ریاضیات اول

برائے گیارہویں اور بارہویں جماعت

طلبہ و طالبات

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 1

محدد، نقطے اور خط

اس سبق میں ہم محدد کی مدد سے نقطوں اور خط کی دو ابعادی میں تعریف کریں گے۔ یہ سبق پڑھ لینے کے بعد آپ اس قابل ہوں گے کہ ؛

- دو نقطوں کے بیچ کا فاصلہ معلوم کریں۔
- کسی خط کے انتہائی نقطوں کے محدد معلوم ہوں تو اس خط کا درمیانی نقطہ معلوم کر سکیں۔
- کسی خط کے انتہائی نقطوں کے محدد معلوم ہوں تو اس خط کی ڈھلوان معلوم کریں۔
- ایک خط کی ڈھلوان سے اسکی مساوات معلوم کریں۔
- دو نقطوں کو ملانے والی لکیر کی مساوات معلوم کریں۔
- لکیروں میں تفریق کریں مختلف طرح کی مساوات سے۔
- دو لکیریں کے مشترک نقاط معلوم کریں۔
- ڈھلوان سے معلوم کریں کہ لکیریں عمودی ہیں یا متوازی ہیں۔

1.1 دو نقطوں کے بیچ کا فاصلہ

جب آپ مبدا چن لیتے ہیں تو صفحے پے افقی سمت میں x محدد بنایئں۔ اور عمودی خط میں y محدد بنائیں، اور اسطرح آپ ایک نظام محدد بنا رہے ہیں۔ اور اس نظام محدد کو کارتیسی نظام محدد کہیں گے، اور یہ نام سترھویں صدی کے ایک فرانسیسی ریاضی دان رین ڈیسکارٹس [1] کے نام پر رکھا گیا شکل 1.1 میں دو نقطے ہیں A اور B ۔ A کے محدد $(4,3)$ ہیں اور B کے $(10,7)$ محدد ہیں۔ خط کا وہ حصہ جو A اور B کے درمیان واقع ہو اسے لکیری قطع کہیں گے۔ لکیری قطع کی لمبائی دو نقتوں کے بیچ کا فاصلہ ہے۔ شکل 1.1 میں ایک نقطہ C بھی شامل کر لیا گیا ہے اور اسطرح ایک قائمہ الزاویہ مثلث وجود میں آتی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ C کا محدد-x B جیسا ہے جبکہ A اور C کا محدد-y ایک ہی ہے۔ اور یوں کے C محدد (10,3) ہیں۔ یہ بہت واضع ہے کہ کی AC لمبائی $10 - 4 = 6$ ہے اور CB کی لمبائی $7 - 3 = 4$ ہے۔ فیثاغورث کے کلیے کو استعمال کرتے ہوئے مثلث ABC سے یہ واضع ہے کہ قطع خط AB کی لمبائی

$$\sqrt{(10-4)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$$

آپ اعداد کی مدد لے سکتے ہیں اور یوں آپ کے پاس نتیجہ 7.21 آئے گا لیکن بہتر یہی ہے کہ آپ اسے جذر کی صورت میں ہی رہنے دیں۔ محدد جیومیٹری کی تجویز اس لیے پیش کی گیٔ کہ حساب کتاب کے لیے الجبرا کا استعمال کیا جا سکے، جیسے اگر A اور B کوئی بھی دو نقطے ہوں اور شکل 1.1 والے نہ ہوں تو بھی ہمارے لیے کافی مدد گار ہوتا ہے کہ صرف محدد دیکھ کہ یہ پتہ چل جائے کہ کس نقطے کی بات ہو رہی ہے۔ اسکا ایک طریقہ یہ ہے کہ علامات استعمال کی جائیں جیسے پہلے نقطے کے محدد (x_1, y_1) اور دوسرے نقطے کے محدد (x_2, y_2) ہوں گے۔ جبکہ x_1 دراصل پہلے نقطے کا محدد x ہے۔ شکل 1.2 میں ایک عام مثلث بنائیٔ گیٔ ہے اور آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نقطہ C کے محدد اب (x_2, y_1) ہیں اور یہ کہ اب $AC = x_2 - x_1$ اور $CB = y_2 - y_1$ ۔ فیثاغورث کے کلیے کے مطابق؛

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ایک اور فائدہ الجبرا استعمال کرنے کا کہ مثلث کی جیسی بھی شکل ہو اور وہ جس بھی جگہ ہو یہ کلیہ کام کرتا ہے شکل 1.3 میں A کے محدد منفی ہیں اور شکل 1.4 میں لکیر کی ڈھلوان نیچے کی طرف ہے بجائے اوپر کی طرف ہونے کے جیسے جیسے آپ بائیں سے دائیں جانب چلتے ہیں۔ شکل 1.3 اور شکل 1.4 میں اپنے طور پر AB کی لمبائی معلوم کرنے کی کوشش کریں۔ اور پھر آپ کلیہ استعمال کر سکتے ہیں اپنے جواب کی پڑتال کرنے کے لیے۔ شکل 1.3 کے لیے $x_2 - x_1 = 3 - (-2) = 3 + 2 = 5$ اور $y_2 - y_1 = 5 - (-1) = 5 + 1 = 6$

$$AB = \sqrt{(3-(-2))^2 + (5-(-1))^2} = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{25+36} = \sqrt{61}$$

اور شکل 1.4 میں $x_2 - x_1 = 6 - 1 = 5$ اور $y_2 - y_1 = 2 - 5 = -3$

$$AB = \sqrt{(6-1)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

ایک اور بات اس سے فرق نہیں پڑتا کہ آپ نقطوں کو کس ترتیب میں رکھتے ہیں، اگر آپ B کو پہلا نقطہ تصور کریں یوں کہ (x_1, y_1) اور A کو دوسرا نقطہ (x_2, y_2) تو کلیے پر اسکا کوئی اثر نہیں ہوگا۔ شکل 1.1 کے لیے یہ

$$BA = \sqrt{(4-10)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$$

---

[1] DescartsRene

دو نقطوں (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) کا درمیانی فاصلہ (یا اس قطع لکیر کی لمبائی جو ان دونوں کو جوڑ رہا ہے)؛

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)2}$$

1.2 قطع لکیر کا وسط

آپ محدد کی مدد سے بھی ایک قطع لکیر کا درمیانی قطع معلوم کر سکتے ہیں۔ شکل1.5 میں ایک قطع لکیر دکھایا گیا ہے جیسا کہ شکل 1.1 میں تھا لیکن اب اس میں درمیانی نقطہ M بھی شامل کیا گیا ہے۔ M سے گزرتی ہوئی محدد-y کے مساوی خط AC کو چھوئے گا اور اس نقطے کو ہم نام دیں گے D کا، اور یوں مثلث ADM کے اطراف کی لمبائی ACB کے اطراف کی لمبائی سے آدھی ہیں، اور اسی لیے ؛

$$AD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}(10 - 4) = \frac{1}{2}(6) = 3,$$

$$DM = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}(7 - 3) = \frac{1}{2}(4) = 2$$

نقطے M اور D کے محدد-x ایک ہی ہیں جو کہ؛

$$4 + AD = 4 + \frac{1}{2}(10 - 4) = 4 + 3 = 7$$

نقطے M کا محدد-y جو کہ؛

$$3 + MD = 3 + \frac{1}{2}(7 - 3) = 3 + 2 = 5$$

لہذہ درمیانی نقطے M کے محدد (75) ہیں شکل 1.6 میں شکل 1.2 ہی ہے لیکن اب اسمیں دو نقطے M اور D شامل کیے گۓ ہیں

$$AD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}(x_2 - x_1), \qquad DM = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}(y_2 - y_1)$$

لہذہ نقطے M کا محدد-x ہے؛

$$\begin{aligned} x_1 + AD &= x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1 \\ &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2). \end{aligned}$$

اور اسی طرح نقطے M کا محدد-y ہے؛

$$\begin{aligned} y_1 + DM &= y_1 + \frac{1}{2}(y_2 - y_1) = y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_1 \\ &= \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2). \end{aligned}$$

دو نقطوں (x_1, y_1) اور $(x_2, y2)$ کو ملانے والے قطع لکیر کے درمیانی حصے کے محدد ہیں ؛

$$\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2),\ \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right)$$

اور اب چونکہ آپ کے پاس وسطی نقطہ M کے محدد کے لیے الجبرائی کلیہ موجود ہے، آپ اسے کسی بھی دو نقطوں کے لیے استعمال کر سکتے ہیں، مثال کے طور پر شکل 1.3 کے لیے AB کا درمیانی نقطہ؛

$$\left(\frac{1}{2}((-2) + 3), \frac{1}{2}((-1) + 5)\right) = \left(\frac{1}{2}(1), \frac{1}{2}(4)\right) = \left(\frac{1}{2}, 2\right).$$

اور شکل 1.4 کے لیے $\left(\frac{1}{2}(1+6), \frac{1}{2}(5+2)\right) = \left(\frac{1}{2}(7), \frac{1}{2}(7)\right) = \left(3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$ یہاں بھی اس بات سے کوئی مسئلہ نہیں ہوگا کہ آپ کس نقطے کو پہلا نقطہ کہتے ہیں اور کسے دوسرا، شکل 1.5 میں اگر آپ (10,7) کو (x_1, y_1) جبکہ (4,3) کو $(x_2, y2)$ تصور کر لیں تو درمیانی نقطہ $\left(\frac{1}{2}(10+4), \frac{1}{2}(7+3)\right) = (7, 5)$ جو کہ پہلے والا جواب ہی ہے۔

1.3 قطع خط کا ڈھلاؤ

کسی لکیر کا ڈھلاؤ دراصل بتاتا ہے کہ کوئی لکیر کتنی ترچھی ہے، لکیر جتنی زیادہ ترچھی ہو گی اتنا زیادہ ڈھلاؤ ہوگا۔ فاصلے اور درمیانی نقطے کے برعکس ڈھلاؤ پوری لکیر کی خصوصیت ہے نہ کہ صرف ایک قطع لکیر کی ۔ اگر آپ لکیر کے کوئی سے بھی دو نقطے چنتے ہیں اور آپ محسوس کرتے ہیں کہ محدد-x اور محدد-y کی قیمتیں بڑھ رہی ہیں جیسے جیسے آپ ایک نقطے سے دوسرے کی طرف جاتے ہیں ، جیسا کہ شکل 1.7 میں دکھایا گیا ہے تو کسر کچھ ایسا بنتا ہے،

$$\frac{y \text{ قدم}}{x \text{ قدم}}$$

اور یہ بدلتا نہیں ہے آپ جو بھی نقطے چنیں۔ اور یہی ایک لکیر کا ڈھلاؤ ہے۔ کلیے پر کوئی اثر نہیں پڑتا محدد مثبت ہوں یا منفی ، شکل 1.3 میں مثال کے طور پر AB کا ڈھلاؤ $\frac{6}{5} = \frac{5+1}{3+2} = \frac{5-(-1)}{3-(-2)}$ ہے لیکن اس بات کا خیال رکھیں کہ شکل 1.4 میں ڈھلاؤ $-\frac{3}{5} = \frac{-3}{5} = \frac{2-5}{6-1}$، منفی ڈھلاؤ کا مطلب ہے کہ جب آپ بائیں سے دائیں جانب چل رہے ہوں تو ترچھاؤ نیچے کی طرف ہو۔ باقی کلیوں کی طرح یہاں بھی اس بات سے فرق نہیں پڑتا کے کس محدد کو ایک کہیں گے اور کسے دو، شکل 1.1 میں آپ ڈھلاؤ کہہ سکتے ہیں کہ $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{7-3}{10-4}$ یا ہم ایسے بھی کہہ سکتے ہیں $\frac{2}{3} = \frac{-4}{-6} = \frac{3-7}{4-10}$ اگر دو لکیروں کا ڈھلاؤ برابر ہے تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ یہ دونوں لکیریں متوازی یا مساوی ہیں۔

مثال 1.1: ایک لکیر کے انتہائی نقطے $(p+q, p-q)$ اور $(p-q, p+q)$ ہیں اس لکیر کی لمبائی ، ڈھلاؤ اور درمیانی نقطے کے محدد معلوم کریں۔ لمبائی اور ڈھلاؤ معلوم کرنے کے لیے آپکو حساب لگانا ہوگا۔

$$x_2 - x_1 = (p+q) - (p-q) = p + q - p + q = 2q$$

اور

$$y_2 - y_1 = (p-q) - (p+q) = p - q - p - q = -2q$$

لمبائی $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(2q)^2+(-2q)^2} = \sqrt{4q^2+4q^2} = \sqrt{8q^2}.$ ہے جبکہ ڈھلاؤ $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-2q}{2q} = -1$ درمیانی نقطے کے لیے

$$x_1+x_2 = (p-q)+(p+q) = p-q+p+q = 2p$$

اور

$$y_1-y_2 = (p+q)+(p-q) = p+q+p-q = 2p$$

لہٰذہ درمیانی نقطہ $\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2), \frac{1}{2}(y_1+y_2)\right) = \left(\frac{1}{2}(2p), \frac{1}{2}(2p) = (p,p).\right.$ ہے۔ کوشش کریں کہ آپ خود سے شکل بنائیں مثال کے نتیجے کو ظاہر کرنے کے لیے۔ □

مثال 1.2: ثابت کریں کے ان نقطوں $A(1,1)$, $B(5,3)$, $C(3,0)$ اور $D(-1,2)$ سے ایک متوازی الاضلاع شکل بنتی ہے۔ آپ اس مثال کو کئ طریقوں سے حل کر سکتے ہیں لیکن جو بھی طریقہ چنیں گے اس میں شکل بنانا لازمی ہے، جو کہ شکل 1.8 میں دکھائ گئ ہے۔ پہلی ترکیب **(لمبائی کا استعمال کرتے ہوئے)**

اس طریقے میں مخالف سمتوں کی لمبائ معلوم کریں، اگر مخالف سمتوں کی لمبائ برابر ہے تو دیے گئے نقطے ایک متوازی الاضلاع شکل بنائیں گے۔

$$AB = \sqrt{(5-1)^2+(3-1)^2} = \sqrt{20}$$
$$DC = \sqrt{(3-(-1))^2+(0-(-2))^2} = \sqrt{20}$$
$$CB = \sqrt{(5-3)^2+(3+0)^2} = \sqrt{13}$$
$$DA = \sqrt{(1-(-1))^2+(1-(-2))^2} = \sqrt{13}$$

اسی لیے $AB = DC$ اور $CB = DA$ اور ثابت ہو گیا کہ دیے گئے نقطے ایک متوازی الاضلاع شکل بناتے ہیں طریقہ 2 **(درمیانی نقطوں کی مدد سے)** اس طریقے میں , اخترن AC اور BD کے درمیانی نقطے معلوم کریں۔ اگر یہ نقطے ایک ہی ہیں تو اسکا مطلب اخترن ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں لہٰذہ یہ بند شکل ایک متوازی الاضلاع شکل ہو گی۔ اخترن AC کا درمیانی نقطہ $\left(\frac{1}{2}(1+3), \frac{1}{2}(1+0)\right)$ جو کہ $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ ہے، اخترن BD کا درمیانی نقطہ $\left(\frac{1}{2}(5+(-1)), \frac{1}{2}(3+(-2))\right)$ اور یہ بھی $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ لہٰذہ ہم کہہ سکتے ہیں کہ دیے گئے نقطے ایک متوازی الاضلاع شکل بناتے ہیں۔ طریقہ 3 **(ڈھلاؤ کی مدد سے)** اس طریقہ کار میں مخالف سمتوں کے ڈھلاؤ معلوم کریں، اگر آمنے سامنے کے دونوں خط متوازی ہوں تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ $ABCD$ ایک متوازی الاضلاع شکل ہو گی۔ خط AB اور DC کے ڈھلاؤ $\frac{3-1}{5-1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ اور $\frac{0-(-2)}{3-(-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ہیں، لہٰذہ AB اور DC متوازی لکیریں ہیں، لکیروں DA اور CB دونوں کا ڈھلاؤ برابر $\frac{3}{2}$ ہے، اسی لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ DA اور CB متوازی ہیں اور یوں یہ ثابت ہوتا ہے کہ $ABCD$ ایک متوازی الاضلاع شکل ہے۔ □

سوال 1: درج ذیل نقطوں کو جوڑنے والے قطع لکیر اعداد کا استعمال نہ کریں اور جہاں مناسب ہو اپنے جواب کو جذر کی صورت میں لکھیں۔ کی لمبائی معلوم کریں. جز (e) اور (h) میں فرض کریں کہ $a > 0$ جبکہ جز (i) اور (J) میں $p > q > 0$ ہے۔

ا. $(2,5),\ (7,1)$

ب. $(-3,2),\ (1,-1)$

ج. $(4,-5),\ (-1,0)$

د. $(-3,-3),\ (-7,3)$

ھ. $(2a,a),\ (10a,-14a)$

و. $(a+1,2a+3),\ (a-1,2a-1)$

ز. $(2,9),\ (2,-14)$

ح. $(12a,5b),\ (3a,5b)$

ط. $(p.q),\ (q,p)$

ي. $(p+4q,p-q),\ (p-3q,p)$

سوال 2: ثابت کریں کہ نقطے $(4,2)$، $(9,3)$، $(6,-1)$، $(1,-2)$ ایک متوازی الاضلاع شکل بناتے ہیں۔

سوال 3: ثابت کریں کہ نقطوں $(-2,5)$، $(2,-7)$، $(-3,-2)$ سے بننے والی مثلث ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔

سوال 4: ثابت کریں کہ نقطے $(14,-5)$، $(-3,-12)$، $(7,12)$ ایک دائرے کا حصہ ہیں جسکا رداس $(2,0)$ ہے۔

سوال 5: درج ذیل نقطوں کو جوڑنے والے قطع لکیر کا وسطی نقطہ معلوم کریں۔

ا. $(2,11),\ (6,15)$

ب. $(5,7),\ (-3,9)$

ج. $(-2,-3),\ (1,6)$

د. $(-3,4),\ (-8,5)$

ھ. $(p+2,3p-1),\ (3p+4,p-5)$

و. $(p+3,q-7),\ (p+5,3-1)$

ز. $(p+2q.2p+13q),\ (5p-2q,-2p-7q)$

ح. $(a+3,b-5),\ (a+3,b+7)$

سوال 6: نقطے $A(-2,1)$، $(6,5)$ ایک دائرے کے قطر کے دو انتہائی نقطے ہیں۔ قطر کے درمیانی نقطے کے محدد معلوم کریں۔

سوال 7: ایک نقطے $A(3,4)$ اور B کو جوڑنے والے قطع لکیر کا درمیانی نقطہ $M(5,7)$ ہے۔ نقطہ B کے محدد معلوم کریں

سوال 8: نقطے $A(1,-2)$، $B(6,-1)$، $C(9,3)$، $D(4,2)$ ایک متوازی الاضلاع شکل کے کونے ہیں۔ ثابت کریں کے وتر AC اور BD ایک ہی نقطے پر ٹکراتے ہیں۔

سوال 9: درض ذیل محدد $A(5,2)$، $B(6,-3)$، $C(4,7)$ میں سے ایک باقی دو کا وسطی نقطہ ہے اسے تلاش کریں۔ دو فاصلوں کو معلوم کر کے آپ اپنا جواب ثابت کر سکتے ہیں۔

سوال 10: درج ذیل نقاط کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔

ا. $(3,8),\ (5,12)$

ب. $(1,-3),\ (-2,6)$

ج. $(-4,-3),\ (0,-1)$

د. $(-5,-3),\ (3,-9)$

ہ. $(p+3, p-3),\ (2p+4, -p-5)$

و. $(p+3, q-5),\ (q-5, p+3)$

ز. $(p+q-1, q+p-3),\ (p-q+1, q-p+3)$

ح. $(7,p),\ (11,p)$

سوال 11: لکیروں AB اور BC کا ڈھلاؤ معلوم کریں جبکہ $A(3,4),\ B(7,6),\ C(-3,1)$۔ ان تینوں نقطوں کے بارے میں اپنی رائے کا بھی اظہار کریں۔

سوال 12: نقطہ $P(x,y)$ ایک سیدھی لکیر کا حصہ ہے جس کے انتہائی نقطے $A(3,0),\ (5,6)$ ہیں۔ لکیر AP اور PB کے ڈھلاؤ کے لیے ریاضیاتی بیانیہ معلوم کریں۔ اور یہ مساوات $y = 3x - 8$ بنا کے دکھائیں۔

سوال 13: ایک لکیر جو کہ مثلث کے ایک کونے کو مخالف طرف کے درمیان سے ملاتی ہے اسے اوسط کہتے ہیں۔ اسی اوسط AM کی لمبائی معلوم کریں جب مثلث کے کونے $A(-1,1),\ B(0,3),\ C(4,7)$ ہوں۔

سوال 14: ایک مثلث کے کونے $A(-2,1),\ B(3,-4),\ C(5,7)$ ہیں۔

ا. لکیر AB کا وسطی نقطہ N اور لکیر AC کا وسطی نقطہ N معلوم کریں

ب. ثابت کریں کہ MN کے BC متوازی ہے

سوال 15: نقطے $A(2,1),\ B(2,7),\ C(-4,-1)$ ایک مثلث بناتے ہیں۔

ا. لکیروں MN اور BC کی لمبائی معلوم کریں

ب. ثابت کریں کہ $BC = 2MN$

سوال 16: ایک چوکور شکل ABCD کے کونے $A(1,1),\ B(7,3),\ C(9,-7),\ D(-3,-3)$ ہیں۔ نقطے P ، Q ، R اور S بالترتیب BC ، AB ، CD اور DA کے وسطی نقطے ہیں۔

ا. شکل $PQRS$ کی تمام اطراف کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔

ب. یہ چوکور شکل $PQRS$ دراصل کیسی شکل ہے؟

سوال 17: مبدا O اور نقطے $P(4,1),\ Q(5,5),\ R(1,4)$ ایک چوکور شکل بناتے ہیں۔

ا. ثابت کریں کے OR اور PQ متوازی ہیں۔

ب. ثابت کریں کے OP اور RQ متوازی ہیں۔

ج. ثابت کریں کہ $OP = OR$

د. چھار طرفہ $OPQR$ کی اصل شکل کیا ہے؟

سوال 18: مبدا O اور نقطے $L(-2,3)$, $M(4,7)$, $N(6,4)$ مل کے ایک چھار طرفہ بناتے ہیں۔

ا. ثابت کریں $ON = LM$

ب. ثابت کریں کہ ON اور LM متوازی ہیں

ج. ثابت کریں کہ $OM = LN$

د. چھار طرفہ $OLMN$ کس شکل کا ہے؟

سوال 19: ایک چھار طرفہ کے کونے $P(1,2)$, $Q(7,0)$, $R(6,-4)$, $S(-3,-1)$ ہیں

ا. ایک چھار طرفہ کے چاروں طرف کا ڈھلاؤ معلوم کریں۔

ب. ایک چھار طرفہ $PQRS$ کی شکل کیا ہو گی؟

سوال 20: ایک چھار طرفہ کے کونے $T(3,2)$, $U(2,5)$, $V(8,7)$, $W(6,1)$ ہیں۔ لکیروں UV اور VW کے وسطی نقطے بالترتیب M اور N ہیں۔ثابت کریں کہ مثلث TMN ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔

سوال 21: ایک چھار طرفہ کے کونے $D(3,-2)$, $E(0,-3)$, $F(-2,3)$, $G(4,1)$ ہیں۔

ا. چھار طرفہ کی تمام اطراف کی لمبائی معلوم کریں

ب. چھار طرفہ $DEFG$ کس طرح کی شکل ہے؟

سوال 22: نقطے $A(2,1)$, $B(6,10)$, $C(10,1)$ ایک مساوی الساقین مثلث ہے اور اس میں AB اور BC کی لمبائی برابر ہے۔ نقطہ G کے محدد (6,4) ہیں

ا. لکیر AC کے وسطی نقطے M کے محدد لکھیں

ب. ثابت کریں کہ $BG = 2GM$ اور یہ کہ BGM ایک سیدھی لکیر ہے۔

ج. لکیر BC کے وسطی نقطے N کے محدد لکھیں۔

د. ثابت کریں کہ $AG = 2GN$ اور یہ کہ AGN ایک سیدھی لکیر ہے۔

1.4 ایک سیدھی لکیر یا خط کی مساوات سے کیا مراد ہے؟

اگر آپکو فیصلہ کرنا ہو تو آپ یہ کیسے اندازہ لگائیں گے کہ نقطے $(3,7)$ اور $(1,5)$ خم $y = 3x^2 + 27$ پے موجود ہیں ؟ اسکا جواب ہے آپ ان محدد کو مساوات میں ڈالیں اور دیکھیں کہ کیا مساوات درست ثابت ہوتی ہے؟ اگر ہم محدد $(3,7)$ کو مساوات میں ڈالنا چاہیں تو مساوات کی دائیں جانب $29 = 2 + 3^2 \times 3$ جبکہ بائیں جانب 7 ہو گی، لہٰذہ مساوات درست ثابت نہیں ہوتی اور یوں یہ بات ثابت ہوتی ہے کہ نقطہ $(3,7)$ بتائے گئے خم کا حصہ نہیں ہے۔ اگر محدد $(1,5)$ پر غور کیا جائے تو مساوات کے دونوں اطراف کا جواب 5 آئے گا اور یوں یہ مساوات درست ثابت ہوتی ہے اور یہ بھی ثابت ہوتا ہے کہ نقطہ $(1,5)$ خم کا حصہ ہے۔ ایک سیدھی لکیر یا خم کی مساوات دراصل ایک اصول ہے جو اس بات کا تعین کرتا ہے کہ دیے گئے محدد بتائی گئی لکیر یا خم کا حصہ ہوں گے یا نہیں۔ لکیر یا خم کی مساوات کو دیکھنے کا یہ نظریہ بہت اہمیت کا حامل ہے۔

1.5 لکیر کی مساوات

مثال 1.3: ایک لکیر جسکا ڈھلاؤ 2 ہے اور جو محدد $(2,1)$ سے گزرتی ہے ایسی لکیر کی مساوات تلاش کریں۔ شکل 1.9 میں ایک لکیر دکھائی گئی ہے جسکا ڈھلاؤ 2 ہے اور یہ محدد $A(2,1)$ سے بھی گزر رہی ہے۔ جبکہ ایک اور نقطہ $P(x,y)$ بھی اس لکیر پر موجود ہے۔ نقطہ P اس لکیر پر موجود ہوگا صرف اور صرف اس صورت میں اگر لکیر AP کا ڈھلاؤ 2 ہوگا۔ لکیر AP کا کا ڈھلاؤ $\frac{y-1}{x-2}$ ۔ یہ ترکیب چونکہ 2 کے برابر ہے $\frac{y-1}{x-2} = 2$ جسکا نتیجہ یہ نکلتا ہے کہ $y - 1 = 2x - 4$ اور $y = 2x - 3$۔ عام طور پر لکیر کی مساوات معلوم کرتے ہیں جسکا ڈھلاؤ m ہو اور جو نقطے A سے گزرتی ہو جبکہ A کے محدد (x_1, y_1) ہوں شکل 1.10 میں یہ لکیر اور ایک نقطہ P دکھائے گئے ہیں جسکے محدد (x,y) ہیں۔ لکیر AP کا ڈھلاؤ $\frac{y-y_1}{x-x_1}$ ہے اور چونکہ ڈھلاؤ m کے برابر ہوتا ہے

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = m, \ y - y_1 = m(x - x_1)$$

□

ایک لکیر جو (x_1, y_1) سے گزرے اور جسکا ڈھلاؤ m ہو اسکی مساوات $y - y_1 = m(x - x_1)$ ہو گی۔ یہ بات ذہن نشین کر لیں کہ نقطہ A کے محدد (x_1, y_1) کی قیمت سے یہ مساوات درست ظابت ہوتی ہے۔

مثال 1.4: ایک لکیر کی مساوات معلوم کریں جسکا ڈھلاؤ -1 ہو جو نقطہ $(-2,3)$ سے گزرتی ہو۔ مساوات $y - y_1 = m(x - x_1)$ کو استعمال کرتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $y - 3 = -1(x - (-2))$, جو کہ $y - 3 = -x - 2$ یا $y = -x + 1$ ہے۔ مساوات کی درستگی کا تعین کرنے کے لیے محدد $(-2,3)$ کو مساوات کے دونوں اطراف استعمال کریں اگر مساوات کے دونوں اطراف کا جواب برابر ہے تو یہ نقطہ دراصل اسی لکیر پر ہوگا جسکی ہم نے مساوات معلوم کی ہے۔ □

