# ریاضیات اول

برائے گیارہویں اور بارہویں جماعت

طلبہ و طالبات

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

# عنوان

# باب 1

# محدد، نقطے اور خط

اس سبق میں ہم محدد کی مدد سے نقطوں اور خط کی دو ابعادی میں تعریف کریں گے۔ یہ سبق پڑھ لینے کے بعد آپ اس قابل ہوں گے کہ ؛

- دو نقطوں کے بیچ کا فاصلہ معلوم کریں۔
- کسی خط کے انتہائی نقطوں کے محدد معلوم ہوں تو اس خط کا درمیانی نقطہ معلوم کر سکیں۔
- کسی خط کے انتہائی نقطوں کے محدد معلوم ہوں تو اس خط کی ڈھلوان معلوم کریں۔
- ایک خط کی ڈھلوان سے اسکی مساوات معلوم کریں۔
- دو نقطوں کو ملانے والی لکیر کی مساوات معلوم کریں۔
- لکیروں میں تفریق کریں مختلف طرح کی مساوات سے۔
- دو لکیریں کے مشترک نقاط معلوم کریں۔
- ڈھلوان سے معلوم کریں کہ لکیریں عمودی ہیں یا متوازی ہیں۔

## 1.1 دو نقطوں کے بیچ کا فاصلہ

جب آپ مبدا چن لیتے ہیں تو صفحے پے افقی سمت میں x محدد بنایئں۔ اور عمودی خط میں y محدد بنائیں، اور اسطرح آپ ایک نظام محدد بنا رہے ہیں۔ اور اس نظام محدد کو کارتیسی نظام محدد کہیں گے، اور یہ نام سترھویں صدی کے ایک فرانسیسی ریاضی دان رین ڈیسکارٹس[1] کے نام پر رکھا گیا شکل 1.1 میں دو نقطے ہیں $A$ اور $B$ ۔ $A$ کے محدد $(4,3)$ ہیں اور $B$ کے $(10,7)$ محدد ہیں۔ خط کا وہ حصہ جو $A$ اور $B$ کے درمیان واقع ہو اسے لکیری قطع کہیں گے۔ لکیری قطع کی لمبائی دو نقتوں کے بیچ کا فاصلہ ہے۔ شکل 1.1 میں ایک نقطہ $C$ بھی شامل کر لیا گیا ہے اور اسطرح ایک قائمہ الزاویہ مثلث وجود میں آتی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $C$ کا محدد-x $B$ جیسا ہے جبکہ $A$ اور $C$ کا محدد-y ایک ہی ہے۔ اور یوں کے $C$ محدد (10,3) ہیں۔ یہ بہت واضع ہے کہ کی AC لمبائی $10-4=6$ ہے اور CB کی لمبائی $7-3=4$ ہے۔ فیثاغورث کے کلیے کو استعمال کرتے ہوئے مثلث ABC سے یہ واضع ہے کہ قطع خط AB کی لمبائی

$$\sqrt{(10-4)^2+(7-3)^2}=\sqrt{6^2+4^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}$$

آپ اعداد کی مدد لے سکتے ہیں اور یوں آپ کے پاس نتیجہ 7.21 آئے گا لیکن بہتر یہی ہے کہ آپ اسے جذر کی صورت میں ہی رہنے دیں۔ محدد جیومیٹری کی تجویز اس لیے پیش کی گئ کہ حساب کتاب کے لیے الجبرا کا استعمال کیا جا سکے، جیسے اگر $A$ اور $B$ کوئ بھی دو نقطے ہوں اور شکل1.1والے نہ ہوں تو بھی ہمارے لیے کافی مدد گار ہوتا ہے کہ صرف محدد دیکھ کہ یہ پتہ چل جائے کہ کس نقطے کی بات ہو رہی ہے۔ اسکا ایک طریقہ یہ ہے کہ علامات استعمال کی جائیں جیسے پہلے نقطے کے محدد $(x_1,y_1)$ اور دوسرے نقطے کے محدد $(x_2,y_2)$ ہوں گے۔جبکہ $x_1$ دراصل پہلے نقطے کا محدد x ہے۔ شکل 2.1 میں ایک عام مثلث بنائ گئ ہے اور آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نقطہ $C$ کے محدد اب $(x_2,y_1)$ ہیں اور یہ کہ اب $AC=x_2-x_1$ اور $CB=y_2-y_1$ ۔ فیثاغورث کے کلیے کے مطابق؛

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

ایک اور فائدہ الجبرا استعمال کرنے کا کہ مثلث کی جیسی بھی شکل ہو اور وہ جس بھی جگہ ہو یہ کلیہ کام کرتا ہے شکل 3.1 میں $A$ کے محدد منفی ہیں اور شکل 4.1 میں لکیر کی ڈھلوان نیچے کی طرف ہے بجائے اوپر کی طرف ہونے کے جیسے جیسے آپ بائیں سے دائیں جانب چلتے ہیں۔ شکل 3.1 اور شکل 4.1 میں اپنے طور پر $AB$ کی لمبائی معلوم کرنے کی کوشش کریں۔ اور پھر آپ کلیہ استعمال کر سکتے ہیں اپنے جواب کی پڑتال کرنے کے لیے۔ شکل 3.1 کے لیے $x_2-x_1=3-(-2)=3+2=5$ اور $y_2-y_1=5-(-1)=5+1=6$

$$AB=\sqrt{(3-(-2))^2+(5-(-1))^2}=\sqrt{5^2+6^2}=\sqrt{25+36}=\sqrt{61}$$

اور شکل 4.1 میں $x_2-x_1=6-1=5$ اور $y_2-y_1=2-5=-3$

$$AB=\sqrt{(6-1)^2+(2-5)^2}=\sqrt{5^2+(-3)^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$$

[1] DescartsRene

ایک اور بات اس سے فرق نہیں پڑتا کہ آپ نقطوں کو کس ترتیب میں رکھتے ہیں، اگر آپ $B$ کو پہلا نقطہ تصور کریں یوں کہ $(x_1, y_1)$ اور $A$ کو دوسرا نقطہ $(x_2, y_2)$ تو کلیے پر اسکا کوئی اثر نہیں ہوگا۔ شکل 1.1 کے لیے یہ

$$BA = \sqrt{(4-10)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$$

دو نقطوں $(x_1, y_1)$ اور $(x_2, y_2)$ کا درمیانی فاصلہ (یا اس قطع لکیر کی لمبائی جو ان دونوں کو جوڑ رہا ہے)؛

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)2}$$

## 2.1 قطع لکیر کا وسط

آپ محدد کی مدد سے بھی ایک قطع لکیر کا درمیانی قطع معلوم کر سکتے ہیں۔ شکل 5.1 میں ایک قطع لکیر دکھایا گیا ہے جیسا کہ شکل 1.1 میں تھا لیکن اب اس میں درمیانی نقطہ $M$ بھی شامل کیا گیا ہے۔ $M$ سے گزرتی ہوئی محدد-y کے مساوی خط $AC$ کو چھوئے گا اور اس نقطے کو ہم نام دیں گے $D$ کا، اور یوں مثلث $ADM$ کے اطراف کی لمبائی $ACB$ کے اطراف کی لمبائی سے آدھی ہیں، اور اسی لیے؛

$$AD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}(10-4) = \frac{1}{2}(6) = 3,$$

$$DM = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}(7-3) = \frac{1}{2}(4) = 2$$

نقطے $M$ اور $D$ کے محدد-x ایک ہی ہیں جو کہ؛

$$4 + AD = 4 + \frac{1}{2}(10-4) = 4+3 = 7$$

نقطے $M$ کا محدد-y جو کہ؛

$$3 + MD = 3 + \frac{1}{2}(7-3) = 3+2 = 5$$

لہذہ درمیانی نقطے $M$ کے محدد (75) ہیں شکل 6.1 میں شکل 2.1 ہی ہے لیکن اب اسمیں دو نقطے $D$ اور $M$ شامل کیے گئے ہیں

$$AD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}(x_2-x_1), \qquad DM = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}(y_2-y_1)$$

لہذہ نقطے $M$ کا محدد-x ہے؛

$$\begin{aligned} x_1 + AD &= x_1 + \frac{1}{2}(x_2-x_1) = x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1 \\ &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2}(x_1+x_2). \end{aligned}$$

اور اسی طرح نقطے $M$ کا محدد-y ہے؛

$$y_1 + DM = y_1 + \frac{1}{2}(y_2 - y_1) = y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_1$$
$$= \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2).$$

دو نقطوں $(x_1, y_1)$ اور $(x_2, y2)$ کو ملانے والے قطع لکیر کے درمیانی حصے کے محدد ہیں ؛

$$\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2),\ \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right)$$

اور اب چونکہ آپ کے پاس وسطی نقطہ $M$ کے محدد کے لیے الجبرائی کلیہ موجود ہے، آپ اسے کسی بھی دو نقطوں کے لیے استعمال کر سکتے ہیں، مثال کے طور پر شکل 3.1 کے لیے $AB$ کا درمیانی نقطہ؛

$$\left(\frac{1}{2}((-2)+3), \frac{1}{2}((-1)+5)\right) = \left(\frac{1}{2}(1), \frac{1}{2}(4)\right) = \left(\frac{1}{2}, 2\right).$$

اور شکل 4.1 کے لیے $\left(\frac{1}{2}(1+6), \frac{1}{2}(5+2)\right) = \left(\frac{1}{2}(7), \frac{1}{2}(7)\right) = \left(3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$ یہاں بھی اس بات سے کوئی مسئلہ نہیں ہوگا کہ آپ کس نقطے کو پہلا نقطہ کہتے ہیں اور کسے دوسرا، شکل5.1 میں اگر آپ (10,7) کو $(x_1, y_1)$ جبکہ (4,3) کو $(x_2, y2)$ تصور کر لیں تو درمیانی نقطہ $= \left(\frac{1}{2}(10+4), \frac{1}{2}(7+3)\right)$ $(7, 5)$ جو کہ پہلے والا جواب ہی ہے۔

## 3.1 قطع خط کا ڈھلاؤ

کسی لکیر کا ڈھلاؤ دراصل بتاتا ہے کہ کوئی لکیر کتنی ترچھی ہے، لکیر جتنی زیادہ ترچھی ہو گی اتنا زیادہ ڈھلاؤ ہوگا۔ فاصلے اور درمیانی نقطے کے برعکس ڈھلاؤ پوری لکیر کی خصوصیت ہے نہ کہ صرف ایک قطع لکیر کی ۔ اگر آپ لکیر کے کوئی سے بھی دو نقطے چنتے ہیں اور آپ محسوس کرتے ہیں کہ محدد-x اور محدد-y کی قیمتیں بڑھ رہی ہیں جیسے جیسے آپ ایک نقطے سے دوسرے کی طرف جاتے ہیں ، جیسا کہ شکل 7.1 میں دکھایا گیا ہے تو کسر کچھ ایسا بنتا ہے،

$$\frac{y \text{ قدم}}{x \text{ قدم}}$$

اور یہ بدلتا نہیں ہے آپ جو بھی نقطے چنیں۔ اور یہی ایک لکیر کا ڈھلاؤ ہے۔ کلیے پر کوئی اثر نہیں پڑتا محدد مثبت ہوں یا منفی ، شکل 3.1 میں مثال کے طور پر AB کا ڈھلاؤ $\frac{6}{5} = \frac{5+1}{3+2} = \frac{5-(-1)}{3-(-2)}$ ہے لیکن اس بات کا خیال رکھیں کہ شکل4.1 میں ڈھلاؤ $-\frac{3}{5} = \frac{-3}{5} = \frac{2-5}{6-1}$، منفی ڈھلاؤ کا مطلب ہے کہ جب آپ بائیں سے دائیں جانب چل رہے ہوں تو ترچھاؤ نیچے کی طرف ہو۔ باقی کلیوں کی طرح یہاں بھی اس بات سے فرق نہیں پڑتا کے کس محدد کو ایک کہیں گے اور کسے دو، شکل 1.1 میں آپ ڈھلاؤ کہہ

سکتے ہیں کہ $\frac{7-3}{10-4} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ یا ہم ایسے بھی کہہ سکتے ہیں $\frac{3-7}{4-10} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$ اگر دو لکیروں کا ڈھلاؤ برابر ہے تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ یہ دونوں لکیریں متوازی یا مساوی ہیں۔

مثال 1.1: ایک لکیر کے انتہائی نقطے $(p-q, p+q)$ اور $(p+q, p-q)$ ہیں اس لکیر کی لمبائی ، ڈھلاؤ اور درمیانی نقطے کے محدد معلوم کریں۔ لمبائی اور ڈھلاؤ معلوم کرنے کے لیے آپکو حساب لگانا ہوگا۔

$$x_2 - x_1 = (p+q) - (p-q) = p+q-p+q = 2q$$
اور
$$y_2 - y_1 = (p-q) - (p+q) = p-q-p-q = -2q$$

لمبائی $\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = \sqrt{(2q)^2 + (-2q)^2} = \sqrt{4q^2 + 4q^2} = \sqrt{8q^2}.$ ہے جبکہ ڈھلاؤ $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-2q}{2q} = -1$ درمیانی نقطے کے لیے

$$x_1 + x_2 = (p-q) + (p+q) = p-q+p+q = 2p$$
اور
$$y_1 - y_2 = (p+q) + (p-q) = p+q+p-q = 2p$$

لہٰذہ درمیانی نقطہ $\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2), \frac{1}{2}(y_1+y_2)\right) = \Big(\frac{1}{2}(2p), \frac{1}{2}(2p) = (p,p).$ ہے۔ کوشش کریں کہ آپ خود سے شکل بنائیں مثال کے نتیجے کو ظاہر کرنے کے لیے۔ □

مثال 2.1: ثابت کریں کے ان نقطوں $A(1,1),\ B(5,3),\ C(3,0)$ اور $D(-1,2)$ سے ایک متوازی الاضلاع شکل بنتی ہے۔ آپ اس مثال کو کوئی طریقوں سے حل کر سکتے ہیں لیکن جو بھی طریقہ چنیں گے اس میں شکل بنانا لازمی ہے ، جو کہ شکل 8.1 میں دکھائی گئی ہے۔ پہلی ترکیب **(لمبائی کا استعمال کرتے ہوئے)**

اس طریقے میں مخالف سمتوں کی لمبائی معلوم کریں ، اگر مخالف سمتوں کی لمبائی برابر ہے تو دیے گئے نقطے ایک متوازی الاضلاع شکل بنائیں گے۔

$$AB = \sqrt{(5-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{20}$$
$$DC = \sqrt{(3-(-1))^2 + (0-(-2))^2} = \sqrt{20}$$
$$CB = \sqrt{(5-3)^2 + (3+0)^2} = \sqrt{13}$$
$$DA = \sqrt{(1-(-1))^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{13}$$

اسی لیے $AB = DC$ اور $CB = DA$ اور ثابت ہو گیا کہ دیے گئے نقطے ایک متوازی الاضلاع شکل بناتے ہیں طریقہ 2 **(درمیانی نقطوں کی مدد سے)** اس طریقے میں , اختران AC اور BD کے درمیانی نقطے معلوم کریں۔ اگر یہ نقطے ایک ہی ہیں تو اسکا مطلب اختران ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں لہٰذہ یہ بند شکل

ایک متوازی الاضلاع شکل ہوگی۔ اختر ن AC کا درمیانی نقطہ $\left(\frac{1}{2}(1+0), \frac{1}{2}(1+3)\right)$ جو کہ $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ ہے، اختر ن BD کا درمیانی نقطہ $\left(\frac{1}{2}(3+(-2)), \frac{1}{2}(5+(-1))\right)$ اور یہ بھی $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ لہذہ ہم کہہ سکتے ہیں کہ دیے گئے نقطے ایک متوازی الاضلاع شکل بناتے ہیں۔ طریقہ 3 **(ڈھلاؤ کی مدد سے)** اس طریقہ کار میں مخالف سمتوں کے ڈھلاؤ معلوم کریں، اگر آمنے سامنے کے دونوں خط متوازی ہوں تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ $ABCD$ ایک متوازی الاضلاع شکل ہوگی۔ خط AB اور DC کے ڈھلاؤ $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3-1}{5-1}$ اور $\frac{0-(-2)}{3-(-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ہیں، لہذہ $AB$ اور $DC$ متوازی لکیریں ہیں، لکیروں $DA$ اور $CB$ دونوں کا ڈھلاؤ برابر $\frac{3}{2}$ ہے، اسی لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $DA$ اور $CB$ متوازی ہیں اور یوں یہ ثابت ہوتا ہے کہ $ABCD$ ایک متوازی الاضلاع شکل ہے۔ □

سوال 1: درج ذیل نقطوں کو جوڑنے والے قطع لکیر کی لمبائی معلوم کریں. جز $(e)$ اور $(h)$ میں فرض کریں کہ $a > 0$ جبکہ جز (i) اور (J) میں $p > q > 0$ ہے۔ اعداد کا استعمال نہ کریں اور جہاں مناسب ہو اپنے جواب کو جذر کی صورت میں لکھیں۔

ا. $(2,5), (7,1)$

ب. $(-3,2), (1,-1)$

ج. $(4,-5), (-1,0)$

د. $(-3,-3), (-7,3)$

ھ. $(2a,a), (10a,-14a)$

و. $(a+1, 2a+3), (a-1, 2a-1)$

ز. $(2,9), (2,-14)$

ح. $(12a,5b), (3a,5b)$

ط. $(p.q), (q,p)$

ي. $(p+4q, p-q), (p-3q, p)$

سوال 2: ثابت کریں کہ نقطے $(1,-2)$, $(-2,-1)$, $(6,-1)$, $(9,3)$, $(4,2)$ ایک متوازی اللاضلاع شکل بناتے ہیں۔

سوال 3: ثابت کریں کہ نقطوں $(-3,-2)$, $(2,-7)$, $(-2,5)$ سے بننے والی مثلث ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔

سوال 4: ثابت کریں کہ نقطے $(7,12)$, $(-3,-12)$, $(14,-5)$ ایک دائرے کا حصہ ہیں جسکا رداس $(2,0)$ ہے۔

سوال 5: درج ذیل نقطوں کو جوڑنے والے قطع لکیر کا وسطی نقطی معلوم کریں۔

ا. $(2,11),\ (6,15)$

ب. $(5,7),\ (-3,9)$

ج. $(-2,-3),\ (1,6)$

د. $(-3,4),\ (-8,5)$

ھ. $(p+2, 3p-1),\ (3p+4, p-5)$

و. $(p+3, q-7),\ (p+5, 3-1)$

ز. $(p+2q.2p+13q),\ (5p-2q, -2p-7q)$

ح. $(a+3, b-5),\ (a+3, b+7)$

سوال 6: نقطے $A(-2,1)$, $(6,5)$ ایک دائرے کے قطر کے دو انتہائی نقطے ہیں۔ قطر کے درمیانی نقطے کے محدد معلوم کریں۔

سوال 7: ایک نقطے $A(3,4)$ اور $B$ کو جوڑنے والے قطع لکیر کا درمیانی نقطہ $M(5,7)$ ہے۔ نقطہ $B$ کے محدد معلوم کریں

سوال 8: نقطے $A(1,-2),\ B(6,-1),\ C(9,3),\ D(4,2)$ ایک متوازی الاضلاع شکل کے کونے ہیں۔ ثابت کریں کے وتر $AC$ اور $BD$ ایک ہی نقطے پر ٹکراتے ہیں۔

سوال 9: درض ذیل محدد $A(5,2),\ B(6,-3),\ C(4,7)$ میں سے ایک باقی دو کا وسطی نقطہ ہے اسے تلاش کریں۔ دو فاصلوں کو معلوم کر کے آپ اپنا جواب ثابت کر سکتے ہیں۔

سوال 10: درج ذیل نقاط کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔

ا. $(3,8),\ (5,12)$

ب. $(1,-3),\ (-2,6)$

ج. $(-4,-3),\ (0,-1)$

د. $(-5,-3),\ (3,-9)$

ھ. $(p+3, p-3),\ (2p+4, -p-5)$

و. $(p+3, q-5),\ (q-5, p+3)$

ز. $(p+q-1, q+p-3),\ (p-q+1, q-p+3)$

ح. $(7,p),\ (11,p)$

سوال 11: لکیروں $AB$ اور $BC$ کا ڈھلاؤ معلوم کریں جبکہ $A(3,4),\ B(7,6),\ C(-3,1)$۔ ان تینوں نقطوں کے بارے میں اپنی رائے کا بھی اظہار کریں۔

سوال 12: نقطہ $P(x,y)$ ایک سیدھی لکیر کا حصہ ہے جس کے انتہائی نقطے $(5,6)$, $A(3,0)$ ہیں۔ لکیر $AP$ اور $PB$ کے ڈھلاؤ کے لیے ریاضیاتی بیانیہ معلوم کریں۔ اور یہ مساوات $y = 3x - 8$ بنا کے دکھائیں۔

سوال 13: ایک لکیر جو کہ مثلث کے ایک کونے کو مخالف طرف کے درمیان سے ملاتی ہے اسے اوسط کہتے ہیں۔ اسی اوسط $AM$ کی لمبائی معلوم کریں جب مثلث کے کونے $A(-1,1)$, $B(0,3)$, $C(4,7)$. ہوں۔

سوال 14: ایک مثلث کے کونے $A(-2,1)$, $B(3,-4)$, $C(5,7)$. ہیں۔

ا. لکیر $AB$ کا وسطی نقطہ $N$ اور لکیر $AC$ کا وسطی نقطہ $N$ معلوم کریں

ب. ثابت کریں کہ $MN$ کے $BC$ متوازی ہے

سوال 15: نقطے $A(2,1)$, $B(2,7)$, $C(-4,-1)$ ایک مثلث بناتے ہیں۔

ا. لکیروں $MN$ اور $BC$ کی لمبائی معلوم کریں ب. ثابت کریں کہ $BC = 2MN$

سوال 16: ایک چوکور شکل ABCD کے کونے $A(1,1)$, $B(7,3)$, $C(9,-7)$, $D(-3,-3)$ ہیں۔ نقطے $P$ ، $Q$ ، $R$ اور $S$ بالترتیب $BC$ ، $AB$ ، $CD$ اور $DA$ کے وسطی نقطے ہیں۔

ا. شکل $PQRS$ کی تمام اطراف کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔ ب. یہ چوکور شکل $PQRS$ دراصل کیسی شکل ہے؟

سوال 17: مبدا $O$ اور نقطے $P(4,1)$, $Q(5,5)$, $R(1,4)$ ایک چوکور شکل بناتے ہیں۔

ا. ثابت کریں کے $OR$ اور $PQ$ متوازی ہیں۔

ب. ثابت کریں کے $OP$ اور $RQ$ متوازی ہیں۔

ج. ثابت کریں کہ $OP = OR$

د. چھارطرفہ $OPQR$ کی اصل شکل کیا ہے؟

سوال 18: مبدا $O$ اور نقطے $L(-2,3)$, $M(4,7)$, $N(6,4)$ مل کے ایک چھارطرفہ بناتے ہیں۔

ا. ثابت کریں $ON = LM$

ب. ثابت کریں کہ $ON$ اور $LM$ متوازی ہیں

ج. ثابت کریں کہ $OM = LN$

د. چہار طرفہ $OLMN$ کس شکل کا ہے؟

سوال 19: ایک چہار طرفہ کے کونے $P(1,2),\ Q(7,0),\ R(6,-4),\ S(-3,-1)$ ہیں

ا. ایک چہار طرفہ کے چاروں طرف کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔

ایک چہار طرفہ $PQRS$ کی شکل کیا ہو گی؟

سوال 20: ایک چہار طرفہ کے کونے $T(3,2),\ U(2,5),\ V(8,7),\ W(6,1)$ ہیں۔ لکیروں $UV$ اور $VW$ کے وسطی نقطے بالترتیب $M$ اور $N$ ہیں۔ ثابت کریں کہ مثلث $TMN$ ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔

سوال 21: ایک چہار طرفہ کے کونے $D(3,-2),\ E(0,-3),\ F(-2,3),\ G(4,1)$ ہیں۔

ا. چہار طرفہ کی تمام اطراف کی لمبائی معلوم کریں

چہار طرفہ $DEFG$ کس طرح کی شکل ہے؟

سوال 22: نقطے $A(2,1),\ B(6,10),\ C(10,1$ ایک مساوی الساقین مثلث ہے اور اس میں $AB$ اور $BC$ کی لمبائی برابر ہے۔ نقطہ $G$ کے محدد $(6,4)$ ہیں

ا. لکیر $AC$ کے وسطی نقطے $M$ کے محدد لکھیں

ب. ثابت کریں کہ $BG = 2GM$ اور یہ کہ $BGM$ ایک سیدھی لکیر ہے۔

ج. لکیر $BC$ کے وسطی نقطے $N$ کے محدد لکھیں۔

د. ثابت کریں کہ $AG = 2GN$ اور یہ کہ $AGN$ ایک سیدھی لکیر ہے۔

## 4.1 ایک سیدھی لکیر یا خط کی مساوات سے کیا مراد ہے؟

اگر آپکو فیصلہ کرنا ہو تو آپ یہ کیسے اندازہ لگائیں گے کہ نقطے $(3,7)$ اور $(1,5)$ خم $y = 3x^2 + 27$ پے موجود ہیں؟ اسکا جواب ہے آپ ان محدد کو مساوات میں ڈالیں اور دیکھیں کہ کیا مساوات درست ثابت ہوتی ہے؟ اگر ہم محدد $(3,7)$ کو مساوات میں ڈالنا چاہیں تو مساوات کی دائیں جانب $3 \times 3^2 + 2 = 29$ جبکہ بائیں جانب 7 ہوگی، لہٰذہ مساوات درست ثابت نہیں ہوتی اور یوں یہ بات ثابت ہوتی ہے کہ نقطہ $(3,7)$ بتائے گۓ خم کا حصہ نہیں ہے۔ اگر محدد $(1,5)$ پر غور کیا جائے تو مساوات کے دونوں اطراف کا جواب 5 آئے گا اور یوں یہ مساوات درست ثابت ہوتی ہے اور یہ بھی ثابت ہوتا ہے کہ نقطہ $(1,5)$ خم کا حصہ ہے۔ ایک سیدھی لکیر یا خم کی مساوات دراصل ایک اصول ہے جو اس بات کا تعین کرتا ہے کہ دیے گۓ محدد بتائ گئ لکیر یا خم کا حصہ ہوں گے یا نہیں۔ لکیر یا خم کی مساوات کو دیکھنے کا یہ نظریہ بہت اہمیت کا حامل ہے۔

## 5.1 لکیر کی مساوات

مثال 3.1: ایک لکیر جسکا ڈھلاؤ 2 ہے اور جو محدد $(2,1)$ سے گزرتی ہے ایسی لکیر کی مساوات تلاش کریں۔ شکل 9.1 میں ایک لکیر دکھائ گئ ہے جسکا ڈھلاؤ 2 ہے اور یہ محدد $A(2,1)$ سے بھی گزر رہی ہے۔ جبکہ ایک اور نقطہ $P(x,y)$ بھی اس لکیر پر موجود ہے۔ نقطہ $P$ اس لکیر پر موجود ہوگا صرف اور صرف اس صورت میں اگر لکیر $AP$ کا ڈھلاؤ 2 ہوگا۔ لکیر $AP$ کا کا ڈھلاؤ $\frac{y-1}{x-2}$ ۔ یہ ترکیب چونکہ 2 کے برابر ہے $\frac{y-1}{x-2} = 2$ جسکا نتیجہ یہ نکلتا ہے کہ $y - 1 = 2x - 4$ اور $y = 2x - 3$۔ عام طور پر لکیر کی مساوات معلوم کرتے ہیں جسکا ڈھلاؤ $m$ ہو اور جو نقطے $A$ سے گزرتی ہو جبکہ $A$ کے محدد $(x_1,y_1)$ ہوں شکل 10.1 میں یہ لکیر اور ایک نقطہ $P$ دکھائے گۓ ہیں جسکے محدد $(x,y)$ ہیں۔ لکیر $AP$ کا ڈھلاؤ $\frac{y-y_1}{x-x_1}$ ہے اور چونکہ ڈھلاؤ $m$ کے برابر ہوتا ہے $\frac{y-y_1}{x-x_1} = m,\ y - y_1 = m(x - x_1)$
□

ایک لکیر جو $(x_1,y_1)$ سے گزرے اور جسکا ڈھلاؤ m ہو اسکی مساوات $y - y_1 = m(x - x_1)$ ہوگی۔ یہ بات ذہن نشین کر لیں کہ نقطہ $A$ کے محدد $(x_1,y_1)$ کی قیمت سے یہ مساوات درست ظابت ہوتی ہے۔

مثال 4.1: ایک لکیر کی مساوات معلوم کریں جسکا ڈھلاؤ -1 ہو جو نقطہ $(-2,3)$ سے گزرتی ہو۔ مساوات $y - y_1 = m(x - x_1)$ کو استعمال کرتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $y - 3 = -1(x - (-2))$, جو کہ $y - 3 = -x - 2$ یا $y = -x + 1$ ہے۔ مساوات کی درستگی کا تعین کرنے کے لیے محدد $(-2,3)$ کو مساوات کے دونوں اطراف استعمال کریں اگر مساوات کے دونوں اطراف کا جواب برابر ہے تو یہ نقطہ دراصل اسی لکیر پر ہوگا جسکی ہم نے مساوات معلوم کی ہے۔ □

مثال 5.1: ایک لکیر کی مساوات معلوم کریں جو کہ دو نقطوں کو جوڑنے سے بنی ہے، نقطوں کے محدد بالترتیب $(3,4)$, اور $(-1,2)$ ہیں۔ مساوات معلوم کرنے کے لیے ، پہلے آپ اس لکیر کا ڈھلاؤ معلوم کریں اور پھر آپ کلیہ $y-y_1=m(x-x_1)$, کا استعمال کر سکتے ہیں۔ لکیر جو کہ نقطہ $(3,4)$, کو $(-1,2)$ سے جوڑتی ہے اسکا ڈھلاؤ ہوگا $\frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}=\frac{2-4}{(-1)-3}$ لہٰذہ نقطہ $(3,4)$, سے گزرنے والی لکیر جسکا ڈھلاؤ $\frac{1}{2}$ ہے اسکی مساوات $y-4=\frac{1}{2}(x-3)$. ہوگی۔ اس مساوات کو سادہ شکل میں دیکھا جائے تو یہ کچھ ایسی دکھے گی۔ $2y-8=x-3$ یا $2y=x+5$۔ اس مساوات کی درستگی کو دیکھنے کے لیے اس میں دیگر فرضی نقطوں کے محدد بھی ڈال کے دیکھیں۔ □

## 6.1 لکیر کی مساوات کی پہچان

مثالوں 1.5.1 سے 3.5.1 تک سب کے جوابات مساوات $y=mx+c$, کی صورت میں لکھے جا سکتے ہیں جبکہ $m$ اور $c$ اعداد ہیں۔ ایسی کسی بھی مساوات کو سیدھی لکیر کی مساوات ثابت کرنا نہایت ہی آسان ہے۔ اگر $y=mx+c$, تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ $y-c=m(x+0)$ اور

$$\frac{y-c}{x-0} \quad (x\neq 0)$$

یہ مساوات ہمیں بتاتی ہے کہ تمام نقطوں کے لیے کہ جنکے محدد $(x,y)$ ہوں گے، وہ لکیر جو نقطہ $(0,c)$ کو جوڑے گی $(x,y)$ سے، اسکا ڈھلاؤ $m$ ہوگا۔ لب لباب یہ کہ $(x,y)$ اس لکیر کا حصہ ہوگا جسکا ڈھلاؤ $m$ ہوگا اور جو نقطہ $(0,c)$ سے گزرتی ہوگی۔ نقطہ $(0,c)$ محور-y پر موجود ہے۔ اس ہندسے $c$ کو قطع وائے کہیں گے۔ قطع ایکس معلوم کرنے کے لیے مساوات میں $y=0$ یہ ڈالیں، اور یوں آپکو ملے گا $x=-\frac{c}{m}$، لیکن یہ بات ذہن نشین کر لیں کہ آپ یہ تقسیم نہیں کر سکتے اگر $m=0$ ہو۔ ایسی صورت حال میں یہ لکیر محور-x کے متوازی ہو جاتی ہے اور اسکا کوئی قطع ایکس نہیں ہوتا۔ جب ایسی صورت حال ہو کہ ڈھلاؤ کی قیمت صفر ہو جائے تو ایسی لکیر پر موجود تمام نقاط کے محدد $(c,$ کچھ بھی$)$ کچھ ایسے ہوں گے۔ لہٰذہ نقاط $\cdots,(5,2),(-1,2),(1,2)$ سب ایک ہی سیدھی لکیر پر موجود ہیں جو کہ $(y=2)$ ہے اور (شکل 11.1) میں دکھائی بھی گئی ہے۔ ایک خاص صورت اسمیں یہ بھی ہے کہ محور-x کی مساوات $y=0$ ہے۔ ایسے ہی ایک سیدھی لکیر جو کہ محور-y کے متوازی ہے ، اسکی مساوات $x=k$ ایسی ہوگی۔ اس لکیر پر موجود تمام نقاط کے محدد $k$ کچھ ایسے ہوں گے۔ لہٰذہ یہ تمام نقاط $\cdots,(3,4),(3,2),(3,0)$ ایک لکیر پر موجود ہیں اور وہ لکیر $x=3$ ہے اور (شکل 12.1) میں یہی لکیر دکھائی گئی ہے۔ یہاں y محور کی اپنی مساوات $x=0$ ہے۔ لکیر $x=k$ کا کائی ڈھلاؤ نہیں ہے، دراصل اسکا ڈھلاؤ متعین نہیں کیا جا سکتا۔ اور اسکی مساوات $y=mx+c$ ایسے نہیں لکھی جا سکتی۔

## 7.1 مساوات $ax + by + c = 0$

فرض کریں کہ آپکے پاس ایک مساوات ہے $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$. یہ آسان ہے کہ اس مساوات کو 3 سے ضرب دیں اور یوں مساوات $3y = 2x + 4$ سادہ ہو جائے گی۔ اور اسکی ترتیب تھوڑی بدلیں تو مساوات کچھ ایسا روپ دھار لے گی، $2x - 3y + 4 = 0$۔ مساوات عام طور پر $ax + by + c = 0$ ایسی ہوتی ہے جسمیں a ، b اور c مستقل ہیں۔ اس بات کا خیال رکھیں کہ مساوات $y = mx + c$ اور $ax + by + c = 0$ دونوں میں عدد $c$ موجود ہے لیکن اس کا مطلب دونوں مساوات میں مختلف ہے۔ مساوات $y = mx + c$ میں $c$ قطع وائے ہے لیکن مساوات $ax + by + c = 0$ میں ایسا کوئی معاملہ نہیں ہے۔ مساوات $ax + by + c = 0$ کا ڈھلاؤ معلوم کرنے کا ایک طریقہ یہ بھی ہے کہ مساوات کو $y = \cdots$ کی شکل میں لکھا جائے ، آگے چل کے ہم اسکی کچھ مثالیں حل کریں گے۔

مثال 6.1: مساوات $2x + 3y - 4 = 0$ کا ڈھلاؤ معلوم کریں، مساوات کو اس $y = \cdots$ شکل میں لکھیں اور پھر اس اصول کو استعمال کریں کہ مساوات $(y = mx + c)$ میں $m$ ڈھلاؤ کو ظاہر کرتا ہے۔ مساوات $2x + 3y - 4 - 0$ میں آپ دیکھیں گے کہ $3y = -2x + 4$ اور $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$. لہٰذہ اس مساوات کا اگر اس مساوات $y = mx + c,$ سے تقابل کیا جائے تو ہم اس نتیجے پر پہنچیں گے کہ ڈھلاؤ $-\frac{2}{3}$ ہے □

مثال 7.1: متوازی الاضلاع کی ایک طرف ایک سیدھی لکیر $3x - 4y - 7 = 0$ کے ساتھ موجود ہے ، نقطہ $(2, 3)$ متوازی الاضلاع کا ایک کونہ ہے، دوسری طرف کی مساوات معلوم کریں۔ لکیر $3x - 4y - 7 = 0$ اور $y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4},$ ایک ہی ہیں لہٰذہ ہم کہہ سکتے ہیں کہ ڈھلاؤ $\frac{3}{4}$ ہے۔ لکیر جو کہ نقطہ $(2, 3)$ سے گزر رہی ہے اور جسکا ڈھلاؤ $\frac{3}{4}$ ہے ، اسکی مساوات $y - 3 = \frac{3}{4}(x - 2),$ یا $3x - 4y + 6 = 0$ ہے □

## 8.1 دو لکیروں کا مشترک نقطہ

فرض کریں کہ آپکے سامنے دو لکیریں ہیں جنکی مساوات $2x - y = 4$ اور $3x + 2y = -1$ ہیں، آپ ان دونوں لکیروں کے مشترک نقطے کے محدد کیسے معلوم کریں گے؟ دراصل آپ کو ایک نقطہ $(x, y)$ کی تلاش ہے جو کہ دونوں لکیروں پر موجود ہو، لہٰذہ اس نقطے کے محدد ایسے ہونے چاہئیں کہ دونوں مساوات درست ثابت ہوں، اسی لیے آپکو ان دونوں مساوات کو ایک ساتھ حل کرنا ہوگا۔ ان دو مساوات سے ، اپ معلوم کر سکیں گے کہ $x = 1$ اور $y = -2,$ ، لہٰذہ مشترک نقطہ $(1, -2)$ ہے۔ یہ طریقہ ہر سیدھی لکیر پر لاگو ہو سکتا ہے بشرطیکہ یہ متوازی نہ ہوں، مشترک نقطہ معلوم کرنے کے لیے لکیروں کی مساوات حل کریں، یہ طریقہ خموں میں مشترک نقطے معلوم کرنے کے لیے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔ سوال 1: دیکھیں کہ کیا دیے گئے نقطے ، بتائی گئی مساوات کی لکیر پر موجود ہیں یا نہیں؟

ا. $(1,2),\ y=5x-3$

ب. $(3,-2),\ y=3x-7$

ج. $(3,-4),\ x^2+y^2=25$

د. $(2,2),\ 3x^2+y^2=40$

ه. $\left(1,1\frac{1}{2}\right),\ y=\frac{x+2}{3x-1}$

و. $\Big(5p,\frac{5}{p},\ y=\frac{5}{x}$

ز. $\left(p,(p-a)^2+1\right),\ y=x^2-2x+2$

ح. $\left(t^2,2t\right),\ y^2=4x$

سوال 2: بتائے گئے نقطوں سے بنی اور درج ذیل ڈھلاؤ والی سیدھی لکیر کی مساوات معلوم کریں۔ آپکے جواب کسر کی صورت میں نہیں ہونا چاہیئے۔

ا. $(2,3),5$

ب. $(1,2),-3$

ج. $(0,4),\frac{1}{2}$

د. $(-2,1),-\frac{3}{8}$

ه. $(0,0),-3$

و. $(3,8),0$

ز. $(-5,-1),-\frac{3}{4}$

ح. $(-3,0),\frac{1}{2}$

ط. $(-3,-1),\frac{3}{8}$

ي. $(3,4),-\frac{1}{2}$

يا. $(2,-1),-2$

يب. $(-2,-5),3$

يج. $(0,-4),7$

يد. $(0,2),-1$

يه. $(3,-2),-\frac{5}{8}$

يو. $(3,0),-\frac{3}{5}$

يز. $(d,0),7$

يح. $(0,4),m$

يط. $(0,c),3$

ك. $(c,0),$

سوال 3: درج ذیل نقاط کو جوڑ کر بننے والی لکیروں کی مساوات معلوم کریں۔ آپکے جواب میں کسر موجود نا ہوں اور آپکا جواب $y=mx+c$ یا $ax+by+c=0$ کی صورت میں ہونا چاہیئے۔

ا. $(1,4),(3,10)$

ب. $(4,5),(-2,-7)$

ج. $(3,2),(0,4)$

د. $(3,7),(3,12)$

ه. $(10,-3),(-5,-12)$

و. $(3,-1),(3,-4,20)$

ز. $(2,-3),(11,-3)$

ح. $(2,0),(5,-1)$

ط. $(-4,2),(-1,-3)$

ي. $(-2,-1),(5,-3)$

يا. $(-3,4),(-3,9)$

يب. $(-1,0),(0,-1)$

يج. $(2,7),(3,10)$

يد. $(-5,4),(-2,-1)$

يه. $(0,0),(5,-3)$

يو. $(0,0),(p,q)$

يز. $(p,q),(p+3,q-1)$

يح. $(p,-q),(p,q)$

يط. $(p,q),(p+2,q+2)$

ك. $(p,0),(0,q)$

سوال 4: درج ذیل لکیروں کا ڈھلاؤ معلوم کریں؛

ا. $2x + y = 7$    د. $y = 5$    ز. $x + y = -3$    ی. $3(y - 4) = 7x$

ب. $3x - 4y = 8$    ھ. $3x - 2y = -4$    ح. $y = 3(x + 4)$    یا. $y = m(x - d)$

ج. $5x + 2y = -3$    و. $5x = 7$    ط. $7 - x = 2y$    یب. $px + qy = pq$

سوال 5: ایک لکیر، جو کہ نقطہ $(-2, 1)$ سے گزرتی ہے اور $y = \frac{1}{2}x - 3$ کے متوازی ہے، کی مساوات معلوم کریں۔

سوال 6: ایک لکیر کی مساوات معلوم کریں جو کہ $(4, -3)$ سے گزرتی ہے اور ایک دوسری لکیر $y + 2x = 7$ کے مساوی ہے۔

سوال 7: ایک لکیر جب کہ نقطہ $(1, 2)$ سے گزر رہی ہے ، یہ لکیر ایک دوسری لکیر کے متوازی ہے جو کہ نقاط $(3, -1)$اور $(-5, 2)$ سے مل کر بنی ہے۔

سوال 8: ایک لکیر کی مساوات معلوم کریں جب کہ نقطہ $(3, 9)$ سے گزر رہی ہے اور مساوی ہے ایک لکیر کے جو نقاط $(-3, 2)$ اور $(2, -3)$ سے مل کر بنی ہے۔

سوال 9: لکیر کی مساوات معلوم کریں جو کہ $(1, 7)$ سے گزرتی ہے اور x-محور کے متوازی ہے

سوال 10: ایک لکر کی مساوات معلوم کریں جو کہ $(d, 0)$ سے گزرتی ہے اور ایک دوسری لکیر $y = mx + c$ کے متوازی ہے۔

سوال 11: درج ذیل سیدھی لکیروں کی مساوات معلوم کریں۔

ا. $3x + 4y = 33,\ 2y = x - 2$    ز. $2x + 3y = 7,\ 6x + 9y = 11$

ب. $y = 3x + 1,\ y = 4x - 1$    ح. $3x + y = 5,\ x + 3y = -1$

ج. $2y = 7x,\ 3x - 2y = 1$    ط. $y = 2x + 3,\ 4x - 2y = -6$

د. $y = 3x + 8,\ y = -2x - 7$    ی. $ax + by = c,\ y = 2ax$

ھ. $x + 5y = 22,\ 3x + 2y = 14$    یا. $y = mx + c,\ y = -mx + d$

و. $2x + 7y = 47,\ 5x + 4y = 50$    یب. $ax - by = 1,\ y = x$

سوال 12: فرض کریں کہ $p$ جسکے محدد $(p,q)$ ہیں اور یہ خط $(y = mx + c)$ کا ایک مستقل نقطہ ہے اور ایسے ہی ایک نقطہ $Q$ ہے جسکے محدد $(r,s)$ ہیں اور یہ بھی مساوات $y = mx + c$ کے خط کا ایک مستقل نقطہ ہے ۔ یہ بات ثابت شدہ ہے کہ نقطوں $p$ اور $Q$ کے محدد سے مساوات $(y = mx + c)$ درست ٹھہرتی ہے، ثابت کریں کہ خط $PQ$ کا ڈھلاؤ $m$ ہوگا نقطہ $Q$ کی تمام حالتوں کے لیے۔

سوال 13: نقاط $a$ , $b$ اور $c$ کی چند ایک قیمتوں کے لیے مساوات $ax + by + c = 0$ ایک سیدھی لکیر کی نہیں رہتی۔ ایسی چند قیمتیں معلوم کریں۔

## 9.1 عمودی لکیروں کا ڈھلاؤ

(حصہ 3.1) میں یہ بتایا گیا ہے کہ دو لکیریں متوازی ہوتی ہیں اگر انکے ڈھلاؤ برابر ہوں۔ لیکن اگر دو لکیریں عمودی ہوں تو انکے ڈھلاؤ کیسے ہوں گے۔ اگر ایک لکیر جسکا ڈھلاؤ مثبت ہو تو عمودی لکیر کا ڈھلاؤ منفی ہوگا، اور اسکا الٹ بھی درست ہوگا، لیکن آپ سے زیادہ بہتر اندازہ لگا سکتے ہیں (شکل 3.1) میں یہ دکھایا گیا ہے کہ خط $PB$ کا ڈھلاؤ $m$ ہو تو ایک ڈھلاؤ مثلث $PAB$ بنائی جا سکتی ہے جسمیں $PA$ کی لمبائی ایک اکائی ہے اور خط $AB$ کی لمبائی $m$ اکائیاں ہے۔ (شکل 14.1) میں ڈھلاؤ مثلث $PAB$ کو گھمایا گیا ہے ایک قائمہ زاویہ سے اور اب مثلث $P'A'B'$ ہے کچھ یوں کہ خط $P'B'$ عمودی ہے خط $PB$ پر۔ اس مثلث کا محدد-x $-m$ ہے جبکہ محدد-x $1$ ہے، اور یوں ؛

$$PB' \text{ ڈھلوان} = \frac{y \text{ قدم}}{x \text{ قدم}} = \frac{1}{-m} = -\frac{1}{m}$$

اور اسی لیے خط $PB$ کے عمودی لکیر کا ڈھلاؤ $-\frac{1}{m}$ ہے۔ اور پس اگر دو عمودی لکیروں کا ڈھلاؤ بالترتیب $m_1$ اور $m_2$ ہو اور پھر $m_1m_2 = -1$ بھی ہو تو یہ سچ ہے کہ دونوں لکیروں کے ڈھلاؤ بالترتیب $m_1$ اور $m_2$ ہوں گے اور اگر $m_1m_2 = -1$ بھی ہو تو یہ دونوں لکیریں عمودی ہیں۔اس بات کے ثبوت کے لیے آخر میں موجود مشق کا سوال 22 دیکھیں۔ دو لکیریں جن کا ڈھلاؤ بالترتیب $m_1$ اور $m_2$ ہو ، یہ دونوں لکیریں عمودی ہوں گی اگر

$$m_1m_2 = -1, \quad m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

یہ بات ذہن نشین کر لیں کہ یہ خصوصیت بے کار ہو گی اگر لکیریں محور کے متوازی ہوں گی۔ لیکن آپ آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ ایک لکیر مستقل $= x$ ایک دوسری لکیر مستقل $= y$ کے عمودی ہی ہوگی۔

مثال 8.1: ثابت کریں کہ نقاط $(5,0)$ .$(4,7)$, $(-1,2)$, $(0,5)$ مجموعی طور پر ایک رومبس بناتے ہیں۔ آپ اس مسئلے کو کئی طریقوں سے حل کر سکتے ہیں، اس حل میں ہم نے ثابت کیا کہ یہ

نقاط ایک متوازی الاضلاع چکل بنا رہے ہیں اور یہ کہ اس کے وتر عمودی ہیں تو یہ ایک رومبس کہلائے گی۔ وتر کے درمیانی نقاط $\left(\frac{1}{2}(0+4), \frac{1}{2}(-5+7)\right)$ اور $(2,1)$ ہیں اور چونکہ یہ دونوں ایک ہی نقطہ ہیں اور بتائی گئی شکل ایک متوازی الاضلاع شکل ہے۔ اب اگر ڈھلاؤ کو دیکھا جائے تو $3 = \frac{12}{4} = \frac{7-(-5)}{4-0}$ اور $-\frac{1}{3} = \frac{-2}{6} = \frac{0-2}{5-(-1)}$ ہیں اور چونکہ ڈھلاؤ کا مضرب $-1$ ہے اسی لیے وتر عمودی ہیں اور یوں ثابت ہوا کہ یہ نقاط مل کر ایک رومبس کو جنم دیتے ہیں۔ □

مثال 9.1: عمودی لکیر کی بنیاد کے محدد معلوم کریں جبکہ $A(-2,-4)$ جڑا ہوا ہے نقاط $B(0,2)$ اور $C(-1,4)$ کے ساتھ۔ لکیر کی مدد سے۔ سب سے پہلے ایک شکل بنائیں جیسے کہ (شکل 15.1 ) ہے اس پر پیمانے کی ضرورت نہیں ہے۔ عمودی لکیر کی بنیاد دراصل وہ مشترک نقطہ $P$ ہے جب کہ لکیر $BC$ پر موجود ہےاور ساتھ ہی ساتھ $A$ سے گزرنی والی عمودی لکیر $BC$ پر بھی موجود ہے۔ سب سے پہلے خط $BC$ کا ڈھلاؤ اور اسکی مساوات معلوم کریں۔ □

خط $BC$ کا ڈھلاؤ $-2 = \frac{2}{-1} = \frac{4-2}{-1-0}$ ہے ۔ خط $BC$ کی مساوات $y-2=-2(x-0)$, ہے جو کہ سادہ ہو کر $2x+y=2$. ایسی صورت اختیار کر لے گی۔ لکیر جو کہ $A$ سے گزرتی ہے اور خط $BC$ کے عمودی ہے اسکا ڈھلاؤ $\frac{1}{2} = -\frac{1}{-2}$ ہے۔ اس لکیر کی مساوات

$$y-(-4)=\frac{1}{2}(x-(-2)), \quad x-2y=6$$

یا $x-2y=6$. ہے۔ یہ لکیریں نقطہ $P$ پر ملتی ہیں جن کے محدد مساوات $2x+y=2$ اور $x-2y=6$ کو درست ثابت کرتے ہیں ۔ اس نقطے کے محدد $(2,-2)$ ہیں سوال 1: ہر حصے میں خط کا ڈھلاؤ معلوم کریں جو کہ ایک دوسری لکیر کے عمودی ہے جسکا ڈھلاؤ دیا گیا ہے۔

ا. $2$ ب. $-3$ ج. $\frac{3}{4}$ د. $-\frac{5}{6}$ ھ. $-1$ و. $1\frac{3}{4}$ ز. $-\frac{1}{m}$ ح. $m$ ط. $\frac{p}{q}$ ي. $0$ یا. $-m$ یب. $\frac{a}{b-c}$

سوال 2: ہر حصے میں خط کی مساوات معلوم کریں جو کہ بتائی گئی لکیروں کے عمودی ہیں۔ آپکا جواب کسر کی صورت میں نہیں ہونا چاہئیے۔

ا. $(2,3), y=4x+3$
ب. $(-3,-1), y=1\frac{1}{2}x+3$
ج. $(2,-5), y=-5x-2$
د. $(7,-4), y=2\frac{1}{2}$
ھ. $(-1,4), 2x+3y=8$
و. $(4,3), 3x-5y=8$
ز. $(5,-3), 2x=3$
ح. $(0,3), y=2x-1$

ط. $(0,0), y = mx + c$ یا. $(c,d), ny - x = p$

ي. $(a,b), y = mx + c$ یب. $(-1,-2), ax + by = c$

سوال 3: ایک خط کی مساوات معلوم کریں جو کہ نقطہ $(-2,5)$ سے گزرتی ہے اور لکیر $y = 3x + 1$ کے عمودی ہے، ان دونوں لکیروں کا مشترک نقطہ بھی معلوم کریں۔

سوال 4: ایک خط کی مساوات معلوم کریں جو کہ نقطہ $(1,1)$ سے گزرتی ہے اور یہ خط $2x - 3y = 12$ کے عمودی ہے، ان دونوں لکیروں کا مشترک نقطہ بھی معلوم کریں۔

سوال 5: ایک لکیر جو مثلث کے ایک کونے سے گزرے اور مخالف سمت کے عمودی ہو، اس لکیر کو اونچائی کا نام دیتے ہیں۔ اس لکیر کی مساوات معلوم کریں جو کہ مثلث $ABC$ کے کونے $A$ سے گزرتی ہے نقاط کے محدد بالترتیب $A(2,3)$, $B(1,-7)$, $C(4,-1)$ ہوں گے۔

سوال 6: نقاط $P(2,5)$, $Q(12,5)$, $R(8,-7)$ مل کے ایک مثلث بناتے ہیں

ا. اونچائی کی مساوات تلاش کریں جو کہ نقطہ $R$ اور پھر نقطہ $Q$ سے گزرے۔

ج. ثابت کریں کہ نقطہ $P$ سے گزرنے والی اونچائی اس مشترک نقطے سے بھی گزرتی ہے۔

ب. ان دونوں اونچائیوں کا مشترک نقطہ معلوم کریں

سوال 7: ثابت کریں کہ نقاط $(5,9)$, $(1,3)$, $(-2,5)$ سے بننے والی ایک مثلث قائمہ زاویہ مثلث ہے۔

سوال 8: لکیروں $2x + y = 3$ اور $3x + 5y - 1 = 0$ کا مشترک نقطہ معلوم کریں

سوال 9: نقاط $A(-1,3)$, $B(5,7)$, $C(0,8)$ کو ملانے سے ایک مثلث بنتی ہے۔

1. ثابت کریں کہ زاویہ $ACB$ ایک قائمہ زاویہ ہے۔

2. اس نقطے کے محدد معلوم کریں جہاں $B$ سے آنے والی خط $AC$ کے متوازی لکیر محور-x کو کاٹتی ہے۔

سوال 10: ایک مربع شکل ہے جسکے دو کونے $A(7,2)$, $C(1,4)$ ہیں

ا. وتر $BD$ کی لمبائی معلوم کریں ب. نقاط $B$ اور $D$ کے محدد معلوم کریں

سوال 11: نقاط $A(-3,2)$, $B(4,3)$, $C(9,-2)$, $D(2,-3)$. کو ملانے سے ایک چوکور شکل بنتی ہے۔

ا. ثابت کریں کہ چاروں سمتوں کی لمبائی برابر ہے۔ ب. ثابت کریں کہ شکل $ABCD$ ایک مربع نہیں ہے۔

سوال 12: $P$ ایک نقطہ ہے جبکہ $I_1$ ایک لکیر ہے جسکی مساوات $3x + 4y = 16$ ہے۔

ا. ایک لکیر $I_2$ کی مساوات معلوم کریں جو کہ نقطہ $P$ سے گزرتی ہے اور لکیر $I_1$ کے عمودی ہو۔ ب. دونوں لکیروں کا مشترک نقطہ معلوم کریں ج. نقطے $P$ سے خط $I_1$ کا عمودی فاصلہ معلوم کریں

سوال 13: ثابت کریں کہ مثلث جس کے کونے $(11,8)$, $(3,20)$, $(-2,8)$ ہیں ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔ اسکا حدود اربعہ معلوم کریں

سوال 14: تین سیدھی لکیریں $y = x$, $7y = 2x$, $4x + y = 60$ ایک مثلث بناتی ہیں۔ اسکے کونوں کے محدد معلوم کریں۔

سوال 15: ایک لکیر کی مساوات معلوم کریں جو کہ نقطہ $(1,3)$ سے گزرتی ہے اور یہ لکیر متوازی ہے ایک دوسری لکیر کے جس کی مساوات $2x + 7y = 5.$ ہے ۔ یاد رکھیں آپکا جواب کچھ اس $ax + by = c$ صورت میں ہونا چاہئیے۔

سوال 16: نقاط $(-4,3)$, $(2,-5)$ کو ملانے سے بننے والی لکیر کی عمودی دوئزک کی مساوات معلوم کریں۔

سوال 17: نقاط جن کے محدد $A(1,2)$, $B(3,5)$, $C(6,6)$, ہیں اور نقطہ $D$ مل کر ایک متوازی الاضلاع شکل بناتے ہیں۔ خط $AC$ کے درمیانی نقطے کے محدد معلوم کریں، اور اس جواب کو استعمال کرتے ہوئے نقطہ $D$ کے محدد معلوم کریں۔

سوال 18: ایک خط $y = 3x$ پے ایک نقطہ $A(0,3)$ سے ایک عمودی لکیر پر نقطہ $P$ عمودی خط کا بنیادی خط ہے۔

ا. خط $AP$ کی مساوات معلوم کریں۔

ب. نقطہ $P$ کے محدد معلوم کریں

ج. نقطہ $A$ کا خط $y = 3x$ سے عمودی فاصلہ معلوم کریں۔

سوال 19: وہ نقاط جو ایک ہی لکیر پر موجود ہوں انہیں ہم ہم پلہ نقاط کہتے ہیں، ثابت کریں کہ نقاط $(-11,-5)$، $(4,7)$، $(-1,3)$ ہم پلہ ہیں۔

سوال 20: سیدھی لکیر کی مساوات معلوم کریں جب کہ نقاط $(-2,2)$، $(3,-1)$ سے گزرتی ہے، اور اپنا جواب $ax + by + c = 0$ کی صورت میں لکھیں۔ محور-x اور اس لکیر کا مشترک نقطہ معلوم کریں۔

سوال 21: نقاط $A$ اور $B$ کے محدد بالترتیب $(3,2)$ اور $(4,-5)$ ہیں، خط $AB$ کے درمیانی نقطے کے محدد معلوم کریں نیز خط $AB$ کا ڈھلاو بھی معلوم کریں۔ اور خط $AB$ کے عمودی دوئزی کی مساوات بھی معلوم کریں، آپکا جواب $ax + by + c = 0$ کی صورت میں ہونا چاہئیے جسمیں $a$ $b$ اور $c$ اعداد صحیح ہیں۔

سوال 22: خم $y = 1 + \frac{1}{2+x}$ محور-x کو نقطہ $A$ پے کاٹتا ہے جبکہ محور-y کو نقطہ $B$ پے کاٹتا ہے۔

ا. نقاط $A$ اور $B$ کے محدد معلوم کریں

ب. خط $AB$ کی مساوات معلوم کریں

ج. خط $AB$ اور مساوات $3y = 4x$ کی لکیر کا مشترک نقطہ معلوم کریں۔

سوال 23: ایک سیدھی لکیر $P$ ایک نقطے $(10,1)$ سے گزرتی ہے اور یہ لکیر عمودی ہے ایک دوسری لکیر $r$ کے جسکی مساوات $2x + y = 1$ ہے۔ آپ لکیر $P$ کی مساوات معلوم کریں۔ دونوں لکیروں کا مشترک نقطہ بھی معلوم کریں جبکہ نقطے $(10,1)$ کا لکیر $r$ سے عمودی فاصلہ بھی معلوم کریں۔

سوال 24: حساب کتاب سے ثابت کریں کہ نقاط $P(0,7)$, $Q(6,5)$, $R(5,2)$, $S(-1,4)$ ایک مستطیل بناتے ہیں

سوال 25: لکیر $3x - 4y = 8$ محور-x کو نقطہ $A$ پے کاٹتی ہے، نقطہ $C$ کے محدد $(-2,9)$. ہیں، نقطہ $C$ سے گزرنے والی لکیر ایک دوسری لکیر $3x - 4y = 8$ پر عمودی ہے۔ مثلث $ABC$ کا حدود اربعہ معلوم کریں۔

سوال 26: نقاط $A(-3,-4)$, $C(5,4)$ ایک رومبس $ABCD$ کے وتر کے انتہائی نقاط ہیں

ا. وتر $BD$ کی لمبائی معلوم کریں
ب. اگر یہ مان لیا جائے کہ خط $BC$ کا ڈھلاؤ $\frac{5}{3}$ ہے تو آپ نقاط $B$ اور $D$ کے محدد معلوم کریں

سوال 27: وسطانیہ کی مساوات معلوم کریں اگر مثلث کے کونے $(4,4)$, $(6,0)$, $(0,2)$ ہیں یہ بھی ثابت کریں کہ تمام وسطانیے ایک ہی نقطے سے گزرتے ہیں۔

سوال 28: دو لکیروں کی مساوات بالترتیب $y = m_1x + c_1$ اور $y = m_2x + C$ ہیں جبکہ $m_1m_2 = -1.$ ثابت کریں کہ لکیریں عمودی ہیں۔

# باب 2

# غیر ناطق جذر اور طاقتیں

اس باب کا پہلا حصہ مربع اور مکعب جذر والی تراکیب کے بارے میں اور دوسرا حصہ طاقتی بیانیوں کے بارے میں ہے۔ اس کو مکمل کرنے کے بعد آپ کو اس قابل ہو جانا چاہیے کہ۔

- مربع، مکعب اور دیگر جذروں والی تراکیب کو سادہ بنا سکیں
- طاقت کے قوانین جانتے ہوں
- منفی، صفر، اور کسری طاقتوں کا مطلب جانتے ہوں
- طاقت کی حامل تراکیب کو سادہ کر سکیں

## 1.2 اعداد کی اقسام

آغاز میں اعداد فقط گنتی کے لیے استعمال ہوتے تھے اور $1, 2, 3, \ldots$ ہماری اس ضرورت کے لیے کافی تھے۔ یہ طبعی اعداد یا مثبت صحیح عدد کہلاتے ہیں۔

آہستہ آہستہ ہمیں معلوم ہوا کہ اعداد پیمائش اور تجارتی مقاصد کے لیے بھی ضروری ہیں، اور اس کے لیے ہمیں کسروں کی ضرورت بھی پڑنے لگی۔ صحیح عدد اور کسروں کو ملا کر منطقی اعداد بنائے گئے۔ یہ وہ اعداد ہیں کہ جنھیں $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔ جب کہ p اور q دونوں صحیح اعداد ہیں اور q صفر نہیں ہو گا۔ یونانی ریاضی دانوں کی بے شمار شاندار دریافتوں میں سے ایک دریافت یہ بھی تھی کہ ایسے اعداد موجود ہیں

جنھیں اس ہئیت میں نہیں لکھا جا سکتا۔ ایسے اعداد کو غیر منطقی اعداد کہا جاتا ہے۔ پہلا ایسا عدد جو دریافت کیا گیا $\sqrt{2}$ تھا، جو فیثاغورس کے قانون کے مطابق ایک ایسے مربع کے وتر کی لمبائی بنتی ہے جس کی ہر طرف کی لمبائی 1 ہو۔ یونانیوں نے جس دلیل سے ثابت کیا کہ $\sqrt{2}$ کو کسری صورت میں نہیں لکھا جا سکتا ، اسی دلیل سے یہ بھی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ کوئی بھی جذر، مربع، مکعب یا کوئی بھی، یا تو صحیح عدد ہو گی یا غیر منطقی عدد۔ اب ہم بہت سے غیر منطقی اعداد جان چکے ہیں جن میں سب سے مشہور $\pi$ ہے۔

منطقی اور غیر منطقی اعداد مل کر حقیقی اعداد بناتے ہیں۔ اعداد صحیح، منطقی، غیر منطقی اور حقیقی اعداد مثبت،منفی یا صفر ہو سکتے ہیں۔

جب کسی منطقی عدد کو اعشاریہ کی صورت میں لکھا جائے تو یا تو اعشاریے کے ایک درجے تک رک جاتے ہیں یا ہندسوں کی ایک مخصوص وضع یا ترتیب میں بار بار دہرایا جانے لگتا ہے۔ مثال کے طور پر۔

$$\frac{7}{10} = 0.7, \quad \frac{7}{11} = 0.6363\ldots, \quad \frac{7}{12} = 0.5833\ldots, \quad \frac{7}{13} = 0.53846153846153\ldots$$

$$\frac{7}{14} = 0.5, \quad \frac{7}{15} = 0.466\ldots, \quad \frac{7}{16} = 0.4375, \quad \frac{7}{17} = 0.41176470588235294117 6\ldots$$

اس کا معکوس بھی درست ہے، یعنی اگر ایک اعشاری عدد رک جائے یا محدود بار دہرایا جائے تو وہ منطقی عدد کہلائے گا۔ لہٰذا اگر ایک غیر منطقی عدد کو اعشاری صورت میں لکھا جائے تو آپ جتنا مرضی پھیلا لیں، اس کے ہندسوں کی ترتیب کبھی دہرائی نہیں جائے گی۔

## 2.2 نامعقولیے اور ان کی خصوصیات

آج سے پہلے جب ہم $\sqrt{2}$ $\sqrt{8}$ $\sqrt{12}$ یا ایسی کسی ترکیب کو دیکھتے تھے تو ہم کیلکولیٹر کی مدد سے اسے اعشاری صورت میں بدل کر لکھ لیا کرتے تھے۔ مثلاً کچھ اس طرح

$\sqrt{2} = 1.414\ldots$ یا $\sqrt{2} = 1.414$ تین اعشاری ہندسوں تک درست یا $\sqrt{2} \approx 1.414$ لیکن $\sqrt{2} = 1.414$ خود یہ ترکیب کیوں درست نہیں ہے؟ $\sqrt{2}\sqrt[3]{9}$ ایسی تراکیب کو نامعقولیہ کہا جاتا ہے۔ اس جزو میں ہم انھی نا معقولیوں سے حساب کرنا سیکھیں گے۔ آپ کو یاد رکھنا ہو گا کہ $\sqrt{x}$ ہمیشہ x کی مثبت مربع جذر(یا $x = 0$ ہونے کی صورت میں صفر) کے معنوں میں لکھا جاتا ہے۔ نامعقولیوں کی اہم خاصیتیں، جو ہم بار بار استعمال کریں گے، یہ ہیں:

$\sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$ اور $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $(\sqrt{x} \times \sqrt{y}) \times (\sqrt{x} \times \sqrt{y}) = (\sqrt{x} \times \sqrt{x}) \times (\sqrt{y} \times \sqrt{y}) = x \times y = xy$ ہے اور چونکہ $\sqrt{x} \times \sqrt{y}$ مثبت ہے، لہٰذا یہ $xy$ کا جذر ہے۔ اسی طرح $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$ ہے۔ اور اسی دلیل سے ہم سمجھ سکتے ہیں کہ $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$۔

درج ذیل مثالیں ان خصوصیات کو سمجھنے میں مدد دے سکتی ہیں۔

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}; \quad \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3};$$

$$\sqrt{18} \times \sqrt{2} = \sqrt{18 \times 2} = \sqrt{36} = 6; \quad \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3.$$

اس حساب کو اپنے کیلکولیٹر سے دوبارہ کر کے دیکھنا شاید آپ کے یقین میں اضافے کا باعث ہو۔

مثال 1.2: سادہ کریں (ا) $\sqrt{63} + \sqrt{28}$ (ب) $\sqrt{10} \times \sqrt{5}$ ان کا حل متبادل طریقے سے بھی نکالا جا سکتا ہے، جیسے جزو ب کے لیے نکالا گیا ہے۔ (ا)

$$\sqrt{28} + \sqrt{63} = (\sqrt{4} \times \sqrt{7}) + (\sqrt{9} \times \sqrt{7}) = 2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = 5\sqrt{7}$$

(ب) پہلا طریقہ $5\sqrt{2} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{50} = \sqrt{5 \times 10} = \sqrt{5} \times \sqrt{10}$ دوسرا طریقہ $\sqrt{5} \times \sqrt{10} = \sqrt{5} \times (\sqrt{5} \times \sqrt{2}) = (\sqrt{5} \times \sqrt{5}) \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ بعض اوقات کسر کے نسب نما سے نا معقولیوں کو ہٹا دینا مفید ہوتا ہے جیسے $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کے نسب نما سے نا معقولیہ ہٹانے کے لیے ہم اوپر نیچے دونوں کو $\sqrt{2}$ سے ضرب دے سکتے ہیں۔ $\frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ □

کچھ نتائج جو اکثر ہماری مدد کریں گے۔ $\sqrt{x} = \frac{x}{\sqrt{x}}$ اور اسی کا بالعکس $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ غیر معقول کو نسب نما سے ہٹا دینا نسب نما کو معقول بنانا کہلاتا ہے۔

مثال 2.2: درج ذیل ترکیب میں نسب نما کو معقول بنائیں۔

(ا) $\frac{6}{\sqrt{2}}$

(ب) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$

حل: (ا) $\frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{3 \times 2}{\sqrt{2}} = 3 \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

(ب) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{3 \times \sqrt{2}}{\sqrt{5} \times \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

مربع جذر کے لیے استعمال ہونے والے قوانین ہی مکعب جذر اور اس سے بالائی جذروں کے لیے استعمال ہوتے ہیں۔ □

مثال 3.2: شکل 1.2 میں ایک عمارت کی چھت کا قطع عمودی کو ایک قائم مثلث $ABC$ کی صورت میں دکھایا گیا ہے۔ جس میں $AB = 15\,\text{m}$ ہے۔چھت کی بلندی $BD$ $10m$ ہے۔ x اور y معلوم کریں۔ ہم مثلث $ABD$ سے شروع کرتے ہیں۔ فیثا غورس کے قانون کے مطابق ہم جانتے ہیں کہ $z^2 + 10^2 = 15^2$ لہذا $z^2 = 225 - 100 = 125$ ہو گا۔

$$z = \sqrt{125} = \sqrt{25 \times 5} = 5\sqrt{5}$$

توجہ کیجیے کہ مثلث $ABC$ اور $ABD$ مماثل ہیں۔ اس مماثلت کو بہتر طور پر سمجھنے کے لیے ہم شکل 2.2 میں $ABD$ کو الٹا کر دکھاتے ہیں۔ اب $ABC$ اور $ABD$ دونوں مثلثوں کی طرفیں ایک ہی تناسب میں ہوں گی۔ لہذا $\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{15}{z}$

اور جیسا کہ ہم جانتے ہیں $\frac{15}{z} = \frac{15}{5\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ ۔ $x = 15 \times \frac{3\sqrt{5}}{5} = 9\sqrt{5}$

$$y = 10 \times \frac{3\sqrt{5}}{5} = 6\sqrt{5}$$

آپ فیثاغورس کے قانون سے مثلث $ABC$ میں $x^2 = 15^2 + y^2$ کی تصدیق کر سکتے ہیں۔ □

سوال 1: کیلکولیٹر استعمال کیے بغیر ان تراکیب کو سادہ کریں۔ .

1. $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$
2. $\sqrt{10} \times \sqrt{10}$
3. $\sqrt{16} \times \sqrt{10}$
4. $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$
5. $\sqrt{32} \times \sqrt{2}$
6. $\sqrt{3} \times \sqrt{12}$
7. $5\sqrt{3} \times \sqrt{3}$
8. $2\sqrt{5} \times 3\sqrt{5}$
9. $3\sqrt{6} \times 4\sqrt{6}$
10. $2\sqrt{20} \times 3\sqrt{5}$
11. $(2\sqrt{7})^2$
12. $(3\sqrt{3})^2$
13. $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5}$
14. $(2\sqrt[4]{3})^4$
15. $(2\sqrt[3]{2})^6$
16. $4\sqrt{125} \times 4\sqrt{5}$

سوال 2: درج ذیل تراکیب کو کیلکولیٹر استعمال کیے بغیر سادہ کریں۔ .

1. $\sqrt{18}$
2. $\sqrt{20}$
3. $\sqrt{24}$
4. $\sqrt{32}$
5. $\sqrt{40}$
6. $\sqrt{45}$

7. $\sqrt{48}$
8. $\sqrt{50}$
9. $\sqrt{54}$
10. $\sqrt{72}$
11. $\sqrt{175}$
12. $\sqrt{675}$

سوال 3: درج ذیل تراکیب کو کیلکولیٹر استعمال کیے بغیر سادہ کریں۔

1. $\sqrt{8}+\sqrt{18}$
2. $\sqrt{3}+\sqrt{12}$
3. $\sqrt{20}-\sqrt{5}$
4. $\sqrt{32}-\sqrt{8}$
5. $\sqrt{50}-\sqrt{18}-\sqrt{8}$
6. $\sqrt{27}+\sqrt{27}$
7. $\sqrt{99}+\sqrt{44}+\sqrt{11}$
8. $8\sqrt{2}+2\sqrt{8}$
9. $2\sqrt{20}+3\sqrt{45}$
10. $\sqrt{52}-\sqrt{13}$
11. $20\sqrt{5}-5\sqrt{20}$
12. $\sqrt{48}+\sqrt{24}-\sqrt{75}+\sqrt{96}$

سوال 4: درج ذیل تراکیب کو کیلکولیٹر استعمال کیے بغیر سادہ کریں۔

ا. $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

ب. $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$

ج. $\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}}$

د. $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$

ھ. $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$

و. $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}$

ز. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{48}}$

ح. $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{200}}$

سوال 5: درج ذیل تراکیب کو کیلکولیٹر استعمال کیے بغیر سادہ کریں

ا. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

ب. $\frac{1}{\sqrt{5}}$

ج. $\frac{4}{\sqrt{2}}$

د. $\frac{6}{\sqrt{6}}$

ھ. $\frac{11}{\sqrt{11}}$

و. $\frac{2}{\sqrt{8}}$

ز. $\frac{12}{\sqrt{3}}$

ح. $\frac{14}{\sqrt{7}}$

ط. $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

ي. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ یب. $\frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$ ید. $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$ یو. $\frac{2\sqrt{18}}{9\sqrt{12}}$

یا. $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ یج. $\frac{7\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$ یہ. $\frac{9\sqrt{12}}{2\sqrt{18}}$

سوال 6: درج ذیل تراکیب سادہ بنائیں اور ہر ایک کا جواب $k\sqrt{3}$ کی شکل میں لکھیں۔

.

ا. $\sqrt{75}+\sqrt{12}$

ب. $\sqrt{6}+\sqrt{3}(4-2\sqrt{3})$

ج. $\frac{12}{\sqrt{3}}-\sqrt{27}$

د. $\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

ھ. $\sqrt{2}\times\sqrt{8}\times\sqrt{27}$

و. $(3-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})-\sqrt{3}\times\sqrt{27}$

ز. $AB=4\sqrt{5}cm$

ح. $BC=\sqrt{10}$

سوال 7: $ABCD$ ایک چوکور ہے، جس میں $AB=4\sqrt{5}cm$ اور $BC=\sqrt{10}$۔ درج ذیل سوال کا جواب سادہ غیر معقول جذر کی شکل میں لکھیں۔ (ا) چوکور کا رقبہ معلوم کریں (ب) وتر $AC$ کی لمبائی معلوم کریں

سوال 8: درج ذیل تراکیب سادہ بنائیں اور ہر ایک کا جواب $k\sqrt{2}$ کی شکل میں لکھیں۔

.

1. $x\sqrt{2}=10$

2. $2y\sqrt{2}-3=\frac{5y}{\sqrt{2}}+1$

3. $z\sqrt{32}-16=z\sqrt{8}-4$

سوال 9: درج ذیل تراکیب کو $k\sqrt[3]{3}$ کی شکل میں لکھیں۔

.

