ریاضیات اول

برائے گیارہویں اور بارہویں جماعت

طلبہ و طالبات

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 1

غیر معقول اور طاقتیں

اس باب کا پہلا حصہ مربع اور مکعب جذر والی تراکیب کے بارے میں اور دوسرا حصہ طاقتی بیانیوں کے بارے میں ہے۔ اس کو مکمل کرنے کے بعد آپ کو اس قابل ہو جانا چاہیے کہ۔

- مربع، مکعب اور دیگر جذروں والی تراکیب کو سادہ بنا سکیں
- طاقت کے قوانین جانتے ہوں
- منفی، صفر، اور کسری طاقتوں کا مطلب جانتے ہوں
- طاقت کی حامل تراکیب کو سادہ کر سکیں

1.1 اعداد کی اقسام

آغاز میں اعداد فقط گنتی کے لیے استعمال ہوتے تھے اور $1, 2, 3, \ldots$ ہماری اس ضرورت کے لیے کافی تھے۔ یہ طبعی اعداد یا مثبت صحیح عدد کہلاتے ہیں۔

آہستہ آہستہ ہمیں معلوم ہوا کہ اعداد پیمائش اور تجارتی مقاصد کے لیے بھی ضروری ہیں، اور اس کے لیے ہمیں کسروں کی ضرورت بھی پڑنے لگی۔ صحیح عدد اور کسروں کو ملا کر منطقی اعداد بنائے گئے۔ یہ وہ اعداد ہیں کہ جنھیں $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔ جب کہ p اور q دونوں صحیح اعداد ہیں اور q صفر نہیں ہو گا۔ یونانی ریاضی دانوں کی بے شمار شاندار دریافتوں میں سے ایک دریافت یہ بھی تھی کہ ایسے اعداد موجود ہیں جنھیں اس ہئیت میں نہیں لکھا جا سکتا۔ ایسے اعداد کو غیر منطقی اعداد کہا جاتا ہے۔ پہلا ایسا عدد جو دریافت کیا گیا $\sqrt{2}$ تھا، جو فیثاغورس کے قانون کے مطابق

ایک ایسے مربع کے وتر کی لمبائی بنتی ہے جس کی ہر طرف کی لمبائی 1 ہو۔ یونانیوں نے جس دلیل سے ثابت کیا کہ $\sqrt{2}$ کو کسری صورت میں نہیں لکھا جا سکتا، اسی دلیل سے یہ بھی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ کوئی بھی جزر، مربع، مکعب یا کوئی بھی، یا تو صحیح عدد ہو گی یا غیر منطقی عدد۔ اب ہم بہت سے غیر منطقی اعداد جان چکے ہیں جن میں سب سے مشہور π ہے۔

منطقی اور غیر منطقی اعداد مل کر حقیقی اعداد بناتے ہیں۔ اعداد صحیح، منطقی، غیر منطقی اور حقیقی اعداد مثبت، منفی یا صفر ہو سکتے ہیں۔

جب کسی منطقی عدد کو اعشاریہ کی صورت میں لکھا جائے تو یا تو اعشاریے کے ایک درجے تک رک جاتے ہیں یا ہندسوں کی ایک مخصوص وضع یا ترتیب میں بار باار دہرایا جانے لگتا ہے۔ مثال کے طور پر۔

$$\frac{7}{10} = 0.7, \quad \frac{7}{11} = 0.6363\ldots, \quad \frac{7}{12} = 0.5833\ldots, \quad \frac{7}{13} = 0.53846153846153\ldots$$

$$\frac{7}{14} = 0.5, \quad \frac{7}{15} = 0.466\ldots, \quad \frac{7}{16} = 0.4375, \quad \frac{7}{17} = 0.411764705882352941176\ldots$$

اس کا معکوس بھی درست ہے، یعنی اگر ایک اعشاری عدد رک جائے یا محدود بار دہرایا جائے تو وہ منطقی عدد کہلائے گا۔ لہٰذا اگر ایک غیر منطقی عدد کو اعشاری صورت میں لکھا جائے تو آپ جتنا مرضی پھیلا لیں، اس کے ہندسوں کی ترتیب کبھی دہرائی نہیں جائے گی۔

1.2 نامعقولیے اور ان کی خصوصیات

آج سے پہلے جب ہم $\sqrt{2}$ $\sqrt{8}$ $\sqrt{12}$ یا ایسی کسی ترکیب کو دیکھتے تھے تو ہم کیلکولیٹر کی مدد سے اسے اعشاری صورت میں بدل کر لکھ لیا کرتے تھے۔ مثلاً کچھ اس طرح

$\sqrt{2} = 1.414\ldots$ یا $\sqrt{2} = 1.414$ تین اعشاری ہندسوں تک درست یا $\sqrt{2} \approx 1.414$ لیکن $\sqrt{2} = 1.414$ خود یہ ترکیب کیوں درست نہیں ہے؟ $\sqrt{2}\sqrt[3]{9}$ ایسی تراکیب کو نامعقولیہ کہا جاتا ہے۔ اس جزو میں ہم انھی نا معقولیوں سے حساب کرنا سیکھیں گے۔ آپ کو یاد رکھنا ہو گا کہ $\sqrt{x}$ ہمیشہ x کی مثبت مربع جذر (یا $x = 0$ ہونے کی صورت میں صفر) کے معنوں میں لکھاجاتا ہے۔ نامعقولیوں کی اہم خاصیتیں، جو ہم بار بار استعمال کریں گے، یہ ہیں:

$\sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$ اور $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $(\sqrt{x} \times \sqrt{y}) \times (\sqrt{x} \times \sqrt{y}) = (\sqrt{x} \times \sqrt{x}) \times (\sqrt{y} \times \sqrt{y}) = x \times y = xy$ ہے اور چونکہ $\sqrt{x} \times \sqrt{y}$ مثبت ہے، لہٰذا یہ xy کا جزر ہے۔ اسی طرح $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$ ہے۔ اور اسی دلیل سے ہم سمجھ سکتے ہیں کہ $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$۔

درج ذیل مثالیں ان خصوصیات کو سمجھنے میں مدد دے سکتی ہیں۔

$$\sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=\sqrt{4}\times\sqrt{2}=2\sqrt{2};\quad \sqrt{12}=\sqrt{4\times 3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3};$$

$$\sqrt{18}\times\sqrt{2}=\sqrt{18\times 2}=\sqrt{36}=6;\quad \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{27}{3}}=\sqrt{9}=3.$$

اس حساب کو اپنے کیلکولیٹر سے دوبارہ کر کے دیکھنا شاید آپ کے یقین میں اضافے کا باعث ہو۔

مثال 1.1: سادہ کریں (ا)

$$\sqrt{28}+\sqrt{63}$$

(ب)

$$\sqrt{5}\times\sqrt{10}$$

ان کا حل متبادل طریقے سے بھی نکالا جا سکتا ہے، جیسے جزو ب کے لیے نکالا گیا ہے۔ (ا)

$$\sqrt{28}+\sqrt{63}=(\sqrt{4}\times\sqrt{7})+(\sqrt{9}\times\sqrt{7})=2\sqrt{7}+3\sqrt{7}=5\sqrt{7}$$

(ب) پہلا طریقہ $\sqrt{5}\times\sqrt{10}=\sqrt{5\times 10}=\sqrt{50}=\sqrt{25\times 2}=5\sqrt{2}$ دوسرا طریقہ $\sqrt{5}\times\sqrt{10}=\sqrt{5}\times(\sqrt{5}\times\sqrt{2})=(\sqrt{5}\times\sqrt{5})\times\sqrt{2}=5\sqrt{2}$ بعض اوقات کسر کے نسب نما سے نا معقولیوں کو ہٹا دینا مفید ہوتا ہے جیسے $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کے نسب نما سے نا معقولیہ ہٹانے کے لیے ہم اوپر نیچے دونوں کو $\sqrt{2}$ سے ضرب دے سکتے ہیں۔ $\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ □

کچھ نتائج جو اکثر ہماری مدد کریں گے۔ $\sqrt{x}=\frac{x}{\sqrt{x}}$ اور اسی کا بالعکس $\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$ غیر معقول کو نسب نما سے ہٹا دینا نسب نما کو معقول بنانا کہلاتا ہے۔

مثال 1.2: درج ذیل ترکیب میں نسب نما کو معقول بنائیں (ا)

$$\frac{6}{\sqrt{2}}$$

(ب)

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$$

(ا)

$$\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{3\times 2}{\sqrt{2}}=3\times\frac{2}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

(ب)

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{3 \times \sqrt{2}}{\sqrt{5} \times \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

مربع جذر کے لیے استعمال ہونے والے قوانین ہی مکعب جذر اور اس سے بالائی جذروں کے لیے استعمال ہوتے ہیں۔ □

مثال 1.3: ہم مثلث ABD سے شروع کرتے ہیں۔ فیثا غورس کے قانون کے مطابق ہم جانتے ہیں کہ $z^2 + 10^2 = 15^2$ لہٰذا $z^2 = 225 - 100 = 125$۔

$$z = \sqrt{125} = \sqrt{25 \times 5} = 5\sqrt{5}$$

توجہ کیجیے کہ مثلث ABC اور ABD مماثل ہیں۔ اس مماثلت کو بہتر طور پر سمجھنے کے لیے ہم شکل 22 میں ABD کو الٹا کر دکھاتے ہیں۔ اب ABC اور ABD دونوں مثلثوں کی طرفیں ایک ہی تناسب میں ہوں گی۔ لہٰذا $\frac{15}{z} = \frac{y}{10} = \frac{x}{15}$

اور جیسا کہ ہم جانتے ہیں $\frac{15}{z} = \frac{15}{5\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ ۔ $x = 15 \times \frac{3\sqrt{5}}{5} = 9\sqrt{5}$

$$y = 10 \times \frac{3\sqrt{5}}{5} = 6\sqrt{5}$$

آپ فیثاغورس کے قانون سے مثلث ABC میں $x^2 = 15^2 + y^2$ کی تصدیق کر سکتے ہیں۔ □

سوال 1: کیلکولیٹر استعمال کیے بغیر ان تراکیب کو سادہ کریں

- $$\sqrt{3} \times \sqrt{3}$$
- $$\sqrt{10} \times \sqrt{10}$$
- $$\sqrt{16} \times \sqrt{10}$$
- $$\sqrt{8} \times \sqrt{2}$$

- $$\sqrt{32} \times \sqrt{2}$$
- $$\sqrt{3} \times \sqrt{12}$$
- $$5\sqrt{3} \times \sqrt{3}$$
- $$2\sqrt{5} \times 3\sqrt{5}$$
- $$3\sqrt{6} \times 4\sqrt{6}$$
- $$2\sqrt{20} \times 3\sqrt{5}$$
- $$(2\sqrt{7})^2$$
- $$(3\sqrt{3})^2$$
- $$\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5}$$
- $$(2\sqrt[4]{3})^4$$
- $$(2\sqrt[3]{2})^6$$
- $$4\sqrt{125} \times 4\sqrt{5}$$

سوال 2: درج ذیل تراکیب کو کیلکولیٹر استعمال کیے بغیر سادہ کریں

- $\sqrt{18}$
- $\sqrt{20}$
- $\sqrt{24}$
- $\sqrt{32}$
- $\sqrt{40}$
- $\sqrt{45}$
- $\sqrt{48}$
- $\sqrt{50}$
- $\sqrt{54}$
- $\sqrt{72}$
- $\sqrt{175}$

- $\sqrt{675}$

سوال 3: درج ذیل تراکیب کو کیلکولیٹر استعمال کیے بغیر سادہ کریں

- $\sqrt{8}+\sqrt{18}$
- $\sqrt{3}+\sqrt{12}$
- $\sqrt{20}-\sqrt{5}$
- $\sqrt{32}-\sqrt{8}$
- $\sqrt{50}-\sqrt{18}-\sqrt{8}$
- $\sqrt{27}+\sqrt{27}$
- $\sqrt{99}+\sqrt{44}+\sqrt{11}$
- $8\sqrt{2}+2\sqrt{8}$
- $2\sqrt{20}+3\sqrt{45}$
- $\sqrt{52}-\sqrt{13}$
- $20\sqrt{5}-5\sqrt{20}$
- $\sqrt{48}+\sqrt{24}-\sqrt{75}+\sqrt{96}$

سوال 4: درج ذیل تراکیب کو کیلکولیٹر استعمال کیے بغیر سادہ کریں

ا. $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

ب. $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$

ج. $\dfrac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}}$

د. $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$

ھ. $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$

و. $\dfrac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}$

ز. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{48}}$

ح. $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{200}}$

سوال 5: درج ذیل تراکیب کو کیلکولیٹر استعمال کیے بغیر سادہ کریں

ا. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

ب. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

ج. $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$

د. $\dfrac{6}{\sqrt{6}}$

ھ. $\dfrac{11}{\sqrt{11}}$

و. $\dfrac{2}{\sqrt{8}}$

ز. $\dfrac{12}{\sqrt{3}}$

ح. $\dfrac{14}{\sqrt{7}}$

ط. $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

ي. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

يا. $\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

يب. $\dfrac{4\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$

يج. $\dfrac{7\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$

يد. $\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$

يہ. $\dfrac{9\sqrt{12}}{2\sqrt{18}}$

يو. $\dfrac{2\sqrt{18}}{9\sqrt{12}}$

سوال 6: درج ذیل تراکیب سادہ بنائیں اور ہر ایک کا جواب $k\sqrt{3}$ کی شکل میں لکھیں۔

ا. $\sqrt{75}+\sqrt{12}$

ب. $\sqrt{6}+\sqrt{3}(4-2\sqrt{3})$

ج. $\dfrac{12}{\sqrt{3}}-\sqrt{27}$

د. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

ھ. $\sqrt{2}\times\sqrt{8}\times\sqrt{27}$

و. $(3-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})-\sqrt{3}\times\sqrt{27}$

ز. $AB=4\sqrt{5}cm$

ح. $BC=\sqrt{10}$

سوال 7: $ABCD$ ایک چوکور ہے، جس میں $AB=4\sqrt{5}cm$ اور $\sqrt{10}=BC$۔ درج ذیل سوال کا جواب سادہ غیر معقول جذر کی شکل میں لکھیں۔ (ا) چوکور کا رقبہ معلوم کریں (ب) وتر AC کی لمبائی معلوم کریں

سوال 8: درج ذیل تراکیب سادہ بنائیں اور ہر ایک کا جواب $k\sqrt{2}$ کی شکل میں لکھیں۔

- $$x\sqrt{2}=10$$
- $$2y\sqrt{2}-3=\frac{5y}{\sqrt{2}}+1$$
- $$z\sqrt{32}-16=z\sqrt{8}-4$$

سوال 9: درج ذیل تراکیب کو $k\sqrt[3]{3}$ کی شکل میں لکھیں۔

- $$\sqrt[3]{24}$$

- $$\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{3}$$

- $$(\sqrt[3]{3})^4$$

- $$\sqrt[3]{3000} - \sqrt[3]{375}$$

سوال 10: درج ذیل قائم مثلثوں کی تیسری نا معلوم طرف معلوم کریں۔ اپنے جواب کو سادہ غیر معقول کی شکل میں لکھیں

سوال 11: آپ کو بتایا جائے کہ اعشاریے کے بارہ ہندسوں تک لکھیے، مثلاً $\sqrt{26} = 5.099019513593$

- $\sqrt{104}$ کی ایسی قیمت معلوم کریں جو دس اعشاری ہندوس تک درست ہو۔
- $\sqrt{650}$ کی ایسی قیمت معلوم کریں جو دس اعشاری ہندسوں تک درست ہو۔
- $\frac{13}{\sqrt{26}}$ کی ایسی قیمت معلوم کریں جو دس اعشاری ہندوس تک درست ہو۔

سوال 12: دی گئی بیک وقت مساواتوں کو حل کریں، $(2\sqrt{5})x + y = 34$ اور $7x - (3\sqrt{5})y = 9\sqrt{5}$