مثال 1.5: ایک لکیر کی مساوات معلوم کریں جو کہ دو نقطوں کو جوڑنے سے بنی ہے، نقطوں کے محدد بالترتیب $(3,4)$, اور $(-1,2)$ ہیں۔ مساوات معلوم کرنے کے لیے ، پہلے آپ اس لکیر کا ڈھلاؤ معلوم کریں اور پھر آپ کلیہ $y - y_1 = m(x - x_1)$, کا استعمال کر سکتے ہیں۔ لکیر جو کہ نقطہ $(3,4)$, کو $(-1,2)$ سے جوڑتی ہے اسکا ڈھلاؤ ہوگا $\frac{2-4}{(-1)-3} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$ لہٰذہ نقطہ $(3,4)$, سے گزرنے والی لکیر جسکا ڈھلاؤ $\frac{1}{2}$ ہے اسکی مساوات $y - 4 = \frac{1}{2}(x - 3)$. ہو گی۔ اس مساوات کو سادہ شکل میں دیکھا جائے تو یہ کچھ ایسی

دکھے گی۔$2y = x + 5$ یا $2y - 8 = x - 3$۔ اس مساوات کی درستگی کو دیکھنے کے لیے اس میں دیگر فرضی نقطوں کے محدد بھی ڈال کے دیکھیں۔ □

1.6 لکیر کی مساوات کی پہچان

مثالوں 1.5.1 سے 1.5.3 تک سب کے جوابات مساوات $y = mx + c$, کی صورت میں لکھے جا سکتے ہیں جبکہ m اور c اعداد ہیں۔ ایسی کسی بھی مساوات کو سیدھی لکیر کی مساوات ثابت کرنا نہایت ہی آسان ہے۔ اگر $y = mx + c$, تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ $y - c = m(x + 0)$ اور

$$\frac{y-c}{x-0} \quad (x \neq 0)$$

یہ مساوات ہمیں بتاتی ہے کہ تمام نقطوں کے لیے کہ جنکے محدد (x, y) ہوں گے، وہ لکیر جو نقطہ $(0, c)$ کو جوڑے گی (x, y) سے، اسکا ڈھلاؤ m ہوگا۔ لب لباب یہ کہ (x, y) اس لکیر کا حصہ ہوگا جسکا ڈھلاؤ m ہوگا اور جو نقطہ $(0, c)$ سے گزرتی ہوگی۔ نقطہ $(0, c)$ محور-y پر موجود ہے۔ اس ہندسے c کو قطع وائے کہیں گے۔ قطع ایکس معلوم کرنے کے لیے مساوات میں $y = 0$ یہ ڈالیں، اور یوں آپکو ملے گا $x = -\frac{c}{m}$، لیکن یہ بات ذہن نشین کر لیں کہ آپ یہ تقسیم نہیں کر سکتے اگر $m = 0$ ہو۔ ایسی صورت حال میں یہ لکیر محور-x کے متوازی ہو جاتی ہے اور اسکا کوئی قطع ایکس نہیں ہوتا۔ جب ایسی صورت حال ہو کہ ڈھلاؤ کی قیمت صفر ہو جائے تو ایسی لکیر پر موجود تمام نقاط کے محدد $(c$, کچھ بھی$)$ کچھ ایسے ہوں گے۔لہٰذہ نقاط $\cdots, (5, 2), (-1, 2), (1, 2)$ سب ایک ہی سیدھی لکیر پر موجود ہیں جو کہ $(y = 2)$ ہے اور (شکل 1.11) میں دکھائی بھی گئی ہے۔ ایک خاص صورت اسمیں یہ بھی ہے کہ محور-x کی مساوات $y = 0$ ہے۔ ایسے ہی ایک سیدھی لکیر جو کہ محور-y کے متوازی ہے، اسکی مساوات $k = x$ ایسی ہوگی۔ اس لکیر پر موجود تمام نقاط کے محدد k کچھ ایسے ہوں گے۔ لہٰذہ یہ تمام نقاط $\cdots, (3, 4), (3, 2), (3, 0)$ ایک لکیر پر موجود ہیں اور وہ لکیر $x = 3$ ہے اور (شکل 1.12) میں یہی لکیر دکھائی گئی ہے۔ یہاں y محور کی اپنی مساوات $x = 0$ ہے۔ لکیر $x = k$ کا کوئی ڈھلاؤ نہیں ہے، دراصل اسکا ڈھلاؤ متعین نہیں کیا جا سکتا۔ اور اسکی مساوات $y = mx + c$ ایسے نہیں لکھی جا سکتی۔

1.7 مساوات $ax + by + c = 0$

فرض کریں کہ آپکے پاس ایک مساوات ہے $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$. یہ آسان ہے کہ اس مساوات کو 3 سے ضرب دیں اور یوں مساوات $3y = 2x + 4$ سادہ ہو جائے گی۔ اور اسکی ترتیب تھوڑی بدلیں تو مساوات کچھ ایسا روپ دھار لے گی، $2x - 3y + 4 = 0$۔ مساوات عام طور پر $ax + by + c = 0$ ایسی ہوتی ہے جسمیں a، b اور c مستقل ہیں۔ اس بات کا خیال رکھیں کہ مساوات $y = mx + c$ اور $ax + by + c = 0$ دونوں میں عدد c موجود ہے لیکن اس کا مطلب دونوں مساوات میں مختلف ہے۔ مساوات $y = mx + c$ میں c قطع وائے ہے لیکن مساوات $ax + by + c = 0$ میں ایسا کوئی معاملہ نہیں ہے۔ مساوات $ax + by + c = 0$ کا ڈھلاؤ معلوم کرنے کا ایک طریقہ یہ بھی ہے کہ مساوات کو $y = \cdots$ کی شکل میں لکھا جائے، آگے چل کے ہم اسکی کچھ مثالیں حل کریں گے۔

مثال 1.6: مساوات $2x + 3y - 4 = 0$ کا ڈھلاؤ معلوم کریں، مساوات کو اس $y = \cdots$ شکل میں لکھیں اور پھر اس اصول کو استعمال کریں کہ مساوات $(y = mx + c$ میں m ڈھلاؤ کو ظاہر کرتا ہے۔ مساوات $2x + 3y - 4 - 0$ میں آپ دیکھیں گے

کہ $3y = -2x + 4$ اور $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ لہٰذہ اس مساوات کا اگر اس مساوات $y = mx + c$ سے تقابل کیا جائے تو ہم اس نتیجے پر پہنچیں گے کہ ڈھلاؤ $-\frac{2}{3}$ ہے
$\square$

مثال 1.7: متوازی الاضلاع کی ایک طرف ایک سیدھی لکیر $3x - 4y - 7 = 0$ کے ساتھ موجود ہے ، نقطہ $(2,3)$ متوازی الاضلاع کا ایک کونہ ہے، دوسری طرف کی مساوات معلوم کریں۔ لکیر $3x - 4y - 7 = 0$ اور $y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$ ایک ہی ہیں لہٰذہ ہم کہہ سکتے ہیں کہ ڈھلاؤ $\frac{3}{4}$ ہے۔ لکیر جو کہ نقطہ $(2,3)$ سے گزر رہی ہے اور جسکا ڈھلاؤ $\frac{3}{4}$ ہے ، اسکی مساوات $y - 3 = \frac{3}{4}(x - 2)$، یا $3x - 4y + 6 = 0$ ہے
$\square$

1.8 دو لکیروں کا مشترک نقطہ

فرض کریں کہ آپکے سامنے دو لکیریں ہیں جنکی مساوات $2x - y = 4$ اور $3x + 2y = -1$ ہیں، آپ ان دونوں لکیروں کے مشترک نقطے کے محدد کیسے معلوم کریں گے؟ دراصل آپ کو ایک نقطے (x, y) کی تلاش ہے جو کہ دونوں لکیروں پر موجود ہو، لہٰذہ اس نقطے کے محدد ایسے ہونے چاہئیں کہ دونوں مساوات درست ثابت ہوں، اسی لیے آپکو ان دونوں مساوات کو ایک ساتھ حل کرنا ہوگا۔ ان دو مساوات سے ، اپ معلوم کر سکیں گے کہ $x = 1$ اور $y = -2$، لہٰذہ مشترک نقطہ $(1, -2)$ ہے۔ یہ طریقہ ہر سیدھی لکیر پر لاگو ہو سکتا ہے بشرطیکہ یہ متوازی نہ ہوں، مشترک نقطہ معلوم کرنے کے لیے لکیروں کی مساوات حل کریں، یہ طریقہ خموں میں مشترک نقطے معلوم کرنے کے لیے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔ سوال 1: دیکھیں کہ کیا دیے گۓ نقطے ، بتائ گۓ مساوات کی لکیر پر موجود ہیں یا نہیں؟

ا. $(1,2)$, $y = 5x - 3$
ب. $(3,-2)$, $y = 3x - 7$
ج. $(3,-4)$, $x^2 + y^2 = 25$
د. $(2,2)$, $3x^2 + y^2 = 40$
ہ. $\left(1, 1\frac{1}{2}\right)$, $y = \frac{x+2}{3x-1}$
و. $\left(5p, \frac{5}{p}\right.$, $y = \frac{5}{x}$
ز. $\left(p, (p-a)^2 + 1\right)$, $y = x^2 - 2x + 2$
ح. $\left(t^2, 2t\right)$, $y^2 = 4x$

سوال 2: بتائے گۓ نقطوں سے بنی اور درج ذیل ڈھلاؤ والی سیدہی لکیر کی مساوات معلوم کریں۔ آپکے جواب کسر کی صورت میں نہیں ہونا چاہئیے۔

ا. $(2,3), 5$
ب. $(1,2), -3$
ج. $(0,4), \frac{1}{2}$
د. $(-2,1), -\frac{3}{8}$
ہ. $(0,0), -3$
و. $(3,8), 0$
ز. $(-5,-1), -\frac{3}{4}$
ح. $(-3,0), \frac{1}{2}$
ط. $(-3,-1), \frac{3}{8}$
ي. $(3,4), -\frac{1}{2}$
يا. $(2,-1), -2$
يب. $(-2,-5), 3$

یج. $(0,-4), 7$ یہ. $(3,-2), -\frac{5}{8}$ یز. $(d,0), 7$ یط. $(0,c), 3$

ید. $(0,2), -1$ یو. $(3,0), -\frac{3}{5}$ یح. $(0,4), m$ ک. $(c,0),$

سوال 3: درج ذیل نقاط کو جوڑ کر بننے والی لکیروں کی مساوات معلوم کریں۔ آپکے جواب میں کسر موجود نا ہوں اور آپکا جواب $y = mx + c$ یا $ax + by + c = 0$ کی صورت میں ہونا چاہیئے۔

ا. $(1,4), (3,10)$

ب. $(4,5), (-2,-7)$

ج. $(3,2), (0,4)$

د. $(3,7), (3,12)$

ھ. $(10,-3), (-5,-12)$

و. $(3,-1), (3,-4,20)$

ز. $(2,-3), (11,-3)$

ح. $(2,0), (5,-1)$

ط. $(-4,2), (-1,-3)$

ي. $(-2,-1), (5,-3)$

یا. $(-3,4), (-3,9)$

یب. $(-1,0), (0,-1)$

یج. $(2,7), (3,10)$

ید. $(-5,4), (-2,-1)$

یہ. $(0,0), (5,-3)$

یو. $(0,0), (p,q)$

یز. $(p,q), (p+3, q-1)$

یح. $(p,-q), (p,q)$

یط. $(p,q), (p+2, q+2)$

ک. $(p,0), (0,q)$

سوال 4: درج ذیل لکیروں کا ڈھلاؤ معلوم کریں؛

ا. $2x + y = 7$

ب. $3x - 4y = 8$

ج. $5x + 2y = -3$

د. $y = 5$

ھ. $3x - 2y = -4$

و. $5x = 7$

ز. $x + y = -3$

ح. $y = 3(x+4)$

ط. $7 - x = 2y$

ي. $3(y-4) = 7x$

یا. $y = m(x-d)$

یب. $px + qy = pq$

سوال 5: ایک لکیر، جو کہ نقطہ $(-2,1)$ سے گزرتی ہے اور $y = \frac{1}{2}x - 3$ کے متوازی ہے، کی مساوات معلوم کریں۔

سوال 6: ایک لکیر کی مساوات معلوم کریں جو کہ $(4,-3)$ سے گزرتی ہے اور ایک دوسری لکیر $y + 2x = 7$ کے مساوی ہے۔

سوال 7: ایک لکیر جو کہ نقطہ $(1,2)$ سے گزر رہی ہے، یہ لکیر ایک دوسری لکیر کے متوازی ہے جو کہ نقاط $(3,-1)$ اور $(-5,2)$ سے مل کر بنی ہے۔

سوال 8: ایک لکیر کی مساوات معلوم کریں جو کہ نقطہ $(3,9)$ سے گزر رہی ہے اور مساوی ہے ایک لکیر کے جو نقاط $(-3,2)$ اور $(2,-3)$ سے مل کر بنی ہے۔

سوال 9: لکیر کی مساوات معلوم کریں جو کہ $(1,7)$ سے گزرتی ہے اور x-محور کے متوازی ہے

سوال 10: ایک لکر کی مساوات معلوم کریں جو کہ $(d,0)$ سے گزرتی ہے اور ایک دوسری لکیر $y = mx + c$ کے متوازی ہے۔

سوال 11: درج ذیل سیدھی لکیروں کی مساوات معلوم کریں۔

ا. $3x + 4y = 33,\ 2y = x - 2$

ب. $y = 3x + 1,\ y = 4x - 1$

ج. $2y = 7x,\ 3x - 2y = 1$

د. $y = 3x + 8,\ y = -2x - 7$

ھ. $x + 5y = 22,\ 3x + 2y = 14$

و. $2x + 7y = 47,\ 5x + 4y = 50$

ز. $2x + 3y = 7,\ 6x + 9y = 11$

ح. $3x + y = 5,\ x + 3y = -1$

ط. $y = 2x + 3,\ 4x - 2y = -6$

ي. $ax + by = c,\ y = 2ax$

یا. $y = mx + c,\ y = -mx + d$

یب. $ax - by = 1,\ y = x$

سوال 12: فرض کریں کہ p جسک محدد (p,q) ہیں اور یہ خم $(y = mx + c)$ کا ایک مستقل نقطہ ہے اور ایسے ہی ایک نقطہ Q ہے جسکے محدد (r,s) ہیں اور یہ بھی مساوات $y = mx + c$ کے خم کا ایک مستقل نقطہ ہے۔ یہ بات ثابت شدہ ہے کہ نقطوں p اور Q کے محدد سے مساوات $(y = mx + c)$ درست ٹھرتی ہے، ثابت کریں کہ خط PQ کا ڈھلاؤ m ہوگا نقطہ Q کی تمام حالتوں کے لیے۔

سوال 13: نقاط a , b اور c کی چند ایک قیمتوں کے لیے مساوات $ax + by + c = 0$ ایک سیدھی لکیر کی نہیں رہتی۔ ایسی چند قیمتیں معلوم کریں۔

1.9 عمودی لکیروں کا ڈھلاؤ

(حصہ 1.3) میں یہ بتایا گیا ہے کہ دو لکیریں متوازی ہوتی ہیں اگر انکے ڈھلاؤ برابر ہوں۔ لیکن اگر دو لکیریں عمودی ہوں تو انکے ڈھلاؤ کیسے ہوں گے۔ اگر ایک لکیر جسکا ڈھلاؤ مثبت ہو تو عمودی لکیر کا ڈھلاؤ منفی ہوگا، اور اسکا الٹ بھی درست ہوگا، لیکن آپ سے زیادہ بہتر اندازہ لگا سکتے ہیں (شکل 1.3) میں یہ دکھایا گیا ہے کہ خط PB کا ڈھلاؤ m ہو تو ایک ڈھلاؤ مثلث PAB بنائی جا سکتی ہے جسمیں PA کی لمبائی ایک اکائی ہے اور خط AB کی لمبائی m اکائیاں ہے۔ (شکل 1.14) میں ڈھلاؤ مثلث PAB کو گھمایا گیا ہے ایک قائمہ زاویہ سے اور اب مثلث $P'A'B'$ ہے کچھ یوں کہ خط $P'B'$ عمودی ہے خط PB پر۔ اس مثلث کا محدد-x $-m$ ہے جبکہ محدد-x 1 ہے، اور یوں؛

$$PB' \text{ ڈھلوان} = \frac{y \text{ قدم}}{x \text{ قدم}} = \frac{1}{-m} = -\frac{1}{m}$$

اور اسی لیے خط PB کے عمودی لکیر کا ڈھلاؤ $-\frac{1}{m}$ ہے۔ اور پس اگر دو عمودی لکیروں کا ڈھلاؤ بالترتیب m_1 اور m_2 ہو اور پھر $m_1m_2 = -1$ بھی ہو تو یہ سچ ہے کہ دونوں لکیروں کے ڈھلاؤ بالترتیب m_1 اور m_2 ہوں گے اور اگر $m_1m_2 = -1$ بھی ہو تو یہ دونوں لکیریں عمودی ہیں۔ اس بات کے ثبوت کے لیے آخر میں موجود مشق کا سوال 22 دیکھیں۔ دو لکیریں جن کا ڈھلاؤ بالترتیب m_1 اور m_2 ہو، یہ دونوں لکیریں عمودی ہوں گی اگر

$$m_1m_2 = -1, \quad m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

یہ بات ذہن نشین کر لیں کہ یہ خصوصیت بے کار ہو گی اگر لکیریں محور کے متوازی ہوں گی۔ لیکن آپ آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ ایک لکیر $x =$ مستقل ایک دوسری لکیر $y =$ مستقل کے عمودی ہی ہوگی۔

مثال 1.8: ثابت کریں کہ نقاط $(5,0)$. $(4,7)$, $(-1,2)$, $(0,5)$ مجموعی طور پر ایک رومبس بناتے ہیں۔ آپ اس مسئلے کو کئی طریقوں سے حل کر سکتے ہیں، اس حل میں ہم نے ثابت کیا کہ یہ نقاط ایک متوازی الاضلاع چکل بنا رہے ہیں اور یہ کہ اس کے وتر عمودی ہیں تو یہ ایک رومبس کہلائے گی۔ وتر کے درمیانی نقاط $\left(\frac{1}{2}(0+4), \frac{1}{2}(-5+7)\right)$ اور $(2,1)$ ہیں اور چونکہ یہ دونوں ایک ہی نقطہ ہیں اور بنائی گئی شکل ایک متوازی الاضلاع شکل ہے۔ اب اگر ڈھلاؤ کو دیکھا جائے تو $\frac{7-(-5)}{4-0} = \frac{12}{4} = 3$ اور $\frac{0-2}{5-(-1)} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$ ہیں اور چونکہ ڈھلاؤ کا مضرب -1 ہے اسی لیے وتر عمودی ہیں اور یوں ثابت ہوا کہ یہ نقاط مل کر ایک رومبس کو جنم دیتے ہیں۔ □

مثال 1.9: عمودی لکیر کی بنیاد کے محدد معلوم کریں جبکہ $A(-2,-4)$ جڑا ہوا ہے نقاط $B(0,2)$ اور $C(-1,4)$ کے ساتھ۔ لکیر کی مدد سے۔ سب سے پہلے ایک شکل بنائیں جیسے کہ (شکل 1.15) ہے اس پر پیمانے کی ضرورت نہیں ہے۔ عمودی لکیر کی بنیاد دراصل وہ مشترک نقطہ P ہے جو کہ لکیر BC پر موجود ہے اور ساتھ ہی ساتھ A سے گزرنی والی عمودی لکیر BC پر بھی موجود ہے۔ سب سے پہلے خط BC کا ڈھلاؤ اور اسکی مساوات معلوم کریں۔ □

خط BC کا ڈھلاؤ $\frac{4-2}{-1-0} = \frac{2}{-1} = -2$ ہے۔ خط BC کی مساوات $y-2 = -2(x-0)$, ہے جو کہ سادہ ہو کر $2x + y = 2$. ایسی صورت اختیار کر لے گی۔ لکیر جو کہ A سے گزرتی ہے اور خط BC کے عمودی ہے اسکا ڈھلاؤ $-\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$

ہے۔ اس لکیر کی مساوات

$$y-(-4)=\frac{1}{2}(x-(-2)), \quad x-2y=6$$

یا $x-2y=6$ ہے۔ یہ لکیریں نقطہ P پر ملتی ہیں جن کے محدد مساوات $2x+y=2$ اور $x-2y=6$ کو درست ثابت کرتے ہیں۔ اس نقطے کے محدد $(2,-2)$ ہیں سوال 1: ہر حصے میں خط کا ڈھلاؤ معلوم کریں جو کہ ایک دوسری لکیر کے عمودی ہے جسکا ڈھلاؤ دیا گیا ہے۔

ا. 2 ج. $\frac{3}{4}$ ھ. -1 ز. $-\frac{1}{m}$ ط. $\frac{p}{q}$ یا. $-m$

ب. -3 د. $-\frac{5}{6}$ و. $1\frac{3}{4}$ ح. m ي. 0 یب. $\frac{a}{b-c}$

سوال 2: ہر حصے میں خط کی مساوات معلوم کریں جو کہ بتائی گئی لکیروں کے عمودی ہیں۔ آپکا جواب کسر کی صورت میں نہیں ہونا چاہئیے۔

ا. $(2,3), y=4x+3$ ھ. $(-1,4), 2x+3y=8$ ط. $(0,0), y=mx+c$

ب. $(-3,-1), y=1\frac{1}{2}x+3$ و. $(4,3), 3x-5y=8$ ي. $(a,b), y=mx+c$

ج. $(2,-5), y=-5x-2$ ز. $(5,-3), 2x=3$ یا. $(c,d), ny-x=p$

د. $(7,-4), y=2\frac{1}{2}$ ح. $(0,3), y=2x-1$ یب. $(-1,-2), ax+by=c$

سوال 3: ایک خط کی مساوات معلوم کریں جو کہ نقطہ $(-2,5)$ سے گزرتی ہے اور لکیر $y=3x+1$ کے عمودی ہے، ان دونوں لکیروں کا مشترک نقطہ بھی معلوم کریں۔

سوال 4: ایک خط کی مساوات معلوم کریں جو کہ نقطہ $(1,1)$ سے گزرتی ہے اور یہ خط $2x-3y=12$ کے عمودی ہے، ان دونوں لکیروں کا مشترک نقطہ بھی معلوم کریں۔

سوال 5: ایک لکیر جو مثلث کے ایک کونے سے گزرے اور مخالف سمت کے عمودی ہو، اس لکیر کو اونچائی کا نام دیتے ہیں۔ اس لکیر کی مساوات معلوم کریں جو کہ مثلث ABC کے کونے A سے گزرتی ہے نقاط کے محدد بالترتیب $A(2,3)$, $B(1,-7)$, $C(4,-1)$. ہوں گے۔

سوال 6: نقاط $P(2,5)$, $Q(12,5)$, $R(8,-7)$ مل کے ایک مثلث بناتے ہیں

ا. اونچائی کی مساوات تلاش کریں جو کہ نقطہ R اور پھر نقطہ Q سے گزرے۔

ب. ان دونوں اونچائیوں کا مشترک نقطہ معلوم کریں

ج. ثابت کریں کہ نقطہ P سے گزرنے والی اونچائی اس مشترک نقطے سے بھی گزرتی ہے۔

سوال 7: ثابت کریں کہ نقاط $(5,9)$,$(1,3)$,$(-2,5)$ سے بننے والی ایک مثلث قائمہ زاویہ مثلث ہے۔

سوال 8: لکیروں $2x + y = 3$ اور $3x + 5y - 1 = 0$ کا مشترک نقطہ معلوم کریں

سوال 9: نقاط $A(-1,3)$, $B(5,7)$, $C(0,8)$ کو ملانے سے ایک مثلث بنتی ہے۔

1. ثابت کریں کہ زاویہ ACB ایک قائمہ زاویہ ہے۔
2. اس نقطے کے محدد معلوم کریں جہاں B سے آنے والی خط AC کے متوازی لکیر محور-x کو کاٹتی ہے۔

سوال 10: ایک مربع شکل ہے جسکے دو کونے $A(7,2)$, $C(1,4)$ ہیں

ا. وتر BD کی لمبائی معلوم کریں

ب. نقاط B اور D کے محدد معلوم کریں

سوال 11: نقاط $A(-3,2)$, $B(4,3)$, $C(9,-2)$, $D(2,-3)$ کو ملانے سے ایک چوکور شکل بنتی ہے۔

ا. ثابت کریں کہ چاروں سمتوں کی لمبائی برابر ہے۔

ب. ثابت کریں کہ شکل $ABCD$ ایک مربع نہیں ہے۔

سوال 12: P ایک نقطہ ہے جبکہ I_1 ایک لکیر ہے جسکی مساوات $3x + 4y = 16$ ہے۔

ا. ایک لکیر I_2 کی مساوات معلوم کریں جو کہ نقطہ P سے گزرتی ہے اور لکیر I_1 کے عمودی ہو۔

ب. دونوں لکیروں کا مشترک نقطہ معلوم کریں

ج. نقطے P سے خط I_1 کا عمودی فاصلہ معلوم کریں

سوال 13: ثابت کریں کہ مثلث جس کے کونے $(11,8)$,$(3,20)$,$(-2,8)$ ہیں ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔ اسکا حدود اربعہ معلوم کریں

سوال 14: تین سیدھی لکیریں $y = x$, $7y = 2x$, $4x + y = 60$ ایک مثلث بناتی ہیں۔ اسکے کونوں کے محدد معلوم کریں۔

سوال 15: ایک لکیر کی مساوات معلوم کریں جو کہ نقطہ $(1,3)$ سے گزرتی ہے اور یہ لکیر متوازی ہے ایک دوسری لکیر کے جس کی مساوات $2x + 7y = 5.$ ہے۔ یاد رکھیں آپکا جواب کچھ اس $ax + by = c$ صورت میں ہونا چاہیئے۔

سوال 16: نقاط $(-4,3)$,$(2,-5)$ کو ملانے سے بننے والی لکیر کی عمودی دوئزک کی مساوات معلوم کریں۔

سوال 17: نقاط جن کے محدد $A(1,2)$, $B(3,5)$, $C(6,6)$, ہیں اور نقطہ D مل کر ایک متوازی الاضلاع شکل بناتے ہیں۔ خط AC کے درمیانی نقطے کے محدد معلوم کریں، اور اس جواب کو استعمال کرتے ہوئے نقطہ D کے محدد معلوم کریں۔

سوال 18: ایک خط $y = 3x$ پے ایک نقطہ $A(0,3)$ سے ایک عمودی لکیر پر نقطہ P عمودی خط کا بنیادی خط ہے۔

ا. خط AP کی مساوات معلوم کریں۔

ب. نقطہ P کے محدد معلوم کریں

ج. نقطہ A کا خط $y = 3x$ سے عمودی فاصلہ معلوم کریں۔

سوال 19: وہ نقاط جو ایک ہی لکیر پر موجود ہوں انہیں ہم ہم پلہ نقاط کہتے ہیں، ثابت کریں کہ نقاط $(-5, -11)$, $(4, 7)$, $(-1, 3)$ ہم پلہ ہیں۔

سوال 20: سیدھی لکیر کی مساوات معلوم کریں جو کہ نقاط $(-2, 2)$, $(3, -1)$ سے گزرتی ہے، اور اپنا جواب $ax + by + c = 0$ کی صورت میں لکھیں۔ محور-x اور اس لکیر کا مشترک نقطہ معلوم کریں۔

سوال 21: نقاط A اور B کے محدد بالترتیب $(3, 2)$ اور $(4, -5)$ ہیں، خط AB کے درمیانی نقطے کے محدد معلوم کریں نیز خط AB کا ڈھلاو بھی معلوم کریں۔ اور خط AB کے عمودی دوئزی کی مساوات بھی معلوم کریں، آپکا جواب $ax + by + c = 0$ کی صورت میں ہونا چاہئیے جسمیں a b اور c اعداد صحیح ہیں۔

سوال 22: خم $y = 1 + \frac{1}{2+x}$ محور-x کو نقطہ A پے کاٹتا ہے جبکہ محور-y کو نقطہ B پے کاٹتا ہے۔

ا. نقاط A اور B کے محدد معلوم کریں

ب. خط AB کی مساوات معلوم کریں

ج. خط AB اور مساوات $3y = 4x$ کی لکیر کا مشترک نقطہ معلوم کریں۔

سوال 23: ایک سیدھی لکیر P ایک نقطے $(10, 1)$ سے گزرتی ہے اور یہ لکیر عمودی ہے ایک دوسری لکیر r کے جسکی مساوات $2x + y = 1$ ہے۔ آپ لکیر P کی مساوات معلوم کریں۔ دونوں لکیروں کا مشترک نقطہ بھی معلوم کریں جبکہ نقطے $(10, 1)$ کا لکیر r سے عمودی فاصلہ بھی معلوم کریں۔

سوال 24: حساب کتاب سے ثابت کریں کہ نقاط $P(0, 7)$, $Q(6, 5)$, $R(5, 2)$, $S(-1, 4)$ ایک مستطیل بناتے ہیں

