$

ہو گا۔

اگر آپ چکے پاس، تو آپ اس خط منحنی کی نمائش کریں تب آپ دیکھ سکیں گے کہ اس کی ڈھلوان ہمیشہ منفی کیوں ہوتی ہے۔ □

اس مشتق میں حصہ ?? کا طریقہ استعمال کریں۔

ا۔  $x = p$  پر  $f(x) = x^3$  کا تفرق معلوم کریں۔ (آپ کو یاد تو ہے  $(p+h)^3 = p^3 + 3p^2h + 3ph^2 + h^3$  ہے)۔ پھر مفرد کی ضرب  $q^3 - p^3 = (q-p)(q^2 + qp + p^2)$  استعمال کرنے کی ضرورت ہوگی۔

ب۔ مساوات  $x = p$  پر  $f(x) = x^8$  کا تفرق معلوم کریں۔ (فرض کریں  $p+h = q$  ہے اور جتنی بار آپ کر سکتے ہیں دو مربع کلیہ کے فرق کو  $q^8 - p^8$  پر استعمال کریں)۔

$p$  پر  $x$  تعامل  $\frac{1}{x^2}$   $f(x)$  مساوات کا تفرق معلوم کریں۔

سوال 1: نقطہ  $(2, 10)$  پر  $y = 5x^2 - 7x + 4$  سے خط مماس کی مساوات معلوم کریں

سوال 2: دیئے ہوئے تعامل  $f(x) = x^3 + 5x^2 - x - 4$  کی مدد سے مندرجہ ذیل سوال حل کریں  
۱.  $f'(-2)$

ب.  $a$  کی قیمت معلوم کریں اس طرح کہ  $f'(a) = 56$  ہے۔

سوال 3: مساوات  $y = x^4 - 4x^3$  سے عمودی مساوات معلوم کریں ایک ایسے نقطہ پر جہاں  $x = \frac{1}{2}$  ہو

سوال 4: ثابت کریں کہ  $y = \frac{1}{x}$  کی مدد سے نقطہ  $p$  پر  $x$  پر خط مماس کی مساوات  $p^2y + x = 2p$  ہو گی۔ خط مماس کے کس نقطہ پر خط مماس کی مساوات  $9y + x + 6 = 0$  ہو گی؟

سوال 5: مماسی خط  $y = 6\sqrt{x}$  سے خط مماس نقطہ  $4, 12$  پر محور  $A$  اور  $B$  ملتے ہیں۔ ثابت کریں کہ  $AB$  کا فاصلہ  $k\sqrt{13}$  کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔ مزید  $k$  کی قیمت معلوم کریں۔

سوال 6: خط مماسی  $y = 2x^3 - 5x^2 + 9x - 1$  سے دو نقاط کے محدود معلوم کریں جہاں خط مماس کی ڈھلاؤ 13 ہو۔

سوال 7: نقطہ  $(1, 8)$  پر  $y = (2x - 1)(3x + 5)$  سے عمودی مساوات معلوم کریں۔ اپنا جواب  $ax + by + c = 0$  صورت میں دیں جہاں  $a, b$  اور  $c$  عدد صحیح ہیں۔

سوال 8: خط مماسی  $y = x^2 - 3x - 4$  پر  $P$  اور  $Q$  پر  $x$  - محور کو پار کرتی ہے  $P$  اور  $Q$  پر خط مماسی سے خط مماس  $R$  پر ملتے ہیں۔  $P$  اور  $Q$  پر خط مماسی سے عمودی خط  $S$  پر ملتے ہیں۔  $RS$  کا فاصلہ معلوم کریں۔

سوال 9: خط مماسی کی مساوات  $y = 2x^2 - 5x + 14$  ہے۔ خط مماسی سے خط عمودی نقطہ  $(111)$  پر خط مماسی سے دوبارہ نقطہ  $P$  پر ملتی ہے۔  $P$  کے محدود معلوم کریں۔

سوال 10: خط مماسی  $y = x^2 + k$  کے ایک مخصوص نقطہ پر خط مماس کی مساوات  $y = 6x - 7$  ہے۔ مستقل  $c$  کی قیمت معلوم کریں۔

سوال 11: ثابت کریں کہ خط مماسی  $y = x^3$  اور  $y = (x + 1)(x^2 + 4)$  میں بالکل ایک نقطہ مشترک ہے، اور تفریق کا طریقہ استعمال کرتے ہوئے اسی نقطہ پر ہر ایک خط مماسی کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔

سوال 12: خط مماسی  $y = 5x^2 - 12x + 1$  کے ایک مخصوص نقطہ پر عمودی مساوات  $x + 18y + c = 0$  ہے۔ مستقل  $c$  کی قیمت معلوم کریں۔

سوال 13: مساوات  $y = x^m$  اور  $y = x^n$  کی ترسیمات نقطہ  $(1, 1)$  ایک دوسرے میں سے گزرتی ہیں،  $m$  اور  $n$  کے درمیان تعلق معلوم کریں اگر ہر ایک خط مماسی پر خط مماس نقطہ  $P$  پر دوسری خط مماسی کے عمودی ہے۔

سوال 14: نقطہ  $x = \frac{1}{4}$  پر خط مماس  $y = \sqrt{x}$  اور  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$  سے نقطہ  $P$  پر ملتے ہیں۔  $P$  کے محدود معلوم کریں۔

سوال 15: نقطہ  $x = 2$  پر خط عمودی  $y = \frac{1}{x^2}$  اور  $y = \frac{1}{x^3}$  سے نقطہ  $Q$  پر ملتے ہیں۔  $Q$  کے محدود معلوم کریں۔





## باب 7

### تفرق کے استعمال

گزشتہ باب میں آپ نے سیکھا کہ تفریق کا معنی کیا ہے۔ اور کی اقسام کے تفاعلات کی تفریق کیسے کی جاتی ہے۔ اس باب میں آپ دیکھیں گے کہ تفریق کو تریسات کی خاکہ نگاری اور حقیقی دنیاوی معموں کو حل کرنے کے لیے کیسے استعمال کیا جاتا ہے۔ جب آپ اس باب کو مکمل کریں تو آپکو چاہیے۔

- اس بات کو سمجھنا کہ کسی تفاعل کا تفرق بھی تفاعل ہوتا ہے
- مثبت، منفی اور صفر کے تفرقات کی اہمیت کی قدر دانی کرنا۔
- زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم نقطوں کو ترسیم پر بٹھانے کی قابل ہونا
- اس بات کو جاننا کہ آپ تفرق کی تشریح ایک متغیرہ میں دوسرے کے متعلق تبدیلی کی شرح سے کر سکتے ہیں۔
- تفرق کے لیے  $\frac{dy}{dx}$  کی علامت سے واقف ہونا
- ان طریقہ کاروں کو حقیقی دنیاوی معموں کو حل کرنے کے لیے استعمال کرنے کے قابل ہونا۔

## 7.1 تفرقات بہ صورت تفاعلات

باب 6 میں متعدد جستجوئیں کر کے آپ کو تفریق سے متعارف کروایا گیا تھا۔ مثلاً مشق 6 الف کے سوال 5 میں آپ سے تفاعل  $f(X) = 2 - x^2$  کی ترسیم کے مختلف نقطوں پر مماسہ کے ڈھلوان کے بارے میں اندازہ لگانے کے لیے پوچھا گیا تھا۔ جدول 7.1 میں وہ نتائج موجود ہیں جنہیں حاصل کرنے کی آپ سے توقع تھی۔

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ مماسہ کا ڈھلوان بھی  $x$  کا تفاعل ہے۔ جو کہ قاعدہ  $2x$  میں دیا گیا ہے۔ باب 6 میں اسی قاعدے کو متفرق کہا گیا ہے۔ لیکن جب آپ اسکی قیمت کو کسی مخصوص  $x$  کے لیے استعمال کرنے کے بجائے اسے ایک تفاعل خیال کر رہے ہوتے ہیں، تو بعض اوقات اسے مشتق تفاعل کہا جاتا ہے۔ اسے  $f'(x)$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اور اس مثال میں یہ  $f'(x) = 2x$  ہے۔

مزید برآں جس طرح آپ تفاعل  $f(x)$  کی ترسیم سازی کر سکتے ہیں۔ اسی طرح مشتق تفاعل  $f'(x)$  کی ترسیم سازی بھی ممکن ہوتی ہے۔ انہی دو ترسیمات کو صفحے پر ایک دوسرے کے اوپر ایک قطار میں دکھانا بہت دلچسپ معلوم ہوتا ہے۔ جس طرح سے سورت 7.2 میں دکھایا گیا ہے۔

ترسیم کے بائیں جانب جہاں  $x < 0$  ہے  $f'(x)$  کا ترسیم  $x$  کے محور سے نیچے موجود ہے۔ جو ظاہر کرتا ہے کہ  $f(x)$  کا ڈھلوان منفی ہے۔ دائیں جانب جہاں ڈھلوان  $f(x)$  کا مثبت ہے، وہاں  $f'(x)$  کا ترسیم  $x$  کے محور کے اوپر موجود ہے۔

جو آپ تفریق کت بارے میں جانتے ہیں وہ آپ مشتق تفاعل کی صورت میں لکھ سکتے ہیں:

$$\begin{aligned} \text{اگر } f(x) &= x^n \text{، جہاں } n \text{ ناطق عدد ہو تو اسکا مشتق تفاعل } f'(x) = nx^{n-1} \text{ ہوگا} \\ f(x) + g(x) &\text{ کا مشتق تفاعل } f'(x) + g'(x) \text{ ہوگا۔} \\ cf(x) &\text{ کا مشتق تفاعل جہاں } c \text{ مستقل ہے، } cf'(x) \text{ ہوگا۔} \end{aligned}$$

مثال 7.1: مساوات  $f(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^3$  کا مشتق تفاعل معلوم کریں۔ اوپر بتائے گئے نتائج کے استعمال سے معلوم ہوتا ہے کہ پوچھے گئے تفاعل کا مشتق تفاعل  $f'(x) = 2x - x^2$  ہے۔ مثال 7-3؟؟ میں موجود تفاعل  $f(x)$  اور مشتق تفاعل  $f'(x)$  کی ترسیمات شکل 7.3 میں بنائی گئی ہیں۔ یہاں بعض نکات غور طلب ہیں، جب  $x < 0$ ، تفاعل  $f(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^3$  کی ترسیمات کی ڈھلوان منفی ہے، اور مشتق تفاعل  $f'(x)$  کی قیمتیں بھی منفی ہیں۔ جب  $x = 0$ ،  $f(x)$  کا ڈھلوان 0 ہے، اور  $f'(0)$  کی قیمت بھی صفر ہے۔  $x = 2$  اور  $x = 0$  کے درمیان  $f(x)$  کا ڈھلوان مثبت ہے اور  $f'(x)$  کا بھی مثبت ہے۔ جب  $x = 2$ ،  $f(x)$  کا ڈھلوان 0 ہے، اور  $f'(2) = 0$  ہے۔ جب  $x > 2$ ،  $f(x)$  کا ڈھلوان منفی ہے، اور مشتق تفاعل  $f'(x)$  کی قیمتیں بھی منفی ہیں۔ □

سوال 1: مندرجہ ذیل صورتوں میں سے ہر ایک کے لیے تفاعل  $f(x)$  اور مشتق تفاعل  $f'(x)$  کی ترسیمات بنائیں۔ اور ان ترسیمات کا موازنہ کریں۔

$$\begin{aligned} \text{ا. } f(x) &= 4x & \text{ب. } f(x) &= x^2 & \text{ج. } f(x) &= x^2 + 4x \\ \text{د. } f(x) &= 5 - x^2 & \text{و. } f(x) &= 3x^2 - 6x & \text{ب. } f(x) &= 3 - 2x \end{aligned}$$

سوال 2: مندرجہ ذیل صورتوں میں سے ہر ایک کے لیے تفاعل  $f(x)$  اور مشتق تفاعل  $f'(x)$  کی ترسیمات بنائیں اور ترسیمات کا موازنہ کریں

$$\begin{aligned} \text{ا. } f(x) &= (2+x)(4-x) & \text{ب. } f(x) &= (x+3)^2 \\ \text{ج. } f(x) &= x^4 & \text{د. } f(x) &= x^2(x-2) \\ \text{ه. } f(x) &= \sqrt{x} \quad x \geq 0 & \text{و. } f(x) &= \frac{1}{x} \quad x \neq 0 \end{aligned}$$

سوال 3: سوال کے ہر حصے میں دی گئی شکل  $y = f'(x)$  مشتق تفاعل کی ترسیمہ کو ظاہر کرتی ہے۔  $y = f(x)$  کی ممکنہ ترسیمہ بنائیں۔

## 7.2 بڑھتے ہوئے اور گھٹتے ہوئے تفاعلات

آسانی کے لیے تفاعل کے لفظ سے مراد اس باب میں وہ تفاعلات ہیں جو اپنے دائرہ کار میں استمراری (مسل) ہوتے ہیں۔ اس میں وہ تمام تفاعلات شامل ہیں جو آپ ابھی تک دیکھ چکے ہیں، لیکن اس میں تفاعلات جیسے  $x$  کا کسری حصہ شامل نہیں ہیں جو کہ تمام مثبت حقیقی اعداد کے لیے واضح ہیں لیکن ان کی ترسیمہ میں، جیسا کہ شکل 7.4 میں دکھایا گیا ہے، ہچکولے موجود ہیں۔

کسی ترسیمہ کو اسکی مساوات سے واضح کرنے کے لیے آپ اس تصور کو جسکے مطابق کسی تفاعل کا متفرق بھی تفاعل ہوتا ہے، استعمال کر سکتے ہیں۔

مثال 7.2: وہ وقفہ معلوم کریں جس میں  $f(x) = x^2 - 6x + 4$  بڑھتا ہوا ہے، اور وہ وقفہ جس میں گھٹتا ہوا ہے۔  $f(x)$  کا متفرق ہے۔  $f'(x) = 2x - 6 = 2(x - 3)$  اس کا مطلب ہے کہ  $x > 3$  کے لیے ترسیمہ کا ڈھلوان مثبت ہے، یعنی،  $f(x)$ ،  $x < 3$  کے لیے بڑھتا ہوا ہے۔

$x < 3$  کے لیے ڈھلوان منفی ہے اور جو  $x$  کی قیمتیں بڑھتی جاتی ہیں،  $y$  کی قیمتیں گھٹتی جاتی ہیں، یعنی  $f(x)$ ،  $x < 3$  کے لیے گھٹتا ہوا ہے۔

□

نتائج صورت شکل 7.5 میں ظاہر کیئے گئے ہیں۔

خود  $x = 3$  کے بارے میں کیا؟ پہلی نظر میں آپ یہ سوچیں گے کہ اس کو دونوں بڑھتے ہوئے اور گھٹتے ہوئے وقفوں سے باہر چھوڑ دینا چاہیئے لیکن ایسا کرنا غلط ہوگا! اگر آپ خط منحنی پر بائیں سے دائیں جانب آگے کو بڑھ رہے ہوں اور جیسے ہی آپ  $x = 3$  سے گزر چکیں، ڈھلوان مثبت ہو جائے گا اور قوس بلند ہونے لگے گا۔ تاہم جتنا آپ  $x = 3$  کے قریب ہوں گے،  $y$  کی قیمت  $f(3) = -5$  سے بڑی ہوگی۔

پس آپ کہہ سکتے ہیں کہ تفاعل  $f(x)$ ،  $x \geq 3$  کے لیے بڑھتا ہوا ہے، اسی طرح  $x \leq 3$  کے لیے گھٹتا ہوا ہے۔

آپ مثال مثال 7.2.1 میں موجود توجیہ کو کسی بھی تفاعل کے لیے استعمال کر سکتے ہیں۔ صورت شکل 7.6 تفاعل  $f(x) = y$  کی ترسیمہ کو ظاہر کرتی ہیں۔ جس کا متفرق وقفہ  $p \leq x \leq q$  میں مثبت ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $y$  کی بڑی قیمتیں  $x$  کی بڑی قیمتوں کے ساتھ منسلک ہیں۔ بعینہ طور پر اگر  $x_1$  اور  $x_2$  وقفہ  $p \leq x \leq q$  میں  $x$  کی دو قیمتیں ہوں اور اگر  $x_2 > x_1$  ہو تو  $f(x_2) > f(x_1)$  ہوگا۔

اس خصوصیت کے حامل تفاعل کو وقفہ  $p \leq x \leq q$  پر سے بڑھتا ہوا کہا جاتا ہے۔ اگر  $f'(x)$  منفی ہو، وقفہ  $p \leq x \leq q$  میں جیسا کہ صورت شکل 7.7 میں ہے، تو تفاعل کی خصوصیت برعکس ہوگی؛ اگر  $x_2 > x_1$  ہو تو،  $f(x_2) < f(x_1)$  ہوگا۔ اس خصوصیت کے حامل تفاعل کو وقفہ  $p \leq x \leq q$  پر گھٹتا ہوا کہا جاتا ہے۔ اگر  $f'(x) > 0$  ہو تو  $p \leq x \leq q$  میں تو  $f(x)$  وقفہ  $p \leq x \leq q$  میں بڑھتا ہوا ہوگا۔ اگر  $f'(x) < 0$  ہو تو وقفہ  $p \leq x \leq q$  میں  $f(x)$  وقفہ  $p \leq x \leq q$  میں گھٹتا ہوا ہوگا۔

اس بات کو دھیان میں رکھیں کہ تفاعل  $f(x)$  کو وقفہ  $p \leq x \leq q$  میں بڑھتا ہوا ہونے کے لیے مشتق تفاعل  $f'(x)$  کے ڈھلوان کا وقفہ کے خاتمے پر جہاں  $x = p$  یا  $x = q$  ہے، مثبت ہونا لازمی ہے، ان نقطوں پر یہ صفر یا بالکل غیر واضح ہوگا۔ یہ شاید ایک خفیف تفاوت لگے لیکن اسکے بہت اہم نتائج ہیں۔ یہ صرف استمراری تفاعلات کے ساتھ کام کرنے کے فیصلے کا انجام تھا۔

وقفہ کا لفظ صرف  $x$  کی ان قیمتوں کے لیے استعمال نہیں ہوتا جو کہ محدود انتہاؤں کے درمیان ہوتی ہیں۔ بلکہ  $x$  کی ان قیمتوں کے لیے بھی استعمال ہوتا ہے، جو عدم مساواتوں  $p < x < q$  یا  $x < q$  کو باور کرواتے ہیں۔

مثال 7.3: تفاعل  $f(x) = x^4 - 4x^3$  کے لیے، معلوم کریں، وہ وقفہ جس میں  $f(x)$  بڑھتا ہوا ہو، اور، وہ وقفہ جس میں گھٹتا ہوا ہو۔

شروع کرتے ہیں  $f'(x)$  کو اجزائے ضربی میں بیان کرتے ہوئے، جیسے  $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$  جیسا کہ  $x^2$  ہمیشہ مثبت ہے، (صرف  $x = 0$  کے علاوہ) یہ معلوم کرنے کے لیے کہ کس جگہ  $f'(x) > 0$  ہے۔ آپ کو عدم مساوات  $x - 3 > 0$  کا حل  $x > 3$  ہے؛ لیکن یہ معلوم کرنے کے لیے کہ کہاں  $f'(x) < 0$  ہے، آپ کو  $x = 0$  کو خارج کرنا پڑے گا تاکہ  $f'(x) < 0$  ہو۔ اگر  $0 < x < 3$  یا  $x < 0$  ہو۔ اس لیے  $f(x)$  وقفہ  $0 \leq x \leq 3$  اور وقفہ  $x \leq 0$  میں گھٹتا ہوا ہے۔

تاہم پچھلے دو وقفوں میں  $x = 0$  کی قیمت مشترک ہے۔ اس طرح آپ ان کو ایک ہی وقفے  $x \leq 3$  میں یکجا کر سکتے ہیں۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ  $f(x)$  وقفہ  $x \leq 3$  میں گھٹتا ہوا ہے۔ □

اس بات کو مد نظر رکھیں کہ  $f'(x) = 0$  ہے جب  $x = 0$  اور  $x = 3$  ہیں۔ آپ صورت شکل 7.8 میں دکھائی گئی  $y = f(x)$  کی ترسیمہ سے ان تمام خصوصیات کی پڑتال کر سکتے ہیں۔ مثال مثال 7.2.2 سے ظاہر ہوتا ہے کہ، اوپر دہے گئے اصول (جو کہ  $f'(x)$  کی علامت کو  $f(x)$  کی خصوصیت سے جو کہ بڑھتا ہوا یا گھٹتا ہوا ہے، جو --- دیتا ہے۔) کو ذرا کشادہ کیا جا سکتا ہے۔

اگر  $f'(x) > 0$  ہو وقفہ  $p < x < q$  میں سوائے ان علیحدہ نقطوں پر جہاں  $f'(x) = 0$  ہے۔ تو  $f(x)$  وقفہ  $p \leq x \leq q$  میں بڑھتا ہوا ہوگا۔ اگر  $f'(x) < 0$  ہو وقفہ  $p < x < q$  میں سوائے ان علیحدہ نقطوں پر جہاں  $f'(x) = 0$ ، تو  $f(x)$  وقفہ  $p \leq x \leq q$  میں گھٹتا ہوا ہوگا۔

اگلی مثال اس تفاعل کے بارے میں ہے جس میں  $x$  کی طاقت مکیور شامل ہے۔ ( $x < 0$  کے لیے)۔ مکیور طاقتیں بعض اوقات مشکلات پیدا کرتی ہیں کیونکہ ان میں کچھ، جب  $x$  منفی ہو تو غیر واضح ہوتے ہیں۔ لیکن اس مثال میں صرف جزر الکعب معلوم کرنا کوئی مشکل کام نہیں ہے۔

مثال 7.4: ان وقفوں کو معلوم کریں جن میں تفاعل  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(1-x)$  بڑھتا ہوا ہو، اور جن میں گھٹتا ہوا ہو۔

تفریق کرنے کے لیے تفاعل  $f(x)$  کو اس طرح لکھیں۔

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}$$

تاکہ

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$$

جس کو آپ اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(2-5x)$$

اس آکری فقرے میں  $x^{-\frac{1}{3}}$  مثبت ہوگا جب  $x > 0$  اور منفی ہوگا جب  $x < 0$ ۔  $2-5x > 0$  کا جزر ضربی مثبت ہوگا جب  $x < 0.4$  ہو اور منفی ہوگا جب  $x > 0.4$  ہو

صورت شکل 7.9 سے ظاہر ہوتا ہے کہ:  $f(x)$  وقفہ  $0 \leq x \leq 0.4$  میں بڑھتا ہوا ہے۔

$f(x)$  وقفہ  $x \geq 0.4$  اور  $x \geq 0$  میں گھٹتا ہوا ہے۔

□

### 7.3 زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم نقطے

مثال 7.2.1 سے ظاہر ہوا کہ تفاعل  $f(x) = x^2 - 6x + 4$ ،  $x \leq 3$  کے لیے گھٹتا ہوا ہے، اور  $x \geq 3$  کے لیے بڑھتا ہوا ہے۔ بڑھتے ہوئے اور گھٹتے ہوئے تعلقات کی تعریف سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر  $x_1 < 3$  ہو تو  $f(x_1) > f(3)$  ہوگا۔ اور یہ کہ اگر  $x_2 > 3$  ہو تو  $f(x_2) > f(3)$ ۔ یعنی  $x$  کی 3 کے علاوہ ہر قیمت کے لیے، تفاعل  $f(3) = -5$  سے بڑا ہوگا۔

آپ کہہ سکتے ہیں کہ  $f(3)$ ،  $f(x)$  کی کم سے کم قیمت ہے اور یہ کہ  $y = f(x)$  (3، 5) کی ترسیمہ کام سے کم نقطہ ہے۔

ضروری نہیں کہ کم سے کم نقطہ کل ترسیمہ پر سب سے کمتر نقطہ ہو، بلکہ یہ اپنے قرب و جوار میں سے کمتر نقطہ ہوتا ہے۔

صورت شکل 7.9 میں  $(0, 0)$  سے ایک کم سے کم نقطہ ہے؛ یہ بات اس حقیقت سے ظاہر ہوتی ہے کہ  $f(x) > 0$  ہے،  $x < 1$  سے ہر عدد کے لیے سوائے  $x = 0$  کے، اگرچہ  $f(x) < 0$  جب  $x > 1$  ہے۔

یہ ایک وضاحت (تعریف) کی طرف رہنمائی کرتا ہے، جو کہ صورت شکل 7.10 میں ظاہر کیا گیا ہے۔ تفاعل  $f(x)$  کا،  $q$  پر کم سے کم نقطہ ہوگا، اگر ایسا وقفہ  $p < x < r$  ہو جس میں  $q$  موجود ہو، جہاں  $f(x) > f(q)$  ہو،  $x$  کی ہر قیمت کے لیے سوائے  $q$  کے۔ اس کا زیادہ سے زیادہ نقطہ ہوگا، اگر وقفے میں  $x$  کی ہر قیمت کے لیے سوائے  $q$  کے  $f(x) > f(q)$  ہو۔ نقطہ  $(q, f(q))$  کو کم سے کم نقطہ یا زیادہ سے زیادہ نقطہ کہا جاتا ہے۔ چنانچہ مثال 7.2.3 میں  $f(x)$  کا کم سے کم نقطہ  $x = 0$  پر ہے اور زیادہ سے زیادہ نقطہ  $x = 4$  پر ہے۔

کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ نقطوں کو بعض اوقات نقطہ تغیر بھی کہا جاتا ہے۔

آپ دیکھیں گے کہ شکل 7.8 کے کم سے کم اور شکل 7.9 کے زیادہ سے زیادہ نقطوں پر ترسیم کا ڈھلوان صفر ہے۔ لیکن شکل 7.9 میں کم سے کم نقطہ پر ترسیم کا خط مماس  $y$  کا محور ہے، اس لیے ڈھلوان غیر واضح ہے۔

یہ مثالیں ایک عموماً اصول کو ظاہر کرتی ہیں؛ اگر  $(q, f(q))$  ترسیم  $y = f(x)$  کا کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ نقطہ ہو، تو یا  $f'(q) = 0$  ہوگا یا  $f'(q)$  بالکل غیر واضح ہوگا۔

دھیان رہے اگرچہ شکل 7.8 میں ایک اور نقطہ بھی ہے جہاں ڈھلوان صفر ہے جو کہ نو تو کم سے نقطہ ہے نا زیادہ سے زیادہ۔ مثلاً نقطہ ترسیم پر وہ نقطہ جہاں ڈھلوان صفر ہو ساکن نقطہ کہلاتا ہے۔ اسی طرح شکل 7.8 اور 7.9 اس حقیقت کو واضح کرتی ہیں کہ ساکن نقطہ کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ نقطہ ہو سکتا ہے یا دونوں میں سے کوئی بھی نہیں ہو سکتا۔

کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ نقطے میں فیصلہ کرنے کا ایک طریقہ ڈھلوان  $f'(x)$  کی علامت کو  $x = q$  کے دونوں طرف معلوم کرنا ہے۔ تفصیلات کے لیے شکل 7.10 کی ترسیمات کی طرف رجوع کرنا آپ کے لیے دوبارہ سے مددگار ثابت ہو سکتا ہے۔

اگر  $f'(x) < 0$  ہو، وقفہ  $p < x < q$  میں اور  $f'(x) > 0$  ہو وقفہ  $q < x < r$  میں تو  $(q, f(q))$  ایک کم سے کم نقطہ ہوگا۔

اگر  $f'(x) > 0$  ہو، وقفہ  $p < x < q$  میں، اور  $f'(x) > 0$  ہو وقفہ  $q < x < r$  میں، تو  $(q, f(q))$  ایک زیادہ سے زیادہ نقطہ ہوگا۔

آپ ترسیمات کی شہادت کی بنا پر اس کو قبول کرتے ہوئے شائد خوش ہوں گے، لیکن یہ ان بیانات سے بھی ثابت ہو سکتا ہے جن کا سامنا آپ سے پہلے ہی ہو چکا ہے۔ فرض کریں  $x_1$  وقفہ  $p < x < q$  میں ایک عدد ہے، تو، چونکہ  $f'(x) > 0$  ہے اس وقفے میں، ضمن 7.2 سے معلوم ہوتا ہے کہ  $f(x_1) > f(q)$  ہوگا۔

اب فرض کریں،  $x_2$  وقفہ  $q < x < r$  میں ایک عدد ہے چونکہ اس وقفے میں  $f'(x) > 0$  ہے،  $f(x_2) < f(q)$  ہوگا۔

اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ اگر  $x$  وقفہ  $p < x < r$  میں  $q$  کے علاوہ کوئی بھی عدد ہو تو  $p < x < r$  ہوگا۔ تعریف کے مطابق اس کا مطلب ہے کہ  $f(x)$  کا کم سے کم نقطہ  $x = q$  پر ہے۔

ان تمام نتائج کو ایک طریقہ کار کی شکل میں جمع کیا جاسکتا ہے۔

مساوات  $y = f(x)$  کی ترسیم پر کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ نقطوں کو معلوم کرنے کے لیے؛

ا. وہ دائرہ کار طے کریں جس سے آپ کو سروکار ہو۔

ب.  $f'(x)$  کے لیے ایک ریاضیاتی بیان معلوم کریں

ج. دائرہ کار میں موجود ان  $x$  کی قیمتوں کو درج کریں جن کے لیے  $f(x)$  یا تو صفر ہو یا غیر واضح ہو۔

د. ان تمام  $x$  کی قیمتوں میں سے ہر ایک کو باری باری لیتے ہوئے، اسی قیمت کے قریب ترین دائیں اور بائیں وقفوں میں  $f(x)$  کی علامت معلوم کریں۔

ه. گر یہ علامتیں علی الترتیب منفی اور مثبت ہوں تو ترسیمہ کے ہاں کم سے کم نقطہ ہوگا۔ اگر یہ مثبت اور پھر منفی ہوں تو زیادہ سے زیادہ نقطہ ہوگا۔ اگر علامتیں بدل نہ رہی ہوں اور ایک جیسی ہوں تو دونوں میں سے کوئی بھی نہیں ہوگا۔

و.  $x$  کی ہر قیمت کے لیے جو کہ کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ ہے  $f(x)$  معلوم کریں۔

مثال 7.5: مساوات  $y = \sqrt{x} + \frac{4}{x}$  کی ترسیمہ پر کم سے کم نقطہ معلوم کریں۔ فرض کریں  $y = f(x) = \sqrt{x} + \frac{4}{x}$ ۔

درجہ الف-- جیسا کہ  $\sqrt{x}$ ،  $x \geq 0$  کے لیے واضح ہے، لیکن  $\frac{1}{x}$ ،  $x = 0$  کے لیے غیر واضح ہے۔ اس لیے سب سے بڑا ممکنہ دائرہ کار  $f(x)$  کے لیے مثبت حقیقی اعداد ہوگا۔ درجہ ب-- متفرق  $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 4x^{-2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{4}{x^2}$  کو اس طرح بھی لکھا جاسکتا ہے جیسے  $f'(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}} - 8}{2x^2}$ ۔ درجہ ج-- متفرق تمام حقیقی اعداد کے لیے واضح ہے اور جب  $x^{\frac{3}{2}} = 8$  ہو تو صفر ہے دونوں اطراف کو طاقت  $\frac{2}{3}$  تک اٹھانے اور طاقت در طاقت کے اصول کو استعمال کرنے کے بعد  $8^{\frac{2}{3}} = (x^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} = x = 4$ ۔ اگر  $0 < x < 4$  ہو، تو کسر کے نیچے والا فقرہ  $2x^2$  مثبت ہوگا، اور  $0 < x^{\frac{3}{2}} - 8 < 4^{\frac{3}{2}} - 8 = 8 - 8 = 0$  ہوگا، نتیجہً  $f'(x) < 0$  ہوگا۔ اگر  $x > 4$  ہو تو  $2x^2$  برابر مثبت ہی رہے گا، لیکن  $0 < x^{\frac{3}{2}} - 8 < 4^{\frac{3}{2}} - 8 = 8 - 8 = 0$  ہوگا، اور نتیجہً  $f'(x) > 0$  ہوگا۔ درجہ د--  $f(x)$  کی علامت 4 کے بائیں جانب منفی ہے اور دائیں جانب مثبت، اس طرح تقابل کا کم سے کم نقطہ  $x = 4$  ہوگا۔ درجہ ی--  $f(4) = \sqrt{4} + \frac{4}{4} = 2 + 1 = 3$  حساب کرنے پر کم سے کم نقطہ  $(4, 3)$  نکل آتا ہے۔ □

اگر آپ کے پاس ترسیمہ شمار کنندہ ہو تو اسے استعمال کر کے  $y = f(x)$  کو  $y = \sqrt{x}$  اور  $y = \frac{4}{x}$  کے ساتھ اکٹھے دکھانا جس سے یہ تقابل بنا ہے، بہت دلچسپ لگے گا۔ آپ جان لیں گے کہ  $y = f(x)$  کم سے کم نقطے کے ارد گرد بہت ہموار ہے۔ یہ بتانا آنکھوں سے بہت مشکل کام ہوگا کہ کم سے کم نقطہ ٹھیک کہاں واقع ہے۔

اس بات کو دھیان میں رکھیے گا کہ یہ نظریہ آپکو بعض تعلقات کی سعت معلوم کرنے کے لیے، کوئی اور راستہ فراہم کرتا ہے۔ مثال 7.3.1 کے تقابل کی جکا دائرہ کار  $x \geq 0$  ہے، سعت  $y \geq 3$  ہوگی۔

سوال 1: مندرجہ ذیل ہر تقابل  $f(x)$  کا متفرق  $f'(x)$  معلوم کریں، اور وہ وقفہ معلوم کریں جس میں  $f(x)$  برہتا ہوا ہو۔

$$\begin{aligned} \text{ا.} \quad & x^2 - 5x + 6 \quad \text{۔} \quad - \quad \frac{5x}{7} \quad - \quad 3x^2 \quad + \quad 2 \\ \text{ب.} \quad & x^2 + 6x - 4 \\ \text{ج.} \quad & 7 - 3x - x^2 \quad \text{۔} \quad + \quad 5x^2 \quad - \quad 3x \quad - \quad 7 - 4x - 3x^2 \quad (f) \end{aligned}$$

سوال 2: مندرجہ ذیل تفاعلات  $f(x)$  میں سے ہر ایک کا متفرق  $f'(x)$  معلوم کریں اور وہ وقفہ معلوم کریں جس میں  $f(x)$  گھٹتا ہوا ہو۔

$$\begin{aligned} \text{ا.} \quad & x^2 + 4x - 9 \quad \text{۔} \quad \text{ج.} \quad 5 - 3x + x^2 \quad \text{۔} \quad 4 + 7x - 2x^2 \\ \text{ب.} \quad & x^2 - 3x - 5 \quad \text{۔} \quad + \quad \frac{8x}{7} \quad - \quad 2x^2 \quad \text{۔} \quad 3 - 5x - 7x^2 \end{aligned}$$

سوال 3: مندرجہ ذیل تفاعلات  $f(x)$  میں سے ہر ایک کا متفرق  $f'(x)$  معلوم کریں، اور کوئی سا وقفہ معلوم کریں، جس میں  $f(x)$  گھٹتا ہوا ہو۔ (ن) میں  $n$  عدد صحیح ہے۔

$$\begin{aligned} \text{ا.} \quad & x^3 - 12x \quad \text{۔} \quad + \quad 3x \quad + \quad \frac{3x^2}{4} \quad - \quad x^3 \quad \text{۔} \quad 3x - x^3 \\ \text{ب.} \quad & 2x^3 - 18x \quad \text{۔} \quad + \quad \frac{2x^3}{5} \quad - \quad \frac{5x^4}{10} \quad + \quad 2x^5 \\ \text{ج.} \quad & 2x^3 - 9x^2 - 24x + 7 \quad \text{۔} \quad + \quad 4x^3 \quad + \quad x^4 \quad \text{۔} \quad 3x + x^3 \end{aligned}$$

سوال 4: مندرجہ ذیل ہر تفاعل  $f(x)$  کا متفرق  $f'(x)$  معلوم کریں اور وہ وقفہ معلوم کریں جس میں  $f(x)$  بڑھتا ہوا ہو۔

$$\begin{aligned} \text{ا.} \quad & x^3 - 27x \quad \text{for } x \geq 0 \quad \text{۔} \quad 12x - 2x^3 \quad \text{۔} \quad 36x^2 - 2x^4 \\ \text{ب.} \quad & 2x^3 + 3x^2 - 36x - 5 \quad \text{۔} \quad \frac{2x^3}{7} + \frac{3x^2}{7} - 36x - 5 \quad \text{۔} \quad 2x^5 - 5x \\ \text{ج.} \quad & x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \quad \text{۔} \quad 3x^4 - 20x^3 + 12 \quad \text{۔} \quad x^n - nx \quad (n > 1) \end{aligned}$$