1. $\sqrt[3]{24}$
2. $\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{3}$
3. $(\sqrt[3]{3})^4$
4. $\sqrt[3]{3000}-\sqrt[3]{375}$

سوال 10: درج ذیل قائم مثلثوں کی تیسری نا معلوم طرف معلوم کریں۔ اپنے جواب کو سادہ غیر معقول کی شکل میں لکھیں

سوال 11: آپ کو بتایا جائے کہ اعشاریے کے بارہ ہندسوں تک لکھیے، مثلاً $\sqrt{26}=5.099\,019\,513\,593$

1. $\sqrt{104}$ کی ایسی قیمت معلوم کریں جو دس اعشاری ہندوس تک درست ہو۔
2. $\sqrt{650}$ کی ایسی قیمت معلوم کریں جو دس اعشاری ہندسوں تک درست ہو۔
3. $\frac{13}{\sqrt{26}}$ کی ایسی قیمت معلوم کریں جو دس اعشاری ہندوس تک درست ہو۔

سوال 12: دی گئی بیک وقت مساواتوں کو حل کریں، $(2\sqrt{5})x+y=34$ اور $7x-(3\sqrt{5})y=9\sqrt{5}$

سوال 13: درج ذیل کو سادہ بنائیں

ا. $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)$

ب. $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$

ج. $(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})$

د. $(2\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}-1)$

ھ. $(4\sqrt{3}-2)(4\sqrt{3}+2)$

و. $(10+\sqrt{5})(10-\sqrt{5})$

ز. $(4\sqrt{7}-5)(4\sqrt{7}+5)$

ح. $(2\sqrt{6}-3\sqrt{3})(2\sqrt{6}+3\sqrt{3})$

سوال 14: سوال نمبر 13 میں ہر جواب ایک عدد صحیح ، نقل کر کے درج ذیل کو مکمل کریں

ا. $(\sqrt{3}-1)(\quad) = 2$   د. $(2\sqrt{7}+\sqrt{3})(\quad) = 25$

ب. $(\sqrt{5}+1)(\quad) = 4$   ہ. $(\sqrt{11}+\sqrt{10})(\quad) = 1$

ج. $(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\quad) = 4$   و. $(3\sqrt{5}-2\sqrt{6})(\quad) = 21$

سوال نمبر 15اور16 میں دی گئی مثالیں ہمیں نسب نما کو منطق بنانے کے طریقے کی طرف متوجہ کرتی ہیں، جو سوال نمبر 5 کی ترکیبوں سے زیادہ پیچیدہ ہوں۔ سوال 15: (ا) وضاحت کریں $\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$ اور ثابت کریں $\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

(ب) ثابت کریں $\frac{1}{2\sqrt{3}+3} = \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5}$

سوال 16: نسب نما کو معقول بنا کر درج ذیل کسروں کو سادہ کریں

ا. $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$   ب. $\frac{1}{3\sqrt{5}-5}$   ج. $\frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{6}+3\sqrt{2}}$

## 3.2 طاقتوں کا استعمال

سولہویں صدی میں جب ریاضی کی کتب چھپنے لگیں، تو ریاضی دان مکعب اور مربع مساواتوں کا حل ڈھونڈ رہے تھے۔ انھیں لگا کہ $xxx$اور $xxxx$ کو $x^3$ اور $x^4$ لکھنا زیادہ آسان اور مفید رہے گا۔

طاقت نویسی کا آغاز تو اس انداز میں ہوا تھا لیکن وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ اندازہ ہوا کہ یہ صرف مختصر نویسی ہی کا ایک انداز نہیں تھا، بلکہ اس انداز سے لکھنا مستقبل میں اہم دریافتوں کا باعث بنا اور ریاضی کی موجودہ شکل اس انداز کے بغیر مبہم اور ناقابل استفہام ہوتی۔ آپ نے اس انداز بیان کی سادہ مثالیں تو استعمال کی ہی ہوں گی۔ عام طور پہ علامت $a^m$ ، $a$ کو $m$بار ضرب دینے کے لیے لکھی جاتی ہے, اس کو یوں سمجھا جا سکتا ہے۔

$$a^m = \overbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}^{\text{ان کی تعداد } m \text{ ہے}}$$

اس میں $a$ کو اساس کہا جاتا ہے اور $m$ کو طاقت کہا جاتا ہے۔ یہاں توجہ دلانا ضروری ہے کہ $a$ کسی بھی قسم کا عدد ہو سکتا ہے لیکن$m$ لازمی طور پر مثبت عدد صحیح ہی ہو گا۔ اسکو عام طور پہ $a$ کی طاقت

$m$ کہا جاتا ہے۔ طاقتی بیانیوں میں لکھی جانے والی تراکیب کو درج ذیل سادہ قوانین سے آسان بنایا جا سکتا ہے۔ ان میں سے ایک ضرب کا قانون ہے۔

$$a^m \times a^n = \overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{\text{تعداد } m} \times \overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{\text{تعداد } n} = \overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{\text{تعداد } m+n} = a^{m+n}$$

یہ بہت سی جگہوں پہ استعمال ہوتا ہے، مثلاً ایسے مکعب کا حجم معلوم کرنے کے لیے جس کی ہر طرف کی لمبائی $a$ ہو۔ ہم جانتے ہیں کہ اساس کے رقبے کو بلندی سے ضرب دے کر حجم دریافت کیا جاتا ہے۔
$= a^2 \times a = a2 \times a^1 = a^{2+1} = a^3$

اس سے ملتا جلتا تقسیم کا قانون

$$\begin{aligned} a^m \div a^n &= \overbrace{(a \times a \times \ldots \times a)}^{\text{تعداد } m} \div \overbrace{(a \times a \times \ldots \times a)}^{\text{تعداد } n} \\ &= \overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{\text{تعداد } m-n} \\ &= a^{m-n} \end{aligned}$$

اسی طرح طاقت پہ طاقت کا قانون ہے

$$\begin{aligned} (a^m)^n &= \overbrace{\overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{\text{تعداد } m} \times \overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{\text{تعداد } m} \times \ldots \overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{\text{تعداد } m}}^{\text{تعداد } n} \\ &= \overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{\text{تعداد } m \times n} = a^{m \times n} \end{aligned}$$

ایک اور قانون جو جز کا قانون ہے کہ جس میں دو اساسیں اور ایک طاقت ہوتی ہے۔

$$\begin{aligned} (a \times b)^m &= \overbrace{(a \times b) \times (a \times b) \times \ldots \times (a \times b)}^{\text{تعداد } m} \\ &= \overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{\text{تعداد } m} \times \overbrace{b \times b \times \ldots \times b}^{\text{تعداد } m} \\ &= a^m \times b^m \end{aligned}$$

ان قوانین کو بیان کرنے کے لیے ضرب کی علامت استعمال کی گئی ہے، لیکن الجبرا کے دیگر حصوں میں اگر غلطی کی گنجائش نہ ہو تو یہ ہٹا دی جاتی ہے۔ اسے مکمل کرنے کے لیے یہاں یہ قوانین دوبارہ دیے جا رہے ہیں۔ ضرب کا قانون $a^m \times a^n = a^{m+n}$ تقسیم کا قانون $a^m \div a^n = am - n$ طاقت پہ طاقت کا قانون $(a^m)^n = a^{m \times n}$ جز کا قانون $(a \times b)^m = a^m \times b^m$

مثال 4.2: دی گئی ترکیب کو سادہ بنائیں۔ $(2a^2b)^3 \div (4a^4b)$

حل:

$$
\begin{aligned}
(2a^2b)^3 \div (4a^4b) &= (2^3(a^2)^3b^3) \div (4a^4b) \\
&= (8a^{2\times3}b^3) \div (4a^4b) \\
&= (8 \div 4) \times (a^6 \div a^4) \times (b^3 \div b^1) \\
&= 2a^{6-4}b^{3-1} \\
&= 2a^2b^2
\end{aligned}
$$

□

## 4.2 صفر اور منفی طاقت

پچھلے حصے میں ہم نے ترکیب $a^m$ کی تعریف بیان کی جس میں ہم $m$ مرتبہ ضرب دیتے ہیں، لیکن اگر $m$ صفر یا منفی ہو تو یہ تعریف اپنے معنی کھو دیتی ہے ۔ ہم کسی بھی چیز کو $-3$ یا صفر مرتبہ ضرب نہیں دے سکتے۔ لیکن $a^m$ کے معنی کو وسعت دے کر دیکھا جائے تو صفر یا منفی طاقت کی صورت میں بھی نہ صرف یہ کہ یہ معنی درست ہے بلکہ مفید بھی ہے۔ اس کے ساتھ اہم بات یہ کہ مثبت طاقت کے تمام قوانین منفی اور صفر طاقتوں کے لیے بھی درست ہیں۔ اس تسلسل پہ غور کریں۔

دائیں سمت پہ اساس ہمیشہ 2 ہے جب کہ طاقت ہر مرتبہ ایک کم ہوتی جا رہی ہے۔ جبکہ بائیں طرف عدد آدھے ہوتے جا رہے ہیں۔ لہٰذا اس تسلسل کو یوں بڑھایا جا سکتا ہے۔

اور ہم اس طرح لا محدود حد تک جا سکتے ہیں۔ اب ان کا آپس میں موازنہ کریں

یوں لگتا ہے جیسے $-2^m$ کو $mfrac1$ لکھنا چاہیے، اور صفر کی طاقت کے لیے ایک خصوصی قیمت $2^0 = 1$ رکھنی چاہیے۔ ہم اپنے پہلے مشاہدے کو صفر کے علاوہ تمام اساسوں اور کسی بھی مثبت عدد صحیح $m$ کے لیے پھیلائیں تو منفی طاقت کے قوانین تک پہنچ سکتے ہیں۔

منفی طاقت کا قانون

ہم یہاں کچھ مثالوں سے ثابت کریں گے کہ مثبت طاقتوں کے لیے بنائے گئے قوانین منفی طاقتوں کے لیے بھی درست ہیں۔ اسی طرح آپ اپنے لیے بہت سی اور مثالیں بھی بنا سکتے ہیں۔

ضرب کا قانون:

طاقت پہ طاقت کا قانون:

جز کا قانون:

مثال 5.2: اگر $a = 5$ ہے تو کی قیمت معلوم کریں۔ یہاں اہم نکتہ یہ ہے کہ طاقت $-2$ صرف $a$ کے ساتھ ہے، یعنی 4 پہ نہیں ہے۔ لہٰذا $4a^{-2}$ کا مطلب ہے $4 \times \frac{1}{2^a}$. اب جب کہ $a = 5$ ہے، $4a^{-2}$ $= 4 \times \frac{1}{25} =$ □

مثال 6.2: ان تراکیب کو سادہ کریں

(ا) $4a^2b \times$ (b)

(ا) پہلا طریقہ ہر چیز کو مثبت طاقت میں لے آئیں

دوسرا طریقہ مثبت اور منفی دونوں طاقتوں کے لیے قوانین استعمال کر لیں۔

(ب) زیر نظر مثال میں میکینکس کا ایک استعمال دیکھیے۔ لزوجیت،(M,L,T) کی پیمائش کے لیے ماس، لمبائی اور وقت کی جہتیں ہیں۔ بریکٹس کو الگ الگ کر کے

منفی طاقتوں کو بہت چھوٹے اعداد لکھنے کے لیے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ یقیناً آپ بہت بڑے اعداد کو معیاری شکل یا سائنسی بیانیے میں لکھنا جانتے ہوں گے، مثلاً روشنی کی رفتار کو 300 000 000 میٹر فی سیکنڈ لکھنے کی بجائے $3 \times 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ لکھا جاتا ہے۔ بالکل اسی طرح سرخ روشنی کا طول موج جو تقریباً 0.000 000 75 میٹر ہے، کو بھی آسانی سے $7.5 \times 10^{-7}\ \mathrm{m}$ لکھا جا سکتا ہے۔ کمپیوٹر اور کیلکولیٹر میں لوگوں کے لیے سائنسی اعتبار سے لکھنے کا امکان موجود ہوتا ہے اور اگر کوئی عدد عام عدد سے زیادہ بڑا یا زیادہ چھوٹا ہو جائے تو وہ اسے معیاری شکل میں بدل دیتا ہے۔ مثلاً یا ۔ علامت (E) ایکسپونینٹ کے لیے استعمال ہوتی ہے جو طاقت ہی کے لیے استعمال ہونے والا دوسرا لفظ ہے □

مثال 7.2: اس ترکیب $G = \frac{gR^2}{M}$ سے کشش ثقل کے مستقل $G$ کا حساب لگائیں، جبکہ $g \approx 9.81$، $R \approx 6.37 \times 10^6$ اور $M \approx 5.97 \times 10^{24}$۔ ($R$ اور $M$ زمین کا رداس اور ماس ہے، اور $g$ کشش ثقل کے سبب پیدا ہونے والا اسراع ہے۔

$$
\begin{aligned}
G &\approx \frac{9.81 \times (6.37 \times 10^6)^2}{5.97 \times 10^{24}} = \frac{9.81 \times (6.37)^2}{5.97} \times \frac{(10^6)^2}{10^{24}} \\
&\approx 66.7 \times \frac{10^{12}}{10^{24}} = 6.67 \times 10^1 \times 10^{-12} = 6.67 \times 10^{1-12} = 6.67 \times 10^{-11}
\end{aligned}
$$

□

سوال 1: درج ذیل تراکیب کو سادہ کریں

ا. $a^2 \times a^3 \times a^7$

ب. $(b^4)^2$

ج. $c^7 \div c^3$

د. $d^5 \times d^4$

ه. $(e^5)^4$

و. $(x^3y^2)^2$

ز. $5g^5 \times 3g^3$

ح. $12h^{12} \div 4h^4$

ط. $(2a^2)^3 \times (3a)^2$

ي. $(p^2q^3)^2 \times (pq^3)^3$

يا. $(4x^2y)^2 \times (2xy^3)^3$

يب. $(6ac^3)^2 \div (9a^2c^5$

يج. $(3m^4n^2)^3 \times (2mn^2)^2$

يد. $(49r^3s^2)^2 \div (7rs)^3$

يه. $(2xy^2z^3)^2 \div (2xy^2z^3)$

سوال 2: درج ذیل تراکیب کو سادہ کریں، ہر جواب $2^n$ کی ہیئت میں لکھیں۔

ا. $2^{11} \times (2^5)^3$

ب. $(2^3)^2 \times (2^2)^3$

ج. $4^3$

د. $8^2$

ه. $\frac{2^7 \times 2^8}{2^{13}}$

و. $\frac{2^2 \times 2^3}{(2^2)^2}$

ز. $4^2 \div 2^4$

ح. $2 \times 4^4 \div 8^3$

سوال 3: درج ذیل تراکیب کو صحیح عدد یا کسر کی صورت میں لکھیں

ا. $2^{-3}$
ب. $4^{-2}$
ج. $5^{-1}$
د. $3^{-2}$
ھ. $10^{-4}$
و. $1^{-7}$
ز. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$
ح. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$
ط. $\left(2\frac{1}{2}\right)^{-1}$
ي. $2^{-7}$
يا. $6^{-3}$
يب. $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-3}$

سوال 4: $x = 2$ کے ساتھ درج ذیل میں سے ہر ایک کی قیمت معلوم کریں

ا. $4x^{-3}$
ب. $(4x)^{-3}$
ج. $\frac{1}{4}x^{-3}$
د. $\left(\frac{1}{4}x\right)^{-3}$
ھ. $(4 \div x)^{-3}$
و. $(x \div 4)^{-3}$

سوال 5: $y = 5$ کے ساتھ درج ذیل میں سے ہر ایک کی قیمت معلوم کریں

ا. $(2y)^{-1})$
ب. $2y^{-1}$
ج. $\left(\frac{1}{2}y\right)^{-1}$
د. $\frac{1}{2}y^{-1}$
ھ. $\frac{1}{(2y)^{-1}}$
و. $\frac{2}{(y^{-1})^{-1}}$

سوال 6: درج ذیل تراکیب کو ممکنہ سادہ ترین شکل میں لکھیں

ا. $a^4 \times a^{-3}$
ب. $\frac{1}{b^{-1}}$
ج. $(c^{-2})^3$
د. $d^{-1} \times 2d$
ھ. $e^{-4} \times e^{-5}$
و. $\frac{f^{-2}}{f^3}$
ز. $12g^3 \times (2g^2)^{-2}$
ح. $(3h^2)^{-2}$
ط. $(3i^{-2})^{-2}$
ي. $\left(\frac{1}{2}j^{-2}\right)^{-3}$

یا. $(2x^3y^{-1})^3$    ید. $(3n^{-2})^4 \times (9n)^{-1}$    یز. $(2q^{-2})^{-2} \div \left(\frac{4}{q}\right)^2$

یب. $(p^2q^4r^3)^{-4}$    یہ. $(2xy^2)^{-1} \times (4xy)^2$

یج. $(4m^2)^{-1} \times 8m^3$    یو. $(5a^3c^{-1})^2 \div (2a^{-1}c^2)$    یح. $(3x^{-2}y)^2 \div (4xy)^{-2}$

سوال 7: درج ذیل تراکیب کو حل کریں

ا. $3^x = \frac{1}{9}$    ج. $2^z \times 2^{z-3} = 32$    ھ. $4^y \times 2^y = 8^{120}$

ب. $5^y = 1$    د. $7^{3x} \div 7^{x-2} = \frac{1}{49}$    و. $3^t \times 9^{t \div 3} = 27^2$

سوال 8: ایک مکعب کی ہر طرف کی لمبائی $3 \times 10^{-2}$ میٹر ہے۔ (ا) مکعب کا حجم معلوم کریں (ب) مکعب کا کل سطحی رقبہ معلوم کریں

سوال 9: ایک کھلاڑی $7.5 \times 10^{-3}$ گھنٹے میں $2 \times 10^{-1}$ km کلومیٹر کا فاصلہ طے کرتا ہے۔ اس کی اوسط رفتار کلومیٹر فی گھنٹہ معلوم کریں۔

سوال 10: ایک $L$ لمبائی رکھنے والی تار کا حجم $V\ m^3$ یوں بیان کیا گیا ہے۔ جبکہ اس کے عمودی تراش کا رداس $r$ ہے۔ (ا) 80 میٹر لمبائی اور $2 \times 10^{-3}m$ عمودی تراش کے رداس کی تار کا حجم معلوم کریں۔

(ب) ایک اور تار جس کی عمودی تراش کا رداس $5 \times 10^{-3}m^3$ اور حجم $8 \times 10^{-3}m^3$ ہے، کی لمبائی معلوم کریں۔

(ج) ایک تار جس کی لمبائی $60m$ اور حجم $6 \times 10^{-3}m^3$ ہے۔ اس کی عمودی تراش کا رداس معلوم کریں۔

سوال 11: ایک مساوات جو موج کو سمجھتے ہوئے سامنے آتی ہے یہ ہے۔ $y = \frac{\lambda d}{a}$

(ا) $y$ معلوم کریں، جبکہ $\lambda = 7 \times 10^{-7}$، $d = 5 \times 10^{-1}$ اور $a = 8 \times 10^{-4}$ ہے۔

(ب) $\lambda$ معلوم کریں، جبکہ $y = 10^{-3}$، $d = 0.6$ اور $a = 2.7 \times 10^{-4}$ ہے۔

سوال 12: حل کریں

$$\frac{3^{5x+2}}{9^{1-x}} = \frac{27^{4+3x}}{729}$$

## 5.2 کسری طاقتیں

گزشتہ حصے میں آپ دیکھ چکے ہیں کہ طاقت کے قوانین صحیح اعداد $m$ اور $n$ کی مثبت اور منفی دونوں طاقتوں کے لیے ٹھیک کام کرتے ہیں۔ لیکن اگر $m$ اور $n$ اعداد صحیح ہی نہ ہوں تو کیا ہو گا۔ اگر ہم طاقت پہ طاقت کے قانون میں $m = \frac{1}{2}$ اور $n = 2$ مانیں تو ہم اس نتیجے پہ پہنچیں گے

$$(x^{\frac{1}{2}})^2 = x^{\frac{1}{2}\times 2} = x^1 = x$$

$x^{\frac{1}{2}} = y$ سمجھنے سے یہ مساوات $x = y^2$ بن جائے گی۔ لہٰذا $y = \sqrt{x}$ یا $y = -\sqrt{x}$ جس سے $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ یا $x^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{x}$۔ $x^{\frac{1}{2}}$ کو $x$ کی مثبت جذر ماننے سے ہمیں $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ ملے گا۔ اسی طرح اگر ہم $m = \frac{1}{3}$ اور $n = 3$ رکھیں تو ہم ظاہر کر سکتے ہیں کہ $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$۔ اس سے زیادہ وسیع طریقے سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ $m = \frac{1}{n}$، ہم دیکھیں گے $(x^1n)^n = x^{\frac{1}{n}\times n} = x$ جو ہمیں ایک بڑا نتیجہ دے گا جو کہ

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

توجہ کیجیے کہ $\sqrt{x} = x^12$ کی صورت میں لازمی طور پہ $x \geq 0$ ہو گا، لیکن $\sqrt[3]{x} = x^13$ کی صورت میں لازمی طور پہ $x \geq 0$ کی ضرورت نہیں ہو گی، کیونکہ ہم کسی منفی نمبر کا مکعب جذر تو بہر حال لے سکتے ہیں۔ $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ کو ذرا سا بڑھا کر دیکھیں تو ہم دیکھ سکتے ہیں کہ $x^{\frac{2}{3}}$ کی قسم کی تراکیب کو کیسے حل کرنا ہے۔ اس کے دو متبادل ہو سکتے ہیں۔

$$x^{\frac{2}{3}} = x^{2\times\frac{1}{3}} = (x^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x^2} \text{ اور } x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{3}\times 2} = (\sqrt[3]{x})^2$$

(اگر $x$ کی قطعی مکعب جذر ہو تو اس کے لیے پہلی شکل بہتر ہے، ورنہ دوسری قسم بہتر ہے) عمومی طور پہ یہی منطق ہمیں کسری طاقتوں کے اصولوں تک لے جاتی ہے۔

جذری طاقت کا قانون

$$x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$$

جذری طاقتوں کو $x^{1/2}$، $x^{m/n}$ بھی لکھا جا سکتا ہے اور اسی طرح مزید بھی۔

مثال 8.2: سادہ کریں۔ (ا) $9^{\frac{1}{2}}$، (ب) $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}}$، (ج) $16^{-\frac{3}{4}}$

حل: (ا) $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

(ب) $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = 3^2 = 9$

(ج) پہلا طریقہ $16^{-\frac{3}{4}} = (2^4)^{-\frac{3}{4}} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

دوسرا طریقہ $16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{(\sqrt[4]{16})^3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ □

طاقت کے معمے حل کرنے کے لیے بہت سے متبادل طریقے بھی موجود ہیں اور آپ کو ان کا بھی تجربہ کرنا چاہیے۔ بہت سے لوگ مثبت طاقت میں سوچنا آسان سمجھتے ہیں لہذا وہ منفی طاقت کو مثبت بنا کر آسانی سے حل کر سکتے ہیں، اگر آپ بھی ایسے ہی ہیں تو آپ پہلا مرحلہ $16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{3}{4}}}$ یوں لکھ سکتے ہیں، بالکل جیسے ہم نے دوسرے طریقے میں دیکھا۔

مثال 9.2: سادہ کریں (ا) $(2\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}$، (ب) $2x^{\frac{1}{2}} \times 3x^{-\frac{5}{2}}$، (ج) $\frac{(2x^2y^2)^{-\frac{1}{2}}}{(2xy^{-2})^{\frac{3}{2}}}$

حل: (ا) $(2\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}} = (\frac{9}{4})^{-\frac{1}{4}} = (\frac{4}{9})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

(ب) $2x^{\frac{1}{2}} \times 3x^{-\frac{5}{2}} = 6x^{\frac{1}{2}-\frac{5}{2}} = 6x^{-2} = \frac{6}{x^2}$

(ج) پہلا طریقہ $(2x^2y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(2x^2y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}xy}$

$$\frac{(2x^2y^2)^{-\frac{1}{2}}}{(2xy^{-2})^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}xy} \times \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}y^{-3}} = \frac{1}{2^2x^{\frac{5}{2}}y^{-2}} = \frac{y^2}{4x^{\frac{5}{2}}}$$

دوسرا طریقہ $(2xy^{-2})^{\frac{3}{2}}$ سے تقسیم کرنا ایسا ہی ہے جیسا $(2xy^{-2})^{-\frac{3}{2}}$ سے ضرب دینا۔

$$\frac{(2x^2y^2)^{-\frac{1}{2}}}{(2xy^{-2})^{\frac{3}{2}}} = (2x^2y^2)^{-\frac{1}{2}}(2xy^{-2})^{-\frac{3}{2}} = (2^{-\frac{1}{2}}x^{-1}y^{-1})(2^{-\frac{3}{2}}x^{-\frac{3}{2}}y^3) = 2^{-2}x^{\frac{5}{2}}y^2$$

جز ج میں ایک نکتہ قابل توجہ ہے اور وہ یہ کہ دونوں طریقوں سے جواب مختلف آ رہا ہے، اور ہم سمجھ سکتے ہیں کہ مساوات کا سادہ ہونا ہر ایک کے مزاج کے مطابق مختلف ہو سکتا ہے۔ □

سوال 1:

کیلکولیٹر کی مدد کے بغیر درج ذیل تراکیب کا مساوی لکھیں

ا. $25^{\frac{1}{2}}$ د. $32^{\frac{1}{5}}$ ز. $16^{-\frac{1}{4}}$ ي. $(-27)^{\frac{1}{3}}$

ب. $8^{\frac{1}{3}}$ ھ. $81^{\frac{1}{4}}$ ح. $49^{-\frac{1}{2}}$ يا. $64^{\frac{2}{3}}$

ج. $36^{\frac{1}{2}}$ و. $9^{-\frac{1}{2}}$ ط. $1000^{-\frac{1}{3}}$ يب. $(-125)^{-\frac{4}{3}}$

سوال 2:

کیلکولیٹر کی مدد کے بغیر درج ذیل تراکیب کا مساوی لکھیں

ا. $4^{\frac{1}{2}}$ ج. $(\frac{1}{4})^{-2}$ ھ. $(\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}$ ز. $4^2$

ب. $(\frac{1}{2})^2$ د. $4^{-\frac{1}{2}}$ و. $(\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$ ح. $((\frac{1}{4})^{\frac{1}{4}})^2$

سوال 3:

کیلکولیٹر کی مدد کے بغیر درج ذیل تراکیب کا مساوی لکھیں

ا. $8^{\frac{2}{3}}$ د. $27^{\frac{4}{3}}$ ز. $4^{2\frac{1}{2}}$ ي. $(3\frac{3}{8})^{\frac{2}{3}}$

ب. $4^{\frac{3}{2}}$ ھ. $32^{\frac{2}{5}}$ ح. $10\,000^{-\frac{3}{4}}$

ج. $9^{-\frac{3}{2}}$ و. $64^{-\frac{5}{6}}$ ط. $(\frac{1}{125})^{-\frac{4}{3}}$ يا. $(2\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}$

سوال 4: درج ذیل مساواتوں کو سادہ بنائیں

ا. $a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{5}{3}}$ ج. $(6c^{\frac{1}{4}}) \times (4c)^{\frac{1}{2}}$ ھ. $(2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}})^6 \times (\frac{1}{2}x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}})^4$

ب. $3b^{\frac{1}{2}} \times 4b^{-\frac{3}{2}}$ د. $(d^2)^{\frac{1}{3}} \div (d^{\frac{1}{3}})^2$ و. $(24e)^{\frac{1}{3}} \div (3e)^{\frac{1}{3}}$

ز. $\frac{(5p^2q^4)^{\frac{1}{3}}}{(25pq^2)^{-\frac{1}{3}}}$ ح. $(4m^3n)^{\frac{1}{4}} \times (8mn^3)^{\frac{1}{2}}$ ط. $\frac{(2x^2y^{-1})^{-\frac{1}{4}}}{(8x^{-1}y^2)^{-\frac{1}{2}}}$

سوال 5: درج ذیل مساواتوں کو حل کریں

ا. $x^{\frac{1}{2}} = 8$ ج. $x^{\frac{2}{3}} = 4$ ھ. $x^{-\frac{3}{2}} = 8$ ز. $x^{\frac{3}{2}} = x\sqrt{2}$

ب. $x^{\frac{1}{3}} = 3$ د. $x^{\frac{2}{3}} = 27$ و. $x^{-\frac{2}{3}} = 9$ ح. $x^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{x}$

سوال 6: $L$ میٹر لمبائی کی ایک لٹکن کو ایک گردش مکمل کرنے کے لیے $T$ وقت درکار ہے، جسے یوں لکھا جائے گا۔ $T = 2\pi l^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}$ جبکہ $g \approx 9.81ms^{-2}$ (ا)ایک 0.9 میٹر لمبی لٹکن کا وقت $T$ دریافت کریں۔ (ب) ایک ایسی لٹکن کی لمبائی معلوم کریں کہ جسے ایک گردش کے لیے تین سیکنڈ کا وقت درکار ہے۔

سوال 7: ایک کرے کے رداس $rcm$ اور حجم $Vcm^3$ کے درمیان تعلق $r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ بنتا ہے۔ ایک ایسے کرے کا رداس معلوم کریں جس کا حجم $1150cm^3$ ہو۔

سوال 8: درج ذیل مساواتوں کو حل کریں

ا. $4^x = 32$ د. $100^x = 1000$ ز. $(2t)^3 \times 4^{t-1} = 16$

ب. $9^y = \frac{1}{27}$ ھ. $8^y = 16$

ج. $16^z = 2$ و. $8^z = \frac{1}{128}$ ح. $\frac{9^y}{27^{2y+1}} = 81$

سوال 9: سادہ کریں .

ا. $5(\sqrt{2}+1) - \sqrt{2}(4 - 3\sqrt{2})$ ج. $(\sqrt{5}-2)^2 + (\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)$

ب. $(\sqrt{2})^4 + (\sqrt{3})^4 + (\sqrt{4})^4$ د. $(2\sqrt{2})^5$

سوال 10: سادہ کریں .

ا. $\sqrt{27}+\sqrt{12}-\sqrt{3}$
ب. $\sqrt{63}-\sqrt{28}$
ج. $\sqrt{100\,000}+\sqrt{1000}+\sqrt{10}$
د. $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{16}$

سوال 11: درج ذیل کے نسب نما کو ناطق بنائیں

ا. $\frac{9}{2\sqrt{3}}$
ب. $\frac{1}{5\sqrt{5}}$
ج. $\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{10}}$
د. $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{15}}$

سوال 12: سادہ کریں

ا. $\frac{4}{\sqrt{2}}-\frac{4}{\sqrt{8}}$
ب. $\frac{10}{\sqrt{5}}+\sqrt{20}$
ج. $\frac{1}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2}-1)+\sqrt{2}(1-\sqrt{8})$
د. $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}}$

سوال 13: $\frac{5}{\sqrt{7}}$ کو $k\sqrt{7}$ شکل میں بنا کر دکھائیں، جبکہ $k$ ایک ناطق عدد ہے۔

سوال 14: اس نتیجے کو درست ثابت کریں $\sqrt{12}\times\sqrt{75}=30$

(ا) غیر معقول اعداد کو استعمال کرتے ہوئے (ب) کسری طاقتیں استعمال کرتے ہوئے

سوال 15: اس شکل میں زاویہ $ABC$ اور $ACD$ قائم زاویے ہیں۔ اگر ہم جانتے ہوں کہ $AB=CD=2\sqrt{6}$ اور $BC=7cm$ تو ظاہر کریں کہ $AD$ کی لمبائی $4\sqrt{6}$ اور $7\sqrt{2}$ کے درمیان ہے۔

سوال 16: مثلث $PQR$ میں $Q$ ایک قائمہ زاویہ ہے۔ $PQ=(6-2\sqrt{2})cm$ اور $QR=(6+2\sqrt{2})cm$ (ا) مثلث کا رقبہ دریافت کریں (ب) ظاہر کریں کہ $PR$ کی لمبائی $2\sqrt{22}cm$ ہے۔

سوال 17: ترکیب $\sqrt{27} \times \sqrt[6]{\frac{4}{3}} \times \sqrt[3]{36}$ کے ہر جز کو طاقت میں لکھ کر سادہ بنائیں

سوال 18: ایک مثلث $ABC$ میں، $AB = 4\sqrt{3}cm$، $BC = 5\sqrt{3}cm$ اور زاویہ $B$ $60°$ ہے۔ کوسائن قاعدے کی مدد سے $AC$ کی لمبائی سادہ غیر معقول اعداد میں نکالیں۔

سوال 19: درج ذیل ہمزاد مساواتوں کو حل کریں $5x - 3y = 41$ اور $7\sqrt{2})x + (4\sqrt{2})y = 82$

سوال 20: اپنے کیلکولیٹر پہ موجود طاقت بنائیں والا بٹن استعمال کرتے ہوئے 5 معین اعداد تک جواب ڈھونڈیں (ا) $\frac{1}{3.7^5}$ (ب) $\sqrt[5]{3.7}$

سوال 21: نقاط $A$ اور $B$ کے محدد، بالترتیب $(2, 3)$ اور $(4, -3)$ ہیں۔ $AB$ کی لمبائی اور اس کے درمیانی نقطے کے محدد معلوم کریں۔

سوال 22: (ا) ایک خط $l$ کی مساوات دریافت کریں، جو نقطہ $A(2, 3)$ سے ڈھلوان $\frac{-1}{2}$ کے ساتھ گزر رہی ہو۔ (ب) ظاہر کریں کہ نقطہ $P$ جس کے محدد $(2 + 2t, 3 - t)$ ہیں، ہمیشہ $l$ پر رہے گا، بھلے $t$ کی قیمت کچھ بھی ہو۔ (ج) $t$ کی قیمت دریافت کریں، ایسے کہ $AP$ کی لمبائی 5 رہے۔ (د) $t$ کی قیمت دریافت کریں جب کہ $OP$ $l$ کے عمودی ہے۔ $O$ کو نقطہ آغاز مانتے ہوئے $OL$ عمودی خط کی لمبائی معلوم کریں

سوال 23: $P$ اور $Q$ ایک خط کے انقطاع کے نقطے ہیں اور $x$ اور $y$ محور بالترتیب سے ہیں۔

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

$PQ$ کا درمیانی فاصلہ 20 ہے اور اس کی ڈھلوان $-3$ ہے۔ اس سب کے ساتھ $a$ اور $b$ کی قیمت معلوم کریں۔

سوال 24: ایک چوکور کی اطراف ان خطوط پر موجود ہیں $y = 2x - 4, y = 2x - 13, x + y = 5$ اور $x + y = -4$۔ اس کی ایک سمت اور اس کے اور اس کے متوازی سمت کا درمیانی فاصلہ معلوم کریں۔ نیز اس چوکور کا رقبہ بھی دریافت کریں۔

سوال 25: درج ذیل کو عداد کی مدد کے بغیر حل کریں

ا. $+ \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ ب. $32^{-\frac{4}{5}}$ د. $\left(1\frac{7}{9}\right)^{1\frac{1}{2}}$

ج. $\left(4^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}$

سوال 26: ترکیب $\left(9a^4\right)^{-\frac{1}{2}}$ کو الجبرائی کسرے کی شکل میں لکھ کر سادہ بنائیں

سوال 27: $y = x^{\frac{1}{3}}$ سمجھتے ہوئے، $x$ کی قیمت معلوم کریں، جس کے لیے $1 = x^{\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}}$

سوال 28: مساوات $4^{2x} \times 8^{x-1} = 32$ کو حل کریں

سوال 29: ترکیب $\frac{1}{(\sqrt{a})^{\frac{4}{3}}}$ کو $a^n$ کی شکل میں لکھیں اور $n$ کی قیمت بتائیں۔

سوال 30: سادہ کریں .

ا. $(4p^{\frac{1}{4}}q^{-3})^{\frac{1}{2}}$ ج. $(2x^6y^8)^{\frac{1}{4}} \times (8x^{-2})^{\frac{1}{4}}$

ب. $\frac{(5b)^{-1}}{(8b^6)^{\frac{1}{3}}}$ د. $(m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{2}})^2 \times (m^{\frac{1}{6}}n^{\frac{1}{3}})^4 \times (mn)^{-2}$

سوال 31: یہ نظر میں رکھتے ہوئے کہ معیاری شکل میں $3^{236} \approx 4 \times 10^{112}$ اور $3^{-376} \approx 4 \times 10^{-180}$، درج ذیل تراکیب کے لیے معیاری شکل میں اندازے معلوم کریں

ا. $3^{376}$ ب. $3^{612}$ ج. $(\sqrt{3})^{236}$ د. $(3^{-376})^{\frac{5}{2}}$

سوال 32: ذیل میں دیا گیا جدول تین سیاروں کا سورج سے اوسط فاصلہ اور ایک گردش کے لیے درکار وقت بتا رہا ہے

(ا) دکھائیں کہ $r^3T^{-2}$ تینوں سیاروں کے لیے تقریباً ایک سی قیمت رکھتا ہے۔ (ب) زمین سورج کے گرد ایک چکر مکمل کرنے میں ایک سال لگاتی ہے، زمین کے مدار کا اوسط رداس معلوم کریں

سوال 33: سادہ کریں

(ا) $2^{\frac{3}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{3}{2}}$، اپنے جواب کو $k\sqrt{2}$ کی شکل میں لکھیں۔

(ب) $(\sqrt{3})^3 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^1 (\sqrt{3})^0 + (\sqrt{3})^{-1} + (\sqrt{3})^{-2} + (\sqrt{3})^{-3}$ ، اپنے جواب کو $a + b\sqrt{3}$ کی شکل میں لکھیں۔

سوال 34: درج ذیل میں سے ہر ایک کو $2^n$ کی شکل میں ظاہر کریں

ا. $2^{70} + 2^{70}$

ب. $2^{-400} + 2^{-400}$

ج. $2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$

د. $2^{100} - 299$

ھ. $8^{0.1} + 8^{0.1} + 8^{0.1} + 8^{0.1} + 8^{0.1} + 8^{0.1} + 8^{0.1} + 8^{0.1}$

سوال 35: مساوات کو حل کریں $\frac{25^{x-2}}{3125} = \frac{125^{3x}}{5^{x+4}}$

سوال 36: ایک کرے کے سطحی رقبے اور حجم کے کلیے بالترتیب $S = 4\pi r^2$ اور $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ہیں۔ جبکہ $r$ کرے کا رداس ہے۔ درجذیل کے لیے موزوں تراکیب بنائیے۔

(ا) سطحی رقبے کو حجم کے ذریعے لکھیں

(ب) حجم کو سطحی رقبے کے ذریعے لکھیں

سوال 37: $mKg$ وزن کے حامل اور $vms^{-1}$ رفتار سے حرکت کرنے والے ایک جسم کی حرکی توانائی $K$ کے لیے کلیہ $K = \frac{1}{2}mv^2$ ہے۔ اس کلیے کو مدنظر رکھتے ہوئے $2.5 \times 10^{-2}kg$ وزن رکھنے والی اور $8 \times 10^2 ms^{-1}$ رفتار سے حرکت کرنے والی گولی کی حرکی توانائی معلوم کریں۔

# باب 3

# تفاعل اور خم

اس سبق میں تفاعل کی بات کی گئی ہے اور ان تفاعل سے جڑے ترسیمات کا جائزہ لیا گیا ہے۔ اس سبق کو مکمل کر چکنے کے بعد آپ اس قابل ہونے چاہئیں کہ ؛

- تفاعل کو لکھنے کے طریقوں سے آگاہ ہوں ، اور سعت اور میدان عمل سے آگاہی حاصل کریں۔
- $x$ کی طاقتوں کے لیے ترسیمات کی شکلوں سے آگاہ ہوں۔
- مساوات $f(x) = ax^2 + bx + c$ کے ترسیمات کی شکلیں سمجھ سکیں۔
- ایسے تفاعل اور ترسیمات کی مساوات بنانے کے قابل ہو جائیں۔
- یہ سیکھ سکیں کہ اجزاء کے استعمال سے ترسیمات کیسے بنائے جاتے ہیں۔
- دو تفاعل کے مشترک نقاط معلوم کر سکیں۔

اگر آپ کے پاس ایک ترسیم بنانے والا اعداد ہے یا آپ کے کمپیوٹر میں کوئی ایسا پروگرام ہے جس کی مدد سے آپ ترسیم بنا سکیں تو اپ ذاتی طور پر تقابل کر سکتے ہیں اپنے پپاس بننے والے ترسیمات کا کتاب میں بنائے گئے ترسیمات سے۔

## 1.3 ایک تفاعل کی تعریف

آپ کلیوں سے پہلے ہی آگاہ ہیں جو کہ حساب کتاب کو بہت کم کر دیتے ہیں اور جن کو اکثر استعمال کرنا پڑتا ہے۔ مثال کے طور پر؛

ایک دائرہ جسکا رداس $x$ ہوگا اسکا حدود اربعہ $\pi x^2$ مربع میٹر ہوگا۔
ایک مکعب جس کی ایک طرف کی لمبائی $x$ میٹر ہے، اسکا حدود اربعہ $x^3$ مکعب میٹر ہوگا۔
اگر ہم $x$ کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے سفر کر رہے ہوں گے تو، $k$ کلومیٹر فاصلے طے کرنے کے لیے، $\frac{k}{x}$ گھنٹے کا وقت درکار ہوگا۔

اکثر آپ نے ان کلیوں میں $x$ کے بجائے دیگر حروف بھی دیکھے ہوں گے جیسے کہ رداس کے لیے $r$، رفتار کے لیے $s$ لیکن اس سبق میں ہم ہمیشہ $x$ ہی استعمال کریں گے ان کلیوں میں۔ اور جو مقدار آپ کو معلوم کرنا ہوگی اس کے لیے ہم $y$ استعمال کریں گے۔ ذرا غور کرین کہ ان کلیوں میں بعض اوقات دیگر حروف یا علامات بھی ہوتی ہیں، انہیں ہم مستقل اعداد کہتے ہیں، یہ یا تو $\pi$ کی طرح کا کوئی عدد ہو سکتی ہیں جو کہ غیر ناطق ہوں اور آپ انکی پوری عددی قیمت نہیں لکھ سکتے، لیکن ان کی قیمت ایک مستقل ہے جسے بدلا نہیں جا سکتا۔ یا تو کوئی ایسی مقدار ہو سکتی ہے جسے آپ خود بیان کریں گے جیسے کہ فاصلہ $k$، جس کی قیمت آپ نے خود سے طے کرنی ہے کہ آپ نے کتنا فاصلہ طے کیا۔

ریاضیاتی بیانیے جیسا کہ $\pi x^2$، $x^3$ اور $\frac{k}{x}$ انہیں ہم $x$ کے تفاعل کہہ سکتے ہیں۔ $x$ کی ایک قیمت، جو بھی آپ چنیں، کے لیے آپ کو $y$ کی ایک قیمت ملے گی۔

عموماً تفاعل لکھنے کے طریقوں پر زیادہ توجہ دی جاتی ہے، بجائے چند مخصوص تفاعل کی مثال دینے کے، تفاعل کے لیے جو علامے استعمال کی جاتی ہے وہ ہے $f(x)$، جسے یوں پڑھا جائے گا (ایف آف ایکس یا بعض اوقات صرف ایف ایکس کہنا بھی کافی ہوگا۔) ایف $f$ تفاعل کے خود کے لیے استعمال ہوتا ہے جبکہ $x$ وہ مقدار ہے جس کے لیے تفاعل کا استعمال کرنا ہے۔

اگر آپ $x$ کی کسی قیمت کے لیے تفاعل کی کسی قیمت کی طرف اشارہ کرنا چاہتے ہیں، کہہ لیں کہ $X = 2$ کے لیے تفاعل کی قیمت کیا ہوگی تو آپ اسے $f(2)$ ایسے لکھیں گے۔ اور اگر آپکا تفاعل $F(X) = X^3$ ہے تو آپ کہہ سکتے ہیں کہ $f(2) = 2^3 = 8$ اگر کسی مثال میں ایک سے زیادہ تفاعل استعمال ہو رہے ہوں تو آپ ان تمام تفاعل کے لیے مختلف حروف استعمال کر سکتے ہیں۔ جیسا کہ $f(x)$ اور $g(x)$۔

یہ لازمی نہیں کہ ہمیشہ ایک الجبرائی کلیہ ہی تفاعل کو بیان کرے، بعض اوقات ایک جملہ، ایک عملی خاکہ یا ایک کمپیوٹر کا پروگرام ایک تفاعل کو زیادہ بہتر طور پر کر سکتا ہے۔ آپ تفاعل کو کیسے بھی بیان کریں بس اس بات کا خیال رکھیں کہ $x$ کی ایک قیمت کے لیے $y$ کی ایک ہی قیمت اور وہ بھی نایاب قیمت آئے۔

## 2.3 ترسیم، عملی میدان اور سعت

آپ جانتے ہیں کہ ترسیم کیسے بنائے جاتے ہیں۔ آپ کارتیسی نظام محدد کے لیے محدد چنتے ہیں۔ اور پھر افقی اور عمودی محوروں کے لیے پیمانے بناتے ہیں۔

یہ محور پرچے یا کاغذ کو چار حصوں میں تقسیم کر دیتے ہیں، جیسا کہ شکل شکل1.3 میں دکھایا گیا ہے۔ پہلے خانے میں $x$ اور $y$ دونوں مثبت ہیں ،دوسرے خانے میں $x$ منفی اور $y$ مثبت ہے، تیسرے خانے میں $x$ اور $y$ دونوں منفی ہیں جبکہ چوتھے خانے میں $x$ مثبت اور $y$ منفی ہے۔

مثال 1.3: کس خانے میں $xy > 0$؟

اگر دو اعداد کا ضرب مثبت ہے تو اسکا مطلب یہ ہوا کہ یا تو دونوں اعداد مثبت ہیں یا دونوں منفی ہیں، لہذہ ہم کہہ سکتے ہیں کہ $0 < x$ اور $0 < y$ یا $x < 0$ اور $y < 0$، لہذہ ہم وثوق سے کہہ سکتے ہیں کہ نقطہ $(x, y)$ یا تو پہلے خانے میں ہے یا تیسرے خانے میں۔ □

اکثر $y$ -محور کو عمودی محور کہہ دیا جاتا ہے اور اسی طرح $x$ -محور کو افقی محور کہہ دیا جاتا ہے۔ لیکن اگر آپ ترسیم ایک افقی سطح جیسا کہ ایک میز یا ایک کاغذ پر بنا رہے ہیں تو اوپر بتایا گیا بیان سو فیصد درست نہیں ہوگا۔

ایک تفاعل $f(x)$ کی ترسیم بنانے میں ان تمام نقطوں کو استعمال کیا جاتا ہے جنکے محدد $(x, y)$، ہماری مساوات $y = f(x)$ کو درست ثابت کریں۔ جب آپ ہاتھ سے ترسیم بنا رہے ہوتے ہیں تو آپ $x$ کی قیمتیں چنتے ہین اور انکے لیے $y = f(x)$ کو حل کرتے ہیں۔ اور پھر آپ ان نقطوں پر نشان لگا دیتے ہیں جن کے محدد $(x, y)$ ہونگے اور ان نقطوں کو جوڑنے سے آپ کا ترسیم بن جائے گا۔ اگر آپ نے یہ صحیح سے کیا ہے تو اس ترسیم پر موجود دوسرے نقطوں کے محدد بھی اس مساوات کو درست ثابت کریں گے جس کے لیے آپ نے ترسیم بنایا ہے۔ کمپیوٹر اور ترسیمی اعداد بھی اسی طرح سے ہی ترسیم بناتے ہیں لیکن وہ ذیادہ نقطوں کی مدد سے کم وقت میں ترسیم بنانے کے قابل ہوتے ہیں۔

چند مساوات جیسے کہ $y = mx + c$ اور $y = x^2$ کے ترسیمات پوری طرح سے نہیں بنائے جا سکتے ، آپ پیمانہ جتنا بھی چھوٹا کر لیں اور کاغذ جتنا بھی بڑا کر لیں ترسیم کناروں سے باہر نکلے گا۔ اور ایسا اس لیے ہو رہا ہے کہ ایسے ترسیاات میں $x$ کوئی بھی حقیقی عدد ہو سکتا ہے جتنا برا آپ سوچ سکیں دونوں مثبت اور منفی محورووں میں تو ایسے ترسیم کو کاغذ میں مقید کر پانا بہت مشکل ہے، بلکہ نا ممکن ہے۔ اب ایسے ترسیمات بنانے ہوں تو آپکی مہارت کا سوال ہے کیونکہ آپ نے $x$ کی وہ قیمتیں چننی ہیں کہ ترسیم کے سارے نمایاں خدوخال واضع ہو جائیں۔

آپ کا چند ایسے تفاعل سے بھی پالا پڑا ہوگا جو کہ تمام حقیقی اعداد پر معین نہیں ہیں۔مثال کے طور پر $\frac{1}{x}$، جسکا کوئی مطلب نہیں ہے جب $x$ صفر ہوگا، اسی طرح سے $\sqrt{x}$ جسکا کوئی مطلب نہیں ہے جب $x$ منفی ہوگا۔ ہم ایک اور مثال دیکھیں گے اور اس مثال میں $x$ کی قیمت پر پابندی بھی لگائی گئی ہے۔

مثال 2.3: مساوات $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ کا مکمل ترسیم بنائیں۔

آپ اس تفاعل کی جوابی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں بشرطیکہ $x$ کی قیمت $-2$ اور $2$ کے درمیان ہو۔ اگر $x > 2$ یا $x < -2$ تو تفاعل $4 - x^2$ کی ایک منفی قیمت آئے گی اور منفی قیمت کا جذر نہیں لیا جا سکتا۔

تفاعل $y = f(x)$ کبھی بھی منفی نہیں ہو سکتا (جذر ہمیشہ مثبت ہوتے ہیں یا صفر ہوتے ہیں) اور یہ 2 سے بڑا بھی نہیں ہو سکتا۔ لہٰذہ تفاعل $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ کا ترسیم ،جیسا کہ شکل 2.3 میں دکھایا گیا ہے، افقی محور پے 2 اور $-2$ کے درمیان ہوگا جبکہ عمودی محور میں اسکی بلندی صفر سے لے کر 2 تک ہوگی۔ □

اگر آپ ایسا تفاعل بھی استعمال کر رہے ہوں جو کہ تمام حقیقی $x$ کے لیے معین ہو ، آپ اس میں صرف اسی وقت دلچسپی لیں گے جب $x$ پر کسی قیم کی پابندی لگی ہوئی ہو۔ مثال کے طور پر ایک مکعب کے حجم کا کلیہ $V = x^3$ ہے، اگرچہ آپ $x$ کی قیمت کسی بھی حقیقی عدد کے لیے معلوم کر سکتے ہیں لیکن ایسا آپ صرف $x$ کی مثبت قیمتوں کے لیے کرتے ہیں۔

اب ہم ایک ایسی مثال حل کرتے ہیں جس میں $x$ کو ایک متناہی فاصلے کے لیے پابند کیا گیا ہے۔

مثال 3.3: ایک تار جسکی لمبائی 4 میٹر ہے اسے دو حصوں میں کاٹا گیا ہے ، اور ہر حصے کو موڑ کر ایک مربع بنایا گیا ہے، اس تار کو کسطرح سے کاٹا جائے کہ دونوں مربع بیقوقت ،

ا. کم سے کم حدود اربعہ رکھتے ہوں

ب. ذیادہ سے ذیادہ حدود اربعہ رکھتے ہوں

فرض کریں دونوں ٹکڑوں کی لمبائی $x$ میٹر اور $(4 - x)$ میٹر ہے۔ اگر لمبائیاں یہ فرض کر لی جائیں تو دونوں مربعوں کا حدود اربعہ ، جیسا کہ شکل 3.3 میں دکھایا گیا ہے، $\left(\frac{1}{4}x\right)^2$ اور $\left(\frac{1}{4}(4 - x)\right)^2$ ہوگا۔ لہٰذہ کل حدود اربعہ جسے $y$ سے ظاہر کیا جائے گا ہوگا؛

$$y = \frac{1}{16}(x^2 + (16 - 8x + x^2)) = \frac{1}{8}(x^2 - 4x + 8)$$

غور کریں کہ کیونکہ $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$، ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ $y = \frac{1}{8}\left((x-2)^2 + 4\right)$۔ آپ اس ریاجیاتی بیانیے کی قیمت کسی بھی $x$ کے لیے معلوم کر سکتے ہیں، لیکن اگر مسئلہ کو سمجھیں تو ہمیں صرف $0 < x < 4$ کے درمیان کی کسی قیمت کے لیے بیانیے کو حل کرنا ہے۔ شکل4.3 میں اسی کا ایک ترسیم بنایا گیا ہے، کیونکہ $(x-2)^2 \geq 0$، حدود اربعہ کم سے کم ہے جب $x = 2$ ہے اور اس نقطے پر حدود اربعہ $0.5$ مربع میٹر ہے۔

ترسیم دیکھنے سے ایسا معلوم ہوتا ہے کہ زیادہ سے زیادہ حدود اربعہ یعنی $1$ مربع میٹر اس وقت ملے گا جب $x = 0$ یا $x = 4$ ہو، لیکن ہم ان قیمتوں کو اس لیے اہمیت نہیں دے رہے کہ سوالل میں بتایا گیا تھا تار کو دو ٹکروں میں تقسیم کرنے کا اگر ہم $x$ کی یہ قیمتیں لیں تو تار کٹی ہی نہیں۔ اس لیے زیادہ سے زیادہ حدود اربعہ کے مربع بنا ہی نہیں، یا ہم یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ زیادہ سے زیادہ حدود اربعہ کا مربع کا حدود اربعہ ہم معلوم نہیں کر سکتے۔ □

ایک تفاعل $x$ کی کسی بھی قیمت کے لیے معین کیوں نہیں ہوگا اسکی دو وجوہات ہو سکتی ہیں۔

ا. تفاعل $f(x)$ کو بیان کرنے والا بیانیہ صرف ایک یا چند $x$ کی قیمتوں کے لیے کوئی معنی رکھتا ہوگا یا معین ہوگا۔

ب. جن معنی میں یہ تفاعل لیا جا رہا ہے ان میں صرف چند $x$ ہی کام کے ہوں گے

تفاعل $x$ کی جن حقیقی قیمتوں کے لیے معین ہوتا ہے اور کوئی جواب بھی دیتا ہے ان تمام قیمتوں کو تفاعل کا میدان عمل کہا جاتا ہے۔ مثلاً مثال مثال2.2.3 میں تفاعل کا میدان عمل $-2 \leq x \leq 2$ تھا، اور اسی طرح مثال مثال3.2.3 میں تفاعل کا میدان عمل $0 < x < 4$تھا۔ تفاعل $\frac{1}{x}$ کا وسیع ترین میدان عمل تمام حقیقی اعداد ہیں سوائے صفر کے، لیکن اگر اس تفاعل کو کسی عام مسئلے میں استعمال کیا جا رہا ہوگا تو آپ اسکا قدرے چھوٹا میدان عمل استعمال کریں گے جیسے کہ تمام مثبت حقیقی اعداد۔

ایک بار آپ نے ایک تفاعل $f(x)$ کا میدان عمل طے کر لیا تو اب نیا سوال یہ اٹھتا ہے کہ میدان عمل کی قیمتوں کے جواب میں کونسی قیمتیں آئیں گی؟ کسی تفاعل کے میدان عمل کی جوابی قیمتوں کو اس تفاعل کی سعت کہا جاتا ہے۔ مثلاً مثال مثال2.2.3 میں تفاعل کی سعت $0 \leq y \leq 2$ تھی، اور اسی طرح مثال مثال3.2.3 میں تفاعل کی سعت $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$ تھی۔ غور کریں کہ قیمت $y = \frac{1}{2}$ آتی ہے جب $x = 2$ ہو، لیکن قیمت $y = 1$ نہیں حاصل کی جا سکتی اگر $0 < x < 4$۔ تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ جسکا میدان عمل تمام حقیقی اعداد ہیں سوائے صفر کے تو اسکی سعت بھی تمام حقیقی اعداد ہیں سوائے صفر کے۔

سوال 1: ہمیں بتایا گیا ہے کہ تفاعل $f(x) = 2x + 5$, ہے، درجذیل کی قیمتیں معلوم کریں،

ا. $f(3)$
ب. $f(0)$
ج. $f(-4)$
د. $f(-2\frac{1}{2})$

سوال 2: ہمیں بتایا گیا ہے کہ تفاعل $f(x) = 3x^2 + 2$ ہے، درج ذیل کی قیمتیں معلوم کریں،

ا. $f(4)$
ب. $f(\pm 1)$
ج. $f(\pm 3)$
د. $f(3)$

سوال 3: ہمیں بتایا گیا ہے کہ تفاعل $f(x) = x^2 + 4x + 3$ ہے، درج ذیل کی قیمتیں معلوم کریں،

ا. $f(2)$
ب. $f(\frac{1}{2})$
ج. $f(\pm 1)$
د. $f(\pm 3)$

سوال 4: ہمیں بتایا گیا ہے کہ $g(x) = x^3$ اور $h(x) = 4x + 1$ ہے۔ درج ذیل معلوم کریں۔

ا. $g(2) + h(2)$
ب. $3g(-1) - 4h(-1)$
ج. $g(5) = h(31)$
د. $h(g(2))$

سوال 5: ہمیں بتایا گیا ہے کہ $f(x) = x^n$ اور $f(3) = 81$، $n$ کی قیمت معلوم کریں۔

سوال 6: ہمیں بتایا گیا ہے کہ $f(x) = ax + b$ اور $f(2) = 7$ اور $f(3) = 12$، $a$ اور $b$ کی قیمت معلوم کریں۔

سوال 7: درج ذیل تفاعل کا وسیع ترین میدان عمل بیان کریں۔

ا. $\sqrt{x}$
ب. $\sqrt{-x}$
ج. $\sqrt{x-4}$
د. $\sqrt{4-x}$
ھ. $\sqrt{x(x-4)}$
و. $\sqrt{2x(x-4)}$
ز. $\sqrt{x^2 - 7x + 12}$
ح. $\sqrt{x^3 - 8}$
ط. $\frac{1}{x-2}$
ي. $\frac{1}{\sqrt{x-2}}$
یا. $\frac{1}{1+\sqrt{x}}$
یب. $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$

سوال 8: درج ذیل تفاعل کا میدام عمل تمام حقیقی اعداد ہیں، انکی سعت معلوم کریں۔

ا. $f(x) = 2x + 7$ ج. $f(x) = 3x - 1$ ھ. $f(x) = (x+2)^2 - 1$

ب. $f(x) = -5x$ د. $f(x) = x^2 - 1$ و. $f(x) = (x-1)^2 + 2$

سوال 9: درج ذیل تمام تفاعل کی سعت معلوم کریں، تمام تفاعل $x$ کی تمام حقیقی قیمتوں کے لیے معین ہیں۔

ا. $f(x) = x^2 + 4$ د. $f(x) = -(1-x)^2 + 7$

ب. $f(x) = 2(x^2 + 5)$ ھ. $f(x) = 3(x+5)^2 + 2$

ج. $f(x) = (x-1)^2 + 6$ و. $f(x) = 2(x+2)^4 - 1$

سوال 10: دیے گئے تمام تفاعل بتائے گئے عملی میدان کے لیے معین ہیں، ان تمام تفاعل کی سعت معلوم کریں۔

ا. $f(x) = 2x$ اور $0 \le x \le 8$ ج. $f(x) = x^2$ اور $-1 \le x \le 4$

ب. $f(x) = 3 - 2x$ اور $-2 \le x \le 2$ د. $f(x) = x^2$ اور $-5 \le x \le -2$

سوال 11: درجذیل تمام تفاعل کی سعت معلوم کریں، تما تفاعل $x$ کے عملی میدان کی بڑی سے بڑی قیمتوں کے لیے معین ہیں۔

ا. $f(x) = x^8$ د. $f(x) = \frac{1}{x^4}$ و. $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}$ ح. $f(x) = \sqrt{4 - x}$

ب. $f(x) = x^{11}$

ج. $f(x) = \frac{1}{x^3}$ ھ. $f(x) = (x)^4 + 5$ ز. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

سوال 12: تار کا ایک ٹکڑا جو کہ 24 سینٹی میٹر لمبا ہے، اور ایک مستطیل کی شکل کا ہے۔ ہمیں بتایا گیا ہے کہ اسکی چوڑائی $w$ سینٹی میٹر ہے۔ ثابت کریں کہ حدود اربعہ $A$ مربع سینٹی میٹر تفاعل $A = 36 - (6 - w)^2$ کے برابر ہے۔ اس تفاعل کے عملی دائرے کی سب سے بڑی قیمت کا پتہ لگائیں اور ساتھ میں اس کی اسی قیمت پے سعت کا بھی۔

سوال 13: تفاعل $y = x(8 - 2x)(22 - 2x)$ کی ترسیم بنائیں۔ ہمیں بتایا گیا ہے کہ اس مکعب کا حجم $y$ مکعب سینٹی میٹر ہے اگر اسکی بلندی $x$ سینٹی میٹر ہو، لمبائی $(22 - 2x)$ اور چوڑائی $(8 - 2x)$ ہو تو۔ اوپر بتائے گئے تفاعل کے لیے عملی دائرہ بھی بتائیں۔

## 3.3 $x$ کی طاقتوں کے ترسیم

### 1.3.3 مثبت صحیح عددی طاقتیں

تفاعل $f(x) = x^n$ کی طرح کے ترسیم کو ذہن میں لائیں، جبکہ $n$ ایک مثبت عدد ہے۔ غور کریں $(0,0)$ اور $(1,1)$ سے تفاعل $y = x^n$ معین ہوتا ہے $n$ کی تمام قیمتوں کے لیے، اور اسی وجہ سے تمام ترسیمات میں $(0,0)$ اور $(1,1)$ نقطے لازمی موجود ہیں۔

پہلے ترسیم کو دیکھیں جب $x$ مثبت ہے، تب $x^n$ بھی مثبت ہے اور ترسیم پورے کا پورا پہلے خانے میں آجاتا ہے۔ شکل 5.3 میں $n = 1, 2, 3$ اور $4$ کے لیے ترسیمات دکھائے گئے ہیں جن میں $x$ کی قیمت صفر سے $1$ کے بیچ رہ رہی ہے۔

خیال رکھنے کے نقطے یہ ہیں کہ ؛

- اگر $n = 1$ ہو تو یہ ایک مخصوص معاملہ ہے اور جسکی ترسیم $y = x$ والی بنتی ہے، جو کہ مبدا سے گزرتی ہے اور دونوں محوروں کے ساتھ $45^0$ درجے کو زاویہ بناتی ہے۔
- اگر $n > 1$ تو افقی محور مبدا پہ ترسیم کا خط مماس بن جائے گا، اور یہ اس لیے کہ جب $x$ کی قیمت چھوٹی ہو تو $x^n$ بھی چھوٹا ہوگا، مثال کے طور پر $(0.1)^2 = 0.01,\ (0.1)^3 = 0.001, (0.1)^4 = 0.0001$
- طاقت $n$ میں ہونے والی ہر بڑھوتری کے ساتھ ، ترسیم افقی محور کے قریب ہی رہتا ہے $x = 0$ اور $x = 1$ کے درمیان، لیکن پھر $x = 1$ کے بعد بہت کم ڈھلوان کے ساتھ بلندی کی طرف بڑھتا ہے۔ اور یہ اس لیے ہوتا ہے کہ $x^{n+1} = x \times x^n$ اور اسی لیے $x^{n+1} < x^n$ جب $0 < x < 1$ اور $x^{n+1} > x^n$ جب $x > 1$۔

اگر $x$ منفی ہو تو آگے کیا ہوگا یہ منحصر ہوتا ہے کہ آیا $n$ جفت ہے یا طاق۔ فرض کریں کہ $x = -a$ جبکہ $a$ ایک مثبت عدد ہے۔

اگر طاقت $n$ جفت ہے تو $f(-a) = (-a)^n = a^n = f(a)$ ، یعنی ترسیم پر $y$ کی قیمت وہی رہے گی مساوات $x = -a$ اور $x = a$ کے لیے۔ یعنی ہمارا ترسیم عمودی محور کے ساتھ تشاکل کی خصوصیت رکھتا ہے۔ یہی بات شکل 6.3 میں ترسیمات $y = x^2$ اور $y = x^4$ کے لیے بیان کی گئی ہے۔ وہ تفاعل جن میں $a$ کی تمام قیمتوں کے لیے یہ خصوصیت ہو کہ $f(-a) = f(a)$ تو ایسے تمام تفاعل کو جفت تفاعل کہا جائے گا۔

اگر $n$ طاق ہوگا تو، $f(-a) = (-a)^n = -a^n = -f(a)$۔ $x = -a$ کے لیے $y$ کی قیمت $x = a$ کی قیمت کے برابر ہے لیکن ایک منفی کی علامت کے ساتھ۔۔ غور کریں کہ نقاط جن کے محدد $(a, a^n)$ اور $(-a, -a^n)$ ہیں مبدا کے دونوں اطراف تشاکل کی خصوصیت پر عمل پیرا ہوتے ہوئے موجود ہیں۔ اسکا مطلب یہ پوری ترسیم مبدا کے ساتھ تشاکل میں ہے۔ یہ شکل 7.3 میں $y = x$ اور $y = x^3$ کے ترسیمات کے لیے واضح کی گئی ہے۔ تفاعل جن میں یہ خصوصیت ہو کہ $f(-a) = -f(a)$ تو ایسے تفاعل کو طاق تفاعل کہا جاتا ہے۔

### 2.3.3 منفی صحیح عددی طاقتیں

آپ کسی بھی منفی عدد صحیح $n$ کو $-m$ لکھ سکتے ہیں جبکہ $m$ ایک مثبت عدد صحیح ہے۔ اور یوں $x^n$ بن جائے گا $x^{-m}$ یا $\frac{1}{x^m}$۔ ایک مرتبہ پھر ہم ابتدا کریں گے ترسیم کے مثبت یعنی سادہ حصے سے، یعنی جب $x$ مثبت ہوگا، ایسی صورتحال میں $\frac{1}{x^m}$ بھی مثبت ہوگا اور ترسیم پہلے خانے میں بنے گا۔ بالکل ایسے ہی جیسے کہ $n$ مثبت ہو نقطہ $(1,1)$ ترسیم پر ہی موجود ہوگا لیکن اگر $x = 0$ ہو تو ایک بڑا فرق ہوگا، کیونکہ $x^m = 0$ ہو جائے گا اور ایسی صورتحال میں $\frac{1}{x^m}$ غیر معین ہوگا، لب لباب ساری بات کا یہ ہے کہ ہمارے ترسیم پے کوئی بھی ایسا نقطہ نہیں ہوگا جسکے لیے $x = 0$ ہو۔ اس پر اگر مزید گہری نگاہ ڈالی جائے، $x$ کی کوئی قیمت فرض کریں جو کہ صفر کے قریب ہو جیسے کہ $0.01$ ، تب اگر $n = -1$ ہوا تو $Y$ کی قیمت $0.01^{-2} = \frac{1}{0.01^2} = \frac{1}{0.0001} =$ کے لیے $n = -2$ ہوگی اور اسی طرح $0.01^{-1} = \frac{1}{0.01^1} = \frac{1}{0.01} = 100$ $10000$ اگر آپ بہت چھوٹا پیمانہ بھی استعمال کریں تو $x^n$ کا ترسیم صفحے کےاوپری حصے سے بالکل غائب ہو جائے گا جیسے جیسے $x$ کی قیمت کو صفر کے مزید قریب لایا جائے گا۔

کیا ہوگا اگر $x$ بہت بڑا ہو ؟ مثال کے طور پے فرض کر لیں کہ $x = 100$ پھر $n = -1$ کے لیے $y$ کی قیمت $0.01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{100^1} = n = -1100^{-1}$ ہوگی۔ اور اگر $n = -2$ کر دیا جائے تو یہ $n = -2100^{-2} = \frac{1}{100^2} = \frac{1}{10000} = 0.0001$ ہو جائے گی۔لہٰذہ ہم کہہ سکتے ہیں کہ جیسے جیسے $x$ کی قیمت کم ہوتی ہے ترسیم افقی محور کے قریب تر آتا جاتا ہے۔

اب ترسیم کے اس حصے پر غور کریں جس کے لیے $x$ منفی ہے۔ ہم نے اوپر دیکھا کہ مثبت $n$ کے لیے ، انحصار اس بات پر ہوتا ہے کہ آیا $n$ جفت ہے یا تاق۔ اور اگر $n$ منفی ہو تب بھی یہی بات درست ہے اور اسی وجہ سے درست ہے۔ اگر $n$ جفت ہے تو $x^n$ ایک جفت تفاعل ہے اور اسکا ترسیم عمودی محور کے ساتھ تشاکل میں ہوگا۔ اور اگر $n$ تاق ہوگا تو تفاعل $x^n$ بھی تاق ہوگا اور یہ مبدا کے ساتھ تشاکل میں ہوگا۔

شکل شکل 8.3 میں ترسیم $y = x^n$ دکھایا گیا ہے اور اس میں $n = -1$ اور $n = -2$ کو مدنظر رکھتے ہوئے یہ ترسیم بنائے گئے ہے۔

### 3.3.3 کسر کی صورت میں طاقتیں

جب $n$ کسر کی صورت میں ہو ، تفاعل $x^n$، $x$ کی منفی قیمتوں کے لیے معین ہو بھی سکتا ہے اور نہیں بھی ہو سکتا۔ مثال کے طور پر $x^{\frac{1}{3}}$ اور $x^{-\frac{4}{5}}$ معین ہیں جب $x > 0$، لیکن $x^{-\frac{1}{2}}$ اور $x^{-\frac{3}{4}}$ کے ساتھ ایسا معاملہ نہیں ہے۔ بے شک $x^n$ کسی منفی $x$ کے لیے معین بھی ہو لیکن زیادہ تر اعداد اور کمپیوٹر انہیں حل نہیں کرتے۔ لہٰذہ ہمارے لیے زیادہ بہتر ہے کہ ہم اس سارے بیانیے کو $x \geq 0$ تک مختصر کر لیں۔ ان تفاعل کے ترسیمات بنانے کا سب سے آسان طریقہ ہے کہ انکا تقابل کیا جائے اعداد صحیح کے ترسیمات سے۔ ذیل میں اسکی دو مثالیں دی گئی ہیں۔

تفاعل $y = x^{\frac{5}{2}}$ کی ترسیم کو کہیں نا کہیں $y = x^2$ اور $y = x^3$ کی ترسیمت کے درمیان میں موجود ہونا چاہئیے۔

تفاعل $y = x^{-\frac{1}{2}}$ کی تترسیم غیر معین ہو جاتی ہے جب $x = 0$ ہو تو۔ اسکی ترسیم تفاعل $y = x^{-1}$ کی ترسیم سے ملتی جلتی ہے لیکن یہ اس سے نیچے بنتی ہے جب $x < 1$ اور اوپر بنتی ہے جب $x > 1$

اگر آپ کے پاس ترسیم بنانے والا اعداد ہے تو آپ خود بھی اس چیز کا تجربہ کر سکتے ہیں کسر کی صورت میں طاقت رکھنے والاے تفاعل کی ترسیا بنا بنا کے ، اگر آپ ایسا کر لیں تو آپ بھی مندرجہ ذیل نتائج تک پہنچیں گے۔

- تفاعل $x^n$ کے ترسیم میں ابھی بھی نقطہ $(1,1)$ موجود ہے۔
- اگر $n$ مثبت ہے تو تترسیم میں ایک اور نقطہ$(0,0)$ بھی لازمی موجود ہوگا
- اگر $n > 1$ ہے تو افقی محور ترسیم کا خط مماس بن جائے گی، اگر $0 < n < 1$ تو عمودی محور ترسیم کا خط مماس بن جائے گی۔ (اسے ذیادہ بہتر طور پر دیکھ پانے کے لیے آپ کو ترسیم کے مبدا کے قریبی حصے کو بڑا کر کے دیکھنا ہوگا۔)

ان تمام ترسیمات میں سب سے ذیادہ اہمیت کے حامل $y = x^{\frac{1}{2}}$ اور $y = \sqrt{x}$ کے ترسیم ہیں۔ ااس ترسیم کی شکل کیسی ہوگی / یہ معلوم کرنے سکے لیے ذرا سوچیں کہ اگر $y = x^{\frac{1}{2}}$ تب $x = y^2$، یعنی ترسیم $y = x^2$ کی ہی بنانی ہے لیکن محوروں کو آپس میں ادلہ بدلی کر کے یعنی افقی محور کو عمودی محور بنا دیں اور عمودی محور کو افقی محور بنا دیں۔ اور یوں ہمارا ترسیم اوپر کی جانب کھلا ہونے کے بجائے دائیں جانب کھلا ہوا ہے۔

لیکن ابھی داستان مکمل نہین ہوئ ، کہ داستان مکلمل ہوتے ہوتے ہو گی، اگر $x = y^2$ تب یا تو $y = +\sqrt{x}$ یا پھر $y = -\sqrt{x}$ اور چونکہ آپ ان میں سے پہلے معاملے کے ساتھ ہی خوش ہیں تو آپ کو تفاعل $x = y^2$ کی ترسیم کا ایک حصہ ، جو کہ افقی محور کے نیچے کا ہے اسے مٹتا دینا ہوگا، صرف اوپری حصے کو باقی رہنے دینا ہے جیسا کہ شکل9.3 میں دکھایا گیا ہے تفاعل $y = x^{\frac{1}{2}}$ یا $y = \sqrt{x}$ کا ترسیم۔

## 4.3 ایک عدد کا مقیاس

فرض کریں آپ دو لوگوں کی بلندیون میں فرق کو ماپنا چاہتے ہیں، عددی معلومات مہیا کی گئ ہوں تو جواب سیدھا سا ہوگا، اگر انکی بلندیاں 90 سینٹی میٹر اور 100 سینٹی میٹر ہیں تو آپکا جواب ہوگا 10 سینٹی میٹر، اور اگر انکی بلندیاں 100 اور 90 سینٹی میٹر ہوتیں تب بھی آپ کا جواب 10 سینٹی میٹر ہی ہوتا۔لیکن ککیا ہو اگر انکی بلندیاں $H$ سینٹی میٹر اور $h$ سینٹی میٹر ہوں، اسکا جواب اس بات پر منحصر ہوگا کہ کونسی قیمت بڑی ہے اگر $Hgh$ ہو تو آپکا جواب ہوگا $(H-h)$ سینٹی میٹر۔ اگر $hgH$ ہو تو آپکا جواب ہوگا $(h-H)$، اور اگر$(h = H)$ ہو تو آپکا جواب ہوگا صفر سینٹی میٹر، جو کہ یا تو $(h-H)$ سینٹی میٹر ہے یا $(H-h)$ سینٹی میٹر ہے۔

اس طرح کے سوالات جن کے جوابات ہمیشہ مثبت یا منفی میں ہوتے ہیں مقیاس کی ضرورت کا بڑھا دیتے ہیں۔

$x$ کا مقیاس جیسے یوں $|x|$ لکھا جاتا ہے اور اسے "ماڈ ایکس" پڑھا جاتا ہے، اسکی تعریف کچھ یوں ہے۔

$$|x| = x \quad x \geq 0$$

$$|x| = -x \quad x < 0$$

مقیاس کی علامت استعمال کرتے ہوئے آپ اب بلندی کو $|H - h|$ لکھ سکتے ہیں جس میں $hgH$، $hH$ یا $h = H$ ہو سکتے ہیں۔

ایک اور صورتحال جس میں معیار یا مقیاس کارآمد ہوتا ہے وہ ہے جب کوئی ہندسہ عددی اعتبار میں تو بہت بڑا ہو، لیکن منفی ہو جیسا کہ $-1000$ یا $-1000000$ ، ایسے اعدادا کو آپ بڑے مقیاس والے منفی اعداد کہہ سکتے ہیں۔

مثال کے طور پر $x$ کی قیمت جوں جوں بڑھے گی ، $\frac{1}{x}$ کی قیمت گھٹتی جائے گی یہاں تک کہ یہ صفر کے قریب ترین پہنچ جائے گی۔ اور $x$ کے بڑے مقیاس والی منفی قیمتوں کے لیے بھی یہ بات درست ہے۔ اور اسی لیے آپ کہہ سکتے ہیں کہ جب $|x|$ بڑا ہوگا تو $\left|\frac{1}{x}\right|$ صفر کے قریب ترین ہوگا۔ اور اگر عددی مثال دیکھیں تو جب $|x| > 1000$ تو $\left|\frac{1}{x}\right| < 0.001$ ہوگا۔ شکل شکل10.3 دیکھیں۔

کچھ حساب کتاب کے آلات میں ایک بٹن موجود ہوتا ہے جو کسی بھی عدد کا مقیاس بتاتا ہے۔ اس بٹن پر اکثر $[ABS]$ درج ہوتا ہے جو کہ مقیاس قیمت کا مآخذ ہے۔

اگر آپ کے پاس ترسیم بنانے والا اعداد ہے تو آپ سوالات سوال3ب4،سوال3ب5،سوال3ب6 کی ترسیم بھی بنا کر دیکھیں۔

سوال 1: درج ذیل مساوات کی ترسیم بنائیں۔

ا. $y = x^5$

ب. $y = x^6$

ج. $y = x^{10}$

د. $y = x^{15}$

سوال 2: تین ترسیم جنکی مساوات بالترتیب $(p)\, y = x^{-2} \quad (q)\, y = x^{-3} \quad (r)\, y = x^{-4}$ ہیں۔ایک لکیر $A$ جسکی مساوات $x = k$ ہے ، ان تینوں ترسیموں کو نقاط $P$ , $Q$ اور $R$ پر آپس میں ملاتی ہے۔ان تینوں نقاط $P$ , $Q$ اور $R$ کو بالترتیب (نیچے سے اوپر) لکھیں جبکہ $k$ درج ذیل قیمتیں لے گا۔

ا. $2$
ب. $\frac{1}{2}$
ج. $\frac{-1}{2}$
د. $-2$

سوال 3: $x$ کی کن قیمتوں کے لیے درج ذیل عدم مساوات صحیح ثابت ہوں گی؟اپنے جوابات کی وضاحت کے لیے ترسیم بھی بنائیں۔

ا. $0 < x^{-3} < 0.001$
ب. $x^{-2} < 0.0004$
ج. $x^{-4} \geq 100$ ,
د. $8x^{-4} < 0.00005$

سوال 4: درج ذیل مساوات کی ترسیم بنائیں ، اس شرط کے ساتھ کہ $x > 0$.

