Chapitre 2: Modèle hybride linéarisé dans le cas $1dx - 1dv$

Ceci est un commentaire anonyme : `\commentaire{Test}`

Ceci est un commentaire rédigé par Anaïs : `\commentaire[Anais]{Test}`

Ceci est un commentaire rédigé par Nicolas : `\commentaire[Nicolas]{Test}`

Ceci est un commentaire rédigé par quelqu'un d'autre, son nom s'affiche alors en note en bas de page : `\commentaire[Bob]{Test}` [1]

1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'introduire et de simuler numériquement une hiérarchie de modèles permettant de décrire des systèmes de particules chargées où une population de particules chaudes intéragit avec un plasma ambiant plus froid. Une telle configuration physique peut par exemple être étudiée dans les plasmas de tokamak où les particules alpha (générées par les réactions de fusion) interagissent avec le plasma ambiant. Un autre exemple se trouve dans la haute atmosphère où les électrons énergétiques du vent solaire interagissent avec la magnétosphère terrestre. Des modèles adaptés à ces configurations ont ainsi été obtenus par exemple dans les deux contextes (voir [1], [2] [3] [4] [5] [6]). Le modèle de départ qui servira de référence repose sur une description cinétique pour l'ensemble du plasma considéré. On introduit alors la fonction de distribution des électrons $f(t, x, v) \in \mathbb{R}_+$ solution du modèle de Vlasov-Poisson (les ions sont considérées immobiles, comme étant un fond neutralisant). En supposant que la population électronique peut être séparée entre une population "froide" f_c et une population délectrons énergétiques f_h, une première étape consiste à écrire f comme la somme de ces deux fonctions de distribution $f = f_c + f_h$. Une seconde étape consiste à supposer que les particules froides restent proches d'un équilibre thermodynamique de température $T_c \approx 0$ et peuvent donc être réprésentées par un modèle fluide. On obtient le modèle hybride fluide/cinétique où la partie fluide (linéaire) décrit la dynamique des particules froides alors que les particules chaudes sont décrites à l'aide d'un modèle cinétique. Ce modèle hybride peut encore être simplifié en considérant des perturbations de type ondes de faible amplitude. Les termes non linéaires de la partie fluide sont donc négligés alors que la partie cinétique reste non linéaire. Le modèle ainsi obtenu (voir [1]) est le modèle hybride linéarisé VHL (Vlasov Hybrid Linearized).

Du fait de la forte disparité des vitesses thermiques entre les particules froides et chaudes, le modèle cinétique est très coûteux à résoudre numériquement, notamment car le maillage en vitesse doit être choisi très fin pour capturer la vitesse thermique des particules froides. Cela implique en outre, pour les schémas numériques classiques, une condition restrictive sur le pas de temps et donc des simulations coûteuses. La dérivation de modèles simplifiés moins coûteux à résoudre numériquement est donc d'un grand intérêt. Parmi ces modèles simplifiés, nous considérerons ici le modèle hybride linéarisé VHL étudié dans [1]. Afin d'effectuer une

1. Commentaire rédigé par Bob

étude comparative entre le modèle VHL et le modèle cinétique original et de tester les schémas numériques, nous nous placerons dans le cas de la dimension 1 en espace et en vitesse. Ce cadre nous permettra aussi de poser les bases de l'étude du cas $1d$-$3v$ pour lequel il est beaucoup plus complexe d'effectuer ces comparaisons et ces tests. Ce type d'étude permettra enfin de comprendre le domaine de validité du modèle VHL.

Pour résoudre numériquement le modèle VHL, nous proposons deux méthodes. La première repose sur le fait que le modèle VHL possède une structure géométrique [7][5], [6]. Plus précisément, le modèle VHL possde une structure Hamiltonienne non canonique, ce qui signifie que les équations peuvent être obtenunes à partir d'un crochet de Poisson et d'un Hamiltonien. Cette structure garantit la préservation d'invariants, comme l'énergie totale. L'objectif est d'exploiter cette structure pour construire des schémas numériques qui possèdent un bon comportement en temps long. Le schéma utilisé est un schéma de type splitting construit à partir d'un *splitting* du Hamiltonien. Cette approche permet de combiner astucieusement certains termes du modèle et on est alors amené à résoudre trois sous-systèmes simples (comme dans [8], [9], [10]). Une propriété remarquable est que chacun des sous-systèmes peut être résolu exactement en temps, l'erreur en temps de la méthode provient donc uniquement de la méthode de *splitting* utilisée. Des méthodes d'ordre arbitraire en temps peuvent être obtenues par composition [11]. La deuxième méthode est basée sur un schéma exponentiel [12], [13], [14], [15], [16], [17]. En exploitant le fait que la partie linéaire du modèle VHL peut être résolue exactement et efficacement, on construit alors des schémas de type Lawson d'ordre élevé. Les résultats du chapitre précédent et de [17] sont donc repris et étendus au cas du système VHL.

Pour les deux méthodes en temps (splitting et Lawson), nous avons introduit une technique de pas de temps adaptatif. Pour les méthodes de type Lawson, le cadre des méthode *embedded* [18][19] [20][21] permet de calculer l'erreur locale facilement. Dans le cas des méthodes de splitting, nous utiliserons le travail récent [22] qui propose des méthodes de splitting *embedded.* Des méthodes d'ordre 4(3) seront utilisées dans le cadre de la comparaison (ordre 3 et ordre 4 pour estimer l'erreur locale). Pour l'approximation de l'espace des phases, nous avons choisi une méthode spectrale en espace et une approximation type différences finies d'ordre élevé (ordre 5 en pratique) pour la direction en vitesse.

La première approche (splitting Hamiltonien) comporte des similarités avec les approches proposées dans [23] et [1] ; néanmoins, ces méthodes reposent sur une approximation de type Particle-In-Cell de l'espace des phases alors que nous utilisons des méthodes eulériennes. Ainsi, on est plus dans l'esprit de [8], [10] où on effectue un splitting puis on discrétise alors que dans [23] et [1], on discrétise l'espace des phases puis on discrétise en temps.

Afin de valider les résultats numériques, une étude approfondie des relations de dispersion est effectuée. Ces relations de dispersion sont obtenues par la résolution du modèle VHL linéarisé. À l'aide de transformée de Fourier en espace, de transformée de Laplace en temps, il est en effet possible de déterminer très précisément la phase linéaire des simulations de modèle non linéaire ; on peut calculer le taux d'amortissement ou d'instabilité d'un équilibre perturbé [24], [25], mais aussi reconstruire le mode fondamental du champ électrique. En plus de fournir des informations pour valider de manière quantitative les codes développés, cette analyse nous permet de faire le lien entre les modèles. En effet, en faisant tendre T_c vers zéro dans la relation de dispersion du modèle de Vlasov original, il est possible de retrouver la relation de dispersion du modèle VHL.

Le chapitre est organisé comme suit : nous présentons tout d'abord la hiérarchie de modèles que nous souhaitons étudier, depuis le modèle cinétique jusqu'au modèle hybride linéarisé. La structure géométrique de ce modèle est exhibée en section 3. La section 4 est dédiée à la présentation des méthodes numériques construites pour la résolution du modèle hybride linéarisé. Dans la section 5, les relations de dispersion sont introduites et étudiées. Les sections

6 et 7 contiennent de nombreuses illustrations numériques. La section 6 se concentre sur la comparaison du modèle cinétique avec le modèle hybride linéarisé, alors que dans la section 7, nous étudions les avantages et les inconvénients des deux méthodes numériques pour le modèle hybride linéarisé.

2 Hiérarchie des modèles

Les modèles étudiés dans cette partie sont présentés dans le cas uni-dimensionnel en espace et en vitesse mais les dérivations peuvent être généralisées au cas multi-dimensionnel. Ainsi, notre point de départ est l'équation de Vlasov $1dx - 1dv$ suivante :

$$\begin{cases} \partial_t f + v\partial_x f + E\partial_v f = 0 \\ f(t=0,x,v) = f^0(x,v) \end{cases}, \tag{1}$$

où $f = f(t,x,v)$ représente la densité de particules dans l'espace des phases $\{\,(x,v) \in \Omega \times \mathbb{R}\,\}$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}$, au temps $t \geqslant 0$, f^0 est la condition initiale et $E(t,x)$ désigne le champ électrique qui est obtenu soit par l'équation de Poisson :

$$\partial_x E = \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}v - 1 \tag{2}$$

ou de manière équivalente par l'équation d'Ampère :

$$\partial_t E = -\int_{\mathbb{R}} vf \,\mathrm{d}v + \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}\int_{\mathbb{R}} vf \,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

couplée à une condition initiale $E(t=0,x) = E^0(x)$ qui vérifie l'équation de Poisson (2) au temps initial. Ces deux dernières équations font des systèmes de Vlasov-Poisson (1)-(2) et de Vlasov-Ampère (1)-(3) des équations de transport non linéaire d'une quantité f dans l'espace des phases $\Omega \times \mathbb{R}$. On considérera des conditions périodiques en espace et nulles à l'infini en vitesse.

2.1 Dérivation du modèle de Vlasov hybride linéarisé

Partons du modèle de Vlasov-Ampère (1)-(3) :

$$\begin{cases} \partial_t f + v\partial_x f + E\partial_v f = 0 \\ \partial_t E = -\int_{\mathbb{R}} vf \,\mathrm{d}v + \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}\int_{\mathbb{R}} vf \,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x, \end{cases}$$

avec la condition initiale $(f^0(x,v), E^0(x))$ vérifiant $\partial_x E^0(x) = \int_{\mathbb{R}} f^0(x,v)\,\mathrm{d}v - 1$. On souhaite distinguer la population de particules f en deux : un premier groupe de particules froides f_c dont la vitesse thermique est faible et un second groupe de particules dites chaudes f_h, dont la vitesse thermique est grande. Le modèle de Vlasov-Ampère en considérant ces deux espèces indépendamment s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t f_c + v\partial_x f_c + E\partial_v f_c = 0, \\ \partial_t f_h + v\partial_x f_h + E\partial_v f_h = 0, \\ \partial_t E = -\int_{\mathbb{R}} vf_c \,\mathrm{d}v - \int_{\mathbb{R}} vf_h \,\mathrm{d}v + \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}\int_{\mathbb{R}} vf \,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x, \end{cases}$$

avec la condition initiale $(f_c^0(x,v), f_h^0(x,v), E^0(x))$ vérifiant

$$\partial_x E^0(x) = \int_{\mathbb{R}} f_c^0(x,v)\,\mathrm{d}v + \int_{\mathbb{R}} f_h^0(x,v)\,\mathrm{d}v - 1.$$

La compatibilité $f^0 = f_c^0 + f_h^0$ est nécessaire pour garantir l'équivalence entre les deux modèles.

On souhaite essentiellement travailler sur la variable f_c pour la considérer non plus comme une inconnue cinétique mais fluide (donc ne dépendant plus de la vitesse v mais seulement du temps t et de la position x). En effet, elle représente des particules froides, de faible vitesse, dont on peut supposer qu'elles restent proches d'un équilibre thermodynamique. Pour cela calculons les moments de la première équation en multipliant celle-ci par $(1, v)^\mathsf{T}$ puis en intégrant par rapport à v :

$$\int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} \partial_t f_c \,\mathrm{d}v + \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} v \partial_x f_c \,\mathrm{d}v + \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} E \partial_v f_c \,\mathrm{d}v = 0.$$

On introduit la densité $\rho_c(t, x)$ et la vitesse moyenne $u_c(t, x)$ des particules froides

$$\begin{pmatrix} \rho_c(t, x) \\ \rho_c(t, x) u_c(t, x) \end{pmatrix} = \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} f_c(t, x, v) \,\mathrm{d}v,$$

de sorte que le système aux moments se réécrive

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho_c \\ \rho_c u_c \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} \rho_c u_c \\ \int_{\mathbb{R}} v^2 f_c \,\mathrm{d}v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_c E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Le système (4) n'étant pas fermé, il faut faire une hypothèse sur la répartition en vitesse des particules froides. On utilisera l'approximation "*plasma froid*" utilisé dans la littérature ([6], [1]) qui suppose l'approximation $f_c(t, x, v) = \rho_c(t, x) \delta_{\{v = u_c(t,x)\}}(v)$, ce qui nous permet d'obtenir le système :

$$\begin{cases} \partial_t \rho_c + \partial_x(\rho_c u_c) = 0 \\ \partial_t(\rho_c u_c) + \partial_x(\rho_c u_c^2) - \rho_c E = 0, \end{cases}$$

puisque $\int_{\mathbb{R}} v^2 \rho_c(t, x) \delta_{\{v = u_c(t,x)\}}(v) \,\mathrm{d}v = \rho_c(t, x) u_c^2(t, x)$. Ce modèle est connu dans la littérature sous le nom d'équations d'Euler sans pression.

En considérant le couplage avec le modèle de Vlasov pour les particules chaudes, l'équation d'Ampère et l'équation de Poisson, on obtient ainsi le modèle de Vlasov-Ampère hybride non-linéaire

$$\begin{cases} \partial_t \rho_c + \partial_x(\rho_c u_c) = 0, \\ \partial_t(\rho_c u_c) + \partial_x(\rho_c u_c^2) - \rho_c E = 0, \\ \partial_t f_h + v \partial_x f_h + E \partial_v f_h = 0, \\ \partial_t E = -\rho_c u_c - \int_{\mathbb{R}} v f_h \,\mathrm{d}v + \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \int_{\mathbb{R}} v f_h \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}x + \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \rho_c u_c \,\mathrm{d}x, \\ \partial_x E = \rho_c + \int_{\mathbb{R}} f_h \,\mathrm{d}v - 1, \end{cases} \tag{5}$$

avec les conditions initiales $(\rho_c^0, \rho_c^0 u_c^0, f_h^0, E^0)$ vérifiant

$$\partial_x E^0(x) = \rho_c^0(x) + \int_{\mathbb{R}} f_h^0(x, v) \,\mathrm{d}v - 1.$$

La compatibilité $\int_{\mathbb{R}} (f^0(x, v) - f_h^0(x, v)) \,\mathrm{d}v = \rho_c^0(x)$ est nécessaire pour garantir le lien avec le modèle hybride non-linéaire (5) et le modèle cinétique de départ.

Le modèle (5) peut être réécrit de manière équivalente sous la forme d'un modèle plus simple. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 1. *Le modèle (5) se réécrit sous la forme ($x \in \Omega \subset \mathbb{R}$ and $v \in \mathbb{R}$)*

$$\begin{cases} \partial_t u_c + \frac{1}{2}\partial_x u_c^2 - E = 0, \\ \partial_t f_h + v\partial_x f_h + E\partial_v f_h = 0, \\ \partial_t E = -\rho_c u_c - \int_{\mathbb{R}} v f_h \,\mathrm{d}v + \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \int_{\mathbb{R}} v f_h \,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x + \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \rho_c u_c \,\mathrm{d}x, \\ \end{cases}$$

avec les conditions initiales $(u_c^0, f_h^0, E^0, \rho_c^0)$ vérifiant

$$\partial_x E^0(x) = \rho_c^0(x) + \int_{\mathbb{R}} f_h^0(x,v)\,\mathrm{d}v.$$

La densité ρ_c est obtenue pour tout temps $t \geqslant 0$ par

$$\rho_c(t,x) = \partial_x E(t,x) - \int_{\mathbb{R}} f_h(t,x,v)\,\mathrm{d}v + 1.$$

Démonstration. À partir de la deuxième équation de (5), on écrit

$$\rho_c\partial_t u_c + u_c\partial_t\rho_c + \rho_c u_c\partial_x u_c + u_c\partial_x(\rho_c u_c) - \rho_c E = 0.$$

Grâce à l'équation de continuité (première équation de (5)), on obtient alors, après simplification par ρ_c

$$\partial_t u_c + u_c\partial_x u_c - E = 0.$$

Prenons l'équation d'Ampère et dérivons-la par rapport à la variable x :

$$\partial_x\partial_t E = -\partial_x(\rho_c u_c) - \int_{\mathbb{R}} v\partial_x f_h\,\mathrm{d}v.$$

Or le modèle (5) nous donne

$$-\partial_x(\rho_c u_c) = \partial_t\rho_c \text{ et } v\partial_x f_h = -\partial_t f_h - E\partial_v f_h,$$

ce qui permet d'écrire :

$$\partial_t\partial_x E = \partial_t\rho_c + \int_{\mathbb{R}} (\partial_t f_h + E\partial_v f_h)\,\mathrm{d}v = \partial_t\rho_c + \partial_t\int_{\mathbb{R}} f_h\,\mathrm{d}v.$$

Après intégration en temps entre 0 et t, on obtient :

$$\partial_x E - \partial_x E^0 = \rho_c + \int_{\mathbb{R}} f_h\,\mathrm{d}v - \rho_c^0 - \int_{\mathbb{R}} f_h^0\,\mathrm{d}v.$$

Ayant supposé que initialement on a $\partial_x E^0 = \rho_c^0 + \int_{\mathbb{R}} f_h^0\,\mathrm{d}v - 1$, on obtient finalement :

$$\partial_x E = \rho_c + \int_{\mathbb{R}} f_h\,\mathrm{d}v - 1,$$

ce qui signifie que si l'équation de Poisson est vérifiée initialement, elle est vérifiée pour tout $t \geqslant 0$. □

Dans la littérature physique, le modèle hybride non linéaire est encore simplifié et c'est la version linéarisée de la partie fluide qui est étudiée (voir [1], [6]). Ainsi, on considère maintenant la linéarisation du modèle (1) satisfait par (ρ_c, u_c, E, f_h) autour de l'équilibre donné par $(\rho_c^{(0)}(x), 0, 0, f_h^{(0)}(v))$ avec $f_h^{(0)}(v)$ une fonction paire. L'objectif est d'obtenir un modèle dans lequel la partie fluide est linéaire alors que l'équation cinétique non linéaire est conservée pour les particules chaudes. Remarquons que le terme $\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\int_\mathbb{R} vf_h\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x + \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \rho_c u_c\,\mathrm{d}x$ dans l'équation d'Ampère ne sera pas pris en compte dans la suite pour alléger les notations. On écrit alors

$$\begin{aligned}
\rho_c(t,x) &= \rho_c^{(0)}(x) &&+\varepsilon\rho_c^{(1)}(t,x)\\
u_c(t,x) &= &&\varepsilon u_c^{(1)}(t,x)\\
E(t,x) &= &&\varepsilon E^{(1)}(t,x),\\
f_h(t,x,v) &= f_h^{(0)}(v) &&+\varepsilon f_h^{(1)}(t,x,v),
\end{aligned} \tag{6}$$

et on insère dans les équations fluides du modèle hybride non linéaire pour obtenir (la partie cinétique n'est pas modifiée) :

$$\begin{cases}
\varepsilon\partial_t u_c^{(1)} + \frac{\varepsilon^2}{2}\partial_x\left(u_c^{(1)}\right)^2 - \varepsilon E^{(1)} = 0\\
\varepsilon\partial_t E^{(1)} = -\int_\mathbb{R} v(f_h^{(0)} + \varepsilon f^{(1)})\,\mathrm{d}v - \varepsilon\rho_c^{(0)}u_c^{(1)} - \varepsilon^2\rho_c^{(1)}u_c^{(1)}.
\end{cases}$$

On néglige maintenant les termes non linéaire (en ε^2), ce qui nous permet, sous l'hypothèse $f_h^{(0)}$ paire d'écrire le système suivant :

$$\begin{cases}
\partial_t u_c^{(1)} - E^{(1)} = 0\\
\partial_t E^{(1)} = -\int_\mathbb{R} vf_h^{(1)}\,\mathrm{d}v - \rho_c^{(0)}u_c^{(1)}
\end{cases}$$

soit encore, avec les notations (6) et en utilisant que $\varepsilon\int_\mathbb{R} vf_h^{(1)}\,\mathrm{d}v = \int_\mathbb{R} vf_h\,\mathrm{d}v$ (puisque $f_h^{(0)}(v)$ paire implique $\int_\mathbb{R} vf_h^{(0)}\,\mathrm{d}v = 0$)

$$\begin{cases}
\partial_t u_c - E = 0\\
\partial_t E = -\int_\mathbb{R} vf_h\,\mathrm{d}v - \rho_c^{(0)}u_c.
\end{cases}$$

Le système d'équations de Vlasov hybride linéarisé s'écrit donc finalement :

$$\begin{cases}
\partial_t u_c = E\\
\partial_t E = -\rho_c^{(0)}u_c - \int_\mathbb{R} vf_h\,\mathrm{d}v\\
\partial_t f_h + v\partial_x f_h + E\partial_v f_h = 0,
\end{cases} \tag{7}$$

avec la condition initiale (u_c^0, E^0, f_h^0) et $\rho_c^{(0)}(x)$ tels que $\partial_x E^0(x) = \rho_c^{(0)}(x) + \int_\mathbb{R} f_h^0(x,v)\,\mathrm{d}v - 1$.

Remarque 1. *Tous les calculs précédents se généralisent au cas multi-dimensionel $x, v \in \mathbb{R}^d$ et le modèle hybride non linéaire s'écrit alors*

$$\begin{cases}
\partial_t u_c + (u_c\cdot\nabla_x)u_c = E\\
\partial_t E = -\rho_c u_c - \int_{\mathbb{R}^d} vf_h\,\mathrm{d}v\\
\partial_t f_h + v\cdot\nabla_x f_h + E\cdot\nabla_v f_h = 0,
\end{cases} \tag{8}$$

et le modèle hybride linéarisé s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t u_c = E \\ \partial_t E = -\rho_c^{(0)} u_c - \int_{\mathbb{R}^d} v f_h \,\mathrm{d}v \\ \partial_t f_h + v \cdot \nabla_x f_h + E \cdot \nabla_v f_h = 0, \end{cases} \tag{9}$$

avec les conditions initiales (u_c^0, E^0, f_h^0) *et* $\rho_c^{(0)}(x)$ *tels que* $\nabla_x \cdot E^0(x) = \rho_c^{(0)}(x) + \int_{\mathbb{R}} f_h^0(x,v)\,\mathrm{d}v - 1$.

2.2 Quelques propriétés du modèle hybride linéarisé

Dans cette partie, quelques propriétés du modèle hybride linéarisé sont exhibées.

Proposition 2. *Le modèle hybride linéarisé VHL* (7) *assure la conservation de la masse totale et de l'énergie totale, c'est-à-dire*

$$0 = \frac{d}{dt} \int_\Omega \int_{\mathbb{R}} f_h \mathrm{d}x \,\mathrm{d}v \left(= \frac{d}{dt} \int_\Omega \rho_c^{(0)} \mathrm{d}x \right),$$
$$0 = \frac{d}{dt} \left[\int_\Omega \int_{\mathbb{R}} f_h v^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}v + \int_{\mathbb{R}} \rho_c u_c^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega E^2 \,\mathrm{d}x \right].$$

Remarque 2. *À partir de la conservation de l'énergie totale pour l'équation cinétique*

$$\frac{d}{dt} \left[\int_\Omega \int_{\mathbb{R}} f v^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}v + \int_\Omega E^2 \,\mathrm{d}x \right] = 0,$$

et l'approximation de $f_c(t,x,v)$ *par* $\rho_c(t,x)\delta_{v=u_c(t,x)}(v) + f_h(t,x,v)$*, on peut retrouver la connservation de l'énergie totale pour le modèle VHL grâce au calcul suivant*

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left[\iint_{\Omega\times\mathbb{R}} (f_c + f_h) v^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}v + \int_\Omega E^2 \,\mathrm{d}x \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[\iint_{\Omega\times\mathbb{R}} (\rho_c \delta_{v=u_c(t,x)}(v) + f_h) v^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}v + \int_\Omega E^2 \,\mathrm{d}x \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[\int_\Omega \rho_c u_c^2 \,\mathrm{d}x + \iint_{\Omega\times\mathbb{R}} f_h v^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}v + \int_\Omega E^2 \,\mathrm{d}x \right]. \end{aligned}$$

Démonstration.

• La conservation de la masse s'obtient en intégrant tout d'abord l'équation de Vlasov en espace et en vitesse :

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \int_{\mathbb{R}} f_h \mathrm{d}x\mathrm{d}v + \int_\Omega \int_{\mathbb{R}} E \partial_v f_h \,\mathrm{d}v\mathrm{d}x = 0.$$

Or, avec les conditions aux bords choisies, on a $\frac{d}{dt} \int_\Omega \int_{\mathbb{R}} f_h \mathrm{d}x\mathrm{d}v = 0$ et comme $\rho_c^{(0)}$ ne dépend pas du temps, on déduit la conservation de la masse totale. Notons que $\int_\Omega E\mathrm{d}x = \int_\Omega u\mathrm{d}x = 0$.

• Pour la conservation de l'énergie, on multiplie l'équation de Vlasov par v^2 et on intègre en x, v pour obtenir, après intégration par partie

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \int_{\mathbb{R}} v^2 f_h \mathrm{d}x\mathrm{d}v - 2 \int_\Omega E \Big(\int_{\mathbb{R}} v f_h \mathrm{d}v \Big) \mathrm{d}x = 0.$$

En utilisant l'équation d'Ampère, le deuxième terme devient

$$
\begin{aligned}
2\int_\Omega E\Big(\partial_t E+\rho_c^{(0)}u_c\Big)\mathrm{d}x &= \frac{d}{dt}\int_\Omega E^2\mathrm{d}x+2\int_\Omega E\rho_c^{(0)}u_c\mathrm{d}x,\\
&= \frac{d}{dt}\int_\Omega E^2\mathrm{d}x+2\int_\Omega (\partial_t u_c)\rho_c^{(0)}u_c\mathrm{d}x,\\
&= \frac{d}{dt}\int_\Omega E^2\mathrm{d}x+\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho_c^{(0)}u_c^2\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

où on a utilisé l'équation sur u_c et le fait que $\rho_c^{(0)}$ ne dépende pas du temps. □

3 Structure géométrique du modèle hybride linéarisé VHL

Dans cette partie, nous présentons la structure du modèle hybride linéarisé VHL (7), à savoir son Hamiltonien et son crochet de Poisson. Pour simplifier les notations, nous notons dans cette section $f=f_h$, $\rho_c=\rho_c^{(0)}$ et $u=u_c$. Cette structure permet notamment d'assurer la préservation de nombreux invariants (énergie totale et opérateurs de Casimir entre autres) mais sera à la base d'un *splitting* en temps, dans l'esprit de [8], [9], [23] [10]. Nous aurons besoin d'introduire certaines notations pour pouvoir introduire la structure.