سوال 25: لکیر $3x - 4y = 8$ محور-x کو نقطہ A پے کاٹتی ہے، نقطہ C کے محدد $(-2, 9)$. ہیں، نقطہ C سے گزرنے والی لکیر ایک دوسری لکیر $3x - 4y = 8$ پر عمودی ہے۔ مثلث ABC کا حدود اربعہ معلوم کریں۔

سوال 26: نقاط $A(-3, -4)$, $C(5, 4)$ ایک رومبس $ABCD$ کے وتر کے انتہائی نقاط ہیں

ا. وتر BD کی لمبائی معلوم کریں

ب. اگر یہ مان لیا جائے کہ خط BC کا ڈھلاؤ $\frac{5}{3}$ ہے تو آپ نقاط B اور D کے محدد معلوم کریں

سوال 27: وسطانیہ کی مساوات معلوم کریں اگر مثلث کے کونے $(4, 4)$, $(6, 0)$, $(0, 2)$ ہیں یہ بھی ثابت کریں کہ تمام وسطانیے ایک ہی نقطے سے گزرتے ہیں۔

سوال 28: دو لکیروں کی مساوات بالترتیب $y = m_1x + c_1$ اور $y = m_2x + C$ ہیں جبکہ $m_1m_2 = -1$. ثابت کریں کہ لکیریں عمودی ہیں۔

باب 2

غیر معقول اور طاقتیں

اس باب کا پہلا حصہ مربع اور مکعب جذر والی تراکیب کے بارے میں اور دوسرا حصہ طاقتی بیانیوں کے بارے میں ہے۔ اس کو مکمل کرنے کے بعد آپ کو اس قابل ہو جانا چاہیے کہ۔

- مربع، مکعب اور دیگر جذروں والی تراکیب کو سادہ بنا سکیں
- طاقت کے قوانین جانتے ہوں
- منفی، صفر، اور کسری طاقتوں کا مطلب جانتے ہوں
- طاقت کی حامل تراکیب کو سادہ کر سکیں

2.1 اعداد کی اقسام

آغاز میں اعداد فقط گنتی کے لیے استعمال ہوتے تھے اور $1, 2, 3, \ldots$ ہماری اس ضرورت کے لیے کافی تھے۔ یہ طبعی اعداد یا مثبت صحیح عدد کہلاتے ہیں۔

آہستہ آہستہ ہمیں معلوم ہوا کہ اعداد پیمائش اور تجارتی مقاصد کے لیے بھی ضروری ہیں، اور اس کے لیے ہمیں کسروں کی ضرورت بھی پڑنے لگی۔ صحیح عدد اور کسروں کو ملا کر منطقی اعداد بنائے گئے۔ یہ وہ اعداد ہیں کہ جنھیں $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔ جب کہ p اور q دونوں صحیح اعداد ہیں اور q صفر نہیں ہو گا۔ یونانی ریاضی دانوں کی بے شمار شاندار دریافتوں میں سے ایک دریافت یہ بھی تھی کہ ایسے اعداد موجود ہیں جنھیں اس ہیئت میں نہیں لکھا جا سکتا۔ ایسے اعداد کو غیر منطقی اعداد کہا جاتا ہے۔ پہلا ایسا عدد جو دریافت کیا گیا $\sqrt{2}$ تھا، جو فیثاغورس کے قانون کے مطابق

ایک ایسے مربع کے وتر کی لمبائی بنتی ہے جس کی ہر طرف کی لمبائی 1 ہو۔ یونانیوں نے جس دلیل سے ثابت کیا کہ $\sqrt{2}$ کو کسری صورت میں نہیں لکھا جا سکتا، اسی دلیل سے یہ بھی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ کوئی بھی جزر، مربع، مکعب یا کوئی بھی، یا تو صحیح عدد ہو گی یا غیر منطقی عدد۔ اب ہم بہت سے غیر منطقی اعداد جان چکے ہیں جن میں سب سے مشہور π ہے۔

منطقی اور غیر منطقی اعداد مل کر حقیقی اعداد بناتے ہیں۔ اعداد صحیح، منطقی، غیر منطقی اور حقیقی اعداد مثبت، منفی یا صفر ہو سکتے ہیں۔

جب کسی منطقی عدد کو اعشاریہ کی صورت میں لکھا جائے تو یا تو اعشاریے کے ایک درجے تک رک جاتے ہیں یا ہندسوں کی ایک مخصوص وضع یا ترتیب میں بار باار دہرایا جانے لگتا ہے۔ مثال کے طور پر۔

$$\frac{7}{10} = 0.7, \quad \frac{7}{11} = 0.6363\ldots, \quad \frac{7}{12} = 0.5833\ldots, \quad \frac{7}{13} = 0.53846153846153\ldots$$

$$\frac{7}{14} = 0.5, \quad \frac{7}{15} = 0.466\ldots, \quad \frac{7}{16} = 0.4375, \quad \frac{7}{17} = 0.41176470588235294117 6\ldots$$

اس کا معکوس بھی درست ہے، یعنی اگر ایک اعشاری عدد رک جائے یا محدود بار دہرایا جائے تو وہ منطقی عدد کہلائے گا۔ لہٰذا اگر ایک غیر منطقی عدد کو اعشاری صورت میں لکھا جائے تو آپ جتنا مرضی پھیلا لیں، اس کے ہندسوں کی ترتیب کبھی دہرائی نہیں جائے گی۔

2.2 نامعقولیے اور ان کی خصوصیات

آج سے پہلے جب ہم $\sqrt{2}$ $\sqrt{8}$ $\sqrt{12}$ یا ایسی کسی ترکیب کو دیکھتے تھے تو ہم کیلکولیٹر کی مدد سے اسے اعشاری صورت میں بدل کر لکھ لیا کرتے تھے۔ مثلاً کچھ اس طرح

$\sqrt{2} = 1.414\ldots$ یا $\sqrt{2} = 1.414$ تین اعشاری ہندسوں تک درست یا $\sqrt{2} \approx 1.414$ لیکن $\sqrt{2} = 1.414$ خود یہ ترکیب کیوں درست نہیں ہے؟ $\sqrt{2}\sqrt[3]{9}$ ایسی تراکیب کو نامعقولیہ کہا جاتا ہے۔ اس جزو میں ہم انھی نا معقولیوں سے حساب کرنا سیکھیں گے۔ آپ کو یاد رکھنا ہو گا کہ $\sqrt{x}$ ہمیشہ x کی مثبت مربع جذر(یا $x = 0$ ہونے کی صورت میں صفر) کے معنوں میں لکھاجاتا ہے۔ نامعقولیوں کی اہم خاصیتیں، جو ہم بار بار استعمال کریں گے، یہ ہیں:

$\sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$ اور $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $(\sqrt{x} \times \sqrt{y}) \times (\sqrt{x} \times \sqrt{y}) = (\sqrt{x} \times \sqrt{x}) \times (\sqrt{y} \times \sqrt{y}) = x \times y = xy$ ہے اور چونکہ $\sqrt{x} \times \sqrt{y}$ مثبت ہے، لہٰذا یہ xy کا جزر ہے۔ اسی طرح $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$ ہے۔ اور اسی دلیل سے ہم سمجھ سکتے ہیں کہ $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$۔

درج ذیل مثالیں ان خصوصیات کو سمجھنے میں مدد دے سکتی ہیں۔

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}; \quad \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3};$$
$$\sqrt{18} \times \sqrt{2} = \sqrt{18 \times 2} = \sqrt{36} = 6; \quad \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3.$$

اس حساب کو اپنے کیلکولیٹر سے دوبارہ کر کے دیکھنا شاید آپ کے یقین میں اضافے کا باعث ہو۔

مثال 2.1: سادہ کریں (ا) $\sqrt{28} + \sqrt{63}$ (ب) $\sqrt{5} \times \sqrt{10}$ ان کا حل متبادل طریقے سے بھی نکالا جا سکتا ہے، جیسے جزو ب کے لیے نکالا گیا ہے۔ (ا)

$$\sqrt{28} + \sqrt{63} = (\sqrt{4} \times \sqrt{7}) + (\sqrt{9} \times \sqrt{7}) = 2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = 5\sqrt{7}$$

(ب) پہلا طریقہ $\sqrt{5} \times \sqrt{10} = \sqrt{5 \times 10} = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$ دوسرا طریقہ $\sqrt{5} \times \sqrt{10} = \sqrt{5} \times (\sqrt{5} \times \sqrt{2}) = (\sqrt{5} \times \sqrt{5}) \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ بعض اوقات کسر کے نسب نما سے نا معقولیوں کو ہٹا دینا مفید ہوتا ہے جیسے $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کے نسب نما سے نا معقولیہ ہٹانے کے لیے ہم اوپر نیچے دونوں کو $\sqrt{2}$ سے ضرب دے سکتے ہیں۔ $\frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ □

کچھ نتائج جو اکثر ہماری مدد کریں گے۔ $\sqrt{x} = \frac{x}{\sqrt{x}}$ اور اسی کا بالعکس $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$ غیر معقول کو نسب نما سے ہٹا دینا نسب نما کو معقول بنانا کہلاتا ہے۔

مثال 2.2: درج ذیل ترکیب میں نسب نما کو معقول بنائیں۔

(ا) $\frac{6}{\sqrt{2}}$

(ب) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$

حل: (ا) $\frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{3 \times 2}{\sqrt{2}} = 3 \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

(ب) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{3 \times \sqrt{2}}{\sqrt{5} \times \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

مربع جذر کے لیے استعمال ہونے والے قوانین ہی مکعب جذر اور اس سے بالائی جذروں کے لیے استعمال ہوتے ہیں۔ □

مثال 2.3: شکل 2.1 میں ایک عمارت کی چھت کا قطع عمودی کو ایک قائم مثلث ABC کی صورت میں دکھایا گیا ہے۔ جس میں $AB = 15\,\text{m}$ ہے۔ چھت کی بلندی BD $10m$ ہے۔ x اور y معلوم کریں۔ ہم مثلث ABD سے شروع کرتے ہیں۔ فیثا غورس کے قانون کے مطابق ہم جانتے ہیں کہ $z^2 + 10^2 = 15^2$ لہٰذا $z^2 = 225 - 100 = 125$ ہو گا۔

$$z = \sqrt{125} = \sqrt{25 \times 5} = 5\sqrt{5}$$

توجہ کیجیے کہ مثلث ABC اور ABD مماثل ہیں۔ اس مماثلت کو بہتر طور پر سمجھنے کے لیے ہم شکل 2.2 میں ABD کو الٹا کر دکھاتے ہیں۔ اب ABC اور ABD دونوں مثلثوں کی طرفیں ایک ہی تناسب میں ہوں گی۔ لہٰذا $\frac{15}{z} = \frac{y}{10} = \frac{x}{15}$

اور جیسا کہ ہم جانتے ہیں $\frac{3\sqrt{5}}{5} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{15}{5\sqrt{5}} = \frac{15}{z}$ ۔ $x = 15 \times \frac{3\sqrt{5}}{5} = 9\sqrt{5}$

$$y = 10 \times \frac{3\sqrt{5}}{5} = 6\sqrt{5}$$

آپ فیثاغورس کے قانون سے مثلث ABC میں $x^2 = 15^2 + y^2$ کی تصدیق کر سکتے ہیں۔ □

سوال 1: کیلکولیٹر استعمال کیے بغیر ان تراکیب کو سادہ کریں۔ .

1. $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$
2. $\sqrt{10} \times \sqrt{10}$
3. $\sqrt{16} \times \sqrt{10}$
4. $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$
5. $\sqrt{32} \times \sqrt{2}$
6. $\sqrt{3} \times \sqrt{12}$
7. $5\sqrt{3} \times \sqrt{3}$
8. $2\sqrt{5} \times 3\sqrt{5}$
9. $3\sqrt{6} \times 4\sqrt{6}$
10. $2\sqrt{20} \times 3\sqrt{5}$
11. $(2\sqrt{7})^2$
12. $(3\sqrt{3})^2$
13. $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5}$
14. $(2\sqrt[4]{3})^4$
15. $(2\sqrt[3]{2})^6$
16. $4\sqrt{125} \times 4\sqrt{5}$

سوال 2: درج ذیل تراکیب کو کیلکولیٹر استعمال کیے بغیر سادہ کریں۔ .

1. $\sqrt{18}$
2. $\sqrt{20}$
3. $\sqrt{24}$
4. $\sqrt{32}$
5. $\sqrt{40}$
6. $\sqrt{45}$
7. $\sqrt{48}$
8. $\sqrt{50}$
9. $\sqrt{54}$
10. $\sqrt{72}$
11. $\sqrt{175}$
12. $\sqrt{675}$

سوال 3: درج ذیل تراکیب کو کیلکولیٹر استعمال کیے بغیر سادہ کریں۔

.

1. $\sqrt{8}+\sqrt{18}$
2. $\sqrt{3}+\sqrt{12}$
3. $\sqrt{20}-\sqrt{5}$
4. $\sqrt{32}-\sqrt{8}$
5. $\sqrt{50}-\sqrt{18}-\sqrt{8}$
6. $\sqrt{27}+\sqrt{27}$
7. $\sqrt{99}+\sqrt{44}+\sqrt{11}$
8. $8\sqrt{2}+2\sqrt{8}$
9. $2\sqrt{20}+3\sqrt{45}$
10. $\sqrt{52}-\sqrt{13}$
11. $20\sqrt{5}-5\sqrt{20}$
12. $\sqrt{48}+\sqrt{24}-\sqrt{75}+\sqrt{96}$

سوال 4: درج ذیل تراکیب کو کیلکولیٹر استعمال کیے بغیر سادہ کریں۔

.

ا. $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ ب. $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$ ج. $\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}}$ د. $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$ ھ. $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$ و. $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}$ ز. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{48}}$ ح. $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{200}}$

سوال 5: درج ذیل تراکیب کو کیلکولیٹر استعمال کیے بغیر سادہ کریں

.

ا. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ب. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ج. $\frac{4}{\sqrt{2}}$ د. $\frac{6}{\sqrt{6}}$

ھ. $\frac{11}{\sqrt{11}}$ و. $\frac{2}{\sqrt{8}}$ ز. $\frac{12}{\sqrt{3}}$ ح. $\frac{14}{\sqrt{7}}$

ط. $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$ ي. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ يا. $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

یب. $\frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$ یج. $\frac{7\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$ ید. $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$

یہ. $\frac{9\sqrt{12}}{2\sqrt{18}}$ یو. $\frac{2\sqrt{18}}{9\sqrt{12}}$

سوال 6: درج ذیل تراکیب سادہ بنائیں اور ہر ایک کا جواب $k\sqrt{3}$ کی شکل میں لکھیں۔

.

ا. $\sqrt{75}+\sqrt{12}$

ب. $\sqrt{6}+\sqrt{3}(4-2\sqrt{3})$

ج. $\frac{12}{\sqrt{3}}-\sqrt{27}$

د. $\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

ہ. $\sqrt{2}\times\sqrt{8}\times\sqrt{27}$

و. $(3-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})-\sqrt{3}\times\sqrt{27}$

ز. $AB=4\sqrt{5}cm$

ح. $BC=\sqrt{10}$

سوال 7: $ABCD$ ایک چوکور ہے، جس میں $AB=4\sqrt{5}cm$ اور $BC=\sqrt{10}$۔ درج ذیل سوال کا جواب سادہ غیر معقول جذر کی شکل میں لکھیں۔ (ا) چوکور کا رقبہ معلوم کریں (ب) وتر AC کی لمبائی معلوم کریں

سوال 8: درج ذیل تراکیب سادہ بنائیں اور ہر ایک کا جواب $k\sqrt{2}$ کی شکل میں لکھیں۔

.

1. $x\sqrt{2}=10$
2. $2y\sqrt{2}-3=\frac{5y}{\sqrt{2}}+1$
3. $z\sqrt{32}-16=z\sqrt{8}-4$

سوال 9: درج ذیل تراکیب کو $k\sqrt[3]{3}$ کی شکل میں لکھیں۔

.

1. $\sqrt[3]{24}$
2. $\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{3}$
3. $(\sqrt[3]{3})^4$
4. $\sqrt[3]{3000}-\sqrt[3]{375}$

سوال 10: درج ذیل قائم مثلثوں کی تیسری نا معلوم طرف معلوم کریں۔ اپنے جواب کو سادہ غیر معقول کی شکل میں لکھیں

سوال 11: آپ کو بتایا جائے کہ اعشاریے کے بارہ ہندسوں تک لکھیے، مثلاً $\sqrt{26}=5.099\,019\,513\,593$

1. $\sqrt{104}$ کی ایسی قیمت معلوم کریں جو دس اعشاری ہندوس تک درست ہو۔

2. $\sqrt{650}$ کی ایسی قیمت معلوم کریں جو دس اعشاری ہندسوں تک درست ہو۔

3. $\frac{13}{\sqrt{26}}$ کی ایسی قیمت معلوم کریں جو دس اعشاری ہندوس تک درست ہو۔

سوال 12: دی گئی بیک وقت مساواتوں کو حل کریں، $7x-(3\sqrt{5})y=9\sqrt{5}$ اور $(2\sqrt{5})x+y=34$

سوال 13: درج ذیل کو سادہ بنائیں

ا. $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)$

ب. $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$

ج. $(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})$

د. $(2\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}-1)$

ھ. $(4\sqrt{3}-2)(4\sqrt{3}+2)$

و. $(10+\sqrt{5})(10-\sqrt{5})$

ز. $(4\sqrt{7}-5)(4\sqrt{7}+5)$

ح. $(2\sqrt{6}-3\sqrt{3})(2\sqrt{6}+3\sqrt{3})$

سوال 14: سوال نمبر 13 میں ہر جواب ایک عدد صحیح ، نقل کر کے درج ذیل کو مکمل کریں

ا. $(\sqrt{3}-1)(\quad)=2$

ب. $(\sqrt{5}+1)(\quad)=4$

ج. $(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\quad)=4$

د. $(2\sqrt{7}+\sqrt{3})(\quad)=25$

ھ. $(\sqrt{11}+\sqrt{10})(\quad)=1$

و. $(3\sqrt{5}-2\sqrt{6})(\quad)=21$

سوال نمبر 15اور16 میں دی گئی مثالیں ہمیں نسب نما کو منطقی بنانے کے طریقے کی طرف متوجہ کرتی ہیں، جو سوال نمبر 5 کی ترکیبوں سے زیادہ پیچیدہ ہوں۔ سوال 15: (ا) وضاحت کریں $\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{1}{\sqrt{3}-1}\times\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$ اور ثابت کریں $\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

(ب) ثابت کریں $\frac{1}{2\sqrt{3}+3}=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5}$

سوال 16: نسب نما کو معقول بنا کر درج ذیل کسروں کو سادہ کریں

ا. $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ ب. $\frac{1}{3\sqrt{5}-5}$ ج. $\frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{6}+3\sqrt{2}}$

2.3 طاقتوں کا استعمال

سولہویں صدی میں جب ریاضی کی کتب چھپنے لگیں، تو ریاضی دان مکعب اور مربع مساواتوں کا حل ڈھونڈ رہے تھے۔ انھیں لگا کہ xxx اور $xxxx$ کو x^3 اور x^4 لکھنا زیادہ آسان اور مفید رہے گا۔

طاقت نویسی کا آغاز تو اس انداز میں ہوا تھا لیکن وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ اندازہ ہوا کہ یہ صرف مختصر نویسی ہی کا ایک انداز نہیں تھا، بلکہ اس انداز سے لکھنا مستقبل میں اہم دریافتوں کا باعث بنا اور ریاضی کی موجودہ شکل اس انداز کے بغیر مبہم اور ناقابل استفہام ہوتی۔ آپ نے اس انداز بیان کی سادہ مثالیں تو استعمال کی ہی ہوں گی۔ عام طور پہ علامت a^m ، a کو m بار ضرب دینے کے لیے لکھی جاتی ہے, اس کو یوں سمجھا جا سکتا ہے۔

$$a^m = \overbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}^{\text{ان کی تعداد } m \text{ ہے}}$$

اس میں a کو اساس کہا جاتا ہے اور m کو طاقت کہا جاتا ہے۔ یہاں توجہ دلانا ضروری ہے کہ a کسی بھی قسم کا عدد ہو سکتا ہے لیکن m لازمی طور پر مثبت عدد صحیح ہی ہو گا۔ اسکو عام طور پہ a کی طاقت m کہا جاتا ہے۔ طاقتی بیانیوں میں لکھی جانے والی تراکیب کو درج ذیل سادہ قوانین سے آسان بنایا جا سکتا ہے۔ ان میں سے ایک ضرب کا قانون ہے۔

$$a^m \times a^n = \overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{\text{تعداد } m} \times \overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{\text{تعداد } n} = \overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{\text{تعداد } m+n} = a^{m+n}$$

یہ بہت سی جگہوں پہ استعمال ہوتا ہے، مثلاً ایسے مکعب کا حجم معلوم کرنے کے لیے جس کی ہر طرف کی لمبائی a ہو۔ ہم جانتے ہیں کہ اساس کے رقبے کو بلندی سے ضرب دے کر حجم دریافت کیا جاتا ہے۔ $= a^2 \times a = a2 \times a^1 = a^{2+1} = a^3$

اس سے ملتا جلتا تقسیم کا قانون

$$\begin{aligned} a^m \div a^n &= \overbrace{(a \times a \times \ldots \times a)}^{\text{تعداد } m} \div \overbrace{(a \times a \times \ldots \times a)}^{\text{تعداد } n} \\ &= \overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{\text{تعداد } m-n} \\ &= a^{m-n} \end{aligned}$$

اسی طرح طاقت پہ طاقت کا قانون ہے

$$
\begin{aligned}
(a^m)^n &= \overbrace{\overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{\text{تعداد } m} \times \overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{\text{تعداد } m} \times \ldots \overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{\text{تعداد } m}}^{\text{تعداد } n} \\
&= \overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{\text{تعداد } m \times n} = a^{m \times n}
\end{aligned}
$$

ایک اور قانون جو جز کا قانون ہے کہ جس میں دو اساسیں اور ایک طاقت ہوتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
(a \times b)^m &= \overbrace{(a \times b) \times (a \times b) \times \ldots \times (a \times b)}^{\text{تعداد } m} \\
&= \overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{\text{تعداد } m} \times \overbrace{b \times b \times \ldots \times b}^{\text{تعداد } m} \\
&= a^m \times b^m
\end{aligned}
$$

ان قوانین کو بیان کرنے کے لیے ضرب کی علامت استعمال کی گئی ہے، لیکن الجبرا کے دیگر حصوں میں اگر غلطی کی گنجائش نہ ہو تو یہ ہٹا دی جاتی ہے۔ اسے مکمل کرنے کے لیے یہاں یہ قوانین دوبارہ دیے جا رہے ہیں۔ ضرب کا قانون $a^m \times a^n = a^{m+n}$ تقسیم کا قانون $a^m \div a^n = am - n$ طاقت پہ طاقت کا قانون $(a^m)^n = a^{m \times n}$ جز کا قانون $(a \times b)^m = a^m \times b^m$

مثال 2.4: دی گئی ترکیب کو سادہ بنائیں۔ $(2a^2b)^3 \div (4a^4b)$

حل:

$$
\begin{aligned}
(2a^2b)^3 \div (4a^4b) &= (2^3(a^2)^3b^3) \div (4a^4b) \\
&= (8a^{2\times 3}b^3) \div (4a^4b) \\
&= (8 \div 4) \times (a^6 \div a^4) \times (b^3 \div b^1) \\
&= 2a^{6-4}b^{3-1} \\
&= 2a^2b^2
\end{aligned}
$$

□

2.4 صفر اور منفی طاقت

پچھلے حصے میں ہم نے ترکیب a^m کی تعریف بیان کی جس میں ہم m مرتبہ ضرب دیتے ہیں، لیکن اگر m صفر یا منفی ہو تو یہ تعریف اپنے معنی کھو دیتی ہے ۔ ہم کسی بھی چیز کو -3 یا صفر مرتبہ ضرب نہیں دے سکتے۔ لیکن a^m کے معنی کو وسعت دے کر دیکھا جائے تو صفر یا منفی طاقت کی صورت میں بھی نہ صرف یہ کہ یہ معنی درست ہے بلکہ مفید بھی ہے۔ اس کے ساتھ اہم بات یہ کہ مثبت طاقت کے تمام قوانین منفی اور صفر طاقتوں کے لیے بھی درست ہیں۔ اس تسلسل پہ غور کریں۔

دائیں سمت پہ اساس ہمیشہ 2 ہے جب کہ طاقت ہر مرتبہ ایک کم ہوتی جا رہی ہے۔ جبکہ بائیں طرف عدد آدھے ہوتے جا رہے ہیں۔ لہذا اس تسلسل کو یوں بڑھایا جا سکتا ہے۔

اور ہم اس طرح لا محدود حد تک جا سکتے ہیں۔ اب ان کا آپس میں موازنہ کریں

یوں لگتا ہے جیسے $-$ 2^m کو $mfrac1$ لکھنا چاہیے، اور صفر کی طاقت کے لیے ایک خصوصی قیمت $2^0 = 1$ رکھنی چاہیے۔ ہم اپنے پہلے مشاہدے کو صفر کے علاوہ تمام اساسوں اور کسی بھی مثبت عدد صحیح m کے لیے پھیلائیں تو منفی طاقت کے قوانین تک پہنچ سکتے ہیں۔

منفی طاقت کا قانون

ہم یہاں کچھ مثالوں سے ثابت کریں گے کہ مثبت طاقتوں کے لیے بنائے گئے قوانین منفی طاقتوں کے لیے بھی درست ہیں۔ اسی طرح آپ اپنے لیے بہت سی اور مثالیں بھی بنا سکتے ہیں۔

ضرب کا قانون:

طاقت پہ طاقت کا قانون:

جز کا قانون:

مثال 2.5: اگر $a = 5$ ہے تو کی قیمت معلوم کریں۔ یہاں اہم نکتہ یہ ہے کہ طاقت -2 صرف a کے ساتھ ہے، یعنی 4 پہ نہیں ہے۔ لہذا $4a^{-2}$ کا مطلب ہے $4 \times \frac{1}{2^a}$. اب جب کہ $a = 5$ ہے، $4a^{-2} = 4 \times \frac{1}{25} =$ □

مثال 2.6: ان تراکیب کو سادہ کریں

(ا) $\times$ (b) $4a^2b$

(ا) پہلا طریقہ ہر چیز کو مثبت طاقت میں لے آئیں

دوسرا طریقہ مثبت اور منفی دونوں طاقتوں کے لیے قوانین استعمال کر لیں۔

(ب) زیر نظر مثال میں میکینکس کا ایک استعمال دیکھیے۔ لزوجیت،(M,L,T) کی پیائش کے لیے ماس، لمبائی اور وقت کی جہتیں ہیں۔ بریکٹس کو الگ الگ کر کے

منفی طاقتوں کو بہت چھوٹے اعداد لکھنے کے لیے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ یقیناً آپ بہت بڑے اعداد کو معیاری شکل یا سائنسی بیانیے میں لکھنا جانتے ہوں گے، مثلاً روشنی کی رفتار کو 300 000 000 میٹر فی سیکنڈ لکھنے کی بجائے $3 \times 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ لکھا جاتا ہے۔ بالکل اسی طرح سرخ روشنی کا طول موج جو تقریباً 0.000 000 75 میٹر ہے، کو بھی آسانی سے $7.5 \times 10^{-7}\ \mathrm{m}$ لکھا جا سکتا ہے۔ کمپیوٹر اور کیلکولیٹر میں لوگوں کے لیے سائنسی اعتبار سے لکھنے کا امکان موجود ہوتا ہے اور اگر کوئی عدد عام عدد سے زیادہ بڑا یا زیادہ چھوٹا ہو جائے تو وہ اسے معیاری شکل میں بدل دیتا ہے۔ مثلاً یا۔ علامت (E) ایکسپونینٹ کے لیے استعمال ہوتی ہے جو طاقت ہی کے لیے استعمال ہونے والا دوسرا لفظ ہے □

مثال 2.7: اس ترکیب $G = \frac{gR^2}{M}$ سے کشش ثقل کے مستقل G کا حساب لگائیں، جبکہ $g \approx 9.81$، $R \approx 6.37 \times 10^6$ اور $M \approx 5.97 \times 10^{24}$۔ ($R$ اور M زمین کا رداس اور ماس ہے، اور g کشش ثقل کے سبب پیدا ہونے والا اسراع ہے۔

$$G \approx \frac{9.81 \times (6.37 \times 10^6)^2}{5.97 \times 10^{24}} = \frac{9.81 \times (6.37)^2}{5.97} \times \frac{(10^6)^2}{10^{24}}$$
$$\approx 66.7 \times \frac{10^{12}}{10^{24}} = 6.67 \times 10^1 \times 10^{-12} = 6.67 \times 10^{1-12} = 6.67 \times 10^{-11}$$