ا. $y = x^{\frac{3}{2}}$
ب. $y = x^{\frac{1}{3}}$
ج. $y = -2x^{\frac{1}{2}}$
د. $y = 4x^{-\frac{1}{4}}$
ه. $y = x^{-\frac{4}{3}}$
و. $y = x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{2}{3}}$

سوال 5: درج ذیل مساوات کی ترسیم بنائیں، جہاں ضرورت پڑے $x$ کی منفی قیمتیں بھی استعمال کریں۔

ا. $y = x^{\frac{2}{3}}$
ب. $y = x^{\frac{3}{4}}$
ج. $y = x^{\frac{4}{5}}$
د. $y = x^{-\frac{1}{3}}$
ه. $y = x^{\frac{4}{3}}$
و. $y = x^{-\frac{3}{2}}$

سوال 6: درج ذیل مساوات کے ساتھ ترسیم بنائیں۔

ا. $y = x^2 + x^{-1}$
ب. $y = x + x^{-2}$
ج. $y = x^2 - x^{-1}$
د. $y = x^{-2} - x^{-1}$
ه. $y = x^{-2} - x^{-3}$
و. $y = x^{-2} - x^{-4}$

سوال 7: درج ذیل تفاعل میں سے ایک جفت ہے اور دو تاک ہیں، آپ معلوم کریں کہ کونسا تفاعل جفت اور کونسے تاک ہیں؟

ا. $y = x^7$    ب. $y = x^4 + 3x^2$    ج. $y = x(x^2 - 1)$

سوال 8: درج ذیل کی قیمتیں معلوم کریں۔

ا. $|-7|$    ج. $|9-4|$    ھ. $|\pi - 3|$

ب. $\left|-\frac{1}{200}\right|$    د. $|4-9|$    و. $|\pi - 4|$

سوال 9: مقیاس $\left|x - x^2\right|$ کی قیمت معلوم کریں، جبکہ $x$ کی قیمتیں درج ذیل میں سے ہوں۔

ا. $2$    ج. $1$    ھ. $0$

ب. $\frac{1}{2}$    د. $-1$

سوال 10: آپ کو بتا دیا گیا ہے کہ $y = \frac{1}{x^2}$، آپ $y$ کے بارے میں کیا کہیں گے اگر؛

ا. $|x| > 100$    ب. $|x| < 0.01$

سوال 11: آپ کو بتا دیا گیا ہے کہ $y = \frac{1}{x^3}$؛

ا. آپ $y$ کے بارے میں کیا کہیں گے اگر $|x| < 1000$ $absy > 1000$ کیلب. آپ $y$ کے بارے میں کیا کہیں گے اگر $|x| > 1000$

سوال 12: ایک فٹبال کا میچ دیکھنے آئے تماشائیوں کی تعداد $N$ قریب ترین ہزار میں 37000 گنی گی۔ اس بیان کو مقیاس کی علامت استعمال کرتے ہوئے ایک عدم مساوات کی صورت میں لکھیں۔

سوال 13: دو جڑواں بچوں کے ریاضی نمبروں بالترتیب $m$ اور $n$ کا فرق کبھی بھی 5 سے زیادہ نہیں ہوا۔ اس بیان کو مقیاس کی علامت استعمال کرتے ہوئے ایک عدم مساوات کی صورت میں لکھیں۔

سوال 14: ایک لکیر کی لمبائی $x$ سینٹی میٹر ہے، آپ کو بتایا گیا ہے کہ $|x - 5.23| < 0.005$، آپ اس کو ایک بیان کی صورت میں کیسے بتائیں گے۔

## 5.3 مساوات $y = ax^2 + bx + c$ کے ترسیم

سبق نام سبق ایک میں آپ نے سیدھی لکیروں کے ترسیم بنانا سیکھے، اور آپ نے یہ بھی جانا کہ مساوات $y = mx + c$ میں مستقل $m$ اور $c$ کا کیا مطلب ہے۔

مشق مشق3c میں آپ کو موقع ملے گا $y = ax^2 + bx + c$ کے جیسی مساوات کے ترسیمات بنانے کا۔

اگر آپ کے پاس ترسیم بنانے والا اعداد ہے تو اسے بروئے کار لاتے ہوئے تمام سوالات حل کریں ورنہ ایک گروپ کی شکل میں دیگر لوگوں کے ساتھ مل کر سوالات حل کریں۔

اہم نقاط کا تزکرہ مشق حل کرنے کے بعد کریں گے۔

سوال 1: ایک ہی نظام محدد میں درج ذیل مساوات کے ترسیم بنائیں۔

ا. $y = x^2 - 2x + 5$ ب. $y = x^2 - 2x + 1$ ج. $y = x^2 - 2x$

سوال 2: ایک ہی نظام محدد میں درج ذیل مساوات کے ترسیم بنائیں۔

ا. $y = x^2 + x - 4$ ب. $y = x^2 + x - 1$ ج. $y = x^2 + x + 2$

سوال 3: دی گئی شکل میں مساوات $y = ax^2 - bx$ کی ترسیم بنائی گئی ہے، اسی شکل پے درج ذیل مساوات کی ترسیم بنائیں۔

ا. $y = ax^2 - bx + 4$ ب. $y = ax^2 - bx - 6$

سوال 4: مساوات $y = ax^2 + bx + c$ کے ترسیم میں $c$ کی قیمت کو تبدیل کرنے سے ترسیم پر کیا فرق پڑے گا؟

سوال 5: درج ذیل مساوات کے ترسیم بنائیں۔

ا. $y = x^2 - 4x + 1$ ج. $y = x^2 + 1$

ب. $y = x^2 - 2x + 1$ د. $y = x^2 + 2x + 1$

سوال 6: مساوات $y = 2x^2 + bx + 4$ کی ترسیم بنائیں لیکن $b$ کی مختلف قیمتوں کے لیے، $b$ کی قیمتوں کو بدلنے سے مساوات $y = ax^2 + bx + c$ پر کیا فرق پڑے گا۔

سوال 7: درج ذیل مساوات کی ترسیم بنائیں۔

ا. $y = x^2 + 1$

ب. $y = 3x^2 + 1$

ج. $y = -3x^2 + 1$

د. $y = -x^2 + 1$

سوال 8: درج ذیل مساوات کی ترسیم بنائیں۔

ا. $y = -4x^2 + 3x + 1$,

ب. $y = -x^2 + 3x + 1$

ج. $y = x^2 + 3x + 1$

د. $y = 4x^2 + 3x + 1$

سوال 9: مساوات $y = ax^2 + bx + c$ میں $a$ تبدیل کرنے سے مساوات کی ترسیم پر کیا فرق پڑے گا؟

سوال 10: شکل میں ایک ترسیم دکھائی گئی ہے۔ معلوم کریں کہ درج ذیل مساوات میں سے کونسی مساوات اس ترسیم کی ہے؟

ا. $y = x^2 - 2x + 5$

ب. $y = -x^2 - 2x + 5$

ج. $y = x^2 + 2x + 5$

د. $y = -x^2 + 2x + 5$

سوال 11: شکل میں ایک ترسیم دکھائی گئی ہے۔ معلوم کریں کہ درج ذیل مساوات میں سے کونسی مساوات اس ترسیم کی ہے؟

ا. $y = -x^2 + 3x + 4$

ب. $y = x^2 - 3x + 4$

ج. $y = x^2 + 3x + 4$

د. $y = -x^2 - 3x + 4$

## 6.3 مساوات $y = ax^2 + bx + c$ سے بنے ترسیموں کی اشکال

مشق حل کرتے ہوئے آپ نے کئی نتائج حاصل کیے ہوں گے، ان تمام نتائج کا نچوڑ ذیل میں بیان کیا گیا ہے۔

تمام ترسیم کی شکل لگ بھگ ایک جیسی تھی اور اس شکل کو قطع مکافی یا پیرابولا کہا جاتا ہے۔ ان تمام قطع مکافی کی محور تشاکل عمودی ہے۔ جس نقطے پر ایک قطع مکافی اپنے محور تشاکل سے ملتا ہے اس نقطے کو راس کہتے ہیں۔ اگر $c$ کی قیمت بدلی جائے تو ترسیم عمودی محور پر اوپر نیچے حرکت کرتی ہے، جبکہ $a$ بدلنے سے محور تشاکل افقی محور میں آگے پیچھے حرکت کرتی ہے۔ اگر $a$ اور $b$ کے ساتھ موجود ریاضیاتی علامات ایک جیسی ہیں یعنی دونوں کے ساتھ جمع یا منفی کی علامت ہے تو محور تشاکل عمودی محور کے بائیں جانب ہوگی اور اگر $a$ اور $b$ کے ساتھ مخالف ریاضیاتی علامات ہوں تو محور تشاکل عمودی محور کے دائیں جانب ہوگی۔

اگر $a$ مثبت ہے تو راس ترسیم کے سب سے نچلے حصے پے موجود ہوگا اور اگر $a$ منفی ہے تو راس ترسیم کے سب سے بلند حصے پے موجود ہوگا۔ $|a|$ جتنا بڑا ہوگا ترسیم اتنی ہی لمبوتری ہوگی، یعنی عمودی محور میں لمبی۔

## 7.3 دو ترسیموں کا مشترکہ نقطہ

دو ترسیموں کا مشترکہ نقطہ معلوم کرنے کا بھی وہی طریقہ ہے جو کہ دو سیدھی لکیروں کا مشترکہ نقطہ معلوم کرنے کا طریقہ ہے۔ فرض کریں کہ آپ کے پاس دو ترسیم ہیں، جن کی مساوات $y = f(x)$ اور $y = g(x)$ ہیں۔ آپ کو ایک نقطے $(x, y)$ کی تلاش ہے جو کہ دونوں ترسیموں میں موجود ہو، اسکا مطلب محدد $(x, y)$ سے دونوں مساوات درست ثابت ہوں گی۔ یہاں سے یہ بات سامنے آتی ہے کہ ہمیں ایک ایسا $x$ چاہیئے جس کے لیے $f(x) = g(x)$۔

مثال 4.3: لکیر $y = 2$ اور ترسیم $y = x^2 - 3x + 4$ کا مشترکہ نقطہ معلوم کریں۔ دونوں مساوات کو ایک ساتھ حل کرنے سے ہمیں حاصل ہوا $x^2 - 3x + 4 = 2$ اور ہمیں اسے یوں بھی لکھ سکتے ہیں؛ $x^2 - 3x + 2 = 0$۔ اس مساوات کو حل کرنے سے اسکے اجزاء ملے جن سے اس مساوات کا حل نکالا جا سکتا ہے جو کہ یہ ہیں؛ $x = 2$ $x = 1$ اب ان قیمتوں کو کسی ایک مساوات میں ڈال کر $y$ معلوم کرنا یقیناً نہایت آسان ہے، اور یوں ہمیں جو مشترکہ نقاط ملے ہیں وہ $(1, 2)$ اور $(2, 2)$ ہیں۔ □

مثال 5.3: لکیر جسکی مساوات $y = 2x - 1$ ہے، اس لکیر اور ترسیم $y = x^2$ کا مشترکہ نقطہ معلوم کریں۔ دونوں مساوات کو حل کریں تو $x^2 = 2x - 1$ ملتا ہے، جو کہ دراصل $x^2 - 2x + 1 = 0$ ہے اور اسکے اجزاء معلوم کیے جائیں تو $(x - 1)^2 = 0$ ملے گا جہاں سے $x = 1$ ملے گا۔ $x$ کی اس قیمت کو دونوں مساوات میں سے ایک میں ڈالیں تو ہمیں $y$ کی قیمت مل جائے گی، اور یوں ہمیں اس نقطے کے محدد معلوم ہو جائیں گے جو کہ لکیر اور ترسیم میں مشترک ہے، اس سوال میں وہ نقطہ $(1, 1)$

ہے۔ یہاں مشترک نقطہ صرف ایک ہی ہے اور اسکی وجہ یہ ہے کہ یہ لکیر ترسیم کا خط مماس ہے، اور خط مماس ایک ترسیم کو ایک ہی نقطے پر چھوتی ہے، اگر آپ کے پاس ترسیم بنانے والا اعداد ہے تو آپ اس بیان کی تصدیق بھی کر سکتے ہیں۔ □

مثال 6.3: ترسیم $y = x^2 - 2x - 6$ اور ترسیم $y = 12 + x - 2x^2$ کا مشترکہ نقطہ معلوم کریں۔

دونوں مساوات کو حل کریں تو $x^2 - 2x - 6 = 12 + x - 2x^2$ملتا ہے، جو کہ دراصل $3x^2 - 3x - 18 = 0$ہے اسے $3$ سے تقسیم کریں تو ہمیں ملے گا $x^2 - x - 6 = 0$ اور اسکے اجزاء معلوم کیے جائیں تو $(x+2)(x-3) = 0$ملے گا جہاں سے$x = -2x = 3$ ملے گا۔

$x$ کی ان قیمتوں کو کسی بھی ایک مساوات میں ڈال کر $y$ کی دو قیمتیں معلوم کی جا سکتی ہیں، اور اسطرح سے ہمارے پاس دو نقاط کے محدد ہوں گے جو کہ $(3, -3)(-2, 2)$ ہیں □

سوال 1: درج ذیل سوالات میں بتائی گئی لکیروں اور ترسیمات کے مشترکہ نقاط معلوم کریں

ا. $x = 3$ اور $y = x^2 + 4x - 7$

ب. $y = 3$, اور $y = x^2 - 5x + 7$

ج. $y = 8$ اور $y = x^2 + 2x$

د. $y + 3 = 0$ اور $y = 2x^2 + 5x - 6$

سوال 2: درج ذیل سوالات میں بتائی گئی لکیروں اور ترسیمات کے مشترکہ نقاط معلوم کریں

ا. $y = x + 1$ اور $y = x^2 - 3x + 4$

ب. $y = 2x + 3$ اور $y = x^2 + 3x - 9$

ج. $y = 3x + 11$ اور $y = 2x^2 + 2x + 5$

د. $y = 4x + 1$ اور $y = 9 + 4x - 2x^2$

ھ. $3x + y - 1 = 0$ اور $y = 6 + 10x - 6x^2$

سوال 3: درج ذیل سوالوں میں یہ ثابت کریں کہ ترسیم اور لکیر ایک ہی نقطے پر ملتی ہیں، اور وہ مشترک نقطہ بھی معلوم کریں۔

ا. $y = 2x + 2$ اور $y = x^2 - 2x + 6$

ب. $y = -2x - 7$ اور $y = x^2 + 4x + 2$

سوال 4: ترسیم $y = x^2 - x$ اور ذیل میں دی ہوئی لکیروں کے مشترک نقاط معلوم کریں۔

ا. $y = x$

ب. $y = x - 1$

اگر آپ کے پاس ترسیم بنانے والا اعداد ہے تو دیکھیں کہ ترسیم اور للکیر کا باہمی رشتہ یا تعلق کیا ہے؟

سوال 5: ترسیم $y = x^2 + 5x + 18$ اور ذیل میں دی ہوئی لکیروں کے مشترک نقاط معلوم کریں۔

ا. $y = -3x + 2$

ب. $y = -3x + 6$

اگر آپ کے پاس ترسیم بنانے والا اعداد ہے تو دیکھیں کہ ترسیم اور للکیر کا باہمی رشتہ یا تعلق کیا ہے؟

سوال 6: لکیر، جسکی مساوات $y = x + 5$ ہے ، اور ذیل میں دیے گئے دو ترسیمات کا الگ الگ مشترک نقطہ معلوم کریں،

ا. $y = 2x^2 - 3x - 1$

ب. $y = 2x^2 - 3x + 7$

اگر آپ کے پاس ترسیم بنانے والا اعداد ہے تو دیکھیں کہ ترسیم اور للکیر کا باہمی رشتہ یا تعلق کیا ہے؟

سوال 7: درج ذیل مساوات سے بننے والے ترسیمات کے مشترک نقاط معلوم کریں۔

ا. $y = x^2 + 5x + 1$ اور $y = x^2 + 3x + 11$

ب. $y = x^2 - 3x - 7$ اور $y = x^2 + x + 1$

ج. $y = 7x^2 + 4x + 1$ اور $y = 7x^2 - 4x + 1$

سوال 8: درج ذیل مساوات سے بننے والے ترسیمات کے مشترک نقاط معلوم کریں۔

ا. $y = \frac{1}{2}x^2$ اور $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$

ب. $y = 2x^2 + 3x + 4$ اور $y = x^2 + 6x + 2$

ج. $y = x^2 + 7x + 13$ اور $y = 1 - 3x - x^2$

د. $y = 6x^2 + 2x - 9$ اور $y = x^2 + 7x + 1$

ھ. $y = (x-2)(6x+5)$ اور $y = (x-5)^2 + 1$

و. $y = 2x(x-3)$ اور $y = x(x+2)$

سوال 9: ذیل میں دی گئی مساوات کی جوڑیوں کے ترسیمات بنائیں اور انکے مشترکہ نقاط بھی معلوم کریں۔

ا. $y = 8x^2\,, y = 8x^{-1}$

ب. $y = x^{-1} y = 3x^{-2}$

ج. $y = x\,, y = 4x^{-3}$

د. $y = 8x^{-2}\,, y = 2x^{-4}$

ھ. $y = 9x^{-3}\,, y = x^{-5}$

و. $y = \frac{1}{4}x^4\,, y = 16x^{-2}$

## 8.3 اجزاء کی مدد سے ترسیمات بنانا

کچھ تفاعل جیسا کہ $f(x) = ax^2 + bx + c$ کے ترسیمات ایسے ہوتے ہیں کہ ان کے اجزاء کی مدد سے بھی ترسیم بنایا جا سکتا ہے۔ مثال کے طور پر ذیل میں دیے گئے تفاعل ہی کو دیکھ لیں

$$f(x) = x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$$
$$g(x) = 12x - 4x^2 = -4x(x-3)$$

پہلے حصے میں $f(1) = 0$ اور $f(5) = 0$ اور اسی لیے نقاط $(1,0)$ اور $(5,0)$ پہلے تفاعل کی ترسیم پر ہی موجود ہیں۔ یہ شکل شکل13.3 میں دکھایا گیا ہے۔ اسی طرح $g(0) = g(3) = 0$ اسی لیے $(0,0)$ اور $(3,0)$ دوسرے تفاعل کی ترسیم پر موجود ہیں ۔ یہ شکل شکل14.3 میں دکھایا گیا ہے۔ آپ ایسے کسی بھی تفاعل کا ترسیم بنا سکتے ہیں جو کچھ اس طرح سے اجزاء میں بٹے، $a(x-r)(x-s)$۔

پہلے یہ ذہن نشین کر لیں کہ یہ افقی محور کو $(r,0)$ اور $(s,0)$ پر کاٹے گا، مستقل $a$ کی علامت آپکو یہ بتائے گی کہ آیا ترسیم اوپر کی طرف مڑے گی یا نیچے کی جانب۔

## 9.3 مثال1.8.3

مندرجہ ذیل ترسیم کا خاکہ بنائیں $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$ آپ اس مساوات کی تجری اس طرح نکال سکتے ہیں۔ $f(x) = (3x+1)(x-1)$ مگر اجزائے ضربی سے حل کرنے کے لیئے ہمیں اس طرح سے لکھنا ہوگا۔

$$f(x) = 3(x + \frac{1}{3})(x-1)$$

اس سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ ترسیم نکات $(\frac{-1}{3}, 0)$ اور $1, 0$ سے گزرتی ہے۔مستقل قیمت 3 سے معلوم ہوتا ہے کہ خاکہ کس قدر بڑھا ہوا ہے۔
اس سے ہمیں یتنی معلومات ملتی یے کہ ہم ترسیم کی شکل کا اندازہ کر سکتے ہیں اور آپ میں خاکہ دیکھ سکتے ہیں۔ اگر ہم غور کریں تو $-1 = f(0)$ جس سے معلوم ہوتا کہ ترسیم $(0, 1)$ پر y-axis کو جاملتی ہے۔

اگر غور کریں کہ خاکے پر محور کے خلاف نشانات نہیں ہیں ، سوائے یہ کہنے کے کہاں ترسیم ان کو کاٹتی ہے۔ اجزائے ضربی کے طریقے کو استعمال کرتے ہوئے ہم دو سے زیادہ اجزاء کے لیے لکھ سکتے ہیں۔

$$f(x) = a(x-r)(x-s)(x-t)$$

یہ تفاعل کسی ایسی ترسیم کی وضاحت کرتا ہے جس کی مساوات ، جب ضرب ہوجاتی ہے $f(x) =$ $ax^3 - ....$ کے ساتھ شروع ہوتی ہے۔
یہ ترسیم نکات $(r, 0), (s, 0)$ اور $(t, 0).$ سے گزرتی ہے۔ مستقل a سے معلوم ہوتا ہے کہ x کی بڑی قیمتوں کے لیے ترسیم(کارتیسی نزامِ محدد کے تہد) اول اور چوتھے خانے موجود میں ہوگی۔ غور کریں کہ figure3.17 میں اجراء $x - 1$ کا مربع (کارتیسی نزامِ محدد کے تہد) -x محور پر یوگا۔

## 10.3 ترسیم سے مساوات کا اندازہ لگانا

اجراء ضربی کا استعمال کرتے ہوئے ہم ترسیم کی مساوات کا باخوبی اندازہ لگا سکیے ہیں۔ $f(x) = ax^2 + bx + c$ اگر وہ نقطے معلوم ہوں جہاں کو ترسیم اُفقی محور پر کاٹتی ہے اور کم از کم ایک نقطے کی جگہ معلوم ہو۔

ایک ایسی مساوات بنائیں جو $y = ax^2 + bx + c$ سے تعلق رکھتی ہو۔افقی مہور کو دو جگہوں پر کاٹتا ہے جو $(1, 0)$ اور $(4, 0)$ ۔جبکہ نکتے کو $(3, -4)$ پر کاٹتا ہے۔
چونکہ وکر محور کو $(1, 0)$ اور $(4, 0)$ پر کاٹتا ہے۔
مساوات کچھ اس طرح کی ہوگی۔

$$y = a(x-1)(x-4)$$

جیسے کہ نکتہ $(3, -4)$ وکر میں آتا ہے۔ $-4 = a(3-1)(3-4)$ جس سے ہمیں ملتا ہے۔ $-4 =$
$-2aa = 2$
وکر کی مساوات یہ بنتی ہے۔ $y = 2(x-1)(x-4)y = 2x^2 - 10x + 8$

1. مندرجہ ذیل ترسیمات کا خاکہ بنائیں۔

ا. $(a)y = (x-2)(x-4)$

ب. $y = (x+3)(x-1)$

ج. $y = x(x-2)$

د. $y = (x+5)(x+1)$

ھ. $y = x(x+3)$

و. $y = 2(x+1)(x-1)$

2. مندرجہ ذیل ترسیمات کا خاکہ بنائیں۔

ا. $y = 3(x+1)(x-5)$

ب. $y = -2(x-3)(x-1)$

ج. $y = -(x+3)(x+5)$

د. $y = 2(x+\frac{1}{2})(x-3)$

ھ. $y = -3(x-4)^2$

و. $y = -5(x-1)(x+\frac{4}{5}$

3. پہلے ضرب کریں پھر ترسیمات کا خاکہ بنائیں۔

ا. $y = x^2 - 2x - 8$

ب. $y = x^2 - 2x$

ج. $y = x^2 + 6x + 9$

د. $y = 2x^2 - 7x + 3$

ھ. $y = 4x^2 - 1$

و. $y = -(x^2 - x - 12)$

ز. $y = -x^2 - 4x - 4$

ح. $y = -(x^2 - 7x + 12)$

ط. $y = 11x - 4x^2 - 6$

4. مساوات بنائیں جو $y = x^2 + bx + c$ قطع مکافی کی صورت پر مبنی ہو۔

ا. $(5,0)$اور عمودی محور کو $(2,0)$ اُفقی محور کو دو جگہوں پر کاٹتا ہے جو

ب. $(-10,0)$اور عمودی محور کو $(-7,0)$ اُفقی محور کو دو جگہوں پر کاٹتا ہے جو

ج. $(3,0)$اور عمودی محور کو $(-5,0)$ اُفقی محور کو دو جگہوں پر کاٹتا ہے جو

د. $(1,-16)$اور عمودی محور کو $(-3,0)$ اُفقی محور کو دو جگہوں پر کاٹتا ہے جو

5. مندرجہ ذیل ترسیمات کا خاکہ بنائیں۔

ا. $y = (x+3)(x-2)(x-3)$

ب. $y = x(x-4)(x-6)$

ج. $y = x^2(x-4)]$

د. $y = x^2(x-4)^2$

ھ. $y = -x(x+4)(x+6)(x+2)$

و. $y = -3(x+1)(x-3)^2$

6. مساوات بنائیں جو $y = ax^2 + bx + c$ قطع مکافی کی صورت پر مبنی ہو۔

ا. پر کاتتا ہے $(0,15)$ اور عمودی مہور کو $(5,0)(1,0)$ اُفقی مہور کو دو جگہوں پر کاتتا ہے جو

ب. پر کاتتا ہے $(0,-56)$ اور عمودی مہور کو $(7,0)(-2,0)$ اُفقی مہور کو دو جگہوں پر کاتتا ہے جو

ج. پر کاتتا ہے $(0,-6)$ اور عمودی مہور کو $(-2,0)(-6,0)$ اُفقی مہور کو دو جگہوں پر کاتتا ہے جو

د. پر کاتتا ہے $(1,16)$ اور عمودی مہور کو $(2,0)(-3,0)$ اُفقی مہور کو دو جگہوں پر کاتتا ہے جو

ھ. ( پر کاتتا ہے $(8,90)$ اور عمودی مہور کو $(7,0)(-10,0)$ اُفقی مہور کو دو جگہوں پر کاتتا ہے جو

سوال 1: درج ذیل ترسیمات بنائیں؛

ا. $y = x^2 - 4x - 5$

ب. $y = 4x^2 - 4x + 1$

ج. $y = -x^2 - 3x + 18$

د. $y = 2x^2 - 9x + 10$

ھ. $y = -(x^2 - 4x + 9$

و. $y = 3x^2 + 9x$

سوال 2: ذیل میں 9 قطع مکافی کی مساوات ہیں،

ا. $y = (x-3)(x-8$

ب. $y = 14 + 5x - x^2$

ج. $y = -x^2 - 3x + 18$

د. $y = x(3-x)$

ھ. $y = (x+2)(x-7)$

و. $y = -3(x+3)(x+7)$

ز. $y = x^2 + 2x + 1$

ح. $y = x^2 + 8x + 12$

ط. $y = x^2 - 25$

درج ذیل سوالات کے جواب دین بغیر ترسیمات بنائے۔

- کونسا قطع کافی عمودی محور سے $y$ کی مثبت قیمت پر سے گزرتا ہے۔؟
- کس قطع مکافی کا راس ترسیم کے بلند ترین مقام پر موجود ہے۔؟
- کس قطع مکافی کا راس عمودی محور کے بائیں جانب ہے؟
- کونسا قطع مکافی مبدا سے گزرتا ہے؟
- کونسا قطع مکافی افقی محور کو $x$ کی دو الگ الگ قیمتوں سے نہیں کاٹتا۔
- کس قطع مکافی کے لیے عمودی محور تشاکلی محور کا کام کر رہی ہے؟
- کونسے دو قطع مکافی کی ایک ہی تشاکلی محور ہے؟
- کس قطع مکافی کا راس چوتھے کانے میں ہے؟

سوال 3: درج ذیل میں دیے گئے ترسیمات کے لیے مناسب مساوات بنائیں۔

سوال 4:

ایک تفاعل کی تعریف کچھ یوں ہے: $f(x) = 7x - 4$

ا. تفاعل $f(7)$، $f(\frac{1}{2})$ اور $f(-5)$ کی قیمت معلوم کریں۔

ب. $x$ کی قیمت معلوم کریں جبکہ $f(x) = 10$

ج. $x$ کی قیمت معلوم کریں جبکہ $f(x) = x$

د. $x$ کی قیمت معلوم کریں جبکہ $f(x) = f(37)$

سوال 5: ایک تفاعل $f(x) = x^2 - 3x + 5$ کے لیے $x$ کی دو قیمتیں معلوم کریں جن کے لیے $f(x) = f(4)$

سوال 6: شکل میں مساوات $y = x^n$ کا ترسیم بنایا گیا ہے، جس میں $n$ ایک عدد صحیح ہے۔ ہمیں بتایا گیا ہے کہ ترسیم نقاط $(2, 200)$ اور $(2, 2000)$ میں سے گزرتا ہے۔ $n$ کی قیمت معلوم کریں۔

سوال 7: دو ترسیمات $f(x) = x^2 - 7x + 5$ اور $y = 1 + 2x - x^2$ کا مشترک نقطہ معلوم کریں۔

سوال 8: خط مستقیم $y = 2x + 3$ اور ترسیم $y = 2x^2 + 3x - 7$ کا مشترک نقطہ معلوم کریں۔

سوال 9: اس نقطے کے محدد معلوم کریں جس پہ خط مستقیم $3x + y - 2 = 0$ اور ترسیم $y = (4x - 3)(x - 2)$ آپس میں ملتے ہیں۔

سوال 10: ترسیم $y = (x - 4)(x - 2)$ اور $y = x(2 - x)$ کے مشترک نقطے کے محدد معلوم کریں اور دونوں ترسیمات کو بنا کے انکا آپسی تعلق بھی بیان کریں۔

سوال 11: ہمیں بتایا گیا ہے کہ $k$ ایک مثبت مستقل عدد ہے، درج ذیل کے ترسیمات بنائیں۔

ا. $y = (x + k)(x - 2k)$

ب. $y = (x + 4k)(x + 2k)$

ج. $y = x(x - k)(x - 5k)$

د. $y = (x + k)(x - 2k)^2$

سوال 12: تفاعل $f$ کی مساوات $f(x) = ax^2 + bx + c$ ہے۔ ہمیں بتایا گیا ہے کہ $f(0) = 6, f(-1) = 15$ اور $f(1) = 1$، آپ $a$ ، $b$ اور $c$ کی قیمتیں معلوم کریں۔

سوال 13: خط $y = 3 - 4x$ اور ترسیم $y = 4(4x^2 + 5x + 3)$ کا مشترک نقطہ معلوم کریں۔

سوال 14: درج ذیل کی ترسیمات بنائیں

ا. $y = (x + 4)(x + 2) + (x + 4)(x - 5)$

ب. $y = (x + 4)(x + 2) + (x + 4)(5 - x)$

سوال 15: تفاعل $f$ کی مساوات $f(x) = ax + b$ ہے۔ ہمیں بتایا گیا ہے کہ $f(-2) = 27$ اور $f(1) = 15$، آپ $x$ کی قیمتیں معلوم کریں جب $f(x) = -5$۔

سوال 16: ایک ترسیم جس کی مساوات $y = ax^2 + bx + c$ ہے، افقی محور کے نقطوں $(-4, 0)$ اور $(9, 0)$ سے گزرتا ہے، ایک اور نقطے $(1, 120)$ سے بھی گزرتا ہے۔ یہ ترسیم عمودی محور کے کس نقطے سے گزرے گا؟

سوال 17: ایک ترسیم جس کی مساوات $y = ax^2 + bx + c$ ہے، اور یہ نقطوں $(-1, 22)(1, 8)(3, 10)(-2, p)(q, 17)$ سے گزرتا ہے $p$ اور $q$ کی قیمتیں معلوم کریں۔

سوال 18: ترسیمات $y = 2x^2 + 5x$، $y = x^2 + 4x + 12$ اور $y = 3x^2 + 4x - 6$ میں ایک نقطہ مشترک ہے، اس نقطے کے محدد معلوم کریں۔

سوال 19: ترسیمات $y = x^2 - 3x + c$ اور $y = k - x - x^2$ ایک نقطے $(-2, 12)$ پر ملتے ہیں، $c$ اور $k$ کی قیمت معلوم کریں اور وہ دوسرا نقطہ بھی معلوم کریں جو ان میں مشترک ہے۔

سوال 20: اگر ترسیمات $y = x^2 + 3x + 14$، $y = x^2 + 2x + 11$ اور $y = px^2 + px + p$ میں ایک مشترک نقطہ ہے، آپ $p$ کی قیمت معلوم کریں۔

سوال 21: ایک سیدھی لکیر $y = x - 1$ ایک ترسیم $y = x^2 - 5x - 8$ سے ملتی ہے نقاط $A$ اور $B$ پر۔ ایک اور ترسیم $y = p + qx - 2x^2$ بھی انہی نقاط سے گزرتا ہے۔ $p$ اور $q$ کی قیمت معلوم کریں۔

سوال 22: لکیر $y = 10x - 9$ ایک ترسیم $y = x^2$ سے ملتی ہے۔ دونوں کے مشترک نقطے کے محدد معلوم کریں۔

سوال 23: ذیل میں دیے گے ترسیمات کے لیے مساوات تجویز کریں۔

سوال 24: ترسیمات $y = x^2 - 5x - 3$ اور $y = 3 - 5x - x^2$ میں ایک نقطہ مشترک ہے، اس نقطے کو معلوم کریں اور جذر کی شکل میں لکھیں۔

سوال 25: ایک لکیر $y = 6x + 1$ ایک ترسیم $y = x^2 + 2x + 3$ سے ملتی ہے اور ان میں دو نقاط مشترک ہیں۔ ثابت کریں کہ ایک نقطے کے محدد $(2 - \sqrt{2}, 13 - 6\sqrt{2})$ ہیں، جبکہ دوسرے نقطے کے محدد معلوم کریں۔

سوال 26: ثابت کریں کہ ترسیمات $y = 2x^2 - 7x + 14$ اور $y = 2 + 5x - x^2$ صرف ایک ہی نقطے پر ملتے ہیں۔ مزید حساب کتاب کیے بغیر اور ترسیمات بنائے بغیر بتائیں کہ درج ذیل ترسیمات میں کتنے مشترک نقاط ہیں؟

ا. $y = 2x^2 - 7x + 12$ اور $y = 2 + 5x - x^2$

ب. $y = 2x^2 - 7x + 14$ اور $y = 1 + 5x - x^2$

ج. $y = 2x^2 - 7x + 34$ اور $y = 22 + 5x - x^2$

سوال 27: آپ $\frac{|x|}{x}$ کے بارے میں کیا رائے رکھتے ہیں اگر؛

ا. $x > 0$

ب. $x < 0$

# باب 4

# دودرجی مساوات

## 1.4 دودرجی الجبرا

یہ باب $ax^2 + bx + c$ کی طرز دودرجی الجبرائی عبارت اور ترسیمات سے متعلق ہے، اِسکے اختتام پر آپ مندرجہ ذیل معلومات حاصل کر چکے ہوں گے کہ

1) دودرجی الجبرائی عبارت کا مربع کیسے لیا جاتا ہے

2) دودرجی الجبرائی ترمیم $y = ax^2 + bx + c$ کے راس اور محور تشاکل کو کیسے معلوم کیا جاتا ہے

3) دودرجی مساوات کو کیسے حل کیا جاتا ہے

4) ہمزاد مساوات کا حل جس میں ایک دودرجی مساوات اور دوسری خطی مساوات ہو

5) اُن مساوات کی شناخت اور حل جنکی دودرجی مساوات میں تحفیف ترکیب بدل کر کی جاسکتی ہو

1.4۔دودرجی عبارات

آپ جانتے ہیں $y = bx + c$ کہ کا ترسیم خطِ مستقیم ہے $y = bx + c$ خطی مساوات کہلاتی ہیں۔باب سوم میں آپ نے سیکھا کہ اگر اسمیں $ax^2$ جمع کریں تو مساوات $y = ax^2 + bx + c$ حاصل ہوگی جسکا ترسیم قطع مکافی ہے یہ عبارت $ax^2 + bx + c$ کہ جسمیں b,a اور c مستقل ہیں۔دودرجی عبارت کہلاتی ہے۔مثلاً $x^2$، $x^2 - 6x + 8$، $2x^2 - 3x + 4$ اور $5 - 3x^2-$ دودرجی مساوات ہیں آپ کسی بھی دودرجی کیلئے $ax^2 + bx + c$ کی طرح لکھ سکتے ہیں جسمیں a,b اور c مستقل ہیں۔ b اور c آپکی پسند کے کوئی بھی اعدد ہو سکتے ہیں مشمول '0' ، لیکن a قطعاً '0' نہیں ہوسکتا ہے۔(عبارت دودرجی نہیں رہے گی) اعداد a,b اور c عددی سر کیلاتے ہیں: $x^2$ کا عددی سر a,x، کا عددی سر b اور c عمومی طور پر مستقل جزو کہلاتا ہے $2x^2 - x + 4$ میں x اور $x^2$ کے عددی سر بالترتیب 1 اور 2 ہیں جبکہ جزو 4 ہے۔

## 2.4 4.2-کامل مربعی صورت

آپ ایک دودرجی الجبرائی عبارت, $x^2 - 6x + 8$ کو بہت سے طریقوں سے لکھ سکتے ہیں جنمیں جزوی صورت $(x-4)(x-2)$ شامل ہے جو کہ اُفقی محور پر قطع مکانی $y = x^2 - 6x + 8$ کا مقامِ انقطاع معلوم کرنے کیلئے استعمال کی جا سکتی ہے۔ جیسا کہ تصویر۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔ میں دیکھایا گیا ہے۔جبکہ صورت، قطع مکانی کے راس کی نشاندہی کیلئے اور تفاعل $f(x) = x^2 - 6x + 8$ کی حدود معلوم کرنے کیلئے استعمال کی جا سکتی ہے۔ جیسا کہ مثال میں دی گئی تصویر میں دکھایا گیا ہے۔ یاد رہے کہ آپ ہمیشہ دودرجی عبارت کو جزوی صورت میں نہیں لکھ سکتے ہیں۔مثال کے طور پر $x^2 + 2x + 3$

اگر آپ ترسیمی مساوات $y = x^2 - 6x + 8$ کو $y = (x-3)^2 - 1$ کی صورت میں لکھیں تو آپ باآسانی محورِ تشاکل اور اس کی نشاندہی کر سکتے ہیں۔ کیونکہ $(x-3)^2$ ایک کامل مربع ہے۔لہٰزا اِسکی قیمت ہمیشہ 0 یا اس سے زیادہ ہوگی اور 0 صرف تب جب $x = 3$ ہو یعنی $(x-3)^2 \geq 0$ ہو اور چونکہ $y = (x-3)^2 - 1$ ہے تو $y \geq 1$ ہوگا۔جیسے کہ $(x-3)^2 = 0$ جب $x = 3$ ہو لہٰزا نقطہ راس $(3, -1)$ ہے اور محورِ تشاکل خط $x = 3$ ہے

$(x-3)^2 - 1$ کو کامل مربع صورت کہتے ہیں۔ذیل میں اِسکے استعمال کی کچھ مزید مثالیں دی گئی ہیں۔

## 3.4 مثال نمبر 1.2.4

دودرجی ترسیم $y = 3 - 2(x+2)^2$ کے راس اور تشاکل کی نشاندہی کریں۔چونکہ $2(x+2)^2 \geq 0$ اور $2(x+2)^2 = 3 - y$ ہے۔تو اِسکی پیروی کرتے ہوئے $3 - y \geq 0$ لہٰزا $y \leq 3$ جیسے $(x+2)^2 = 0$ جب $x = -2$،ترسیم کا راس وہ نقتہے جسکے محدد $(-2, 3)$ ہیں،y کی سب سے بڑی قیمت 3 ہے۔اور محورِ تشاکل x=-2 ہے۔

## 4.4 مثال نمبر 2.2.4

مساوات کو حل کریں۔

جیسے $3(x-2)^2 - 2 = 0$ , $3(x-2)^2 = 2$ اور $(x-2)^2 = \frac{2}{3}$ چنانچہ $(x-2) = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$,

$x = 2 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$

## 5.4 3.4 مربع مکمل کرنا

جب دودرجی عبارت کو کامل مربع کی صورت میں لکھنے کی کوشش کرتے ہیں۔اِس نقطہ پر توجہ کریں کہ جب آپ $x + \frac{1}{2}b$ کا مربع ہیں تو آپ کو $= x^2 + bx = x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2 = \left(x + \frac{1}{2}b\right)^2$ $\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}b^2$ حاصل ہوگا لہٰذا۔

اب c کو طرفین میں جمع کریں

## 6.4 مثال نمبر 1.3.4

$x^2 + 10x + 32$ کو کامل مربع صورت میں لکھیں۔

$$x^2 + 10x + 32 = (x^2 + 10x) + 32 = (x+5)^2 - 25 + 32 = (x+5)^2 + 7$$

۔$\frac{1}{4}b^2$ − $\left(x + \frac{1}{2}b\right)^2$ = $ax^2 + bx$ کو ذہن نشین کرنے کی کوشش نہ کریں۔ یہ سیکھ لیں کہ آپ x کے عددی سر کا نصف کریں اور لکھیں $ax^2 + bx = \left(x + \frac{1}{2}b\right)^2 - \frac{1}{4}b^2$ پھر اِس میں مساوات کے دونوں جانب c جمع کریں۔اگر آپ نے $ax^2 + bx + c$ کو کامل مربع صورت میں لکھنا ہو لیکن $x^2$ کا عددی سر a کی قیمت 1 نہ ہو تو کے پہلے دو جزو میں سے جزو ضربی a کو باہر نکال کر لکھ سکتے ہیں:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + xc$$

تب دودرجی عبارت کے مربع کو قوسین میں مکمل کریں۔

## 7.4 مثال نمبر 2.3.4

$2x^2 + 10x + 7$ کو کامل مربع صورت میں لکھیں ۔
جن جزو میں x موجود ہے ان میں سے جزو ضربی کو ابتداءً باہر نکال لیں

$$2x^2 + 10x + 7 = 2\Big(x^2 + 5x) + 7.$$

قوسین میں موجود جزو کو حل کرتے ہوئے۔

$$x^2 + 5x = \Big(x + \frac{5}{2}\Big)^2 - \frac{25}{4},$$

$$2x^2 + 10x + 7 = 2\Big(x^2 + 5x\Big) + 7 = 2\Big\{\Big(x + \frac{5}{2}\Big)^2 - \frac{25}{4}\Big\} + 7$$

$$= 2\Big(x + \frac{5}{2}\Big)^2 - \frac{25}{2} + 7 = 2\Big(x + \frac{5}{2}\Big)^2 - \frac{11}{2}.$$

اِس مقام پر ذہنی طور پر نتیجہ کو پرکھنا قابل قدر ہے۔ اگر $x^2$ کا عددی سر منفی ہو تو بھی بنیادی طریقہ کار یہی ہے۔جیسا مثال نمبر 3.3.4 میں دکھایا گیا ہے۔

## 8.4 مثال نمبر 3.3.4

$3 - 4x - 2x^2$ کو کامل مربع صورت میں ظاہر کریں۔ ۔
جن جزو میں x موجود ہے ابتداءً ان میں سے جزو ضربی 2- کو باہر نکال لیں۔ قوسین میں موجود جزو کو حل کرتے ہوئے۔

## 9.4 مثال نمبر 4.3.4

$12x^2 - 7x - 12$ کو کامل مربع صورت میں ظاہر کریں اور نتائج کو استعمال کرتے ہوئے۔اسکا جزو ضربی معلوم کریں۔ ۔

$$12x^2 - 7x - 12 = 12\Big(x^2 - \frac{7}{12}x\Big) - 12 = 12\Big\{\Big(x - \frac{7}{24}\Big)^2 - \frac{49}{576}\Big\} - 12$$

$$12\Big\{\Big(x - \frac{7}{24}\Big)^2 - \frac{625}{576}\Big\} = 12\Big\{\Big(x - \frac{7}{24}\Big)^2 - (\frac{25}{24})^2\Big\}$$

اب آپ کلیہ، $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ کو استعمال کرسکتے ہیں، قوسین میں موجود مساوات کی تجزی کیلئے a کو بطور $x = \frac{7}{24}$ اور بطور $\frac{-25}{24}$ لیں۔

## 10.4 مثال نمبر 5.3.4

$x^2 - 8x + 12$ کو کامل مربع کی صورت میں ظاہر کریں۔ اپنے نتائج کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل $f(x) = x^2 - 8x + 12$ کی حدود معلوم کریں۔جو کہ x کی تمام حقیقی قیمتوں کیلئے تعریف شدہ ہے۔

$$x^2 - 8x + 12 = (x-4)^2 - 4$$

جیسا کہ x کی تمام قیمتوں کیلیۓ $y > -4$ ہے۔
$x^2 - 8x + 12 = (x-4)^2 - 4 \leq -4$ لہزا $f(x) \leq -4$

f(x) کو بطورِ y لکھیں توحد $y \leq -4$ ہے۔

## 11.4 مشق نمبر 4(A)

1-مندرجہ ذیل ترسیمات کا (i) راس اور (ii) خطِ تاکل کی مساوات معلوم کریں۔
2-مندرجہ ذیل دودرجی عبارت کی (i) کم سے کم (اگر مناسب۔ ہو تو زیادہ سے زیادہ) قیمت اور (ii) x کی وہ قیمت میں کیلیۓ یہ ہے۔
3- مندرجہ ذیل دودرجی عبارت کو حلکریں۔ غیر معقول اعداد جواب کا حصہ رہنے دہں۔
4-مندرجہ ذیل کو کامل مربع صورت میں ظاہر کریں۔
5-کامل مربع صورت کو استعمال کرتے ہوئے ذیل میں دیۓ گئ ہر ایک عبارت کی کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ مناسب قیمت معلوم کریں اور x کی وہ قیمت میں کیلیۓ یہ ہے۔

7-ذیل میں دیئے گئے ہر ایک تفاعل، x کی حقیقی قیمتوں کیلئے تعریف شدہ ہے۔ مربع مکمل کرتے ہوئے f(x) کو کے طور پر لکھیں اور انکی حدود معلوم کریں۔
8-مربع مکمل کرتے ہوئے (i) راس اور (ii) ذیل میں دیئے گئے ہر ایک قطع مکافی کے خطِ تشاکل کی مساوات معلوم کریں۔
9-ذیل میں دیئے گئے ہر ایک تفاعل کا دائرہ کار تمام مثبت حقیقی اعداد پر محیط ہے۔ہر تفاعل کی سعت معلوم کریں۔

## 12.4 4.4 دودرجی مساوات کو حل کرنا

یقیناً آپ $x^2 - 6x - 8$ صورت کی دودرجی مساوات کے بذریعہ تجزی $x^2 - 6x + 8$ سے $(x - 2)(x - 4)$ میں حل سے واقف ہیں اور تب بذریعہ استدلال اگر ------ تب یا تو---------یا------ لہٰزا $x = 2$ یا $x = 4$ مساوات $x^2 - 6x + 8$ کا کاحل $x = 2$ یا $x = 4$ ہے۔اعداد 2 اور 4 مساوات کے جزر ہیں اگر آپ دودرجی عبارت کا جزر یا آسانی معلوم کر سکتے ہوں تو یقیناً یہ مساوات کے حل کا تیز تر طریقہ ہے۔ تاہم، ممکن ہے کہ عبارت کے جزر نہ ہوں یا انہیں معلوم کرنا مشکل ہو مثلاً $30x^2 - 11x - 30$ کے جزر معلوم کرنے کی کوشش کریں
اگر آپ مساوات کو حل کرنے کیلئے ایک دودرجی عبارت کی تجزی نہیں کر سکتے ہوں تب دودرجی کلیہ استعمال کریں، ۔$ax^2 + bx + c = 0$ کا حل جہاں $a \neq 0$ ہے

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

یہ جاننا مفید ہے کہ کیسے کامل مربع صورت، $ax^2 + bx + c$ سے یہ کلیہ اخذ کیا گیا ہے ابیداءً مساوات کے دونوں اطراف کو a سے تقسیم کریں a) کی قیمت 0 نہیں ہوسکتی ہے۔ ورنہ یہ دودرجی مساوات نہیں رہے گی)

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

بائیں طرف عبارت کا مربع مکمل کرنے سے آپ کو معلوم ہوگا کہ

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

لہزا آپ مساوات کے حل کو جاری رکھ سکتے ہیں۔

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

یہاں دو ممکنات ہیں۔ $-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ $x + \frac{b}{2a} = +\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ یا $= x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے دو جزر ہوں گے۔

یہ ظاہر کرتا ہے کہ اگر $ax^2 + bx + c = 0$ اور $a \neq 0$ تو $x = -b \pm \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

## 13.4 مثال نمبر1.4.4

مساوات کے حل کیلے دو درجی کلیہ استعمال کریں (a) اسکا $(a)ax^2 + bx + c$ کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے، $a = 2$, $b = 3$ = اور $4 = c$ درج کریں تو

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times (-4)}}{2 \times 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 32}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{4}$$

آپ سے بعض اوقات ضرر کو غیر معقول صورت میں رہنے دینا متوقع ہوگا۔ بعض دیگر اوقات آپ سے صزر $\frac{3-sqrt41}{4} = 2.35$ اور $\frac{3-sqrt41}{4} = -0.85$ کی صورت میں درکار ہوگا۔ مساوات میں ان اعداد کی ترکیب بدلی کے نتائج ملاحظہ کریں۔
(b) b=3,a=2 اور c=4 درج کرنے سے

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times (4)}}{2 \times 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 32}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{-23}}{4}$$

لیکن 23- کا جضر اطربع ممکن نہیں ہے اسکا مطلب یہ ہے کہ مساوات $2x^2 - 3x + 4 = 0$ کا کوئی جذر نہیں ہے-
$y = 2x^2 - 3x + 4$ کی کامل مربعی صورت میں تحویل کی کوشش کریں- آپ $y = 2x^2 - 3x + 4$- کے ترسیم سے کیا اخذ کرتے ہیں؟

$(c) = 30a = -11 b$ اور $c = 30$ درج کرنے سے
تیسری مثال کی تجزی تو ہوتی ہے لیکن جزر معلوم کرنا مشکل ہے۔ تاہم اگر مساوات کے جذر
معلوم ہو جائیں تو آپ اخذ کر سکتے ہیں کہ $(5x-6)(6x+5)300 + 11x - 30x^2$ 4.5 ممیز $- a^2$
$4ac$ اگر آپ واپس مسال نمبر 4-1-1 پر نظر ڈالیں تو آپ دیکھیں گے کہ جزو $(a)$ کی مساوات کے
جذر میں غیر معقول اعداد بھی وابستہ ہیں جزو $(b)$ میں جزر نہیں تھا اور جزو $(c)$ میں جذر کسور
تھیں۔ جزو اطراابع کی علامت کے نیچے موجود عبارت $b^2 - 4ac$ کی قیمت کے حساب سے آپ
پیش گوئی کر سکتے ہیں کہ کونسا معاملہ پیش آئے گا۔ اور دو درجی کلیے $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ پر اسکے تجوید سے

- اگر $b^2 - 4ac$ ایک کامل مربع ہے تو جذر عدد صحیح یا کسور ہوں گے۔
- اگر $b^2 - 4ac > 0$ تو مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے دو جذر ہوں گے

- اگر $b^2 - 4ac > 0$ تو کوئی جزو نہیں ہوگا۔
- اگر $b^2 - 4ac = 0$ ہو تو جذر $x = \frac{-b}{2a}$ سے حاصل ہوں گے۔ دروصل ایک ہی جذر ہوگا

بعض اوقات کہا جاتا ہے کہ دو موافق جذر یا ایک دہرا جذر ہے کیونکہ جذر کی قیمتیں $\frac{-b+0}{2a}$ اور $\frac{-b-0}{2a}$ برابر ہیں۔
$b^2 - 4ac$ دو درجی عبارت $ax^2 + bx + c$ کا ممیز کہلاتا ہے کیونکہ اسکی قیمت کی مدد سے مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے حل کی اقسام میں تمیز کی جاتی ہے۔
مثال نمبر 4-5-1
مندرجہ ذیل مساوات کے دو درجی اجزاء کے ممیز کی قیمتوں سے آپ کیا اخذ کر سکتے ہیں؟
$(a)$ جیسے کہ $- - - - 2 = a$ ممیز مثبت ہے لہذا مساوات $2x^2 - 3x - 4 = 0$ کے دو جذر ہیں مزید جیسا کہ "41" کامل مربع نہیں ہے تو جذر ناطق ہیں۔
$(b)$ ممیز مثبت ہے لہذا مساوات $2x^2 - 3x - 5$ کے دو جذر ہیں اور چونکہ 49 کامل مربع ہے۔ لہذا جذر ناطق ہے۔
$(c)$ کیونکہ ممیز منفی ہے اسلئے مساوات $2x^2 - 4x + 5 = 0$ کا کوئی جذر نے۔

$(d)$ چونکہ ممیز صفر ہے اسلیے مساوات $2x^2 - 4x + 2 = 0$ کا صرف ایک (دہرا) جذر ہے۔
مثال نمبر 4-5-2
مثاوات $kx^2 - 2x - 7 = 0$ کے دو حقیقی جذر ہیں، آپ مستقل $k$ کی قیمت کے بارے میں کیا اخذ کر سکتے ہیں؟
ممیز $4 + 28k = (-2)^2 - 4(k)(-7)$ ہے۔ مساوات کے دو حقیقی جذر ہیں لہذا ممیز کی قیمت مثبت ہوگی۔ بس $4 + 28k > 0$ اور $k > \frac{-1}{7}$۔
مثال نمبر 4-5-3

اگر $b - 4ac = 0$ ہو تو ہی مساوات کے دہرے جذر ہوتے ہیں۔یعنی اگر $2^2 - 43k = 0$ راس سے k کی قیمت 1/3 حاصل ہوگی۔ مشاہدہ کریں کہ کیسے مندرجہ ذیل بالا میں دو درجی مساوات کو حل کرنےضرورت ہی پیش نہیں آئی۔آپ کو جو بھی معلوم کرنا ہو کرسکتے ہیں۔

## 14.4 مشق نمبر4B

1 مندرجہ ذیل مساوات کو حل کرنے کےلیے دو درجی کلیہ استعمال کریں۔غیر ناطق جوابات کو غیر معقول صورت میں چھوڑ دیں۔اگر حل ممکن نہیں تو بھی بتائیے۔ اپنے جوابات کو سوالنمبر 8 میں استعمال کیلئے محفوظ رکھیں۔

2 ممیز $b^2 - 4ac = 0$ کی قیمت کو استعمال کرتے ہوئے معلوم کریں کہ مندرجہ ذیل مساوات کے جذر کتنے ہیں(ایک ہے،دو ہیں یا کوئی نہیں) جزو(i) اور (ii) میں p اور q کی قیمتیں مثبت ہیں۔

3 مندرجہ ذیل پر مساوات کا ایک دہرہ جذر ہے۔ ہر معاملے میں k کی قیمت معلوم کریں۔ اپنے جوابات کو عدد صحیح، مکمل کسور یا غیر معقول صورت میں رہنے دیں۔

4 مندرجہ ذیل مساوات کے جذر کی تعداد مي دی گئ ہے۔ جس قدر ممکن ہو k کی قیمت اخذ کریں۔

5 ممیز کی قیمت کو استعال کرتے ہوئے محور x پر مندرجہ ذیل ترمیمات کے نقاط انقطاع کی تعداد معلوم کریں۔

6 اگر a اور c دونوں مثبت ہوں تو ترمیم $y = ax^2 + bx + c$ سے متعلق کیا بیان کرسکتے ہیں؟

7 اگر a منفی اور c مثبت ہو تو ترمیم $y = ax^2 + bx + c$ سے آپ کیا بیان کرسکتے ہیں؟

8 آپ کو سوالنمبر 1 کے جوابات ناطق یا غیر معقول صورت میں درکار ہوں گے نہ کہ اعشاریہ۔ سوالنمبر 1 (a)،(b) اور (c) کیلئے جذر کی (i) جمع اور (ii) ضرب کریں۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ اگر صرف ایک ہی (دہرا) جذر ہو تو کیا ہو گا؟

(B) دودرجی مساوات $x^2+bx+c=0$ کے جذر $\alpha$ اور $\beta$ ، $x^2+bx+c$ کے اجزائے ضرب $x-\alpha$ اور $x-\beta$ سے ہی اخذ ہوں گے۔ آپ مساوات $x^2+bx+c=0$ کے جذر واضح کریں جنکی جمع b" اور ضرب c ہو۔

c جز B کو طول دیتے ہوئے جز a,b اور پر c مشتمل مساوات $x^2+bx+c=0$ کے جذر کی (i) جمع اور (ii) ضرب کیلئے عبارات معلوم کریں۔

## 15.4 6.4 ہمزاد مساوات

یہ جزو ظاہر کرے گا کہ $y=x^2$ اور $5x+4y=21$ جیسے ہمزاد مساواتوں کے جوڑوں کو کیسے حل کیا جاتا ہے اس میں جزو 7.3 کے مقدمات کو مزید آگے بڑھایا جائے

## 16.4 مثال نمبر 1.6.4

ہمزاد مساوات $y=x^2$ , $x+y=6$ کو حل کریں۔ عمومی طور پر ان مساوات کو حل کرنے کا بہترین طریقہ یہ ہے کہ ایک مساوات سے x یا y کیلئے عبارت معلوم کرکے دوسری مساوات میں درج کر دی جائے۔ یہاں y کی قیمت کیلئے پہلی مساوات کو استعمال کرتے ہوئے دوسری مساوات میں ترکیب بدلی نسبتا آسان ہے جسکا ماحصل $x+x^2=6$ ہے۔ اسے مرتب کرنے سے $x^2+x-6=0$ ۔ لہذا $(x+3)(x-2)=0$ یعنی $x=2$ یا $x=-3$ ۔ آپ y کی متعلقہ قیمتیں مساوات $y=x^2$ سے معلوم کرسکتے ہیں۔ جو کہ بالترتیب $y=4$ اور $y=9$ ہیں۔ لہذا اسکا حل $x=2, y=4$ یا $x=3, y=9$ ہے۔ جانچ لیں کہ قیمتوں کے ہر جوڑے کیلئے $x+y=6$ ۔ توجہ رہے کہ جوابات باہم جوڑوں کی شکل میں ہیں۔ جوابات کو $x=2, x=-3$ یا $y=4, y=9$ کی صورت میں لکھنا غلط ہے کیونکہ جوڑے $x=2, y=9$ اور $x=-3, y=4$ اصل مساوات کو ثابت نہیں کرتے ہیں۔ آپ یہ تب ملاحظہ کرسکتے ہیں اگر سوال کی تشریح ترسیمات $y=x^2$ اور $x+y=6$ کے نقاط انقطاع معلوم کرنے کیلئے کریں جیسے کہ شکل 2.4 میں۔

## 17.4 مثال نمبر 2.6.4

ہمزاد مساوات $x^2-2xy+3y^2=6$ اور $2x-3y=3$ کو حل کریں۔ پہلی مساوات x یا y کیلئے عبارت معلوم کرنا مشکل ہے لہذا دوسری مساوات سے ابتدا کریں۔ اگر آپ کسور سے گریز کریں تو غلطی کے امکانات کم ہوں گے۔ دوسری مساوات سے مساوات $2x=3+3y$ حاصل ہوئی لہذا اسکا مربع لینے سے

$$4x^2=(3+3y)^2=9+18y+9y^2$$

اب آپ کے پاس $4x^2$ اور 2x کیلئے عبارت موجود ہیں لہذا اب آپ پہلی مساوات میں ترکیب بدل سکتے ہیں۔ پہلی مساوات کو 4 سے ضرب دینا مددگار رہے گا۔ لہذا یہ $9y^2 6y-15=0$ میں تخفیف ہو جاتا ہے اور اسے 3 سے تقسیم کریں تو $3y^2+2y-5=0$ ۔ اس مساوات کو حل کرنے سے $(y-1)(3y+5)=0$ حاصل ہوا لہذا $y=1$ یا $y=-5/3$ ۔

دوسری مساوات میں ترکیب بدلنے سے x کی قیمت بالترتیب x=3 اور x= -1 حاصل ہوگی۔ لہٰزا حل x=-1 ,y=3 اور x=3,y=1 ہے۔

## 18.4 مثال نمبر 4-3.6

کتنے نقاط پر خط $x+2y=3$ منحنی $2x^{+}y^2=4$ کو مقطع کرتا ہے؟ $x+2y=3$ لہٰزا $x=3-2y$ کی ترکیب $2x^2+y=4$ میں درج کرنے سے $2(3-2y)^2+y^2=4$ لہٰزا $(9-12y+4y^2)+y^2=4$ کی تحقیق سے مساوات $y^2-24y+14=0$ حاصلہوئی۔ اس مساوات کا ممیز $24^2-4*9*14=576-504=72$ ہے۔کیونکہ ممیز مثبت ہے۔ اس لیے مساوات کے دو حل ہوں گے، معلوم ہوا کہ خط منحنی کودو نقاط پر منقطع کرتا ہے۔

## 19.4 دودرجی مساوات میں قابل تخفیف مساوات7.4

## 20.4 دودرجی مساوات میں قابل تخفیف مساوات

بعض اوقات آپکا سامنا ایسی مساوات سے ہوگا جو دودرجی نہیں ہوں گی۔ درست تریب میں بدلی کے ذریعے انہی دودرجی مساوات میں تبدیل کرنا ممکن ہے۔

## 21.4 مثال نمبر1.7.4

مساوات $t^4-13t^2+36=0$ کو حل کریں۔ جزو $t^4$ کی موجودگی کے باعث یہ ایک دودرجی مساوات ہے لیکن اگر $x$ کو بطور $t^4$ لیں تو یہ مساوات $x^2-13x+36=0$ میں تبدیل ہو جائے گی جو کہ $x$ کی دودرجی مساوات ہے۔ تو $(x-4)(x+9)=0$ لہٰزا $x=4$ یا $x=9$ ۔ واپس $x=t^2$ درج کرنے سے $t^2=4$ یا $t^2=9$ یعنی نتیجہ $t=\pm 2$ یا $t=+-3$۔

## 22.4 مثال نمبر2.7.4

مساوات $sqrtx=6-x$ کو حل کریں۔
$(a)$ y کو $\sqrt{x}$ ۔کیلیۓ استعمال کرتے ہوئے۔
$(b)$ مساوات کی طرفیں کا مربع لینے سے ۔
$(a)$ $\sqrt{x}$ کی جگہ y درج کرنے سے مساوات ، $y=6-y^2$ یا $y^2+y=6$ میں تحلیل ہو جاتی ہے۔ لہٰزا

$(y+3)(y-2)=6$ پس $y=2$ یا $y=3$ لیکن چونکہ $y=\sqrt{x}$ جبکہ $\sqrt{x}$ قطعاً منفی نہیں ہو سکتا ہے۔تو واحد حل $y=2$ ہی ہے جس سے $x=4$ حاصل ہوا۔

طرفین کا مربع لینے سے $(6-x)^2 = 36 - 12x + x^2$ یا $x^2 - 13x + 16 = 0$ ۔ لہزاہ $(x-4)(x-9) = 0$ تو ماحصل $x = 4$ یا $x = 9$ ہے۔ جوابات کو جانچنے سے معلوم ہوتا ہے کہ جب $x = 4$ ہو تو مساوات $\sqrt[2]{x)} = 6 - x$ درست ثابت ہوتی ہے لیکن جب $x = 9$ ہو تو , $sqrt[2]x) = 3$ اور $6 - x = -3$ یعنی $x = 9$ پس $x = 9$ جذر نہیں ہے لہزاہ $x = 4$ واحد جذر ہے۔ یہ اہم ہے کہ اگر آپ مساوات $sqrt[2]x = 6 - x$ کا مربع لیں تو اس کے جزر سمیت وہ جزر جو آپ اصلا معلوم کرنا چاہ رہے تھے معلوم کریں گے۔ قابلغور ہے کہ $x = 4$ تو اس مساوات کو درست ثابت کرتا ہے۔لیکن $x = 9$ نہیں کرتا۔ نتیجہ یہ ہے کہ جب آپ کسی مساوات کو حل کرتے ہوئے اس کا مربع لیں تو ضروری ہے کہ اپنے جوابات کو جانچ لیں۔

## 23.4 مشق نمبر 4C

1. مندرجہ ذیل ہمزاد مساوات کے جوڑوں کو حل کریں۔

2. خط مستقیم اور منحنی کے نقاط انقطاع کے محدد معلوم کریں۔

3. مندرجہ ذیل سوالات میں خط مستقیم اور منحنی کے نقاط انقطاع کی تعداد معلوم کریں۔

4. مندرجہ ذیل مساوات کو حل کریں۔غیر ناطق جوابات ، غیر معلوم صورت میں دیں۔

5. مندرجہ ذیل مساوات کو حل کریں۔ (زیادہ تر معملات میں مناسب عبارت سے ضرب مساوات کو قابل مہم بنادے گی۔

6. مندرجہ ذیل مساوات کو حل کریں۔

## 24.4 متفرق مشق4

1. ہمزاد مساوات $X + Y = 2$ اور $x^2 + 2y^2 = 11$ کو حل کریں۔

2. دودرجی کثیر رکنی عبارت $x^2 - 10x + 17$ کو $f(x)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔طاقی قیمتوں کو واضع کرتے ہوے $f(x)$ کو $(x-a)^2 + b$ صورت میں لکھیں۔لہزاہ $fx$ کے لیے کم سے کم ممکن قیمت اور اس کے موافق $x$ کی قیمت معلوم کریں۔

3. ہمزاد مساوات $2x + y = 3$ اور $2x^2 - xy = 10$ کو حل کریں۔

4. k۔ کی کن قیمتوں کے لیے مساوات $2x^2 - kx + 8 = 0$ دہرا جذر رکھتی ہیں؟

5. تفاعل $fx = (2x+4)(x-4)$ کو کامل مربعی صورت میں ظاہر کر کے تفاعل $fx$ کی سعت معلوم کریں۔

6. مساوات کو حاصل کرکے جواب ہر ممکن حد تک منفق اور غیر معقول صورت میں ہے۔

(b) مساوات $x^4 - (6\sqrt{3})x^2 + 24 = 0$ کے چاروں ممکنہ حل کے جوابات دو درجہ اعشاریہ تک دیں۔

(7) ظاہر کریں کہ خط $y = 3x - 3$ اور منحنی $y = (3x+1)(x+2)$ ایک دوسرے کو منقطع نہیں کرتے ہیں۔

(8) $9x^2 - 36x + 52$ کو $(Ax^2 + Bx)^2 + C$ کی صورت میں ظاہر کریں جبکہ B,A اور C عدد صحیح ہیں لہٰذا یا دوسری صورت میں $9x^2 - 36x + 52$ کیلئے x کی حقیقی قیمتوں کا مجموعہ معلوم کریں۔

(9) دو درجہ اعشاریہ تک درست محدد دیتے ہوئے منحنی $y = 6x^2 + 4x - 3$ اور $y = x^2 - 3x - 1$ کے نقاط انقطاع معلوم کریں۔

(10)(a) $9x^2 + 12x + 7$ کو $(ax+b)^2 + c$ کی صورت میں ظاہر کریں،یہاں b,a اور c مستقل ہیں جنکی قیمتیں معلوم کرنا مقصود ہیں۔

(b) $\frac{1}{9x^2+12x+7}$ کیلئے درست، x کی حقیقی قیمتوں کا مجموع معلوم کریں۔

(11) مساوات $8x^4 - 8x^2 + 1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ کے تمام جزر معلوم کریں جو تین معنی خیز اعداد تک درست ہوں۔

(12) x کی تمام قیمتوں کیلئے درست مستقبل a,b اور c معلوم کریں۔

لہٰذا $y = 3x^2 - 5x + 1$ کیے ترمیم پر سب سے کم قیمت نقط کے محدود معلوم کریں۔

(یاداشت: سب سے کم اور سب سے زیادہ قیمت والے نقاط راس ہیں۔)

(13) قوس $xy = 6$ اور $y = 9 - x$ خط کے نقاط انقطاع معلوم کریں۔

(14) $y = ax^2 - 2bx + c$ قوس کی مساوات a,b اور c ہے اور مشتقل ہیں جبکہ a>0

(a) قوس کے راس کے محدد کو a,b اور c کی صورت میں معلوم کریں۔

(b) ہمیں معلوم ہے کہ قوس کا راس خط، $x = y$ پر ہے۔c کیلئے a اور b کی صورت میں عبارت معلوم کریں۔یہ بھی ظاہر کریں کہ b کی تمام قیمتوں کیلئے $c \leq \frac{-1}{4a}$

(15)(a) $y = x - 1$ اور $y = kx^2$ کے ترسیمات کو تصویر میں دکھایا گیا ہے جہاں ایک مثبت مستقل ہے ترسیمات دو متفرق نقاط A اور B پر ایک دوسرے کو منقطع کرتے ہیں۔A اور B کیلئے x کیلئے دو درجی مساوات تحریر کریں اور ظاہر کریں کہ $K < \frac{1}{4}$.

(b) مندرجہ ذیل معملات میں ترسیمات $y = x - 1$ اور $y = kx^2$ کے باہمی تعلق کو واضح کریں.

(1) $k = \frac{1}{4}$ (2) $k > \frac{1}{4}$

(c) ترمیم یا کسی اور دلیل سے ثابت کریں کہ جب منفی k مستقل ہو تو مساوات $x - 1 = kx^2$ کے دو حقیقی جزر ہوتے ہیں،ایک جزر 0 اور 1 کے درمیان ہوگا۔

$y = 3x + 5$ کے عمودی مساوات معلوم کئے بغیر درج ذیل طریقے سے خط $y = 3x + 5$ اور نقطہ $(1,2)$ کے درمیان کم سے کم فاصلہ معلوم کریں۔

(a) $(x,y)$ خط پر ایک عمومی نقطہ ہے، ظاہر کریں کہ نقطہ $(1,2)$ سے اس کا فاصلہ 'd'، $d^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$ کے ذریعے حاصل ہو گا۔

(b) خط کی مساوات کو حل کر کے ظاہر کریں کہ $d^2 = (x-1)^2 + (3x+3)^2$

(c) ظاہر کریں کہ $d^2 = 10x^2 + 16x + 10$

(d) مربع کی تکمیل کے ذریعے ظاہر کریں کہ کم سے کم ممکن فاصلہ

(17) سوالنمبر 16 کی ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے۔

(a) $(2,3)$ کا $y = 2x + 1$ سے عمودی فاصلہ معلوم کریں۔

(b) $(1,3)$ کا $y = -2x + 5$ سے عمودی فاصلہ معلوم کریں۔

(c) $(2,-1)$ کا $3x + 4y + 7 = 0$ سے عمودی فاصلہ معلوم کریں۔

(18) نوے درجے پر قائم دو سڑکوں کا نقطہ انقطاع '0' ہے؛ ایک سڑک شمال سے جنوب اور دوسری مشرک سے مغرب کی جانب ہے۔ گاڑی (A) نقطہ 0 کے 100 میٹر مغرب سے مشرق کی جانب 20m/s کی رفتار سے بڑھ رہی ہے اور گاڑی (B) نقطہ 0 کے 80 میٹر شمال سے جنوب کی جانب 20m/s کی رفتار سے بڑھ رہی ہے۔

(a) ظاہر کریں کہ 't' وقت کے بعد انکا باہمی فاصلہ 'd' ہوگا۔

$$d^2 = (100 - 20t^2) + (80 - 20t^2)$$

(b) ظاہر کریں کہ باسکی تحقیق کے نتیجے میں $d^2 = 400(5 - t^2) + (4 - t^2)$

(c) ظاہر کریں کہ دونوں گاڑیوں کا کم سے کم باہمی فاصلہ $10\sqrt{2}$ میٹر ہے

(19) نوے درجے پر قائم دو سڑکوں کا نقطہ '0' انقطاع ہے؛ ایک سڑک شمال سے جنوب اور دوسری مشرک سے مغرب کی جانب ہے۔ دونوں موٹر بائیک B اور A کے درمیان کم سے کم فاصلہ معلوم کریں جو کہ ابتدائی طور پر نقطہ '0' کی جانب مندرجہ ذیل صورتوں میں گامزن ہیں

(a) دونوں موٹر بائیک '0' سے 10 میٹر کے فاصلہ پر ہیں A 20m/s اور B 10m/s سے سفر کر رہا ہے

(b) A, '0' سے 120 میٹر کے فاصلہ پر ہے اور اسکی رفتار 20m/s ہے جبکہ B, '0' سے 80 میٹر پر ہے اور اسکی رفتار 10m/s ہے۔

(c) A, '0' سے 120 میٹر کے فاصلہ پر ہے اور اسکی رفتار 20m/s ہے جبکہ B, '0' سے 60 میٹر پر ہے اور اسکی رفتار 10m/s ہے۔

(a) $2 - 4x - x^2$ اور $x^2 + 8x + 24$ کو کامل مربع صورت میں ظاہر کریں۔

(b) ظاہر کریں کہ مساوات $y = 2 - 4x - x^2$ اور $x^2 + 8x + 24$ کے ترسیمات ایک دوسرے کو منقطع نہیں کرتے ہیں۔

(c) ایک مثال کے ذایعے ظاہر کریں کہ $y = A - (x-a)^2$ اور $y = B - (x-b)^2$ جیسی مساوات کے ذریعے ترسیم معلوم کیا جاسکتا ہے جو کہ ایک دوسرے کو منقطع نہیں کرتے ہیں۔

(21) ایک "ریا لگانگا فرم " مختلف مقامات سے دھاتی ڈبے جمع کرتی ہے اور انہیں پیس کر دھات واپس صنعت کار کو بیچ دیتے ہیں۔ ہر ہفتہ 1 ٹن دھاتی ڈبوں سے p منافع ہوتا ہے۔ $p = 100 - \frac{1}{2}t^2 - 200$ تکمیل مربع سے معلوم کریں کہ فرم زیادہ سے زیادہ کیناہفتہوار منافع حاصل کرتی ہے اور اتنا منافع حاصل اور ہر ہفتہ منافع حاصل کرنے کے لیے لتنے ٹن دھاتی ڈبے اکٹھا کرکے بیچنا ہوں گے؟

# باب 5

# عدم مساوات

یہ باب عدم مساوات کا تعلق اور عدم مساوات کے حل کے بارے میں ہے۔ اس باب کے مکمل ہوتے ہی آپ یہ چیزیں سیکھ جائیں گے۔

- عدم مساوات کی علامتوں کے ساتھ کام کرنے کے اصول سیکھ جائیں گے۔
- لکیری عدم مساوات کو حل کرنے کے قابل ہو جائیے گے۔
- چوکور عدم مساوات کو حل کرنے کے قابل ہو جائیے گے۔

## 1.5 عدم مساوات کے اشارے

آپ اکثر ایک نمبر کا دوسرے سے موازنہ کرنا چاہتے ہیں اور کہتے ہیں کے کون سا بڑا ہے۔ یہ عدم مساوات کی $>$ ، $<$ علامتوں کے لیے استعمال ہوتے ہیں۔ اور آپ پہلے ہی عدم مساوات کو اباب 3 اور 4 میں پڑھ چکے ہیں۔

علامت $>$ کا مطلب یہ ہے کہ $a$ بڑا ہے $b$ سے۔ آپ اسکی جغرافیائی طور پر تصویر بنائیں۔جیسا کہ تصویر 5.1 ظاہر کرتی ہے کہ تین عدم لکیریں جو $a$ اور $b$ کی طرف ظاہر کرتی ہے۔

نوٹ کریں کے اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا کہ $a$ اور $b$ مثبت ہیں یا منفی۔ $O$ کی پوزیشن $a$ اور $b$ کے سلسلے میں لکیر پر غیر متعلقہ ہے۔ تینوں لکیر پر ---کے طور 6 نیچے اور لکیر پر 7->4 --------------------- اسی

طرح علامت --- کا مطلب ہے کہ $ab$ سے کم ہے۔ آپ اس کا تصور کر سکتے ہیں کہ جغرافیائی طور پر $b$ بائیں طرف ہے $a$ کہ۔ ------------------- یہ چار تاثرات برابر ہیں۔ $a$ بڑا ہے $b$ سے $b$ کم ہے $a$ سے علامت --- کا مطلب ہے کہ -- بڑا ہے --- سے پر پھر --- برابر ہے --- کے لیکن ---سے کم نہیں ہے۔

یہ تاثرات برابر ہیں۔

ا. $a$ بڑا ہے $b$ سے یا $a$ برابر ہے $b$ کے

ب. $b$ کم ہے $a$ سے یا $b$ برابر ہے $a$ کے

علامتوں < اور > کو سخت عدم مساوات علامتیں کہا جاتا ہے۔ اور اسی طرح --- اور --- کو کمزور عدم مساوات علامتیں کیا جاتا ہے۔

## 2.5 لکیری عدم مساوات کا حل کرنا

جب آپ عدم مساوات کا حل کرتے ہیں جیسے ---تو آپ کو آسان تر لکھنا پڑتا ہے۔ بلکل اسی معنی کے ساتھ اس معاملے میں آسان بیان نکلا ہے---۔ لیکن آپ پیچیدہ بیان سے سادہ بیان تک کیسے پہنچے گے۔

## 3.5 دونوں اطراف میں ایک ہی تعداد میں اضافہ یا گھٹانا

آپ عدم مساوات کے دونوں اطراف کو ایک ہی تعداد سے جوڑ یا گھٹا سکتے ہیں۔ مثال پر آپ نمبر 11 دونوں اطراف میں شامل کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر آپ کو مل جائے گا -------------- ------------------------------- اسی طرح کے اقدام کے جواز میں یہ ظاہر کرنا مشکل ہے کہ کوئی بھی نمبر --- یا پھر -------مثبت ہے۔ یہ کہاں جا سکتا ہے۔ $O$ کی لکیر پر $a$ دائیں طرف ہے $b$ کہ تصویر 5.2 سے ظاہر ہوتا ہے اور یہ سچ ہے چاہیے $C$ مثبت ہو یا منفی

چونکہ $C$ جمع کرنا۔ $C$ شامل کرنی کے مترادف ہے، لہزا آپ یہ بھی کر سکتے ہیں کہ دونوں اطراف سے ایک ہی تعداد کو گھٹائیں۔ ------------------- اس مثال میں --- کو دونوں طرف سے گھٹائیں --- ---

## 4.5 ایک مثبت تعداد کے ذریعے دونوں اطراف سے ضرب کرنا

آپ عدم مساوات کے دونوں اطراف کو مثبت تعداد کے ذریعہ ضرب (یا تقسیم) کر سکتے ہیں

مثال کے طور پر آپ مثبت نمبر 7 (دونوں کے ضرب) کے ذریعے دونوں اطراف تقسیم کر سکتے ہیں۔ ---- ----- یہاں قدم کا جواز پیش کیا گیا ہے اگر $O$، <> اور --- پر --- لکیر پر ہے۔

بطور ---،--- دائیں طرف ہے --- کہ لکیر پر

جیسا کہ ---، --- اور --- کے عہدوں کی توسیع --- اور --- کے مطابق ---ہے۔ تصویر 3.5 ظاہر کرتا ہے کہ چاہیے --- اور --- مثبت ہوں یا منفی --- دائیں طرف ہے --- کہ تو---

## 5.5 دونوں اطاف کو منفی تعداد سے ضرب کرنا

اگر --- اور آپ دونوں اطراف سے $a + b$ کو منفی کریں۔ اور --- کو حاصل کریں۔ جو --- جیسا ہے۔ یہ ایسا ظاہر کرتا ہے کہ 1۔ عدم مساوات کو دونوں اطراف ظاہر کرتا ہے۔ اور آپ عدم مساوات کی سمت تبدیل کر دیں۔ اور فرض کریں آپ --- کو 2۔ عدم مساوات سے ضرب دینا چاہتے ہیں تو یہ ایک جیسا ہے --- کو 2۔ سے ضرب دیں تو ---۔ آپ 2۔ سے ضرب لگانے کے بارے میں سوچ سکتے ہیں۔ جیسے $a$ اور $b$ اصل میں ہیں پھر ایک توسیع پزیر کے طور پر 2 سے ضرب کریں۔ آپ یہ کہہ کر خلاصہ کر سکتے ہیں کہ اگر آپ ضرب (یا تقسیم) عدم مساوات کو دونوں اطراف سے منفی تعداد سے کریں تو آپ کو عدم مساوات کی سمت تبدیل کرنی ہو گئی۔ اگر --- اور --- تو

## 6.5 عدم مساوات پر آپریشن کا خلاصہ

- آپ عدم مساوات کی دونوں جانب کسی ہندسے کو جمع یا تفریق کر سکتے ہیں.

- آپ عدم مساوات کو کسی مثبت ہندسے سے ضرب یا تقسیم کر سکتے ہیں.

- آپ عدم مساوات کو کسی منفی ہندسے سے ضرب یا تقسیم کر سکتے ہیں مگر آپ کو عدم مساوات کی سمت تبدیل کرنا ہوگی.

عدم مساوات کو حل کرنا محض ان تین قاعدوں کا درست استعمال ہے.