سوال 5: مندرجہ ذیل تفاعلات  $f(x)$  میں سے ہر ایک کا متفرق تفاعل  $f'(x)$  معلوم کریں، اور وہ وقفے معلوم کریں جن میں  $f(x)$  گھٹتا ہوا ہو۔ اور وہ وقفے جن میں  $f(x)$  بڑھتا ہوا ہو۔



ا.  $x^{\frac{2}{3}}(x+2)$  ج.  $x^{\frac{3}{2}}(x-1)$  ہ.  $x + \frac{3}{x} \text{ for } x > 0$

ب.  $x^{\frac{3}{4}} - 2x^{\frac{7}{4}}, \text{ for } x > 0$  د.  $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}, x > 0$  ہ.  $x^{\frac{3}{5}}(x^2 - 13)$

سوال 6: مندرجہ ذیل تعلقات  $f(x)$  کی ترسیمات میں سے ہر ایک کے لیے؛

- ا. ساکن نقطوں کے محدود معلوم کریں ج. راس معلوم کرنے کے لیے، تکمیل مربع د. ان قیمتوں کی سعت بیان کریں جن کے قاعدے کو استعمال کر کے اپنے جواب کی پڑتال کریں
- ب. دلیل کے ساتھ بتادیں کہ آیا یہ زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم نقطہ ہے۔

ا.  $x^2 - 8x + 4$  ج.  $5x^2 + 6x + 2$  ہ.  $x^2 + 6x + 9$

ب.  $3x^2 + 12x + 5$  د.  $4 - 6x - x^2$  ہ.  $1 - 4x - 4x^2$

سوال 7: مندرجہ ذیل تعلقات کی ترسیمات پر ساکن نقطوں کے ہم پلہ نقطے معلوم کریں، نیز معلوم کریں کہ آیا نقاط زیادہ سے زیادہ نقاط ہیں یا کم سے کم نقاط ہیں

ا.  $2x^3 + 3x^2 - 72x + 5$  ہ.  $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$  ی.  $\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}$

ب.  $x^3 - 3x^2 - 45x + 7$  ج.  $x + \frac{1}{x}$  یب.  $x^{\frac{1}{3}}(4 - x)$

ج.  $3x^4 - 8x^3 + 6x^2$  ج.  $x^2 + \frac{54}{x}$  ج.  $x^{\frac{1}{5}}(x + 6)$

د.  $3x^5 - 20x^3 + 1$  ط.  $x - \frac{1}{x}$  ی.  $x^4 - 8x^2$

ہ.  $2x + x^2 - 4x^3$  ی.  $x - \sqrt{x}, \text{ for } x > 0$  ی.  $x^2 - \frac{16}{x} + 5$

سوال 8: ان تعلقات کی سعتیں معلوم کریں، جو کہ سب سے بڑے ممکنہ دائرہ کاروں میں واضح ہوں

ا.  $x^2 + x + 1$  ب.  $x^4 - 8x^2$  ج.  $x + \frac{1}{x}$

## 7.4 متفرقات، تبدیلی کی شرح کے موافق

تعلق  $y = f(x)$  میں موجود  $x$  اور  $y$  کی مقداروں کو بسا اوقات متغیرات کہا جاتا ہے، کیونکہ  $x$  دائرہ کاروں میں موجود کوئی بھی عدد ہوتا ہے اور  $y$  سمت میں موجود کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے۔ جب آپ ترسیم بناتے ہیں تو  $x$  کی قیمتوں کے چناؤ میں آزاد ہوتے ہیں۔ اور پھر  $y$  کی قیمتوں کو وضع کرتے ہیں۔ اس لیے  $x$  کو آزاد اور  $y$  کو تابع متغیرہ کہا جاتا ہے۔

یہ تغیرات بسا اوقات طبعی یا معاشی مقداروں کو ظاہر کرتے ہیں اور پھر دیگر حروف کو استعمال کرنا، جو کہ ان مقداروں کے بارے میں بتاتے ہیں، بہت معقول لگتا ہے۔ مثلاً وقت کے لیے  $t$ ، حجم کے لیے  $V$ ، دام کے لیے  $c$ ، آبادی کے لیے  $p$  اور وغیرہ وغیرہ۔

یہ بات بہت جلد واضح کی جائے گی، کہ حرف  $d$  کو گہرائی کے لیے کیوں استعمال نہیں کیا گیا۔ حرف  $z$  عمودی سمت میں فاصلے کے لیے زیادہ تر استعمال ہوتا ہے۔

تابع متغیر، دباؤ  $p$  ہے، جسے بارس میں ناپا جاتا ہے۔ سطح پر غوطہ خور صرف ہوائی دباؤ محسوس کرتا ہے، جو کہ بار 1 کے لگ بھگ ہوتا ہے لیکن جوں جوں غوطہ خور نیچے اترتا جاتا ہے دباؤ بڑھتا جاتا ہے۔ ساحلی گہرائیوں پر متغیرات تقریباً اس مساوات کے ذریعے جڑے ہوئے ہوتے ہیں۔  $p = 1 + 0.1z$

ترسیم کا ہم پلہ نقطہ  $(z, p)$  ایک خط مستقیم ہے، جس طرح شکل 7.11 میں دکھائی گئی ہے۔ مستقل عدد 0.1 مساوات میں موجود، وہ مقدار ہے جس سے دباؤ ہر اضافی گہرائی کی لمبائی کے لیے بڑھ جاتا ہے۔ یہ دباؤ کی گہرائی کے متعلق تبدیلی کی شرح ہے۔

اگر غوطہ خور  $z$  میٹر کے فاصلے تک نیچے اترتا ہے تو دباؤ  $\delta p$  مقدار تک بڑھتا جائے گا۔ یہ تبدیلی کی شرح  $\frac{\delta p}{\delta z}$  ہے۔ یہ ترسیم کے ڈھلوان سے ظاہر کیا گیا ہے۔ لیکن سمندر کی گہرائیوں میں ترسیم  $(z, p)$  مزید خط مستقیم نہیں رہتی، بلکہ اسکی شکل شکل 7.12 والی بن جاتی ہے۔ مقدار  $\frac{\delta p}{\delta z}$  اب، اضافی گہرائی  $\delta z$  میں تبدیلی کی متوسط شرح کو ظاہر کرتی ہے۔

صورت شکل 7.12 میں وتر کا ڈھلوان اسی چیز کو ظاہر کرتا ہے۔ گہرائی کے متعلق دباؤ کی تبدیلی کی شرح،  $\frac{\delta p}{\delta z}$  کی حد ہے، (جیسے ہی  $\delta z$  صفر کو بڑھتا ہے)

متفرق  $f'(x)$  کی علامت جیسے اب تک اس حد کے لیے استعمال کیا گیا ہے، معیاری نہیں ہے، کیونکہ اس میں  $p$  کا تذکرہ نہیں ہے، ایک ایسی علامت کا ہونا ضروری ہے، جس میں متغیرات کے لیے استعمال کیے گئے دونوں حروف موجود ہیں۔ ایک متبادل علامت  $\frac{\delta p}{\delta z}$  وضع کیا جاتا ہے، جسے متوسط شرح میں حرف  $\delta$  کو حد میں  $d$  سے بدل کر حاصل کیا جاسکتا ہے۔

باقاعدہ طور پر،

$$\frac{dp}{dz} = \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{\delta p}{\delta z}$$

یہاں کوئی نیا تصور نہیں ہے۔ یہ صرف باب تفرق میں دیے گئے متفرق کی تعریف کو ایک نئے مختلف انداز میں لکھنے کا طریقہ ہے۔ اک کا فائدہ یہ ہے کہ مختلف حروف کو استعمال کر کے اسے ملایا جاسکتا ہے، جب کبھی دو متغیرات میں تعلق ہو، ان میں تبدیلی کی شرح کو بیان کرنے کے لیے۔

اگر  $x$  اور  $y$  علی الترتیب، آزاد اور تابع متغیرات ہوں، کسی تفاعلی تعلق میں، تو متفرق،

$$\frac{dp}{dz} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta p}{\delta z}$$

متغیر  $y$  کی  $x$  کے متعلق تبدیلی کی شرح کی ناپتا ہے۔ اگر  $y = f(x)$  ہو، تو  $\frac{dy}{dx} = f'(x)$  ہوگا۔

ہر چند کہ  $\frac{dy}{dx}$  ایک کسر لگتا ہے، فی الحال آپ کو اسے ایک غیر متفق علامت جیسا خیال کرنا چاہیے جو چار حروف اور ایک افقی کیر سے بنایا گیا ہو۔ جو علامت  $dx$  اور  $dy$  ہیں، وہ آپ کوئی معنی نہیں رکھتے (بعد میں، گو آپ کو معلوم ہوگا کہ بعض صورتوں میں علامت  $\frac{dy}{dx}$  ایک کسر کی طرح پیش آتا ہے۔ یہ  $f'(x)$  کی علامت کے اوپر اسکا ایک اور فائدہ ہے)

اس علامت کو وسیع معنوں میں استعمال کیا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر، اگر چلے ہوئے گھاس کا رقبہ آگ لگنے کے  $t$  منٹ بعد  $A$  مربع میٹر  $m^2$  ہو تو  $\frac{dA}{dt}$  اس شرح کو ناپتا ہے، جس سے آگ مربع میٹر فی منٹ کے حساب سے پھیل رہی ہو۔ اگر زمین کی سطح پر موجود کسی نقطے پر، میدان میں  $x$  میٹر کے فاصلے کو نقشے پر  $y$  میٹر سے ظاہر کیا جائے تو  $\frac{dy}{dx}$  اس نقطے پر نقشے کے پیمانے (درجے) کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال 7.6: خواتین کی 100 میٹر دوڑ، میں ایک تیز دوڑنے والی 36 میٹر طے کرنے کے بعد، اپنی بلند ترین رفتار 12 میٹر فی سیکنڈ پر پہنچ جاتی ہے، اس فاصلے تک، اسکی رفتار طے کئے گئے فاصلے کی جذر سے تناسب ہے۔

یہ ثابت کریں کہ جب تک وہ آخری رفتار تک نہیں پہنچ جاتی، اس کی رفتار میں فاصلے سے متعلق تبدیلی کی شرح، اسکی رفتار کے بالعکس تناسب ہے۔

فرض کریں کہ  $x$  میٹر دوڑنے کے بعد اسکی رفتار  $S$  میٹر فی سیکنڈ ہوتی ہے۔ آپکو کہا گیا ہے کہ  $x = 36$  میٹر تک رفتار  $S = k\sqrt{x}$  ہوگی، اور یہ بھی کہ جب  $S = 12$  ہوگا تو  $x = 36$  ہوگی، تو،

$$12 = k\sqrt{36}$$

جو کہ  $k$  کی قیمت دے گا،

$$k = \frac{12}{6} = 2$$

لہذا  $(x, S)$  کا تعلق:  $0 < x < 36$  کے لیے  $S = 2\sqrt{x}$  ہوگا۔

فاصلے سے متعلق رفتار میں تبدیلی کی شرح، متفرق  $\frac{dS}{dx}$  ہوگی، اور  $\sqrt{x}$  کا متفرق (حصہ حصہ 6.5 سے)  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$  ہے۔

اس لیے،

$$\frac{dS}{dx} = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

چونکہ  $\sqrt{x} = \frac{S}{2}$  ہے،  $\frac{dS}{dx}$  کو  $\frac{2}{S}$  لکھا جاسکتا ہے۔ تبدیلی کی شرح، اس لیے، اسکی رفتار کے بالعکس تناسب ہے۔ باقی (بچی ہوئی) دوڑ تک کے لیے اگر وہ اپنی بلند ترین رفتار برقرار رکھتی ہے، تو رفتار برقرار رکھتی ہے، تو رفتار میں فاصلے کی نسبت تبدیلی کی شرح 0 تک گر جائے گی،

xg36 کے لیے صورت شکل 7.13 ظاہر کرتی ہے کہ ڈھلوان (چونکہ تبدیلی کی شرح کو ظاہر کرتا ہے)، جیسے ہی اسکی رفتار بڑھتی جائے گی، چھوٹا ہوتا جائے گا، اور پھر صفر ہوگا۔ جو نیچی وہ بلند ترین رفتار پہ پہنچ جائے گی۔ □

مثال 7.7: کاروں کی ایک قطار، جس میں ہر کوئی 5 میٹر لمبی ہے، ایک مستقل رفتار  $S$  کلومیٹر فی گھنٹہ کے حساب سے ایک کھلی سڑک پر سفر کر رہی ہے۔ کاروں کی ہر جوڑی کے درمیان ایک تجویز کردہ فاصلہ ہے جو کہ قاعدہ  $(0.18S + 0.006S^2)$  میٹر میں دیا گیا ہے، سڑک میں گنجائش کے مطابق کاروں کی تعداد کو بڑھانے کے لیے، کاروں کو کس رفتار سے سفر کرنا چاہیے؟

فاصلے کے قاعدے کو  $(aS + bS^2)$  کی شکل میں لکھنا، ایک اچھا تصور ہے، جہاں  $a = 0.18$  اور  $b = 0.006$  ہیں۔ یہ ایک صاف قاعدہ دیتا ہے، اور عددی سروں کو قاعدے میں تبدیل کرنے سے قاعدے پر پڑنے والے اثر کو بھی کھوجنے کے قابل بناتا ہے۔ لیکن یہ یاد رہے، جب آپ  $a$  اور  $b$  کا تفرق لیتے ہیں تو وہ محض مستقل اعداد ہوتے ہیں۔

ایک ہار جو کہ کار کی لمبائی کا ہے اور اس کے سامنے علیحدگی کا فاصلہ سڑک کے  $5 + aS + cS^2$  میٹر یا  $\frac{5+aS+cS^2}{1000}$  km کو گھیر لیتا ہے، ایک گھنٹے میں ایک نگرانی کرنے والے مقام سے گزرنے والے بلاکس کی سب سے بڑی تعداد کے لیے، ایک بلاک سے چیک پوسٹ سے گزرنے کا وقت  $T$  (گھنٹوں میں) جتنا ممکن ہو سکے کم سے کم ہونا چاہیے۔ چونکہ بلاک  $S$  کلومیٹر فی گھنٹہ کے حساب سے حرکت کر رہا ہے۔

$$TS = \frac{5 + aS + cS^2}{1000}$$

$$T = \frac{5 + aS + cS^2}{1000S}$$

$$T = 0.001(5S^{-1} + a + bS)$$

اب  $T$  کی کم سے کم قیمت کو معلوم کرنے کے طریقہ کار کی پیروی کریں۔

ا. چونکہ رفتار کو مثبت ہونی چاہیے، اس لیے دائرہ کار  $S \geq 0$  ہوگا۔

$$\text{ب. تفرق ہوگا، } \frac{dT}{dS} = 0.001(5S^{-2} + a + b)$$

ج. یہ متفرق دائرہ کار میں ہر جگہ واضح ہے، اور جب  $5S^{-2} + a + b = 0$  ہے تو صفر ہے۔ جس سے  $S = \sqrt{\frac{5}{b}}$  آتا ہے

د. ونیچی  $S$  بڑھتی ہے  $\frac{5}{S^2}$  کم ہوتا ہے، اس لیے  $5S^{-2} + a + b$  بڑھتا ہے، چونکہ  $\frac{dT}{dS}$  صفر ہے، جب  $S = \sqrt{\frac{5}{b}}$  ہے، اور جب  $S < \sqrt{\frac{5}{b}}$  ہے تو  $\frac{dT}{dS}$  کی علامت منفی ہے اور جب  $S > \sqrt{\frac{5}{b}}$  ہے تو علامت مثبت ہے۔

ه. ویکہ  $\frac{dT}{dS}$  منفی سے مثبت تک تبدیل ہوتا ہے،  $T$  کم سے کم ہوگا، جب  $S = \sqrt{\frac{5}{b}}$  ہوگا۔

و.  $a = 0.18$  اور  $b = 0.006$  کو متبادل استعمال کرنے پر  $S = \sqrt{\frac{5}{0.006}} \approx 28.87$  آتی ہے اور  $T \approx 0.0005264$  کم سے کم نقطے پر آتا ہے۔

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ کاروں کی حرکت 29 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار پہ سب سے بہتر ہوگی۔ (ہر بلاک پھر تقریباً 0.000526 گھنٹہ یا 1.89 سیکنڈز لے گا،) (چیک پوائنٹ سے گزرنے کے لیے) نتیجہً ایک گھنٹے میں گزرنے والی کاروں کی تعداد تقریباً 1900  $\approx \frac{1}{0.000526}$  ہوگی۔

مثال 7.8: ایک خالی مخروط، جس کی تہ کا رداس  $a$  سینٹی میٹر اور اونچائی  $b$  سینٹی میٹر ہیں، ایک میز پر پرا ہوا ہے۔ اس سب سے بڑے بیلن کا حجم کیا ہوگا، جسے اسکے اندر چھپایا جاسکتا ہو؟

رداس  $r$  سینٹی میٹر اور اونچائی  $h$  کے بیلن کا حجم  $V$  ہے، جو کہ

$$V = \pi r^2 h$$

آپ برملا اپنی مرضی سے  $r$  اور  $h$  کو بڑا سے بڑا رکھ کے، اسے بڑا بنا سکتے ہیں۔ لیکن اس سوال میں متغیرات اس اقتضا کے پابند ہیں کہ بیلن کو مخروط کے سانچے میں پورا آنا چاہیے ہوگا۔

زیادہ سے زیادہ قیمت معلوم کرنے کا طریقہ کار کی پیروی کرنے سے پہلے آپ کو اس چیز کو معلوم کرنے کی ضرورت ہے کہ یہ حد بندی  $r$  اور  $h$  کی قیمتوں کو کیسے اثر انداز کرتی ہے۔

صورت شکل 7.14 ظاہر کرتی ہے ایک تین سمتی ڈھانچے کو اور صورت شکل 7.15 ایک عمودی حصہ ہے، جو کہ مخروط کے سب سے اوپر ہے۔ صورت شکل 7.15 میں بھاری کپڑوں سے منتخب کی ہوئی مثلثیں (جو کہ مماثل ہیں) یہ ظاہر کرتی ہیں کہ  $r$  اور  $h$  مندرجہ ذیل مساوات کے ذریعے جڑے ہوئے ہیں؛

$$\frac{h}{a-r} = \frac{b}{a}$$

الغذا۔

$$h = \frac{b(a-r)}{a}$$

ہوگا۔

$h$  کے اس فقرے کو  $V$  کے کلیے میں متبادل استعمال کرنے پر ملتا ہے۔

$$V = \frac{\pi r^2 b(a-r)}{a} = \frac{\pi b}{a} (ar^2 - r^3)$$

یہ بات دھیان میں رہے کہ  $V$  کے ابتدائی ریاضیاتی فقرے میں دو آزاد متغیرات  $r$  اور  $h$  موجود ہیں۔ متبادل استعمال کرنے کے نتیجے میں آزاد متغیرات کی تعداد کم ہو کر ایک رہ جائیگی،  $h$  غائب ہو جاتا ہے اور صرف  $r$  باقی رہتا ہے۔ یہ طریقہ کار کو استعمال کر کے زیادہ سے زیادہ

قیمت معلوم کرنے کو ممکن بناتا ہے۔ اس طبعی مسئلے کا کوئی حقیقی مطلب تب ہوگا جب  $0 < r < a$  ہو، لہذا اس وقفے کو تفاعل کے دائرہ کار کے طور پر لے لیں۔ عمومی اصول کے مطابق تفریق کر کے (یاد رہے کہ  $\pi a$  اور  $b$  مستقل اعداد ہیں) معلوم ہوتا ہے،

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dr} &= \left(\frac{\pi b}{a}\right) (2ar - 3r^2) \\ &= \left(\frac{\pi b}{a}\right) r(2a - 3r)\end{aligned}$$

دائرہ کار میں موجود  $r$  کی صرف وہ قیمت جس کے لیے  $\frac{dV}{dr} = 0$  ہے،  $\frac{2}{3}a$  ہے۔ اس بات کی جانچ پڑتال کرنا کہ  $\frac{dV}{dr}$  کی علامت  $0 < r < \frac{2}{3}a$  کے لیے مثبت ہے۔ اور  $r > \frac{2}{3}a$  کے لیے منفی ہے، بہت آسان ہے۔ لہذا، زیادہ سے زیادہ حجم کے بیلن کا رداس  $\frac{2}{3}a$  ہوگا، اونچائی  $\frac{1}{3}b$  ہوگی اور حجم  $\frac{4}{27}\pi a^2 b$  ہوگا۔ □

سوال 1: سوال کے ہر حصے میں ہر تفریق کو ظاہر کریں فلاں کی نسبت سے فلاں میں تبدیلی کی شرح میں اور اس کی طبعی اہمیت بیان کریں۔

ا. معلوم کریں  $\frac{dh}{dx}$  جبکہ  $h$  سطح سمندر سے بلندی، اور  $x$ ، سیدھی سڑک پر طے کیا گیا افقی فاصلہ ہے۔

ب. معلوم کریں  $\frac{dN}{dt}$  جبکہ  $N$  وقت  $t$  پر انسٹیڈیم کا گیٹ کھلنے کے بعد لوگوں کی تعداد ہے۔

ج. معلوم کریں  $\frac{dM}{dr}$  جبکہ  $M$  مقناطیس سے فاصلے  $r$  پر مقناطیسی قوت ہے۔

د. معلوم کریں  $\frac{dv}{dt}$  جبکہ  $v$  ایک زرے کی رفتار ہے جو وقت  $t$  کے ساتھ ایک سیدھی لکیر میں حرکت کر رہا ہے۔

ه. معلوم کریں  $\frac{dq}{ds}$  جبکہ  $q$  گاڑی میں استعمال ہونے والے پیٹرول کی شرح ہے، اور  $S$  کلومیٹر فی گھنٹہ میں گاڑی کی رفتار ہے۔

سوال 2: درج ذیل تمام جملوں کو موزوں اکائیوں اور علامات کا استعمال کرتے ہوئے متفرق کی شکل میں لکھیں۔

1. سطح سمندر سے بلندی کی نسبت سے فضائی دباؤ میں تبدیلی کی شرح

2. دن کے وقت کی نسبت سے درجہ حرارت میں تبدیلی کی شرح

3. وقت کے ساتھ جوار میں بڑھنے کی شرح

4. زندگی کے پہلے ہفتے میں بچے کے وزن میں اضافے کی شرح

سوال 3:

7.4. متغیرات، تبدیلی کی شرح کے موافق

ا. معلوم کریں جبکہ  $z = 3t^2 + 7t - 5$   $\frac{dz}{dt}$

ب. معلوم کریں جبکہ  $\theta = x - \sqrt{x}$   $\frac{d\theta}{dx}$

ج. معلوم کریں جبکہ  $x = y + \frac{3}{y^2}$   $\frac{dx}{dy}$

د. معلوم کریں جبکہ  $r = t^2 + \frac{1}{\sqrt{t}}$   $\frac{dr}{dt}$

ه. معلوم کریں جبکہ  $m = (t + 3)^2$   $\frac{dm}{dt}$

و. معلوم کریں جبکہ  $f = 2s^6 - 3s^2$   $\frac{df}{ds}$

ز. معلوم کریں جبکہ  $w = 5t$   $\frac{dw}{dt}$

ح. معلوم کریں جبکہ  $R = \frac{1-r^3}{r^2}$   $\frac{dR}{dr}$

سوال 4: ایک ذرہ  $x$  - محور کے گرد حرکت کرتا ہے۔ وقت  $t$  پر اس کی منتقلی  $x = 6t - t^2$  ہے۔

ا.  $\frac{dx}{dt}$  کیا ظاہر کرتا ہے؟

ب.  $x$  بڑھ رہا ہے یا کم ہو رہا ہے؟ جب  $x = 1$  اور  $x = 4$  ہے؟

ج. ذرے کی سب سے بڑی مثبت منتقلی معلوم کریں۔ اور بتائیں کہ کس طرح یہ آپ کے پہلے حصے کے جواب سے جڑا ہوا ہے؟

سوال 5:

مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کو ریاضیاتی شکل میں ڈھالنے کے لئے مناسب علامت نویسی وضع کریں۔

ا. موٹرے پر طے کردہ فاصلہ مستقل شرح سے بڑھ رہا ہے۔

ب. سیونگ بینک ڈپازٹ میں اضافے کی شرح جمع کی گئی رقم کے متناسب ہے۔

ج. درجہ حرارت کے تفاعل کے متناسب درخت کے تنے کا قطر بڑھتا ہے۔

سوال 6: ایک گاڑی ہر ایک کلو میٹر کے لئے  $S$  کلو میٹر فی گھنٹہ کی رفتار پر چلتے ہوئے  $y$  کلو میٹر فی لیٹر پیٹرول استعمال کرتی ہے۔ جبکہ

$$y = 5 + \frac{1}{5}S - \frac{1}{800}S^2$$

وہ رفتار معلوم کریں جس کے لیے کار کم خرچ میں زیادہ فاصلہ طے کرے۔

سوال 7: ایک گیند عمودی طور پر اوپر کی طرف پھینکی گئی۔ وقت  $t$  پر اس کی بلندی  $h$  ہے اور ان دونوں کے بیچ کا تناسب اس مساوات  $h = 20t - 5t^2$  سے ملتا ہے۔ گیند کی زمین سے اوپر زیادہ سے زیادہ بلندی معلوم کریں۔

سوال 8: دو حقیقی اعداد  $x$  اور  $y$  کا مجموعہ 12 ہے۔ اس ضرب  $xy$  کی زیادہ سے زیادہ قیمت معلوم کریں۔

سوال 9: دو حقیقی مثبت اعداد  $x$  اور  $y$  کا ضرب 20 ہے۔ ان کے جمع کی کم سے کم قیمت معلوم کریں۔

سوال 10: ایک سیلینڈر کے حجم کا کلیہ  $V = \pi r^2 h$  ہے، حجم  $V$  کی سب سے بڑی اور سب سے چھوٹی قیمت معلوم کریں۔

سوال 11: ایک رسی جو کہ 1 سینٹی میٹر لمبی ہے، سے دائرے بنائے گئے ہیں، اس مربعی دائرے میں مخالف سمتوں کے ایک جوڑے کی لمبائی  $x$  سینٹی میٹر ہے۔ اس  $x$  کی قیمت معلوم کریں یہ خیال رکھتے ہوئے کہ اس دائرے کا رقبہ بڑے سے بڑا ہوگا۔

سوال 12: بھیڑوں کے ایک مستطیل ہاڑے کی ایک سمت میں رکاوٹ لگائی گئی ہے باقی کی تین سمتوں میں ہاڑ لگائی گئی ہے۔ مستطیل کی لمبائی  $x$  میٹر ہے؛ 120 میٹر جنگلا دستیاب ہے۔

ا. ظاہر کریں کہ مستطیل کا رقبہ  $\frac{1}{2}x(120 - x)m^2$  ہے۔

ب. بھیڑ کے ہاڑے کا زیادہ سے زیادہ رقبہ معلوم کریں۔

سوال 13: دھات کے ایک مستطیل ٹکڑے کی لمبائی 50 سینٹی میٹر اور چوڑائی 40 سینٹی میٹر ہے۔ ہر ایک کونے سے لمبائی  $x$  سینٹی میٹر کے برابر مربع کاٹے اور پھینک دیے گئے۔ اب شیٹ کو ایک تہ کر کے  $x$  سینٹی میٹر گہرائی کی ایک ٹرے بنائی گئی۔  $x$  کی ممکنہ قیمتوں کا دائرہ کار کیا ہے؟ ٹرے کی سکت یا حجم کو زیادہ سے زیادہ بنانے والی  $x$  کی قیمت معلوم کریں۔

سوال 14: ایک مربع بنیاد کا استعمال کرتے ہوئے ایک کھلا مستطیل بنانا ہے جس کا حجم 4000 سینٹی میٹر کیوب ہے۔ اس بنیاد کی ایک سمت کی لمبائی معلوم کریں جب مستطیل بنانے کے لیے درکار مواد کو کم سے کم استعمال میں لایا جائے۔

سوال 15: ایک بیلن کار رومی کی ٹوکری، جس کا رداس  $r$  سینٹی میٹر ہے اور سکت  $V$  سینٹی میٹر کیوب ہے۔ سطح کا رقبہ 5000 مربع سینٹی میٹر ہے۔



$$V = \frac{1}{2}r(5000 - \pi r^2) \text{ کہ ثابت کریں}$$

ب. ٹوکری کی زیادہ سے زیادہ سکت معلوم کریں۔

سوال 16: رداس 10 سینٹی میٹر کے کرہ کی اندر ایک گھل اسطوانہ پڑا ہوا ہے۔ اسطوانہ کے زیادہ سے زیادہ حجم کا حساب لگائیں۔

سوال 17: تفرق کا استعمال کرتے ہوئے وکر پر غیر متحرک نقطوں کے محدود تلاش کریں۔

$$y = x + \frac{4}{x}$$

اور دریافت کریں کہ ہر غیر متحرک نقطہ زیادہ سے زیادہ نقطہ ہے یا کم سے کم نقطہ ہے۔  $x$  کے اقدار کا مجموعہ تلاش کریں جس کے لئے  $y$  بڑھتا ہے جیسے جیسے  $x$  کی قیمت بڑھتی ہے۔

سوال 18: ایک تابکار مادہ کے سڑنے کی شرح، اس وقت تک بچے ہوئے مادہ کے متناسب سمجھا جاتا ہے۔ اگر وقت  $t$  پر، بچا ہوا مادہ  $m$  ہے، تو اس کا مطلب ہے کہ  $m$  اور  $t$  مساوات کو پورا کرتے ہیں۔

$$\frac{dm}{dt} = -km$$

جبکہ  $k$  ایک مثبت مستقل ہے۔ (منفی نشان مادہ کے گھٹنے کی نشاندہی کرتا ہے۔) اسی طرح کی مساوات بنائیں جو مندرجہ ذیل بیانات کی نمائندگی کرتی ہوں۔

ا. بیکٹیریا کی آبادی نرھنے کی شرح، بیکٹیریا کی موجودہ آبادی میں موجود بیکٹیریا کی تعداد  $n$  کے متناسب ہے

ب. جب گرم سوپ کا ایک پیالہ فریجز میں رکھا جائے تو، درجہ حرارت،  $0^\circ\text{C}$  کے گھٹنے کی شرح موجودہ درجہ حرارت کے متناسب ہے۔

ج. ایک کافی کپ کا درجہ حرارت  $0^\circ\text{C}$  گھٹنے کی شرح، کمرے کے درجہ حرارت اور اس کافی کے پیالے کے درجہ حرارت میں فرق کے ساتھ متناسب ہے۔

سوال 19: ایک گاڑی نے ایک ٹرک کو تیز رفتاری سے پیچھے چھوڑا۔ اس کی ابتدائی رفتار  $u$  ہے، اور وقت  $t$  پر جب اس کار نے رفتار بڑھانا شروع کی تو  $x$  فاصلہ طے کیا ہے، جبکہ  $x = ut + kt^2$  تفرق کا استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ گاڑی کی رفتار  $x = ut + kt^2$  ہے، اور یہ ظاہر کریں کہ اس کی تیز رفتاری مستقل ہے۔

سوال 20: جب ڈرائیور نے گاڑی کے بریک لگائے تو گاڑی  $20\text{ms}^{-1}$  کی رفتار سے چل رہی تھی۔ بریک لگانے کے  $t$  سینکڑوں بعد گاڑی مزید  $x$  میٹر کا فاصلہ طے کر چکی تھی۔ جبکہ  $x = 20t - 20t^2$ ۔ تفرق کی مدد سے اس وقت کار کی رفتار اور اسراع معلوم کریں۔ یہ بھی معلوم کریں کہ یہ کیلئے کب تک لاگو ہوں گے؟

سوال 21: ایک لڑکا ایک پہاڑ کی 60 میٹر اونچی چوٹی پر کھڑا ہے۔ وہ سیدھا اوپر کی جانب ایک پتھر پھینکتا ہے، کہ اس پتھر کا فاصلہ  $h$  میٹر، اس چٹان کی چوٹی سے اس مساوات  $h = 20t - 5t^2$  کی مدد سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

ا. پہاڑ کے اوپر پتھر کی زیادہ سے زیادہ اونچائی معلوم کریں۔

ب. پتھر لڑکے اور پہاڑ کی چوٹی سے تھوڑا سا چوک کر چوٹی سے نیچے کر جاتا ہے، معلوم کریں وہ وقت کہ جب پتھر ساحل سے نکلے گا۔

ج. وہ رفتار معلوم کریں جس سے پتھر ساحل سمندر سے نکلے گا۔

سوال 22: مساوات  $x^2 + y^2$  کی کم سے کم قیمت معلوم کریں جب  $x + y = 10$  ہو۔

سوال 23: ایک قائمہ زاویہ مثلث کی دو چھوٹی اطراف کی لمبائی کا مجموعہ 18 سینٹی میٹر ہے، معلوم کریں؛

ا. ڈھلوان کی کم سے کم لمبائی۔

ب. مثلث کا زیادہ سے زیادہ ممکنہ رقبہ

سوال 24:

ا. مساوات  $y = 12x + 3x^2 - 2x^3$  کے خاکہ پر مستقل نقطے تلاش کریں اور خاکہ بنائیں۔

ب. یہ خاکہ کیسے دیکھائے گا کہ مساوات  $12x + 3x^2 - 2x^3 = 0$  کے صرف تین حقیقی حل ہیں۔

ج. اپنے خاکے کو استعمال کرتے ہوئے واضح کریں کہ اس مساوات  $12x + 3x^2 - 2x^3 = -5$  کے بھی صرف تین حقیقی حل ہیں۔

د. مساوات  $12x + 3x^2 - 2x^3 = k$  کے حل  $k$  کی کن قیمتوں کے لیے درج ذیل شرائط پوری کریں گے؟

ا. بالکل تین حقیقی حل؟

ب. صرف ایک حقیقی حل؟

سوال 25: مساوات  $y = x^3 - 12x - 12$  کے خم کے ساکن نقاط معلوم کریں، نیز خم بھی بنائیں۔

$k$  کی وہ قیمتیں معلوم کریں کہ جن کے لیے مساوات  $x^3 - 12x - 12 = k$  کے ایک سے زیادہ حقیقی حل ملیں۔

سوال 26: مساوات  $y = x^3 - 12x - 12$  کے خم پر موجود ساکن نقاط معلوم کریں، خم بنائیں اور  $k$  کی وہ تمام قیمتیں معلوم کریں جن کے لیے مساوات  $x^3 + x^2 = k$  کے تین حقیقی حل موجود ہوں۔

سوال 27: مساوات  $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 10$  کے خم کے ساکن نقاط معلوم کریں، خم بنائیں،  $k$  کی کن قیمتوں کے لیے مساوات  $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 10 = k$  کے

ا. چار حقیقی حل ہوں گے

ب. دو حقیقی حل ہوں گے

سوال 28: مساوات  $y = x(x-1)^2$  کے خم کے ساکن نقاط کے محدود معلوم کریں، خم بنائیں۔  $k$  کی حقیقی قیمتوں کا ایک سیٹ بنائیں جن کے لیے مساوات  $x(x-1)^2 = k$  کا صرف ایک حقیقی حل ہو۔

سوال 29: کسی جسم کا درمیانی حصہ ایک چوتھائی دائرہ ہے، اور جیساک کہ شکل میں دکھایا گیا ہے اس کا رداس  $r$  ہے اور یہ چوتھائی دائرہ ایک مستطیل جسکی لمبائی  $x$  اور اونچائی  $r$  ہے، سے جڑا ہوا ہے۔

ا. اس حصے کی باہری دیوار  $P$  اور رقبہ  $A$  ہیں۔ ان دونوں کو  $r$  اور  $x$  کی نسبت سے لکھیں، اور یہ بھی ثابت کریں کہ  $A = -\frac{1}{2}Pr - r^2$

ب. فرض کریں کہ باہری دیوار کی لمبائی مستقل ہے،  $x$  معلوم کریں  $r$  کی نسبت سے، ایسی صورت حال کے لیے کہ جب رقبہ  $A$  زیادہ سے زیادہ ہو۔ اور ثابت کریں کہ  $x$  کی اس قیمت کے لیے  $A$  زیادہ سے زیادہ ہے نہ کہ کم سے کم۔