□

سوال 1: درج ذیل تراکیب کو سادہ کریں

ا. $a^2 \times a^3 \times a^7$

ب. $(b^4)^2$

ج. $c^7 \div c^3$

د. $d^5 \times d^4$

ھ. $(e^5)^4$

و. $(x^3y^2)^2$

ز. $5g^5 \times 3g^3$

ح. $12h^{12} \div 4h^4$

ط. $(2a^2)^3 \times (3a)^2$

ي. $(p^2q^3)^2 \times (pq^3)^3$

یا. $(4x^2y)^2 \times (2xy^3)^3$

یب. $(6ac^3)^2 \div (9a^2c^5$

یج. $(3m^4n^2)^3 \times (2mn^2)^2$

ید. $(49r^3s^2)^2 \div (7rs)^3$

یہ. $(2xy^2z^3)^2 \div (2xy^2z^3)$

سوال 2: درج ذیل تراکیب کو سادہ کریں، ہر جواب 2^n کی ہیئت میں لکھیں۔

ا. $2^{11}\times(2^5)^3$

ب. $(2^3)^2\times(2^2)^3$

ج. 4^3

د. 8^2

ھ. $\frac{2^7\times2^8}{2^{13}}$

و. $\frac{2^2\times2^3}{(2^2)^2}$

ز. $4^2\div2^4$

ح. $2\times4^4\div8^3$

سوال 3: درج ذیل تراکیب کو صحیح عدد یا کسر کی صورت میں لکھیں

ا. 2^{-3}

ب. 4^{-2}

ج. 5^{-1}

د. 3^{-2}

ھ. 10^{-4}

و. 1^{-7}

ز. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

ح. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

ط. $\left(2\frac{1}{2}\right)^{-1}$

ي. 2^{-7}

یا. 6^{-3}

یب. $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-3}$

سوال 4: $x=2$ کے ساتھ درج ذیل میں سے ہر ایک کی قیمت معلوم کریں

ا. $4x^{-3}$

ب. $(4x)^{-3}$

ج. $\frac{1}{4}x^{-3}$

د. $\left(\frac{1}{4}x\right)^{-3}$

ھ. $(4\div x)^{-3}$

و. $(x\div4)^{-3}$

سوال 5: $y=5$ کے ساتھ درج ذیل میں سے ہر ایک کی قیمت معلوم کریں

ا. $(2y)^{-1})$

ب. $2y^{-1}$

ج. $\left(\frac{1}{2}y\right)^{-1}$

د. $\frac{1}{2}y^{-1}$

ھ. $\frac{1}{(2y)^{-1}}$

و. $\frac{2}{(y^{-1})^{-1}}$

سوال 6: درج ذیل تراکیب کو ممکنہ سادہ ترین شکل میں لکھیں

ا. $a^4 \times a^{-3}$

ب. $\frac{1}{b^{-1}}$

ج. $(c^{-2})^3$

د. $d^{-1} \times 2d$

ه. $e^{-4} \times e^{-5}$

و. $\frac{f^{-2}}{f^3}$

ز. $12g^3 \times (2g^2)^{-2}$

ح. $(3h^2)^{-2}$

ط. $(3i^{-2})^{-2}$

ي. $\left(\frac{1}{2}j^{-2}\right)^{-3}$

یا. $(2x^3y^{-1})^3$

یب. $(p^2q^4r^3)^{-4}$

یج. $(4m^2)^{-1} \times 8m^3$

ید. $(3n^{-2})^4 \times (9n)^{-1}$

یہ. $(2xy^2)^{-1} \times (4xy)^2$

یو. $(5a^3c^{-1})^2 \div (2a^{-1}c^2)$

یز. $(2q^{-2})^{-2} \div \left(\frac{4}{q}\right)^2$

یح. $(3x^{-2}y)^2 \div (4xy)^{-2}$

سوال 7: درج ذیل تراکیب کو حل کریں

ا. $3^x = \frac{1}{9}$

ب. $5^y = 1$

ج. $2^z \times 2^{z-3} = 32$

د. $7^{3x} \div 7^{x-2} = \frac{1}{49}$

ه. $4^y \times 2^y = 8^{120}$

و. $3^t \times 9^{t \div 3} = 27^2$

سوال 8: ایک مکعب کی ہر طرف کی لمبائی 3×10^{-2} میٹر ہے۔ (ا) مکعب کا حجم معلوم کریں (ب) مکعب کا کل سطحی رقبہ معلوم کریں

سوال 9: ایک کھلاڑی 7.5×10^{-3} گھنٹے میں 2×10^{-1} km کلومیٹر کا فاصلہ طے کرتا ہے۔ اس کی اوسط رفتار کلومیٹر فی گھنٹہ معلوم کریں۔

سوال 10: ایک L لمبائی رکھنے والی تار کا حجم $V\ m^3$ یوں بیان کیا گیا ہے۔ جبکہ اس کے عمودی تراش کا رداس r ہے۔ (ا) 80 میٹر لمبائی اور $2 \times 10^{-3}m$ عمودی تراش کے رداس کی تار کا حجم معلوم کریں۔

(ب) ایک اور تار جس کی عمودی تراش کا رداس $5 \times 10^{-3}m^3$ اور حجم $8 \times 10^{-3}m^3$ ہے، کی لمبائی معلوم کریں۔

(ج) ایک تار جس کی لمبائی $60m$ اور حجم $6 \times 10^{-3}m^3$ ہے۔ اس کی عمودی تراش کا رداس معلوم کریں۔

سوال 11: ایک مساوات جو موج کو سمجھتے ہوئے سامنے آتی ہے یہ ہے۔ $y = \frac{\lambda d}{a}$

(ا) y معلوم کریں، جبکہ $\lambda = 7 \times 10^{-7}$، $d = 5 \times 10^{-1}$ اور $a = 8 \times 10^{-4}$ ہے۔

(ب) λ معلوم کریں، جبکہ $y = 10^{-3}$، $d = 0.6$ اور $a = 2.7 \times 10^{-4}$ ہے۔

سوال 12: حل کریں

$$\frac{3^{5x+2}}{9^{1-x}} = \frac{27^{4+3x}}{729}$$

2.5 کسری طاقتیں

گزشتہ حصے میں آپ دیکھ چکے ہیں کہ طاقت کے قوانین صحیح اعداد m اور n کی مثبت اور منفی دونوں طاقتوں کے لیے ٹھیک کام کرتے ہیں۔ لیکن اگر m اور n اعداد صحیح ہی نہ ہوں تو کیا ہو گا۔ اگر ہم طاقت پہ طاقت کے قانون میں $m = \frac{1}{2}$ اور $n = 2$ مانیں تو ہم اس نتیجے پہ پہنچیں گے

$$(x^{\frac{1}{2}})^2 = x^{\frac{1}{2}\times 2} = x^1 = x$$

$x^{\frac{1}{2}} = y$ سمجھنے سے یہ مساوات $x = y^2$ بن جائے گی۔ للٰذا $y = \sqrt{x}$ یا $y = -\sqrt{x}$ جس سے $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ یا $-\sqrt{x}$۔ $x^{\frac{1}{2}}$ کو x کی مثبت جذر ماننے سے ہمیں $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ملے گا۔ اسی طرح اگر ہم $m = \frac{1}{3}$ اور $n = 3$ رکھیں تو ہم ظاہر کر سکتے ہیں کہ $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$۔ اس سے زیادہ وسیع طریقے سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ $m = \frac{1}{n}$، ہم دیکھیں گے $(x^1n)^n = x^{\frac{1}{n}\times n} = x$ جو ہمیں ایک بڑا نتیجہ دے گا جو کہ

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

توجہ کیجیے کہ $\sqrt{x} = x^12$ کی صورت میں لازمی طور پہ $x \geq 0$ ہو گا، لیکن $\sqrt[3]{x} = x^13$ کی صورت میں لازمی طور پہ $x \leq 0$ کی ضرورت نہیں ہو گی، کیونکہ ہم کسی منفی نمبر کا مکعب جذر تو بہرحال لے سکتے ہیں۔ $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ کو ذرا سا بڑھا کر دیکھیں تو ہم دیکھ سکتے ہیں کہ $x^{\frac{2}{3}}$ کی قسم کی تراکیب کو کیسے حل کرنا ہے۔ اس کے دو متبادل ہو سکتے ہیں۔

$$x^{\frac{2}{3}} = x^{2\times\frac{1}{3}} = (x^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x^2} \text{ اور } x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{3}\times 2} = (\sqrt[3]{x})^2$$

(اگر x کی قطعی مکعب جذر ہو تو اس کے لیے پہلی شکل بہتر ہے، ورنہ دوسری قسم بہتر ہے) عمومی طور پہ یہی منطق ہمیں کسری طاقتوں کے اصولوں تک لے جاتی ہے۔

جذری طاقت کا قانون

$$x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$$

جذری طاقتوں کو $x^{1/2}$، $x^{m/n}$ بھی لکھا جا سکتا ہے اور اسی طرح مزید بھی۔

مثال 2.8: سادہ کریں۔ (ا) $9^{\frac{1}{2}}$، (ب) $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}}$، (ج) $16^{-\frac{3}{4}}$

حل: (ا) $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

(ب) $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = 3^2 = 9$

(ج) پہلا طریقہ $16^{-\frac{3}{4}} = (2^4)^{-\frac{3}{4}} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

دوسرا طریقہ $16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{(\sqrt[4]{16})^3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ □

طاقت کے معمے حل کرنے کے لیے بہت سے متبادل طریقے بھی موجود ہیں اور آپ کو ان کا بھی تجربہ کرنا چاہیے۔ بہت سے لوگ مثبت طاقت میں سوچنا آسان سمجھتے ہیں لہذا وہ منفی طاقت کو مثبت بنا کر آسانی سے حل کر سکتے ہیں، اگر آپ بھی ایسے ہی ہیں تو آپ پہلا مرحلہ $16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{3}{4}}}$ یوں لکھ سکتے ہیں، بالکل جیسے ہم نے دوسرے طریقے میں دیکھا۔

مثال 2.9: سادہ کریں (ا) $(2\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}$، (ب) $2x^{\frac{1}{2}} \times 3x^{-\frac{5}{2}}$، (ج) $\frac{(2x^2y^2)^{-\frac{1}{2}}}{(2xy^{-2})^{\frac{3}{2}}}$

حل: (ا) $(2\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}} = (\frac{9}{4})^{-\frac{1}{4}} = (\frac{4}{9})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

(ب) $2x^{\frac{1}{2}} \times 3x^{-\frac{5}{2}} = 6x^{\frac{1}{2}-\frac{5}{2}} = 6x^{-2} = \frac{6}{x^2}$

(ج) پہلا طریقہ $(2x^2y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(2x^2y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}xy}}$

$$\frac{(2x^2y^2)^{-\frac{1}{2}}}{(2xy^{-2})^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}xy}} \times \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}y^{-3}} = \frac{1}{2^2x^{\frac{5}{2}}y^{-2}} = \frac{y^2}{4x^{\frac{5}{2}}}$$

دوسرا طریقہ $(2xy^{-2})^{\frac{3}{2}}$ سے تقسیم کرنا ایسا ہی ہے جیسا $(2xy^{-2})^{-\frac{3}{2}}$ سے ضرب دینا۔

$$\frac{(2x^2y^2)^{-\frac{1}{2}}}{(2xy^{-2})^{\frac{3}{2}}} = (2x^2y^2)^{-\frac{1}{2}}(2xy^{-2})^{-\frac{3}{2}} = (2^{-\frac{1}{2}}x^{-1}y^{-1})(2^{-\frac{3}{2}}x^{-\frac{3}{2}}y^3) = 2^{-2}x^{\frac{5}{2}}y^2$$

جز ج میں ایک نکتہ قابل توجہ ہے اور وہ یہ کہ دونوں طریقوں سے جواب مختلف آ رہا ہے، اور ہم سمجھ سکتے ہیں کہ مساوات کا سادہ ہونا ہر ایک کے مزاج کے مطابق مختلف ہو سکتا ہے۔ □

سوال 1:

کیلکولیٹر کی مدد کے بغیر درج ذیل تراکیب کا مساوی لکھیں

ا. $25^{\frac{1}{2}}$ د. $32^{\frac{1}{5}}$ ز. $16^{-\frac{1}{4}}$ ي. $(-27)^{\frac{1}{3}}$

ب. $8^{\frac{1}{3}}$ ھ. $81^{\frac{1}{4}}$ ح. $49^{-\frac{1}{2}}$ یا. $64^{\frac{2}{3}}$

ج. $36^{\frac{1}{2}}$ و. $9^{-\frac{1}{2}}$ ط. $1000^{-\frac{1}{3}}$ یب. $(-125)^{-\frac{4}{3}}$

سوال 2:

کیلکولیٹر کی مدد کے بغیر درج ذیل تراکیب کا مساوی لکھیں

ا. $4^{\frac{1}{2}}$ ج. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ ھ. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ز. 4^2

ب. $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ د. $4^{-\frac{1}{2}}$ و. $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ ح. $\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2$

سوال 3:

کیلکولیٹر کی مدد کے بغیر درج ذیل تراکیب کا مساوی لکھیں

ا. $8^{\frac{2}{3}}$ د. $27^{\frac{4}{3}}$ ز. $4^{2\frac{1}{2}}$ ي. $\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$

ب. $4^{\frac{3}{2}}$ ھ. $32^{\frac{2}{5}}$ ح. $10\,000^{-\frac{3}{4}}$

ج. $9^{-\frac{3}{2}}$ و. $64^{-\frac{5}{6}}$ ط. $\left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{4}{3}}$ یا. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$

سوال 4: درج ذیل مساواتوں کو سادہ بنائیں

ا. $a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{5}{3}}$

ب. $3b^{\frac{1}{2}} \times 4b^{-\frac{3}{2}}$

ج. $(6c^{\frac{1}{4}}) \times (4c)^{\frac{1}{2}}$

د. $(d^2)^{\frac{1}{3}} \div (d^{\frac{1}{3}})^2$

ھ. $(2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}})^6 \times (\frac{1}{2}x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}})^4$

و. $(24e)^{\frac{1}{3}} \div (3e)^{\frac{1}{3}}$

ز. $\frac{(5p^2q^4)^{\frac{1}{3}}}{(25pq^2)^{-\frac{1}{3}}}$

ح. $(4m^3n)^{\frac{1}{4}} \times (8mn^3)^{\frac{1}{2}}$

ط. $\frac{(2x^2y^{-1})^{-\frac{1}{4}}}{(8x^{-1}y^2)^{-\frac{1}{2}}}$

سوال 5: درج ذیل مساواتوں کو حل کریں

ا. $x^{\frac{1}{2}} = 8$

ب. $x^{\frac{1}{3}} = 3$

ج. $x^{\frac{2}{3}} = 4$

د. $x^{\frac{2}{3}} = 27$

ھ. $x^{-\frac{3}{2}} = 8$

و. $x^{-\frac{2}{3}} = 9$

ز. $x^{\frac{3}{2}} = x\sqrt{2}$

ح. $x^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{x}$

سوال 6: L میٹر لمبائی کی ایک لٹکن کو ایک گردش مکمل کرنے کے لیے T وقت درکار ہے، جسے یوں لکھا جائے گا۔ $T = 2\pi l^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}$ جبکہ $g \approx 9.81ms^{-2}$ (ا) ایک 0.9 میٹر لمبی لٹکن کا وقت T دریافت کریں۔ (ب) ایک ایسی لٹکن کی لمبائی معلوم کریں کہ جسے ایک گردش کے لیے تین سیکنڈ کا وقت درکار ہے۔

سوال 7: ایک کرے کے رداس rcm اور حجم Vcm^3 کے درمیان تعلق $r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ بنتا ہے۔ ایک ایسے کرے کا رداس معلوم کریں جس کا حجم $1150cm^3$ ہو۔

سوال 8: درج ذیل مساواتوں کو حل کریں

ا. $4^x = 32$

ب. $9^y = \frac{1}{27}$

ج. $16^z = 2$

د. $100^x = 1000$

ھ. $8^y = 16$

و. $8^z = \frac{1}{128}$

ز. $(2t)^3 \times 4^{t-1} = 16$

ح. $\frac{9^y}{27^{2y+1}} = 81$

سوال 9: سادہ کریں .

ا. $5(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}(4-3\sqrt{2})$

ب. $(\sqrt{2})^4+(\sqrt{3})^4+(\sqrt{4})^4$

ج. $(\sqrt{5}-2)^2+(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)$

د. $(2\sqrt{2})^5$

سوال 10: سادہ کریں۔

ا. $\sqrt{27}+\sqrt{12}-\sqrt{3}$

ب. $\sqrt{63}-\sqrt{28}$

ج. $\sqrt{100\,000}+\sqrt{1000}+\sqrt{10}$

د. $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{16}$

سوال 11: درج ذیل کے نسب نما کو ناطق بنائیں

ا. $\frac{9}{2\sqrt{3}}$

ب. $\frac{1}{5\sqrt{5}}$

ج. $\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{10}}$

د. $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{15}}$

سوال 12: سادہ کریں

ا. $\frac{4}{\sqrt{2}}-\frac{4}{\sqrt{8}}$

ب. $\frac{10}{\sqrt{5}}+\sqrt{20}$

ج. $\frac{1}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2}-1)+\sqrt{2}(1-\sqrt{8})$

د. $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}}$

سوال 13: $\frac{5}{\sqrt{7}}$ کو $k\sqrt{7}$ شکل میں بنا کر دکھائیں، جبکہ k ایک ناطق عدد ہے۔

سوال 14: اس نتیجے کو درست ثابت کریں $\sqrt{12}\times\sqrt{75}=30$

(ا) غیر معقول اعداد کو استعمال کرتے ہوئے (ب) کسری طاقتیں استعمال کرتے ہوئے

سوال 15: اس شکل میں زاویہ ABC اور ACD قائم زاویے ہیں۔ اگر ہم جانتے ہوں کہ $AB = CD = 2\sqrt{6}$ اور $BC = 7cm$ تو ظاہر کریں کہ AD کی لمبائی $4\sqrt{6}$ اور $7\sqrt{2}$ کے درمیان ہے۔

سوال 16: مثلث PQR میں Q ایک قائمہ زاویہ ہے۔ $PQ = (6-2\sqrt{2})cm$ اور $QR = (6+2\sqrt{2})cm$ (ا) مثلث کا رقبہ دریافت کریں (ب) ظاہر کریں کہ PR کی لمبائی $2\sqrt{22}cm$ ہے۔

سوال 17: ترکیب $\sqrt{27} \times \sqrt[6]{\frac{4}{3}} \times \sqrt[3]{36}$ کے ہر جز کو طاقت میں لکھ کر سادہ بنائیں

سوال 18: ایک مثلث ABC میں، $AB = 4\sqrt{3}cm$، $BC = 5\sqrt{3}cm$ اور زاویہ B 60 ہے۔ کوسائن قاعدے کی مدد سے AC کی لمبائی سادہ غیر معقول اعداد میں نکالیں۔

سوال 19: درج ذیل ہمزاد مساواتوں کو حل کریں $5x - 3y = 41$ اور $7\sqrt{2})x + (4\sqrt{2})y = 82$

سوال 20: اپنے کیلکولیٹر پہ موجود طاقت بنائیں والا بٹن استعمال کرتے ہوئے 5 معین اعداد تک جواب ڈھونڈیں (ا) $\frac{1}{3.7^5}$ (ب) $\sqrt[5]{3.7}$

سوال 21: نقاط A اور B کے محدد، بالترتیب $(2,3)$ اور $(4,-3)$ ہیں۔ AB کی لمبائی اور اس کے درمیانی نقطے کے محدد معلوم کریں۔

سوال 22: (ا) ایک خط l کی مساوات دریافت کریں، جو نقطہ $A(2,3)$ سے ڈھلوان $\frac{-1}{2}$ کے ساتھ گزر رہی ہو۔ (ب) ظاہر کریں کہ نقطہ P جس کے محدد $(2+2t, 3-t)$ ہیں، ہمیشہ l پر رہے گا، بھلے t کی قیمت کچھ بھی ہو۔ (ج) t کی قیمت دریافت کریں، ایسے کہ AP کی لمبائی 5 رہے۔ (د) t کی قیمت دریافت کریں جب کہ OP l کے عمودی ہے۔ O کو نقطہ آغاز مانتے ہوئے OL عمودی خط کی لمبائی معلوم کریں

سوال 23: P اور Q ایک خط کے انقطاع کے نقطے ہیں اور x اور y محور بالترتیب یہ ہیں۔

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

PQ کا درمیانی فاصلہ 20 ہے اور اس کی ڈھلوان -3 ہے۔ اس سب کے ساتھ a اور b کی قیمت معلوم کریں۔

سوال 24: ایک چوکور کی اطراف ان خطوط پر موجود ہیں $x + y = 5$، $y = 2x - 13$، $y = 2x - 4$، $x + y = -4$۔ اس کی ایک سمت اور اس کے اور اس کے متوازی سمت کا درمیانی فاصلہ معلوم کریں۔ نیز اس چوکور کا رقبہ بھی دریافت کریں۔

سوال 25: درج ذیل کو عداد کی مدد کے بغیر حل کریں

ا. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

ب. $32^{-\frac{4}{5}}$

ج. $\left(4^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}$

د. $\left(1\frac{7}{9}\right)^{1\frac{1}{2}}$

سوال 26: ترکیب $\left(9a^4\right)^{-\frac{1}{2}}$ کو الجبرائی کسرے کی شکل میں لکھ کر سادہ بنائیں

سوال 27: $y = x^{\frac{1}{3}}$ سمجھتے ہوئے، x کی قیمت معلوم کریں، جس کے لیے $x^{\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}} = 1$

سوال 28: مساوات $4^{2x} \times 8^{x-1} = 32$ کو حل کریں

سوال 29: ترکیب $\frac{1}{(\sqrt{a})^{\frac{4}{3}}}$ کو a^n کی شکل میں لکھیں اور n کی قیمت بتائیں۔

سوال 30: سادہ کریں .

ا. $(4p^{\frac{1}{4}}q^{-3})^{\frac{1}{2}}$

ب. $\frac{(5b)^{-1}}{(8b^6)^{\frac{1}{3}}}$

ج. $(2x^6y^8)^{\frac{1}{4}} \times (8x^{-2})^{\frac{1}{4}}$

د. $(m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{2}})^2 \times (m^{\frac{1}{6}}n^{\frac{1}{3}})^4 \times (mn)^{-2}$

سوال 31: یہ نظر میں رکھتے ہوئے کہ معیاری شکل میں $3^{236} \approx 4 \times 10^{112}$ اور $3^{-376} \approx 4 \times 10^{-180}$، درج زیل تراکیب کے لیے معیاری شکل میں اندازے معلوم کریں

ا. 3^{376}

ب. 3^{612}

ج. $(\sqrt{3})^{236}$

د. $(3^{-376})^{\frac{5}{2}}$

سوال 32: ذیل میں دیا گیا جدول تین سیاروں کا سورج سے اوسط فاصلہ اور ایک گردش کے لیے درکار وقت بتا رہا ہے

(ا) دکھائیں کہ r^3T^{-2} تینوں سیاروں کے لیے تقریباً ایک سی قیمت رکھتا ہے۔ (ب) زمین سورج کے گرد ایک چکر مکمل کرنے میں ایک سال لگاتی ہے، زمین کے مدار کا اوسط رداس معلوم کریں

سوال 33: سادہ کریں

(ا) $2^{\frac{3}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{3}{2}}$، اپنے جواب کو $k\sqrt{2}$ کی شکل میں لکھیں۔

(ب) $(\sqrt{3})^3 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^1 (\sqrt{3})^0 + (\sqrt{3})^{-1} + (\sqrt{3})^{-2} + (\sqrt{3})^{-3}$، اپنے جواب کو $a + b\sqrt{3}$ کی شکل میں لکھیں۔

سوال 34: درج ذیل میں سے ہر ایک کو 2^n کی شکل میں ظاہر کریں

ا. $2^{70} + 2^{70}$

ب. $2^{-400} + 2^{-400}$

ج. $2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$

د. $2^{100} - 299$

ھ. $8^{0.1} + 8^{0.1} + 8^{0.1} + 8^{0.1} + 8^{0.1} + 8^{0.1} + 8^{0.1} + 8^{0.1}$

سوال 35: مساوات کو حل کریں $\frac{125^{3x}}{5^{x+4}} = \frac{25^{x-2}}{3125}$

سوال 36: ایک کرے کے سطحی رقبے اور حجم کے کلیے بالترتیب $S = 4\pi r^2$ اور $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ہیں۔ جبکہ r کرے کا رداس ہے۔ درجذیل کے لیے موزوں تراکیب بنائیے۔

(ا) سطحی رقبے کو حجم کے ذریعے لکھیں

(ب) حجم کو سطحی رقبے کے ذریعے لکھیں

سوال 37: mKg وزن کے حامل اور vms^{-1} رفتار سے حرکت کرنے والے ایک جسم کی حرکی توانائی K کے لیے کلیہ $K = \frac{1}{2}mv^2$ ہے۔ اس کلیے کو مد نظر رکھتے ہوئے $2.5 \times 10^{-2}kg$ وزن رکھنے والی اور $8 \times 10^2 ms^{-1}$ رفتار سے حرکت کرنے والی گولی کی حرکی توانائی معلوم کریں۔

باب 3

تفاعل اور ترسیمات

باب4

دودرجی

باب 5

عدم مساوات

باب6

تفرق

باب 7

تفرق کے استعمال

باب8

ترتیبات

باب 9

الکراجی کا مسئلہ ثنائی

باب 10

تکونیات

اس سبق میں ہم سائن ، کوسائن اور ٹینجنٹ کے بارے میں پڑھیں گے، جب آپ یہ سبق مکمل کر لیں گے تو آپ اس قابل ہوں گے کہ؛

1. تمام زاویوں کے لیے سائن ، کوسائن اور ٹینجنٹ کے ترسیموں کی شکل پہچانیں
2. خاص زاویوں کے لیے سائن ، کوسائن اور ٹینجنٹ کی قیمتیں معلوم ہوں یا معلوم کرنے کا طریقہ آتا ہو۔
3. سادہ مثلثی مساوات حل کر سکیں
4. $\tan\theta^0$اور$\cos\theta^0$،$\sin\theta^0$ کی مماثل کا استعمال آتا ہو۔

10.1 $\cos\theta^0$کی ترسیم

زاویے کی علامت کے طور پر اکثر یونانی زبان کے خط استعمال کیے جاتے ہیں، ہم اس سبق میں θ (تھیٹا) اور ϕ (فائ) استعمال کریں گے۔

غالباً آپ نے $\cos\theta^0$ پہلے قائم مثلث میں زاویوں کا حساب لگاتے ہوئے استعمال کیا ہوگا، کہ جب زاویہ صفر سے بڑا اور 90 سے چھوٹا تھا۔ اور پھر آپنے اسے کسی اور مثلث میں استعمال کیا ہوگا جب زاویہ $180 > \theta > 0$ تھا۔ تاہم اگر آپکے پاس ایک ترسیم بنانے والا حساب کتاب کا آلہ ہے تو آپ دیکھیں گے کہ یہ $\cos\theta^0$ کی ایسی ہی ترسیم بناتا ہے جیسی کہ شکل 10.3 میں بنی ہوئ ہے۔ یہ حصہ $\cos\theta^0$ کی تعریف بیان کرتا ہے ہر طرح کے زاویوں کے لیے بیشک وہ مثبت ہوں یو منفی۔

شکل 10.1 میں ایک دائرہ دکھایا گیا ہے جسکا رداس 1 اکائی ہے اور جسکا مبدا O پر ہے۔ x محدد پر ایک زاویہ بناتے ہوئے ایک خط OP کھینچیں کہ یہ دائرے کی حد کو چھو لے اور اس نقطے کو P کہہ دیں۔ سے P ایک عمودی خط کھینچیں کہ وہ OA کو پا لے اور جس نقطے پر وہ خط OA کو چھوئے اس نقطے کو N کہہ دیں۔ فرض کریں کہ ON=x ہے اور NP=y ہے جبکہ نقطہ P کے محدد (x,y) ہیں۔

مثلث ONP کو دیکھیں، تعریف استعمال کرتے ہوئے $\cos\theta = \frac{ON}{OP}$ اور ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ $x = \frac{x}{1} = \cos\theta$۔

نتیجہ $x = \cos\theta^0$ دراصل $\cos\theta^0$ کی تعریف کے طور پر استعمال ہو رہا ہے زاویے کی تمام قیمتوں کے لیے۔

آپ اس تعریف کی اثرات دیکھیں گے جب زاویہ 90 کا مضرب ہوگا۔

مثال 10.1: مثلثی تناسب $\cos\theta^0$ کی قیمت معلوم کریں جب؛.

