Matematická analýza 1
(velmi předběžná verze)

17. dubna 2018

L. Pick, S. Hencl, J. Spurný a M. Zelený

Obsah

Předmluva

Tento text je velmi nedokonalou verzí budoucích skript. Některé jeho části budou ještě výrazně revidovány. Přesto snad může pomoci studentům MFF UK v prvním ročníku při přípravě na zkoušku.

KAPITOLA 1

Logika, množiny a základní číselné obory

1.1. Logika

1.1.1. Logika je věda o formální správnosti myšlení. Formálně logická správnost spočívá ve správnosti *vyvození* závěru z předpokladů. V tomto oddílu se budeme zabývat logikou výrokovou a predikátovou.

1.1.2. Výrok je tvrzení, o kterém má smysl říci, že je pravdivé (platí) nebo není pravdivé (neplatí). Pokud výrok platí, říkáme, že má **pravdivostní hodnotu** 1, pokud neplatí, říkáme, že má pravdivostní hodnotu 0. Pouze některé správně utvořené gramatické věty jsou výroky. Věty „Číslo 4 je sudé." a „Praha je hlavní město Kanady." jsou výroky, naproti tomu „Ahoj!" nebo „Kéž by už byl konec." nikoli. Tvrzení „Číslo π^π je iracionální." je výrok, i když zatím není známo, zda pravdivý či nepravdivý. Z výroků lze vytvářet nové složitější výroky pomocí logických operací. Se základními logickými operacemi se nyní seznámíme.

1.1.3. Negací výroku A rozumíme výrok „Není pravda, že platí A." K vyjádření negace výroku A můžeme také použít obrat „Neplatí A.", případně změnit příslušné sloveso ve výroku pomocí předpony „ne-". Negaci výroku A značíme $\neg A$. Je-li výrok A pravdivý, pak je výrok $\neg A$ nepravdivý. Je-li výrok A nepravdivý, pak je výrok $\neg A$ pravdivý.

1.1.4. Konjunkcí výroků A a B nazveme výrok „Platí A a zároveň platí B." Dále používáme také obraty „Platí A a platí B.", „Platí A i B." Konjunkci výroků A a B značíme $A \wedge B$, někdy také $A \,\&\, B$. Pokud jsou pravdivé oba výroky A a B, pak je konjunkce $A \wedge B$ pravdivá. Pokud je alespoň jeden z výroků A a B nepravdivý, pak je konjunkce $A \wedge B$ nepravdivá.

1.1.5. Disjunkcí výroků A a B nazveme výrok „Platí A nebo platí B." Disjunkci výroků A a B značíme $A \vee B$. Pokud je alespoň jeden z výroků A a B pravdivý, pak je disjunkce $A \vee B$ pravdivá. Pokud jsou oba výroky A a B nepravdivé, pak je disjunkce $A \vee B$ nepravdivá. Poznamenejme, že disjunkce není vylučující, to znamená, že je pravdivá i v případě, kdy platí oba výroky A a B zároveň. Takto používáme spojku „nebo“ v matematice na rozdíl od přirozeného jazyka, kde může mít i význam vylučovací.

1.1.6. Implikací nazýváme výrok „Jestliže platí (výrok) A, potom platí (výrok) B.“ Takové spojení výroků A a B značíme $A \Rightarrow B$. Pokud A neplatí nebo oba výroky A i B platí, pak jde o pravdivý výrok. Pokud A platí a B neplatí, pak jde o výrok nepravdivý. Výroku A říkáme **předpoklad** a výroku B **závěr**. Místo výroku „Jestliže platí A, potom platí B.“ používáme také následující obraty.

- Jestliže platí výrok A, pak platí výrok B.
- Výrok A implikuje výrok B.
- Z výroku A plyne výrok B.
- Předpokládejme, že platí výrok A, potom platí výrok B.
- Nechť platí výrok A. Potom platí výrok B.
- Výrok A je postačující podmínkou pro platnost výroku B.
- Výrok B je nutnou podmínkou pro platnost výroku A.

Je-li předpoklad A nepravdivý, pak implikace $A \Rightarrow B$ platí vždy bez ohledu na platnost závěru B. Jinými slovy, z nepravdivého výroku plyne jakýkoliv jiný výrok. Tato skutečnost může někdy působit potíže, které vyplývají z rozdílného používání obratu „Jestliže platí A, pak platí B.“ v logice a v přirozeném jazyce. V běžné řeči používáme tento obrat zpravidla tehdy, existuje-li nějaká věcná souvislost mezi předpokladem A a závěrem B, zatímco v logice používáme tento obrat i ke spojení výroků, kde taková souvislost nemusí existovat, například „Jestliže je medvěd ryba, pak jsou Athény v Egyptě.“ Pravdivost takového výroku v logice závisí pouze na pravdivostních hodnotách předpokladu a závěru. Ačkoliv pravdivost takových výroků může působit nezvykle, je formálně logické pojetí implikace v matematice velmi užitečné. Podrobnější vysvětlení lze nalézt například v [**18**, II.8].

1.1.7. Ekvivalencí výroků A a B nazýváme výrok „Výrok A platí právě tehdy, když platí výrok B.“ Ekvivalenci výroků A a B značíme $A \Leftrightarrow B$. Pokud A a B mají stejnou pravdivostní hodnotu, pak je $A \Leftrightarrow B$ pravdivý výrok. Pokud nemají A a B stejnou pravdivostní hodnotu, pak je $A \Leftrightarrow B$ nepravdivý výrok. Místo „Výrok A platí právě tehdy, když platí výrok B.“ používáme také následující obraty.

- Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.
- Výrok A je ekvivalentní s výrokem B.
- Výrok A je nutnou a postačující podmínkou pro platnost výroku B.

1.1.8. Následující tabulky uvádějí pravdivostní hodnoty výše definovaných logických operací v závislosti na pravdivosti výroků A a B.

A	$\neg A$
0	1
1	0

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

1.1.9. Pro zjednodušení zápisu bude mít mezi logickými operacemi negace přednost před ostatními operacemi. Například zápis $\neg A \Rightarrow B$ znamená $(\neg A) \Rightarrow B$.

1.1.10. Věta (vlastnosti negace, konjunkce a disjunkce)**.** Nechť A, B a C jsou výroky. Potom jsou následující výroky vždy pravdivé bez ohledu na pravdivost výroků A, B, C.

(a) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
(b) $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$
(c) $\big((A \wedge B) \wedge C\big) \Leftrightarrow \big(A \wedge (B \wedge C)\big)$
(d) $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$
(e) $\big((A \vee B) \vee C\big) \Leftrightarrow \big(A \vee (B \vee C)\big)$
(f) $\big(A \vee (B \wedge C)\big) \Leftrightarrow \big((A \vee B) \wedge (A \vee C)\big)$
(g) $\big(A \wedge (B \vee C)\big) \Leftrightarrow \big((A \wedge B) \vee (A \wedge C)\big)$

Důkaz. (a) Předpokládejme nejprve, že výrok A je nepravdivý. Potom je výrok $\neg A$ pravdivý a výrok $\neg(\neg A)$ je nepravdivý. Výroky A a $\neg(\neg A)$ mají stejnou pravdivostní hodnotu, takže je výrok $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ pravdivý.

Nyní předpokládejme, že výrok A je pravdivý. Potom je výrok $\neg A$ nepravdivý a výrok $\neg(\neg A)$ je pravdivý. Výroky A a $\neg(\neg A)$ mají stejnou pravdivostní hodnotu, takže je výrok $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ opět pravdivý. Tím je důkaz proveden. Předchozí úvahu lze přehledněji zapsat pomocí následující tabulky.

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$	$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
0	1	0	1
1	0	1	1

(b) Každý z výroků A a B může být pravdivý nebo nepravdivý. Použijeme-li stejný postup jako v předchozím případě, je třeba projít celkem čtyři případy. Tyto případy spolu s pravdivostními hodnotami příslušných výroků jsou zachyceny v následující tabulce.

A	B	$A \wedge B$	$B \wedge A$	$(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$
0	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Poslední sloupec pravdivostních hodnot obsahuje pouze pravdivostní hodnotu 1, takže uvažovaná ekvivalence je vždy pravdivá.

(c) Podobně jako v předchozím případě sestavíme příslušnou tabulku. Zde je již celkem osm možností pravdivostních hodnot pro trojici výroků A, B a C.

A	B	C	$A \wedge B$	$B \wedge C$	$(A \wedge B) \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Poslední dva sloupce pravdivostních hodnot jsou shodné, takže dokazovaná ekvivalence je vždy pravdivá.

Případy (d)–(g) lze odvodit zcela obdobně a příslušné tabulky zde již uvádět nebudeme. ■

1.1.11. Tvrzení (b) a (c) Věty 1.1.10 ukazují, že pokud chceme postupně spojit výroky $A_1, \dots, A_n$ pomocí konjunkce, nezáleží na pořadí, v jakém uvažované výroky spojíme. Například výroky

$$A_1 \wedge \big((A_2 \wedge A_3) \wedge A_4\big), \qquad \big((A_4 \wedge A_3) \wedge A_1\big) \wedge A_2$$

jsou ekvivalentní. V takových případech pak používáme jednodušší zápis $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$. Tvrzení (d) a (e) Věty 1.1.10 umožňují zavedení obdobného zápisu $A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n$ pro disjunkci. V případě konjunkce dokonce někdy vynecháváme symbol $\wedge$ a výroky pouze oddělujeme čárkami. Například výrok „Platí výroky A_1, A_2, A_3." znamená „Platí výrok $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$."

1.1.12. Věta (negace konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence)**.** Nechť A a B jsou výroky. Potom jsou následující výroky vždy pravdivé bez ohledu na pravdivost výroků A a B.

(a) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
(b) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
(c) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$
(d) $\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow \neg B)$

Důkaz. Pomocí tabulky pravdivostních hodnot ukažme například platnost (d). Pravdivost výroků (a)–(c) lze dokázat obdobně.

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$\neg(A \Leftrightarrow B)$	$A \Leftrightarrow \neg B$
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

Poslední dva sloupce jsou shodné, a tedy výrok $\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow \neg B)$ je vždy pravdivý. ∎

1.1.13. Věta (vztah implikace a ekvivalence)**.** Nechť A a B jsou výroky. Potom jsou výroky $A \Leftrightarrow B$ a $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ ekvivalentní, tj. výrok

$$\big(A \Leftrightarrow B\big) \Leftrightarrow \big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\big) \tag{1.1}$$

je vždy pravdivý bez ohledu na pravdivost výroků A a B.

Důkaz. Opět použijeme tabulku pravdivostních hodnot.

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Poslední dva sloupce jsou shodné, a výrok (1.1) je tedy vždy pravdivý. ∎

1.1.14. Věta. Nechť A, B a C jsou výroky. Potom jsou následující výroky vždy pravdivé bez ohledu na pravdivost výroků A, B, C.

(a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
(b) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
(c) $\big((A \vee B) \Rightarrow C\big) \Leftrightarrow \big((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)\big)$

Důkaz. Tvrzení plynou z následujících tabulek pravdivostních hodnot.

(a)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

(b)

A	B	$\neg A$	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

(c)

A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \Rightarrow C$	$A \Rightarrow C$	$B \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Sloupec pravdivostních hodnot odpovídající výroku $(A \vee B) \Rightarrow C$ je shodný s posledním sloupcem, a proto je výrok v bodě (c) vždy pravdivý. ■

1.1.15. Tvrzení „Číslo x je liché.“, kde x je proměnná, je gramatickou větou, nicméně není výrokem, protože jej nelze potvrdit ani vyvrátit. Z uvedeného tvrzení se stane výrok, pokud proměnnou x nahradíme konkrétním číslem, například „Číslo 7 je liché.“ Právě uvedený příklad motivuje následující definici.

1.1.16. Definice. Výroková forma $V(x_1, \dots, x_n)$ je výraz, z něhož vznikne výrok, když za proměnné $x_1, \dots, x_n$ dosadíme po řadě prvky z daných množin $M_1, M_2, \dots, M_n$. Takovou výrokovou formu s n proměnnými a příslušnými množinami $M_1, M_2, \dots, M_n$ značíme

$$V(x_1, \dots, x_n), \quad x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_n \in M_n.$$

1.1.17. Pojem množiny v předchozí definici používáme v intuitivním smyslu. Pro naše úvahy nám zatím postačí toto (ne zcela přesné) vymezení: *Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů (které nazýváme prvky) do jediného celku.* Je-li a prvkem množiny A, pak píšeme $a \in A$. Pokud a není prvkem A, píšeme $a \notin A$. Jestliže každý prvek množiny A je i prvkem množiny B, potom říkáme, že A je podmnožinou B a píšeme $A \subset B$. Prázdnou množinou nazveme množinu, která neobsahuje žádný prvek. Zpřesňující výklad je uveden v Oddílu 1.3 a Dodatku **??**.

1.1.18. Nechť výroková forma V má tvar „x je hlavní město České republiky“, kde za x dosazujeme prvky z množiny všech českých měst. Pak $V(\text{Praha})$ je pravdivý výrok, ale výrok $V(\text{Plzeň})$ neplatí.

1.1.19. Poznámka. Predikátem v logice rozumíme vlastnost, kterou nějakému předmětu přisuzujeme, nebo mu ji upíráme. V Příkladu 1.1.18 je predikátem „být hlavním městem České republiky". Predikátová logika se věnuje studiu predikátů a vyšetřování vlastností kvantifikace. Pojmem kvantifikace se nyní budeme zabývat.

1.1.20. Definice. Nechť $V(x)$, $x \in M$, je výroková forma a $P \subset M$.

(a) Výrok „Pro každé $x \in P$ platí $V(x)$." symbolicky zapisujeme ve tvaru

$$\forall x \in P : V(x).$$

Symbol $\forall$ nazýváme **obecným kvantifikátorem**.

(b) Výrok „Existuje $x \in P$ takové, že platí $V(x)$." zapisujeme ve tvaru

$$\exists x \in P : V(x).$$

Symbol $\exists$ nazýváme **existenčním kvantifikátorem**.

(c) Výrok „Existuje právě jedno $x \in P$ takové, že platí $V(x)$." zapisujeme ve tvaru

$$\exists! x \in P : V(x).$$

1.1.21. Poznámka. Z typografického hlediska vznikly symboly $\forall$ a $\exists$ otočením písmen A a E. Písmeno A vychází z německého slova *allgemein*, a písmeno E patrně z francouzského slova *exister*.

1.1.22 (kvantifikace přes prázdnou množinu)**.** Nechť $V(x)$, $x \in M$, je výroková forma. Jestliže P je prázdná množina, potom výrok

$$\forall x \in P : V(x)$$

považujeme za pravdivý. Na druhé straně výrok

$$\exists x \in P : V(x)$$

je zřejmě nepravdivý.

1.1.23. Pokud má výroková forma více proměnných, můžeme z ní pomocí kvantifikátorů vytvořit nové výrokové formy s menším počtem proměnných nebo dokonce výroky. Mějme výrokovou formu $V(x, y)$, $x \in M_1$, $y \in M_2$. Nyní můžeme vytvořit nové výrokové formy s jednou proměnnou například takto:

$$\begin{aligned} &\forall x \in M_1 : V(x, y), \qquad && \exists x \in M_1 : V(x, y), \\ &\forall y \in M_2 : V(x, y), && \exists y \in M_2 : V(x, y). \end{aligned}$$

V prvním řádku jde o výrokové formy s proměnnou y a ve druhém s proměnnou x. Z těchto forem lze utvořit výroky použitím dalšího kvantifikátoru, například

$$\forall x \in M_1 : \big(\forall y \in M_2 : V(x, y)\big), \qquad \exists y \in M_2 : \big(\exists x \in M_1 : V(x, y)\big).$$

Výroky uvedeného typu zapisujeme zpravidla jednodušeji následujícím způsobem:

$$\forall x \in M_1\ \forall y \in M_2 \colon V(x,y), \qquad \exists y \in M_2\ \exists x \in M_1 \colon V(x,y).$$

Obdobně můžeme pomocí kvantifikátorů vytvářet výrokové formy a výroky z výrokové formy s více než dvěma proměnnými.

1.1.24 (intuitivní pojetí matematické logiky)**.** V našem textu se přidržíme intuitivního významu kvantifikátorů, tj. využijeme toho, jak v běžné řeči rozumíme obratům „pro každé x“ a „existuje x“. Nebudeme tedy usilovat o čistě formální pojetí matematické logiky, neboť takový přístup by pro svou náročnost nebyl přiměřený našemu textu. Proto některé vlastnosti kvantifikátorů z tohoto oddílu nebudeme dokazovat, nicméně by tyto vlastnosti měly být intuitivně zřejmé. V knize [**16**] je možné se seznámit s precizní výstavbou matematické logiky a jejími hlubokými výsledky. Kniha však předpokládá obeznámenost s vyšší matematikou.

1.1.25 (zúžení výrokové formy)**.** Uveďme nejprve dvě následující vlastnosti. Nechť $V(x), x \in M_1$, je výroková forma a $M_2 \subset M_1$. Potom platí:

(a) $\big(\forall x \in M_1 \colon V(x)\big) \Rightarrow \big(\forall x \in M_2 \colon V(x)\big)$,
(b) $\big(\exists x \in M_2 \colon V(x)\big) \Rightarrow \big(\exists x \in M_1 \colon V(x)\big)$.

Výrok (a) říká, že pokud výrok $V(x)$ platí pro každý prvek x množiny M_1, pak platí i pro každý prvek x z množiny M_2. Výrok (b) tvrdí, že pokud v podmnožině M_2 existuje prvek x takový, že $V(x)$ platí, pak takový prvek nalezneme i v množině M_1.

1.1.26 (pořadí kvantifikátorů)**.** Uveďme dále tři základní vlastnosti týkající se pořadí kvantifikátorů, které budeme často používat. Nechť $V(x,y), x \in M_1, y \in M_2$ je výroková forma. Potom platí:

- $\big(\forall x \in M_1\ \forall y \in M_2 \colon V(x,y)\big) \Leftrightarrow \big(\forall y \in M_2\ \forall x \in M_1 \colon V(x,y)\big)$,
- $\big(\exists x \in M_1\ \exists y \in M_2 \colon V(x,y)\big) \Leftrightarrow \big(\exists y \in M_2\ \exists x \in M_1 \colon V(x,y)\big)$,
- $\big(\exists x \in M_1\ \forall y \in M_2 \colon V(x,y)\big) \Rightarrow \big(\forall y \in M_2\ \exists x \in M_1 \colon V(x,y)\big)$.

První dvě vlastnosti říkají, že pořadí kvantifikátorů *stejného typu* lze zaměňovat, aniž by se změnila pravdivostní hodnota výroku. V poslední ze tří výše uvedených formulí je však pouze implikace, nikoli ekvivalence. Pořadí obecného kvantifikátoru a existenčního kvantifikátoru totiž obecně zaměnit nelze, jak ukazuje následující příklad.

Nechť $A(m,d), m \in M, d \in D$, značí výrokovou formu

$$\text{„Muž } m \text{ je otcem dítěte } d\text{.“}, \quad m \in M, d \in D,$$

kde M je množina všech mužů a D je množina všech dětí. Výroky

$$\forall d \in D\ \exists m \in M \colon A(m,d), \qquad \exists m \in M\ \forall d \in D \colon A(m,d)$$

se liší pouze pořadím kvantifikátorů. První výrok říká, že každé dítě má svého otce. Druhý výrok tvrdí, že existuje muž, který je otcem všech dětí. Pravdivostní hodnoty těchto výroků se tedy liší.

1.1.27. Označení. Nechť $V(x, y)$ je výroková forma, kde za proměnné x a y bereme prvky množiny A. V takovém případě vzhledem k záměnnosti kvantifikátorů stejného typu používáme často místo zápisu

$$\forall x \in A\ \forall y \in A \colon V(x, y)$$

zápis

$$\forall x, y \in A \colon V(x, y).$$

Podobně místo

$$\exists x \in A\ \exists y \in A \colon V(x, y)$$

píšeme zkráceně

$$\exists x, y \in A \colon V(x, y).$$

Tuto konvenci budeme zřejmým způsobem používat i ve formulích, které obsahují více než dva kvantifikátory.

1.1.28. Označení. Nechť V a P jsou výrokové formy s proměnnou $x \in M$. Zápis

$$\forall x \in M, P(x) \colon V(x), \tag{1.2}$$

označuje výrok

$$\forall x \in M \colon \big(P(x) \Rightarrow V(x)\big).$$

Výrok (1.2) čteme: „Pro každé x z M splňující P platí $V(x)$." Zápis

$$\exists x \in M, P(x) \colon V(x) \tag{1.3}$$

označuje výrok

$$\exists x \in M \colon \big(P(x) \wedge V(x)\big).$$

Výrok (1.3) čteme: „Existuje x z M splňující P, pro které platí $V(x)$." Obdobný zápis používáme i v případě, že V je výroková forma o více než jedné proměnné. Výše uvedená úmluva zjednodušuje a zpřehledňuje zápis formulí.

1.1.29 (negace výroků s kvantifikátory)**.** Nechť V a P je výroková forma s proměnnou $x \in M$. Negaci výroku

$$\forall x \in M \colon V(x)$$

lze zapsat ve tvaru

$$\exists x \in M \colon \neg V(x),$$

přičemž $\neg V$ značí výrokovou formu, která po dosazení za proměnnou x určuje výrok $\neg\big(V(x)\big)$. Podobně negaci výroku

$$\exists x \in M : V(x)$$

lze zapsat ve tvaru

$$\forall x \in M : \neg V(x).$$

Negovat výrok

$$\forall x \in M, P(x) \colon V(x),$$

znamená negovat výrok

$$\forall x \in M : \big(P(x) \Rightarrow V(x)\big).$$

Po provedení negace dostaneme

$$\exists x \in M : \neg\big(P(x) \Rightarrow V(x)\big),$$

takže podle Věty 1.1.12(c)

$$\exists x \in M : \big(P(x) \wedge \neg V(x)\big).$$

Poslední formuli lze přepsat ve tvaru

$$\exists x \in M, P(x) \colon \neg V(x).$$

Podobně lze odvodit, že negace výroku

$$\exists x \in M, P(x) \colon V(x)$$

má tvar

$$\forall x \in M, P(x) \colon \neg V(x).$$

Pokud negujeme výrok, který obsahuje více kvantifikátorů, postupujeme tak, že ve formuli zaměníme obecné kvantifikátory za existenční, existenční za obecné a znegujeme výrokovou formu. Správnost postupu vyplývá z předchozího výkladu.

1.1.30. Negaci výroku

$$\forall x \in M_1 \ \exists y \in M_2 \ \forall z \in M_3 \colon V(x, y, z)$$

lze zapsat ve tvaru

$$\exists x \in M_1 \ \forall y \in M_2 \ \exists z \in M_3 \colon \neg V(x, y, z).$$

Další příklady jsou uvedeny v Oddílu 1.9.

1.2. Základní metody důkazů

1.2.1. Množinu všech **přirozených** čísel, tj. množinu všech čísel $1, 2, 3, \dots$, budeme značit $\mathbb{N}$, množinu všech **celých** čísel $\mathbb{Z}$, množinu všech **racionálních** čísel, tj. množinu čísel tvaru $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$, budeme značit $\mathbb{Q}$ a množinu všech **reálných** čísel $\mathbb{R}$. **Iracionálním** číslem rozumíme každé reálné číslo, které není racionální. Čísla z uvedených množin můžeme porovnávat mezi sebou podle velikosti, sčítat, odečítat, násobit a dělit. Pro rovnost reálných čísel budeme používat standardní symbol $=$ a pro nerovnosti symboly $\leq$, $\geq$, $<$, $>$. Pro uvedené operace pak symboly $+$ (plus), $-$ (minus), $\cdot$ (krát) a – (zlomková čára). Budeme předpokládat znalost základních vlastností těchto množin na úrovni středoškolské matematiky, tj. zejména znalost vlastností početních operací. Také použijeme tvrzení, že množina přirozených čísel je rovna množině všech celých čísel, která jsou větší než 0, a číslo 1 je nejmenší přirozené číslo, tj. pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n \geq 1$. O množinách $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ zde hovoříme zejména proto, abychom je mohli používat v ilustračních příkladech tohoto oddílu. Jejich přesnému zavedení se budeme věnovat v Oddílu 1.5 a Dodatku **??**. Logická struktura hlavní linie výkladu však nebude narušena používáním dosud nedefinovaných pojmů a nedokázaných tvrzení.

1.2.2. V matematice vycházíme z několika základních tvrzení, která nedokazujeme. Taková tvrzení nazýváme **axiomy**. Všechna další tvrzení jsou potom odvozována z axiomů a tvrzení již dokázaných. Matematické tvrzení, které považujeme za důležité nebo zajímavé samo o sobě, většinou nazýváme **větou**. K označení tvrzení, které má pomocný charakter, tj. potřebujeme jej pouze k důkazu jiných tvrzení, používáme zpravidla slovo **lemma**.[1] **Definice** vymezují nové pojmy, věty a lemmata hovoří o vlastnostech těchto pojmů a vztazích mezi nimi. Matematická teorie je tak tvořena axiomy, definicemi, větami, lemmaty a důkazy. Podrobnější výklad o axiomech i samotném jazyce matematiky je uveden v Dodatku **??**.

Nejčastěji bývá matematická věta formulována ve tvaru implikace, tj. pokud platí předpoklad A, pak platí závěr B. Důkazem je pak posloupnost správných úvah vedoucích od předpokladů věty k jejímu závěru. Mezi základní typy důkazů patří:

- přímý důkaz,
- nepřímý důkaz,
- důkaz sporem,
- důkaz rozborem případů,

[1] Slovo lemma je středního rodu.

- důkaz matematickou indukcí.

Tyto postupy nyní stručně vysvětlíme a výklad doplníme příklady. Uveďme ještě, že u složitějších důkazů je často nutné použít i několika z výše uvedených postupů a vzájemně je kombinovat.

1.2.3 (přímý důkaz)**.** Mějme matematickou větu ve tvaru implikace $A \Rightarrow B$ pro jisté výroky A a B. Při přímém důkazu postupujeme takto: Předpokládáme, že výrok A platí. Odtud odvodíme platnost jistého výroku C_1, pomocí C_1 dokážeme pravdivost jistého výroku C_2, z něho pak dokážeme C_3 a tak dále, až z předpokladu platnosti výroku C_n dokážeme výrok B. Odvodili jsme tedy následující řetěz implikací

$$A \Rightarrow C_1,\ C_1 \Rightarrow C_2,\ C_2 \Rightarrow C_3, \dots, C_{n-1} \Rightarrow C_n,\ C_n \Rightarrow B,$$

ze kterého již plyne platnost implikace $A \Rightarrow B$. Chceme-li dokázat nějakou větu přímým důkazem, je na nás, abychom nalezli vhodné střední členy $C_1, \dots, C_n$, které nám umožní z předpokladu odvodit závěr. Jak je hledat v konkrétním případě, na to bohužel žádný návod či dokonce algoritmus neexistuje. Matematika je tvůrčí činnost a bez určité míry důvtipu žádnou novou větu dokázat nelze.

1.2.4 (nepřímý důkaz)**.** Tento typ důkazu je založen na ekvivalenci výroků $A \Rightarrow B$ a $\neg B \Rightarrow \neg A$ (viz Větu 1.1.14(a)). Platí-li druhý výrok, pak platí i první. Stačí tedy nalézt jakýkoli důkaz druhého výroku.

1.2.5 (důkaz sporem)**.** Tato metoda je založena na ekvivalenci výroků $A \Rightarrow B$ a $\neg(A \wedge \neg B)$ (viz Větu 1.1.12(c)). Při tomto způsobu dokazování předpokládáme platnost výroku $A \wedge \neg B$. Pokud se nám z něho podaří odvodit výrok C, který je neplatný, pak nemůže platit ani výrok $A \wedge \neg B$ (z platného výroku nelze odvodit výrok neplatný). Platí tedy $\neg(A \wedge \neg B)$, neboli $A \Rightarrow B$.

1.2.6 (důkaz rozborem případů)**.** Má-li dokazované tvrzení tvar $(A \vee B) \Rightarrow C$, pak podle Věty 1.1.14(c) stačí dokázat tvrzení $A \Rightarrow C$ a $B \Rightarrow C$. V tomto důkazu tedy nejprve dokazujeme závěr C za předpokladu, že platí A. Pak dokazujeme C za předpokladu, že platí B. Při aplikaci této metody je tedy třeba zapsat předpoklad věty ve tvaru $A \vee B$ tak, abychom pak mohli snáze odvodit $A \Rightarrow C$ a $B \Rightarrow C$. Ani zde není k dispozici žádný algoritmus, jak taková A a B nalézt, a je třeba použít vlastního důvtipu.

1.2.7 (důkaz matematickou indukcí)**.** Metodu důkazu matematickou indukcí lze použít k důkazu výroku tvaru

$$\forall n \in \mathbb{N} : V(n), \tag{1.4}$$

kde $V(n)$, $n \in \mathbb{N}$, je výroková forma. V prvním kroku matematické indukce dokážeme platnost výroku $V(1)$. Ve druhém kroku pak dokážeme výrok

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \big(V(n) \Rightarrow V(n+1)\big),$$

neboli předpokládáme platnost $V(n)$ (tzv. **indukční předpoklad**) a odvodíme platnost $V(n+1)$. Z těchto dvou kroků pak vyplývá platnost výroku (1.4).

V případě, že chceme dokázat výrok tvaru

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0\colon V(n),$$

kde $n_0 \in \mathbb{Z}$ a $V(n)$, $n \in \{j \in \mathbb{Z};\ j \geq n_0\}$, je výroková forma, pak v prvním kroku matematické indukce dokážeme platnost výroku $V(n_0)$. Ve druhém kroku pak dokážeme výrok

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0\colon \big(V(n) \Rightarrow V(n+1)\big).$$

Korektnost této důkazové metody podstatně souvisí s konstrukcemi množiny přirozených čísel a množiny celých čísel, kterým se budeme věnovat v Dodatku **??**.

1.2.8 (důkaz úplnou matematickou indukcí)**.** Nechť $V(n), n \in \mathbb{N}$, je výroková forma. Výrok

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon V(n) \tag{1.5}$$

je někdy možné dokázat pomocí úplné matematické indukce, která sestává z ověření následujících tvrzení:

(a) platí $V(1)$,

(b) pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\big(\forall j \in \mathbb{N}, j \leq n\colon V(j)\big) \Rightarrow V(n+1).$$

Krok (b) úplné matematické indukce se liší od druhého kroku matematické indukce popsané v paragrafu 1.2.7 v tom, že místo abychom předpokládali platnost pouze $V(n)$, předpokládáme, že platí výroky $V(1), V(2), \ldots, V(n)$.

Předpokládejme, že platí (a) a (b). Ukážeme, že pak platí (1.5). Definujme výrokovou formu $W(n), n \in \mathbb{N}$, následujícím způsobem: Výrok $W(n)$ říká, že pro každé $j \in \mathbb{N}$, $j \leq n$, platí $V(j)$. Matematickou indukcí dokážeme tvrzení

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon W(n). \tag{1.6}$$

Výrok $W(1)$ platí podle (a). Nyní předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $W(n)$. Potom podle (b) platí $V(n+1)$. Platí-li $W(n)$ a $V(n+1)$, pak platí $W(n+1)$. Podle principu matematické indukce platí (1.6). Z výroku (1.6) pak okamžitě plyne (1.5).

Další varianty důkazu matematickou indukcí jsou uvedeny v příkladové části této kapitoly (Oddíl 1.9).

Použití výše uvedených důkazových metod přiblížíme v následujících příkladech.

1.2.9. Příklad. Dokažte, že pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \geq ab$.

Řešení. Provedeme přímý důkaz tvrzení. Vezměme libovolná čísla $a, b \in \mathbb{R}$. Potom platí $(a-b)^2 \geq 0$. Upravíme-li tuto nerovnost, dostaneme $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$. Odtud již snadno plyne dokazovaná nerovnost $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \geq ab$. ♣

1.2.10. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že potom existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n = 2k$, nebo $n = 2k - 1$, přičemž oba případy nemohou nastat zároveň. V prvním případě říkáme, že n je **sudé**, a ve druhém, že je **liché**.

Řešení. K důkazu první části tvrzení použijeme matematickou indukci. Pro $n = 1$ položme $k = 1$. Potom máme $1 = 2 \cdot 1 - 1$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$, a chceme tvrzení dokázat i pro číslo $n + 1$. Podle indukčního předpokladu existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n = 2k$, nebo $n = 2k - 1$. V prvním případě platí $n + 1 = 2k + 1 = 2(k + 1) - 1$, ve druhém $n + 1 = 2k$. V prvním případě je tedy hledaným číslem $k + 1$ a ve druhém k.

Pokud by číslo $n \in \mathbb{N}$ bylo zároveň liché i sudé, pak by existovala $k, l \in \mathbb{N}$ taková, že $n = 2k = 2l - 1$. Potom $2(l - k) = 1$, a tedy $l - k > 0$. Tudíž by platilo $k + 1 \leq l$, a tedy $n = 2l - 1 \geq 2(k + 1) - 1 = 2k + 1 > 2k = n$, což není možné. Metodou důkazu sporem jsme odvodili i druhou část tvrzení. Tím je tvrzení příkladu dokázáno. ♣

1.2.11. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $p \in \mathbb{N}$ je liché. Dokažte, že potom p^n je liché číslo. (Symbol p^n značí $\underbrace{p \cdots p}_{n \text{ krát}}$ a $p^0 = 1$. Podrobně je tento zápis zaveden v paragrafu 1.6.1(b).)

Řešení. Nechť $p \in \mathbb{N}$ je liché. Tvrzení dokážeme matematickou indukcí. Pro $n = 1$ je číslo $p^1 = p$ liché podle předpokladu. Předpokládejme platnost tvrzení pro přirozené číslo n, tj. předpokládejme, že číslo p^n je liché. Pak existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $p^n = 2k - 1$. Existuje také $l \in \mathbb{N}$ takové, že $p = 2l - 1$. Potom platí

$$p^{n+1} = p^n \cdot p = (2k - 1) \cdot (2l - 1) = 2(2kl - k - l + 1) - 1.$$

Dále platí $2kl - k - l + 1 = k(l - 1) + l(k - 1) + 1 \geq 1$, a tedy $2kl - k - l + 1 \in \mathbb{N}$. Odtud plyne, že číslo p^{n+1} je liché. ♣

1.2.12. Připomeňme, že číslo $d \in \mathbb{Z}$ nazýváme **dělitelem** čísla $n \in \mathbb{Z}$, značíme $d \mid n$, pokud existuje $k \in \mathbb{Z}$ splňující $n = kd$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je zřejmě 1 i n dělitelem n. Řekneme, že $n \in \mathbb{N}$ je **prvočíslo**, pokud $n > 1$ a jeho jediní kladní dělitelé jsou 1 a n. Například čísla $2, 3, 5, 7, 11$ jsou prvočísla.

1.2.13. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že potom existuje právě jedna dvojice $k, l \in \mathbb{N}$ taková, že $n = 2^{k-1}(2l-1)$.

Řešení. K důkazu použijeme úplnou matematickou indukci. Pro $n = 1$ položíme $k = 1$ a $l = 1$ a máme $n = 1 = 2^{1-1}(2 \cdot 1 - 1)$.

Předpokládejme, že každé $j \in \mathbb{N}$, $j \leq n$, lze vyjádřit ve tvaru $2^{k-1}(2l-1)$ pro vhodná $k, l \in \mathbb{N}$. Chceme ukázat, že i pro číslo $n+1$ lze nalézt příslušná $k, l \in \mathbb{N}$. Pokud je $n+1$ číslo liché, pak existuje $l \in \mathbb{N}$ takové, že $n+1 = 2l-1$. Položíme $k = 1$ a tvrzení je dokázáno. Pokud je číslo $n+1$ sudé, pak existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $n+1 = 2m$. Poněvadž $m \leq n$, existují podle indukčního předpokladu čísla $k', l' \in \mathbb{N}$ taková, že $m = 2^{k'-1}(2l'-1)$. Potom stačí položit $k = k'+1$ a $l = l'$.

Zbývá dokázat, že čísla k, l jsou pro dané $n \in \mathbb{N}$ určena jednoznačně. Předpokládejme, že $n = 2^{k-1}(2l-1) = 2^{k'-1}(2l'-1)$ pro $k, l, k', l' \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že $k' > k$, pak platí $2l-1 = 2^{k'-k}(2l'-1)$. Číslo na levé straně rovnosti je liché, zatímco číslo na pravé straně je sudé, což je spor. Podobně vede ke sporu předpoklad $k < k'$. Musí tedy platit $k = k'$. Potom dostáváme $2l-1 = 2l'-1$. Odtud již snadno plyne $l = l'$. Tím je důkaz jednoznačnosti proveden. ♣

1.2.14. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že je-li n^2 sudé, potom je i n je sudé.

Řešení. Podle Příkladu 1.2.11 platí, že pokud je n liché, pak je i n^2 liché. Odtud plyne tvrzení metodou nepřímého důkazu. ♣

1.2.15. Příklad (Hippasus[2]). Dokažte, že číslo $\sqrt{2}$, které je definováno jako kladné řešení rovnice $y^2 = 2$ v oboru reálných čísel, není racionální. Existenci a jednoznačnost takového řešení dokážeme později (vizte 4.3.14).

Řešení. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo. Potom existují $p \in \mathbb{N}$ a $q \in \mathbb{N}$ taková, že $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Navíc můžeme předpokládat, že nejvýše jedno z čísel p a q je sudé. Podle Příkladu 1.2.13 lze totiž nalézt čísla k_1, l_1, k_2, l_2 z množiny $\mathbb{N} \cup \{0\}$ taková, že $p = 2^{k_1}(2l_1 - 1)$ a $q = 2^{k_2}(2l_2 - 1)$. Pak stačí místo dvojice p a q uvažovat dvojici $2l_1 - 1$ a $2^{k_2-k_1}(2l_2-1)$, pokud $k_2 \geq k_1$, nebo $2^{k_1-k_2}(2l_1-1)$ a $2l_2-1$, pokud $k_2 < k_1$.

Z rovnosti $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ plyne, že $p^2 = 2q^2$, a tedy číslo p^2 je sudé. Podle Příkladu 1.2.14 dostáváme, že i p je sudé, a tedy $p^2 = 4k$, kde $k \in \mathbb{N}$. Z výchozí rovnosti $p^2 = 2q^2$ dostáváme, že q^2 je sudé. Podle Příkladu 1.2.14 je číslo q sudé. Odtud plyne, že p a q mají společného dělitele 2. To je ovšem

[2]Hippasus (5. stol. př. n. l.)

spor s předpokladem, že nejvýše jedno z čísel p a q je sudé. Číslo $\sqrt{2}$ tedy není racionální. ♣

1.2.16. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že potom je číslo $n(n+1)$ sudé.

Řešení. Provedeme důkaz rozborem případů. Mějme $n \in \mathbb{N}$. Pak platí, že n je sudé, nebo n je liché. Pokud je n sudé, pak je i číslo $n(n+1)$ sudé. Pokud je číslo n liché, pak je číslo $n+1$ sudé, a proto je i číslo $n(n+1)$ sudé. Tím je důkaz proveden. ♣

1.2.17. Při důkazu výroku

$$\forall x \in M : V(x)$$

často postupujeme následujícím způsobem. Zvolíme $x \in M$ pevné, ale libovolné, tj. o x předpokládáme pouze to, že je prvkem M, a nic dalšího. Postupnými dedukcemi ukážeme platnost výroku $V(x)$ pro toto x. Tím je pak důkaz proveden.

1.2.18 (konstruktivní a nekonstruktivní důkaz)**.** Při důkazu výroku

$$\exists x \in M : V(x)$$

máme dvě možnosti. Buď přímo nalezneme nějaké $x \in M$, pro které platí $V(x)$, nebo takové $x \in M$ nenalezneme, ale dokážeme, že alespoň jedno musí existovat. Tyto postupy nazýváme po řadě **konstruktivním důkazem** a **nekonstruktivním důkazem**. Nekonstruktivní důkaz také někdy nazýváme **existenčním důkazem**.

1.2.19. Příklad. Ukažte, že existují iracionální čísla a, b taková, že a^b je číslo racionální.

Řešení (konstruktivní důkaz). Položme $a = \sqrt{2}$ a $b = \log_2 9$, kde $\log_2$ označuje logaritmus o základu 2. Přesnou definici výrazu a^b a logaritmů uvedeme v Kapitole 5. Potom platí

$$a^b = \sqrt{2}^{\log_2 9} = 2^{\frac{1}{2}\log_2(3^2)} = 2^{\log_2 3} = 3.$$

Stačí tedy odvodit, že číslo $\log_2 9$ je iracionální. Použijeme metodu důkazu sporem. Předpokládejme, že $\log_2 9 = \frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$. Poněvadž je číslo $\log_2 9$ kladné, musí být p přirozené. Potom $9 = 2^{\log_2 9} = 2^{\frac{p}{q}}$, a tedy $9^q = 2^p$. Číslo 2^p je sudé a podle Příkladu 1.2.11 je číslo 9^q liché, což je spor. ♣

Řešení (nekonstruktivní důkaz). Využijeme opět iracionalitu čísla $\sqrt{2}$. Pokud by číslo $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ bylo racionální, pak bychom byli s důkazem hotovi. Pokud by tomu tak nebylo, pak by čísla $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ a $\sqrt{2}$ byla iracionální, přitom ale číslo

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

je racionální. Tím je tvrzení dokázáno, neboť alespoň jedna dvojice čísel

$$a = \sqrt{2},\ b = \sqrt{2} \qquad \text{nebo} \qquad a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}},\ b = \sqrt{2}$$

splňuje zadání úlohy. Výše uvedený postup však neříká, zda je řešením první nebo druhá dvojice čísel.

Poznamenejme ještě, že lze ukázat, že číslo $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ je iracionální. Důkaz je však velmi obtížný ([**7, 15**]). ♣

1.2.20 (důkazy nerovností)**.** Máme-li dokázat nerovnost $A \le B$ mezi reálnými čísly A a B, často postupujeme tak, že nalezneme reálné číslo C splňující $A \le C$ a $C \le B$. Odtud pak již plyne nerovnost $A \le B$. Při hledání čísla C jde o to, aby důkazy nerovností $A \le C$ a $C \le B$ byly snazší než důkaz nerovnosti $A \le B$. Číslu C někdy říkáme *horní odhad* čísla A a také *dolní odhad* čísla B. Samotnou nerovnost $A \le C$ nebo $C \le B$ také někdy nazýváme *odhadem*.

1.3. Množiny

1.3.1. Nebudeme se zde zabývat otázkou, co je obecně množina. Tento problém, jenž se nachází na pomezí matematiky a filosofie, je totiž velmi nesnadný a překračuje rámec tohoto textu. Zopakujme zatím pouze formulaci z paragrafu 1.1.17, která říká, že množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů (které nazýváme **prvky**) do jediného celku. Doplňující informace jsou uvedeny v Dodatku **??**. Pro systematický výklad teorie množin doporučujeme knihu [**5**].

Nyní zopakujeme pojmy z paragrafu 1.1.17 a přidáme několik dalších.

1.3.2. Množina je určena svými prvky. Skutečnost, že prvek a **patří** do množiny A, značíme $a \in A$, a skutečnost, že a do A **nepatří**, zapíšeme ve formě $a \notin A$.

Množinu definujeme výčtem prvků, například píšeme $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, nebo pomocí vlastnosti, kterou musejí splňovat její prvky, tj. píšeme $\{x \in M;\ V(x)\}$, kde M je množina a $V(x)$, $x \in M$, je výroková forma. Příkladem je zápis $\{x \in \mathbb{N};\ x < 6\}$.

Prázdnou množinou nazveme množinu, která neobsahuje žádný prvek. Označíme ji symbolem $\emptyset$. Množinu, která není prázdná, nazýváme **neprázdnou**.

1.3.3. Řekneme, že množina A je **částí** množiny B nebo množina A je **podmnožinou** množiny B, jestliže každý prvek množiny A je rovněž prvkem množiny B. Tuto skutečnost značíme $A \subset B$ (někdy též píšeme $B \supset A$) a tomuto vztahu mezi množinami říkáme **inkluze**. Prázdná množina je podmnožinou každé množiny.

Množiny A a B jsou si **rovny** ($A = B$), jestliže mají stejné prvky, neboli platí současně $A \subset B$ a $B \subset A$. Není těžké odvodit, že pro libovolné množiny A, B, C platí

- $A = A$,
- jestliže $A = B$, potom $B = A$,
- jestliže $A = B$ a $B = C$, potom $A = C$.

Pokud si množiny A a B nejsou rovny, píšeme $A \neq B$. Řekneme, že množina A je **vlastní částí** množiny B nebo A je **vlastní podmnožinou** množiny B, jestliže $A \subset B$ a $A \neq B$.

Nechť X je množina. Množinu všech podmnožin X značíme $\mathcal{P}(X)$ a nazýváme ji **potenční množinou** množiny X. Z jazykových důvodů budeme často používat slovní spojení „systém (pod)množin“ místo „množina (pod)množin“.

1.3.4. Označení. (a) Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $A_1, \dots, A_n$ jsou množiny. Potom zápis $A_1 \subset \dots \subset A_n$ znamená, že platí inkluze $A_1 \subset A_2, A_2 \subset A_3, \dots, A_{n-1} \subset A_n$. Obdobné značení používáme i pro symbol $\supset$.

(b) Nechť X je množina a $n \in \mathbb{N}$. Místo zápisu $x_1 \in X, x_2 \in X, \dots, x_n \in X$ budeme často používat stručnější zápis $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$.

Nyní zavedeme operace, které ze dvou (nebo více) množin utvoří další množinu.

1.3.5. Sjednocením množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B. Sjednocení množin A a B značíme symbolem $A \cup B$.

Je-li $\mathcal{A}$ systém množin, pak jeho **sjednocení** $\bigcup \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a, pro které existuje $A \in \mathcal{A}$ takové, že $a \in A$.

1.3.6. Průnikem dvou množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B. Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$. Mají-li dvě množiny prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou **disjunktní**.

Je-li $\mathcal{A}$ neprázdný systém množin, pak jeho **průnik** $\bigcap \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a, které pro každé $A \in \mathcal{A}$ splňují $a \in A$. Řekneme, že systém $\mathcal{A}$ je **disjunktní**, jestliže pro každé $A, B \in \mathcal{A}$ splňující $A \neq B$ platí $A \cap B = \emptyset$.

1.3.7. Nechť $\mathcal{A} = \big\{\{1,2,3\},\{3,4,7\},\{1,2,3,4,5\}\big\}$. Potom $\bigcup \mathcal{A} = \{1,2,3,4,5,7\}$ a $\bigcap \mathcal{A} = \{3\}$.

1.3.8. **Rozdílem** množin A a B nazveme množinu prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B. Rozdíl množin A a B značíme $A \setminus B$.

1.3.9. Nechť $m \in \mathbb{N}$ a $A_1, \dots, A_m$ jsou množiny. **Kartézským součinem** $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m$ nazveme množinu všech uspořádaných m-tic $[a_1, a_2, \dots, a_m]$, kde $a_i \in A_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$. Někdy místo symbolu $[a_1, a_2, \dots, a_m]$ používáme symbol $(a_1, a_2, \dots, a_m)$. Přesnou definici pojmu uspořádaná n-tice lze nalézt v Dodatku **??**. Je-li A množina a $n \in \mathbb{N}$, pak místo $\underbrace{A \times \cdots \times A}_{n\text{-krát}}$ píšeme A^n.

1.3.10. Poznámka. V operaci kartézského součinu není obecně možné zaměňovat pořadí množin. Pokud například $A = \{0\}$, $B = \{1\}$, pak $A \times B = \{[0,1]\}$, $B \times A = \{[1,0]\}$, takže $A \times B \neq B \times A$.

1.3.11. Věta (de Morganova[3] pravidla)**.** Nechť X je množina a $\mathcal{A}$ je neprázdný systém množin. Pak platí

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} = \bigcap \{X \setminus A;\ A \in \mathcal{A}\}$$

a dále

$$X \setminus \bigcap \mathcal{A} = \bigcup \{X \setminus A;\ A \in \mathcal{A}\}.$$

Důkaz. Provedeme důkaz prvního z uvedených tvrzení. Máme dokázat dvě inkluze, a sice

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} \subset \bigcap \{X \setminus A;\ A \in \mathcal{A}\}$$

a zároveň

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} \supset \bigcap \{X \setminus A;\ A \in \mathcal{A}\}.$$

Je-li $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{A}$, znamená to, že x patří do X, ale nepatří do sjednocení $\bigcup \mathcal{A}$. Tedy $x \notin A$ pro každou množinu $A \in \mathcal{A}$. To ale znamená, že pro každé $A \in \mathcal{A}$ je $x \in X \setminus A$, a tudíž $x \in \bigcap \{X \setminus A;\ A \in \mathcal{A}\}$. Tím je první inkluze dokázána.

Nechť $x \in X \setminus A$ pro každou z uvažovaných množin $A \in \mathcal{A}$. Tedy $x \in X$, ale $x \notin A$ pro všechna $A \in \mathcal{A}$. Takže $x \notin \bigcup \mathcal{A}$. Tudíž celkem $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{A}$, čímž je završen důkaz druhé inkluze.

Druhé de Morganovo pravidlo lze dokázat obdobně. ■

[3] Augustus de Morgan (1806–1871)

1.4. Relace uspořádání a zobrazení

Relace uspořádání.

1.4.1. Definice. Nechť A a B jsou množiny. **Binární relací** R mezi prvky množin A a B rozumíme libovolnou podmnožinu R kartézského součinu $A \times B$. Pokud $[a, b] \in R$, pak říkáme, že prvek a je v relaci R s prvkem b. Píšeme $a\ R\ b$. Pokud $A = B$, říkáme, že R je **binární relace na** A. Pokud nehrozí nedorozumění, budeme místo slovního spojení „binární relace" používat slovo „relace".

Existuje mnoho příkladů matematických objektů, které jsou relacemi. V tuto chvíli pro nás budou důležité dva speciální typy relací, totiž uspořádání a zobrazení. Následující definice nám pomůže zavést první z nich.

1.4.2. Definice. Nechť A je množina a nechť R je relace na A. Řekneme, že R je

- **reflexivní**, jestliže platí
$$\forall x \in A\colon [x, x] \in R,$$
- **symetrická**, jestliže platí
$$\forall x, y \in A\colon [x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \in R,$$
- **tranzitivní**, jestliže platí
$$\forall x, y, z \in A\colon \big([x, y] \in R \wedge [y, z] \in R\big) \Rightarrow [x, z] \in R,$$
- **antisymetrická**, jestliže platí
$$\forall x, y \in A\colon [x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \notin R,$$
- **slabě antisymetrická**, jestliže platí
$$\forall x, y \in A\colon \big([x, y] \in R \wedge [y, x] \in R\big) \Rightarrow x = y.$$

1.4.3. Definice. Nechť A je množina a nechť R je relace na A. Řekneme, že R je

- **uspořádání** (někdy též **částečné uspořádání** či **neostré uspořádání**), jestliže je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní,
- **ostré uspořádání**, jestliže je antisymetrická a tranzitivní,
- **lineární uspořádání**, jestliže jde o uspořádání takové, že pro každé prvky $x, y \in A$ platí $[x, y] \in R$ nebo $[y, x] \in R$.

1.4.4. Právě definovaný pojem uspořádání je velmi abstraktní a používá se pro porovnávání velmi rozmanitých objektů mezi sebou. Uspořádání reálných čísel je jenom jedním z mnoha příkladů uspořádání. Toto uspořádání je navíc lineární. Podobně ostrá nerovnost mezi reálnými čísly je ostrým uspořádáním ve smyslu naší definice.

1.4.5. Nechť X je množina. Pak relace

$$R = \{[A, B] \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X);\ A \subset B\}$$

je uspořádání na $\mathcal{P}(X)$. Pokud má X alespoň dva prvky, pak toto uspořádání není lineární. Jestliže totiž existují $x, y \in X$, $x \neq y$, pak neplatí ani $\{x\} \subset \{y\}$ ani $\{y\} \subset \{x\}$.

1.4.6. Příklad. Na množině $\mathbb{N}^2$ definujeme lexikografické uspořádání $\leq_{\text{lex}}$ následujícím způsobem

$$[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [m_1, m_2] \Leftrightarrow \big(n_1 < m_1 \vee (n_1 = m_1 \wedge n_2 \leq m_2)\big).$$

Ověřte, že relace $\leq_{\text{lex}}$ je opravdu uspořádání.

Řešení. Reflexivita. Pro libovolné $[n_1, n_2] \in \mathbb{N}^2$ platí $[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [n_1, n_2]$, neboť $n_1 = n_1$ a $n_2 \leq n_2$.

Slabá antisymetrie. Pokud $[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [m_1, m_2]$ a zároveň $[m_1, m_2] \leq_{\text{lex}} [n_1, n_2]$, pak nemůže platit $n_1 < m_1$ ani $m_1 < n_1$. Musí tedy platit $n_1 = m_1$. Pak ovšem platí $n_2 \leq m_2$ a $m_2 \leq n_2$, a proto $n_2 = m_2$. Dokázali jsme tedy, že $[n_1, n_2] = [m_1, m_2]$.

Tranzitivita. Uvažujme nyní prvky $[n_1, n_2], [m_1, m_2], [k_1, k_2] \in \mathbb{N}^2$ splňující

$$[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [m_1, m_2] \qquad \text{a} \qquad [m_1, m_2] \leq_{\text{lex}} [k_1, k_2].$$

Z prvního vztahu plyne $n_1 \leq m_1$ a z druhého $m_1 \leq k_1$. Dostáváme tedy $n_1 \leq k_1$. Pokud platí dokonce $n_1 < k_1$, pak $[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [k_1, k_2]$. Pokud $n_1 = k_1$, pak platí také $n_1 = m_1$. Musí tedy platit $n_2 \leq m_2$ a $m_2 \leq k_2$. Odtud plyne nerovnost $n_2 \leq k_2$. Tím je dokázán vztah $[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [k_1, k_2]$. ♣

Nyní uvedeme několik základních pojmů, které souvisí s relací uspořádání.

1.4.7. Definice. Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subset X$. Řekneme, že prvek $x \in X$ je

- **horní závorou** množiny A, jestliže pro každé $a \in A$ platí $a \leq x$,
- **dolní závorou** množiny A, jestliže pro každé $a \in A$ platí $x \leq a$.

Množina A je

- **shora omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je horní závorou množiny A,
- **zdola omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je dolní závorou množiny A,
- **omezená**, jestliže je omezená shora i zdola.

1.4.8. Definice. Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $M \subset X$. Řekneme, že prvek $G \in X$ je **supremem množiny** M, jestliže platí:

(a) G je horní závorou množiny M,
(b) je-li prvek $G' \in X$ horní závorou množiny M, potom $G \leq G'$.

Řekneme, že prvek $g \in X$ je **infimem množiny** M, jestliže platí

(a) g je dolní závorou množiny M,
(b) je-li prvek $g' \in X$ dolní závorou množiny M, potom $g' \leq g$.

1.4.9. Poznámka. V předchozích dvou definicích jsme použili symbol $\leq$, který se používá zejména pro označení uspořádání na reálných číslech. Zde jej pro názornost používáme k označení libovolné relace uspořádání.

1.4.10. Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subset X$. Podle předchozí definice je supremum A její nejmenší horní závorou a infimum je její největší dolní závorou. Supremum a infimum množiny A nemusejí existovat, pokud však existují, jsou určeny jednoznačně.

Odvoďme toto pozorování například pro infimum, v případě suprema je možné postupovat obdobně. Nechť g_1 a g_2 jsou infima množiny $A \subset X$ vzhledem k uspořádání $\leq$ na množině X. Potom g_1 i g_2 jsou dolní závory množiny A. Podle vlastnosti (b) z definice infima platí $g_1 \leq g_2$ a také $g_2 \leq g_1$. Ze slabé antisymetrie relace uspořádání pak plyne $g_1 = g_2$.

Pokud supremum množiny A (vzhledem k uspořádání $\leq$) existuje, značíme jej $\sup A$. Pokud existuje infimum množiny A, značíme jej $\inf A$.

Supremum a infimum budeme používat zejména při studiu podmnožin reálných čísel, pro ilustraci však uveďme následující příklad, který využívá lexikografického uspořádání dvojic přirozených čísel.

1.4.11. Příklad. Nechť $\leq_{\text{lex}}$ je lexikografické uspořádání na množině $\mathbb{N}^2$ (viz Příklad 1.4.6). Dokažte, že supremum množiny $A = \{[1,n] \in \mathbb{N}^2;\ n \in \mathbb{N}\}$ je rovno prvku $[2,1]$.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ podle definice platí $[1,n] \leq_{\text{lex}} [2,1]$, čímž je ověřena podmínka (a) z definice suprema. Uvažujme prvek $[a,b] \in \mathbb{N}^2$, který je horní závorou množiny A. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí buď $1 < a$, nebo $1 = a$ a $n \leq b$. Druhá možnost však nemůže platit pro každé n, neboť přirozené číslo $b + 1$ nesplňuje nerovnost $b + 1 \leq b$. Platí tedy $1 < a$, neboli $2 \leq a$. Pak ovšem opět podle definice uspořádání $\leq_{\text{lex}}$ dostáváme $[2,1] \leq_{\text{lex}} [a,b]$. Tím je ověřena i podmínka (b) z definice suprema. ♣

1.4.12. Věta. Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X, $M \subset X$ je neprázdná množina a nechť existuje infimum a supremum množiny M. Potom platí $\inf M \leq \sup M$.

Důkaz. Množina M je neprázdná, takže můžeme nalézt prvek $a \in M$. Potom platí $\inf M \leq a$, neboť $\inf M$ je dolní závorou M. Dále platí $a \leq \sup M$, neboť $\sup M$ je horní závorou M. Odtud díky tranzitivitě uspořádání dostáváme nerovnost $\inf M \leq \sup M$. ∎

K právě zavedeným pojmům suprema a infima se vrátíme v Oddílu 1.5, kde budou uvedeny další ilustrační příklady.

Relace zobrazení.

1.4.13. Definice. Binární relaci $F \subset A \times B$ nazýváme **zobrazením** z množiny A do množiny B, jestliže platí

$$\forall x \in A\ \forall y_1, y_2 \in B\colon\ \Big(\big([x, y_1] \in F \land [x, y_2] \in F\big) \Rightarrow y_1 = y_2\Big).$$

1.4.14. Je-li F zobrazení z množiny A do množiny B, pak podle definice pro každé $x \in A$ existuje nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $[x, y] \in F$. Pokud pro dané $x \in A$ takové y existuje, pak je tedy určeno jednoznačně a značíme je $F(x)$.

1.4.15. Definice. Nechť F je zobrazení z množiny A do množiny B.

- **Definičním oborem** zobrazení F nazýváme množinu
$$\mathcal{D}(F) = \{x \in A;\ \exists y \in B\colon F(x) = y\}.$$
- **Oborem hodnot** zobrazení F nazýváme množinu
$$\mathcal{H}(F) = \{y \in B;\ \exists x \in A\colon F(x) = y\}.$$
- **Grafem zobrazení** F nazýváme množinu
$$\operatorname{graf}(F) = \big\{[x, F(x)] \in A \times B;\ x \in \mathcal{D}(F)\big\}.$$

1.4.16. Poznámky. (a) Zobrazení jsme definovali pomocí pojmu relace. Při tomto přístupu tedy ztotožňujeme pojem zobrazení a pojem grafu zobrazení. V matematické analýze však často chápeme zobrazení F z množiny A do množiny B jako *přiřazení*, tj. prvkům x z jisté podmnožiny A je přiřazen jednoznačně určený prvek $F(x)$ z množiny B. V takovém případě pak zobrazení a jeho graf chápeme jako dva různé objekty, které si však vzájemně jednoznačně odpovídají.

(b) Je-li F zobrazení z množiny A do množiny B, pak je F také zobrazení z množiny C do množiny D, pokud $F \subset C \times D$, neboli $\mathcal{D}(F) \subset C$ a $\mathcal{H}(F) \subset D$.

Například zobrazení F, které každému kladnému číslu $x \in \mathbb{R}$ přiřazuje reálné číslo $\frac{1}{x}$, je zobrazením z množiny kladných reálných čísel do množiny kladných reálných čísel, ale také zobrazením z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$.

1.4.17. Označení. Nechť A a B jsou množiny. Pak symbol $F: A \to B$ znamená, že F je zobrazení z množiny A do množiny B a $\mathcal{D}(F) = A$. Takové zobrazení F nazýváme také **zobrazením množiny A do množiny B**. Na rozdíl od zobrazení z množiny A do množiny B, kde definiční obor je pouze podmnožinou množiny A, je zobrazení množiny A do množiny B definováno právě ve všech bodech množiny A.

1.4.18. Zobrazení $F: A \to B$ často definujeme tak, že pro každé $x \in A$ určíme prvek $F(x) \in B$. V takovém případě někdy používáme zápis $x \mapsto F(x)$, $x \in A$. Je třeba si uvědomit, že dva různé předpisy mohou definovat stejné zobrazení. Tak je tomu například u následujících dvou předpisů:

$$x \mapsto (x+1)^2, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$x \mapsto x^2 + 2x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.4.19. Definice. Nechť $f: A \to B$ je zobrazení, $M \subset A$, $P \subset B$.

- **Obrazem množiny** M při zobrazení f rozumíme množinu
$$\{y \in B;\ \exists x \in M: f(x) = y\},$$
kterou značíme $f(M)$.
- **Vzorem množiny** P při zobrazení f rozumíme množinu
$$\{x \in A;\ f(x) \in P\},$$
kterou značíme $f^{-1}(P)$.

1.4.20. Definice. Řekneme, že zobrazení $f: A \to B$ je

- **prosté** (**injektivní**), jestliže platí
$$\forall x, y \in A\colon\ (f(x) = f(y) \ \Rightarrow\ x = y),$$
- „**na**“ (**surjektivní**), jestliže platí
$$\forall y \in B\ \exists x \in A\colon\ f(x) = y,$$
- **bijekce** (**vzájemně jednoznačné zobrazení**), jestliže je prosté a „na“.

1.4.21. Poznámka. Abychom mohli říci, že nějaké zobrazení je „na“, musí být zadána koncová množina B. Odtud vyplývá, že pojmy surjektivity a bijektivity zobrazení zavedené v Definici 1.4.20 představují vlastnosti zobrazení f a zároveň množiny B.

1.4.22. Nechť $f: A \to B$ je prosté zobrazení. Potom přímo z definic dostáváme, že f je bijekce množiny A na množinu $f(A)$.

1.4.23. Definice. Nechť $f: A \to B$ je zobrazení a $C \subset A$. Pak zobrazení $g: C \to B$ definované předpisem $x \mapsto f(x)$, $x \in C$, nazýváme **restrikcí** nebo **zúžením** zobrazení f na množinu C. Zobrazení g značíme $f|_C$.

1.4.24. Definice. Nechť f a g jsou zobrazení. Pak zobrazení $g \circ f$ je definováno předpisem $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$ pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$ taková, že $f(x) \in \mathcal{D}(g)$. Zobrazení $g \circ f$ nazýváme **složeným zobrazením** (**složením zobrazení**) f a g, přičemž g nazýváme **vnějším** zobrazením a f nazýváme **vnitřním** zobrazením.

1.4.25. Definice. Nechť $f : A \to B$ je prosté zobrazení. Pak zobrazení $f^{-1}: f(A) \to A$ definované pro $y \in f(A)$ předpisem $f^{-1}(y) = x$, kde $x \in A$ je jednoznačně určeno vztahem $y = f(x)$, nazýváme **inverzním zobrazením** k zobrazení f.

1.4.26. Poznámka. K zobrazení, které není prosté, nelze definovat inverzní zobrazení. Příkladem je funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem $f(x) = x^2$ pro $x \in \mathbb{R}$.

1.4.27 (sjednocení a průnik indexovaného systému)**.** Nechť X a I jsou množiny a pro každé $\alpha \in I$ je definována množina $A_\alpha \subset X$. Máme tedy dáno zobrazení $\alpha \mapsto A_\alpha$ množiny I do potenční množiny $\mathcal{P}(X)$. Takové zobrazení nazýváme **indexovaným systémem množin**. Uvažujme systém $\mathcal{A} = \{A_\alpha;\ \alpha \in I\}$. Pak množinu $\bigcup \mathcal{A}$ označujeme také symbolem $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$. Pokud je navíc I neprázdná množina, pak množinu $\bigcap \mathcal{A}$ označujeme $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$.

Na závěr tohoto oddílu uvedeme definice dvou typů zobrazení, se kterými budeme často pracovat.

1.4.28. Definice. Nechť A je neprázdná množina.

(a) **Konečnou posloupností** prvků A rozumíme každé zobrazení množiny $\{1, \dots, n\}$, kde $n \in \mathbb{N}$, do množiny A. Pokud $k \mapsto a_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$, je takové zobrazení, pak tuto posloupnost značíme $\{a_k\}_{k=1}^n$. Prvek a_k nazýváme k**-tým členem** této posloupnosti.

(b) **Nekonečnou posloupností** prvků A rozumíme každé zobrazení $n \mapsto a_n, n \in \mathbb{N}$, množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do množiny A. Takovou posloupnost obvykle značíme $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, případně jen $\{a_n\}$. Prvek a_n nazýváme n**-tým členem** této posloupnosti.

1.4.29. Posloupnost může být definována také **rekurentně**. Mějme neprázdnou množinu A. Při rekurentním zadání posloupnosti je obvykle explicitně předepsán člen $a_1 \in A$ nebo několik prvních členů a_1, $a_2, \dots,$ $a_n \in A$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ a je stanoven předpis, podle kterého je možné pro každé $j \in \mathbb{N}, j > n$, určit hodnotu $a_{j+1} \in A$ na základě znalosti hodnoty a_j, případně některých dalších již známých hodnot a_k, kde $k \leq j$. Existence a jednoznačnost takto zadané posloupnosti vyplývá z následující věty.

1.4.30. Věta (rekurentně zadaná posloupnost)**.** Nechť A je neprázdná množina a $\mathcal{S}$ je množina všech konečných posloupností prvků množiny A včetně prázdné posloupnosti. Nechť $f : \mathcal{S} \to A$ je zobrazení. Potom existuje právě jedna posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků množiny A splňující

(a) $x_1 = f(\emptyset)$,
(b) $x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})$ pro každé $n \in \mathbb{N}, n > 1$.

Důkaz. Nejprve pomocí matematické indukce ukážeme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje právě jedna posloupnost $\{x_n^k\}_{n=1}^{k}$ taková, že

(a') $x_1^k = f(\emptyset)$,
(b') $x_n^k = f(x_1^k, \dots, x_{n-1}^k)$ pro každé $n \in \{2, \dots, k\}$.

Pokud $k = 1$, pak je posloupnost $\{x_n^1\}_{n=1}^{1}$ jednoznačně určena podmínkou (a').

Předpokládejme, že pro $k \in \mathbb{N}$ podmínky (a') a (b') jednoznačně určují posloupnost $\{x_n^k\}_{n=1}^{k}$. Posloupnost $\{x_n^{k+1}\}_{n=1}^{k+1}$ musí podle indukčního předpokladu splňovat $\{x_n^{k+1}\}_{n=1}^{k} = \{x_n^k\}_{n=1}^{k}$. Prvek x_{k+1}^{k+1} musí splňovat $x_{k+1}^{k+1} = f(x_1^{k+1}, \dots, x_k^{k+1}) = f(x_1^k, \dots, x_k^k)$, a je tedy jednoznačně určen.

Hledanou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definujeme předpisem $x_n = x_n^n, n \in \mathbb{N}$. Tato posloupnost zřejmě splňuje podmínku (a). Vzhledem k jednoznačnosti posloupností $\{x_n^k\}_{n=1}^{k}$ platí $\{x_n^j\}_{n=1}^{k} = \{x_n^k\}_{n=1}^{k}$ pro každé $k, j \in \mathbb{N}, j \geq k$. Pro každé $k, j \in \mathbb{N}, j \geq k$, tedy platí $x_k = x_k^j$. Potom pro $n \in \mathbb{N}, n > 1$, platí

$$x_n = x_n^n = f(x_1^n, \dots, x_{n-1}^n) = f(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

čímž je ověřena podmínka (b). Odtud plyne, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má požadované vlastnosti. ■

1.4.31. Poznámka. Nejčastější způsob zadání rekurentní posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vypadá následovně. Je dána neprázdná množina A a zobrazení $g \colon A \to A$. Prvek $x_1 \in A$ je dán a $x_n = g(x_{n-1})$ pro $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Tento způsob je speciálním případem zadání rekurentní posloupnosti z předchozí věty. Stačí totiž definovat jednak $f(\emptyset) = x_1$ a pro konečnou posloupnost $(y_1, \dots, y_m)$ prvků množiny A položit $f(y_1, \dots, y_m) = g(y_m)$.

1.5. Množina reálných čísel

1.5.1. Číselné obory přirozených, celých, racionálních a reálných čísel mají pro další výklad zásadní význam. Jejich *přesná* konstrukce však není snadná, a proto ji provedeme až v Dodatku **??**. V tomto oddíle budeme předpokládat, že uvedené množiny již máme zkonstruovány, a uvedeme jejich vlastnosti, které budeme v dalším výkladu používat. V Dodatku **??** pak ukážeme, že tyto vlastnosti v jistém smyslu již jednoznačně určují uvažované číselné obory.

Naše číselné obory popíšeme jako množiny, na nichž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení** a relace **uspořádání**, které budeme značit obvyklým způsobem $+$, $\cdot$ a $\leq$, přičemž jsou splněny následující skupiny vlastností:

- vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah (viz 1.5.2 a 1.5.3),
- vztah uspořádání a operací sčítání a násobení (viz 1.5.9),
- vlastnost existence suprema (viz 1.5.12).

Základní vlastnosti množin $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ jsou uvedeny v 1.5.13–1.5.15.

Nyní popíšeme, jaké vlastnosti požadujeme po čtveřici $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, kde $\mathbb{R}$ je množina, $+\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cdot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou zobrazení a $\leq$ je relace, která je podmnožinou $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dále též uvedeme vlastnosti množin $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$.

1.5.2 (**vlastnosti sčítání**). Zobrazení $+$, respektive $\cdot$, přiřazuje dvojici $[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ hodnotu v $\mathbb{R}$, kterou značíme $x + y$, respektive $x \cdot y$. Místo o zobrazeních $+$ a $\cdot$ budeme hovořit o **operacích** $+$ a $\cdot$.

(a) Sčítání reálných čísel je **asociativní**, neboli

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x + (y + z) = (x + y) + z. \tag{1.7}$$

(b) Sčítání reálných čísel je **komutativní**, neboli

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x + y = y + x. \tag{1.8}$$

(c) V množině reálných čísel existuje **nulový prvek**, neboli

$$\exists w \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\colon x + w = x. \tag{1.9}$$

Prvek w je určen jednoznačně. Pokud totiž prvky w_1 a w_2 mají uvedenou vlastnost, pak platí $w_1 + w_2 = w_1$ a také díky komutativitě sčítání $w_1 + w_2 = w_2 + w_1 = w_2$. Odtud plyne $w_1 = w_2$. Prvek w značíme symbolem 0.

(d) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje **opačný prvek**, neboli

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{R}\colon x + z = 0.$$

Pro dané $x \in \mathbb{R}$ je prvek z určen jednoznačně. Pokud totiž prvky z_1 a z_2 mají uvedenou vlastnost, pak díky komutativitě a asociativitě sčítání platí

$$\begin{aligned} z_1 &= z_1 + 0 = z_1 + (x + z_2) = (z_1 + x) + z_2 \\ &= z_2 + (z_1 + x) = z_2 + (x + z_1) = z_2 + 0 = z_2. \end{aligned}$$

Prvek z značíme symbolem $-x$.

1.5.3 (**vlastnosti násobení**). (a) Násobení reálných čísel je asociativní, neboli

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z. \tag{1.10}$$

(b) Násobení reálných čísel je komutativní, neboli

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = y \cdot x. \tag{1.11}$$

(c) V množině reálných čísel existuje **jednotkový prvek**, neboli

$$\exists v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \forall x \in \mathbb{R}\colon v \cdot x = x. \tag{1.12}$$

Prvek v je určen jednoznačně. Pokud totiž prvky $v_1, v_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ splňují právě uvedenou podmínku, potom platí $v_1 = v_2 \cdot v_1 = v_1 \cdot v_2 = v_2$. Prvek v značíme symbolem 1.

(d) Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existuje **inverzní prvek**, neboli

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = 1. \tag{1.13}$$

Pro dané $x \in \mathbb{R}$ je prvek y určen jednoznačně. Pokud totiž prvky y_1 a y_2 mají uvedenou vlastnost, pak díky komutativitě a asociativitě násobení platí $y_1 = y_1 \cdot (x \cdot y_2) = (y_1 \cdot x) \cdot y_2 = y_2$. Prvek y značíme symbolem x^{-1} nebo $\frac{1}{x}$.

1.5.4 (**vzájemný vztah sčítání a násobení**). Sčítání a násobení splňují pravidlo **distributivity**, neboli

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z. \tag{1.14}$$

1.5.5 (operace odčítání a dělení). Nechť $x, y \in \mathbb{R}$. **Rozdíl** čísel x a y je definován jako číslo $x + (-y)$ a značíme ho symbolem $x - y$. Pokud navíc $y \neq 0$, pak je **podíl** čísel x a y definován jako číslo $x \cdot y^{-1}$. Místo $x \cdot y^{-1}$ používáme také symbol $\frac{x}{y}$ nebo (méně často) $x : y$ či x/y.

1.5.6. Z vlastností uvedených v 1.5.2, 1.5.3 a 1.5.4 vyplývají všechna obvyklá pravidla pro počítání s reálnými čísly. Několik základních příkladů uvedeme v následující větě. Důkazy dalších početních pravidel jsou obsaženy v Dodatku **??**.

1.5.7. Věta. Platí:

(a) $\forall x \in \mathbb{R}\colon -(-x) = x$,
(b) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\colon (x^{-1})^{-1} = x$,
(c) $\forall x \in \mathbb{R}\colon 0 \cdot x = 0$.

Důkaz. (a) Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom podle 1.5.2(d),(b) platí $x + (-x) = 0$ a $(-x) + x = 0$. Tedy x je opačný prvek k prvku $-x$, a proto platí $-(-x) = x$.

(b) Nechť $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom podle 1.5.3(d),(b) platí $x \cdot x^{-1} = 1$ a $x^{-1} \cdot x = 1$. Tudíž x je inverzní prvek k prvku x^{-1}, jinými slovy $(x^{-1})^{-1} = x$.

(c) Nechť $x \in \mathbb{R}$. Postupným použitím 1.5.3(c), 1.5.2(c), 1.5.4 a znovu 1.5.3(c) dostaneme

$$x = 1 \cdot x = (1 + 0) \cdot x = 1 \cdot x + 0 \cdot x = x + 0 \cdot x.$$

Přičteme-li v rovnosti $x = x + 0 \cdot x$ k oběma stranám číslo $-x$, dostaneme

$$x + (-x) = (x + 0 \cdot x) + (-x).$$

Odtud pomocí vlastnosti 1.5.2(d) použité na levou stranu rovnosti a vlastností 1.5.2(b),(a) použitých na pravou stranu obdržíme

$$0 = 0 \cdot x + \big(x + (-x)\big).$$

Konečně díky vlastnostem 1.5.2(d),(c) odtud dostaneme $0 \cdot x = 0$. ■

1.5.8. Poznámka. Někdy hovoříme o prvcích množiny $\mathbb{R}$ jako o bodech a o prvku 0 jako o počátku.

1.5.9 (**vztah uspořádání a operací sčítání a násobení**)**.** (a) Relace $\leq$ je lineárním uspořádáním na množině $\mathbb{R}$.

(b) Pro každé $x, y, z \in \mathbb{R}$ splňující $x \leq y$ platí

$$x + z \leq y + z.$$

(c) Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ splňující $0 \leq x$ a $0 \leq y$ platí

$$0 \leq x \cdot y.$$

1.5.10. Označení. Nechť $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Symbol $x \geq y$ má stejný význam jako symbol $y \leq x$. Pokud $x \leq y$ a $x \neq y$, pak píšeme $x < y$ nebo $y > x$. Symboly $<$ a $>$ značí tzv. **ostrou nerovnost**.

(b) Pokud $x > 0$, respektive $x < 0$, pak nazýváme x **kladným**, respektive **záporným**, reálným číslem. Pokud $x \geq 0$, respektive $x \leq 0$, pak nazýváme x **nezáporným**, respektive **nekladným**, reálným číslem.

1.5.11. Věta. Platí

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \colon (x \leq y \wedge z \geq 0) \Rightarrow xz \leq yz.$$

Důkaz. Předpokládejme, že reálná čísla x, y, z splňují $x \leq y$ a $z \geq 0$. Přičtením prvku $-x$ k levé a pravé straně nerovnosti $x \leq y$ dostaneme $0 \leq y - x$. Potom podle vlastnosti (c) v 1.5.9 obdržíme $0 \leq (y - x)z = yz - xz$. Přičtením prvku xz k levé a pravé straně poslední nerovnosti dostaneme požadovanou nerovnost. ■

V Definicích 1.4.7 a 1.4.8 jsme zavedli pojem horní závory, dolní závory, omezenosti množiny a pojmy suprema a infima pro obecné uspořádání. Nyní budeme tyto pojmy používat pro množinu reálných čísel s uvedeným uspořádáním $\leq$. Vlastnost existence suprema reálných čísel lze pak formulovat následovně.

1.5.12 (vlastnost existence suprema). Každá neprázdná shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum.

1.5.13 (základní vlastnosti množiny přirozených čísel). Množina $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ přirozených čísel splňuje tyto podmínky:

(a) $1 \in \mathbb{N}$,
(b) $\forall x \in \mathbb{N} : x + 1 \in \mathbb{N}$,
(c) jestliže $A \subset \mathbb{N}$ splňuje
- $1 \in A$,
- $\forall x \in A : x + 1 \in A$,

potom $\mathbb{N} = A$.

Podmínky (a)–(c) lze neformálně popsat následujícím způsobem. Množina přirozených čísel obsahuje číslo 1 (podmínka (a)) a pokud je nějaké reálné číslo x číslem přirozeným, pak také číslo $x + 1$ je číslem přirozeným (podmínka (b)). Podmínka (c) říká, že množina přirozených čísel je nejmenší množina splňující podmínky (a) a (b). Tato vlastnost také zaručuje platnost principu matematické indukce (viz 1.2.7). Množina přirozených čísel, opět neformálně řečeno, tedy vznikla tak, že jsme do ní zařadili prvek 1 a pak všechny prvky, které vznikly postupným přičítáním 1, a žádné jiné. Místo $1 + 1, 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1, \dots$ budeme samozřejmě psát $2, 3, 4, \dots$

1.5.14. Množina celých čísel je definována jako

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{m \in \mathbb{R};\ -m \in \mathbb{N}\}.$$

1.5.15. Množina racionálních čísel je definována jako

$$\mathbb{Q} = \{pq^{-1};\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}.$$

1.6. Vlastnosti reálných čísel

Poté co jsme popsali množinu reálných čísel, budeme pokračovat odvozením jejích základních vlastností.

Vlastnosti početních operací a uspořádání.

1.6.1. Označení. (a) Nechť $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$, a pro každé $i \in \{m, \dots, n\}$ je $a_i \in \mathbb{R}$. Potom symbolem $\sum_{i=m}^{n} a_i$ značíme součet všech reálných čísel $a_m, \dots, a_n$, tedy

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

Je-li $m > n$, pak klademe

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = 0.$$

(b) Nechť $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$, a pro každé $i \in \{m, \dots, n\}$ je $a_i \in \mathbb{R}$. Potom symbolem $\prod_{i=m}^{n} a_i$ značíme součin všech reálných čísel $a_m, \dots, a_n$, tedy

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_{n-1} \cdot a_n.$$

Je-li $m > n$, pak klademe

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = 1.$$

Připomeňme ještě, že pokud $a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$, pak symbol a^n značí součin

$$\underbrace{a \cdot a \cdots a \cdot a}_{n \text{ krát}}.$$

Pokud $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, a $n \in \mathbb{N}$, pak symbol a^{-n} značí součin

$$\underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdots a^{-1} \cdot a^{-1}}_{n \text{ krát}}.$$

Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme symbol a^0 jako 1. Zde nedefinujeme novou početní operaci, ale pouze užitečnou zkratku, která zjednodušuje zápis některých výrazů. Toto je třeba mít na paměti zejména v případě, kdy $a = 0$.

(c) Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definujme symbol $n!$, čteme n **faktoriál**, takto: $0! = 1$ a $n! = n \cdot (n-1)!$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pokud $n \in \mathbb{N}$, pak je číslo $n!$ součinem čísel $1, \dots, n$.

(d) Pro $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k \leq n$, definujeme **kombinační číslo** $\binom{n}{k}$, čteme n **nad** k, předpisem

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

1.6.2. Poznámka. Přesně vzato jsou definice součtu a součinu konečně mnoha reálných čísel induktivní. Máme-li definován součet (součin) n reálných čísel, můžeme definovat součet (součin) $n+1$ reálných čísel. Z těchto definic by měly také vycházet důkazy běžných pravidel pro počítání s konečnými součty a součiny, jako je například vzorec

$$\sum_{n=n_1}^{n_3} a_n = \sum_{n=n_1}^{n_2} a_n + \sum_{n=n_2+1}^{n_3} a_n,$$

kde $n_1 \le n_2 \le n_3$ jsou přirozená čísla a $a_{n_1}, \ldots, a_{n_3}$ jsou reálná čísla. Zde však volíme výše uvedený neformální výklad, neboť jeho přesnost je pro náš text dostačující.

Uveďme následující pozorování, které je užitečné při práci se součty reálných čísel.

1.6.3. Nechť $m, n, p \in \mathbb{Z}$, $m \le n$, a pro každé $i \in \{m, \ldots, n\}$ je $a_i \in \mathbb{R}$. Potom platí

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m+p}^{n+p} a_{i-p},$$

neboť v obou součtech sčítáme reálná čísla $a_m, \ldots, a_n$.

1.6.4. Věta (binomická věta)**.** Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a pro každá $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \tag{1.15}$$

Důkaz. Tvrzení dokážeme matematickou indukcí. Pro $n = 0$ a libovolná $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$(a+b)^0 = 1,$$

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1.$$

Odtud dostáváme (1.15) pro $n = 0$.

Předpokládejme, že $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a, b \in \mathbb{R}$ a vztah (1.15) platí. Pak díky indukčnímu předpokladu a algebraickou úpravou dostaneme

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \cdot (a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\right) \cdot (a+b) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}.\end{aligned}$$

Podle pozorování v 1.6.3 obdržíme

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k,$$

a tedy

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n-k+1} b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}.
\end{aligned}$$

Dokazované tvrzení nyní plyne z následujícího vztahu, který platí pro každé $n, k \in \mathbb{N}, k \leq n$:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n+1-k)!(k-1)!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1-k} \right) \\
&= \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} \cdot \frac{n+1}{(n+1-k)k} = \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

■

Následující příklad obsahuje zobecnění známých vztahů $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ a $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

1.6.5. Příklad. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$a^n - b^n = (a - b) \cdot \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1}.$$

Řešení. Vztah odvodíme úpravou pravé strany:

$$\begin{aligned}
(a-b) \cdot \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} a^{n+1-k} b^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^k \\
&= a^n + \sum_{k=2}^{n} a^{n+1-k} b^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a^{n-k} b^k - b^n \\
&= a^n + \sum_{k=1}^{n-1} a^{n-k} b^k - \sum_{k=1}^{n-1} a^{n-k} b^k - b^n \\
&= a^n - b^n.
\end{aligned}$$

♣

1.6.6. Příklad. Nechť $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potom platí

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Řešení. Použijeme Příklad 1.6.5 pro $a = 1, b = q$ a na místo čísla n dosadíme $n+1$. Pak s pomocí 1.6.3 obdržíme

$$1 - q^{n+1} = (1-q) \sum_{k=1}^{n+1} q^{k-1} = (1-q) \sum_{k=0}^{n} q^k.$$

Odtud již snadno plyne dokazovaný vztah, neboť $1-q \neq 0$, a tedy můžeme obě strany rovnosti vydělit číslem $1-q$. ♣

1.6.7. Věta. Nechť $k \in \mathbb{N}$.

(a) Pro každé $x, y \in \mathbb{R}, 0 \le x < y$, platí $x^k < y^k$.
(b) Pro každé $x \in \mathbb{R}, x \ge 1$, platí $x \le x^k$.
(c) Pro každé $x \in \mathbb{R}, 0 \le x \le 1$, platí $x^k \le x$.

Důkaz. (a) Nechť $x, y \in \mathbb{R}, 0 \le x < y$. Podle Příkladu 1.6.5 platí

$$y^k - x^k = (y-x) \cdot \sum_{k=1}^{n} y^{n-k} x^{k-1}.$$

Výraz $y-x$ je zřejmě kladný. Také výraz $\sum_{k=1}^{n} y^{n-k} x^{k-1}$ je kladný, neboť všechny sčítance v této sumě jsou nezáporné a sčítanec pro $k=1$ je kladný. Kladný je tedy i součin obou výrazů. Dostáváme $y^k - x^k > 0$, neboli $x^k < y^k$.

(b) Pokud $k = 1$ nebo $x = 1$, pak tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme, že platí $k > 1$ a $x > 1$. Potom je $k-1 \in \mathbb{N}$, a tedy podle již dokázaného tvrzení (a) máme $x^{k-1} > 1^{k-1} = 1$. Odtud s pomocí Věty 1.5.11 obdržíme

$$x^k = x \cdot x^{k-1} \ge x \cdot 1 = x.$$

(c) Pokud $k = 1$ nebo $x = 1$, pak tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme, že platí $k > 1$ a $x < 1$. Potom je $k-1 \in \mathbb{N}$, a tedy podle již dokázaného tvrzení (a) máme $x^{k-1} < 1^{k-1} = 1$. Odtud s pomocí Věty 1.5.11 obdržíme

$$x^k = x \cdot x^{k-1} \le x \cdot 1 = x.$$

■

Absolutní hodnota reálného čísla.

1.6.8. Definice. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ definujeme jeho **absolutní hodnotu** jako

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{pokud } x \geq 0, \\ -x, & \text{pokud } x < 0. \end{cases}$$

1.6.9. Není těžké si rozmyslet, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

(a) $|x| \geq 0$,
(b) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
(c) $|x| = |-x|$,
(d) $\big||x|\big| = |x|$,
(e) $\forall \lambda \in \mathbb{R}\colon |\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$,
(f) $|x| = \max\{x, -x\}$.

Geometricky můžeme absolutní hodnotu čísla x interpretovat jako vzdálenost bodu x od počátku na reálné ose. Výraz $|x - y|$ pak nazveme **vzdáleností bodu** x **od bodu** y.

Následující nerovnost budeme při práci s absolutní hodnotou často používat. Její název pochází z jejího zobecnění pro komplexní čísla, které vyjadřuje nerovnost mezi součtem délek dvou stran trojúhelníka a délkou zbývající strany.

1.6.10. Věta (trojúhelníková nerovnost)**.** Pro každá $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$|a + b| \leq |a| + |b| . \tag{1.16}$$

Důkaz. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Z 1.6.9(f) okamžitě vyplývá, že platí $a \leq |a|$ a $b \leq |b|$. Odtud dostáváme $a + b \leq |a| + |b|$. Opět z 1.6.9(f) snadno vyplývá, že platí $|a| \geq -a$ a $|b| \geq -b$. Odtud dostáváme $-(a + b) \leq |a| + |b|$. Podle definice absolutní hodnoty platí $|a + b| = a + b$ nebo $|a + b| = -(a + b)$. V obou případech tedy dostáváme $|a + b| \leq |a| + |b|$, čímž je nerovnost (1.16) dokázána. ∎

1.6.11. Důsledek. (a) Pro každá $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y| . \tag{1.17}$$

(b) Pro každá $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y| . \tag{1.18}$$

Důkaz. (a) Nechť $x, y \in \mathbb{R}$. Položme v (1.16) nejprve $a = y$, $b = x - y$. Obdržíme $|x| = |y + x - y| \leq |y| + |x - y|$. Platí tedy $|x| - |y| \leq |x - y|$. V (1.16) dále položme $a = x$, $b = y - x$. Dostaneme $|y| = |x + y - x| \leq |x| + |y - x| = |x| + |x - y|$. Platí tedy $-(|x| - |y|) \leq |x - y|$. Z obdržených nerovností již plyne (1.17).

(b) V (1.16) položme $a = x - z$, $b = z - y$, a dostaneme požadovanou nerovnost. ■

1.6.12. Poznámka. Někdy bývá trojúhelníkovou nerovností nazývána nerovnost (1.18).

1.6.13. Lemma. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, takové, že pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, platí $|a - b| < K\varepsilon$, potom $a = b$.

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že ačkoli jsou podmínky lemmatu pro reálná čísla a, b splněny, jsou čísla a a b různá. Předpokládejme nejprve, že $a > b$. Položme $\varepsilon = \frac{1}{2K}(a - b)$. Číslo ε je kladné, a proto podle předpokladu platí $0 < |a - b| < K\varepsilon = \frac{1}{2}(a - b)$. Odtud vyplývá $0 < a - b < \frac{1}{2}(a - b)$, což je spor. Pokud $a < b$, pak položíme $\varepsilon = \frac{1}{2K}(b - a)$ a spor obdržíme obdobně jako v předchozím případě. ■

Další vlastnosti suprema a infima.

1.6.14. Uspořádání $\leq$ na množině $\mathbb{R}$ je lineární, a proto je číslo $G \in \mathbb{R}$ supremem množiny $M \subset \mathbb{R}$ právě tehdy, když platí

(a) G je horní závorou množiny M,
(b) $\forall G' \in \mathbb{R}, G' < G\ \exists x \in M : G' < x$.

Pokud je totiž G supremem množiny M, pak je G horní závorou M, a tedy splňuje (a). Jestliže $G' \in \mathbb{R}, G' < G$, potom G' není horní závorou M. Odtud plyne, že existuje $x \in M$ takové, že $G' < x$. Tím je ověřena podmínka (b).

Nyní předpokládejme, že $G \in \mathbb{R}$ splňuje podmínky (a) a (b). Potom je G horní závorou množiny M. Předpokládejme, že $G' \in \mathbb{R}$ je horní závorou M. Chceme ukázat, že platí $G \leq G'$. Předpokládejme, že tomu tak není. Potom díky linearitě uspořádání $\leq$ dostáváme $G' < G$. Podle vlastnosti (b) existuje $x \in M$ takové, že $G' < x$, což je ovšem spor s předpokladem, že G' je horní závorou množiny M.

Zdůrazněme, že linearitu uspořádání $\leq$ jsme využili v okamžiku, kdy jsme z předpokladu, že neplatí $G \leq G'$ odvodili nerovnost $G' < G$. Pro obecné uspořádání takové odvození nelze provést.

Obdobně číslo $g \in \mathbb{R}$ je infimem množiny $M \subset \mathbb{R}$ právě tehdy, když platí

(c) g je dolní závorou M,
(d) $\forall g' \in \mathbb{R}, g < g'\ \exists x \in M : x < g'$.

1.6.15. Věta (o existenci infima)**.** Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je zdola omezená neprázdná množina. Potom existuje infimum množiny M a označíme-li

$$-M = \{x \in \mathbb{R};\ -x \in M\},$$

pak platí $\inf M = -\sup(-M)$.

Důkaz. Množina $-M$ je zřejmě neprázdná. Nechť $K \in \mathbb{R}$ je dolní závorou množiny M. Pro každé $x \in -M$ platí $-x \in M$, takže $K \leq -x$, tedy $x \leq -K$. Odtud plyne, že $-K$ je horní závorou množiny $-M$. Množina $-M$ je tedy shora omezená. Z 1.5.12 plyne existence suprema množiny $-M$, které označíme symbolem G. Dokážeme, že prvek $g = -G$ je infimem množiny M tak, že ověříme podmínky (c) a (d) z charakterizace infima v 1.6.14.

Pro každé $x \in M$ platí $-x \in -M$, tedy $-x \leq G$, takže $g \leq x$. Číslo g je proto dolní závorou množiny M. Tím jsme ověřili podmínku (c). Předpokládejme, že $g' \in \mathbb{R}$ a $g < g'$. Položme $G' = -g'$. Potom $G' < G$, a z vlastnosti (b) v 1.6.14 tedy vyplývá, že existuje $y \in -M$ takové, že $G' < y$, takže $-y < g'$. Protože $-y \in M$, ověřili jsme i podmínku (d) v 1.6.14. Tím je důkaz proveden. ■

1.6.16. Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$.

- Řekneme, že a je **největším prvkem** (**maximem**) množiny M, jestliže $a \in M$ a a je horní závorou množiny M.
- Řekneme, že b je **nejmenším prvkem** (**minimem**) množiny M, jestliže $b \in M$ a b je dolní závorou množiny M.

1.6.17. Pokud maximum a minimum množiny M existují, pak jsou určeny jednoznačně. Má-li totiž množina M dvě maxima G_1, G_2, pak G_1 i G_2 jsou horní závory M. Platí tedy $G_1 \leq G_2$ a $G_2 \leq G_1$, a proto $G_1 = G_2$. Obdobně se dokáže jednoznačnost minima. Minimum a maximum množiny M značíme po řadě $\min M$ a $\max M$.

1.6.18. Věta. Nechť $M \subset \mathbb{R}$.

(a) Má-li množina M maximum, pak má i supremum, které je rovno jejímu maximu.
(b) Má-li množina M minimum, pak má i infimum, které je rovno jejímu minimu.

Důkaz. (a) Předpokládejme, že $G = \max M$. Pak je G horní závorou M, a tedy je splněna podmínka (a) z 1.6.14. Je-li nyní $G' < G$, pak G je prvek M větší než G', a tedy je splněna i podmínka (b) z 1.6.14. Proto je číslo G supremem množiny M.

Tvrzení (b) lze dokázat obdobně. ■

1.6.19. Příklad. Nechť $x, y \in \mathbb{R}$ a $A = \{x, y\}$. Pak existuje maximum i minimum množiny A.

Řešení. Budeme postupovat rozborem případů. Mějme tedy prvky $x, y \in \mathbb{R}$. Z linearity uspořádání $\mathbb{R}$ platí $x \leq y$ nebo $y \leq x$. V prvním případě je zřejmě

$$\max\{x, y\} = y, \quad \min\{x, y\} = x,$$

v případě druhém platí

$$\max\{x, y\} = x, \quad \min\{x, y\} = y.$$

♣

1.6.20. Označení. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Potom zápis $a_1 \leq \dots \leq a_n$ znamená, že platí nerovnosti $a_1 \leq a_2, a_2 \leq a_3, \dots, a_{n-1} \leq a_n$. Obdobné značení používáme i pro další typy nerovností.

1.6.21. Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Definujeme množiny

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}, & [a,b] &= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\},\\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}, & [a,b) &= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\},\\
(-\infty,b) &= \{x \in \mathbb{R};\ x < b\}, & (-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R};\ x \leq b\},\\
(a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}, & [a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x\},\\
(-\infty,\infty) &= \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Pak množiny (a,b), $(-\infty,b)$, (a,∞) a $(-\infty,\infty)$ nazýváme **otevřenými intervaly**, množinu $[a,b]$ nazýváme **uzavřeným intervalem** a množiny $[a,b)$, $(a,b]$, $(-\infty,b]$ a $[a,\infty)$ nazýváme **polouzavřenými intervaly**.

1.6.22. Prázdná množina je také intervalem, neboť $(a,a) = \emptyset$ pro každé $a \in \mathbb{R}$. Také každá jednoprvková podmnožina $\mathbb{R}$ je intervalem, neboť $[a,a] = \{a\}$ pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Následující lemma udává užitečnou charakterizaci intervalu. Chceme-li ukázat, že jistá množina je intervalem, stačí ověřit podmínku ze znění lemmatu, která říká, že množina s každými dvěma svými body x a y obsahuje i všechny body mezi x a y. Není tedy třeba hledat příslušné krajní body intervalu. Lemma použijeme například v důkazu Věty 4.3.6.

1.6.23. Lemma. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Množina M je interval právě tehdy, když platí

$$\forall x, y \in M\ \forall z \in \mathbb{R}\colon (x < z < y \Rightarrow z \in M). \tag{1.19}$$

Řada matematických vět má tvar ekvivalence. Jejich důkaz často vedeme tak, že dokážeme postupně dvě implikace. Pro zjednodušení a zpřehlednění zápisu budeme občas používat symboly $\Rightarrow$ a $\Leftarrow$, které uvedou příslušné části důkazu.

Důkaz Lemmatu 1.6.23. $\Rightarrow$ Předpokládejme, že $M = (a,b)$, kde $a,b \in \mathbb{R}$ a $a < b$. Pro ověření podmínky (1.19) vezměme $x, y \in M$ a $z \in \mathbb{R}$ takové, že $x < z < y$. Potom platí $a < x < z < y < b$, a tedy $z \in M$. Tím je podmínka (1.19) po uvedený typ intervalu ověřena. Pro ostatní typy intervalů je ověření obdobné.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že množina M splňuje (1.19). Pokud $M = \emptyset$, pak je M interval. Není-li M omezená zdola ani shora, pak $M = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Vezmeme-li totiž libovolné číslo $z \in \mathbb{R}$, pak existuje $x \in M$, $x < z$ (neboť M není zdola omezená) a také existuje $y \in M$, $z < y$ (protože M není shora omezená). Podle předpokladu tedy platí $z \in M$.

Je-li M omezená a neprázdná, pak klademe $G = \sup M$ a $g = \inf M$. Platí $(g, G) \subset M$. Je-li totiž $z \in (g, G)$, pak podle definice infima existuje takové $x \in M$, že $x < z$, podobně podle definice suprema existuje $y \in M$, $z < y$. Podle našeho předpokladu je tedy $z \in M$. Dále je $M \subset [g, G]$, neboť g je dolní závorou M a G je horní závorou M. Množina M je tedy interval s krajními body g a G, přičemž každý z nich může (ale nemusí) patřit do M.

V ostatních případech, kdy je M omezená pouze zdola a kdy je M omezená pouze shora, lze tvrzení dokázat obdobně. ∎

1.6.24. Věta. Nechť $n, m \in \mathbb{Z}$, $n < m$. Pak $n + 1 \leq m$.

Důkaz. Provedeme přímý důkaz. Jelikož $n < m$, je $m - n$ kladné celé číslo. Tedy $m-n$ je přirozené číslo, a proto $1 \leq m-n$. Tím je tvrzení dokázáno. ∎

1.6.25. Věta (existence celé části)**.** Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $k \leq x < k + 1$.

Důkaz. Nejprve sporem dokážeme jednoznačnost čísla k s uvedenými vlastnostmi. Nechť existují $k, j \in \mathbb{Z}$ taková, že $k \neq j$, $k \leq x < k + 1$ a $j \leq x < j + 1$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $j < k$. Potom $k \leq x$ a $x - 1 < j$, takže $0 < k - j < 1$. Protože $k - j \in \mathbb{Z}$ a $0 < k - j$, plyne z Věty 1.6.24, že $1 \leq k - j$. To je spor s tím, že $k - j < 1$. Dokázali jsme tedy, že existuje nejvýše jedno číslo s uvedenými vlastnostmi.

Nyní dokážeme, že pro dané $x \in \mathbb{R}$ příslušné číslo existuje. Označme $M = \{n \in \mathbb{Z};\ n \leq x\}$. Číslo x je horní závorou množiny M, a proto je M shora omezená. Ukážeme, že M je neprázdná. Předpokládejme, že tomu tak není. Pak pro každé $n \in \mathbb{Z}$ platí, že $x < n$, a proto je množina $\mathbb{Z}$ zdola omezená. Množina $\mathbb{Z}$ je neprázdná, a tak existuje infimum $g \in \mathbb{R}$ množiny $\mathbb{Z}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{Z}$ máme $g \leq n$. Je-li $n \in \mathbb{Z}$, pak i $n - 1 \in \mathbb{Z}$, a proto $g \leq n - 1$. Pro každé $n \in \mathbb{Z}$ potom platí $g + 1 \leq n$. Prvek $g + 1$ je tedy dolní závorou množiny $\mathbb{Z}$, což je spor s tím, že $g = \inf \mathbb{Z}$. Množina M je tudíž neprázdná.

Existuje tedy supremum $G \in \mathbb{R}$ množiny M. Potom existuje $k \in M$ takové, že $G-1 < k$. Pak platí $G < k+1$, a tedy $k+1 \notin M$. Odtud a z faktu $k \in M$ plyne $k \in \mathbb{Z}$ a $k \leq x < k+1$. ■

1.6.26. Definice. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom číslo $k \in \mathbb{Z}$ splňující $k \leq x < k + 1$ (jehož existenci a jednoznačnost zaručuje Věta 1.6.25), nazýváme **celou částí** čísla x a značíme jej $[x]$.

1.6.27. Věta (Archimédova[4] vlastnost $\mathbb{R}$)**.** Ke každému $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ splňující $x < n$.

Důkaz. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Nyní stačí položit $n = \max\{[x]+1, 1\}$. ■

1.6.28. Lemma. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}$ jsou neprázdné množiny splňující

$$\forall a \in A\ \forall b \in B : a \leq b.$$

Pak existuje $\sup A$ a $\inf B$ a platí $\sup A \leq \inf B$.

Důkaz. Vezměme $a_0 \in A$ a $b_0 \in B$ libovolné. Dle předpokladu je a_0 dolní závorou B a b_0 horní závorou A. Díky neprázdnosti obou množin tedy existuje $\sup A$ a $\inf B$. Protože

$$\forall b \in B : b \text{ je horní závorou } A,$$

platí

$$\forall b \in B : \ \sup A \leq b.$$

Tedy $\sup A$ je dolní závora B, z čehož plyne $\sup A \leq \inf B$. ■

1.6.29. Věta (hustota $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom existuje $y \in \mathbb{Q}$ takové, že $a < y < b$.

Důkaz. Podle Věty 1.6.27 existuje ke kladnému číslu $\frac{1}{b-a}$ číslo $n \in \mathbb{N}$ takové, že platí $\frac{1}{b-a} < n$. Je tedy $na + 1 < nb$. Položíme $y = \frac{[na]+1}{n}$. Potom $y \in \mathbb{Q}$ a podle Věty 1.6.25 platí

$$a = \frac{na}{n} < \frac{[na]+1}{n} \leq \frac{na+1}{n} < \frac{nb}{n} = b.$$

■

1.6.30. Věta. Nechť $M \subset \mathbb{N}$ je neprázdná množina. Potom existuje minimum množiny M.

Důkaz. Jelikož $M \subset \mathbb{N}$, je 1 dolní závorou M. Proto existuje infimum množiny M, které označíme symbolem g. Z definice infima plyne, že existuje $a \in M$ splňující $g \leq a < g + \frac{1}{2}$. Dokážeme, že $a = \min M$. Nechť tedy

[4] Archimédés (287 př. n. l. – 212 př. n. l.)

$b \in M$ je libovolné. Chceme ukázat, že $a \leq b$. Tuto nerovnost dokážeme sporem.

Předpokládejme tedy, že $b < a$. Platí $g \leq b$. Protože $a - b$ je kladné celé číslo, platí $a - b \in \mathbb{N}$. Tedy $1 \leq a - b$. Platí tak

$$1 \leq a - b < g + \frac{1}{2} - g = \frac{1}{2}.$$

Tedy $2 < 1$, což je spor s tím, že 1 je nejmenší přirozené číslo. Platí tedy $a \leq b$, a a je tak minimem množiny M. ∎

1.6.31. Označení. V dalším výkladu budeme používat i zápisy $x > y$ a $x \geq y$, které po řadě znamenají totéž co $y < x$ a $y \leq x$.

1.7. Konečné a spočetné množiny

Pojem „počet prvků množiny" je možné rozšířit i na případy, kdy je uvažovaná množina nekonečná. Potom místo tohoto pojmu používáme pojem „mohutnost množiny". Jeho přesné zavedení však přesahuje rámec našeho textu a je možné jej nalézt například v knize [**5**]. V tomto oddílu pouze ukážeme jeden ze způsobů jak porovnávat množiny co do velikosti, který s pojmem mohutnosti pracuje implicitně. Podáme také přesnou definici konečných a nekonečných množin.

1.7.1. Definice. (a) Řekneme, že množina A **má stejnou mohutnost** jako množina B, jestliže existuje bijekce A na B. Značíme $A \approx B$.

(b) Řekneme, že množina A **má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti množiny** B, jestliže existuje prosté zobrazení A do B. Značíme $A \preceq B$.

(c) Řekneme, že množina A **má menší mohutnost než množina** B, jestliže existuje prosté zobrazení A do B a přitom A a B nemají stejnou mohutnost. Značíme $A \prec B$.

1.7.2. Označení. Nechť A je množina. Zobrazení $\mathrm{Id}_A \colon A \to A$ definované předpisem $\mathrm{Id}_A(a) = a$, $a \in A$, nazýváme **identickým zobrazením**.

1.7.3. Věta. Nechť A, B, C jsou množiny. Potom platí

(a) $A \preceq A$,
(b) pokud $A \preceq B$ a $B \preceq C$, pak $A \preceq C$.

Důkaz. (a) Identické zobrazení Id_A je zřejmě prosté zobrazení množiny A do množiny A, a tedy $A \preceq A$.

(b) Podle předpokladu existují prostá zobrazení $f \colon A \to B$ a $g \colon B \to C$. Složené zobrazení $g \circ f$ je dobře definováno na množině A a má hodnoty v množině C. Pokud $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$, pak $f(x) = f(y)$, neboť g je prosté. Ze vztahu $f(x) = f(y)$ pak plyne $x = y$, neboť f je prosté. To znamená, že zobrazení $g \circ f$ je prosté, což dokazuje vztah $A \preceq C$. ∎

1.7.4. Věta. Nechť A, B, C jsou množiny. Potom platí

(a) $A \approx A$,
(b) pokud $A \approx B$, pak $B \approx A$,
(c) pokud $A \approx B$ a $B \approx C$, pak $A \approx C$.

Důkaz. (a) Identické zobrazení Id_A je bijekce množiny A na množinu A, a proto $A \approx A$.

(b) Předpokládejme, že f je bijekce množiny A na množinu B. Zobrazení f je prosté, a proto existuje zobrazení f^{-1}. Definičním oborem zobrazení f^{-1} je množina B a jeho obor hodnot je roven A. Zobrazení $f^{-1}\colon A \to B$ je tedy „na". Pokud pro $x, y \in B$ platí $f^{-1}(x) = f^{-1}(y)$, potom $x = f(f^{-1}(x)) = f(f^{-1}(y)) = y$, a zobrazení f^{-1} je tedy prosté. Dostáváme tak, že zobrazení f^{-1} je bijekce, a proto má množina A stejnou mohutnost jako množina B, tj. $B \approx A$.

(c) Podle předpokladu existuje bijekce f množiny A na množinu B a bijekce g množiny B na množinu C. Složené zobrazení $g \circ f$ je dobře definováno na množině A a má hodnoty v množině C. Pokud $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$, pak $f(x) = f(y)$, neboť g je prosté. Ze vztahu $f(x) = f(y)$ pak plyne $x = y$, neboť f je prosté. To znamená, že zobrazení $g \circ f$ je prosté. Pro každý prvek $c \in C$ existuje prvek $b \in B$ takový, že $g(b) = c$, neboť g je „na". Pro prvek b existuje prvek $a \in A$ takový, že $f(a) = b$, neboť f je „na". Potom platí $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$. Zobrazení $g \circ f$ je tedy „na". Tím je tvrzení dokázáno. ∎

1.7.5. Věta (Cantorova[5]-Bernsteinova[6] věta). Nechť X a Y jsou množiny splňující $X \preceq Y$ a zároveň $Y \preceq X$. Pak X a Y mají stejnou mohutnost.

K důkazu Cantorovy-Bernsteinovy věty použijeme následující lemma. Připomeňme, že symbol $\mathcal{P}(X)$ značí potenční množinu (vizte 1.3.3).

1.7.6. Lemma. Nechť X je množina a $H\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ je zobrazení splňující podmínku

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(X)\colon A \subset B \Rightarrow H(A) \subset H(B). \tag{1.20}$$

Potom existuje $C \subset X$ takové, že $H(C) = C$.

[5] Georg Cantor (1845-1918)
[6] Felix Bernstein (1878-1956)

Důkaz. Definujme $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{P}(X);\ A \subset H(A)\}$. Ukážeme, že $C = \bigcup \mathcal{C}$ je hledanou množinou. Zřejmě platí $C \subset X$. Pokud $A \in \mathcal{C}$, potom $A \subset C$ podle definice C. Díky (1.20) pak platí $H(A) \subset H(C)$. Dohromady tedy máme $A \subset H(A) \subset H(C)$. Z této úvahy a definice C dostáváme $C \subset H(C)$. Nyní znovu použijeme (1.20) pro dvojici množin C a $H(C)$ a dostaneme $H(C) \subset H\big(H(C)\big)$. To znamená, že $H(C) \in \mathcal{C}$, a tedy $H(C) \subset C$. Tím je rovnost $H(C) = C$ dokázána. ∎

Důkaz Věty 1.7.5. Podle předpokladu věty existují prostá zobrazení $f: X \to Y$ a $g: Y \to X$. Definujme zobrazení $H: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ předpisem

$$H(A) = X \setminus g\big(Y \setminus f(A)\big).$$

Pokud $U \subset V \subset X$, potom $f(U) \subset f(V)$, a tedy také $Y \setminus f(V) \subset Y \setminus f(U)$. Odtud již snadno odvodíme inkluzi $H(U) \subset H(V)$. Zobrazení H tedy splňuje předpoklady Lemmatu 1.7.6, s pomocí kterého nalezneme množinu $C \subset X$ splňující $H(C) = C$. Pak platí

$$C = H(C) = X \setminus g\big(Y \setminus f(C)\big).$$

Odtud plyne $X \setminus C = g\big(Y \setminus f(C)\big)$. Zobrazení $g|_{Y \setminus f(C)}$ je tedy prosté zobrazení množiny $Y \setminus f(C)$ na množinu $X \setminus C$. Potom $g^{-1}|_{X \setminus C}$ je prosté zobrazení $X \setminus C$ na $Y \setminus f(C)$. Poněvadž $f|_C$ je prosté zobrazení C na $f(C)$, je následující zobrazení $h: X \to Y$ hledanou bijekcí mezi množinami X a Y

$$h(a) = \begin{cases} f(a) & \text{pro } a \in C, \\ g^{-1}(a) & \text{pro } a \in X \setminus C. \end{cases}$$ ∎

Z následující věty vyplývá, že pro každou množinu existuje množina, která je „větší" ve smyslu Definice 1.7.1.

1.7.7. Věta (Cantorova věta)**.** Nechť X je množina. Pak $X \prec \mathcal{P}(X)$.

Důkaz. Zobrazení $\varphi: X \to \mathcal{P}(X)$ definované předpisem $\varphi(x) = \{x\}$, je prosté, takže platí $X \preceq \mathcal{P}(X)$.

Zbývá ukázat, že množiny X a $\mathcal{P}(X)$ nemají stejnou mohutnost. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že existuje bijekce $\varphi: X \to \mathcal{P}(X)$. Označme $A = \{x \in X;\ x \notin \varphi(x)\}$. Zobrazení φ je bijekce, a proto můžeme nalézt $a \in X$ takové, že $\varphi(a) = A$. Pokud $a \in A$, pak podle definice množiny A platí $a \notin \varphi(a)$, což je spor, neboť $\varphi(a) = A$. Pokud $a \notin A$, pak podle definice množiny A platí $a \in \varphi(a) = A$, což je opět spor. Tím je předpoklad existence bijekce φ přiveden ke sporu a tvrzení je dokázáno. ∎

1.7.8. Definice. Nechť A je množina. Řekneme, že množina A je

- **konečná**, pokud je buď prázdná, nebo existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X má stejnou mohutnost jako $\{1, \dots, n\}$,

- **nekonečná**, pokud není konečná,
- **spočetná**, jestliže je konečná nebo má stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$,
- **nespočetná**, pokud není spočetná.

1.7.9. Lemma. Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. Potom $\{1, \dots, n\} \approx \{1, \dots, m\}$ právě tehdy, když $m = n$.

Důkaz. Pokud $m = n$, potom $\{1, \dots, n\} \approx \{1, \dots, m\}$ podle Věty 1.7.4(a).

Opačnou implikaci dokážeme pomocí matematické indukce podle m. Předpokládejme, že $m = 1$ a $\{1\} \approx \{1, \dots, n\}$. Potom existuje bijekce $\varphi\colon \{1\} \to \{1, \dots, n\}$. Platí tedy $\varphi(1) = 1$ a také $\varphi(1) = n$. Musí tedy platit $n = 1$, a proto $m = n$.

Předpokládejme platnost tvrzení pro $m \in \mathbb{N}$. Dále předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $\{1, \dots, n\} \approx \{1, \dots, m + 1\}$. Existuje tedy bijekce $\varphi\colon \{1, \dots, m + 1\} \to \{1, \dots, n\}$. Pak existuje jednoznačně určené číslo $k_0 \in \{1, \dots, m + 1\}$ takové, že $\varphi(k_0) = n$. Definujme pomocné zobrazení $\psi\colon \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n - 1\}$ předpisem

$$\psi(k) = \begin{cases} \varphi(k), & \text{pokud } k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{k_0\}, \\ \varphi(m + 1), & \text{pokud } k = k_0 \text{ a } k_0 \in \{1, \dots, m\}. \end{cases}$$

Zobrazení ψ je dobře definované s hodnotami v množině $\{1, \dots, n - 1\}$. Ověřme, že jde o bijekci množiny $\{1, \dots, m\}$ na množinu $\{1, \dots, n - 1\}$. Zobrazení je „na“, neboť obor hodnot obsahuje všechny prvky množiny $\{1, \dots, n\} \setminus \{\varphi(k_0)\} = \{1, \dots, n - 1\}$. Předpokládejme nyní, že $\psi(k) = \psi(k')$ pro $k, k' \in \{1, \dots, m\}$. Pokud $k = k_0$, pak $k_0 \in \{1, \dots, m\}$ a $\psi(k) = \psi(k_0) = \varphi(m + 1)$. Díky prostotě φ platí $k' = k_0 = k$. Pokud $k \neq k_0$, pak díky prostotě φ musí být $k' \neq k_0$. Potom ale platí $\psi(k) = \varphi(k) = \varphi(k') = \psi(k')$. Odtud plyne $k = k'$. Zobrazení ψ je tedy prosté.

Máme tedy $\{1, \dots, n - 1\} \approx \{1, \dots, m\}$. Podle indukčního předpokladu dostáváme $n - 1 = m$, a tedy $n = m + 1$. ■

1.7.10. Pokud $X \approx \{1, \dots, n\}$ pro jisté $n \in \mathbb{N}$, pak je toto n určeno podle Lemmatu 1.7.9 jednoznačně. Toto pozorování je důležité pro korektnost následující definice.

1.7.11. Definice. Pokud je množina X prázdná, pak říkáme, že **počet prvků** množiny X je roven 0. Pokud $X \approx \{1, \dots, n\}$ pro jisté $n \in \mathbb{N}$, pak říkáme, že **počet prvků** množiny X je roven n. Počet prvků konečné množiny X značíme $|X|$.

1.7.12. Pokud jsou množiny X a Y konečné a mají stejnou mohutnost, pak jsou obě prázdné nebo obě neprázdné. V prvním případě $X = Y$ a počet prvků X a Y je roven 0. Ve druhém případě existují $m, n \in \mathbb{N}$ taková, že $X \approx$

$\{1,\dots,m\}$ a $Y \approx \{1,\dots,n\}$. Potom podle Věty 1.7.4 dostáváme $\{1,\dots,m\} \approx \{1,\dots,n\}$, a tedy podle Lemmatu 1.7.9 platí $m = n$, neboli $|X| = |Y|$.

Pokud jsou X a Y konečné a mají stejný počet prvků, pak jsou opět obě prázdné nebo obě neprázdné. V prvním případě $X = Y$ a $X \approx Y$. Ve druhém případě existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $X \approx \{1,\dots,n\}$ a $Y \approx \{1,\dots,n\}$. Potom podle Věty 1.7.4 dostáváme $X \approx Y$.

Platí tedy, že dvě konečné množiny mají stejnou mohutnost, právě když mají stejný počet prvků.

1.7.13. Věta. Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je konečná množina. Potom je množina A omezená. Je-li navíc A neprázdná, pak existuje její maximum a minimum.

Důkaz. Je-li A prázdná, pak je zřejmě omezená, neboť každé $x \in \mathbb{R}$ je zároveň horní i dolní závorou množiny A.

Nechť je A neprázdná. V tomto případě provedeme důkaz matematickou indukcí podle počtu jejích prvků. Je-li A jednoprvková, je tvrzení zřejmé. Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro každou množinu o n prvcích. Nechť A je množina o $n+1$ prvcích, tj. existuje bijekce $\varphi\colon \{1,\dots,n+1\} \to A$. Položme $B = \{\varphi(1),\dots,\varphi(n)\}$. Pak $B \subset \mathbb{R}$ má n prvků, a tedy je dle indukčního předpokladu omezená a existuje její maximum G' a minimum g'. Položme

$$g = \min\{\varphi(n+1), g'\}, \quad G = \max\{\varphi(n+1), G'\}.$$

Čísla g a G jsou dobře definovaná dle Příkladu 1.6.19. Dále platí

$$\forall i \in \{1,\dots,n+1\}\colon g \le \varphi(i) \le G.$$

Tedy g je dolní závora množiny A a G je horní závora množiny A. Proto je množina A omezená. Protože $g', G' \in \varphi(\{1,\dots,n\}) \subset A$, je $g, G \in A$. Nalezli jsme tedy minimum i maximum množiny A. Dle principu matematické indukce tedy tvrzení platí pro všechny konečné podmnožiny $A \subset \mathbb{R}$. ∎

1.7.14. Věta. Množina $\mathbb{N}$ je nekonečná.

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že množina $\mathbb{N}$ je konečná. Podle Věty 1.7.13 je potom množina $\mathbb{N}$ omezená, a tedy existuje její horní závora v $\mathbb{R}$, kterou označíme K. Potom podle Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.6.27) existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n > K$. Tudíž K není horní závorou množiny $\mathbb{N}$, což je spor. ∎

Následující lemma může být poněkud překvapivé, protože ukazuje, že množinu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je možné prostě zobrazit do $\mathbb{N}$.

1.7.15. Lemma. Zobrazení $\varphi\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definované předpisem

$$\varphi(n,m) = (n+m)^2 + n, \quad (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

je prosté.

Důkaz. Předpokládejme, že platí $\varphi(n,m) = \varphi(n',m')$ pro $(n,m), (n',m') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Potom máme

$$\begin{aligned}(n'+m'+1)^2 &> (n'+m')^2 + n' = \varphi(n',m') = \varphi(n,m)\\ &= (n+m)^2 + n > (n+m)^2.\end{aligned}$$

Odtud plyne nerovnost $n'+m'+1 > n+m$. Potom máme $n+m \leq n'+m'$. Obdobně odvodíme nerovnost $n'+m' \leq n+m$. Musí tedy platit $n'+m' = n+m$. Odtud a z rovnosti $\varphi(n,m) = \varphi(n',m')$ plyne $n = n'$, a tedy také $m = m'$. Zobrazení φ je tedy prosté. ∎

1.7.16. Lemma. Nechť A, B jsou množiny a $f: A \to B$ je zobrazení. Pak $f(A) \preceq A$.

Důkaz. Korektní důkaz se opírá o axiom výběru, což je výrok, jehož platnost při práci s množinami předpokládáme. Zde je jedna z jeho možných formulací:

Je-li $b \mapsto C_b$, $b \in I$, indexovaný systém neprázdných množin, potom existuje zobrazení $\varphi: I \to \bigcup_{b\in I} C_b$ takové, že pro každé $b \in I$ platí $\varphi(b) \in C_b$.

Další vysvětlení je uvedeno v Dodatku **??**.

Pokud je množina A prázdná, potom tvrzení zřejmě platí. Pokud je množina A neprázdná, potom položíme $I = f(A)$ a $C_b = f^{-1}(\{b\})$ pro $b \in I$. Podle axiomu výběru existuje zobrazení $\varphi: f(A) \to A$ takové, že pro každé $b \in f(A)$ platí $\varphi(b) \in f^{-1}(\{b\})$. Zobrazení φ je prosté. Pokud totiž $\varphi(b) = \varphi(b')$, potom platí $b = f\big(\varphi(b)\big) = f\big(\varphi(b')\big) = b'$. Dostáváme tedy $f(A) \preceq A$. ∎

1.7.17. Věta (vlastnosti konečných množin)**.**

(a) Nechť A je konečná množina a $B \subset A$. Potom B je konečná.
(b) Nechť $\mathcal{A}$ je konečná množina, jejímiž prvky jsou konečné množiny. Potom $\bigcup \mathcal{A}$ je konečná množina.
(c) Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $A_1, \dots, A_n$ jsou konečné množiny. Potom $A_1 \times \cdots \times A_n$ je konečná množina.
(d) Nechť A je konečná množina, B je množina a $f: A \to B$ je zobrazení. Potom $f(A)$ je konečná množina.

Důkaz. (a) Nejprve matematickou indukcí podle n dokážeme, že je-li $n \in \mathbb{N}$ a $A \subset \{1, \dots, n\}$, potom je množina A konečná. Je-li $n = 1$ a $A \subset \{1\}$, pak buď je A prázdná množina, nebo $A = \{1\}$. V obou případech přímo z definice plyne, že množina A je konečná.

Předpokládejme nyní, že každá podmnožina množiny $\{1, \dots, n\}$ je konečná. Nechť A je podmnožina množiny $\{1, \dots, n+1\}$. Pokud $A \subset \{1, \dots, n\}$,

pak je A konečná množina podle indukčního předpokladu. V opačném případě platí
$$A = \bigl(A \cap \{1, \dots, n\}\bigr) \cup \{n + 1\}.$$
Pak je množina $B = A \cap \{1, \dots, n\}$ konečná. Je-li B prázdná, pak $A = \{n+1\}$ a existuje bijekce množiny $\{1\}$ na množinu A. Je-li B neprázdná, potom existují $k \in \mathbb{N}$ a bijekce $\varphi\colon \{1, \dots, k\} \to B$. Definujme $\psi : \{1, \dots, k+1\} \to A$ předpisem
$$\psi(i) = \begin{cases} \varphi(i) & \text{pro } i \in \{1, \dots, k\}, \\ n + 1 & \text{pro } i = k + 1. \end{cases}$$
Pak ψ je bijekce $\{1, \dots, k + 1\}$ na A, a tedy A je konečná množina.

Předpokládejme nyní, že A je konečná neprázdná množina a B je její neprázdná podmnožina. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ a bijekce $\varphi\colon A \to \{1, \dots, n\}$. Potom je zobrazení $\psi = \varphi|_B$ bijekcí množiny B na množinu $\varphi(B)$. Podle první části důkazu je množina $\varphi(B)$ konečná, tj. existuje $m \in \mathbb{N}$ a bijekce $\omega\colon \varphi(B) \to \{1, \dots, m\}$. Pak $\omega \circ \psi$ je bijekce množiny B na množinu $\{1, \dots, m\}$, takže množina B je konečná.

(b) Nejprve dokážeme, že sjednocení dvou konečných množin je konečná množina. Nechť tedy C a D jsou konečné množiny. Je-li alespoň jedna z nich prázdná, pak tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že jsou obě neprázdné. Potom existují $m, n \in \mathbb{N}$ a bijekce $\alpha\colon C \to \{1, \dots, n\}$, $\beta\colon D \to \{1, \dots, m\}$. Definujme zobrazení $\gamma\colon D \setminus C \to \{n+1, \dots, n+m\}$ předpisem $\gamma(x) = \beta(x) + n$, $x \in D \setminus C$. Pak zobrazení $\varphi\colon C \cup D \to \{1, \dots, n+m\}$ definované předpisem
$$\varphi(x) = \begin{cases} \alpha(x), & x \in C, \\ \gamma(x), & x \in D \setminus C, \end{cases}$$
je prosté zobrazení množiny $C \cup D$ do množiny $\{1, \dots, n + m\}$, neboť zobrazení $\alpha|_C$, $\gamma|_{D \setminus C}$ jsou prostá a
$$\alpha(C) \cap \gamma(D \setminus C) \subset \{1, \dots, n\} \cap \{n + 1, \dots, n + m\} = \emptyset.$$
Platí $\varphi(C \cup D) \subset \{1, \dots, n+m\}$, a množina $\varphi(C \cup D)$ je tedy konečná podle již dokázané části (a). Množina $C \cup D$ je konečná, neboť podle 1.4.22 platí $C \cup D \approx \varphi(C \cup D)$.

Pokud je množina $\mathcal{A}$ konečná, pak je buď prázdná nebo má n prvků, kde $n \in \mathbb{N}$. V prvním případě je její sjednocení prázdnou množinou, a je tedy konečné. Ve druhém případě dokážeme tvrzení matematickou indukcí. Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$. Nechť tedy $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_{n+1}\}$, kde A_i, $i = 1, \dots, n + 1$, jsou dané konečné množiny. Potom podle indukčního předpokladu je $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ konečnou množinou. Pak je ale množina

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = \Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \cup A_{n+1}$$

konečná dle první části důkazu. Tím je podle principu matematické indukce tvrzení dokázáno.

(c) Podobně jako v (b) stačí dokázat, že kartézský součin dvou konečných neprázdných množin A a B je konečný. Mějme $m, n \in \mathbb{N}$ a bijekce $\alpha\colon A \to \{1, \dots, n\}$, $\beta\colon B \to \{1, \dots, m\}$. Nechť φ je zobrazení z Lemmatu 1.7.15. Pak zobrazení ψ definované předpisem

$$\psi(a, b) = \varphi(\alpha(a), \beta(b)), \quad (a, b) \in A \times B,$$

je prosté zobrazení množiny $A \times B$ do konečné množiny $\{1, \dots, (n+m)^2+n\}$. Množina $\psi(A \times B)$ je tedy konečná podle již dokázané části (a). Odtud plyne i konečnost množiny $A \times B$, neboť $A \times B \approx \psi(A \times B)$.

(d) Díky Lemmatu 1.7.16 víme, že $f(A) \preceq A$, tj. existuje prosté zobrazení $\psi\colon f(A) \to A$. Potom je množina $\psi(f(A))$ podmnožinou konečné množiny A, a je tedy podle (a) konečná. Množina $f(A)$ je tedy konečná, neboť $f(A) \approx \psi(f(A))$. ■

1.7.18. Lemma. (a) Množina A je spočetná právě tehdy, když platí $A \preceq \mathbb{N}$.

(b) Nechť A je neprázdná množina. Potom je množina A spočetná právě tehdy, když existuje zobrazení $f: \mathbb{N} \to A$, které je „na".

Důkaz. (a) $\Rightarrow$ Pokud je A spočetná, pak je buď konečná, nebo $A \approx \mathbb{N}$. V prvním případě je A buď prázdná nebo existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $A \approx \{1, \dots, n\}$. Zřejmě tedy platí $A \preceq \mathbb{N}$.

Pokud $A \approx \mathbb{N}$, pak také zřejmě $A \preceq \mathbb{N}$.

$\Leftarrow$ Nechť $f: A \to \mathbb{N}$ je prosté zobrazení. Množina $f(A)$ je buď omezená, nebo neomezená. Předpokládejme nejprve, že nastává první možnost. Potom existuje číslo $K \in \mathbb{R}$, které je horní závorou množiny $f(A)$. Podle Věty 1.6.27 existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $K < n$. Potom platí $f(A) \subset \{1, \dots, n\}$. Podle Věty 1.7.17(a) je $f(A)$ konečná množina. Vzhledem k tomu, že $A \approx f(A)$ podle 1.4.22, dostáváme, že množina A je konečná, a tedy spočetná.

Předpokládejme nyní, že množina $f(A)$ není omezená. Induktivně budeme konstruovat posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Položme $n_1 = \min f(A)$. Předpokládejme, že pro $k \in \mathbb{N}$ jsou již definována čísla $n_1, \dots, n_k$. Množina $f(A) \setminus \{n_1, \dots, n_k\}$ je neprázdná, neboť $f(A)$ je neomezená. Položíme $n_{k+1} = \min\big(f(A) \setminus \{n_1, \dots, n_k\}\big)$. Tím je konstrukce posloupnosti provedena podle Věty 1.4.30. Zobrazení $\varphi\colon k \mapsto n_k, k \in \mathbb{N}$, je podle konstrukce prosté a platí $\varphi(\mathbb{N}) = f(A)$. Podle 1.4.22 platí $\varphi(\mathbb{N}) \approx \mathbb{N}$, a tedy

$f(A) \approx \mathbb{N}$. Odtud dostáváme $A \approx \mathbb{N}$, neboť $A \approx f(A)$ podle 1.4.22. Množina A je tedy spočetná.

(b) $\Rightarrow$ Podle již dokázaného bodu (a) existuje prosté zobrazení $g\colon A \to \mathbb{N}$. Množina A je neprázdná, takže můžeme nalézt prvek $a \in A$. Zobrazení $f : \mathbb{N} \to A$ definujeme předpisem

$$f(n) = \begin{cases} g^{-1}(n), & \text{pokud } n \in \mathcal{H}(g), \\ a, & \text{pokud } n \in \mathbb{N} \setminus \mathcal{H}(g). \end{cases}$$

Potom zřejmě $f(\mathbb{N}) = A$.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že $f : \mathbb{N} \to A$ je zobrazení, které je „na". Potom podle 1.7.16 platí $A \preceq \mathbb{N}$. Množina A je tedy spočetná podle již dokázané části (a). ■

1.7.19. Věta (vlastnosti spočetných množin)**.**

(a) Nechť A je spočetná množina a $B \subset A$. Potom je množina B spočetná.
(b) Nechť $\mathcal{A}$ je spočetná množina, jejímiž prvky jsou spočetné množiny. Potom je množina $\bigcup \mathcal{A}$ spočetná.
(c) Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $A_1, \dots, A_n$ jsou spočetné množiny. Potom je množina $A_1 \times \cdots \times A_n$ spočetná.
(d) Nechť A je spočetná množina, B je množina a $f : A \to B$ je zobrazení. Potom je množina $f(A)$ spočetná.

Důkaz. (a) Nechť $B \subset A$ a A je spočetná. Potom $\mathrm{Id}_B\colon B \to A$ je prosté zobrazení, a platí tedy $B \preceq A$. Poněvadž $A \preceq \mathbb{N}$ podle Lemmatu 1.7.18(a), dostáváme $B \preceq \mathbb{N}$ podle Věty 1.7.3(b) a množina B je tedy spočetná podle Lemmatu 1.7.18(a).

(b) Označme $\tilde{\mathcal{A}} = \{A \in \mathcal{A};\ A \neq \emptyset\}$. Potom $\bigcup \tilde{\mathcal{A}} = \bigcup \mathcal{A}$. Pokud $\tilde{\mathcal{A}} = \emptyset$, potom je množina $\bigcup \mathcal{A}$ prázdná, a tedy spočetná. V opačném případě existuje podle Lemmatu 1.7.18(b) zobrazení $f : \mathbb{N} \to \tilde{\mathcal{A}}$, které je „na". Pro každé $A \in \tilde{\mathcal{A}}$ existuje zobrazení $g_A : \mathbb{N} \to A$, které je „na". Definujme zobrazení $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup \mathcal{A}$ předpisem $\psi(n, m) = g_{f(n)}(m)$. Zobrazení ψ je „na". Pro každé $x \in \bigcup \mathcal{A}$ totiž existuje $A \in \tilde{\mathcal{A}}$ takové, že $x \in A$. Existují tedy $n, m \in \mathbb{N}$ taková, že $f(n) = A$ a $g_A(m) = x$. Potom $\psi(n, m) = g_{f(n)}(m) = g_A(m) = x$.

Podle Lemmat 1.7.15 a 1.7.18(a) je množina $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ spočetná, a tedy existuje zobrazení h množiny $\mathbb{N}$ na množinu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (Lemma 1.7.18(b)). Potom je zobrazení $\psi \circ h$ zobrazením množiny $\mathbb{N}$ na množinu $\bigcup \mathcal{A}$, což podle Lemmatu 1.7.18(b) dokazuje spočetnost množiny $\bigcup \mathcal{A}$.

(c) Podobně jako v důkazu bodů (b) a (c) Věty 1.7.17 stačí dokázat, že kartézský součin dvou spočetných množin A a B je spočetný. Kartézský součin $A \times B$ je roven sjednocení $\bigcup_{a \in A} \{a\} \times B$. Zřejmě platí $\{a\} \times B \approx B$.

Množina $A \times B$ je tedy spočetným sjednocením spočetných množin a podle (b) je tedy spočetná.

(d) Nechť A je spočetná množina a $f : A \to B$ je zobrazení. Víme z Lemmatu 1.7.16, že platí $f(A) \preceq A$. Protože $A \preceq \mathbb{N}$, dostáváme podle Věty 1.7.3(b) $f(A) \preceq \mathbb{N}$. Odtud plyne podle (a) spočetnost $f(A)$. ■

1.7.20. Příklad. Dokažte, že množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je spočetná.

Řešení. Množina $\mathbb{Z}$ je spočetná, neboť je sjednocením množiny kladných čísel, množiny záporných čísel a jednoprvkové množiny obsahující číslo 0. Množina $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ je tedy podle Věty 1.7.19(c) spočetná. Zobrazení $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ definované předpisem $f(p,q) = pq^{-1}$ zobrazuje $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ na $\mathbb{Q}$. Podle Věty 1.7.19(d) je množina $\mathbb{Q}$ spočetná. ♣

1.7.21. Příklad. Nechť $\mathcal{J}$ je disjunktní systém neprázdných otevřených intervalů v $\mathbb{R}$. Dokažte, že potom je systém $\mathcal{J}$ spočetný.

Řešení. Pro každé $J \in \mathcal{J}$ nalezneme racionální číslo $q_J \in J$. Pak je zobrazení definované předpisem $J \mapsto q_J$, $J \in \mathcal{J}$, prostým zobrazením množiny $\mathcal{J}$ do spočetné množiny $\mathbb{Q}$, tedy $\mathcal{J}$ je také spočetná. ♣

1.7.22. Příklad. Nechť A je nekonečná množina. Dokažte, že potom A obsahuje nekonečnou spočetnou podmnožinu.

Řešení. Definujme induktivně posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ následovně. Zvolme $a_1 \in A$ libovolně. Předpokládejme, že pro $n \in \mathbb{N}$ jsme již definovali prvky $a_1, \dots, a_n$. Množina $A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ je neprázdná, neboť A je nekonečná. Prvek a_{n+1} zvolme libovolně z této množiny. Množina $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je nekonečná dle Věty 1.7.14, a tím je důkaz proveden. ♣

1.7.23. Poznámka. Množina $\mathbb{R}$ je nespočetná. Důkaz provedeme až v Příkladu 3.8.10 a jiným způsobem v paragrafu 10.10.32.

1.8. Vlastnosti elementárních funkcí

Reálná funkce f jedné reálné proměnné (dále jen funkce) je zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

V tomto oddílu uvedeme definice některých pojmů, které jsou důležité při zkoumání reálných funkcí. Dále se seznámíme s elementárními funkcemi, tj. s polynomy, exponenciálou, logaritmem, odmocninami, obecnou mocninou, goniometrickými funkcemi a cyklometrickými funkcemi. Uvedeme souhrny jejich základních vlastností, ze kterých lze odvodit všechna početní pravidla středoškolské matematiky. V Kapitole 5 pak několik takových odvození provedeme.

1.8.1. Definice. Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je interval. Řekneme, že funkce $f : J \to \mathbb{R}$ je

- **rostoucí** na intervalu J, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$,
- **klesající** na intervalu J, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) > f(x_2)$,
- **neklesající** na intervalu J, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \leq f(x_2)$,
- **nerostoucí** na intervalu J, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.

1.8.2. Definice. **Monotónní funkcí** (respektive **ryze monotónní funkcí**) na intervalu $J \subset \mathbb{R}$ rozumíme funkci, která je neklesající nebo nerostoucí (respektive rostoucí nebo klesající) na J.

1.8.3. Definice. Nechť $f : A \to \mathbb{R}$ a $M \subset A$. Řekneme, že f je

- **shora omezená** na M, jestliže množina $f(M)$ je shora omezená,
- **zdola omezená** na M, jestliže množina $f(M)$ je zdola omezená,
- **omezená** na M, jestliže množina $f(M)$ je omezená,
- **konstantní** na M, jestliže pro všechna $x, y \in M$ platí $f(x) = f(y)$.

1.8.4. Definice. Nechť $f : A \to \mathbb{R}$ a $M \subset A$. Řekneme, že f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = -f(x)$,
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = f(x)$,
- **periodická** s periodou a, kde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $x + a \in \mathcal{D}(f)$, $x - a \in \mathcal{D}(f)$ a $f(x + a) = f(x)$.

1.8.5 (algebraické operace s funkcemi)**.** Nechť M je množina, $f : M \to \mathbb{R}$, $g : M \to \mathbb{R}$ a $c \in \mathbb{R}$. Pak definujeme funkce $f + g$, fg, cf na množině M předpisy

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x), \quad x \in M, \\ (fg)(x) &= f(x)g(x), \quad x \in M, \\ (cf)(x) &= cf(x), \quad x \in M. \end{aligned}$$

Je-li $g(x) \neq 0$ pro každé $x \in M$, pak definujeme

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in M.$$

1.8.6. Věta. Nechť M je neprázdná množina a $f : M \to \mathbb{R}$ a $g : M \to \mathbb{R}$ jsou zobrazení.

(a) Jestliže f a g jsou shora omezená, potom

$$\sup(f+g)(M) \leq \sup f(M) + \sup g(M).$$

(b) Jestliže f a g jsou zdola omezená, potom

$$\inf(f+g)(M) \geq \inf f(M) + \inf g(M).$$

Důkaz. (a) Množiny $f(M)$ a $g(M)$ jsou neprázdné a shora omezené, a proto existují jejich suprema, která označíme po řadě A a B. Nechť $x \in M$. Potom z definice suprema plyne $f(x) \leq A$ a $g(x) \leq B$, a tedy také $f(x) + g(x) \leq A + B$. Protože $x \in M$ bylo zvoleno libovolně, je $A + B$ horní závorou množiny $(f+g)(M)$. Odtud plyne tvrzení (a).

(b) Důkaz tvrzení (b) je obdobný důkazu tvrzení (a). ■

1.8.7. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Definujme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = ax + b$. Takto definovaná funkce se nazývá **afinní**. Pokud je $b = 0$, říkáme, že f je **lineární**. Zde definujeme pojem lineární funkce jinak, než je obvyklé na střední škole, protože v pokročilejších matematických textech se užívá právě uvedené definice.

1.8.8. Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$. Definujme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = ax^2+bx+c$. Je-li $a \neq 0$, pak se takto definovaná funkce nazývá **kvadratická**.

1.8.9. Polynomem budeme rozumět každou funkci P tvaru

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.21}$$

kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Čísla $a_0, \ldots, a_n$ se nazývají **koeficienty polynomu P**. **Nulovým polynomem** rozumíme konstantní nulovou funkci definovanou na $\mathbb{R}$.

Důkaz následujícího tvrzení a důkaz tvrzení z dalšího paragrafu jsou uvedeny v Dodatku **??**. Pro každý nenulový polynom existují *jednoznačně určená* čísla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$, taková, že

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak říkáme, že **stupeň polynomu** P je roven n. Stupeň nulového polynomu definujeme jako -1. Stupeň polynomu P značíme st P.

1.8.10. Reálným kořenem polynomu P rozumíme každé číslo $x \in \mathbb{R}$ splňující $P(x) = 0$. Nechť P je polynom tvaru (1.21), kde $a_n \neq 0$. Potom existuje nejvýše n reálných kořenů polynomu P.

Pro polynomy stupně 1 a 2 je možné určit hodnoty reálných kořenů pomocí následujících vzorců. Rovnice $ax + b = 0$, kde $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, má právě jeden reálný kořen $-\frac{b}{a}$. Odvození je snadné. Uvažujme rovnici

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1.22}$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Označme $D = b^2 - 4ac$. Číslo D nazýváme **diskriminantem** rovnice (1.22). Pokud $D > 0$, pak má rovnice právě dva reálné kořeny $\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ a $\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$. Pokud $D = 0$, pak má rovnice právě jeden reálný kořen $\frac{-b}{2a}$. Pokud $D < 0$, pak rovnice nemá reálné kořeny.

1.8.11 (dělení polynomů)**.** Nechť P a Q jsou dva polynomy, přičemž polynom Q není nulový. Pak existují jednoznačně určené polynomy R a Z takové, že $P = RQ + Z$ a $\operatorname{st} Z < \operatorname{st} Q$.

Polynomy R a Z hledáme pomocí následujícího algoritmu. Pokud $\operatorname{st} Q > \operatorname{st} P$, pak stačí položit R rovno nulovému polynomu a $Z = P$. Pokud $\operatorname{st} Q \leq \operatorname{st} P$, pak nalezneme takové $a_1 \in \mathbb{R}$ a $k_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, že $\operatorname{st}(P - a_1 x^{k_1} Q) < \operatorname{st} P$. Tento krok potom opakujeme, přičemž místo polynomu P uvažujeme polynom $P - a_1 x^{k_1} Q$, pokud nemá tento polynom stupeň menší než polynom Q. Tímto způsobem obdržíme $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{R}$ a $k_1, \dots, k_l \in \mathbb{N}$ taková, že platí $\operatorname{st}(P - a_1 x^{k_1} Q - a_2 x^{k_2} Q - \cdots - a_l x^{k_l} Q) < \operatorname{st} Q$. Potom položíme $R(x) = a_1 x^{k_1} + \cdots + a_l x^{k_l}$ a $Z = P - RQ$.

1.8.12. Nechť $k \in \mathbb{N}$. Potom k**-tou odmocninou** nazýváme inverzní funkci k funkci $x \mapsto x^k$, $x \in [0, \infty)$, je-li k sudé, a k $x \mapsto x^k$, $x \in \mathbb{R}$, je-li k liché. Značíme $x \mapsto \sqrt[k]{x}$. Definice je korektní, neboť v obou případech uvažujeme inverzní funkci k funkci, která je na svém definičním oboru rostoucí.

1.8.13. Racionální funkcí rozumíme každou funkci tvaru $\frac{P}{Q}$, kde P, Q jsou polynomy, přičemž Q není nulový polynom. Definičním oborem takové funkce je množina $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ Q(x) = 0\}$. Polynom Q není nulový, takže racionální funkce je definována v každém bodě $\mathbb{R}$ vyjma nejvýše konečně mnoha bodů (vizte 1.8.10).

1.8.14. Exponenciální funkce, kterou budeme značit exp, má definiční obor roven $\mathbb{R}$ a obor hodnot roven $(0, \infty)$. Tato funkce splňuje následující podmínky:

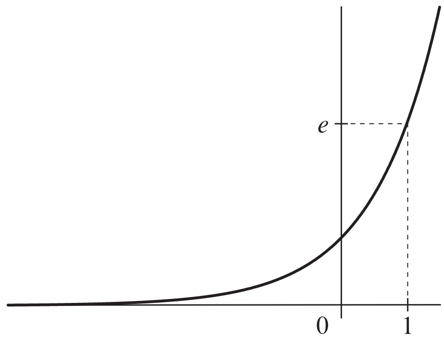
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \exp(x) \geq 1 + x$.

Odtud lze odvodit následující užitečné vlastnosti exponenciální funkce:

- exp je rostoucí funkce na $\mathbb{R}$,
- $\exp(0) = 1$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{Z}\colon\ \exp(nx) = (\exp(x))^n$,
- $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0\colon\ \exp(x) > 1$.

Hodnotu funkce exp v bodě 1 značíme symbolem e a nazýváme ji Eulerovým číslem.[7]

[7] Leonhard Euler (1707–1783)



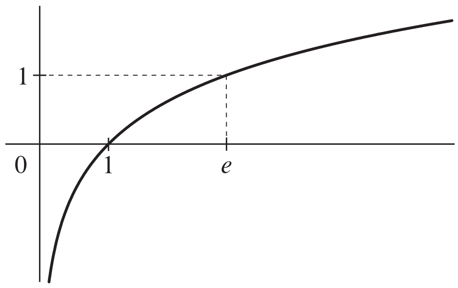
Obrázek 1. Graf exponenciální funkce

1.8.15. Logaritmická funkce, kterou budeme značit log, je funkce inverzní k funkci exponenciální. Její definiční obor je tedy roven $(0,\infty)$ a obor hodnot roven $\mathbb{R}$. Tato funkce splňuje následující podmínky:

- $\forall x, y \in (0,\infty)\colon \log(xy) = \log(x) + \log(y)$,
- $\forall x \in (0,\infty)\colon \log(x) \leq x - 1$.

Odtud lze odvodit další užitečné vlastnosti logaritmické funkce:

- funkce log je rostoucí na intervalu $(0,\infty)$,
- $\log(1) = 0$,
- $\forall x \in (0,\infty)\ \forall n \in \mathbb{Z}\colon \log(x^n) = n \log x$,
- $\forall x \in (1,\infty)\colon \log(x) > 0$.

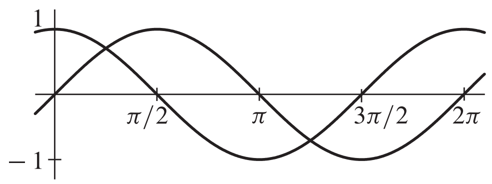


Obrázek 2. Graf funkce logaritmus

1.8.16. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme **obecnou mocninu** a^x předpisem $a^x = \exp(x \log a)$. Pro $a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{Z}$ jsme však symbol a^n již definovali v Označení 1.6.1(b). Pokud je $a > 0$, máme pro tento symbol dvě definice. Nová definice se však v tomto případě shoduje s předchozí definicí, neboť platí $\exp\big(n \log(a)\big) = \exp\big(\log(a^n)\big) = a^n$.

1.8.17 (vlastnosti funkcí sinus a kosinus)**.** Funkce **sinus**, značíme sin, a **kosinus**, značíme cos, mají definiční obor roven $\mathbb{R}$ a obor hodnot roven intervalu $[-1, 1]$. Tyto funkce splňují následující podmínky:

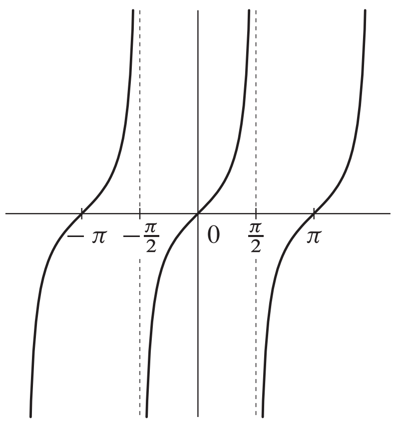
- funkce sin a cos jsou 2π-periodické,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$,
- sin je lichá funkce a cos je sudá funkce,
- existuje jednoznačně určené kladné číslo π takové, že sin je rostoucí na $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(0) = 0$ a $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.



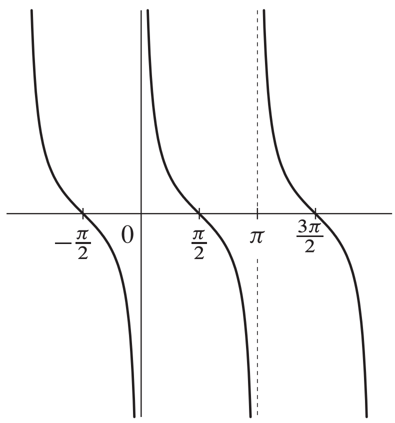
Obrázek 3. Grafy funkcí sinus a kosinus

1.8.18 (vlastnosti funkcí tangens a kotangens)**.** Funkce **tangens**, značíme ji tg, a **kotangens**, značíme ji cotg, definujeme předpisy

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\},$$
$$\operatorname{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}.$$



Obr. 4. Graf funkce tangens

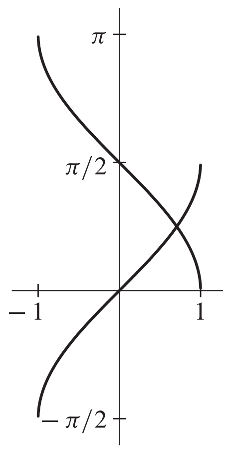


Obr. 5. Graf funkce kotangens

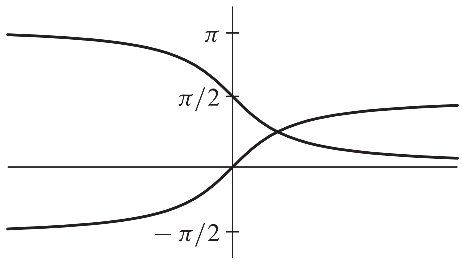
1.8.19. Cyklometrické funkce **arkussinus** (arcsin), **arkuskosinus** (arccos), **arkustangens** (arctg) a **arkuskotangens** (arccotg) definujeme následujícím způsobem

$$\arcsin = \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}, \qquad \arccos = \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1},$$
$$\operatorname{arctg} = \left(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1}, \qquad \operatorname{arccotg} = \left(\operatorname{cotg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1}.$$

Uvedené definice cyklometrických funkcí jsou korektní, neboť uvažované restrikce goniometrických funkcí jsou prosté.



Obrázek 6. Grafy funkcí arkussinus a arkuskosinus



Obrázek 7. Grafy funkcí arkustangens a arkuskotangens

1.9. Teoretické a početní příklady

1.9.1. Příklad. Zformulujte negaci výroku

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \colon (0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |x-3| < \varepsilon). \tag{1.23}$$

pomocí postupu uvedeného v paragrafu 1.1.29. Dále rozhodněte, zda platí uvedený výrok nebo jeho negace.

Řešení. Opakovaně použijeme pravidla uvedená v paragrafu 1.1.29 k vyjádření negace uvedeného výroku.

$$\neg\big(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \colon (0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |x-3| < \varepsilon)\big)$$
$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \neg\big(\exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \colon (0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |x-3| < \varepsilon)\big)$$
$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \neg\big(\forall x \in \mathbb{R} \colon (0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |x-3| < \varepsilon)\big)$$
$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \exists x \in \mathbb{R} \colon \neg\big(0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |x-3| < \varepsilon\big)$$

Podle Věty 1.1.12(c) lze poslední výrok zapsat ve tvaru

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \exists x \in \mathbb{R} \colon (0 < |x-1| < \delta \wedge |x-3| \geq \varepsilon).$$

Položme $\varepsilon = 1$ a k libovolnému $\delta > 0$ definujme $x = 1 - \frac{\delta}{2}$. Platí $|x-1| = \frac{\delta}{2}$, a tedy $0 < |x-1| < \delta$. Navíc pro $|x-3| = 2 + \frac{\delta}{2}$ platí $|x-3| \geq 1 = \varepsilon$. Dokázali jsme tedy, že zadaný výrok (1.23) neplatí. ♣

1.9.2. Příklad. Nechť $V(x), x \in M$, je výroková forma. Napište negaci výroku

$$\exists! x \in M \colon V(x) \tag{1.24}$$

pomocí postupu uvedeného v paragrafu 1.1.29.

Řešení. Výrok (1.24) lze zapsat ve tvaru

$$\Big(\exists x \in M \colon V(x)\Big) \wedge \Big(\forall y, z \in M \colon \big((V(y) \wedge V(z)) \Rightarrow y = z\big)\Big) \tag{1.25}$$

První výrok v předchozí konjunkci říká, že existuje alespoň jeden prvek $x \in M$ takový, že platí $V(x)$. Druhý výrok v konjunkci říká, že pokud existují prvky y a z takové, že platí $V(y)$ a $V(z)$, pak jsou si rovny. Podle 1.1.29 a Věty 1.1.12 lze zapsat negaci výroku (1.25) ve tvaru

$$\Big(\forall x \in M \colon \neg V(x)\Big) \vee \Big(\exists y, z \in M \colon \big(V(y) \wedge V(z) \wedge y \neq z\big)\Big).$$

Neformálně lze poslední výrok vyjádřit takto: buď pro žádné $x \in M$ neplatí $V(x)$, nebo existují dvě různá $y, z \in M$, pro která platí $V(y)$ a $V(z)$. ♣

1.9.3. Příklad. Nechť $A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \wedge x^2 < 2\}$. Pak A je shora omezená podmnožina v $\mathbb{Q}$, která v $\mathbb{Q}$ nemá supremum, tj. neexistuje racionální číslo $q \in \mathbb{Q}$ s vlastnostmi z Definice 1.4.8.

Řešení. Množina A je zřejmě neprázdná, neboť $0 \in A$, a shora omezená, a to například číslem 2. Pro každé číslo $x \in \mathbb{Q}$, které je větší než 2, totiž platí nerovnosti $2 \leq 2^2 \leq x^2$, a tedy takové x není prvkem množiny A.

Postupujme nyní sporem a předpokládejme existenci čísla $q \in \mathbb{Q}$, které by bylo nejmenší horní závorou množiny A. Ukážeme, že pak platí $q^2 = 2$. Pokud by totiž bylo $q^2 < 2$, tj. $q < \sqrt{2}$, pak díky Větě 1.6.29 nalezneme racionální číslo $q' \in (q, \sqrt{2})$. Pak $0 \leq q'$ a $(q')^2 < 2$, tj. $q' \in A$. To je ovšem ve sporu s nerovností $q < q'$, tedy s faktem, že q je horní závora množiny A.

Pokud by bylo $q > \sqrt{2}$, opět díky Větě 1.6.29 existuje $q' \in \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, q)$. Pak pro každé $p \in A$ platí $p \leq q'$, neboť v opačném případě bychom dostali z nerovností $2 \leq (q')^2 < p^2 < 2$ spor. Racionální číslo q' je tedy horní závora množiny A, která je ostře menší než q, což je spor s faktem, že q je nejmenší horní závora množina A.

Zbývá tedy jediná možnost, totiž že $q^2 = 2$. To je ale spor s Větou 1.2.15, a proto supremum množiny A v množině racionálních čísel neexistuje. ♣

1.9.4. Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Řešení. Provedeme přímý důkaz. Vzorec plyne z binomické věty (Věta 1.6.4), neboť pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

♣

1.9.5. Příklad (součet aritmetické řady)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} (ai + b) = \tfrac{1}{2}\big((n+1)a + 2b\big)n. \tag{1.26}$$

Řešení. Pro $n = 1$ je levá strana rovna $\sum_{i=1}^{1}(ai + b) = a + b$ a pravá $\frac{1}{2}(2a + 2b) = a + b$. Pro $n = 1$ tedy tvrzení platí. Předpokládejme platnost vztahu (1.26) pro pevně dané n, tj.

$$\sum_{i=1}^{n} (ai + b) = \tfrac{1}{2}\big((n+1)a + 2b\big)n.$$

Chceme dokázat, že platí

$$\sum_{i=1}^{n+1}(ai+b) = \tfrac{1}{2}\big((n+2)a+2b\big)(n+1). \tag{1.27}$$

Levou stranu (1.27) můžeme rozepsat jako

$$\sum_{i=1}^{n+1}(ai+b) = \left(\sum_{i=1}^{n}(ai+b)\right) + \big(a(n+1)+b\big).$$

Sumu v závorkách na pravé straně ale umíme sečíst podle indukčního předpokladu. Provedením algebraických úprav pak dostaneme

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}(ai+b) &= \Big(\sum_{i=1}^{n}(ai+b)\Big) + \big(a(n+1)+b\big)\\ &= \frac{1}{2}\big((n+1)a+2b\big)n+\big(a(n+1)+b\big)\\ &= \frac{1}{2}\big((n+2)a+2b\big)(n+1).\end{aligned}$$

Tím je důkaz proveden. ♣

1.9.6. Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $2^n \geq n$.

Řešení. Pro $n = 1$ je nerovnost splněna, neboť $2^1 = 2 \geq 1$. Předpokládejme, že nerovnost platí pro $n \in \mathbb{N}$, tj. platí $2^n \geq n$. Potom také platí

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n = n + n \geq n + 1.$$

Tím je nerovnost ověřena pro $n + 1$ a tvrzení je podle principu matematické indukce dokázáno. ♣

1.9.7. Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, platí $2n^2 \geq (n+1)^2$.

Řešení. Tvrzení platí pro $n = 3$, neboť

$$2 \cdot 3^2 = 18 \geq 16 = (3+1)^2.$$

Předpokládejme nyní platnost nerovnosti pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Předpokládáme tedy $2n^2 \geq (n+1)^2$. Potom

$$\begin{aligned}2(n+1)^2 = 2n^2 + 4n + 2 &\geq (n+1)^2 + 4n + 2\\ &= n^2 + 6n + 3 = (n^2 + 4n + 4) + (2n - 1)\\ &= (n+2)^2 + (2n-1) \geq (n+2)^2.\end{aligned}$$

Tím je dokončen indukční krok. Z principu matematické indukce nyní vyplývá požadované tvrzení. ♣

1.9.8. Příklad. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, platí $2^n \geq n^2$.

Řešení. Opět použijeme princip matematické indukce popsaný v paragrafu 1.2.7, přičemž v prvním kroku dokážeme výrok pro $n = 4$. Tvrzení pro $n = 4$ platí, neboť $2^4 = 16 \geq 16 = 4^2$. Nyní učiníme indukční předpoklad, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, platí $2^n \geq n^2$ a budeme se snažit dokázat $2^{n+1} \geq (n+1)^2$. Z indukčního předpokladu a Příkladu 1.9.7 plyne

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n^2 \geq (n+1)^2.$$

Podle (modifikovaného) principu matematické indukce tedy tvrzení platí pro všechna $n \geq 4$. ♣

1.9.9. Příklad. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Dokažte, že pak existuje $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a^n \geq cn^2$.

Řešení. Označme $\delta = a - 1$. Potom $\delta > 0$, a tedy pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, podle binomické věty (Věta 1.6.4) platí

$$a^n = (1+\delta)^n \geq 1 + n\delta + \binom{n}{2}\delta^2 > \frac{1}{2}n(n-1)\delta^2.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, zřejmě platí $n(n-1) \geq \frac{1}{2}n^2$, a tedy dostáváme

$$a^n \geq \frac{1}{4}\delta^2 n^2. \tag{1.28}$$

Položme $c = \min\{\frac{1}{4}\delta^2, a\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, platí nerovnost $a^n \geq cn^2$ podle (1.28). Dokazovaná nerovnost platí i pro $n = 1$, neboť $a \geq c$. ♣

1.9.10 (varianta matematické indukce)**.** Nechť $V(n), n \in \mathbb{N}$, je výroková forma. Existují případy, kdy je vhodné výrok

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon V(n) \tag{1.29}$$

dokázat pomocí varianty matematické indukce, která spočívá v ověření následujících tvrzení:

(a) platí $V(1)$ a $V(2)$,
(b) pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $V(n) \Rightarrow V(n+2)$.

Dokážeme, že z (a) a (b) plyne (1.29). Matematickou indukcí ověřme platnost tvrzení

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon V(2n-1). \tag{1.30}$$

Pro $n = 1$ tvrzení platí, neboť platí $V(1)$. Předpokládejme, že tvrzení (1.30) platí pro n, tj. platí $V(2n-1)$. Podle (b) dostáváme, že platí i výrok $V(2n+1)$. Tím je podle principu matematické indukce, který byl popsán v paragrafu 1.2.7, dokázán výrok (1.30).

Obdobně dokážeme tvrzení

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon V(2n). \tag{1.31}$$

yní ověříme platnost (1.29). Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom podle Příkladu 1.2.10 existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n = 2k - 1$ nebo $n = 2k$. V prvním případě platí (1.29) podle (1.30) a ve druhém případě platí (1.29) podle (1.31). Tím je tvrzení (1.29) dokázáno.

Použití této varianty matematické indukce ilustruje následující příklad.