Tout d'abord, rappelons que pour une fonctionnelle donnée $\mathcal{G}(f)$, la dérivée de Fréchet de la distribution $\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta f}(f)$ évaluée au point f, est définie par

$$
\mathcal{G}(f+\delta f)-\mathcal{G}(f)=\int_{\Omega\times\mathbb{R}}\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta f}(f)(x,v)\delta f(x,v)\mathrm{d}x\mathrm{d}v+\mathcal{O}(\delta f^2), \tag{10}
$$

pour toute variation régulière δf. On définit le Hamiltonien associé au modèle VHL (7)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \frac{1}{2}\int_\mathbb{R} E^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\mathbb{R}\rho_c u^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\mathbb{R}\int_\mathbb{R} v^2 f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v, && (11)\\
&= \mathcal{H}_E+\mathcal{H}_u+\mathcal{H}_f. && (12)
\end{aligned}
$$

Les trois termes correspondent respectivement à l'énergie électrique, l'énergie cinétique des particules froides et l'énergie cinétique des particules chaudes. Pour une fonctionnelle $\mathcal{G}(E,u,f)$, on notera $\delta\mathcal{G}/\delta f$, $\delta\mathcal{G}/\delta E$ et $\delta\mathcal{G}/\delta u$ les dérivées de Fréchet de $\mathcal{G}$ par rapport à f, E et u respectivement. On introduit à présent le crochet de Poisson de deux fonctionnelles $\mathcal{F}(E,u,f)$ et $\mathcal{G}(E,u,f)$

$$
\begin{aligned}
\{\mathcal{F},\mathcal{G}\}(u,E,f) =& \int_\mathbb{R}\int_\mathbb{R} f\left(\partial_x\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta f}\partial_v\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta f}-\partial_v\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta f}\partial_x\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta f}\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}x\\
&+\int_\mathbb{R}\left(\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta u}\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta E}-\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta E}\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta u}\right)\mathrm{d}x\\
&+\int_\mathbb{R}\int_\mathbb{R}\left(\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta E}\partial_v f\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta f}-\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta E}\partial_v f\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta f}\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Avec cette notation, le modèle hybride linéarisé (7) se réécrit alors, avec $U=(u,E,f)$ et $\mathcal{H}$ donné par (11)

$$
\partial_t U=\{U,\mathcal{H}\}. \tag{13}
$$

Dans la suite, on vérifie que la réécriture (13) est bien équivalente au modèle VHL. Pour cela, on a besoin des relations suivantes

$$
\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta f}=\frac{v^2}{2},\quad \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta u}=\rho_c u,\quad \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta E}=E.
$$

De plus, par abus de notation, on notera la fonctionnelle associée à la fonction comme suit (par exemple pour u) $u(t,z) = \int_{\mathbb{R}} u(t,x)\delta(x-z)\mathrm{d}x$, de sorte que $\frac{\delta u}{\delta u} = \delta(x-z)$. Pour f, on notera $f(t,x,w) = \int_{\mathbb{R}} f(t,z,v)\delta(x-z)\delta(w-v)\mathrm{d}x\mathrm{d}v$, de sorte que $\frac{\delta f}{\delta f} = \delta(x-z)\delta(w-v)$.

- On calcule dans un premier temps $\{u, \mathcal{H}\}$

$$\partial_t u(t,z) = \{u,\mathcal{H}\} \quad = \quad 0 + \int_{\mathbb{R}} \delta(x-z)E(t,x)\mathrm{d}x + 0 = E(t,z)$$

- Puis on considère $\{E, \mathcal{H}\}$

$$\begin{aligned} \partial_t E(t,z) = \{E,\mathcal{H}\} &= 0 - \int_{\mathbb{R}} \delta(x-z)\rho_c u \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \left(\delta(x-z)\partial_v f \frac{v^2}{2}\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}x \\ &= -\rho_c u(t,z) - \int_{\mathbb{R}} f(t,z,v)v\mathrm{d}v \end{aligned}$$

- Finalement, $\{f, \mathcal{H}\}$ donne

$$\begin{aligned} \partial_t f(t,z,w) = \{f,\mathcal{H}\} &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f \left(\partial_x(\delta(x-z)\delta(w-v))\partial_v \frac{v^2}{2}\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}x \\ &\quad +0 - \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} (E\partial_v f)\,\delta(x-z)\delta(w-v)\mathrm{d}v\mathrm{d}x \\ &= (-v\partial_x f - E\partial_v f)(t,z,w). \end{aligned}$$

Enfin, on peut vérifier que le crochet de Poisson satisfait les propriétés suivantes
— anti-symétrie : $\{F,G\} = -\{G,F\}$
— bilinéarité : $\{F+G,H\} = \{F,H\} + \{G,H\}$
— identité de Jacobi : $\{\{F,G\},H\} + \{\{G,H\},F\} + \{\{H,F\},G\} = 0$.
Les deux premières propriétés sont simples alors que la dernière est habituellement plus compliquée. On utilise les calculs de [10], [26].

4 Schémas numériques

Nous allons maintenant présenter les schémas numériques développés pour approcher la solution du modèle hybride linéarisé (7). Notre but est de comparer deux approches pour la discrétisation temporelle. D'une part, pour profiter de la structure hamiltonienne présentée dans la section 3, nous proposons une méthode de *splitting* hamiltonien en temps, couplée à une méthode de composition d'ordre élevé, en l'occurrence la méthode de Suzuki ([27], [11], [22]). Concernant la discrétisation en espace, nous utilisons la transformée de Fourier discrète, alors que la discrétisation en vitesse est effectuée par une méthode semi-Lagrangienne d'ordre 5. Nous détaillons cette approche dans la sous-section 4.1. D'autre part, le modèle VHL (7) peut être réécrit sous la forme

$$\partial_t U = AU + N(U),$$

avec A une matrice 3×3 et N représente les termes non linéaires. On reconnait une structure particulière qu'un intégrateur exponentiel peut exploiter, en particulier pour éviter une condition CFL trop restrictive induite par le terme de transport en espace (souvent la plus restrictive [17]). Nous présentons dans la sous-section 4.2 la discrétisation en temps de Lawson d'ordre 4 que nous avons choisi d'implémenter. Celle-ci est couplée à une méthode de transformée de Fourier discrète en espace et à une méthode WENO d'ordre 5 en vitesse. Les deux schémas numériques obtenus sont donc d'ordre élevé dans toutes les variables. Pour optimiser le temps de calcul des deux schémas, nous proposons d'utiliser une méthode de pas de temps adaptatif, présentée dans la sous-section 4.3. Pour le cas des schémas exponentiels, cette approche de pas de temps adaptatif est motivée par le fait que le terme non linéaire $E\partial_v f$ ne va pas induire de grand déplacement au moins dans la phase linéaire (car $|E| \ll 1$ dans ce régime), ce qui permettra d'utiliser de grands pas de temps ; dans le cas où E est plus grand, cela signifie que le système tente de reproduire des phénomènes complexes non linéaires, ainsi un pas de temps plus petit devra être considéré pour capturer ces phénomènes.

4.1 Méthode de *splitting* hamiltonien

On construit une méthode numérique de type *splitting* à partir de la décomposition du Hamiltonien

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_E + \mathcal{H}_u + \mathcal{H}_f.$$

Ainsi, avec $U = (u, E, f)$, le *splitting* en temps se déduit de

$$\partial_t U = \{U, \mathcal{H}_E + \mathcal{H}_u + \mathcal{H}_f\} = \{U, \mathcal{H}_E\} + \{U, \mathcal{H}_u\} + \{U, \mathcal{H}_f\}. \tag{14}$$

Dans la suite, on nnontera les solutions correspondantes aux trois différentes parties $\varphi^{[E]}$, $\varphi^{[u]}$ et $\varphi^{[f]}$. On commence par $\varphi^{[E]}(U)$ solution de $\partial_t U = \{U, \mathcal{H}_E\}$,

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \{u, \mathcal{H}_E\} = E \\ \partial_t E &= \{E, \mathcal{H}_E\} = 0 \\ \partial_t f &= \{f, \mathcal{H}_E\} = -E\partial_v f \end{aligned} \tag{15}$$

Puis, on considère $\partial_t U = \{U, \mathcal{H}_u\}$ (dont la solution est $\varphi^{[u]}(U)$)

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \{u, \mathcal{H}_u\} = 0 \\ \partial_t E &= \{E, \mathcal{H}_u\} = -\rho_c u \\ \partial_t f &= \{f, \mathcal{H}_u\} = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Enfin, on écrit les équations associées à $\partial_t U = \{U, \mathcal{H}_f\}$ (dont la solution est $\varphi^{[f]}(U)$),

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \{u, \mathcal{H}_f\} = 0 \\ \partial_t E &= \{E, \mathcal{H}_f\} = -\int_{\mathbb{R}} vf \, \mathrm{d}v \\ \partial_t f &= \{f, \mathcal{H}_f\} = -v\partial_x f \end{aligned} \tag{17}$$

Ainsi, la solution $\varphi(U)$ de (14) sera approchée par la composition de $\varphi^{[u]}(U)$, $\varphi^{[E]}(U)$ et $\varphi^{[f]}(U)$. Par exemple, un splitting de Lie-Trotter permet d'approcher $\varphi(U)$ grâce à $\varphi(U) \approx \varphi^{[E]} \circ \varphi^{[u]} \circ \varphi^{[f]}(U)$. Une remarque importante est que chaque sous-système peut être résolu exactement en temps de sorte que l'erreur en temps ne provient que du splitting.

4.1.1 Résolution de chaque sous-système

Nous nous intéressons à la semi-discrétisation en temps du *splitting* hamiltonien donné par les trois systèmes (15)-(16)-(17). Soit $\Delta t > 0$ un pas de temps, on définit $t^n = n\Delta t$ pour $n \geqslant 0$ et on note U^n l'approximation de $U(t^n)$. Connaissant U^n, nous souhaitons calculer U^{n+1}. Pour ne pas multiplier les notations, nous notons dans chaque étape du *splitting* $\tilde{U}^n$ le résultat de l'étape précédente (pour la première étape $\tilde{U}^n = U^n$). Il est important dans une méthode de *splitting* de résoudre exactement chaque sous-système. Nous résolvons chaque système de la manière suivante.

- $U_{\Delta t}^{[E]} = \varphi_{\Delta t}^{[E]}(\tilde{U}^n)$ **:** dans cette étape, E est constant, par conséquent l'intégration en temps de l'équation $\partial_t u_c = E$ ne pose pas de problème :

$$u_{c\,\Delta t}^{[E]} = \tilde{u}_c^n + \Delta t \tilde{E}^n$$

La deuxième équation $\partial_t E = 0$ se résout par une simple copie des données :

$$E_{\Delta t}^{[E]} = \tilde{E}^n$$

La troisième équation $\partial_t f_h + E \partial_v f_h = 0$ est un transport en v, on pourrait souhaiter résoudre cette équation par une transformée de Fourier en v, mais pour effectuer une comparaison avec la méthode de Lawson que nous verrons par la suite, nous utiliserons ici une méthode semi-lagrangienne, par conséquent le problème se résout en remontant une caractéristique.

$$f_{h\,\Delta t}^{[E]} = \tilde{f}_h^n(x, v - \Delta t \tilde{E}^n)$$

On synthétise cela avec :

$$U_{\Delta t}^{[E]} = \varphi_{\Delta t}^{[E]}(\tilde{U}^n) = \begin{pmatrix} \tilde{u}_c^n + \Delta t \tilde{E}^n \\ \tilde{E}^n \\ \tilde{f}_h(x, v - \Delta t \tilde{E}^n) \end{pmatrix}$$

- $U_{\Delta t}^{[u]} = \varphi_{\Delta t}^{[u]}(\tilde{U}^n)$ **:** dans cette étape les variables u_c et f_h n'évoluent pas au cours du temps, il n'y a qu'une équation différentielle sur E que l'on peut résoudre de façon exacte. Pour la variable u_c, respectivement f_h, on a l'équation $\partial_t u_c = 0$, respectivement $\partial_t f_h = 0$, ce qui nous donne :

$$u_{c\,\Delta t}^{[u]} = \tilde{u}_c^n \qquad f_{h\,\Delta t}^{[u]} = \tilde{f}_h^n$$

Enfin l'équation sur E : $\partial_t E = -\rho_c^0 u_c$:

$$E_{\Delta t}^{[u]} = \tilde{E}^n - \Delta t \rho_c^0 \tilde{u}_c^n$$

On résumera cette étape par :

$$U_{\Delta t}^{[u]} = \varphi_{\Delta t}^{[u]}(\tilde{U}^n) = \begin{pmatrix} \tilde{u}^n \\ \tilde{E}^n - \Delta t \rho_c \tilde{u}_c^n \\ \tilde{f}_h^n \end{pmatrix}$$

- $U_{\Delta t}^{[f]} = \varphi_{\Delta t}^{[f]}(\tilde{U}^n)$ **:** pour résoudre cette étape, la première équation $\partial_t u_c = 0$ ne présente pas de difficulté :

$$u_{c\,\Delta t}^{[f]} = \tilde{u}_c^n$$

la troisième équation $\partial_t f_h + v \partial_x f_h = 0$ se résout simplement après une transformée de Fourier en x, et elle peut se résoudre exactement pour tout $s \in [t^n, t^{n+1}]$:

$$f_{h\,\Delta t}^{[f]} = f_h^{[f]}(\Delta t) \qquad \hat{f}_h^{[f]}(s) = e^{-ikv(s-t^n)} \hat{\tilde{f}}_h^n,$$

où $\hat{\tilde{f}}_h^n$ désigne la transformée de Fourier de $\tilde{f}_h^n$ en x et k désigne la variable de Fourier. La deuxième équation $\partial_t E = -\int v f_h \,\mathrm{d}v$ profite de la connaissance exacte pour tout temps de

f_h sur l'intervalle de temps considéré, cela permet d'effectuer une intégration en temps sans difficulté, en effet on a :

$$\begin{cases} \partial_t E = -\int v f_h \,\mathrm{d}v \\ \hat{f}_h^{[f]}(s) = e^{-ikv(s-t^n)}\hat{\tilde{f}}_h^n \ , \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

On insère l'équation sur $f_h^{[f]}(s)$, pour tout $s \in [t^n, t^n + \Delta t]$, on travaille sur les modes de Fourier, une intégration en temps sur l'intervalle $[t^n, t^n + \Delta t]$ nous permet d'obtenir ($\hat{E}_{\Delta t}^{[f]}$ et $\hat{\tilde{E}}^n$ désignent les transformées de Fourier de $E_{\Delta t}^{[f]}$ et $\tilde{E}^n$)

$$\begin{aligned} \hat{E}_{\Delta t}^{[f]} &= \hat{\tilde{E}}^n - \int_{t^n}^{t^n+\Delta t} \int_{\mathbb{R}} v e^{-ikv(s-t^n)} \hat{\tilde{f}}_h^n \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}s \\ &= \hat{\tilde{E}}^n - \int_{\mathbb{R}} v \hat{\tilde{f}}_h^n \int_{t^n}^{t^n+\Delta t} e^{-ikv(s-t^n)} \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}v \\ &= \hat{\tilde{E}}^n - \int_{\mathbb{R}} v \hat{\tilde{f}}_h^n \left[\frac{-1}{ikv} \left(e^{-ikv\Delta t} - 1 \right) \right] \mathrm{d}v \\ &= \hat{\tilde{E}}^n - \frac{i}{k} \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-ikv\Delta t} - 1 \right) \hat{\tilde{f}}_h^n \,\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

On synthétise cela avec :

$$U_{\Delta t}^{[f]} = \varphi_{\Delta t}^{[f]}(\tilde{U}^n) = \begin{pmatrix} \tilde{u}_c^n \\ \hat{\tilde{E}}^n - \frac{i}{k} \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-ikv\Delta t} - 1 \right) \hat{\tilde{f}}_h^n \,\mathrm{d}v \\ e^{-ikv\Delta t} \hat{\tilde{f}}_h^n \end{pmatrix}$$

On a ainsi chacune de nos 3 étapes qui est résolue de manière exacte. Le pas de temps d'intégration Δt est à voir comme un paramètre de la résolution de chaque sous étape, ce qui permet en les réalisant successivement sur un pas de temps Δt, d'obtenir un *splitting* de Lie. Mais nous pouvons les concaténer différemment, avec des pas d'intégration différents, pour construire la méthode de Strang ou une méthode d'ordre plus élevé que nous allons voir dans la sous-section suivante, la méthode de Suzuki.

4.1.2 Composition d'ordre élevé

On s'intéresse à une méthode en temps d'ordre élevé, la méthode de Suzuki [27]. Celle-ci se construit à partir de la méthode de Strang [28] dont la formulation à 3 étapes s'écrit comme suit :

$$U^{n+1} = S_{\Delta t}(U^n) = \varphi_{\Delta t/2}^{[E]} \circ \varphi_{\Delta t/2}^{[u]} \circ \varphi_{\Delta t}^{[f]} \circ \varphi_{\Delta t/2}^{[E]} \circ \varphi_{\Delta t/2}^{[u]}(U^n)$$

La méthode de Suzuki est une composition de 5 méthodes de Strang, donc un total de 25 étapes. Celle-ci s'écrit :

$$U^{n+1} = \mathcal{S}_{\Delta t}(U^n) = S_{\alpha_1 \Delta t} \circ S_{\alpha_2 \Delta t} \circ S_{\alpha_3 \Delta t} \circ S_{\alpha_2 \Delta t} \circ S_{\alpha_1 \Delta t}(U^n)$$

où les constantes α_i sont définies par :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{4 - \sqrt[3]{4}} \qquad \alpha_3 = \frac{1}{1 - 4^{\frac{2}{3}}}$$

Pour rappel, la méthode de Strang est une composition d'ordre 2 en temps, la méthode de Suzuki ainsi construite est une méthode d'ordre 4. On refère à [29] pour d'autres méthodes de composition basées sur une décomposition en trois parties.

4.1.3 Discrétisation de l'espace des phases

Avec les conditions périodiques en espace, il parait naturel d'effectuer la résolution du système (17) en espace grâce aux transformées de Fourier en x. Cette étape sera effectuée par l'algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT) qui effectue une transformée de Fourier discrète. Ainsi l'équation sur E et le transport en x de la variable f_h s'effectuent dans l'espace de Fourier discret. Pour le système (15) où nous résolvons l'équation de transport en v de la quantité f_h en utilisant le fait que f est constante le long des caractéristiques, nous utiliserons une interpolation à l'aide d'un polynôme par morceaux de Lagrange de degré 5 (voir [30]).

4.2 Méthode de Lawson sur le modèle hybride

Nous présentons une seconde approche pour la discrétisation en temps du modèle (7), que nous comparerons à la méthode de splitting présentée dans la sous-section 4.1. Il s'agit de la méthode de Lawson [16], qui fait partie de la classe des méthodes de type exponentielle.

4.2.1 Présentation de la méthode de Lawson

Le système VHL (7) s'écrit, pour un mode k après une transformée de Fourier en x sur l'équation de Vlasov sur f_h :

$$\begin{cases} \partial_t u_c = E \\ \partial_t E = -\rho_c^{(0)} u_c - \int_{\mathbb{R}} v f_h \,\mathrm{d}v \\ \partial_t \hat{f}_h + ikv\hat{f}_h + \widehat{E\partial_v f_h} = 0 \end{cases} \tag{18}$$

où $\hat{f}_h := \hat{f}_h(t,k,v)$ désigne la transformée de Fourier de $f_h(t,x,v)$ par rapport à x, k étant la variable de Fourier. Ce modèle peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\partial_t \begin{pmatrix} u_c \\ E \\ \hat{f}_h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \rho_c^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ikv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_c \\ E \\ \hat{f}_h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \int_{\mathbb{R}} v f_h \,\mathrm{d}v \\ \widehat{E\partial_v f_h} \end{pmatrix} = 0.$$

On pose $U = \left(u_c, E, \hat{f}_h\right)^{\mathsf{T}}$, ainsi que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \rho_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ikv \end{pmatrix}, \qquad N(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ \int_{\mathbb{R}} v f_h \,\mathrm{d}v \\ \widehat{E\partial_v f_h} \end{pmatrix}$$

pour écrire (18) sous une forme plus compacte suivante :

$$\partial_t U + AU + N(U) = 0.$$

Cette formulation est propice à l'utilisation d'intégrateurs exponentiels dont le point de départ est la réécriture suivante

$$\partial_t (e^{tA}U) + e^{tA}N(U) = 0.$$

Puis, en effectuant le changement d'inconnue $V = e^{tA}U$ et avec $\tilde{N} : (t,V) \mapsto e^{tA}N(e^{-tA}V)$, on peut écrire :

$$\partial_t V + \tilde{N}(t,V) = 0$$

Cette équation peut se résoudre numériquement avec une méthode de type Runge-Kutta. Cette méthode Runge-Kutta sur V peut se réécrire en méthode sur U, la méthode ainsi obtenue sur U est appelée méthode de Lawson induite par la méthode Runge-Kutta choisie, présentée initialement dans [14].

Ainsi, à partir d'une méthode de Runge-Kutta explicite [2] définie par un tableau de Butcher

$$\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & \\
c_2 & a_{2,1} & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & & \\
c_s & a_{s,1} & \cdots & a_{s,s-1} & \\
\hline
 & b_1 & \cdots & b_{s-1} & b_s
\end{array}$$

on peut écrire le schéma sur V

$$\begin{aligned}
V^{(i)} &= v^n + \Delta t \sum_j a_{ij} \tilde{N}(t^n + c_j \Delta t, V^{(j)}) \\
V^{n+1} &= v^n + \Delta t \sum_i b_i \tilde{N}(t^n + c_i \Delta t, V^{(i)})
\end{aligned}$$

avec la convention $V^{(0)} = V^n$. Exprimé avec la variable U le schéma s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
U^{(s)} &= e^{c_s \Delta t A} U^n + \Delta t \sum_{j=0}^{s-1} a_{s,j} e^{-(c_j - c_s)\Delta t A} N(U^{(j)}), \\
U^{n+1} &= e^{\Delta t A} U^n + \Delta t \sum_{i=0}^{s-1} b_i e^{(1-c_i)\Delta t A} N(U^{(i)})
\end{aligned}$$

Pour un comparatif d'ordre équivalent à celui de la méthode de splitting présentée dans la sous-section 4.1, la méthode de Lawson que nous choisissons est la méthode de Lawson sous-jacente à la méthode Runge-Kutta d'ordre 4 : $RK(4,4)$:

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}$$

dont le schéma est :

$$\begin{aligned}
U^{(1)} &= e^{\frac{\Delta t}{2} A} U^n + \frac{\Delta t}{2} e^{\frac{\Delta t}{2} A} N(U^n) \\
U^{(2)} &= e^{\frac{\Delta t}{2} A} U^n + \frac{\Delta t}{2} N(U^{(1)}) \\
U^{(3)} &= e^{\Delta t A} U^n + \Delta t e^{\frac{\Delta t}{2} A} N(U^{(2)}) \\
U^{n+1} &= -\frac{1}{3} e^{\Delta t A} U^n + \frac{1}{3} e^{\frac{\Delta t}{2} A} U^{(1)} + \frac{2}{3} e^{\frac{\Delta t}{2} A} U^{(2)} + \frac{1}{3} U^{(3)} + \frac{\Delta t}{6} N(U^{(3)})
\end{aligned}$$

Les méthodes de Lawson sont particulièrement intéressantes dans notre cadre car l'expo-

2. Nous ne nous intéresserons ici qu'à des méthodes Runge-Kutta explicites, ce qui explique que le tableau de Butcher est triangulaire strictement inférieur, ce choix est fait pour des raisons de résolution numérique, en effet nous souhaitons mettre en place des méthodes d'ordre élevé au plus faible coût de calcul possible.

nentielle de la matrice A est connue explicitement et peut donc être calculée très efficacement

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\rho_c^{(0)}}t\right) & -\frac{\sin\left(\sqrt{\rho_c^{(0)}}t\right)}{\sqrt{\rho_c^{(0)}}} & 0 \\ \sqrt{\rho_c^{(0)}}\sin\left(\sqrt{\rho_c^{(0)}}t\right) & \cos\left(\sqrt{\rho_c^{(0)}}t\right) & 0 \\ 0 & 0 & e^{ikvt} \end{pmatrix}.$$

4.2.2 Discrétisation spatiale

Il est maintenant nécessaire de présenter les méthodes de discrétisation dans l'espace des phases. Dans le modèle (18) que nous résolvons il n'y a que l'équation de Vlasov qui présente des dérivées spatiales. La dérivée spatiale dans la direction x, symbolisée par le $ikv\hat{f}_h$, sera approchée par une méthode pseudo-spectrale faisant appel en pratique à l'algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT). La dérivée dans la direction v, $E\partial_v f_h$, nécessite une méthode d'ordre élevé pour bien capturer la filamentation produite dans les solutions du modèle de Vlasov-Poisson ou Vlasov-Ampère. Nous utilisons pour ce fait la méthode WENO (*Weighted Essentially Non-oscillatory*) d'ordre 5 [31],[32],[33]. Cette méthode se présente comme suit (voir aussi [17]) :

$$\partial_t \hat{f}_{h\,k,\ell} + v_\ell ik\,\hat{f}_{h\,k,\ell} + \left(E^+ \frac{\widehat{f^+_{h\;\cdot,\ell+1/2} - f^+_{h\;\cdot,\ell-1/2}}}{\Delta v}\right)_k + \left(E^- \frac{\widehat{f^-_{h\;\cdot,\ell+1/2} - f^-_{h\;\cdot,\ell-1/2}}}{\Delta v}\right)_k = 0$$

où $\hat{f}_{h\,k,\ell} \approx \hat{f}_h\,(k, v_\ell)$, $v_\ell = \ell\Delta v + v_{\min}$, $E^+ = \max(E, 0)$, $E^- = \min(E, 0)$ et $f^{\pm}_{h\;i,\ell\pm1/2}$ représente le flux numérique donné par la méthode de WENO5.