سوال 13: درج ذیل کو سادہ بنائیں

ا. $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)$

ب. $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$

ج. $(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})$

د. $(2\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}-1)$

ھ. $(4\sqrt{3}-2)(4\sqrt{3}+2)$

و. $(10+\sqrt{5})(10-\sqrt{5})$

ز. $(4\sqrt{7}-5)(4\sqrt{7}+5)$

ح. $(2\sqrt{6}-3\sqrt{3})(2\sqrt{6}+3\sqrt{3})$

سوال 14: سوال نمبر 13 میں ہر جواب ایک عدد صحیح ، نقل کر کے درج ذیل کو مکمل کریں

ا. $(\sqrt{3}-1)(\quad)=2$

ب. $(\sqrt{5}+1)(\quad)=4$

ج. $(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\quad)=4$

د. $(2\sqrt{7}+\sqrt{3})(\quad)=25$

ھ. $(\sqrt{11}+\sqrt{10})(\quad)=1$

و. $(3\sqrt{5}-2\sqrt{6})(\quad)=21$

سوال نمبر 15اور16 میں دی گئی مثالیں ہمیں نسب نما کو منطقی بنانے کے طریقے کی طرف متوجہ کرتی ہیں، جو سوال نمبر 5 کی ترکیبوں سے زیادہ پیچیدہ ہوں۔ سوال 15: (ا) وضاحت کریں $\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{1}{\sqrt{3}-1}\times\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$ اور ثابت کریں $\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

(ب) ثابت کریں $\frac{1}{2\sqrt{3}+3}=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5}$

سوال 16: نسب نما کو معقول بنا کر درج ذیل کسروں کو سادہ کریں

ا. $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$

ب. $\frac{1}{3\sqrt{5}-5}$

ج. $\frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{6}+3\sqrt{2}}$

1.3 طاقتوں کا استعمال

سولہویں صدی میں جب ریاضی کی کتب چھپنے لگیں، تو ریاضی دان مکعب اور مربع مساواتوں کا حل ڈھونڈ رہے تھے۔ انھیں لگا کہ xxx اور $xxxx$ کو x^3 اور x^4 لکھنا زیادہ آسان اور مفید رہے گا۔

طاقت نویسی کا آغاز تو اس انداز میں ہوا تھا لیکن وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ اندازہ ہوا کہ یہ صرف مختصر نویسی ہی کا ایک انداز نہیں تھا، بلکہ اس انداز سے لکھنا مستقبل میں اہم دریافتوں کا باعث بنا اور ریاضی کی موجودہ شکل اس انداز کے بغیر مبہم اور ناقابل استفہام ہوتی۔ آپ نے اس انداز بیان کی سادہ مثالیں تو استعمال کی ہی ہوں گی۔ عام طور پہ علامت a^m ، a کو m بار ضرب دینے کے لیے لکھی جاتی ہے, اس کو یوں سمجھا جا سکتا ہے۔

$$a^m = \overbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}^{m of these}$$

اس میں a کو اساس کہا جاتا ہے اور m کو طاقت کہا جاتا ہے۔ یہاں توجہ دلانا ضروری ہے کہ a کسی بھی قسم کا عدد ہو سکتا ہے لیکن m لازمی طور پر مثبت عدد صحیح ہی ہو گا۔ اسکو عام طور پہ a کی طاقت m کہا جاتا ہے۔ طاقتی بیانیوں میں لکھی جانے والی تراکیب کو درج ذیل سادہ قوانین سے آسان بنایا جا سکتا ہے۔ ان میں سے ایک ضرب کا قانون ہے۔

$$a^m \times a^n = \overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{m of these} \times \overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{n of these} = \overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{m+n of these} = a^{m+n}$$

یہ بہت سی جگہوں پہ استعمال ہوتا ہے، مثلاً ایسے مکعب کا حجم معلوم کرنے کے لیے جس کی ہر طرف کی لمبائی a ہو۔ ہم جانتے ہیں کہ اساس کے رقبے کو بلندی سے ضرب دے کر حجم دریافت کیا جاتا ہے۔ $a^3 = a^{2+1} = a2 \times a^1 = a^2 \times a =$

اس سے ملتا جلتا تقسیم کا قانون

$$\begin{aligned} a^m \div a^n &= \overbrace{(a \times a \times \ldots \times a)}^{m of these} \div \overbrace{(a \times a \times \ldots \times a)}^{n of these} \\ &= \overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{m-n of these} \\ &= a^{m-n} \end{aligned}$$

اسی طرح طاقت پہ طاقت کا قانون ہے

$$
\begin{aligned}
(a^m)^n &= \overbrace{\overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{m of these} \times \overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{m of these} \times \ldots \overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{m of these}}^{n of these} \\
&= \overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{m \times n of these} = a^{m \times n}
\end{aligned}
$$

ایک اور قانون جو جز کا قانون ہے کہ جس میں دو اساسیں اور ایک طاقت ہوتی ہے۔

$$
(a \times b)^m = \overbrace{(a \times b) \times (a \times b) \times \ldots \times (a \times b)}^{m of these} = \overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{m of these} \times \overbrace{b \times b \times \ldots \times b}^{m of these} = a^m \times b^m
$$

ان قوانین کو بیان کرنے کے لیے ضرب کی علامت استعمال کی گئی ہے، لیکن الجبرا کے دیگر حصوں میں اگر غلطی کی گنجائش نہ ہو تو یہ ہٹا دی جاتی ہے۔ اسے مکمل کرنے کے لیے یہاں یہ قوانین دوبارہ دیے جا رہے ہیں۔ ضرب کا قانون $a^m \times a^n = a^{m+n}$ تقسیم کا قانون $a^m \div a^n = am - n$ طاقت پہ طاقت کا قانون $(a^m)^n = a^{m \times n}$ جز کا قانون $(a \times b)^m = a^m \times b^m$

مثال 1.4: دی گئی ترکیب کو سادہ بنائیں $(2a^2b)^3 \div (4a^4b)$

$$
\begin{aligned}
(2a^2b)^3 \div (4a^4b) &= (2^3(a^2)^3b^3) \div (4a^4b) \\
&= (8a^{2\times 3}b^3) \div (4a^4b) \\
&= (8 \div 4) \times (a^6 \div a^4) \times (b^3 \div b^1) \\
&= 2a^{6-4}b^{3-1} \\
&= 2a^2b^2
\end{aligned}
$$

□

) 1.4

صفر اور منفی طاقت)

پچھلے حصے میں ہم نے ترکیب a^m کی تعریف بیان کی جس میں ہم m مرتبہ ضرب دیتے ہیں،لیکن اگر m صفر یا منفی ہو تو یہ تعریف اپنے معنی کھو دیتی ہے ۔ ہم کسی بھی چیز کو -3 یا صفر مرتبہ ضرب نہیں دے سکتے۔ لیکن a^m کے معنی کو وسعت دے کر دیکھا جائے تو صفر یا منفی طاقت

کی صورت میں بھی نہ صرف یہ کہ یہ معنی درست ہے بلکہ مفید بھی ہے۔ اس کے ساتھ اہم بات یہ کہ مثبت طاقت کے تمام قوانین منفی اور صفر طاقتوں کے لیے بھی درست ہیں۔ اس تسلسل پہ غور کریں۔

دائیں سمت پہ اساس ہمیشہ 2 ہے جب کہ طاقت ہر مرتبہ ایک کم ہوتی جا رہی ہے۔ جبکہ بائیں طرف عدد آدھے ہوتے جا رہے ہیں۔ لہذا اس تسلسل کو یوں بڑھایا جا سکتا ہے۔

اور ہم اس طرح لا محدود حد تک جا سکتے ہیں۔ اب ان کا آپس میں موازنہ کریں

یوں لگتا ہے جیسے -2^m کو $mfrac1$ لکھنا چاہیے، اور صفر کی طاقت کے لیے ایک خصوصی قیمت $2^0 = 1$ رکھنی چاہیے۔ ہم اپنے پہلے مشاہدے کو صفر کے علاوہ تمام اساسوں اور کسی بھی مثبت عدد صحیح m کے لیے پھیلائیں تو منفی طاقت کے قوانین تک پہنچ سکتے ہیں۔

منفی طاقت کا قانون

ہم یہاں کچھ مثالوں سے ثابت کریں گے کہ مثبت طاقتوں کے لیے بنائے گئے قوانین منفی طاقتوں کے لیے بھی درست ہیں۔ اسی طرح آپ اپنے لیے بہت سی اور مثالیں بھی بنا سکتے ہیں۔

ضرب کا قانون:

طاقت پہ طاقت کا قانون:

جز کا قانون:

مثال 1.5: اگر $a = 5$ ہے تو کی قیمت معلوم کریں یہاں اہم نکتہ یہ ہے کہ طاقت -2 صرف a کے ساتھ ہے، یعنی 4 پہ نہیں ہے۔
لہٰذا $4a^{-2}$ کا مطلب ہے $4 \times \frac{1}{2^a}$. اب جب کہ $a = 5$ ہے، $4a^{-2} = 4 \times \frac{1}{25} =$ □

مثال 1.6: ان تراکیب کو سادہ کریں

(ا) $4a^2b \times$ (b)

(ا) پہلا طریقہ ہر چیز کو مثبت طاقت میں لے آئیں

دوسرا طریقہ مثبت اور منفی دونوں طاقتوں کے لیے قوانین استعمال کر لیں۔

(ب) زیر نظر مثال میں میکینکس کا ایک استعمال دیکھیے۔ لزوجیت،(M,L,T) کی پیمائش کے لیے ماس، لمبائی اور وقت کی جہتیں ہیں۔ بریکٹس کو الگ الگ کر کے

منفی طاقتوں کو بہت چھوٹے اعداد لکھنے کے لیے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ یقیناً آپ بہت بڑے اعداد کو معیاری شکل یا سائنسی بیانیے میں لکھنا جانتے ہوں گے، مثلاً روشنی کی رفتار کو 300000000 میٹر فی سیکنڈ لکھنے کی بجائے $3 times 10^8 ms^{-1}$ لکھا جاتا ہے۔ بالکل اسی طرح سرخ روشنی کا طول موج جو تقریباً (0.00000075 metres) میٹر ہے، کو بھی آسانی سے $7.5 times 10^{-7}$ لکھا جا سکتا ہے۔ کمپیوٹر اور کیلکولیٹر میں لوگوں کے لیے سائنسی اعتبار سے لکھنے کا امکان موجود ہوتا ہے اور اگر کوئی عدد عام عدد سے زیادہ بڑا یا زیادہ چھوٹا ہو جائے تو وہ اسے معیاری شکل میں بدل دیتا ہے۔ مثلاً یا۔ علامت (E) ایکسپونینٹ کے لیے استعمال ہوتی ہے جو طاقت ہی کے لیے استعمال ہونے والا دوسرا لفظ ہے
□

مثال 1.7: اس ترکیب $G = \frac{gR^2}{M}$ سے کشش ثقل کے مستقل G کا حساب لگائیں، جبکہ $g \approx 9.81$ $R \approx 6.37 \times 10^6$ اور $M \approx 5.97 \times 10^{24}$۔ ($R$ اور M زمین کا رداس اور ماس ہے، اور g کشش ثقل کے سبب پیدا ہونے والا اسراع ہے۔

$$G \approx \frac{9.81 \times (6.37 \times 10^6)^2}{5.97 \times 10^{24}} = \frac{9.81 \times (6.37)^2}{5.97} \times \frac{(10^6)^2}{10^{24}}$$
$$\approx 66.7 \times \frac{10^{12}}{10^{24}} = 6.67 \times 10^1 \times 10^{-12} = 6.67 \times 10^{1-12} = 6.67 \times 10^{-11}$$

□

سوال 1: درج ذیل تراکیب کو سادہ کریں

ا. $a^2 \times a^3 \times a^7$

ب. $(b^4)^2$

ج. $c^7 \div c^3$

د. $d^5 \times d^4$

ہ. $(e^5)^4$

و. $(x^3y^2)^2$

ز. $5g^5 \times 3g^3$

ح. $12h^{12} \div 4h^4$

ط. $(2a^2)^3 \times (3a)^2$

ي. $(p^2q^3)^2 \times (pq^3)^3$

يا. $(4x^2y)^2 \times (2xy^3)^3$

يب. $(6ac^3)^2 \div (9a^2c^5$

يج. $(3m^4n^2)^3 \times (2mn^2)^2$

يد. $(49r^3s^2)^2 \div (7rs)^3$

يہ. $(2xy^2z^3)^2 \div (2xy^2z^3)$

سوال 2: درج ذیل تراکیب کو سادہ کریں، ہر جواب 2^n کی ہیئت میں لکھیں۔

ا. $2^{11} \times (2^5)^3$

ب. $(2^3)^2 \times (2^2)^3$

ج. 4^3

د. 8^2

ھ. $\dfrac{2^7 \times 2^8}{2^{13}}$

و. $\dfrac{2^2 \times 2^3}{(2^2)^2}$

ز. $4^2 \div 2^4$

ح. $2 \times 4^4 \div 8^3$

سوال 3: درج ذیل تراکیب کو صحیح عدد یا کسر کی صورت میں لکھیں

ا. 2^{-3}

ب. 4^{-2}

ج. 5^{-1}

د. 3^{-2}

ھ. 10^{-4}

و. 1^{-7}

ز. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}$

ح. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$

ط. $\left(2\dfrac{1}{2}\right)^{-1}$

ي. 2^{-7}

يا. 6^{-3}

يب. $\left(1\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$

سوال 4: $x = 2$ کے ساتھ درج ذیل میں سے ہر ایک کی قیمت معلوم کریں

ا. $4x^{-3}$

ج. $\frac{1}{4}x^{-3}$

ھ. $(4 \div x)^{-3}$

ب. $(4x)^{-3}$

د. $\left(\frac{1}{4}x\right)^{-3}$

و. $(x \div 4)^{-3}$

سوال 5: $y = 5$ کے ساتھ درج ذیل میں سے ہر ایک کی قیمت معلوم کریں

ا. $(2y)^{-1})$

ج. $\left(\frac{1}{2}y\right)^{-1}$

ھ. $\frac{1}{(2y)^{-1}}$

ب. $2y^{-1}$

د. $\frac{1}{2}y^{-1}$

و. $\frac{2}{(y^{-1})^{-1}}$

سوال 6: درج ذیل تراکیب کو ممکنہ سادہ ترین شکل میں لکھیں

ا. $a^4 \times a^{-3}$

و. $\frac{f^{-2}}{f^3}$

یا. $(2x^3y^{-1})^3$

ب. $\frac{1}{b^{-1}}$

ز. $12g^3 \times (2g^2)^{-2}$

یب. $(p^2q^4r^3)^{-4}$

ج. $(c^{-2})^3$

ح. $(3h^2)^{-2}$

یج. $(4m^2)^{-1} \times 8m^3$

د. $d^{-1} \times 2d$

ط. $(3i^{-2})^{-2}$

ید. $(3n^{-2})^4 \times (9n)^{-1}$

ھ. $e^{-4} \times e^{-5}$

ي. $\left(\frac{1}{2}j^{-2}\right)^{-3}$

یہ. $(2xy^2)^{-1} \times (4xy)^2$

یو. $(5a^3c^{-1})^2 \div (2a^{-1}c^2)$

یز. $(2q^{-2})^{-2} \div \left(\frac{4}{q}\right)^2$

یح. $(3x^{-2}y)^2 \div (4xy)^{-2}$

سوال 7: درج ذیل تراکیب کو حل کریں

ا. $3^x = \frac{1}{9}$

ب. $5^y = 1$

ج. $2^z \times 2^{z-3} = 32$

د. $7^{3x} \div 7^{x-2} = \frac{1}{49}$

ھ. $4^y \times 2^y = 8^{120}$

و. $3^t \times 9^{t \div 3} = 27^2$

سوال 8: ایک مکعب کی ہر طرف کی لمبائی 3×10^{-2} میٹر ہے۔ (ا) مکعب کا حجم معلوم کریں (ب) مکعب کا کل سطحی رقبہ معلوم کریں

سوال 9: ایک کھلاڑی 7.5×10^{-3} گھنٹے میں $2 \times 10^{-1}km$ کلومیٹر کا فاصلہ طے کرتا ہے۔ اس کی اوسط رفتار کلومیٹر فی گھنٹہ معلوم کریں۔

سوال 10: ایک L لمبائی رکھنے والی تار کا حجم Vm^3 یوں بیان کیا گیا ہے۔ جبکہ اس کے عمودی تراش کا رداس r ہے۔ (ا) 80 میٹر لمبائی اور $2 \times 10^{-3}m$ عمودی تراش کے رداس کی تار کا حجم معلوم کریں۔

(ب) ایک اور تار جس کی عمودی تراش کا رداس $5 \times 10^{-3}m^3$ اور حجم $8 \times 10^{-3}m^3$ ہے، کی لمبائی معلوم کریں۔

(ج) ایک تار جس کی لمبائی $60m$ اور حجم $6 \times 10^{-3}m^3$ ہے۔ اس کی عمودی تراش کا رداس معلوم کریں۔