1.9.11. Příklad (Bernoulliova nerovnost)**.** Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\forall x \in [-2, \infty)\colon (1 + x)^n \geq 1 + nx. \tag{1.32}$$

Řešení. Matematickou indukcí ve variantě z 1.9.10 dokážeme platnost (1.32) pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pro $n = 1$ vztah (1.32) zřejmě platí. Pro $n = 2$ plyne (1.32) z následujícího odhadu:

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 \geq 1 + 2x.$$

Tím je ověřen bod (a) v 1.9.10. Předpokládejme, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí (1.32). Použitím zřejmé nerovnosti $(1 + x)^2 \geq 0$, která platí pro každé $x \in \mathbb{R}$, dostáváme z indukčního předpokladu

$$\begin{aligned}(1 + x)^{n+2} &= (1 + x)^n (1 + x)^2 \geq (1 + nx)(1 + x)^2 \\ &= 1 + (n + 2)x + (2 + x)nx^2 + x^2.\end{aligned}$$

Protože $x^2 \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $2 + x \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}, x \geq -2$, platí $(2 + x)nx^2 + x^2 \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}, x \geq -2$. Odtud dostáváme pro každé $x \geq -2$ nerovnost $(1 + x)^{n+2} \geq 1 + (n + 2)x$. Tím je dokázána implikace (b) podle 1.9.10, a tedy i Bernoulliova nerovnost. ♣

1.9.12. Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Řešení. Tvrzení dokážeme pomocí matematické indukce. Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$. Podle Bernoulliovy nerovnosti (Příklad 1.9.11) platí

$$\left(\frac{n + 2}{n + 1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n + 1}\right)^{n+1} \geq 1 + (n + 1) \cdot \frac{1}{n + 1} = 2,$$

odtud plyne $2(n + 1)^{n+1} \leq (n + 2)^{n+1}$. Použijeme-li indukční předpoklad a právě odvozenou nerovnost, obdržíme

$$\begin{aligned}(n + 1)! = n! \cdot (n + 1) &\leq \left(\frac{n + 1}{2}\right)^n \cdot (n + 1) \\ &= \frac{2 \cdot (n + 1)^{n+1}}{2^{n+1}} \leq \left(\frac{n + 2}{2}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

♣

1.9.13 (další varianta matematické indukce)**.** Nechť $V(n), n \in \mathbb{N}$, je výroková forma. Existují případy, kdy je vhodné výrok

$$\forall n \in \mathbb{N}: V(n) \tag{1.33}$$

dokázat pomocí varianty matematické indukce, která sestává z ověření následujících tvrzení:

(a) platí $V(1)$,
(b) pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $V(n) \Rightarrow V(2n)$,
(c) pro každé $n \in \mathbb{N}, n > 1$, platí $V(n) \Rightarrow V(n-1)$.

Dokážeme, že z (a)–(c) plyne (1.33). Nejprve pomocí matematické indukce popsané v 1.2.7 odvodíme platnost výroku

$$\forall m \in \mathbb{N}: V(2^m). \tag{1.34}$$

Z (a) a (b) plyne platnost $V(2)$. Nechť nyní $V(2^m)$ platí pro nějaké $m \in \mathbb{N}$. Pak $2^{m+1} = 2 \cdot 2^m$, a tedy $V(2^{m+1})$ platí podle (b). Tím je tvrzení (1.34) dokázáno.

Platnost tvrzení (1.33) dokážeme sporem. Předpokládejme, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $V(n_0)$ neplatí. Položme

$$B = \{j \in \mathbb{N};\ j \leq 2^{n_0} \text{ a } V(j) \text{ neplatí}\}.$$

Číslo 1 je dolní závorou množiny B a číslo 2^{n_0} je horní závorou množiny B. Množina B je podmnožinou $\mathbb{N}$, takže z její omezenosti plyne, že je konečná. Množina B je neprázdná, neboť podle našeho předpokladu $V(n_0)$ neplatí a díky Příkladu 1.9.6 máme $n_0 \leq 2^{n_0}$, takže $n_0 \in B$. Množina B má tedy maximum podle Věty 1.7.13. Označme $G = \max B$. Platí tudíž $G + 1 \notin B$. Poněvadž podle (1.34) platí $V(2^{n_0})$, a tedy $2^{n_0} \notin B$, dostáváme $G < 2^{n_0}$. Odtud plyne, že tvrzení $V(G+1)$ platí. Podle (c) tedy platí i $V(G)$, což je spor s $G \in B$. Tím je naše tvrzení dokázáno.

Použití právě uvedené varianty matematické indukce ukážeme v následujícím příkladu.

1.9.14. Příklad (nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem)**.** Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a pro každé $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, \infty)$ platí nerovnost

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}. \tag{1.35}$$

Řešení. Postupně ověříme (a)–(c) z 1.9.13, přičemž $V(n)$, $n \in \mathbb{N}$, je tvrzení, které říká, že pro každé $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, \infty)$ platí nerovnost (1.35).

(a) Zřejmě platí $\frac{x_1}{1} \geq \sqrt[1]{x_1} = x_1$.

(b) Nejprve ověříme platnost nerovnosti (1.35) pro $n = 2$. Pro libovolné $A, B \in [0, \infty)$ platí podle Příkladu 1.2.9

$$\frac{A+B}{2} \geq \sqrt{AB}. \tag{1.36}$$

Nyní předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $V(n)$. Budeme dokazovat tvrzení $V(2n)$. Mějme $x_1, x_2, \ldots, x_{2n} \in [0, \infty)$. Použijeme indukční předpoklad nejprve pro n-tici $x_1, \ldots, x_n$ a poté pro n-tici $x_{n+1}, \ldots, x_{2n}$. Dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}}{2n} &= \frac{1}{2}\Big(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{n}\Big) \\ &\geq \frac{1}{2}\big(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}}\big).\end{aligned} \tag{1.37}$$

Nerovnost (1.36) použijeme pro nezáporná čísla

$$A = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \quad \text{a} \quad B = \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}}.$$

Obdržíme nerovnost

$$\frac{1}{2}\big(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}}\big) \geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \cdot \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}}}.$$

Tento odhad spolu s (1.37) dává

$$\begin{aligned}\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}}{2n} &\geq \frac{1}{2}\big(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}}\big) \\ &\geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \cdot \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}}} \\ &= \sqrt[2n]{x_1 x_2 \cdots x_{2n}}.\end{aligned}$$

Tím je dokázáno tvrzení $V(2n)$, a tedy i bod (b).

(c) Předpokládejme, že platí $V(n)$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Budeme dokazovat tvrzení $V(n-1)$. Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ jsou libovolná nezáporná reálná čísla. Označme

$$D = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}.$$

Použijeme indukční předpoklad pro n-tici čísel $y_1, \ldots, y_n$ definovanou předpisem

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad \ldots \quad y_{n-1} = x_{n-1}, \quad y_n = D.$$

Z indukčního předpokladu pak plyne, že

$$\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \geq \sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n}. \tag{1.38}$$

Dále platí

$$\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} = \frac{(n-1)D + D}{n} = D \qquad \text{a}$$

$$\sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} \cdot \sqrt[n]{D}.$$

Pak můžeme přepsat (1.38) ve tvaru

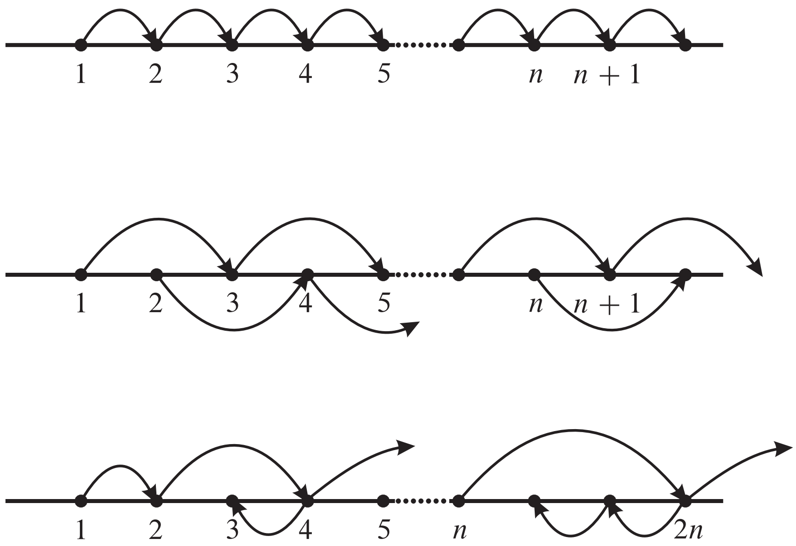
$$D \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} \sqrt[n]{D}.$$

Odtud odvodíme

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} = D \geq \left(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}\right)^{\frac{1}{1-\frac{1}{n}}} = \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}},$$

čímž jsme dokázali tvrzení $V(n-1)$, a tedy i bod (c) varianty matematické indukce z 1.9.13. Tím je nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dokázána. ♣

1.9.15. Poznámka. Nechť $V(n), n \in \mathbb{N}$, je výroková forma. Následující obrázky neformálně zachycují, jak ve variantách matematické indukce z paragrafů 1.2.7, 1.9.10 a 1.9.13 dochází k ověřování platnosti výroků $V(n)$.



Obrázek 8.

1.9.16. Příklad. Ukažte, že každé $n \in \mathbb{N}, n > 1$, je dělitelné prvočíslem.

Řešení. Použijeme úplnou matematickou indukci (viz 1.2.8). Číslo 2 je prvočíslo, a proto tvrzení platí. Nechť $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro každé $k \in \mathbb{N}$ splňující $2 \leq k \leq n$. Nechť D je množina všech $d \in \mathbb{N}, 1 < d < n+1$, která dělí $n+1$. Pokud je D prázdná množina, pak je $n + 1$ prvočíslo, a indukční krok je v tomto případě hotov, neboť prvočíslo $n + 1$ dělí $n + 1$. Předpokládejme tedy, že $D \neq \emptyset$. Vezměme $d \in D$. Podle indukčního předpokladu existuje prvočíslo p, které dělí d. Protože d dělí $n + 1$, dělí p také $n + 1$ a tvrzení je dokázáno. ♣

1.9.17. Příklad (Eukleidés[8]). Ukažte, že množina prvočísel je nekonečná.

Řešení. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že existuje pouze konečně mnoho prvočísel. Nechť $p_1, p_2, \dots, p_k$ jsou všechna prvočísla. Položme $p = (p_1 p_2 \cdots p_k)+1$. Tvrdíme, že p je prvočíslo. Pokud by tomu tak totiž nebylo, existovalo by $i \in \{1, \dots, k\}$ takové, že p_i dělí p (Příklad 1.9.16). Tedy $p = p_i n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Pak ale

$$1 = p - p_1 \cdots p_k = p_i n - p_1 \cdots p_k = p_i(n - p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_k),$$

takže p_i dělí 1, což je spor. Tedy p je prvočíslo, které je však větší než libovolné z prvočísel $p_1, \dots, p_k$. To je ale spor s naším předpokladem. ♣

1.9.18. Příklad (vlastnosti průniku). Nechť A, B, C a D jsou množiny. Dokažte, že potom platí:

(a) $\emptyset \cap A = \emptyset$,
(b) $A \cap A = A$,
(c) $A \cap B = B \cap A$,
(d) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
(e) $A \cap B \subset A$,
(f) jestliže $C \subset A$ a $C \subset B$, pak $C \subset (A \cap B)$,
(g) $A = A \cap B$ právě tehdy, když $A \subset B$,
(h) jestliže $A \subset B$ a $C \subset D$, pak $(A \cap B) \subset (C \cap D)$.

Řešení. Tvrzení snadno plynou přímo z definic průniku a inkluze. Dokažme však alespoň tvrzení (g). Je-li $A \subset B$, pak z (f) máme $A \subset A \cap B$, protože $A \subset B$ i $A \subset A$. Obrácená inkluze plyne z (e). Tedy $A = A \cap B$.

K důkazu obrácené implikace předpokládejme platnost rovnosti $A = A \cap B$. Pak z (e) plyne $A = A \cap B \subset B$. ♣

1.9.19. Příklad (vlastnosti sjednocení). Nechť A, B, C a D jsou množiny. Dokažte, že potom platí:

(a) $\emptyset \cup A = A$,
(b) $A \cup A = A$,

[8] Eukleidés (asi 325 př. n. l. – asi 260 př. n. l.)

(c) $A \cup B = B \cup A$,
(d) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
(e) $A \subset A \cup B$,
(f) jestliže $A \subset C$ a $B \subset C$, pak $(A \cup B) \subset C$,
(g) $A = A \cup B$ právě tehdy, když $B \subset A$,
(h) jestliže $A \subset B$ a $C \subset D$, pak $(A \cup B) \subset (C \cup D)$.

Řešení. Tvrzení plynou snadno z definic sjednocení a inkluze. ♣

1.9.20. Příklad (obraz množiny a množinové operace). Nechť X, Y jsou množiny, $f : X \to Y$ je zobrazení a $A, B \subset X$.

(a) Dokažte, že pokud $A \subset B$, pak platí $f(A) \subset f(B)$.
(b) Dokažte, že platí $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
(c) Dokažte, že platí $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Dokažte, že inkluzi nelze obecně nahradit rovností.

Řešení. (a) Předpokládejme, že $y \in f(A)$. Potom existuje $x \in A$ takové, že $f(x) = y$. Pak platí také $x \in B$, a tedy $y = f(x) \in f(B)$. Tím je inkluze $f(A) \subset f(B)$ dokázána.

(b) Protože $A \subset A \cup B$, platí podle již dokázaného tvrzení (a), že $f(A) \subset f(A \cup B)$. Obdobně máme $f(B) \subset f(A \cup B)$. Tedy $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

Nyní dokážeme opačnou inkluzi. Je-li $y \in f(A \cup B)$, potom existuje $x \in A \cup B$ takové, že $f(x) = y$. Pak buď $x \in A$, a tedy $y = f(x) \in f(A)$, nebo $x \in B$, a pak $y = f(x) \in f(B)$. V obou případech, které se nemusí vylučovat, dostáváme $y \in f(A) \cup f(B)$. Tedy $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$. Dohromady tedy platí $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(c) Poněvadž platí $A \cap B \subset A$ a $A \cap B \subset B$, dostáváme podle tvrzení (a), že $f(A \cap B) \subset f(A)$ a $f(A \cap B) \subset f(B)$. Odtud pak plyne $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Dokážeme, že inkluzi nelze obecně nahradit rovností. Uvažujme množiny $X = Y = \{0, 1\}$, zobrazení $f : X \to Y$ definované předpisem $f(0) = f(1) = 0$ a množiny $A = \{0\}$, $B = \{1\}$. Pak $A \cap = \emptyset$, a tedy $f(A) = \emptyset$, ale $f(A) = f(B) = \{0\}$, takže $f(A) \cap f(B) = \{0\}$. Tudíž $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$. ♣

1.9.21. Příklad (vzor množiny a množinové operace). Nechť X, Y jsou množiny, $f : X \to Y$ je zobrazení a $A, B \subset Y$. Dokažte následující tvrzení.

(a) Pokud $A \subset B$, pak $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.
(b) Platí $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
(c) Platí $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
(d) Platí $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

Řešení. (a) Jestliže $x \in f^{-1}(A)$, potom $f(x) \in A$. Pak také $f(x) \in B$, a tedy $x \in f^{-1}(B)$.

(b) Podle bodu (a) platí $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(A \cup B)$ a $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$. Odtud plyne inkluze $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$. Předpokládejme, že platí $x \in f^{-1}(A \cup B)$. Potom $f(x) \in A \cup B$. Platí tedy $f(x) \in A$ nebo $f(x) \in B$. V prvním případě platí $x \in f^{-1}(A)$ a ve druhém $x \in f^{-1}(B)$. Platí tedy $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

(c) a (d) Důkazy lze provést obdobně jako v předchozích případech. ♣

1.9.22. Příklad (další vlastnosti obrazu a vzoru)**.** Nechť X, Y jsou množiny, $f : X \to Y$ je zobrazení.

(a) Dokažte, že pro každé $A \subset X$ platí $A \subset f^{-1}(f(A))$.
(b) Nechť $\mathcal{H}(f) = Y$. Dokažte, že pro každé $B \subset Y$ platí $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$.
(c) Dokažte, že f je prosté právě tehdy, když pro každou množinu $A \subset X$ platí $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$.
(d) Dokažte, že f je „na" právě tehdy, když pro každou množinu $B \subset Y$ platí $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$.

Řešení. (a) Jestliže $x \in A$, potom $f(x) \in f(A)$. Pak dostáváme $x \in f^{-1}(f(A))$.

(b) Nechť $B \subset Y$. Pokud $y \in B$, pak existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = y$, neboť $\mathcal{H}(f) = Y$. Potom $x \in f^{-1}(B)$, a tedy $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. Předpokládejme nyní $y \in f(f^{-1}(B))$. Potom existuje $x \in f^{-1}(B)$ takové, že $f(x) = y$. Odtud plyne $y = f(x) \in B$, což dokazuje druhou inkluzi.

(c) Nechť $f : X \to X$ je prosté a $A \subset X$. Z (a) víme, že $A \subset f^{-1}(f(A))$. Mějme tedy $x \in f^{-1}(f(A))$. Pak existuje $x' \in A$ takové, že $f(x) = f(x')$. Protože zobrazení f je prosté, platí $x = x'$, a tedy $x \in A$.

Není-li f prosté, existují dva různé prvky $x, x' \in X$ takové, že $f(x) = f(x')$. Položme $A = \{x\}$. Pak $x' \in f^{-1}(f(A))$, a tedy $A \neq f^{-1}(f(A))$.

(d) Důkaz je podobný jako v (c). ♣

1.9.23. Příklad (hustota $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom existuje $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ takové, že $a < z < b$.

Důkaz. Podle Věty 1.6.29 existuje racionální číslo $y \in (a, b)$. Podle téže věty aplikované na interval (y, b) nalezneme racionální číslo $y' \in (y, b)$. Položme $z = y + \frac{y'-y}{\sqrt{2}}$. Protože $\sqrt{2} > 1$, máme

$$a < y < z = y + \frac{y'-y}{\sqrt{2}} < y + (y' - y) = y' < b.$$

Kdyby bylo číslo z racionální, pak by také číslo $\sqrt{2} = \frac{y'-y}{z-y}$ bylo racionální, což by bylo ve sporu s Příkladem 1.2.15. Číslo z je tedy iracionální, a tím je tvrzení dokázáno. ∎

1.9.24. Příklad. Určete supremum a infimum množiny $M = \left\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

Řešení. Protože zřejmě $\max M = 1$, platí podle Věty 1.6.18 také $\sup M = 1$. Dále platí, že všechny prvky v M jsou kladné, a tak je 0 dolní závorou M. Zdá se, že čísla z množiny M mohou být „libovolně malá“, a tedy žádné kladné číslo by nemělo být dolní závorou M. Proto je 0 vhodným kandidátem na infimum M. Ukážeme, že opravdu platí $\inf M = 0$. Ověříme platnost podmínek (c) a (d) z 1.6.14.

Platnost první podmínky plyne z toho, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{1}{n} \geq 0$. Pro ověření druhé podmínky musíme ukázat, že

$$\forall y \in \mathbb{R}, y > 0\ \exists x \in M : y > x.$$

Mějme tedy $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, dáno. Z Věty 1.6.27 plyne existence přirozeného čísla n splňujícího $n > \frac{1}{y}$. Pak $\frac{1}{n} \in M$ a $\frac{1}{n} < y$. Tím jsme pro číslo 0 ověřili podmínky (c) a (d) z 1.6.14, a platí tedy $\inf M = 0$. ♣

1.9.25. Příklad. Určete supremum a infimum množiny $M = [0, 1)$.

Řešení. Protože $\min M = 0$, platí podle Věty 1.6.18 také $\inf M = 0$. Snadno odhadneme, že supremem množiny M bude patrně 1. Tuto domněnku nyní dokážeme.

Platnost podmínky (c) z 1.6.14 plyne přímo z definice intervalu. Pro ověření podmínky (d) dokážeme

$$\forall y \in \mathbb{R}, y < 1\ \exists x \in [0, 1) : y < x.$$

Nechť tedy $y \in \mathbb{R}$, $y < 1$. Položme $x = \max\{0, \frac{1}{2}(1 + y)\}$. Díky tomu, že platí $y < 1$, dostáváme $0 \leq x < 1$, a tedy $x \in [0, 1)$. Z nerovnosti $y < 1$ dále plyne odhad $y < \frac{1}{2}(1 + y)$, a proto $y < x$. Tím je podmínka (d) ověřena, a tedy skutečně $\sup M = 1$. ♣

1.9.26. Příklad. Určete supremum a infimum množiny $M = \left\{\frac{p}{p+q};\ p, q \in \mathbb{N}\right\}$.

Řešení. Pro $p, q \in \mathbb{N}$ je hodnota zlomku $\frac{p}{p+q}$ kladné číslo menší než 1.

Proveďme nyní následující neformální úvahu. Nechť $p = 1$ a q je „velké“ číslo. Pak zlomek $\frac{p}{p+q}$ bude „blízko“ 0. Obdobně, je-li $q = 1$ a p je „velké“ číslo, pak je zlomek $\frac{p}{p+q} = \frac{1}{1+\frac{1}{p}}$ „blízko“ 1. Jako rozumná se tedy jeví domněnka, že $\inf M = 0$ a $\sup M = 1$.

Dokážeme nejprve $\inf M = 0$. Platnost podmínky (c) z 1.6.14 plyne z nerovnosti $\frac{p}{p+q} \geq 0$, která platí pro každé $p, q \in \mathbb{N}$. Pro ověření druhé podmínky máme dokázat

$$\forall y \in \mathbb{R}, y > 0\ \exists p, q \in \mathbb{N}\colon y > \frac{p}{p+q}.$$

Mějme $y \in \mathbb{R}, y > 0$, dáno. Položíme $p = 1$ a nalezneme pomocí Věty 1.6.27 $q \in \mathbb{N}$ splňující $q > \frac{1}{y-1}$. Pak $\frac{p}{p+q} = \frac{1}{1+q} < y$. Tím jsem dokončili důkaz, že $\inf M = 0$.

Nyní ověříme, že $\sup M = 1$. Protože platí $\frac{p}{p+q} \leq 1$ pro každé $p, q \in \mathbb{N}$, je podmínka (a) z 1.6.14 splněna. Pro ověření podmínky (b) máme dokázat

$$\forall y \in \mathbb{R}, y < 1\ \exists p, q \in \mathbb{N}\colon y < \frac{p}{p+q}.$$

Položme $q = 1$. Z Věty 1.6.27 nalezneme $p \in \mathbb{N}$ splňující $p > \frac{y}{1-y}$. Pak platí $\frac{p}{p+q} = \frac{p}{p+1} > y$. Ověřili jsme, že $\sup M = 1$. ♣

1.9.27. Příklad. Uvažujme funkci $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in (0, \infty)$.

(a) Dokažte, že funkce f je klesající na $(0, 1]$, rostoucí na $[1, \infty)$ a v bodě 1 má minimum.
(b) Dokažte, že funkce $g = f|_{(0,1]}$, $h = f|_{[1,\infty)}$ jsou prosté.
(c) Dokažte, že platí $\mathcal{H}(f) = \mathcal{H}(g) = \mathcal{H}(h) = [2, \infty)$. Nalezněte inverzní funkci k funkcím g a h.
(d) Nalezněte $f \circ f$ a $\mathcal{H}(f \circ f)$.

Řešení. (a) Vezměme $0 < x < y \leq 1$. Pak je nerovnost $f(x) > f(y)$ ekvivalentní s nerovností

$$\frac{(y-x)(1-xy)}{xy} > 0,$$

která platí díky nerovnosti $xy < y^2 \leq 1$. Obdobně ověříme, že f roste na intervalu $[1, \infty)$. V bodě 1 má tedy minimum, jehož hodnota je $f(1) = 2$.

(b) Funkce g je klesající na $(0, 1]$ a funkce h rostoucí na $[1, \infty)$. Jsou tedy prosté.

(c) Protože je g klesající na $(0, 1]$ a $g(1) = f(1) = 2$, zjevně platí $\mathcal{H}(g) \subset [2, \infty)$. Mějme nyní dáno $y \in [2, \infty)$. Pak rovnice $x + \frac{1}{x} = y$ má dle 1.8.10 dva kořeny

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(y + \sqrt{y^2 - 4}\right), \quad x_2 = \frac{1}{2}\left(y - \sqrt{y^2 - 4}\right).$$

Protože hledáme x splňující $g(x) = y$ v intervalu $(0, 1]$, je tímto hledaným x číslo x_2, neboť $x_2 \in [0, 1]$, jak lze snadno ověřit. Tedy $\mathcal{H}(g) = [2, \infty)$.

Pro $y \in [2, \infty]$ jsem nalezli $x = \frac{1}{2}\big(y - \sqrt{y^2-4}\big)$ splňující $g(x) = y$. Protože již víme, že $g\colon (0,1] \to [2,\infty)$ je bijekce, platí

$$g^{-1}(y) = \frac{1}{2}\Big(y - \sqrt{y^2-4}\Big), \quad y \in [2,\infty).$$

Obdobně odvodíme, že $\mathcal{H}(h) = [2,\infty)$ a $h^{-1}(y) = \frac{1}{2}\big(y + \sqrt{y^2-4}\big)$ pro $y \in [2,\infty)$. Zřejmě tedy $\mathcal{H}(f) = [2,\infty)$.

(d) Protože $\mathcal{H}(f) = [2,\infty) \subset (0,\infty)$, je $f \circ f$ dobře definované a pro každé $x \in (0,\infty)$ platí

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) &= x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x + \frac{1}{x}}\\ &= \frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2+1}.\end{aligned}$$

Dále platí dle (c) a (a)

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(f \circ f) &= f\Big(f\big((0,\infty)\big)\Big) = f\big([2,\infty)\big)\\ &\subset [f(2),\infty) = \Big[\frac{5}{2},\infty\Big).\end{aligned}$$

Mějme nyní dáno $z \in \big[\frac{5}{2},\infty\big)$. Dle (b) a (c) existuje $y \in [1,\infty)$ splňující $f(y) = z$. Protože je h rostoucí, platí $y \geq 2$, jinak by totiž platilo $z = f(y) < f(2) = \frac{5}{2}$, což by byl spor. Opět podle (c) existuje $x \in [1,\infty)$ splňující $f(x) = y$. Tedy

$$(f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) = f(y) = z$$

a $\mathcal{H}(f \circ f) \supset \big[\frac{5}{2},\infty\big)$. Tedy $\mathcal{H}(f \circ f) = \big[\frac{5}{2},\infty\big)$. ♣

1.9.28. Příklad. Vydělte polynom $P(x) = 2x^3 + 4x^2 - x + 2$ polynomem $Q(x) = x^2 + x + 2$.

Řešení. Budeme postupovat podle algoritmu uvedeného v 1.8.11. Polynom Q vynásobíme výrazem $2x$ a výsledek odečteme od P. Obdržíme

$$P_1(x) = P(x) - 2xQ(x) = 2x^3 + 4x^2 - x + 2 - 2x(x^2+x+2) = 2x^2 - 5x + 2.$$

Polynom Q vynásobíme výrazem 2 a výsledek odečteme od P_1. Obdržíme

$$P_2(x) = P_1(x) - 2Q(x) = 2x^2 - 5x + 2 - 2(x^2+x+2) = -7x - 2.$$

Potom máme

$$P(x) = (2x+2)Q(x) - 7x - 2.$$

♣

KAPITOLA 2

Limita posloupnosti

2.1. Úvod

V běžném životě se často setkáváme s posloupnostmi reálných čísel. Může jít například o posloupnost meteorologických měření teploty vzduchu, o posloupnost makroekonomických dat jako je například inflace nebo nezaměstnanost a podobně. Takové posloupnosti sestávají z konečného počtu členů. Formální definice konečné posloupnosti reálných čísel vypadá následovně (srovnejte s Definicí 1.4.28(a)).

2.1.1. Definice. **Konečnou posloupností** reálných čísel rozumíme každé zobrazení množiny $\{1, \dots, n\}$, kde $n \in \mathbb{N}$, do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$. Pokud $k \mapsto a_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$, je takové zobrazení, pak tuto posloupnost značíme $\{a_k\}_{k=1}^n$. Číslo a_k nazýváme k**-tým členem** této posloupnosti.

V řadě modelů z různých vědních oborů se používají i posloupnosti, které mají nekonečný počet členů. Zde je formální definice (srovnejte s Definicí 1.4.28(b)).

2.1.2. Definice. **Nekonečnou posloupností** reálných čísel rozumíme každé zobrazení $n \mapsto a_n, n \in \mathbb{N}$, množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$. Takovou posloupnost obvykle značíme $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, případně jen $\{a_n\}$. Číslo a_n nazýváme n**-tým členem** této posloupnosti.

V dalším textu budeme posloupností rozumět vždy nekonečnou posloupnost.

2.1.3. Nyní uvedeme dva jednoduché modely z oblasti bankovnictví. Klient banky si u ní uloží částku ve výši a korun českých s ročním úrokem p procent. Po uplynutí jednoho roku bude tedy zůstatek na účtu roven $(1 + \tilde{p})a$, kde $\tilde{p} = \frac{p}{100}$. Na konci n-tého roku bude potom zůstatek a_n roven $(1+\tilde{p})^n a$. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ tedy vyjadřuje vývoj stavu konta na konci jednotlivých let.

Ve druhém příkladě půjčí banka klientovi částku ve výši a korun českých s úrokem p procent na dobu jednoho roku. Po uplynutí lhůty musí tedy dlužník zaplatit částku $(1+\tilde{p})a$, kde opět $\tilde{p}=\frac{p}{100}$. Pokud by banka rozdělila rok na dvě půlroční úrokovací období, byla by dlužná částka na konci prvního půlroku rovna $(1+\frac{\tilde{p}}{2})a$ a na konci roku by musel klient zaplatit částku $(1+\frac{\tilde{p}}{2})^2 a$. Pokud by banka rozdělila rok na n stejně dlouhých úrokovacích období, musel by klient na konci roku zaplatit částku $b_n=\left(1+\frac{\tilde{p}}{n}\right)^n a$.

Nyní se můžeme ptát, zda budou hodnoty a_n nebo b_n s rostoucím n růst. Pokud ano, mohou růst „nade všechny meze“ nebo se budou „blížit“ k nějaké hodnotě? K zodpovězení těchto otázek použijeme výsledky, které odvodíme v této kapitole.

Pomocí posloupnosti s nekonečným počtem členů můžeme také aproximovat hodnotu jistého čísla A, které je pro nás z nějakého důvodu zajímavé. Členy takové posloupnosti by měly s rostoucím n stále přesněji aproximovat hodnotu A. Takto postupoval Archimédés, když počítal délku obvodu kruhu přibližně pomocí obvodu pravidelného mnohoúhelníka. Čím měl mnohoúhelník více stran, tím byl jeho obvod lepším přiblížením skutečnému obvodu kruhu.

V uvedených příkladech, ke kterým se ještě později vrátíme, jsme neformálně užili slov „blížit se“ a „přibližovat se“ o členech posloupnosti. V této kapitole dáme těmto obratům přesný matematický význam zavedením pojmu limita posloupnosti. Pojem limity má pro matematickou analýzu zásadní význam a v tomto textu se s ním budeme setkávat téměř neustále. Ještě před jeho zavedením se budeme krátce zabývat základními vlastnostmi posloupností.

2.1.4. Symbol $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ označuje posloupnost, tedy zobrazení z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$, zatímco symbol $\{a_n;\ n\in\mathbb{N}\}$ značí množinu všech členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jde tedy o podmnožinu $\mathbb{R}$. Známe-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pak známe i $\{a_n;\ n\in\mathbb{N}\}$, ale nikoli naopak. Zadání posloupnosti kromě informace o oboru hodnot totiž navíc udává pořadí prvků z tohoto oboru. Například posloupnosti $a_n=(-1)^n$ a $b_n=(-1)^{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$, jsou sice různé, ale mají stejné množiny členů, neboť $\{a_n;\ n\in\mathbb{N}\}=\{b_n;\ n\in\mathbb{N}\}=\{-1,1\}$.

2.1.5. Definice. Nechť $c\in\mathbb{R}$. Posloupnost $a_n=c$, $n\in\mathbb{N}$, se nazývá **konstantní**.

2.1.6. Množina všech členů konstantní posloupnosti je jednoprvková.

2.1.7. Dalšími jednoduchými příklady posloupností, s nimiž se ještě setkáme, jsou $\{n\}$ a $\{\frac{1}{n}\}$. Množinu všech členů posloupnosti tvoří v prvním případě množina $\mathbb{N}$, ve druhém případě množina $\{\frac{1}{n};\ n\in\mathbb{N}\}$.

V následujících třech příkladech jsou posloupnosti zadány rekurentně (viz 1.4.29).

2.1.8. Fibonacciova[1] posloupnost je dána následujícím způsobem: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, platí $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$. Zde je prvních osm členů této posloupnosti: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. Další informace o Fibonacciově posloupnosti lze nalézt například v knize [**6**].

2.1.9. Položme $p_1 = 2$. Předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ již máme definován člen p_n. Podle Věty 1.9.17 je množina prvočísel nekonečná, a proto je množina $A_n = \{k \in \mathbb{N};\ k > p_n, k \text{ je prvočíslo}\}$ neprázdná. Podle Věty 1.6.30 má tato množina nejmenší prvek. Položme $p_{n+1} = \min A_n$. Tím jsme rekurentně definovali nekonečnou posloupnost $\{p_n\}$, kde p_n je n-té prvočíslo, tedy $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, $p_6 = 13, \dots$ Podotkněme, že určit n-tý člen této posloupnosti pro dané $n \in \mathbb{N}$ je obecně velice obtížné. Další informace o prvočíslech je možné nalézt například v knize [**4**].

Zadání posloupnosti může být někdy velice osobité, jak ukazuje následující příklad.

2.1.10. Posloupnost, označovaná v anglicky psané literatuře výrazem **look and say sequence**, jejíž začátek má tvar

$$1,\ 11,\ 21,\ 1211,\ 111221,\ \dots,$$

je zadána následujícím předpisem: $a_1 = 1$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ dostaneme hodnotu členu a_{n+1} „speciálním přečtením" číslic v dekadickém zápisu členu a_n. Člen $a_1 = 1$ přečteme jako „jedna jednička", což zapíšeme ve tvaru $a_2 = 11$. Člen a_2 přečteme jako „dvě jedničky" a dostaneme $a_3 = 21$. Tímto způsobem postupujeme dále. Například člen a_6 získáme přečtením členu $a_5 = 111221$ ve formě „tři jedničky, dvě dvojky, jedna jednička", takže $a_6 = 312211$. Posloupnost je tedy zadána rekurentně a přesná formulace její definice by vyžadovala ještě jisté úsilí. Další informace o této kuriózní posloupnosti lze nalézt například v článku [**3**].

Nyní zavedeme několik nových pojmů, které popisují důležité základní vlastnosti posloupností.

2.1.11. Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,

[1] Leonardo Fibonacci (asi 1170–1250)

- **omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je omezená.

2.1.12. Posloupnost $\{a_n\}$ je tedy shora omezená právě tehdy, když existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq K$. Podobně posloupnost $\{a_n\}$ je zdola omezená právě tehdy, když existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq K$. Konečně omezenost posloupnosti $\{a_n\}$ je charakterizována v následujícím lemmatu.

2.1.13. Lemma. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Pak $\{a_n\}$ je omezená právě tehdy, když existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \leq K$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Díky omezenosti množiny $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ nalezneme čísla $A, B \in \mathbb{R}$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $A \leq a_n \leq B$. Položme $K = \max\{|A|, |B|\}$. Pak zřejmě platí $-K \leq a_n \leq K$, a tedy $|a_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

$\Leftarrow$ Nechť $K \in \mathbb{R}$ splňuje $|a_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak $-K \leq a_n \leq K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, a tedy množina členů posloupnosti $\{a_n\}$ je omezená. ∎

2.1.14. Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq a_{n+1}$,
- **rostoucí**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$,
- **nerostoucí**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq a_{n+1}$,
- **klesající**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > a_{n+1}$.

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je **monotónní**, jestliže je nerostoucí nebo neklesající. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je **ryze monotónní**, jestliže je rostoucí, nebo klesající.

2.1.15. Poznámka. Upozorněme na to, že výrok „Posloupnost $\{a_n\}$ je neklesající.“ není negací výroku „Posloupnost $\{a_n\}$ je klesající.“ Například posloupnost $\{(-1)^n\}$ není klesající, avšak není ani neklesající. Podobně je tomu s výroky „Posloupnost $\{a_n\}$ je nerostoucí.“ a „Posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí.“.

2.1.16. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom $\{a_n\}$ je neklesající právě tehdy, když platí

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m < n\colon a_m \leq a_n.$$

Implikaci $\Rightarrow$ lze dokázat snadno matematickou indukcí, opačná implikace je zřejmá. Obdobná tvrzení platí i pro ostatní typy monotonie.

2.1.17. Definice. Nechť $q \in \mathbb{R}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **geometrickou posloupností**.

2.1.18. Příklad. Nechť $q \in \mathbb{R}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Dokažte, že posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní právě tehdy, když $q \geq 0$ nebo $\alpha = 0$.

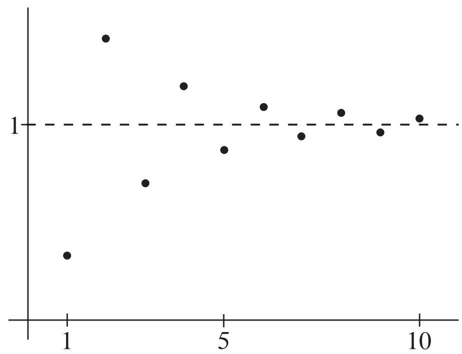
Řešení. Je-li $\alpha = 0$, pak je tvrzení zřejmé. Předpokládejme, že $\alpha > 0$. Je-li $q \in [0,1]$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $q^{n+1} \leq q^n$, a tedy také $\alpha q^{n+1} \leq \alpha q^n$. Posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy v tomto případě nerostoucí. Je-li $q \in [1,\infty)$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $q^{n+1} \geq q^n$, a tedy také $\alpha q^{n+1} \geq \alpha q^n$ a posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy v tomto případě neklesající. Obdobně lze dokázat, že je-li $\alpha < 0$, pak je posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající pro každé $q \in [0,1]$ a nerostoucí pro každé $q \in [1,\infty)$.

Předpokládejme, že $\alpha > 0$ a $q < 0$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ sudé platí $\alpha q^n \geq 0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ liché platí $\alpha q^n \leq 0$. Odtud plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ sudé platí $\alpha q^n \leq \alpha q^{n+1}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ liché platí $\alpha q^n \geq \alpha q^{n+1}$. Posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ tedy není monotónní. Obdobně lze dokázat, že posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ není monotónní, je-li $\alpha < 0$ a $q < 0$. Tvrzení je dokázáno. ♣

2.2. Vlastní limita posloupnosti

Další výklad začneme dvěma příklady. Uvažujme nejprve posloupnost $\{a_n\}$ definovanou předpisem $a_n = (-1)^n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Zdá se být zřejmé, že pro tuto posloupnost nelze nalézt nějaké reálné číslo, k němuž by se její členy „blížily“ (viz Obrázek **??**).

Nechť nyní $a_n = 1 + (-\frac{2}{3})^n$, $n \in \mathbb{N}$. Následující obrázek zachycuje chování prvních deseti členů této posloupnosti.



Obrázek 1.

V tomto případě se naopak zdá být zřejmé, že členy posloupnosti $\{a_n\}$ se s rostoucím n „blíží“ k číslu 1. Tento intuitivní náhled nyní vyjádříme pomocí matematicky přesných pojmů.

2.2.1. Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou** A, jestliže platí

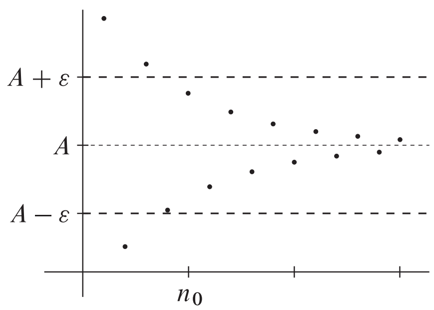
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon |a_n - A| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

2.2.2. Jestliže tvrdíme, že limitou posloupnosti $\{a_n\}$ je reálné číslo A, musíme ověřit podmínku (2.1). Pro libovolné zadané kladné číslo ε musíme nalézt přirozené číslo (index) n_0 takové, aby každý prvek posloupnosti s indexem n větším nebo rovným tomuto n_0 se již od hodnoty A nevzdálil o více než o „maximální povolenou odchylku“ vymezenou číslem ε, tedy $|a_n - A| < \varepsilon$. Jinými slovy, pro libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, hledáme takové $n_0 \in \mathbb{N}$, aby platil výrok

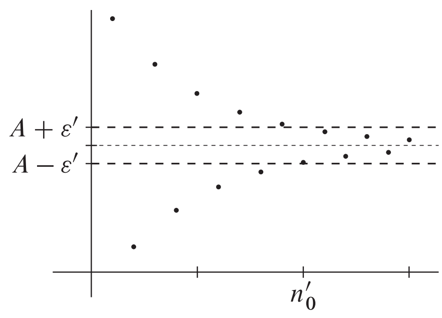
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon |a_n - A| < \varepsilon. \tag{2.2}$$

Nalezené n_0 bude obecně záviset na volbě ε (viz následující dva obrázky).

Na Obrázku 2.2.2 vidíme jednu z možných voleb čísla n_0 pro zadané ε. Na Obrázku 2.2.2 bylo zadáno ε' menší než ε. Číslo n_0 však nesplňuje podmínku (2.2), kde ε je zaměněno za ε', neboť existují $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, pro která nerovnost $|a_n - A| < \varepsilon'$ neplatí. Pro index n_0' (větší než n_0) je podmínka (2.2), kde ε je zaměněno za ε' a n_0 je zaměněno za n_0', splněna.



Obrázek 2.



Obrázek 3.

2.2.3. Na ověřování podmínky (2.1) je možné také nahlížet jako na hru, v níž se utkají dva hráči. První hráč (náš protivník) volí v prvním tahu hry kladné reálné číslo ε. Naším úkolem (v roli druhého hráče) je zvolit ve druhém tahu hry přirozené číslo n_0. Ve třetím (posledním) tahu hry volí první hráč přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ splňující $n \geq n_0$. Pokud $|a_n - A| \geq \varepsilon$, vyhrává první hráč, v opačném případě vítězíme my. Pokud dokážeme vyhrát libovolnou takovou partii, je limitou posloupnosti $\{a_n\}$ číslo A. Všimněme si, že ve druhém tahu volíme n_0, aniž bychom věděli, které n zvolí náš protivník v tahu následujícím. Tato skutečnost odpovídá pořadí kvantifikátorů v podmínce (2.1).

2.2.4. Věta (jednoznačnost limity)**.** Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A, B \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnou A a zároveň posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnou B. Potom platí $A = B$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Podle definice limity existují přirozená čísla n_A, n_B taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_A$, je $|a_n - A| < \varepsilon$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_B$, je $|a_n - B| < \varepsilon$. Položme $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$. Pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < \varepsilon$ i $|a_n - B| < \varepsilon$. Odtud a z trojúhelníkové nerovnosti (1.16) máme

$$\begin{aligned} |A - B| &= |A - a_{n_0} + a_{n_0} - B| \\ &\leq |A - a_{n_0}| + |a_{n_0} - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Protože $|A - B| < 2\varepsilon$ pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, je podle Lemmatu 1.6.13 $|A - B| = 0$, neboli $A = B$. ■

2.2.5. Označení. Jestliže posloupnost $\{a_n\}$ má limitu, pak tato limita je určena jednoznačně a označujeme ji symbolem $\lim_{n\to\infty} a_n$. Je-li limitou posloupnosti $\{a_n\}$ reálné číslo A, pak píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ nebo $a_n \overset{n\to\infty}{\to} A$. Nehrozí-li nedorozumění, píšeme někdy pouze $\lim a_n = A$ nebo $a_n \to A$.

2.2.6. K zavedení symbolu $\lim a_n$ potřebujeme tvrzení Věty 2.2.4. Kdyby totiž posloupnost měla více než jednu limitu, pak by nebylo jasné, co symbol $\lim a_n$ vlastně označuje a rovnost $\lim a_n = A$ by nedávala smysl.

2.2.7. Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že $\{a_n\}$ **konverguje** (je **konvergentní**), jestliže existuje $A \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim a_n = A$, neboli platí

$$\exists A \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon |a_n - A| < \varepsilon.$$

Je-li posloupnost konvergentní, říkáme též, že **má vlastní limitu**. Jestliže posloupnost nemá vlastní limitu, pak říkáme, že **diverguje** (je **divergentní**).

2.2.8. Příklad. Nechť $c \in \mathbb{R}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = c$. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} a_n = c$.

Řešení. Zvolme libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme $n_0 = 1$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, máme $|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$, takže podle definice limity dostáváme $\lim a_n = c$. ♣

Následující příklad ukazuje, že hodnota limity konvergentní posloupnosti nemusí být prvkem množiny jejích členů.

2.2.9. Příklad. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Řešení. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.6.27) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{\varepsilon} < n_0$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ dále platí $\frac{1}{n} > 0$, a tedy $\frac{1}{n} > -\varepsilon$. Odtud plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$. To podle definice limity znamená, že $\lim a_n = 0$. ♣

2.2.10. Příklad. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1$.

Řešení. Nejprve si uvědomíme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left|\frac{n}{n+2} - 1\right| = \left|\frac{n-(n+2)}{n+2}\right| = \left|\frac{-2}{n+2}\right| = \frac{2}{n+2}.$$

Zvolme libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $0 < \frac{2}{n_0+2} < \varepsilon$. Tuto vlastnost má jakékoli $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 > \frac{2}{\varepsilon} - 2$. Existence takového n_0 vyplývá z Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.6.27). Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, zřejmě platí $\frac{2}{n+2} \leq \frac{2}{n_0+2} < \varepsilon$. Pro tato $n \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$\left|\frac{n}{n+2} - 1\right| = \frac{2}{n+2} \leq \frac{2}{n_0+2} < \varepsilon.$$

Podle definice limity tedy platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1.$$

♣

2.2.11. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Je užitečné uvědomit si, jak vypadá negace výroku „$\{a_n\}$ je konvergentní“. Posloupnost $\{a_n\}$ nekonverguje, tj. nemá vlastní limitu, právě tehdy, když platí

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon |a_n - A| \geq \varepsilon.$$

2.2.12. Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{n^4\}$ nemá vlastní limitu.

Řešení. Nechť A je libovolné reálné číslo. Položme $\varepsilon = 1$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$. S pomocí Archimédovy vlastnosti (Věta 1.6.27) nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n \geq \max\{|A| + 1, n_0\}$. Pak platí $n^4 \geq n \geq |A| + 1$, a tedy podle Důsledku 1.6.11(a) platí

$$\left|n^4 - A\right| \geq n^4 - A \geq n^4 - |A| \geq |A| + 1 - |A| = 1.$$

Podle 2.2.11 je tedy posloupnost $\{n^4\}$ divergentní. ♣

Máme-li dokázat, že zadaná posloupnost nemá vlastní limitu, pak musíme pro každé číslo $A \in \mathbb{R}$ ukázat, že A není limitou této posloupnosti. Předpokládáme tedy, že A je libovolné reálné číslo a v závislosti na něm volíme vhodné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. V předchozím příkladu bylo sice možné pracovat s libovolným kladným reálným číslem ε, ale v dalších dvou úlohách bude volba vhodného ε hrát důležitou roli.

2.2.13. Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{(-1)^n\}$ nemá vlastní limitu.

Řešení. Nechť A je libovolné reálné číslo. Položme $\varepsilon = 1$. Je-li $A \geq 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$, pak volíme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, n liché. Potom platí

$$|(-1)^n - A| = |-1 - A| = 1 + A \geq 1 = \varepsilon.$$

Je-li $A < 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$, pak volíme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, n sudé. Potom platí

$$|(-1)^n - A| = |1 - A| = 1 - A \geq 1 = \varepsilon.$$

Posloupnost $\{(-1)^n\}$ tedy nemá vlastní limitu. ♣

2.2.14. Poznámka. Na rozdíl od Příkladu 2.2.12 nelze při řešení Příkladu 2.2.13 volit ε libovolně. Například volba $\varepsilon = 3$ by k řešení nevedla. Číslo ε zde musíme zvolit „dostatečně malé“.

2.2.15. Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{a_n\} = \left\{(-1)^n \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{n}\right)\right\}$ nemá vlastní limitu.

Řešení. Nechť A je libovolné reálné číslo. Položme $\varepsilon = \frac{1}{36}$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je libovolné.

Předpokládejme nejprve, že $A \geq 0$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$ liché a splňující $n \geq \max\{n_0, 9\}$. Potom $\frac{1}{4} - \frac{2}{n} \geq \frac{1}{4} - \frac{2}{9} > 0$, a tedy

$$\begin{aligned}\left|(-1)^n \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{n}\right) - A\right| &= \left|(-1)\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{n} + A\right)\right| = \frac{1}{4} - \frac{2}{n} + A \\ &\geq \frac{1}{4} - \frac{2}{n} \geq \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36} = \varepsilon,\end{aligned}$$

jinými slovy $|a_n - A| \geq \varepsilon$.

Nyní předpokládejme, že $A < 0$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$ sudé a splňující $n \geq \max\{n_0, 9\}$. Potom platí

$$\begin{aligned}\left|(-1)^n \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{n}\right) - A\right| &= \left|\frac{1}{4} - \frac{2}{n} - A\right| = \frac{1}{4} - \frac{2}{n} - A \\ &\geq \frac{1}{4} - \frac{2}{n} \geq \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36} = \varepsilon,\end{aligned}$$

a tedy opět $|a_n - A| \geq \varepsilon$. Podle 2.2.11 tedy posloupnost $\{a_n\}$ nemá vlastní limitu. ♣

V Příkladu 2.2.10 jsme na základě definice ověřili, že číslo 1 je opravdu limitou posloupnosti $\{\frac{n}{n+2}\}$ ve smyslu Definice 2.2.1. V Příkladech 2.2.12 a 2.2.15 jsme užili této definice k důkazu neexistence vlastní limity příslušných posloupností. Definice sama nám ale nedává návod, jak limitu vypočítat. V další části této kapitoly odvodíme věty, které objasní základní vlastnosti limit a dále budou užitečné při výpočtech limit konkrétních posloupností.

2.2.16. Věta. Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A \in \mathbb{R}$ a $\lim a_n = A$. Nechť existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$. Pak také $\lim b_n = A$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_2 \in \mathbb{N}$ splňující

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2\colon\ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$|b_n - A| = |a_n - A| < \varepsilon.$$

Tedy $\lim b_n = A$. ■

2.2.17. Poznámka. Předcházející větu lze formulovat i následujícím způsobem. Změníme-li u dané konvergentní posloupnosti $\{a_n\}$ konečně mnoho členů, pak má nově vzniklá posloupnost $\{b_n\}$ stejnou limitu jako posloupnost $\{a_n\}$. Pokud je totiž množina $\{n \in \mathbb{N};\ a_n \neq b_n\}$ konečná, potom je omezená, a tedy existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí $a_n = b_n$.

2.2.18. Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Nechť existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí $a_n = c$. Potom $\lim_{n\to\infty} a_n = c$, jak vyplývá z Příkladu 2.2.82:EX:posl_teor_const a Věty 2.2.16.

Nyní zformulujeme několik podmínek ekvivalentních podmínce (2.1) v definici limity posloupnosti. Často je totiž snazší ověřit některou z těchto podmínek namísto podmínky původní.

2.2.19. Lemma. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Pak $\lim a_n = A$ právě tehdy, když existuje $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, takové, že platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon\ |a_n - A| < K\varepsilon. \tag{2.3}$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Nechť $\lim a_n = A$. Pak z definice limity plyne, že (2.3) platí pro $K = 1$.

$\Leftarrow$ Nechť $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, je číslo splňující (2.3). Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{K}$. Podle (2.3) k tomuto ε' existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < K\varepsilon' = \varepsilon$. K zadanému $\varepsilon > 0$ jsme tedy našli $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, máme $|a_n - A| < \varepsilon$. Jinými slovy $\lim a_n = A$. ■

2.2.20. Lemma. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Potom $\lim a_n = A$ právě tehdy, když existuje $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_0 > 0$, takové, že platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon |a_n - A| < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Položme $\varepsilon_0 = 1$. Potom (2.4) plyne z definice limity a 1.1.25, kde klademe $M_1 = (0, \infty)$, $M_2 = (0, 1)$ a $V(\varepsilon)$ je výroková forma

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon |a_n - A| < \varepsilon.$$

$\Leftarrow$ Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme $\varepsilon' = \min\{\varepsilon, \frac{\varepsilon_0}{2}\}$. Potom $\varepsilon' \in (0, \varepsilon_0)$, a tedy podle (2.4) k němu existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < \varepsilon' \leq \varepsilon$. Tedy $\lim a_n = A$. ■

2.2.21. Z Lemmatu 2.2.20 plyne, že pro ověření existence limity posloupnosti stačí vyšetřit jen ε z intervalu $(0, \varepsilon_0)$, kde ε_0 je libovolně malé pevně stanovené číslo. Stačí se tedy zabývat jen „malými hodnotami“ ε, což v dalším textu usnadní některé důkazy.

2.2.22. V definici limity posloupnosti (Definice 2.2.1) může být nerovnost $n \geq n_0$ ekvivalentně nahrazena nerovností $n > n_0$. Podobně nerovnost $|a_n - A| < \varepsilon$ může být ekvivalentně nahrazena nerovností $|a_n - A| \leq \varepsilon$. První z těchto tvrzení je snadné. Pro důkaz druhého tvrzení si nejprve uvědomíme, že z podmínky (2.1) triviálně plyne výrok

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \colon |a_n - A| \leq \varepsilon. \tag{2.5}$$

Jestliže naopak platí (2.5), potom

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \colon |a_n - A| < 2\varepsilon.$$

Odtud pomocí Lemmatu 2.2.19 vyplývá (2.1).

Následující dvě věty ukazují vztahy mezi limitami posloupností $\{a_n\}$ a $\{|a_n|\}$.

2.2.23. Věta. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel, $A \in \mathbb{R}$ a $\lim a_n = A$. Pak $\lim |a_n| = |A|$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon\ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí podle Důsledku 1.6.11(a) odhad $\big||a_n| - |A|\big| \leq |a_n - A| < \varepsilon$. Celkem tedy máme

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon \big||a_n| - |A|\big| < \varepsilon.$$

To ale podle definice znamená, že $\lim |a_n| = |A|$. ∎

2.2.24. Poznámka. Opačná implikace ve Větě 2.2.23 obecně neplatí. Například posloupnost $\{(-1)^n\}$ nemá vlastní limitu (viz Příklad 2.2.13), ale $\lim |(-1)^n| = \lim 1 = 1$. Pokud ovšem $A = 0$, pak opačná implikace platí, jak ukazuje následující věta.

2.2.25. Věta. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom platí: $\lim a_n = 0$ právě tehdy, když $\lim |a_n| = 0$.

Důkaz. Podle definice limity je $\lim a_n = 0$, právě když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon\ |a_n| < \varepsilon,$$

zatímco $\lim |a_n| = 0$, právě když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon\ \big||a_n|\big| < \varepsilon.$$

Protože $\big||a_n|\big| = |a_n|$, jsou oba výroky ekvivalentní. ∎

Nyní se budeme věnovat vztahu mezi existencí vlastní limity a omezeností posloupnosti.

2.2.26. Věta. Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Důkaz. Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost reálných čísel. Existuje tedy $A \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim a_n = A$. Položme $\varepsilon = 1$. Podle definice k tomuto ε existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, je $|a_n - A| < 1$. Množina $\{|a_n|;\ n \in \mathbb{N}, n < n_0\}$ je konečná, a tedy je podle Věty 1.7.13 omezená. Nechť $M \in \mathbb{R}$ je její horní závora. Potom

$$|a_n| \leq \begin{cases} M, & \text{jestliže } n \in \mathbb{N}, 1 \leq n < n_0, \\ |A| + 1, & \text{jestliže } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0. \end{cases}$$

Nyní položme $K = \max\{M, |A| + 1\}$. Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \leq K$, a tedy je posloupnost $\{a_n\}$ omezená. ∎

2.2.27. Z Věty **??** vyplývá, že každá neomezená posloupnost je divergentní.

2.2.28. Poznámka. Omezenost posloupnosti není postačující podmínkou pro její konvergenci. Například posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená, avšak není konvergentní.

2.2.29. Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ nazýváme **vybranou posloupností z posloupnosti** $\{a_n\}$, případně **podposloupností posloupnosti** $\{a_n\}$.

2.2.30. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Následující posloupnosti jsou vybranými posloupnostmi z posloupnosti $\{a_n\}$:

(a) posloupnost $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ členů s „lichým indexem“ a posloupnost $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ členů se „sudým indexem“, kde příslušnými posloupnostmi $\{n_k\}$ jsou po řadě $\{2k-1\}$ a $\{2k\}$;
(b) posloupnost $\{a_{k+1}\}_{k=1}^{\infty}$, kde $n_k = k+1$, $k \in \mathbb{N}$;
(c) posloupnost $\{a_{k^2}\}_{k=1}^{\infty}$, kde $n_k = k^2$, $k \in \mathbb{N}$;
(d) posloupnost $\{a_{p_k}\}_{k=1}^{\infty}$, kde p_k je k-té prvočíslo, $k \in \mathbb{N}$.

2.2.31. Poznámka. Posloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ v Definici 2.2.29 určuje výběr těch členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, které se objeví v podposloupnosti $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Posloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ musí být podle definice rostoucí. Například posloupnosti $a_2, a_2, a_2, a_2, \dots$ nebo $a_3, a_2, a_1, a_4, a_5, a_6, \dots$ obecně neurčují podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}$.

2.2.32. Nechť posloupnost $\{a_n\}$ je zadána předpisem $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Uvažujme její podposloupnosti $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{a_{k^2}\}_{k=1}^{\infty}$. Posloupnost $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ je konstantní a splňuje $\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = -1$. Také posloupnost $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ je konstantní a splňuje $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 1$. Konečně posloupnost $\{a_{k^2}\}_{k=1}^{\infty}$ splývá s původní posloupností, a tedy je divergentní.

V 2.2.32 jsme k zadané divergentní posloupnosti nalezli dvě její konvergentní podposloupnosti s různými limitami a jednu její divergentní podposloupnost. Posloupnosti vybrané z divergentní posloupnosti mohou tedy konvergovat k různým limitám nebo mohou divergovat. Pro posloupnosti vybrané z konvergentní posloupnosti je situace jednodušší, jak ukazuje následující věta.

2.2.33. Věta (limita vybrané posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel, $A \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí poslupnost přirozených čísel. Potom platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

K důkazu věty budeme potřebovat následující lemma.

2.2.34. Lemma. Nechť $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $n_k \geq k$.

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k. Protože $n_1 \in \mathbb{N}$, zřejmě máme $n_1 \geq 1$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ platí $n_k \geq k$. Potom platí $n_{k+1} > n_k \geq k$, neboť $\{n_k\}$ je rostoucí. Z Věty 1.6.24 plyne, že $n_{k+1} \geq k+1$. Tím je tvrzení podle principu matematické indukce dokázáno. ∎

Důkaz Věty 2.2.33. Zvolme libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu existuje $n^* \in \mathbb{N}$ takové, že
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n^*\colon\ |a_n - A| < \varepsilon. \tag{2.6}$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq n^*$, platí díky Lemmatu 2.2.34 nerovnost $n_k \geq k \geq n^*$, a tedy podle (2.6) dostaneme $\left|a_{n_k} - A\right| < \varepsilon$. Tím je věta dokázána. ■

2.2.35. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže existují dvě podposloupnosti posloupnosti $\{a_n\}$ mající různé vlastní limity, pak posloupnost $\{a_n\}$ diverguje. Kdyby totiž posloupnost $\{a_n\}$ měla vlastní limitu A, pak by obě podposloupnosti musely mít podle Věty 2.2.33 limitu A, což by byl spor.

2.2.36. Předchozí odstavec nám umožňuje dokázat divergenci posloupnosti $\{(-1)^n\}$ jiným způsobem než v Příkladu 2.2.13. Označíme-li $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, pak podle 2.2.32 je $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 1$ a $\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = -1$. Nalezli jsme dvě podposloupnosti s různými limitami, a tedy posloupnost $\{(-1)^n\}$ diverguje.

V další části tohoto oddílu ukážeme, jak pojem limity souvisí s aritmetickými operacemi a relací uspořádání na množině reálných čísel.

2.2.37. Věta (aritmetika limit)**.** Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A, B \in \mathbb{R}$, $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$. Potom platí:

(a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,
(b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,
(c) je-li $B \neq 0$ a $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle definice limity existují přirozená čísla n_A, n_B taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_A$, je $|A - a_n| < \varepsilon$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_B$, je $|B - b_n| < \varepsilon$. Položíme-li $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$, pak pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí obě uvedené nerovnosti.

(a) Z trojúhelníkové nerovnosti (Věta 1.6.10) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (A + B)| &= |(a_n - A) + (b_n - B)| \\ &\leq |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Dokazované tvrzení tedy vyplývá z Lemmatu 2.2.19 pro $K = 2$.

(b) Posloupnost $\{b_n\}$ je konvergentní, a tedy podle Věty **??** je také omezená. Jinými slovy existuje $L \in \mathbb{R}$, $L > 0$, takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|b_n| \leq L$. Úpravou výrazu $a_n b_n - AB$ a použitím trojúhelníkové nerovnosti (Věta 1.6.10) dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |(a_n b_n - b_n A) + (b_n A - AB)| \\ &\leq |a_n b_n - b_n A| + |b_n A - AB| \\ &= |b_n|\,|a_n - A| + |A|\,|b_n - B|\,. \end{aligned}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, dále platí

$$|b_n|\,|a_n - A| + |A|\,|b_n - B| < L\varepsilon + |A|\varepsilon = (L + |A|)\varepsilon.$$

Tudíž pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$|a_n b_n - AB| < L\varepsilon + |A|\varepsilon = (L + |A|)\varepsilon.$$

Dokazované tvrzení tedy vyplývá z Lemmatu 2.2.19 pro $K = L + |A|$.

(c) Obdobnými úpravami jako v důkazech předchozích tvrzení dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| &= \left|\frac{a_n B - b_n A}{b_n B}\right| = \left|\frac{a_n B - AB + AB - Ab_n}{b_n B}\right| \\ &\leq \left|\frac{a_n B - AB}{b_n B}\right| + \left|\frac{AB - Ab_n}{b_n B}\right| \\ &= \frac{1}{|b_n|}\,|a_n - A| + \frac{|A|}{|b_n|\,|B|}\,|b_n - B|\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Podle definice limity existuje ke kladnému číslu $\frac{1}{2}\,|B|$ takové $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí

$$|B - b_n| < \frac{1}{2}\,|B|\,. \tag{2.8}$$

Podle Důsledku 1.6.11(a) a (2.8) pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí

$$\big||B| - |b_n|\big| \leq |B - b_n| < \frac{1}{2}\,|B|\,. \tag{2.9}$$

Vzhledem k tomu, že navíc platí $|B| - |b_n| \leq \big||B| - |b_n|\big|$, dostáváme podle (2.9) pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, nerovnost $|B| - |b_n| < \frac{1}{2}\,|B|$, a tedy také

$$\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|B|}. \tag{2.10}$$

Položme

$$K = \max\left\{\frac{2}{|B|}, \frac{2\,|A|}{B^2}\right\}.$$

Pak podle (2.7) a (2.10) máme pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| &\leq \frac{2}{|B|}\,|a_n - A| + \frac{2\,|A|}{B^2}\,|b_n - B| \\ &\leq K(|a_n - A| + |b_n - B|). \end{aligned}$$

Položme $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_2$, potom máme

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| < 2K\varepsilon.$$

Dokazované tvrzení pak plyne z Lemmatu 2.2.19. ■

V dalším textu se budeme někdy odkazovat na dílčí tvrzení (a), (b), (c) Věty 2.2.37 po řadě jako na větu o limitě součtu, větu o limitě součinu a větu o limitě podílu.

2.2.38. Příklad. Dokažte, že platí $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Řešení. Tvrzení vyplývá z Příkladu 2.2.9 a věty o limitě součinu (Věta 2.2.37(b)) pro posloupnosti $\{a_n\} = \{b_n\} = \{\frac{1}{n}\}$. ♣

2.2.39. Podstatným předpokladem věty o aritmetice limit (Věta 2.2.37) je konvergence posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$. V případě, kdy jedna či obě posloupnosti divergují, nelze o konvergenci posloupnosti definované jako jejich součet, součin či podíl obecně nic říci. Uvedeme několik příkladů.

- Nechť $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ a $\{b_n\} = \{(-1)^n\}$. Pak jsou obě posloupnosti divergentní, ale $\lim a_n b_n = 1$.
- Nechť $\{a_n\} = \{n^2\}$ a $\{b_n\} = \{\frac{1}{n}\}$, a tedy $\{a_n b_n\} = \{n\}$. Pak $\{a_n\}$ a $\{a_n b_n\}$ divergují podle Věty **??** a $\{b_n\}$ konverguje podle Příkladu 2.2.9.
- Nechť $\{a_n\} = \{n\}$ a $\{b_n\} = \{\frac{1}{n^2}\}$. Pak $\{a_n\}$ diverguje, $\{b_n\}$ konverguje podle Příkladu 2.2.38 a $\{a_n b_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ konverguje.

Situace vypadá obdobně i v případě ostatních aritmetických operací. Konstrukce příslušných příkladů není obtížná.

V dalším výkladu se nám bude hodit následující obecnější verze věty o limitě součtu.

2.2.40. Věta. Nechť $l \in \mathbb{N}$ a $\{a_n^1\}, \dots, \{a_n^l\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, l$, a $\lim a_n^j = A_j$, $j = 1, \dots, l$. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{l} a_n^j = \sum_{j=1}^{l} A_j.$$

Obdobné tvrzení lze zformulovat i pro součin konečně mnoha posloupností.

Důkaz. Použijeme matematickou indukci. Pro $l = 1$ je tvrzení triviální. Předpokládejme nyní jeho platnost pro $l \in \mathbb{N}$. Máme-li $l + 1$ posloupností

$\{a_n^1\}, \dots, \{a_n^{l+1}\}$ s limitami $A_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, l+1$, pak platí

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{l+1} a_n^j &= \lim_{n\to\infty} \Big(\big(\sum_{j=1}^{l} a_n^j \big) + a_n^{l+1} \Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{l} a_n^j + \lim_{n\to\infty} a_n^{l+1} \\ &= \Big(\sum_{j=1}^{l} A_j \Big) + A_{l+1} = \sum_{j=1}^{l+1} A_j,\end{aligned}$$

přičemž druhá rovnost plyne z Věty 2.2.37(a) a třetí z indukčního předpokladu.

Tvrzení týkající se součinu konečně mnoha posloupností lze dokázat obdobně. ■

2.2.41. Příklad. Vypočítejte $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2+7}$.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{n^2+n}{2n^2+7} = \frac{n^2+n}{2n^2+7} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{7}{n^2}}.$$

Podle Příkladu 2.2.9 je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ a podle Příkladu 2.2.8 je $\lim_{n\to\infty} 1 = 1$. Tedy $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$. Podobně odvodíme $\lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{7}{n^2}\right) = 2$. Podle věty o limitě podílu (Věta 2.2.37(c)) dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{7}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})}{\lim_{n\to\infty}(2+\frac{7}{n^2})} = \frac{1}{2}.$$

Při počítání limit posloupností obvykle zapisujeme výpočet stručněji. V našem příkladu by zkrácený zápis vypadal následovně:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{7}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})}{\lim_{n\to\infty}(2+\frac{7}{n^2})} \tag{2.11}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} 7 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} \tag{2.12}$$

$$= \frac{1+0}{2+7\cdot 0} = \frac{1}{2}. \tag{2.13}$$

Napíšeme-li v průběhu výpočtu nejprve rovnost (2.11), musíme si být vědomi toho, že zatím nevíme, zda tato rovnost platí. Rovnost bude platit, pokud ukážeme, že obě limity ve zlomku na pravé straně existují a limita ve jmenovateli je nenulová. Podobně rovnost (2.12) bude platit, pokud ukážeme, že všechny limity jsou vlastní a výsledný výraz ve jmenovateli je nenulový. Hodnoty limit ve výrazu v (2.12) však již známe a výpočet (2.13) ukazuje, že výraz ve jmenovateli je nenulový. Dostáváme tak platnost první rovnosti ve (2.13), a díky tomu i platnost rovnosti (2.12). Odtud potom dostáváme platnost rovnosti (2.11), a tím korektnost celého řešení.

Při počítání limit musíme každý krok výpočtu zdůvodnit. Někdy jde jen o algebraickou úpravu počítaného výrazu, často pak používáme větu o aritmetice limit, případně již vypočítané limity. Bez zdůvodnění jako například v předchozím odstavci *není řešení úplné*. Později v pokročilejších částech skript již nebudeme podrobná zdůvodnění uvádět, což ale neznamená, že jsme je neprovedli. ♣

Následující výsledek obsahuje jednoduché ale užitečné tvrzení o limitě posloupnosti definované jako součin omezené posloupnosti a posloupnosti s nulovou limitou.

2.2.42. Věta. Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, přičemž $\lim a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je omezená. Potom $\lim a_n b_n = 0$.

Důkaz. Protože $\{b_n\}$ je omezená, existuje číslo $K > 0$ splňující $|b_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Protože $\lim a_n = 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n| = |a_n - 0| < \varepsilon$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, tudíž platí

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n|\,|b_n| < K\varepsilon.$$

Tedy podle Lemmatu 2.2.19 platí $\lim a_n b_n = 0$. ■

2.2.43. Poznámka. Tvrzení Věty 2.2.42 neplyne z věty o limitě součinu (Věta 2.2.37(b)), protože posloupnost $\{b_n\}$ nemusí mít vlastní limitu.

2.2.44. Příklad. Dokažte, že $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Řešení. Tvrzení plyne z Věty 2.2.42, neboť posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená a $\lim \frac{1}{n} = 0$. ♣

V předchozích větách jsme uvedli několik důležitých souvislostí mezi pojmem limity a operacemi na množině reálných čísel. Nyní se zaměříme na vztah mezi pojmem limity a relací uspořádání na množině reálných čísel.

2.2.45. Věta (limita a uspořádání)**.** Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A, B \in \mathbb{R}$, $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$.

(a) Nechť $A < B$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n < b_n$.

(b) Nechť existuje $n^* \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n^*$, platí $a_n \geq b_n$. Potom $A \geq B$.

Důkaz. (a) Položme $\varepsilon = \frac{1}{2}(B - A)$. Pak podle definice limity existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí $a_n < A + \varepsilon$ a $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_2$, platí $b_n > B - \varepsilon$. Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$a_n < A + \varepsilon = \frac{A + B}{2} = B - \varepsilon < b_n.$$

(b) Předpokládejme pro spor, že platí $A < B$. Potom podle tvrzení (a) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n < b_n$. Položme $m = \max\{n_0, n^*\}$. Pak dostáváme $a_m < b_m \leq a_m$, což je spor. ∎

2.2.46. Poznámky. (a) Věta 2.2.45 nám poskytuje možnost odhadnout shora nebo zdola hodnotu limity dané posloupnosti, o níž víme, že konverguje, ale jejíž limitu neznáme, pomocí jiné posloupnosti, jejíž limitu známe.

(b) V tvrzení Věty 2.2.45(b) nelze nerovnosti „$a_n \geq b_n$" a „$A \geq B$" nahradit nerovnostmi „$a_n > b_n$" a „$A > B$". Položme například $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Potom zřejmě platí $a_n > b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, neplatí však $A = B = 0$.

2.2.47. Věta (o dvou strážnících)**.** Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

(a) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \leq c_n \leq b_n$,

(b) $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou konvergentní a platí $\lim a_n = \lim b_n$.

Potom je $\{c_n\}$ konvergentní a platí $\lim c_n = \lim a_n$.

Důkaz. Označme $\lim a_n = A$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu podle předpokladu (b) existují $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_2$, platí

$$A - \varepsilon < b_n < A + \varepsilon.$$

Odtud a z předpokladu (a) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$, platí

$$A - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < A + \varepsilon,$$

a tedy $|c_n - A| < \varepsilon$. ∎

2.2.48. Příklad. Spočtěte $\lim \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$.

Řešení. Zřejmě platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ nerovnosti $1 < 1 + \frac{1}{n} < (1 + \frac{1}{n})^2$. Podle Věty **??** tedy pro pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnosti $1 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{n}$.

Vzhledem k tomu, že $\lim 1 = \lim(1 + \frac{1}{n}) = 1$, dostáváme podle věty o dvou strážnících (Věta 2.2.47), že $\lim \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1$. ♣

2.2.49. Příklad. Nechť $k \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}$ a $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných čísel splňující $\lim a_n = A$. Dokažte, že $A \geq 0$ a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}$.

Řešení. Nezápornost čísla A plyne z Věty 2.2.45(b). Předpokládejme nejprve, že $A = 0$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, libovolně. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n < \varepsilon^k$. Pro taková $n \in \mathbb{N}$ ale díky monotonii odmocniny (Věta **??**(a)) máme $0 \leq \sqrt[k]{a_n} < \varepsilon$. Dostáváme tedy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = 0 = \sqrt[k]{A}$.

Nyní předpokládejme, že $A > 0$. Pak podle Příkladu 1.6.5 pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}
&\left|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{A}\right| \\
&= \left|\frac{a_n - A}{(\sqrt[k]{a_n})^{k-1} + (\sqrt[k]{a_n})^{k-2}\sqrt[k]{A} + \cdots + \sqrt[k]{a_n}(\sqrt[k]{A})^{k-2} + (\sqrt[k]{A})^{k-1}}\right| \\
&\leq \frac{1}{(\sqrt[k]{A})^{k-1}}\,|a_n - A|\,.
\end{aligned}$$

Odtud a použitím rovnosti $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[k]{A})^{k-1}}\,|a_n - A| = 0$ obdržíme podle Věty 2.2.47 $\lim_{n\to\infty} \left|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{A}\right| = 0$. Podle Věty 2.2.25 platí $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{A}) = 0$. Odtud díky větě o limitě součtu (Věta 2.2.37(a)) dostáváme $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}$. ♣

2.2.50. Příklad. Dokažte, že $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

Řešení. Vzhledem k tomu, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\sqrt[n]{n} \geq 1$, můžeme psát $\sqrt[n]{n} = 1 + \theta_n$, kde $\theta_n \geq 0$. Pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí podle binomické věty (Věta 1.6.4)

$$n = (1 + \theta_n)^n \geq 1 + n\theta_n + \frac{n(n-1)}{2}\theta_n^2 \geq \frac{n(n-1)}{2}\theta_n^2.$$

Protože pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí $n - 1 \geq \frac{n}{2}$, dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$n \geq \frac{n(n-1)}{2}\theta_n^2 \geq \frac{n^2}{4}\theta_n^2.$$

Odtud a z monotonie odmocniny (Věta **??**(a)) pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, plyne $\frac{2}{\sqrt{n}} \geq \theta_n$. Podle Příkladu 2.2.9, Příkladu 2.2.49 pro $k = 2$ a z věty o limitě součinu (Věta 2.2.37(b)) dostaneme $\lim \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$, takže podle Věty 2.2.47 máme $\lim \theta_n = 0$. Odtud plyne dokazované tvrzení. ♣

2.2.51. Příklad. Nechť $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Dokažte, že $\lim \sqrt[n]{c} = 1$.

Řešení. Nechť nejprve $c \geq 1$. Pomocí Archimédovy vlastnosti (Věta 1.6.27) nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > c$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $1 \leq \sqrt[n]{c} \leq \sqrt[n]{n}$. Z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.47) a Příkladu 2.2.50 plyne $\lim \sqrt[n]{c} = 1$.

Nechť nyní $c \in (0, 1)$. Potom podle věty o limitě podílu (Věta 2.2.37(c)) a podle již dokázaného tvrzení platí

$$\lim \sqrt[n]{c} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{c}}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\frac{1}{c}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

♣

2.3. Nevlastní limita posloupnosti

Posloupnost $\{a_n\}$ definovaná předpisem $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, je sice divergentní, má však následující vlastnost. Pro libovolné $K \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > K$. Vskutku, stačí pomocí Archimédovy vlastnosti (Věta 1.6.27) nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > K$. Obdobnou vlastnost má například posloupnost $\{b_n\}$ definovaná předpisem $b_n = -n^2$, $n \in \mathbb{N}$, přičemž nerovnost $a_n > K$ je nahrazena nerovností $b_n < K$. Obě vlastnosti můžeme chápat jako jisté typy limitního chování posloupnosti, i když jiné, než je konvergence k reálnému číslu, kterou jsme studovali v předcházejícím oddílu. Tyto typy limitního chování formálně zavedeme v následující definici.

2.3.1. Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou** ∞ (čteme plus nekonečno), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n > K.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou** $-\infty$ (čteme mínus nekonečno), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n < K.$$

Má-li posloupnost limitu rovnou plus nebo mínus nekonečnu, říkáme, že **má nevlastní limitu**.

2.3.2. Jestliže má posloupnost limitu rovnou ∞, pak říkáme, že **diverguje** k ∞. Jestliže má posloupnost limitu rovnou $-\infty$, pak říkáme, že **diverguje** k $-\infty$.

2.3.3. Příklad. Dokažte, že $\lim n = \infty$.

Řešení. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. Z Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.6.27) vyplývá existence $n_0 \in \mathbb{N}$ splňujícího $n_0 > K$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $n \geq n_0 > K$, čímž je tvrzení dokázáno. ♣

Naším cílem nyní bude rozšířit některé poznatky z předcházejícího oddílu i pro nevlastní limity. K tomuto účelu nejprve rozšíříme reálnou osu o prvky ∞ a $-\infty$ a odpovídajícím způsobem rozšíříme také operace sčítání a násobení a relaci uspořádání.

2.3.4. Definice. **Rozšířenou reálnou osou** budeme nazývat množinu $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ a budeme ji značit $\mathbb{R}^*$. Na množinu $\mathbb{R}^*$ rozšíříme aritmetické operace a relaci uspořádání definované na $\mathbb{R}$ následujícím způsobem.

Operace sčítání:

- $\forall a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}\colon -\infty + a = a + (-\infty) = -\infty$,
- $\forall a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\colon \infty + a = a + \infty = \infty$,
- $-(\infty) = -\infty, -(-\infty) = \infty$.

Operace násobení:

- $\forall a \in (0, \infty) \cup \{\infty\}\colon a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$,
- $\forall a \in (0, \infty) \cup \{\infty\}\colon a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty$,
- $\forall a \in \{-\infty\} \cup (-\infty, 0)\colon a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty$,
- $\forall a \in \{-\infty\} \cup (-\infty, 0)\colon a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \infty$,
- $(\infty)^{-1} = 0, (-\infty)^{-1} = 0$.

Relace uspořádání:

- $\forall a \in \mathbb{R}\colon -\infty < a, a < \infty$,
- $-\infty < \infty$.

2.3.5. Operace sčítání a násobení nejsou definovány pro všechny dvojice z $\mathbb{R}^*$. Přesněji, následující výrazy nejsou definovány:

$$\infty + (-\infty), \quad -\infty + \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad 0 \cdot (-\infty), \quad (-\infty) \cdot 0.$$

2.3.6. Věta. Pro každé $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ platí následující rovnosti, pokud je vždy alespoň jedna strana rovnosti definována:

(a) $x + y = y + x$,
(b) $(x + y) + z = x + (y + z)$,
(c) $xy = yx$,
(d) $(xy)z = x(yz)$,
(e) $x(y + z) = xy + xz$.

Důkaz. Všechna tvrzení plynou z Definice 2.3.4 a z vlastností sčítání a násobení reálných čísel pomocí rozboru jednotlivých případů, kdy postupně rozlišujeme, zda prvky x, y a z jsou reálné, nebo se rovnají ∞, nebo se rovnají $-\infty$. ∎

Právě provedené rozšíření množiny reálných čísel nám umožňuje definovat pojmy suprema a infima pro libovolné podmnožiny $\mathbb{R}$.

2.3.7. Definice. Nechť $A \subset \mathbb{R}$ a $G \in \mathbb{R}^*$. Předpokládejme, že platí následující podmínky:

(a) $\forall a \in A\colon a \leq G$,
(b) $\forall G' \in \mathbb{R}^*, G' < G\ \exists a \in A\colon G' < a$.

Pak G nazýváme **supremem** množiny A. Podobně definujeme **infimum** množiny A.

2.3.8. Pro neprázdnou a shora omezenou podmnožinu reálných čísel se pojem suprema zavedený v Definici 1.4.8 shoduje s pojmem zavedeným v Definici 2.3.7. Supremum shora neomezené množiny je rovno ∞ a supremum prázdné množiny je rovno $-\infty$. Podobně infimum zdola neomezené množiny je $-\infty$ a infimum prázdné množiny je ∞.

V následujícím textu budeme již vždy používat právě uvedenou rozšířenou definici suprema a infima. Budeme je však i nadále značit symboly sup a inf.

2.3.9. Absolutní hodnota je na množině $\mathbb{R}^*$ definována předpisem $|x| = \max\{x, -x\}$, a tedy $|\infty| = \infty$, $|-\infty| = \infty$.

2.3.10. Definice 2.3.1 je doplněním Definice 2.2.1 o případy, kdy limitou je buď ∞ nebo $-\infty$. Víme tedy, co znamená, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnou A, kde buď $A \in \mathbb{R}$, nebo $A = \infty$, nebo $A = -\infty$. Následující věta ukazuje, že věta o jednoznačnosti limity (Věta 2.2.4) zůstává v platnosti i pro takto rozšířenou definici.

2.3.11. Věta (jednoznačnost limity)**.** Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Důkaz. Mějme posloupnost $\{a_n\}$. Dokázali jsme již, že nejvýše jedno reálné číslo může být limitou posloupnosti $\{a_n\}$ (Věta 2.2.4). Zbývá dokázat, že nemůže nastat žádný z případů:

- posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní a současně má limitu ∞,
- posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní a současně má limitu $-\infty$,
- posloupnost $\{a_n\}$ má limitu ∞ a současně $-\infty$.

Předpokládejme, že posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní a současně má limitu ∞. Podle Věty **??** je posloupnost $\{a_n\}$ omezená, a tím spíš je omezená shora. Tudíž existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \leq K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Protože ale současně má posloupnost $\{a_n\}$ limitu ∞, existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, je $a_n > K$, což je spor.

Ve zbývajících dvou případech je důkaz obdobný. ■

2.3.12. Má-li posloupnost $\{a_n\}$ nevlastní limitu, označujeme hodnotu této limity opět symbolem $\lim a_n$. Píšeme tedy $\lim a_n = \infty$ nebo $\lim a_n = -\infty$. Ke korektnímu zavedení tohoto značení potřebujeme Větu 2.3.11. Kdyby totiž posloupnost měla více než jednu limitu (vlastní či nevlastní), pak by nebylo jasné, co symbol $\lim a_n$ vlastně označuje a rovnost $\lim a_n = A$ by nedávala smysl (pro srovnání viz 2.2.6).

2.3.13. Poznámka. Pro každou posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ nastává právě jedna z následujících možností:

$$\lim a_n \begin{cases} \text{existuje} \begin{cases} \text{vlastní, tj. je rovna reálnému číslu,} \\ \text{nevlastní, tj. je rovna } \infty \text{ nebo } -\infty, \end{cases} \\ \text{neexistuje.} \end{cases}$$

2.3.14. Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$. Potom **okolím** bodu c rozumíme každou množinu tvaru $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. **Okolím** bodu ∞ rozumíme každou množinu tvaru $B(\infty, \varepsilon) = (\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. **Okolím** bodu $-\infty$ rozumíme každou množinu tvaru $B(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

2.3.15. Lemma. Nechť $A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^*$, $A \neq \tilde{A}$. Potom existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, takové, že $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $\tilde{A} \in \mathbb{R}$. Je-li také $A \in \mathbb{R}$, pak položíme $\varepsilon = \frac{|\tilde{A}-A|}{2}$. Potom zřejmě platí $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$. Je-li $A = \infty$ nebo $A = -\infty$, zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, libovolně a opět dostaneme $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$.

Nyní předpokládejme, že $\tilde{A} = \infty$. Je-li $A \in \mathbb{R}$, položíme $\varepsilon = \frac{1}{|A|+1}$. Odtud opět plyne, že $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$. Je-li $A = -\infty$, zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, libovolně a opět obdržíme $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$.

Případ $\tilde{A} = -\infty$ je obdobný případu $\tilde{A} = \infty$. ■

Zavedení pojmu okolí (Definice 2.3.14) nám umožňuje ekvivalentně formulovat pojem limity posloupnosti (vlastní i nevlastní) jedinou formulí. To je náplní následující věty.

2.3.16. Věta. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Pak $\lim a_n = A$ právě tehdy, když platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n \in B(A, \varepsilon). \tag{2.14}$$

Důkaz. Nechť $A \in \mathbb{R}$. Potom je výrok $a_n \in B(A, \varepsilon)$ ekvivalentní výroku $|a_n - A| < \varepsilon$. Takže v tomto případě je formule (2.14) shodná a formulí (2.1).

Nechť $A = \infty$. Předpokládejme nejprve, že $\lim a_n = A$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Víme, že pro $K = \frac{1}{\varepsilon}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > K$. To podle definice okolí bodu ∞ znamená, že $a_n \in B(\infty, \varepsilon)$, a tedy formule (2.14) platí.

Nyní naopak předpokládejme, že platí (2.14). Zvolme $K \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, následujícím způsobem. Je-li $K \leq 0$, zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolně. Je-li $K > 0$, položíme $\varepsilon = \frac{1}{K}$. V obou případech pak platí $\frac{1}{\varepsilon} \geq K$. K tomuto ε pak nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \in B(\infty, \varepsilon)$. Potom platí $a_n > \frac{1}{\varepsilon} \geq K$, a tedy $a_n > K$. Odtud plyne $\lim a_n = A$.

V případě $A = -\infty$ je důkaz obdobný. ■

Ve zbývající části tohoto oddílu uvedeme obecnější varianty některých vět, které již známe z předcházejícího textu. Zatímco se však dříve uvedená tvrzení týkala pouze vlastních limit, zde budou věty formulovány i pro nevlastní limity.

Nejprve uvedeme obdobu Věty 2.2.16.

2.3.17. Věta. Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim a_n = A$. Nechť existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$. Pak také $\lim b_n = A$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_2 \in \mathbb{N}$ splňující

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2 \colon a_n \in B(A, \varepsilon).$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $b_n = a_n$, a tedy $b_n \in B(A, \varepsilon)$. Odtud vyplývá, že $\lim b_n = A$. ■

2.3.18. Poznámka. Z předchozí věty plyne následující zobecnění Poznámky 2.2.17. Změníme-li u posloupnosti reálných čísel $\{a_n\}$ splňující $\lim a_n = A$, kde $A \in \mathbb{R}^*$, konečně mnoho členů, pak má nově vzniklá posloupnost opět limitu A.

Následující tvrzení je obdobou Věty 2.2.23.

2.3.19. Věta. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel, $A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim a_n = A$. Pak $\lim |a_n| = |A|$.

Důkaz. Je-li $A \in \mathbb{R}$, pak tvrzení plyne z Věty 2.2.23. Nechť $A = \infty$. Pak z předpokladu $\lim a_n = A$ plyne existence $n_0 \in \mathbb{N}$ takového, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \geq 0$, a tedy $|a_n| = a_n$. Tudíž podle Věty 2.3.17 platí $\lim |a_n| = \lim a_n$. Protože $\lim a_n = \infty$ a $|\infty| = \infty$, plyne odtud, že $\lim |a_n| = |A|$.

Konečně nechť $A = -\infty$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \in B(-\infty, \varepsilon)$, a tedy také $-a_n \in B(\infty, \varepsilon)$. Odtud plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $-a_n > 0$, a tedy $|a_n| = -a_n$. To znamená, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n| \in B(\infty, \varepsilon)$. Protože $|A| = \infty$, dokázali jsme, že $\lim |a_n| = |A|$. ∎

Následující věta je jistou jednostrannou obdobou Věty **??**.

2.3.20. Věta. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $\lim a_n = \infty$. Potom je posloupnost $\{a_n\}$ zdola omezená.

Důkaz. Položme $\varepsilon = 1$. Podle definice k tomuto ε existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \geq 1$. Množina $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}, n < n_0\}$ je konečná, a tedy je podle Věty 1.7.13 omezená. Nechť $M \in \mathbb{R}$ je některá její dolní závora. Potom

$$a_n \geq \begin{cases} M, & \text{jestliže } n \in \mathbb{N}, 1 \leq n < n_0, \\ 1, & \text{jestliže } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0. \end{cases}$$

Nyní položme $K = \min\{M, 1\}$. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ tedy máme $a_n \geq K$, takže posloupnost $\{a_n\}$ je zdola omezená. ∎

2.3.21. Obdobně jako ve Větě 2.3.20 lze dokázat, že je-li $\{a_n\}$ posloupnost reálných čísel a $\lim a_n = -\infty$, potom je posloupnost $\{a_n\}$ shora omezená.

Věta 2.2.33 platí v nezměněné podobě i pro nevlastní limity.

2.3.22. Věta (limita vybrané posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}$. Jestliže $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, pak také $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

Důkaz. Nechť $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, která určuje naši vybranou posloupnost. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu existuje $n^* \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n^* \colon a_n \in B(A, \varepsilon). \tag{2.15}$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq n^*$, platí díky Lemmatu 2.2.34 nerovnost $n_k \geq k \geq n^*$, a tedy podle (2.15) dostaneme $a_{n_k} \in B(A, \varepsilon)$. Tím je věta dokázána. ∎

Tvrzení věty o limitě vybrané posloupnosti (Věty 2.2.33 a 2.3.22) nelze obrátit. Jako příklad může opět posloužit posloupnost $\{(-1)^n\}$ a její podposloupnost $\{(-1)^{2k}\}_{k=1}^{\infty}$. Nicméně platí následující tvrzení, které v dalším textu ještě využijeme (například v Kapitole 3).

2.3.23. Věta. Nechť $l \in \mathbb{N}$ a $\{n_k^1\}_{k=1}^{\infty}$, $\{n_k^2\}_{k=1}^{\infty}$, …, $\{n_k^l\}_{k=1}^{\infty}$ jsou rostoucí posloupnosti přirozených čísel takové, že

$$\left\{n_k^j;\ j \in \{1,\dots,l\},\ k \in \mathbb{N}\right\} = \mathbb{N}. \tag{2.16}$$

Nechť $A \in \mathbb{R}^*$ a $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel taková, že pro každé $j \in \{1,\dots,l\}$ platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k^j} = A$. Potom $\lim a_n = A$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_1, k_2, \dots, k_l \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\begin{aligned} &\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq k_1 \colon a_{n_k^1} \in B(A,\varepsilon),\\ &\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq k_2 \colon a_{n_k^2} \in B(A,\varepsilon),\\ &\qquad\vdots\\ &\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq k_l \colon a_{n_k^l} \in B(A,\varepsilon). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Položme $n_0 = \max\{n_{k_1}^1, n_{k_2}^2, \dots, n_{k_l}^l\}$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Díky podmínce (2.16) existují $j \in \{1,\dots,l\}$ a $k \in \mathbb{N}$ taková, že $n = n_k^j$. Potom platí

$$n_k^j = n \geq n_0 \geq n_{k_j}^j.$$

Posloupnost $\{n_k^j\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí, a proto $k \geq k_j$. Podle j-té podmínky v (2.17) dostaneme $a_n = a_{n_k^j} \in B(A,\varepsilon)$, čímž je tvrzení dokázáno. ∎

2.3.24. Poznámka. Speciálním případem předchozí věty je následující tvrzení. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Nechť $A \in \mathbb{R}$ a platí

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = A.$$

Potom $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

Poznamenejme, že ve Větě 2.3.23 je důležité, aby počet posloupností $\{n_k^1\}_{k=1}^{\infty}$, $\{n_k^2\}_{k=1}^{\infty}$, …, $\{n_k^l\}_{k=1}^{\infty}$ byl konečný. Pro nekonečný počet těchto posloupností tvrzení neplatí. Příslušný protipříklad je uveden v Příkladu **??**.

Následující věta je zobecněním věty o aritmetice limit (Věta 2.2.37).

2.3.25. Věta (aritmetika limit)**.** Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A, B \in \mathbb{R}^*$, $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$. Potom platí:

(a) $\lim(a_n + b_n) = A + B$, pokud je výraz na pravé straně definován,
(b) $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, pokud je výraz na pravé straně definován,
(c) je-li $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, pokud je výraz na pravé straně definován.

Důkaz. Tuto větu lze dokázat způsobem velmi podobným důkazu Věty 2.2.37. Uvedeme pouze důkaz tvrzení (b) v případě, kdy $A \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$, a $B = -\infty$.

Musíme tedy dokázat, že

$$\lim (a_n \cdot b_n) = \begin{cases} \infty, & \text{pokud } A < 0, \\ -\infty, & \text{pokud } A > 0. \end{cases}$$

Nechť nejprve $A < 0$ a $K \in \mathbb{R}$. Položme $\varepsilon = -\frac{A}{2}$. Z předpokladu $\lim a_n = A$ a z definice limity vyplývá existence takového $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí $a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon) = (\frac{3A}{2}, \frac{A}{2})$. Podobně z předpokladu $\lim b_n = -\infty$ plyne existence takového $n_2 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_2$, platí $b_n < \min\{0, \frac{2K}{A}\}$. Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$a_n \cdot b_n > \frac{Ab_n}{2} > K,$$

takže $\lim (a_n \cdot b_n) = \infty$.

V případě $A > 0$ je důkaz zcela obdobný. ■

2.3.26. Předpoklad, že výrazy na pravých stranách jsou definovány, nelze z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.25) vynechat. Vskutku, nechť například $\{a_n\} = \{\frac{(-1)^n}{n}\}$. Potom $\lim a_n = 0$, ale $\lim \frac{1}{a_n} = \lim (-1)^n n$ neexistuje ani nevlastní.

2.3.27. Z informace $\lim a_n = \infty$ a $\lim b_n = -\infty$ nelze odvodit hodnotu $\lim(a_n + b_n)$. Nechť například $A \in \mathbb{R}$, $\{a_n\} = \{n\}$ a $\{b_n\} = \{-n + A\}$. Pak

$$\lim a_n = \infty, \quad \lim b_n = -\infty \quad \text{a} \quad \lim(a_n + b_n) = A.$$

Výraz $\infty - \infty$ nelze tedy definovat tak, aby pro takové posloupnosti platila věta o limitě součtu. Existence a případně i hodnota $\lim(a_n + b_n)$ závisí na jemnějším chování posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$.

2.3.28. Poznámka. Nechť $l \in \mathbb{N}$ a $\{a_n^1\}, \ldots, \{a_n^l\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A_j \in \mathbb{R}^*$, $j = 1, \ldots, l$, a dále $\lim a_n^j = A_j$, $j = 1, \ldots, l$. Potom platí

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{l} a_n^j = \sum_{j=1}^{l} A_j,$$

pokud je výraz na pravé straně definován. Obdobné tvrzení lze zformulovat i pro součin konečně mnoha posloupností. Důkaz lze provést obdobně jako ve Větě 2.2.40.

Z odstavce 2.3.26 vyplývá, že pro výpočet $\lim \frac{a_n}{b_n}$, kde $\lim b_n = 0$, nemůžeme bezprostředně použít větu o limitě podílu (Věta 2.3.25(c)), nicméně platí následující věta.

2.3.29. Věta. Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, přičemž pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $b_n \neq 0$. Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$, $\lim a_n = A$, $\lim b_n = 0$ a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $b_n > 0$. Potom $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

Důkaz. Posloupnost $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ je dobře definována, neboť $b_n \neq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Předpokládejme nejprve, že $A \in \mathbb{R}$, $A > 0$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. Položme $\varepsilon = \frac{A}{2}$. K němu existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 \colon a_n > A - \varepsilon = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2}.$$

Položme $L = \max\{1, K\}$. Pak existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2 \colon b_n < \frac{A}{2L}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$, platí

$$\frac{a_n}{b_n} > \frac{\frac{A}{2}}{\frac{A}{2L}} = L \geq K,$$

a tedy $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

Nechť nyní $A = \infty$. Zvolme opět $K \in \mathbb{R}$. Položme $L = \max\{1, K\}$. Pak existují $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 \colon a_n > 1,$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2 \colon b_n < \frac{1}{L}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$, platí

$$\frac{a_n}{b_n} > \frac{1}{\frac{1}{L}} = L \geq K.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ∎

Následující větu je možno dokázat obdobně jako Větu 2.2.45.

2.3.30. Věta (limita a uspořádání)**.** Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A, B \in \mathbb{R}^*$, $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$.

(a) Nechť $A < B$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí je $a_n < b_n$.

(b) Nechť existuje $n^* \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n^*$, platí $a_n \geq b_n$. Potom $A \geq B$.

Pro nevlastní limity platí následující dvě varianty věty o dvou strážnících.

2.3.31. Věta. Nechť $\{a_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

(a) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \leq c_n$,

(b) $\lim a_n = \infty$.

Potom platí $\lim c_n = \infty$.

Důkaz. Zvolme $L \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_1$, platí $a_n \geq L$. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq \max\{n_0, n_1\}$, pak platí $c_n \geq a_n$, a tedy $c_n \geq L$. Tím je dokázáno, že $\lim c_n = \infty$. ■

Podle předchozí věty stačí nalézt pouze jednoho „strážníka“ k důkazu tvrzení $\lim c_n = \infty$. Následující věta je její zřejmou obdobou pro posloupnosti s limitou $-\infty$.

2.3.32. Věta. Nechť $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

(a) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $b_n \geq c_n$,

(b) $\lim b_n = -\infty$.

Potom platí $\lim c_n = -\infty$.

2.3.33. Příklad. Dokažte, že platí

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty, & \text{pokud } q \in (1, \infty), \\ 1, & \text{pokud } q = 1, \\ 0, & \text{pokud } q \in (-1, 1), \\ \text{neexistuje}, & \text{pokud } q \in (-\infty, -1]. \end{cases}$$

Řešení. Předpokládejme nejprve, že $q > 1$. Pak můžeme psát $q = 1 + h$, kde $h > 0$. Odtud a z Bernoulliovy nerovnosti (Příklad 1.9.11) plyne $q^n = (1+h)^n \geq 1 + hn$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Zřejmě $\lim(1 + hn) = \infty$, a podle Věty 2.3.31 máme $\lim q^n = \infty$.

Pokud $q \in (0, 1)$, pak podle předchozího odstavce platí $\lim(q^{-1})^n = \infty$. Aplikací Věty 2.3.25 dostaneme

$$\lim q^n = \lim \frac{1}{(q^{-1})^n} = 0.$$

Pro $q = 0$ a $q = 1$ je tvrzení zřejmé. Pro $q = -1$ plyne tvrzení z Příkladu 2.2.13. Pokud $q \in (-1, 0)$, pak $\lim |q^n| = \lim |q|^n = 0$, a tedy podle Věty 2.2.25 také $\lim q^n = 0$.

Je-li konečně $q < -1$, pak $q^2 > 1$, a tedy máme $\lim q^{2n} = \lim(q^2)^n = \infty$. Potom platí podle věty o limitě součinu (Věta 2.3.25(b)) $\lim q^{2n+1} = \lim q(q^2)^n = -\infty$. Nalezli jsme dvě vybrané posloupnosti s různými limitami, a tedy limita původní posloupnosti neexistuje. ♣

Následující tvrzení dává do souvislosti pojmy limity a suprema množiny.

2.3.34. Věta. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina, $G \in \mathbb{R}^*$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.

(i) Platí $G = \sup M$.

(ii) Číslo G je horní závorou M a existuje posloupnost $\{x_n\}$ bodů z M splňující $\lim x_n = G$.

Důkaz. (i)⇒(ii) Je-li $G = \sup M$, pak G je zřejmě horní závorou M.

Pokud $G = \infty$, pak M není shora omezená, a tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in M$ splňující $x_n > n$. Podle Věty 2.3.31 je pak $\lim x_n = \infty = G$.

V případě, že $G \in \mathbb{R}$, pak podle definice suprema ke každému $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in M$ splňující $x_n > G - \frac{1}{n}$. Protože G je horní závorou M, je automaticky $x_n \leq G$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Podle věty o dvou strážnících (Věta 2.2.47) tedy máme $\lim x_n = G$.

(ii)⇒(i) Zvolme $G' \in \mathbb{R}$, $G' < G$. Pak z definice limity plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ pro které $x_{n_0} > G'$. (V případě $G = \infty$ to plyne přímo z definice, v případě $G \in \mathbb{R}$ stačí v definici vzít $\varepsilon = G - G'$.) Našli jsme tedy prvek z množiny M, který je větší než G', čímž jsme ověřili podmínku (b) z definice suprema. ■

2.3.35. Poznámka. Obdobné tvrzení platí i pro infimum.

2.3.36. Příklad. Nechť $k \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^*$ a $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných reálných čísel splňující $\lim a_n = A$. Potom $A \geq 0$ a platí

$$\lim \sqrt[k]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[k]{A}, & \text{pokud } A \in \mathbb{R}, \\ \infty, & \text{pokud } A = \infty. \end{cases}$$

Řešení. Pokud $A \in \mathbb{R}$, pak tvrzení vyplývá z Příkladu 2.2.49.

Nechť $A = \infty$ a $K \in \mathbb{R}$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > |K|^k$. Potom podle monotonie odmocniny (Věta **??**) pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, máme $\sqrt[k]{a_n} > |K| \geq K$, tedy $\lim \sqrt[k]{a_n} = \infty$. ♣

V následujících příkladech ukážeme použití výše vyložených vět.

2.3.37. Příklad. Vypočtěte $\lim\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.

Řešení. Podle Příkladu 2.3.3 a Příkladu 2.3.36 dostaneme $\lim \sqrt{n} = \infty$. Odtud a z věty o limitě vybrané posloupnosti (Věty 2.2.33) dále plyne, že

$\lim \sqrt{n+1} = \infty$. To znamená, že pro výpočet zadané limity nemůžeme užít větu o aritmetice limit přímočarým způsobem. Upravíme proto nejprve zadaný výraz tak, aby bylo možné bezprostředně použít větu o aritmetice limit. Pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Pak podle věty o limitě podílu (Věta 2.3.25(c)) můžeme počítat

$$\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

♣

2.3.38. Poznámka. Na závěr tohoto oddílu ještě uvedeme následující možné rozšíření pojmu posloupnost. Posloupností reálných čísel budeme rozumět každé zobrazení množiny $A \subset \mathbb{Z}$ do $\mathbb{R}$, přičemž A je zdola omezená a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\{n \in \mathbb{N};\ n \geq n_0\} \subset A$. Obecnější definicí chceme postihnout zejména následující dva případy. Posloupnost tvaru $n \mapsto a_n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, (značíme $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$) a pak posloupnosti, jejichž členy jsou definovány pro každé přirozené n vyjma konečné množiny, například posloupnost $\{\frac{1}{n-7}\}$, jejíž definiční obor je $\mathbb{N} \setminus \{7\}$.

V těchto případech zůstávají v platnosti všechny poznatky o posloupnostech, které jsme dosud odvodili. V případech, které budou vyžadovat jisté modifikace, na ně vždy explicitně upozorníme.

2.4. Hlubší věty o limitách

Uvedeme nejprve důležitou vlastnost monotónních posloupností.

2.4.1. Věta (limita monotónní posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost reálných čísel. Potom existuje $\lim a_n$. Je-li navíc $\{a_n\}$ neklesající, pak $\lim a_n = \sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Je-li $\{a_n\}$ nerostoucí, pak $\lim a_n = \inf\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že posloupnost $\{a_n\}$ je neklesající. Nechť navíc $\{a_n\}$ není shora omezená. Potom $\sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\} = \infty$. Zvolíme $K \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme index $n_0 \in \mathbb{N}$ takový, že $a_{n_0} \geq K$. Protože $\{a_n\}$ je neklesající, platí díky 2.1.16 pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, nerovnosti $a_n \geq a_{n_0} \geq K$. Odtud vyplývá, že $\lim a_n = \infty$.

Nyní předpokládejme, že $\{a_n\}$ je shora omezená, tedy $\sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$. Zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, a označíme $A = \sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Z definice suprema plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_0} > A - \varepsilon$. Protože však $\{a_n\}$ je neklesající, je $A - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Nerovnost $a_n < A + \varepsilon$ platí dokonce pro všechna $n \in \mathbb{N}$, neboť A je horní závorou množiny všech členů posloupnosti $\{a_n\}$. Ke zvolenému ε jsme tedy nalezli $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon.$$

To podle definice limity znamená, že $\lim a_n = A$.

Nyní předpokládejme, že $\{a_n\}$ je nerostoucí. Pak lze tvrzení dokázat obdobně, můžeme ale také postupovat následujícím způsobem. Snadno nahlédneme, že posloupnost $\{-a_n\}$ je neklesající. Podle již dokázané části věty je tedy $\lim(-a_n) = \sup\{-a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Podle Věty 1.6.15 odtud plyne, že $\lim(-a_n) = -\inf\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Konečně podle věty o limitě součinu (Věta 2.3.25(b)) dostáváme

$$\lim a_n = \lim(-1)(-a_n) = -\lim(-a_n) = \inf\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

■

2.4.2. Důsledek. Každá neklesající shora omezená posloupnost je konvergentní. Podobně každá nerostoucí zdola omezená posloupnost je konvergentní.

Důkaz. Nechť $\{a_n\}$ je neklesající shora omezená posloupnost reálných čísel. Z Věty 2.4.1 vyplývá, že $\lim a_n = \sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Z omezenosti posloupnosti shora dále plyne, že $\sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$. Posloupnost $\{a_n\}$ je tedy konvergentní. Je-li posloupnost $\{a_n\}$ nerostoucí a zdola omezená, pak lze důkaz provést obdobně. ■

Věta 2.4.1 umožňuje ověřit existenci limity posloupnosti, aniž by bylo nutné ji explicitně vypočítat. V některých případech je ale informace o existenci limity nezbytnou součástí jejího výpočtu. Tento jev ilustruje následující příklad.

2.4.3. Příklad. Nechť $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$. Spočtěte limitu posloupnosti $\{a_n\}$, která je zadána následujícím způsobem:

$$a_1 = \sqrt{c}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}. \tag{2.18}$$

Řešení. Nejprve si uvědomíme, že posloupnost $\{a_n\}$ je dobře definovaná. První člen je definován explicitně a je nezáporný. Předpokládáme-li, že a_n je definováno a je nezáporné, pak je definováno i a_{n+1} a je nezáporné. Podle principu matematické indukce je pak posloupnost $\{a_n\}$ definovaná a její členy jsou nezáporné.

Je-li $c = 0$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = 0$, a tedy $\lim a_n = 0$.

Předpokládejme tedy, že $c > 0$. Nejprve dokážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ je monotónní. Zřejmě platí $a_1 < a_2$. Jestliže pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n-1} < a_n$, pak

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} + c} < \sqrt{a_n + c} = a_{n+1}.$$

Podle principu matematické indukce je tedy posloupnost $\{a_n\}$ rostoucí.

Nyní dokážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ je shora omezená. Zřejmě platí $a_1 < \sqrt{c} + 1$. Předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < \sqrt{c} + 1$. Potom

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{a_n + c} < \sqrt{\sqrt{c} + 1 + c} < \sqrt{c + 2\sqrt{c} + 1} \\ &= \sqrt{(\sqrt{c} + 1)^2} = \sqrt{c} + 1. \end{aligned}$$

Z principu matematické indukce tedy plyne, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $a_n < \sqrt{c} + 1$, takže $\{a_n\}$ je shora omezená. Ověřili jsme, že posloupnost $\{a_n\}$ splňuje předpoklady věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1). Podle této věty má tedy posloupnost $\{a_n\}$ vlastní limitu. Označme ji symbolem A.

Posledním krokem řešení bude výpočet hodnoty A. Z (2.18) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + c$. Z věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.33) odvodíme, že také $\lim a_{n+1} = A$, a z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.25) dostaneme vztahy $\lim a_{n+1}^2 = A^2$ a $\lim(a_n + c) = A + c$. Získali jsme kvadratickou rovnici $A^2 = A + c$ pro neznámou hodnotu A, o které zatím víme jen, že existuje. Výpočtem zjistíme, že A je rovno buď $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4c})$ nebo $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4c})$. Hodnota $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4c})$ však nemůže být limitou posloupnosti $\{a_n\}$, protože je to záporné číslo a všechny prvky posloupnosti $\{a_n\}$ jsou nezáporné. To by bylo ve sporu s Větou 2.2.45(b) (do níž bychom dosadili $B = 0$ a $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$). Odtud vyplývá, že $\lim a_n = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4c})$. ♣

2.4.4. Důležitou součástí řešení předcházejícího příkladu bylo ověření existence limity posloupnosti $\{a_n\}$. Bez tohoto kroku by bylo řešení neúplné. Uvažujme posloupnost $\{b_n\}$ definovanou rekurentně předpisem

$$b_1 = -1, \quad b_{n+1} = -b_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Za předpokladu, že $\lim b_n$ existuje a je rovna prvku $A \in \mathbb{R}^*$, bychom podobně jako v řešení Příkladu 2.4.3 odvodili, že $A = -A$, a tedy $A = 0$. Limita posloupnosti $\{b_n\}$ ale není rovna 0, neboť $b_n = (-1)^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, jak lze snadno ověřit.

2.4.5. Věta (Cantorův princip vložených intervalů)**.** Nechť $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost uzavřených intervalů splňující:

- pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$,

- platí $\lim(b_n - a_n) = 0$.

Potom je množina $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ jednobodová.

Důkaz. Z předpokladu vyplývá, že posloupnost $\{a_n\}$ je neklesající a posloupnost $\{b_n\}$ je nerostoucí. Navíc pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq b_n \leq b_1$, takže posloupnost $\{a_n\}$ je shora omezená. Obdobně lze dokázat, že posloupnost $\{b_n\}$ je zdola omezená. Z Důsledku 2.4.2 vyplývá, že existují vlastní limity posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$. Označme $A = \lim a_n$ a $B = \lim b_n$. Protože $A, B \in \mathbb{R}$, je $B - A$ definovaný výraz. Z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.25) plyne, že $\lim(b_n - a_n) = B - A$. Podle předpokladu ale platí $\lim(b_n - a_n) = 0$, takže $A = B$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq A \leq b_n$, takže $A \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$.

Předpokládejme, že $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq y \leq b_n$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy platí $|y - A| \leq b_n - a_n$. Protože $\lim(b_n - a_n) = 0$, platí $y = A$. Odtud vyplývá, že $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{A\}$. ■

2.4.6. Věta (Bolzano[2]-Weierstrass[3])**.** Nechť $\{a_n\}$ je omezená posloupnost reálných čísel. Potom existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, která je konvergentní.

Důkaz. Posloupnost $\{a_n\}$ je omezená, a proto existují $m, M \in \mathbb{R}$ taková, že $m \leq a_n \leq M$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. V první části důkazu induktivně sestrojíme posloupnost do sebe vnořených uzavřených intervalů.

Položme $\alpha_1 = m$, $\beta_1 = M$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ máme zvolena čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ a $\beta_1, \dots, \beta_k$. Je-li množina $\{n \in \mathbb{N};\ a_n \in [\alpha_k, \frac{\alpha_k+\beta_k}{2}]\}$ nekonečná, pak položíme $\alpha_{k+1} = \alpha_k$ a $\beta_{k+1} = \frac{\alpha_k+\beta_k}{2}$. Je-li množina $\{n \in \mathbb{N};\ a_n \in [\alpha_k, \frac{\alpha_k+\beta_k}{2}]\}$ konečná, pak položíme $\alpha_{k+1} = \frac{\alpha_k+\beta_k}{2}$ a $\beta_{k+1} = \beta_k$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_k \leq \beta_k$ a $[\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}] \subset [\alpha_k, \beta_k]$. Navíc $\beta_k - \alpha_k = \frac{M-m}{2^{k-1}}$, a tedy $\lim(\beta_k - \alpha_k) = 0$. Podle Cantorova principu vložených intervalů je tedy množina $\bigcap_{k=1}^{\infty}[\alpha_k, \beta_k]$ jednobodová. Označme symbolem A její jediný prvek. Potom platí $\lim \alpha_k = \lim \beta_k = A$.

Nyní budeme induktivně vybírat podposloupnost posloupnosti $\{x_n\}$ konvergující k A. Položme $n_1 = 1$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ máme zvolena přirozená čísla $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ taková, že pro všechna $j \in \mathbb{N}$, $j \leq k$, platí $a_{n_j} \in [\alpha_j, \beta_j]$. Podle výše uvedené konstrukce je množina $\{n \in \mathbb{N};\ a_n \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]\}$ nekonečná. Navíc je množina $\{1, \dots, n_k\}$ zřejmě konečná. Odtud plyne, že množina $\{n \in \mathbb{N};\ n > n_k,\ a_n \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]\}$ je nekonečná. Tedy existuje $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ takové, že $n_{k+1} > n_k$ a $a_{n_{k+1}} \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_k \leq a_{n_k} \leq \beta_k$. Dle věty o dvou

---

[2]Bernard Bolzano (1781–1848)

[3]Karl Weierstrass (1815–1897)

strážnících tedy platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Protože $A \in \mathbb{R}$, nalezli jsme konvergentní podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}$. Odtud vyplývá tvrzení. ■

2.4.7. Nechť $\{a_n\}$ je shora omezená posloupnost reálných čísel. Položíme-li $b_n = \sup\{a_k;\ k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, pak je $\{b_n\}$ nerostoucí posloupnost reálných čísel. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) tedy existuje $\lim b_n$. Nechť je posloupnost $\{a_n\}$ zdola omezená. Položíme-li $c_n = \inf\{a_k;\ k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, pak je $\{c_n\}$ neklesající posloupnost reálných čísel, a tedy $\lim c_n$ opět existuje. Tyto úvahy ukazují, že následující definice je korektní, neboť v ní uvedené limity existují.

2.4.8. Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Pak definujeme

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{a_k;\ k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}, & \text{je-li } \{a_n\} \text{ shora omezená,} \\ \infty, & \text{je-li } \{a_n\} \text{ shora neomezená.} \end{cases}$$

Tuto hodnotu nazýváme **limes superior** posloupnosti $\{a_n\}$. Obdobně definujeme **limes inferior** posloupnosti $\{a_n\}$ předpisem

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{a_k;\ k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}, & \text{je-li } \{a_n\} \text{ zdola omezená,} \\ -\infty, & \text{je-li } \{a_n\} \text{ zdola neomezená.} \end{cases}$$

Pokud nemůže dojít k nedorozumění, budeme místo symbolů $\limsup_{n\to\infty} a_n$ a $\liminf_{n\to\infty} a_n$ psát pouze $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$.

2.4.9. Poznámka. V literatuře se často vyskytují symboly $\overline{\lim}\ a_n$ a $\underline{\lim}\ a_n$ označující $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$, v našem textu je ale nebudeme používat.

2.4.10. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Na rozdíl od limity posloupnosti, která nemusí existovat, hodnoty $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ existují a splňují $\limsup a_n \in \mathbb{R}^*$, $\liminf a_n \in \mathbb{R}^*$. Z definice limes inferior a limes superior plyne, že $\liminf a_n \leq \limsup a_n$. Hodnoty $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ se nemusí rovnat, jak ukazuje následující příklad.

2.4.11. Příklad. posloupnost $\{(-1)^n\}$, pro kterou platí $\limsup(-1)^n = 1$ a $\liminf(-1)^n = -1$.

2.4.12. Věta. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Potom $\lim a_n = A$ právě tehdy, když $\limsup a_n = \liminf a_n = A$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme nejprve, že platí $A \in \mathbb{R}$. Posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní, a tedy podle Věty **??** omezená. Můžeme tedy definovat posloupnosti reálných čísel $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$, kde $b_n = \sup\{a_k;\ k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}$ a $c_n = \inf\{a_k;\ k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak je posloupnost $\{b_n\}$ nerostoucí a posloupnost $\{c_n\}$ neklesající. Navíc zřejmě platí $c_n \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < \varepsilon$. Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > A - \varepsilon$, z definice infima dostáváme nerovnost $c_{n_0} \geq A - \varepsilon$. Podobně lze odvodit nerovnost $b_{n_0} \leq A + \varepsilon$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$A - \varepsilon \leq c_{n_0} \leq c_n \leq b_n \leq b_{n_0} \leq A + \varepsilon.$$

Podle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.2.45(b)) dostáváme

$$A - \varepsilon \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq A + \varepsilon.$$

Vzhledem k tomu, že ε bylo zvoleno libovolně, platí podle Lemmatu 1.6.13 $\limsup a_n = \liminf a_n = A$.

Je-li $A = \infty$, pak $\{a_n\}$ není shora omezená, ale je omezená zdola (Věta 2.3.20). Tedy podle definice dostáváme $\limsup a_n = \infty$ a $\liminf a_n = \lim c_n$. Nechť $K \in \mathbb{R}$. K němu existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > K$, a tedy také $c_n \geq K$. Odtud plyne $\lim c_n = \infty$, a tudíž $\liminf a_n = \infty$.

Je-li $A = -\infty$, postupujeme obdobně jako v předcházejícím případě.

$\Leftarrow$ Nejprve opět předpokládejme, že platí $A \in \mathbb{R}$. Potom je podle definice limes superior a limes inferior posloupnost $\{a_n\}$ omezená. Nechť posloupnosti $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou definovány stejně jako v předchozí části důkazu. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $c_n \leq a_n \leq b_n$. Navíc z předpokladu vyplývá, že $\lim c_n = \lim b_n = A$. Pomocí věty o dvou strážnících (Věta 2.2.47) tedy dostáváme $\lim a_n = A$.

Je-li $A = \infty$, pak je posloupnost $\{a_n\}$ zdola omezená, a tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $c_n \leq a_n$ a $\lim c_n = \infty$, takže z Věty 2.3.31 dostáváme $\lim a_n = \infty$.

Jestliže $A = -\infty$, pak postupujeme obdobně, přičemž místo Věty 2.3.31 použijeme Větu 2.3.32. ■

2.4.13. Věta. Nechť $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel. Potom

(a) $\liminf x_n + \liminf y_n \leq \liminf(x_n + y_n)$, pokud je výraz na levé straně definován,

(b) $\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$, pokud je výraz na pravé straně definován.

Důkaz. Dokážeme pouze tvrzení (b). Nejprve předpokládejme, že $\limsup x_n + \limsup y_n = \infty$. Potom je dokazovaná nerovnost triviální. Nechť nyní $\limsup x_n + \limsup y_n < \infty$. Potom jsou nyní obě posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ shora omezené, a tedy také posloupnost $\{x_n + y_n\}$ je shora omezená. Takže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí rovnost

$$\limsup(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k + y_k;\ k \in \mathbb{N}, k \geq n\}. \tag{2.19}$$

Označme

$$z_n = \sup\{x_k;\ k \in \mathbb{N}, k \geq n\} + \sup\{y_k;\ \ k \in \mathbb{N}, k \geq n\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Potom je posloupnost $\{z_n\}$ nerostoucí, a tedy podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) má limitu. Navíc z Věty 1.8.6(a) plyne pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\sup\{x_k + y_k;\ k \in \mathbb{N}, k \geq n\} \leq z_n.$$

Podle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.3.30(b)) platí

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{x_k + y_k;\ k \in \mathbb{N}, k \geq n\} \leq \lim_{n\to\infty} z_n. \tag{2.20}$$

Z definice limes superior a věty o limitě součtu (Věta 2.3.25(a)) pak dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \limsup x_n + \limsup y_n. \tag{2.21}$$

Konečně z (2.19), (2.20) a (2.21) plyne dokazované tvrzení.

Tvrzení (a) je možné dokázat obdobně. ■

2.4.14. Věta. Nechť $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel. Předpokládejme, že platí

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon x_n \leq y_n.$$

Potom $\limsup x_n \leq \limsup y_n$ a $\liminf x_n \leq \liminf y_n$.

Důkaz. Odvodíme pouze první nerovnost, druhou lze dokázat obdobně. Pokud je posloupnost $\{y_n\}$ shora neomezená, pak $\limsup y_n = \infty$ a nerovnost zřejmě platí. Pokud je posloupnost $\{y_n\}$ shora omezená, pak je shora omezená i posloupnost $\{x_n\}$. Dokazovaná nerovnost potom plyne z nerovnosti $\sup\{x_k;\ k \geq n\} \leq \sup\{y_k;\ k \geq n\}, n \in \mathbb{N}$, a z věty o limitě a uspořádání (Věta 2.3.30(b)). ■

2.4.15. Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že A je **hromadná hodnota** posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ z posloupnosti $\{a_n\}$ taková, že platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Množinu všech hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}$ značíme $H(\{a_n\})$.

2.4.16. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je její podposloupnost. Potom platí $H(\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}) \subset H(\{a_n\}_{n=1}^{\infty})$, neboť vybraná posloupnost z podposloupnosti posloupnosti $\{a_n\}$ je také vybranou posloupností z posloupnosti $\{a_n\}$. Jsou-li totiž $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ rostoucí posloupnosti posloupnosti přirozených čísel, pak také $\{n_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel.

2.4.17. Poznámka. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $m \in \mathbb{N}$. Potom je $\{a_{n+m}\}_{n=1}^{\infty}$ podposloupností posloupnosti $\{a_n\}$ a navíc platí

$$H(\{a_{n+m}\}_{n=1}^{\infty}) = H(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}).$$

Inkluze $H(\{a_{n+m}\}_{n=1}^{\infty}) \subset H(\{a_n\}_{n=1}^{\infty})$ plyne z 2.4.16. Nyní dokážeme opačnou inkluzi. Nechť $A \in H(\{a_n\}_{n=1}^{\infty})$. Pak existuje posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Posloupnost $\{n_{k+m}\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Poněvadž podle Lemmatu 2.2.34 pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $n_{k+m} \geq k + m > m$, je $\{a_{n_{k+m}}\}_{k=1}^{\infty}$ vybranou posloupností z posloupnosti $\{a_{n+m}\}_{n=1}^{\infty}$. Podle Věty 2.2.33 potom $\lim_{k\to\infty} a_{n_{k+m}} = A$, a proto $A \in H(\{a_{n+m}\}_{n=1}^{\infty})$.

2.4.18. Příklad. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel splňující $a \leq a_n \leq b$ pro nějaká $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, a pro každé $n \in \mathbb{N}$. Nechť A je hromadná hodnota posloupnosti $\{a_n\}$. Dokažte, že potom $A \in [a, b]$.

Řešení. Nechť $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost indexů taková, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Položme $b_k = a$ pro $k \in \mathbb{N}$. Potom $\lim_{k\to\infty} b_k = a$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{n_k} \geq b_k$. Podle Věty 2.2.45(b) platí $A \geq a$. Obdobně lze dokázat, že $A \leq b$. Tvrzení je dokázáno. ♣

2.4.19. Věta. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ jsou hromadnými hodnotami posloupnosti $\{a_n\}$ a pro každou hromadnou hodnotu A posloupnosti $\{a_n\}$ platí $\liminf a_n \leq A \leq \limsup a_n$.

Důkaz. Označme $\limsup a_n = A$. Předpokládejme nejprve, že $A \in \mathbb{R}$. Pak $\{a_n\}$ je shora omezená. Položme $b_n = \sup\{a_k;\ k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}$. Pak je posloupnost $\{b_n\}$ nerostoucí a $\lim b_n = A$. Protože $\lim b_n = A$, existuje $m_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $|b_{m_1} - A| < 1$. Z definice b_{m_1} vyplývá, že existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq m_1$, splňující $b_{m_1} \geq a_{n_1} > b_{m_1} - 1$. Pak platí $|b_{m_1} - a_{m_1}| < 1$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ máme určena přirozená čísla $m_1, \dots, m_k$ a $n_1, \dots, n_k$. Protože $\lim b_n = A$, existuje $m_{k+1} \in \mathbb{N}$ takové, že $m_{k+1} > m_k$ a $|b_{m_{k+1}} - A| < \frac{1}{k+1}$. Z definice $b_{m_{k+1}}$ vyplývá, že existuje $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, takové, že $n_{k+1} \geq m_{k+1}$ a $b_{m_{k+1}} \geq a_{n_{k+1}} > b_{m_{k+1}} - \frac{1}{k+1}$. Tím je podle principu matematické indukce konstrukce posloupností $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ provedena. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$|a_{n_k} - A| \leq |a_{n_k} - b_{m_k}| + |b_{m_k} - A| < \frac{2}{k},$$

a tedy $\lim a_{n_k} = A$. Tím jsme dokázali, že $A \in H(\{a_n\})$.

Předpokládejme nyní, že $A = \infty$. Potom je posloupnost $\{a_n\}$ shora neomezená. Existuje tedy $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_1} > 1$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ jsme již určili přirozená čísla $n_1, \dots, n_k$. Množina $\{a_j;\ j > n_k\}$

je shora neomezená. Můžeme tedy nalézt $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, $n_{k+1} > n_k$, takové, že $a_{n_{k+1}} > k+1$. Podle Věty 2.3.31 platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \infty$, takže $\infty \in H(\{a_n\})$.

Konečně předpokládejme, že $A = -\infty$. Podle 2.4.10 platí $\liminf a_n \leq -\infty$, tedy $\liminf a_n = -\infty$. To podle Věty 2.4.12 znamená, že $\lim a_n = -\infty$. Pro $k \in \mathbb{N}$ položme $n_k = k$. Potom je posloupnost $\{n_k\}$ rostoucí a platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, a tedy $-\infty \in H(\{a_n\})$.

Dokázali jsme, že $\limsup a_n \in H(\{a_n\})$. Obdobně lze dokázat, že $\liminf a_n \in H(\{a_n\})$.

Předpokládejme, že $y \in H(\{a_n\})$. Je-li $\limsup a_n = \infty$, pak zřejmě platí $y \leq \limsup a_n$. Je-li $\limsup a_n < \infty$, pak je posloupnost $\{a_n\}$ shora omezená a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq b_n$. Nechť $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel splňující $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = y$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{n_k} \leq b_{n_k}$, a tedy dle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.3.30(b)) platí $y \leq \limsup a_n$. Obdobně lze dokázat, že $y \geq \liminf a_n$. Tím je důkaz proveden. ■

2.4.20. Důsledek. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom je množina $H(\{a_n\})$ neprázdná.

Důkaz. Podle Věty 2.4.19 obsahuje množina $H(\{a_n\})$ prvek $\limsup a_n$, je tedy neprázdná. ■

2.4.21. Důsledek. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom platí $\limsup a_n = \max H(\{a_n\})$ a $\liminf a_n = \min H(\{a_n\})$.

Důkaz. Tvrzení plyne bezprostředně z Věty 2.4.19. ■

2.4.22. Důsledek. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Je-li $\lim a_n = A$, pak $H(\{a_n\}) = \{A\}$.

Důkaz. Je-li $\lim a_n = A$, pak podle Věty 2.4.12 platí $\limsup a_n = \liminf a_n = A$, takže tvrzení plyne z Věty 2.4.19. ■

2.4.23. Příklad. Nechť $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že $H(\{a_n\}) = \{-1, 1\}$.

Řešení. Protože podposloupnosti $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{a_{2k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{a_n\}$ splňují $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 1$ a $\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = -1$, dostáváme inkluzi $H(\{a_n\}) \supset \{-1, 1\}$.

Opačnou inkluzi dokážeme sporem. Nechť existuje $A \in \mathbb{R}^*$ takové, že $A \in H(\{a_n\}) \setminus \{-1, 1\}$. Potom existuje podposloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{a_n\}$ taková, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Podle Lemmatu 2.3.15 existuje $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_1 > 0$, takové, že $-1 \notin B(A, \varepsilon_1)$ a $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_2 > 0$, takové, že $1 \notin B(A, \varepsilon_2)$. Položme $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Potom $B(A, \varepsilon) \cap \{-1, 1\} = \emptyset$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí buď $a_{n_k} = 1$ nebo $a_{n_k} = -1$, a tedy $a_{n_k} \notin B(A, \varepsilon)$, což je ve sporu s tím, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Odtud plyne $H(\{a_n\}) \subset \{-1, 1\}$. Tím je tvrzení dokázáno. ♣

Na závěr tohoto oddílu uveďme ještě Bolzanovu-Cauchyovu[4] podmínku. Její význam ukazuje pak následující věta.

2.4.24. Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že $\{a_n\}$ splňuje **Bolzanovu-Cauchyovu podmínku**, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, m \geq n_0 \colon |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

2.4.25. Věta. Posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme nejprve, že posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu a označme tuto limitu A. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Z definice limity k tomuto ε nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < \varepsilon$. Potom pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, $n \geq n_0$, platí

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - A| + |A - a_m| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Posloupnost $\{a_n\}$ tedy splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.

$\Leftarrow$ Nyní naopak předpokládejme, že posloupnost $\{a_n\}$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $m, n \in \mathbb{N}, m \geq n_0, n \geq n_0$, platí $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Potom pro $m = n_0$ dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, nerovnosti $a_{n_0} - \varepsilon < a_n < a_{n_0} + \varepsilon$. Množina $\{a_j;\ j \in \mathbb{N},\ j \geq n_0\}$ je tedy omezená. Množina $\{a_j;\ j \in \mathbb{N},\ j < n_0\}$ je konečná, a proto je také omezená. Odtud plyne, že posloupnost $\{a_n\}$ je omezená, takže můžeme definovat posloupnosti $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jako v textu před Definicí 2.4.8. Z definice těchto posloupností vyplývají pro každé $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, odhady

$$a_{n_0} - \varepsilon \leq c_m \leq b_m \leq a_{n_0} + \varepsilon,$$

a tedy také

$$a_{n_0} - \varepsilon \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq a_{n_0} + \varepsilon.$$

Odtud dostáváme $\liminf a_n \in \mathbb{R}$, $\limsup a_n \in \mathbb{R}$ a

$$0 \leq \limsup a_n - \liminf a_n < 2\varepsilon,$$

a tedy, protože ε bylo zvoleno libovolně,

$$\liminf a_n = \limsup a_n \in \mathbb{R}.$$

Označíme-li $A = \liminf a_n$, pak podle Věty 2.4.12 platí $\lim a_n = A$. Jak víme, $A \in \mathbb{R}$, takže posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu. ■

2.4.26. Věta (Borelova věta[5])**.** Nechť I je uzavřený interval a $\mathcal{S}$ je množina otevřených intervalů taková, že $I \subset \bigcup \mathcal{S}$. Potom existuje konečná množina $\mathcal{S}_0 \subset S$ taková, že $I \subset \bigcup \mathcal{S}_0$.

[4] Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

[5] Émile Borel (1871–1956)

Důkaz. Nechť $I = [a, b]$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Označme symbolem M množinu všech $x \in [a, b]$, pro které existuje konečná množina $\mathcal{S}_x \subset \mathcal{S}$ taková, že $[a, x] \subset \bigcup \mathcal{S}_x$. Dle předpokladu existuje otevřený interval $I_a \in \mathcal{S}$ splňující $a \in I_a$. Položme $\mathcal{S}_a = \{I_a\}$. Potom je zřejmě $\mathcal{S}_a$ konečná množina a platí $[a, a] \subset \bigcup \mathcal{S}_a$. Tedy $a \in M$, takže množina M je neprázdná. Navíc je zřejmě b horní závorou množiny M, a tedy M je shora omezená. Označme $y = \sup M$. Z výše uvedených faktů vyplývá, že $y \in [a, b]$. Protože I_a je otevřený interval, existuje $x \in [a, b]$, $x > a$, takové, že $x \in I_a$. Pak zřejmě platí $[a, x] \subset \bigcup \mathcal{S}_a$, a tedy $x \in M$. To znamená, že $y > a$.

Dokážeme, že $y \in M$. Dle předpokladu existuje otevřený interval $I_y \in \mathcal{S}$ splňující $y \in I_y$. Tedy existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že $y - \delta > a$ a $(y - \delta, y] \subset I_y$. Položme $z = y - \frac{\delta}{2}$. Potom $z < y$, a tedy dle definice suprema existuje konečná množina $\mathcal{S}_z \subset \mathcal{S}$ splňující $[a, z] \subset \bigcup \mathcal{S}_z$. Položme $\mathcal{S}_y = \mathcal{S}_z \cup \{I_y\}$. Potom je $\mathcal{S}_y$ konečná množina otevřených intervalů. Předpokládejme, že $x \in [a, y]$. Je-li $x \in [a, z]$, potom $x \in \bigcup \mathcal{S}_z$. Je-li $x \in (z, y]$, potom $x \in I_y$. V každém případě platí $x \in \bigcup \mathcal{S}_y$, takže $[a, y] \subset \bigcup \mathcal{S}_y$. Odtud vyplývá, že $y \in M$.

Zbývá dokázat, že $y = b$. Předpokládejme, že $y < b$. Potom existuje otevřený interval $J_y \in \mathcal{S}$ splňující $y \in J_y$. Tedy existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $y + \varepsilon < b$ a $[y, y + \varepsilon) \subset J_y$. Potom pomocí obdobné úvahy jako výše lze dokázat, že $y + \varepsilon \in M$. To je spor s definicí suprema. Dokázali jsme tedy, že $b = \sup M$ a $b \in M$. Odtud vyplývá tvrzení věty. ■

2.5. Teoretické příklady k limitě posloupnosti

2.5.1. Příklad. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Dokažte, že $\lim a_n = A$ právě tehdy, když pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, je množina

$$\{n \in \mathbb{N};\ a_n \notin (A - \varepsilon, A + \varepsilon)\}$$

konečná.

Řešení. $\Leftarrow$ Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme

$$n_0 = \max\{n \in \mathbb{N};\ a_n \notin (A - \varepsilon, A + \varepsilon)\} + 1.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Protože ε bylo zvoleno libovolně, dokázali jsme, že $\lim a_n = A$.

$\Rightarrow$ Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Z definice limity k tomuto ε existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < \varepsilon$. Množina $\{n \in \mathbb{N};\ a_n \notin (A - \varepsilon, A + \varepsilon)\}$ je tudíž podmnožinou konečné množiny $\{n \in \mathbb{N};\ n < n_0\}$, a tedy je sama konečná. ♣

2.5.2. Příklad. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Dokažte, že
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0.$$

Řešení. Z Příkladu 1.9.9 víme, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí $cn^2 \leq a^n$, kde $c = \frac{(a-1)^2}{4}$. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, tedy platí
$$0 \leq \frac{n}{a^n} \leq \frac{1}{cn}.$$
Pro $n \in \mathbb{N}$ označme
$$a_n = 0,\ b_n = \frac{1}{cn} \text{ a } c_n = \frac{n}{a^n}.$$
Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí $a_n \leq c_n \leq b_n$ a navíc
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$
Z Věty o dvou strážnících (Věta 2.2.47) tedy dostáváme
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0.$$
♣

2.5.3. Příklad. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ a $a > 1$. Dokažte, že
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0.$$

Řešení. Nejprve dokážeme tvrzení pro $k = 1$. Označme $\varepsilon = a - 1$. Potom $\varepsilon > 0$, a tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí podle binomické věty (Věta 1.6.4)
$$a^n = (1+\varepsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon^k \geq \binom{n}{2} \varepsilon^2 = \frac{n(n+1)\varepsilon^2}{2}.$$
Tudíž pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí
$$0 < \frac{n}{a^n} \leq n \frac{2}{n(n+1)\varepsilon^2} = \frac{2}{\varepsilon^2(n+1)}.$$
Protože $\lim \frac{2}{\varepsilon^2(n+1)} = 0$, plyne z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.47), že $\lim \frac{n}{a_n} = 0$.

Nechť nyní $k \in \mathbb{N}$. Označme $b = a^{\frac{1}{k}}$. Pak $b > 1$, a tedy dle již dokázané části tvrzení platí $\lim \frac{n}{b^n} = 0$. Podle věty o aritmetice limit (Věta 2.2.37(b)) platí
$$\lim \frac{n^k}{a^n} = \lim \left(\frac{n}{b^n}\right)^k = 0^k = 0.$$
Tvrzení je dokázáno. ♣

2.5.4. Příklad. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Dokažte, že
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Řešení. Z Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.6.27) vyplývá existence čísla $m \in \mathbb{N}$ splňujícího $m \geq a$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, potom platí
$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdots \frac{a}{m} \frac{a}{m+1} \frac{a}{m+2} \cdots \frac{a}{n-1} \cdot \frac{a}{n}.$$
Potom pro každé $j \in \mathbb{N}$, $j \leq m-1$ platí
$$\frac{a}{j} \leq a$$
a pro každé $j \in \mathbb{N}$, $m \leq j \leq n-1$ platí
$$\frac{a}{j} \leq 1.$$
Celkem tedy dostáváme odhad
$$\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdots \frac{a}{m} \frac{a}{m+1} \frac{a}{m+2} \cdots \frac{a}{n-1} \cdot \frac{a}{n} \leq \frac{a^m}{n}.$$
Pro $n \in \mathbb{N}$ označíme
$$a_n = 0,\ b_n = \frac{a^m}{n} \text{ a } c_n = \frac{a^n}{n!}.$$
Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, platí $a_n \leq c_n \leq b_n$ a navíc
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$
Podle Věty o dvou strážnících (Věta 2.2.47) tedy dostáváme
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$
♣

2.5.5. Příklad. Dokažte, že
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Řešení. Nejprve pro každé $n \in \mathbb{N}$ vyjádříme n-tý člen posloupnosti ve tvaru
$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n}.$$
Postupně odhadneme každý činitel v tomto součinu a dostaneme
$$\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n} \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot 1 = \frac{1}{n}.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ označíme

$$a_n = 0,\ b_n = \frac{1}{n} \text{ a } c_n = \frac{n!}{n^n}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$ a navíc

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Podle Věty o dvou strážnících (Věta 2.2.47) tedy dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

♣

2.5.6. Příklad. Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

Řešení. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Potom zřejmě platí

$$n! \geq n(n-1)(n-2)\cdots\left[\frac{n}{2}\right] \geq \left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)^{\frac{n}{2}},$$

a tedy

$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

Dále zřejmě platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\left[\frac{n}{2}\right]} = \infty.$$

Z Věty 2.3.31 tudíž vyplývá, že také $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$. ♣

2.5.7. Příklad. Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \log n = \infty.$$

Řešení. Nechť $K \in \mathbb{R}$. Musíme nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, aby pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platilo $\log n > K$. Tato nerovnost je podle vlastností logaritmu a exponenciální funkce (Věta 1.8.15(h)) ekvivalentní nerovnosti

$$n > e^K. \tag{2.22}$$

Podle Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.6.27) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > e^K$ (například můžeme volit $n_0 = [e^K] + 1$). Potom pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí (2.22). Tím je tvrzení dokázáno. ♣

2.5.8. Příklad. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí a shora omezená a posloupnost $\{b_n\}$ je klesající a zdola omezená, a tedy jsou obě posloupnosti konvergentní, a že navíc platí $\lim a_n = \lim b_n$.

Řešení. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom z Bernoulliovy nerovnosti (Příklad 1.9.11) plyne odhad

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} > 1 + \frac{1}{n}.$$

Algebraickými úpravami odtud odvodíme nerovnost

$$\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} > \frac{n+1}{n},$$

a tedy

$$\frac{n}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2},$$

jinými slovy

$$b_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} = b_{n+1}.$$

Odtud vyplývá, že posloupnost $\{b_n\}$ je klesající.

Nyní dokážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom z Bernoulliovy nerovnosti (Příklad 1.9.11) plyne, že

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1 + n\frac{-1}{(n+1)^2} > 1 - \frac{1}{n+2}.$$

Odtud dostaneme

$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n > \frac{n+1}{n+2}.$$

Tedy

$$\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^n < \frac{n+2}{n+1}.$$

Dokázali jsme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1},$$

takže posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí.

Z monotonie posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ dostaneme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$2 = a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1 = 4.$$

Z věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) tedy plyne, že existují vlastní limity $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$. Podle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.2.45) platí $A, B \in [2, 4]$. Podle věty o limitě podílu (Věta 2.3.25(c)) tedy dále platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{B}{A}.$$

Podle definice posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ dále platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Tedy $A = B$. Tím je tvrzení dokázáno. ♣

2.5.9. Definice. Označíme

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Z Příkladu 2.5.8 vyplývá, že toto číslo je dobře definováno. Číslo e nazýváme **Eulerovým číslem**.[6]

2.5.10. Příklad. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost s kladnými členy. Dokažte, že platí

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Řešení. Nejprve dokážeme první nerovnost. Označme $B = \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Pokud $B = 0$, pak dokazovaná nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme nyní $B > 0$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$ takové, že $B > K > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon \frac{a_{n+1}}{a_n} > K.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(K^{n-n_0} a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Z Věty 2.4.14 dostaneme

$$\liminf \sqrt[n]{a_n} \geq \liminf \left(K^{n-n_0} a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

[6] Leonhard Euler (1707–1783)

Pomocí Příkladu 2.2.51 spočteme

$$\lim_{n\to\infty} \left(K^{n-n_0} a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} K \left(K^{-n_0} a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} = K.$$

Podle Věty 2.4.12 tedy také platí

$$\liminf_{n\to\infty} \left(K^{n-n_0} a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} = K,$$

takže celkem dostáváme

$$\liminf \sqrt[n]{a_n} \geq K.$$

Díky volbě K odtud plyne

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \geq B.$$

Tím je dokázána první nerovnost. Druhá nerovnost platí podle 2.4.10. Zbývá provést důkaz třetí nerovnosti. Označme $A = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Potom $A \in \mathbb{R}^*$, $A \geq 0$. Pokud $A = \infty$, pak dokazovaná nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon \frac{a_{n+1}}{a_n} < A + \varepsilon.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \dots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left((A+\varepsilon)^{n-n_0} a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{2.23}$$

Z Věty 2.4.14 dostaneme

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \left((A+\varepsilon)^{n-n_0} a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Pomocí Příkladu 2.2.51 spočteme

$$\lim_{n\to\infty} \left((A+\varepsilon)^{n-n_0} a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (A+\varepsilon) \left((A+\varepsilon)^{-n_0} a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} = A + \varepsilon.$$

Podle Věty 2.4.12 tedy také platí

$$\limsup_{n\to\infty} \left((A+\varepsilon)^{n-n_0} a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}} = A + \varepsilon,$$

a tedy celkem dostáváme

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq A + \varepsilon.$$

Díky volbě ε odtud plyne, že $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq A$. Tím je dokázána třetí nerovnost. ♣

2.5.11. Příklad. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel splňujících $b_k \in H(\{a_n\})$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Nechť dále $b \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{k\to\infty} b_k = b$. Dokažte, že potom $b \in H(\{a_n\})$.

Řešení. Položme $\varepsilon = 1$. Nalezneme $k_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $b_{k_1} \in B(b, 1)$. Z definice hromadného bodu plyne, že pak existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_1} \in B(b, 1)$.

Nechť $j \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že již máme určena přirozená čísla $n_1, n_2, \cdots, n_j$. Potom existuje $k_{j+1} \in \mathbb{N}$ takové, že $b_{k_{j+1}} \in B(b, \frac{1}{j+1})$. Nalezneme $n_{j+1} \in \mathbb{N}$ takové, že $n_{j+1} > n_j$ a $a_{n_{j+1}} \in B(b, \frac{1}{j+1})$.

Podle principu matematické indukce takto zkonstruujeme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ splňující $\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = b$. Tedy b je hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}$. ♣

2.5.12. Příklad. Nechť $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dokažte, že pro hromadné body posloupnosti $\{a_n\} = \{n\alpha - [n\alpha]\}$ platí $H(\{a_n\}) = [0, 1]$.

Řešení. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$, a $x \in (\varepsilon, 1-\varepsilon)$. Nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $m > \frac{1}{\varepsilon}$.

Nyní dokážeme, že platí výrok

$$\exists p \in \mathbb{Z}\ \exists q \in \mathbb{N} : |\alpha q - p| < \frac{1}{m} < \varepsilon. \tag{2.24}$$

Pro $k \in \{0, \ldots, m\}$ položme $x_k = \alpha k - [\alpha k]$. Pak pro každé takové k platí $x_k \in [0, 1)$. Interval $[0, 1)$ je sjednocením m intervalů tvaru

$$[0, \tfrac{1}{m}),\ [\tfrac{1}{m}, \tfrac{2}{m}),\ \ldots,\ [\tfrac{m-1}{m}, 1).$$

Existuje tedy alespoň jeden z uvedených intervalů, který obsahuje dva členy posloupnosti $\{x_k\}_{k=0}^{m}$. Předpokládejme, že jde o prvky x_i a x_j, kde $i < j$. Pak platí $|x_j - x_i| < \frac{1}{m}$. Položme $p = [\alpha j] - [\alpha i]$ a $q = j - i$. Potom $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ a platí

$$|q\alpha - p| = \big|(j-i)\alpha - ([\alpha j] - [\alpha i])\big| = |x_j - x_i| < \frac{1}{m}.$$

Tím je dokázána platnost výroku (2.24).

Dokážeme, že $q\alpha - p \neq 0$. Kdyby $q\alpha - p = 0$, pak by $\alpha = \frac{p}{q}$, což není možné, protože α je iracionální.

Nalezneme $n_0 \in \mathbb{Z}$ splňující

$$n_0(q\alpha - p) \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon). \tag{2.25}$$

Odtud plyne, že $n_0 \neq 0$, neboť $0 \notin (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Dále platí $[n_0(\alpha q - p)] = 0$, a tedy $n_0 p = [n_0 \alpha q]$.

Je-li $n_0 > 0$, položíme $n = n_0 q$. Potom $n \in \mathbb{N}$ a z (2.25) vyplývá, že

$$a_n = n_0 \alpha q - [n_0 \alpha q] \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon),$$

tedy $|a_n - x| < \varepsilon$. Podobně jako v řešení Příkladu **??** odtud vyplývá, že $x \in H(\{a_n\})$. Protože ε i $x \in (0,1)$ byla zvolena libovolně, plyne odtud, že $(0,1) \subset H(\{a_n\})$. Podle Příkladu 2.5.11 dostáváme $[0,1] \subset H(\{a_n\})$. Inkluze $H(\{a_n\}) \subset [0,1]$ plyne z Věty 2.2.45. Tím je tvrzení dokázáno. ♣

2.5.13. Příklad (Stolzova věta)**.** Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $\{b_n\}$ je rostoucí posloupnost kladných reálných čísel splňující $\lim b_n = \infty$. Nechť $A \in \mathbb{R}^*$. Předpokládejme, že platí

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = A.$$

Dokažte, že potom $\lim \frac{a_n}{b_n} = A$.

Důkaz. Položme $a_0 = b_0 = 0$. Předpokládejme nejprve, že $A > -\infty$. Zvolme $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha < A$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$ platí

$$\frac{a_k - a_{k-1}}{b_k - b_{k-1}} > \alpha.$$

Nechť $n \in \mathbb{N}, n > k_0$. Potom

$$\frac{a_n}{b_n} = \sum_{k=1}^{k_0} \frac{a_k - a_{k-1}}{b_n} + \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{a_k - a_{k-1}}{b_n}.$$

Pro druhý sčítanec na pravé straně poslední rovnosti platí odhad

$$\sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{a_k - a_{k-1}}{b_n} = \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{b_k - b_{k-1}}{b_n} \cdot \frac{a_k - a_{k-1}}{b_k - b_{k-1}} \geq \alpha \frac{b_n - b_{k_0}}{b_n}.$$

Protože podle věty o aritmetice limit a z předpokladu $\lim b_n = \infty$ plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{a_k - a_{k-1}}{b_n} = 0,$$

a navíc zřejmě

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n - b_{k_0}}{b_n} = 1,$$

dostáváme celkem

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \geq \alpha.$$

Protože $\alpha < A$ bylo zvoleno libovolně, plyne odtud

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \geq A.$$

Tato nerovnost platí tedy pro každé $A \in \mathbb{R}^*$, neboť pro $A > -\infty$ jsme ji právě dokázali a pro $A = -\infty$ je triviální. Obdobným způsobem odvodíme nerovnost

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq A.$$

Odtud plyne

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A.$$

Tvrzení věty je dokázáno. ∎

2.5.14. Příklad. Každá posloupnost reálných čísel má monotónní podposloupnost.

Řešení. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Předpokládejme nejprve, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ má množina $\{a_n;\ n \in \mathbb{N},\ n \geq m\}$ největší prvek. Označme $n_0 = 0$. Nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$a_{n_1} = \max\{a_n;\ n \geq 1\}.$$

Předpokládejme nyní, že máme nalezena přirozená čísla $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Zvolíme $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, $n_{k+1} > n_k$ takové, že

$$a_{n_{k+1}} = \max\{a_n;\ n \geq n_k + 1\}.$$

Podle principu matematické indukce takto zkonstruujeme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ splňující

$$a_{n_j} = \max\{a_n;\ n \geq n_{j-1} + 1\}, \quad j = 2, \ldots, k.$$

Posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je pak vybranou posloupností z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a zřejmě je nerostoucí.

Nyní předpokládejme, že existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že množina $\{a_n;\ n \in \mathbb{N},\ n \geq m\}$ nemá největší prvek. Potom pro každé $m' \in \mathbb{N}$, $m' \geq m$ nemá množina $\{a_n;\ n \geq m'\}$ největší prvek. Položme $n_1 = m$. Předpokládejme nyní, že máme zvolena přirozená čísla $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Množina $\{a_n;\ n \geq n_k\}$ nemá podle předpokladu největší prvek. Protože je a_{n_k} jejím prvkem, existuje $n_{k+1} > n_k$ takové, že

$$a_{n_{k+1}} > a_{n_k}.$$

Podle principu matematické indukce takto zkonstruujeme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ splňující

$$a_{n_1} < a_{n_2} < \cdots < a_{n_k}.$$

Posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je pak vybranou posloupností z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a zřejmě je rostoucí. Tím je tvrzení dokázáno. ♣

2.5.15. Poznámka. Příklad 2.5.14 lze následujícím způsobem využít k alternativnímu důkazu Bolzanovy-Weierstrassovy věty. Je-li $\{a_n\}$ omezená posloupnost reálných čísel, lze z ní vybrat podle Příkladu 2.5.14 vybrat monotónní podposloupnost, která bude opět omezená. Taková posloupnost je konvergentní podle Důsledku 2.4.2.

2.6. Početní příklady k limitě posloupnosti

2.6.1. Příklad. Nechť $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{2}{3}$ a posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definována předpisem

$$a_n = \left(\frac{x^3}{3x-2}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vyšetřete, pro která reálná čísla x je posloupnost $\{a_n\}$ monotónní a určete typ její monotonie v závislosti na parametru x.

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{2}{3}$, je $\{a_n\}$ geometrická posloupnost. Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$ označíme $q_x = \frac{x^3}{3x-2}$. Podle Příkladu 2.1.18 je tato posloupnost monotónní právě tehdy, když platí $q_x \geq 0$. Navíc je konstantní právě pro $q_x \in \{0, 1\}$. Bude užitečné si uvědomit, že pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{2}{3}$, platí

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2).$$

Je-li $x \in (\frac{2}{3}, \infty)$, je $q_x \geq 0$. Pro tato x dále platí, že $x^3 - 3x + 2 \geq 0$, tj. $q_x \geq 1$. Navíc $q_x > 1$ pro $x \in (\frac{2}{3}, \infty) \setminus \{1\}$ a $q_x = 1$ pro $x = 1$. Tedy posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí pro $x \in (\frac{2}{3}, \infty) \setminus \{1\}$ a konstantní pro $x = 1$.

V případě $x \in (-\infty, \frac{2}{3})$ platí $q_x \geq 0$ právě tehdy, když $x \leq 0$. Dále je $q_x > 1$ právě tehdy, když $x^3 - 3x + 2 < 0$, což nastává právě pro $x \in (-\infty, -2)$. Nakonec si povšimneme, že $q_x \in \{0, 1\}$ právě tehdy, když $x \in \{0, -2\}$. Zadaná posloupnost je proto rostoucí pro $x \in (-\infty, -2)$, klesající pro $x \in (-2, 0)$ a konstantní pro $x \in \{-2, 0\}$.

Shrneme-li přecházející úvahy, dostáváme, že

$$\{a_n\} \begin{cases} \text{je rostoucí pro} & x \in (-\infty, -2) \cup (\frac{2}{3}, 1) \cup (1, \infty), \\ \text{je klesající pro} & x \in (-2, 0), \\ \text{je konstantní pro} & x \in \{-2, 0, 1\}, \\ \text{není monotónní pro} & x \in (0, \frac{2}{3}). \end{cases}$$

♣

2.6.2. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-3}{n^3-1}.$$

Řešení. Výraz $\frac{2n^2+n-3}{n^3-1}$ je podílem hodnot dvou polynomů v bodech n, přičemž polynom v čitateli má stupeň 2 a polynom ve jmenovateli má stupeň 3. Vydělíme čitatele i jmenovatele výrazem n^3, tedy mocninou čísla n odpovídající vyššímu z obou stupňů. Podle Věty o aritmetice limit (Věta 2.3.25) postupně dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-3}{n^3-1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n^3}}{1-\frac{1}{n^3}}\\ &= \frac{\lim_{n\to\infty} 2\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}-\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^3}}{\lim_{n\to\infty} 1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}\\ &= \frac{0+0-0}{1-0}=0.\end{aligned}$$

♣

2.6.3. Příklad. Nechť $a, b \in (0,1)$. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}.$$

Řešení. Z Příkladu 1.6.6 plyne, že

$$\frac{1+a+\cdots+a^n}{1+b+\cdots+b^n} = \frac{(1-b)(1-a^{n+1})}{(1-a)(1-b^{n+1})}.$$

Z Příkladu 2.3.33 a Věty o aritmetice limit (Věta 2.3.25) dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} 1-a^{n+1} = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} a \lim_{n\to\infty} a^n = 1$$

a obdobně také

$$\lim_{n\to\infty} 1-b^{n+1} = 1.$$

Z věty o aritmetice limit pak vyplývá, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+a+\ldots+a^n}{1+b+\ldots+b^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-b}{1-a} \cdot \frac{\lim_{n\to\infty}(1-a^{n+1})}{\lim_{n\to\infty}(1-b^{n+1})} = \frac{1-b}{1-a}.$$

♣

2.6.4. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}.$$

Řešení. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom z binomické věty dostaneme

$$(n+4)^{100} = n^{100} + \binom{100}{1} 4n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i} 4^i n^{100-i}$$

a podobně

$$(n+3)^{100} = n^{100} + \binom{100}{1} 3n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i} 3^i n^{100-i}.$$

Tedy

$$(n+4)^{100} - (n+3)^{100} = 100n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i} (4^i - 3^i) n^{100-i}.$$

Obdobným postupem lze dokázat, že

$$(n+2)^{100} - n^{100} = 200n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i} 2^i n^{100-i}.$$

Odtud a z Věty o aritmetice limit (Věta 2.3.25) vyplývá, že

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{100} - (n+3)^{100}}{(n+2)^{100} - n^{100}} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{100n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i} (4^i - 3^i) n^{100-i}}{200n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i} 2^i n^{100-i}} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{100 + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i} (4^i - 3^i) \frac{1}{n^{i-1}}}{200 + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i} 2^i \frac{1}{n^{i-1}}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

♣

2.6.5. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}).$$

Řešení. Bude užitečné si uvědomit, že větu o aritmetice limit (Věta 2.3.25) nemůžeme použít přímo, protože

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1} = \infty,$$

a tedy výraz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1}$$

není definován. Zapíšeme výraz $\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}$ ve tvaru zlomku

$$\frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}}{1},$$

a tento zlomek rozšíříme výrazem $\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}$. Dostaneme

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1} &= \frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}\\ &= \frac{n^2+n-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}\\ &= \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}.\end{aligned}$$

Nyní rozšíříme výsledný zlomek výrazem $\frac{1}{n}$. Dostaneme

$$\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1} = \frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}.$$

Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 \le \sqrt{1+\frac{1}{n}} \le 1+\frac{1}{n} \quad \text{a} \quad 1 \le \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \le 1+\frac{1}{n^2},$$

plyne z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.47), že

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Celkem tedy z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.25) vyplývá, že

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}) &= \frac{\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} + \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\\ &= \frac{1-0}{1+1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

♣

2.6.6. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}).$$

Řešení. Podobně jako v předcházejícím příkladu, ani zde nelze ihned využít věty o aritmetice limit. Protože

$$(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}\,\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}) = 1,$$

platí

$$\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}=\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}\,\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}.$$

Tento zlomek rozšíříme výrazem $\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$. Dostaneme

$$\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}=\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}}{\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

Pro každé $n\in\mathbb{N}$ dále platí

$$1\le\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\le\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n})^2}\le 1+\frac{1}{n},$$

a tedy z Věty o dvou strážnících (Věta 2.2.47) dostaneme

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n})^2}=1.$$

Z Příkladů 2.2.38 a 2.2.49 vyplývá, že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}=0.$$

Kombinací odhadů pak pomocí věty o aritmetice limit (Věta 2.3.25) dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})&=\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n})^2}+\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+\lim_{n\to\infty}1}\\&=\frac{0}{1+1+1}=0.\end{aligned}$$

♣

2.6.7. Příklad. Vypočtěte $\lim\left(\sqrt{4n^2-n}-2n\right)$.

Řešení. Uvědomíme si, že nelze užít větu o limitě součtu, protože $\lim\sqrt{4n^2-n}=\infty$ a $\lim\sqrt{n(4n-1)}=\infty$ (Věta 2.3.25(b) a Příklad 2.3.36) a $\lim(-2n)=-\infty$. Nejprve rozšíříme n-tý člen naší posloupnosti výrazem

$$\frac{\sqrt{4n^2-n}+2n}{\sqrt{4n^2-n}+2n}$$

a použijeme vzorec $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, kde položíme $a=\sqrt{4n^2-n}$, $b=2n$. Dostaneme tak

$$\sqrt{4n^2-n}-2n=\left(\sqrt{4n^2-n}-2n\right)\cdot\frac{\sqrt{4n^2-n}+2n}{\sqrt{4n^2-n}+2n}=\frac{-n}{\sqrt{4n^2-n}+2n}.$$

Tento zlomek ještě rozšíříme výrazem $\frac{1}{n}$ a dostaneme

$$\sqrt{4n^2-n}-2n=\frac{-1}{\sqrt{4-\frac{1}{n}}+2}.$$

Protože poslední rovnost platí pro každé $n\in\mathbb{N}$, obdržíme podle Věty 2.3.25 a Příkladu 2.2.49

$$\lim\left(\sqrt{4n^2-n}-2n\right)=\lim\frac{-1}{\sqrt{4-\frac{1}{n}}+2}=-\frac{1}{4}.$$

♣

2.6.8. Příklad. Vypočtěte $\lim\frac{n\sqrt{2n+5}-3\sqrt[3]{2n}}{\sqrt{n^3+8}+\sqrt[3]{n^4}}$.

Řešení. Nejprve provedeme následující *neformální* úvahu. Čísla 5 a 8, která vystupují pod druhými odmocninami, jsou malá ve srovnání s n, které neomezeně roste. Jestliže tato čísla zanedbáme, budou ve zlomku figurovat následující mocniny proměnné n: $n^{\frac{3}{2}}, n^{\frac{1}{3}}, n^{\frac{3}{2}}$ a $n^{\frac{4}{3}}$. Nejvyšší exponent je $\frac{3}{2}$. Na základě této předběžné úvahy rozšíříme zlomek výrazem $n^{-\frac{3}{2}}$. Dostaneme tak

$$\frac{n\sqrt{2n+5}-3\sqrt[3]{2n}}{\sqrt{n^3+8}+\sqrt[3]{n^4}}=\frac{\sqrt{2+\frac{5}{n}}-3\sqrt[6]{\frac{4}{n^7}}}{\sqrt{1+\frac{8}{n^3}}+\sqrt[6]{\frac{1}{n}}}.$$

Limitu posledního výrazu snadno spočteme na základě Věty 2.3.25 o aritmetice limit a Příkladu 2.3.36:

$$\lim\frac{\sqrt{2+\frac{5}{n}}-3\sqrt[6]{\frac{4}{n^7}}}{\sqrt{1+\frac{8}{n^3}}+\sqrt[6]{\frac{1}{n}}}=\frac{\lim\sqrt{2+\frac{5}{n}}-3\lim\sqrt[6]{\frac{4}{n^7}}}{\lim\sqrt{1+\frac{8}{n^3}}+\lim\sqrt[6]{\frac{1}{n}}}=\sqrt{2}.$$

♣

2.6.9. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n^2+1}\right).$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1} = \sqrt[6]{(n^3+1)^2} - \sqrt[6]{(n^2+1)^3}.$$

Dále pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$(a^6 - b^6) = (a-b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5).$$

Tuto identitu aplikujeme na čísla

$$a = \sqrt[6]{(n^3+1)^2} \quad \text{a} \quad b = \sqrt[6]{(n^2+1)^3}$$

a dostaneme

$$\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1} = \frac{(n^3+1)^2 - (n^2+1)^3}{\sqrt[6]{(n^3+1)^{10}} + \sqrt[6]{(n^3+1)^8(n^2+1)^3} + \ldots + \sqrt[6]{(n^2+1)^{15}}}.$$

Tento zlomek rozšíříme výrazem $\frac{1}{n^5}$ a obdržíme

$$\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1} = \frac{-3\frac{1}{n} + 2\frac{1}{n^2} - 3\frac{1}{n^3}}{\sqrt[6]{(1+\frac{1}{n^3})^{10}} + \sqrt[6]{(1+\frac{1}{n^3})^8(1+\frac{1}{n^2})^3} + \ldots + \sqrt[6]{(1+\frac{1}{n^2})^{15}}},$$

a tedy

$$n(\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}) = \frac{-3 + 2\frac{1}{n} - 3\frac{1}{n^2}}{\sqrt[6]{(1+\frac{1}{n^3})^{10}} + \sqrt[6]{(1+\frac{1}{n^3})^8(1+\frac{1}{n^2})^3} + \ldots + \sqrt[6]{(1+\frac{1}{n^2})^{15}}}.$$

Kombinací Příkladů 2.2.9, 2.2.38, 2.2.49 a věty o aritmetice limit (Věta 2.3.25) konečně dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}) = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}.$$

♣

2.6.10. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}).$$

Řešení. Pokud bychom ihned použili větu o limitě součinu, tak dostaneme neurčitý výraz $\infty \cdot 0$. Zkusíme si tedy zadaný výraz nejprve upravit za použití vzorce

$$(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}).$$

Snadno dostaneme

$$\sqrt{n}(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}) = \sqrt{n}(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})\frac{\sqrt[n]{3^{n-1}}+\sqrt[n]{3^{n-2}}\sqrt[n]{2}+\ldots+\sqrt[n]{2^{n-1}}}{\sqrt[n]{3^{n-1}}+\sqrt[n]{3^{n-2}}\sqrt[n]{2}+\ldots+\sqrt[n]{2^{n-1}}}$$
$$= \frac{\sqrt{n}(3-2)}{\sqrt[n]{3^{n-1}}+\sqrt[n]{3^{n-2}}\sqrt[n]{2}+\ldots+\sqrt[n]{2^{n-1}}}.$$

Nyní si stačí uvědomit, že ve jmenovateli posledního zlomku je n členů z nichž každý je větší než 1, a odhadneme tedy

$$0 \leq \sqrt{n}(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}) \leq \frac{\sqrt{n}}{n}.$$

Z $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ dostáváme, že hledaná limita je rovna 0 podle věty o dvou strážnících. ♣

2.6.11. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+n^2}{n^3+n!}.$$

Řešení. Výraz $\frac{3^n+n^2}{n^3+n!}$ obsahuje kromě mocnin čísla n navíc exponenciální výraz 3^n a výraz $n!$. Z předcházejících příkladů vyplývá, že bude výhodné rozšířit čitatele i jmenovatele výrazem $\frac{1}{n!}$. Dostaneme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+n^2}{n^3+n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^n}{n!}+\frac{n^2}{n!}}{\frac{n^3}{n!}+1} = \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}+\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n!}}{\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n!}+\lim_{n\to\infty}1}.$$

Podle Příkladu 2.5.4 pro $a=3$ máme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!} = 0.$$

Podle Příkladů 2.5.3 a 2.5.4 a podle Věty o aritmetice součinu (Věta 2.3.25(b)) je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}\frac{2^n}{n!} = 0\cdot 0 = 0.$$

Obdobně lze dokázat, že platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n!} = 0.$$

Podle Věty o dvou strážnících (Věta 2.2.47) tedy dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+n^2}{n^3+n!} = \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}+\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n!}}{\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n!}+\lim_{n\to\infty}1} = \frac{0+0}{0+1} = 0.$$

♣

2.6.12. Příklad. Spočtěte limitu
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}.$$

Řešení. Z věty o vlastnostech funkce sin (Věta 1.8.17(a)) vyplývá, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí
$$-1 \leq \sin(n!) \leq 1.$$
Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí
$$\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} = \frac{n}{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$
Kombinací odhadů dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}$
$$-\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \leq -\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} \leq \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1} \leq \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$
Z definice limity dokážeme, že
$$\lim_{n\to\infty}(-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0.$$

Vskutku, nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Potom z Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.6.27) plyne existence $n_0 \in \mathbb{N}$ takového, že $n_0 > \frac{1}{\varepsilon^3}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí
$$\left|-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n_0}} < \varepsilon,$$
a tedy
$$\lim_{n\to\infty}(-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}) = 0.$$
Z Věty 2.2.23 pak vyplývá, že
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ označíme
$$a_n = -\frac{1}{\sqrt[3]{n}},\ b_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \text{ a } c_n = \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}.$$
Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$ a navíc
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Podle Věty o dvou strážnících (Věta 2.2.47) tedy dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1} = 0.$$

♣

2.6.13. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n}.$$

Řešení. Podle Příkladu 1.9.8 pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, platí

$$n^2 \leq 2^n \leq 3^n.$$

Pro každé takové $n \in \mathbb{N}$ tedy platí

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 3^n + 3^n} = 3\sqrt[n]{3}.$$

Podle Příkladu 2.2.51 a věty o aritmetice limit (Věta 2.3.25) platí

$$\lim_{n\to\infty} 3\sqrt[n]{3} = 3.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ označíme

$$a_n = 3, \quad b_n = \sqrt[n]{3}, \quad c_n = \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ platí

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 3.$$

Z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.47) tedy plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n} = 3.$$

♣

2.6.14. Příklad. Nechť $a_n = [\sqrt[3]{n^3 + 8n^2} - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2}]$, $n \in \mathbb{N}$. Spočtěte $\lim a_n$.