La méthode WENO est une famille de schémas volumes finis non-linéaires ayant une interprétation en tant que méthode aux différences finies. La méthode consiste à utiliser 3 interpolations pondérées par des poids non-linéaires issus des approximations des dérivées successives de f. L'écriture des poids s'effectue comme suit :

$$\beta_0^+ = \frac{13}{12}(\underbrace{f_h{}^+_{i,j-2} - 2\,f_h{}^+_{i,j-1} + f_h{}^+_{i,j}}_{\Delta x^2(f_h{}''_{i,j}+\mathcal{O}(\Delta x))}))^2 + \frac{1}{4}(\underbrace{f_h{}^+_{i,j-2} - 4\,f_h{}^+_{i,j-1} + 3\,f_h{}^+_{i,j}}_{2\Delta x(f_h{}'_{i,j}+\mathcal{O}(\Delta x^2))})^2$$

$$\beta_1^+ = \frac{13}{12}(\underbrace{f_h{}^+_{i,j-1} - 2\,f_h{}^+_{i,j} + f_h{}^+_{i,j+1}}_{\Delta x^2(f_h{}''_{i,j}+\mathcal{O}(\Delta x^2))})^2 + \frac{1}{4}(\underbrace{f_h{}^+_{i,j-1} - f_h{}^+_{i,j+1}}_{2\Delta x\, f_h{}'_{i,j}+\mathcal{O}(\Delta x^2))})^2$$

$$\beta_2^+ = \frac{13}{12}(\underbrace{f_h{}^+_{i,j} - 2\,f_h{}^+_{i,j+1} + f_h{}^+_{i,j+2}}_{\Delta x^2(f_h{}''_{i,j}+\mathcal{O}(\Delta x))})^2 + \frac{1}{4}(\underbrace{3\,f_h{}^+_{i,j} - 4\,f_h{}^+_{i,j+1} + f_h{}^+_{i,j+2}}_{-2\Delta x(f_h{}'_{i,j}+\mathcal{O}(\Delta x^2))})^2$$

et de manière similaire :

$$\beta_0^- = \frac{13}{12}(f_h{}^-_{i,j+1} - 2\,f_h{}^-_{i,j+2} + f_h{}^-_{i,j+3})^2 + \frac{1}{4}(3\,f_h{}^-_{i,j+1} - 4\,f_h{}^-_{i,j+2} + f_h{}^-_{i,j+3})^2$$
$$\beta_1^- = \frac{13}{12}(f_h{}^-_{i,j} - 2\,f_h{}^-_{i,j+1} + f_h{}^-_{i,j+2})^2 + \frac{1}{4}(f_h{}^-_{i,j} - f_h{}^-_{i,j+2})^2$$
$$\beta_2^- = \frac{13}{12}(f_h{}^-_{i,j-1} - 2\,f_h{}^-_{i,j} + f_h{}^-_{i,j+1})^2 + \frac{1}{4}(f_h{}^-_{i,j-1} - 4\,f_h{}^-_{i,j} + 3\,f_h{}^-_{i,j+1})^2$$

Ce qui nous permet de calculer les poids définis par :

$$\alpha_i^{\pm} = \frac{\gamma_i}{(\varepsilon + \beta_i^{\pm})^2}, \quad i = 0, 1, 2$$

où ε est un paramètre numérique pour assurer la non nullité du dénominateur, il sera pris à 10^{-6} ; et avec $\gamma_0 = \frac{1}{10}$, $\gamma_1 = \frac{6}{10}$ et $\gamma_2 = \frac{3}{10}$. La normalisation des poids s'effectue comme suit :

$$w_i^{\pm} = \frac{\alpha_i^{\pm}}{\sum_m \alpha_m^{\pm}}, \quad i = 0, 1, 2$$

Nous pouvons ensuite calculer les flux numériques pour WENO5 [31], donnés par :

$$\begin{aligned}\hat{f}^{+}_{i,j+\frac{1}{2}} = {} & w_0^{+}\left(\frac{2}{6}\,{f_h}^{+}_{i,j-2} - \frac{7}{6}\,{f_h}^{+}_{i,j-1} + \frac{11}{6}\,{f_h}^{+}_{i,j}\right) + w_1^{+}\left(-\frac{1}{6}\,{f_h}^{+}_{i,j-1} + \frac{5}{6}\,{f_h}^{+}_{i,j} + \frac{2}{6}\,{f_h}^{+}_{i,j+1}\right) \\ & + w_2^{+}\left(\frac{2}{6}\,{f_h}^{+}_{i,j} + \frac{5}{6}\,{f_h}^{+}_{i,j+1} - \frac{1}{6}\,{f_h}^{+}_{i,j+2}\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\hat{f}^{-}_{i,j+\frac{1}{2}} = {} & w_2^{-}\left(-\frac{1}{6}\,{f_h}^{-}_{i,j-1} + \frac{5}{6}\,{f_h}^{-}_{i,j} + \frac{2}{6}\,{f_h}^{-}_{i,j+1}\right) + w_1^{-}\left(\frac{2}{6}\,{f_h}^{-}_{i,j} + \frac{5}{6}\,{f_h}^{-}_{i,j+1} - \frac{1}{6}\,{f_h}^{-}_{i,j+2}\right) \\ & + w_0^{-}\left(\frac{11}{6}\,{f_h}^{-}_{i,j+1} - \frac{7}{6}\,{f_h}^{-}_{i,j+2} + \frac{2}{6}\,{f_h}^{-}_{i,j+3}\right)\end{aligned}$$

La méthode WENO5 prend la forme finale :

$$\partial_v f_h(x_i, v_j) \approx \frac{1}{\Delta v}\left[\left(\hat{f}^{+}_{i,j+\frac{1}{2}} - \hat{f}^{+}_{i,j-\frac{1}{2}}\right) + \left(\hat{f}^{-}_{i,j+\frac{1}{2}} - \hat{f}^{-}_{i,j-\frac{1}{2}}\right)\right]$$

4.3 Méthode de pas de temps adaptatif

Nous terminons cette section en présentant des méthodes de pas adaptatifs qui seront incorporées aux intégrateurs en temps précédents. Ce type d'approche est importante lorsqu'on souhaite effectuer des simulations dédiées à la physique des plasmas. En effet, lors d'instabilités, une phase linéaire peut être décrite à l'aide de grands pas de temps alors que dans la phase non linéaire, de petits pas de temps sont nécessaires pour capturer les phénomènes physiques complexes.

Pour une équation différentielle scalaire donnée $du(t)/dt = f(t, u(t)), u(0) = u_0 \in$, une méthode à pas de temps adaptatif consiste à effectuer 2 estimations numériques de la solution $u(t^{n+1})$ au temps t^{n+1}. On note Δt^n le pas de temps utilisé pour calculer $u^{n+1}_{[p]}$ et $u^{n+1}_{[p+1]}$ telles que :

$$u^{n+1}_{[p]} = u(t^{n+1}) + \mathcal{O}((\Delta t^n)^{p+1}) \qquad u^{n+1}_{[p+1]} = u(t^{n+1}) + \mathcal{O}((\Delta t^n)^{p+2})$$

c'est-à-dire que $u^{n+1}_{[p]}$ est d'ordre p et $u^{n+1}_{[p+1]}$ d'ordre $p+1$. On peut alors effectuer une estimation de l'erreur locale faite sur la solution d'ordre p :

$$L^{n+1}_{[p]} = |u^{n+1}_{[p+1]} - u^{n+1}_{[p]}|.$$

Etant donnée une tolérance tol (fixée par l'utilisateur), si l'erreur locale est supérieure à la tolérance alors l'itération est rejetée, on recommence l'itération avec u^n et un nouveau pas de temps Δt^n plus petit. Sinon l'itération est acceptée et $u^{n+1} = u^{n+1}_{[p]}$, car c'est sur l'estimation d'ordre p que l'on contrôle l'erreur, dans la pratique l'approximation d'ordre $p+1$ est souvent celle qui finalement est conservée.

Pour l'iteration suivante, le nouveau pas de temps optimal est calculé par :

$$\Delta t_{\text{opt}} = \sqrt[p]{\frac{\text{tol}}{L^{n+1}_{[p]}}}\,\Delta t^n$$

Il est possible de limiter l'évolution du pas de temps optimal en évitant une trop grande volatilité de celui-ci :

$$\Delta t^{n+1} = \max\left(\frac{1}{2}, \min\left(2, \sqrt[p]{\frac{\mathrm{tol}}{L_{[p]}^{n+1}}}\right)\right)\Delta t^n$$

Les méthodes de pas de temps adaptatifs que nous présenterons ici sont des méthodes multi-étages. Pour limiter le coût de calcul, ces méthodes sont basées sur des intégrateurs d'ordre $p+1$, auxquels on ajoute une pondération des étages pour dégrader cette solution et construire une méthode d'ordre p. De plus, ayant présenté l'approche dans le cas d'une équation différentielle, nous devons définir une norme en x et v pour donner un sens à l'erreur locale.

4.3.1 Méthode de pas de temps adaptatif avec la méthode de Suzuki

Pour utiliser la méthode de *splitting* de Suzuki présentée dans la sous-section 4.1 avec une méthode de pas de temps adaptatif [22], on définit les sous-étapes $U^{(m)}$, $m = 1, \dots, 4$, comme ceci :

$$U_{[4]}^{n+1} = \mathcal{S}_{\Delta t}(U^n) = \underbrace{S_{\alpha_1\Delta t} \circ \underbrace{S_{\alpha_2\Delta t} \circ \underbrace{S_{\alpha_3\Delta t} \circ \underbrace{S_{\alpha_2\Delta t} \circ \underbrace{S_{\alpha_1\Delta t}(U^n)}_{U^{(1)}}}_{U^{(2)}}}_{U^{(3)}}}_{U^{(4)}}.$$

On obtient, par pondération des $\left(U^{(s)}\right)_{s\in[\![1,4]\!]}$ une approximation d'ordre 3 de $U(t^{n+1})$, donnée par :

$$U_{[3]}^{n+1} = -U^n + w_1(U^{(1)} + U^{(4)}) + w_2(U^{(2)} + U^{(3)})$$

avec :

$$w_1 = \frac{g_2(1-g_2)}{g_1(g_1-1) - g_2(g_2-1)} \qquad w_2 = 1 - w_1$$

où $g_1 = \alpha_1$ et $g_2 = \alpha_1 + \alpha_2$.

Ensuite on effectue l'estimation de l'erreur suivante : $L_{[3]}^{n+1} = \|U_{[4]}^{n+1} - U_{[3]}^{n+1}\|_2$.

La norme que nous utiliserons sur $U^n = (u_c^n, E^n, \hat{f}_h^n)$ pour estimer l'erreur locale est la somme des normes L^2 de chaque variable :

$$\begin{aligned} L_{[3]}^{n+1} = & \left(\sum_i ({u_c}_i^{[4]} - {u_c}_i^{[3]})^2 \Delta x\right)^{\frac{1}{2}} \\ & + \left(\sum_i (E_i^{[4]} - E_i^{[3]})^2 \Delta x\right)^{\frac{1}{2}} \\ & + \left(\sum_j \sum_i \left|{f_h}_{i,j}^{[4]} - {f_h}_{i,j}^{[3]}\right|^2 \Delta x \Delta v\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{19}$$

où ${u_c}_i$, E_i et ${f_h}_{i,j}$ sont les inconnues discrètes associés au point i, j de grille de l'espace des phases.

4.3.2 Méthode de pas de temps adaptatif avec la méthode de Lawson

Nous présentons une méthode dite de Runge-Kutta *embedded*, qui est une méthode de pas de temps adaptatif pour les méthodes de Runge-Kutta. La littérature sur le sujet est relativement riche, nous avons voulu ici présenter une méthode du même ordre que la méthode de Suzuki à pas de temps adaptatif pour effectuer une comparaison entre ces 2 méthodes de résolution. La méthode que nous avons retenue est aussi appelée la méthode de Dormand-Prince 4(3), abrégée en DP4(3) [19],[18]. Cette méthode a pour tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & & \\
\hline
1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \left(\frac{1}{6}-\lambda\right) & \lambda
\end{array}$$

avec λ un paramètre fixé à $\frac{1}{10}$ et où l'estimateur d'ordre 4, $U_{[4]}^{n+1}$, est donné par l'avant dernière ligne, et l'estimateur d'ordre 3, $U_{[3]}^{n+1}$, est donné par la dernière ligne, l'avant dernière ligne se lisant alors comme une ligne classique du tableau de Butcher.

Comme dans l'approche précédente, on calcule l'estimation de l'erreur locale $L_{[3]}^{n+1} = \|U_{[4]}^{n+1} - U_{[3]}^{n+1}\|_2$ dont la définition est la même que (19), et on adapte le pas de temps comme expliqué plus haut.

Dans le tableau de Butcher, le paramètre λ peut être optimisé selon certains critères. En effet, si on note $R(\lambda)$ la fonction de stabilité de la méthode d'ordre 3, on obtient

$$R(\lambda) = \frac{\lambda z^5}{24} + z^4\left(\frac{1}{24} - \frac{\lambda}{12}\right) + \frac{z^3}{6} + \frac{z^2}{2} + z + 1$$

Idéalement $\lambda = 0$ permet d'obtenir une méthode d'ordre 4 (ce qui est déjà effectuée dans l'étage précédent du tableau de Butcher). On cherche donc à trouver le $\lambda \neq 0$ tel que le domaine de stabilité soit le plus large possible ou que ce schéma minimise l'erreur tout en restant d'ordre 3.

5 Relations de dispersion

Cette section est dédiée à l'étude des relations de dispersion relatives aux modèles cinétique (1)-(2) et hybride linéarisé (7). Il s'agit de linéariser le modèle étudié puis d'exprimer le mode fondamental du champ électrique linéarisé. Cela permet d'obtenir une très bonne approximation de la phase linéaire de l'énergie électrique. Cette approche, complètement indépendante des schémas numériques utilisés pour résoudre le modèle de départ, sera utilisée comme outil de validation des codes présentés dans la section 4.

Nous allons présenter les relations de dispersion de nos deux modèles, puis nous expliquerons comment reconstruire l'approximation linéaire de l'énergie électrique. Enfin, nous détaillerons les calculs des relations de dispersion pour le cas test qui nous intéressera dans les simulations numériques (sections 6 et 7).

5.1 Relations de dispersion dans le cas cinétique

Nous nous intéressons d'abord aux relations de dispersion du modèle cinétique de Vlasov-Poisson (1)-(2), en nous appuyant sur [24]. Pour obtenir les relations de dispersion, il est nécessaire de linéariser le système autour d'un équilibre, pour cela rappelons les équations de Vlasov-Poisson (1)-(2) :

$$\begin{cases} \partial_t f + v\partial_x f + E\partial_v f = 0 \\ \partial_x E = \int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}v - 1 \\ f(t=0,x,v) = f^0(x,v) \end{cases} \tag{20}$$

Dans un premier temps, nous nous intéressons à la linérarisation de ce modèle cinétique autour d'un état d'équilibre donné par $(f(t,x,v))_{eq} = f^{(0)}(v)$ et $(E(t,x))_{eq} = 0$, on considère le développement suivant :

$$\begin{cases} f(t,x,v) = f^{(0)}(v) + \varepsilon f^{(1)}(t,x,v) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ E(t,x) = 0 + \varepsilon E^{(1)}(t,x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{cases} \tag{21}$$

La densité de particules est définie par $\rho_0 = \rho_{0,c} + \rho_{0,h} = \int f^{(0)} \, \mathrm{d}v$. On injecte (21) dans (20) pour obtenir :

$$\begin{cases} \varepsilon\partial_t f^{(1)} + v\varepsilon\partial_x f^{(1)} + \varepsilon E^{(1)} \left(\partial_v f^{(0)} + \varepsilon\partial_v f^{(1)}\right) = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \varepsilon\partial_x E^{(1)} = \int f^{(0)} + \varepsilon \int f^{(1)} - n_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{cases}$$

ce qui nous permet d'obtenir, en négligeant les termes d'ordre ε^2, le système de Vlasov-Poisson linéarisé :

$$\begin{cases} \partial_t f^{(1)} + v\partial_x f^{(1)} + E^{(1)}\partial_v f^{(0)} = 0 \\ \partial_x E^{(1)} = \int f^{(1)} \, \mathrm{d}v \end{cases} \tag{22}$$

Pour un état d'équilibre connu $f^{(0)}(v)$, habituellement une distribution gaussienne, les inconnues de (22) sont $f^{(1)}(t,x,v)$ et $E^{(1)}(t,x)$.

Nous souhaitons dériver l'expression générale de la relation de dispersion associée au modèle cinétique linéarisé (22). Afin de simplifier la lecture, nous supprimons l'index (1) sur nos inconnues $f^{(1)}$ et $E^{(1)}$. Nous supposons que le fonctions $f^{(1)}$ et $E^{(1)}$ sont L-périodiques en x dans le domaine $\Omega = [0,L]$, nous allons, successivement, appliquer une transformée de Fourier en x et et une transformée de Laplace en t sur le système (22).

Tout d'abord, nous effectuons une transformée de Fourier en x, définie pour une fonction $f(x)$ comme :

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)e^{-ikx} \, \mathrm{d}x \,, \quad k = \frac{2\pi}{L}n, n \in \mathbb{Z}$$

Nous obtenons :

$$\begin{cases} \partial_t \hat{f} + ikv\hat{f} + \hat{E}\partial_v f^{(0)} = 0 \\ ik\hat{E} = \int \hat{f}(t,k,v) dv \end{cases} \tag{23}$$

Maintenant, nous utilisons la transformée de Laplace définie pour une fonction $f(t)$ par :

$$\tilde{f}(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{i\omega t} \, \mathrm{d}t$$

et, si elle est définie, la transformée de Laplace inverse est donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty} \tilde{f}(\omega)e^{-i\omega t} \, \mathrm{d}\omega$$

Appliquons la transformée de Laplace à la première équation du système (23) :

$$\int_0^{+\infty} \partial_t \hat{f}(t)e^{i\omega t} \, \mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} ikv\hat{f}(t)e^{i\omega t} \, \mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \hat{E}(t)\partial_v f^{(0)}e^{i\omega t} \, \mathrm{d}t = 0$$

et en utilisant une intégration par partie dans la première intégrale nous obtenons :

$$-\hat{f}(t=0,k,v) - i\omega \int_0^{+\infty} \hat{f}(t)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t + ikv \int_0^{+\infty} \hat{f}(t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t \\ +\partial_v f^0 \int_0^{+\infty} \hat{E}(t)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t = 0$$

et donc :

$$(ikv - i\omega)\tilde{\hat{f}}(\omega,k,v) + \partial_v f^0 \tilde{\hat{E}}(\omega,k) = \hat{f}_0(k,v), \tag{24}$$

où $\hat{f}_0(k,v) = \hat{f}(t=0,k,v)$ correspond à la condition initiale. En appliquant maintenant la transformée de Laplace à la seconde équation de (23) nous obtenons :

$$\int_0^{+\infty} ik\hat{E}(t,k)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t,k,v)\,\mathrm{d}v\, e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

ce qui nous donne :

$$\tilde{\hat{E}}(\omega,k) = -\frac{i}{k}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\hat{f}}(\omega,k,v)dv \tag{25}$$

Maintenant, nous souhaitons injecter l'équation (24) dans (25). Nous devons prêter attention aux pôles $\omega = kv$. En fait, si $\Im(\omega) > 0$ et pour une fonction analytique $g(v)$, alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(v)}{ikv - i\omega}\,\mathrm{d}v$ est analytique. Lorsque $\Im(\omega) \leqslant 0$, nous devons construire un prolongement analytique et remplacer l'intégrale par $\int_\gamma \frac{g(v)}{ikv-i\omega}\,\mathrm{d}v$ avec γ un coutour ouvert parallèle à l'axe réel à l'infini et qui passe par le pôle $\omega = kv$ (voir [24]). Par la suite, nous utiliserons la notation γ soit pour l'axe réel $]-\infty,+\infty[$ quand $\Im(\omega) > 0$, ou pour un chemin ouvert bien choisi lorsque $\Im(\omega) \leqslant 0$.

Avec cette notation, le résultat de l'injection de (24) dans (25) nous donne :

$$\begin{aligned}
\tilde{\hat{E}} &= -\frac{i}{k}\int_\gamma \frac{1}{ikv - i\omega}\left(\hat{f}_0(k,v) - \partial_v f^{(0)}\tilde{\hat{E}}(\omega,k)\right)\mathrm{d}v \\
&= -\frac{1}{k}\int_\gamma \frac{\hat{f}_0(k,v)}{kv-\omega}\,\mathrm{d}v + \frac{1}{k}\int_\gamma \frac{\partial_v f^{(0)}\tilde{\hat{E}}(\omega,k)}{kv-\omega}\,\mathrm{d}v \\
&= -\frac{1}{k^2}\int_\gamma \frac{\hat{f}_0(k,v)}{v-\frac{\omega}{k}}\,\mathrm{d}v + \frac{1}{k^2}\tilde{\hat{E}}(\omega,k)\int_\gamma \frac{\partial_v f^{(0)}}{v-\frac{\omega}{k}}\,\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

donc :

$$\left(1 - \frac{1}{k^2}\int_\gamma \frac{\partial_v f^{(0)}}{v-\frac{\omega}{k}}\,\mathrm{d}v\right)\tilde{\hat{E}}(\omega,k) = -\frac{1}{k^2}\int_\gamma \frac{\hat{f}_0(k,v)}{v-\frac{\omega}{k}}\,\mathrm{d}v$$

En introduisant :

$$D(k,\omega) = 1 - \frac{1}{k^2}\int_\gamma \frac{\partial_v f^{(0)}}{v-\frac{\omega}{k}}\,\mathrm{d}v \tag{26}$$

et

$$N(k,\omega) = -\frac{1}{k^2}\int_\gamma \frac{\hat{f}_0(k,v)}{v-\frac{\omega}{k}}dv \tag{27}$$

nous pouvons définir $\tilde{\hat{E}}(\omega,k)$ comme :

$$\tilde{\hat{E}}(\omega,k) = \frac{N(k,\omega)}{D(k,\omega)}$$

L'équation (26) est appelée relation de dispersion du modèle cinétique.

5.2 Relations de dispersion dans le cas hybride

Intéressons-nous dans cette section à dériver l'expression générale de la relation de dispersion associée au modèle hybride linéarisé (7). Pour cela, nous allons repartir du modèle hybride non-linéaire (5) et linéariser à la fois les équations fluides et l'équation cinétique. On injecte le développement (6) dans (5). Les mêmes calculs que dans la section 2 et l'approximation en ε^2 y compris dans l'équation cinétique sur f_h conduisent au modèle

$$\begin{cases} \partial_t u_c^{(1)} = E^{(1)} \\ \partial_t E^{(1)} = -\rho_c^{(0)} u_c^{(1)} - \int v f_h^{(1)} \,\mathrm{d}v \\ \partial_t f_h^{(1)} + v\partial_x f_h^{(1)} + E^{(1)} \partial_v f_h^{(0)} = 0 \end{cases}$$

d'inconnues $E^{(1)}$, $u_c^{(1)}$ et $f_h^{(1)}$ que nous noterons dans la suite, respectivement, E, u_c et f_h, solutions du système hybride linéarisé dans toutes les inconnues

$$\begin{cases} \partial_t u_c = E \\ \partial_t E = -\rho_c^{(0)} u_c - \int v f_h \,\mathrm{d}v \\ \partial_t f_h + v\partial_x f_h + E \partial_v f_h^{(0)} = 0 \end{cases} \tag{28}$$

Nous insistons sur le fait que le modèle (28) correspond à une linéarisation de la partie cinétique (ou chaude) du modèle hybride (7) que nous avons étudié précédemment. Par la suite, nous supposerons que la densité de particules froides $\rho_c^{(0)}$ est une constante (en temps t et espace x) et que la fonction $f_h^{(0)}$ est une fonction paire en v et ne dépend que de cette variable. Nous supposons que les fonctions f_h, E et u_c sont L-périodiques en x sur le domaine spatial $\Omega = [0, L]$ et nous appliquons la transformée de Fourier en x puis une transformée de Laplace en t.