سوال 11: ایک مساوات جو موج کو سمجھتے ہوئے سامنے آتی ہے یہ ہے۔ $y = \frac{\lambda d}{a}$

(ا) y معلوم کریں، جبکہ $\lambda = 7 \times 10^{-7}$، $d = 5 \times 10^{-1}$ اور $a = 8 \times 10^{-4}$ ہے۔

(ب) λ معلوم کریں، جبکہ $y = 10^{-3}$، $d = 0.6$ اور $a = 2.7 \times 10^{-4}$ ہے۔

سوال 12: حل کریں

$$\frac{3^{5x+2}}{9^{1-x}} = \frac{27^{4+3x}}{729}$$

1.5 کسری طاقتیں

گزشتہ حصے میں آپ دیکھ چکے ہیں کہ طاقت کے قوانین صحیح اعداد m اور n کی مثبت اور منفی دونوں طاقتوں کے لیے ٹھیک کام کرتے ہیں۔ لیکن اگر m اور n اعداد صحیح ہی نہ ہوں تو کیا ہو گا۔ اگر ہم طاقت پہ طاقت کے قانون میں $m = \frac{1}{2}$ اور $n = 2$ مانیں تو ہم اس نتیجے پہ پہنچیں گے

$$(x^{\frac{1}{2}})^2 = x^{\frac{1}{2}\times 2} = x^1 = x$$

$y = x^{\frac{1}{2}}$ سمجھنے سے یہ مساوات $x = y^2$ بن جائے گی۔ لہٰذا $y = \sqrt{x}$ یا $y = -\sqrt{x}$ جس سے $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ یا $-\sqrt{x}$۔ $x^{\frac{1}{2}}$ کو x کی مثبت جذر ماننے سے ہمیں $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ملے گا۔ اسی طرح اگر ہم $m = \frac{1}{3}$ اور $n = 3$ رکھیں تو ہم ظاہر کر سکتے ہیں کہ $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$۔ اس سے زیادہ وسیع طریقے سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ $m = \frac{1}{n}$، ہم دیکھیں گے $x = x^{\frac{1}{n}\times n} = (x^1n)^n$ جو ہمیں ایک بڑا نتیجہ دے گا جو کہ

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

توجہ کیجیے کہ $\sqrt{x} = x^12$ کی صورت میں لازمی طور پہ $0 \leq x$ ہو گا، لیکن $\sqrt[3]{x} = x^13$ کی صورت میں لازمی طور پہ $0 \leq x$ کی ضرورت نہیں ہو گی، کیونکہ ہم کسی منفی نمبر کا مکعب جذر تو بہر حال لے سکتے ہیں۔ $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ کو ذرا سا بڑھا کر دیکھیں تو ہم دیکھ سکتے ہیں کہ $x^{\frac{2}{3}}$ کی قسم کی تراکیب کو کیسے حل کرنا ہے۔ اس کے دو متبادل ہو سکتے ہیں۔

$$x\frac{2}{3} = x^{2\times\frac{1}{3}} = (x^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x^2} \text{ اور } x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{3}\times 2} = (\sqrt[3]{x})^2$$

(اگر x کی قطعی مکعب جذر ہو تو اس کے لیے پہلی شکل بہتر ہے، ورنہ دوسری قسم بہتر ہے) عمومی طور پہ یہی منطق ہمیں کسری طاقتوں کے اصولوں تک لے جاتی ہے۔

جذری طاقت کا قانون

$$x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$$

جذری طاقتوں کو $x^{1/2}$، $x^{m/n}$ بھی لکھا جا سکتا ہے اور اسی طرح مزید بھی۔

مثال 1.8: سادہ کریں (ا) $9^{\frac{1}{2}}$

(ب) $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}}$

(ج) $16^{-\frac{3}{4}}$

(ا) $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

(ب) $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = 3^2 = 9$

(ج) پہلا طریقہ $16^{-\frac{3}{4}} = (2^4)^{-\frac{3}{4}} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

دوسرا طریقہ $16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{(\sqrt[4]{16})^3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ □

طاقت کے معمے حل کرنے کے لیے بہت سے متبادل طریقے بھی موجود ہیں اور آپ کو ان کا بھی تجربہ کرنا چاہیے۔ بہت سے لوگ مثبت طاقت میں سوچنا آسان سمجھتے ہیں لہذا وہ منفی طاقت کو مثبت بنا کر آسانی سے حل کر سکتے ہیں، اگر آپ بھی ایسے ہی ہیں تو آپ پہلا مرحلہ $16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{3}{4}}}$ یوں لکھ سکتے ہیں، بالکل جیسے ہم نے دوسرے طریقے میں دیکھا۔

مثال 1.9: سادہ کریں (ا) $(2\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}$

(ب) $2x^{\frac{1}{2}} \times 3x^{-\frac{5}{2}}$

(ج) $\frac{(2x^2y^2)^{-\frac{1}{2}}}{(2xy^{-2})^{\frac{3}{2}}}$

(ا) $(2\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}} = (\frac{9}{4})^{-\frac{1}{4}} = (\frac{4}{9})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ (ب) $2x^{\frac{1}{2}} \times 3x^{-\frac{5}{2}} = 6x^{\frac{1}{2}-\frac{5}{2}} = 6x^{-2} = \frac{6}{x^2}$

(ج) پہلا طریقہ $(2x^2y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(2x^2y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}xy}}$

$$\frac{(2x^2y^2)^{-\frac{1}{2}}}{(2xy^{-2})^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}xy}} \times \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}y^{-3}} = \frac{1}{2^2x^{\frac{5}{2}}y^{-2}} = \frac{y^2}{4x^{\frac{5}{2}}}$$

دوسرا طریقہ $(2xy^{-2})^{\frac{3}{2}}$ سے تقسیم کرنا ایسا ہی ہے جیسا $(2xy^{-2})^{-\frac{3}{2}}$ سے ضرب دینا۔

$$\frac{(2x^2y^2)^{-\frac{1}{2}}}{(2xy^{-2})^{\frac{3}{2}}} = (2x^2y^2)^{-\frac{1}{2}}(2xy^{-2})^{-\frac{3}{2}} = (2^{-\frac{1}{2}}x^{-1}y^{-1})(2^{-\frac{3}{2}}x^{-\frac{3}{2}}y^3) = 2^{-2}x^{\frac{5}{2}}y^2$$

جز ج میں ایک نکتہ قابل توجہ ہے اور وہ یہ کہ دونوں طریقوں سے جواب مختلف آ رہا ہے، اور ہم سمجھ سکتے ہیں کہ مساوات کا سادہ ہونا ہر ایک کے مزاج کے مطابق مختلف ہو سکتا ہے۔ □

سوال 1:

کیلکولیٹر کی مدد کے بغیر درج ذیل تراکیب کا مساوی لکھیں

ا. $25^{\frac{1}{2}}$

ب. $8^{\frac{1}{3}}$

ج. $36^{\frac{1}{2}}$

د. $32^{\frac{1}{5}}$

ھ. $81^{\frac{1}{4}}$

و. $9^{-\frac{1}{2}}$

ز. $16^{-\frac{1}{4}}$

ح. $49^{-\frac{1}{2}}$

ط. $1000^{-\frac{1}{3}}$

ی. $(-27)^{\frac{1}{3}}$

یا. $64^{\frac{2}{3}}$

یب. $(-125)^{-\frac{4}{3}}$

سوال 2:

کیلکولیٹر کی مدد کے بغیر درج ذیل تراکیب کا مساوی لکھیں

ا. $4^{\frac{1}{2}}$

ب. $(\frac{1}{2})^2$

ج. $(\frac{1}{4})^{-2}$

د. $4^{-\frac{1}{2}}$

ھ. $(\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}$

و. $(\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$

ز. 4^2

ح. $((\frac{1}{4})^{\frac{1}{4}})^2$

سوال 3:

کیلکولیٹر کی مدد کے بغیر درج ذیل تراکیب کا مساوی لکھیں

ا. $8^{\frac{2}{3}}$

ب. $4^{\frac{3}{2}}$

ج. $9^{-\frac{3}{2}}$

د. $27^{\frac{4}{3}}$

ھ. $32^{\frac{2}{5}}$

و. $64^{-\frac{5}{6}}$

ز. $4^{2\frac{1}{2}}$

ح. $10\,000^{-\frac{3}{4}}$

ط. $(\frac{1}{125})^{-\frac{4}{3}}$

ي. $(3\frac{3}{8})^{\frac{2}{3}}$

يا. $(2\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}$

سوال 4: درج ذیل مساواتوں کو سادہ بنائیں

ا. $a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{5}{3}}$

ب. $3b^{\frac{1}{2}} \times 4b^{-\frac{3}{2}}$

ج. $(6c^{\frac{1}{4}}) \times (4c)^{\frac{1}{2}}$

د. $(d^2)^{\frac{1}{3}} \div (d^{\frac{1}{3}})^2$

ھ. $(2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}})^6 \times (\frac{1}{2}x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}})^4$

و. $(24e)^{\frac{1}{3}} \div (3e)^{\frac{1}{3}}$

ز. $\dfrac{(5p^2q^4)^{\frac{1}{3}}}{(25pq^2)^{-\frac{1}{3}}}$

ح. $(4m^3n)^{\frac{1}{4}} \times (8mn^3)^{\frac{1}{2}}$

ط. $\dfrac{(2x^2y^{-1})^{-\frac{1}{4}}}{(8x^{-1}y^2)^{-\frac{1}{2}}}$

سوال 5: درج ذیل مساواتوں کو حل کریں

ا. $x^{\frac{1}{2}} = 8$

ب. $x^{\frac{1}{3}} = 3$

ج. $x^{\frac{2}{3}} = 4$

د. $x^{\frac{2}{3}} = 27$

ھ. $x^{-\frac{3}{2}} = 8$

و. $x^{-\frac{2}{3}} = 9$

ز. $x^{\frac{3}{2}} = x\sqrt{2}$

ح. $x^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{x}$

سوال 6: L میٹر لمبائی کی ایک لٹکن کو ایک گردش مکمل کرنے کے لیے T وقت درکار ہے، جسے یوں لکھا جائے گا۔ $T = 2\pi l^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}$ جبکہ $g \approx 9.81ms^{-2}$ (ا)ایک 0.9 میٹر لمبی لٹکن کا وقت T دریافت کریں۔ (ب) ایک ایسی لٹکن کی لمبائی معلوم کریں کہ جسے ایک گردش کے لیے تین سیکنڈ کا وقت درکار ہے۔

سوال 7:   ایک کرے کے رداس $r cm$ اور حجم $V cm^3$ کے درمیان تعلق $r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ بنتا ہے۔ ایک ایسے کرے کا رداس معلوم کریں جس کا حجم $1150cm^3$ ہو۔

سوال 8:   درج ذیل مساواتوں کو حل کریں

ا.	ج.	ھ.	ز.
$4^x = 32$	$16^z = 2$	$8^y = 16$	$(2t)^3 \times 4^{t-1} = 16$

ب.	د.	و.	ح.
$9^y = \frac{1}{27}$	$100^x = 1000$	$8^z = \frac{1}{128}$	$\frac{9^y}{27^{2y+1}} = 81$

سوال 9:   سادہ کریں

ا.   ب.   ج.   د.

$(2\sqrt{2})^5$ $(\sqrt{5}-2)^2+(\sqrt{5}-2)((\sqrt{5})^4+2)(\sqrt{3})^4+(\sqrt{4}5)(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}(4-3\sqrt{2})$

سوال 10:   سادہ کریں

ا.   ب.   ج.   د.

$\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{16}$ $\sqrt{100\,000}+\sqrt{1000}+\sqrt{10}$ $\sqrt{63}-\sqrt{28}$ $\sqrt{27}+\sqrt{12}-\sqrt{3}$

سوال 11:   درج ذیل کے نسب نما کو ناطق بنائیں

ا. $\dfrac{9}{2\sqrt{3}}$

ب. $\dfrac{1}{5\sqrt{5}}$

ج. $\dfrac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{10}}$

د. $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{15}}$

سوال 12: سادہ کریں

ا. $\dfrac{4}{\sqrt{2}} - \dfrac{4}{\sqrt{8}}$

ب. $\dfrac{10}{\sqrt{5}} + \sqrt{20}$

ج. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2}-1) + \sqrt{2}(1-\sqrt{8})$

د. $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}} + \dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}}$

سوال 13: $\frac{5}{\sqrt{7}}$ کو $k\sqrt{7}$ شکل میں بنا کر دکھائیں، جبکہ k ایک ناطق عدد ہے۔

سوال 14: اس نتیجے کو درست ثابت کریں $\sqrt{12} \times \sqrt{75} = 30$

(ا) غیر معقول اعداد کو استعمال کرتے ہوئے (ب) کسری طاقتیں استعمال کرتے ہوئے

سوال 15: اس شکل میں زاویہ ABC اور ACD قائم زاویے ہیں۔ اگر ہم جانتے ہوں کہ $AB = CD = 2\sqrt{6}$ اور $BC = 7cm$ تو ظاہر کریں کہ AD کی لمبائی $4\sqrt{6}$ اور $7\sqrt{2}$ کے درمیان ہے۔

سوال 16: مثلث PQR میں Q ایک قائمہ زاویہ ہے۔ $PQ = (6-2\sqrt{2})cm$ اور $QR = (6+2\sqrt{2})cm$ (ا) مثلث کا رقبہ دریافت کریں (ب) ظاہر کریں کہ PR کی لمبائی $2\sqrt{22}cm$ ہے۔

سوال 17: ترکیب $\sqrt{27} \times \sqrt[6]{\frac{4}{3}} \times \sqrt[3]{36}$ کے ہر جز کو طاقت میں لکھ کر سادہ بنائیں

سوال 18: ایک مثلث ABC میں، $AB = 4\sqrt{3}cm$، $BC = 5\sqrt{3}cm$ اور زاویہ B 60 ہے۔ کوسائن قاعدے کی مدد سے AC کی لمبائی سادہ غیر معقول اعداد میں نکالیں۔

سوال 19: درج ذیل ہمزاد مساواتوں کو حل کریں $5x - 3y = 41$ اور $7\sqrt{2})x + (4\sqrt{2})y = 82$

سوال 20: اپنے کیلکولیٹر پہ موجود طاقت بنائیں والا بٹن استعمال کرتے ہوئے 5 معین اعداد تک جواب ڈھونڈیں (ا)

$$\frac{1}{3.7^5}$$

(ب)

$$\sqrt[5]{3.7}$$

سوال 21: نقاط A اور B کے محدد، بالترتیب $(2,3)$ اور $(4,-3)$ ہیں۔ AB کی لمبائی اور اس کے درمیانی نقطے کے محدد معلوم کریں۔

سوال 22: (ا) ایک خط l کی مساوات دریافت کریں، جو نقطہ $A(2,3)$ سے ڈھلوان $\frac{-1}{2}$ کے ساتھ گزر رہی ہو۔ (ب) ظاہر کریں کہ نقطہ P جس کے محدد $(2+2t, 3-t)$ ہیں، ہمیشہ l پر رہے گا، بھلے t کی قیمت کچھ بھی ہو۔ (ج) t کی قیمت دریافت کریں، ایسے کہ AP کی لمبائی 5 رہے۔ (د) t کی قیمت دریافت کریں جب کہ OP l کے عمودی ہے۔ O کو نقطہ آغاز مانتے ہوئے OL عمودی خط کی لمبائی معلوم کریں

سوال 23: P اور Q ایک خط کے انقطاع کے نقطے ہیں اور x اور y محور بالترتیب یہ ہیں۔

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

PQ کا درمیانی فاصلہ 20 ہے اور اس کی ڈھلوان -3 ہے۔ اس سب کے ساتھ a اور b کی قیمت معلوم کریں۔

سوال 24: ایک چوکور کی اطراف ان خطوط پر موجود ہیں $y = 2x - 4, y = 2x - 13, x + y = 5$۔ $x + y = -4$۔ اس کی ایک سمت اور اس کے اور اس کے متوازی سمت کا درمیانی فاصلہ معلوم کریں۔ نیز اس چوکور کا رقبہ بھی دریافت کریں۔

سوال 25: درج ذیل کو عداد کی مدد کے بغیر حل کریں

ا. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

ب. $32^{-\frac{4}{5}}$

ج. $\left(4^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}$

د. $\left(1\frac{7}{9}\right)^{1\frac{1}{2}}$

سوال 26: ترکیب $\left(9a^4\right)^{-\frac{1}{2}}$ کو الجبرائی کسرے کی شکل میں لکھ کر سادہ بنائیں