Řešení. Označme $b_n = \sqrt[3]{n^3 + 8n^2} - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{6n^2}{(n^3 + 8n^2)^{\frac{2}{3}} + \big((n^3 + 8n^2)(n^3 + 2n^2)\big)^{\frac{1}{3}} + (n^3 + 2n^2)^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{6}{(1 + \frac{8}{n})^{\frac{2}{3}} + \big((1 + \frac{8}{n})(1 + \frac{2}{n})\big)^{\frac{1}{3}} + (1 + \frac{2}{n})^{\frac{2}{3}}}. \end{aligned}$$

Limita posloupnosti $\{b_n\}$ je tedy rovna 2. Protože

$$3 < \left(1 + \frac{8}{n}\right)^{\frac{2}{3}} + \left((1 + \frac{8}{n})(1 + \frac{2}{n})\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

máme $b_n < 2$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Zvolme nyní $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $b_n > 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Pro tato n pak platí $1 < b_n < 2$, a tedy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} [b_n] = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

♣

2.6.15. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - \left[\frac{n^3}{100}\right] 100}{\sqrt{n}}.$$

Řešení. Na většinu jednoduchých příkladů s celými částmi stačí použít elementární odhad

$$x - 1 \leq [x] \leq x \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R}.$$

Díky tohoto odhadu dostaneme

$$0 = \frac{n^3 - \frac{n^3}{100} 100}{\sqrt{n}} \leq \frac{n^3 - \left[\frac{n^3}{100}\right]}{\sqrt{n}} \leq \frac{n^3 - \left(\frac{n^3}{100} - 1\right) 100}{\sqrt{n}} = \frac{100}{\sqrt{n}}.$$

Vzhledem k $\lim_{n\to\infty} \frac{100}{\sqrt{n}} = 0$ dostáváme, že hledaná limita je rovna 0 podle věty o dvou strážnících. ♣

2.6.16. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sin(\frac{n\pi}{2}).$$

Řešení. Nechť $A \in \mathbb{R}$ a $n_0 \in \mathbb{N}$. Položme $\varepsilon = 1$. Je-li $A \geq 0$, pak položíme $n = 4n_0 + 3$. Potom zřejmě platí $n \geq n_0$ a

$$|\sin(\frac{n\pi}{2}) - A| = |-1 - A| = 1 + A \geq 1 = \varepsilon.$$

Je-li $A < 0$, pak položíme $n = 4n_0 + 1$. Potom opět $n \geq n_0$ a navíc platí

$$|\sin(\frac{n\pi}{2}) - A| = |1 - A| = 1 - A \geq 1 = \varepsilon.$$

Z kombinace obou případů vyplývá výrok

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \colon |\sin(\frac{n\pi}{2}) - A| \geq \varepsilon.$$

Z 2.2.11 vyplývá, že posloupnost $\sin(\frac{n\pi}{2})$ nemá vlastní limitu. Z vlastností funkce sin (Věta 1.8.17(a)) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $-1 \leq \sin(\frac{n\pi}{2}) \leq 1$. Posloupnost je tedy omezená, a proto nemůže mít ani nevlastní limitu. ♣

2.6.17. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označíme

$$a_n = (-1)^n \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ vyjádříme výraz $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ve tvaru zlomku

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{1},$$

a tento zlomek rozšíříme výrazem $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$. Dostaneme

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}},$$

a tedy

$$\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Poslední zlomek rozšíříme výrazem $\frac{1}{\sqrt{n}}$ a dostaneme

$$\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}.$$

Z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.25) tedy dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{2}.$$

Odtud a opět z věty o aritmetice limit dostaneme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \frac{1}{2},$$

zatímco

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = -\frac{1}{2}.$$

Odtud a z 2.2.35 plyne, že posloupnost $\{a_n\}$ je divergentní. ♣

2.6.18. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2 \cdot n!}{(n-1)! + 2^n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + n \right).$$

Řešení. Řešení příkladu započneme pozorováním, že

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n \in \{4k;\ k \in \mathbb{N}\}, \\ 1, & n \in \{4k+1;\ k \in \mathbb{N}\}, \\ 0, & n \in \{4k+2;\ k \in \mathbb{N}\}, \\ -1, & n \in \{4k+3;\ k \in \mathbb{N}\}. \end{cases}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ dále platí

$$\frac{2 \cdot n!}{(n-1)! + 2^n} = \frac{2n}{1 + \frac{2^n}{(n-1)!}}.$$

Díky Větě 2.3.25 a Příkladu 2.5.4 tak máme rovnosti

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2 \cdot n!}{(n-1)! + 2^n} + n\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2}{1 + \frac{2^n}{(n-1)!}} + 1\right) = \infty$$

a

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2 \cdot n!}{(n-1)! + 2^n} + n\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(-\frac{2}{1 + \frac{2^n}{(n-1)!}} + 1\right) = -\infty.$$

Uvažujeme-li tedy vybrané podposloupnosti $\{a_{4k+1}\}$ a $\{a_{4k+3}\}$, z právě vypočtených limit dostáváme díky Větě2.3.22

$$\lim_{k\to\infty} a_{4k+1} = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} a_{4k+3} = -\infty.$$

Můžeme tedy z Věty 2.3.22 usoudit, že limita zadané posloupnosti neexistuje. ♣

2.6.19. Příklad. Zjistěte, zda posloupnost $\left\{\frac{(-1)^n+2}{2^n(3-(-1)^n)}\right\}$ má limitu. Pokud ano, vypočtěte ji.

Řešení. Zadaná posloupnost je součinem posloupností $\left\{\frac{(-1)^n+2}{3-(-1)^n}\right\}$ a $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$. První z nich je omezená, neboť každý její člen je roven buď $\frac{1}{4}$ nebo $\frac{3}{2}$. Druhá posloupnost má limitu rovnou 0. Podle Věty 2.2.42 má tedy posloupnost $\left\{\frac{(-1)^n+2}{2^n(3-(-1)^n)}\right\}$ limitu rovnou 0. ♣

2.6.20. Příklad. Spočtěte limitu rekurentně zadané posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže

$$a_1 = 10 \quad \text{a} \quad a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Předpokládejme nejprve, že posloupnost má vlastní limitu, kterou označíme A. Kombinací 2.2.30(b) a věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.33) pak dostaneme

$$\lim a_{n+1} = A.$$

Z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.25) obdržíme

$$\lim \left(6 - \frac{5}{a_n}\right) = 6 - \frac{5}{A},$$

a tedy

$$A = \lim a_{n+1} = \lim \left(6 - \frac{5}{a_n}\right) = 6 - \frac{5}{A}.$$

Tento vztah chápeme jako rovnici pro neznámou A. Rovnice má dvě řešení, a sice $A = 1$ a $A = 5$.

Zatím jsme dokázali pouze následující implikaci: je-li posloupnost konvergentní, pak platí buď $A = 1$ nebo $A = 5$. Zatím však nevíme, zda posloupnost nějakou limitu má. To se nyní budeme snažit dokázat, a to pomocí věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1). Vzhledem k tomu, že $a_1 = 10$ a navíc, jak snadno ověříme dosazením, platí $a_2 < a_1$, je pravděpodobné, že limitou posloupnosti, pokud nějaká existuje, je spíše číslo 5 než číslo 1 a že posloupnost je klesající.

Dokážeme matematickou indukcí, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 5$. Pro $n = 1$ je toto tvrzení zřejmé. Předpokládejme tedy, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 5$. Potom

$$a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n} > 6 - \frac{5}{5} = 5,$$

a tvrzení tedy vyplývá z principu matematické indukce.

Nyní dokážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ je klesající. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Chceme dokázat, že

$$a_n > a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n},$$

jinými slovy

$$a_n - 6 + \frac{5}{a_n} = \frac{a_n^2 - 6a_n + 5}{a_n} = \frac{(a_n - 5)(a_n - 1)}{a_n} > 0.$$

Poslední nerovnost ovšem snadno plyne z toho, že $a_n > 5$.

Dokázali jsme, že posloupnost $\{a_n\}$ je klesající a že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 5$, takže $\{a_n\}$ je zdola omezená. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) je tedy $\{a_n\}$ konvergentní. Označme její limitu symbolem A. Podle úvahy v první části řešení musí platit buď $A = 1$ nebo $A = 5$. Z toho, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 5$, vyplývá podle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.2.45(b)), že $A \geq 5$, takže možnost $A = 1$ je vyloučena. Můžeme tudíž učinit závěr, že

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 5.$$

♣

2.6.21. Příklad. Nechť $a \in [1, \infty)$. Spočtěte limitu rekurentně zadané posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže

$$a_1 = a \quad \text{a} \quad a_{n+1} = \frac{5a_n - 3}{a_n + 1}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Obdobně jako v Příkladech 2.4.3 a 2.6.20 odvodíme, že má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu A, pak A je řešením rovnice $A = \frac{5A-3}{A+1}$, a tedy buď $A = 1$ nebo $A = 3$.

Předpokládejme nejprve, že $a \geq 3$. Dokážeme matematickou indukcí, že potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq 3$. Pro $n = 1$ je tato nerovnost zřejmě splněna. Předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq 3$. Pak

$$a_{n+1} = \frac{5a_n - 3}{a_n + 1} = 5 - \frac{8}{a_n + 1} \geq 5 - \frac{8}{3 + 1} = 3.$$

Tím je tvrzení dokázáno.

Dokážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ je nerostoucí. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom nerovnost

$$a_n \geq a_{n+1} = \frac{5a_n - 3}{a_n + 1}$$

platí právě tehdy, když

$$0 \geq \frac{5a_n - 3}{a_n + 1} - a_n = \frac{5a_n - 3 - a_n^2 - a_n}{a_n + 1} = \frac{-(a_n - 3)(a_n - 1)}{a_n + 1}.$$

To je ovšem pro $a \geq 3$ splněno pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Z věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) tedy vyplývá, že pro každé $a \geq 3$ je posloupnost $\{a_n\}$ konvergentní a platí $\lim a_n = 3$.

Nyní předpokládejme, že $a \in (1, 3)$. Dokážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n < 3$. Tato nerovnost je zřejmě splněna pro $n = 1$. Předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < 3$. Pak

$$a_{n+1} = \frac{5a_n - 3}{a_n + 1} = 5 - \frac{8}{a_n + 1} < 5 - \frac{8}{3 + 1} = 3,$$

a tedy tvrzení vyplývá z principu matematické indukce.

Dokážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom nerovnost

$$a_n < a_{n+1} = \frac{5a_n - 3}{a_n + 1}$$

platí právě tehdy, když

$$0 < \frac{5a_n - 3}{a_n + 1} - a_n = \frac{5a_n - 3 - a_n^2 - a_n}{a_n + 1} = \frac{-(a_n - 3)(a_n - 1)}{a_n + 1}.$$

To je ovšem pro $a \in (1, 3)$ splněno pro každé $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{a_n\}$ je tedy rostoucí a shora omezená. Z věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) tedy vyplývá, že pro každé $a \in (1, 3)$ je posloupnost $\{a_n\}$ konvergentní. Označíme její limitu symbolem A. Podle úvahy uvedené v úvodní části důkazu pak platí buď $A = 1$ nebo $A = 3$. Vzhledem k tomu, že posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí, platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ nerovnost

$$a_n > a_1 > 1.$$

Odtud a z věty o limitě a uspořádání (Věta 2.2.45(b)) plyne, že $A \neq 1$. Tudíž $A = 3$.

Předpokládejme konečně, že $a = 1$. Potom $a_n = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $\lim a_n = 1$. ♣

2.6.22. Příklad. Posloupnost $\{a_n\}$ je zadána následujícím způsobem: $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 < a_2$, a pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, položíme

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}.$$

Rozhodněte, zda existuje $\lim a_n$ a pokud ano, spočtěte ji.

Řešení. Nejprve ukážeme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{2k-1} < a_{2k+1} < a_{2k+2} < a_{2k}.$$

V prvním kroku indukce požadované nerovnosti snadno z předpokladu $a_1 < a_2$ ověříme. Předpokládejme, že nerovnosti platí pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Pak z nerovnosti $a_{2k+1} < a_{2k+2}$ odvodíme

$$a_{2k+1} < \frac{a_{2k+1} + a_{2k+2}}{2} = a_{2k+3}.$$

Z této nerovnosti dále plyne

$$a_{2k+3} = \frac{a_{2k+2} + a_{2k+1}}{2}, \frac{a_{2k+3} + a_{2k+2}}{2} = a_{2k+4}.$$

Nakonec použijeme nerovnost $a_{2k+1} < a_{2k+2}$ platnou díky indukčnímu předpokladu k ověření vztahu

$$a_{2k+3} = \frac{a_{2k+2} + a_{2k+1}}{2} < a_{2k+2},$$

z něhož plyne

$$a_{2k+4} = \frac{a_{2k+3} + a_{2k+2}}{2} < a_{2k+2}.$$

Tím je důkaz požadovaných nerovností dokončen.

Vyplývá z nich, že posloupnost $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající, posloupnost $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_1 \leq a_n \leq a_2$. takže posloupnosti $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ jsou omezené. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) tedy existují vlastní limity

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = A \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = B.$$

Ze vztahu

$$a_{n+1} = \frac{a_{n-1} + a_n}{2}$$

vyplývá, že

$$B = \frac{A + B}{2},$$

a tedy $A = B$. Obě posloupnosti $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ tedy konvergují ke stejné limitě.

Nechť $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Přepíšeme vzorec definující a_k ve tvaru

$$a_{k+1} - a_k = a_{k-1} - a_{k+1}.$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom pro hodnoty $k = 2, 3, \ldots, n$ postupně dostaneme

$$\begin{aligned}
a_3 - a_2 &= a_1 - a_3, \\
a_4 - a_3 &= a_2 - a_4, \\
&\ldots \\
a_{n-1} - a_{n-2} &= a_{n-3} - a_{n-1}, \\
a_n - a_{n-1} &= a_{n-2} - a_n, \\
a_{n+1} - a_n &= a_{n-1} - a_{n+1}.
\end{aligned}$$

Sečtením všech těchto rovností dostaneme vztah

$$a_{n+1} - a_2 = a_1 + a_2 - a_n - a_{n+1}.$$

Odtud a z toho, že $\lim a_n = A$ nyní plyne, že

$$A - a_2 = a_1 + a_2 - A - A,$$

tedy

$$A = \frac{a_1 + 2a_2}{3}.$$

♣

2.6.23. Příklad. Posloupnost $\{a_n\}$ nechť je zadána rekurentně pomocí vztahů $a_1 = 1$ a $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Ukažte, že tato posloupnost má limitu a spočtěte ji.

Řešení. Definujme funkce

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad g(x) = f(f(x)) = \frac{1+x}{2+x}, \quad x \in [0,1].$$

Nechť c značí kořen kvadratické funkce $x^2 + x - 1$ nacházející se v intervalu $[0,1]$, tj. $c = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$. Protože $g(x) = 1 - \frac{2}{1+x}$, je g na intervalu $[0,1]$ rostoucí a pomocí elementárního výpočtu ověříme, že

- rovnice $g(x) = x$ má v intervalu $[0,1]$ právě jeden kořen, a to c,
- $x < g(x) < c$ pro $x \in [0,c)$ a $c < x < g(x)$ pro $x \in (c,1]$.

Jelikož pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{2k+2} = g(a_{2k})$ a $a_{2k+1} = g(a_{2k-1})$, dostáváme z vlastností funkce g nerovnosti

$$a_2 < a_4 < \cdots < a_{2k} < a_{2k+2} < c < a_{2k+1} < a_{2k-1} < \cdots < a_3 < a_1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Posloupnosti $\{a_{2k}\}$ a $\{a_{2k-1}\}$ jsou tedy monotónní a omezené, což znamená podle Věty 2.4.1, že jsou konvergentní. Označme $a = \lim a_{2k}$ a $b = \lim a_{2k-1}$. Protože $a_{2k+2} = g(a_{2k}) = \frac{1+a_{2k}}{2+a_{2k}}$, dostáváme z věty o aritmetice limit (Věta 2.2.37) rovnost $a = g(a)$. Proto $a = c$. Obdobně odvodíme, že $b = c$, a tedy $\lim a_n = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ (viz Věta 2.3.23). ♣

2.6.24. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n.$$

Řešení. Podle věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.33), Příkladu 2.5.8, a Definicie 2.5.9 platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = e.$$

Tudíž podle Příkladu 2.2.49 dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}} = \sqrt{e}.$$

♣

2.6.25. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = \frac{1}{\frac{n}{n-1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n-1}}.$$

Tedy jest

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}.$$

Díky Příkladu 2.5.8, Definici 2.5.9 a větě o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.33) víme, že

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = e.$$

Podle věty o limitě podílu (Věta 2.2.37(c)) je tedy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

♣

2.6.26. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}.$$

Řešení. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

a tedy

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} &= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\ &= 1-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Odtud, z Příkladu 2.2.9, věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.33) a věty o aritmetice limit (Věta 2.3.25) pak plyne, že

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

♣

2.6.27. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

Řešení. Pro každé $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$, platí

$$1 - \frac{1}{j^2} = \frac{j^2 - 1}{j^2} = \frac{(j-1)(j+1)}{j^2},$$

a tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) &= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdots \frac{(n-2)n}{(n-1)^2} \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{n+1}{n}.\end{aligned}$$

Odtud, z Příkladu 2.2.9 a věty o aritmetice limit (Věta 2.3.25) vyplývá, že

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

♣

2.6.28. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}.$$

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označíme

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \quad \text{a} \quad b_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n+1}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n b_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}.$$

Navíc pro každé $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ máme $\frac{2j-1}{2j} \leq \frac{2j}{2j+1}$ a součinem těchto n nerovností dostaneme $a_n \leq b_n$. Tedy

$$0 \leq a_n \leq \sqrt{a_n b_n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Kombinací Příkladů 2.2.9 a 2.2.49 a vět o vybrané posloupnosti (Věta 2.2.33) a o aritmetice limit (Věta 2.3.25) dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} = 0.$$

♣

KAPITOLA 3

Číselné řady

Nejen v matematice, ale i ve fyzice, chemii, ekonomii a dalších vědách, se často setkáváme s posloupnostmi, které vznikají následujícím způsobem. Je dána posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a nová posloupnost má následující členy: $a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \dots$, tj. m-tý člen nové posloupnosti je součtem prvních m členů posloupnosti $\{a_n\}$. Tato situace nastává tak často, že stojí za to těmto speciálním posloupnostem věnovat zvláštní kapitolu.

Při vyšetřování konvergence posloupností vzniklých uvedeným způsobem se snažíme sečíst nekonečně mnoho reálných čísel. Tato operace ovšem vyžaduje přesnou definici a pravidla pro korektní zacházení s nekonečnými součty.

3.1. Základní pojmy

3.1.1. Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme **nekonečnou řadou**, případně zkráceně **řadou**, přičemž číslo a_n je n**-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Položíme-li pro $m \in \mathbb{N}$

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m,$$

nazýváme číslo s_m m**-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3.1.2. Definice. Součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je limita posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **konvergentní**, je-li jejím součtem reálné číslo. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **divergentní**, jestliže $\lim_{m\to\infty} s_m$ neexistuje nebo je nevlastní.

Pro jemnější rozlišení mezi dvěma různými typy divergentních řad budeme někdy říkat, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje k** ∞, respektive **diverguje k** $-\infty$, jestliže $\lim_{m\to\infty} s_m = \infty$, respektive $\lim_{m\to\infty} s_m = -\infty$, a že že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje (osciluje)**, jestliže $\lim_{m\to\infty} s_m$ neexistuje.

3.1.3. Poznámka. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ značí jednak řadu, jednak součet řady, pokud tento součet existuje. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ můžeme použít k označení prvku z množiny $\mathbb{R}^*$ až po ověření, že příslušná řada má součet. Potom uvedená dvojznačnost nepůsobí žádné potíže.

3.1.4. Poznámka. Podle chování posloupnosti částečných součtů $\{s_m\}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ můžeme provést toto rozlišení:

$$\lim s_m \begin{cases} \text{existuje} \begin{cases} \text{vlastní, pak jde o konvergentní řadu,} \\ \text{nevlastní a je rovna} \begin{cases} \infty, \text{ pak řada diverguje k } \infty, \\ -\infty, \text{ pak řada diverguje k } -\infty, \end{cases} \end{cases} \\ \text{neexistuje, pak řada diverguje (osciluje).} \end{cases}$$

3.1.5. Poznámka. Pojem nekonečné řady je možné zobecnit v podobném smyslu, jako jsme to provedli pro posloupnosti v Poznámce 2.3.38. Nechť $k \in \mathbb{Z}$ a $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel (ve smyslu rozšířené definice uvedené v Poznámce 2.3.38). Potom symbol $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ označuje **řadu**, kde sčítací index probíhá množinu $\mathbb{Z} \cap [k, \infty)$. Existuje-li limita posloupnosti $\{s_m\}_{m=k}^{\infty}$, kde

$$s_m = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_m,$$

pak tuto limitu nazýváme **součtem řady** a značíme ji opět $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ je **konvergentní**, je-li jejím součtem reálné číslo. Řekneme, že řada $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ je **divergentní**, jestliže $\lim_{m\to\infty} s_m$ neexistuje nebo je nevlastní. Pro jednoduchost se až na drobné výjimky v této kapitole omezíme na řady tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Jejich případné zobecnění pro řady tvaru $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ je většinou zcela přímočaré.

3.1.6. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ je divergentní.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$. Potom platí:

$$s_n = \begin{cases} -1, & \text{je-li } n \text{ liché,} \\ 0, & \text{je-li } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Odtud plyne, že $\lim s_n$ neexistuje. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ tedy diverguje (osciluje). ♣

3.1.7. Definice. Nechť $q \in \mathbb{R}$. Potom řadu $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ nazýváme **geometrickou řadou** a číslo q jejím **kvocientem**.

3.1.8. Příklad. Nechť $q \in \mathbb{R}$. Dokažte, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konverguje právě tehdy, když $|q| < 1$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$. Jestliže $q \neq 1$, pak podle Příkladu 1.6.6 platí $s_n = \frac{1-q^n}{1-q}$.

Předpokládejme, že $|q| < 1$. Potom platí $\lim s_n = \frac{1}{1-q}$, a tedy řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konverguje.

Nyní předpokládejme, že $|q| \geq 1$. Jestliže $q > 1$, pak z výše uvedeného vyplývá, že $\lim s_n = \infty$. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ tedy diverguje. Jestliže $q = 1$, pak $s_n = n + 1$, a tedy $\lim s_n = \infty$, takže řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ diverguje. Jestliže $q = -1$, pak řada diverguje podle Příkladu 3.1.6. Předpokládejme konečně, že $q < -1$. Položme $a = |q|$. Potom

$$s_n = \begin{cases} \frac{1+a^n}{1+a}, & \text{je-li } n \text{ liché,} \\ \frac{1-a^n}{1+a}, & \text{je-li } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Odtud vyplývá, že $\limsup s_n = \infty$ a $\liminf s_n = -\infty$. To podle Věty 2.4.12 znamená, že neexistuje $\lim s_n$. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ tedy diverguje. ♣

3.1.9. Příklad. Nechť $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$, a $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dokažte, že potom platí

$$\sum_{n=k}^{\infty} q^n = \frac{q^k}{1-q}.$$

Řešení. Pro $m \in \mathbb{N}$, $m \geq k$, platí

$$\sum_{n=k}^{m} q^n = q^k \sum_{n=0}^{m-k} q^n = q^k \frac{1-q^{m-k+1}}{1-q}.$$

Odtud plyne, že

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=k}^{m} q^n = \lim_{m\to\infty} q^k \frac{1-q^{m-k+1}}{1-q} = \frac{q^k}{1-q}.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ♣

3.1.10. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ je konvergentní a její součet je roven 1.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. Podle Příkladu 2.6.26 dostáváme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

♣

3.1.11. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentní a její součet je ∞.

Řešení. Posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$ uvedené řady je zřejmě rostoucí. Z věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) vyplývá, že existuje $\lim s_n$, kterou označíme symbolem A. Navíc platí $A = \sup\{s_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, a tedy $A \geq s_1 > 0$. Dokážeme, že $\{s_n\}$ nesplňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku (viz Definici 2.4.24). K tomu stačí nalézt $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, splňující

$$\forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists m, n \in \mathbb{N},\ m, n \geq n_0 \colon |s_n - s_m| \geq \varepsilon.$$

Položme $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$. Položme $n = n_0$ a $m = 2n_0$. Pak $m, n \geq n_0$ a platí

$$|s_n - s_m| = s_{2n_0} - s_{n_0} = \sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{k}.$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \leq 2n_0$, platí $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n_0}$. Tudíž

$$|s_n - s_m| > n_0 \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Posloupnost $\{s_n\}$ tedy nesplňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Odtud a z Věty 2.4.25 vyplývá, že posloupnost $\{s_n\}$ nemá vlastní limitu, takže $A \notin \mathbb{R}$. Protože $A > 0$, platí $A = \infty$. ♣

3.1.12. Definice. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nazýváme **harmonickou řadou**.

3.1.13. Poznámka. Všimněme si rozdílu mezi úlohou vyjádřit hodnotu součtu dané řady (pokud existuje) pomocí známých konstant a úlohou rozhodnout, zda daná řada konverguje či diverguje. Řešení první úlohy dává výsledek i pro druhou. Určit součet dané řady může být však velmi obtížné až neřešitelné. V takovém případě je pro nás otázka konvergence řady velice důležitá.

3.1.14. Pro nekonečné řady platí tvrzení obdobné Větě 2.3.17, tedy že změna konečně mnoha členů řady nemá vliv na konvergenci či divergenci řady či na existenci jejího součtu. Přesněji, máme-li dvě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, pro něž existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (respektive má součet) právě tehdy, když $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje (respektive má součet). Změnou konečně mnoha členů řady však můžeme samozřejmě změnit hodnotu součtu řady.

Nyní uvedeme jednoduchou nutnou podmínku konvergence řady.

3.1.15. Věta (nutná podmínka konvergence řady)**.** Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potom $\lim a_n = 0$.

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Potom $a_n = s_n - s_{n-1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Podle předpokladu věty existuje vlastní $\lim s_n$. Podle 3.1.14

existuje také $\lim s_{n-1}$ a platí $\lim s_{n-1} = \lim s_n$. Podle Věty 2.2.37 tedy platí $\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = 0$. ■

3.1.16. Opačná implikace v tvrzení Věty 3.1.15 neplatí. Platí například $\lim \frac{1}{n} = 0$, avšak podle Příkladu 3.1.11 je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentní.

3.1.17. V některých případech lze použít Větu 3.1.15 k odvození divergence řady. Jestliže $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a neplatí $\lim a_n = 0$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní. Například $\lim(-1)^n$ neexistuje, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ diverguje. Věta 3.1.15 nám tak poskytuje jiné řešení Příkladu 3.1.6.

3.1.18. Věta (Bolzanova-Cauchyova podmínka konvergence řady)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní,

(ii) platí výrok

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0\colon \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ položme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Potom pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, platí $\sum_{k=n}^{m} a_k = s_m - s_{n-1}$. Výrok (3.1) tedy platí právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0\colon |s_m - s_{n-1}| < \varepsilon.$$

To podle Věty 2.4.25 nastává právě tehdy, když posloupnost $\{s_n\}$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku, tedy právě tehdy, když je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní. Odtud plyne tvrzení. ■

3.1.19. Není těžké si rozmyslet, že výrok (3.1) je ekvivalentní výroku

$$\exists C \in \mathbb{R},\ C > 0\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0\colon \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < C\varepsilon.$$

3.1.20. Věta. Nechť řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mají součet.

(a) Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ a výraz $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je definován. Potom má řada $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ součet a platí $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Nechť je výraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ definován. Potom má řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ součet a platí $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ a $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$.

(a) Použitím věty o aritmetice limit (Věta 2.3.25) pak dostaneme existenci limity částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ a rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \alpha a_n = \lim_{m\to\infty} \alpha s_m = \alpha \lim_{m\to\infty} s_m = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(b) Obdobně obdržíme existenci součtu řady $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ a vztah

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) &= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}(a_n + b_n) = \lim_{m\to\infty}(s_m + t_m)\\ &= \lim_{m\to\infty} s_m + \lim_{m\to\infty} t_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.\end{aligned}$$

■

3.1.21. Věta (linearita konvergentních řad)**.** Nechť jsou řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom jsou konvergentní i řady $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a platí $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz. Tvrzení bezprostředně vyplývá z Věty 3.1.20. ■

3.1.22. Věta. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní řada a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentní řada. Potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ divergentní.

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ je konvergentní. Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní, je podle Věty 3.1.21 také řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní. To je spor. ■

3.2. Řady s nezápornými členy

Důležité speciální případy nekonečných číselných řad představují řady s nezápornými členy, tedy řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pro které je $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Tyto řady se vyznačují určitými specifickými vlastnostmi, které můžeme při práci s nimi (například při vyšetřování jejich konvergence či divergence) využít.

3.2.1. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Potom je buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, nebo diverguje k ∞. Jinými slovy, řada s nezápornými členy má vždy součet, který může být konečný nebo nekonečný. To plyne z věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) a pozorování, že posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je neklesající.

3.2.2. Věta (srovnávací kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \leq b_n$.

(a) Jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, pak je i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní, pak je i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentní.

Důkaz. (a) Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ a $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Posloupnost $\{s_n\}$ je neklesající, protože členy posloupnosti $\{a_n\}$ jsou nezáporné. Dokážeme, že posloupnost $\{s_n\}$ je shora omezená. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ zřejmě platí $s_n \leq s_{n_0} + t_n$. Posloupnost $\{t_n\}$ je konvergentní, a tedy je posloupnost $\{s_{n_0} + t_n\}$ shora omezená. Proto je i posloupnost $\{s_n\}$ shora omezená. Protože posloupnost $\{s_n\}$ je neklesající a shora omezená, je podle Důsledku 2.4.2 konvergentní. Podle definice je tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Tvrzení bezprostředně plyne z již dokázaného tvrzení (a). ■

3.2.3. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentní.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \frac{1}{n^2}$ a $b_n = \frac{2}{n(n+1)}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $0 \leq a_n \leq b_n$. Z Příkladu 3.1.10 vyplývá, že $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní. Podle Věty 3.2.2(a) je tedy i řada$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní. ♣

3.2.4. Poznámka. Součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je roven číslu $\frac{\pi^2}{6}$, k důkazu tohoto tvrzení jsou však potřeba pokročilejší pasáže matematické analýzy.

3.2.5. Věta (limitní srovnávací kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je řada s kladnými členy a existuje $\lim \frac{a_n}{b_n}$. Označme $A = \lim \frac{a_n}{b_n}$.

(a) Pokud $A \in (0, \infty)$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní právě tehdy, když je konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
(b) Pokud $A = 0$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní, pak je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
(c) Pokud $A = \infty$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní, pak je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz. (a) Položme $\varepsilon = \frac{A}{2}$. K tomuto ε nalezneme podle definice limity $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\frac{A}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3A}{2}. \tag{3.2}$$

$\Rightarrow$ Předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní. Z první nerovnosti v (3.2) vyplývá, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $b_n < \frac{2}{A} a_n$. Podle Věty 3.1.21 je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{A} a_n$ konvergentní. Podle Věty 3.2.2(a) je také řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní.

$\Leftarrow$ Nyní předpokládejme, že je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní. Potom z druhé nerovnosti v (3.2) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n < \frac{3A}{2} b_n$.

Obdobným způsobem jako v důkazu opačné implikace lze nyní dokázat, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní.

(b) Položme $\varepsilon = 1$. K tomuto ε nalezneme z definice limity $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$. Pak $a_n \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Podle Věty 3.2.2(a) je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(c) Položme $K = 1$. Podle definice nevlastní limity nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \geq b_n$. Podle Věty 3.2.2(a) je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní. ■

3.2.6. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{5n^4+3}$ je konvergentní.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = \frac{2n^2 + 1}{5n^4 + 3} \qquad \text{a} \qquad b_n = \frac{1}{n^2}.$$

Potom platí $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{5}$. Podle Příkladu 3.2.3 je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní. Podle Věty 3.2.5(a) je i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní. ♣

3.2.7. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+100}}$ je divergentní.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n + 100}} \qquad \text{a} \qquad b_n = \frac{1}{n}.$$

Potom platí $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$. Z Příkladu 3.1.11 plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentní. Podle Věty 3.2.5(c) je tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní. ♣

Základním nástrojem pro zkoumání konvergence řad s nezápornými členy je srovnávací kritérium, případně limitní srovnávací kritérium (Věty 3.2.2 a 3.2.5). Pro jejich používání však potřebujeme dostatečně rozsáhlou škálu řad, o nichž již víme, zda jsou konvergentní či divergentní. Takovou informaci zatím máme k dispozici pouze pro geometrickou řadu (Příklad 3.1.8). Využijeme ji nyní k odvození dvou velmi užitečných kritérií, totiž Cauchyova odmocninového a d'Alembertova podílového kritéria.

3.2.8. Věta (Cauchyovo odmocninové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon\ \sqrt[n]{a_n} \leq q,$$

potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Jestliže $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(c) Jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(d) Jestliže $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak není pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

(e) Jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, pakení pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

Důkaz. (a) Z předpokladu plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \leq q^n$. Protože je $q \in (0, 1)$, je řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konvergentní. Podle Věty 3.2.2(a) je tedy také řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Označme $A = \limsup \sqrt[n]{a_n}$. Zvolme $q \in (A, 1)$. Pak podle definice limes superior nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sup\{\sqrt[n]{a_n};\ n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\} < q$. Potom platí

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon \sqrt[n]{a_n} < q.$$

Tvrzení tedy plyne z již dokázaného tvrzení (a).

(c) Podle Věty 2.4.12 platí $\limsup \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, a tedy tvrzení bezprostředně plyne z (b).

(d) Označme $A = \limsup \sqrt[n]{a_n}$. Podle Věty 2.4.19 existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Protože $A > 1$, existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$. Povýšením této nerovnosti na n_k dostaneme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $a_{n_k} \geq 1$. To znamená, že neplatí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = 0$. Podle Věty 2.2.33 tedy neplatí ani $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Není tudíž splněna nutná podmínka konvergence řady, a tedy podle Věty 3.1.15 řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

(e) Tvrzení bezprostředně plyne z (d) a Věty 2.4.12. ■

3.2.9. Poznámka. Jestliže je $\{a_n\}$ posloupnost nezáporných reálných čísel splňující $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$, pak o konvergenci či divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ není možné rozhodnout na základě Cauchyova kritéria. Platí například $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$, ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentní a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentní.

3.2.10. Příklad. Nechť $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}$ konverguje.

Řešení. Podle Příkladu 2.2.50 platí $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. Odtud a z věty o aritmetice limit pro posloupnosti (Věta 2.2.37) plyne, že

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\frac{n^k}{a^n}} = \lim \frac{(\sqrt[n]{n})^k}{a} = \frac{1}{a} < 1.$$

Podle Věty 3.2.8(c) tedy řada konverguje. ♣

3.2.11. Věta (d'Alembertovo podílové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.

(a) Jestliže platí výrok

$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,$$

potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Jestliže $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(c) Jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(d) Jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, potom není pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

Důkaz. (a) Matematickou indukcí dokážeme, že platí výrok

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon a_n \leq q^{n-n_0} a_{n_0}. \tag{3.3}$$

Pro $n = n_0$ je tvrzení zřejmé. Předpokládejme, že nerovnost v (3.3) platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Potom

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} a_n \leq q a_n \leq q q^{n-n_0} a_{n_0} = q^{n+1-n_0} a_{n_0},$$

přičemž první nerovnost plyne z předpokladu věty a druhá z indukčního předpokladu. Tím je podle principu matematické indukce dokázán výrok (3.3).

Podle Příkladu 3.1.8 a Věty 3.1.21 je řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^{n-n_0} a_{n_0}$ konvergentní. Podle 3.1.14 je také řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-n_0} a_{n_0}$ konvergentní. Podle Věty 3.2.2(a) je tedy konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Je-li $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak podle definice limes superior existují $q \in (0,1)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon \frac{a_{n+1}}{a_n} < q.$$

Tvrzení nyní plyne z (a).

(c) Tvrzení plyne z (b).

(d) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak podle definice limity existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1.$$

Dokážeme, že platí výrok

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n \geq a_{n_0}. \tag{3.4}$$

Pro $n = n_0$ je toto tvrzení zřejmé. Jestliže pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \geq a_{n_0}$, pak podle předpokladu platí

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} a_n \geq a_n \geq a_{n_0}.$$

Tím je podle principu matematické indukce dokázán výrok (3.4). Protože $a_{n_0} > 0$, neplatí $\lim a_n = 0$. Není tedy splněna nutná podmínka konvergence řady a podle Věty 3.1.15 řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. ■

3.2.12. Příklad. Rozhodněte, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}$ konverguje.

Řešení. Naše řada má kladné členy. Použijeme podílové kritérium (Věta 3.2.11). Pro $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, máme

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \\ &= \frac{(1+\frac{1}{n})^3}{(3+\frac{1}{n})(3+\frac{2}{n})(3+\frac{3}{n})}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Z věty o limitě součinu (Věta 2.2.37(b)) dostáváme $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{27}$, což zaručuje podle Věty 3.2.11 konvergenci zkoumané řady. ♣

3.2.13. Poznámka. Je-li $\{a_n\}$ posloupnost kladných reálných čísel splňující $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, pak o konvergenci či divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nemůžeme rozhodnout na základě podílového kritéria. Označíme-li například $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = \frac{1}{n^2}$ pro $n \in \mathbb{N}$, pak platí $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1$, řada $\sum a_n$ je divergentní a řada $\sum b_n$ je konvergentní.

3.2.14. Poznámka. V souvislosti s tvrzením (d) ve Větě 3.2.11 upozorněme na to, že předpoklad $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ nezaručuje divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Příkladem je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ definovaná předpisem

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n-1}, & n \text{ liché}, \\ 2^{-n+1}, & n \text{ sudé}, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Tato řada má tedy tvar

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{32} + \cdots$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $0 \leq a_n \leq 2^{-n+1}$, a tedy je uvedená řada konvergentní podle srovnávacího kritéria (Věta 3.2.2(a)). Přesto však platí $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, neboť

$$\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \lim_{k\to\infty} \frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{-2k+1}}{2^{-(2k-1)-1}} = \lim_{k\to\infty} 2 = 2.$$

3.2.15. Příklad. Rozhodněte, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(10000)^n}{n!}$ konverguje.

Řešení. Členy zadané řady jsou kladné a platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10000}{n+1} = 0.$$

Naše řada tedy konverguje podle podílového kritéria (Věta 3.2.11(c)). ♣

3.2.16. Poznámka. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost s kladnými členy. Z Příkladu 2.5.10 plyne, že pokud $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existuje, pak existuje i $\lim \sqrt[n]{a_n}$ a limity se rovnají. To znamená, že pokud lze použít d'Alembertovo podílové kritérium (Věta 3.2.11(c), (d)), pak lze použít i Cauchyovo odmocninové kritérium (Věta 3.2.8(c), (e)). Výpočet $\lim \sqrt[n]{a_n}$ však může být někdy podstatně obtížnější než výpočet $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

3.2.17. Věta (kondenzační kritérium)**.** Nechť $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost s nezápornými členy. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konverguje.

Důkaz. Pro $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, označme

$$s_k = a_1 + \cdots + a_k,$$
$$t_k = 2^0 a_{2^0} + 2^1 a_{2^1} + 2^2 a_{2^2} + \cdots + 2^k a_{2^k}.$$

$\Leftarrow$ Pokud $k, m \in \mathbb{N}$, $m < 2^k$, potom platí

$$\begin{aligned} s_m &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + (a_8 + \cdots + a_{15}) + \cdots \\ &\quad \cdots + (a_{2^{k-1}} + \cdots + a_{2^k - 1}) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} a_n \leq \sum_{j=0}^{k-1} 2^j a_{2^j} = t_{k-1} \leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^j a_{2^j} < \infty. \end{aligned}$$

Protože ke každému $m \in \mathbb{N}$ existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $m < 2^k$, je posloupnost $\{s_n\}$ shora omezená, a proto podle 3.2.1 řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$\Rightarrow$ Pokud $k, m \in \mathbb{N}$, $m > 2^k$, potom platí

$$\begin{aligned} s_m &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots \\ &\quad \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \\ &\geq \frac{a_1}{2} + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{t_k}{2}, \end{aligned}$$

a odtud plyne $t_k \leq 2s_m \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Posloupnost $\{t_k\}$ je tedy shora omezená, a proto podle 3.2.1 řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konverguje. ∎

Již jsme dokázali, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje (Příklad 3.1.11), zatímco $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje (Příklad 3.2.3). Charakterizaci konvergence řad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ podává následující věta.

3.2.18. Věta. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$, konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$.

Důkaz. Je-li $\alpha \leq 0$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{1}{n^{\alpha}} \geq \frac{1}{1^{\alpha}} = 1$, takže členy posloupnosti $\{\frac{1}{n^{\alpha}}\}$ nekonvergují k 0. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ tudíž nesplňuje nutnou podmínku konvergence, a tedy podle Věty 3.1.15 diverguje.

Předpokládejme nyní, že $\alpha \in (0, \infty)$. Pak $\{\frac{1}{n^{\alpha}}\}$ je nerostoucí posloupnost kladných čísel. Podle kondenzačního kritéria (Věta 3.2.17) řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^{\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{n\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(1-\alpha)} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^n.$$

Řada $\sum_{n=0}^{\infty}(2^{1-\alpha})^n$ je geometrickou řadou s kvocientem $2^{1-\alpha}$, a tedy je podle Příkladu 3.1.8 konvergentní právě tehdy, když $2^{1-\alpha} < 1$. To nastává právě tehdy, když $\alpha > 1$. ■

3.2.19. Příklad. Vyšetřeme chování řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt{n^3}}$.

Řešení. Jedná se o řadu s kladnými členy. Odhadneme, že naši řadu bychom mohli srovnat s řadou tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}},$$

o níž již podle Věty 3.2.18 víme, že konverguje. Položíme

$$a_n = \frac{1 + \sqrt[3]{n}}{1 + \sqrt{n^3}} \qquad \text{a} \qquad b_n = \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$$

a vypočteme

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{7}{6}} \cdot \frac{1 + \sqrt[3]{n}}{1 + \sqrt{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{7}{6}} + n^{\frac{3}{2}}}{1 + n^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + n^{-\frac{1}{3}}}{1 + n^{-\frac{3}{2}}} = 1.$$

Zkoumaná řada tedy konverguje dle limitního srovnávacího kritéria (Věta 3.2.5). ♣

3.3. Řady s obecnými členy

V tomto oddílu odvodíme několik postačujících podmínek pro konvergenci řad, jejichž členy mohou být kladné i záporné. Prvním výsledkem tohoto typu bude Leibnizova věta.

3.3.1. Věta (Leibniz). Nechť $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost, která konverguje k 0. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konverguje.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $\{a_n\}$ je nerostoucí. Odtud a z předpokladu věty plyne díky Větě 2.4.1 rovnost $\lim a_n = \inf\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\} = 0$. Potom tedy $a_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Označme $\{s_k\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} s_{2(k+1)} - s_{2k} &= a_{2k+2} - a_{2k+1} \leq 0, \\ s_{2k+1} - s_{2k-1} &= -a_{2k+1} + a_{2k} \geq 0, \end{aligned}$$

neboť $\{a_n\}$ je nerostoucí. Tedy posloupnost $\{s_{2k}\}$ je nerostoucí a posloupnost $\{s_{2k+1}\}$ je neklesající. Díky větě o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) mají obě posloupnosti limitu. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $s_{2k+1} = s_{2k} - a_{2k+1}$. Z předpokladu víme, že $\lim a_n = 0$, a tedy díky větě o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.3.22) také $\lim a_{2k+1} = 0$. Z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.25) tedy dostáváme

$$\lim s_{2k+1} = \lim(s_{2k} - a_{2k+1}) = \lim s_{2k} - \lim a_{2k+1} = \lim s_{2k},$$

takže posloupnosti $\{s_{2k}\}$ a $\{s_{2k+1}\}$ mají společnou limitu $s \in \mathbb{R}^*$. Jelikož ale pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$s_1 \leq s_{2k+1} = s_{2k} - a_{2k+1} \leq s_{2k} \leq s_2,$$

je $s \in \mathbb{R}$. Odtud díky Větě 2.3.23 (viz též Poznámku 2.3.24) plyne, že $\lim s_n = s$, a naše řada je tedy konvergentní.

Je-li posloupnost $\{a_n\}$ neklesající, potom je posloupnost $\{-a_n\}$ nerostoucí a $\lim(-a_n) = 0$, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(-a_n)$ podle již dokázaného konverguje. Podle Věty 3.1.21 konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. ■

3.3.2. Příklad. Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ je konvergentní.

Řešení. Protože je posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$ nerostoucí a konverguje k 0, plyne konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ z Věty 3.3.1. ♣

3.3.3. Poznámka. Předpoklad monotonie ve Větě 3.3.1 nelze vynechat. Příkladem je řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, kde

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ sudé}, \\ 0 & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ liché}. \end{cases}$$

Posloupnost $\{a_n\}$ sestává z nezáporných čísel a konverguje k 0, není však monotónní. Označme $\{s_k\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$s_{2k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2j} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}.$$

Podle Příkladu 3.1.11 je $\lim_{k\to\infty} s_{2k} = \infty$, a tedy uvedená řada diverguje.

V následujícím lemmatu využíváme úmluvu uvedenou v Označení 1.6.1.

3.3.4. Lemma (Abelova[1] parciální sumace)**.** Nechť $m \in \mathbb{N}$ a $a_1, \dots, a_m$, $b_1, \dots, b_m$ jsou reálná čísla.

(a) Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \le m$, a $\sigma_k = \sum_{j=n}^{k} a_j$, $k = n, \dots, m$. Pak platí

$$\sum_{j=n}^{m} a_j b_j = \sum_{j=n}^{m-1} \sigma_j (b_j - b_{j+1}) + \sigma_m b_m. \tag{3.6}$$

(b) Označme $s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$, $k = 0, \dots, m$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \le m$, platí

$$\sum_{j=n}^{m} a_j b_j = -s_{n-1} b_n + \sum_{j=n}^{m-1} s_j (b_j - b_{j+1}) + s_m b_m. \tag{3.7}$$

Důkaz. (a) Pomocí elementárních úprav dostaneme

$$\begin{aligned}
\sum_{j=n}^{m} a_j b_j &= a_n b_n + \dots + a_m b_m \\
&= \sigma_n b_n + (\sigma_{n+1} - \sigma_n) b_{n+1} + \cdots \\
&\qquad \cdots + (\sigma_{m-1} - \sigma_{m-2}) b_{m-1} + (\sigma_m - \sigma_{m-1}) b_m \\
&= \sigma_n (b_n - b_{n+1}) + \sigma_{n+1} (b_{n+1} - b_{n+2}) + \cdots \\
&\qquad \cdots + \sigma_{m-2} (b_{m-2} - b_{m-1}) + \sigma_{m-1} (b_{m-1} - b_m) + \sigma_m b_m \\
&= \sum_{j=n}^{m-1} \sigma_j (b_j - b_{j+1}) + \sigma_m b_m.
\end{aligned}$$

Tím jsme dokázali vzorec (3.6).

[1] Niels Henrik Abel (1802–1829)

(b) Podobně jako výše počítejme

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=n}^{m} a_j b_j &= a_n b_n + \cdots + a_m b_m \\
&= (s_n - s_{n-1}) b_n + (s_{n+1} - s_n) b_{n+1} + \cdots \\
&\qquad \cdots + (s_{m-1} - s_{m-2}) b_{m-1} + (s_m - s_{m-1}) b_m \\
&= -s_{n-1} b_n + s_n (b_n - b_{n+1}) + s_{n+1} (b_{n+1} - b_{n+2}) + \cdots \\
&\qquad \cdots + s_{m-2} (b_{m-2} - b_{m-1}) + s_{m-1} (b_{m-1} - b_m) + s_m b_m \\
&= -s_{n-1} b_n + \sum_{j=n}^{m-1} s_j (b_j - b_{j+1}) + s_m b_m .
\end{aligned}
$$

Tím je dokázán vztah (3.7). ■

3.3.5. Věta (Abelovo-Dirichletovo[2] kritérium)**.** Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, přičemž $\{b_n\}$ je monotónní. Nechť je navíc splněna alespoň jedna z následujících dvou podmínek:

(A) posloupnost $\{b_n\}$ je omezená a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,
(D) $\lim b_n = 0$ a posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je omezená.

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že posloupnost $\{b_n\}$ je nerostoucí. Pokud by posloupnost $\{b_n\}$ byla neklesající, pracovali bychom s posloupností $\{-b_n\}$ a závěr odvodili pomocí Věty 3.1.21. Tvrzení věty dokážeme nejprve za předpokladu platnosti podmínky (A) a potom za předpokladu (D). V obou případech ověříme Bolzanovu-Cauchyovu podmínku pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Konvergence řady řady pak vyplyne z Věty 3.1.18.

(A) Posloupnost $\{b_n\}$ je omezená, a proto existuje $C \in (0, \infty)$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|b_n| \leq C$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku, takže můžeme nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m \in \mathbb{N}$, $n_0 \leq n \leq m$, platí $\left|\sum_{j=n}^{m} a_j\right| < \varepsilon$. Zvolme nyní $n, m \in \mathbb{N}, n_0 \leq n \leq m$, pevně a označme $\sigma_k = \sum_{j=n}^{k} a_j$, $k = n, \dots, m$. Platí tedy $|\sigma_k| < \varepsilon$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, $n \leq k \leq m$. Z Lemmatu 3.3.4(a) pak

[2] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859)

dostáváme

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=n}^{m} a_j b_j\right| &= \left|\left(\sum_{j=n}^{m-1} \sigma_j (b_j - b_{j+1})\right) + \sigma_m b_m\right| \\ &\leq \left(\sum_{j=n}^{m-1} |\sigma_j| (b_j - b_{j+1})\right) + |\sigma_m||b_m| \\ &\leq \varepsilon\left(\sum_{j=n}^{m-1} (b_j - b_{j+1})\right) + \varepsilon|b_m| = \varepsilon((b_n - b_m) + |b_m|) \\ &\leq \varepsilon\,(|b_n| + 2|b_m|) \leq 3C\varepsilon,\end{aligned}$$

čímž je podle Věty 3.1.18 a podle 3.1.19 důkaz proveden.

(D) Z předpokladu snadno vyplývá, že členy posloupnosti $\{b_n\}$ jsou nezáporné. Označme $s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$ pro $k \in \mathbb{N}$. Nalezneme $M \in (0, \infty)$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|s_n| \leq M$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|b_n| < \varepsilon$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Nechť $n, m \in \mathbb{N}$ splňují $n_0 \leq n \leq m$. Pak díky tvrzení (b) Lemmatu 3.3.4 máme

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=n}^{m} a_j b_j\right| &= \left|-s_{n-1} b_n + \sum_{j=n}^{m-1} s_j (b_j - b_{j+1}) + s_m b_m\right| \\ &\leq M b_n + \sum_{j=n}^{m} M(b_j - b_{j+1}) + M b_m \\ &= M b_n + M\,(b_n - b_m) + M b_m \\ &= 2M b_n < 2M\varepsilon.\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. ∎

3.3.6. Poznámky. (a) Podmínka (D) ve Větě 3.3.5 hovoří o omezenosti posloupnosti *částečných součtů* řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, nikoliv o omezenosti posloupnosti $\{a_n\}$.

(b) Leibnizova věta (Věta 3.3.1) je okamžitým důsledkem Věty 3.3.5(D). Máme-li totiž řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$, kde $\{b_n\}$ je monotónní posloupnost konvergující k nule, má řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ omezenou posloupnost částečných součtů (vizte Příklad 3.1.6), a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ konverguje.

3.3.7. Příklad.

(a) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů pro každé $x \in \mathbb{R}$.

(b) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů právě tehdy, když $x \in \mathbb{R} \setminus \{2l\pi;\ l \in \mathbb{Z}\}$.

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} 2\sin(\tfrac{1}{2}x)\sin(kx) &= \cos(k-\tfrac{1}{2})x - \cos(k+\tfrac{1}{2})x, \\ 2\sin(\tfrac{1}{2}x)\cos(kx) &= \sin(k+\tfrac{1}{2})x - \sin(k-\tfrac{1}{2})x. \end{aligned}$$

Pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$\begin{aligned} 2\sin(\tfrac{1}{2}x)\sum_{k=1}^{n}\sin(kx) &= \sum_{k=1}^{n}\bigl(\cos(k-\tfrac{1}{2})x - \cos(k+\tfrac{1}{2})x\bigr) \\ &= \cos(1-\tfrac{1}{2})x - \cos(n+\tfrac{1}{2})x \\ &= \cos\tfrac{1}{2}x - \cos(n+\tfrac{1}{2})x, \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} 2\sin(\tfrac{1}{2}x)\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) &= \sum_{k=1}^{n}\bigl(\sin(k+\tfrac{1}{2})x - \sin(k-\tfrac{1}{2})x\bigr) \\ &= -\sin(1-\tfrac{1}{2})x + \sin(n+\tfrac{1}{2})x \\ &= \sin(n+\tfrac{1}{2})x - \sin(\tfrac{1}{2}x). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Je-li $x \in \{2l\pi;\ l \in \mathbb{Z}\}$, sestává řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$ z nulových členů, a má tedy omezenou posloupnost částečných součtů. Naproti tomu řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ zjevně nemá omezenou posloupnost částečných součtů.

Pokud $x \notin \{2l\pi;\ l \in \mathbb{Z}\}$, ze vzorce (3.8) plyne pro každé $n \in \mathbb{N}$ odhad

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)\right| \le \frac{\left|\cos(\frac{1}{2}x)-\cos(n+\frac{1}{2})x\right|}{\left|2\sin(\frac{1}{2}x)\right|} \le \frac{1}{\left|\sin(\frac{1}{2}x)\right|}$$

a ze vztahu (3.9) nerovnost

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)\right| \le \frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin(\frac{1}{2}x)\right|}{\left|2\sin(\frac{1}{2}x)\right|} \le \frac{1}{\left|\sin(\frac{1}{2}x)\right|}.$$

♣

3.3.8. Příklad.

(a) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ je konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$.

(b) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ konverguje právě tehdy, když $x \in \mathbb{R} \setminus \{2l\pi;\ l \in \mathbb{Z}\}$.

Řešení. (a) Nechť $x \in \mathbb{R}$. Použijeme Dirichletovo kritérium (Věta 3.3.5(D)) pro $a_n = \sin nx$ a $b_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost částečných součtů řady

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je omezená díky Příkladu 3.3.7. Posloupnost $\{b_n\}$ je klesající a $\lim b_n = 0$. Dostáváme tak konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

(b) Obdobně lze ukázat konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$, kde $x \in \mathbb{R} \setminus \{2l\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Pro $x = 2l\pi$, kde $l \in \mathbb{Z}$, je pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentní podle Příkladu 3.1.11. ♣

3.4. Absolutní konvergence řad

3.4.1. Definice (absolutní a neabsolutní konvergence)**.** Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní. Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, ale není absolutně konvergentní, říkáme, že je **neabsolutně konvergentní**.

3.4.2. Poznámka. Všimněme si, že řada, jejíž členy nemění znaménko, konverguje právě tehdy, když konverguje absolutně.

3.4.3. Věta (vztah absolutní konvergence řady a konvergence řady)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní řada. Pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní a navíc platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Důkaz. Podle Věty 3.1.18 splňuje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Vzhledem k tomu, že pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $n \leq m$, platí

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| = \left| \sum_{k=n}^{m} |a_k| \right|,$$

splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Podle Věty 3.1.18 tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ a $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$. Potom zřejmě platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $s_n \leq \sigma_n$. Odtud, z definice součtu řady a Věty 2.2.45 plyne, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. ■

3.4.4. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ je absolutně konvergentní.

Řešení. Označme $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom platí $|a_n| = \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje (vizte Příklad 3.2.3), je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ absolutně konvergentní. ♣

3.4.5. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ je neabsolutně konvergentní.

Řešení. Označme $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ a $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom je $\{b_n\}$ monotónní posloupnost splňující $\lim b_n = 0$, a tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní podle Věty 3.3.1. Naproti tomu je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergentní podle Věty 3.2.18. Odtud plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je neabsolutně konvergentní. ♣

Následující dvě věty jsou variantami Cauchyova odmocninového a d'Alembertova podílového kritéria pro absolutní konvergenci řad.

3.4.6. Věta (Cauchyovo odmocninové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada.

(a) Jestliže platí
$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon \sqrt[n]{|a_n|} \leq q,$$
pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní.

(b) Je-li $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(c) Je-li $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(d) Je-li $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, pak není pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

(e) Je-li $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, pak není pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

Důkaz. (a) Podle již dokázaného Cauchyova kritéria pro řady s nezápornými členy (Věta 3.2.8(a)) dostáváme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Tvrzení (b) a (c) lze odvodit obdobně.

(d) Podle Věty 3.2.8(d) dostáváme, že posloupnost $\{|a_n|\}$ nekonverguje k nule. Podle Věty 2.2.25 pak $\{a_n\}$ také nekonverguje k nule. Odtud plyne divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Tvrzení (e) lze dokázat obdobně. ■

3.4.7. Věta (d'Alembertovo podílové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nenulovými členy.

(a) Jestliže platí
$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q,$$
pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní.

(b) Je-li $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(c) Je-li $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(d) Je-li $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, pak není pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

Důkaz. (a) D'Alembertovo podílové kritérium pro řady s nezápornými členy (Věta 3.2.11(a)) ukazuje, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konverguje, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguje absolutně. Při důkazu tvrzení (b) a (c) lze postupovat obdobně.

(d) Podle Věty 3.2.11(d) dostáváme, že posloupnost $\{|a_n|\}$ nekonverguje k nule. Podle Věty 2.2.25 pak $\{a_n\}$ také nekonverguje k nule. Odtud plyne divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. ∎

3.4.8. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$.

Řešení. Nejprve vyšetříme, zda řada konverguje absolutně, tj. zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$. Protože

$$\lim\frac{\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim\frac{(n+1)\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}=1$$

a řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje podle Věty 3.2.18, z limitního srovnávacího kritéria plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$ diverguje. Proto řada ze zadání nekonverguje absolutně.

Pro vyšetření neabsolutní konvergence použijeme Leibnizovo kritérium (Věta 3.3.1). Řada zřejmě pravidelně střídá znaménka. Dále platí

$$\lim\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}=\lim\frac{1}{\sqrt{n+1}-\frac{1}{n+1}}=0.$$

Nakonec potřebujeme rozhodnout o platnosti nerovnosti

$$a_n=\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}\geq\frac{n+2}{(n+2)\sqrt{n+2}-1}=a_{n+1}. \tag{3.10}$$

Tuto nerovnost však snadno převedeme ekvivalentními úpravami na nerovnost

$$(n+1)(n+2)\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)+1\geq 0,$$

jež platí pro každé $n\in\mathbb{N}$. Pro každé $n\in\mathbb{N}$ tedy platí i (3.10). Ověřili jsme, že naše řada splňuje předpoklady Věty 3.3.1, a proto řada konverguje.

Řada ze zadání je tedy neabsolutně konvergentní. ♣

3.4.9. Příklad. Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n(\sqrt{n}+1)}$ je absolutně konvergentní.

Řešení. Pro všechna $n\in\mathbb{N}$ platí

$$\left|(-1)^{[\sqrt{n}]}\right|\leq 1 \qquad \text{a} \qquad 0\leq\frac{1}{n(\sqrt{n}+1)}\leq\frac{1}{n^{3/2}}.$$

Odtud pro každé $n \in \mathbb{N}$ plyne

$$0 \leq \left| \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n(\sqrt{n}+1)} \right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}. \tag{3.11}$$

Věta 3.2.18 říká, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ je konvergentní. Z nerovnosti (3.11) a Věty 3.2.2 plyne absolutní konvergence zkoumané řady. ♣

3.4.10. Příklad. Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ je neabsolutně konvergentní.

Řešení. Zadaná řada je konvergentní podle Příkladu 3.3.8. K ověření neabsolutní konvergence je třeba ukázat divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n}\right|$. Protože však

$$\forall n \in \mathbb{N}: \left|\frac{\sin n}{n}\right| \geq \frac{\sin^2 n}{n},$$

stačí podle Věty 3.2.2(b) dokázat divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$. Pomocí vzorce pro dvojnásobný argument dostaneme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1-\cos 2n}{2n}.$$

Tedy, kdyby konvergovala řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$, konvergovala by i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos 2n}{2n}$. Podle Příkladu 3.3.8 řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}$ konverguje. Navíc pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{n} = \frac{1-\cos 2n}{n} + \frac{\cos 2n}{n}.$$

Kdyby tedy konvergovala řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$, konvergovala by podle Věty 3.1.22 i harmonická řada. To by však byl spor s Příkladem 3.1.11. ♣

3.5. Přerovnání řad

Sčítáme-li konečně mnoho reálných čísel $a_1, \dots, a_n$, pak výsledný součet nezávisí na pořadí sčítanců $a_1, \dots, a_n$. Jinými slovy, je-li π libovolná bijekce množiny $\{1, \dots, n\}$ na sebe, pak platí $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_{\pi(i)}$. V tomto oddílu ukážeme, za jakých podmínek platí analogie uvedeného pozorování i pro nekonečné řady.

3.5.1. Definice. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada. Je-li $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekce, nazveme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ **přerovnáním** původní řady.

3.5.2. Příklad. Uvažujme například bijekci $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definovanou předpisem

$$\pi(n) = \begin{cases} n+1, & \text{pokud } n \text{ je liché,} \\ n-1, & \text{pokud } n \text{ je sudé.} \end{cases}$$

Máme-li řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots,$$

pak pomocí bijekce π obdržíme přerovnanou řadu

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} &= a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + a_{\pi(3)} + a_{\pi(4)} + \dots \\ &= a_2 + a_1 + a_4 + a_3 + \dots \end{aligned}$$

Následující jednoduché lemma v dalším výkladu několikrát použijeme.

3.5.3. Lemma. Nechť $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je zobrazení a $A \subset f(\mathbb{N})$ je konečná množina. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $A \subset \{f(1), \dots, f(n)\}$.

Důkaz. Pokud je A prázdná, pak stačí položit například $n = 1$. Předpokládejme, že A je neprázdná. Pro každé $a \in A$ nalezneme $n_a \in \mathbb{N}$ takové, že platí $f(n_a) = a$. Množina $B = \{n_a;\ a \in A\}$ je neprázdná a konečná, neboť A je neprázdná a konečná. Položme $n = \max B$. Potom platí

$$A = f(B) \subset f\bigl(\{1, \dots, n\}\bigr) = \{f(1), \dots, f(n)\},$$

čímž je tvrzení dokázáno. ∎

3.5.4. Lemma. Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potom pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\left|\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n\right| < \varepsilon$.

Důkaz. Označme $\{s_n\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a s její součet. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|s - s_{n_0-1}| < \varepsilon$. Označme $\{t_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ částečné součty řady $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, tj.

$$t_n = a_{n_0} + \dots + a_n, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $s_n = s_{n_0-1} + t_n$, a tedy také

$$\lim t_n = \lim(s_n - s_{n_0-1}) = s - s_{n_0-1}.$$

Posloupnost $\{t_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ tedy konverguje. Řada $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ je tudíž konvergentní a její součet je roven $s - s_{n_0-1}$. Tedy platí

$$\left|\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n\right| = |s - s_{n_0-1}| < \varepsilon.$$

∎

3.5.5. Věta. Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje a $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. Potom přerovnaná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ absolutně konverguje a platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$.

Důkaz. Zvolme $m \in \mathbb{N}$. Lemma 3.5.3 aplikujeme na zobrazení π^{-1} a množinu $A = \{1, \dots, m\}$. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\{1, \dots, m\} \subset \{\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(n)\}.$$

Máme tedy $\{\pi(1), \dots, \pi(m)\} \subset \{1, \dots, n\}$. Potom platí

$$\sum_{j=1}^{m} \left|a_{\pi(j)}\right| \le \sum_{i=1}^{n} |a_i| \le \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|.$$

Odtud podle 3.2.1 plyne, že řada $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{\pi(j)}|$ konverguje, a tedy řada $\sum_{j=1}^{\infty} a_{\pi(j)}$ konverguje absolutně.

Pro důkaz druhé části tvrzení označme

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + \dots + a_n, & t_n &= a_{\pi(1)} + \dots + a_{\pi(n)}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ s &= \lim_{n\to\infty} s_n, & t &= \lim_{n\to\infty} t_n. \end{aligned}$$

Potom s a t jsou dobře definovaná reálná čísla, neboť řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ absolutně konvergují, a tedy i konvergují. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Pomocí Lemmatu 3.5.4 nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} |a_i| < \varepsilon \qquad \text{a} \qquad \sum_{j=m+1}^{\infty} |a_{\pi(j)}| < \varepsilon. \tag{3.12}$$

Lemma 3.5.3 aplikujeme na zobrazení π^{-1} a π a nalezneme $n, j \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\begin{aligned} &\{1, \dots, m\} \subset \{\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(n)\}, \\ &\{1, \dots, m\} \subset \{\pi(1), \dots, \pi(j)\}. \end{aligned}$$

Položíme-li $k = \max\{j, n\}$, máme $k \ge n$, a dostaneme

$$\{\pi(1), \dots, \pi(m)\} \subset \{1, \dots, k\}, \tag{3.13}$$

$$\{1, \dots, m\} \subset \{\pi(1), \dots, \pi(k)\}. \tag{3.14}$$

Zvolme libovolné $p \in \mathbb{N}$, $p \ge k$. Označme

$$\begin{aligned} A &= \{1, \dots, p\} \setminus \{\pi(1), \dots, \pi(p)\}, \\ B &= \{\pi(1), \dots, \pi(p)\} \setminus \{1, \dots, p\}. \end{aligned}$$

Pak podle (3.14) máme $A \subset \{i \in \mathbb{N};\ i > m\}$ a podle (3.13) je $B \subset \{\pi(j);\ j \in \mathbb{N}, j > m\}$. Potom dostáváme

$$\begin{aligned}|s_p - t_p| &= \left|\sum_{i=1}^{p} a_i - \sum_{j=1}^{p} a_{\pi(j)}\right| = \left|\sum_{i\in A} a_i - \sum_{j\in B} a_{\pi(j)}\right| \leq \sum_{i\in A} |a_i| + \sum_{j\in B} \left|a_{\pi(j)}\right| \\ &\leq \sum_{i=m+1}^{\infty} |a_i| + \sum_{j=m+1}^{\infty} \left|a_{\pi(j)}\right| < 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Ukázali jsme, že platí $s - t = \lim_{p\to\infty}(s_p - t_p) = 0$, a tedy $s = t$. Tím je důkaz dokončen. ■

Předcházející věta říká, že přerovnání absolutně konvergentní řady nemění její součet. Pro neabsolutně konvergentní řady však toto tvrzení neplatí. Nejprve ukážeme příklad řady a jejího přerovnání s rozdílnými součty.

3.5.6. Příklad. Uvažujme řadu

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdots$$

Dokažte, že existuje přerovnání této řady, které má jiný součet než původní řada.

Řešení. Zadanou řadu přepíšeme ve tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_{2n-1} = \frac{1}{n}$, $a_{2n} = -\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Pro částečné součty této řady platí $s_{2n-1} = \frac{1}{n}$ a $s_{2n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Odtud podle Věty 2.3.23 plyne, že $\lim s_n = 0$, takže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

Položme

$$\pi(n) = \begin{cases} 4k-3, & \text{pokud } n = 3k-2, k \in \mathbb{N}, \\ 4k-1, & \text{pokud } n = 3k-1, k \in \mathbb{N}, \\ 2k, & \text{pokud } n = 3k, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Potom platí

$$a_{\pi(3k-2)} = \frac{1}{2k-1}, \qquad a_{\pi(3k-1)} = \frac{1}{2k}, \qquad a_{\pi(3k)} = -\frac{1}{k}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

a tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \dots,$$

Označme n-tý částečný součet přerovnané řady symbolem σ_n. Potom platí

$$\sigma_{3n} = \sum_{k=1}^{n} \bigl(a_{\pi(3k-2)} + a_{\pi(3k-1)} + a_{\pi(3k)}\bigr) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)2k}, \tag{3.15}$$

$$\sigma_{3n+1} = \sigma_{3n} + \frac{1}{2n+1}, \tag{3.16}$$

$$\sigma_{3n+2} = \sigma_{3n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}. \tag{3.17}$$

Protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\frac{1}{(2k-1)2k} \leq \frac{1}{k^2}$, je řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)2k}$ konvergentní podle srovnávacího kritéria (Věta 3.2.2(a)) a Věty 3.2.18. Její součet je kladný, neboť členy řady jsou kladné. Podle (3.15) tedy platí vztah $\lim_{n\to\infty} \sigma_{3n} = s \in (0,\infty)$. Nyní snadno podle (3.16) a (3.17) dostáváme, že platí také $\lim_{n\to\infty} \sigma_{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \sigma_{3n+2} = s$. Podle Věty 2.3.23 obdržíme $\lim \sigma_n = s$. Součet přerovnané řady je s, takže se liší od součtu původní řady. ♣

Následující věta ukazuje, že chování řady a jejího přerovnání popsané v předcházejícím příkladu je pro neabsolutně konvergentní řady typické.

3.5.7. Věta (Riemann). Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně a nechť $s \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje přerovnání této řady se součtem s.

Zbytek tohoto oddílu bude věnován důkazu Riemannovy věty.

3.5.8. Označení. Pro $x \in \mathbb{R}$ označme $x^+ = \max\{x, 0\}$ a $x^- = \max\{-x, 0\}$. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí následující vztahy:

$$x^+ \geq 0,\ x^- \geq 0,\ x = x^+ - x^-,\ |x| = x^+ + x^-,\ (-x)^+ = x^-,\ (-x)^- = x^+.$$

3.5.9. Lemma. Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně. Pak platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \infty$.

Důkaz. Jelikož obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ sestávají z nezáporných čísel, jejich součty existují, a jsou buď konečné nebo rovné ∞. Označme tyto součty po řadě s_+ a s_-. Jestliže jsou s_+ i s_- vlastní, potom podle Věty 3.1.21 řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ + a_n^-)$$

konverguje, což je spor s předpokladem.

Předpokládáme-li $s_+ = \infty$ a $s_- \in \mathbb{R}$, pak dostaneme snadno z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.25)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = \infty,$$

což je opět spor s předpokladem. Analogicky bychom pak přivedli ke sporu předpoklad $s_+ \in \mathbb{R}$ a $s_- = \infty$. Zbývá tedy pouze možnost $s_+ = s_- = \infty$. ■

3.5.10. Lemma. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost, $A \in \mathbb{R}^*$, $\lim a_n = A$ a $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. Pak $\lim_{n\to\infty} a_{\pi(n)} = A$.

Důkaz. Zvolme libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $a_k \in B(A, \varepsilon)$. Podle Lemmatu 3.5.3 nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí $\{1, \dots, k_0\} \subset \{\pi(1), \dots, \pi(n_0)\}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n > n_0$, pak máme $\pi(n) > k_0$, a tedy $a_{\pi(n)} \in B(A, \varepsilon)$, čímž je tvrzení dokázáno. ■

3.5.11. Lemma. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \leq \beta$. Nechť $\{\alpha_j\}$, $\{\beta_j\}$ jsou posloupnosti reálných čísel splňující $\lim \alpha_j = \alpha$ a $\lim \beta_j = \beta$. Potom platí

$$\lim_{j\to\infty} \min\{\alpha_j, \beta_j\} = \alpha.$$

Důkaz. Uvažujme nejprve případ, kdy $\alpha < \beta$. Podle Věty 2.3.30(a) existuje $j \in \mathbb{N}$ takové, že $\alpha_j < \beta_j$ pro každé $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_0$. Tedy pro každé $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_0$, platí $\min\{\alpha_j, \beta_j\} = \alpha_j$, z čehož okamžitě plyne, že $\lim \min\{\alpha_j, \beta_j\} = \alpha$.

Je-li $\alpha = \beta$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, máme dáno, pak podle definice limity existují $j_1, j_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_1$, platí $\alpha_j \in B(\alpha, \varepsilon)$ a pro $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_2$, platí $\beta_j \in B(\beta, \varepsilon)$. Pro přirozená čísla $j \geq \max\{j_1, j_2\}$ pak dostáváme $\min\{\alpha_j, \beta_j\} \in B(\alpha, \varepsilon) = B(\beta, \varepsilon)$. ■

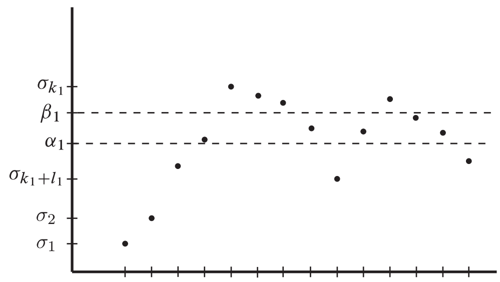
Riemannova věta (Věta 3.5.7) bude snadným důsledkem následující obecnější věty.

3.5.12. Věta. Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \leq \beta$. Pak existuje bijekce $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že pro částečné součty $\{\sigma_n\}$ přerovnané řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)}$ platí $\liminf \sigma_n = \alpha$ a $\limsup \sigma_n = \beta$.

Důkaz. Nalezneme posloupnosti reálných čísel $\{\alpha_j\}$ a $\{\beta_j\}$ splňující $\lim \alpha_j = \alpha$ a $\lim \beta_j = \beta$. Označíme

$$P = \{n \in \mathbb{N};\ a_n \geq 0\} \qquad \text{a} \qquad M = \{n \in \mathbb{N};\ a_n < 0\}.$$

Technické provedení důkazu Věty 3.5.12 je poměrně obtížné, ale základní myšlenka je jednoduchá. Množiny P a M rozdělí množinu $\mathbb{N}$ na dvě disjunktní podmnožiny. Zkonstruovat hledanou bijekci π znamená určit hodnoty $\pi(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Tyto hodnoty budeme konstruovat induktivně. Nejprve nalezneme prvky $\pi(1) < \pi(2) < \dots < \pi(k_1)$ z množiny P, kde $k_1 \in \mathbb{N}$ je nejmenší přirozené číslo takové, že platí $\sum_{j=1}^{k_1} a_{\pi(j)} > \beta_1$. Potom nalezneme prvky $\pi(k_1+1) < \pi(k_1+2) < \dots < \pi(k_1+l_1)$ z množiny M, kde $l_1 \in \mathbb{N}$ je nejmenší přirozené číslo takové, že platí $\sum_{j=1}^{k_1+l_1} a_{\pi(j)} < \alpha_1$. Tento postup potom opakujeme s čísly $\beta_2, \alpha_2, \beta_3, \dots$ tak, že střídavě vybíráme prvky z množin P a M, přičemž každý vybereme právě jednou. Následující obrázek nám pomůže lépe pochopit celý postup, který nyní provedeme podrobně.



Obrázek 1.

Zřejmě $\mathbb{N} = P \cup M$ a $P \cap M = \emptyset$. Dokážeme, že množiny P a M jsou nekonečné. Předpokládejme pro spor nejprve, že P je konečná. Pak pro $n \in \mathbb{N}$, $n > \max P$, platí $a_n < 0$, a tedy $a_n^+ = 0$. Z tohoto pozorování plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ konverguje. To je ovšem ve sporu s Lemmatem 3.5.9. Obdobně bychom přivedli ke sporu předpoklad, že množina M je konečná.

Podle Věty 1.7.19 nalezneme bijekci ρ množiny $\mathbb{N}$ na P a bijekci τ množiny $\mathbb{N}$ na M. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ nalezneme podle Lemmatu 3.5.3 $n \in \mathbb{N}$ takové, že platí $\{1, \dots, m\} \cap P \subset \{\rho(1), \dots, \rho(n)\}$, a tedy

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\rho(k)} \geq \sum_{k=1}^{m} a_k^+.$$

Odtud, z Věty 2.2.45(b) a z Lemmatu 3.5.9 plyne

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\rho(k)} = \infty. \tag{3.18}$$

Obdobně lze odvodit rovnost

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{\tau(l)} = -\infty. \tag{3.19}$$

Položme $k_0 = l_0 = 0$. Konstrukce hledaného přerovnání se bude opírat o následující pomocné tvrzení.

Pomocné tvrzení. Existují rostoucí posloupnosti přirozených čísel $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ a $\{l_j\}_{j=1}^{\infty}$ takové, že pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí

(a) k_j je nejmenší přirozené číslo splňující $k_j > k_{j-1}$ a zároveň

$$\sum_{k=1}^{k_j} a_{\rho(k)} + \sum_{k=1}^{l_{j-1}} a_{\tau(k)} \geq \beta_j, \tag{3.20}$$

(b) l_j je nejmenší přirozené číslo splňující $l_j > l_{j-1}$ a zároveň

$$\sum_{k=1}^{k_j} a_{\rho(k)} + \sum_{k=1}^{l_j} a_{\tau(k)} \leq \alpha_j. \tag{3.21}$$

Důkaz pomocného tvrzení. Budeme postupovat pomocí matematické indukce. Nejprve nalezneme nejmenší $k_1 \in \mathbb{N}$ splňující

$$\sum_{k=1}^{k_1} a_{\rho(k)} \geq \beta_1.$$

Takové k_1 existuje díky (3.18). Nyní s pomocí (3.19) nalezneme nejmenší $l_1 \in \mathbb{N}$ splňující

$$\sum_{k=1}^{k_1} a_{\rho(k)} + \sum_{k=1}^{l_1} a_{\tau(k)} \leq \alpha_1.$$

Tím je první krok konstrukce proveden.

Nyní předpokládejme, že přirozená čísla k_j a l_j jsou již zkonstruována. S pomocí (3.18) nalezneme nejmenší přirozené číslo k_{j+1} splňující $k_{j+1} > k_j$ a

$$\sum_{k=1}^{k_{j+1}} a_{\rho(k)} + \sum_{k=1}^{l_j} a_{\tau(k)} \geq \beta_{j+1}.$$

Dále s pomocí (3.19) nalezneme nejmenší přirozené číslo l_{j+1} splňující $l_{j+1} > l_j$ a

$$\sum_{k=1}^{k_{j+1}} a_{\rho(k)} + \sum_{k=1}^{l_{j+1}} a_{\tau(k)} \leq \alpha_{j+1}.$$

Tím je konstrukce provedena a pomocné tvrzení dokázáno.

Konstrukce bijekce π. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí

$$k_{j-1} + l_{j-1} < k_j + l_{j-1} < k_j + l_j. \tag{3.22}$$

Pro $j \in \mathbb{N}$ označme

$$A_j = \big(k_{j-1} + l_{j-1}, k_j + l_{j-1}\big] \cap \mathbb{N} \quad \text{a} \quad B_j = \big(k_j + l_{j-1}, k_j + l_j\big] \cap \mathbb{N}.$$

Protože $k_0 = l_0 = 0$, dostáváme z (3.22) rovnost $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty}(A_j \cup B_j)$. Navíc jsou množiny $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$ po dvou disjunktní. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$\pi(n) = \begin{cases} \rho(n - l_{j-1}), & \text{pokud } n \in A_j, \\ \tau(n - k_j), & \text{pokud } n \in B_j. \end{cases}$$

Surjektivita π. Přímo z definice plyne, že pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí

$$\pi(A_j) = \rho\big((k_{j-1}, k_j] \cap \mathbb{N}\big) \quad \text{a} \quad \pi(B_j) = \tau\big((l_{j-1}, l_j] \cap \mathbb{N}\big). \tag{3.23}$$

Zobrazení π je tedy na, neboť podle předchozího platí

$$\pi(\mathbb{N}) = \rho(\mathbb{N}) \cup \tau(\mathbb{N}) = P \cup M = \mathbb{N}.$$

Injektivita π. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ jsou zobrazení $\pi|_{A_j}, \pi|_{B_j}$ prostá, neboť τ a ρ jsou prostá zobrazení. Dále máme $\pi\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\big) \cap \pi\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\big) = P \cap M = \emptyset$ a navíc podle (3.23) pro každé $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, platí $\pi(A_i) \cap \pi(A_j) = \emptyset$ a $\pi(B_i) \cap \pi(B_j) = \emptyset$. Z právě uvedených faktů již plyne, že π je prosté.

Rovnost $\liminf \sigma_n = \alpha$. Pro hodnotu n-tého částečného součtu σ_n přerovnané řady platí podle definice π následující vztah

$$\sigma_n = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n-l_{j-1}} a_{\rho(k)} + \sum_{k=1}^{l_{j-1}} a_{\tau(k)}, & \text{pokud } n \in A_j, \\ \sum_{k=1}^{k_j} a_{\rho(k)} + \sum_{k=1}^{n-k_j} a_{\tau(k)}, & \text{pokud } n \in B_j. \end{cases} \tag{3.24}$$

Je-li $j \in \mathbb{N}$, pak platí buď $l_j > l_{j-1} + 1$ nebo $l_j = l_{j-1} + 1$. Předpokládejme, že nastává první případ. Potom $l_j - 1 > l_{j-1}$, a tedy, díky podmínce minimality v (b), platí $\sigma_{k_j + l_j - 1} > \alpha_j$. Pokud nastává druhý případ, potom $\sigma_{k_j + l_j - 1} = \sigma_{k_j + l_{j-1}} \geq \beta_j$ podle (3.20). Odtud plyne $\sigma_{k_j + l_j - 1} \geq \min\{\alpha_j, \beta_j\}$, a tedy

$$\begin{aligned} \alpha_j \geq \sigma_{k_j + l_j} &= \sigma_{k_j + l_j - 1} + a_{\pi(k_j + l_j)} \\ &\geq \min\{\alpha_j, \beta_j\} + a_{\pi(k_j + l_j)}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Podle Lemmatu 3.5.11 platí $\lim_{j \to \infty} \min\{\alpha_j, \beta_j\} = \alpha$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní, a tedy platí $\lim a_n = 0$ (Věta 3.1.15). Užitím Lemmatu 3.5.10

obdržíme $\lim_{n\to\infty} a_{\pi(n)} = 0$. Z věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.33) plyne $\lim_{j\to\infty} a_{\pi(k_j+l_j)} = 0$. Odtud, z (3.25) a z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.47) snadno dostaneme

$$\lim_{j\to\infty} \sigma_{k_j+l_j} = \alpha. \tag{3.26}$$

Podle věty o vztahu limes superior, limes inferior a hromadných hodnot (Věta 2.4.19) dostaneme nerovnost $\liminf \sigma_n \leq \alpha$. Nyní dokážeme opačnou nerovnost.

Pro $n \in A_j$ platí

$$\sigma_n = \sigma_{k_{j-1}+l_{j-1}} + \sum_{i=k_{j-1}+l_{j-1}+1}^{n} a_{\rho(i-l_{j-1})} \geq \sigma_{k_{j-1}+l_{j-1}},$$

neboť členy $a_{\rho(i-l_{j-1})}$ v předchozí sumě jsou nezáporné. Pro $n \in B_j$ platí

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_{k_j+l_{j-1}} + \sum_{i=k_j+l_{j-1}+1}^{n} a_{\tau(i-k_j)} \\ &\geq \sigma_{k_j+l_{j-1}} + \sum_{i=k_j+l_{j-1}+1}^{k_j+l_j} a_{\tau(i-k_j)} = \sigma_{k_j+l_j},\end{aligned}$$

neboť $n \leq k_j + l_j$ a členy $a_{\tau(i-k_j)}$ v předchozí sumě jsou záporné. Pro $n \in A_j \cup B_j$ tedy dohromady máme

$$\sigma_n \geq \min\{\sigma_{k_{j-1}+l_{j-1}}, \sigma_{k_j+l_j}\}. \tag{3.27}$$

Pokud $\alpha = -\infty$, je nerovnost $\liminf \sigma_n \geq \alpha$ zřejmá. Předpokládejme, že $\alpha > -\infty$. Zvolme $\alpha' \in \mathbb{R}$, $\alpha' < \alpha$. K němu s pomocí (3.26) nalezneme $j_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall j \in \mathbb{N}, j \geq j_0 \colon \sigma_{k_j+l_j} > \alpha'. \tag{3.28}$$

Nechť nyní $n \in \mathbb{N}$ splňuje $n > k_{j_0} + l_{j_0}$. K němu existuje $j \in \mathbb{N}$, $j > j_0$, takové, že $n \in A_j \cup B_j$. Potom podle (3.27) a (3.28) platí

$$\sigma_n \geq \min\{\sigma_{k_{j-1}+l_{j-1}}, \sigma_{k_j+l_j}\} > \alpha'.$$

Tím je dokázána nerovnost $\liminf \sigma_n \geq \alpha$. Spolu s již dokázanou opačnou nerovností $\liminf \sigma_n \leq \alpha$ dostáváme rovnost $\liminf \sigma_n = \alpha$.

Rovnost $\limsup \sigma_n = \beta$. Tento vztah lze dokázat obdobně jako rovnost $\liminf \sigma_n = \alpha$. ∎

Riemannovu větu (Věta 3.5.7) lze nyní snadno dokázat pomocí Věty 3.5.12.

Důkaz Věty 3.5.7. Položme $\alpha = \beta = s$. Podle Věty 3.5.12 existuje bijekce $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že pro posloupnost částečných součtů přerovnané řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ platí $\liminf \sigma_n = \limsup \sigma_n = s$. Díky Větě 2.4.12 tedy máme $\lim \sigma_n = s$, čímž je důkaz dokončen. ■

3.6. Součin řad

Nechť $a_1, \dots, a_n$ a $b_1, \dots, b_m$ jsou konečné posloupnosti reálných čísel. Pak platí

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) = \sum_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,m\}} a_i b_j. \tag{3.29}$$

V tomto oddílu ukážeme analogii vztahu (3.29) pro nekonečné řady. Je zřejmé, že bychom měli určitým způsobem sčítat všechna čísla $a_n b_m$, kde $n, m \in \mathbb{N}$. Otázkou však je, v jakém pořadí je sčítat. Jedna možnost je patrná z následujícího obrázku.

$$\begin{array}{ccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \dots \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \dots \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \dots \\
a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Obrázek 2.

Zde nejprve sčítáme prvky na „diagonálách“ a dostáváme tak novou řadu, jejíž součet (pokud existuje) můžeme chápat jako součin řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$. Právě uvedená možnost násobení řad není jediná, patří však mezi důležitější. Její formální definice následuje.

3.6.1. Definice. Mějme řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$. Jejich **Cauchyovým součinem** rozumíme řadu $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, jejíž členy jsou definovány předpisem

$$c_k = \sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i, \quad k \in \mathbb{N}.$$

3.6.2. Věta (Mertens). Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje a řada $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konverguje. Pak jejich Cauchyův součin je konvergentní řada, jejíž součet je roven $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right)$.

Důkaz. Pro $k \in \mathbb{N}$ označme

$$
\begin{aligned}
A_k &= \sum_{j=1}^{k} a_j, & A &= \sum_{j=1}^{\infty} a_j, & \tilde{A} &= \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|, \\
B_k &= \sum_{j=1}^{k} b_j, & B &= \sum_{j=1}^{\infty} b_j, & \beta_k &= B_k - B, \\
c_k &= \sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i, & C_k &= \sum_{j=1}^{k} c_j.
\end{aligned}
$$

Pro $k \in \mathbb{N}$ platí

$$
\begin{aligned}
C_k &= (a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \cdots + (a_1 b_k + \cdots + a_k b_1) \\
&= a_1(b_1 + \cdots + b_k) + a_2(b_1 + \cdots + b_{k-1}) + \cdots + a_k b_1 \\
&= a_1 B_k + a_2 B_{k-1} + \cdots + a_k B_1 \\
&= a_1(B + \beta_k) + a_2(B + \beta_{k-1}) + \cdots + a_k(B + \beta_1) \\
&= (a_1 + \cdots + a_k)B + (a_1 \beta_k + a_2 \beta_{k-1} + \cdots + a_k \beta_1) \\
&= A_k B + (a_1 \beta_k + a_2 \beta_{k-1} + \cdots + a_k \beta_1) \\
&= A_k B + \sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j} \beta_j .
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

Pro $k \in \mathbb{N}$ označme dále $\gamma_k = \sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j} \beta_j$. Nyní ukážeme, že platí $\lim \gamma_k = 0$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $|\beta_k| < \varepsilon$. Pak pro $k \in \mathbb{N}$, $k > k_0$, máme

$$\begin{aligned} |\gamma_k| = \left|\sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j}\beta_j\right| &\leq \left|\sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j\right| + \left|\sum_{j=k_0+1}^{k} a_{k+1-j}\beta_j\right| \\ &\leq \left|\sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j\right| + \sum_{j=k_0+1}^{k} \left|a_{k+1-j}\right| \left|\beta_j\right| \\ &\leq \left|\sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j\right| + \varepsilon \cdot \sum_{j=k_0+1}^{k} \left|a_{k+1-j}\right| \\ &\leq \left|\sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j\right| + \varepsilon\tilde{A}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Podle Věty 3.1.15 platí $\lim a_k = 0$, a tedy podle Věty 2.2.33 také pro každé $j \in \{1, \ldots, k_0\}$ platí $\lim_{k\to\infty} a_{k+1-j} = 0$. Pomocí věty o aritmetice limit (Věta 2.3.25)dostáváme

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j = 0. \tag{3.32}$$

Díky Větě 2.4.13, (3.31) a (3.32) pak platí $\limsup |\gamma_k| \leq \varepsilon\tilde{A}$. Odtud plyne, že $\limsup |\gamma_k| = 0$, a tedy $\lim_{k\to\infty} |\gamma_k| = 0$. Tedy podle Věty 2.2.25 dostáváme $\lim \gamma_k = 0$.

Limitním přechodem v (3.30) pak dostáváme z Věty 2.2.37 rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \lim_{k\to\infty} C_k = \lim_{k\to\infty} (A_k B + \gamma_k) = AB.$$

Tím je důkaz dokončen. ∎

3.6.3. Důsledek. Cauchyův součin dvou absolutně konvergentních řad je absolutně konvergentní.

Důkaz. Podle Mertensovy věty (Věta 3.6.2) je Cauchyův součin řad $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ a $\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|$ konvergentní řada. Pro Cauchyův součin řad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ a $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ tak platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} |a_{k+1-i}| |b_i|\right) < \infty.$$

Odtud plyne, že Cauchyův součin řad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ a $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ absolutně konverguje. ∎

Předpoklad pouhé konvergence obou řad ve Větě 3.6.2 ke konvergenci jejich Cauchyova součinu nestačí, jak vyplývá z následujícího příkladu.

3.6.4. Příklad. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konverguje, ale Cauchyův součin této řady se stejnou řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ nekonverguje.

Řešení. Konvergence řady vyplývá z Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1).

Členy odpovídajícího Cauchyova součinu mají pro $k \in \mathbb{N}$ tvar

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k+1-i} \frac{1}{\sqrt{k+1-i}} (-1)^i \frac{1}{\sqrt{i}} \\ &= (-1)^{k+1} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{(k+1-i)i}}. \end{aligned}$$

Podle AG-nerovnosti (Příklad 1.9.14) dostaneme odhad

$$\begin{aligned} \sqrt{(k+1-i)i} &\leq \frac{(k+1-i)+(i)}{2} \\ &= \frac{k+1}{2}, \quad k \in \mathbb{N},\ i = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$|c_k| = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{(k+1-i)i}} \geq \sum_{i=1}^{k} \frac{2}{k+1} = \frac{2k}{k+1}.$$

Tedy neplatí $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$, takže podle Věty 3.1.15 Cauchyův součin $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ nekonverguje. ♣

Cauchyův součin dvou konvergentních řad tedy nemusí konvergovat. Nicméně platí následující věta, jejíž důkaz provedeme až v Kapitole 8.

3.6.5. Věta (Abel). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ jsou konvergentní řady, jejichž Cauchyův součin konverguje. Pak platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right).$$

3.7. Zobecněné řady

Nechť I je množina a pro každé $\alpha \in I$ je dáno reálné číslo x_α. Je-li I konečná, pak je součet $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ dobře definován. V tomto oddílu ukážeme, že součet $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ lze v jistých případech definovat i pro I nekonečnou, přičemž některé vlastnosti obvyklé pro součet konečně mnoha čísel zůstanou v platnosti. Přístup použitý v tomto oddílu je odlišný od způsobu, jakým jsme definovali součet nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. V definici součtu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jsme totiž podstatným způsobem využili uspořádání sčítaných členů, zatímco pro definici součtu $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ žádné uspořádání k dispozici nemáme. Příkladem takového součtu je $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} x_{(n,m)}$.

3.7.1. Označení. Nechť I je množina. Potom symbolem $\mathcal{F}(I)$ označíme množinu všech konečných podmnožin I.

3.7.2. Definice. Nechť I je množina a pro každé $\alpha \in I$ je x_α reálné číslo. Symbol $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ nazýváme **zobecněnou řadou**. Prvek $x \in \mathbb{R}^*$ nazveme **součtem zobecněné řady** $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$, pokud platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists F \in \mathcal{F}(I)\ \forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F\colon \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha \in B(x,\varepsilon).$$

V takovémto případě pak píšeme $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = x$ a říkáme, že zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ **má součet**. Je-li $x \in \mathbb{R}$, je zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ **konvergentní**. Pokud není zobecněná řada konvergentní, říkáme, že je **divergentní**.

Pokud je konvergentní zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} |x_\alpha|$, nazveme zobecněnou řadu $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ **absolutně konvergentní**.

3.7.3. Poznámka. V tomto oddílu se budeme zabývat téměř výlučně zobecněnými řadami. Pokud nebude hrozit nedorozumění budeme místo termínu „zobecněná řada“ často psát jen „řada“.

3.7.4. Věta (jednoznačnost součtu zobecněné řady)**.** Řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ má nejvýše jeden součet.

Důkaz. Předpokládejme, že dvě různá čísla $x, y \in \mathbb{R}^*$ jsou součtem řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$. Zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \emptyset$. K němu nalezneme konečné množiny $F_1, F_2 \subset I$ splňující

$$\forall F \in \mathcal{F}(I), F \supset F_1\colon \sum_{\alpha\in F} x_\alpha \in B(x,\varepsilon),$$
$$\forall F \in \mathcal{F}(I), F \supset F_2\colon \sum_{\alpha\in F} x_\alpha \in B(y,\varepsilon).$$

Pak pro konečnou množinu $F_1 \cup F_2$ platí

$$\sum_{\alpha\in F_1\cup F_2} x_\alpha \in B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \emptyset,$$

což je zřejmý spor. ∎

3.7.5. Poznámka. Symbol $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ značí jednak zobecněnou řadu, jednak součet této řady, pokud existuje. Symbol $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ můžeme tedy používat k označení prvku z $\mathbb{R}^*$ až po ověření, že příslušná řada konverguje. S podobnou dvojznačností jsme se již setkali u nekonečných řad.

3.7.6. Poznámka. Je-li indexová množina I konečná, pak je součet zobecněné řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ roven obvyklému součtu. Vskutku, je-li $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, pak můžeme položit $F = I$. Potom pro každou $F' \in \mathcal{F}(I)$ splňující $F' \supset F$ platí $F' = I$. Tedy $\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha \in B\left(\sum_{\alpha\in I} x_\alpha, \varepsilon\right)$. Pokud $I = \emptyset$, pak klademe $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = 0$. Ve shodě s touto úmluvou platí právě uvedená úvaha o zobecněném součtu i v případě, kdy je I prázdná množina.

Následující věta je analogií Věty 3.1.20 pro zobecněné řady.

3.7.7. Věta (linearita zobecněného součtu)**.** Nechť řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ a $\sum_{\alpha\in I} y_\alpha$ mají součet.

(a) Pokud je definován výraz $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha + \sum_{\alpha\in I} y_\alpha$, pak má i zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha + y_\alpha)$ součet a platí

$$\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha + y_\alpha) = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha + \sum_{\alpha\in I} y_\alpha.$$

(b) Pokud $c \in \mathbb{R}$ a výraz $c\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ je definován, pak má i zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} cx_\alpha$ součet a platí

$$\sum_{\alpha\in I} cx_\alpha = c\sum_{\alpha\in I} x_\alpha.$$

Důkaz. Označme $x = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ a $y = \sum_{\alpha\in I} y_\alpha$.

(a) Rozlišíme několik případů.

Případ $x, y \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme konečné množiny $F_1, F_2 \subset I$ takové, že platí

$$\forall F_1' \in \mathcal{F}(I), F_1' \supset F_1 \colon \left|\sum_{\alpha\in F_1'} x_\alpha - x\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall F_2' \in \mathcal{F}(I), F_2' \supset F_2 \colon \left|\sum_{\alpha\in F_2'} y_\alpha - y\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Položme $F = F_1 \cup F_2$. Pro každou konečnou množinu $F' \subset I$ obsahující F dostáváme

$$\left|\sum_{\alpha\in F'}(x_\alpha + y_\alpha) - (x+y)\right| \le \left|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha - x\right| + \left|\sum_{\alpha\in F'} y_\alpha - y\right| < \varepsilon.$$

Tímto je požadovaná rovnost dokázána.

Případ $x = \infty$, $y \in \mathbb{R}$. Chceme dokázat, že platí $\sum_{\alpha \in I}(x_\alpha + y_\alpha) = \infty$. Pro dané $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, nalezneme konečnou množinu $F_1 \subset I$ takovou, že platí

$$\forall F_1' \in \mathcal{F}(I), F_1' \supset F_1 \colon \sum_{\alpha \in F_1'} x_\alpha > \frac{1}{\varepsilon} - y + 1. \tag{3.33}$$

Dále nalezneme konečnou množinu $F_2 \subset I$ takovou, že platí

$$\forall F_2' \in \mathcal{F}(I), F_2' \supset F_2 \colon \left| \sum_{\alpha \in F_2'} y_\alpha - y \right| < 1.$$

Pak máme

$$\forall F_2' \in \mathcal{F}(I), F_2' \supset F_2 \colon \sum_{\alpha \in F_2'} y_\alpha > y - 1. \tag{3.34}$$

Položíme $F = F_1 \cup F_2$. Pak pro každou konečnou množinu $F' \subset I$ obsahující F dostáváme díky (3.33) a (3.34) nerovnost

$$\sum_{\alpha \in F'} (x_\alpha + y_\alpha) = \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha + \sum_{\alpha \in F'} y_\alpha > \frac{1}{\varepsilon} - y + 1 + y - 1 = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Tím je požadovaná rovnost pro případ $x = \infty$, $y \in \mathbb{R}$ dokázána. Ve zbývajících případech lze postupovat obdobně. Příslušné důkazy již uvádět nebudeme.

(b) Pokud je $c = 0$, potom musí být $x \in \mathbb{R}$ a tvrzení je téměř zřejmé. Předpokládejme v dalším, že platí $c \neq 0$. Rozlišíme následující případy

Případ $x \in \mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Nalezneme konečnou množinu $F \subset I$ takovou, že platí

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F \colon \left| \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha - x \right| < \frac{\varepsilon}{|c|}.$$

Pro každou množinu $F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F$, pak máme

$$\left| \sum_{\alpha \in F'} c x_\alpha - c x \right| = |c| \left| \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha - x \right| < |c| \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

Platí tedy rovnost $\sum_{\alpha \in I} c x_\alpha = c x$.

Případ $x = -\infty$, $c < 0$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Nalezneme konečnou množinu $F \subset I$ takovou, že platí

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F \colon \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha < -\frac{1}{|c|\varepsilon}.$$

Pro každou množinu $F' \in \mathcal{F}(I)$, $F' \supset F$, pak máme

$$\sum_{\alpha \in F'} c x_\alpha > -c \frac{1}{|c|\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Platí tedy rovnost $\sum_{\alpha \in I} c x_\alpha = \infty$.

Ostatní případy lze dokázat obdobně jako v předchozím případě. ∎

3.7.8. Věta (vlastnosti zobecněného součtu). Pro zobecněnou řadu $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ platí následující tvrzení.

(a) Jsou-li čísla x_α, $\alpha \in I$, nezáporná, pak $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ má součet a platí

$$\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = \sup\left\{\sum_{\alpha \in F} x_\alpha;\ F \in \mathcal{F}(I)\right\}. \tag{3.35}$$

(b) Zobecněné řady $\sum_{\alpha \in I} |x_\alpha|$, $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+$, $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$ mají vždy součet a platí

$$\sum_{\alpha \in I} |x_\alpha| = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+ + \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-. \tag{3.36}$$

(c) Zobecněná řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ má součet právě tehdy, když je definován výraz $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$. V tomto případě pak platí

$$\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-. \tag{3.37}$$

Důkaz. (a) Nechť x_α, $\alpha \in I$, jsou nezáporná čísla. Označme

$$s = \sup\left\{\sum_{\alpha \in F} x_\alpha;\ F \in \mathcal{F}(I)\right\}.$$

Ukážeme, že platí $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = s$. Nejprve si povšimneme, že platí

$$\forall F \in \mathcal{F}(I)\colon \sum_{\alpha \in F} x_\alpha \le s. \tag{3.38}$$

Mějme nyní dáno libovolné $s' \in \mathbb{R}$, $s' < s$. Z definice suprema nalezneme konečnou množinu $F \subset I$ takovou, že $\sum_{\alpha \in F} x_\alpha > s'$. Pak pro libovolnou konečnou množinu $F' \subset I$ obsahující F platí

$$\sum_{\alpha \in F'} x_\alpha \ge \sum_{\alpha \in F} x_\alpha > s'.$$

Odtud a z (3.38) již snadno dostaneme rovnost $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = s$.

(b) Díky (a) mají zobecněné řady $\sum_{\alpha \in I} |x_\alpha|$, $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+$, $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$ vždy součet. Rovnost (3.36) plyne z Věty 3.7.7(a), neboť $|x_\alpha| = x_\alpha^+ + x_\alpha^-$ a součet $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+ + \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$ je definován.

(c) Položme $P = \{\alpha \in I;\ x_\alpha \geq 0\}$, $M = \{\alpha \in I;\ x_\alpha < 0\}$, $p = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+$ a $m = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$. Dokážeme nejprve, že platí

$$p = \sum_{\alpha \in P} x_\alpha \qquad \text{a} \qquad m = -\sum_{\alpha \in M} x_\alpha. \tag{3.39}$$

Zřejmě platí rovnosti

$$\left\{\sum_{\alpha \in F} x_\alpha^+;\ F \in \mathcal{F}(I)\right\} = \left\{\sum_{\alpha \in F} x_\alpha;\ F \in \mathcal{F}(P)\right\}, \tag{3.40}$$

$$\left\{\sum_{\alpha \in F} x_\alpha^-;\ F \in \mathcal{F}(I)\right\} = \left\{-\sum_{\alpha \in F} x_\alpha;\ F \in \mathcal{F}(M)\right\}, \tag{3.41}$$

a tedy máme

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+ &= \sup\left\{\sum_{\alpha \in F} x_\alpha^+;\ F \in \mathcal{F}(I)\right\} \\
&= \sup\left\{\sum_{\alpha \in F} x_\alpha;\ F \in \mathcal{F}(P)\right\} && \text{(podle (3.40))} \\
&= \sum_{\alpha \in P} x_\alpha, \\
-\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^- &= -\sup\left\{\sum_{\alpha \in F} x_\alpha^-;\ F \in \mathcal{F}(I)\right\} \\
&= -\sup\left\{-\sum_{\alpha \in F} x_\alpha;\ F \in \mathcal{F}(M)\right\} && \text{(podle (3.41))} \\
&= \inf\left\{\sum_{\alpha \in F} x_\alpha;\ F \in \mathcal{F}(M)\right\} && \text{(podle Věty 1.6.15)} \\
&= \sum_{\alpha \in M} x_\alpha.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nejprve dokážeme, že rozdíl $p - m$ je dobře definován. Pro spor předpokládejme, že tomu tak není, tj. $p = m = \infty$. Nechť $F \subset I$ je konečná. Z (3.39) plyne

$$\sup\left\{\sum_{\alpha \in G} x_\alpha;\ G \in \mathcal{F}(P \setminus F)\right\} = \infty,$$

a tedy existuje konečná množina $G_1 \subset P \setminus F$ taková, že

$$\sum_{\alpha \in G_1} x_\alpha > -\sum_{\alpha \in F} x_\alpha + 1.$$

Z (3.39) dále plyne

$$\inf\left\{\sum_{\alpha\in G} x_\alpha;\ G \in \mathcal{F}(M \setminus F)\right\} = -\infty,$$

a tedy existuje konečná množina $G_2 \subset M \setminus F$ taková, že

$$\sum_{\alpha\in G_2} x_\alpha < -\sum_{\alpha\in F} x_\alpha - 1.$$

Položíme $F_1 = F \cup G_1$ a $F_2 = F \cup G_2$. Pro každou konečnou množinu $F \subset I$ jsme tedy nalezli $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(I)$, které obsahují F a splňují $\sum_{\alpha\in F_1} x_\alpha > 1$ a $\sum_{\alpha\in F_2} x_\alpha < -1$. Toto je ale ve sporu s předpokladem existence součtu řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$. Rozdíl $p - m$ je tedy dobře definován.

$\Leftarrow$ Řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje podle Věty 3.7.7.

Rovnost (3.37) plyne z právě dokázané ekvivalence a Věty 3.7.7, neboť $x_\alpha = x_\alpha^+ + (-1)\cdot x_\alpha^-, \alpha \in I$. ∎

Z Věty 3.7.8(a) snadno plyne následující analogie srovnávacího kritéria z Věty 3.2.2.

3.7.9. Věta (srovnávací kritérium pro zobecněné řady). Nechť $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ a $\sum_{\alpha\in I} y_\alpha$ jsou zobecněné řady s nezápornými členy a nechť platí $y_\alpha \le x_\alpha$ pro každé $\alpha \in I$. Potom součty řad existují a platí $\sum_{\alpha\in I} y_\alpha \le \sum_{\alpha\in I} x_\alpha$. Jestliže tedy navíc řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje, pak konverguje i řada $\sum_{\alpha\in I} y_\alpha$.

Důkaz. Existence součtů obou řad plyne z Věty 3.7.8(a). Z nerovností $0 \le y_\alpha \le x_\alpha, \alpha \in I$, dostáváme

$$0 \le \sup\left\{\sum_{\alpha\in F} y_\alpha;\ F \in \mathcal{F}(I)\right\} \le \sup\left\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha;\ F \in \mathcal{F}(I)\right\}.$$

Odtud pomocí Věty 3.7.8(a) ihned plyne dokazovaná nerovnost. Z ní pak snadno vyplývá i tvrzení o konvergenci. ∎

3.7.10. Věta (absolutní konvergence zobecněné řady). Řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ je konvergentní právě tehdy, když je absolutně konvergentní.

Důkaz. $\Rightarrow$ Podle Věty 3.7.8(c) řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+$ a $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$ konvergují, a proto konverguje podle Věty 3.7.8(b) i řada $\sum_{\alpha\in I} |x_\alpha|$.

$\Leftarrow$ Pro každé $\alpha \in I$ platí nerovnosti $0 \le x_\alpha^+ \le |x_\alpha|$ a $0 \le x_\alpha^- \le |x_\alpha|$, a proto podle Věty 3.7.9 řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+$ a $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$ konvergují. Podle Věty 3.7.8(c) konverguje tedy i řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$. ∎

3.7.11. Věta (přerovnání zobecněné řady). Nechť má zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ součet a $\pi\colon I \to I$ je bijekce. Potom má součet i řada $\sum_{\alpha\in I} x_{\pi(\alpha)}$ a platí $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = \sum_{\alpha\in I} x_{\pi(\alpha)}$.

Důkaz. Označme s součet řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme konečnou množinu $F \subset I$ takovou, že

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F: \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha \in B(s,\varepsilon).$$

Položme $G = \pi^{-1}(F)$ a vezměme libovolnou konečnou množinu $G' \subset I$ obsahující G. Pak množina $F' = \pi(G')$ je konečná, obsahuje F a platí

$$\sum_{\alpha\in G'} x_{\pi(\alpha)} = \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha \in B(s,\varepsilon).$$

Tedy $\sum_{\alpha\in I} x_{\pi(\alpha)} = s$. ■

3.7.12. Věta. Nechť zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje. Potom je množina $\{\alpha \in I;\ x_\alpha \neq 0\}$ spočetná.

Důkaz. Řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ je absolutně konvergentní dle Věty 3.7.10. Označme $s = \sum_{\alpha\in I} |x_\alpha|$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$I_n = \left\{\alpha \in I;\ |x_\alpha| \geq \frac{1}{n}\right\}.$$

Máme-li pak libovolnou konečnou množinu $F \subset I_n$, platí pro počet jejích prvků odhad

$$|F| = \sum_{\alpha\in F} 1 = n \sum_{\alpha\in F} \frac{1}{n} \leq n \sum_{\alpha\in F} |x_\alpha| \leq ns.$$

Tedy i sama množina I_n má nejvýše ns prvků, a je tedy konečná. Proto je podle Věty 1.7.19(b) množina $\{\alpha \in I;\ |x_\alpha| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ spočetná. ■

3.7.13. Poznámka. Nechť $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ je konvergentní zobecněná řada. Z důkazu tvrzení Věty 3.7.12 plyne, že pro pro každé $c \in \mathbb{R}, c > 0$, je množina $\{\alpha \in I;\ |x_\alpha| > c\}$ konečná. Tuto vlastnost můžeme chápat jako analogii Věty 3.1.15 pro konvergentní zobecněné řady.

Pro množinu reálných čísel $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ máme nyní dva různé pojmy součtu jejích prvků. Totiž součet definovaný jako limita částečných součtů a součet zobecněné řady z Definice 3.7.2. Symboly $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ a $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ pro příslušné součty rozlišují použité metody. Následující věta ukazuje jejich vzájemný vztah.

3.7.14. Věta (zobecněný součet na $\mathbb{N}$). Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost.

(a) Zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$je konvergentní právě tehdy, když řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je absolutně konvergentní. V tomto případě pak platí $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

(b) Jestliže má zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ součet, má ho i řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ a tyto součty se rovnají.

Důkaz. (a) Podle Věty 3.7.10 konverguje řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ právě tehdy, když konverguje absolutně. Řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konverguje absolutně podle Věty 3.7.8(a) právě tehdy, když

$$\sup\left\{\sum_{i\in F} |x_i|;\ F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})\right\} < \infty,$$

tedy, dle definice suprema,

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |x_i|;\ n \in \mathbb{N}\right\} < \infty.$$

Poslední nerovnost nastává právě tehdy, když je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ konvergentní, tedy když je řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ absolutně konvergentní. Tím je proveden důkaz ekvivalence.

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je absolutně konvergentní. Označme $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Dokážeme rovnost $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku konvergence řady (Věta 3.1.18(ii)). Můžeme tedy nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\left|x - \sum_{i=1}^{n} x_i\right| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \sum_{i=n_0}^{n} |x_i| < \varepsilon.$$

Položme nyní $F = \{1, \ldots, n_0\}$ a nechť $F' \subset \mathbb{N}$ je konečná množina obsahující F. Označme $F'' = \{i \in F';\ i > n_0\}$. Pak pro F' máme odhad

$$\begin{aligned}
\left|x - \sum_{i\in F'} x_i\right| &= \left|x - \sum_{i=1}^{n_0} x_i - \sum_{i\in F''} x_i\right| \leq \left|x - \sum_{i=1}^{n_0} x_i\right| + \left|\sum_{i\in F''} x_i\right| \\
&\leq \left|x - \sum_{i=1}^{n_0} x_i\right| + \sum_{i\in F''} |x_i| \\
&\leq \left|x - \sum_{i=1}^{n_0} x_i\right| + \sum_{i=n_0+1}^{\max F'} |x_i| < 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Tedy $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = x$.

(b) Díky tvrzení (a) zbývá ověřit případ, kdy je součet zobecněné řady $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ nevlastní. Předpokládejme nejprve, že platí $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \infty$. Zvolme $s \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme konečnou množinu $F \subset \mathbb{N}$ takovou, že platí

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F \colon \sum_{n\in F'} x_n > s.$$

Položíme $n_0 = \max F$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, dostáváme $F \subset \{1, \dots, n\}$, a tedy $\sum_{i=1}^{n} x_i > s$. Tím jsme ukázali, že částečné součty řady $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergují k ∞.

Je-li $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = -\infty$, platí díky Větě 3.7.7(b) $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-x_n) = \infty$, a tedy víme z předešlého, že $\sum_{n=1}^{\infty}(-x_n) = \infty$. Z Věty 2.3.25 plyne $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = -\infty$. ■

3.7.15. Příklad. Tvrzení (b) Věty 3.7.14 nelze obrátit, jak ukazuje libovolná neabsolutně konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Ta nemůže mít zobecněný součet. Kdyby totiž $s = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$, pak i $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ podle Věty 3.7.14(b). Pomocí Riemannovy Věty 3.5.7 bychom našli bijekci $\pi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takovou, že $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} \neq s$. Podle Věty 3.7.11 ale platí $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_{\pi(n)} = s$. Opět z Věty 3.7.14(b) máme $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = s$, což je spor.

3.7.16. Věta (součin zobecněných řad)**.** Nechť zobecněné řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ a $\sum_{\beta\in J} y_\beta$ konvergují. Potom konverguje i zobecněná řada $\sum_{(\alpha,\beta)\in I\times J} x_\alpha y_\beta$ a platí

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in I\times J} x_\alpha y_\beta = \left(\sum_{\alpha\in I} x_\alpha\right) \cdot \left(\sum_{\beta\in J} y_\beta\right).$$

Důkaz. Ověříme nejprve absolutní konvergenci řady $\sum_{(\alpha,\beta)\in I\times J} x_\alpha y_\beta$. Označme $s = \sum_{\alpha\in I} |x_\alpha|$ a $t = \sum_{\beta\in J} |y_\beta|$. Máme-li dánu konečnou množinu $F \subset I \times J$, najdeme pomocí Věty 1.7.17 konečné množiny $F_1 \subset I$ a $F_2 \subset J$ splňující $F \subset F_1 \times F_2$ a odhadneme

$$\begin{aligned}\sum_{(\alpha,\beta)\in F} |x_\alpha y_\beta| \leq \sum_{(\alpha,\beta)\in F_1\times F_2} |x_\alpha y_\beta| &= \left(\sum_{\alpha\in F_1} |x_\alpha|\right) \cdot \left(\sum_{\beta\in F_2} |y_\beta|\right)\\ &\leq s \cdot t < \infty.\end{aligned}$$

Zde jsme použili absolutní konvergenci obou řad plynoucí z Věty 3.7.10. Z tvrzení Věty 3.7.8(a) plyne absolutní konvergence řady $\sum_{(\alpha,\beta)\in I\times J} x_\alpha y_\beta$, a tedy i její konvergence (viz znovu Věta 3.7.10).

Ukážeme nyní požadovanou rovnost. Označíme

$$x = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha, \qquad y = \sum_{\beta\in J} y_\beta, \qquad z = \sum_{(\alpha,\beta)\in I\times J} x_\alpha y_\beta$$

a pro dané kladné $\varepsilon \in \mathbb{R}$ najdeme konečné množiny $F \subset I \times J$, $F_1 \subset I$ a $F_2 \subset J$ takové, že platí

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I \times J), F' \supset F : \left| \sum_{(\alpha,\beta) \in F'} x_\alpha y_\beta - z \right| < \varepsilon, \tag{3.42}$$

$$\forall F_1' \in \mathcal{F}(I), F_1' \supset F_1 : \left| \sum_{\alpha \in F_1'} x_\alpha - x \right| < \varepsilon, \tag{3.43}$$

$$\forall F_2' \in \mathcal{F}(J), F_2' \supset F_2 : \left| \sum_{\beta \in F_2'} y_\beta - y \right| < \varepsilon. \tag{3.44}$$

Nalezneme konečné množiny $F_1' \subset I$ a $F_2' \subset J$ splňující $F \subset F_1' \times F_2'$. Potom platí

$$\sum_{(\alpha,\beta) \in F_1' \times F_2'} x_\alpha y_\beta = \sum_{\alpha \in F_1'} x_\alpha \cdot \sum_{\beta \in F_2'} y_\beta . \tag{3.45}$$

Odhadneme

$$\begin{aligned} |z - xy| &= \left| z - \sum_{(\alpha,\beta) \in F_1' \times F_2'} x_\alpha y_\beta + \sum_{\alpha \in F_1'} x_\alpha \cdot \sum_{\beta \in F_2'} y_\beta - xy \right| \qquad \text{(podle (3.45))} \\ &\leq \left| z - \sum_{(\alpha,\beta) \in F_1' \times F_2'} x_\alpha y_\beta \right| + \left| \sum_{\alpha \in F_1'} x_\alpha \cdot \sum_{\beta \in F_2'} y_\beta - xy \right| . \end{aligned}$$

První výraz odhadneme podle (3.42) a dostaneme

$$\left| z - \sum_{(\alpha,\beta) \in F_1' \times F_2'} x_\alpha y_\beta \right| < \varepsilon. \tag{3.46}$$

Nyní odhadneme druhý výraz

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\alpha \in F_1'} x_\alpha \cdot \sum_{\beta \in F_2'} y_\beta - xy \right| &\leq \left| \sum_{\alpha \in F_1'} x_\alpha \cdot \left(\sum_{\beta \in F_2'} y_\beta - y \right) + \left(\sum_{\alpha \in F_1'} x_\alpha - x \right) \cdot y \right| \\ &\leq \sum_{\alpha \in F_1'} |x_\alpha| \cdot \left| \sum_{\beta \in F_2'} y_\beta - y \right| + \left| \sum_{\alpha \in F_1'} x_\alpha - x \right| \cdot |y| \\ &\leq s\varepsilon + \varepsilon\, |y| . \end{aligned}$$

Tedy $z = xy$ a důkaz je hotov. ∎

3.7.17. Věta (asociativita zobecněného součtu)**.** Nechť J je množina a $\{I_\beta;\ \beta \in J\}$ je systém množin splňující $I_\beta \cap I_{\beta'} = \emptyset$ pro různé indexy $\beta, \beta' \in J$.

Nechť $I = \bigcup_{\beta \in J} I_\beta$ a zobecněná řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ konverguje. Potom pro každé $\beta \in J$ řada $\sum_{\alpha \in I_\beta} x_\alpha$ konverguje. Označíme-li $y_\beta = \sum_{\alpha \in I_\beta} x_\alpha$, $\beta \in J$, pak řada $\sum_{\beta \in J} y_\beta$ konverguje a platí $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = \sum_{\beta \in J} y_\beta$.

Důkaz. Zvolme $\beta \in J$. Podle Věty 3.7.8(b) mají řady $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+$ a $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$ součet. Pomocí (3.35) odhadneme

$$0 \leq \sum_{\alpha \in I_\beta} x_\alpha^+ \leq \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+ < \infty \quad \text{a} \quad 0 \leq \sum_{\alpha \in I_\beta} x_\alpha^- \leq \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^- < \infty.$$

Odtud plyne, že i řady $\sum_{\alpha \in I_\beta} x_\alpha^+$ a $\sum_{\alpha \in I_\beta} x_\alpha^-$ konvergují. Tedy dle Věty 3.7.8(c) řada $\sum_{\alpha \in I_\beta} x_\alpha$ konverguje. Čísla y_β, $\beta \in J$, jsou tedy dobře definována.

Označme $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = x$. Nyní dokážeme rovnost $\sum_{\beta \in J} y_\beta = x$. Je-li $I = \emptyset$, pak pro každé $\beta \in J$ platí $I_\beta = \emptyset$, takže $y_\beta = 0$. Potom máme

$$\sum_{\beta \in J} y_\beta = \sum_{\beta \in J} 0 = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha = 0.$$

Nechť $I \neq \emptyset$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme konečnou neprázdnou množinu $F \subset I$ takovou, že

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F : \left| \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha - x \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.47}$$

Označme $G = \{\beta \in J;\ F \cap I_\beta \neq \emptyset\}$. Množina G je konečná, neboť systém $\{I_\beta;\ j \in \beta\}$ je disjunktní a množina F je konečná. Nechť $G' \in \mathcal{F}(J)$, $G' \supset G$. Počet prvků G' označme n. Pro každé $\beta \in G'$ nalezneme konečnou množinu $F_\beta \subset I_\beta$ takovou, že

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I_\beta), F' \supset F_\beta : \left| \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha - y_\beta \right| < \frac{\varepsilon}{2n}. \tag{3.48}$$

Položme $F^* = F \cup \bigcup_{\beta \in G'} F_\beta$. Množina F^* je konečná. Dále platí $F^* \subset \bigcup_{\beta \in G'} I_\beta$, neboť $F \subset \bigcup_{\beta \in G} I_\beta \subset \bigcup_{\beta \in G'} I_\beta$. Potom platí

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{\beta \in G'} y_\beta - x \right| &\leq \left| \sum_{\beta \in G'} y_\beta - \sum_{\alpha \in F^*} x_\alpha \right| + \left| \sum_{\alpha \in F^*} x_\alpha - x \right| \\
&\leq \left| \sum_{\beta \in G'} \Big(y_\beta - \sum_{\alpha \in F^* \cap I_\beta} x_\alpha \Big) \right| + \left| \sum_{\alpha \in F^*} x_\alpha - x \right| \\
&\leq \sum_{\beta \in G'} \left| y_\beta - \sum_{\alpha \in F^* \cap I_\beta} x_\alpha \right| + \left| \sum_{\alpha \in F^*} x_\alpha - x \right|.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Dále zřejmě platí $F \subset F^*$, a tedy podle (3.47)

$$\left|\sum_{\alpha\in F^*} x_\alpha - x\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pro $\beta \in G'$ platí $F_\beta \subset F^* \cap I_\beta$, a proto podle (3.48) platí

$$\left|y_\beta - \sum_{\alpha\in F^*\cap I_\beta} x_\alpha\right| < \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Z těchto dvou odhadů a z (3.49) pak plyne

$$\left|\sum_{\beta\in G'} y_\beta - x\right| < n \cdot \frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

čímž je tvrzení dokázáno. ∎

3.7.18. Věta (Bolzanova-Cauchyova podmínka pro zobecněné řady)**.** Zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje právě tehdy, když platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists F \in \mathcal{F}(I)\ \forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \cap F = \emptyset\colon \left|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha\right| < \varepsilon. \tag{3.50}$$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje a její součet je roven $x \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme konečnou množinu $F \subset I$ takovou, že pro každou konečnou množinu $F'' \subset I$ obsahující F platí $|\sum_{\alpha\in F''} x_\alpha - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pro konečnou množinu $F' \subset I$ disjunktní s F pak platí

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha\right| &= \left|\sum_{\alpha\in F\cup F'} x_\alpha - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha\right| = \left|\sum_{\alpha\in F\cup F'} x_\alpha - x + x - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha\right| \\ &\le \left|\sum_{\alpha\in F\cup F'} x_\alpha - x\right| + \left|x - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

tedy podmínka (3.50) je splněna.

Nyní předpokládejme, že řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ splňuje podmínku (3.50). Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak pomocí podmínky (3.50) pro $\varepsilon = \frac{1}{n}$ nalezneme konečnou množinu $F_n \subset I$ takovou, že

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I),\ F' \cap F_n = \emptyset\colon \left|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha\right| < \frac{1}{n}. \tag{3.51}$$

Označme $y_n = \sum_{\alpha \in F_n} x_\alpha$, $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že $\{y_n\}$ je cauchyovská posloupnost reálných čísel. Pro každé $n, m \in \mathbb{N}$ platí

$$|y_m - y_n| = \left| \sum_{\alpha \in F_m} x_\alpha - \sum_{\alpha \in F_n} x_\alpha \right| \leq \left| \sum_{\alpha \in F_m \setminus F_n} x_\alpha \right| + \left| \sum_{\alpha \in F_n \setminus F_m} x_\alpha \right|.$$

Protože $F_m \setminus F_n$ je konečná množina disjunktní s F_n, dostáváme podle (3.51) odhad $\left| \sum_{\alpha \in F_m \setminus F_n} x_\alpha \right| < \frac{1}{n}$. Obdobně dostaneme odhad $\left| \sum_{\alpha \in F_n \setminus F_m} x_\alpha \right| < \frac{1}{m}$. Tedy pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ máme $|y_m - y_n| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Potom pro každá $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, $n \geq n_0$, platí

$$|y_m - y_n| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tudíž je posloupnost $\{y_n\}$ cauchyovská.

Díky Větě 2.4.25 tedy existuje $x \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim y_n = x$. Ukážeme, že platí $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = x$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ a $|y_{n_0} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Nechť $F' \subset I$ je konečná množina obsahující F_{n_0}. Potom platí

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha - x \right| &= \left| \sum_{\alpha \in F_{n_0}} x_\alpha + \sum_{\alpha \in F' \setminus F_{n_0}} x_\alpha - x \right| \\
&\leq \left| \sum_{\alpha \in F_{n_0}} x_\alpha - x \right| + \left| \sum_{\alpha \in F' \setminus F_{n_0}} x_\alpha \right| \\
&= \left| y_{n_0} - x \right| + \left| \sum_{\alpha \in F' \setminus F_{n_0}} x_\alpha \right|.
\end{aligned}$$

Podle (3.51) platí

$$\left| \sum_{\alpha \in F' \setminus F_{n_0}} x_\alpha \right| < \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tedy celkem dostaneme

$$\left| \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha - x \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Podle Definice 3.7.2 tedy $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = x$. ■

3.7.19. Příklad. Zobecněná řada $\sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \frac{1}{n^2 + m^2}$ není konvergentní.

Řešení. Protože řada sestává z nezáporných čísel, má součet. Naším cílem je ukázat, že je roven nekonečnu. Pro přirozené číslo $j \in \mathbb{N}$ odhadneme částečný součet přes indexovou množinu

$$I_j = \{j+1, \dots, 2j\} \times \{j+1, \dots, 2j\},$$

tedy

$$\begin{aligned}\sum_{(n,m)\in I_j} \frac{1}{n^2+m^2} &= \sum_{m=j+1}^{2j} \sum_{n=j+1}^{2j} \frac{1}{n^2+m^2} \geq \sum_{m=j+1}^{2j} \sum_{n=j+1}^{2j} \frac{1}{8j^2} \\ &= j^2 \cdot \frac{1}{8j^2} = \frac{1}{8}.\end{aligned} \tag{3.52}$$

Potom množiny I_{2^j}, $j \in \mathbb{N}$, jsou disjunktní, a proto můžeme odhadnout

$$\begin{aligned}\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{n^2+m^2} &\geq \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{(n,m)\in\bigcup_{j=1}^k I_{2^j}} \frac{1}{n^2+m^2} && \text{(viz definici zobecněné řady)} \\ &= \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{k} \sum_{(n,m)\in I_{2^j}} \frac{1}{n^2+m^2} && \text{(disjunktnost } I_{2^j},\ j\in\mathbb{N}) \\ &\geq \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{8} && \text{(viz (3.52))} \\ &= \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{k}{8} = \infty.\end{aligned}$$

♣

3.7.20. Příklad. Zobecněná řada $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{n^3+m^3}$ je konvergentní.

Řešení. Položme

$$N_k = \{(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N};\ \max\{m,n\} = k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Potom je počet prvků množiny N_k pro každé $k \in \mathbb{N}$ roven $2k-1$. Pro $k \in \mathbb{N}$ tedy odhadneme

$$\sum_{(n,m)\in N_k} \frac{1}{n^3+m^3} \leq \sum_{(n,m)\in N_k} \frac{1}{\max\{m,n\}^3} = \sum_{(n,m)\in N_k} \frac{1}{k^3} = \frac{2k-1}{k^3}.$$

Nechť $F \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je libovolná konečná množina. Najdeme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $F \subset \bigcup_{j=1}^{k} N_j$, a dostaneme

$$\sum_{(n,m)\in F} \frac{1}{n^3+m^3} \le \sum_{(n,m)\in\bigcup_{j=1}^{k} N_j} \frac{1}{n^3+m^3} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{(n,m)\in N_j} \frac{1}{n^3+m^3}$$
$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{2j-1}{j^3} \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j-1}{j^3}.$$

Řada $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j-1}{j^3}$ konverguje podle limitního srovnávacího kritéria (Věta 3.2.5) srovnáním s konvergentní řadou $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$. Z (3.35) tedy máme

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{n^3+m^3} \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j-1}{j^3} < \infty.$$

♣

3.7.21. Příklad. Nechť Q značí množinu všech racionálních čísel z intervalu $(0,1)$. Pak zobecněná řada $\sum_{q\in Q} q$ má součet roven nekonečnu.

Řešení. Protože racionálních čísel větších jak $\frac{1}{2}$ je nekonečně mnoho, je množina $\{q \in Q;\ q > \frac{1}{2}\}$ nekonečná, a tedy daná řada diverguje podle Poznámky 3.7.13. Protože je tvořena kladnými čísly, platí $\sum_{q\in Q} q = \infty$ dle Věty 3.7.8(a). ♣

3.8. Teoretické příklady k číselným řadám

3.8.1. Řady s nezápornými členy.

3.8.1. Příklad (Raabeovo kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má kladné členy.

- Pokud $\liminf n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) > 1$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
- Pokud existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \ge n_0$ platí $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \le 1$, je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.
- Pokud $\limsup n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) < 1$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Řešení. Předpokládejme nejprve, že $\liminf n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) > 1$. Najdeme $q \in (1,\infty)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové,

$$\forall n \ge n_0 \colon n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \ge q.$$

Tedy
$$\forall n \geq n_0 \colon n a_n - (n+1) a_{n+1} \geq (q-1) a_{n+1}.$$
Proto pro $n > n_0$ platí
$$\begin{aligned} n_0 a_{n_0} > n_0 a_{n_0} - n a_n &= \sum_{k=n_0}^{n-1} (k a_k - (k+1) a_{k+1}) \\ &\geq (q-1) \sum_{k=n_0}^{n-1} a_{k+1}. \end{aligned}$$
Tedy
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k = \sum_{k=n_0}^{n-1} a_{k+1} \leq \frac{n_0 a_{n_0}}{q-1}.$$
To ale znamená, že posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je shora omezená, a tedy je tato řada konvergentní.

Předpokládejme nyní, že pro jisté $n_0 \in \mathbb{N}$ platí
$$\forall n \geq n_0 \colon n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1.$$
Pak
$$\forall n \geq n_0 \colon \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}.$$
Tedy pro $n > n_0$ platí
$$\begin{aligned} a_{n+1} &\geq \frac{n}{n+1} a_n \geq \frac{n}{n+1} \frac{n-1}{n} a_{n-1} \\ &= \frac{n-1}{n+1} a_{n-1} \geq \cdots \geq \frac{n_0}{n+1} a_{n_0}. \end{aligned}$$
Jelikož je řada
$$\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{n_0}{k+1} a_{n_0} = n_0 a_{n_0} \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$$
divergentní, ze srovnávacího kritéria (viz Věta 3.2.2) plyne divergence řady $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_{k+1}$, a tedy i řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Poslední tvrzení pak plyne přímo z předcházejícího. ♣

3.8.2. Příklad. Nechť $\sum a_n$ a $\sum b_n$ jsou řady s kladnými členy. Nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Ukažte, že pokud řada $\sum b_n$ konverguje, koneverguje i řada $\sum a_n$.

Dokažte pomocí tohoto tvrzení d'Alambertovo kritérium 3.2.11(c), (d).

Řešení. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ je libovolné. Pak dle předpokladu platí

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n_0}} &= \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \\ &\leq \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdot \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdots \frac{b_{n_0+1}}{b_{n_0}} = \frac{b_n}{b_{n_0}}.\end{aligned}$$

Dostáváme tak

$$a_n \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} b_n, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Konverguje-li tedy řada $\sum b_n$, konverguje i řada $\sum \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} b_n$, a tedy podle Věty 3.2.2 i řada $\sum a_n$.

Předpokládejme nyní, že řada $\sum a_n$ má kladné členy a $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, kde $q \in [0, 1)$. Díky Větě 2.2.45 existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Pak máme $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{q^{n+1}}{q^n}$, přičemž řada $\sum q^n$ konverguje (viz Věta 3.1.8). Podle výše dokázaného tvrzení řada $\sum a_n$ konverguje.

Případ, kdy $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, kde $q > 1$, lze dokázat analogicky. ♣

3.8.3. Příklad. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní řada s kladnými členy a $\{s_n\}$ je posloupnost jejích částečných součtů. Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ diverguje.

Řešení. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ konverguje. Pak splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku podle Věty 3.1.18. Pro $\varepsilon = \frac{1}{2}$ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n_0 \leq n \leq m \colon \sum_{k=n}^{m} \frac{a_k}{s_k} < \frac{1}{2}. \tag{3.53}$$

Posloupnost $\{s_k\}$ je rostoucí a platí $\lim s_k = \infty$. Snadno tedy dostaneme $\lim \frac{s_k - s_{n_0}}{s_k} = \lim \left(1 - \frac{s_{n_0}}{s_k}\right) = 1$. Existuje tedy $m_0 \in \mathbb{N}$, $m_0 \geq n_0$, takové, že $\frac{s_{m_0} - s_{n_0}}{s_{m_0}} > \frac{1}{2}$. Potom platí

$$\sum_{k=n_0+1}^{m_0} \frac{a_k}{s_k} \geq \frac{1}{s_{m_0}} \sum_{k=n_0+1}^{m_0} a_k = \frac{s_{m_0} - s_{n_0}}{s_{m_0}} > \frac{1}{2},$$

což je ale spor s (3.53). ♣

3.8.4. Příklad. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní řada s kladnými členy. Potom existuje posloupnost $\{b_n\}$ taková, že $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ a $\lim \frac{b_n}{a_n} = 0$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ položíme $b_n = \frac{a_n}{s_n}$, kde s_n je n-tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje podle Příkladu 3.8.3. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje a má kladné členy, proto platí $\lim s_n = \infty$. Odtud dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} = 0.$$

♣

3.8.5. Příklad. Nechť $\{c_n\}$ je posloupnost splňující $\lim c_n = \infty$. Pak existuje konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ s kladnými členy taková, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n$ diverguje.

Řešení. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že všechny členy posloupnosti $\{c_n\}$ jsou větší než 1. Nalezneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}$ splňující

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_k : c_n \geq k + 1.$$

Položme $n_0 = 0$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme jednoznačně určené $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n_{k-1} < n \leq n_k$ a definujeme

$$b_n = \frac{1}{c_n} \cdot \frac{1}{k(n_k - n_{k-1})}.$$

Pro takto definované b_n platí $b_n \leq \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k(n_k - n_{k-1})}$. Pak máme pro každé $l \in \mathbb{N}$ odhad

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{n_l} b_n &= \sum_{k=1}^{l} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} b_n \leq \sum_{k=1}^{l} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k^2(n_k - n_{k-1})} \\ &= \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty. \end{aligned}$$

Tedy je vybraná posloupnost částečných součtů řady $\sum b_n$ omezená, což znamená, že řada $\sum b_n$ konverguje. Dále platí pro každé $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{n_l} c_n b_n &= \sum_{k=1}^{l} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} c_n b_n = \sum_{k=1}^{l} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k(n_k - n_{k-1})} \\ &= \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ♣

3.8.6. Příklad. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní řada s kladnými členy. Označme $r_n = \sum_{j=n}^{\infty} a_j$, $n \in \mathbb{N}$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n}$ diverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ konverguje.

Řešení. Posloupnost $\{r_n\}$ je klesající a platí $\lim r_n = 0$. Ukážeme, že první řada nesplňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. K němu nalezneme $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, takové, že $\frac{r_{m+1}}{r_n} < \frac{1}{2}$. Potom platí

$$\sum_{j=n}^{m} \frac{a_j}{r_j} \geq \sum_{j=n}^{m} \frac{a_j}{r_n} = \frac{r_n - r_{m+1}}{r_n} = 1 - \frac{r_{m+1}}{r_n} > \frac{1}{2}.$$

Naše řada je tedy divergentní.

Nyní ukážeme konvergenci druhé řady. Zřejmě platí $a_n = r_n - r_{n+1}$, a proto pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} = \frac{r_n - r_{n+1}}{\sqrt{r_n}} = (\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})\frac{\sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n+1}}}{\sqrt{r_n}} \leq 2(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}).$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$ konverguje, neboť její k-tý částečný součet je roven $2(\sqrt{r_1} - \sqrt{r_{k+1}})$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ tedy konverguje podle srovnávacího kritéria. ♣

Následující příklad ukazuje, že limitní srovnávací kritérium pro konvergenci řad (Věta 3.2.5) neplatí bez předpokladu nezápornosti zadaných řad.

3.8.7. Příklad. Existuje konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a divergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ splňující $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Řešení. Položme $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ a $b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje podle Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1) a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje, neboť je součtem konvergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a divergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Dále platí

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1.$$

♣

3.8.8. Příklad. Dokažte, že platí

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ a $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Podle Příkladu 2.5.8 potom platí $e = \lim a_n$. Dokážeme nejprve, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq s_n$. Pro $n = 1$ zřejmě platí $a_1 = s_1 = 2$. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom z binomické věty (Věta 1.6.4) plyne, že

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!} \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

Pro každé $k \in \{2, \ldots, n\}$ zřejmě platí $\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leq 1$, a tedy

$$a_n \leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = s_n.$$

Tím je dokázáno, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq s_n$.

Nyní dokážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $s_n \leq e$. Posloupnost $\{s_n\}$ je zřejmě rostoucí, a proto stačí toto tvrzení dokázat pouze pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom pro každé $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, platí

$$\begin{aligned} a_m &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{1}{m^k} \geq \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} \frac{1}{m^k} \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{m}\right) \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

Pro každé $k \in \{2, \ldots, n\}$ zřejmě platí $\lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{m}\right) = 1$. Tedy z věty o aritmetice limit plyne, že

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} \frac{1}{m^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = s_n.$$

Protože $\lim_{m\to\infty} a_m = e$, plyne odtud a z věty o limitě a uspořádání (Věta 2.2.45), že $s_n \leq e$. Celkem jsme tedy dokázali, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq s_n \leq e$. Protože $\lim_{n\to\infty} a_n = e$, dostaneme z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.47) rovnost $\lim_{n\to\infty} s_n = e$. Tím je tvrzení dokázáno. ♣

3.8.9. Příklad. Dokažte, že e je iracionální číslo.

Řešení. Důkaz provedeme sporem. Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ platí podle Příkladu 3.8.8

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} < e = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j!}.$$

Zřejmě dále platí

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j!} = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\cdots(k+j)} < \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^j}.$$

Podle Příkladu 3.1.9 máme

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^j} = \frac{1}{k},$$

a tedy celkem dostáváme

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} < e < \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} + \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^j} = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} + \frac{1}{kk!}.$$

Předpokládejme, že $e = \frac{p}{q}$ pro nějaká $p, q \in \mathbb{N}$. Potom tedy

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} < \frac{p}{q} < \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} + \frac{1}{kk!}.$$

Vynásobíme obě nerovnosti kladným výrazem $qk!$ a dostaneme

$$qk! \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} < pk! < qk! \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} + \frac{q}{k}.$$

Označme

$$m = qk! \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!},$$

pak

$$m < pk! < m + \frac{q}{k}.$$

Pro speciální volbu $k = q$ pak dostáváme $pk! \in (m, m+1)$. To je ale spor, protože obě čísla $m = qk! \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}$ i $pk!$ jsou zřejmě přirozená. ♣

3.8.10. Příklad (číselné rozvoje). Nechť $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a $P = \{0, \dots, p-1\}$. Nechť

$$\mathcal{P} = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in P^{\mathbb{N}};\ \{a_n\} \text{ nekončí výrazem } 000\dots\}.$$

- Zobrazení $\varphi : P^{\mathbb{N}} \to [0, 1]$ definované jako

$$\varphi(\{a_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$$

je dobře definované. (Zápis $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} = 0.a_1a_2a_3\dots$ se nazývá **p-adickým rozvojem čísla** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$.)

- Jsou-li $a = \{a_n\}$ a $b = \{b_n\}$ v $P^{\mathbb{N}}$ různé posloupnosti, pak $\varphi(a) = \varphi(b)$ právě tehdy, když platí

$$\begin{aligned} a &= (a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, 0, 0, 0 \dots) \quad \text{a} \\ b &= (a_1, \dots, a_{k-1}, a_k - 1, p - 1, p - 1, p - 1, \dots), \end{aligned}$$

kde $k \in \mathbb{N}$ a $a_k > 0$.

- Zobrazení $\varphi \colon \mathcal{P} \to (0, 1]$ je bijekce.

Řešení. Povšimněme si nejprve, že zobrazení φ je dobře definované zobrazení do $[0, 1]$ díky odhadu

$$\varphi(\{a_n\}) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} = 1.$$

Nyní ověříme druhé tvrzení. Nejprve si uvědomme, že pro posloupnosti a, b výše popsaného tvaru platí

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_k}{p^k} \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_k - 1}{p^k} + \frac{1}{p^k} \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_k - 1}{p^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} \\ &= \varphi(b). \end{aligned}$$

Obráceně, nechť $\varphi(a) = \varphi(b)$ pro dvě různé posloupnosti $a, b \in P^{\mathbb{N}}$. Předpokládejme, že $k \in \mathbb{N}$ je první souřadnice, kde $b_k < a_k$. Nechť dále existuje $l > k$ takové, že $b_l < p - 1$. Pak máme

$$\begin{aligned}
\varphi(b) &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{b_k}{p^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{b_n}{p^n} \\
&< \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{b_k}{p^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} \\
&= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{b_k + 1}{p^k} \\
&\le \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_k}{p^k} \\
&\le \varphi(a),
\end{aligned}$$

což je spor s předpokladem $\varphi(a) = \varphi(b)$. Tedy $b_{k+1} = b_{k+2} = \cdots = p - 1$ a

$$\varphi(b) = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{b_k + 1}{p^k}.$$

Protože

$$\begin{aligned}
\varphi(b) = \varphi(a) &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_k}{p^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} \\
&\ge \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_k}{p^k} \ge \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{b_{k+1}}{p^k} \\
&= \varphi(b),
\end{aligned}$$

máme

$$a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = 0 \quad \text{a} \quad a_k = b_k + 1.$$

Tím je druhé tvrzení je ověřeno.

K důkazu třetího tvrzení stačí dokázat, že φ je surjekce $\mathcal{P}$ na $(0, 1]$. Nechť $x \in (0, 1]$ je dáno. Induktivně definujeme posloupnost $\{a_n\}$ takto: Položme

$$a_1 = \max\{i \in P;\ \frac{i}{p} < x\}.$$

Máme-li čísla $a_1, \dots, a_n$ již nalezena, definujme

$$a_{n+1} = \max\{i \in P;\ \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{p^k} + \frac{i}{p^{n+1}} < x\}.$$

Povšimněme si, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{p^k} < x \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{p^k} + \frac{a_{n+1}+1}{p^{n+1}}. \tag{3.54}$$

Z definice posloupnosti $\{a_n\}$ totiž platí první nerovnost v (3.54). Abychom ověřili nerovnost druhou, předpokládejme, že

$$x > \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{p^k} + \frac{a_{n+1}+1}{p^{n+1}}$$

pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Pokud $a_{n+1} < p-1$, vede tato nerovnost okamžitě ke sporu s definicí a_{n+1}. Pokud $a_{n+1} = p-1$, pak

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{p^k} + \frac{a_{n+1}+1}{p^{n+1}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{p^k} + \frac{1}{p^n}\\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{p^k} + \frac{a_n+1}{p^n}.\end{aligned}$$

Z definice čísla a_n dostaneme $a_n = p-1$. Induktivně pak obdržíme

$$a_{n+1} = a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = p-1.$$

Proto

$$x > \sum_{k=1}^{n} \frac{p-1}{p^k} + \frac{p}{p^{n+1}} = \frac{p-1}{p}\frac{\frac{1}{p^n}-1}{\frac{1}{p}-1} + \frac{1}{p^n} = 1,$$

což je spor. Tedy (3.54) platí.

Z těchto nerovností vidíme,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{p^k} < x \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{p^k} + \frac{p}{p^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

a tedy pomocí Věty 2.2.45 máme

$$\varphi(\{a_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_k}{p^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{p^k} = x.$$

Tedy φ je zobrazení na. ♣

3.8.11. Příklad. Nechť $p \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ a $x \in [0,1]$ má p-adický rozvoj $0.a_1a_2a_3\ldots$. Ten nazveme **periodickým**, pokud existují přirozená čísla $k \geq 0$, $r > 0$ taková, že pro $n > k$ platí $a_{n+r} = a_n$. Ukažte, že x má periodický rozvoj právě tehdy, když je racionální.

Řešení. Nechť nejprve rozvoj $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$ je periodický, tj. existují $k, r \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n+r} = a_n$ pro $n > k$. Potom ale díky absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$ lze použít Větu 3.7.17 a dostaneme

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_1}{p^1} + \cdots \frac{a_k}{p^k} + \left(\frac{a_{k+1}}{p^{k+1}} + \cdots + \frac{a_{k+r}}{p^{k+r}}\right)\left(1 + \frac{1}{p^r} + \frac{1}{p^{2r}} + \frac{1}{p^{3r}} \cdots\right) \\ &= \frac{a_1}{p^1} + \cdots \frac{a_k}{p^k} + \left(\frac{a_{k+1}}{p^{k+1}} + \cdots + \frac{a_{k+r}}{p^{k+r}}\right)\frac{1}{1 - \frac{1}{p^r}}, \end{aligned}$$

což je racionální číslo.

Nechť je nyní číslo $x \in [0, 1]$ racionální. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $x \in (0, 1)$, tj. $x = \frac{u}{v}$, kde $u, v \in \mathbb{N}$ a $u < v$. Nechť $x = 0.a_1a_2a_3\ldots$ je p-adický rozvoj x. Jsou-li všechna a_n od jistého místa rovna 0 nebo jsou od jistého místa rovna $p-1$, je zřejmě rozvoj x periodický. Předpokládejme tedy, že tomu tak není, tj. $\{a_n\} \in \mathcal{P}$ (viz Příklad 3.8.10) a $\{a_n\}$ nekončí opakováním cifry $p - 1$. Označme $s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{p^n}$. Nechť $k \in \mathbb{N}$. Pak

$$0 \le x - s_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} < \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} = \frac{1}{p^k}.$$

Tedy

$$0 \le p^k(x - s_k) < 1.$$

Dále máme

$$p^k(x - s_k) = p^k\frac{u}{v} - p^k s_k = \frac{c_k}{v}, \tag{3.55}$$

kde c_k je celé číslo. Protože $0 \le p^k(x - s_k) < 1$, je $c_k \in \{0, \ldots, v - 1\}$. Tedy pro každé $k \in \{1, \ldots, v + 1\}$ platí $c_k \in \{0, \ldots, v - 1\}$.

Proto existují indexy $k, l \in \{1, \ldots, v + 1\}$, $k < l$, takové, že $c_k = c_l$. Položme $r = l - k$, pak $c_k = c_{k+r}$. Z (3.55) máme

$$\begin{aligned} \frac{c_k}{v} &= p^k(x - s_k) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n-k}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{j+k}}{p^j}, \\ \frac{c_{k+r}}{v} &= p^{k+r}(x - s_{k+r}) = \sum_{n=k+r+1}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n-k-r}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{j+k+r}}{p^j}. \end{aligned}$$

Máme tedy dva rozvoje čísla $\frac{c_k}{v}$ nekončící cifrou $p - 1$, a tedy se dle Příkladu 3.8.10 musí rovnat. Proto pro $n > k$ platí $a_n = a_{n+r}$ a x je periodické. ♣

3.8.2. Řady s obecnými členy.

3.8.12. Lemma. Nechť $\{a_j\}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel a $n \in \mathbb{N}$. Pak pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí $0 \le \sum_{i=0}^{k}(-1)^i a_{n+i} \le a_n$.

Důkaz. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je dáno. Indukcí podle k dokážeme, že pro každou nerostoucí posloupnost nezáporných čísel $\{a_j\}$ platí uvedená nerovnost. Pokud $k = 0$, pak jsou nerovnosti

$$\sum_{i=0}^{0}(-1)^i a_{n+i} = a_n \begin{cases} \ge 0 \\ \le a_n \end{cases}$$

zřejmé.

Předpokládejme nyní, že uvedené tvrzení platí pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Naším cílem je dokázat nerovnost pro $k + 1$, tj. chceme ověřit nerovnosti

$$0 \le \sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i a_{n+i} \le a_n. \tag{3.56}$$

Posloupnost $\{a_{i+1}\}_{i=0}^{\infty}$ má nezáporné členy a je nerostoucí. Proto podle indukčního předpokladu platí

$$0 \le \sum_{i=0}^{k}(-1)^i a_{n+1+i} \le a_{n+1}. \tag{3.57}$$

Potom díky (3.57) dostáváme

$$\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i a_{n+i} = a_n - \sum_{i=0}^{k}(-1)^i a_{n+1+i} \begin{cases} \ge a_n - a_{n+1} \ge 0 \\ \le a_n \end{cases}, \tag{3.58}$$

čímž je podle principu matematické indukce tvrzení dokázáno. ■

Alternativní důkaz Věty 3.3.1. Konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ ověříme pomocí Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro řady, tedy ověříme platnost podmínky (ii) Věty 3.1.18. Předpokládejme nejprve, že posloupnost $\{a_n\}$ je nerostoucí. Členy této posloupnosti jsou pak nutně nezáporné. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \ge n_0 : a_n < \varepsilon. \tag{3.59}$$

Vezměme nyní libovolná čísla $n, m \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 \le n \le m$. Pak z Lemmatu 3.8.12 plyne, že

$$\left|\sum_{i=n}^{m}(-1)^i a_i\right| = \sum_{i=0}^{m-n}(-1)^i a_{n+i} \le a_n.$$

Díky (3.59) tedy pro každé $n, m \in \mathbb{N}$, $n_0 \leq n \leq m$, máme

$$\left|\sum_{i=n}^{m}(-1)^i a_i\right| < \varepsilon.$$

Tím je ověřena platnost Bolzanovy–Cauchyovy podmínky pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Je-li posloupnost $\{a_n\}$ neklesající, pak lze důkaz dokončit stejně jako v prvním důkazu Věty 3.3.1. ■

3.8.13. Příklad. Nechť řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mají omezené posloupnosti částečných součtů.

(a) Pokud $c \in \mathbb{R}$, pak má řada $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ omezenou posloupnost částečných součtů.

(b) Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ má omezenou posloupnost částečných součtů.

Důkaz. Označme postupně $\{s_m\}$ a $\{t_m\}$ posloupnosti částečných součtů řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Podle předpokladu existuje $M \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|s_n| \leq M$ a $|t_n| \leq M$.

(a) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left|\sum_{k=1}^{n} ca_k\right| = |cs_n| \leq |c|M.$$

Tím je omezenost posloupnosti částečných součtů dokázána.

(b) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)\right| \leq |s_n| + |t_n| \leq 2M$$

a tvrzení je dokázáno. ■

3.8.14. Příklad. Dokažte následující tvrzení.

(a) Nechť $\sum a_n$ je konvergentní řada a $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel splňující $n_1 = 1$. Položme $b_k = \sum_{n_k \leq j < n_{k+1}} a_j$, $k \in \mathbb{N}$. Pak $\sum b_k = \sum a_n$.

(b) Ukažte, že sestává-li řada $\sum a_n$ z nezáporných čísel a $\{n_k\}$ a b_k jsou jako výše, pak $\sum a_n$ konverguje právě tehdy, když $\sum b_k$ konverguje.

(c) Nalezněte divergentní řadu $\sum a_n$ a rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}$ takovou, že $n_1 = 1$ a řada $\sum b_k$ konverguje (b_k jsou definovány jako v (a)).

Řešení. Nechť $\{s_u\}$ a $\{t_v\}$ jsou posloupnosti částečných součtů pro řady $\sum a_n$ a $\sum b_k$. Rozmyslíme si nejprve, že

$$t_v = \sum_{k=1}^{v} b_k = \sum_{k=1}^{v} \sum_{n_k \le j < n_{k+1}} a_j = \sum_{j=1}^{n_{v+1}-1} a_j = s_{n_{v+1}-1}, \quad v \in \mathbb{N}. \tag{3.60}$$

Přistupme nyní k důkazu tvrzení (a). Je-li řada $\sum a_n$ konvergentní, existuje vlastní limita $a = \lim_{u\to\infty} s_u$. Z Věty 2.2.33 a (3.60) pak dostáváme

$$\lim_{v\to\infty} t_v = \lim_{v\to\infty} s_{n_{v+1}-1} = a.$$

Řada $\sum b_k$ tedy konverguje.

(b) Díky (a) stačí dokázat, že řada $\sum a_n$ konverguje, konverguje-li řada $\sum b_k$. Označme $b = \lim_{v\to\infty} t_v$. Jelikož má řada $\sum a_n$ nezáporné členy, existuje $a = \lim_{u\to\infty} s_u$. Z rovnosti (3.60) pak plyne

$$\lim_{v\to\infty} s_{n_{v+1}-1} = \lim_{v\to\infty} t_v = b,$$

tj. posloupnost $\{s_u\}$ má konvergentní podposloupnost $\{s_{n_{v+1}-1}\}$. Proto je sama konvergentní dle Věty 2.3.22) a řada $\sum a_n$ konverguje.

(c) Položme $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, a $n_k = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$. Pak $b_k = a_{2k-1} + a_{2k} = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Řada $\sum b_k$ tedy konverguje, zatímco řada $\sum a_n$ diverguje (například díky Větě 3.1.15). ♣

3.8.3. Miscelanea.

3.8.15. Příklad. Ukažte, že platí $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathbb{R}$.

Řešení. Nechť $\mathcal{Z}$ značí množinu všech zobrazení $\mathbb{N}$ do $\{0, 1\}$. Pak $\mathcal{Z} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (viz důkaz Příkladu **??**)Pro $z \in \mathcal{Z}$ definujme $\varphi\colon \mathcal{Z} \to [0, 1]$ jako

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z(n)}{3^n}, \quad z \in \mathcal{Z}.$$

Ukažme, že φ je prosté. Mějme tedy dvě zobrazení $z, z' \in \mathcal{Z}$ a nechť $n \in \mathbb{N}$ je první souřadnice, kde $z(n) \neq z'(n)$. Můžeme předpokládat, že $z(n) = 1$

a $z'(n) = 0$. Pak

$$\begin{aligned}
\varphi(z') &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z'(k)}{3^k} + 0 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z'(k)}{3^k} \\
&\le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z(k)}{3^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z(k)}{3^k} + \frac{1}{2 \cdot 3^n} \\
&< \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z(k)}{3^k} + \frac{z(n)}{3^n} \\
&\le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z'(k)}{3^k} + \frac{z(n)}{3^n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z(k)}{3^k} \\
&= \varphi(z).
\end{aligned}$$

Tedy

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathcal{Z} \preceq [0,1] \preceq \mathbb{R}.$$

Dále musíme dokázat, že $\mathbb{R} \preceq \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Protože $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$ (Příklad 1.7.20), stačí ověřit $\mathbb{R} \preceq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. K tomuto účelu položme

$$\psi(x) = \{q \in \mathbb{Q};\ q < x\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Díky Větě 1.6.29 je ψ prosté, a tak $\mathbb{R} \preceq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Z Věty **??** plyne závěr. ♣

3.8.16. Příklad. Ukažte, že platí

$$\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{R}.$$

Řešení. Zjevně platí $\mathbb{R} \preceq \mathbb{R}^2$. Dále uvažujme zobrazení $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{Q}^2)$ definované jako

$$\psi(x,y) = \{(p,q) \in \mathbb{Q}^2;\ (p < x) \wedge (q < y)\}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Pak z Věty 1.6.29 plyne prostota ψ. Protože $\mathbb{Q}^2 \approx \mathbb{N}$ dle Věty 1.7.19(d) a Příkladu 1.7.20, máme tak

$$\mathbb{R}^2 \preceq \mathcal{P}(\mathbb{Q}^2) \approx \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Protože $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathbb{R}$ dle Příkladu 3.8.15, plyne tvrzení z Věty **??**. ♣

3.8.17. Příklad. Ukažte, že Cauchyův součin divergentních řad $2+\sum_{n=2}^{\infty} 2^{n-1}$ a $-1 + \sum_{n=2}^{\infty} 1$ je konvergentní.