Tout d'abord, nous appliquons la transformée de Fourier en x :

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}_c = \hat{E} \\ \partial_t \hat{E} = -\rho_c^{(0)} \hat{u}_c - \int \hat{f}_h dv \\ \partial_t \hat{f}_h + ikv\hat{f}_h + \hat{E} \partial_v f_h^{(0)} = 0 \end{cases} \tag{29}$$

Alors, nous multiplions par $e^{i\omega t}$ et nous intégrons en temps. L'équation sur $\hat{u}_c$ nous donne :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \partial_t \hat{u}_c e^{i\omega t} \,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \hat{E} e^{i\omega t} \,\mathrm{d}t \\ -\int_0^{+\infty} i\omega \hat{u}_c e^{i\omega t} \,\mathrm{d}t - \hat{u}_c(t=0,k) &= \int_0^{+\infty} \hat{E} e^{i\omega t} \,\mathrm{d}t \\ -i\omega \tilde{\hat{u}}_c(\omega,k) - \hat{u}_c(t=0,k) &= \tilde{\hat{E}}(\omega,k) \\ \tilde{\hat{u}}_c(\omega,k) + \frac{1}{i\omega} \tilde{\hat{E}}(\omega,k) &= -\frac{1}{i\omega} \hat{u}_c(t=0,k) \end{aligned} \tag{30}$$

Les mêmes opérations sur l'équation sur $\hat{E}$ nous donnent :

$$-i\omega \tilde{\hat{E}}(\omega,k) - \hat{E}(t=0,k) = -\rho_c^{(0)} \tilde{\hat{u}}_c(\omega,k) - \int_{-\infty}^{+\infty} v \tilde{\hat{f}}_h(\omega,k) dv \tag{31}$$

Tandis que l'équation sur $\hat{f}_h$ nous donne :

$$\begin{aligned}
-i\omega\tilde{\hat{f}}_h(\omega,k,v) - \hat{f}_h(t=0,k,v) + ikv\tilde{\hat{f}}_h(\omega,k,v) + \tilde{\hat{E}}(\omega,k)\partial_v f_h^{(0)}(v) = 0 \\
\tilde{\hat{f}}_h(\omega,k,v)\,(ikv - i\omega) = \hat{f}_h(t=0,k,v) - \tilde{\hat{E}}(\omega,k)\partial_v f_h^{(0)}(v) \\
\tilde{\hat{f}}_h(\omega,k,v) = -\frac{i}{k}\frac{\hat{f}_h(t=0,k,v)}{v-\frac{\omega}{k}} + \frac{i}{k}\frac{\tilde{\hat{E}}(\omega,k)\partial_v f_h^{(0)}(v)}{v-\frac{\omega}{k}}.
\end{aligned} \tag{32}$$

Nous injectons l'expression (32) dans (31) :

$$\begin{aligned}
-i\omega\tilde{\hat{E}}(\omega,k) - \hat{E}(t=0,k) = -\rho_c^{(0)}\tilde{\hat{u}}(\omega,k) + \frac{i}{k}\int_\gamma v\frac{\hat{f}_h(t=0,k,v)}{v-\frac{\omega}{k}}dv \\
-\frac{i}{k}\int_\gamma v\frac{\tilde{\hat{E}}(\omega,k)\partial_v f_h^{(0)}(v)}{v-\frac{\omega}{k}}dv
\end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned}
\tilde{\hat{E}}(\omega,k)\left(1-\frac{1}{\omega k}\int_\gamma v\frac{\partial_v f_h^{(0)}(v)}{v-\frac{\omega}{k}}dv\right) - \frac{\rho_c^{(0)}}{i\omega}\tilde{\hat{u}}_c(\omega,k) = -\frac{1}{i\omega}\hat{E}(t=0,k) \\
-\frac{1}{\omega k}\int_\gamma v\frac{\hat{f}_h(t=0,k,v)}{v-\frac{\omega}{k}}dv
\end{aligned}$$

Nous injectons maintenant l'expression (30) dans (33) pour obtenir le problème suivant :

$$\begin{aligned}
\tilde{\hat{E}}(\omega,k)\left(1-\frac{1}{\omega k}\int_\gamma v\frac{\partial_v f_h^{(0)}(v)}{v-\frac{\omega}{k}}dv\right) + \frac{\rho_c^{(0)}}{i\omega}\left(\frac{1}{i\omega}\tilde{\hat{E}}(\omega,k) + \frac{1}{i\omega}\hat{u}_c(t=0,k)\right) \\
= -\frac{1}{i\omega}\hat{E}(t=0,k) - \frac{1}{\omega k}\int_\gamma v\frac{\hat{f}_h(t=0,k,v)}{v-\frac{\omega}{k}}dv
\end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned}
\tilde{\hat{E}}(\omega,k)\left(1-\frac{1}{k^2}\left(\rho_c\frac{k^2}{\omega^2} + \int_\gamma \frac{\partial_v f_h^{(0)}(v)}{v-\frac{\omega}{k}}dv\right)\right) \\
= \frac{\rho_c^{(0)}}{\omega^2}\hat{u}_c(t=0,k) - \frac{1}{i\omega}\hat{E}(t=0,k) - \frac{1}{\omega k}\int_\gamma v\frac{\hat{f}_h(t=0,k,v)}{v-\frac{\omega}{k}}dv
\end{aligned}$$

Nous introduisons :

$$D(k,\omega) = 1 - \frac{1}{k^2}\left(\rho_c^{(0)}\frac{k^2}{\omega^2} + \int_\gamma \frac{\partial_v f_h^{(0)}(v)}{v-\frac{\omega}{k}}dv\right) \tag{33}$$

et

$$N(k,\omega) = \frac{\rho_c^{(0)}}{\omega^2}\hat{u}_c(t=0,k) - \frac{1}{i\omega}\hat{E}(t=0,k) - \frac{1}{\omega k}\int_\gamma v\frac{\hat{f}_h(t=0,k,v)}{v-\frac{\omega}{k}}dv, \tag{34}$$

nous pouvons alors définir $\tilde{\hat{E}}(\omega,k)$ comme :

$$\tilde{\hat{E}}(\omega,k) = \frac{N(k,\omega)}{D(k,\omega)}$$

Remarque 3. *Comme nous le verrons dans la sous-section suivante, pour retrouver la pente de la partie linéaire de l'énergie électrique, il est suffisant de trouver les racines de* $D(k,\omega)$*, ou les pôles de* $\tilde{\hat{E}}(\omega,k)$*. Si seule la pente de la partie linéaire nous intéresse, un autre moyen de la retrouver est de réécrire les équations* (30)-(33) *comme le système suivant :*

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{i\omega} \\ -\frac{\rho_c}{i\omega} & 1-\frac{1}{\omega k}\int_\gamma v\frac{\partial_v f_h^{(0)}(v)}{v-\frac{\omega}{k}}\,\mathrm{d}v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\hat{u}}_c(\omega,k) \\ \tilde{\hat{E}}(\omega,k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{i\omega}\hat{u}_c(0,k) \\ -\frac{1}{i\omega}\hat{E}(0,k)-\frac{1}{\omega k}\int_\gamma v\frac{\hat{f}_h(0,k,v)}{v-\frac{\omega}{k}}\,\mathrm{d}v \end{pmatrix} \tag{35}$$

Le problème revient alors à trouver les racines du déterminant de ce système, qui s'écrit

$$\begin{aligned} Det(k,\omega) &= 1-\frac{1}{\omega k}\int_\gamma v\frac{\partial_v f_h^{(0)}(v)}{v-\frac{\omega}{k}}\,\mathrm{d}v-\frac{\rho_c^{(0)}}{\omega^2} \\ &= 1-\frac{1}{k^2}\left(\rho_c^{(0)}\frac{k^2}{\omega^2}+\int_\gamma\frac{\partial_v f_h^{(0)}(v)}{v-\frac{\omega}{k}}\,\mathrm{d}v\right) \end{aligned}$$

On retrouve bien (33)*. La connaissance de* (34) *nous donnera, en plus de la pente, la phase de l'énergie électrique dans sa partie linéaire.*

5.3 Expression du champ électrique linéarisé

Dans cette sous-section, nous considérons un prolongement analytique continu de $N(k,\omega)$ et $D(k,\omega)$, et nous supposons que la transformée de Laplace et de Fourier de $\tilde{\hat{E}}$ sont bien définies pour obtenir une approximation du champ électrique linéarisé.

La transformée de Laplace inverse peut être calculée à l'aide du théorème des résidus :

$$\hat{E}(t,k)=\frac{1}{2i\pi}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty}\tilde{\hat{E}}(\omega,k)e^{-i\omega t}d\omega=\sum_j Res_{\omega=\omega^{k,j}}\left(\tilde{\hat{E}}(\omega,k)e^{-i\omega t}\right)$$

où $\omega^{k,j}$ sont les pôles de $\tilde{\hat{E}}(\omega,k)$. Nous rappelons que si $\omega^{k,j}$ est un pôle simple, alors :

$$\begin{aligned} Res_{w=w^{k,j}}\left(\tilde{\hat{E}}(\omega,k)e^{-i\omega^{k,j}t}\right) &= \lim_{\omega\to\omega^{k,j}}\left(\omega-\omega^{k,j}\right)\tilde{\hat{E}}(\omega,k)e^{-i\omega t} \\ &= \lim_{\omega\to\omega^{k,j}}\left(\omega-\omega^{k,j}\right)\frac{N(k,\omega)}{D(k,\omega)}e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

Maintenant, un développement de Taylor de $D(k,\omega)$ nous donne :

$$D(k,\omega)=\underbrace{D(k,\omega^{k,j})}_{0}+\left(\omega-\omega^{k,j}\right)\frac{\partial D}{\partial\omega}(k,\omega^{k,j})+\mathcal{O}\left((\omega-\omega^{k,j})^2\right)$$

donc, le passage à la limite nous donne :

$$Res_{\omega=\omega^{k,j}}\left(\tilde{\hat{E}}(\omega,k)e^{-i\omega^{k,j}t}\right)=\frac{N(k,\omega^{k,j})}{\frac{\partial D}{\partial\omega}(k,\omega^{k,j})}e^{-i\omega^{k,j}t}. \tag{36}$$

Remarque 4. *En fait, pour un k fixé, on obtient une très bonne approximation de* $\hat{E}(t,k)$ *(excepté pour des temps courts) en considérant seulement la fréquence principale. Soient les deux racines* $\omega^{k,j_0\pm}=\pm\omega_r+i\omega_i$ *de* $D(k,\omega)$ *(où* $\omega_r\in\mathbb{R}^+$*,* $\omega_i\in\mathbb{R}$*) qui ont la plus grande partie* *imaginaire ω_i : pour toute autre racine $\omega^{k,j}$, on a $\Im(\omega^{k,j}) < \omega_i$. Les autres pôles peuvent être négligés. En effet, nous avons :*

$$
\begin{aligned}
\hat{E}(t,k) = & \sum_j C_j e^{-i\omega^{k,j}t} = C_{j_0^+} e^{-i\omega^{k,j_0^+}t} + C_{j_0^-} e^{-i\omega^{k,j_0^-}t} + \sum_{j\neq j_0^{\pm}} C_j e^{-i\omega^{k,j}t} \\
= & e^{\omega_i t}\left(C_{j_0^+} e^{-i\omega_r t} + C_{j_0^-} e^{i\omega_r t} + \sum_{j\neq j_0^{\pm}} C_j e^{-i\Re(\omega^{k,j})t} e^{(\Im(\omega^{k,j})-\omega_i)t} \right)
\end{aligned}
$$

et par hypothèse, $\Im(\omega^{k,j}) - \omega_i < 0 \ \forall j \neq j_0^{\pm}$, nous pouvons conclure que la somme tend vers zéro lorsque $t \to +\infty$.

Lemme 5.1. *Si $f^{(0)}(v)$ (respectivement $f_h^{(0)}(v)$) est une fonction paire, alors pour D défini par (26) (respectivement (33)) nous avons $D(k, \omega_r + i\omega_i) = 0 \Leftrightarrow D(k, -\omega_r + i\omega_i) = 0$.*

Démonstration. Voir en Annexe A. (à voir si on le laisse en annexe ou si on l'enlève complètement) □

En considérant seulement les deux racines principales $\pm\omega_r + i\omega_i$ de $D(k,\omega)$, supposés pôles simples de $\tilde{\hat{E}}(\omega,k)$, nous avons l'approximation :

$$
\hat{E}(t,k) \approx Res_{\omega=\omega_r+i\omega_i}\left(\tilde{\hat{E}}(\omega,k)e^{-i\omega t}\right) + Res_{\omega=-\omega_r+i\omega_i}\left(\tilde{\hat{E}}(\omega,k)e^{-i\omega t}\right)
$$

où les résidus sont définis par (36). Notons $r^{\pm}$ le module de $\frac{N(k,\pm\omega_r+i\omega_i)}{\frac{\partial D}{\partial\omega}(k,\pm\omega_r+i\omega_i)}$ et $\phi^{\pm}$ son argument, nous avons alors :

$$
\hat{E}(t,k) \approx r^+ e^{i\phi^+} e^{-i(\omega_r+i\omega_i)t} + r^- e^{i\phi^-} e^{-i(-\omega_r+i\omega_i)t}. \tag{37}
$$

Dans plusieurs cas test classiques, nous avons une symétrie entre les racines, qui dépend de la perturbation initiale de l'équilibre. Par la suite la perturbation initiale de l'équilibre sera toujours une fonction cosinus.

Hypothèse 5.1. *Le module et l'argument de $\frac{N(k,\pm\omega_r+i\omega_i)}{\frac{\partial D}{\partial\omega}(k,\pm\omega_r+i\omega_i)}$ vérifient $r^+ = r^-$ (noté r par la suite) et $\phi^+ = -\phi^-$ (noté simplement ϕ).*

Sous l'hypothèse 5.1, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
\hat{E}(t,k) \approx & \quad r e^{i\phi} e^{-i(\omega_r+i\omega_i)t} + r e^{-i\phi} e^{-i(-\omega_r+i\omega_i)t} \\
= & \quad r e^{\omega_i t}\left(e^{i(\omega_r t-\phi)} + e^{-i(\omega_r t-\phi)}\right) \\
= & \quad 2r e^{\omega_i t}\cos(\omega_r t - \phi).
\end{aligned} \tag{38}
$$

Maintenant, si nous considérons la définition des coefficients de Fourier, nous avons :

$$
\hat{E}(t,k) = \frac{1}{L}\int_0^L E(t,x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{L}\int_0^L E(t,x)\cos(-kx)\,\mathrm{d}x + i\frac{1}{L}\int_0^L E(t,x)\sin(-kx)\,\mathrm{d}x
$$

et :

$$
\begin{aligned}
\hat{E}(t,-k) &= \frac{1}{L}\int_0^L E(t,x)e^{ikx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{L}\int_0^L \cos(kx)\,\mathrm{d}x + i\frac{1}{L}\int_0^L E(t,x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{L}\int_0^L E(t,x)e^{ikx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{L}\int_0^L \cos(-kx)\,\mathrm{d}x - i\frac{1}{L}\int_0^L E(t,x)\sin(-kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \overline{\hat{E}(t,k)}
\end{aligned}
$$

Hypothèse 5.2. *$N(k,\omega) = 0$ si $k \notin \left\{\pm\frac{2\pi}{L}\right\}$.*

Sous l'hypothèse 5.2, avec l'approximation des coefficients de Fourier (qui sont tous réels) données par (38) et avec $l = \frac{2\pi}{L}$, nous obtenons l'approximation du champ électrique suivante :

$$\begin{aligned}
E(t,x) &\approx \varepsilon E^{(1)}(t,x) \approx \varepsilon\left(\hat{E}(t,l)e^{ikx} + \overline{\hat{E}(t,l)}e^{-ilx}\right) \\
&\approx 2\varepsilon\hat{E}(t,l)\cos(lx) \\
&\approx 4\varepsilon r e^{\omega_i t}\cos(\omega_t t - \phi)\cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)
\end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'obtenir une approximation de l'énergie électrique, définie par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(t) &:= \left(\int_0^L E^2(t,x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\approx 4\varepsilon r e^{\omega_i t}\left|\cos(\omega_r t - \phi)\right|\left(\int_0^L \cos^2\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\approx 2\sqrt{2L}\varepsilon r e^{\omega_i t}\left|\cos(\omega_r t - \phi)\right|
\end{aligned} \tag{39}$$

puisque :

$$\begin{aligned}
\int_0^L \cos^2\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\,\mathrm{d}x &= \int_0^L \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x + \int_0^L \frac{1}{2}\cos\left(\frac{4\pi}{L}x\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{L}{2} + \left[\frac{L}{8\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{L}x\right)\right]_0^L = \frac{L}{2}
\end{aligned}$$

Remarque 5. *Il est possible de mener une étude similaire pour une perturbation donnée par une fonction sinus. Nous obtenons alors des résultats similaires en remplaçant dans l'approximation de $\hat{E}(t,k)$, $E(t,x)$ et $\mathcal{E}(t)$ les fonctions cosinus par des fonctions sinus.*

Il est à noter que ces approximations ne prennent en compte que les racines dominantes de $D(\frac{2\pi}{L},\omega)$, les deux ayant la plus grande partie imaginaire. Cette approximation devient valable en temps t suffisamment long.

La partie imaginaire ω_i nous donne le comportement global des coefficients de Fourier du champ électrique, et donc de l'énergie électrique comme une fonction du temps. Nous obtenons un amortissement de l'énergie électrique si $\omega_i < 0$, ou une instabilité si $\omega_i > 0$. Lorsque nous traçons l'énergie électrique en fonction du temps en échelle logarithmique, nous pouvons observer les comportements suivants :

- un amortissement avec un taux $\omega_i < 0$, le taux indiquant la pente globale de l'amortissement,
- quelques oscillations stables, suivies du développement d'une instabilité avec un taux $\omega_i > 0$, jusqu'à la saturation recherchée.

5.4 Applications

Dans cette sous-section, nous nous intéressons au calcul de $D(k,\omega)$ pour le modèle cinétique (26) ou hybride (33), dans le cadre des cas tests qui nous intéressent. Pour le modèle cinétique la distribution initiale est donnée par :

$$f_0(x,v) = \mathcal{M}_{1-\alpha,0,T_c}(v) + \left(\mathcal{M}_{\alpha/2,v_0,1}(v) + \mathcal{M}_{\alpha/2,-v_0,1}(v)\right)(1 + \epsilon\cos(kx))$$

avec α la densité de particules chaudes, centrées en $\pm v_0 \in \mathbb{R}$, et les particules froides sont caractérisées par une température T_c, et où l'on note :

$$\mathcal{M}_{\rho,u,T}(v) := \frac{1}{(2\pi T)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{|v-u|^2}{2T}\right)$$

la distribution maxwellienne de densité ρ, centrée en la vitesse u et de température T. Cette distribution initiale f_0 nous permet de construire une condition initiale compatible pour le modèle hybride, données par la limite $T_c \to 0$:

$$\begin{aligned} f_{h,0}(x,v) &= \left(\mathcal{M}_{\alpha/2,v_0,1}(v) + \mathcal{M}_{\alpha/2,-v_0,1}(v)\right)(1+\epsilon\cos(kx)) \\ u_{c,0} &= 0 \end{aligned} \tag{40}$$

le champ électrique à l'instant initial E_0 est donné par la résolution de l'équation de Poisson avec la condition initiale :

$$\partial_x E_0(x) = (1-\alpha) + \int_{\mathbb{R}} f_{h,0}(x,v)\,\mathrm{d}v - 1$$

Nous cherchons ensuite les racines en ω de la fonction $D(k,\omega)$ pour k fixé. Celles-ci sont approchées numériquement à l'aide d'une méthode de Newton, la dérivée $\frac{\partial D}{\partial \omega}(k,\omega)$ est alors nécessaire. La racine ayant la plus grande partie imaginaire, dans la pratique nous ne conservons que celle avec une partie réelle positive, nous donne des informations sur l'évolution de l'énergie électrique au cours du temps (taux d'amortissement et taux d'instabilité en échelle logarithmique). De plus, le calcul de $N(k,\omega)$ nous permet d'obtenir plus d'informations sur le mode dominant $\hat{E}(t,k)$ donné par (37) dans le cas général, ou par (38) sous l'hypothèse 5.1. Nous en déduisons notamment la phase des oscillations de l'énergie électrique dans sa partie linéaire.

5.4.1 Quelques propriétés de la fonction de dispersion du plasma

Dans le calcul de $D(k,\omega)$ et $N(k,\omega)$ apparaît la fonction de dispersion du plasma, aussi appelée fonction de Fried-Conte [25] :

$$Z(\xi) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_\gamma \frac{e^{-z^2}}{z-\xi}\,\mathrm{d}z \tag{41}$$

Tout d'abord on rappelle que :

$$Z'(\xi) = -2\left(1+\xi Z(\xi)\right). \tag{42}$$

Nous allons maintenant établir quelques propriétés utiles pour vérifier l'hypothèse 5.1 dans différents cas test classiques.

Lemme 5.2. *La fonction $Z_\alpha^0(\omega) : \omega \in \mathbb{C} \mapsto Z(\alpha\omega) \in \mathbb{C}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, est telle que : $Z_\alpha^0(-\bar{\omega}) = -\overline{Z_\alpha^0(\omega)}$.*

Lemme 5.3. *La fonction $Z_{\alpha,\beta}^+(\omega) : \omega \in \mathbb{C} \mapsto Z(\alpha\omega-\beta) + Z(\alpha\omega+\beta) \in \mathbb{C}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ fixés, est telle que : $Z_{\alpha,\beta}^+(-\overline{\omega}) = -\overline{Z_{\alpha,\beta}^+(\omega)}$.*

Lemme 5.4. *La fonction $Z_{\alpha,\beta}^-(\omega) : \omega \in \mathbb{C} \mapsto Z(\alpha\omega-\beta) - Z(\alpha\omega+\beta) \in \mathbb{C}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ fixés, est telle que : $Z_{\alpha,\beta}^-(-\overline{\omega}) = \overline{Z_{\alpha,\beta}^-(\omega)}$.*

La démonstration de ces lemmes est proposée dans l'annexe A.

L'introduction de la fonction Z provient de la nécessité dans les relations de dispersion définies en (26)-(27) et (33)-(34) d'intégrer une distribution maxwellienne qui est une distribution gaussienne renormalisée :

$$\mathcal{M}_{\rho,u,T} = \frac{\rho}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(v-u)^2}{2T}}$$

Rappelons le résultat :

$$\partial_v \mathcal{M}_{\rho,u,T}(v) = -\frac{v-u}{T} \mathcal{M}_{\rho,u,T}(v)$$

Ainsi, avant de passer à l'application de ces résultats sur le cas test qui nous intéresse, calculons une intégrale qui intervient dans le calcul de $D(k,\omega)$:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{\partial_v \mathcal{M}_{\rho,u,T}}{v-\frac{\omega}{k}} \,\mathrm{d}v &= -\frac{\rho}{\sqrt{2\pi T}T} \int_\gamma \frac{(v-\frac{\omega}{k}+\frac{\omega}{k}-u)e^{-\frac{(v-u)^2}{2T}}}{v-\frac{\omega}{k}} \,\mathrm{d}v \\
&= -\frac{\rho}{\sqrt{2\pi T}T} \left(\int_\gamma e^{-\frac{(v-u)^2}{2T}} \,\mathrm{d}v + \left(\frac{\omega}{k}-u\right) \int_\gamma \frac{e^{-\frac{(v-u)^2}{2T}}}{v-\frac{\omega}{k}} \,\mathrm{d}v \right)
\end{aligned}$$

Dans la première intégrale, on utilise le changement de variable $w = \frac{v-u}{\sqrt{T}}$, $\mathrm{d}w = \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{T}}$, dans la seconde intégrale, nous utilisons le changement de variable suivant : $w = \frac{v-u}{\sqrt{2T}}$, $\mathrm{d}w = \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{2T}}$. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
-\frac{\rho}{\sqrt{2\pi T}T} &\left(\int_\gamma e^{-\frac{w^2}{2}} \sqrt{T} \,\mathrm{d}w + \left(\frac{\omega}{k}-u\right) \int_\gamma \frac{e^{-w^2}}{\sqrt{2T}w+u-\frac{\omega}{k}} \sqrt{2T} \,\mathrm{d}w \right) \\
&= \frac{\rho}{T} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \left(\frac{\omega}{k}-u\right) \int_\gamma \frac{e^{-w^2}}{w - \frac{1}{\sqrt{2T}}\left(\frac{\omega}{k}-u\right)} \,\mathrm{d}w \right)
\end{aligned}$$

et enfin nous obtenons :

$$\int_\gamma \frac{\partial_v \mathcal{M}_{\rho,u,T}(v)}{v-\frac{\omega}{k}} \,\mathrm{d}v = -\frac{\rho}{T} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2T}} \left(\frac{\omega}{k}-u\right) Z\left(\frac{\frac{\omega}{k}-u}{\sqrt{2T}} \right) \right) \tag{43}$$

où Z est la fonction de diffusion de plasma (41).

Le calcul de la fonction $N(k,\omega)$ demande l'évaluation d'une intégrale pour laquelle on utilise le changement de variable $w = \frac{v-u}{\sqrt{2T}}$,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{\mathcal{M}_{\rho,u,T}(v)}{v-\frac{\omega}{k}} \,\mathrm{d}v &= \frac{\rho}{\sqrt{2\pi T}} \int_\gamma \frac{e^{-\frac{(v-u)^2}{2T}}}{v-\frac{\omega}{k}} \,\mathrm{d}v \\
&= \frac{\rho}{\sqrt{2\pi T}} \int_\gamma \frac{e^{-w^2}}{\sqrt{2T}w+u-\frac{\omega}{k}} \sqrt{2T} \,\mathrm{d}w \\
&= \frac{\rho}{\sqrt{2\pi T}} \int_\gamma \frac{e^{-w^2}}{w-\frac{1}{\sqrt{2T}}\left(\frac{\omega}{k}-u\right)} \,\mathrm{d}w
\end{aligned}$$

soit :

$$\int_\gamma \frac{\mathcal{M}_{\rho,u,T}(v)}{v-\frac{\omega}{k}} \,\mathrm{d}v = \frac{\rho}{\sqrt{2T}} Z\left(\frac{\frac{\omega}{k}-u}{\sqrt{2T}} \right) \tag{44}$$

5.4.2 Application à la modélisation hybride

La condition initiale du cas test du modèle hybride nous donne comme état d'équilibre (état perturbé) pour les particules chaudes :

$$f_h^{(0)}(v) = \mathcal{M}_{\alpha/2,v_0,1}(v) + \mathcal{M}_{\alpha/2,-v_0,1}(v) = \frac{\alpha}{2\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{(v-v_0)^2}{2}} + e^{-\frac{(v+v_0)^2}{2}}\right)$$

avec une vitesse des particules chaudes $v_0 \in \mathbb{R}$ fixée et une densité de particules chaudes $\alpha \in \mathbb{R}$. Les particules froides n'étant pas perturbées, l'état d'équilibre est l'état initial caractérisé par une densité $\rho_c^{(0)} = 1-\alpha$, et une vitesse moyenne $u_c(t=0,x) = 0$. L'expression (33) nous donne à l'aide de (43) :

$$\begin{aligned} D(k,\omega) &= 1 - \frac{1}{k^2}\left((1-\alpha)\frac{k^2}{\omega^2} + \int_\gamma \frac{\partial_v f_h^{(0)}(v)}{v-\frac{\omega}{k}}dv\right) \\ &= 1 - \frac{1}{k^2}\left[(1-\alpha)\frac{k^2}{\omega^2} - \frac{\alpha}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\omega}{k}-v_0\right)Z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\omega}{k}-v_0\right)\right)\right)\right. \\ &\qquad \left. -\frac{\alpha}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\omega}{k}+v_0\right)Z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\omega}{k}+v_0\right)\right)\right)\right]. \end{aligned} \tag{45}$$

On dérive $D(k,\omega)$ à l'aide de (42) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial D(k,\omega)}{\partial \omega} = 2\frac{(1-\alpha)}{\omega^3} + \frac{1}{\sqrt{2}k^3}\frac{\alpha}{2}&\left[\left(1-2\tilde{\omega}_-^2\right)Z\left(\tilde{\omega}_-\right)\right. \\ &\left. + \left(1-2\tilde{\omega}_+^2\right)Z\left(\tilde{\omega}_+\right) - 2\tilde{\omega}_- - 2\tilde{\omega}_+\right] \end{aligned} \tag{46}$$

où $\tilde{\omega}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\omega}{k} \pm v_0\right)$.