مثال

عدم مساوات کو حل کریں۔ اس مثال میں آپ کو دونوں اطراف کو تقسیم کرنے کی ضرورت ہے۔ تبدیل کرنے کیلئے یاد رکھنا عدم مساوات کی سمت ---------- بن جاتی ہے۔

مثال

------------ عدم مساوات کو حل کریں۔

ترتیب میں دونوں اطراف سے ضرب کرنے کے لیے ایک مثبت تعداد سے ضرب لگانے کے بارے میں قاعدہ کا استعمال کریں۔ حل کرتے ہوئے کسور کو صاف کریں۔ایک وجہ ہے کہ ایک ہی آپریشن کیا جا سکتا ہے۔ جو عدم مساوات کو متاثر کرتی ہے۔

---

-------------------------------- اس قسم کی عدم مساوات کو حل کرنے کے مترادف ہے ۔ تاہم آپ ضرب لگاتے ہیں یا کسی عدد کو تقسیم کرتے ہیں۔ اگر تعداد منفی ہو تو عدم مساوات کو ختم کرنا ضروری ہے۔ -------------------------------------------------

مشق 5A

سوال:- عدم مساوات کو حل کریں۔ ------------------------------

چوکور عدم مساوات 3.5 چوتھے باب میں آپ نے دیکھا ہے کہ ایک چوکور دک تقریب میں سے تین سے ایک شکل ہو سکتی ہے۔ معمول کی شکل ---------------- عنصر کی شکل ---------------- مکمل مربع فارم ----------------

اگر آپ ---------------- کو چوکور عدم مساوات کو حل کرنے کی ضرورت ہے۔ اب تک استعمال کرنے میں سب سے آسان فارم عنصر کی شکل ہے۔ یہاں کچھ ایسی مثالیں ہیں جو چوکور عدم مساوات کو حل کرنے کے طریقے دکھاتی ہے۔

مثال 1.3.5

---------- عدم مساوات کو حل کریں۔ طریقہ 1:- ---------- ترسیم کا خاکہ بنائیں ۔ ترسیم -------- اور -------- پر کاٹتا ہے ۔ --- کی قابلیت مثبت ہے ۔ قطع مکافی اوپر موڑتا ہے۔ جیسا تصویر 5.5 میں دکھایا گیا ہے۔ آپ کو --- کی اقدار تلاش کرنے کی ضرورت ہے جیسے--- ترسیم سے دیکھ سکتے ہیں کہ 4 اور 2 درمیان میں ہے ۔ تو ---- اور ----- سے یاد رکھنا ---- بھی ---- جیسا ہے ۔ تو آپ دیکھ سکتے ہیں ۔ اسکا مطلب ہے x بڑا ہے 2 سے اور کم ہے 4 سے۔ جب آپ ---- اور ---- قسم کی مساوات لکھتے ہیں ------------ کی شکل میں ہے اور ضروری ہے کہ -------- لکھنا کوئی معنی رکھتا ۔ اسی طرح x دونوں سے زیادہ ہو سکتا ہے -------------------- کو وقفہ کہا جاتا ہے ۔ طریقہ 2:- --- کی اقدار تلاش کریں ۔

جس کے لئے ـــــــــــــ ـــــــــ اور ـــــــ اقدار کو عدم مساوات کے لیے اہم اقدار کہا جاتا ہے ۔ موضوع میں عوامل کی علامت کو ظاہر کرنے کے لیے ایک انظال بنائیں ــــــــــــــــ ــــــــــــــــ ــــــــــــــــ ــــــــــــــ ــــــــــــــ

مثال 2.3.5 :- ـــــــــــــــ عدم مساوات کو حل کریں ۔ تصویر ـــــــــــــــــ کی ترسیم دکھاتا ہے۔ جیساا کہ ـــ کی قابلیت منفیی ہے۔ قطع مکافی کی چوٹی اوپر کی طرف ہے۔ تو ـــــ جب کہ ــــــــ اور ــــــــــــ ہے۔ نوٹ کریں کہ اس معاملے میں عدم مساوات بھی اہم اقدار ـــ اور ـــ بھی ربط سے مطمعن ہے۔

مثال ـــــ ــــــــ جہاں ـــــ ہے۔ عدم مساوات کو حل کریں۔ یہ ــــــــ اور ــــــــ کے جیسا ہے۔ ـــــــ اور ـــــ کی اہم اقدار ہے۔ انظال ـــــــــــــ انظال ـــــ سے پتی چلتا ہے اگر ــــــ کو ــــــ یہ ـــــ اور ـــــ جیسا دکھتا ہے۔ مثال ـــــ کا نتیجہ اہم ہے۔ آپ اسے مزید لکھ سکتے ہیں اگر ـــــ ہے یہ بیانات مساوی ہیں۔ ـــــــــــــــ ـــــــــــــ جغرافیائی یا انظال کے طریقوں سے استعمال کر کے عدم مساوات کو حل کرنا سب سے آسان ہے۔ آپ اس خاکہ کو کامل کرنے کے لئے جغرافیائی احاب وکتاب کے آلہ کو استعمال کر سکتے ہیں۔ اور یہ عمل سب سے آسان ہے۔ مثال ـــــ ظاہر کرتا ہے کہ کس طرح عدم مساوات کے دلائل کو زیادہ الجبری شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ مثال ـــــ الف ــــــــــ ب ــــــــــ عدم مساوات کو حل کریں۔ اگر دو عوامل کی پیداوار منفی ہے تو ان میں سے ایک منفی ہونا ضروری ہے۔ اور دیگر مثبت کو غور کرنے کے لیے دو امکانات ہیں۔ اگر ـــــ منفی ہے تو ـــــ مثبت ہے تو ــــــ اور ــــــ ہے۔ جو کہ ناممکن ہے۔ لیکن اگر ــــــ مثبت اور ــــــ منفی ہے تو ــــــ اور ـــــــ ممکن ہوتا ہے۔ ب اگر دو عوامل کی مصنوع مثبت ہے تو دونوں مثبت ہیں تو یہ دونوں منفی ہیں۔ اگر ـــــ اور ـــــ مثبت ہے تو ـــــ اور ـــــ بنتا ہے۔ ـــــــ اگر دونوں ـــــ اور ـــــ بنتا ہے۔

مثال ـــــ الف ــــــــــــ ب ــــــــــــ الگ الگ طور پر عدم مساوات کو حل کریں۔ ــــــــــــ مربع مکمل کریں۔ ــــــــــــ کی سب سے چھوٹی اقدار ـــ ہے اور یہ اس وقت ہوتا ہے جب ـــــ تو ـــ کی کوئی اقدام نہیں ہوتی۔ (ب) ـــــــــــــــ الف مندرجہ ذیل عدالت عدم مساوات کو حل کرنے کے لئے خاکہ ترمیم کا استعمال کریں ب مندرجہ ذیل عدم مساوات کو حل کرنے کے لئے اھم اقدار پر مبنی انظال استعمال کریں ج مندرجہ ذیل عدم مساوات کو دور کرنے کے لئے الجبری طریقہ استعمال کریں-غیر معقول تعداد کواس میں جوڑیں-اضافی کی شرائط میں × کی عدم مساوات کی اقدار درست ہو سکتی ھے۔ د کوئی بھی طریقہ استعمال کریں عدم مساوات کو حل کرنے کے لئے

متنوع دوہرائی سوال الف عدم مساوات کو حل کریں ب عدم مساوات کو حل کریں ج عدم مساوات کو حل کریں ہ عدم مساوات کو حل کریں

عدم مساوات کو حل کریں سوالات سے کے جوابات دینے میں امتیازی کا استعمال کریں-آپ کو جانچ پڑتال کرنے کی ضرورت پڑ سکتی ہے۔ قدر الگ الگ سوال کی وہ اقدار تلاش کریں جس کے لئے مندرجہ ذیل مساوات کی دو الگ الگ جڑیں ھیں الف ب ج سوال کی اقدار کی حد معلوم کریں-جس کے

لئے مساوات کی جڑیں ہیں ۔ سوال کی اقدار کا سیٹ تلاش کریں ۔جس کے لئے ہے۔ سوال اور کی ترسیم کا خاکہ بنائیں ۔اور

کی اقدار کو اس طرح تلاش کریں کہ لکیر مساوات کے ساتھ وکر سے مل سکے ۔۔۔۔۔۔صرف ایک بار۔

۔۔۔۔ اور۔۔۔۔ مساوات کے ساتھ کے ساتھ ایک ہی محور پر منفی خطوط ظاہر کریں اور چورہا کے ان نقاط کو ظاہر کریں۔

ایک میل آرڈر والی فوٹو گرافی والی کمپنی اپنی تصویر تیار کرنے کی خدمت پیش کرتی ہے۔گاہکوں کو یہ شیشے ندیچے اور انتاطار کے سائز پر مبنی ہے ۔ اس ۔۔ فی میٹر وصول کرتا ہے۔ فریم اور فریم کے گلاس کے لیے فی میٹر مربع ۔۔۔ کے تاثرات لکھیں ۔ ایک فریم میں تصویر کو بڑھا کر اور بڑھتے ہوئے لاگت کے لیے جو ۔۔ میٹر چوڑا ہے اور ۔۔۔ میٹر اوذچپائی کی ایک تصویر کو بڑھیا گیا تھا ۔ اور اس کی قیمت میں سائزز ۔۔۔ میٹر کے مربع فریم میں کیا گیا ہے ۔ ۔۔۔ کے لیے مربع مساوات کو مرتب کریں اور حل کریں۔

۔۔۔۔۔ کے زریعے سیدھی لکیر کی مساوات تلاش کریں جو لکیر پر ہے۔ ۔۔۔۔۔ اور ۔۔۔۔۔ نقاط سے گزرتا ہے۔ مثلث ۔۔۔ کے علاقے کو تلاش کریں۔ آپ کا جواب آسان تر شکل میں ہونا چاہیے۔

عدم مساوات کو حل کریں ۔ الف۔ ب۔ ج

چوکور مساوات ۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔ کی ایک جڑ دہرائی ہوتی ہے ۔ P کی ایک ممکن اقدار تلاش کریں۔

بیک وقت مساوات کو حل کریں۔ ۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔

کے عدم مساوات کو حل کریں۔ دہرائی کی مشق ۱)ایک لکیر ان نقطوں میں سے گزرتی ہے۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔اور۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔ہے ۔جوایک مساوات ظاہرکرتی ہے۔ لکیر۔۔۔۔کو۔۔۔۔پر کاٹتی ہے۔جس کی مساوات۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔ہے۔۔۔۔پر۔۔۔کے نقاط تلاش کریں۔ ۲)) یہ ظاہر کریں مساوات کی کوئی یہی جڑہ۔۔۔۔۔۔۔۔کی جڑہےاور۔۔۔۔۔کی جڑ ہے اور ظاہرکریں۔۔۔۔۔۔۔کا کوئی حل نہیں ۳)۔۔۔۔۔۔۔۔کو۔۔۔۔۔۔۔۔کو فارم میں لکھیں۔جہاں۔۔۔اور۔۔۔۔کی اقدارتلاش کریں۔ الف ۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔کی سب سے کم اقدارلکھیں اور ۔۔۔۔ کی تلاش کریں ب)۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔کی اقدارتلاش کریں ۴)۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔اسان کریں ۵)عدم مساوات کو حل کریں۔ الف ب ج ۶)دکھائیں کہ مساوات کو۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔کو۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔کی شکل میں لکھاجا سکتا ہے۔لہذا۔۔۔۔کی قیمتکی تلاش کریں جو مساوات کو پورا کریں

یہ ثابت کریں کہ نقاط۔۔۔۔۔۔اور۔۔۔۔پر کونے والے مثلث دائیں کونے میں ہیں۔ اور اسکے علاقے کا حساب لگائیں۔ یہ معلوم کریں کہ لکیر۔۔۔منفی خطوط سے ملتا ہے۔۔۔۔مساوات میں۔۔۔کو کسی چیز سے کٹوتی کر سکتے ہیں۔ ۔۔۔ اور۔۔۔۔ رومبس میں مخالف راس ہیں۔ اسکے وتر کی مساوات تلاش کریں۔ دوسری عمودی

حصوں میں سے ایک۔۔۔ہے۔ چوتھا محور تلاش کریں۔ نقاط۔۔۔کے وسطہ نقطہ لکھیں۔ ۔۔۔کے فاصلہ کا حساب لگائیں۔ نقطہ۔۔۔دائرے پر ہے۔ ۔۔۔کے قطر ہے اور۔۔۔نقاط ہے۔ جہاں۔۔۔مثبت ہے۔ ۔۔۔کے اقدار کا حساب لگائیں۔ عدم مساوات کو حل کریں۔ مثلث کے دونوں اطراف کی لمبائی۔۔۔ سینٹی میٹر اور۔۔۔ سینٹی میٹر ہے اور انکے درمیان۔۔۔کا زاویہ ہے۔ تیسرے پہلو کا حساب لگائیں اور جواب۔۔۔ کی فارم میں ہونا چاہیئے۔

................ ایک مثلث کے راس ہیں۔۔۔ کے عمودی تنصیف کی مساوات جبکہ ۔۔۔کا عمودی تنصیف معلوم کریں. ۔۔ کے محدد معلوم کریں جہاں یہ خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اور ۔۔۔۔ سے ۔۔ تک کا فاصلہ معلوم کریں. .......کا رقبہ معلوم کریں. .... سے..... تک عمود کی لمبائی معلوم کریں اور ..... اخذ کریں کہ...... کا زاویہ..... ہے. ایک چوکود میں۔۔۔۔۔۔۔۔ کے راس اور لمبائی دو عمود۔۔۔اور۔۔۔کی مساوات لکھیں۔ ۔۔۔ قدر معلوم کرنے کے لیئے۔۔۔متبادل۔۔۔استعمال کریں۔ جو مساوات کو پورا کرتی ہے۔۔۔۔ چوکود کی تقریب۔۔۔ہے۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔کی اقدار تلاش کریں۔ ظاہر کریں۔۔۔ اور اس کی وضاحت کے لیئے۔۔۔ کے قریب کریں۔ حساب وکتاب کا آلہ استعمال کیئے بغیر۔۔۔کی جذر لکھیں۔ ۔۔۔کو۔۔۔اور۔۔۔کی شکل میں لکھیں۔

اشاریہ اشارے میں اضافی اشارے میں

# باب 6

# تفرق

یہ سبق کسی بھی ترسیم پر موجود نقطے کے ڈھلاؤ یا خط مماس معلوم کرنے کے بارے میں ہے۔ جب آپ یہ سبق مکمل کر لیں گے ، آپ کو عبور حاصل ہوگا کہ:

آپ ایک سمتی مقدار پر ایک نقطہ پہ ڈھلاؤ معلوم کرنے کے لئے ایک کلیہ کا حساب لگائیں, اس کی مساوات بنائیں مربعی اور دیگر قسم کے خم پہ ایک نقطہ پر عین مطابق ڈھلاؤ کا حساب لگائیں

اس سبق کو دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ پہلے حصے میں حصہ حصہ1.6 تا حصہ حصہ5.6 میں آپ تجربے کی بنیاد پر نتائج اخذ کرتے ہوئے خط مماس سے ترسیم تک کے مسائل حل کریں گے۔ دوسرے حصے میں حصہ حصہ6.6 تاحصہ حصہ7.6 تجربے کی بنیاد پر اخذ نتائج کو ثابت کریں گے۔ آپ اگر چاہیں تو سبق کے دوسرے حصے کو نظرانداز کر سکتے ہیں لیکن آپ کو چاہئیے کہ سبق کے اختتام پہ موجود مشق کو حل کریں۔

## 1.6 خط مماس کاڈھلاؤمعلوم کرنا

ایک سادہ سے خم کے بارے میں سوچیں جیسے کے $y = x^2$ کی ترسیم۔ جیسے جیسے آپ کی نظر $x$ محور کی سمت بڑھتی ہے ، کیا آپ بیان کر سکتے ھیں ، ریاضی کی زبان میں، خم کی سمت کس طرح سے تبدیل ہوتی ہے۔

جیسے ایک سیدھی لکیر کا ایک عددی ڈھلاؤ ہے، لہذا کوئی بھی خم، بشرطیکہ وہ کافی حد تک (سموتھ) ہو ایک ڈھلوان یا ڈھلاؤ رکھتا ہے جو کہ کسی بھی ایک نقطے پہ ماپا جا سکتا ہے۔ فرق صرف اتنا ھے کہ خم کے لیے ڈھلاؤ کی سمت بھی بدلتی ھے جیسے جیسے آپ اسکے ساتھ چلتے ھیں۔ ریاضی دان اس ڈھلاؤ کی مدد سے خم کی سمت کا تعین کرتے ہیں۔

سبق باب-محدد-نقطے-اور-لکیریں میں آپ سیکھ چکے ھیں کے اگر آپکے پاس ایک سیدھی لکیر کے دو نقطوں کے محدد دستیاب ہوں تو آپ کیسے اسکا ڈھلاؤ معلوم کر سکتے ہیں۔ آپ اس طریقے کو براہ راست خم پہ استعمال نہیں کر سکتے کیوں‌کہ وہ ایک سیدھی لکیر نہیں ہے۔ آپ اس خط مماس کا ڈھلاؤ معلوم کرتے ھیں جو کہ خم کے کسی بھی دو نقطوں کی مدد سے بنایا جائے گا۔(جیسا کہ آپ تصویر شکل1.6 میں دیکھ رہے ھیں) کہ ایک نقطے پر خط مماس اور ڈھلاؤ کی ڈھلوان برابر ہے۔تاھم یہاں ایک نیا مسئلہ کھڑا ہو گیا ہے، وہ یہ کہ آپ ایک لکیر کا ڈھلاؤ صرف تب ہی معلوم کر سکتے ہیں جب آپ کو اسکے دو نقطوں کے محدد پتہ ہوں۔

تصویر شکل2.6 میں ہم آہنگ لکیریں (سیدھی لکیریں جو خم کے دو نقطوں میں سے گزریں) دکھائی گئی ہیں جو خط مماس کے قریب تر ہوتی جا رہی ہیں، لہذا بہتر یہی ہے کہ ہم ان ھم آھنگ لکیروں کی ڈھلوان معلوم کرنے سے ابتدا کریں، کیونکہ اس طریقے کو پہلے سبق میں سیکھ چکے ھیں۔

مثال 1.6: ایک ھم آھنگ لکیر کی ڈھلوان اور مساوات معلوم کریں جو کہ $y = x^2$ کے خم کے دو نقطوں کو جوڑتی ہے ، ان دو نقطوں کے محدد ہیں (0.0،16.4) اور(0.0،16.7)

حصہ حصہ3.1 میں ہم آہنگ لکیر کی ڈھلوان معلوم کرنے کے نسخہ کے مطابق؛

$$\frac{0.49 - 0.16}{0.7 - 0.4} = \frac{0.33}{0.3} = 1.1$$

حصہ حصہ5.1 میں ہم آہنگ لکیر کی مساوات معلوم کرنے کے نسخہ کے مطابق؛

$$y - 0.16 = 1.1(x - 0.4),$$

جو کہ؛

$$y = 1.1x - 0.28$$

□

یہاں مددگار ہوگا کہ ہم کچھ نئ علامات سیکھیں، بڑھوتری کے لئے ہم یونانی علامت $\delta$ڈیلٹا) کا استعمال کرتے ہیں۔لہذا $x$ میں بڑھوتری کو $\delta x$ اور $y$ میں بڑھوتری کو $\delta y$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ ان مقداروں کو حصہ حصہ3.1

میں (x-step) اور (y-step) کہا گیا ہے۔ لہذہ مثال مثال1.1.6 میں ہم آھنگ لکیر کے ایک سرے سے دوسرے (x-step) $0.7 - 0.4 = 0.3$ جبکہ (y-step) $0.49 - 0.16 = 0.33$ ہے۔لہذا ہم کہہ سکتے ھیں کہ؛

$$\delta x = 0.3, \quad \delta y = 0.33$$

اس علامت نویسی سے آپ کسی ھم آھنگ لکیر کی ڈھلوان کو $\frac{\delta y}{\delta x}$ سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

ایک طبقہ $\delta$ کی بجائے $\Delta$ استعمال کرتا ہے، دونوں ہی صحیح ہیں۔ اس بات کا خیال رکھیں کہ اس $frac\delta y\delta x$ میں آپ دونوں $\delta$ کو آپس میں کاٹ نہیں سکتے کیوںکہ یہ اعداد نہیں ہیں۔ اب جبکہ ہم علامت کو استعمال کر رھے ہیں تو آپ عادت بنا لیں اسکو بڑھوتری کی شرح کہنے کی ، اسطرح آپ اسکو الجبرا کی عام علامت نا سمجھیں۔ یاد رکھیں کہ $\delta x$ یا$\delta y$ منفی بھی ہو سکتے ہیں،اور ایسی صورت میں (y-step)اور(x-step) کم ھونگے۔

اگر ہم اس طریقے کو بروے کار لاتے ہوے ھم آھنگ لکیروں کے ڈھلاؤ کو معلوم کریں تو مثالمثال1.1.6 کچھ ایسی دکھے گی؛

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{0.49 - 0.16}{0.7 - 0.4} = \frac{0.33}{0.3} = 1.1$$

مثال 2.6: خم $y = x^2$ کے دو نقطوں کو جوڑنے والی ھم آھنگ لکیر کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔جبکے $x$ محدد $0.4$ اور $0.41$ ہیں۔ سب سے پہلے آپکو ان دونوں نقطوں پہ $y$ - محدد معلوم کرنا ھوگا جو کہ $0.4^2 = 0.16$ اور $0.41^2 = 0.1681$ ہیں۔

اس مثال کو بھی مثال مثال1.1.6 کی طرح حل کریں گے۔$\delta x = 0.41 - 0.4 = 0.01$ اور $\delta y =$ $0.1681 - 0.16 = 0.0081$ تاہم ھم آھنگ لکیر کا ڈھلاؤ ھے؛

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{0.0081}{0.01} = 0.81$$

□

مثال مثال4.6 میں ھم آھنگ لکیر اور محدد-x $0.4$ پہ موجود خط مماس کو الگ پہچاننا مشکل ھے ،یہاں ہمیں ایک طریقہ ملتا ھے کہ ہم محددx 4.6 پہ خط مماس کا ڈھلاؤ کسطرہ معلوم کر سکتے ھیں۔ مثال 3.1.6 میں یہ نقطے مزید قریب آگۓ ہیں۔

مثال 3.6: خم $y = x^2$ کے دو نقطوں کو جوڑنے والی ہم آہنگ لکیر کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔ جکے x محدد 4.0 اور40001.0 ہیں۔ دونوں نقطوں کے محدد $(0.4, 0.4^2)$ اور $(0.40001, 0.40001^2)$ ہیں

$\delta y = 0.40001^2 - 0.4^2 = 0.0000080001$ اور $\delta x = 0.40001 - 0.4 = 0.00001$ لہذہ ہم آہنگ لکیر کا ڈھلاؤ ہے؛ $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{0.0000080001}{0.00001} = 0.80001$

یہ نتیجہ چونکہ 8.0 کے بہت قریب ہے لہذہ ایسا نظر آ رہا ہے کہ $y = x^2$ کے خم پہ محدد x 4.0 پہ موجود خط مماس کا ڈھلاؤ 8.0 ہے۔ لیکن اس سے یہ ثابت نہیں ہوتا کیونکہ آپ ابھی تک دو نقطوں کو ملانے والی خط مماس کی مساوات معلوم کر رہے ہیں، قطعی نظر اسکے کہ یہ نقطے کتنے قریب ہیں۔ □

سوالنمبر 2 اور 3 میں سوالوں کو مختلف حصوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے،لہذا طلباء کی جماعت اکٹھے کام کرتے ہوئے ان تمام سوالوں کے جوابات حاصل کر لیں گے،اور پھر ان جوابات کو جمع کیا جا سکتا ھے،

سوال 1: سیدھی لکیر کی ایک مساوات بنائیں جو $y = x^2$ کے خم پہ دو نقطوں کو ملائے جنکی x کی قیمت 1 اور 2 ہو۔

سوال 2: اس سوال کے ہر حصے میں $y = x^2$ کے خم پہ درج ذیل x محدد کے دو نقطوں سے بننے والی ہم آہنگ لکیروں کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔

ا. 1 اور 1.001

ب. 1 اور 0.9999

ج. 2 اور 0.002

د. 2 اور 1.999

ھ. 3 اور 3.000001

و. 3 اور 2.99999

سوال 3: اس سوال کے ہر حصے میں، $y = x^2$ کے خم پہ درج ذیل نقطے اور اسکے قریبی نقطے کی مدد سے بنی ہم آہنگ لکیر کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔ بتائے گئے نقطے اور اسکے قریبی نقطے کے مابین فاصلے کو تبدیل کر کے اسی عمل کو دہرائیں، اس بات کا خیال رکھیں کہ کچھ نقطے بتائے گئے نقطے کی بائیں طرف بھی ہوں۔

ا. $(-11)$ ب. $(-24)$ ج. $(10100)$

سوال 4: سوالنمبر 2 اور 3 سے حاصل شدہ تجربے کی بنیاد $y = x^2$کے خم پہ موجود کسی بھی نقطے پے خط مماس کے ڈھلاؤ کا اندازہ کریں۔

سوال 5: جزا

سوال نمبر 2 سے 4 تک استعمال شدہ طریقے کی مدد سے $y = x^2 + 1$اور $y = x^2 - 2$کے خم پہ موجود کسی بھی نقطے پہ بنی خط مماس کا ڈھلاءو معلوم کریں۔ جزب حصہ حصہ1 میں حاصل شدہ تجربے کی بنیاد پے $y = x^2 + c$ ، جبکہ $c$ ایک حقیقی عدد ھے، کے خم پہ بنی کسی بھی خط مماس کے ڈھلاؤ کو معلوم کرنے کا ایک عالمگیر اصول وضع کریں

خط مماس کا ڈھلاؤ جو کہ $y = x^2 + c$کے خم پہ بنی ھو۔

اگر آپ مشق $6A$ کے نتائج کو جمع کریں تو آپکو یہ شبہ گزرے گا کہ کسی بھی نقطے پر$y = x^2$ کے خم پہ بنی خط مماس کا ڈھلاؤ x محدد کا دوگناہ ھے، لب لباب یہ ہے کہ $y = x^2$کے خم کے ڈھلاؤ کا کلیہ $2x$ ہے

مثال کے طور پر ، $y = x^2$ کے خم پہ ایک نقطے (-3،9) کا ڈھلاؤ $-6 = (-3) \times 2$ ہے،اسکا مطلب یہ ھوا کہ اس نقطے پہ بنی خط مماس کا ڈھلاؤ 6- ہوگا اور یہ نقطہ $(-39)$ سے گزرے گی۔ اس خط مماس کی مساوات معلوم کرنے کے لیے آپ ضیمہ 5.1 کا سہارا لے سکتے ہیں۔ لکیر کی مساوات ہو گی؛

$$y - 9 = -6(x - (3)),$$

جو کہ ؛ $y - 9 = 6x - 18$ یا $y = -6x - 9$ ہے۔

غور کریں کہ ڈھلاؤ کا کلیہ خم $y = x^2 + c$ پر بھی لاگو ھو رہا ہے ، جبکہ c مستقل ہے۔ x پہ بھی ڈھلاؤ 2x ہی ہے۔ اسکی وجہ سادہ سی ہے کہ $y = x^2 + c$ کا خم بھی $y = x^2$ کے خم جیسا ہی ھے بس صرف $y$ محور کی سمت تھوڑا منتقل ہو گیا ہے۔

ایک ثانیے کے لیے یہ مان لیں کہ ان نتائج کو ثابت کیا جا سکتا ہے۔آپکو ثبوت مل جائے گا حصہ حصہ 6.6میں۔

خم کے کسی نقطے پر عمودی لکیر۔

وہ لکیر جو خم اور خط مماس کے باہمی ملاپ کے نقطے سے کچھ اس طرح گزرے کہ خط مماس کے ساتھ $90^0$ کا زاویہ بنائے اس نقطے پر خم کی عمودی لکیر کہلاتی ہے۔

$90^0$

اگر آپکو کسی ایک نقطے پر خط مماس کا ڈھلاؤ معلوم ہے تو آپ حصہحصہ 9.1 کے نتیجے سے عمودی خط کا ڈھلاؤ معلوم کر سکتے ہیں۔ اگر خط مماس کا ڈھلاؤ $m$ ہے تو عمودی لکیر کا ڈھلاؤ $-\frac{1}{m}$ ہوگا، بشرطیکہ $m \neq 0$

مثال 4.6: $y = x^2$ کے خم پہ عمودی لکیر کی ایک مساوات معلوم کریں جبکہ اس نقطے پہ $x = -3$؛ اور $x = 0$ ہے۔

حصہحصہ 2.6 میں ہم نے $(-39)$ پہ خط مماس کا ڈھلاؤ معلوم کیا تھا جو کہ $-6$ تھا۔ اسی طرح عمودی خط کا ڈھلاؤ $\frac{1}{6} = -\frac{1}{-6}$ اور یہ بھی $(-39)$ سے ہی گزرتا ہے۔ لہٰذا عمودی خط کی مساوات $y - 9 = \frac{1}{6}(x - (-3))$, جسکی سادہ شکل $6y = x + 57$ ہے۔

نقطے $(0,0)$ پر خط مماس کا ڈھلاؤ $0$ ہے۔ لہٰذا خط مماس $x$ محور کے مساوی بڑھتی رہے گی۔ اسی وجہ سے عمودی خط $y$ محور کے مساوی بڑہتی رہے گی۔ اسکی مساوات کچھ یوں ہے۔ $= x$۔ جب عمودی خط $(0,0)$ سے گزرتی ہے تو اسکی مساوات ہوگی $x = 0$ □

اگر آپکے پاس ترسیم کاری کا آلہ موجود ہے تو، آپ $y = x^2$ کے خم کو، $y = -6x - 9$ کے خط مماس کو، $6y = x + 57$ کے عبوری خط کا مشاہدہ کریں، آپ نتائج سے حیران ضرور ہوں گے۔

آپکو یہ بات سمجھنی ہو گی کہ اگر آپ ایک ھی نقطے پر خم، خط مماس اور خط عمودی کشید کریں تو خط عمودی صرف اسی صورت $90^0$ زاویے پر ہوگا جب $x$ اور $y$ محور دونوں پہ پیمانہ ایک سا ہو، خط مماس پر کوئی فرق نہیں پڑے گا۔

اس موقع پر آپکو سمجھنا ہو گا کہ آپکو اس نتیجے کو دیگر مساوات کے لئے بھی عالمگیر کرنا ہوگا۔ ضمیمہ 2.6 میں آپ نے دیکھا کہ $y = x^2 + c$ کے خم میں کسی بھی $x$ پہ موجود خط مماس کا ڈھلاؤ $2x$ کے برابر ہوگا۔

## مشق 6

سوالنمبر 9 سے 12 میں سوالوں کو مختلف حصوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے،لہٰذا طلباء کی جماعت اکٹھے کام کرتے ہوئے ان تمام سوالوں کے جوابات حاصل کر لیں گے،اور پھر ان جوابات کو جمع کیا جا سکتا ھے،

درج ذیل x $x$ محدد کی مدد سے $y = x^2$ کے خم پہ بننے والے خط مماس کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔

ا. 1

ب. 4

ج. 0

د. −2

ھ. −2.0

و. −5.3

ز. p

ح. 2p

درج ذیل $x$ محدد کی مدد سے $2 - y = x^2$ کے خم پہ بننے والے خط مماس کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔

ا. 1

ب. 4

ج. 0

د. −2

ھ. −2.0

و. −5.3

ز. p

ح. 2p

خم $5 + y = x^2$ پہ ایک نقطے $p$ کا $y$ محدد 9 ہے۔ اسی نقطے پے خط مماس کے ڈھلاؤ کی دو ممکن مقداریں معلوم کریں۔

بتائے گئے خم کے دیئے گئے $x$ یا $y$ محدد سے معرض وجود میں آئے نقطے پر بنی خط مماس کی مساوات معلوم کریں۔

ا. $y = x^2$ جبکہ $x = 2$

ب. $x = 2 + 2$ جبکہ $x = -1$

ج. $x = 2 - 2$ جبکہ $y = -1$

د. $x = 2 - 2$ جبکہ $y = -2$

تائے گئے خم کے دیئے گئے x یا y محدد سے معرض وجود میں آئے نقطے پر بنے عمودی خط کی مساوات معلوم کریں

ا. $y = x^2$ جبکہ $x = 1$

ب. $y = x^2 + 1$ جبکہ $x = -2$

ج. $y = x^2 + 1$ جبکہ $x = 0$

د. $y = x^2 + c$ جبکہ $x = \sqrt{c}$

خم $y = x^2$ کے ایک نقطے $p$ پرخط مماس کا ڈھلاؤ 3 ہے۔ اس نقطے $p$ پر عمودی خط کی مساوات بنائیں۔

خم $y = x^2 + 1$ کے ایک نقطے P پر عمودی خط کا ڈھلاؤ $-1$ ہے۔ اس نقطہ $p$ پر خط مماس کی مساوات بنائیں۔ خم $y = x^2$ میں محدد $(2, 4)$ سے بننے والا عمودی خط دوبارہ اس خم سے گزرتا ہے، اس نقطے کی نشاندہی کریں۔

سوال کے ہر حصے میں درج ذیل خموں کو بروئے کار لاتے ہوئے $y = 2x^2$، $y = 3x^2$ اور $y = -x^2$ بتائے گئے x محدد سے بننے والے نقطوں سے معرض وجود میں آنے والی ہم آہنگ لکیر کا ڈھلاؤ معلوم کریں

ا. 1 اور 1.001

ب. 1 اور 0.9999

ج. 2 اور 0.002

د. 2 اور 1.999

ھ. 3 اور 3.000001

و. 3 اور 2.99999

اس سوال کے ہر حصے میں، $y = \frac{1}{2}x^2$ اور $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$ کے خم سے درج ذیل x محدد سے بننے والے نقتے اور اسکے قریبی نقتے کی مدد سے بنی ہم آہنگ لکیر کا ڈھلاءو معلوم کریں۔ بتائے گئے نقتے اور اسکے قریبی نقتے کے مابین فاصلے کو تبدیل کر کے اسی عمل کو دہرائیں، اس بات کا خیال رکھیں کہ کچھ نقتے بتائے گئے نقتے کی بائیں طرف بھی ہوں۔

ا. $-1$

ب. $-2$

ج. $10$

سوالنمبر 9 اور 10 سے حاصل شدہ تجربے کی بنیاد $y = ax^2$ اور $y = ax^2 + c$ ، جبکہ ایک a حقیقی عدد ہے، کے خم پے موجود کسی بھی نقطے پے خط مماس کے ڈھلاؤ کا اندازہ کریں۔

سوال 6: حصہ ا سوالنمبر 9 سے 11 تک استعمال شدہ طریقے کی مدد سے $y = x^2 + 3x$ اور $y = x^2 - 2x$ کے خم سپہ موجود کسی بھی نقطے سپہ بنی خط مماس کا ڈھلاؤ معلوم کرنے کا طریقہ وضع کریں۔ حصہ ب حصہ (ا) مییں حاصل شدہ تجربے کی بنیاد پے $y = x^2 + bx$ ، جبکہ $b$ ایک حقیقی عدد ہے، کے خم سپہ بنی کسی بھی خط مماس کے ڈھلاؤ کو معلوم کرنے کا ایک عالمگیر اصول وضع کریں

دو درجی ترسیم کے ڈھلاؤ کا کلیہ؛ سبقسبق 3 میں عام دو درجی ترسیم کا تذکرہ کیا گیا ،جسکی مساوات کچھ ایسی $y = ax^2 + bx + c$ ہے، جبکہ $a$ ، $b$ اور $c$ مستقل ہیں۔ ایسے خم کی خط مماس کے ڈھلاؤ کے بارے مییں آپکا کیا خیال ہے؟

مشق مشق6B کے سوالات کے حل سے آپکو اندازہ ہوا ہوگا $y = ax^2$ کے ڈھلاؤ کا کلیہ $2ax$ ہے. اسکا مطلب، مثال کے طور سپہ، $y = 3x^2$ کے خم کا ڈھلاؤ x کی ہر مقدار سپہ تین گناہ زیادہ ہو گا اگر اسکے مقابل خم $y = x^2$ کا ہو۔ آپنے اس بات کا بھی مشاہدہ کیا ہوگا کہ $y = x^2 + bx$ کے ڈھلاؤ کا کلیہ $2x + b$ ہے، لب لباب تمام کلام کا یہ ہے کہ $y = x^2 + 4x$ کے ڈھلاؤ کا کلیہ $2x + 4$ ہے۔ جو کہ $x^2$ اور $4x$ کے ڈھلاؤ کے کلیوں کے جمع کے برابر ہے۔

آپکو اس بات کا پہلے سے ہی علم ہے کہ $y = x^2$ اور $y = x^2 + c$ دونوں کے ڈھلاؤ کا کلیہ ایک ہی ہے، $c$ کی مقدار جتنی بھی ہو اس سے فرق نہیں پڑتا۔

لہذا اس بات مییں کوئی بعید نہیں ہے کہ؛

مساوات $y = ax^2 + bx + c$ کے خم کے ڈھلاؤ کا کلیہ $2ax + b$ ہے،

یہ نتیجہ اس طرح بھی اہم ہے کہ ہم ایک ایسے تفاعل کا ڈھلاؤ معلوم کر سکتے ہیں جو کئ حصوں پر مشتمل ہو، اور ایسا کرنے کے لیۓ ہم ان تمام حصوں کے ڈھلاؤ کو باہمی طور سپہ جمع کر دیتے ہیں۔ آپ ایک ایسے تفاعل کا ڈھلاؤ بھی معلوم کر سکتے ہیں جسکے ساتھ کوئی مستقل عدد ضرب کھا رہا ہو، اور ایسا کرنے کے لیۓ ہمیں اس تفاعل کے ڈھلاؤ کو بھی اسے عدد سے ضرب دینی ہو گی۔

حصہ حصہ 6.6 میں ہم اس بات کا مشاہدہ کریں گے کہ ہم ان نتائج کو ثابت کر سکتے ہیں، وقت ضائع نہ کرتے ہوئے یہاں ان کے استعمال کی چند مثالیں دی گئ ہیں ، لیکن اس سے قبل ہمیں علامت نویسی کو دیکھنا ہوگا۔

مان لیں کے ایک خم کی مساوات $y = f(x)$ ہے، اسکے ڈھلاؤ کا کلیہ $f\prime(x)$ ہوگا، اور اسکو $f$ ڈیش $x$ پڑھا جائے گا۔

کسی بھی خم کے خط مماس کے ڈھلاؤ کو معلوم کرنا تفریق کاری کہلاتا ہے، اور جب ہم اس عمل کو انجام دے رہے ہوتے ہیں تو دراصل ہم تفریق کاری کر رہے ہوتے ہیں۔

جیسے $f(2)$ سے مراد وہ مقدار ہے جب $x = 2$ ہو، اسی طرح $f\prime(2)$ اس ڈھلاؤ کے لیے استعمال ہوتا ہے جب $y = f(x)$ اور $x = 2$ ہو۔ لہذا (ڈیش) جو $f\prime(x)$ پہ بنی ہے ہمیں تفریق کا بتاتی ہے، اس علامت کو دیکھتے ہی آپ جس $x$ پہ ڈھلاؤ معلوم کرنا چاہتے اسکے $x$ کے متبادل سے x کو بدل دیتے ہیں۔

مقدار $f\prime(2)$ کو تفاعل $f(x)$ کا تفرق کہا جائے گا جب $x = 2$ ہوگا۔

پس جب بھی ہمیں مساوات y=f(x) کے خم کا $x = 2$ پے ڈھلاؤ معلوم کرنا ہو ، ہم $f\prime(x)$ معلوم کریں گے اور پھر $x$ کو اسکے متبادل مقدار یعنی یہاں 2 سے بدل دیں گے، نتیجے کے طور پر ہمیں $f\prime(2)$ ملے گا۔

مثال 5.6: مساوات $3x^2 - 2x + 5$ کو تفریق کریں۔ خم $3x^2 - 2x + 5$ کے خط مماس اور عمودی خط کے ڈھلاؤ کی مساوات بنائیں، جبکہ اس نقطے پر $x = 1$ ہو۔

مان لیں کہ $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$، اس تفاعل کے مطابق $a = 3$ ، $b = -2$ اور $c = 5$ ہے ۔ اس تفاعل کا اگر تفرق معلوم کریں،$f\prime(x) = 2 \times 3 \times x - 2 = 5x - 2$

وہ نقطہ جس پہ $x = 1$ اسکا $y$ محدد برابر ہوگا $3 - 2 + 5 = 6$

جب$x = 1$ہوگا تو خط مماس کا ڈھلاؤ ہوگا،$f\prime(1) = 6 \times 1 - 2 - 4$

اسی لیے خط مماس کی مساوات کچھ یوں بنے گی، $y - 6 = 4(x - 1)$ یا $y = 4x + 2$

عمودی خط، خط مماس کے ساتھ عمودی ہوتا ہے اس لیے اسکا ڈھلاؤ $\frac{-1}{4}$ ہوگا، اسی لیے عمودی خط کے ڈھلاؤ کی مساوات $y - 6 = \frac{-1}{4}(x - 1)$ ہوگی جسکی سادہ شکل کچھ یوں $x + 4y = 25$ ہے۔ □

مثال 6.6: درج ذیل تفاعل کا تفرق معلوم کریں۔

ا. $f(x) = 2(x^2 - 3x - 2),$

ب. $g(x) = (x+2)(2x-3)$

**طریقہ اول** کوسین کو ضرب دینا
$f(x) = 2(x^2 - 3x - 2) = 2x^2 - 6x - 4$ تاہم $f'(x) = 4x - 6$
**طریقہ دوئم**

اگر بتایا گیا تفاعل کسی مستقل عدد کے ساتھ ضرب کھا رہا ہو تو، اس تفاعل کا ڈھلاءو بھی اسی عدد کا مضرب ہوگا۔ اس مثال میں وہ عدد 2 ہے، اسی لیے $f'(x) = 2(2x-3)$

سوال کے دوسرے حصے $g(x) = (x+2)(2x-3)$ کے لیے پہلے حصے میں بتایا گیا طریقہ دوئم کارآمد نہیں ہوگا۔کیونکہ مضرب ایک مستقل عدد نہیں ہے ، لیکن آپ کوسین کو حل کر کے ایک دو درجی مساوات حاصل کر سکتے ہیں جسے بعد میں متفرق کیا جا سکتا ہے، جیسے؛ $g(x) = (x+2)(2x-3) = 2x^2 + x - 6$ اسی لیے $g\prime(x) = 4x + 1$
اگر آپ اپنی یاداشت میں آنے والے اصولوں کے تحت ایک تفاعل کا تفرق معلوم کرنے میں ناکام ہو رہے ہیں تو آپ اس تفاعل کو کسی بھی سادہ شکل میں ڈھال کے اس کا تفرق معلوم کر سکتے ہیں۔
□

مثال 7.6: مساوات $y = x^2 - 4x + 2$ کے خم پے ایک $x$ -محور کے متوازی بنے خط مماس کی مساوات معلوم کریں۔
حصہ حصہ6.1 میں ہم سیکھ چکے ہیں کہ عددیx-محور کے متوازی لکیر کا ڈھلاؤ صفر ہوتا ہے۔ فرض کریں کہ $f(x) = x^2 - 4x + 2$ اور یوں $f'(x) = 2x - 4$ ۔

$x$ معلوم کرنے کے لیے کہ جب ڈھلاؤ صفر ہوگا ہمیں مساوات $2x - 4 = 0$ کو حل کرنا ہوگا۔ اور اس سے ہمیں $x = 2$ حاصل ہوگا۔ جب $x = 2$ تو $y = 2^2 - 4 \times 2 + 2 = -2$ ہوگا۔

حصہ حصہ6.1 میں ہم نے دیکھا کہ عددیx-محور کے متوازی لکیر کی مساوات $y = c$ جیسی ہوتی ہے، تاہم ہمارے خط مماس کی مساوات بھی $y = -2$ ہے۔
□

چار سوالات 13 تا 16 میں سوالات کے حصوں کو طلباء کے مابین بانٹا جا سکتا ہے، تاکہ طلباء جو کہ ایک ساتھ کام کر رہے ہیں انکے پاس تمام سوالات کے حل موجود ہوں۔ سوال 7: درج ذیل تمام تفاعل کے لیے ڈھلاءو کلیہ معلوم کریں۔

ا. $x^2$ ب. $x^2 - x$ ج. $4x^2$ د. $3x^2 - 2x$ ہ. $2 - 3x$ و. $x - 2 - 2x^2$ ز. $2 + 4x - 3x^2$ ح. $\sqrt{2}x - \sqrt{3}x^2$

سوال 8: درض ذیل میں دیے گئے تمام تفاعل $f(x)$ کے متفرق $f'(x)$ معلوم کریں۔ کچھ حصوں میں آپ کو تفاعل کی ترتیب بدلنا ہو گی قبل انکا متفرق معلوم کرنے کے۔

ا. $3x - 1$ ب. $2 - 3x^2$ ج. $4$ د. $1 + 2x + 3x^2$ ہ. $x^2 - 2x^2$ و. $3(1 - 2x - x^2)$ ز. $2x(1 - x)$ ح. $x(2x + 1) - 1$

سوال 9: درج ذیل تمام تفاعل $f(x)$ کا $x = -3$ پر تفرق معلوم کریں

ا. $-x^2$ ب. $3x$ ج. $x^2 + 3x$ د. $-x^2$ ہ. $2x^2 + 4x - 1$ و. $-(3 - x^2)$ ز. $-x(2 + x)$ ح. $(x - 2)(2x - 1)$

سوال 10: درج ذیل تمام تفاعل $f(x)$ کے لیے $x$ کی ایسی قیمت معلوم کریں کہ تفرق $f'(x)$ کی بتائی ہوئی قیمت آ جائے۔

ا. $3$ $2x^2$ ج. $+$ $3x$ $+$ $2$ $2$ $1$ و. $+$ $(3x$
$0$ $x^2$ $10$ $2)$
ب. $-$ $x$ ہ. $-$ $(x$ $-$ $2)(x$
$-1$ $2x^2$ د. $-$ $4x$ $+$ $x^2$ $0$ $1)$

سوال 11: بتائی گئی مساوات کے خم پہ ایک نقطے کا $x$ -محدد بتایا گیا ہے۔ اس نقطے پر بننے والی خط مماس کی مساوات معلوم کریں۔

ا. $y = x^2 \quad x = -1$ د. $y = 1 - x^2 \quad x = -3$

ب. $y = 3x^2 - 2x - 1 \quad x = 1$ ہ. $y = x(2 - x) \quad x = 1$

ج. $y = x^2 - 2x + 3 \quad x = 2$ و. $y = (x - 1)^2 \quad x = 1$

سوال 12: بتائی گئی مساوات کے خم پہ ایک نقطے کا $x$ -محدد بتایا گیا ہے۔ اس نقطے پر بننے والے عمودی خط کی مساوات معلوم کریں۔

ا. $y = -x^2 \quad x = 1$     د. $y = 1 - x^2 \quad x = 0$

ب. $y = 3x^2 - 2x - 1 \quad x = 1$     ھ. $y = 2(2 + x + x^2) \quad x = -1$

ج. $y = 1 - 2x^2 \quad x = -2$     و. $y = (2x - 1)^2 \quad x = \frac{1}{2}$

سوال 13: خم $y = x^2$ پے بننے والی خط مماس، جو کہ مساوات $y = x$ کے متوازی ہے، کی مساوات معلوم کریں۔

سوال 14: خم $y = x^2$ پے بننے والی خط مماس، جو کہ $x$ -محور کے متوازی ہے، کی مساوات معلوم کریں۔

سوال 15: خم $y = x^2 - 2x$ پے بننے والی خط مماس، جو کہ مساوات $2y = x - 1$ کے عمودی ہے، کی مساوات معلوم کریں۔

سوال 16: خم $y = 3x^2 - 2x - 1$ پے بننے والے عمودی خط، جو کہ مساوات $y = x - 3$ کے متوازی ہے، کی مساوات معلوم کریں۔

سوال 17: خم $y = (x - 1)^2$ پے بننے والے عمودی خط، جو کہ $y$ -محور کے متوازی ہے، کی مساوات معلوم کریں۔

سوال 18: خم $y = 2x^2 + 3x + 4$ پے بننے والے عمودی خط، جو کہ مساوات $y = 7x - 5$ کے عمودی ہے، کی مساوات معلوم کریں۔

سوال 19: سوال سوال6b9 اور سوال6b10 میں استعمال کیے گئے طریقے کو استعمال کرتے ہوئے مساوات $y = x^3$ اور $y = x^4$ کے ڈھلاؤ کے کلیے معلوم کریں۔

سوال 20: اس سوال کے ہر حصے میں، مساوات $y = \sqrt{x}$ کے خم کے دو نقطوں کو جوڑنے والی ہم آہنگ لکیر کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔ دونوں نقاط کے $x$ -محدد بتائے گئے ہیں۔

ا. 1 اور 1.001 ج. 4 اور 4.002 ھ. 0.25 اور 0.250001

ب. 1 اور 0.9999 د. 4 اور 3.999 و. 0.25 اور 0.249999

سوال 21: اس سوال کے ہر حصے میں خم $y = \frac{1}{x}$ پر بننے والی دو نقاط کو جوڑنے والی ہم آہنگ لکیر کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔ یاد رہے ایک نقطے کے محدد ذیل میں بتائے گئے ہیں اور دوسرا نقطہ آپ کوئی بھی چن لیں لیکن وہ بتائے گئے نقطے کے قریب ترین ہو۔ اب چنے گئے نقطے اور بتائے گئے نقطے کا فاصلہ تبدیل کر کے ڈھلاؤ معلوم کریں، اور اس بات کا خیال رکھیں کہ آپ کچھ نقاط بتائے گئے نقطے کے دائیں طرف چنیں جبکہ کچھ نقاط بائیں طرف۔

ا. $(-1,-1)$ ب. $(-2,-0.5)$ ج. $(10,0.1)$

16۔ $y = \sqrt{x}$ اور $y = \frac{1}{x}$ کے ترسیمات پر کسی بھی مقام پر خط مماس کے ڈھلوان کے بارے میں اندازہ لگانے کے لئے سوالاتسوال14 اور سوال15 کے نتائج کا استعمال کریں

## 2.6 تفریق کے کچھ اصول

اگر $f(x) = ax^2 + bx + c$ ہے، پھر $f'(x) = 2ax + b$ ہو گا۔

اگر آپ دو تفاعل کو جمع کرتے ہیں تو پھر تفرق کی جمع تفرقات کی جمع ہو گی ; جیسا کہ اگر $f(x) = g(x) + h(x)$ ہے تو پھر $f'(x) = g'(x) + h'(x)$ ہو گا۔

اگر آپ تفاعل کو کسی، مستقل سے مضرب کرتے ہیں تو آپ کو تفریق کو بھی اسی مستقل سے مضرب کرنا پڑے گا۔ جیسا کہ اگر $f(x) = ag(x)$ ہے تو $f'(x) = ag'(x)$ ہو گا۔

مشقمشق6C کے سوال نمبرسوال13 سے آپکو پتا لگ جائے گا کہ $f(x) = x^3$ کا تفرق $f'(x) = 3x^2$ ہے اور $f(x) = x^4$ کا تفرق $f'(x) = 4x^3$ ہے۔ آپ پہلے سے جانتے ہیں کہ اگر $f(x) = x^2$ ہے تو $f'(x) = 2x$ یا $2x^1$ ہو گا۔

اگر $f(x) = x^n$ ،(جہاں $n$ ایک مثبت عدد صحیح ہے)، تو $f'(x) = nx^{n-1}$ ہو گا۔

مثال 8.6: $y = x^3 - 3x^2 - 4x + 2$ کی ترسیم پر نقطے کے نقاط (coordinates) معلوم کریں جس پر ڈھلوان 5 ہے

فرض کریں کہ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 2$، تو پھر $f'(x) = 3x^2 - 6x - 4$ ہو گا۔ جب $f'(x) = 5$ تو ڈھلوان بھی 5 ہے، اس طرح جب $3x^2 - 6x - 4 = 5$ ہے تو یہ دودرجی الجبرائی مساوات $3x^2 - 6x - 9 = 0$ دیتا ہے جو تسہیل ہو کہ $x^2 - 2x - 3 = 0$ بن جاتی ہے

جز و ضربی کی صورت میں $(x + 1)(x - 3) = 0$ ہے تو اس طرح $x = -1$ یا $x = 3$ ہو گا۔

ہم پہلے کہ نقطے معلوم کرنے کے لیے ان اقدار کو $y = x^3 - 3x^2 - 4x + 2$ میں متبادل کرنا ہو ہے اس طرح آپ کو $y = (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) + 2 = -1 - 3 + 4 + 2 = 2$ اور $y = 3^3 - 3 \times 3^2 - 4 \times 3 + 2 = 27 - 27 - 12 + 2 = -10$ حاصل ہو گا۔

اس لئے مطلوب نکات کے ہم پہلے $(-1, 2)$ اور $(3, -10)$ ہیں □

مشقمشق 6C کے سوال نمبر سوال 14 سے سوال 16 تک دو مزید اصول تجویز کرتے ہیں۔ اگر $f(x) = \sqrt{x}$ تو $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ہو گا اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ تو $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ ہو گا۔ یں

اشاریہ اشارے میں، یہ نتائج اس طرح شکل اختیار کرتے ہیں کہ: اگر $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$، تو $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ ہو گا اگر $f(x) = x^{-1}$، تو $f'(x) = -x^{-2} = (-1)x^{-2}$ ہو گا

یہ مندرجہ ذیل اصول تجویز کرتا ہے

اگر $f(x) = x^n$ (جہاں n ایک ناطق عدد ہے)، تو $f'(x) = nx^{n-1}$ ہو گا۔

مثال 9.6:

$y = 2\sqrt{x}$ کی ترسیم پر بننے والے خط مماس کی مساوات معلوم کریں جہاں $x = 9$ ہو

فرض کریں کہ $f(x) = 2\sqrt{x} = 2x^{\frac{1}{2}}$ ہے

تو، خانے میں دیے گئے نتائج کو استعمال کرتے ہوئے

$$f'(x) = 2 \times \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}}$$

ہو گا

جب $x = 9$ ہے، تو $f'(9) = 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$ ہو گا

جب مماس نقطہ $(9, 2\sqrt{9}) = (9, 6)$ سے گزرے گی، تو یہ مساوات بنے گی

$$y - 6 = \frac{1}{3}(x - 9)$$

یا

$$3y - x = 9$$

□

مثال 10.6:

دیے گئے ہر تفاعل کو تفریق کریں

ا. $x(1 + x^2)$

ب. $(1 + \sqrt{x})^2$

ج. $\frac{x^2+x+1}{x}$

ا. فرض کریں کہ $f(x) = x(1 + x^2)$ ہے، پھر $f(x) = x + x^3$ ہو گا، اور $f'(x) = 1 + 3x^2$ ہو گا

ب. فرض کریں کہ $f(x) = (1 + \sqrt{x})^2$ ہے، پھر $f(x) = 1 + 2\sqrt{x} + x = 1 + 2x^{\frac{1}{2}} + x$ ہو گا، اور $f'(x) = 2 \times \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 1 = x^{-\frac{1}{2}} + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1$ ہو گا۔

ج. فرض کریں کہ $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x}$ ہے، پھر تقسیم کے لحاظ سے $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x} = x + 1 + x^{-1}$ ہو گا، اور $f'(x) = 1 + (-1)x^{-2} = 1 - \frac{1}{x^2}$
□

مثال 11.6:

نقطہ $(8, 2)$ پر $y = \sqrt[3]{x}$ سے بننے والے خط مماس کی مساوات معلوم کریں۔

اشاریہ اشارہ میں $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ ہے، تو اصول کے مطابق اس کا تفرق $\frac{1}{3}x^{(\frac{1}{3}-1)}$ یا $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ ہو گا۔

جو اضافی اشارے میں اس طرح لکھا جائے گا $\frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}$۔ نقطہ $(8,2)$ پہ، یہ اس طرح لکھا جائے گا $\frac{1}{12} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}$۔

اس طرح خط مماس کی مساوات $y - 2 = \frac{1}{12}(x-8)$ یا $x - 12y + 16 = 0$ ہے □

اس حصے میں بیان کردہ نتائج کو اس کتاب کے باقی حصے کے لئے سمجھا جاسکتا ہے۔ ان میں سے کچھ حصے حصہ 6.6 اور حصہ 7.6 میں ثابت ہیں، لیکن اگر آپ چاہتے ہیں تو آپ ان آخری حصوں کو چھوڑ سکتے ہیں اور، مشقمشق D6 کے ذریعے کام کرنے کے بعد، براہ راست متفرق مشق مشق 6 میں جا سکتے ہیں۔

سوال 1: مندرجہ ذیل تفاعل کو تفریق کریں۔

ا. $x^3 + 2x^2$

ب. $1 - 2x^3 + 3x^2$

ج. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

د. $2x^3 - 3x^2 + x$

ہ. $2x^2(1 - 3x^2)$

و. $(1-x)(1+x+x^2)$

سوال 2: مندرجہ ذیل میں دیئے گئے ہر تفاعل $f(x)$ کے لیے $f'(-2)$ معلوم کریں۔

ا. $2x - x^3$

ب. $2x - x^2$

ج. $1 - 2x - 3x^2 + 4x^3$

د. $2 - x$

ہ. $x^2(1+x)$

و. $(1+x)(1-x+x^2)$

سوال 3: مندرجہ ذیل میں دیئے گئے ہر تفاعل $f(x)$ کے لیے x کی رقم معلوم کریں، اس طرح کے $f'(x)$ دیئے گئے عدد کے برابر ہو۔

ا. $12 \quad x^3$

ب. $8 \quad x^3 - x^2$

ج. $108 \quad 3x - 3x^2 + x^3$

د. $-1 \quad x^3 - 3x^2 + 2x$

ھ. $0 \quad x(1+x)^2$

و. $2 \quad x(1-x)(1+x)$

سوال 4: مندرجہ ذیل میں دیئے گئے تفاعل کو تفرق کریں۔

ا. $2\sqrt{x}$

ب. $(1+\sqrt{x})^2$

ج. $x - \frac{1}{2}\sqrt{x}$

د. $x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

ھ. $x - \frac{1}{x}$

و. $\frac{x^3+x^2+1}{x}$

ز. $\frac{(x+1)(x+2)}{x}$

ح. $\left(\frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}\right)$

سوال 5: مساوات $y = x^3 + x$ کی ترسیم پر بننے والے خط مماس کی مساوات معلوم کریں ، ایسے نقطہ پہ جہاں $x = -1$ ہو

سوال 6: مساوات $y = 4x - x^3$ کے ساتھ خط منحنی کی ایک خط مماس میں سے ایک مساوات $y = x - 2$ کی لکیر ہے۔ دوسرے خط مماس کی مساوات تلاش کریں جو $y = x - 2$ کے متوازی ہو۔

سوال 7: مساوات $y = \sqrt{x}$ کے ساتھ خط منحنی پہ دیئے ہوئے نقطہ $(4, 2)$ پر خط مماس کی مساوات تلاش کریں

سوال 8: مساوات $y = \frac{1}{x}$ کے ساتھ خط منحنی پہ دیئے ہوئے نقطہ $(2, \frac{1}{2})$ پر خط مماس کی مساوات تلاش کریں

سوال 9: ۔ $y = x + \frac{1}{x}$ کی ترسیم پر عمودی مساوات نقطہ $(1, 2)$ پر معلوم کریں

سوال 10: مساوات $y = x^2 - 2x$ اور $y = x^3 - 3x^2 - 2x$ کے ترسیمات، دونوں مبدا میں سے گزر رہیں ہیں ، ثابت کریں کے کہ یہ ایک ہی خط مماس کا اشتراک کریں گے۔

سوال 11: ایک ترسیم یا خم کی مساوات $y = x^3 - 3x^2 - 2x - 6$ ہے، اس خم پر بننے والی خط مماس کی مساوات معلوم کریں اس نقطے پر کہ جہاں یہ عمودی محور کو کاٹتا ہے۔

سوال 12: ایک ترسیم یا خم کی مساوات $y = x(x - a)(x + a)$ ہے جس میں $a$ مستقل ہے، اس خم پر بننے والی خط مماس کی مساوات معلوم کریں اس نقطے پر کہ جہاں یہ عمودی محور کو کاٹتا ہے۔

سوال 13: اس مشترک نقطے کے محدد معلوم کریں جو کہ ترسیم $y = x^2$ کے خط مماس اور ایک خط مستقیم $y = x + 2$ کے درمیان ہے۔

سوال 14: دیے گئے تمام تفاعل کے متفرق معلوم کریں۔ جس طرح سے سوال دیا گیا ہے ویسی ہی شکل میں جواب دیں لیکن جذر اور منفی علامت کے بغیر۔

ا. $\frac{1}{4x}$    د. $\sqrt[4]{3}$    ز. $\frac{3}{x} + \frac{1}{3x^3}$

ب. $\frac{3}{x^2}$    ہ. $6\sqrt[3]{x}$    ح. $\sqrt{16x^5}$

ج. $x^0$    و. $\frac{4}{\sqrt{x}}$    ط. $x\sqrt{x}$

ی. $\frac{1}{\sqrt[3]{8x}}$     یا. $\frac{x-2}{x^2}$     یب. $\frac{1+x}{\sqrt[4]{x}}$

سوال 15: ترسیم $y = \sqrt[3]{x^2}$ کی خط مماس اور عمودی خط کی مساوات معلوم کریں نقطہ $(8,4)$ پہ۔

سوال 16: ترسیم $y = \frac{1}{x^2}$ کے نقطے $\left(\frac{1}{2},4\right)$ پر بنی خط مماس محور کو نقطے $P$ اور $Q$ پے چھوتی ہے، ان دونوں نقطوں کے محدد معلوم کریں۔

## 3.6 دودرجی ترسیم کے ڈھلاؤ کا کلیہ

اگر آپ چاہیں تو آپ ان آخری کے حصوں کو چھوڑ کر سیدھا آخری مشق پے جا سکتے ہیں۔ اس حصے کا مقصد صرف اتنا ہے کہ آپ دو درجی ترسیم کا ڈھلاؤ معلوم کر سکیں وہ بھی اندازے لگائے بغیر۔

مثال 12.6: ترسیم $y = x^2$ کے راگ (کارڈ) کا ڈھلاؤ معلوم کریں، جس کے افقی محدد $P$ اور $p+h$ ہیں۔ اس نقطے کے عمودی محدد ہوں گے $p^2$ اور $(p+h)^2$۔

$$\delta x = h, \delta y = (p+h)^2 - p^2 = p^2 + 2ph + h^2 - p^2 = 2ph + h^2 = h(2p+h)$$

اور یوں ڈھلاؤ ہوگا؛

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{h(2p+h)}{h} = 2p + h$$

اس بات پر غور کریں کے مثالوں مثال1.1.6 سے مثال3.1.6 کے ڈھلاؤ اس جواب کے خاص معاملے تھے۔جیسا کہ ٹیبل ٹیبل 7.6 میں دکھایا بھی گیا ہے۔ □

الجبرا کے استعمال سے آپ کو یہ فائدہ ہوگا کہ ڈھلاؤ معلوم کرتے وقت آپ کو ہر بار شروع سے کام نہیں کرنا پڑے گا۔ ذیل میں دیا گیا ٹیبل $p = 0.4$ کے لیے چند مزید جوابات، جن میں چند منفی اور چند مثبت ہیں، دکھاتا ہے جب $h$ کی قیمت مسلسل تبدیل کی جاتی ہے۔

آگر آپ کے پاس ایک ترسیمی اعدد ہے، یا کوئی کمپوٹر کا ایسا پروگرام جو کہ ترسیم بنا سکتا ہو تو یہ نہایت دلچسپ ہوگا مساوات $y = x^2$کا ترسیم بنایا جائے اور اس ترسیم کے دو نقاط $(0.4, 0.16)$کو ملانے والی راگ کا ڈھلاؤ دیکھا جائے۔ آپ مشاہدہ کریں گے کہ جب $x$ صفر کے بہت قریب ہوگا، یعنی راگ کے دونوں کناروں کے درمیان کا فاصلہ بہت کم ہوگا، تو یہ تقریباً نا ممکن سا ہو جائے گا خط مماس اور راگ کو الگ الگ سے پہچاننا۔ اور آپ ٹیبل ٹیبیل7.6 اور ٹیبل 8.6 میں ان راگوں کے لیے دیکھ سکتے ہیں کہ ان کا ڈھلاؤ $0.8$ کے کس قدر قریب ہے۔

حقیقت میں $h$ کو صفر کے قریب لانے سے آپ اس راگ کا ڈھلاؤ 0.8 کت قریب لا سکتے ہیں جتنا آپ چاہیں۔ مثال مثال1.6.6 اس راگ کا ڈھلاؤ $(0.8+h)$ تھا، یعنی اگر آپ چاہتے ہیں کہ نقاط $(0.4, 0.16)$ سے گزرنے والی خط مماس کا ڈھلاؤ 0.799999 یا 0.800001 ہو تو آپ کو $h$ کی قیمت $-0.000001$ اور $+0.000001$ کے درمیان کہیں رکھنی پڑے گی۔ ایک ایسی قیمت جو آپ $h$ کے لیے نہیں لے سکتے وہ صفر خود ہی ہے۔ تاہم آپ کہہ سکتے ہیں کہ ؛

حد میں جیسے جیسے $h$ صفر کے قریب تر ہوتا جاتا ہے ، راگ کا ڈھلاؤ 0.8 کے قریب ترین ہوتا جاتا ہے۔

اس بیان کو لکھنے کا عام اور زیادہ مقبول طریقہ یہ ہے کہ ؛

$$\lim_{h\to 0} = \lim_{h\to 0}(0.8+h) = 0.8$$

$p$ کی قیمت 0.4 لینے سے کچھ بھی خاص نہیں ہوگا، اور آپ $p$ کی کسی بھی اور قیمت کے لیے بھی یہی رائے رکھیں گے۔مثال مثال1.6.6 یہ بتاتی ہے کہ راگ کا ڈھلاؤ جو کہ جوڑ رہی ہے $(p, p^2)$ کو $(p+h, (p+h)^2)$ سے، $2p+h$ ہوگا۔ اگر آپ $p$ کی قیمت کو مستقل کر دیں اور $h$ کی قیمتوں کو مسلسل تبدیل کریں تو جیسا ہم نے اوپر بیان کیا تھا،

$$\lim_{h\to 0} \text{راگ کا ڈھلاؤ} = \lim_{h\to 0}(2p+h) = 2p$$

اور اسی ترسیم $y = x^2$ کے لیے نقطہ $(p, p^2)$ پہ راگ کا ڈھلاؤ $2p$ ہے۔

اس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ؛

ترسیم $y = x^2$ کے لیے ڈھلاؤ کا کلیہ $2x$ ہے۔

کسی بھی ترسیم کے لیے یہی طریقہ لاگو ہوگا اگر آپ کو اسکی مساوات کا پتہ ہے۔

شکل شکل9.6 میں ایک ترسیم دکھایا گیا ہے جسکی مساوات $y = f(x)$ ہے، یعنی یہ کسی بھی تفاعل کا ترسیم ہے۔ فرض کرین کہ آپ کو نقطہ $p$ پر خط مماس کے ڈھلاؤ کی قیمت معلوم کرنی ہے جسکے محدد $(p, f(p))$ ہیں۔ اس نقطے کو کسی بھی دوسرے نقطے $(p+h, f(p+h))$ سے ملانے والی راگ کے لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ؛

$$\delta x = h, \delta y = f(p+h) - f(p)$$

یعنی اسکا ڈھلاؤ ہوگا؛

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

اور اب ذرا $h$ کی قیمت تبدیل کریں تاکہ نقطہ $Q$ ترسیم میں کسی اور جگہ چلا جائے، تب اگر $Q$ نقطہ $P$ کے قریب ہوگا یعنی $h$ صفر کے قریب ہوگا، تو نقطہ $P$ پر راگ کا ڈھلاؤ اسی نقطے پر بننے والی خط مماس کے ڈھلاؤ کے قریب ترین ہوگا، جبکہ $x = p$، حد میں جب $h$ صفر کی طرف بڑھتا ہے تو یہ بیانیہ $f'(p)$ کی طرف بڑھتا ہے۔

اگر خم، ترسیم $y = f(x)$ کا نقطہ $(p, f(p))$ پر خط مماس ہے تو، اسکا ڈھلاؤ

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h}$$

ہوگا۔

اس قیمت کو تفاعل $f(x)$ کا تفرق بھی کہا جاتا ہے اور علامت $f'(p)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اور چونکہ $P$ ، $x$ کی کسی بھی قیمت کے لیے درست ہوگی تو ہم لکھ سکتے ہیں کہ،

تفاعل $f(x)$ کا $x$ کی کسی بھی قیمت پر تفرق $f'(p)$ ہوگا، $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$۔

مثال 13.6: تفاعل $f(x) = 4x - 5$ کا تفرق معلوم کریں۔

تفرق کی تعریف کو مد نظر رکھتے ہوئے، $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ۔

کسر کی اوپری سطر کے مطابق؛

$$f(x+h) - f(x) = (4(x+h)-5) - (4x-5) = 4x + 4h - 5 - 4x + 5 = 4h$$

اسی لیے؛

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{4h}{h} = 4$$

اور پھر حد مین جب $h$ صفر کے قریب تر ہوتا جاتا ہے،

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} 4 = 4$$

یقیناً آپ کو اندازہ تھا کہ نتیجہ کیا ہوگا، پہلے ہی سبق میں ہم نے سیکھا تھا کہ $f(x) = 4x - 5$ کی ترسیم ایک خط مستقیم ہے جسکا ڈھلاؤ $4$ ہے۔ تو یہ کوئی اچنبے کی بات نہیں ہونی چاہیئے کہ مساوات $f(x) = 4x - 5$ کا تفرق $4$ ہے۔

اسی طرح سے تفاعل $f(x) = mx + c$ جو کہ ایک سیدھی لکیر ہے کا تفرق $m$ ہوگا۔ □

مثال 14.6: تفاعل $f(x) = 3x^2$ کا تفرق معلوم کریں۔ اس تفاعل کے لیے $f(x+h) = 3(x+h)^2 = 3x^2 + 6xh + 3h^2$ اسی لیے

$$f(x+h) - f(x) = (3x^2 + 6xh + 3h^2) - 3x^2 = 6xh + 3h^2 = h(6x + 3h)$$

اور $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{h(6x+3h)}{h} = 6x + 3h$ اور پھر حد میں جب $h$ صفر کے قریب تر ہوتا جاتا ہے،

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}(6x + 3h) = 6x$$

غور کریں کہ تفاعل $f(x) = x^2$ کا تفرق $2x$ ہے، اور تفاعل $f(x) = 3x^2$ کا تفرق $6x$ ہے، جو کہ $3 \times 2x$ ہے۔ یہ حصہحصہ5.6 میں بتائے گئے اصولوں میں سے پہلے کی مثال ہے۔

اگر آپ ایک تفاعل کو ایک عدد سے ضرب دیں تو اس تفاعل کا تفرق بھی اسی عدد سے ضرب کھائے گا۔ □

مثال 15.6: تفاعل $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$ کا تفرق معلوم کریں۔ تفاعل $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$ کے لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ؛

$$f(x+h) = 3(x+h)^2 + 4(x+h) - 5 = 3x^2 + 6xh + 3h^2 + 4x + 4h - 5$$

اس لیے؛

$$f(x+h) - f(x) = (3x^2 + 6xh + 3h^2 + 4x + 4h - 5) - (3x^2 + 4x - 5) \tag{1}$$
$$= 3x^2 + 6xh + 3h^2 + 4x + 4h - 5 - 3x^2 - 4x + 5 \tag{2}$$
$$= 6xh + 3h^2 + 4h = h(6x + 3h + 4) \tag{3}$$
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h(6x + 3h + 4)}{h} = 6x + 3h + 4 \tag{4}$$

اور پھر اس حد میں، جیسے جیسے $h$ صفر کے قریب جاتا ہے ؛

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}(6x + 3h + 4) = 6x + 4$$

□

مثالیں مثال2.6.6 اور مثال3.6.6 ایک اور عام اصول کی وضاحت کرتی ہیں۔ مثال مثال4.6.6 میں جو تفاعل دیا گیا تھا وہ دراصل مثال مثال2.6.6 اور مثال 3.6.6 میں دیے گئے تفاعل کا مجموعہ ہے۔ اور اسی نسبت سے مثال مثال4.6.6 میں آنے والی ڈھلاؤ کی قیمت مثال مثال2.6.6 اور مثال 3.6.6 میں آنے والی ڈھلاؤ کی قیمتوں کا مجموعہ ہے۔ عام قانون کے مطابق ؛

تعریف : اگر آپ دو تفاعل کو جمع کرتے ہیں ، تو آپ اس نئے تفاعل کا تفرق معلوم کرنا چاہتے ہیں تو ، آپ کو دونوں تفاعل، جن کا یہ تفاعل مجموعہ ہے، کے تفرق کو جمع کرنا ہوگا۔

□

## 4.6 چند مزید تفاعل کے ڈھلاؤ کے کلیے

چند تفاعل کے لیے حصہ حصہ6.6 میں بتایا گیا طریقہ آپکو مشکل الجبرا میں ڈال سکتا ہے، اور یہ آسان ہے کہ آپ ایک دوسری علامت استعمال کریں۔ دو نقطوں ، جن میں ایک نقطہ $p$ جو کہ $x$ -محور پر موجود ہے جبکہ دوسرا نقطہ $p+h$ (یا $x$ اور $h$ $x+h$ ) ، کو جوڑنے والی ہم آہنگ لکیر کا ڈھلاؤ معلوم کرنے کے بجائے آپ مختلف طرح کے محدد چن سکتے ہیں، جیسے کہ $\Big(p, f(p)\Big)$ یا $\Big(q, f(q)\Big)$ رکھنے کے لیے نقاط لے سکتے ہیں ، اس طرح کے $\delta x = q - p$ اور

$\delta y = f(q) - f(p)$ ہے

تو پھر ڈھلوان یہ $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(q)-f(p)}{q-p}$ ہو گی ۔

یہ دیکھنے کے لیے کے یہ کس طرح کام کرتا ہے ، یہاں مثال 3-6-6 میں اس کا استعمال ہوا ہے ۔

مثال 16.6:

$x = p$ پر تفاعل $f(x) = 3x^2$ کا تفرق معلوم کریں ۔

اس تفاعل کے لیے ، $f(q) - f(p) = 3q^2 - 3p^2 = 3(q^2 - p^2) = 3(q-p)(q+p)$ ہے.