Řešení. Označíme-li členy řady $2 + \sum_{n=2}^{\infty} 2^{n-1}$ jako a_k, členy řady $-1 + \sum_{n=2}^{\infty} 1$ jako b_k a c_k, $k \in \mathbb{N}$, nechť jsou členy Cauchyova součinu, máme $c_1 = -2$, zatímco

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2\colon c_k &= (a_1 b_k + \cdots a_k b_1) = a_1 + \cdots + a_{k-1} - a_k \\ &= 2 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{k-2} - 2^{k-1} = 0.\end{aligned}$$

Cauchyův součin zadaných řad tedy konverguje. ♣

3.8.18. Příklad. Nechť Q značí množinu racionálních čísel v intervalu $(0,1)$. Pak existují bijekce π a σ množiny $\mathbb{N}$ na Q takové, že $\sum_{n\in\mathbb{N}} \pi(n)^n$ konverguje a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma(n)^n$ diverguje.

Řešení. Konstrukce π. Nalezneme rostoucí posloupnost $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ reálných čísel z intervalu $[0,1)$ splňující $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{2}$ a $\lim a_k = 1$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ nalezneme $n_k \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{a_{k+1}^{n_k}}{1-a_{k+1}} < 2^{-(k+1)}$. Položíme $n_0 = 0$. Dále nalezneme posloupnost nekonečných množin $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$, které splňují

- $P_k \subset \{n \in \mathbb{N};\ n \geq n_k\}$,
- $\forall k, l \in \mathbb{N}, k \neq l\colon P_k \cap P_l = \emptyset$,
- $\bigcup_{k=0}^{\infty} P_k = \mathbb{N}$.

Pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ nalezneme bijekci π_k množiny P_k na množinu $A_k = (a_k, a_{k+1}] \cap Q$. Hledanou bijekci pak definujeme jako $\pi(n) = \pi_k(n)$ pro $n \in P_k$. Odhadneme

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} \pi(n)^n &= \sum_{q\in Q} q^{\pi^{-1}(q)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q\in A_k} q^{\pi^{-1}(q)} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{k+1}^{n_k+l} \leq \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k+1}^{n_k}}{1-a_{k+1}} \leq 2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 3.\end{aligned}$$

Konstrukce σ. Nalezneme rostoucí posloupnost $\{q_k\}$ prvků Q splňující $q_k^{2k} > \frac{1}{2}$. Označme $T = \{q_k;\ k \in \mathbb{N}\}$. Množina T je nekonečná a spočetná. Nalezneme bijekci τ množiny lichých přirozených čísel na množinu $Q \setminus T$. Potom definujeme bijekci $\sigma\colon \mathbb{N} \to Q$ předpisem $\sigma(2k) = q_k$ a $\sigma(2k-1) = \tau(2k-1)$, $k \in \mathbb{N}$. Pro $m \in \mathbb{N}$ odhadneme

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma(n)^n > \sum_{k=1}^{m} q_k^{2k} > \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2} = \frac{m}{2}.$$

Odtud plyne $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma(n)^n = \infty$. ♣

3.8.19. Věta (Toeplitzova)**.** Nechť $c_{n,k} \in \mathbb{R}$, $n, k \in \mathbb{N}$, jsou reálná čísla splňující

(a) pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\lim_{n\to\infty} c_{n,k} = 0$,
(b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} = 1$,
(c) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k}| < \infty$.

Nechť $\{a_k\}$ je konvergentní posloupnost. Potom je posloupnost $\{b_n\}$, kde $b_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k$, dobře definovaná a platí $\lim b_n = \lim a_n$.

Důkaz. Označme $C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k}|$. Posloupnost $\{a_k\}$ je omezená, neboť je konvergentní. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ potom podle (c) platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k} a_k| \le C \cdot \sup\{|a_k|;\ k \in \mathbb{N}\} < \infty,$$

a tedy řada $\sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k$ konverguje absolutně, takže b_n je reálné číslo.

Nyní navíc předpokládejme, že $\lim a_k = 0$. Zvolme libovolně $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \ge k_0\colon\ |a_k| < \varepsilon. \tag{3.61}$$

Potom platí

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} |b_n| &= \limsup_{n\to\infty} \Big| \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k \Big| \\ &= \limsup_{n\to\infty} \Big| \sum_{k=1}^{k_0} c_{n,k} a_k + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} c_{n,k} a_k \Big|\end{aligned}$$

Díky (a) platí rovnost

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_0} c_{n,k} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_0} c_{n,k} a_k = 0,$$

neboť uvažovaná suma má pevný konečný počet sčítanců a lze užít větu o aritmetice limit. Dále odhadneme s pomocí (c) a (3.61)

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \Big| \sum_{k=k_0+1}^{\infty} c_{n,k} a_k \Big| &\le \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |c_{n,k} a_k| \\ &\le \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |c_{n,k}| \varepsilon \le C\varepsilon.\end{aligned}$$

Dohromady tedy díky Větě 2.4.13 máme

$$\limsup_{n\to\infty} |b_n| \le \limsup_{n\to\infty} \Big| \sum_{k=1}^{k_0} c_{n,k} a_k \Big| + \limsup_{n\to\infty} \Big| \sum_{k=k_0+1}^{\infty} c_{n,k} a_k \Big| \le C\varepsilon$$

pro libovolné kladné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, a tedy $\lim b_n = 0$.

Předpokládejme nyní, že $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$. Potom můžeme psát

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k}(a_k - A) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} A.$$

První limita je rovna 0 podle předchozí části, neboť $\lim_{k\to\infty}(a_k - A) = 0$. Druhá limita je rovna A díky (b). Dohromady tedy dostáváme $\lim_{n\to\infty} b_n = A$, čímž je tvrzení dokázáno. ■

3.8.20. Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom posloupnost

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}_{n=1}^{\infty}$$

nazýváme **posloupností cesàrovských**[3] **součtů** posloupnosti $\{a_n\}$.

V následující větě ukážeme důležitý speciální případ Toeplitzovy věty, z něhož vyplývá, že cesàrovské součty konvergentní posloupnosti mají stejnou limitu, jako zadaná posloupnost.

3.8.21. Věta. Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost reálných čísel. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Důkaz. Pro $n, k \in \mathbb{N}$ položme

$$c_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{pokud } k \le n, \\ 0 & \text{pokud } k > n. \end{cases}$$

Ověříme předpoklady Toeplitzovy věty (Věta 3.8.19). Nechť $k \in \mathbb{N}$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} c_{n,k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

a tedy předpoklad (a) je splněn. Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} = 1,$$

[3] Ernesto Cesàro, 1859–1906

je splněn i předpoklad (b). Konečně protože $c_{n,k} \geq 0$ pro každé $n, k \in \mathbb{N}$, dostáváme

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k}| = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} = 1$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k}| = 1 < \infty$, takže i předpoklad (c) je ověřen. Vzhledem k tomu, že

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

plyne tvrzení z Toeplitzovy věty. ■

3.8.22. Poznámka. Nechť $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{(-1)^n}{n}$, a tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = 0,$$

přestože posloupnost $\{a_n\}$ nemá limitu. Tvrzení Věty 3.8.21 tedy nelze obrátit.

3.8.23. Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme **nekonečným součinem**. Pokud existuje limita $\lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} a_n$, pak symbol $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ označuje také její hodnotu. Je-li tato hodnota reálné číslo, pak říkáme, že uvedený nekonečný součin **konverguje**.

3.8.24. Příklad. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost s kladnými členy. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ konverguje.

Řešení. $\Leftarrow$ Posloupnost $\{\prod_{n=1}^{k}(1 + a_n)\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí a pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n) \geq \prod_{n=1}^{k}(1 + a_n) \geq 1 + \sum_{n=1}^{k} a_n \geq \sum_{n=1}^{k} a_n.$$

Odtud již plyne konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$\Rightarrow$ Posloupnost $\{\prod_{n=1}^{k}(1 + a_n)\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí, a proto má limitu. Díky nerovnosti $\log(1 + x) \leq x$ (viz 1.8.15) platné pro každé $x \in (0, \infty)$ dostaneme

$$\log\Big(\prod_{n=1}^{k}(1 + a_n)\Big) = \sum_{n=1}^{k} \log(1 + a_n) \leq \sum_{n=1}^{k} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Odtud plyne

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \leq \exp\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

a nekonečný součin tedy konverguje. ♣

3.8.25. Příklad. Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$, kde p_n značí n-té prvočíslo, diverguje.

Řešení. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že naše řada je konvergentní. Potom je konvergentní také řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{p_n}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $p_n \geq 2$, a proto díky součtu geometrické řady dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p_n}\right)^k = \frac{1}{p_n}\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}} \leq \frac{2}{p_n}.$$

Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{p_n}\Big)^k\Big)$$

je tedy konvergentní. Podle předchozího příkladu pak konverguje nekonečný součin

$$\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p_n}\right)^k\Big) = \prod_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p_n}\right)^k\Big).$$

Zvolme $m \in \mathbb{N}$ libovolné. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že prvočíselný rozklad každého $l \in \mathbb{N}, l \leq m$, obsahuje pouze prvočísla z množiny $\{p_j;\ j \in \mathbb{N}, j \leq n_0\}$ v mocnině nejvýše n_0. Pak platí

$$\prod_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{p_n})^k\Big) \geq \prod_{n=1}^{n_0}\Big(\sum_{k=0}^{n_0}(\frac{1}{p_n})^k\Big) \geq \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j}.$$

Harmonická řada však diverguje, a proto musí nekonečný součin $\prod_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p_n}\right)^k$ též divergovat, což je spor. ♣

3.8.26. Příklad. Dokažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí nerovnosti

$$\frac{1}{k+1} \leq \log\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}. \tag{3.62}$$

Řešení. Nechť $k \in \mathbb{N}$ je pevně zvoleno. Podle 1.8.15 platí pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$, nerovnost $\log(1+x) \leq x$. Dosadíme-li $x = \frac{1}{k}$, dostaneme ihned druhou nerovnost v (3.62). Dosadíme-li $x = -\frac{1}{k+1}$, pak je předpoklad $x > -1$ splněn, a tedy platí

$$\log\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \leq -\frac{1}{k+1},$$

to jest

$$-\log\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \geq \frac{1}{k+1}.$$

Odtud a z vlastností logaritmu (1.8.15) dostáváme

$$\log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \log\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{k+1}}\right) = -\log\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \geq \frac{1}{k+1},$$

což je první nerovnost v (3.62). ♣

3.8.27. Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnosti

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \log n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}.$$

Řešení. Zvolíme $n \in \mathbb{N}$ pevně. Posčítáme nerovnosti v (3.62) pro hodnoty $k = 1, \ldots, n-1$. Dostaneme

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Z vlastností logaritmické funkce (1.8.15) ale vyplývá, že

$$\sum_{k=1}^{n-1} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \log\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) = \log\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{n}{n-1}\right) = \log n.$$

Tím jsou obě nerovnosti dokázány. ♣

3.8.28. Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}$, definovaná předpisem

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n, \quad n \in \mathbb{N},$$

je konvergentní.

Řešení. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \log(n+1) + \log n = \frac{1}{n+1} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 0$$

podle první nerovnosti v (3.62) aplikované na $k = n$. Posloupnost $\{a_n\}$ je tedy klesající. Dále platí podle Příkladu 3.8.27

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \log n \geq 0,$$

takže posloupnost $\{a_n\}$ je omezená zdola (například konstantou 0). Z věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) tedy plyne, že posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní. ♣

3.8.29. Poznámka. Označíme

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n).$$

Z Příkladu 3.8.28 vyplývá, že toto číslo je dobře definováno. Číslo γ nazýváme **Eulerovou-Mascheroniho konstantou**.[4] Přibližnou hodnotou konstanty γ je $0,577$ a není známo, zda je toto číslo racionální.

3.8.30. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right).$$

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

a

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n.$$

Potom je

$$b_n = a_{2n} - a_n + \log(2n) - \log n,$$

a tedy podle věty o limitě součtu (Věta 2.2.37(a)) platí

$$\begin{aligned}\lim b_n &= \lim\big(a_{2n} - a_n + \log(2n) - \log n\big)\\ &= \lim\left(a_{2n} - a_n + \log\left(\frac{2n}{n}\right)\right) = \gamma - \gamma + \log 2\\ &= \log 2.\end{aligned}$$

♣

[4] Lorenzo Mascheroni, 1750–1800.

3.9. Početní příklady k číselným řadám

3.9.1. Řady s nezápornými členy.

3.9.1. Příklad. Rozhodněte, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^n+3}{(n^4+1)^6}$ konverguje.

Řešení. Spočteme nejprve

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n^2 2^n + 3}{(n^4+1)^6}},$$

abychom mohli použít Větu 3.2.8. Uvědomme si, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n > 1$, platí nerovnosti

$$2(\sqrt[n]{n})^2 \leq \sqrt[n]{n^2 2^n + 3} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 2^n n^2} = 2\sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^2,$$
$$\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n^{24}} \leq \sqrt[n]{(n^4+1)^6} \leq \sqrt[n]{2^6 n^{24}} = \sqrt[n]{2^6}(\sqrt[n]{n})^{24}.$$

Podle věty o dvou strážnících (Věta 2.2.47), Příkladů 2.2.51 a 2.2.50 a věty o aritmetice limit (Věta 2.2.37) tedy platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 2^n + 3}{(n^4+1)^6}} = 2.$$

Zadaná řada tedy diverguje podle Věty 3.2.8(e). ♣

3.9.2. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$.

Řešení. Pro velké hodnoty $n \in \mathbb{N}$ je ve výrazu $n^3 + 1$ člen 1 zanedbatelný, a proto můžeme očekávat, že naše řada bude velmi blízko řadě s členy $\frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$. Tento svůj odhad ověříme pomocí limitního srovnávacího kritéria pro konvergenci řad (Věta 3.2.5). Označme $a_n = \frac{n^2}{n^3+1}$ a $b_n = \frac{1}{n}$. Snadno vidíme, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^3+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^3}} = 1 \in (0, \infty).$$

Podle limitního srovnávacího kritéria (Věta 3.2.5) tedy dostáváme, že zadaná řada konverguje, právě tehdy když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Tato řada diverguje podle Příkladu 3.1.11, a tedy diverguje i zadaná řada. ♣

3.9.3. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

Řešení. Řada má kladné členy. Použijeme podílové kritérium (Věta 3.2.11) a dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

Zadaná řada tedy konverguje. ♣

3.9.4. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

Řešení. K vyšetření konvergence této řady použijeme odmocninové kritérium (Věta 3.2.8). Pomocí Příkladu 2.2.51 dostáváme

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim \sqrt[n]{n} \cdot \lim \sqrt[n]{n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Zadaná řada tedy konverguje. ♣

3.9.5. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$n^\alpha(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = n^\alpha(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n^\alpha}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Pro velké hodnoty n se jmenovatel posledního zlomku chová zhruba jako $\sqrt{n}$, a proto zkusíme použít limitní srovnávací kritérium (Věta 3.2.5) pro

$$a_n = \frac{n^\alpha}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \qquad \text{a} \qquad b_n = \frac{n^\alpha}{\sqrt{n}} = n^{\alpha - \frac{1}{2}}.$$

Spočteme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^\alpha}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}{\frac{n^\alpha}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2} \in (0, \infty).$$

Zadaná řada konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha - \frac{1}{2}}$. Podle Věty 3.2.18 zadaná řada konverguje, právě tehdy když $\alpha - \frac{1}{2} < -1$, neboli právě když $\alpha < -\frac{1}{2}$. ♣

3.9.6. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$.

Řešení. Posloupnost $\{\frac{1}{n\log^2 n}\}_{n=2}^{\infty}$ je klesající a má kladné členy. Podle kondenzačního kritéria (Věta 3.2.17) zadaná řada konverguje právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k \log^2(2^k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \log^2 2}.$$

Tato řada konverguje podle Věty 3.2.18 a Věty 3.1.21. Zadaná řada je tedy konvergentní. ♣

3.9.7. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\log^2 n}$.

Řešení. Nejprve výraz upravíme

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\log^2 n} = \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2}}{\log^2 n} \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2}}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2}} \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2}\right)\log^2 n}. \end{aligned}$$

Položme $b_n = \frac{1}{n\log^2 n}$. Snadno spočteme

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2})\log^2 n}}{\frac{1}{n\log^2 n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} \\ &= \frac{1}{2} \in (0,\infty). \end{aligned}$$

Řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log^2 n}$ konverguje podle Příkladu 3.9.6, a tedy konverguje i zadaná řada podle limitního srovnávacího kritéria. ♣

3.9.8. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

Řešení. Použijeme podílové kritérium. Počítejme

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}} = \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}.$$

Podle Příkladu 2.5.2 platí, že $\lim \frac{n}{2^n} = 0$, a tedy

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \lim\left(\frac{n}{2^n}+\frac{1}{2^n}\right) \lim\left(\frac{n}{2^n}+\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\cdot 0 \cdot 0 < 1.$$

Zadaná řada tedy konverguje. ♣

3.9.9. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^n$.

Řešení. Funkce kosinus nabývá hodnot v intervalu $[-1,1]$ a pro všechna $t \in [-1,1]$ platí

$$0 \le \frac{1+t}{2+t} = 1 - \frac{1}{2+t} \le 1 - \frac{1}{2+1} = \frac{2}{3}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy platí

$$0 \le \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Geometrická řada s kvocientem $\frac{2}{3}$ konverguje, a proto konverguje i zadaná řada podle srovnávacího kritéria (Věta 3.2.2(a)). ♣

3.9.10. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}\right)$.

Řešení. Využijeme vzorec $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ a členy zadané řady upravíme

$$\begin{aligned}
a_n &= \sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}\\
&= \left(\sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}\right)\frac{\sqrt[3]{(n^2+5)^2} + \sqrt[3]{n^2+5}\,\sqrt[3]{n^2+1} + \sqrt[3]{(n^2+1)^2}}{\sqrt[3]{(n^2+5)^2} + \sqrt[3]{n^2+5}\,\sqrt[3]{n^2+1} + \sqrt[3]{(n^2+1)^2}}\\
&= \frac{(n^2+5)-(n^2+1)}{\sqrt[3]{(n^2+5)^2} + \sqrt[3]{n^2+5}\,\sqrt[3]{n^2+1} + \sqrt[3]{(n^2+1)^2}}\\
&= \frac{4}{\sqrt[3]{(n^2+5)^2} + \sqrt[3]{n^2+5}\,\sqrt[3]{n^2+1} + \sqrt[3]{(n^2+1)^2}}.
\end{aligned}$$

Čitatel posledního zlomku je konstanta a jmenovatel se chová při pomyslném zanedbání konstant řádově jako $n^{\frac{4}{3}}$. Zkusíme tedy zadanou řadu porovnat s řadou $\sum b_n$, kde $b_n = n^{-\frac{4}{3}}$, a dostaneme

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{\sqrt[3]{(n^2+5)^2}+\sqrt[3]{n^2+5}\,\sqrt[3]{n^2+1}+\sqrt[3]{(n^2+1)^2}}}{\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt[3]{(1+\frac{5}{n^2})^2} + \sqrt[3]{1+\frac{5}{n^2}}\,\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt[3]{(1+\frac{1}{n^2})^2}} = \frac{4}{3} \in (0,\infty).
\end{aligned}$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{4}{3}}$ konverguje podle základní srovnávací škály (Věta 3.2.18), a proto konverguje i naše řada podle limitního srovnávacího kritéria. ♣

3.9.11. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}$.

Řešení. Podle Příkladu 2.5.3 platí $\lim_{k\to\infty} \frac{k^6}{e^k} = 0$. Speciálně tedy existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna přirozená $k \geq k_0$ platí $\frac{k^6}{e^k} \leq 1$. Pokud je tedy $n_0 = k_0^3$ a $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, pak pomocí elementárního odhadu celé části $x - 1 \leq [x] \leq x$ dostáváme

$$\frac{n^2}{e^{\sqrt[3]{n}}} = \frac{(\sqrt[3]{n})^6}{e^{\sqrt[3]{n}}} \leq \frac{([\sqrt[3]{n}] + 1)^6}{e^{[\sqrt[3]{n}]}} \leq \frac{(2[\sqrt[3]{n}])^6}{e^{[\sqrt[3]{n}]}} \leq 2^6.$$

Pro $n \geq n_0$ tedy máme odhad

$$e^{-\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{e^{\sqrt[3]{n}}} \leq \frac{2^6}{n^2}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^6}{n^2}$ konverguje, a proto podle srovnávacího kritéria pro řady (Věta 3.2.2) dostáváme i konvergenci původní řady. ♣

3.9.12. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^2+3} - \sqrt[3]{n^3+1}$.

Řešení. Označme $a_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Upravme a_n pomocí vzorce $a^6 - b^6$, kde $a = \sqrt{n^2+3}$, $b = \sqrt[3]{n^3+1}$, jako

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+3} - \sqrt[3]{n^3+1} &= \frac{(n^2+3)^3 - (n^3+1)^2}{a^5 + a^4 b + \cdots + ab^4 + b^5} \\ &= \frac{9n^4 - 2n^3 + 27n^2 + 26}{a^5 + a^4 b + \cdots + ab^4 + b^5}.\end{aligned}$$

Zjevně jsou tedy hodnoty posloupnosti $\{a_n\}$ od jistého indexu $n_0 \in \mathbb{N}$ kladné. Porovnáme-li $\sum a_n$ s řadou $\sum \frac{1}{n}$, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

Protože $\frac{3}{2}$ je kladné konečné číslo a řada $\sum \frac{1}{n}$ diverguje (viz Příklad 3.1.11), zadaná řada diverguje podle limitního srovnávacího kritéria (viz Věta 3.2.5). ♣

3.9.13. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum a_n$, kde

$$a_n = \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Členy zadané řady jsou kladné a

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}} + 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tedy
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n+1}}=\infty.$$
Podle Příkladu 3.8.1 tedy daná řada konverguje. ♣

3.9.14. Příklad. Nechť $a, b, d \in (0,\infty)$. Vyšetřete konvergenci řady $\sum a_n$, kde
$$a_n=\frac{a(a+d)\cdots(a+nd)}{b(b+d)\cdots(b+nd)},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Řešení. Členy řady jsou zřejmě kladné a
$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{b+(n+1)d}{a+(n+1)d},\quad n\in\mathbb{N}.$$
Pak
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\frac{b-a}{a+(n+1)d}=\frac{b-a}{d}.$$
Je-li tedy $\frac{b-a}{d}>1$, tj. $b-a>d$, zadaná řada dle Příkladu 3.8.1 konverguje a pro $b-a<d$ řada diverguje. Je-li $b=a+d$, dostaneme
$$a_n=\frac{a(a+d)\cdots(a+nd)}{(a+d)(a+2d)\cdots(a+nd)(a+(n+1)d)}=\frac{a}{a+(n+1)d},\quad n\in\mathbb{N}.$$
Srovnáním s řadou $\sum\frac{1}{n}$ (viz Věta 3.2.5) obdržíme divergenci dané řady i v tomto případě. ♣

3.9.2. Řady s obecnými členy.

3.9.15. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Řešení. Posloupnost $\{a_n\}=\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ je zřejmě klesající a splňuje $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. Zadaná řada tedy konverguje podle Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1). Absolutně nekonverguje, neboť řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje podle Věty 3.2.18. ♣

3.9.16. Příklad. Nechť $\alpha\in\mathbb{R}$ a $x\in\mathbb{R}\setminus\{2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}$. Potom mají řady $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(nx+\alpha)$ a $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx+\alpha)$ omezené posloupnosti částečných součtů.

Řešení. Nechť $x\in\mathbb{R}\setminus\{2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}$. Řady $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ a $\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$ mají omezené posloupnosti částečných součtů podle Příkladu 3.3.7. Dále pro každé $n\in\mathbb{N}$ platí
$$\sin(nx+\alpha)=\sin nx\cos\alpha+\cos nx\sin\alpha,$$
$$\cos(nx+\alpha)=\cos nx\cos\alpha-\sin nx\sin\alpha.$$

Odtud pak dokazovaná tvrzení snadno plynou pomocí Příkladu 3.8.13. ♣

3.9.17. Příklad. Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů pro každé $x \in \mathbb{R}$, zatímco řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cos nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů právě tehdy, když $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Řešení. Díky součtovým vzorcům platí pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ rovnosti $(-1)^n \sin nx = \sin n(x+\pi)$ a $(-1)^n \cos nx = \cos n(x+\pi)$. Tvrzení pak plynou okamžitě z Příkladu 3.9.16. ♣

3.9.18. Příklad. Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ je konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin nx$ má pro každé $x \in \mathbb{R}$ omezenou posloupnost částečných součtů dle Příkladu 3.9.17. Posloupnost $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ zjevně konverguje monotónně k 0. Zadaná řada tedy konverguje podle Dirichletova kritéria (Věta 3.3.5(D)). ♣

3.9.19. Příklad. Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \frac{n^2}{n^2+1}$ konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Podle Příkladu 3.9.18 konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$. Dále posloupnost $\{\frac{n^2}{n^2+1}\}$ splňuje

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 \le \frac{n^2}{n^2+1} \le 1$$

a

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{n^2}{n^2+1} = 1 - \frac{1}{n^2+1}.$$

Tedy je posloupnost $\{\frac{n^2}{n^2+1}\}$ omezená a neklesající. Dle Abelova kriteria (Věta 3.3.5(A)) je proto i zadaná řada konvergentní. ♣

3.9.20. Příklad. Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx + \frac{\pi}{4}) \left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}} - n\right) \frac{n^2+n}{n^2+2}$$

konverguje pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Řešení. Nechť $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Označme pro $n \in \mathbb{N}$ postupně $a_n = \cos(nx + \frac{\pi}{4})$, $b_n = \sqrt{n^2+\sqrt{n}} - n$ a $c_n = \frac{n^2+n}{n^2+2}$. Upravme

$$b_n = \sqrt{n^2+\sqrt{n}} - n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+n}.$$

Tedy $\lim b_n = 0$.

Dále zkoumejme pro $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $b_{n+1} \leq b_n$. Ta je ekvivalentní s následujícími nerovnostmi:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(n+1)^2 + \sqrt{n+1}} - (n+1) \leq \sqrt{n^2 + \sqrt{n}} - n \Leftrightarrow \\
&(n+1)^2 + \sqrt{n+1} \leq n^2 + \sqrt{n} + 1 + 2\sqrt{n^2 + \sqrt{n}} \Leftrightarrow \\
&2n + \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n^2 + \sqrt{n}} \Leftrightarrow \\
&4n^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right)^2 + \frac{4n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq 4n^2 + 4\sqrt{n} \Leftrightarrow \\
&\left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq 4.
\end{aligned}$$

Jelikož levá strana poslední nerovnosti konverguje k 2 pro n jdoucí do nekonečna, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, poslední nerovnost platí. Tedy pro tato n máme $b_{n+1} \leq b_n$.

Dále platí, že $\sum a_n$ má díky Příkladu 3.9.16 omezenou posloupnost částečných součtů. Tedy je z Věty 3.3.5(D) řada $\sum_{n=n_0}^{\infty} \cos(nx+\frac{\pi}{4})(\sqrt{n^2+\sqrt{n}}-n)$ konvergentní. Proto je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx+\frac{\pi}{4})(\sqrt{n^2+\sqrt{n}}-n)$.

Konečně vyšetříme chování posloupnosti $\{c_n\}$. Zjevně $\lim c_n = 1$, a tedy je $\{c_n\}$ omezená. Dále zkoumejme její monotonii, konkrétně nerovnost $c_n \geq c_{n+1}$. Ta je ekvivalentní s následujícími nerovnostmi:

$$\begin{aligned}
&\frac{n^2+n}{n^2+2} \geq \frac{(n+1)^2 + (n+1)}{(n+1)^2 + 2} \Leftrightarrow \\
&(n^2 + 2n + 3)(n^2 + n) \geq (n^2 + 2)(n^2 + 3n + 2) \Leftrightarrow \\
&n^4 + 3n^3 + 5n^2 + 3n \geq n^4 + 3n^3 + 4n^2 + 6n + 4 \Leftrightarrow \\
&n^2 \geq 3n + 4 \Leftrightarrow \\
&1 \geq \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}.
\end{aligned}$$

Protože pravá strana poslední nerovnosti konverguje k 0, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, tato nerovnost platí. Pro tato n tedy máme $c_n \geq c_{n+1}$, tj. $\{c_n\}$ je od indexu n_0 nerostoucí. Proto dle Věty 3.3.5(A) konverguje řada $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n b_n c_n$, a tedy i zadaná řada.

Nechť nyní $x \in \{2k\pi;\ , k \in \mathbb{Z}\}$. Pak $a_n = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Dále máme pro nezápornou posloupnost $\{b_n\}$ rovnost

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+n} = \frac{1}{2} \in (0,\infty).$$

Řada $\sum b_n$ proto diverguje podle Vět 3.2.5 a 3.2.18.

Protože $\lim c_n = 1$ a $\{c_n\}$ je od jistého $n_0 \in \mathbb{N}$ neklesající, je i posloupnost $\{\frac{1}{c_n}\}$ omezená a monotónní. Pokud by konvergovala řada $\sum b_n c_n$, dle Věty 3.3.5(A) by konvergovala i řada $\sum b_n = \sum b_n c_n \frac{1}{c_n}$. Ta ale diverguje. Proto řada $\sum b_n c_n$ diverguje. ♣

3.9.21. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$.

Řešení. Posloupnost $\{a_n\}_{n=2}^{\infty} = \left\{\frac{1}{\log n}\right\}_{n=2}^{\infty}$ je zřejmě klesající a splňuje $\lim a_n = 0$. Zadaná řada tedy konverguje podle Leibnizova kritéria. Podle Příkladu 1.9.8 pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$, platí $n^2 \leq 2^n$, a tedy také $n \leq n^2 \leq 2^n \leq e^n$. Odtud dostáváme

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\log n}\right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n} \geq \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Zadaná řady tedy konverguje neabsolutně. ♣

3.9.22. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{3}-1)$.

Řešení. Posloupnost $\{a_n\} = \{(\sqrt[n]{3}-1)\}$ je zřejmě klesající a splňuje $\lim a_n = 0$ podle Příkladu 2.2.51. Řada tedy konverguje podle Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1).

Ukážeme, že zadaná řada nekonverguje absolutně. Použijeme vzorec z Věty 1.6.5 a pro každé $n \in \mathbb{N}$ dostaneme

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt[n]{3}-1 &= (\sqrt[n]{3}-1)\cdot\frac{\sqrt[n]{3^{n-1}}+\sqrt[n]{3^{n-2}}+\ldots+1}{\sqrt[n]{3^{n-1}}+\sqrt[n]{3^{n-2}}+\ldots+1} \\ &= \frac{3-1}{\sqrt[n]{3^{n-1}}+\sqrt[n]{3^{n-2}}+\ldots+1} = \frac{2}{\sqrt[n]{3^{n-1}}+\sqrt[n]{3^{n-2}}+\ldots+1} \geq \frac{2}{3n}. \end{aligned}$$

Pak máme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n(\sqrt[n]{3}-1)\right| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3n}.$$

Poslední řada je divergentní, takže řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n(\sqrt[n]{3}-1)\right|$ diverguje podle srovnávacího kritéria (Věta 3.2.2(b)). ♣

3.9.23. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ v závislosti na parametru $z \in \mathbb{R}$.

Řešení. Pro $z = 0$ řada zřejmě konverguje absolutně. Pokud $z \neq 0$ má řada nenulové členy a můžeme použít podílové kritérium (Věta 3.4.7). Snadno spočteme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{z^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0 < 1.$$

Zadaná řada tedy konverguje absolutně pro každé $z \in \mathbb{R}$. ♣

3.9.24. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řad

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Pro $x = 0$ první řada zřejmě konverguje absolutně. Pokud $x \neq 0$ má tato řada nenulové členy a můžeme použít podílové kritérium (Věta 3.4.7). Snadno spočteme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+3)} = 0.$$

Zadaná řada konverguje absolutně pro každé $x \in \mathbb{R}$. Analogickým způsobem lze ukázat, že i druhá řada konverguje absolutně pro každé $x \in \mathbb{R}$. ♣

3.9.25. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}$ v závislosti na parametru $z \in \mathbb{R}$.

Řešení. Pro $z = 0$ řada zřejmě konverguje absolutně. Pokud $z \neq 0$ má řada nenulové členy a můžeme použít podílové kritérium (Věta 3.4.7). Snadno spočteme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|(-1)^{n+1} \frac{z^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|(-1)^n \frac{z^n}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{n+1}}{|z|^n} \frac{n}{n+1} = |z|.$$

Pro $|z| < 1$ tedy zadaná řada konverguje dokonce absolutně a pro $|z| > 1$ zadaná řada diverguje. Zbývá vyšetřit případy $z = 1$ a $z = -1$. Pro $z = -1$ obdržíme divergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Pro $z = 1$ dostáváme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ jejíž konvergence snadno plyne z Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1), ale absolutně zřejmě nekonverguje díky divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Zadaná řada konverguje právě tehdy, když platí $z \in [-1, 1)$, a absolutně konverguje právě tehdy, když $z \in (-1, 1)$. ♣

3.9.26. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n$ v závislosti na parametru $z \in \mathbb{R}$.

Řešení. Pro $z = 0$ řada zřejmě konverguje absolutně. V případě, že $z \neq 0$, jsou členy řady nenulové a můžeme použít podílové kritérium (Věta 3.4.7):

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!}|z|^{n+1}}{\frac{(2n)!}{n!n!}|z|^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2(n+1))!}{(2n)!} \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} \frac{|z|^{n+1}}{|z|^n} = \\ &= \lim_{n\to\infty} (2n+2)(2n+1)\frac{1}{(n+1)^2}|z| = 4|z| \,.\end{aligned}$$

Pro $|z| < \frac{1}{4}$ tedy zadaná řada konverguje absolutně a pro $|z| > \frac{1}{4}$ zadaná řada diverguje. Zbývá vyřešit případy $z = \frac{1}{4}$ a $z = -\frac{1}{4}$. Položme $a_n = \binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Přímočarý výpočet ukazuje, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad \text{a} \qquad a_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} a_n. \tag{3.63}$$

Matematickou indukcí dokážeme pro každé $n \in \mathbb{N}$ následující odhad

$$\frac{1}{2n} \le a_n \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}}. \tag{3.64}$$

Pro $n = 1$ nerovnosti triviálně platí. Předpokládejme, že nerovnosti jsou splněny pro $n \in \mathbb{N}$. Potom dostáváme

$$a_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} a_n \begin{cases} \ge \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{1}{2n} \ge \frac{1}{2n+2} \\ \le \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \le \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \end{cases} .$$

Z rekurentního vztahu (3.63) vyplývá, že posloupnost $\{a_n\}$ je klesající. Z odhadu (3.64) a věty o dvou strážnících plyne $\lim a_n = 0$. Podle Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1) dostáváme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}$.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}$ je podle srovnávacího kritéria divergentní díky odhadu (3.64).

Zadaná řada tedy konverguje právě tehdy, když platí $z \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ a a absolutně konverguje právě tehdy, když $z \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. ♣

3.9.27. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n)}{n}$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \sin(2n)$ a $b_n = \frac{1}{n}$. Podle Příkladu 3.3.7(a) má řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ omezenou posloupnost částečných součtů. Posloupnost $\{b_n\}$ je klesající a platí $\lim b_n = 0$. Naše řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ tedy konverguje podle Dirichletova kritéria (Věta 3.3.5(D)).

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|\sin 2n| \geq \sin^2 2n = \frac{1}{2}(1 - \cos(4n)) \geq 0.$$

S využitím této nerovnosti dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin(2n)}{n}\right| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(4n)}{2n}. \tag{3.65}$$

Opět podle Dirichletova kritéria (Věta 3.3.5(D)) a s využitím Příkladu 3.3.7 snadno odvodíme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(4n)}{n}$. Kdyby řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(4n)}{2n}$ konvergovala, pak by konvergovala i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$, což by byl spor. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(4n)}{2n}$ tedy diverguje, a proto podle srovnávacího kritéria diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin(2n)}{n}\right|$. Zadaná řada tak konverguje neabsolutně. ♣

3.9.28. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\cos(n\frac{\pi}{4})}{\log(\log n)}$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$ a $b_n = \frac{1}{\log(\log n)}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má omezenou posloupnost částečných součtů (Příklad 3.3.7), $\{b_n\}$ je klesající a $\lim b_n = 0$. Jsou tedy splněny všechny předpoklady Dirichletova kritéria, a proto naše řada konverguje. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left|\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right| \geq \cos^2\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos(n\frac{\pi}{2})).$$

S využitím této nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{\infty} \left|\frac{\cos(n\frac{\pi}{4})}{\log(\log n)}\right| &\geq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1 + \cos(n\frac{\pi}{2})}{2\log(\log n)} \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2\log(\log n)} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\cos(n\frac{\pi}{2})}{2n}. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Konvergence druhé řady plyne opět z Dirichletova kritéria.

Analogicky Příkladu 3.9.21 dostaneme odhad $n \leq e^n \leq e^{e^n}$, a tedy dvojím zlogaritmováním této nerovnosti dostaneme

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2\log(\log n)} \geq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2n} = \infty.$$

Za pomoci odhadu (3.66) tedy dostáváme, že zadaná řada konverguje neabsolutně. ♣

3.9.29. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} n$.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ a $b_n = \operatorname{arctg} n$. Posloupnost $\{b_n\}$ je zřejmě monotónní a omezená. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ konverguje podle Dirichletova kritéria, neboť řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ má omezenou posloupnost částečných součtů a posloupnost $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ je klesající a má limitu rovnou nule. Zadaná řada tedy skutečně konverguje podle Abelova kritéria.

Na vyšetření absolutní konvergence využijeme odhad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \arctan n \right| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}} \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n)}{2\sqrt{n}} .$$

Druhá řada konverguje podle Dirichletova kritéria, zatímco první řada diverguje. Proto zadaná řada není absolutně konvergentní. ♣

3.9.30. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=11}^{\infty} a_n$, kde $a_n = \frac{\sin n}{n+10\sin n}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 11$.

Řešení. Nechť $b_n = \frac{\sin n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, a uvažujme řadu $\sum_{n=11}^{\infty} b_n$. Ta je dle Příkladu 3.3.8 konvergentní a přitom platí

$$|a_n - b_n| = \left| \frac{-10(\sin n)^2}{n(n+10\sin n)} \right| \leq \frac{10}{n(n-10)}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 11.$$

Označíme-li $c_n = \frac{10}{n(n-10)}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 11$, dostáváme díky srovnání s řadou $\sum \frac{1}{n^2}$ (viz Věta 3.2.5 a Věta 3.2.18), že $\sum |c_n|$ konverguje. Proto je i řada $\sum |a_n - b_n|$ konvergentní (viz Věta 3.2.2), z čehož díky Větě 3.4.3 plyne, že je řada

$$\sum_{n=11}^{\infty} a_n = \sum_{n=11}^{\infty} (a_n - b_n) + \sum_{n=11}^{\infty} b_n$$

konvergentní.

Vyšetřeme nyní konvergenci řady $\sum_{n=11}^{\infty} |a_n|$. Dokážeme-li, že je řada $\sum_{n=11}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n+10\sin n}$ divergentní, ověříme díky odhadu

$$\left| \frac{\sin n}{n+10\sin n} \right| \geq \frac{\sin^2 n}{n+10\sin n}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 11,$$

a Větě 3.2.2 absolutní divergenci řady $\sum_{n=11}^{\infty} a_n$. Uvědomme si, že platí

$$\frac{\sin^2 n}{n+10\sin n} = \frac{1}{2(n+10\sin n)} - \frac{\cos 2n}{2(n+10\sin n)}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 11.$$

Konvergenci řady $\sum_{n=11}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2(n+10\sin n)}$ ověříme podobně jako konvergenci řady $\sum_{n=11}^{\infty} a_n$. Řada $\sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{2(n+10\sin n)}$ diverguje, což plyne ze srovnání s řadou $\sum \frac{1}{n}$ (viz Věta 3.2.18 a 3.2.5). Z toho dostáváme, že řada $\sum_{n=11}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n+10\sin n}$ diverguje, jelikož v opačném případě by řada

$$\sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{2(n+10\sin n)} = \sum_{n=11}^{\infty} \left(\frac{\sin^2 n}{n+10\sin} + \frac{\cos 2n}{2(n+10\sin n)} \right)$$

konvergovala. Tím je řešení příkladu dokončeno. ♣

3.9.31. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum a_n$, kde

$$a_n = \frac{\sin(2n+1)}{2n+(-1)^n n} \operatorname{arctg}(n^2), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Z Příkladu 3.9.16 víme, že řada $\sum \sin(2n+1)$ má omezené částečné součty. Dále z rovností

$$(-1)^n \sin(2n+1) = (-1)^n \sin 2n \cos 1 + (-1)^n \cos 2n \sin 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

a Příkladu 3.9.17 odvodíme omezenost částečných součtů řady $\sum (-1)^n \sin(2n+1)$. Upravme výraz $\frac{1}{2n+(-1)^n n}$ jako

$$\frac{1}{2n+(-1)^n n} = \frac{2n-(-1)^n n}{3n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tedy platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)}{2n+(-1)^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\sin(2n+1)}{3n} - \frac{(-1)^n \sin n}{3n} \right).$$

Posloupnost $\{\frac{2}{3n}\}$ konverguje monotónně k 0, a tedy řada $\sum \frac{2\sin(2n+1)}{3n}$ konverguje díky Větě 3.3.5(D). Podobně ověříme konvergenci řady $\sum \frac{(-1)^n \sin(2n+1)}{3n}$. Dostáváme tedy, že řada $\sum \frac{\sin(2n+1)}{2n+(-1)^n n}$ konverguje. Nakonec použijeme Větu 3.3.5(A) k odvození konvergence zadané řady (posloupnost $\{\operatorname{arctg}(n^2)\}$ je monotónní a omezená). ♣

KAPITOLA 4

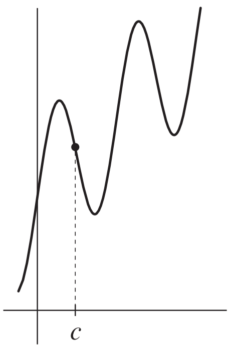
Limita a spojitost funkce

4.1. Definice a základní vlastnosti

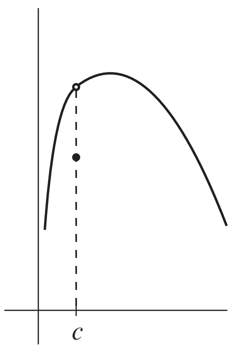
4.1.1. Definice. Reálnou funkcí jedné reálné proměnné rozumíme zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, tj. $f : M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}$.

V této kapitole budeme psát stručněji jen **funkce**. Podobně tomu bude i dále, nebude-li hrozit nedorozumění.

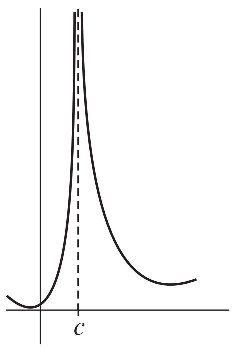
Na následujících obrázcích máme grafy několika různých funkcí. Podívejme se na chování těchto funkcí blízko bodu c. Na prvém obrázku se zdá, že přibližují-li se hodnoty x k bodu c, blíží se $f(x)$ k funkční hodnotě f v bodě c. Na druhém obrázku se děje něco podobného, ale $f(c)$ je různé od hodnoty, k níž se blíží $f(x)$, když se proměnná x přibližuje k c. Konečně na třetím obrázku rostou hodnoty $f(x)$ nade všechny meze. Analogicky můžeme rozumět dalším dvěma obrázkům pro $c = \infty$. Na posledním obrázku se však pro x blížící se k c funkční hodnoty $f(x)$ k žádné hodnotě nepřibližují.



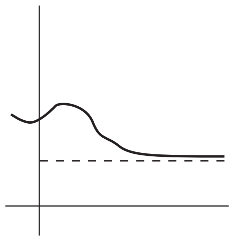
Obrázek 1.



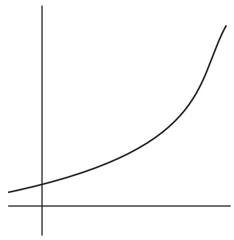
Obrázek 2.



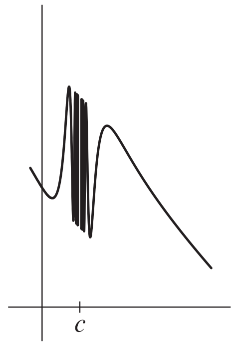
Obrázek 3.



Obrázek 4.



Obrázek 5.



Obrázek 6.

Nyní budeme chtít matematicky postihnout, co to znamená, že se funkční hodnoty $f(x)$ k něčemu blíží, pokud se x blíží k c. Přitom si ale nebudeme všímat funkční hodnoty v bodě c, ale pouze samotného faktu „blížení se“. Následující definice nám pomůže při přesné formulaci tohoto pojmu.

4.1.2. Definice. Připomeňme, že v Definici 2.3.14 jsem definovali pojem okolí pro body z $\mathbb{R}^*$. Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. **Prstencové okolí bodu** c definujeme jako $P(c,\varepsilon) = (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \setminus \{c\}$.

Prstencové okolí bodu ∞ (respektive $-\infty$) definujeme takto

$$P(\infty,\varepsilon) = B(\infty,\varepsilon) = (\frac{1}{\varepsilon}, \infty),$$
$$P(-\infty,\varepsilon) = B(-\infty,\varepsilon) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}).$$

4.1.3. Poznámky. (a) Ať už je $c \in \mathbb{R}$ nebo $c \in \{\infty, -\infty\}$, vždy pro $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}, 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, platí $B(c,\varepsilon_1) \subset B(c,\varepsilon_2)$. Podobně je tomu, nahradíme-li okolí prstencovým okolím. Všimněte si, že v případě bodu ∞ je okolí a prstencové okolí táž množina. Stejně je tomu s okolím a prstencovým okolím bodu $-\infty$.

(b) Pokud $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^*$, $c_1 \neq c_2$, pak existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že

$$B(c_1,\varepsilon) \cap B(c_2,\varepsilon) = \emptyset.$$

V případě, že $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, pak můžeme volit například $\varepsilon = \frac{1}{2}|c_1 - c_2|$. Pokud je $c_1 = \infty$ a $c_2 \in \mathbb{R}$, pak položíme $\varepsilon = \min\{1, \frac{1}{(|c_2|+2)}\}$. Potom totiž platí

$$c_2 + \varepsilon \leq c_2 + 1 < |c_2| + 2 = \frac{1}{1/(|c_2|+2)} \leq \frac{1}{\varepsilon},$$

takže $B(\infty,\varepsilon) \cap B(c_2,\varepsilon) = \emptyset$. Ve zbývajících případech postupujeme obdobně.

(c) Pokud $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^*$, $c_1 < c_2$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, splňují $B(c_1, \varepsilon) \cap B(c_2, \varepsilon) = \emptyset$, potom pro každé $x \in B(c_1, \varepsilon)$, $y \in B(c_2, \varepsilon)$ platí $x < y$.

Následující definice je jednou z nejdůležitějších v tomto textu.

4.1.4. Definice. Řekneme, že prvek $A \in \mathbb{R}^*$ je **limitou funkce** f **v bodě** $c \in \mathbb{R}^*$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon). \tag{4.1}$$

4.1.5. Věta (jednoznačnost limity)**.** Funkce má v bodě nejvýše jednu limitu.

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^*$, $A_1 \neq A_2$, jsou limity funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $B(A_1, \varepsilon) \cap B(A_2, \varepsilon) = \emptyset$. Podle definice limity pak existuje $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta_1) \colon f(x) \in B(A_1, \varepsilon).$$

Podobně existuje $\delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_2 > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta_2) \colon f(x) \in B(A_2, \varepsilon).$$

Položme $\delta_3 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Vezměme $x \in P(c, \delta_3)$. Potom máme

$$f(x) \in B(A_1, \varepsilon_1) \cap B(A_2, \varepsilon_2) = \emptyset,$$

což je spor. ■

Podobně jako u limity posloupnosti nám předchozí věta umožňuje zavést následující označení.

4.1.6. Označení. Má-li funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$ limitu $A \in \mathbb{R}^*$, pak píšeme $\lim_{x \to c} f(x) = A$.

4.1.7. Poznámky. (a) Jestliže $\lim_{x \to c} f(x)$ existuje, pak je f definována na jistém prstencovém okolí bodu c. V bodě c funkce nemusí být vůbec definována.

(b) Nechť $\lim_{x \to c} f(x) = A$, kde $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$. Pak můžeme rozlišit tyto případy:

$$\text{počítáme limitu} \begin{cases} \textbf{ve vlastním bodě}\text{, tj. } c \in \mathbb{R} \text{ a} \begin{cases} A \in \mathbb{R} \text{ (limita je } \textbf{vlastní}\text{)}, \\ A = \infty \text{ (limita je rovna } \textbf{plus nekonečnu}\text{)}, \\ A = -\infty \text{ (limita je rovna } \textbf{mínus nekonečnu}\text{)}, \end{cases} \\ \textbf{v nevlastním bodě}\text{, tj. } c = \pm\infty \text{ a} \begin{cases} A \in \mathbb{R} \text{ (limita je } \textbf{vlastní}\text{)}, \\ A = \infty \text{ (limita je rovna } \textbf{plus nekonečnu}\text{)}, \\ A = -\infty \text{ (limita je rovna } \textbf{mínus nekonečnu}\text{)}. \end{cases} \end{cases}$$

Uvědomme si, že pro $c \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$ platí $\lim_{x\to c} f(x) = A$, právě když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\, \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\, \forall x \in \mathbb{R} \colon 0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon. \tag{4.2}$$

Obdobně platí $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ právě tehdy, když

$$\forall K \in \mathbb{R}\, \exists L \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R} \colon x > L \Rightarrow f(x) > K.$$

Zde je vidět užitečnost pojmů okolí a prstencové okolí, které nám dovolují formulovat definici vlastní i nevlastní limity funkce ve vlastním i nevlastním bodě pomocí jedné formule.

4.1.8. Příklad. Nechť $A \in \mathbb{R}$ a f je funkce, jejíž funkční hodnoty jsou na jistém prstencovém okolí bodu $c \in \mathbb{R}^*$ rovny $A \in \mathbb{R}$. Potom $\lim_{x\to c} f(x) = A$.

Důkaz. Podle předpokladu existuje $\delta_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c,\delta_0)$ platí $f(x) = A$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolně. Nyní položíme $\delta = \delta_0$. Pro $x \in P(c,\delta)$ platí $x \in P(c,\delta_0)$, a tedy $f(x) = A \in B(A,\varepsilon)$. ■

4.1.9. Příklad. Nechť $c \in \mathbb{R}^*$. Potom $\lim_{x\to c} x = c$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme $\delta = \varepsilon$. Pro $x \in P(c,\varepsilon)$ platí $x \in P(c,\delta) = P(c,\varepsilon) \subset B(c,\varepsilon)$. ■

4.1.10. Příklad. Platí $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu volme $\delta = \varepsilon$. Pro $x \in P(\infty,\delta)$ platí $0 < \frac{1}{x} < \varepsilon$, a tedy $\frac{1}{x} \in B(0,\varepsilon)$. ■

4.1.11. Příklad. Platí $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Důkaz. Ukážeme, že formule (4.1) je splněna pro funkci $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $c = 0$ a $A = \infty$. Zvolme tedy $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K tomuto ε hledáme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že platí

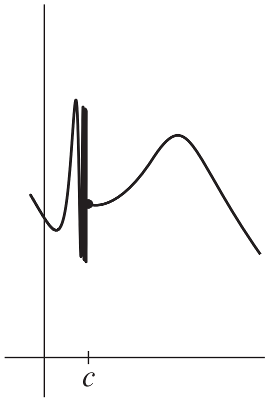
$$\forall x \in P(0,\delta) \colon \frac{1}{x^2} \in B(\infty,\varepsilon),$$

neboli

$$\forall x \in P(0,\delta) \colon \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Položíme-li $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, pak je výše uvedená formule splněna a důkaz proveden. ■

Na následujícím obrázku vidíme, že limita funkce f v bodě c zjevně neexistuje, přesto blíží-li se x k bodu c zprava, potom se i funkční hodnoty blíží k jisté hodnotě.



I tento pojem, kdy se proměnná blíží k c z jedné strany, lze formalizovat a to pomocí pojmu limity v bodě zprava (respektive zleva). K tomu budeme potřebovat pravé (respektive levé) okolí bodu, jež jsou definovány následovně.

4.1.12. Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **pravé okolí bodu** c jako $B_+(c,\varepsilon) = [c, c+\varepsilon)$,
- **levé okolí bodu** c jako $B_-(c,\varepsilon) = (c-\varepsilon, c]$,
- **pravé prstencové okolí bodu** c jako $P_+(c,\varepsilon) = (c, c+\varepsilon)$,
- **levé prstencové okolí bodu** c jako $P_-(c,\varepsilon) = (c-\varepsilon, c)$.

Dále definujeme

- **levé okolí bodu** ∞ jako $B_-(\infty,\varepsilon) = (\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$,
- **pravé okolí bodu** $-\infty$ jako $B_+(-\infty,\varepsilon) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$,
- **levé prstencové okolí bodu** ∞ jako $P_-(\infty,\varepsilon) = B_-(\infty,\varepsilon)$,
- **pravé prstencové okolí bodu** $-\infty$ jako $P_+(-\infty,\varepsilon) = B_+(-\infty,\varepsilon)$.

4.1.13. Definice. Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zprava** rovnou A, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\, \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\, \forall x \in P_+(c,\delta)\colon f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

Analogicky definujeme pojem **limity zleva** v bodě $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

4.1.14. Poznámka. Obdobně jako ve Větě 4.1.5 lze dokázat, že funkce f má v daném bodě c nejvýše jednu limitu zprava a nejvýše jednu limitu zleva. Pro limitu zleva funkce f v bodě c užíváme symbol $\lim_{x\to c_-} f(x)$ a pro limitu zprava symbol $\lim_{x\to c_+} f(x)$.

4.1.15. Věta. Funkce f má limitu v bodě $c \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když má v bodě c limitu zprava i zleva a hodnoty těchto jednostranných limit se rovnají.

Potom navíc platí

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c_-} f(x) = \lim_{x\to c_+} f(x).$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme, že $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolně. Podle definice limity nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P(c,\delta)\colon f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

Potom ale máme také

$$\forall x \in P_+(c,\delta)\colon f(x) \in B(A,\varepsilon),$$

neboť $P_+(c,\delta) \subset P(c,\delta)$. Tím jsme dokázali, že platí $\lim_{x\to c_+} f(x) = A$. Rovnost $\lim_{x\to c_-} f(x) = A$ dokážeme obdobně.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že $\lim_{x\to c_+} f(x) = \lim_{x\to c_-} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolně. Podle definice limity zprava nalezneme $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P_+(c,\delta_1)\colon f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

Dále podle definice limity zleva nalezneme $\delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_2 > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P_-(c,\delta_2)\colon f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Potom $P(c,\delta) \subset P(c,\delta_1) \cup P(c,\delta_2)$, takže pro každé $x \in P(c,\delta)$ máme $f(x) \in B(A,\varepsilon)$. Dokázali jsme tak, že platí $\lim_{x\to c} f(x) = A$. ■

Nyní dokážeme jednoduchý, ale užitečný princip, který je obdobou Věty 2.2.25 pro funkce. Nejprve zformulujeme pomocné tvrzení.

4.1.16. Lemma. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Potom pro každé $y \in \mathbb{R}$ platí ekvivalence

$$y \in B(0,\varepsilon) \quad\Leftrightarrow\quad |y| \in B(0,\varepsilon).$$

Důkaz. Nechť $y \in \mathbb{R}$. Potom $y \in B(0,\varepsilon)$ právě tehdy, když $-\varepsilon < y < \varepsilon$, což zřejmě platí právě tehdy, když $-\varepsilon < -y < \varepsilon$. Odtud a z definice absolutní hodnoty reálného čísla plyne tvrzení. ■

4.1.17. Věta. Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a f je funkce definovaná na nějakém okolí bodu c. Potom platí:

$$\lim_{x\to c} f(x) = 0$$

právě tehdy, když

$$\lim_{x\to c} |f(x)| = 0.$$

Důkaz. Z definice limity plyne, že $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ právě tehdy, když platí (4.1) pro speciální volbu $A = 0$. Dle Lemmatu 4.1.16 ovšem $f(x) \in B(0, \varepsilon)$ platí právě tehdy, když $|f(x)| \in B(0, \varepsilon)$. Tedy $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in P(c, \delta)\colon |f(x)| \in B(0, \varepsilon),$$

což podle Definice 4.1.4 znamená, že $\lim_{x\to c} |f(x)| = 0$. ∎

4.1.18. Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě c **spojitá**, jestliže $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Řekneme, že funkce f je v bodě c **spojitá zprava** (respektive **zleva**), jestliže $\lim_{x\to c+} f(x) = f(c)$ (respektive $\lim_{x\to c-} f(x) = f(c)$).

4.1.19. Poznámka. Z vlastností okolí lze snadno odvodit ekvivalenci následujících výroků.

(i) Funkce f je spojitá v bodě c.

(ii) Funkce f splňuje

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in B(c, \delta)\colon f(x) \in B(f(c), \varepsilon).$$

(iii) Funkce f splňuje

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\colon |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Porovnejte poslední dvě formule s formulemi (4.1) a (4.2).

4.1.20. Příklady. (a) Definujme

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ -1 & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

Tuto funkci nazýváme **signum** a značíme ji sign. Snadno nahlédneme, že

$$\lim_{x\to 0+} \operatorname{sign} x = 1 \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to 0-} \operatorname{sign} x = -1.$$

Funkce sign je tedy v bodě 0 nespojitá.

(b) Afinní funkce $f\colon x \mapsto ax+b$ je spojitá v každém bodě $c \in \mathbb{R}$. Tvrzení dokážeme přímým ověřením definice. Udělejme to podrobně v případě, že $a > 0$. Mějme $c \in \mathbb{R}$. Pak pro každé $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, a každé $x \in (c - \delta, c + \delta)$ platí

$$f(c) - a\delta < f(x) = f(c) + a(x - c) < f(c) + a\delta.$$

Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položíme-li $\delta = \frac{\varepsilon}{a}$, plyne z předchozí nerovnosti, že pro každé $x \in (c - \delta, c + \delta)$ platí

$$f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon.$$

Tím je dokázáno, že $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

4.2. Věty o limitách

Definice limity neobsahuje návod, jak tuto limitu vypočítat, případně jak ukázat, že funkce v daném bodě limitu nemá. Věty z tohoto oddílu nám umožní jednak limity v některých případech vypočítat a dále ukáží nové vlastnosti právě definovaných pojmů.

4.2.1. Věta (vlastní limita a omezenost)**.** Má-li funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$ vlastní limitu, pak existuje $P(c,\delta)$ takové, že f je na $P(c,\delta)$ omezená.

Důkaz. Označme $A = \lim_{x\to c} f(x)$. Podle předpokladu je $A \in \mathbb{R}$. Pro $\varepsilon = 1$ nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c,\delta)\colon\ f(x) \in B(A,1),$$

neboli $f(P(c,\delta)) \subset (A-1, A+1)$. Tato inkluze dokazuje omezenost funkce f na $P(c,\delta)$. ■

4.2.2. Věta (aritmetika limit funkcí)**.** Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$. Potom platí:

(a) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$,
(b) $\lim_{x\to c}(f(x)g(x)) = AB$,
(c) $\lim_{x\to c}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{A}{B}$,

pokud jsou pravé strany definovány.

Důkaz. Dokážeme pouze tvrzení (c). Technika důkazů zbývajících tvrzení je obdobná a zde je nebudeme provádět. Výraz $\frac{A}{B}$ je podle předpokladu definován, takže musí nastat některý z následujících případů:

(1) $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
(2) $A \in \mathbb{R}$, $B \in \{-\infty, \infty\}$,
(3) $A = \infty$, $B \in \mathbb{R}$, $B > 0$,
(4) $A = \infty$, $B \in \mathbb{R}$, $B < 0$,
(5) $A = -\infty$, $B \in \mathbb{R}$, $B > 0$,
(6) $A = -\infty$, $B \in \mathbb{R}$, $B < 0$.

(1) Naším cílem je dokázat, že ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c,\delta)\colon\ \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\right| < \varepsilon. \tag{4.3}$$

Z definice limity plyne, že ke kladnému číslu $\frac{|B|}{2}$ existuje $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c,\eta)$ platí $g(x) \in (B - \frac{|B|}{2}, B + \frac{|B|}{2})$, a tedy

$|g(x)| > \frac{|B|}{2} > 0$, takže výraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ má smysl pro každé $x \in P(c,\eta)$. Pro $x \in P(c,\eta)$ odhadujme

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\right| &= \frac{1}{|g(x)|\,|B|}\,|f(x)B - g(x)A| \\ &= \frac{1}{|g(x)|\,|B|}\,|f(x)B - AB + AB - g(x)A| \\ &\le \frac{1}{|g(x)|\,|B|}(|B|\,|f(x)-A| + |A|\,|B-g(x)|) \\ &\le M(|f(x)-A\,| + |g(x)-B|),\end{aligned} \tag{4.4}$$

kde $M = \max\left\{\frac{2}{|B|}, \frac{2|A|}{|B|^2}\right\}$. Zvolme nyní $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Z předpokladů věty plyne, že k číslu $\frac{\varepsilon}{2M}$ existují kladná čísla $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ taková, že platí

$$\forall x \in P(c,\delta_1)\colon\ |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2M}, \tag{4.5}$$

$$\forall x \in P(c,\delta_2)\colon\ |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2M}. \tag{4.6}$$

Potom pro $\delta = \min\{\eta, \delta_1, \delta_2\}$ plyne platnost (4.3) z (4.4), (4.5) a (4.6).

(2) Podle Věty 4.2.1 existuje $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, a kladné $K \in \mathbb{R}$ takové, že

$$x \in P(c,\delta_1)\colon |f(x)| < K. \tag{4.7}$$

Zvolme nyní libovolně $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Ať už předpokládáme $B = \infty$ nebo $B = -\infty$, můžeme v obou případech nalézt $\delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_2 > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c,\delta_2)\colon |g(x)| > \frac{K}{\varepsilon}. \tag{4.8}$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Potom pro každé $x \in P(c,\delta)$ díky (4.7) a (4.8) dostáváme

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \frac{K}{K/\varepsilon} = \varepsilon.$$

Tím je dokázáno, že pro $A \in \mathbb{R}$ a B nevlastní je limita rovna 0.

(3) Podobně jako v bodě (1) nalezneme $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c,\eta)\colon g(x) < 2B. \tag{4.9}$$

Zvolme libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c,\delta_1)\colon f(x) > \frac{2B}{\varepsilon}. \tag{4.10}$$

Položme $\delta = \min\{\eta, \delta_1\}$. Potom pro každé $x \in P(c,\delta)$ platí

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{2B}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{2B} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Tím je dokázáno, že $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Zbývající případy (4)-(6) lze dokázat stejným způsobem jako případ (3), pouze je třeba na příslušných místech změnit nerovnosti a znaménka.

■

4.2.3. Příklad. Následující příklady demonstrují, že bez předpokladu existence pravých stran ve vzorcích Věty 4.2.2 nelze o hodnotě limit na levých stranách nic říci.

Uvažujme například $f(x) = x$ a $g(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$. Pak $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = -x$, ale $\lim_{x\to\infty} f(x) + g(x) = 0$.

Poněkud odlišný příklad je následující. Vezměme $f(x) = x \sin x$ a $g(x) = (x+1)\sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$. Pak $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ neexistuje, i když $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1$. Potíž tkví v tom, že podíl $\frac{f(x)}{g(x)}$ není definován na žádném okolí ∞.

4.2.4. Poznámka. Věta 4.2.2 má i své zřejmé jednostranné varianty.

4.2.5. Věta (spojitost a aritmetické operace)**.** Nechť f, g jsou spojité funkce v bodě $c \in \mathbb{R}$. Potom i funkce $f + g$ a fg spojité v bodě c. Je-li navíc $g(c) \neq 0$, je i funkce $\frac{f}{g}$ spojitá v bodě c.

Důkaz. Tvrzení plynou okamžitě z Věty 4.2.2. ■

4.2.6. Příklad. Víme již, že funkce $f(x) = x$ je spojitá v každém bodě $c \in \mathbb{R}$ (Příklad 4.1.20(b)). Podle předcházející věty jsou tedy funkce $x^2, x^3, x^4, \dots$ spojité v každém bodě $\mathbb{R}$. Odtud podle téže věty plyne, že polynomy a racionální funkce jsou spojité na svých definičních oborech.

Výraz „$\frac{A}{0}$" není definován, nicméně platí tato věta.

4.2.7. Věta. Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to c} g(x) = 0$, $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $A > 0$. Jestliže existuje $\eta > 0$ takové, že funkce g je kladná na $P(c,\eta)$, pak $\lim_{x\to c}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \infty$.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $L \in \mathbb{R}$ libovolně. Nalezneme $\delta_1 > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c,\delta_1)$ platí $f(x) \in (A - \frac{A}{2}, A + \frac{A}{2})$. Dále nalezneme $\delta_2 > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c,\delta_2)$ platí $|g(x)| < \frac{A}{2(|L|+1)}$. Položíme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \eta\}$. Pak pro každé $x \in P(c,\delta)$ máme $0 < g(x) < \frac{A}{2(|L|+1)}$ a

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{A/2}{A/(2(|L|+1))} = |L| + 1 > L.$$

Tím je tvrzení pro $A \in \mathbb{R}$ dokázáno.

Předpokládejme nyní, že $A = \infty$. Zvolme opět $L \in \mathbb{R}$ libovolně. Nalezneme $\delta_1 > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c, \delta_1)$ platí $f(x) > 1$. Dále nalezneme $\delta_2 > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c, \delta_2)$ platí $|g(x)| < \frac{1}{|L|+1}$. Položíme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \eta\}$. Pak pro každé $x \in P(c, \delta)$ máme $0 < g(x) < \frac{1}{|L|+1}$ a

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{1}{1/(|L|+1)} = |L| + 1 > L.$$

■

4.2.8. Poznámka. Předchozí věta má i svou variantu pro jednostranné limity. Předpokládáme-li, že $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\lim_{x\to c_+} g(x) = 0$, $\lim_{x\to c_+} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$ a existuje $\eta > 0$ takové, že funkce g je kladná na $P_+(c, \eta)$, pak $\lim_{x\to c_+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$. Podobně lze zformulovat i variantu s limitou zleva.

4.2.9. Věta (o srovnání)**.** Nechť $c \in \mathbb{R}^*$.

(a) Nechť
$$\lim_{x\to c} f(x) > \lim_{x\to c} g(x).$$
Pak existuje $\delta > 0$ takové, že platí
$$\forall x \in P(c, \delta)\colon\ f(x) > g(x).$$

(b) Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že platí
$$\forall x \in P(c, \delta)\colon\ f(x) \le g(x).$$
Nechť existuje $\lim_{x\to c} f(x)$ a $\lim_{x\to c} g(x)$. Potom platí
$$\lim_{x\to c} f(x) \le \lim_{x\to c} g(x).$$

(c) (o dvou strážnících) Nechť existuje $\eta > 0$ takové, že platí
$$\forall x \in P(c, \eta)\colon\ f(x) \le h(x) \le g(x).$$
Dále předpokládejme, že
$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = A \in \mathbb{R}^*.$$
Potom existuje rovněž $\lim_{x\to c} h(x)$ a rovná se A.

Důkaz. (a) Označme $A = \lim_{x\to c} f(x)$ a $B = \lim_{x\to c} g(x)$. Podle Poznámky 4.1.3(b) nalezneme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $B(A, \varepsilon) \cap B(B, \varepsilon) = \emptyset$. K tomuto ε nalezneme kladná $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\forall x \in P(c, \delta_1)\colon\ f(x) \in B(A, \varepsilon),$$
$$\forall x \in P(c, \delta_2)\colon\ g(x) \in B(B, \varepsilon).$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Díky volbě ε a nerovnosti $A > B$ platí podle Poznámky 4.1.3(c) pro každé $x \in B(c, \delta)$ nerovnost $f(x) > g(x)$.

(b) Tuto část tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme, že $\lim_{x\to c} f(x) > \lim_{x\to c} g(x)$. Potom podle již dokázané části (a) existuje $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \eta) \colon f(x) > g(x).$$

Zvolme $y \in P(c, \delta) \cap P(c, \eta)$. Pak ovšem platí $f(y) > g(y) \geq f(y)$, což je spor.

(c) Nechť nejprve $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu existuje $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$ takové, že pro $x \in P(c, \delta_1)$ platí

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon, \qquad A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon.$$

Nechť nyní $\delta = \min\{\delta_1, \eta\}$. Je-li $x \in P(c, \delta)$, potom máme

$$A - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < A + \varepsilon,$$

a tedy $h(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Ke každému $\varepsilon > 0$ tedy existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta) \colon h(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon),$$

čili $\lim_{x\to c} h(x) = A$.

Předpokládejme nyní, že $A = \infty$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu existuje $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c, \delta_1)$ platí $\frac{1}{\varepsilon} < f(x)$. Nechť nyní $\delta = \min\{\delta_1, \eta\}$. Je-li $x \in P(c, \delta)$, pak platí

$$\frac{1}{\varepsilon} < f(x) \leq h(x),$$

a tedy $h(x) \in B(\infty, \varepsilon)$. Dokázali jsme tedy $\lim_{x\to c} h(x) = \infty$.

Případ $A = -\infty$ lze dokázat obdobně. ■

4.2.10. Příklad. Nechť $h(x) = x \cos x \sin \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pak $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Řešení. Položme $f(x) = -|x|$, $g(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Pak

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \quad x \in P(0, 1),$$

a

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0.$$

Z Věty 4.2.9(c) tedy plyne $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$. ♣

4.2.11. Poznámka. Pokud je funkce f v bodě c spojitá a $f(c) \neq 0$, pak existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že f je různá od nuly na $B(c, \delta)$. Toto tvrzení plyne z části (a) předchozí věty, kde za funkci g volíme nulovou funkci.

4.2.12. Poznámka. V kapitole o posloupnostech jsme ukázali varianty věty o dvou strážnících pro nevlastní limity (Věta 2.3.31 a 2.3.32). Podobně je tomu i v případě nevlastních limit funkcí. Uveďme formulaci věty pro limitu rovnou ∞.

4.2.13. Věta. Nechť existuje $\eta > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c,\eta)$ platí $f(x) \le h(x)$. Dále předpokládejme, že $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$. Potom existuje rovněž $\lim_{x\to c} h(x)$ a rovná se ∞.

4.2.14. Příklad. Ukažte, že $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+\sin x}{x} = \infty$.

Řešení. Jelikož

$$\frac{x^2+\sin x}{x} \ge \frac{x^2-1}{x} = x - \frac{1}{x}, \quad x \in (0,\infty),$$

a

$$\lim_{x\to\infty} x - \frac{1}{x} = \infty,$$

platí též z Věty 4.2.13

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+\sin x}{x} = \infty.$$

♣

Při výpočtech limit je často užitečná následující věta, jejíž důkaz lze snadno provést pomocí tvrzení (c) z Věty 4.2.9.

4.2.15. Věta. Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ a nechť existuje $\eta > 0$ takové, že g je omezená na $P(c,\eta)$. Potom $\lim_{x\to c}(f(x)g(x)) = 0$.

Další věta dává do souvislosti limitu funkce s limitou posloupnosti.

4.2.16. Věta (Heine)**.** Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a funkce f je definována na prstencovém okolí bodu c. Pak jsou výroky (i) a (ii) ekvivalentní.

(i) Platí $\lim_{x\to c} f(x) = A$.

(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in \mathcal{D}(f)$, $x_n \neq c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Mějme posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in \mathcal{D}(f)$, $x_n \neq c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle (i) existuje $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c,\delta)\colon f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

K již nalezenému δ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \ge n_0\colon x_n \in B(c,\delta).$$

Potom máme také

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon x_n \in P(c, \delta),$$

a tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon f(x_n) \in B(A, \varepsilon).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Dokážeme $\neg$(i) $\Rightarrow$ $\neg$(ii). Předpokládáme-li negaci (i), potom máme

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \exists x \in P(a, \delta) \colon \neg(f(x) \in B(A, \varepsilon)).$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tak existuje $x_n \in P(c, \frac{1}{n})$ takové, že $\neg(f(x_n) \in B(A, \varepsilon))$. Pak máme $x_n \neq c$, $\neg(f(x_n) \in B(A, \varepsilon))$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim x_n = c$. Neplatí tak $\lim f(x_n) = A$. Jsou tedy splněny předpoklady ve (ii) ale nikoliv závěr ve (ii), tj. (ii) neplatí, což jsme měli dokázat. ■

Není těžké zformulovat Heineovu větu pro limitu zleva (respektive zprava). Podobně lze dát do souvislosti spojitost a limitu posloupnosti. Z několika různých variant uveďme následující dvě, přičemž dokážeme pouze druhou.

4.2.17. Věta. Nechť $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $A \in \mathbb{R}^*$ a funkce f je definována na levém prstencovém okolí bodu c. Pak jsou výroky (i) a (ii) ekvivalentní.

(i) Platí $\lim_{x \to c-} f(x) = A$.
(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in \mathcal{D}(f)$, $x_n < c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

4.2.18. Věta. Nechť $c \in \mathbb{R}$ a funkce f je definována na okolí bodu c. Pak jsou výroky (i) a (ii) ekvivalentní.

(i) Funkce f je spojitá v bodě c.
(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in \mathcal{D}(f)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$.

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Mějme posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in \mathcal{D}(f)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle (i) existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in B(c, \delta) \colon f(x) \in B(f(c), \varepsilon).$$

K již nalezenému δ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon x_n \in B(c, \delta),$$

a tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon f(x_n) \in B(f(c), \varepsilon).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Dokážeme $\neg$(i) $\Rightarrow$ $\neg$(ii). Předpokládáme-li negaci (i), potom máme

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \exists x \in B(a, \delta) \colon \neg(f(x) \in B(f(c), \varepsilon)).$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tak existuje $x_n \in B(c, \frac{1}{n})$ takové, že $\neg(f(x_n) \in B(A, \varepsilon))$. Pak máme $\neg(f(x_n) \in B(A, \varepsilon))$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim x_n = c$. Neplatí tak $\lim f(x_n) = A$. Jsou tedy splněny předpoklady ve (ii) ale nikoliv závěr ve (ii). ∎

Větu 4.2.16 lze často použít k důkazu neexistence limity.

4.2.19. Příklad. Ukážeme, že neexistuje $\lim_{x\to\infty}(-1)^{[x]}$, kde $[x]$ značí celou část čísla x.

Řešení. Předpokládejme, že $\lim_{x\to\infty}(-1)^{[x]} = A \in \mathbb{R}^*$. Vezměme posloupnost $\{x_n\} = \{2n\}$. Potom $(-1)^{[x_n]} = (-1)^{[2n]} = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $\lim_{n\to\infty}(-1)^{[x_n]} = 1$. Přitom $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ a $x_n \neq \infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Vezměme dále posloupnost $\{y_n\} = \{2n+1\}$. Potom $(-1)^{[y_n]} = (-1)^{[2n+1]} = -1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $\lim_{n\to\infty}(-1)^{[y_n]} = -1$. Přitom $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ a $y_n \neq \infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Podle Heineovy věty musí být $\lim_{n\to\infty}(-1)^{[x_n]} = \lim_{n\to\infty}(-1)^{[y_n]} = A$. Na druhé straně ovšem $\lim_{n\to\infty}(-1)^{[x_n]} \neq \lim_{n\to\infty}(-1)^{[y_n]}$, a to je spor. Proto limita $\lim_{x\to\infty}(-1)^{[x]}$ neexistuje. ♣

Věta 4.2.2 říká, jak se limita funkce chová vzhledem k algebraickým operacím sčítání, násobení a dělení. Následující věta ozřejmuje vztah limity ke skládání funkcí.

4.2.20. Věta (limita složené funkce)**.** Nechť $c, D, A \in \mathbb{R}^*$. Mějme funkce f a g splňující $\lim_{x\to c} g(x) = D$ a $\lim_{y\to D} f(y) = A$. Předpokládejme dále, že je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(P) existuje $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c, \eta)$ platí $g(x) \neq D$,

(S) funkce f je spojitá v bodě D.

Potom platí

$$\lim_{x\to c}(f \circ g)(x) = A.$$

Důkaz. Předpokládejme, že je splněna podmínka (P). Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. K tomuto ε existuje $\psi > 0$ takové, že

$$\forall y \in P(D, \psi)\colon\ f(y) \in B(A, \varepsilon),$$

neboť $\lim_{y\to D} f(y) = A$. K nalezenému ψ je možné najít $\delta' > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta')\colon\ g(x) \in B(D, \psi),$$

neboť $\lim_{x\to c} g(x) = D$. Položme $\delta = \min\{\delta', \eta\}$. Pro $x \in P(c, \delta)$ platí $g(x) \in B(D, \psi) \setminus \{D\}$, neboli $g(x) \in P(D, \psi)$. Odtud dostáváme $f(g(x)) \in B(A, \varepsilon)$. Tím je důkaz věty ve verzi s podmínkou (P) proveden.

Nyní předpokládejme, že je splněna podmínka (S). Vezměme $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\psi > 0$ takové, že pro každé $y \in P(D, \psi)$ platí $f(y) \in B(A, \varepsilon)$. Protože je f spojitá v bodě D, máme $f(D) = A$. Proto pro každé $y \in B(D, \psi)$ platí $f(y) \in B(A, \varepsilon)$. K číslu ψ existuje nyní $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c, \delta)$ platí $g(x) \in B(D, \psi)$. Dohromady tedy máme, že pro $x \in P(c, \delta)$ platí $f(g(x)) \in B(A, \varepsilon)$. Tím je důkaz proveden. ■

4.2.21. Příklad. Není-li splněna podmínka (P) ani (S), pak závěr věty nemusí platit. Zvolíme-li $f = |\text{sign}|$, $g = 0$, $c = 0$, $D = 0$ a $A = 1$, pak $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, $\lim_{y\to 0} f(y) = 1$, ale $\lim_{x\to 0}(f \circ g)(x) = 0 \neq 1$.

4.2.22. Věta. Pokud je funkce g spojitá v bodě $c \in \mathbb{R}$ a funkce f je spojitá v bodě $g(c)$, pak je funkce $f \circ g$ spojitá v bodě c.

Důkaz. Tvrzení plyne ihned z Věty 4.2.20. ■

4.2.23. Příklad. Nechť funkce f je spojitá v bodě 0. Potom je $\lim_{x\to\infty} f(\frac{1}{x}) = f(0)$.

Řešení. Platí $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ (Příklad 4.1.10) a $\lim_{y\to 0} f(y) = f(0)$. Podle Věty 4.2.20 ve verzi s podmínkou (S) pak platí $\lim_{x\to\infty} f(\frac{1}{x}) = f(0)$. ♣

Věta o limitě složené funkce má také své varianty pro jednostranné limity. Bez důkazu uveďme jednu z nich.

4.2.24. Věta. Nechť $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $D \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $A \in \mathbb{R}^*$. Mějme funkce f a g splňující $\lim_{x\to c-} g(x) = D$ a $\lim_{y\to D+} f(y) = A$. Dále nechť existuje $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že pro každé $x \in P_-(c, \eta)$ platí $g(x) > D$. Potom platí

$$\lim_{x\to c-} (f \circ g)(x) = A.$$

4.2.25. Věta (limita monotónní funkce)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Nechť funkce f monotónní na intervalu (a, b). Potom existují $\lim_{x\to a+} f(x)$ a $\lim_{x\to b-} f(x)$, přičemž platí:

- Je-li f na (a, b) neklesající, pak
$$\lim_{x\to a+} f(x) = \inf f((a, b)) \quad \text{a} \quad \lim_{x\to b-} f(x) = \sup f((a, b)).$$
- Je-li f na (a, b) nerostoucí, pak
$$\lim_{x\to a+} f(x) = \sup f((a, b)) \quad \text{a} \quad \lim_{x\to b-} f(x) = \inf f((a, b)).$$

Důkaz. Dokážeme, že $\lim_{x\to a+} f(x) = \inf f((a, b))$ platí pro neklesající zdola omezenou funkci f a pro a $a \in \mathbb{R}$. Důkazy ostatních případů lze provést obdobně. Označme $m = \inf f((a, b)) \in \mathbb{R}$. Zvolme číslo $\varepsilon > 0$. Z vlastnosti infima plyne, že existuje $y \in f((a, b))$ takové, že $y < m + \varepsilon$. Z definice množiny $f((a,b))$ plyne, že $y = f(x')$ pro nějaké $x' \in (a,b)$. Protože však funkce f je neklesající, je

$$\forall x \in (a,x'):\ f(x) \leq f(x') < m + \varepsilon.$$

Protože m je dolní závora množiny $f((a,b))$, je

$$\forall x \in (a,b):\ m - \varepsilon < m \leq f(x).$$

Na intervalu (a,x') tedy platí:

$$\forall x \in (a,x'):\ m - \varepsilon < f(x) < m + \varepsilon.$$

Tím jsme dokázali, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ (v našem případě to bylo $\delta = x' - a$) takové, že

$$\forall x \in P_+(a,\delta):\ f(x) \in (m - \varepsilon, m + \varepsilon),$$

tj. $\lim_{x \to a_+} f(x) = m$. ∎

4.3. Funkce spojité na intervalu

4.3.1. Definice. Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce $f: J \to \mathbb{R}$ je **spojitá na intervalu** J, jestliže platí:

- f je spojitá v každém vnitřním bodě J,
- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J.

Spojitost funkce na intervalu lze charakterizovat pomocí konvergence posloupností, jak ukazuje následující varianta Heineovy věty.

4.3.2. Věta. Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je interval a $f: J \to \mathbb{R}$. Pak je ekvivalentní:

(i) funkce f je spojitá na J,
(ii) pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in J$ a $\lim x_n = c \in J$, platí $\lim f(x_n) = f(c)$.

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Uvažujme posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in J$, $n \in \mathbb{N}$, a $\lim x_n = c \in J$. Pokud je bod c vnitřním bodem intervalu J, potom podle Heineovy věty (Věta 4.2.18) platí $\lim f(x_n) = f(c)$. Pokud je bod c krajním bodem intervalu J, pak $\lim f(x_n) = f(c)$ platí podle příslušné jednostranné varianty Heineovy věty.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Spojitost ve vnitřních bodech J plyne opět z Heineovy věty. Spojitost v krajních bodech, pokud jsou tyto prvkem J, plyne z jednostranných variant Heineovy věty. ■

4.3.3. Věta. Nechť I, J jsou intervaly v $\mathbb{R}$ a $f: I \to \mathbb{R}$, $g: J \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce. Nechť $f(I) \subset J$. Pak $g \circ f: I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce.

Důkaz. Použijme Větu 4.3.2. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost bodů v I konvergující k bodu $x \in I$. Dle Věty 4.3.2(ii) použité pro funkci f platí $\lim f(x_n) = f(x)$. Opětovným použití tohoto tvrzení, tentokrát pro funkci g, dostaneme, že $\lim g(f(x_n)) = g(f(x))$. Proto $\lim (g \circ f)(x_n) = (g \circ f)(x)$, a tedy $g \circ f$ je spojitá na I opět dle Věty 4.3.2. ■

4.3.4. Věta (Bolzanova věta o nabývání mezihodnot)**.** Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a $f(a) < f(b)$. Pak ke každému $C \in (f(a), f(b))$ existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí $f(\xi) = C$.

Důkaz. Zvolme $C \in (f(a), f(b))$ a položme $M = \{z \in [a, b];\ f(z) < C\}$. Množina M je neprázdná (neboť $a \in M$) a shora omezená (číslo b je horní závora M), je tedy $\xi = \sup M \in \mathbb{R}$. Zřejmě platí $\xi \in [a, b]$. Ukážeme, že $f(\xi) = C$ vyloučením možností $f(\xi) > C$ a $f(\xi) < C$.

Kdyby $f(\xi) > C$, pak $\xi > a$ a lze nalézt $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\xi - \delta, \xi)$ platí $f(x) > C$. To znamená, že $M \subset [a, \xi - \delta]$, což je spor s definicí ξ.

Kdyby $f(\xi) < C$, pak $\xi < b$ a lze nalézt $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\xi, \xi + \delta)$ platí $f(x) < C$. To znamená, že $(\xi, \xi + \delta) \subset M \subset [a, \xi]$, což je opět spor. ■

4.3.5. Poznámka. Věta analogicky platí v případě, kdy $f(a) > f(b)$. Povšimněme si, že z předpokladů věty neplyne nic o tom, kolik je takových bodů $\xi \in (a, b)$, v nichž je $f(\xi) = C$. Bolzanova věta o nabývání mezihodnot ale tvrdí, že takový bod existuje alespoň jeden.

4.3.6. Věta (zobrazení intervalu spojitou funkcí)**.** Nechť J je interval. Nechť funkce $f: J \to \mathbb{R}$ je spojitá na J. Potom je $f(J)$ interval.

Důkaz. Ověříme, že množina $f(J)$ splňuje předpoklad Lemmatu 1.6.23. Zvolme $y_1, y_2 \in f(J)$ a $z \in \mathbb{R}$, $y_1 < z < y_2$. Pak existují $x_1, x_2 \in J$ taková, že $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$. Podle Věty 4.3.4 a za ní následující poznámky musí f v jistém bodě nabývat hodnoty z, takže $z \in f(J)$. Podle Lemmatu 1.6.23 je tedy množina $f(J)$ intervalem. ■

4.3.7. Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset \mathcal{D}(f)$).

• Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (respektive **minima**) **na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M\colon f(y) \leq f(x) \qquad (\text{respektive } \forall y \in M\colon f(y) \geq f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem maxima** (respektive **minima**) funkce f na množině M.

• Řekneme, že f nabývá v bodě x **lokálního maxima** (respektive **lokálního minima**) **vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall y \in B(x,\delta)\cap M\colon f(y) \leq f(x) \qquad (\text{respektive } \forall y \in B(x,\delta)\cap M\colon f(y) \geq f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem lokálního maxima** (respektive **lokálního minima**) funkce f na množině M.

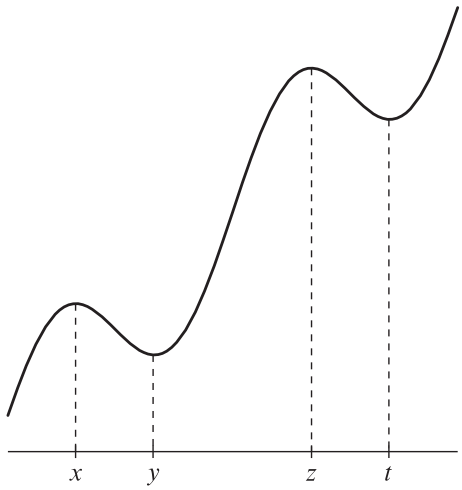
• Řekneme, že f nabývá v bodě x **ostrého lokálního maxima** (respektive **ostrého lokálního minima**) **vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall y \in P(x,\delta)\cap M\colon f(y) < f(x) \qquad (\text{respektive } \forall y \in P(x,\delta)\cap M\colon f(y) > f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem ostrého lokálního maxima** (respektive **ostrého lokálního minima**) funkce f na množině M.

• Symbol $\max_M f$ (respektive $\min_M f$) označuje největší (respektive nejmenší) hodnotu, které funkce f na množině M nabývá (pokud taková hodnota existuje).

• Bodem **extrému** budeme rozumět bod maxima či minima. Bodem **lokálního extrému** budeme rozumět bod lokálního maxima či lokálního minima.



Obrázek 7.

Na obrázku jsou x a z body lokálního maxima funkce f a v bodech y a t má funkce f lokální minimum.

4.3.8. Budeme-li hovořit o lokálním extrému reálné funkce (bez udání množiny), budeme mít na mysli lokální extrém vzhledem k nějakému okolí.

4.3.9. Věta (existence extrémů)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, a f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Potom f nabývá na $[a, b]$ své největší hodnoty a své nejmenší hodnoty.

Důkaz. Označme $G = \sup f([a, b])$. Podle Věty 2.3.34 existuje posloupnost $\{y_n\}$ prvků množiny $f([a, b])$ taková, že $\lim y_n = G$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $x_n \in [a, b]$ splňující $f(x_n) = y_n$. Podle Věty 2.4.6 vybereme z posloupnosti $\{x_n\}$ konvergentní posloupnost $\{x_{n_k}\}$ s limitou x^*. Podle Věty 2.2.45 leží bod x^* v intervalu $[a, b]$. Podle Věty 4.2.18 platí $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x^*)$. Protože $f(x_{n_k}) = y_{n_k}$, je posloupnost $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Podle Věty 2.2.33 platí

$$f(x^*) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} y_n = G.$$

Je tedy $f(x^*) = G$ a x^* je bodem maxima funkce f na intervalu $[a, b]$.

Pro důkaz existence bodu minima definujme funkci $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ předpisem $g(x) = -f(x)$. Funkce g je na $[a, b]$ spojitá, musí tedy na $[a, b]$ nabývat svého maxima podle již dokázané části věty. Nechť tomu tak je v bodě $x_* \in [a, b]$. Pak platí $g(x) \le g(x_*)$ kdykoliv $x \in [a, b]$. To znamená, že

$f(x) \geq f(x_*)$ pro každé $x \in [a,b]$, a f nabývá svého minima na $[a,b]$ v bodě x_*. Tím je věta dokázána. ■

4.3.10. Příklad. Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ nenabývá na intervalu $(0,1)$ extrému. Stejně tak funkce $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro } x \in \{0,1\}, \\ x & \text{pro } x \in (0,1) \end{cases}$$

nemá na $[0,1]$ extrém. Tyto dva příklady ukazují, že ani předpoklad uzavřenosti intervalu ani spojitosti funkce nelze ve Větě 4.3.9 vynechat.

4.3.11. Důsledek. Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a,b]$. Potom je f na $[a,b]$ omezená.

Důkaz. Podle předchozí věty nabývá funkce f na intervalu $[a,b]$ maxima v bodě x^* a minima v bodě x_*. Platí tedy $f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*)$ pro každé $x \in [a,b]$, takže množina $f([a,b])$ je omezená. ■

4.3.12. Hledání extrémů funkce na nějaké množině patří k důležitým úlohám. Věta 4.3.9 sice nedává návod jak bod extrému hledat, ale dává nám velmi cennou informaci o tom, že alespoň jeden bod maxima (respektive minima) existuje (za předpokladů věty). V dalším se naučíme, jak vytipovat body, které jsou podezřelé z toho, že by v nich funkce mohla nabývat extrému. Pokud víme (např. podle Věty 4.3.9), že naše funkce nabývá maxima (respektive minima) na uvažované množině, pak bodem maxima (respektive minima) bude ten z vytipovaných podezřelých bodů, v němž funkce nabývá největší (respektive nejmenší) hodnoty.

Na závěr tohoto oddílu se budeme zabývat vztahem spojitosti k inverznímu zobrazení. Spojitá funkce na intervalu J zobrazuje tento interval na interval $f(J)$ (Věta 4.3.6). Pokud je f na J rostoucí (nebo klesající), je f prosté zobrazení J na $f(J)$ a existuje inverzní zobrazení $f^{-1}\colon f(J) \to J$. Toto zobrazení je funkce, budeme proto o f^{-1} hovořit jako o **funkci inverzní**. Následující věta tvrdí, že jak druh monotonie tak i spojitost zdědí inverzní funkce od funkce výchozí.

4.3.13. Věta (spojitost inverzní funkce)**.** Nechť f je spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J. Potom funkce f^{-1} je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že f je spojitá a rostoucí, jinak bychom uvažovali $-f$. Potom podle Věty 4.3.6 je funkce f^{-1} definována na intervalu $f(J)$ a je rostoucí, což je snadné si uvědomit. Dokážeme spojitost f^{-1} na $f(J)$. Nechť $y_0 \in f(J)$ není pravý koncový bod intervalu $f(J)$. Dokážeme spojitost f^{-1} v bodě y_0 zprava. Označme $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Bod x_0 není pravým koncovým bodem J, neboť f je rostoucí na J. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Zvolme $x_1 \in J \cap (x_0, x_0+\varepsilon)$ a položme $\delta = f(x_1) - y_0$. Odtud potom $[y_0, y_0 + \delta] \subset f(J)$, a tedy

$$f^{-1}(B_+(y_0,\delta)) = f^{-1}([y_0, y_0+\delta)) = [x_0, x_1) \subset B(x_0,\varepsilon) = B(f^{-1}(y_0),\varepsilon).$$

Analogicky bychom dokázali spojitost zleva funkce f^{-1} v bodech $f(J)$, které nejsou levým koncovým bodem $f(J)$. Odtud plyne spojitost f^{-1} na $f(J)$. ∎

4.3.14. Je-li $n \in \mathbb{N}$ liché, pak funkce $x \mapsto x^n$ je spojitá rostoucí funkce na $\mathbb{R}$, a tedy dle Věty 4.3.13 je funkce $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ spojitá (a rostoucí) na $\mathbb{R}$. Je-li $n \in \mathbb{N}$ sudé, pak funkce $x \mapsto x^n$ je spojitá rostoucí funkce na $[0,\infty)$, a tedy dle Věty 4.3.13 je funkce $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ spojitá (a rostoucí) na $[0,\infty)$.

4.4. Teoretické příklady k limitě funkce

4.4.1. Příklad. Nechť $x \in \mathbb{R}^*$ a f je funkce definovaná na nějakém $P(x,\delta)$. Definujeme pak **limes superior** a **limes inferior** funkce f v bodě x jako

$$\limsup_{y\to x} f(y) = \inf_{\delta>0} \sup f(P(x,\delta)),$$
$$\liminf_{y\to x} f(y) = \sup_{\delta>0} \inf f(P(x,\delta)).$$

Obdobně definujeme limes superior a inferior v bodě x zleva či zprava. Platí následující tvrzení.

(a) Máme $\liminf_{y\to x} f(y) \le \limsup_{y\to x} f(y)$.
(b) Limita $\lim_{y\to x} f(y)$ existuje právě tehdy, když $\limsup_{y\to x} f(y) = \liminf_{y\to x} f(y)$. V tomto případě pak platí

$$\lim_{y\to x} f(y) = \limsup_{y\to x} f(y) \ (= \liminf_{y\to x} f(y)). \tag{4.11}$$

(c) Platí $\limsup_{y\to x}(-f(y)) = -\liminf_{y\to x} f(y)$.

Řešení. K důkazu tvrzení (a) si stačí uvědomit, že pro každá $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ kladná platí

$$\inf f(P(x,\delta_1)) \le \sup f(P(x,\delta_2)).$$

Tato nerovnost snadno plyne z nerovností (kde $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$)

$$\inf f(P(x,\delta_1)) \le \inf f(P(x,\delta)) \le \sup f(P(x,\delta)) \le \sup f(P(x,\delta_2)).$$

Dokažme nyní druhé tvrzení. Předpokládejme existenci limity $A = \lim_{y\to x} f(y)$ a označme $a = \liminf_{y\to x} f(y)$, $b = \limsup_{y\to x} f(y)$. Je-li $a < b$, pak platí

$$\forall \delta > 0\colon\ \inf f(P(x,\delta)) \le a < b \le \sup f(P(x,\delta)). \tag{4.12}$$

Zvolme $a', b' \in \mathbb{R}$ splňující $a < a' < b' < b$ a dále pak $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, pro které množina $B(A,\varepsilon)$ neprotíná alespoň jeden z intervalů $(-\infty, a')$ a (b', ∞). Z definice limity existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že $f(P(x,\delta)) \subset B(A,\varepsilon)$. Pro toto δ však platnost (4.12) znamená neprázdnost množiny

$$f(P(x,\delta)) \cap (-\infty, a') \cap (b', \infty) \subset B(A,\varepsilon) \cap (-\infty, a') \cap (b', \infty) = \emptyset.$$

Tento spor tedy dává $a = b$.

V důkazu obrácené implikace označme

$$A = \limsup_{y\to x} f(y) = \liminf_{y\to x} f(y)$$

a uvažme nejprve případ $A = \infty$. Pak pro dané $\varepsilon > 0$ najdeme $\delta \in \mathbb{R}$ kladné takové, že $\inf f(P(x,\delta)) > \frac{1}{\varepsilon}$. Tedy $f(P(x,\delta)) \subset B(A,\varepsilon)$ a $\lim_{y\to x} f(y) = \infty$.

Obdobně bychom dokázali $\lim_{y\to x} f(y) = -\infty$ v případě $A = -\infty$. Je-li $A \in \mathbb{R}$, najdeme pro dané $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, čísla $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ kladná taková, že

$$A - \varepsilon < \inf f(P(x,\delta_1)) \quad \text{a} \quad \sup f(P(x,\delta_2)) < A + \varepsilon.$$

Položíme-li $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, dostáváme

$$A - \varepsilon < \inf f(P(x,\delta)) \le \sup f(P(x,\delta)) < A + \varepsilon.$$

Tedy $f(P(x,\delta)) \subset B(A,\varepsilon)$, což dává $\lim_{y\to x} f(y) = A$.

Důkaz této implikace též ověřil platnost rovnosti (4.11).

Přistupme k důkazu tvrzení (c). To však snadno plyne z následujících identit

$$\sup\{-x;\ x \in A\} = -\inf\{x;\ x \in A\}, \quad \inf\{-x;\ x \in A\} = -\sup\{x;\ x \in A\}$$

platných pro každou neprázdnou množinu $A \subset \mathbb{R}$, protože pak dostáváme

$$\begin{aligned}\limsup_{y\to x} -f(y) &= \inf_{\delta>0} \sup(-f)(P(x,\delta)) = \inf_{\delta>0} (-\inf f(P(x,\delta)))\\ &= -\sup_{\delta>0} \inf f(P(x,\delta)) = -\liminf_{y\to x} f(P(x,\delta)).\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. ♣

4.4.2. Příklad. Je-li $x \in \mathbb{R}^*$ a f, g jsou funkce definované na nějakém $P(x, \delta)$, platí

$$\liminf_{y \to x} (f(y) + g(y)) \geq \liminf_{y \to x} f(y) + \liminf_{y \to x} g(y),$$
$$\limsup_{y \to x} (f(y) + g(y)) \leq \limsup_{y \to x} f(y) + \limsup_{y \to x} g(y),$$

pokud jsou pravé strany definovány.

Řešení. Dokážeme pouze druhou nerovnost, důkaz první je obdobný. Označme

$$b_1 = \limsup_{y \to x} f(y) \quad \text{a} \quad b_2 = \limsup_{y \to x} g(y).$$

Je-li $b_1 + b_2 = \infty$, požadovaná nerovnost zjevně platí. Předpokládejme tedy, že $b_1 + b_2 < \infty$ a nechť $b' \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo větší než $b_1 + b_2$. Snadno nalezneme čísla $b_1', b_2' \in \mathbb{R}$ taková, že $b_1 < b_1'$, $b_2 < b_2'$ a $b_1' + b_2' < b'$. Z definice nyní existují $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ kladná splňující

$$\sup f(P(x, \delta_1)) < b_1' \quad \text{a} \quad \sup g(P(x, \delta_2)) < b_2'.$$

Pro $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ pak z Věty 1.8.6 dostáváme

$$\begin{aligned} \sup(f + g)(P(x, \delta)) &\leq \sup f(P(x, \delta)) + \sup g(P(x, \delta)) \\ &\leq \sup f(P(x, \delta_1)) + \sup g(P(x, \delta_2)) \\ &< b_1' + b_2' < b'. \end{aligned}$$

Tedy

$$\limsup_{y \to x} (f + g)(y) = \inf_{\delta > 0} \sup(f + g)(P(x, \delta)) < b'.$$

Jelikož bylo b' libovolné, platí

$$\limsup_{y \to x} (f + g)(y) \leq b_1 + b_2.$$

Tím je důkaz dokončen. ♣

4.4.3. Příklad. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je monotónní funkce. Potom je množina

$$D = \{x \in \mathbb{R};\ f \text{ není spojitá v bodě } x\}$$

spočetná.

Řešení. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že je f neklesající. Má tedy v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ limitu zleva i zprava dle Věty 4.2.25. Zřejmě pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{y \to x_-} f(y) \leq f(x) \leq \lim_{y \to x_+} f(y),$$

a tedy

$$D = \{x \in \mathbb{R};\ \lim_{y \to x_-} f(y) < \lim_{y \to x_+} f(y)\}.$$

Pro každé $x \in D$ označme $a_x = \lim_{y \to x_-} f(y)$ a $b_x = \lim_{y \to x_+} f(y)$. Máme-li $x, y \in D$, $x < y$, pak

$$a_x < b_x \leq a_y < b_y .$$

Tedy je systém otevřených intervalů

$$\{(a_x, b_x);\ x \in D\}$$

disjunktní, a proto spočetný dle Příkladu 1.7.21. Tedy je i množina D spočetná. ♣

4.4.4. Příklad. Nechť f je funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Potom je množina

$$E = \{x \in \mathbb{R};\ f \text{ má v bodě } x \text{ ostrý lokální extrém}\}$$

spočetná.

Řešení. Zjevně stačí ukázat, že množina

$$M = \{x \in \mathbb{R};\ f \text{ má v } x \text{ ostré lokální maximum}\}$$

je spočetná. K tomuto účelu nalezneme pro každé $x \in M$ kladné číslo δ_x takové, že

$$\forall y \in (x - \delta_x, x + \delta_x) \colon f(y) < f(x).$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$M_n = \{x \in M;\ \delta_x > \frac{1}{n}\}$$

a uvědomme si, že pro různé body x, y z M_n platí

$$(x - \frac{1}{2n}, x + \frac{1}{2n}) \cap (y - \frac{1}{2n}, y + \frac{1}{2n}) = \emptyset. \tag{4.13}$$

Uvažujeme-li totiž bod z v eventuálním průniku, platí pak

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n},$$

což znamená, že

$$y \in (x - \delta_x, x + \delta_x) \quad \text{a} \quad x \in (y - \delta_y, y + \delta_y).$$

Díky volbě δ_x a δ_y pak platí $f(y) < f(x)$ a $f(x) < f(y)$, což je zřejmý spor. Tím je ověřena platnost (4.13).

Systém intervalů

$$\{(x - \frac{1}{2n}, x + \frac{1}{2n});\ x \in M_n\}$$

je proto disjunktní, a tedy spočetný dle Příkladu 1.7.21.

Tedy i množina

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$$

je spočetná podle Věty 1.7.19(c). ♣

4.4.5. Příklad. Nechť f je reálná funkce. Jestliže f není spojitá v bodě $x \in \mathbb{R}$, ale existuje její vlastní limita v x, potom říkáme, že f má v x **odstranitelnou nespojitost**. Neexistuje-li vlastní limita f v bodě x, pak říkáme, že bod x je bodem **neodstranitelné nespojitosti** funkce f. Body neodstranitelné nespojitosti klasifikujeme dále takto. Existují-li vlastní ale různé jednostranné limity v bodě x, pak říkáme, že x je bodem **nespojitosti prvního druhu**. Jestliže alespoň jedna z jednostranných limit neexistuje nebo je nevlastní, pak říkáme, že x je bodem **nespojitosti druhého druhu**.

Dokažte, že platí:

(a) Množina $\{x \in \mathbb{R};\ f$ má v x odstranitelnou nespojitost$\}$ je spočetná.
(b) Množina $\{x \in \mathbb{R};\ f$ má v x neodstranitelnou nespojitost 1. druhu$\}$ je spočetná.

Řešení. (a) Stačí dokázat, že množiny

$$O = \{x \in \mathbb{R};\ \lim_{y \to x} f(y) < f(x)\} \quad \text{a} \quad P = \{x \in \mathbb{R};\ \lim_{y \to x} f(y) < f(x)\}$$

jsou spočetné. Provedeme důkaz pouze pro množinu O, protože pro množinu P je důkaz obdobný. Pro každé $x \in O$ nalezneme $r_x \in \mathbb{Q}$ takové, že

$$\lim_{y \to x} f(y) < r_x < f(x).$$

Pak množina $O = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} O_r$, kde $O_r = \{x \in O;\ r_x = r\}$, je sjednocením spočetně mnoha množin, a tedy stačí dokázat, že každá množina O_r je spočetná. Vezměme tedy pevné $r \in \mathbb{Q}$ a pro každé $x \in O_r$ zvolme $\delta_x > 0$ splňující

$$\forall y \in P(x, \delta_x)\colon f(y) < r.$$

Systém intervalů $\mathcal{J} = \{(x - \frac{1}{2}\delta_x, x + \frac{1}{2}\delta_x);\ x \in O_r\}$ je disjunktní. Pokud totiž $x, y \in O_r, x \neq y$, a $(x - \frac{1}{2}\delta_x, x + \frac{1}{2}\delta_x) \cap (y - \frac{1}{2}\delta_y, y + \frac{1}{2}\delta_y) \neq \emptyset$ a $\delta_x \leq \delta_y$, potom $|x - y| < \frac{1}{2}\delta_x + \frac{1}{2}\delta_y \leq \delta_y$. Tedy $f(x) < r$ díky volbě δ_y a zároveň $f(x) > r_x = r$, což je spor. Systém $\mathcal{J}$ je tedy spočetný dle Příkladu 1.7.21, a proto je i množina O_r spočetná.

(b) Stačí dokázat, že množiny

$$N = \{x \in \mathbb{R};\ \lim_{y \to x_-} f(y) < \lim_{y \to x_+} f(y)\},$$
$$M = \{x \in \mathbb{R};\ \lim_{y \to x_-} f(y) > \lim_{y \to x_+} f(y)\}$$

jsou spočetné. Důkaz provedeme pouze pro množinu N. Důkaz pro M je obdobný. Pro každé $x \in N$ nalezneme $r_x \in \mathbb{Q}$ splňující

$$\lim_{y \to x_-} f(y) < r_x < \lim_{y \to x_+} f(y)$$

a rozložíme N jako $N = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} N_r$, kde $N_r = \{x \in N;\ r_x = r\}$, $r \in \mathbb{Q}$. Vezmeme nyní $r \in \mathbb{Q}$ pevné a pro každé $x \in N_r$ zvolme $\delta_x > 0$ takové, že

$$\forall y \in P_-(x, \delta_x)\colon\ f(y) < r,$$
$$\forall y \in P_+(x, \delta_x)\colon\ f(y) > r.$$

Máme-li nyní dva body $x, y \in N_r$, $x < y$, pak zjevně

$$(x, x + \delta_x) \cap (y - \delta_y, y) = \emptyset.$$

Tedy i

$$(x - \delta_x, x + \delta_x) \cap (y - \delta_y, y + \delta_y) = \emptyset.$$

Opět je tedy systém $\{(x - \delta_x, x + \delta_x);\ x \in N_r\}$ disjunktní, a proto spočetný. Tedy i množina N_r je spočetná. Odtud plyne spočetnost N. ♣

4.4.6. Příklad. Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována jako

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Pak má funkce f v každém reálném čísle bod neodstranitelné nespojitosti 2. druhu.

Řešení. Máme-li $x \in \mathbb{R}$ dáno, v každém jeho levém či pravém okolí existuje racionální i iracionální číslo. Tedy dle definice funkce f limita zprava ani zleva v bodě x neexistuje. ♣

4.4.7. Příklad. Dokažte následující variantu Heineovy věty 4.2.17:

Nechť $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $A \in \mathbb{R}^*$ a funkce f je definována na levém prstencovém okolí bodu c. Pak jsou výroky (i) a (ii) ekvivalentní.

(i) Platí $\lim_{x \to c_-} f(x) = A$.

(ii) Pro každou rostoucí posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in \mathcal{D}(f)$, $x_n < c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \to \infty} x_n = c$, platí $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

Řešení. Implikace (i) $\implies$ (ii) platí dle Heineovy věty 4.2.17. Dokažme tedy obrácenou implikaci. Předpokládejme, že f je definována na nějakém okolí $P_-(c,\eta)$. Nechť $\lim_{x\to c_-} f(x) \neq A$. Tedy platí

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \exists x \in P_-(c,\delta)\colon\ f(x) \notin B(A,\varepsilon). \tag{4.14}$$

Induktivně nyní zkonstruujme rostoucí posloupnost $\{x_n\}$ v $\mathcal{D}(f)$ konvergující k c takto: V prvním kroce položme $\delta_1 = \eta$. Dle (4.14) existuje $x_1 \in P_-(c,\delta_1)$ takové, že $f(x_1) \notin B(A,\varepsilon)$.

Předpokládejme nyní, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ máme nalezeny body $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ splňující $f(x_i) \notin B(A,\varepsilon)$, $i \in \{1,\dots,n\}$. Zvolíme $\delta_{n+1} \in (0, \frac{1}{n+1})$ takové, že $x_{n+1} \notin P_-(c,\delta_{n+1})$. Použitím (4.14) obdržíme $x_{n+1} \in P_-(c,\delta_{n+1})$ splňující $f(x_{n+1}) \notin B(A,\varepsilon)$. Zjevně pak platí $x_n < x_{n+1}$. Tím je konstrukce ukončena.

Našli jsem tak rostoucí posloupnost $\{x_n\}$ v $\mathcal{D}(f)$ takovou, že $\{f(x_n)\}$ nekonverguje k A, ale $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ (to platí díky tomu, že $x_n \in P_-(c,\frac{1}{n})$). Důkaz je tímto ukončen. ♣

4.4.8. Příklad. Ukažte, že nekonstantní periodická spojitá funkce má nejmenší kladnou periodu (tzv. *fundamentální periodu*). Najděte nekonstantní periodickou funkci bez fundamentální periody.

Řešení. Předpokládejme, že T_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou kladné periody funkce f konvergující k 0. Nechť $x \in \mathbb{R}$ je libovolné, stejně jako $\varepsilon \in (0,\infty)$. Ze spojitosti f v bodě x najdeme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall y \in B(x,\delta)\colon\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Vezměme nyní $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $T_{n_0} < \frac{\delta}{2}$. Pak alespoň jedno číslo tvaru kT_{n_0}, $k \in \mathbb{Z}$, protíná interval $x - \delta, x + \delta)$. Tedy

$$|f(x) - f(0)| = |f(x) - f(kT_{n_0})| < \varepsilon.$$

Jelikož ε bylo libovolné, platí $f(0) = f(x)$. Tedy f je konstantní.

Uvažujme nyní Dirichletovu funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Pak je každé racionální číslo periodou funkce f, a tedy f nemá fundamentální periodu. ♣

4.4.9. Příklad. Sestrojte funkci $f : [0,1] \to [0,1]$ takovou, že pro každý nedegenerovaný interval $I \subset [0,1]$ platí $f(I) = [0,1]$.

Řešení. Každé číslo $x \in [0,1]$ si vyjádříme v desetinném rozvoji jako

$$x = 0.a_1a_2a_3\dots.$$

(Pro číslo $x = 0.a_1 \dots a_n 00\dots$, kde $a_n \neq 0$, uvažujeme desetinný rozvoj tvaru $x = 0.a_1 \dots (a_n - 1)99\dots$.)

Řekneme, že x splňuje podmínku periodicity pro $n \in \mathbb{N}$, pokud číslo $0.a_1a_3a_5\dots$ je racionální a jeho desetinný rozvoj se periodicky opakuje počínaje číslem a_{2n-1}. Položme

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x \text{ nesplňuje podmínku periodicity pro žádné} n \in \mathbb{N}, \\ 0.a_{2n}a_{2n+2}a_{2n+4}, & \text{pokud } x \text{ splňuje podmínku periodicity pro } n. \end{cases}$$

Ukažme, že f má požadovanou vlastnost. Nechť tedy $I \subset [0,1]$ je nedegenerovaný interval. Vezmeme $n \in \mathbb{N}$ a cifry $a_1, \dots, a_{2n-2}$ takové, že $a_{2n-3} \notin \{0,1\}$ a

$$[0.a_1a_2\dots a_{2n-2}0, 0.a_1a_2\dots a_{2n-2}1] \subset I.$$

Nechť

$$y = 0.b_1b_2b_3\dots \in [0,1]$$

je dáno. Definujme číslo $x \in I$ pomocí dalších cifer v jeho rozvoji, konkrétně

$$a_{2n-1} = a_{2n+1} = \dots = a_{4n-5} = 0, \quad a_{4n-3} = 1$$

a nechť další liché cifry x jsou definovány opakováním této sekvence. Na sudé pozice od $2n$ počínaje položme cifry čísla y, tj.

$$x = 0.a_1a_2\dots a_{2n-1}b_1a_{2n+1}b_2a_{2n+3}\dots.$$

Pak $x \in I$, splňuje podmínku periodicity pro n, a tedy

$$f(x) = 0.b_1b_2b_3\dots.$$

♣

4.4.10. Příklad. Nalezněte spojitou funkci na $\mathbb{R}$, která není na žádném nedegenerovaném intervalu v $\mathbb{R}$ monotónní.

Řešení. Nechť $f_1(x) = |x|$ pro $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ a nechť dále f_1 je dodefinována na $\mathbb{R}$ periodicky s periodou 1. Pro $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, položíme

$$f_n(x) = 4^{-n+1} f_1(4^{n-1}x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak je f_n 4^{-n+1}-periodická spojitá funkce na $\mathbb{R}$, jejíž maximální hodnota je $\frac{1}{2}4^{-n+1}$. Nechť

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_1(4^{n-1}x)}{4^{n-1}}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.15}$$

Pak f je dobře definovaná, neboť pro každé x je suma v (4.15) absolutně konvergentní. Dále je f spojitá.

Mějme totiž $x \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ dány. Najdeme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{4^{m-1}} < \varepsilon$. Dále nechť $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ je takové, že

$$\forall i \in \{1, \dots, m-1\}\ \forall y \in B(x, \delta)\colon\ |f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\varepsilon}{m}.$$

Pak pro $y \in B(x, \delta)$ platí

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \sum_{i=1}^{m} |f_i(x) - f_i(y)| + \sum_{i=m+1}^{\infty} |f_i(x)| + |f_i(y)| \\ &\leq m\frac{\varepsilon}{m} + 2 \cdot 4^{-m+1} \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy f je spojitá v x.

Nyní ukážeme, že není na žádném nedegenerovaném intervalu monotónní. K tomuto účelu odvodíme následující fakt:

Je-li $a = k4^{-m}$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ a $h_m = 4^{-2m-1}$, pak

$$f(a + h_m) - f(a) > 0 \quad a \quad f(a - h_m) - f(a) > 0.$$

Máme-li totiž a a h_m jako výše, pak $f_n(a) = 0$ pro $n > m$. Dále platí

$$\forall n > 2m+1\colon\ f_n(a+h_m) = 0, \quad \forall n \in \{m+1, \dots, 2m+1\}\colon\ f_n(a+h_m) = h_m.$$

Nakonec si povšimneme, že

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall a, h \in \mathbb{R}\colon |f_n(a+h) - f_n(a)| \leq |h|.$$

Dohromady proto máme

$$\begin{aligned} f(a + h_m) - f(a) &= \sum_{i=1}^{n} (f_i(a + h_m) - f_i(a)) + \sum_{i=m+1}^{2m+1} f_i(a + h_m) \\ &\geq -mh_m + (m+1)h_m \\ &= h_m > 0 \end{aligned}$$

Obdobně dostaneme, že

$$f(a - h_m) - f(a) \geq h_m > 0.$$

Mějme nyní libovolný nedegenerovaný interval $I \subset \mathbb{R}$. Protože čísla tvaru $\{k4^{-m};\ k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}$ protínají každý otevřený interval, lze vybrat $k \in \mathbb{Z}$ a $m \in \mathbb{N}$ takové, že pro a a h_m jako výše máme $a, a + h_m, a - h_m \in I$. Z přecházejících výpočtů pak máme

$$f(a - h_m) > f(a), \quad f(a + h_m) > f(a).$$

Funkce f proto není monotónní na I. ♣

4.4.11. Příklad. Nechť $D \subset \mathbb{R}$ je spočetná množina. Najděte neklesající funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takovou, že její množina bodů nespojitosti je právě D.

Řešení. Očíslujeme množinu D jako $D = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ a pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_n \\ 1, & x \geq x_n. \end{cases}$$

Definujme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jako

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x).$$

Zjevně je f dobře definovaná (pro každé $x \in \mathbb{R}$ je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x)$ absolutně konvergentní) a neklesající (neboť všechny funkce f_n jsou neklesající). Ukažme, že f je spojitá v každém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus D$. Pro takovéto x a dané $\varepsilon \in (0, \infty)$ najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon$. Dále najdeme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro $y \in B(x, \delta)$ a $n \in \{1, \dots, n_0\}$ platí

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$$

(všechny funkce f_n jsou spojité v x). Pak pro $y \in B(x, \delta)$ máme

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(y)| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(y)| \\ &\leq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} \varepsilon + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} 2 \\ &\leq \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy f je spojitá v x.

Na druhou stranu, nechť $m \in \mathbb{N}$ je pevné. Ukážeme, že f není spojitá v x_m. Všimneme si, že funkce $\sum_{n \neq m} \frac{1}{2^n} f_n$ je též neklesající, a tedy má jednostranné limity ve všech bodech $\mathbb{R}$. Proto platí

$$\begin{aligned}\lim_{x\to(x_m)_-} f(x) &= \lim_{x\to(x_m)_-} \frac{1}{2^m} f_m(x) + \lim_{x\to(x_m)_-} \sum_{n\neq m} \frac{1}{2^n} f_n(x)\\ &= 0 + \lim_{x\to(x_m)_-} \sum_{n\neq m} \frac{1}{2^n} f_n(x)\\ &\leq \sum_{n\neq m} \frac{1}{2^n} f_n(x_m)\\ &< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x_m)\\ &= f(x_m).\end{aligned}$$

Tedy f není spojitá v x_m. ♣

4.4.12. Příklad. Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou funkce spojité v bodě a. Ukažte, že funkce

$$|f|(x) = |f(x)|, \quad \max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{a}$$
$$\min\{f, g\} = \min\{f(x), g(x)\},$$

kde $x \in \mathbb{R}$, jsou též spojité v a.

Řešení. Vzhledem k tomu, že $|f(x)| = \sqrt{(f(x))^2}$, $x \in \mathbb{R}$, je $|f|$ spojitá v a podle Příkladů 4.2.6 a **??**.

Dále platí

$$\begin{aligned}\max\{f(x), g(x)\} &= \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} \quad \text{a}\\ \min\{f(x), g(x)\} &= \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2},\end{aligned}$$

z čehož použitím první části důkazu plnou požadovaná tvrzení. ♣

4.4.13. Příklad. Nechť $a, A \in \mathbb{R}^*$ a f je reálná funkce splňující $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(i) Platí $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{x} = A$.
(ii) Platí $\lim_{x\to a} \frac{\sin f(x)}{x} = A$.

Řešení. (i) $\implies$ (ii) Nechť $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{x} = A$. Předpokládejme nejprve, že $A \neq 0$. Pak existuje okolí $P(a, \eta)$ takové, že $f(x) \neq 0$ pro $x \in P(a, \eta)$. Z věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.20) a Věty 4.2.2 pak dostáváme

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin f(x)}{x} = \lim_{x\to a} \left(\frac{\sin f(x)}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x} \right) = A.$$

Nechť nyní $A = 0$. Pro dané $\varepsilon \in (0, \infty)$ nalezneme $\delta \in (0, \infty)$ takové, že pro $y \in P(0, \delta)$ platí $\left|\frac{\sin y}{y}\right| < 2$. Nechť $\eta \in (0, \infty)$ je takové, že pro $x \in P(a, \eta)$ platí $|f(x)| < \delta$ a $\left|\frac{f(x)}{x}\right| < \varepsilon$. Pak pro $x \in P(a, \eta)$ máme

$$\left|\frac{\sin f(x)}{x}\right| = \begin{cases} \left|\frac{\sin f(x)}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x}\right|, & f(x) \neq 0, \\ 0, & f(x) = 0. \end{cases}$$

Protože pro $x \in P(a, \eta)$ splňující $f(x) \neq 0$ platí $f(x) \in P(0, \delta)$, dostáváme

$$\left|\frac{\sin f(x)}{x}\right| < 2\varepsilon.$$

Ukázali jsem tedy i v tomto případě, že $\lim_{x\to a} \frac{\sin f(x)}{x} = A$.

(ii) $\implies$ (i) Nechť $\lim_{x\to a} \frac{\sin f(x)}{x} = A$ a $A \neq 0$. Pak existuje okolí $P(a, \eta)$ takové, že $f(x) \neq 0$ pro $x \in P(a, \eta)$. (V opačném případě by totiž existovala posloupnost $\{x_n\}$ splňující $\lim x_n = a$, $f(x_n) = 0$ a $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Z Věty 4.2.16 pak plyne

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{\sin f(x_n)}{x_n} = A,$$

což by byl spor.) Můžeme tedy použít Větu 4.2.20 k odvození rovnosti

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to a} \left(\frac{\sin f(x)}{x} \cdot \frac{f(x)}{\sin f(x)}\right) = A.$$

Je-li $A = 0$, pro dané $\varepsilon \in (0, \infty)$ nalezneme $\delta \in (0, \frac{\pi}{4})$ splňující $\left|\frac{y}{\sin y}\right| < 2$ pro $y \in P(0, \delta)$. Nechť $\eta \in (0, \infty)$ je zvoleno tak, že pro $x \in P(a, \eta)$ platí $\left|\frac{\sin f(x)}{x}\right| < \varepsilon$ a $|f(x)| < \delta$. Pak pro $x \in P(a, \eta)$ platí, že $f(x) = 0$ právě tehdy, když $\sin f(x) = 0$. Máme tedy

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| = \begin{cases} \left|\frac{\sin f(x)}{x} \cdot \frac{f(x)}{\sin f(x)}\right|, & f(x) \neq 0, \\ 0, & f(x) = 0, \end{cases} \qquad x \in P(a, \eta).$$

Jelikož pro $x \in P(a, \eta)$ splňující $f(x) \neq 0$ platí $f(x) \in P(0, \delta)$, dostáváme

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| < 2\varepsilon.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ♣

4.5. Početní příklady k limitě funkce

4.5.1. Příklad. Nechť

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Spočítejte limity

$$\lim_{x \to 0} f(x) \quad \text{a} \quad \lim_{x \to 1} f(x).$$

Řešení. Z Příkladu 4.2.6 víme, že funkce $x^2 + 2x - 3$ i $x^2 - 1$ jsou spojité, a proto

$$\lim_{x \to 0} x^2 + 2x - 3 = -3, \quad \lim_{x \to 0} x^2 - 1 = -1.$$

Z Věty o aritmetice limit funkcí 4.2.2 dostáváme

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{\lim_{x \to 0}(x^2 + 2x - 3)}{\lim_{x \to 0}(x^2 - 1)} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

Při výpočtu druhé limity takto postupovat nemůžeme, neboť

$$\lim_{x \to 1} x^2 + 2x - 3 = 0, \quad \lim_{x \to 1} x^2 - 1 = 0.$$

Jelikož výraz $\frac{0}{0}$ není definovaný, nelze použít přímočaře Větu 4.2.2. Označme však

$$g(x) = \frac{x + 3}{x + 1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Pak

$$f(x) = \frac{(x - 1)(x + 3)}{(x - 1)(x + 1)} = g(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Speciálně tedy platí, že

$$f(x) = g(x), \quad x \in P(1, 2).$$

Proto

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} g(x),$$

pokud jedna strana existuje. Poslední limitu ale snadno spočteme pomocí metody popsané v první část výpočtu. Tedy

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x + 3}{x + 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

♣

4.5.2. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}.$$

Řešení. Vezměme nejprve $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, pevné a vyjádřeme funkci $x^n - 2x + 1$ jako

$$\begin{aligned} x^n - 2x + 1 &= (x^n - x) - (x - 1) = x(x^{n-1} - 1) - (x - 1) \\ &= x(x-1)(x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1) - (x - 1) \\ &= (x - 1)\left(x(x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1) - 1\right). \end{aligned}$$

Tedy dostáváme postupem podobným jako v Příkladu 4.5.1 výpočet

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(x(x^{98} + x^{97} + \cdots + x + 1) - 1\right)}{(x-1)\left(x(x^{48} + x^{47} + \cdots + x + 1) - 1\right)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{\left(x(x^{98} + x^{97} + \cdots + x + 1) - 1\right)}{\left(x(x^{48} + x^{47} + \cdots + x + 1) - 1\right)} \\ &= \frac{99 - 1}{49 - 1} = \frac{49}{24}. \end{aligned}$$

♣

4.5.3. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$$

Řešení. Zajímá nás chování polynomů v zadané limitě pro x jdoucí do nekonečna. V čitateli i jmenovateli máme polynom 50 stupně, u něhož je v nekonečnu převládající člen x^{50}. Rozšíříme tedy zlomek v limitě výrazem $\frac{1}{x^{50}}$ a dostaneme

$$\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \frac{(2 - \frac{3}{x})^{20}(3 + \frac{2}{x})^{30}}{(2 + \frac{1}{x})^{50}}.$$

Podle Příkladu 4.1.10 platí $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. Tedy z Věty o aritmetice limit funkcí 4.2.2 máme

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} 2 - \frac{3}{x} &= 2, \\ \lim_{x\to\infty} 3 + \frac{2}{x} &= 3, \\ \lim_{x\to\infty} 2 + \frac{1}{x} &= 2. \end{aligned}$$

Dále je funkce $y \mapsto y^n$, $y \in \mathbb{R}$, spojitá na $\mathbb{R}$ (viz Příklad 4.2.6), a tedy máme opět z Věty 4.2.2

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2-\frac{3}{x})^{20}(3+\frac{2}{x})^{30}}{(2+\frac{1}{x})^{50}} = \frac{2^{20}3^{30}}{2^{50}}.$$

♣

4.5.4. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Spočítejte limitu

$$\lim_{x\to 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x-1}.$$

Řešení. Vyjádříme

$$\begin{aligned}\frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x-1} &= \frac{(x-1) + (x^2-1) + \cdots + (x^n-1)}{x-1} \\ &= \frac{x-1}{x-1} + \frac{x^2-1}{x-1} + \cdots + \frac{x^n-1}{x-1}.\end{aligned}$$

Pro každé $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ platí

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^j-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^{j-1} + x^{j-2} + \cdots + 1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1} (x^{j-1} + x^{j-2} + \cdots + 1) = j.\end{aligned}$$

Z Věty 4.2.2 tady máme

$$\lim_{x\to 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x-1} = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1),$$

přičemž poslední rovnost plyne z Příkladu 1.9.5 pro $a = 1$ a $b = 0$. ♣

4.5.5. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2},$$

kde $n, m \in \mathbb{N}$.

Řešení. Čitatel zadané funkce vyjádříme jako

$$\begin{aligned}(1+mx)^n - (1+nx)^m = &\left(1 + \binom{n}{1}(mx) + \binom{n}{2}(mx)^2 + \cdots + \binom{n}{n}(mx)^n\right) \\ &- \left(1 + \binom{m}{1}(nx) + \binom{m}{2}(nx)^2 + \cdots + \binom{m}{m}(nx)^m\right).\end{aligned}$$

Protože

$$\binom{n}{1}m = nm = mn = \binom{m}{1}n,$$

máme

$$\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}=\left(\binom{n}{2}m^2-\binom{m}{2}n^2\right)+P(x),$$

kde $P(x)$ je polynom bez absolutního členu. Z Věty 4.2.2 a Příkladu 4.2.6 tedy dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\left(\left(\binom{n}{2}m^2-\binom{m}{2}n^2\right)+P(x)\right)\\&=\binom{n}{2}m^2-\binom{m}{2}n^2+P(0)\\&=\binom{n}{2}m^2-\binom{m}{2}n^2.\end{aligned}$$

♣

4.5.6. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right),$$

kde $m,n\in\mathbb{N}$.

Řešení. Racionální funkci v zadané limitě upravíme na

$$\begin{aligned}\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}&=\frac{m(1-x^n)-n(1-x^m)}{(1-x)^2(1+\cdots+x^{m-1})(1+\cdots+x^{n-1})}\\&=\frac{m(1+\cdots+x^{n-1})-n(1+\cdots+x^{m-1})}{(1-x)(1+\cdots+x^{m-1})(1+\cdots+x^{n-1})}\\&=\frac{m(1+\cdots+x^{n-1}-n)-n(1+\cdots+x^{m-1}-m)}{(1-x)(1+\cdots+x^{m-1})(1+\cdots+x^{n-1})}.\end{aligned}\tag{4.16}$$

Dále máme

$$\begin{aligned}&m(1+\cdots+x^{n-1}-n)-n(1+\cdots+x^{m-1}-m)\\&=m\sum_{j=1}^{n-1}(x^j-1)-n\sum_{j=1}^{m-1}(x^j-1)\\&=(x-1)\left(m\sum_{j=1}^{n-1}(x^{j-1}+\cdots+1)-m\sum_{j=1}^{m-1}(x^{j-1}+\cdots+1)\right).\end{aligned}\tag{4.17}$$

Z (4.17) tedy máme

$$\begin{aligned}
&\frac{m(1+\cdots+x^{n-1}-n)-n(1+\cdots+x^{m-1}-m)}{1-x}\\
&=-\left(m\sum_{j=1}^{n-1}(x^{j-1}+\cdots+1)-m\sum_{j=1}^{m-1}(x^{j-1}+\cdots+1)\right).
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Pomocí (4.18) dostáváme z (4.16) díky Větě 4.2.2 závěr

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)&=\lim_{x\to 1}-\frac{m\sum_{j=1}^{n-1}(x^{j-1}+\cdots+1)-n\sum_{j=1}^{m-1}(x^{j-1}+\cdots+1)}{(1+\cdots+x^{m-1})(1+\cdots+x^{n-1})}\\
&=-\frac{m\sum_{j=1}^{n-1}j-n\sum_{j=1}^{m-1}j}{mn}\\
&=-\frac{\frac{1}{2}m(n-1)n-\frac{1}{2}n(m-1)m}{mn}\\
&=\frac{1}{2}(m-n).
\end{aligned}$$

♣

4.5.7. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}.$$

Řešení. Úpravou dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}&=\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}\,\frac{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}\\
&=\frac{(x+13)-4(x+1)}{x^2-9}\,\frac{1}{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}\\
&=\frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)}\,\frac{1}{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}.
\end{aligned}$$

Funkce

$$g(x)=\frac{-3}{x+3}\,\frac{1}{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}},\qquad x\in(2,\infty),$$

je spojitá na intervalu $I=(2,\infty)$ z následujících důvodů. Funkce $x\mapsto x+13$, $x\mapsto x+1$ jsou spojité na I dle Příkladu 4.2.6. Vzhledem k Příkladu **??** a Větě 4.3.3 jsou i funkce $x\mapsto\sqrt{x+13}$, $x\mapsto\sqrt{x+1}$ spojité na I. Dále jsou funkce $x\mapsto x+3$, $x\mapsto\sqrt{x+13}$, $x\mapsto\sqrt{x+1}$ nenulové na I, a tedy je g, jakožto výsledek algebraických operací provedených na tyto funkce, spojitá na I dle Věty 4.2.5.

Proto máme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} &= \lim_{x\to 3}\frac{-3}{x+3}\frac{1}{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}\\ &= \frac{-3}{6}\frac{1}{\sqrt{16}+2\sqrt{4}}\\ &= \frac{-1}{16}.\end{aligned}$$

♣

4.5.8. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}.$$

Řešení. Úpravou dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} &= \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\\ &\quad\cdot\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}\\ &= \frac{1+x-(1-x)}{1+x-(1-x)}\cdot\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\\ &= \frac{(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}.\end{aligned}$$

Z Věty 4.2.2 a Příkladu **??** máme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}=\frac{3}{2}.$$

♣

4.5.9. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2},$$

Řešení. Upravme nejprve výraz v čitateli zadané funkce. Použijeme vzorec pro a^6-b^6, kde $a=\sqrt{x+2}$ a $b=\sqrt[3]{x+20}$. Označíme-li

$$g(x)=a^5+a^4b+\cdots+ab^4+b^5,$$

pak

$$\lim_{x\to 7} g(x) = 6\cdot 3^5 \tag{4.19}$$

a

$$\begin{aligned}\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20} &= \frac{(\sqrt{x+2})^6-(\sqrt[3]{x+20})^6}{g(x)}\\ &= \frac{(x+2)^3-(x+20)^2}{g(x)}\\ &= \frac{x^3+5x^2-28x-392}{g(x)}.\end{aligned}$$

Polynom $x^3+5x^2-28x-392$ má číslo 7 za kořen, a tedy ho lze vyjádřit ve tvaru $(x-7)P(x)$, kde $P(x)$ je polynom druhého stupně. Standardním algoritmem Příkladu **??** dostaneme

$$x^3+5x^2-28x-392 = (x-7)(x^2+12x+56). \tag{4.20}$$

Jmenovatele $\sqrt[4]{x+9}-2$ upravíme pomocí vzorce a^4-b^4 na

$$\sqrt[4]{x+9}-2 = \frac{(x+9)-2^4}{h(x)} = \frac{x-7}{h(x)},$$

kde $a=\sqrt[4]{x+9}$, $b=2$ a

$$h(x) = a^3+a^2b+ab^2+b^3.$$

Pak

$$\lim_{x\to 7} h(x) = 4\cdot 2^3. \tag{4.21}$$

Kombinací (4.19), (4.20) a (4.21) dostaneme pomocí Věty 4.2.2 závěr

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2} &= \lim_{x\to 7}\frac{(x-7)(x^2+12x+56)}{g(x)}\cdot\frac{h(x)}{x-7}\\ &= \frac{(7^2+12\cdot 7+56)(4\cdot 2^3)}{6\cdot 3^5}\\ &= \frac{189\cdot 4\cdot 2^3}{6\cdot 3^5}.\end{aligned}$$

♣

4.5.10. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}.$$

Řešení. Označme $a = \sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}$ a $b = \sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}$. Pak

$$\begin{aligned}
a-b &= \frac{a^{12}-b^{12}}{\sum_{j=0}^{11} a^{11-j}b^j} = \frac{(1+\frac{x}{3})^4-(1+\frac{x}{4})^3}{\sum_{j=0}^{11} a^{11-j}b^j} \\
&= \frac{1}{\sum_{j=0}^{11} a^{11-j}b^j}\left(\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\left(\frac{x}{3}\right)^k - \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k\right) \\
&= \frac{1}{\sum_{j=0}^{11} a^{11-j}b^j}\left(x\left(\binom{4}{1}-\binom{3}{1}\right)+x^2P(x)\right),
\end{aligned}$$

kde $P(x)$ je polynom druhého stupně. Dále

$$1-\sqrt{1-\frac{x}{2}} = \frac{1-(1-\frac{x}{2})}{1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}} = \frac{1}{2}\frac{x}{1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}}.$$

Tedy

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}} &= \frac{1}{\sum_{j=0}^{11}(\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}})^{11-j}(\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}})^j} \\
&\quad\cdot\left(x\left(\binom{4}{1}-\binom{3}{1}\right)+x^2P(x)\right)\cdot\frac{2\left(1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right)}{x}.
\end{aligned}$$

Z Věty o aritmetice limit funkcí 4.2.2 a spojitosti odmocniny (Příklad ??) dostáváme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}} = \frac{2\cdot 2\left(\binom{4}{1}-\binom{3}{1}\right)}{12} = \frac{1}{3}.$$

♣

4.5.11. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}.$$

Řešení. Odhadneme, že převládající výraz čitatele i jmenovatele zadané funkce je $\sqrt{x}$. Proto provedeme úpravu

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\,\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}$$
$$= \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}.$$

Nyní již snadno odvodíme pomocí Věty 4.2.2 a Příkladu **??**, že

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} = 1.$$

♣

4.5.12. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right).$$

Řešení. Postupně upravíme výraz $\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ na

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x} &= \frac{x+2-(x+1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} + \frac{x-(x+1)}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\\
&= \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}\\
&= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}\\
&= \frac{-2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})}.
\end{aligned}$$

Proto

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}\big(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\big)\\
&\quad=\frac{-2}{(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}})(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}})(1+\sqrt{1+\frac{2}{x}})}\\
&\quad=\frac{-2}{2\cdot 2\cdot 2}=-\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

♣

4.5.13. Příklad. Nechť reálná čísla $a, b \in \mathbb{R}$ splňují

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x+1}-ax-b=0.$$

Najděte a a b.

Řešení. Všimněme si, že $\lim_{x\to-\infty} x^2-x+1=\infty$, tedy je funkce $\sqrt{x^2-x+1}$ dobře definovaná na nějakém okolí $P_+(-\infty,\delta)$. Uvažujme v dalším tuto funkci na $P_+(-\infty,\delta)$. Dle předpokladu máme

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2-x+1}-ax-b}{x}+a+\frac{b}{x}\right)=a.$$

Jelikož $x=-\sqrt{x^2}$ pro x záporné, dostáváme

$$\begin{aligned}
a&=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2}}\\
&=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=-1.
\end{aligned}$$

Dále platí z předpokladu

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x+1}-ax=\lim_{x\to-\infty}\Big(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\Big)+b=b,$$

tedy

$$\begin{aligned}
b&=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x+1}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}-x}\\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{-1-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

♣

4.5.14. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{[\sqrt{x^2+5}]+x}{\sqrt{x^2+1}+[3x]}.$$

Řešení. Protože $[x] \leq x < [x]+1$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, dostáváme odhady

$$\frac{\sqrt{x^2+5}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+3x} \leq \frac{[\sqrt{x^2+5}]+x}{\sqrt{x^2+1}+[3x]} \leq \frac{\sqrt{x^2+5}+x}{\sqrt{x^2+1}+3x-1} \tag{4.22}$$

platné pro každé reálné číslo $x > 1$. Označme pro $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+3x} \quad \text{a} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}+x}{\sqrt{x^2+1}+3x-1}.$$

Pak

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+3} = \frac{1}{2} \tag{4.23}$$

a

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+3-\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}. \tag{4.24}$$

Označíme-li

$$h(x) = \frac{[\sqrt{x^2+5}]+x}{\sqrt{x^2+1}+[3x]}, \quad x \in (1,\infty),$$

dostáváme z (4.22) nerovnosti

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \quad x \in (1,\infty).$$

Díky Větě 4.2.9(c) tak z (4.23) a (4.24) plyne

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \frac{1}{2}.$$

♣

4.5.15. Příklad. Ukažte, že

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x(\sin x - 1)}{\sqrt{x^2+1}}$$

neexistuje.

Řešení. Předpokládejme, že $A \in \mathbb{R}^*$ je rovno $\lim_{x\to\infty} \frac{x(\sin x-1)}{\sqrt{x^2+1}}$. Označme $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1.$$

Uvažujme pro $n \in \mathbb{N}$ body

$$x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad y_n = 2\pi n.$$

Pak $\{x_n\}$,$\{y_n\}$ jsou posloupnosti v definičním oboru funkce $\frac{x(\sin x-1)}{\sqrt{x^2+1}}$ konvergující k ∞, a proto z Heineovy věty 4.2.17 plyne

$$A = \lim_{n\to\infty} f(x_n)(\sin x_n - 1) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

a

$$A = \lim_{n\to\infty} f(y_n)(\sin y_n - 1) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)(-1) = -1.$$

To je ale zřejmý spor, takže $\lim_{x\to\infty} \frac{x(\sin x-1)}{\sqrt{x^2+1}}$ neexistuje. ♣

KAPITOLA 5

Derivace a elementární funkce

Derivace reálné funkce jedné reálné proměnné je po pojmech limity posloupnosti a limity funkce dalším klíčovým pojmem matematické analýzy, který má široké uplatnění v matematických modelech problémů přírodních věd. V této kapitole odvodíme základní vlastnosti pojmu derivace a s jejich pomocí zavedeme základní (elementární) funkce, jako jsou exponenciální funkce, logaritmus, goniometrické funkce, cyklometrické funkce a další. Rozšíření našich poznatků o pojem derivace nám v závěru kapitoly umožní zkoumat některé hlubší důležité vlastnosti reálných funkcí a také studovat a popsat takzvaný průběh funkce. V příkladové části kapitoly se mimo jiné vrátíme k náročnějším úlohám nalezení limity posloupnosti či funkce pomocí nově osvojených technik založených na derivaci funkce a jejích aplikacích.

5.1. Základní vlastnosti derivace

5.1.1. Definice. Nechť $a \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Jestliže existuje limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \tag{5.1}$$

pak tuto limitu nazýváme **derivací funkce** f **v bodě** a a značíme ji $f'(a)$. Obdobně definujeme **derivaci zprava** a **derivaci zleva funkce** f **v bodě** a předpisy

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{a} \quad f'_-(a) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Derivaci zleva a derivaci zprava často souhrnně nazýváme **jednostrannými derivacemi**.

5.1.2. Poznámka. Při počítání derivace funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ mohou nastat tyto případy:

$$\text{derivace v bodě } a \begin{cases} \text{neexistuje,} \\ \text{existuje a je} \begin{cases} \textbf{vlastní}\text{, tj. je rovna reálnému číslu,} \\ \textbf{nevlastní}\text{, tj. je rovna } +\infty \text{ nebo } -\infty. \end{cases} \end{cases}$$

5.1.3. Věta (jednoznačnost derivace)**.** Jestliže existuje derivace funkce f v bodě a (vlastní či nevlastní), pak je určena jednoznačně.

Důkaz. Tvrzení bezprostředně vyplývá z definice derivace a Věty 4.1.5 o jednoznačnosti limity funkce. ■

Pro výpočet derivace funkce v bodě je často výhodné použít místo vzorce (5.1) jiný vzorec, který uvedeme v následující větě.

5.1.4. Věta (alternativní vzorec pro výpočet derivace)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Potom platí

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

má-li alespoň jedna ze stran rovnosti smysl. Obdobně platí

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a_+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

a

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a_-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

vždy má-li alespoň jedna ze stran rovnosti smysl.

Důkaz. Předpokládejme, že existuje $f'(a)$. Označme

$$F(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

pro h z nějakého okolí nuly a

$$g(x) = x - a$$

pro x z nějakého okolí bodu a. Potom platí

$$\lim_{h \to 0} F(h) = f'(a) \quad \text{a} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0.$$

Navíc je funkce g na okolí bodu a ryze monotónní, a tedy prostá, takže pro každé $x \neq a$ platí $g(x) \neq 0$. To znamená, že je splněna podmínka (P) věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.20), a tedy podle této věty dostáváme

$$\lim_{x \to a} F(g(x)) = f'(a).$$

Protože $F(g(x)) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, plyne odtud

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Obráceně, předpokládejme, že existuje $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Označme tuto limitu symbolem L. Položme

$$F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

pro x z nějakého okolí bodu a a

$$g(h) = h + a$$

pro h z nějakého okolí nuly. Potom platí

$$\lim_{h\to 0} g(h) = a \quad \text{a} \quad \lim_{x\to a} F(x) = L.$$

Navíc je funkce g na okolí bodu 0 ryze monotónní, a tedy prostá, takže pro každé $h \neq 0$ platí $g(h) \neq a$. Tudíž je opět splněna podmínka (P) věty o limitě složené funkce, a tedy

$$\lim_{h\to 0} F(g(h)) = L.$$

Protože $F(g(h)) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, plyne odtud

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = L,$$

tedy

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Tím je dokázáno tvrzení pro $f'(a)$. Tvrzení týkající se $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$ lze dokázat obdobně. ■

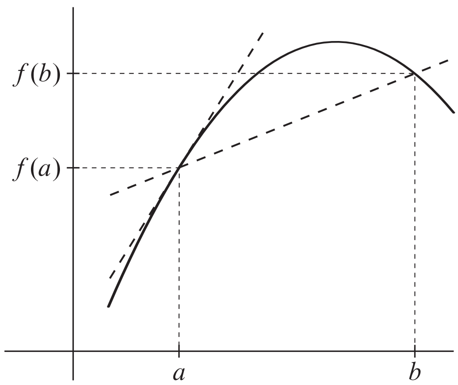
5.1.5. Věta (vztah derivace a jednostranných derivací)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Potom $f'(a)$ existuje právě tehdy, když existují $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$ a platí $f'_+(a) = f'_-(a)$. Navíc potom platí $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$.

Důkaz. Tvrzení bezprostředně plyne z definice derivace, definice jednostranných derivací a Věty 4.1.15. ■

5.1.6. Poznámky. (a) Z existence $f'(a)$ (vlastní nebo nevlastní) plyne, že existuje okolí bodu a, na němž je funkce f definovaná. Podobně existence $f'_+(a)$ (opět vlastní nebo nevlastní) zaručuje existenci $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, splňujícího $B_+(a, \delta) \subset \mathcal{D}(f)$. Obdobné tvrzení platí pro derivaci zleva.

(b) Derivace reálné funkce v bodě je „lokální pojem“. To znamená, že jestliže se funkce f a g shodují na nějakém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ a existuje $f'(a)$, pak existuje i $g'(a)$ a platí $f'(a) = g'(a)$.

5.1.7. Geometricky lze pojem derivace interpretovat následujícím způsobem.



Obrázek 1.

Podíl $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ je směrnicí sečny grafu funkce, tj. přímky, která prochází body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$. Přibližujeme-li bod b k bodu a, pak se tato přímka přibližuje k přímce procházející bodem $[a, f(a)]$ se směrnicí $f'(a)$ (pokud $f'(a)$ existuje vlastní).

5.1.8. Definice. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje vlastní $f'(a)$, pak **tečnou ke grafu funkce** f **v bodě** a nazýváme afinní funkci

$$x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a), \quad x \in \mathbb{R}.$$

5.1.9. Poznámka. Má-li funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ na množině $M \subset \mathbb{R}$ vlastní derivaci v každém bodě $x \in M$, pak zobrazení $f'\colon M \to \mathbb{R}$, které přiřadí bodu $x \in M$ hodnotu $f'(x)$, je reálnou funkcí definovanou na množině M.

5.1.10. Definice. Nechť f je reálná funkce. Potom **definičním oborem funkce** f' budeme rozumět množinu všech $x \in \mathcal{D}(f)$, pro která existuje vlastní $f'(x)$.

5.1.11. Příklad. Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí $f'(a) = 0$.

Řešení. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Podle Věty 5.1.4 platí

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{c-c}{x-a} = \lim_{x\to a} 0 = 0.$$

♣

5.1.12. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí $f'(a) = na^{n-1}$.

Řešení. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Pak podle Příkladu 1.6.5 a Věty 5.1.4 platí

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{x - a}{x - a}\left(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}\right) \\ &= \lim_{x\to a}\left(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}\right) = na^{n-1}. \end{aligned}$$

Poslední rovnost plyne z věty o aritmetice limit funkcí (Věta 4.2.2) a ze spojitosti mocninných funkcí (Příklad 4.2.6). ♣

5.1.13. Příklad. Nechť $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že derivace funkce f v bodě 0 neexistuje, existují však jednostranné derivace funkce f v bodě 0 a platí $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(0) = -1$.

Řešení. Podle definice jednostranných derivací máme

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{x} = 1, \\ f'_-(0) &= \lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x}{x} = -1. \end{aligned}$$

Protože se jednostranné derivace funkce f v bodě 0 nerovnají, vyplývá z Věty 5.1.5, že $f'(0)$ neexistuje. ♣

Na následujícím příkladu ilustrujeme důležitý poznatek, že reálná funkce může mít derivaci v bodě, ve kterém není spojitá.

5.1.14. Příklad. Nechť $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že $f'(0) = \infty$.

Řešení. Podle Věty 5.1.4 máme

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty, \\ f'_-(0) &= \lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-1}{x} = \infty. \end{aligned}$$

Z Věty 5.1.5 tedy vyplývá, že $f'(0) = \infty$. ♣

Ukázali jsme, že existence (nevlastní) derivace funkce f v bodě a nezaručuje její spojitost v a. Jestliže však má f *vlastní* derivaci v a, pak je již v tomto bodě spojitá.

5.1.15. Věta (vztah derivace a spojitosti)**.** Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Potom je f v bodě a spojitá.

Důkaz. Podle Věty 5.1.4 a věty o aritmetice limit pro funkce (Věta 4.2.2) platí

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) = f'(a)\cdot 0 = 0,$$

neboť $f'(a)$ existuje vlastní. Tedy

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

neboli f je v bodě a spojitá. ∎

5.1.16. Poznámka. Tvrzení obdobné Větě 5.1.15 platí i pro jednostranné derivace. Přesněji: existuje-li vlastní $f'_+(a)$, pak funkce f je spojitá zprava v bodě a a existuje-li vlastní $f'_-(a)$, pak funkce f je spojitá zleva v bodě a.

5.1.17. Věta (aritmetika derivací)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$ a funkce f a g jsou definované na nějakém okolí bodu a. Nechť existují $f'(a) \in \mathbb{R}^*$ a $g'(a) \in \mathbb{R}^*$.

(a) Pak platí
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$
je-li výraz na pravé straně definován.

(b) Je-li alespoň jedna z funkcí f, g spojitá v bodě a, pak
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$
je-li výraz na pravé straně definován.

(c) Je-li funkce g spojitá v bodě a a navíc $g(a) \neq 0$, pak
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2},$$
je-li výraz na pravé straně definován.

Důkaz. (a) Je-li výraz $f'(a) + g'(a)$ definován, pak podle definice derivace a věty o aritmetice limit pro funkce (Věta 4.2.2) máme

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(f(a+h) + g(a+h) - f(a) - g(a)\big)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(f(a+h) - f(a)\big) + \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(g(a+h) - g(a)\big)\\ &= f'(a) + g'(a).\end{aligned}$$

(b) Předpokládejme, že je výraz $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ definován. Dále předpokládejme například, že funkce g je spojitá v bodě a. Potom

$$\lim_{h\to 0}(g(a+h) - g(a)) = 0.$$

Díky této rovnosti dostaneme pomocí definice derivace a věty o aritmetice limit pro funkce

$$
\begin{aligned}
(fg)'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)\big)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)+f(a)g(a+h)-f(a)g(a)\big)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big((f(a+h)-f(a))g(a+h)+f(a)(g(a+h)-g(a))\big)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big((f(a+h)-f(a))g(a+h)\big)+\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(f(a)(g(a+h)-g(a))\big)\\
&= f'(a)g(a)+f(a)g'(a).
\end{aligned}
$$

(c) Nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že funkce g je na okolí $B(a,\delta)$ nenulová. Pak pro $x \in B(a,\delta)$ můžeme psát

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)} &= \frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{g(x)g(a)}\\
&= \frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(x)}{g(x)g(a)}\\
&= \frac{1}{g(x)g(a)}\big((f(x)-f(a))\,g(a)-f(a)\,(g(x)-g(a))\big).
\end{aligned}
$$

Potom podle Věty 5.1.4 dostáváme

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}\right)\\
&= \lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)g(a)}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a)-f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)\\
&= \lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)g(a)}\left(\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a)-\lim_{x\to a}f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)\\
&= \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}.
\end{aligned}
$$

Ve výpočtu jsme využili větu o aritmetice limit pro funkce a vztah

$$\lim_{x\to a} g(x) = g(a),$$

který vyplývá ze spojitosti funkce g v bodě a. ■

5.1.18. Poznámka. Tvrzení Věty 5.1.17 platí obdobně i pro jednostranné derivace.

5.1.19. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ a $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n a^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Vzorec plyne z Příkladů 5.1.11, 5.1.12 a Věty 5.1.17(a). ♣

Na následujících příkladech ukážeme, že předpoklady Věty 5.1.17 jsou podstatné a není možné je vynechat.

5.1.20. Příklad. Definujeme funkce f a g proměnné $x \in \mathbb{R}$ předpisy

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ -\frac{3}{4}, & x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -\operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že $f'(0)$ a $g'(0)$ existují, ale $(f+g)'(0)$ neexistuje.

Řešení. Obdobně jako v Příkladu 5.1.14 spočteme, že $f'(0) = \infty$ a $g'(0) = -\infty$. Dále platí

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ -\frac{1}{4}, & x = 0. \end{cases}$$

Opět snadno vypočítáme, že $(f+g)'_+(0) = \infty$ a $(f+g)'_-(0) = -\infty$. Tedy podle Věty 5.1.5 $(f+g)'(0)$ neexistuje. ♣

Předcházející příklad ukazuje, že z existence derivací funkcí f a g v bodě a obecně neplyne existence derivace funkce $f+g$ v bodě a. Funkce uvedené v tomto příkladu ovšem nesplňují podmínku Věty 5.1.17(a), totiž že výraz $f'(a) + g'(a)$ má mít smysl.

Následující příklad ilustruje důležitost předpokladu spojitosti alespoň jedné z uvažovaných funkcí ve Větě 5.1.17(b).

5.1.21. Příklad. Nechť funkce f a g jsou definovány stejně jako v Příkladu 5.1.20. Dokažte, že výraz $f'(0)g(0) + f(0)g'(0)$ má smysl, ale přesto $(fg)'(0)$ neexistuje.

Řešení. Vynásobíme-li funkce f a g, dostaneme

$$(fg)(x) = \begin{cases} -1, & x \neq 0, \\ -\frac{3}{8}, & x = 0. \end{cases}$$

Podobně jako v Příkladu 5.1.20 odvodíme, že derivace $(fg)'(0)$ neexistuje. Výraz $f'(0)g(0) + f(0)g'(0)$ však smysl má, protože

$$f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = \infty \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot (-\infty) = \infty.$$

♣

Také ve Větě 5.1.17(c) je předpoklad spojitosti funkce g podstatný, jak ukazuje následující příklad.

5.1.22. Příklad. Nechť $f(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$ a nechť funkce g je definována předpisem

$$g(x) = \begin{cases} -\operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že výraz

$$\frac{f'(0)g(0) - f(0)g'(0)}{g^2(0)}$$

má smysl, přesto ale $(\frac{f}{g})'(0)$ neexistuje.

Řešení. Jest

$$\frac{f'(0)g(0) - f(0)g'(0)}{g^2(0)} = \frac{-g'(0)}{g^2(0)} = \frac{\infty}{\frac{1}{4}} = \infty,$$

a tedy výraz

$$\frac{f'(0)g(0) - f(0)g'(0)}{g^2(0)}$$

má smysl. Dále

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases}$$

a tedy

$$\left(\frac{f}{g}\right)'_+(0) = -\infty$$

a

$$\left(\frac{f}{g}\right)'_-(0) = \infty.$$

Podle Věty 5.1.5 tedy $(\frac{f}{g})'(0)$ neexistuje. ♣

5.1.23. Věta (derivace složené funkce)**.** Nechť funkce g je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$ a má v tomto bodě derivaci. Nechť funkce f má derivaci v bodě $g(a)$. Pak

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a), \tag{5.2}$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Důkaz. Označme $b = g(a)$. Díky existenci derivace $f'(b)$ nalezneme $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, takové, že funkce f je definována na $B(b, \sigma)$ (Poznámka 5.1.6(a)). Protože g je spojitá v a, existuje $\varrho \in \mathbb{R}$, $\varrho > 0$, takové, že $g(B(a, \varrho)) \subset B(b, \sigma)$ (Definice 4.1.18). Funkce $f \circ g$ je tedy dobře definována na okolí $B(a, \varrho)$.

Předpokládejme nejprve, že platí $g'(a) \neq 0$. Pak existuje $\tilde{\varrho} \in (0, \varrho)$ takové, že pro každé $x \in P(a, \tilde{\varrho})$ platí

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \neq 0. \tag{5.3}$$

Označme

$$\varphi(y) = \frac{f(y) - f(b)}{y - b}, \quad y \in P(b, \sigma).$$

Nyní použijeme Větu 4.2.20(P) pro složení vnější funkce φ s vnitřní funkcí g, přičemž podmínka (P) je splněna díky (5.3). Dostaneme

$$\lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} (\varphi \circ g)(x) = \lim_{y \to b} \varphi(y) = f'(b).$$

Pro každé $x \in P(a, \tilde{\varrho})$ platí $g(x) \neq g(a)$, a tedy také

$$\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} = \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

Odtud podle věty o aritmetice limit (Věta 4.2.2) dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} &= \lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= f'(b)g'(a).\end{aligned}$$

Předpokládejme nyní, že $g'(a) = 0$. Protože výraz na pravé straně (5.2) je definován, je $f'(b)$ vlastní. Důkaz vztahu (5.2) v tomto případě znamená dokázat rovnost

$$\lim_{x \to a} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} = 0. \tag{5.4}$$

Mějme dáno $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Díky Větě 4.2.9 nalezneme $C \in \mathbb{R}, C > 0$, a $\tilde{\sigma} \in (0, \sigma)$ taková, že platí

$$\forall y \in P(b, \tilde{\sigma}) \colon \left| \frac{f(y) - f(b)}{y - b} \right| < C. \tag{5.5}$$

Z definice derivace nalezneme $\tilde{\varrho}_1 \in (0, \varrho)$ takové, že platí

$$\forall x \in P(a, \tilde{\varrho}_1) \colon \left| \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right| < \varepsilon. \tag{5.6}$$

Díky spojitosti g v bodě a existuje $\tilde{\varrho}_2 \in (0, \varrho)$ takové, že platí

$$\forall x \in B(a, \tilde{\varrho}_2) \colon g(x) \in B(b, \tilde{\sigma}). \tag{5.7}$$

Položme $\tilde{\varrho} = \min\{\tilde{\varrho}_1, \tilde{\varrho}_2\}$. Vezměme libovolné $x \in P(a, \tilde{\varrho})$. Pokud $g(x) = g(a)$, pak

$$\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} = 0.$$

Pokud $g(x) \neq g(a)$, pak díky (5.5), (5.6) a (5.7) dostáváme

$$\left|\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x-a}\right| = \left|\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)}\right| \cdot \left|\frac{g(x) - g(a)}{x-a}\right| < C\varepsilon.$$

V obou případech jsme tedy ukázali, že pro $x \in P(a, \tilde{\varrho})$ platí

$$\left|\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x-a}\right| < \varepsilon.$$

Tím je důkaz dokončen. ∎

5.1.24. Poznámka. Ve Větě 5.1.23 je předpoklad spojitosti funkce g v bodě a automaticky splněn, je-li $g'(a)$ vlastní, jak plyne z Věty 5.1.15.

Předpoklad spojitosti vnitřní funkce ve Větě 5.1.23 nelze obecně vynechat, jak ukazuje následující příklad.

5.1.25. Příklad. Nechť funkce f a g jsou definovány pomocí předpisů

$$f(y) = |y|, \quad y \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ -\frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že výraz $f'(g(0))g'(0)$ má smysl, ale přesto $(f \circ g)'(0)$ neexistuje.

Řešení. Podobně jako v Příkladu 5.1.14 odvodíme, že $g'(0) = \infty$. Dále zřejmě platí $f'(-\frac{1}{2}) = -1$. Výraz

$$f'(g(0))g'(0) = f'(-\frac{1}{2}) \cdot g'(0) = (-1) \cdot \infty = -\infty$$

tedy má smysl. Dále platí

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \end{cases}$$

a tedy $(f \circ g)'(0)$ neexistuje. ♣

5.1.26. Věta (derivace inverzní funkce)**.** Nechť I je nedegenerovaný interval a nechť a je vnitřním bodem I. Nechť f je spojitá a ryze monotónní funkce na I. Označme $b = f(a)$. Pak platí následující tvrzení.

(a) Má-li f v bodě a nenulovou derivaci, pak

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

(b) Je-li $f'(a) = 0$ a f je rostoucí na I, pak

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \infty.$$

(c) Je-li $f'(a) = 0$ a f je klesající na I, pak

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = -\infty.$$

Důkaz. (a) Předpokládejme, že funkce f je na intervalu I rostoucí. Z Věty 4.3.6 vyplývá, že množina $J = f(I)$ je interval. Dle Věty 4.3.13 navíc víme, že inverzní funkce $f^{-1}\colon J \to I$ je spojitá a rostoucí. Protože a je vnitřním bodem I a f je rostoucí, je také b vnitřním bodem J. Tedy existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $B(b, \varepsilon) \subset J$. Díky tomu, že a je vnitřním bodem I víme, že existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že $B(a, \delta) \subset I$. Ze spojitosti funkce f v bodě a plyne, že toto δ lze zvolit tak, aby $f(B(a, \delta)) \subset B(b, \varepsilon)$. Označme

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad x \in P(a, \delta). \tag{5.8}$$

Pak platí

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = f'(a). \tag{5.9}$$

Protože je f^{-1} rostoucí, můžeme použít Větu 4.2.20(P) pro složení vnitřní funkce f^{-1} s vnější funkcí φ a odvodit z (5.9)

$$\lim_{y \to b} \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)} = \lim_{y \to b} (\varphi \circ f^{-1})(y) = \lim_{x \to a} \varphi(x) = f'(a). \tag{5.10}$$

(a) Zde předpokládáme $f'(a) \neq 0$, takže z věty o aritmetice limit (Věta 4.2.2) a (5.10) dostáváme

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{y \to b} \frac{1}{\frac{y-b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

(b) Nyní předpokládáme, že platí $f'(a) = 0$. Podle (5.10) máme

$$\lim_{y \to b} \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)} = 0. \tag{5.11}$$

Funkce

$$\psi(y) = \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}, \quad y \in P(b, \varepsilon),$$

je na okolí $P(b, \varepsilon)$ kladná, neboť funkce f^{-1} je rostoucí na J. Věta 4.2.7 pak dává

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{y \to b} \frac{1}{\psi(y)} = \infty.$$

Pokud je funkce f klesající, pak lze tvrzení dokázat obdobně. ■

5.1.27. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $g(y) = \sqrt[n]{y}$, $y \in (0, \infty)$. Dokažte, že

$$g'(b) = \frac{\sqrt[n]{b}}{nb}, \quad b \in (0, \infty).$$

Řešení. Definujeme funkci f předpisem
$$f(x) = x^n, \quad x \in (0, \infty),$$
a označíme $I = J = (0, \infty)$. Potom $f: I \to J$, $g: J \to I$ a funkce f a g jsou navzájem inverzní. Nechť $b \in J$. Označme $a = g(b)$, neboli $a = \sqrt[n]{b}$. Pak podle Věty 5.1.26(a) a Příkladů 5.1.12 a 5.1.11 máme
$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{na^{n-1}} = \frac{a}{na^n} = \frac{\sqrt[n]{b}}{nb}.$$
♣

5.1.28. Poznámka. Není těžké ověřit, že je-li $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, a $g(y) = \sqrt[n]{y}$, $y \in [0, \infty)$, pak $g'_+(0) = \infty$.