Maintenant, remarquons que :

$$\hat{f}_h(t=0,k,v) = \hat{g}(k)\frac{\alpha}{2\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{(v-v_0)^2}{2}} e^{-\frac{(v+v_0)^2}{2}}\right), \quad g(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$$

ce qui nous permet de simplifier ce calcul de $N(k,\omega)$ en utilisant (34) et (44) :

$$\begin{aligned} N(k,\omega) &= \frac{(1-\alpha)}{\omega^2}\hat{u}(t=0,k) - \frac{1}{i\omega}\hat{E}(t=0,k) - \frac{\hat{g}(k)}{2\omega k}\left(\int_\gamma v\frac{\mathcal{M}_{\alpha/2,v_0,1}}{v-\frac{\omega}{k}}\,\mathrm{d}v + \int_\gamma v\frac{\mathcal{M}_{\alpha/2,-v_0,1}}{v-\frac{\omega}{k}}\,\mathrm{d}v\right) \\ &= \frac{(1-\alpha)}{\omega^2}\hat{u}(t=0,k) - \frac{1}{i\omega}\hat{E}(t=0,k) - \frac{\hat{g}(k)}{2\omega k}\left(\int_\gamma \mathcal{M}_{\alpha/2,v_0,1}\,\mathrm{d}v + \frac{\omega}{k}\int_\gamma \frac{\mathcal{M}_{\alpha/2,v_0,1}}{v-\omega k}\,\mathrm{d}v\right. \\ &\qquad\left. + \int_\gamma \mathcal{M}_{\alpha/2,-v_0,1}\,\mathrm{d}v + \frac{\omega}{k}\int_\gamma \frac{\mathcal{M}_{\alpha/2,-v_0,1}}{v-\omega k}\,\mathrm{d}v\right) \\ &= \frac{(1-\alpha)}{\omega^2}\hat{u}(t=0,k) - \frac{1}{i\omega}\hat{E}(t=0,k) - \frac{\hat{g}(k)}{2\omega k}\left[\alpha + \frac{\omega}{k}\frac{\alpha}{2\sqrt{2}}\left(Z\left(\frac{\frac{\omega}{k}-v_0}{\sqrt{2}}\right)\right.\right. \\ &\qquad\left.\left. +\ Z\left(\frac{\frac{\omega}{k}+v_0}{\sqrt{2}}\right)\right)\right] \end{aligned}$$

soit finalement :

$$\begin{aligned} N(k,\omega) = \frac{(1-\alpha)}{\omega^2}\hat{u}(t=0,k) - \frac{1}{i\omega}\hat{E}(t=0,k) \\ -\frac{\hat{g}(k)}{k^2}\left[\alpha\frac{k}{\omega} + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}}\left(Z\left(\frac{\frac{\omega}{k}-v_0}{\sqrt{2}}\right) + Z\left(\frac{\frac{\omega}{k}+v_0}{\sqrt{2}}\right)\right)\right] \end{aligned} \tag{47}$$

où $\hat{g}(k)$ est donnée par :

$$\hat{g}\left(\frac{2\pi}{L}\right) = \hat{g}\left(-\frac{2\pi}{L}\right) = \frac{1}{2}, \quad \hat{g}(k) = 0, k \notin \left\{-\frac{2\pi}{L}, \frac{2\pi}{L}\right\} \tag{48}$$

Lemme 5.5. *Sous l'hypothèse $\hat{u}(t=0,k) = 0$, pour $\frac{\partial D(k,\omega)}{\partial \omega}$ donnée par* (46) *et $N(k,\omega)$ par* (47)*, l'hypothèse 5.1 est satisfaite.*

La démonstration de ce lemme est effectuée dans l'annexe A. Elle permet de justifier l'écriture (38) du mode fondamental du champ électrique linéarisé puis l'approximation (39) de l'énergie électrique linéarisée.

5.4.3 Application à la modélisation cinétique

La densité de particules initiale de la modélisation cinétique peut se réécrire comme la somme de la densité de particules froides et de la densité de particules chaudes, avec pour les particules froides une simple distribution maxwellienne non perturbée, et pour les particules chaudes une bi-maxwellienne dont l'intégration a déjà été traitée dans le cas hybride :

$$f_0(x,v) = \mathcal{M}_{1-\alpha,0,Tc}(v) + f_{h,0}(x,v) \tag{49}$$

avec $f_{h,0}(x,v)$ donnée par (40). L'expression de $D(k,\omega)$ s'obtient à partir de (26) et (43) :

$$\begin{aligned} D(k,\omega) = 1 - \frac{1}{k^2}\Bigg[& -\frac{1-\alpha}{T_c}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2T_c}}\frac{\omega}{k} Z\left(\frac{1}{\sqrt{2T_c}}\frac{\omega}{k}\right)\right) \\ & -\frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\omega}{k} - v_0\right) Z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\omega}{k} - v_0\right)\right)\right) \\ & -\frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\omega}{k} + v_0\right) Z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\omega}{k} + v_0\right)\right)\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{50}$$

Expression que l'on peut dériver et simplifier à l'aide de (42) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial D(k,\omega)}{\partial \omega} = \frac{1}{\sqrt{2}k^3}\Bigg[& \frac{1-\alpha}{\sqrt{T_c}T_c}\left((1-2\tilde{\omega}_0^2)Z(\tilde{\omega}_0) - 2\tilde{\omega}_0\right) \\ & + \frac{\alpha}{2}\left((1-2\tilde{\omega}_-^2)Z(\tilde{\omega}_-) + (1-2\tilde{\omega}_+^2)Z(\tilde{\omega}_+) - 2\tilde{\omega}_- - 2\tilde{\omega}_+\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{51}$$

où $\tilde{\omega}_0 = \frac{1}{\sqrt{2T_c}}\frac{\omega}{k}$ et $\tilde{\omega}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\omega}{k} \pm v_0)$. Maintenant, pour le calcul de $N(k,\omega)$, on remarque que l'on a :

$$\hat{f}(t=0,k,v) = \hat{g}(k)\frac{\alpha}{2\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{(v-v_0)^2}{2}} + e^{-\frac{(v+v_0)^2}{2}}\right)$$

avec la fonction $g(x)$ qui vérifie :

$$\hat{g}\left(\frac{2\pi}{L}\right) = \hat{g}\left(-\frac{2\pi}{L}\right) = \frac{1}{2}, \quad \hat{g}(k) = 0, k \notin \left\{-\frac{2\pi}{L}, \frac{2\pi}{L}\right\}$$

ce qui nous permet, en utilisant les équations (27) et (44) d'obtenir :

$$N(k,\omega) = -\frac{\hat{g}(k)}{k^2}\frac{\alpha}{2\sqrt{2}}\left(Z\left(\frac{\frac{\omega}{k} - v_0}{\sqrt{2}}\right) + Z\left(\frac{\frac{\omega}{k} + v_0}{\sqrt{2}}\right)\right) \tag{52}$$

Nous avons donc le lemme suivant.

Lemme 5.6. *Pour* $\frac{\partial D(k,\omega)}{\partial \omega}$ *donnée par* (51) *et* $N(k,\omega)$ *par* (52)*, l'hypothèse 5.1 est satisfaite.*

La démonstration de ce lemme est effectuée dans l'annexe A. Elle permet de justifier l'écriture (38) du mode fondamental du champ électrique linéarisé puis l'approximation (39) de l'énergie électrique linéarisée.

5.4.4 Consistance des relations de dispersion

Dans les sous-sections précédentes, nous avons obtenu les relations de dispersion des modèles cinétique et VHL correspondant à la condition initiale (49). Une première validation va consister à vérifier que les relations de dispersion du modèle cinétique données par (50)-(51)-(52) sont consistantes, quand $T_c \to 0$, avec les relations de dispersion du modèle hybride données par (45)-(46)-(47). Pour cela, rappelons que

$$Z(z) = \sqrt{\pi}\exp(-z^2)(i - erfi(z))$$

et qu'à la limite $z \to +\infty$, nous avons le développement asymptotique suivant

$$erfi(z) = -i + \exp(z^2)/\sqrt{\pi}(\frac{1}{z} + \frac{1}{2z^3} + \frac{3}{4z^5} + \mathcal{O}\left(z^{-7}\right)).$$

Ainsi, nous avons $Z(z) = 2i\sqrt{\pi}\exp(-z^2) - \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^3} - \frac{3}{4z^5} + \mathcal{O}\left(z^{-7}\right)$ ou encore $Z(z) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{2z^3} - \frac{3}{4z^5} + \mathcal{O}\left(z^{-7}\right)$ et donc

$$zZ(z) = -1 - \frac{1}{2z^2} + \mathcal{O}\left(z^{-4}\right).$$

Commençons par regarder la consistance en $D(k,\omega)$. Avec $z = \frac{1}{\sqrt{2T_c}}\frac{\omega}{k}$ quand $T_c \to 0$, le terme correspondant aux particules froides de (50) s'écrit

$$\begin{aligned}
-\frac{1-\alpha}{T_c}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2T_c}}\frac{\omega}{k}Z\left(\frac{1}{\sqrt{2T_c}}\frac{\omega}{k}\right)\right) &= -\frac{1-\alpha}{T_c}\left(1 - 1 - \frac{1}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2T_c}}\frac{\omega}{k}\right)^2} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2T_c}}\frac{\omega}{k}\right)^{-4}\right)\right) \\
&= (1-\alpha)\frac{k^2}{\omega^2} + \mathcal{O}(T_c).
\end{aligned}$$

C'est le terme correspondant à la partie fluide (froide) de (45). Les autres termes (venant des particules chaudes) sont les mêmes dans les deux expressions, donc $D(k,\omega)$ donné par le modèle cinétique est consistant, à la limite $T_c \to 0$, avec celui donné par le modèle hybride (avec un taux $\mathcal{O}(T_c)$). Regardons ensuite la consistance en $\frac{\partial D(k,\omega)}{\partial \omega}$. Les termes venant des particules chaudes sont les mêmes dans les modèles cinétique (51) et hybride (46). Nous ne nous intéressons qu'aux termes venant des particules froides. De (51), nous avons

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2}k^3}\frac{1-\alpha}{T_c\sqrt{T_c}}\left(Z\left(\tilde{\omega}_0\right) - 2\tilde{\omega}_0^2 Z\left(\tilde{\omega}_0\right) - 2\tilde{\omega}_0\right) \\
= &\frac{1}{\sqrt{2}k^3}\frac{1-\alpha}{T_c\sqrt{T_c}}\left(-\frac{1}{\tilde{\omega}_0} - \frac{1}{2\tilde{\omega}_0^3} + 2\tilde{\omega}_0 + \frac{1}{\tilde{\omega}_0} + \frac{3}{2\tilde{\omega}_0^3} - 2\tilde{\omega}_0\right) + \mathcal{O}\left(\tilde{\omega}_0^{-5}\right) \\
= &\frac{1}{\sqrt{2}k^3}\frac{1-\alpha}{T_c\sqrt{T_c}}\frac{1}{\tilde{\omega}_0^3} + \mathcal{O}\left(\tilde{\omega}_0^{-5}\right)
\end{aligned}$$

donc pour $\tilde{\omega}_0 = \frac{1}{\sqrt{2T_c}}\frac{\omega}{k}$, nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{2}k^3}\frac{1-\alpha}{T_c\sqrt{T_c}}\frac{2T_c\sqrt{2T_c}k^3}{\omega^3} = 2\frac{1-\alpha}{\omega^3}$$

qui est le terme fluide de (46). Regardons enfin la consistance en $N(k,\omega)$. Là encore, les termes venant des particules chaudes sont les mêmes dans les modèles cinétique (52) et hybride (47). Les termes supplémentaires dans le modèle hybride s'annulent sous l'hypothèse $\hat{u}(t=0,k) = 0$ et avec $\hat{g}(k)$ donné par (48) et $\hat{E}(t=0,k)$ obtenu à partir de l'équation de Poisson

$$\begin{aligned}
\partial_x E(t=0,x) &= \rho_c(t=0,x) + \int f^h(t=0,x,v)dv - 1 \\
&= (1-\alpha) + \alpha\left(1 + \varepsilon\cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\right) - 1 \\
&= \alpha\varepsilon\cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)
\end{aligned}$$

soit

$$\hat{E}\left(t=0,k\right) = -\frac{i\alpha}{2k},\ k \in \left\{-\frac{2\pi}{L}, \frac{2\pi}{L}\right\}, \quad \hat{E}(k) = 0,\ k \notin \left\{-\frac{2\pi}{L}, \frac{2\pi}{L}\right\}. \tag{53}$$

La consistance du modèle cinétique, à la limite $T_c \to 0$, vers le modèle hybride est établie sur les relations de dispersion.

6 Limite du modèle cinétique vers le modèle hybride

Il s'agit ici d'étudier numériquement la convergence du modèle cinétique (1)-(2) vers le modèle VHL (7), lorsque la température T_c des particules froides tend vers 0. Une première étude de consistance est effectuée sur les relations de dispersion. Une seconde étude, numérique, montre la convergence de différentes quantités obtenues par les schémas proposés dans la section 4. Ces deux études complémentaires ont pour but de justifier l'utilisation de la modélisation hybride linéarisée lorsque les particules se répartissent en deux faisceaux : l'un de particules chaudes (rapides) et l'autre de particules froides (de température $T_c \ll 1$, lentes). Pour cela, le modèle cinétique (1)-(2) sera initialisé avec

$$f^0(x,v) = \mathcal{M}_{1-\alpha,0,T_c}(v) + (1+\epsilon\cos(kx))\left(\mathcal{M}_{\alpha/2,v_0,1}(v) + \mathcal{M}_{\alpha/2,-v_0,1}(v)\right) \tag{54}$$

avec $k = 0.5$, $v_0 = 4$, α, $x \in [0, 4\pi]$, $v \in [-v_{\max}, v_{\max}]$ avec $v_{\max} = 8$ et la perturbation des particules chaudes $\epsilon = 10^{-3}$. Le paramètre T_c prendra différentes valeurs selon les résultats que nous souhaitons illustrer. Comme dans la sous-section 5.4, on a noté $\mathcal{M}_{\rho,u,T}(v)$ la distribution Maxwellienne :

$$\mathcal{M}_{\rho,u,T}(v) := \frac{1}{(2\pi T)^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{|v-u|^2}{2T}\right)$$

Pour la condition initiale des simulations avec le modèle hybride linéarisé (7), nous considérerons :

$$\begin{aligned}
u_c(x) &= 0 \\
f_h(x,v) &= (1+\epsilon\cos(kx))\left(\mathcal{M}_{\alpha/2,v_0,1}(v) + \mathcal{M}_{\alpha/2,-v_0,1}(v)\right)
\end{aligned} \tag{55}$$

où k, v_0, α et ϵ sont pris identiques au modèle cinétique, le domaine en x et en v reste inchangé. $E(t=0,x)$ est obtenu en résolvant l'équation de Poisson sur notre condition initiale, comme indiqué dans la proposition 2 :

$$\partial_x E(t=0) = (1-\alpha) + \int (1+\epsilon\cos(kx))\left(\mathcal{M}_{\alpha/2,v_0,1}(v) + \mathcal{M}_{\alpha/2,-v_0,1}(v)\right)\,\mathrm{d}v - 1$$

expliquer pourquoi il y a une bande jaune dans Fig. 1 Avant une étude plus détaillée, nous donnons un premier aperçu des solutions des deux modèles pour le choix $T_c = 0.05$. Sur la figure 1, sont tracées la condition initiale $f^0(x, v)$ du modèle cinétique (gauche), la solution numérique $f(T_f = 300, x, v)$ au temps final du modèle cinétique (milieu) et la solution numérique $f_h(T_f = 300, x, v)$ au temps final des particules chaudes pour le modèle hybride (droite). De plus, sur la figure 2 est tracée l'évolution de l'énergie électrique $\|E(t, \cdot)\|_{L_2}$ au cours du temps pour ces deux modèles avec les mêmes paramètres numériques (échelle semi-logarithmique).

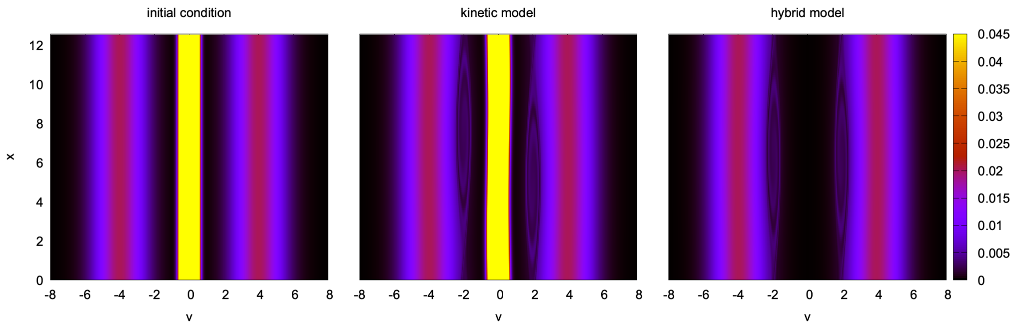


FIGURE 1 – Représentation de la condition initiale du modèle cinétique à gauche et la solution obtenue au temps final $T_f = 300$ avec le modèle cinétique avec $T_c = 0.05$ (au milieu) et la densité de particules chaudes obtenue avec modèle hybride linéarisé (à droite).

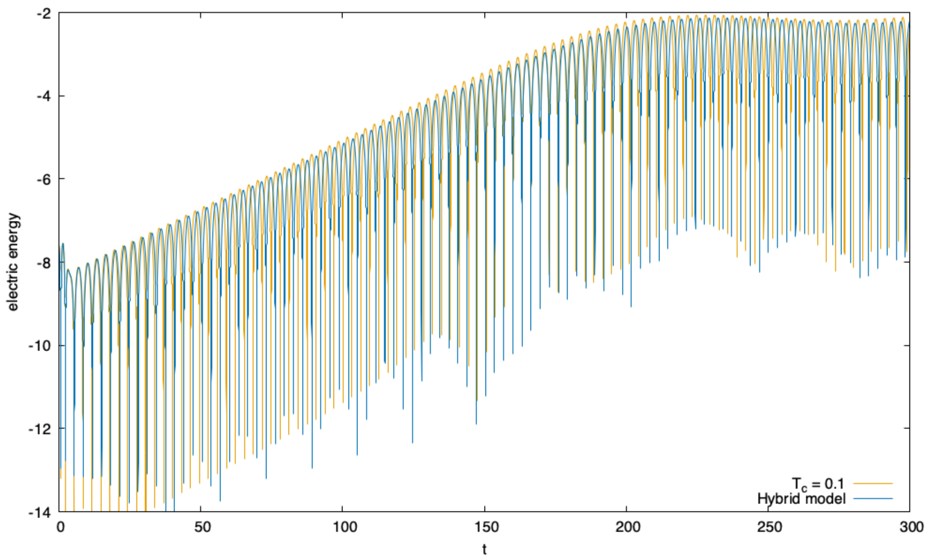


FIGURE 2 – Énergie électrique donnée pour le modèle cinétique avec $T_c = 0.05$ et le modèle hybride linéarisé.

La première observation est que les résultats proches de ceux obtenus par le modèle hybride linéarisé (7) sont très proches de ceux obtenus par le modèle cinétique (1)-(2), ce qui valide la modélisation. La perturbation des particules chaudes induit une instabilité (l'équilibre étant du type double Gaussienne) qu'on voit se développer jusqu'au temps $t = 200$ (voir figure 2) et deux vortex sont alors créés autour de la vitesse $v \approx 2$, au centre desquels de fines structures se développent.

Dans la suite, nous allons approfondir cette étude en comparant les résultats obtenus aux relations de dispersion des deux modèles puis en essayant de déterminer le domaine de validité du modèle VHL.

6.1 Convergence en énergie totale

Nous nous intéresserons ici à une grandeur conservée qu'est l'énergie totale, celle-ci est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie électrique. Pour le modèle cinétique elle se calcule comme :

$$\mathcal{E}_K(t) = \iint_{\Omega\times\mathbb{R}} v^2 f \,\mathrm{d}x\mathrm{d}v + \int_\Omega E^2 \,\mathrm{d}x.$$

Pour le modèle VHL, l'énergie cinétique comporte deux termes, un terme fluide pour les particules froides, et un terme cinétique pour les particules chaudes :

$$\mathcal{E}_{VHL}(t) = \int_\Omega \rho_c u_c^2 \,\mathrm{d}x + \iint_{\Omega\times\mathbb{R}} v^2 f_h \,\mathrm{d}x\mathrm{d}v + \int_\Omega E^2 \,\mathrm{d}x$$

Proposition 3. *La différence en énergie totale entre le modèle cinétique et le modèle hybride linéarisé pour des conditions initiales données par* (54) *et* (55) *converge en* $(1-\alpha)T_c|\Omega|$.

Démonstration. Pour le choix de f^0, l'énergie totale du modèle cinétique vaut :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_K(t) = \mathcal{E}_K(0) &= \iint_{\Omega\times\mathbb{R}} v^2 f^0(x,v) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}v + \int_\Omega E^2(t=0,x) \,\mathrm{d}x \\ &= \left[(1-\alpha)T_c + \alpha v_0^2 + \alpha\right]|\Omega|\end{aligned}$$

On remarque que lorsque $T_c \to 0$, on obtient $\lim_{T_c\to 0}\mathcal{E}_K(t) = (\alpha v_0^2 + \alpha)|\Omega|$. L'énergie totale dans le cadre du modèle hybride se calcule comme suit :

$$\mathcal{E}_{HL}(t) = \int_\Omega \rho_c^{(0)} u_c^2 \,\mathrm{d}x + \iint_{\Omega\times\mathbb{R}} v^2 f_h \,\mathrm{d}x\mathrm{d}v + \int_\Omega E^2 \,\mathrm{d}x$$

ce qui nous donne, avec le choix de condition initiale $\rho_c^{(0)} = 1-\alpha$, $u_c^0 = 0$ et $f_h^0(v) = \mathcal{M}_{\alpha/2,v_0,1}(v) + \mathcal{M}_{\alpha/2,-v_0,1}(v)$, conformément à (55) :

$$\mathcal{E}_{HL}(t) = (\alpha v_0^2 + \alpha)|\Omega|$$

qui est bien compatible avec $\lim_{T_c\to 0}\mathcal{E}_K(t)$. De plus on peut calculer :

$$\mathcal{E}_K(t) - \mathcal{E}_{HL}(t) = (1-\alpha)T_c|\Omega|$$

c'est-à-dire que la convergence du modèle hybride est liée à la pression $\rho_c^{(0)}T_c$ des particules froides. □

Pour vérifier numériquement cette proposition nous effectuons un jeu de simulations. Le modèle cinétique de Vlasov-Poisson (1)-(2) est simulé à l'aide d'une méthode en temps de type Lawson basée sur une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, la méthode WENO d'ordre 5 pour approcher la dérivée dans la direction v et l'algorithme de FFT pour la dérivée dans la direction x. Il s'agit ainsi du même schéma que celui utilisé pour la fonction de distribution f_h des particules chaudes du modèle hybride linéarisé. Nous choisissons la condition initiale (54) avec $\alpha = 0.2$, $T_c \in \{0.06, 0.1, 0.125, 0.15, 0.175, 0.2\}$, la discrétisation du domaine $\Omega = [0, 4\pi]$ s'effectue avec $N_x = 135$ points, la discrétisation du domaine en vitesse $[-v_{\max}, v_{\max}]$ nécessite de capturer la gaussienne représentant les particules froides pour différentes valeurs de T_c, nous choisissons donc d'adapter le nombre de points de discrétisation en vitesse N_v à T_c, $N_v \in \{1131, 1011, 905, 826, 764, 715\}$, ceux-ci correspondant à environ 20 points de discrétisation pour capturer la gaussienne de température T_c, $N_v \approx \lceil \frac{16}{\sqrt{T_c/20}} \rceil$. Nous avons une condition CFL sur le schéma WENO utilisé dans la direction v, nous nous assurons d'être sous cette condition quelle que soit l'évolution de E en prenant $\Delta t = 0.5\Delta v$. Ce jeu de simulations s'arrête au temps 7, or le choix des différents Δt implique des données à des temps différents, nous choisissons d'effectuer une interpolation polynomiale de Lagrange d'ordre 5 pour exploiter les données au temps $T^\star = 6.5$. Nous obtenons ainsi l'énergie totale pour différentes températures sur la figure 3, bien que le schéma de type Runge-Kutta ne conserve pas exactement l'énergie, celle-ci est bien préservée en temps court (dire a quelle precision environ 10^{-12}, 10^{-8} ?). Après l'interpolation au temps $T^\star = 6.5$ on obtient la convergence vers le modèle hybride sur la figure 4 où l'on observe bien l'ordre 1 en température.

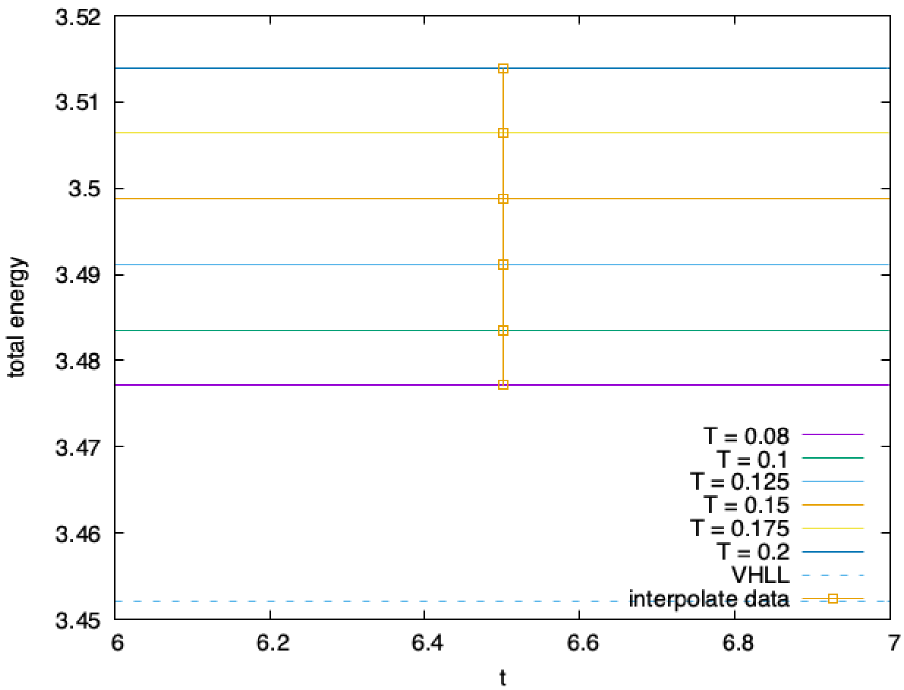


FIGURE 3 – Énergie totale avec les différents modèles.