سوال 30: ایک خم کی مساوات  $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$  ہے۔ متفرق کی مدد سے اس خم کے ساکن نقاط کے محدود معلوم کریں اور یہ بھی معلوم کریں کہ ساکن نقاط زیادہ سے زیادہ قیمت کے حامل نقاط ہیں یا کم سے کم قیمت کے حامل نقاط ہیں۔ اسی خم کے نقاط حاصل کریں وگرنہ ذیل میں دیے گئے دونوں خموں کے ساکن نقاط کے محدود معلوم کریں۔

ا.  $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 5$

ب.  $y = \frac{2}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2}$

سوال 31: ایک سوپر مارکیٹ کا مینیجر اکثر اوقات 20 فیصد منافع رکھتا ہے ان تمام اشیاء پر جو کہ وہ بیچتا ہے۔ وہ یہ تسلیم کرتا ہے کہ  $F$  اسکے کچے گاہک ہیں اور اگر وہ اپنا منافع  $x$  فیصد تک لے آئے تو وہ  $k(20 - x)$  مزید گاہکوں کی توجہ اپنی طرف کر سکے گا۔ ہر ہفتے خریدار جو اس سے سامان خریدتے ہیں انکی تھوک کے حساب سے قیمت  $A$  یورو ہے۔ ثابت کریں کہ منافع  $x$  فیصد ہونے پر مینیجر کو ہفتہ وار منافع  $Ax((F + 20k) - kx)$  یورو ہوگا۔ یہ بھی ثابت کریں کہ اگرچہ مینیجر اپنا منافع 20 فیصد سے کم کر لے وہ منافع کما سکتا ہے، یہ بات ذہن میں رکھتے ہوئے کہ اسکے پاس گاہکوں کا اضافہ ہوگا۔

سوال 32: ایک کمپنی جو کہ چڑھائی چڑھنے والے جوتے بناتی ہے اسکے دو طرح کے اخراجات ہیں۔ مستقل اخراجات، (پودوں، قیمتوں اور دفتر کے اخراجات) 2000 یورو فی ہفتہ۔ مصنوعات بنانے کی لاگت، (مواد اور مزدوروں پر آنے والی لاگت) 20 یورو فی جوڑا۔ مارکیٹ پر کی گئی تحقیق یہ بتاتی ہے کہ اگر 30 یورو فی جوتا بیچا جائے تو ہفتے میں 500 جوڑے جوتے کے کمیں گے۔ لیکن 55 یوروں میں ایک جوتا بھی نہیں بکے گا۔ اور ان کے درمیان بنائی گئی ترسیم جو کہ بکری اور قیمت کے مابین ہے وہ ایک سیدھی لکیر ہے۔ اگر کمپنی والے ایک جوڑے کی قیمت  $x$  یورو لگا دیں، تو درج ذیل کے لیے مساوات معلوم کریں

ا. ہفتہ وار بکری

ب. ہفتہ وار رسیدیں

ج. ہفتہ وار لاگت

یہ بھی ثابت کریں کہ ہفتہ وار منافع اس مساوات  $P = -20x^2 + 1500x - 24000$  سے حاصل کیا جاسکتا ہے اور وہ قیمت بھی معلوم کریں کہ جس پے بوٹ بیچنے سے زیادہ سے زیادہ منافع ہوگا۔

سوال 33: ایک جفت تفاعل کا خم بنائیں جسکا ہر نقطے پر تفرق لینا ممکن ہے۔ فرض کریں اسی خم پے  $P$  کوئی نقطہ ہے جبکہ  $x = p$  بشرطیکہ  $p > 0$ ، اسی خم پے نقطہ  $P$  پر ایک خط مماس بنائیں۔ نقطہ  $P$  پر بھی خط مماس بنائیں جس کے لیے  $x = -p$

ا. نقطہ  $P$  اور  $P$  کی ڈھلوانوں میں کیا تعلق ہے۔ ان دونوں نقاط کے متفرق  $f'(p)$  اور  $f(p)$  میں باہمی تعلق بھی معلوم کریں۔ یہ تعلق آپکو ایک جفت تفاعل کے متفرق کے بارے میں کیا تفصیلات فراہم کر رہا ہے۔

ب. ثابت کریں کہ کسی بھی تاک تفاعل کا متفرق جفت ہوتا ہے۔

باب 8

ترتیبات



باب 9

الکراجی کا مسئلہ ثنائی





## باب 10

### تکونیات

اس سبق میں ہم سائن، کوسائن اور ٹینجینٹ کے بارے میں پڑھیں گے، جب آپ یہ سبق مکمل کر لیں گے تو آپ اس قابل ہوں گے کہ:

1. تمام زاویوں کے لیے سائن، کوسائن اور ٹینجینٹ کے تریسوں کی شکل پہچانیں
2. خاص زاویوں کے لیے سائن، کوسائن اور ٹینجینٹ کی قیمتیں معلوم ہوں یا معلوم کرنے کا طریقہ آتا ہو۔
3. سادہ مثلثی مساوات حل کر سکیں
4.  $\sin \theta^0$ ،  $\cos \theta^0$  اور  $\tan \theta^0$  کی مماثل کا استعمال آتا ہو۔

#### 10.1 $\cos \theta^0$ کی ترسیم

زاویے کی علامت کے طور پر اکثر یونانی زبان کے خط استعمال کیے جاتے ہیں، ہم اس سبق میں  $\theta$  (تھینا) اور  $\phi$  (فائی) استعمال کریں گے۔

غالباً آپ نے  $\cos \theta^0$  پہلے قائم مثلث میں زاویوں کا حساب لگاتے ہوئے استعمال کیا ہوگا، کہ جب زاویہ صفر سے بڑا اور 90 سے چھوٹا تھا۔ اور پھر آپ نے اسے کسی اور مثلث میں استعمال کیا ہوگا جب زاویہ  $0 < \theta < 180$  تھا۔ تاہم اگر آپ کے پاس ایک ترسیم بنانے والا حساب کتاب کا آلہ ہے تو آپ دیکھیں گے کہ یہ  $\cos \theta^0$  کی ایسی ہی ترسیم بناتا ہے جیسی کہ شکل 10.3 میں بنی ہوئی ہے۔ یہ حصہ  $\cos \theta^0$  کی تعریف بیان کرتا ہے ہر طرح کے زاویوں کے لیے بیشک وہ مثبت ہوں یو منفی۔

شکل 10.1 میں ایک دائرہ دکھایا گیا ہے جسکا رداس 1 اکائی ہے اور جسکا مرکز O پر ہے۔ x محدد پر ایک زاویہ بناتا ہے ہونے ایک خط OP کھینچیں کہ یہ دائرے کی حد کو چھو لے اور اس نقطے کو P کہہ دیں۔ سے ایک عمودی خط کھینچیں کہ وہ OA کو پالے اور جس نقطے پر وہ خط OA کو چھوئے اس نقطے کو N کہہ دیں۔ فرض کریں کہ  $ON = x$  ہے اور  $NP = y$  ہے جبکہ نقطہ P کے محدد (x, y) ہیں۔

مثلاً ONP کو دیکھیں، تعریف استعمال کرتے ہوئے  $\cos \theta = \frac{ON}{OP} = x$  اور ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ  $\cos \theta = \frac{x}{1} = x$ ۔

نتیجہ  $\cos \theta^0 = x$  دراصل  $\cos \theta^0$  کی تعریف کے طور پر استعمال ہو رہا ہے زاویے کی تمام قیمتوں کے لیے۔

آپ اس تعریف کی اثرات دیکھیں گے جب زاویہ 90 کا مضرب ہوگا۔

مثال 10.1: مثلثی تناسب  $\cos \theta^0$  کی قیمت معلوم کریں جب؛

$$\theta = 270$$

$$\theta = 180$$

1. جب  $\theta = 180$ ، P ایک نقطہ ہے جسکے محدد (1, 0) ہیں۔ جیسا کہ x محدد نقطہ P کا 1- ہے لہذا  $\cos^0 180 = -1$ ۔

2. جب زاویہ  $\theta = 270$ ، P ایک نقطہ ہے (0, -1) اسی لیے  $\cos^0 270 = 0$ ۔

□

جیسے جیسے زاویہ بڑھتا ہے نقطہ P دائرے کے گرد گھومتا ہے، اور جب  $\theta = 360$  ہوتا ہے نقطہ P پورا دائرہ مکمل کر کے دوبارہ A پر پہنچ جاتا ہے۔ اور جب زاویہ 360 سے بڑھتا ہے تو نقطہ P دوبارہ چکر شروع کر دیتا ہے۔ یہاں سے ہم بآسانی یہ کہہ سکتے ہیں کہ  $\cos(\theta - 360)^0 = \cos \theta^0$  اور جب بھی زاویہ 360 ہوتا ہے  $\cos \theta^0$  اپنی قیمت دہراتا ہے۔

اگر زاویہ 0 سے چھوٹا ہو تو  $\theta$  مخالف سمت میں گھومے گا لیکن شروع A سے ہی ہوگا۔ شکل 10-2 میں زاویہ -150 دکھایا گیا ہے۔ یعنی اگر  $\theta = -150$  تو P تیسرے خانے میں ہوگا اور چونکہ P کا x محدد منفی ہے لہذا  $\cos(-150)^0$  منفی ہوگا۔

حساب کتاب کا ایک آلہ آپکو زاویے کی ہر قیمت کے لیے  $\cos \theta^0$  کی قیمت دے گا۔ اگر آپکے پاس ترسیم بنانے والا حساب کتاب کا آلہ ہے تو ان قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے  $\cos \theta^0$  کی ترسیم بنائیں وہ ایسی ہی دکھے گی جیسی کہ شکل 10.3 میں نظر آ رہی ہے۔

اگر آپ  $\cos \theta^0$  کی ترسیم بنانا چاہتے ہیں تو آپ کو حساب کتاب کے آلے میں مساوات  $y = \cos x$  ڈالنی ہوگی اور یہ بھی خیال رکھیں کہ حساب کتاب کا آلہ ڈگری موڈ میں ہے۔

کوسائن تفاعل کی ترسیم خود کو دہراتی رہتی ہے۔ تفاعل کی اس خصوصیت کو دوری خصوصیت کہتے ہیں۔ اور ان تفاعل کا دور وہ کم سے کم وقفہ ہے کہ جس کے لیے تفاعل خود کو دہراتا ہے۔ اسی لیے کوسائن کے تفاعل کا دور 360 درجے ہے۔ اور خصوصیت  $\cos(\theta \pm 360)^0 = \cos \theta^0$  کو دوری خصوصیت کہیں گے۔ کی قدرتی رجحانات بھی دوری خصوصیت دکھاتے ہیں۔ اور اکثر انکی خصوصیات سمجھنے کے لیے کوسائن تفاعل کا ہی استعمال کیا جاتا ہے۔

مثال 10.2: ایک بندرگاہ میں پانی کی گہرائی میٹرز میں ناپی جاتی ہے اور اس گہرائی کو ماپنے کا کلیہ  $d = 6 + 3 \cos 30t^0$  ہے۔ جبکہ t وقت کے لیے ہے جو گھنٹوں میں ناپا جائے گا دوپہر کے بعد سے۔ معلوم کریں؛

1. رات کے پے پانی کی گہرائی معلوم کریں

2. پانی کی کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ گہرائی اور یہ کس وقت ہوگی۔

1. رات کے 9.45 جب  $t = 9.75$  تاکہ  $d = 6 + 3 \cos(30 + 9.75) = 6 + 3 \cos 292.5 = 7.148$  اسی لیے پانی کی گہرائی 7.15 میٹر ہے۔ اور آپکا جواب 3 معنی خیز ہندسوں تک ہونا چاہیے۔

2. مستقل  $d$  کی قیمت زیادہ سے زیادہ تب ہوگی جب کوسائن تفاعل کی قیمت 1 ہے۔ اور اسی لیے  $9 = 6 + 3 \times 1$ ۔ اسی طرح کم سے کم قیمت بھی  $3 = 6 + 3 \times (-1)$ ، زیادہ سے زیادہ گہرائی 9 میٹر اور کم سے کم گہرائی 3 میٹر ہے۔ پہلی دفعہ جب دوپہر میں یہ واقع وقوع پذیر ہوگا  $30t = 360$  اور  $30t = 180$ ، جسکا مطلب رات کا درمیان اور شام کے 6 بجے ہے۔

□

## 10.2 $\sin \theta^0$ اور $\tan \theta^0$ کی ترسیم

جیسے ہم نے کوسائن کے تفاعل کے لیے ایک شکل 10.1 بنائی اسی کو استعمال کرتے ہوئے سائن کی تعریف کچھ یوں ہوگی۔

$$\sin \theta = \frac{NP}{OP} = \frac{y}{1} = y$$

کوسائن کی ترسیم کی طرح سائن کی ترسیم (شکل 10.4) دوری ہے، جسکا دورانیہ 360 درجے ہے۔ اور اسکی ترسیم بھی 1 اور 1 کے درمیان ہی رہتی ہے۔

اگر آپ شکل 10.1 کی طرف لوٹیں تو آپ دیکھیں گے کہ  $\frac{y}{x} = \frac{NP}{OP} = \tan \theta$ ، اور اسے  $\tan \theta^0$  کی تعریف کی طرح لیا جاتا ہے۔  $\tan \theta^0$  کے میدان عمل میں وہ زاویے شامل نہیں ہیں جن کے لیے  $x$  صفر ہو۔ جیسا کہ  $\theta = \pm 90, \pm 270 \dots$  شکل 10.5 میں  $\tan \theta^0$  کی ترسیم دکھائی گئی ہے۔

سائن اور کوسائن کی ترسیم کی طرح ٹینجٹ کی ترسیم بھی دوری ہے لیکن اسکا دورانیہ 180 ہے، اسی لیے  $\tan(\theta \pm 180) = \tan \theta$

تعریف: ہم جانتے ہیں کہ  $\sin \theta^0 = y$ ،  $\cos \theta^0 = x$  اور ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ  $\tan \theta^0 = \frac{y}{x}$  ہے ان تمام حقائق کو جمع کریں تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ  $\tan \theta^0 = \frac{\sin \theta^0}{\cos \theta^0}$ ، آپ  $\tan \theta^0$  کی متبادل تعریف کے طور پر استعمال کر سکتے ہیں۔

□

### 10.3 چند مثلثی تفاعل کی درست قیمتیں

تعریف: صرف چند ہی ایسے زاویے ہیں جن کی درست قیمت عدد صحیح ہے اور جن کے

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tan 45^\circ = 1$$

آپ درست معلوم کر سکتے ہیں۔ ان زاویوں میں  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  اور  $60^\circ$  زیادہ اہم ہیں۔  $45^\circ$  زاویے کی مثلثی تناسب معلوم کرنے کے لیے ایک قائمہ زاویہ کے سلتھ مساوی الساقین ٹکون بتائیں۔ جس کی اطراف کی لمبائی 1 اکائی ہو۔ جیسا کہ شکل 6-10 میں ہے وتر کی لمبائی-- ہو گی۔ تب

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan 45^\circ = 1$$

اگر آپ نسب نما کو اسٹولائی بنائیں تو

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan 45^\circ = 1$$

-  $30^\circ$  اور  $60^\circ$  درجے کی مثلثی تناسب معلوم کرنے کے لیے ایک یکطرفہ مثلث (ٹکون) بنائیں جس کی اطراف 2 اکائیوں جتنی لمبی ہیں۔ جیسے کہ شکل 7-10 میں دکھایا گیا ہے۔ اس سے ایک خط عمودی خط کھینچیں جو قائمہ کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کر دے۔ اس عمودی خط کی لمبائی  $\sqrt{3}$  اکائیاں ہیں۔ اس عمودی خط نے اس کو بھی دو برابر حصوں میں تقسیم کر دیا ہے۔

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan 60^\circ = \sqrt{3};$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

آپ کو یہ نتائج ازبر ہونے چاہئیں۔

□

مثال 10.3: مندرجہ ذیل کی درست قیمتیں معلوم کریں۔

$$\cos 135^\circ \quad , \quad \sin 120^\circ \quad , \quad \tan 495^\circ$$

-- شکل 10.3 کے مطابق ----- شکل 10-4 کے مطابق ----- شکل 10.5 کے مطابق۔

$$\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad ,$$

$$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad ;$$

$$\cos 495^\circ = \tan(495 - 360)^\circ = \tan 135^\circ = -\tan 45^\circ = -1 \quad ;$$

□

## مشق 10-1

(1) ذیل میں دیے گئے  $\theta$  زاویوں کے لیے 4 اعشاری نقطوں تک درست قیمت معلوم کریں (تمام سوالات کی مساوات یہاں لکھیں)

tan  $\theta^\circ$  iiisin  $\theta^\circ$  iicos  $\theta^\circ$  i

124.9 ز

325 د

25 ا

554 ح

-250 هـ

125 ؛

225 ط

67.4 و

225 ج

(2) ذیل میں دیے گئے تمام تفاعل کی کم اور زیادہ ترین قیمت معلوم کریں۔ نیز--- کی شرح کی وہ کم از کم مثبت قدر بھی معلوم کریں جس پر آپ قیمتیں معلوم کریں گے۔

$$\frac{8}{\sin x^\circ} \quad ,$$

$$2 + \sin x^\circ \quad ا$$

$$9 + \sin(4x - 20)^\circ \quad هـ$$

$$7 - 4 \cos x^\circ \quad ؛$$

$$\frac{30}{11 - 5 \cos \left( \frac{1}{2}x - 45 \right)^\circ} \quad ,$$

$$5 + 8 \cos 2x^\circ \quad ج$$

(3) (اس سوال کے لیے حساب و کتاب کے کسی آلے کا استعمال نہ کریں) سوال کے ہر حصے میں اعداد کے مثلثی تفاعل دیے گئے ہیں 'باقی تمام اعداد معلوم کریں'  $0 \leq x \leq 360$  اس شرط کے ساتھ کہ معلوم کیے گئے اعداد کا مثلثی تفاعل دیے گئے تفاعل کے مساوی ہو۔ مثال کے طور پر اگر  $\sin 80^\circ$  دیا گیا ہے تو ہمارا جواب  $x = 100$  ہونا چاہیے کیونکہ  $-\sin 100^\circ = \sin 80^\circ$

$$\sin(-260)^\circ \quad ؛$$

$$\sin 400^\circ \quad ز$$

$$\sin 130^\circ \quad د$$

$$\sin 20^\circ \quad ا$$

$$\cos(-200)^\circ \quad یا$$

$$\cos(-30)^\circ \quad ح$$

$$\cos 140^\circ \quad هـ$$

$$\cos 40^\circ \quad ؛$$

$$\tan 1000^\circ \quad ؛$$

$$\tan 430^\circ \quad ط$$

$$\tan 160^\circ \quad و$$

$$\tan 60^\circ \quad ج$$

(4) (اس سوال کے لیے بھی حساب و کتاب کے کسی آلے کا استعمال نہ کریں) سوال کے ہر حصے میں اعداد کے مثلثی تقابل دیے گئے ہیں 'باقی تمام اعداد معلوم کریں،  $x$ ،  $-180 \leq x \leq 180$  بشرطیکہ کہ معلوم کیے گئے اعداد کا مثلثی تقابل دیے گئے تقابل کے مساوی ہو۔ مثال کے طور پر اگر  $\sin 80^\circ$  دیا گیا ہے تو ہمارا جواب  $x = 100$  ہونا چاہیے کیونکہ  $\sin 100^\circ = \sin 80^\circ$

$$\begin{array}{llll} \sin 20^\circ & \text{ا} & \sin 130^\circ & \text{د} \\ \sin 400^\circ & \text{ز} & \sin(-260)^\circ & \text{یہ} \\ \cos 40^\circ & \text{ب} & \cos 140^\circ & \text{ط} \\ \cos(-30)^\circ & \text{ح} & \cos(-200)^\circ & \text{یا} \\ \tan 60^\circ & \text{ج} & \tan 160^\circ & \text{و} \\ \tan 430^\circ & \text{ط} & \tan 1000^\circ & \text{یہ} \end{array}$$

(5) حساب و کتاب کا آلہ استعمال کیے بغیر درج ذیل کی درست قیمت معلوم کریں۔

$$\begin{array}{llll} \sin 135^\circ & \text{ا} & \cos 225^\circ & \text{ط} \\ \sin 225^\circ & \text{ط} & \sin 210^\circ & \text{یہ} \\ \cos 120^\circ & \text{ب} & \tan(-330)^\circ & \text{و} \\ \cos 630^\circ & \text{یہ} & \tan 675^\circ & \text{یا} \\ \sin(-30)^\circ & \text{ج} & \cos 900^\circ & \text{ز} \\ \tan 405^\circ & \text{یا} & \cos(-120)^\circ & \text{یہ} \\ \tan 240^\circ & \text{د} & \tan 510^\circ & \text{ح} \\ \sin(-315)^\circ & \text{یہ} & \sin 1260^\circ & \text{یہ} \end{array}$$

(6) حساب و کتاب کا آلہ استعمال کیے بغیر وہ کم ترین زاویہ معلوم کریں کہ دی گئی مساوات درست ہو جائیں۔

$$\begin{array}{llll} \cos \theta^\circ = \frac{1}{2} & \text{ا} & \tan \theta^\circ = -\sqrt{3} & \text{ج} \\ \tan \theta^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3} & \text{ط} & \tan \theta^\circ = -\frac{1}{2} & \text{ز} \\ \cos \theta^\circ = 0 & \text{ح} & \tan \phi^\circ = -1 & \text{و} \\ \sin \phi^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \text{ب} & \cos \theta^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3} & \text{د} \end{array}$$

(7) حساب و کتاب کا آلہ استعمال کیے بغیر طریقات مقباس کا حاصل کم ترین زاویہ معلوم کریں کہ مساوات برابر ہو جائیں۔ (اگر دو زاویہ ہوں تو مثبت کو چنیں)۔

$$\begin{array}{llll} \cos \theta^\circ = -\frac{1}{2} & \text{ا} & \sin \theta^\circ = -1 & \text{ج} \\ \sin \phi^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3} & \text{ط} & \sin \phi^\circ = -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \text{ز} \\ \tan \phi^\circ = \sqrt{3} & \text{ب} & \cos \theta^\circ = -1 & \text{د} \\ \tan \theta^\circ = -\frac{1}{3}\sqrt{3} & \text{و} & \tan \theta^\circ = 0 & \text{ح} \end{array}$$

(8) گودمی میں پانی کی سطح (تقریباً 12 گھنٹے بعد چکر دہراتی ہے اور اس کی مساوات  $D = A + B \sin 30t^\circ$  ہے، یہاں  $D$  گہرائی کو ظاہر کرتا ہے اور اس کی اکائی میٹر ہے۔  $A$  اور  $D$  حثیت مستقل ہیں۔  $t$  وقت ہے۔ جیسے کہ گھنٹوں میں ناپا جائے گا اور یہ کام صبح کے 8:00 بجے کے بعد سے شروع ہوا ہے۔ ہمیں معلوم ہوا کہ پانی کی زیادہ سے زیادہ 7.60 میٹر ہے جبکہ کم سے کم گہرائی 2.2 میٹر ہے۔  $B$  اور  $A$  کی قیمت معلوم کریں 'دوپہر کے وقت گودمی میں پانی کی ایک گہرائی ہوگی۔ آپ کا جواب سینٹی میٹر کی حد تک درست بتائیں۔

10.4  $\sin \theta^0, \cos \theta^0$  اور  $\tan \theta^0$  کی ترینیم کی تشاکل کی خصوصیات

تعریف: اگر آپ  $\sin \theta^0, \cos \theta^0$  اور  $\tan \theta^0$  کی ترینیم کا بغور جائزہ لیں تو آپ ان میں سے تشاکل کی خصوصیات کو دستیاب پائیں گے۔ شکل 10-5 میں  $\cos \theta^0$  کی ترینیم دکھائی گئی ہے۔  $\cos \theta^0$  کی ترینیم عمودی خط کے ساتھ تشاکل میں ہے۔ اس کا مطلب ہے آپ  $\theta$  کو  $-\theta$  سے بدل دیں تو ترینیم پر کوئی اثر نہیں پڑے گا۔

$$\cos(-\theta)^0 = \cos \theta^0$$

اس کا مطلب  $\cos \theta^0$  کی ترینیم  $\theta$  کا ایک جفت تفاعل ہے۔ (جیسا کہ حصہ 3-3 میں بیان کیا گیا ہے) تشاکل کی دیگر خصوصیات بھی ہیں مثال کے طور پر شکل 10-8 میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اگر آپ تفاعل میں 180 درجے جمع یا منفی کریں تو آپ کے تفاعل کا نشان بدل جائے گا۔ یعنی اگر تفاعل مثبت تھا تو منفی ہو جائے گا جبکہ منفی تفاعل مثبت ہو جائے گا۔

$$\cos(\theta - 180)^0 = -\cos \theta^0$$

ہم اسے مستقیم حرکت کی خصوصیات کہتے ہیں۔

□

یہاں ایک مزید کارآمد خصوصیات بھی موجود ہیں۔ جیسے ہم جفت اور مستقیم حرکت کی خصوصیات کے ملاپ سے وجود میں لائے۔

$$\cos(180 - \theta)^0 = \cos(\theta - 180)^0 = -\cos \theta^0$$

مثلاً میں  $\cos \theta^0$  کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے آپ کا اس خصوصیت سے واسطہ پڑا ہو گا۔  $\sin \theta^0$  کی ترینیم جو شکل 10-9 میں دکھائی گئی ہے، کے لیے بھی ایسی ہی خصوصیات ہیں۔ مشق 10-- کے ایک سوال میں آپ ان خصوصیات کے وجود کو ثابت گے۔ ان کو ثابت کرنے کا طریقہ-- کی خصوصیات کو ثابت کرنے کے طریقے سے مماثلت رکھنا ہے۔  $\cos \theta^0$  اور  $\sin \theta^0$  کے تفاعل کے خصوصیات درج ذیل ہیں۔

$$\cos(-\theta)^0 = \cos \theta^0, \sin(-\theta)^0 = -\sin \theta^0$$

$$\sin(\theta - 180)^0 = -\sin \theta^0, \cos(\theta - 180)^0 = -\cos \theta^0$$

مستقیم حرکت کی خصوصیات

$$\cos(\theta \pm 360)^0 = \cos \theta^0$$

$$\cos(180 - \theta)^0 = -\cos \theta^0$$

$$\sin(\theta \pm 360)^0 = \sin \theta^0$$

$$\sin(180 - \theta)^0 = \sin \theta^0$$

اگر آپ شکل 10.5 میں  $\tan \theta^0$  کی ترسیم کا حوالہ لیں اور  $\sin \theta^0$  اور  $\cos \theta^0$  کی ترسیم کے انداز میں اسکا بھی جائزہ لیں تو آپ کو  $\sin \theta^0$  اور  $\cos \theta^0$  جیسے ہی جوابات ملیں گے۔  $\tan \theta^0$  کے تقابل کی خصوصیت مندرجہ ذیل ہیں۔ توآتر کی خصوصیت:

$$\tan(\theta \pm 180)^0 = \tan \theta^0$$

ناک خصوصیت:

$$\tan(-\theta)^0 = -\tan \theta^0$$

$$\tan(180 - \theta)^0 = -\tan \theta^0$$

اس بات پر غور کریں کہ  $\tan \theta^0$  کی ترسیم 180 درجے کے بعد خود کو دہراتی ہے لہذا اس کی مستقیم حرکت کی خصوصیت اور توآتر کی خصوصیت ایک سی ہیں۔

مثال 10.4: خصوصیت ثابت کریں کہ:  $\cos(90 - \theta)^0 = \sin \theta^0$ ۔ یہ آسان ہو جائے گا اگر وقفہ  $0 < \theta < 90$  یہ تصور کیا جائے۔ ایک قائم زاویے کی حاصل مثلث بنائیں، زاویہ صرف آسانی کے لیے چنا گیا ہے البتہ یہ خصوصیت کسی بھی زاویے کے لیے ثابت کی جاسکتی ہے۔ اگر آپ  $\cos \theta^0$  کے کی ترسیم کو زاویے کے مثبت غور میں 90 درجے مستقیم حرکت دیں تو آپ کو  $\sin \theta^0$  کا ترسیم ملے گا۔ لہذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ  $\cos(\theta - 90)^0 = \sin \theta^0$  اور چونکہ  $\cos \theta^0$  ایک جفت تقابل ہے  $\cos(\theta - 90)^0 = \cos(90 - \theta)^0$  اسی لیے  $\cos(90 - \theta)^0 = \sin \theta^0$  ثابت ہو گیا۔ □

مشق 10B میں ایک اور خصوصیت جو آپ کو ثابت کرنی ہوگی وہ  $\sin(90 - \theta)^0 = \cos \theta^0$  ہے۔

مشق 10.1: سوال 1:  $\sin \theta^0$ ,  $\cos \theta^0$  اور  $\tan \theta^0$  کی تشاکل اور توآتر کی خصوصیات استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل نتائج اخذ کریں۔

ا.  $\sin(90 - \theta)^0 = \cos \theta^0$       ہ.  $\tan(\theta - 180)^0 = \tan \theta^0$

ب.  $\sin(270 + \theta)^0 = -\cos \theta^0$       و.  $\cos(180 - \theta)^0 = \cos(180 + \theta)^0$

ج.  $\sin(90 + \theta)^0 = \cos \theta^0$       ز.  $\tan(360 - \theta)^0 = -\tan(180 + \theta)^0$

د.  $\cos(90 + \theta)^0 = -\sin \theta^0$       ح.  $\sin(-90 - \theta)^0 = -\cos \theta^0$

سوال 2:  $y = \tan \theta^0$  اور  $y = \frac{1}{\tan \theta^0}$  کی ترسیم بنائیں اور انہی عور پر ثابت کریں کہ  $\frac{1}{\tan \theta^0} = -\tan(90 - \theta)^0$

سوال 3: مندرجہ ذیل تمام مساوات کی ایسی قیمتیں معلوم کریں کہ جن سے درج ذیل مساوات درست ثابت ہو جائیں۔



$$\sin(\theta + 2\alpha)^0 = \cos(\alpha - \theta)^0 \quad \text{د.} \quad \cos(\alpha - \theta)^0 = \sin \theta^0 \quad \text{ا.}$$

$$\cos(2\alpha - \theta)^0 = \cos(\theta - \alpha)^0 \quad \text{ه.} \quad \sin(\alpha - \theta)^0 = \cos(\alpha + \theta)^0 \quad \text{ب.}$$

$$\sin(5\alpha + \theta)^0 = \cos(\theta - 3\alpha)^0 \quad \text{و.} \quad \tan \theta^0 = \tan(\theta + \alpha)^0 \quad \text{ج.}$$

## 10.5 مثلثی تفاعل کی مساوات کا حل

$$\cos \theta^0 = k \text{ کی مساوات کا حل}$$

$\cos \theta^0 = k$  کی مساوات حل کرنے کے لیے فرض کریں کہ  $-1 \leq k \leq 1$ ۔ اگر  $k$  اس شرط پر پورا اترے تو مساوات کا کوئی حل نہیں ہوگا۔ شکل 10.10 میں  $k$  کی منفی قیمت دکھائی گئی ہے۔ یاد رکھیں ہر 360 درجے کے وقفے میں  $\cos \theta^0 = k$  کے دو جزر ہوتے ہیں سوائے جب  $k = \pm 1$  ہو۔

حساب کتاب کے آلے پر  $[\cos^{-1}]$  کا بٹن دبائیں تو آپکو وہ زاویہ ملے گا جس سے مساوات درست ثابت ہوگی۔ کچھ آلات پر الٹ کو سائن کا بٹن ہوگا۔ لیکن بد قسمتی سے اس طریقے میں ہمیں صرف ایک جزر ملے گا۔ عموماً آپ دیے گئے وقفے میں  $\cos \theta^0 = k$  کے تمام جزر حاصل کرنا چاہتے ہیں۔

$$\cos \theta^0 = k \text{ کی مساوات کو حل کرنے کے لیے 3 اقدام ہیں:-}$$

$$\text{ا. } [\cos^{-1} k] \text{ معلوم کریں۔}$$

$$\text{ب. } \text{تفائل کی خصوصیت استعمال کرتے ہوئے مزید ایک جزر حاصل کریں۔ تفائل کی خصوصیت یہ ہے } \cos(-\theta)^0 = \cos \theta^0$$

$$\text{ج. } \text{تواتر کی خصوصیت یعنی } \cos(\theta \pm 360)^0 = \cos \theta^0 \text{ کا استعمال کرتے ہوئے مزید جزر معلوم کریں۔}$$

مثال 10.5:

$$\text{مساوات } \cos \theta^0 = \frac{1}{3} \text{ کو حل کریں اور } 0 \leq \theta \leq 360 \text{ میں آنے والے تمام جزر ایک اعشاری نقطہ تک درست معلوم کریں۔}$$

$$\text{ا. حساب کتاب کے آلے کا استعمال کریں اور } \cos^{-1} \frac{1}{3} = 70.52\dots \text{ میں آنے والے تمام جزر پہلا جزر ہے۔}$$

ب. تشاکل کی خصوصیت  $\cos(-\theta)^\circ = \cos \theta^\circ$  کا استعمال کریں اور اس خصوصیت سے آپ حاصل کریں گے  $-70.52 = 360 + \dots$  چونکہ دوسرا جذر ہے۔ لیکن یہ بتائے گئے وقفے کا حصہ نہیں ہے۔

ج. تواتر کی خصوصیت  $\cos(\theta \pm 360)^\circ = \cos \theta^\circ$  اور اس سے آپ کو ملے گا  $-70.52 = 360 + \dots$  اور یہ جزر بتائے گئے وقفے میں ہی ہے۔

لہذا  $0 \leq \theta \leq 360$  اس وقفے میں  $70.52$  اور  $289.5$  ایک اعشاری نقطے تک درست جوابات ہیں۔

□

$180 \leq \theta \leq 180$  میں مساوات  $\cos 3\theta^\circ = -\frac{1}{2}$  کے تمام جز معلوم کریں۔ یہ مثال بھی پچھلی مثال جیسی ہے۔ فرق صرف اتنا ہے کہ اس میں دو فالتو اقدام ہیں ایک ابتداء میں اور ایک انتہا پہ۔ فرض کریں کہ  $3\theta = \phi$  اب مساوات  $\cos \phi^\circ = -\frac{1}{2}$  کو حل کرنا ہو گا اور اب یہ مساوات کافی حد تک سادہ ہو چکی ہے۔ لیکن اگر  $3\theta = \phi$  ہے تو  $180 \leq 3\theta \leq (-180) \times$  اسی لیے اب نیا وقفہ  $540 \leq \phi \leq 540$  ہو گا۔ اس طرح ہم اصل مسئلے تک آچکے ہیں کہ  $\cos \phi^\circ = -\frac{1}{2}$  کی مساوات حل کرتی ہے کچھ اس طرح کہ جوابات اسی وقفے میں ہوں (آپ تقریباً 6 جز کے لیے تیار رہیں) پہلا قدم

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120$$

دوسرا قدم: دوسرا جز ہو گا  $-120$ ۔

تیسرا قدم: تیسری کی خصوصیت کے مطابق دونوں معلوم شدہ جز میں  $360$  جمع اور منفی کرتے ہوئے

$$-120 - 360 = -480, -120 + 360 = 240, 120 - 360 = -240$$

$$120 + 360 = 480$$

لہذا دیئے گئے وقفے میں  $\cos \phi^\circ = -\frac{1}{2}$  کے جز  $480, -480, -240, -120, 120, 240$  ہیں یہ ہیں

اصل مساوات کی طرف لوٹتے ہوئے

اور یہ  $\phi = \frac{1}{3}\theta$  حقیقت مد نظر رکھتے ہوئے اصل جز  $80, 40, -40, -80, -160, 160$  ہوں گے

$$\sin \theta^\circ = k$$

$\sin \theta^\circ = k$  کی مساوات اگر دیئے گئے وقفے میں ہو تو اسی طریقے سے ہی حل ہو گا فرق صرف اتنا ہے کہ  $\sin \theta^\circ$  کے لیے تشاکل کی خصوصیت  $\sin(180 - \theta)^\circ$  ہے۔ وقفہ  $-1 \leq k \leq 1$  ہے۔

قدم 1:  $\sin^{-1} k$  معلوم کریں

قدم 2: تشاکل کی خصوصیت  $\sin(180 - \theta)^\circ = \sin \theta^\circ$  کو استعمال کرتے ہوئے دیگر جز معلوم کریں

قدم 3: تواتر کی خصوصیت  $\sin(\theta \pm 360)^\circ = \sin \theta^\circ$  کا استعمال کرتے ہوئے دیگر جز معلوم کریں مثال: 3-10-5

$180 \leq \theta \leq -18$  میں  $\sin \theta^\circ = -0.7$  کے تمام جز ایک اعشاری نقطے تک درست معلوم کریں