5.1.29. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ je liché a $g(y) = \sqrt[n]{y}$, $y \in \mathbb{R}$. Pak
$$g'(b) = \begin{cases} \frac{\sqrt[n]{b}}{nb}, & b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \infty, & b = 0. \end{cases}$$

Řešení. Definujeme funkci f předpisem
$$f(x) = x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$
a označíme $I = J = (-\infty, \infty)$. Potom $f: I \to J$, $g: J \to I$ a funkce f a g jsou navzájem inverzní. Nechť $b \in J, b \neq 0$, a $a = g(b)$. Pak podle Věty 5.1.26(a) a Příkladů 5.1.12 a 5.1.11 dostaneme obdobně jako v Příkladu 5.1.27
$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{\sqrt[n]{b}}{nb}.$$
Je-li $b = 0$, pak $g'(0) = \infty$ podle Věty 5.1.26(b). ♣

5.1.30. Věta (nutná podmínka existence extrému)**.** Nechť f je reálná funkce. Jestliže a je bodem lokálního extrému funkce f, potom buď $f'(a)$ neexistuje nebo $f'(a) = 0$.

Důkaz. Předpokládejme, že $f'(a)$ existuje a je různá od 0. Uvažujme nejprve případ $f'(a) > 0$. Dle Věty 4.2.9(a) existuje $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že
$$\forall x \in P(a, \delta) \colon \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$
Odtud plyne, že pro $x \in P_+(a, \delta)$ platí $f(a) < f(x)$ a pro $x \in P_-(a, \delta)$ platí $f(a) > f(x)$. Tedy f nemá v a lokální extrém.

Obdobně lze odvodit, že funkce f nemá v a lokální extrém ani v případě, kdy $f'(a) < 0$. Tím je důkaz proveden. ■

5.1.31. Poznámka. Funkce $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, nabývá svého (dokonce globálního) mimima na $\mathbb{R}$ v bodě 0, ale $f'(0)$ neexistuje.

5.2. Věty o střední hodnotě

5.2.1. Věta (Rolleova věta)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Je-li $f(a) = f(b)$ a f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b), pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f'(c) = 0$.

Důkaz. Podle Věty 4.3.9 nabývá funkce f na intervalu $[a, b]$ svého maxima i minima. Označme $m = \min f\big([a, b]\big)$ a $M = \max f\big([a, b]\big)$. Pak

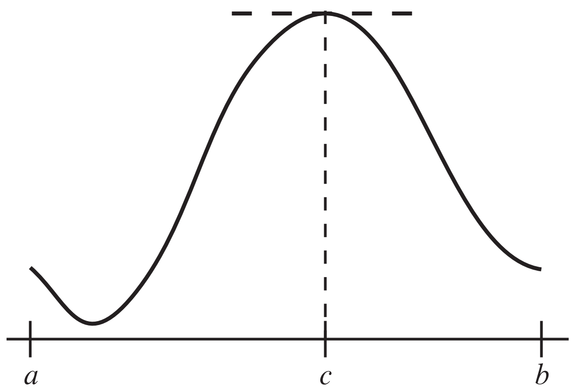
$$m \leq f(a) = f(b) \leq M. \tag{5.12}$$

Jestliže $m = M$, potom je funkce f konstantní na $[a, b]$. Z Příkladu 5.1.11 vyplývá, že $f'(c) = 0$ dokonce v každém bodě $c \in (a, b)$.

Nyní předpokládejme, že $m < M$. Potom musí být alespoň jedna z obou nerovností v (5.12) ostrá. Nechť například platí $f(b) < M$. Nalezneme $c \in [a, b]$ splňující $f(c) = M$. Potom $c \notin \{a, b\}$, a tedy $c \in (a, b)$. Pak f nabývá v bodě c svého maxima na intervalu $[a, b]$ a existuje v něm derivace podle předpokladu. Podle Věty 5.1.30 platí $f'(c) = 0$.

Jestliže $m < f(a)$, pak lze postupovat obdobně jako v předcházejícím případě. Alternativně je také možné použít již dokázané tvrzení na funkci $-f$. Tím je důkaz hotov. ■

5.2.2. Poznámka. Geometricky lze interpretovat Větu 5.2.1 tak, že za předpokladů věty graf funkce f obsahuje bod $[c, f(c)]$, v němž je tečna ke grafu f rovnoběžná s osou x.



Obrázek 2.

5.2.3. Poznámka. Ve Větě 5.2.1 nelze předpoklad o existenci derivace v bodech intervalu (a, b) vynechat. Příkladem je funkce $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$, která je na intervalu $[-1, 1]$ spojitá, platí $f(-1) = f(1)$, ale nemá v žádném bodě intervalu $(-1, 1)$ nulovou derivaci.

5.2.4. Věta (Lagrangeova věta)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která má v každém bodě intervalu (a, b) derivaci. Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Důkaz. Myšlenka důkazu spočívá v převedení problému do situace, ve které bude možné použít Rolleovu větu (Věta 5.2.1). Definujme funkci g předpisem

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad x \in [a, b].$$

Pak g je spojitá podle Věty 4.2.5 a Příkladu 4.2.6. Přímočarý výpočet navíc dává $g(a) = g(b)$. Protože v každém bodě intervalu (a, b) má funkce

$$x \mapsto \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad x \in [a, b],$$

vlastní derivaci (Příklad 5.1.12) a funkce f derivaci, existuje podle Věty 5.1.17(a) derivace g v každém bodě intervalu (a, b). Díky Větě 5.2.1 tedy lze nalézt bod $c \in (a, b)$ splňující $g'(c) = 0$. Protože pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

dostáváme

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Tedy $f'(c)$ je vlastní, a $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■

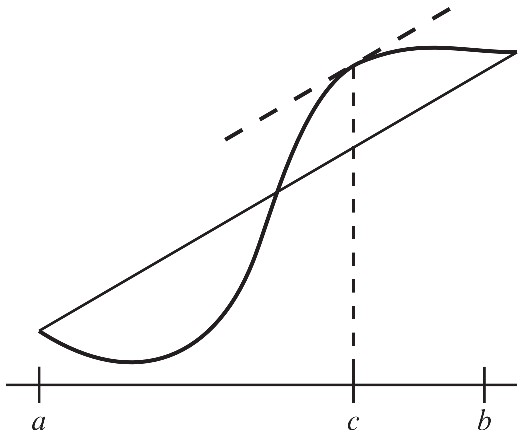
5.2.5. Poznámka. Za předpokladů Věty 5.2.4 můžeme přírůstek funkce f na intervalu $[a, b]$, který je roven $f(b) - f(a)$, vyjádřit takto:

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a),$$

tedy jako součin přírůstku proměnné x a derivace v bodě c, o jehož poloze víme jen tolik, že patří do (a, b).

Uvědomme si, že ani Věta 5.2.1 ani Věta 5.2.4 neříkají nic o tom, kolik bodů c s danou vlastností existuje. Říkají pouze, že takový bod je alespoň jeden.

Geometricky lze interpretovat Větu 5.2.4 tak, že za uvedených předpokladů obsahuje graf funkce f bod $[c, f(c)]$, v němž je tečna ke grafu f rovnoběžná s přímkou spojující body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$.



OBRÁZEK 3.

5.2.6. Věta. Nechť I je interval a $f: I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce mající v každém vnitřním bodě intervalu I nezápornou (respektive kladnou) derivaci. Pak f je neklesající (respektive rostoucí) na I.

Důkaz. Předpokládejme, že pro každý vnitřní bod x intervalu I platí $f'(x) \geq 0$. Nechť $a, b \in I, a < b$. Pak $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá a má derivaci v každém vnitřním bodě intervalu $[a, b]$. Dle Věty 5.2.4 existuje bod $c \in (a, b)$ splňující

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Tedy

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0,$$

což znamená $f(a) \leq f(b)$. Funkce f je tedy neklesající.

Případ, kdy má f kladnou derivaci v každém vnitřním bodě intervalu I, lze dokázat obdobně. ■

5.2.7. Poznámka. Předpoklad spojitosti lze ve Větě 5.2.6 vynechat, jak uvidíme ve Větě 5.4.7, jejíž důkaz je však o něco obtížnější.

5.2.8. Poznámka. Má-li funkce f ve Větě 5.2.6 derivaci nekladnou (respektive zápornou), aplikace Věty 5.2.6 na funkci $-f$ dává, že f je nerostoucí (respektive klesající).

5.2.9. Věta. Nechť I je interval a $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce mající v každém vnitřním bodě intervalu I nulovou derivaci. Pak f je konstantní na I.

Důkaz. Podle Věty 5.2.6, jsou funkce f, $-f$ neklesající. Tedy funkce f je zároveň neklesající i nerostoucí na I, jinými slovy je konstantní. ∎

5.2.10. Věta (o limitě derivací)**.** Nechť reálná funkce f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x \to a+} f'(x)$. Pak existuje $f'_+(a)$ a platí

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+} f'(x).$$

Důkaz. Označme $L = \lim_{x \to a+} f'(x)$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že f' má konečné hodnoty na $P_+(a, \delta)$ a navíc pro každé $z \in P_+(a, \delta)$ platí

$$f'(z) \in B(L, \varepsilon). \tag{5.13}$$

Vezměme libovolné $x \in P_+(a, \delta)$. Pak $f : [a, x] \to \mathbb{R}$ má derivaci v každém bodě intervalu (a, x). Funkce f je spojitá na intervalu $[a, x]$, neboť spojitost v bodech intervalu $(a, x]$ plyne z Věty 5.1.15 a spojitost v a zprava předpokládáme. Dle Věty 5.2.4 existuje $c_x \in (a, x)$ splňující

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x).$$

Protože $c_x \in P_+(a, \delta)$, z (5.13) máme

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in B(L, \varepsilon).$$

Dokázali jsme tedy $f'_+(a) = L$ a důkaz je tak hotov. ∎

5.2.11. Poznámka. Větu 5.2.10 lze zformulovat a dokázat pro derivaci zleva i pro oboustrannou derivaci.

5.2.12. Poznámka. Vynecháme-li ve Větě 5.2.10 předpoklad spojitosti, závěr přestane obecně platit. Vezmeme-li totiž do úvahy funkci $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x \in \mathbb{R}$, v bodě 0, pak $\lim_{x \to 0+} f'(x) = \lim_{x \to 0+} 0 = 0$, ale $f'_+(0) = \infty$.

Stejně tak nemůžeme z neexistence limity $\lim_{x \to a+} f'(x)$ odvodit neexistenci $f'_+(a)$, viz Příklad 5.5.1.

5.2.13. Věta (Cauchyova věta)**.** Nechť f a g jsou funkce spojité na intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$, nechť f má v každém bodě $x \in (a, b)$ derivaci a nechť g má v každém bodě $x \in (a, b)$ vlastní nenulovou derivaci. Potom $g(a) \neq g(b)$ a existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{5.14}$$

Důkaz. Z Lagrangeovy věty (Věta 5.2.4) plyne existence bodu $d \in (a,b)$ takového, že

$$g'(d) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

Protože $g'(d) \neq 0$, dostáváme $g(b) - g(a) \neq 0$. Definujme funkci

$$\varphi(x) = \big(f(x) - f(a)\big)\big(g(b) - g(a)\big) - \big(g(x) - g(a)\big)\big(f(b) - f(a)\big), \quad x \in [a,b].$$

Pak je funkce φ podle Věty 4.2.5 spojitá na $[a,b]$ a v každém bodě intervalu (a,b) má derivaci (Věta 5.1.17), neboť funkce

$$x \mapsto \big(f(x) - f(a)\big)\big(g(b) - g(a)\big)$$

má v každém bodě intervalu (a,b) derivaci a funkce

$$x \mapsto \big(g(x) - g(a)\big)\big(f(b) - f(a)\big)$$

má v každém bodě intervalu (a,b) vlastní derivaci. Navíc $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Z Věty 5.2.1 tedy plyne existence bodu $c \in (a,b)$, který splňuje $\varphi'(c) = 0$. Protože pro každé $x \in (a,b)$ platí

$$\varphi'(x) = f'(x)\big(g(b) - g(a)\big) - g'(x)\big(f(b) - f(a)\big),$$

dle Věty 5.1.17, dosazením $x = c$ máme

$$0 = \varphi'(c) = f'(c)\big(g(b) - g(a)\big) - g'(c)\big(f(b) - f(a)\big),$$

odkud elementární úpravou dostáváme (5.14). ■

5.3. l'Hospitalovo pravidlo

5.3.1. Věta (l'Hospitalovo pravidlo)**.** Nechť $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, f, g jsou funkce a existuje $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Jestliže navíc platí

(a) $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$, nebo
(b) $\lim_{x\to a+} |g(x)| = \infty$,

potom

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

5.3.2. Poznámka. Věta 5.3.1 platí i pro limity zleva a oboustranné limity.

Důkaz. Označme

$$L = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{5.15}$$

Dokažme nejprve následující pomocné tvrzení.

Pomocné tvrzení.

(i) Jestliže $\alpha \in \mathbb{R}$ splňuje $\alpha > L$, pak existuje $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P_+(a, \delta) : \frac{f(x)}{g(x)} < \alpha.$$

(ii) Jestliže $\beta \in \mathbb{R}$ splňuje $\beta < L$, pak existuje $\delta' \in \mathbb{R}, \delta' > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P_+(a, \delta') : \frac{f(x)}{g(x)} > \beta.$$

Důkaz pomocného tvrzení. (i) Zvolme $r \in (L, \alpha)$. Díky předpokladu existence limity v (5.15) nalezneme $\delta_1 \in \mathbb{R}, \delta_1 > 0$, takové, že funkce f a g jsou definované na $P_+(a, \delta_1)$, f zde má vlastní derivaci, g zde má vlastní nenulovou derivaci a platí

$$\forall x \in P_+(a, \delta_1) : \frac{f'(x)}{g'(x)} < r. \tag{5.16}$$

Vezměme nyní libovolná $x, y \in P_+(a, \delta_1), x < y$. Podle Cauchyovy věty (Věta 5.2.13) aplikované na f a g na intervalu $[x, y]$ existuje $c \in (x, y)$ splňující

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{5.17}$$

Pro každé $x, y \in P_+(a, \delta_1), x < y$, tedy podle (5.16) a (5.17) platí

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < r. \tag{5.18}$$

Předpokládejme, že platí podmínka (a). Potom pro pevné $y \in P_+(a, \delta_1)$ dostaneme podle (5.18)

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f(y)}{g(y)} \leq r < \alpha.$$

Stačí položit $\delta = \delta_1$ a za předpokladu platnosti podmínky (a) je pomocné tvrzení dokázáno.

Předpokládejme nyní, že platí podmínka (b). Zvolme pevně $\tilde{y} \in P_+(a, \delta_1)$. Potom platí

$$\lim_{x \to a+} r\left(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} = r + 0 = r < \alpha. \tag{5.19}$$

Existuje tedy $\delta_2 \in (0, \delta_1)$, takové, že

$$\forall x \in P_+(a, \delta_2) : r\left(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} < \alpha. \tag{5.20}$$

Navíc díky podmínce (b) můžeme požadovat, aby platilo

$$\forall x \in P_+(a, \delta_2) : \ \frac{g(\tilde{y})}{g(x)} < 1. \tag{5.21}$$

Nechť $x \in P_+(a, \delta_2)$. Pak můžeme psát

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x)} + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \\ &= \frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x) - g(\tilde{y})} \cdot \frac{g(x) - g(\tilde{y})}{g(x)} + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \\ &= \frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x) - g(\tilde{y})} \Big(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\Big) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \end{aligned} \tag{5.22}$$

S pomocí (5.20), (5.21) a (5.22) odhadneme

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x) - g(\tilde{y})} \Big(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\Big) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \\ &< r\Big(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\Big) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} < \alpha. \end{aligned}$$

Položíme $\delta = \delta_2$ a pomocné tvrzení je dokázáno i za předpokladu platnosti podmínky (b).

(ii) Podle (5.15) platí $\lim_{x \to a+} \frac{-f(x)}{g(x)} = -L$. Předpokládejme, že $\beta \in \mathbb{R}$ splňuje $\beta < L$. Potom platí $-\beta > -L$. Již dokázanou část (i) použijeme pro $\alpha = -\beta$ a nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P_+(a, \delta) : \ \frac{-f(x)}{g(x)} < -\beta.$$

Nyní stačí položit $\delta' = \delta$ a tvrzení je dokázáno. ■

Důkaz věty lze nyní již snadno dokončit. Pokud $L = -\infty$, respektive $L = \infty$, tvrzení věty plyne okamžitě z (i), respektive z (ii). Nechť $L \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Použijeme (i) pro $\alpha = L + \varepsilon$ a obdržíme příslušné $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$. Dále použijeme (ii) pro $\beta = L - \varepsilon$ a obdržíme příslušné $\delta' \in \mathbb{R}, \delta' > 0$. Pro každé $x \in P_+(a, \min\{\delta, \delta'\})$ dostaneme

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in (\beta, \alpha) = (L - \varepsilon, L + \varepsilon) = B(L, \varepsilon),$$

což dokazuje naši větu. ■

Důkaz. Označme

$$L = \lim_{x \to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{5.23}$$

Rozlišíme několik případů a pro každý z nich provedeme důkaz zvlášť.

Případ číslo 1. Předpokládejme, že $a \in \mathbb{R}$ a je splněna podmínka (a).

Díky předpokladu existence limity v (5.23) nalezneme $\tilde{\delta} \in \mathbb{R}, \tilde{\delta} > 0$, takové, že funkce f a g jsou definované na $P_{+}(a, \tilde{\delta})$, f zde má vlastní derivaci a g zde má vlastní nenulovou derivaci. Definujme funkce

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in P_{+}(a, \tilde{\delta}), \\ 0, & x = a, \end{cases} \qquad \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \in P_{+}(a, \tilde{\delta}), \\ 0, & x = a. \end{cases}$$

Pak $\tilde{f}$ a $\tilde{g}$ jsou spojité funkce na intervalu $[a, a + \tilde{\delta})$, neboť v bodech z $(a, a + \tilde{\delta})$ plyne spojitost z Věty 5.1.15 a spojitost zprava v bodě a plyne z podmínky (a).

Mějme dáno $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Z definice limity nalezneme $\delta \in (0, \tilde{\delta})$ takové, že

$$\forall x \in P_{+}(a, \delta) : \frac{f'(x)}{g'(x)} \in B(L, \varepsilon).$$

Vezměme nyní libovolné $x \in P_{+}(a, \delta)$. Podle Cauchyovy věty (Věta 5.2.13) aplikované na $\tilde{f}$ a $\tilde{g}$ na intervalu $[a, x]$ existuje $c_x \in (a, x)$ splňující

$$\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(a)} = \frac{\tilde{f}'(c_x)}{\tilde{g}'(c_x)}.$$

Protože

$$\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

a výraz na levé straně je dobře definován dle Věty 5.2.13, má i výraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ smysl. Jelikož $c_x \in P_{+}(a, \delta)$, dostáváme dále

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(a)} = \frac{\tilde{f}'(c_x)}{\tilde{g}'(c_x)} \in B(L, \varepsilon).$$

Tedy platí $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Případ číslo 2. Předpokládejme, že $a \in \mathbb{R}$, je splněna podmínka (b) a $L \in \mathbb{R}$.

Mějme dáno $\varepsilon \in (0, 1)$. Díky předpokladu existence limity v (5.23) nalezneme $\tilde{\delta} \in \mathbb{R}, \tilde{\delta} > 0$, takové, že funkce f a g jsou definované na $P_{+}(a, \tilde{\delta})$, f zde má vlastní derivaci a g zde má vlastní nenulovou derivaci. Navíc díky podmínce (b) můžeme požadovat, aby funkce g byla na $P_+(a,\tilde{\delta})$ nenulová. Díky (5.23) a předpokladu $L \in \mathbb{R}$ nalezneme $\delta_1 \in (0,\tilde{\delta})$ takové, že

$$\forall x \in P_+(a,\delta_1): \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \varepsilon. \tag{5.24}$$

Zvolme pevně $\tilde{y} \in P_+(a,\delta_1)$. Pomocí podmínky (b) nalezneme $\delta_2 \in (0,\delta_1)$ splňující

$$\forall x \in P_+(a,\delta_2): \left|\frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right| < \varepsilon \ \& \ \left|\frac{f(\tilde{y})}{g(x)}\right| < \varepsilon. \tag{5.25}$$

Nechť $x \in P_+(a,\delta_2)$. Použijeme Cauchyovu větu o střední hodnotě (Věta 5.2.13) pro funkce f a g na intervalu $[x,\tilde{y}]$ a nalezneme $c_x \in (x,\tilde{y})$ splňující

$$\frac{f(x)-f(\tilde{y})}{g(x)-g(\tilde{y})} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}. \tag{5.26}$$

Pak můžeme psát

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x)-f(\tilde{y})}{g(x)} + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \\ &= \frac{f(x)-f(\tilde{y})}{g(x)-g(\tilde{y})}\cdot\frac{g(x)-g(\tilde{y})}{g(x)} + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \\ &= \frac{f(x)-f(\tilde{y})}{g(x)-g(\tilde{y})}\Big(1-\frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\Big) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)}.\end{aligned} \tag{5.27}$$

Použijeme (5.26) a vyjádříme

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\Big(1-\frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\Big) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \\ &= \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\cdot\frac{g(\tilde{y})}{g(x)} + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)}.\end{aligned}$$

Pomocí vztahů $\varepsilon \in (0,1)$, (5.24), (5.25) a trojúhelníkové nerovnosti můžeme nyní odhadnout

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| &\le \left|\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - L\right| + \left|\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\cdot\frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right| + \left|\frac{f(\tilde{y})}{g(x)}\right| \\ &< \varepsilon + (|L|+\varepsilon)\cdot\varepsilon + \varepsilon = (|L|+2+\varepsilon)\varepsilon < (|L|+3)\varepsilon.\end{aligned}$$

Tím je důkaz rovnosti $\lim_{x\to a_+}\frac{f(x)}{g(x)} = L$ v tomto případě proveden.

Případ číslo 3. Předpokládejme, že $a \in \mathbb{R}$, je splněna podmínka (b) a $L = \infty$. Mějme dáno $K \in \mathbb{R}, K > 0$. Díky předpokladu existence limity v (5.23) nalezneme $\tilde{\delta} \in \mathbb{R}, \tilde{\delta} > 0$, takové, že funkce f a g jsou definované na $P_+(a,\tilde{\delta})$,

f zde má vlastní derivaci a g zde má vlastní nenulovou derivaci. Navíc díky podmínce (b) můžeme požadovat, aby funkce g byla na $P_+(a, \tilde{\delta})$ nenulová. Podle předpokladu $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ nalezneme $\delta_1 \in (0, \tilde{\delta})$ takové, že

$$\forall x \in P_+(a, \delta_1) : \frac{f'(x)}{g'(x)} > 2K. \tag{5.28}$$

Zvolme pevně $\tilde{y} \in P_+(a, \delta_1)$. Pomocí podmínky (b) nalezneme $\delta_2 \in (0, \tilde{y} - a)$ splňující

$$\forall x \in P_+(a, \delta_2) : \left|\frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right| < \frac{1}{4} \ \& \ \left|\frac{f(\tilde{y})}{g(x)}\right| < \frac{K}{2}. \tag{5.29}$$

Nechť $x \in P_+(a, \delta_2)$. Potom $x < \tilde{y}$. Použijeme Cauchyovu větu (Věta 5.2.13) pro funkce f a g na intervalu $[x, \tilde{y}]$ a nalezneme $c_x \in (x, \tilde{y})$ splňující

$$\frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x) - g(\tilde{y})} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}. \tag{5.30}$$

Pak můžeme psát

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x)} + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \\ &= \frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x) - g(\tilde{y})}\left(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)}. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Díky (5.30) a (5.31) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\left(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \\ &= \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \cdot \frac{g(\tilde{y})}{g(x)} + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \end{aligned} \tag{5.32}$$

Odtud pomocí (5.28) a (5.29) plyne

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 2K - 2K \cdot \frac{1}{4} - \frac{K}{2} = K.$$

Tím je důkaz vztahu $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ v tomto případě proveden.

Případ číslo 4. Předpokládejme, že $a \in \mathbb{R}$, je splněna podmínka (b) a $L = -\infty$.

Výsledek z předchozího případu aplikujeme na dvojici funkcí $-f$ a g a obdržíme

$$\lim_{x \to a+} \frac{-f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{-f'(x)}{g'(x)} = \infty.$$

Platí tedy také

$$\lim_{x\to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

Případ číslo 5. Předpokládejme, že $a = -\infty$ a je splněna podmínka (a) nebo podmínka (b).

Funkce f a g jsou definovány na jistém okolí bodu $-\infty$. Proto jsou na jistém pravém okolí bodu 0 funkce F a G dobře definovány předpisem

$$F(x) = f\left(-\frac{1}{x}\right), \qquad G(x) = g\left(-\frac{1}{x}\right).$$

Pak z Věty 4.2.20 dostáváme $\lim_{x\to 0_+} F(x) = \lim_{x\to 0_+} G(x) = 0$, pokud je splněna podmínka (a), a $\lim_{x\to 0_+} |G(x)| = \infty$, pokud je splněna podmínka (b). Dále platí

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to 0_+} \frac{f'\left(-\frac{1}{x}\right) x^{-2}}{g'\left(-\frac{1}{x}\right) x^{-2}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{f'\left(-\frac{1}{x}\right)}{g'\left(-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{y\to -\infty} \frac{f'(y)}{g'(y)} = L.$$

Nyní aplikujeme již dokázanou část l'Hospitalova pravidla na dvojici funkcí F a G v bodě 0 a dostaneme

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to 0_+} \frac{F'(x)}{G'(x)} = L,$$

což opětovným použitím Věty 4.2.20 dává

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0_+} \frac{f\left(-\frac{1}{y}\right)}{g\left(-\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y\to 0_+} \frac{F(y)}{G(y)} = L.$$

■

5.3.3. Příklad. Platí, že $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x^3} = \frac{1}{6}$.

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $(x-\sin(x))' = 1-\cos(x)$, $(x-\sin(x))'' = \sin(x)$ a $(x^3)' = 3x^2$, $(x^3)'' = 6x$. Protože $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{6x} = \frac{1}{6}$, dostáváme použitím l'Hospitalova pravidla 5.3.1(a) rovnost

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{6x} = \frac{1}{6}.$$

Dalším použitím l'Hospitalova pravidla 5.3.1(a) obdržíme

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{3x^2} = \frac{1}{6}.$$

♣

5.3.4. Příklad. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$, platí vztahy $\lim_{x\to 0_+} x^\alpha \log x = 0$ a $\lim_{x\to\infty} e^{-x}x^\alpha = 0$.

Řešení. Použijeme l'Hospitalovo pravidlo 5.3.1(b) a dostaneme

$$\lim_{x\to 0_+} x^\alpha \log x = \lim_{x\to 0_+} \frac{\log x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{x^{-1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0.$$

Pro výpočet druhé limity nalezneme $n \in \mathbb{N}$ splňující $\alpha < n$. Pak n-násobné užití Věty 5.3.1(b) dává

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}x^n = \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

Protože $0 \le e^{-x}x^\alpha \le e^{-x}x^n$ pro každé $x \in \mathbb{R}, x \ge 1$, platí $\lim_{x\to\infty} e^{-x}x^\alpha = 0$ dle Věty 4.2.9(c). ♣

5.3.5. Poznámka. Obecně není pravda, že z existence $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ můžeme něco usoudit o $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Například platí

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x+\sin(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+\frac{\sin(x)}{x}} = -\infty,$$

ale

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{1+\cos(x)}$$

neexistuje, neboť funkce $x \mapsto \frac{2x}{1+\cos(x)}$ není definována na žádném okolí bodu $-\infty$.

5.3.6. Poznámka. L'Hospitalovo pravidlo není vždy vhodným nástrojem pro výpočet limity. Přímočaré použití l'Hospitalova pravidla pro limitu

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

vede k limitě

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}}{1} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}.$$

Výpočet poslední limity není však snazší než výpočet původní limity.

5.3.7. Poznámka. Uvažujme

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) \quad \text{a} \quad g(x) = f(x)e^{\sin(x)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{\sin(x)}} \tag{5.33}$$

neexistuje. Na druhou stranu, počítáme-li pomocí l'Hospitalova pravidla (Věta 5.3.1), dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)e^{\sin(x)} + f(x)e^{\sin(x)}\cos(x)} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x)}{e^{\sin(x)}\left(\cos(x) + f(x)\right)} = 0,\end{aligned} \tag{5.34}$$

což nesouhlasí s (5.33). Chybné použití l'Hospitalova pravidla spočívá v tom, že výraz $\frac{f'}{g'}$ není definovaný na žádném okolí ∞, tj. $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ z definice neexistuje. Druhá rovnost ve výpočtu (5.34) je tedy chybná.

5.4. Monotónní a konvexní funkce

5.4.1. Definice. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je

- **rostoucí v bodě** a, pokud existuje $\delta > 0$ takové, že $f(x) < f(a)$ pro všechna $x \in P_-(a, \delta)$ a $f(x) > f(a)$ pro všechna $x \in P_+(a, \delta)$,
- **klesající v bodě** a, pokud existuje $\delta > 0$ takové, že $f(x) > f(a)$ pro všechna $x \in P_-(a, \delta)$ a $f(x) < f(a)$ pro všechna $x \in P_+(a, \delta)$,
- **neklesající v bodě** a, pokud existuje $\delta > 0$ takové, že $f(x) \leq f(a)$ pro všechna $x \in P_-(a, \delta)$ a $f(x) \geq f(a)$ pro všechna $x \in P_+(a, \delta)$,
- **nerostoucí v bodě** a, pokud existuje $\delta > 0$ takové, že $f(x) \geq f(a)$ pro všechna $x \in P_-(a, \delta)$ a $f(x) \leq f(a)$ pro všechna $x \in P_+(a, \delta)$.

Podobně definujeme, že funkce f je **rostoucí v** a **zprava** apod.

5.4.2. Poznámka. Je-li funkce $f: I \to \mathbb{R}$ rostoucí na intervalu I, pak je zřejmě rostoucí v každém vnitřním bodě intervalu I a rostoucí zprava či zleva v eventuálních krajních bodech intervalu I.

5.4.3. Věta. Má-li reálná funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ kladnou (respektive zápornou) derivaci zprava, pak je v tomto bodě rostoucí (respektive klesající) zprava.

Důkaz. Předpokládejme, že $f'_+(a) > 0$, tj. $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$. Dle Věty 4.2.9(i) existuje takové $\delta > 0$, že

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0, \quad x \in P_+(a, \delta).$$

Pak zřejmě platí $f(x) > f(a)$ pro všechna $x \in P_+(a, \delta)$, tj. f je rostoucí zprava v a.

Obdobně lze dokázat tvrzení i v případě $f'_+(a) < 0$. ■

5.4.4. Poznámka. Obdobné tvrzení platí pro derivaci zleva a oboustrannou derivaci.

5.4.5. Poznámka. Je-li reálná funkce g rostoucí v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak obecně nemusí existovat $\delta > 0$ takové, že g je monotónní na intervalu $(a-\delta, a+\delta)$. Stačí vzít $g(x) = x + f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, kde f je funkce z Příkladu 5.5.2, a položit $a = 0$. Potom $g'(x) = 1 + f'(x)$ platí pro každé $x \in \mathbb{R}$. Dále $g'(0) = 1$, a tedy g je rostoucí v 0. Funkce f' není omezená shora ani zdola na žádném okolí bodu 0, a proto v každém okolí bodu 0 funkce g' nabývá kladných i záporných hodnot. Předpokládejme nejprve, že g je neklesající na jistém okolí $B(0, \delta)$, $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Potom pro každé $x, y \in B(0, \delta)$, $x \neq y$, platí

$$\frac{g(x) - g(y)}{x - y} \geq 0.$$

Díky větě o srovnání (Věta 4.2.9(b)) dostáváme, že $g'(y) \geq 0$ pro každé $y \in B(0, \delta)$, což je spor. Obdobný spor obdržíme, pokud předpokládáme, že g je nerostoucí na jistém okolí bodu 0.

5.4.6. Věta. Nechť $f : I \to \mathbb{R}$ roste (respektive neklesá) v každém bodě intervalu I (v případných krajních bodech I uvažujeme příslušné jednostranné varianty). Pak f roste (respektive neklesá) na I.

Důkaz. Předpokládejme, že f je rostoucí v každém bodě intervalu I, a uvažujme libovolné body $a, b \in I$, $a < b$. Chceme dokázat, že $f(a) < f(b)$. Definujme $M = \{c \in (a, b];\ f(c) > f(a)\}$. Pak M je shora omezená množina, neboť b je horní závorou M. Funkce f je rostoucí zprava v bodě a, a proto existuje $\delta_1 \in \mathbb{R}, \delta_1 > 0$, takové, že $f(x) > f(a)$ pro všechna $x \in P_+(a, \delta_1)$. Pak $(a, b] \cap P_+(a, \delta_1) \subset M$, a tedy $M \neq \emptyset$. Položme $s = \sup M$. Pak zřejmě $a < s \leq b$. Nalezneme $\delta_2 \in \mathbb{R}, \delta_2 > 0$, takové, že $f(x) < f(s)$ pro všechna $x \in P_-(s, \delta_2)$. Z definice suprema existuje $t_1 \in M \cap P_-(s, \delta_2)$, pro které tedy platí $f(a) < f(t_1) < f(s)$. Proto dostáváme $s \in M$.

Dokážeme nyní, že $s = b$. Kdyby totiž platilo $s < b$, nalezli bychom $\delta_3 \in \mathbb{R}, \delta_3 > 0$, takové, že $f(x) > f(s)$ pro všechna $x \in P_+(s, \delta_3)$. Pak tedy libovolné $t_2 \in P_+(s, \delta_3) \cap (s, b)$ splňuje $f(a) < f(s) < f(t_2)$, což znamená $t_2 \in M$. To je ale spor s faktem $s = \sup M$. Tím je rovnost $s = b$ dokázána, a tedy díky $s \in M$ máme $f(b) = f(s) > f(a)$. Tím je důkaz nerovnosti $f(a) < f(b)$ proveden.

Předpokládejme nyní, že f je neklesající v každém bodě I. Mějme dány body $a < b$ z intervalu I a zvolme pevné $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Funkce $g(x) =$

$f(x) + \varepsilon x$, $x \in I$, je rostoucí v každém bodě I, tedy dle první části důkazu platí $f(a) + \varepsilon a = g(a) < g(b) = f(b) + \varepsilon b$. Jelikož ε je libovolné, platí $f(a) \leq f(b)$. Tím je důkaz dokončen. ■

5.4.7. Věta. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f : I \to \mathbb{R}$ má v každém bodě I kladnou (respektive nezápornou, zápornou, nekladnou) derivaci (v případných krajních bodech I uvažujeme jednostranné derivace). Pak f roste (respektive neklesá, klesá, neroste) na I.

Důkaz. Má-li funkce v každém bodě intervalu I kladnou derivaci, je v každém bodě I rostoucí podle Věty 5.4.3. Z Věty 5.4.6 pak plyne, že f je rostoucí na I.

Ostatní případy jsou obdobné. ■

5.4.8. Definice. Nechť I je interval a nechť f je reálná funkce definovaná alespoň na I. Řekneme, že f je

- **konvexní** na I, jestliže

$$\forall x, y \in I \ \forall \lambda \in (0,1) : \ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

- **konkávní** na I, jestliže

$$\forall x, y \in I \ \forall \lambda \in (0,1) : \ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

- **ryze konvexní** na I, jestliže

$$\forall x, y \in I, x \neq y \ \forall \lambda \in (0,1) : \ f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

- **ryze konkávní** na I, jestliže

$$\forall x, y \in I, x \neq y \ \forall \lambda \in (0,1) : \ f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

5.4.9. Lemma (ekvivalentní podmínky pro konvexitu)**.** Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a nechť $f : I \to \mathbb{R}$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:

(i) f je konvexní na I,

(ii) $\forall x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3 : \ \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$,

(iii) $\forall x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3 : \ \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$,

(iv) $\forall x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3 : \ \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$.

Obdobné charakterizace platí pro konkávní, ryze konvexní a ryze konkávní funkce.

Důkaz. Předpokládejme, že $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$. Položme $\lambda = \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$. Pak platí $\lambda \in (0,1)$ a $x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3$. Označme $c = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_3)$. Přímočarým výpočtem pak obdržíme

$$\frac{c - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} = \frac{f(x_3) - c}{x_3 - x_2}. \tag{5.35}$$

Pokud platí $f(x_2) \leq c$, pak pomocí (5.35) dostáváme

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \tag{5.36}$$

Pokud platí jedna z nerovností v (5.36) nebo nerovnost

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

pak podle (5.35) platí nerovnost $f(x_2) \leq c$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Předpokládejme, že $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$. Při označení z předchozího odstavce dostaneme $f(x_2) \leq c$, neboť f je konvexní. Pak podle (5.35) dostáváme nerovnost

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Předpokládejme, že $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$, a c je definováno stejně jako v úvodním odstavci. Potom podle předpokladu platí

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1},$$

takže $c \geq f(x_2)$. Tím je podmínka z definice konvexity ověřena.

Ekvivalenci (i) $\Leftrightarrow$ (iii) a (i) $\Leftrightarrow$ (iv) lze pomocí úvah prvního odstavce ověřit obdobně. ■

5.4.10. Věta (vztah konvexity a existence jednostranných derivací)**.** Nechť f je funkce konvexní na intervalu I a nechť $a \in \operatorname{Int} I$. Potom existují vlastní jednostranné derivace $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$. Navíc platí $f'_-(a) \leq f'_+(a)$.

Důkaz. Nechť $a \in \operatorname{Int} I$. Nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, splňující $B(a,\delta) \subset I$ a definujeme funkce

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad x \in P_+(a,\delta), \\ \psi(y) &= \frac{f(y) - f(a)}{y - a}, \quad y \in P_-(a,\delta). \end{aligned}$$

Pro body $y_1, y_2, x_1, x_2 \in P(a, \delta)$ splňující $y_2 < y_1 < a < x_1 < x_2$ dostáváme z Lemmatu 5.4.9

$$\varphi(x_1) = \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} \le \frac{f(x_2) - f(a)}{x_2 - a} = \varphi(x_2)$$

a

$$\psi(y_2) = \frac{f(y_2) - f(a)}{y_2 - a} \le \frac{f(y_1) - f(a)}{y_1 - a} = \psi(y_1).$$

Tedy φ je neklesající na $P_+(a, \delta)$ a ψ je neklesající na $P_-(a, \delta)$. Z Lemmatu 5.4.9 dále pro každé $x \in P_+(a, \delta)$ a $y \in P_-(a, \delta)$ plyne

$$\psi(y) = \frac{f(a) - f(y)}{a - y} \le \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \varphi(x). \tag{5.37}$$

Tedy φ je zdola omezená na $P_+(a, \delta)$ a ψ je shora omezená na $P_-(a, \delta)$.

Z Věty 4.2.25 plyne, že

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a_+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a_+} \varphi(x)$$

a

$$f'_-(a) = \lim_{y \to a_-} \frac{f(y) - f(a)}{y - a} = \lim_{y \to a_-} \psi(y)$$

existují vlastní.

Navíc z (5.37) a Věty 4.2.25 plyne pro každé $x \in P_+(a, \delta)$

$$f'_-(a) = \lim_{y \to a_-} \psi(y) \le \varphi(x).$$

Po dalším použití Věty 4.2.25 dostáváme

$$f'_-(a) \le \lim_{x \to a_+} \varphi(x) = f'_+(a).$$

Tím je důkaz dokončen. ■

5.4.11. Poznámky. (a) Jednostranné derivace konvexní funkce f na intervalu I se nemusí v bodě $a \in \operatorname{Int} I$ rovnat, a nemusí tedy existovat $f'(a)$. Příkladem je funkce $f(x) = |x|$ a bod $x = 0$.

(b) Podobně jako v důkazu Věty 5.4.10 lze odvodit existenci jednostranných derivací konvexní funkce v krajních bodech definičního intervalu. Tyto derivace ale mohou být nevlastní, např. funkce sign uvažovaná na intervalu $[-1, 0]$.

5.4.12. Věta (vztah konvexity a spojitosti)**.** Konvexní funkce na intervalu je spojitá v každém vnitřním bodě tohoto intervalu.

Důkaz. Je-li $f : I \to \mathbb{R}$ konvexní na intervalu I a $a \in \operatorname{Int} I$, pak obě jednostranné derivace $f'_-(a)$ a $f'_+(a)$ existují vlastní. Podle Věty 5.1.15 a Poznámky 5.1.16, f je spojitá zleva i zprava v a, tedy je spojitá v a. ■

5.4.13. Poznámka. Funkce sign, která je na intervalu $(-1, 0]$ konvexní, není spojitá v bodě 0. Z konvexity funkce f tedy nevyplývá spojitost ve všech bodech intervalu I, na němž je funkce f definována.

5.4.14. Věta (vztah druhé derivace a konvexity či konkávnosti)**.** Nechť f je spojitá funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a nechť má f na $\operatorname{Int} I$ spojitou první derivaci. Jestliže je f' rostoucí na $\operatorname{Int} I$, pak f je ryze konvexní na I.

Speciálně, je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in \operatorname{Int} I$, pak f je ryze konvexní na I.

Důkaz. Předpokládejme, že f' je rostoucí funkce na $\operatorname{Int} I$, kde $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Vezměme libovolné body $x_1 < x_2 < x_3$ z intervalu I. Díky Lagrangeově větě 5.2.4 existují body $c \in (x_1, x_2)$ a $d \in (x_2, x_3)$ splňující

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \quad \text{a} \quad \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(d).$$

Z předpokladu tedy obdržíme

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) < f'(d) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Dle Lemmatu 5.4.9 je tedy f ryze konvexní.

Je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in \operatorname{Int} I$, je f' rostoucí na $\operatorname{Int} I$ (Věta 5.4.7), a tedy f je ryze konvexní díky první části důkazu. ■

5.4.15. Poznámka. Obdobná tvrzení platí pro konvexitu, ryzí konkávnost a konkávnost.

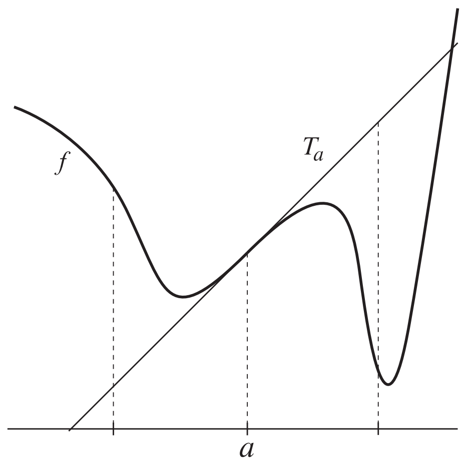
5.4.16. Definice. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě a **inflexi** (neboli že a je **inflexním bodem** funkce f), jestliže existuje vlastní $f'(a)$ a existuje $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že buď

$$\begin{aligned} &\forall x \in P_-(a, \delta) : \ f(x) > f(a) + f'(a)(x - a) \qquad \text{a} \\ &\forall x \in P_+(a, \delta) : \ f(x) < f(a) + f'(a)(x - a). \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} &\forall x \in P_-(a, \delta) : \ f(x) < f(a) + f'(a)(x - a) \qquad \text{a} \\ &\forall x \in P_+(a, \delta) : \ f(x) > f(a) + f'(a)(x - a). \end{aligned}$$

Následující obrázek ilustruje právě definovaný pojem inflexního bodu.



Obrázek 4.

5.4.17. Věta (nutná podmínka pro inflexi)**.** Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje $f''(a)$ a je různá od nuly, pak a není inflexním bodem funkce f.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $f''(a) > 0$. Z definice limity najdeme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $x \in P(a, \delta)$ platí

$$\frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} > 0.$$

Dostáváme tedy, že

$$\begin{aligned} &\forall x \in P_-(a, \delta) : \ f'(x) < f'(a) \quad \text{a} \\ &\forall x \in P_+(a, \delta) : \ f'(x) > f'(a). \end{aligned} \tag{5.38}$$

Vezměme nyní libovolné $x \in P_-(a, \delta)$. Protože f je spojitá na $B(a, \delta)$ dle Věty 5.1.15, pomocí Lagrangeovy věty 5.2.4 najdeme $c_x \in (x, a)$ splňující

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} = f'(c_x).$$

Protože $f'(c_x) < f'(a)$ z (5.38), máme $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < f'(a)$. Úpravou dostáváme $f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$.

Je-li $x \in P_+(a, \delta)$, jako výše nalezneme $d_x \in (a, x)$ splňující

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(d_x) > f'(a).$$

Tedy máme $f(x) > f(a) + f'(a)(x-a)$. Jinými slovy, bod $[x, f(x)]$ leží nad tečnou f v bodě a na levém i pravém okolí a. Tedy a není inflexním bodem f. Obdobně bychom postupovali v případě $f''(a) < 0$. ∎

5.4.18. Poznámka. Rovnost $f''(a) = 0$ ještě nezaručuje, že a je inflexním bodem f. Příkladem je funkce $f(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$. Pak $f''(0) = 0$, ale bod 0 není inflexním bodem f, protože graf funkce f leží nad tečnou v bodě 0.

5.4.19. Věta (postačující podmínka pro inflexi)**.** Nechť f má spojitou první derivaci na intervalu (a,b) a $c \in (a,b)$. Předpokládejme, že

$$\forall x \in (a,c): \ f''(x) > 0 \quad \text{a} \quad \forall x \in (c,b): \ f''(x) < 0$$

nebo

$$\forall x \in (a,c): \ f''(x) < 0 \quad \text{a} \quad \forall x \in (c,b): \ f''(x) > 0.$$

Pak c je inflexním bodem f.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že pro f platí první varianta, tj.

$$\forall x \in (a,c): \ f''(x) > 0 \quad \text{a} \quad \forall x \in (c,b): \ f''(x) < 0.$$

Z Věty 5.2.6 plyne, že f' je rostoucí na $(a,c]$ a je klesající na $[c,b)$. Pro dané $x \in (a,c)$ použijeme Lagrangeovu větu 5.2.4 k nalezení $c_x \in (x,c)$ splňujícího

$$\frac{f(c) - f(x)}{c - x} = f'(c_x) < f'(c).$$

Tedy $f(x) > f(c) + f'(c)(x-c)$.

Podobně pro $x \in (c,b)$ najdeme $d_x \in (c,x)$ splňující

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(d_x) < f'(c).$$

Úpravou obdržíme $f(x) < f(c) + f'(c)(x-c)$. Tedy c splňuje první variantu v Definici 5.4.16, tj. c je inflexním bodem f.

Obdobně bychom ověřili, že funkce s vlastností

$$\forall x \in (a,c): \ f''(x) < 0, \quad \text{a} \quad \forall x \in (c,b): \ f''(x) > 0.$$

splňuje v c druhou variantu definice inflexního bodu. Tím je důkaz dokončen. ∎

5.4.20. Příklad. Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(x) = \begin{cases} x^5 \left(2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pak f má v 0 inflexi, ale neexistuje okolí 0, kde by byly splněny předpoklady Věty 5.4.19.

Řešení. Protože $f'(0) = 0$ (viz výpočet v Příkladu 5.5.1), tečna funkce f v bodě 0 je dána jako
$$t(x) = f(0) + f'(0)x = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Je-li $x < 0$, pak $f(x) < 0 = t(x)$, pro $x > 0$ máme $f(x) > 0 = t(x)$. Tedy f má v 0 inflexní bod.

Na druhou stranu,
$$f'(x) = \begin{cases} 10x^4 + 5x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$
a
$$f''(x) = \begin{cases} x\Big(20x^2(2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)) + 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\Big), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
Označíme-li
$$g(x) = 20x^2\Big(2 + \sin\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big) + 2x \cos\Big(\frac{1}{x}\Big), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$
pak $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ dle Věty 4.2.15. Tedy výraz $g(x) - \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ nabývá kladných i záporných hodnot na libovolném okolí 0. Protože
$$f''(x) = x\Big(g(x) - \sin\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big), \quad x \neq 0,$$
nabývá druhá derivace f kladné i záporné hodnoty na libovolném okolí bodu 0. ♣

5.4.21. Definice. Nechť f je reálná funkce definovaná na nějakém okolí bodu ∞. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě ∞ **asymptotu** $ax + b$, jestliže
$$\lim_{x\to\infty} \big(f(x) - ax - b\big) = 0. \tag{5.39}$$
Obdobně definujeme asymptotu v bodě $-\infty$.

5.4.22. Věta (tvar asymptoty)**.** Funkce f má v bodě ∞ asymptotu $ax + b$ právě tehdy, když
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}. \tag{5.40}$$
Obdobné tvrzení platí pro asymptotu v bodě $-\infty$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme nejprve, že funkce $x \mapsto ax + b$ je asymptotou funkce f v ∞, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Pak plyne z předpokladu a Věty 4.2.2
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - ax - b}{x} + \lim_{x\to\infty} \Big(a + \frac{b}{x}\Big) = a,$$

a

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax-b)+\lim_{x\to\infty}b=b.$$

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že funkce $x\mapsto ax+b$ splňuje (5.40). Pak

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax-b)=b-b=0.$$

Tedy $x\mapsto ax+b$ je asymptotou funkce f v ∞. ■

5.4.23. Příklady. 1. Funkce e^x má v $-\infty$ asymptotu $x\mapsto 0$ a v bodě ∞ asymptotu nemá, neboť první limita ve Větě 5.4.22 je nevlastní.

2. Funkce $f(x)=\sqrt{2x^2+x+1}$ má v bodě ∞ asymptotu $x\mapsto\sqrt{2}x+\frac{1}{2\sqrt{2}}$. To plyne z

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+x+1}}{x}=\sqrt{2}$$

a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\bigl(f(x)-\sqrt{2}x\bigr)&=\lim_{x\to\infty}\bigl(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}x\bigr)\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2}x}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

3. Funkce tangens nemá v bodě ∞ asymptotu, protože není definovaná na žádném jeho okolí.

4. Funkce sinus nemá v bodě ∞ asymptotu, ačkoli první z obou limit ve Větě 5.4.22 existuje a je rovna nule, neexistuje však limita $\lim_{x\to\infty}(f(x)-0\cdot x)$.

5.4.24. Při *vyšetřování průběhu funkce* získáváme zejména následující informace:

- definiční obor, spojitost, limity v krajních bodech a limity v bodech nespojitosti,
- eventuální speciální vlastnosti, např. sudost, lichost nebo periodicita,
- definiční obor derivace, derivace a eventuální jednostranné derivace,
- intervaly monotonie a extrémy (lokální i globální),
- obor hodnot,
- definiční obor druhé derivace, druhá derivace, konvexita a konkávnost, inflexní body,
- asymptoty,
- náčrt grafu funkce.

5.4.25. Příklad. Vyšetřete průběh funkce $f(x)=\arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$.

Řešení. Podívejme se nejdříve na funkci

$$g(x) = \frac{2x}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a funkce g má vlastní první i druhou derivaci v každém bodě $x \in \mathbb{R}$. Zřejmě

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0, \tag{5.41}$$

g je lichá a kladná na $(0, \infty)$. Počítejme

$$g'(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}\left(2(x^2+1) - 4x^2\right) = \frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tedy $g' > 0$ na intervalu $(-1, 1)$ a $g' < 0$ na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$. Dle Věty 5.2.6 g roste na $[-1, 1]$ a klesá na intervalech $(-\infty, -1]$ a $[1, \infty)$. Tedy g má minimum v bodě -1 a maximum v 1. Protože $g(-1) = -1$ a $g(1) = 1$, z Věty 4.3.4 plyne $\mathcal{H}(f) = [-1, 1]$.

Jelikož $\mathcal{D}(\arcsin) = [-1, 1]$, je funkce f definovaná na $\mathbb{R}$ a je zde spojitá (jelikož g i arcsin jsou spojité, plyne tvrzení z Poznámky 4.2.22(b)). Díky (5.41) a spojitosti funkce arcsin v 0 dostáváme použitím Věty 4.2.20

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = f(0) = 0.$$

Po dosazení vidíme $f(-x) = -f(x)$, tj. f je lichá.

Při výpočtu derivace dostáváme za pomoci Věty 5.1.17 a vlastnosti (C7)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2}\right)^{-1} \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\left|1-x^2\right|}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.
\end{aligned}$$

V bodech -1 a 1 použijeme Větu 5.2.10 k odvození

$$\begin{aligned}
f'_+(1) &= \lim_{x\to1_+} f'(x) = \lim_{x\to1_+} \frac{-2}{x^2+1} = -1, \\
f'_-(1) &= \lim_{x\to1_-} f'(x) = \lim_{x\to1_-} \frac{2}{x^2+1} = 1, \\
f'_+(-1) &= \lim_{x\to-1_+} f'(x) = \lim_{x\to-1_+} \frac{2}{x^2+1} = 1, \\
f'_-(-1) &= \lim_{x\to-1_-} f'(x) = \lim_{x\to-1_-} \frac{-2}{x^2+1} = -1.
\end{aligned}$$

Tedy derivace v bodech -1 a 1 neexistuje.

Máme $f' > 0$ na $(-1, 1)$ a $f' < 0$ na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$. Z Věty 5.2.6 plyne, že f roste na $[-1, 1]$ a klesá na intervalech $(-\infty, -1]$ a $[1, \infty)$. Dále, f má maximum v bodě 1 a minimum v bodě -1, přičemž $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$ a $f(1) = \frac{\pi}{2}$. Díky spojitosti funkce f dostáváme za použití Věty 4.3.4 $\mathcal{H}(f) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Počítáme-li druhou derivaci, dostáváme

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-4x}{(x^2+1)^2}, & x \in (-1, 1), \\ \frac{4x}{(x^2+1)^2}, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty). \end{cases}$$

Tedy $f''(x) = 0$ právě v bodě $x = 0$, $f'' > 0$ na $(-1, 0) \cup (1, \infty)$ a $f'' < 0$ na $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$. Z Věty 5.4.14 odvodíme, že f je ryze konvexní na intervalech $[-1, 0]$ a $[1, \infty)$ a je ryze konkávní na intervalech $(-\infty, -1]$ a $[0, 1]$. Dále má f v 0 inflexní bod dle Věty 5.4.19.

Pro výpočet asymptot můžeme použít Větu 5.4.22, což dává

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

a

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - 0 \cdot x = \lim_{x\to-\infty} f(x) - 0 \cdot x = 0.$$

Tedy přímka $t(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, je asymptotou funkce f v ∞ i $-\infty$.

Nyní již zbývá pouze načrtnout graf funkce f. ♣

5.5. Teoretické příklady k derivaci funkce

5.5.1. Příklad. Definujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pak $f'(x)$ existuje vlastní pro každé $x \in \mathbb{R}$, ale funkce f' není spojitá v 0.

Řešení. V každém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ spočteme derivaci dle Věty 5.1.17 jako

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

V bodě 0 vyjde

$$f'(0) = \lim_{x\to0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

dle Věty 4.2.15. Podíváme-li se na posloupnost

$$a_n = \frac{1}{2\pi n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

konverguje tato posloupnost k 0, ale

$$\lim_{n\to\infty} f'(a_n) = \lim_{n\to\infty} (-\cos(2\pi n)) = -1.$$

Tedy dle Heineovy věty (Věta 4.2.16) není pravda, že $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$, tj. f' není spojitá v bodě 0. ♣

5.5.2. Příklad. Pro funkci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

platí

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \tag{5.42}$$

a tedy f má v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Funkce f však není omezená shora ani zdola na žádném okolí bodu 0.

Řešení. Obdobně jako v Příkladu 5.5.1 dokážeme (5.42).

Položíme-li

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

máme $\lim a_n = 0$ a

$$\lim_{n\to\infty} f'(a_n) = \lim_{n\to\infty} \left(-2\sqrt{2\pi n}\cos(2\pi n)\right) = -\infty,$$

a tedy f' není omezená zdola na žádném okolí 0. Podobně, položíme-li

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

máme $\lim b_n = 0$ a

$$\lim_{n\to\infty} f'(b_n) = \lim_{n\to\infty} \left(-2\sqrt{(2n+1)\pi}\cos((2n+1)\pi)\right) = \infty,$$

a tedy f' není omezená shora na žádném okolí 0. ♣

5.5.3. Příklad. Nechť f je reálná funkce s definičním oborem $\mathcal{D}(f)$, pro který platí, že $-x \in \mathcal{D}(f)$, kdykoliv $x \in \mathcal{D}(f)$. Nechť $a \in \mathcal{D}(f)$ a existuje $f'_+(a)$. Pak existuje $f'_-(-a)$ a platí

$$f'_-(-a) = \begin{cases} -f'_+(a), & f \text{ je sudá}, \\ f'_+(a), & f \text{ je lichá}. \end{cases}$$

Řešení. Nechť $\delta \in (0, \infty)$ je takové, že $[a, a+\delta) \subset \mathcal{D}(f)$, a předpokládejme, že f je sudá. Pak platí $(a-\delta, a] \subset \mathcal{D}(f)$. Položme

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad x \in (a, a+\delta).$$

Pak $g(x) = \frac{f(-x)-f(-a)}{x-a}$, $x \in (a, a+\delta)$, a použitím Věty 4.2.20 dostáváme

$$\begin{aligned} f'_+(a) &= \lim_{x \to a_+} g(x) = \lim_{y \to a_-} g(-y) = \lim_{y \to a_-} \frac{f(y) - f(-a)}{-y - a} \\ &= -\lim_{y \to a_-} \frac{f(y) - f(-a)}{a - (-a)} = f'_-(-a). \end{aligned}$$

Tvrzení pro případ liché funkce se ověří obdobně. ♣

5.5.4. Příklad. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

Ukažte, že f je rostoucí v bodě 0, má vlastní derivaci pro každé $x \in \mathbb{R}$, ale není rostoucí na žádném okolí bodu 0.

Řešení. Pomocí Příkladu 5.5.1 odvodíme, že

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Z Věty 5.4.3 plyne, že f je rostoucí v bodě 0.

Definujme nyní body $x_n, y_n, n \in \mathbb{N}$, jako

$$x_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-1}, \quad y_n = \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-1}.$$

Přímočarým výpočtem se ověří, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $x_{n+1} < y_n < x_n$ a že

$$f(y_n) < f(x_n) \quad \text{a} \quad f(y_n) < f(x_{n+1}).$$

Protože posloupnosti $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ konvergují k 0, funkce f není monotónní na žádném okolí 0. ♣

5.5.5. Příklad. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left(2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ukažte, že f má v 0 ostré lokální minimum, má vlastní derivaci pro každé $x \in \mathbb{R}$, ale není monotónní na žádném jednostranném okolí bodu 0.

Řešení. Funkce f je zjevně kladná na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, a má tedy v 0 ostré (globální) minimum. Podobně jako Příkladu 5.5.1 odvodíme, že

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\left(2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Položíme-li

$$x_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-1}, \quad y_n = \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ vztahy

$$x_{n+1} < y_n < x_n, \quad f(y_n) < f(x_n) \quad \text{a} \quad f(y_n) < f(x_{n+1}).$$

Jelikož $\lim x_n = \lim y_n = 0$, funkce f není na žádném pravém okolí 0 monotónní.

Obdobně ukážeme, že f není monotónní na žádném levém okolí bodu 0. Uvažujeme-li totiž body $-x_n$ a $-y_n$ (kde x_n a y_n jsou definovány výše), platí

$$-x_n < -y_n < -x_{n+1}, \quad f(-x_n) < f(-y_n), \quad f(-x_{n+1}) < f(-y_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tím je požadované tvrzení dokázáno.

♣

5.5.6. Příklad. Nechť má funkce f v bodě a vlastní derivaci a nechť čísla $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ splňují $x_n \leq a \leq y_n$, $y_n - x_n > 0$ a $y_n - x_n \to 0$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(a).$$

Řešení. Je-li x_n nebo y_n rovno a, jedná se o derivační podíl z definice. Tedy lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že $x_n < a < y_n$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ je dáno. Protože

$$0 < a - x_n < y_n - x_n \quad \text{a} \quad 0 < y_n - a < y_n - x_n,$$

platí $x_n \to a$ a $y_n \to a$. Protože $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$, z Heineovy věty 4.2.16 najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí

$$\left|\frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a} - f'(a)\right| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \left|\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} - f'(a)\right| < \varepsilon.$$

Pro tato n_0 pak máme

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}-f'(a)\right| \\
&\quad=\left|\frac{f(y_n)-f(a)}{y_n-x_n}+\frac{f(a)-f(x_n)}{y_n-x_n}-\left(\frac{y_n-a}{y_n-x_n}+\frac{a-x_n}{y_n-x_n}\right)f'(a)\right| \\
&\quad\le\frac{y_n-a}{y_n-x_n}\left|\frac{f(y_n)-f(a)}{y_n-a}-f'(a)\right|+\frac{a-x_n}{y_n-x_n}\left|\frac{f(a)-f(x_n)}{a-x_n}-f'(a)\right| \\
&\quad\le\varepsilon\left(\frac{y_n-a}{y_n-x_n}+\frac{a-x_n}{y_n-x_n}\right) \\
&\quad=\varepsilon.
\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. ♣

5.5.7. Příklad. Nechť $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je spojitá periodická nekonstantní funkce. Pak nemá ani v ∞ ani v $-\infty$ asymptotu.

Řešení. Nechť $a>0$ je perioda funkce f, tj. $f(x)=f(x+a)$ pro každé $x\in\mathbb{R}$. Nejprve si rozmysleme, že f je omezená funkce. To plyne z faktu, že f je v absolutní hodnotě omezená na $[0,a]$ nějakou konstantou M (viz Věta 4.3.11), a tedy je omezená M i na každém intervalu tvaru $[ka,(k+1)a]$, $k\in\mathbb{Z}$.

Dostáváme proto, že

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0.$$

Předpokládáme-li nyní existenci asymptoty například v ∞, existuje $b\in\mathbb{R}$ splňující $\lim_{x\to\infty}(f(x)-b)=0$. Najdeme $x\in(0,a)$ splňující $f(x)\neq f(a)$. Z Věty 4.2.17 nyní plyne, že

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x+na)=b=\lim_{n\to\infty}f(na)=f(0),$$

což je spor. Tím je důkaz dokončen. ♣

5.5.8. Příklad. Nechť $a<c<b$ jsou čísla v $\mathbb{R}^*$ a $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ je ryze konvexní na $(a,c]$ a na $[c,b)$. Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní.

(i) Funkce f je ryze konvexní na (a,b).
(ii) Platí $f'_-(c)\le f'_+(c)$.

Dokažte též, že analogické tvrzení platí v případě, že $a,b\in\mathbb{R}$ a f je ryze konvexní na $[a,c]$ a $[c,b]$.

Řešení. Odvoďme nejprve následující pozorování.

Nechť $a < b < c$ a α, β, γ jsou reálná čísla. Nechť
$$\frac{\beta-\alpha}{b-a} < \frac{\gamma-\beta}{c-b}.$$
Pak
$$\frac{\beta-\alpha}{b-a} < \frac{\gamma-\alpha}{c-a}.$$

Abychom toto dokázali, vezměme $t \in (0,1)$ splňující $b = ta + (1-t)c$. Pak $b - a = (1-t)(c-a)$ a $c - b = t(c-a)$. Předpokládaná nerovnost tedy znamená, že
$$\frac{\beta-\alpha}{1-t} < \frac{\gamma-\beta}{t}, \quad \text{tj.} \quad t(\beta-\alpha) < \gamma-\beta. \tag{5.43}$$
Požadovaná nerovnost pak má tvar
$$\frac{\beta-\alpha}{1-t} < \frac{\gamma-\alpha}{1}, \quad \text{tj.} \quad \beta-\gamma < t(\alpha-\gamma).$$
Tato nerovnost je však zjevně ekvivalentní s nerovností (5.43).

Přistupme nyní k důkazu tvrzení. Díky Větě 5.4.10 a Poznámce 5.4.11 víme, že f má jednostranné derivace v bodě c. Položme
$$\varphi(x) = \frac{f(c)-f(x)}{c-x}, \quad x \in (a,c), \qquad \psi(y) = \frac{f(y)-f(c)}{y-c}, \quad y \in (c,b).$$
Díky Lemmatu 5.4.9 víme, že φ je rostoucí na (a,c) a ψ na (c,b). Nechť $x' \in (a,c)$ a $y' \in (c,b)$ jsou dány. Pak
$$\begin{aligned} \frac{f(c)-f(x')}{c-x'} &< \sup\{\varphi(x);\ x \in (x',c)\} = f'_-(c), \\ \frac{f(y')-f(c)}{y'-c} &> \inf\{\psi(y);\ y \in (c,y')\} = f'_+(c). \end{aligned} \tag{5.44}$$

Ověřme nyní implikaci (i) $\Longrightarrow$ (ii). Je-li f ryze konvexní na intervalu (a,b), platí podle Lemmatu 5.4.9 nerovnost
$$\forall x \in (a,c)\ \forall y \in (c,b)\colon \varphi(x) < \psi(y).$$
Tedy z Lemmatu 1.6.28 máme
$$f'_-(c) = \sup\{\varphi(x);\ x \in (a,c)\} \le \inf\{\psi(y);\ y \in (c,b)\} = f'_+(c).$$

Obráceně, nechť $f'_-(c) \le f'_+(c)$. Nechť $x < y < z$ jsou body vybrané z intervalu (a,b). Předpokládejme nejprve, že $x < y \le c < z$. Pokud $y = c$, máme díky (5.44) nerovnosti
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} < f'_-(c) \le f'_+(c) < \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

Je-li $y < c$, máme z Lemmatu 5.4.9 a

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} < \frac{f(c)-f(y)}{c-y} < f'_-(c) \leq f'_+(c) < \frac{f(z)-f(c)}{z-c}.$$

Díky pozorování ze začátku důkazu tedy platí

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} < \frac{f(z)-f(y)}{z-y}. \tag{5.45}$$

Je-li $x < c \leq y < z$, ověříme nerovnost (5.45) analogicky. V případě $x < y < z \leq c$ nebo $c \leq x < y < z$ platí nerovnost(5.45) díky předpokladu.

Tím je podle Lemmatu 5.4.9 dokázána ryzí konvexita f na (a, b).

V případě, kdy $a, b \in \mathbb{R}$ a f je ryze konvexní na $[a, c]$ a $[c, b]$, postupujeme zcela analogicky. ♣

5.5.9. Příklad. Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, kde $a \neq 0$. Pak rovnice $ax^3 + bx + cx + d = 0$ má v $\mathbb{R}$ alespoň jedno řešení.

5.5.10. Příklad. Označme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $x \in \mathbb{R}$. Pak f je spojitá funkce na $\mathbb{R}$. Předpokládáme-li, že $a > 0$, platí

$$\lim_{x\to\infty} x^3(a + bx^{-1} + cx^{-2} + dx^{-3}) = \infty$$

a

$$\lim_{x\to-\infty} x^3(a + bx^{-1} + cx^{-2} + dx^{-3}) = -\infty.$$

Podle Věty 4.3.6 je tedy $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, a proto existuje alespoň jedno $x \in \mathbb{R}$ splňující $f(x) = 0$.

Je-li $a < 0$, použijeme právě dokázané tvrzení pro funkci $-f$.

5.5.11. Příklad. Ukažte, že $3 < \pi < 4$.

Řešení. Připomeňme, že číslo π je definováno jako $\pi = 2\alpha$, kde α je jednoznačně určené reálné číslo v intervalu $(0, 2)$ splňující $\cos\alpha = 0$. Zjevně tedy $\pi < 4$. Abychom dokázali nerovnost $\pi > 3$, stačí ověřit, že $\cos(\frac{3}{2}) > 0$ (dle vlastnosti (G4) je funkce kosinus klesající na intevalu $(0, 2)$.)

Označme $\beta = \frac{3}{2}$ a $a_n = \frac{\beta^{2n}}{(2n)!}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak pro $n \geq 1$ máme $a_{n+1} \leq a_n$, a tedy dle Lemmatu 3.8.12 platí

$$\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^n a_n = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=4}^{k}(-1)^n a_n \geq 0.$$

Tedy

$$\begin{aligned}\cos\beta &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\beta^{2n}}{(2n)!} = 1-\frac{\beta^2}{2!}+\frac{\beta^4}{4!}-\frac{\beta^6}{6!}+\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^n a_n\\ &\geq \left(1-\frac{\beta^2}{2!}\right)+\frac{\beta^4}{4!}\left(1-\frac{\beta^2}{6\cdot 5}\right)\\ &= \frac{359}{5\cdot 2^{10}} > 0\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. ♣

5.5.12. Příklad. Dokažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\operatorname{arccotg}'(x) = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Řešení. Nechť $I = (0,\pi)$ a nechť $f(y) = \operatorname{cotg} y$, $y \in (0,\pi)$. Potom inverzní funkce f^{-1} je definována na $\mathbb{R}$ a splňuje $f^{-1}(x) = \operatorname{arccotg}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Pro každé $y \in (0,\pi)$ platí

$$f'(y) = \frac{-1}{\sin^2(y)} = -(1+\operatorname{cotg}^2 y),$$

a tedy f je spojitá a klesající na I. Nechť $x \in \mathbb{R}$ a $y = \operatorname{arccotg}(x)$. Potom $y \in (0,\pi)$ a $x = \operatorname{cotg}(y)$. Podle věty o derivaci inverzní funkce (Věta 5.1.26(a)) tedy pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\operatorname{arccotg}'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{-1}{1+\operatorname{cotg}^2(y)} = \frac{-1}{1+x^2},$$

což jsme chtěli dokázat. ♣

V následujícím příkladu ukážeme, že pomocí věty o derivaci inverzní funkce je možné v některých případech spočítat derivaci určité funkce ačkoli pro tuto funkci nemáme k dispozici explicitní vyjádření.

5.5.13. Příklad. Nechť funkce f je definována pro každé $x \in \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = x^3 + \sin x$. Ukažte, že f je na $\mathbb{R}$ prostá a $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$ a pro její inverzní funkci $g = f^{-1}$ spočtěte $g'(b)$ a $g''(b)$, kde $b = f(1)$.

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f'(x) = 3x^2 + \cos x.$$

Je-li $x \in [0, \frac{\pi}{2})$, platí $3x^2 + \cos x > 0$, a pro $x \in [\frac{\pi}{2}, \infty)$ máme díky Příkladu 5.5.11 a vlastnosti (G7) odhad

$$3x^2 + \cos x \geq 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \geq 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4} > 0.$$

Protože je f' sudá funkce, je $f'(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Tedy funkce f je spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$. Protože $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ a $\lim_{x\to-\infty} = -\infty$, dostáváme z Věty 4.3.4, že $\mathcal{H}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. K funkci f tedy existuje inverzní funkce $g = f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Položme $a = 1$ a $b = f(1) = 1 + \sin 1$. Podle věty o derivaci inverzní funkce (Věta 5.1.26(a)) platí

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{3 + \cos 1}.$$

Použijeme-li dále Větu 5.1.17, máme

$$g''(y) = ((f'(g(y)))^{-1})' = \frac{-f''(g(y))}{(f'(g(y)))^3}, \quad y \in \mathbb{R},$$

a tedy pro $b = 1 + \sin 1 = f(1)$ máme

$$g''(b) = \frac{\sin 1 - 6}{(3 + \cos 1)^3}.$$

♣

5.5.14. Příklad. Najděte spojitou funkci na $\mathbb{R}$, která nemá v žádném bodě vlastní derivaci.

Řešení. Nechť f_n a f jsou funkce zkonstruované v Příkladu 4.4.10. Nechť $a \in \mathbb{R}$ je libovolný bod. Ukážeme za pomoci Příkladu 5.5.6, že $f'(a)$ neexistuje vlastní. Povšimněme si nejdříve, že f_n je 4^{-n-1}-periodická a na každém intervalu, kde je afinní, má směrnici rovnou buď 1 nebo -1. Pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, najdeme jednoznačně určené $k \in \mathbb{Z}$ takové, že

$$\frac{k}{4^{n+1}} \leq a < \frac{k+1}{4^{n+1}}.$$

Položme

$$x_n = \frac{k}{4^{n+1}}, \quad y_n = \frac{k+1}{4^{n+1}}.$$

Pak pro $m \geq n$ platí

$$f_m(x_n) = f_m(y_n) = 0$$

a pro $m \in \{1, \dots, n-1\}$ je funkce f_m afinní na intervalu $[x_n, y_n]$. Tedy

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{f_m(y_n) - f_m(x_n)}{y_n - x_n}.$$

Protože je f_m afinní na $[x_n, y_n]$ se směrnicí 1 či -1, máme

$$\frac{f_m(y_n) - f_m(x_n)}{y_n - x_n} \in \{-1, 1\}, \quad m \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Proto

$$\sum_{m=1}^{n-1} \frac{f_m(y_n) - f_m(x_n)}{y_n - x_n} = \begin{cases} \text{liché celé číslo,} & \text{pokud } n \text{ je sudé,} \\ \text{sudé celé číslo,} & \text{pokud } n \text{ je liché.} \end{cases}$$

Limita $\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}$ pro n jdoucí do nekonečna tedy nemůže existovat vlastní, protože tato posloupnost nesplňuje Bolzanovu-Cauchyovy podmínku 2.4.25. Tedy dle Příkladu 4.4.10 $f'(a)$ neexistuje vlastní. ♣

5.5.15. Příklad. Nechť f je konvexní funkce na intervalu (a, b). Pak množina bodů nediferencovatelnosti funkce f je nejvýše spočetná.

Řešení. Z Věty 5.4.14 víme, že v každém bodě $x \in (a, b)$ existují vlastní jednostranné derivace a platí $f'_-(x) \leq f'_+(x)$. Ukažme nyní, že pro body $x, y \in (a, b)$, $x < y$, platí

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y).$$

K tomuto účelu vezmeme body u, v splňující $x < u < v < y$. Díky konvexitě f (viz Lemma 5.4.9) pak máme

$$\frac{f(u) - f(x)}{u - x} \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(v) - f(y)}{v - y}.$$

Tedy pro každé $v \in (x, y)$ platí dle Věty 2.2.47

$$f'_+(x) = \lim_{u \to x_+} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \leq \frac{f(v) - f(y)}{v - y}.$$

Opětovným použitím Věty 2.2.47 máme

$$f'_+(x) \leq \lim_{v \to y_-} \frac{f(v) - f(y)}{v - y} = f'_-(y).$$

Tedy jsem ukázali, že f'_- je neklesající funkce na (a, b). Podle Příkladu 4.4.3 je tedy f'_- spojitá všude na (a, b) s výjimkou nejvýše spočetné množiny D. Máme-li nyní bod $x \in (a, b) \setminus D$, platí

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq \lim_{y \to x_+} f'_-(y) = f'_-(x).$$

Odtud plyne, že $f'_-(x) = f'_+(x)$. Dle Věty 5.1.5 tudíž existuje $f'(x)$. ♣

5.5.16. Příklad. Nechť $f_a(x) = x^a \sin(\ln x) \operatorname{arctg} x$, $x \in (0, \infty)$. Zjistěte, pro která $a \in \mathbb{R}$ lze f rozšířit na celé $\mathbb{R}$ tak, aby měla všude konečnou derivaci.

Řešení. Nejprve zjistíme, pro která $a \in \mathbb{R}$ existuje vlastní limita $\lim_{x \to 0_+} f_a(x)$. Jelikož

$$f_a(x) = \sin(\ln x) \frac{\operatorname{arctg} x}{x} x^{a+1}, \quad x \in (0, \infty),$$

a sin je omezená funkce, dostáváme pro $a > -1$

$$\lim_{x\to 0_+} f_a(x) = 0.$$

Pokud $a \leq -1$, položíme $x_n = e^{\pi(\frac{1}{2}-2n)}$ a $y_n = e^{\pi(\frac{3}{2}-2n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak za pomoci Věty 2.3.25 obdržíme pro $a = -1$

$$\lim_{x\to 0_+} f_a(x_n) = 1, \quad \lim_{x\to 0_+} f_a(y_n) = -1,$$

zatímco pro $a < -1$ dostaneme

$$\lim_{x\to 0_+} f_a(x_n) = \infty, \quad \lim_{x\to 0_+} f_a(y_n) = -\infty.$$

Tedy pro $a \leq -1$ limita $\lim_{x\to 0_+} f_a(x)$ neexistuje (viz Věta 4.2.17).

Z těchto výpočtů plyne, že pro $a > -1$ lze funkci f_a dodefinovat spojitě na $\mathbb{R}$ tím, že ji na $(-\infty, 0]$ položíme rovnou 0. V případě $a \in (-\infty, -1]$ f spojitě dodefinovat v bodě 0 není možné.

Nechť f_a je pro $a > -1$ dodefinována 0 v bodě 0. Pak je spojitá zprava v bodě 0, a tedy podle Věty 5.2.10 a výše uvedených výpočtů

$$(f_a)'_+(0) = \lim_{x\to 0_+} x^{a-1} \sin(\ln x) \operatorname{arctg} x = \lim_{x\to 0_+} f_{a-1}(x)$$

existuje právě tehdy, když $a > 0$. V tom případě pak derivace funkce f_a v bodě 0 zprava existuje a je rovna 0. Dodefinujeme-li tedy f_a hodnotou 0 na intervalu $(-\infty, 0]$, dostaneme funkci s vlastní derivací na $\mathbb{R}$. ♣

Následující příklad je zobecněním Bernoulliovy nerovnosti na intervalu $(-1, \infty)$ (vizte Příklad 1.9.11).

5.5.17. Příklad. Dokažte, že pro každé $\alpha \in [1, \infty)$ a $x \in (-1, \infty)$ platí

$$(1 + x)^\alpha \geq 1 + \alpha x.$$

Řešení. Definujme pomocnou funkci $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = (1 + x)^\alpha - 1 - \alpha x.$$

Pak je f spojitá a platí

$$f'(x) = \alpha\left((1 + x)^{\alpha-1} - 1\right), \quad x \in (-1, \infty),$$

což znamená, že $f'(x) \leq 0$ pro $x \in (-1, 0)$ a $f'(x) \geq 0$ pro $x \in (0, \infty)$. Tedy f je nerostoucí na intervalu $(-1, 0]$ a neklesající na intervalu $[0, \infty)$ (vizte Větu 5.4.7). Tudíž f nabývá svého minima v bodě 0. Protože $f(0) = 0$, je f nezáporná na $(-1, \infty)$. Odtud plyne dokazovaná nerovnost. ♣

5.5.18. Příklad. Ukažte, že pro každé kladné $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, platí

$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\log b - \log a} < \frac{a+b}{2}.$$

Řešení. Předpokládejme, že $a < b$. Podělíme zadané nerovnosti číslem a a položíme $\frac{b}{a} = x$. Tím dostáváme ekvivalentní nerovnosti

$$\sqrt{x} < \frac{x-1}{\log x} < \frac{1+x}{2}, \quad x \in (1, \infty) \tag{5.46}$$

První nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$x \log^2 x < (x-1)^2, \quad x \in (1, \infty),$$

která plyne z nerovnosti

$$\log(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}, \quad x \in (0, \infty), \tag{5.47}$$

dosazením $x - 1$ za x.

Dokažme tedy (5.47). K tomuto účelu položme

$$f(x) = \log(1+x) - \frac{x}{\sqrt{1+x}}, \quad x \in [0, \infty).$$

Pak $f(0) = 0$ a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x}\left(\sqrt{1+x} - \frac{x}{2\sqrt{1+x}}\right) = \frac{2\sqrt{1+x} - 2 - x}{2(1+x)\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{2\left(\sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2})\right)}{2(1+x)\sqrt{1+x}} < 0, \quad x \in (0, \infty), \end{aligned}$$

protože pro kladná x platí $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$. Tedy je f klesající na $[0, \infty)$, a proto $f(x) < 0$ na $(0, \infty)$. Tím je (5.47) dokázáno.

Ověřme nyní druhou nerovnost v (5.46). Ta je ekvivalentní s nerovností

$$2(x-1) - (x+1)\log x < 0, \quad x \in (1, \infty). \tag{5.48}$$

Definujme funkci

$$f(x) = 2(x-1) - (x+1)\log x, \quad x \in [1, \infty).$$

Pak $f(1) = 0$ a

$$f'(x) = 2 - \frac{x+1}{x} - \log x = 1 - \frac{1}{x} - \log x, \quad x \in (1, \infty).$$

Položme

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x} - \log x, \quad x \in [1, \infty).$$

Pak $g(1) = 0$ a

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(\frac{1}{x} - 1) < 0, \quad x \in (1, \infty).$$

Funkce g je tedy klesající na $[1, \infty)$, a proto záporná na $(1, \infty)$. Tedy je i f' záporná na $(1, \infty)$. Tím pádem je ale f, jakožto klesající funkce na $[1, \infty)$, záporná na $(1, \infty)$, což dokazuje (5.48). Tím je důkaz dokončen. ♣

5.5.19. Příklad. Dokažte, že $H(\{\sin n\}) = [-1, 1]$ a $H(\{\cos n\}) = [-1, 1]$.

Důkaz. Nechť $x \in [-1, 1)$. Nalezneme $a \in [0, 1]$ takové, že $\sin(2\pi a) = x$. Položme $\alpha = \frac{1}{2\pi}$. Číslo π je iracionální (tento fakt dokážeme pomocí integrálního počtu v Příkladu 9.6.9), a tedy je i číslo α iracionální. Z Příkladu 2.5.12 tudíž vyplývá, že existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že

$$\lim_{k \to \infty} (\alpha n_k - [\alpha n_k]) = a. \tag{5.49}$$

Díky spojitosti funkce sinus dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{k \to \infty} \sin(n_k) &= \lim_{k \to \infty} \sin(2\pi\alpha n_k) = \lim_{k \to \infty} \sin(2\pi\alpha n_k - 2\pi[\alpha n_k]) \\ &= \lim_{k \to \infty} \sin(2\pi(\alpha n_k - [\alpha n_k])) = \sin(2\pi a) = x. \end{aligned}$$

Protože $x \in [-1, 1]$ bylo zvoleno libovolně a inkluze $[-1, 1] \subset H(\{\sin n\})$ je zřejmá, plyne odtud, že $H(\{\sin n\}) = [-1, 1]$. Tvrzení týkající se hromadných bodů posloupnosti $\{\cos n\}$ je možné dokázat obdobně. ■

5.5.20. Příklad. Nechť D je nekonečná spočetná podmnožina $(0, 1)$. Najděte spojitou konvexní funkci na $[0, 1]$, která nemá derivaci právě v bodech množiny D.

Řešení. Očíslujme množinu D jako $D = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ a definujme pro $n \in \mathbb{N}$ funkci $f_n(x) = |x - x_n|$, $x \in [0, 1]$. Pak funkce f_n má následující vlastnosti:

(a) z trojúhelníkové nerovnosti plyne $|f_n(x) - f_n(y)| \le |x - y|$, $x, y \in [0, 1]$,

(b) f_n je zjevně konvexní,

(c) $(f_n)'_-(x_n) = -1$, $(f_n)'_+(x_n) = 1$ a f_n' je vlastní na $(0, 1) \setminus \{x_n\}$,

(d) f_n je omezená na $[0, 1]$ číslem 1.

Položme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x), \quad x \in [0, 1].$$

Díky vlastnosti (d) je f dobře definovaná funkce na $[0, 1]$, neboť definující řada je absolutně konvergentní. Dále se jednoduše z definice ověří pomocí (b), že f je konvexní.

Zafixujme si index $j \in \mathbb{N}$ a ukažme, že $f'_+(x_j) > f'_-(x_j)$. K tomuto účelu najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{1}{4\cdot 2^j}$. Pak $n_0 > j$. Z vlastnosti (a) dostáváme pro $h > 0$ splňující $x_j + h \in (0, 1)$ odhad

$$\begin{aligned}\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{f_n(x_j+h)-f_n(x_j)}{h}\right) &\geq -\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left|\frac{f_n(x_j+h)-f_n(x_j)}{h}\right| \\ &\geq -\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} > -\frac{1}{4\cdot 2^j}.\end{aligned}$$

Derivace zprava funkce f existuje díky její konvexitě, a tak můžeme odhadovat

$$\begin{aligned} f'_+(x_j) &= \lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h}(f(x_j+h)-f(x_j)) = \lim_{h\to 0_+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\frac{f_n(x_j+h)-f_n(x_j)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0_+}\Bigg(\sum_{n\in\{1,\dots,n_0\}\setminus\{j\}} \frac{1}{2^n}\frac{f_n(x_j+h)-f_n(x_j)}{h} + \frac{1}{2^j}\frac{f_j(x_j+h)-f_j(x_j)}{h} \\ &\quad + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\frac{f_n(x_j+h)-f_n(x_j)}{h}\Bigg) \\ &\geq \lim_{h\to 0_+}\Bigg(\sum_{n\in\{1,\dots,n_0\}\setminus\{j\}} \frac{1}{2^n}\frac{f_n(x_j+h)-f_n(x_j)}{h} + \frac{1}{2^j}\frac{f_j(x_j+h)-f_j(x_j)}{h} \\ &\quad - \frac{1}{4\cdot 2^j}\Bigg) \\ &= \sum_{n\in\{1,\dots,n_0\}\setminus\{j\}} \frac{1}{2^n} f'_n(x_j) + \frac{1}{2^j}(f_j)'_+(x_j) - \frac{1}{4\cdot 2^j} \\ &= \sum_{n\in\{1,\dots,n_0\}\setminus\{j\}} \frac{1}{2^n} f'_n(x_j) + \frac{1}{2^j} - \frac{1}{4\cdot 2^j} \\ &= \sum_{n\in\{1,\dots,n_0\}\setminus\{j\}} \frac{1}{2^n} f'_n(x_j) + \frac{3}{4\cdot 2^j}. \end{aligned}$$

(Připomeňme, že funkce f_i, $i \in \{1, \dots, n_0\} \setminus \{j\}$, mají v bodě x_j vlastní derivaci.)

Obdobně odvodíme, že

$$f'_-(x_j) \leq \sum_{n\in\{1,\dots,n_0\}\setminus\{j\}} \frac{1}{2^n} f'_n(x_j) - \frac{3}{4\cdot 2^j}.$$

Tedy $f'_+(x_j) > f'_-(x_j)$, a tedy derivace f v bodě x_j neexistuje.

Ukažme nyní, že v bodě $x \in (0,1) \setminus D$ derivace f existuje vlastní. K tomu stačí dokázat, že $f'_+(x) \le f'_-(x)$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, je dáno. Najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Jako výše pak máme pro $h > 0$ splňující $x + h \in (0,1)$ odhad

$$\left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \right| \le \varepsilon.$$

Tedy

$$\begin{aligned}
f'_+(x) &= \lim_{h \to 0_+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0_+} \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \\
&\le \lim_{h \to 0_+} \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} + \varepsilon \\
&= \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} \left(\lim_{h \to 0} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \right) + \varepsilon \\
&= \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} f'_n(x) + \varepsilon,
\end{aligned}$$

protože f_n jsou v x diferencovatelné. Obdobně obdržíme

$$f'_-(x) \ge \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} f'_n(x) - \varepsilon.$$

Protože ε bylo libovolné, máme požadovaný odhad $f'_+(x) \le f_-(x)$. ♣

5.5.21. Příklad. Pro každé $x \in (0, \infty)$ platí

$$\frac{x-1}{x} \le \log x \le x - 1 \tag{5.50}$$

(viz 1.8.15). Rovnosti v (5.50) navíc platí právě tehdy, když $x = 1$.

Řešení. Označme

$$f(x) = \log x - \frac{x}{x-1}, \quad x \in (0, \infty).$$

Pak

$$f'(x) = \frac{x-1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x \in (1, \infty).$$

Tedy f klesá na $(0, 1]$ a roste na $[1, \infty)$. Má tedy v bodě 1 globální minimum. Vzhledem k tomu, že $f(1) = 0$, dostáváme první nerovnost v (5.50). Navíc $f(x) = 0$, tj. v první nerovnosti v (5.50) platí rovnost, právě tehdy, když $x = 1$.

Abychom dokázali druhou nerovnost, položme

$$g(x) = x - 1 - \log x, \quad x(0, \infty).$$

Protože

$$g'(x) = \frac{x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow x \in (1, \infty),$$

funkce g roste na $[1, \infty)$ a klesá na $(0, 1]$. Má tedy v bodě 1 minimum. Jelikož $g(1) = 0$, je funkce g kladná na $(0, \infty) \setminus \{1\}$. Tím je dokázána druhá nerovnost (5.50). ♣

5.5.22. Příklad. Nechť $a \in \mathbb{R}$ a

$$f_a(x) = ax^2, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \log x, \quad x \in (0, \infty).$$

Zjistěte, pro která a existuje bod $z \in (0, \infty)$, ve kterém mají funkce f a g společnou tečnu.

Řešení. Zřejmě pro $x \in (0, \infty)$ platí $f_a'(x) = 2ax$ a $g'(x) = \frac{1}{x}$. Mají-li mít funkce f_a a g v bodě $z \in (0, \infty)$ společnou tečnu, musí platit $2az = f_a'(z) = g'(z) = \frac{1}{z}$. Pro $a \in (\infty, 0]$ takový bod zjevně neexistuje. Je-li $a > 0$, požadovaná rovnost platí pro $z = (2a)^{-\frac{1}{2}}$. Společnou tečnu pak tyto funkce budou mít v případě

$$\frac{1}{2} = f_a((2a)^{-\frac{1}{2}}) = g((2a)^{-\frac{1}{2}}) = \log(2a)^{-\frac{1}{2}}.$$

To nastává v případě $a = (2e)^{-1}$. Společná tečna v bodě $\sqrt{e}$ má pak tvar

$$t(x) = \frac{1}{2} + e^{-\frac{1}{2}}(x - \sqrt{e}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

5.5.23. Příklad. Označme

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pak $\{a_n\}$ je klesající posloupnost kladných čísel s kladnou limitou. Ta se obvykle značí γ a nazývá **Eulerovou konstantou**.

Řešení. Položme

$$b_n = 1 + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n + 1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pak platí pro každé $n \in \mathbb{N}$:

- $b_n < a_n$ (to je zřejmé, jelikož logaritmus je rostoucí funkce),
- $a_{n+1} < a_n$ (tato nerovnost je ekvivalentní nerovnosti $\frac{1}{n+1} < \log(1+\frac{1}{n})$, která plyne z první nerovnosti v (5.50)),
- $b_{n+1} > b_n$ (tato nerovnost je ekvivalentní nerovnosti $\log(1+\frac{1}{n+1}) < \frac{1}{n+1}$, která plyne z druhé nerovnosti v (5.50)),
- b_n je kladné (to plyne z druhé nerovnosti v (5.50), neboť

$$\log(n+1) = \sum_{k=1}^{n}(\log(k+1) - \log k) = \sum_{k=1}^{n}\log(1+\frac{1}{k})$$
$$< \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}).$$

Tedy máme

$$0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_n < a_n < \cdots a_2 < a_1, \quad n \in \mathbb{N},$$

a zřejmě

$$\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = \lim_{n\to\infty} \log(1+\frac{1}{n}) = 0.$$

Z těchto faktů již plyne požadovaný závěr dle Vět 2.4.1 a 2.2.45. ♣

5.5.1. Hyperbolické funkce.

5.5.24. Definice. Hyperbolické funkce hyperbolický sinus, **hyperbolický kosinus**, **hyperbolický tangens**, **hyperbolický kotangens** definujeme následujícím způsobem

$$\begin{aligned}
\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, && x \in \mathbb{R},\\
\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, && x \in \mathbb{R},\\
\operatorname{tgh} x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}, && x \in \mathbb{R},\\
\operatorname{cotgh} x &= \frac{\cosh x}{\sinh x}, && x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.
\end{aligned}$$

Vlastnosti hyperbolických funkcí

(H1) Platí

$$\begin{aligned}
\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh x + \cosh x \sinh y, \quad x \in \mathbb{R},\\
\cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y, \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Plyne dosazením do vzorců, například první identita se odvodí pomocí

$$\begin{aligned}\sinh x \cosh x + \cosh x \sinh y &= \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y})}{4} + \frac{(e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4} \\ &= \frac{1}{4}(2e^{x+y} - 2e^{-x-y}) = \sinh(x+y).\end{aligned}$$

(H2) Funkce sinh je lichá, cosh je sudá a obě jsou spojité na $\mathbb{R}$.

Plyne z definice.

(H3) Platí $(\sinh)' = \cosh$ a $(\cosh)' = \sinh$ na $\mathbb{R}$.

Z definice máme

$$\sinh' x = \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(H4) Platí $\sinh 0 = 0$ a $\cosh 0 = 1$. Dále platí $\lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} \sinh x = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} \cosh x = \infty$, $\lim_{x\to\infty} \cosh x = \infty$.

Z definice máme první část tvrzení. Dále platí

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -\infty$$

díky větě o aritmetice limit (Věta 4.2.2). Ostatní limity se spočtou obdobně.

(H5) Funkce sinh roste na $\mathbb{R}$, cosh roste na $[0,\infty)$ a klesá na $(-\infty, 0]$.

Protože díky (H3) platí $(\sinh)' = \cosh$, což je podle definujícího vzorce kladná funkce na $\mathbb{R}$, je sinh rostoucí na $\mathbb{R}$. Dále máme $(\cosh)' = \sinh$. Ale sinh je rostoucí a $\sinh 0 = 0$. Tedy sinh je záporná na $(-\infty, 0)$ a kladná na $(0,\infty)$. Proto je cosh klesající na $(-\infty, 0]$ a rostoucí na $[0,\infty)$ (viz Věta 5.2.6).

(H6) Platí $\mathcal{H}(\sinh) = \mathbb{R}$ a $\mathcal{H}(\cosh) = [1,\infty)$.

Tvrzení plyne z (H4), (H5), spojitosti obou funkcí a Bolzanovy věty o nabývání mezihodnot (viz Věta 4.3.4).

(H7) Platí $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Dosazením z definice máme

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}\left((e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2\right) = 1.$$

(H8) Funkce tgh a cotgh jsou liché a na svých definičních oborech spojité.

Plyne z definice a Věty 4.2.5.

(H9) Platí $\operatorname{tgh} 0 = 0$, $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{tgh} x = -1$, $\lim_{x\to\infty} \operatorname{tgh} x = 1$, $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{cotgh} x = -1$, $\lim_{x\to0_-} \operatorname{cotgh} x = -\infty$, $\lim_{x\to0_+} \operatorname{cotgh} x = \infty$, $\lim_{x\to\infty} \operatorname{cotgh} x = 1$.

Dosazením obdržíme $\operatorname{tgh} 0 = 0$. Dále platí

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1.$$

Ostatní limity spočteme analogicky.

(H10) Platí $(\operatorname{tgh})' = \frac{1}{\cosh^2}$ a $(\operatorname{cotgh})' = \frac{-1}{\sinh^2}$ na $\mathbb{R}$.

Z (H3) a (H7) máme

$$(\operatorname{tgh})' = \left(\frac{\sinh}{\cosh}\right)' = \frac{1}{\cosh^2}(\cosh^2 - \sinh^2) = \frac{1}{\cosh^2}.$$

Obdobně se ověří druhé tvrzení.

(H11) Funkce tgh roste na $\mathbb{R}$, cotgh klesá na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

Tvrzení plyne z (H10) a Věty 5.2.6.

(H12) Platí $\mathcal{H}(\operatorname{tgh}) = (-1, 1)$ a $\mathcal{H}(\operatorname{cotgh}) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Tvrzení plyne z (H11), (H9) a spojitosti obou funkcí.

5.6. Početní příklady k derivaci funkce

5.6.1. Limity funkcí.

5.6.1. Příklad. Dokažte, že

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Řešení. Z vlastnosti sinu (G5) víme, že $\sin'(0) = 1$. Dále platí $\sin 0 = 0$ (viz (G4)). Tedy z Definice 5.1.1 plyne

$$1 = \sin'(0) = \lim_{x\to0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x}.$$

♣

5.6.2. Příklad. Spočtěte $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$.

Řešení. Upravíme
$$\frac{\sin 5x}{x} = 5\frac{\sin 5x}{5x}.$$
Položme
$$f(y) = \frac{\sin y}{y},\ y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad g(x) = 5x, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Nechť dále
$$c = 0, D = 0, A = 1.$$
Pak
$$\lim_{x\to c} g(x) = D, \quad \lim_{y\to D} f(y) = A$$
a pro libovolné $\eta \in (0, \infty)$
$$g(x) \neq D, \quad x \in P(c, \eta).$$
Z Věty 4.2.20(P) a Příkladu 5.6.1 tedy plyne, že
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = \lim_{x\to c} (f \circ g)(x) = A = 1.$$
Z Věty 4.2.2 máme
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x\to 0} 5\frac{\sin 5x}{5x} = 5.$$
♣

5.6.3. Příklad. Dokažte, že
$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$
Řešení. Upravme
$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - \cos x}{x^2}\frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}\frac{1}{1 + \cos x} = \frac{\sin^2 x}{x^2}\frac{1}{1 + \cos x}.$$
Jelikož kosinus je spojitá funkce (viz (G13)) a $\cos 0 = 1$ (viz (G6)), plyne z Příkladu 5.6.1 a Věty 4.2.2 rovnost
$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$
♣

5.6.4. Příklad. Spočtěte limitu
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}}.$$

Řešení. Upravíme zadaný výraz

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}} &= \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}\,\frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}\\
&= \frac{x^2}{1-\cos x+x\sin x}\left(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}\right)\\
&= \frac{1}{\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\sin x}{x}}\left(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}\right)
\end{aligned}
$$

Pomocí Příkladů 5.6.1 a 5.6.3 dostáváme díky Větě 4.2.2 rovnost

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}} = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}\cdot(1+1) = \frac{4}{3}.$$

♣

5.6.5. Příklad. Dokažte, že

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1, \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1} = 1.$$

Řešení. Protože $\exp'(0) = \exp(0) = 1$ (vlastnosti (E2) a (E3)), platí dle Definice 5.1.1 rovnost

$$1 = \exp'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-\exp(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}.$$

Obdobně dostaneme z vlastnosti logaritmu (L7) rovnost

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-\log(1+0)}{x-0} = \big(\log(1+x)\big)'_{x=0}\\
&= \left(\frac{1}{1+x}\right)_{x=0} = 1.
\end{aligned}
$$

Dále položme

$$f(y) = \frac{\log(1+y)}{y},\ y\in(-1,\infty)\setminus\{0\}, \quad g(x) = x-1,\ x\in\mathbb{R},$$

a

$$c = 1, D = 0, A = 1.$$

Pak

$$\lim_{x\to c} g(x) = D, \quad \lim_{y\to D} f(y) = 1$$

a $g(x)\neq D$ pro $P(c,1)$. Tedy z Věty 4.2.20(P) plyne

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1} = \lim_{x\to 1}(f\circ g)(x) = A = 1.$$

♣

5.6.6. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{x}.$$

Řešení. Upravíme

$$\frac{\log(1+\sin x)}{x} = \frac{\log(1+\sin x)}{\sin x}\frac{\sin x}{x}.$$

Pro $x \in P(0,\pi)$ platí $\sin x \neq 0$, a tedy je splněna podmínka (P) Věty 4.2.20. Proto

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

♣

5.6.7. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}.$$

Řešení. Funkci v zadané limitě upravíme na

$$\frac{\log(\cos x)}{x^2} = \frac{\log(1+(\cos x-1))}{\cos x - 1}\frac{\cos x - 1}{x^2}.$$

Protože $\cos x - 1 \neq 0$ pro $x \in P(0, \frac{\pi}{2})$, z Vět 4.2.20(P) a 4.2.2 máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+(\cos x-1))}{\cos x - 1} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

♣

5.6.8. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - x).$$

Řešení. Pišme

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - x) &= \frac{\sin 2x}{\cos(\frac{\pi}{4} - x)} \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - x)}{\frac{\pi}{4} - x} \cdot \frac{\frac{\pi}{4} - x}{\cos 2x} \\ &= \frac{\sin 2x}{\cos(\frac{\pi}{4} - x)} \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - x)}{\frac{\pi}{4} - x} \cdot \frac{\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - 2x)}{\sin(\frac{\pi}{2} - 2x)}.\end{aligned} \tag{5.51}$$

Položíme-li ve Větě 4.2.20(P) $f(y) = \frac{\sin y}{y}$, $g(x) = \frac{\pi}{4} - x$ (respektive $g(x) = \frac{\pi}{2} - 2x$) a

$$c = \frac{\pi}{4}, D = 0, A = 1,$$

dostaneme
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(\frac{\pi}{4}-x)}{\frac{\pi}{4}-x} = 1 = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-2x)}{\frac{\pi}{2}-2x}$$
(platí $\frac{\pi}{4}-x \neq 0$ pro $x \in P(\frac{\pi}{4},1)$ a $\frac{\pi}{2}-2x \neq 0$ pro $x \in P(\frac{\pi}{4},1)$). Tedy máme z (5.51)
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-x) = \frac{1}{1}\cdot 1\cdot \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

♣

5.6.9. Příklad. Spočtěte
$$\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x-a}.$$

Řešení. Aby zadaný výpočet měl smysl, je třeba předpokládat, že $a \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Upravíme zadaný výraz na
$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x-a} &= \frac{\sin x\cos a - \sin a\cos x}{\cos x\cos a(x-a)} = \frac{\sin(x-a)}{\cos x\cos a(x-a)}\\ &= \frac{1}{\cos x\cos a}\cdot\frac{\sin(x-a)}{x-a}.\end{aligned}$$
Tedy
$$\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x-a} = \frac{1}{\cos^2 a}.$$
Povšimněme si, že zadaná limita je rovna $\operatorname{tg}'(a)$, a tedy jsme znovu ověřili vzorec (G17). ♣

5.6.10. Příklad. Spočtěte
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}.$$

Řešení. Pišme
$$\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x} = \frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{1-\cos x}. \tag{5.52}$$
Dále máme
$$\begin{aligned}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{x^2} &= \frac{1-\cos x}{x^2} + \cos x\left(\frac{1-\cos 2x\cos 3x}{x^2}\right)\\ &= \frac{1-\cos x}{x^2} + \cos x\left(\frac{1-\cos 2x}{x^2} + \cos 2x\frac{1-\cos 3x}{x^2}\right)\\ &= \frac{1-\cos x}{x^2} + \cos x\left(\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}4 + \cos 2x\frac{1-\cos 3x}{(3x)^2}9\right).\end{aligned}$$

Tedy
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x \cos 2x \cos 3x}{x^2} = \frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} + 9\frac{1}{2} = 7.$$
Z (5.52) máme
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x \cos 2x \cos 3x}{1-\cos x} = 7\cdot 2 = 14.$$

♣

5.6.11. Příklad. Spočtěte limitu
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}.$$

Řešení. Upravme zadaný výraz na
$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})} &= \frac{x-\frac{\pi}{3}}{\sin(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{6})}\cdot\frac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{x-\frac{\pi}{3}}\\ &= \frac{x-\frac{\pi}{3}}{\sin(\frac{\pi}{3}-x)}\cdot\frac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{x-\frac{\pi}{3}}.\end{aligned} \tag{5.53}$$

Protože
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{x-\frac{\pi}{3}} = 1,$$
konverguje první část výrazu v (5.53) k -1.

Dále máme
$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{x-\frac{\pi}{3}} &= \frac{\sin x}{\cos^3 x}\cdot\frac{\sin^2 x - 3\cos^2 x}{x-\frac{\pi}{3}}\\ &= \frac{\sin x}{\cos^3 x}\cdot\frac{4\sin^2 x - 3}{x-\frac{\pi}{3}}\\ &= \frac{\sin x}{\cos^3 x}\cdot\frac{(2\sin x-\sqrt{3})(2\sin x+\sqrt{3})}{x-\frac{\pi}{3}}\\ &= \frac{\sin x}{\cos^3 x}\cdot 2\frac{(\sin x-\sin\frac{\pi}{3})(2\sin x+\sqrt{3})}{x-\frac{\pi}{3}}.\end{aligned} \tag{5.54}$$

Protože
$$\frac{\sin x - \sin\frac{\pi}{3}}{x-\frac{\pi}{3}} = \frac{\cos(\frac{1}{2}(x+\frac{\pi}{3}))\sin(\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{3}))}{\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{3})},$$
dostáváme
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sin\frac{\pi}{3}}{x-\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Z (5.53) a 5.54 pak máme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})} &= -1\cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{x-\frac{\pi}{3}}\\ &= -1\cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(\frac{1}{2})^3}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(2\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\right)\\ &= -24.\end{aligned}$$

♣

5.6.12. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}.$$

Řešení. Nejprve upravíme

$$\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x}) = -2\sin\frac{xe^x-xe^{-x}}{2}\sin\frac{xe^x+xe^{-x}}{2}.$$

Dále

$$\begin{aligned}&\frac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}\\ &= -2\frac{\sin\frac{xe^x-xe^{-x}}{2}}{\frac{xe^x-xe^{-x}}{2}}\frac{\sin\frac{xe^x+xe^{-x}}{2}}{\frac{xe^x+xe^{-x}}{2}}\frac{xe^x-xe^{-x}}{2x^2}\frac{xe^x+xe^{-x}}{2x} \qquad (5.55)\\ &= -2\frac{\sin\frac{xe^x-xe^{-x}}{2}}{\frac{xe^x-xe^{-x}}{2}}\frac{\sin\frac{xe^x+xe^{-x}}{2}}{\frac{xe^x+xe^{-x}}{2}}\frac{e^{2x}-1}{2x}e^{-x}\frac{e^x+e^{-x}}{2}.\end{aligned}$$

Spočteme nejprve limitu prvního zlomku v (5.55). K tomu označme

$$f(y)=\frac{\sin y}{y},\quad g(x)=\frac{xe^x-xe^{-x}}{2}.$$

Pak $\lim_{y\to 0} f(y)=1$, $\lim_{x\to 0} g(x)=0$ a

$$0=g(x)=\frac{1}{2}xe^{-x}(e^{2x}-1)\Leftrightarrow x=0.$$

Předpoklad (P) Věty 4.2.20 je tak splněn pro libovolné okolí $P(0,\eta)$, a tedy

$$1=\lim_{x\to 0}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{xe^x-xe^{-x}}{2}}{\frac{xe^x-xe^{-x}}{2}}.$$

Podobně využijeme faktu, že

$$\frac{1}{2}x(e^x+e^{-x})=0\Leftrightarrow x=0,$$

k odvození rovnosti
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{xe^x+xe^{-x}}{2}}{\frac{xe^x+xe^{-x}}{2}}=1.$$
Z Věty o aritmetice limit 4.2.2 a (5.55) pak plyne
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}=-2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{2}{2}=-2.$$
♣

5.6.13. Příklad. Spočtěte limitu
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right).$$

Řešení. Pišme
$$\begin{aligned}\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}&=2\cos\frac{1}{2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})\sin\frac{1}{2}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\\&=2\cos\frac{1}{2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}.\end{aligned}\tag{5.56}$$
Funkce $\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$ konverguje k 0 pro x jdoucí do nekonečna. Ze spojitosti sinu a Věty 4.2.20(S) plyne
$$\lim_{x\to\infty}\sin\left(\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right)=0.$$
Funkce $2\cos\frac{1}{2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$ je omezená na $\mathbb{R}$, a tedy
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)=0$$
dle Věty 4.2.15. ♣

5.6.14. Příklad. Spočtěte limitu
$$\lim_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{3x}}.$$

Řešení. Dle definice mocniny a^b (viz Definice 6.1.7) platí
$$(1+4x)^{\frac{1}{3x}}=\exp\left(\frac{1}{3x}\log(1+4x)\right),\quad x\in(-\frac{1}{4},\infty)\setminus\{0\}.$$
Protože
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{3x}\log(1+4x)=\lim_{x\to 0}\frac{4}{3}\frac{\log(1+4x)}{4x}=\frac{4}{3}$$
a exp je spojitá funkce (viz (E7), z Věty 4.2.20(S) plyne
$$\lim_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{3x}}=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{3x}\log(1+4x)\right)=\exp\left(\frac{4}{3}\right).$$

♣

5.6.15. Příklad. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n .$$

Řešení. Vezměme $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a označme

$$f(x) = \left(1+\frac{a}{x}\right)^x, \quad x \in (|a|, \infty).$$

Pak f je dobře definovaná funkce splňující

$$f(x) = \exp(x\log(1+\frac{a}{x})), \quad x \in (|a|, \infty).$$

Protože

$$\lim_{x\to\infty} x\log(1+\frac{a}{x}) = \lim_{x\to\infty} a\frac{\log(1+\frac{a}{x})}{\frac{a}{x}} = a,$$

platí

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \exp(a).$$

Je-li $a = 0$, máme

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 1 = 1 = \exp(a).$$

Tedy

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \exp(a).$$

Z Heineovy věty 4.2.16 plyne, že

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \exp(a).$$

♣

5.6.16. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}(2e^x-1)^{\frac{x^2+1}{x}} .$$

Řešení. Protože

$$(2e^x-1)^{\frac{x^2+1}{x}} = \exp\left(\frac{x^2+1}{x}\log(2e^x-1)\right),$$

budeme počítat limitu $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x}\log(2e^x-1)$. Pišme

$$\frac{x^2+1}{x}\log(2e^x-1) = (x^2+1)\cdot\frac{\log(2e^x-1)}{2e^x-2}\cdot 2\cdot\frac{e^x-1}{x}.$$

Protože $\lim_{y\to 1} \frac{\log y}{y-1} = 1$ a $2e^x - 1 \neq 1$ pro $x \in P(0, 15)$, platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x} \log(2e^x - 1) = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2.$$

Ze spojitosti funkce exp dostáváme

$$\lim_{x\to 0} (2e^x - 1)^{\frac{x^2+1}{x}} = e^2.$$

♣

5.6.17. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1 + x2^x}{1 + x3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Řešení. Jako v předchozích příkladech je třeba spočítat

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \log\left(\frac{1 + x2^x}{1 + x3^x}\right).$$

Protože $\lim_{x\to 0} 1 + x3^x = 1$, existuje dle Věty 4.2.9(a) číslo $\eta \in (0, \infty)$ takové, že

$$1 + x3^x > 0, \quad x \in B(0, \eta).$$

Dále máme pro $x \in B(0, \eta)$

$$0 = \frac{1 + x2^x}{1 + x3^x} - 1 = \frac{x(2^x - 3^x)}{1 + x3^x} \Leftrightarrow x = 0.$$

Z Věty o limitě složené funkce 4.2.20(P) tedy plyne rovnost

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)}{\frac{1+x2^x}{1+x3^x} - 1} = 1.$$

Protože

$$\frac{1}{x^2} \log\left(\frac{1 + x2^x}{1 + x3^x}\right) = \frac{1}{x^2} \frac{\log\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)}{\frac{1+x2^x}{1+x3^x} - 1} \left(\frac{1 + x2^x}{1 + x3^x} - 1\right), \quad x \in P(0, \eta),$$

vyjádříme

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x^2}\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}-1\right) &= \frac{1}{x}\frac{2^x-3^x}{1+x3^x}\\
&= \frac{(e^{x\log 2}-1)-(e^{x\log 3}-1)}{x}\cdot\frac{1}{1+x3^x}\\
&= \left(\frac{e^{x\log 2}-1}{x\log 2}\log 2-\frac{e^{x\log 3}-1}{x\log 3}\log 3\right)\frac{1}{1+x3^x}.
\end{aligned}
$$

Snadno ověříme předpoklady Věty 4.2.20(P) pro okolí $P(0,\eta)$ a dostaneme tak

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}-1\right) = \log 2-\log 3 = \log\frac{2}{3}.$$

Závěr proto je

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \exp(\log\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}.$$

♣

5.6.18. Příklad. Nechť $a\in\mathbb{R}$. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}.$$

Řešení. Ze zadání zřejmě plyne, že pro existenci limity je nutné, aby $a\notin\{k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}$. Pro tato a počítejme limitu

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\log\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right).$$

Z vlastností funkce sinus víme, že existuje $\eta\in\mathbb{R}$, $\eta>0$, takové, že

$$\sin x\neq\sin a,\quad x\in P(a,\eta).$$

Pro $x\in P(a,\eta)$ pak máme

$$\frac{1}{x-a}\log\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right) = \frac{\log\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)}{\frac{\sin x}{\sin a}-1}\cdot\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\cdot\frac{1}{\sin a}.$$

Podobně jako v Příkladu 5.6.9 odvodíme, že

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a} = \cos a.$$

Z Věty 4.2.20 a 4.2.2 tak plyne

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\log\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right) = \frac{\cos a}{\sin a} = \operatorname{cotg} a.$$

Tedy
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=\exp(\operatorname{cotg} a).$$

♣

5.6.19. Příklad. Nechť $a\in\mathbb{R}$. Spočtěte
$$\lim_{n\to\infty}\cos^n\frac{a}{\sqrt{n}}.$$

Důkaz. Nechť $a\in\mathbb{R}$. Je-li $a=0$, je rovna zadaná limita 1. Nechť tedy $a\neq 1$. Protože $\lim_{x\to\infty}\frac{a}{\sqrt{x}}=0$, existuje $\eta\in(0,\infty)$ takové, že
$$\frac{a}{\sqrt{x}}\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\quad x\in P(\infty,\eta).$$

Protože $a\neq 0$, platí
$$\frac{a}{\sqrt{x}}\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\setminus\{0\},\quad x\in P(\infty,\eta).$$

Položme
$$f(x)=\left(\cos\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^x,\quad x\in P(\infty,\eta).$$

Pak
$$f(x)=\exp\left(x\log\cos\frac{a}{\sqrt{x}}\right),\quad x\in P(\infty,\eta).$$

Jelikož
$$x\log\cos\frac{a}{\sqrt{x}}=\frac{\log\cos\frac{a}{\sqrt{x}}}{\cos\frac{a}{\sqrt{x}}-1}\cdot\frac{\cos\frac{a}{\sqrt{x}}-1}{\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2\cdot x,$$

platí díky Větě 4.2.20 rovnost
$$\lim_{x\to\infty}x\log\cos\frac{a}{\sqrt{x}}=-\frac{1}{2}\cdot a^2.$$

Tedy
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\exp(-\frac{a^2}{2}).$$

Z Heineovy věty 4.2.16 nyní plyne
$$\lim_{n\to\infty}\cos^n\frac{a}{\sqrt{n}}=e^{-\frac{a^2}{2}},\quad a\in\mathbb{R}.$$

■

5.6.20. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x^2 - x + 1)}{\log(x^{10} + x + 1)}.$$

Řešení. Nejprve si uvědomíme, že

$$\lim_{x\to\infty}(x^2 - x + 1) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty}(x^{10} + x + 1) = \infty.$$

Existuje tedy $\eta \in (0, \infty)$ takové, že

$$x^2 - x + 1 > 0, \ x^{10} + x + 1 > 0, \quad x \in P(\infty, \eta).$$

Tedy je výraz v zadané limitě dobře definován na $P(\infty, \eta)$.

Pro $x \in P(\infty, \eta)$ pak máme

$$\begin{aligned} \frac{\log(x^2 - x + 1)}{\log(x^{10} + x + 1)} &= \frac{\log(x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}))}{\log(x^{10}(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}}))} \\ &= \frac{2\log x + \log(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{10\log x + \log(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}})} \\ &= \frac{2 + \frac{\log(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{\log x}}{10 + \frac{\log(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}})}{\log x}}. \end{aligned} \tag{5.57}$$

Protože je logaritmus spojitá funkce na $(0, \infty)$ (viz (L4)) a $\lim_{x\to\infty}(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) = 1$, máme z Věty 4.2.20(S)

$$\lim_{x\to\infty} \log(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) = 0.$$

Obdobně odvodíme, že

$$\lim_{x\to\infty} \log(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}}) = 0.$$

Z (5.57) pak plyne díky Větě 4.2.2 rovnost

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x^2 - x + 1}{\log(x^{10} + x + 1)} = \frac{1}{5}.$$

♣

5.6.21. Příklad. Nechť $a \in (0, \infty)$. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(a + x) + \log(a - x) - 2\log a}{x^2}.$$

Řešení. Máme

$$\frac{\log(a+x)+\log(a-x)-2\log a}{x^2} = \frac{\log\left(\frac{a^2-x^2}{a^2}\right)}{x^2} = \frac{\log\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}{-\frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{-1}{a^2}.$$

Tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(a+x)+\log(a-x)-2\log a}{x^2} = -\frac{1}{a^2}.$$

♣

5.6.22. Příklad. Nechť $a > 0$. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to a} \frac{a^x - x^a}{x-a}.$$

Řešení. Upravme zadaný výraz jako

$$\begin{aligned}
\frac{a^x - x^a}{x-a} &= \frac{1}{x-a}\left(e^{x\log a} - e^{a\log x}\right) = \frac{e^{a\log a}}{x-a}\left(e^{(x-a)\log a} - e^{a(\log x - \log a)}\right)\\
&= \frac{e^{a\log a}}{x-a}\left(e^{(x-a)\log a} - 1 + 1 - e^{a(\log x-\log a)}\right)\\
&= a^a\left(\frac{e^{(x-a)\log a}-1}{(x-a)\log a}\log a - \frac{e^{a(\log x-\log a)}-1}{a(\log x - \log a)}\cdot a\cdot \frac{\log\frac{x}{a}}{\frac{x}{a}-1}\cdot\frac{x-a}{a}\cdot\frac{1}{x-a}\right)
\end{aligned}$$

Protože je logaritmus prostá funkce (viz (L3)), $\log x \neq \log a$ pro $x \in P(a,a)$. Tedy

$$\lim_{x\to a}\frac{e^{(x-a)\log a}-1}{(x-a)\log a} = 1.$$

Obdobně odvodíme, že

$$\lim_{x\to a}\frac{e^{a(\log x-\log a)}-1}{a(\log x-\log a)} = 1, \quad \lim_{x\to a}\frac{\log\frac{x}{a}}{\frac{x}{a}-1} = 1.$$

Tedy obdržíme

$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a} = a^a\left(\log a - 1\right)$$

♣

5.6.23. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(\pi 2^x)}{\log\cos(\pi 2^x)}.$$

Řešení. Počítejme limitu
$$\lim_{y\to 2\pi} f(y),$$
kde
$$f(y)=\frac{\sin^2 y}{\log\cos y},\quad y\in P(2\pi,\frac{\pi}{2}).$$
Pak máme
$$f(y)=\frac{\sin^2 y}{(y-2\pi)^2}\cdot\frac{\cos y-1}{\log\cos y}\cdot\frac{(y-2\pi)^2}{\cos y-1}. \tag{5.58}$$
Položme
$$h(z)=\frac{\sin z}{z},\ z\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\quad g(y)=y-2\pi,\ y\in\mathbb{R}.$$
a
$$c=2\pi, D=0, A=1.$$
Protože $g(y)\neq D$ pro $y\in P(2\pi,11)$ a $\lim_{z\to D} h(z)=A$, z Věty 4.2.20(P) plyne
$$1=A=\lim_{y\to c}(h\circ g)(y)=\lim_{y\to 2\pi}\frac{\sin(y-2\pi)}{y-2\pi}=\lim_{y\to 2\pi}\frac{\sin y}{y-2\pi}.$$
Analogicky odvodíme rovnost
$$\lim_{y\to 2\pi}\frac{\cos y-1}{(y-2\pi)^2}=-\frac{1}{2}.$$
Zjevně
$$\lim_{y\to 2\pi}\frac{\cos y-1}{\log\cos y}=1.$$
Z (5.58) a Věty 4.2.2 tak plyne
$$\lim_{y\to 2\pi} f(y)=1\cdot 1\cdot(-2).$$
Nakonec označme
$$g(x)=\pi 2^x,\quad x\in\mathbb{R}.$$
Pak $g(x)\neq 2\pi$ pro $x\in P(1,1)$, a tedy z Věty 4.2.20(P) plyne
$$-2=\lim_{x\to 1}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(\pi 2^x)}{\log\cos(\pi 2^x)}.$$
♣

5.6.24. Příklad. Spočtěte limitu
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{(e^x-1)^2}.$$

Řešení. Upravíme zadaný výraz na

$$\frac{\sin x}{(e^x-1)^2} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x^2}{(e^x-1)^2} \cdot \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Označíme-li

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x^2}{(e^x-1)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

pak $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Protože

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty,$$

z jednostranné verze věty o aritmetice limit funkcí (viz Věta 4.2.2 a Poznámka 4.2.4), dostáváme

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{(e^x-1)^2} = \infty, \quad \lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{(e^x-1)^2} = -\infty.$$

Zadaná limita tedy neexistuje dle Věty 4.1.15. ♣

5.6.25. Příklad. Nechť a, b, c jsou kladná čísla. Spočtěte

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{3}(a^x + b^x + c^x)\right)^{\frac{1}{x}}$$

Řešení. Předpokládejme, že $0 < a \leq b \leq c$ a upravme zadaný výraz na

$$\left(\frac{1}{3}(a^x + b^x + c^x)\right)^{\frac{1}{x}} = a\left(\frac{1}{3}\left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^x + \left(\frac{c}{a}\right)^x\right)\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Označme $d_1 = \frac{b}{a}$, $d_2 = \frac{c}{a}$ a počítejme limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \log\left(\frac{1}{3}\left(1 + d_1^x + d_2^x\right)\right).$$

Protože $1 \leq d_1 \leq d_2$, je funkce

$$x \mapsto 1 + d_1^x + d_2^x$$

neklesající. Pokud $d_1 = d_2 = 1$, máme $a = b = c$ a zadaná limita je zjevně rovna a. Lze tedy předpokládat, že alespoň $d_2 > 1$. Pak je ale funkce

$$x \mapsto 1 + d_1^x + d_2^x$$

rostoucí na $\mathbb{R}$, a tedy platí

$$1 + d_1^x + d_2^x = 3 \Leftrightarrow x = 0.$$

Proto lze použít Větu 4.2.20(P) k odvození

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\frac{1}{3}(1+d_1^x+d_2^x)\right)}{\left(\frac{1}{3}(1+d_1^x+d_2^x)\right)-1} = 1.$$

Tím pádem máme

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \log\left(\frac{1}{3}(1+d_1^x+d_2^x)\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\frac{1}{3}(1+d_1^x+d_2^x)\right)}{\left(\frac{1}{3}(1+d_1^x+d_2^x)\right)-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{d_1^x-1}{x} + \frac{d_2^x-1}{x}\right) \\
&= \frac{1}{3}\log(d_1 d_2) \\
&= \log \sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}}.
\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}(a^x+b^x+c^x)\right)^{\frac{1}{x}} &= a\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\left(\frac{1}{3}\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^x+\left(\frac{c}{a}\right)^x\right)\right)\right) \\
&= a\exp(\log\sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}}) \\
&= \sqrt[3]{abc}.
\end{aligned}$$

♣

5.6.26. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \log(1+2^x)\log\big(1+\frac{3}{x}\big).$$

Řešení. Máme

$$\begin{aligned}
\log(1+2^x)\log(1+\frac{3}{x}) &= \big(x\log 2+\log(1+2^{-x})\big)\cdot\frac{\log(1+\frac{3}{x})}{\frac{3}{x}}\cdot\frac{3}{x} \\
&= 3\left(\log 2+\frac{\log(1+2^{-x})}{x}\right)\cdot\frac{\log(1+\frac{3}{x})}{\frac{3}{x}}.
\end{aligned}$$

Tedy z Věty 4.2.2 plyne

$$\lim_{x\to\infty}\log(1+2^x)\log(1+\frac{3}{x}) = 3\log 2.$$

♣

5.6.27. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \big((x+2)\log(x+4) - 2(x+1)\log(x+1) + x\log x\big)\,.$$

Řešení. Jelikož

$$\begin{aligned}
&(x+2)\log(x+4) - 2(x+1)\log(x+1) + x\log x\\
&\quad = x\big(\log(x+4) - 2\log(x+1) + \log x\big) + 2\big(\log(x+4) - \log(x+1)\big)\\
&\quad = x\log\frac{x(x+4)}{(x+1)^2} + 2\log\frac{x+4}{x+1}\\
&\quad = x\frac{\log\frac{x(x+4)}{(x+1)^2}}{\frac{x(x+4)}{(x+1)^2} - 1}\cdot\frac{2x-1}{(x+1)^2} + 2\log\frac{x+4}{x+1}
\end{aligned}$$

a

$$\frac{x(x+4)}{(x+1)^2} \neq 1, \quad x \in P(\infty, 1),$$

máme

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\big((x+2)\log(x+4) - 2(x+1)\log(x+1) + x\log x\big)\\
&\qquad = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2 - x}{(x+1)^2} = 2.
\end{aligned}$$

♣

5.6.28. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right).$$

Řešení. Máme

$$\lim_{y\to\frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} y\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}} \sin y\,\frac{\frac{\pi}{2} - y}{\cos y} = 1.$$

Označíme-li tedy

$$f(y) = \operatorname{tg} y\left(\frac{\pi}{2} - y\right),\ y \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad g(x) = \operatorname{arctg} x,\ x \in \mathbb{R},$$

a

$$c = \infty, D = \frac{\pi}{2}, A = 1,$$

pak z Věty 4.2.24 plyne

$$1 = A = \lim_{x\to c}(f\circ g)(x) = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right).$$

♣

5.6.29. Příklad. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} n \operatorname{arctg} \frac{1}{n(a^2+1)+a} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2n}\right)\right)^n .$$

Řešení. Nalezněme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, takové, že platí $0 < \frac{\pi}{4} - \varepsilon < \frac{\pi}{4} + \varepsilon < 1$. Protože $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x}\right) = \frac{\pi}{4}$, existuje $\eta \in (0,\infty)$ takové, že

$$\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x} \in B\left(\frac{\pi}{4},\varepsilon\right), \quad x \in P(\infty,\eta).$$

Definujme pro $x \in P(\infty,\eta)$ funkce

$$f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x(a^2+1)+a}, \quad g(x) = \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x}\right)\right)^x .$$

Jelikož

$$x(a^2+1)+a = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-a}{a^2+1},$$

existuje $\delta \in (0,\eta)$ takové, že

$$x(a^2+1)+a \neq 0, \quad x \in P(\infty,\delta)$$

Pak pro $x \in P(\infty,\delta)$ máme

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x(a^2+1)+a}}{\frac{1}{x(a^2+1)+a}} \cdot \frac{x}{x(a^2+1)+a}.$$

Protože $\lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{arctg} y}{y} = 1$ (viz (C15)), dostáváme z Věty 4.2.20

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{a^2+1}. \tag{5.59}$$

Dále máme

$$g(x) = \exp\left(x \log\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x}\right)\right)\right), \quad x \in P(\infty,\eta). \tag{5.60}$$

Jestliže $a = 0$, platí $g(x) = 1$, a tedy $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = 1$. V dalším proto předpokládejme, že $a \neq 0$. Pro $x \in P(\infty,\eta)$ platí pak $\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x} \neq 1$, a tak lze upravit argument exponenciální funkce v (5.60) takto

$$\begin{aligned}
x \log\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x}\right)\right) &= \frac{\log\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x}\right)\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x}\right)-1} \cdot x \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x}\right)} \\
&= \frac{\log\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x}\right)\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x}\right)-1} \cdot x \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{a}{2x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{a}{2x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{a}{2x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{a}{2x}}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x}\right)} \\
&= \frac{\log\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x}\right)\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x}\right)-1} \cdot \frac{\sqrt{2}x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x}\right)} \cdot \frac{\sin\frac{a}{2x}}{\frac{a}{2x}} \cdot \frac{a}{2x}.
\end{aligned}$$

Díky Větě 4.2.20 a Větě 4.2.2 dostáváme

$$\lim_{x\to\infty} x\log\Big(\operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2x}\Big)\Big) = \frac{\sqrt{2}\frac{a}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = a. \tag{5.61}$$

Kombinací (5.61) a (5.59) máme

$$\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = \frac{e^a}{a^2+1}$$

(tento vzorec platí i pro $a = 0$).

Z Heineovy věty 4.2.16 nakonec obdržíme

$$\lim_{n\to\infty} n \operatorname{arctg} \frac{1}{n(a^2+1)+a}\Big(\operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2n}\Big)\Big)^n = \frac{e^a}{a^2+1}.$$

♣

5.6.30. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1_-} \frac{\frac{\pi}{2}-\arcsin x}{\sqrt{1-x}}.$$

Řešení. Protože

$$\lim_{y\to\frac{\pi}{2}_-} \frac{1-\sin y}{\left(\frac{\pi}{2}-y\right)^2} = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}_-} \left(\frac{\cos y}{\frac{\pi}{2}-y}\right)^2 \frac{1}{1+\sin y} = \frac{1}{2},$$

máme

$$\lim_{y\to\frac{\pi}{2}_-} \frac{\frac{\pi}{2}-y}{\sqrt{1-\sin y}} = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}_-} \sqrt{\frac{\left(\frac{\pi}{2}-y\right)^2}{1-\sin y}} = \sqrt{2}.$$

Označme

$$f(y) = \frac{\frac{\pi}{2}-y}{\sqrt{1-\sin y}},\ y\in P_-(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\quad g(x)=\arcsin x,\quad x\in[-1,1],$$

a

$$c=1, D=\frac{\pi}{2}, A=\sqrt{2}.$$

Protože

$$\lim_{x\to c_-} g(x) = D,\quad g(x)<\frac{\pi}{2},\ x\in(-1,1)\quad \text{a}\quad \lim_{y\to D_-} f(y) = A,$$

z Věty 4.2.17 máme

$$\sqrt{2} = A = \lim_{x\to c_-}(f\circ g)(x) = \lim_{x\to 1_-}\frac{\frac{\pi}{2}-\arcsin x}{\sqrt{1-x}}.$$

♣

5.6.31. Příklad. Spočtěte

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right).$$

Řešení. Funkce $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ nenabývá na $P(\infty, 1)$ hodnoty 1 a

$$\lim_{y\to 1-} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin y}{\sqrt{1-y}} = \sqrt{2}$$

dle Příkladu 5.6.30. Z Věty o limitě složené funkce 4.2.24 tedy máme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}} = \sqrt{2}.$$

Dále vyjádříme

$$x\left(\sqrt{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}\right) = \frac{x}{\sqrt[4]{x^2+1}\sqrt{\sqrt{x^2+1}+x}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^2}}\sqrt{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}}.$$

Tedy

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^2}}\sqrt{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}}\right)\\
&= \sqrt{2}\cdot\frac{1}{1\cdot\sqrt{1+1}} = 1.
\end{aligned}$$

♣

5.6.2. Derivace funkce. Při výpočtu derivace dané funkce f nejprve určíme definiční obor této funkce. V těch bodech definičního oboru, ve kterých je to možné, pak vypočteme hodnotu derivace pomocí vzorců pro derivace elementárních funkcí a vět z odstavce 5.1, zejména věty o aritmetice derivací (Věta 5.1.17) a věty o derivaci složené funkce (Věta 5.1.23). V bodech definičního oboru funkce f, v nichž tento postup z nějakého důvodu selhává, se pokusíme vypočítat jednostranné derivace podle Definice 5.1.1, případně pomocí věty o limitě jednostranných derivací (Věta 5.2.10). Máme přitom na paměti, že definiční obor derivace může být vlastní podmnožinou definičního oboru funkce.

5.6.32. Příklad. Spočtěte derivaci funkce $f(x) = e^{x^2+2}$.

Řešení. Položme

$$F(x) = x^2 + 2,\ x \in \mathbb{R}, \quad \text{a} \quad G(y) = e^y,\ y \in \mathbb{R}.$$

Potom $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, neboť $f = G \circ F$. Funkce F a G mají vlastní derivace na $\mathbb{R}$, a tak snadno spočteme derivace

$$F'(y) = e^y, \quad y \in \mathbb{R},$$
$$G'(x) = (x^2+2)' = (x^2)' + 2' = 2x + 0 = 2x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Protože je G spojitá v každém bodě $\mathbb{R}$, dostaneme podle věty o derivaci složené funkce (Věta 5.1.23)

$$f'(x) = (F \circ G)'(x) = F'(G(x)) \cdot G'(x) = e^{G(x)} \cdot 2x = e^{x^2+2} \cdot 2x.$$

Definiční obor derivace funkce f je roven $\mathbb{R}$. ♣

5.6.33. Příklad. Spočítejte derivaci funkce $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.

Řešení. Platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Podle věty o derivaci součinu (Věta 5.1.17(b)) dostaneme

$$f'(x) = (x^2)'e^{-x^2} + x^2(e^{-x^2})' = 2xe^{-x^2} + x^2(e^{-x^2})'.$$

Zbylou derivaci snadno spočítáme podle věty o derivaci složené funkce (Věta 5.1.23) pro $F(y) = e^y$ a $G(x) = -x^2$, neboť podle derivace elementárních funkcí dostáváme

$$F'(y) = e^y, \qquad y \in \mathbb{R},$$
$$G'(x) = (-x^2)' = -(x^2)' = -2x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Celkově tedy

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{-x^2} + x^2(e^{-x^2})' = 2xe^{-x^2} + x^2 e^{G(x)}(-2x) \\ &= 2xe^{-x^2} + x^2 e^{-x^2}(-2x). \end{aligned}$$

Snadno určíme, že definiční obor derivace je opět celé $\mathbb{R}$. ♣

5.6.34. Příklad. Spočítejte derivaci funkce $f(x) = \log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$.

Řešení. Vzhledem k tomu, že $\mathcal{D}(\log) = (0,\infty)$, platí $x \in \mathcal{D}(f)$ právě tehdy, když $\frac{x^2-1}{x^2+1} > 0$. Vyřešením příslušné nerovnice dostáváme $\mathcal{D}(f) = (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$. Položme

$$F(y) = \log y \quad \text{a} \quad G(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

Pro derivace těchto funkcí platí

$$\begin{aligned}F'(y) &= \frac{1}{y}, \quad y \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty),\\ G'(x) &= \frac{(x^2-1)'(x^2+1)-(x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}\\ &= \frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Pomocí věty o derivaci složené funkce dostáváme pro $x \in \mathcal{D}(f)$

$$\begin{aligned}f'(x) &= F'(G(x)) \cdot G'(x) = \frac{1}{G(x)} \frac{2x(x^2+1)-(x^2+1)2x}{(x^2+1)^2}\\ &= \frac{x^2+1}{x^2-1} \frac{4x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{x^4-1}.\end{aligned}$$

Platí tedy $\mathcal{D}(f') = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Definiční obor funkce $x \mapsto \frac{4x}{x^4-1}$ je sice roven $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, nicméně definiční obor derivace je menší. ♣

5.6.35. Příklad. Spočtěte derivaci funkce $f(x) = \sqrt{1-e^{-x^2}}$.

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $1 - e^{-x^2} \geq 0$, a proto $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Derivaci funkce f v každém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ spočteme dvojnásobným užitím věty o derivaci složené funkce:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-e^{-x^2}}} \left(1-e^{-x^2}\right)' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-e^{-x^2}}} (-e^{-x^2})(-2x)\\ &= \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}.\end{aligned}$$

V bodě 0 dopočítáme jednostranné derivace přímo podle definice:

$$\begin{aligned}f'_+(0) &= \lim_{h\to0+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to0+} \frac{\sqrt{1-e^{-h^2}}-0}{h}\\ &= \lim_{h\to0+} \sqrt{\frac{e^{-h^2}-1}{-h^2}} = \sqrt{1} = 1.\end{aligned}$$

Obdobně lze spočítat derivaci zleva za použití vztahu $h = -\sqrt{h^2}$ pro $h < 0$. Dostaneme

$$f'_-(0) = \lim_{h\to0-} \frac{\sqrt{1-e^{-h^2}}-0}{h} = \lim_{h\to0-} -\sqrt{\frac{e^{-h^2}-1}{-h^2}} = -1\ .$$

Platí tedy $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(0)$ neexistuje, ale platí $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(0) = -1$. ♣

5.6.36. Příklad. Spočtěte derivaci funkce $f(x) = \min\{x, x^3\}$ v každém bodě $x \in \mathbb{R}$, ve kterém existuje. Pokud v některých bodech derivace neexistuje, vyšetřete existenci jednostranných derivací a pokud existují, spočtěte je.

Řešení. Funkci f můžeme vyjádřit ve tvaru

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{pro } x \in (-\infty, -1] \cup [0, 1], \\ x & \text{pro } x \in [-1, 0] \cup [1, \infty). \end{cases}$$

Tedy zřejmě platí

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{pro } x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1), \\ 1 & \text{pro } x \in (-1, 0) \cup (1, \infty). \end{cases}$$

Zbývá vyšetřit derivaci v bodech $x = 0, \pm 1$. Protože funkce f je spojitá v bodě -1, platí podle věty o limitě derivací (Věta 5.2.10)

$$f'_-(-1) = \lim_{x \to -1_-} 3x^2 = 3, \quad f'_+(-1) = \lim_{x \to -1_+} 1 = 1.$$

Odtud plyne, že $f'(-1)$ neexistuje. Podobně lze odvodit, že $f'(0)$ a $f'(1)$ neexistují a že platí

$$f'_-(0) = 1, \ f'_+(0) = 0, \ f'_-(1) = 3, \ f'_+(1) = 1.$$

♣

5.6.37. Příklad. Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Řešení. Zřejmě platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Pro $x \neq 0$ platí, že funkce f je na jistém okolí bodu x definována předpisem $x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Derivace v bodě je lokální pojem (Poznámka 5.1.6(e)), a proto pro $x \neq 0$ platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = (x^2)' \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x^2 \left(\sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' \\ &= 2x \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x^2 \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}. \end{aligned}$$

V bodě $x = 0$ spočteme derivaci podle definice

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{h}} - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} h \sin \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = 0. \end{aligned}$$

Poslední rovnost plyne z Věty 4.2.15, neboť funkce sinus je omezená. Platí tedy $f'(0) = 0$ a $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R}$. ♣

5.6.38. Příklad. Spočtěte derivaci funkce $f(x) = x^{\log x}$, $x \in (0, \infty)$.

Řešení. Podle definice obecné mocniny (Definice 6.1.7(c)) platí pro každé $x \in (0, \infty)$ vztah $f(x) = e^{\log x \cdot \log x} = e^{\log^2 x}$. Derivaci spočteme pomocí věty o derivování složené funkce (Věta 5.1.23), tedy

$$f'(x) = e^{\log^2 x} \cdot \left(\log^2 x\right)' = e^{\log^2 x} \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x}, \quad x \in (0, \infty).$$

Pro definiční obor derivace platí $\mathcal{D}(f') = (0, \infty)$. ♣

5.6.39. Příklad. Spočtěte derivaci funkce $f(x) = \arccos(1 - x^2)$.

Řešení. Vzhledem k tomu, že $\mathcal{D}(\arccos) = [-1, 1]$ a reálné číslo x splňuje nerovnosti

$$-1 \le 1 - x^2 \le 1$$

právě tehdy, když $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, je $\mathcal{D}(f) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Podle věty pro derivaci složené funkce (Věta 5.1.23), kterou lze použít pro každé $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{0\}$, dostáváme

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1 - (1 - x^2)^2}} (1 - x^2)' = \frac{-1}{\sqrt{2x^2 - x^4}} (-2x) \\ &= \frac{2 \operatorname{sign} x}{\sqrt{2 - x^2}}, \quad x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Funkce f je na svém definičním oboru spojitá, a proto se můžeme pokusit jednostranné limity v bodech množiny $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$ počítat jako limity jednostranných derivací podle věty o limitě derivací (Věta 5.2.10). Dostaneme tak

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{2\operatorname{sign} x}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$
$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{2\operatorname{sign} x}{\sqrt{2-x^2}} = -\sqrt{2},$$
$$f'_+(-\sqrt{2}) = \lim_{x\to -\sqrt{2}+} f'(x) = \lim_{x\to -\sqrt{2}+} \frac{2\operatorname{sign} x}{\sqrt{2-x^2}} = -\infty,$$
$$f'_-(\sqrt{2}) = \lim_{x\to \sqrt{2}-} f'(x) = \lim_{x\to \sqrt{2}-} \frac{2\operatorname{sign} x}{\sqrt{2-x^2}} = \infty.$$

Definičním oborem f' je tedy množina $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{0\}$, přičemž hodnoty jednostranných derivací ve zbývajících bodech definičního oboru f jsou uvedeny výše. ♣

5.6.40. Příklad. Dokažte, že pro všechna $x \neq 0$ platí

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} x\,.$$

Řešení. Definiční obor funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

je $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Na každém z těchto dvou intervalů platí

$$f'(x) = \left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}\left(\frac{1}{x}\right)'$$
$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}\,\frac{-1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0\,.$$

Zadaná funkce je tedy na intervalu $(0, \infty)$ konstantní podle Věty 5.2.9 a dosazením bodu $x = 1$ dostaneme

$$f(1) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2}\,.$$

Funkce f je tedy rovna $\frac{\pi}{2}$ na celém intervalu $(0, \infty)$. Analogicky dosazením bodu $x = -1$ dostaneme, že f je rovna $-\frac{\pi}{2}$ na intervalu $(-\infty, 0)$. ♣

5.6.41. Příklad. Nechť funkce f je definována na $\mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f^{(n)}(0) = 0$.

Řešení. Dokážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existuje polynom P_n takový, že

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} P_n(\frac{1}{x}) & \text{pokud } x \neq 0, \\ 0 & \text{pokud } x = 0 \end{cases}$$

(zde využíváme úmluvu $f^{(0)} = f$). Toto tvrzení zřejmě platí pro $n = 0$. Předpokládejme nyní, že platí pro nějaké $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak pro $x \neq 0$ máme

$$f^{(n+1)}(x) = \left(-\frac{1}{x^2} P_n'(\frac{1}{x}) + \frac{2}{x^3} P_n(\frac{1}{x})\right) e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Označme pro $y \in \mathbb{R}$

$$P_{n+1}(y) = -y^2 P_n'(y) + 2y^3 P_n(y).$$

Pak P_{n+1} je polynom a platí

$$f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Pišme nyní polynom P_n jako $P_n(y) = \sum_{k=0}^m a_k y^k$, kde $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$.

Pro nenulové reálné číslo x máme rovnosti

$$\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \frac{1}{x} P_n(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x^2}} = \sum_{k=0}^m a_k x^{-k-1} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Z věty o aritmetice limit (Věta 4.2.2), Příkladu 5.3.4 a věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.20(P)) tak dostáváme

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \sum_{k=0}^m a_k \left(\lim_{x \to 0} \left(x^{-k-1} e^{-\frac{1}{x^2}}\right)\right) = 0.$$

Tím je ověřen indukční krok, a tak i celé tvrzení. ♣

5.6.3. l'Hospitalovo pravidlo.

5.6.42. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg}(1 + x) - \operatorname{arctg}(1 - x)}{x}.$$

Řešení. Označme

$$f(x) = \operatorname{arctg}(1 + x) - \operatorname{arctg}(1 - x) \quad \text{a} \quad g(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$. Můžeme se tedy pokusit spočítat zadanou limitu pomocí l'Hospitalova pravidla 5.3.1. Dokážeme-li totiž existenci limity $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, můžeme z výše uvedeného l'Hospitalova pravidla usoudit na existenci limity $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$, a navíc dostaneme $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Výpočtem obdržíme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+(1+x)^2}(1+x)' - \frac{1}{1+(1-x)^2}(1-x)'}{1} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{1+(1+x)^2} - \frac{-1}{1+(1-x)^2} \right) = \frac{1}{1+1} - \frac{-1}{1+1} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Zadaná limita je tedy rovna 1. ♣

5.6.43. Příklad. Nechť $a, b \in (0, \infty)$. Spočtěte limity

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{ax}}{x^b}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\log^a x}{x^b}.$$

Řešení. Z Příkladu 5.3.4 a Věty 4.2.7 plyne, že pro každé $\alpha \in (0, \infty)$ platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \infty.$$

Máme tedy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{ax}}{(ax)^b} \cdot a^b = \infty.$$

Protože

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{(e^x)^b} = 0,$$

pomocí Věty 4.2.24 dostáváme

$$0 = \lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^a}{\left(e^{\log x}\right)^b} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log^a x}{x^b}.$$

♣

5.6.44. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Řešení. Označme $a_n = \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Pokud $\alpha \leq 0$, posloupnost $\{a_n\}$ podle Příkladu 5.6.43 a Věty 4.2.16 nekonverguje k 0, a tedy řada $\sum a_n$ diverguje. Předpokládejme tedy, že $\alpha > 0$.

Položíme-li $f(x) = \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}$, $x \in (2, \infty)$, dostaneme pro $x \in (2, \infty)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^{2\alpha}(\log x)^{2\beta}} \left[-\alpha x^{\alpha-1}(\log x)^\beta - \beta x^\alpha (\log x)^{\beta-1} x^{-1} \right] \\ &= \frac{x^{\alpha-1}(\log x)^\beta}{x^{2\alpha}(\log x)^{2\beta}} \left[-\alpha - \beta (\log x)^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Jelikož

$$\lim_{x\to\infty} \left(-\alpha - \beta(\log x)^{-1} \right) = -\alpha < 0,$$

je funkce f na jistém okolí ∞ klesající. Lze tedy k vyšetření konvergence dané řady použít kondenzační kritérium (Věta 3.2.17). Máme

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} 2^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\left(2^{\alpha-1}\right)^n n^\beta (\log 2)^\beta}.$$

Je-li $\alpha > 1$, platí

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{\left(2^{\alpha-1}\right)^n n^\beta (\log 2)^\beta}{\left(2^{\alpha-1}\right)^{n+1} (n+1)^\beta (\log 2)^\beta} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^\beta 2^{1-\alpha} = 2^{1-\alpha} < 1, \end{aligned}$$

a tedy řada $\sum 2^n a_{2^n}$ konverguje. Pokud $\alpha = 1$, řada $\sum 2^n a_{2^n}$ konverguje právě tehdy, když $\beta > 1$ (viz Větu 3.2.18).

Z výše uvedených úvah tedy vyplývá, že řada $\sum a_n$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$ a $\beta \in \mathbb{R}$, nebo když $\alpha = 1$ a $\beta > 1$. ♣

5.6.45. Příklad. Spočítejte limitu funkce

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}.$$

Řešení. Postupnou aplikací l'Hospitalova pravidla dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x + e^x \cos(x) - 1 - 2x}{3x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x + e^x \cos(x) + e^x \cos(x) - e^x \sin x - 2}{6x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2e^x \cos(x) - 2e^x \sin x}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

♣

5.6.46. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right).$$

Řešení. Zadaný výraz upravíme jako

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2\sin^2 x}=\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}. \tag{5.62}$$

Opakovanou aplikací l'Hospitalova pravidla obdržíme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}&=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x-2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos^2 x-2\sin^2 x-2}{12x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-8\cos x\sin x}{24x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{3},\end{aligned}$$

z (5.62) máme

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=-\frac{1}{3}.$$

♣

5.6.47. Příklad. Spočítejte limitu funkce

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Řešení. Máme

$$\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{x^2}\log\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)}, \tag{5.63}$$

a

$$\frac{1}{x^2}\log\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}-1\right)\frac{\log\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)}{\frac{\operatorname{arctg} x}{x}-1}.$$

Ukažme, že $\operatorname{arctg} x\neq x$ pro $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Označíme-li totiž $f(x)=x-\operatorname{arctg} x$, $x\in\mathbb{R}$, pak

$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{1+x^2}>0,\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Funkce f je tedy rostoucí na $\mathbb{R}$, a proto z vlastnosti $f(0)=0$ plyne

$$f(x)>0,\ x\in(0,\infty),\quad f(x)<0,\ x\in(-\infty,0).$$

Proto $f(x) \neq 0$ na libovolném $P(0,\eta)$, a tedy $\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \neq 1$ na libovolném $P(0,\eta)$. Z Věty o limitě složené funkce 4.2.20 a vlastnosti (C15) tedy dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\frac{\operatorname{arctg} x}{x})}{\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - 1} = 1.$$

Dále máme pomocí l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \frac{\operatorname{arctg} x - x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-x^2}{1+x^2}}{3x^2} = -\frac{1}{3}\,.$$

Z (5.63) tedy plyne

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{3}}.$$

♣

5.6.48. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{\log x - x + 1}.$$

Řešení. Upravíme zadaný výraz na

$$\begin{aligned} \frac{x^x - x}{\log x - x + 1} &= \frac{e^{x\log x} - e^{\log x}}{\log x - x + 1} \\ &= e^{\log x} \frac{e^{(x-1)\log x} - 1}{(x-1)\log x} \cdot \frac{\log x}{x-1} \cdot \frac{(x-1)^2}{\log x - x + 1}. \end{aligned}$$

Dále plyne z l'Hospitalova pravidla 5.3.1

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{\log x - x + 1} = \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)}{\frac{1}{x} - 1} = \lim_{x\to 1} -2x = -2.$$

Z Věty 4.2.20 a 4.2.2 tedy máme

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{\log x - x + 1} = -2.$$

♣

5.6.49. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\log(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\log(1+x)}.$$

Řešení. Upravme zadaný výraz do tvaru

$$\frac{1}{\log(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\log(1+x)}$$
$$=\frac{\log(1+x)-\log(x+\sqrt{x^2+1})}{x(x+\sqrt{x^2+1}-1)}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+1}-1}{\log(x+\sqrt{x^2+1})}\cdot\frac{x}{\log(1+x)}.$$

Zřejmě platí

$$x+\sqrt{x^2+1}-1=0 \Leftrightarrow x=0,$$

a tedy

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{x^2+1}-1}{\log(x+\sqrt{x^2+1})}=1.$$

Zjevně $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\log(1+x)}=1$. Dále

$$\frac{\log(1+x)-\log(x+\sqrt{x^2+1})}{x(x+\sqrt{x^2+1}-1)}$$
$$=\frac{\log\frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+1}}}{\frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+1}}-1}\cdot\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{1}{x(x+\sqrt{x^2+1}-1)}$$
$$=\frac{\log\frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+1}}}{\frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+1}}-1}\cdot\frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})(1+\sqrt{x^2+1})}\cdot\frac{-x^2}{x(x+\sqrt{x^2+1}-1)}.$$

Protože

$$\frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+1}}=1 \Leftrightarrow x=0,$$

platí

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+1}}}{\frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+1}}-1}=1.$$

Nakonec dostaneme z l'Hospitalova pravidla 5.3.1 rovnost

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x(x+\sqrt{x^2+1}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x+\sqrt{x^2+1}-1}$$
$$=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}$$
$$=-1.$$

Tedy

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\log(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\log(1+x)}\right)=-\frac{1}{2}.$$

♣

5.6.50. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\log(e^x+x)}{x}\right).$$

Řešení. Nejprve upravme zadaný výraz na

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\log(e^x+x)}{x}\right)\\
&=\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\cdot\frac{\log(e^x+x)}{x}\right)\\
&\qquad-\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\right)\cdot\frac{\log(e^x+x)}{x}
\end{aligned}$$

První část dále upravíme

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\cdot\frac{\log(e^x+x)}{x}\right)\\
&=\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\left(1-\frac{\log(e^x+x)}{x}\right)\\
&=\frac{\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}}{x}\left(x-\log e^x-\log(1+xe^{-x})\right)\\
&=\frac{\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}}{x}\left(-\log(1+xe^{-x})\right).
\end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\cdot\frac{\log(e^x+x)}{x}\right)=0.$$

Dále máme pro $a = \sqrt{x^2+x+1}$, $b = \sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}$ rovnost

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\right)\cdot\frac{\log(e^x+x)}{x}\\
&= \frac{a^6-b^6}{a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5}\cdot\frac{\log(e^x+x)}{x}\\
&= \frac{(x^2+x+1)^3-(x^3+x^2+x+1)^2}{a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5}\cdot\frac{\log(e^x+x)}{x}\\
&= \frac{x+\sum_{i=1}^4 c_i x^i}{a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5}\cdot\frac{\log(e^x+x)}{x}
\end{aligned}$$

(zde c_i, $i \in \{1,\dots,4\}$, jsou reálná čísla). Platí

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(e^x+x)}{x} = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{\log(1+xe^{-x})}{x} = 1$$

a

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\frac{-x+\sum_{i=1}^4 c_i x^i}{a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1+\sum_{i=1}^4 c_i x^{i-1}}{\frac{a^5}{x}+\frac{a^4b}{x}+\frac{a^3b^2}{x}+\frac{a^2b^3}{x}+\frac{ab^4}{x}+\frac{b^5}{x}}\\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1} - \sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\log(e^x+x)}{x}\right) = -\frac{1}{6}.$$

♣

5.6.51. Příklad. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty}\left((x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{a}{x+a}}\right).$$

Řešení. Je-li $a = 0$, zadaná limita se zřejmě rovná 0. V dalším výpočtu tedy předpokládejme, že $a \neq 0$.

Označme pro $x \in (|a|,\infty)$ funkce

$$f(x) = \frac{x+1}{x}\log(x+a), \quad g(x) = \frac{x+a+1}{x+a}\log x.$$

Spočtěme nejdříve limitu $\lim_{x\to\infty}(f(x)-g(x))$. Máme totiž

$$\begin{aligned}
f(x)-g(x) &= \frac{1}{x(x+a)}\big((x+a)(x+1)\log(x+a)-x(x+a+1)\log x\big)\\
&= \frac{1}{x(x+a)}\big(x^2(\log(x+a)-\log x)+x(a+1)(\log(x+a)-\log x)\\
&\qquad + a\log(x+a)\big)\\
&= \frac{1}{x(x+a)}\Big(x^2\log(1+\frac{a}{x})+x(a+1)\log(1+\frac{a}{x})+a\log(x+a)\Big)\\
&= \frac{x}{x+a}\log(1+\frac{a}{x})+\frac{a+1}{x+a}\log(1+\frac{a}{x})+\frac{a}{x(x+a)}\log(x+a).
\end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{x\to\infty} f(x)-g(x)=0.$$

Označme dále pro $x\in(|a|,\infty)$

$$h(x)=x^2\log(1+\frac{a}{x})+x(a+1)\log(1+\frac{a}{x})+a\log(x+a).$$

Pak

$$h(x)=x\left(\frac{\log(1+\frac{a}{x})}{\frac{a}{x}}\cdot a+(a+1)\log(1+\frac{a}{x})+a\cdot\frac{\log(x+a)}{x}\right).$$

Tedy

$$\lim_{x\to\infty} h(x)=\begin{cases}\infty, & a>0,\\ -\infty, & a<0.\end{cases}$$

V obou případech tak existuje $\eta\in(|a|,\infty)$ takové, že $h(x)\neq 0$ na (η,∞). Tedy i

$$f(x)-g(x)=\frac{h(x)}{x(x+a)}\neq 0,\quad x\in(\eta,\infty).$$

Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned}
(x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}} &= e^{\frac{x+1}{x}\log(x+a)}-e^{\frac{x+a+1}{x+a}\log x}\\
&= e^{f(x)}-e^{g(x)}\\
&= e^{g(x)}\cdot\frac{e^{f(x)-g(x)}-1}{x}\cdot(f(x)-g(x)).
\end{aligned}\tag{5.64}$$

Dále

$$
\begin{aligned}
e^{g(x)}(f(x)-g(x)) &= xe^{\frac{\log x}{x+a}}\frac{1}{x(x+a)}h(x)\\
&= e^{\frac{\log x}{x+a}}\frac{h(x)}{x+a}\\
&= e^{\frac{\log x}{x+a}}\Big(\frac{x}{x+a}\frac{\log(1+\frac{a}{x})}{\frac{a}{x}}a+\frac{x}{x+a}(a+1)\log(1+\frac{a}{x})\\
&\qquad +\frac{1}{x+a}a\log(x+a)\Big).
\end{aligned}
$$

Tedy

$$\lim_{x\to\infty} e^{g(x)}(f(x)-g(x)) = a.$$

Z (5.64) tedy plyne

$$\lim_{x\to\infty}\Big((x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{a}{x+a}}\Big) = a.$$

♣

5.6.4. Aplikace na vyšetřování konvergence číselných řad.

5.6.52. Věta. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel, nechť $A, B \in \mathbb{R}^*$ a nechť $\lim a_n = A$. Nechť f je funkce definovaná alespoň na nějakém prstencovém okolí bodu A splňující $\lim_{y\to A} f(y) = B$. Předpokládejme, že je splněna alespoň jedna z následujících dvou podmínek:

(P) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \neq A$,

(S) $A \in \mathbb{R}$ a funkce f je v bodě A spojitá.