Nous effectuons le même type d'analyse sur l'énergie électrique, à partir des données des simulations précédentes, en sachant qu'il n'existe pas de résultat théorique sur sa convergence. L'énergie électrique pour les différents choix de T_c est représentée sur la figure 5a, cette figure illustre mieux la nécessité d'effectuer une interpolation pour extraire les données. Une convergence est observée mais avec un ordre plus faible, environ 0.59, que l'énergie totale sur la figure 5b.

6.2 Convergence en température à l'aide des relations de dispersion

Nous étudions numériquement la convergence des racines de la relation de dispersion quant T_c tend vers 0. Pour cela, on note $D^K_{[T_c]}(\omega, k)$ la relation de dispersion du modèle cinétique (50) et $D^H(\omega, k)$ la relation de dispersion du modèle VHL (45). Pour k fixé, on note $\omega \in \mathbb{C}$ la racine de plus grande partie imaginaire. Cette racine est calculée numériquement à l'aide

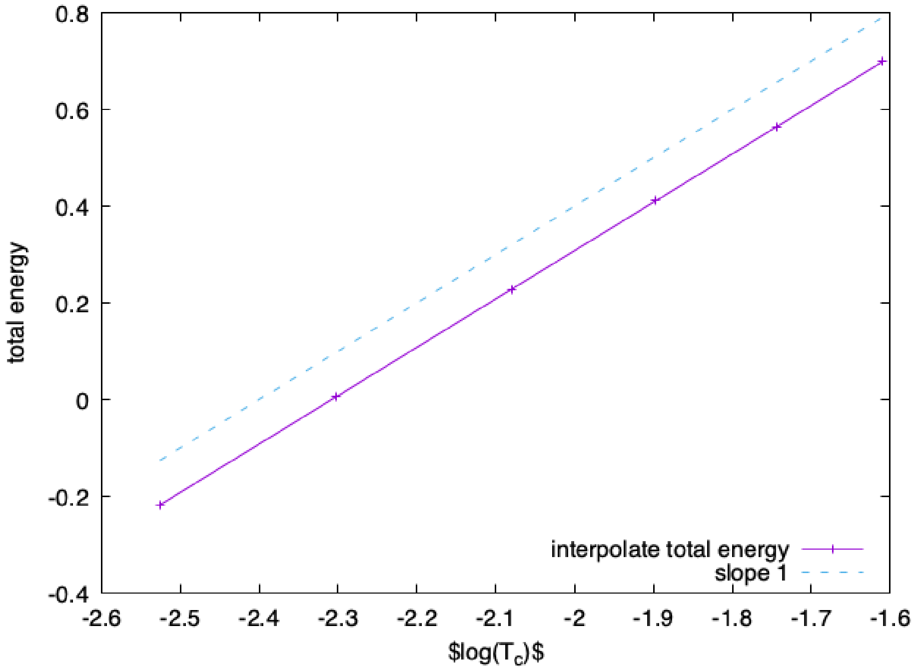
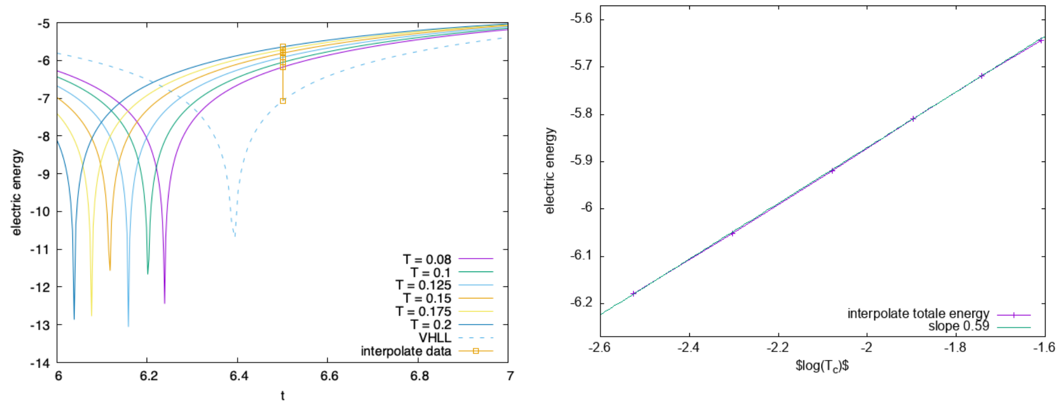


FIGURE 4 – Convergence de l'énergie totale du modèle cinétique vers le modèle hybride quand T_c tend vers 0.

d'une méthode de Newton. On étudie maintenant la convergence des ω_K (zéro de $(D^K(\omega, k))$ vers ω_H (zéro de $(D^H(\omega, k))$. La convergence de $\omega_K(T_c)$ vers ω_H est visible sur la figure 6, où l'on représente, en échelle log-log le module de la différence des 2 zéros $\Delta\omega = |\omega_K - \omega_H|$. On observe une convergence d'ordre 1 en T_c des zéros de la relation de dispersion, aucun argument théorique sur les fonctions holomorphes ne vient appuyer ce résultat, contrairement à ce qui a été énoncé pour l'énergie totale.

La racine de plus grande partie imaginaire permettent de valider la phase linéaire du code. Cette phase linéaire peut être rendue plus longue en considérant une valeur très faible de la perturbation $\epsilon = 10^{-4}$ dans les conditions initiales (54) et (55). Ceci va nous permettre de vérifier non seulement le taux d'instabilité, mais aussi, grâce aux calculs de la section 5 de l'énergie électrique. Nous pouvons donc comparer pour $\alpha = 0.1$, $T_c = 0.1$, $N_x = 135$, $N_v = 1200$, $T_f = 200$ et $\Delta t = 0.5\Delta x$ ce régime linéaire sur la figure 7a. Un résultat similaire est observable pour différentes températures ainsi que sur le modèle hybride linéarisé, comme l'illustre la figure 7b. (referer aux formules de la section 5 et donner la formule avec les valeurs de ω...) En plus du taux d'instabilité de l'énergie électrique, il est possible à l'aide des relations de dispersion d'obtenir une très bonne approximation de l'énergie électrique dans la phase linéaire. On peut voir que l'étude des relations de dispersion ne permet pas d'obtenir des résultats fiables en début de simulation, où d'autres modes que le mode principal sont encore visibles (modes évanescents). De même, comme on peut le voir sur la figure 2, la phase non-linéaire où l'énergie électrique atteint une saturation mélange de nombreux modes, c qui est incompatible avec l'étude du linéarisé. Néanmoins, même au temps $t \approx 200$, les résultats du code sont en excellent accord avec ceux obtenus grâce aux relations de dispersion (voir figure 7b).



(a) Énergie électrique avec les différents modèles

(b) Convergence de l'énergie électrique du modèle cinétique vers le modèle hybride quand T_c tend vers 0.

FIGURE 5 – Étude de la convergence de l'énergie électrique lorsque T_c tend vers 0.

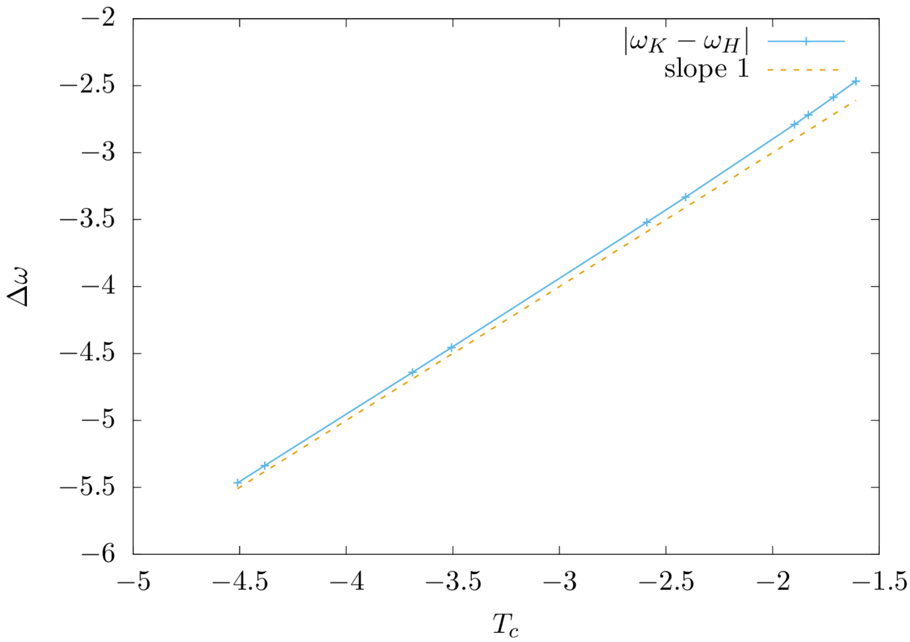
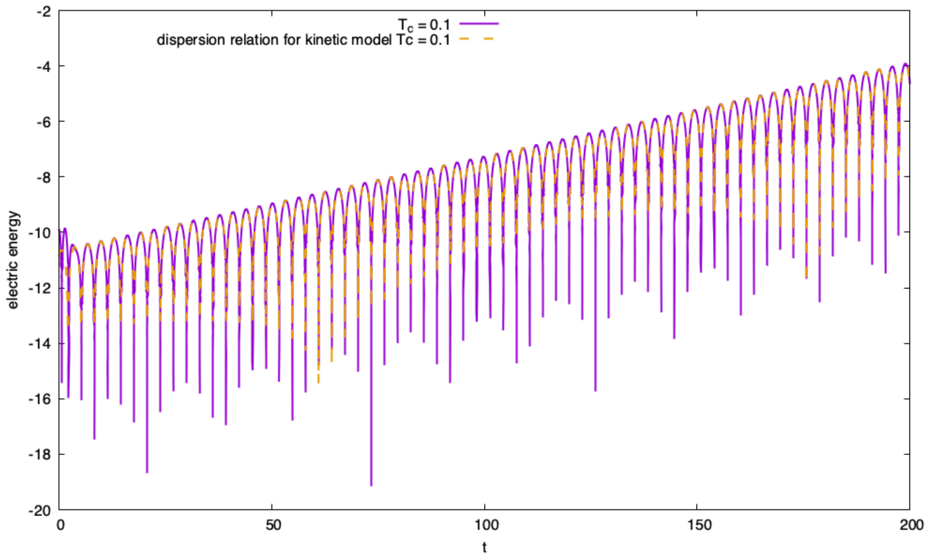


FIGURE 6 – Convergence des zéros de la relation de dispersion cinétique vers la solution hybride

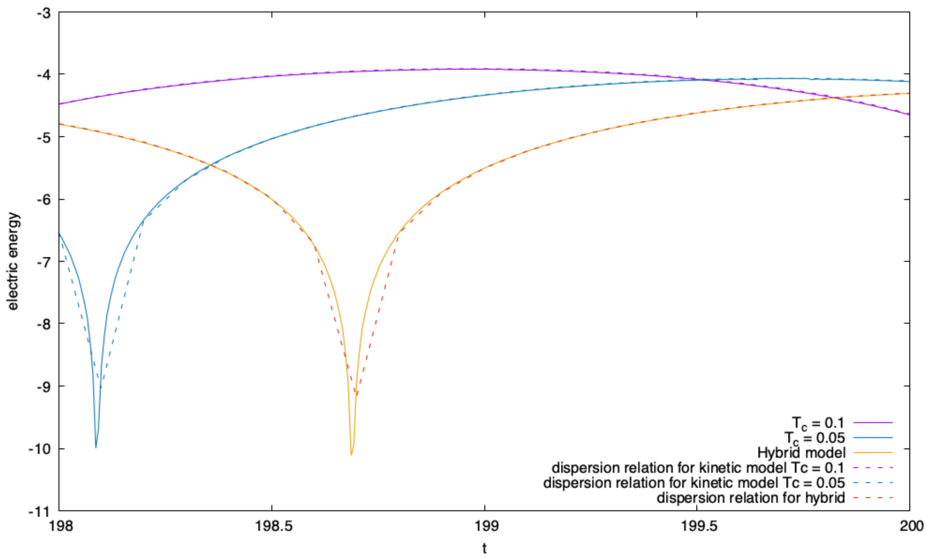
6.3 Évolution avec la densité de particules chaudes

Nous avons validé les modèles et les relations de dispersions lorsque la température des particules froides T_c tend vers 0, la proposition 3 nous indique que la convergence s'effectue en $(1-\alpha)T_c|\Omega|$ où α est la densité des particules chaudes. Nous traçons sur la figure 8 l'évolution du taux d'instabilité donnée par les relations de dispersions (racine de plus grande partie imaginaire) en fonction de α et pour différentes valeurs de T_c. Cette évolution est représentée pour le modèle cinétique avec différentes températures, et pour le modèle hybride, avec comme condition initiale pour les particules chaudes :

$$f_h^0(x,v) = \left(\mathcal{M}_{\alpha/2,4,1}(v) + \mathcal{M}_{\alpha/2,-4,1}(v)\right)(1+\epsilon\cos(kx)), \quad x \in [0,4\pi].$$



(a) Énergie électrique jusqu'au temps 200 avec un régime linéaire très long, et comparaison avec les résultats données par les relations de dispersion.



(b) Énergie électrique entre les temps 198 et 200 pour les températures $T_c = 0.1, 0.05$ et le modèle hybride, et comparaison avec les résultats des relations de dispersion.

FIGURE 7 – Évolution de l'énergie électrique dans une longue phase linéaire et comparaison avec les relations de dispersion.

La condition initiale du modèle cinétique est donnée par : $f^0(x,v) = \mathcal{M}_{1-\alpha,0,T_c}(v) + f_h^0(x,v)$. On retrouve sur la figure 8 la convergence en température du modèle cinétique vers le modèle

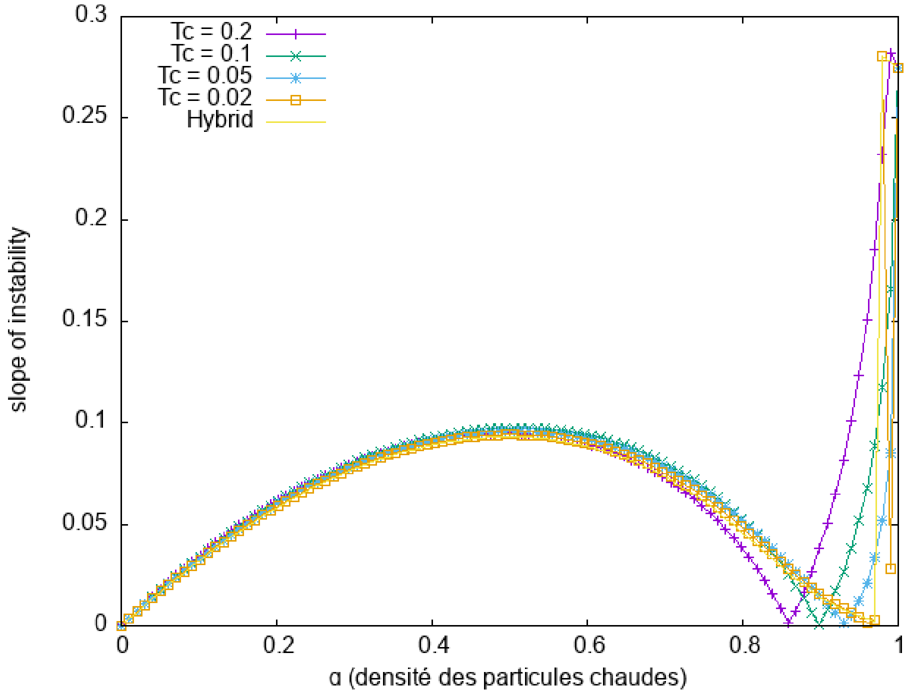


FIGURE 8 – Évolution de la pente du développement de l'instabilité (ou taux d'instabilité) donnée par les relations de dispersion en fonction de la densité de particules chaudes α

hybride. Pour $\alpha = 0$ la condition initiale se restreint aux particules froides, qui ne sont pas perturbées, il est donc normal d'obtenir une pente nulle ; pour $\alpha = 1$, il n'y a que des particules chaudes et on retrouve l'instabilité double faisceaux (TSI) avec le bon taux d'instabilité. On peut enfin observer que pour ce choix de T_c, les taux d'instabilité obtenus restent proches de ceux du modèle VHL pour $0 \leqslant \alpha \leqslant 0.5$ (qui correspond à une population identique de particules chaude et froide).

7 Comparaison des deux résolutions hybrides

Dans cette section on s'intéressera à la comparaison des méthodes de simulation présentées dans la section 4 pour approcher numériquement le modèle VHL. On étudiera en particulier les méthodes de pas de temps adaptatif associées. Nous utilisons dans cette section la condition initiale suivante :

$$\begin{aligned} u_c(x) &= 0 \\ f_h(x,v) &= \left(\mathcal{M}_{\alpha/2,v_0,1}(v) + \mathcal{M}_{\alpha/2,-v_0,1}(v)\right)(1+\epsilon\cos(kx)) \end{aligned}$$

avec $k = 0.5$, $\alpha = 0.2$, $v_0 = 4$, $x \in [0, 4\pi]$, $v \in [-8, 8]$, et la perturbation $\epsilon = 0.1$. Le champ électrique initiale $E(t = 0, x)$ est obtenu en résolvant l'équation de Poisson sur notre condition initiale, comme indiqué dans la proposition 2 :

$$\partial_x E(t=0) = (1-\alpha) + \int (1+\epsilon\cos(kx))\left(\mathcal{M}_{\alpha/2,v_0,1}(v) + \mathcal{M}_{\alpha/2,-v_0,1}(v)\right)\,\mathrm{d}v - 1$$

La discrétisation du domaine s'effectue avec $N_x = 81$ dans la direction x, et $N_v = 128$ points dans la direction v.

Nous allons effectuer différentes configurations pour tester et comparer les deux méthodes

1. pas de temps fixe
   - $\Delta t = 0.5\Delta v$
   - $\Delta t = \sigma \frac{\Delta t}{\|E^n\|_\infty}$ où $\sigma \approx 1.433$ est la condition CFL de WENO5 avec DP4, et $\|E^n\|_\infty = \max_{t^n}(\max_i |E_i^n|) \approx 0.2$ d'après une estimation issue des résultats d'une simulation ;
   - $\Delta t = 1$ qui est un pas de temps choisi arbitrairement grand pour illustrer l'absence de condition CFL de la méthode de Suzuki.
2. pas de temps adaptatif
   - méthode présentée dans la section 4.3 avec une tolérance $tol = 10^{-4}$,
   - méthode basée sur la condition de CFL en choisissant $\Delta t^n = \min\left(\sigma \frac{\Delta v}{\|E_i^n\|_\infty}, 2\right)$ où $\sigma \approx 1.433$, et $\|E_i^n\|_\infty = \max_i(|E_i^n|)$.

Quelque soit la méthode de simulation choisie, nous allons regarder les estimateurs d'erreur présentées dans la section 4.3 :

$$\begin{aligned} L &= \left(\sum_i ({u_c}_i^{[4]} - {u_c}_i^{[3]})^2 \Delta x\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_i (E_i^{[4]} - E_i^{[3]})^2 \Delta x\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i,j} \left| {f_h}_{i,j}^{[4]} - {f_h}_{i,j}^{[3]} \right|^2 \Delta v \Delta x\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= L_{u_c} + L_E + L_{f_h} \end{aligned}$$

Cela permettra de comparer l'estimation de l'erreur avec une même tolérance entre la méthode DP4(3) et la méthode de Suzuki. Nous allons aussi regarder le nombre d'itération de chaque méthode de simulation, et la taille des pas de temps que la méthode de pas de temps adaptatif propose. Il est à noter que uniquement les deux méthodes de la section 4.3 utilisent cette estimation d'erreur et ont un critère pour rejeter une itération.

Figure 9 : en faire 2 figure (Suzuki et DP par exemple ?). Reprendre les commentaires en fonction du coup.

Sur la figure 9 on peut voir l'évolution de l'énergie électrique au cours du temps pour les différentes simulations. Il est important de remarquer que 4 résultats sont différents de ce que prédit la relation de dispersion, la courbe rouge, qui est un résultat donné par la méthode DP4 avec un pas de temps $\Delta t = 1$ hors de la condtion CFL, le schéma est instable ; la courbe jaune, dont les résultats sont donnés par la méthode DP4 avec un pas de temps $\Delta t = 1.433\Delta v/\|E\|_\infty$ est l'illustration d'un schéma utilisé juste sous sa condition de CFL, le schéma est stable mais il n'est pas précis ; les courbes violettes et vertes sont issus des résultats respectivement de DP4 et Suzuki avec une méthode de pas de temps adaptatif donné par la condition de CFL, cette méthode de pas de temps adaptatif propose de très grand pas de temps dans la phase linéaire du problème où le champ électrique est faible, mais produit une erreur importante, qui se répercute sur les résultats en fin de simulation. Les autres résultats sont conformes aux relations de dispersion.

Sur la figure 10 on représente l'évolution du temps courant dans la simulation en fonction des itérations. Les courbes en pointillés sont celles avec un pas de temps constant. On remarque que les simulations où le pas de temps est guidé par la condition de CFL locale sont parmi les plus performantes pour atteindre le temps final, mais comme nous avons pu le voir sur la figure précédente 9, ce sont aussi celles qui donnent des résultats avec une très mauvaise précision. Les simulations avec un pas de temps constant très grand, donnent à première vue de bon résultat avec un intégrateur en temps sans condition de CFL comme Suzuki, mais de mauvais résultats avec la méthode DP4. La méthode DP4(3) s'impose ensuite comme

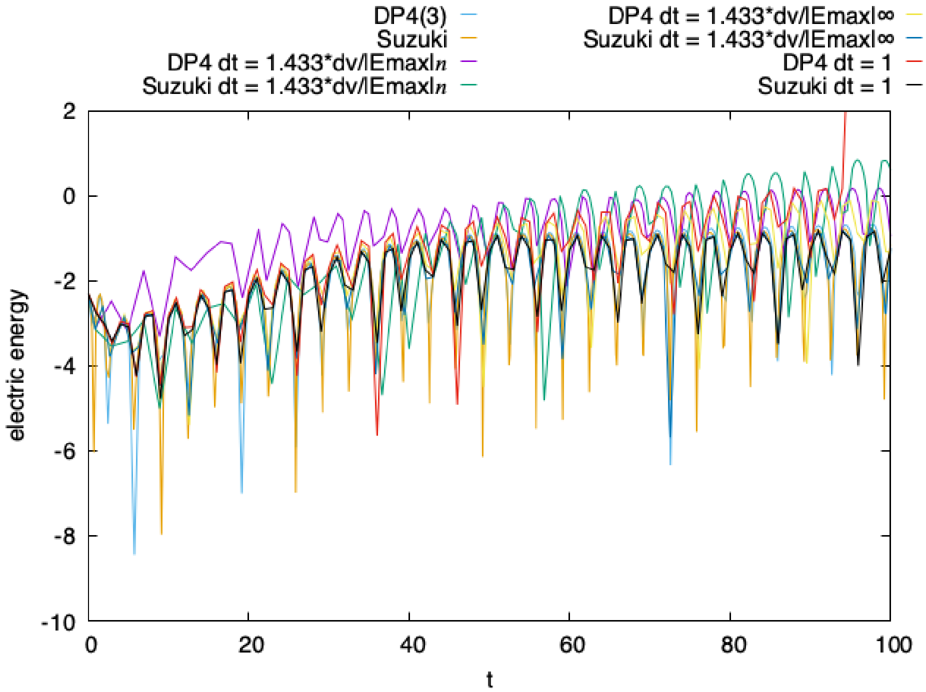


Figure 9 – Évolution de l'énergie électrique avec les différentes méthodes

un très bon choix pour maintenir l'erreur sous une certaine tolérance tout en atteignant rapidement le temps final, ici $T_f = 100$. Les résultats pour la méthodes de Suzuki à pas de temps adaptatif ou les simulations avec un pas de temps pris arbitrairement petit $\Delta t = 0.5\Delta v$, ont été tronqués pour mieux observer les simulations plus rapide, la méthode de Suzuki termine en 1290 itérations, et les simulations avec un pas de temps fixé à $\Delta t = 0.5\Delta v$ en 1600 itérations. commentaire[Nicolas]Je ne comprends pas bien la fin : pourquoi 2 méthodes ont été "tronquées" ?