قدم 1: حساب و کتاب کے آلے کا استعمال کرتے ہوئے  $\sin^{-1}(-0.7) = -44.42 \dots$  معلوم کریں۔ دی گئی مساوات کا پہلا جز ہے

قدم 2: تشاکل کی خصوصیت  $\sin(180 - \theta)^\circ = \sin \theta^\circ$  کا استعمال کرتے ہوئے یہ  $180 - (-44.42 \dots) = 224.42 \dots$  دوسرا جز ہے۔ بد قسمتی سے یہ بنائے گئے وقفے میں نہیں ہے

قدم 3: تواتر کی خصوصیت  $\sin(\theta \pm 360)^\circ = \sin \theta^\circ$  کا استعمال کر کے  $224.42 \dots - 360 = -135.57 \dots$  حاصل کریں گے یہ جز بنائے گئے وقفے میں ہی شامل ہے

مثال: 4-10-5

وقفہ:  $0 \leq \theta \leq 360$  میں مساوات  $\sin \frac{1}{3}(\theta - 30)^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$  کو حل کریں اور تمام جز معلوم کریں۔

فرض کریں کہ  $\phi = \frac{1}{3}(\theta - 30)$  اور یوں دی گئی مساوات  $\sin \phi^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$  سادہ ہو گئی اور اب ہم اس نئی مساوات کے حل تلاش کریں گے

قدم 1:  $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 60$  یہ بتائے گئے حصہ میں پہلا جز ہے

قدم 2: دوسرا جز  $180 - 60 = 120$  لیکن یہ بتائے گئے وقفے میں نہیں آتا۔

قدم 3:  $360$  کے مضرب کو جمع نفی کرنے سے بھی ہمیں اس وقفے میں ہمیں مزید جز نہیں ملیں گے

اسی وجہ سے مساوات  $\sin \phi^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$  کا وقفہ  $110 \leq \phi \leq -10$  میں ایک ہی جز ہے اور وہ ہے  $60$ ۔ اصل مساوات کی طرف لوٹے ہوئے جبکہ ہم جانتے ہیں کہ  $\theta = 3\phi + 30$  تو مساوات کا اصل جز  $\theta = 210$  ہو گا

$\tan \theta^\circ = k$  کی مساوات حل کرتے ہوئے

$\tan \theta^\circ = k$  کی مساوات بھی ویسے ہی حل ہو گی جیسے ہم نے باقی مثلثی تناسب کی مساوات کو حل کیا۔ یہاں یہ بات اہم ہے کہ ہر  $180$  درجے کے وقفے میں صرف ایک ہی جز ملے گا اور مزید جز کے لیے ہمیں تواتر کی خصوصیت کا سہارا لینا پڑے گا

قدم 1:  $\tan^{-1} k$  معلوم کریں

قدم 2: تواتر کی خصوصیت  $\tan(180 + \theta)^\circ = \tan \theta^\circ$  کا استعمال کرتے ہوئے دیگر جز تلاش کریں

سوال 1: زاویے کی دو کم سے کم قیمتیں معلوم کریں کہ جن کے لیے درج ذیل مساوات درست ثابت ہوں۔ آپکا جواب ایک اعشاری نقطے تک درست ہونا چاہیے۔

$$\begin{aligned} \text{ا. } \cos \frac{1}{2}\theta^\circ &= \frac{2}{3} & \text{ب. } \tan \frac{2}{3}\theta^\circ &= -3 & \text{ج. } \sin \frac{1}{4}\theta^\circ &= -\frac{1}{4} & \text{د. } \tan \frac{3}{4}\theta^\circ &= 0.5 \\ \text{ا. } \cos \frac{1}{3}\theta^\circ &= \frac{1}{3} & \text{ب. } \sin \frac{2}{3}\theta^\circ &= -0.3 & \text{ج. } \cos \frac{1}{3}\theta^\circ &= \frac{1}{3} & \text{د. } \sin \frac{2}{3}\theta^\circ &= -0.3 \end{aligned}$$

سوال 2: بغیر حساب و کتاب کے آلے کی مدد لیے درج ذیل مساوات کے وقفہ  $0 \leq t \leq 360$  میں جذر (اگر کوئی ہیں تو) معلوم کریں۔

$$\begin{aligned} \text{ا. } \sin(2t - 30)^\circ &= \frac{1}{2} & \text{ب. } \tan(2t - 45)^\circ &= 0 & \text{ج. } \tan\left(\frac{3}{2}t - 45\right)^\circ &= -\sqrt{3} & \text{د. } \cos\left(\frac{1}{5}t - 50\right)^\circ &= 0 \\ \text{ا. } \tan(2t - 45)^\circ &= 0 & \text{ب. } \cos(2t - 50)^\circ &= -\frac{1}{2} & \text{ج. } \tan(3t - 180)^\circ &= -1 & \text{د. } \sin\left(\frac{1}{4}t - 20\right)^\circ &= 0 \\ \text{ا. } \cos(3t + 135)^\circ &= \frac{1}{2}\sqrt{3} & \text{ب. } \sin\left(\frac{1}{2}t + 50\right)^\circ &= 1 & \text{ج. } \sin\left(\frac{1}{4}t - 20\right)^\circ &= 0 & \text{د. } \cos(3t + 135)^\circ &= \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

سوال 3: ایک اعشاری نقطے تک  $z$  کی تمام قیمتیں معلوم کریں، بشرطیکہ ذیل میں دی گئی مساوات درست ثابت ہوں اور تمام قیمتیں اس وقفے  $-180 \leq z \leq 180$  میں ہوں۔

$$\begin{aligned} \text{ا. } \sin z^\circ &= -0.16 & \text{ب. } (1 - \tan z^\circ) \sin z^\circ &= 0 & \text{ج. } \cos(45 + z)^\circ &= 0.832 & \text{د. } \tan(3z - 17)^\circ &= 3 \\ \text{ا. } \cos z^\circ (1 + \sin z^\circ) &= 0 & \text{ب. } \sin z^\circ &= 0.23 & \text{ج. } \tan(3z - 17)^\circ &= 3 & \text{د. } \sin z^\circ &= 0.23 \end{aligned}$$

سوال 4: وقفے  $0 \leq \theta \leq 360$  میں موجود درج ذیل مساوات کے لیے زاویے  $\theta$  کی قیمت معلوم کریں۔

$$\text{ا. } \sin 2\theta^\circ = \cos 36^\circ \quad \text{ب. } \cos 5\theta^\circ = \sin 70^\circ \quad \text{ج. } \tan 3\theta^\circ = \tan 60^\circ$$

سوال 5:

وقفے  $0 \leq \theta \leq 360$  میں زاویے کی تمام قیمتیں معلوم کریں جنکے لیے مساوات  $\sin \theta^\circ \cos \theta^\circ = \frac{1}{2} \tan \theta^\circ$  درست ثابت ہو۔

سوال 6: درجہ ذیل قیمتوں کے لیے مثلثی تفاعل سائن، کوسائن اور ٹینجینٹ کی ایک مثال بنائیں اور اس طرح کے بتائی گئی قیمت پے یہ تفاعل خود کو دہراتا ہو۔

- ا. 90 ج. 48 د. 120 ب. 20  
 ہ. 720 و. 600

سوال 7: وقفے  $0 \leq \phi \leq 360$  میں درج ذیل کی ترسیم بنائیں، ہر ایک سوال میں تفاعل کے دورانیے کا بھی بتائیں۔

- ا.  $y = \sin 3\phi^\circ$  د.  $y = \tan \frac{1}{3}\phi^\circ$  ز.  $y = \sin (3\phi - 20)^\circ$   
 ب.  $y = \cos 2\phi^\circ$  ہ.  $y = \cos \frac{1}{2}\phi^\circ$  ح.  $y = \tan 2\phi^\circ$   
 ج.  $y = \sin 4\phi^\circ$  و.  $y = \sin \left(\frac{1}{2}\phi + 30\right)^\circ$  ط.  $y = \tan \left(\frac{1}{2}\phi + 90\right)^\circ$

سوال 8: قطب شمالی کے ایک مخصوص علاقے میں پورے سال کے تمام دنوں میں روشن گھنٹے  $d$  معلوم کرنے کا کلیہ  $d = A + B \sin kt^\circ$  جسمیں  $A, B$  اور  $k$  مثبت مستقل ہیں اور  $t$  دن میں وقت ہے موسم بہار کے بدلاؤ کے بعد سے۔

1. یہ تصور کرتے ہوئے کہ دن میں روشن گھنٹوں کی عددی قیمت 365 دنوں بعد خود کو دہرائی ہے  $k$  کی قیمت معلوم کریں آپ کا جواب 3 اعشاری نقطوں تک درست ہو۔

2. یہ بتایا گیا ہے کہ سب سے چھوٹے دن میں 6 گھنٹے روشن جبکہ سب سے لمبے دن میں 18 روشن گھنٹے ہیں  $A$  اور  $B$  کی قیمت معلوم کریں۔ سال کے نئے دن میں روشن وقت کتنا ہوگا گھنٹوں اور منٹوں میں بتائیں یہ مانتے ہوئے کہ سال کا نیا دن موسموں کی اس تبدیلی سے 80 دن پہلے آتا ہے۔

3. اسی علاقے میں ایک قصبہ ہے جہاں کے لوگ سال میں سو دفعہ تہوار مناتے ہیں اور ان دونوں دن روشن دن 10 گھنٹے کا ہوتا ہے۔ موسموں کے تغیر کو مد نظر رکھتے ہوئے بتائیں کہ یہ کونسے دو دن ہیں

## 10.6 مثلثی تفاعل کے باہمی روابط

الجبرا میں مساوات حل کرنا آپ کی عادت بن جاتی ہے، جن میں ہم ایک نا معلوم غیر مستقل مقدار، جسے ہم عموماً  $x$ ، کہتے ہیں، کی قیمت معلوم کرتے ہیں جیسے اس مساوات میں  $7 = 2x + 3 - x - 6$ ۔ آپ الجبرائی مساوات کو سادہ کرنے میں بھی مہارت رکھتے ہیں جیسے مساوات  $2x + 3 - x - 6$  سادہ ہو کے  $3 - x$  بن جاتی ہے، آپ کو اندازہ نہیں ہوا لیکن یہ دونوں بالکل الگ طریقہ کار ہیں۔

جب آپ مساوات  $7 = 2x + 3 - x - 6$  کو حل کرتے ہیں تو آپ کو معلوم ہوتا ہے کہ اسکا صرف ایک ہی حل ہے  $x = 10$ ، لیکن  $3 - x$  اور  $2x + 3 - x - 6$  بالکل ایک جیسے ہیں  $x$  کی تمام قیمتوں کے لیے، بعض اوقات ان دونوں طرح کی صورت حال میں فرق کرنا ضروری ہوتا ہے۔

اگر دو تراکیب  $x$  کی ہر قیمت کے لیے ایک سا جواب دیں تو ایسی تراکیب کو ہو بہو برابر کہا جائے گا۔ اور ایسی تراکیب کو ظاہر کرنے کے لیے ( ) علامت استعمال کی جاتی ہے اور اسے پڑھا جائے گا "ہو بہو برابر ہے"۔ یہ جملہ

$$2x + 3 - x - 6 = x - 3$$

ایک مماثل کہلائے گا۔ لہذا  $x$  میں ایک مماثل ایک ایسی مساوات ہے جو  $x$  کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہے۔

مثلاً تناسب میں بھی ایسا ہی ہوتا ہے، حصہ 10.2 کے آخر میں یہ دیکھا گیا تھا کہ  $\tan \theta^\circ = \frac{\sin \theta^\circ}{\cos \theta^\circ}$  بشرطیکہ  $\cos \theta^\circ \neq 0$ ۔

$$\tan \theta^\circ = \frac{\sin \theta^\circ}{\cos \theta^\circ}$$

مماثل کی علامت استعمال کی جاتی ہے تب بھی جبکہ قوت نمائی قیمتیں موجود ہوں چنکے لیے دونوں اطراف معین نہ ہوں، وہ گی مثال میں اگر زاویہ 90 کا تاک مضرب ہو تو کوئی بھی طرف معین نہیں ہے لیکن مماثل کی علامت وہاں موجود ہے۔

حصہ 10.1 اور 10.2 میں کی گئی  $\cos \theta^\circ = x$  اور  $\sin \theta^\circ = y$  کی تعریف سے ایک اور تعلق فوراً سے ذہن میں آتا ہے اگر  $P$  ایک اکائی کے ایک دائرے کی باہری حد بندی پر موجود ایک نقطہ ہے۔ فیثا غورث کے قانون کے مطابق  $x^2 + y^2 = 1$  ہے یا ہم کہہ سکتے ہیں کہ  $(\cos \theta^\circ)^2 + (\sin \theta^\circ)^2 = 1$

غلط العام میں ہم  $(\cos \theta^\circ)^2$  کو  $\cos^2 \theta^\circ$  کہتے ہیں اور ایسے ہی  $(\sin \theta^\circ)^2$  کو  $\sin^2 \theta^\circ$  کہتے ہیں، زاویے کی ہر قیمت کے لیے  $\cos^2 \theta^\circ + \sin^2 \theta^\circ \equiv 1$ ۔ ہم اسے بعض اوقات مثلثیات کا فیثا غورث کا کلیہ بھی کہتے ہیں۔

زاویے کی ہر قیمت کے لیے؛  $\tan \theta^\circ \equiv \frac{\sin \theta^\circ}{\cos \theta^\circ}$  بشرطیکہ  $\cos \theta^\circ \neq 0$

$$\cos^2 \theta^\circ + \sin^2 \theta^\circ \equiv 1$$

غلط العام  $\cos^n \theta^\circ$  جکا ہم نے ذکر کیا یہ مثبت طاقتوں کی حد تک تو بہترین ہے۔ کسی بھی صورت میں  $n = -1$  استعمال نہیں کیا جاسکتا کیونکہ یہاں ایک خطرہ ہے آپ اسے یہ  $\cos^{-1} x$  سمجھ سکتے ہیں، جبکہ یہ ان زاویوں کے لیے استعمال ہوتا ہے چنکے cosine کی قیمت  $x$  ہوتی ہے۔ اگر آپ شک میں گرفتار ہوں تو  $(\cos \theta^\circ)^n$  یا  $(\cos \theta^\circ)^{-n}$  استعمال کریں کیونکہ انکا ایک ہی مطلب ہے جو واضح ہے

$$\cos^2 \theta + \sin \theta \equiv 1$$

آپ اس مساوات  $\cos^2 \theta + \sin \theta \equiv 1$  کو استعمال کرتے ہوئے کسی بھی مثلث کے کوسائن کلیے کو ثابت کر سکتے ہیں۔

فرض کریں  $ABC$  ایک مثلث ہے جسکی اطراف  $a, b, c$  اور  $AB=c, BC=a, CA=b$  ہیں۔ فرض کریں کہ نقطہ  $A$  کارتیسی نظام محدد کے مبدا ہے۔ اور  $AC$  ایک خط ہے جو کہ  $x$  محدد پے  $x$  کی سمت میں ہے۔ جیسا کہ شکل 10.11 میں دکھایا گیا ہے۔

نقطہ C کے محدد (b,0) ہیں، جبکہ B کے محدد (c cos A, c sin A) یہ ہیں، جبکہ A زاویے BAC کے لیے ہے۔ اور تب فاصلے کے کلیے کا استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} a^2 &= (b - c \cos A)^2 + (c \sin A)^2 \\ &= b^2 - 2bc \cos A + c^2 \cos^2 A + c^2 \sin^2 A \\ &= b^2 - 2bc \cos A + c^2 (\cos^2 A + \sin^2 A) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \end{aligned}$$

اب آخر میں  $\cos^2 A + \sin A = 1$  کا استعمال کرتے ہوئے۔

مثال 10.6: بتایا گیا ہے کہ  $\sin \theta = \frac{3}{5}$  اور زاویہ منفرد ہے۔ حساب و کتاب کے آلے سے پرہیز کرتے ہوئے  $\cos \theta^0$  اور  $\tan \theta^0$  کی قیمت معلوم کریں۔

جیسا کہ  $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$ ،  $\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$  اور اس سے ہمیں ملے گا  $\cos \theta = \pm \frac{4}{5}$ ۔ جیسا کہ ہم جانتے ہیں زاویہ منفرد ہے۔  $90^\circ$  لہذا  $\cos \theta^0$  منفی ہے، اسی لیے  $\cos \theta = -\frac{4}{5}$ ۔

$$\square \quad \cos \theta = -\frac{4}{5}, \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4} \text{ اور } \sin \theta = \frac{3}{5} \text{ جیسا کہ}$$

مثال 10.7: مساوات  $3 \cos^2 \theta + 4 \sin \theta = 4$  کو حل کریں اور وقفہ  $180^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  میں آنے والے تمام جذر ایک اعشاری قیمت تک درست معلوم کریں۔

جیسا کہ نظر آ رہا ہے ہم اس مساوات کو حل نہیں کر سکتے لیکن اگر ہم اس مساوات میں  $\cos^2 \theta$  کو  $1 - \sin^2 \theta$  سے بدل دیں تو، ہمیں نئی مساوات  $3(1 - \sin^2 \theta) + 4 \sin \theta = 4$  ملے گی جو کہ مزید سادہ ہو کہ درج ذیل شکل اختیار کر لے گی؛

$$3 \sin^2 \theta - 4 \sin \theta + 1 = 0$$

یہ  $\sin \theta^0$  میں ایک دو طاقی مساوات ہے جس کے آپ اجزائے ضربی بنا سکتے ہیں  $(\sin \theta - 1)(3 \sin \theta - 1) = 0$  اور اس سے ہمیں ملے گا  $\sin \theta = \frac{1}{3}$  یا  $\sin \theta = 1$

ایک جذر تو،  $\sin^{-1} \frac{1}{3} = 19.47 \dots$  ہے اور باقی جذر  $\sin \theta^0$  کی تشاکل کی خصوصیت کی مدد سے جو ہمیں ملے ہیں وہ ہیں  $180 - 19.47 \dots = 160.52 \dots$  مساوات  $\sin \theta = 1$  کا اکلوتا جذر،  $\theta = 90^\circ$  ہے، لہذا تمام جذر  $19.5, 90$  اور  $160.5$  ہیں۔  $\square$

سوال 1: نیچے بنی ہر ایک مثلث کے لیے

1. فیثا غورث کے کھینے کا استعمال کریں اور تیسری سمت کی لمبائی معلوم کریں۔

2.  $\sin \theta^0$ ،  $\cos \theta^0$  اور  $\tan \theta^0$  کی درست قیمتیں معلوم کریں۔

سوال 2:

1. یہ بتایا گیا ہے کہ زاویہ A ایک منفرجیہ زاویہ ہے اور یہ کہ  $\sin A = \frac{5}{14}\sqrt{3}$  آپ  $\cos A^0$  کی درست قیمت معلوم کریں۔

2. ہمیں وقفہ  $180B \leq 360$  معلوم ہے اور ہم جانتے ہیں کہ  $\tan B = -\frac{21}{20}$  آپ  $\cos B^0$  کی قیمت معلوم کریں۔

3.  $\sin C^0$  کی وہ تمام قیمتیں معلوم کریں جن کے لیے  $\cos C = \frac{1}{2}$

4. کی وہ تمام قیمتیں معلوم کریں جن کے لیے اس وقفہ  $180 < D < 180$  میں مساوات  $\tan D = 5 \sin D$  درست ثابت ہو۔

سوال 3: اور اس مساوات  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \equiv 1$  اور اس مساوات  $\tan \theta \equiv \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  کا استعمال کریں بشرطیکہ  $\cos \theta \neq 0$  اور نیچے دی گئی مساوات کو ثابت کریں۔

$$\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta \equiv \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \quad \text{ج.} \quad \frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\tan \theta} \equiv \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{ا.}$$

$$\frac{\tan \theta \sin \theta}{1 - \cos \theta} \equiv 1 + \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{د.} \quad \frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} \equiv 1 + \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{ب.}$$

سوال 4: دی گئی تمام مساوات کو زاویے کی قیمت کے لیے حل کریں، اور وقفہ  $0 \leq \theta \leq 360$  میں زاویے کے جوابات دیں اس بات کو خیال رکھتے ہوئے کہ آپ کے جوابات 0.1 کے قریب ترین درست ہوں۔

$$10 \sin^2 \theta - 5 \cos^2 \theta + 2 = 4 \sin \theta \quad \text{ج.} \quad 4 \sin^2 \theta - 1 = 0 \quad \text{ا.}$$

$$4 \sin^2 \theta \cos \theta = \tan^2 \theta \quad \text{د.} \quad \sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta = 2 \quad \text{ب.}$$

سوال 5: دیے گئے وقفہ  $180 \leq \theta \leq 180$  میں زاویے کی قیمتیں معلوم کریں کہ جن کے لیے  $2 \tan \theta - 3 = \frac{2}{\tan \theta}$

سوال 6: درج ذیل کی دہرائی کا نقطہ معلوم کریں۔



ا.  $\sin x$       ب.  $\tan 2x$

سوال 7:  $y = \cos x^0$  کی ترسیم کو ذہن میں رکھتے ہوئے یا پھر درج ذیل کو  $\cos x^0$  کی صورت میں لکھیں۔

ا.  $\cos(360 - x)$       ب.  $\cos(x + 180)$

سوال 8: مساوات  $y = \cos \frac{1}{2}\theta$  کی ترسیم بنائیں اور وقفے  $360 \leq \theta \leq -360$  میں زاویے کی قیمت معلوم کریں۔ ان نقطوں کے محدود بھی واضح کریں کہ جن پے ترسیم  $\theta$  اور  $y$  محدود کو کاٹے گا۔

سوال 9: درج ذیل مساوات کو زاویے کے لیے حل کریں۔ آپکا جواب وقفے  $0 \leq \theta \leq 360$  میں ہونا چاہیے۔

ا.  $\tan \theta = 0.4$       ب.  $\sin 2\theta = 0.4$

سوال 10: مساوات  $3 \cos 2x = 2$  کو حل کریں اور وقفے  $0 \leq \theta \leq 180$  میں تمام جوابات تحریر کریں۔ آپکے جوابات 0.1 کے قریب ترین ہونے چاہئیں۔

سوال 11:

1. ایک ایسے مثلثی تفاعل کی مثال دیں جو ہر 180 درجے بعد خود کو دہراتا ہو۔

2. مساوات  $\sin 3x = 0.5$  کو وقفے  $0 \leq x \leq 180$  میں آنے والے  $x$  کے تمام جوابات معلوم کریں۔

سوال 12: وقفے  $0 \leq \theta \leq 360$  میں زاویے کی وہ تمام قیمتیں معلوم کریں کہ جن کے لیے مساوات  $2 \cos(\theta + 30)$  درست ثابت ہو۔

سوال 13:

1. مساوات  $\sin 2x + \cos(90 - 2x)$  کو کسی ایک مثلثی تفاعل کی صورت میں لکھیں۔

2. وقفے  $0 \leq x \leq 360$  میں مساوات  $\sin 2x + \cos(90 - 2x) = -1$  کی تمام قیمتیں معلوم کریں۔

سوال 14: زاویہ A کی وہ کم ترین قیمت معلوم کریں کہ جس کے لیے۔

- ا.  $\sin A = 0.2$  اور  $\cos A$  منفی ہوں۔  
 ب.  $\tan A = -0.5$  اور  $\sin A$  منفی ہوں۔  
 ج.  $\cos A = \sin A$  دونوں منفی ہوں۔  
 د.  $\sin A = -0.2275$  اور  $A > 360$

سوال 15: درج ذیل مماثل کو ثابت کریں۔

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan \theta} + \tan \theta &\equiv \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} & \frac{1}{\sin \theta} - \sin \theta &\equiv \frac{\cos \theta}{\tan \theta} \\ \frac{1 - 2 \sin^2 \theta}{\cos \theta + \sin \theta} &\equiv \cos \theta - \sin \theta & \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} &\equiv \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \end{aligned}$$

سوال 16: درج ذیل تفاعل کے لیے  $y$  کی کم ترین اور زیادہ ترین قیمتیں جبکہ  $x$  کی کم ترین مثبت قیمت معلوم کریں کہ جس کے لیے یہ تفاعل درست ثابت ہوں۔

$$\begin{aligned} y &= 1 + \cos 2x & y &= \frac{12}{3 + \cos x} \\ y &= 5 - 4 \sin(x + 30) & y &= \frac{60}{1 + \sin^2(2x - 15)} \\ y &= 29 - 20 \sin(3x - 45) & y &= 8 - 3 \cos^2 x \end{aligned}$$

سوال 17: درج ذیل مساوات کو زاویے کے لیے حل کریں اور اپنا جواب اس وقفے  $0 \leq x \leq 360$  میں دیں۔

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \tan \theta & \tan^2 \theta - 2 \tan \theta &= 1 \\ 2 - 2 \cos^2 \theta &= \sin \theta & \sin 2\theta - \sqrt{3} \cos 2\theta &= 0 \end{aligned}$$

سوال 18:  $t$  کا تفاعل  $t(x) = \tan 3x$  ہے۔

1. تفاعل کب  $t(x)$  خود کو دہرائے گا۔
2. وقفے  $0 \leq x \leq 180$  کے لیے مساوات  $t(x) = \frac{1}{2}$  حل کریں
3. درج ذیل مساوات کے لیے کم سے کم مثبت حل تلاش کریں۔

$$t(x) = -\frac{1}{2} \quad (ا)$$

$$t(x) = 2 \quad (ب)$$

سوال 19: درج ذیل مسائل میں سے ہر ایک کے لیے ایک مشقی تفاعل بنائیں جس سے بتائی گئی صورت حال واضح ہو سکے۔

1. ایک نہر میں پانی کی گہرائی کم سے کم 3.6 میٹر اور زیادہ سے زیادہ 6 میٹر کے درمیان تبدیل ہوتی رہتی ہے 24 گھنٹے کے اوقات میں۔
2. ایک کیمیائی کارخانے جو کہ دس دن کے وقفے میں کام کرتا ہے، دن میں کم سے کم 1500 بیرل تیل صاف کرتا ہے جبکہ زیادہ سے زیادہ 2800 بیرل صاف کرتا ہے۔
3. دائرہ قطب شمالی کے جنوب کے کچھ قصبوں میں روشن دن 2 سے 22 گھنٹوں کا ہوتا ہے 360 دنوں کے ایک مدار میں۔

سوال 20:

سوال 21: ایک فولادی دوشاخہ مرتعش ہے۔ اسکی ایک شاخ کے آخری سرے کا ہٹاؤ  $y$  کی ہوئی حالت سے زیادہ سے زیادہ ہٹاؤ تک وقت  $t$  میں بیان کرنے کے لیے کلیہ ہے۔

$$y = 0.1 \sin(100000t)$$

معلوم کریں؛

1. سب سے زیادہ ہٹاؤ اور کس وقت یہ وقوع پزیر ہوگا۔
2. ایک مکمل چکر کے لیے کتنا وقت لگے گا۔
3. ایک سینڈ میں کتنے دائرے مکمل کرے گا فولادی دوشاخے کا ارتعاش۔
4. پہلے مکمل دائرے کے دوران وہ وقت بتائیں کہ جب فولادی دوشاخے کا دوسرا سرا اپنی رکی ہوئی حالت سے 0.06 سینٹی میٹر ہٹتا ہے۔

سوال 22:

ایک پلک دار رسی کا ایک کنارہ ایک چوکھٹ سے باندھا گیا ہے جبکہ دوسرا سرا الٹک رہا ہے۔ کھلے سرے پر ایک چھوٹی سی گیند بندھی ہوئی ہے۔ اس لٹکتی ہوئی گیند کو تھوڑا سا نیچے کھینچا جاتا ہے اور پھر چھوڑ دیا جاتا ہے، اس سے بال اس اس پلک دار رسی پر اوپر نیچے مرتعش ہو جاتی ہے۔ گیند کی گہرائی چوکھٹ سے  $d$  وقت  $t$  کے بعد اس کلیے کی مدد سے معلوم کی جاسکتی ہے

$$d = 100 + 10 \cos 500t$$

معلوم کریں کہ؛

1. گیند کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم گہرائی

2. وہ وقت جب گیند اپنے اونچے ترین مقام پر ہوگی۔

3. ایک مکمل ارتعاش کے لیے درکار وقت۔

4. ایک ارتعاش میں وقت کا وہ حصہ کہ جسکے لیے رسی کی لمبائی 99 سینٹی میٹر سے کم رہتی ہے

سوال 23: ایک مرتوش ذرے کا ہٹاؤ  $y$  ہے، جو کہ میٹرز میں ماپا جاتا ہے اور جسکے لیے تقابل  $y = a \sin(kt + \alpha)$  ہے۔ جسمیں  $a$  میٹرز میں، وقت  $t$  سیکنڈز میں جبکہ  $k$  اور  $\alpha$  دونوں مستقل ہیں۔ ایک مکمل ارتعاش کے لیے وقت  $T$  سیکنڈز ہے۔ معلوم کریں کہ؛

1. مستقل  $k$  کو  $T$  کی اکائیوں میں

2. ایک سینڈ میں مکمل ہونے والی دائروی ارتعاش،  $k$  کی اکائیوں میں۔

سوال 24: ایک جزیرے پر ایک خاص قسم کے پرندوں کی آبادی  $P$  تبدیل ہوتی رہتی ہے، اور یہ منحصر کرتی ہے ان کی خوراک، ہجرت، موسم اور شکار پر۔ ایک ماہر ارضیات جو ان پر تحقیق کر رہا تھا اسے سال میں انکی آبادی کے لیے ایک کلیہ بنایا

$$P = N - C \cos \omega t,$$

اس کلیے میں  $N, C, \omega$  مستقل ہیں۔ جبکہ  $t$  وقت ہے جسکی اکاے ایک ہفتہ رکھی گئی ہے اور یہ وقت صفر سے شروع ہو رہا ہے یعنی یکم جنوری رات 12 بجے سے۔

1. فرض کریں کہ تقابل خود کو 50 ہفتوں بعد دہراتا ہے  $\omega$  کی قیمت معلوم کریں

2. مساوات کا استعمال کریں اور  $CN$  کی اکائیوں میں جواب دیں

(i) سال کے شروع میں اس نسل کے کتنے پرندے پائے جاتے ہیں

(ب) اس نسل کے پرندوں کی زیادہ سے آبادی اور یہ سال کے کس حصے میں پائی جائے گی

سوال 25: صحرا کے قریبی ایک جزیرے تک جانے والی سڑک اکثر پانی سے ڈھکی ہوتی ہے۔ سمندر کا پانی جب سڑک کے برابر آتا ہے تو سڑک بند ہو جاتی ہے۔ ایک خاص دن پانی کی سطح سمندر سے بلندی 4.6 میٹرز ہے۔ لہر کی بلندی  $h$  بیان کرنے کی لیے یہ  $h = 4.6 \cos kt$  کلیہ استعمال کیا جا سکتا ہے۔ وقت  $t$  سے ظاہر کیا گیا ہے اور یہ وہ وقت ہے جو شروع ہوتا ہے اونچی لہر کے آنے کے بعد سے۔ اور یہ بھی دیکھنے میں آیا ہے کہ اونچی لہر 12 گھنٹے میں ایک بار آتی ہے۔

1. مستقل  $k$  کی قیمت معلوم کریں

2. اسی دن ایک عبارت لگا دی گئی کہ سڑک تین گھنٹے کے لیے بند ہے۔ یہ مانتے ہوئے کہ حکم نامہ درست ہے، سڑک کی سطح سمندر سے اونچائی معلوم کریں اور آپکا جواب دو اعشاری نقطوں تک درست ہونا چاہیے

3. دراصل سڑک کی بحالی کے کام میں اسکی سطح بڑھی ہے، اب سڑک صرف 2 گھنٹے 40 منٹ کے لیے بند ہوئی ہے، یہ بتائیں کہ سڑک کی سطح کتنی بلند ہوئی۔

سوال 26: سمندر میں بننے والی لہروں کے لیے سب سے سادہ نظریہ یہ ہے کہ یہ سورج اور چاند کی کشش ثقل کی وجہ سے معرض وجود میں آتی ہیں۔ چاند کی کشش ثقل سورج کی نسبت 9 گنا زیادہ ہے۔ سورج کی وجہ سے ہونے والا تغیر خود کو 360 دنوں بعد دہراتا ہے جبکہ چاند کے زیر اثر سلسلہ 30 دنوں بعد خود کو دہراتا ہے۔ لہروں کی اونچائی  $h$ ، وقت کی علامت  $t$  ہے جسکی اکائی دن لیا گیا ہے اور تفاعل

$$h = A \cos \alpha t + B \cos \beta t,$$

ہے۔ اس تفاعل میں  $A \cos \alpha t$  یہ سورج کے اثر کے لیے ہے جبکہ  $B \cos \beta t$  چاند کی کشش ثقل سے پیدا ہونے والی لہروں کے لیے ہے۔ ہمیں بتایا گیا ہے کہ  $h=5$  ہے اور  $t=0$  آپ  $B$ ،  $A$  اور  $\beta$  کی قیمت معلوم کریں۔



## باب 11

### تفاعل کا مجموعہ اور تفاعل کا الٹ





باب 12

وسعت تفرق



## باب 13

## سمتیات



## باب 14

### ہندسی ترتیبات

114 page

$$(b) \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots \quad (a) 1, 4, 9, 16, 25, \dots$$

$$(d) 1, 1.1, 1.21, 1.331, 1.4641, \dots \quad (c) 99, 97, 95, 93, 91, \dots$$

$$(f) 3, 1, 4, 1, 5, \dots \quad (e) 2, 4, 8, 14, 22, \dots$$

کثرت اوقات کسی ترتیب کو  $u_0, u_1, u_2, \dots$  یعنی  $r=0$  سے شروع کرنا آسان رہتا ہے لیکن یہاں اس بات کا خیال کرنا ضروری ہے کہ ہم پہلے جزو سے مراد  $u_0$  لے رہے ہیں یا  $u_1$ ؟  $a$  اور  $b$  کے جزو کے لیے ہمیں کلیہ تھے میں کوئی مسئلہ نہیں  $a$  کے اجراء دراصل  $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots$  ہیں لہذا اس کا جزو ہوگا

$$u_r = r^2$$

اسی طرح  $b$  کے اجراء کو  $\frac{1}{1+1}, \frac{2}{2+1}, \frac{3}{3+1}, \frac{4}{4+1}, \frac{5}{5+1}, \dots$  لکھ جاسکتا ہے یعنی

$$u_r = \frac{r}{r+1}$$

اسی طرح  $c$  اور  $d$  میں قلیہ موجود ہے لیکن اسے حاصل کرنا آسان نہیں ہے لیکن ہم ہر اگلے جزو کو دیکھ کر بتا سکتے ہیں کہ پچھلا جزو کیسے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یعنی دو درجے پیچھے جاکہ مثلاً

$$u_2 = u_1 - 2$$

$$u_3 = u_2 - 2$$

$$u_4 = u_3 - 2$$

وغیرہ۔ انی ایک کیلے میں ایسے سمویا جاسکتا ہے

$$u_{r+1} = u_r - 2$$

میں ہر جزو کو 1.1 سے ضرب دی گئی ہے

$$u_{r+1} = 1.1u_r$$

بہ قسمتی سے بہت سی ترتیبات ایسی ہیں جو  $u_{r+1} = u_1 - 2$  کے کلمہ پر پورا اترتی ہیں مثلاً 2, 4, 6, 8, 10 اور 2-, 4-, 6-, 8-, 10- ...

