uOttawa

CSI 2501 - Structures discrètes

Hiver 2022 Section A

Professeur Jean-Lou De Carufel

Devoir 2

Kien Do (ID: 300163370)

1. Vrai

   Preuve par induction.

   Supposons que $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$ et $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 2\}$. On veut prouver que

   $$P(n) = \forall x\, \forall n\, ((1+x)^n \geq 1 + nx)$$

   Cas de base:
   Soit $n = 2$. Montrons que $P(2)$ est vrai. On a que,

   $$(1+x)^n = (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$$

   Et,

   $$1 + nx = 1 + (2)x = 1 + 2x$$

   Donc, $P(n)$ est vrai pour $n = 2$.

   Hypothèse d'induction

   Supposons que $P(k) = \forall x\, \forall k\, ((1+x)^k \geq 1 + kx)$ où $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$ et $\{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq 2\}$.

   Étape d'induction

   Il faut montrer que l'étape d'induction est vrai pour $P(k+1) = \forall x\, \forall k\, ((1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x)$. Donc,

   $$\begin{aligned}
   &(1+x)^{k+1} = (1+x)^k \times (1+x) \\
   &(1+x)^{k+1} \geq (1+kx) \times (1+x) \qquad \xleftarrow[\text{Remarque que } 1+x \geq 0 \text{ car } x \geq -1]{\text{Par hypothèse d'induction}} \\
   &(1+x)^{k+1} \geq 1 + x + kx + kx^2 \\
   &(1+x)^{k+1} \geq 1 + x(1+k) + kx^2
   \end{aligned}$$

   Remarque que $x \geq -1$, donc que $x^2 \geq 0$. Puisque $x^2 \geq 0$, on a que $kx^2 \geq 0$. Par conséquent,

   $$1 + x(1+k) + kx^2 \geq 1 + x(1+k)$$

   Vu que,

   $$(1+x)^{k+1} \geq 1 + x(1+k) + kx^2$$

   Et

   $$1 + x(1+k) + kx^2 \geq 1 + x(1+k)$$

   On a que

   $$(1+x)^{k+1} \geq 1 + x(1+k)$$

   Puisque $P(k+1)$ est vrai pour tous $k \geq 2$, $x \geq -1$, l'énoncé est vrai.

2. Faux

   Preuve par contradiction.

   Montrons que

   $$\neg\,(\text{l'énoncé}) \equiv \exists x\, \exists n\ ((1+x)^n < 1+nx)$$

   est vrai dans le domaine $\{x \in \mathbb{R}\}$ et $\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \geq 2\}$.

   Prenons $n = 3$, $x = -5$. On voit que,

   Côté gauche:

   $$(1+x)^n = (1+(-5))^3 = (-4)^3 = -64$$

   Côté droit:

   $$1+nx = 1+(-5)(3) = 1-15 = -14$$

   Donc,

   $$(1+x)^n < 1+nx$$

   est faux lorsque $n = 3$, $x = -5$.

   Puisque la contradiction de l'énoncé est vrai, on peut conclure que l'énoncé est faux.