سوال 27: $y = x^{\frac{1}{3}}$ سمجھتے ہوئے، x کی قیمت معلوم کریں، جس کے لیے $x^{\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}} = 1$

سوال 28: مساوات $4^{2x} \times 8^{x-1} = 32$ کو حل کریں

سوال 29: ترکیب $\frac{1}{(\sqrt{a})^{\frac{4}{3}}}$ کو a^n کی شکل میں لکھیں اور n کی قیمت بتائیں۔

سوال 30: سادہ کریں

ا. $(4p^{\frac{1}{4}}q^{-3})^{\frac{1}{2}}$

ب. $\frac{(5b)^{-1}}{(8b^6)^{\frac{1}{3}}}$

ج. $(2(x^6y^8)^{\frac{1}{4}})^2 \times (8x^{-2})^{\frac{1}{4}}$

د. $(m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{2}})^2 \times (m^{\frac{1}{6}}n^{\frac{1}{3}})^4 \times (mn)^{-1}$

سوال 31: یہ نظر میں رکھتے ہوئے کہ معیاری شکل میں $3^{236} \approx 4 \times 10^{112}$ اور $3^{-376} \approx 4 \times 10^{-180}$، درج زیل تراکیب کے لیے معیاری شکل میں اندازے معلوم کریں

ا. 3^{376}

ب. 3^{612}

ج. $(\sqrt{3})^{236}$

د. $(3^{-376})^{\frac{5}{2}}$

سوال 32: ذیل میں دیا گیا جدول تین سیاروں کا سورج سے اوسط فاصلہ اور ایک گردش کے لیے درکار وقت بتا رہا ہے

(ا) دکھائیں کہ r^3T^{-2} تینوں سیاروں کے لیے تقریباً ایک سی قیمت رکھتا ہے۔ (ب) زمین سورج کے گرد ایک چکر مکمل کرنے میں ایک سال لگاتی ہے، زمین کے مدار کا اوسط رداس معلوم کریں

سوال 33: سادہ کریں

(ا) $2^{\frac{3}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{3}{2}}$، اپنے جواب کو $k\sqrt{2}$ کی شکل میں لکھیں۔

(ب) $(\sqrt{3})^3 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^1 (\sqrt{3})^0 + (\sqrt{3})^{-1} + (\sqrt{3})^{-2} + (\sqrt{3})^{-3}$، اپنے جواب کو $a + b\sqrt{3}$ کی شکل میں لکھیں۔

سوال 34: درج ذیل میں سے ہر ایک کو 2^n کی شکل میں ظاہر کریں

ا. $2^{70} + 2^{70}$

ب. $2^{-400} + 2^{-400}$

ج. $2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$

د. $2^{100} - 299$

ھ. $8^{0.1} + 8^{0.1} + 8^{0.1} + 8^{0.1} + 8^{0.1} + 8^{0.1} + 8^{0.1} + 8^{0.1}$

سوال 35: مساوات کو حل کریں $\frac{25^{x-2}}{3125} = \frac{125^{3x}}{5^{x+4}}$

سوال 36: ایک کرے کے سطحی رقبے اور حجم کے کلیے بالترتیب $S = 4\pi r^2$ اور $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ہیں۔ جبکہ r کرے کا رداس ہے۔ درجذیل کے لیے موزوں تراکیب بنائیے۔

(ا) سطحی رقبے کو حجم کے ذریعے لکھیں

(ب) حجم کو سطحی رقبے کے ذریعے لکھیں

سوال 37: mKg وزن کے حامل اور vms^{-1} رفتار سے حرکت کرنے والے ایک جسم کی حرکی توانائی K کے لیے کلیہ $K = \frac{1}{2}mv^2$ ہے۔ اس کلیے کو مد نظر رکھتے ہوئے $2.5 \times 10^{-2}kg$ وزن رکھنے والی اور $8 \times 10^2ms^{-1}$ رفتار سے حرکت کرنے والی گولی کی حرکی توانائی معلوم کریں۔

باب2

مثلث

اس سبق میں ہم سائن ، کوسائن اور ٹینجنٹ کے بارے میں پڑھیں گے، جب آپ یہ سبق مکمل کر لیں گے تو آپ اس قابل ہوں گے کہ؛

1. تمام زاویوں کے لیے سائن ، کوسائن اور ٹینجنٹ کے ترسیموں کی شکل پہچانیں
2. خاص زاویوں کے لیے سائن ، کوسائن اور ٹینجنٹ کی قیمتیں معلوم ہوں یا معلوم کرنے کا طریقہ آتا ہو۔
3. سادہ مثلثی مساوات حل کر سکیں
4. $\sin\theta^0$،$\cos\theta^0$اور$\tan\theta^0$ کی مماثل کا استعمال آتا ہو۔

2.1 $\cos\theta^0$کی ترسیم

زاویے کی علامت کے طور پر اکثر یونانی زبان کے خط استعمال کیے جاتے ہیں، ہم اس سبق میں θ (تھیٹا) اور ϕ (فائ) استعمال کریں گے۔

غالباً آپ نے $\cos\theta^0$ پہلے قائم مثلث میں زاویوں کا حساب لگاتے ہوئے استعمال کیا ہوگا، کہ جب زاویہ صفر سے بڑا اور 90 سے چھوٹا تھا۔ اور پھر آپنے اسے کسی اور مثلث میں استعمال کیا ہوگا جب زاویہ $180 > \theta > 0$ تھا۔ تاہم اگر آپکے پاس ایک ترسیم بنانے والا حساب کتاب کا آلہ ہے تو آپ دیکھیں گے کہ یہ $\cos\theta^0$ کی ایسی ہی ترسیم بناتا ہے جیسی کہ شکل 10.3 میں بنی ہوئ ہے۔ یہ حصہ $\cos\theta^0$ کی تعریف بیان کرتا ہے ہر طرح کے زاویوں کے لیے بیشک وہ مثبت ہوں یو منفی۔

شکل 10.1 میں ایک دائرہ دکھایا گیا ہے جسکا رداس 1 اکائی ہے اور جسکا مبدا O پر ہے۔ x محدد پر ایک زاویہ بناتے ہوئے ایک خط OP کھینچیں کہ یہ دائرے کی حد کو چھو لے اور اس نقطے کو P کہہ دیں۔ سے P ایک عمودی خط کھینچیں کہ وہ OA کو پا لے اور جس نقطے پر وہ خط OA کو چھوئے اس نقطے کو N کہہ دیں ۔ فرض کریں کہ ON=x ہے اور NP=y ہے جبکہ نقطہ P کے محدد (x,y) ہیں۔

مثلث ONP کو دیکھیں، تعریف استعمال کرتے ہوئے $\cos\theta = \frac{ON}{OP}$ اور ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ $\cos\theta = \frac{x}{1} = x$۔

نتیجہ $x = \cos\theta^0$ دراصل $\cos\theta^0$ کی تعریف کے طور پر استعمال ہو رہا ہے زاویے کی تمام قیمتوں کے لیے۔

آپ اس تعریف کی اثرات دیکھیں گے جب زاویہ 90 کا مضرب ہوگا۔

مثال 2.1: مثلثی تناسب $\cos\theta^0$ کی قیمت معلوم کریں جب؛

.1

$$\theta = 180$$

.2

$$\theta = 270$$

1. جب $\theta = 180$، P ایک نقطہ ہے جسکے محدد(1,0-) ہیں ۔ جیسا کہ x محدد نقطہ P کا 1- ہے لہٰذہ $\cos^0 180 = -1$ ہے۔
2. جب زاویہ $\theta = 270$ ،P ایک نقطہ ہے $(0,-1)$ اسی لیے $\cos 270^0 = 0$

□

جیسے جیسے زاویہ بڑھتا ہے نقطہ P دائرے کے گرد گھومتا ہے, اور جب $\theta = 360$ ہوتا ہے نقطہ P پورا دائرہ مکمل کر کے دوبارہ A پر پہنچ جاتا ہے۔ اور جب زاویہ 360 سے بڑھتا ہے تو نقطہ P دوبارہ چکر شروع کر دیتا ہے ۔ یہاں سے ہم بآسانی یہ کہہ سکتے ہیں کہ $\cos(\theta - 360)^0 = \cos\theta^0$ اور جب بھی زاویہ 360 ہوتا ہے $\cos\theta^0$اپنی قیمت دہراتا ہے ۔

اگر زاویہ 0 سے چھوٹا ہو تو θ مخالف سمت میں گھومے گا لیکن شروع A سے ہی ہوگا۔ شکل 10۔2 میں زاویہ 150- دکھایا گیا ہے۔ یعنی اگر $\theta = -150$ تو P تیسرے خانے میں ہوگا اور چونکہ P کا x محدد منفی ہے لہٰذہ $\cos(-150)^0$ منفی ہوگا۔

حساب کتاب کا ایک آلہ آپکو زاویے کی ہر قیمت کے لیے $\cos\theta^0$ کی قیمت دے گا۔ اگر آپکے پاس ترسیم بنانے والا حساب کتاب کا آلہ ہے تو ان قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے $\cos\theta^0$ کی ترسیم بنائیں وہ ایسی ہی دکھے گی جیسی کہ شکل 10.3 میں نظر آ رہی ہے۔

اگر آپ $\cos\theta^0$ کی ترسیم بنانا چاہتے ہیں تو آپ کو حساب کتاب کے آلے میں مساوات $y = \cos x$ ڈالنی ہوگی اور یہ بھی خیال رکھیں کہ حساب کتاب کا آلہ ڈگری موڈ میں ہے۔

کوسائن تفاعل کی ترسیم خود کو دہراتی رہتی ہے۔ تفاعل کی اس خصوصیت کو دوری خصوصیت کہتے ہیں۔ اور ان تفاعل کا دور وہ کم سے کم وقفہ ہے کہ جس کے لیے تفاعل خود کو دہراتا ہے۔اسی لیے کوسائن کے تفاعل کا دور 360 درجے ہے۔ اور خصوصیت $\cos\theta^0 = \cos(\theta \pm 360)^0$ کو دوری خصوصیت کہیں گے۔ کئ قدرتی رجحانات بھی دوری خصوصیت دکھاتے ہیں۔ اور اکثر انکی خصوصیات سمجھنے کے لیے کوسائن تفاعل کا ہی استعمال کیا جاتا ہے۔

مثال 2.2: ایک بندرگاہ میں پانی کی گہرائ میٹرز میں ناپی جاتی ہے اور اس گہرائ کو ماپنے کا کلیہ $d = 6 + 3\cos 30t^0$ ہے. جبکہ t وقت کے لیے ہے جو گھنٹوں میں ناپا جائے گا دوپہر کے بعد سے۔ معلوم کریں؛

1. رات کے پے پانی کی گہرائ معلوم کریں
2. پانی کی کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ گہرائ اور یہ کس وقت ہو گی۔

1. رات کے 9.45 جب $t = 9.75$ تاکہ $d = 6 + 3\cos(30 + 9.75) = 6 + 3\cos 292.5 = 7.148\ldots$ اسی لیے پانی کی گہرائ 7.15 میٹرز ہے۔ اور آپکا جواب 3 معنی خیز ہندسوں تک ہونا چاہیے۔
2. مستقل d کی قیمت زیادہ سے زیادہ تب ہو گی جب کوسائن تفاعل کی قیمت 1 ہے۔ اور اسی لیے $6 + 3 \times 1 = 9$۔ اسی طرح کم سے کم قیمت بھی $6 + 3 \times (-1) = 3$، زیادہ سے زیادہ گہرائ 9 میٹر اور کم سے کم گہرائ 3 میٹر ہے ۔پہلی دفعہ جب دوپہر میں یہ واقع وقوع پزیر ہوگا $30t = 360$ اور $30t = 180$، جسکا مطلب رات کا درمیان اور شام کے 6 بجے ہے۔

□

2.2 $\sin\theta^0$اور$\tan\theta^0$کی ترسیم

جیسے ہم نے کوسائن کے تفاعل کے لیے ایک شکل 10.1 بنائ اسی کو استعمال کرتے ہوئے سائن کی تعریف کچھ یوں ہو گی۔

$$\sin\theta = \frac{NP}{OP} = \frac{y}{1} = y$$

کوسائن کی ترسیم کی طرح سائن کی ترسیم (شکل 10.4) دوری ہے، جسکا دورانیہ 360 درجے ہے۔اور اسکی ترسیم بھی -1 اور 1 کے درمیان ہی رہتی ہے۔

اگر آپ شکل 10.1 کی طرف لوٹیں تو آپ دیکھیں گے کہ $\tan\theta = \frac{NP}{OP} = \frac{y}{x}$، اور اسے $\tan\theta^0$ کی تعریف کی طرح لیا جاتا ہے۔ $\tan\theta^0$ کے میدان عمل میں وہ زاویے شامل نہیں ہیں جن کے لیے x صفر ہو۔ جیسا کہ $\theta = \pm 90, \pm 270 \ldots$۔ شکل 10.5 میں $\tan\theta^0$ کی ترسیم دکھائ گئ ہے۔

سائن اور کوسائن کی ترسیم کی طرح ٹینجنٹ کی ترسیم بھی دوری ہے لیکن اسکا دورانیہ 180 ہے ،اسی لیے $\tan(\theta \pm 180) = \tan\theta$

تعریف: ھم جانتے ھیں کہ $\sin\theta^o = y$, $\cos\theta^o = x$ ہے اور ھم یہ بھی جانتے ہیں کہ $\tan\theta^o = \frac{y}{x}$ ہے ان تمام حقائق کو جمع کریں تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\tan\theta^o = \frac{\sin\theta^o}{\cos\theta^o}$ آپ ، $\tan\theta^o$ کی متبادل تعریف کے طور پر استعمال کر سکتے ہیں۔

□

2.3 چند مثلق تفاعل کی درست قیمتیں

تعریف : صرف چند ہی ایسے زاویے ہیں جن کی درست قیمت عدد صحیح ہے اور جن کے

$$\cos 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tan 45^o = 1$$

آپ درست معلوم کر سکتے ہیں۔ ان زاویوں میں 30° , 45° اور 60° زیادہ اہم ہیں۔ 45° زاویے کی مثلثی تناسب معلوم کرنے کے لیے ایک قائمہ زاویہ کے سلتھ مسادی الساقین تکون بتائیں ۔ جس کی اطراف کی لمبائی 1 اکائی ہو۔ جیسا کہ شکل 6 -10 میں ھے وتر کی لمبائ-- ھو گی۔ تب

$$\cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan 45^o = 1$$

اگر آپ نسب نما کو اسثولالی بنائیں تو

$$\cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan 45^o = 1$$

- 30° اور 60° درجے کی مثلی تناسب معلوم کرنے کے لیے ایک یکر طرفہ مثلث(تکون) بنائیں جس کی اطراف 2 اکائیوں جتنی لمبی ہیں۔ جیسے کہ شکل 7۔10 میں دکھایا گیا ہے۔ راس سے ایک خط عمودی خط کھینچیں جو قائدہ کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کر دے۔ اس عمودی خط کی لمبائی $\sqrt{3}$ اکائیاں ہیں۔ اس عمودی خط نے راس کو بھی دو برابر حصوں میں تقسیم کر دیا ہے۔

$$\cos 60^o = \frac{1}{2}, \ \sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \tan 60^o = \sqrt{3};$$

$$\cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \sin 30^o = \frac{1}{2}, \ \tan 30^o = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

آپ کو یہ نتائج ازبر ہونے چاہئیں۔

□

مثال 2.3: مندرجہ ذیل کی درست قیمتیں معلوم کریں۔

ا $\cos 135^o$ ب $\sin 120^o$ ج $\tan 495^o$

-- شکل 3۔10 کے مطابق ---------- -- شکل 10-4 کے مطابق---------- -- شکل 5۔10 کے مطابق-

ا $\cos 135^o = -\cos 45^o = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

ب $\sin 120^o = \sin 60^o = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

ج $\cos 495^o = \tan(495-360)^o = \tan 135^o = -\tan 45^o = -1$

$\square$

مشق 10-ا

1)ذیل میں دیے گئے θ زاویوں کے لیے 4 اعشاری نقطوں تک درست قیمت معلوم کریں(تمام سوالات کی مساوات یہاں لکھیں)

i $\cos\theta^o$		ii $\sin\theta^o$		iii $\tan\theta^o$	
ا	25	د	325	ز	124.9
ب	125	ھ	-250	ح	554
ج	225	و	67.4	ط	225