صفحہ 115

یہ تعریف اس وقت تک مکمل نہیں ہو سکتی جب تک ہم پہلے جزو کے بارے میں معلوم نہ ہو لہذا ترتیب کو تعریف تو مکمل بنانے کے لیے ہمیں c اور d کو ایسے تلف ہو گا

$$u_{r+1} = u_r - 2 \text{ اور } u_1 = 99 \text{ (c)}$$

$$u_{r+1} = 1.1u_r \text{ اور } u_1 = 1 \text{ (d)}$$

اس طرح کی تعریفوں کو استقراری تعریفیں کہتے ہیں۔ ترتیب c کی بنیاد جیومیٹری ہے۔ یہ ترتیب دراصل مختلف دائروں کے ذریعے کسی مسطح کو تقسیم کرنے والے خطوں کو سب سے زیادہ تعداد بتاتی ہے۔ (ا، 2، 3، 4.... دائروں کے ذریعے اپنی اشکال بنانے کی کوشش کیجیے)۔ آپ کے پاس کچھ ایسی ترتیب بنے گی۔

$$u_2 = u_1 + 2, u_3 = u_2 + 4, u_4 = u_3 + 6$$

وغیر ان میں ہونے والے اضافے 2، 4، 6... کو 2r سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ لہذا استقراری تعریف یہ ہوگی  $u_1 = 2$  اور  $u_{r+1} = u_r + 2r$

f کے بارے میں یم کر سکتے ہیں کہ اگلے تین اعداد 161 ہونگے (کیونکہ جفت مقامات پر آنے والے اعداد میں ہر بار 1 درجہ کا اضافہ ہوتا ہے۔) دراصل اس ترتیب کا نقطہ آغاز قدرے مختلف ہے جیسا کہ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اس کے پہلے پانچ اعداد  $\pi$  کی نشاندہی کر رہے ہیں۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ اگلے تین اعداد 629 ہونگے

یہ مثال بتاتی ہے کہ بھی کسی ترتیب کا یکتا حل صرف چند ابتدائی اجزاء کو دیکھ کر نہیں بتایا جاسکتا مثال کے طور پر دی گئی ترتیب کے لیے آٹھ اجزاء معلوم کیجیے۔

$$u_r = r^2 + (r-1)(r-2)(r-3)(r-4)(r-5)$$

آپ دیکھیں گے کہ پہلے پانچ اجزاء میں ہیں جو کہ ترتیب a میں دیے گئے ہیں لیکن اگلے اجزاء آپ کے اندازے سے برعکس ہونگے ایک ترتیب کو اسی وقت بیان کیا جاسکتا ہے جب ہمارے پاس اس کا کلیہ ہو استقراری تعریف ہو یا واضح اصول مشق 8A

ذیل میں دی گئی تعریفیں استعمال کر کر تمام ترتیبات کے پہلے پانچ اجزاء لکھ

$$(a) u_1 = 7, u_{r+1} = u_r + 7 \quad (b) u_1 = 13, u_{r+1} = u_r - 5$$

$$(c) u_1 = 4, u_{r+1} = 3u_r \quad (d) u_1 = 6, u_{r+1} = \frac{1}{2}u_r + 3$$

$$(e) u_1 = 2, u_{r+1} = 3u_r + 1 \quad (f) u_1 = 1, u_{r+1} = u_r^2 + 3$$

ذیل میں دی گئی ترتیبات کے لیے استقراری تعریفیں لکھ

$$(a) 246810 \dots \quad (b) 119753 \dots$$

$$(c) 26101418 \quad (d) 261854162 \dots$$

$$(e) \frac{1}{3} \frac{1}{9} \frac{1}{27} \frac{1}{81} \dots \quad (f) \frac{1}{2}a \frac{1}{6}a \frac{1}{8}a \frac{1}{16}a \dots$$

$$(g) b - 2c \quad b - c \quad b + c \dots \quad (h) 1 - 11 - 11 \dots$$

$$(i) \frac{p}{q^3} \frac{p}{q^2} \frac{p}{q} \dots \quad (j) \frac{a^3}{b^2} \frac{a^2}{b} a b \dots$$

$$(k) x^3 5x^2 25x \dots (l) 1 1 + x (1 + x)^2 (1 + x)^3$$

116 page

ر ترتیب کے ابتدائی پانچ اجزاء لکھیے اور استقراری تعریف دیں

$$(a) u_r = 2r + 3 \quad (b) u_r = r^2 \quad (c) u_r = \frac{1}{2}r(r + 1)$$

$$(d) u_r = \frac{1}{6}r(r + 1)(2r + 1) \quad (e) u_r = 2 \times 3^r \quad (f) u_r = 3 \times 5^{r-1}$$

ر ترتیب کے جزو کے لیے ممکنہ کلیہ لکھیے

$$(c) 4 7 12 19 \dots \quad (d) 4 12 24 40 60 \dots a) 9 8 7 6 \dots \quad (b) 6 18 54 162 \dots$$

$$(e) \frac{1}{4} \frac{3}{5} \frac{5}{6} \frac{7}{7} \dots \quad (f) \frac{2}{2} \frac{5}{4} \frac{10}{8} \frac{17}{16} \dots$$

مثالی نمبروں کی ترتیب

تصویر 8.1 میں مثالی انداز میں لگائے گئے کالے کے نشانات مثالی اعداد ہیں۔ اگر  $t_r$  کسی مثالی نمبر کو ظاہر کر رہا ہو تو ہم بعد میں آنے والی صفوں میں دیکھ سکتے ہیں کہ

$$t_1 = 1$$

اور عمومی طور پر

$$t_r = 1 + 2 + 3 + \dots + r$$

یہاں تین نقاط 3 اور r کے درمیان آنے والے تمام قدرتی اعداد کو ظاہر کرتے ہیں تصویر 8.2 میں ایک علامتی مثالی نمبر  $t_r$  کو دکھایا گیا ہے (اسے  $r=9$  کے لئے بنایا گیا ہے لیکن ہم r کی کوئی بھی قیمت لے سکتے ہیں۔) r کی قیمت معلوم کرنے کا ایک آسان طریقہ یہ ہے کہ اسی طرح نقاط کی ایک شکل بنائی جائے اور اسے کالے کے نشانات کے ساتھ الٹا کر لگا دیا جائے، جیسے تصویر 8.3 میں دکھایا گیا ہے۔ نقاط اور کالے کے نشانات ایک مستطیل بنائیں گے، جس کی چوڑائی r اور لمبائی r+1 ہوگی۔ اس میں کل  $r(r+1)$  چیزیں ہوں گی، جن میں سے آدھے نقاط ہیں اور آدھے کالے کے نشانات۔ یعنی کالے کے نشانات ہوں گے:

$$t_r = \frac{1}{2}r(r + 1)$$

اس کا مطلب یہ ہوا کہ: r تک تمام قدرتی اعداد کا مجموعہ  $\frac{1}{2}r(r + 1)$  ہے۔



ہم اس دلیل کو الجبرائی شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں۔ اگر ہم اوپر سے نیچے کی طرف کاٹے کے نشانات کی گنتی کریں تو ہمیں حاصل ہو گا

$$t_r = 1 + 2 + 3 + \dots + (r - 2) + (r - 1) + r,$$

لیکن اگر ہم اوپر سے نیچے کی طرف نقاط کی تعداد گنیں تو ہمیں حاصل ہو گا

$$t_r = r + (r - 1) + (r - 2) + \dots + 3 + 2 + 1.$$

مستطیل میں موجود تمام چیزوں کا گنتا ان دونوں مساواتوں کے حاصل جمع کے برابر ہو گا:

$$2t_r = (r + 1) + (r + 1) + (r + 1) + \dots + (r + 1) + (r + 1) + (r + 1).$$

یعنی ہر r صف کے لئے ایک  $(r + 1)$  اس کا مطلب یہ ہوا کہ

$$2t_r = r(r + 1)$$

$$t_r = \frac{1}{2}r(r + 1)$$

ہم ترتیب  $t_r$  کے لئے ایک استقرائی تعریف بھی وضع کر سکتے ہیں۔ تصویر 8.1 میں ہم دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی اگلے مثلثی نمبر کو حاصل کرنے کے لئے کاٹے کے نشانات کی اگلی صف میں ایک کا اضافہ کر دیا جائے یعنی

$$t_2 = t_1 + 2, t_3 = t_2 + 3$$

عمومی طور پر لکھا جاسکتا ہے کہ

$$t_{r+1} = t_r + (r + 1)$$

اس تعریف کو مکمل کرنے کی غرض سے ہم  $t_1 = 1$  یا  $t_0 = 0$  کا انتخاب کر سکتے ہیں۔ اگر ہم  $t_0 = 0$  کا انتخاب کریں تو ہم  $t_1$  کو  $r = 0$  سے معلوم کر سکتے ہیں، جیسے کہ:

عدد ضربیہ کی ترتیب

اگر ہمیں  $t_r$  کی تعریف میں ایک جزو سے دوسرا جمع کی بجائے ضرب سے حاصل کریں تو ہمیں عدد ضربیہ کی ترتیب حاصل ہو گی۔

$$f_{r+1} = f_r \times (r + 1) \quad r = 0, 1, 2, 3, \dots$$

یہاں ایک اہم نقطہ  $f_0$  دینا ہے (سوچئے!) بجائے اس کے کہ ہم  $f = 0$  کو 1 لیں۔ (یہ دیکھنے میں تھوڑا عجیب لگتا ہے لیکن اس کی توجیح اگلے سبق میں واضح ہو گی۔)

$$f_1 = f_0 \times 1 = 1 \times 1 = 1, f_2 = f_1 \times 2 = 1 \times 2 = 2, f_3 = f_2 \times 3 = 2 \times 3 = 6$$

اس طرح  $r \geq 1$  والے کسی بھی عدد کے لئے لکھ سکتے ہیں کہ

$$f_r = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times r.$$

یہ اتنی اہم ترتیب ہے کہ اس کی اپنی مخصوص علامت ہے  $r!$  جسے  $r$  ضربیہ پڑھتے ہیں۔  
 $r$  ضربیہ کی تعریف  $0! = 1$  اور  $(r+1)! = r! \times (r+1)$  سے کی جاتی ہے۔  
 $r \geq 1$  کے لئے  $r!$  سے مراد 1 اور  $r$  کے درمیان آنے والے تمام قدرتی اعداد کا حاصل ضرب ہے۔

بہت سے کیلوئٹرز میں اس کے لئے ایک مخصوص کلید ہوتی ہے۔  $n$  کی چھوٹی قیمتوں کے لئے، ہمیں بالکل درست جواب ملتا ہے لیکن  $n=14$  سے بڑے اعداد کے لئے ہمیں صرف ایک تخمینہ ملتا ہے۔

پاسکل کی ترتیب

ضرب کے اصول پہ مبنی ایک اور اہم ترتیب پاسکل کی ترتیب ہے۔ آپ اگلے سبق میں دیکھیں گے کہ یہ ترتیب  $(x + y)^n$  جیسی تراکیب کی توسیع میں استعمال ہوتی ہیں۔ ایک علامتی مثال کی استقرائی تعریف یہ ہو گی:

$$p_{r+1} = \frac{4-r}{r+1} p_r \quad p_0 = 1$$

یہ تعریف  $r=0, 1, 2, \dots$  کے لئے مطلوبہ اجزاء دیتی ہے

$$p_1 = \frac{4}{1} p_0 = 4, \quad p_2 = \frac{3}{2} p_1 = 6, \quad p_3 = \frac{2}{3} p_2 = 4$$

$$p_4 = \frac{1}{4} p_3 = 1, \quad p_5 = \frac{0}{5} p_4 = 0, \quad p_6 = \frac{(-1)}{5} p_5 = 0,$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ایک خاص جگہ آ کے ترتیب میں ایک جزو 0 کے برابر آ جاتا ہے اور اس کی وجہ سے اگلے آنے والے تمام اجزاء بھی 0 کے برابر ہوں گے۔ لہذا مکمل ترتیب کچھ یوں بنے گی

$$1, 4, 6, 4, 1, 0, 0, 0, 0, \dots$$

یہ پاکی ترتیب کی صرف ایک شکل نسل ہے اور اس نسل کی اپنی خاص علامت

$$\binom{4}{r} \text{ ہے۔ مثال کے طور پر } \binom{4}{2} = 6, \quad \binom{4}{1} = 4, \quad \binom{4}{0} = 1 \text{ وغیرہ۔ پاسکل کی دیگر ترتیب میں 4 کی جگہ مختلف اعداد ہوں گے۔}$$

پاسکل کی ترتیب کی عمومی تعریف یہ ہے:

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{r+1} = \frac{n-r}{r+1} \binom{n}{r} \quad r = 0, 1, 2, 3, \dots$$

آپ  $n = 0, 1, 2, 3$  کے لئے پاسکل کی ترتیب خود بنائیے۔

$$n = 0, 1, 0, 0, 0, 0, \dots$$

$$n = 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots$$

$$n = 2, 1, 2, 1, 0, 0, \dots$$

$$n = 3, 1, 3, 3, 1, 0, \dots$$

صفر کے اعداد کو شمار کئے بغیر پاسکل کی ترتیب کو پاسکل کی مثلث کہا جاتا ہے۔ اس کا سب سے پہلا تاریخی حوالہ چین میں ملتا ہے لیکن یورپ میں بلیز پاسکل (سترہویں صدی کا ریاضی دان اور نظریۂ احتمال کے بانیان میں سے ایک) کو یورپ میں اس ترتیب کی اشاعت و ترویج کا سبب مانا جاتا

ہے۔ اسے عام طور پر مساوی الثاقین مثلث کی صورت میں ظاہر کیا جاتا ہے، جیسے تصویر 8.4 میں دکھایا گیا ہے۔ لیکن تصویر 8.5 میں دکھائی گئی اس ترتیب کی الجبرائی شکل زیادہ عام فہم ہے کہ ہر قطار  $r$  کی کسی خاص قیمت کی نشاندہی کرتی ہے۔

حیران کن طور پر ماسوائے 1 کے، تصویر 8.4 میں ہر عدد اپنے سے اوپر والی صف میں موجود دو قریب ترین اعداد کا مجموعہ ہے۔ آپ نے یہ اعداد پہلے بھی دیکھے ہیں۔ فصل 8.1 کی ترتیب d دیکھیے۔

مشق 8ب

1. تصویر 8.3 کو بطور مثال سامنے رکھیں  
کالے کے نشانات کی ایک تصویر بنائیے جو r مثالی نمبر  $t_r$  کو ظاہر کرے۔  
نقاط کو استعمال کرتے ہوئے ایک اور تصویر بنائیے جو  $t_{r-1}$  کو ظاہر کرے۔  
ان دونوں کو تصاویر کو جوڑیں اور ثابت کریں کہ

$$t_r + t_{r-1} = r^2$$

ذیل میں دیے گئے کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے جزو c کو الجبرائی طریقے سے ثابت کریں

$$t_r = \frac{1}{2}r(r+1)$$

2.  $r \geq 1$  والے تمام اعداد کے لئے r کی صورت میں  $t_r - t_{r-1}$  کے لئے ترکیب بنائیں۔  
جزو (a) 2 اور سوال 1 (c) کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ

$$1^3, 2^3, 3^3, \dots, n^3$$

جزو b کو استعمال کرتے ہوئے تراکیب کو مثالی اعداد کی صورت میں لکھیں اور ثابت کریں کہ

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

3. سیکولیٹر کو استعمال کئے بغیر مندرجہ ذیل کی قیمتیں معلوم کریں۔

$$(a) 7! \quad (b) \frac{8!}{3!} \quad (c) \frac{7!}{4! \times 3!}$$

4. مندرجہ ذیل کو عدد ضربیہ کی صورت میں لکھیں۔

$$(a) 8 \times 7 \times 6 \times 5 \quad (b) 9 \times 10 \times 11 \times 12 \quad (c) n(n-1)(n-2)$$

$$(d) n(n^2-1) \quad (e) n(n+1)(n+2)(n+3) \quad (f) (n+6)(n+5)(n+4)$$

$$(g) 8 \times 7! \quad (h) n \times (n-1)!$$

5 حل کریں۔

$$(a) \frac{12!}{11!} \quad (b) 23! - 22! \quad (c) \frac{(n+1)!}{n!} \quad (d) (n+1)! - n!$$

7. ثابت کریں۔

$$\frac{(2n)!}{n!} = 2^n (1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1))$$

فصل 8.4 میں دی گئی استقرائی تعریف کو استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل پاسکل کی تراکیب لکھیں۔

$$(a)n = 5, \quad pt(b)n = 6, \quad (c)n = 8$$

کی استقرائی تعریف کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں

$$\binom{9}{6} = \frac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3}$$

اسی طریقے کو استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل کو بھی عدد ضربیہ کی صورت میں لکھیں۔

$$(a) \binom{11}{4} \quad (b) \binom{11}{7} \quad (c) \binom{10}{5} \quad (d) \binom{12}{3} \quad (e) \binom{12}{9}$$

9. سوال 8 کے جوابات ایک تعمیی نتیجے کی تجویز دیتے ہیں۔  $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$  فرض کریں کہ یہ نتیجہ درست ہے اور ثابت کریں

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

10. حل کریں

$$(a) \binom{6}{3} + \binom{6}{4} = \binom{7}{4} \quad (b) \binom{8}{5} + \binom{8}{6} = \binom{9}{6}$$

ان جوابات کی بنیاد پر ایک تعمیی ترکیب لکھیے۔

$n=2, 11$  ے لئے پاسک کی ترتیب ہے

اس ترکیب کے اجزاء کا مجموعہ 4 کے برابر ہے۔

$n$  کی دیگر قیمتوں کے لئے پاسکل کی ترتیب لکھیں اور ان کے مجموعے معلوم کریں۔

حسابی ترتیب

حسابی ترتیب یا حسابی تساعد ایک ایسی ترتیب ہے، جس کے اجزاء مستقل قدم کی صورت بڑھتے یا گھٹتے ہیں۔ مثال کے طور پر فصل 8.1 کی ترتیب c دیکھیں۔ حسابی ترتیب کی استقرائی تعریف یہ ہوگی:

$$u_1 = a, u_{r+1} = u_r + d$$

عدد d کو مشترکہ فرق کہا جاتا ہے۔ ترتیب کا پہلا جزو  $a=99$  جبکہ مشترکہ فرق  $d=2$  ہے

مثال 8.5.1

سیما اگلے دس سالوں کے لئے ایک مخصوص رقم چندے میں دینا چاہتی ہے۔ اُس ے پہلے سال سو روپے اور پھر ہر آنے والے سال میں بیس روپے کا اضافہ کرنے کا فیصلہ کیا ہے۔ اس حساب سے وہ اپنے آخری سال میں کتنی رقم چندے میں دے گی؟ اور اُن دس سالوں میں چندے میں دی جانے والی مکمل رقم کتنی ہوگی؟

اگرچہ سیما نے رقم 10 بار دینی ہے لیکن رقم میں اضافہ صرف 9 بار ہو گا۔ لہذا سیما آخری سال میں

دے گی۔

$$(100 + 9 \times 20) = 280$$

اور چندے میں دی جانے والی مکمل رقم اگر S ہو تو

$$S = 100 + 120 + 140 + \dots + 240 + 260 + 280$$

چونکہ یہاں صرف 10 اجزاء ہیں، اس لئے انہیں جمع کرنا آسان ہے لیکن ہم ایک ایسا طریقہ معلوم کریں گے، جس سے ہم کسی بھی حسابی ترتیب کے اعداد کا مجموعہ حاصل کر سکتے ہیں۔ اوپر دیے گئے اعداد کو الٹا کر لکھیے



$$S = 280 + 260 + 240 + \dots + 140 + 120 + 100.$$

دونوں مساواتوں کو جمع کیجیے

$$2S = 380 + 380 + 380 + \dots + 380 + 380 + 380,$$

یہاں عدد 380 دس بار آیا ہے۔ لہذا

$$2S = 380 \times 10 = 3800$$

ان حسابات کو تصاویر 8.2 اور 8.3 کی مدد سے سمجھایا گیا ہے۔ سیما کی طرف سے دی جانے والی رقم تصویر 8.6 کی پہلی صف میں دیکھی جاسکتی ہے۔ (کالے کے ہر نشان کی قیمت 20 روپے ہے۔) تصویر 8.7 میں نقاط کی مدد سے ایک اور نقل تیار کر کے اُسے کالے کے نشانات کے ساتھ رکھا گیا ہے۔ اس طرح 10 صفیں ہیں اور ہر صف میں 19 نقاط اور کالے کے نشانات ہے۔ ہر صف کی قیمت 380 روپے ہے۔ مثال 8.5.1 میں حسابی ترتیب کے دو مندرجہ ذیل خصائص دیکھے جاسکتے ہیں۔

حسابی ترتیب میں صرف متناہی اجزاء ہی ہوتے ہیں۔  
حسابی اوسط کے تمام اجزاء کا مجموعہ معلوم کرنا کئی حوالوں سے دلچسپی کا باعث ہے۔ اس طرح کی حسابی ترتیب کو حسابی تسلسل بھی کہا جاتا ہے۔  
مثال 8.5.1 کے تمام اجزاء حسابی ترتیب بناتے ہیں لیکن اگر انہیں جمع کیا جائے

$$100 + 120 + 140 + \dots + 240 + 260 + 280$$

تو یہ حسابی تسلسل کہلائے گا۔

عمومی طور پر، حسابی ترتیب

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$$

میں  $n$  اجزاء ہوتے ہیں اور پہلے جزو سے  $n-1$  جزو تک تمام اجزاء کا مشترک فرق ہوتا ہے۔ اگر ہم آخری جزو کو  $l$  سے ظاہر کریں تو ہم لکھ سکتے ہیں

$$l = a + (n - 1)d.$$

اس کلیہ کی مدد سے ہم  $a, l, n, d$  میں سے کوئی بھی مقدار معلوم کر سکتے ہیں۔

فرض کرتے ہیں کہ ان تمام اجزاء کا مجموعہ  $S$  کے برابر ہے۔ سو  $a, l, n, d$  کی صورت میں  $S$  کا کلیہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

122 page

طریقہ نمبر 1 یہ مثال 8.5.1 میں دی گئی دلیل کی تعمیری صورت ہے۔ تسلسل کو لکھا جاسکتا ہے

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (l - 2d) + (l - d) + l.$$

اب اسے الٹا کر لکھیے

$$S = l + (l - d) + (l - 2d) + \dots + (a + 2d) + (a + d) + a.$$

دونوں مساواتوں کو جمع کرتے ہیں۔

$$2S = (a + l) + (a + l) + (a + l) + \dots + (a + l) + (a + l) + (a + l),$$

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ  $a + l$  کا جزو  $n$  دفعہ آ رہا ہے لہذا،  $2S = n(a + l)$ ،  $S = \frac{1}{2}n(a + l)$ ۔ حسابی تسلسل یہ ہے طریقہ نمبر 2 اس طریقے میں ہم فصل 8.2 میں دیے گئے مثالی اعداد کے کلیے کو استعمال کریں گے۔ حسابی تسلسل یہ ہے

$$2S = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + (n - 1)d)$$

$a$  اور  $d$  والے تمام اجزاء کو علیحدہ علیحدہ جمع کرنے سے

$$S = (a + a + \dots + a) + (1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1))$$

پہلی توسین میں  $a$  دراصل  $n$  دفعہ آ رہا ہے۔ دوسری توسین 1 سے  $n - 1$  تک آنے والی تمام قدرتی اعداد کا مجموعہ ہے۔ مثالی کے اعداد کے کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے ہم لکھ سکتے ہیں:

$$t_{n-1} = \frac{1}{2}(n - 1)((n - 1) + 1) = \frac{1}{2}(n - 1)n$$

یہاں  $r$  برابر ہے  $n - 1$  کے۔

$$S = na + \frac{1}{2}(n - 1)nd = \frac{1}{2}(2a + (n - 1)d)$$

یہ وہی جواب ہے جو ہمیں طریقہ نمبر 1 سے ملا ہے۔ حسابی ترتیب کے تمام نتائج کا خلاصہ یہ ہے۔

ایک حسابی ترتیب کے  $n$  اجزاء ہوتے ہیں، جس میں پہلے جزو کو  $a$  اور ان کے مشترکہ فرق کو  $d$  کہتے ہیں  $l = a + (n - 1)d$  اور ان کا مجموعہ

$$S = \frac{1}{2}n(a + l) = \frac{1}{2}n(2a + (n - 1)d)$$

ہوتا ہے۔

ال 8.5.2 پہلے طاق  $n$  قدرتی اعداد کا مجموعہ معلوم کیجیے۔ طریقہ نمبر 1 طاق اعداد کی حسابی ترتیب میں پہلا جزو  $a=1$  ہے اور مشترکہ فرق  $d=2$  ہے۔ لہذا

$$S = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)d) = \frac{1}{2}n(2 + (n-1)2) = \frac{1}{2}n(2n) = n^2$$

طریقہ نمبر 2 سے  $2n$  تک تمام قدرتی نمبر لکھیں۔ اب  $n$  جفت اعداد یعنی  $2, 4, 6, \dots, 2n$  کو مٹا دیں۔ ہمارے پاس صرف  $n$  طاق اعداد باقی بچیں گے۔ 1 سے  $2n$  تک اعداد کا مجموعہ  $t_r$  ہے۔ یہاں برابر ہے کہ  $2n$  سو

$$t_{2n} = \frac{1}{2}(2n)(2n+1) = n(2n+1)$$

جفت  $n$  اعداد کا مجموعہ ہو گا:

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) = 2t_n = n(n+1)$$

پہلے طاق  $n$  اعداد کا مجموعہ ہو گا

$$n(2n+1) - n(n+1) = n((2n+1) - (n+1)) = n(n) = n^2$$

طریقہ نمبر 3 تصویر 8.8 میں ایک مربع بنایا گیا ہے جس میں صفیں  $n$  ہیں اور ہر صف میں  $n$  کالے کے نشانات ہیں۔ (یہ مربع  $n=7$  کے لئے بنایا گیا ہے۔) آپ نقاط کے ذریعے ظاہر کئے گئے ہر میں  $L$  کالے کے نشانات گن سکتے ہیں، لہذا  $n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots$  مثال 8.5.3

ایک طالب علم 426 صفحات کی کتاب پڑھتا ہے۔ جیسے جیسے وہ کتاب پڑھتا جاتا ہے، دلچسپی کی وجہ سے اس کی پڑھنے کی رفتار بڑھتی جاتی ہے۔ پہلے دن وہ 19 صفحات پڑھتا ہے اور ہر نئے دن 3 صفحات کا مزید اضافہ کرتا جاتا ہے۔ اسے کتاب ختم کرنے میں کتنے لگیں گے؟  $d = ?$ ,  $a = 19$ ,  $S = 426$ ۔  $S = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)d)$ , ہمیں دیا گیا ہے

$$S = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)d),$$

$$426 = \frac{1}{2}n(38 + (n-1)3),$$

$$852 = n(3n + 35),$$

$$3n^2 + 35n - 852 = 0.$$

دو درجی الجبرائی کلیہ کا اطلاق کرنے سے

$$n = \frac{-35 \pm \sqrt{35^2 - 4 \times 3 \times 9 - (852)}}{2 \times 3} = \frac{-35 \pm 107}{6}$$

چونکہ  $n$  ہمیشہ مثبت ہو گا۔ لہذا  $\frac{72}{6} = 12$   $n = \frac{-35+107}{6}$  وہ کتاب کو 12 دن میں کرے گا۔

1. مندرجہ ذیل میں سے کون سی ترتیب کسی حسابی ترتیب کے پہلے چار اجزاء کو ظاہر کرتی ہیں؟ ان ترتیب کا مشترکہ فرق بھی لکھیں۔

$$7 \quad 10 \quad 13 \quad 16 \dots$$

$$3 \quad 5 \quad 9 \quad 15 \dots$$

$$1 \quad 0.1 \quad 0.01 \quad 0.001 \dots$$

$$4 \quad 2 \quad 0 \quad -2 \dots$$

$$2 \quad -3 \quad 4 \quad -5 \dots$$

$$p - 2q \quad p - q \quad p \quad p + q \dots$$

$$\frac{1}{2}a \quad \frac{1}{3}a \quad \frac{1}{4}a \quad \frac{1}{5}a \dots$$

$$x \quad 2x \quad 3x \quad 4x \dots$$

2. مندرجہ ذیل حسابی ترتیب کا چھٹا جزو بتائیں اور جزو r کے لئے ترکیب بھی لکھیں۔

$$2 \quad 4 \quad 6 \dots$$

$$17 \quad 20 \quad 23 \dots$$

$$5 \quad 2 \quad -1 \dots$$

$$1.3 \quad 1.7 \quad 2.1 \dots$$

$$1 \quad 1\frac{1}{2} \quad 2 \dots$$

$$73 \quad 67 \quad 61 \dots$$

$$x \quad x + 2 \quad x + 4 \dots$$

$$1 - x \quad 1 \quad 1 + x \dots$$

3. مندرجہ ذیل حسابی ترتیب میں پہلے تین اور آخری جزو دیے گئے ہیں۔ اجزاء کی تعداد معلوم کریں۔

$$4 \quad 5 \quad 6 \quad \dots \quad 17$$

$$3 \quad 9 \quad 15 \quad \dots \quad 525$$

$$8 \quad 2 \quad -4 \quad \dots \quad -202$$

$$2\frac{1}{8} \quad 3\frac{1}{4} \quad 4\frac{3}{8} \quad \dots \quad 13\frac{3}{8}$$

$$3x \quad 7x \quad 11x \quad \dots \quad 43x$$

$$-3 \quad -1\frac{1}{2} \quad 0 \quad \dots \quad 12$$

$$\frac{1}{6} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \dots \quad 2\frac{2}{3}$$

$$1 - 2x \quad 1 - x \quad 1 \quad \dots \quad 1 + 25x$$

4. مندرجہ ذیل حسابی ترتیب میں دیے گئے اجزاء کا مجموعہ معلوم کریں۔

$$2 + 5 + 8 + \dots$$

20

$$4 + 11 + 18 + \dots$$

15

$$8 + 5 + 2 + \dots$$

12

$$\frac{1}{2} + 1 + 1\frac{1}{2} + \dots$$

58

$$7 + 3 + (-1) + \dots$$

25

$$1 + 3 + 5 + \dots$$

999

$$a + 5a + 9a + \dots$$

40

$$-3p - 6p - 9p - \dots$$

5. مندرجہ ذیل حسابی ترتیب میں اجزاء کی تعداد معلوم کریں اور اُن کا مجموعہ لکھیں۔

$$5 + 7 + 9 + \dots + 111$$

$$8 + 12 + 16 \dots + 84$$

$$7 + 13 + 19 + \dots + 277$$

$$8 + 5 + 2 + \dots + (-73)$$

$$-14 - 10 - 6 - \dots + 94$$

$$157 + 160 + 163 + \dots + 529$$

$$10 + 20 + 30 + \dots + 10000$$

$$1.8 + 1.2 + 0.6 + \dots + (-34.2)$$

6. مندرجہ ذیل حسابی ترتیب میں آپ کو دو اجزاء دیے گئے ہیں۔ پہلا جزو اور مشترکہ فرق معلوم کریں۔

$$= -13 \quad 11th = 25th = 5.0 \quad 13th = 3.5 \quad 8th = 47 \quad 10th = 12 \quad 3rd = 35 \quad 9th = 15 \quad 4th$$

$$7th = 2p + 7 \quad 3rd = -7x \quad 11th = 2x \quad 2nd = 5 \quad 7th = -3 \quad 3rd = -32 \quad 20th = -8 \quad 12th$$

7. معلوم کریں کہ مندرجہ ذیل حسابی تسلسل میں کتنے اجزاء کا مجموعہ دیے گئے حاصل جمع کے برابر ہو گا۔

$$27 + 23 + = 680 \quad 20 + 23 + 26 + \dots = 162 \quad 8 + 9 + 10 + \dots = 820 \quad 3 + 7 + 11 + \dots$$

$$= 2338 \quad -11 - 4 + 3 + \dots = 1017 \quad 6.1.1 + 1.3 + 1.5 + \dots = -2040 \quad 19 + \dots$$

page 125

8. ایک گلہری اخروٹ اکٹھے کرتی ہے۔ مہینے کے پہلے دن اُسے 5 اخروٹ ملتے ہیں، دوسرے دن 8 اور تیسرے دن 11 اور اس طرح ایک حسابی تساعد چلتا ہے۔ a. بیسویں دن اُسے کتنے اخروٹ ملیں گے؟ b. کتنے دنوں کے بعد گلہری کے پاس 1000 سے زیادہ اخروٹ ہوں گے؟ 9. کلثوم نے گاڑی خریدنے کے لئے بغیر سود کے قرضہ لیا۔ وہ غیر مساوی اقساط کی صورت میں قرض کی ادائیگی کرتی ہے۔ پہلے مہینے وہ تیس ڈالر ادا کرتی ہے اور پھر ہر آنے والے مہینے میں مزید دو ڈالر کا اضافہ کرتی ہے۔ اُسے 24 اقساط ادا کیں۔ a. آخری قسط کی رقم معلوم کریں۔ b. قرضے کی مکمل رقم معلوم کریں۔ 10. a. 1 سے 100 تک تمام قدرتی اعداد کا مجموعہ معلوم کریں۔ b. 101 سے 200 تک تمام قدرتی اعداد کا مجموعہ معلوم کریں۔ c.  $n+1$  سے  $2n$  تک قدرتی اعداد کے لئے ترکیب معلوم کریں اور اس حل کریں۔ 11. ایک ملازم یکم جنوری 2000ء کو کام کا آغاز کرتا ہے اور اُس کی سالانہ تنخواہ 30000 ڈالر ہے۔ یکم جنوری 2015ء تک اُس کی تنخواہ میں ہر سال 800 ڈالر کا اضافہ ہوتا ہے۔ وہ اسی تنخواہ پر 31 دسمبر 2040ء تک کام کرتا ہے۔ اُس نے اپنی مکمل پیشہ وارانہ زندگی میں کتنی رقم کمائی؟ 1. ایک ترتیب کی استقرائی تعریف یہ ہے:

a.  $U_{r+1} = 3U_r - 1$  اس ترتیب کے پہلے پانچ اجزاء معلوم کریں اگر  $c = 1$ ،  $c = 2$ ،  $c = 0$ ،  $c = \frac{1}{2}$  b. ثابت کریں کہ c کی ہر قیمت کے لئے حصہ میں (a) دیے گئے اجزاء کو  $U_r = \frac{1}{2} + b \times 3^r$  لکھا جاسکتا ہے۔ c. ثابت کریں اگر r کسی قیمت کے لئے  $U_{r+1} = \frac{1}{2} + b \times 3^{r+1}$  2. مندرجہ ذیل ترتیب کے لئے  $u_4$  کی قیمت معلوم کریں۔

$$U_{r+1} = (2 + U_r)^2 U_1 = 0$$

3. ایک ترتیب کی تعریف ایسے کی گئی ہے

$$U_{n+1} = \sqrt{(4 - U_n)^2}$$

یہاں کوئی  $u_1$  بھی حقیقی عدد ہے۔

a. اگر  $u_1 = 1$  ہو تو  $u_2, u_3, u_4$  معلوم کریں اور ترتیب کے رویے کی بابت بتائیں۔ b. اگر  $u_1 = 6$  ہو تو ترتیب کا رویہ کیا ہو گا؟ c.  $U_1$  کی کس قیمت کے لئے ترتیب کے تمام اجزاء ایک دوسرے کے برابر ہوں گے؟ 4. ایک ترتیب کی تعریف ایسے کی گئی ہے  $U_{n+1} = U_n^2 - 1$  یہاں کوئی  $u_1$  بھی حقیقی عدد ہے۔ a. ترتیب کے رویے کی بابت بتائیں اگر  $u = 0$ ،  $u = 1$  اور  $u = 2$ ۔ b. اگر  $u_2 = u_1$  ہو تو  $u_1$  کی دو ممکنہ قیمتیں معلوم کریں۔ c. اگر  $u_3 = u_1$  ہو تو ثابت کریں کہ  $U_1^4 - 2U_1^2 - U_1 = 0$

page 126 حسابی تساعد کا جزو  $1+4r$  کے برابر ہے۔  $n$  کی صورت میں اس تساعد کا مجموعہ معلوم کریں۔ ایک حسابی تساعد کے پہلے دو اجزاء کا مجموعہ 18 اور پہلے چار اجزاء کا مجموعہ 52 ہے۔ پہلے آٹھ اجزاء کا مجموعہ معلوم کریں۔ ایک حسابی تساعد کے پہلے 20 اجزاء کا مجموعہ 50 اور اگلے 20 اجزاء کا مجموعہ منفی 50 ہے۔ اس تساعد کے پہلے 100 اجزاء کا مجموعہ معلوم کریں۔ ایک حسابی تساعد کا پہلا جزو  $a$  اور مشترک فرق منفی 1 ہے۔ پہلے اجزاء  $n$  کا مجموعہ پہلے  $3n$  اجزاء کے مجموعے کے برابر ہے۔  $a$  کو  $n$  کی صورت میں لکھیے۔ مندرجہ ذیل حسابی تساعد کا مجموعہ معلوم کریں۔ اس تساعد کا ہر تیسرا جزو مٹا دیں یعنی اب باقی اجزاء کا مجموعہ معلوم کریں۔ ایک حسابی تساعد، جس کا پہلا جزو  $a$  اور مشترک فرق  $d$  ہے، کا مجموعہ  $T$  ہے۔ پہلے 50 طاق اعداد کا مجموعہ  $T-1000$  ہے۔  $d$  کی قیمت معلوم کریں۔ ذیل میں دی گئی ترتیب میں ہر اگلا نمبر پچھلے سے 0.1 درجے بڑا ہے۔ اس ترتیب میں کل کتنے اجزاء ہیں؟ تمام اجزاء کا مجموعہ معلوم کریں۔ ذیل میں ایک ترتیب دی گئی ہے۔  $U_3$  کی قیمت معلوم کریں۔  $u_{(n+1)} - u_n$  کو  $n$  کی صورت میں ظاہر کریں اور حل کریں۔ اس ترتیب کے اجزاء کا مشترک فرق ایک حسابی ترتیب بناتا ہے۔ اس حسابی تساعد کے لئے پہلا جزو، مشترک فرق اور پہلے 1000 اجزاء کا مجموعہ معلوم کریں۔ ایک کھلونے بنانے والی کمپنی اپنی پیداواری صلاحیت میں اضافہ کے لئے ہر ہفتہ 8 کھلونے زیادہ بناتی ہے تاوقتیکہ کہ پیداواری صلاحیت 1000 کھلونوں تک بڑھ سکے۔ پہلے ہفتے 280 کھلونے بنائے جاتے ہیں، دوسرے ہفتے 288 اور اسی طرح یہ سلسلہ چلتا رہتا ہے۔ ثابت کریں 91 ویں ہفتہ میں 1000 کھلونے بنائے جائیں گے۔ سن 1971ء میں تعمیر کردہ ایک مکان 999 سال کے ٹھیکے پر دیا جاتا ہے۔ اس معاہدے میں سالانہ کرایہ بھی شامل ہے۔ ٹھیکے کے پہلے 21 سالوں کے لئے سالانہ کرایہ 28 یورو طے پاتا ہے جسے اگلے 21 سالوں کے لئے 14 یورو سے 42 یورو تک بڑھایا جائے گا اور اُس کے بعد ہر 21 سال کے دورانیے کے اختتام پر 14 یورو کا اضافہ ہو گا۔ اگر ٹھیکہ 999 سال تک چلتا ہے تو اس عرصے میں 21 سال کے کل کتنے دورانیے آئیں گے اور بقیہ کتنے سال بچ جائیں گے؟ 21 سال کے تمام دورانیوں میں ادا کیا گیا کل کرایہ معلوم کریں۔