1. $\theta = 180$
2. $\theta = 270$

1. جب $\theta = 180$، P ایک نقطہ ہے جسکے محدد(-1,0) ہیں۔ جیسا کہ x محدد نقطہ P کا -1 ہے لہذہ $\cos^0 180 = -1$ ہے۔
2. جب زاویہ $\theta = 270$ P، ایک نقطہ ہے $(0, -1)$ اسی لیے $\cos 270^0 = 0$

□

جیسے جیسے زاویہ بڑھتا ہے نقطہ P دائرے کے گرد گھومتا ہے، اور جب $\theta = 360$ ہوتا ہے نقطہ P پورا دائرہ مکمل کر کے دوبارہ A پر پہنچ جاتا ہے۔ اور جب زاویہ 360 سے بڑھتا ہے تو نقطہ P دوبارہ چکر شروع کر دیتا ہے۔ یہاں سے ہم بآسانی یہ کہہ سکتے ہیں کہ $\cos(\theta - 360)^0 = \cos\theta^0$ اور جب بھی زاویہ 360 ہوتا ہے $\cos\theta^0$اپنی قیمت دہراتا ہے۔

اگر زاویہ 0 سے چھوٹا ہو تو θ مخالف سمت میں گھومے گا لیکن شروع A سے ہی ہوگا۔ شکل 10۔2 میں زاویہ -150 دکھایا گیا ہے۔ یعنی اگر $\theta = -150$ تو P تیسرے خانے میں ہوگا اور چونکہ P کا x محدد منفی ہے لہذہ $\cos(-150)^0$ منفی ہوگا۔

حساب کتاب کا ایک آلہ آپکو زاویے کی ہر قیمت کے لیے $\cos\theta^0$ کی قیمت دے گا۔ اگر آپکے پاس ترسیم بنانے والا حساب کتاب کا آلہ ہے تو ان قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے $\cos\theta^0$ کی ترسیم بنائیں وہ ایسی ہی دکھے گی جیسی کہ شکل 10.3 میں نظر آ رہی ہے۔

اگر آپ $\cos\theta^0$ کی ترسیم بنانا چاہتے ہیں تو آپ کو حساب کتاب کے آلے میں مساوات $y = \cos x$ ڈالنی ہوگی اور یہ بھی خیال رکھیں کہ حساب کتاب کا آلہ ڈگری موڈ میں ہے۔

کوسائن تفاعل کی ترسیم خود کو دہراتی رہتی ہے۔ تفاعل کی اس خصوصیت کو دوری خصوصیت کہتے ہیں۔ اور ان تفاعل کا دور وہ کم سے کم وقفہ ہے کہ جس کے لیے تفاعل خود کو دہراتا ہے۔اسی لیے کوسائن کے تفاعل کا دور 360 درجے ہے۔ اور خصوصیت $\cos(\theta \pm 360)^0 = \cos\theta^0$ کو دوری خصوصیت کہیں گے۔ کئی قدرتی رجحانات بھی دوری خصوصیت دکھاتے ہیں۔ اور اکثر انکی خصوصیات سمجھنے کے لیے کوسائن تفاعل کا ہی استعمال کیا جاتا ہے۔

مثال 10.2: ایک بندرگاہ میں پانی کی گہرائی میٹرز میں ناپی جاتی ہے اور اس گہرائی کو ماپنے کا کلیہ $d = 6 + 3\cos 30t^0$ ہے. جبکہ t وقت کے لیے ہے جو گھنٹوں میں ناپا جائے گا دوپہر کے بعد سے۔ معلوم کریں؛

1. رات کے پے پانی کی گہرائی معلوم کریں

2. پانی کی کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ گہرائی اور یہ کس وقت ہو گی۔

1. رات کے 9.45 جب 9.75 $t = 9.75$ تاکہ $d = 6 + 3\cos(30 + 9.75) = 6 + 3\cos 292.5 =$ $7.148\ldots$ اسی لیے پانی کی گہرائی 7.15 میٹرز ہے۔ اور آپکا جواب 3 معنی خیز ہندسوں تک ہونا چاہیے۔

2. مستقل d کی قیمت زیادہ سے زیادہ تب ہو گی جب کوسائن تفاعل کی قیمت 1 ہے۔ اور اسی لیے $6 + 3 \times 1 = 9$ ۔ اسی طرح کم سے کم قیمت بھی $6 + 3 \times (-1) = 3$، زیادہ سے زیادہ گہرائی 9 میٹر اور کم سے کم گہرائی 3 میٹر ہے ۔ پہلی دفعہ جب دوپہر میں یہ واقع وقوع پزیر ہوگا $30t = 360$ اور $30t = 180$ ، جسکا مطلب رات کا درمیان اور شام کے 6 بجے ہے۔

□

10.2 $\sin\theta^0$ اور $\tan\theta^0$ کی ترسیم

جیسے ہم نے کوسائن کے تفاعل کے لیے ایک شکل 10.1 بنائی اسی کو استعمال کرتے ہوئے سائن کی تعریف کچھ یوں ہو گی۔

$$\sin\theta = \frac{NP}{OP} = \frac{y}{1} = y$$

کوسائن کی ترسیم کی طرح سائن کی ترسیم (شکل 10.4) دوری ہے، جسکا دورانیہ 360 درجے ہے۔اور اسکی ترسیم بھی -1 اور 1 کے درمیان ہی رہتی ہے۔

اگر آپ شکل 10.1 کی طرف لوٹیں تو آپ دیکھیں گے کہ $\tan\theta = \frac{NP}{OP} = \frac{y}{x}$، اور اسے $\tan\theta^0$ کی تعریف کی طرح لیا جاتا ہے۔ $\tan\theta^0$ کے میدان عمل میں وہ زاویے شامل نہیں ہیں جن کے لیے x صفر ہو۔ جیسا کہ $\theta = \pm 90, \pm 270\ldots$ ۔ شکل 10.5 میں $\tan\theta^0$ کی ترسیم دکھائی گئی ہے۔

سائن اور کوسائن کی ترسیم کی طرح ٹینجنٹ کی ترسیم بھی دوری ہے لیکن اسکا دورانیہ 180 ہے ،اس لیے $\tan(\theta \pm 180) = \tan\theta$

تعریف : ھم جانتے ھیں کہ $\cos\theta^o = x$, $\sin\theta^o = y$ ہے اور ھم یہ بھی جانتے ہیں کہ $\tan\theta^o = \frac{y}{x}$ ہے ان تمام حقائق کو جمع کریں تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\tan\theta^o = \frac{\sin\theta^o}{\cos\theta^o}$ ، آپ $\tan\theta^o$ کی متبادل تعریف کے طور پر استعمال کر سکتے ہیں۔

□

10.3 چند مثلثی تفاعل کی درست قیمتیں

تعریف : صرف چند ہی ایسے زاویے ہیں جن کی درست قیمت عدد صحیح ہے اور جن کے

$$\cos 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \sin 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \tan 45^o = 1$$

آپ درست معلوم کر سکتے ہیں۔ ان زاویوں میں 30° , 45° اور 60° زیادہ اہم ہیں۔ 45° زاویے کی مثلثی تناسب معلوم کرنے کے لیے ایک قائمہ زاویہ کے ساتھ مساوی الساقین تکون بنائیں ۔ جس کی اطراف کی لمبائی 1 اکائی ہو۔ جیسا کہ شکل 6-10 میں ہے وتر کی لمبائی-- ہو گی۔ تب

$$\cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \tan 45^o = 1$$

اگر آپ نسب نما کو اسثولالی بنائیں تو

$$\cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \tan 45^o = 1$$

- 30° اور 60° درجے کی مثلی تناسب معلوم کرنے کے لیے ایک یکر طرفہ مثلث(تکون) بنائیں جس کی اطراف 2 اکائیوں جتنی لمبی ہیں۔ جیسے کہ شکل 7۔10 میں دکھایا گیا ہے۔ راس سے ایک خط عمودی خط کھینچیں جو قائدہ کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کر دے۔ اس عمودی خط کی لمبائی $\sqrt{3}$ اکائیاں ہیں۔ اس عمودی خط نے راس کو بھی دو برابر حصوں میں تقسیم کر دیا ہے۔

$$\cos 60^o = \frac{1}{2},\ \sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \tan 60^o = \sqrt{3};$$

$$\cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin 30^o = \frac{1}{2},\ \tan 30^o = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

آپ کو یہ نتائج ازبر ہونے چاہئیں۔

□

مثال 10.3: مندرجہ ذیل کی درست قیمتیں معلوم کریں۔

ا $\cos 135^o$ ب $\sin 120^o$ ج $\tan 495^o$

-- شکل 3۔10 کے مطابق --------- -- شکل 4-10 کے مطابق---------- -- شکل 5۔10 کے مطابق-

ا $\cos 135^o = -\cos 45^o = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

ب $\sin 120^o = \sin 60^o = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

ج $\cos 495^o = \tan(495-360)^o = \tan 135^o = -\tan 45^o = -1$

□

مشق 10-ا

1) ذیل میں دیے گئے θ زاویوں کے لیے 4 اعشاری نقطوں تک درست قیمت معلوم کریں (تمام سوالات کی مساوات یہاں لکھیں)

i $\cos\theta^o$		ii $\sin\theta^o$		iii $\tan\theta^o$	
ا	25	د	325	ز	124.9
ب	125	ھ	-250	ح	554
ج	225	و	67.4	ط	225

2) ذیل میں دیے گئے تمام تفاعل کی کم اور زیادہ ترین قیمت معلوم کریں۔ نیز--- کی شرح کی وہ کم از کم مثبت قدر بھی معلوم کریں جس پے آپ قیمتیں معلوم کریں گے۔

ا $2+\sin x^o$

ب $7-4\cos x^o$

ج $5+8\cos 2x^o$

د $\frac{8}{\sin x^o}$

ھ $9+\sin(4x-20)^o$

و $\frac{30}{11-5\cos\left(\frac{1}{2}x-45\right)^o}$

3) (اس سوال کے لیے حساب و کتاب کے کسی آلے کا استعمال نہ کریں) سوال کے ہر حصے میں اعداد کے مثلثی تفاعل دیے گئے ہیں' باقی تمام اعداد معلوم کریں' $0 \le x \le 360$, x اس شرط کے ساتھ کہ معلوم کیے گئے اعداد کا مثلثی تفاعل دیے گئے تفاعل کے مساوی ہو۔ مثال کے طور پر اگر $\sin 80^o$ دیا گیا ہے تو ہمارا جواب $x = 100$ ہونا چاہیئے کیونکہ $\sin 100^o = \sin 80^o$۔

ا	$\sin 20^o$	د	$\sin 130^o$	ز	$\sin 400^o$	ی	$\sin(-260)^o$
ب	$\cos 40^o$	ھ	$\cos 140^o$	ح	$\cos(-30)^o$	یا	$\cos(-200)^o$
ج	$\tan 60^o$	و	$\tan 160^o$	ط	$\tan 430^o$	یب	$\tan 1000^o$

4) (اس سوال کے لیے بھی حساب و کتاب کے کسی آلے کا استعمال نہ کریں) سوال کے ہر حصے میں اعداد کے مثلثی تفاعل دیے گئے ہیں' باقی تمام اعداد معلوم کریں، x $-180 \leq x \leq 180$,x بشرطیکہ کہ معلوم کیے گئے اعداد کا مثلثی تفاعل دیے گئے تفاعل کے مساوی ہو۔ مثال کے طور پر اگر $\sin 80^o$ دیا گیا ہے تو ہمارا جواب $x = 100$ ہونا چاہیئے کیونکہ $\sin 100^o = \sin 80^o$

ا $\sin 20^o$ د $\sin 130^o$ ز $\sin 400^o$ ی $\sin(-260)^o$

ب $\cos 40^o$ ہ $\cos 140^o$ ح $\cos(-30)^o$ یا $\cos(-200)^o$

ج $\tan 60^o$ و $\tan 160^o$ ط $\tan 430^o$ یب $\tan 1000^o$

5) حساب و کتاب کا آلہ استعمال کیے بغیر درج ذیل کی درست قیمیت معلوم کریں۔

ا $\sin 135^o$ ہ $\cos 225^o$ ط $\sin 225^o$ یج $\sin 210^o$

ب $\cos 120^o$ و $\tan(-330)^o$ ی $\cos 630^o$ ید $\tan 675^o$

ج $\sin(-30)^o$ ز $\cos 900^o$ یا $\tan 405^o$ یھ $\cos(-120)^o$

د $\tan 240^o$ ح $\tan 510^o$ یب $\sin(-315)^o$ یو $\sin 1260^o$

6) حساب و کتاب کا آلہ استعمال کیے بغیر وہ کم ترین زاویہ معلوم کریں کہ دی گئی مساوات درست ہو جائیں۔

ا $\cos\theta^o = \frac{1}{2}$ ج $\tan\theta^o = -\sqrt{3}$ ہ $\tan\theta^o = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ ز $\sin\theta^o = -\frac{1}{2}$

ب $\sin\phi^o = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ د $\cos\theta^o = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ و $\tan\phi^o = -1$ ح $\cos\theta^o = 0$

7) حساب و کتاب کا آلہ استعمال کیے بغیر طبیعات مقباس کا حاصل کم ترین زاویہ معلوم کریں کہ مساوات برابر ہو جائیں۔ (اگر دو زاویہ ہوں تو مثبت کو چنیں)۔

ا $\cos\theta^o = -\frac{1}{2}$ ج $\sin\theta^o = -1$ ہ $\sin\phi^o = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ز $\sin\phi^o = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

ب $\tan\phi^o = \sqrt{3}$ د $\cos\theta^o = -1$ و $\tan\theta^o = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$ ح $\tan\phi^o = 0$

8) گودی میں پانی کی سطح (تقریباً 12 گھنٹے بعد چکر دہراتی ہے اور اس کی مساوات $D = A + B\sin 30t^o$ ہے، یہاں D گہرائی کو ظاہر کرتا ہے اور اس کی اکائی میٹر ہے۔ A اور D حثیت مستقل ہیں۔ t وقت ہے۔ جیسے کہ گھنٹوں میں ناپا جائے گا اور یہ کام صبح کے 8:00 بجے کے بعد سے شروع ہوا ہے۔ ہمیں معلوم ہوا کہ پانی کی زیادہ سے زیادہ 7.60 میٹر ہے جبکہ کم سے کم گہرائی 2.2 میٹر ہے۔ B اور A کی قیمت معلوم کریں' دوپہر کے وقت گودی میں پانی کی ایک گہرائی ہو گی۔ آپ کا جواب سینٹی میٹر کی حد تک درست بتائیں۔

10.4 $\sin\theta^o$, $\cos\theta^o$ اور $\tan\theta^o$ کی ترانیم کی تشاکل کی خصوصیات

تعریف : اگر آپ $\sin\theta^o$, $\cos\theta^o$ اور $\tan\theta^o$ کی ترانیم کا بغور جائزہ لیں تو آپ ان میں سے تساکل کی خصوصیات کو دستیاب پائیں گے۔ شکل 5۔10 میں $\cos\theta^o$ کی ترسیم دکھائی گئی ہے۔ $\cos\theta^o$ کی ترنیم عمودی خط کے ساتھ تشاکل میں ہے۔ اس کا مطلب ہے آپ θ کو $-\theta$ سے بدل دیں تو ترسیم پر کوئی اثر نہیں پڑے گا۔

$$\cos(-\theta)^o = \cos\theta^o$$

اس کا مطلب $\cos\theta^o$ کی ترنیم θ کا ایک جفت تفاعل ہے۔ (جیسا کہ حصہ 3۔3 میں بیان کیا گیا ہے) تشاکل کی دیگر خصوصیات بھی ہیں' مثال کے طور پر شکل 8۔10 میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اگر آپ تفاعل میں 180 درجے جمع یا منفی کریں تو آپ کے تفاعل کا نشان بدل جائے گا۔ یعنی اگر تفاعل مثبت تھا تو منفی ہو جائے گا جبکہ منفی تفاعل مثبت ہو جائے گا۔

$$\cos(\theta - 180)^o = -\cos\theta^o$$

ہم اسے مستقیم حرقت کی خصوصیات کہتے ہیں۔

□

یہاں ایک مزید کارآمد خصوصیات بھی موجود ہیں۔ جیسے ہم جفت اور اور مستقیم حرکت کی خصوصیات کے ملاپ سے وجود میں لائے۔

$$\cos(180 - \theta)^o = \cos(\theta - 180)^o = -\cos\theta^o$$

مثلث میں $\cos\theta^o$ کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے آپ کا اس خصوصیت سے واسطہ پڑا ہو گا ۔ $\sin\theta^o$ کی ترمیم جو شکل 9۔10 میں دکھائی گئی ہے،کے لیے بھی ایسی ہی خصوصیات ہیں۔ مشق 10-- کے ایک سوال میں آپ ان خصوصیات کے وجود کو ثابت گے۔ ان کو ثابت کرنے کا طریقہ-- کی خصوصیات کو ثابت کرنے کے طریقے سے مماثلت رکھنا ہے۔ $\cos\theta^o$ اور $\sin\theta^o$ کے تفاعل کے خصوصیات درج ذیل ہیں۔

تواتر کی خصوصیات $\cos(-\theta)^o = \cos\theta^o$,$\sin(-\theta)^o = -\sin\theta^o$

تاک کی خصوصیات $\sin(\theta - 180)^o = -\sin\theta^o$,$\cos(\theta - 180)^o = -\cos\theta^o$

مستقیم حرکت کی خصوصیات

$$\cos(\theta \pm 360)^o = \cos\theta^o$$

$$\cos(180 - \theta)^o = -\cos\theta^o$$

$$\sin(\theta \pm 360)^o = \sin\theta^o$$

$$\sin(180 - \theta)^o = \sin\theta^o$$

اگر آپ شکل 10.5 میں $\tan\theta^o$ کی ترسیم کا حوالہ لیں اور $\sin\theta^o$ اور $\cos\theta^o$ کی ترسیم کے انداز میں اسکا بھی جائزہ لیں تو آپ کو $\sin\theta^o$ اور $\cos\theta^o$ جیسے ہی جوابات ملیں گے۔ $\tan\theta^o$ کے تفاعل کی خصوصیت مندرجہ ذیل ہیں۔ تواتر کی خصوصیت:

$$\tan(\theta \pm 180)^o = \tan\theta^o$$

ناک خصوصیت:

$$\tan(-\theta)^o = -\tan\theta^o$$
$$\tan(180-\theta)^o = -\tan\theta^o$$

اس بات پر غور کریں کہ $\tan\theta^o$ کی ترسیم 180 درجے کے بعد خود کو دہراتی ہے لہذا اس کی مستقیم حرکت کی خصوصیت اور تواتر کی خصوصیت ایک سی ہیں۔

مثال 10.4: خصوصیت ثابت کریں کہ:- $\cos(90-\theta)^o = \sin\theta^o$۔ یہ آسان ہو جائے گا اگر وقفہ $0 < \theta < 90$ یہ تصور کیا جائے۔ ایک قائم زاوے کی حاصل مثلث بنائیں، زاویہ صرف آسانی کے لیے چنا گیا ہے البتہ یہ خصوصیت کسی بھی زاویے کے لیے ثابت کی جاسکتی ہے۔ اگر آپ $\cos\theta^o$ کے کی ترسیم کو زاویے کے مثبت غور میں 90 درجے مستقیم حرکت دیں تو آپ کو $\sin\theta^o$ کا ترسیم ملے گا۔ لہذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\cos(\theta-90)^o = \sin\theta^o$ اور چونکہ $\cos\theta^o$ ایک جفت تفاعل ہے $\cos(90-\theta)^o = \cos(\theta-90)^o$ اسی لیے $\cos(90-\theta)^o = \sin\theta^o$ ثابت ہو گیا۔ □

مشق 10B میں ایک اور خصوصیت جو آپ کو ثابت کرنی ہو گی وہ $\sin(90-\theta)^o = \cos\theta^o$ ہے۔

مشق 10.1: سوال 1: $\sin\theta^o$, $\cos\theta^o$ اور $\tan\theta^o$ کی تشاکل اور تواتر کی خصوصیات استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل نتائج اخذ کریں۔

ا. $\sin(90-\theta)^o = \cos\theta^o$

ب. $\sin(270+\theta)^o = -\cos\theta^o$

ج. $\sin(90+\theta)^o = \cos\theta^o$

د. $\cos(90+\theta)^o = -\sin\theta^o$

ھ. $\tan(\theta-180)^o = \tan\theta^o$

و. $\cos(180-\theta)^o = \cos(180+\theta)^o$

ز. $\tan(360-\theta)^o = -\tan(180+\theta)^o$

ح. $\sin(-90-\theta)^o = -\cos\theta^o$

سوال 2: $y = \tan\theta^o$ اور $y = \frac{1}{\tan\theta^o}$ کی ترسیم بنائیں اور انہی عور پر ثابت کریں کہ $\tan(90-\theta)^o = \frac{1}{\tan\theta^o}$-

سوال 3: مندرجہ ذیل تمام مساوات کیلئے α کی ایسی قیمتیں معلوم کریں کہ جن سے درج ذیل مساوات درست ثابت ہو جائیں۔

ا. $\cos(\alpha-\theta)^o = \sin\theta^o$　　د. $\sin(\theta+2\alpha)^o = \cos(\alpha-\theta)^o$

ب. $\sin(\alpha-\theta)^o = \cos(\alpha+\theta)^o$　　ھ. $\cos(2\alpha-\theta)^o = \cos(\theta-\alpha)^o$

ج. $\tan\theta^o = \tan(\theta+\alpha)^o$　　و. $\sin(5\alpha+\theta)^o = \cos(\theta-3\alpha)^o$

10.5 مثلثی تفاعل کی مساوات کا حل

$\cos\theta^o = k$ کی مساوات کا حل

$\cos\theta^o = k$ کی مساوات حل کرنے کے لیے فرض کریں کہ $-1 \le k \le 1$۔ اگر k اس شرط پر پورا اترے تو مساوات کا کوئی حل نہیں ہو گا۔ شکل 10.10 میں k کی منفی قیمت دکھائی گئی ہے۔ یاد رکھیں ہر 360 درجے کے وقفے میں $\cos\theta^o = k$ کے دو جزر ہوتے ہیں سوائے جب $k = \pm 1$ ہو۔

حساب کتاب کے آلے پر $[\cos^{-1}]$ کا بٹن دبائیں تو آپکو وہ زاویہ ملے گا جس سے مساوات درست ثابت ہو گی۔ کچھ آلات پر الٹ کوسائن کا بٹن ہو گا۔ لیکن بدقسمتی سے اس طریقے میں ہمیں صرف ایک جزر ملے گا۔ عموماً آپ دیے گئے وقفے میں $\cos\theta^o = k$ کے تمام جزر حاصل کرنا چاہتے ہیں۔

$\cos\theta^o = k$ کی مساوات کو حل کرنے کے لیے 3 اقدام ہیں:-

ا. $[\cos^{-1} k]$ معلوم کریں۔

ب. تشاکل کی خصوصیت استعمال کرتے ہوئے مزید ایک جزر حاصل کریں۔ تشاکل کی خصوصیت یہ ہے $\cos(-\theta)^o = \cos\theta^o$۔

ج. تواتر کی خصوصیت یعنی $\cos(\theta \pm 360)^o = \cos\theta^o$ کا استعمال کرتے ہوئے مزید جزر معلوم کریں۔

مثال 10.5:

مساوات $\cos\theta^o = \frac{1}{3}$ کو حل کریں اور $0 \le \theta \le 360$ میں آنے والے تمام جزر ایک اعشاری نقطع تک درست معلوم کریں۔

ا. حساب کتاب کے آلے کا استعمال کریں اور $\cos^{-1}\frac{1}{3} = 70.52...$ معلوم کریں کہ یہ بتائے گئے وقفے کا پہلا جزر ہے.

ب. تشاکل کی خصوصیت $\cos(-\theta)^o = \cos\theta^o$ کا استعمال کریں اور اس خصوصیت سے آپ حاصل کریں گے -70.52 چونکہ دوسرا جذر ہے۔ لیکن یہ بتائے گئے وقفے کا حصہ نہیں ہے.

ج. تواتر کی خصوصیت $\cos(\theta \pm 360)^o = \cos\theta^o$ اور اس سے آپ کو ملے گا -70.52---+360=289.47 اور یہ جزر بتائے گئے وقفے میں ہی ہے۔

لہٰذا $0 \leq \theta \leq 360$ اس وقفے میں 70.52 اور 289.5 ایک اعشاری نقطے تک درست جوابات ہیں۔

□

$-180 \leq \theta \leq 180$ میں مساوات $\cos 3\theta^\circ = -\frac{1}{2}$ کے تمام جز معلوم کریں۔ یہ مثال بھی پچھلی مثال جیسی ہے۔ فرق صرف اتنا ھے کہ اس میں دو فالتو اقدام ھیں ایک ابتداء میں اور ایک انتہا پہ۔ فرض کریں کہ $\phi = 3\theta$ اب مساوات $\cos\phi^\circ = -\frac{1}{2}$ کو حل کرنا ھو گا اوراب یہ مساوات کافی حد تک سادہ ہو چکی ھے ۔ لیکن اگر $\phi = 3\theta$ ھے تو $(-180) \times \leq 3\theta \leq 180\times$ اسی لیے اب نیا وقفہ $-540 \leq \phi \leq 540$ ھو گا ۔ اس طرح ھم اصل مسلے تک آ پہچے ھیں کہ $\cos\phi^0 = -\frac{1}{2}$ کی مساوات ھل کرتی ہے کچھ اس طرح کہ جوابات اسی وقفے میں ہوں(آپ تقریبا 6 جز کے لیے تیار رہیں) پہلا قدم

$$\cos^{-1}(-\frac{1}{2}) = 120$$

دوسرا قدم : دوسرا جز ہو گا -120

تیسرا قدم : تیسری کی خصوصیت کے مطابق دونوں معلام شدہ جز میں 360 جمع اور منفی کرتے ہوئے

$$-120 - 360 = -480,\ -120 + 360 = 240,\ 120 - 360 = -240$$

$$120 + 360 = 480$$

لہٰزا دیۓ گۓ وقفے میں $\cos\phi^\circ = -\frac{1}{2}$ کے جز $-480,\ -240,\ -120,\ 120,\ 240,\ 480$ یہ ھیں

اصل مساوات کی طرف لوٹتے ھوئے

اور یہ $\theta = \frac{1}{3}\phi$ حقیقت مد نظر رکھتے ھوئے اصل جز $-160,\ -80,\ -40,\ 40,\ 80,\ 160$ ہوں گے

$\sin\theta^\circ = k$ کی مساوات کا حل

$\sin\theta^\circ = k$ کی مساوات اگر دیۓ گۓ وقفے میں ہو تو اسی طریقے سے ہی حل ہو گا فرق صرف اتنا ہے کہ $\sin\theta^\circ$ کے لیے تشاکل کی خصوصیت $\sin(180-\theta)^\circ$ ہے ۔ وقفہ $-1 \leqslant k \leqslant 1$ ہے

قدم 1: $\sin^{-1} k$ معلوم کریں

قدم 2: تشاکل کی خصوصیت $\sin{(180-\theta)}^\circ = \sin{\theta^\circ}$ کو استعمال کرتے ہوئے دیگر جز معلوم کریں

قدم 3: تواتر کی خصوصیت $\sin{(\theta \pm 360)}^\circ = \sin{\theta^\circ}$ کا استعمال کرتے ہوئے دیگر جز معلوم کریں مثال : 3-5-10

$180 \leqslant \theta \leqslant -18-$ میں $\sin{\theta^\circ} = -0.7$ کے تمام جز ایک اعشاری نقطے تک درست معلوم کریں

قدم :1 حساب و کتاب کے آلے کا استعمال کرتے ہوئے $\sin^{-1}{(-0.7)} = -44.42\cdots$ معلوم کریں۔ دی گئ مساوات کا پہلا جز ہے

قدم: تشاکل کی خصوصیت $\sin{(180-\theta)}^\circ = \sin{\theta^\circ}$ کا استعمال کرتے ہوئے یہ $180 - (-44.42\cdots) = 224.42\cdots$ دوسرا جز ھے ۔ بد قسمتی سے یہ بنائے گۓ وقفے میں نہیں ھے

قدم 3 : تواتر کی خصوصیت $\sin(\theta \pm 360)^\circ = \sin{\theta^\circ}$ کا استعمال کر کے $224.42\cdots - 360 = -135.57\cdots$ حاصل کریں گے یہ جز بنائے گۓ وقفے میں ہی شامل ہے

مثال : 4-5-10

وقفہ : $0 \leqslant \theta \leqslant 360$ میں مساوات $\sin{\frac{1}{3}(\theta-30)}^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ کو حل کریں اور تمام جز معلوم کریں۔