2)ذیل میں دیے گئے تمام تفاعل کی کم اور زیادہ ترین قیمت معلوم کریں۔ نیز--- کی شرح کی وہ کم از کم مثبت قدر بھی معلوم کریں جس پے آپ قیمتیں معلوم کریں گے۔

ا $2+\sin x^o$

ب $7-4\cos x^o$

ج $5+8\cos 2x^o$

د $\frac{8}{\sin x^o}$

ھ $9+\sin(4x-20)^o$

و $\frac{30}{11-5\cos\left(\frac{1}{2}x-45\right)^o}$

3) (اس سوال کے لیے حساب و کتاب کے کسی آلے کا استعمال نہ کریں) سوال کے ہر حصے میں اعداد کے مثلثی تفاعل دیے گئے ہیں' باقی تمام اعداد معلوم کریں' $0 \le x \le 360$,xاس شرط کے ساتھ کہ معلوم کیے گئے اعداد کا مثلثی تفاعل دیے گئے تفاعل کے مساوی ہو۔ مثال کے طور پر اگر $\sin 80^o$دیا گیا ہے تو ہمارا جواب $x = 100$ہونا چاہیئے کیونکہ $\sin 100^o = \sin 80^o$۔

ا	$\sin 20^o$	د	$\sin 130^o$	ز	$\sin 400^o$	ی	$\sin(-260)^o$
ب	$\cos 40^o$	ھ	$\cos 140^o$	ح	$\cos(-30)^o$	یا	$\cos(-200)^o$
ج	$\tan 60^o$	و	$\tan 160^o$	ط	$\tan 430^o$	یب	$\tan 1000^o$

4) (اس سوال کے لیے بھی حساب و کتاب کے کسی آلے کا استعمال نہ کریں) سوال کے ہر حصے میں اعداد کے مثلثی تفاعل دیے گئے ہیں' باقی تمام اعداد معلوم کریں، x، $-180 \le x \le 180$ بشرطیکہ کہ معلوم کیے گئے اعداد کا مثلثی تفاعل دیے گئے تفاعل کے مساوی ہو۔ مثال کے طور پر اگر $\sin 80^o$ دیا گیا ہے تو ہمارا جواب $x = 100$ ہونا چاہیئے کیونکہ $\sin 80^o = \sin 100^o$

ا $\sin 20^o$ ب $\cos 40^o$ ج $\tan 60^o$

د $\sin 130^o$ ه $\cos 140^o$ و $\tan 160^o$

ز $\sin 400^o$ ح $\cos(-30)^o$ ط $\tan 430^o$

ی $\sin(-260)^o$ یا $\cos(-200)^o$ یب $\tan 1000^o$

5) حساب و کتاب کا آلہ استعمال کیے بغیر درج ذیل کی درست قیمیت معلوم کریں۔

ا $\sin 135^o$ ب $\cos 120^o$ ج $\sin(-30)^o$ د $\tan 240^o$

ه $\cos 225^o$ و $\tan(-330)^o$ ز $\cos 900^o$ ح $\tan 510^o$

ط $\sin 225^o$ ی $\cos 630^o$ یا $\tan 405^o$ یب $\sin(-315)^o$

یج $\sin 210^o$ ید $\tan 675^o$ یه $\cos(-120)^o$ یو $\sin 1260^o$

6) حساب و کتاب کا آلہ استعمال کیے بغیر وہ کم ترین زاویہ معلوم کریں کہ دی گئی مساوات درست ہو جائیں۔

ا $\cos\theta^o = \frac{1}{2}$ ب $\sin\phi^o = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ج $\tan\theta^o = -\sqrt{3}$ د $\cos\theta^o = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

ه $\tan\theta^o = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ و $\tan\phi^o = -1$ ز $\sin\theta^o = -\frac{1}{2}$ ح $\cos\theta^o = 0$

7) حساب و کتاب کا آلہ استعمال کیے بغیر طبعیات مقباس کا حاصل کم ترین زاویہ معلوم کریں کہ مساوات برابر ہو جائیں۔ (اگر دو زاویہ ہوں تو مثبت کو چنیں)۔

ا $\cos\theta^o = -\frac{1}{2}$ ب $\tan\phi^o = \sqrt{3}$ ج $\sin\theta^o = -1$ د $\cos\theta^o = -1$

ه $\sin\phi^o = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ و $\tan\theta^o = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$ ز $\sin\phi^o = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ح $\tan\phi^o = 0$

8) گودی میں پانی کی سطح (تقریباً 12 گھنٹے بعد چکر دہراتی ہے اور اس کی مساوات $D = A + B\sin 30t^o$ ہے، یہاں D گہرائی کو ظاہر کرتا ہے اور اس کی اکائی میٹر ہے۔ A اور D حثیت مستقل ہیں۔ t وقت ہے ۔ جیسے کہ گھنٹوں میں ناپا جائے گا اور یہ کام صبح کے 8:00 بجے کے بعد سے شروع ہوا ہے۔ ہمیں معلوم ہوا کہ پانی کی زیادہ سے زیادہ 7.60 میٹر ہے جبکہ کم سے کم گہرائی 2.2 میٹر ہے۔ Bاور A کی قیمت معلوم کریں' دوپہر کے وقت گودی میں پانی کی ایک گہرائی ہو گی۔ آپ کا جواب سینٹی میٹر کی حد تک درست بتائیں۔

2.4 $\sin\theta^o$, $\cos\theta^o$ اور $\tan\theta^o$ کی ترانیم کی تشاکل کی خصوصیات

تعریف : اگر آپ $\sin\theta^o$, $\cos\theta^o$ اور $\tan\theta^o$ کی ترانیم کا بغور جائزہ لیں تو آپ ان میں سے تساکل کی خصوصیات کو دستیاب پائیں گے۔ شکل 5۔10 میں $\cos\theta^o$ کی ترسیم دکھائی گئی ہے۔ $\cos\theta^o$ کی ترنیم عمودی خط کے ساتھ تشاکل میں ہے۔ اس کا مطلب ہے آپ θ کو $-\theta$ سے بدل دیں تو ترسیم پر کوئی اثر نہیں پڑے گا۔

$$\cos(-\theta)^o = \cos\theta^o$$

اس کا مطلب $\cos\theta^o$ کی ترنیم θ کا ایک جفت تفاعل ہے۔ (جیسا کہ حصہ 3۔3 میں بیان کیا گیا ہے) تشاکل کی دیگر خصوصیات بھی ہیں' مثال کے طور پر شکل 8۔10 میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اگر آپ تفاعل میں 180 درجے جمع یا منفی کریں تو آپ کے تفاعل کا نشان بدل جائے گا۔ یعنی اگر تفاعل مثبت تھا تو منفی ہو جائے گا جبکہ منفی تفاعل مثبت ہو جائے گا۔

$$\cos(\theta - 180)^o = -\cos\theta^o$$

ہم اسے مستقیم حرقت کی خصوصیات کہتے ہیں۔

□

یہاں ایک مزید کارآمد خصوصیات بھی موجود ہیں۔ جیسے ہم جفت اور اور مستقیم حرکت کی خصوصیات کے ملاپ سے وجود میں لائے۔

$$\cos(180 - \theta)^o = \cos(\theta - 180)^o = -\cos\theta^o$$

مثلث میں $\cos\theta^o$ کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے آپ کا اس خصوصیت سے واسطہ پڑا ہو گا ۔ $\sin\theta^o$ کی ترمیم جو شکل 9۔10 میں دکھائی گئی ہے،کے لیے بھی ایسی ہی خصوصیات ہیں۔ مشق 10-- کے ایک سوال میں آپ ان خصوصیات کے وجود کو ثابت کرے گے۔ ان کو ثابت کرنے کا طریقہ-- کی خصوصیات کو ثابت کرنے کے طریقے سے مماثلت رکھنا ہے۔ $\cos\theta^o$ اور $\sin\theta^o$ کے تفاعل کے خصوصیات درج ذیل ہیں۔

تواتر کی خصوصیات	$\cos(-\theta)^o = \cos\theta^o$	$\sin(-\theta)^o = -\sin\theta^o$
تاک کی خصوصیات	$\cos(\theta - 180)^o = -\cos\theta^o$	
مستقیم حرکت کی خصوصیات	$\cos(180 - \theta)^o = -\cos\theta^o$	$\sin(\theta - 180)^o = -\sin\theta^o$

$\cos(\theta \pm 360)^o = \cos\theta^o$	$\sin(\theta \pm 360)^o = \sin\theta^o$	$\sin(180 - \theta)^o = \sin\theta^o$

اگر آپ شکل 10.5 میں $\tan\theta^o$ کی ترسیم کا حوالہ لیں اور $\sin\theta^o$ اور $\cos\theta^o$ کی ترسیم کے انداز میں اسکا بھی جائزہ لیں تو آپ کو $\sin\theta^o$ اور $\cos\theta^o$ جیسے ہی جوابات ملیں گے۔ $\tan\theta^o$ کے تفاعل کی خصوصیت مندرجہ ذیل ہیں۔ تواتر کی خصوصیت:

$$\tan(\theta \pm 180)^o = \tan\theta^o$$

ناک خصوصیت:

$$\tan(-\theta)^o = -\tan\theta^o$$
$$\tan(180-\theta)^o = -\tan\theta^o$$

اس بات پر غور کریں کہ $\tan\theta^o$ کی ترسیم 180 درجے کے بعد خود کو دہراتی ہے لہذا اس کی مستقیم حرکت کی خصوصیت اور تواتر کی خصوصیت ایک سی ہیں۔

مثال 2.4: خصوصیت ثابت کریں کہ:- $\cos(90-\theta)^o = \sin\theta^o$۔ یہ آسان ہو جائے گا اگر وقفہ $0 < \theta < 90$ یہ تصور کیا جائے۔ ایک قائم زاوے کی حاصل مثلث بنائیں، زاویہ صرف آسانی کے لیے چنا گیا ہے البتہ یہ خصوصیت کسی بھی زاویے کے لیے ثابت کی جاسکتی ہے۔ اگر آپ $\cos\theta^o$ کے کی ترسیم کو زاویے کے مثبت غور میں 90 درجے مستقیم حرکت دیں تو آپ کو $\sin\theta^o$ کا ترسیم ملے گا۔ لہذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\cos(\theta-90)^o = \sin\theta^o$ اور چونکہ $\cos\theta^o$ ایک جفت تفاعل ہے $\cos(90-\theta)^o = \cos(\theta-90)^o$ اسی لیے $\cos(90-\theta)^o = \sin\theta^o$ ثابت ہو گیا۔ □

مشق 10B میں ایک اور خصوصیت جو آپ کو ثابت کرنی ہو گی وہ $\sin(90-\theta)^o = \cos\theta^o$ ہے۔

مشق 2.1: سوال 1: $\sin\theta^o$, $\cos\theta^o$ اور $\tan\theta^o$ کی تشاکل اور تواتر کی خصوصیات استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل نتائج اخذ کریں۔

ا. $\sin(90-\theta)^o = \cos\theta^o$

ب. $\sin(270+\theta)^o = -\cos\theta^o$

ج. $\sin(90+\theta)^o = \cos\theta^o$

د. $\cos(90+\theta)^o = -\sin\theta^o$

ھ. $\tan(\theta-180)^o = \tan\theta^o$

و. $\cos(180-\theta)^o = \cos(180+\theta)^o$

ز. $\tan(360-\theta)^o = -\tan(180+\theta)^o$

ح. $\sin(-90-\theta)^o = -\cos\theta^o$

سوال 2: $y = \tan\theta^o$ اور $y = \frac{1}{\tan\theta^o}$ کی ترسیم بنائیں اور انہی عور پر ثابت کریں کہ $\tan(90-\theta)^o = \frac{1}{\tan\theta^o}$-

سوال 3: مندرجہ ذیل تمام مساوات کیلئے α کی ایسی قیمتیں معلوم کریں کہ جن سے درج ذیل مساوات درست ثابت ہو جائیں۔

ا. $\cos(\alpha - \theta)^o = \sin\theta^o$

ب. $\sin(\alpha - \theta)^o = \cos(\alpha + \theta)^o$

ج. $\tan\theta^o = \tan(\theta + \alpha)^o$

د. $\sin(\theta + 2\alpha)^o = \cos(\alpha - \theta)^o$

ھ. $\cos(2\alpha - \theta)^o = \cos(\theta - \alpha)^o$

و. $\sin(5\alpha + \theta)^o = \cos(\theta - 3\alpha)^o$

2.5 مثلثی تفاعل کی مساوات کا حل

$\cos\theta^o = k$ کی مساوات کا حل

$\cos\theta^o = k$ کی مساوات حل کرنے کے لیے فرض کریں کہ $-1 \leq k \leq 1$۔ اگر k اس شرط پر پورا اترے تو مساوات کا کوئی حل نہیں ہوگا۔ شکل 10.10 میں k کی منفی قیمت دکھائی گئی ہے۔ یاد رکھیں ہر 360 درجے کے وقفے میں $\cos\theta^o = k$ کے دو جزر ہوتے ہیں سوائے جب $k = \pm 1$ ہو۔

حساب کتاب کے آلے پر $[\cos^{-1}]$ کا بٹن دبائیں تو آپکو وہ زاویہ ملے گا جس سے مساوات درست ثابت ہو گی۔ کچھ آلات پر [ARCCOS] کا بٹن ہوگا۔ لیکن بد قسمتی سے اس طریقے میں ہمیں صرف ایک جزر ملے گا۔ عموما آپ دیے گئے وقفے میں $\cos\theta^o = k$ کے تمام جزر حاصل کرنا چاہتے ہیں۔

$\cos\theta^o = k$ کی مساوات کو حل کرنے کے لیے 3 اقدام ہیں:-

ا. $[\cos^{-1} k]$ معلوم کریں۔

ب. تشاکل کی خصوصیت استعمال کرتے ہوئے مزید ایک جزر حاصل کریں۔ تشاکل کی خصوصیت یہ ہے $cos(-\theta)^o = \cos\theta^o$۔

ج. تواتر کی خصوصیت یعنی $\cos(\theta \pm 360)^o = \cos\theta^o$ کا استعمال کرتے ہوئے مزید جزر معلوم کریں۔

مثال 2.5:

مساوات $\frac{1}{3} = \cos\theta^o$ کو حل کریں اور $0 \leq \theta \leq 360$ میں آنے والے تمام جزر ایک اعشاری نقطع تک درست معلوم کریں۔

ا. حساب کتاب کے آلے کا استعمال کریں اور $\cos^{-1}\frac{1}{3} = 70.52...$ معلوم کریں کہ یہ بتائے گۓ وقفے کا پہلا جزر ہے.

ب. تشاکل کی خصوصیت $\cos(-\theta)^o = \cos\theta^o$ کا استعمال کریں اور اس خصوصیت سے آپ حاصل کریں گے -70.52 چونکہ دوسرا جذر ہے۔ لیکن یہ بتائے گئے وقفے کا حصہ نہیں ہے.