لہذا $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(q)-f(p)}{q-p}\frac{3(q-p)(q+p)}{q-p} = 3(q+p)$ ہو گا۔ □

اب اس طریقہ میں $q$ نے $p+h$ کی جگہ لی ہے ، چنانچہ آپ ایک حد میں $h$ کی قیمت کو 0 (صفر) لینے کے بجائے ، آپ $q$ کی قیمت کو $p$ لے سکتے ہیں۔ یہ دیکھنا کافی آسان ہے کہ جب $q$ کی قیمت $p$ کی طرف جاتی ہے تو $3(q+p)$ کی قیمت $3(p+p) = 3(2p) = 6p$ کی طرف جائے گی۔

لہذا ، اگر $f(x) = 3x^2$ تو $f'(p) = 6p$ ہو گا ۔ چونکہ یہ $p$ کی ہر قیمت کے لیے کارآمد ہے ، لہذا آپ $f'(x) = 6x$ لکھ سکتے ہیں ۔

اس اشارے میں ، تفرق کی تعریف یہ شکل اختیار کرتی ہے: $x = p$ پر $f(x)$ کا تفرق یہ $f'(p) = \lim_{q\to p} \frac{f(q)-f(p)}{q-p}$ ہے ۔ $x = p$ پر تفاعل $f(x) = x^4$ کا تفرق معلوم کریں ۔ $x = p$ پر $f(p) = p^4$ ہے اور $x = q$ پر $f(q) = q^4$, ہے ۔

خط مستقیم جو $(p, p^4)$ اور $(q, q^4)$ کو ملا رہی ہے اس کے لیے $\delta x = q - p, \delta y = q^4 - p^4$ ہے۔

دھیان دیں کہ آپ $\delta y$ کو $(q^2)^2 - (p^2)^2$ لکھ سکتے ہیں ۔

$$\delta y = (q^2 - p^2)(q^2 + p^2) = (q - p)(q + p)(q^2 + p^2)$$

حاصل کرنے کے لیے، آپ دو مربع کے فرق کو دو بار استعمال کر سکتے ہیں

لہذا،

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{(q-p)(q+p)(q^2+p^2)}{q-p} = (q+p)(q^2+p^2)$$

ہے ۔

پھر ایک حد میں جب ، $q$ کی قیمت $p$ ہو گی تو

$$f'(p) = \lim_{q\to p} \frac{f(q)-f(p)}{q-p} = \lim_{q\to p} \Big((q+p)(q^2+p^2)\Big) = 2p(2p^2) = 4p^3$$

ہو گا۔

مثال 17.6: $x = p$ پر تفاعل $f(x) = \sqrt{x}$ کا تفرق معلوم کریں ۔ $x = p$ پر $f(p) = \sqrt{p}$ اور $x = q$ پر $f(q) = \sqrt{q}$ ہے۔ خط مستقیم جو $(p, \sqrt{p})$ اور $(q, \sqrt{q})$ کو ملا رہی ہے اس کے لیے $\delta x = q - p,\ \delta y = \sqrt{q} - \sqrt{p}$ ہے دھیان دیں کے آپ $\delta x$ کو دو مربع کے فرق کے طور پر اس طرح لکھ سکتے ہیں ۔

$$\delta x = q - p = (\sqrt{q})^2 - (\sqrt{p})^2 = (\sqrt{q} - \sqrt{p})(\sqrt{q} + \sqrt{p})$$

لہذا, $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\sqrt{q}-\sqrt{p}}{(\sqrt{q}-\sqrt{p})(\sqrt{q}+\sqrt{p})} = \frac{1}{\sqrt{q}+\sqrt{p}}$ ہے ۔

پھر ایک حد میں جب ، q کی قیمت p ہو گی تو

$$f'(p) = \lim_{q\to p} \frac{f(q)-f(p)}{q-p}$$

$$= \lim_{q\to p} \frac{1}{\sqrt{q}+\sqrt{p}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{q}+\sqrt{p}} = \frac{1}{2\sqrt{p}} = \frac{1}{2}p^{-\frac{1}{2}}$$

ہو گا۔

دھیان دیں کہ جب $p = 0$ ہو گا تب یہ کام نہی کرے گا کیونکہ اس صورت میں $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{\sqrt{q}}$ ہو گا، جس کی کوئی حد نہی ہے چونکہ $q \to 0$ ہے۔ آپ شکل 6-10 میں $y = \sqrt{x}$ کے ترسیم سے دیکھ سکتے ہیں کہ $x = 0$ پر خط مماس y-محور پر ہے، جس کی کوئی ڈھلوان نہی ہے۔ □

مثال 18.6:

$x = p$ پر تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ کا تفرق معلوم کریں۔

$x = p$ پر $f(p) = \frac{1}{p}$ ہے اور $x = q$ پر $f(q) = \frac{1}{q}$ ہے۔

جو خط مستقیم $\left(p, \frac{1}{p}\right)$ اور $\left(q, \frac{1}{q}\right)$ کو ملا رہی ہے اس کے لیے $\delta x = q - p, \delta y = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} = \frac{p-q}{qp} = -\frac{q-p}{qp}$ ہے۔

اور

$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{-\left(\frac{q-p}{qp}\right)}{q-p} = -\frac{1}{qp}$ ہے۔

لہذا، ایک حد میں جب $q$ کی قیمت $p$ ہو گی تو

$$f'(p) = \lim_{q\to p} \frac{f(q)-f(p)}{q-p} = \lim_{q \to p}\left(-\frac{1}{qp}\right) = -\frac{1}{p^2} = -p^{-2}$$

ہو گا۔

اگر آپ چکے پاس، تو آپ اس خط منحنی کی نمائش کریں تب آپ دیکھ سکیں گے کہ اس کی ڈھلوان ہمیشہ منفی کیوں ہوتی ہے۔ □

اس مشق میں حصہ حصہ 7.6 کا طریقہ استعمال کریں۔

ا. $x = p$ پر تفاعل $f(x) = x^3$ کا تفرق معلوم کریں۔ (آپ کو یا تو توسیع $(p+h)^3 = p^3 + 3p^2h + 3ph^2 + h^3$ یا پھر مفرد کی ضرب $q^3 - p^3 = (q-p)(q^2+qp+p^2)$ استعمال کرنے کی ضرورت ہو گی)۔

ب. مساوات $x = p$ پر تفاعل $f(x) = x^8$ کا تفرق معلوم کریں۔ (فرض کریں $p + h = q$ ہے اور جتنی بار آپ کر سکتے ہیں دو مربع کلیے کے فرق کو $q^8 - p^8$ پر استعمال کریں)۔

$x = p$ پر تفاعل $f(x) = \frac{1}{x^2}$ مساوات کا تفرق معلوم کریں۔

سوال 1: نقطہ $(2,10)$ پر $y = 5x^2 - 7x + 4$ سے خط مماس کی مساوات معلوم کریں

سوال 2: دیئے ہوئے تفاعل $f(x) = x^3 + 5x^2 - x - 4$ کی مدد سے مندرجہ ذیل سوال حل کریں

ا. $f'(-2)$

ب. $a$ کی قیمت معلوم کریں اس طرح کہ $f'(a) = 56$ ہے۔

سوال 3: مساوات $y = x^4 - 4x^3$ سے عمودی مساوات معلوم کریں ایک ایسے نقطہ پر جہاں $x = \frac{1}{2}$ ہو

سوال 4: ثابت کریں کہ $y = \frac{1}{x}$ کی مدد سے نقطہ $x = p$ پر خط مماس کی مساوات $p^2y + x = 2p$ ہو گی۔ خط منحنی کے کس نقطہ پر خط مماس کی مساوات $9y + x + 6 = 0$ ہو گی۔؟

سوال 5: منحنی خط $y = 6\sqrt{x}$ سے خط مماس نقطہ $4, 12$ پر محور $A$ اور $B$ ملتے ہیں۔ ثابت کریں کہ $AB$ کا فاصلہ $k\sqrt{13}$ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔ مزید $k$ کی قیمت معلوم کریں۔

سوال 6: خط منحنی $y = 2x^3 - 5x^2 + 9x - 1$ سے دو نقاط کے محدد معلوم کریں جہاں خط مماس کی ڈھلوان 13 ہو۔

سوال 7: نقطہ $(1,8)$ پر $y = (2x-1)(3x+5)$ سے عمودی مساوات معلوم کریں۔ اپنا جواب $ax + by + c = 0$ صورت میں دیں جہاں $a$ ، $b$ اور $c$ عدد صحیح ہیں۔

سوال 8: خط منحنی $y = x^2 - 3x - 4$ $P$ اور $Q$ پر $x$ -محور کو پار کرتی ہے $P$ اور $Q$ پر خط منحنی سے خط مماس $R$ پر ملتے ہیں۔ $P$ اور $Q$ پر خط منحنی سے عمودی خط $S$ پر ملتے ہیں۔ $RS$ کا فاصلہ معلوم کریں۔

سوال 9: خط منحنی کی مساوات $y = 2x^2 - 5x + 14$ ہے۔ خط منحنی سے خط عمودی نقطہ $(111)$ پر خط منحنی سے دوبارہ نقطہ $P$ پر ملتی ہے۔ $P$ کے محدد معلوم کریں۔

سوال 10: خط منحنی $y = x^2 + k$ کے ایک مخصوص نقطہ پر خط مماس کی مساوات $y = 6x - 7$ ہے۔ مستقل $c$ کی قیمت معلوم کریں۔

سوال 11: ثابت کریں کہ خط منحنی $y = x^3$ اور $y = (x+1)(x^2+4)$ میں بالکل ایک نقطہ مشترک ہے، اور تفریق کا طریقہ استعمال کرتے ہوئے اسی نقطہ پر ہر ایک خط منحنی کا ڈھلوان معلوم کریں۔

سوال 12: خط منحنی $y = 5x^2 - 12x + 1$ کے ایک مخصوص نقطہ پر عمودی مساوات $x + 18y + c = 0$ ہے۔ مستقل $c$ کی قیمت معلوم کریں۔

سوال 13: مساوات $y = x^m$ اور $y = x^n$ کی ترسیمات نقطہ $(1,1)$ ایک دوسرے میں سے گزرتی ہیں، $m$ اور $n$ کے درمیان تعلق معلوم کریں اگر ہر ایک خط منحنی پر خط مماس نقطہ $P$ پر دوسری خط منحنی کے عمودی ہے۔

سوال 14: نقطہ $x = \frac{1}{4}$ پر خط مماس $y = \sqrt{x}$ اور $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ سے نقطہ $P$ پر ملتے ہیں۔ $P$ کے محدد معلوم کریں۔

سوال 15: نقطہ $x = 2$ پر خط عمودی $y = \frac{1}{x^2}$ اور $y = \frac{1}{x^3}$ سے نقطہ $Q$ پر ملتے ہیں۔ $Q$ کے محدد معلوم کریں۔

# باب 7

# تفرق کے استعمال

گزشتہ باب میں آپ نے سیکھا کہ تفریق کا معنی کیا ہے۔ اور کئ اقسام کے تفاعلات کی تفریق کیسے کی جاتی ہے۔اس باب میں آپ دیکھیں گے کہ تفریق کو ترسیمات کی خاکہ نگاری اور حقیقی دنیاوی معموں کو حل کرنے کے لیے کیسے استعمال کیا جاتا ہے۔ جب آپ اس باب کو مکمل کریں تو آپکو چاہئیے۔

- اس بات کو سمجھنا کہ کسی تفاعل کا تفرق بھی تفاعل ہوتا ہے
- مثبت، منفی اور صفر کے تفرقات کی اہمیت کی قدر دانی کرنا۔
- زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم نقطوں کو ترسیم پر بٹھانے کی قابل ہونا
- اس بات کو جاننا کہ آپ تفرق کی تشریح ایک متغیرہ میں دوسرے کے متعلق تبدیلی کی شرح سے کر سکتے ہیں۔
- تفرق کے لیے $\frac{dy}{dx}$ کی علامت سے واقف ہونا
- ان طریقہ کاروں کو حقیقی دنیاوی معموں کو حل کرنے کے لیے استعمال کرنے کے قابل ہونا۔

## 1.7 تفرقات بہ صورت تفاعلات

باب 6میں متعدد جستجوئیں کر کے آپ کو تفریق سے متعارف کروایا گیا تھا۔ مثلاً مشق 6 الف کے سوال 5 میں آپ سے تفاعل $f(X) = x^2 - 2$ کی ترسیم کے مختلف نقطوں پر مماسہ کے ڈھلوان کے بارے میں اندازہ لگانے مکے لیے پاچھا گیا تھا۔ جدول 1.7 میں وہ نتائج موجود ہیں جنھیں حاصل کرنے کی آپ سے توقع تھی۔

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ مماسے کا ڈھلوان بھی $x$ کا تفاعل ہے۔ جو کہ قاعدہ $2x$ میں دیا گیا ہے۔ باب 6 میں اسی قاعدے کو متفرق کہا گیا ہے۔لیکن جب آپ اسکی قیمت کو کسی مخصوص $x$ کے لیے استعمال کرنے کے بجائے اسے ایک تفاعل خیال کر رہے ہوتے ہیں، تو بعض اوقات اسے مشتق تفاعل کہا جاتا ہے۔ اسے $f'(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اور اس مثال میں یہ $f'(x) = 2x$ ہے۔

مزید برآں جس طرح آپ تفاعل $f(x)$ کی ترسیم سازی کر سکتے ہیں۔ اسی طرح مشتق تفاعل $f'(x)$ کی ترسیم سازی بھی ممکن ہوتی ہے۔ انہی دو ترسیمات کو صفحے پر ایک دوسرے کے اوپر ایک قطار میں دکھانا بہت دلچسپ معلوم ہوتا ہے۔ جس طرح سے سورت 2.7 میں دکھایا گیا ہے۔

ترسیم کے بائیں جانب جہاں $x < 0$ ہے $f'(x)$ کا ترسیم $x$ کے محور سے نیچے موجود ہے۔ جو ظاہر کرتا ہے کہ $f(x)$ کا ڈھلاوان منفی ہے۔ دائیں جانب جہاں ڈھلوان $f(x)$ کا مثبت ہے، وہاں $f'(x)$ کا ترسیمہ $x$ کے محور کے اوپر موجود ہے۔

جو آپ تفریق کت بارے میں جانتے ہیں وہ آپ مشتق تفاعل کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔؛

اگر $f(x) = x^n$ ہو، جہاں $n$ ناطق عدد ہو تو اسکا مشتق تفاعل $f'(x) = nx^{n-1}$ ہوگا
$f(x) + g(x)$ کا مشتق تفاعل $f'(x) + g'(x)$ ہوگا۔
$cf(x)$ گا مشتق تفاعل جہاں $c$ مستقل ہے،$cf'(x)$ ہوگا۔

مثال 1.7: مساوات $f(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^3$ کا مشتق تفاعل معلوم کریں۔اوپر بتائے گۓ نتائج کے استعمال سے معلوم ہوتا ہے کہ پوچھے گۓ تفاعل کا مشتق تفاعل $f'(x) = 2x - x^2$ ہے۔ مثال 7-3 ؟؟ میں موجود تفاعل $f(x)$ اور مشتق تفاعل $f'(x)$ کی ترسیمات شکل 3.7 میں بتائ گئ ہیں۔ یہاں بعض نقات غور طلب ہیں، جب $x < 0$، تفاعل $f(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^3$ کی ترسیمات کی ڈھلوان منفی ہے، اور مشتق تفاعل $f'(x)$ کی قیمتیں بھی منفی ہیں۔ جب $x = 0$ ، $f(x)$ کا ڈھلوان $0$ ہے، اور $f'(0)$ کی قیمت بھی صفر ہے۔ $x = 0$ اور $x = 2$ کے درمیان $f(x)$ کا ڈھلوان مثبت ہے اور $f'(x)$ کا بھی مثبت ہے۔ جب $x = 2$ ، $f(x)$ کا ڈھلوان $0$ ہے، اور $f'(2) = 0$۔ جب $x > 2$، $f(x)$ کا ڈھلوان منفی ہے، اور مشتق تفاعل $f'(x)$ کی قیمتیں بھی منفی ہیں۔ □

سوال 1: مندرجہ ذئل صورتوں میں سے ہر ایک کے لیے تفاعل $f(x)$ اور مشتق تفاعل $f'(x)$ کی ترسیمات بنائیں۔ اور ان ترسیمات کا موازنہ کریں۔

ا. $f(x = 4x)$ ج. $f(x) = x^2$ ہ. $f(x) = x^2 + 4x$

ب. $f(x) = 3 - 2x$ د. $f(x) = 5 - x^2$ و. $f(x) = 3x^2 - 6x$

سوال 2: مندرجی ذیل صورتوں میں سے ہر ایک کے لیے تفاعل $f(x)$ اور مشتق تفاعل $f'(x)$ کی ترسیمات بنائیں اور ترسیمات کا موازنہ کریں

ا. $f(x) = (2 + x)(4 - x)$ ج. $f(x) = x^4$ ہ. $f(x) = \sqrt{x} \quad x \geq 0$

ب. $f(x) = (x + 3)^2$ د. $f(x) = x^2(x - 2)$ و. $f(x) = \frac{1}{x} \quad x \neq 0$

سوال 3: سوال کے ہر حصے میں دی گی شکل $y = f'(x)$ مشتق تفاعل کی ترسیمہ کو ظاہر کرتی ہے۔ $y = f(x)$ کی ممکنہ ترسیمہ بنائیں۔

## 2.7 بڑھتے ہوئے اور گھٹتے ہوئے تفاعلات

آسانی کے لیے تفاعل کے لفظ سے مراد اس باب میں وہ تفاعلات ہیں جو اپنے دائرہ کار میں استمراری (مسلسل) ہوتے ہیں۔ اس میں وہ تمام تفاعلات شامل ہیں جو آپ ابھی تک دیکھ چکے ہیں، لیکن اس میں تفاعلات جیسے $x$ کا کسری حصہ شامل نہیں ہیں جو کہ تمام مثبت حقیقی اعداد کے لیے واضع ہیں لیکن ان کی ترسیمہ میں ، جیسا کہ شکل شکل 4.7 میں دکھایا گیا ہے، ہچکولے موجود ہیں۔

کسی ترسیمہ کو اسکی مساوات سے واضع کرنے کے لیے آپ اس تصور کو جسکے مطابق کسی تفاعل کا متفرق بھی تفاعل ہوتا ہے، استعمال کر سکتے ہیں۔

مثال 2.7: وہ وقفہ معلوم کریں جس میں $f(x) = x^2 - 6x + 4$ بڑھتا ہوا ہے، اور وہ وقفہ جس میں گھٹتا ہوا ہے۔ $f(x)$ کا متفرق ہے۔ $f'(x) = 2x - 6 = 2(x - 3)$ اس کا مطلب ہے کہ $x > 3$ کے لیے ترسیمہ کا ڈھلوان مثبت ہے، یعنی،$f(x)$،$x < 3$ کے لیے بڑھتا ہوا ہے۔

$x < 3$ کے لیے ڈھلوان منفی ہے اور جونہی $x$ کی قیمتیں بڑھتی جاتی ہیں، $y$ کی قیمتیں گھٹتی جاتی ہیں، یعنی $f(x)$ ، $x < 3$ کے لیے گھٹتا ہوا ہے۔

نتائج صورت شکل 5.7 میں ظاہر کیئے گئے ہیں۔ □

خود $x = 3$ کے بارے میں کیا؟ پہلی نظر میں آپ یہ سوچیں گے کہ اس کو دونوں بڑھتے ہوئے اور گھٹتے ہوئے وقفوں سے باہر چھوڑ دینا چاہئیے لیکن ایسا کرنا غلط ہوگا! اگر آپ خط منحنی پر بائیں سے دائیں جانب آگے کو بڑھ رہے ہوں اور جیسے ہی آپ $x = 3$ سے گزر چکیں، ڈھلوان مثبت ہو جائے گا اور قوس بلند ہونے لگے گا۔ تاہم جتنا آپ $x = 3$ کے قریب ہوں گے، $y$ کی قیمت $f(3) = -5$ سے بڑی ہوگی۔

پس آپ کہہ سکتے ہیں کہ تفاعل $f(x)$، $x \geq 3$ کے لیے بڑھتا ہوا ہے، اسی طرح $x \leq 3$ کے لیے گھٹتا ہوا ہے۔

آپ مثال مثال1.2.7 میں موجود توجیہ کو کسی بھی تفاعل کے لیے استعمال کر سکتے ہیں۔ صورت شکل6.7 تفاعل $y = f(x)$ کی ترسیمہ کو ظاہر کرتی ہیں۔ جس کا متفرق وقفہ $p \leq x \leq q$ میں مثبت ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $y$ کی بڑی قیمتیں $x$ کی بڑی قیمتوں کے ساتھ منسلک ہیں۔ بعینہ طور پر اگر $x_1$ اور $x_2$ وقفہ $p \leq x \leq q$ میں $x$ کی دو قیمتیں ہوں اور اگر $x_2 > x_1$ ہو تو $f(x_2) > f(x_1)$ ہوگا۔

اس خصوصیت کے حامل تفاعل کو وقفہ $p \leq x \leq q$ پر سے بڑھتا ہوا کہا جاتا ہے۔ اگر $f'(x)$ منفی ہو، وقفہ $p \leq xleq$ میں جیسا کہ صورت شکل7.7 میں ہے، تو تفاعل کی خصوصیت برعکس ہوگی؛ اگر $x_2 > x_1$ ہو تو، $f(x_2) < f(x_1)$ ہوگا۔اس خصوصیت کے حامل تفاعل کو وقفہ $p \leq x \leq q$ پر گھٹتا ہوا کہا جاتا ہے۔ اگر$f'(x) > 0$ہو وقفہ $p \leq x \leq q$ میں تو $f(x)$ وقفہ $p \leq x \leq q$ میں بڑھتا ہوا ہوگا۔ اگر $f'(x) < 0$ ہو وقفہ $p < x < q$ میں، تو $f(x)$ وقفہ $p \leq x \leq q$ میں گھٹتا ہوا ہوگا۔

اس بات کو دھیان میں رکھیں کہ تفاعل $f(x)$ کو وقفہ $p \leq x \leq q$ میں بڑھتا ہوا ہونے کے لیے مشتق تفاعل $f'(x)$ کے ڈھلوان کا وقفہ کے خاتمے پر جہاں $p = x$یا $q = x$ہے، مثبت ہونا لازمی ہے، ان نقطوں پر یہ صفر یا بالکل غیر واضع ہوگا۔ یہ شاید ایک خفیف تفاوت لگے لیکن اسکے بہت اہم نتائج ہیں۔ یہ صرف استمراری تفاعلات کے ساتھ کام کرنے کے فیصلے کا انجام تھا۔

وقفہ کا لفظ صرف $x$ کی ان قیمتوں کے لیے استعمال نہیں ہوتا جو کہ محدود انتہاؤں کے درمیان ہوتی ہیں۔ بلکہ $x$ کی ان قیمتوں کے لیے بھی استعمال ہوتا ہے، جو عدم مساواتوں $p < x$ یا $x < q$ کو باور کرواتی ہیں۔

مثال 3.7: تفاعل $f(x) = x^4 - 4x^3$ کے لیے، معلوم کریں، وہ وقفہ جس میں $f(x)$ بڑھتا ہوا ہو، اور، وہ وقفہ جس میں گھٹتا ہوا ہو۔

شروع کرتے ہیں $f'(x)$ کو اجزائے ضربی میں بیان کرتے ہوئے، جیسے $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$ جیسا کہ $x^2$ ہمیشہ مثبت ہے،(صرف$x = 0$ کے علاوہ) یہ معلوم کرنے کے لیے کہ کس جگہ$f'(x) > 0$ ہے۔۔ آپ کو عدد مساوات $x - 3 > 0$ کا حل $x > 3$ ہے؛ لیکن یہ معلوم کرنے کے لیے کہ کہاں $f'(x) < 0$ ہے، آپ کو $x = 0$ کو خارج کرنا پڑے گا تاکہ $f'(x) < 0$ ہو۔ اگر $x < 0$ یا $0 < x < 3$ ہو۔ اس لیے $f(x)$ وقفہ $x \leq 3$ اور وقفہ $0 \leq x \leq 3$ میں گھٹتا ہوا ہے۔

تاہم پچھلے دو وقفوں میں $x = 0$ کی قیمت مشترک ہے۔ اس طرح آپ ان کو ایک ہی وقفے $x \leq 3$ میں یکجا کر سکتے ہیں۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ $f(x)$ وقفہ $x \leq 3$ میں گھٹتا ہوا ہے۔ $\square$

اس بات کو مد نظر رکھیں کہ $f'(x) = 0$ ہے جب $x = 0$ اور $x = 3$ ہیں۔ آپ صورت شکل8.7 میں دکھائی گئی $y = f(x)$ کی ترسیمہ سے ان تمام خصوصیات کی پڑتال کر سکتے ہیں۔مثال مثال2.2.7 سے ظاہر ہوتا ہے کہ، اوپر دیے گئے اصول (جو کہ $f'(x)$ کی علامت کو $f(x)$ کی خصوصیت سے جو کہ بڑھتا ہوا یا گھٹتا ہوا ہے ہے، جو --- دیتا ہے۔) کو ذرا کشادہ کیا جا سکتا ہے۔

اگر $f'(x) > 0$ ہو وقفہ $p < x < q$ میں سوائے ان علیحدہ نقطوں پر جہاں $f'(x) = 0$ ہے۔تو $f(x)$ وقفہ $p \leq x \leq q$ میں بڑھتا ہوا ہوگا۔ اگر $f'(x) < 0$ ہو وقفہ $p < x < q$ میں سوائے ان علیحدہ نقطوں پر جہاں $f'(x) = 0$ ، تو $f(x)$ وقفہ $p \leq x \leq q$ میں گھٹتا ہوا ہوگا۔

اگلی مثال اس تفاعل کے بارے میں ہے جس میں $x$ کی طاقت مکسور شامل ہے۔($x < 0$ کے لیے )۔ مکسور طاقتیں بعض اوقات مشکلات پیدا کرتی ہیں کیونکہ ان میں کچھ ، جب $x$ منفی ہو تو غیر واضع ہوتے ہیں۔ لیکن اس مثال میں صرف جزرالکعب معلوم کرنا کوئی مشکل کام نہیں ہے۔

مثال 4.7: ان وقفوں کو معلوم کریں جن میں تفاعل $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(1-x)$ بڑھتا ہوا ہو، اور جن میں گھٹتا ہوا ہو۔

تفریق کرنے کے لیے تفاعل $f(x)$ کو اس طرح لکھیں۔

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}$$

تاکہ

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$$

جس کو آپ اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(2-5x)$$

اس آکری فقرے میں $x^{-\frac{1}{3}}$مثبت ہوگا جب $x > 0$ اور منفی ہوگا جب $x < 0$۔$2 - 5x$کا جزرضربی مثبت ہوگا جب $x < 0.4$ ہو اور منفی ہوگا جب $x > 0.4$

صورت شکل9.7 سے ظاہر ہوتا ہے کہ؛ $f(x)$ وقفہ $0 \leq x \leq 0.4$ میں بڑھتا ہوا ہے۔

$f(x)$ وقفہ $x \geq 0$ اور $x \geq 0.4$ میں گھٹتا ہوا ہے۔

$\square$

## 3.7 زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم نقطے

مثال مثال1.2.7سے ظاہر ہوا کہ تفاعل$f(x) = x^2 - 6x + 4$، $x \leq 3$ کے لیے گھٹتا ہوا ہے، اور $x \geq 3$ کے لیے بڑھتا ہوا ہے۔بڑھتے ہوئے اور گھٹتے ہوئے تفاعلات کی تعریف سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر $x_1 < 3$ ہو تو $f(x_1) > f(3)$ ہوگا۔ اور یہ کہ اگر $x_2 > 3$ ہو تو $f(x_2) > f(3)$۔ یعنی $x$ کی $3$ کے علاوہ ہر قیمت کے لیے ،تفاعل $f(3) = -5$ سے بڑا ہوگا۔

آپ کہہ سکتے ہیں کہ $f(3)$، $f(x)$ کی کم سے کم قیمت ہے اور یہ کہ (3،-5) $y = f(x)$ کی ترسیمہ کا کم سے کم نقطہ ہے۔

ضروری نہیں کہ کم سے کم نقطہ کل ترسیمہ پر سب سے کمتر نقطہ ہو، بلکہ یہ اپنے قرب و جوار میں سے کمتر نقطہ ہوتا ہے۔

صورت شکل9.7 میں $(0,0)$ سے ایک کم سے کم نقطہ ہے؛ یہ بات اس حقیقت سے ظاہر ہوتی ہے کہ $f(x) > 0$ ہے، $x < 1$ سے ہر عدد کے لیے سوائے $x = 0$ کے، اگر چہ $f(x) < 0$ جب $x > 1$ ہے۔

یہ ایک وضاحت (تعریف) کی طرف رہنمائی کرتا ہے، جو کہ صورت شکل10.7 میں ظاہر کیا گیا ہے۔ تفاعل $f(x)$ کا، $x = q$ پر کم سے کم نقطہ ہوگا، اگر ایسا وقفہ $p < x < r$ ہو جس میں $q$ موجود ہو، جہاں $f(x) > f(q)$ ہو، $x$ کی ہر قیمت کے لیے سوائے $q$ کے۔ اس کا زیادہ سے زیادہ نقطہ ہوگا، اگر وقفے میں $x$ کی ہر قیمت کے لیے سوائے $q$ کے $f(x) > f(q)$ہو۔ نقطہ $(q, f(q))$ کو کم سے کم نقطہ یا زیادہ سے زیادہ نقطہ کہا جاتا ہے۔چنانچہ مثال 3.2.7میں $f(x)$ کا کم سے کم نقطہ $x = 0$ پر ہے اور زیادہ سے زیادہ نقطہ $x = 4$ پر ہے۔

کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ نقطوں کو بعض اوقات نقطہ تغیر بھی کہا جاتا ہے۔

آپ دیکھیں گے کہ شکل 8.7 کے کم سے کم اور شکل 9.7 کے زیادہ سے زیادہ نقطوں پر ترسیمہ کا ڈھلوان صفر ہے۔ لیکن شکل 9.7 میں کم سے کم نقطہ پر ترسیمہ کا خط مماس $y$ کا محور ہے، اس لیے ڈھلوان غیر واضع ہے۔

یہ مثالیں ایک عمومی اصول کو ظاہر کرتی ہیں؛ اگر $(q, f(q))$ ترسیمہ $y = f(x)$ کا کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ نقطہ ہو ، تو یا $f'(q) = 0$ ہوگا یا $f'(q)$ بالکل غیر واضع ہوگا۔

دھیان رہے اگرچہ شکل 8.7 میں ایک اور نقطہ بھی ہے جہاں ڈھلوان صفر ہے جو کہ نو تو کم سے نقطہ ہے نا زیادہ سے زیادہ۔مثلاً نقطہ ترسیمہ پر وہ نقطہ جہاں ڈھلوان صفر ہو ساکن نقطہ کہلاتا ہے۔ اسی طرح شکل 8.7 اور 9.7 اس حقیقت کو واضع کرتی ہیں کہ ساکن نقطہ کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ نقطہ ہوسکتا ہے یا دونوں میں سے کوئی بھی نہیں ہو سکتا۔

کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ نقطے مسیں فیصلہ کرنے کا ایک طریقہ ڈھلوان $f'(x)$ کی علامت کو $x = q$ کے دونوں طرف معلوم کرنا ہے۔ تفصیلات کے لیے شکل 10.7 کی ترسیمات کی طرف رجوع کرنا آپ کے لیے دوبارہ سے مددگار ثابت ہو سکتا ہے۔

اگر $f'(x) < 0$ ہو، وقفہ $p < x < q$ مسیں اور $f'(x) > 0$ ہو وقفہ $q < x < r$ مسیں تو $(q, f(q)$ ایک کم سے کم نقطہ ہوگا۔

اگر $f'(x) > 0$ ہو،وقفہ $p < x < q$ مسیں ،اور $f'(x) > 0$ ہو وقفہ $q < x < r$ مسیں ، تو $q, f(q))$ ایک زیادہ سے زیادہ نقطہ ہوگا۔

آپ ترسیمات کی شہادتکی بنا پر اس کو قبول کرتے ہوئے شائد خوش ہوں گے، لیکن یہ ان بیانات سے بھی ثابت ہو سکتا ہے جن کا سامنا آپ سے پہلے ہی ہو چکا ہے۔ فرض کریں $x_1$ وقفہ $p < x < q$ مسیں ایک عدد ہے، تو، (چونکہ $f'(x) > 0$ ہےاس وقفہ مسیں)، ضمن 2.7 سے معلوم ہوتا ہے کہ $f(x_1) > f(q)$ ہوگا۔

اب فرض کریں، $x_2$ وقفہ $q < x < r$ مسیں ایک عدد ہےچونکہ اس وقفہ مسیں $f'(x) > 0$ہے، $f(q) < f(x_2)$ہوگا۔

اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ اگر $x$ وقفہ $p < x < r$ مسیں $q$ کے علاوہ کوئی بھی عدد ہو تو $p < x < r$ ہوگا۔ تعریف کے مطابق اس کا مطلب ہے کہ $f(x)$ کا کم سے کم نقطہ $x = q$ پر ہے۔

ان تمام نتائج کو ایک طریقہ کار کی شکل مسیں جمع کیا جا سکتا ہے۔

مساوات $y = f(x)$ کی ترسیمہ پر کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ نقطوں کو معلوم کرنے کے لیے؛

ا. وہ دائرہ کار طے کریں جس سے آپ کو سروکار ہو۔

ب. $f'(x)$ کے لیے ایک ریاضیاتی بیان معلوم کریں

ج. دائرہ کار مسیں موجود ان $x$ کی قیمتوں کو درج کریں جن کے لیے $f\prime(x)$ یا تو صفر ہو یا غیر واضع ہو۔

د. ان تمام $x$ کی قیمتوں مسیں سے ہر ایک کو باری باری لیتے ہوئے،اسی قیمت کے قریب ترین دائیں اور بائیں وقفوں مسیں $f\prime(x)$ کی علامت معلوم کریں۔

ہ. گر یہ علامتیں علی الترتیب منفی اور مثبت ہوں تو ترسیمہ کے ہاں کم سے کم نقطہ ہوگا۔ اگر یہ مثبت اور پھر منفی ہوں تو زیادہ سے زیادہ نقطہ ہوگا۔اگر علامتیں بدل نہ رہی ہوں اور ایک جیسی ہوں تو دونوں مسیں سے کوی بھی نہیں ہوگا۔

و. $x$ کی ہر قیمت کے لیے جو کہ کم سے کم یا ذیادہ سے ذیادہ ہے $f(x)$ معلوم کریں۔

مثال 5.7: مساوات $y = \sqrt{x} + \frac{4}{x}$ کی ترسیمہ پر کم سے کم نقطہ معلوم کریں۔ فرض کریں $y = f(x) = \sqrt{x} + \frac{4}{x}$ --۔

درجہ الف-- جیسا کہ $\sqrt{x}$ ، $x \geq 0$ کے لیے واضع ہے، لیکن $\frac{1}{x}$، $x = 0$ کے لیے غیر واضع ہے۔ اس لیے سب سے بڑا ممکنہ دائرہ کار $f(x)$ کے لیے مثبت حقیقی اعداد ہوگا۔ درجہ ب--متفرق $f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} - 4x^{-2}$ کو اس طرح بھی لکھا جا سکتا ہے جیسے $f'(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}-8}{2x^2}$--۔ درجہ ج-- متفرق تمام حقیقی اعداد کے لیے واضع ہے اور جب $x^{\frac{3}{2}} = 8$ ہو تو صفر ہے دونوں اطراف کو طاقت $\frac{2}{3}$ تک اٹھانے اور طاقت در طاقت کے اصول کو استعمال کرنے کے بعد $x = (x^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}} = 4$۔ -- درجہ د-- اگر $0 < x < 4$ ہو ، تو کسر کے نیچے والا فقرہ $2x^2$ مثبت ہوگا،اور $x^{\frac{3}{2}} - 8 < 4^{\frac{3}{2}} - 8 = 8 - 8 = 0$ ہوگا،نتیجۃً $f'(x) < 0$ ہوگا۔ اگر $xg4$ ہو تو $2x^2$ برابر مجبت ہی رہے گا، لیکن $x^{\frac{3}{2}} - 8 > 4^{\frac{3}{2}} - 8 = 0$ ہوگا، اور نتیجۃً $f'(x) > 0$ ہوگا۔ درجہ ہ -- $f\prime(x)$ کی علامت $4$ کے بائیں جانب منفی ہے اور دائیں جانب مثبت ، اسطرح تفاعل کا کم سے کم نقطہ $x = 4$ ہوگا۔ درجہ ی-- $f(4) = \sqrt{4} + \frac{4}{4} = 2 + 1 = 3$ حساب کرنے پر کم سے کم نقطہ $(4, 3)$ نکل آتا ہے۔ □

اگر آپ کے پاس ترسیمہ شمار کنندہ ہو تو اسے استعمال کر کے $y = f(x)$ کو $y = \sqrt{x}$ اور $y = \frac{4}{x}$ کے ساتھ اکٹھے دکھانا جس سے یہ تفاعل بنا ہے، بہت دلچسپ لگے گا۔ آپ جان لیں گے کہ $y = f(x)$ کم سے کم نقطے کے اردگرد بہت ہموار ہے۔ یہ بتانا آنکھوں سے بہت مشکل کام ہوگا کہ کم سے کم نقطہ ٹھیک کہاں واقع ہے۔

اس بات کو دھیان میں رکھیے گا کہ یہ نظریہ آپکو بعض تفاعلات کی سعت معلوم کرنے کے لیے، کوئ اور راستہ فراہم کرتا ہے۔مثال 1.3.7 کے تفاعل کی جسکا دائرہ کار $xg0$ ہے،سعت $y \geq 3$ ہوگی۔

سوال 1: مندرجہ ذیل ہر تفاعل $f(x)$ کا متفرق $f\prime(x)$معلوم کریں، اور وہ وقفہ معلوم کریں جس میں $f(x)$ بڑھتا ہوا ہو۔

ا. $x^2 - 5x + 6$ د. $-\ 5x\ -\ 3x^2\ 2$ $7$

ب. $x^2 + 6x - 4$

ج. $7 - 3x - x^2$ ہ. $-\ 3x\ +\ 5x^2$ و. $(f)7 - 4x - 3x^2$

سوال 2: مندرجہ ذیل تفاعلات $f(x)$ میں سے ہر ایک کا متفرق $f\prime(x)$ معلوم کریں اور وہ وقفہ معلوم کریں جس میں $f(x)$ گھٹتا ہوا ہو۔

ا. $x^2 + 4x - 9$ ج. $5 - 3x + x^2$ ھ. $4 + 7x - 2x^2$

ب. $x^2 - 3x - 5$ د. $\frac{2x^2}{7} - 8x +$ و. $3 - 5x - 7x^2$

سوال 3: مندرجہ ذیل تفاعلات $f(x)$ میں سے ہر ایک کا متفرق $f\prime(x)$ معلوم کریں، اور کوئی سا وقفہ معلوم کریں، جس میں $f(x)$ گھٹتا ہوا ہو۔جز(و) میں $n$ عدد صحیح ہے۔

ا. $x^3 - 12x$ د. $\frac{x^3 - 3x^2 + 3x}{4} +$ ز. $3x - x^3$

ب. $\frac{2x^3 - 18x}{5} +$ ھ. $x^4 - 2x^2$ ح. $\frac{2x^5 - 5x^4}{10} +$

ج. $2x^3 - 9x^2 - 24x + 7$ و. $x^4 + 4x^3$ ط. $3x + x^3$

سوال 4: مندرجہ ذیل ہر تفاعل $f(x)$ کا متفرق $f\prime(x)$معلوم کریں اور وہ وقفہ معلوم کریں جس میں $f(x)$ بڑھتا ہوا ہو۔

ا. $x^3 - 27xforx \geq 0$ د. $12x - 2x^3$ ز. $36x^2 - 2x^4$

ب. $2x^3 18x + 5$ ھ. $\frac{2x^3 + 3x^2 - 36x}{7} -$ ح. $2x^5 - 5x$

ج. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ و. $3x^4 - 20x^3 + 12$ ط. $x^n - nx(n > 1)$

سوال 5: مندرجہ ذیل تفاعلات $f(x)$ میں سے ہر ایک کا متفرق تفاعل $f\prime(x)$ معلوم کریں، اور وہ وقفے معلوم کریں جن میں $f(x)$ گھٹتا ہوا ہو۔اور وہ وقفے جن میں $f(x)$ بڑھتا ہوا ہو۔

ا. $x^{\frac{3}{2}}(x-1)$ ج. $x^{\frac{2}{3}}(x+2)$ ھ. $x + \frac{3}{x} forx \neq 0$

ب. $x^{\frac{3}{4}} - 2x^{\frac{7}{4}}, forx > 0$ د. $x^{\frac{3}{5}}(x^2 - 13)$ و. $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}, x > 0$

سوال 6: مندرجہ ذیل تفاعلات $f(x)$ کی ترسیمات میں سے ہر ایک کے لیے ؛

ا. ساکن نقطوں کے محدد معلوم کریں

ب. دلیل کے ساتھ بتا دیں کہ آیا یہ زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم نقطہ ہے۔

ج. راس معلوم کرنے کے لیے، تکمیل مربع کے قاعدے کو استعمال کر کے اپنے جواب کی پڑتال کریں

د. ان قیمتوں کی سعت بیان کریں جن قیمتوں کو تفاعل لے سکتا ہے۔

ا. $x^2 - 8x + 4$

ب. $3x^2 + 12x + 5$

ج. $5x^2 + 6x + 2$

د. $4 - 6x - x^2$

ھ. $x^2 + 6x + 9$

و. $1 - 4x - 4x^2$

سوال 7: مندرجہ ذیل تفاعلات کی ترسیمات پر ساکن نقطوں کے ہم پلہ نقطے معلوم کریں، نیز معلوم کریں کہ آیا نقاط زیادہ سے زیادہ نقاط ہیں یا کم سے کم نقاط ہیں

ا. $2x^3 + 3x^2 - 72x + 5$

ب. $x^3 - 3x^2 - 45x + 7$

ج. $3x^4 - 8x^3 + 6x^2$

د. $3x^5 - 20x^3 + 1$

ھ. $2x + x^2 - 4x^3$

و. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

ز. $x + \frac{1}{x}$

ح. $x^2 + \frac{54}{x}$

ط. $x - \frac{1}{x}$

ي. $x - \sqrt{x}, for x > 0$

يا. $\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}$

يب. $x^{\frac{1}{3}}(4 - x)$

يج. $x^{\frac{1}{5}}(x + 6)$

يد. $x^4 - 8x^2$

يه. $x^2 - \frac{16}{x} + 5$

سوال 8: ان تفاعلات کی سعتیں معلوم کریں، جو کہ سب سے بڑے ممکنہ دائرہ کاروں میں واضع ہوں

ا. $x^2 + x + 1$

ب. $x^4 - 8x^2$

ج. $x + \frac{1}{x}$

## 4.7 متفرقات، تبدیلی کی شرح کے موافق

تعلق $y = f(x)$ میں موجود $x$ اور $y$ کی مقداروں کو بااوقات متغیرات کہا جاتا ہے، کیونکہ $x$ دائرہکاروں میں موجود کوئی بھی عدد ہوتا ہے اور $y$ سعت میں موجود کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے۔ جب آپ ترسیمہ بناتے ہیں تو $x$ کی قیمتوں کے چناؤ میں آزاد ہوتے ہیں۔ اور پھر $y$ کی قیمتوں کو وضع کرتے ہیں۔ اس لیے $x$ کو آزاد اور $y$ کو تابع متغیرہ کہا جاتا ہے۔

یہ تغیرات بااوقات طبعی یا معاشی مقداروں کو ظاہر کرتے ہیں اور پھر دیگر حروف کو استعمال کرنا، جوکہ ان مقداروں کے بارے میں بتاتے ہیں، بہت معقول لگتا ہے۔ مثلاً وقت کے لیے $t$ ، حجم کے لیے $V$ ،دام کے لیے $c$ ،آبادی کے لیے $p$ اور وغیرہ وغیرہ۔

یہ بات بہت جلد واضع کی جائے گی، کہ حرف $d$ کو گہرائی کے لیے کیوں استعمال نہیں کیا گیا۔ حرف $z$ عمودی سمت میں فاصلے کے لیے زیادہ تر استعمال ہوتا ہے۔

تابع متغیر ،دباؤ $p$ ہے، جسے بارس میں ناپا جاتا ہے۔ سطح پر غوطہ خور صرف ہوائی دباؤ محسوس کرتا ہے، جو کہ بار 1 کے لگ بھگ ہوتا ہے لیکن جوں جوں غوطہ خور نیچے اترتا جاتا ہے دباؤ بڑھتا جاتا ہے۔ ساحلی گہرائیوں پر متغیرات تقریباً اس مساوات کے ذریعے جڑے ہوئے ہوتے ہیں۔$p = 1 + 0.1z$

ترسیمہ کا ہم پلہ نقطہ $(z, p)$ ایک خط مستقیم ہے، جس طرح شکل 11.7 میں دکھائی گئی ہے۔ مستقل عدد 0.1 مساوات میں موجود، وہ مقدار ہے جس سے دباؤ ہر اضافی گہرائی کی لمبائی کے لیے بڑھ جاتا ہے۔ یہ دباؤ کی گہرائی کے متعلق تبدیلی کی شرح ہے۔

اگر غوطہ خور $\delta z$ میٹر کے فاصلے تک نیچے اترتا ہے تو دباؤ $\delta p$مقدار تک بڑھتا جائے گا۔ یہ تبدیلی کی شرح $\frac{\delta p}{\delta z}$ ہے۔ یہ ترسیمہ کے ڈھلوان سے ظاہر کیا گیا ہے۔ لیکن سمندر کی گہرائیوں میں ترسیمہ $(z, p)$ مزید خط مستقیم نہیں رہتی، بلکہ اسکی شکل شکل12.7 والی بن جاتی ہے۔مقدار $\frac{\delta p}{\delta z}$ اب،اضافی گہرائی $\delta z$میں تبدیلی کی متوسط شرح کو ظاہر کرتی ہے۔

صورت شکل12.7 میں وتر کا ڈھلوان اسی چیز کو ظاہر کرتا ہے۔ گہرائی کے متعلق دباؤ کی تبدیلی کی شرح، $\frac{\delta p}{\delta z}$ کی حد ہے،(جیسے ہی $\delta z$صفر کو بڑھتا ہے)

متفرق $f'()$ کی علامت جیسے اب تک اس حد کے لیے استعمال کیا گیا ہے۔، معیاری نہیں ہے، کیونکہ اس میں $p$ کا تزکرہ نہیں ہے، ایک ایسی علامت کا ہونا ضروری ہے، جس میں متغیرات کے لیے استعمال کیے گئے دونوں حروف موجود ہیں۔ایک متبادل علامت $\frac{\delta p}{\delta z}$وضع کیا جاتا ہے، جسے متوسط شرح میں حرف $\delta$کو حد میں $d$ سے بدل کر حاصل کیا جا سکتا ہے۔

باقاعدہ طور پر،

$$\frac{dp}{dz} = \lim_{\delta z \to 0} \frac{\delta p}{\delta z}$$

یہاں کوئی نیا تصور نہیں ہے۔ یہ صرف باب تفرق میں دیے گئے متفرق کی تعریف کو ایک نئے مختلف انداز میں لکھنے کا طریقہ ہے۔ اک کا فائدہ یہ ہے کہ مختلف حروف کو استعمال کر کے اسے ملایا جا سکتا ہے، جب کبھی دو متغیرات میں تفاعلی تعلق ہو، ان میں تبدیلی کی شرح کو بیان کرنے کے لیے۔

اگر $x$ اور $y$ علی الترتیب ، آذاد اور تابع متغیرات ہوں، کسی تفاعلی تعلق میں ، تو متفرق،

$$\frac{dp}{dz} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta p}{\delta z}$$

متغیر $y$ کی $x$ کے متعلق تبدیلی کی شرح کی ناپتا ہے۔ اگر $y = f(x)$ہو،تو$\frac{dy}{dx} = f'(x)$ہوگا۔

ہر چند کہ $\frac{dy}{dx}$ایک کسر لگتا ہے،فی الحال آپ کو اسے ایک غیر متفق علامت جیسا خیال کرنا چاہیئے جو چار حروف اور ایک افقی لکیر سے بنایا گیا ہو۔ جو علامت $dx$اور $dy$ ہیں، وہ آپ کوئی معنی نہیں رکھتے (بعد میں،گو آپ کو معلوم ہوگا کہ بعض صورتوں میں علامت $\frac{dy}{dx}$ ایک کسر کیطرح پیش آتا ہے۔ یہ$f'()$کی علامت کے اوپر اسکا ایک اور فائدہ ہے)

اس علامت کو وسیع معنوں میں استعمال کیا جا سکتا ہے۔ مثال کے طور پر، اگر جلے ہوئے گھاس کا رقبہ آگ لگنے کے $t$ منٹ بعد $A$ مربع میٹر $m^2$ہو تو $\frac{dA}{dt}$اس شرح کو ناپتا ہے، جس سے آگ مربع میٹر فی منٹ کے حساب سے پھیل رہی ہو۔ اگر زمین کی سطح پو موجود کسی نقطے پر، میدان میں $x$ میٹر کے فاصلے کو نقشے پر $y$ میٹر سے ظاہر کیا جائے تو $\frac{dy}{dx}$ اس نقطے پر نقشے کے پیمانے (درجے) کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال 6.7: خواتین کی 100 میٹر دوڑ ، میں ایک تیز دوڑنے والی 36 میٹر طے کرنے کے بعد، اپنی بلند ترین رفتار 12 میٹر فی سیکنڈ پر پہنچ جاتی ہے، اس فاصلے تک ، اسکی رفتار طے کئے گئے فاصلے کی جذر سے متناسب ہے۔

یہ ثابت کریں کہ جب تک وہ آخری رفتار تک نہیں پہنچ جاتی، اس کی رفتار میں فاصلے سے متعلق تبدیلی کی شرح ، اسکی رفتار کے بالعکس متناسب ہے۔

فرض کریں کہ $x$ میٹر دوڑنے کے بعد اسکی رفتار $S$ میٹر فی سیکنڈ ہوتی ہے۔ آپکو کہا گیا ہے کہ $x = 36$میٹر تک رفتار $S = k\sqrt{x}$ہوگی، اور یہ بھی کہ جب $S = 12$ہوگا تو $x = 36$ ہوگی۔ تو،

$$12 = k\sqrt{36}$$

جو کہ $k$ کی قیمت دے گا،

$$k = \frac{12}{6} = 2$$

لہٰذہ $(x, S)$ کا تعلق؛ $0 < x < 36$ کے لیے $S = 2\sqrt{x}$ ہوگا۔

فاصلے سے متعلق رفتار میں تبدیلی کی شرح، متفرق $\frac{dS}{dx}$ ہوگی، اور $\sqrt{x}$ کا متفرق (حصہ حصہ 5.6 سے) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ہے۔

اس لیۓ،

$$\frac{dS}{dx} = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

چونکہ $\frac{S}{2} = \sqrt{x}$ ہے، $\frac{dS}{dx}$ کو $\frac{2}{S}$ لکھا جا سکتا ہے۔ تبدیلی کی شرح، اس لیۓ، اسکی رفتار کے بالعکس متناسب ہے۔ باقی (بچی ہوئی) دوڑ تک کے لیے اگر وہ اپنی بلند ترین رفتار برقرار رکھتی ہے، تو رفتار برقرار رکھتی ہے، تو رفتار میں فاصلے کی نسبت تبدیلی کی شرح 0 تک گر جائے گی، $x$g36 کے لیے صورت شکل 13.7 ظاہر کرتی ہے کہ ڈھلوان (چونکہ تبدیلی کی شرح کو ظاہر کرتا ہے)، جیسے ہی اسکی رفتار بڑھتی جائے گی، چھوٹا ہوتا جائے گا،اور پھر صفر ہوگا۔ جونہی وہ بلند ترین رفتار پہ پہنچ جائے گی۔ □

مثال 7.7: کاروں کی ایک قطار، جس میں ہر کوئی 5 میٹر لمبی ہے، ایک مستقل رفتار $S$ کلومیٹر فی گھنٹہ کے حساب سے ایک کھلی سڑک پر سفر کر رہی ہے۔ کاروں کی ہر جوڑی کے درمیان ایک تجویز کردہ فاصلہ ہے جو کہ قاعدہ $(0.18S + 0.006S^2)$ میٹر میں دیا گیا ہے، سڑک میں گنجائش کے مطابق کاروں کی تعداد کو بڑھانے کے لیے، کاروں کو کس رفتار سے سفر کرنا چاہئیے؟

فاصلے کے قاعدے کو $(aS + bS^2)$ کی شکل میں لکھنا، ایک اچھا تصور ہے، جہاں $a = 0.18$ اور $b = 0.006$ ہیں۔ یہ ایک صاف قاعدہ دیتا ہے، اور عددی سروں کو قاعدے میں تبدیل کرنے سے قاعدے پر پڑنے والے اثر کو بھی کھوجنے کے قابل بناتا ہے۔ لیکن یہ یاد رہے، جب آپ $a$ اور $b$ کا تفرق لیتے ہیں تو وہ محض مستقل اعداد ہوتے ہیں۔

ایک باڑ جو کہ کار کی لمبائی کا ہے اور اس کے سامنے علیحدگی کا فاصلہ سڑک کے $5 + aS + cS^2$m میٹر یا $\frac{5+aS+cS^2}{1000}$km کو گھیر لیتا ہے، ایک گھنٹے میں ایک نگرانی کرنے والے مقام سے گزرنے والے بلاکس کی سب سے بڑی تعداد کے لیے، ایک بلاک سے چیک پوسٹ سے گزرنے کا وقت $T$ (گھنٹوں میں) جتنا ممکن ہو سکے کم سے کم ہونا چاہئیے۔ چونکہ بلاک $S$ کلومیٹر فی گھنٹہ کے حساب سے حرکت کر رہا ہے۔

$$TS = frac5 + aS + cS^2 1000$$
$$T = frac5 + aS + cS^2 1000S$$
$$T = 0.001(5S^{-1} + a + bS$$

اب $T$ کی کم سے کم قیمت کو معلوم کرنے کے طریقہ کار کی پیروی کریں۔

ا. چونکہ رفتار کو مثبت ہونی چاہئیے، اس لیے دائرہ کار $Sg0$ ہوگا۔

ب. تفرق ہوگا، $\frac{dT}{dS} = 0.001(5S^{-2} + a + b)$

ج. یہ متفرق دائرہ کار میں ہر جگہ واضع ہے ، اور جب $0 = b + \frac{5}{S^2} -$ ہے تو صفر ہے۔ جس سے $S = \sqrt{\frac{5}{b}}$ آتا ہے

د. ونہی $S$ بڑھتی ہے $\frac{5}{S^2}$ کم ہوتا ہے، اس لیے $+\frac{5}{S^2}-$ بڑھتا ہے، چونکہ $\frac{dT}{dS}$ صفر ہے، جب $S = \sqrt{\frac{5}{b}}$ ہے، اور جب $S < \sqrt{\frac{5}{b}}$ ہے تو $\frac{dT}{dS}$ کی علامت منفی ہے اور جب $S > \sqrt{\frac{5}{b}}$ ہے تو علامت مثبت ہے۔

ھ. ونکہ $\frac{dT}{dS}$ منفی سے مثبت تک تبدیل ہوتا ہے، $T$ کم سے کم ہوگا، جب $Sg\sqrt{\frac{5}{b}}$ ہوگا۔

و. $a = 0.18$ اور $b = 0.006$ کو متبادل استعمال کرنے پر $S = \sqrt{\frac{5}{0.006}} \approx 28.87$ آتی ہے اور $T \approx 0.0005264$ کم سے کم نقطے پر آتا ہے۔

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ کاروں کی حرکت 29 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار پہ سب سے بہتر ہوگی۔(ہر بلاک پھر تقریباً 0.000526 گھنٹہ یا 1.89 سیکنڈز لے گا، (چیک پوائنٹ سے گزرنے کے لیے) نتیجۃً ایک گھنٹے میں گزرنے والی کاروں کی تعداد تقریباً $\frac{1}{0.000526} \approx 1900$ ہوگی۔) □

مثال 8.7: ایک خالی مخروطہ ، جس کی تہ کا رداس $a$ سینٹی میٹر اور اونچائی $b$ سینٹی میٹر ہیں، ایک میز پر پڑا ہوا ہے۔ اس سب سے بڑے بیلن کا حجم کیا ہوگا، جسے اسکے اندر چھپایا جا سکتا ہو؟

رداس $r$ سینٹی میٹر اور اونچائی $h$ کے بیلن کا حجم $V$ ہے، جو کہ

$$V = \pi r^2 h$$

آپ برملا اپنی مرضی سے $r$ اور $h$ کو بڑا سے بڑا رکھ کے ، اسے بڑا بنا سکتے ہیں۔ لیکن اس سوال میں متغیرات اس اقتضا کے پابند ہیں کہ بیلن کو مخروطے کے سانچے میں پورا آنا چاہئیے ہوگا۔

زیادہ سے زیادہ قیمت معلوم کرنے کا طریقہ کار کی پیروی کرنے سے پہلے آپ کو اس چیز کو معلوم کرنے کی ضرورت ہے کہ یہ حد بندی $r$ اور $h$ کی قیمتوں کو کیسے اثر انداز کرتی ہے۔

صورت شکل14.7 ظاہر کرتی ہے ایک تین سمتی ڈھانچے کو اور صورت شکل15.7 ایک عمودی حصہ ہے، جو کہ مخروطہ کے سب سے اوپر ہے۔ صورت شکل15.7 میں بھاری لکیروں سے منتخب کی ہوئی مثلثیں (جو کہ مماثل ہیں) یہ ظاہر کرتی ہیں کہ $r$ اور $h$ مندرجہ ذیل مساوات کے ذریعے جڑے ہوئے ہیں۔؛

$$\frac{h}{a-r} = \frac{b}{a}$$

لہٰذا۔

$$h = \frac{b(a-r)}{a}$$

ہوگا۔

$h$ کے اس فقرے کو $V$ کے کلیے میں متبادل استعمال کرنے پر ملتا ہے۔

$$V = \frac{\pi r^2 b(a-r)}{a} = \frac{\pi b}{a}(ar^2 - r^3)$$

یہ بات دھیان میں رہے کہ $V$ کے ابتدائی ریاضیاتی فقرے میں دو آزاد متغیرات $r$ اور $h$ موجود ہیں۔ متبادل استعمال کرنے کے نتیجے میں آزاد متغیرات کی تعداد کم ہو کر ایک رہ جائیگی، $h$ غائب ہو جاتا ہے اور صرف $r$ باقی رہتا ہے۔ یہ طریقہ کار کو استعمال کر کے زیادہ سے زیادہ قیمت معلوم کرنے کو ممکن بناتا ہے۔ اس طبعی مسئلے کا کوئی حقیقی مطلب تب ہوگا جب $a$ > $r$ > 0ہو، لہٰذہ اس وقفے کو تفاعل کے دائرہ کار کے طور پر لے لیں۔ عمومی اصول کے مطابق تفریق کر کے (یاد رہے کہ $\pi$ $a$ اور $b$ مستقل اعداد ہیں) معلوم ہوتا ہے،

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dr} &= \left(\frac{\pi b}{a}\right)(2ar - 3r^2)\\ &= \left(\frac{\pi b}{a}\right) r(2a - 3r)\end{aligned}$$

دائرہ کار میں موجود $r$ کی صرف وہ قیمت جس کے لیے $\frac{dV}{dr} = 0$ ہے ،$\frac{2}{3}a$ ہے۔ اس بات کی جانچ پڑتال کرنا کہ $\frac{dV}{dr}$ کی علامت $0 < r < \frac{2}{3}a$ کے لیے مثبت ہے۔اور $\frac{2}{3}a < r < a$ کے لیے منفی ہے، بہت آسان ہے۔ لہٰذہ ، زیادہ سے زیادہ حجم کے بیلن کا رداس $\frac{2}{3}a$ ہوگا، اونچائی $\frac{1}{3}b$ ہوگی اور حجم $\frac{4}{27}\pi a^2 b$ ہوگا۔ □

سوال 1: سوال کے ہر حصے میں ہر تفرق کو ظاہر کریں فلاں کی نسبت سے فلاں میں تبدیلی کی شرح میں اور اس کی طبعی اہمیت بیان کریں۔

ا. معلوم کریں $\frac{dh}{dx}$ جبکہ $h$ سطح سمندر سے بلندی، اور $x$ ، سیدھی سڑک پر طے کیا گیا افقی فاصلہ ہے۔

ب. معلوم کریں $\frac{dN}{dt}$ جبکہ $N$ وقت $t$ پر اسٹیڈیم کا گیٹ کھلنے کے بعد لوگوں کی تعداد ہے۔

ج. معلوم کریں $\frac{dM}{dr}$ جبکہ $M$ مقناطیس سے فاصلے $r$ پر مقناطیسی قوت ہے۔

د. معلوم کریں $\frac{dv}{dt}$ جبکہ $v$ ایک زرے کی رفتار ہے جو وقت $t$ کے ساتھ ایک سیدھی لکیر میں حرکت کر رہا ہے۔

ھ. معلوم کریں $\frac{dq}{dS}$ جبکہ $q$ گاڑی میں استعمال ہونے والے پیٹرول کی شرح ہے، اور $S$ کلومیٹر فی گھنٹہ میں گاڑی کی رفتار ہے۔

سوال 2: درج ذیل تمام جملوں کو موزوں اکائیوں اور علامات کا استعمال کرتے ہوئے متفرق کی شکل میں لکھیں۔

1. سطح سمندر سے بلنری کی نسبت سے فضائی دباؤ میں تبدیلی کی شرح
2. دن کے وقت کی نسبت سے درجہ حرارت میں تبدیلی کی شرح
3. وقت کے ساتھ جوار میں بڑھنے کی شرح
4. زندگی کے پہلے ہفتے میں بچے کے وزن میں اضافے کی شرح

سوال 3:

ا. معلوم کریں $\frac{dz}{dt}$ جبکہ $z = 3t^2 + 7t - 5$

ب. معلوم کریں $\frac{d\theta}{dx}$ جبکہ $\theta = x - \sqrt{x}$

ج. معلوم کریں $\frac{dx}{dy}$ جبکہ $x = y + \frac{3}{y^2}$

د. معلوم کریں $\frac{dr}{dt}$ جبکہ $r = t^2 + \frac{1}{\sqrt{t}}$

ھ. معلوم کریں $\frac{dm}{dt}$ جبکہ $m = (t+3)^2$

و. معلوم کریں $\frac{df}{ds}$ جبکہ $f = 2s^6 - 3s^2$

ز. معلوم کریں $\frac{dw}{dt}$ جبکہ $w = 5t$

ح. معلوم کریں $\frac{dR}{dr}$ جبکہ $R = \frac{1-r^3}{r^2}$

سوال 4: ایک ذرہ $x$ -محور کے گرد حرکت کرتا ہے۔وقت $t$ پر اس کی منتقلی $x = 6t - t^2$ ہے۔

ا. $\frac{dx}{dt}$ کیا ظاہر کرتا ہے؟

ب. $x$ بڑھ رہا ہے یا کم ہو رہا ہے؟ جب $x = 1$ اور $x = 4$ ہے؟

ج. ذرے کی سب سے بڑی مثبت منتقلی معلوم کریں۔ اور بتائیں کے کس طرح یہ آپ کے پہلے حصے کے جواب سے جڑا ہوا ہے؟

سوال 5:

مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کو ریاضیاتی شکل میں ڈھالنے کے لئے مناسب علامت نویسی وضع کریں۔

ا. موٹروے پر طے کردہ فاصلہ مستقل شرح سے بڑھ رہا ہے۔

ب. سیونگ بینک ڈپازٹ میں اضافے کی شرح جمع کی گئی رقم کے متناسب ہے۔

ج. درجہ حرارت کے تفاعل کے متناسب درخت کے تنے کا قطر بڑھتا ہے۔

سوال 6: ایک گاڑی ہر ایک کلو میٹر کے لئے $S$ کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار پر چلتے ہوئے $y$ کلومیٹر فی لیٹر پیٹرول استعمال کرتی ہے۔ جبکہ

$$y = 5 + \frac{1}{5}S - \frac{1}{800}S^2$$

وہ رفتار معلوم کریں جس کے لیے کار کم خرچ میں زیادہ فاصلہ طے کرے۔

سوال 7: ایک گیند عمودی طور پر اوپر کی طرف پھینکی گئی۔ وقت $t$ پر اس کی بلندی $h$ ہے اور ان دونوں کے بیچ کا تناسب اس مساوات $h = 20t - 5t^2$ سے ملتا ہے۔ گیند کی زمین سے اوپر زیادہ سے زیادہ بلندی معلوم کریں۔

سوال 8: دو حقیقی اعداد $x$ اور $y$ کا مجموعہ 12 ہے۔ اس ضرب $xy$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت معلوم کریں۔

سوال 9: دو حقیقی مثبت اعداد $x$ اور $y$ کا ضرب 20 ہے۔ان کے جمع کی کم سے کم قیمت معلوم کریں۔

سوال 10: ایک سیلنڈر کے حجم کا کلیہ $V = \pi r^2 h$ ہے، حجم $V$ کی سب سے بڑی اور سب سے چھوٹی قیمت معلوم کریں۔

سوال 11: ایک رسی جو کہ 1 سینٹی میٹر لمبی ہے، سے دائرے بنائے گئے ہیں، اس مربعی دائرے میں مخالف سمتوں کے ایک جوڑے کی لمبائی $x$ سینٹی میٹر ہے۔ اس $x$ کی قیمت معلوم کریں یہ خیال رکھتے ہوئے کہ اس دائرے کا رقبہ بڑے سے بڑا ہوگا۔

سوال 12: بھیڑوں کے ایک مستطیل باڑے کی ایک سمت میں رکاوٹ لگائی گئی ہے باقی کی تین سمتوں میں باڑ لگائی گئی ہے۔ مستطیل کی لمبائی $x$ میٹر ہے؛ 120 میٹر جنگلا دستیاب ہے۔

ا. ظاہر کریں کہمستطیل کا رقبہ $\frac{1}{2}x(120 - x)m^2$ ہے۔

ب. بھیڑ کے باڑے کا زیادہ سے زیادہ رقبہ معلوم کریں۔

سوال 13: دھات کے ایک مستطیل ٹکڑے کی لمبائی 50 سینٹی میٹر اور چوڑائی 40 سینٹی میٹر ہے۔ ہر ایک کونے سے لمبائی $x$ سینٹی میٹر کے برابر مربع کاٹے اور پھینک دیے گئے۔ اب شیٹ کو ایک ستہ کر کے $x$ سینٹی میٹر گہرائی کی ایک ٹرے بنائی گئی۔ $x$ کی ممکنہ قیمتوں کا دائرہ کار کیا ہے؟ ٹرے کی سکت یا حجم کو زیادہ سے زیادہ بنانے والی $x$ کی قیمت معلوم کریں۔

سوال 14: ایک مربع بنیاد کا استعمال کرتے ہوئے ایک کھلا مستطیل بنانا ہے جس کا حجم 4000 سینٹی میٹر کیوب ہے۔ اس بنیاد کی ایک سمت کی لمبائی معلوم کریں جب مستطیل بنانے کے لیے درکار مواد کو کم سے کم استعمال میں لایا جائے۔

سوال 15: ایک بیلن کار ردی کی ٹوکری، جس کا رداس $r$ سینٹی میٹر ہے اور سکت $V$ سینٹی میٹر کیوب ہے۔ سطح کا رقبہ 5000 مربع سینٹی میٹر ہے۔

ا. ثابت کریں کہ $V = \frac{1}{2}r(5000 - \pi r^2)$

ب. ٹوکری کی زیادہ سے زیادہ سکت معلوم کریں۔

سوال 16: رداس 10 سینٹی میٹر کے کرہ کی اندر ایک گول اسطوانہ پڑا ہوا ہے۔ اسطوانہ کے زیادہ سے زیادہ حجم کا حساب لگائیں۔

سوال 17: تفرق کا استعمال کرتے ہوئے وکر پر غیر متحرک نقطوں کے محدد تلاش کریں۔

$$y = x + \frac{4}{x}$$

اور دریافت کریں کہ ہر غیر متحرک نقطہ زیادہ سے زیادہ نقطہ ہے یا کم سے کم نقطہ ہے۔ $x$ کے اقدار کا مجموعہ تلاش کریں جس کے لئے $y$ بڑھتا ہے جیسے جیسے $x$ کی قیمت بڑھتی ہے۔

سوال 18: ایک تابکار مادہ کے سڑنے کی شرح، اس وقت تک بچے ہوئے مادہ کے متناسب سمجھا جاتا ہے۔ اگر وقت $t$ پر، بچا ہوا مادہ $m$ ہے، تو اس کا مطلب ہے کہ $m$ اور $t$ مساوات کو پورا کرتے ہیں۔

$$\frac{dm}{dt} = -km$$

جبکہ $k$ ایک مثبت مستقل ہے۔(منفی نشان مادہ کے گھٹنے کی نشاندہی کرتا ہے۔) اسی طرح کی مساوات بنائیں جو مندرجہ ذیل بیانات کی نمائندگی کرتی ہوں۔

ا. بیکٹیریا کی آبادی نڑھنے کی شرح، بیکٹیریا کی موجودہ آبادی میں موجود بیکٹیریا کی تعداد $n$ کے متناسب ہے

ب. جب گرم سوپ کا ایک پیالہ فریزر میں رکھا جائے تو،درجہ حرارت، $\theta^0 C$ کے گھٹنے کی شرح موجودہ درجہ حرارت کے متناسب ہے۔

ج. ایک کافی کپ کا درجہ حرارت $\theta^0 C$ گھٹنے کی شرح، کمرے کے درجہ حرارت اور اس کافی کے پیالے کے درجہ حرارت میں فرق کے ساتھ متناسب ہے ۔

سوال 19: ایک گاڑی نے ایک ٹرک کو تیز رفتاری سے پیچھے چھوڑا۔ اس کی ابتدائی رفتار $u$ ہے، اور وقت $t$ پر جب اس کار نے رفتار بڑھانا شروع کی تو $x$ فاصلہ طے کیا ہے، جبکہ $x = ut + kt^2$ تفرق کا استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ گاڑی کی رفتار$x = ut + kt^2$ہے، اور یہ ظاہر کریں کہ اس کی تیز رفتاری مستقل ہے۔

سوال 20: جب ڈرائیور نے گاڑی کے بریک لگائے تو گاڑی $20ms^{-1}$ کی رفتار سے چل رہی تھی۔ بریک لگانے کے $t$ سیکنڈز بعد گاڑی مزید $x$ میٹرز کا فاصلہ طے کر چکی تھی۔جبکہ $x = 20t - 20t^2$۔ تفرق کی مدد سے اس وقت کار کی رفتار اور اسراع معلوم کریں۔ یہ بھی معلوم کریں کہ یہ کلیے کب تک لاگو ہوں گے؟

سوال 21: ایک لڑکا ایک پہاڑ کی 60 میٹر اونچی چوٹی پر کھڑا ہے۔ وہ سیدھا اوپر کی جانب ایک پتھر پھینکتا ہے ، کہ اس پتھر کا فاصلہ $h$ میٹر ، اس چٹان کی چوٹی سے اس مساوات $h = 20t - 5t^2$ کی مدد سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

ا. پہاڑ کے اوپر پتھڑ کی زیادہ سے زیادہ اونچائی معلوم کریں۔

ب. پتھر لڑکے اور پہاڑ کی چوٹی سے تھوڑا سا چوک کر چوٹی سے نیچے کر جاتا ہے، معلوم کریں وہ وقت کہ جب پتھر ساحل سے ٹکرائے گا۔

ج. وہ رفتار معلوم کریں جس سے پتھر ساحل سمندر سے ٹکرایا۔

سوال 22: مساوات $x^2 + y^2$ کی کم سے کم قیمت معلوم کریں جب $x + y = 10$ ہو۔

سوال 23: ایک قائمہ زاویہ مثلث کی دو چھوٹی اطراف کی لمبائی کا مجموعہ 18 سینٹی میٹر ہے، معلوم کریں؛

ا. ڈھلوان کی کم سے کم لمبائی۔

ب. مثلث کا زیادہ سے زیادہ ممکنہ رقبہ

سوال 24:

ا. مساوات $y = 12x + 3x^2 - 2x^3$ کے خاکہ پر مستقل نقطے تلاش کریں اور خاکہ بنائیں۔

ب. یہ خاکہ کیسے دیکھائے گا کہ مساوات $12x + 3x^2 - 2x^3 = 0$ کے صرف تین حقیقی حل ہیں۔

ج. اپنے خاکے کو استعمال کرتے ہوئے واضع کریں کہ اس مساوات $12x + 3x^2 - 2x^3 = -5$ کے بھی صرف تین حقیقی حل ہیں۔

د. مساوات $12x + 3x^2 - 2x^3 = k$ کے حل $k$ کی کن قیمتوں کے لیے درج ذیل شرائط پوری کریں گے؟

ا. بلکل تین حقیقی حل؟

ب. صرف ایک حقیقی حل؟

سوال 25: مساوات $y = x^3 - 12x - 12$ کے خم کے ساکن نقاط معلوم کریں، نیز خم بھی بنائیں۔

$k$ کی وہ قیمتیں معلوم کریں کہ جن کے لیے مساوات $x^3 - 12x - 12 = k$ کے ایک سے زیادہ حقیقی حل ملیں۔

سوال 26: مساوات $y = x^3 - 12x - 12$ کے خم پے موجود ساکن نقاط معلوم کریں، خم بنائیں اور $k$ کی وہ تمام قیمتیں معلوم کریں جن کے لیے مساوات $x^3 + x^2 = k$ کے تین حقیقی حل موجود ہوں۔

سوال 27: مساوات $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 10$ کے خم کے ساکن نقاط معلوم کریں ، خم بنائیں، $k$ کی کن قیمتوں کے لیے مساوات $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 10 = k$ کے ؛

ا. چار حقیقی حل ہوں گے

ب. دو حقیقی حل ہوں گے

سوال 28: مساوات $y = x(x-1)^2$ کے خم کے ساکن نقاط کے محدد معلوم کریں ، خم بنائیں۔ $k$ کی حقیقی قیمتوں کا ایک سیٹ بنائیں جن کے لیے مساوات $x(x-1)^2 = k$ کا صرف ایک حقیقی حل ہو۔

سوال 29: کسی جسم کا درمیانی حصہ ایک چوتھائی دائرہ ہے، اور جیساکہ کہ شکل میں دکھایا گیا ہے اسکا رداس $r$ ہے اور یہ چوتھائی دائرہ ایک مستطیل جسکی لمبائی $x$ اور اونچائی $r$ ہے، سے جڑا ہوا ہے۔

ا. اس حصے کی باہری دیوار $P$ اور رقبہ $A$ ہیں۔ ان دونوں کو $r$ اور $x$ کی نسبت سے لکھیں، اور یہ بھی ثابت کریں کہ $A = \frac{1}{2}Pr - r^2$۔

ب. فرض کریں کہ باہر دیوار کی لمبائی مستقل ہے، $x$ معلوم کریں $r$ کی نسبت سے، ایسی صورتحال کے لیے کہ جب رقبہ $A$ زیادہ سے زیادہ ہو۔ اور ثابت کریں کہ $x$ کی اس قیمت کے لیے $A$ زیادہ سے زیادہ ہے نہ کہ کم سے کم۔

سوال 30: ایک خم کی مساوات $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ ہے۔ متفرق کی مدد سے اس خم کے ساکن نقاط کے محدد معلوم کریں اور یہ بھی معلوم کریں کہ ساکن نقاط زیادہ سے زیادہ قیمت کے حامل نقاط ہیں یا کم سے کم قیمت کے حامل نقاط ہیں۔ اسی خم کے نقاط حاصل کریں وگرنہ ذیل میں دیے گئے دونوں خموں کے ساکن نقاط کے محدد معلوم کریں۔

ا. $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 5$

ب. $y = \frac{2}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2}$

سوال 31: ایک سوپر مارکیٹ کا مینیجر اکثر اوقات 20 فیصد منافع رکھتا ہے ان تمام اشیاء پر جو کہ وہ بیچتا ہے۔ وہ یہ تسلیم کرتا ہے کہ $F$ اسکے پکے گاہک ہیں اور اگر وہ اپنا منافع $x$ فیصد تک لے آئے تو وہ $k(20-x)$ مزید گاہکوں کی توجہ اپنی طرف کر سکے گا۔ ہر ہفتے خریدار جو اس سے سامان خریدتے ہیں انکی تھوک کے حساب سے قیمت $A$ یورو ہے۔ ثابت کریں کہ منافع $x$ فیصد ہونے پر مینیجر کو ہفتہ وار منافع $\frac{1}{100}Ax((F+20k)-kx)$ یورو ہوگا۔ یہ بھی ثابت کریں کہ اگر چہ مینیجر اپنا منافع 20 فیصد سے کم کر لے وہ منافع کما سکتا ہے، یہ بات ذہن میں رکھتے ہوئے کہ اسکے پاس گاہکوں کا اضافہ ہوگا۔

سوال 32: ایک کمپنی جو کہ چڑھائی چڑھنے والے جوتے بناتی ہے اسکے دو طرح کے اخراجات ہیں۔ مستقل اخراجات، (پودوں، قیمتوں اور دفتر کے اخراجات) 2000 یورو فی ہفتہ۔ مصنوعات بنانے کی لاگت، (مواد اور مزدوروں پر آنے والی لاگت) 20 یورو فی جوڑا۔ مارکیٹ پر کی گئی تحقیق یہ بتاتی ہے کہ اگر 30 یورو فی جوتا بیچا جائے تو ہفتے میں 500 جوڑے جوتے کے بکیں گے۔ لیکن 55 یوروں میں ایک جوتا بھی نہیں بکے گا۔ اور ان کے درمیان بنائی گئی ترسیم جو کہ بکری اور قیمت کے مابین ہے وہ ایک سیدھی لکیر ہے۔ اگر کمپنی والے ایک جوڑے کی قیمت $x$ یورو لگا دیں، تو درج ذیل کے لیے مساوات معلوم کریں

ا. ہفتہ وار بکری

ب. ہفتہ وار رسیدیں

ج. ہفتہ وار لاگت

یہ بھی ثابت کریں کہ ہفتہ وار منافع اس مساوات $P = -20x^2 + 1500x - 24000$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے اور وہ قیمت بھی ملوم کریں کہ جس پے بوٹ بیچنے سے زیادہ سے زیادہ منافع ہوگا۔

سوال 33: ایک جفت تفاعل کا خم بنائیں جسکا ہر نقطے پر تفرق لینا ممکن ہے۔ فرض کریں اسی خم پے $P$ کوئی نقطہ ہے جبکہ $x = p$ بشرطیکہ $p > 0$، اسی خم پے نقطہ $P$ پر ایک خط مماس بنائیں۔ نقطہ $P\prime$ پر بھی خط مماس بنائیں جس کے لیے $x = -p$

ا. نقطہ $P$ اور $P\prime$ کی ڈھلوانوں میں کیا تعلق ہے۔ ان دونوں نقاط کے متفرق $f'(p)$ اور $f(p)$ میں باہمی تعلق بھی معلوم کریں۔ یہ تعلق آپکو ایک جفت تفاعل کے متفرق کے بارے یں کیا تفصیلات فراہم کر رہا ہے۔

ب. ثابت کریں کہ کسی بھی تاک تفاعل کا متفرق جفت ہوتا ہے۔

# باب 8

# ترتیبات

# باب 9

# الکراجی کا مسئلہ ثنائی

## 1.9 ثنائی مسئلہ

یہ سبق بنیادی طور پر $(x+y)^n$ کے توسیع سے متعلق ہے جہاں n ایک مثبت ناطق عدد ہے یا صفر ہے۔ جب آپ اس سبق کو مکمل کرلیں گے تب آپ درج ذیل باتوں کے اہل ہوجائیں گے۔

اگر n چھوٹا ہو تو پاسکل کے مثلث کو استعمال کرکے $(x+y)^n$ کا توسیع معلوم کرنا۔

اگر n بڑا ہو تو $(x+y)^n$ کے توسیع میں حاصل ہونے والے ضربیوں (Coefficients) کو محسوب کرنا۔

ثنائی مسئلہ کی مناسبت سے $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ علامتی اظہار کے استعمال کے قابل ہونا

1.9 کی توسیع:۔

ثنائی مسئلہ کو استعمال کرکے $(x+y)^n$ کو فوری طور پر اور آسانی سے حل کیا جاسکتا ہے۔ یہ قابل استعمال ہوتا ہے اگر $(x+y)^n$ کی اس طرح رجوع کیا جائے کہ n کی قیمت 2، 3 اور 4 ہو۔

یہ توسیع کچھ اس طرح ہونگے۔

$$
\begin{aligned}
(x+y)^2 &= x(x+y)+y(x+y) = x^2+2xy+y^2\\
(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)^2 = (x+y)(x^2+2xy+y2\\
&= x(x^2+2xy+y^2)+y(x^2+2xy+y^2)\\
&= x^3+2x^2y+xy^2
\end{aligned}
$$

$$x^2y+2xy^2+y^3$$

$$
\begin{aligned}
&= x^3+3x^2y+3y^2x+y^3\\
(x+y)^4 &= (x+y)(x+y)^3 = (x+y)(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)\\
&= x(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)+y(x^3+3x^2y+3xy^2+t^3)\\
&= x^4+3x^3y+3x^2y^2+xy63+x^3y+3x^2y^2+3xy^3+y^4\\
&= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4
\end{aligned}
$$

آپ ان تمام نتائج کا خلاصہ ، $(x+y)^1$ کو شامل کرتے ہوئے ، درج ذیل انداز میں بیان کرسکتے ہیں۔ تمام ضربیوں کو جلی انداز میں لکھا گیا ہے۔

$$
\begin{aligned}
&(x+y)^1 = 1x+1y\\
&(x+y)^2 = 1x^2+2xy+1y^2\\
&(x+y)^3 = 1x^3+3x^2y+3xy^2+1y^3 \; (x+y)^4 \quad = 1x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+1y^4
\end{aligned}
$$

ان تمام توسیع کا احتیاط کے ساتھ مطالعہ کیجئے۔ دیکھئے کہ کس طرح سے قوت نما $x^n$ کے ساتھ بائیں جانب سے شروع ہوتے ہیں ۔ پھر x کے قوت نما مسلسل 1 سے کم ہوتے جاتے ہیں اور y کے قوت نما 1 سے بڑھتے جاتے ہیں اور $y^n$ تک پہونچ جاتے ہیں۔ یہاں یہ بھی نوٹ کیجئے کہ تمام ضربیوں کے ذریعئے پاسکل کا مثلث نما ترتیب تیار ہوتا ہے جسے آپ نے پہلے دفع نمبر 4.8میں دیکھا ہے اور ایک بار پھر اُسے یہاں درج ذیل خاکہ1.9 میں دکھایا گیا ہے۔

پاسکل کے مثلثوں کو تیار کرنے کا ایک آسان طریقہ کچھ اس طرح ہے: 1 سے شروع کیجئے۔ پھر اُوپری قطار کے ارکان کی جوڑیوں کی جمع کیجئے اور اُس مجموعی عدد کو اُن دونوں کے درمیان نیچے کے مقام پر بیچوں بیچ (درج بالا خاکہ میں قطاروں کے مطابق) لکھئے؛ اُس قطار کو 1 کے ساتھ مکمل کیجئے۔ یہ بالکل اُسی طرح سے ہے جیسا کہ ہم نے پچھلی مثال کے وقت $(x+y)^3$ اور $(x+y)^4$ کے مجموعے کے پھیلاؤ میں دیکھا تھا۔

اب آپ اس قابل ہو گئے ہونگے کہ اندازہ لگا سکیں کہ پانچویں قطار میں حاصل ہونے والے ضربیہ درج ذیل ہونگے۔

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

اور یہ بھی کہ

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

1.1.9 مثال $(1+y)^6$ کے توسیع کو لکھئے۔

پاسکل کے مثلث کے دوسری قطار کو استعمال کیجئے، قوت نما کی ترتیب کو جاری رکھئے اور x کی جگہ 1 لیجئے:

$$\begin{aligned}(1+y)^6 &= (1)^6 + 6(1)^5y + 15(1)^4y^2 + 20(1)^3y^3 + 15(1)^2y^4 + 6(1)y^5 + y^6 \\ &= 1 + 6y + 15y^2 + 20y^3 + 15y^4 + 6y^5 + y^6\end{aligned}$$

2.1.9 مثال

فقرہ $(2x+3)^4$ میں قوسین کی حاصل ضرب کی شکل میں لکھئے۔ $(x+y)^4$ کی توسیع کو استعمال کیجئے اور اس میں کیx جگہ(2x) اورy کی جگہ 3 کو استعمال کیجئے۔

$$\begin{aligned}(2x+3)^4 &= (2x)^4 + 4\times(2x)^3\times 3 + 6\times(2x)^2\times 3^2 + 4\times(2x)\times 3^3 + 3^4 \\ &= 16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81\end{aligned}$$

3.1.9 مثال

توسیع کیجئے۔ $(x^2+2)^3$

$$(x^2+2)^3 = (x^2)^3 + 3\times(x^2)^2\times +3\times x^2\times 2^2 + 2^3 = x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8$$

4.1.9 مثال $(3x-4)^5$ کی توسیع میں حاصل ہونے والے $x^3$ کا ضربیہ معلوم کیجئے۔ قطار میں $x^3$ کی اصطلاح تیسرے مقام پر حاصل ہوگی جس کا ضربیہ 1، 5 ، 10 ، ۔۔۔ ہوگا۔ اس طرح سے وہ اصطلاح درج ذیل ہوگی۔

$$10\times(3x)^3\times(-4)^2 = 10\times 27\times 16x63 = 4320x^3$$

اسی لئے مطلوب ضربیہ 4320 ہے۔

5.1.9 مثال

$$(1+2x+3x^2)^3$$

کی توسیع کیجئے ۔

شنائی توسیع کو اسیعمال کرنے کے لئے ، آپ کو

$$1 + 2x + 3x^2$$

اس اصطلاح کو تین اجزا ءکی بجائے دو اجزاء میں لکھنا پڑے گا۔ ایسا کرنے کا ایک آسان طریقہ یہ ہے کہ آپ دی گئی اصطلاح کو

$$(1 + (2x + 3)^2)^3$$

اصطلاح کو اس طرح لکھیں۔ تب

$$(1 + (2x + 3^2))^3 = 1^3 + 3 \times 1^2 \times (2x + 3x^2) + 3 \times 1 \times (2x + 3x^2)^2 + (2x + 3x^2)^3$$

اب آپ شنائی توسیع کے مسئلہ کو استعمال کرکے دی گئی اصطلاح کی توسیع کرسکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}(1 + 2x + 3^2)^3 &= 1 + 3(2x + 3x^2) + 3((2x)^2 + 2 \times (2x) \times (3x^2) + (3x^2)^2) + ((2x)^3 + 3 \times (2x)^2 \times (3x^2\\
&= 1 + (6x + 9x^2) + (12x^2 + 36x^3 + 27x^4) + (8x^3 + 36x^4 + 54x^5 + 27x^6)\\
&= 1 + 6x + 21x^2 + 44x^3 + 63x^4 + 54x^5 + 27x^6\end{aligned}$$