15 127 page. ایک حسابی تساعد کا پہلا جزو a اور مشترک فرق 10 ہے۔ اس تساعد کے پہلے n اجزاء کا مجموعہ 10000 ہے۔ a کو n کی صورت میں ظاہر کریں اور ثابت کریں کہ اس تساعد کا n جزو ہوگا:

$$\frac{10000}{n} + 5(n - 1)$$

اگر n جزو 500 سے کم ہو تو ثابت کریں  $0 < n^2 - 101n + 2000$  اور n کی سب سے بڑی قیمت معلوم کریں۔

16. تین ترتیب کی استقرائی لحاظ سے تعریف کی گئی ہے:

$u_0 = 0$ ,  $u_{r+1} = u_r + (2r + 1)$ ,  $u_1 = 1$ ,  $u_r = 2u_{r-1} - u_{r-2}$  for  $r \geq 1$  ہر ترتیب کے پہلے چند اجزاء معلوم کریں اور  $u_r$  کا کلیہ بتائیں۔ معلوم کریں کہ جو کلیہ آپ نے اخذ کیا ہے، وہ ترتیب کے اجزاء کو درست طور سے معلوم کرتا ہے۔ 17. پاسکل کی ترتیب کو استعمال کرتے ہوئے ایک نئی ترتیب Fn بتائی گئی ہے۔

$$F_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_n = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ 1 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 1 \\ n-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix}$$

ثابت کریں کہ تصویر 8.5 میں وتری سطروں کے ساتھ ساتھ دیے گئے اعداد کو جمع کرنے سے  $F_n$  کی ترتیب حاصل کی جاسکتی ہے۔ n کی چھوٹی قیمتوں کے لئے ثابت کریں کہ - (اسے فیبوناچی ترتیب کہتے ہیں۔ فیبوناچی سے سن 1200ء کے قریب اٹلی کو عرب دنیا کے الجبرائی طریقوں سے متعارف کروایا تھا۔) پاسکل کی ترتیب کی خاصیت  $\begin{pmatrix} n+1 \\ r+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ r+1 \end{pmatrix}$  (مشق 8 ب کا سوال نمبر 10 دیکھیں۔) استعمال کرتے ہوئے وضاحت کریں:  $F_4 + F_5 = F_6$ ,  $F_3 + F_4 = F_5$



## باب 15

### دہرائفوقات

سبق مشتق کے اگلے تصور کو پیش کرتا ہے۔ اس سبق کو مکمل کرنے کے بعد، آپ ان باتوں کے اہل ہو جائیں گے۔  
ترسیمات کی ساخت اور ان کے حقیقی دُنیا میں اطلاق کے لئے، دو درجی مشتق کی افادیت کو سمجھنا۔  
نقطہ عظیم اور نقطہ اقلیت کے درمیان امتیازی فرق کو سمجھنے کے لئے دو درجی مشتق کو استعمال کرنا۔  
نقطہ موڑ پر دو درجی مشتق کے صفر ہوجانے کے تصور کو سمجھنا۔

15.1 ترسیمات کی تیاری اور اُنکے مفہوم

سبق نمبر 7 میں حاصل ہونے والے نتائج، کسی تفاعل کی خصوصیات اور مشتق کی قیمتوں کے درمیانی تعلق، صرف اُن تفاعل تک ہی محدود تھے جو کہ اپنے اپنے دائرہ کار میں مسلسل ہوتے تھے۔ اُن تمام نتائج میں اس بات کو استعمال کیا گیا تھا کہ ترسیم کے کسی خاص نقطے پر مشتق کی قیمت، صرف اس نقطے پر تفاوت کی پیشکش ہی نہیں کرتا ہے بلکہ وہ خود ایک تفاعل کے طور پر تصور کیا جاتا ہے۔  
اس سبق میں ہمیں مزید ایک پابندی لگانی پڑے گی۔ اُن تفاعل پر جنکے ترسیم میں اچانک تبدیلی نہیں ہوتی ہے، اُن تفاعل کو ہموار تفاعل کہا جاتا ہے۔ یعنی مثال کے طور پر، ایک تفاعل  $(1 - x)x^{\frac{3}{2}}$  کے لئے، آپ کو اُس کے دائرہ کار میں سے نقطہ عجب کو باہر نکال دینا ہوگا، جو کہ اس مثال میں مبدا ہے۔ (مثال 7.2.3 سے)

ہموار ہونے کی شرط سے ظاہر ہوتا ہے کہ مشتق، جو کہ خود ایک تفاعل ہے، مسلسل ہے اور اُس کا تفرق لیا جاسکتا ہے۔ اُس کے نتیجے کو دو درجی مشتق کہا جاتا ہے۔ اُسے عام طور پر  $f''(x)$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اسی طرح سے اُسے  $\frac{d^2y}{dx^2}$  سے بھی ظاہر کرتے ہیں۔  
مثال 15.1.1  $y = f(x) = x^3 - 3x^2$  کے ترسیم میں، اُن وقفوں کی شناخت کیجئے جہاں  $f'(x)$

$f(x)$  اور  $f''(x)$  مثبت ہوتے ہوں، اُن کا ترسیمی مفہوم بیان کیجئے۔

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = 6x - 6$$

خاکہ 15.1 میں اس تقابل، اُسکے پہلے مشتق اور دوسرے مشتق کی ترسیمات دکھائی گئی ہیں۔  
اس خاکہ سے ظاہر ہوتا ہے کہ تقابل  $f(x) = x^2(x - 3)$  میں، جب  $x > 3$ ، ہو تب  $f(x) > 0$ ، ہوتا ہے۔ کی  $x$  ان تمام قیمتوں کیلئے کی ترسیم، - محور  $x$  کے اوپر حاصل ہوتی ہے۔  
اسی طرح سے تقابل  $f'(x) = 3x(x - 2)$  میں، جب  $x > 2$  یا  $x < 0$  ہو تب  $f'(x)$  کی ترسیم میں، اس وقفے میں تقاوت کی قیمت مثبت ہوتی ہے، تاکہ  $f(x)$  کی قیمت بڑھتی جائے۔  
آخر میں، تقابل  $f''(x) = 6(x - 1)$  میں، جب  $x > 1$  ہو تب  $f''(x) > 0$  ہوتا ہے۔ ایسا ظاہر ہوتا ہے کہ اس وقفے میں  $f(x)$  کی ترسیم اوپر کی جانب منحرف ہوتی ہوئی دکھائی دیتی ہے۔  
"اوپر کی جانب منحرف ہونے" کے اس تصور کو آسانی سے سمجھنے کیلئے، تقاوت کیلئے حرف  $g$  کو استعمال کرتے ہیں  
یعنی  $g = f'(x)$  ہوتا ہے۔ اسی طرح سے  $f''(x) = \frac{dg}{dx}$  ہوتا ہے، جو کہ  $x$  کی مناسبت سے تقاوت کی تبدیلی کی شرح کو ظاہر کرتا ہے۔  
جس وقفے میں  $f''(x) > 0$  ہوتا ہے، وہاں تقاوت کی قیمت بڑھتی جاتی ہے، جیسے جیسے  $x$  کی قیمت بڑھنے لگتی ہے۔  
درج بالا خاکہ 15.1 میں درمائی ترسیم میں اسے دیکھا جاسکتا ہے، جو کہ ایک مربعی ترسیم ہے جس کا نقطہ راس  $(1, -3)$  ہے۔  
اس لئے اس ترسیم کے بائیں جانب تقاوت کی قیمت نقطہ  $(1, -2)$  پر بڑھتے ہوئے  $-3$  ہو جاتی ہے۔ نقطہ اقلیت  $(2, -4)$  سے گزرتے ہوئے صفر ہو جاتی ہے اور پھر بڑھ کر مثبت ہو جاتی ہے۔ اس کے بعد جب  $x > 2$  ہوتا ہے تو لگاتار بڑھنے لگتی ہے۔  
درج بالا خاکہ 15.2 میں تین منحنی دکھائے گئے ہیں۔ اگر  $f''(x) > 0$  ہو تو اوپر کی جانب انحراف ہوتا ہے اور اگر  $f''(x) < 0$  ہو تو نیچے کی جانب انحراف ہوتا ہے۔ یہاں یہ بات نہایت اہمیت کی حامل ہے کہ یہ خاصیت ہمیشہ تقاوت کی علامت پر منحصر نہیں ہوتی ہے۔ ایک منحنی اوپر کی جانب منحرف ہو سکتی ہے اگر اس کا تقاوت مثبت ہو یا منفی ہو یا صفر ہو۔

مثال نمبر 15.1.2

اگر  $f(x) = y$  جہاں  $x > 0$ ،  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$  ہو اور اس کا دائرہ کار  $x > 0$  ہو۔ تقابل  $f(x)$  کی تفتیش کیجئے۔  
دیئے گئے تقابل  $f(x)$  کو آپ یا تو  $\frac{x-1}{x^2}$

اس طرح سے یا  $x^{-1} - x^{-2}$

اس طرح سے لکھ سکتے ہیں۔  
اسی لئے،

$$f'(x) = -x^{-2} + 2x^{-3} = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{-x + 2}{x^3}$$

اور

$$f''(x) = 2x^{-3} - 6x^{-4} = \frac{2}{x^3} - \frac{6}{x^4} = \frac{2(x - 3)}{x^4}$$

ہوتے ہیں۔ دیئے گئے دائرہ کار میں، ایسا لگتا ہے کہ

$$\begin{array}{ll} f(x) < 0, x < 1 & \text{and} \quad f(x) > 0, x > 1; \\ f'(x) > 0, x < 2 & \text{and} \quad f'(x) < 0, x > 2; \\ f''(x) < 0, x < 3 & \text{and} \quad f''(x) > 0, x > 3 \end{array}$$

اس لئے اس کی ترسیم محور کے نیچے ہوتی ہے اگر  $0 < x < 1$  ہو اور محور کے اوپر ہوتی ہے اگر  $x > 1$  ہو۔ اور یہ ترسیم محور کو نقطہ پر قطع کرتی ہے۔ اس کی تفاوت مثبت ہوتی ہے اگر  $0 < x < 2$  ہو اور منفی ہوتی ہے اگر  $x > 2$  ہو۔ اس دوران اس کا نقطہ عظیم  $(2, \frac{1}{4})$  ہوتا ہے۔ اور یہ ترسیم  $0 < x < 3$  کیلئے نیچے کی جانب منحرف ہوتی ہے اور  $x > 3$  کیلئے اوپر کی جانب منحرف ہوتی ہے۔ یہ تمام معلومات کافی ہیں جن کے ذریعے، کی دیئے گئے وقفے میں، فاضل قیمتوں کیلئے ترسیم کی ساخت کا تصور سمجھا جاسکتا ہے۔ لیکن تفتیش مکمل کرنے کیلئے یہ ضروری ہو جاتا ہے کہ بہت چھوٹی اور بہت بڑی قیمتوں کیلئے ترسیم کیسی ہوگی۔ اس کیلئے درج ذیل تحسیب کرنا چاہیئے مثلاً

$$f(0.01) = 100 - 10000 = -9900$$

$$f(100) = 0.01 - 0.0001 = 0.0099 \text{ اور}$$

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ جب  $x$  کی قیمت چھوٹی ہوتی ہے تب  $y$  بہت بڑی قدر کیساتھ منفی ہوتی ہے۔ اور جب  $y$  کی قیمت بڑی ہوتی ہے تب  $x$  بہت چھوٹا لیکن مثبت عدد ہوتا ہے۔

نوٹ:- اس مثال میں دی گئی معلومات کا استعمال کر کے آپ خود اس کی ترسیم بنانے کی کوشش کیجئے۔ اگر آپ کے پاس تریسی تحسیب کار ہو تو اُسے استعمال کر کے اپنے بنائے ہوئے ترسیم کی جانچ کیجئے۔

ترسیم تیار کرنے کی یہ صلاحیت دراصل اُن نقاط کی مشتق کرنا ہے جن کے محدود کچھ معنی رکھتے ہوں۔ مثال 15.1.2 میں نقطہ ہماری توجہ کا مرکز ہوتا ہے جہاں ترسیم محور کو قطع کرتی ہے اور نقطہ  $(2, \frac{1}{4})$  جو کہ اس ترسیم کا نقطہ عظیم ہوتا ہے۔ ایک اور دلچسپ نقطہ  $(3, \frac{2}{9})$  بھی ہے جہاں ترسیم نیچے کی جانب انحراف سے تبدیل ہو کر اوپر کی جانب انحراف میں تبدیل ہو جاتا ہے۔ یہاں نوٹ کیجئے کہ اسی نقطہ پر  $f''(x)$  کی قیمت بھی منفی سے مثبت ہو رہی ہے، اور  $f''(3) = 0$  ہوتا ہے۔

کسی بھی ترسیم کا ایسا نقطہ، جہاں ترسیم ایک جانب انحراف سے تبدیل ہو کر دوسری جانب انحراف دکھاتا ہے اُسے اس ترسیم کا نقطہ موڑ کہتے ہیں۔ اگر کسی ترسیم میں نقطہ  $p.f(q)$  ہوتا ہے، نقطہ موڑ کے طور پر موجود ہو تو اُس نقطہ پر ہوتا ہے۔

215. دو درجی مشتق کا عملی استعمال  
حقیقی دنیا میں کئی حالتوں میں دو درجی مشتق کافی اہم ہوتے ہیں، کیونکہ ان کے ذریعے ہم پہلے سے ہی مستقبل کی راہیں متعین کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر، پچھلے کئی وقتوں سے کمپیوٹروں کو گھریلو استعمال کافی بڑھ رہا ہے۔ کمپیوٹر تیار کرنے والے کارخانہ داروں نے  $t$  سالوں میں  $H$  کمپیوٹرس تیار کرنے کا تخمینہ کیا۔ ایسی حالت میں وقت اور کمپیوٹرس کی تعداد کے درمیان تیار ہونے والے ترسیم کی تفاوت  $\frac{dH}{dt}$  مثبت ہوگی۔ لیکن کمپیوٹرس تیار کرنے کی یہ شرح آگے بھی بڑھ رہی ہے یا کم ہو رہی ہے اسے معلوم کرنے کیلئے کارخانہ داروں کو  $\frac{d^2H}{dt^2}$  کی قیمت معلوم کرنا پڑے گا۔ (اگر کمپیوٹرس کی کھپت کی شرح منفی حاصل ہو تو کارخانہ داروں نے اپنے کمپیوٹرس کی کوالٹی پر غور کرنا ہوگا)۔ اس طرح کے حالات میں کی قیمت کا کافی اثر پڑتا ہے۔ اسی طرح سے اگر محکمہ موسمیات والے وقت  $t$  میں ہوا کے دباؤ کی قیمت کے ذریعے زیادہ یقین کے ساتھ معلومات نہیں دے سکتے اگر منفی ہو۔ لیکن اگر انہیں  $\frac{dp}{dt^2}$  کی قیمت بھی منفی مل جائے تو وہ یقین کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ موسم میں زبردست تبدیلیاں رونما ہونے والی ہیں۔

اس مشتق میں، پہلی اور دوسری مشتق کی معلومات کو استعمال کر کے ترسیم تیار کیجئے۔ اگر آپ ترسیم تیار کر لیتے ہیں تو تریسی عداد کو استعمال کر کے اپنی ترسیم کی جانچ کیجئے۔

$$f(x) = y \text{ جہاں } f(x) = x^3 - 1 \text{ ہو کے ترسیم پر غور کیجئے۔}$$

اس حقیقت کو استعمال کر کے معلوم کیجئے کہ محور  $x$  کو ترسیم کس نقطہ پر قطع کرتا ہے؟ اُس کا ترسیم بھی بنائیے۔

$$(b) f(x) = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1) \text{ اور } y = f'(x) \text{ معلوم کیجئے اور } y = f'(x) \text{ کی ترسیم بنائیے۔}$$

(c)  $y = f''(x)$  معلوم کیجئے اور  $y = f''(x)$  کی ترسیم بنائیے۔ (d) اپنے تیار کئے گئے تریسات کی مستقل مزاجی معلوم کیجئے۔ مثال کے طور پر،  $f(x) = y$  کے ترسیم کی جانچ کیجئے کہ اگر ہو تو ترسیم اوپر کی جانب منحرف ہوتی ہے۔

-2

$$y = x^3 + x$$

کی ترسیم کے لئے،

(a) اجزائے ضربی کو استعمال کر کے ثابت کیجئے کہ ترسیم - محور کو صرف ایک بار قطع کرتا ہے۔

(b)  $\frac{dy}{dx}$  اور  $\frac{d^2y}{dx^2}$  کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

(c) وہ وقفہ معلوم کیجئے جہاں ترسیم اوپر کی جانب منحرف ہو رہی ہے۔  
(d)

$$y = x^3 + x$$

کی ترسیم سے حاصل ہونے والی معلومات کو استعمال کیجئے۔

3-  $f(x) = y$  کی ترسیم تیار کرنے کے لئے اور کی معلومات استعمال کیجئے جہاں

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 9 = (x - 3)(x^2 + 3) \quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 9$$

4- مندرجہ ذیل کی ترسیمات بنائیے اور ان نقاط کے محدود معلوم کیجئے جہاں  $\frac{dy}{dx} = 0$  اور  $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$  ہوں۔

$$y = x + \frac{4}{x^2} \quad \text{ج.}$$

$$y = x + \frac{1}{x} \quad \text{ح.}$$

$$y = x^4 - 4x^2 \quad \text{ا.}$$

$$y = x - \frac{4}{x^2} \quad \text{د.}$$

$$y = x - \frac{1}{x} \quad \text{د.}$$

$$y = x^3 + x^2 \quad \text{ب.}$$

5- (a) مندرجہ ذیل ترسیم قیمت (P) اور وقت (t) کے درمیان تیار کی گئی ہے۔ افراط زر کی شرح  $\frac{dp}{dt}$  بڑھ رہی ہے۔ اس ترسیم میں  $\frac{d^2p}{dt^2}$  کیا ظاہر کرتا ہے اور اس کی قیمت کے متعلق کیا کہا جاسکتا ہے؟

(b) ترسیم بنائیے جس میں دکھایا گیا ہو کہ قیمتیں بڑھ رہی ہیں۔ لیکن افراط زر کی شرح کم ہوتی جا رہی ہے جس کا مکمل اضافہ 20 کی طرف جارہا ہے۔

-  $f(x) = y$  کی ترسیمات کے لئے  $f(x)$  اور  $f''(x)$  کی مثبت یا منفی علامتیں لکھئے۔ (e) اور میں (f) آپ کو متعلقہ وقفے کی حالت کی بھی ضرورت پڑے گی۔

- درج ذیل ترسیم ایک کمپنی کے شیئرز کی قیمتیں S دکھاتے ہیں۔

(a) اس ترسیم کے ہر مرحلے کے لئے  $\frac{dS}{dt}$  اور  $\frac{d^2S}{dt^2}$  کے متعلق اظہار خیال کیجئے۔

(b)

غیر تکنیکی الفاظ میں وضاحت کیجئے کہ اس ترسیم میں کیا واقعہ ہو رہا ہے؟ 8- کولین اپنی اسکول کے لئے نکل چکا ہے، جو کہ اس کے گھر سے 800 میٹر فاصلے پر واقع ہے۔ اس کی رفتار، باقی بچے ہوئے فاصلے کے ساتھ راست تناسب میں ہوتی ہے۔ فرض کریں کہ x میٹرس کا فاصلہ اس نے طے کر لیا ہے اور y میٹرس کا فاصلہ ابھی باقی ہے۔

X(a) بالمتقابل t اور y بالمتقابل t کے ترسیمات بنائیے

(b)  $\frac{d^2x}{dt^2}$  اور  $\frac{dy}{dt}$  کی علامتیں کیا ہو گئی؟

9- ایک تابکار عنصر کے انحطاط کی شرح، دیئے گئے وقت t پر، اس میں موجود جوہروں کی تعداد کے N ساتھ راست تناسب میں ہوتی ہے۔  
(a)

اس معلومات کو ظاہر کرنے کے لئے ایک مساوات لکھئے۔ (b) بالمتقابل t کے لئے ترسیم بنائیے۔ (c)  $\frac{d^2N}{dt^2}$  کی علامت کیا ہوتی ہے؟

10۔ درج ذیل تمام معاملات کے لئے  $y = f(x)$  ترسیمات کے مختلف حصوں کے خاکے تیار کیجئے۔ (مثال کے طور پر، (a) میں، آپ صرف محور  $y$  کے قریب والے حصے کی ترسیم بنا سکتے ہیں کیونکہ  $x$  کی دیگر قیمتیں نہیں دی گئی ہیں۔)

$$f(0) = -3, f'(0) = 0, f''(0) = 3$$

$$f(0) = 3, f'(0) = 2, f''(0) = 1$$

$$f(5) = -2, f'(5) = -2, f''(5) = -2$$

3 اقلیتی اور اعظم قیمتوں پر نظر ثانی

پچھلی مشق میں، آپ نے کچھ مقامات پر دیکھا ہوگا کہ معلومات کے مختلف ٹکڑے آپس میں منضبط ہوتے ہیں۔ یہ بات خاص طور پر ان نقاط پر بالکل صحیح ثابت ہوتی ہے جہاں ترسیم کی قیمت یا تو اعظم ہو یا اقل ترین۔ اگر آپ نے نشاندہی کی ہوگی کہ اقلیتی نقطے پر  $f'(x)$  کی علامت تبدیل ہوتی ہے، تب آپ نے یہ بھی دیکھا ہوگا کہ  $f''(x)$  سے ترسیم اوپر کی جانب منحرف ہوتی ہے۔

خاکہ 215 میں ایک عام نتیجہ سکھایا گیا ہے:

اگر  $f'(q) = 0$  اور  $f''(q) > 0$  ہوں تب  $x = q$  پر اقل ترین نقطہ حاصل ہوگا۔

اگر  $f'(q) = 0$  اور  $f''(q) < 0$  ہوں تب  $x = q$  پر اعظم ترین نقطہ حاصل ہوگا۔

اسے اکثر اوقات نہایت آسانی سے استعمال کیا جاسکتا ہے بجائے اس کے کہ یہ دیکھنا کہ جس نقطہ پر کی علامت تبدیل ہوتی ہے وہاں ترسیم کا اعظم یا اقل ترین نقطہ ہوتا ہے۔

دفع 7.3 میں دکھائے گئے طریقہ کار کو، درج ذیل انداز میں ترمیم کیا جاسکتا ہے۔

(1)  $y = f(x)$  کی ترسیم کے لئے اعظم نقطہ یا اقل ترین نقطہ معلوم کرنا۔

مرحلہ نمبر (1): اس دائرہ کار کو متعین کیجئے جس میں آپ دلچسپی رکھتے ہوں۔

مرحلہ نمبر (2):  $f'(x)$  کے لئے ایک فقرہ (Expression) معلوم کیجئے۔

مرحلہ نمبر (3): اس دائرہ کار میں  $x$  کی قیمتوں کی فہرست بنائیے جن کے لئے  $f'(x)$  کی قیمت صفر ہو۔ (اگر وہاں حاصل ہونے والی قیمتوں کے لئے  $f'(x)$  غیر معروف ہو، تب دفع 7.3 میں دکھائے گئے طریقہ کار کو استعمال کریں۔)

مرحلہ نمبر (4):  $f''(x)$  کے لئے ایک فقرہ (Expression) معلوم کیجئے۔

مرحلہ نمبر (5): مرحلہ نمبر (3) میں،  $x$  کی ہر قیمت کے لئے  $f''(x)$  کی علامت معلوم کیجئے۔ اگر علامت مثبت ہو تو ترسیم کا اقل ترین نقطہ ہوگا اور اگر علامت منفی ہو تو ترسیم کا اعظم نقطہ ہوگا۔ (اگر  $f''(x)$  کی قیمت صفر حاصل ہو جائے تو پُرانا طریقہ استعمال کیا جائے گا۔)

مرحلہ نمبر (6):  $x$  کی ہر قیمت کے لئے، جو کہ اعظم یا اقل ترین نقطہ دیتی ہے، محسوب  $f(x)$  کریں۔

نوٹ کیجئے کہ یہ طریقہ کار، دو حصوں میں منقسم ہوتا ہے۔

اول یہ کہ، یہ طریقہ صرف ہموار تقاضی کی ترسیمات کے لئے کارآمد ثابت ہوتا ہے۔ اسی لئے جن نقاط پر  $f'(x)$  غیر معروف ہو وہاں اسے استعمال نہیں کیا جاسکتا۔

دوم یہ کہ، اگر  $f'(q) = 0$  اور  $f''(q) = 0$  ہوں تو  $x = q$  پر  $f(x)$  کی قیمت یا تو اعظم ہوگی یا اقل ترین ہوگی یا دونوں نہیں۔ اسے  $x = 0$  پر  $f(x) = x^3$  اور  $g(x) = x^4$  کا موازنہ کر کے دکھایا جاسکتا ہے۔

آپ آسانی کے ساتھ دیکھ سکتے ہیں کہ  $f'(0) = 0$  اور  $g'(0) = 0$ ۔ لیکن  $x=0$  پر  $g(x)$  کی قیمت اقل ترین ہوتی ہے جبکہ وہاں  $f(x)$  نا تو اعظم ہوتا ہے اور نا ہی اقل ترین۔ (در حقیقت  $y=f(x)$  کی ترسیم میں مبدے پر نقطہ موڑ حاصل ہوتا ہے کیونکہ  $f''(x) = 6x$  ہوتا ہے، جو کہ  $x > 0$  کیلئے منفی ہوتا ہے اور  $x < 0$  کیلئے مثبت۔) آگے چل کر آپ دیکھیں گے کہ کچھ تقابل کیلئے دودرجی مشتق معلوم کرنے کیلئے بہت محنت درکار ہوتی ہے۔ ایسے معاملات میں، پُرانا طریقہ کار اپنانا ہی زیادہ موثر ہوتا ہے۔

## 15.3.1 مثال:

$f(x) = x^5 + x^4$  کی ترسیم کیلئے اعظم ترین اور اقل ترین نقاط معلوم کیجئے۔

مرحلہ نمبر (1): دیا گیا تقابل تمام حقیقی اعداد کے لئے معروف ہے۔

مرحلہ نمبر (2):

$$f'(x) = 4x^3 + 5x^4 = x^3(4 + 5x)$$

مرحلہ نمبر (3): اگر  $x=0$  یا  $x=0.8$  ہو تو  $f'(x) = 0$  ہوتا ہے۔

مرحلہ نمبر (4):  $f''(x) = 12x^2 + 20x^3 = 4x^2(3 + 5x)$ ۔

مرحلہ نمبر (5):  $f''(-0.8) = 4(-0.8)^2(3 - 4) < 0$ ۔ اس لئے  $x = -0.8$  اعظم نقطہ دیتا ہے۔ اسی طرح سے  $f''(0) = 0$ ۔ اسی لئے پُرانا طریقہ کار استعمال کرنا ہوگا۔

$0.8 < x < 0$  کے لئے  $x^3 < 0$  اور  $4 + 5x > 0$  اسی لئے  $f'(x) < 0$ ؛  $x > 0$  کے لئے  $f'(x) > 0$  اسی لئے  $x = 0$  ایک اقل ترین نقطہ ہوتا ہے

مرحلہ نمبر (6):  $(0.08192, 0.8)$  نقطہ اعظم ہے اور  $(0, 0)$  نقطہ اقلیت

## 15.3.2 مثال

$y = \frac{(x+1)^2}{x}$  کی ترسیم کیلئے اعظم نقطہ اور اقل ترین نقطہ معلوم کیجئے۔

دیا گیا تقابل صفر "0" چھڑ کر باقی تمام حقیقی اعداد کیلئے معروف ہے۔ اس تقابل کا مشتق لینے کے لئے اسے درج ذیل انداز میں لکھا جاتا ہے۔

$$y = \frac{(x+1)^2}{x} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = x + 2 + x^{-1}$$

اب اس کا مشتق لیتے ہیں۔

$$\frac{dy}{dx} = 1 - x^{-2} = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm 1$$

اس کا دوسرے درجہ کا مشتق درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

اس کی قیمت 2- حاصل ہوتی ہے اگر  $x = 1$ ۔

اس کی قیمت 2 ہوتی ہے اگر  $x = 1$ ۔ اس لئے  $(-1, 0)$  ایک نقطہ عظم ہوگا اور  $(1, 4)$  ایک اقلیتی نقطہ۔ یہاں اقل ترین قیمت، اعظم

قیمت سے بڑی حاصل ہوئی۔ یہ کیسے ممکن ہوا؟

درج ذیل تفاعل اور مساواتوں کی ترسیمات پر موجود ساکن نقاط کو پلاٹ کرنے اور وضاحت کرنے کیلئے پہلے اور دوسرے درجہ کی مشتق کا استعمال کیجئے۔ اگر یہ طریقہ کار ناکام ثابت ہو تو  $\frac{dy}{dx}$  کی علامت کے تبدیل ہونے کو استعمال کر کے اعظم نقطہ، اقل ترین نقطہ اور نقطہ موڑ معلوم کیجئے۔

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x - x^3 \\ f(x) &= x^3 - 3x^2 \\ f(x) &= 3x^4 + 1 \\ f(x) &= 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4 \\ f(x) &= \frac{2}{x^4} - \frac{1}{x} \\ f(x) &= x^2 + \frac{1}{x^2} \\ f(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \\ f(x) &= 2x^3 - 12x^2 + 24x + 6 \\ y &= 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 - 3 \\ y &= x^3 - 3x^2 + 3x + 5 \\ y &= 16x - 3x^3 \\ y &= \frac{4}{x^2} - x \\ y &= \frac{4+x^2}{x} \\ y &= \frac{x-3}{x^2} \\ y &= 2x^5 - 7 \\ y &= 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 1 \end{aligned}$$

#### 4 منطقی امتیازات

آپ نے دیکھا ہے کہ ہموار تفاعل کی ترسیمات کے لئے، یہ صحیح ہوتا ہے کہ اگر  $(q, f(q))$  ایک نقطہ عظم یا اقلیتی نقطہ ہو تب  $f(q)=0$  ہے۔

لیکن اس کا معکوس بیان، کہ اگر  $f(q)=0$  ہو تب  $(q, f(q))$  ایک نقطہ عظم یا اقلیتی نقطہ ہوگا، یہ بیان غلط ہوتا ہے۔ آپ اسے غلط ثابت کر سکتے ہیں ایک متضاد مثال کو استعمال کر کے، مثلاً ایک تفاعل جس کے لئے "اگر۔۔۔۔۔" والا حصہ تو موجود ہو لیکن "تب۔۔۔۔۔" والا حصہ موجود نا ہو۔

ایسا ایک تفاعل  $f(x) = x^3$  ہے جس میں  $q=0$  ہے۔ چونکہ  $f'(x) = 3x^2$  ہے اور  $f'(0)=0$  ہے، لیکن  $(0,0)$  اس تفاعل کیلئے نا تو اعظم نقطہ ہے اور نا ہی اقل ترین نقطہ۔ ایسی ہی صورت حال نقطہ موڑ کے ساتھ بھی آتی ہے۔ ہموار تفاعل کے لئے یہ صحیح ہوتا ہے کہ اگر  $(p, f(p))$  ایک نقطہ موڑ ہو تب  $f''(p) = 0$  ہو تب اس کے معکوس کے مطابق، اگر  $f''(p) = 0$  ہو تب نقطہ  $(p, f(p))$  ایک نقطہ موڑ ہوتا ہے، یہ بات غلط ہوتی ہے۔ اس معاملے میں ایک متضاد مثال،  $x=0$  کے لئے تفاعل  $f(x) = x^4$  کی ہو سکتی ہے۔ چونکہ

$f''(x) = 12x^2$  ہے جس کیلئے  $f''(0) = 0$  ہوگا۔ لیکن  $(0,0)$  ایک نقطہ اقلیت ہے  $f(x) = x^4$  کے ترسیم میں، نا کہ نقطہ موڑ۔

اعلیٰ ریاضیات میں عام مسائل کو مخصوص تفاعل کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ بہت سے مسئلے ایسے ہوتے ہیں جن کے معکوس بھی صحیح ثابت ہوتے ہیں، مثلاً فیثاغورث کا مسئلہ۔ لیکن، جیسا کہ اوپر مثال میں تھا، اگر کسی مسئلہ کا معکوس غلط ہو، تب یہ بہت اہم ہو جاتا ہے کہ آپ (صحیح) مسئلہ کو

استعمال کر رہے ہیں ناکہ (غلط) معکوس کو۔

$$f(x) = x^4 \text{ سکینٹن کی توسیع}$$

حالانکہ  $f(x) = x^4$  بذات خود ایک علامت ہے، اسی لئے اسے اجزا میں تقسیم نہیں کرنا چاہیئے لیکن کئی مرتبہ اسے  $y$  کو الگ کر کے لکھنے کے کئی فائدے ہوتے ہیں۔ یعنی اسے  $y = \frac{d}{dx} y$  اس طرح لکھا جاتا ہے۔ اسی لئے اگر  $f(x) = y$  ہو تو آپ اسے اس طرح لکھ سکتے ہیں،

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

ایک نہایت قابل استعمال محضی انداز ہے۔ مثال کے طور پر اگر  $y = x^4$  ہو تب  $\frac{dy}{dx} = 4x^3$  ہوگا۔ اسے محضی انداز میں اس طرح لکھ سکتے ہیں،

$$\frac{d}{dx} x^4 = 4x^3$$

آپ  $\frac{d}{dx}$  کو علامتی ہدایت سمجھ سکتے ہیں جس کے عمل کے بعد مشتق حاصل ہو جاتا ہے۔ آپ نے ایسے تحسب کار دیکھے ہونگے جو تحسبی عمل کے علاوہ الجبرا بھی کرتے ہیں۔ ان میں، اگر آپ ایک تفاعل مثلاً  $x^4$  لیں اور اسے مشتق کا حکم دیں تب وہ آپ کو ماحصل کے طور پر  $4x^3$  پیش کرے گا۔ علامت  $\frac{d}{dx}$  کو کبھی کبھی مشتقی عامل بھی کہا جاتا ہے۔ اس طرح یہ علامت مشتق کے حکم لگانے جیسا ہی عمل کرتی ہے۔

اسی انداز میں دوسرے درجہ کی مشتق میں بھی یہی سکینٹن کو استعمال کیا جاسکتا ہے۔ دوسرے درجہ کی مشتق یعنی  $\frac{dy}{dx}$  کا مشتق لینا جسے عام طور پر ہم  $\frac{d}{dx} \frac{dy}{dx}$  کے طور پر لکھتے ہیں۔ اگر آپ اس اصطلاح کو سمیٹ کر ایک اصطلاح بنائیں تو اوپر کی حصہ میں  $d^2 y$  ہوگا اور نیچے حصہ میں  $(dx)^2$  ہوگا۔ یہاں وحدانی خطوط کو ہٹا کر لکھیں تو یہ  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  بن جاتا ہے۔