ج. تواتر کی خصوصیت $\cos(\theta \pm 360)^o = \cos\theta^o$ اور اس سے آپ کو ملے گا -70.52---+360=289.47 اور یہ جزر بتائے گئے وقفے میں ہی ہے۔

لہٰذا $0 \leq \theta \leq 360$ اس وقفے میں 70.52 اور 289.5 ایک اعشاری نقطے تک درست جوابات ہیں۔

□

$-180 \leq \theta \leq 180$ میں مساوات $\cos 3\theta^\circ = -\frac{1}{2}$ کے تمام جز معلوم کریں۔ یہ مثال بھی پچھلی مثال جیسی ہے۔ فرق صرف اتنا ھے کہ اس میں دو فالتو اقدام ھیں ایک ابتداء میں اور ایک انتہا پہ۔ فرض کریں کہ $\phi = 3\theta$ اب مساوات $\cos\phi^\circ = -\frac{1}{2}$ کو حل کرنا ھو گا اوراب یہ مساوات کافی حد تک سادہ ہو چکی ھے ۔ لیکن اگر $\phi = 3\theta$ ھے تو $(-180) \times 3 \leq 3\theta \leq 180\times 3$ اسی لیے اب نیا وقفہ $-540 \leq \phi \leq 540$ ھو گا ۔ اس طرح ھم اصل مسلے تک آ پہنچے ھیں کہ $\cos\phi^0 = -\frac{1}{2}$ کی مساوات ھل کرتی ہے کچھ اس طرح کہ جوابات اسی وقفے میں ہوں(آپ تقریبا 6 جز کے لیے تیار رہیں) پہلا قدم

$$\cos^{-1}(-\frac{1}{2}) = 120$$

دوسرا قدم : دوسرا جز ہو گا -120

تیسرا قدم : تیسری کی خصوصیت کے مطابق دونوں معلام شدہ جز میں 360 جمع اور منفی کرتے ہوئے

$$-120 - 360 = -480,\ -120 + 360 = 240,\ 120 - 360 = -240$$

$$120 + 360 = 480$$

لہٰزا دیئے گئے وقفے میں $\cos\phi^\circ = -\frac{1}{2}$ کے جز $-480,\ -240,\ -120,\ 120,\ 240,\ 480$ یہ ھیں

اصل مساوات کی طرف لوٹتے ھوئے

اور یہ $\theta = \frac{1}{3}\phi$ حقیقت مد نظر رکھتے ھوئے اصل جز $-160,\ -80,\ -40,\ 40,\ 80,\ 160$ ہوں گے

$\sin\theta^\circ = k$ کی مساوات کا حل

$\sin\theta^\circ = k$ کی مساوات اگر دیئے گئے وقفے میں ہو تو اسی طریقے سے ہی حل ہو گا فرق صرف اتنا ہے کے $\sin\theta^\circ$ کے لیے تشاکل کی خصوصیت $\sin(180-\theta)^\circ$ ہے ۔ وقفہ $-1 \leqslant k \leqslant 1$ ہے

قدم 1: $\sin^{-1} k$ معلوم کریں

قدم 2: تشاکل کی خصوصیت $\sin\,(180-\theta)^\circ = \sin\theta^\circ$ کو استعمال کرتے ہوئے دیگر جز معلوم کریں

قدم 3: تواتر کی خصو صیت $\sin\,(\theta \pm 360)^\circ = \sin\theta^\circ$ کا استعمال کرتے ہوئے دیگر جز معلوم کریں مثال : 3۔5۔10

$180 \leqslant \theta \leqslant -18-$ میں $\sin\theta^\circ = -0.7$ کے تمام جز ایک اعشاری نقطے تک درست معلوم کریں

قدم :1 حساب و کتاب کے آلے کا استعمال کرتے ہوئے $\sin^{-1}\,(-0.7) = -44.42\cdots$ معلوم کریں۔ دی گئ مساوات کا پہلا جز ہے

قدم: تشاکل کی خصوصیت $\sin\,(180-\theta)^\circ = \sin\theta^\circ$ کا استعمال کرتے ہوئے یہ $180-(-44.42\cdots) = 224.42\cdots$ دوسرا جز ھے ۔ بد قسمتی سے یہ بنائے گۓ وقفے میں نہیں ھے

قدم 3 : تواتر کی خصو صیت $\sin(\theta\pm 360)^\circ = \sin\theta^\circ$ کا استعمال کر کے $224.42\cdots - 360 = -135.57\cdots$ حاصل کریں گے یہ جز بنائے گۓ وقفے میں ہی شامل ہے

مثال : 4۔5۔10

وقفہ : $0 \leqslant \theta \leqslant 360$ میں مساوات $\sin\frac{1}{3}\,(\theta-30)^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ کو حل کریں اور تمام جز معلوم کریں۔

فرض کریں کہ $\phi = (\theta-30)\,\frac{1}{3}$ اور یوں دی گئ مساوات $\sin\phi^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ سادہ ہو گئ اور اب ہم اس نئ مساوات کے حل تلاش کریں گے

قدم 1: $60 = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ یہ بتائے گۓ حصہ میں پہلا جزر ہے

قدم 2: دوسرا جزر $120 = 60 - 180$ لیکن یہ بتائے گۓ وقفے مس نہی آتا۔

قدم 3: 360 کے مضرب کو جمع نفی کرنے سے بھی ھمیں اس وقفے میں ھمیں مزید جزر نہی ملیں گے

اسی وجہ سے مساوات $\sin\phi^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ کا وقفہ $-10 \leqslant \phi \leqslant 110$ میں ایک ہی جز ہے اور وہ ہے 60 ۔ اصل مساوات کی طرف لوٹتے ہوئے جبکہ ہم جانتے ہیں کہ $\theta = 3\phi + 30$ تو مساوات کا اصل جزر $\theta = 210$ ہو گا

$\tan\theta^\circ = k$ کی مساوات حل کرتے ہوئے

$\tan\theta^\circ = k$ کی مساوات بھی ویسے ہی حل ہو گی جیسے ہم نے باقی مثلی تناسب کی مساوات کو حل کیا ۔ یہاں یہ بات اہم ہے کہ ہر 180 درجے کے وقفے میں صرف ایک ہی جزر ملے گا اور مزید جزر کے لیے ہمیں تواتر کی خصوصیت کا سہارا لینا پڑتے گا

قدم 1: $\tan^{-1} k$ معلوم کریں

قدم 2 : تواتر کی خصوصیت $\tan\,(180+\theta)^\circ = \tan\theta^\circ$ کا استعمال کرتے ہوئے دیگر جزر تلاش کریں

سوال 1: زاویے کی دو کم سے کم قیمتیں معلوم کریں کہ جن کے لیے درج ذیل مساوات درست ثابت ہوں۔ آپکا جواب ایک اعشاری نقطے تک درست ہونا چاہیے۔

ا. $\cos\frac{1}{2}\theta^\circ = \frac{2}{3}$ ج. $\sin\frac{1}{4}\theta^\circ = -\frac{1}{4}$ ھ. $\tan\frac{3}{4}\theta = 0.5$

ب. $\tan\frac{2}{3}\theta^\circ = -3$ د. $\cos\frac{1}{3}\theta^\circ = \frac{1}{3}$ و. $\sin\frac{2}{3}\theta^\circ = -0.3$

سوال 2: بغیر حساب و کتاب کے آلے کی مدد لیے درج ذیل مساوات کے وقفہ $0 \leqslant t \leqslant 360$ میں جذر (اگر کوئی ہیں تو) معلوم کریں۔

ا. $sin\,(2t-30)^\circ = \frac{1}{2}$ د. $\tan\left(\frac{3}{2}t-45\right)^\circ = -\sqrt{3}$ ز. $\cos\left(\frac{1}{5}t-50\right)^\circ = 0$

ب. $\tan\,(2t-45)^\circ = 0$ ھ. $\cos\,(2t-50)^\circ = -\frac{1}{2}$ ح. $\tan\,(3t-180)^\circ = -1$

ج. $\cos\,(3t+135)^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ و. $\sin\left(\frac{1}{2}t+50\right)^\circ = 1$ ط. $\sin\left(\frac{1}{4}t-20\right)^\circ = 0$

سوال 3: ایک اعشاری نقطے تک z کی تمام قیمتیں معلوم کریں، بشرطیکہ ذیل میں میں دی گئ مساوات درست ثابت ہوں اور تمام قیمتیں اس وقفے $-180 \leqslant z \leqslant 180$ میں ہوں۔

ا. $\sin z^\circ = -0.16$ ج. $(1-\tan z^\circ)\sin z^\circ = 0$ ھ. $\cos\,(45+z)^\circ = 0.832$

ب. $\cos z^\circ\,(1+\sin z^\circ) = 0$ د. $\sin z^{circ} = 0.23$ و. $\tan\,(3z-17)^\circ = 3$

سوال 4: وقفے $0 \leqslant \theta \leqslant 360$ میں موجود درج ذیل مساوات کے لیے زاویے θ کی قیمت معلم کریں۔

ا. $\sin 2\theta^\circ = \cos 36^\circ$ ب. $\cos 5\theta^\circ = \sin 70^\circ$ ج. $\tan 3\theta^\circ = \tan 60^\circ$

سوال 5:

وقفے $0 \leqslant \theta \leqslant$ میں زاویے کی تمام قیمتیں معلوم کریں جنکے لیے مساوات $s\sin\theta^\circ\cos\theta^\circ = \frac{1}{2}\tan\theta^\circ$ درست ثابت ہو۔

سوال 6: درجہ ذیل قیمتوں کے لیے مثلثی تفاعل sine,cosine اور tangent کی ایک مثال بنائیں اور اس طرح کے بتائ گی قیمت پے یہ تفاعل خود کو دہراتا ہو۔

ا. 90 ج. 48 ھ. 720

ب. 20 د. 120 و. 600

سوال 7: وقفے $0 \leqslant \phi \leqslant 360$ میں درج ذیل کی ترسیم بنائیں، ہر ایک سوال میں تفاعل کے دورانیے کا بھی بتائیں۔

ا. $y = \sin 3\phi^\circ$ د. $y = \tan \frac{1}{3}\phi^\circ$ ز. $y = \sin\left(3\phi - 20\right)^\circ$

ب. $y = \cos 2\phi^\circ$ ھ. $y = \cos \frac{1}{2}\phi^\circ$ ح. $y = \tan 2\phi^\circ$

ج. $y = \sin 4\phi^\circ$ و. $y = \sin\left(\frac{1}{2}\phi + 30\right)^\circ$ ط. $y = \tan\left(\frac{1}{2}\phi + 90\right)^\circ$

سوال 8: قطب شمالی کے ایک مخصوص علاقے میں پورے سال کے تمام دنوں میں روشن گھنٹے d معلوم کرنے کا کلیہ $d = A + B \sin kt^\circ$ جسمیں A,B, اور k مثبت مستقل ہیں اور t دن میں وقت ہے موسم بہار کے بدلاؤ کے بعد سے۔

1. یہ تصور کرتے ہوئے کہ دن میں روشن گھنٹوں کی عددی قیمت 365 دنوں بعد خود کو دہراتی ہے k۔ کی قیمت معلم کریں آپ کا جواب 3 اعشاری نقطوں تک درست ہو۔

2. یہ بتایا گیا ہے کہ سب سے چھوٹے دن میں 6 گھنٹے روشن جبکہ سب سے لمبے دن میں 18 روشن گھنٹے ہیں Aاور B کی قیمت معلوم کریں۔ سال کے نئے دن میں روشن وقت کتنا ہوگا گھنٹوں اور منٹوں میں بتائیں یہ مانتے ہوئے کہ سال کا نیا دن موسموں کی اس تبدیلی سے 80 دن پہلے آتا ہے۔

3. اسی علاقے میں ایک قصبہ ہے جہاں کے لوگ سال میں سو دفعہ تہوار مناتے ہیں اور ان دونوں دن روشن دن 10 گھنٹے کا ہوتا ہے۔ موسموں کے تغیر کو مد نظر رکھتے ہوئے بتائیں کہ یہ کونسے دو دن ہیں

2.6 مثلثی تفاعل کے باہمی روابط

الجبرا میں مساوات حل کرنا آپ کی عادت بن جاتی ہے، جن میں ہم ایک نا معلوم غیر مستقل مقدار، جسے ہم عموماً x، کہتے ہیں، کی قیمت معلم کرتے ہیں جیسے اس مساوات میں $2x + 3 - x - 6 = 7$۔ آپ الجبرائی مساوات کو سادہ کرنے میں بھی میارت رکھتے ہیں جیسے مساوات $2x + 3 - x - 6$ سادہ ہو کے $x - 3$ بن جاتی ہے، آپ کو اندازہ نہیں ہوا لیکن یہ دونوں بالکل الگ طریقہ کار ہیں۔

جب آپ مساوات $2x + 3 - x - 6 = 7$ کو حل کرتے ہیں تو آپ کو معلوم ہوتا ہے کہ اسکا صرف ایک ہی حل ہے $x = 10$، لیکن $x - 3$ اور $2x + 3 - x - 6$ بالکل ایک جیسے ہیں x کی تمام قیمتوں کے لیے، بعض اوقات ان دونوں طرح کی صورتحال میں فرق کرنا ضروری ہوتا ہے۔

اگر دو تراکیب x کی ہر قیمت کے لیے ایک سا جواب دیں تو ایسی تراکیب کو ہو بہو برابر کہا جائے گا۔ اور ایسی تراکیب کو ظاہر کرنے کے لیے ( ) علامت استعمال کی جاتی ہے اور اسے پڑھا جائے گا "ہو بہو برابر ہے". یہ جملہ

$$2x + 3 - x - 6 = x - 3$$

ایک مماثل کہلائے گا۔ لٰہذہ x میں ایک مماثل ایک ایسی مساوات ہے جو x کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہے۔

مثلثی تناسب میں بھی ایسا ہی ہوتا ہے، حصہ 10.2 کے آخر میں یہ دیکھا گیا تھا کہ $\tan\theta^\circ = \frac{\sin\theta^\circ}{\cos\theta^\circ}$ بشرطیکہ $\cos\theta^\circ \neq 0$۔

$$\tan\theta^\circ = \frac{\sin\theta^\circ}{\cos\theta^\circ}$$

مماثل کی علامت استعمال کی جاتی ہے تب بھی جبکہ قوت نمائی قیمتیں موجود ہوں جنکے لیے دونوں اطراف معین نہ ہوں، دہ گئی مثال میں اگر زاویہ 90 کا تاک مضرب ہو تو کوئی بھی طرف معین نہیں ہے لیکن مماثل کی علامت وہاں موجود ہے۔

حصہ 10.1 اور 10.2 میں کی گئی $x = \cos\theta^\circ$ اور $y = \sin\theta^\circ$ کی تعریف سے ایک اور تعلق فوراً سے ذہن میں آتا ہے اگر P ایک اکائی کے ایک دائرے کی باہری حد بندی پر موجود ایک نقطہ ہے۔ فیثا غورث کے قانون کے مطابق $x^2 = y^2 = 1$ ہے یا ہم کہہ سکتے ہیں کہ $(\cos\theta^\circ)^2 + (\sin\theta^\circ)^2 = 1$

غلط العام میں ہم $(\cos\theta^\circ)^2$ کو $\cos^2\theta^\circ$ کہتے ہیں اور ایسے ہی $(\sin\theta^\circ)^2$ کو $\sin^2\theta^\circ$ کہتے ہیں , زاویے کی ہر قیمت کے لیے $\cos^2\theta^\circ + \sin^2\theta^\circ \equiv 1$۔ ہم اسے بعض اوقات مثلثیات کا فیثاغورث کا کلیہ بھی کہتے ہیں۔

زاویے کی ہر قیمت کے لیے؛ $\tan\theta^\circ \equiv \frac{\sin\theta^\circ}{\cos\theta^\circ}$ بشرطیکہ $\cos\theta^\circ \neq 0$

$$\cos^2\theta^\circ + \sin^2\theta^\circ \equiv 1$$

غلط العام $\cos^n\theta^\circ$ جسکا ہم نے ذکر کیا یہ مثبت طاقتوں کی حد تک تو بہترین ہے۔ کسی بھی صورت میں $n = -1$ استعمال نہیں کیا جا سکتا کیونکہ یہاں ایک خطرہ ہے آپ اسے یہ $\cos^{-1} x$ سمجھ سکتے ہیں، جبکہ یہ ان زاویوں کے لیے استعمال ہوتا ہے جنکے cosine کی قیمت x ہوتی ہے۔ اگر آپ شک میں گرفتار ہوں تو $(\cos\theta^\circ)^n$ یا $(\cos\theta)^{-n}$ استعمال کریں کیونکہ انکا ایک ہی مطلب ہے جو واضع ہے

آپ اس مساوات $\cos^2\theta + \sin\theta \equiv 1$
کو استعمال کرتے ہوئے کسی بھی مثلث کے کوسائن کلیے کو ثابت کر سکتے ہیں۔

فرض کریں ABC ایک مثلث ہے جسکی اطراف ،BC=a CA=b، اور AB=c ہیں۔ فرض کریں کہ نقطہ A کارتیسی نظام محدد کے مبدا پے ہے۔ اور AC ایک خط ہے جو کہ x محدد پے x کی سمت میں ہے۔ جیسا کہ شکل 10.11 میں دکھایا گیا ہے۔

نقطہ C کے محدد (b,0) ہیں، جبکہ B کے محدد $(c\cos A, c\sin A)$ یہ ہیں ، جبکہ A زاویے BAC کے لیے ہے۔ اور تب فاصلے کے کلیے کا استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} a^2 &= (b - c\cos A)^2 + (c\sin A)^2 \\ &= b^2 - 2bc\cos A + c^2\cos^2 A + c^2\sin^2 A \\ &= b^2 - 2bc\cos A + c^2(\cos^2 A + \sin A) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \end{aligned}$$