اس قسم کے تفصیلی کام میں ، آپ اسے اپنے جوابات کو آسانی سے جانچنے کے لئے استعمال کرسکتے ہیں۔ آپ ایسا کرنے کے لئے $(1 + 2x + 3x^2)^3$ کی توسیع کیجئے اور بعد میں $((1 + 2x) + 3x^2)^3$ کی توسیع کرکے دیکھئے کہ آپ کا جواب ایک جیسا ملتا ہے یا نہیں۔ ایسا کرنے کا اور زیادہ آسان طریقہ یہ بھی ہے کہ آپ x کی قیمت 1 رکھ کر اسے حل کیجئے۔ پھر آپ کو بائیں جانب $216 = 6^3 = (1 + 2 + 3)^3$ اسی طرح سے دائیں جانب آپ کو 27+54+63+44+21+6+1=216 کچھ اس طرح سے حاصل ہوگا۔ یہاں ایک بات یہ بھی قابل غور ہے کہ اگر آپ کو دائیں جانب اور بائیں جانب ایک جیسے اعداد مل جاتے ہیں تو اس سے یہ ضمانت نہیں دی جاسکتی کہ دی گئی اصطلاح کی توسیع سو فیصد صحیح کی گئی ہے۔ لیکن اگر دونوں جانب حاصل ہونے والے اعداد مختلف ہوں تو یہ بات یقینی طور پر ثابت کرتی ہے کہ دی گئی اصطلاح کی توسیع کرنے میں کوئی غلطی ہوئی ہے۔

مشق 9A

1۔ درج ذیل میں سے ہر ایک کی توسیع کیجئے۔

| 1. | 2. | 3. |
|---|---|---|
| $(2x + y)^2$ | $(5x + 3y)^2$ | $(4 + 7p)^2$ |

4. $(1-8t)^2$
5. $(1-5x^2)^2$
6. $(2+x^3)^2$
7. $(x^2+y^3)^3$
8. $(3x^2+2y^3)^3$

2۔ درج ذیل میں سے ہر ایک کی توسیع کیجئے۔

1. $(x+2)^3$
2. $(2p+3q)^3$
3. $(1-4x)^3$
4. $(1-x^3)^3$

3۔ درج ذیل کی توسیع میں حاصل ہونے والے x کے ضریب معلوم کیجئے۔

1. $(3x+7)^2$
2. $(2x+5)^3$

4۔ درج ذیل کی توسیع میں حاصل ہونے والے $x^2$ کے ضریب معلوم کیجئے۔

1. $(4x+5)^3$
2. $(1-3x)^4$

5۔ درج ذیل تمام اصطلاحات کی توسیع کیجئے۔

1. $(1+2x)^5$
2. $(p+2q)^6$
3. $(2m-3n)^4$
4. $(1+\frac{1}{2}x)^4$

6۔ درج ذیل کی توسیع میں حاصل ہونے والے $x^3$ کے ضریب معلوم کیجئے۔

.1
$$(1+3x)^5$$

.2
$$(2-5x)^4$$

7۔ $(1+x+2x^2)^2$ کی توسیع کیجئے۔ اپنے جواب کی تصدیق کرنے کے لئے عددی متبادلی طریقہ استعمال کیجئے۔ 8۔ $(x+4)^3$ کی توسیع کیجئے۔ اسی طرح سے $(x+1)(x+4)^3$ کی بھی توسیع کیجئے۔

9۔
$$(3x+2)^2(2x+3)^3$$

کی توسیع کیجئے۔ 10۔
$$(1+ax)^4$$

کے توسیع میں ، $x^3$ کا ضربیہ 1372 حاصل ہوتا ہے۔ مستقل کیa قیمت معلوم کیجئے۔ 11۔ $(x+y)^{11}$ کی توسیع کیجئے۔ 12۔ $(2x+y)^{12}$ کی توسیع میں $x^6y^6$ کا ضربیہ معلوم کیجئے۔

## 2.9 شنائی مسئلہ

درج بالا دفع 1.9 میں جو طریقہ کار دیا گیا ہے وہ $(x+y)^n$ کی توسیع معلوم کرنے کے لئے نہایت موزوں ہے اگر n کی قیمت بہت چھوٹی ہو۔ لیکن اس طریقہ کو استعمال کرکے ہم $(x+y)^{15}$ کی توسیع میں $x^{11}y^4$ کا ضربیہ نہیں معلوم کرسکتے۔ آپ صرف پاسکل کے مثلث کی تمام قطاروں کے متعلق سوچئے جو کہ آپ لکھ سکتے ہیں! یہاں آپ کو $(x+y)^n$ کی توسیع میں $x^{n-r}y^r$ کے ضربیہ کی قیمت معلوم کرنے کے لئے n اور r میں ایک ضابطے کی ضرورت محسوس ہوگی ۔ خوش قسمتی سے ، پاسکل کے مثلث کی nth قطار، دراصل پاسکل کی nth ترتیب ہے جو کہ دفع 4.8 میں دی گئی ہے۔ وہاں دکھایا گیا تھا کہ

$$\binom{n}{0}\ \binom{n}{r+1}=\frac{n-r}{r+1}\binom{n}{r}\ r=1,2,3...$$

حقیقت میں، آپ پاسکل کے مثلث کو درج ذیل انداز میں لکھ سکتے ہیں۔

وغیرہ وغیرہ

اس طرح سے آپ $(x+y)^n$ کی توسیع کا ایک نہایت خوبصورت اور صاف ستھرا ضابطہ اس طرح بیان کرسکتے ہو،

شنائی مسئلہ کو اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے کہ اگر n ایک فطری عدد ہو تو

$$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+...+\binom{n}{n}y^n$$

ضربیوں کی تحسیب کے لئے ، آپ اس دفع کے ابتدائی حصے میں دیئے گئے ماخوذی ضابطے کو استعمال کرکے $\binom{n}{r}$ کا ضابطہ بنا سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر، $\binom{4}{2}$ کی قیمت معلوم کرنے کے لئے آپ n = 4 سے ابتدا کرسکتے ہیں ۔ پھر

$$\binom{4}{0}=1,\binom{4}{1}=\frac{4-0}{0+1}\binom{4}{0}=\frac{4}{1}\times 1=\frac{4}{1}\binom{4}{2}=\frac{4-1}{1+1}\binom{4}{1}=\frac{3}{2}\times\frac{4}{1}=\frac{4\times 3}{1\times 2}$$

عام انداز میں ،

$$\binom{n}{0}=1,\binom{n}{1}=\frac{n-0}{0+1}\times 1=\frac{n}{1},\binom{n}{2}=\frac{n-1}{1+1}\binom{n}{1}=\frac{n-1}{2}\times\frac{n}{1}=\frac{n(n-1)}{1\times 2},\ldots$$

اسی طرح سے تسلسل کو جاری رکھتے ہوئے آپ معلوم کرسکتے ہیں کہ $\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)\ldots(n-(r-1))}{1\times 2\times\ldots\times r}$

آپ $\binom{n}{r}$ کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں کہ

$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)\ldots(n-(r-1))}{1\times 2\times\ldots\times r}\times\frac{(n-r)\times(n-r-1)\times\ldots\times 2\times 1}{(n-r)\times(n-r-1)\times\ldots\times 2\times 1}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

نوٹ کیجئے کہ یہ ضابطہ r=0 اور r=n اور ان کے درمیان تمام قیمتوں کے لئے صحیح ثابت ہوتا ہے، کیونکہ (دفع 3.18 ) کے مطابق $0!=1$ ہوتا ہے۔

اسی طرح سے ، ثنائی ضربیوں کو درج ذیل انداز میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)\ldots(n-(r-1))}{1\times 2\times\ldots\times r},\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

جب آپ $\binom{n}{r}$ کی کوئی مخصوص قیمت معلوم کرنے کے لئے پہلا ضابطہ استعمال کریں گے ، مثلاً $\binom{10}{4}$ یا $\binom{12}{7}$ ، تب یہ یاد رکھنا کافی مددگار ثابت ہوگا کہ سب سے اُوپری خط میں بہت زیادہ عوامل موجود ہیں اور اُتنے ہی زیادہ عوامل سب سے نچلے خط میں موجود ہوتے ہیں۔ اسی لئے آپ نسب نما میں اعداد رکھتے ہوئے

شروع ہوسکتے ہیں اور پھر 10 اور 12 بالترتیب سے گن سکتے ہیں، لیکن یہاں اس بات کا یقین رکھنا ہوگا کہ نسب نما اور شمار کنندہ دونوں میں عوامل کی تعداد برابر ہونی چاہیئے۔

$$\binom{10}{4} = \frac{10\times 9\times 8\times 7}{1\times 2\times 3\times 4} = 210, \binom{12}{7} \frac{12\times 11\times 10\times 9\times 8\times 7\times 6}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7} = 792$$

کئی کیلکولیٹرس کے ذریعئے آپ $\binom{n}{r}$ کی قیمت معلوم کرسکتے ہیں جو کہ اسے $\left({}_nC_r\right)$ کی شکل میں ظاہر کرتے ہیں۔ $\binom{10}{4}$ کی قیمت معلوم کرنے کے لئے آپ کو عام طور پر $\left(10,_n C_r, 4\right)$ ترتیبی کنجی استعمال کرنی ہوگی، لیکن پہلے آپ نے کیلکولیٹر کے دست نامہ میں تفصیلات دیکھ لینا چاہیئے۔

1.2.9 مثال $(x+y)^{15}$ کی توسیع میں $x^{11}y^4$ کا ضربیہ معلوم کیجئے۔

مطلوب ضربیہ درج ذیل ہوگا۔

$$\binom{15}{4} = \frac{15\times 14\times 13\times 12}{1\times 2\times 3\times 4} = 1365$$

آپ $\binom{n}{r}$ کی جن قیمتوں کو شنائی مسئلہ کے لئے استعمال کرنا چاہتے ہیں، ان کو یقینی بنانے کے لئے، مزید ایک اور مرحلہ طے کرنا ہوگا۔ خاکہ 1.9 میں، آپ دیکھیں کہ پاسکل کے مثلث کے پہلے اور ہر قطار کے آخری رکن کو چھوڑکر، باقی تمام ارکان کو اُس کے فوراً اُوپر موجود دونوں ارکان کا مجموعہ کرکے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اسی لئے یہ بات بالکل صحیح ثابت ہوسکتی ہے کہ

$$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}$$

مثال کے طور پر،

$$\begin{aligned}
\binom{6}{3} + \binom{6}{4} &= \frac{6\times 5\times 4}{1\times 2\times 3} + \frac{6\times 5\times 4\times 3}{1\times 2\times 3\times 4} = \frac{6\times 5\times 4\times 4 + 6\times 5\times 4\times 3}{1\times 2\times 3\times 4} \\
&= \frac{6\times 5\times 4}{1\times 2\times 3\times 4} \times (4+3) \\
&= \frac{7\times 6\times 5\times 4}{1\times 2\times 3\times 4} \\
&= \binom{7}{4}
\end{aligned}$$

$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}$ کو ثابت کرنا آسان نہیں ہے۔ آپ اس نتیجہ کو براہ راست قبول کر کے اور اُسکے ثبوت کو ترک کرنا چاہیں گے ، اور سیدھے مثال 2.2.9 پر پہونچنا چاہیں گے۔

اس نتیجے کو ثابت کرنے کے لئے ، دائیں جانب سے شروع کیجئے۔

$$\begin{aligned}
\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} &= \frac{n(n-l)...(n-(r-l))}{1\times 2\times ...\times r} + \frac{n(n-l)...(n-r)}{1\times 2\times ...\times r\times (r+1)} \\
&= \frac{n(n-l)...(n-(r-l))\times (r+1) + n(n-l)...(n-r)}{1\times 2\times ...\times r\times (r+1)} \\
&= \frac{n(n-l)...(n-(r-l))}{1\times 2\times ...\times r\times (r+1)} \times ((r+1)+(n-r)) \\
&= \frac{n(n-l)...(n-(r-l))}{1\times 2\times ...\times r\times (r+1)} \times (n+1) \\
&= \frac{(n+1)n(n-1)...((n+1)-r)}{1\times 2\times ...\times r\times (r+1)} \\
&= \binom{n+1}{r+1}
\end{aligned}$$

اس طرح سے ، استدلال کی وہ زنجیر مکمل ہوجاتی ہےجو کہ پاسکل کے مثلث کو ثنائی ضربیوں کے ساتھ جوڑتی ہے۔

درج ذیل مثال ایسی ہے جس میں x کی قیمت کو چھوٹا یا کم فرض کیا گیا ہے۔ جب مثال کے طور پر $x = 0.1$ ہو تو x کی ہر اگلی قوت نما 10 گنا سے کم ہوتی جائے گی اور حقیقت میں اتنی چھوٹی ہوجائے گی کہ تمام بڑی قوت نماؤں کو نظر انداز کر دینا بہتر ثابت ہوگا۔ مثال 2.2.9 میں ، آپ کو ثنائی توسیع کرتے وقت x کی قوت نماؤں کو چڑھتی ترتیب میں رکھنے کے لئے کہا گیا تھا۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ آپ x کی سب سے چھوٹی قوت نما سے شروع کریں اور پھر اگلی سب سے چھوٹی قوت نما پر جائیں اور اس طرح سے تسلسل کو مکمل کریں۔ مثال 2.2.9 x کے قوت نماؤں کی چڑھتی ترتیب میں، $(2-3x^{10})$ کی توسیع کے لئے ابتدائی چار رکن معلوم کیجئے۔ $x = \frac{1}{100}$ رکھ کر ، $1.97^{10}$ کی نزدیکی مکمل عدد کی شکل میں تقریبی قیمت معلوم کیجئے۔

$$(2-3x)^{10} = 2^{10} + \binom{10}{1}\times 2^9 \times (-3x) + \binom{10}{2}\times 2^8\times (-3x)^2 + \binom{10}{3}\times 2^7\times (-3x)^3 + ...$$

$$= 1024 - 10 \times 512 \times 3x + \frac{10 \times 9}{1 \times 2} \times 256 \times 9x^2 - \frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} \times 128 \times 27x^3 + ...$$
$$1024 - 15360x + 103\,680x^2 - 414\,720x^3 + ...$$

اسی لئے پہلے چار ارکان $1024 - 15360x + 103680x^2 - 414720x^3$ ہونگے۔ $x = \frac{1}{100}$ رکھنے پر،

$$1.97^{10} = 1024 - 15360x \times \frac{1}{100} + 103680 \times (\frac{1}{100})^2 - 414720(\frac{1}{100})^3$$
$$= 880.35328$$

اسی لئے

$880 \approx 1.97^{10}$ حاصل ہوا۔ اگلا رکن درج ذیل ہوگا، $\binom{10}{4} \times 2^6 \times 3(x)^4 = 1088640x^4 = 0.0108864$
اس کے بعد والے ارکان مزید چھوٹے ہونگے اور حقیقتاً اُن سب کو نظر انداز کرنا بہتر ہوگا۔ مشق 9B 1۔ درج ذیل میں سے ہر ایک کی قیمت معلوم کیجئے۔

.1 $\binom{7}{3}$

.2 $\binom{8}{6}$

.3 $\binom{9}{5}$

.4 $\binom{13}{4}$

.5 $\binom{6}{4}$

.6 $\binom{10}{2}$

.7 $\binom{11}{10}$

.8 $\binom{50}{2}$

2۔ درج ذیل میں سے ہر ایک کی توسیع کے دوران $x^3$ کا ضربیہ معلوم کیجئے۔

$(1+x)^5 \quad (b) \quad (1-x)^8 \quad (c) \quad (1+x)^{11} \quad (d)(1-x)^{16}$

3۔ درج ذیل میں سے ہر ایک کی توسیع کے دوران $x^5$ کا ضربیہ معلوم کیجئے۔

$$(2+x)^7 \quad (b)(3-x)^8 \quad (c)(1+2x)^9 \quad (d)(1-\frac{1}{2x})^{12}$$

4۔ درج ذیل میں سے ہر ایک کی توسیع کے دوران $x^6y^8$ کا ضربیہ معلوم کیجئے۔

.1 $(x+y)^{14} \quad (b)(2x+y)^{14}$

.2 $c)(3x-2y)^{14}$

.3 $d)(4x+\frac{1}{2}y)^{14}$

۔ درج ذیل کی x کی قوت نماؤں کی چڑھتی ترتیب میں توسیع کے ابتدائی چار ارکان معلوم کیجئے۔

.1 $(1+x)^{13}\ (b)\ (1-x)^{15}$

.2 $(1+3x)^{10}\ (d)\ (2-5x)^7$

6۔ درج ذیل کی x کی قوت نماؤں کی چڑھتی ترتیب میں توسیع کے ابتدائی تین ارکان معلوم کیجئے۔

.1 $(1+x)^{22}$

.2 $(1-x)^{30}$

.3 $(1-4x)^{18}$

.4 $(1+6x)^{19}$

7۔ $(1+2x)^8$ کے لئے ، x کی قوت نماؤں کی چڑھتی ترتیب میں توسیع کے ابتدائی تین ارکان معلوم کیجئے۔ $x=0.01$ منتخب کرکے $1.208^8$ کی تقربی قیمت معلوم کیجئے۔ 8۔ $(2+5x)^{12}$ کے لئے ، x کی قوت نماؤں کی چڑھتی ترتیب میں توسیع کے ابتدائی تین ارکان معلوم کیجئے۔ x کے لئے کوئی مناسب قیمت منتخب کرکے دو عشری مقامات تک $2.005^{12}$ کی تقربی قیمت معلوم کیجئے۔

9۔ $(1+2x)^{16}$ کی $x^3$ والے رکن تک اور اُس کو شامل کرتے ہوئے توسیع کیجئے۔ اِسی طرح سے $(1+3x)(1+2x)^{16}$ کی توسیع میں

$x^3$ کا ضربیہ معلوم کیجئے۔ 10۔ $(1-3x)^{10}$ کی $x^2$ والے رکن تک اور اُس کو شامل کرتے ہوئے توسیع کیجئے۔ اِسی طرح سے $(1+3x)^2(1-3x)^{10}$ کی توسیع میں $x^2$ کا ضربیہ معلوم کیجئے۔

11۔ $(1+ax)(1+5x)^{40}$ کے توسیع میں x کے ضربیہ کی قیمت 207 دی گئی ہے۔ a کی قیمت معلوم کیجئے۔

12۔ $(1 + x)^8 + (1 - x)^8$ کو حل کیجئے۔ x کی کوئی مناسب قیمت منتخب کرکے $0.99^8 + 1.01^8$ کی بالکل صحیح قیمت معلوم کیجئے۔ 13۔ $(1 + ax)^n$ کی توسیع کی ابتداء $1 + 36x + 576x^2$ سے ہوتی ہے۔ a اور n کی قیمتیں معلوم کیجئے۔ متفرق مشق 9

1۔ $(3 + 4x)^3$ کی توسیع کیجئے۔

2۔ x کی قوت نماؤں کی چڑھتی ترتیب کے لئے ، درج ذیل کی پہلے تین ارکان تک توسیع کیجئے۔

1. $(1 + 4x)^{10}$
2. $(1 - 2x)^{16}$

3۔ درج ذیل کی توسیع میں $a^3b^5$ کا ضربیہ معلوم کیجئے۔

.1

$$(3a - 2b)^8$$

.2

$$(5a + \frac{1}{2}b)^8$$

4۔ x کی قوت نماؤں کی چڑھتی ترتیب کے لئے ، $(3 + 5x)^7$ کی توسیع کیجئے جس میں $x^2$ کے رکن کو شامل رکھا گیا ہو۔ $x = 0.01$ رکھ کر $3.05^7$ کی تقربی قیمت نزدیکی کامل عدد کی شکل میں معلوم کیجئے۔

5۔ x کی چڑھتی ترتیب میں $(2 + \frac{1}{4}x)^8$ کی توسیع ابتدائی چار ارکان تک حاصل کیجئے۔ حاصل ہونے والی اس توسیع میں x کی کوئی مناسب قیمت رکھ کر $2.0025^8$ کی قیمت تین عشری مقامات تک صحت کے ساتھ معلوم کیجئے۔

(OCR)

6۔ x کی چڑھتی ترتیب میں $(2 - 3x)^8$ کی توسیع ابتدائی تین ارکان تک حاصل کیجئے۔ حاصل ہونے والی اس توسیع کو استعمال کرکے $1.997^8$ کی قیمت قریب ترین مکمل عدد کی شکل میں حاصل کیجئے۔
(OCR)

7۔ $(x^2 + \frac{1}{x})^3$ کی توسیع کیجئے اور ہر ایک رکن کو حل کیجئے۔

8. $(2x - \frac{3}{x^2})^4$ کی توسیع کیجئے۔

9۔ $(x + \frac{1}{2x})^6 + (x - \frac{1}{2x})^6$ کی توسیع کیجیے اور حل کیجیے۔

10۔ $(x^4 + \frac{4}{x})^3$ کی توسیع کیجیے اور $x^2$ کا ضربیہ معلوم کیجیے۔ 11۔ $(2x + \frac{5}{x})^6$ کی توسیع کیجیے اور x سے آزاد رکن معلوم کیجیے۔ 12۔ $(1 + y)^{12}$ کی توسیع کیجیے اور $y^4$ کا ضربیہ معلوم کیجیے۔ اسی طرح سے درج ذیل حل کیجیے۔ (a) $(1 + 3y)^{12}$ کی توسیع کیجیے اور $y^4$ کا ضربیہ معلوم کیجیے۔ (b) $(1 - 2y^2)^{12}$ کی توسیع کیجیے اور $y^8$ کا ضربیہ معلوم کیجیے۔ (c) $(x + \frac{1}{2}y)^{12}$ کی توسیع کیجیے اور $x^8y^4$ کا ضربیہ معلوم کیجیے۔

13۔ $(2p - q)(p + q)^{10}$ کی توسیع کیجیے اور $p^4q^7$ کا ضربیہ معلوم کیجیے 14۔ $x$ $(1 + 2s)^{20}$ کی توسیع ابتدائی تین ارکان تک حاصل کیجیے۔ x کی کوئی مناسب قیمت منتخب کرکے درج ذیل کی قریب ترین قیمتیں معلوم کیجیے۔

(a) $1.002^{20}$ اور (b) $0.996^{20}$

15۔ $1.995^{10}$ $x$ $(2 - \frac{1}{2x^2})^{10}$ کی توسیع x کی چڑھتی قوت نماؤں کی شکل میں، ابتدائی تین ارکان تک حاصل کیجیے۔ اسی طرح سے $1.995^{10}$ کی قیمت تین بامعنی اعداد تک صحت کے ساتھ معلوم کیجیے۔ 16۔ درج ذیل میں سے کوئی دو توسیع صحیح ہیں اور باقی دو روسیع غلط ہیں۔ جو توسیع غلط ہیں اُنہیں معلوم کیجیے۔

.1 $(2 - \frac{1}{2x^2})^{10}\ x\ 1.995^{10}$

.2 $(3 + 4x)^2 = 243 + 1620x + 4320x^2 + 5670x^3 + 3840^4 + 1024x^5$

.3 $(1 - 2x + 3x^2)^3 = 1 + 6x - 3x^2 + 28x^3 - 9x^4 + 54x^5 - 27x^6$

.4 $(1 - x)(1 + 4x)^4 = 1 + 15x + 80x^2 + 160x^5 - 256x^5$

.5 $(2x + y)^2(3x + y)^3 = 108x^5 + 216x^4y + 171x^3y^2 + 67x^2y^3 + 13xy^4 + y^6$

17۔ $(\frac{1}{2x} + x^3)^8$ کی توسیع میں x سے آزاد رکن معلوم کیجیے۔

18۔ $(2x + \frac{1}{x}^2)^9$ کی توسیع میں x سے آزاد رکن معلوم کیجیے۔

19۔ $(x^2 - \frac{1}{2x})^{16}$ کی توسیع میں x سے آزاد رکن معلوم کیجیے۔

20۔ $\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{24}$ کی توسیع میں $x^{-12}$ کا ضربیہ معلوم کیجئے۔

21۔ $\left(1 + 3x + 4x^2\right)^4$ کی توسیع کی x قوت نماؤں کی چڑھتی ترتیب میں $x^2$ کے رکن تک حاصل کیجئے۔ x کی مناسب قیمت منتخب کر کے $1.0304^4$ کی تقریباً قیمت معلوم کیجئے۔

22۔ $(3x + 5)^3 - (3x - 5)^3$ کی توسیع کیجئے اور حل کیجئے۔ اسی طرح سے $(3x + 5)^3 - (3x - 5)^3 = 730$ اس مساوات کو حل کیجئے۔

23۔ $(7 - 6x)^3 + (7 + 6x)^3 = 1736$ اس مساوات کو حل کیجئے۔

24۔ درج ذیل میں، t کی قوت نماؤں میں، پہلے تین ارکان معلوم کیجئے ۔ (a) $(1 + \alpha t)^5$ (b) $(1 - \beta t)^8$ اسی طرح سے، $(1 + \alpha t)^5 (1 - \beta t)^8$ کی توسیع میں، الفا اور بیٹا کی شکل میں $t^2$ کا ضربیہ معلوم کیجئے۔

25۔ (a) دکھایئے کہ

1. $\binom{6}{4} = \binom{6}{2}$

2. $\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$

3. $\binom{15}{12} = \binom{15}{3}$

4. $\binom{13}{6} = \binom{13}{7}$

(b) درج ذیل میں ، x کی ممکنہ قیمتیں لکھئے۔

1. $\binom{11}{4} = \binom{11}{x}$

2. $\binom{16}{3} = \binom{16}{x}$

.3 $\binom{20}{7} = \binom{20}{x}$

.4 $\binom{45}{17} = \binom{45}{x}$

(c) تعریف $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ کو استعمال کرکے ، ثابت کیجئے کہ

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

26۔ دفع 4.8 میں امالی خاصیت $\binom{n}{r+1} = \frac{n-r}{r+1}\binom{n}{r}$ دی گئی ہے۔ اُسے استعمال کرکے پاسکل کے مثلث کی خاصیت کو ثابت کیجئے کہ

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$$

27۔ (a) دکھائیے کہ

.1 $4 \times \binom{6}{2} = 3 \times \binom{6}{3} = 6 \times \binom{5}{2}$

.2 $3 \times \binom{7}{4} = 5 \times \binom{7}{5} = 7 \times \binom{6}{4}$

(b) c اور a , b اعداد لکھئے جو کہ

.1 $a \times \binom{8}{5} = b \times \binom{8}{6} = c \times \binom{7}{5}$

.2 $a \times \binom{9}{3} = b \times \binom{9}{4} = c \times \binom{8}{3}$

(c). ثابت کیجئے کہ

$$(n-r)\times\binom{n}{r}=(r+1)\times\binom{n}{r+1}=n\times\binom{n-1}{r}$$

28.ثابت کیجئے کہ $\binom{n}{r-1}+2\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}=\binom{n+2}{r+1}$

29۔ $1.0003^{18}$ کی قیمت 15 عشری مقامات تک صحت کے ساتھ معلوم کیجئے۔

30۔ (a) $(2\sqrt{2}+\sqrt{3})^4$ کو $a+b\sqrt{6}$ کی شکل میں توسیع کیجئے۔ یہاں a اور b صحیح اعداد ہیں۔

(b) $(2\sqrt{2}+\sqrt{3})^5$ کی بالکل صحیح قیمت معلوم کیجئے۔

31. (a) $(\sqrt{7}-\sqrt{5})^4+(\sqrt{7}+\sqrt{5})^4$ کو حل کیجئے اور اُسکی توسیع کیجئے $0<\sqrt{7}-\sqrt{5}<1$ اس حقیقت کو استعمال کرکے ، ایسے متصل صحیح اعداد معلوم کیجئے جن کے درمیان $(\sqrt{7}+\sqrt{5})^4$ پایا جاتا ہو۔ (b) کیلکولیٹر کو استعمال کئے بغیر، ایسے متصل صحیح اعداد معلوم کیجئے جن کے درمیان $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6$ کی قیمت آتی ہو

32. درج ذیل کی توسیع میں، n کی شکل میں x کے ضربیہ معلوم کیجئے $(1+4x)+(1+4x)^2+(1+4x)^3+\ldots+(1+4x)^n$ 33. دیا گیا ہے کہ

$a+b(1+x)^3+c(1+2x)^3+d(1+3x)^3=x^3$, x کی تمام قیمتوں کے لئے ، مستقل a b c اور d کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

# باب 10

# تکونیات

اس سبق میں ہم سائن ، کوسائن اور ٹینجنٹ کے بارے میں پڑھیں گے، جب آپ یہ سبق مکمل کر لیں گے تو آپ اس قابل ہوں گے کہ؛

1. تمام زاویوں کے لیے سائن ، کوسائن اور ٹینجنٹ کے ترسیموں کی شکل پہچانیں
2. خاص زاویوں کے لیے سائن ، کوسائن اور ٹینجنٹ کی قیمتیں معلوم ہوں یا معلوم کرنے کا طریقہ آتا ہو۔
3. سادہ مثلثی مساوات حل کر سکیں
4. $\sin\theta^0$،$\cos\theta^0$اور$\tan\theta^0$ کی مماثل کا استعمال آتا ہو۔

## 1.10 $\cos\theta^0$کی ترسیم

زاویے کی علامت کے طور پر اکثر یونانی زبان کے خط استعمال کیے جاتے ہیں، ہم اس سبق میں $\theta$ (تھیٹا) اور $\phi$ (فائ) استعمال کریں گے۔

غالباً آپ نے $\cos\theta^0$ پہلے قائم مثلث میں زاویوں کا حساب لگاتے ہوئے استعمال کیا ہوگا، کہ جب زاویہ صفر سے بڑا اور 90 سے چھوٹا تھا۔ اور پھر آپنے اسے کسی اور مثلث میں استعمال کیا ہوگا جب زاویہ $180 > \theta > 0$ تھا۔ تاہم اگر آپکے پاس ایک ترسیم بنانے والا حساب کتاب کا آلہ ہے تو آپ دیکھیں

گے کہ یہ $\cos\theta^0$ کی ایسی ہی ترسیم بناتا ہے جیسی کہ شکل 3.10 میں بنی ہوئی ہے۔ یہ حصہ $\cos\theta^0$ کی تعریف بیان کرتا ہے ہر طرح کے زاویوں کے لیے بیشک وہ مثبت ہوں یو منفی۔

شکل 1.10 میں ایک دائرہ دکھایا گیا ہے جسکا رداس 1 اکائی ہے اور جسکا مبدا O پر ہے۔ x محدد پر ایک زاویہ بناتے ہوئے ایک خط OP کھینچیں کہ یہ دائرے کی حد کو چھو لے اور اس نقطے کو P کہہ دیں۔ سے P ایک عمودی خط کھینچیں کہ وہ OA کو پا لے اور جس نقطے پر وہ خط OA کو چھوئے اس نقطے کو N کہہ دیں ۔ فرض کریں کہ ON=x ہے اور NP=y ہے جبکہ نقطہ P کے محدد (x,y) ہیں۔

مثلث ONP کو دیکھیں، تعریف استعمال کرتے ہوئے $\cos\theta = \frac{ON}{OP}$ اور ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ $\cos\theta = \frac{x}{1} = x$۔

نتیجہ $x = \cos\theta^0$ دراصل $\cos\theta^0$ کی تعریف کے طور پر استعمال ہو رہا ہے زاویے کی تمام قیمتوں کے لیے۔

آپ اس تعریف کی اثرات دیکھیں گے جب زاویہ 90 کا مضرب ہوگا۔

مثال 1.10: مشلثی تناسب $\cos\theta^0$ کی قیمت معلوم کریں جب ؛ .

1. $\theta = 180$
2. $\theta = 270$

1. جب $\theta = 180$، P ایک نقطہ ہے جسکے محدد(1,0-) ہیں ۔ جیسا کہ x محدد نقطہ P کا 1- ہے لہذہ $\cos^0 180 = -1$ ہے۔

2. جب زاویہ $\theta = 270$ ،P ایک نقطہ ہے $(0,-1)$ اس لیے $\cos 270^0 = 0$

□

جیسے جیسے زاویہ بڑھتا ہے نقطہ P دائرے کے گرد گھومتا ہے, اور جب $\theta = 360$ ہوتا ہے نقطہ P پورا دائرہ مکمل کر کے دوبارہ A پر پہنچ جاتا ہے۔ اور جب زاویہ 360 سے بڑھتا ہے تو نقطہ P دوبارہ چکر شروع کر دیتا ہے ۔ یہاں سے ہم بآسانی یہ کہہ سکتے ہیں کہ $\cos(\theta-360)^0 = \cos\theta^0$ اور جب بھی زاویہ 360 ہوتا ہے $\cos\theta^0$اپنی قیمت دہراتا ہے ۔

اگر زاویہ 0 سے چھوٹا ہو تو $\theta$ مخالف سمت میں گھوے گا لیکن شروع A سے ہی ہوگا۔ شکل 10۔2 میں زاویہ 150- دکھایا گیا ہے۔ یعنی اگر $\theta = -150$ تو P تیسرے خانے میں ہوگا اور چونکہ P کا x محدد منفی ہے لہذہ $\cos(-150)^0$ منفی ہوگا۔

حساب کتاب کا ایک آلہ آپکو زاویے کی ہر قیمت کے لیے $\cos\theta^0$ کی قیمت دے گا۔ اگر آپکے پاس ترسیم بنانے والا حساب کتاب کا آلہ ہے تو ان قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے $\cos\theta^0$ کی ترسیم بنائیں وہ ایسی ہی دکھے گی جیسی کہ شکل 3.10 میں نظر آ رہی ہے۔

اگر آپ $\cos\theta^0$ کی ترسیم بنانا چاہتے ہیں تو آپ کو حساب کتاب کے آلے میں مساوات $y = \cos x$ ڈالنی ہو گی اور یہ بھی خیال رکھیں کہ حساب کتاب کا آلہ ڈگری موڈ میں ہے۔

کوسائن تفاعل کی ترسیم خود کو دہراتی رہتی ہے۔ تفاعل کی اس خصوصیت کو دوری خصوصیت کہتے ہیں۔ اور ان تفاعل کا دور وہ کم سے کم وقفہ ہے کہ جس کے لیے تفاعل خود کو دہراتا ہے۔اسی لیے کوسائن کے تفاعل کا دور 360 درجے ہے۔ اور خصوصیت $\cos(\theta \pm 360)^0 = \cos\theta^0$ کو دوری خصوصیت کہیں گے۔ کئ قدرتی رجحانات بھی دوری خصوصیت دکھاتے ہیں۔ اور اکثر انکی خصوصیات سمجھنے کے لیے کوسائن تفاعل کا ہی استعمال کیا جاتا ہے۔

مثال 2.10: ایک بندرگاہ میں پانی کی گہرائ میٹرز میں ناپی جاتی ہے اور اس گہرائ کو ماپنے کا کلیہ $d = 6 + 3\cos 30t^0$ ہے. جبکہ t وقت کے لیے ہے جو گھنٹوں میں ناپا جائے گا دوپہر کے بعد سے۔ معلوم کریں؛

1. رات کے بجے پانی کی گہرائ معلوم کریں

2. پانی کی کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ گہرائ اور یہ کس وقت ہو گی۔

1. رات کے 9.45 جب $t = 9.75$ تاکہ $d = 6 + 3\cos(30 + 9.75) = 6 + 3\cos 292.5 =$ $7.148\ldots$ اسی لیے پانی کی گہرائ 15.7 میٹرز ہے۔ اور آپکا جواب 3 معنی خیز ہندسوں تک ہونا چاہیے۔

2. مستقل d کی قیمت زیادہ سے زیادہ تب ہو گی جب کوسائن تفاعل کی قیمت 1 ہے۔ اور اسی لیے $6 + 3 \times 1 = 9$ ۔ اسی طرح کم سے کم قیمت بھی $3 = (-1) \times 3 + 6$، زیادہ سے زیادہ گہرائ 9 میٹر اور کم سے کم گہرائ 3 میٹر ہے ۔پہلی دفعہ جب دوپہر میں یہ واقع وقوع پزیر ہوگا $30t = 360$ اور $30t = 180$ ، جسکا مطلب رات کا درمیان اور شام کے 6 بجے ہے۔

□

## 2.10 $\sin\theta^0$ اور $\tan\theta^0$ کی ترسیم

جیسے ہم نے کوسائن کے تفاعل کے لیے ایک شکل 1.10 بنائی اسی کو استعمال کرتے ہوئے سائن کی تعریف کچھ یوں ہو گی۔

$$\sin\theta = \frac{NP}{OP} = \frac{y}{1} = y$$

کوسائن کی ترسیم کی طرح سائن کی ترسیم (شکل 4.10) دوری ہے، جسکا دورانیہ 360 درجہ ہے۔اور اسکی ترسیم بھی -1 اور 1 کے درمیان ہی رہتی ہے۔

اگر آپ شکل 1.10 کی طرف لوٹیں تو آپ دیکھیں گے کہ $\tan\theta = \frac{NP}{OP} = \frac{y}{x}$، اور اسے $\tan\theta^0$ کی تعریف کی طرح لیا جاتا ہے۔ $\tan\theta^0$ کے میدان عمل میں وہ زاویے شامل نہیں ہیں جن کے لیے x صفر ہو۔ جیسا کہ $\ldots\ \theta = \pm 90, \pm 270$۔ شکل 5.10 میں $\tan\theta^0$ کی ترسیم دکھائی گئی ہے۔

سائن اور کوسائن کی ترسیم کی طرح ٹینجنٹ کی ترسیم بھی دوری ہے لیکن اسکا دورانیہ 180 ہے ،اس لیے $\tan(\theta \pm 180) = \tan\theta$

تعریف : ہم جانتے ہیں کہ $\cos\theta^o = x, \sin\theta^o = y$ ہے اور ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ $\tan\theta^o = \frac{y}{x}$ ہے ان تمام حقائق کو جمع کریں تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\tan\theta^o = \frac{\sin\theta^o}{\cos\theta^o}$ آپ ، $\tan\theta^o$ کی متبادل تعریف کے طور پر استعمال کر سکتے ہیں۔

□

## 3.10 چند مثلثی تفاعل کی درست قیمتیں

تعریف : صرف چند ہی ایسے زاویے ہیں جن کی درست قیمت عدد صحیح ہے اور جن کے

$$\cos 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \sin 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \tan 45^o = 1$$

آپ درست معلوم کرسکتے ہیں۔ ان زاویوں میں ° 30 , ° 45 اور ° 60 زیادہ اہم ہیں۔ ° 45 زاویے کی مثلثی تناسب معلوم کرنے کے لیے ایک قائمہ زاویہ کے سلتھ مساوی الساقین تکون بتائیں ۔ جس کی اطراف کی لمبائی 1 اکائی ہو۔ جیسا کہ شکل 6 -10 میں ہے وتر کی لمبائی-- ہو گی۔ تب

$$\cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \tan 45^o = 1$$

اگر آپ نسب نما کو استولالی بنائیں تو

$$\cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan 45^o = 1$$

- ° 30 اور ° 60 درجے کی مثلثی تناسب معلوم کرنے کے لیے ایک یکطرفہ مثلث (تکون) بنائیں جس کی اطراف 2 اکائیوں جتنی لمبی ہیں۔ جیسے کہ شکل 7-10 میں دکھایا گیا ہے۔ راس سے ایک خط عمودی خط کھینچیں جو قائدہ کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کر دے۔ اس عمودی خط کی لمبائی $\sqrt{3}$ اکائیاں ہیں۔ اس عمودی خط نے راس کو بھی دو برابر حصوں میں تقسیم کر دیا ہے۔

$$\cos 60^o = \frac{1}{2},\ \sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \tan 60^o = \sqrt{3};$$

$$\cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin 30^o = \frac{1}{2},\ \tan 30^o = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

آپ کو یہ نتائج ازبر ہونے چاہئیں۔

□

مثال 3.10: مندرجہ ذیل کی درست قیمتیں معلوم کریں۔

ا $\cos 135^o$ ب $\sin 120^o$ ج $\tan 495^o$

-- شکل 3-10 کے مطابق --------- -- شکل 4-10 کے مطابق---------- -- شکل 5-10 کے مطابق-

ا $\cos 135^o = -\cos 45^o = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

ب $\sin 120^o = \sin 60^o = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

ج $\cos 495^o = \tan(495 - 360)^o = \tan 135^o = -\tan 45^o = -1$

□

## مشق 10-ا

1)ذیل میں دیے گئے $\theta$ زاویوں کے لیے 4 اعشاری نقطوں تک درست قیمت معلوم کریں(تمام سوالات کی مساوات یہاں لکھیں)

| iii $\tan\theta^o$ | ii $\sin\theta^o$ | i $\cos\theta^o$ |
|---|---|---|
| ز 9.124 | د 325 | ا 25 |
| ح 554 | ہ −250 | ب 125 |
| ط 225 | و 4.67 | ج 225 |

2)ذیل میں دیے گئے تمام تفاعل کی کم اور زیادہ ترین قیمت معلوم کریں۔ نیز--- کی شرح کی وہ کم از کم مثبت قدر بھی معلوم کریں جس پہ آپ قیمتیں معلوم کریں گے۔

ا $2+\sin x^o$

ب $7-4\cos x^o$

ج $5+8\cos 2x^o$

د $\frac{8}{\sin x^o}$

ہ $9+\sin(4x-20)^o$

و $\frac{30}{11-5\cos\left(\frac{1}{2}x-45\right)^o}$

3) (اس سوال کے لیے حساب و کتاب کے کسی آلے کا استعمال نہ کریں) سوال کے ہر حصے میں اعداد کے مثلثی تفاعل دیے گئے ہیں' باقی تمام اعداد معلوم کریں' $x, 0 \le x \le 360$ اس شرط کے ساتھ کہ معلوم کیے گئے اعداد کا مثلثی تفاعل دیے گئے تفاعل کے مساوی ہو۔ مثال کے طور پر اگر $\sin 80^o$ دیا گیا ہے تو ہمارا جواب $x = 100$ ہونا چاہیئے کیونکہ $\sin 100^o = \sin 80^o$۔

| | | | |
|---|---|---|---|
| ی $\sin(-260)^o$ | ز $\sin 400^o$ | د $\sin 130^o$ | ا $\sin 20^o$ |
| یا $\cos(-200)^o$ | ح $\cos(-30)^o$ | ہ $\cos 140^o$ | ب $\cos 40^o$ |
| یب $\tan 1000^o$ | ط $\tan 430^o$ | و $\tan 160^o$ | ج $\tan 60^o$ |

4) (اس سوال کے لیے بھی حساب و کتاب کے کسی آلے کا استعمال نہ کریں) سوال کے ہر حصے میں اعداد کے مثلثی تفاعل دیے گئے ہیں' باقی تمام اعداد معلوم کریں، $x$ $x, -180 \le x \le 180$ بشرطیکہ کہ معلوم کیے گئے اعداد کا مثلثی تفاعل دیے گئے تفاعل کے مساوی ہو۔ مثال کے طور پر اگر $\sin 80^o$ دیا گیا ہے تو ہمارا جواب $x = 100$ ہونا چاہیئے کیونکہ $\sin 100^o = \sin 80^o$

ا $\sin 20^o$ د $\sin 130^o$ ز $\sin 400^o$ ی $\sin(-260)^o$

ب $\cos 40^o$ ہ $\cos 140^o$ ح $\cos(-30)^o$ یا $\cos(-200)^o$

ج $\tan 60^o$ و $\tan 160^o$ ط $\tan 430^o$ یب $\tan 1000^o$

5) حساب و کتاب کا آلہ استعمال کیے بغیر درج ذیل کی درست قیمت معلوم کریں۔

ا $\sin 135^o$ ہ $\cos 225^o$ ط $\sin 225^o$ یج $\sin 210^o$

ب $\cos 120^o$ و $\tan(-330)^o$ ی $\cos 630^o$ ید $\tan 675^o$

ج $\sin(-30)^o$ ز $\cos 900^o$ یا $\tan 405^o$ یھ $\cos(-120)^o$

د $\tan 240^o$ ح $\tan 510^o$ یب $\sin(-315)^o$ یو $\sin 1260^o$

6) حساب و کتاب کا آلہ استعمال کیے بغیر وہ کم ترین زاویہ معلوم کریں کہ دی گئی مساوات درست ہو جائیں۔

ا $\cos\theta^o = \frac{1}{2}$ ج $\tan\theta^o = -\sqrt{3}$ ہ $\tan\theta^o = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ ز $\sin\theta^o = -\frac{1}{2}$

ب $\sin\phi^o = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ د $\cos\theta^o = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ و $\tan\phi^o = -1$ ح $\cos\theta^o = 0$

7) حساب و کتاب کا آلہ استعمال کیے بغیر طبیعیات مقباس کا حاصل کم ترین زاویہ معلوم کریں کہ مساوات برابر ہو جائیں۔ (اگر دو زاویہ ہوں تو مثبت کو چنیں)۔

ا $\cos\theta^o = -\frac{1}{2}$ ج $\sin\theta^o = -1$ ہ $\sin\phi^o = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ز $\sin\phi^o = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

ب $\tan\phi^o = \sqrt{3}$ د $\cos\theta^o = -1$ و $\tan\theta^o = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$ ح $\tan\phi^o = 0$

8) گودی میں پانی کی سطح (تقریباً 12 گھنٹے بعد چکر دہراتی ہے اور اس کی مساوات $D = A + B\sin 30t^o$ ہے، یہاں $D$ گہرائی کو ظاہر کرتا ہے اور اس کی اکائی میٹر ہے۔ $A$ اور $D$ حثیت مستقل ہیں۔ t وقت ہے ۔ جیسے کہ گھنٹوں میں ناپا جائے گا اور یہ کام صبح کے 8:00 بجے کے بعد سے شروع ہوا ہے۔ ہمیں معلوم ہوا کہ پانی کی زیادہ سے زیادہ 60.7 میٹر ہے جبکہ کم سے کم گہرائی 2.2 میٹر ہے۔ $B$اور $A$ کی قیمت معلوم کریں' دوپہر کے وقت گودی میں پانی کی ایک گہرائی ہو گی۔ آپ کا جواب سینٹی میٹر کی حد تک درست بتائیں۔

## 4.10 $\sin\theta^o$, $\cos\theta^o$ اور $\tan\theta^o$ کی ترانیم کی تشاکل کی خصوصیات

تعریف : اگر آپ $\sin\theta^o$ , $\cos\theta^o$ اور $\tan\theta^o$ کی ترانیم کا بغور جائزہ لیں تو آپ ان میں سے تشاکل کی خصوصیات کو دستیاب پائیں گے۔ شکل 5-10 میں $\cos\theta^o$ کی ترسیم دکھائی گئی ہے۔ $\cos\theta^o$ کی ترنیم عمودی خط کے ساتھ تشاکل میں ہے۔ اس کا مطلب ہے آپ $\theta$ کو $-\theta$ سے بدل دیں تو ترسیم پر کوئی اثر نہیں پڑے گا۔

$$\cos(-\theta)^o = \cos\theta^o$$

اس کا مطلب $\cos\theta^o$ کی ترنیم $\theta$ کا ایک جفت تفاعل ہے۔ (جیسا کہ حصہ 3-3 میں بیان کیا گیا ہے) تشاکل کی دیگر خصوصیات بھی ہیں' مثال کے طور پر شکل 8-10 میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اگر آپ تفاعل میں 180 درجے جمع یا منفی کریں تو آپ کے تفاعل کا نشان بدل جائے گا۔ یعنی اگر تفاعل مثبت تھا تو منفی ہو جائے گا جبکہ منفی تفاعل مثبت ہو جائے گا۔

$$\cos(\theta - 180)^o = -\cos\theta^o$$

ہم اسے مستقیم حرقت کی خصوصیات کہتے ہیں۔

□

یہاں ایک مزید کارآمد خصوصیات بھی موجود ہیں۔ جیسے ہم جفت اور اور مستقیم حرکت کی خصوصیات کے ملاپ سے وجود میں لائے۔

$$\cos(180 - \theta)^o = \cos(\theta - 180)^o = -\cos\theta^o$$

مثلث میں $\cos\theta^o$ کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے آپ کا اس خصوصیت سے واسطہ پڑا ہو گا ۔ $\sin\theta^o$ کی ترمیم جو شکل 9-10 میں دکھائی گئی ہے، کے لیے بھی ایسی ہی خصوصیات ہیں۔ مشق 10-- کے ایک سوال میں آپ ان خصوصیات کے وجود کو ثابت کریں گے۔ ان کو ثابت کرنے کا طریقہ-- کی خصوصیات کو ثابت کرنے کے طریقے سے مماثلت رکھتا ہے۔ $\cos\theta^o$ اور $\sin\theta^o$ کے تفاعل کے خصوصیات درج ذیل ہیں۔

تواتر کی خصوصیات $\sin(-\theta)^o = -\sin\theta^o$, $\cos(-\theta)^o = \cos\theta^o$

تاک کی خصوصیات $\cos(\theta - 180)^o = -\cos\theta^o$, $\sin(\theta - 180)^o = -\sin\theta^o$

مستقیم حرکت کی خصوصیات

$$\cos(\theta \pm 360)^o = \cos\theta^o$$

$$\cos(180 - \theta)^o = -\cos\theta^o$$

$$\sin(\theta \pm 360)^o = \sin\theta^o$$

$$\sin(180-\theta)^o = \sin\theta^o$$

اگر آپ شکل 5.10 میں $\tan\theta^o$ کی ترسیم کا حوالہ لیں اور $\sin\theta^o$ اور $\cos\theta^o$ کی ترسیم کے انداز میں اسکا بھی جائزہ لیں تو آپ کو $\sin\theta^o$ اور $\cos\theta^o$ جیسے ہی جوابات ملیں گے۔ $\tan\theta^o$ کے تفاعل کی خصوصیت مندرجہ ذیل ہیں۔ تواتر کی خصوصیت:

$$\tan(\theta \pm 180)^o = \tan\theta^o$$

ناک خصوصیت:

$$\tan(-\theta)^o = -\tan\theta^o$$

$$\tan(180-\theta)^o = -\tan\theta^o$$

اس بات پر غور کریں کہ $\tan\theta^o$ کی ترسیم 180 درجے کے بعد خود کو دہراتی ہے لہذا اس کی مستقیم حرکت کی خصوصیت اور تواتر کی خصوصیت ایک سی ہیں۔

مثال 4.10: خصوصیت ثابت کریں کہ:- $\cos(90-\theta)^o = \sin\theta^o$۔ یہ آسان ہو جائے گا اگر وقفہ $0 < \theta < 90$ یہ تصور کیا جائے۔ ایک قائم زاوے کی حاصل مثلث بنائیں، زاویہ صرف آسانی کے لیے چنا گیا ہے البتہ یہ خصوصیت کسی بھی زاویے کے لیے ثابت کی جا سکتی ہے۔ اگر آپ $\cos\theta^o$ کے کی ترسیم کو زاویے کے مثبت غور میں 90 درجے مستقیم حرکت دیں تو آپ کو $\sin\theta^o$ کا ترسیم ملے گا۔لہذاہم کہہ سکتے ہیں کہ $\cos(\theta-90)^o = \sin\theta^o$ اور چونکہ $\cos\theta^o$ ایک جفت تفاعل ہے= $\cos(90-\theta)^o$ $\cos(\theta-90)^o$ اسی لیے $\cos(90-\theta)^o = \sin\theta^o$ ثابت ہو گیا۔ □

مشق 10B میں ایک اور خصوصیت جو آپ کو ثابت کرنی ہوگی وہ $\sin(90-\theta)^o = \cos\theta^o$ ہے۔

---

مشق 1.10: سوال 1: $\sin\theta^o$, $\cos\theta^o$ اور $\tan\theta^o$ کی تشاکل اور تواتر کی خصوصیات استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل نتائج اخذ کریں۔

ا. $\sin(90-\theta)^o = \cos\theta^o$

ب. $\sin(270+\theta)^o = -\cos\theta^o$

ج. $\sin(90+\theta)^o = \cos\theta^o$

د. $\cos(90+\theta)^o = -\sin\theta^o$

ھ. $\tan(\theta-180)^o = \tan\theta^o$

و. $\cos(180-\theta)^o = \cos(180+\theta)^o$

ز. $\tan(360-\theta)^o = -\tan(180+\theta)^o$

ح. $\sin(-90-\theta)^o = -\cos\theta^o$

سوال 2: $y = \tan\theta^o$ اور $y = \frac{1}{\tan\theta^o}$ کی ترسیم بنائیں اور انہی عور پر ثابت کریں کہ $\tan(90-\theta)^o = \frac{1}{\tan\theta^o}$۔

سوال 3: مندرجہ ذیل تمام مساوات کیلئے $\alpha$ کی ایسی قیمتیں معلوم کریں کہ جن سے درج ذیل مساوات درست ثابت ہو جائیں۔

ا. $\cos(\alpha-\theta)^o = \sin\theta^o$

ب. $\sin(\alpha-\theta)^o = \cos(\alpha+\theta)^o$

ج. $\tan\theta^o = \tan(\theta+\alpha)^o$

د. $\sin(\theta+2\alpha)^o = \cos(\alpha-\theta)^o$

ھ. $\cos(2\alpha-\theta)^o = \cos(\theta-\alpha)^o$

و. $\sin(5\alpha+\theta)^o = \cos(\theta-3\alpha)^o$

---

## 5.10 مثلثی تفاعل کی مساوات کا حل

$\cos\theta^o = k$ کی مساوات کا حل

$\cos\theta^o = k$ کی مساوات حل کرنے کے لیے فرض کریں کہ $-1 \leq k \leq 1$۔ اگر $k$ اس شرط پر پورا اترے تو مساوات کا کوئی حل نہیں ہوگا۔ شکل 10.10 میں $k$ کی منفی قیمت دکھائی گئی ہے۔ یاد رکھیں ہر 360 درجے کے وقفے میں $\cos\theta^o = k$ کے دو جزر ہوتے ہیں سوائے جب $k = \pm 1$ ہو۔

حساب کتاب کے آلے پر $[\cos^{-1}]$ کا بٹن دبائیں تو آپکو وہ زاویہ ملے گا جس سے مساوات درست ثابت ہو گی۔ کچھ آلات پر الٹ کوسائن کا بٹن ہوگا۔ لیکن بدقسمتی سے اس طریقے میں ہمیں صرف ایک جزر ملے گا۔ عموما آپ دیے گئے وقفے میں $\cos\theta^o = k$ کے تمام جزر حاصل کرنا چاہتے ہیں۔

$\cos\theta^o = k$ کی مساوات کو حل کرنے کے لیے 3 اقدام ہیں:-

ا. $[\cos^{-1} k]$ معلوم کریں۔

ب. تشاکل کی خصوصیت استعمال کرتے ہوئے مزید ایک جزر حاصل کریں۔ تشاکل کی خصوصیت یہ ہے $\cos(-\theta)^o = \cos\theta^o$۔

ج. تواتر کی خصوصیت یعنی $\cos(\theta \pm 360)^o = \cos\theta^o$ کا استعمال کرتے ہوئے مزید جزر معلوم کریں۔

مثال 5.10:

مساوات $\cos\theta^o = \frac{1}{3}$ کو حل کریں اور $0 \leq \theta \leq 360$ میں آنے والے تمام جزر ایک اعشاری نقطع تک درست معلوم کریں۔

ا. حساب کتاب کے آلے کا استعمال کریں اور $\cos^{-1}\frac{1}{3} = 70.52...$ معلوم کریں کہ یہ بتائے گئے وقفے کا پہلا جزر ہے.

ب. تشاکل کی خصوصیت $\cos(-\theta)^o = \cos\theta^o$ کا استعمال کریں اور اس خصوصیت سے آپ حاصل کریں گے 52.70- چونکہ دوسرا جذر ہے۔ لیکن یہ بتائے گئے وقفے کا حصہ نہیں ہے.

ج. تواتر کی خصوصیت $\cos(\theta \pm 360)^o = \cos\theta^o$ اور اس سے آپ کو ملے گا 52.70---+360=47.289- اور یہ جزر بتائے گئے وقفے میں ہی ہے۔

لہٰزا $0 \leq \theta \leq 360$ اس وقفے میں 52.70 اور 5.289 ایک اعشاری نقطے تک درست جوابات ہیں۔

□

$-180 \leq \theta \leq 180$ میں مساوات $\cos 3\theta^\circ = -\frac{1}{2}$ کے تمام جز معلوم کریں۔ یہ مثال بھی پچھلی مثال جیسی ہے۔ فرق صرف اتنا ھے کہ اس میں دو فالتو اقدام ھیں ایک ابتداء میں اور ایک انتہا پہ۔ فرض کریں کہ $\phi = 3\theta$ اب مساوات $\cos\phi^\circ = -\frac{1}{2}$ کو حل کرنا ہو گا اوراب یہ مساوات کافی حد تک سادہ ہو چکی ھے ۔ لیکن اگر $\phi = 3\theta$ ھے تو $\times(-180) \leq 3\theta \leq 180\times$ اسی لیے اب نیا وقفہ $-540 \leq \phi \leq 540$ ہو گا ۔ اس طرح ھم اصل مسلے تک آ پہنچے ھیں کہ $\cos\phi^0 = -\frac{1}{2}$ کی مساوات ھل کرتی ہے کچھ اس طرح کہ جوابات اسی وقفے میں ہوں(آپ تقریبا 6 جز کے لیے تیار رہیں) پہلا قدم

$$\cos^{-1}(-\frac{1}{2}) = 120$$

دوسرا قدم : دوسرا جز ہو گا $-120$

تیسرا قدم : تیسری کی خصوصیت کے مطابق دونوں معلام شدہ جز میں 360 جمع اور منفی کرتے ہوئے

$$-120 - 360 = -480,\ -120 + 360 = 240,\ 120 - 360 = -240$$

$$120 + 360 = 480$$

لہٰزا دیئے گئے وقفے میں $\cos \phi^\circ = -\frac{1}{2}$ کے جز $480\ -480,\ -240,\ -120,\ 120,\ 240$ ہیں

اصل مساوات کی طرف لوٹتے ہوئے

اور یہ $\theta = \frac{1}{3}\phi$ حقیقت مدنظر رکھتے ہوئے اصل جز $160\ -160,\ -80,\ -40,\ 40,\ 80$ ہوں گے

$\sin \theta^\circ = k$ کی مساوات کا حل

$\sin \theta^\circ = k$ کی مساوات اگر دیئے گئے وقفے میں ہو تو اسی طریقے سے ہی حل ہو گا فرق صرف اتنا ہے کہ $\sin \theta^\circ$ کے لیے تشاکل کی خصوصیت $\sin\,(180-\theta)^\circ$ ہے۔ وقفہ $-1 \leqslant k \leqslant 1$ ہے

قدم 1: $\sin^{-1} k$ معلوم کریں

قدم 2: تشاکل کی خصوصیت $\sin\,(180-\theta)^\circ = \sin \theta^\circ$ کو استعمال کرتے ہوئے دیگر جز معلوم کریں

قدم 3: تواتر کی خصوصیت $\sin\,(\theta \pm 360)^\circ = \sin \theta^\circ$ کا استعمال کرتے ہوئے دیگر جز معلوم کریں مثال: 10-5-3

$180 \leqslant \theta \leqslant -18-$ میں $\sin \theta^\circ = -0.7$ کے تمام جز ایک اعشاری نقطے تک درست معلوم کریں

قدم 1: حساب و کتاب کے آلے کا استعمال کرتے ہوئے $\sin^{-1}\,(-0.7) = -44.42\cdots$ معلوم کریں۔ دی گئی مساوات کا پہلا جز ہے

قدم: تشاکل کی خصوصیت $\sin\,(180-\theta)^\circ = \sin \theta^\circ$ کا استعمال کرتے ہوئے یہ $180 - (-44.42\cdots) = 224.42\cdots$ دوسرا جز ہے۔ بد قسمتی سے یہ بنائے گئے وقفے میں نہیں ہے

قدم 3: تواتر کی خصوصیت $\sin(\theta \pm 360)^\circ = \sin \theta^\circ$ کا استعمال کر کے $224.42\cdots - 360 = -135.57\cdots$ حاصل کریں گے یہ جز بنائے گئے وقفے میں ہی شامل ہے

مثال: 10-5-4

وقفہ: $0 \leqslant \theta \leqslant 360$ میں مساوات $\sin \frac{1}{3}\,(\theta-30)^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ کو حل کریں اور تمام جز معلوم کریں۔

فرض کریں کہ $\phi = \frac{1}{3}\,(\theta-30)$ اور یوں دی گئی مساوات $\sin \phi^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ سادہ ہو گئی اور اب ہم اس نئی مساوات کے حل تلاش کریں گے

قدم 1: $60 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \sin^{-1}$ سے بتائے گئے حصہ میں پہلا جزر ہے

قدم 2: دوسرا جزر $120 = 60 - 180$ لیکن سے بتائے گئے وقفے میں نہی آتا۔

قدم 3: 360 کے مضرب کو جمع نفی کرنے سے بھی ہمیں اس وقفے میں ہمیں مزید جزر نہی ملیں گے

اسی وجہ سے مساوات $\sin \phi^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ کا وقفہ $-10 \leqslant \phi \leqslant 110$ میں ایک ہی جزر ہے اور وہ ہے 60 ۔ اصل مساوات کی طرف لوٹتے ہوئے جبکہ ہم جانتے ہیں کہ $\theta = 3\phi + 30$ تو مساوات کا اصل جزر $\theta = 210$ ہو گا

$\tan \theta^\circ = k$ کی مساوات حل کرتے ہوئے

$\tan \theta^\circ = k$ کی مساوات بھی ویسے ہی حل ہو گی جیسے ہم نے باقی مثلی تناسب کی مساوات کو حل کیا ۔ یہاں سے بات اہم ہے کہ ہر 180 درجے کے وقفے میں صرف ایک ہی جزر ملے گا اور مزید جزر کے لیے ہمیں تواتر کی خصوصیت کا سہارا لینا پڑتے گا

قدم 1: $\tan^{-1} k$ معلوم کریں

قدم 2 : تواتر کی خصوصیت $\tan\,(180+\theta)^\circ = \tan\theta^\circ$ کا استعمال کرتے ہوئے دیگر جزر تلاش کریں

سوال 1: زاویے کی دو کم سے کم قیمتیں معلوم کریں کہ جن کے لیے درج ذیل مساوات درست ثابت ہوں۔ آپکا جواب ایک اعشاری نقطے تک درست ہونا چاہیے۔

ا. $\cos \frac{1}{2}\theta^\circ = \frac{2}{3}$

ب. $\tan \frac{2}{3}\theta^\circ = -3$

ج. $\sin \frac{1}{4}\theta^\circ = -\frac{1}{4}$

د. $\cos \frac{1}{3}\theta^\circ = \frac{1}{3}$

ھ. $\tan \frac{3}{4}\theta = 0.5$

و. $\sin \frac{2}{3}\theta^\circ = -0.3$

سوال 2: بغیر حساب و کتاب کے آلے کی مدد لیے درج ذیل مساوات کے وقفہ $0 \leqslant t \leqslant 360$ میں جزر ( اگر کوئی ہیں تو) معلوم کریں۔

ا. $\sin\,(2t-30)^\circ = \frac{1}{2}$

ب. $\tan\,(2t-45)^\circ = 0$

ج. $\cos\,(3t+135)^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

د. $\tan\left(\frac{3}{2}t-45\right)^\circ = -\sqrt{3}$

ھ. $\cos\,(2t-50)^\circ = -\frac{1}{2}$

و. $\sin\left(\frac{1}{2}t+50\right)^\circ = 1$

ز. $\cos\left(\frac{1}{5}t-50\right)^\circ = 0$

ح. $\tan(3t-180)^\circ = -1$ ط. $\sin\left(\frac{1}{4}t-20\right)^\circ = 0$

سوال 3: ایک اعشاری نقطے تک z کی تمام قیمتیں معلوم کریں، بشرطیکہ ذیل میں میں دی گئ مساوات درست ثابت ہوں اور تمام قیمتیں اس وقفے $-180 \leqslant z \leqslant 180$ میں ہوں۔

ا. $\sin z^\circ = -0.16$ ج. $(1-\tan z^\circ)\sin z^\circ = 0$ ھ. $\cos(45+z)^\circ = 0.832$

ب. $\cos z^\circ(1+\sin z^\circ) = 0$ د. $\sin z^\circ = 0.23$ و. $\tan(3z-17)^\circ = 3$

سوال 4: وقفے $0 \leq \theta \leq 360$ میں موجود درج ذیل مساوات کے لیے زاویے $\theta$ کی قیمت معلم کریں۔

ا. $\sin 2\theta^\circ = \cos 36^\circ$ ب. $\cos 5\theta^\circ = \sin 70^\circ$ ج. $\tan 3\theta^\circ = \tan 60^\circ$

سوال 5:

وقفے $0 \leq \theta \leq$ میں زاویے کی تمام قیمتیں معلوم کریں جنکے لیے مساوات $\sin\theta^\circ\cos\theta^\circ = \frac{1}{2}\tan\theta^\circ$ درست ثابت ہو۔

سوال 6: درجہ ذیل قیمتوں کے لیے مثلثی تفاعل سائن، کوسائن اور ٹینجنٹ کی ایک مثال بنائیں اور اس طرح کے بتائی گی قیمت پے یہ تفاعل خود کو دہراتا ہو۔

ا. 90 ج. 48 ھ. 720

ب. 20 د. 120 و. 600

سوال 7: وقفے $0 \leq \phi \leq 360$ میں درج ذیل کی ترسیم بنائیں، ہر ایک سوال میں تفاعل کے دورانیے کا بھی بتائیں۔

ا. $y = \sin 3\phi^\circ$ د. $y = \tan\frac{1}{3}\phi^\circ$ ز. $y = \sin(3\phi-20)^\circ$

ب. $y = \cos 2\phi^\circ$ ھ. $y = \cos\frac{1}{2}\phi^\circ$ ح. $y = \tan 2\phi^\circ$

ج. $y = \sin 4\phi^\circ$ و. $y = \sin\left(\frac{1}{2}\phi+30\right)^\circ$ ط. $y = \tan\left(\frac{1}{2}\phi+90\right)^\circ$

سوال 8: قطب شمالی کے ایک مخصوص علاقے میں پورے سال کے تمام دنوں میں روشن گھنٹے $d$ معلوم کرنے کا کلیہ $d = A + B\sin kt^{\circ}$ جسمیں A,B, اور k مثبت مستقل ہیں اور $t$ دن میں وقت ہے موسم بہار کے بدلاؤ کے بعد سے۔

1. یہ تصور کرتے ہوئے کہ دن میں روشن گھنٹوں کی عددی قیمت 365 دنوں بعد خود کو دہراتی ہے k۔ کی قیمت معلم کریں آپ کا جواب 3 اعشاری نقطوں تک درست ہو۔

2. یہ بتایا گیا ہے کہ سب سے چھوٹے دن میں 6 گھنٹے روشن جبکہ سب سے لمبے دن میں 18 روشن گھنٹے ہیں Aاور B کی قیمت معلوم کریں۔ سال کے نئے دن میں روشن وقت کتنا ہوگا گھنٹوں اور منٹوں میں بتائیں یہ مانتے ہوئے کہ سال کا نیا دن موسموں کی اس تبدیلی سے 80 دن پہلے آتا ہے۔

3. اسی علاقے میں ایک قصبہ ہے جہاں کے لوگ سال میں سو دفعہ تہوار مناتے ہیں اور ان دونوں دن روشن دن 10 گھنٹے کا ہوتا ہے۔ موسموں کے تغیر کو مد نظر رکھتے ہوئے بتائیں کہ یہ کونسے دو دن ہیں

## 6.10 مثلثی تفاعل کے باہمی روابط

الجبرا میں مساوات حل کرنا آپ کی عادت بن جاتی ہے، جن میں ہم ایک نا معلوم غیر مستقل مقدار، جسے ہم عموماً $x$، کہتے ہیں، کی قیمت معلم کرتے ہیں جیسے اس مساوات میں $2x + 3 - x - 6 = 7$۔ آپ الجبرائی مساوات کو سادہ کرنے میں بھی مہارت رکھتے ہیں جیسے مساوات $2x + 3 - x - 6$ سادہ ہو کے $x - 3$ بن جاتی ہے، آپ کو اندازہ نہیں ہوا لیکن یہ دونوں بالکل الگ طریقہ کار ہیں۔

جب آپ مساوات $2x + 3 - x - 6 = 7$ کو حل کرتے ہیں تو آپ کو معلوم ہوتا ہے کہ اسکا صرف ایک ہی حل ہے $x = 10$ ، لیکن $2x + 3 - x - 6$ اور $x - 3$ بالکل ایک جیسے ہیں $x$ کی تمام قیمتوں کے لیے، بعض اوقات ان دونوں طرح کی صورتحال میں فرق کرنا ضروری ہوتا ہے۔

اگر دو تراکیب $x$ کی ہر قیمت کے لیے ایک سا جواب دیں تو ایسی تراکیب کو ہو بہو برابر کہا جائے گا۔ اور ایسی تراکیب کو ظاہر کرنے کے لیے ( ) علامت استعمال کی جاتی ہے اور اسے پڑھا جائے گا "ہو بہو برابر ہے". یہ جملہ

$$2x + 3 - x - 6 = x - 3$$

ایک مماثل کہلائے گا۔ لہٰذہ $x$ میں ایک مماثل ایک ایسی مساوات ہے جو $x$ کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہے۔

مثلثی تناسب میں بھی ایسا ہی ہوتا ہے، حصہ 2.10 کے آخر میں یہ دیکھا گیا تھا کہ $\tan\theta^{\circ} = \frac{\sin\theta^{\circ}}{\cos\theta^{\circ}}$ بشرطیکہ $\cos\theta^{\circ} \neq 0$ ۔

$$\tan\theta^\circ = \frac{\sin\theta^\circ}{\cos\theta^\circ}$$

مماثل کی علامت استعمال کی جاتی ہے تب بھی جبکہ قوت نمائی قیمتیں موجود ہوں جنکے لیے دونوں اطراف معین نہ ہوں، دہ گی مثال میں اگر زاویہ 90 کا تاک مضرب ہو تو کوی بھی طرف معین نہیں ہے لیکن مماثل کی علامت وہاں موجود ہے۔

حصہ 1.10 اور 2.10 میں کی گئ $x = \cos\theta^\circ$ اور $y = \sin\theta^\circ$ کی تعریف سے ایک اور تعلق فوراً سے ذہن میں آتا ہے اگر P ایک اکائ کے ایک دائرے کی باہری حد بندی پر موجود ایک نقطہ ہے ۔ فیثا غورث کے قانون کے مطابق $x^2 = y^2 = 1$ ہے یا ہم کہہ سکتے ہیں کہ $(\cos\theta^\circ)^2 + (\sin\theta^\circ)^2 = 1$

غلط العام میں ہم $(\cos\theta^\circ)^2$ کو $\cos^2\theta^\circ$ کہتے ہیں اور ایسے ہی $(\sin\theta^\circ)^2$ کو $\sin^2\theta^\circ$ کہتے ہیں , زاویے کی ہر قیمت کے لیے $\cos^2\theta^\circ + \sin^2\theta^\circ \equiv 1$۔ ہم اسے بعض اوقات مثلثیات کا فیثاغورث کا کلیہ بھی کہتے ہیں۔

زاویے کی ہر قیمت کے لیے؛ $\tan\theta^\circ \equiv \frac{\sin\theta^\circ}{\cos\theta^\circ}$ بشرطیکہ $\cos\theta^\circ \neq 0$

$$\cos^2\theta^\circ + \sin^2\theta^\circ \equiv 1$$

غلط العام $\cos^n\theta^\circ$ جسکا ہم نے ذکر کیا یہ مثبت طاقتوں کی حد تک تو بہترین ہے ۔ کسی بھی صورت میں $n = -1$ استعمال نہیں کیا جا سکتا کیونکہ یہاں ایک خطرہ ہے آپ اسے یہ $\cos^{-1} x$ سمجھ سکتے ہیں، جبکہ یہ ان زاویوں کے لیے استعمال ہوتا ہے جنکے cosine کی قیمت x ہوتی ہے۔ اگر آپ شک میں گرفتار ہوں تو $(\cos\theta^\circ)^n$ یا $(\cos\theta)^{-n}$ استعمال کریں کیونکہ انکا ایک ہی مطلب ہے جو واضع ہے

آپ اس مساوات $\cos^2\theta^\circ + \sin\theta^\circ \equiv 1$
کو استعمال کرتے ہوئے کسی بھی مثلث کے کوسائن کلیے کو ثابت کر سکتے ہیں۔

فرض کریں ABC ایک مثلث ہے جسکی اطراف ، BC=a CA=b، اور AB=c ہیں ۔ فرض کریں کہ نقطہ A کارتیسی نظام محدد کے مبدا پے ہے۔ اور AC ایک خط ہے جو کہ x محدد پے x کی سمت میں ہے ۔ جیسا کہ شکل 11.10 میں دکھایا گیا ہے۔

نقطہ C کے محدد (b,0) ہیں، جبکہ B کے محدد $(c\cos A^\circ, c\sin A^\circ)$ یہ ہیں ، جبکہ A زاویے BAC کے لیے ہے۔ اور تب فاصلے کے کلیے کا استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
a^2 &= (b - c\cos A^\circ)^2 + (c\sin A^\circ)^2 \\
&= b^2 - 2bc\cos A^\circ + c^2\cos^2 A^\circ + c^2\sin^2 A^\circ \\
&= b^2 - 2bc\cos A^\circ + c^2(\cos^2 A^\circ + \sin A^\circ) \\
&= b^2 + c^2 - 2bc\cos A^\circ,
\end{aligned}$$

اب آخر میں $\cos^2 A^\circ + \sin A^\circ = 1$ کا استعمال کرتے ہوئے۔

مثال 6.10: بتایا گیا ہے کہ $\sin\theta^\circ = \frac{3}{5}$ اور زاویہ منفرجہ ہے۔ حساب و کتاب کے آلے سے پرہیز کرتے ہوئے $\cos\theta^0$ اور $\tan\theta^0$ کی قیمت معلم کریں۔

جیسا کہ $\cos^2\theta^\circ + \sin^2\theta^\circ = 1, \cos^2\theta^\circ = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$ اور اس سے ہمیں ملے گا $\cos\theta^\circ = \pm\frac{4}{5}$۔
جیسا کہ ہم جانتے ہیں زاویہ منفرجہ ہے . $90\theta180$ لہٰذہ $\cos\theta^0$ منفی ہے ، اسی لیے $\cos\theta^\circ = -\frac{4}{5}$۔

$$\cos\theta^\circ = -\tfrac{4}{5}, \tan\theta^\circ = \frac{\sin\theta^\circ}{\cos\theta^\circ} = \frac{3/5}{-4/5} = -\tfrac{3}{4}$$ جیسا کہ $\sin\theta^\circ = \frac{3}{5}$ اور □

مثال 7.10: مساوات $3\cos^2\theta^\circ + 4\sin\theta^\circ = 4$ کو حل کریں اور وقفہ $-180\theta \leq 180$ میں آنے والے تمام جذر ایک اعشاری قیمت تک درست معلوم کریں۔

جیسا کہ نظر آ رہا ہے ہم اس مساوات کع حل نہیں کر سکتے لیکن اگر یم اس مساوات میں $\cos^2\theta^\circ$ کو $1 - \sin^2\theta^\circ$ سے بدل دیں تو، ہمیں نئ مساوات $3(1-\sin^2\theta^\circ) + 4\sin\theta^\circ = 4$ ملے گی جو کہ مزید سادہ ہو کہ درج ذیل شکل اختیار کر لے گی؛

$$3\sin^2\theta^\circ - 4\sin\theta^\circ + 1 = 0$$

یہ $\sin\theta^0$ میں ایک دو طاقتی مساوات ہے جس کے آپ اجزائے ضربی بنا سکتے ہیں $(3\sin\theta^\circ -1)(\sin\theta^\circ - 1) = 0$ اور اس سے ہمیں ملے گا $\sin\theta^\circ = \frac{1}{3}$ یا $\sin\theta^\circ = 1$

ایک جذر تو $\sin^{-1}\frac{1}{3} = 19.47\ldots$ ہے اور باقی جذر $\sin\theta^0$ کی تشاکل کی خصوصیت کی مدد سے جو ہمیں ملے ہیں وہ ہیں $(180 - 19.47\ldots) = 160.52\ldots$ مساوات $\sin\theta^\circ = 1$ کا اکلوتا جذر $\theta = 90$, ہے، لہٰذہ تمام جذر 5،90.19 اور 5.160 ہیں ۔ □

سوال 1: نیچے بنی ہر ایک مثلث کے لیے

1. فیثا غورث کے کلیے کا استعمال کریں اور تیسری سمت کی لمبائ معلوم کریں۔

2. $\sin\theta^0$، $\cos\theta^0$ اور $\tan\theta^0$ کی درست قیمتیں معلم کریں ۔

سوال 2:

1. یہ بتایا گیا ہے کہ زاویہ A ایک منفرجہ زاویہ ہے اور یہ کہ $\sin A^\circ = \frac{5}{14}\sqrt{3}$ آپ $\cos A^0$ کی درست قیمت معلم کریں۔

2. ہمیں وقفہ $180B \leq 360$ معلوم ہے اور ہم جانتے ہیں کہ $\tan B^\circ = -\frac{21}{20}$ آپ $\cos B^0$ کی قیمت معلم کریں۔

3. $\sin C^0$ کی وہ تمام قیمتیں معلوم کریں جن کے لیے $\cos C^\circ = \frac{1}{2}$

4. کی وہ تمام قیمتیں معلوم کریں جن کے لیے اس وقفہ $-180 < D < 180$ میں مساوات $\tan D^\circ = 5\sin D^\circ$ درست ثابت ہو۔

سوال 3: اور اس مساوات $\cos^2\theta^\circ + \sin^2\theta^\circ \equiv 1$ اور اس مساوات $\tan\theta^\circ \equiv \dfrac{\sin\theta^\circ}{\cos\theta}$ کا استعمال کریں بشرطیکہ $\cos\theta^\circ \neq 0$ اور نیچے دی گئی مساوات کو ثابت کریں۔ .

ا. $\dfrac{1}{\sin\theta^\circ} - \dfrac{1}{\tan\theta^\circ} \equiv \dfrac{1-\cos\theta^\circ}{\sin\theta^\circ}$

ب. $\dfrac{\sin^2\theta^\circ}{1-\cos\theta^\circ} \equiv 1 + \dfrac{1}{\cos\theta^\circ}$

ج. $\dfrac{1}{\cos\theta^\circ} + \tan\theta^\circ \equiv \dfrac{\cos\theta^\circ}{1-\sin\theta^\circ}$

د. $\dfrac{\tan\theta^\circ \sin\theta^\circ}{1-\cos\theta^\circ} \equiv 1 + \dfrac{1}{\cos\theta^\circ}$

سوال 4: دی گئی تمام مساوات کو زاویے کی قیمت کے لیے حل کریں، اور وقفہ $0 \leq \theta \leq 360$ میں زاویے کے جوابات دیں اس بات کو خیال رکھتے ہوئے کہ آپکے جوابات 1.0 کے قریب ترین درست ہوں۔ .

ا. $4\sin^2\theta^\circ - 1 = 0$

ب. $\sin^2\theta^\circ + 2\cos^2\theta^\circ = 2$

ج. $10\sin^2\theta^\circ - 5\cos^2\theta^\circ + 2 = 4\sin\theta^\circ$

د. $4\sin^2\theta^\circ\cos\theta^\circ = \tan^2\theta^\circ$

سوال 5: دیے گئے وقفے $-180 \leq \theta \leq 180$ میں زاویے کی قیمتیں معلوم کریں کہ جن کے لیے $2\tan\theta^\circ - \dfrac{2}{\tan\theta^\circ} = 3$۔

سوال 6: درج ذیل کی دہرائی کا نقطہ معلوم کریں .

ا. $\sin x^\circ$ ب. $\tan 2x^\circ$

سوال 7: $y = \cos x^0$ کی ترسیم کو ذہن میں رکھتے ہوئے یا پھر درج ذیل کو $\cos x^0$ کی صورت میں لکھیں .