Il est intéressant de regarder, pour des méthodes à pas de temps adaptatif, l'évolution de la taille du pas de temps. C'est ce qui est tracé sur la figure 11 en fonction du temps, les itérations rejetées par un critère d'erreur n'ont pas été représentées sur cette figure. Les simulations dont le pas de temps est donné par la condition de CFL locale $\sigma\Delta v/(\max|E^n|)$ (en violet et en vert sur la figure) sont soumis à de très importantes variations dans le choix du pas de temps, de plus, pour éviter des erreurs trop importantes en début de simulation, il a été choisi de toujours prendre un pas de temps inférieur à 2, cette forte variabilité dans le choix du pas de temps implique une erreur relativement importante dans les résultats. La méthode DP4(3) propose des pas de temps autour de 0.5 et propose des pas de temps plus important dans la phase linéaire (entre les temps 5 et 40). La méthode de Suzuki, alors qu'elle n'est soumis à aucune condition de stabilité, propose des pas de temps bien plus faible, jusqu'à proposer des pas de temps similaire au choix arbitraire $\Delta t = 0.5\Delta v$, et ce avant l'installation de la saturation de l'énergie électrique au temps 40. Sur la figure 12 on représente à la fois les itérations acceptées et rejetées par le critère d'erreur, on remarque que le pas de temps des itérations rejetées reste du même ordre de grandeur que les autres itérations. Les rejets d'itérations ont toujours lieu lors des rebonds de l'énergie électrique, pour éviter trop de rejets de la sorte, il est possible de limiter les évolutions du pas de temps de l'itération suivante avec par exemple $\Delta t^{n+1} \in [0.5\Delta t^n, 2\Delta t^n]$. Dire que si on rejete moins, on va plus vite...) Il faudrait parler des courbes "fail" de la figure 11 ; j'imagine que ce sont les iterations rejetees ?

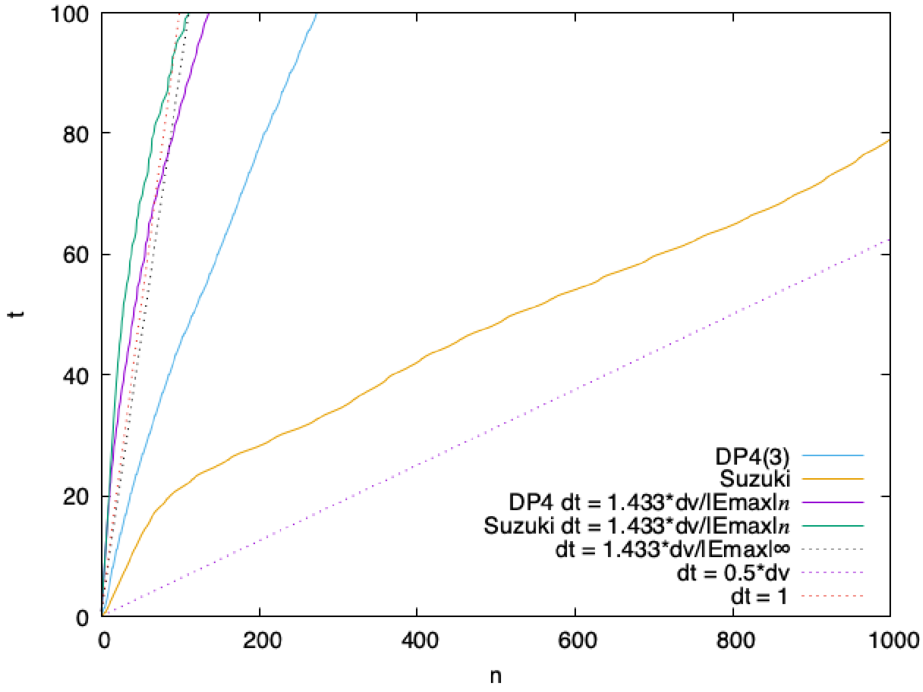


FIGURE 10 – Évolution du temps au cours des itérations de la simulation

On peut regarder l'évolution de l'erreur estimée L au cours du temps de la simulation sur la figure 13, ici encore les itérations rejetées par le critère sont représentées différemment. Les deux méthodes effectuent dans les itérations acceptées une erreur similaire qui semble tourner autour de $0.5tol$. On peut également combiner les résultats de la figure 12 avec ceux de la figure 13 pour tracer le nuage de points de l'erreur commise à chaque itération en fonction du pas de temps proposé par la méthode, ce que l'on trace sur la figure 14. On remarque que de manière général la méthode DP4(3) propose des pas de temps plus grand, et pour chaque méthode, ce ne sont pas les itérations avec les plus grands pas de temps qui sont rejetées. La méthode de Suzuki semble ne jamais effectuer une erreur qui excède $2tol$.

Regardons, toujours pour ces 2 méthodes, l'évolution de l'erreur au cours du temps, mais en regardant la contribution dans L dûe à L_{u_c}, L_E et $L_{\hat{f}_h}$. C'est ce que l'on représente dans la figure 15. L'erreur de la méthode DP4(3) et ses différentes contributions est représentée en haut, alors que celle de la méthode de Suzuki est représentée en bas. La méthode de Lawson propose de résoudre exactement la partie linéaire du problème, dans notre cas seul u_c est entièrement résolu par la partie linéaire, ce qui explique une contribution à l'erreur de l'ordre de 10^{-18} pour L_{u_c}. La partie non linéaire comprend le calcul du courant de f_h dans L_E, et le transport dans la direction v dans $L_{\hat{f}_h}$, ces 2 composantes restent élevées tout au long de la simulation. Pour la méthode de Suzuki, l'erreur provient essentiellement de $L_{\hat{f}_h}$, ce qui est lié à l'erreur produite par la méthode Lagrange 5 pour la résolution du transport dans la direction v.

Quelque soit le choix du pas de temps, on peut utiliser les estimateurs d'erreur locale pour étudier l'évolution de l'erreur au cours du temps pour les différentes méthodes. C'est l'objet de la figure 16 où l'on trace l'évolution de l'erreur en échelle semi-log pour différentes méthodes ainsi que la tolérance 10^{-4}. On remarque que l'erreur commise par la méthode de Suzuki et DP4(3) est bien plus faible que les autres méthodes, et ce d'environ deux ordres de grandeur. Il n'y a que les simulations avec un pas fixe $\Delta t = 0.5\Delta v$ qui sont également sous la tolérance fixé

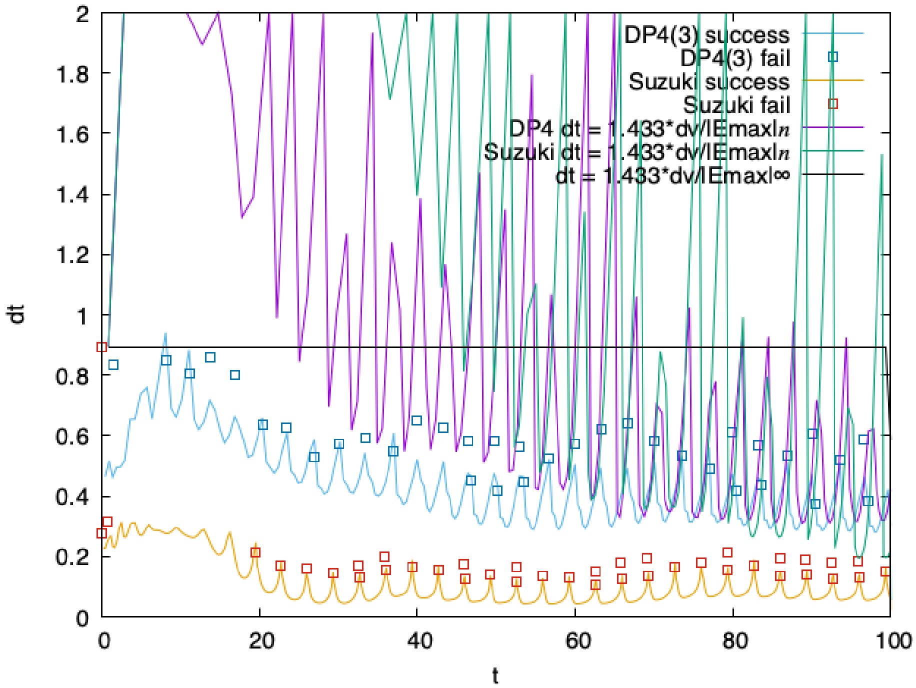


FIGURE 11 – Évolution de la taille du pas de temps Δt^n au cours du temps, les itérations rejetées sont notées à l'aide des carrés

à 10^{-4}. Donc sans connaissance a priori du problème, les méthodes à pas de temps adaptatif présentées dans la section 4.3 sont très intéressantes. Nous pouvons aussi remarquer que la constante d'erreur en temps de la méthode de Suzuki est bien plus importante que la méthode DP4(3) en regardant pour des simulations avec un pas de temps fixe l'erreur commise (par exemple les courbes en pointillées), ceci explique pourquoi la méthode DP4(3) propose des pas de temps plus important pour la même tolérance.

Tracer l'energie totale pour differentes methods (pas de temps fixe Suzuki(dt=1 et dt=2) et DP4(3) + Suzuki en dt adaptatif) temps de calcul par iteration et par etape de calcul.

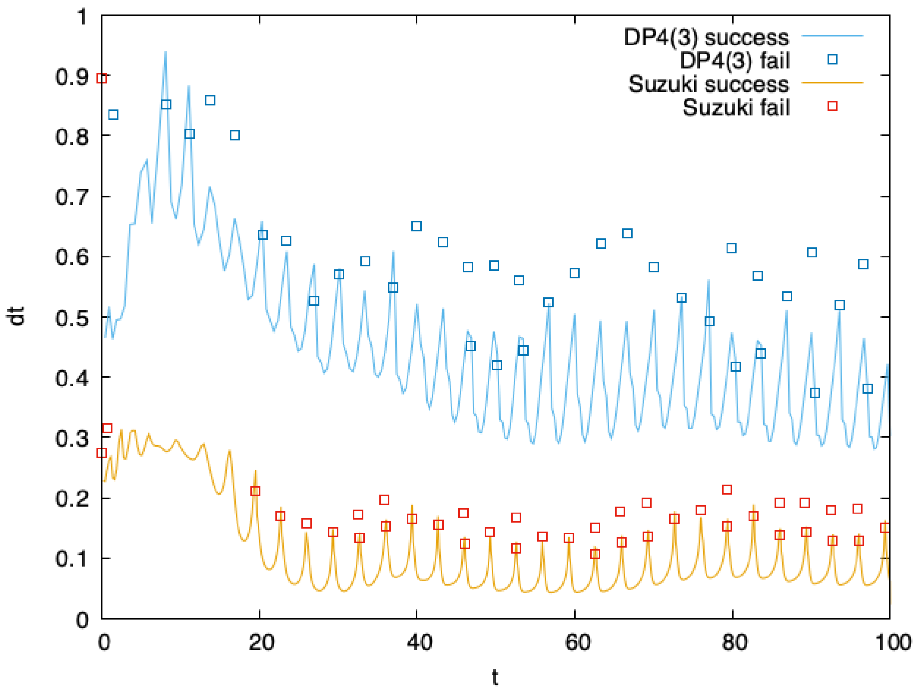


FIGURE 12 – Évolution de la taille du pas de temps Δt^n au cours du temps, les itérations rejetées sont notées à l'aide des carrés

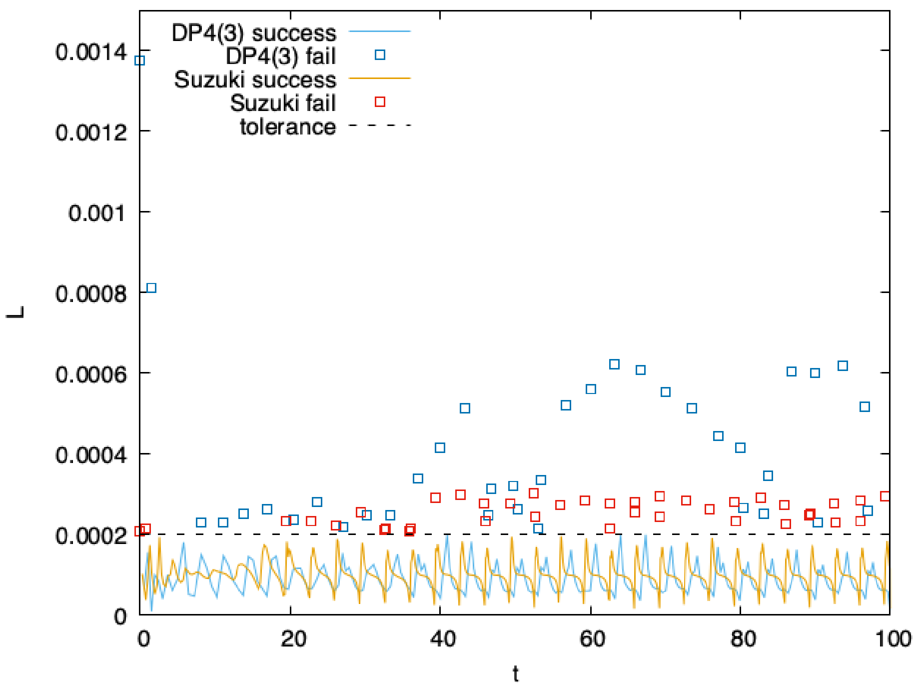


FIGURE 13 – Étude de l'erreur L au cours du temps, l'erreur des itérations rejetées est notée à l'aide des carrés

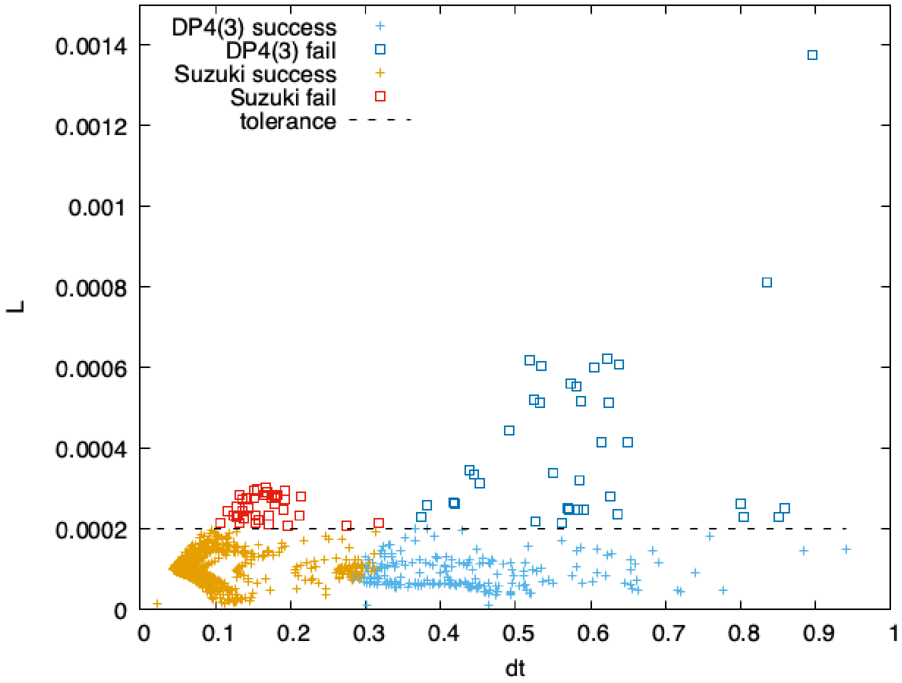


FIGURE 14 – Comparaison de l'erreur commise en fonction de la taille du pas de temps

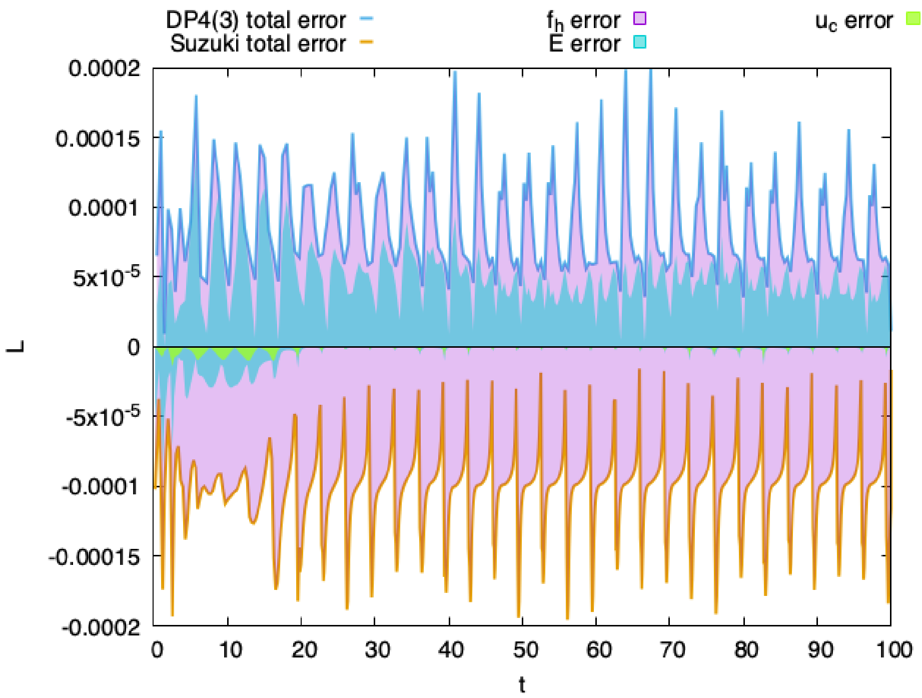


FIGURE 15 – Comparaison de l'erreur au cours du temps et de la contribution de chaque composante de l'erreur

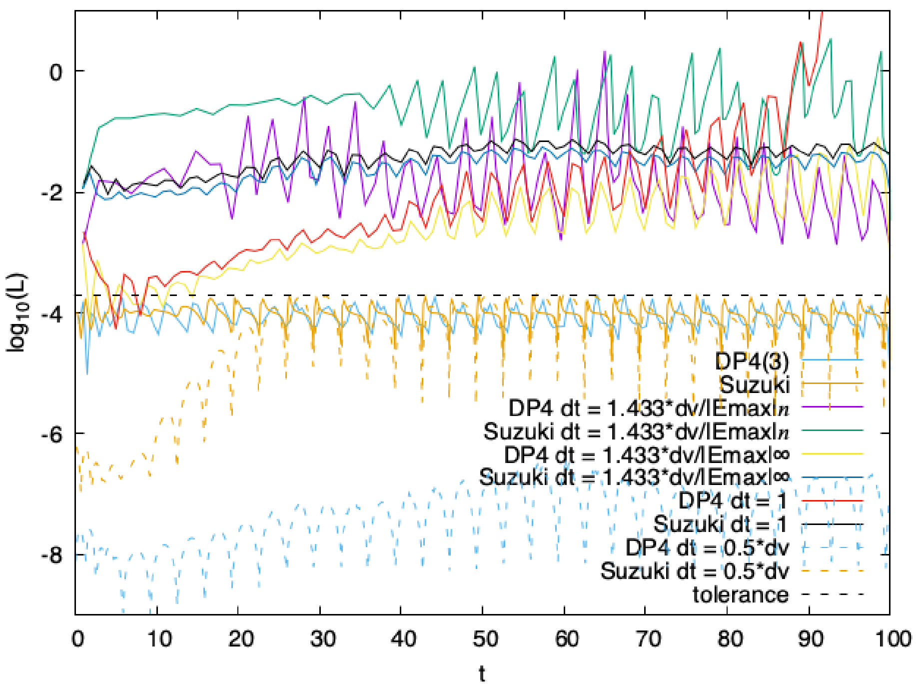


FIGURE 16 – Comparaison de l'erreur obtenue à l'aide du temps de temps adaptatif et d'un pas de temps constant

8 Références bibliographiques

Références

[1] Florian HOLDERIED. “Investigation of Finite Element Methods for a 4D Hyrbid Plasma Model”. Mém. de mast. Technische Universität München, 2019 (cf. p. 1, 2, 4, 6).

[2] Liu CHEN et Fulvio ZONCA. “Physics of Alfvén waves and energetic particles in burning plasmas”. In : *Rev. Mod. Phys.* 88 (2016), p. 015008. DOI : 10.1103/RevModPhys.88.015008 (cf. p. 1).

[3] Yuto KATOH et Yoshiharu OMURA. “Computer simulation of chorus wave generation in the Earth’s inner magnetosphere”. In : *Geophysical Research Letters* 34.3 (2007). DOI : 10.1029/2006GL028594 (cf. p. 1).

[4] X. TAO. “A numerical study of chorus generation and the related variation of wave intensity using the DAWN code”. In : *Journal of Geophysical Research : Space Physics* (2014). DOI : 10.1002/2014JA019820 (cf. p. 1).

[5] Cesare TRONCI. “Hamiltonian approach to hybrid plasma models”. In : *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* 43.37 (2010), p. 375501. DOI : 10.1088/1751-8113/43/37/375501 (cf. p. 1, 2).

[6] Cesare TRONCI et al. “Hybrid Vlasov-MHD models : Hamiltonian vs. non-Hamiltonian”. In : *Plasma Physics and Controlled Fusion* 56.9 (2014), p. 095008. DOI : 10.1088/0741-3335/56/9/095008 (cf. p. 1, 2, 4, 6).

[7] Philip J. MORRISON. “Structure and structure-preserving algorithms for plasma physics”. In : *Physics of Plasmas* 24.5 (2017), p. 055502. DOI : 10.1063/1.4982054 (cf. p. 2).

[8] Nicolas CROUSEILLES, Lukas EINKEMMER et Erwan FAOU. “Hamiltonian splitting for the Vlasov-Maxwell equations”. In : *Journal of Computational Physics* 283 (2015), p. 224-240. DOI : 10.1016/j.jcp.2014.11.029 (cf. p. 2, 8).

[9] Fernando CASAS et al. “High-order Hamiltonian splitting for Vlasov-Poisson equations”. In : *Numerische Mathematik* 135.3 (2017). DOI : 10.1007/s00211-016-0816-z (cf. p. 2, 8).

[10] Yingzhe LI, Nicolas CROUSEILLES et Yajuan SUN. “Numerical simulations of Vlasov-Maxwell equations for laser plasmas based on Poisson structure”. In : *Journal of Computational Physics* 405 (2020). DOI : 10.1016/j.jcp.2019.109172 (cf. p. 2, 8, 9).

[11] E HAIRER. *Geometric numerical integration : structure-preserving algorithms for ordinary differential equations*. Berlin New York : Springer, 2006. ISBN : 978-3-540-30663-4 (cf. p. 2, 9).

[12] Marlis HOCHBRUCK et Alexander OSTERMANN. “Exponential integrators”. In : *Acta Numerica* 19 (2010), p. 209-286. DOI : 10.1017/S0962492910000048 (cf. p. 2).

[13] Marlis HOCHBRUCK et Alexander OSTERMANN. “Explicit Exponential Runge–Kutta Methods for Semilinear Parabolic Problems”. In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 43.3 (2005), p. 1069-1090. DOI : 10.1137/040611434 (cf. p. 2).

[14] J. Douglas LAWSON. “Generalized Runge-Kutta Processes for Stable Systems with Large Lipschitz Constants”. In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 4.3 (1967), p. 372-380. DOI : 10.1137/0704033. eprint : https://doi.org/10.1137/0704033 (cf. p. 2, 14).

[15] Leah ISHERWOOD, Zachary J. GRANT et Sigal GOTTLIEB. “Strong Stability Preserving Integrating Factor Runge-Kutta Methods”. In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 56.6 (2018), p. 3276-3307. DOI : 10.1137/17M1143290 (cf. p. 2).

[16] J. Douglas LAWSON. “An Order Six Runge-Kutta Process with Extended Region of Stability”. In : *Journal on Numerical Analysis* (1967). DOI : 10.1137/0704056 (cf. p. 2, 13).

[17] Nicolas CROUSEILLES, Lukas EINKEMMER et Josselin MASSOT. “Exponential methods for solving hyperbolic problems with application to kinetic equations”. 2019 (cf. p. 2, 9, 15).

[18] J.R. DORMAND et P.J. PRINCE. “A family of embedded Runge-Kutta formulae”. In : *Journal of Computational and Applied Mathematics* 6.1 (1980), p. 19-26. DOI : 10.1016/0771-050X(80)90013-3 (cf. p. 2, 18).

[19] J.R. DORMAND et P.J. PRINCE. “New Runge-Kutta algorithms for numerical simulation in dynamical astronomy”. In : *Celestial mechanics* 18 (1978), p. 223-232. DOI : 10.1007/BF01230162 (cf. p. 2, 18).

[20] Stéphane BALAC et Arnaud FERNANDEZ. “Mathematical analysis of adaptive step-size techniques when solving the nonlinear Schrödinger equation for simulating light-wave propagation in optical fibers”. 2013 (cf. p. 2).

[21] Stéphane BALAC et Fabrice MAHÉ. “Embedded Runge-Kutta scheme for step-size control in the interaction picture method”. In : *Computer Physics Communications* 184.4 (2013), p. 1211-1219. DOI : 10.1016/j.cpc.2012.12.020 (cf. p. 2).

[22] Sergio BLANES, Fernando CASAS et Mechthild THALHAMMER. “Splitting and composition methods with embedded error estimators”. In : *Applied Numerical Mathematics* 146 (2019), p. 400-415. DOI : 10.1016/j.apnum.2019.07.022 (cf. p. 2, 9, 17).

[23] Michael KRAUS et al. “GEMPIC : geometric electromagnetic particle-in-cell methods”. In : *Journal of Plasma Physics* 83.4 (2017), p. 905830401. DOI : 10.1017/S002237781700040X (cf. p. 2, 8).

[24] Eric SONNENDRÜCKER. *Numerical Methods for the Vlasov-Maxwell equations*. Springer, 2015 (cf. p. 2, 18, 20).

[25] Burton D. FRIED et Samuel D. CONTE. *The Plasma Dispersion Function ; the Hilbert transform of the Gaussian*. Academic Press, 1961 (cf. p. 2, 26).

[26] Philip J. MORRISON. “A general theory for gauge-free lifting”. In : *Physics of Plasmas* 20 (2012). DOI : 10.1063/1.4774063 (cf. p. 9).

[27] Masuo SUZUKI. “Fractal decomposition of exponential operators with applications to many-body theories and Monte Carlo simulations”. In : *Physics Letters A* 146.6 (1990), p. 319-323. ISSN : 0375-9601. DOI : https://doi.org/10.1016/0375-9601(90)90962-N (cf. p. 9, 12).

[28] Gilbert STRANG. “On the Construction and Comparison of Difference Schemes”. In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 5.3 (1968), p. 506-517. DOI : 10.1137/0705041 (cf. p. 12).

[29] Fernando CASAS et Alejandro ESCORIHUELA-TOMÀS. “Composition Methods for Dynamical Systems Separable into Three Parts”. In : *Mathematics* 8.4 (2020). ISSN : 2227-7390. DOI : 10.3390/math8040533 (cf. p. 12).