اب آخر میں $\cos^2 A + \sin A = 1$ کا استعمال کرتے ہوئے۔

مثال 2.6: بتایا گیا ہے کہ $\sin\theta = \frac{3}{5}$ اور زاویہ منفرجیہ ہے۔ حساب و کتاب کے آلے سے پرہیز کرتے ہوئے $\cos\theta^0$ اور $\tan\theta^0$ کی قیمت معلم کریں۔

جیسا کہ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$ اور اس سے ہمیں ملے گا $\cos\theta = \pm\frac{4}{5}$۔ جیسا کہ ہم جانتے ہیں زاویہ منفرجیہ ہے . $90\theta180$ للہذہ $\cos\theta^0$ منفی ہے ، اسی لیے $\cos\theta = -\frac{4}{5}$۔

جیسا کہ $\sin\theta = \frac{3}{5}$ اور $\cos\theta = -\frac{4}{5}, \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}$ $\square$

مثال 2.7: مساوات $3\cos^2\theta + 4\sin\theta = 4$ کو حل کریں اور وقفہ $-180\theta \leq 180$ میں آنے والے تمام جذر ایک اعشاری قیمت تک درست معلوم کریں۔

جیسا کہ نظر آ رہا ہے ہم اس مساوات کع حل نہیں کر سکتے لیکن اگر یم اس مساوات میں$\cos^2\theta$ کو $1 - \sin^2\theta$ سے بدل دیں تو، ہمیں نئ مساوات $3(1 - \sin^2\theta) + 4\sin\theta = 4$ ملے گی جو کہ مزید سادہ ہو کہ درج ذیل شکل اختیار کر لے گی؛

$$3\sin^2\theta - 4\sin\theta + 1 = 0$$

یہ $\sin\theta^0$ میں ایک دو طاقتی مساوات ہے جس کے آپ اجزائے ضربی بنا سکتے ہیں$0 = (3\sin\theta - 1)(\sin\theta - 1)$اور اس سے ہمیں ملے گا$\sin\theta = \frac{1}{3}$ یا $\sin\theta = 1$

ایک جذر تو $\sin^{-1}\frac{1}{3} = 19.47\ldots$, ہے اور باقی جذر $\sin\theta^0$ کی تشاکل کی خصوصیت کی مدد سے جو ہمیں ملے ہیں وہ ہیں $(180 - 19.47\ldots) = 160.52\ldots$ مساوات $\sin\theta = 1$ کا اکلوتا جذر $\theta = 90$, ہے، للہذہ تمام جذر 19.5،90 اور 160.5 ہیں ۔
$\square$

سوال 1: نیچے بنی ہر ایک مثلث کے لیے

1. فیثا غورث کے کلیے کا استعمال کریں اور تیسری سمت کی لمبائی معلوم کریں۔

2. $\sin\theta^0$، $\cos\theta^0$ اور $\tan\theta^0$ کی درست قیمتیں معلم کریں۔

سوال 2:

1. یہ بتایا گیا ہے کہ زاویہ A ایک منفرجیہ زاویہ ہے اور یہ کہ $\sin A = \frac{5}{14}\sqrt{3}$ آپ $\cos A^0$ کی درست قیمت معلم کریں۔

2. ہمیں وقفہ $180B \leq 360$ معلوم ہے اور ہم جانتے ہیں کہ $\tan B = -\frac{21}{20}$ آپ $\cos B^0$ کی قیمت معلم کریں۔

3. $\sin C^0$ کی وہ تمام قیمتیں معلوم کریں جن کے لیے $\cos C = \frac{1}{2}$

4. کی وہ تمام قیمتیں معلوم کریں جن کے لیے اس وقفے $-180 < D < 180$ میں مساوات $\tan D = 5\sin D$ درست ثابت ہو۔

سوال 3: اور اس مساوات $\cos^2\theta + \sin\theta \equiv 1$ اور اس مساوات $\tan\theta \equiv \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ کا استعمال کریں بشرطیکہ $\cos\theta \neq 0$ اور نیچے دی گئی مساوات کو ثابت کریں۔

1. $$\frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\tan\theta} \equiv \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

2. $$\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} \equiv 1 + \frac{1}{\cos\theta}$$

3. $$\frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta \equiv \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

4. $$\frac{\tan\theta\sin\theta}{1-\cos\theta} \equiv 1 + \frac{1}{\cos\theta}$$

سوال 4: دی گئی تمام مساوات کو زاویے کی قیمت کے لیے حل کریں، اور وقفے $0 \leq \theta \leq 360$ میں زاویے کے جوابات دیں اس بات کو خیال رکھتے ہوئے کہ آپکے جوابات 0.1 کے قریب ترین درست ہوں۔

1. $4\sin^2\theta - 1 = 0$

2. $\sin^2\theta + 2\cos^2\theta = 2$

3. $10\sin^2\theta - 5\cos^2\theta + 2 = 4\sin\theta$

4. $4\sin^2\theta\cos\theta = \tan^2\theta$

سوال 5: دیے گئے وقفے $-180 \leq \theta \leq 180$ میں زاویے کی قیمتیں معلوم کریں کہ جن کے لیے $2\tan\theta - 3 = \dfrac{2}{\tan\theta}$۔

سوال 6: درج ذیل کی دہرائی کا نقطہ معلوم کریں

1. $\sin x$

2. $\tan 2x$

سوال 7: $y = \cos x^0$ کی ترسیم کو ذہن میں رکھتے ہوئے یا پھر درج ذیل کو $\cos x^0$ کی صورت میں لکھیں

1. $\cos(360 - x)$

2. $\cos(x + 180)$

سوال 8: مساوات $y = \cos\frac{1}{2}\theta$ کی ترسیم بنائیں اور وقفے $-360 \leq \theta \leq 360$ میں زاویے کی قیمت معلوم کریں۔ ان نقطوں کے محدد بھی واضع کریں کہ جن پے ترسیم θ اور y محدد کو کاٹے گا۔

سوال 9: درج ذیل مساوات کو زاویے کے لیے حل کریں. آپکا جواب وقفے $0 \leq \theta \leq 360$ میں ہونا چاہیے

1. $\tan\theta = 0.4$

2. $\sin 2\theta = 0.4$

سوال 10: مساوات $3\cos 2x = 2$ کو حل کریں اور وقفے $0 \leq \theta \leq 180$ میں تمام جوابات تحریر کریں۔ آپکے جوابات 0.1 کے قریب ترین ہونے چاہئیں۔

سوال 11:

1. ایک ایسے مثلثی تفاعل کی مثال دیں جو ہر 180 درجے بعد خود کو دہراتا ہو۔

2. مساوات $\sin 3x = 0.5$ کو وقفے $0x180$ میں آنے والے x کے تمام جوابات معلوم کریں۔

سوال 12: وقفے $0 \leq \theta \leq 360$ میں زاویے کی وہ تمام قیمتیں معلوم کریں کہ جن کے لیے مساوات $2\cos(\theta + 30)$ درست ثابت ہو۔

سوال 13:

1. مساوات $\sin 2x + \cos(90 - 2x)$ کو کسی ایک مثلثی تفاعل کی صورت میں لکھیں۔

2. وقفے $0 \leq x \leq 360$ میں مساوات $\sin 2x + \cos(90 - 2x) = -1$ کی x کی تمام قیمتیں معلوم کریں۔

سوال 14: زاویہ A کی وہ کم ترین قیمت معلوم کریں کہ جس کے لیے؛

1. $\sin A = 0.2$ اور $\cos A$ منفی ہوں۔

2. $\tan A = -0.5$ اور $\sin A$ منفی ہوں۔

3. $\cos A = \sin A$ دونوں منفی ہوں۔

4. $\sin A = -0.2275$ اور $A > 360$۔

سوال 15: درج ذیل مماثل کو ثابت کریں۔

1. $$\frac{\cos\theta}{\tan\theta} \equiv \frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta$$

2. $$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} \equiv \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$

3. $$\frac{1}{\sin\theta\cos\theta} \equiv \frac{1}{\tan\theta} + \tan\theta$$

4. $$\cos\theta - \sin\theta \equiv \frac{1-2\sin^2\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$$

سوال 16: درج ذیل تفاعل کے لیے y کی کم ترین اور زیادہ ترین قیمتیں جبکہ x کی کم ترین مثبت قیمت معلوم کریں کہ جس کے لیے یہ تفاعل درست ثابت ہوں۔

1. $y = 1 + \cos 2x$

2. $y = 5 - 4\sin(x + 30)$

3. $y = 29 - 20\sin(3x - 45)$

4. $y = 8 - 3\cos^2 x$

5. $y = \dfrac{12}{3 + \cos x}$

6. $y = \dfrac{60}{1 + \sin^2(2x - 15)}$

سوال 17: درج ذیل مساوات کو زاویے کے لیے حل کریں اور آپنا جواب اس وقفے $0 \leq x \leq 360$ میں دیں۔

1. $\sin\theta = \tan\theta$

2. $2 - 2\cos^2\theta = \sin\theta$

3. $\tan^2\theta - 2\tan\theta = 1$

4. $\sin 2\theta - \sqrt{3}\cos 2\theta = 0$

سوال 18: t کا تفاعل $t(x) = \tan 3x$ ہے۔

1. تفاعل کب t(x) خود کو دہرائے گا۔

2. وقفہ $0 \leq x \leq 180$ کے لیے مساوات $t(x) = \frac{1}{2}$ حل کریں

3. درج ذیل مساوات کے لیے کم سے کم مثبت حل تلاش کریں۔

(ا) $t(x) = -\frac{1}{2}$

(ب) $t(x) = 2$

سوال 19: درج ذیل مسائل میں سے ہر ایک کے لیے ایک مثلثی تفاعل بنائیں جس سے بتائی گئی صورت حال واضح ہو سکے۔

1. ایک نہر میں پانی کی گہرائی کم سے کم 3.6 میٹر اور زیادہ سے زیادہ 6 میٹر کے درمیان تبدیل ہوتی رہتی ہے 24 گھنٹے کے اوقات میں۔
2. ایک کیمیائی کارخانے جو کہ دس دن کے وقفے میں کام کرتا ہے ، دن میں کم سے کم 1500 بیرل تیل صاف کرتا ہے جبکہ زیادہ سے زیادہ 2800 بیرل صاف کر پاتا ہے۔
3. دائرہ قطب شمالی کے جنوب کے کچھ قصبوں میں روشن دن 2 سے 22 گھنٹوں کا ہوتا ہے 360 دنوں کے ایک مدار میں۔

سوال 20:

سوال 21: ایک فولادی دوشاخہ مرتعش ہے۔ اسکی ایک شاخ کے آخری سرے کا ہٹاؤ y رکی ہوئی حالت سے زیادہ سے زیادہ ہٹاؤ تک وقت t میں بیان کرنے کے لیے کلیہ ہے۔

$$y = 0.1\sin(100000t)$$

معلوم کریں؛

1. سب سے زیادہ ہٹاؤ اور کس وقت یہ وقوع پزیر ہوگا۔
2. ایک مکمل چکر کے لیے کتنا وقت لگے گا۔
3. ایک سیکنڈ میں کتنے دائرے مکمل کرے گا فولادی دوشاخے کا ارتعاش
4. پہلے مکمل دائرے کے دوران وہ وقت بتائیں کہ جب فالادی دوشاخے کا دوسرا سرا اپنی رکی ہوئی حالت سے 0.06 سینٹی میٹر ہٹتا ہے۔

سوال 22:

ایک لچک دار رسی کا ایک کنارہ ایک چوکھٹ سے باندھا گیا ہے جبکہ دوسرا سرا لٹک رہا ہے۔ کھلے سرے پر ایک چھوٹی سی گیند بندھی ہوئی ہے۔ اس لٹکتی ہوئی گیند کو تھوڑا سا نیچے کھینچا جاتا ہے اور پھر چھوڑ دیا جاتا ہے، اس سے بال اس اس لچک دار رسے پر اوپر نیطے مرتعش ہو جاتی ہے۔ گیند کی گہرائی چوکھٹ سے d وقت t کے بعد اس کلیے کی مدد سے معلوم کی جا سکتی ہے

$$d = 100 + 10\cos 500t$$

معلوم کریں کہ؛

1. گیند کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم گہرائی

2. وہ وقت جب گیند اپنے اونچے ترین مقام پے ہو گی۔

3. ایک مکمل ارتعاش کے لیے درکار وقت۔

4. ایک ارتعاش میں وقت کا وہ حصہ کہ جسکے لیے رسی کی لمبائی 99 سینٹی میٹر سے کم رہتی ہے

سوال 23: ایک مرتوش ذرے کا ہٹاؤ y ہے، جو کہ میٹرز میں ماپا جاتا ہے اور جسکے لیے تفاعل $y = a\sin(kt + \alpha)$ ہے۔ جسمیں a میٹرز میں ، وقت t سیکنڈز میں جبکہ k اور α دونوں مستقل ہیں ۔ ایک مکمل ارتعاز کے لیے وقت T سیکنڈز ہے۔ معلوم کریں کہ؛

1. مستقل k کو T کی اکایئوں میں

2. ایک سیکنڈ میں مکمل ہونے والی دائروی ارتعاش، k کی اکائیوں میں۔

سوال 24: ایک جزیرے پر ایک خاص قسم کے پرندوں کی آبادی P تبدیل ہوتی رہتی ہے، اور یہ منحصر کرتی ہے ان کی خوراک، ہجرت، موسم اور شکار پر۔ ایک ماہر ارضیات جو ان پر تحقیق کر رہا تھا اسنے سال میں انکی آبادی کے لیے ایک کلیہ بنایا

$$P = N - C\cos\omega t,$$

اس کلیے میں N،C اور ω مستقل ہیں۔ جبکہ t وقت ہے جسکی اکاے ایک ہفتہ رکھی گئی ہے اور یہ وقت صفر سے شروع ہو رہا ہے یعنی یکم جنوری رات 12 بجے سے۔

1. فرض کریں کہ تفاعل خود کو 50 ہفتوں بعد دہراتا ہے ω کی قیمت معلوم کریں

2. مساوات کا استعمال کریں اور اورN C کی اکائیوں میں جواب دیں

(ا) سال کے شروع میں اس نسل کے کتنے پرندے پائے جاتے ہیں

(ب) اس نسل کے پرندوں کی زیادہ سے آبادی اور یہ سال کے کس حصے میں پائی جائے گی

سوال 25: صحرا کے قریبی ایک جزیرے تک جانے والی سڑک اکثر پانی سے ڈھکی ہوتی ہے۔ سمندر کا پانی جب سڑک کے برابر آتا ہے تو سڑک بند ہو جاتی ہے۔ ایک خاص دن پانی کی سطح سمندر سے بلندی 4.6 میٹرز ہے. لہر کی بلندی h بیان کرنے کی لیے یہ $h = 4.6\cos kt$ کلیہ استعمال کیا جا سکتا ہے۔ وقت t سے ظاہر کیا گیا ہے اور یہ وہ وقت ہے جو شروع ہوتا ہے اونچی لہر کے آنے کے بعد سے۔ اور یہ بھی دیکھنے میں آیا ہے کہ اونچی لہر 12 گھنٹے میں ایک بار آتی ہے۔

1. مستقل k کی قیمت معلوم کریں

2. اسی دن ایک عبارت لگا دی گی کہ سڑک تین گھنٹے کے لیے بند ہے ۔ یہ مانتے ہوئے کہ حکم نامہ درست ہے ، سڑک کی سطح سمندر سے اونچائی معلوم کریں اور آپکا جواب دو اعشاری نقطوں تک درست ہونا چاہئیے

3. دراصل سڑک کی بحالی کے کام میں اسکی سطح بڑھی ہے، اب سڑک صرف 2 گھنٹے 40 منٹ کے لیے بند ہوئ ہے ، یہ بتائیں کہ سڑک کی سطح کتنی بلند ہوئ۔

سوال 26: سمندر میں بننے والی لہروں کے لیے سب سے سادہ نظریہ یہ ہے کہ یہ سورج اور چاند کی کشش ثقل کی وجہ سے معرض وجود میں آتی ہیں۔ چاند کی کشش ثقل سورج کی نسبت 9 گناہ ذیادہ ہے۔ سورج کی وجہ سے ہونے والا تغیر خود کو 360 دنوں بعد دہراتا ہے جبکہ چاند کے زیر اثر سلسلہ 30 دنوں بعد خود کو دہراتا ہے ۔ لہروں کی اونچائ h ، وقت کی علامت t ہے جسکی اکائ دن لیا گیا ہے اور تفاعل

$$h = A\cos\alpha t + B\cos\beta t,$$

ہے۔ اس تفاعل میں $A\cos\alpha t$ یہ سورج کے اثر کے لیے ہے جبکہ کلیے کا دوسرا حصہ $B\cos\beta t$ چاند کی کشش ثقل سے پیدا ہونے والی لہروں کے لیے ہے۔ ہمیں بتایا گیا ہے کہ h=5 ہے اور t=0 آپ B، A، α اور β، کی قیمت معلوم کریں۔