فرض کریں کہ $\phi = \frac{1}{3}(\theta - 30)$ اور یوں دی گئ مساوات $\sin{\phi^\circ} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ سادہ ہو گئ اور اب ہم اس نئ مساوات کے حل تلاش کریں گے

قدم 1 : $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 60$ یہ بتائے گۓ حصہ میں پہلا جزر ہے

قدم 2: دوسرا جزر $180 - 60 = 120$ لیکن یہ بتائے گۓ وقفے مں نہی آتا۔

قدم 3: 360 کے مضرب کو جمع نفی کرنے سے بھی ھمیں اس وقفے میں ھمیں مزید جزر نہی ملیں گے

اسی وجہ سے مساوات $\sin{\phi^\circ} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ کا وقفہ $-10 \leqslant \phi \leqslant 110$ میں ایک ہی جز ہے اور وہ ہے 60 ۔ اصل مساوات کی طرف لوٹتے ہوئے جبکہ ہم جانتے ہیں کہ $\theta = 3\phi + 30$ تو مساوات کا اصل جزر $\theta = 210$ ہو گا

$\tan{\theta^\circ} = k$ کی مساوات حل کرتے ہوئے

$\tan{\theta^\circ} = k$ کی مساوات بھی ویسے ہی حل ہو گی جیسے ہم نے باقی مثلی تناسب کی مساوات کو حل کیا ۔ یہاں یہ بات اہم ہے کہ ہر 180 درجے کے وقفے میں صرف ایک ہی جزر ملے گا اور مزید جزر کے لیے ہمیں تواتر کی خصوصیت کا سہارا لینا پڑتے گا

قدم 1: $\tan^{-1} k$ معلوم کریں

قدم 2 : تواتر کی خصوصیت $\tan{(180+\theta)}^\circ = \tan{\theta^\circ}$ کا استعمال کرتے ہوئے دیگر جزر تلاش کریں

سوال 1: زاویے کی دو کم سے کم قیمتیں معلوم کریں کہ جن کے لیے درج ذیل مساوات درست ثابت ہوں۔ آپکا جواب ایک اعشاری نقطے تک درست ہونا چاہیے۔

ا. $\cos\frac{1}{2}\theta^\circ = \frac{2}{3}$ ج. $\sin\frac{1}{4}\theta^\circ = -\frac{1}{4}$ ھ. $\tan\frac{3}{4}\theta = 0.5$

ب. $\tan\frac{2}{3}\theta^\circ = -3$ د. $\cos\frac{1}{3}\theta^\circ = \frac{1}{3}$ و. $\sin\frac{2}{3}\theta^\circ = -0.3$

سوال 2: بغیر حساب و کتاب کے آلے کی مدد لیے درج ذیل مساوات کے وقفہ $0 \leqslant t \leqslant 360$ میں جذر (اگر کوئی ہیں تو) معلوم کریں۔

ا. $\sin(2t-30)^\circ = \frac{1}{2}$ د. $\tan\left(\frac{3}{2}t-45\right)^\circ = -\sqrt{3}$ ز. $\cos\left(\frac{1}{5}t-50\right)^\circ = 0$

ب. $\tan(2t-45)^\circ = 0$ ھ. $\cos(2t-50)^\circ = -\frac{1}{2}$ ح. $\tan(3t-180)^\circ = -1$

ج. $\cos(3t+135)^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ و. $\sin\left(\frac{1}{2}t+50\right)^\circ = 1$ ط. $\sin\left(\frac{1}{4}t-20\right)^\circ = 0$

سوال 3: ایک اعشاری نقطے تک z کی تمام قیمتیں معلوم کریں، بشرطیکہ ذیل میں میں دی گئ مساوات درست ثابت ہوں اور تمام قیمتیں اس وقفے $-180 \leqslant z \leqslant 180$ میں ہوں۔

ا. $\sin z^\circ = -0.16$ ج. $(1-\tan z^\circ)\sin z^\circ = 0$ ھ. $\cos(45+z)^\circ = 0.832$

ب. $\cos z^\circ(1+\sin z^\circ) = 0$ د. $\sin z^\circ = 0.23$ و. $\tan(3z-17)^\circ = 3$

سوال 4: وقفے $0 \leq \theta \leq 360$ میں موجود درج ذیل مساوات کے لیے زاویے θ کی قیمت معلم کریں۔

ا. $\sin 2\theta^\circ = \cos 36^\circ$ ب. $\cos 5\theta^\circ = \sin 70^\circ$ ج. $\tan 3\theta^\circ = \tan 60^\circ$

سوال 5:

وقفے $0 \leq \theta \leq$ میں زاویے کی تمام قیمتیں معلوم کریں جنکے لیے مساوات $\sin\theta^\circ\cos\theta^\circ = \frac{1}{2}\tan\theta^\circ$ درست ثابت ہو۔

سوال 6: درجہ ذیل قیمتوں کے لیے مثلثی تفاعل سائن، کوسائن اور ٹینجنٹ کی ایک مثال بنائیں اور اس طرح کے بتائ گی قیمت پے یہ تفاعل خود کو دہراتا ہو۔

ا. 90 ج. 48 ھ. 720

ب. 20 د. 120 و. 600

سوال 7: وقفے $0 \leq \phi \leq 360$ میں درج ذیل کی ترسیم بنائیں، ہر ایک سوال میں تفاعل کے دورانیے کا بھی بتائیں۔

ا. $y = \sin 3\phi^\circ$ د. $y = \tan \frac{1}{3}\phi^\circ$ ز. $y = \sin\left(3\phi - 20\right)^\circ$

ب. $y = \cos 2\phi^\circ$ ھ. $y = \cos \frac{1}{2}\phi^\circ$ ح. $y = \tan 2\phi^\circ$

ج. $y = \sin 4\phi^\circ$ و. $y = \sin\left(\frac{1}{2}\phi + 30\right)^\circ$ ط. $y = \tan\left(\frac{1}{2}\phi + 90\right)^\circ$

سوال 8: قطب شمالی کے ایک مخصوص علاقے میں پورے سال کے تمام دنوں میں روشن گھنٹے d معلوم کرنے کا کلیہ $d = A + B \sin kt^\circ$ جسمیں A,B, اور k ثبت مستقل ہیں اور t دن میں وقت ہے موسم بہار کے بدلاؤ کے بعد سے۔

1. یہ تصور کرتے ہوئے کہ دن میں روشن گھنٹوں کی عددی قیمت 365 دنوں بعد خود کو دہراتی ہے k۔ کی قیمت معلم کریں آپ کا جواب 3 اعشاری نقطوں تک درست ہو۔

2. یہ بتایا گیا ہے کہ سب سے چھوٹے دن میں 6 گھنٹے روشن جبکہ سب سے لمبے دن میں 18 روشن گھنٹے ہیں Bاور A کی قیمت معلوم کریں۔ سال کے نئے دن میں روشن وقت کتنا ہوگا گھنٹوں اور منٹوں میں بتائیں یہ مانتے ہوئے کہ سال کا نیا دن موسموں کی اس تبدیلی سے 80 دن پہلے آتا ہے۔

3. اسی علاقے میں ایک قصبہ ہے جہاں کے لوگ سال میں سو دفعہ تہوار مناتے ہیں اور ان دونوں دن روشن دن 10 گھنٹے کا ہوتا ہے۔ موسموں کے تغیر کو مد نظر رکھتے ہوئے بتائیں کہ یہ کونسے دو دن ہیں

10.6 مثلثی تفاعل کے باہمی روابط

الجبرا میں مساوات حل کرنا آپ کی عادت بن جاتی ہے، جن میں ہم ایک نا معلوم غیر مستقل مقدار، جسے ہم عموماً x، کہتے ہیں، کی قیمت معلم کرتے ہیں جیسے اس مساوات میں $2x + 3 - x - 6 = 7$۔ آپ الجبرائ مساوات کو سادہ کرنے میں بھی میارت رکھتے ہیں جیسے مساوات $2x + 3 - x - 6$ سادہ ہو کے $x - 3$ بن جاتی ہے، آپ کو اندازہ نہیں ہوا لیکن یہ دونوں بالکل الگ طریقہ کار ہیں۔

جب آپ مساوات $2x + 3 - x - 6 = 7$ کو حل کرتے ہیں تو آپ کو معلوم ہوتا ہے کہ اسکا صرف ایک ہی حل ہے $x = 10$، لیکن $2x + 3 - x - 6$ اور $x - 3$ بالکل ایک جیسے ہیں x کی تمام قیمتوں کے لیے، بعض اوقات ان دونوں طرح کی صورتحال میں فرق کرنا ضروری ہوتا ہے۔

اگر دو تراکیب x کی ہر قیمت کے لیے ایک سا جواب دیں تو ایسی تراکیب کو ہو بہو برابر کہا جائے گا۔ اور ایسی تراکیب کو ظاہر کرنے کے لیے ( ) علامت استعمال کی جاتی ہے اور اسے پڑھا جائے گا "ہو بہو برابر ہے". یہ جملہ

$$2x + 3 - x - 6 = x - 3$$

ایک مماثل کہلائے گا۔ لٰہذہ x میں ایک مماثل ایک ایسی مساوات ہے جو x کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہے۔

مثلثی تناسب میں بھی ایسا ہی ہوتا ہے، حصہ 10.2 کے آخر میں یہ دیکھا گیا تھا کہ $\tan\theta^\circ = \frac{\sin\theta^\circ}{\cos\theta^\circ}$ بشرطیکہ $\cos\theta^\circ \neq 0$۔

$$\tan\theta^\circ = \frac{\sin\theta^\circ}{\cos\theta^\circ}$$

مماثل کی علامت استعمال کی جاتی ہے تب بھی جبکہ قوت نمائی قیمتیں موجود ہوں جنکے لیے دونوں اطراف معین نہ ہوں، دہ گئ مثال میں اگر زاویہ 90 کا تاک مضرب ہو تو کوئی بھی طرف معین نہیں ہے لیکن مماثل کی علامت وہاں موجود ہے۔

حصہ 10.1 اور 10.2 میں کی گئ $x = \cos\theta^\circ$ اور $y = \sin\theta^\circ$ کی تعریف سے ایک اور تعلق فوراً سے ذہن میں آتا ہے اگر P ایک اکائی کے ایک دائرے کی باہری حد بندی پر موجود ایک نقطہ ہے ۔ فیثا غورث کے قانون کے مطابق $x^2 = y^2 = 1$ ہے یا ہم کہہ سکتے ہیں کہ $(\cos\theta^\circ)^2 + (\sin\theta^\circ)^2 = 1$

غلط العام میں ہم $(\cos\theta^\circ)^2$ کو $\cos^2\theta^\circ$ کہتے ہیں اور ایسے ہی $(\sin\theta^\circ)^2$ کو $\sin^2\theta^\circ$ کہتے ہیں , زاویے کی ہر قیمت کے لیے $\cos^2\theta^\circ + \sin^2\theta^\circ \equiv 1$۔ ہم اسے بعض اوقات مثلثیات کا فیثاغورث کا کلیہ بھی کہتے ہیں۔

زاویے کی ہر قیمت کے لیے؛ $\tan\theta^\circ \equiv \frac{\sin\theta^\circ}{\cos\theta^\circ}$ بشرطیکہ $\cos\theta^\circ \neq 0$

$$\cos^2\theta^\circ + \sin^2\theta^\circ \equiv 1$$

غلط العام $\cos^n\theta^\circ$ جسکا ہم نے ذکر کیا یہ مثبت طاقتوں کی حد تک تو بہترین ہے ۔ کسی بھی صورت میں $n = -1$ استعمال نہیں کیا جا سکتا کیونکہ یہاں ایک خطرہ ہے آپ اسے یہ $\cos^{-1} x$ سمجھ سکتے ہیں، جبکہ یہ ان زاویوں کے لیے استعمال ہوتا ہے جنکے cosine کی قیمت x ہوتی ہے۔ اگر آپ شک میں گرفتار ہوں تو $(\cos\theta^\circ)^n$ یا $(\cos\theta)^{-n}$ استعمال کریں کیونکہ انکا ایک ہی مطلب ہے جو واضح ہے

آپ اس مساوات $\cos^2\theta + \sin\theta \equiv 1$
کو استعمال کرتے ہوئے کسی بھی مثلث کے کوسائن کلیے کو ثابت کر سکتے ہیں۔

فرض کریں ABC ایک مثلث ہے جسکی اطراف ، BC=a CA=b، اور AB=c ہیں ۔ فرض کریں کہ نقطہ A کارتیسی نظام محدد کے مبدا پے ہے۔ اور AC ایک خط ہے جو کہ x محدد پے x کی سمت میں ہے ۔ جیسا کہ شکل 10.11 میں دکھایا گیا ہے۔

نقطہ C کے محدد (b,0) ہیں، جبکہ B کے محدد $(c\cos A, c\sin A)$ یہ ہیں، جبکہ A زاویے BAC کے لیے ہے۔ اور تب فاصلے کے کلیے کا استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} a^2 &= (b - c\cos A)^2 + (c\sin A)^2 \\ &= b^2 - 2bc\cos A + c^2\cos^2 A + c^2\sin^2 A \\ &= b^2 - 2bc\cos A + c^2(\cos^2 A + \sin A) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \end{aligned}$$

اب آخر میں $\cos^2 A + \sin A = 1$ کا استعمال کرتے ہوئے۔

مثال 10.6: بتایا گیا ہے کہ $\sin\theta = \frac{3}{5}$ اور زاویہ منفرجیہ ہے۔ حساب و کتاب کے آلے سے پرہیز کرتے ہوئے $\cos\theta^0$ اور $\tan\theta^0$ کی قیمت معلم کریں۔

جیسا کہ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$ اور اس سے ہمیں ملے گا $\cos\theta = \pm\frac{4}{5}$۔ جیسا کہ ہم جانتے ہیں زاویہ منفرجیہ ہے . $90\theta180$ لہٰذہ $\cos\theta^0$ منفی ہے، اسی لیے $\cos\theta = -\frac{4}{5}$۔

جیسا کہ $\sin\theta = \frac{3}{5}$ اور $\cos\theta = -\frac{4}{5}, \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}$ □

مثال 10.7: مساوات $3\cos^2\theta + 4\sin\theta = 4$ کو حل کریں اور وقفہ $-180\theta \le 180$ میں آنے والے تمام جذر ایک اعشاری قیمت تک درست معلوم کریں۔

جیسا کہ نظر آ رہا ہے ہم اس مساوات کع حل نہیں کر سکتے لیکن اگر یم اس مساوات میں $\cos^2\theta$ کو $1 - \sin^2\theta$ سے بدل دیں تو، ہمیں نئ مساوات $3(1 - \sin^2\theta) + 4\sin\theta = 4$ ملے گی جو کہ مزید سادہ ہو کہ درج ذیل شکل اختیار کر لے گی؛

$$3\sin^2\theta - 4\sin\theta + 1 = 0$$

یہ $\sin\theta^0$ میں ایک دو طاقتی مساوات ہے جس کے آپ اجزائے ضربی بنا سکتے ہیں $(3\sin\theta - 1)(\sin\theta - 1) = 0$ اور اس سے ہمیں ملے گا $\sin\theta = \frac{1}{3}$ یا $\sin\theta = 1$

ایک جذر تو $\sin^{-1}\frac{1}{3} = 19.47\ldots$، ہے اور باقی جذر $\sin\theta^0$ کی تشاکل کی خصوصیت کی مدد سے جو ہمیں ملے ہیں وہ ہیں $(180 - 19.47\ldots) = 160.52\ldots$ مساوات $\sin\theta = 1$ کا اکلوتا جذر $\theta = 90$, ہے، لہٰذہ تمام جذر 19.5،90 اور 160.5 ہیں۔
□

سوال 1: نیچے بنی ہر ایک مثلث کے لیے

1. فیثا غورث کے کلیے کا استعمال کریں اور تیسری سمت کی لمبائی معلوم کریں۔
2. $\sin\theta^0$، $\cos\theta^0$ اور $\tan\theta^0$ کی درست قیمتیں معلم کریں ۔

سوال 2:

1. یہ بتایا گیا ہے کہ زاویہ A ایک منفرجیہ زاویہ ہے اور یہ کہ $\sin A = \frac{5}{14}\sqrt{3}$ آپ $\cos A^0$ کی درست قیمت معلم کریں۔
2. ہمیں وقفہ $180B \leq 360$ معلوم ہے اور ہم جانتے ہیں کہ $\tan B = -\frac{21}{20}$ آپ $\cos B^0$ کی قیمت معلم کریں۔
3. $\sin C^0$ کی وہ تمام قیمتیں معلوم کریں جن کے لیے $\cos C = \frac{1}{2}$
4. کی وہ تمام قیمتیں معلوم کریں جن کے لیے اس وقفے $-180 < D < 180$ میں مساوات $\tan D = 5\sin D$ درست ثابت ہو۔

سوال 3: اور اس مساوات $\cos^2\theta + \sin^2\theta \equiv 1$ اور اس مساوات $\tan\theta \equiv \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ کا استعمال کریں بشرطیکہ $\cos\theta \neq 0$ اور نیچے دی گئ مساوات کو ثابت کریں۔ .

ا. $\dfrac{1}{\sin\theta} - \dfrac{1}{\tan\theta} \equiv \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

ب. $\dfrac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} \equiv 1 + \dfrac{1}{\cos\theta}$

ج. $\dfrac{1}{\cos\theta} + \tan\theta \equiv \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

د. $\dfrac{\tan\theta\sin\theta}{1-\cos\theta} \equiv 1 + \dfrac{1}{\cos\theta}$

سوال 4: دی گئ تمام مساوات کو زاویے کی قیمت کے لیے حل کریں، اور وقفے $0 \leq \theta \leq 360$ میں زاویے کے جوابات دیں اس بات کو خیال رکھتے ہوئے کہ آپکے جوابات 0.1 کے قریب ترین درست ہوں۔ .

ا. $4\sin^2\theta - 1 = 0$

ب. $\sin^2\theta + 2\cos^2\theta = 2$

ج. $10\sin^2\theta - 5\cos^2\theta + 2 = 4\sin\theta$

د. $4\sin^2\theta\cos\theta = \tan^2\theta$

سوال 5: دیے گئے وقفے $-180 \leq \theta \leq 180$ میں زاویے کی قیمتیں معلوم کریں کہ جن کے لیے $2\tan\theta - 3 = \dfrac{2}{\tan\theta}$۔

سوال 6: درج ذیل کی دہرائی کا نقطہ معلوم کریں .

ا. $\sin x$ ب. $\tan 2x$

سوال 7: $y = \cos x^0$ کی ترسیم کو ذہن میں رکھتے ہوئے یا پھر درج ذیل کو $\cos x^0$ کی صورت میں لکھیں .

ا. $\cos(360 - x)$ ب. $\cos(x + 180)$

سوال 8: مساوات $y = \cos \frac{1}{2}\theta$ کی ترسیم بنائیں اور وقفہ $-360 \leq \theta \leq 360$ میں زاویے کی قیمت معلوم کریں۔ ان نقطوں کے محدد بھی واضع کریں کہ جن پے ترسیم θ اور y محدد کو کاٹے گا۔

سوال 9: درج ذیل مساوات کو زاویے کے لیے حل کریں . آپکا جواب وقفہ $0 \leq \theta \leq 360$ میں ہونا چاہیے .

ا. $\tan \theta = 0.4$ ب. $\sin 2\theta = 0.4$

سوال 10: مساوات $3 \cos 2x = 2$ کو حل کریں اور وقفہ $0 \leq \theta \leq 180$ میں تمام جوابات تحریر کریں۔ آپکے جوابات 0.1 کے قریب ترین ہونے چاہئیں۔

سوال 11:

1. ایک ایسے مثلثی تفاعل کی مثال دیں جو ہر 180 درجے بعد خود کو دہراتا ہو۔
2. مساوات $\sin 3x = 0.5$ کو وقفہ $0x180$ میں آنے والے x کے تمام جوابات معلوم کریں۔

سوال 12: وقفہ $0 \leq \theta \leq 360$ میں زاویے کی وع تمام قیمتیں معلوم کریں کہ جن کے لیے مساوات $2 \cos(\theta + 30)$ درست ثابت ہو۔

سوال 13:

1. مساوات $\sin 2x + \cos(90 - 2x)$ کو کسی ایک مثلثی تفاعل کی صورت میں لکھیں۔
2. وقفہ $0 \leq x \leq 360$ میں مساوات $\sin 2x + \cos(90 - 2x) = -1$ کی x کی تمام قیمتیں معلوم کریں۔

سوال 14: زاویہ A کی وہ کم ترین قیمت معلوم کریں کہ جس کے لیے .

ا. $\sin A = 0.2$ اور $\cos A$ منفی ہوں۔

ب. $\tan A = -0.5$ اور $\sin A$ منفی ہوں۔

ج. $\cos A = \sin A$ دونوں منفی ہوں۔

د. $\sin A = -0.2275$ اور $A > 360$۔

سوال 15: درج ذیل مماثل کو ثابت کریں۔ .

ا. $$\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta \equiv \frac{\cos\theta}{\tan\theta}$$

ب. $$\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} \equiv \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

ج. $$\frac{1}{\tan\theta} + \tan\theta \equiv \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

د. $$\frac{1-2\sin^2\theta}{\cos\theta+\sin\theta} \equiv \cos\theta - \sin\theta$$

سوال 16: درج ذیل تفاعل کے لیے y کی کم ترین اور زیادہ ترین قیمتیں جبکہ x کی کم ترین مثبت قیمت معلوم کریں کہ جس کے لیے یہ تفاعل درست ثابت ہوں۔ .

ا. $y = 1 + \cos 2x$

ب. $y = 5 - 4\sin(x+30)$

ج. $y = 29 - 20\sin(3x - 45)$

د. $y = 8 - 3\cos^2 x$

ھ. $$y = \frac{12}{3+\cos x}$$

و. $$y = \frac{60}{1+\sin^2(2x-15)}$$

سوال 17: درج ذیل مساوات کو زاویے کے لیے حل کریں اور آپنا جواب اس وقفے $0 \le x \le 360$ میں دیں۔ .

ا. $\sin\theta = \tan\theta$

ب. $2 - 2\cos^2\theta = \sin\theta$

ج. $\tan^2\theta - 2\tan\theta = 1$

د. $\sin 2\theta - \sqrt{3}\cos 2\theta = 0$

سوال 18: t کا تفاعل $t(x) = \tan 3x$ ہے۔

1. تفاعل کب t(x) خود کو دہرائے گا۔
2. وقفے $0 \le x \le 180$ کے لیے مساوات $t(x) = \frac{1}{2}$ حل کریں
3. درج ذیل مساوات کے لیے کم سے کم مثبت حل تلاش کریں۔

(ا) $t(x) = -\frac{1}{2}$

(ب) $t(x) = 2$

سوال 19: درج ذیل مسائل میں سے ہر ایک کے لیے ایک مثلثی تفاعل بنائیں جس سے بتائی گئی صورت حال واضح ہو سکے۔

1. ایک نہر میں پانی کی گہرائی کم سے کم 3.6 میٹر اور زیادہ سے زیادہ 6 میٹر کے درمیان تبدیل ہوتی رہتی ہے 24 گھنٹے کے اوقات میں۔
2. ایک کیمیائی کارخانے جو کہ دس دن کے وقفے میں کام کرتا ہے، دن میں کم سے کم 1500 بیرل تیل صاف کرتا ہے جبکہ زیادہ سے زیادہ 2800 بیرل صاف کر پاتا ہے۔
3. دائرہ قطب شمالی کے جنوب کے کچھ قصبوں میں روشن دن 2 سے 22 گھنٹوں کا ہوتا ہے 360 دنوں کے ایک مدار میں۔

سوال 20:

سوال 21: ایک فولادی دوشاخہ مرتعش ہے۔ اسکی ایک شاخ کے آخری سرے کا ہٹاؤ y رکی ہوئی حالت سے زیادہ سے زیادہ ہٹاؤ تک وقت t میں بیان کرنے کے لیے کلیہ ہے۔

$$y = 0.1\sin(100000t)$$

معلوم کریں؛

1. سب سے زیادہ ہٹاؤ اور کس وقت یہ وقوع پزیر ہوگا۔
2. ایک مکمل چکر کے لیے کتنا وقت لگے گا۔
3. ایک سیکنڈ میں کتنے دائرے مکمل کرے گا فولادی دوشاخے کا ارتعاش۔
4. پہلے مکمل دائرے کے دوران وہ وقت بتائیں کہ جب فالادی دوشاخے کا دوسرا سرا اپنی رکی ہوئی حالت سے 0.06 سینٹی میٹر ہٹتا ہے۔

سوال 22:

ایک لچک دار رسی کا ایک کنارہ ایک چوکھٹ سے باندھا گیا ہے جبکہ دوسرا سرا لٹک رہا ہے۔ کھلے سرے پر ایک چھوٹی سی گیند بندھی ہوئی ہے۔ اس لٹکتی ہوئی گیند کو تھوڑا سا نیچے کھینچا جاتا ہے اور پھر چھوڑ دیا جاتا ہے، اس سے بال اس اس لچک دار رسے پر اوپر نیطے مرتعش ہو جاتی ہے۔ گیند کی گہرائی چوکھٹ سے d وقت t کے بعد اس کلیے کی مدد سے معلوم کی جا سکتی ہے

$$d = 100 + 10\cos 500t$$

معلوم کریں کہ؛

1. گیند کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم گہرائی
2. وہ وقت جب گیند اپنے اونچے ترین مقام پے ہو گی۔
3. ایک مکمل ارتعاش کے لیے درکار وقت۔
4. ایک ارتعاش میں وقت کا وہ حصہ کہ جسکے لیے رسی کی لمبائی 99 سینٹی میٹر سے کم رہتی ہے

سوال 23: ایک مرتوش ذرے کا ہٹاؤ y ہے، جو کہ میٹرز میں ماپا جاتا ہے اور جسکے لیے تفاعل $y = a\sin(kt + \alpha)$ ہے۔ جسمیں a میٹرز میں ، وقت t سیکنڈز میں جبکہ k اور α دونوں مستقل ہیں ۔ ایک مکمل ارتعاز کے لیے وقت T سیکنڈز ہے۔ معلوم کریں کہ؛

1. مستقل k کو T کی اکایئوں میں
2. ایک سیکنڈ میں مکمل ہونے والی دائروی ارتعاش، k کی اکائیوں میں۔

سوال 24: ایک جزیرے پر ایک خاص قسم کے پرندوں کی آبادی P تبدیل ہوتی رہتی ہے، اور یہ منحصر کرتی ہے ان کی خوراک، ہجرت، موسم اور شکار پر۔ ایک ماہر ارضیات جو ان پر تحقیق کر رہا تھا اسنے سال میں انکی آبادی کے لیے ایک کلیہ بنایا

$$P = N - C\cos\omega t,$$

اس کلیے میں N،C اور ω مستقل ہیں۔ جبکہ t وقت ہے جسکی اکاے ایک ہفتہ رکھی گئ ہے اور یہ وقت صفر سے شروع ہو رہا ہے یعنی یکم جنوری رات 12 بجے سے۔

1. فرض کریں کہ تفاعل خود کو 50 ہفتوں بعد دہراتا ہے ω کی قیمت معلوم کریں
2. مساوات کا استعمال کریں اور اورN C کی اکائیوں میں جواب دیں

   (ا) سال کے شروع میں اس نسل کے کتنے پرندے پائے جاتے ہیں

   (ب) اس نسل کے پرندوں کی زیادہ سے آبادی اور یہ سال کے کس حصے میں پائی جائے گی

سوال 25: صحرا کے قریبی ایک جزیرے تک جانے والی سڑک اکثر پانی سے ڈھکی ہوتی ہے۔ سمندر کا پانی جب سڑک کے برابر آتا ہے تو سڑک بند ہو جاتی ہے۔ ایک خاص دن پانی کی سطح سمندر سے بلندی 4.6 میٹرز ہے. لہر کی بلندی h بیان کرنے کی لیے یہ $h = 4.6\cos kt$ کلیہ استعمال کیا جا سکتا ہے۔ وقت t سے ظاہر کیا گیا ہے اور یہ وہ وقت ہے جو شروع ہوتا ہے اونچی لہر کے آنے کے بعد سے۔ اور یہ بھی دیکھنے میں آیا ہے کہ اونچی لہر 12 گھنٹے میں ایک بار آتی ہے۔

1. مستقل k کی قیمت معلوم کریں

2. اسی دن ایک عبارت لگا دی گی کہ سڑک تین گھنٹے کے لیے بند ہے۔ یہ مانتے ہوئے کہ حکم نامہ درست ہے، سڑک کی سطح سمندر سے اونچائی معلوم کریں اور آپکا جواب دو اعشاری نقطوں تک درست ہونا چاہیئے