ا. $\cos(360 - x)^\circ$ ب. $\cos(x + 180)^\circ$

سوال 8: مساوات $y = \cos \frac{1}{2}\theta^\circ$ کی ترسیم بنائیں اور وقفہ $-360 \leq \theta \leq 360$ میں زاویے کی قیمت معلوم کریں۔ ان نقطوں کے محدد بھی واضع کریں کہ جن پے ترسیم $\theta$ اور $y$ محدد کو کاٹے گا۔

سوال 9: درج ذیل مساوات کو زاویے کے لیے حل کریں . آپکا جواب وقفہ $0 \leq \theta \leq 360$ میں ہونا چاہیے .

ا. $\tan \theta^\circ = 0.4$ ب. $\sin 2\theta^\circ = 0.4$

سوال 10: مساوات $3\cos 2x^\circ = 2$ کو حل کریں اور وقفہ $0 \leq \theta \leq 180$ میں تمام جوابات تحریر کریں۔ آپکے جوابات 1.0 کے قریب ترین ہونے چاہئیں۔

سوال 11:

1. ایک ایسے مشلثی تفاعل کی مثال دیں جو ہر 180 درجے بعد خود کو دہراتا ہو۔
2. مساوات $\sin 3x^\circ = 0.5$ کو وقفہ $0x180$ میں آنے والے x کے تمام جوابات معلوم کریں۔

سوال 12: وقفہ $0 \leq \theta \leq 360$ میں زاویے کی وع تمام قیمتیں معلوم کریں کہ جن کے لیے مساوات $2\cos(\theta + 30)^\circ$ درست ثابت ہو۔

سوال 13:

1. مساوات $\sin 2x^\circ + \cos(90 - 2x)^\circ$ کو کسی ایک مشلثی تفاعل کی صورت میں لکھیں۔
2. وقفہ $0 \leq x \leq 360$ میں مساوات $\sin 2x^\circ + \cos(90 - 2x)^\circ = -1$ کی x کی تمام قیمتیں معلوم کریں۔

سوال 14: زاویہ A کی وہ کم ترین قیمت معلوم کریں کہ جس کے لیے .

ا. $\sin A^\circ = 0.2$ اور $\cos A^\circ$ منفی ہوں۔

ب. $\tan A^\circ = -0.5$ اور $\sin A^\circ$ منفی ہوں۔

ج. $\sin A^\circ = \cos A^\circ$ دونوں منفی ہوں۔

د. $\sin A^\circ = -0.2275$ اور $A > 360$۔

سوال 15: درج ذیل مماثل کو ثابت کریں۔ .

ا. $\dfrac{\cos\theta^\circ}{\tan\theta^\circ} \equiv \dfrac{1}{\sin\theta^\circ} - \sin\theta^\circ$

ب. $\dfrac{\cos\theta^\circ}{1+\sin\theta^\circ} \equiv \dfrac{1-\sin\theta^\circ}{\cos\theta^\circ}$

ج. $\dfrac{1}{\sin\theta^\circ\cos\theta^\circ} \equiv \tan\theta^\circ + \dfrac{1}{\tan\theta^\circ}$

د. $\cos\theta^\circ - \sin\theta^\circ \equiv \dfrac{1-2\sin^2\theta^\circ}{\cos\theta^\circ+\sin\theta^\circ}$

سوال 16: درج ذیل تفاعل کے لیے y کی کم ترین اور زیادہ ترین قیمتیں جبکہ x کی کم ترین مثبت قیمت معلوم کریں کہ جس کے لیے یہ تفاعل درست ثابت ہوں۔ .

ا. $y = 1 + \cos 2x^\circ$

ب. $y = 5 - 4\sin(x+30)^\circ$

ج. $y = 29 - 20\sin(3x-45)^\circ$

د. $y = 8 - 3\cos^2 x^\circ$

ھ. $y = \dfrac{12}{3+\cos x^\circ}$

و. $y = \dfrac{60}{1+\sin^2(2x-15)^\circ}$

سوال 17: درج ذیل مساوات کو زاویے کے لیے حل کریں اور آپنا جواب اس وقفے $0 \le x \le 360$ میں دیں۔ .

ا. $\sin\theta^\circ = \tan\theta^\circ$

ب. $2 - 2\cos^2\theta^\circ = \sin\theta^\circ$

ج. $\tan^2\theta^\circ - 2\tan\theta^\circ = 1$

د. $\sin 2\theta^\circ - \sqrt{3}\cos 2\theta^\circ = 0$

سوال 18: t کا تفاعل $t(x) = \tan 3x^\circ$ ہے۔

1. تفاعل کب t(x) خود کو دہرائے گا۔

2. وقفہ $0 \le x \le 180$ کے لیے مساوات $t(x) = \frac{1}{2}$ حل کریں

3. درج ذیل مساوات کے لیے کم سے کم مثبت حل تلاش کریں۔

(ا) $t(x) = -\frac{1}{2}$

(ب) $t(x) = 2$

سوال 19: درج ذیل مسائل میں سے ھر ایک کے لیے ایک مثلثی تفاعل بنائیں جس سے بتائی گئ صورت حال واضع ہو سکے۔

1. ایک نہر میں پانی کی گہرائی کم سے کم 6.3 میٹر اور زیادہ سے زیادہ 6 میٹر کے درمیان تبدیل ہوتی رہتی ہے 24 گھنٹے کے اوقات میں۔

2. ایک کیمیائی کارخانے جو کہ دس دن کے وقفے میں کام کرتا ہے ، دن میں کم سے کم 1500 بیرل تیل صاف کرتا ہے جبکہ زیادہ سے زیادہ 2800 بیرل صاف کر پاتا ہے۔

3. دائرہ قطب شمالی کے جنوب کے کچھ قصبوں میں روشن دن 2 سے 22 گھنٹوں کا ہوتا ہے 360 دنوں کے ایک مدار میں۔

سوال 20:

سوال 21: ایک فولادی دوشاخہ مرتعش ہے۔ اسکی ایک شاخ کے آخری سرے کا ہٹاؤ y رکی ہوئی حالت سے زیادہ سے زیادہ ہٹاؤ تک وقت t میں بیان کرنے کے لیے کلیہ ہے۔

$$y = 0.1\sin(100000t)^\circ$$

معلوم کریں؛

1. سب سے زیادہ ہٹاؤ اور کس وقت یہ وقوع پزیر ہوگا۔

2. ایک مکمل چکر کے لیے کتنا وقت لگے گا۔

3. ایک سیکنڈ میں کتنے دائرے مکمل کرے گا فولادی دوشاخہ کا ارتعاش۔

4. پہلے مکمل دائرے کے دوران وہ وقت بتائیں کہ جب فالادی دوشاخہ کا دوسرا سرا اپنی رکی ہوئی حالت سے 06.0 سینٹی میٹر ہٹتا ہے۔

سوال 22:

ایک لچک دار رسی کا ایک کنارہ ایک چوکھٹ سے باندھا گیا ہے جبکہ دوسرا سرا لٹک رہا ہے۔ کھلے سرے پر ایک چھوٹی سی گیند بندھی ہوئی ہے۔ اس لٹکتی ہوئی گیند کو تھوڑا سا نیچے کھینچا جاتا ہے اور پھر چھوڑ دیا جاتا ہے، اس سے بال اس اس لچک دار رسے پر اوپر نیچے مرتعش ہو جاتی ہے۔ گیند کی گہرائی چوکھٹ سے d وقت t کے بعد اس کلیے کی مدد سے معلوم کی جا سکتی ہے

$$d = 100 + 10\cos 500t^{\circ}$$

معلوم کریں کہ؛

1. گیند کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم گہرائی
2. وہ وقت جب گیند اپنے اونچے ترین مقام پے ہو گی۔
3. ایک مکمل ارتعاش کے لیے درکار وقت۔
4. ایک ارتعاش میں وقت کا وہ حصہ کہ جسکے لیے رسی کی لمبائی 99 سینٹی میٹر سے کم رہتی ہے

سوال 23: ایک مرتوش ذرے کا ہٹاؤ y ہے، جو کہ میٹرز میں ماپا جاتا ہے اور جسکے لیے تفاعل $y = a\sin(kt+\alpha)^{\circ}$ ہے۔ جسمیں a میٹرز میں ، وقت t سیکنڈز میں جبکہ k اور $\alpha$ دونوں مستقل ہیں ۔ ایک مکمل ارتعاز کے لیے وقت T سیکنڈز ہے۔ معلوم کریں کہ؛

1. مستقل k کو T کی اکائیوں میں
2. ایک سیکنڈ میں مکمل ہونے والی دائروی ارتعاش، k کی اکائیوں میں۔

سوال 24: ایک جزیرے پر ایک خاص قسم کے پرندوں کی آبادی P تبدیل ہوتی رہتی ہے، اور یہ منحصر کرتی ہے ان کی خوراک، ہجرت، موسم اور شکار پر۔ ایک ماہر ارضیات جو ان پر تحقیق کر رہا تھا اسنے سال میں انکی آبادی کے لیے ایک کلیہ بنایا

$$P = N - C\cos\omega t^{\circ},$$

اس کلیے میں N،C اور $\omega$ مستقل ہیں۔ جبکہ t وقت ہے جسکی اکائی ایک ہفتہ رکھی گئی ہے اور یہ وقت صفر سے شروع ہو رہا ہے یعنی یکم جنوری رات 12 بجے سے۔

1. فرض کریں کہ تفاعل خود کو 50 ہفتوں بعد دہراتا ہے $\omega$ کی قیمت معلوم کریں

2. مساوات کا استعمال کریں اور اورC N کی اکائیوں میں جواب دیں

(ا) سال کے شروع میں اس نسل کے کتنے پرندے پائے جاتے ہیں

(ب) اس نسل کے پرندوں کی ذیادہ سے آبادی اور یہ سال کے کس حصے میں پائی جائے گی

سوال 25: صحرا کے قریبی ایک جزیرے تک جانے والی سڑک اکثر پانی سے ڈھکی ہوتی ہے۔ سمندر کا پانی جب سڑک کے برابر آتا ہے تو سڑک بند ہو جاتی ہے۔ ایک خاص دن پانی کی سطح سمندر سے بلندی 6.4 میٹرز ہے. لہر کی بلندی h بیان کرنے کی لیے یہ $h = 4.6 \cos kt^\circ$ کلیہ استعمال کیا جا سکتا ہے۔ وقت t سے ظاہر کیا گیا ہے اور یہ وہ وقت ہے جو شروع ہوتا ہے اونچی لہر کے آنے کے بعد سے۔ اور یہ بھی دیکھنے میں آیا ہے کہ اونچی لہر 12 گھنٹے میں ایک بار آتی ہے۔

1. مستقل k کی قیمت معلوم کریں

2. اسی دن ایک عبارت لگا دی گئی کہ سڑک تین گھنٹے کے لیے بند ہے ۔ یہ مانتے ہوئے کہ حکم نامہ درست ہے ، سڑک کی سطح سمندر سے اونچائی معلوم کریں اور آپکا جواب دو اعشاری نقطوں تک درست ہونا چاہئیے

3. دراصل سڑک کی بحالی کے کام میں اسکی سطح بڑھی ہے، اب سڑک صرف 2 گھنٹے 40 منٹ کے لیے بند ہوئی ہے ، یہ بتائیں کہ سڑک کی سطح کتنی بلند ہوئی۔

سوال 26: سمندر میں بننے والی لہروں کے لیے سب سے سادہ نظریہ یہ ہے کہ یہ سورج اور چاند کی کشش ثقل کی وجہ سے معرض وجود میں آتی ہیں۔ چاند کی کشش ثقل سورج کی نسبت 9 گناہ ذیادہ ہے۔ سورج کی وجہ سے ہونے والا تغیر خود کو 360 دنوں بعد دہراتا ہے جبکہ چاند کے زیر اثر سلسلہ 30 دنوں بعد خود کو دہراتا ہے ۔ لہروں کی اونچائی h ، وقت کی علامت t ہے جسکی اکائی دن لیا گیا ہے اور تفاعل

$$h = A \cos \alpha t^\circ + B \cos \beta t^\circ,$$

ہے۔ اس تفاعل میں $A \cos \alpha t^\circ$ یہ سورج کے اثر کے لیے ہے جبکہ کلیے کا دوسرا حصہ $B \cos \beta t^\circ$ چاند کی کشش ثکل سے پیدا ہونے والی لہروں کے لیے ہے۔ ہمیں بتایا گیا ہے کہ h=5 ہے اور t=0 آپ ،B، ،$\alpha$A، اور $\beta$، کی قیمت معلوم کریں۔

# باب 11

# تفاعل کا مجموعہ اور تفاعل کا الٹ

# باب 12

# وسعت تفرق

# باب 13

# سمتیات

# باب 14

# ہندسی ترتیبات

114 page

$(a) 1\ 4\ 9\ 16\ 25 \ldots$    $(b) \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{5}{6} \ldots$

$(c) 99\ 97\ 95\ 93\ 91 \ldots$    $(d) 1\ 1.1\ 1.21\ 1.331\ 1.4641 \ldots$

$(e) 2\ 4\ 8\ 14\ 22 \ldots$    $(f) 3\ 1\ 4\ 1\ 5 \ldots$

کثر اوقات کسی ترتیب کو . . . $u_0, u_1, u_2$ یعنی r=0 سے شروع کرنا آسان رہتا ہے لیکن یہاں اس بات کا خیال کرنا ضروری ہے کے ہم پہلے جزو سے مراد $u_0$ لے رہے ہیں یا $u_1$ ؟ a اور b کے جزو کے لیے ہمیں کلیہ تھے میں کوئی مسئلہ نہیں a کے اجرا دراصل $1^2, 2^2, 3^2.4^2$ ہیں لہذا اس کا جزو ہوگا

$$u_r = r^2$$

اسی طرح b کے اجرا کو $\frac{1}{1+1}, \frac{2}{2+1}, \frac{3}{3+1}, \frac{4}{4+1}, \frac{5}{5+1}$ لکھ جا سکتا ہے یعنی

$$u_r = \frac{r}{r+1}$$

اسی طرح c اور d میں قلیہ موجود ہے لیکن اسے حاصل کرنا آسان نہیں ہے لیکن ہم ہر اگلے جزو کو دیکھ کر بتا سکتے ہیں کہ پچھلا جزو کیسے حاصل کیا جا سکتا ہے . یعنی دو درجے پیچھے جا کہ مثلاً

$$u_2 = u_1 - 2$$

$$u_3 = u_2 - 2$$

$$u_4 = u_3 - 2$$

وغیرہ. انفی ایک کیلئے میں ایسے سمویا جا سکتا ہے

$$u_{r+1} = u_r - 2$$

میں ہر جزو کو 1.1 سے ضرب دی گئی ہے

$$u_{r+1} = 1.1u_r$$

بہ قسمتی سے بہت سی ترتیبات ایسی ہیں جو $u_{r+1} = u_1 - 2$ کے کلیہ پر پورا اترتی ہیں مثلاً 10, 8, 6 , 4 , 2 اور ‎-2, -4, -6, -8, -10 ...

صفحہ 115
یہ تعریف اس وقت تک مکمل نہیں ہوسکتی جب تک ہم پہلے جزو کے بارے میں معلوم نہ ہو لہذا ترتیب کو تعریف تو مکمل بنانے کے لیے ہمیں c اور d کو ایسے تلف ہو گا
(c) $u_1 = 99$ اور $u_{r+1} = u_r - 2$
(d) $u_1 = 1$ اور $u_{r+1} = 1.1u_r$
اس طرح کی تعریفوں کو استقرادی تعریفیں کہتے ہیں . ترتیب c کی بنیاد جیومیٹری ہے . یہ ترتیب دراصل مختلف دائروں کے ذریعے کسی مسطح کو تقسیم کرنے والے خطوں کو سب سے زیادہ تعداد بتائی ہے . ( ا, 2, 3, 4 .... دائروں کے ذریعے اپنی اشکال بنانے کی کوشش کیجیے ) . آپ کے پاس کچھ ایس ترتیب بنے گی۔

$$u_2 = u_1 + 2, u_3 = u_2 + 4, u_4 = u_3 + 6$$

وغیرہ ان میں ہونے والے اضافے 2, 4, 6 ... کو 2r سے ظاہر کیا جاسکتا ہے . لہذا استقراری تعریف یہ ہوگی $u_1 = 2$ اور $U_{r+1} = u_r + 2r$
f کے بارے میں یم کر سکتے ہیں کہ اگلے تین اعداد 1 6 1 ہونگے (کیونکہ جفت مقامات پہ آنے والے اعداد میں ہر بار 1 درجہ کا اضافہ ہوتا ہے . ) دراصل اس ترتیب کا نقطہ آغاز قدرے مختلف ہے جیسا کہ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اس کے پہلے پانچ اعداد $\pi$ کی نشاندہی کر رہے ہیں . اس کا مطلب یہ ہوا کہ اگلے تین اعداد 9 2 6 ہونگے
یہ مثال بتاتی ہے کہ بھی کسی ترتیب کا یکتا حل صرف چند ابتدائی اجراء کو دیکھ کر نہیں بتایا جا سکتا مثال کے طور پر دی گئی ترتیب کے لیے آٹھو اجزاء معلوم کیجیے .

$$u_r = r^2 + (r-1)(r-2)(r-3)(r-4)(r-5)$$

آپ دیکھیں گے کہ پہلے پانچ اجراء میں ہیں جو کہ ترتیب a میں دیے گئے ہیں لیکن اگلے اجراء آپکے اندازے سے برعکس ہونگے
ایک ترتیب کو اسی وقت بیان کیا جاسکتا ہے جب ہمارے پاس اس کا کلیہ ہو استقراری تعریف ہو یا واضع اصول
مشق 8A
ذیل میں دی گئی تعریفیں استعمال کر کر تمام ترتیبات کے پہلے پانچ اجراء لکھے

$$(a) u_1 = 7, u_{r+1} = u_r + 7 \quad (b) u_1 = 13, u_{r+1} = u_r - 5$$

$$(c) u_1 = 4, u_{r+1} = 3u_r \quad (d) u_1 = 6, u_{r+1} = \frac{1}{2}u_r + 3$$

$$(e) u_1 = 2, u_{r+1} = 3u_r + 1 \quad (f)\ u_1 = 1, u_{r+1} = u_r^2 + 3$$

ذیل میں دی گئی ترتیبات کے لیے استقزاری تعریفین لکھے

$$(a) 2\,4\,6\,8\,10 \ldots \quad (b) 11\,9\,7\,5\,3 \ldots$$

$$(c)\ 2\ \ 6\ \ 10\ \ 14\ \ 18 \qquad (d) 2\,6\,18\,54\,162 \ldots$$

$$(e)\frac{1}{3}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{27}\ \frac{1}{81}\ ...\quad (f)\frac{1}{2}a\ \frac{1}{6}a\ \frac{1}{8}a\ \frac{1}{16}a\ ...$$
$$(g)\ b-2c\ \ b-c\ \ b\ \ b+c\ ...\quad (h)\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ ...$$
$$(i)\frac{p}{q^3}\ \frac{p}{q^2}\ \frac{p}{q}\ ...\quad (j)\frac{a^3}{b^2}\ \frac{a^2}{b}\ a\ b\ ...$$
$$(k)\ x^3\ 5x^2\ 25x\ ...\quad (l)1\ 1+x\ (1+x)^2\ (1+x)^3$$

116 page
ر ترتیب کے ابتدائی پانچ اجزاء لکھیے اور استقراری تعریف دیں

$$(a)u_r=2r+3\ \ (b)u_r=r^2\ \ (c)u_r=\frac{1}{2}r(r+1)$$
$$(d)u_r=\frac{1}{6}r(r+1)(2r+1)\ \ (e)u_r=2\times 3^r\ \ (f)u_r=3\times 5^{r-1}$$

ر ترتیب کے جزو کے لیے ممکنہ کلیہ لکھے

$(c)4\ 7\ 12\ 19\ ...\quad (d)\ 4\ 12\ 24\ 40\ 60\ ...\ a)9\ 8\ 7\ 6\ ...\quad (b)6\ 18\ 54\ 162\ ...$

$$(e)\frac{1}{4}\ \frac{3}{5}\ \frac{5}{6}\ \frac{7}{7}\ ...\quad (f)\ \frac{2}{2}\ \frac{5}{4}\ \frac{10}{8}\ \frac{17}{16}\ ...$$

مثلثی نمبروں کی ترتیب

تصویر 1.8 میں مثلثی انداز میں لگائے گئے کاٹے کے نشانات مثلثی اعداد ہیں۔ اگر $t_r$ کسی مثلثی نمبر کو ظاہر کر رہا ہو تو ہم بعد میں آنے والی صفوں میں دیکھ سکتے ہیں کہ

$$t_1=1$$

اور عمومی طور پر

$$t_r=1+2+3+...+r$$

یہاں تین نقاط 3 اور r کے درمیان آنے والے تمام قدرتی اعداد کو ظاہر کرتے ہیں تصویر 2.8 میں ایک علامتی مثلثی نمبر $t_r$ کو دکھایا گیا ہے(اسے r=9 کے لئے بنایا گیا ہے لیکن ہم r کی کوئی بھی قیمت لے سکتے ہیں۔) r کی قیمت معلوم کرنے کا ایک آسان طریقہ یہ ہے کہ اسی طرح نقاط کی ایک شکل بنائی جائے اور اُسے کاٹے کے نشانات کے ساتھ الٹا کر لگا دیا جائے، جیسے تصویر 3.8 میں دکھایا گیا ہے۔ نقاط اور کاٹے کے نشانات ایک مستطیل بنائیں گے، جس کی چوڑائی r اور لمبائی r+1 ہو گی. اس میں کُل ملا کر (r+1) چیزیں ہوں گی، جن میں سے آدھے نقاط ہیں اور آدھے کاٹے کے نشانات۔ یعنی کاٹے کے نشانات ہوں گے:

$$t_r=\frac{1}{2}r(r+1)$$

اس کا مطلب یہ ہوا کہ: سے r تک تمام قدرتی اعداد کا مجموعہ $\frac{1}{2}r(r+1)$ ہے۔

117 page

ہم اس دلیل کو الجبرائی شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں۔ اگر ہم اوپر سے نیچے کی طرف کاٹے کے نشانات کی گنتی کریں تو ہمیں حاصل ہو گا

$$t_r = 1 + 2 + 3 + \ldots + (r-2) + (r-1) + r,$$

لیکن اگر ہم اوپر سے نیچے کی طرف نقاط کی تعداد گنیں تو ہمیں حاصل ہو گا

$$t_r = r + (r-1) + (r-2) + \ldots + 3 + 2 + 1.$$

مستطیل میں موجود تمام چیزوں کا گننا ان دونوں مساواتوں کے حاصل جمع کے برابر ہو گا:

$$2t_r = (r+1) + (r+1) + (r+1) + \ldots + (r+1) + (r+1) + (r+1).$$

یعنی ہر r صف کے لئے ایک $(r+1)$ اس کا مطلب یہ ہوا کہ

$$2t_r = r(r+1)$$

$$t_r = \frac{1}{2}r(r+1)$$

ہم ترتیب $t_r$ کے لئے ایک استقرائی تعریف بھی وضع کر سکتے ہیں۔ تصویر 1.8 میں ہم دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی اگلے مثلثی نمبر کو حاصل کرنے کے لئے کاٹے کے نشانات کی اگلی صف میں ایک کا اضافہ کر دیا جائے یعنی

$$t_2 = t_1 + 2, t_3 = t_2 + 3$$

عمومی طور پر لکھا جا سکتا ہے کہ

$$t_{r+1} = t_r + (r+1)$$

اس تعریف کو مکمل کرنے کی غرض سے ہم $t_1 = 1$ یا $t_0 = 0$ کا انتخاب کر سکتے ہیں. اگر ہم $t_0 = 0$ انتخاب کریں تو ہم $t_1$ کو $r = 0$ سے معلوم کر سکتے ہیں، جیسے کہ:

عدد ضربیہ کی ترتیب

اگر ہمیں $t_r$ کی تعریف میں ایک جزو سے دوسرا جمع کی بجائے ضرب سے حاصل کریں تو ہمیں عدد ضربیہ کی ترتیب حاصل ہو گی۔

$$f_{r+1} = f_r \times (r+1) \quad r = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

یہاں ایک اہم نقطہ $f_0$ و 0لینا ہے (سوچئے!) بجائے اس کے کہ ہم $f = 0$ کو 1 لیں۔(یہ دیکھنے میں تھوڑا عجیب لگتا ہے لیکن اس کی توجیح اگلے سبق میں واضح ہو گی۔)

$$f_1 = f_o \times 1 = 1 \times 1 = 1\,,\ f_2 = f_1 \times 2 = 1 \times 2 = 2\,, f_3 = f_2 \times 3 = 2 \times 3 = 6$$

اسی طرح $1 \geq r$ والے کسی بھی عدد کے لئے لکھ سکتے ہیں کہ

$$f_r \;=\; 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times r.$$

یہ اتنی اہم ترتیب ہے کہ اس کی اپنی مخصوص علامت ہے $r!$ جسے r ضربیہ پڑھتے ہیں۔
r ضربیہ کی تعریف $1 = 0!$ اور $(r+1)! = r! \times (r+1)$ سے کی جاتی ہے۔
$1 \geq r$ کے لئے r! سے مراد 1 اور r کے درمیان آنے والے تمام قدرتی اعداد کا حاصل ضرب ہے۔

بہت سے کیلکولیٹرز میں اس کے لئے ایک مخصوص کلید ہو تی ہے۔ n کی چھوٹی قیمتوں کے لئے، ہمیں بالکل درست جواب ملتا ہے لیکن n=14 سے بڑے اعداد کے لئے ہمیں صرف ایک تخمینہ ملتا ہے۔

پاسکل کی ترتیب

ضرب کے اصول پہ مبنی ایک اور اہم ترتیب پاسکل کی ترتیب ہے۔ آپ اگلے سبق میں دیکھیں گے کہ یہ ترتیب $(x+y)^n$ جیسی تراکیب کی توسیع میں استعمال ہوتی ہیں۔ ایک علامتی مثال کی استقرائی تعریف یہ ہو گی:

$p_{r+1} = \frac{4-r}{r+1} p_r$ اور $p_0 = 1$

یہ تعریف ...r=0,1,2 کے لئے مطلوب اجزاء دیتی ہے

$$p_1 = \frac{4}{1}p_o = 4,\; p_2 = \frac{3}{2}p_1 = 6,\; p_3 = \frac{2}{3}p_2 = 4$$

$$p_4 = \frac{1}{4}p_3 = 1\,, p_5 = \frac{0}{5}p_4 = 0,\; p_6 = \frac{(-1)}{5}p_5 = 0,$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ایک خاص جگہ آ کے ترتیب میں ایک جزو 0 کے برابر آ جاتا ہے اور اس کی وجہ سے اگلے آنے والے تمام اجزاء بھی 0 کے برابر ہوں گے۔ لہذا مکمل ترتیب کچھ یوں بنے گی

$$1, 4, 6, 4, 1, 0, 0, 0, 0, 0, ....$$

یہ پا کی ترتیب کی صرف ایک سکل نسل ہے اور اس نسل کی اپنی حاصل علامت

$\binom{4}{r}$ ہے ۔ مثال کے طور پر $\binom{4}{0} = 1\; \binom{4}{1} = 4\; \binom{4}{2} = 6$ وغیرہ۔ پاسکل کی دیگر تراتیب میں 4 کی جگہ مختلف اعداد ہوں گے۔

پاسکل کی ترتیب کی عمومی تعریف یہ ہے:

$$\binom{n}{0} = 1\; \binom{n}{r+1} = \frac{n-r}{r+1}\binom{n}{r}\; r = 0, 1, 2, 3, ...$$

آپ $n = 0, 1, 2, 3$ کے لئے پاسکل کی ترتیب خود بنائیے۔

$$n\; = 0,\; 1,\; 0,\; 0,\; 0,\; 0, ...$$

$$n\; = 1,\; 1,\; 1,\; 0,\; 0,\; 0, ...$$

$$n\; = 2,\; 1,\; 2,\; 1,\; 0,\; 0, ...$$

$$n\; = 3,\; 1,\; 3,\; 3,\; 1,\; 0, ...$$

صفر کے اعداد کو شمار کئے بغیر پاسکل کی ترتیب کو پاسکل کی مثلث کہا جاتا ہے۔ اس کا سب سے پہلا تاریخی حوالہ چین میں ملتا ہے لیکن یورپ میں بلیز پاسکل (سترہویں صدی کا ریاضی دان اور نظریہ احتمال کے بانیان میں سے ایک) کو یورپ میں اس ترتیب کی اشاعت و ترویج کا سبب مانا جاتا ہے۔ اسے عام طور پر مساوی الشاقین مثلث کی صورت میں ظاہر کیا جاتا ہے، جیسے تصویر 4.8 میں دکھایا گیا ہے۔ لیکن تصویر 5.8 میں دکھائی گئی اس ترتیب کی الجبرائی شکل زیادہ عام فہم ہے کہ ہر قطار r کی کسی خاص قیمت کی نشاندہی کرتی ہے۔

119 page

حیران کُن طور پر ماسوائے 1 کے، تصویر 4.8 میں ہر عدد اپنے سے اوپر والی صف میں موجود دو قریب ترین اعداد کا مجموعہ ہے۔ آپ نے یہ اعداد پہلے بھی دیکھے ہیں۔ فصل 1.8 کی ترتیب d دیکھیے۔

مشق 8ب

1. تصویر 3.8 کو بطور مثال سامنے رکھیں
کاٹے کے نشانات کی ایک تصویر بنائیے جو r مثلثی نمبر $t_r$ کو ظاہر کرے۔
نقاط کو استعمال کرتے ہوئے ایک اور تصویر بنائیے جو $t_{r-1}$ کو ظاہر کرے۔
ان دونوں کو تصاویر کو جوڑیں اور ثابت کریں کہ

$$t_r + t_{r-1} = r^2$$

ذیل میں دیے گئے کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے جزو c کو الجبرائی طریقے سے ثابت کریں

$$t_r = \frac{1}{2}r(r+1)$$

2. $r \geq 1$ والے تمام اعداد کے لئے کیr صورت میں $t_r - t_{r-1}$ کے لئے ترکیب بنائیں۔
جزو 2(a) اور سوال 1 (c) کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ

$$1^3, 2^3, 3^3, ..., n^3$$

جزو b کو استعمال کرتے ہوئے تراکیب کو مثلثی اعداد کی صورت میں لکھیں اور ثابت کریں کہ

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

3. کیلکولیٹر کو استعمال کئے بغیر مندرجہ ذیل کی قیمتیں معلوم کریں۔

$$(a) 7! \quad (b) \frac{8!}{3!} \quad (c) \frac{7!}{4! \times 3!}$$

4. مندرجہ ذیل کو عدد ضربیہ کی صورت میں لکھیں۔

$$(a)\ 8 \times 7 \times 6 \times 5 \quad (b) 9 \times 10 \times 11 \times 12 \quad (c) n(n-1)(n-2)$$

$$(d)\ n(n^2-1) \quad (e) n(n+1)(n+2)(n+3) \quad (f)(n+6)(n+5)(n+4)$$

$$(g) 8 \times 7! \quad (h) n \times (n-1)!$$

5حل کریں۔

$$(a)\frac{12!}{11!}\ \ (b)23!-22!\ \ (c)\frac{(n+1)!}{n!}\ \ (d)(n+1)!-n!$$

7.ثابت کریں۔

$$\frac{(2n)!}{n!}=2^n(1\times 3\times 5\times \ldots \times (2n\ -\ 1))$$

فصل 4.8 میں دی گئی استقرائی تعریف کو استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل پاسکل کی تراکیب لکھیں۔

$$(a)n=5,\quad pt(b)n=6,\quad (c)n=8$$

120 page

$\binom{n}{r}$ کی استقرائی تعریف کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں

$$\binom{9}{6} = \frac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3}$$

اسی طریقے کو استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل کو بھی عدد ضربیہ کی صورت میں لکھیں۔

$$(a)\binom{11}{4}\quad (b)\binom{11}{7}\quad (c)\binom{10}{5}\quad (d)\binom{12}{3}\quad (e)\binom{12}{9}$$

9. سوال 8 کے جوابات ایک تعمیمی نتیجے کی تجویز دیتے ہیں۔ $\frac{n!}{r! \times (n-r)!} = \binom{n}{r}$ فرض کریں کہ یہ نتیجہ درست ہے اور ثابت کریں

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

10. حل کریں

$$(a)\binom{6}{3} + \binom{6}{4} = \binom{7}{4}\quad (b)\binom{8}{5} + \binom{8}{6} = \binom{9}{6}$$

ان جوابات کی بنیاد پر ایک تعمیمی ترکیب لکھیے۔

n=2.11 ے لئے پاسکل کی ترتیب ہے

اس ترکیب کے اجزاء کا مجموعہ 4 کے برابر ہے۔

n کی دیگر قیمتوں کے لئے پاسکل کی تراتیب لکھیں اور اُن کے مجموعے معلوم کریں.

حسابی ترتیب

حسابی ترتیب یا حسابی تاعد ایک ایسی ترتیب ہے، جس کے اجزاء مستقل قدم کی صورت بڑھتے یا گھٹتے ہیں۔ مثال کے طور پر فصل 1.8 کی ترتیب c دیکھیں۔ حسابی ترتیب کی استقرائی تعریف یہ ہو گی:

$$u_1 = a,\ u_{r+1} = u_r + d$$

عدد d کو مشترکہ فرق کہا جاتا ہے۔ ترتیب c کا پہلا جزو a=99 جبکہ مشترکہ فرق d= -2 ہے

مثال 1.5.8

سیما اگلے دس سالوں کے لئے ایک مخصوص رقم چندے میں دینا چاہتی ہے۔ اُس ے پہلے سال سو روپے اور پھر ہر آنے والے سال میں بیس روپے کا اضافہ کرنے کا فیصلہ کیا ہے۔اس حساب سے وہ اپنے آخری سال میں کتنی رقم چندے میں دے گی؟ اور اُن دس سالوں میں چندے میں دی جانے والی مکمل رقم کتنی ہو گی؟

اگرچہ سیما نے رقم 10 بار دینی ہے لیکن رقم میں اضافہ صرف 9 بار ہو گا۔ لہذا سیما آخری سال میں
دے گی۔

$$(100 \,+\, 9 \times\, 20) = 280$$

اور چندے میں دی جانے والی مکمل رقم اگر S ہو تو

$$S = 100 + 120 + 140 + ... + 240 + 260 + 280$$

چونکہ یہاں صرف 10 اجزاء ہیں، اس لئے انہیں جمع کرنا آسان ہے لیکن ہم ایک ایسا طریقہ معلوم کریں گے، جس سے ہم کسی بھی حسابی ترتیب کے اعداد کا مجموعہ حاصل کر سکتے ہیں۔ اوپر دیے گئے اعداد کو الٹا کر لکھیے

121 page

$$S = 280 + 260 + 240 + \ldots + 140 + 120 + 100.$$

دونوں مساواتوں کو جمع کیجیے

$$2S = 380 + 380 + 380 + \ldots + 380 + 380 + 380,$$

یہاں عدد 380 دس بار آیا ہے۔ لہٰذا
$2S = 380 \times 10 = 3800$ سیما دس سالوں میں چندے میں 1900 روپے دے گی۔
ان حسابات کو تصاویر 2.8 اور 3.8 کی مدد سے سمجھایا گیا ہے۔ سیما کی طرف سے دی جانے والی رقم تصویر 6.8 کی پہلی صف میں دیکھی جا سکتی ہے۔ (کاٹے کے ہر نشان کی قیمت 20 روپے ہے۔) تصویر 7.8 میں نقاط کی مدد سے ایک اور نقل تیار کر کے اُسے کاٹے کے نشانات کے ساتھ رکھا گیا ہے۔ اس طرح 10 صفیں ہیں اور ہر صف میں 19 نقاط اور کاٹے کے نشانات ہے۔ ہر صف کی قیمت 380 روپے ہے۔ مثال 1.5.8 میں حسابی ترتیب کے دو مندرجہ ذیل خصائص دیکھے جا سکتے ہیں۔
حسابی ترتیب میں صرف متناہی اجزاء ہی ہوتے ہیں۔
حسابی اوسط کے تمام اجزاء کا مجموعہ معلوم کرنا کئی حوالوں سے دلچسپی کا باعث ہے۔ اس طرح کی حسابی ترتیب کو حسابی تسلسل بھی کہا جاتا ہے۔
مثال 1.5.8 کے تمام اجزاء حسابی ترتیب بناتے ہیں لیکن اگر انہیں جمع کیا جائے

$$100 + 120 + 140 + \ldots + 240 + 260 + 280$$

تو یہ حسابی تسلسل کہلائے گا۔
عمومی طور پر، حسابی ترتیب

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$$

میں n اجزاء ہوتے ہیں اور پہلے جزو سے n-1 جزو تک تمام اجزاء کا مشترک فرق ہوتا d ہے۔ اگر ہم آخری جزو کو l سے ظاہر کریں تو ہم لکھ سکتے ہیں

$$l = a + (n - 1)d.$$

اس کلیہ کی مدد سے ہم a,l,n,d میں سے کوئی بھی مقدار معلوم کر سکتے ہیں۔

فرض کرتے ہیں کہ ان تمام اجزاء کا مجموعہ کے S برابر ہے۔ سو a,l,n,d کی صورت میں S کا کلیہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔

122 page

طریقہ نمبر 1 یہ مثال 1.5.8 میں دی گئی دلیل کی تعمیمی صورت ہے۔ تسلسل کو لکھا جا سکتا ہے

$$S = \quad a \quad + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (l-2d) + (l-d) + l.$$

اب اسے الٹا کر لکھیے

$$S = \quad l \quad + (l-d) + (l-2d) + \ldots + (a+2d) + (a+d) + a.$$

دونوں مساواتوں کو جمع کرتے ہیں۔

$$2S = (a+l) + (a+l) + (a+l) + \ldots + (a+l) + (a+l) + (a+l),$$

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ a+l کا جزو n دفعہ آ رہا ہے لہٰذا, $2S = n(a+l)$, $S = \frac{1}{2}n(a+1)$.

طریقہ نمبر 2 اس طریقے میں ہم فصل 2.8 میں دیے گئے مثلثی اعداد کے کلیے کو استعمال کریں گے۔
حسابی تسلسل یہ ہے

$$2S = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (a+(n-1)d)$$

a اور d والے تمام اجزاء کو علیحدہ علیحدہ جمع کرنے سے

$$S = (a+a+\ldots+a) + (1+2+3+\ldots+(n-1))$$

پہلی قوسین میں a دراصل n دفعہ آ رہا ہے۔ دوسری قوسین 1 سے n-1 تک آنے والی تمام قدرتی اعداد کا مجموعہ ہے۔ مثلثی کے اعداد کے کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے ہم لکھ سکتے ہیں:

$$t_{n-1} = \frac{1}{2}(n-1)((n-1)+1) = \frac{1}{2}(n-1)n$$

یہاں r برابر ہے n-1 کے۔

$$S = na + \frac{1}{2}(n-1)nd = \frac{1}{2}(2a + (n-1)d)$$

یہ وہی جواب ہے جو ہمیں طریقہ نمبر 1 سے ملا ہے۔ حسابی ترتیب کے تمام نتائج کا خلاصہ یہ ہے۔

ایک حسابی ترتیب کے n اجزاء ہوتے ہیں، جس میں پہلے جزو کو a اور ان کے مشترکہ فرق کو d کہتے ہیں $l = a + (n-1)d$ اور ان کا مجموعہ

$$S = \frac{1}{2}n(a+l) = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)d)$$

ہوتا ہے۔

123 page

ال 2.5.8 پہلے طاقn قدرتی اعداد کا مجموعہ معلوم کیجے۔ طریقہ نمبر 1 طاق اعداد کی حسابی ترتیب میں پہلا جزو a=1 ہے اور مشترکہ فرق d=2 ہے۔ لہٰذا

$$S = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)d) = \frac{1}{2}n(2 + (n-1)2) = \frac{1}{2}n(2n) = n^2$$

طریقہ نمبر 2 1 سے 2n تک تمام قدرتی نمبر لکھیں۔ اب n جفت اعداد یعنی 2,4,6,...,2n کو مٹا دیں۔ ہمارے پاس صرف n طاق اعداد باقی بچیں گے۔ 1 سے 2n تک اعداد کا مجموعہ $t_r$ ہے۔ یہاں برابرr ہے کے۔2n سو

$$t_{2n} = \frac{1}{2}(2n)(2n+1) = n(2n+1)$$

جفتn اعداد کا مجموعہ ہو گا:

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = 2t_n = n(n+1)$$

پہلے طاقn اعداد کا مجموعہ ہو گا

$$n(2n+1) - n(n+1) = n((2n+1) - (n+1)) = n(n) = n^2$$

طریقہ نمبر 3 تصویر 8.8 میں ایک مربع بنایا گیا ہے جس میں صفیںn ہیں اور ہر صف میں کاٹےn کے نشانات ہیں۔ (یہ مربع n=7 کے لئے بنایا گیا ہے۔)آپ نقاط کے ذریعے ظاہر کئے گئے ہر میںL کاٹے کے نشانات گن سکتے ہیں، لہٰذا $n^2 = 1 + 3 + 5 + \ldots$

مثال 3.5.8

ایک طالب علم 426 صفحات کی کتاب پڑھتا ہے۔ جیسے جیسے وہ کتاب پڑھتا جاتا ہے، دلچسپی کی وجہ سے اُس کی پڑھنے کی رفتار بڑھتی جاتی ہے۔ پہلے دن وہ 19 صفحات پڑھتا ہے اور ہر نئے دن 3 صفحات کا مزید اضافہ کرتا جاتا ہے۔ اُسے کتاب ختم کرنے میں کتنے لگیں گے؟ $a = 19, d = 3$ . $S = 426$, ہمیں دیا گیا ہے $S = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)d)$,

$$S = \tfrac{1}{2}n(2a + (n-1)d),$$

$$426 = \frac{1}{2}n(38 + (n-1)3),$$

$$852 = n(3n + 35),$$

$$3n^2 + 35n - 825 = 0.$$

دو درجی الجبرائی کلیہ کا اطلاق کرنے سے

$$n = \frac{-35 \pm \sqrt{35^2 - 4 \times 3 \times 9 - (852)}}{2 \times 3} = \frac{-35 \pm 107}{6}$$

چونکہ n ہمیشہ مثبت ہو گا۔ لہٰذا $n = \frac{-35+107}{6} = \frac{72}{6} = 12$ وہ کتاب کو 12 دن میں کرے گا۔

page 124

1. مندرجہ ذیل میں سے کون سی تراتیب کسی حسابی ترتیب کے پہلے چار اجزاء کو ظاہر کرتی ہیں؟ اُن تراتیب کا مشترکہ فرق بھی لکھیں۔

$$7 \quad 10 \quad 13 \quad 16\ldots$$
$$3 \quad 5 \quad 9 \quad 15\ldots$$
$$1 \quad 0.1 \quad 0.01 \quad 0.001\ldots$$
$$4 \quad 2 \quad 0 \quad -2\ldots$$
$$2 \quad -3 \quad 4 \quad -5\ldots$$
$$p-2q \quad p-q \quad p \quad p+q\ldots$$
$$\frac{1}{2}a \quad \frac{1}{3}a \quad \frac{1}{4}a \quad \frac{1}{5}a\ldots$$
$$x \quad 2x \quad 3x \quad 4x\ldots$$

2. مندرجہ ذیل حسابی تراتیب کا چھٹا جزو بتائیں اور جزوr کے لئے ترکیب بھی لکھیں۔

$$2 \quad 4 \quad 6\ldots$$
$$17 \quad 20 \quad 23\ldots$$
$$5 \quad 2 \quad -1\ldots$$
$$1.3 \quad 1.7 \quad 2.1\ldots$$
$$1 \quad 1\frac{1}{2} \quad 2\ldots$$
$$73 \quad 67 \quad 61\ldots$$
$$x \quad x+2 \quad x+4\ldots$$
$$1-x \quad 1 \quad 1+x\ldots$$

3. مندرجہ ذیل حسابی تراتیب میں پہلے تین اور آخری جزو دیے گئے ہیں۔ اجزاء کی تعداد معلوم کریں۔

$$4 \quad 5 \quad 6 \quad \ldots \quad 17$$
$$3 \quad 9 \quad 15 \quad \ldots \quad 525$$
$$8 \quad 2 \quad -4 \quad \ldots \quad -202$$
$$2\frac{1}{8} \quad 3\frac{1}{4} \quad 4\frac{3}{8} \quad \ldots \quad 13\frac{3}{8}$$
$$3x \quad 7x \quad 11x \quad \ldots \quad 43x$$

$$-3 \quad -1\frac{1}{2} \quad 0 \quad ... \quad 12$$

$$\frac{1}{6} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad ... \quad 2\frac{2}{3}$$

$$1-2x \quad 1-x \quad 1 \quad ... \quad 1+25x$$

4. مندرجہ ذیل حسابی تراتیب میں دیے گئے اجزاء کا مجموعہ معلوم کریں۔

$$2+5+8+...$$

20

$$4+11+18+...$$

15

$$8+5+2+...$$

12

$$\frac{1}{2}+1+1\frac{1}{2}+...$$

58

$$7+3+(-1)+...$$

25

$$1+3+5+...$$

999

$$a+5a+9a+...$$

40

$$-3p-6p-9p-...$$

5. مندرجہ ذیل حسابی تراتیب میں اجزاء کی تعداد معلوم کریں اور اُن کا مجموعہ لکھیں۔

$$5+7+9+...+111$$

$$8+12+16...+84$$

$$7+13+19+...+277$$

$$8+5+2+...+(-73)$$

$$-14-10-6-...+94$$

$$157+160+163+...+529$$

$$10+20+30+...+10000$$

$$1.8+1.2+0.6+...+(-34.2)$$

6. مندرجہ ذیل حسابی تراتیب میں آپ کو دو اجزاء دیے گئے ہیں۔ پہلا جزو اور مشترکہ فرق معلوم کریں۔

$= \ -13 \ 11th = \ 2 \ 5th = \ 5.0 \ 13th = \ 3.5 \ 8th = \ 47 \ 10th = \ 12 \ 3rd = \ 35 \ 9th = \ 15 \ 4th$
$7th = 2p + 7 \ 3rd = \ -7x \ 11th = 2x \ 2nd = 5 \ 7th = \ -3 \ 3rd = \ -32 \ 20th = \ -8 \ 12th$
$19 + 4p =$ 7. معلوم کریں کہ مندرجہ ذیل حسابی تسلسل میں کتنے اجزاء کا مجموعہ دیے گئے حاصل جمع کے برابر ہو گا۔

$27 + 23 + = 680 \ 20 + 23 + 26 + \ldots = 162 \ 8 + 9 + 10 + \ldots = 820 \ 3 + 7 + 11 + \ldots$
$= 2338 \ -11 - 4 + 3 + \ldots = 1017.6 \ 1.1 + 1.3 + 1.5 + \ldots = -2040 \ 19 + \ldots$

page125

8. ایک گلہری اخروٹ اکٹھے کرتی ہے۔ مہینے کے پہلے دن اُسے 5 اخروٹ ملتے ہیں، دوسرے دن 8 اور تیسرے دن 11 اور اس طرح ایک حسابی قاعدہ چلتا ہے۔ a. بیسویں دن اُسے کتنے اخروٹ ملیں گے؟ b. کتنے دنوں کے بعد گلہری کے پاس 1000 سے زیادہ اخروٹ ہوں گے؟ 9. کلثوم نے گاڑی خریدنے کے لئے بغیر سود کے قرضہ لیا۔وہ غیر مساوی اقساط کی صورت میں قرض کی ادائیگی کرتی ہے۔ پہلے مہینے وہ تیس ڈالر ادا کرتی ہے اور پھر ہر آنے والے مہینے میں مزید دو ڈالر کا اضافہ کرتی ہے۔ اُسے 24 اقساط ادا کیں۔ a. آخری قسط کی رقم معلوم کریں۔ b. قرضے کی مکمل رقم معلوم کریں۔ 10. a. 1 سے 100 تک تمام قدرتی اعداد کا مجموعہ معلوم کریں۔ b. 101 سے 200 تک تمام قدرتی اعداد کا مجموعہ معلوم کریں۔ c. n+1 سے 2n تک قدرتی اعداد کے لئے ترکیب معلوم کریں اور اُس حل کریں۔ 11. ایک ملازم یکم جنوری 2000ء کو کام کا آغاز کرتا ہے اور اُس کی سالانہ تنخواہ 30000 ڈالر ہے۔ یکم جنوری 2015ء تک اُس کی تنخواہ میں ہر سال 800 ڈالر کا اضافہ ہوتا ہے۔ وہ اسی تنخواہ پر 31 دسمبر2040ء تک کام کرتا ہے۔ اُس نے اپنی مکمل پیشہ وارانہ زندگی میں کتنی رقم کمائی؟ 1. ایک ترتیب کی استقرائی تعریف یہ ہے: $\mathcal{U}_{r+1} = 3\mathcal{U}_r - 1$ a. اس ترتیب کے پہلے پانچ اجزاء معلوم کریں اگر $c = 1$ $c = 2$ $c = 0$ $c = \frac{1}{2}$ b. ثابت کریں کہ c کی ہر قیمت کے لئے حصہ میں(a) دیے گئے اجزاء کو $\mathcal{U}_r = \frac{1}{2} + b \times 3^r$ لکھا جا سکتا ہے۔ c. ثابت کریں اگر r کی کسی قیمت کے لئے $\mathcal{U}_r = \frac{1}{2} + b \times 3^r$ تو $\mathcal{U}_{r+1} = \frac{1}{2} + b \times 3^{r+1}$ 2. مندرجہ ذیل ترتیب کے لئے u4 کی قیمت معلوم کریں۔

$$\mathcal{U}_{r+1} = (2 + \mathcal{U}_r)^2 \quad \mathcal{U}_1 = 0$$

3. ایک ترتیب کی تعریف ایسے کی گئی ہے

$$\mathcal{U}_{n+1} = \sqrt{(4 - \mathcal{U}_n)^2}$$

یہاں کوئی u1 بھی حقیقی عدد ہے۔

a. اگر u1=1 ہو تو u2,u3,u4 معلوم کریں اور ترتیب کے رویے کی بابت بتائیں۔ b. اگر u1=6 ہو تو ترتیب کا رویہ کیا ہو گا؟ c. U1 کی کس قیمت کے لئے ترتیب کے تمام اجزاء ایک دوسرے کے برابر ہوں گے؟ 4. ایک ترتیب کی تعریف ایسے کی گئی ہے $\mathcal{U}_{n+1} = \mathcal{U}_n{}^2 - 1$

یہاں کوئی u1 بھی حقیقی عدد ہے۔ a. ترتیب کے رویے کی بابت بتائیں اگر u=0, u=1 اور u=2. b. اگر u2=u1 ہو تو u1 کی دو ممکنہ قیمتیں معلوم کریں۔ c. اگر u3=u1 ہو تو ثابت کریں کہ $\mathcal{U}_1{}^4 - 2\mathcal{U}_1{}^2 - \mathcal{U}_1 = 0$

page126 حسابی تسلسل کا جزو $r$ $1+4r$ کے برابر ہے۔ n کی صورت میں اس تسلسل کا مجموعہ معلوم کریں۔ ایک حسابی تسلسل کے پہلے دو اجزاء کا مجموعہ 18 اور پہلے چار اجزاء کا مجموعہ 52 ہے۔ پہلے آٹھ اجزاء کا مجموعہ معلوم کریں۔ ایک حسابی تسلسل کے پہلے 20 اجزاء کا مجموعہ 50 اور اگلے 20 اجزاء کا مجموعہ منفی 50 ہے۔اس تسلسل کے پہلے 100 اجزاء کا مجموعہ معلوم کریں۔ ایک حسابی تسلسل کا پہلا جزو a اور مشترک فرق منفی 1 ہے۔ پہلے اجزاءn کا مجموعہ پہلے 3n اجزاء کے مجموعے کے برابر ہے۔ a کو n کی صورت میں لکھیے۔ مندرجہ ذیل حسابی تسلسل کا مجموعہ معلوم کریں۔ اس تسلسل کا ہر تیسرا جزو مٹا دیں یعنی اب باقی اجزاء کا مجموعہ معلوم کریں۔ ایک حسابی تسلسل، جس کا پہلا جزو a اور مشترک فرق d ہے، کا مجموعہ T ہے۔ پہلے 50 طاق اعداد کا مجموعہ $1/2$ T-1000 ہے۔ d کی قیمت معلوم کریں۔ ذیل میں دی گئی ترتیب میں ہر اگلا نمبر پچھلے سے 1.0 درجے بڑا ہے۔ اس ترتیب میں کُل کتنے اجزاء ہیں؟ تمام اجزاء کا مجموعہ معلوم کریں۔ ذیل میں ایک ترتیب دی گئی ہے۔ U3 کی قیمت معلوم کریں۔ $u_n - u_{(n+1)}$ کو n کی صورت میں ظاہر کریں اور حل کریں۔ اس ترتیب کے اجزاء کا مشترک فرق ایک حسابی ترتیب بناتا ہے۔ اس حسابی تسلسل کے لئے پہلا جزو، مشترک فرق اور پہلے 1000 اجزاء کا مجموعہ معلوم کریں۔ ایک کھلونے بنانے والی کمپنی اپنی پیداواری صلاحیت میں اضافہ کے لئے ہر ہفتہ 8 کھلونے زیادہ بناتی ہے تاوقتیکہ کہ پیداواری صلاحیت 1000 کھلونوں تک بڑھ سکے۔ پہلے ہفتے 280 کھلونے بنائے جاتے ہیں، دوسرے ہفتے 288 اور اسی طرح یہ سلسلہ چلتا رہتا ہے۔ ثابت کریں 91 ویں ہفتہ میں 1000 کھلونے بنائے جائیں گے۔ سن 1971ء میں تعمیر کردہ ایک مکان 999 سال کے ٹھیکے پر دیا جاتا ہے۔ اس معاہدے میں سالانہ کرایہ بھی شامل ہے۔ ٹھیکے کے پہلے 21 سالوں کے لئے سالانہ کرایہ 28 یورو طے پاتا ہے جسے اگلے 21 سالوں کے لئے 14 یورو سے 42 یورو تک بڑھایا جائے گا اور اُس کے بعد ہر 21 سال کے دورانیے کے اختتام پر 14 یورو کا اضافہ ہو گا۔ اگر ٹھیکہ 999 سال تک چلتا ہے تو اس عرصے میں 21 سال کے کُل کتنے دورانیے آئیں گے اور بقیہ کتنے سال بچ جائیں گے؟ 21 سال کے تمام دورانیوں میں ادا کیا گیا کُل کرایہ معلوم کریں۔

page 127 15. ایک حسابی تساعد کا پہلا جزو a اور مشترک فرق 10 ہے۔ اس تساعد کے پہلے n اجزاء کا مجموعہ 10000 ہے۔a کو n کی صورت میں ظاہر کریں اور ثابت کریں کہ اس تساعد کا n جزو ہو گا:

$$\frac{10000}{n} + 5(n-1)$$

اگر n جزو 500 سے کم ہو تو ثابت کریں $n^2 - 101n + 2000 < 0$ اور کیn سب سے بڑی قیمت معلوم کریں۔
16. تین تراتیب کی استقرائی لحاظ سے تعریف کی گئی ہے:
$u_0 = 0$ $u_{r+1} = u_r + (2r+1)$ $u_0 = 0$ $u_1 = 1$ $u_{r+1} = 2u_r - u_{r-1}$ $r \geq 1$ ہر ترتیب کے پہلے چند اجزاء معلوم کریں اور $u_r$ کا کلیہ بتائیں۔ معلوم کریں کہ جو کلیہ آپ نے اخذ کیا ہے، وہ ترتیب کے اجزاء کو درست طور سے معلوم کرتا ہے۔ 17. پاسکل کی ترتیب کو استعمال کرتے ہوئے ایک نئی ترتیب Fn بنائی گئی ہے۔

$$\binom{0}{0} \quad \binom{0}{1} + \binom{1}{0} = F_1 \quad \binom{0}{2} + \binom{1}{1} + \binom{2}{0} = F_2$$

$$F_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \ldots + \left(1n-1\right) + \binom{0}{n}$$

ثابت کریں کہ تصویر 5.8 میں وتری سطروں کے ساتھ ساتھ دیے گئے اعداد کو جمع کرنے سے $F_n$ کی ترتیب حاصل کی جا سکتی ہے۔ کیn چھوٹی قیمتوں کے لئے ثابت کریں کہ ۔ (اسے فیبوناچی ترتیب کہتے ہیں۔ فیبو ناچی سے سن 1200ء کے قریب اٹلی کو عرب دنیا کے الجبرائی طریقوں سے متعارف کروایا تھا۔) پاسکل کی ترتیب کی خاصیت $\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r+1} + \binom{n}{r}$ (مشق 8ب کا سوال نمبر 10 دیکھیں۔) استعمال کرتے ہوئے وضاحت کریں: $F_3 + F_4 = F_5$ $F_4 + F_5 = F6$

# باب 15

# دہرا تفرقات

سبق مشتق کے اگلے تصور کو پیش کرتا ہے۔ اِس سبق کو مکمل کرنے کے بعد ، آپ اِن باتوں کے اہل ہوجائینگے۔

ترسیمات کی ساخت اور اُن کے حقیقی دُنیا میں اطلاق کے لئے ، دو درجی مشتق کی افادیت کو سمجھنا۔

نقطہِ عظیمت اور نقطہِ اقلیت کے درمیان امتیازی فرق کو سمجھنے کے لئے دو درجی مشتق کو استعمال کرنا۔

نقطہِ موڑ پر دودرجی مشتق کے صفر ہوجانے کے تصور کو سمجھنا۔

## 1.15 ترسیمات کی تیاری اور اُنکے مفہوم

سبق نمبر 7 میں حاصل ہونے والے نتائج ، کسی تفاعل کی خصوصیات اور مشتق کی قیمتوں کے درمیانی تعلق، صرف اُن تفاعل تک ہی محدود تھے جو کہ اپنے اپنے دائرہ کار میں مسلسل ہوتے تھے۔ اُن تمام نتائج میں اِس بات کو استعمال کیا گیا تھا کہ ترسیم کے کسی خاص نقطے پر مشتق کی قیمت، صرف اُس نقطے پر تفاوت کی پیمائش ہی نہیں کرتا ہے بلکہ وہ خود ایک تفاعل کے طور پر تصور کیا جاتا ہے۔

اِس سبق میں ہمیں مزید ایک پابندی لگانی پڑے گی ۔ اُن تفاعل پر جنکے ترسیم میں اچانک تبدیلی نہیں ہوتی ہے، اُن تفاعل کو ہموار تفاعل کہا جاتا ہے۔ یعنی مثال کے طور پر ، ایک تفاعل $(x-1)\ x^{\frac{3}{2}}$ کے لئے ، آپ کو اُس کے دائرہ کار میں سے نقطہِ عجب کو باہر نکال دینا ہوگا، جوکہ اِس مثال میں مبدا ہے ۔ (مثال 3.2.7 سے )

ہموار ہونے کی شرط سے ظاہر ہوتا ہے کہ مشتق ، جوکہ خود ایک تفاعل ہے، مسلسل ہے اور اُس کا تفرق لیا جاسکتا ہے۔ اُس کے نتیجے کو دو درجی مشتق کہا جاتا ہے۔ اُسے عام طور پر $f''(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اِسی طرح سے اُسے $\frac{d^2y}{dx^2}$ سے بھی ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 1.1.15 $y = f(x) = x^3 - 3x^2$ کے ترسیم میں، اُن وقفوں کی شناخت کیجئے جہاں $f'(x)$

$f(x)$ اور $f''(x)$ مثبت ہوتے ہوں، اُن کا ترسیمی مفہوم بیان کیجئے۔

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = 6x - 6$$

خاکہ 1.15 میں اِس تفاعل ، اُسکے پہلے مشتق اور دوسرے مشتق کی ترسیمات دکھائی گئی ہیں۔
اِس خاکہ سے ظاہر ہوتا ہے کہ تفاعل $f(x) = x^2(x-3)$ میں، جب $x > 3$, ہو تب $f(x) >$ ,
0 ہوتا ہے۔ کیx اِن تمام قیمتوں کیلئے کی ترسیم، - محورx کے اُوپر حاصل ہوتی ہے۔
اِسی طرح سے تفاعل $f'(x) = 3x(x-2)$ میں ، جب $x > 2$ یا $x < 0$ ہو تب ہوتا ہے۔ f(x) کی
ترسیم میں، اِس وقفے میں تفاوت کی قیمت مثبت ہوتی ہے، تاکہ f(x) کی قیمت بڑھتی جائے۔
آخر میں، تفاعل $f''(x) = 6(x-1)$ میں، جب $x > 1$, ہو تب $f''(x) > 0$ ہوتا ہے۔ ایسا
ظاہر ہوتا ہے کہ اِس وقفے میں f(x) کی ترسیم اُوپر کی جانب منحرف ہوتی ہوئی دکھائی دیتی ہے۔
"اُوپر کی جانب منحرف ہونے" کے اِس تصور کو آسانی سے سمجھنے کیلئے ، تفاوت کیلئے حرف g کو
استعمال کرتے ہیں
یعنی $g = f'(x)$ ہوتا ہے۔ اِسی طرح سے $f''(x) = \frac{dg}{dx}$ ہوتا ہے، جو کہ x کی مناسبت سے تفاوت کی تبدیلی
کی شرح کو ظاہر کرتا ہے۔ جس وقفے میں $f''(x) > 0$ ہوتا ہے، وہاں تفاوت کی قیمت بڑھتی جاتی ہے،
جیسے جیسے x کی قیمت بڑھنے لگتی ہے۔
درجِ بالا خاکہ 1.15 میں درمیانی ترسیم میں اِسے دیکھا جاسکتا ہے، جو کہ ایک مربعی ترسیم ہے جس
کا نقطہ راس ((1, -3 ہے۔
اسی لئے اس ترسیم کے بائیں جانب تفاوت کی قیمت نقطہ (1,-2) پر بڑھتے ہوئے 3- ہوجاتی ہے۔ نقطہ
اقلیت (2,-4) سے گزرتے ہوئے صفر ہوجاتی ہے اور پھر بڑھ کر مثبت ہوجاتی ہے۔ اس کے بعد جب x
< 2 ہوتا ہے تو لگاتار بڑھنے لگتی ہے۔
درجِ بالا خاکہ 2.15 میں تین منحنی دکھائے گئے ہیں۔ اگر $f''(x) > 0$ ہو تو اُوپر کی جانب انحراف ہوتا ہے
اور اگر $f''(x) < 0$ ہو تو نیچے کی جانب انحراف ہوتا ہے۔ یہاں یہ بات نہایت اہمیت کی حامل
ہے کہ یہ خاصیت ہمیشہ تفاوت کی علامت پر منحصر نہیں ہوتی ہے۔ ایک منحنی اُوپر کی جانب
منحرف ہوسکتی ہے اگر اُس کا تفاوت مثبت ہو یا منفی ہو یا صفر ہو۔
مثال نمبر 2.1.15
اگر y = f(x) جہاں $x > 0$ , $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ ہو اور اُس کا دائرہ کار $x > 0$ ہو۔ تفاعل f (x) کی تفتیش کیجئے۔
دیئے گئے تفاعل $f(x)$ کو آپ یا تو $\frac{x-1}{x^2}$

اس طرح سے یا $x^{-1} - x^{-2}$

اس طرح سے لکھ سکتے ہیں۔
اسی لئے ،

$$f'(x) = -x^{-2} + 2x^{-3} = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{-x+2}{x^3}$$

اور

$$f''(x) = 2x^{-3} - 6x^{-4} = \frac{2}{x^3} - \frac{6}{x^4} = \frac{2(x-3)}{x^4}$$

ہوتے ہیں۔ دیئے گئے دائرہ کار میں، ایسا لگتا ہے کہ

$$\begin{array}{lcl} f(x) < 0, x < 1 & \text{and} & f(x) > 0, x > 1; \\ f'(x) > 0, x < 2 & \text{and} & f'(x) < 0, x > 2; \\ f''(x) < 0, x < 3 & \text{and} & f''(x) > 0, x > 3 \end{array}$$

اس لئے اِس کی ترسیم محور کے نیچے ہوتی ہے اگر $0 < x < 1$ ہو اور محور کے اُوپر ہوتی ہے اگر $x > 1$ ہو۔ اور یہ ترسیم محور کو نقطہ پر قطع کرتی ہے۔ اِس کی تفاوت مثبت ہوتی ہے اگر $0 < x < 2$ ہو اور منفی ہوتی ہے اگر $x > 2$ ہو۔ اس دوران اُس کا نقطہ عظیمت $(2, \frac{1}{4})$ ہوتا ہے۔ اور یہ ترسیم $0 < x < 3$ کیلئے نیچے کی جانب منحرف ہوتی ہے اور $x > 3$ کیلئے اُوپر کی جانب منحرف ہوتی ہے۔
یہ تمام معلومات کافی ہیں جن کے ذریعے، کی دیئے گئے وقفے میں، فاضل قیمتوں کیلئے ترسیم کی ساخت کا تصور سمجھا جاسکتا ہے۔ لیکن تفتیش مکمل کرنے کیلئے یہ ضروری ہوجاتا ہے کہ کی بہت چھوٹی اور بہت بڑی قیمتوں کیلئے ترسیم کیسی ہوگی۔ اس کیلئے درجِ ذیل تحسیب کرنا چاہیئے مثلاً
$f(0.01) = 100 - 10000 = -9900$

اور $f(100) = 0.01 - 0.0001 = 0.0099.$
اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ جب x کی قیمت چھوٹی ہوتی ہے تب y بہت بڑی قدر کیساتھ منفی ہوتی ہے۔ اور جب y کی قیمت بڑی ہوتی ہے تب x بہت چھوٹا لیکن مثبت عدد ہوتا ہے۔
نوٹ:۔ اِس مثال میں دی گئی معلومات کا استعمال کرکے آپ خود اِس کی ترسیم بنانے کی کوشش کیجئے۔ اگر آپ کے پاس ترسیمی تحسیب کار ہو تو اُسے استعمال کرکے اپنے بنائے ہوئے ترسیم کی جانچ کیجئے۔
ترسیم تیار کرنے کی یہ صلاحیت دراصل اُن نقاط کی مشق کرنا ہے جن کے محدد کچھ معنی رکھتے ہوں۔ مثال 2.1.15 میں نقطہ ہماری توجہ کا مرکز ہوتا ہے جہاں ترسیم محور کو قطع کرتی ہے اور نقطہ $(2, \frac{1}{4})$ جو کہ اس ترسیم کا نقطہ عظیمت ہوتا ہے۔ ایک اور دلچسپ نقطہ $(3, \frac{2}{9})$ بھی ہے جہاں ترسیم نیچے کی جانب انحراف سے تبدیل ہوکر اُوپر کی جانب انحراف میں تبدیل ہوجاتا ہے۔ یہاں نوٹ کیجئے کہ اِسی نقطہ پر $f''(x)$ کی قیمت بھی منفی سے مثبت ہورہی ہے، اور $f''(3) = 0$ ہوتا ہے۔
کسی بھی ترسیم کا ایسا نقطہ، جہاں ترسیم ایک جانب انحراف سے تبدیل ہوکر دوسری جانب انحراف دکھاتا ہے اُسے اُس ترسیم کا نقطہ موڑ کہتے ہیں۔ اگر کسی ترسیم میں نقطہ $p.f(q)$ ہوتا ہے۔، نقطہ موڑ کے طور پر موجود ہو تو اُس نقطہ پر ہوتا ہے۔

### .215دو درجی مشتق کا عملی استعمال

حقیقی دُنیا میں کئی حالتوں میں دو درجی مشتق کافی اہم ہوتے ہیں ، کیونکہ اِن کے ذریعئے ہم پہلے سے ہی مستقبل کی راہیں متعین کرسکتے ہیں۔ مثال کے طور پر ، پچھلے کئی وقتوں سے کمپیوٹروں کو گھریلو استعمال کافی بڑھ رہا ہے۔ کمپیوٹر تیار کرنے والے کارخانہ داروں نے t سالوں میں H کمپیوٹرس تیار کرنے کا تخمینہ کیا ۔ ایسی حالت میں وقت اور کمپیوٹرس کی تعداد کے درمیان تیار ہونے والے ترسیم کی تفاوت $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ مثبت ہوگی۔ لیکن کمپیوٹرس تیار کرنے کی یہ شرح آگے بھی بڑھ رہی ہے یا کم ہورہی ہے اِسے معلوم کرنے کیلئے

کارخانہ داروں کو $\frac{d^2H}{dt^2}$ کی قیمت معلوم کرنا پڑے گا۔ (اگر کمپیوٹرس کی کھپت کی شرح منفی حاصل ہو تو کارخانہ داروں نے اپنے کمپیوٹرس کی کوالیٹی پر غور کرنا ہوگا۔) اِس طرح کے حالات میں کی قیمت کا کافی اثر پڑتا ہے۔ اِسی طرح سے اگر محکمہ موسمیات والے وقت t میں ہوا کے دباو کی p قیمت کے ذریعئے زیادہ یقین کے ساتھ معلومات نہیں دے سکتے اگر منفی ہو۔ لیکن اگر اُنہیں $\frac{dp}{dt^2}$ کی قیمت بھی منفی مل جائے تو وہ یقین کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ موسم میں زبردست تبدیلیاں رونما ہونے والی ہیں۔

اس مشق میں ، پہلی اور دوسری مشتق کی معلومات کو استعمال کرکے ترسیم تیار کیجئے۔ اگر آپ ترسیم تیار کرلیتے ہیں تو ترسیمی عداد کو استعمال کرکے اپنی ترسیم کی جانچ کیجئے۔

1۔ y = f(x) جہاں $f(x) = x^3 - x$ ہو کے ترسیم پر غور کیجئے۔

اِس حقیقت کو استعمال کرکے معلوم کیجئے کہ محورx- کو ترسیم کس نقطہ پر قطع کرتا ہے؟ اُس کا ترسیم بھی بنائیے۔

(b) $f(x) = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$ $y = f'(x)$ معلوم کیجئے اور $y = f'(x)$ کی ترسیم بنائیے۔

(c) $y = f''(x)$ معلوم کیجئے اور $y = f''(x)$ کی ترسیم بنائیے۔ (d) اپنے تیار کئے گئے ترسیمات کی مستقل مزاجی معلوم کیجئے۔ مثال کے طور پر، y = f(x) کے ترسیم کی جانچ کیجئے کہ اگر ہو تو ترسیم اُوپر کی جانب منحرف ہوتی ہے۔

2۔

$$y = x^3 + x$$

کی ترسیم کے لئے،

(a) اجزائے ضربی کو استعمال کرکے ثابت کیجئے کہ ترسیم - محور کو صرف ایک بار قطع کرتا ہے۔

(b) $\frac{dy}{dx}$ اور $\frac{d^2y}{dx^2}$ کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

(c) وہ وقفہ معلوم کیجئے جہاں ترسیم اُوپر کی جانب منحرف ہورہی ہے۔

(d)

$$y = x^3 + x$$

کی ترسیم سے حاصل ہونے والی معلومات کو استعمال کیجئے۔

3۔ y = f(x) کی ترسیم تیار کرنے کے لئے اور کی معلومات استعمال کیجئے جہاں

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 9$ (نوٹ کیجئے کہ $x^3 - 3x^2 + 3x - 9 = (x-3)(x^2+3)$)

4۔ مندرجہ ذیل کی ترسیمات بنائیے اور اُن نقاط کے محدد معلوم کیجئے جہاں $\frac{dy}{dx} = 0$ اور $\frac{d^2y}{d^2x} = 0$ ہوں۔

ا. $y = x^4 - 4x^2$ ج. $y = x + \frac{1}{x}$ ہ. $y = x + \frac{4}{x^2}$

ب. $y = x^3 + x^2$ د. $y = x - \frac{1}{x}$ و. $y = x - \frac{4}{x^2}$

5۔ (a) مندرجہ ذیل ترسیم قیمت (P) اور وقت (t) کے درمیان تیار کی گئی ہے۔ افراطِ زر کی شرح $\frac{dp}{dt}$ بڑھ رہی ہے۔ اس ترسیم میں $\frac{d^2p}{dt^2}$ کیا ظاہر کرتا ہے اور اُس کی قیمت کے متعلق کیا کہا جاسکتا ہے؟

(b) ترسیم بنائیے جس میں دکھایا گیا ہو کہ قیمتیں بڑھ رہی ہیں۔ لیکن افراطِ زر کی شرح کم ہوتی جارہی ہے جس کا مکمل اضافہ 20 کی طرف جارہا ہے۔
۔ f(x) = y کی ترسیمات کے لئے f (x)` اور f (x)`` کی مثبت یا منفی علامتیں لکھئے۔ (e) اور میں(f) آپ کو متعلقہ وقفے کی حالت کی بھی ضرورت پڑے گی۔
۔ درجِ ذیل ترسیم ایک کمپنی کے شیئرس کی قیمتیں S دکھاتے ہیں۔
(a) اس ترسیم کے ہر مرحلے کے لئے $\frac{dS}{dt}$ اور $\frac{d^2s}{dt^2}$ کے متعلق اظہارِ خیال کیجئے۔
(b)
غیر تکنیکی الفاظ میں وضاحت کیجئے کہ اس ترسیم میں کیا واقع ہورہا ہے؟ 8۔ کولین اپنی اسکول کے لئے نکل چکا ہے، جو کہ اُس کے گھر سے 800میٹر فاصلے پر واقع ہے۔ اُس کی رفتار، باقی بچے ہوئے فاصلے کے ساتھ راست تناسب میں ہوتی ہے۔ فرض کریں کہx میٹرس کا فاصلہ اُس نے طے کرلیا ہے اورy میٹرس کا فاصلہ ابھی باقی ہے۔
(a)X بالمقابل t اور y بالمقابل t کے ترسیمات بنائیے
(b) $\frac{dx}{dt}$ $\frac{d^2x}{dt^2}$ $\frac{dy}{dt}$ اور $\frac{d^2y}{dt^2}$ کی علامتیں کیا ہونگی؟
9۔ ایک تابکار عنصر کے انحطاط کی شرح ، دیئے گئے وقت t پر ، اُس میں موجود جوہروں کی تعداد کےN ساتھ راست تناسب میں ہوتی ہے۔
(a)
اِس معلومات کو ظاہر کرنے کے لئے ایک مساوات لکھئے۔ (b) بالمقابلN t کے لئے ترسیم بنائیے۔ (c) $\frac{d^2N}{dt^2}$ کی علامت کیا ہوتی ہے؟

10۔ درجِ ذیل تمام معاملات کے لئے y = f(x)کی ترسیمات کے مختلف حصوں کے خاکے تیار کیجئے۔ (مثال کے طور پر، (a) میں، آپ صرف محورy- کے قریب والے حصے کی ترسیم بنا سکتے ہیں کیونکہx کی دگر قیمتیں نہیں دی گئی ہیں۔ )

ا. $f(0) = 3,\ f'(0) = 2,\ f''(0) = 1$ ج. $f(0) = -3,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = 3$
ب. $f(5) = -2,\ f'(5) = -2,\ f''(5) = -2$

3 اقلیتی اور اعظم قیمتوں پر نظرِ ثانی
پچھلی مشق میں ، آپ نے کچھ مقامات پر دیکھا ہوگا کہ معلومات کے مختلف ٹکڑے آپس میں منضبط ہوتے ہیں۔ یہ بات خاص طور پر اُن نقاط پر بالکل صحیح ثابت ہوتی ہے جہاں ترسیم کی قیمت یا تو اعظم ہو یا اقل ترین۔ اگر آپ نے نشاندہی کی ہوگی کہ اقلیتی نقطے پر f (x)` کی علامت تبدیل ہوتی ہے، تب آپ نے یہ بھی دیکھا ہوگا کہf (x)`` سے ترسیم اُوپر کی جانب منحرف ہوتی ہے۔
خاکہ .215 میں ایک عام نتیجہ سکھایا گیا ہے:
اگر $f'(q) = 0$ اور $f''(q) > 0$ ہوں تب $x = q$ پر اقل ترین نقطہ حاصل ہوگا۔

اگر $f'(q) = 0$ اور $f''(q) < 0$ ہوں تب $x = q$ پر اعظم ترین نقطہ حاصل ہوگا۔
اِسے اکثر اوقات نہایت آسانی سے استعمال کیا جاسکتا ہے بجائے اِس کے کہ یہ دیکھنا کہ جس نقطہ پر کی علامت تبدیل ہوتی ہے وہاں ترسیم کا اعظم یا اقل ترین نقطہ ہوتا ہے۔
دفع 3.7 میں دکھائے گئے طریقہ کار کو، درج ذیل انداز میں ترمیم کیا جاسکتا ہے۔
$y = f(x)$ کی ترسیم کے لئے اعظم نقطہ یا اقل ترین نقطہ معلوم کرنا۔
مرحلہ نمبر (1):۔ اُس دائرہ کار کو متعین کیجئے جس میں آپ دلچپی رکھتے ہوں۔
مرحلہ نمبر (2):۔ f`(x) کے لئے ایک فقرہ (Expression) معلوم کیجئے۔
مرحلہ نمبر (3):۔ اُس دائرہ کار میں x کی قیمتوں کی فہرست بنائیے جن کے لئے f`(x) کی قیمت صفر ہو۔ (اگر وہاں حاصل ہونے والی قیمتوں کے لئے f`(x) غیر معروف ہو، تب دفع 3.7 میں دکھائے گئے طریقہ کار کو استعمال کریں۔)
مرحلہ نمبر (4):۔ f``(x) کے لئے ایک فقرہ (Expression) معلوم کیجئے۔
مرحلہ نمبر (5):۔ مرحلہ نمبر (3) میں، کی x ہر قیمت کے لئے f کی (x)`` علامت معلوم کیجئے۔ اگر علامت مثبت ہو تو ترسیم کا اقل ترین نقطہ ہوگا اور اگر علامت منفی ہو تو ترسیم کا اعظم نقطہ ہوگا۔ (اگر f کی (x)`` قیمت صفر حاصل ہوجائے تو پُرانا طریقہ استعمال کیا جائے گا۔)
مرحلہ نمبر (6):۔ کی x ہر قیمت کے لئے، جو کہ اعظم یا اقل ترین نقطہ دیتی ہے، محسوب f(x) کریں۔

نوٹ کیجئے کہ یہ طریقہ کار، دو حصوں میں منقسم ہوتا ہے۔
اول یہ کہ، یہ طریقہ صرف ہموار تفاعل کی ترسیمات کے لئے کارآمد ثابت ہوتا ہے۔ اِسی لئے جن نقاط پر f`(x) غیر معروف ہو وہاں اِسے استعمال نہیں کیا جاسکتا۔
دوم یہ کہ، اگر f`(q) = 0 اور f``(q) = 0 ہوں تو x = q پر f(x) کی قیمت یا تو اعظم ہوگی یا اقل ترین ہوگی یا دونوں نہیں۔ اِسے x = 0 پر $f(x) = x^3$ اور $g(x) = x^4$ کا موازنہ کرکے دکھایا جاسکتا ہے۔