15.6 اعلیٰ درجی مشتق

دو درجی مشتق پر اکتفا کرنے یا رُک جانے کی کوئی خاص وجہ نہیں ہے۔ چونکہ  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  بذات خود بھی ایک تفاعل ہے، اگر وہ ایک ہموار تفاعل ہو تو اُسکا مزید مشتق لیا جاسکتا ہے جو کہ سہ درجی مشتق ہوگا۔ اس عمل کو مسلسل جاری رکھنے پر اعلیٰ مشتقوں کا ایک سلسلہ مل جاتا ہے۔

$$\frac{d^3 y}{dx^3}, \frac{d^4 y}{dx^4}, \frac{d^5 y}{dx^5}$$

$$f'''(x), f^{(4)}(x), f^{(5)}(x),$$

یہاں آپ نوٹ کیجئے کہ تیسرے درجہ تک مشتق کو ظاہر کرنے کیلئے “dashes” کو استعمال کیا گیا لیکن چوتھے مشتق سے آگے کیلئے وحدانی خطوط میں عدد لکھ کر اس مشتق کے درجے کا اظہار کیا گیا ہے۔

یہ تمام اعلیٰ درجی مشتقیں، حقیقی دُنیا میں یا ترسیمات کی تیاری میں کوئی خاص تفہیمی کردار نہیں ادا کرتے ہیں۔ لیکن کچھ معاملات میں یہ اہم بھی ہوتے ہیں۔ مثلاً تقریبی تحسب میں اور سلسلہ وار تفاعل کے اظہار کے لئے ان کا اہم استعمال ہوتا ہے۔

مندرجہ ذیل کیلئے  $\frac{d^3 y}{dx^3}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}$  اور  $\frac{d^4 y}{dx^4}$  معلوم کیجئے۔

$$y = x^2 + 3x - 7$$

$$y = 2x^3 + x + \frac{1}{x}$$



$$y = x^4 - 2$$

$$y = \sqrt{x}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y = x^{\frac{1}{4}}$$

2۔ مندرجہ ذیل کیلئے  $f'(x)$ ،  $f''(x)$  اور  $f(4)(x)$  معلوم کیجئے۔

$$y = x^2 - 5x + 2$$

$$y = 2x^5 - 3x^2$$

$$y = \frac{1}{x^4}$$

$$y = x^2(3 - x^4)$$

$$y = x^{\frac{3}{4}}$$

$$y = x^{\frac{3}{8}}$$

3۔ اگر  $y = x^n$  ہو تو  $\frac{d^n y}{dx^n}$  معلوم کیجئے جہاں  $n$  ایک مثبت عدد ہے۔

4۔ اگر  $y = x^{n+2}$  ہو تو  $\frac{d^n y}{dx^n}$  معلوم کیجئے جہاں  $n$  ایک مثبت عدد ہے۔

5۔ اگر  $y = x^m$  ہو تو  $\frac{d^n y}{dx^n}$  معلوم کیجئے جہاں  $m$  ایک مثبت عدد ہے اور  $m < n$  متفرق مشق

- 15-1  $x^3 - 6x^2 + 9x + 6$  کی اعظم قیمت اور اقل قیمت معلوم کیجئے، ساتھ ہی ساتھ یہ بھی بتائیے کہ آپ نے انہیں کیسے معلوم کیا؟
- 2- تفاعل  $f(x) = 16x + \frac{1}{x^2}$  کیلئے اعظم قیمت اور اقل قیمت معلوم کیجئے، ساتھ ہی ساتھ یہ بھی بتائیے کہ آپ نے اعظم اور اقل نقطہ کیسے متعین کیا۔
- 3- تفاعل  $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{30 - 5x}$  میں اعظم قیمت اور اقل قیمت معلوم کیجئے اور  $x$  متعلقہ قیمتیں بھی دیجئے۔
- 4- تفاعل  $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-4x}$  کی ترسیم میں اعظم نقطہ اور اقلیتی نقطہ کے محدود لکھئے۔
- 5- نسرین کی کافی کے سرد ہونے کی شرح، کافی کے درجہ حرارت  $\theta$  اور ماحول کے درجہ حرارت  $\alpha$  کے فرق کے ساتھ راست تناسب میں ہے۔

$\theta$  اور  $t$  کے درمیان ترسیم بنائیے۔ اگر  $t=0$  پر  $\alpha = 20$  ہو اور

$\theta = 95$  ہو۔ اگر  $t > 0$  ہو تو  $\theta$  کی  $\frac{d\theta}{dt}$  اور

کی علامتیں بتائیے۔  $\frac{d^2\theta}{dt^2}$

۔ اڑان کے دوران، ہوائی جہازوں میں ایک مزاحمت محسوس کی جاتی ہے جسے ہوائی رگڑ کہا جاتا ہے۔ ایک مخصوص جہاز کیلئے، کم رفتاروں کے لئے، ہوائی رگڑ کی قیمت

$kS^2$  کے برابر ہے، جہاں  $k$  ایک مستقل ہے جسے ہوائی رگڑ کا ضریب ہے اور  $S$  اُس جہاز کی رفتار ہے۔

اگر رفتاروں کو بڑھایا جائے تو رفتار کے ساتھ ساتھ  $k$  کی قیمت بھی بڑھتی جاتی ہے۔ اور  $k$  بالقابل  $S$  تیار ہونے والی ترسیم درج ذیل ہے۔ (آواز کی رفتار کے قریبی قیمتوں والے علاقے کو عام طور پر سمی رکاوٹ کہا جاتا ہے۔)

(a) ترسیم میں، تینوں علاقوں میں  $\frac{dk}{dS}$  اور  $\frac{d^2k}{dS^2}$  کی علامتیں بتائیے۔

(b) کس علاقے میں  $k$

کی قیمت نہایت تیزی سے تبدیل ہو رہی ہے؟ (c) بہت زیادہ تیز رفتاروں کیلئے  $k$

کی قیمتوں سے کیا نتیجہ اخذ کیا جاسکتا ہے؟ 7۔ ایک کھڑکی کا پچھلا حصہ مستطیل نما ہے اور اوپری حصہ نیم دائرہ نما ہے۔ نچلے مستطیل نما حصے کو ABCD سے دکھایا گیا ہے جس کی چوڑائی  $2x$  ہے اور اونچائی ہے  $y$  اوپری نیم دائرہ نما حصہ کا قطر AB ہے، یعنی نیم دائرے کا نصف قطر ہے۔  $x$

کھڑکی کا مجموعی محیط 10 میٹرز ہے۔  $x$  اور  $\pi$  کی شکل میں کھڑکی کے مجموعی رقبے کے لئے فقرہ حاصل کیجئے۔ ساتھ ہی ساتھ  $x$  کی وہ قیمت معلوم کیجئے جس کے لئے رقبہ کی قیمت اعظم ہوگی۔ کی  $x$  اُس مخصوص قیمت کو معلوم کرنے کیلئے  $\frac{d^2y}{dx^2}$  کی قیمت کا استعمال کیجئے۔

۔ اگر  $a > 0$  ہو تو، درج ذیل تفاعل کیلئے اعظم اور اقلیت کی تفتیش کیجئے

$$x^2(x - a)$$

$$x^3(x - a)$$

$$x^2(x-a)^2$$

$$x^3(x-a)^2$$

تفاعل

$$x^n(x-a)^m$$

کیلئے ایک انکل بنائیے۔  
 $f^n(x)$  کے لئے ایک فقرہ تیار کیجئے جہاں  $f(x)$  درج ذیل ہو۔

$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

10\*۔ درج ذیل مساواتوں کی منحنيوں کیلئے نقطہ موڑ کے محدود معلوم کیجئے۔

$$y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 4$$

$$y = x^2 - \frac{1}{x} + 2$$



باب 16

تکميل



## باب 17

### حجم جسم طواف

یہ باب کسی حجم یا ٹھوس جسم کو تلاش کرنے کے لیے انضمام کے استعمال کے بارے میں ہے۔ جس کو ٹھوس رد عمل کہا جاتا ہے۔ جب آپ اس باب کو مکمل کر لیں گے تو آپ  $x$  اور  $y$  محور میں سے کسی ایک کے بارے میں انقلاب کا حجم تلاش کرنے کے قابل ہو جائیں گے۔

#### 17.1 انقلاب کی جلدیں

O ایک لکیر پر ہے اور O ایک مہدا ہے۔ OA کی ایک لکیر بنائیں۔ جیسا تصور 17.11 میں دکھایا گیا ہے۔ لائن OA اور  $x$ -محور کے سایہ دار دکھائے جانے والے خطے پر غور کریں۔ اگر آپ اس خطے کو کے گرد  $360^\circ$  کے ذریعے گھماتے ہیں تو، یہ ایک ٹھوس شنگ نکال دیتا ہے۔ 17-2 تصور میں اس طرح سے تعمیر ہونے والی شکل کو انقلاب کا ٹھوس کہا جاتا ہے۔ ٹھوس انقلاب کے حجم کو بعض اوقات انقلاب کا حجم کہا جاتا ہے۔

ایک خط کے منحنی خطوط کے حساب کتاب کرنے کے لئے متعدد طریقوں سے انقلاب کے حجم کا حساب لگانا یکساں ہے، اور اس کی مثال ایک مثال سے دی جاسکتی ہے۔

فرض کریں  $y = \sqrt{x}$  کے ترسیم اور  $x = 1$  سے  $x = 4$  کے ترسیم کے درمیان کے علاقے کو تصویر 17-3 میں دکھا جاسکتا ہے،  $x$ -محور کے گرد انقلاب کا ٹھوس بنانے کے لیے گھمایا جاتا ہے۔ کلیدی طور پر ایک اور عام سوال پوچھ کر شروع کرنا ہے۔ اس کا حجم  $V$  ہے۔  $x = 1$  سے کسی بھی قدر کی قدر کے انقلاب کا ٹھوس ہے۔ یہ ٹھوس تصویر 17 میں دکھایا گیا ہے۔

فرض کریں  $\delta x$  کو بڑھایا ہوا ہے۔ چونکہ  $y$  اور  $V$  دونوں  $x$  کے افعال ہیں۔ اسی سے  $y$  اور  $V$  میں اضافے کو  $\delta y$  اور  $\delta V$  لکھا جاسکتا ہے۔ تصویر 17.5 میں رنگین حجم میں اضافہ  $\delta V$  کے درمیان ہے۔ فرض نمائنی کی مقدار کی چوڑائی 6 ریڈی  $y + \delta y$  ہے۔ ان دونوں قرض کا مرکز

تصویر 17-5 کے دائیں میں دکھایا گیا ہے۔  $\delta V$ ؛  $\pi y^2 \delta x$  اور  $\pi(y + \delta y)^2$  کے درمیان ہے۔ جس سے اسکی پیروی ہوتی ہے۔  $\frac{\delta V}{\delta x}$ ؛  $\pi y^2$  اور  $\pi(y + \delta y)^2$  کے درمیان میں ہے۔

اب  $\delta V$  کی طرف جاتا ہے اور یہ حصہ 4-7 کی تعریف میں  $\frac{\delta V}{\delta x}$ ،  $\frac{dV}{dx}$  کی طرف جاتا ہے۔ تو  $y$ ،  $y + \delta y$  کی طرف جاتا ہے۔ اور اس کے بعد

$$\frac{dV}{dx} = \pi y^2$$

تو  $V$  ایک ایسا فعل ہے۔ جس کا مانور  $\pi y^2$  ہے۔ اور  $\sqrt{x}$  اور  $\frac{dV}{dx} = \pi x y = \sqrt{x}$  ہے۔

اسی طرح

$$V = \frac{1}{2} \pi x^2 - \frac{1}{2} \pi$$

حجم  $x = 4$  تلاش کرنے کے لیے  $V$  کے اظہار کے لیے  $x = 4$  کی جگہ لیں۔ تو حجم ہے۔

$$\frac{1}{2} \pi \times 4^2 - \frac{1}{2} \pi = \frac{1}{2} \pi (16 - 1) = \frac{15}{2} \pi$$

آپ حصہ 16-3 کو استعمال کر کے آخری حصے کے متعارف کریں گے اور اسے مختصر کریں گے۔

$$V = \int_1^4 \pi y^2 dx = \int_1^4 \pi x dx = \left[ \frac{1}{2} \pi x^2 \right]_1^4 = \frac{1}{2} \pi \times 16 - \frac{1}{2} \pi \times 1 = \frac{15}{2} \pi$$

نوٹ کریں کے مثال کے شروع میں جو اسناد لال استعمال کیا گیا ہے۔ وہ مکمل طور پر عام تھا اور کسی طرح بھی اصل وکر کی مساوات پر انحصار نہیں کرتا تھا۔ جب  $x = a$  اور  $x = b$  کے درمیان  $y = f(x)$  کا ترسیم ہوتا ہے تو تحت خط  $a < b$  -  $x$  محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ انقلاب کا ٹھوس کا حجم ہوتا ہے۔

$$\int_a^b \pi (f(x))^2 dx \quad \int_a^b \pi y^2 dx$$

مثال 17.1:  $x = -1$  اور  $x = 1$  کو  $x$ -محور کے گرد چار دائیں زاویہ سے گھمایا جاتا ہے۔ اور حجم  $y = 1 + x^2$  کے ترسیم کے نیچے پیدا ہوتا ہے۔ اسکا حجم تلاش کریں۔

چار دائیں زاویوں کا فخرہ بعض اوقات  $360^\circ$  کی جگہ پر مکمل بیان کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔ اور  $x$ -محور کے گرد گردش کرتا ہے۔ تو مطلوبہ حجم  $V$  ہے۔ جہاں

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 \pi y^2 dx = \int_{-1}^1 \pi (1 + 2x^2 + x^4) dx \\ &= \left[ \pi \left( x + \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 \right) \right]_{-1}^1 \\ &= \pi \left\{ \left( 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) - \left( (-1) + \frac{2}{3} (-1)^3 + \frac{1}{5} (-1)^5 \right) \right\} = \frac{56}{15} \pi \end{aligned}$$



یہ معمول کی بات ہے نتیجہ  $\pi$  کے عین مطابق متعدد کے طور پر دیا ہے۔ اہم اعداد و شمار یا اشاری جگہوں کی دی گئی تعداد کا صحیح جواب دیں۔ اور ثابت کریں کہ بنیاد کے ساتھ ایک شنگ کا حجم  $V$  در اس  $r$  اور اوچائی  $\frac{1}{3}\pi r^2 h$  ہے۔ شنگ دینے کے لیے گھومنے والا مثلث تصویر 17.6 میں دکھایا گیا ہے۔ جسکی اوچائی پورے صفے پر تیار کی گئی ہے۔ اور اسکا میلان --- پر ہے جو کہ  $\frac{r}{h}$  ہے اور مساوات  $y = \frac{r}{h}x$  بنتی ہے۔

لہذا یاد رکھے کے  $r, n$  اور  $h$  ثابت قدم ہیں۔ اور  $x$  پر انصاف نہیں کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \pi y^2 dx = \int_0^h \pi \left( \frac{r}{h}x \right)^2 dx \\ &= \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \left[ \frac{1}{3}x^3 \right]_0^h = \pi \frac{r^2}{h^2} \times \frac{1}{3}h^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h \end{aligned}$$

□

## 17.2 -y- محور کے گرد انقلاب کی جلدیں

تصویر 17.7 مع  $y = f(x)$  کے ترسیم میں درمیان کا علاقہ  $y = c$  اور  $y = d$  ہے۔ اور اسے  $x$ -محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ جو تصویر 17-8 میں ٹھوس دکھایا گیا ہے۔  $y$ -محور کے گرد ٹھوس انقلاب کو تلاش کرنے کے لیے کردار کو تبدیل کریں۔ جو کہ حصہ 17.1 میں  $x$  اور  $y$  کی گفتگو کی گئی ہے۔ خطہ  $y = f(x)$  کے ترسیم سے جڑا ہوا ہے۔ تو کثیر  $y = c$  اور  $y = d$ ،  $y$ -محور کے گرد گھمایا جاتا ہے، تشکیل شدہ ٹھوس حجم ہوتا ہے۔

$$\int_c^d \pi x^2 dy.$$

مثال 17.2: خطہ  $y = x^3$  اور اس کے درمیان  $y$ -محور سے جڑا ہوا ہے۔ تو پیدا شدہ حجم تلاش کریں۔ اور  $y$ -محور کے درمیان  $y = 1$  اور  $y = 8$  کو  $360^\circ$   $y$ -محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

$$\begin{aligned} V &= \int_1^8 \pi y^{\frac{2}{3}} dy = \pi \left[ \frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} \right]_1^8 = \pi \left( \frac{3}{5} \times 8^{\frac{5}{3}} \right) - \pi \left( \frac{3}{5} \times 1^{\frac{5}{3}} \right) \\ &= \pi \left( \frac{3}{5} \times 32 \right) - \pi \left( \frac{3}{5} \times 1 \right) = \frac{93}{5} \pi \end{aligned}$$

□

مشق 17.1: اس مشق کے تمام سوالات کو اپنے جوابات میں  $\pi$  کی ضرب کے طور پر لکھیں۔

ا. جب خط  $x = a$  کے درمیان  $y = f(x)$  کے ترسیم کے پیدا ہوتا ہے۔ تب حجم تلاش کرے  $x = b$  کو  $360^0$  کے ذریعے  $x$ -محور کے گرد گھمایا جاتا ہے؟

$$f(x) = x; \quad a = 3, \quad b = 5 \quad \text{ا.} \quad xf(x) = x^3; \quad a = 2, \quad b = 6 \quad \text{ج.}$$

$$f(x) = x^2; \quad a = 2, \quad b = 5 \quad \text{ب.} \quad f(x) = \frac{1}{x}; \quad a = 1, \quad b = 4 \quad \text{د.}$$

ب. جب حجم  $x = a$  اور  $y = f(x)$  کے درمیان ترسیم کے نیچے بنائے گئے۔ حجم کا پتہ لگائیں۔  $x = b$  کو  $360^0$ -محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

$$f(x) = x + 3; \quad a = 3, \quad b = 9 \quad \text{ا.} \quad f(x) = \sqrt{x+1}; \quad a = 0, \quad b = 3 \quad \text{ج.}$$

$$f(x) = x^2 + 1; \quad a = 2, \quad b = 5 \quad \text{ب.} \quad f(x) = x(x-2); \quad a = 0, \quad b = 2 \quad \text{د.}$$

ج. جب خط  $y$ -محور اور  $y = f(x)$  کے ترسیم کے ساتھ جڑا ہوا ہو۔ تب پیدا شدہ حجم تلاش کریں۔ اور  $y = c$  اور  $y = d$  کی لکیر کو  $y$ -محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ تاکہ ٹھوس رستہ نکالا جاسکے۔

$$f(x) = x^2; \quad c = 1, d = 3 \quad \text{ا.} \quad f(x) = \sqrt{9-x}; \quad c = 0, d = 3 \quad \text{ھ.}$$

$$f(x) = x + 1; \quad c = 1, d = 4 \quad \text{ب.} \quad f(x) = x^2 + 1; \quad c = 1, d = 4 \quad \text{د.}$$

$$f(x) = \sqrt{x}; \quad c = 2, d = 7 \quad \text{ج.} \quad f(x) = x^{\frac{2}{3}}; \quad c = 1, d = 5 \quad \text{ز.}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}; \quad c = 2, d = 5 \quad \text{د.} \quad f(x) = \frac{1}{x} + 2; \quad c = 3, d = 5 \quad \text{ج.}$$

د. ہر معاملے میں خط مندرجہ ذیل منحنی خطوط اور  $x$ -محور کے درمیان منسلک ہوتا ہے۔  $x$ -محور کے گرد  $360^0$  کے ذریعے پیدا کردہ ٹھوس کا حجم تلاش کریں۔

$$y = (x+1)(x-3) \quad \text{ا.} \quad y = x^2 - 5x + 6 \quad \text{ج.}$$

$$y = 1 - x^2 \quad \text{ب.} \quad y = x^2 - 3 \quad \text{د.}$$

ھ.  $y = x$  اور  $y = x^2$  کے ترسیموں کے درمیان منسلک خطے  $R$  کے ذریعے گھمایا جاتا ہے تو جو حجم ہوتا ہے، اسے تلاش کریں۔

ا.  $x$ -محور کے گرد      ب.  $y$ -محور کے گرد

و.  $y = 4x$  اور  $y = x^2$  کے ترسیموں کے درمیان منسلک خطے  $R$  کے ذریعے گھمایا جاتا ہے تو جو حجم ہوتا ہے، اسے تلاش کریں۔

ا.  $x$ -محور کے گرد      ب.  $y$ -محور کے گرد

ز.  $y = \sqrt{x}$  اور  $y = x^2$  کے ترسیموں کے درمیان منسلک خطے  $R$  کے ذریعے گھمایا جاتا ہے تو جو حجم ہوتا ہے، اسے تلاش کریں۔

ا.  $x$ -محور کے گرد      ب.  $y$ -محور کے گرد

ح. گلاس کا پیالہ  $y$ -محور کے ترسیموں کے مابین اس علاقے کے گرد گھماتے ہوئے تشکیل دیا جاتا ہے۔

$$y = x^3 \text{ اور } y = x^2 \text{ پیالے میں شیشے کی مقدار معلوم کریں۔}$$

ط. یہ خط دونوں محوروں سے منسلک ہے۔ لکیر  $x = 2$  اور  $x = \frac{1}{8}x^2 + 2$  کے ارد گرد گھمایا گیا ہے۔ ایک محور بنانے کے لیے  $y$ -محور ٹھوس کا حجم تلاش کریں۔

مشق 17.2:

ا. یہ خط  $y = x^2 + 1$  اور  $x$ -محور اور لکیر  $x = 2$  سے جڑا ہوا ہے۔  $x$ -محور کے گرد گھمایا گیا ہے۔  $\pi$  اور  $\pi$  کے لحاظ سے تشکیل شدہ ٹھوس کا حجم تلاش کریں۔

ب. یہ وضاحت کریں کہ نقاط  $x, y$  مرکزہ ایک مطمئن دراس کی مساوات  $x^2 + y^2 = a^2$  کی نفاذی کریں۔  $x$ -محور کت نیم کے اوپر دائرہ گھمایا جاتا ہے۔  $360^\circ$  کے ذریعے  $x$ -محور کو گھمایا جاتا ہے۔ دراس کا دائرہ  $a$  کی وضاحت کریں۔ اضافت کریں کے حجم  $V$  کیوں ہے۔ اس دائرہ کا  $V$  مز جانب دیا گیا ہے۔

$$V = 2\pi \int_0^a a(a^2 - x^2)dx.$$

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3 \text{ یہ ثابت کریں}$$

ج. مساوات والا بیضوی  $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$  تصویر میں دکھایا گیا ہے۔  $a$  اور  $b$  کا محور ایک ہی ہے۔  $a^2$  اور  $b^2$  بیضوی شکل بنانے کے لیے  $x$ -محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ اس بیضوی کا حجم تلاش کریں۔  $b$  بناتے ہوئے بیضوی کی مقدار کم کریں۔ اور  $y$ -محور کے گرد گھمایا جائے۔

د. تصویر میں  $y = x^{-\frac{2}{3}}$  مکر دکھایا گیا ہے۔

(i) دکھائیں کے سایہ دار علاقہ  $A$  لامحدود ہے۔

(ب) رنگیں علاقہ  $B$  تلاش کریں۔

(ج)  $A$  رقبہ کے گرد  $360^\circ$  کے ذریعے گھمایا جاتا ہے۔  $x$ -محور حجم تلاش کریں۔

(د) علاقہ  $B$   $360^\circ$  کے ذریعے گھمایا جاتا ہے۔  $y$ -محور حجم تلاش کریں۔

ه. مساوات کا علاقہ سوال 4 میں دیا گیا ہے۔ ان کی مساوی علاقوں اور جلدوں کی تعقیقات کریں۔

$$(i) \quad y = x^{-\frac{3}{5}}, \quad (ii) \quad y = x^{-\frac{1}{4}}.$$

و. نقطہ موڑ اور نقاط کے بتائے ہوئے وکر  $y = 9 - x^2$  کا خاکہ بنائیں۔ محور کے ساتھ چو رہا ہے۔ محدود خط جس میں منحنی خطوط پر مشتمل ہوتا ہے۔ اور  $x$ -محور  $R$  کے ذریعے ظاہر ہوتا ہے۔

(i)  $R$  کا رقبہ تلاش کریں اور اسی وجہ سے دوسری صورت میں --- تلاش کریں۔

(ب) جب  $R$  کو  $360^\circ$  کے ذریعے گھمایا جاتا ہے، تو حاصل کی جانے والی ٹھوس انقلاب کا حجم  $x$ -محور کے گرد تلاش کریں۔

(ج) جب  $R$  کو  $360^\circ$  کے ذریعے گھمایا جاتا ہے، تو حاصل کی جانے والی ٹھوس انقلاب کا حجم  $y$ -محور کے گرد تلاش کریں۔

ز. خطے کو منحنی خطوط وکر  $y = (x - 2)^{\frac{3}{2}}$  جس کے لیے  $2 \leq x \leq 4$  ہے۔ جو  $x$ -محور کے ساتھ ہے۔  $x = 4$  تلاش کریں۔  $\pi$  کے لہاظ سے حاصل کردہ ٹھوس کا حجم جب  $R$  ہوتا ہے۔  $x$ -محور کے گرد چار زاویوں سے گھمایا جاتا ہے۔

## باب 18

### ریڈیئن

ایک دائرے کا مرکز 0 اور رداس 6 سم ہے۔ ایک مستقیم خط PG جس کی لمبائی 8 سم ہے اس میں ایک قطع بناتا ہے۔ اس قطعے کا احاطہ اور رقبہ دریافت کریں۔ آپکا جواب تین نمایاں ہندسوں تک درست ہو۔

اس طرح کے مسائل میں یہ مفید ہوتا ہے کہ آغاز کے لیے شکل 18.3 میں دکھائے نیم تارک ضلع کی بجائے پورے احاطے OPQ پر غور کیا جائے۔

اس قطع کا احاطہ دو حصوں پر مشتمل ہے۔ 8 سم لمبائی والا سیدھا حصہ اور خط منحنی والا حصہ۔ منحنی حصہ کی لمبائی معلوم کرنے کے لیے زاویہ POQ کو جاننے کی ضرورت ہوگی۔

اس زاویے کو آپ  $\theta$  کا نام دے لیں۔ چونکہ یہ ایک مساوی الساقین (دو اضلاع برابر) ٹکون ہے۔ لہذا مرکز 0 سے خط PQ تک کھینچا گیا ایک خط سے خط PQ اور زاویہ POQ دونوں دو برابر حصوں میں تقسیم ہو جاتے ہیں۔

$$\sin \frac{1}{2}\theta = \frac{4}{6} = 0.666...$$

$$\text{لہذا } \frac{1}{2}\theta = 0.7297... \text{ اور } \theta = 1.459...$$

اپنے عداد کو لازماً ریڈیئن انداز میں کر لیں۔ اب اس کا احاطہ  $d = 8 + 6\theta = 16.756...$  ٹھہرتا ہے۔ اس کا احاطہ 16.8 سم ہے جو کہ تین ہندسوں تک درست ہے

مذکورہ قطعے کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے آپکو حلقہ OPQ کا رقبہ معلوم کرنا ہو گا پھر اس رقبے میں سے مثلث OPQ کا رقبہ نفی کرنا ہو گا۔

اگر ہم کسی ٹکون کے رقبے کے لیے  $\frac{1}{2}bc \sin A$  کو استعمال میں لائیں تو ٹکون PQR کا رقبہ  $\frac{1}{2}r^2 \sin \theta$  بنے گا۔ لہذا نیم تارک حصے کا رقبہ یوں ہو گا

$$\frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}r^2 \sin \theta = \frac{1}{2} \times 6^2 \times 1.459... - \frac{1}{2} \times 6^2 \times \sin 1.459... = 8.381$$

اس موقع پر  $\theta$  کی جو بھی قیمت آئے اس اپنے عداد میں محفوظ کر لینا آپ کے لیے مفید ثابت ہو گا تاکہ بعد کے حساب کتاب میں اسے استعمال کر سکیں۔

مثال 18.2.1 میں  $\sin \theta \sin \frac{1}{2}\theta = \frac{4}{6} = 0.666...$  اور  $\sin 1.459...$  استعمال ہوئے ہیں تاہم یہ نشانہ ہی نہیں کی گئی کہ یہ زاویے ریڈیئن میں تھے۔ روایتی طور پر ایسے حالات میں آپ ریڈیئن اکائی مانتے ہیں مثلاً اگر  $\sin 12$  درج ہو تو آپ اسے 12 ریڈیئن کا sine سمجھیں گے۔ اگر یہ 120 کا Sine ہوتا تو اسے  $\sin 120$  لکھا جاتا۔

مثال 18.2.2 ایک مستقیم خط دائرے کے مرکز پر  $\theta$  زاویہ بناتا ہے۔ اور اس طرح دائرہ کا ایک حصہ قطع کرتا ہے۔ اس حصے کا رقبہ دائرے کے کل رقبے کا  $\frac{1}{3}$  ہے۔

$$\theta - \sin \theta = \frac{2}{3}\pi \quad (i) \text{ اخذ کریں کہ}$$

(ب) ثابت کریں کہ  $\theta = 2.61$  دو اعشاری نقطوں تک درست ہے۔

(i) رد اس کو r مان لیں۔

اگر ہم مثال 18.2.1 میں استعمال کردی طریقہ سے فائدہ اٹھائیں تو اس حصے کا رقبہ درج ذیل ہو گا

$$1/2r^2\theta - 1/2r^2 \sin \theta$$

یہ دائرے کے کل رقبے کا  $1/3$  تب قرار پائے گا جب

$$1/2r^2\theta - 1/2r^2 \sin \theta = 1/3\pi r^2$$

اس مساوات کو 2 سے ضرب دیں اور  $r^2$  سے تقسیم کر دیں تو آپ کو درج ذیل نتیجہ حاصل ہو گا

$$\theta - \sin \theta = 2/3\pi$$

(ب) اگر ہم مساوات  $f(\theta) = \theta \sin \theta$  میں  $\theta$  کی قیمت 2.61 لگائیں تو  $f(2.61) = 2.103$  بنے گا جو 2.094 کے بہت قریب ہے۔

اس سے ہمیں یہ اندازہ ہوتا ہے کہ  $\theta$  کی قیمت 2.61 کے بہت قریب ہے۔ لیکن یہ دو اعشاری نقطوں تک درست 2.61 بیان کو ثابت کرنے کے لیے ناکافی ہے اس مقصد کے لیے آپ کو یہ ثابت کرنا پڑے گا کہ  $\theta$  کی قیمت 2.605 اور 2.165 کے درمیان ہے۔ شکل 18.5 سے عیاں ہے کہ  $\theta$  کی قیمت 0 اور  $\pi$  کے درمیان ہے اور  $\theta$  کے بڑھنے سے نیم تاریک حصہ بھی بڑھ جاتا ہے۔ چنانچہ آپ کو یہ دکھانا ہے کہ  $\theta = 2.605$  ہونے سے یہ حصہ بہت چھوٹا ہو جاتا ہے جبکہ  $\theta = 2.515$  ہونے سے بہت بڑا ہو جاتا ہے۔

$$f(2.605) = 2.605 - \sin 2.605 = 2.093...$$

اور

$$f(2.615) = 2.615 - \sin 2.615 = 2.112...$$

پہلا جواب  $2/3\pi = 2.094...$  سے چھوٹا ہے جبکہ دوسرا جواب بڑا ہے۔ اس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ مساوات کا جزر 2.605 اور 2.615 کے درمیان ہے۔ لہذا جزر دو اعشاری نقطوں تک درست 2.61 ہے

مشق 18

درج ذیل میں سے ہر زاویے کو ریڈیئن میں تبدیل کریں۔ آپ جواب کو  $\pi$  کے مضرب چھوڑ سکتے ہیں۔

135

45

30

72

18

120

22.5

720

600

270

1

مندرجہ ذیل تمام زاویے ریڈین میں ہیں۔ عداد استعمال کیے بغیر انہیں درجوں میں تبدیل کریں۔

$$(1/3)\pi$$

$$(1/20)\pi$$

$$(1/5)\pi$$

$$(1/8)\pi$$

$$(1/9)\pi$$

$$(2/3)\pi$$

$$(5/8)\pi$$

$$(3/5)\pi$$

$$(1/45)\pi$$

$$(6)\pi$$

$$(-1/2)\pi$$

$$(5/18)\pi$$

عدا استعمال کیے بغیر مندرجہ ذیل کو عین درست قیمتیں لکھیں۔

$$\sin(1/3)\pi$$

$$\cos(1/4)\pi$$

$$\tan(1/6)\pi$$

$$\cos(3/2)\pi$$

$$\sin(7/4)\pi$$

$$\cos(7/6)\pi$$

$$\tan(5/3)\pi$$

$$\sin^2(2/3)\pi$$

زیریں مساواتیں اس شکل کے حوالے ہیں جبکہ R دائرے کا رداس (سم) ہے  
S قوس کی لمبائی (سم) ہے۔  
A ضلع کا رقبہ (سم) ہے

جبکہ  $\theta$  مرکز پر بننے والا زاویہ (ریڈین) میں ہے

$$r = 7 \text{ اور } \theta = 1.2 \text{ ہے۔ S اور A کی قیمتیں معلوم کریں۔}$$

$$r = 3.5 \text{ اور } \theta = 2.1 \text{ ہے۔ S اور A کی قیمتیں معلوم کریں}$$

$$s = 12 \text{ اور } r = 8 \text{ ہے۔ } \theta \text{ اور A کی قیمتیں معلوم کریں}$$

$$s = 14 \text{ اور } \theta = 0.7 \text{ ہے۔ } r \text{ اور A کی قیمتیں معلوم کریں}$$

$$A = 30 \text{ اور } r = 5 \text{ ہے۔ } \theta \text{ اور s کی قیمتیں معلوم کریں}$$

$$A = 64 \text{ اور } s = 16 \text{ ہے۔ } \theta \text{ اور r کی قیمتیں معلوم کریں۔}$$

$$A = 30 \text{ اور } s = 10 \text{ ہے۔ } \theta \text{ کی قیمتیں معلوم کریں۔}$$

$$\theta = (1/3)\pi \text{ اور } r = 5 \text{ ہے۔ قوس کا رقبہ دریافت کریں}$$

$$\theta = (2/5)\pi \text{ اور } r = 3.1$$

$$\theta = (5/6)\pi \text{ اور } r = 28$$

$$s = 9 \text{ اور } r = 6$$

$$s = 4 \text{ اور } r = 9.5$$

ایک دائرے کا رداس 13 سم ہے۔ 10 سم لمبا ایک مستقیم خط، اس دائرے کا جو حصہ قطع کرتا ہے اس کا رقبہ معلوم کریں۔

ایک دائرہ جس کا رداس 25 سم ہے، 4 سم والا ایک مستقیم خط اس کے حصے کو منقطع کرتا ہے۔ اس حصے کا احاطہ دریافت کریں

ایک مستقیم خط دائرے کو اس طرح منقطع کرتا ہے کہ مرکزہ پر زاویہ  $\theta$  بنائے اور منقطع حصے کا رقبہ دائرہ کے کل رقبے کا  $(1/4)$  بناتا ہے

$$(i) \text{ واضح کریں کہ } \theta - \sin \theta = (1/2)\pi$$

(ب) ثابت کریں کہ  $\theta = 2\pi$  جبکہ یہ قیمت دو اعشاری نقطوں تک درست ہو۔

دو دائرے جن کے رداس 5 سم اور 24 سم ہیں جزوی طور پر ایک دوسرے کے کونے ہیں۔ ان کے مراکز باہم 13 سم دور ہیں۔ دونوں میں مشترک رقبہ معلوم کریں۔

اس شکل میں دو ایسے دائرے دکھائے گئے ہیں جو ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ دائروں کے رداس 6 سم اور 4 سم ہیں جبکہ ان کے

مراکز کا درمیانی فاصلہ 7 سم ہے۔ دونوں دائروں میں مشترک نیم تاریک حصے کا احاطہ اور رقبہ معلوم کریں۔

سورج کے کمرے کا 10% حصہ چاند کے کمرے سے ڈھک جائے تو اسے 10% سورج گرہن کہتے ہیں ایک بچہ اس کی دو کڑوں کی مدد سے تصویر کشی کرتا ہے ہر کمرے کا رداس cm r ہے جیسا کہ یہاں دکھایا گیا ہے۔