3. دراصل سڑک کی بحالی کے کام میں اسکی سطح بڑھی ہے، اب سڑک صرف 2 گھنٹے 40 منٹ کے لیے بند ہوئی ہے، یہ بتائیں کہ سڑک کی سطح کتنی بلند ہوئی۔

سوال 26: سمندر میں بننے والی لہروں کے لیے سب سے سادہ نظریہ یہ ہے کہ یہ سورج اور چاند کی کشش ثقل کی وجہ سے معرض وجود میں آتی ہیں۔ چاند کی کشش ثقل سورج کی نسبت 9 گناہ زیادہ ہے۔ سورج کی وجہ سے ہونے والا تغیر خود کو 360 دنوں بعد دہراتا ہے جبکہ چاند کے زیر اثر سلسلہ 30 دنوں بعد خود کو دہراتا ہے۔ لہروں کی اونچائی h، وقت کی علامت t ہے جسکی اکائی دن لیا گیا ہے اور تفاعل

$$h = A\cos\alpha t + B\cos\beta t,$$

ہے۔ اس تفاعل میں $A\cos\alpha t$ یہ سورج کے اثر کے لیے ہے جبکہ کلیے کا دوسرا حصہ $B\cos\beta t$ چاند کی کشش ثکل سے پیدا ہونے والی لہروں کے لیے ہے۔ ہمیں بتایا گیا ہے کہ h=5 ہے اور t=0 آپ B، A، α اور β، کی قیمت معلوم کریں۔

باب 11

تفاعل کا مجموعہ اور تفاعل کا الٹ

باب12

وسعت تفرق

باب13

سمتیات

باب 14

ہندسی ترتیبات

باب 15

دہرا تفرقات

سبق مشتق کے اگلے تصور کو پیش کرتا ہے۔ اِس سبق کو مکمل کرنے کے بعد ، آپ اِن باتوں کے اہل ہو جائینگے۔

ترسیمات کی ساخت اور اُن کے حقیقی دُنیا میں اطلاق کے لئے ، دو درجی مشتق کی افادیت کو سمجھنا۔

نقطہِ عظیمت اور نقطہِ اقلیت کے درمیان امتیازی فرق کو سمجھنے کے لئے دو درجی مشتق کو استعمال کرنا۔

نقطہِ موڑ پر دودرجی مشتق کے صفر ہو جانے کے تصور کو سمجھنا۔

15.1 ترسیمات کی تیاری اور اُنکے مفہوم

سبق نمبر 7 میں حاصل ہونے والے نتائج ، کسی تفاعل کی خصوصیات اور مشتق کی قیمتوں کے درمیانی تعلق، صرف اُن تفاعل تک ہی محدود تھے جو کہ اپنے اپنے دائرہ کار میں مسلسل ہوتے تھے۔ اُن تمام نتائج میں اِس بات کو استعمال کیا گیا تھا کہ ترسیم کے کسی خاص نقطے پر مشتق کی قیمت، صرف اُس نقطے پر تفاوت کی پیمائش ہی نہیں کرتا ہے بلکہ وہ خود ایک تفاعل کے طور پر تصور کیا جاتا ہے۔

اِس سبق میں ہمیں مزید ایک پابندی لگانی پڑے گی ۔ اُن تفاعل پر جنکے ترسیم میں اچانک تبدیلی نہیں ہوتی ہے، اُن تفاعل کو ہموار تفاعل کہا جاتا ہے۔ یعنی مثال کے طور پر ، ایک تفاعل $(x - 1)\ x^{\frac{3}{2}}$ کے لئے ، آپ کو اُس کے دائرہ کار میں سے نقطہِ عجب کو باہر نکال دینا ہوگا، جو کہ اِس مثال میں مبدا ہے ۔ (مثال 7.2.3 سے)

ہموار ہونے کی شرط سے ظاہر ہوتا ہے کہ مشتق ، جو کہ خود ایک تفاعل ہے، مسلسل ہے اور اُس کا تفرق لیا جاسکتا ہے۔ اُس کے نتیجے کو دو درجی مشتق کہا جاتا ہے۔ اُسے عام طور پر $f''(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اِسی طرح سے اُسے $\frac{d^2y}{dx^2}$ سے بھی ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 15.1.1 $y = f(x) = x^3 - 3x^2$ کے ترسیم میں، اُن وقفوں کی شناخت کیجئے جہاں $f'(x)$

$f(x)$ اور $f''(x)$ مثبت ہوتے ہوں، اُن کا ترسیمی مفہوم بیان کیجئے۔

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''\left(x\right) = 6x - 6$$

خاکہ 15.1 میں اِس تفاعل ، اُسکے پہلے مشتق اور دوسرے مشتق کی ترسیمات دکھائی گئی ہیں۔
اس خاکہ سے ظاہر ہوتا ہے کہ تفاعل $f\left(x\right) = x^2(x-3)$ میں ، جب $x > 3$, ہو تب $f\left(x\right) > 0$, ہوتا ہے۔ کی x اِن تمام قیمتوں کیلئے کی ترسیم، - محور x کے اُوپر حاصل ہوتی ہے۔
اِسی طرح سے تفاعل $f'\left(x\right) = 3x(x-2)$ میں ، جب $x > 2$ یا $x < 0$ ہو تب ہوتا ہے۔ f(x) کی ترسیم میں، اِس وقفے میں تفاوت کی قیمت مثبت ہوتی ہے، تاکہ f(x) کی قیمت بڑھتی جائے۔
آخر میں، تفاعل $f''\left(x\right) = 6(x-1)$ میں، جب $x > 1$, ہو تب $f''\left(x\right) > 0$ ہوتا ہے۔ ایسا ظاہر ہوتا ہے کہ اِس وقفے میں f(x) کی ترسیم اُوپر کی جانب منحرف ہوتی ہوئی دکھائی دیتی ہے۔
"اُوپر کی جانب منحرف ہونے" کے اِس تصور کو آسانی سے سمجھنے کیلئے ، تفاوت کیلئے حرف g کو استعمال کرتے ہیں
یعنی $g = f'\left(x\right)$ ہوتا ہے۔ اِسی طرح سے $f''\left(x\right) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$ ہوتا ہے، جو کہ x کی مناسبت سے تفاوت کی تبدیلی کی شرح کو ظاہر کرتا ہے۔
جس وقفے میں $f''\left(x\right) > 0$ ہوتا ہے، وہاں تفاوت کی قیمت بڑھتی جاتی ہے، جیسے جیسے x کی قیمت بڑھنے لگتی ہے۔
درجِ بالا خاکہ 15.1 میں درمیانی ترسیم میں اِسے دیکھا جاسکتا ہے، جو کہ ایک مربعی ترسیم ہے جس کا نقطہ راس ((1,-3 ہے۔
اسی لئے اس ترسیم کے بائیں جانب تفاوت کی قیمت نقطہ (1,-2) پر بڑھتے ہوئے 3- ہوجاتی ہے۔ نقطہ اقلیت (2,-4) سے گزرتے ہوئے صفر ہوجاتی ہے اور پھر بڑھ کر مثبت ہوجاتی ہے۔ اس کے بعد جب x > 2 ہوتا ہے تو لگاتار بڑھنے لگتی ہے۔
درجِ بالا خاکہ 15.2 میں تین منحنی دکھائے گئے ہیں۔ اگر $f''\left(x\right) > 0$ ہو تو اُوپر کی جانب انحراف ہوتا ہے اور اگر $f''\left(x\right) < 0$ ہو تو نیچے کی جانب انحراف ہوتا ہے۔ یہاں یہ بات نہایت اہمیت کی حامل ہے کہ یہ خاصیت ہمیشہ تفاوت کی علامت پر منحصر نہیں ہوتی ہے۔ ایک منحنی اُوپر کی جانب منحرف ہوسکتی ہے اگر اُس کا تفاوت مثبت ہو یا منفی ہو یا صفر ہو۔

مثال نمبر 15.1.2
اگر y=f(x) جہاں $x > 0$, $f\left(x\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ ہو اور اُس کا دائرہ کار $x > 0$ ہو۔ تفاعل f (x) کی تفتیش کیجئے۔
دیئے گئے تفاعل $f\left(x\right)$ کو آپ یا تو $\frac{x-1}{x^2}$

اس طرح سے یا $x^{-1} - x^{-2}$

اس طرح سے لکھ سکتے ہیں۔
اسی لئے ،

$$f'(x) = -x^{-2} + 2x^{-3} = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{-x+2}{x^3}$$

اور

$$f''(x) = 2x^{-3} - 6x^{-4} = \frac{2}{x^3} - \frac{6}{x^4} = \frac{2(x-3)}{x^4}$$

ہوتے ہیں۔ دیئے گئے دائرہ کار میں، ایسا لگتا ہے کہ

$$\begin{array}{lll} f(x) < 0, x < 1 & \text{and} & f(x) > 0, x > 1; \\ f'(x) > 0, x < 2 & \text{and} & f'(x) < 0, x > 2; \\ f''(x) < 0, x < 3 & \text{and} & f''(x) > 0, x > 3 \end{array}$$

اس لئے اِس کی ترسیم محور کے نیچے ہوتی ہے اگر $0 < x < 1$ ہو اور محور کے اُوپر ہوتی ہے اگر $x > 1$ ہو۔ اور یہ ترسیم محور کو نقطہ پر قطع کرتی ہے۔ اِس کی تفاوت مثبت ہوتی ہے اگر $0 < x < 2$ ہو اور منفی ہوتی ہے اگر $x > 2$ ہو۔ اس دوران اُس کا نقطہ عظیمت $(2, \frac{1}{4})$ ہوتا ہے۔ اور یہ ترسیم $0 < x < 3$ کیلئے نیچے کی جانب منحرف ہوتی ہے اور $x > 3$ کیلئے اُوپر کی جانب منحرف ہوتی ہے۔
یہ تمام معلومات کافی ہیں جن کے ذریعئے، کی دیئے گئے وقفے میں، فاضل قیمتوں کیلئے ترسیم کی ساخت کا تصور سمجھا جاسکتا ہے۔ لیکن تفتیش مکمل کرنے کیلئے یہ ضروری ہوجاتا ہے کہ کی بہت چھوٹی اور بہت بڑی قیمتوں کیلئے ترسیم کیسی ہوگی۔ اس کیلئے درجِ ذیل تحسیب کرنا چاہیئے مثلاً

$$f(0.01) = 100 - 10000 = -9900$$

اور $f(100) = 0.01 - 0.0001 = 0.0099.$
اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ جب x کی قیمت چھوٹی ہوتی ہے تب y بہت بڑی قدر کیساتھ منفی ہوتی ہے۔ اور جب y کی قیمت بڑی ہوتی ہے تب x بہت چھوٹا لیکن مثبت عدد ہوتا ہے۔
نوٹ:۔ اِس مثال میں دی گئی معلومات کا استعمال کرکے آپ خود اِس کی ترسیم بنانے کی کوشش کیجئے۔ اگر آپ کے پاس ترسیمی تحسیب کار ہو تو اُسے استعمال کرکے اپنے بنائے ہوئے ترسیم کی جانچ کیجئے۔
ترسیم تیار کرنے کی یہ صلاحیت دراصل اُن نقاط کی مشق کرنا ہے جن کے محدد کچھ معنی رکھتے ہوں۔ مثال 15.1.2 میں نقطہ ہماری توجہ کا مرکز ہوتا ہے جہاں ترسیم محور کو قطع کرتی ہے اور نقطہ $(2, \frac{1}{4})$ جو کہ اس ترسیم کا نقطہ عظیمت ہوتا ہے۔ ایک اور دلچسپ نقطہ $(3, \frac{2}{9})$ بھی ہے جہاں ترسیم نیچے کی جانب انحراف سے تبدیل ہوکر اُوپر کی جانب انحراف میں تبدیل ہوجاتا ہے۔ یہاں نوٹ کیجئے کہ اِسی نقطہ پر $f''(x)$ کی قیمت بھی منفی سے مثبت ہورہی ہے، اور $f''(3) = 0$ ہوتا ہے۔
کسی بھی ترسیم کا ایسا نقطہ، جہاں ترسیم ایک جانب انحراف سے تبدیل ہوکر دوسری جانب انحراف دکھاتا ہے اُسے اُس ترسیم کا نقطہ موڑ کہتے ہیں۔
اگر کسی ترسیم میں نقطہ $p.f(q)$ ہوتا ہے۔، نقطہ موڑ کے طور پر موجود ہو تو اُس نقطہ پر ہوتا ہے۔
.215دو درجی مشتق کا عملی استعمال
حقیقی دُنیا میں کئی حالتوں میں دو درجی مشتق کافی اہم ہوتے ہیں، کیونکہ اِن کے ذریعئے ہم پہلے سے ہی مستقبل کی راہیں متعین کرسکتے ہیں۔ مثال کے طور پر، پچھلے کئی وقتوں سے کمپیوٹروں کو گھریلو استعمال کافی بڑھ رہا ہے۔ کمپیوٹر تیار کرنے والے کارخانہ داروں نے t سالوں میں H کمپیوٹرس تیار کرنے کا تخمینہ کیا۔ ایسی حالت میں وقت اور کمپیوٹرس کی تعداد کے درمیان تیار ہونے والے ترسیم کی تفاوت $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ مثبت ہوگی۔ لیکن کمپیوٹرس تیار کرنے کی یہ شرح آگے بھی بڑھ رہی ہے یا کم ہورہی ہے اِسے معلوم کرنے کیلئے کارخانہ داروں کو $\frac{d^2H}{dt^2}$ کی قیمت معلوم کرنا پڑے گا۔ (اگر کمپیوٹرس کی کھپت کی شرح منفی حاصل ہو تو کارخانہ داروں نے اپنے کمپیوٹرس کی کوالیٹی پر غور کرنا ہوگا۔) اِس طرح کے حالات میں کی قیمت کا کافی اثر پڑتا ہے۔ اِسی طرح سے اگر محکمہ موسمیات والے وقت t میں ہوا کے دباو کی p قیمت کے ذریعئے زیادہ یقین کے ساتھ معلومات نہیں دے سکتے اگر منفی ہو۔ لیکن اگر اُنہیں $\frac{dp}{dt^2}$ کی قیمت بھی منفی مل جائے تو وہ یقین کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ موسم میں زبردست تبدیلیاں رونما ہونے والی ہیں۔
اس مشق میں، پہلی اور دوسری مشتق کی معلومات کو استعمال کرکے ترسیم تیار کیجئے۔ اگر آپ ترسیم تیار کرلیتے ہیں تو ترسیمی عداد کو استعمال کرکے اپنی ترسیم کی جانچ کیجئے۔
1۔ f(x)=y جہاں $f(x) = x^3 - x$ ہو کے ترسیم پر غور کیجئے۔
اِس حقیقت کو استعمال کرکے معلوم کیجئے کہ محورx- کو ترسیم کس نقطہ پر قطع کرتا ہے؟ اُس کا ترسیم بھی بنایئے۔
(b) $f(x) = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$ $y = f'(x)$ معلوم کیجئے اور $y = f'(x)$ کی ترسیم بنایئے۔
(c) $y = f''(x)$ معلوم کیجئے اور $y = f''(x)$ کی ترسیم بنایئے۔ (d) اپنے تیار کئے گئے ترسیمات کی مستقل مزاجی معلوم کیجئے۔ مثال کے طور پر، f(x)=y کے ترسیم کی جانچ کیجئے کہ اگر ہو تو ترسیم اُوپر کی جانب منحرف ہوتی ہے۔
2۔

$$y = x^3 + x$$

کی ترسیم کے لئے،
(a) اجزائے ضربی کو استعمال کر کے ثابت کیجئے کہ ترسیم - محور کو صرف ایک بار قطع کرتا ہے۔
(b) $\frac{dy}{dx}$ اور $\frac{d^2y}{dx^2}$ کی قیمتیں معلوم کیجئے۔
(c) وہ وقفہ معلوم کیجئے جہاں ترسیم اُوپر کی جانب منحرف ہو رہی ہے۔
(d)

$$y = x^3 + x$$

کی ترسیم سے حاصل ہونے والی معلومات کو استعمال کیجئے۔
3۔ f(x) = y کی ترسیم تیار کرنے کے لئے اور کی معلومات استعمال کیجئے جہاں
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 9$ (نوٹ کیجئے کہ $x^3 - 3x^2 + 3x - 9 = (x-3)(x^2+3)$
4۔ مندرجہ ذیل کی ترسیمات بنائیے اور اُن نقاط کے محدد معلوم کیجئے جہاں $\frac{dy}{dx} = 0$ اور $\frac{d^2y}{d^2x} = 0$ ہوں۔

ا. $y = x^4 - 4x^2$ ج. $y = x + \frac{1}{x}$ ھ. $y = x + \frac{4}{x^2}$

ب. $y = x^3 + x^2$ د. $y = x - \frac{1}{x}$ و. $y = x - \frac{4}{x^2}$

5۔ (a) مندرجہ ذیل ترسیم قیمت (P) اور وقت (t) کے درمیان تیار کی گئی ہے۔ افراطِ زر کی شرح $\frac{dp}{dt}$ بڑھ رہی ہے۔ اس ترسیم میں $\frac{d^2p}{dt^2}$ کیا ظاہر کرتا ہے اور اُس کی قیمت کے متعلق کیا کہا جاسکتا ہے؟
(b) ترسیم بنائیے جس میں دکھایا گیا ہو کہ قیمتیں بڑھ رہی ہیں۔ لیکن افراطِ زر کی شرح کم ہوتی جارہی ہے جس کا مکمل اضافہ 20 کی طرف جارہا ہے۔
۔ f(x) = y کی ترسیمات کے لئے f `(x) اور f ``(x) کی مثبت یا منفی علامتیں لکھئے۔ (e) اور میں(f) آپ کو متعلقہ وقفے کی حالت کی بھی ضرورت پڑے گی۔
۔ درجِ ذیل ترسیم ایک کمپنی کے شیئرس کی قیمتیں S دکھاتے ہیں۔
(a) اس ترسیم کے ہر مرحلے کے لئے $\frac{dS}{dt}$ اور $\frac{d^2s}{dt^2}$ کے متعلق اظہارِ خیال کیجئے۔
(b)
غیر تکنیکی الفاظ میں وضاحت کیجئے کہ اس ترسیم میں کیا واقع ہورہا ہے؟ 8۔ کولین اپنی اسکول کے لئے نکل چکا ہے، جو کہ اُس کے گھر سے 800 میٹر فاصلے پر واقع ہے۔ اُس کی رفتار، باقی بچے ہوئے فاصلے کے ساتھ راست تناسب میں ہوتی ہے۔ فرض کریں کہ x میٹرس کا فاصلہ اُس نے طے کرلیا ہے اور y میٹرس کا فاصلہ ابھی باقی ہے۔
(a)X بالمقابل t اور y بالمقابل t کے ترسیمات بنائیے
(b) $\frac{dx}{dt}$ $\frac{d^2x}{dt^2}$ $\frac{dy}{dt}$ اور $\frac{d^2y}{dt^2}$ کی علامتیں کیا ہونگی؟
9۔ ایک تابکار عنصر کے انحطاط کی شرح، دیئے گئے وقت t پر، اُس میں موجود جوہروں کی تعداد کے N ساتھ راست تناسب میں ہوتی ہے۔
(a)
اِس معلومات کو ظاہر کرنے کے لئے ایک مساوات لکھئے۔ (b) بالمقابل t N کے لئے ترسیم بنائیے۔ (c) $\frac{d^2N}{dt^2}$ کی علامت کیا ہوتی ہے؟

10۔ درج ذیل تمام معاملات کے لئے y = کیf(x) ترسیمات کے مختلف حصوں کے خاکے تیار کیجئے۔ (مثال کے طور پر، (a) میں، آپ صرف محورy- کے قریب والے حصے کی ترسیم بنا سکتے ہیں کیونکہ x کی دگر قیمتیں نہیں دی گئی ہیں۔)

ا. $f(0) = 3,\ f'(0) = 2,\ f''(0) = 1$ ج. $f(0) = -3,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = 3$

ب. $f(5) = -2,\ f'(5) = -2,\ f''(5) = -2$

3 اقلیتی اور اعظم قیمتوں پر نظر ثانی

پچھلی مشق میں ، آپ نے کچھ مقامات پر دیکھا ہوگا کہ معلومات کے مختلف ٹکڑے آپس میں منضبط ہوتے ہیں۔ یہ بات خاص طور پر اُن نقاط پر بالکل صحیح ثابت ہوتی ہے جہاں ترسیم کی قیمت یا تو اعظم ہو یا اقل ترین۔ اگر آپ نے نشاندہی کی ہوگی کہ اقلیتی نقطے پر f (x)` کی علامت تبدیل ہوتی ہے، تب آپ نے یہ بھی دیکھا ہوگا کہ f (x)`` سے ترسیم اُوپر کی جانب منحرف ہوتی ہے۔

خاکہ .215 میں ایک عام نتیجہ سکھایا گیا ہے:

اگر $f'(q) = 0$ اور $f''(q) > 0$ ہوں تب $x = q$ پر اقل ترین نقطہ حاصل ہوگا۔

اگر $f'(q) = 0$ اور $f''(q) < 0$ ہوں تب $x = q$ پر اعظم ترین نقطہ حاصل ہوگا۔

اِسے اکثر اوقات نہایت آسانی سے استعمال کیا جاسکتا ہے بجائے اِس کے کہ یہ دیکھنا کہ جس نقطہ پر کی علامت تبدیل ہوتی ہے وہاں ترسیم کا اعظم یا اقل ترین نقطہ ہوتا ہے۔

دفع 7.3 میں دکھائے گئے طریقہ کار کو ، درج ذیل انداز میں ترمیم کیا جاسکتا ہے۔

$y = f(x)$ کی ترسیم کے لئے اعظم نقطہ یا اقل ترین نقطہ معلوم کرنا۔

مرحلہ نمبر (1):۔ اُس دائرہ کار کو متعین کیجئے جس میں آپ دلچسپی رکھتے ہوں۔

مرحلہ نمبر (2):۔f (x)` کے لئے ایک فقرہ (Expression) معلوم کیجئے۔

مرحلہ نمبر (3):۔ اُس دائرہ کار میںx کی قیمتوں کی فہرست بنایئے جن کے لئے f (x)` کی قیمت صفر ہو۔ (اگر وہاں حاصل ہونے والی قیمتوں کے لئے f (x)` غیر معروف ہو، تب دفع 7.3 میں دکھائے گئے طریقہ کار کو استعمال کریں۔)

مرحلہ نمبر (4):۔f (x)`` کے لئے ایک فقرہ (Expression) معلوم کیجئے۔

مرحلہ نمبر (5):۔ مرحلہ نمبر (3) میں، کیx ہر قیمت کے لئے f کی(x)`` علامت معلوم کیجئے۔ اگر علامت مثبت ہو تو ترسیم کا اقل ترین نقطہ ہوگا اور اگر علامت منفی ہو تو ترسیم کا اعظم نقطہ ہوگا۔ (اگرf کی(x)`` قیمت صفر حاصل ہوجائے تو پُرانا طریقہ استعمال کیا جائے گا۔)

مرحلہ نمبر (6):۔ کیx ہر قیمت کے لئے، جوکہ اعظم یا اقل ترین نقطہ دیتی ہے، محسوبf(x) کریں۔

نوٹ کیجئے کہ یہ طریقہ کار ، دو حصوں میں منقسم ہوتا ہے۔

اول یہ کہ ، یہ طریقہ صرف ہموار تفاعل کی ترسیمات کے لئے کارآمد ثابت ہوتا ہے۔ اِسی لئے جن نقاط پر f ` (x) غیر معروف ہو وہاں اِسے استعمال نہیں کیا جاسکتا۔

دوم یہ کہ، اگرf ` (q) = 0 اور f `` (q) = 0 ہوں تو x = q پر f(x) کی قیمت یا تو اعظم ہوگی یا اقل ترین ہوگی یا دونوں نہیں۔ اِسے x = 0 پر $f(x) = x^3$ اور $g(x) = x^4$ کا موازنہ کرکے دکھایا جاسکتا ہے۔

آپ آسانی کے ساتھ دیکھ سکتے ہیں کہ f `(0)= f ``(0)=0 اور g `(0)= g ``(0)=0 ۔
لیکن x=0 پر g(x) کی قیمت اقل ترین ہوتی ہے جبکہ وہاں f(x) ناتو اعظم ہوتا ہے اور نا ہی اقل ترین۔
(درحقیقت y=f(x) کی ترسیم میں مبدے پر نقطہ موڑ حاصل ہوتا ہے کیونکہ $f''(x) = 6x$ ہوتا ہے، جوکہ x<0 کیلئے منفی ہوتا ہے اور x>0 کیلئے مثبت۔)
آگے چل کر آپ دیکھیں گے کہ کچھ تفاعل کیلئے دودرجی مشتق معلوم کرنے کیلئے بہت محنت درکار ہوتی ہے۔ ایسے معاملات میں، پُرانا طریقہ کار اپنانا ہی زیادہ موثر ہوتا ہے۔

15.3.1 مثال:
$\mathrm{f}(x) = x^4 + x^5$ کی ترسیم کیلئے اعظم ترین اور اقل ترین نقاط معلوم کیجئے۔
مرحلہ نمبر (1):۔ دیا گیا تفاعل تمام حقیقی اعداد کے لئے معروف ہے۔
مرحلہ نمبر (2):۔

$$\mathrm{f}'(x) = 4x^3 + 5x^4 = x^3(4+5x)$$

مرحلہ نمبر (3):۔ اگر x=0 یا x=-0.8 ہو تو f(x)` =0 ہوتا ہے۔
مرحلہ نمبر (4):۔ $\mathrm{f}''(x) = 12x^2 + 20x^3 = 4x^2(3+5x)$
مرحلہ نمبر (5):۔ $\mathrm{f}''(-0.8) = 4(-0.8)^2(3-4) < 0$ اِس لئے x=-0.8 اعظم نقطہ دیتا ہے۔اِسی طرح سے f ``(0) =0 اِسی لئے پُرانا طریقہ کار استعمال کرنا ہوگا۔
$-0.8 < x < 0$ کے لئے $x^3 < 0$ اور $4+5x > 0$ اِسی لئے $f'(x) < 0$; $x > 0$ کے لئے $f'(x) > 0$ اِسی لئے
$x = 0$ ایک اقل ترین نقطہ ہوتا ہے
مرحلہ نمبر (6):۔ (-0.8 ,0.08192) نقطہ اعظم ہے اور (0 ,0) نقطہ اقلیت
15.3.2 مثال
$y = \frac{(x+1)^2}{x}$ کی ترسیم کیلئے اعظم نقطہ اور اقل ترین نقطہ معلوم کیجئے۔
دیا گیا تفاعل صفر "0" چھاڑ کر باقی تمام حقیقی اعداد کیلئے معروف ہے۔ اِس تفاعل کا مشتق لینے کے لئے اِسے درجِ ذیل انداز میں لکھا جاتا ہے۔
$y = \frac{(x+1)^2}{x} = \frac{x^2+2x+1}{x} = x + 2 + x^{-1}$,
اب اس کا مشتق لیتے ہیں۔
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - x^{-2} = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$, اِسی لئے اگر $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ ہو تو

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm 1$$

, اس کا دوسرے درجہ کا مشتق درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

, اس کی قیمت 2- حاصل ہوتی ہے اگر x=-1
اور اس کی قیمت 2 ہوتی ہے اگر x=1 ۔ اس لئے (-1، 0) ایک نقطہ عظمہ ہوگا اور (4، 1) ایک اقلیتی نقطہ۔ یہاں اقل ترین قیمت ، اعظم

قیمت سے بڑی حاصل ہوئی۔ یہ کیسے ممکن ہوا؟
درج ذیل تفاعل اور مساواتوں کی ترسیمات پر موجود ساکن نقاط کو پلاٹ کرنے اور وضاحت کرنے کیلئے پہلے اور دوسرے درجہ کی مشتق کا استعمال کیجئے۔ اگر یہ طریقہ کار ناکام ثابت ہو تو $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کی علامت کے تبدیل ہونے کو استعمال کرکے اعظم نقطہ، اقل ترین نقطہ اور نقطہ موڑ معلوم کیجئے۔

$$\mathrm{f}(x) = 3x - x^3$$
$$\mathrm{f}(x) = x^3 - 3x^2$$
$$\mathrm{f}(x) = 3x^4 + 1$$
$$\mathrm{f}(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$$
$$\mathrm{f}(x) = \frac{2}{x^4} - \frac{1}{x}$$
$$\mathrm{f}(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$
$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$
$$\mathrm{f}(x) = 2x^3 - 12x^2 + 24x + 6$$
$$y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 - 3$$
$$y = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$$
$$y = 16x - 3x^3$$
$$y = \frac{4}{x^2} - x$$
$$y = \frac{4+x^2}{x}$$
$$y = \frac{x-3}{x^2}$$
$$y = 2x^5 - 7$$
$$y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 1$$