Potom

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = B.$$

5.6.53. Příklad. Vyšetřete konvergenci číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arccotg}(2n)}{\sqrt[3]{n+4}}.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = \frac{\operatorname{arccotg}(2n)}{\sqrt[3]{n+4}}.$$

Podle l'Hospitalova pravidla, verze $\frac{0}{0}$, platí

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arccotg}(2x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-2}{1+4x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{1+4x^2} = \frac{1}{2}.$$

Z Heineovy věty (Věta 4.2.16) tedy dostáváme rovnost

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arccotg}(2n)}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Dále platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n+4}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{n}{n+4}} = 1.$$

Odtud a z věty o aritmetice limit (Věta 4.2.2) plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\operatorname{arccotg}(2n)}{\sqrt[3]{n+4}}}{\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = \frac{1}{2}.$$

Zadaná řada má zřejmě všechny členy kladné a platí $\frac{1}{2} \in (0, \infty)$. Z limitního srovnávacího kritéria (Věta 3.2.5) tedy vyplývá, že zadaná řada konverguje právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}.$$

Tato řada ale konverguje podle Věty 3.2.18, neboť $\frac{4}{3} > 1$. Tedy zadaná řada také konverguje. ♣

5.6.54. Příklad. Vyšetřete konvergenci číselné řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(\frac{n^2+4}{n(n-1)}\right).$$

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 2$, platí

$$\log\left(\frac{x^2+4}{x(x-1)}\right) = \log\left(\frac{x^2-x+x+4}{x^2-x}\right) = \log\left(1+\frac{x+4}{x^2-x}\right).$$

Podle Příkladu 5.6.5

$$\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1,$$

navíc

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+4}{x^2-x} = 0$$

a pro každé $x \in P(\infty, 2)$ platí

$$\frac{x+4}{x^2-x} \neq 0.$$

Tudíž podle věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.20) máme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{x+4}{x^2-x}\right)}{\frac{x+4}{x^2-x}} = 1.$$

Podle Heineovy věty (Věta 4.2.16) tedy platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{n+4}{n^2-n}\right)}{\frac{n+4}{n^2-n}} = 1.$$

Navíc zřejmě pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x > 4$, platí

$$\log\left(1+\frac{x+4}{x^2-x}\right) > 0,$$

takže pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, platí $a_n > 0$. Můžeme tedy použít limitní srovnávací kritérium (Věta 3.2.5). Podle tohoto kritéria, varianty (a), konverguje řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(\frac{n^2+4}{n(n-1)}\right).$$

právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-n}.$$

Protože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+4}{n^2-n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n}{n^2-n} = 1$$

a řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje podle Příkladu 3.1.11, diverguje podle limitního srovnávacího kritéria také zadaná řada. ♣

5.6.55. Příklad. Vyšetřete konvergenci číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n) \arccos(\log(e - \frac{1}{n})).$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\cos(\pi n) = (-1)^{n+1}$. Zadanou řadu tedy můžeme přepsat ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \arccos(\log(e - \frac{1}{n})).$$

Platí
$$\lim_{x\to\infty}(e-\frac{1}{x})=e,$$
přičemž pro každé $x\in\mathbb{R}$ platí $e-\frac{1}{x}\neq e$. Z věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.20, varianta (P)) tedy dostáváme, že
$$\lim_{x\to\infty}\log(e-\frac{1}{x})=1.$$
Podle (C4) a (C5) platí $\lim_{y\to 1-}\arccos(y)=0$ a navíc pro každé $n\in\mathbb{N}$ platí $\log(e-\frac{1}{n})\neq 1$. Z Věty 5.6.52 tedy vyplývá, že
$$\lim_{n\to\infty}\arccos(\log(e-\frac{1}{n}))=0.$$
Posloupnost $\{e-\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je zřejmě rostoucí. Funkce log je na $(0,\infty)$ rostoucí podle (L3) a funkce arccos je na $[-1,1]$ klesající podle (C4). Posloupnost $\{\arccos(\log(e-\frac{1}{n}))\}_{n=1}^{\infty}$ je tudíž klesající. Zadaná řada tedy konverguje podle Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1). ♣

5.6.56. Příklad. Vyšetřete konvergenci číselné řady
$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arccotg}(n)(-1-\frac{1}{n})^{n}.$$

Řešení. Přepíšeme zadanou řadu ve tvaru
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\operatorname{arccotg}(n)(1+\frac{1}{n})^{n}.$$
Víme, že posloupnost $\{\operatorname{arccotg}(n)\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a že platí $\lim_{n\to\infty}\operatorname{arccotg}(n)=0$. Z Leibnizova kritéria konvergence konvergence číselných řad (Věta 3.3.1) tedy plyne, že řada
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\operatorname{arccotg}(n)$$
konverguje. Z Příkladu 2.5.8 víme, že posloupnost $\{(1+\frac{1}{n})^{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená a rostoucí. Z Abelova kritéria konvergence číselných řad (Věta 3.3.5(A)) plyne, že i zadaná řada konverguje. ♣

5.6.57. Příklad. Vyšetřete konvergenci číselné řady
$$\sum_{n=1}^{\infty}n\cos(5n)\frac{\operatorname{tg}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})}{n+3}.$$

Řešení. Jak víme z Příkladu 3.3.7(b), řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(5n)$ má omezené částečné součty. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}, \quad b_n = \operatorname{tg}(a_n) \quad \text{a} \quad c_n = \frac{n}{n+3}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}.$$

Odtud plyne, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající posloupnost kladných reálných čísel splňující $\lim a_n = 0$. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$0 < a_n \leq a_1 = \frac{2}{1+\sqrt{3}} < 1 < \frac{\pi}{2},$$

takže pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme $a_n \in (0, \frac{\pi}{2})$. Protože funkce tangens je rostoucí na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ (viz (G18)), je posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesající. Podle (G4) je funkce tangens spojitá v bodě 0, tedy $\lim_{x\to 0} \operatorname{tg}(x) = 0$. Navíc pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme $a_n \neq 0$. Podle Věty 5.6.52, varianta (P) tudíž platí

$$\lim b_n = \lim \operatorname{tg}(a_n) = 0.$$

Dle Dirichletova kritéria konvergence číselných řad (Věta 3.3.5, varianta (D)) je tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(5n) \operatorname{tg}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$$

konvergentní. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$c_n = \frac{n}{n+3} = \frac{n+3-3}{n+3} = 1 - \frac{3}{n+3},$$

a tedy je posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí. Navíc je omezená, neboť zřejmě pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{4} \leq c_n < 1.$$

Podle Abelova kritéria konvergence číselných řad (Věta 3.3.5, varianta (A)) je tedy zadaná řada konvergentní. ♣

5.6.58. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, kde

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2+1}\,\log(100n)}{\sqrt[4]{n^3+n} + \sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Položme

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2+1}\log(100x)}{\sqrt[4]{x^3+x}+\sqrt{x}}, \quad x \in (0,\infty).$$

Pak pro $x \in (0,\infty)$ platí

$$\begin{aligned}
f'(x) = {}& \frac{1}{\left(\left(x^3+x\right)^{\frac14}+x^{\frac12}\right)^2} \cdot \\
& \Bigg[\left(\frac13\left(x^2+1\right)^{-\frac23}(2x+1)\log(100x)+(x^2+1)^{\frac13}\frac{100}{100x}\right)\left((x^3+x)^{\frac14}+x^{\frac12}\right) \\
& -\left((x^2+1)^{\frac13}\log(100x)\left(\frac14(x^3+x)^{-\frac34}(3x^2+1)+\frac12 x^{-\frac12}\right)\right)\Bigg] \\
={}& \frac{x^{\frac{5}{12}}\log(100x)}{\left(\left(x^3+x\right)^{\frac14}+x^{\frac12}\right)^2} \\
& \cdot\Bigg[\left(\frac13\left(1+x^{-2}\right)^{-\frac23}2\left(1+x^{-1}\right)+\frac{\left(1+x^{-2}\right)^{\frac13}\cdot x^{\frac23-1+1-\frac43}}{\log(100x)}\right)\left(\left(1+x^{-2}\right)^{\frac14}+x^{\frac12-\frac34}\right) \\
& \quad -\left(1+x^{-2}\right)^{\frac13}\left(\frac14\left(1+x^{-2}\right)^{-\frac34}3\left(1+(3x)^{-1}\right)+\frac12 x^{-\frac12-\frac94+2}\right)\Bigg].
\end{aligned}$$

Označíme-li

$$\begin{aligned}
g(x) = {}& \Bigg[\left(\frac13\left(1+x^{-2}\right)^{-\frac23}2\left(1+x^{-1}\right)+\frac{\left(1+x^{-2}\right)^{\frac13}\cdot x^{\frac23-1+1-\frac43}}{\log(100x)}\right)\left(\left(1+x^{-2}\right)^{\frac14}+x^{\frac12-\frac34}\right) \\
& \quad -\left(1+x^{-2}\right)^{\frac13}\left(\frac14\left(1+x^{-2}\right)^{-\frac34}3\left(1+(3x)^{-1}\right)+\frac12 x^{-\frac12-\frac94+2}\right)\Bigg].
\end{aligned}$$

obdržíme

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \left(\frac23+0\right)(1+0)-1\left(\frac34+0\right) = -\frac{1}{12}.$$

Existuje tedy $y \in (0,\infty)$ takové, že pro $x \in (y,\infty)$ je $f'(x) < 0$, a tedy f je klesající na intervalu (y,∞). Dále máme

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+x^{-2}\right)^{\frac13}\frac{\log(100x)}{x^{\frac{1}{12}}}}{\left(1+x^{-2}\right)^{\frac14}+x^{\frac12-\frac34}} = 0,$$

(použili jsme Příklad 5.3.4).

Na základě těchto výpočtů tedy vidíme, že posloupnost $\{a_n\}$ od indexu n_0 splňujícího $n_0 > y$ konverguje monotónně k 0. Dle Věty 3.3.1 tedy zadaná řada konverguje.

Řada $\sum |(-1)^n a_n| = \sum a_n$ však nekonverguje, což snadno ověříme srovnáním z řadou $\sum \frac{\log n}{n^{\frac{1}{12}}}$ (tj. použijeme Větu 3.2.5 a Příklad 5.6.44). ♣

5.6.59. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde

$$a_n = \left(\operatorname{cotg} \frac{n\pi}{4n-2} - \sin \frac{n\pi}{2n+1}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Položme

$$f(x) = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4-2x} - \sin \frac{\pi}{2+x}, \quad x \in (-1, 1).$$

Jelikož $0 < \frac{\pi}{4-2x} < \pi$ a $2 + x \neq 0$ pro $x \in (-1, 1)$, je f dobře definovaná. Počítejme

$$f'(x) = \frac{-\pi}{\left(\sin \frac{\pi}{4-2x}\right)^2} \cdot \frac{2}{(4-2x)^2} - \cos \frac{\pi}{2+x} \cdot \frac{-\pi}{(2+x)^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

Pak $\lim_{x\to 0} f'(x) = \frac{-\pi}{4}$.

Dle Věty 5.3.1 proto platí

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0_+} \frac{f'(x)}{1} = -\frac{\pi}{4}. \tag{5.65}$$

Existuje tedy okolí $P_+(0, \delta)$ takové, že $f(x) < 0$.

Z Heineovy věty 4.2.17 plyne, že pro $n > (\delta)^{-1}$ jsou čísla $-a_n$ kladná a platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{8}.$$

Srovnáním s řadou $\sum \frac{1}{n}$ (viz Věta 3.2.5) odvodíme pomocí Věty 3.2.18 divergenci řady $\sum(-a_n)$. Zadaná řada tedy diverguje. ♣

5.6.5. Průběh funkce. Vyšetřením průběhu zadané funkce rozumíme postupné zjištění všech důležitých informací o dané funkci, díky nimž bychom na konci měli být schopni načrtnout graf funkce. Při vyšetřování průběhu funkce zjišťujeme zejména následující její vlastnosti (uvedené pořadí je pouze orientační):

- definiční obor,
- symetrie (zjistíme, zda je funkce sudá, lichá nebo periodická),
- spojitost (případně jednostranná) ve všech bodech definičním oboru,

- průsečíky s oběma souřadnými osami,
- jednostranné limity v v krajních bodech definičního oboru (což mohou být i $\pm\infty$) a ve všech bodech nespojitosti,
- hodnota první derivace, případně jednostranné první derivace ve všech bodech definičního oboru, v nichž existuje,
- intervaly monotonie,
- lokální a globální extrémy,
- obor hodnot,
- hodnota druhé derivace, případně jednostranné druhé derivace ve všech bodech definičního oboru, v nichž existuje,
- intervaly konvexity a konkavity,
- inflexní body,
- asymptoty,
- náčrt grafu.

5.6.60. Příklad. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \arccos\left(\frac{|4x|}{4+x^2}\right)$$

Řešení. Definičním oborem funkce arccos je interval $[-1, 1]$. Definičním oborem funkce f je tedy množina

$$\{x \in \mathbb{R};\ -1 \leq \frac{|4x|}{4+x^2} \leq 1\}.$$

Platí tedy $x \in \mathcal{D}(f)$ právě tehdy, když platí následující dvě nerovnosti:

$$-1 \leq \frac{|4x|}{4+x^2} \leq 1.$$

První z nerovností platí právě tehdy, když

$$x^2 + |4x| + 4 \geq 0$$

a podobně druhá nerovnost platí právě tehdy, když

$$x^2 - |4x| + 4 \geq 0.$$

Vzhledem k tomu, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$x^2 \pm |4x| + 4 = (|x| \pm 2)^2 \geq 0,$$

dostáváme $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.

Funkce $\frac{|4x|}{4+x^2}$ je spojitá na $\mathbb{R}$ a funkce arccos je spojitá na intervalu $[-1, 1]$. Odtud a z věty o spojitosti složené funkce plyne, že f je spojitá na $\mathbb{R}$.

Spočítáme limity funkce f v krajních bodech jejího definičního oboru, tedy v bodech $\pm\infty$. Jest

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{|4x|}{4+x^2} = 0,$$

funkce arccos je spojitá v bodě 0 a platí $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$. Dle věty o limitě složené funkce, varianta (S), tedy platí

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Protože $f(0) = \frac{\pi}{2}$, je průsečíkem grafu funkce s osou y bod $[0, \frac{\pi}{2}]$. Pro určení průsečíků grafu funkce s osou x musíme vyřešit rovnici $f(x) = 0$, tedy nalézt kořeny funkce f. Protože jediným kořenem funkce arccos je bod 1, platí $f(x) = 0$ právě tehdy, když $\frac{|4x|}{4+x^2} = 1$. To nastane právě tehdy, když $(|x| - 2)^2 = 0$, tedy $x = \pm 2$. Funkce f má tedy právě dva průsečíky s osou x, a to v bodech $[-2, 0]$ a $[2, 0]$.

Funkce f je zřejmě sudá. Není lichá, neboť například není splněna podmínka $f(0) = 0$. Není ani periodická, neboť například $f(-2) = f(2) = 0$, ale žádné další kořeny funkce nemá.

Vypočítáme první derivaci funkce f. Pro $x \in (0, 2) \cup (2, \infty)$ jest

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{16x^2}{(4+x^2)^2}}} \cdot \frac{4(4+x^2) - 2x \cdot 4x}{(4+x^2)^2} \\ &= \frac{x^2 - 4}{\sqrt{(x^2-4)^2}} \cdot \frac{4}{4+x^2} \\ &= \begin{cases} -\frac{4}{4+x^2} & \text{pokud } x \in (0, 2) \\ \frac{4}{4+x^2} & \text{pokud } x \in (2, \infty). \end{cases} \end{aligned}$$

Uvedený výpočet není možné použít pro $x = 2$. V tomto bodě musíme spočítat jednostranné derivace. Jak už víme, funkce f je v bodě 2 spojitá, a tedy podle věty o limitě derivací platí

$$f'_-(2) = \lim_{x\to 2_-} \frac{-4}{4+x^2} = -\frac{1}{2}$$

a

$$f'_+(2) = \lim_{x\to 2_+} \frac{4}{4+x^2} = \frac{1}{2}.$$

Protože $f'_-(2) \neq f'_+(2)$, funkce f nemá v bodě 2 derivaci.

Pro $x \in (-\infty, 0)$ spočítáme $f'(x)$ podobně jako výše, anebo použijme Příklad 5.5.3. Obdržíme tak

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{4}{4+x^2} & \text{pokud } x \in (-\infty, -2) \\ \frac{4}{4+x^2} & \text{pokud } x \in (-2, 0). \end{cases}$$

a

$$f'_-(-2) = -\frac{1}{2}, \quad f'_+(-2) = \frac{1}{2}.$$

Funkce f nemá tedy v bodě -2 derivaci.

Posledním bodem, v němž jsme dosud nevyšetřili hodnoty derivace (či jednostranných derivací) funkce f, je bod 0. Funkce f je v bodě 0 spojitá, a tedy podle věty o limitě derivací platí

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0_-} \frac{4}{4 + x^2} = 1$$

a

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0_+} \frac{-4}{4 + x^2} = -1.$$

Protože $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, funkce f nemá v bodě 0 derivaci.

Definičním oborem funkce f' je tedy množina $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$.

Vyšetříme intervaly monotonie funkce f. Z výše uvedeného výpočtu plyne, že

$$\begin{aligned} &\forall x \in (-\infty, -2)\colon f'(x) < 0, \\ &\forall x \in (-2, 0)\colon f'(x) > 0, \\ &\forall x \in (0, 2)\colon f'(x) < 0, \\ &\forall x \in (2, \infty)\colon f'(x) > 0. \end{aligned}$$

Podle věty o vztahu derivace a monotonie je tedy funkce f

- klesající na $(-\infty, -2]$,
- rostoucí na $[-2, 0)$,
- klesající na $[0, 2]$,
- rostoucí na $[2, \infty)$.

Vyšetříme lokální a globální extrémy funkce f. Z výše uvedených intervalů monotonie vyplývá, že funkce f má lokální maximum v bodě 0, přičemž hodnota tohoto maxima je rovna $\frac{\pi}{2}$, a lokální minima v bodech ± 2, přičemž hodnota obou těchto minim je rovna 0. Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$ existuje $f'(x)$ a platí $f'(x) \neq 0$. Odtud vyplývá, že v těchto bodech není splněna nutná podmínka existence extrému, a tedy funkce f nemá žádné jiné extrémy než výše uvedené body $-2, 0, 2$. Z tohoto pozorování a z intervalů monotonie dále plyne, že všechny tři uvedené lokální extrémy jsou ve skutečnosti globální.

Nyní určíme obor hodnot funkce f. Z globality extrémů $[0, \frac{\pi}{2}]$ a $[\pm 2, 0]$ vyplývá, že $\mathcal{H}(f) \subset [0, \frac{\pi}{2}]$. Protože f je spojitá na $[0, 2]$, $f(0) = \frac{\pi}{2}$ a $f(2) = 0$, plyne z Bolzanovy věty o nabývání mezihodnot, že $[0, \frac{\pi}{2}] \subset \mathcal{H}(f)$. Kombinací obou inkluzí dostáváme, že $\mathcal{H}(f) = [0, \frac{\pi}{2}]$.

Vypočítáme nyní druhou derivaci funkce f. Protože $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$, víme, že f'' neexistuje (ani jednostranná) v bodech $2, 0, 2$. Nechť $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$. Potom platí

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{8x}{(4+x^2)^2} & \text{pokud } x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2), \\ \frac{-8x}{(4+x^2)^2} & \text{pokud } x \in (-2, 0) \cup (2, \infty). \end{cases}$$

Tedy jest

$$\begin{aligned} &\forall x \in (-\infty, -2) \colon f''(x) < 0, \\ &\forall x \in (-2, 0) \colon f''(x) > 0, \\ &\forall x \in (0, 2) \colon f''(x) > 0, \\ &\forall x \in (2, \infty) \colon f''(x) < 0. \end{aligned}$$

Podle věty o vztahu druhé derivace a konvexity je tedy funkce f

- ryze konkávní na $(-\infty, -2]$,
- ryze konvexní na $[-2, 0)$,
- ryze konvexní na $[0, 2]$,
- ryze konkávní na $[2, \infty)$.

Z těchto výsledků ovšem nevyplývá, zda je nebo není funkce f konvexní na celém intervalu $[-2, 2]$. Tuto otázku musíme vyšetřit. Povšimneme si, že platí $f(-2) = f(2) = 0$ a zároveň $f(0) > 0$. Dosadíme-li $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ a $x_3 = 2$ do podmínky (ii) Lemmatu 5.4.9, zjistíme, že tato podmínka není splněna, neboť by muselo platit

$$\frac{f(0) - f(-2)}{2} \leq \frac{f(2) - f(0)}{2},$$

a tedy $\frac{\pi}{4} \leq -\frac{\pi}{4}$. Tato podmínka je ale podle lemmatu ekvivalentní konvexitě funkce f na intervalu $[-2, 2]$, takže jsme dokázali, že f na tomto intervalu není konvexní. (Příklad 5.5.8 nabízí alternativní postup ukazující, že f není konvexní na intervalu $[-2, 2]$.)

Z výpočtu druhé derivace funkce f vyplývá, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ buď $f''(x)$ neexistuje nebo existuje a $f''(x) \neq 0$. V žádném bodě $x \in \mathbb{R}$ tedy není splněna nutná podmínka existence inflexního bodu. To znamená, že funkce f nemá žádné inflexní body.

Zbývá vyšetřit asymptoty funkce f. Jest

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

a

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - 0 \cdot x) = \frac{\pi}{2}.$$

Funkce f má tedy v $-\infty$ i v ∞ asymptotu $\frac{\pi}{2}$ (konstantní funkci). ♣

5.6.61. Příklad. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = |x| + \operatorname{arctg}(|x - \sqrt{3}|).$$

Řešení. Definičním oborem funkce arctg je množina $\mathbb{R}$, takže $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.

Funkce arctg i funkce $|\cdot|$ (absolutní hodnota) jsou spojité na $\mathbb{R}$. Odtud, z věty o aritmetice spojitostí a z věty o spojitosti složené funkce vyplývá, že funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$.

Funkce f není lichá například proto, že $f(0) = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \neq 0$. Funkce f není ani sudá, neboť například $f(-\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \operatorname{arctg}(2\sqrt{3})$, ale $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$, a tedy $f(-\sqrt{3}) \neq -f(\sqrt{3})$. Periodicitu funkce f vyšetříme později.

Protože $f(0) = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$, je průsečíkem grafu funkce s osou y bod $[0, \frac{\pi}{3}]$. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom buď platí $x = 0$ a $f(0) = \frac{\pi}{3} > 0$ nebo $x \neq 0$ a $f(x) \geq |x| > 0$. Platí tedy $f(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, takže graf funkce f nemá žádné průsečíky s osou x.

Zřejmě platí

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Vypočítáme první derivaci funkce f v bodech, ve kterých existuje. Nechť nejprve $x \in (-\infty, 0)$. Potom $f(x) = -x - \operatorname{arctg}(x - \sqrt{3})$, a tedy

$$f'(x) = -1 - \frac{1}{1 + (x - \sqrt{3})^2} = \frac{-2 - (x - \sqrt{3})^2}{1 + (x - \sqrt{3})^2}.$$

Nyní nechť $x \in (0, \sqrt{3})$. Potom $f(x) = x - \operatorname{arctg}(x - \sqrt{3})$, a tedy

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1 + (x - \sqrt{3})^2} = \frac{(x - \sqrt{3})^2}{1 + (x - \sqrt{3})^2}.$$

Konečně nechť $x \in (\sqrt{3}, \infty)$. Potom $f(x) = x + \operatorname{arctg}(x - \sqrt{3})$, a tedy

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{1 + (x - \sqrt{3})^2} = \frac{2 + (x - \sqrt{3})^2}{1 + (x - \sqrt{3})^2}.$$

Nyní vyšetříme existenci derivace v bodech 0 a $\sqrt{3}$, pro které jsme nemohli použít přímý výpočet. Spočteme jednostranné derivace v těchto bodech. Funkce f je v obou těchto bodech spojitá, a tedy podle věty o limitě derivací platí

$$\begin{aligned}
f'_-(0) &= \lim_{x\to 0_-} f'(x) = \lim_{x\to 0_-} \frac{-2-(x-\sqrt{3})^2}{1+(x-\sqrt{3})^2} = -\frac{5}{4},\\
f'_+(0) &= \lim_{x\to 0_+} f'(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{(x-\sqrt{3})^2}{1+(x-\sqrt{3})^2} = \frac{3}{4},\\
f'_-(\sqrt{3}) &= \lim_{x\to \sqrt{3}_-} f'(x) = \lim_{x\to \sqrt{3}_-} \frac{(x-\sqrt{3})^2}{1+(x-\sqrt{3})^2} = 0,\\
f'_+(\sqrt{3}) &= \lim_{x\to \sqrt{3}_+} f'(x) = \lim_{x\to \sqrt{3}_+} \frac{2+(x-\sqrt{3})^2}{1+(x-\sqrt{3})^2} = 2.
\end{aligned}$$

Z uvedených výsledků vyplývá, že funkce f nemá první derivaci v bodech 0 a $\sqrt{3}$. Definičním oborem funkce f' je tedy množina $\mathbb{R}\setminus\{0,\sqrt{3}\}$.

Vyšetříme intervaly monotonie funkce f. Z výše uvedeného výpočtu plyne, že

$$\begin{aligned}
&\forall x\in(-\infty,0)\colon\ f'(x)<0,\\
&\forall x\in(0,\sqrt{3})\colon\ f'(x)>0,\\
&\forall x\in(\sqrt{3},\infty)\colon\ f'(x)>0.
\end{aligned}$$

Podle věty o vztahu derivace a monotonie je tedy funkce f

- klesající na $(-\infty,0]$,
- rostoucí na $[0,\sqrt{3}]$,
- rostoucí na $[\sqrt{3},\infty)$.

Vyšetříme lokální a globální extrémy funkce f. Z výše uvedených intervalů monotonie vyplývá, že funkce f má globální minimum v bodě 0, přičemž hodnota tohoto minima je rovna $\frac{\pi}{3}$. Pro každé $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,\sqrt{3}\}$ existuje $f'(x)$ a platí $f'(x)\neq 0$. Odtud vyplývá, že v těchto bodech není splněna nutná podmínka existence extrému. Zbývá vyšetřit bod $x=\sqrt{3}$. V tomto bodě ale funkce f nemá lokální extrém, protože f je rostoucí na pravém okolí tohoto bodu a klesající na levém okolí tohoto bodu. Tudíž funkce f nemá žádné jiné extrémy než výše uvedený bod $\sqrt{3}$.

Vzhledem k tomu, že funkce f má jen jedno globální minimum, nemůže být periodická.

Nyní určíme obor hodnot funkce f. Z globality minima $[0,\frac{\pi}{3}]$ vyplývá, že $\mathcal{H}(f)\subset[\frac{\pi}{3},\infty)$. Protože f je spojitá na $[0,\infty]$, $f(0)=\frac{\pi}{3}$ a $\lim_{x\to\infty} f(x) =$

∞, plyne z Bolzanovy věty o nabývání mezihodnot, že $[\frac{\pi}{3}, \infty) \subset \mathcal{H}(f)$. Kombinací obou inkluzí dostáváme, že $\mathcal{H}(f) = [\frac{\pi}{3}, \infty)$.

Vypočítáme nyní druhou derivaci funkce f. Protože $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{0, \sqrt{3}\}$, víme, že f'' neexistuje (ani jednostranná) v bodech $0, \sqrt{3}$. Nechť $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \sqrt{3}\}$. Potom platí

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2(x-\sqrt{3})}{(1+(x-\sqrt{3})^2)^2} & \text{pokud } x \in (-\infty, 0) \cup (0, \sqrt{3}), \\ \frac{-2(x-\sqrt{3})}{(1+(x-\sqrt{3})^2)^2} & \text{pokud } x \in (\sqrt{3}, \infty). \end{cases}$$

Tedy jest

$$\begin{aligned} &\forall x \in (-\infty, 0) \colon f''(x) < 0, \\ &\forall x \in (0, \sqrt{3}) \colon f''(x) < 0, \\ &\forall x \in (\sqrt{3}, \infty) \colon f''(x) < 0. \end{aligned}$$

Podle věty o vztahu druhé derivace a konvexity je tedy funkce f

- ryze konkávní na $(-\infty, 0]$,
- ryze konkávní na $[0, \sqrt{3}]$
- ryze konkávní na $[\sqrt{3}, \infty)$.

Ověřme, že funkce f není konkávní na intervalu $[0, \infty)$. Byla-li by totiž f konkávní na tomto intervalu, platila by podle Příkladu 5.5.8 nerovnost $f'_-(\sqrt{3}) \geq f'_+(\sqrt{3})$. Tak však dle předchozích výpočtů neplatí.

Z výpočtu druhé derivace funkce f vyplývá, že pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{D}(f')$ buď $f''(x)$ neexistuje nebo existuje a $f''(x) \neq 0$. V žádném bodě $x \in \mathbb{R}$ tedy není splněna nutná podmínka existence inflexního bodu. To znamená, že funkce f nemá žádné inflexní body.

Zbývá vyšetřit asymptoty funkce f. Jest

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x - \operatorname{arctg}(x - \sqrt{3})}{x} = -1$$

a

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} (f(x) - (-1) \cdot x) &= \lim_{x \to -\infty} (-x - \operatorname{arctg}(x - \sqrt{3}) + x) \\ &= \lim_{x \to -\infty} (- \operatorname{arctg}(x - \sqrt{3})) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Funkce f má tedy v $-\infty$ asymptotu $-x + \frac{\pi}{2}$. Podobně platí

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x + \operatorname{arctg}(x - \sqrt{3})}{x} = 1$$

a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(f(x)-1\cdot x) &= \lim_{x\to\infty}(x+\operatorname{arctg}(x-\sqrt{3})-x)\\ &= \lim_{x\to\infty}(\operatorname{arctg}(x-\sqrt{3})) = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Funkce f má tedy v ∞ asymptotu $x+\frac{\pi}{2}$. ♣

5.6.62. Příklad. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \log(4+x^2) + 3\operatorname{arccotg}(\frac{2}{x}).$$

Řešení. Definičním oborem funkce log je interval $(0,\infty)$ a pro každé $x\in\mathbb{R}$ platí $4+x^2\in(0,\infty)$. Definičním oborem funkce arccotg je $\mathbb{R}$. Definičním oborem funkce $x\mapsto\frac{2}{x}$ je množina $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Tedy celkem platí $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Podle věty o spojitosti složené funkce je funkce f spojitá na svém definičním oboru, tedy na množině $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Spočítáme limity funkce f v krajních bodech jejího definičního oboru. Jest

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty, \quad \lim_{x\to 0_-} f(x)=\log(4)+3\pi,\\ &\lim_{x\to 0_+} f(x)=\log(4), \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty.\end{aligned}$$

Z výše uvedených limit funkce f v bodech $\pm\infty$ vyplývá, že funkce není periodická ani lichá. Z jednostranných limit v bodě 0 dále vyplývá, že funkce f není ani sudá.

Vzhledem k tomu, že $0\notin\mathcal{D}(f)$, funkce f nemá průsečík s osou y. Pro každé $x\in\mathbb{R}$ platí $4+x^2>1$. Protože je funkce log je na intervalu $(0,\infty)$ rostoucí, platí pro každé $x\in\mathbb{R}$ také $\log(4+x^2)>\log(1)=0$. Dále víme, že $\mathcal{H}(\operatorname{arccotg})=(0,\pi)$. Celkem tedy pro každé $x\in\mathcal{D}(f)$ dostáváme

$$f(x)\ge\log(4+x^2)>0.$$

Odtud vyplývá, že funkce f nemá žádný průsečík s osou x.

Vypočítáme první derivaci funkce f. Jest

$$f'(x) = \frac{2x}{4+x^2} + \frac{-3}{1+\frac{4}{x^2}}\cdot\frac{-2}{x^2} = \frac{2x+6}{x^2+4} \quad \text{pro každé } x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Vyšetříme intervaly monotonie funkce f. Z výše uvedeného výpočtu plyne, že

$$\begin{aligned} &\forall x \in (-\infty, -3)\colon f'(x) < 0, \\ &\forall x \in (-3, 0)\colon f'(x) > 0, \\ &\forall x \in (0, \infty)\colon f'(x) > 0. \end{aligned}$$

Podle věty o vztahu derivace a monotonie je tedy funkce f

- klesající na $(-\infty, -3]$,
- rostoucí na $[-3, 0)$,
- rostoucí na $(0, \infty)$.

Vyšetříme lokální a globální extrémy funkce f. Z výše uvedených intervalů monotonie vyplývá, že funkce f má lokální minimum v bodě $x = -3$, přičemž hodnota tohoto minima je rovna $\log(13) + 3\operatorname{arccotg}(\frac{-2}{3})$. Toto minimum není globální, protože $\lim_{x\to 0+} f(x) < f(-3)$, a tedy na pravém prstencovém okolí bodu 0 existuje bod y takový, že $f(y) < f(-3)$. Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -3\}$ existuje $f'(x)$ a platí $f'(x) \neq 0$. Odtud vyplývá, že v těchto bodech není splněna nutná podmínka existence extrému. Tudíž funkce f nemá žádné jiné lokální extrémy než výše uvedený bod -3. Globální extrémy tedy tato funkce nemá vůbec.

Nyní určíme obor hodnot funkce f. Z výše uvedených intervalů monotonie vyplývá, že

$$f(x) \in (f(-3), \infty) \quad \text{pro } x \in (-\infty, 0)$$

a

$$f(x) \in (\log(4), \infty) \quad \text{pro } x \in (0, \infty).$$

Protože $f(-3) > \log(4)$, vyplývá odtud, že $\mathcal{H}(f) \subset (\log(4), \infty)$. Protože f je spojitá na $(0, \infty)$, $\lim_{x\to 0_+} f(x) = \log(4)$ a $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, plyne z Bolzanovy věty o nabývání mezihodnot, že $(\log(4), \infty) \subset \mathcal{H}(f)$. Kombinací obou inkluzí dostáváme, že $\mathcal{H}(f) = (\log(4), \infty)$.

Vypočítáme nyní druhou derivaci funkce f. Jest

$$f''(x) = -2 \cdot \frac{x^2 + 6x - 4}{(x^2 + 4)^2} \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Bude užitečné si uvědomit, že

$$x^2 + 6x - 4 = (x - x_1)(x - x_2), \quad \text{kde } x_1 = -3 - \sqrt{13},\ x_2 = -3 + \sqrt{13},$$

a že

$$x_1 < -3 < 0 < x_2.$$

Tedy jest

$$\begin{aligned} &\forall x \in (-\infty, x_1)\colon\ f''(x) < 0,\\ &\forall x \in (x_1, 0)\colon\ f''(x) > 0,\\ &\forall x \in (0, x_2)\colon\ f''(x) > 0,\\ &\forall x \in (x_2, \infty)\colon\ f''(x) < 0. \end{aligned} \tag{5.66}$$

Podle věty o vztahu druhé derivace a konvexity je tedy funkce f

- ryze konkávní na $(-\infty, x_1]$,
- ryze konvexní na $[x_1, 0)$,
- ryze konvexní na $(0, x_2]$,
- ryze konkávní na $[x_2, \infty)$.

Z výpočtu druhé derivace funkce f vyplývá, že pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, 0, x_2\}$ platí $f''(x) \neq 0$. V žádném bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, 0, x_2\}$ tedy není splněna nutná podmínka existence inflexního bodu. Zbývá vyšetřit body x_1 a x_2. Víme, že existují vlastní derivace $f'(x_1)$ a $f'(x_2)$ a f' je zjevně spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Z nerovností (5.66) vidíme, že jsou splněny podmínky Věty 5.4.19 (postačující podmínky pro inflexi). Oba body x_1 a x_2 jsou tudíž inflexními body funkce f. Z výše uvedené analýzy vyplývá, že jiné inflexní body funkce f nemá.

Zbývá vyšetřit asymptoty funkce f. Jest

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

a

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 0 \cdot x) = \infty.$$

Funkce f tedy nemá asymptotu v $-\infty$ ani v ∞.

Závěrem ještě určíme jednostranné limity funkce f' v bodě 0. Tato informace se bude při náčrtu grafu funkce f hodit. Jest

$$\lim_{x\to 0_-} f'(x) = \frac{3}{2} \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0_+} f'(x) = \frac{3}{2}.$$

♣

5.6.63. Příklad. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = (x^2 - x + 2)e^{|x+3|-3}.$$

Řešení. Zřejmě platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.

Z věty o aritmetice spojitostí a z věty o spojitosti složené funkce vyplývá, že funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$.

Protože $f(0) = 2$, je průsečíkem grafu funkce s osou y bod $[0, 2]$. Rovnice $x^2 - x + 2 = 0$ nemá žádné reálné řešení a navíc pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $e^{|x+3|-3} > 0$, takže graf funkce f nemá žádné průsečíky s osou x.

Zřejmě platí

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Z toho vyplývá, že f není ani periodická, ani lichá. Není ani sudá, neboť například $f(-3) = 14e^{-3}$, ale $f(3) = 8e^3$, a tedy $f(-1) \neq -f(1)$.

Vypočítáme první derivaci funkce f v bodech, ve kterých existuje. Nechť nejprve $x \in (-\infty, -3)$. Potom $f(x) = (x^2 - x + 2)e^{-x-6}$, a tedy

$$f'(x) = (-x^2 + 3x - 3)e^{-x-6}.$$

Nyní nechť $x \in (-3, \infty)$. Potom $f(x) = (x^2 - x + 2)e^x$, a tedy

$$f'(x) = (x^2 + x + 1)e^x.$$

Zbývá vyšetřit existenci derivace v bodě $x = -3$, pro který jsme nemohli použít přímý výpočet. Spočteme jednostranné derivace v tomto bodě. Funkce f je v bodě $x = -3$ spojitá, a tedy podle věty o limitě derivací platí

$$f'_-(-3) = \lim_{x \to -3_-} f'(x) = \lim_{x \to -3_-} (x^2 - x + 2)e^{-x-6} = -21e^{-3},$$

$$f'_+(-3) = \lim_{x \to -3_+} f'(x) = \lim_{x \to -3_+} (x^2 - x + 2)e^x = 7e^{-3}.$$

Protože $f'_-(-3) \neq f'_+(-3)$, funkce f nemá první derivaci v bodě -3. Definičním oborem funkce f' je tedy množina $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

Vyšetříme intervaly monotonie funkce f. Protože ani jeden z mnohočlenů $(-x^2 + 3x - 3)$ a $(x^2 + x + 1)$ nemá žádný reálný kořen, plyne z výše uvedeného výpočtu, že

$$\forall x \in (-\infty, -3)\colon f'(x) < 0,$$
$$\forall x \in (-3, \infty)\colon f'(x) > 0.$$

Podle věty o vztahu derivace a monotonie je tedy funkce f

- klesající na $(-\infty, -3]$,
- rostoucí na $[-3, \infty)$.

Vyšetříme lokální a globální extrémy funkce f. Z výše uvedených intervalů monotonie vyplývá, že funkce f má globální minimum v bodě -3, přičemž hodnota tohoto minima je rovna $14e^{-3}$. Z těchto intervalů monotonie též plyne, že f nemá jiné globální a ani lokální extrémy.

Vzhledem k tomu, že funkce f má jen jedno globální minimum, nemůže být periodická.

Nyní určíme obor hodnot funkce f. Z globality minima $[-3, 14e^{-3}]$ vyplývá, že $\mathcal{H}(f) \subset [14e^{-3}, \infty)$. Protože f je spojitá na $(-\infty, -3]$, $f(-3) = 14e^{-3}$ a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, plyne z Bolzanovy věty o nabývání mezihodnot, že $[14e^{-3}, \infty) \subset \mathcal{H}(f)$. Kombinací obou inkluzí dostáváme, že $\mathcal{H}(f) = [14e^{-3}, \infty)$.

Vypočítáme nyní druhou derivaci funkce f. Protože $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, víme, že f'' neexistuje (ani jednostranná) v bodě -3. Nechť $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Potom platí

$$f''(x) = \begin{cases} e^{-x-6}(-2x+3) & \text{pokud } x \in (-\infty, -3), \\ e^{x}(x+2)(x+1) & \text{pokud } x \in (-3, \infty). \end{cases}$$

Tedy jest

$$\begin{aligned} &\forall x \in (-\infty, -3) \colon f''(x) > 0, \\ &\forall x \in (-3, -2) \colon f''(x) > 0, \\ &\forall x \in (-2, -1) \colon f''(x) < 0, \\ &\forall x \in (-1, \infty) \colon f''(x) > 0. \end{aligned} \tag{5.67}$$

Podle věty o vztahu druhé derivace a konvexity je tedy funkce f

- ryze konvexní na $(-\infty, -3]$,
- ryze konvexní na $[-3, -2]$,
- ryze konkávní na $[-2, -1]$,
- ryze konvexní na $[-1, \infty)$.

Protože $f'_-(-3) \leq f'_+(-3)$, je f dle Příkladu 5.5.8 ryze konvexní na intervalu $(-\infty, -2]$.

Nechť $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$. Potom buď $x = -3$ a neexistuje $f'(-3)$ nebo $x \neq -3$ a platí $f''(x) \neq 0$. V žádném bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$ tedy není splněna nutná podmínka existence inflexního bodu. Zbývá vyšetřit body $x_1 = -2$ a $x_2 = -1$. Víme, že f' existuje a spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Díky (5.67) jsou splněny podmínky Věty 5.4.19 (postačující podmínky pro inflexni). Oba body x_1 a x_2 jsou tudíž inflexními body funkce f a z výše uvedené analýzy vyplývá, že jiné inflexní body funkce f nemá.

Zbývá vyšetřit asymptoty funkce f. Vzhledem k tomu, že

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty,$$

funkce f nemá v ∞ ani v $-\infty$ asymptotu. ♣

5.6.64. Příklad. Vyštřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x \cdot \sqrt[9]{x}}{\sqrt{3}\,\sqrt[3]{x} - 3}.$$

Řešení. Zadaná funkce je zřejmě dobře definovaná na $\mathbb{R} \setminus \{27\}$. Dále je díky Větám 4.2.5 a 4.3.3 na svém definičním oboru spojitá. Při výpočtu limit v krajních bodech definičního oboru dostáváme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{1-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}}} = \infty,\\
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{1-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}}} = -\infty,\\
\lim_{x\to 27_+} f(x) &= \infty, \qquad \lim_{x\to 27_-} f(x) = -\infty.
\end{aligned} \tag{5.68}$$

Vzhledem k tomu, že $\mathcal{D}(f)$ není symetrický a ani periodický, funkce není ani sudá, ani lichá, či periodická.

Při výpočtu první derivace funkce f můžeme v bodech $\mathcal{D}(f)\setminus\{0\}$ použít Větu 5.1.17 a obdržíme

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{x^{\frac{10}{3}}}{\left(x^{\frac{1}{3}}-3\right)^{\frac{1}{3}}}\right)'\\
&= \frac{\frac{10}{9}x^{\frac{1}{9}}\left(x^{\frac{1}{3}}-3\right)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{10}{9}}\frac{1}{3}\left(x^{\frac{1}{3}}-3\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{(x^{\frac{1}{3}}-3)^{\frac{2}{3}}}\\
&= \frac{x^{\frac{1}{9}}}{3(x^{\frac{1}{3}}-3)^{\frac{4}{3}}}\left(3x^{\frac{1}{3}}-10\right), \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0,27\}.
\end{aligned}$$

V bodě 0 dostaneme

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(x)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{1}{9}}}{\left(x^{\frac{1}{3}}-3\right)^{\frac{1}{3}}} = 0.$$

Tedy jest

$$\begin{aligned}
&\forall x \in (-\infty,0)\colon f'(x) > 0,\\
&\forall x \in (0,27)\colon f'(x) < 0,\\
&\forall x \in (27,\frac{1000}{27})\colon f'(x) < 0,\\
&\forall x \in (\frac{1000}{27},\infty)\colon f'(x) > 0.
\end{aligned}$$

Podle věty o vztahu derivace a monotonie je tedy funkce f

- rostoucí na $(-\infty, 0]$,

- klesající na $[0, 27)$,
- klesající na $(27, \frac{1000}{3}]$,
- rostoucí na $[\frac{1000}{3}, \infty)$.

Vyšetříme lokální a globální extrémy funkce f. Vzhledem k (5.68) nemá f globální extrémy. Z výše uvedených intervalů monotonie vyplývá, že funkce f má lokální maximum v bodě 0, přičemž hodnota tohoto maxima je rovna 0, a má lokální minimum v bodě $\frac{1000}{27}$, přičemž hodnota tohoto minima je $\frac{1000}{27}\sqrt[3]{10}$. Z těchto intervalů též vyplývá, že f jiných lokálních extrémů nemá.

Určíme nyní $\mathcal{H}(f)$. Jelikož je f spojitá na intervalu $(-\infty, 27)$ i na intervalu $(27, \infty)$, dostáváme kombinací Věty 4.3.6, (5.68) a znalosti lokálních extrémů f, že

$$\mathcal{H}(f) = (-\infty, 0] \cup [\frac{1000}{27}\sqrt[3]{10}, \infty).$$

Druhou derivaci funkce f spočteme v bodech $\mathcal{D}(f) \setminus \{0\}$. Pro tyto body platí

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{3x^{\frac{4}{9}} - 10x^{\frac{1}{9}}}{3(x^{\frac{1}{3}} - 3)^{\frac{4}{3}}}\right)' \\
&= \frac{\left(\frac{12}{9}x^{-\frac{5}{9}} - \frac{10}{9}x^{-\frac{8}{9}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}} - 3\right)^{\frac{4}{3}} - \left(3x^{\frac{4}{9}} - 10x^{\frac{1}{9}}\right)\frac{4}{3}\left(x^{\frac{1}{3}} - 3\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{3(x^{\frac{1}{3}} - 3)^{\frac{8}{3}}} \\
&= \frac{\left(x^{\frac{1}{3}} - 3\right)^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{8}{9}}}{3(x^{\frac{1}{3}} - 3)^{\frac{8}{3}}}\left(\left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{9}} - \frac{10}{3}\right)\left(x^{\frac{1}{3}} - 3\right) - \frac{4}{9}x^{\frac{2}{9}}\left(3x^{\frac{4}{9}} - 10x^{\frac{1}{9}}\right)\right) \\
&= \frac{\left(x^{\frac{1}{3}} - 3\right)^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{8}{9}}}{3\left(x^{\frac{1}{3}} - 3\right)^{\frac{8}{3}}}\left(-2x^{\frac{1}{3}} + 10\right).
\end{aligned}$$

Tedy jest

$$\begin{aligned}
&\forall x \in (-\infty, 0)\colon\ f''(x) < 0, \\
&\forall x \in (0, 27)\colon\ f''(x) < 0, \\
&\forall x \in (27, 125)\colon\ f''(x) > 0, \\
&\forall x \in (125, \infty)\colon\ f''(x) < 0.
\end{aligned} \tag{5.69}$$

Podle Věty 5.4.14 je tedy funkce f

- ryze konkávní na $(-\infty, 0]$,
- ryze konkávní na $[0, 27)$,

- ryze konvexní na $(27, 125]$,
- ryze konkávní na $[125, \infty)$.

Jelikož je $f'(0) = 0$, je podle Příkladu 5.5.8 f ryze konkávní na $(-\infty, 27)$. Dále z Věty 5.4.19 plyne, že bod 125 je inflexním bodem funkce f. Vzhledem k (5.69) funkce f jiných inflexních bodů nemá.

Zbývá vyšetřit asymptoty funkce f. Jest

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(1 - 3x^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}} = 1$$

a

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to\infty} \left(\frac{y^3 \cdot y^{\frac{1}{3}}}{(y-3)^{\frac{1}{3}}} - y^3 \right) &= \lim_{y\to\infty} \frac{y^3 \cdot y^{\frac{1}{3}} - y^3 (y-3)^{\frac{1}{3}}}{(y-3)^{\frac{1}{3}}} \\
&= \lim_{y\to\infty} \frac{y^3 (y - (y-3))}{(y-3)^{\frac{1}{3}} \left(y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{1}{3}} (y-3)^{\frac{1}{3}} + (y-3)^{\frac{2}{3}} \right)} \\
&= \lim_{y\to\infty} \frac{3y^2}{\left(1 - 3y^{-1}\right)^{\frac{1}{3}} \left(1 + \left(1 - 3y^{-1}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1 - 3y^{-1}\right)^{\frac{2}{3}} \right)} = \infty.
\end{aligned}$$

Z této limity a Věty 4.2.20 nyní plyne

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 \cdot \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{\frac{1}{3}} - 3\right)^{\frac{1}{3}}} - x \right) = \infty.$$

Z těchto výpočtů plyne, že f nemá v ∞ asymptotu.

Obdobně obdržíme, že

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\left(1 - 3x^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}} = 1,$$

dále

$$\lim_{y\to-\infty} \left(\frac{y^3 \cdot y^{\frac{1}{3}}}{(y-3)^{\frac{1}{3}}} - y^3 \right) = \infty,$$

a tedy

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - x) = \infty.$$

Ani v $-\infty$ tedy funkce f asymptotu nemá. ♣

5.6.65. Příklad. Vyšťřete průběh funkce

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot e^{-\frac{1}{\log^2 x}}, & x \in (0,1) \cup (1,\infty), \\ 0, & x \in \{0,1\}. \end{cases}$$

Řešení. Vzhledem k tomu, že $\mathcal{D}(f) = [0,\infty)$, nemůže být f ani sudá, lichá či periodická. Vzhledem k tomu, že

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 1} f(x) = 0,$$

je f spojitá v bodech 0 a 1. Zřejmě je též spojitá v bodech množiny $(0,1) \cup (1,\infty)$, a tedy je spojitá na $\mathcal{D}(f)$. Limita v nekonečnu je

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x \cdot \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{\log^2 x}} = \infty.$$

Počítáme-li první derivaci funkce f, obdržíme

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-\frac{1}{\log^2 x}} + x e^{-\frac{1}{\log^2 x}} \cdot \frac{2}{x} \cdot (\log x)^{-3} \\ &= e^{-\frac{1}{\log^2 x}} (\log x)^{-3} \left[\log^3 x + 2\right], \quad x \in (0,1) \cup (1,\infty). \end{aligned}$$

Přímo z definice spočítáme

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0_+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{\log^2 x}} = 1.$$

Konečně díky Větě 5.2.10 dostáváme

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} f'(x) = \lim_{x\to 1} \left(\log^3 x + 2\right) \cdot \lim_{x\to 1} \left(\frac{\log^{-4} x}{e^{\log^{-2} x}} \log^{-3} x \log^4 x \right) = 0.$$

(Při výpočtu jsme použili Větu 4.2.20 a fakt $\lim_{y\to\infty} \frac{y^2}{e^y} = 0$, viz Příklad 5.6.43.)

Tedy jest

$$\begin{aligned} &\forall x \in (0, e^{-\sqrt[3]{2}}) \colon f'(x) > 0, \\ &\forall x \in (e^{-\sqrt[3]{2}}, 1) \colon f'(x) < 0, \\ &\forall x \in (1,\infty) \colon f'(x) > 0. \end{aligned}$$

Podle věty o vztahu derivace a monotonie je tedy funkce f

- rostoucí na $[0, e^{-\sqrt[3]{2}}]$,
- klesající na $[e^{-\sqrt[3]{2}}, 1]$,
- rostoucí na $[1,\infty)$.

V bodech 0 a 1 má tedy funkce f globální minimum o hodnotě 0, v bodě $e^{-\sqrt[3]{2}}$ má lokální maximum. Vzhledem k tomu, že $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, funkce f nemá globální maximum.

Z těchto úvah a Věty 4.3.4 plyne, že $\mathcal{H}(f) = [0, \infty)$.

Pro $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ spočteme

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{-\frac{1}{\log^2 x}} \left(2\log^{-3} x \cdot \frac{1}{x}\right) \left(1 + 2\log^{-3} x\right) + e^{-\frac{1}{\log^2 x}} \log^{-4} x \frac{-6}{x} \\ &= e^{-\frac{1}{\log^2 x}} \frac{2}{x} \log^{-6} x \left[\log^3 x + 2 - 3\log^2 x\right]. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že

$$y^3 - 3y^2 + 2 = (y-1)(y^2 - 2y + 2) = (y-1)\left(y - (1+\sqrt{3})\right)\left(y - (1-\sqrt{3})\right),$$

máme

$$\begin{aligned} &\forall x \in (0, e^{1-\sqrt{3}}) \colon f''(x) < 0, \\ &\forall x \in (e^{1-\sqrt{3}}, 1) \colon f''(x) > 0, \\ &\forall x \in (1, e) \colon f''(x) > 0, \\ &\forall x \in (e, e^{1+\sqrt{3}}) \colon f''(x) < 0, \\ &\forall x \in (e^{1+\sqrt{3}}, \infty) \colon f''(x) > 0. \end{aligned} \tag{5.70}$$

Podle věty o vztahu druhé derivace a konvexity je tedy funkce f

- ryze konkávní na $[0, e^{1-\sqrt{3}}]$,
- ryze konvexní na $[e^{1-\sqrt{3}}, 1]$,
- ryze konvexní na $[1, e]$,
- ryze konkávní na $[e, e^{1+\sqrt{3}}]$,
- ryze konvexní na $[e^{1+\sqrt{3}}, \infty)$.

Díky Příkladu 5.5.8 je funkce f ryze konvexní na $[e^{1-\sqrt{3}}, e]$. Z Věty 5.4.19 plyne, že $e^{1-\sqrt{3}}, e, e^{1+\sqrt{3}}$ jsou inflexní body funkce f. V bodě 1 má tečna ke grafu funkce f tvar $t(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, z čehož přímo z definice plyne, že 1 není inflexní bod f. Konečně můžeme z (5.70) usoudit, že jiné než výše uvedené inflexní body funkce f nemá.

Zjistíme nyní, zdali má funkce f v nekonečnu asymptotu. Vzhledem k tomu, že

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{\log^2 x}} = 1$$

a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(f(x)-x) &= \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{e^{-\log^{-2}x}-1}{-\log^{-2}x}\right)(-\log^{-2}x)\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{e^{-\log^{-2}x}-1}{-\log^{-2}x}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\log^{-2}x} = -\infty,\end{aligned}$$

funkce f nemá v nekonečnu asymptotu. (Při výpočtu jsme užili Příklad 5.6.43.)

♣

5.6.66. Příklad. Vyštřete průběh funkce

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{6\sin x}.$$

Řešení. Definiční obor funkce f je množina

$$\mathcal{D}(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k\pi,(1+k)\pi)$$

a f je zjevně na $\mathcal{D}(f)$ spojitá.

Vzhledem k tomu, že sinus je lichá funkce, je f též lichá. Navíc je periodická s periodou 2π. Omezíme se tedy při vyšetřování průběhu f na množinu $(-\pi,0)\cup(0,\pi)$. Cenným vodítkem nám přitom bude právě lichost zadané funkce.

Máme

$$\lim_{x\to-\pi_-} f(x) = \lim_{x\to 0_-} f(x) = -\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to\pi_-} f(x) = \infty. \tag{5.71}$$

Platí

$$f'(x) = \cos x - \frac{\cos x}{6\sin^2 x} = \frac{\cos x}{\sin^2 x}\left(\sin^2 x - \frac{1}{6}\right), \quad x \in \mathcal{D}(f).$$

Označme $\alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}$ a nechť

$$x_1 = -\pi+\alpha, \quad x_2 = -\alpha, \quad x_3 = \alpha, \quad x_4 = \pi-\alpha.$$

Tedy

- $f' > 0$ na intervalech $(-\pi, x_1)$, $(-\frac{\pi}{2}, x_2)$, $(x_3, \frac{\pi}{2})$, (x_4, π) a
- $f' < 0$ na intervalech $(x_1, -\frac{\pi}{2})$, $(x_2, 0)$, $(0, x_3)$, $(\frac{\pi}{2}, x_4)$.

Podle věty o vztahu derivace a monotonie je tedy funkce f

- rostoucí na intervalech $(-\pi, x_1]$, $[-\frac{\pi}{2}, x_2]$, $[x_3, \frac{\pi}{2}]$, $[x_4, \pi]$ a
- klesající na $[x_1, -\frac{\pi}{2}]$, $[x_2, 0)$, $(0, x_3]$, $[\frac{\pi}{2}, x_4]$.

V bodech $-\frac{\pi}{2}, x_3, x_4$ má lokální minima, přičemž $f(x_3) = f(x_4) = \sqrt{\frac{2}{3}}$ a $f(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{7}{6}$, a v bodech $x_1, x_2, \frac{\pi}{2}$ má lokální maxima, přičemž $f(x_1) = f(x_2) = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ a $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{7}{6}$.

Z právě provedených úvah, Věty 4.3.4 a (5.71) plyne, že

$$\mathcal{H}(f) = (-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}] \cup [\sqrt{\frac{2}{3}}, \infty).$$

Druhá derivace funkce f je pak pro $x \in \mathcal{D}(f)$ rovna

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\cos x \left(1 - \frac{1}{6\sin^2 x}\right)\right)' \\ &= (-\sin x)\left(1 - \frac{1}{6\sin^2 x}\right) + \cos x \frac{-2}{6}(\sin x)^{-3} \cos x \\ &= \frac{-6\sin^4 x \sin^2 x + 2\cos^2 x}{6\sin^3 x} \\ &= \frac{-6\sin^4 x - \sin^2 x + 2}{6\sin^2 x}. \end{aligned}$$

Jelikož rovnice

$$-6y^2 - y + 2 = 0$$

má kořeny $-\frac{2}{3}$ a $\frac{1}{2}$, hledáme ta čísla x, pro která $\sin^2 x = \frac{1}{2}$. Zajímá nás tedy množina $\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\}$. Protože je

- $f'' > 0$ na intervalech $(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}), (0, \frac{\pi}{4}), (\frac{3\pi}{4}, \pi)$ a
- $f'' < 0$ na intervalech $(-\pi, -\frac{3\pi}{4}), (-\frac{\pi}{4}, 0), (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$,

je podle Věty 5.4.14 funkce f

- ryze konvexní na intervalech $[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}], (0, \frac{\pi}{4}], [\frac{3\pi}{4}, \pi)$ a
- ryze konkávní na intervalech $(-\pi, -\frac{3\pi}{4}], [-\frac{\pi}{4}, 0), [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$.

Dle Věty 5.4.19 jsou body $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ inflexními body funkce f. Vzhledem ke znaménku druhé derivace jiných inflexních bodů funkce f nemá, viz Věta 5.4.17.

Asymptoty zřejmě nemá smysl vyšetřovat, a tedy zbývá pouze načrtnout graf. ♣

5.6.67. Příklad. Vyšetřete průběh funkce zdané parametricky rovnicemi

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Přesněji se požaduje následující úvaha. Ukažte, že funkce $\varphi(t) = t - \sin t$, $t \in \mathbb{R}$, je rostoucí a zobrazuje $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Existuje proto její inverzní funkce

$\varphi^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $\psi(t) = 1 - \cos t$, $t \in \mathbb{R}$.

Řešení. Funkce φ i ψ jsou nekonečně diferencovatelné a platí

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty, \quad \lim_{t\to-\infty} \varphi(t) = -\infty.$$

Dále

$$\varphi'(t) = 1 - \cos t, \quad t \in \mathbb{R},$$

a tedy $\varphi' > 0$ na intervalech $(2k\pi, 2\pi(k+1))$, $k \in \mathbb{Z}$, přičemž v bodech $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, má derivaci rovnou 0. Funkce φ je proto rostoucí na $\mathbb{R}$ a díky Větě 4.3.4 je $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Tím je zaručena existence funkce $\varphi^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Navíc je φ^{-1} spojitá díky Větě 4.3.13.

Ukažme, že f je 2π-periodická. Nechť $x \in \mathbb{R}$ je libovolné a $t \in \mathbb{R}$ splňuje $\varphi(t) = x$. Pak též

$$\varphi(t + 2\pi) = (t + 2\pi) - \sin(t + 2\pi) = (t + 2\pi) - \sin t = x + 2\pi.$$

Tedy

$$f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)) = \psi(t) = \psi(t + 2\pi) = \psi(\varphi^{-1}(x + 2\pi)) = f(x + 2\pi).$$

Stačí tedy vyšetřit průběh funkce na intervalu $[0, 2\pi]$.

Podle Věty 5.1.26 spočteme

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\psi(\varphi^{-}(x)))' = \psi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1}(x))' \\ &= \sin(\varphi^{-1}(x)) \frac{1}{1 - \cos(\varphi^{-1}(x))}, \quad x \in (0, 2\pi). \end{aligned}$$

Ozančíme-li $t = \varphi^{-1}(x)$, je výraz $\frac{\sin t}{1-\cos t}$ kladný pro $t \in (0, \pi)$, záporný pro $t \in (\pi, 2\pi)$ a nulový pro $t = \pi$. Tedy $f' > 0$ na intervalu $(0, \pi)$, $f' < 0$ na intervalu $(\pi, 2\pi)$ a $f'(x) = 0$ pro $x = \pi$. Jelikož f je spojitá, můžeme použít Větu 5.2.10 a odvodit pomocí Věty 4.2.24

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x\to 0_+} f'(x) = \lim_{x\to 0_+} \sin(\varphi^{-1}(x)) \frac{1}{1 - \cos(\varphi^{-1}(x))} \\ &= \lim_{t\to 0_+} \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \lim_{t\to 0_+} \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{t^2}{1 - \cos t} \cdot \frac{1}{t} = \infty. \end{aligned}$$

Obdobně odvodíme (například podle Věty 5.3.1)

$$f'_-(2\pi) = \lim_{t\to 2\pi_-} \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \lim_{t\to 2\pi_-} \frac{\cos t}{\sin t} = -\infty.$$

Z těchto výpočtů nyní vidíme, že f roste na intervalu $[0, \pi]$ a klesá na intervalu $[\pi, 2\pi]$. Dále má v bodě π globální maximum o hodnotě 2. Vzhledem k tomu, že f je kladná na inttervalu $(0, 2\pi)$, má f v bodech 0 a 2π globální minima splňující $f(0) = f(2\pi) = 0$.

Vzhledem k tomu, že f je jakožto složení spojitých funkcí spojitá, dostáváme z Věty 4.3.4, že $\mathcal{H}(f) = [0, 2]$.

K výpočtu f'' opět použijeme Větu 5.1.26. Nejprve označme $\omega(t) = \frac{\sin t}{1-\cos t}$, $t \in (0, 2\pi)$. Pak

$$\omega'(t) = \frac{-1}{1-\cos t}, \quad t \in (0, 2\pi).$$

Tedy máme

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{\sin(\varphi^{-1}(x))}{1-\cos(\varphi^{-1}(x))}\right)' = \big(\omega(\varphi^{-1}(x))\big)' \\ &= \omega'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1}(x))' = \frac{-1}{1-\cos(\varphi^{-1}(x))} \cdot \frac{1}{1-\cos(\varphi^{-1}(x))} \\ &= \frac{-1}{(1-\cos(\varphi^{-1}(x)))^2}, \quad x \in (0, 2\pi). \end{aligned}$$

Tedy $f'' < 0$ na $(0, 2\pi)$, a tedy je f ryze konkávní na $[0, 2\pi]$ (viz Věta 5.4.14).

Vzhledem k její periodicitě nemá asymptoty, viz Příklad 5.5.7. ♣

KAPITOLA 6

Elementární funkce

Již v první kapitole jsme se zabývali elementárními funkcemi. Uvedli jsme však pouze některé jejich vlastnosti a jejich konstrukcí jsme se nezabývali. Výsledky, které jsme odvodili v předchozích kapitolách, nám nyní umožní elementární funkce zkonstruovat a přesně odvodit jejich základní vlastnosti.

6.1. Exponenciální funkce a logaritmus

6.1.1. Označení. V následující části textu, ale i později, budeme pracovat s nekonečnými řadami tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, kde x i a_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou reálná čísla. Pro $x = 0, n = 0$, pak ale musíme uvažovat výraz $a_0 0^0$. Symbol 0^0 není obecně definován, zde však bude označovat číslo 1. Tato konvence umožňuje místo komplikovanějšího zápisu $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ psát pouze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

6.1.2. Definice. Exponenciální funkci exp definujme pro $x \in \mathbb{R}$ předpisem

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{6.1}$$

Místo $\exp(x)$ budeme pro jednoduchost zápisu často psát $\exp x$.

6.1.3. Věta (základní vlastnosti funkce exp)**.** Funkce $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je dobře definována a splňuje

(E1) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$,

(E2) $\lim_{x \to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1$.

Důkaz. Z Příkladu 3.9.23 vyplývá, že řada na pravé straně rovnosti (6.1) je absolutně konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$. Funkce exp je tedy předpisem (6.1) dobře definována na množině $\mathbb{R}$.

Zvolme $x, y \in \mathbb{R}$. Potom z binomické věty (Věta 1.6.4) plyne, že

$$\exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{n-k} y^k}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!}.$$

Výraz na pravé straně předchozí vysazené formule je Cauchyovým součinem řad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$ podle Definice 3.6.1. Protože, jak již víme, jsou obě tyto řady absolutně konvergentní (stačila by jedna), plyne z Mertensovy věty (Věta 3.6.2), že řada $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!}$ je konvergentní a platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right),$$

tedy $\exp(x+y) = (\exp x)(\exp y)$. Odtud plyne tvrzení (E1).

Zbývá dokázat tvrzení (E2). Nechť $x \in \mathbb{R}$, $|x| \leq 1$. Potom podle (6.1) platí:

$$\left| \frac{\exp x - 1}{x} - 1 \right| = \left| \frac{\exp x - 1 - x}{x} \right| = \left| \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| = \left| x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!} \right|.$$

Protože $|x| \leq 1$ a $n-2 \geq 0$ pro každé $n \geq 2$, dostáváme z Věty 3.4.3 a Příkladu 3.8.8, že

$$\left| \frac{\exp x - 1}{x} - 1 \right| \leq |x| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|x|^{n-2}}{n!} \leq |x| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = (e-2)|x|.$$

Zřejmě platí $\lim_{x \to 0} (e-2)|x| = 0$, a tedy dle věty o limitě a uspořádání (Věta 4.2.9) platí také $\lim_{x \to 0} \left| \frac{\exp x - 1}{x} - 1 \right| = 0$. Podle Věty 4.1.17 tudíž platí $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\exp x - 1}{x} - 1 \right) = 0$. Odtud plyne tvrzení (E2). ■

6.1.4 (**vlastnosti exponenciální funkce**). Nyní uvedeme několik vlastností exponenciální funkce, které odvodíme pouze z výroků (E1) a (E2). To znamená, že se nebudeme odvolávat na předpis (6.1) ale pouze na (E1) a (E2). Tento přístup nám později umožní dokázat, že exponenciální funkce je svými vlastnostmi (E1) a (E2) jednoznačně určena.

(E3) Platí $\exp(0) = 1$.

Podle (E1) platí $\exp(0) = \exp(0+0) = (\exp(0))^2$. To znamená, že buď $\exp(0) = 1$, nebo $\exp(0) = 0$. Předpokládejme, že $\exp(0) = 0$. Potom pro každé $x \in \mathbb{R}$ podle (E1) platí $\exp(x) = \exp(x+0) = \exp(x)\exp(0) = 0$. Tedy z (E2) vyplývá, že $1 = \lim_{x \to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{x}$, což je spor. Platí tedy $\exp(0) = 1$.

(E4) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\exp'(x) = \exp(x)$.

Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom podle definice derivace a (E1) platí

$$\begin{aligned}\exp'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h)-\exp(x+0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \cdot \frac{\exp(x)\exp(h)-\exp(x)\exp(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \exp(x)\cdot\frac{\exp(h)-\exp(0)}{h}.\end{aligned}$$

Odtud podle (E3) a (E2) plyne, že

$$\exp'(x) = \lim_{h\to 0} \exp(x)\cdot\frac{\exp(h)-1}{h} = \exp(x).$$

(E5) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

Z (E1) a (E3) plyne $1 = \exp(x-x) = \exp(x)\exp(-x)$. Odtud plyne tvrzení.

(E6) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\exp(x) > 0$.

Nechť $x \in \mathbb{R}$. Z (E5) plyne $\exp(x) \neq 0$. Dle (E1) platí

$$\exp(x) = \exp(\tfrac{x}{2}+\tfrac{x}{2}) = \exp\big(\tfrac{x}{2}\big)\cdot\exp\big(\tfrac{x}{2}\big) = (\exp\big(\tfrac{x}{2}\big))^2 \geq 0,$$

čímž je tvrzení dokázáno.

(E7) Funkce exp je spojitá na $\mathbb{R}$.

Podle (E4) má funkce exp vlastní derivaci v každém bodě $x \in \mathbb{R}$. Tvrzení tedy plyne z Věty 5.1.15.

(E8) Funkce exp je rostoucí na $\mathbb{R}$.

Podle (E3) a (E6) platí $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Tvrzení tedy plyne z Věty 5.2.6.

(E9) Platí $\lim_{x\to\infty}\exp(x) = \infty$ a $\lim_{x\to-\infty}\exp(x) = 0$.

Z (E3) a (E8) plyne $\exp(1) > \exp(0) = 1$. Odtud, z (E1) a Příkladu 2.3.33 dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}\exp(n) = \lim_{n\to\infty}\big(\exp(1)\big)^n = \infty.$$

To znamená, že funkce exp není shora omezená. Zároveň je podle 5:P:vlastnost-E8 rostoucí, a tedy z věty o limitě monotónní funkce (Věta 4.2.25) plyne, že

$\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$. Podle (E5), Věty 4.2.20 a již dokázané části tvrzení dále platí, že

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\exp(-x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0.$$

Tím jsou dokázána obě požadovaná tvrzení.

(E10) Platí $\mathscr{H}(\exp) = (0, \infty)$.

Podle (E7) je funkce exp je spojitá, a tedy podle Věty 4.3.6 je množina $\mathscr{H}(\exp)$ interval. Podle (E6) pak platí $\mathscr{H}(\exp) \subset (0, \infty)$. Díky (E9) pak dostáváme $\mathscr{H}(\exp) = (0, \infty)$.

6.1.5. Věta. Existuje právě jedna funkce definovaná na $\mathbb{R}$ splňující podmínky (E1) a (E2).

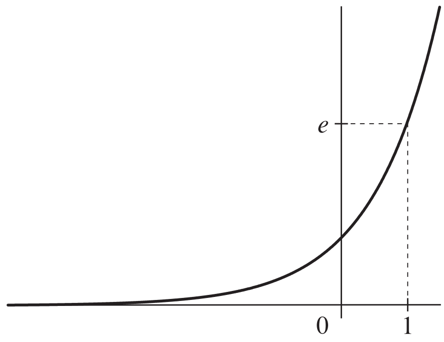
Důkaz. Existence funkce splňující podmínky (E1) a (E2) plyne z Definice 6.1.2 a Věty 6.1.3. Dokážeme nyní její jednoznačnost.

Předpokládejme, že funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ splňují $f(x + y) = f(x)f(y)$ a $g(x + y) = g(x)g(y)$, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1$ a $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-1}{x} = 1$. Ukážeme, že pak již nutně platí $f = g$.

Z předchozích úvah vyplývá, že funkce f a g splňují všechny podmínky (E3)-(E10), neboť k jejich odvození jsme využili pouze podmínky (E1) a (E2). Platí tedy $f(0) = g(0) = 1$ podle (E3) a pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f'(x) = f(x)$ a $g'(x) = g(x)$ podle (E4). Z podmínky (E6) vyplývá, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $g(x) \neq 0$. Pomocí Věty 5.1.17(c) tudíž dostáváme pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{g(x)^2} = 0.$$

Podle Věty 5.2.9 je funkce $\frac{f}{g}$ konstantní, tedy existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\frac{f(x)}{g(x)} = c$. Protože $\frac{f(0)}{g(0)} = 1$, platí $c = 1$. Odtud plyne, že $f = g$. Tvrzení je dokázáno. ∎



OBRÁZEK 1. Graf exponenciální funkce

6.1.6. Poznámka. Podle Příkladu 3.8.8 platí $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Ze vzorce (6.1) tedy plyne

$$\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

6.1.7. Definice.

(a) Funkce $\log\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ je definována jako inverzní funkce k funkci exp. Nazývá se **přirozeným logaritmem**.

(b) Je-li $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, pak definujeme funkci $\log_a\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

Funkci $\log_a$ nazýváme **logaritmem o základu** a. V případě $a = e$ píšeme pouze log místo $\log_e$.

(c) Nechť $a \in \mathbb{R}, a > 0$, a $b \in \mathbb{R}$. Potom definujeme reálné číslo a^b předpisem $a^b = \exp(b \log a)$.

(d) Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Potom funkci $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$, nazýváme **obecnou mocninou**.

(e) Je-li $n \in \mathbb{N}$ liché, n-**tou odmocninu** $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $x \in \mathbb{R}$, definujeme jako inverzní funkci k funkci $x \mapsto x^n$, $x \in \mathbb{R}$. Je-li $n \in \mathbb{N}$ sudé, n-**tou odmocninu** $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $x \in [0, \infty)$, definujeme jako inverzní funkci k funkci $x \mapsto x^n$, $x \in [0, \infty)$.

6.1.8 (vlastnosti přirozeného logaritmu)**.**

(L1) Platí $\mathcal{D}(\log) = (0, \infty)$.

Platí $\mathcal{D}(\log) = \mathcal{H}(\exp)$, a proto tvrzení plyne z (E10).

(L2) Platí $\mathcal{H}(\log) = \mathbb{R}$.

Tvrzení plyne z faktu $\mathcal{H}(\log) = \mathcal{D}(\exp)$.

(L3) Funkce log je rostoucí na $(0, \infty)$.

Funkce exp je rostoucí, a proto je podle Věty 4.3.13 rostoucí i funkce log.

(L4) Funkce log je spojitá na $(0, \infty)$.

Spojitost plyne z věty o spojitosti inverzní funkce (Věta 4.3.13).

(L5) Pro každé $x, y \in (0, \infty)$ platí $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

Vezměme $x, y \in (0, \infty)$ a označme $a = \log x$ a $b = \log y$. Pak

$$xy = \exp(a)\exp(b) = \exp(a + b) = \exp(\log(x) + \log(y)),$$

a tedy $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

(L6) Pro každé $a \in (0, \infty)$ a $b \in \mathbb{R}$ platí $\log a^b = b \log a$.

Pro příslušná a, b platí podle definice obecné mocniny

$$\log a^b = \log\bigl(\exp(b \log a)\bigr) = b \log a.$$

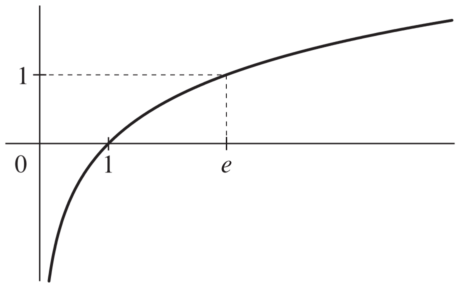
(L7) Pro každé $x \in (0, \infty)$ platí $(\log)'x = \frac{1}{x}$.

Podle věty o derivaci inverzní funkce (Věta 5.1.26(a)) a (E4) platí pro $x \in (0, \infty)$ vztah

$$\log' x = \frac{1}{\exp'(\log x)} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}.$$

(L8) Platí $\lim_{x \to 0_+} \log x = -\infty$ a $\lim_{x \to \infty} \log x = \infty$.

Podle (L3) je funkce log rostoucí, takže z věty o limitě monotónní funkce (Věta 4.2.25) plyne $\lim_{x \to 0_+} \log x = \inf \mathcal{H}(\log)$ a $\lim_{x \to \infty} \log x = \sup \mathcal{H}(\log)$. Z (L2) pak vyplývá naše tvrzení.



Obrázek 2. Graf funkce logaritmus

6.1.9. Poznámky. (a) V Definici 6.1.7(c) jsme provedli rozšíření výrazu a^b na všechny reálné exponenty b za předpokladu, že základ a je větší než 0. Doposud jsme měli korektně definován výraz a^b, $a > 0$, pouze pro případ, kdy b bylo číslo racionální. Nová definice dává podle vlastnosti (L6) v tomto případě totéž, a je tedy rozšířením definice původní. Místo $\exp(x)$ často píšeme e^x, neboť podle definice obecné mocniny jsou si tyto výrazy rovny. Výraz a^b máme tedy definován v těchto případech:

- $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, a $b \in \mathbb{R}$ libovolné,
- $a \in \mathbb{R}$ libovolné a $b \in \mathbb{N}$,
- $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, a $b \in \mathbb{Z}$, $b < 0$.

(b) Nechť f a g jsou reálné funkce definované na množině $M \subset \mathbb{R}$, přičemž $f : M \to (0, \infty)$. Potom symbolem $f(x)^{g(x)}$ budeme označovat funkci definovanou na množině M předpisem $x \mapsto \exp(g(x) \log f(x))$.

6.2. Goniometrické funkce

Při odvozování některých vlastností elementárních funkcí v tomto oddílu využijeme následující lemma.

6.2.1. Lemma. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom existuje kladné $C \in \mathbb{R}$ (závisející na x) takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $h \in (-1, 1)$ platí

$$\left|(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}\right| \leq h^2 C^n. \tag{6.2}$$

Důkaz. Položme $C = 2(|x| + 1)$. Pokud $n = 1$, pak tvrzení triviálně platí. Z binomické věty pro $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, a $h \in (-1, 1)$ dostáváme

$$(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k.$$

Využitím nerovností $|x| + 1 \geq 1$ a $|h| < 1$ obdržíme

$$|(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}| \leq \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k}|h|^k \leq \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (|x|+1)^n h^2$$
$$\leq h^2(|x|+1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Podle Příkladu 1.9.4 platí $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. Pak dostáváme

$$|(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}| \leq h^2(|x|+1)^n 2^n = h^2 C^n.$$

Tím je důkaz dokončen. ■

6.2.2. Definice. Funkci **sinus**, značíme sin, a **kosinus**, značíme cos, definujeme předpisy

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{6.3}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{6.4}$$

6.2.3. Věta (základní vlastnosti sinu a kosinu)**.** Funkce sinus a kosinus jsou dobře definované a splňují

(G1) pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y),$$

(G2) pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),$$

(G3) sin je lichá funkce a cos je sudá funkce,

(G4) existuje kladné číslo π takové, že sin je rostoucí na $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(0) = 0$ a $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$,

(G5) $\sin'(0) = 1$.

Důkaz. Podle Příkladu 3.9.24 obě řady konvergují pro každé $x \in \mathbb{R}$. Funkce sin a cos jsou tedy dobře definovány.

Nejprve dokážeme, že platí

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin'(x) = \cos(x). \tag{6.5}$$

Vezměme pevné $x \in \mathbb{R}$. Pro $h \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}
&\sin(x+h) - \sin(x) - h\cos(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{(x+h)^{2n+1} - x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{hx^{2n}}{(2n)!} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left((x+h)^{2n+1} - x^{2n+1} - h(2n+1)x^{2n} \right).
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Podle Lemmatu 6.2.1 nalezneme pro $x \in \mathbb{R}$ kladné C takové, že pro každé $h \in \mathbb{R}, |h| < 1$, platí

$$|(x+h)^{2n+1} - x^{2n+1} - h(2n+1)x^{2n}| \leq C^{2n+1} h^2. \tag{6.7}$$

Odtud a z (6.6) dostáváme, že pro každé $h \in P(0,1)$ platí

$$\begin{aligned}
|\sin(x+h) - \sin(x) - h\cos(x)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^{2n+1}}{(2n+1)!} h^2 \\
&= \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^{2n+1}}{(2n+1)!} \Big) h^2.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^{2n+1}}{(2n+1)!}$ konverguje podle podílového kritéria. Odtud pak plyne

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{\sin(x+h) - \sin(x) - h\cos(x)}{h} \right| = 0,$$

neboli

$$\sin'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \cos(x).$$

Zcela analogicky lze odvodit vztah

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ \cos'(x) = -\sin(x). \tag{6.9}$$

Ověříme vlastnosti (G1)-(G5).

(G1)-(G2) Vezměme $a \in \mathbb{R}$ pevné a pro $x \in \mathbb{R}$ definujme

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \big(\sin(x+a) - \sin(x)\cos(a) - \sin(a)\cos(x) \big)^2 \\
&\quad + \big(\cos(x+a) - \cos(x)\cos(a) + \sin(a)\sin(x) \big)^2.
\end{aligned}$$

Přímočarý výpočet spolu s (6.5) a (6.9) dává, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\psi'(x) = 0$. Protože

$$\psi(0) = (\sin(a) - \sin(a))^2 + (\cos(a) - \cos(a))^2 = 0,$$

dostáváme $\psi(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, a tedy také dokazované vztahy z (G1).

(G3) Ze vztahu (6.3) plyne, že funkce sin je lichá. Podobně z (6.4) plyne, že funkce cos je sudá.

(G4) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}\Big(1 - \frac{x^2}{(4n+2)(4n+3)}\Big).$$

Pokud $x \in (0, 2)$, potom jsou členy předchozí řady kladné a platí $\sin(x) > 0$. Podle Věty 5.2.6 a (6.9) je funkce cos klesající na intervalu $(0, 2)$. Ze vztahu

$$\cos(x) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}\Big(1 - \frac{x^2}{(4n+3)(4n+4)}\Big)$$

plyne

$$\cos(2) < 1 - \frac{2^2}{2!}\Big(1 - \frac{2^2}{3 \cdot 4}\Big) = -\frac{1}{3} < 0.$$

Existuje tedy právě jedno $\alpha \in (0, 2)$ takové, že $\cos(\alpha) = 0$ (Věta 4.3.4). Tedy funkce cos je na intervalu $(0, \alpha)$ kladná. Odtud a z (6.5) plyne, že funkce sin je rostoucí na $[0, \alpha]$ (Věta 5.2.6). Položme nyní $\pi = 2\alpha$. Podle (G1) a (G2) platí

$$1 = \cos(0) = \cos\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\Big) = \cos\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\cos\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) - \sin\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\sin\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = 0 + \sin^2\Big(\frac{\pi}{2}\Big),$$

a tedy $\sin^2(\frac{\pi}{2}) = 1$. Poněvadž $\sin(\frac{\pi}{2}) > 0$, platí $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Podle (6.3) snadno ověříme $\sin 0 = 0$. Tím jsou vlastnosti popsané v (G4) ověřeny.

(G5) Podle (6.4) máme $\cos(0) = 1$, a tedy podle (6.5) platí $\sin'(0) = \cos(0) = 1$. ■

6.2.4 (vlastnosti funkcí sinus a kosinus)**.** K odvození vlastností funkcí sinus a kosinus použijeme pouze vlastnosti (G1)–(G5).

(G6) Platí $\cos(0) = 1$.

Z (G1) a (G4) dostáváme

$$\begin{aligned} 1 &= \sin\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \sin\Big(\frac{\pi}{2} + 0\Big) = \sin\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\cos(0) + \cos\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\sin(0) \\ &= 1 \cdot \cos(0) + \cos\Big(\frac{\pi}{2}\Big) \cdot 0 = \cos(0). \end{aligned}$$

(G7) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Z (G2) a (G3) máme pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$1 = \cos(x - x) = \cos(x)\cos(-x) - \sin(x)\sin(-x) = \cos^2(x) + \sin^2(x).$$

(G8) Platí $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Tvrzení plyne z (G4) a (G7).

(G9) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ a $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$.

Podle (G1), (G2), (G4) a (G8) platí

$$\begin{aligned} \sin(x + \pi) &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x), \\ \cos(x + \pi) &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x). \end{aligned}$$

(G10) Funkce sin a cos jsou 2π-periodické.

Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom podle (G9) platí $\sin(x + 2\pi) = -\sin(x + \pi) = \sin x$ a $\cos(x + 2\pi) = -\cos(x + \pi) = \cos(x)$.

(G11) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\sin'(x) = \cos(x)$.

Spočteme nejprve dvě limity, které budeme potřebovat při odvození derivace funkce sin. Podle (G5) platí

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h) - \sin(0)}{h} = \sin'(0) = 1.$$

Podle vztahu (G2) platí pro každé $h \in \mathbb{R}$ rovnost $\cos(h) = \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{h}{2}\right)$. Podle (G7) pak obdržíme vztah $\cos(h) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)$. Tento vztah použijeme v následujícím výpočtu

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{-2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h^2} = -\frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right)^2 = -\frac{1}{2}.$$

Pro $x \in \mathbb{R}$ počítejme

$$\begin{aligned}
\sin'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)\big) \\
&= \lim_{h\to 0} \sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h^2}h + \lim_{h\to 0}\cos(x)\frac{\sin(h)}{h} \\
&= \sin(x)\cdot\frac{-1}{2}\cdot 0 + \cos(x)\cdot\sin'(0) = \cos(x).
\end{aligned}$$

(G12) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí podle (G1) a (G8) vztah $\sin\big(\frac{\pi}{2}-x\big) = \cos(x)$. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ máme podle věty o derivaci složené funkce

$$\cos'(x) = \Big(\sin\big(\frac{\pi}{2}-x\big)\Big)' = \cos\big(\frac{\pi}{2}-x\big)\cdot(-1) = -\sin(x).$$

(G13) Funkce sin a cos jsou spojité na $\mathbb{R}$.

Funkce sin a cos mají v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci, a tedy jsou podle Věty 5.1.15 v x spojité.

(G14) Platí $\sin(x) = 0$, právě když $x = k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

Funkce sin je 2π-periodická podle (G10). Stačí tedy určit nulové body v intervalu $[0, 2\pi)$. Podle (G4) platí, že $\sin(0) = 0$ a funkce sin je kladná na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Odtud a podle (G12) je cos klesající na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$. Díky vztahu $\cos\big(\frac{\pi}{2}\big) = 0$ dostáváme, že funkce cos je na intervalu $[0, \frac{\pi}{2})$ kladná. Ze vztahů $\sin\big(x+\frac{\pi}{2}\big) = \cos(x)$ a $\cos\big(x+\frac{\pi}{2}\big) = -\sin(x)$ dostáváme, že funkce sin je nulová v intervalu $[0, 2\pi)$ právě v bodech 0 a π.

(G15) Platí $\cos(x) = 0$, právě když $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

Tvrzení plyne z (G14) a vztahu $\sin\big(x+\frac{\pi}{2}\big) = \cos(x)$.

6.2.5. Věta. Trojice $(\sin, \cos, \pi)$ je vlastnostmi (G1)–(G5) určena jednoznačně.

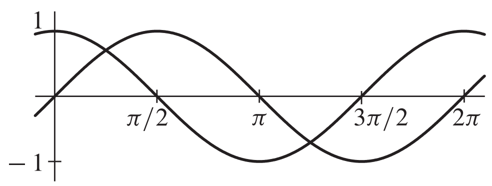
Důkaz. Předpokládejme, že trojice $(\sin^*, \cos^*, \pi^*)$ splňuje vlastnosti (G1)-(G5). Položme

$$\varphi(x) = (\sin(x) - \sin^*(x))^2 + (\cos(x) - \cos^*(x))^2, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= 2\big(\sin(x) - \sin^*(x)\big) \cdot \big(\cos(x) - \cos^*(x)\big) \\ &\quad + 2\big(\cos(x) - \cos^*(x)\big) \cdot \big(-\sin(x) + \cos^*(x)\big) = 0.\end{aligned}$$

Tedy je dle Věty 5.2.9 funkce φ konstantní na $\mathbb{R}$. V bodě 0 je však nulová, a tedy je nulová všude. Proto je $\sin = \sin^*$ a $\cos = \cos^*$. Odtud a díky (G4) platí $\pi = \pi^*$ a důkaz je hotov. ∎



Obrázek 3. Grafy funkcí sinus a kosinus

6.2.6. Definice. Funkce **tangens**, značíme ji tg, a **kotangens**, značíme ji cotg, definujeme předpisy

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, & x &\in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}, \\ \operatorname{cotg}(x) &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, & x &\in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Funkce sin, cos, tg a cotg nazýváme **goniometrickými funkcemi**.

6.2.7. Poznámka. Vzhledem k tomu, že již bylo zavedeno číslo π a obecná mocnina, máme zavedeno také reálné číslo π^π, o němž jsme se zmínili v 1.1.2.

Vlastnosti funkce tangens.

(G14) Funkce tg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

Plyne z (G13) pomocí Věty 4.2.5.

(G15) Funkce tg je lichá.

Plyne z (G3).

(G16) Funkce tg je π-periodická.

Je-li $x \in \mathcal{D}(\mathrm{tg})$, pak také $x + \pi \in \mathcal{D}(\mathrm{tg})$ a $x - \pi \in \mathcal{D}(\mathrm{tg})$ podle (G15). Pro $x \in \mathcal{D}(\mathrm{tg})$ pak máme podle (G9)

$$\mathrm{tg}(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \mathrm{tg}(x).$$

(G17) Platí $\mathrm{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$, $x \in \mathcal{D}(\mathrm{tg})$.

Pro $x \in \mathcal{D}(\mathrm{tg})$ platí podle věty o derivaci podílu (Věta 5.1.17(c))

$$\begin{aligned}\mathrm{tg}'(x) &= \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)}.\end{aligned}$$

(G18) Funkce tg je rostoucí na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Funkce cos je na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ kladná, a tedy je derivace funkce tg na tomto intervalu kladná. Z Věty 5.2.6 pak plyne, že funkce tg je rostoucí na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(G19) Platí $\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}) = 1$.

(G20) Platí $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \mathrm{tg}(x) = \infty$ a $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+} \mathrm{tg}(x) = -\infty$.

Tvrzení plyne z poznámky za Větou 4.2.7 a vlastností funkcí sinus a kosinus.

(G21) Platí $\mathcal{H}(\mathrm{tg}) = \mathbb{R}$.

Funkce tg je spojitá na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a zobrazuje tento interval opět na interval (Věta 4.3.6), který podle předchozího tvrzení není omezený ani shora ani zdola. Musí tedy být $\mathrm{tg}\big((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\big) = \mathbb{R}$, čímž je tvrzení dokázáno.

Vlastnosti funkce kotangens. Při důkazu následujících vlastností lze postupovat stejně jako v případě funkce tangens, a proto odvození již uvádět nebudeme.

(G21) Funkce cotg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

(G22) Funkce cotg je lichá.

(G23) Funkce cotg je periodická s periodou π.

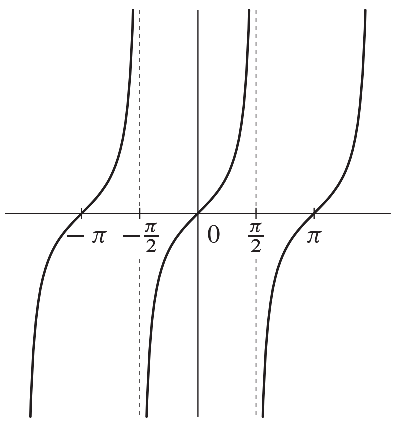
(G24) Funkce cotg je klesající na intervalu $(0, \pi)$.

(G25) Platí $\lim_{x \to 0_+} \operatorname{cotg}(x) = \infty$.

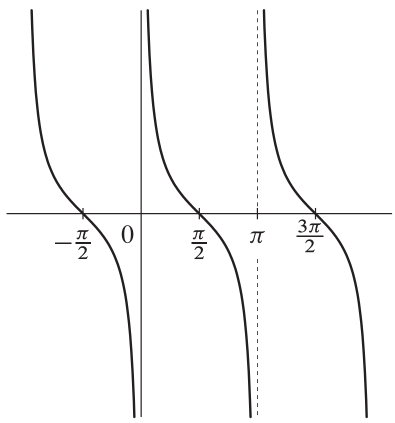
(G26) Platí $\lim_{x \to \pi_-} \operatorname{cotg}(x) = -\infty$.

(G27) Platí $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

(G28) Platí $\mathscr{H}(\operatorname{cotg}) = \mathbb{R}$.



Obr. 4. Graf funkce tangens



Obr. 5. Graf funkce kotangens

6.3. Cyklometrické funkce

6.3.1. Definice. Cyklometrické funkce arkussinus (arcsin), **arkuskosinus** (arccos), **arkustangens** (arctg) a **arkuskotangens** (arccotg) definujeme následujícím způsobem

$$\begin{aligned} \arcsin &= \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}, \\ \arccos &= \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}, \\ \operatorname{arctg} &= \left(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1}, \\ \operatorname{arccotg} &= \left(\operatorname{cotg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

6.3.2 (vlastnosti cyklometrických funkcí)**.**

(C1) Platí $\mathcal{D}(\arcsin) = [-1,1]$ a $\mathcal{H}(\arcsin) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(C2) Platí $\mathcal{D}(\arccos) = [-1,1]$ a $\mathcal{H}(\arccos) = [0,\pi]$.

(C3) Funkce arcsin je lichá, rostoucí a spojitá na $[-1,1]$.

(C4) Funkce arccos je klesající a spojitá na $[-1,1]$.

(C5) Následující rovnosti plynou ze známých vlastností funkcí sin a cos.

$$\begin{aligned} \arcsin(-1) &= -\frac{\pi}{2}, & \arccos(-1) &= \pi, \\ \arcsin 1 &= \frac{\pi}{2}, & \arccos 1 &= 0, \\ \arcsin 0 &= 0, & \arccos 0 &= \frac{\pi}{2}, \\ \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{\pi}{4}, & \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(C6) Platí $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$.

Funkce arcsin je prostá, a proto $\arcsin x \neq 0$ pro každé $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$. Užitím Věty 4.2.20(P) a vlastnosti funkce sinus dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\arcsin x)}{\arcsin x} = 1.$$

Odtud po algebraické úpravě plyne
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1.$$
Dokazovaný vztah nyní plyne z Věty 4.2.2(c) o limitě podílu.

(C7) Pro každé $y \in (-1,1)$ platí $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Pro dané $y \in (-1,1)$ nalezneme $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ splňující $\sin(x) = y$. Podle Věty 5.1.26 platí
$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

(C8) Platí $\arcsin'_+(-1) = \infty$ a $\arcsin'_-(1) = \infty$.

V bodě 1 počítejme dle Věty 5.2.10
$$\arcsin'_-(1) = \lim_{y\to 1_-} \arcsin'(y) = \lim_{y\to 1_-} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \infty.$$
Obdobně odvodíme $\arcsin'_+(-1) = \infty$.

(C9) Pro každé $x \in [-1,1]$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Vezměme libovolné $x \in [-1,1]$ a označme $y = \arcsin x$. Potom platí $x = \sin y = \cos(\frac{\pi}{2} - y)$. Protože $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, je $\frac{\pi}{2} - y \in [0,\pi]$, a tedy $\arccos x = \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, odkud již plyne dokazovaná rovnost.

(C10) Pro každé $y \in (-1,1)$ platí $\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

(C11) Platí $\mathscr{D}(\operatorname{arctg}) = \mathbb{R}$ a $\mathscr{H}(\operatorname{arctg}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(C12) Funkce arctg je spojitá, rostoucí a lichá na $\mathbb{R}$.

(C13) Platí $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$.

(C14) Platí $\operatorname{arctg}(0) = 0$, $\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

(C15) Platí $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$.

(C16) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}$.

(C17) Platí $\mathcal{D}(\operatorname{arccotg}) = \mathbb{R}$ a $\mathcal{H}(\operatorname{arccotg}) = (0, \pi)$.

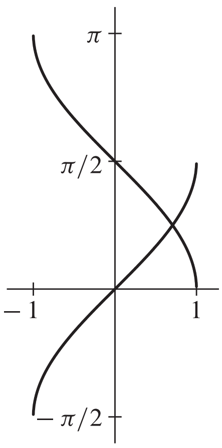
(C18) Funkce arccotg je spojitá a klesající funkce na $\mathbb{R}$.

(C19) Platí $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arccotg}(x) = 0$ a $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arccotg}(x) = \pi$.

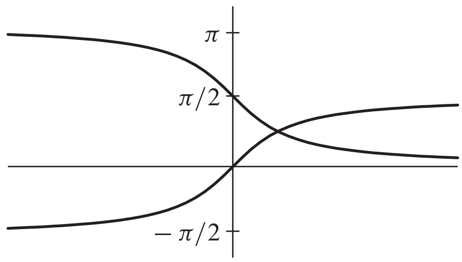
(C20) Platí $\operatorname{arccotg}(0) = \frac{\pi}{2}$ a $\operatorname{arccotg}(1) = \frac{\pi}{4}$.

(C21) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$.

(C22) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\operatorname{arccotg}' x = -\frac{1}{1+x^2}$.



Obrázek 6. Grafy funkcí arkussinus a arkuskosinus



Obrázek 7. Grafy funkcí arkustangens a arkuskotangens

KAPITOLA 7

Taylorův polynom

V této kapitole budeme studovat otázku aproximace obecné funkce polynomem. K zadané funkci budeme hledat vhodný polynom, jenž se v blízkosti daného bodu v jistém dobře definovaném smyslu přibližuje hodnotám funkce. Budeme se přitom snažit, aby odchylka funkce od polynomu byla dostatečně malá. K tomuto účelu vybudujeme několik účinných metod, jak absolutní velikost této odchylky shora odhadnout.

7.1. Základní vlastnosti

7.1.1. Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$ a nechť existuje vlastní $f'(a)$. Potom existuje tečna ke grafu funkce f v bodě a ve smyslu Definice 5.1.8. Označme funkci, která definuje tuto tečnu, symbolem t, tedy položme

$$t(x) = f(a) + f'(a)(x-a), \quad x \in \mathbb{R}.$$

O této funkci můžeme říci, že v jistém smyslu *aproximuje* chování f v blízkosti bodu a, neboť platí

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - t(x)|}{|x-a|} = 0. \tag{7.1}$$

To plyne z výpočtu

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} \frac{f(x) - t(x)}{x-a} &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = \\ &= \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \right) = 0\end{aligned}$$

a z Věty 4.1.17. Neformálně řečeno, pro hodnoty x dostatečně blízké k bodu a je výraz $|f(x) - t(x)|$ podstatně menší než $|x-a|$.

Nyní nahradíme afinní funkci t, což je polynom stupně nejvýše 1, polynomem P obecně vyššího stupně. Ukazuje se, že pro dané $n \in \mathbb{N}$ je možné nalézt polynom P splňující

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - P(x)|}{|x-a|^n} = 0. \tag{7.2}$$

Jestliže $n > 1$, pak (7.2) představuje lepší aproximaci než (7.1), protože

$$\lim_{x \to a} \frac{|x-a|^n}{|x-a|} = 0,$$

a tedy je výraz $|x-a|^n$ je pro x dostatečně blízké k bodu a podstatně menší než $|x-a|$, takže polynom P aproximuje f s podstatně větší přesností než tečna.

Při hledání vhodného polynomu bude užitečné si povšimnout, že funkce t splňuje $f(a) = t(a)$ a $f'(a) = t'(a)$. Budeme hledat polynom P tak, aby pro každé $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ platilo $f^{(j)}(a) = P^{(j)}(a)$. Ukážeme, že polynom, který je zaveden následující definicí, splňuje tento požadavek i (7.2).

7.1.2. Definice. Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Pak polynom $T_n^{f,a}$, definovaný pro každé $x \in \mathbb{R}$ předpisem

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n,$$

nazýváme **Taylorovým polynomem**[1] **funkce** f **v bodě** a **řádu** n.

7.1.3. Úmluva. V dalším textu budeme symbol tvaru $(x-a)^0$ chápat jako 1, a to i tehdy, jestliže $x = a$. Symbolem $f^{(0)}$ (tedy „nultou derivací“ funkce f) budeme rozumět samotnou funkci f.

7.1.4. Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Potom pro každé $j \in \{0, \dots, n-1\}$ existuje vlastní $f^{(j)}(x)$ na nějakém okolí bodu a. Speciálně odtud vyplývá, že Taylorův polynom $T_n^{f,a}$ je dobře definován. Zřejmě platí $T_1^{f,a} = t$.

7.1.5. Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Z definice Taylorova polynomu je zřejmé, že platí $\operatorname{st}(T_n^{f,a}) \le n$. Tato nerovnost ovšem může být ostrá. To nastává právě tehdy, když platí $f^{(n)}(a) = 0$. Položíme-li například $f = \sin$, $a = 0$ a $n = 2$, dostaneme

$$T_2^{\sin,0}(x) = \sin 0 + \sin'(0)x + \frac{\sin''(0)}{2} x^2 = x, \quad x \in \mathbb{R},$$

takže $\operatorname{st}(T_2^{\sin,0}) = 1$.

[1] Brook Taylor (1685–1731)

7.1.6. Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Označme $T = T_n^{f,a}$. Pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}
T'(x) &= f'(a) + f''(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(a)(x-a)^{n-1},\\
T''(x) &= f''(a) + f'''(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{(n-2)!} f^{(n)}(a)(x-a)^{n-2},\\
&\vdots\\
T^{(n-1)}(x) &= f^{(n-1)}(a) + f^{(n)}(a)(x-a),\\
T^{(n)}(x) &= f^{(n)}(a).
\end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = a$, dostaneme vztahy

$$T(a) = f(a),\ T'(a) = f'(a),\ T''(a) = f''(a), \ldots,\ T^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

7.1.7. Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Potom pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $(T_n^{f,a})'(x) = T_{n-1}^{f',a}(x)$. Toto tvrzení bezprostředně vyplývá z Definice 7.1.2 a 7.1.6.

7.1.8. Příklad. Spočtěte Taylorův polynom třetího řádu v bodě 0 pro funkce sinus a kosinus.

Řešení. Protože platí

$$\sin 0 = 0,\ \sin' 0 = \cos 0 = 1,\ \sin'' 0 = -\sin 0 = 0,\ \sin''' 0 = -\cos 0 = -1,$$

dostáváme

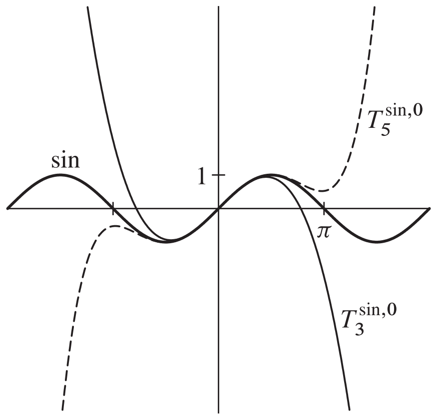
$$T_3^{\sin,0}(x) = x - \frac{1}{6}x^3.$$

Podobně lze odvodit vztah

$$T_3^{\cos,0}(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2.$$

♣

7.1.9. Na následujícím obrázku jsou zachyceny grafy funkce sinus a Taylorových polynomů $T_3^{\sin,0}$ a $T_5^{\sin,0}$.



Obrázek 1. Taylorovy polynomy funkce sinus

7.1.10. Budeme studovat otázku, jak kvalitní je aproximace funkce jejím Taylorovým polynomem. Kvalitu přiblížení obvykle měříme velikostí „chyby aproximace“, tedy veličiny $|f(x) - T_n^{f,a}(x)|$ v daném bodě x. Tuto chybu je možné jen málokdy spočítat přesně, uvedeme ale pro ni několik velmi efektivních odhadů. Chybu aproximace budeme v dalším textu nazývat „zbytkem“. Důležitou charakteristikou kvality aproximace je popis a nebo alespoň horní odhad velikosti zbytku v závislosti na bodu x, jestliže se tento bod blíží k bodu a.

7.1.11. Věta (Peanův tvar zbytku)**.** Nechť f je reálná funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Potom

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Důkaz. Použijeme matematickou indukci podle n. Nechť $n = 1$. Potom podle 7.1.4 a (7.1) platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_1^{f,a}(x)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - t(x)}{x-a} = 0.$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Předpokládejme, že existuje vlastní $f^{(n)}(a)$ a tvrzení věty platí pro $n-1$. To znamená, že pro každou funkci g takovou, že existuje vlastní $g^{(n-1)}(a)$, platí

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x) - T_{n-1}^{g,a}(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0.$$

Tento předpoklad využijeme pro $g = f'$. Víme, že funkce f' v bodě a vlastní $(n-1)$-ní derivaci, neboť $(f')^{(n-1)}(a) = f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Podle indukčního předpokladu tedy platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0. \tag{7.3}$$

Funkce f je spojitá v bodě a, neboť existuje vlastní $f'(a)$. Funkce $T_n^{f,a}$ je polynom, a tedy je také spojitá v bodě a. Z toho plyne, že můžeme využít L'Hospitalova pravidla (viz Větu 5.3.1(a)). Dostaneme

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{\big(f(x) - T_n^{f,a}(x)\big)'}{\big((x-a)^n\big)'}.$$

Podle 7.1.6 platí $\big(T_n^{f,a}\big)' = T_{n-1}^{f',a}$. Tudíž z (7.3) vyplývá, že

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{n(x-a)^{n-1}} = 0.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ■

7.1.12. Lemma. Nechť $n \in \mathbb{N}$, Q je polynom, st $Q \le n$ a $\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$. Pak Q je nulový polynom.

Důkaz. Předpokládejme, že polynom Q není nulový. Polynom Q má zřejmě v bodě a kořen. Pak podle Lemmatu **??** existuje $k \in \{1, \dots, n\}$ a polynom R takový, že $Q(x) = (x-a)^k R(x)$ a $R(a) \neq 0$. Potom platí

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{R(x)}{(x-a)^{n-k}}.$$

Poslední limita ale buď neexistuje (je-li $k < n$ a $n-k$ je liché), nebo je nevlastní (je-li $k < n$ a $n-k$ je sudé), nebo je vlastní a nenulová (je-li $k = n$). Ve všech těchto případech dostáváme spor. Tím je tvrzení lemmatu dokázáno. ■

7.1.13. Věta. Nechť f je reálná funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, existuje vlastní $f^{(n)}(a)$ a P je polynom stupně nejvýše n splňující

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Potom $P = T_n^{f,a}$.

Důkaz. Podle Věty 7.1.11 víme, že

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Podle věty o aritmetice limit (Věta 4.2.2) tedy platí

$$\lim_{x\to a} \frac{T_n^{f,a}(x) - P(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{T_n^{f,a}(x) - f(x)}{(x-a)^n} + \lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0+0 = 0.$$

Dále platí $\operatorname{st}\bigl(T_n^{f,a} - P\bigr) \leq n$, a tedy podle Lemmatu 7.1.12 je $T_n^{f,a} - P$ nulový polynom. To znamená, že $P = T_n^{f,a}$. ■

Věta 7.1.11 udává asymptotický odhad „řádu“ chyby, jíž se dopustíme při nahrazení funkce Taylorovým polynomem, neříká však nic o její skutečné velikosti. V následující větě odvodíme přesnější formuli pro vyjádření chyby, ovšem za silnějších předpokladů na funkci f.

7.1.14. Věta (obecný tvar zbytku)**.** Nechť f je reálná funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$, a f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní derivaci řádu $(n+1)$. Nechť φ je spojitá funkce na $[a, x]$ mající v každém bodě intervalu (a, x) vlastní nenulovou derivaci. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

Důkaz. Definujme funkci $F\colon [a, x] \to \mathbb{R}$ předpisem

$$F(t) = f(x) - \left(f(t) + f'(t)(x-t) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(x-t)^n \right).$$

Funkce F je spojitá na $[a, x]$ a má vlastní derivaci v každém bodě intervalu (a, x), neboť všechny funkce vystupující v definici F mají vlastní derivaci v každém bodě intervalu $[a, x]$. Podle Cauchyovy věty (Věta 5.2.13) tedy existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$\frac{F(x) - F(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \tag{7.4}$$

Nechť $t \in (a, x)$. Potom

$$\begin{aligned} F'(t) &= -\left(f'(t) + f'(t)\cdot(-1) + f''(t)(x-t) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \right) \\ &= -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n. \end{aligned}$$

Dosadíme-li $t = \xi$, dostaneme

$$F'(\xi) = -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

Zřejmě platí $F(x) = 0$ a $F(a) = f(x) - T_n^{f,a}(x)$. Odtud a z (7.4) dostáváme

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

Tvrzení je dokázáno. ■

7.1.15. Věta 7.1.14 platí i v případě $x < a$. Důkaz je stejný.

7.1.16. Předpoklady Věty 7.1.14 lze mírně zeslabit. Stačí předpokládat, že $f^{(n)}$ je spojitá na $[a, x]$ a $f^{(n+1)}$ existuje (vlastní či nevlastní) na (a, x). I za tohoto předpokladu lze použít postup z uvedeného důkazu.

Větu 7.1.14 nyní využijeme k odvození dvou konkrétních tvarů zbytku Taylorova polynomu. Dosáhneme toho v obou případech vhodnou volbou funkce φ.

7.1.17. Věta (Lagrangeův tvar zbytku)**.** Nechť f je reálná funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$, a f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní derivaci řádu $(n+1)$. Potom existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}. \tag{7.5}$$

Důkaz. Položme $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$, $t \in [a, x]$. Pak je funkce φ je spojitá na $[a, x]$ a na otevřeném intervalu (a, x) má vlastní nenulovou derivaci. Podle Věty 7.1.14 tedy existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$\begin{aligned} f(x) - T_n^{f,a}(x) &= \frac{1}{n!} \frac{0 - (x-a)^{n+1}}{(-(n+1)(x-\xi)^n)} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n \\ &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

■

7.1.18. Věta. Nechť f je reálná funkce, I je interval, $n \in \mathbb{N}$ a f má v každém bodě intervalu I vlastní derivaci řádu $(n+1)$. Nechť $M \in \mathbb{R}$ a pro každé $x \in I$ platí $\left| f^{(n+1)}(x) \right| \le M$. Potom pro každé $x \in I$ platí

$$|f(x) - T_n^{f,a}(x)| \le \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}.$$

Důkaz. Tvrzení bezprostředně plyne z Věty 7.1.17. ■

7.1.19. Věta (Cauchyův tvar zbytku)**.** Nechť f je reálná funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$, a f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní derivaci řádu $(n+1)$. Potom existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n (x-a). \tag{7.6}$$

Důkaz. Položme $\varphi(t) = t$, $t \in [a, x]$. Pak je funkce φ je spojitá na $[a, x]$ a na otevřeném intervalu (a, x) má vlastní nenulovou derivaci. Podle Věty 7.1.14 existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{x-a}{1} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n (x-a).$$

■

7.2. Symbol malé o

7.2.1. Z Věty 7.1.11 vyplývá, že za uvedených předpokladů můžeme funkci f na jistém okolí bodu a zapsat ve tvaru $f = T_n^{f,a} + \omega$, kde „chybová funkce“ ω splňuje

$$\lim_{x \to a} \frac{\omega(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

7.2.2. Taylorovy polynomy lze mimo jiné použít k počítání limit funkcí a posloupností a k vyšetřování konvergence číselných řad s nezápornými členy. Ve všech těchto případech většinou počítáme limitu nějaké komplikované funkce. Pro výpočet limity posloupnosti pak obvykle využijeme Heineovu větu a pro vyšetření konvergence řady srovnávací kritérium.

Základní myšlenka výpočtu limity funkce je následující. Funkce, které se objevují ve výrazu, jehož limitu počítáme, vyjádříme jako součet polynomu a chybové funkce. Výpočet limity pak bude sestávat z výpočtu limity obsahující pouze polynomy a chybové funkce. Při vhodném vyjádření funkce ve tvaru „polynom plus chybová funkce“ pak mohou být tyto výpočty velmi jednoduché. Při počítání s chybovými funkcemi totiž nemusíme brát v úvahu jejich přesný tvar, ale pouze odhady velikosti chyby. Hlavní problém výpočtu pak spočívá v tom, jak nalézt k daným funkcím odpovídající polynomy vhodného stupně a chybové funkce. Takové postupy ukážeme v následujícím výkladu.

7.2.3. Definice. Nechť f a g jsou funkce, $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f je v bodě a **malé** o **od funkce** g (píšeme $f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$), jestliže platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

7.2.4. Výraz „$f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$“ chápeme jako jeden symbol. Znaménko rovnosti zde neznačí standardní rovnost mezi reálnými čísly nebo funkcemi a nelze s ním pracovat samostatně.

7.2.5. Tvrzení Věty 7.1.11 je možné zapsat ve tvaru

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = o\big((x-a)^n\big), x \to a,$$

proto bude v roli funkce g často vystupovat funkce $x \mapsto (x-a)^n$, nebo jen $x \mapsto x^n$ v případě $a = 0$.

(c) Symbol $f(x) = o(1)$, $x \to a$ podle definice znamená, že $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

(d) Pokud nebude hrozit nedorozumění, budeme symbol $x \to a$ vynechávat.

7.2.6. Věta (aritmetika malého o)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.

(a) Jestliže $f_1(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$ a $f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$, potom $f_1(x) + f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$.

(b) Jestliže $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a $f_2(x) = o\big(g_2(x)\big)$, $x \to a$, potom $f_1(x) f_2(x) = o\big(g_1(x) g_2(x)\big)$, $x \to a$.

(c) Jestliže $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a f_2 je nenulová na jistém prstencovém okolí bodu a, potom $f_1(x) f_2(x) = o\big(g_1(x) f_2(x)\big)$, $x \to a$.

(d) Jestliže $f(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a $\lim_{x\to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ je vlastní, potom $f(x) = o\big(g_2(x)\big)$, $x \to a$.

(e) Jestliže $f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$ a h je omezená na jistém prstencovém okolí bodu a, potom $h(x) f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$.

(f) Jestliže $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \le n$, a $f(x) = o\big((x-a)^n\big)$, $x \to a$, potom $f(x) = o\big((x-a)^m\big)$, $x \to a$.

Důkaz. Všechna tvrzení bezprostředně plynou z věty o aritmetice limit (Věta 4.2.2) a Věty 4.2.15. ■

7.2.7. Věta. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, nechť φ je funkce definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu a a nechť f a g jsou funkce definované na nějakém prstencovém okolí bodu b. Předpokládejme, že platí $f(y) = o\big(g(y)\big)$, $y \to b$, a $\lim_{x\to a} \varphi(x) = b$. Nechť dále existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(a, \delta) \colon \varphi(x) \neq b.$$

Potom $f\big(\varphi(x)\big) = o\big(g(\varphi(x))\big)$, $x \to a$.

Důkaz. Tvrzení bezprostředně plyne z věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.20(P)). ■

7.2.8. Příklad. Určete Taylorův polynom řádu 3 funkce tangens v bodě 0.

Řešení. Mohli bychom spočítat derivace funkce tangens až do třetího řádu v bodě 0 a pak sestavit příslušný Taylorův polynom podle definice, jako jsme to učinili v Příkladu 7.1.8. Ukážeme však ještě jiný postup.

Protože má funkce tangens na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ derivace všech řádů, stačí nalézt polynom P takový, že $\operatorname{st}(P) \leq 3$ a $\operatorname{tg} x - P(x) = o(x^3)$, $x \to 0$. Pak totiž podle Věty 7.1.13 již musí platit $P = T_3^{\operatorname{tg},0}$. Označme $P(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3$. Potom

$$\frac{\sin x}{\cos x} - (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3) = o(x^3), \quad x \to 0,$$

neboli

$$\frac{\sin x}{\cos x} - (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3) = \omega(x),$$

kde funkce ω je definována na prstencovém okolí bodu 0 a platí

$$\lim_{x \to 0} \frac{\omega(x)}{x^3} = 0.$$

Potom pro každé x z tohoto prstencového okolí platí

$$\sin x = \big(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \omega(x)\big) \cos x. \tag{7.7}$$

Funkce sinus a kosinus můžeme vyjádřit podle Příkladu 7.1.8 ve formě

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \eta(x), \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \zeta(x), \end{aligned}$$

kde funkce η a ζ splňují

$$\lim_{x \to 0} \frac{\eta(x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\zeta(x)}{x^3} = 0.$$

Uvedená vyjádření funkcí sinus a kosinus nyní dosadíme do (7.7), pravou stranu roznásobíme a po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{6}x^3 + \eta(x) &= \big(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \omega(x)\big)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \zeta(x)\right) = \\ &= A_0 + A_1 x + \left(A_2 - \frac{1}{2}A_0\right)x^2 + \left(A_3 - \frac{1}{2}A_1\right)x^3 + \tau(x), \end{aligned} \tag{7.8}$$

přičemž

$$\tau(x) = \omega(x) - \frac{1}{2}A_2x^4 - \frac{1}{2}A_3x^5 - \frac{1}{2}\omega(x)x^2 + \bigl(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \omega(x)\bigr)\zeta(x).$$

Z tvaru funkce τ snadno odvodíme, že

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tau(x)}{x^3} = 0.$$

Úpravou (7.8) obdržíme

$$A_0 + (A_1 - 1)x + \left(A_2 - \frac{1}{2}A_0\right)x^2 + \left(A_3 - \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{6}\right)x^3 = \eta(x) - \tau(x).$$

Označme symbolem Q polynom na levé straně předchozího vztahu. Potom st $Q \leq 3$ a z tvaru pravé strany plyne, že $Q(x) = o(x^3)$, $x \to 0$. Podle Lemmatu 7.1.12 musí být polynom Q nulový, a tedy musí mít nulové koeficienty, tj.

$$A_0 = 0, \quad A_1 - 1 = 0, \quad A_2 - \frac{1}{2}A_0 = 0, \quad A_3 - \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{6} = 0.$$

Odtud dostaneme $A_0 = 0$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0$, $A_3 = \frac{1}{3}$, neboli

$$T_3^{\mathrm{tg},0}(x) = x + \frac{1}{3}x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

7.2.9. Při počítání úloh podobného typu, jaký jsme viděli v Příkladu 7.2.8 se často užívá následující konvence. Místo abychom pracovali s jednotlivými chybovými funkcemi - v našem příkladu to byly funkce $\omega, \eta, \zeta, \tau$ - budeme je značit vždy stejným symbolem, který bude obsahovat pouze informaci o přesnosti našeho odhadu. Místo abychom psali například $f(x) = g(x) + \omega(x)$, kde $\omega(x) = o(x^3)$, $x \to 0$, budeme psát rovnou $f(x) = g(x) + o(x^3)$, $x \to 0$. Tento způsob zápisu činí výpočet přehlednější, nicméně je třeba dát pozor na jistá jeho úskalí. Nebudeme se zde snažit dát tomuto zápisu přesný matematický význam. Budeme jej chápat pouze jako zkrácenou verzi zápisu s chybovými funkcemi, který již přesný matematický význam má. Korektnost našeho výpočtu bude dána tím, že jej můžeme zapsat vždy naprosto přesně s použitím chybových funkcí. Výpočet z Příkladu 7.2.8 pak lze zapsat následovně:

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) &= \big(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + o(x^3)\big)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right) = \\ &= A_0 + A_1 x + \left(A_2 - \frac{1}{2}A_0\right)x^2 + \left(A_3 - \frac{1}{2}A_1\right)x^3 + \\ &\quad + o(x^3) - \frac{1}{2}A_2 x^4 - \frac{1}{2}A_3 x^5 - \frac{1}{2}x^2 o(x^3) + \\ &\quad + \big(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + o(x^3)\big)o(x^3), \quad x \to 0. \end{aligned}$$

Všimněme si, že

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}A_2 x^4 = o(x^3),\ x \to 0 \quad \text{(z definice)}, \\ &-\frac{1}{2}A_3 x^5 = o(x^3),\ x \to 0 \quad \text{(z definice)}, \\ &-\frac{1}{2}x^2 o(x^3) = o(x^3),\ x \to 0 \quad \text{(Věta 7.2.6(v))}, \\ &\big(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + o(x^3)\big)o(x^3) = o(x^3),\ x \to 0 \quad \text{(Věta 7.2.6(e))}. \end{aligned}$$

Odtud plyne podle Věty 7.2.6(a)

$$A_0 + (A_1 - 1)x + \left(A_2 - \frac{1}{2}A_0\right)x^2 + \left(A_3 - \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{6}\right)x^3 = o(x^3), \quad x \to 0.$$

Závěr výpočtu již nyní proběhne stejně jako v předchozí variantě.

Při bezpečném zvládnutí této metody lze k výsledku často dospět rychleji než postupným derivováním dané funkce, neboť s odhady chyb lze pracovat velmi efektivně.

7.3. Taylorovy a Maclaurinovy řady elementárních funkcí

Ve Větě 7.1.11 jsme viděli, že s rostoucím řádem Taylorova polynomu dostáváme přesnější aproximaci dané funkce f. Bylo by tedy možné očekávat, že bychom danou funkci mohli jistým způsobem vyjádřit pomocí limity Taylorových polynomů, tedy ve tvaru nekonečné řady. Tato úvaha motivuje následující definici.

7.3.1. Definice. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a funkce f má v bodě a derivace všech řádů. Potom řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme **Taylorovou řadou funkce f o středu a**. Ve speciálním případě $a = 0$ mluvíme o **Maclaurinově řadě**[2].

7.3.2. Poznámka. V souvislosti s Taylorovou řadou funkce f nás zajímá zejména platnost rovnosti

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n, \tag{7.9}$$

pro nějaké $x \in \mathbb{R}$, tj. zda je nekonečná řada pro dané x konvergentní a eventuálně zda je její součet roven $f(x)$. Samotná konvergence Taylorovy řady pro každé $x \in \mathbb{R}$ však platnost vztahu (7.9) ještě nezaručuje. Příkladem je funkce

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

jejíž všechny derivace v bodě 0 jsou rovny 0 (viz Příklad 5.6.41), takže součet její Taylorovy řady je konstantní nulová funkce, ačkoliv $f(x) \neq 0$ pro $x \neq 0$.

V mnoha případech lze ale funkci vyjádřit jako součet její Taylorovy řady alespoň na jistém intervalu.

Nyní postupně spočteme Taylorovy polynomy a řady některých elementárních funkcí. Budeme se zároveň zabývat otázkou, pro která $x \in \mathbb{R}$ jsou tyto řady konvergentní a zda je jejich součtem původně zadaná funkce. Místo symbolu $T_k^{f,a}$ budeme psát pro přehlednost pouze T_k, neboť z kontextu bude vždy zřejmé, s jakou funkcí f pracujeme. Bod a bude shodou okolností roven vždy 0. Dále budeme značit $R_k = f - T_k$. Platnost rovnosti (7.9) v daném bodě $x \in \mathbb{R}$ je pak ekvivalentní výroku $\lim_{k\to\infty} R_k(x) = 0$. Připomínáme, že i zde budeme využívat úmluvu $f^{(0)} = f$.

7.3.3 (exponenciální funkce). Pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí $\exp^{(l)} x = \exp x$. Je tedy $\exp^{(l)} 0 = 1$ pro každé $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Taylorův polynom T_k má pak tvar

$$T_k(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k.$$

[2] Colin Maclaurin (1698–1746)

Taylorova řada se středem v bodě 0 má potom tvar $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$

podle definice exponenciální funkce (6.1).

7.3.4 (funkce sinus). Pro derivace funkce sinus platí

$$\sin' x = \cos x, \quad \sin'' x = -\sin x, \quad \sin^{(3)} x = -\cos x, \quad \sin^{(4)} x = \sin x$$

a dále se funkce periodicky opakují, tj. $\sin^{(k+4)} x = \sin^{(k)} x$. Tedy

$$\sin 0 = 0, \quad \sin' 0 = 1, \quad \sin'' 0 = 0, \quad \sin^{(3)} 0 = -1, \quad \sin^{(4)} 0 = 0, \dots$$

Taylorovy polynomy v bodě 0 mají tudíž tvar $T_0(x) = 0$, $T_1(x) = T_2(x) = x$, $T_3(x) = T_4(x) = x - \frac{1}{3!}x^3$. Obecně pak máme pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$T_{2k-1}(x) = T_{2k}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1}.$$

Pro funkci sinus je Taylorův polynom řádu $2k$ v bodě 0 polynomem stupně $2k - 1$. Podle (6.3) pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí rovnost

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

7.3.5 (funkce kosinus). Podobně jako v předchozím případě dostaneme pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$T_{2k}(x) = T_{2k+1}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k}.$$

Z (6.4) pak plyne pro každé $x \in \mathbb{R}$ vztah

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}.$$

7.3.6 (funkce $x \mapsto \log(1 + x)$). Funkce $f(x) = \log(1 + x)$ má na svém definičním oboru $(-1, \infty)$ derivace všech řádů. Snadno lze matematickou indukcí dokázat, že pro každé $l \in \mathbb{N}$ a $x \in (-1, \infty)$ platí

$$f^{(l)}(x) = (-1)^{l-1}\frac{(l-1)!}{(1+x)^l}.$$

Odtud dostáváme

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0!, \quad f''(0) = -1!, \quad \dots, \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!,$$

a tudíž pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$T_k(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k.$$

Zvolme $x \in (0, 1]$. Použijeme Lagrangeův tvar zbytku (Věta 7.1.17). Podle této věty pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje číslo $\xi_n \in (0, x)$ takové, že

$$\log(1 + x) - \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{x^j}{j} = \frac{1}{(n + 1)!}(-1)^n \frac{n!}{(1 + \xi_n)^{n+1}} x^{n+1}.$$

Odhadneme

$$\left|\log(1 + x) - \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{x^j}{j}\right| \leq \frac{1}{n + 1}\left(\frac{x}{1 + \xi_n}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{n + 1}.$$

Odtud plyne

$$\log(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n. \tag{7.10}$$

Uvažujme nyní $x \in (-1, 0)$. Pro tyto hodnoty proměnné x využijeme Cauchyův tvar zbytku (Věta 7.1.19). Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme podle této věty číslo $\xi_n \in (x, 0)$ takové, že

$$\begin{aligned}\log(1 + x) - \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{x^j}{j} &= \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi_n)x(x - \xi_n)^n\\ &= \frac{1}{n!}(-1)^n\frac{n!}{(1 + \xi_n)^{n+1}} \cdot x \cdot (x - \xi_n)^n.\end{aligned}$$

Zřejmě platí nerovnost

$$1 - \frac{1 + x}{1 + \xi_n} \leq -x,$$

a tedy můžeme odhadnout

$$\begin{aligned}\left|\log(1 + x) - \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{x^j}{j}\right| &\leq \frac{(\xi_n - x)^n}{(1 + \xi_n)^{n+1}}|x| = \left(\frac{\xi_n - x}{1 + \xi_n}\right)^n \frac{|x|}{1 + \xi_n}\\ &= \left(1 - \frac{1 + x}{1 + \xi_n}\right)^n \frac{|x|}{1 + \xi_n} \leq (-x)^n\frac{|x|}{1 + x}\\ &= \frac{|x|^{n+1}}{1 - |x|}.\end{aligned}$$

Protože dále platí $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} = 0$, dostáváme

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

Pro každé $x \in (-1, 1]$ tedy platí

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n. \tag{7.11}$$

7.3.7. Ze vztahu (7.11) dostaneme dosazením $x = 1$ zajímavou rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \log 2.$$

Pro $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1]$ řada v (7.11) diverguje, a pro takové x vztah (7.11) neplatí.

7.3.8. Příklad. Napište Maclaurinovu řadu pro funkci $x \mapsto \log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ na intervalu $(-1, 1)$.

Řešení. Z 7.3.6 plyne, že pro každé $x \in (-1, 1)$ platí

$$\begin{aligned}
\log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) &= \frac{1}{2}\big(\log(1+x) - \log(1-x)\big) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-x)^n\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}.
\end{aligned}$$

♣

7.3.9 (funkce $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$). Poslední funkcí, pro kterou Taylorův polynom v bodě 0 odvodíme z definice, bude funkce $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, $x \in (-1, \infty)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$. Na svém definičním oboru má funkce f derivace všech řádů. Pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}
&f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \quad \dots \\
&\qquad \dots, \quad f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},
\end{aligned}$$

a tedy

$$f'(0) = \alpha, \quad f''(0) = \alpha(\alpha-1), \quad \dots, \quad f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1).$$

Taylorův polynom k-tého řádu pro funkci f v bodě 0 má proto tvar

$$T_k(x) = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Definujme pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ **zobecněné kombinační číslo** $\binom{\alpha}{j}$ předpisem

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!}.$$

Pro $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $j \leq \alpha$ tento předpis dává obvyklé kombinační číslo. Nyní můžeme $T_k(x)$ přepsat ve tvaru

$$T_k(x) = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^k. \tag{7.12}$$

Ukážeme, že pro každé $x \in (-1, 1)$ platí

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n. \tag{7.13}$$

Pro $x = 0$ je tvrzení zřejmé. Zvolme tedy $x \in (-1, 1)$, $x \neq 0$, pevně. Podle Cauchyova tvaru zbytku (Věta 7.1.19) nalezneme pro každé $n \in \mathbb{N}$ číslo ξ_n ležící mezi 0 a x takové, že

$$(1+x)^\alpha - \sum_{j=0}^{n} \binom{\alpha}{j} x^j = \frac{1}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\xi_n)^{\alpha-n-1}(x-\xi_n)^n x.$$

Funkce $z \mapsto z^{\alpha-1}$ je na intervalu $(0, \infty)$ monotónní, a tedy

$$(1+\xi_n)^{\alpha-1} \leq \max\{1, (1+x)^{\alpha-1}\}.$$

Můžeme odhadnout

$$\left| (1+x)^\alpha - \sum_{j=0}^{n} \binom{\alpha}{j} x^j \right| \leq \frac{1}{n!}|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)| \cdot \max\{1, (1+x)^{\alpha-1}\} \cdot \left| \frac{x-\xi_n}{1+\xi_n} \right|^n \cdot |x|, \tag{7.14}$$

Vzhledem k tomu, že platí

$$\left| \frac{x-\xi_n}{1+\xi_n} \right| \leq |x|,$$

můžeme dále odhadnout

$$\left| (1+x)^\alpha - \sum_{j=0}^{n} \binom{\alpha}{j} x^j \right| \leq \frac{1}{n!}|\alpha\cdots(\alpha-n)| C \cdot |x|^{n+1}, \tag{7.15}$$

kde $C = \max\{1, (1+x)^{\alpha-1}\}$. Označme $a_n = \frac{1}{n!}|\alpha\cdots(\alpha-n)|C\cdot|x|^{n+1}$. Potom

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n-1}{n+1}\right|\cdot|x| = |x| < 1.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je tedy konvergentní podle d'Alembertova kritéria (Věta 3.2.11), a proto podle Věty 3.1.15 nutně platí $\lim a_n = 0$. Odtud a z (7.15) vyplývá platnost (7.13).

Nyní uvedeme několik příkladů na výpočet a použití Taylorova polynomu. Na následujícím příkladu ilustrujeme způsob, jak vypočítat Taylorův polynom bez derivování.

7.3.10. Příklad. Pro funkci $f(x) = \frac{1}{1+x}$ nalezněte Taylorovy polynomy všech řádů v bodě 0.

Řešení. Víme (viz Příklad 3.1.8), že pro každé $x \in (-1,1)$ a $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^k x^k + \sum_{n=k+1}^{\infty}(-1)^n x^n =$$
$$= 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^k x^k + (-1)^{k+1}\frac{x^{k+1}}{1+x}.$$

Dále

$$(-1)^{k+1}\frac{x^{k+1}}{1+x} = o(x^k),\ x \to 0,$$

a tedy $T_k^{f,0}(x) = 1-x+x^2-\cdots+(-1)^k x^k$ podle Věty 7.1.13. Tento výsledek, který jsme odvodili bez počítání derivací, je ve shodě se vztahem (7.12) pro případ $\alpha = -1$. ♣

7.3.11. Příklad. Nechť $f(x) = \sin(\sin x)$. Spočtěte $T_5^{f,0}$.

Řešení. Podle Věty 7.1.13 platí

$$\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{120}y^5 + o(y^5),\ y \to 0.$$

Podle Věty 7.2.7, kde $g(y) = y^5$ a $\varphi(x) = \sin x$, dostáváme

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{1}{6}\sin^3 x + \frac{1}{120}\sin^5 x + o(\sin^5 x),\ x \to 0. \tag{7.16}$$

Protože $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, je tedy podle Věty 7.2.6(d)

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{1}{6}\sin^3 x + \frac{1}{120}\sin^5 x + o(x^5),\ x \to 0. \tag{7.17}$$

Spočítejme rozvoje pro funkce $\sin^3 x$ a $\sin^5 x$. S využitím toho, že $-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = o(x^2)$, $x \to 0$, dostaneme

$$\begin{aligned}
\sin^3 x &= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^3 = \\
&= x^3 + 3x^2\left(-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) + 3x\left(-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^2 + \\
&\quad + \left(-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^3 = \\
&= x^3 + \left(-\frac{1}{2}x^5 + 3x^2 o(x^3)\right) + 3x\big(o(x^2)\big)^2 + \big(o(x^2)\big)^3 = \\
&= x^3 - \frac{1}{2}x^5 + o(x^5), \quad x \to 0.
\end{aligned}$$

Při odvození posledních dvou rovností jsme využili Větu 7.2.6(a)-(c),(f). Podobně platí

$$\sin^5 x = \big(x + o(x)\big)^5 = x^5 + \sum_{j=1}^{5} \binom{5}{j} x^{5-j}\big(o(x)\big)^j = x^5 + o(x^5),\ x \to 0.$$

Všimněme si, že při umocňování Taylorova rozvoje je vhodné stanovit jeho řád pokud možno co nejnižší, abychom si výpočet zbytečně nekomplikovali, ale tak aby výsledný odhad chyby byl požadovaného řádu. Pro rozvoj $\sin^3 x$ s chybou $o(x^5)$ stačilo pracovat s Taylorovým polynomem funkce sinus třetího řádu, a pro rozvoj $\sin^5 x$ s chybou $o(x^5)$ jsme vystačili dokonce s Taylorovým polynomem funkce sinus prvního řádu.

Po dosazení do (7.17) a (7.16) dostaneme

$$\sin(\sin x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + o(x^5),\ x \to 0,$$

takže $T_5^{f,0}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5$. ♣

7.3.12. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin(\sin x) - \sin(2x)\sqrt[3]{1+x^2}}{x^5}.$$

Řešení. Podle předchozího příkladu platí

$$\sin(\sin x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + o(x^5), \quad x \to 0,$$

a dále podle Věty 7.2.7, Věty 7.2.6(d), (7.17) a 7.12 platí

$$\sin(2x) = (2x) - \frac{1}{6}(2x)^3 + \frac{1}{120}(2x)^5 + o(x^5) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o(x^5), \quad x \to 0,$$

$$\sqrt[3]{1+x^2} = 1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}(x^2)^2 + o(x^4), \quad x \to 0.$$

Nyní vyjádříme

$$\begin{aligned}\sin(2x)\sqrt[3]{1+x^2} &= \left(2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + o(x^4)\right) = \\ &= 2x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^5 + o(x^5), \quad x \to 0.\end{aligned}$$

Nakonec spočteme zadanou limitu:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0} \frac{2\sin(\sin x) - \sin(2x)\sqrt[3]{1+x^2}}{x^5} = \\ &\qquad = \lim_{x\to 0} \frac{\left(2x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)\right) - \left(2x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^5 + o(x^5)\right)}{x^5} = \\ &\qquad = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{5}x^5 + o(x^5)}{x^5} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{5} + \frac{o(x^5)}{x^5}\right) = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

♣

7.3.13. Příklad. Nalezněte $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, aby pro Taylorův polynom T_k funkce exp platil odhad $\left|\exp(x) - T_k(x)\right| < 0{,}001$ pro každé $x \in [0, 1]$.

Řešení. Nechť $x \in [0, 1]$ a $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Podle Lagrangeova tvaru zbytku (Věta 7.1.17) existuje $\xi_k \in (0, 1)$ takové, že

$$\left|\exp x - T_k(x)\right| = e^{\xi_k} \cdot \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \leq \frac{e}{(k+1)!} < \frac{3}{(k+1)!}. \tag{7.18}$$

Pro $k = 6$ platí $\frac{3}{(k+1)!} = \frac{1}{1680} < 0{,}001$. Zadané přesnosti tedy podle odhadu (7.18) dosáhneme na celém intervalu $[0, 1]$ pro $k = 6$, tj. použijeme-li k přibližnému výpočtu hodnoty $\exp x$ polynom

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6.$$

♣

7.4. Teoretické příklady k Taylorovu polynomu

7.4.1. Příklad. Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ má derivace všech řádů v každém bodě intervalu $[a, b]$, přičemž existuje číslo M takové, že $|f^{(n)}(x)| \leq M$ pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a každé $x \in [a, b]$. Pak pro každé x a x_0 v $[a, b]$ platí

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Řešení. Zvolme pevně $x, x_0 \in [a, b]$. Použijeme pro odhad chyby Lagrangeův tvar zbytku (Věta 7.1.17). Z této věty plyne, že existuje ξ ležící mezi x_0 a x splňující

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n,$$

kde

$$r_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Odtud ihned vyplývá odhad

$$|r_n| \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Proto $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ a platí

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

♣

Následující příklad obsahuje pomocné technické tvrzení, které využijeme v dalším výkladu.

7.4.2. Příklad. Nechť φ je omezená funkce na $\mathbb{R}$ taková, že φ' je omezená na $\mathbb{R}$. Nechť $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dokažte, že potom je funkce

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^k \varphi(n^2 x), \quad x \in \mathbb{R},$$

diferencovatelná a platí

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{k+2} \varphi'(n^2 x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Nechť $C \in \mathbb{R}$ je takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$|\varphi(x)| \leq C \quad \text{a} \quad |\varphi'(x)| \leq C. \tag{7.19}$$

Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^k C$ konverguje, plyne ze srovnávacího kritéria (Věta 3.2.2), že řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^k \varphi(n^2 x)$ konverguje absolutně. Podle Věty 3.4.3 tedy tato řada konverguje, takže funkce g je dobře definovaná na $\mathbb{R}$.

Vezměme pevné $x \in \mathbb{R}$ a zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{k+2}$ konverguje, a tedy k tomuto ε lze nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{-n} n^{k+2} < \varepsilon. \tag{7.20}$$

Z Lagrangeovy věty o střední hodnotě (Věta 5.2.4) aplikované na funkci $y \mapsto \varphi(n^2 y)$ vyplývá, že pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ existuje $\xi \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\varphi(n^2 a) - \varphi(n^2 b) = n^2 \varphi'(n^2 \xi)(a - b).$$

Odtud plyne, že

$$|\varphi(n^2 a) - \varphi(n^2 b)| \leq C n^2 |a - b|. \tag{7.21}$$

Nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $h \in P(0, \delta)$ a každé $n \in \mathbb{N}$, $n < n_0$, platí

$$\left| \frac{1}{h}(\varphi(n^2(x+h)) - \varphi(n^2 x)) - n^2 \varphi'(n^2 x) \right| < \frac{\varepsilon}{n^k}. \tag{7.22}$$

Pak pro $h \in P(0, \delta)$ máme

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{k+2} \varphi'(n^2 x) \right| \\
&= \left| \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^k \left(\frac{1}{h}(\varphi(n^2(x+h)) - \varphi(n^2 x)) - n^2 \varphi'(n^2 x) \right) \right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{n_0 - 1} 2^{-n} n^k \left| \frac{1}{h}(\varphi(n^2(x+h)) - \varphi(n^2 x)) - n^2 \varphi'(n^2 x) \right| \\
&\quad + \sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{-n} n^k \left(\left| \frac{1}{h}(\varphi(n^2(x+h)) - \varphi(n^2 x)) \right| + \left| n^2 \varphi'(n^2 x) \right| \right).
\end{aligned}$$

Odhadneme-li první sumu pomocí (7.22) a druhou pomocí (7.19), (7.20) a (7.21), dostaneme

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{g(x+h)-g(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{k+2} \varphi'(n^2 x)\right| \\
&< \sum_{n=1}^{n_0-1} 2^{-n} n^k \frac{\varepsilon}{n^k} + \sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{-n} n^k 2Cn^2 \\
&\le \sum_{n=1}^{n_0-1} 2^{-n} \varepsilon + 2C \sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{-n} n^{k+2} \\
&\le (1+2C)\varepsilon.
\end{aligned}$$

♣

7.4.3. Příklad. Položme $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos(n^2 x)$, $x \in \mathbb{R}$. Ukažte, že f má derivace všech řádů, avšak její Taylorova řada se středem v bodě 0 diverguje v každém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Řešení. Funkce kosinus i všechny její derivace jsou omezené funkce. Podle Příkladu 7.4.2 je funkce f dobře definovaná a pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{2k} \cos^{(k)}(n^2 x). \tag{7.23}$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $y \in \mathbb{R}$ máme $\cos^{(4k)}(y) = \cos y$, a tedy

$$f^{(4k)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{8k}.$$

Nyní dokážeme, že Taylorova řada funkce f nekonverguje v žádném bodě různém od nuly. Vezměme tedy $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Protože $(4k)! \le (4k)^{4k}$, pro každé $k, m \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{(4k)!} f^{(4k)}(0) x^{4k}\right| &= \frac{1}{(4k)!} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{8k} |x|^{4k} \\
&\ge \frac{1}{(4k)!} 2^{-m} m^{8k} |x|^{4k} \\
&\ge \frac{1}{(4k)^{4k}} 2^{-m} m^{8k} |x|^{4k}.
\end{aligned} \tag{7.24}$$

Vezměme libovolné $k \in \mathbb{N}$ splňující $k^2|x|^2 > 2$ a položme $m = 2k$. Potom z (7.24) dostaneme

$$\left|\frac{1}{(4k)!} f^{(4k)}(0)x^{4k}\right| \geq \frac{1}{(4k)^{4k}} 2^{-m} m^{8k} |x|^{4k} = \left(\frac{k^2|x|^2}{2}\right)^{2k} > 1.$$

Taylorova řada funkce f v bodě x se středem v bodě 0 tedy nesplňuje nutnou podmínku konvergence řady, a tudíž podle Věty 3.1.15 diverguje. ♣

7.4.4. Příklad. [34] Nechť $\sum a_n$ má kladné členy. Dokažte následující tvrzení.

(a) Pokud existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ a $q \in (1, \infty)$ taková, že

$$n \log n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n}\right) \geq q, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,$$

pak řada $\sum a_n$ konverguje.

(b) Pokud existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$n \log n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n}\right) \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,$$

pak řada $\sum a_n$ diverguje.

Řešení. (a) Zvolme $p \in (1, q)$ a položme $b_n = \frac{1}{n(\log n)^p}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Pak

$$\begin{aligned}\frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{(n+1)\log^p(n+1)}{n \log^p n} \\ &= 1 + \frac{(n+1)\log^p(n+1) - n\log^p n}{n \log^p n}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.\end{aligned}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ použijeme Větu 7.1.17 pro funkci $f(x) = x \log^p x$, $x \in (0, \infty)$, a interval $[n, n+1]$ a nalezneme bod $c_n \in (n, n+1)$ splňující

$$f(n+1) = f(n) + f'(n) + \frac{1}{2} f''(c_n).$$

Obdržíme tedy

$$\begin{aligned}&(n+1)\log^p(n+1) - n\log^p n \\ &= \log^p n + p\log^{p-1} n + \frac{p\log^{p-1} c_n + p(p-1)\log^{p-2} c_n}{2c_n}.\end{aligned}$$

Označíme-li

$$\beta_n = \frac{p\log^{p-1} c_n + p(p-1)\log^{p-2} c_n}{2c_n}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

[3] de Morgan

[4] Bertrand

platí podle Příkladu 5.6.43 a Věty 4.2.16

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0.$$

Existuje tedy $n_1 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ takové, že

$$\beta_n < (q-p)\log^{p-1} n, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq n_1.$$

Pro $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ pak platí

$$\begin{aligned}\frac{b_n}{b_{n+1}} &= 1 + \frac{\log^p n + p\log^{p-1} n + \beta_n}{n\log^p n} < 1 + \frac{1}{n} + \frac{q\log^{p-1} n}{n\log^p n} \\ &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{q}{n\log n}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq n_2.\end{aligned}$$

Pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_2$, pak dostáváme

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} < 1 + \frac{1}{n} + \frac{q}{n\log n} \leq \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Díky Příkladu 3.8.2 dostáváme konvergenci řady $\sum a_n$, neboť řada $\sum b_n$ konverguje podle Příkladu 5.6.44.

(b) Položme $b_n = \frac{1}{n\log n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Podobně jako výše nalezneme pro každé $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ bod $c_n \in (n, n+1)$ splňující

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{(n+1)\log(n+1) - n\log n}{n\log n} = 1 + \frac{1}{n\log n}\left(1 + \log n + \frac{1}{2c_n}\right).$$

Dostaneme tedy pro $n \in N \setminus \{1\}$, $n \geq n_0$, odhad

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\log n} + \frac{1}{2c_n n\log n} > \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Tedy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, n \geq n_0,$$

Vzhledem k tomu, že řada $\sum \frac{1}{n\log n}$ diverguje (viz Příklad 5.6.44), dostáváme díky Příkladu 3.8.2 divergenci řady $\sum a_n$. ♣

7.4.5. Příklad. [5]Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy a $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \infty)$ a $\{b_n\}$ omezená posloupnost reálných čísel. Předpokládejme, že

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a}{n} + \frac{b_n}{n^{1+\varepsilon}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dokažte, že pokud $a > 1$, řada $\sum a_n$ konverguje, pokud $a \leq 1$, pak řada $\sum a_n$ konverguje.

[5]Gauss

Řešení. Pokud $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, lze použít Příklad 3.8.1. Díky předpokladu máme

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(a + \frac{b_n}{n^\varepsilon}\right) = a,$$

a tedy řada $\sum a_n$ konverguje pro $a > 1$ a diverguje pro $a < 1$.

Pokud $a = 1$, platí díky Příkladu 5.6.43

$$\lim_{n\to\infty} n\log n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n \log n}{n^\varepsilon} = 0.$$

Tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$n\log n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n}\right) \leq 1.$$

Z Příkladu 7.4.4 nyní plyne divergence dané řady. ♣

7.5. Početní příklady k Taylorovu polynomu

7.5.1. Příklad. S přesností 10^{-4} vypočítejte $\cos(0{,}1)$.

Řešení. Položíme $f(x) = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Potom zřejmě pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí $|f^{(k)}(x)| \leq 1$. Podle Věty 7.1.18 tedy pro $a = 0$, $x = 0{,}1$ a $M = 1$ tedy platí

$$|f(0{,}1) - T_n^{f,0}(0{,}1)| \leq \frac{(0{,}1)^{n+1}}{(n+1)!}\ .$$

Pro $n = 3$ tedy platí

$$|f(0{,}1) - T_3^{f,0}(0{,}1)| < 10^{-4}.$$

Přibližnou hodnotu $\cos(0{,}1)$ s požadovanou přesností obdržíme jako hodnotu Taylorova polynomu funkce kosinus řádu 3, tedy

$$T_3^{f,0}(0{,}1) = 1 - \frac{(0{,}1)^2}{2} = 0{,}995.$$

♣

Jak jsme již uvedli výše, Taylorův polynom lze v určitých případech použít k výpočtu limit funkcí či posloupností nebo k vyšetřování konvergence číselných řad. Tyto postupy nyní ilustrujeme na několika příkladech.

7.5.2. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}.$$

Řešení. Podle 7.3.5 platí

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)-1+\frac{1}{2}x^2}{x^4}\\ &= \lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{24}+\frac{o(x^4)}{x^4}\Big)=\frac{1}{24}.\end{aligned}$$

♣

7.5.3. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1}{\sin x - x}\,.$$

Řešení. Podle 7.3.3 a 7.3.4 dostaneme

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1}{\sin x - x} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x^3+o(x^3)-1}{x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)-x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3+o(x^3)}{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = -6.$$

♣

7.5.4. Příklad. Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} n^4\left(\cos(\frac{1}{n}) - e^{-\frac{1}{2n^2}}\right)\,.$$

Řešení. Z Heineovy věty (Věta 4.2.16) vyplývá, že

$$\lim_{n\to\infty} n^4\left(\cos(\frac{1}{n}) - e^{-\frac{1}{2n^2}}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}\,,$$

pokud limita vpravo existuje. Stačí tedy spočítat tuto limitu. Z 7.3.5 a 7.3.3 dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)-\Big(1+\frac{-x^2}{2}+\frac{1}{3!}(-\frac{x^2}{2})^2+o(x^4)\Big)}{x^4}\\ &= \frac{1}{24}-\frac{1}{8}=-\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

♣

7.5.5. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{cotg}^2 x\right).$$

Řešení. Výraz, jehož limitu počítáme, přepíšeme do tvaru

$$\frac{1}{x^2} - \operatorname{cotg}^2 x = \frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^4}.$$

Z Příkladu 5.6.1 a věty o aritmetice limit plyne, že $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} = 1$. Pro druhý zlomek využijeme Taylorových rozvojů příslušných funkcí, tedy 7.3.4 a 7.3.5. Dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3))^2 - x^2(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))^2}{x^4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) - x^2(1 - x^2 + o(x^2))}{x^4} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Z věty o aritmetice limit tedy vyplývá, že

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{cotg}^2 x\right) = \frac{2}{3}.$$

♣

7.5.6. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 - 2x + x^3} - \sqrt[3]{1 - 3x + x^2} - \frac{x^2}{6}}{\sin x - x}.$$

Řešení. Podle 7.3.4 platí

$$\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \to 0.$$

Dál máme z 7.3.9

$$\begin{aligned}(1+y)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 + o(y^3), \quad y \to 0, \\ (1+y)^{\frac{1}{3}} &= 1 + \frac{1}{3}y - \frac{1}{9}y^2 + \frac{5}{81}y^3 + o(y^3), \quad y \to 0.\end{aligned}$$

V následujícím výpočtu bude symbol $o(x^3)$ uvažován pro $x \to 0$. Podle Věty 7.2.6 platí

$$\begin{aligned}(1 + (x^3 - 2x))^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}(x^3 - 2x) - \frac{1}{8}(x^3 - 2x)^2 + \frac{1}{16}(x^3 - 2x)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x^3 - 2x) - \frac{1}{8}(4x^2) + \frac{1}{16}(-8x^3) + o(x^3)\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}(1+(x^2-3x))^{\frac{1}{3}} &= 1+\frac{1}{3}(x^2-3x)-\frac{1}{9}(x^2-3x)^2+\frac{5}{81}(x^2-3x)^3+o(x^3)\\ &= 1+\frac{1}{3}(x^2-3x)-\frac{1}{9}(9x^2-6x^3)+\frac{5}{81}(-27x^3)+o(x^3).\end{aligned}$$

Dostáváme tedy

$$\begin{aligned}\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}-\frac{x^2}{6} &= x\left(-2\frac{1}{2}+3\frac{1}{3}\right)+x^2\left(-\frac{4}{8}-\frac{1}{3}+\frac{9}{9}-\frac{1}{6}\right)\\ &+x^3\left(\frac{1}{2}-\frac{8}{16}-\frac{6}{9}+27\frac{5}{81}\right)\\ &= x^3+o(x^3).\end{aligned}$$

Proto

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}-\frac{x^2}{6}}{\sin x-x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3+o(x^3)}{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}\right)=-6.$$

♣

7.5.7. Příklad. Nechť

$$f(x)=\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}, \quad x\in(-1,0)\cup(0,\infty).$$

Najděte polynom P třetího stupně, který splňuje

$$f(x)-P(x)=o(x^3), \quad x\to 0.$$

Řešení. V následujícím výpočtu budeme uvažovat symbol o pro $x\to 0$. Platí

$$f(x)=e^{\frac{\log(1+x)}{x}-1}=e^{\frac{\log(1+x)-x}{x}}, \quad x\in\mathcal{D}(f).$$

Označme $g(x)=\frac{\log(1+x)-x}{x}$, $x\in\mathcal{D}(f)$. Protože podle 7.3.6 platí

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4),$$

máme

$$\log(1+x)-x=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4),$$

a tedy

$$g(x)=-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3).$$

Protože

$$g(x)=x\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right),$$

platí $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ a existuje okolí $P(0,\delta)$, na kterém funkce g nenabývá hodnoty 0.

Jelikož dle 7.3.3 platí

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + o(y^3),$$

dostáváme díky Větě 4.2.20

$$\begin{aligned} e^{g(x)} &= 1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4} - 2\frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{6}\left(-\frac{x^3}{8}\right) + o(x^3) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Požadovaný polynom P je tedy tvaru

$$P(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

7.5.8. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1-x)^{-\frac{1}{x}} + ex}{ex^3}.$$

Řešení. Symbol o opět uvažujeme pro $x \to 0$. Díky Příkladu 7.5.7 máme

$$\begin{aligned} (1+x)^{\frac{1}{x}} - (1-x)^{-\frac{1}{x}} + ex &= e\left(\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{e}(1-x)^{-\frac{1}{x}} + x\right) \\ &= e\left(\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3\right) - \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 + \frac{7}{16}x^3\right) + x\right) \\ &= e\left(-\frac{7}{8}x^3 + o(x^3)\right). \end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1-x)^{-\frac{1}{x}} + ex}{ex^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{7}{8}x^3 + o(x^3)}{x^3} = -\frac{7}{8}.$$

♣

7.5.9. Příklad. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\log\Big(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\Big) - \sin(\frac{1}{n}) - \frac{1}{2n^3} \right) \frac{n^\alpha}{\log^2(n)}$$

v závislosti na parametru α.

Řešení. Podle Příkladu 7.3.8 a dále podle 7.3.6 a 7.3.4 jest pro každé $x \in (-1, 1)$

$$\log\Big(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\Big) - \sin(x) - \frac{x^3}{2} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} - \frac{x^3}{2} + o(x^5)$$
$$= x^5\Big(\frac{1}{5} - \frac{1}{5!}\Big) + o(x^5) = \frac{23}{120}x^5 + o(x^5), \quad x \to 0.$$

Pro speciální volbu $x = \frac{1}{n}$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, dostáváme

$$\log\Big(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\Big) - \sin(\frac{1}{n}) - \frac{1}{2n^3} = \frac{23}{120}n^{-5} + o(n^{-5}), \quad n \to \infty.$$

Označme pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$a_n = \left(\log\Big(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\Big) - \sin(\frac{1}{n}) - \frac{1}{2n^3} \right) \frac{n^\alpha}{\log^2(n)}$$

a

$$b_n = \frac{n^{\alpha-5}}{\log^2 n}.$$

Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} n^5 \left(\frac{23}{120}n^{-5} + o(n^{-5}) \right) = \frac{23}{120}. \tag{7.25}$$

Srovnávací posloupnost $\{b_n\}$ volíme tak, aby $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ vyšla konečná a nenulová. Jelikož jsou členy řady $\sum b_n$ kladné, z (7.25) plyne, že řada $\sum a_n$ má od jistého indexu $n_0 \in \mathbb{N}$ kladné členy. Dále z limitního srovnávacího kritéria (Věta 3.2.5(a)) plyne, že řada $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ je konvergentní právě tehdy, když je konvergentní řada $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$. Stačí tedy vyšetřit konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ v závislosti na parametru α.

To jsme však již provedli v Příkladu 5.6.44, podle kterého řada $\sum b_n$ konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (-\infty, 4]$. Zadaná řada $\sum a_n$ tedy konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (-\infty, 4]$. ♣

7.5.10. Příklad. Pro $p \in (0, \infty)$ vyšetřete konvergenci řady $\sum a_n^p$, kde

$$a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Použijeme Raabeovo kritérium 3.8.1. Počítejme tedy pro $n \in \mathbb{N}$ výraz

$$n\left(\frac{a_n^p}{a_{n+1}^p}-1\right)=n\left(\left(\frac{n+1}{n+\frac{1}{2}}\right)^p-1\right)=\frac{n\left((n+1)^p-(n+\frac{1}{2})^p\right)}{(n+\frac{1}{2})^p}.$$

Pro funkci $f(x)=x^p$, $x\in(0,\infty)$ a každý interval $[n+\frac{1}{2},n+1]$ použijeme Větu 7.1.17 a nalezneme tak $c_n\in(n+\frac{1}{2},n+1)$ splňující

$$(n+1)^p-(n+\frac{1}{2})^p=\frac{p}{2}(n+\frac{1}{2})^{p-1}+\frac{1}{2}p(p-1)c_n^{p-2}\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Vzhledem k tomu, že

$$\frac{(n+\frac{1}{2})^p}{(n+1)^2(n+\frac{1}{2})^p}\le\frac{c_n^{p-2}}{(n+\frac{1}{2})^p}\le\frac{(n+1)^p}{(n+\frac{1}{2})^{p+2}},\quad n\in\mathbb{N},$$

platí díky Větě 2.2.47 rovnost $\lim n\frac{c_n^{p-2}}{(n+\frac{1}{2})^p}=0$. Proto máme

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n^p}{a_{n+1}^p}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{p}{2}n(n+\frac{1}{2})^{p-1}}{(n+\frac{1}{2})^p}+\frac{p(p-1)}{8}\frac{nc_n^{p-2}}{(n+\frac{1}{2})^p}\right)=\frac{p}{2}.$$

Řada $\sum a_n^p$ tedy konverguje pro $p>2$ a diverguje pro $p<2$.

Je-li $p=2$, platí

$$\frac{a_n^2}{a_{n+1}^2}=\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{(n+\frac{1}{2})^2}\right)^2=1+\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2}+\frac{1}{4(n+\frac{1}{2})^2},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Položíme-li $b_n=-\frac{n^2+n}{4n^2+4n+1}$, $n\in\mathbb{N}$, dostaneme omezenou posloupnost splňující

$$\frac{a_n^2}{a_{n+1}^2}=1+\frac{1}{n}+\frac{b_n}{n^2},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Podle Příkladu 7.4.5 tedy řada $\sum a_n^2$ diverguje. ♣

7.5.11. Příklad. Nechť $\alpha\in(0,\infty)$. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$, kde

$$a_n=\log\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right),\quad n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Řešení. Podle Příkladu 7.3.6 platí

$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\varphi(x),\quad x\in(-1,1),$$

kde φ je funkce splňující $\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = 0$. Položme

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}, \quad c_n = \frac{1}{2n^{2\alpha}} + \varphi(b_n), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Protože $b_n \in (-1, 1)$ pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, platí

$$\log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) = b_n + c_n, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Řada $\sum b_n$ konverguje pro každé $\alpha \in (0, \infty)$ podle Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1). Dále díky Větě 4.2.16 platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{\frac{1}{n^{2\alpha}}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\varphi(b_n)}{b_n^2}\right) = 1.$$

Tedy dle Věty 3.2.5 a řada $\sum c_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$. To ale nastane právě tehdy, když $\alpha > \frac{1}{2}$ (viz Věta 3.2.18).

Platí tedy $\sum a_n = \sum (b_n + c_n)$, přičež $\sum b_n$ vždy konverguje a $\sum c_n$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > \frac{1}{2}$. Řada $\sum a_n$ tedy konverguje právě tehdy, když $\alpha > \frac{1}{2}$.

♣

7.5.12. Příklad. Zjistěte pro která $C \in \mathbb{R}$ má funkce

$$f(x) = \cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} + Cx^4, \quad x \in \mathbb{R},$$

lokální maximum v bodě 0.

Řešení. Symbol o uvažujeme pro $x \to 0$. Díky 7.3.5 a 7.3.3 máme

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6) \quad \text{a}$$
$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + o(x^6).$$

Tedy

$$f(x) = x^4\left(\frac{12C - 1}{12}\right) + x^6\left(\frac{14}{6!}\right) + o(x^6).$$

Označme $c = \frac{12C-1}{12}$. Je-li $C > \frac{1}{12}$, tj. $c > 0$, máme

$$f(x) = x^4\left(c + \frac{14}{6!}x^2 + o(x^2)\right).$$

Protože $\lim_{x\to 0}\left(c + \frac{14}{6!}x^2 + o(x^2)\right) = c$, existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\frac{f(x)}{x^4} > \frac{c}{2}, \quad x \in P(0, \delta).$$

Tedy $f(x) > 0$ pro $x \in P(0, \delta)$. Jelikož $f(0) = 0$, má v tomto případě funkce f v bodě 0 lokální minimum.

Obdobně odvodíme, že pro $C < \frac{1}{12}$ má f v 0 lokální maximum.

Je-li $C = \frac{1}{12}$, dostáváme

$$f(x) = \frac{14}{6!}x^6 + o(x^6) = x^6\left(\frac{14}{6!} + o(1)\right).$$

Zcela analogickou úvahou jako výše obdržíme, že f má v 0 lokální minimum. ♣

7.5.13. Příklad. Zjistěte, zdali je 0 inflexním bodem funkce

$$f(x) = \sin x + \sinh x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Během výpočtu budeme symbol o používat pro $x \to 0$. Pro funkci platí

$$f''(x) = (\cos x + \cosh x)' = -\sin x + \sinh x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Plat9 tedy $f''(0) = 0$. Jelikož $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, máme díky 7.3.3 a 7.3.4 vztahy

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5),\\
\sinh x &= \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{n=0}^{5}\frac{x^n}{n!} + o(x^5)\right) - \left(\sum_{n=0}^{5}\frac{(-x)^n}{n!} + o(x^5)\right)\right)\\
&= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5).
\end{aligned}$$

Dostáváme tak

$$f''(x) = 2\frac{x^3}{3!} + o(x^5) = x^3(2 + o(x^2)).$$

Z tohoto vztahu dostáváme $\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{x^3} = 2$, a tedy existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že $\frac{f''(x)}{x^3} > 1$ pro $x \in P(0, \delta)$. Platí tedy, že $f''(x) < 0$ pro $x \in (-\delta, 0)$ a $f''(x) > 0$ pro $x \in (0, \delta)$. Podle Věty 5.4.19 má f v bodě 0 inflexní bod. ♣

KAPITOLA 8

Mocninné řady

Jak víme z kapitoly o Taylorově polynomu, je v některých případech možné vyjádřit danou funkci ve tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, kde $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Někdy je vhodnější pracovat s uvedeným rozvojem spíše než s původním tvarem funkce.

8.1. Základní vlastnosti

8.1.1. Definice. Mocninnou řadou o středu $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme symbol

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{8.1}$$

kde $a_n \in \mathbb{R}$ pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

8.1.2. Pokud za x v (8.1) dosadíme reálné číslo, dostaneme číselnou řadu, přičemž symbolem $a_0(x-x_0)^0$ rozumíme a_0 (vizte Úmluvu 7.1.3). Mocninná řada tedy určuje funkci

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

jejímž definičním oborem je množina těch $x \in \mathbb{R}$, pro která příslušná číselná řada konverguje. Tato řada je konvergentní alespoň pro $x = x_0$. Funkce tohoto tvaru budou nyní předmětem našeho zájmu.

8.1.3. Věta. Uvažujme mocninnou řadu (8.1). Pak existuje právě jeden nezáporný prvek $\varrho \in \mathbb{R}^*$ takový, že

- pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x-x_0| < \varrho$, je řada (8.1) absolutně konvergentní,
- pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| > \varrho$, je řada (8.1) divergentní.

Prvek ϱ splňuje

$$\varrho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{8.2}$$

kde výrazem $\frac{1}{0}$ rozumíme ∞ a výrazem $\frac{1}{\infty}$ rozumíme 0.

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in \mathbb{R}$ položme $b_n = a_n(x - x_0)^n$. Označme dále $\gamma = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Předpokládejme nejprve, že $\gamma \in (0, \infty)$. Pak

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|x - x_0| = \gamma|x - x_0|.$$

Odtud vyplývá, že

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} < 1$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - x_0| < \varrho$ a

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} > 1$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - x_0| > \varrho$. Podle Cauchyova odmocninového kritéria (Věta 3.4.6(b) a (d)) je tudíž řada (8.1) absolutně konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - x_0| < \varrho$ a divergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - x_0| > \varrho$.

Je-li $\gamma = 0$, pak podle (8.2) platí $\varrho = \infty$ a obdobným výpočtem jako výše dostaneme

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = 0$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Daná mocninná řada je tedy absolutně konvergentní podle Cauchyova odmocninového kritéria (Věta 3.2.8(b)) pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Je-li $\gamma = \infty$, pak podle (8.2) platí $\varrho = 0$ a

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \infty$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$. Daná mocninná řada je tedy divergentní podle Cauchyova odmocninového kritéria (Věta 3.2.8(d)) pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$.

Ve všech třech případech jsme tedy ověřili, že číslo ϱ má požadované vlastnosti.

Dokážeme nyní jednoznačnost prvku ϱ. Předpokládejme, že prvek $\varrho' \in \mathbb{R}^*$ má také uvedené vlastnosti, a přitom $\varrho \neq \varrho'$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\varrho < \varrho'$. Potom by ale pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $\varrho < |x - x_0| < \varrho'$ musela řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ konvergovat a zároveň divergovat, což není možné. Tím je důkaz dokončen. ■

8.1.4. Definice. Uvažujme mocninnou řadu (8.1). Jednoznačně určený prvek ϱ z předchozí věty nazýváme **poloměrem konvergence** řady (8.1).

8.1.5. Věta. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada a nechť existuje $\lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$. Potom je tato limita rovna poloměru konvergence uvedené mocninné řady.

Důkaz. Podle Poznámky 3.2.16 platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Tvrzení tudíž plyne z Věty 8.1.3 a Věty 2.4.12. ∎

8.1.6. Příklady. Spočtěte poloměry konvergence mocninných řad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ a určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ uvedené řady konvergují.