- 1۔ ان دونوں کڑوں کے مراکز کے درمیانی فاصلے کی پیمائش  $r$  کے حوالے سے کیجیے۔
- 2۔ انہی دو کڑوں کے مراکز کے درمیانی فاصلے کی پیمائش 80٪ سورج گرہن کے مطابق بھی کیجیے۔
- 3۔ 18.3 مثنائی افعال کے تریسے

اگر کسی زاویہ کی ریڈیئن میں ناپا جائے تو  $y = \cos \theta$ ،  $y = \sin \theta$  اور  $y = \tan \theta$  کی اشکال ویسی ہی ہوں گی جیسی کہ  $y = \cos \theta$ ،  $y = \sin \theta$  اور  $y = \tan \theta$  کی ہوں گی صرف یہ فرق ہوگا کہ محور کے ساتھ ان کا پیمانہ مختلف ہوگا۔  
 $\theta$  کو ریڈیئن میں رکھ کر  $y = \cos \theta$ ،  $y = \sin \theta$  اور  $y = \tan \theta$  کے تریسات اشکال 18.6، 18.7 اور 18.8 میں دکھائے گئے ہیں۔

اگر آپ حصہ جات 10.1 اور 10.2 والے تریسات ہر سمت میں ایک جیسی پیمائش کے ساتھ بنائیں تو وہ یہاں دکھائے گئے تریسات کے مقابلے میں بہت زیادہ چوڑے اور چپے ہوں گے۔  
 درحقیقت اگر آپ کو  $y = \cos \theta$ ،  $y = \sin \theta$  اور  $y = \tan \theta$  کے تریسات دریافت کرنے ہوں تو اس کے لئے تقریباً ہمیشہ ریڈیئن ہی استعمال کئے جاتے ہیں ان تریسات میں توازن کی وہی خصوصیات موجود ہوتی ہیں جو کہ  $y = \cos \theta^0$ ،  $y = \sin \theta^0$  اور  $y = \tan \theta^0$  میں ہوتی ہیں۔ دور عا خصوصیات:

$$\cos(\theta \pm 2\pi) = \cos \theta \quad 1.$$

$$\sin(\theta \pm 2\pi) = \sin \theta \quad 2.$$

$$\tan(\theta \pm 2\pi) = \tan \theta \quad 3.$$

طارق/جفت خصوصیات:

$$\tan(\theta \pm 2\pi) = \tan \theta \quad 1.$$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta \quad 2.$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta \quad 3.$$

مستقیم حرکت کی خصوصیات:

$$\cos(\theta - \pi) = -\cos \theta \quad 1.$$

$$\sin(\theta - \pi) = -\sin \theta \quad 2.$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta \quad 3.$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta \quad 4.$$

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta \quad 5.$$

مشق 18 ب 1۔  $y = \cos \theta$  اور  $y = \sin \theta$  کے تریسات استعمال کر کے یہ دکھائے کہ  $\sin(\frac{1}{2}\pi - \theta) = \cos \theta$   
 اس خصوصیت اور اس کے ساتھ اوپر خانے میں دی گئی sine, cosine اور tangent افعال کی توازن کی خصوصیات کو استعمال کر کے مندرجہ ذیل نتائج کو ثابت کیجئے

$$\cos\left(\frac{1}{2}\pi + \theta\right) = -\sin \theta \quad \text{ج}$$

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = -\cos \theta \quad \text{ا}$$

$$\sin\left(-\theta - \frac{1}{2}\pi\right) = -\cos \theta \quad \text{د}$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi + \theta\right) = -\cos \theta \quad \text{ب}$$

اپنی محوروں کو استعمال کرتے ہوئے  $y = \tan \theta$  اور  $y = \frac{1}{\tan \theta}$  کے خاکے بنائیں۔ نیز یہ دکھائیں کہ  $\tan\left(\frac{1}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta}$  کی ایسی کم از کم قیمت تلاش کریں جس کے لیے

$$\cos(\alpha - \theta) = \sin \theta \quad 1.$$

$$\sin(\alpha - \theta) = \cos(\alpha + \theta) \quad 2.$$

$$\tan \theta = \tan(\theta + \alpha) \quad 3.$$

$$\sin(\theta + 2\alpha) = \cos(\alpha - \theta) \quad 4.$$

$$\cos(2\alpha - \theta) = \cos(\theta - \alpha) \quad 5.$$

$$\sin(5\alpha + \theta) = \cos \theta - 3\alpha \quad 6.$$

الٹ ٹکونیاتی تفاعل  
آپ اب تک کئی بار علامات  $\sin^{-1}$ ،  $\cos^{-1}$ ،  $\tan^{-1}$  کو دیکھ چکے ہوں گے۔ اب وقت آگیا ہے کہ آپ کو الٹ ٹکونیاتی تفاعل (تقالات) کی ایک جامع تعریف سے آگاہ کیا جائے۔  
آپ حصہ 18.3 سے دیکھ سکتے ہیں کہ تفاعل  $\sin x$ ،  $\cos x$  اور  $\tan x$  ایک ایک نہیں ہوتے۔ حصہ 11.6 سے یہ نتیجہ نکالا جاسکتا ہے کہ جب تک ان کی تعریف کے دائرہ کار کو محدود نہ کر دیں ان کے الٹ نہیں ہوتے۔ یہاں ہم فرض کر رہیں کہ آپ ریڈیئن اکائی کو استعمال کر رہے ہیں۔  
شکل 18.9 سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ  $\cos^{-1}$  کی تعریف کے لیے cosine تفاعل کے دائرہ کار کو  $0 \leq x \leq \pi$  تک محدود کیا گیا ہے۔ ایک بار پھر دیکھیں کہ  $y = \sin x$  کی ترسیم کا موٹا حصہ  $y = \sin^{-1} x$  میں  $y = \sin^{-1} x$  کا عکس ہے۔ اس کا الٹ بھی درست ہے۔

مشق سوالات 1 سے 5 میں آلہء حساب استعمال نہ کریں

دریافت کریں

$$\cos^{-1} \frac{1}{2} \sqrt{3} \quad 1.$$

$$\tan^{-1} 11 \quad 2.$$

$$\cos^{-1} 0 \quad .3$$

$$\sin^{-1} \frac{1}{2} \sqrt{3} \quad .4$$

$$\tan^{-1} 1 - \sqrt{3} \quad .5$$

$$\sin^{-1} 1 - 1 \quad .6$$

$$\tan^{-1} -1 \quad .7$$

$$\cos^{-1} 1 - 1 \quad .8$$

ریافت کریں

$$\cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad .1$$

$$\sin^{-1} 1 - 0.5 \quad .2$$

$$\cos^{-1} 1 - 0.5 \quad .3$$

$$\tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} \quad .4$$

$$\tan^{-1} 1 - \sqrt{3} \quad .5$$

دریافت کریں

$$\sin(\sin^{-1} 10.5) \quad .1$$

$$\cos(\cos^{-1} (-1)) \quad .2$$

$$\tan(\tan^{-1} \sqrt{3}) \quad .3$$

$$\cos(\cos^{-1} 10) \quad .4$$

دریافت کریں

$$1. \cos^{-1}(\cos \frac{3}{2}\pi)$$

$$2. \sin^{-1}(\sin \frac{13}{6}\pi)$$

$$3. \tan^{-1}(\tan \frac{1}{6}\pi)$$

$$4. \cos^{-1}(\cos 2\pi)$$

دریافت کریں

$$1. \sin(\cos^{-1} \frac{1}{2}\sqrt{3})$$

$$2. \frac{1}{\tan(\tan^{-1} 12)}$$

$$3. \cos(\sin^{-1}(-0.5))$$

$$4. \tan(\cos^{-1} \frac{1}{2}\sqrt{2})$$

کوئی یی تریسی طریقہ استعمال کر کے مساوات  $\cos x = \cos^{-1} x$  کو حل کریں۔ آپ کا جواب 3 اشاری درجوں تک درست ہو۔ یہ کسی سادہ تر مساوات کا واحد جز ہے؟

ریڈیئنس کو استعمال کرتے ہوئے تکنیکی مساواتوں کو حل کرنا بعض اوقات تکنیکی مساواتوں کو حل کرتے ہوئے آپ کسی زاویے کو ریڈیئنس میں تلاش کرنا چاہیں گے۔ اس کے اصول وہی ہوں گے جو آپ نے حصہ 10.5 میں درجوں (درجات) میں کام کرنے کے لیے استعمال کیے تھے۔ تاہم تغاقل  $\cos^{-1}$ ،  $\sin^{-1}$  اور  $\tan^{-1}$  کے معانی وہی ہوں گے جو انہیں حصہ 18.4 میں تفویض کیے گئے تھے۔

مثال

مساوات  $\cos \theta = -0.7$  کو اس طرح حل کریں کہ وقفہ  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  میں تمام جزر دو اشاری نقطوں تک درست آئیں۔

قدم 1

$$\cos^{-1}(-0.7) = 2.346... \text{ یہ وقفہ } 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ میں ایک جزر ہے}$$

قدم 2

$\cos(-\theta) = \cos \theta$  کی تشکل کی خصوصیت کو استعمال کر کہ یہ دکھائیں کہ  $-2.346... \dots$  ایک اور جزر ہے۔ توجہ کریں کہ -

$2.346... \dots$  مطلوبہ وقفے میں نہیں ہے۔

قدم 3

دوری خصوصیت  $\cos(\theta \pm 2\pi) = \cos \theta$  کے استعمال سے واضح کریں  $3.936... + 2\pi = -2.346... \dots$  مطلوبہ وقفے میں ایک جزر ہے۔

وقفہ  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  میں مساوات  $\cos(\theta) = -0.7$  کے جزر 2.35 اور 3.94 ہیں جو کہ دو اشاری نقطوں تک درست ہیں۔

مثال

مساوات  $\sin \theta = (-0.2)$  کو اس طرح حل کریں کہ وقفہ  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  میں دو اشاری نقطوں تک درست ہوں۔

قدم 1

$$\sin^{-1} 0.2 = -0.201$$

مذکورہ بالا وقفے میں ایک جزر ہے۔

قدم 2

اس مساوات کا ایک جزر  $3.342 = \pi - (-0.201 \dots)$  ہے۔ تاہم یہ مطلوبہ وقفے میں نہیں ہے۔

قدم 3

$2\pi$  کو تفریق کرنے سے ہمیں  $2.490$  حاصل ہوتا ہے۔ یہ وقفہ  $\pi \leq \theta \leq -\pi$  میں ایک اور جزر ہے۔

لہذا  $\pi \leq \theta \leq -\pi$  میں  $\sin \theta = (-0.2)$  کے جزر  $-2.94$  اور  $0.20$  ہیں جو دو اشاری نقطوں تک درست ہیں۔

مثال

مساوات  $0.3 = \cos 3\theta - 0.1$  کو اس طرح حل کریں کہ وقفہ  $\pi \leq \theta \leq -\pi$  میں تمام جزر دو اشاری نقطوں تک درست ہوں۔

$0.3 = \cos 3\theta - 0.1$  کو  $\phi$  فرض کر لیں تاکہ مساوات کی شکل  $\cos \phi = 0.3$  ہو جائے۔ چونکہ  $\theta$  وقفہ  $\pi \leq \theta \leq -\pi$  میں آتا ہے

لہذا  $3\theta - 0.1 = \phi$  وقفہ  $3\pi - 0.1 \leq \phi \leq -3\pi - 0.1$  میں آئے گا جو کہ  $9.324 \leq \phi \leq -9.524$  ہے۔

اس مسئلے کا پہلا حصہ یہ ہے کہ  $\cos \phi = 0.3$  کو حل کر کہ  $9.324 \leq \phi \leq -9.524$  حاصل کیا جائے۔

قدم 1

$\cos^{-1} 0.3 = 1.266$  میں یہ وقفہ  $9.324 \leq \phi \leq -9.524$  میں ایک جزر ہے۔

قدم 2

اس حقیقت کے مطابق cosine تعامل جنت ہے اور ایک جزر  $1.266 \dots$  ہے۔

درج ذیل صورت دے سکتے ہیں  $\sin^2 \theta + \sin \theta - 1 = 0$  اب یہ  $\sin \theta$  میں ایک دو درجی الجبرائی مساوات ہے۔ آپ اسے حصہ 4.4

میں درج دو درجی الجبرائی کلیے کو استعمال کر کے حل کر سکتے ہیں۔  $\sin \theta = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2}$  جس سے  $\sin \theta = 0.618$  یا

$\sin \theta = -1.618$  حاصل ہوتا ہے۔ ایک جزر  $0.666 \dots = \sin^{-1} 0.618 \dots$  ہے۔  $\sin \theta = 0.618 \dots$  کے لیے اسی

وقفے میں دوسرا جزر  $2.475 \dots = \pi - 0.666 \dots$  ہے جو  $\sin \theta$  کے متفاصل کے استعمال سے حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ  $\sin \theta$  کی

یہ خصوصیت ہے کہ  $-1 \leq \sin \theta \leq 1$  اس لیے مساوات

$\sin \theta = -1.618$  کا کوئی جزر نہیں ہے۔ لہذا مطلوبہ جزر  $0.67$  اور  $2.48$  ہیں جو کہ دو اعشاری نقطوں تک درست ہیں۔ مشق 18

ریڈیئن میں، دو اعشاری نقطوں تک درست،  $\theta$  کی وہ کم از کم مثبت قیمتیں تلاش کریں جن کے لیے

$$1. \sin \theta = 0.12$$

$$2. \sin \theta = -0.86$$

$$3. \sin \theta = 0.925$$

$$4. \cos \theta = 0.81$$

$$5. \cos \theta = -0.81$$

$$6. \cos \theta = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\tan \theta = 4.1 \quad .7$$

$$\tan \theta = -0.35 \quad .8$$

$$\tan \theta = 0.17 \quad .9$$

$$\sin(\pi + \theta) = 0.3 \quad .10$$

$$\sin(2\pi + \frac{1}{3}) = 0.123 \quad .11$$

$$\sin(\frac{1}{6} - \theta) = 0.5 \quad .12$$

$$\cos(3\theta - \frac{2}{3}\pi) = 0 \quad .13$$

وقفہ  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  میں کی وہ تمام قیمتیں تلاش کریں جو مندرجہ ذیل کو حل کر سکیں۔ آپ کے جوابات جتنا ممکن ہو دو اعشاری نقطوں تک درست ہونے چاہئیں۔

$$4 \sin \theta = 3 \cos \theta \quad \text{ا} \quad \sin \theta = 0.84 \quad \text{ب} \quad \sin \theta = -0.73 \quad \text{ج}$$

$$3 \sin \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{ا} \quad \cos \theta = 0.27 \quad \text{ب} \quad \cos \theta = -0.15 \quad \text{ج}$$

$$3 \sin \theta = \tan \theta \quad \text{ا} \quad 4 \tan \theta + 5 = 0 \quad \text{ب} \quad \tan \theta = 1.9 \quad \text{ج}$$

3. مندرجہ ذیل مساواتوں کے لیے وقفہ  $0 < x \leq 2\pi$  میں تمام حل نکالئے

$$\tan 2x = 0.5 \quad \text{ا} \quad \sin 2x = -0.62 \quad \text{ب} \quad \cos 2x = \frac{1}{4} \quad \text{ج}$$

$$\sin 3x = -0.45 \quad \text{ا} \quad \cos 4x = -\frac{1}{5} \quad \text{ب} \quad \tan 3x = 3 \quad \text{ج}$$

4. وقفہ  $-\pi < t \leq \pi$  میں مندرجہ ذیل تمام مساواتوں کے جزر تلاش کریں۔

$$\tan 5t = 0.7 \quad \text{ا} \quad \sin 3t = -0.32 \quad \text{ب} \quad \cos 3t = \frac{3}{4} \quad \text{ج}$$

$$\sin 2t = -0.42 \quad \text{ا} \quad \cos 2t = 0.264 \quad \text{ب} \quad \tan 2t = -2 \quad \text{ج}$$

5. وقفہ  $-\pi < \theta \leq \pi$  میں مندرجہ ذیل تمام مساواتوں کے جزر، اگر کوئی ہوں، تلاش کریں۔

$$\begin{array}{lll} \tan \frac{2}{3}\theta = 0.5 \text{ ا} & \sin \frac{1}{5}\theta = -\frac{1}{5} \text{ ب} & \cos \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{3} \text{ ج} \\ \sin \frac{2}{5}\theta = -0.4 \text{ د} & \cos \frac{1}{3}\theta = \frac{1}{2} \text{ ه} & \tan \frac{2}{3}\theta = -5 \text{ و} \end{array}$$

6. آئہ حساب، کتاب، استعمال کئے بغیر مندرجہ ذیل تمام مساواتوں کے جزر تلاش کریں اگر کوئی ہوں۔ آپ کے جواب میں وقفہ  $0 < \theta \leq 2\pi$  کے مضربوں میں ہوں۔

$$\begin{array}{lll} \cos(\frac{1}{5} - \frac{5}{18}\pi) = 0 \text{ ا} & \tan(\frac{3}{2}\theta - \frac{1}{6}\pi) = -\sqrt{3} \text{ ب} & \sin(2\theta - \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2} \text{ ج} \\ \tan(3\theta - \pi) = -1 \text{ د} & \cos(2\theta - \frac{5}{18}\pi) = -\frac{1}{2} \text{ ه} & \tan(2\theta - \frac{1}{6}\pi) = 0 \text{ و} \\ \sin(\frac{1}{4}\theta - \frac{1}{9}\pi) = 0 \text{ ز} & \sin(\frac{1}{2}\theta + \frac{5}{18}\pi) = 1 \text{ ح} & \cos(3\theta + \frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ ط} \end{array}$$

7. مندرجہ ذیل مساواتوں کے لیے وقفہ  $-\pi < \theta \leq \pi$  میں جزر تلاش کریں اگر کوئی ہوں۔

$$\begin{array}{lll} 2 \sin \theta = \tan \theta \text{ ا} & \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta \text{ ب} & \tan \theta = 2 \cos \theta \text{ ج} \\ \tan^2 \theta = 2 \cos^2 \theta \text{ د} & \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 \text{ ه} & \sin^2 \theta = 2 \cos \theta \text{ و} \end{array}$$

متفرق مشق 18

1. اس خاکے میں آپ کو ایک دائرے کا ایک حلقہ دکھایا گیا ہے جس کا مرکز  $O$  اور رداس 6cm ہے۔ زاویہ  $POQ$  کی قیمت 0.6 ریڈیئن ہے۔  
قوس  $PQ$  کی لمبائی اور احاطہ  $POQ$  کا رقبہ معلوم کریں۔
2. ایک دائرہ جس کا رداس  $a$  اور مرکز  $O$  ہے۔ اس دائرے کے ایک خطے  $OAB$  میں  $\angle AOB$  کی قیمت  $\theta$  ریڈیئن ہے۔ احاطہ  $AOB$  کا رقبہ قوس  $AB$  کی لمبائی کے مرتب کا دوگنا ہے۔  $\theta$  کی قیمت تلاش کریں۔
3. اس شکل میں ایک دائرے، جس کا مرکز  $O$  اور رداس  $r$  ہے، کا ایک حلقہ دکھایا گیا ہے۔ قوس کی لمبائی حلقے کے احاطے کا نصف ہے۔  $r$  کو اکائی مان کر اس حلقے کا رقبہ معلوم کریں۔
4. اس شکل میں آپ کو دو دائرے دکھائے گئے ہیں جن کے مراکز  $A$  اور  $B$  ہیں۔ یہ دائرے ایک دوسرے کو نقاط  $C$  اور  $D$  پر اس طرح قطع کرتے ہیں کہ ان میں سے ہر ایک کا مرکز دوسرے کے محیط پر آتا ہے۔ ہر دائرے کا رداس ایک اکائی ہے۔ زاویہ  $CAD$  کی قیمت معلوم کریں۔

اس شکل میں ایک نیم تاریک علاقہ ہے جس کی حدود قوس  $CBD$  اور عمودی خط  $CD$  ہیں۔ اس علاقے کا رقبہ دریافت کریں۔ نیز واضح کریں کہ ان دونوں دائروں کے اندر واقع مشترکہ علاقے کا رقبہ ہر دائرے کے رقبے کا  $\frac{1}{3}$  و بیش 39 فیصد ہے۔

5۔ اس خاکے میں آپ کو ایک دائرے کی قوس  $ABC$  دکھائی گئی ہے۔ دائرے کا مرکز  $O$  اور رداس 5cm سم ہے۔ خطوط  $AD$  اور  $CD$  بالترتیب نقاط  $A$  اور  $C$  پر اس دائرے کے tangents ہیں۔ زاویہ  $AOC$  کی قیمت  $\frac{2}{3}\pi$  ریڈیئن ہے۔

خطوط  $AD$ ،  $DC$  اور قوس  $ABC$  کے اندر محدود علاقے کا رقبہ معلوم کریں۔ آپ کا جواب دو نمایاں ہندسوں تک درست ہونا چاہیئے۔

6. وقفہ  $-\pi < x \leq \pi$  میں  $x$  کی وہ تمام قیمتیں دریافت کریں جو درج ذیل مساواتوں کے تسلی بخش جواب ہوں۔ آپ کے جواب یاد دو اعشاری نقطوں تک درست ہوں یا پھر  $\pi$  کے مکمل مضربوں میں ہوں۔

$$1. \sin x = -0.16$$

$$2. \cos x(1 + \sin x) = 0$$

$$3. (1 - \tan x) \sin x = 0$$

$$4. \sin 2x = 0.23$$

$$5. \cos\left(\frac{3}{4}\pi - x\right) = 0.832$$

$$6. \tan(3x - 17) = 3$$

7. ایک تار میں برقی رو، c amperes کو مندرجہ ذیل مساواتوں کے ذریعے واضح کیا جا سکتا ہے۔  
 $c = 5 \sin(100\pi t + \frac{1}{6}\pi)$  جہاں  $t$  سیکنڈوں میں وقت کا اظہار کرتا ہے۔  
 ارتعاش کا عرصہ دریافت کریں۔ ہر ایک سیکنڈ میں ارتعاشات کی تعداد معلوم کریں۔

کی وہ پہلی تین مثبت قیمتیں تلاش کریں جن کے لئے  $c$  کی قیمت 2 ہو۔ آپ کے جوابات 3 اعشاری نظروں تک درست ہونے چاہئیں۔

ایک ذرہ جو ارتعاش میں ہے، کا ہٹاؤ  $y$  میٹر ہے جہاں  $y$  کی وضاحت  $y = a \sin(kt + \alpha)$  سے ہوتی ہے جبکہ  $\alpha$  کی پیمائش میڑوں میں ہے اور  $t$  کی پیمائش سیکنڈوں میں ہوتی ہے پر  $h$  اور  $\alpha$  مستقل ہیں۔ ایک ارتعاش کی قیمت  $T$  سیکنڈ ہے۔ مندرجہ ذیل جوابات تلاش کریں۔  
 $h$  کی قیمت  $T$  کی اکائیوں ہیں۔

$h$  کو اکائی مان کر ایک سیکنڈ میں مکمل ہونے والے ارتعاشات کی قیمت

اس شکل میں آپ کو ایک دائرہ دکھایا گیا ہے جس کا مرکز  $O$  رداس  $r$  ہے۔ نیز ایک خط مستقیم  $AB$  جو مرکز  $O$  پر ایک دائرہ  $\theta$  بنایا ہے جس کی پیمائش ریڈیئن میں ہے۔ خط مستقیم دائرہ کے ایک نیم تاریک حصے کی حد بندی کر رہا ہے۔

اس نیم تاریک حصے کا رقبہ  $r$  اور  $\theta$  کی اکائیوں میں معلوم کریں۔

یہ متعین ہے کہ اس حصے کا رقبہ ٹکون  $AOB$  کے رقبے کا ایک تہائی ہے۔ اس کی روشنی میں واضح کریں کہ

$$3\theta - 4 \sin \theta = 0$$

$\theta$  کی وہ مثبت قیمت تلاش کریں جو  $0.1$  ریڈیئن کے اندر  $3\theta - 4 \sin \theta = 0$  کو درست ثابت کریں۔ اس مقصد کے لئے  $3\theta -$



$4 \sin \theta = 0$  کی قیمتوں کا جدول بنائیں۔ اس دوران میں علامت کی تبدیلی یا عدم تبدیلی پر توجہ دیں۔  
 اس شکل میں آپ کو دو دائرے دکھائے گئے ہیں جن کے مرکز A اور B ہیں اور یہ دائرے نقطہ C پر ایک دوسرے کو چھوتے ہیں۔ ہر دائرے کا رداس r ہے۔ دونوں دائروں پر ایک نقطہ D یا E اس طرح سے واقع ہے کہ خط DE خط ACB کے متوازی ہے۔  
 زاویوں DAC اور EBC میں سے ہر ایک زاویے کی قیمت  $\theta$  ریڈین ہے۔ جبکہ  $0 < \theta < \pi$  متعین ہے۔  
 خط DE کی لمبائی r اور  $\theta$  کی اکائیوں میں واضح کریں۔ خط DE کی لمبائی دو قوسوں میں سے کسی کی بھی لمبائی کے برابر ہے۔  
 ثابت کریں کہ  $\theta - 2 \cos \theta - 2 = 0$   
 $0 < \theta < 1/2\pi$  کے لئے  $y = \cos \theta$  کا ترسیم کھینچیں۔ اپنے ترسیم پر ایک موزوں سیدھا خط کھینچ کر، جس کی مساوات بیان کرنا لازمی ہے۔ یہ واضح کریں کہ مساوات  $\theta + 2 \cos \theta - 2 = 0$  کا وقفہ  $0 < \theta < 1/2\pi$  میں صرف ایک جزو ہے۔  
 حساب کرتے تصدیق کریں کہ  $\theta$  کی قیمت 1.10 اور 1.11 کے درمیان ہے۔  
 اس شکل میں ایک دائرے کی قوس ABC دکھائی گئی ہے جبکہ دائرے کا مرکز O اور رداس r ہے اور AC خط مستقیم ہے۔ زاویہ AOC کی قیمت  $\theta$  ریڈین ہے۔  
 جبکہ قوس ABC کی لمبائی S ہے۔  
 $\theta$  کی وضاحت r اور S کی اکائیوں میں کریں۔ پر یہ اخذ کر کے دکھائیں کہ مثلث AOC کے رقبے کا اظہار مندرجہ ذیل انداز میں کیا جاسکتا ہے۔

$$\frac{1}{2} r^2 \sin \left( 2\pi - \frac{s}{r} \right)$$

کوئی تریسٹی استدلال استعمال کرتے ہوئے جس کی بنیاد  $y = \sin x$  کے خاکے پر یا کسی اور طریقہ سے یہ دکھائیں کہ  $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$  جہاں  $\alpha$  تینوں زاویوں میں سے کسی بھی زاویے کی قیمت ریڈین میں ہے۔ اس تعین کی روشنی میں کہ تکون AOC کا رقبہ بڑے حلقے OABC کے رقبے کا پانچواں حصہ ہے۔ یہ نتیجہ نکال کر دکھائیں کہ

$$\frac{s}{r} + 5 \sin \left( \frac{s}{r} \right) = 0$$

کوئی تریسٹی طریقہ استعمال کر کے یا کسی اور طریقہ سے ان مماثلات کا تعین کیجئے۔

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x \equiv \frac{1}{2}$$

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} \left( \frac{1}{x} \right) \equiv \frac{1}{2} \pi \text{ or } -\frac{1}{2} \pi$$

اس شکل میں آپ کو ایک دائرے ایک غوس دکھائی گئی ہے۔ اس دائرے کا مرکز O ہے اور رداس r ہے۔ جبکہ قوس کا خط مستقیم AB ہے۔ خط AB دائرے کے مرکز O پر  $\theta$  ریڈین کا زاویہ بناتا ہے اس شکل میں آپ کو آپک مربع ABCD بھی دکھایا گیا ہے یہ متعین ہے کہ نیم تاریک حصے کا رقبہ مربع کے رقبے کا عین آٹھواں حصہ ہے۔ یہ ثابت کریں کہ

$$2\theta - 2 \sin \theta + \cos \theta - 1 = 0$$

یا پھر اس میں یہ دکھائیں کہ  $\theta$  کی قیمت 1 اور 2 کے درمیان ہے  
 جدولیاتی طریقہ کے استعمال سے  $\theta$  کی قیمت دریافت کریں جو ایک اعشاری نقطہ تک درست ہو۔

مندرجہ ذیل تفاعلات کے دائرہ ہائے کار اور سمیتیں بیان کریں  
مساوات

$$2 \sin^{-1} x - 4$$

$$2 \sin^{-1} (x - 4)$$

کو حل کر رہے ہیں جبکہ وقفہ  $0 \leq \theta \leq x$  میں تمام جزر کی قیمتیں تلاش کریں جو دو اعشاری نقطوں تک درست ہوں۔  
وقفہ  $2\pi \leq 0 \leq 2\pi$  میں کسی بھی جزر کی قیمت  $\pi$  کی اکائی میں دیے ہوئے۔ درج ذیل مساواتوں کو حل کریں

$$2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 2$$

نظر ثانی مشق 3

(1)  $y = 4 - x$  اور  $y = x^2 + 2x$  کی ترسیات اور ان کے نقاط انقطاع پر ان کے محدودات کا حساب لگائیں۔ دونوں ترسیات کے درمیان واقع ممتدائی خطے کا رقبہ دریافت کریں۔

(2)  $y = x^3 - 3x + 3$  کے ترسیم پر ساکن نقاط کے محدودات کا حساب لگائیں۔

ب) اس نقطے کے محدودات کا حساب لگائیں جس کے لیے  $\frac{d^2y}{dx^2}$

ج) منفی پر واقع اس نقطے پر جس کی قیمت  $x = 2$ ، منفی اور اس کے عمودی خط کی مساوات دریافت کریں۔

د) قوس محور  $x$  اور خطوط  $x = 0$  اور  $x = 2$  کی حدود میں واقع رقبہ تلاش کریں۔

(3) عدد استعمال کیے بغیر  $y = x^4 - x^5$  کا خاکہ بنائے اور ان مقامات کی نشاندہی کریں جن کے لئے  $\frac{d^2y}{dx^2}$  مثبت ہے نیز جن کے لیے منفی ہے۔

(4) ایک صحیح عدد ہے۔  $y = x^n$  اور  $y = x^{\frac{1}{n}}$  کے ترسیات بنائیں اور اس خطے کا رقبہ معلوم کریں جو ان کے اندر محدود ہے۔

(5) ایک منفی ایک ایسی مساوات کی حامل ہے جو  $\frac{d^2y}{dx^2} = 5$  کے تقاضے پورے کرتی ہے۔ یہ منفی نقطہ  $(0, 4)$  سے گزرتی ہے۔ اس نقطے پر اس tangent کی تدریج 3 ہے۔  $x$  کو اکائی بنا کر  $y$  کی قیمت تلاش کریں۔

(6) ایک منفی  $y = kx^2$  جہاں  $k$  ایک مستقل ہے، کا  $y = 1$

اور  $y = 3$  کا درمیانی حصہ  $y$  محور کے گرد 360 گھمایا جاتا ہے۔ اس یقین کے ساتھ کہ پیدا شدہ حجم  $12\pi$  ہے  $k$  کی قیمت دریافت کریں۔

$\int_1^3 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) dx$  کی قیمت دریافت کریں اپنے نتیجے کی طور پر تشریح کریں۔ ایک خطے  $R$  کی حد بندی درج ذیل سے ہوتی ہے

(i) محور (ii) خط  $x = 16$  اور ایک منفی  $y = 6 - \sqrt{x}$  جہاں  $0 \leq x \leq 36$

اس جسم طواف کا حجم معلوم کریں جو اس وقت پیدا ہوتا ہے جب  $R$  کو  $x$  محور کے گرد ایک چکر دے جاتا ہے۔

9- رقبہ اول میں ایک خطے کی اطراف محوروں اور ایک منفی جس کی مساوات  $y = \sqrt{9 - x}$  ہیں۔ اس خطے کا رقبہ تلاش کریں۔

10- بلا ایک منفی  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$  کے  $x = 1$  سے  $x = 4$  تک حصے کی تصویری کشی کریں

- خطے R کا رقبہ دریافت کریں جبکہ اس خطے کی اطراف اس منحنی x محور اور خطوط  $x = 1$  اور  $x = 4$  پر مشتمل ہیں۔  
ایک بھڑکے پروں کے متوازی افقی horizon کے ترچے افقی کی جگہ استعمال کیا گیا ہے کے ساتھ بننے والے زاویے کی م سادہ  $0.4 \sin 600t$  ریڈیئن ہے۔ جبکہ اس سے مراد سینڈ ہیں۔ اس بھڑکے پر ایک سینڈ میں کتنی دفعہ ارتکاش کرتے ہیں؟

طے کریں کہ آیا نقطہ  $(1, 2, -1)$  اس خط پر واقع ہے۔ جو  $(3, 1, 2)$  اور  $(5, 0, 5)$  سے گزرتا ہے۔  
اس شکل میں ایک ایسے دائرے کا حصہ دکھایا گیا ہے جس کا مرکز 0 اور رداس r ہے۔ نقاط A, B, C اس دائرے پر اس طرح واقع ہیں کہ A, B, C دائرے کا قطر ہے جبکہ زاویے کی قیمت  $\theta$  ریڈیئن ہے۔ زاویہ AOC کی قیمت  $\theta$  کی اکائی ہے دریافت کریں اور نکون OAC میں cosine کا قاعدہ استعمال کر کے  $AC^2$  اور r کی اکائیوں میں واضح کریں۔  
نکون ABC کو سمجھ کر AC کی لمبائی r اور  $\theta$  میں تحریر کریں۔ اور یہ نتیجہ اخذ کر کے دکھائیں کہ  $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$   
x کی مثبت قیمتوں کے لیے  $y = \frac{9}{2x+3}$  کا ترسیم بنائے۔  
محن کے اس حصے کو جو  $x=0$  اور  $x=3$  کے درمیان واقع ہے۔ x محور کے گرد  $2\pi$  گردش دی جاتی ہے۔ طواف کا حجم دریافت کریں۔  
x کے حوالے سے مندرجہ ذیل تفاعلات کو ایک دوسرے سے ممیز کریں۔

$$(x^3 + 2x - 1)^3$$

$$\sqrt{\frac{1}{x^2 + 1}}$$

ایک استاد کو اس کی ملازمت کے پہلے سال کی کل تنخواہ 12800 پاؤنڈ ملی اس نے اپنی مستقبل کی تنخواہ کا تخمینہ اس بنیاد پر لگایا کہ اس کی تنخواہ میں 950 پاؤنڈ سالانہ کا مستقل اضافہ ہوگا جسے کہ اس کی تنخواہ 20400 پاؤنڈ سالانہ کی زیادہ سے زیادہ حد کو پہنچ جائے گی۔  
اپنی مدت ملازمت کے پانچویں سال اس کی کمائی کتنی ہوگی۔ کس سال میں واپسلی بار زیادہ سے زیادہ تنخواہ وصول کرے گا۔ حساب لگائیں کہ اپنی مدت ملازمت کے nth سال کے آخر تک وہ کل کتنی رقم وصول کر چکا ہوگا۔ لکھیں کہ کون سی رقم n کی کس قیمت کے مطابق ہے۔  
مذکورہ استاد کی جڑ طواں بہن نے بھی اسی سال اپنے شعبے میں اپنے کام کا آغاز کیا اس کی پہلے سال کی تنخواہ 13500 پاؤنڈ تھی جبکہ اس کی تنخواہ میں مستقلاً 5% کا اضافہ ہونا تھا۔  
کوئی موزوں طریقہ استعمال کر کے طے کریں کہ اپنی ملازمت کے nth سال اس کی تنخواہ کتنی ہوگی۔  
ثابت کریں کہ اپنی ملازمت کے چوتھے سال اس کی آمدن اپنے بھائی سے کم ہوگی۔  
کس سال میں پہنچ کر پہلی بار اس کی آموں اپنے بھائی سے زیادہ ہوگی؟  
ایک جیو میٹرانی عقائد کا پہلا جزو 6 اور مشترک نسبت 0.75 ہے۔ اس عقائد کے پہلے دس اجزاء کا مجموعہ دریافت کریں۔ آپ کا جواب دو اعشاری نقطوں تک درست ہونا چاہی۔

اکائی کے اس جال پر دو سمتیں  $\alpha$  اور  $\beta$  دکھائی گئی ہیں  
 $|\alpha + \beta|$  دریافت کریں  
 $\alpha, \beta$  دریافت کریں  
 $\alpha$  اور  $\beta$  کا درمیانہ زاویہ دریافت کریں۔



## جوابات