4 منطقی امتیازات

آپ نے دیکھا ہے کہ ہموار تفاعل کی ترسیمات کے لئے، یہ صحیح ہوتا ہے کہ اگر (q,f(q)) ایک نقطہ عظمہ یا اقلیتی نقطہ ہو تب ہوتا f'(q)=0 ہے۔
لیکن اس کا معکوس بیان ، کہ اگر f'(q)=0 ہو تب (q,f(q)) ایک نقطہ عظمہ یا اقلیتی نقطہ ہوگا ، یہ بیان غلط ہوتا ہے۔
آپ اُسے غلط ثابت کر سکتے ہیں ایک متضاد مثال کو استعمال کرکے، مثلاً ایک تفاعل جس کے لئے "اگر۔۔۔۔۔۔" والا حصہ تو موجود ہو لیکن "تب ۔۔۔۔" والا حصہ موجود نا ہو۔
ایسا ایک تفاعل $\mathrm{f}(x) = x^3$ ہے جس میں q = 0 ہے۔ چونکہ $\mathrm{f}'(x) = 3x^2$ ہے
اور f `(x) = 0 ہے، لیکن (0،0) اس تفاعل کیلئے نا تو اعظم نقطہ ہے اور نا ہی اقل ترین نقطہ۔
ایسی ہی صورت حال نقطہ موڑ کے ساتھ بھی آتی ہے۔ ہموار تفاعل کے لئے یہ صحیح ہوتا ہے کہ اگر (p, f(p)) ایک نقطہ موڑ ہو تب f ``(p) = 0ہوتا ہے۔ لیکن اس کے معکوس کے مطابق، اگر f ``(p) = 0 ہو تب نقطہ (p, f(p)) ایک نقطہ موڑ ہوتا ہے، یہ بات غلط ہوتی ہے۔
اس معاملے میں ایک متضاد مثال، x = 0 کے لئے تفاعل $\mathrm{f}(x) = x^4$ کی ہوسکتی ہے۔ چونکہ

$\mathrm{f}''(x) = 12x^2$ ہوتا ہے جس کیلئے f ``(0) = 0 ہوگا۔ لیکن (0،0) ایک نقطہ اقلیت ہے $\mathrm{f}(x) = x^4$ کے ترسیم میں، نا کہ نقطہ موڑ۔
اعلیٰ ریاضیات میں عام مسائل کو مخصوص تفاعل کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ بہت سے مسئلے ایسے ہوتے ہیں جن کے معکوس بھی صحیح ثابت ہوتے ہیں، مثلاً فیثاغورث کا مسئلہ۔ لیکن، جیسا کہ اُوپر مثال میں تھا، اگر کسی مسئلہ کا معکوس غلط ہو، تب یہ بہت اہم ہوجاتا ہے کہ آپ (صحیح) مسئلہ کو

استعمال کر رہے ہیں نا کہ (غلط) معکوس کو۔

15.5 $f(x) = x^4$ سنکیتن کی توسیع

حالانکہ $f(x) = x^4$ بذات خود ایک علامت ہے، اِسی لئے اِسے اجزا میں تقسیم نہیں کرنا چاہیئے لیکن کئی مرتبہ اِسے y کو الگ کر کے لکھنے کے کئی فائدے ہوتے ہیں۔ یعنی اِسے $\frac{d}{dx}y$ اس طرح لکھا جاتا ہے۔ اسی لئے اگر $f(x) = y$ ہو تو آپ اِسے اس طرح لکھ سکتے ہیں،

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$$

ایک نہایت قابل استعمال مخففی انداز ہے۔ مثال کے طور پر اگر $y = x^4$ ہو تب $\frac{dy}{dx} = 4x^3$ ہوگا۔
اِسے مخففی انداز میں اس طرح لکھ سکتے ہیں،

$$\frac{d}{dx}x^4 = 4x^3$$

آپ $\frac{d}{dx}$ کو علامتی ھدایت سمجھ سکتے ہیں جس کے عمل کے بعد مشتق حاصل ہو جاتا ہے۔ آپ نے ایسے تحسیب کار دیکھے ہونگے جو تحسیبی عمل کے علاوہ الجبرا بھی کرتے ہیں۔ اِن میں، اگر آپ ایک تفاعل مثلاً x^4 لیں اور اُسے 'مشتق' کا حکم دیں تب وہ آپ کو ماحصل کے طور پر $4x^3$ پیش کرے گا۔ علامت $\frac{d}{dx}$ کو کبھی کبھی مشتقی عامل بھی کہا جاتا ہے۔ اس طرح یہ علامت 'مشتق کے حکم' لگانے جیسا ہی عمل کرتی ہے۔

اِسی انداز میں دوسرے درجہ کی مشتق میں بھی یہی سنکیتن کو استعمال کیا جاسکتا ہے۔

دوسرے درجہ کی مشتق یعنی $\frac{dy}{dx}$ کا مشتق لینا جسے عام طور پر ہم $\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}$ کے طور پر لکھتے ہیں۔ اگر آپ اس اصطلاح کو سمیٹ کر ایک اصطلا بنائیں تو اُوپری حصہ میں d^2y ہوگا اور نچلے حصہ میں $(dx)^2$ ہوگا۔ یہاں وحدانی خطوط کو ہٹا کر لکھیں تو یہ $\frac{d^2y}{dx^2}$ بن جاتا ہے۔

15.6 اعلیٰ درجی مشتق

دو درجی مشتق پر اکتفا کرنے یا رُک جانے کی کوئی خاص وجہ نہیں ہے۔ چونکہ $\frac{d^2y}{dx^2}$ بذات خود بھی ایک تفاعل ہے، اگر وہ ایک ہموار تفاعل ہو تو اُسکا مزید مشتق لیا جاسکتا ہے جو کہ سہ درجی مشتق ہوگا۔ اِس عمل کو مسلسل جاری رکھنے پر اعلیٰ مشتقوں کا ایک سلسلہ مل جاتا ہے۔
$\frac{d^3y}{dx^3}$، $\frac{d^4y}{dx^4}$، $\frac{d^5y}{dx^5}$ وغیرہ وغیرہ۔ تفاعلی انداز میں اِسے کچھ اس طرح لکھا جاتا ہے

$$f'''(x), f^{(4)}(x), f^{(5)}(x),$$

یہاں آپ نوٹ کیجئے کہ تیسرے درجہ تک مشتق کو ظاہر کرنے کیلئے "dashes" کو استعمال کیا گیا لیکن چوتھے مشتق سے آگے کیلئے وحدانی خطوط میں عدد لکھ کر اُس مشتق کے درجے کا اظہار کیا گیا ہے۔

یہ تمام اعلیٰ درجی مشتقیں، حقیقی دُنیا میں یا ترسیمات کی تیاری میں کوئی خاص تفہیمی کردار نہیں ادا کرتے ہیں۔ لیکن کچھ معاملات میں یہ اہم بھی ہوتے ہیں۔ مثلاً تقربی تحسیب میں اور سلسلہ وار تفاعل کے اظہار کے لئے اِن کا اہم استعمال ہوتا ہے۔

۔ مندرجہ ذیل کیلئے $\frac{d^3y}{dx^3}$ ، ، $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، $\frac{dy}{dx}$ اور $\frac{d^4y}{dx^4}$ معلوم کیجئے۔

$$y = x^2 + 3x - 7$$

$$y = 2x^3 + x + \frac{1}{x}$$

$$y = x^4 - 2$$

$$y = \sqrt{x}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y = x^{\frac{1}{4}}$$

2۔ مندرجہ ذیل کیلئے f`(x) ، f``(x) ، f```(x) اور f(4)(x) معلوم کیجئے۔

$$y = x^2 - 5x + 2$$

$$y = 2x^5 - 3x^2$$

$$y = \frac{1}{x^4}$$

$$y = x^2(3 - x^4)$$

$$y = x^{\frac{3}{4}}$$

$$y = x^{\frac{3}{8}}$$

3۔ اگر $y = x^n$ ہو تو $\frac{d^n y}{dx^n}$ معلوم کیجئے جہاں n ایک مثبت عدد ہے۔

4۔ اگر $y = x^{n+2}$ ہو تو $\frac{d^n y}{dx^n}$ معلوم کیجئے جہاںn ایک مثبت عدد ہے۔

5۔ اگر $y = x^m$ ہو تو $\frac{d^n y}{dx^n}$ معلوم کیجئے جہاں m ایک مثبت عدد ہے اور m < n

متفرق مشق

115۔ x^3-6x^2+9x+6 کی اعظم قیمت اور اقل قیمت معلوم کیجئے، ساتھ ہی ساتھ یہ بھی بتایئے کہ آپ نے اِنہیں کیسے معلوم کیا؟
2۔ تفاعل $\mathrm{f}(x)=16x+\frac{1}{x^2}$ کیلئے اعظم قیمت اور اقل قیمت معلوم کیجئے، ساتھ ہی ساتھ یہ بھی بتایئے کہ آپ نے اعظم اور اقل نقطہ کیسے متعین کیا۔
3۔ تفاعل $\mathrm{f}(x)=\sqrt{x}+\sqrt{30-5x}$ میں اعظم قیمت اور اقل قیمت معلوم کیجئے اور x کی متعلقہ قیمتیں بھی دیجئے۔
4۔ تفاعل $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-4x}$ کی ترسیم میں اعظم نقطہ اور اقلیتی نقطہ کے محدد لکھئے۔
5۔ نسرین کی کافی کے سرد ہونے کی شرح، کافی کے درجہ حرارت θ اور ماحول کے درجہ حرارت α کے فرق کے ساتھ راست تناسب میں ہے۔

θ اور t کے درمیان ترسیم بنایئے. اگر t=0 پر $\alpha=20$ ہو اور

$\theta=95$ ہو. اگر $t>0$ ہو تو θ کی $\theta, \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ اور

$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$ کی علامتیں بتایئے۔
۔ اُڑان کے دوران، ہوائی جہازوں میں ایک مزاحمت محسوس کی جاتی ہے جسے ہوائی رگڑ کہا جاتا ہے۔ ایک مخصوص جہاز کیلئے، کم رفتاروں کے لئے، ہوائی رگڑ کی قیمت

kS^2 کے برابر ہے، جہاں k ایک مستقل ہے جسے ہوائی رگڑ کا ضریب ہے اور S اُس جہاز کی رفتار ہے۔
اگر رفتاروں کو بڑھایا جائے تو رفتار کے ساتھ ساتھ k کی قیمت بھی بڑھتی جاتی ہے۔ اور k بالمقابل S تیار ہونے والی ترسیم درج ذیل ہے۔ (آواز کی رفتار کے قریبی قیمتوںوالے علاقے کو عام طور پر سمعی رکاوٹ کہا جاتا ہے۔)
(a) ترسیم میں، تینوں علاقوں میں $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}S}$ اور $\frac{\mathrm{d}^2k}{\mathrm{d}S^2}$ کی علامتیں بتایئے۔
(b) کس علاقے میں k
کی قیمت نہایت تیزی سے تبدیل ہورہی ہے؟ (c) بہت زیادہ تیز رفتاروں کیلئے k
کی قیمتوں سے کیا نتیجہ اخذ کیا جاسکتا ہے؟ 7۔ ایک کھڑکی کا نچلا حصہ مستطیل نما ہے اور اُوپری حصہ نیم دائرہ نما ہے۔ نچلے مستطیل نما حصے کو ABCD سے دکھایا گیا ہے جس کی چوڑائی 2x ہے اور اُونچائی ہے۔y اُوپری نیم دائرہ نما حصہ کا قطر AB ہے، یعنی نیم دائرے کا نصف قطر ہے۔x
کھڑکی کا مجموعی محیط 10 میٹرس ہے۔x اور π کی شکل میں کھڑکی کے مجموعی رقبے کے لئے فقرہ حاصل کیجئے۔ ساتھ ہی ساتھ x کی وہ قیمت معلوم کیجئے جس کے لئے رقبہ کی قیمت اعظم ہوگی۔ x کی اُس مخصوص قیمت کو معلوم کرنے کیلئے $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ کی قیمت کا استعمال کیجئے۔
۔ اگر a>0 ہو تو، درج ذیل تفاعل کیلئے اعظم اور اقلیت کی تفتیش کیجئے

$$x^2(x-a)$$

$$x^3(x-a)$$

$$x^2(x-a)^2$$

$$x^3(x-a)^2$$

تفاعل

$$x^n(x-a)^m$$

کیلئے ایک انٹگل بنایئے۔

$f^n(x)$ کے لئے ایک فقرہ تیار کیجئے جہاںf(x) درج ذیل ہو۔

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$\mathrm{f}(x) = \sqrt{x}$$

10*۔ درج ذیل مساواتوں کی منحنیوں کیلئے نقطہ موڑ کے محدد معلوم کیجئے۔

$$y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 4$$

$$y = x^2 - \frac{1}{x} + 2$$

باب16

تکمل

باب 17

حجم جسم طواف

یہ باب کسی حجم یا ٹھوس حجم کو تلاش کرنے کے لیے انضمام کے استعمال کے بارے میں ہے۔ جس کو ٹھوس رد عمل کہا جاتا ہے۔جب آپ اس باب کو مکمل کرلیں گے تو آپ x اور y محور میں سے کسی ایک کے بارے میں انقلاب کا حجم تلاش کرنے کے قابل ہو جائیں گے۔

17.1 انقلاب کی جلدیں

O ایک لکیر پر ہے اور O ایک مبدا ہے۔ OA کی ایک لکیر بنائیں۔ جیسا تصور 17.11 میں دکھایا گیا ہے۔لائن OA اور x۔ محور کے سایہ دار دکھائے جانے والے خطے پر غور کریں۔اگر آپ اس خطے کو کے گرد 360^0 کے ذریعے گھماتے ہیں تو،یہ ایک ٹھوس شنک نکال دیتا ہے۔ 17۔2 تصور میں اس طرح سے تعمیر ہونے والی شکل کو انقلاب کا ٹھوس کہا جاتا ہے۔ٹھوس انقلاب کے حجم کو بعض اوقات انقلاب کا حجم کہا جاتا ہے۔

ایک خط کے منحنی خطوط کے حساب کتاب کرنے کے لئے متعدد طریقوں سے انقلاب کے حجم کا حساب لگانا یکساں ہے ، اور اس کی مثال ایک مثال سے دی جاسکتی ہے۔

فرض کریں $y = \sqrt{x}$ کے ترسیم اور $x = 1$ سے $x = 4$ کے ترسیم کے درمیان کے علاقے کو تصویر 17۔3 میں دکھا جا سکتا ہے، x- محور کے گرد انقلاب کا ٹھوس بنانے کے لیے گھمایا جاتا ہے۔کلیدی طور پر ایک اور عام سوال پوچھ کر شروع کرنا ہے۔ اسکا حجم V ہے۔ $x = 1$ سے کسی بھی قدر کی قدر کے انقلاب کا ٹھوس ہے۔ یہ ٹھوس تصویر 17 میں دکھایا گیا ہے۔

فرض کریں δx کو بڑھایا ہوا ہے۔ چونکہ y اور V دونوں ہی x کے افعال ہے۔ اسی سے y اور V میں اضافے کو δy اور δV لکھا جاسکتا ہے۔ تصویر 17.5 میں رنگین حجم میں اضافہ δV کے درمیان ہے۔ فرض نما نلی کی مقدار کی چوڑائی 6 ریڑی δy + y ہے ۔ ان دونوں قرض کا مرکز

تصویر 17۔5 کے دائیں میں دکھایا گیا ہے۔ δV؛ $\pi y^2 \delta x$ اور $\pi(y+\delta y)^2$ کے درمیان ہے۔ جس سے اسکی پیروی ہوتی ہے۔ $\frac{\delta V}{\delta x}$؛ πy^2 اور $\pi(y+\delta y)^2$ کے درمیان میں ہے۔

اب δV کی طرف جاتا ہے اور یہ حصہ 4۔7 کی تعریف میں $\frac{\delta V}{\delta x}$, $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$ کی طرف جاتا ہے۔ تو $y + \delta V$, y کی طرف جاتا ہے۔ اور اس کے بعد

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \pi y^2$$

تو V ایک ایسا فعل ہے ۔ جس کا ماخوز πy^2 ہے۔ اور $y = \sqrt{x}$ $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \pi x$ ہے.

اسی طرح

$$V = \frac{1}{2}\pi x^2 - \frac{1}{2}\pi$$

حجم $x = 4$ تلاش کرنے کے لیے V کے اظہار کے لیے $x = 4$ کی جگہ لیں۔ تو حجم ہے۔

$$\frac{1}{2}\pi \times 4^2 - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi(16-1) = \frac{15}{2}\pi$$

آپ حصہ 16۔3 کو استعمال کر کے آخری حصے کو متعارف کریں گے اور اسے مختصر کریں گے۔

$$V = \int_1^4 \pi y^2 \,\mathrm{d}x = \int_1^4 \pi x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\pi x^2\right]_1^4 = \frac{1}{2}\pi \times 16 - \frac{1}{2}\pi \times 1 = \frac{15}{2}\pi$$

نوٹ کریں کے مثال کے شروع میں جو استدلال استعمال کیا گیا ہے۔ وہ مکمل طور پر عام تھا اور کسی طرح بھی اصل وکر کی مساوات پر انعصار نہیں کرتا تھا-جب $x = a$ اور $x = b$ کے درمیان $y = f(x)$ کا ترسیم ہوتا ہے تو تحت خطہ $a < b$ x-محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ انقلاب کا ٹھوس کا حجم ہوتا ہے۔

$$\int_a^b \pi(f(x))^2 \,\mathrm{d}x \quad \int_a^b \pi y^2 \,\mathrm{d}x$$

مثال 17.1: $x = -1$ اور $x = 1$ کو x-محور کے گرد چار دائیں زاویہ سے گھمایا جاتا ہے۔ اور حجم $y = 1 + x^2$ کے ترسیم کے نیچے پیدا ہوتا ہے۔اسکا حجم تلاش کریں۔

چار دائیں زاویوں کا فقرہ بعض اوقات 360^0 کی جگہ پر مکمل بیان کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔ اور x-محور کے گرد گردش کرتا ہے۔تو مطلوبہ حجم V ہے۔ جہاں

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 \pi y^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \pi \left(1 + 2x^2 + x^4\right) \mathrm{d}x \\ &= \left[\pi\left(x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\right]_{-1}^1 \\ &= \pi\left\{\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) - \left((-1) + \frac{2}{3}(-1)^3 + \frac{1}{5}(-1)^5\right)\right\} = \frac{56}{15}\pi \end{aligned}$$

یہ معمول کی بات ہے نتیجہ π کے عین مطابق متعدد کے طور پر دیا ہے۔اہم اعداد و شمار یا اشاری جگہوں کی دی گئی تعداد کا صحیح جواب دیں۔ اور ثابت کریں کہ بنیاد کے ساتھ ایک شنک کا حجم V دراس r اور اوچائی h $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ہے۔ شنک دینے کے لیے گھومنے والا مثلث تصویر 17.6 میں دکھایا گیا ہے۔ جسکی اوچائی پورے صفے پر تیار کی گئی ہے۔ اور اسکا میلان---پر ہے جو کہ $\frac{r}{h}$ ہے اور مساوات $y = \frac{r}{h}x$ بنتی ہے۔

لہزا یاد رکھے کے n، r اور h ثابت قدم ہیں- اور x پر انعصار نہیں کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \pi y^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^h \pi \left(\frac{r}{h}x\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 \, \mathrm{d}x = \pi \frac{r^2}{h^2} \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h = \pi \frac{r^2}{h^2} \times \frac{1}{3}h^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h \end{aligned}$$

□

17.2 y- محور کے گرد انقلاب کی جلدیں

تصویر 17.7 مع $y = f(x)$ کے ترسیم میں درمیان کا علاقہ $y = c$ اور $y = d$ ہے۔ اور اسے x- محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔جو تصویر 17۔8 میں ٹھوس دکھایا گیا ہے۔ y- محور کے گرد ٹھوس انقلاب کو تلاش کرنے کے لیے کردار کو تبدیل کریں۔ جو کہ حصہ 17.1 میں x اور y کی گفتگو کی گئی ہے۔ خط $y = f(x)$ کے ترسیم سے جڑا ہوا ہے۔ تو لکیر $y = c$ اور $y = d$, y- محور کے گرد گھمایا جاتا ہے، تشکیل شدہ ٹھوس حجم ہوتا ہے۔

$$\int_c^d \pi \, x^2 \, dy.$$

مثال 17.2: خط $y = x^3$ اور اس کے درمیان y- محور سے جڑا ہوا ہے۔ تو پیدا شدہ حجم تلاش کریں۔ اور y- محور کے درمیان $y = 1$ اور $y = 8$ کو 360^0 y- محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

$$\begin{aligned} V &= \int_1^8 \pi \, y^{\frac{2}{3}} \, dy = \pi [\frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}}]_1^8 = \pi(\frac{3}{5} \times 8^{\frac{5}{3}}) - \pi(\frac{3}{5} \times 1^{\frac{5}{3}}) \\ &= \pi(\frac{3}{5} \times 32) - \pi(\frac{3}{5} \times 1) = \frac{93}{5}\pi \end{aligned}$$

□

مشق 17.1: اس مشق کے تمام سوالات کو اپنے جوابات میں π کی ضرب کے طور پر لکھیں۔

ا. جب خط $x = a$ کے درمیان $y = f(x)$ کے ترسیم کے پیدا ہوتا ہے۔ تب حجم تلاش کرے $x = b$ کو 360^0 کے ذریعے x-محور کے گرد گھمایا جاتا ہے؟ .

ا. $f(x) = x; \quad a = 3, \quad b = 5$

ب. $f(x) = x^2; \quad a = 2, \quad b = 5$

ج. $xf(x) = x^3; \quad a = 2, \quad b = 6$

د. $f(x) = \frac{1}{x}; \quad a = 1, \quad b = 4$

ب. جب حجم $x = a$ اور $y = f(x)$ کے درمیان ترسیم کے نیچے بنائے گئے۔ حجم کا پتہ لگائیں۔ $x = b$ کو 360^0 x-محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ .

ا. $f(x) = x + 3; \quad a = 3, \quad b = 9$

ب. $f(x) = x^2 + 1; \quad a = 2, \quad b = 5$

ج. $f(x) = \sqrt{x+1}; \quad a = 0, \quad b = 3$

د. $f(x) = x(x-2); \quad a = 0, \quad b = 2$

ج. جب خط y-محور اور $y = f(x)$ کے ترسیم کے ساتھ جڑا ہوا ہو۔ تب پیدا شدہ حجم تلاش کریں۔ اور $y = c$ اور $y = d$ کی لکیر کو y-محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ تاکہ ٹھوس رستہ نکالا جا سکے۔ .

ا. $f(x) = x^2; \quad c = 1, d = 3$

ب. $f(x) = x + 1; \quad c = 1, d = 4$

ج. $f(x) = \sqrt{x}; \quad c = 2, d = 7$

د. $f(x) = \frac{1}{x}; \quad c = 2, d = 5$

ھ. $f(x) = \sqrt{9 - x}; \quad c = 0, d = 3$

و. $f(x) = x^2 + 1; \quad c = 1, d = 4$

ز. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}; \quad c = 1, d = 5$

ح. $f(x) = \frac{1}{x} + 2; \quad c = 3, d = 5$

د. ہر معاملے مین خطا مندرجہ ذیل منحنی خطوط اور x-محور کے درمیانمنسلک ہوتا ہے۔ x-محور کے گرد 360^0 کے ذریعے پیدا کردہ ٹھوس کا حجم تلاش کریں۔ .

ا. $y = (x+1)(x-3)$

ب. $y = 1 - x^2$

ج. $y = x^2 - 5x + 6$

د. $y = x^2 - 3$

ھ. $y = x$ اور $y = x^2$ کے ترسیموں کے درمیان منسلک خطے R کے ذریعے گھمایا جاتا ہے تو جو حجم ہوتا ہے، اسے تلاش کریں۔ .

ا. x-محور کے گرد ب. y-محور کے گرد

و. $y = x^2$ اور $y = 4x$ کے ترسیموں کے درمیان منسلک خطے R کے ذریعے گھمایا جاتا ہے تو جو حجم ہوتا ہے، اسے تلاش کریں۔ .

ا. x-محور کے گرد ب. y-محور کے گرد

ز. $y = \sqrt{x}$ اور $y = x^2$ کے ترسیموں کے درمیان منسلک خطے R کے ذریعے گھمایا جاتا ہے تو جو حجم ہوتا ہے، اسے تلاش کریں۔ .

ا. x-محور کے گرد ب. y-محور کے گرد

ح. گلاس کا پیالہ y-محور کے ترسیموں کے مابین اس علاقے کے گرد گھماتے ہوئے تشکیل دیا جاتا ہے۔

$y = x^2$ اور $y = x^3$ پیالے میں شیشے کی مقدار مرلوم کریں۔

ط. یہ خط دونوں محوروں سے منسلک ہے۔ لکیر $x = 2$ اور وکر $y = \frac{1}{8}x^2 + 2$ کے ارد گرد گھمایا گیا ہے۔ایک محور بنانے کے لیے y-محور ٹھوس کا حجم تلاش کریں۔

مشق 17.2:

ا. یہ خط وکر $y = x^2 + 1$ x-محور اور لکیر $x = 2$ سے جڑا ہوا ہے۔ x-محور کے گرد گھمایا گیا ہے۔ π اور π کے رحاظ سے تشکیل شدہ ٹھوس کا حجم تلاش کریں۔

ب. یہ وضاحت کریں کے نقاط x, y مرکزہ ایک مطمئن دراس کی مساوات $x^2 + y^2 = a^2$ کی نشاندہی کریں۔ x-محور کت نیم کے اوپر دائرہ گھمایا جاتا ہے۔360^0 کے ذریعے x-محور کو گھمایا جاتا ہے۔دراس کا دائرہ a کی وضاحت کریں۔اضاحت کریں کے حجم V کیوں ہے۔ اس دائرہ کا V مزجانب دیا گیا ہے۔

$$V = 2\pi \int_0 a(a^2 - x^2)dx.$$

یہ ثابت کریں $V = \frac{4}{3}\pi a^3$

ج. مساوات والا بیضوی $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ تصویر میں دکھایا گیا ہے۔ a اور b کا محور ایک ہی ہے۔ a^2 اور b^2 بھضوی شکل بنانے کے لیے x- محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔اس بیضوی کا حجم تلاش کریں۔ b بناتے ہوئے بیضوی کی مقدار کم کریں۔ اور y- محور کے گرد گھمایا جاے۔

د. تصویر میں $y = x^{-\frac{2}{3}}$ عکر دکھایا گیا ہے۔

(ا) دکھائیں کے سایہ دار علاقہ A لامحدود ہے۔

(ب) رنگیں علاقہ B تلاش کریں۔

(ج) A رقبہ کے گرد 360^0 کے ذریعے گھمایا جاتا ہے۔ x- محور حجم تلاش کریں۔

(د) علاقہ B 360^0 کے ذریعے گھمایا جاتا ہے۔ y- محور حجم تلاش کریں۔

ھ. مساوات کاعلاقہ سوال 4 میں دیا گیا ہے۔ ان کی مساوی علاقوں اور جلدوں کی تعقیقات کریں۔

$$(i) \quad y = x^{-\frac{3}{5}}, \qquad\qquad (ii) \quad y = x^{-\frac{1}{4}}.$$

و. نقطہ موڑ اور نقاط کے بتائے ہوئے وکر $y = 9 - x^2$ کا خاکہ بنائیں۔ محور کے ساتھ چو رہا ہے۔ محدود خط جس میں منحنی خطوط پر مشتمل ہوتا ہے۔ اور x- محور R کے زریعے ظاہر ہوتا ہے۔

(ا) R کا رقبہ تلاش کریں اور اسی وجہ سے دوسری صورت میں --- تلاش کریں۔

(ب) جب R کو 360^0 کے ذریعے گھمایا جاتا ہے، تو حاصل کی جانے والی ٹھوس انقلاب کا حجم x- محور کے گرد تلاش کریں۔

(ج) جب R کو 360^0 کے ذریعے گھمایا جاتا ہے،تو حاصل کی جانے والی ٹھوس انقلاب کا حجم y- محور کے گرد تلاش کریں۔

ز. خطے کو منحنی خطوط وکر $y = (x-2)^{\frac{3}{2}}$ ہے۔ جس کے لیے $2 \leq x \leq 4$ ہے۔ جو x- محور کے ساتھ ہے۔ $x = 4$ تلاش کریں۔ π کے لہاظ سے حاصل کردہ ٹھوس کا حجم جب R ہوتا ہے۔ x- محور کے گرد چار زاویوں سے گھمایا جاتا ہے۔

باب18

ریڈیئن

جوابات