Řešení. Podle Příkladu 2.5.6 platí

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0,$$

takže poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ je roven ∞ a řada konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Platí

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty,$$

a tedy poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ je roven 0. Řada konverguje pouze pro $x = 0$.

Díky Příkladu 2.2.50 víme, že

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1,$$

takže poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ je roven 1. Řada tedy absolutně konverguje pro každé $x \in (-1, 1)$ a diverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x| > 1$. Zbývá vyšetřit konvergenci v bodech 1 a -1. Jak víme z Příkladů 3.1.11 a 3.3.2, řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n}$ diverguje, zatímco řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje. Mocninná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ tedy konverguje pro $x \in [-1, 1)$ a diverguje pro všechna ostatní $x \in \mathbb{R}$. ♣

8.1.7. Poznámka. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada a $\varrho \in \mathbb{R}^*$ je její poloměr konvergence. Potom nastane právě jedna z následujících tří možností:

- buď $\varrho = 0$ a řada konverguje pouze pro $x = x_0$,
- nebo $\varrho = \infty$ a řada absolutně konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$,

- nebo $\varrho \in (0, \infty)$ a řada absolutně konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < \varrho$, diverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| > \varrho$, a může nebo nemusí konvergovat pro $x = x_0 + \varrho$ a pro $x = x_0 - \varrho$.

8.2. Derivace mocninné řady

V dalším textu se nám bude hodit následující pomocné lemma technické povahy. Tvrzení je obdobné Lemmatu 6.2.1, které jsme využili při odvozování elementárních funkcí. Zde však potřebujeme přesnější odhad a obecnější formu výrazu na pravé straně nerovnosti.

8.2.1. Lemma. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ a $h \in (-\delta, \delta)$ platí

$$\left|(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}\right| \le h^2\delta^{-2}(|x| + \delta)^n. \tag{8.3}$$

Důkaz. Pokud $n = 1$, pak tvrzení zřejmě platí, neboť na levé straně nerovnosti je nula a na pravé je nezáporné číslo. Nechť $n \in \mathbb{N}, n \ge 2$. Potom z binomické věty pro každé $h \in (-\delta, \delta)$ dostáváme

$$(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k.$$

Z nerovnosti $|h| < \delta$, z trojúhelníkové nerovnosti pro konečné sumy a ještě jednou z binomické věty pak odvodíme odhad

$$\begin{aligned}
|(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}| &\le \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} |h|^k \le \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} \delta^{k-2} h^2 \\
&\le h^2\delta^{-2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} \delta^k \\
&= h^2\delta^{-2}(|x| + \delta)^n.
\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. ■

8.2.2. Věta (derivace mocninné řady)**.** Nechť ϱ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Potom poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ je také roven ϱ. Pro $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - x_0| < \varrho$ označme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. Potom má funkce f v každém takovém bodě vlastní derivaci a platí $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}$.

Důkaz. Zřejmě platí $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup \sqrt[n]{n|a_n|}$. Dokážeme opačnou nerovnost, tedy $\limsup \sqrt[n]{n|a_n|} \le \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Jestliže $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} =$

∞, pak tato nerovnost platí zřejmě. Předpokládejme, že $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$. Víme, že $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\sqrt[n]{n} < (1 + \varepsilon)$. Pro tato $n \in \mathbb{N}$ potom platí

$$\sup_{k \geq n} \sqrt[k]{k|a_k|} \leq (1 + \varepsilon) \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|a_k|},$$

a tedy $\limsup \sqrt[n]{n|a_n|} \leq (1 + \varepsilon) \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Protože ε bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že $\limsup \sqrt[n]{n|a_n|} \leq \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Celkem tedy máme $\limsup \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Odtud a z definice poloměru konvergence mocninné řady vyplývá, že poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^n$ je roven ϱ. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$ je zřejmě konvergentní pro $x = x_0$. Jestliže $x \in \mathbb{R}$ splňuje $0 < |x - x_0| < \varrho$, potom platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} = \frac{1}{x - x_0} \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^n,$$

a tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$ konvergentní. Obdobnou úvahou lze dokázat, že pro $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - x_0| > \varrho$ je řada $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$ divergentní. Poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$ je tedy roven ϱ.

Dokážeme nyní druhou část tvrzení. Jestliže $\varrho = 0$, pak je tvrzení triviální, neboť žádné $x \in \mathbb{R}$ s uvedenou vlastností neexistuje. Předpokládejme, že $\varrho > 0$. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že $x_0 = 0$. Zvolme $x \in (-\varrho, \varrho)$. K důkazu tvrzení stačí dokázat, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}. \tag{8.4}$$

Nalezneme $\delta > 0$ splňující $|x| + \delta < \varrho$. Potom pro každé $h \in (-\delta, \delta)$ platí $|x + h| \leq |x| + |h| < |x| + \delta < \varrho$, a tedy je výraz $f(x + h)$ dobře definován.

Z Lemmatu 8.2.1 tudíž plyne

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\right| \\
&= \frac{1}{|h|}\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - h\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\right| \\
&= \frac{1}{|h|}\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n ((x+h)^n - x^n - hnx^{n-1})\right| \\
&\leq \frac{1}{|h|}\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \left|(x+h)^n - x^n - hnx^{n-1}\right| \\
&\leq \frac{1}{|h|} h^2 \delta^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| (|x|+\delta)^n \\
&= |h| \delta^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| (|x|+\delta)^n .
\end{aligned}
$$

Protože $|x|+\delta < \varrho$, je podle Věty 8.1.3 řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(|x|+\delta)^n$ konvergentní. Odtud vyplývá, že

$$\lim_{h\to 0} |h|\delta^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|(|x|+\delta)^n = 0,$$

a tedy také

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\right| = 0.$$

Odtud a z Věty 2.2.25 plyne (8.4). Tvrzení je dokázáno. ■

8.2.3. Věta (vztah mocninné řady a Taylorova polynomu)**.** Nechť ϱ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$. Pro $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x-x_0| < \varrho$ označme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Potom

(a) pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a každé $x \in \mathbb{R}$, $|x-x_0| < \varrho$, existuje vlastní $f^{(k)}(x)$ a platí

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n (x-x_0)^{n-k},$$

(b) speciálně platí $f^{(k)}(a) = k!\, a_k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

(c) pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in \mathbb{R}$ platí $T_n^{f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$.

Důkaz. Tvrzení (a) plyne iterováním Věty 8.2.2 k-krát. Tvrzení (b) je speciálním případem tvrzení (a) pro $x = x_0$. Dokážeme tvrzení (c). Podle již dokázaného tvrzení (a) má funkce f na intervalu $(x_0 - \varrho, x_0 + \varrho)$ derivace všech řádů a platí

$$f^{(k)}(a) = k!a_k, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Podle definice Taylorova polynomu tedy máme

$$T_n^{f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ■

8.2.4. Při derivování mocninné řady (8.1) člen po členu se zachovává poloměr konvergence ϱ. V případech, kdy $\varrho \in (0, \infty)$, se však může stát, že v některém z krajních bodů $x_0 + \varrho$ a $x_0 - \varrho$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$ diverguje, přestože původní řada (8.1) v těchto bodech konverguje. Příkladem je řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, která je konvergentní pro $x \in [-1, 1)$, ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ není konvergentní pro $x = -1$.

8.2.5. Věta. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$ jsou mocninné řady. Jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ obě řady konvergují ke stejnému součtu, potom pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí $a_n = b_n$.

Důkaz. Pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ označme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ potom platí $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$. Podle Věty 8.2.3(a) je $f^{(n)}(a) = n!a_n = n!b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $a_n = b_n$. Rovnost $a_0 = b_0$ plyne ze vztahu $f(a) = a_0 = b_0$. ■

8.2.6. Věta. Nechť ϱ je poloměr konvergence řady (8.1). Potom poloměr konvergence řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} \tag{8.5}$$

je také roven ϱ. Pro $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - x_0| < \varrho$ označme

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}.$$

Potom v každém takovém bodě má funkce g vlastní derivaci a platí

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ položme

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{pokud } n = 0, \\ \frac{a_{n-1}}{n}, & \text{pokud } n \geq 1. \end{cases}$$

Potom

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n}(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n.$$

Podle Věty 8.2.2 mají řady $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ stejný poloměr konvergence ϱ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - x_0| < \varrho$ platí

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n(x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ■

8.2.7. Příklad. Dokažte, že pro každé $x \in (-1, 1)$ platí

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}. \tag{8.6}$$

Řešení. Položme

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{2k+1}, & \text{jestliže } n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ 0, & \text{jestliže } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ je sudé.} \end{cases}$$

Chceme dokázat, že pro každé $x \in (-1, 1)$ platí $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Z Příkladu 2.2.50 plyne, že

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[2k+1]{\frac{1}{2k+1}} = 1,$$

takže poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je roven 1. Pro $x \in (-1, 1)$ položme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Pak dle Věty 8.2.2 a Příkladu 3.1.8 platí

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ jest

$$(n+1)a_{n+1} = \begin{cases} (-1)^{2k}, & \text{jestliže } n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ 0, & \text{jestliže } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ je liché.} \end{cases}$$

Tudíž

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-1,1).$$

Zároveň však pro každé $x \in (-1,1)$ platí $\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}$. Pro $x \in (-1,1)$ položme $g(x) = f(x) - \operatorname{arctg} x$. Pak podle věty o aritmetice derivací (Věta 5.1.17) platí $g'(x) = 0$ pro každé $x \in (-1,1)$. Protože g má v každém bodě intervalu $(-1,1)$ vlastní derivaci, je podle věty o vztahu derivace a spojitosti (Věta 5.1.15) na tomto intervalu spojitá. Tudíž podle Věty 5.2.9 existuje $c \in \mathbb{R}$ splňující $g(x) = c$, $x \in (-1,1)$, tedy $f(x) = \operatorname{arctg} x + c$, $x \in (-1,1)$. Protože $f(0) = 0$, a tedy $g(0) = f(0) - \operatorname{arctg} 0$, je $c = 0$ a $f(x) = \operatorname{arctg} x$. ♣

8.2.8. Příklad. Dokažte, že pro každé $x \in (-1,1)$ platí

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1}. \tag{8.7}$$

Řešení. Rovnost lze dokázat obdobně jako v řešení Příkladu 8.2.7 s použitím vzorce

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n}, \quad x \in (-1,1),$$

jenž vyplývá ze vztahu (7.13) pro $\alpha = -\frac{1}{2}$. ♣

8.3. Abelova věta

Nechť ϱ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$. Předpokládejme, že $\varrho \in (0,\infty)$. Označme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ pro $x \in (x_0 - \varrho, x_0 + \varrho)$. V tomto oddílu se budeme zabývat souvislostí limity $\lim_{x \to (x_0+\varrho)-} f(x)$ a součtu řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n$. Vzniká totiž přirozená otázka, zda je možné platnost vzorců (8.6) a (8.7) rozšířit i na krajní body.

Nejprve si povšimneme, že obecně žádná souvislost mezi uvedenou limitou a řadou neexistuje. Položíme-li například $a_n = (-1)^n$ pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pak $\varrho = 1$ a $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ pro $x \in (-1,1)$. To znamená, že $f(x) = \frac{1}{1+x}$ pro $x \in (-1,1)$, a tedy $\lim_{x\to 1-} f(x) = \frac{1}{2}$. Přitom řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ diverguje.

Ukazuje se, že lze obdržet mnohem příznivější výsledky v případě, kdy je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n$ konvergentní. Tuto situaci popisuje Abelova věta, kterou nyní zformulujeme a dokážeme. Nejprve uvedeme pomocné tvrzení.

8.3.1. Lemma. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je konvergentní číselná řada. Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ označme $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Potom jsou pro každé $x \in (-1, 1)$ řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ absolutně konvergentní a platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n.$$

Důkaz. Posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ je podle předpokladu konvergentní, a tedy omezená. Takže existuje $C > 0$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|s_n| \leq C$. Zvolme $x \in (-1, 1)$. Potom

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|s_n||x|^n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{C}|x| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{C}|x| = |x| < 1.$$

Z Cauchyova odmocninového kritéria (Věta 3.4.6(a)) tedy vyplývá, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ je absolutně konvergentní. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je podle předpokladu konvergentní, a tedy podle Věty 3.1.15 platí $\lim a_n = 0$. Tudíž také posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je omezená. Odtud pomocí obdobné úvahy jako výše vyplývá, že i řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je absolutně konvergentní. Nechť $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potom platí

$$\begin{aligned}(1 - x) \sum_{n=0}^{N} s_n x^n &= \sum_{n=0}^{N} s_n x^n - \sum_{n=0}^{N} s_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{N} s_n x^n - \sum_{n=1}^{N+1} s_{n-1} x^n \\ &= s_0 + \sum_{n=1}^{N} (s_n - s_{n-1}) x^n - s_N x^{N+1} \\ &= \sum_{n=0}^{N} a_n x^n - s_N x^{N+1}.\end{aligned}$$

Posloupnost $\{s_N\}_{N=0}^{\infty}$ je omezená a $\lim_{N\to\infty} x^{N+1} = 0$. Podle Věty 2.2.42 tedy platí $\lim_{N\to\infty} s_N x^{N+1} = 0$. Odtud a z věty o aritmetice limit vyplývá, že

$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n &= \lim_{N\to\infty}(1-x)\sum_{n=0}^{N} s_n x^n\\ &= \lim_{N\to\infty}\Big(\sum_{n=0}^{N} a_n x^n - s_N x^{N+1}\Big)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.\end{aligned}$$

Tím je tvrzení dokázáno. ■

8.3.2. Věta (Abel)**.** Nechť ϱ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Předpokládejme, že $\varrho \in (0,\infty)$.

(a) Jestliže $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varrho^n$ konverguje, potom platí

$$\lim_{x\to(x_0+\varrho)_-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\varrho^n.$$

(b) Jestliže $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-\varrho)^n$ konverguje, potom platí

$$\lim_{x\to(x_0-\varrho)_+}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-\varrho)^n.$$

Důkaz. Dokážeme tvrzení (a). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x_0 = 0$. Předpokládejme nejprve, že $\varrho = 1$. Označme $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, pro $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ položme $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ a pro $x \in (-1,1)$ položme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Chceme dokázat, že $\lim_{x\to 1_-} f(x) = s$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$, platí $|s_n - s| < \varepsilon$. Nyní pro tato ε a n_0 nalezneme $\delta \in (0,1)$ takové, že pro každé $x \in (1-\delta, 1)$ platí $(1-x)\sum_{n=0}^{n_0}|s_n - s| < \varepsilon$. Potom podle Lemmatu 8.3.1 pro každé

$x \in (1-\delta, 1)$ platí

$$\begin{aligned}
|f(x)-s| &= \Big|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - s\Big| = \Big|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - s\Big| \\
&= \Big|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - (1-x)s\sum_{n=0}^{\infty} x^n\Big| \leq (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} |s_n - s| x^n \\
&= (1-x)\sum_{n=0}^{n_0} |s_n - s| x^n + (1-x)\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |s_n - s| x^n \\
&< (1-x)\sum_{n=0}^{n_0} |s_n - s| + (1-x)\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \varepsilon x^n \\
&< \varepsilon + (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon x^n \\
&= \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Tedy $\lim_{x\to 1_-} f(x) = s$. Tím je tvrzení dokázáno pro $\varrho = 1$.

Nyní předpokládejme, že $\varrho \in (0, \infty)$. Potom platí

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|\varrho^n} = \frac{1}{\varrho}\varrho = 1,$$

a tedy je poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n x^n$ roven 1. Z již dokázané části tvrzení a z věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.20(P)) tedy plyne, že

$$\lim_{x\to\varrho_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{x\to\varrho_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n \Big(\frac{x}{\varrho}\Big)^n = \lim_{y\to 1_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n y^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n.$$

Větu 4.2.20 jsme mohli použít díky tomu, že vnitřní funkce $x \mapsto \frac{x}{\varrho}$ je rostoucí. Tím je dokázáno tvrzení (a). Tvrzení (b) lze dokázat obdobným způsobem. ■

8.3.3. Příklad. Dokažte, že pro každé $x \in [-1, 1]$ platí

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Řešení. Dle (8.6) víme, že tvrzení platí pro každé $x \in (-1, 1)$. Dokážeme jeho platnost pro $x = 1$. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ konverguje podle Leibnizovy věty (Věta 3.3.1). Tedy ze spojitosti funkce arctg a z Abelovy věty plyne, že

$$\operatorname{arctg} 1 = \lim_{x \to 1_-} \operatorname{arctg} x = \lim_{x \to 1_-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Obdobným postupem lze dokázat, že $\operatorname{arctg}(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$, neboť řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}(-1)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ také konverguje podle Leibnizovy věty. ♣

8.3.4. Poznámka. V Příkladu 8.3.3 jsme dokázali následující zajímavý vztah

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Pro aproximaci čísla π však není tento vzorec vhodný, protože řada na pravé straně rovnosti konverguje velice pomalu. Například pro určení hodnoty čísla π s přesností, jaká byla známa již Archimédovi, je třeba sečíst více než 300 členů uvedené řady.

8.4. Teoretické příklady na mocninné řady

8.4.1. Příklad (Tauberova[1] věta). Nechť má mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ poloměr konvergence 1 a nechť $L \in \mathbb{R}^*$. Označme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-1, 1)$. Jestliže platí $\lim n a_n = 0$ a $\lim_{x \to 1_-} f(x) = L$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L$.

Řešení. Protože $\lim n a_n = 0$, platí podle Věty 2.2.25 také $\lim n|a_n| = 0$. Z Věty 3.8.21 pak vyplývá, že i $\lim \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} k|a_k| = 0$.

Označme

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Potom $\lim f(x_n) = L$.

Nechť nejprve $L \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí

$$|f(x_n) - L| < \varepsilon, \tag{8.8}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} k|a_k| < \varepsilon \tag{8.9}$$

a

$$n|a_n| < \varepsilon. \tag{8.10}$$

[1]Alfred Tauber (1866–1942)

Položme $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potom pro každé $x \in (0,1)$ a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$\begin{aligned} s_n - L = \sum_{k=0}^n a_k - L &= \sum_{k=0}^n a_k - L + f(x) - \sum_{k=0}^\infty a_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^n a_k(1-x^k) + f(x) - L - \sum_{k=n+1}^\infty a_k x^k, \end{aligned}$$

a tedy

$$|s_n - L| \le \sum_{k=0}^n |a_k|(1-x^k) + |f(x) - L| + \sum_{k=n+1}^\infty |a_k| x^k.$$

Protože pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ máme

$$(1-x^k) = (1-x)(1+x+\cdots+x^{k-1}) \le k(1-x),$$

dostáváme

$$\sum_{k=0}^n |a_k|(1-x^k) \le (1-x)\sum_{k=0}^n k|a_k|.$$

Nechť nyní $n \in \mathbb{N}$ je zvoleno tak, aby $n \ge n_0$. Potom z (8.10) plyne

$$\sum_{k=n+1}^\infty |a_k| x^k < \varepsilon \sum_{k=n+1}^\infty \frac{x^k}{k} \le \frac{\varepsilon}{n} \sum_{k=n+1}^\infty x^k = \frac{\varepsilon x^{n+1}}{n(1-x)} < \frac{\varepsilon}{n(1-x)}.$$

Celkově dostáváme pro každé $x \in (0,1)$ a $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$ odhad

$$|s_n - L| \le (1-x)\sum_{k=0}^n k|a_k| + |f(x) - L| + \frac{\varepsilon}{n(1-x)}.$$

Do tohoto odhadu nyní dosadíme hodnotu $x = x_n$. Ze (8.8) a (8.9) pak obdržíme

$$\begin{aligned} |s_n - L| &\le (1-x_n)\sum_{k=0}^n k|a_k| + |f(x_n) - L| + \frac{\varepsilon}{n(1-x_n)} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^n k|a_k| + |f(x_n) - L| + \varepsilon < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon, \end{aligned}$$

a tedy $\lim s_n = L$.

Nyní předpokládejme, že $L = \infty$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in (0,1)$ platí

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k + f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k(1-x^k) + f(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \\ &\geq f(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k. \end{aligned}$$

Nyní nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, aby pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platilo $|a_n| \leq \frac{1}{n}$. Pak pro každé takové n dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| x^k &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \\ &= \frac{x^{n+1}}{n(1-x)} \leq \frac{1}{n(1-x)}. \end{aligned}$$

Dosadíme-li do tohoto odhadu $x = x_n$, dostaneme $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \leq 1$. Tedy celkem

$$s_n \geq f(x_n) - 1$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Tvrzení nyní plyne z toho, že $\lim f(x_n) = \infty$.

Nechť $L = -\infty$. Položíme $b_n = -a_n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, a $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, $x \in (-1,1)$. Potom zřejmě platí $\lim n b_n = 0$ a $\lim_{x \to 1-} g(x) = \infty$. Z již dokázaného tvrzení tudíž plyne $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty$, a tedy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = -\infty$. ♣

8.4.2. Poznámka. V Tauberově větě z Příkladu 8.4.1 lze předpoklad $\lim n a_n = 0$ nahradit předpokladem, že posloupnost $\{n a_n\}$ je omezená. Důkaz tohoto tvrzení, který podal J. E. Littlewood[2], je podstatně obtížnější než důkaz původní Tauberovy věty a zde jej uvádět nebudeme.

8.5. Početní příklady na mocninné řady

8.5.1. Příklad. Nalezněte poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$.

Řešení. Jedná se o mocninnou řadu ve tvaru (8.1) se středem $x_0 = 0$ a koeficienty

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 0, \\ \frac{1}{n^3} & \text{pro } n \geq 1. \end{cases}$$

[2]John Edensor Littlewood (1885–1977)

Platí

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^3}} = 1,$$

a tudíž ze vzorce (8.2) dostaneme $\varrho = 1$.

Poloměr konvergence ϱ lze také vypočítat pomocí Poznámky 3.2.16, neboť platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = 1.$$

♣

8.5.2. Příklad. Nalezněte poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} x^n$.

Řešení. Jedná se o mocninnou řadu ve tvaru (8.1) se středem $x_0 = 0$ a koeficienty

$$a_n = \frac{n!}{(2n)!} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{(2n)!}}{\frac{(n+1)!}{(2n+2)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1} = \infty.$$

Podle Poznámky 3.2.16 je tedy poloměr konvergence roven $\varrho = \infty$. ♣

8.5.3. Příklad. Nalezněte poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k!}}{k!}$.

Řešení. Jedná se o mocninnou řadu se středem $x_0 = 0$ a koeficienty

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{k!}, & \text{pokud } n = k! \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\sqrt[n]{a_n} \le \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$, a tedy podle Věty 2.4.14 a Příkladu 2.2.50 máme

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \le \limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

Podle věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.33) platí

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k!]{a_{k!}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k!]{\frac{1}{k!}} = 1,$$

a tedy $\limsup \sqrt[n]{a_n} = 1$. Odtud a ze vzorce (8.2) vyplývá, že poloměr konvergence je roven 1. ♣

8.5.4. Příklad. Nechť $0 < a < b$. Nalezněte poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(na^n + \frac{b^n}{n^2}\right) x^n.$$

Řešení. Jedná se o mocninnou řadu ve tvaru (8.1) se středem $x_0 = 0$ a koeficienty

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 0, \\ na^n + \frac{b^n}{n^2} & \text{pro } n \geq 1. \end{cases}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí odhady

$$\frac{b^n}{n^2} \leq na^n + \frac{b^n}{n^2} \leq 2nb^n.$$

Pomocí limity z Příkladu 2.2.50 dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{b^n}{n^2}} = b \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2nb^n} = b,$$

a proto podle věty o dvou strážnících (Věta 2.2.47) platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{na^n + \frac{b^n}{n^2}} = b.$$

Podle (8.2) je tedy poloměr konvergence ϱ roven $\frac{1}{b}$. ♣

8.5.5. Příklad. Nechť $c > 0$. Nalezněte poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{c^{n^2}} x^n.$$

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ označme

$$a_n = \frac{n!}{c^{n^2}}.$$

Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{c^{n^2}}}{\frac{(n+1)!}{c^{(n+1)^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{c^{2n+1}}{n+1} = \begin{cases} 0, & \text{pokud } c \in (0,1], \\ \infty, & \text{pokud } c \in (1,\infty). \end{cases}$$

Podle Poznámky 3.2.16 tedy pro poloměr konvergence ϱ dostáváme

$$\varrho = \begin{cases} 0, & \text{pokud } c \in (0,1], \\ \infty, & \text{pokud } c \in (1,\infty). \end{cases}$$

♣

8.5.6. Příklad. Dokažte, že funkci $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$, $x \in (-1, 1)$ lze rozvinout do mocninné řady se středem v bodě 0 a poloměrem konvergence 1. Určete koeficienty této řady.

Řešení. Podle vzorce pro součet geometrické řady a jednoduché úpravy platí pro $x \in (-1, 1)$

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2+1) \cdot \frac{1}{1-x^2} = -(x^2+1) \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-x^{2n+2} - x^{2n}) = -1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2x^{2n}. \end{aligned}$$

Tedy $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-1, 1)$, kde

$$a_n = \begin{cases} -1 & \text{pro } n = 0, \\ 0 & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ liché}, \\ -2 & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ sudé}. \end{cases}$$

♣

8.5.7. Příklad. Dokažte, že funkci $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$, $x \in (-1, 1)$ lze rozvinout do mocninné řady se středem v bodě 0 a poloměrem konvergence 1. Určete koeficienty této řady.

Řešení. Podle vzorce pro součet geometrické řady pro každé $x \in (-1, 1)$ platí

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Dostali jsme mocninnou řadu se středem v bodě 0 a koeficienty

$$a_n = \begin{cases} (-1)^k, & \text{pokud } n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ 0, & \text{pokud } n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Poloměr konvergence této řady je roven 1. Podle Věty 8.1.3 konverguje mocninná řada na intervalu $(-1, 1)$ absolutně. Podle Mertensovy věty (Věta 3.6.2) platí

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k a_{n-k} x^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \end{aligned}$$

kde

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mají čísla k a $2n-k$ stejnou paritu, tj. jsou obě lichá nebo obě sudá. Pokud je navíc k sudé, pak platí

$$a_k a_{2n-k} = (-1)^{\frac{k}{2}}(-1)^{n-\frac{k}{2}} = (-1)^n.$$

Pokud je k liché, pak platí $a_k a_{2n-k} = 0 \cdot 0 = 0$. Počet sudých čísel v množině $\{0, 1, \ldots, 2n\}$ je roven $n+1$. Máme tedy $b_{2n} = (-1)^n(n+1)$.

Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mají čísla k a $2n+1-k$ rozdílnou paritu, a proto je právě jedno z čísel a_k a a_{2n+1-k} rovno 0. Odtud plyne, že $b_{2n+1} = 0$.

Výsledná řada má tedy tvar

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^{2n}, \qquad x \in (-1, 1).$$

♣

8.5.8. Příklad. Rozviňte funkci $f(x) = \sin^2 x$ do mocninné řady.

Řešení. Podle vzorce pro sin polovičního úhlu a podle známé mocninné řady pro cos dostáváme

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}.$$

♣

8.5.9. Příklad. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}.$$

Řešení. Zkoumejme mocninnou řadu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} x^{2n+3}.$$

Snadno zjistíme, že poloměr konvergence je $R = 1$. Posloupnost $\frac{1}{2n+3}$ monotónně klesá k nule, a tedy podle Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1) tato mocninná řada konverguje i pro $x = 1$. Z Abelovy věty tedy dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} = f(1) = \lim_{x \to 1-} f(x).$$

Podle věty o derivaci mocninné řady (Věta 8.2.2) platí pro všechna $x \in (-1, 1)$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+2} = \frac{x^2}{1+x^2} ,$$

kde jsme v posledním kroku využili vzorce pro součet geometrické řady. Snadnou integrací dostaneme

$$f(x) = \int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - \arctan x + C .$$

Dosazením $x = 0$ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} 0^{2n+3} = 0 - \arctan 0 + C ,$$

a tedy $C = 0$. Součet zadané řady nyní dopočteme podle Abelovy věty

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} = \lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} (x - \arctan x) = 1 - \frac{\pi}{4} .$$

♣

8.5.10. Příklad. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2n) \frac{1}{3^n} .$$

Řešení. Zkoumejme mocninnou řadu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

pro $x \in (-1, 1)$. Pravou stranu můžeme snadno derivovat, a tedy podle věty o derivaci mocninné řady (Věta 8.2.2) platí pro všechna $x \in (-1, 1)$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} .$$

První člen řady je nulový, a proto opětovným použitím věty o derivaci mocninné řady dostaneme

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3} .$$

Z posledních dvou rovností snadno dostáváme

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+2n)x^n &= x^2\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-n)x^{n-2}+3x\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}\\ &= x^2f''(x)+3xf'(x)=\frac{2x^2}{(1-x)^3}+\frac{3x}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

pro všechna $x \in (-1,1)$. Dosazením $x=\frac{1}{3}$ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+2n)\frac{1}{3^n}=\frac{3}{4}+\frac{9}{4}=3\,.$$

♣

8.5.11. Příklad. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\,.$$

Řešení. Zkoumejme mocninnou řadu

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}x^{2n+1}\,.$$

Snadno zjistíme, že poloměr konvergence této mocninné řady je $R=1$ a že tato řada konverguje i pro $x=1$. Z Abelovy věty (Věta 8.3.2) tedy dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=f(1)=\lim_{x\to 1-}f(x)\,.$$

Podle věty o derivaci mocninné řady (Věta 8.2.2) platí pro všechna $x \in (-1,1)$

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}\,. \tag{8.11}$$

Poslední řadu si označme $g(x)$. Tato řada má poloměr konvergence 1, a z věty o derivaci mocninné řady dostaneme pro všechna $x \in (-1,1)$

$$g'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2}\,,$$

kde jsme v posledním kroku použili vzorec pro součet geometrické řady. Integrací spočteme

$$g(x) = \int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)}\right)\,dx = \frac{1}{2}\log(x+1) - \frac{1}{2}\log(1-x) + C\,.$$

Dosazením $x = 0$ do řady pro $g(x)$ lehce dopočteme $C = 0$. Z (8.11) máme

$$f'(x) = xg(x) = \frac{1}{2}x\log(x+1) - \frac{1}{2}x\log(1-x)\,.$$

Standardní integrací pomocí per-partes a rozkladu na parciální zlomky, kterou zde nebudeme detailně rozepisovat, lze z tohoto spočítat

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\log(1+x) + \frac{1}{2}x^2\log(1+x)\right) - \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\log(1-x) + \frac{1}{2}x^2\log(1-x)\right) + C_2 \\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\log\frac{x+1}{1-x} + \frac{1}{4}x^2\log\frac{x+1}{1-x} + C_2\,.
\end{aligned}$$

Dosazením $x = 0$ pak snadno zjistíme, že $C_2 = 0$. Podle Abelovy věty dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-}\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(x^2-1)\log\frac{x+1}{1-x} = \frac{1}{2}\,,$$

kde jsme v posledním kroku mimo jiné využili známou limitu $\lim_{x\to 1-}(x-1)\log(1-x) = 0$. ♣

8.5.12. Příklad. Rozhodněte, pro která $k \in \mathbb{N}$ je limita

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{tg} x}{x^k} \tag{8.12}$$

konečná a nenulová.

Řešení. Jest

$$\frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{tg} x}{x^k} = \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\operatorname{arctg} x\cos x - \sin x}{x^{k+1}}.$$

Podle 8.6 a 7.3.5 máme

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} x \cos x &= (x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3))(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))\\ &= x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^5 + o(x^6)\\ &= x - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3), \quad x \to 0.\end{aligned}$$

Odtud a z 7.3.4 dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x \cos x - \sin x}{x^k} &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}{x^k}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{x^k}.\end{aligned}$$

Protože $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$, plyne z věty o aritmetice limit, že pro volbu $k = 3$ je hledaná limita konečná a nenulová, přesněji

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x \cos x - \sin x}{x^3} = -\frac{2}{3}.$$

Opětovným použitím věty o aritmetice limit odtud ihned dostaneme, že pro $k = 1$ nebo $k = 2$ platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x \cos x - \sin x}{x^k} = 0.$$

Konečně pro sudé číslo k, $k > 3$, platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x \cos x - \sin x}{x^k} = \infty$$

a pro liché číslo k, $k > 3$, limita (8.12) neexistuje. ♣

KAPITOLA 9

Integrál

9.1. Primitivní funkce

9.1.1. Definice. Nechť I je otevřený interval a nechť f je funkce s reálnými hodnotami definovaná alespoň na I. Řekneme, že funkce $F : I \to \mathbb{R}$ je **primitivní funkcí k funkci** f **na** I, pokud pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

9.1.2. Poznámky.

(a) Nechť F je primitivní funkcí k nějaké funkci f na otevřeném intervalu I. Potom F je na I spojitá, neboť má dle definice v každém bodě I vlastní derivaci.

(b) Existují funkce, které na jistém intervalu nemají primitivní funkci. Příkladem je funkce sign na intervalu $\mathbb{R}$.

(c) Primitivní funkce není určena jednoznačně. Nechť F je primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I a nechť $c \in \mathbb{R}$. Pak funkce $F + c$ je také primitivní funkcí k f na I.

(d) Hledání primitivní funkce nazýváme **integrací** a primitivní funkci někdy označujeme jako **neurčitý integrál**.

9.1.3. Označení. Fakt, že F je primitivní funkce k f na otevřeném intervalu I, značíme symbolem

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} F(x), \quad x \in I.$$

Symbol $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ označuje množinu všech primitivních funkcí na k f na I.

9.1.4. Definice. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, $A, B \subset X$ jsou množiny a c je reálné číslo. Pak

$$A + B = \{a + b;\ a \in A, b \in B\} \quad \text{a} \quad cA = \{ca;\ a \in A\}.$$

Pokud $x \in X$ je vektor, $x + A$ značí $\{x\} + A$.

9.1.5. Definice. Nechť I je otevřený interval.

(a) Pak systém X všech reálných funkcí na I tvoří vektorový prostor, přičemž operace definovány bodově. Přesněji, pro $f, g \in X$ a $c \in \mathbb{R}$ máme

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{a} \quad (cf)(x) = cf(x), \qquad x \in I.$$

(b) Je-li $A \subset X$, řekneme, že A je **určená až na konstantu**, pokud existuje $f \in X$ takové, že $A = \{f + c;\ c \in \mathbb{R}\}$.

9.1.6. Věta (o jednoznačnosti primitivní funkce až na konstantu)**.** Nechť I je otevřený interval a nechť funkce f je definovaná alespoň na I. Nechť F a G jsou primitivní funkce k funkci f na I. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $F(x) = G(x) + c$, $x \in I$.

Speciálně tedy platí, že množina $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ je určená až na konstantu.

Důkaz. Definujme funkci

$$H(x) = F(x) - G(x), \quad x \in I.$$

Pak

$$H'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad x \in I,$$

a tedy dle Věty 5.2.9 je H konstantní na I. ■

9.1.7. Při hledání primitivní funkce k dané funkci na nějakém otevřeném intervalu používáme následující symboliku:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} F(x), \quad x \in I.$$

Na levé straně rovnosti stojí **množina** funkcí (přesněji množina všech primitivních funkcí k funkci f), zatímco na pravé straně stojí (libovolný) representant této množiny, tedy funkce F, jedna z primitivních funkcí k funkci f na I. Vztah $\stackrel{c}{=}$ tedy není rovností v obvyklém slova smyslu, čteme jej jako **rovnost až na konstantu** a znamená, že všechny primitivní funkce k funkci f na intervalu I obdržíme tak, že k funkci F přičteme libovolnou konstantní funkci na I.

Zadání úlohy nalézt primitivní funkci k funkci f symbolicky zapisujeme ve formě

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jednotlivé části tohoto zápisu jsou tyto:

$\int$ …znak integrálu

$f(x)$ …**integrand**, tedy funkce, k níž hledáme primitivní funkci

dx …**diferenciál**, symbol, jenž označuje jednak konec integrandu a jednak určuje proměnnou, vzhledem k níž integrujeme.

Následující tvrzení uvedeme zatím bez důkazu, podrobný důkaz bude uveden později (Důsledek 9.2.25).

9.1.8. Věta (vztah spojitosti a existence primitivní funkce)**.** Nechť f je spojitá funkce na otevřeném intervalu I. Pak má na I primitivní funkci.

9.1.9. Věta (linearita primitivní funkce)**.** Nechť funkce f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F, funkce g má na I primitivní funkci G a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I.

Důkaz. Podle Věty 5.1.17 platí

$$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

pro každé $x \in I$. Odtud plyne tvrzení. ∎

9.1.10. Věta (Darbouxova vlastnost derivace)**.** Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci. Pak má f na I **Darbouxovu vlastnost**, tj. $f(J)$ je interval, kdykoli $J \subset I$ je interval.

Důkaz. Nechť J je interval. Předpokládejme, že $y_1, y_2 \in f(J)$, $y_1 < y_2$ a $z \in (y_1, y_2)$. Chceme ukázat, že $z \in f(J)$. To nám postačí k důkazu tvrzení dle Lemmatu 1.6.23.

Nechť F je primitivní k funkci f na I. Definujme funkci

$$H(x) = F(x) - zx, \quad x \in I.$$

Pak H je spojitá na I a pro každé $x \in I$ platí

$$H'(x) = f(x) - z,$$

tj. H má na I vlastní derivaci.

Nalezneme $x_1, x_2 \in J$ taková, že $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$. Předpokládejme, že $x_1 < x_2$. (V opačném případě bychom postupovali obdobně.) Protože funkce H nabývá na intervalu $[x_1, x_2]$ minima (Věta 4.3.9), můžeme ho označit jako x_0. Jelikož

$$H'(x_1) = f(x_1) - z < 0,$$

existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P^+(x_1, \delta) : H(x) < H(x_1).$$

Tedy $x_0 \neq x_1$. Obdobně odvodíme z faktu $H'(x_2) = f(x_2) - z > 0$, že $x_0 \neq x_2$.

Máme tedy $x_0 \in (x_1, x_2)$, a platí proto $H'(x_0) = 0$ (viz Věta 5.1.30). Odtud $f(x_0) = z$. ∎

9.1.11. Poznámka. Nechť I je otevřený interval a nechť f je funkce definovaná alespoň na I. Potom na I platí následující implikace:

$$f \text{ je spojitá} \Rightarrow f \text{ má primitivní funkci} \Rightarrow f \text{ má Darbouxovu vlastnost.}$$

9.1.12. Poznámka. Z Věty 9.1.10 plyne, že funkce $\operatorname{sign} x$ nemá na intervalu $(-1, 1)$ primitivní funkci.

9.1.13. Věta (první věta o substituci)**.** Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Nechť φ je funkce definovaná na intervalu (α, β) s hodnotami v (a, b), která má v každém bodě (α, β) vlastní derivaci. Pak

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} F(\varphi(t)), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Důkaz. Podle věty o derivaci složené funkce (Věta 5.1.23) platí

$$(F(\varphi(t))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t), \quad t \in (\alpha, \beta),$$

čímž je tvrzení dokázáno. ■

9.1.14. Příklad. Nechť $(a, b) = (\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$,

$$f(x) = x^4,\ x \in (a, b) \quad \text{a} \quad \varphi(t) = \sin t,\ t \in (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{1}{5}x^5, \quad x \in (a, b).$$

Tedy dle první věty o substituci (Věta 9.1.13) platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int \sin^4 t \cos t\,\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} \frac{1}{5}\sin^5 t, \quad t \in (\alpha, \beta).$$

9.1.15. Věta (druhá věta o substituci)**.** Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ má v každém bodě nenulovou vlastní derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b) a platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} G(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in (a, b).$$

Důkaz. Podle Věty 9.1.10 nemění φ' na (α, β) znaménko. Podle Věty 5.4.7 je φ klesající nebo rostoucí na (α, β). Tedy existuje inverzní funkce $\varphi^{-1} : (a, b) \to (\alpha, \beta)$. Pro každé $x \in (a, b)$ pak platí

$$\begin{aligned}(G(\varphi^{-1}(x)))' &= G'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1}(x))' \\ &= f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))\varphi'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} \\ &= f(x).\end{aligned}$$

Při výpočtu jsme použili větu o derivaci složené funkce (Věta 5.1.23) a větu o derivaci inverzní funkce (Věta 5.1.26). ■

9.1.16. Příklad. Spočtěte primitivní funkci k $\sqrt{1-x^2}$ na intervalu $(-1,1)$.

Řešení. Položme $(\alpha,\beta) = (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $(a,b) = (-1,1)$ a

$$f(x) = \sqrt{1-x^2},\ x \in (a,b) \quad \text{a} \quad \varphi(t) = \sin t,\ t \in (\alpha,\beta).$$

Pak

$$\varphi((\alpha,\beta)) = \varphi((-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})) = (-1,1) = (a,b)$$

a $\varphi^{-1}(x) = \arcsin x$ na $(-1,1)$. Dále platí

$$\begin{aligned}\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t &= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{1}{2}(1+\cos 2t) \overset{c}{=} \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t, \quad t \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}).\end{aligned}$$

Tedy

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x), \quad x \in (-1,1).$$

♣

9.1.17. Symbol $\mathrm{d}x$ nemá žádný matematický význam a nelze s ním žádným způsobem algebraicky manipulovat. Nesmí se tedy například objevit ve jmenovateli zlomku, nelze jím krátit a podobně. Tento symbol lze v některých případech i vynechat, například tvrzení první věty o substituci lze symbolicky zapsat ve tvaru

$$\int (f\circ\varphi)\varphi' \overset{c}{=} F\circ\varphi.$$

Symbol dx však může posloužit jako užitečná mnemotechnická pomůcka při praktických výpočtech, například při použití jedné z vět o substituci. Hledáme-li kupříkladu primitivní funkci k funkci $g(t)$ na intervalu (α,β) pomocí první věty o substituci, často postupujeme tak, že se snažíme nalézt funkce f a φ takové, aby platilo $g(t) = (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)$. V takových případech obvykle nejprve najdeme funkci φ', k ní pak dopočítáme φ a interval (a,b). Formálně zaměníme $x = \varphi(t)$ a $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, zbytek integrandu by pak již měl být ve formě $\varphi(t)\varphi'(t)$.

Výše uvedený vztah $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ nemá žádný matematický význam, jde jen o užitečnou pomůcku při výpočtech.

9.1.18. Poznámka. Nechť $h\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá a $\varphi\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ má vlastní nenulovou derivaci. Označme $(\alpha,\beta) = \varphi((a,b))$ a nechť $f\colon (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ je definována jako $f(t) = h(\varphi^{-1}(t))(\varphi^{-1})'(t)$. Je-li F primitivní funkce k f na (α,β), je $F\circ\varphi$ primitivní funkce k h na (a,b).

Důkaz. Díky předpokladu je φ ryze monotónní funkce, jejíž inverze má na intervalu (α, β) vlastní derivaci. Funkce f je tak dobře definovaná a spojitá. Derivujeme-li nyní $F \circ \varphi$ na (a, b), dostáváme

$$(F \circ \varphi)'(x) = (f \circ \varphi)(x)\varphi'(x) = h(x)(\varphi^{-1})'(\varphi(x))\varphi(x) = h(x).$$

■

9.1.19. Věta (integrace per partes)**.** Nechť I je otevřený interval a nechť f je spojitá funkce na I. Nechť F je primitivní funkce k funkci f na I a G je primitivní funkce k funkci g na I. Pak platí

$$\int g(x)F(x)\,\mathrm{d}x = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,\mathrm{d}x, \quad x \in I.$$

Důkaz. Funkce G je spojitá na I dle Poznámky 9.1.2(a), takže i funkce fG je spojitá na I. Má tedy primitivní funkci na I dle Věty 9.1.8. Uvažujme nějaký prvek množiny vpravo, tedy funkci tvaru $GF - H$, kde H je primitivní ke Gf. Pak z Věty 5.1.17 máme

$$(GF - H)' = gF + Gf - Gf = gF.$$

Tedy

$$\int gF \stackrel{c}{=} GF - H.$$

Obě množiny tedy obsahují funkci $GF - H$, a proto se rovnají (viz Věta 9.1.6). ■

9.1.20. Příklad. Spočtěte primitivní funkci k funkci arctg na intervalu $(-\infty, \infty)$.

Řešení. Položíme $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $F(x) = \operatorname{arctg} x$, $g(x) = 1$ a $G(x) = x$. Potom f je spojitá na $\mathbb{R}$, a tedy podle Věty 9.1.19 platí

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x &= \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = \int g(x)F(x)\,\mathrm{d}x \\
&= G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx \\
&= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx \\
&\stackrel{c}{=} x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2),\ x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

♣

9.1.21. Příklad. Spočtěte primitivní funkci k funkci xe^x na $(-\infty, \infty)$.

Řešení. Ve Větě 9.1.19 položme $f(x) = 1$, $F(x) = x$, $g(x) = e^x$ a $g(x) = e^x$. Dostaneme

$$\begin{aligned}\int xe^x \, \mathrm{d}x &= \int g(x)F(x)\, dx = G(x)F(x) - \int G(x) f(x) \, \mathrm{d}x \\ &= xe^x - \int e^x \, \mathrm{d}x \overset{c}{=} e^x(x-1), \quad x \in (-\infty, \infty).\end{aligned}$$

♣

9.1.22. Příklad. Spočtěte primitivní funkci k funkci $\log x$ na $(0, \infty)$.

Řešení. Ve Větě 9.1.19 položme $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \log x$, $g(x) = 1$ a $G(x) = x$. Dostaneme

$$\begin{aligned}\int \log x \, \mathrm{d}x &= \int 1 \cdot \log x \, \mathrm{d}x = \int g(x)F(x) \, \mathrm{d}x \\ &= G(x)F(x) - \int G(x) f(x) \, \mathrm{d}x \\ &= x \log x - \int 1 \, \mathrm{d}x \overset{c}{=} x(\log x - 1), \quad x \in (0, \infty).\end{aligned}$$

♣

9.1.23. Lemma. Nechť I je otevřený interval a X je vektorový prostor všech reálných funkcí na I. Nechť je neprázdná $A \subset X$ určená až na konstantu a nechť C značí množinu všech konstantních funkcí na I. Pak platí následující tvrzení.

(a) Je-li $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, je cA též určená až na konstantu.
(b) Platí $A = A + C$.
(c) Pokud a_1, a_2 jsou reálná čísla, platí

$$a_1 A + a_2 A = \begin{cases} (a_1 + a_2)A, & a_1 + a_2 \neq 0, \\ C, & a_1 + a_2 = 0 \text{ a } a_1 \neq 0, \\ \{0\}, & a_1 = a_2 = 0. \end{cases}$$

Důkaz. Tvrzení (a) a (b) ihned plynou z definice.

V důkazu tvrzení (c) nejprve uvažujeme případ $a_1 + a_2 \neq 0$. Nechť $f_1, f_2 \in A$ jsou dány. Jelikož $A = \{f + c : c \in \mathbb{R}\}$ pro nějaké $f \in X$, existují $c_1, c_2 \in$ splňující $f_i = f + c_i$, $i = 1, 2$. Pak

$$\begin{aligned}a_1 f_1 + a_2 f_2 &= (a_1 + a_2) f + a_1 c_1 + a_2 c_2 \\ &= (a_1 + a_2) \left(f + \frac{a_1 c_1 + a_2 c_2}{a_1 + a_2} \right) \in (a_1 + a_2)A.\end{aligned}$$

Pokud naopak $g \in (a_1 + a_2)A$ je dáno, platí $g = (a_1 + a_2)(f + c)$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$. Tedy

$$g = a_1(f + c) + a_2(f + c) \in a_1 A + a_2 A.$$

Tím je první případ ověřen.

Pokud $a_1 + a_2 = 0$ a $a_1 \neq 0$, pak pro $f_1, f_2 \in A$ máme jako výše $f_i = f + c_i$, $i = 1, 2$, a tedy

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 = a_1 c_1 + a_2 c_2 \in C.$$

Je-li $c \in C$ dána, pak $f_1 = f + \frac{c}{a_1}$ a $f_2 = f$ splňují $a_1 f_1 + a_2 f_2 = c$, a tedy požadovaný vztah platí.

Případ $a_1 = a_2 = 0$ je pak zřejmý.

■

9.1.24. Příklad. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx$. Dokažte, že platí rekurentní formule

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(1 + x^2)^n} + \frac{2n - 1}{2n} I_n, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Speciálně tedy platí

$$I_1 \stackrel{c}{=} \operatorname{arctg} x, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

a

$$I_2 \stackrel{c}{=} \frac{x}{2(1 + x^2)} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Řešení. Z věty o vztahu spojitosti a existence primitivní funkce (Věta 9.1.8) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ má funkce $\frac{1}{(1+x^2)^n}$ primitivní funkci na $\mathbb{R}$. Z Věty 9.1.19 dostaneme

$$\begin{aligned}
I_n &= \int 1 \cdot \frac{1}{(1 + x^2)^n}\, \mathrm{d}x = x\frac{1}{(1 + x^2)^n} - \int x(-n)\frac{2x}{(1 + x^2)^{n+1}}\, \mathrm{d}x \\
&= x\frac{1}{(1 + x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(1 + x^2)^n} \\
&= \frac{x}{(1 + x^2)^n} + 2n \left(\int \frac{1}{(1 + x^2)^n}\, \mathrm{d}x - \int \frac{1}{(1 + x^2)^{n+1}}\, \mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{x}{(1 + x^2)^n} + 2n I_n - 2n I_{n+1}.
\end{aligned}$$

Z Lemmatu 9.1.23 nyní plyne následujícím způsobem tvrzení.

Nechť C značí množinu konstatních funkcí na $\mathbb{R}$ a nechť $f = \frac{x}{(1+x^2)^n}$. V obdržené rovnici

$$I_n = f + 2n I_n - 2n I_{n+1}$$

přičteme k oběma stranám $-I_n + 2nI_{n+1}$ a obdržíme

$$2nI_{n+1} + I_n - I_n = f + 2nI_n - I_n - 2nI_{n+1} + 2nI_{n+1},$$

tj.

$$2nI_{n+1} + C = f + (2n-1)I_n + C.$$

To ale davá rovnost

$$2nI_{n+1} = f + (2n-1)I_n,$$

z které již požadovaný závěr plyne. ♣

Následující příklad ukazuje, že v některých případech při hledání primitivní funkce metodou per partes musíme vyřešit funkcionální rovnici.

9.1.25. Příklad. Spočtěte primitivní funkci k funkci $e^x \sin x$ na $\mathbb{R}$.

Řešení. Z věty o vztahu spojitosti a existence primitivní funkce (Věta 9.1.8) plyne, že funkce $e^x \sin x$ má na $\mathbb{R}$ primitivní funkci. Dvojím použitím Věty 9.1.19 dostaneme

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x &= e^x \sin x - \int e^x \cos x \,\mathrm{d}x \\ &= e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Lemma 9.1.23 nyní použijeme pro obdrženou rovnost

$$A = g - A,$$

kde $A = \int e^x \sin x \,\mathrm{d}x$ a $g = e^x(\sin x - \cos x)$. Přičtením A k oběma stranám rovnice tak obržíme

$$2A = g + C,$$

kde C značí množinu všech konstatních funkcí na intervalu $(-\infty, \infty)$. Z této rovnosti již plyne

$$\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

9.1.26. Poznámka. Vyzkoušejme metodu per partes pro výpočet primitivní funkce k funkci $\operatorname{tg} x$ na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Pak dostáváme

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = (-\cos x)\frac{1}{\cos x} - \int (-\cos x)\frac{\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\ &= -1 + \int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Tato rovnost by mohla svádět k odvození identity $0 = -1$. Tento spor je však jen zdánlivý, neboť správně použité Lemma 9.1.23 dává pro $A = \int \operatorname{tg} x \, dx$ rovnost $C = -1 + C$, což je pravdivá rovnost (symbol C opět značí množinu všech konstatních funkcí na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$).

9.1.27. Definice. Racionální funkcí budeme rozumět podíl dvou polynomů, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule. Racionální funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je definovaná na libovolné podmnožině $\mathbb{R}$, která neobsahuje žádný kořen polynomu Q.

9.1.28. Lemma (Eukleidův algoritmus)**.** Nechť p, h jsou polynomy. Pokud $h \neq 0$, existují polynomy q a r takové, že

- $p = qh + r$,
- $r = 0$ nebo $\operatorname{st}(r) < \operatorname{st}(h)$.

Důkaz. Pokud $p = 0$ nebo $\operatorname{st}(p) < \operatorname{st}(h)$, tvrzení zjevně platí, neboť stačí položit $q = 0$ a $r = p$.

Předpokládejme tedy pro spor, že tvrzení neplatí. Pak existují nenulové polynomy p, h, pro které příslušný rozklad neexistuje a pro které je rozdíl $\operatorname{st}(p) - \operatorname{st}(h)$ minimální. Dle prvního kroku důkazu platí $n = \operatorname{st}(p) - \operatorname{st}(h) \geq 0$. Nechť $c(p)$, respektive $c(h)$, je koeficient u nejvyšší mocniny v p, respektive h. Pak

$$w = x^n \frac{c(p)}{c(h)} h - p$$

je buďto 0, nebo je to polynom stupně menšího než je stupeň p. Tedy $\operatorname{st}(w) - \operatorname{st}(h) < n$, což vzhledem k minimalitě n implikuje existenci polynomů a, b takových, že $w = ah + b$ a $b = 0$ nebo $\operatorname{st}(b) < \operatorname{st}(h)$. Pak ovšem

$$ah + b = w = x^n \frac{c(p)}{c(h)} h - p,$$

což znamená, že

$$p = \left(x^n \frac{c(p)}{c(h)} - a \right) h + (-b).$$

To je však již požadovaná reprezentace p, což je ve sporu s volbou p a h. Tím je důkaz dokončen. ∎

9.1.29. Lemma. Nechť p, q jsou nenulové polynomy s největším společným dělitelem w. Pak existují polynomy c, d takové, že $w = cp + dq$. Speciálně pak platí, že c, d nemají společného dělitele.

Důkaz. Položme

$$S(p, q) = \{ap + bq;\ a, b \text{ polynomy}\}.$$

Pak je každý element $S(p,q)$ dělitelný w. Potřebujeme dokázat, že $w \in S(p,q)$.

To je zřejmé, pokud je q konstantní polynom. Vskutku, pak $w = q$ a $p = qp'$ pro nějaký polynom p'. Pak pro $a = 1$ a $b = 1 - p'$ platí

$$w = q = qp' + (1 - p')q = ap + bq.$$

Předpokládejme nyní, že tvrzení neplatí pro dvojici p, q, kde q má minimální stupeň mezi všemi takovými páry. Z minimality platí $\mathrm{st}(q) \leq \mathrm{st}(p)$, takže existují polynomy c, r takové, že $r = 0$ nebo $\mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(q)$ a $p = cq + r$. Povšimněme si, že $\neq 0$, neboť v opačném případě je p násobek q a dokazované tvrzení pro dvojici p, q pak platí. To je však spor s volbou p, q.

Další úvahou jest pozorování, že každý společný dělitel dvojice p, q je dělitelem dvojice q, r a obráceně. Tedy w je největší společný dělitel páru q, r. Jelikož $\mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(q)$, z minimality dokazované tvrzení pro dvojici q, r platí, a tedy existují polynomy x, y takové, že $xq + yr = w$. Pak ale platí

$$w = xq + yr = xq + y(p - cq) = yp + (x - yc)q,$$

což je v sporu s volbou páru p, q. Důkaz je tak dokončen.

Speciální část již nyní snadno plyne. Pokud bychom totiž měli $c = ac'$ a $d = ad'$ pro nějaké polynomy a, c', d' různé od 1,kde vedoucí koeficient u a je 1, víme, že $p = wp'$ a $q = wq'$ pro nějaké polynomy p', q'. Pak ale rovnost

$$w = cwp' + dwq'$$

implikuje fakt

$$1 = cp' + dq' = a(c'p' + d'q').$$

Z toho však již plyne $a = 1$, což je spor. ∎

9.1.30. Věta (rozklad na parciální zlomky)**.** Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že

(i) $\mathrm{st}\, P < \mathrm{st}\, Q$,
(ii) $Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \dots (x - x_k)^{p_k}(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \dots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,
(iii) $a_n,\ x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{R}, a_n \neq 0, k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
(iv) $p_1, \dots, p_k,\ q_1, \dots, q_l \in \mathbb{N}$,
(v) žádný z mnohočlenů $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1,\ \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemá reálný kořen,
(vi) žádné dva z mnohočlenů $x - x_1,\ x - x_2, \dots, x - x_k$, nemají společný kořen.
(vii) P a Q jsou nesoudělné.

Pak existují jednoznačně určená čísla $A_1^1, \dots, A_{p_1}^1, \dots, A_1^k, \dots, A_{p_k}^k, B_1^1, C_1^1, \dots, B_{q_1}^1, C_{q_1}^1, \dots, B_1^l, C_1^l, \dots, B_{q_l}^l, C_{q_l}^l$ taková, že platí

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1^1}{x-x_1} + \dots + \frac{A_{p_1}^1}{(x-x_1)^{p_1}} \\ &+ \dots + \frac{A_1^k}{x-x_k} + \dots + \frac{A_{p_k}^k}{(x-x_k)^{p_k}} \\ &+ \frac{B_1^1 x + C_1^1}{x^2+\alpha_1 x+\beta_1} + \dots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}} + \dots \\ &+ \frac{B_1^l x + C_1^l}{x^2+\alpha_l x+\beta_l} + \dots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}}\end{aligned}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující $Q(x) \neq 0$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že q je monický, tj. že jeho vedoucí koeficient je 1.

Krok 1. V prvním kroce ukážeme, že tvrzení platí pro případ, kdy $q(x) = (x-x_1)^n$ nebo $q(x) = (x^2+\alpha x+\beta)^n$. Je-li $n = 1$, je výraz $\frac{p}{q}$ v požadovaném tvaru.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k < n$, kde $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Nechť nyní q je tvaru $q(x) = (x-x_1)^n$. Pak existují polynom a a číslo r takové, že $p(x) = a(x)(x-x_1) + r$. Tedy

$$\frac{p(x)}{(x-x_1)^n} = \frac{a(x)}{(x-x_1)^{n-1}} + \frac{r}{(x-x_1)^n}.$$

Na první člen vpravo aplikujeme indukční předpoklad a druhý je již v požadovaném tvaru.

Podobně postupujeme v případě $q(x) = (x^2+\alpha x+\beta)^n$. Předpokládáme-li platnost tvrzení pro každé $k < n$, kde $n \in \mathbb{N}$, píšeme $p(x) = a(x)(x^2 + \alpha x + \beta)) + r(x)$, kde $a(x)$ je polynom a $r(x)$ je polynomm nejvýše stupně 1. Pak

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a(x)}{(x^2+\alpha x+\beta)^{n-1}} + \frac{r(x)}{(x^2+\alpha x+\beta)^n}.$$

Opět lze na první člen použít indukční předpoklad, zatímco druhý je v požadovaném tvaru.

Tím je tvrzení dokázáno v případě, kdy $q(x)$ je mocnina typu $(x-x_1)^n$ nebo $(x^2+\alpha x+\beta)^n$, kde kvadratický člen je nerozložitelný.

Krok 2. Dokazujme nyní tvrzení pro případ, kdy q je součinem n různých typů nerozložitelných prvočinitelů. Pro případ $n = 1$ bylo tvrzení dokázáno v Kroku 1.

Předpokládejme nyní jeho platnost pro všechna $k < n$, kde $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Nechť $q = gh$ je polynom stupně n, kde g i h jsou monické, nesdílejí žádné netriviální společné dělitele a $\mathrm{st}(p) < n$. Tedy $\mathrm{st}(p) < \mathrm{st}(g) + \mathrm{st}(h) = n$ a $\min\{\mathrm{st}(g), \mathrm{st}(h)\} \geq 1$. Jelikož nemají g a h žádného netriviálního společného dělitele, dle Lemmatu 9.1.29 existují polynomy c a d takové, že $1 = cg + dh$. Pak c nem8 společný násobek s h a d nem společný násobek s g. Pak máme

$$\frac{p}{q} = \frac{p(cg + dh)}{q} = \frac{pcg}{q} + \frac{pdh}{q} = \frac{pc}{h} + \frac{pd}{g}.$$

Dostali jsme tak součet dvou výrazů, z nichž každý má ve jmenovateli méně než n různých nerozložitelných prvočinitelů. V případě, kdy $\mathrm{st}(pc) < \mathrm{st}(h)$ a $\mathrm{st}(pd) < \mathrm{st}(g)$ tak lze aplikovat indukční předpoklad a důkaz ukončit. V případě, že tomu tak není, předpokládejme například, že $\mathrm{st}(pc) \geq \mathrm{st}(h)$. Pak $pc = qh + r$ pro nějaké polynomy q a r, kde $\mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(h)$. To implikuje, že r nesdílí s h žádného společného dělitele, neboť v opačném případě by společný dělitel h a r byl též dělitelem p (neboť c nemá s h společného dělitele), což by byl spor s podmínkou (vii).

Máme tak

$$\frac{p}{q} = \frac{p(cg + dh)}{q} = \frac{(qh + r)g + dhp}{q} = \frac{rg + (q + df)h}{q}.$$

Jako výše díky podmínce (vii) vidíme, že $(q + df)$ nemá společného dělitele s g. Pak

$$\mathrm{st}(rg) < \mathrm{st}(h) + \mathrm{st}(g) \quad \text{a} \quad \mathrm{st}(p) < \mathrm{st}(h) + \mathrm{st}(g),$$

a tedy též

$$\mathrm{st}((q + df)h) < \mathrm{st}(h) + \mathrm{st}(g).$$

Tedy $\mathrm{st}(q + df) < \mathrm{st}(g)$ a $\mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(h)$. Dostáváme tak

$$\frac{p}{q} = \frac{rg + (q + df)h}{q} = \frac{r}{h} + \frac{q + df}{g},$$

přičemž na oba zlomky na pravé straně již lze použít indukční předpoklad.

Důkaz je tak dokončen. ∎

9.1.31 (postup při integraci racionální funkce)**.** Při integraci racionální funkce postupujeme podle následující osnovy:

1. krok: vyjádříme funkci $R(x)$ ve tvaru $R(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$, kde $\mathrm{st}\, P_2 < \mathrm{st}\, Q$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) \neq 0$;
2. krok: provedeme rozklad funkce $\frac{P_2(x)}{Q(x)}$ na parciální zlomky podle Věty 9.1.30;
3. krok: integrujeme jednotlivé parciální zlomky podle následujících formulí:

(i) Je-li

$$I = \int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx,$$

kde $A \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$, pak

$$I \overset{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{1-n}\frac{A}{(x-a)^{n-1}}, & x \in (-\infty, a) \text{ nebo } x \in (a, \infty), \text{ je-li } n > 1; \\ A \log|x-a|, & x \in (-\infty, a) \text{ nebo } x \in (a, \infty), \text{ je-li } n = 1. \end{cases}$$

(ii) Je-li

$$I = \int \frac{Bx + C}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q}\,dx,$$

kde $q \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $\beta - \frac{1}{4}\alpha^2 > 0$, pak nejprve vyjádříme I ve tvaru

$$I = \frac{B}{2}\int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,dx + (C - \frac{B\alpha}{2})\int \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,dx.$$

Označíme-li

$$I_1 = \int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,dx \quad \text{a} \quad I_2 = \int \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,dx,$$

potom

$$I_1 = \begin{cases} \frac{1}{(1-q)(x^2+\alpha x+\beta)^{q-1}}, & x \in \mathbb{R}, \text{ je-li } q > 1, \\ \log(x^2+\alpha x+\beta), & x \in \mathbb{R}, \text{ je-li } q = 1. \end{cases}$$

Dále platí

$$I_2 = \int \frac{1}{((x+\frac{\alpha}{2})^2 + \beta - \frac{\alpha^2}{4})^q}\,dx = \frac{1}{(\beta - \frac{\alpha^2}{4})^q}\int \frac{1}{\left[\left(\frac{2x+\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}\right)^2 + 1\right]^q}\,dx.$$

Pro výpočet posledního integrálu využijeme první větu o substituci. Položíme $y = \frac{2x+\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}$, takže $dy = \frac{2}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}dx$ a obdržíme

$$\int \frac{1}{\left[\left(\frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\beta-\frac{\alpha^2}{4}}}\right)^2 + 1\right]^q}\,dx = \frac{2}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}\int \frac{1}{(y^2+1)^q}\,dy.$$

Výsledný integrál pak spočítáme podle Příkladu 9.1.24.

9.1.32. Příklad. Najděte primitivní funkci k $\frac{x^5-x^3+2x^2+3x+1}{x^2-1}$.

Řešení. Standardním postupem (dělením polynomů) spočteme

$$\frac{x^5 - x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1} = x^3 + 2 + 3\frac{x+1}{x^2-1} = x^3 + 2 + 3\frac{1}{x-1}.$$

Tedy

$$\int \frac{x^5 - x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{x^4}{4} + 2x + 3\log|x-1|$$
$$\text{na } (-\infty,-1), (-1,1) \text{ a na } (1,\infty).$$

♣

9.1.33. Příklad. Najděte primitivní funkci k $\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x^2+x+1)}$.

Řešení. Obecný rozklad na parciální zlomky má tvar

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1},$$

kde $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Vynásobíme obě strany výrazem $(x+1)^2(x^2+x+1)$ a obdržíme

$$x^2+1 = x^3(B+C)+x^2(A+2B+2C+D)+x(A+2B+2C+2D)+(A+B+D).$$

Dva polynomy se rovnají právě tehdy, když se rovnají všechny jejich koeficienty. Tedy dostaneme tedy soustavu čtyř lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= B + C \\ 1 &= A + 2B + 2C + D \\ 0 &= A + 2B + C + 2D \\ 1 &= A + B + D. \end{aligned}$$

Jejím řešením je

$$A = 2, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = -1.$$

Tedy

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x^2+x+1)} = \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2+x+1}.$$

Máme

$$\int \frac{2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{-2}{x+1} \quad \text{na } (-\infty,-1) \text{ a } (-1,\infty)$$

a

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}x.$$

Ten substitucí $t = \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}$ převedeme na integrál $\int \sqrt{\frac{3}{4}} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$. Tedy

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} \stackrel{c}{=} \sqrt{\frac{4}{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right) \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

Dohromady máme

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{-2}{x+1} + \sqrt{\frac{4}{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)$$
$$\text{na } (-\infty,-1) \text{ a } (-1,\infty).$$

♣

9.1.34. Označení. Ve zbytku této kapitoly budeme symbolem $R(x, y)$ značit **racionální funkci dvou proměnných**, tj. $R(x, y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, kde

$$P(x, y) = \sum_{i,j=0}^{N_1} a_{ij} x^i y^j, \quad Q(x, y) = \sum_{i,j=0}^{N_2} b_{ij} x^i y^j,$$

kde $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{R}$, $i, j = 0, \dots, N_1(N_2)$ a $Q \not\equiv 0$.

Řekneme, že R je **sudá v první souřadnici**, pokud pro každé $(x, y) \in \mathcal{D}\, R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ Q(x, y) \neq 0\}$ platí $(-x, y) \in \mathcal{D}\, R$ a máme $R(-x, y) = R(x, y)$. Analogicky definujeme lichost v první a sudost a lichost v druhé souřadnici.

Funkce R je **sudá**, pokud pro každé $(x, y) \in \mathcal{D}\, R$ platí $(-x, -y) \in \mathcal{D}\, R$ a $R(x, y) = R(-x, -y)$. Analogicky definujeme lichost funkce R.

9.1.35. Lemma. Nechť $R(x, y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ je racionální funkce dvou proměnných, která je sudá v první souřadnici. Pak lze funkci R vyjádřit ve tvaru $R(x, y) = S(x^2, y)$, kde S je racionální funkce splňující $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(R)$.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že R je polynom, tj.

$$R(x, y) = \sum_{k,l=0}^{n} a_{k,l} x^k y^l, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Pak platí

$$0 = R(x, y) - R(-x, y) = \sum_{k,l=0}^{n} a_{k,l}(x^k - (-1)^k x^k) y^l, \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{9.1}$$

Předpokládejme, že existují $k \in \{1, \dots, n\}$ liché a $l \in \{0, \dots, n\}$ takové, že $a_{k,l} \neq 0$. Nechť m je nejvyšší lichý index, pro který existuje $l \in \{0, \dots, n\}$ splňující $a_{m,l} \neq 0$. Nechť I značí množinu takovýchto l a nechť

$$P(y) = \sum_{l \in I} a_{m,l} y^l.$$

Pak P je nenulový polynom na $\mathbb{R}$.

Z (9.1) pak plyne

$$0 = x^m \sum_{k=0,l}^{n} a_{k,l} x^{k-m} (1 - (-1)^k) y^l.$$

Pak pro každé $y \in \mathbb{R}$ platí

$$0 = \lim_{x \to \infty} x^m \sum_{k=0,l}^{n} a_{k,l} x^{k-m} (1-(-1)^k) y^l = \lim_{x \to \infty} x^m \sum_{l \in I} a_{m,l} y^l = \lim_{x \to \infty} x^m P(y).$$

Z nenulovosti P pak plyne spor. Tedy R obsahuje pouze sudé mocniny x, takže lze psát

$$R(x, y) = S(x^2, y),$$

kde S je polynom dvou proměnných.

Nechť nyní R je obecná racionální funkce splňující $R(-x, y) = R(x, y)$, $(x, y) \in \mathcal{D}(R)$. Pišme $R(x, y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, kde P, Q jsou polynomy dvou proměnných. Pak

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}(R)\colon P(x, y) Q(-x, y) = P(-x, y) Q(x, y). \tag{9.2}$$

Tato rovnost však platí na $\mathbb{R}^2$. Vskutku, nechť $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ je libovolné. Pokud $Q(x, y) \neq 0$, platí (9.2) díky sudosti funkce R v první souřadnici. Pokud $Q(x, y) = 0$, máme $(x, y) \notin \mathcal{D}(R)$, a tedy také $(-x, y) \notin \mathcal{D}(R)$. Tedy $Q(-x, y) = 0$ a rovnost (9.2) platí.

Z rovnosti (9.2) nyní plyne, že je polynom $P(x, y) Q(-x, y)$ sudý v první souřadnici, a tedy $P(x, y) Q(-x, y) = S_1(x^2, y)$ na $\mathbb{R}^2$ pro nějaký polynom S_1 dle první části důkazu. Též polynom $Q(x, y) Q(-x, y)$ je sudý v první souřadnici, a rovná se tak $S_2(x^2, y)$ pro nějaký polynom S_2. Jelikož $Q(x, y) = 0$ právě tehdy, když $Q(-x, y) = 0$, má racionální funkce $S = \frac{S_1}{S_2}$ stejný definiční obor jako R a platí pro ni

$$R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = \frac{P(x, y) Q(-x, y)}{Q(x, y) Q(-x, y)} = \frac{S_1(x^2, y)}{S_2(x^2, y)} = S(x^2, y).$$

■

9.1.36. Lemma. Nechť $R(x,y)$ je racionální funkce dvou proměnných. Pak platí následující tvrzení.

(a) Pokud je R lichá v první souřadnici, existuje racionální funkce S taková, že
$$R(x,y)=S(x^2,y)x,\quad (x,y)\in\mathcal{D}(R), x\neq 0.$$

(b) Pokud je R lichá v druhé souřadnici, existuje racionální funkce S taková, že
$$R(x,y)=S(x,y^2)y,\quad (x,y)\in\mathcal{D}(R), y\neq 0.$$

(c) Pokud je R sudá, existuje racionální funkce S jedné proměnné taková, že
$$R(x,y)=S\left(\frac{x}{y},y^2\right),\quad (x,y)\in\mathcal{D}(R), y\neq 0.$$

Důkaz. (a) Nechť $R=\frac{P}{Q}$ je racionální funkce lichá v první souřadnici. Pak je funkce
$$T(x,y)=\frac{R(x,y)}{x},\quad (x,y)\in\mathcal{D}(R), x\neq 0,$$
racionální a sudá v první souřadnici. Dle Lemmatu 9.1.35 existuje racionální funkce S taková, že $T(x,y)=S(x^2,y)$, $(x,y)\in\mathcal{D}(T)$. Pak
$$R(x,y)=xT(x,y)=S(x^2,y)x,\quad (x,y)\in\mathcal{D}(R), x\neq 0.$$
Pokud $(0,y)\in\mathcal{D}(R)$, platí $(0,y)\in\mathcal{D}(S)$ a díky lichosti funkce R v první souřadnici máme
$$R(0,y)=0=0S(0^2,y).$$
Tedy
$$R(x,y)=S(x^2,y)x,\quad (x,y)\in\mathcal{D}(R).$$
Tím je důkaz tvrzení (a) dokončen.

Tvrzení (b) se dokáže obdobně.

(c) Nechť R je sudá. Pak pro $(x,y)\in\mathcal{D}(R)$, $y\neq 0$, platí
$$R(x,y)=R\left(\frac{x}{y}y,y\right).$$
Racionální funkce
$$S(a,b)=R\left(ab,b\right),$$
je sudá v druhé souřadnici a existuje tak racionální funkce T taková, že $\mathcal{D}(S)=\mathcal{D}(T)$ a $S(a,b)=T(a,b^2)$. Pak
$$R(x,y)=R\left(\frac{x}{y}y,y\right)=T\left(\frac{x}{y},y^2\right).$$
■

9.1.37. Poznámka (integrace trigonometrických integrálů)**.** Pro převod integrálů tvaru $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ na integraci racionální funkce lze využít jedné z následujících substitucí:

(i) vždy lze užít substituce $\operatorname{tg}(\frac{x}{2}) = t$,
(ii) pokud $R(a, -b) = -R(a, b)$, lze užít substituci $\sin x = t$,
(iii) pokud $R(-a, b) = -R(a, b)$, pak lze užít substituci $\cos x = t$,
(iv) pokud $R(-a, -b) = R(a, b)$, pak lze užít $\operatorname{tg} x = t$.

Dobrá rada: je-li to možné, bývá obvykle výhodnější zvolit některou ze substitucí (ii)-(iv) než substituci (i).

9.1.38. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{dx}{\cos x \sin^2 x}.$$

Řešení. Zadaná trigonometrická funkce je typu (ii)

♣

9.1.39. Věta. Nechť f, F jsou spojité funkce na otevřeném intervalu I, $c \in I$ a nechť $F'(x) = f(x)$ pro $x \in I \setminus \{c\}$. Pak $F' = f$ na I.

Důkaz. Tvrzení ihned plyne z Věty **??**. ■

9.1.40. Příklad. Spočtěte $\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Protože $R(a, b) = \frac{1}{1+a^2}$, použijeme substituci $t = \operatorname{tg} x$. V první větě o substituci (Věta 9.1.13) je pak $\varphi(t) = \operatorname{arctg} t$, $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$ a $(a, b) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Zjevně je $\varphi'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ nenulová na $(-\infty, \infty)$ a $\varphi((-\infty, \infty)) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Protože $\operatorname{tg} x = t$, máme

$$t^2 = \operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}.$$

Tedy

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2}.$$

Počítáme tedy integrál

$$\int \frac{1}{1 + \frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{1 + 2t^2}\,\mathrm{d}t \overset{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t) \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

Z druhé věty o substituci (Věta 9.1.15) tedy plyne, že

$$\int \frac{1}{1 + \sin^2 x}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x), \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}). \tag{9.3}$$

Funkce $\frac{1}{1+\sin^2 x}$ je ale spojitá na celém $\mathbb{R}$, a tedy dle Věty 9.1.8 má na $\mathbb{R}$ primitivní funkci G. Tu najdeme pomocí již nalezené funkce F z (9.3). Protože

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} F(x) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

položíme

$$G(x) = \begin{cases} F(x) + k\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x \in (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}), \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + k\frac{\pi}{\sqrt{2}}, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Pak G je spojitá funkce a v každém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ platí $G'(x) = (1 + \sin^2 x)^{-1}$. V bodech tvaru $k\pi + \frac{\pi}{2}$ tato rovnost platí díky Větě 9.1.39. ♣

9.1.41. Věta (Integrály tvaru $\int R(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}})$). Nechť $q \in \mathbb{N}, a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad \neq bc$ a $R(x, y)$ je racionální funkcí dvou proměnných. Nechť I je otevřený interval obsažený v $\mathcal{D}\left(R\left(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{q}}\right)\right)$. Položíme $\varphi(x) = (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{q}}$, $x \in I$. Pak je φ monotónní funkce, $J = \varphi(I)$ je otevřený interval a $t \mapsto R(\varphi^{-1}(t), t)(\varphi^{-1})'(t)$ je racionální spojitá funkce definovaná na J. Je-li F její primitivní funkce na J, je $F \circ \varphi$ primitivní funkce k $R\left(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{q}}\right)$ na I.

Důkaz. Zobrazení $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ je ryze monotónní na každém otevřeném intervalu obsaženém v jeho definičním oboru. Vhledem k monotonii odmocniny pak dostáváme ryzí monotonii funkce $x \mapsto \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}$ na každém otevřeném intervalu obsaženém v definičním oboru této funkce. Proto je φ ryze monotónní funkce a její obor hodnot J je otevřený interval (viz Věta 4.3.6). Inverzní funkce $\varphi^{-1}\colon J \to I$ je určena jako $\varphi^{-1}(t) = \frac{t^q d-b}{a-t^q c}$, z čehož plyne, že $t \mapsto R(\varphi^{-1}(t), t)(\varphi^{-1})'(t)$ je racionální funkce na J. Fakt, že $F \circ \varphi$ je primitivní k $R\left(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{q}}\right)$ na I, nyní plyne z Věty 9.1.15 ■

9.1.42. Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Funkce $\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ je definovaná na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$ a je na nich spojitá. Na nich tedy budeme hledat primitivní funkci. Položme

$t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$. Pak

$$x = \frac{t^2+1}{t^2-1} = \varphi(t),$$

přičemž $\varphi : (0,1) \to (-\infty,-1)$ a $\varphi : (1,\infty) \to (1,\infty)$ jsou bijekce s nenulovou derivací

$$\varphi'(t) = \frac{-4t}{(t^2-1)^2}.$$

Podle druhé věty o substituci (Věta 9.1.15) dostaneme integrál

$$I = \int \frac{t^2-1}{t^2+1} t \frac{-4t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{-4t^2}{(t^2+1)(t^2-1)}\,\mathrm{d}t.$$

Rozkladem na parciální zlomky zjistíme, že

$$\frac{4t^2}{(t^2+1)(t^2-1)} = -\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} - \frac{2}{t^2+1}.$$

Tedy

$$I \stackrel{c}{=} \log|t+1| - \log|t-1| - 2\operatorname{arctg} t, \quad \text{na } (0,1) \text{ a } (1,\infty).$$

Závěrem dostáváme

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \log\left|\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}\right| - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \quad \text{na } (-\infty,-1) \text{ a } (1,\infty).$$

♣

9.1.43. Věta (Integrály tvaru $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$)**.** Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ a nechť $\mathcal{D}\, R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x \neq \emptyset$. Označíme $g(x) = R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}$. Pak platí následující tvrzení.

(a) Nechť má trojčlen ax^2+bx+c dvojnásobný reálný kořen α. Pak platí $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2$ a dle předpokladu $a > 0$. Pak ale

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}|x-\alpha|$$

a integrál $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ lze nalézt metodou popsanou v (9.1.31).

(b) Nechť $a > 0$ a I je otevřený interval obsažený v $\mathcal{D}\, R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$. Pak je funkce

$$\varphi(x) = \sqrt{ax^2_b x + c} - \sqrt{a}x, \quad x \in I,$$

ryze monotónní na I a funkce $(g \circ \varphi^{-1})(\varphi^{-1})'$ je racionální funkce definovaná na $\varphi(I)$. Pokud G značí k ní primitivní, je $G \circ \varphi$ primitivní funkce ke g.

(c) Nechť $a < 0$. Dle předpokladu má pak polynom $ax^2 + bx + c$ dva různé reálné kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 < \alpha_2$ a platí $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$. Pak pro $x \in (\alpha_1, \alpha_2)$ platí

$$\begin{aligned}\sqrt{ax^2 + bx + c} &= \sqrt{(-a)(x - \alpha_1)(\alpha_2 - x)}\\ &= \sqrt{-a}(x - \alpha_1)\sqrt{\frac{\alpha_2 - x}{x - \alpha_1}}.\end{aligned}$$

Zadaný integrál jsme tak převedli na případ popsaný ve Větě 9.1.41.

Důkaz. Tvrzení (a) je zjevné.

V důkazu tvrzení (b) si nejprve uvědomíme, že díky přepokladu platí $b^2 - 4ac > 0$. Označíme $p(x) = ax^2 + bx + c$ a zderivováním funkce φ obdržíme

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{2ax + b}{2\sqrt{p(x)}} - \sqrt{a} = \frac{1}{2\sqrt{p(x)}} \cdot \frac{2ax + b - 2\sqrt{a}\sqrt{p(x)}}{2\sqrt{p(x)}} =\\ &= \frac{1}{2\sqrt{p(x)}} \cdot \frac{(2ax + b)^2 - 4ap(x)}{(2ax + b) + 2\sqrt{a}\sqrt{p(x)}}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{p(x)}} \cdot \frac{b^2 - 4ac}{(2ax + b) + 2\sqrt{a}\sqrt{p(x)}}.\end{aligned}$$

Jelikož $(2ax + b) + 2\sqrt{a}\sqrt{p(x)} = 0$ pro nějaké x právě tehdy, když $b^2 - 4ac = 0$, je $\varphi'(x) \neq 0$ na $\mathbb{R}$. Tedy φ je ryze monotónní na každém otevřeném intervalu $I \subset \mathcal{D}(g)$.

Nechť I je takový interval. Označíme $t = \varphi(x)$. Přímočarým výpočtem pak obdržíme

$$\varphi^{-1}(t) = \frac{c - t}{2\sqrt{a}t - b},$$

z čehož plyne racionalita funkce $(g \circ \varphi^{-1})(\varphi^{-1})'$. Funkce $G \circ \varphi$ je pak primitivní ke g díky Větě 9.1.15.

(c) V obou případech je splněna podmínka $ad \neq bc$, přesněji, v prvním případě je $ad = -\alpha_1$ a $bc = -\alpha_2$, zatímco ve druhém případě je $ad = \alpha_1$ a $bc = \alpha_2$. ■

9.1.44. Příklad. Spočtěte $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Použijeme substituci

$$\sqrt{x^2 + 1} = x + t.$$

Pak

$$x = \frac{1 - t^2}{2t} = \varphi(t)$$

a

$$\varphi'(t) = \frac{1(1-t^2)}{2t^2}.$$

Pak $\varphi : (0,1) \to (0,\infty)$ a $\varphi : (1,\infty) \to (-\infty,0)$ jsou bijekce s nenulovou derivací. Tedy počítáme integrál

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{2t}\frac{1+t^2}{2t}} \frac{-(1+t^2)}{2t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{-2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = -\left(\int \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t + \int \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t\right) \\ &\stackrel{c}{=} -\log\left|t^2-1\right|. \end{aligned}$$

Tedy

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = -\log\left|\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2 - 1\right| \quad \text{na } (-\infty,0) \text{ a } (0,\infty).$$

♣

9.2. Riemannův integrál

9.2.1. Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom **dělením intervalu** $[a,b]$ nazveme každou konečnou posloupnost $D = \{x_i\}_{i=0}^n$, pro kterou platí $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Body dělení D nazýváme **dělícími body** D. **Normou dělení** D rozumíme číslo

$$\nu(D) = \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1,\dots,n\}.$$

Řekneme, že dělení D' je **jemnější** než D (nebo že D' **zjemňuje** D), pokud všechny dělící body D jsou obsaženy v D'. Tento fakt zapisujeme jako $D \preceq D'$.

9.2.2. Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená funkce na $[a,b]$. Nechť $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ je nějaké dělení intervalu $[a,b]$. Potom definujeme

$$\overline{S}(f,D) = \sum_{i=1}^n \Big(\sup_{t\in[x_{i-1},x_i]} f(t)\Big)(x_i - x_{i-1})$$

a

$$\underline{S}(f,D) = \sum_{i=1}^n \Big(\inf_{t\in[x_{i-1},x_i]} f(t)\Big)(x_i - x_{i-1}).$$

Hodnotu $\overline{S}(f, D)$ pak nazýváme **horním Riemannovým součtem** funkce f pro dělení D a hodnotu $\underline{S}(f, D)$ **dolním Riemannovým součtem** funkce f pro dělení D.

Dále definujeme **horní Riemannův integrál** funkce f přes interval $[a, b]$ předpisem

$$\int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\{\overline{S}(f, D);\, D \text{ je dělení intervalu } [a, b]\}$$

a **dolní Riemannův integrál** funkce f přes interval $[a, b]$ předpisem

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\{\underline{S}(f, D);\, D \text{ je dělení intervalu } [a, b]\}.$$

9.2.3. Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená funkce na $[a, b]$. Řekneme, že funkce f **má na intervalu** $[a, b]$ **Riemannův integrál**, pokud $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x$. Hodnota Riemannova integrálu funkce f přes interval $[a, b]$ je pak rovna společné hodnotě $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x$ a značíme ji $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Je-li $a > b$, pak definujeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$, a je-li $a = b$ položíme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

9.2.4. Označení. Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Potom množinu všech funkcí, které mají Riemannův integrál na intervalu $[a, b]$, značíme symbolem $\mathcal{R}([a, b])$.

9.2.5. Poznámka. Omezenost funkce f v definici Riemannova integrálu je nezbytná, protože v opačném případě by hodnoty $\overline{S}(f, D)$ a $\underline{S}(f, D)$ nemusely být vlastní.

9.2.6. Příklady. (a) Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}, a < b$. Potom $\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b - a)$.

(b) Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nechť D je Dirichletova funkce. Potom $\int_{\underline{a}}^{b} D(x)\,\mathrm{d}x = 0$ a $\int_a^{\overline{b}} D(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Riemannův integrál funkce D tedy neexistuje.

(c) Nechť R je Riemannova funkce. Potom $R \in \mathcal{R}([a, b])$ a $\int_a^b R(x)\,\mathrm{d}x = 0$ (odvodíme později).

(d) Platí $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$ (odvodíme později).

9.2.7. Poznámka. Nechť $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}$, $M_1 \subset M_2$. Nechť f je funkce definovaná alespoň na M_2. Potom platí

$$\sup_{M_1} f \leq \sup_{M_2} f \quad \text{a} \quad \inf_{M_1} f \geq \inf_{M_2} f.$$

9.2.8. Věta (vlastnosti dělení)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená funkce na $[a, b]$.

(a) Nechť D, D' jsou dělení intervalu $[a, b]$, přičemž $D' \preceq D$. Pak platí

$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D).$$

(b) Nechť D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a, b]$. Pak platí

$$\underline{S}(f, D_1) \leq \overline{S}(f, D_2).$$

(c) Platí

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Důkaz. (a) Druhá nerovnost zřejmě platí z definice. Dokažme tedy první. Předpokládáme-li, že $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ a D' obsahuje oproti D právě jeden bod navíc, řekněme z ležící mezi body x_{j-1} a x_j pro nějaké $j \in \{1, \dots, n\}$, pak platí

$$\begin{aligned}\underline{S}(f, D') - \underline{S}(f, D) = \left(\inf_{[x_{j-1},z]} f\right)(z - x_{j-1}) + \left(\inf_{[z,x_j]} f\right)(x_j - z)\\ - \left(\inf_{[x_{j-1},x_j]} f\right)(x_j - x_{j-1}).\end{aligned}$$

Protože

$$\inf_{[x_{j-1},z]} f \geq \inf_{[x_{j-1},x_j]} f \quad \text{a} \quad \inf_{[z,x_j]} f \geq \inf_{[x_{j-1},x_j]} f,$$

dostáváme

$$\underline{S}(f, D') - \underline{S}(f, D) \geq \left(\inf_{[x_{j-1},x_j]} f\right)(z - x_{j-1} + x_j - z - x_j + x_{j-1}) = 0.$$

Tím je důkaz prvé nerovnosti proveden pro případ, kdy D' obsahuje oproti D jeden dělící bod navíc. Obecný případ prvé nerovnosti pak snadno odvodíme indukcí.

Důkaz třetí nerovnosti je pak možno vést obdobně jako důkaz nerovnosti prvé.

(b) Máme-li dána dělení D a D', snadno najdeme dělení D'' zjemňující D i D'. Dle bodu (a) pak platí

$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D'') \leq \overline{S}(f, D'') \leq \overline{S}(f, D').$$

(c) Je-li D dělení $[a, b]$, pak z (b) máme

$$\underline{S}(f, D) \leq \inf\{\overline{S}(f, D');\, D' \text{ dělení } [a, b]\} = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tedy i

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\{\underline{S}(f,D);\, D \text{ dělení } [a,b]\} \le \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tím je důkaz proveden. ■

9.2.9. Důsledek. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená funkce na $[a,b]$. Nechť D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a,b]$. Označme kde $m = \inf_{[a,b]} f$ a $M = \sup_{[a,b]} f$. Pak

$$m(b-a) \le \underline{S}(f,D_1) \le \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{S}(f,D_2) \le M(b-a).$$

Důkaz. První a poslední nerovnost plyne z definice horního a dolního součtu pro dělení $D'' = \{a,b\}$. Druhá a čtvrtá nerovnost plynou z definice horního a dolního Riemannova integrálu. Konečně třetí nerovnost plyne z Věty 9.2.8. ■

9.2.10. Věta (aproximace Riemannova integrálu součty přes dělení s malou normou)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená funkce na $[a,b]$. Pak pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé dělení D intervalu $[a,b]$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{S}(f,D) < \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon$$

a

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \ge \underline{S}(f,D) > \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon.$$

Důkaz. Dokažme nejprve tvrzení týkající se posledních dvou nerovností. Funkce f je omezená, a tedy existuje kladné číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall x \in [a,b] : |f(x)| < K.$$

Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, je dáno. K němu nalezneme dělení $D_0 = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ intervalu $[a,b]$ takové, že

$$\overline{S}(f,D_0) < \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Položme

$$\mu(D_0) = \min\{x_i - x_{i-1};\ i \in \{1,\dots,n\}\}$$

a

$$\delta_1 = \min\{\mu(D_0), \frac{\varepsilon}{4Kn}\}.$$

Nechť nyní D je dělení intervalu $[a,b]$ splňující $\nu(D) < \delta_1$. Vezmeme dělení P sestávající ze všech dělicích bodů D_0 a D a označme $X = \{x_0, \dots, x_n\}$ množinu dělicích bodů D_0. Ověřme nejprve, že

$$\overline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, P) + 2Kn\nu(D). \tag{9.4}$$

Označme totiž jako $\mathcal{D}$ všechny intervaly dané dělením D a $\mathcal{P}$ všechny intervaly dané dělením P. Nechť dále $|I|$ značí délku intervalu I. Pak

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{I \in \mathcal{D}} \left(\sup_I f \right) |I| \quad \text{a} \quad \overline{S}(f, P) = \sum_{I \in \mathcal{P}} \left(\sup_I f \right) |I|$$

Nechť interval $I = [\alpha, \beta]$ splňuje $I \in \mathcal{D}$. Je-li obsažen i v $\mathcal{P}$, příspěvek příslušný tomuto intervalu je v obou horních součtech stejný. Není-li I v $\mathcal{P}$, protíná jeho vnitřek množinu X. Vzhledem k nerovnosti $\nu(D) < \mu(D_0)$ existuje právě jeden index $i \in \{0, \dots, n\}$ takový, že $\alpha < x_i < \beta$. V součtu $\overline{S}(f, D)$ se nyní vyskytuje výraz

$$\left(\sup_{[\alpha,\beta]} f \right) (\beta - \alpha),$$

zatímco v $\overline{S}(f, P)$ máme součet

$$\left(\sup_{[\alpha,x_i]} f \right) (x_i - \alpha) + \left(\sup_{[x_i,\beta]} f \right) (\beta - x_i)$$

Rozdíl těchto výrazů odhadneme jako

$$\begin{aligned} &\left| \left(\sup_{[\alpha,\beta]} f \right) (\beta - \alpha) - \left(\left(\sup_{[\alpha,x_i]} f \right) (x_i - \alpha) + \left(\sup_{[x_i,\beta]} f \right) (\beta - x_i) \right) \right| \\ &\leq K(\beta - \alpha) + K(x_i - \alpha + \beta - x_i) = 2K(\beta - \alpha) \leq 2K\nu(D). \end{aligned}$$

Jelikož je intervalů z $\mathcal{D}$ protínajících X nejvýše n, máme

$$\overline{S}(f, D) - \overline{S}(f, P) \leq 2Kn\nu(D),$$

tj. nerovnost (9.4).

Použitím této nerovnosti pak dostáváme díky volbě δ_1 nerovnosti

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x &\leq \overline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, P) + 2Kn\nu(D) \\ &\leq \overline{S}(f, D_0) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + 2\frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Tedy δ_1 splňuje požadavek daný v tvrzení druhou sérií nerovností.

Analogicky bychom našli $\delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_2 > 0$, takové, že pro každé dělení D intervalu $[a,b]$ splňující $\nu(D) < \delta_2$ platí

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \underline{S}(f,D) \geq \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon.$$

Kladné číslo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ pak zjevně vyhovuje požadovaným vlastnostem, a důkaz je tedy hotov. ■

9.2.11. Důsledek. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená funkce na $[a,b]$. Nechť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost dělení intervalu $[a,b]$ splňující $\lim \nu(D_n) = 0$. Pak

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f,D_n) \quad \text{a} \quad \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f,D_n).$$

Důkaz. Dokážeme pouze druhý vztah, první by se dokázal obdobně. Mějme kladné číslo $\varepsilon \in \mathbb{R}$ dáno. K němu dle Věty 9.2.10 existuje kladné $\delta \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé dělení $\delta > 0$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$\overline{S}(f,D) < \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $\nu(D_n) < \delta$. Pak pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí

$$\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f,D_n) < \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Tím je důkaz dokončen. ■

9.2.12. Důsledek. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená funkce na $[a,b]$. Nechť existuje posloupnost dělení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ intervalu $[a,b]$ splňující

$$\lim \nu(D_n) = 0$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f,D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f,D_n).$$

Potom $f \in \mathcal{R}([a,b])$ a platí

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f,D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f,D_n).$$

Důkaz. Dle Důsledku 9.2.11 a předpokladu platí

$$\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f,D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f,D_n) = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jelikož $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$, je funkce riemannovsky integrovatelná a platí požadovaný vztah. ■

9.2.13. Příklad. Ukažte podle definice Riemannova integrálu, že funkce $f(x) = x^2$ splňuje $f \in \mathcal{R}([0,1])$ a spočtěte $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme tzv. **ekvidistantní** dělení $D_n = \{\frac{j}{n}\}_{j=0}^n$ intervalu $[0,1]$. Pak $\lim \nu(D_n) = \frac{1}{n} = 0$ a platí

$$\underline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{1}{6n^3}(n-1)n(2n-1),$$

$$\overline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6n^3} n(n+1)(2n+1).$$

Tedy

$$\lim \underline{S}(f, D_n) = \lim \overline{S}(f, D_n) = \frac{1}{3}.$$

Dle Důsledku 9.2.12 pak máme $f \in \mathcal{R}([0,1])$ a $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$. ♣

9.2.14. Věta (kritérium existence Riemannova integrálu)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená funkce na $[a, b]$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:

(i) $f \in \mathcal{R}([a, b])$,

(ii) pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje dělení D intervalu $[a, b]$ takové, že

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Nechť $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Pak existují dělení D_1, D_2 intervalu $[a, b]$ taková, že

$$\overline{S}(f, D_1) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad \underline{S}(f, D_2) > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nechť D je dělení intervalu $[a, b]$ zjemňující D_1 i D_2. Pak dostaneme díky Větě 9.2.8 nerovnosti

$$\begin{aligned}\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) &\le \overline{S}(f, D_1) - \underline{S}(f, D_2) \\ &\le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy (ii) platí.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolné. K němu nalezneme dělení D intervalu $[a,b]$ takové, že $\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < \varepsilon$. Pak ale máme

$$0 \leq \int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\underline{a}}^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < \varepsilon.$$

Tedy $\int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\underline{a}}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a $f \in \mathcal{R}([a,b])$. ■

9.2.15. Definice. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a nechť f je funkce definovaná alespoň na I. Řekneme, že f je **stejnoměrně spojitá** na I, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x, y \in I : (|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

9.2.16. Poznámka. Je-li funkce f na intervalu I stejnoměrně spojitá, pak je na I spojitá.

Důkaz. Nechť $x_0 \in I$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ z definice stejnoměrné spojitosti pro ε. Tedy jsou-li $x, y \in I$ body splňující $|x-y| < \delta$, je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Je-li nyní $y \in I$, $|x_0 - y| < \delta$, je $|f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$. Funkce f je proto spojitá v bodě x_0, respektive je spojitá zleva či zprava v x_0 v závislosti na poloze x_0 v I. ■

9.2.17. Příklad. Nechť $I = (0,1)$ a $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in I$. Dokažte, že f je spojitá na I, ale není stejnoměrně spojitá na I.

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $x_n = \frac{1}{n}$ a $y_n = \frac{1}{n+1}$. Pak $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, ale $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$. Pro $\varepsilon \in (0,1)$ tedy nenajdeme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, požadované v definici stejnoměrné spojitosti. ■

9.2.18. Věta (vztah spojitosti a stejnoměrné spojitosti)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nechť f je spojitá funkce na $[a,b]$. Potom f je stejnoměrně spojitá na $[a,b]$.

Důkaz. Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a,b]$. Potom platí

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \exists x, y \in [a,b] : (|x-y| < \delta)\ \&\ (|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon).$$

Mějme tedy kladné $\varepsilon \in \mathbb{R}$ z tohoto výroku. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují $x_n, y_n \in [a,b]$ takové, že

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Posloupnost $\{x_n\}$ je omezená, a proto z ní lze díky Bolzanově-Weierstrassově větě 2.4.6 vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergující k bodu $x \in \mathbb{R}$. Ten je pak obsažen v $[a,b]$ (Věta **??**). Protože

$$|x - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + \frac{1}{n_k},$$

konverguje i posloupnost $\{y_{n_k}\}$ k x.

Ukažme, že v bodě x není f spojitá. Kdyby tomu tak nebylo, z Heineovy podmínky (Věta 4.2.18) bychom věděli vztahy

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}).$$

Tedy by platilo

$$\lim_{k\to\infty} \left|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\right| \le \lim_{k\to\infty} \left|f(x_{n_k}) - f(x)\right| + \lim_{k\to\infty} \left|f(x) - f(y_{n_k})\right| = 0.$$

Ale $\varepsilon \le \left|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\right|$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, což by byl spor. ■

9.2.19. Věta (vztah spojitosti a riemannovské integrovatelnosti)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nechť f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Důkaz. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, je dáno. Funkce f je omezená na $[a, b]$ (Důsledek 4.3.11) a stejnoměrně spojitá (Věta 9.2.18). Najdeme tedy $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x, y \in [a, b] : (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Zvolme nyní dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ takové, že $\nu(D) < \delta$. Pak pro $i \in \{1, \dots, n\}$ máme díky stejnoměrné spojitosti

$$\sup_{[x_{i-1},x_i]} f \le \inf_{[x_{i-1},x_i]} f + \varepsilon,$$

a tedy

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \right) (x_i - x_{i-1}) \\ &\le \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b - a). \end{aligned}$$

Věta 9.2.14 tedy říká, že f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$. ■

9.2.20. Věta (vztah monotonie a riemannovské integrovatelnosti)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nechť f je monotónní funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Důkaz. Předpokládejme, že f je neklesající. Pak je omezená, neboť

$$\forall x \in [a, b] : f(a) \le f(x) \le f(b).$$

Opět použijeme Větu 9.2.14. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, je dáno. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\frac{1}{n}(b - a)(f(b) - f(a)) < \varepsilon,$$

a zvolíme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$, kde $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$, $i = 0, \dots, n$. Pak platí

$$\begin{aligned}\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) &= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \Big)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \Big(\inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \Big)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) < \varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy i v tomto případě je $f \in \mathcal{R}([a, b])$. ■

9.2.21. Úmluva. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je funkce definovaná na množině M splňující $[a, b] \subset M$. Potom symbolem $f \in \mathcal{R}([a, b])$ značíme fakt, že $f|_{[a,b]} \in \mathcal{R}([a, b])$.

9.2.22. Věta (vlastnosti Riemannova integrálu)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

(a) Nechť $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$, $\alpha f \in \mathcal{R}([a, b])$ a platí

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) Nechť $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ a $f(x) \le g(x)$, $x \in [a, b]$. Pak $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

(c) Nechť $c \in (a, b)$ a nechť f je funkce definovaná na $[a, b]$. Pak platí

$$f \in \mathcal{R}([a, b]) \Leftrightarrow (f \in \mathcal{R}([a, c]) \;\&\; f \in \mathcal{R}([c, b])).$$

Je-li $f \in \mathcal{R}([a, b])$, pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(d) Nechť $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Pak $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$ a platí

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. (a) Nejprve si povšimneme, že funkce f, g, jakožto riemannovsky integrovatelné funkce na $[a, b]$, jsou na tomto intervalu omezené. Tedy i $f + g$ je omezená na $[a, b]$.

Je-li $I \subset [a, b]$ neprázdný interval, platí

$$\sup_I (f + g) \leq \sup_I f + \sup_I g \quad \text{a} \quad \inf_I (f + g) \geq \inf_I f + \inf_I g.$$

Proto pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ máme

$$\underline{S}(f, D) + \underline{S}(g, D) \leq \underline{S}(f + g, D) \leq \overline{S}(f + g, D) \leq \overline{S}(f, D) + \overline{S}(g, D). \quad (9.5)$$

Zvolme posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a, b]$, jejichž norma konverguje k 0. Pak dle Důsledku 9.2.11 platí

$$\lim_{n\to\infty} (\overline{S}(f, D_n) + \overline{S}(g, D_n)) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} (\underline{S}(f, D_n) + \underline{S}(g, D_n)) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Ze (9.5) tedy máme

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f + g, D_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f + g, D_n) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Z Důsledku 9.2.12 plyne $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$ a $\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Je-li nyní $f \in \mathcal{R}([a, b])$ a $\alpha \geq 0$, je funkce αf omezená na $[a, b]$. Dále pro každý interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I \alpha f = \alpha \sup_I f, \quad \inf_I \alpha f = \alpha \inf_I f.$$

Tedy pro posloupnost $\{D_n\}$ dělení intervalu $[a, b]$ takovou, že $\nu(D_n) \to 0$, máme

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(\alpha f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha \overline{S}(f, D_n) = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(\alpha f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha \underline{S}(f, D_n) = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Z Důsledku 9.2.12 tedy plyne $\alpha f \in \mathcal{R}([a, b])$ a $\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

K dokončení důkazu (a) nyní stačí ověřit požadované tvrzení pro $\alpha = -1$. Pak máme pro každý interval $I \subset [a, b]$

$$\sup_I (-f) = -\inf_I f, \quad \inf_I (-f) = -\sup_I f,$$

a tedy pro posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a,b]$ splňující $\nu(D_n) \to 0$ dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(-f, D_n) = \lim_{n\to\infty} -\underline{S}(f, D_n) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(-f, D_n) = \lim_{n\to\infty} -\overline{S}(f, D_n) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jako výše proto platí $-f \in \mathcal{R}([a,b])$ a $\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Nechť $\{D_n\}$ je posloupnost dělení a $\nu(D_n) \to 0$. Pak díky předpokladu máme $\sup_I f \le \sup_I g$, a tedy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) \le \lim_{n\to\infty} \overline{S}(g, D_n) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) Nechť $\{D_n^1\}, \{D_n^2\}$ jsou posloupnosti dělení intervalu $[a,c]$, respektive $[c,b]$, přičemž jejich normy konvergují k 0. Nechť $\{D_n\}$ je dělení sestávající z dělících bodů dělení D_n^1 a D_n^2. Pak též $\nu(D_n) \to 0$.

Předpokládejme nejprve, že f je riemannovsky integrovatelná jak na $[a,c]$, tak na $[c,b]$. Pak platí

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^1) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^2) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^2) = \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tedy máme

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \big(\underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2)\big) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \big(\overline{S}(f, D_n^1) + \overline{S}(f, D_n^2)\big) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dle Důsledku 9.2.12 platí $f \in \mathcal{R}([a,b])$ a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Obráceně, nechť $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Pak platí

$$\begin{aligned} 0 &\le \overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1) \\ &\le \big(\overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1)\big) + \big(\overline{S}(f, D_n^2) - \underline{S}(f, D_n^2)\big) \\ &= \overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n) \to 0. \end{aligned}$$

Proto i
$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1) = 0.$$
Odtud již plyne riemannovská integrovatelnost f na $[a, c]$. Případ intervalu $[b, c]$ se dokáže obdobně. Rovnost integrálů pak plyne z první části důkazu.

(d) Je-li $f \in \mathcal{R}([a, b])$, je omezená, a tedy i $|f|$ je omezená. Pro libovolný interval $I \subset [a, b]$ platí
$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f. \tag{9.6}$$
Pro libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ totiž nalezneme $x, y \in I$ taková, že
$$|f(y)| \leq \inf_I |f| + \varepsilon \quad \text{a} \quad |f(x)| \geq \sup_I |f| - \varepsilon.$$
Pak máme
$$\begin{aligned} \sup_I |f| - \inf_I |f| &\leq |f(x)| + \varepsilon - |f(y)| + \varepsilon \\ &= |f(x)| - |f(y)| + 2\varepsilon \\ &\leq |f(x) - f(y)| + 2\varepsilon \\ &\leq \sup_I f - \inf_I f + 2\varepsilon. \end{aligned}$$
Tím je (9.6) ověřena.

Ze (9.6) plyne pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$, že
$$\overline{S}(|f|, D) - \underline{S}(|f|, D) \leq \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D).$$
Podle Věty 9.2.14 je $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$.

Dále máme pro libovolné dělení D odhad
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D) \leq \overline{S}(|f|, D).$$
Tedy i $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d} \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. Dosadíme-li do tohoto odhadu $-f$ a použijeme-li (a), dostaneme konečně
$$-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |-f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$
Proto $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. ■

9.2.23. Poznámka. Pro libovolná $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x) + \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$
pokud alespoň dva integrály ve výrazu existují. To plyne z Věty 9.2.22(c) a konvence $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

9.2.24. Věta (o derivaci funkce horní meze Riemannova integrálu)**.** Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval a nechť f je funkce definovaná na J splňující $f \in \mathcal{R}([a,b])$ pro každé $a, b \in J$. Nechť $c \in J$. Definujeme funkci F na J předpisem

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in J.$$

Potom platí:

(a) F je spojitá na J,
(b) jestliže x_0 je vnitřním bodem intervalu J a funkce f je spojitá v x_0, pak $F'(x_0) = f(x_0)$.

Důkaz. (a) Nechť $y_0 \in J$ není pravý krajní bod J. Dokážeme, že

$$\lim_{y \to y_0+} F(y) = F(y_0).$$

Nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že $[y_0, y_0 + \delta] \subset J$. Protože je f riemannovsky integrovatelná na $[y_0, y_0 + \delta]$, je f na tomto intervalu omezená. Nechť K je kladné číslo splňující

$$\forall x \in [y_0, y_0 + \delta] : |f(x)| \leq K.$$

Pro $y \in [y_0, y_0 + \delta]$ pak máme

$$\begin{aligned} |F(y) - F(y_0)| &= \left| \int_c^y f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^{y_0} f(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_{y_0}^y f(x)\,\mathrm{d}x \right| \\ &\leq \int_{y_0}^y |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_{y_0}^y K\,\mathrm{d}x = K(y - y_0). \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\lim_{y \to y_{0+}} |F(y) - F(y_0)| = 0,$$

neboli

$$\lim_{y \to y_{0+}} F(y) = F(y_0).$$

Spojitost zleva v bodech J, které nejsou levým krajním bodem J, se dokáže obdobně.

(b) Nechť $x_0 \in J$ je bodem spojitosti f a nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ je dáno. K němu nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Pak pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ platí

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - f(x_0)\right| \\ &= \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^{x} (f(t)-f(x_0))\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^{x} |f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^{x} \varepsilon\,\mathrm{d}t\right| = \varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy $F'(x_0) = f(x_0)$ a tvrzení je dokázáno. ■

9.2.25. Důsledek (vztah spojitosti a existence primitivní funkce)**.**

(a) Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť f je spojitá funkce na intervalu (a, b). Potom f má na (a, b) primitivní funkci.

(b) Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$ a F je primitivní funkce k funkci f na (a, b). Potom existují vlastní limity $\lim_{x \to a+} F(x)$ a $\lim_{x \to b-} F(x)$ a platí

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b-} F(x) - \lim_{x \to a+} F(x).$$

Důkaz. (a) Zvolme $c \in (a, b)$ a položme

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in (a, b).$$

Podle věty o vztahu spojitosti a riemannovské integrovatelnosti (Věta 9.2.19 je funkce f riemannovsky integrovatelná na každém intervalu $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, a proto je F dobře definovaná funkce. Věta 9.2.24 pak zaručuje platnost vztahu $F' = f$ na (a, b), tj. F je primitivní k f.

(b) Definujme funkci

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(a), & t \in (a-1, a], \\ f(t), & t \in (a, b), \\ f(b), & t \in [b, b+1). \end{cases}$$

Pak je $\tilde{f}$ spojitá na $(a-1, b+1)$. Položme

$$\tilde{F}(x) = \int_a^x \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in (a-1, b+1).$$

Pak je $\tilde{F}$ primitivní funkce k $\tilde{f}$ na $(a-1, b+1)$, a tedy je na tomto intervalu spojitá (viz Věta 5.1.15). Protože je $\tilde{F}|_{(a,b)}$ primitivní funkce k funkci f, existuje podle Věty 9.1.6 $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall x \in (a,b) : F(x) = \tilde{F}(x) + c.$$

Tedy

$$\lim_{x \to a_+} F(x) = \tilde{F}(a) + c \quad \text{a} \quad \lim_{x \to b_-} F(x) = \tilde{F}(b) + c.$$

Pak tedy

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t = \tilde{F}(b) = \lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x),$$

neboť $\tilde{F}(a) = 0$. Tím je důkaz dokončen. ∎

9.2.26. Věta (charakterizace riemannovské integrovatelnosti)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je funkce definovaná na intervalu $[a,b]$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:

(i) $f \in \mathcal{R}([a,b])$;

(ii) existuje $I \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, splňující: je-li $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení intervalu $[a,b]$ takové, že $\nu(D) < \delta$, a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, pak

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon.$$

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 9.2.14 existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé dělení D splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon \le \underline{S}(f,D) \le \overline{S}(f,D) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Je-li tedy $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení, $\nu(D) < \delta$, a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon \le \underline{S}(f,D) \le \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \le \overline{S}(f,D) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Tedy f splňuje podmínku (ii), položíme-li $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(ii)$\Rightarrow$ (i) Nejprve ukážeme, že z platnosti (ii) plyne omezenost f. Zvolíme-li totiž $\varepsilon = 1$ a $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, je dané podmínkou (ii), pak pro dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ splňující $\nu(D) < \delta$ máme

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon$$

pro každou volbu bodů $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$.

Uvažujme jedno takové pevné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ a označme

$$\eta = \min\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \ldots, n\}, \quad K = \max\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}.$$

Mějme $t \in [a,b]$ dáno libovolné. Nechť $j \in \{1, \ldots, n\}$ je takové, že $t \in [x_{j-1}, x_j]$. Uvažujme body

$$t_i = x_i, i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}, \quad t_j = t.$$

Pak

$$\begin{aligned}
\left| f(t)(x_j - x_{j-1}) \right| &= \left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I + I - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \\
&\leq \left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| + |I| + \sum_{i=1}^n |f(x_i)(x_i - x_{i-1})| \\
&\leq 1 + |I| + \sum_{i=1}^n K(x_i - x_{i-1}) \\
&= 1 + |I| + K(b-a).
\end{aligned}$$

Tedy $|f(t)| \leq \frac{1}{\eta}(1 + |I| + K(b-a))$ a f je omezená.

K důkazu faktu $f \in \mathcal{R}([a,b])$ použijeme Věty 9.2.14. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, a nalezněme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, dle (ii). Nechť $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ je libovolné dělení $[a,b]$ splňující $\nu(D) < \delta$. Pro každé $i = 1, \ldots, n$ najdeme $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ takové, že

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f < f(t_i) + \varepsilon.$$

Pak máme

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, D) &= \sum_{i=1}^n \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \right) (x_i - x_{i-1}) \\
&< \sum_{i=1}^n (f(t_i) + \varepsilon)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(b-a) \\
&\leq I + \varepsilon + \varepsilon(b-a).
\end{aligned}$$

Obdobně odvodíme

$$\underline{S}(f, D) > I - \varepsilon - \varepsilon(b-a).$$

Tedy dostáváme

$$\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < 2(1+b-a)\varepsilon.$$

Tedy f je riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$.

Platí-li nyní (i), v průběhu důkazu jsme odvodili $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Platí-li (ii), máme z důkazu implikace (ii) $\Rightarrow$ (i) pro kladné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, kladné $\delta \in \mathbb{R}$ z podmínky (ii) a dělení D, $\nu(D) < \delta$ odvozenou nerovnost

$$\overline{S}(f,D) < I + \varepsilon(1+b-a).$$

Tedy

$$\int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f,D) < I + \varepsilon(1+b-a).$$

Tedy $\int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x \leq I$. Obdobně odvodíme $\int_{\underline{a}}^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq I$, a tedy $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. ■

9.2.27. Poznámky. (i) Z důkazu Věty 9.2.26 vyplývá, že

- platí-li podmínka (i), pak platí také podmínka (ii), a to s hodnotou $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$,
- platí-li podmínka (ii) s nějakou hodnotou I, pak nutně platí $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(ii) Podmínka (ii) Věty 9.2.26 je původní Riemannovou definicí Riemannova integrálu. Náš výklad sledoval alternativní přístup, který náleží Darbouxovi.

9.3. Newtonův integrál

9.3.1. Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a,b). Řekneme, že **funkce f má na intervalu (a,b) Newtonův integrál**, případně že **Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a,b) existuje**, jestliže

- f má na (a,b) primitivní funkci F,
- existují limity $\lim_{x\to a_+} F(x)$ a $\lim_{x\to b_-} F(x)$ (nikoli nutně vlastní);
- rozdíl těchto dvou limit je definován jako prvek množiny $\mathbb{R}^*$.

Hodnotou Newtonova integrálu z funkce f na intervalu (a,b) nazýváme prvek množiny $\mathbb{R}^*$ určený výrazem

$$\lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x).$$

Tuto hodnotu pak značíme symbolem $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Pokud $a > b$, položíme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$. Jestliže $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) **konverguje**, v opačném případě říkáme, že **diverguje**.

9.3.2. Označení. Jestliže je potřeba rozlišit mezi Newtonovým a Riemannovým integrálem z funkce f na intervalu s krajními body a a b, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, budeme používat označení

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

9.3.3. Poznámky. (a) Hodnota Newtonova integrálu nezávisí na použité primitivní funkci. To plyne z věty o rovnosti až na konstantu (Věta 9.1.6).

(b) Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Pak nastává právě jedna z následujících možností:

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \begin{cases} \text{existuje} \begin{cases} \text{a je roven reálnému číslu, tedy konverguje,} \\ \text{a je roven } \infty \text{ nebo } -\infty\text{, tedy diverguje,} \end{cases} \\ \text{neexistuje.} \end{cases}$$

9.3.4. Označení. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Množinu všech funkcí $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, které mají na intervalu (a, b) konvergentní Newtonův integrál, značíme symbolem $\mathcal{N}(a, b)$.

Je-li $(a, b) \subset \mathcal{D}(f)$, pak symbol $f \in \mathcal{N}(a, b)$ znamená $f|_{(a,b)} \in \mathcal{N}(a, b)$.

Nechť funkce F je definovaná na (a, b) a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $\lim_{x\to a+} F(x)$ a $\lim_{x\to b-} F(x)$. Potom budeme značit $F(a+) = \lim_{x\to a+} F(x)$, $F(b-) = \lim_{x\to b-} F(x)$ a $[F]_a^b = F(b-) - F(a+)$, pokud má rozdíl smysl.

9.3.5. Příklad. (a) Je-li $f(x) = x^\alpha$, $x \in (0, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, pak

$$(N)\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x = \begin{cases} [\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-1, \infty), \\ [\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}]_0^1 = \infty, & \alpha \in (-\infty, -1), \\ [\log x]_0^1 = \infty, & \alpha = -1. \end{cases}$$

(b) Obdobně,

$$(N)\int_1^\infty x^\alpha\,\mathrm{d}x = \begin{cases} [\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}]_1^\infty = \infty, & \alpha \in (-1, \infty), \\ [\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}]_1^\infty = \frac{-1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-\infty, -1), \\ [\log x]_1^\infty = \infty, & \alpha = -1. \end{cases}$$

9.3.6. Příklady. (a) Z předchozího příkladu vidíme, že funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ je na intervalu $(0,1)$ newtonovsky integrovatelná ale není na $[0,1]$ při libovolném dodefinování v krajních bodech riemannovsky integrovalná, neboť na $(0,1)$ není omezená.

(b) Funkce $f(x) = \operatorname{sign} x$ je intervalu $[-1,1]$ monotónní, a tedy podle Věty 9.2.20 také riemannovsky integrovatelná, není však na $(-1,1)$ newtonovsky integrovatelná, protože na $(-1,1)$ nemá f dle Poznámky 9.1.12 primitivní funkci.

9.3.7. Poznámka. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je spojitá funkce na $[a,b]$. Potom $f \in \mathcal{N}(a,b)$.

9.3.8. Věta (vlastnosti Newtonova integrálu)**.**

(a) Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť $f, g \in \mathcal{N}(a,b)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak $f + g \in \mathcal{N}(a,b)$, $\alpha f \in \mathcal{N}(a,b)$ a platí

$$\int_a^b f(x) + g(x) \,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x) \, dx,$$

$$\int_a^b \alpha f(x) \,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x.$$

(b) Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť $f, g \in \mathcal{N}(a,b)$. Nechť platí $f(x) \leq g(x)$, $x \in (a,b)$. Pak $\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x) \,\mathrm{d}x$.

(c) Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, nechť $f \in \mathcal{N}(a,b)$ a nechť f je spojitá na (a,b). Pak $\int_a^b |f(x)| \,\mathrm{d}x$ existuje a $\left|\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)| \,\mathrm{d}x$.

(d) Nechť $a, c \in \mathbb{R}^*$, $a < c$, a nechť $b \in (a,c)$. Pokud $f \in \mathcal{N}(a,c)$, pak $f \in \mathcal{N}(a,b) \cap \mathcal{N}(b,c)$ a platí

$$\int_a^c f(x) \,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x) \,\mathrm{d}x. \tag{9.7}$$

(e) Nechť $a, c \in \mathbb{R}^*$, $a < c$, a nechť $b \in (a,c)$. Pokud $f \in \mathcal{N}(a,b) \cap \mathcal{N}(b,c)$ a f je spojitá v b, pak $f \in \mathcal{N}(a,c)$ a platí (9.7).

Důkaz. (a) Nechť F a G jsou primitivní funkce k f, respektive ke g na intervalu (a,b). Pak je $F+G$ primitivní k $f+g$ a díky aritmetice limit (Věta 4.2.2) máme

$$[F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b \in \mathbb{R}.$$

Tedy

$$\int_a^b f(x) + g(x) \,\mathrm{d}x = [F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b = \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x) \,\mathrm{d}x.$$

Obdobně odvodíme

$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = [\alpha F]_a^b = \alpha[F]_a^b = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) Nechť F a G jsou primitivní funkce k f, respektive ke g na intervalu (a,b). Pak platí

$$(G-F)'(x) = g(x) - f(x) \geq 0, \quad x \in (a,b),$$

a tedy $G - F$ je neklesající na (a,b) (viz Věta 5.4.7). Proto

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = [G-F]_a^b \geq 0.$$

Tedy dle (a) máme

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b (g(x)-f(x))\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) Funkce $|f|$ má jakožto spojitá funkce na intervalu funkci primitivní dle Věty 9.1.8. Označme ji F. Protože $|f| \geq 0$, je F neklesající (viz Věta 5.4.7). Tedy existují limity v krajních bodech intervalu (a,b) a rozdíl

$$\lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x)$$

je definován.

Je-li tento rozdíl roven ∞, požadovaná nerovnost zjevně platí. Pokud $|f| \in \mathcal{N}(a,b)$, můžeme použít tvrzení (b), jelikož platí $-f \leq |f|$ i $f \leq |f|$, a tedy

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \max\{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\}\\ &= \max\{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x\}\\ &\leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(d) Nechť F je primitivní funkce k f na intervalu (a,c). Pak je F primitivní k f i na intervalech (a,b) a (b,c). Navíc má v bodě b, jakožto spojitá funkce na (a,c), vlastní jednostranné limity. Tedy platí

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = [F]_a^c = [F]_a^b + [F]_b^c = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(e) Nechť F je primitivní k f na (a,b) a G na (b,c). Přičtením vhodné konstanty k jedné z funkcí můžeme zařídit, aby

$$\lim_{x \to b_-} F(x) = \lim_{x \to b_+} G(x).$$

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a,b), \\ \lim_{x \to b_-} F(x), & x = b, \\ G(x), & x \in (b,c). \end{cases}$$

Pak je H spojitá na (a,c) a $H'(x) = f(x)$ pro $x \in (a,b) \cup (b,c)$. V bodě b toto platí díky Větě 5.2.10

$$H'(b) = \lim_{x \to b} H'(x) = \lim_{x \to b} f(x) = f(b),$$

neboť f je spojitá v b. Funkce H je tedy primitivní k f na (a,c) a má vlastní limity v krajních bodech (a,c), protože je v příslušných bodech mají funkce F a G. Tedy $f \in \mathcal{N}(a,c)$. ■

9.3.9. Poznámka. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť F a G jsou funkce definované na (a,b). Nechť existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $F(a+)$, $F(b-)$, $G(a+)$ a $G(b-)$. Potom platí

$$[F - G]_a^b = [F]_a^b - [G]_a^b,$$

jestliže má pravá strana smysl.

9.3.10. Věta (per partes pro Newtonův integrál)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť f a g jsou funkce definované na (a,b). Nechť F je primitivní funkce k funkci f na (a,b) a G je primitivní funkce k funkci g na (a,b). Potom platí

$$\int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [FG]_a^b - \int_a^b f(x)G(x)\,\mathrm{d}x,$$

jestliže má pravá strana smysl.

Důkaz. Jelikož je pravá strana požadované rovnosti dobře definována, existuje primitivní funkce k funkci fG na (a,b). Označme ji písmenem H. Potom platí

$$(GF - H)' = gF + Gf - fG = gF,$$

tj. $GF-H$ je primitivní funkcí k funkci gF. Rozdíl výrazů $[GF]_a^b$, $\int_a^b G(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ je definován, stejně jako výrazy samotné. Z Poznámky 9.3.9 plyne, že

$$\begin{aligned}\int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x &= [FG-H]_a^b = [FG]_a^b - [H]_a^b \\ &= [FG]_a^b - \int_a^b f(x)G(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. ■

9.3.11. Věta (substituce pro Newtonův integrál)**.** Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ a $\alpha < \beta$. Nechť f je funkce definovaná na (a, b) a nechť φ je funkce definovaná na (α, β). Nechť φ má vlastní nenulovou derivaci na (α, β) a nechť platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Potom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\left|\varphi'(t)\right|\,\mathrm{d}t,$$

jestliže má alespoň jedna strana smysl.

Důkaz. Funkce φ zřejmě má na intervalu (α, β) vlastní derivaci (funkci φ'). Z Darbouxovy vlastnosti derivace (Věta 9.1.10) tedy plyne, že obraz intervalu (α, β) při zobrazení φ', tedy množina $\varphi'((\alpha, \beta))$, je interval. Z předpokladu víme, že bod 0 není prvkem tohoto intervalu. Z toho vyplývá, že funkce φ' nemění na (α, β) znaménko. Předpokládejme, že φ' je záporná na (α, β).

Existuje-li $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, má f na (a, b) primitivní funkci F a existují limity $F(b-)$ a $F(a+)$. Z věty o derivaci složené funkce (Věta 5.1.23) plyne, že také funkce $(f\circ\varphi)(-\varphi')$ má na intervalu (α, β) primitivní funkci, a to funkci $-F\circ\varphi$. Máme

$$\lim_{t\to\beta_-}\varphi(t) = a, \qquad \lim_{t\to\alpha_+}\varphi(t) = b$$

a z Věty 4.2.24

$$\lim_{t\to\alpha_+} F(\varphi(t)) = \lim_{x\to b_-} F(x), \qquad \lim_{t\to\beta_-} F(\varphi(t)) = \lim_{x\to a_+} F(x).$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t &= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))(-\varphi'(t))\,\mathrm{d}t = [-F\circ\varphi]_\alpha^\beta \\ &= -\lim_{x\to a_+} F(x) + \lim_{x\to b_-} F(x) \\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Předpokládáme-li existenci integrálu $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$, označme G primitivní funkci k $(f\circ\varphi)|\varphi'| = -(f\circ\varphi)\varphi'$. Z druhé věty o substituci (Věta 9.1.15 pak plyne, že $-G\circ\varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f. Platí

$$\lim_{x\to a_+}\varphi^{-1}(x)=\beta,\qquad \lim_{x\to b_-}\varphi^{-1}(x)=\alpha,$$

a tedy

$$\lim_{x\to a_+} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t\to\beta_-} G(t),\qquad \lim_{x\to b_-} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t\to\alpha_+} G(t).$$

Odtud máme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [-G\circ\varphi]_a^b = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

■

9.3.12. Věta (Bolzanova-Cauchyova podmínka pro funkce)**.** Nechť $a\in\mathbb{R}^*$ a nechť $\delta_0\in\mathbb{R}$, $\delta_0>0$. Nechť funkce F je definována alespoň na $P(a,\delta_0)$. Potom existuje vlastní $\lim_{x\to a} F(x)$ právě tehdy, když je splněna následující (tzv. Bolzanova-Cauchyova) podmínka:

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R},\varepsilon>0\ \exists\delta\in\mathbb{R},\delta>0\ \forall x,y\in P(a,\delta): |F(x)-F(y)|<\varepsilon.$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme nejprve, že $\lim_{x\to a} F(x)=A$ a $A\in\mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ je dáno. K němu nalezneme $\delta\in\mathbb{R}$ kladné, že

$$\forall x\in P(a,\delta): |F(x)-A|<\varepsilon.$$

Pak pro každou dvojici $x,y\in P(a,\delta)$ máme

$$|F(x)-F(y)|\le|F(x)-A|+|A-F(y)|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

$\Leftarrow$ Nechť platí podmínka věty. Nechť je funkce F definovaná na prstencovém okolí $P(a,\delta_0)$. Je-li $\{x_n\}$ posloupnost obsažená v $P(a,\delta_0)$ taková, že $\lim x_n=a$, splňuje posloupnost $\{F(x_n)\}$ Bolzanovu-Cauchyovu podmínku (viz Věta 2.4.25). Zvolíme-li totiž $\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$, nechť kladné $\delta\in\mathbb{R}$ je dáno Bolzanovou-Cauchyovou podmínkou. K δ nalezneme $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že pro $n\in\mathbb{N}$, $n\ge n_0$, platí $|x_n-a|<\delta$. Pak pro $n,m\in\mathbb{N}$, $n,m\ge n_0$, platí

$$|F(x_n)-F(x_m)|<\varepsilon.$$

Zvolme jednu takovou posloupnost $\{x_n\}$ a položme $A=\lim F(x_n)$ (ta existuje díky Větě 2.4.25). Pak $\lim_{x\to a} F(x)=A$. Vezměme totiž libovolnou posloupnost $\{y_n\}$ v $P(a,\delta_0)$ konvergující k a. Nechť $\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$. K němu nalezneme $\delta\in\mathbb{R}$, $\delta>0$ z Bolzanovy-Cauchyovy podmínky. Nechť $n_1\in\mathbb{N}$ je takové, že

$$\forall n\in\mathbb{N}, n\ge n_1: x_n, y_n\in P(a,\delta).$$

Najdeme ještě $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 : |F(x_n) - A| < \varepsilon.$$
Pak pro přirozené číslo $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ platí
$$|F(y_n) - A| \leq |F(y_n) - F(x_n)| + |F(x_n) - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$
Z Heineovy věty 4.2.16 máme proto $\lim_{x\to a} F(x) = A$. ∎

9.3.13. Poznámka. Tvrzení Věty 9.3.12 platí obdobně i pro jednostranné limity.

9.3.14. Věta. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená spojitá funkce na (a, b). Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Důkaz. Podle Věty 9.1.8 má f na (a, b) primitivní funkci F. Ukážeme za pomoci Bolzanovo-Caychyovy podmínky pro funkce, že limity F v krajních bodech existují vlastní. Nechť $K \in \mathbb{R}$ je kladné takové, že
$$\forall x \in (a, b) : |f(x)| \leq K.$$
Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$. Pak pro $x, y \in (a, a + \delta)$, $x < y$, platí z Věty 9.3.8(c)
$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq K|y - x| < K\delta \leq \varepsilon.$$
Tedy $\lim_{x\to a+} F(x)$ existuje vlastní dle Věty 9.3.12.

Existence vlastní limity v b zleva se dokáže obdobně. ∎

9.3.15. Poznámka. Pro neomezený interval tvrzení Věty 9.3.14 neplatí. Například funkce $f(x) = 1$, $x \in (0, \infty)$, je spojitá a omezená na $(0, \infty)$, ale $f \notin \mathcal{N}(0, \infty)$. Funkce $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, je na intervalu $\mathbb{R}$ také spojitá a omezená, integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ však dokonce ani neexistuje.

9.3.16. Věta (vztah Riemannova a Newtonova integrálu)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená funkce na $[a, b]$. Je-li $f \in \mathcal{R}([a, b]) \cap \mathcal{N}(a, b)$, pak
$$(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Protože funkce f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$, existuje podle charakterisace riemannovské integrovatelnosti (Věta 9.2.26) $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro libovolné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ o normě menší než δ a libovolnou volbu bodů $t_i \in [x_i - x_{i-1}]$, $i = 1, \ldots, n$ platí
$$\left|\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

Mějme tedy $\varepsilon \in (0,\infty)$ dáno a $\delta \in (0,\infty)$ nalezeno tak, že splňuje tuto podmínku. Vezměme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ o normě menší než δ.

Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b). Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a,b) \\ \lim_{x\to b-} F(x), & x = b \\ \lim_{x\to a+} F(x), & x = a. \end{cases}$$

Povšimněme si, že H je dobře definovaná spojitá funkce na $[a,b]$ dle Poznámky 9.1.2(a) a faktu $f \in \mathcal{N}(a,b)$. Navíc $H' = f$ na (a,b). Pro každé $i = 1,\dots,n$ použijeme Lagrangeovu větu 5.2.4 k nalezení bodu $t_i \in (x_{i-1},x_i)$, který splňuje

$$H(x_i) - H(x_{i-1}) = H'(t_i)(x_i - x_{i-1}) = f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Pak

$$\begin{aligned}(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x) = H(b) - H(a)\\ &= H(x_n) - H(x_0) = \sum_{i=1}^n (H(x_i) - H(x_{i-1}))\\ &= \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}).\end{aligned}$$

Tedy

$$\left|(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

Tím je důkaz dokončen. ∎

9.3.17. Důsledek (vztah spojitosti a existence Riemannova a Newtonova integrálu)**.** Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je spojitá funkce na $[a,b]$. Potom $f \in \mathcal{R}([a,b]) \cap \mathcal{N}(a,b)$ a

$$(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Tvrzení plyne z Věty 9.2.19, Věty 9.3.14 a Věty 9.3.16. ∎

9.4. Konvergence Newtonova integrálu

9.4.1. Věta (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu). Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a nechť $a < b$. Nechť funkce $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b)$. Nechť dále je f spojitá na $[a, b)$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Důkaz. Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, $G(x) \geq F(x)$ na (c, b). Dále jsou obě funkce G, F neklesající, jelikož jejich derivace jsou nezáporné. Tedy mají v b limitu zleva (viz Věta 4.2.25) a platí

$$\lim_{x \to b_-} F(x) \leq \lim_{x \to b_-} G(x).$$

Protože $g \in \mathcal{N}(a, b)$, je poslední limita vlastní. Protože je F neklesající, je i $\lim_{x \to b_-} F(x)$ vlastní.

Obě funkce mají vlastní limitu v c, jelikož jsou v tomto bodě spojité. Tedy $f \in \mathcal{N}(c, b)$. Protože f je spojitá na $[a, c]$, platí $f \in \mathcal{N}(a, c)$ podle Věty 9.3.14. Věta 9.3.8(e) nyní dává $f \in \mathcal{N}(a, b)$. ■

9.4.2. Poznámka. Tvrzení Věty 9.4.1 platí s příslušnými úpravami i pro intervaly typu $(a, b]$. Přesněji, jestliže $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, funkce $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in (a, b]$, f je spojitá na $(a, b]$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$, potom také $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

9.4.3. Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x$ konverguje.

Řešení. Zkoumejme konvergenci $\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x$. Máme totiž pomocí per partes

$$\int \cos \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = x \cos \frac{1}{x} - \int x(-\sin \frac{1}{x}) \frac{-1}{x^2}\, \mathrm{d}x, \quad x \in (0, \infty).$$

Tedy

$$\int \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = x \cos \frac{1}{x} - \int \cos \frac{1}{x}, \quad x \in (0, \infty).$$

Protože $\int_0^1 \cos \frac{1}{x}$ konverguje (Věta 9.3.14), konverguje i

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = \left[x \cos \frac{1}{x} \right]_0^1 - \int_0^1 \cos \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x.$$

Substitucí $\frac{1}{x} = t$ máme konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 t \left(\sin \frac{1}{t} \right) \frac{1}{t^2}\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{t} \sin \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t$$

(viz Věta 9.3.11). ♣

9.4.4. Příklad. Dokažte, že $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$ konverguje.

Řešení. Funkce $\frac{1}{x^4+1}$ je spojitá na intervalu $[0,1]$, a tedy dle Věty 9.3.14 konverguje $\int_0^1 \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$. Dále platí $0 \le \frac{1}{x^4+1} \le \frac{1}{x^4}$ na $[1,\infty)$. Protože $x^{-4} \in \mathcal{N}(1,\infty)$ (Příklad 9.3.5(b)), je podle Věty 9.4.1 i $\frac{1}{x^4+1} \in \mathcal{N}(1,\infty)$. Použitím Věty 9.3.8(e) dostáváme $\frac{1}{x^4+1} \in \mathcal{N}(0,\infty)$. ♣

9.4.5. Věta (limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a nechť $a < b$. Nechť f, g jsou spojité nezáporné funkce na $[a,b)$. Jestliže $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0,\infty)$, pak $f \in \mathcal{N}(a,b)$ právě tehdy, když $g \in \mathcal{N}(a,b)$.

Důkaz. Označme $c = \lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ a nechť $f \in \mathcal{N}(a,b)$. Z Věty 4.2.9 existuje $x_0 \in (a,b)$ takové, že

$$\forall x \in [x_0,b) : \frac{f(x)}{g(x)} \ge \frac{1}{2}c.$$

Platí tedy

$$\forall x \in [x_0,b) : 0 \le g(x) \le \frac{2}{c} f(x).$$

Jelikož $f \in \mathcal{N}(a,b)$, je též $\frac{2}{c}f \in \mathcal{N}(a,b)$. Proto $f \in \mathcal{N}(x_0,b)$ dle Věty 9.3.8(c), a tedy Věta 9.4.1 dává $g \in \mathcal{N}(x_0,b)$. Protože g je spojitá na omezeném intervalu $[a,x_0]$, je zde Newtonovsky integrovatelná. Dle Věty 9.3.8(d) je $g \in \mathcal{N}(a,x_0)$.

Obrácenou implikaci lze dokázat obdobně za pomocí odhadu $\frac{f(x)}{g(x)} < 2c$ na vhodném intervalu (x_0,b). ■

9.4.6. Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Řešení. Položme pro $x \in [1,\infty)$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x^3+x^2}, \quad g(x) = x^{-\frac{5}{2}}.$$

Obě funkce jsou spojité nezáporné funkce na $[1,\infty)$ a platí

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x^3+x^2}}{x^{\frac{-5}{2}}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}{x+1} = 2.\end{aligned}$$

Podle Věty 9.4.5 dostáváme $f \in \mathcal{N}(1,\infty)$, neboť již víme, že $g \in \mathcal{N}(1,\infty)$ (Příklad 9.3.5(b)). ♣

9.4.7. Lemma (odhady Newtonova integrálu součinu dvou funkcí)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a nechť $a < b$. Nechť f je spojitá funkce na $[a,b]$ a $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ je nerostoucí, nezáporná a spojitá. Potom

$$g(a) \inf_{x\in[a,b]} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \le \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \le g(a) \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Speciálně platí

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \le g(a) \sup_{x\in[a,b]} \left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right|.$$

Důkaz. Dokažme nejprve druhou nerovnost. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Díky stejnoměrné spojitosti funkcí f a fg (viz Věta 9.2.18) existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ takové, že platí

$$\begin{aligned}&\forall x, y \in [a,b] : |x-y| < \delta \Rightarrow \\ &\qquad (|f(x)g(x) - f(y)g(y)| < \varepsilon) \ \&\ (|f(x) - f(y)| < \varepsilon).\end{aligned} \tag{9.8}$$

Označme

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b],$$

a zvolme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ s normou menší než δ. Pak máme ze (9.8) pro každé $i \in \{1,\dots,n\}$

$$\forall t \in [x_{i-1}, x_i] : f(t) \ge f(x_{i-1}) - \varepsilon,$$

a tedy

$$f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) - \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \le \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Obdobnou úvahou dostáváme pomocí (9.8)

$$\begin{aligned}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t &\le f(x_{i-1})g(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \\ &\le g(x_{i-1})\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon(x_i - x_{i-1})\right) + \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \\ &\le g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + (g(a)+1)\varepsilon(x_i - x_{i-1}).\end{aligned}$$

Označme

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon(g(a)+1)(b-a).$$

Pak

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)\; dt \\
&\le \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(x_i - x_{i-1})(g(a)+1) \\
&= \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon(g(a)+1)(b-a) \\
&= \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})(F(x_i) - F(x_{i-1})) + \tilde{\varepsilon} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)(g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1})F(x_n) + \tilde{\varepsilon} \\
&\le \sup_{t\in[a,b]} F(t) \left(\sum_{i=1}^{n-1} (g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1}) \right) + \tilde{\varepsilon} \\
&= g(a) \sup_{t\in[a,b]} F(t) + \varepsilon(g(a)+1)(b-a).
\end{aligned}
$$

Jelikož ε bylo libovolné, plyne odtud požadovaná nerovnost.

První nerovnost lze dokázat obdobně. ■

9.4.8. Věta (Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence Newtonova integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a nechť $a < b$. Nechť $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá a F je primitivní funkce k funkci f na (a,b). Dále nechť $g : [a,b) \to \mathbb{R}$ je na $[a,b)$ monotónní a spojitá. Pak platí:

(a) Jestliže $f \in \mathcal{N}(a,b)$ a g je omezená, pak $fg \in \mathcal{N}(a,b)$.
(b) Je-li F omezená na (a,b) a $\lim_{x\to b-} g(x) = 0$, je $fg \in \mathcal{N}(a,b)$.

Důkaz. V obou případech má funkce fg na (a,b) funkci primitivní, označme ji H. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že g je nerostoucí. V opačném případě bychom mohli pracovat s funkcí $-g$, neboť změna znaménka u g konvergenci integrálu $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ neovlivní.

(a) Můžeme předpokládat, že g je nezáporná, protože jinak bychom uvažovali funkci $g(x) + K$, kde K je číslo splňující

$$\forall x \in [a,b) : |g(x)| < K.$$

Pak totiž konvergence integrálu

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x)(g(x)+K) - f(x)K)\,\mathrm{d}x$$

plyne z dokázaného tvrzení pro nezápornou funkci a Věty 9.3.8(a).

Mějme tedy g nezápornou a nechť $C \in (0,\infty)$ splňuje

$$\forall x \in [a,b) : |g(x)| < C.$$

Podle předpokladu existuje $\lim_{x\to b_-} F(x)$ vlastní. Mějme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ dáno. K němu nalezneme pomocí Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro funkce (Věta 9.3.12) kladné $\delta \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall x, y \in P_-(b,\delta) : -\varepsilon < F(y) - F(x) < \varepsilon.$$

Potom pro x, y z okolí $P_-(b,\delta)$, $x < y$, platí podle Lemmatu 9.4.7

$$\begin{aligned} H(y) - H(x) &= \int_x^y f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \le g(x) \sup_{z\in[x,y]} \int_x^z f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= g(x) \sup_{z\in[x,y]} (F(z) - F(x)) \le g(x)\varepsilon \le C\varepsilon \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} H(y) - H(x) &= \int_x^y f(t)g(t)\,\mathrm{d}x \ge g(x) \inf_{z\in[x,y]} \int_x^z f(t)\,\mathrm{d}t \\ &\ge g(x) \inf_{x\in[x,y]} (F(z) - F(x)) \ge -g(x)\varepsilon \ge -C\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy pro tato x, y platí

$$|H(x) - H(y)| < C\varepsilon.$$

Tedy H splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku v bodě b zleva, má v něm vlastní limitu zleva.

Snadnou úvahou pak obdržíme $fg \in \mathcal{N}(a,b)$ (viz závěr důkazu Věty 9.4.1). Podrobněji, zvolme $c \in (a,b)$. Ze spojitosti funkce fg na $[a,c]$ odvodíme $fg \in \mathcal{N}(a,c)$ (Věta 9.3.14). Dále H je spojitá v c, a tedy má zde vlastní limitu. Proto $fg \in \mathcal{N}(a,c)$. Věta 9.3.8(e) pak završí argumentaci.

(b) Z předpokladu plyne, že $g(x) \ge 0$ pro všechna $x \in [a,b)$. Nechť $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, je takové, že

$$\forall x \in (a,b) : |F(x)| < K.$$

Pro dané $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ najdeme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P_-(b,\delta) : |g(x)| < \varepsilon.$$

Pak pro $x, y \in P_-(b, \delta)$, $x < y$ máme

$$\begin{aligned} H(y) - H(x) &= \int_x^y f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \\ &\le g(x) \sup_{z \in [x,y]} (F(z) - F(x)) \\ &\le \varepsilon \sup_{z \in [x,y]} (F(z) - F(x)) \\ &\le 2K\varepsilon \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} H(y) - H(x) &= \int_x^y f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \\ &\ge g(x) \inf_{z \in [x,y]} (F(z) - F(x)) \\ &\ge \varepsilon \inf_{z \in [x,y]} (F(z) - F(x)) \\ &\ge -2K\varepsilon, \end{aligned}$$

a tedy pro tato x, y platí

$$|H(x) - H(y)| \le 2K\varepsilon.$$

Tedy Věta 9.3.12 říká, že H má vlastní limitu v b zleva. Jako výše pak důkaz uzavřeme pozorováním, že $fg \in \mathcal{N}(a, b)$. ■

9.4.9. Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Řešení. Položíme ve Větě 9.4.8(b) pro $x \in [1, \infty)$

$$f(x) = \cos x \quad \text{a} \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Pak primitivní funkce k f, totiž $\sin x$, je omezená na $(1, \infty)$ a $g(x)$ je na $[1, \infty)$ nezáporná monotónní funkce mající v ∞ limitu 0. A obě funkce jsou zjevně spojité na $[1, \infty)$. Tedy dle výše zmíněné věty zadaný integrál konverguje. ♣

9.4.10. Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \operatorname{arctg} x \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Řešení. Ve Větě 9.4.8(a) položíme pro $x \in [1, \infty)$

$$f(x) = \frac{\cos x}{x} \quad \text{a} \quad g(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Obě funkce jsou spojité na $[1, \infty)$, g je omezená neklesající a $f \in \mathcal{N}(1, \infty)$. Tedy integrál konverguje podle Větě 9.4.8(a). ♣

9.4.11. Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$ diverguje.

Řešení. Protože platí

$$\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x}, \quad x \in [1, \infty),$$

stačí dle Věty 9.4.1 ověřit divergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x} \,\mathrm{d}x.$$

Pišme

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1 - \cos 2x}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}.$$

Jest

$$\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x}\, dx = \frac{1}{4} \int_2^\infty \frac{\cos y}{y}\, dy$$

a z předchozího příkladu víme, že $\frac{\cos x}{x} \in \mathcal{N}(1, \infty)$. Tím spíše $\frac{\cos x}{x} \in \mathcal{N}(2, \infty)$, a tedy i $\frac{\cos 2x}{2x} \in \mathcal{N}(1, \infty)$. Máme tudíž

$$\frac{1}{2x} = \frac{\cos 2x}{2x} + \frac{\sin^2 x}{x},$$

přičemž $\frac{1}{2x} \notin \mathcal{N}(1, \infty)$ a $\frac{\cos x}{x} \in \mathcal{N}(1, \infty)$. Kdyby $\frac{\sin^2 x}{x} \in \mathcal{N}(1, \infty)$, pak by podle Věty 9.3.8(a) platilo i $\frac{1}{2x} \in \mathcal{N}(1, \infty)$, což by byl spor. Odtud plyne, že $\frac{\sin^2 x}{x} \notin \mathcal{N}(1, \infty)$, a tedy i $\frac{|\sin x|}{x} \notin \mathcal{N}(1, \infty)$. ♣

9.4.12. Věta (první věta o střední hodnotě)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a nechť $a < b$. Nechť f je spojitá funkce na $[a, b]$, g je nezáporná na $[a, b]$, $g \in \mathcal{N}(a, b)$ a $fg \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom existuje $c \in [a, b]$ takové, že

$$\int_a^b f(x)g(x) \,\mathrm{d}x = f(c) \int_a^b g(x) \,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Funkce f, jakožto funkce na $[a, b]$ spojitá, nabývá na něm svého minima m a maxima M (viz Věta 4.3.9). Pak pro $x \in [a, b]$ platí

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x). \tag{9.9}$$

Pokud $\int_a^b g(x) \,\mathrm{d}x = 0$, pak $g = 0$, neboť je nezáporná. Za bod c můžeme zvolit libovolný bod z $[a, b]$.

Předpokládejme tedy, že $\int_a^b g(x) \,\mathrm{d}x > 0$. Potom ze (9.9) platí

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) \,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x) \,\mathrm{d}x} \leq M.$$

Protože $f([a,b]) = [m, M]$ dle Věty 4.3.6, existuje $c \in [a,b]$ splňující

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Tím je důkaz dokončen. ■

9.4.13. Věta (druhá věta o střední hodnotě)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a nechť $a < b$. Nechť f je spojitá funkce na $[a,b]$, g je monotónní a spojitá na $[a,b]$. Potom existuje $c \in [a,b]$ takové, že

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9.10}$$

Důkaz. Předpokládejme opět, že g je nezáporná a nerostoucí. Nalezneme-li totiž bod c pro funkci $-g$ či $g + C$, pak takové c vyhovuje i (9.10).

Definujme

$$\varphi(y) = g(a)\int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t + g(b)\int_y^b f(t)\,\mathrm{d}t, \quad y \in [a,b].$$

Potom lze funkci φ vyjádřit jako

$$\varphi(y) = (g(a) - g(b))\int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t + g(b)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t, \quad y \in [a,b].$$

Pak je funkce φ spojitá na $[a,b]$ (Věta 9.2.24), a tedy existují body $y_1, y_2 \in [a,b]$ takové, že

$$\varphi(y_1) = \max_{y\in[a,b]} \varphi(y) \quad \text{a} \quad \varphi(y_2) = \min_{y\in[a,b]} \varphi(y).$$

Uvažujme spojitou nezápornou nerostoucí funkci

$$\psi(t) = g(t) - g(b), \quad t \in [a,b].$$

Lemma 9.4.7 pak dává

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t - g(b)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b f(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t \\
&\le \psi(a) \sup_{t\in[a,b]} \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s \\
&= (g(a) - g(b)) \max_{t\in[a,b]} \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

z čehož dostáváme

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t &\le (g(a)-g(b))\max_{t\in[a,b]}\int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s + g(b)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \max_{t\in[a,b]}\left((g(a)-g(b))\int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s + g(b)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \varphi(y_1).\end{aligned}$$

Obdobně obdržíme z Lemmatu 9.4.7

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \ge \varphi(y_2).$$

Spojitá funkce φ tedy musí v nějakém bodě $c \in [a,b]$ nabývat hodnoty $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ (Věta 4.3.6), a tedy

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(c) = g(a)\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + g(b)\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

■

9.4.14. Poznámka. Věta 9.4.13 nabízí alternativní důkaz Věty 9.4.8. Mějme totiž f, g, F, H jako v důkazu Věty 9.4.8. V případě tvrzení (a) najdeme pro dané $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, kladné $\delta \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall x, y \in P_-(b,\delta) : |F(x) - F(y)| < \varepsilon.$$

Nechť g je omezená konstantou C. Vezměme $x, y \in P_-(b,\delta)$, $x < y$. Ať $c \in [x,y]$ splňuje

$$\int_x^y f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = g(x)\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t + g(y)\int_c^y f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{9.11}$$

Pak pro tato x, y máme

$$\begin{aligned}|H(x)-H(y)| = \left|\int_x^y f(t)g(t)\right| &= \left|g(x)\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t + g(y)\int_c^y f(t)\,\mathrm{d}t\right|\\ &\le C\left|\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t\right| + C\left|\int_c^y f(t)\,\mathrm{d}t\right|\\ &= C\,|F(c)-F(x)| + C\,|F(y)-F(c)|\\ &\le 2C\varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy H má v b zleva vlastní limitu a $fg \in \mathcal{N}(a,b)$.

V Případě tvrzení (b) Věty 9.4.8(b), nechť C omezuje F a $|g(x)| < \varepsilon$ pro $x \in P_-(b,\delta)$. Nechť $x, y \in P_-(b,\delta)$, $x < y$. Najdeme bod $c \in [x,y]$

splňující (9.11). Pak máme odhad

$$\begin{aligned}|H(x)-H(y)| = \left|\int_x^y f(t)g(t)\right| &= \left|g(x)\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t + g(y)\int_c^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le \varepsilon\left|\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \varepsilon\left|\int_c^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &= \varepsilon\,|F(c)-F(x)| + \varepsilon\,|F(y)-F(c)| \\ &\le 4C\varepsilon.\end{aligned}$$

Důkaz pak dokončíme jako výše.

9.5. Aplikace určitého integrálu

9.5.1. Věta (Integrální kritérium)**.** Nechť f je nezáporná nerostoucí spojitá funkce na $[n_0,\infty)$, kde $n_0 \in \mathbb{N}$. Nechť pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $a_n = f(n)$, $n \ge n_0$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Důkaz. Uvažujme $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \ge n_0$ a dělení $D = \{n_0, n_0+1, \dots, n_1-1, n_1\}$ intervalu $[n_0,n_1]$. Funkce f je nerostoucí, a tedy

$$\overline{S}(f,D) = a_{n_0} + \dots + a_{n_1-1} = \sum_{i=n_0}^{n_1-1} a_i,$$

$$\underline{S}(f,D) = a_{n_0+1} + \dots + a_{n_1} = \sum_{i=n_0+1}^{n_1} a_i.$$

Protože je f spojitá na $[n_0,n_1]$, platí

$$\begin{aligned}\sum_{i=n_0+1}^{n_1} a_i = \underline{S}(f,D) &\le (R)\int_{n_0}^{n_1} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (N)\int_{n_0}^{n_1} f(x)\,\mathrm{d}x = (R)\int_{n_0}^{n_1} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (9.12) \\ &\le \overline{S}(f,D) = \sum_{i=n_0}^{n_1-1} a_i.\end{aligned}$$

Předpokládejme nyní, že $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pak je funkce

$$F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad t \in [n_0,\infty)$$

primitivní k f na (n_0, ∞), a tedy pro každé $n_1 > n_0$ máme z (9.12)

$$\begin{aligned}\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{x\to\infty} F(x) - F(n_0) = \lim_{x\to\infty} F(x)\\ &= \lim_{x\to\infty} \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \ge \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n_0+1}^{n} a_i\\ &= \sum_{i=n_0+1}^{\infty} a_i .\end{aligned}$$

Proto $\sum_{i=n_0+1}^{\infty} a_i$ konverguje, a tedy i $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje.

Obráceně, jestliže $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje, pak pro (9.12) dává

$$\begin{aligned}\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n_0}^{n-1} a_i \ge \limsup_{n\to\infty} \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \limsup_{x\to\infty} F(x).\end{aligned} \tag{9.13}$$

Protože je f nezáporná, je F neklesající. Tedy limita F v nekonečnu existuje a podle (9.13) je vlastní. Tedy $\int_{n_0}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ konverguje. ■

9.5.2. Příklad. Ukažte, že řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ diverguje.

Řešení. Položme $f(x) = \frac{1}{x \log x}$, $x \in [2, \infty)$. Pak f je nezáporná spojitá a nerostoucí na $[2, \infty)$. Protože

$$\int_{2}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\log t]_{\log 2}^{\infty} = \infty,$$

řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = \sum_{n=2}^{\infty} f(n)$$

diverguje podle Věty 9.5.1. ♣

9.5.3. Věta (Zbytek Taylorova polynomu v integrálním tvaru)**.** Nechť $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$ a funkce f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní $(n+1)$-ní derivaci. Pak

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \int_a^x \frac{1}{n!} f^{n+1}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t. \tag{9.14}$$

Důkaz. Budeme postupovat matematickou indukcí podle $n \in \mathbb{N}$.

Pro $n = 0$ máme

$$f(x) - T_0^{f,a}(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

tedy (9.14) pro $n = 0$ platí.

Předpokládejme nyní platnost tvrzení pro $n \in \mathbb{N}$ a dokažme ho pro $n+1$. Mějme tedy $(n+2)$-krát diferencovatelnou funkci f na intervalu $[a, x]$. Pak je funkce $f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$ spojitá na $[a, x]$, a proto můžeme pomocí per partes (Věta 9.3.10) počítat

$$\begin{aligned}
&\int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\,\mathrm{d}t\\
&= \left[\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}\right]_a^x\\
&\quad - \int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(n+1)(x-t)^n(-1)\,\mathrm{d}t\\
&= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^n + \int_a^x \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t\\
&= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^n + f(x) - T_n^{f,a}(x)\\
&= f(x) - T_{n+1}^{f,a}(x).
\end{aligned}$$

Tím je důkaz proveden. ■

9.5.4. Definice. **Křivkou** budeme rozumět zobrazení $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) takové, že $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ je **třídy C^1**, tj. φ_i' jsou spojité na $[a, b]$, přičemž v krajních bodech $[a, b]$ uvažujeme příslušnou jednostrannou derivaci. **Geometrickým obrazem** křivky φ rozumíme množinu $\langle\varphi\rangle = \varphi([a, b]) \subset \mathbb{R}^n$.

9.5.5. Příklady. (a) Jednotkovou kružnici v rovině lze vyjádřit křivkou $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(b) Graf funkce f na intervalu je křivkou popsanou zobrazením $\varphi(t) = [t, f(t)]$, $t \in [a, b]$.

(c) Geometrický obraz křivky lze často parametrizovat různými zobrazeními φ, například graf funkce $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, $x \in [-1, 1]$ lze popsat také jako $\varphi(t) = (t^3, t^2)$, $t \in [-1, 1]$.

9.5.6. Definice. Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ke křivka. Její **délkou** rozumíme hodnotu

$$L(\varphi) = \sup\{L(\varphi, D);\ D \text{ dělení intervalu } [a, b]\},$$

kde pro dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ definujeme

$$L(\varphi, D) = \sum_{i=1}^{n} \|\varphi(x_{i-1}) - \varphi(x_i)\| .$$

9.5.7. Definice. Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je takové zobrazení, že všechny její složky $f_1, \dots, f_n$ jsou riemannovsky (respektive newtonovsky) intrgrovatelné. Pak definujeme

$$(R) \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \left((R) \int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t, \dots, (R) \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \right),$$

respektive

$$(N) \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \left((N) \int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t, \dots, (N) \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \right).$$

9.5.8. Lemma. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f = (f_1, \dots, f_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je spojitá. Pak

$$\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\| = \left\| [\int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t, \dots, \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t] \right\| \le \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t. \quad (9.15)$$

Důkaz. Funkce $t \mapsto \|f(t)\|$ je spojitá na $[a, b]$, a proto $\int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$ konverguje. Položme

$$y = [\int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t, \dots, \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t] \in \mathbb{R}^n.$$

Pak máme z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti

$$\begin{aligned}
\|y\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} y_i f_i(t) \right) \mathrm{d}t \le \int_a^b \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} f_i^2(t) \right)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \|y\|\,\|f(t)\|\,\mathrm{d}t = \|y\| \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Pokud $y = 0$, (9.15) zjevně platí. Pokud $\|y\| > 0$, právě provedený výpočet dává (9.15). ∎

9.5.9. Věta. Nechť $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je křivka. Pak platí

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \cdots + (\varphi_n'(t))^2}\, \mathrm{d}t.$$

Důkaz. Mějme libovolné dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ dáno. Pak platí díky Lemmatu 9.5.8

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^k \left\|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\right\| &= \sum_{j=1}^k \left\|\int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t)\, \mathrm{d}t\right\| \\ &\le \sum_{j=1}^k \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left\|\varphi'(t)\right\|\, \mathrm{d}t = \int_a^b \left\|\varphi'(t)\right\|\, \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Odtud plyne $L(\varphi) \le \int_a^b \|\varphi'(t)\|\, \mathrm{d}t$.

Abychom dokázali obrácenou nerovnost, zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Poněvadž jsou φ_i' stejnoměrně spojité na $[a, b]$ (viz Věta 9.2.18), existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\forall s, t \in [a, b], |s - t| < \delta : \left|\varphi_i'(t) - \varphi_i'(s)\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Nechť nyní $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ je dělení $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$. Potom pro $t \in [x_{j-1}, x_j]$ platí $\|\varphi'(t)\| \le \left\|\varphi'(x_j)\right\| + \varepsilon$. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned}\int_{x_{j-1}}^{x_j} \left\|\varphi'(t)\right\|\, \mathrm{d}t - \varepsilon(x_j - x_{j-1}) &\le \left\|\varphi'(x_j)\right\| (x_j - x_{j-1}) \\ &= \left\|\int_{x_{j-1}}^{x_j} \big(\varphi'(t) + \varphi'(x_j) - \varphi'(t)\big)\, \mathrm{d}t\right\| \\ &\le \left\|\int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t)\, \mathrm{d}t\right\| + \left\|\int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi'(x_j) - \varphi'(t))\, \mathrm{d}t\right\| \\ &\le \left\|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\right\| + \varepsilon(x_j - x_{j-1}).\end{aligned}$$

Dostáváme tedy

$$\int_a^b \left\|\varphi'(t)\right\|\, \mathrm{d}t \le \sum_{j=1}^k \left\|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\right\| + 2\varepsilon(b - a) \le L(\varphi) + 2\varepsilon(b - a).$$

Protože ε bylo voleno libovolně, dostáváme $\int_a^b \|\varphi'(t)\|\, \mathrm{d}t \le L(\varphi)$. ∎

9.5.10. Příklad. (a) Je-li $\varphi(t) = [\cos t, \sin t]$, $t \in [0, 2\pi]$, pak

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi.$$

(b) Je-li f spojitě diferencovatelná funkce na $[a, b]$, pak parametrizace jejího grafu pomocí $\varphi(t) = [t, f(t)]$, $t \in [a, b]$, dává, že délka grafu funkce f je rovna $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$.

9.6. Teoretické příklady na integrál

9.6.1. Příklad. Definujme funkci $f : [0, 1] \to [0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x \text{ je iracionální,} \\ \frac{1}{q}, & \text{pokud } x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N} \text{ nesoudělné.} \end{cases}$$

Ukažte, že f nemá primitivní funkci na žádném intervalu $(a, b) \in [0, 1]$ a $(R)\int_0^1 f(x)\, dx = 0$.

Řešení. Je-li $(a, b) \subset [0, 1]$ libovolný interval, vezmeme racionální číslo tvaru $\frac{p}{q}$, p, q nesoudělné, ležící v intervalu (a, b). Pak funkce f nenabývá na (a, b) žádných iracionálních hodnot v intervalu $(0, \frac{1}{q})$, a tedy nemá na (a, b) Darbouxovu vlastnost. Proto dle Věty 9.1.10 nemá na (a, b) primitivní funkci.

Ukažme nyní, že $(R)\int_0^1 f(x)\, dx = 0$. K tomuto účelu postačí ukázat, že pro dané $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje dělení D intervalu $[0, 1]$ splňující $\overline{S}(f, D) \leq \varepsilon$. Pak totiž

$$0 \leq \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) < \varepsilon$$

a $(R)\int f(x)\, dx = 0$ dle Věty 9.2.14.