[30] Frédérique CHARLES, Bruno DESPRÉS et Michel MEHRENBERGER. "Enhanced Convergence Estimates for Semi-Lagrangian Schemes Application to the Vlasov–Poisson Equation". In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 51.2 (2013), p. 840-863. DOI : 10.1137/110851511 (cf. p. 13).

[31] Chi-Wang SHU. "High Order Finite Difference and Finite Volume WENO Schemes and Discontinuous Galerkin Methods for CFD". In : *International Journal of Computational Fluid Dynamics* 17.2 (2003), p. 107-118. DOI : 10.1080/1061856031000104851 (cf. p. 15, 16).

[32] Xu-Dong LIU, Stanley OSHER et Tony CHAN. "Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes". In : *Journal of Computational Physics* 115.1 (1994), p. 200-212. ISSN : 0021-9991. DOI : https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1187 (cf. p. 15).

[33] Rong WANG et Raymond J. SPITERI. "Linear instability of the fifth-order WENO method". In : *Journal on Numerical Analysis* 45.5 (2007), p. 1871-1901. DOI : 10.1137/050637868 (cf. p. 15).

A Résultats sur les relations de dispersion

Cette annexe est dédiée aux démonstrations des propriétés énoncées dans la section 5 sur les relations de dispersion.

Nous démontrons tout d'abord le lemme 5.1, qui concerne la symétrie des racines de $D(k,\omega)$, et dont l'énoncé est rappelé ci-dessous.

Lemme A.1. *Si $f^{(0)}(v)$ (respectivement $f_h^{(0)}(v)$) est une fonction paire, alors pour $D(k,\omega)$ défini par (26) (respectivement (33)) nous avons $D(k,\omega_r+i\omega_i)=0 \Leftrightarrow D(k,-\omega_r+i\omega_i)=0$.*

Démonstration. Nous le vérifions dans le cas cinétique, les calculs étant similaires dans le cas hybride. Avec la définition (26) de $D(k,\omega)$, nous avons

$$\begin{aligned}
&D(k,\omega_r+i\omega_i)=0\\
\Leftrightarrow\quad &\Re\left(\frac{1}{k^2}\int_\gamma \frac{\partial_v f^0}{v-\frac{\omega_r+i\omega_i}{k}}dv\right)=1,\ \Im\left(\frac{1}{k^2}\int_\gamma \frac{\partial_v f^0}{v-\frac{\omega_r+i\omega_i}{k}}dv\right)=0.
\end{aligned}$$

Distinguons les parties réelles et imaginaires :

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{\partial_v f^0(v)}{v-\frac{\omega_r+i\omega_i}{k}}dv &= \int_\gamma \frac{\partial_v f^0(v)}{\left(v-\frac{\omega_r+i\omega_i}{k}\right)\left(v-\frac{\omega_r-i\omega_i}{k}\right)}\left(v-\frac{\omega_r-i\omega_i}{k}\right)dv\\
&=\int_\gamma \frac{\partial_v f^0(v)}{\left(v-\frac{\omega_r}{k}\right)^2+\left(\frac{\omega_i}{k}\right)^2}\left(v-\frac{\omega_r}{k}\right)dv + i\int_\gamma \frac{\partial_v f^0(v)}{\left(v-\frac{\omega_r}{k}\right)^2+\left(\frac{\omega_i}{k}\right)^2}\frac{\omega_i}{k}dv.
\end{aligned}$$

Maintenant, considérons $\omega=-\omega_r+i\omega_i$ et rappelons qu'on a supposé que $f^0(v)$ était une fonction paire. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma \frac{\partial_v f^0(v)}{v-\frac{-\omega_r+i\omega_i}{k}}dv\\
&\qquad= \int_\gamma \frac{\partial_v f^0(v)}{\left(v+\frac{\omega_r}{k}\right)^2+\left(\frac{\omega_i}{k}\right)^2}\left(v+\frac{\omega_r}{k}\right)dv + i\int_\gamma \frac{\partial_v f^0(v)}{\left(v+\frac{\omega_r}{k}\right)^2+\left(\frac{\omega_i}{k}\right)^2}\frac{\omega_i}{k}dv\\
&\qquad= -\int_\gamma \frac{\partial_v f^0(-v)}{\left(-v+\frac{\omega_r}{k}\right)^2+\left(\frac{\omega_i}{k}\right)^2}\left(v-\frac{\omega_r}{k}\right)dv + i\int_\gamma \frac{\partial_v f^0(-v)}{\left(-v+\frac{\omega_r}{k}\right)^2+\left(\frac{\omega_i}{k}\right)^2}\frac{\omega_i}{k}dv\\
&\qquad= \int_\gamma \frac{\partial_v f^0(v)}{\left(v-\frac{\omega_r}{k}\right)^2+\left(\frac{\omega_i}{k}\right)^2}\left(v-\frac{\omega_r}{k}\right)dv - i\int_\gamma \frac{\partial_v f^0(v)}{\left(v-\frac{\omega_r}{k}\right)^2+\left(\frac{\omega_i}{k}\right)^2}\frac{\omega_i}{k}dv \quad .
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\Re\left(\frac{1}{k^2}\int_\gamma \frac{\partial_v f^0}{v-\frac{\omega_r+i\omega_i}{k}}dv\right)=1,\ \Im\left(\frac{1}{k^2}\int_\gamma \frac{\partial_v f^0}{v-\frac{\omega_r+i\omega_i}{k}}dv\right)=0\\
\Leftrightarrow\ &\Re\left(\frac{1}{k^2}\int_\gamma \frac{\partial_v f^0}{v-\frac{-\omega_r+i\omega_i}{k}}dv\right)=1,\ \Im\left(\frac{1}{k^2}\int_\gamma \frac{\partial_v f^0}{v-\frac{-\omega_r+i\omega_i}{k}}dv\right)=0
\end{aligned}$$

et

$$D(k,\omega_r+i\omega_i)=0 \Leftrightarrow D(k,-\omega_r+i\omega_i)=0.$$

□

Nous allons maintenant démontrer les lemmes 5.2, 5.3 et 5.4, dont les énoncés sont rappelés ci-dessous, qui donnent des propriétés de la fonction de Fried-Conte (41).

Lemme A.2. *La fonction $Z^0_\alpha(\omega) : \omega \in \mathbb{C} \mapsto Z(\alpha\omega) \in \mathbb{C}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, est telle que : $Z^0_\alpha(-\bar{\omega}) = -\overline{Z^0_\alpha(\omega)}$.*

Démonstration. Par définition de la fonction de Fried-Conte, et avec la notation $\omega = \omega_r + i\omega_i$, nous avons

$$Z(\alpha(\omega_r+i\omega_i)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_\gamma \frac{e^{-z^2}}{z-\alpha(\omega_r+i\omega_i)}dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_\gamma \frac{e^{-z^2}(z-\alpha\omega_r+i\alpha\omega_i)}{(z-\alpha\omega_r)^2+(\alpha\omega_i)^2}dz$$

d'où

$$\begin{aligned}
\Re\left(Z(\alpha(\omega_r+i\omega_i))\right) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_\gamma \frac{e^{-z^2}(z-\alpha\omega_r)}{(z-\alpha\omega_r)^2+(\alpha\omega_i)^2}dz\\
\Im\left(Z(\alpha(\omega_r+i\omega_i))\right) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_\gamma \frac{e^{-z^2}\alpha\omega_i}{(z-\alpha\omega_r)^2+(\alpha\omega_i)^2}dz.
\end{aligned}$$

Maintenant, $-\overline{\omega} = -\omega_r + i\omega_i$, implique

$$\begin{aligned}
Z(\alpha(-\omega_r+i\omega_i)) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_\gamma \frac{e^{-z^2}}{z-\alpha(-\omega_r+i\omega_i)}dz\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_\gamma \frac{e^{-z^2}(z+\alpha\omega_r+i\alpha\omega_i)}{(z+\alpha\omega_r)^2+(\alpha\omega_i)^2}dz\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_\gamma \frac{e^{-z^2}(-z+\alpha\omega_r+i\alpha\omega_i)}{(-z+\alpha\omega_r)^2+(\alpha\omega_i)^2}dz\\
&= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_\gamma \frac{e^{-z^2}(z-\alpha\omega_r)}{(z-\alpha\omega_r)^2+(\alpha\omega_i)^2}dz + i\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_\gamma \frac{e^{-z^2}\alpha\omega_i}{(z-\alpha\omega_r)^2+(\alpha\omega_i)^2}dz
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\Re\left(Z(\alpha(-\omega_r+i\omega_i))\right) &= -\Re\left(Z(\alpha(\omega_r+i\omega_i))\right)\\ \Im\left(Z(\alpha(-\omega_r+i\omega_i))\right) &= \Im\left(Z(\alpha(\omega_r+i\omega_i))\right),\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

Lemme A.3. *La fonction $Z^+_{\alpha,\beta}(\omega) : \omega \in \mathbb{C} \mapsto Z(\alpha\omega-\beta) + Z(\alpha\omega+\beta) \in \mathbb{C}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ fixés, est telle que : $Z^+_{\alpha,\beta}(-\overline{\omega}) = -\overline{Z^+_{\alpha,\beta}(\omega)}$.*

Démonstration. Nous avons par définition de la fonction de Fried-Conte

$$\begin{aligned}Z(\alpha\omega-\beta)+Z(\alpha\omega+\beta) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_\gamma \frac{e^{-z^2}}{z-\alpha\omega+\beta}+\frac{e^{-z^2}}{z-\alpha\omega-\beta}dz\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_\gamma \frac{e^{-z^2}(z-\alpha\omega-\beta)+e^{-z^2}(z-\alpha\omega+\beta)}{(z-\alpha\omega)^2-\beta^2}dz\\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_\gamma \frac{e^{-z^2}(z-\alpha\omega)}{(z-\alpha\omega)^2-\beta^2}dz.\end{aligned}$$

Maintenant, avec la notation $\omega = \omega_r + i\omega_i$, nous avons

$$\begin{aligned}Z(\alpha(\omega_r+i\omega_i)-\beta)+Z(\alpha(\omega_r+i\omega_i)+\beta) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_\gamma \frac{e^{-z^2}(z-\alpha\omega_r-i\alpha\omega_i)}{(z-\alpha\omega_r-i\alpha\omega_i)^2-\beta^2}dz\\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_\gamma \frac{e^{-z^2}(z-\alpha\omega_r-i\alpha\omega_i)}{(z-\alpha\omega_r)^2-(\alpha\omega_i)^2-\beta^2-2i\alpha\omega_i(z-\alpha\omega_r)}dz\\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_\gamma \frac{e^{-z^2}(z-\alpha\omega_r-i\alpha\omega_i)\left((z-\alpha\omega_r)^2-(\alpha\omega_i)^2-\beta^2+2i\alpha\omega_i(z-\omega_r)\right)}{\left((z-\alpha\omega_r)^2-(\alpha\omega_i)^2-\beta^2\right)^2+4\left(\alpha\omega_i\right)^2(z-\alpha\omega_r)^2}dz\\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_\gamma \frac{e^{-z^2}\left((z-\alpha\omega_r)\left((z-\alpha\omega_r)^2-(\alpha\omega_i)^2-\beta^2\right)+2(\alpha\omega_i)^2(z-\alpha\omega_r)\right)}{\left((z-\alpha\omega_r)^2-(\alpha\omega_i)^2-\beta^2\right)^2+4\left(\alpha\omega_i\right)^2(z-\alpha\omega_r)^2}dz\\ &+ i\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_\gamma \frac{e^{-z^2}\left(2\alpha\omega_i(z-\alpha\omega_r)^2-\alpha\omega_i\left((z-\alpha\omega_r)^2-(\alpha\omega_i)^2-\beta^2\right)\right)}{\left((z-\alpha\omega_r)^2-(\alpha\omega_i)^2-\beta^2\right)^2+4\left(\alpha\omega_i\right)^2(z-\alpha\omega_r)^2}dz\\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_\gamma \frac{e^{-z^2}(z-\alpha\omega_r)\left((z-\alpha\omega_r)^2+(\alpha\omega_i)^2-\beta^2\right)}{\left((z-\alpha\omega_r)^2-(\alpha\omega_i)^2-\beta^2\right)^2+4\left(\alpha\omega_i\right)^2(z-\alpha\omega_r)^2}dz\\ &+ i\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_\gamma \frac{e^{-z^2}\alpha\omega_i\left((z-\alpha\omega_r)^2+(\alpha\omega_i)^2+\beta^2\right)}{\left((z-\alpha\omega_r)^2-(\alpha\omega_i)^2-\beta^2\right)^2+4\left(\alpha\omega_i\right)^2(z-\alpha\omega_r)^2}dz.\end{aligned}$$

Par ailleurs, en considérant $-\overline{\omega} = -\omega_r + i\omega_i$, nous avons

$$\begin{aligned}&Z(\alpha(-\omega_r+i\omega_i)-\beta)+Z(\alpha(-\omega_r+i\omega_i)+\beta)\\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_\gamma \frac{e^{-z^2}(z+\alpha\omega_r)\left((z+\alpha\omega_r)^2+(\alpha\omega_i)^2-\beta^2\right)}{\left((z+\alpha\omega_r)^2-(\alpha\omega_i)^2-\beta^2\right)^2+4\left(\alpha\omega_i\right)^2(z+\alpha\omega_r)^2}dz\\ &+ i\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_\gamma \frac{e^{-z^2}\alpha\omega_i\left((z+\alpha\omega_r)^2+(\alpha\omega_i)^2+\beta^2\right)}{\left((z+\alpha\omega_r)^2-(\alpha\omega_i)^2-\beta^2\right)^2+4\left(\alpha\omega_i\right)^2(z+\alpha\omega_r)^2}dz.\end{aligned}$$

La seule fonction impaire en z est $(z + \alpha\omega_r)$, qui apparaît dans la partie réelle, ainsi

$$\begin{aligned}
& Z(\alpha(-\omega_r + i\omega_i) - \beta) + Z(\alpha(-\omega_r + i\omega_i) + \beta) \\
= \quad & -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\gamma \frac{e^{-z^2}(z - \alpha\omega_r)\left((z - \alpha\omega_r)^2 + (\alpha\omega_i)^2 - \beta^2\right)}{\left((z - \alpha\omega_r)^2 - (\alpha\omega_i)^2 - \beta^2\right)^2 + 4\left(\alpha\omega_i\right)^2 (z - \alpha\omega_r)^2} dz \\
+ \quad & i\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\gamma \frac{e^{-z^2}\alpha\omega_i\left((z - \alpha\omega_r)^2 + (\alpha\omega_i)^2 + \beta^2\right)}{\left((z - \alpha\omega_r)^2 - (\alpha\omega_i)^2 - \beta^2\right)^2 + 4\left(\alpha\omega_i\right)^2 (z - \alpha\omega_r)^2} dz.
\end{aligned}$$

L'identification des parties réelles et imaginaires de $Z(\alpha\omega - \beta) + Z(\alpha\omega + \beta)$ et $Z(-\alpha\overline{\omega} - \beta) + Z(-\alpha\overline{\omega} + \beta)$ achève la preuve. □

Lemme A.4. *La fonction* $Z^-_{\alpha,\beta}(\omega) : \omega \in \mathbb{C} \mapsto Z\left(\alpha\omega - \beta\right) - Z\left(\alpha\omega + \beta\right) \in \mathbb{C}$, *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ *fixés, est telle que :* $Z^-_{\alpha,\beta}\left(-\overline{\omega}\right) = \overline{Z^-_{\alpha,\beta}(\omega)}$.

Démonstration. Nous avons par définition de la fonction de Fried-Conte

$$\begin{aligned}
& Z(\alpha\omega - \beta) - Z(\alpha\omega + \beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_\gamma \frac{e^{-z^2}}{z - \alpha\omega + \beta} - \frac{e^{-z^2}}{z - \alpha\omega - \beta} dz \\
= \quad & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_\gamma \frac{e^{-z^2}(z - \alpha\omega - \beta) - e^{-z^2}(z - \alpha\omega + \beta)}{(z - \alpha\omega)^2 - \beta^2} dz \\
= \quad & -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\gamma \frac{e^{-z^2}\beta}{(z - \alpha\omega)^2 - \beta^2} dz.
\end{aligned}$$

Maintenant, avec la notation $\omega = \omega_r + i\omega_i$, nous avons

$$\begin{aligned}
& Z(\alpha(\omega_r + i\omega_i) - \beta) - Z(\alpha(\omega_r + i\omega_i) + \beta) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\gamma \frac{e^{-z^2}\beta}{(z - \alpha\omega_r - i\alpha\omega_i)^2 - \beta^2} dz \\
= \quad & -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\gamma \frac{e^{-z^2}\beta}{(z - \alpha\omega_r)^2 - (\alpha\omega_i)^2 - \beta^2 - 2i\alpha\omega_i(z - \alpha\omega_r)} dz \\
= \quad & -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\gamma \frac{e^{-z^2}\beta\left((z - \alpha\omega_r)^2 - (\alpha\omega_i)^2 - \beta^2 + 2i\alpha\omega_i(z - \alpha\omega_r)\right)}{\left((z - \alpha\omega_r)^2 - (\alpha\omega_i)^2 - \beta^2\right)^2 + 4\left(\alpha\omega_i\right)^2 (z - \alpha\omega_r)^2} dz
\end{aligned}$$

Par ailleurs, avec $-\overline{\omega} = -\omega_r + i\omega_i$, nous avons

$$\begin{aligned}
& Z(\alpha(-\omega_r + i\omega_i) - \beta) - Z(\alpha(-\omega_r + i\omega_i) + \beta) \\
= \quad & -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\gamma \frac{e^{-z^2}\beta\left((z + \alpha\omega_r)^2 - (\alpha\omega_i)^2 - \beta^2 + 2i\alpha\omega_i(z + \alpha\omega_r)\right)}{\left((z + \alpha\omega_r)^2 - (\alpha\omega_i)^2 - \beta^2\right)^2 + 4\left(\alpha\omega_i\right)^2 (z + \alpha\omega_r)^2} dz
\end{aligned}$$

La seule fonction impaire en z est $(z + \alpha\omega_r)$, apparaissant dans la partie imaginaire, d'où

$$\begin{aligned}
& Z(\alpha(-\omega_r + i\omega_i) - \beta) - Z(\alpha(-\omega_r + i\omega_i) + \beta) \\
= \quad & -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\gamma \frac{e^{-z^2}\beta\left((z - \alpha\omega_r)^2 - (\alpha\omega_i)^2 - \beta^2 - 2i\alpha\omega_i(z - \alpha\omega_r)\right)}{\left((z - \alpha\omega_r)^2 - (\alpha\omega_i)^2 - \beta^2\right)^2 + 4\left(\alpha\omega_i\right)^2 (z - \alpha\omega_r)^2} dz
\end{aligned}$$

L'identification des parties réelles et imaginaires de $Z(\alpha\omega - \beta) - Z(\alpha\omega + \beta)$ et $Z(-\alpha\overline{\omega} - \beta) - Z(-\alpha\overline{\omega} + \beta)$ achève la preuve. □

Nous pouvons enfin démontrer les lemmes 5.5 et 5.6 concernant la vérification de l'hypothèse 5.1, qui conduit à l'expression (38) du mode fondamental du champ électrique linéarisé puis à l'approximation (39) de l'énergie électrique linéarisée. Ces lemmes sont rappelés ci-dessous.

D'une part, nous rappelons le résultat 5.6 dans le cas cinétique.

Lemme A.5. *Pour* $\frac{\partial D(k,\omega)}{\partial \omega}$ *donnée par* (51) *et* $N(k,\omega)$ *par* (52), *l'hypothèse 5.1 est satisfaite.*

Démonstration. En utilisant (51) et les lemmes 5.2, 5.3, 5.4 avec $\delta = \frac{1}{\sqrt{2T_c}k}$, $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}k}$ et $\beta = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D}{\partial \omega}(k,\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}k^3}\left[\frac{1-\alpha}{T_c\sqrt{T_c}}\left(\left(1-\frac{\omega^2}{T_c k^2}\right)Z_\delta^0(\omega) - 2\frac{\omega}{\sqrt{2T_c}k}\right)\right. \\
&\quad + \frac{\alpha}{2}\left(\left(1-\left(\frac{\omega}{k}-v_0\right)^2\right)Z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\omega}{k}-v_0\right)\right)\right. \\
&\quad + \left(1-\left(\frac{\omega}{k}+v_0\right)^2\right)Z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\omega}{k}+v_0\right)\right) \\
&\quad \left.\left. - \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\omega}{k}-v_0\right) - \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\omega}{k}+v_0\right)\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}k^3}\left[\frac{1-\alpha}{T_c\sqrt{T_c}}\left(\left(1-\frac{\omega^2}{T_c k^2}\right)Z_\delta^0(\omega) - 2\frac{\omega}{\sqrt{2T_c}k}\right) - 2\sqrt{2}\frac{\omega}{k}\right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha}{2}\left((1-v_0^2)Z_{\eta,\beta}^+(\omega) - \frac{\omega^2}{k^2}Z_{\eta,\beta}^+(\omega) + 2v_0\frac{\omega}{k}Z_{\eta,\beta}^-(\omega)\right)\right]
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D}{\partial \omega}(k,-\overline{\omega}) &= \frac{1}{\sqrt{2}k^3}\left[\frac{1-\alpha}{T_c\sqrt{T_c}}\left(\left(1-\frac{(-\overline{\omega})^2}{T_c k^2}\right)Z_\delta^0(-\overline{\omega}) + 2\frac{\overline{\omega}}{\sqrt{2T_c}k}\right) + 2\sqrt{2}\frac{\overline{\omega}}{k}\right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha}{2}\left((1-v_0^2)Z_{\eta,\beta}^+(-\overline{\omega}) - \frac{(-\overline{\omega})^2}{k^2}Z_{\eta,\beta}^+(-\overline{\omega}) - 2v_0\frac{\overline{\omega}}{k}Z_{\eta,\beta}^-(-\overline{\omega})\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}k^3}\left[\frac{1-\alpha}{T_c\sqrt{T_c}}\left(-\left(1-\frac{\overline{\omega^2}}{T_c k^2}\right)\overline{Z_\delta^0(\omega)} + 2\frac{\overline{\omega}}{\sqrt{2T_c}k}\right) + 2\sqrt{2}\frac{\overline{\omega}}{k}\right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha}{2}\left(-(1-v_0^2)\overline{Z_{\eta,\beta}^+(\omega)} + \frac{\overline{\omega^2}}{k^2}\overline{Z_{\eta,\beta}^+(\omega)} - 2v_0\frac{\overline{\omega}}{k}\overline{Z_{\eta,\beta}^-(\omega)}\right)\right] \\
&= -\overline{\frac{\partial D}{\partial \omega}(k,\omega)}.
\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant (52) et le lemme 5.3 avec $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}k}$ et $\beta = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$, nous avons

$$N(k,\omega) = -\frac{\hat{g}(k)}{k^2}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{2}}Z_{\eta,\beta}^+(\omega)\right)$$

et

$$\begin{aligned}
N(k,-\overline{\omega}) &= -\frac{\hat{g}(k)}{k^2}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{2}}Z_{\eta,\beta}^+(-\overline{\omega})\right) \\
&= -\frac{\hat{g}(k)}{k^2}\left(-\frac{\alpha}{2\sqrt{2}}\overline{Z_{\eta,\beta}^+(\omega)}\right) = -\overline{N(k,\omega)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons

$$\frac{N(k,-\overline{\omega})}{\frac{\partial D}{\partial \omega}(k,-\overline{\omega})} = \overline{\left(\frac{N(k,\omega)}{\frac{\partial D}{\partial \omega}(k,\omega)}\right)}.$$

Autrement dit, $\frac{N(k,\omega)}{\frac{\partial D}{\partial \omega}(k,\omega)} = re^{i\phi}$ si et seulement si $\frac{N(k,-\overline{\omega})}{\frac{\partial D}{\partial \omega}(k,-\overline{\omega})} = re^{-i\phi}$. □

D'autre part, nous rappelons le résultat 5.5 dans le cas hybride.

Lemme A.6. *Sous l'hypothèse $\hat{u}(t=0,k)=0$, pour $\frac{\partial D(k,\omega)}{\partial \omega}$ donnée par (46) et $N(k,\omega)$ par (47), l'hypothèse 5.1 est satisfaite.*

Démonstration. Regardons d'abord $\frac{\partial D(k,\omega)}{\partial \omega}$. Les termes en facteur de α (venant de la partie chaude cinétique) se comportent comme dans la preuve du lemme 5.5 (voir la preuve ci-dessus). Les termes en facteur de $1-\alpha$ sont tels que

$$\frac{1}{(-\overline{\omega})^3} = -\frac{1}{\overline{\omega}^3} = -\overline{\frac{1}{\omega^3}}.$$

Nous en déduisons $\frac{\partial D}{\partial \omega}(k,-\overline{\omega}) = -\overline{\frac{\partial D}{\partial \omega}(k,\omega)}$.

Regardons ensuite $N(k,\omega)$. Sous l'hypothèse $\hat{u}(t=0,k)=0$ et avec les notations $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}k}$ et $\beta = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$, nous avons

$$N(k,-\overline{\omega}) \quad = \quad -\frac{1}{-i\overline{\omega}}\hat{E}(t=0,k) - \frac{\hat{g}(k)}{k^2}\left[\alpha\frac{k}{-\overline{\omega}} + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}}Z^+_{\eta,\beta}(-\overline{\omega})\right].$$

Nous rappelons que $\hat{E}(t=0,k)$ est un imaginaire pur (éventuellement nul) donné par (53). Ceci implique

$$\begin{aligned} N(k,-\overline{\omega}) &= \frac{1}{i\overline{\omega}}\hat{E}(t=0,k) + \frac{\hat{g}(k)}{k^2}\left[\alpha\frac{k}{\overline{\omega}} + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}}\overline{Z^+_{\eta,\beta}(\omega)}\right] \\ &= \overline{\frac{1}{i\omega}\hat{E}(t=0,k)} + \frac{\hat{g}(k)}{k^2}\left[\alpha\overline{\frac{k}{\omega}} + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}}\overline{Z^+_{\eta,\beta}(\omega)}\right] = -\overline{N(k,\omega)}. \end{aligned}$$

La preuve est terminée. □