باب 3

انقلاب کا حجم

یہ باب کسی حجم یا ٹھوس حجم کو تلاش کرنے کے لیے انضمام کے استعمال کے بارے میں ہے۔ جس کو ٹھوس رد عمل کہا جاتا ہے۔جب آپ اس باب کو مکمل کرلیں گے تو آپ x اور y محور میں سے کسی ایک کے بارے میں انقلاب کا حجم تلاش کرنے کے قابل ہو جائیں گے۔

3.1 انقلاب کی جلدیں

O ایک لکیر پر ہے اور O ایک مبدا ہے۔ OA کی ایک لکیر بنائیں۔ جیسا تصور 17.11 میں دکھایا گیا ہے۔لائن OA اور x۔ محور کے سایہ دار دکھائے جانے والے خطے پر غور کریں۔اگر آپ اس خطے کو کے گرد 360^0 کے ذریعے گھماتے ہیں تو،یہ ایک ٹھوس شنک نکال دیتا ہے۔ 17۔2 تصور میں اس طرح سے تعمیر ہونے والی شکل کو انقلاب کا ٹھوس کہا جاتا ہے۔ٹھوس انقلاب کے حجم کو بعض اوقات انقلاب کا حجم کہا جاتا ہے۔

ایک خط کے منحنی خطوط کے حساب کتاب کرنے کے لئے متعدد طریقوں سے انقلاب کے حجم کا حساب لگانا یکساں ہے ، اور اس کی مثال ایک مثال سے دی جاسکتی ہے۔

فرض کریں $y = \sqrt{x}$ کے ترسیم اور $x = 1$ سے $x = 4$ کے ترسیم کے درمیان کے علاقے کو تصویر 17۔3 میں دکھا جا سکتا ہے، x- محور کے گرد انقلاب کا ٹھوس بنانے کے لیے گھمایا جاتا ہے۔کلیدی طور پر ایک اور عام سوال پوچھ کر شروع کرنا ہے۔ اسکا حجم V ہے۔ $x = 1$ سے کسی بھی قدر کی قدر کے انقلاب کا ٹھوس ہے۔ یہ ٹھوس تصویر 17 میں دکھایا گیا ہے۔

فرض کریں δx کو بڑھایا ہوا ہے۔ چونکہ y اور V دونوں ہی x کے افعال ہے۔ اسی سے y اور V میں اضافے کو δy اور δV لکھا جاسکتا ہے۔ تصویر 17.5 میں رنگین حجم میں اضافہ δV کے درمیان ہے۔ فرض نما نلی کی مقدار کی چوڑائی 6 ریڑی δy + y ہے ۔ ان دونوں قرض کا مرکز

تصویر 17-5 کے دائیں میں دکھایا گیا ہے۔ δV؛ $\pi y^2 \delta x$ اور $\pi(y+\delta y)^2$ کے درمیان ہے۔ جس سے اسکی پیروی ہوتی ہے۔ $\frac{\delta V}{\delta x}$؛ πy^2 اور $\pi(y+\delta y)^2$ کے درمیان میں ہے۔

اب δV کی طرف جاتا ہے اور یہ حصہ 4-7 کی تعریف میں $\frac{\delta V}{\delta x}$، $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$ کی طرف جاتا ہے۔ تو $y + \delta V$، y کی طرف جاتا ہے۔ اور اس کے بعد

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \pi y^2$$

تو V ایک ایسا فعل ہے۔ جس کا ماخوذ πy^2 ہے۔ اور $y = \sqrt{x}$ πx $= \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$ ہے۔

اسی طرح

$$V = \frac{1}{2}\pi x^2 - \frac{1}{2}\pi$$

حجم $x = 4$ تلاش کرنے کے لیے V کے اظہار کے لیے $x = 4$ کی جگہ لیں۔ تو حجم ہے۔

$$\frac{1}{2}\pi \times 4^2 - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi(16-1) = \frac{15}{2}\pi$$

آپ حصہ 16-3 کو استعمال کر کے آخری حصے کو متعارف کریں گے اور اسے مختصر کریں گے۔

$$V = \int_1^4 \pi y^2 \,\mathrm{d}x = \int_1^4 \pi x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\pi x^2\right]_1^4 = \frac{1}{2}\pi \times 16 - \frac{1}{2}\pi \times 1 = \frac{15}{2}\pi$$

نوٹ کریں کے مثال کے شروع میں جو استدلال استعمال کیا گیا ہے۔ وہ مکمل طور پر عام تھا اور کسی طرح بھی اصل وکر کی مساوات پر انحصار نہیں کرتا تھا۔جب $x = a$ اور $x = b$ کے درمیان $y = f(x)$ کا ترسیم ہوتا ہے تو تحت خطہ $a < b$ x-محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ انقلاب کا ٹھوس کا حجم ہوتا ہے۔

$$\int_a^b \pi(f(x))^2 \,\mathrm{d}x \quad \int_a^b \pi y^2 \,\mathrm{d}x$$

مثال 3.1: $x = -1$ اور $x = 1$ کو x-محور کے گرد چار دائیں زاویہ سے گھمایا جاتا ہے۔ اور حجم $y = 1 + x^2$ کے ترسیم کے نیچے پیدا ہوتا ہے۔اسکا حجم تلاش کریں۔

چار دائیں زاویوں کا فقرہ بعض اوقات 360^0 کی جگہ پر مکمل بیان کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔ اور x-محور کے گرد گردش کرتا ہے۔تو مطلوبہ حجم V ہے۔ جہاں

$$V = \int_{-1}^1 \pi y^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \pi\left(1 + 2x^2 + x^4\right) \mathrm{d}x$$

$$= \left[\pi\left(x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\right]_{-1}^1$$

$$= \pi \left\{ \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) - \left((-1) + \frac{2}{3}(-1)^3 + \frac{1}{5}(-1)^5\right) \right\} = \frac{56}{15}\pi$$

$$\frac{56}{15}\pi$$

یہ معمول کی بات ہے نتیجہ π کے عین مطابق متعدد کے طور پر دیا ہے۔اہم اعداد و شمار یا اشاری جگہوں کی دی گئی تعداد کا صیح جواب دیں۔ اور ثابت کریں کہ بنیاد کے ساتھ ایک شنک کا حجم V دراس r اور اوچائی h $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ہے۔ شنک دینے کے لیے گھومنے والا مثلث تصویر 17.6 میں دکھایا گیا ہے۔ جسکی اوچائی پورے صفے پر تیار کی گئی ہے۔ اور اسکا میلان---پر ہے جو کہ $\frac{r}{h}$ ہے اور مساوات $y = \frac{r}{h}x$ بنتی ہے۔

لہسزا یاد رکھے کے n، r اور h ثابت قدم ہیں- اور x پر انعصار نہیں کرتے ہیں۔

$$V = \int_0^h \pi y^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^h \pi \left(\frac{r}{h}x\right)^2 \mathrm{d}x$$

$$= \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 \, \mathrm{d}x = \pi \frac{r^2}{h^2} \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h = \pi \frac{r^2}{h^2} \times \frac{1}{3}h^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

□

3.2 y- محور کے گرد انقلاب کی جلدیں

تصویر 17.7 مع $y = f(x)$ کے ترسیم میں درمیان کا علاقہ $y = c$ اور $y = d$ ہے۔ اور اسے x- محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔جو تصویر 17۔8 میں ٹھوس دکھایا گیا ہے۔ y- محور کے گرد ٹھوس انقلاب کو تلاش کرنے کے لیے کردار کو تبدیل کریں۔ جو کہ حصہ 17.1 میں x اور y کی گفتگو کی گئی ہے۔ خطہ $y = f(x)$ کے ترسیم سے جڑا ہوا ہے۔ تو لکیر $y = c$ اور $y = d$, y- محور کے گرد گھمایا جاتا ہے، تشکیل شدہ ٹھوس حجم ہوتا ہے۔

$$\int_c^d \pi \, x^2 \, dy.$$

مثال 3.2: خطہ $y = x^3$ اور اس کے درمیان y- محور سے جڑا ہوا ہے۔ تو پیدا شدہ حجم تلاش کریں۔ اور y- محور کے درمیان $y = 1$ اور $y = 8$ کو 360^0 y- محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

$$V = \int_1^8 \pi \, y^{\frac{2}{3}} \, dy = \pi [\frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}}]_1^8 = \pi (\frac{3}{5} \times 8^{\frac{5}{3}}) - \pi (\frac{3}{5} \times 1^{\frac{5}{3}})$$
$$= \pi (\frac{3}{5} \times 32) - \pi (\frac{3}{5} \times 1) = \frac{93}{5}\pi$$

$$= \frac{93}{5}\pi$$

□

مشق 3.1: اس مشق کے تمام سوالات کو اپنے جوابات میں π کی ضرب کے طور پر لکھیں۔

ا. جب خط $x = a$ کے درمیان $y = f(x)$ کے ترسیم کے پیدا ہوتا ہے۔ تب حجم تلاش کرے $x = b$ کو 360^0 کے ذریعے x-محور کے گرد گھمایا جاتا ہے؟

(a) $f(x) = x;\ a = 3, b = 5$ (b) $f(x) = x^2;\ a = 2, b = 5$

(c) $f(x) = x^3;\ a = 2, b = 6$ (d) $f(x) = \frac{1}{x};\ a = 1, b = 4$

ب. جب حجم $x = a$ اور $y = f(x)$ کے درمیان ترسیم کے نیچے بنائے گئے۔ حجم کا پتہ لگائیں۔ $x = b$ کو 360^0 x-محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

(a) $f(x) = x + 3;\ a = 3, b = 9$ (b) $f(x) = x^2 + 1;\ a = 2, b = 5$

(c) $f(x) = \sqrt{x+1};\ a = 0, b = 3$ (d) $f(x) = x(x-2);\ a = 0, b = 2$

ج. جب خطہ y-محور اور $y = f(x)$ کے ترسیم کے ساتھ جڑا ہوا ہو۔ تب پیدا شدہ حجم تلاش کریں۔ اور $y = c$ اور $y = d$ کی لکیر کو y-محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ تاکہ ٹھوس رستہ نکالا جا سکے۔

(a) $f(x) = x^2;\ c = 1, d = 3$ (b) $f(x) = x + 1;\ c = 1, d = 4$

(c) $f(x) = \sqrt{x};\ c = 2, d = 7$ (d) $f(x) = \frac{1}{x};\ c = 2, d = 5$

(e) $f(x) = \sqrt{9-x};\ c = 0, d = 3$ (f) $f(x) = x^2 + 1;\ c = 1, d = 4$

(g) $f(x) = x^{\frac{2}{3}};\ c = 1, d = 5$ (h) $f(x) = \frac{1}{x} + 2;\ c = 3, d = 5$

د. ہر معاملے مین خطا مندرجہ ذیل منحنی خطوط اور x-مھور کے درمیانمنسلک ہوتا ہے۔ x-محور کے گرد 360^0 کے ذریعے پیدا کردہ ٹھوس کا حجم تلاش کریں۔

$$(a)\quad y=(x+1)(x-3); \qquad (b)\quad y=1-x^2$$
$$(c)\quad y=x^2-5x+6 \qquad (d)\quad y=x^2-3$$

ھ. $y=x$ اور $y=x^2$ کے ترسیموں کے درمیان منسلک خطے R کے ذریعے گھمایا جاتا ہے تو جو حجم ہوتا ہے، اسے تلاش کریں۔

ا. x-محور کے گرد

ب. y-محور کے گرد

و. $y=x^2$ اور $y=4x$ کے ترسیموں کے درمیان منسلک خطے R کے ذریعے گھمایا جاتا ہے تو جو حجم ہوتا ہے، اسے تلاش کریں۔

ا. x-محور کے گرد

ب. y-محور کے گرد

ز. $y=\sqrt{x}$ اور $y=x^2$ کے ترسیموں کے درمیان منسلک خطے R کے ذریعے گھمایا جاتا ہے تو جو حجم ہوتا ہے، اسے تلاش کریں۔

ا. x-محور کے گرد

ب. y-محور کے گرد

ح. گلاس کا پیالہ y-محور کے ترسیموں کے مابین اس علاقے کے گرد گھماتے ہوئے تشکیل دیا جاتا ہے۔

$y=x^2$ اور $y=x^3$ پیالے میں شیشے کی مقدار مرلوم کریں۔

ط. یہ خط دونوں محوروں سے منسلک ہے۔ لکیر $x=2$ اور وکر $y=\frac{1}{8}x^2+2$ کے ارد گرد گھمایا گیا ہے۔ایک محور بنانے کے لیے y-محور ٹھوس کا حجم تلاش کریں۔

مشق 3.2:

ا. یہ خط وکر $y = x^2 + 1$ x-محور اور لکیر $x = 2$ سے جڑا ہوا ہے۔ x-محور کے گرد گھمایا گیا ہے۔ π اور π کے رحاظ سے تشکیل شدہ ٹھوس کا حجم تلاش کریں۔

ب. یہ وضاحت کریں کے نقاط x, y مرکزہ ایک مطمئن دراس کی مساوات $x^2 + y^2 = a^2$ کی نشاندہی کریں۔ x-محور کت نیم کے اوپر دائرہ گھمایا جاتا ہے۔ 360^0 کے ذریعے x-محور کو گھمایا جاتا ہے۔دراس کا دائرہ a کی وضاحت کریں۔اضاحت کریں کے حجم V کیوں ہے۔ اس دائرہ کا V مزجانب دیا گیا ہے۔

$$V = 2\pi \int_0 a(a^2 - x^2)dx.$$

یہ ثابت کریں $V = \frac{4}{3}\pi a^3$

ج. مساوات والا بیضوی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ تصویر میں دکھایا گیا ہے۔a اور b کا محور ایک ہی ہے۔ a^2 اور b^2 بیضوی شکل بنانے کے لیے x-محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔اس بیضوی کا حجم تلاش کریں۔ b بناتے ہوئے بیضوی کی مقدار کم کریں۔ اور y-محور کے گرد گھمایا جاے۔

د. تصویر میں $y = x^{-\frac{2}{3}}$ عکر دکھایا گیا ہے۔

(ا) دکھائیں کے سایہ دار علاقہ A لا محدود ہے۔

(ب) رنگیں علاقہ B تلاش کریں۔

(ج) A رقبہ کے گرد 360^0 کے ذریعے گھمایا جاتا ہے۔x-محور حجم تلاش کریں۔

(د) علاقہ B 360^0 کے ذریعے گھمایا جاتا ہے۔ y-محور حجم تلاش کریں۔

ھ. مساوات کاعلاقہ سوال 4 میں دیا گیا ہے۔ ان کی مساوی علاقوں اور جلدوں کی تعقیقات کریں۔

$$(i) \quad y = x^{-}\frac{3}{5}, \qquad\qquad (ii) \quad y = x^{-}\frac{1}{4}.$$

و. نقطہ موڑ اور نقاط کے بتائے ہوئے وکر $y = 9 - x^2$ کا خاکہ بنائیں۔ محور کے ساتھ چو رہا ہے۔ محدود خط جس میں منخنی خطوط پر مشتمل ہوتا ہے۔ اور x-محور R کے زریعے ظاہر ہوتا ہے۔

(ا) R کا رقبہ تلاش کریں اور اسی وجہ سے دوسری صورت میں --- تلاش کریں۔

(ب) جب R کو 360^0 کے ذریعے گھمایا جاتا ہے، تو حاصل کی جانے والی ٹھوس انقلاب کا حجم x-محور کے گرد تلاش کریں۔

(ج) جب R کو 360^0 کے ذریعے گھمایا جاتا ہے،تو حاصل کی جانے والی ٹھوس انقلاب کا حجم y-محور کے گرد تلاش کریں۔

ز. خطے کو منخنی خطوط وکر $y = (x-2)^{\frac{3}{2}}$ ہے۔ جس کے لیے $2 \leq x \leq 4$ ہے۔ جو x-محور کے ساتھ ہے۔ $x = 4$ تلاش کریں۔ π کے لہاظ سے حاصل کردہ ٹھوس کا حجم جب R ہوتا ہے۔ x-محور کے گرد چار زاویوں سے گھمایا جاتا ہے۔

جوابات