آپ آسانی کے ساتھ دیکھ سکتے ہیں کہ f`(0) = f``(0) = 0 اور g`(0) = g``(0) = 0۔
لیکن x = 0 پر g(x) کی قیمت اقل ترین ہوتی ہے جبکہ وہاں f(x) نا تو اعظم ہوتا ہے اور نا ہی اقل ترین۔
(درحقیقت y = f(x) کی ترسیم میں مبدے پر نقطہ موڑ حاصل ہوتا ہے کیونکہ $f''(x) = 6x$ ہوتا ہے، جو کہ x < 0 کیلئے منفی ہوتا ہے اور x > 0 کیلئے مثبت۔)
آگے چل کر آپ دیکھیں گے کہ کچھ تفاعل کیلئے دودرجی مشتق معلوم کرنے کیلئے بہت محنت درکار ہوتی ہے۔ ایسے معاملات میں، پُرانا طریقہ کار اپنانا ہی زیادہ موثر ہوتا ہے۔

1.3.15 مثال:
$f(x) = x^4 + x^5$ کی ترسیم کیلئے اعظم ترین اور اقل ترین نقاط معلوم کیجئے۔
مرحلہ نمبر (1):۔ دیا گیا تفاعل تمام حقیقی اعداد کے لئے معروف ہے۔
مرحلہ نمبر (2):۔

$f'(x) = 4x^3 + 5x^4 = x^3(4+5x)$

مـــرحـلـہ نمبـر (3):۔ اگر x = 0یا x = -0.8 ہو تو f`(x) = 0 ہوتا ہے۔

مـــرحـلـہ نمبـر (4):۔ $f''(x) = 12x^2 + 20x^3 = 4x^2(3+5x)$

مـــرحـلـہ نمبـر (5):۔ $f''(-0.8) = 4(-0.8)^2(3-4) < 0$ اِس لـئےx = - 0.8 اعظـم نقطـہ دیتا ہے۔اِسی طـرح سے f``(0) = 0 اِسی لئے پُرانا طـریقـہ کار استعمال کرنا ہوگا۔

$0 < x < 0.8$ کے لئے $x^3 < 0$ اور $4+5x > 0$ اِسی لئے $f'(x) < 0$ ; $x > 0$ کے لئے $f'(x) > 0$ اِسی لئے $x = 0$ ایک اقـل ترین نقطـہ ہوتا ہے

مـــرحـلـہ نمبـر (6):۔ (-0.8, 0.08192) نقطـہ اعظـم ہے اور (0, 0) نقطـہ اقلیت

2.3.15 مثال

$y = \frac{(x+1)^2}{x}$, کی ترسیم کیلئے اعظـم نقطـہ اور اقـل ترین نقطـہ معـلوم کیجئے۔

دیا گیا تفـاعـل صفـر "0" چھـاڑ کر باقی تمـام حقیقی اعـداد کیلئے معـروف ہے۔ اِس تفـاعـل کا مشتق لینے کے لئے اِسے درجِ ذیل انداز میں لکھا جاتا ہے۔

$y = \frac{(x+1)^2}{x} = \frac{x^2+2x+1}{x} = x + 2 + x^{-1}$,

اب اس کا مشتق لیتے ہیں۔

$\frac{dy}{dx} = 1 - x^{-2} = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$, اِسی لئے اگر $\frac{dy}{dx} = 0$ ہو تو

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm 1$$

, اس کا دوسرے درجہ کا مشتق درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

, اس کی قیمت -2 حاصل ہوتی ہے اگر x = -1

اور اس کی قیمت 2 ہوتی ہے اگر x = 1 ۔ اس لئے (-1، 0) ایک نقطہ عظمہ ہوگا اور (1 ،4) ایک اقلیتی نقطہ۔ یہاں اقل ترین قیمت ، اعظم قیمت سے بڑی حاصل ہوئی۔ یہ کیسے ممکن ہوا؟

درج ذیل تفاعل اور مساواتوں کی ترسیمات پر موجود ساکن نقاط کو پلاٹ کرنے اور وضاحت کرنے کیلئے پہلے اور دوسرے درجہ کی مشتق کا استعمال کیجئے۔ اگر یہ طریقہ کار ناکام ثابت ہو تو $\frac{dy}{dx}$ کی علامت کے تبدیل ہونے کو استعمال کرکے اعظم نقطہ، اقل ترین نقطہ اور نقطہ موڑ معلوم کیجئے۔

$f(x) = 3x - x^3$

$f(x) = x^3 - 3x^2$

$f(x) = 3x^4 + 1$

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$

$f(x) = \frac{2}{x^4} - \frac{1}{x}$

$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

$f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 24x + 6$

$y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 - 3$

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$$
$$y = 16x - 3x^3$$
$$y = \frac{4}{x^2} - x$$
$$y = \frac{4+x^2}{x}$$
$$y = \frac{x-3}{x^2}$$
$$y = 2x^5 - 7$$
$$y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 1$$

4 منطقی امتیازات
آپ نے دیکھا ہے کہ ہموار تفاعل کی ترسیمات کے لئے، یہ صحیح ہوتا ہے کہ اگر ((q,f(q)) ایک نقطہ عظمہ یا اقلیتی نقطہ ہو تب ہوتا f'(q)=0 ہے۔
لیکن اس کا معکوس بیان ، کہ اگر f'(q)=0 ہو تب ((q,f(q)) ایک نقطہ عظمہ یا اقلیتی نقطہ ہوگا، یہ بیان غلط ہوتا ہے۔
آپ اُسے غلط ثابت کرسکتے ہیں ایک متضاد مثال کو استعمال کرکے، مثلاً ایک تفاعل جس کے لئے "اگر ـــــ" والا حصہ تو موجود ہو لیکن "تب ـــ" والا حصہ موجود نا ہو۔
ایسا ایک تفاعل $f(x) = x^3$ ہے جس میں q = 0 ہے۔ چونکہ $f'(x) = 3x^2$ ہے
اور f `(x) = 0 ہے، لیکن (0،0) اس تفاعل کیلئے نا تو اعظم نقطہ ہے اور نا ہی اقل ترین نقطہ۔
ایسی ہی صورت حال نقطہ موڑ کے ساتھ بھی آتی ہے۔ ہموار تفاعل کے لئے یہ صحیح ہوتا ہے کہ اگر ,p)) f(p) ایک نقطہ موڑ ہو تب f ``(p) = 0ہوتا ہے۔ لیکن اس کے معکوس کے مطابق، اگر f ``(p) = 0 ہو تب نقطہ ,p)) f(p) ایک نقطہ موڑ ہوتا ہے، یہ بات غلط ہوتی ہے۔
اس معاملے میں ایک متضاد مثال، x = 0 کے لئے تفاعل $f(x) = x^4$ کی ہوسکتی ہے۔ چونکہ

$f''(x) = 12x^2$ ہوتا ہے جس کیلئے f ``(0) = 0 ہوگا۔ لیکن (0،0) ایک نقطہ اقلیت ہے $f(x) = x^4$ کے ترسیم میں، نا کہ نقطہ موڑ۔
اعلیٰ ریاضیات میں عام مسائل کو مخصوص تفاعل کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ بہت سے مسئلے ایسے ہوتے ہیں جن کے معکوس بھی صحیح ثابت ہوتے ہیں، مثلاً فیثاغورث کا مسئلہ۔ لیکن، جیسا کہ اُوپر مثال میں تھا، اگر کسی مسئلہ کا معکوس غلط ہو، تب یہ بہت اہم ہوجاتا ہے کہ آپ (صحیح) مسئلہ کو استعمال کررہے ہیں ناکہ (غلط) معکوس کو۔

5.15 $f(x) = x^4$ سنکیتن کی توسیع
حالانکہ $f(x) = x^4$ بذات خود ایک علامت ہے، اِسی لئے اِسے اجزا میں تقسیم نہیں کرنا چاہیئے لیکن کئی مرتبہ اِسے y کو الگ کرکے لکھنے کے کئی فائدے ہوتے ہیں۔ یعنی اِسے $\frac{d}{dx}y$ اس طرح لکھا جاتا ہے۔
اسی لئے اگر f(x) = y ہو تو آپ اِسے اس طرح لکھ سکتے ہیں،

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$$

ایک نہایت قابل استعمال مخففی انداز ہے۔ مثال کے طور پر اگر $y = x^4$ ہو تب $\frac{dy}{dx} = 4x^3$ ہوگا۔
اِسے مخففی انداز میں اس طرح لکھ سکتے ہیں،

$$\frac{d}{dx}x^4 = 4x^3$$

آپ $\frac{d}{dx}$ کو علامتی ھدایت سمجھ سکتے ہیں جس کے عمل کے بعد مشتق حاصل ہوجاتا ہے۔ آپ نے ایسے تحسیب کار دیکھے ہونگے جو تحسیبی عمل کے علاوہ الجبرا بھی کرتے ہیں۔ اِن میں، اگر آپ ایک تفاعل مثلاً $x^4$ لیں اور اُسے 'مشتق' کا حکم دیں تب وہ آپ کو ماحصل کے طور پر $4x^3$ پیش کرے گا۔ علامت $\frac{d}{dx}$ کو کبھی کبھی مشتقی عامل بھی کہا جاتا ہے۔ اس طرح یہ علامت 'مشتق کے حکم' لگانے جیسا ہی عمل کرتی ہے۔

اِسی انداز میں دوسرے درجہ کی مشتق میں بھی یہی سنکیتن کو استعمال کیا جاسکتا ہے۔
دوسرے درجہ کی مشتق یعنی $\frac{dy}{dx}$ کا مشتق لینا جسے عام طور پر ہم $\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}$ کے طور پر لکھتے ہیں۔ اگر آپ اس اصطلاح کو سمیٹ کر ایک اصطلابنائیں تو اُوپری حصہ میں $d^2y$ ہوگا اور نچلے حصہ میں $(dx)^2$ ہوگا۔ یہاں وحدانی خطوط کو ہٹا کر لکھیں تو یہ $\frac{d^2y}{dx^2}$ بن جاتا ہے۔

6.15 اعلیٰ درجی مشتق

دو درجی مشتق پر اکتفا کرنے یا رُک جانے کی کوئی خاص وجہ نہیں ہے۔ چونکہ $\frac{d^2y}{dx^2}$ بذات خود بھی ایک تفاعل ہے، اگر وہ ایک ہموار تفاعل ہو تو اُسکا مزید مشتق لیا جاسکتا ہے جو کہ سہ درجی مشتق ہوگا۔ اِس عمل کو مسلسل جاری رکھنے پر اعلیٰ مشتقوں کا ایک سلسلہ مل جاتا ہے۔
$\frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \frac{d^5y}{dx^5}$ وغیرہ وغیرہ۔ تفاعلی انداز میں اِسے کچھ اس طرح لکھا جاتا ہے

$$f'''(x), f^{(4)}(x), f^{(5)}(x),$$

یہاں آپ نوٹ کیجئے کہ تیسرے درجہ تک مشتق کو ظاہر کرنے کیلئے " dashes " کو استعمال کیا گیا لیکن چوتھے مشتق سے آگے کیلئے وحدانی خطوط میں عدد لکھ کر اُس مشتق کے درجے کا اظہار کیا گیا ہے۔
یہ تمام اعلیٰ درجی مشتقیں، حقیقی دُنیا میں یا ترسیمات کی تیاری میں کوئی خاص تفہیمی کردار نہیں ادا کرتے ہیں۔ لیکن کچھ معاملات میں یہ اہم بھی ہوتے ہیں۔ مثلاً تقربی تحسیب میں اور سلسلہ وار تفاعل کے اظہار کے لئے اِن کا اہم استعمال ہوتا ہے۔
۔ مندرجہ ذیل کیلئے $\frac{d^3y}{dx^3}$، $\frac{d^2y}{dx^2}$، $\frac{dy}{dx}$ اور $\frac{d^4y}{dx^4}$ معلوم کیجئے۔

$$y = x^2 + 3x - 7$$

$$y = 2x^3 + x + \frac{1}{x}$$

$$y = x^4 - 2$$

$$y = \sqrt{x}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y = x^{\frac{1}{4}}$$

2۔ مندرجہ ذیل کیلئے f`(x) ، f``(x) ، f```(x) اور f(4)(x) معلوم کیجئے۔

$$y = x^2 - 5x + 2$$

$$y = 2x^5 - 3x^2$$

$$y = \frac{1}{x^4}$$

$$y = x^2(3 - x^4)$$

$$y = x^{\frac{3}{4}}$$

$$y = x^{\frac{3}{8}}$$

3۔ اگر $y = x^n$ ہو تو $\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ معلوم کیجئے جہاں n ایک مثبت عدد ہے۔

4۔ اگر $y = x^{n+2}$ ہو تو $\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ معلوم کیجئے جہاںn ایک مثبت عدد ہے۔

5۔ اگر $y = x^m$ ہو تو $\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ معلوم کیجئے جہاں m ایک مثبت عدد ہے اور m < n

متفرق مشق

15 1۔ $x^3 - 6x^2 + 9x + 6$ کی اعظم قیمت اور اقل قیمت معلوم کیجئے، ساتھ ہی ساتھ یہ بھی بتائیے

کہ آپ نے اِنہیں کیسے معلوم کیا؟
2۔ تفاعل $f(x) = 16x + \frac{1}{x^2}$ کیلئے اعظم قیمت اور اقل قیمت معلوم کیجئے، ساتھ ہی ساتھ یہ بھی بتائیے کہ آپ نے اعظم اور اقل نقطہ کیسے متعین کیا۔
3۔ تفاعل $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{30 - 5x}$ میں اعظم قیمت اور اقل قیمت معلوم کیجئے اور x کی متعلقہ قیمتیں بھی دیجئے۔
4۔ تفاعل $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-4x}$ کی ترسیم میں اعظم نقطہ اور اقلیتی نقطہ کے محدد لکھئے۔
5۔ نسرین کی کافی کے سرد ہونے کی شرح، کافی کے درجہ حرارت $\theta$ اور ماحول کے درجہ حرارت $\alpha$ کے فرق کے ساتھ راست تناسب میں ہے۔

$\theta$ اور t کے درمیان ترسیم بنائیے. اگر t=0 پر $\alpha = 20$ ہو اور

$\theta = 95$ ہو. اگر $t > 0$ ہو تو $\theta$ کی $\theta, \frac{d\theta}{dt}$ اور

$\frac{d^2\theta}{dt^2}$ کی علامتیں بتائیے۔
۔ اُڑان کے دوران، ہوائی جہازوں میں ایک مزاحمت محسوس کی جاتی ہے جسے ہوائی رگڑ کہا جاتا ہے۔ ایک مخصوص جہاز کیلئے، کم رفتاروں کے لئے، ہوائی رگڑ کی قیمت

$kS^2$ کے برابر ہے، جہاں k ایک مستقل ہے جسے ہوائی رگڑ کا ضریب ہے اور S اُس جہاز کی رفتار ہے۔
اگر رفتاروں کو بڑھایا جائے تو رفتار کے ساتھ ساتھ k کی قیمت بھی بڑھتی جاتی ہے۔ اور k بالمقابل S تیار ہونے والی ترسیم درج ذیل ہے۔ (آواز کی رفتار کے قریبی قیمتوں والے علاقے کو عام طور پر سمعی رکاوٹ کہا جاتا ہے۔)
(a) ترسیم میں، تینوں علاقوں میں $\frac{dk}{dS}$ اور $\frac{d^2k}{dS^2}$ کی علامتیں بتائیے۔
(b) کس علاقے میں k
کی قیمت نہایت تیزی سے تبدیل ہورہی ہے؟ (c) بہت زیادہ تیز رفتاروں کیلئے k
کی قیمتوں سے کیا نتیجہ اخذ کیا جاسکتا ہے؟ 7۔ ایک کھڑکی کا نچلا حصہ مستطیل نما ہے اور اُوپری حصہ نیم دائرہ نما ہے۔ نچلے مستطیل نما حصے کو ABCD سے دکھایا گیا ہے جس کی چوڑائی 2x ہے اور اُونچائی y-ہے۔
اُوپری نیم دائرہ نما حصہ کا قطر AB ہے، یعنی نیم دائرے کا نصف قطر x-ہے۔
کھڑکی کا مجموعی محیط 10 میٹرس ہے۔x اور $\pi$ کی شکل میں کھڑکی کے مجموعی رقبے کے لئے فقرہ حاصل کیجئے۔ ساتھ ہی ساتھ x کی وہ قیمت معلوم کیجئے جس کے لئے رقبہ کی قیمت اعظم ہوگی۔ x کی اُس مخصوص قیمت کو معلوم کرنے کیلئے $\frac{d^2y}{dx^2}$ کی قیمت کا استعمال کیجئے۔
۔ اگر a>0 ہو تو ، درج ذیل تفاعل کیلئے اعظم اور اقلیت کی تفتیش کیجئے

$$x^2(x-a)$$

$$x^3(x-a)$$

$$x^2(x-a)^2$$

$$x^3(x-a)^2$$

تفاعل

$$x^n(x-a)^m$$

کیلئے ایک اٹکل بنائیے۔
$f^n(x)$ کے لئے ایک فقرہ تیار کیجئے جہاں f(x) درج ذیل ہو۔

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x^3}$$
$$\mathrm{f}(x) = \sqrt{x}$$

10*۔ درج ذیل مساواتوں کی منحنیوں کیلئے نقطہ موڑ کے محدد معلوم کیجئے۔

$$y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 4$$

$$y = x^2 - \frac{1}{x} + 2$$

# باب 16

# تکمل

# باب 17

# حجم جسم طواف

یہ باب کسی حجم یا ٹھوس حجم کو تلاش کرنے کے لیے انضمام کے استعمال کے بارے میں ہے۔ جس کو ٹھوس ردعمل کہا جاتا ہے۔جب آپ اس باب کو مکمل کرلیں گے تو آپ $x$ اور $y$ محور میں سے کسی ایک کے بارے میں انقلاب کا حجم تلاش کرنے کے قابل ہو جائیں گے۔

## 1.17 انقلاب کی جلدیں

$O$ ایک لکیر پر ہے اور $O$ ایک مہدا ہے۔ $OA$ کی ایک لکیر بنائیں۔ جیسا تصور 11.17 میں دکھایا گیا ہے۔لائن $OA$ اور $x$۔محور کے سایہ دار دکھائے جانے والے خطے پر غور کریں۔اگر آپ اس خطے کو کے گرد $360^0$ کے ذریعے گھماتے ہیں تو، یہ ایک ٹھوس شنک نکال دیتا ہے۔ 17۔2 تصور میں اس طرح سے تعمیر ہونے والی شکل کو انقلاب کا ٹھوس کہا جاتا ہے۔ٹھوس انقلاب کے حجم کو بعض اوقات انقلاب کا حجم کہا جاتا ہے۔

ایک خط کے منحنی خطوط کے حساب کتاب کرنے کے لئے متعدد طریقوں سے انقلاب کے حجم کا حساب لگانا یکساں ہے ، اور اس کی مثال ایک مثال سے دی جا سکتی ہے۔

فرض کریں $y = \sqrt{x}$ کے ترسیم اور $x = 1$ سے $x = 4$ کے ترسیم کے درمیان کے علاقے کو تصویر 17۔3 میں دکھا جا سکتا ہے، $x$-محور کے گرد انقلاب کا ٹھوس بنانے کے لیے گھمایا جاتا ہے۔کلیدی طور پر ایک اور عام سوال پوچھ کر شروع کرنا ہے۔ اس کا حجم $V$ ہے۔ $x = 1$ سے کسی بھی قدر کی قدر کے انقلاب کا ٹھوس ہے۔ یہ ٹھوس تصویر 17 میں دکھایا گیا ہے۔

فرض کریں $\delta x$ کو بڑھایا ہوا ہے۔ چونکہ $y$ اور $V$ دونوں ہی $x$ کے افعال ہے۔ اسی سے $y$ اور $V$ میں اضافے کو $\delta y$ اور $\delta V$ لکھا جا سکتا ہے۔ تصویر 5.17 میں رنگین حجم میں اضافہ $\delta V$ کے درمیان ہے۔ فرض نما نلی کی مقدار کی چوڑائی 6 ریڑی $y + \delta y$ ہے ۔ ان دونوں فترض کا مرکز تصویر 17-5 کے دائیں میں دکھایا گیا ہے۔ $\delta V$؛ $\pi y^2 \delta x$ اور $\pi(y+\delta y)^2$ کے درمیان ہے۔ جس سے اسکی پیروی ہوتی ہے۔ $\frac{\delta V}{\delta x}$؛ $\pi y^2$ اور $\pi(y+\delta y)^2$ کے درمیان میں ہے۔

اب $\delta V$ کی طرف جاتا ہے اور یہ حصہ 4-7 کی تعریف میں $\frac{\delta V}{\delta x}$, $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$ کی طرف جاتا ہے۔ تو $y + \delta V$, $y$ کی طرف جاتا ہے۔ اور اس کے بعد

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \pi y^2$$

تو $V$ ایک ایسا فعل ہے ۔ جس کا ماخوذ $\pi y^2$ ہے۔ اور $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \pi x\, y = \sqrt{x}$ ہے.

اسی طرح

$$V = \frac{1}{2}\pi x^2 - \frac{1}{2}\pi$$

حجم $x = 4$ تلاش کرنے کے لیے $V$ کے اظہار کے لیے $x = 4$ کی جگہ لیں۔ تو حجم ہے۔

$$\frac{1}{2}\pi \times 4^2 - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi(16-1) = \frac{15}{2}\pi$$

آپ حصہ 16-3 کو استعمال کر کے آخری حصے کع متعارف کریں گے اور اسے مختصر کریں گے۔

$$V = \int_1^4 \pi y^2 \,\mathrm{d}x = \int_1^4 \pi x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\pi x^2\right]_1^4 = \frac{1}{2}\pi \times 16 - \frac{1}{2}\pi \times 1 = \frac{15}{2}\pi$$

نوٹ کریں کے مثال کے شروع میں جو اسندلال استعمال کیا گیا ہے۔ وہ مکمل طور پر عام تھا اور کسی طرح بھی اصل وکر کی مساوات پر انحصار نہیں کرتا تھا-جب $x = a$ اور $x = b$ کے درمیان $y = f(x)$ کا ترسیم ہوتا ہے تو تحت خطہ $a < b$ $x$-محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ انقلاب کا ٹھوس کا حجم ہوتا ہے۔

$$\int_a^b \pi(f(x))^2 \,\mathrm{d}x \qquad \int_a^b \pi y^2 \,\mathrm{d}x$$

مثال 1.17: $x = -1$ اور $x = 1$ کو $x$-محور کے گرد چار دائیں زاویہ سے گھمایا جاتا ہے۔ اور حجم $y = 1 + x^2$ کے ترسیم کے نیچے پیدا ہوتا ہے۔اسکا حجم تلاش کریں۔

چار دائیں زاویوں کا فقرہ بعض اوقات $360^0$ کی جگہ پر مکمل بیان کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔ اور $x$-محور کے گرد گردش کرتا ہے۔ تو مطلوب حجم $V$ ہے۔ جہاں

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{1} \pi y^2 \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \pi \left(1 + 2x^2 + x^4\right) \mathrm{d}x \\ &= \left[\pi \left(x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\right]_{-1}^{1} \\ &= \pi \left\{ \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) - \left((-1) + \frac{2}{3}(-1)^3 + \frac{1}{5}(-1)^5\right) \right\} = \frac{56}{15}\pi \end{aligned}$$

یہ معمول کی بات ہے نتیجہ $\pi$ کے عین مطابق متعدد کے طور پر دیا ہے۔اہم اعداد و شمار یا اشاری جگہوں کی دی گئی تعداد کا صحیح جواب دیں۔ اور ثابت کریں کہ بنیاد کے ساتھ ایک شنک کا حجم $V$ دراس $r$ اور اوچائی $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ہے۔ شنک دینے کے لیے گھومنے والا مثلث تصویر 6.17 میں دکھایا گیا ہے۔ جسکی اوچائی پورے صفے پر تیار کی گئی ہے۔ اور اسکا میلان---پر ہے جو کہ $\frac{r}{h}$ ہے اور مساوات $y = \frac{r}{h}x$ بنتی ہے۔

لہزا یاد رکھے کے $n$، $r$ اور $h$ ثابت قدم ہیں- اور $x$ پر انعصار نہیں کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} V &= \int_{0}^{h} \pi y^2 \, \mathrm{d}x = \int_{0}^{h} \pi \left(\frac{r}{h}x\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= \pi \frac{r^2}{h^2} \int_{0}^{h} x^2 \, \mathrm{d}x = \pi \frac{r^2}{h^2} \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{h} = \pi \frac{r^2}{h^2} \times \frac{1}{3}h^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h \end{aligned}$$

□

## 2.17 $y$-محور کے گرد انقلاب کی جلدیں

تصویر 7.17 مع $y = f(x)$ کے ترسیم میں درمیان کا علاقہ $y = c$ اور $y = d$ ہے۔ اور اسے $x$-محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔جو تصویر 17-8 میں ٹھوس دکھایا گیا ہے۔ $y$-محور کے گرد ٹھوس انقلاب کو تلاش کرنے کے لیے کردار کو تبدیل کریں۔ جو کہ حصہ 1.17 میں $x$ اور $y$ کی گفتگو کی گئی ہے۔ خطہ $y = f(x)$ کے ترسیم سے جڑا ہوا ہے۔ تو لکیر $y = c$ اور $y = d$ , $y$-محور کے گرد گھمایا جاتا ہے، تشکیل شدہ ٹھوس حجم ہوتا ہے۔

$$\int_{c}^{d} \pi \, x^2 \, dy.$$

مثال 2.17: خطہ $y = x^3$ اور اس کے درمیان $y$-محور سے جڑا ہوا ہے۔ تو پیدا شدہ حجم تلاش

کریں۔ اور $y$-محور کے درمیان $y = 1$ اور $y = 8$ کو $360^0$ $y$-محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

$$V = \int_1^8 \pi y^{\frac{2}{3}}\, dy = \pi[\frac{3}{5}y^{\frac{5}{3}}]_1^8 = \pi(\frac{3}{5} \times 8^{\frac{5}{3}}) - \pi(\frac{3}{5} \times 1^{\frac{5}{3}})$$
$$= \pi(\frac{3}{5} \times 32) - \pi(\frac{3}{5} \times 1) = \frac{93}{5}\pi$$

□

---

مشق 1.17: اس مشق کے تمام سوالات کو اپنے جوابات میں $\pi$ کی ضرب کے طور پر لکھیں۔

ا. جب خط $x = a$ کے درمیان $y = f(x)$ کے ترسیم کے پیدا ہوتا ہے۔ تب حجم تلاش کرے $x = b$ کو $360^0$ کے ذریعے $x$-محور کے گرد گھمایا جاتا ہے؟ .

ا. $f(x) = x; \quad a = 3, \quad b = 5$
ب. $f(x) = x^2; \quad a = 2, \quad b = 5$
ج. $xf(x) = x^3; \quad a = 2, \quad b = 6$
د. $f(x) = \frac{1}{x}; \quad a = 1, \quad b = 4$

ب. جب حجم $x = a$ اور $y = f(x)$ کے درمیان ترسیم کے نیچے بنائے گئے۔ حجم کا پتہ لگائیں۔ $x = b$ کو $360^0$ $x$-محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ .

ا. $f(x) = x + 3; \quad a = 3, \quad b = 9$
ب. $f(x) = x^2 + 1; \quad a = 2, \quad b = 5$
ج. $f(x) = \sqrt{x+1}; \quad a = 0, \quad b = 3$
د. $f(x) = x(x-2); \quad a = 0, \quad b = 2$

ج. جب خطہ $y$-محور اور $y = f(x)$ کے ترسیم کے ساتھ جڑا ہوا ہو۔ تب پیدا شدہ حجم تلاش کریں۔ اور $y = c$ اور $y = d$ کی لکیر کو $y$-محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ تا کہ ٹھوس رستہ نکالا جا سکے۔ .

ا. $f(x) = x^2; \quad c = 1, d = 3$

ب. $f(x) = x + 1; \quad c = 1, d = 4$

ج. $f(x) = \sqrt{x}; \quad c = 2, d = 7$

د. $f(x) = \frac{1}{x}; \quad c = 2, d = 5$

ھ. $f(x) = \sqrt{9 - x}; \quad c = 0, d = 3$

و. $f(x) = x^2 + 1; \quad c = 1, d = 4$

ز. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}; \quad c = 1, d = 5$

ح. $f(x) = \frac{1}{x} + 2; \quad c = 3, d = 5$

د. ہر معاملے میں خطا مندرجہ ذیل منحنی خطوط اور $x$-مھور کے درمیانمنسلک ہوتا ہے۔ $x$-محور کے گرد $360^0$ کے ذریعے پیدا کردہ ٹھوس کا حجم تلاش کریں۔ .

ا. $y = (x + 1)(x - 3)$

ب. $y = 1 - x^2$

ج. $y = x^2 - 5x + 6$

د. $y = x^2 - 3$

ھ. $y = x$ اور $y = x^2$ کے ترسیموں کے درمیان منسلک خطے $R$ کے ذریعے گھمایا جاتا ہے تو جو حجم ہوتا ہے، اسے تلاش کریں۔ .

ا. $x$-محور کے گرد

ب. $y$-محور کے گرد

و. $y = x^2$ اور $y = 4x$ کے ترسیموں کے درمیان منسلک خطے $R$ کے ذریعے گھمایا جاتا ہے تو جو حجم ہوتا ہے، اسے تلاش کریں۔ .

ا. $x$-محور کے گرد

ب. $y$-محور کے گرد

ز. $y = \sqrt{x}$ اور $y = x^2$ کے ترسیموں کے درمیان منسلک خطے $R$ کے ذریعے گھمایا جاتا ہے تو جو حجم ہوتا ہے، اسے تلاش کریں۔ .

ا. $x$-محور کے گرد

ب. $y$-محور کے گرد

ح. گلاس کا پیالہ $y$-محور کے ترسیموں کے مابین اس علاقے کے گرد گھماتے ہوئے تشکیل دیا جاتا ہے۔

$y = x^2$ اور $y = x^3$ پیالے میں شیشے کی مقدار مرلوم کریں۔

ط. یہ خط دونوں محوروں سے منسلک ہے۔ لکیر $x = 2$ اور وکر $y = \frac{1}{8}x^2 + 2$ کے اردگرد گھمایا گیا ہے۔ایک محور بنانے کے لیے $y$-محور ٹھوس کا حجم تلاش کریں۔

---

---

مشق 2.17:

ا. یہ خط وکر $y = x^2 + 1$ $x$-محور اور لکیر $x = 2$ سے جڑا ہوا ہے۔ $x$-محور کے گرد گھمایا گیا ہے۔ $\pi$ اور $\pi$ کے رحاظ سے تشکیل شدہ ٹھوس کا حجم تلاش کریں۔

ب. یہ وضاحت کریں کے نقاط $x, y$ مرکزہ ایک مطمئن دراس کی مساوات $x^2 + y^2 = a^2$ کی نشاندہی کریں۔ $x$-محور کٹ نیم کے اوپر دائرہ گھمایا جاتا ہے۔$360^0$ کے ذریع $x$-محور کو گھمایا جاتا ہے۔دراس کا دائرہ $a$ کی وضاحت کریں۔اضاحت کریں کے حجم $V$ کیوں ہے۔ اس دائرہ کا $V$ مزجانب دیا گیا ہے۔

$$V = 2\pi \int_0 a(a^2 - x^2)dx.$$

یہ ثابت کریں $V = \frac{4}{3}\pi a^3$

ج. مساوات والا بیضوی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ تصویر میں دکھایا گیا ہے۔$a$ اور $b$ کا محور ایک ہی ہے۔ $a^2$ اور $b^2$ بھضوی شکل بنانے کے لیے $x$-محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔اس بیضوی کا حجم تلاش کریں۔ $b$ بناتے ہوئے بیضوی کی مقدار کم کریں۔ اور $y$-محور کے گرد گھمایا جائے۔

د. تصویر میں $y = x^{-\frac{2}{3}}$ عکر دکھایا گیا ہے۔

(ا) دکھائیں کے سایہ دار علاقہ $A$ لامحدود ہے۔

(ب) رنگیں علاقہ $B$ تلاش کریں۔

(ج) $A$ رقبہ کے گرد $360^0$ کے ذریع گھمایا جاتا ہے۔$x$-محور حجم تلاش کریں۔

(د) علاقہ $B$ $360^0$ کے ذریع گھمایا جاتا ہے۔ $y$-محور حجم تلاش کریں۔

ھ. مساوات کا علاقہ سوال 4 میں دیا گیا ہے۔ ان کی مساوی علاقوں اور جلدوں کی تعقیقات کریں۔

$$(i)\quad y = x - \frac{3}{5}, \qquad\qquad (ii)\quad y = x - \frac{1}{4}.$$

و. نقطہ موڑ اور نقاط کے بتائے ہوئے وکر $y = 9 - x^2$ کا خاکہ بنائیں۔ محور کے ساتھ چو رہا ہے۔ محدود خط جس میں منحنی خطوط پر مشتمل ہوتا ہے۔ اور $x$-محور $R$ کے زریعے ظاہر ہوتا ہے۔

(ا) $R$ کا رقبہ تلاش کریں اور اسی وجہ سے دوسری صورت میں --- تلاش کریں۔

(ب) جب $R$ کو $360^0$ کے ذریعے گھمایا جاتا ہے، تو حاصل کی جانے والی ٹھوس انقلاب کا حجم $x$-محور کے گرد تلاش کریں۔

(ج) جب $R$ کو $360^0$ کے ذریعے گھمایا جاتا ہے،تو حاصل کی جانے والی ٹھوس انقلاب کا حجم $y$-محور کے گرد تلاش کریں۔

ز. خطے کو منحنی خطوط وکر $y = (x-2)^{\frac{3}{2}}$ ہے۔ جس کے لیے $2 \leq x \leq 4$ ہے۔ جو $x$-محور کے ساتھ ہے۔ $x = 4$ تلاش کریں۔ $\pi$ کے لہاظ سے حاصل کردہ ٹھوس کا حجم جب $R$ ہوتا ہے۔ $x$-محور کے گرد چار زاویوں سے گھمایا جاتا ہے۔

# باب 18

# ریڈیئن

ایک دائرے کا مرکز 0 اور رداس 6 سم ہے۔ ایک مستقیم خط PG جس کی لمبائی 8 سم ہے اس میں ایک قطع بناتا ہے۔ اس قطعے کا احاطہ اور رقبہ دریافت کریں۔ آپکا جواب تین نمایاں ہندسوں تک درست ہو۔
اس طرح کے مسائل میں یہ مفید ہوتا ہے کہ آغاز کے لیے شکل 18.3 میں دکھائے نیم تاریک ضلع کی بجائے پورے احاطے OPQ پر غور کیا جائے۔
اس قطع کا احاطہ دو حصوں پر مشتمل ہے۔ 8 سم لمبائی والا سیدھا حصہ اور خط منحنی والا حصہ۔ منحنی حصہ کی لمبائی معلوم کرنے کے لیے زاویہ POQ کو جاننے کی ضرورت ہو گی۔
اس زاویے کو آپ $\theta$ کا نام دے لیں۔ چونکہ یہ ایک مساوی الساقین (دو اضلاع برابر) تکون ہے۔ لہزہ مرکز 0 سے خط PQ تک کھینچا گیا ایک خط سے خط PQ اور زاویہ POQ دونوں دو برابر حصوں میں تقسیم ہو جاتے ہیں۔

$$\sin\frac{1}{2}\theta = \frac{4}{6} = 0.666...$$

لہذا $\frac{1}{2}\theta = 0.7297...$ اور $\theta = 1.459...$
اپنے عدداد کو لازماً ریڈئین انداز میں کر لیں۔ اب اس کا احاطہ $d = 8 + 6\theta = 16.756...$ ٹھہرتا ہے۔
اسکا احاطہ 8.16 سم ہے جو کہ تین ہندسوں تک درست ہے
مذکورہ قطعے کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے آپکو حلقہ OPQ کا رقبہ معلوم کرنا ہو گا پھر اس رقبے میں سے مثلث OPQ کا رقبہ نفی کرنا ہو گا۔
اگر ہم کسی تکون کے رقبے کے لیے کلیہ $\frac{1}{2}bc\sin A$ کو استعمال میں لائیں تو تکون PQR کا رقبہ $\frac{1}{2}r^2\sin\theta$ بنے گا۔ لہذا نیم تاریک حصے کا رقبہ یوں ہو گا

$$\frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}r^2\sin\theta = \frac{1}{2}\times 6^2\times 1.459... - \frac{1}{2}\times 6^2\times\sin 1.459... = 8.381$$

اس موقع پر $\theta$ کی جو بھی قیمت آئے اس اپنے عدد مسیں محفوظ کر لینا آپکے لیے مفید ثابت ہو گا تا کہ بعد کے حساب کتاب میں اسے استعمال کر سکیں۔
مثال 1.2.18 مسیں $\sin\theta \sin\frac{1}{2}\theta = \frac{4}{6} == 0.666...$ اور $\sin 1.459...$ استعمال ہوئے ہیں تاہم یہ نشاندہی نہیں کی گئی کہ یہ زاویے ریڈئین مسیں تھے۔ روایتی طور پر ایسے حالات مسیں آپ ریڈئین اکائی مانتے ہیں مثلاً اگر $\sin 12$ درج ہو تو آپ اسے 12 ریڈئین کا sine سمجھیں گے۔ اگر یہ 120 کا Sine ہوتا تو اسے $\sin 120$ لکھا جاتا۔
مثال 2.2.18 ایک مستقیم خط دائرے کے مرکز پر $\theta$ زاویہ بناتا ہے۔ اور اس طرح دائرہ کا ایک حصہ قطع کرتا ہے۔ اس حصے کا رقبہ دائرے کے کل رقبے کا $\frac{1}{3}$ ہے۔
(ا) اخذ کریں کہ $\theta - \sin\theta = \frac{2}{3}\pi$
(ب) ثابت کریں کہ $\theta = 2.61$ دو اعشاری نقطوں تک درست ہے۔
(ا) رداس کو r مان لیں۔
اگر ہم مثال 1.2.18 مسیں استعمال کردی طریقہ سے فائدہ اٹھائیں تو اس حصے کا رقبہ درج ذیل ہو گا

$$1/2r^2\theta - 1/2r^2\sin\theta$$

یہ دائرے کے کل رقبے کا $1/3$ تب قرار پائے گا جب

$$1/2r^2\theta - 1/2r^2\sin\theta = 1/3\pi r^2$$

اس مساوات کو 2 سے ضرب دیں اور $r^2$ سے تقسیم کر دیں تو آپکو درج زیل نتیجہ حاصل ہو گا

$$\theta - \sin\theta = 2/3\pi$$

(ب) اگر ہم مساوات $f(\theta) = \theta\sin\theta$ مسیں $\theta$ کی قیمت 61.2 لگائیں تو $f(2.61) = 2.103$ بنے گا جو 094.2 کے بہت قریب ہے۔
اس سے ہمیں یہ اندازہ ہوتا ہے کہ $\theta$ کی قیمت 61.2 کے بہت قریب ہے۔ لیکن یہ دع اعشاری نقطوں تک درست 61.2 بیان کو ثابت کرنے کے لیے ناکافی ہے اس مقصد کے لیے آپکو یہ ثابت کرنا پڑے گا کہ $\theta$ کی قیمت 605.2 اور 165.2 کے درمیان ہے۔
شکل 5.18 سے عیاں ہے کہ $\theta$ کی قیمت 0 اود $\pi$ کے درمیان ہے اور $\theta$ کے بڑھنے سے نیم تاریک حصہ بھی بڑھ جاتا ہے۔ چنانچہ آپکو یہ دکھانا ہے کہ $\theta = 2.605$ ہونے سے یہ حصہ بہت چھوٹا ہو جاتا ہے جبکہ $\theta = 2.515$ ہونے سے بہت بڑا ہو جاتا ہے۔

$$f(2.605) = 2.605 - \sin 2.605 = 2.093\ldots$$

اور

$$f(2.615) = 2.615 - \sin 2.615 = 2.112\ldots$$

پہلا جواب $2.094\ldots = 2/3\pi$ سے چھوٹا ہے جبکہ دوسرا جواب بڑا ہے۔ اس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ مساوات کا جزر 605.2 اور 615.2 کے درمیان ہے۔ لہٰذا جزر دو اعشاری نقطوں تک درست 61.2 ہے
مشق 18

درج ذیل میں سے ہر زاویے کو ریڈئین میں تبدیل کریں۔ آپ جواب کو $\pi$ کے مضرب چھوڑ سکتے ہیں۔

90

135

45

30

72

18

120

22.5

720

600

270

1

مندرجہ ذیل تمام زاویے ریڈئین میں ہیں۔ عدداد استعمال کیے بغیر انہیں درجوں میں تبدیل کریں۔

$(1/3)\pi$

$(1/20)\pi$

$(1/5)\pi$

$(1/8)\pi$

$(1/9)\pi$

$(2/3)\pi$

$(5/8)\pi$

$(3/5)\pi$

$(1/45)\pi$

$(6)\pi$

$(-1/2)\pi$

$(5/18)\pi$

عـدداد استعمال کیے بغیـر منـدرجـہ ذیل کو عـین درست قیمتیں لکھیں۔

$$\sin(1/3)\pi$$
$$\cos(1/4)\pi$$
$$\tan(1/6)\pi$$
$$\cos(3/2)\pi$$
$$\sin(7/4)\pi$$
$$\cos(7/6)\pi$$
$$\tan(5/3)\pi$$
$$\sin^2(2/3)\pi$$

زیریں مساواتیں اس شکل کے حوالے ہیں جبکہ R دائرے کا رداس (سم) ہے
S قوس کی لمبائی (سم) ہے۔
اور A ضلع کا رقبہ (سم) ہے
جبکہ $\theta$ مرکز پر بننے والا زاویہ (ریڈیئن) میں ہے
$r = 7$ اور $\theta = 1.2$ ہے۔ S اور A کی قیمتیں معلوم کریں۔
$r = 3.5$ اور $\theta = 2.1$ ہے۔ S اور A کی قیمتیں معلوم کری
$s = 12$ اور $r = 8$ ہے۔ $\theta$ اور A کی قیمتیں معلوم کریں
$s = 14$ اور $\theta = 0.7$ ہے۔ r اور A کی قیمتیں معلوم کریں
$A = 30$ اور $r = 5$ ہے۔ $\theta$ اور s کی قیمتیں معلوم کری
$A = 64$ اور $s = 16$ ہے۔ $\theta$ اور r کی قیمتیں معلوم کریں۔
$A = 30$ اور $s = 10$ ہے۔ $\theta$ کی قیمتیں معلوم کریں۔
درج ذیل ہر صورت میں نیم تاریک حصے کا رقبہ دریافت کریں $r = 5$ $\theta = (1/3)\pi$
$\theta = (2/5)\pi$ $r = 3.1$
$\theta = (5/6)\pi$ $r = 28$
$s = 9$ $r = 6$
$s = 4$ $r = 9.5$

ایک دائرے کا رداس 13 سم ہے۔ 10 سم لمبا ایک مستقیم خط، اس دائرے کا جو حصہ قطع کرتا ہے اس کا رقبہ معلوم کریں۔

ایک دائرہ جس کا رداس 25 سم ہے، 4 سم والا ایک مستقیم خط اس کے حصے کو منقطع کرتا ہے۔ اس حصے کا احاطہ دریافت کریں

ایک مستقیم خط دائرے کو اس طرح منقطع کرتا ہے کہ مرکزہ پر زاویہ $\theta$ بنائے اور منقطع حصے کا رقبہ دائرہ کے کل رقبے کا $(1/4)$ بناتا ہے
(ا) واضع کریں کہ $\theta - \sin\theta = (1/2)\pi$
(ب) ثابت کریں کہ $\theta = 2\pi$ جبکہ یہ قیمت دو اعشاری نقطوں تک درست ہو۔

دو دائرے جن کے رداس 5 سم اور 24 سم ہیں جزوی طور پر ایک دوسرے کے کونے ہیں۔ ان کے مراکز باہم 13 سم دور ہیں۔ دونوں میں مشترک رقبہ معلوم کریں۔
اس شکل میں دو ایسے دائرے دکھائے گئے ہیں جو ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ دائروں کے رداس 6 سم اور 4 سم ہیں جبکہ ان کے
مراکز کا درمیانی فاصلہ 7 سم ہے۔ دونوں دائروں میں مشترک نیم تاریک حصے کا احاطہ اور رقبہ معلوم کریں۔

سورج کے کرّے کا 10٪ حصّہ چاند کے کرّے سے ڈھک جائے تو اسے 10٪ سورج گرہن کہتے ہیں ایک بچہ اس کی دو کرّوں کی مدد سے تصویر کشی کرتا ہے ہر کرّے کا رداس cm r ہے جیسا کہ یہاں دکھایا گیا ہے۔
1۔ ان دونوں کرّوں کے مراکز کے درمیانی فاصلے کی پیمائش r کے حوالے سے کیجیے۔
2۔ انہی دو کرّوں کے مراکز کے درمیانی فاصلے کی پیمائش 80٪ سورج گرہن کے مطابق بھی کیجیے۔
3.18 مثلثاتی افعال کے ترسیمے
اگر کسی زاویہ کی ریڈئین میں ناپا جائے تو $y = \cos\theta$، $y = \sin\theta$ اور $y = \tan\theta$ کی اشکال ویسی ہی ہوں گی جیسی کہ $y = \cos\theta^\circ$، $y = \sin\theta^\circ$ اور $y = \tan\theta^\circ$ کی ہوں گی صرف یہ فرق ہوگا کہ محور کے ساتھ ان کا پیمانہ مختلف ہوگا۔
$\theta$ کو ریڈئین میں رکھ کر $y = \cos\theta$، $y = \sin\theta$ اور $y = \tan\theta$ کے ترسیمات اشکال 6.18، 7.18 اور 8.18 میں دکھائے گئے ہیں۔

اگر آپ حصہ جات 1.10 اور 2.10 والے ترسیمات ہر سمت میں ایک جیسی پیمائش کے ساتھ بنائیں تو وہ یہاں دکھائے گئے ترسیمات کے مقابلے میں بہت زیادہ چوڑے اور چپٹے ہوں گے۔
در حقیقت اگر آپ کو $y = \cos\theta$، $y = \sin\theta$ اور $y = \tan\theta$ کے ترسیمات دریافت کرنے ہوں تو اس کے لئے تقریباً ہمیشہ ریڈئین ہی استعمال کئے جاتے ہیں ان ترسیمات میں توازن کی وہی خصوصیات موجود ہوتی ہیں جو کہ $y = \cos\theta^o$، $y = \sin\theta^o$ اور $y = \tan\theta^o$ میں ہوتی ہیں۔ دورعا خصوصیات:

1. $\cos(\theta \pm 2\pi) = \cos\theta$
2. $\sin(\theta \pm 2\pi) = \sin\theta$
3. $\tan(\theta \pm 2\pi) = \tan\theta$

طارق/جفت خصوصیات:

1. $\tan(\theta \pm 2\pi) = \tan\theta$
2. $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

3. $\tan(-\theta) = \tan\theta$

مستقیم حرکت کی خصوصیات:

1. $\cos(\theta - \pi) = -\cos\theta$
2. $\sin(\theta - \pi) = -\sin\theta$
3. $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$
4. $\sin(\pi - \theta) = -\sin\theta$
5. $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$

مشق 18ب ۔1 $y = \cos\theta$ اور $y = \sin\theta$ کے ترسیمات استعمال کر کے یہ دکھائے کہ $\sin(\frac{1}{2}\pi - \theta) = \cos\theta$
اس خصوصیت اور اس کے ساتھ اوپر خانے میں دی گئی cosine , sine اور tangent افعال کی توازن کی خصوصیات کو استعمال کر کے مندرجہ ذیل نتائج کو ثابت کیجئے

ا $\sin(\frac{3}{2}\pi + \theta) = -\cos\theta$

ب $\sin(\frac{1}{2}\pi + \theta) = -\cos\theta$

ج $\cos(\frac{1}{2}\pi + \theta) = -\sin\theta$

د $\sin(-\theta - \frac{1}{2}\pi) = -\cos\theta$

اپنی محوروں کو استعمال کرتے ہوئے $y = \tan\theta$ اور $y = \frac{1}{\tan\theta}$ کے خاکے بنائیں۔ نیز یہ دکھائیں کہ $\tan\left(\frac{1}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}$
$\alpha$ کی ایسی کم از کم قیمت تلاش کریں جس کے لیے

1. $\cos(\alpha - \theta) = \sin\theta$
2. $\sin(\alpha - \theta) = \cos(\alpha + \theta)$
3. $\tan\theta = \tan(\theta + \alpha)$
4. $\sin(\theta + 2\alpha) = \cos(\alpha - \theta)$

5. $\cos(2\alpha - \theta) = \cos(\theta - \alpha)$

6. $\sin(5\alpha + \theta) = \cos\theta - 3\alpha$

الٹ تکونیاتی تفاعل

آپ اب تک کئی بار علامات $\sin^{-}1$ ، $\cos^{-}1$ ، $\tan^{-}1$ کو دیکھ چکے ہوں گے۔ اب وقت آگیا ہے کہ آپ کو الٹ تکونی تفاعل(تفاعلات) کی ایک جامع تعریف سے آگاہ کیا جائے۔

آپ حصہ 3.18 سے دیکھ سکتے ہیں کہ تفاعل $\cos x$ ، $\sin x$ اور $\tan x$ ایک ایک نہیں ہوتے۔ حصہ 6.11 سے یہ نتیجہ نکالا جا سکتا ہے کہ جب تک ان کی تعریف کے دائرہ کار کو محدود نہ کر دیں ان کے الٹ نہیں ہوتے۔ یہاں ہم فرض کر رہیں کا آپ ریڈئین اکائی کو استعمال کر رہے ہیں۔

شکل 9.18 سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ $\cos^{-1}$ کی تعریف کے لیے cosine تفاعل کے دائرہ کار کو $0 \leq x \leq \pi$ تک محدود کیا گیا ہے۔

ایک بار پھر دیکھیں کہ $y = \sin x$ کی ترسیم کا موٹا حصہ $y = x$ میں $y = \sin^{-}1x$ کا عکس ہے۔ اس کا الٹ بھی درست ہے۔

مشق سوالات 1 سے 5 میں آلہء حساب استعمال نہ کریں

دریافت کریں

1. $\cos^{-1} \frac{1}{2}\sqrt{3}$

2. $\tan^{-} 11$

3. $\cos^{-1} 0$

4. $\sin^{-1} \frac{1}{2}\sqrt{3}$

5. $\tan^{-} 1 - \sqrt{3}$

6. $\sin^{-} 1 - 1$

7. $\tan^{-1} -1$

8. $\cos^{-} 1 - 1$

ریافت کریں

1. $\cos^{-} 1 \frac{1}{\sqrt{2}}$

2. $\sin^{-} 1 - 0.5$
3. $\cos^{-} 1 - 0.5$
4. $\tan^{-} 1 \frac{1}{\sqrt{3}}$
5. $\tan^{-} 1 - \sqrt{3}$

دریافت کریں

1. $\sin(\sin^{-} 10.5)$
2. $\cos(\cos^{-} 1(-1))$
3. $\tan(\tan^{-} 1\sqrt{3})$
4. $\cos(\cos^{-} 10)$

دریافت کریں

1. $\cos^{-} 1(\cos \frac{3}{2}\pi)$
2. $\sin^{-} 1(\sin \frac{13}{6}\pi)$
3. $\tan^{-} 1(\tan \frac{1}{6}\pi)$
4. $\cos^{-} 1(\cos 2\pi)$

دریافت کریں

1. $\sin(\cos^{-} 1\frac{1}{2}\sqrt{3})$
2. $\frac{1}{\tan(\tan^{-} 12)}$
3. $\cos(\sin^{-} 1(-0.5))$

.4 $\tan(\cos^{-}1\frac{1}{2}\sqrt{2})$

3 کوئی ی ترسیمی طریقہ استعمال کر کے مساوات $\cos x = \cos^{-}1x$ کو حل کریں۔ آپ کا جواب اشاری درجوں تک درست ہو۔ یہ کسی سادہ تر مساوات کا واحد جذر ہے؟

ریڈئیں کو استعمال کرتے ہوئے تکونیاتی مساواتوں کو حل کرنا

بعض اوقات تکونیاتی مساواتوں کو حل کرتے ہوئے آپ کسی زاویے کو ریڈئین میں تلاش کرنا چاہیں گے۔ اس کے اصول وہی ہوں گے جو آپ نے حصہ 5.10 میں درجوں (درجات) میں کام کرنے کے لیے استعمال کیے تھے۔ تاہم تفاعل $\cos^{-}1$ ، $\sin^{-}1$ اور $\tan^{-}1$ کے معانی وہی ہوں گے جو انہیں حصہ 4.18 میں تفویض کیے گئے تھے۔

مثال

مساوات $\cos\theta = -0.7$ کواس طرح حل کریں کا وقفہ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ میں تمام جذر دو اشاری نقطوں تک درست آئیں۔

قدم 1

$\cos^{-}1(-0.7) = 2.346...$ یہ وقفہ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ میں ایک جذر ہے

قدم 2

$\cos(-\theta) = \cos\theta$ کی تشاکل کی خصوصیت کو استعمال کر کہ یہ دکھائیں کہ -346.2..... ایک اور جذر ہے۔
توجہ کریں کہ -346.2..... مطلوب وقفے میں نہیں ہے۔

قدم 3

دوری خصوصیت $\cos\theta = (\cos\theta \pm 2\pi)$ کے استعمال سے واضع کریں $-2.346.... + 2\pi = 3.936...$ مطلوب وقفے میں ایک جذر ہے۔

وقفہ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ میں مساوات $\cos(\theta) = -0.7$ کے جذر 35.2 اور 94.3 ہیں جو کہ دو اشاری نقطوں تک درست ہیں۔

مثال

مساوات $\sin\theta = (-0.2)$ کو اس طرح حل کریں کہ وقفہ $-\pi \leq \theta \leq \pi$ میں دو اشاری نقطوں تک درست ہوں۔

قدم 1

$$\sin^{-1} 0.2 = -0.201$$

مذکورہ بالا وقفے میں ایک جذر ہے۔

قدم 2

اس مساوات کا ایک جذر $\pi - (-0.201\ldots) = 3.342$ ہے۔ تاہم یہ مطلوب وقفے میں نہیں ہے۔

قدم 3

$2\pi$ کو تفریق کرنے سے ہمیں -490.2 حاصل ہوتا ہے۔ یہ وقفہ $-\pi \leq \theta \leq \pi$ میں ایک اور جذر ہے۔

لہٰذا $-\pi \leq \theta \leq \pi$ میں $\sin\theta = (-0.2)$ کے جذر -94.2 اور -20.0 ہیں جو دو اشاری نقطوں تک درست ہیں۔

مثال

مساوات $\cos 3\theta - 0.1) = 0.3$ کو اس طرح حل کریں کہ وقفہ $-\pi \leq \theta \leq \pi$ میں تمام جذر دو اشاری نقطوں تک درست ہوں۔

$3\theta - 0.1 = \phi$ کو $\phi$ فرض کر لیں تا کہ مساوات کی شکل $\cos\phi = 0.3$ ہو جائے۔ چونکہ $\theta$ وقفہ $-\pi \le \theta \le \pi$ میں آتا ہے لہذا $\phi = 3\theta - 0.1$ وقفہ $-3\pi - 0.1 \le \phi \le 3\pi - 0.1$ میں آئے گا جو کہ $-9.524\ldots \le \phi \le 9.324\ldots$ ہے۔
اس مسئلے کا پہلا حصہ یہ ہے کہ $\cos\phi = 0.3$ کو حل کر کہ $-9.524\ldots \le \phi \le 9.324\ldots$ حاصل کیا جائے۔
قدم 1
$\cos^{-1} 0.3 = 1.266\ldots$ میں یہ وقفہ $-9.524.. \le \phi \le 9.324\ldots$ میں ایک جزر ہے۔
قدم 2
اس حقیقت کے مطابق cosine تفاعل جفت ہے اور ایک جزر $1.266\ldots$ ہے۔

درج ذیل صورت دے سکتے ہیں $\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$ اب یہ $\sin\theta$ میں ایک دو درجی الجبرائی مساوات ہے۔ آپ اسے حصہ 4.4 میں درج دو درجی الجبرائی کلیے کو استعمال کر کے حل کر سکتے ہیں۔ $\sin\theta = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-1)}}{2}$ جس سے $\sin\theta = 0.618$ یا $\sin\theta = -1.618$ حاصل ہوتا ہے۔ ایک جزر $\sin^{-1} 0.618\ldots = 0.666\ldots$ ہے۔ $\sin\theta = 0.618\ldots$ کے لیے اسی وقفے میں دوسرا جزر $\pi - 0.666\cdots = 2.475\cdots$ ہے جو $\sin\theta$ کے تشاکل کے استعمال سے حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ $\sin\theta$ کی یہ خصوصیت ہے کہ $-1 \le \sin\theta \le 1$ اس لیے مساوات

$\sin\theta = -1.618$ کا کوئی جزر نہیں ہے۔ لہذا مطلوب جزر 0.67 اور 2.48 ہیں جو کہ دو اعشاری نقطوں تک درست ہیں۔ مشق 18 ریڈیئن میں، دو اعشاری نقطوں تک درست، $\theta$ کی وہ کم از کم مثبت قیمتیں تلاش کریں جن کے لیے

1. $\sin\theta = 0.12$
2. $\sin\theta = -0.86$
3. $\sin\theta = 0.925$
4. $\cos\theta = 0.81$
5. $\cos\theta = -0.81$
6. $\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{3}}$
7. $\tan\theta = 4.1$
8. $\tan\theta = -0.35$
9. $\tan\theta = 0.17$

10. $\sin(\pi+\theta)=0.3$

11. $\sin(2\pi+\frac{1}{3})=0.123$

12. $\sin(\frac{1}{6}-\theta)=0.5$

13. $\cos(3\theta-\frac{2}{3}\pi)=0$

وقفہ $-\pi \le \theta \le \pi$ میں $\theta$ کی وہ تمام قیمتیں تلاش کریں جو مندرجہ ذیل کو حل کر سکیں۔ آپ کے جوابات جتنا ممکن ہو دو اعشاری نقطوں تک درست ہونے چاہئیں۔

ا $\sin\theta=0.84$    د $\sin\theta=-0.73$    ز $4\sin\theta=3\cos\theta$

ب $\cos\theta=0.27$    ھ $\cos\theta=-0.15$    ح $3\sin\theta=\frac{1}{\sin\theta}$

ج $\tan\theta=1.9$    و $4\tan\theta+5=0$    ط $3\sin\theta=\tan\theta$

3. مندرجہ ذیل مساواتوں کے لیے وقفہ $0<x\le 2\pi$ میں تمام حل نکالئے

ا $\cos 2x=\frac{1}{4}$    ج $\sin 2x=-0.62$    ھ $\tan 2x=0.5$

ب $\tan 3x=3$    د $\cos 4x=-\frac{1}{5}$    و $\sin 3x=-0.45$

4. وقفہ $-\pi<t\le\pi$ میں مندرجہ ذیل تمام مساواتوں کے جزر تلاش کریں۔

ا $\cos 3t=\frac{3}{4}$    ج $\sin 3t=-0.32$    ھ $\tan 5t=0.7$

ب $\tan 2t=-2$    د $\cos 2t=0.264$    و $\sin 2t=-0.42$

5. وقفہ $-\pi<\theta\le\pi$ میں مندرجہ ذیل تمام مساواتوں کے جزر ، اگر کوئی ہوں، تلاش کریں۔

ا $\cos\frac{1}{2}\theta=\frac{1}{3}$ ج $\sin\frac{1}{5}\theta=-\frac{1}{5}$ ھ $\tan\frac{2}{3}\theta=0.5$

ب $\tan\frac{2}{3}\theta=-5$ د $\cos\frac{1}{3}\theta=\frac{1}{2}$ و $\sin\frac{2}{5}\theta=-0.4$

6. آلئہ حساب، کتاب، استعمال کئے بغیر مندرجہ ذیل تمام مساواتوں کے عزاد کے جزر تلاش کریں اگر کوئی ہوں۔ آپ کے جواب میں وقفہ $0<\theta\le 2\pi$ میں $\pi$ کے مضربوں میں ہوں۔

ا $\sin(2\theta-\frac{1}{3}\pi)=\frac{1}{2}$ د $\tan(\frac{3}{2}\theta-\frac{1}{6}\pi)=-\sqrt{3}$ ز $\cos(\frac{1}{5}-\frac{5}{18}\pi)=0$

ب $\tan(2\theta-\frac{1}{6}\pi)=0$ ھ $\cos(2\theta-\frac{5}{18}\pi)=-\frac{1}{2}$ ح $\tan(3\theta-\pi)=-1$

ج $\cos(3\theta+\frac{1}{4}\pi)=\frac{1}{2}\sqrt{3}$ و $\sin(\frac{1}{2}\theta+\frac{5}{18}\pi)=1$ ط $\sin(\frac{1}{4}\theta-\frac{1}{9}\pi)=0$

7. مندرجہ ذیل مساواتوں کے لیے وقفہ $-\pi<\theta\le\pi$ میں جزر تلاش کریں اگر کوئی ہوں۔

ا $\tan\theta=2\cos\theta$ ج $\sin^2\theta=2\cos^2\theta$ ھ $2\sin\theta=\tan\theta$

ب $\sin^2\theta=2\cos\theta$ د $\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1$ و $\tan^2\theta=2\cos^2\theta$

متفرق مشق 18
1. اس خاکے میں آپ کو ایک دائرے کا ایک حلقہ دکھایا گیا ہے جس کا مرکز $O$ اور رداس 6cm ہے۔ زاویہ $POQ$ کی قیمت 6.0 ریڈیئن ہے۔
قوس $PQ$ کی لمبائی اور احاطہ $POQ$ کا رقبہ معلوم کریں۔
2. ایک دائرہ جس کا رداس $a$ اور مرکز $O$ ہے۔ اس دائرے کے ایک خطے $OAB$ میں $\angle AOB$ کی قیمت $\theta$ ریڈیئن ہے۔
احاطہ $AOB$ کا رقبہ قوس $AB$ کی لمبائی کے مربع کا دوگنا ہے۔ $\theta$ کی قیمت تلاش کریں۔
3. اس شکل میں ایک دائرے، جس کا مرکز $O$ اور رداس $r$ ہے، کا ایک حلقہ دکھایا گیا ہے۔
قوس کی لمبائی حلقے کے احاطے کا نصف ہے۔ $r$ کو اکائی مان کر اس حلقے کا رقبہ معلوم کریں۔
4. اس شکل میں آپ کو دو دائرے دکھائے گئے ہیں جن کے مراکز $A$ اور $B$ ہیں۔ یہ دائرے ایک دوسرے کو نقاط $C$ اور $D$ پر اس طرح قطع کرتے ہیں کہ ان میں سے ہر ایک کا مرکز دوسرے کے محیط پر آتا ہے۔ ہر دائرے کا رداس ایک اکائی ہے۔
زاویہ $CAD$ کی قیمت معلوم کریں۔
اس شکل میں ایک نیم تاریک علاقہ ہے جس کی حدود قوس $CBD$ اور عمودی خط $CD$ ہیں۔

اس علاقے کا رقبہ دریافت کریں۔ نیز واضح کریں کہ ان دونوں دائروں کے اندر واقع مشترکہ علاقے کا رقبہ ہر دائرے کے رقبے کا قسم و بیش 39 فیصد ہے۔

5۔ اس خاکے میں آپ کو ایک دائرے کی قوس $ABC$ دکھائی گئی ہے۔ دائرے کا مرکز $O$ اور رداس 5cm ہے۔ خطوط $AD$ اور $CD$ بالترتیب نقاط $A$ اور $C$ پر اس دائرے کے tangents ہیں۔ زاویہ $AOC$ کی قیمت $\frac{2}{3}\pi$ ریڈیئن ہے۔

خطوط $AD$، $DC$ اور قوس $ABC$ کے اندر محدود علاقے کا رقبہ معلوم کریں۔ آپ کا جواب دو نمایاں ہندسوں تک درست ہونا چاہیئے۔

6. وقفہ $-\pi < x \leq \pi$ میں $x$ کی وہ تمام قیمتیں دریافت کریں جو درج ذیل مساواتوں کے تسلی بخش جواب ہوں۔ آپ کے جواب یا دو اعشاری نقطوں تک درست ہوں یا پھر $\pi$ کے مکمل مضربوں میں ہوں۔

1. $\sin x = -0.16$
2. $\cos x(1 + \sin x) = 0$
3. $(1 - \tan x)\sin x = 0$
4. $\sin 2x = 0.23$
5. $\cos\left(\frac{3}{4}\pi - x\right) = 0.832$
6. $\tan(3x - 17) = 3$

7. ایک تار میں برقی رو، c amperes کو مندرجہ ذیل مساواتوں کے ذریعے واضح کیا جا سکتا ہے۔
$c = 5\sin(100\pi t + \frac{1}{6}\pi)$ جہاں t سیکنڈوں میں وقت کا اظہار کرتا ہے۔
ارتعاش کا عرصہ دریافت کریں۔ ہر ایک سیکنڈ میں ارتعاشات کی تعداد معلوم کریں۔

کی وہ پہلی تین مثبت قیمتیں تلاش کریں جن کے لئے c کی قیمت 2 ہو۔ آپ کے جوابات 3 اعشاری نظروں تک درست ہونے چاہئیں۔

ایک ذرہ جو ارتعاش میں ہے، کا ہٹاؤ y میٹر ہے جہاں y کی وضاحت $y = a\sin(kt + \alpha)$ سے ہوتی ہے جبکہ $\alpha$ کی پیمائش میٹروں میں ہے اور t کی پیمائش سیکنڈوں میں ہوتی ہے پر h اور $\alpha$ مستقلات ہیں۔
ایک ارتعاش کی قیمت T سیکنڈ ہے۔
مندرجہ ذیل جوابات تلاش کریں ۔
h کی قیمت T کی اکائیوں ہیں۔
h کو اکائی مان کر ایک سیکنڈ میں مکمل ہونے والے ارتعاشات کی قیمت
اس شکل میں آپ کو ایک دائرہ دکھایا گیا ہے جس کا مرکز 0 رداس r ہے۔ نیز ایک خط مستقیم AB جو مرکز 0 پر ایک دائرہ $\theta$ بنایا ہے جس کی پیمائش ریڈیئن میں ہے۔ خط مستقیم دائرہ کے ایک نیم

تاریک حصے کی حد بندی کر رہا ہے۔
اس نیم تاریک حصے کا رقبہ r اور $\theta$ کی اکائیوں میں معلوم کریں۔
یہ متعین ہے کہ اس حصے کا رقبہ تکون AOB کے رقبے کا ایک تہائی ہے۔ اس کی روشنی میں واضح کریں کہ

$$3\theta - 4\sin\theta = 0$$

$\theta$ کی وہ مثبت قیمت تلاش کریں جو 1.0 ریڈیئن کے اندر $3\theta - 4\sin\theta = 0$ کو درست ثابت کریں۔ اس مقصد کے لئے $3\theta - 4\sin\theta = 0$ کی قیمتوں کا جدول بنائیں۔اس دوران میں علامت کی تبدیلی یا عدم تبدیلی پر توجہ دیں۔
اس شکل میں آپ کو دو دائرے دکھائے گئے ہیں جن کے مرکز A اور B ہیں اور یہ دائرے نقطہ C پر ایک دوسرے کو چھوتے ہیں۔ ہر دائرے کا رداس r ہے۔ دونوں دائروں پر ایک نقطہ D یا E اس طرح سے واقع ہے کہ خط DE خطہ ACB کہ متوازی ہے۔
زاویوں DAC اور EBC میں سے ہر ایک زاویے کی قیمت $\theta$ ریڈیئن ہے۔جبکہ $0 < \theta < \pi$ متعین ہے۔
خط DE کی لمبائی r اور $\theta$ کی اکائیوں میں واضح کریں ۔ خط DE کی لمبائی دو قوسوں میں سے کسی کی بھی لمبائی کے برابر ہے۔
ثابت کریں کہ $\theta - 2\cos\theta - 2 = 0$
$0 < \theta < 1/2\pi$ کے لئے $y = cos\theta$ کا ترسیم کھینچیں۔ اپنے ترسیم پر ایک موزوں سیدھا خط کھینچ کر، جس کی مساوات بیان کرنا لازمی ہے۔ یہ واضح کریں کہ مساوات $\theta + 2\cos\theta - 2 = 0$ کا وقفہ $0 < \theta < 1/2\pi$ میں صرف ایک جزو ہے۔
حساب کرتے تصدیق کریں کہ $\theta$ کی قیمت 10.1 اور 11.1 کے درمیان ہے۔
اس شکل میں ایک دائرے کی قوس ABC دکھائی گئی ہے جبکہ دائرے کا مرکز 0 اور رداس r ہے اور AC خط مستقیم ہے۔ زاویہ AOC کی قیمت $\theta$ ریڈیئن ہے۔
جبکہ قوس ABC کی لمبائی S ہے۔
$\theta$ کی وضاحت r اور S کی اکائیوں میں کریں۔ پر یہ اخذ کر کے دکھائیں کہ مثلث AOC کے رقبے کا اظہار مندرج ذیل انداز میں کیا جا سکتا ہے۔

$$\frac{1}{2}r^2\sin\left(2\pi - \frac{s}{r}\right)$$

کوئی ترسیمی استدلال استعمال کرتے ہوئے جس کی بنیاد $y = \sin x$ کے خاکے پر یا کسی اور طریقے سے یہ دکھائیں کہ $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$ جہاں $\alpha$ تینوں زاویوں میں سے کسی بھی زاویے کی قیمت ریڈیئن میں ہے۔ اس تعین کی روشنی میں کہ تکون AOC کا رقبہ بڑے حلقے OABC کے رقبے کا پانچواں حصہ ہے۔ یہ نتیجہ نکال کر دکھائیں کہ

$$\frac{s}{r} + 5\sin\left(\frac{s}{r}\right) = 0$$

کوی ترسیمی طریقہ استعمال کر کے یا کسی اور طریقہ سے ان مماثلات کا تعین کیجئے۔

$$\sin^{-1}x + \cos^{-1}x \equiv \frac{1}{2}$$

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \equiv \frac{1}{2}\pi \; or \; -\frac{1}{2}\pi$$

اس شکل میں آپ کو ایک دائرے ایک غوس دکھائی گئی ہے-اس دائرے کا مرکز 0 ہے اور رداس r ہے-جبکہ قوس کا خط مستقیم AB ہے-خط AB دایرے کے مرکز 0 پر $\theta$ ریڈین کا زاویہ بناتاہے اس شکل مےں اپ کو آپک مربع ABCD بھی دکھایا گیا ہے یہ متعین ہے کہ نیم تاریک حصے کا رقبہ مربع کے رقبے کا عین آٹھواں حصہ ہے -یہ ثابت کریں کہ

$$2\theta - 2\sin\theta + \cos\theta - 1 = 0$$

یا پھر اس میں یہ دکھائیں کہ $\theta$ کی قیمیت 1اور2 کے درمیان ہے
جدولیاتی طریقہ کے استعمال سے $\theta$ کی قیمیت دریافت کریں جو ایک اعشاری نقطہ تک درست ہو -
مندرجہ ذیل تفاعلات کے دائرہ ہائے کار اور سعتیں بیان کریں
مساوات

$$2\sin^{-1} x - 4$$

$$2\sin^{-1}(x-4)$$

کو حل کرہں جبکہ وقفہ $x \leq \theta \leq 0$ مہں تمام جزر کی قیمتیں تلاش کریں جو دو اعشاری نقطوں تک درست ہوں۔
وقفہ $-2\pi \leq 0 \leq 2\pi$ میں کسی بھی جزر کی قیمیت $pi$ کی اکائی ہیں دیے ہوئے۔ درج ذیل مساواتوں کو حل کریں

$$2\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$2\cos^2\theta + \sin^2\theta = 2$$

نظرثانی مشق 3

1) $y = 4 - x$ اور $y = x^2 + 2x$ کی ترسیمات اور ان کے نقاط انقطاع پر ان کے محددات کا حساب لگایں ۔ دونوں ترسیمات کے درمیان واقع ممتناہی خِطے کا رقبہ دریافت کریں۔
2) $y = x^3 - 3x + 3$ کے ترسیم پر ساکن نقاط کے محددات کا حساب لگایں۔
ب)اس نقطے کے محدد کا حساب لگائیں جس کے لیے $\frac{d^2y}{dx^2}$
ج) منحنی پر واقع اس نقطے پر جس کی قیمت $x = 2$ ، منحنی اور اس کے عمودی خط کی مساوات دریافت کریں۔
د) قوس محور $x$ اور خطوط $x = 0$ اور $x = 2$ کی حدود میں واقع رقبہ تلاش کریں۔
3) عدّاد استعمال کیے بغیر $y = x^4 - x^5$ کا خاکہ بنائے اور ان مقامات کی نشاندہی کریں جن کے لئے $\frac{d^2y}{dx^2}$ مثبت ہے نیز جن کے لیے منفی ہے۔
4) 8 ایک صحیح عدد ہے۔ $y = x^n$ اور $y = x^{\frac{1}{n}}$ کے ترسیمات بنائیں اور اس خطے کا رقبہ معلوم کریں جو ان کے اندر محدود ہے ۔
5) ایک منحنی ایک ایسی مساوات کی حامل ہے جو $\frac{d^2y}{dx^2} = 5$ کے تقاضے پورے کرتی ہے ۔ یہ منحنی نقطہ

$(0,4)$ سے گزرتی ہے ۔ اس نقطے پر اس tangent کی تدریج 3 ہے۔ $x$ کو اکائی بنا کر y کی قیمت تلاش کریں ۔
6) ایک منحنی $y = kx^2$ جہاں $k$ ایک مستقل ہے ،کا $y = 1$

اور $y = 3$ کا درمیانی حصہ $y$ محور کے گرد $360°$ گھمایا جاتا ہے ۔ اس یقین کے ساتھ کہ پیدا شدہ حجم $12\pi$ ہے k کی قیمت دریافت کریں۔

$\int_1^3 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)\,\mathrm{d}x$ کی قیمت دریافت کریں اپنے نتیجے کی طور پر تشریح کریں۔ ۔ ایک خطے R کی حد بندی درج ذیل سے ہوتی ہے
(i)x محور (ii) خط $x = 16$ اور ایک منحنی $y = 6 - \sqrt{x}$ جہاں $0 \leq x \leq 36$
اس جسم طواف کا حجم معلوم کریں جو اس وقت پیدا ہوتا ہے جب R کو x محور کے گرد ایک چکر دےا جاتا ہے۔
9۔ ربع اول میں ایک خطے کی اطراف محوروں اور ایک منحنی جس کی مساوات $y = \sqrt{9 - x}$ ہیں۔ اس خطے کا رقبہ تلاش کریں۔
10 ۔ )بالا ایک منحنی $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ کے $x = 1$ سے $x = 4$ تک حصے کی تصوےر کشی کریں
۔ خطے R کا رقبہ دریافت کریں جبکہ اس خطے کی اطراف اس منحنی x محور اور ر خطوط $x = 1$ اور ر $x = 4$ پر مشتمل ہیں۔
ایک بھڑ کے پروں کے متوازی افق horizon کے ترجے افقی کی جگہ استعمال کیا گیا ہے کے ساتھ بننے والے زاویے کی م ساوات $0.4 \sin 600t$ ریڈیئن ہے۔ جبکہ اس سے مراد سیکنڈ ہیں۔ اس بھ ڑکے پر ایک سیکنڈ میں کتنی دفعہ ارکعاش کرتے ہیں؟

طے کریں کہ آیا نقطہ $(1, 2, -1)$ اس خط پر واقع ہے۔ جو $(3, 1, 2)$ اور $(5, 0, 5)$ سے گزرتا ہے ۔
اس شکل میں ایک ایسے دائرے کا حصہ دکھایا گیا ہے جس کا مرکز 0 اور رداس r ہے۔ نقاط A,B,C اس دائرے پر اس طرح واقع ہیں کہ A,B دائرے کا قطر ہے جبکہ زاویے کی قیمت $\theta$ ریڈئین ہے۔ زاویہ AOC کی قیمت $\theta$ کی اکائی ہے دریافت کریں اور تکون OAC میں cosine کا فائدہ استعمال کر کہ $AC^2$ کو r اور $\theta$ کی اکائیوں میں واضع کریں۔
تکون ABC کو سمجھ کر AC کی لمبائی r اور $\theta$ میں تحریر کریں۔ اور یہ نتیجہ اخذ کر کہ دکھائیں کہ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$
x کی مثبت قیمتوں کے لیے $y = \frac{9}{2x+3}$ کا ترسیم بنائے۔
محن کے اس حصے کو جو x=0 اور x=3 کے درمیان واقع ہے۔ x محور کے گرد $2\pi$ گردش دی جاتی ہے۔ طواف کا حجم دریافت کریں۔
x کے حوالے سے مندرجہ ذیل تفاعلات کو ایک دوسرے سے ممیز کریں۔

$$(x^3 + 2x - 1)^3$$

$$\sqrt{\frac{1}{x^2 + 1}}$$

ایک استاد کو اس کی ملازمت کے پہلے سال کی کل تنخواہ 12800 پاؤنڈ ملی اس نے اپنی مستقبل کی تنخواہ کا تخمینہ اس بنیاد پہ لگایا کہ اس کی تنخواہ میں 950 پاؤنڈ سالانہ کا مستقل اضافہ ہوگا حتہ کہ اس کی تنخواہ 20400 پاؤنڈ سالانہ کی زیادہ سے زیادہ حد کو پہنچ جائے گی۔

اپنی مدت ملازمت کے پانچویں سالا اس کی کمائی کتنی ہوگی۔ کس سال میں وا پہلی بار زیادہ سے زیادہ تنخواہ وصول کرے گا۔ حساب لگائیں کہ اپنی مدت ملازمت کے nth سال کے آخر تک وہ کل کتنی رقم وصول کر چکا ہوگا۔ لکھیں کہ کون سی رقم n کی کس قیمت کے مطابق ہے۔

مذکورہ استاد کی جبرطواں بہن نے بھی اسی سال اپنے شعبے میں اپنے کام کا آغاز کیا اس کی پہلے سال کی تنخواہ 13500 پاؤنڈ تھی جبکہ اس کی تنخواہ میں مستقلاً 5% کا اضافہ ہونا تھا۔

کوئی موزوں طریقہ استعمال کر کہ طے کریں کہ اپنی ملازمت کے nth سال اس کی تنخواہ کتنی ہوگی۔

ثابت کریں کے اپنی ملازمت کے چوتھے سال اس کی آمدن اپنے بھائی سے کم ہوگی۔

کس سال میں پہنچ کر پہلی بار اس کی آمون اپنے بھائی سے زیادہ ہوگی ؟

ایک جیو میڑائی عقائد کا پہلا جزو 6 اور مشترک نسبت 75.0 ہے۔ اس عقائد کے پہلے دس اجزاء کا مجموعہ دریافت کریں۔ آپ کا جواب دو اعشاری نقطوں تک درست ہونا چاہی۔

اکائی کے اس جال پر دو سمتیں $\alpha$ اور $\beta$ دکھائی گئی ہیں

$|\alpha + \beta|$ دریافت کریں

$\alpha.\beta$ دریافت کریں

$\alpha$ اور $\beta$ کا درمیانہ زاویہ دریافت کریں ۔

# جوابات