Najděme nyní takové dělení. Množina

$$M = \{x \in [0, 1];\ f(x) \geq \varepsilon\}$$

je konečná. Lze proto najít navzájem se neprotínající intervaly $I_1, \dots, I_n$ takové, že $\sum_{i=1}^n |I_i| < \varepsilon$ a $M \subset \bigcup_{i \in I} I_i$. Nechť D sestává z koncových bodů intervalů I_i, $i = 1, \dots, n$, s eventuálně přidanými body 01 a 1. Pak pro interval I z D různý od $I_j, \dots I_n$ platí $\sup_I f \leq \varepsilon$. Tedy

$$\begin{aligned}\overline{S}(f, D) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{I_i} f\right) |I_i| + \sum_{I \notin \{I_1,\dots,I_n\}} \left(\sup_{I} f\right) |I| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |I_i| + \varepsilon \sum_{I \notin \{I_1,\dots,I_n\}} |I| \\ &\leq 2\varepsilon.\end{aligned}$$

♣

9.6.2. Příklad. Nechť f je spojitá funkce na otevřeném omezeném intervalu (a, b). Ukažte, že f je stejnoměrně spojitá na (a, b) právě tehdy, když existují vlastní limity v krajních bodech (a, b).

Řešení. Má-li f vlastní limity v krajních bodech intervalu (a, b), můžeme definovat $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ jako

$$F(x) = \begin{cases} \lim_{y \to a+} f(y), & x = a, \\ f(x), & x \in (a, b), \\ \lim_{y \to b-} f(y), & x = b. \end{cases}$$

Pak F je na $[a, b]$ spojitá, a tedy i stejnoměrně spojitá (vizte Větu 9.2.18). Tedy f je stejnoměrně spojitá na (a, b).

Obráceně, je-li f stejnoměrně spojitá na (a, b), splňuje v obou krajních bodech Bolzanovu-Cauchyovu podmínku (Věta 9.3.12). To ověříme takto. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, je dáno. Najdeme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, dle definice stejnoměrné spojitosti, tj.

$$\forall x, y \in I : (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Tedy pro $x, y \in P_+(a, \delta)$ máme $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, což jsme potřebovali dokázat. ♣

9.6.3. Příklad. Nechť $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$. Pak funkce

$$x \mapsto f(x)g(x),\ x \mapsto \max\{f(x), g(x)\} \text{ a } x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}$$

leží v $\mathcal{R}([a, b])$.

Řešení. Jelikož maximum i minimum dvou omezených funkcí je funkce omezená a

$$\begin{aligned}\max\{f(x), g(x)\} &= \frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{|f(x) - g(x)|}{2}, \\ \min\{f(x), g(x)\} &= \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{|f(x) - g(x)|}{2},\end{aligned}$$

jsou funkce $x \mapsto \max f(x), g(x)$, $x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}$ riemannovsky integrovatelné dle Věty 9.2.22(a).

Obraťme nyní naši pozornost k součinu fg. Protože $fg = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2\right)$, stačí dokázat integrovatelnost f^2 pro $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Mějme tedy funkci $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Pak f^2 je omezená funkce díky omezenosti f. Je-li c konstanta, platí $f^2 = (f+c)^2 - c^2 - 2cf$, a tedy stačí uvažovat nezápornou funkci f. Nechť tedy f je nezáporná a omezená číslem M. Pro $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, najdeme dělení D intervalu $[a,b]$ takové, že $\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < \varepsilon$ (viz Věta 9.2.14). Nechť $\mathcal{D}$ značí množinu intervalů v dělení D.

Protože pro množinu A nezáporných čísel platí

$$\sup A^2 = \sup\{x^2;\ x \in A\} = \left(\sup A\right)^2 \quad \text{a} \quad \inf A^2 = (\inf A)^2\,,$$

máme pro množinu A sestávající z nezáporných čísel a omezenou číslem M odhad

$$\begin{aligned}\sup A^2 - \inf A^2 &= (\sup A)^2 - (\inf A)^2 \\ &= (\sup A - \inf A)(\sup A + \inf A) \\ &\le 2M(\sup A - \inf A)\end{aligned} \tag{9.16}$$

Použitím (9.16) dostáváme

$$\begin{aligned}\overline{S}(f^2,D) - \underline{S}(f^2,D) &= \sum_{I\in\mathcal{D}} \left(\sup_I f^2 - \inf_I f^2\right)|I| \\ &\le \sum_{I\in\mathcal{D}} 2M\left(\sup_I f - \inf_I f\right)|I| \\ &\le 2M\varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy f^2 je riemannovsky integrovatelná dle Věty 9.2.14. ♣

9.6.4. Příklad. Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je riemannovsky integrovatelná kladná funkce na $[a,b]$. Pak $(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$.

Řešení. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že $f(x) > 0$ pro každé $x \in [a,b]$ a přitom $(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Předpokládejme navíc, že f je omezená číslem 1 na $[a,b]$. Induktivně zkonstruujeme intervaly $[a_n,b_n] \subset [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

- $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$,
- $0 < b_n - a_n \le \frac{1}{n}$,
- $\sup_{[a_n,b_n]} f \le \frac{1}{n}$.

V prvním kroku konstrukce položíme $[a_1,b_1] = [a,b]$ a povšimneme si, že jsou požadované vlastnosti splněny.

Předpokládejme nyní, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ máme nedegenerované intervaly $[a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n]$ splňující $\sup_{[a_n,b_n]} f \leq \frac{1}{n}$. Protože platí podle Věty 9.2.22(c)

$$0 = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b_n}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a členy na pravé straně jsou nezáporné (viz Věta 9.2.22(b)), máme

$$\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Vezměme dělení D intervalu $[a_n, b_n]$ takové, že $S(f, D) < \frac{1}{n+1}$. Protože $S(f, D) \geq S(f, D')$ pro každé jemnější dělení D', můžeme předpokládat, že norma D je menší než $\frac{1}{n+1}$. Z definice $S(f, D)$ plyne, že alespoň na jednom intervalu určeném dělením D je supremum funkce f menší než $\frac{1}{n+1}$. Tento interval označíme jako $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, čímž je indukční krok dokončen.

Příklad **??** nyní dává, že existuje bod $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. Pro něj pak platí

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(x) \leq \sup_{[a_n,b_n]} f \leq \frac{1}{n},$$

a tedy $f(x) = 0$. To je však spor s předpokladem. ♣

9.6.5. Příklad. Ukažte, že

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\,\mathrm{d}x = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}.$$

Řešení. Odvodíme rekurentní formuli pro $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x$. Integrací per partes totiž dostáváme pro $n \geq 2$

$$\begin{aligned}\int \sin^n x\,\mathrm{d}x &= \int \sin^{n-1} x \sin x\,\mathrm{d}x \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + \int (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + \int (n-1) \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Tedy

$$\int \sin^n x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x.$$

Proto
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x.$$
Protože
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \quad \text{a} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = 1,$$
máme
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k},$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,\mathrm{d}x = \prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}.$$
Závěrem použijeme substituci $t = \frac{\pi}{2} - x$ k odvození
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x.$$

♣

9.6.6. Příklad (Wallisova formule)**.** Ukažte, že
$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k-1}\frac{2k}{2k+1}.$$

Řešení. Díky Příkladu 9.6.5 máme
$$S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k},$$
$$C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,\mathrm{d}x = \prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}.$$
Tedy dostáváme
$$\frac{\pi}{2} = S_n\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k-1} = \frac{S_n}{C_n}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k-1}\frac{2k}{2k+1}. \tag{9.17}$$
Povšimněme si, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí
$$0 < \sin^{2n+2} x < \sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$
a tedy dle Příkladu 9.6.4
$$0 < S_{n+1} \le C_n \le S_n \le C_{n-1}.$$

Tím pádem máme

$$\frac{2n+1}{2n} = \frac{C_{n-1}}{C_n} \ge \frac{S_n}{C_n} \ge \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{n}{n+1}.$$

Limitním přechodem v (9.17) máme požadovanou rovnost

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1}\frac{2k}{2k+1}$$

♣

9.6.7. Příklad (Stirlingův vzorec)**.** Ukažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

Řešení. Označme

$$a_n = \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \quad \text{a} \quad b_n = \log a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pak platí pro $n \in \mathbb{N}$

$$b_n - b_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1)\log\frac{n+1}{n} - 1. \tag{9.18}$$

Protože dle Příkladu 7.3.8 platí

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}, \quad x \in (-1,1),$$

máme

$$\log\frac{n+1}{n} = \log\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2k+1}.$$

Dosazením do (9.18) dostaneme

$$b_n - b_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1)\log\frac{n+1}{n} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2k}.$$

Tedy je posloupnost $\{b_n\}$ klesající.

Dále dostáváme odhad

$$b_n - b_{n+1} < \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right)^k = \frac{1}{(2n+1)^2}\frac{1}{1-\frac{1}{(2n+1)^2}} = \frac{1}{4}\frac{1}{n(n+1)}.$$

Tím pádem obdržíme

$$\begin{aligned} b_1 - b_n &= (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_{n-1} - b_n) \\ &\le \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &\le \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

což znamená, že

$$b_n > b_1 - \frac{1}{4}.$$

Tedy je posloupnost $\{b_n\}$, jakožto klesající a zdola omezená, konvergentní k nějakému číslu b. Z toho máme konvergenci posloupnosti $\{a_n\}$, neboť

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} e^{b_n} = e^b.$$

Označíme $C = e^b$ a spočtěme její hodnotu. Protože víme z Příkladu 9.6.6, že

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{((2n)!)^2(2n+1)},$$

máme použitím $\lim a_n = C$ rovnost

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n} C^4 (2n)^2 \left(\frac{n}{e}\right)^{4n}}{C^2 4n \left(\frac{2n}{e}\right)^{4n} (2n+1)} \\ &= C^2 \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n} 4n^2 n^{4n}}{4n(2n+1)(2n)^{4n}} = C^2 \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n(2n+1)} \\ &= \frac{C^2}{2}. \end{aligned}$$

Protože $C \ge 0$, dostáváme

$$C = \sqrt{\pi}$$

a Stirlingova formule je odvozena. ♣

9.6.8. Příklad (Laplaceův-Gaussův integrál)**.** Ukažte, že

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí po substituci $x = \sin t$

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t \,\mathrm{d}t = \frac{2\cdot 4\cdots 2n}{1\cdot 3\cdots(2n+1)} \tag{9.19}$$

podle Příkladu 9.6.5. Dále pro $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, platí díky substituci $x = \operatorname{tg} t$ a opět díky Příkladu 9.6.5

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \cos^{-2} t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} t \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)}\frac{\pi}{2}.\end{aligned} \tag{9.20}$$

Dále platí

$$1 - y \le e^{-y} \le \frac{1}{1+y}, \quad y \in [0,\infty). \tag{9.21}$$

Označíme-li totiž

$$\varphi_1(y) = e^{-y} - 1 + y, \quad \varphi_2(y) = 1 - (1+y)e^{-y}, \quad y \in [0,\infty),$$

pak

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$$

a

$$\varphi_1'(y) = 1 - e^{-y} > 0, \quad \varphi_2'(y) = ye^{-y} > 0, \quad y \in (0,\infty).$$

Obě funkce jsou tedy rostoucí na $[0,\infty)$ (viz Věta 5.2.6), a proto nezáporné na $(0,\infty)$. Odtud již plyne (9.21).

Z (9.21) máme

$$(1-x^2)^n \le e^{-nx^2}, \quad x \in (0,1),$$

a

$$e^{-nx^2} \le \frac{1}{(1+x^2)^n}, \quad x \in (0,\infty).$$

Tedy

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x \le \int_0^1 e^{-nx^2} \,\mathrm{d}x \le \int_0^\infty e^{-nx^2} \,\mathrm{d}x \le \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} \,\mathrm{d}x.$$

Substitucí $t = x\sqrt{n}$ dostaneme

$$\sqrt{n}\int_0^1 (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x \le \int_0^\infty e^{-t^2} \,\mathrm{d}t \le \sqrt{n}\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} \,\mathrm{d}x.$$

Z rovností (9.19) a (9.20) obdržíme

$$\sqrt{n}\frac{2\cdot 4\cdots 2n}{1\cdot 3\cdots(2n+1)} \le \int_0^\infty e^{-t^2} \,\mathrm{d}t \le \sqrt{n}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)}\frac{\pi}{2}. \tag{9.22}$$

Spočtěme nyní limity krajních výrazů v (9.22). Použitím Stirlingovy formule 9.6.7 máme

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\frac{2\cdot 4\cdots 2n}{1\cdot 3\cdots (2n+1)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2}{\sqrt{2\pi(2n+1)}\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi n\sqrt{n}2^{2n}n^{2n}e}{\sqrt{2\pi(2n+1)}(2n+1)^{2n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi n\sqrt{n}n^{2n}e}{\sqrt{2\pi(2n+1)}\left(\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{n}\right)^n\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{e}{(e^{\frac{1}{2}})^2} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}.
\end{aligned}$$

Z tohoto vzorce pak dostáváme

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\frac{1\cdot 3\cdots (2n-3)}{2\cdot 4\cdots (2n-2)}\frac{\pi}{2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\frac{1\cdot 3\cdots (2n-3)(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdots (2n-2)(2n)}\frac{\pi}{2(2n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\pi}{2(2n+1)}\frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n\pi}{2(2n+1)}\frac{(2n+1)!}{\sqrt{n}2^{2n}(n!)^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}.
\end{aligned}$$

Tedy z Věty **??** máme limitním přechodem v (9.22)

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

♣

9.6.9. Příklad. Ukažte, že číslo π je iracionální.

Důkaz. Předpokládejme, že $\pi = \frac{a}{b}$ pro nějaká $a, b \in \mathbb{N}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme polynomy

$$f(x) = \frac{1}{n!}x^n(a-bx)^n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}x^n b^k x^k,$$
$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x).$$

Všimněme si, že $n!f(x)$ má celé koeficenty a členy u x mají stupeň alespoň n. Proto

$$f(0), f^{(1)}(0), \dots, f^{(2n)}(0) \in \mathbb{Z}. \tag{9.23}$$

Protože $f(x) = f(\frac{a}{b} - x) = f(\pi - x)$, platí též

$$f(\pi), f^{(1)}(\pi), \dots, f^{(2n)}(\pi) \in \mathbb{Z}. \tag{9.24}$$

Protože $f^{(2n+2)}(x) = 0$, odvodíme

$$\big(F'(x)\sin x - F(x)\cos x\big)' = F''(x)\sin x + F(x)\sin x = f(x)\sin x.$$

Tedy

$$\int_0^\pi f(x)\sin x \,\mathrm{d}x = \big[F'(x)\sin x - F(x)\cos x\big] = F(\pi) + F(0).$$

Díky (9.23) a (9.24) platí

$$\int_0^\pi f(x)\sin x \,\mathrm{d}x = F(\pi) + F(0) \in \mathbb{Z}.$$

Ale máme

$$0 < f(x)\sin x < \frac{1}{n!}(\pi^n a^n),$$

a tedy dle Příkladu 9.6.4 platí

$$0 < \int_0^\pi f(x)\sin x \,\mathrm{d}x < \pi\frac{1}{n!}(\pi^n a^n).$$

Pro dostatečně velké $n \in \mathbb{N}$ je tedy

$$\int_0^\pi f(x)\sin x \in \mathbb{N} \cap (0,1),$$

což je spor. ■

9.6.10. Příklad. Nechť f je sudá funkce a $[-a,a] \subset \mathcal{D}(f)$. Pokud $f \in \mathcal{R}([-a,a])$ (resp. $f \in \mathcal{N}(-a,a)$), pak

$$(R)\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2(R)\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(resp. } (N)\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2(N)\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\text{)}.$$

Nechť f je lichá funkce a $[-a,a] \subset \mathcal{D}(f)$. Pokud $f \in \mathcal{R}([-a,a])$ (resp. $f \in \mathcal{N}(-a,a)$), pak

$$(R)\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad (\text{resp. } (N)\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0).$$

Řešení. Pro newtonovsky integrovatelné funkce tvrzení snadno plyne z Věty o substituci 9.3.11, neboť substitucí $x = -t$ dostaneme pro sudou funkci rovnost

$$\begin{aligned}
(N)\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x &= (N)\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + (N)\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= (N)\int_{0}^{a} f(-t)\,\mathrm{d}t + (N)\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (N)\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + (N)\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 2(N)\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

pro lichou pak

$$\begin{aligned}
(N)\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x &= (N)\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + (N)\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= (N)\int_{0}^{a} f(-t)\,\mathrm{d}t + (N)\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (N)\int_{0}^{a} -f(t)\,\mathrm{d}t + (N)\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Nechť f je nyní sudá funkce riemannovsky integrovatelná na $[-a,a]$. Pro $n \in \mathbb{N}$ uvažujme dělení $D_n^+ = \{\frac{ja}{n}\}_{j=0}^{n}$ a $D_n^- = \{-a + \frac{ja}{n}\}_{j=0}^{n}$. Díky Důsledku 9.2.11 platí

$$\overline{\int_{-a}^{0}} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^-) \quad \text{a} \quad \overline{\int_{0}^{a}} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^+).$$

Vzhledem k sudosti funkce f platí $\overline{S}(f, D_n^-) = \overline{S}(f, D_n^+)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy dostáváme

$$\begin{aligned}(R)\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x &= (R)\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + (R)\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \overline{\int_{-a}^{0}} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_{0}^{a}} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^-) + \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^+) \\ &= 2\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^+) \\ &= 2\overline{\int_{0}^{a}} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\cdot(R)\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Je-li funkce f lichá, platí pro výše uvažovaná dělení D_n^- a D_n^+ vztah $\overline{S}(f, D_n^+) = -\underline{S}(f, D_n^-)$. Tím pádem máme

$$\begin{aligned}(R)\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x &= (R)\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + (R)\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \underline{\int_{-a}^{0}} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_{0}^{a}} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^-) + \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^+) \\ &= -\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^+) + \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^+) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. ♣

9.6.11. Příklad. Nechť $p \in \mathbb{R}$ a f je p-periodická funkce.

(a) Nechť jsou intervaly $[a, b]$ a $[a + p, b + p]$ obsaženy v $\mathcal{D}(f)$ a f je riemannovsky integrovatelná funkce na $[a, b]$. Pak je riemannovsky integrovatelná na $(a + p, b + p)$ a platí $(R)\int_{a+p}^{b+p} f(x)\,\mathrm{d}x = (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Nechť jsou intervaly (a, b) a $(a + p, b + p)$ obsaženy v $\mathcal{D}(f)$ a f je newtonovsky integrovatelná funkce na (a, b). Pak je newtonovsky integrovatelná na $(a + p, b + p)$ a platí $(N)\int_{a+p}^{b+p} f(x)\,\mathrm{d}x = (N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Řešení. (a) Nechť $\{D_n\}$ je posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ taková, že $\nu(D_n) \to 0$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ uvažujme dělení D_n' intervalu $[a+p, b+p]$, které vznikne z D_n přičtením p k dělícím bodům dělení D_n. Jelikož je f p-periodická, platí $\overline{S}(()f, D'_n) = \overline{S}(()f, D_n)$ a $\underline{S}(()f, D'_n) = \underline{S}(()f, D_n)$. Tedy existuje $(R)\int_{a+p}^{b+p} f(x)\,\mathrm{d}x$ a platí pro něj

$$(R)\int_{a+p}^{b+p} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D'_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b). Pak je funkce

$$G(x) = F(x-p), \quad x \in (a+p, b+p),$$

primitivní k f na $(a+p, b+p)$. Vskutku, pro $x \in (a+p, b+p)$ platí

$$G'(x) = F'(x-p) = f(x-p) = f(x).$$

Jelikož máme

$$\begin{aligned}
[G(x)]_{a+p}^{b+p} &= \lim_{x\to(b+p)_-} G(x) - \lim_{x\to(a+p)_+} G(x) \\
&= \lim_{x\to(b+p)_-} F(x-p) - \lim_{x\to(a+p)_+} F(x-p) \\
&= \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x) = [F(x)]_a^b,
\end{aligned}$$

platí

$$(N)\int_{a+p}^{b+p} f(x)\,\mathrm{d}x = (N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

♣

9.6.12. Příklad. Ukažte, že součin dvou riemannovsky integrovatelných funkcí na omezeném uzavřeném intervaly je opět riemannovsky integrovatelná funkce. Dále najděte příklad newtonovsky integrovatelné funkce na otevřeném intervalu, jejíž druhá mocnina není newtonovsky integrovatelná.

Řešení. Mějme $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$. Protože

$$fg = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right),$$

stačí dokázat, že $f^2 \in \mathcal{R}([a,b])$ pro $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Jelikož je riemannovsky intergovatelná funkce omezená, lze přičtením vhodné konstanty $c \in \mathbb{R}$ zařídit, že $f + c$ je nezáporná. Pak ale

$$f^2 = (f+c)^2 - c^2 - 2cf$$

je v $\mathcal{R}([a,b])$, pokud $f + c \in \mathcal{R}([a,b])$. Lze tedy předpokládat, že f je nezáporná riemannovsky integrovatelná funcke na $[a,b]$. Naším cílem je dokázat, že $f^2 \in \mathcal{R}([a,b])$.

Nejprve si rozmysleme, že pro omezenou $A \subset [0,\infty)$ platí

$$(\sup A)^2 = \sup\{a^2;\ a \in A\} \quad \text{a} \quad (\inf A)^2 = \inf\{a^2;\ a \in A\}. \tag{9.25}$$

Z nerovnosti $(\sup A)^2 \geq a^2, a \in A$, je totiž patrné, že $(\sup A)^2 \geq \sup\{a^2;\ a \in A\}$. Máme-li $\varepsilon(0,\infty)$ dáno, najdeme $\tilde{a} \in A$ takové, že $\tilde{a} > \sup A - \varepsilon$. Pak

$$\sup\{a^2;\ a \in A\} \geq (\tilde{a})^2 > (\sup A)^2 - \varepsilon(2 \sup A - \varepsilon).$$

Tedy dostáváme i opačnou nerovnost pro první tvrzení. Druhé se dokáže obdobně.

Mějme nyní $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolné. Podle Věty 9.2.14 najdeme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a,b]$ takové, že

$$\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) \leq \varepsilon.$$

Nechť $M \in \mathbb{R}$ omezuje f na $[a,b]$. Pak máme z (9.25)

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f^2,D) - \underline{S}(f^2,D) &= \sum_{i=1}^n \left(\sup_{[x_i,x_{i-1}]} f^2 - \inf_{[x_i,x_{i-1}]} f^2 \right)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n \left((\sup_{[x_i,x_{i-1}]} f)^2 - (\inf_{[x_i,x_{i-1}]} f)^2 \right)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n \left((\sup_{[x_i,x_{i-1}]} f - \inf_{[x_i,x_{i-1}]} f)(\sup_{[x_i,x_{i-1}]} f + \inf_{[x_i,x_{i-1}]} f) \right)(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq 2M \sum_{i=1}^n \left(\sup_{[x_i,x_{i-1}]} f - \inf_{[x_i,x_{i-1}]} f \right)(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq 2M \leq 2M\left(\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D)\right) \leq 2M\varepsilon.
\end{aligned}$$

Věta 9.2.14 říká, že $f^2 \in \mathcal{R}([a,b])$.

Pro důkaz druhé části tvrzení stačí uvažovat funkci $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in (0,1)$. Pak $f \in \mathcal{N}(0,1)$, ale $f^2 \notin \mathcal{N}(0,1)$. ♣

9.6.13. Příklad. Najděte příklad funkce f, která má primitivní funkci na intervalu $(-1,1)$, ale $|f|$ ani f^2 primitivní funkci na $(-1,1)$ nemá.

Řešení. Uvažujme funkci

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x^3}), & x \in (-1,1) \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pak

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \cos(\frac{1}{x^3}) + 3\frac{1}{x^2} \sin(\frac{1}{x^3}), & x \in (-1,1) \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Protože je funkce

$$g(x) = \begin{cases} 2x \cos(\frac{1}{x^3}), & x \in (-1, 1) \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

spojitá na $(-1, 1)$, má zde primitivní funkci. Tedy i funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \sin(\frac{1}{x^3}), & x \in (-1, 1) \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

má primitivní funkci na $(-1, 1)$. Ukážeme, že

$$|f(x)| = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \left|\sin(\frac{1}{x^3})\right|, & x \in (-1, 1) \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

primitivní funkci na $(-1, 1)$ nemá. Předpokládejme, že G je primitivní funkce k $|f|$ na $(-1, 1)$. Položme

$$H(x) = (R) \int_{-1}^{x} |f(t)| \, \mathrm{d}t, \quad x \in (-1, 0).$$

Pak podle Věty 9.2.24 je H dobře definovaná funkce na $(-1, 0)$ a její derivace je zde rovna $|f|$. Věta 9.1.6 tedy dává existenci konstanty $c \in \mathbb{R}$ takové, že $H(x) = G(x) + c$, $x \in (-1, 0)$. Pak tedy

$$\lim_{x \to 0_-} H(x) = G(0) + c$$

je vlastní. Ukážeme, že tento fakt vede ke sporu. Počítejme pomocí Věty o substituci 9.1.13

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0_-} H(x) &= \lim_{x\to 0_-} (R)\int_{-1}^{x} \frac{1}{t^2}\left|\sin(\frac{1}{t^3})\right| \,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\to 0_-} (N)\int_{-1}^{x} \frac{1}{t^2}\left|\sin(\frac{1}{t^3})\right| \,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\to 0_-} (N)\int_{\frac{1}{x}}^{-1} \left|\sin t^3\right| \,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\to 0_+} (N)\int_{1}^{\frac{1}{x}} \left|\sin t^3\right| \,\mathrm{d}t \\
&= (N)\int_{1}^{\infty} \left|\sin t^3\right| \,\mathrm{d}t \\
&= (N)\int_{1}^{\infty} \frac{|\sin t|}{3t^{\frac{2}{3}}} \,\mathrm{d}t \\
&\geq (N)\int_{1}^{\infty} \frac{|\sin t|}{3t} \,\mathrm{d}t = \infty
\end{aligned}
$$

(poslední rovnost plyne z Příkladu 9.4.11). Tím jsme dostali kýžený spor.

Pro funkci f^2 postupujeme obdobně pomocí výpočtu

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0_-} (R)\int_{-1}^{x} f^2(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to 0_-} (N)\int_{-1}^{x} \frac{1}{t^4}\left(\sin(\frac{1}{t^3})\right)^2 \,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\to 0_-} (N)\int_{\frac{1}{x}}^{-1} t^2(\sin t^3)^2\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\to 0_+} (N)\int_{1}^{\frac{1}{x}} t^2(\sin t^3)^2\,\mathrm{d}t \\
&= (N)\int_{1}^{\infty} t^2(\sin t^3)^2\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}(N)\int_{1}^{\infty} \sin^2 t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{6}\left[t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_1^{\infty} = \infty.
\end{aligned}
$$

♣

9.6.14. Příklad. Nechť $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ je monotónní spojitá funkce a nechť konverguje $(N) \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že f je nerostoucí a nezáporná. Označíme $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$, $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(\frac{k}{n}) \\ &\le \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

a tedy

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \le \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Na druhou stranu máme odhady

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{k=2}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\le \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f(\frac{k-1}{n}) \le \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) \\ &= a_n + \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Jelikož integrál $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, platí $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. (Vskutku, je-li F primitivní funkce k f na $(0,1)$, pak

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} [F(x)]_0^{\frac{1}{n}} = 0.)$$

Dostáváme tak

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \le \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Platí tak $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} a_n$. ♣

9.6.15. Příklad. Ukažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1}.$$

Řešení. Pro $a_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$ platí

$$\log a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \log \frac{k}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Použijeme-li předešlý Příklad 9.6.14 na funkci $f(x) = \log x$, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \log a_n = \int_0^1 \log x \,\mathrm{d}x = [x \log x]_0^1 - \int_0^1 1 \,\mathrm{d}x = -1.$$

Ze spojitosti funkce exp tak máme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \exp(-1).$$

♣

9.7. Početní příklady na integrál

9.7.1. Příklad. Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} \,\mathrm{d}x$$

Řešení. Díky Větě 9.1.9 platí

$$\begin{aligned}\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} \,\mathrm{d}x &= \int \frac{1-3x+3x^2-x^3}{\sqrt[3]{x^4}} \,\mathrm{d}x \\ &= \int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + 3\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^5} \right) \mathrm{d}x \\ &\stackrel{c}{=} -\frac{1}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{9\sqrt[3]{x^2}}{2} + \frac{9\sqrt[3]{x^5}}{5} - \frac{3\sqrt[3]{x^8}}{8}, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty).\end{aligned}$$

♣

9.7.2. Příklad. Nalezněte primitivní funkci

$$\int (2x-3)^{10} \,\mathrm{d}x$$

Řešení. Máme

$$\int (2x-3)^{10} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2x-3)^{10} 2 \,\mathrm{d}x.$$

Položíme-li ve Větě 9.1.13 $\varphi(x) = 2x - 3$ a $f(t) = t^{10}$, máme $\int f(t)\,\mathrm{d}t \overset{c}{=} \frac{1}{11}t^{11}$, $t \in \mathbb{R}$. Tedy platí

$$\int (2x-3)^{10} \overset{c}{=} \frac{1}{22}(2x-3)^{11}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

9.7.3. Příklad. Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{1}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$$

Řešení. Funkce $h(x) = \frac{1}{1+\cos x}$ je spojitá na intervalech $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, a na těchto intervalech tedy budeme hledat její primitivní funkci. Platí

$$\int \frac{1}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Pro první člen platí

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} -\operatorname{cotg} x, \quad x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi).$$

V druhém členu použijeme Větu 9.1.13 pro funkci $\varphi(x) = \sin x$ a $f(t) = \frac{1}{t^2}$. Jelikož $\int f(t) \overset{c}{=} -\frac{1}{t}$, $t \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, platí

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} -\frac{1}{\sin x}, \quad x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi).$$

Položíme-li nyní

$$g(x) = \begin{cases} \frac{-\cos x + 1}{\sin x}, & x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

dostaneme spojitou funkci na $(-\pi, \pi)$, která je dle předchozích výpočtů a Věty 9.1.39 primitivní k h na $(-\pi, \pi)$. Rozšíříme-li g 2π-periodicky na $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$, z periodicity uvažovaných funkcí plyne, že g je primitivní k h na množině $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ (viz Příklad 9.6.11). ♣

9.7.4. Příklad. Nalezněte primitivní funkce

$$\int \frac{x}{4+x^4}\,\mathrm{d}x, \ \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x, \ \int \frac{1}{x \log x \log\log x}\,\mathrm{d}x, \ \int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. U prvního příkladu položíme $\varphi(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, a $f(t) = \frac{1}{4+t^2}$, $t \in \mathbb{R}$. Pak

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{4\left(1+\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)} \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Jelikož

$$\int \frac{x}{4+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{4+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x,$$

máme dle Věty 9.1.13 rovnost

$$\int \frac{x}{4+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

V druhém příkladu je funkce $h(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ definovaná na množině $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$. Nejprve uvažujeme $x \in (1,\infty)$ a píšeme

$$h(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}.$$

Pak pro $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (1,\infty)$, a $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, $t \in (-1,1)$, platí

$$h(x) = -f(\varphi(x))\varphi'(x), \quad x \in (1,\infty).$$

Jelikož $\int f(t)\,\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} \arcsin t$, $t \in (-1,1)$, platí

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} -\arcsin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in (1,\infty).$$

Podobně odvodíme, že

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \arcsin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in (-\infty,-1).$$

V případě funkce $h(x) = \frac{1}{x\log x\log\log x}$ hledáme primitivní funkci na intervalech $(1,e)$ a (e,∞). Uvažujeme-li na těechto intervalech funkci $\varphi(x) = \log\log x$ a funkci $f(t) = \frac{1}{t}$, dostáváme

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jelikož $\int f(t) = \log|t|$, $t \in (-\infty,0) \cup (0,\infty)$, máme

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x = \log|\varphi(x)| = \log\left|\log\log x\right|, \quad x \in (1,e) \cup (e,\infty).$$

Je-li $h(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, pro funkce $\varphi(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, a $f(t) = \frac{1}{t}$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, máme

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x = -\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tedy

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x = -\log|\cos x|, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

♣

9.7.5. Příklad. Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Funkce $h(x) = \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$ splňuje

$$h(x) = \frac{1}{(\operatorname{tg}^2 x + 2)\cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Položíme $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, a $f(t) = \frac{1}{t^2+2}$, $t \in \mathbb{R}$. Pak

$$h(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x), \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Jelikož

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\,\mathrm{d}t \overset{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

máme pro funkci

$$H(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right), \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),$$

rovnost

$$\int h(x) \overset{c}{=} H(x), \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Nechť nyní H je π-periodicky dodefinována na $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Pak též $H'(x) = h(x)$ na této množině (viz Příklad 9.6.11). Jelikož

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} H(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \quad \text{a} \quad \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+} H(x) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

je funkce

$$F(x) = \begin{cases} H(x) + k\frac{\pi}{\sqrt{2}}, & x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + k\frac{\pi}{\sqrt{2}}, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z, \end{cases}$$

díky Větě 9.1.39 primitivní k h na celém $\mathbb{R}$. ♣

9.7.6. Příklad. Nalezněte primitivní funkce

$$\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Pro funkci $h(x) = \frac{1}{\sin x}$ platí

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}, \quad x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi). \end{aligned}$$

Položíme-li $\varphi(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ a $f(t) = \frac{1}{t}$, máme rovnost

$$h(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x), \quad x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi).$$

Proto

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|, \quad x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi).$$

Díky periodicitě však tato rovnost platí i pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Pro výpočet druhé primitivní funkce uvažujme rovnost $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$, $x \in \mathbb{R}$, a substituční funkci $\varphi(x) = \frac{\pi}{2} + x$. Díky Větě 9.1.13 a předešlému výpočtu pak platí

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}\,\mathrm{d}x \\ &\overset{c}{=} \log\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

♣

9.7.7. Příklad. Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{2^x 3^x}{9^x - 4^x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Funkce $h(x) = \frac{2^x 3^x}{9^x - 4^x}$ je spojitá funkce na $\mathbb{R} \setminus 0$, kde tedy budeme hledat funkci k ní primitivní. Platí

$$h(x) = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Položíme-li $\varphi(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, $x \in \mathbb{R}$, a $f(t) = \frac{1}{t^2 - 1}$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, platí

$$h(x) = \frac{1}{\log\frac{3}{2}} f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Jelikož

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|, \quad t \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},$$

dostáváme

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{1}{2(\log 3 - \log 2)}\log\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

♣

9.7.8. Příklad. Nalezněte primitivní funkci

$$\int x\sqrt{2-5x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Primitivní funkci k $h(x) = x\sqrt{2-5x}$ budeme hledat na intervalu $(-\infty, \frac{2}{5})$. Uvažujme substituci $\varphi(x) = 2-5x$, $x \in (-\infty, \frac{2}{5})$. Pak $\varphi^{-1}(t) = \frac{2-t}{5}$, $(\varphi^{-1})'(t) = -\frac{1}{5}$ a

$$h(\varphi^{-1}(t))(\varphi^{-1})'(t) = -\frac{2}{25}\sqrt{t} + \frac{1}{25}t^{\frac{3}{2}}, t \in (0,\infty).$$

Jelikož

$$\int h \stackrel{c}{=} -\frac{4}{75}t^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{125}t^{\frac{5}{2}}, \quad t \in (0,\infty),$$

dle Poznámky 9.1.18 platí

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} -\frac{4}{75}(2-5x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{125}(2-5x)^{\frac{5}{2}}, \quad x \in (-\infty, \frac{2}{5}).$$

♣

9.7.9. Příklad. Nalezněte primitivní funkci

$$\int \sin^4 x\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Jelikož

$$\begin{aligned}\sin^4 x &= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x\\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x,\end{aligned}$$

dostáváme

$$\int \sin^4 x\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

9.7.10. Příklad. Nalezněte primitivní funkci
$$\int \frac{1}{\sinh^2 x \cosh^2 x}\, \mathrm{d}x.$$

Řešení. Máme
$$\int \frac{1}{\sinh^2 x \cosh^2 x}\, \mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x - \sinh^2 x}{\sinh^2 x \cosh^2 x}\, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sinh^2 x}\, \mathrm{d}x - \int \frac{1}{\cosh^2 x}\, \mathrm{d}x$$
$$\stackrel{c}{=} -\operatorname{cotgh}^2 x - \operatorname{tgh}^2 x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

♣

9.7.11. Příklad. Nalezněte primitivní funkci
$$\int \cos^5 x \sqrt{\sin x}\, \mathrm{d}x.$$

Řešení. Primitivní funkci k $h(x) = \cos^5 x \sqrt{\sin x}$ budeme hledat na intervalech $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pišme
$$h(x) = \cos^4 x \sqrt{\sin x} \cos x = (1 - \sin^2 x)^2 \sqrt{\sin x} \cos x.$$
Položíme-li $\varphi(x) = \sin x$ a $f(t) = (1-t^2)^2\sqrt{t}$, $t \in (0, \infty)$, platí
$$\int f(t)\, \mathrm{d}t = \int \left(\sqrt{t} - 2t^{\frac{5}{2}} + t^{\frac{9}{2}}\right) \mathrm{d}t \stackrel{c}{=} \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{7}t^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{11}t^{\frac{11}{2}}, \quad t \in (0, \infty).$$
Pomocí Věty 9.1.13 dostáváme
$$\int h(x) \stackrel{c}{=} \frac{2}{3}\sin x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{7}\sin x^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{11}\sin x^{\frac{11}{2}}, \quad x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi).$$

♣

9.7.12. Příklad. Nalezněte primitivní funkci
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\, \mathrm{d}x,$$
kde a je kladné reálné číslo.

Řešení. Položíme $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$, a $\varphi(t) = a \sinh t$, $t \in \mathbb{R}$. Pak
$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{a\sqrt{1 + \sinh^2 t}} = \frac{1}{a \cosh t}$$
a
$$\varphi'(t) = a \cosh t.$$
Tedy
$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, \mathrm{d}t = \int 1\, \mathrm{d}t \stackrel{c}{=} t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Proto

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \varphi^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \log\left(\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(Poslední rovnost snadno odvodíme ze vzorce $\frac{x}{a} = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$.) ♣

9.7.13. Příklad. Nalezněte primitivní funkci

$$\int \left(\frac{\log x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x.$$

Řešení. Pomocí Věty 9.1.19 postupně odvodíme

$$\begin{aligned}\int \log^2 x \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{\log^2 x}{x} + 2\int \frac{\log x}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\log^2 x}{x} + 2\left(-\frac{\log x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\right) \\ &\stackrel{c}{=} -\frac{1}{x}\left(\log^2 x + 2\log x + 2\right), \quad x \in (0,\infty).\end{aligned}$$

♣

9.7.14. Příklad. Nalezněte primitivní funkci

$$\int x^2 \arccos x\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Dvojnásobbným použitím Věty 9.1.19 dostáváme

$$\begin{aligned}\int x^2 \arccos x\,\mathrm{d}x &= \frac{x^3 \arccos x}{3} + \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^3 \arccos x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2 \left(\sqrt{1-x^2}\right)'\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^3 \arccos x}{3} - \frac{x^2\sqrt{1-x^2}}{3} + \frac{1}{3}\int 2x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Pomocí substituce $t = 1 - x^2$ převedeme poslední integrál na hledání primitivní funkce $\int -\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$. Tedy

$$\int 2x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} -\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}, \quad x \in (-1,1),$$

z čehož plyne závěr

$$\int x^2 \arccos x\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{x^3 \arccos x}{3} - \frac{x^2\sqrt{1-x^2}}{3} - \frac{2}{9}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}, \quad x \in (-1,1).$$

♣

9.7.15. Příklad. Nalezněte primitivní funkce

$$\int \sin(\log x)\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \int \cos(\log x)\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Označíme-li $I_1 = \int \sin(\log x)\,\mathrm{d}x$ a $I_2 = \int \cos(\log x)\,\mathrm{d}x$, pomocí Věty 9.1.19 dostáváme pro $x \in (0,\infty)$ rovnosti

$$I_1 = x\sin(\log x) - I_2 \quad \text{a} \quad I_2 = x\cos(\log x) + I_1.$$

Množiny I_1 a I_2 jsou určené až na konstantu. Použitím Lemmatu 9.1.23 máme po dosazení druhé rovnice do první a přičtení I_1 rovnost

$$2I_1 = I_1 + I_1 = x\sin(\log x) - x\cos(\log x) - I_1 + I_1 = x\sin(\log x) - x\cos(\log x) + C$$

(C značí množinu všech konstantních funkcí na $(0,\infty)$). Tedy

$$I_1 \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\big(x\sin(\log x) - x\cos(\log x)\big), \quad x \in (0,\infty).$$

Obdobně odvodíme vztah

$$I_2 \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\big(x\sin(\log x) + x\cos(\log x)\big), \quad x \in (0,\infty).$$

♣

9.7.16. Příklad. Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{x^{10}}{x^2 + x - 2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Standardním postupem zjistíme, že

$$\begin{aligned}\frac{x^{10}}{x^2 + x - 2} =& x^8 - x^7 + 3x^6 - 5x^5 + 11x^4 - 21x^3 + 43x^2 - 85x + 171 \\ &+ \frac{-341x + 342}{x^2 + x - 2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}.\end{aligned}$$

Dále platí $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$, a tedy dle Věty 9.1.30 existují $A, B \in \mathbb{R}$ splňující

$$\frac{-341x + 342}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}.$$

Úpravou dostáváme vztah

$$-341x + 342 = A(x-1) + B(x+2), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}. \tag{9.26}$$

Ze spojitosti polynomů na obou stranách této rovnosti plyne, že musí platit pro všechna $x \in \mathbb{R}$, speciálně tedy i pro $x \in \{-2, 1\}$. Dosadíme-li tak do (9.26) $x = -2$ a $x = 1$, dostaneme $A = \frac{-1024}{3}$ a $B = \frac{1}{3}$.

Proto

$$\int \frac{x^{10}}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{x^9}{9} - \frac{x^8}{8} + \frac{3}{7}x^7 - \frac{5}{6}x^6 + \frac{11}{5}x^5 - \frac{21}{4}x^4 + \frac{43}{3}x^3 - \frac{85}{2}x^2 + 171x + \frac{1}{3}\log\left|\frac{x-1}{(x+2)^{1024}}\right|, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{-2,1\}.$$

♣

9.7.17. Příklad. Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Dle Věty 9.1.30 existují čísla $A, B, C \in \mathbb{R}$ taková, že platí

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1}, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}.$$

Pak platí

$$x^2+1 = A(x+1)(x-1) + B(x-1) + C(x+1)^2, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}.$$

Ze spojitosti obou stran této rovnosti pak plyne, že je splněna pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Porovnáme-li koeficienty polynomy na levé straně s koeficenty polynomu na straně pravé, obdržíme $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$ a $C = \frac{1}{2}$. Proto

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\log|x-1| \\ &\overset{c}{=} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\log\left|x^2-1\right|,\end{aligned}$$

přičemž uvedený vztah platí na $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. ♣

9.7.18. Příklad. Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{1}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Polynom ve jmenovateli lze rozložit jako

$$\begin{aligned}x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1 &= x^4(x+1) - 2x^2(x+1) + (x+1) \\ &= (x+1)(x^4-2x^2+1) = (x-1)^2(x+1)^3.\end{aligned}$$

Dle Věty 9.1.30 existují reálná čísla A, B, C, D, E taková, že platí

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{(x+1)^3}, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}.$$

Vynásobíme rovnost jmenovatelem pravé strany, čímž dostaneme rovnost

$$1 = A(x-1)(x+1)^3+B(x+1)^3+C(x+1)^2(x-1)^2+D(x+1)(x-1)^2+E(x-1)^2$$

platnou na celém $\mathbb{R}$. Porovnáním koeficientů na obou stranách dospíváme k systému rovnic

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ 2A + B + D &= 0 \\ 3B - 2C - D + E &= 0 \\ -2A + 3B - D - 2E &= 0 \\ -A + B + C + D + E &= 1. \end{aligned}$$

Řešení tohoto systému je

$$A = -\frac{3}{16},\ B = \frac{1}{8},\ C = \frac{3}{16},\ D = \frac{1}{4},\ E = \frac{1}{4}.$$

Proto

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1}\,\mathrm{d}x \\ &\stackrel{c}{=} \frac{-3}{16}\log|x-1| - \frac{1}{8(x-1)} + \frac{3}{16}\log|x+1| - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{8(x+1)^2}, \end{aligned}$$

přičemž tato rovnost platí pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. ♣

9.7.19. Příklad. Nalezněte primitivní funkci

$$\frac{1}{x^4 - 1}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Jelikož

$$x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1),$$

hledáme dle Věty 9.1.30 rozklad ve tvaru

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},$$

kde A, B, C, D jsou reálná čísla. Úpravou dostáváme rovnost

$$1 = A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)(x+1), \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}.$$

Standardním postupem vypočteme

$$A = \frac{1}{4},\ B = -\frac{1}{4},\ C = 0,\ D = -\frac{1}{2}.$$

Dostáváme tak

$$\int \frac{1}{x^4-1}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{1}{4}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log|x+1| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

♣

9.7.20. Příklad. Nalezněte primitivní funkci

$$\frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Jelikož polynom x^4+1 nemá reálné kořeny, lze ho vyjádřit jako součin dvou nerozložitelných kvadratických polynomů. Ty nalezneme buď za pomoci metody neuurčitých koeficientů nebo pomocí rozkladu

$$x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1).$$

Rozklad na parciální vzorky tedy bude mít tvar

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1},\quad x\in\mathbb{R},$$

kde $A,B,C,D\in\mathbb{R}$. Úpravou obržíme rovnost

$$\begin{aligned}1&=(Ax+B)(x^2-\sqrt{2}x+1)+(Cx+D)(x^2-\sqrt{2}x+1)\\&=x^3(A+C)+x^2(-\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D)+x(A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D)+(B+D).\end{aligned}$$

Řešením příslušné soustavy lineárních rovnic dostáváme

$$A=\frac{1}{2\sqrt{2}},\ B=\frac{1}{2},\ C=-\frac{1}{2\sqrt{2}},\ D=\frac{1}{2}.$$

Pak

$$\begin{aligned}\int\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{\frac{1}{4\sqrt{2}}(2x+\sqrt{2})}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x+\int\frac{\frac{1}{4}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4\sqrt{2}}\log(x^2+\sqrt{2}x+1)+\int\frac{\frac{1}{4}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4\sqrt{2}}\log(x^2+\sqrt{2}x+1)+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(\sqrt{2}x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4\sqrt{2}}\log(x^2+\sqrt{2}x+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1).\end{aligned}$$

Obdobně postupujeme i u druhého členu, což vede k výsledku

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x&\overset{c}{=}\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)\\&\quad+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1),\quad x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

♣

9.7.21. Příklad. Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Použijeme substituci $y = x-1$, čímž se problém převede na výpočet

$$\int \frac{(y+1)^3}{y^100}\,\mathrm{d}y = \int \left(y^{-97} + 3y^{-98} + 3y^{-99} + y^{-100}\right)\mathrm{d}y$$
$$\stackrel{c}{=} -\frac{1}{96}y^{-96} - \frac{3}{97}y^{-97} - \frac{3}{98}y^{-98} - \frac{1}{99}y^{-99}, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Tedy

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\,\mathrm{d}y \stackrel{c}{=} -\frac{1}{96}(x-1)^{-96} - \frac{3}{97}(x-1)^{-97} - \frac{3}{98}(x-1)^{-98}$$
$$-\frac{1}{99}(x-1)^{-99}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

♣

9.7.22. Příklad. Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Jelikož

$$\int \frac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \frac{x^5 5x^4}{(x^{10}+2x^5+2)^2}\,\mathrm{d}x,$$

substitucí $y = x^5$ převedeme úlohu na hledání primitivní funkce

$$\int \frac{y}{(y^2+2y+2)^2}\,\mathrm{d}y.$$

Díky Příkladu 9.1.24 pak máme

$$\int \frac{y}{(y^2+2y+2)^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int \left(\frac{2y+2}{(y^2+2y+2)^2} - \frac{2}{(y^2+2y+2)^2}\right)\mathrm{d}y$$
$$= -\frac{1}{2(y^2+2y+2)} - \int \frac{1}{((y+1)^2+1)^2}\,\mathrm{d}y$$
$$\stackrel{c}{=} -\frac{1}{2(y^2+2y+2)} - \frac{y+1}{2(y^2+2y+2)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(y+1).$$

Závěr jest tedy následující:

$$\int \frac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} -\frac{x^5+1}{10(x^{10}+2x^5+2)} - \frac{1}{10}\operatorname{arctg}(x^5+1),$$

přičemž rovnost platí na $\mathbb{R}$. ♣

9.7.23. Příklad. Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Polynom x^2+x+1 je kladný na celé reálné ose, a tedy budeme hledat primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$. Použijeme Eulerovu substituci (viz Věta 9.1.43), tj. položíme $\varphi(x)=\sqrt{x^2+x+1}-x$. Pak

$$x=\frac{t^2-1}{1-2t},\quad \sqrt{x^2+x+1}=\frac{-t^2+t-1}{1-2t}$$

a

$$(\varphi^{-1})'(t)=-2\frac{t^2-t+1}{(1-2t)^2}.$$

Úlohu jsme tak převedli na hledání primitivní funkce

$$\begin{aligned}\int -2\cdot\frac{(1-2t)(t^2-t+1)}{(-t^2+t-2)(1-2t)^2}\,\mathrm{d}t &= 2\int\frac{1}{1-2t}\,\mathrm{d}t\\ &\overset{c}{=} -\log|1-2t|,\quad t\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}.\end{aligned}$$

Proto platí

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} -\log\left|1-2\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\right|,\quad x\in\mathbb{R}.$$

♣

9.7.24. Příklad. Nalezněte primitivní funkci

$$\int\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Použijeme Větu 9.1.41, takže položíme $\varphi(x)=\sqrt[6]{x+1}$. Pak $(\varphi^{-1})(t)=t^6-1$ a $(\varphi^{-1})'(t)=6t^5$. Úlohu jsme tak převedli na hledání primitivní funkce

$$\int\frac{(1-t^3)6t^5}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Standardním postupem odvodíme identitu

$$\frac{t^8-t^5}{t^2+1}=t^6-t^4-t^3+t^2+t-1+\frac{-t+1}{t^2+1}.$$

Jelikož
$$\int \frac{-t+1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t - \int \frac{t}{t^2+1} \overset{c}{=} \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\log(1+t^2),$$
máme výsledek
$$\int \frac{(1-t^3)6t^5}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \overset{c}{=} -\frac{6}{7}t^7 + \frac{6}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 6t$$
$$+ 3\log(1+t^2) - 6\operatorname{arctg} t,$$
kde $t \in \mathbb{R}$. Nyní jen stačí dosadit $t = \sqrt[6]{1+x}$ a obdržíme tak hledanou primitivní funkci pro $x \in (-1,\infty)$. ♣

9.7.25. Příklad. Nalezněte primitivní funkci
$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Jelikož
$$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1},$$
zvolíme substituci $t = \varphi(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ (viz Věta 9.1.41). Pak $\varphi^{-1}(t) = -\frac{1+t^2}{1-t^2}$ a $(\varphi^{-1})'(t) = \frac{-4t}{(1-t^2)^2}$. Úlohu tak převedeme na hledání primitivní funkce
$$\int \frac{t-1}{t+1}\cdot\frac{-4t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{4t}{(1+t)^3(1-t)}\,\mathrm{d}t.$$
Standardním postupem obdržíme rozklad na parciální zlomky
$$\frac{4t}{(1+t)^3(1-t)} = \frac{1}{2(1-t)} + \frac{1}{2(1+t)} + \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{2}{(1+t)^3},$$
což znamená, že
$$\int \frac{4t}{(1+t)^3(1-t)}\,\mathrm{d}t \overset{c}{=} \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - \frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2}, \quad t \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}.$$
Dosazením $t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ dostaneme hledanou primitivní funkci na intervalu $(1,\infty)$. ♣

9.7.26. Příklad. Nalezněte primitivní funkci
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Substitucí $t = \varphi(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1+x}$ dostáváme

$$\varphi^{-1}(t) = \left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2 \quad \text{a} \quad (\varphi^{-1})'(t) = \frac{(t^2-1)(t^2+1)}{2t^3}.$$

Tím jsme úohu převedli na hledání primitivní funkce

$$\int \frac{1}{1+t} \cdot \frac{(t^2+1)(t^2-1)}{2t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{t^3-t^2+t-1}{t^3}\,\mathrm{d}t$$
$$\stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\left(t - \log|t| - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}\right), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}.$$

Dosazením $t = \sqrt{x} + \sqrt{1+x}$ obdržíme hledanou primitivní funkci na intervalu $(0, \infty)$. ♣

9.7.27. Příklad. Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Zvolíme substituci $t = \varphi(x) = e^x$, čímž úohu převedeme na výpožet

$$\int \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} t - \log|1+t|, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Proto

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} e^x - \log(1+e^x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

9.7.28. Příklad. Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{1}{x\sqrt{-\log^2 x + 4\log -3}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Substitucí $t = \log x$ převedeme úlohu na hledání primitivní funkce

$$\int \frac{1}{\sqrt{-t^2+4t-3}}\,\mathrm{d}t.$$

Jelikož

$$\sqrt{-t^2+4t-3} = \sqrt{(t-1)(3-t)} = (3-t)\sqrt{\frac{t-1}{3-t}}, \quad t \in (1,3),$$

položíme $y = \varphi(t) = \sqrt{\frac{t-1}{3-t}}$. Pak $\varphi^{-1}(y) = \frac{3y^2+1}{y^2+1}$, $(\varphi^{-1})'(y) = \frac{4y}{(y^2+1)^2}$ a $3 - t = \frac{2}{y^2+1}$. Tím obdržíme

$$\int \frac{1}{\frac{2}{y^2+1} \cdot y} \cdot \frac{4y}{(y^2+1)^2}\,\mathrm{d}y = \int \frac{2}{y^2+1}\,\mathrm{d}y \stackrel{c}{=} 2\operatorname{arctg} y, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Proto platí

$$\int \frac{1}{x\sqrt{-\log^2 x + 4\log -3}}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\log x - 1}{3 - \log x}}, \quad x \in (e, e^3).$$

♣

9.7.29. Příklad. Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x} + \sqrt{1-e^x}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Primitivní funkci budeme hldat na intervalu $(-\infty, 0)$. Výpočet započneme úpravou

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x}}{(1+e^x)-(1-e^x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\sqrt{1+e^x}}{2e^x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\sqrt{1-e^x}}{2e^x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{9.27}$$

Podívejme se nejprve na první člen. V něm provedeme substituci $t = \varphi(x) = \sqrt{1+e^x}$, $x \in (-\infty, 0)$. Pak $\varphi^{-1}(t) = \log(t^2 - 1)$ a $(\varphi^{-1})'(t) = \frac{2t}{t^2-1}$. Úlohu jsme tak převedli na výpočet primitivní funkce

$$\int \frac{t^2}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Dle Věty 9.1.30 existují čísla $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ splňující

$$\frac{t^2}{(t^2-1)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Úpravou a použitím spojitosti dostáváme rovnost

$$t^2 = A(t^3+t^2-t-1)+B(t^2+2t+1)+C(t^3-t^2-t+1)+D(t^2-2t+1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Systém rovnic

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ A + B - C + D &= 1 \\ -A + 2B - C - 2D &= 0 \\ -A + B + C + D &= 0 \end{aligned}$$

má řešení

$$A = \frac{1}{4},\ B = \frac{1}{4},\ C = -\frac{1}{4},\ D = \frac{1}{4}.$$

Proto platí

$$\int \frac{t^2}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t \overset{c}{=} \frac{1}{4}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{4(t-1)} - \frac{1}{4(t+1)}.$$

V druhém výrazu z (9.27) provedeme substituci $t = \varphi(x) = \sqrt{1-e^x}$. Pak $\varphi^{-1}(t) = \log(1-t^2)$ a $(\varphi^{-1})'(t) = -\frac{2t}{1-t^2}$. Dostaneme tak integrál

$$\int \frac{-t^2}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Použitím první části výpočtu obdržíme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} & \frac{1}{4}\log\left|\frac{t_1-1}{t_1+1}\right| - \frac{1}{4(t_1-1)} - \frac{1}{4(t_1+1)} \\ & + \frac{1}{4}\log\left|\frac{t_2-1}{t_2+1}\right| - \frac{1}{4(t_2-1)} - \frac{1}{4(t_2+1)}, \end{aligned}$$

kde $t_1 = \sqrt{1+e^x}$ a $t_2 = \sqrt{1-e^x}$. Výpočet přitom platí na intervalu $(-\infty, 0)$.

♣

9.7.30. Příklad. Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Primitivní funkci budeme hledat na intervalech $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Jelikož

$$\frac{1}{(2+\cos x)\sin x} = \frac{\sin x}{(2+\cos x)(\sin^2 x} = \frac{\sin x}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)},$$

substitucí $t = \varphi(x) = \cos x$ převedeme úlohu na hledání primtivní funkce

$$\int \frac{-1}{(2+t)(1-t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

Snadným rozkladem na parciální zlomky obdržíme

$$\frac{-1}{(2+t)(1-t^2)} = \frac{1}{3(2+t)} - \frac{1}{6(1-t)} - \frac{1}{2(1+t)}.$$

Tedy

$$\int \frac{-1}{(2+t)(1-t^2)}\,\mathrm{d}t \overset{c}{=} \frac{1}{3}\log(2+t) + \frac{1}{6}\log(1-t) - \frac{1}{2}\log(1+t)$$

pro $t \in \mathbb{R} \setminus \{-2,-1,1\}$, z čehož plyne

$$\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{1}{3}\log(2+\cos x)+\frac{1}{6}\log(1-\cos x)-\frac{1}{2}\log(1+\cos x),$$

přičemž $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k\pi,(k+1)\pi)$. ♣

9.7.31. Příklad. Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Jelikož

$$\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2\sin x \cos x}{1+\sin^4 x}\,\mathrm{d}x,$$

substitucí $t = \varphi(x) = \sin^2 x$ převedeme daný integrál na úlohu nalézt primitivní funkci

$$\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Tedy

$$\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sin^2 x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

9.7.32. Příklad. Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Použijeme substituci $t = \varphi(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Stejně jako ve Větě **??** máme $\varphi^{-1}(t) = \operatorname{arctg} t$, $(\varphi^{-1})'(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$ a $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$. Dostáváme tak úlohu

$$\int \frac{t^2+1}{(t^2+2)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^2+2-1}{(t^2+2)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^2+2} - \int \frac{1}{(t^2+2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

První integrál vyjde

$$\int \frac{1}{t^2+2}\, \mathrm{d}t \overset{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

zatímco druhý je dle rekurzívního vzorce 9.1.24 roven

$$\int \frac{1}{(t^2+2)^2} \overset{c}{=} \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\left(\frac{t}{2(1+(\frac{t}{\sqrt{2}})^2)}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dohromady dostáváme

$$\int \frac{t^2+1}{(t^2+2)^2}\, \mathrm{d}t \overset{c}{=} \frac{3}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) - \frac{t}{4(2+t^2)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dosazením tak získáváme rovnost

$$\int \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}\, \mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{3}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\operatorname{tg} x}{4(\operatorname{tg}^2 x + 2)}, \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Označme

$$F(x) = \frac{3}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\operatorname{tg} x}{4(\operatorname{tg}^2 x + 2)}.$$

Z periodicity uvažovaných funkcí plyne, že F je primitivní k zadané funkci také na každém intervalu tvaru $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Jelikož

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} F(x) = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}} \quad \text{a} \quad \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+} F(x) = -\frac{3\pi}{8\sqrt{2}},$$

funkce

$$H(x) = \begin{cases} F(x) + k\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}, & x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), \\ \frac{3\pi}{8\sqrt{2}} + k\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z},$$

je spojitá na $\mathbb{R}$ a mimo body $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, je primitivní k funkci zadané. Dle Věty 9.1.39 se tedy jedná o hledanou primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$. ♣

9.7.33. Příklad. Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5}\, \mathrm{d}x.$$

Řešení. Použijeme substituci $t = \varphi(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $x \in (-\pi, \pi)$. Pak $\varphi^{-1}(t) = 2\operatorname{arctg} t$, $(\varphi^{-1})'(t) = \frac{2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ a $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Dosazením získáváme integrál

$$\int \frac{1}{3t^2+2t+2}\, \mathrm{d}t = \frac{3}{5}\int \frac{1}{1+\left(\frac{3}{\sqrt{5}}(t+\frac{1}{3})\right)^2}\, \mathrm{d}t \overset{c}{=} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pak je funkce

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}}\right)$$

primitivní k zadané funkci $f = \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5}$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. Z periodicity uvažovaných funkcí je F primitivní k f i na intervalech $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Jelikož

$$\lim_{x\to\pi_-} F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{5}} \quad \text{a} \quad \lim_{x\to-\pi_+} F(x) = -\frac{\pi}{2\sqrt{5}}$$

funkce

$$H(x) = \begin{cases} F(x) + k\frac{\pi}{\sqrt{5}}, & x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi), \\ \frac{\pi}{2\sqrt{5}} + k\frac{\pi}{\sqrt{5}}, & x = \pi + 2k\pi, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z},$$

je spojitá na $\mathbb{R}$ a mimo body $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, je primitivní k funkci zadané. Dle Věty 9.1.39 se tedy jedná o hledanou primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$. ♣

9.7.34. Příklad. Nalezněte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$$

Řešení. Jelikož

$$\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+1} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n},$$

stačí dle Věty **??** určit limitu výrazu

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 2^{\frac{k}{n}}.$$

Uvážíme-li však funkci $f(x) = 2^x$, $x \in [0,1]$, obdržíme riemannovsky integrovatelnou funkci na $[0,1]$ (viz Věta 9.2.19) a dle Důsledku 9.2.12 máme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 2^{\frac{k}{n}} = (R)\int_0^1 2^x\,\mathrm{d}x = (N)\int_0^1 2^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\log 2}\left[2^x\right]_0^1 = \frac{1}{\log 2}.$$

♣

9.7.35. Příklad. Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = \int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Označme

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

a

$$F(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dle Věty 9.2.24 platí

$$F'(x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} f'(x) &= \big(F(x^3) - F(x^2)\big)' = g(x^3)3x^2 - g(x^2)2x \\ &= \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

♣

9.7.36. Příklad. Nalezněte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Řešení. Pomocí l'Hospitalova pravidla odvodíme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

♣

9.7.37. Příklad. Vypočtěte integrál

$$\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Použitím Věty 9.3.11 a Příkladu 9.6.11 dostaneme

$$\begin{aligned} \int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^{200\pi} \sqrt{1-\cos y}\,\mathrm{d}y = 50\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos y}\,\mathrm{d}y \\ &= 50\left(\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos y}\,\mathrm{d}y + \int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{1-\cos y}\,\mathrm{d}y\right) \\ &= 100\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos y}\,\mathrm{d}y = 100\int_0^{\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{1+\cos y}}\,\mathrm{d}y \\ &= 100\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 200\left[\sqrt{t}\right]_{t=0}^{t=2} = 200\sqrt{2}. \end{aligned}$$

♣

9.7.38. Příklad. Spočtětě integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\varepsilon\cos x}\,\mathrm{d}x,$$

kde $\varepsilon \in [0,1)$.

Řešení. Použitím substituce $\operatorname{cotg}\frac{x}{2} = t$, kde $\cos x = \frac{t^2-1}{t^2+1}$, dostáváme

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\varepsilon\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\varepsilon\frac{t^2-1}{t^2+1}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{t^2(1+\varepsilon)+1-\varepsilon}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{4}{1-\varepsilon}\int_0^{\infty} \frac{1}{1+\left(t\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{4}{1-\varepsilon}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{arctg}\left(t\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right)\right]_{t=0}^{y=\infty} \\
&= \frac{\pi}{2}\frac{4}{\sqrt{(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.
\end{aligned}$$

♣

9.7.39. Příklad. Spočtětě integrál

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Pomocí Věty 9.3.10 dostáváme

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x\right]_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{2}\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\left(\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) \\
&= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

♣

9.7.40. Příklad. Spočtětě integrál
$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} \left|\log x\right| \,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Platí
$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{e}}^{e} \left|\log x\right| \,\mathrm{d}x &= \int_{\frac{1}{e}}^{1} (-\log x) \,\mathrm{d}x + \int_{1}^{e} \log x \,\mathrm{d}x \\ &= \left[-x\log x + x\right]_{\varepsilon^{-1}}^{1} + \left[x\log x - x\right]_{1}^{e} \\ &= 2 - \frac{2}{e}.\end{aligned}$$

♣

9.7.41. Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálů
$$\int_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x, \qquad \int_1^\infty x^\alpha \,\mathrm{d}x,$$
kde α je reálný parametr.

Řešení. Jelikož
$$\int_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1, & \alpha \neq -1, \\ \left[\log x\right]_0^1, & \alpha = -1 \end{cases}$$
integrál $\int_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > -1$.

Podobně odvodíme, že $\int_1^\infty x^\alpha \,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$.

♣

9.7.42. Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálů
$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^\alpha \left|\log x\right|^\beta \,\mathrm{d}x, \qquad \int_{10}^\infty x^\alpha \left|\log x\right|^\beta \,\mathrm{d}x,$$
kde α a β jsou reálné parametry.

Řešení. Uvažujme nejprve první integrál. Integrovaná funkce má v bodě $\frac{1}{2}$ vlastní limitu a na intervalu $(0, \frac{1}{2})$ je spojitá. Je tedy třeba vyšetřit její integrovatelnost u bodu 0.

Pokud $\alpha > -1$, zvolíme $\alpha' \in (-1, \alpha)$ a díky platnosti vztahu
$$\lim_{x\to 0+} x^{\alpha-\alpha'} \left|\log x\right|^\beta = 0$$
odvodíme odhad
$$x^\alpha \left|\log x\right|^\beta \leq x^{\alpha'},$$

který platí ne nějakém okolí $(0, \delta)$. Jelikož $\int_0^\delta x^{\alpha'}$ konverguje (viz Příklad 9.7.41), konverguje dle Věty 9.4.1 i integrál původní.

Pokud $\alpha = -1$, platí

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{-1} \left|\log x\right|^\beta = \begin{cases} -\left[\frac{(-\log x)^{\beta+1}}{\beta+1}\right]_0^{\frac{1}{2}}, & \beta \neq -1, \\ -\left[\log(-\log x)\right]_0^{\frac{1}{2}}, & \beta = -1. \end{cases}$$

Tedy intergrál konverguje pro $\beta < -1$.

Je-li konečně $\alpha < -1$, zvolíme $\alpha' \in (\alpha, -1)$ a díky platnosti vztahu

$$\lim_{x \to 0_+} x^{\alpha-\alpha'} \left|\log x\right|^\beta = \infty$$

odvodíme odhad

$$x^\alpha \left|\log x\right|^\beta \geq x^{\alpha'},$$

který platí na nějakém okolí $(0, \delta)$. Z divergence integrálu $\int_0^\delta x^{\alpha'}$ pak plyne divergence integrálu zadaného.

Závěrem tedy lze říci, že integrál konverguje právě tehdy, když $\alpha > -1$ nebo když $\alpha = -1$ a $\beta < -1$.

Druhý integrál bychom vyšetřili obdobným způsobem, přičemž by nám vyšlo, že konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$ nebo když $\alpha = -1$ a $\beta < -1$. ♣

9.7.43. Příklad. Dokažte, že

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) \,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2} \log 2.$$

Řešení. Snadno ověříme, že integrál konverguje. Vskutku,

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{\log(\sin x)}{\log x} = \lim_{x \to 0_+} \frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right) + \log x}{\log x} = 1,$$

a $\log x$ je funkce integrovatelná u 0 (viz Příklad 9.7.42).

Nyní pomocí substituce $x = 2t$ máme

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) \,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(2 \sin t \cos t) \,\mathrm{d}t \\ &= 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log 2 \,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin t) \,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos t)\right). \end{aligned}$$

Jelikož substitucí $t = \frac{\pi}{2} - u$ v posledním integrálu získáváme

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos t)\, \mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin u)\, \mathrm{d}u,$$

platí

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\, \mathrm{d}x = \frac{\pi \log 2}{2} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\, \mathrm{d}x.$$

Tím je požadovaná rovnost dokázána. ♣

9.7.44. Příklad. Vypočtěte integrály

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\, \mathrm{d}x, \int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}\, \mathrm{d}x.$$

Řešení. První integrál převedeme pomocí per partes na

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\, \mathrm{d}x = \left[x \log(\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\, \mathrm{d}x = \frac{\pi \log 2}{2}.$$

V druhém provedeme substituci $x = \sin t$ a dostaneme

$$\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin t)\, \mathrm{d}t = -\frac{\pi \log 2}{2}.$$

Třetí pak opět pomocí per partes vyčíslíme jako

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} = \left[\arcsin x \log x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi \log 2}{2}.$$

♣

9.7.45. Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálů

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x^2}\, \mathrm{d}x, \qquad \int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x.$$

Řešení. Integrandy jsou spojité funkce, takže stačí vyšetřit existenci integrálů v krajních bodech daných intervalů. Podívejme se nejprve na funkci $f(x) = \frac{-\log x}{1-x^2}$. Pak pro $g(x) = -\log x$ platí $\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Jelikož má $g(x)$ u 0 konvergentní integrál, dle Věty 9.4.5 má u 0 i $f(x)$ konvergentní integrál. Tedy i $-f(x)$ (což je zadaná funkce) má u 0 konvergentní integrál.

U bodu 1 platí

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\log x}{1-x^2} = \lim_{x\to 1-} \frac{\log x}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x} = -\frac{1}{2},$$

a tedy je zadaná funkce u 1 jakožto omezená funkce integrovatelná.

Závěr tedy je, že první integrál konverguje.

Druhý integrand u 0 srovnáme s funkcí $\log x$, co je funkce u 0 integrovatelná. U nekonečna se integrand chová jako $\frac{\log x}{x^2}$ (tj. pro $f(x) = \frac{\log x}{1+x^2}$ a $g(x) = \frac{\log x}{x^2}$ platí $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, co je integrovatelná funkce. Tedy i f je integrovatelná u nekonečna. Dohromady máme, že i druhý integrál je konvergentní.

♣

9.7.46. Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_0^\infty \frac{x - \sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x,$$

kde α je reálný parametr.

Řešení. Integrand $f(x)$ je nezáporná spojitá funkce na $(0, \infty)$, budeme tak vyšetřovat integrovatelnost v krajních bodech tohoto intervalu. Položíme $g(x) = x^{3-\alpha}$. Pak

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

Dle Věty 9.4.5 konverguje f u 0 právě thedy, když u 0 konverguje g. To však nastává právě pro $3 - \alpha > -1$, tj. $\alpha < 4$.

U nekonečna uvážíme funkci $g(x) = \frac{1}{x^{\alpha-1}}$. Pak

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x} = 1,$$

a tedy f má u nekonečna konvergentní integrál právě thedy, když g je integrovatelná u nekonečna. To však nastává právě pro $\alpha - 1 > 1$.

Dohramdy tak máme, že integrál konverguje právě thedy, když $\alpha \in (2, 4)$.

♣

9.7.47. Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_0^\infty \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right) \operatorname{arctg} x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Daná funkce $f(x)$ je integrovatelná u 0, neboť zde je omezená ($\lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$ a $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ je omezená). U nekonečna f srovnáme s funkcí $g(x) = \frac{1}{x^2}$, neboť pak máme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Jelikož je g integrovatelná u nekonečna, je i f integrovatelná u nekonečna. Proto je f integrovatelná na $(0, \infty)$. ♣

9.7.48. Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x) \operatorname{tg}^\alpha x \, dx,$$

kde α je reálný parametr.

Řešení. Co se týče integrovatlenosti daná funkce f u 0, položme $g(x) = x^{\alpha+2}$. Pak

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\log(\cos x)}{\cos x - 1} \frac{\cos x - 1}{x^2} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^p \frac{1}{\cos^p x} = -\frac{1}{2}.$$

Tedy f je integrovatelná u 0 právě tehdy, když g je integrovatelná u 0. To nastává v případě $\alpha > -3$.

Situaci u bodu $\frac{\pi}{2}$ nám pomůže objasnit funkce

$$g(x) = \frac{\log\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^\alpha}.$$

Pak

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \sin^\alpha x \left(\frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x} \right)^\alpha \frac{\log(\cos x)}{\log(\frac{\pi}{2} - x} \\
&= 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \frac{\log(\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}) + \log(\frac{\pi}{2} - x)}{\log(\frac{\pi}{2} - x)} = 1.
\end{aligned}$$

Jelikož je funkce g integrovatelná u $\frac{\pi}{2}$ zleva právě thedy, když $\alpha < 1$ (viz Příklad 9.7.42, máme dle Věty 9.4.5 nutnou a postačující podmínku pro integrovatelnost f u $\frac{\pi}{2}$.

Závěr tedy jest, že integrál konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (-3, 1)$.

♣

9.7.49. Příklad. Vyšetřete absolutní i neabsolutní konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} \, dx,$$

kde α je reálný parametr.

Řešení. Vzhledem ke spojitosti dané funkce f na $[1, \infty)$ stačí vyšetřit její integrovatelnost v nekonečnu. Je-li $\alpha > 1$, platí $|f(x)| \leq \frac{1}{x^\alpha}$, a tedy f je absolutně integrovatelná. Je-li $\alpha \in (0, 1]$, má $\sin x$ omezenou primitivní funkci a

$x^{-\alpha}$ je klesající funkce s limitou 0 v nekonečnu. Dle Věty 9.4.8 je integrál z f konvergentní. Pokud $\alpha \in (-\infty, 0]$, máme pro každé $n \in \mathbb{N}$ odhad

$$\left| \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin x x^{-\alpha} \, dx \right| \geq (2n\pi)^{-\alpha} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin x \, dx = 2 \cdot (2n\pi)^{-\alpha}.$$

Z tohoto odhadu vidíme neplatnost Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro primitivní funkci k f v nekonečnu. Integrál tak není v tomto případě konvergentní.

Uvažujme nyní znovu $\alpha \in (0, 1]$. Pak pro přirozená čísla $n < m$ platí

$$\begin{aligned} \int_{2n\pi}^{2m\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha} \, dx &= \sum_{k=n}^{m-1} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha} \, dx \\ &\geq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{(2(k+1)\pi)^\alpha} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\sin x| \, dx \\ &= 2^{1-\alpha} \pi^{-\alpha} \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha}. \end{aligned}$$

Jelikož je řada $\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^{-\alpha}$ divergentní, plyne z předcházejícího odhadu neplatnost Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro primitivní funkci k f v nekonečnu.

Integrál je tak konvergentní právě tehdy, když $\alpha > 0$, a je absolutně konvergentní právě thedy, když $\alpha > 1$.

♣

9.7.50. Příklad. Vyšetřete absolutní i neabsolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^\infty (\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}) x^{-\alpha} \, dx,$$

kde α je reálný parametr.

Řešení. Jelikož

$$\cos x = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

a

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4),$$

dostáváme pro danou funkci f vztah

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{f(x)}{x^{4-\alpha}} = \lim_{x \to 0_+} \frac{-\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

Tedy f je integrovatelná u 0 právě tehdy, když $4 - \alpha > -1$, tj. $\alpha < 5$.

Zkoumejme nyní situaci v nekonečnu. Povšimněme si, že $e^{-\frac{x^2}{2}}x^{-\alpha}$ je (absolutně) integrovatelná v nekonečnu pro každé α. To totiž ihned plyne z odhadu

$$e^{-\frac{x^2}{2}}x^{-\alpha} \leq x^{-2}$$

platného na nějakém okolí ∞, který odvodíme z limity

$$\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}x^{\gamma} = 0, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Pro $\alpha > 1$ tak máme odhad

$$|f(x)| \leq \frac{2}{x^{\alpha}},$$

a tedy je f absolutně integrovatelná.

Pokud $\alpha \in (0, 1]$, jsou funkce $\frac{\cos x}{x^{\alpha}}$ a $e^{-\frac{x^2}{2}}x^{-\alpha}$ integrovatelné, a tedy i f je integrovatelná. Není však absolutně integrovatelná, neboť máme odhad

$$|f(x)| \geq \frac{|\cos x|}{x^{\alpha}} - e^{-\frac{x^2}{2}}x^{-\alpha},$$

kde na pravé straně je součet divergentní a konvergentní funkce, tj. funkce s divergentním integrálem.

Pokud $\alpha \in (-\infty, 0]$, integrál $\int_{10}^{\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x$ diverguje (viz Příklad 9.7.49). Jelikož $\int_{10}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x$ konverguje, diverguje i $\int_{10}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Závěr tedy jest, že $\int_{0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (0, 5)$. Dále daný integrál konverguje absolutně právě tehdy, když $\alpha \in (1, 5)$.

♣

9.7.51. Příklad. Vyšetřete absolutní i neabsolutní konvergenci integrálů

$$\int_{10}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int_{10}^{\infty} \frac{\sin x}{x + 2\sin x}\,\mathrm{d}x, \quad \int_{10}^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + 2\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. U prvního integrálu vyšetřujeme díky nezápornosti integrandu pouze absolutní konvergenci. Jelikož však

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x},$$

$\int_{10}^{\infty} \frac{1}{2x}$ diverguje a $\int_{10}^{\infty} \frac{\cos 2x}{2x}$ konverguje (viz Věta 9.4.8), diverguje i integrál $\int_{10}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}$.

U druhého integrálu odhadneme

$$\left|\frac{\sin x}{x+2\sin x}-\frac{\sin x}{x}\right| = \left|\frac{x\sin x - x\sin x - 2\sin^2 x}{x(x+2\sin x)}\right| \le \frac{2}{x(x-2)}$$

Funkce $\frac{\sin x}{x+2\sin x}-\frac{\sin x}{x}$ je tak integrovatelná (viz Věta 9.4.1), což díky integrovatelnosti funkce $\frac{\sin x}{x}$ implikuje integrovatelnost funkce

$$\frac{\sin x}{x+2\sin x} = \left(\frac{\sin x}{x+2\sin x}-\frac{\sin x}{x}\right)+\frac{\sin x}{x}.$$

U absolutní konvergence použijeme odhad

$$\left|\frac{\sin x}{x+2\sin x}\right| \ge \frac{|\sin x|}{x+2} = \frac{|\sin x|}{x}\frac{x}{x+2},$$

který dává díky Příkladu 9.7.49 a Větě 9.4.8(A) divergenci daného integrálu.

U třetího integrálu postupujeme obodobně jako u předešlého, dostaneme však odhad

$$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}+2\sin x}-\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right| = \left|\frac{2\sin^2 x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2\sin x)}\right| \ge \frac{2\sin^2 x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}.$$

Snadno odvodíme, že funkce na pravé straně této nerovnosti není integrovatelná, a tedy je funkce

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}+2\sin x} = \left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}+2\sin x}-\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

součtem funkce s konvergentním integrálem a funkce s divergentním integrálem. Jední se tedy o neintegrovatelnou funkci.

♣

9.7.52. Příklad. Vyšetřete absolutní i neabsolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^\infty x\sin x^4 \,\mathrm{d}x$$

Řešení. U 0 jest funkce spojitá, a tedy integrovatelná. Dále pišme

$$\int_1^\infty x\sin x^4 \,\mathrm{d}x = \int_1^\infty 4x^3\sin x^4 \frac{1}{4x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Jelikož je funkce $\int 4x^3\sin x^4 = -\cos x^4$ omezená a $\frac{1}{4x^2}$ konverguje v nekonečnu monotónně k nule, konverguje integrál dle Věty 9.4.8(D).

U absolutní konvergence je třeba znovu vyzkoumat integrovatelnost v nekonečnu. K tomuto účelu použijeme substituci $x^4 = y$ a obdržíme

$$\int_1^\infty x \left|\sin x^4\right| \,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \sqrt[4]{y} \frac{\sin y}{4y^{\frac{3}{4}}} \,\mathrm{d}y = \frac{1}{4} \int_1^\infty \frac{|\sin y|}{y^{\frac{1}{2}}} \,\mathrm{d}y,$$

což je divergentní integrál (viz Příklad 9.7.49). Tedy je daný integrál absolutně divergentní.

♣

9.7.53. Příklad. Nechť φ je rostoucí spojitá funkce na $[1, \infty)$ splňující $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$ a f je nekonstatní periodická funkce na $\mathbb{R}$. Pak $\lim_{x\to\infty} f(\varphi(x))$ neexistuje.

Řešení. Díky předpokladu je $\varphi\colon [1, \infty) \to [\varphi(1), \infty)$ bijekce. Nechť $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ jsou body splňující $f(x_1) \neq f(x_2)$ a nechť $p > 0$ je perioda f. Zvolíme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $x_1 + kp, x_2 + kp \in [\varphi(1), \infty)$. Pak body $x_n = \varphi^{-1}(x_1 + (k+n)p)$ a $y_n = \varphi^{-1}(x_2 + (k + n)p)$, $n \in \mathbb{N}$, ukazují na neexistenci limity $f \circ \varphi$ v nekonečnu, neboť $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty$, ale přitom

$$\lim_{n\to\infty} (f \circ \varphi)(x_n) = f(x_1), \quad \lim_{n\to\infty} (f \circ \varphi)(y_n) = f(x_2).$$

♣

9.7.54. Příklad. Vyšetřete absolutní i neabsolutní konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty x^\alpha \sin(x + \log x) \,\mathrm{d}x,$$

kde α je reálný parametr.

Řešení. Označme $\varphi(x) = x + \log x$. Jelikož $\varphi'(x) = 1 + \frac{1}{x}$, vidíme, že $1 \le \varphi' \le 2$ a φ' klesá. Tedy φ' i $\frac{1}{\varphi'}$ jsou omezené monotónní funkce. Dle Věty 9.4.8(A) tak platí

$$\int_1^\infty x^\alpha \sin\varphi(x) \,\mathrm{d}x \text{ konverguje} \iff \int_1^\infty x^\alpha (\sin\varphi(x))\varphi'(x) \,\mathrm{d}x \text{ konverguje.}$$

Budeme tak vyšetřovat konvergenci druhého integrálu.

Označme $\psi(x) = \varphi'(x)\sin\varphi(x)$. Pak $\int \psi(x) \,\mathrm{d}x = -\cos\varphi(x)$ je omezená, a tedy v případě $\alpha < 0$ integrál konverguje dle Věty 9.4.8(D). Pokud $\alpha = 0$, integr8l diverguje, neboť

$$\int_1^\infty \varphi'(x) \sin\varphi(x) \,\mathrm{d}x = [-\cos\varphi(x)]_1^\infty$$

neexistuje (viz Příklad 9.7.53). Je-li $\alpha > 0$, pak integrál diverguje. V opačném případě by totiž integrál

$$\int_1^\infty \psi(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty x^\alpha \psi(x) x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x$$

konvergoval dle Věty 9.4.8(A), což dle předcházející části neplatí. Integrál tak konverguje pro $\alpha < 0$.

Vyzkoumejme nyní absolutní konvergenci. Podobně jako výše odvodíme z Věty 9.4.8(A), že

$$\int_1^\infty x^\alpha\,|\sin\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \text{ konverguje } \iff \int_1^\infty x^\alpha\,|\sin\varphi(x)|\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \text{ konverguje.}$$

Pro případ $\alpha < -1$ je zjevně integrál konvergentní. Předpokládejme, že $\alpha \in [-1, 0)$. Zvolme libovolné $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$, a nechť $x, y \in [1, \infty)$ splňují $\varphi(a) = n\pi$ a $\varphi(b) = m\pi$ (Takové body existují, neboť $\varphi\colon [1, \infty) \to [1, \infty)$ je rostoucí bijekce.) Pak

$$\begin{aligned}
\int_a^\infty x^\alpha\,|\sin\varphi(x)|\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x &\geq \int_a^b x^\alpha\,|\sin\varphi(x)|\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&\geq b^\alpha \int_a^b |\sin\varphi(x)|\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = b^\alpha \int_{n\pi}^{m\pi} |\sin y|\,\mathrm{d}y \\
&= b^\alpha 2(m-n).
\end{aligned}$$

Jelikož

$$b \leq b + \log b = \varphi(b) = m\pi,$$

platí $b^\alpha \geq (m\pi)^\alpha$. Tedy

$$\begin{aligned}
\int_a^\infty x^\alpha\,|\sin\varphi(x)|\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x &\geq 2\left(m^{1+\alpha} - b^\alpha n\right) \\
&= 2\left(m^{1+\alpha} - n(\varphi^{-1}(m\pi))^\alpha\right) \\
&\geq 2\left(1 - n(\varphi^{-1}(m\pi))^\alpha\right).
\end{aligned} \tag{9.28}$$

Protože $\lim_{m\to\infty}(\varphi^{-1}(m\pi))^\alpha = 0$, dostáváme z (9.28) neplatnost Bolzanovy-Cauchyovy podmínky v nekonečnu.

Vskutku, nechť $x_0 \in (1, \infty)$ je libovolné. Zvolíme $n \in \mathbb{N}$ tak, aby $\varphi^{-1}(n\pi) > x_0$ a nechť $m > n$ je takové přirozené číslo, že $n(\varphi^{-1}(m\pi))^\alpha < \frac{1}{2}$. Pak (9.28) dává

$$\int_{x_0}^\infty x^\alpha\,|\sin\varphi(x)|\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^\infty x^\alpha\,|\sin\varphi(x)|\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x > 1.$$

Tím je ukázáno, že daný integrál diverguje absolutně pro $\alpha \in [-1, 0)$. ♣

9.7.55. Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\sin(\sin x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

Řešení. Ukážeme nejprve, že pro libovolné $a < b$ platí

$$\left|\int_a^b \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x\right| \le 2\pi. \tag{9.29}$$

Je-li totiž $b-a \le 2\pi$, pak odhad zjevně platí. V opačném případě nalezneme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $a + k2\pi \ge b$ a $a + (k-1)2\pi < b$. Pak

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^{a+k2\pi} \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x - \int_b^{a+2k\pi} \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\int_b^{a+2k\pi} \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x\right| \le 2\pi,\end{aligned}$$

neboť

$$\int_a^{a+k2\pi} \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{k-1} \int_{a+n2\pi}^{a+(n+1)2\pi} \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Tato rovnost platí díky výpočtu

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x + \int_\pi^{2\pi} \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi} \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \sin(\sin(y+\pi))\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\pi} \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \sin(-\sin y)\,\mathrm{d}y = 0.\end{aligned}$$

Tím je (9.29) dokázána.

Ověřme nyní platnost Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro daný integrál. Pro dané $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, položme $x_0 = \max\{1, 4\pi\varepsilon^{-1}\}$. Pak pro $a, b \in (x_0, \infty)$, $a < b$, existuje dle Věty 9.4.13 $c \in (a, b)$ takové, že

$$\int_a^b \frac{\sin(\sin x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_a^c \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{b}\int_c^b \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

Z toho dostáváme díky (9.29)

$$\left|\int_a^b \frac{\sin(\sin x)}{x}\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{\varepsilon}{4\pi}\left|\int_a^c \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x\right| + \frac{\varepsilon}{4\pi}\left|\int_c^b \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x\right|$$
$$\le \frac{\varepsilon}{4\pi}2\pi + \frac{\varepsilon}{4\pi}2\pi = \varepsilon.$$

Tím je konvergence daného integrálu dokázána. ♣

9.7.56. Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Platí $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x = \operatorname{arctg} x$, takže můžeme psát

$$\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (\sin x^{-2})(-2x^{-3})\frac{-x^2}{2}\frac{x}{\operatorname{arctg} x}\,\mathrm{d}x.$$

Jelikož je $\int(\sin x^{-2})(-2x^{-3})\,\mathrm{d}x = \cos x^{-2}$ omezená a $\lim_{x\to 0+} \frac{-x^2}{2} = 0$, konverguje dle Věty 9.4.8(D) integrál

$$\int_0^1 (\sin x^{-2})(-2x^{-3})\frac{-x^2}{2}\,\mathrm{d}x.$$

K ověření konvergence stačí nyní dle Věty 9.4.8(A) ukázat, že je funkce $x \mapsto \frac{x}{\operatorname{arctg} x}$ na nějakém pravém okolí bodu 0 omezená a monotónní. Její omezenost je zřejmá, neboť má v 0 vlastní limitu. Dále platí

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}, \quad x \in (-1,1) \setminus \{0\},$$

a tedy pro funkci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

platí

$$f'(0) = 0 \quad \text{a} \quad f''(0) = -\frac{2}{3}.$$

Jelikož má f spojitou druhou derivaci, platí $f'' < 0$ pro nějaké $(0,\delta)$. Tedy f' klesá na $(0,\delta)$, což implikuje, že $f' < 0$ na $(0,\delta)$. Tedy f klesá na $(0,\delta)$. Proto je funkce $\frac{1}{f}$ monotónní na $(0,\delta)$ a důkaz je tak hotov. ♣

KAPITOLA 10

Metrické prostory

Tato kapitola je věnována metrickým prostorům, tj. množinám, na kterých je dán způsob měření vzdálenosti. Metrické prostory nám umožní definovat pojem spojitosti obecněji než tomu bylo v Kapitole 4. Dále budeme zkoumat některé důležité speciální třídy metrických prostorů. Výsledky této kapitoly budeme později často používat.

10.1. Základní pojmy

10.1.1. Definice. Nechť P je množina a $\varrho\colon P \times P \to [0,\infty)$ je funkce splňující následující tři podmínky:

(a) $\forall x, y \in P : \varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
(b) $\forall x, y \in P : \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$,
(c) $\forall x, y, z \in P : \varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$.

Potom funkci ϱ nazýváme **metrikou** na P a dvojici (P, ϱ) nazýváme **metrickým prostorem**. Jsou-li x, y prvky množiny P, pak nezáporné číslo $\varrho(x, y)$ nazýváme jejich **vzdáleností**.

10.1.2. Metrický prostor (P, ϱ) sestává z množiny prvků P a z funkce ϱ, pomocí které mezi prvky P měříme vzdálenost. V tomto kontextu budeme o prvcích množiny P hovořit jako o bodech. Definice metrického prostoru připouští i možnost, že P je prázdná množina. Podmínky (a)–(c) vyjadřují přirozené požadavky, které by měl splňovat libovolný způsob měření vzdálenosti na jakékoli množině. Podmínka (a) vyjadřuje jednak to, že dva různé body mají vždy od sebe kladnou vzdálenost a jednak to, že vzdálenost každého bodu od sebe sama je vždy nulová. Podmínka (b) říká, že vzdálenost bodu x od bodu y je vždy stejná jako vzdálenost bodu y od bodu x. Podmínka (c), kterou nazýváme **trojúhelníkovou nerovností**, je dalším přirozeným požadavkem.

10.1.3. Úmluva. Přestože metrický prostor (P, ϱ) je dvojice (množina, metrika), často používáme obratu „metrický prostor P“, pokud je volba metriky zřejmá z kontextu.

Následující série příkladů ilustruje právě definovaný pojem metrického prostoru. Navíc se s metrickými prostory z těchto příkladů budeme setkávat i později.

10.1.4. Příklad. Definujme funkci ϱ na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ předpisem

$$\varrho(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Dokažte, že $(\mathbb{R}, \varrho)$ tvoří metrický prostor.

Řešení. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí $|x - y| \in [0, \infty)$. Stačí tedy ověřit platnost podmínek (a)–(c) z Definice 10.1.1. Podmínky (a) a (b) jsou však zřejmě splněny a podmínka (c) plyne z Důsledku 1.6.11(b). ♣

10.1.5. Úmluva. V dalším textu budeme na metrickém prostoru $\mathbb{R}$ vždy uvažovat metriku ϱ definovanou v Příkladu 10.1.4, pokud nebude výslovně řečeno jinak.

Občas budeme (nejen v této kapitole) využívat následující elementární, avšak užitečnou nerovnost.

10.1.6. Věta (Cauchyova nerovnost)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ jsou reálná čísla. Pak platí

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right). \tag{10.1}$$

Důkaz. Pokud jsou všechna čísla $a_1, \dots, a_n$ rovna nule, pak v (10.1) nastává rovnost. Předpokládejme nyní, že alespoň jedno z čísel $a_1, \dots, a_n$ je různé od nuly. Uvažujme výraz

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2, \tag{10.2}$$

který lze přepsat na tvar

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) x + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Koeficient u x^2 je nenulový a výraz (10.2) je nezáporný pro libovolné x reálné, takže rovnice

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) x + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) = 0$$

má nejvýše jeden reálný kořen. Diskriminant D této rovnice je tedy menší nebo roven nule. Odtud plyne, že

$$D = 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq 0,$$

což snadno dává (10.1). ■

10.1.7. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Definujme funkci ϱ_2 na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ předpisem

$$\varrho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

kde $x = [x_1, \dots, x_n]$, $y = [y_1, \dots, y_n]$. Dokažte, že $(\mathbb{R}^n, \varrho_2)$ tvoří metrický prostor.

Řešení. Podmínky (a) a (b) z definice metrického prostoru jsou zřejmě splněny. Ověříme podmínku (c). Nechť $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. Označme $a_i = x_i - y_i$ a $b_i = y_i - z_i$, $i = 1, \dots, n$. Potom z Cauchyovy nerovnosti (Věta 10.1.6) vyplývá, že

$$\begin{aligned}
\varrho_2(x, z) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2} \\
&= \varrho_2(x, y) + \varrho_2(y, z).
\end{aligned}$$

Tím jsme ověřili, že $(\mathbb{R}^n, \varrho_2)$ je metrický prostor. ♣

10.1.8. Funkci ϱ_2 z Příkladu 10.1.7 nazýváme **eukleidovskou metrikou** na $\mathbb{R}^n$. Symbol pro tuto metriku je zvolen z důvodů, které budou zřejmé z dalšího textu. Pro $n = 1$ splývá metrika ϱ_2 na $\mathbb{R}$ s metrikou ϱ zavedenou v Příkladu 10.1.4.

10.1.9. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Definujme funkci ϱ_1 na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ předpisem

$$\varrho_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \tag{10.3}$$

kde $x = [x_1, \dots, x_n]$ a $y = [y_1, \dots, y_n]$. Dokažte, že $(\mathbb{R}^n, \varrho_1)$ tvoří metrický prostor.

Řešení. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ platí $\varrho_1(x, y) \in [0, \infty)$ a podmínky (a), (b) z Definice 10.1.1 jsou zřejmě splněny. Zbývá tedy ověřit podmínku (c). Nechť $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $x = [x_1, \dots, x_n]$, $y = [y_1, \dots, y_n]$ a $z = [z_1, \dots, z_n]$. Potom z Důsledku 1.6.11(b) vyplývá, že

$$\varrho_1(x, z) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| \le \sum_{i=1}^{n} (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|) = \varrho_1(x, y) + \varrho_1(y, z).$$

Tím je ověřena platnost podmínky (c). Dokázali jsme tedy, že $(\mathbb{R}^n, \varrho_1)$ je metrický prostor. ♣

10.1.10. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Definujme funkci ϱ_∞ na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ předpisem

$$\varrho_\infty(x, y) = \max\bigl\{|x_i - y_i|;\ i \in \{1, \dots, n\}\bigr\}, \tag{10.4}$$

kde $x = [x_1, \dots, x_n]$ a $y = [y_1, \dots, y_n]$. Dokažte, že $(\mathbb{R}^n, \varrho_\infty)$ tvoří metrický prostor.

Řešení. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ platí $\varrho_\infty(x, y) \in [0, \infty)$ a podmínky (a), (b) z Definice 10.1.1 jsou zřejmě splněny. Zbývá tedy ověřit podmínku (c). Nechť $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $x = [x_1, \dots, x_n]$, $y = [y_1, \dots, y_n]$ a $z = [z_1, \dots, z_n]$. Potom existuje $j \in \{1, \dots, n\}$ takové, že

$$\varrho_\infty(x, z) = \max\bigl\{|x_i - z_i|;\ i \in \{1, \dots, n\}\bigr\} = |x_j - z_j|.$$

Podle Důsledku 1.6.11(b) pak máme

$$|x_j - z_j| \le |x_j - y_j| + |y_j - z_j|.$$

Protože

$$|x_j - y_j| \le \max\bigl\{|x_i - y_i|;\ i \in \{1, \dots, n\}\bigr\} = \varrho_\infty(x, y)$$

a

$$|y_j - z_j| \le \max\bigl\{|y_i - z_i|;\ i \in \{1, \dots, n\}\bigr\} = \varrho_\infty(y, z),$$

dostáváme celkem

$$\varrho_\infty(x, z) \le \varrho_\infty(x, y) + \varrho_\infty(y, z),$$

čímž jsme ověřili platnost podmínky (c). Dokázali jsme tedy, že $(\mathbb{R}^n, \varrho_\infty)$ je metrický prostor. ♣

10.1.11. Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Označme symbolem $\mathcal{C}([a, b])$ množinu všech spojitých reálných funkcí definovaných na intervalu $[a, b]$. Definujme funkci $\varrho_{\sup}$ na $\mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b])$ předpisem

$$\varrho_{\sup}(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|.$$

Dokažte, že $(\mathcal{C}([a,b]), \varrho_{\sup})$ tvoří metrický prostor. Funkci $\varrho_{\sup}$ nazýváme **supremovou metrikou** na $\mathcal{C}([a,b])$.

Řešení. Nechť $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$. Podle věty o spojitosti a aritmetických operacích (Věta 4.2.5) a věty o spojitosti složené funkce (Věta 4.2.22) platí $|f-g| \in \mathcal{C}([a,b])$. Podle věty o existenci extrémů (Věta 4.3.9) nabývá funkce $|f-g|$ na $[a,b]$ svého maxima, takže funkce $\varrho_{\sup}$ je na $\mathcal{C}([a,b]) \times \mathcal{C}([a,b])$ dobře definovaná a splňuje $\varrho_{\sup}(f,g) \in [0,\infty)$ pro každé $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$. Podmínky (a) a (b) z Definice 10.1.1 jsou zřejmě splněny. Nechť $f, g, h \in \mathcal{C}([a,b])$. Potom pro každé $x \in [a,b]$ platí

$$\begin{aligned}|f(x)-h(x)| &\le |f(x)-g(x)| + |g(x)-h(x)| \\ &\le \sup_{y\in[a,b]} |f(y)-g(y)| + \sup_{y\in[a,b]} |g(y)-h(y)| \\ &= \varrho_{\sup}(f,g) + \varrho_{\sup}(g,h).\end{aligned}$$

Odtud plyne, že číslo $\varrho_{\sup}(f,g) + \varrho_{\sup}(g,h)$ je horní závorou množiny

$$\{|f(x)-h(x)|;\ x \in [a,b]\},$$

a tedy podle definice suprema platí

$$\varrho_{\sup}(f,h) \le \varrho_{\sup}(f,g) + \varrho_{\sup}(g,h).$$

Tím je ověřena podmínka (c) z Definice 10.1.1. Dokázali jsme, že $(\mathcal{C}([a,b]), \varrho_{\sup})$ je metrický prostor. ♣

10.1.12. Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Definujme funkci ϱ_{int} na $\mathcal{C}([a,b]) \times \mathcal{C}([a,b])$ předpisem

$$\varrho_{\mathrm{int}}(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx.$$

Dokažte, že $(\mathcal{C}([a,b]), \varrho_{\mathrm{int}})$ tvoří metrický prostor. Funkci ϱ_{int} nazýváme **integrální metrikou** na $\mathcal{C}([a,b])$.

K řešení příkladu budeme potřebovat následující lemma.

10.1.13. Lemma. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $h \in \mathcal{C}([a,b])$. Nechť existuje $x_0 \in [a,b]$ takové, že $h(x_0) > 0$. Potom $\int_a^b |h(x)|\,dx > 0$.

Důkaz. Nechť nejprve x_0 je vnitřním bodem $[a,b]$. Ze spojitosti funkce h plyne existence $\delta > 0$ takového, že $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset [a,b]$ a $h(x) > \frac{1}{2}h(x_0)$ pro každé $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$. Potom

$$\int_a^b |h(x)|\,dx \ge \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |h(x)|\,dx \ge \frac{1}{2}h(x_0)\cdot 2\delta = \delta h(x_0) > 0.$$

Nyní předpokládejme, že $x_0 = a$. Potom ze spojitosti funkce h plyne existence $\delta > 0$ takového, že $\delta < b - a$ a $h(x) > \frac{1}{2}h(a)$ pro každé $x \in [a, a + \delta)$. Potom
$$\int_a^b |h(x)|\, dx \geq \int_a^{a+\delta} |h(x)|\, dx \geq \frac{1}{2}h(a) \cdot \delta > 0.$$
V případě $x_0 = b$ postupujeme obdobně. ∎

Řešení Příkladu 10.1.12. Podle Věty 9.2.19 je funkce ϱ_{int} dobře definovaná a splňuje $\varrho_{\mathrm{int}}(f, g) \in [0, \infty)$ pro každé $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$. Jestliže $f = g$, potom zřejmě $\varrho_{\mathrm{int}}(f, g) = 0$. Jestliže naopak $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$ a platí $\varrho_{\mathrm{int}}(f, g) = 0$, pak podle Lemmatu 10.1.13 je $f(x) - g(x) = 0$ pro každé $x \in [a, b]$, tedy $f = g$. Tím je ověřena podmínka (a) z Definice 10.1.1. Podmínka (b) je zřejmě splněna. Ověříme platnost podmínky (c). Nechť $f, g, h \in \mathcal{C}([a, b])$. Potom pomocí Důsledku 1.6.11(b) a linearity určitého integrálu (Věta 9.2.22(a)) dostáváme
$$\begin{aligned}
\varrho_{\mathrm{int}}(f, h) &= \int_a^b |f(x) - h(x)|\, dx \\
&\leq \int_a^b \big(|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|\big)\, dx \\
&= \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx + \int_a^b |g(x) - h(x)|\, dx \\
&= \varrho_{\mathrm{int}}(f, g) + \varrho_{\mathrm{int}}(g, h).
\end{aligned}$$
Dokázali jsme, že $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\mathrm{int}})$ je metrický prostor. ♣

10.1.14. Příklad. Nechť P je libovolná množina. Definujme funkci $\varrho_{\mathrm{diskr}} \colon P \times P \to [0, \infty)$ předpisem
$$\varrho_{\mathrm{diskr}}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } x \neq y, \\ 0, & \text{pokud } x = y. \end{cases}$$
Dokažte, že potom $(P, \varrho_{\mathrm{diskr}})$ tvoří metrický prostor. Funkci ϱ_{diskr} nazýváme **diskrétní metrikou** na P a $(P, \varrho_{\mathrm{diskr}})$ **diskrétním metrickým prostorem**.

Řešení. Pro každé $x, y \in P$ platí $\varrho(x, y) \in [0, \infty)$ a podmínky (a) a (b) z Definice 10.1.1 jsou zřejmě splněny. Nechť $x, y, z \in P$. Jestliže $x = z$, potom $\varrho_{\mathrm{diskr}}(x, z) = 0$, a tedy nerovnost v (c) je zřejmě splněna. Jestliže $x \neq z$, potom $x \neq y$ nebo $z \neq y$. Odtud plyne, že
$$\varrho_{\mathrm{diskr}}(x, y) + \varrho_{\mathrm{diskr}}(y, z) \geq 1 = \varrho_{\mathrm{diskr}}(x, z).$$

Podmínka (c) je tedy splněna. Dokázali jsme, že $(P, \varrho_{\mathrm{diskr}})$ je metrický prostor. ♣

10.1.15. Příklad. Nechť P je množina všech posloupností, jejichž členy jsou rovny 0, nebo 1, tedy

$$P = \big\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty};\ \forall n \in \mathbb{N} : x_n \in \{0, 1\}\big\}.$$

Pro posloupnosti $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\}$ z P definujeme

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = y, \\ \frac{1}{k} & \text{pro } x \neq y, \text{ kde } k = \min\{m \in \mathbb{N};\ x_m \neq y_m\}. \end{cases}$$

Dokažte, že (P, ϱ) je metrický prostor.

Řešení. Pro každé $x, y \in P$ zřejmě platí $\varrho(x, y) \in [0, \infty)$. Dále platí $\varrho(x, y) = 0$ právě tehdy, když $x = y$. Konečně $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ pro každé $x, y \in P$. Nechť $x, y, z \in P$. Jestliže $x = z$, potom nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme, že $x \neq z$. Potom existuje nejmenší $k \in \mathbb{N}$ takové, že $x_k \neq z_k$. Odtud plyne, že $x_k \neq y_k$ nebo $z_k \neq y_k$, a tedy $\varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geq \frac{1}{k}$. Máme tak $\varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geq \varrho(x, z)$. Ověřili jsme, že funkce ϱ je metrikou na množině $P \times P$, a tedy (P, ϱ) je metrický prostor. ♣

10.1.16. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom dvojice $(M, \varrho|_{M\times M})$ zřejmě tvoří opět metrický prostor, neboť podmínky (a)–(c) z Definice 10.1.1 jsou splněny pro všechna x, y, z z P, a tedy i pro všechna x, y, z z M. Z této úvahy plyne korektnost následující definice.

10.1.17. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom dvojici $(M, \varrho|_{M\times M})$ nazýváme **metrickým podprostorem** metrického prostoru (P, ϱ). Metriku $\varrho|_{M\times M}$ na prostoru M nazýváme **indukovanou** nebo též **zděděnou** metrikou z prostoru (P, ϱ) a značíme ji opět pouze symbolem ϱ.

Pro porozumění následující definici je třeba znát pojem vektorového prostoru. Tento pojem jakož i definice dalších důležitých pojmů lineární algebry a související základní výsledky je možné nalézt například v [**2**].

10.1.18. Definice. Nechť X je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$, kde $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, a o je jeho nulový prvek. Zobrazení $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ nazýváme **normou** na X, jestliže jsou splněny následující tři podmínky:

(a) $\forall x \in X : \|x\| = 0 \ \Leftrightarrow\ x = o$,
(b) $\forall x \in X\ \forall \lambda \in \mathbb{F} : \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,
(c) $\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Dvojici $\big(X, \|\cdot\|\big)$ pak nazýváme **normovaným lineárním prostorem** nad tělesem $\mathbb{F}$. Ve většině případů, s nimiž se setkáme, bude $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. V takových případech budeme hovořit pouze o normovaném lineárním prostoru.

10.1.19. Věta. Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Definujme zobrazení $\varrho\colon X \times X \to [0,\infty)$ předpisem $\varrho(x,y) = \|x-y\|$. Potom ϱ je metrika na X.

Důkaz. Nechť $x, y \in X$. Potom zřejmě $\varrho(x,y) \in [0,\infty)$. Ověříme podmínky (a)–(c) z Definice 10.1.1. Rovnost $\varrho(x,y) = 0$ nastává právě tehdy, když $\|x-y\| = 0$, což nastává právě tehdy, když $x - y = o$, neboli $x = y$. Použijeme-li podmínku (b) z Definice 10.1.18 pro speciální volbu $\lambda = -1$, dostaneme

$$\begin{aligned}\varrho(x,y) &= \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = |(-1)|\|y-x\| \\ &= \|y-x\| = \varrho(y,x),\end{aligned}$$

tedy podmínka (b) z Definice 10.1.1 je splněna. Pro každé $x, y, z \in X$ platí díky podmínce (c) z Definice 10.1.18

$$\begin{aligned}\varrho(x,z) &= \|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \le \|x-y\| + \|y-z\| \\ &= \varrho(x,y) + \varrho(y,z).\end{aligned}$$

Ověřili jsme tedy i podmínku (c) z Definice 10.1.1. Tím je důkaz dokončen. ∎

10.1.20. Podle Věty 10.1.19 můžeme každý normovaný lineární prostor považovat také za prostor metrický, jestliže definujeme metriku pomocí normy způsobem uvedeným v tvrzení Věty 10.1.19. Toto tvrzení nelze obrátit (tedy ne každý metrický prostor je možné opatřit odpovídající normou), jak ukazuje následující příklad.

10.1.21. Příklad. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$, který má alespoň jeden nenulový prvek. Dokažte, že na V neexistuje norma $\|\cdot\|$ splňující $\|x-y\| = \varrho_{\text{diskr}}(x,y)$ pro každé $x, y \in V$.

Řešení. Předpokládejme, že taková norma existuje. Nechť $x \in V$ je nenulový prvek. Potom také $2x$ je nenulový prvek prostoru V a platí

$$\|x\| = \|x-o\| = \varrho_{\text{diskr}}(x,o) = 1.$$

Podle podmínky (b) Definice 10.1.18 dále platí

$$\|2x\| = 2\|x\| = 2,$$

zároveň však platí

$$\|2x\| = \|2x-o\| = \varrho_{\text{diskr}}(2x,o) = 1,$$

což je spor. Tvrzení je dokázáno. ♣

10.1.22. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Definujme funkci $\|\cdot\| \colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ předpisem

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Dokažte, že $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Funkci $\|\cdot\|$ nazýváme **eukleidovskou normou na** $\mathbb{R}^n$.

Řešení. Zřejmě platí $\|x\| \in [0,\infty)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$. Jestliže $x = o$, potom $x_i = 0$ pro každé $i \in \{1,\dots,n\}$, a tedy $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n 0^2} = 0$. Jestliže naopak $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, potom existuje $j \in \{1,\dots,n\}$ splňující $x_j \neq 0$ a tedy platí

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \geq \sqrt{x_j^2} = |x_j| > 0.$$

Odtud plyne, že podmínka (a) Definice 10.1.18 je splněna.

Nechť $x \in \mathbb{R}^n$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Potom platí

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda^2 x_i^2} = |\lambda| \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = |\lambda| \cdot \|x\|,$$

a tedy podmínka (b) Definice 10.1.18 je splněna.

Nechť konečně $x, y \in \mathbb{R}^n$. Potom (vizte výpočet v řešení Příkladu 10.1.7 platí

$$\|x+y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} = \|x\| + \|y\|.$$

Ověřili jsme platnost podmínky (c) Definice 10.1.18. Funkce $\|\cdot\|$ je tedy norma na $\mathbb{R}^n$. ♣

10.2. Konvergence v metrických prostorech

10.2.1. Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}$ prvků P **konverguje** k prvku $x \in P$, jestliže platí $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$. Tento fakt značíme symbolem $x_n \xrightarrow{\varrho} x$, $n \to \infty$, případně pouze $x_n \to x$.

Prvek x nazýváme **limitou posloupnosti** $\{x_n\}$ **v** P. **Konvergentní posloupností v** P rozumíme posloupnost, která má limitu v P.

10.2.2. Nechť $P = \mathbb{R}$. Pak výše uvedený pojem konvergence splývá s pojmem konvergence posloupnosti reálných čísel.

10.2.3. Definice. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků metrického prostoru (P, ϱ). Jestliže $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak říkáme, že $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je **podposloupnost** posloupnosti $\{x_n\}$, případně **vybranou posloupností** z posloupnosti $\{x_n\}$.

10.2.4. Věta (vlastnosti konvergence)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor.

(a) Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků P a existují $n_0 \in \mathbb{N}$ a $x \in P$ takové, že $x_n = x$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Potom $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

(b) Každá posloupnost prvků P má v P nejvýše jednu limitu.

(c) Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků P. Nechť $\{x_{n_k}\}$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{x_n\}$. Jestliže $x \in P$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, pak také $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

Důkaz. (a) Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $\varrho(x_n, x) = 0$, a tedy $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$, takže $x_n \to x$.

(b) Předpokládejme, že existují $x, y \in P$ takové, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = y$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ a $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\varrho(x, x_n) < \varepsilon$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, a $\varrho(y, x_n) < \varepsilon$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$. Položme $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_2$, potom platí

$$0 \leq \varrho(x, y) \leq \varrho(x, x_n) + \varrho(x_n, y) < 2\varepsilon.$$

Protože ε bylo libovolně zvoleno, plyne odtud, že $\varrho(x, y) = 0$, a tedy $x = y$.

(c) Protože posloupnost reálných čísel $\{\varrho(x_{n_k}, x)\}$ je vybraná z posloupnosti $\{\varrho(x_n, x)\}$, plyne z věty o limitě vybrané posloupnosti reálných čísel (Věta 2.2.33), že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. ■

10.2.5. Příklad. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků neprázdné množiny P. Dokažte, že $\{x_n\}$ je konvergentní v $(P, \varrho_{\mathrm{diskr}})$ právě tehdy, když existují $n_0 \in \mathbb{N}$ a $x \in P$ takové, že $x_n = x$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Řešení. $\Rightarrow$ Nechť $x_n \to x$ pro nějaký prvek $x \in P$. Potom $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$, a tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $\varrho(x_n, x) < 1$. Z definice diskrétní metriky plyne, že pro každé takové n platí $x_n = x$.

$\Leftarrow$ Tato implikace platí v každém metrickém prostoru, jak vyplývá z Věty 10.2.4(a). ♣

V následujícím příkladu ukážeme, že konvergence ve vícerozměrném eukleidovském prostoru splývá s konvergencí „po složkách“.

10.2.6. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $P = \mathbb{R}^n$ a $\varrho = \varrho_2$ je eukleidovská metrika (vizte Příklad 10.1.7). Nechť $\{x^m\}_{m=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků z P a $y \in P$. Dokažte, že potom platí $x^m \to y$ právě tehdy, když pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $\lim_{m\to\infty} x_i^m = y_i$.

Řešení. $\Rightarrow$ Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ a každé $m \in \mathbb{N}$ platí $|x_i^m - y_i^m| \le \varrho(x^m, y)$. Odtud plyne tvrzení.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $\lim_{m\to\infty} x_i^m = y_i$. Potom ze spojitosti odmocniny, podle věty o aritmetice limit (Věta 2.2.37) a Heineovy věty (Věta 4.2.16) dostáváme

$$\lim_{m\to\infty} \varrho(x^m, y) = \lim_{m\to\infty} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^m - y_i)^2} = 0,$$

a tedy $x^m \to y$. ♣

10.2.7. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\varrho_1(x, y) \le \sqrt{n}\varrho_2(x, y) \le n\varrho_\infty(x, y) \le n\varrho_1(x, y). \tag{10.5}$$

Řešení. Z Cauchyovy nerovnosti (10.1) odvodíme, že

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| &\le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \\ &\le \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \\ &\le n \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i| \le n \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|. \end{aligned}$$

Odtud plyne tvrzení. ♣

10.2.8. Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $\{x^m\}_{m=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků z $\mathbb{R}^n$ a $y \in \mathbb{R}^n$. Dokažte, že následující tři výroky jsou ekvivalentní.

(i) Platí $x^m \overset{\varrho_1}{\to} y$.
(ii) Platí $x^m \overset{\varrho_2}{\to} y$.
(iii) Platí $x^m \overset{\varrho_\infty}{\to} y$.

Řešení. (i)$\Rightarrow$(ii) Předpokládejme, že $x^m \overset{\varrho_1}{\to} y$. Potom $\lim_{m\to\infty} \varrho_1(x^m, y) = 0$. Z (10.5) plyne, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí $\varrho_2(x^m, y) \le \sqrt{n}\varrho_1(x^m, y)$. Protože pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí $\varrho_2(x^m, y) \ge 0$, vyplývá z věty o dvou strážnících, že také $\lim_{m\to\infty} \varrho_2(x^m, y) = 0$, a tedy platí (ii).

(ii)$\Rightarrow$(iii) Předpokládejme nyní, že platí $x^m \overset{\varrho_2}{\to} y$. Pak kombinací první a poslední nerovnosti v (10.5) dostaneme, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí $\varrho_\infty(x^m, y) \le \sqrt{n}\varrho_2(x^m, y)$, a tedy $\lim_{m\to\infty} \varrho_2(x^m, y) = 0$. Tím je dokázáno tvrzení (iii).

(iii)$\Rightarrow$(i) Konečně předpokládáme-li, že platí $x^m \overset{\varrho_\infty}{\to} y$, pak odvodíme platnost tvrzení (i) obdobným způsobem z toho, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí $\varrho_1(x^m, y) \le n\varrho_\infty(x^m, y)$. ♣

10.3. Topologické pojmy v metrických prostorech

10.3.1. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Řekneme, že množina M je **uzavřená** v P, jestliže platí následující implikace: je-li $\{x_n\}$ poslupnost prvků M splňující $x_n \to x$ pro nějaký prvek $x \in P$, pak platí $x \in M$.

10.3.2. Příklad. (a) Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$. Dokažte, že $[a, b]$ je uzavřená množina v $\mathbb{R}$.

(b) Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dokažte, že $(a, b]$ není uzavřená množina v $\mathbb{R}$.

Řešení. (a) Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků intervalu $[a, b]$ splňující $x_n \to x$ pro nějaké $x \in \mathbb{R}$. Podle Důsledku 2.4.22 platí $H(\{x_n\}) = \{x\}$. Podle Příkladu 2.4.18 tudíž platí $x \in [a, b]$. Tedy $[a, b]$ je uzavřená množina.

(b) Položme $x_n = a + \frac{b-a}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak je $\{a_n\}$ posloupnost prvků intervalu $(a, b]$ splňující $x_n \to a$. Protože $a \notin (a, b]$,plyne odtud, že $(a, b]$ není uzavřená množina. ♣

10.3.3. Příklad. Dokažte, že v každém metrickém prostoru je každá konečná množina uzavřená.

Řešení. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $M \subset P$ je konečná množina a $\{x_n\}$ je posloupnost prvků M splňující $x_n \to x$ pro nějaké $x \in P$. Předpokládejme, že $x \notin M$. Položme $d = \min\{\varrho(x, y);\ y \in M\}$. Protože M je konečná, platí $d > 0$. Dále zřejmě pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\varrho(x_n, x) \ge d$. To je ale spor s tím, že $x_n \to x$. Odtud plyne, že $x \in M$, a tedy je množina M uzavřená. ♣

10.3.4. Příklad. Dokažte, že v diskrétním metrickém prostoru je každá množina uzavřená.

Řešení. Nechť P je množina a $M \subset P$. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků M a $x \in P$ je takové, že $x_n \to x$ v $(P, \varrho_{\mathrm{diskr}})$. Podle Příkladu 10.2.5 existují $n_0 \in \mathbb{N}$ a $y \in P$ taková, že $x_n = y$ pro každé $n \ge n_0$. Odtud plyne, že

$y \in M$. Z Věty 10.2.4(a) plyne, že $x_n \to y$, a tedy z Věty 10.2.4(b) vyplývá, že $x = y$. Tedy $x \in M$, takže M je uzavřená. ♣

10.3.5. Věta (vlastnosti uzavřených množin)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor.

(a) Prázdná množina a celý prostor P jsou uzavřené množiny.

(b) Nechť $\mathcal{F}$ je neprázdný systém uzavřených množin. Potom je množina $\bigcap \mathcal{F}$ uzavřená.

(c) Nechť $m \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že množiny $F_1, \dots, F_m$ jsou uzavřené. Potom je množina $\bigcup_{i=1}^m F_i$ uzavřená.

Důkaz. (a) Prázdná množina neobsahuje žádnou posloupnost, takže implikace v definici uzavřené množiny je splněna. Uzavřenost množiny P je zřejmá.

(b) Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost prvků $\bigcap \mathcal{F}$ splňující $x_n \to x$ pro nějaké $x \in P$. Nechť $F \in \mathcal{F}$. Potom je $\{x_n\}$ posloupnost prvků F. Protože F je uzavřená, platí $x \in F$. Protože F byla zvolena libovolně, plyne odtud, že $x \in \mathcal{F}$. Tedy $\mathcal{F}$ je uzavřená množina.

(c) Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost prvků $\bigcup_{i=1}^m F_i$ splňující $x_n \to x$ pro nějaké $x \in P$. Protože sjednocení $\bigcup_{i=1}^m F_i$ je konečné, existuje index $j \in \{1, \dots, m\}$ takový, že v množině F_j leží nekonečně mnoho prvků posloupnosti $\{x_n\}$. To znamená, že existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$, která je celá obsažena v množině F_j. Podle Věty 10.2.4(c) platí $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Protože F_j je uzavřená množina, platí $x \in F_j$, a tedy tím spíše $x \in \bigcup_{i=1}^m F_i$. Odtud plyne, že $\bigcup_{i=1}^m F_i$ je uzavřená množina. ■

10.3.6. V tvrzení (c) Věty 10.3.5 je důležité, že sjednocení množin je konečné. Pro nekonečná sjednocení toto tvrzení neplatí. Uvažujme například množiny $F_n = [\frac{1}{n}, 1]$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\frac{1}{n}, 1] = (0, 1]$. Z Příkladu 10.3.2 tedy plyne, že každá z množin F_n je uzavřená, ale $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\frac{1}{n}, 1]$ není uzavřená.

10.3.7. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $x \in P$ a $r > 0$. Potom množinu $B(x, r)$ definovanou předpisem

$$B(x, r) = \{y \in P;\ \varrho(x, y) < r\}$$

nazýváme **otevřenou koulí se středem** x **a poloměrem** r.

10.3.8. Příklad. Uvažujte metrický prostor $\mathbb{R}$ s eukleidovskou metrikou. Nechť $x \in \mathbb{R}$ a $r > 0$. Dokažte, že $B(x, r) = (x - r, x + r)$.

Řešení. Tvrzení plyne z definice eukleidovské metriky na $\mathbb{R}$ elementárním výpočtem. ♣

10.3.9. Příklad. Nechť P je libovolná neprázdná množina a $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je diskrétní metrický prostor. Nechť $x \in P$ a $r > 0$. Dokažte, že

$$B(x,r) = \begin{cases} \{x\}, & \text{pokud } r \leq 1, \\ P, & \text{pokud } r > 1. \end{cases}$$

Řešení. Tvrzení plyne bezprostředně z definice diskrétní metriky. ♣

10.3.10. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $M \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je **vnitřním bodem** množiny M, jestliže existuje $r > 0$ takové, že $B(x,r) \subset M$. Řekneme, že množina M je **otevřená** v P, jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem. Množinu všech vnitřních bodů množiny M nazýváme **vnitřkem** množiny M a označujeme symbolem $\operatorname{Int} M$ podle latinského slova interior (vnitřek).

10.3.11. Věta (charakterisace vnitřku)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom $\operatorname{Int} M$ je největší (vzhledem k množinové inkluzi) otevřená množina obsažená v M.

Důkaz. Předpokládejme, že $x \in \operatorname{Int} M$. Potom existuje $r > 0$ takové, že $B(x,r) \subset M$. Dokážeme, že $B(x,r) \subset \operatorname{Int} M$. Zvolme $y \in B(x,r)$. Označme $s = r - \varrho(x,y)$. Potom $s > 0$. Dále platí $B(y,s) \subset B(x,r)$, neboť pro každé $z \in B(y,s)$ máme

$$\varrho(x,z) \leq \varrho(x,y) + \varrho(y,z) < \varrho(x,y) + s = r.$$

Tedy $B(y,s) \subset M$, takže $y \in \operatorname{Int} M$. Odtud plyne, že $B(x,r) \subset \operatorname{Int} M$, a tedy $\operatorname{Int} M$ je otevřená.

Nyní dokážeme, že $\operatorname{Int} M$ je největší otevřená množina obsažená v M. Nechť $G \subset M$ je otevřená množina. Potom pro každé $x \in G$ nalezneme $r > 0$ takové, že $B(x,r) \subset G$. Platí tedy také, že $B(x,r) \subset M$. To znamená, že x je vnitřním bodem množiny M, a tedy $x \in \operatorname{Int} M$. Platí tudíž $G \subset \operatorname{Int} M$. ■

10.3.12. Příklad. Dokažte, že v metrickém prostoru $\mathbb{R}$ je každý otevřený interval otevřená množina.

Řešení. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a $x \in (a,b)$. Položme $r = \min\{x-a, b-x, 1\}$, potom zřejmě platí $B(x,r) = (x-r, x+r) \subset (a,b)$, a tedy x je vnitřním bodem (a,b). Odtud plyne, že (a,b) je otevřená množina. ♣

10.3.13. Příklad. Dokažte, že v metrickém prostoru $\mathbb{R}$ není interval $(0,1]$ otevřenou množinou a že platí $\operatorname{Int}(0,1] = (0,1)$.

Řešení. Nechť $r > 0$. Potom $B(1,r) = (1-r, 1+r) \not\subset (0,1]$, takže bod $x = 1$ není vnitřním bodem intervalu $(0,1]$. Interval $(0,1]$ tedy není otevřenou množinou. Z Příkladu 10.3.12 vyplývá, že každý bod $x \in (0,1)$ je vnitřním bodem intervalu $(0,1)$, a tedy i vnitřním bodem intervalu $(0,1]$. Odtud plyne, že $\mathrm{Int}(0,1] = (0,1)$. ♣

10.3.14. Příklad. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor, $x_0 \in P$ a $r_0 > 0$. Dokažte, že potom je $B(x_0,r_0)$ otevřená množina.

Řešení. Zvolme $x \in B(x_0,r_0)$. Položme $r = r_0 - \varrho(x_0,x)$. Potom $r > 0$. Pro každé $y \in B(x,r)$ navíc platí

$$\varrho(x_0,y) \le \varrho(x_0,x) + \varrho(x,y) < \varrho(x_0,x) + r = r_0.$$

Tedy $y \in B(x_0,r_0)$. Protože y bylo zvoleno libovolně, vyplývá odtud, že $B(x,r) \subset B(x_0,r_0)$. Tudíž každý bod množiny $B(x_0,r_0)$ je jejím vnitřním bodem, a tedy $B(x_0,r_0)$ je otevřená množina. ♣

10.3.15. Věta (vlastnosti otevřených množin)**.** Nechť (P,ϱ) je metrický prostor.

(a) Prázdná množina a P jsou otevřené množiny.

(b) Nechť $\mathcal{G}$ je systém otevřených množin v P. Potom je množina $\bigcup \mathcal{G}$ otevřená.

(c) Nechť $m \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že množiny $G_1,\dots,G_m$ jsou otevřené v P. Potom je množina $\bigcap_{i=1}^m G_i$ otevřená.

Důkaz. (a) Tvrzení plyne bezprostředně z definice otevřené množiny.

(b) Předpokládejme, že $x \in \bigcup \mathcal{G}$. Potom existuje množina $G \in \bigcup \mathcal{G}$ taková, že $x \in G$. Protože G je otevřená množina, existuje $r > 0$ takové, že $B(x,r) \subset G$. Tedy $B(x,r) \subset \bigcup \mathcal{G}$. Odtud plyne, že $\bigcup \mathcal{G}$ je otevřená množina.

(c) Nechť $x \in \bigcap_{i=1}^m G_i$. Potom $x \in G_i$ pro každé $i \in \{1,\dots,m\}$. Pro každé $i \in \{1,\dots,m\}$ je množina G_i otevřená, tedy existuje $r_i > 0$ takové, že $B(x,r_i) \subset G_i$. Položme $r = \min\{r_i;\ i \in \{1,\dots,m\}\}$. Potom zřejmě platí $B(x,r) \subset B(x,r_i)$ pro každé $i \in \{1,\dots,m\}$, a tedy $B(x,r) \subset G_i$, takže $B(x,r) \subset \bigcap_{i=1}^m G_i$. Množina $\bigcap_{i=1}^m G_i$ je tudíž otevřená. ■

10.3.16. V tvrzení Věty 10.3.15(c) je důležité, že počet množin, které pronikáme, je konečný. Pro nekonečný systém otevřených množin obdobné tvrzení neplatí, tj. průnik nekonečně mnoha otevřených množin nemusí být otevřenou množinou. Příkladem je prostor $\mathbb{R}$, kde pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme $G_n = (0, 1 + \frac{1}{n})$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ je G_n otevřená množina, ale $\bigcap_{n=1}^\infty G_n = (0,1]$, což není otevřená množina, jak víme z Příkladu 10.3.13.

10.3.17. Věta (vztah otevřených a uzavřených množin)**.** Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom množina M je otevřená právě tehdy, když $P \setminus M$ je uzavřená.

Důkaz. $\Rightarrow$ Nechť M je otevřená množina, $\{x_n\}$ je posloupnost prvků $P \setminus M$ a $x \in P$ je takové, že $x_n \to x$. Předpokládejme, že $x \in M$. Potom díky otevřenosti M existuje $r > 0$ takové, že $B(x,r) \subset M$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\varrho(x_{n_0}, x) < r$. Potom $x_{n_0} \in (P \setminus M) \cap B(x,r)$, což je spor. Tedy $x \notin M$. To znamená, že $x \in P \setminus M$, a tedy $P \setminus M$ je uzavřená množina.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že M není otevřená množina. Pak existuje $x \in M$ takové, že pro každé $r > 0$ platí $B(x,r) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$. Speciálně pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $B(x, \frac{1}{n}) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$. Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ lze nalézt $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap (P \setminus M)$. Posloupnost $\{x_n\}$ pak leží celá v množině $P \setminus M$ a zřejmě splňuje $x_n \to x$. Protože $x \notin P \setminus M$, plyne odtud, že $P \setminus M$ není uzavřená. ■

10.3.18. Příklad. Dokažte, že každá podmnožina diskrétního prostoru je zároveň otevřená i uzavřená.

Řešení. Nechť P je množina a $M \subset P$. Z Příkladu 10.3.4 vyplývá, že M je uzavřená v $(P, \varrho_{\mathrm{diskr}})$. Ze stejného příkladu ale vyplývá, že také množina $P \setminus M$ je uzavřená. Podle Věty 10.3.17 je tedy množina M otevřená. ♣

10.3.19. Věta. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom

$$\operatorname{Int} M = \bigcup \{B(x,r);\ x \in P,\ r > 0,\ B(x,r) \subset M\}.$$

Důkaz. Označme

$$G = \bigcup \{B(x,r);\ x \in P,\ r > 0,\ B(x,r) \subset M\}.$$

Předpokládejme nejprve, že $x \in \operatorname{Int} M$. Potom existuje $r > 0$ takové, že $B(x,r) \subset M$. Odtud plyne, že $B(x,r) \subset G$, a tedy speciálně $x \in G$. Tím je dokázána inkluze $\operatorname{Int} M \subset G$.

Nyní předpokládejme, že $y \in G$. Pak existují $x \in P$ a $r > 0$ taková, že $B(x,r) \subset M$ a $y \in B(x,r)$. Podle Příkladu 10.3.14 je množina $B(x,r)$ otevřená, a tedy existuje $s > 0$ takové, že $B(y,s) \subset B(x,r)$, tedy $B(y,s) \subset M$. Jinými slovy, $y \in \operatorname{Int} M$. Tím je dokázána inkluze $G \subset \operatorname{Int} M$, a tedy množinová rovnost $G = \operatorname{Int} M$. ■

10.3.20. Věta (struktura otevřených podmnožin $\mathbb{R}$)**.** Množina $G \subset \mathbb{R}$ je otevřená právě tehdy, když G je spočetným sjednocením po dvou disjunktních otevřených intervalů.

Důkaz. $\Rightarrow$ Je-li G prázdná, pak tvrzení platí, neboť stačí uvažovat prázdný systém intervalů. Předpokládejme nyní, že $G \neq \emptyset$. Nechť $y \in G$. Potom definujeme prvky $a_y, b_y \in \mathbb{R}^*$ předpisem

$$a_y = \inf\{x \in \mathbb{R};\ [x,y] \subset G\}, \quad b_y = \sup\{z \in \mathbb{R};\ [y,z] \subset G\}.$$

Dokážeme, že $a_y, b_y \notin G$. Jestliže $a_y = -\infty$, pak zřejmě $a_y \notin G$. Předpokládejme tedy, že $a_y \in \mathbb{R}$ a navíc $a_y \in G$. Potom existuje $r > 0$ takové, že $B(a_y, r) \subset G$, tedy $(a_y - r, a_y + r) \subset G$. Pro libovolné $s \in (0, r)$ pak platí $[a_y - s, y] \subset G$, to je ale spor s definicí a_y. Odtud vyplývá, že $a_y \notin G$. Obdobně lze dokázat, že $b_y \notin G$. Povšimněme si, že $a_y < y < b_y$.

Dále dokážeme, že $(a_y, b_y) \subset G$. Nechť $x \in (a_y, b_y)$. Potom buď $x \in (a_y, y]$ a $[x, y] \subset G$ nebo $x \in [y, b_y)$ a $[y, x] \subset G$. V obou případech platí $x \in G$.

Nechť $\mathcal{J} = \{(a_y, b_y);\ y \in G\}$. Potom $\bigcup \mathcal{J} \subset G$. Inkluze $G \subset \bigcup \mathcal{J}$ je zřejmá, neboť pro každé $y \in G$ platí $y \in (a_y, b_y) \in \mathcal{J}$. Tedy $G = \bigcup \mathcal{J}$.

Nechť $y, z \in G$. Dokážeme, že potom buď $(a_y, b_y) = (a_z, b_z)$ nebo $(a_y, b_y) \cap (a_z, b_z) = \emptyset$. Předpokládejme, že $(a_y, b_y) \neq (a_z, b_z)$. Jestliže $a_y = a_z$, potom $b_y \neq b_z$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $b_y > b_z$. Potom ale $b_z \in (a_y, b_y)$, a tedy $b_z \in G$, což je spor. Jestliže $a_y \neq a_z$, potom bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a_y < a_z$. Protože $a_z \notin G$, platí $a_z \notin (a_y, b_y)$. Takže $a_z \geq b_y$, a tedy $(a_y, b_y) \cap (a_z, b_z) = \emptyset$. Systém $\mathcal{J}$ je tedy po dvou disjunktní.

Z Příkladu 1.7.21 plyne, že systém $\mathcal{J}$ je spočetný.

$\Leftarrow$ Tato implikace plyne z Příkladu 10.3.12 a Věty 10.3.15(b). ■

10.3.21. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $M \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je **hraničním bodem** množiny M, jestliže pro každé $r > 0$ platí $B(x, r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(x, r) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$. Množinu všech hraničních bodů množiny M nazýváme **hranicí** množiny M a značíme ji ∂M.

10.3.22. Hraniční bod množiny v metrickém prostoru může a nemusí být prvkem této množiny.

10.3.23. Příklad. Dokažte, že v metrickém prostoru $\mathbb{R}$ je hranicí intervalu $(0, 1)$ množina $\{0, 1\}$.

Řešení. Označme $M = (0, 1)$. Nechť $r > 0$. Potom $B(0, r) = (-r, r)$, a tedy $B(0, r) \cap M = (0, \min\{r, 1\}) \neq \emptyset$ a $B(0, r) \cap (\mathbb{R} \setminus M) = (-r, 0] \neq \emptyset$. Odtud plyne, že $0 \in \partial M$. Podobně lze dokázat, že $1 \in \partial M$. Je-li $x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$, pak existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \cap M = \emptyset$, a tedy $x \notin \partial M$. Je-li $x \in (0, 1)$, pak existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \cap (\mathbb{R} \setminus M) = \emptyset$, a tedy opět $x \notin \partial M$. Odtud již vyplývá platnost dokazovaného tvrzení. ♣

10.3.24. Příklad. Dokažte, že v metrickém prostoru $\mathbb{R}$ platí: $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ a $\partial(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

Řešení. Nechť $x \in \mathbb{R}$ a $r > 0$. Podle Věty 1.6.29 existují $y \in \mathbb{R}$ a $z \in \mathbb{R}$ splňující $y \in B(x, r) \cap \mathbb{Q}$ a $z \in B(x, r) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Odtud plyne, že $x \in \partial\mathbb{Q}$ a také $x \in \partial(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. ♣

10.3.25. Věta (vlastnosti hranice)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom platí

(a) $\partial M = \partial(P \setminus M)$,
(b) $\partial P = \partial\emptyset = \emptyset$.

Důkaz. (a) Tvrzení zřejmě plyne přímo z Definice 10.3.21.

(b) Nechť $x \in P$. Potom pro každé $r > 0$ platí $B(x, r) \cap \emptyset = \emptyset$, a tedy $x \notin \partial\emptyset$. To znamená, že $\partial\emptyset = \emptyset$. Odtud a z tvrzení (a) potom plyne, že $\partial P = \emptyset$. ∎

10.3.26. Příklad. Nechť P je množina a $M \subset P$. Dokažte, že v prostoru $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ platí $\partial M = \emptyset$.

Řešení. Je-li $M = \emptyset$, potom platnost tvrzení vyplývá z Věty 10.3.25(a). Předpokládejme, že $M \neq \emptyset$ a $x \in P$. Potom pro $r \in (0, 1]$ podle Příkladu 10.3.9 platí $B(x, r) = \{x\}$. Jestliže $x \in M$, pak $B(x, r) \cap (P \setminus M) = \emptyset$. Je-li naopak $x \in P \setminus M$, pak $B(x, r) \cap M = \emptyset$. V obou případech x není hraničním bodem M. Vzhledem k tomu, že x bylo zvoleno libovolně, je $\partial M = \emptyset$. ♣

10.3.27. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Označme $\overline{M} = M \cup \partial M$. Potom množinu $\overline{M}$ nazýváme **uzávěrem** množiny M v prostoru P.

10.3.28. Poznámka. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom zřejmě platí $M \subset \overline{M}$.

10.3.29. Věta. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom M je uzavřená právě tehdy, když obsahuje všechny své hraniční body, tedy když $\partial M \subset M$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků M splňující $x_n \to x$, kde $x \in P$. Jestliže $x \in \partial M$, potom dle předpokladu platí $x \in M$. Předpokládejme, že $x \notin \partial M$. Potom z definice hraničního bodu vyplývá, že existuje $r > 0$ takové, že buď $B(x, r) \cap M = \emptyset$ nebo $B(x, r) \cap (P \setminus M) = \emptyset$. První možnost nemůže nastat, protože $x_n \to x$ a pro každé $n \in N$ platí $x_n \in M$. Tudíž platí $B(x, r) \cap (P \setminus M) = \emptyset$. Speciálně tedy $x \in M$. Odtud plyne, že M je uzavřená.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že M je uzavřená množina a nechť $x \in \partial M$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap M$. Potom zřejmě platí $x_n \to x$. Z uzavřenosti M pak plyne, že $x \in M$. Tvrzení je dokázáno. ∎

Z Věty 10.3.29 bezprostředně vyplývá následující tvrzení.

10.3.30. Důsledek. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Jestliže $\partial M = \emptyset$, pak je množina M uzavřená.

10.3.31. Příklad. Dokažte, že $(0, 1]$ není otevřená ani uzavřená množina v $\mathbb{R}$ a platí $\operatorname{Int}(0, 1] = (0, 1)$ a $\overline{(0, 1]} = [0, 1]$.

Řešení. Označme $M = (0, 1]$. Z Příkladu 10.3.13 víme, že M není otevřená množina a že $\operatorname{Int} M = (0, 1)$. Dále podle Příkladu 10.3.23 platí $\partial M = \{0, 1\}$. Odtud plyne, že $\overline{M} = [0, 1]$, a tedy M není uzavřená množina. ♣

10.3.32. Příklad. Dokažte, že množina $\mathbb{Q}$ není otevřená ani uzavřená v $\mathbb{R}$ a platí $\operatorname{Int} \mathbb{Q} = \emptyset$ a $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Řešení. Z Příkladu 10.3.24 víme, že $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, takže $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Tudíž $\mathbb{Q} \neq \overline{\mathbb{Q}}$, a tedy množina $\mathbb{Q}$ není uzavřená v $\mathbb{R}$.

Nechť $x \in \mathbb{Q}$ a $r > 0$. Potom podle Věty 1.6.29 existuje $y \in B(x, r) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Tedy $B(x, r)$ není podmnožinou $\mathbb{Q}$, takže x není vnitřním bodem množiny $\mathbb{Q}$. To znamená, že $\operatorname{Int} \mathbb{Q} = \emptyset$. Odtud plyne, že $\mathbb{Q} \neq \operatorname{Int} \mathbb{Q}$, a tedy $\mathbb{Q}$ není otevřená v $\mathbb{R}$. ♣

10.3.33. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $x \in P$. Potom **vzdálenost bodu** x **od množiny** A definujeme předpisem

$$\operatorname{dist}(x, A) = \inf\{\varrho(x, y);\ y \in A\}.$$

10.3.34. Poznámka. Speciálně pro každé $x \in P$ platí $\operatorname{dist}(x, \emptyset) = \infty$.

10.3.35. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $A, B \subset P$, $A \subset B$, a $x \in P$. Dokažte, že potom platí $\operatorname{dist}(x, B) \leq \operatorname{dist}(x, A)$.

Řešení. Vzhledem k tomu, že $A \subset B$, platí

$$\{\varrho(x, y);\ y \in A\} \subset \{\varrho(x, y);\ y \in B\}.$$

Tudíž

$$\inf\{\varrho(x, y);\ y \in B\} \leq \inf\{\varrho(x, y);\ y \in A\}.$$

Odtud plyne dokazované tvrzení. ♣

10.3.36. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. **Průměr** prostoru P definujeme předpisem

$$\operatorname{diam} P = \begin{cases} \sup\{\varrho(x, y);\ x, y \in P\}, & \text{pokud } P \neq \emptyset, \\ 0, & \text{pokud } P = \emptyset. \end{cases}$$

Průměrem množiny A rozumíme průměr metrického prostoru (A, ϱ).

10.3.37. Definice. Řekneme, že metrický prostor P je **omezený**, jestliže platí $\operatorname{diam} P < \infty$. Řekneme, že podmnožina A prostoru P je **omezená**, jestliže je metrický prostor (A, ϱ) omezený.

10.3.38. Poznámka. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Je-li množina P prázdná nebo jednobodová, pak platí $\operatorname{diam} P = 0$. Jestliže má množina P alespoň dva různé body, pak z podmínky (a) v Definici 10.1.1 plyne, že $\operatorname{diam} P > 0$.

10.3.39. Příklad. Nechť P je množina. Dokažte, že potom je metrický prostor $(P, \varrho_{\mathrm{diskr}})$ omezený.

Řešení. Je-li $P = \emptyset$, platí $\operatorname{diam} P = 0$. Je-li $P \neq \emptyset$, pak pro každé $x, y \in P$ platí $\varrho(x, y) \leq 1$, a tedy $\operatorname{diam} P \leq 1$. Tudíž je $(P, \varrho_{\mathrm{diskr}})$ omezený. ♣

10.3.40. Poznámky. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor.

(a) Nechť $A, B \subset P$ a $A \subset B$. Potom $\operatorname{diam} A \leq \operatorname{diam} B$.

(b) Množina $A \subset P$ je omezená právě tehdy, když existují $r > 0$ a $x \in P$ taková, že $A \subset B(x, r)$.

10.3.41. Věta (vlastnosti uzávěru)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $B \subset P$.

(a) Platí $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{P} = P$.

(b) Jestliže $A \subset B$, potom $\overline{A} \subset \overline{B}$.

(c) Je-li $A \neq \emptyset$, pak $\overline{A} = \{x \in P;\ \operatorname{dist}(x, A) = 0\}$.

(d) Množina $\overline{A}$ je uzavřená.

(e) Platí $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(f) Platí $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \overline{A}$.

(g) Platí

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subset P;\ F \text{ je uzavřená množina},\ A \subset F\}.$$

Důkaz. (a) Tvrzení plyne z definice uzávěru a z toho, že $\partial\emptyset = 0$ a $\partial P = \emptyset$.

(b) Předpokládejme, že $x \in \overline{A}$. Pokud $x \in B$, pak $x \in \overline{B}$. Jestliže $x \in \overline{A} \setminus B$, potom speciálně $x \in \overline{A} \setminus A$, a tedy $x \in \partial A$. Zvolme $r > 0$. Potom $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$, a tedy také $B(x, r) \cap B \neq \emptyset$, neboť $A \subset B$. Z toho, že $x \notin B$, dále zřejmě plyne, že $B(x, r) \cap (P \setminus B) \neq \emptyset$. Tedy $x \in \partial B$. Protože $\partial B \subset \overline{B}$, dostáváme $x \in \overline{B}$.

(c) Označme

$$M = \{x \in P;\ \operatorname{dist}(x, A) = 0\}.$$

Nechť $y \in P \setminus M$. Potom $\operatorname{dist}(y, A) > 0$. Tedy existuje $r > 0$ takové, že $B(y, r) \cap A = \emptyset$. Nechť $a \in A$ a $z \in B(y, \frac{r}{2})$. Potom

$$\varrho(z, a) \geq \varrho(y, a) - \varrho(z, y) > r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}.$$

Tedy $B(y, \frac{r}{2}) \subset P \setminus M$, takže $P \setminus M$ je otevřená množina. Podle Věty 10.3.17 je množina M uzavřená. Zřejmě platí $A \subset M$, a tedy podle (b) také $\overline{A} \subset \overline{M}$. Protože M je uzavřená, máme $\overline{M} = M$, a tedy $\overline{A} \subset M$.

Dokážeme nyní opačnou inkluzi. Nechť $x \in P \setminus \overline{A}$. Pak existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \cap A = \emptyset$, a tedy $x \notin M$, neboť $\operatorname{dist}(x, A) \geq r > 0$.

(d) Je-li $A = \emptyset$, pak podle tvrzení (a) je $\overline{A} = \emptyset$, a podle Věty 10.3.5(a) je tedy $\overline{A}$ uzavřená. Nechť $A \neq \emptyset$. Pak z tvrzení (c) víme, že

$$\overline{A} = \{x \in P;\ \operatorname{dist}(x, A) = 0\},$$

přičemž v důkazu tvrzení (c) jsme ověřili, že množina na pravé straně rovnosti je uzavřená.

(e) Protože $A \subset A \cup B$, plyne z (b), že $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$. Obdobně dostaneme $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, a tedy $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Dokážeme opačnou inkluzi. Víme, že $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$, a tedy podle (b) platí $\overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$. Podle (d) a Věty 10.3.5(c) je $\overline{A} \cup \overline{B}$ uzavřená množina, tedy $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Odtud plyne, že $\overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Celkem tedy platí $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

(f) Pokud $A = \emptyset$, pak tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme, že $x, y \in \overline{A}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle (d) existují $x', y' \in A$ takové, že $\varrho(x, x') < \varepsilon$ a $\varrho(y, y') < \varepsilon$. Potom

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, x') + \varrho(x', y') + \varrho(y', y) < 2\varepsilon + \operatorname{diam} A.$$

Protože ε bylo libovolně zvoleno, plyne odtud, že $\operatorname{diam} \overline{A} \leq \operatorname{diam} A$. Opačná nerovnost plyne z Poznámek 10.3.28 a 10.3.40(a).

(g) Množinu na pravé straně rovnosti označme symbolem C. Předpokládejme, že F je uzavřená množina splňující $A \subset F$. Podle tvrzení (b) potom platí $\overline{A} \subset \overline{F}$. Protože F je uzavřená množina, platí $\overline{F} = F$, takže $\overline{A} \subset F$. Protože tato inkluze platí pro libovolnou uzavřenou množinu F splňující $A \subset F$, dostáváme celkem $\overline{A} \subset C$. Podle tvrzení (c) je množina $\overline{A}$ uzavřená a navíc zřejmě platí $A \subset \overline{A}$. Odtud ihned plyne, že $C \subset \overline{A}$. Kombinací obou dokázaných inkluzí dostáváme tvrzení (g). ■

10.3.42. Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Dokažte, že

$$\overline{(a, b)} = \begin{cases} [a, b], & \text{pokud } a, b \in \mathbb{R}, \\ (-\infty, b], & \text{pokud } a = -\infty,\ b \in \mathbb{R}, \\ [a, \infty), & \text{pokud } a \in \mathbb{R},\ b = \infty, \\ \mathbb{R}, & \text{pokud } a = -\infty,\ b = \infty. \end{cases}$$

Řešení. Jestliže $a, b \in \mathbb{R}$, pak obdobným postupem jako v řešení Příkladu 10.3.23 dokážeme, že $\partial(a, b) = \{a, b\}$. Jestliže $a = -\infty$ a $b \in \mathbb{R}$, pak podobně dokážeme, že $\partial(-\infty, b) = \{b\}$. Jestliže $a \in \mathbb{R}$ a $b = \infty$, odvodíme obdobným postupem, že $\partial(a, \infty) = \{a\}$. Jestliže $a = -\infty$ a $b = \infty$ je tvrzení zřejmé. ♣

10.3.43. Poznámka. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $B \subset P$. Potom platí $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, přičemž tato inkluze může být vlastní.

Důkaz. Podle Věty 10.3.41(b) platí $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ a $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$, takže $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Dokážeme, že inkluze může být vlastní pomocí následujícího příkladu. Nechť $P = \mathbb{R}$, $A = (0, 1)$ a $B = (1, 2)$. Potom $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$, ale $\overline{A} = [0, 1]$ a $\overline{B} = [1, 2]$, takže $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\} \neq \emptyset$. ∎

10.3.44. Věta. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $Q \subset P$. Nechť $A \subset Q$. Potom A je otevřená (respektive uzavřená) v (Q, ϱ) právě tehdy, když existuje množina $B \subset P$ otevřená (respektive uzavřená) v (P, ϱ) splňující $A = B \cap Q$.

Důkaz. Nechť A je otevřená množina v prostoru (Q, ϱ). Podle Věty 10.3.19 je

$$A = \bigcup \{B_Q(x, r);\ x \in Q,\ r > 0,\ B_Q(x, r) \subset A\},$$

kde

$$B_Q(x, r) = \{y \in Q;\ \varrho(x, y) < r\}.$$

Označme

$$B = \bigcup \{B(x, r);\ x \in Q,\ r > 0,\ B_Q(x, r) \subset A\}.$$

Podle Věty 10.3.15(b) je B otevřená množina v prostoru (P, ϱ). Navíc zřejmě platí $A = B \cap Q$.

Obráceně, předpokládejme, že B je otevřená množina v prostoru (P, ϱ) splňující $A = B \cap Q$. Podle Věty 10.3.19 je

$$B = \bigcup \{B(x, r);\ x \in P,\ r > 0,\ B(x, r) \subset B\}.$$

Potom platí

$$A = \bigcup \{B_Q(x, r);\ x \in Q,\ r > 0,\ B(x, r) \subset B\},$$

tedy

$$A = \bigcup \{B_Q(x, r);\ x \in Q,\ r > 0,\ B_Q(x, r) \subset A\}.$$

Tedy opět podle Věty 10.3.15(b) je množina A otevřená v prostoru (Q, ϱ).

Potom podle Věty 10.3.41(c) a (d) je množina B uzavřená v prostoru (P, ϱ). Navíc zřejmě platí

$$B \cap Q = \{x \in Q;\ \operatorname{dist}(x, A) = 0\}.$$

Tím je dokázáno tvrzení věty pro případ, kdy množina A je otevřená.

Nyní předpokládejme, že A je uzavřená v prostoru (Q, ϱ). Podle Věty 10.3.17 to nastává právě tehdy, když je množina $Q \setminus A$ otevřená v prostoru (Q, ϱ). Podle již dokázaného tvrzení to nastává právě tehdy, když existuje otevřená množina H v (P, ϱ) splňující $H \cap Q = Q \setminus A$. Položíme-li $B = P \setminus H$, pak je množina B uzavřená v (P, ϱ) a splňuje

$$B \cap Q = (P \setminus H) \cap Q = Q \setminus H = Q \setminus (Q \setminus A) = A.$$

■

10.3.45. Příklady. (a) Dokažte, že interval $[0, 1]$ je otevřenou množinou v prostoru $[0, 1] \cup (2, 3)$ se zděděnou eukleidovskou metrikou, ačkoli to není otevřená množina v prostoru $\mathbb{R}$.

(b) Dokažte, že jednobodová množina $\{2\}$ je otevřenou množinou v prostoru $[0, 1] \cup \{2\}$ se zděděnou eukleidovskou metrikou, ačkoli to není otevřená množina v prostoru $\mathbb{R}$.

Řešení. (a) Označme $P = [0, 1] \cup (2, 3)$ a $G = [0, 1]$. Nechť $x \in G$. Potom zřejmě platí $\{y \in P;\ y \in B(x, 1)\} \subset G$. Odtud plyne, že G je otevřená množina.

(b) Označme $P = [0, 1] \cup \{2\}$ a $G = \{2\}$. Platí $\{y \in P;\ y \in B(2, 1)\} \subset G$. Protože bod 2 je jediným bodem množiny G, plyne odtud, že G je otevřená množina. ♣

10.4. Spojitá zobrazení mezi metrickými prostory

10.4.1. Definice. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, $f : P \to Q$, $a \in P$ a $M \subset P$. Řekneme, že zobrazení f je

- **spojité v bodě** a **vzhledem k množině** M, jestliže $a \in M$ a platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in M\colon\ \operatorname{dist}(x, a) < \delta \ \Rightarrow\ \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon, \tag{10.6}$$

- **spojité v bodě** a, jestliže je spojité v a vzhledem k P,
- **spojité na množině** M, jestliže je spojité v každém bodě $a \in M$ vzhledem k M,
- **spojité**, jestliže je spojité na P.

10.4.2. Výrok (10.6) můžeme ekvivalentně zapsat takto:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in B_\varrho(a, \delta) \cap M\colon\ f(x) \in B_\sigma(f(a), \varepsilon),$$

neboli

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon\ f(B_\varrho(a, \delta) \cap M) \subset B_\sigma(f(a), \varepsilon).$$

10.4.3. Je-li $P = Q = \mathbb{R}$ (s obvyklou metrikou), pak výše uvedená definice spojitosti souhlasí s definicí spojitosti reálné funkce jedné reálné proměnné.

10.4.4. Příklad. Nechť $i, n \in \mathbb{N}$, $i \leq n$. Nechť $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je projekce definovaná předpisem $\pi_i(x) = x_i$. Dokažte, že zobrazení π_i je spojité.

Řešení. Zvolme $a \in \mathbb{R}^n$ a $\varepsilon > 0$. Položme $\delta = \varepsilon$. Potom pro každé $x \in B(a, \delta)$ platí

$$\begin{aligned}\varrho_e(\pi_i(x), \pi_i(a)) = |\pi_i(x) - \pi_i(a)| = |x_i - a_i| &\leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j)^2} \\ &= \varrho_e(x, a) < \delta = \varepsilon,\end{aligned}$$

a tedy π_i je spojité v a. ♣

Spojitost zobrazení mezi metrickými prostory závisí zásadním způsobem na zvolených metrikách. Náseldující příklad tento fakt ilustruje.

10.4.5. Příklad. Nechť $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f : P \to Q$. Dokažte, že f je spojité.

Řešení. Předpokládejme, že $a \in P$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Položme $\delta = 1$. Potom platí $B_{\varrho_{\text{diskr}}}(a, \delta) = \{a\}$. Odtud plyne, že pro každé $x \in B_{\varrho_{\text{diskr}}}(a, \delta)$ platí $f(x) = f(a)$, a tedy $f(x) \in B_\sigma(f(a), \varepsilon)$. To znamená, že f je spojité v a. Tím je důkaz spojitosti f dokončen. ♣

10.4.6. Věta (charakterizace spojitosti)**.** Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f : P \to Q$. Potom jsou následující tři výroky ekvivalentní.

(i) Zobrazení f je spojité na P.

(ii) Pro každou množinu G otevřenou v Q je množina $f^{-1}(G)$ otevřená v P.

(iii) Pro každou množinu F uzavřenou v Q je množina $f^{-1}(F)$ uzavřená v P.

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Předpokládejme, že G je otevřená množina v Q a $x \in f^{-1}(G)$. Potom $f(x) \in G$. Protože G je otevřená, existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $B_\sigma(f(x), \varepsilon) \subset G$. Díky spojitosti zobrazení f nalezneme $\delta > 0$ takové, že $f(B_\varrho(x, \delta)) \subset B_\sigma(f(x), \varepsilon)$. To znamená, že

$$B_\varrho(x, \delta) \subset f^{-1}(B_\sigma(f(x), \varepsilon)) \subset f^{-1}(G).$$

Bod x je tedy vnitřním bodem množiny $f^{-1}(G)$. Odtud plyne, že $f^{-1}(G)$ je otevřená množina v P.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Nechť $a \in P$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Množina $f^{-1}(B_\sigma(f(a), \varepsilon))$ obsahuje prvek a a podle předpokladu je otevřená. Nalezneme tedy $\delta > 0$

takové, že $B_\varrho(a,\delta) \subset f^{-1}(B_\sigma(f(a),\varepsilon))$, neboli $f(B_\varrho(a,\delta)) \subset B_\sigma(f(a),\varepsilon)$. Odtud plyne, že f je spojité v a.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Nechť F je uzavřená množina v Q. Potom $Q \setminus F$ je otevřená množina v Q, a tedy, podle (ii), je množina $f^{-1}(Q \setminus F)$ otevřená v P. Z Příkladu 1.9.21(d) plyne, že

$$\begin{aligned} f^{-1}(F) &= f^{-1}(Q \setminus (Q \setminus F)) = f^{-1}(Q) \setminus f^{-1}(Q \setminus F) \\ &= P \setminus f^{-1}(Q \setminus F). \end{aligned}$$

Množina $f^{-1}(F)$ je tedy uzavřená v P.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Nechť G je otevřená množina v Q. Potom $Q \setminus G$ je uzavřená množina v Q, a tedy, podle (iii), je množina $f^{-1}(Q \setminus G)$ uzavřená v P. Množina $f^{-1}(G) = P \setminus f^{-1}(Q \setminus G)$ je tudíž otevřená v P. ■

10.4.7. Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor, $M \subset P$ a $a \in P$. Řekneme, že a je **hromadným bodem množiny** M, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ platí $M \cap (B(a,\varepsilon) \setminus \{a\}) \neq \emptyset$. Množinu všech hromadných bodů množiny M nazýváme **derivací množiny** M a značíme ji symbolem M'. Řekneme, že a je **izolovaným bodem množiny** M, jestliže $a \in M \setminus M'$.

10.4.8. Příklad. Nechť $M = (0,1)$. Dokažte, že $M' = [0,1]$.

Řešení. Zvolme $x \in [0,1]$ a $\varepsilon > 0$. Označme

$$y = \begin{cases} \min\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\}, & \text{je-li } x = 0, \\ \max\{\frac{x}{2}, \frac{x-\varepsilon}{2}\}, & \text{je-li } x \in (0,1), \\ \max\{\frac{1}{2}, 1 - \frac{\varepsilon}{2}\}, & \text{je-li } x = 1. \end{cases}$$

Ve všech případech potom platí $y \neq x$ a $y \in B(x,\varepsilon) \cap M$, takže

$$(B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap M \neq \emptyset.$$

Odtud plyne inkluze $M' \subset [0,1]$.

Nyní zvolme $x \notin [0,1]$. Položme $\varepsilon = \min\{|x|, |x-1|\}$. Potom $\varepsilon > 0$ a zřejmě platí $B(x,\varepsilon) \cap M = \emptyset$. Odtud plyne inkluze $[0,1] \subset M'$, a tedy celkem $M' = [0,1]$. ♣

10.4.9. Příklad. Nechť $M = \{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$. Dokažte, že $M' = \{0\}$.

Řešení. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n \in \mathbb{N}$ splňující $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Položme $y = \frac{1}{n}$. Potom $y \neq 0$ a $y \in B(0,\varepsilon) \cap M$. Tedy $0 \in M'$.

Nyní zvolme $x \neq 0$. Položme

$$\varepsilon = \begin{cases} |x|, & \text{je-li } x \in (-\infty, 0), \\ \min\{|x - \frac{1}{n}|, |x - \frac{1}{n+1}|\}, & \text{je-li } n \in \mathbb{N} \text{ a } x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}), \\ |x-1|, & \text{je-li } x \in (1,\infty). \end{cases}$$

Ve všech případech potom platí $\varepsilon > 0$ a $B(x,\varepsilon) \cap M = \emptyset$. Tedy $x \notin M'$. Odtud plyne, že $M' = \{0\}$. ♣

10.4.10. Příklad. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je prostá omezená posloupnost reálných čísel a $M = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Dokažte, že $M' = H(\{a_n\})$.

Řešení. Předpokládejme, že $x \in H(\{a_n\})$ a nechť $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel splňující $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = x$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq k_0$, platí $|a_{n_k} - x| < \varepsilon$. Z toho, že posloupnost $\{a_n\}$ je prostá, plyne, že existuje $k \in \mathbb{N}, k \geq k_0$ takové, že $a_{n_k} \neq x$. Pak $a_{n_k} \in (B(x,\varepsilon)\setminus\{x\})\cap M$. Odtud plyne, že $H(\{a_n\}) \subset M'$.

Nyní předpokládejme, že $x \in M'$. Podle definice hromadného bodu to znamená, že platí výrok

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists y \in (B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap M. \tag{10.7}$$

Dle (10.7) lze nalézt $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_1} \neq x$ a platí $a_{n_1} \in B(x,1)$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ máme určena přirozená čísla $n_1, \dots, n_k$. Podle (10.7) lze nalézt $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ takové, že $n_{k+1} > n_k$, $a_{n_{k+1}} \neq x$ a $a_{n_{k+1}} \in B(x, \frac{1}{k+1})$. Podle principu matematické indukce dostaneme touto konstrukcí rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, pro kterou navíc zřejmě platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = x$. Odtud plyne, že $x \in H(\{a_n\})$, a tedy $M' \subset H(\{a_n\})$. Celkem jsme dokázali, že $M' = H(\{a_n\})$.

♣

10.4.11. Příklad. Nechť $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je diskrétní metrický prostor a $M \subset P$. Dokažte, že $M' = \emptyset$.

Řešení. Pro každé $x \in P$ zřejmě platí $B(x,1) \cap M = \{x\}$, a tedy $(B(x,1) \setminus \{x\})\cap M = \emptyset$. Tudíž $x \notin M'$. Protože x bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že $M' = \emptyset$. ♣

10.4.12. Definice. Nechť (P,ϱ) a (Q,σ) jsou metrické prostory, $f\colon P \to Q$, $A \subset P$, $a \in A'$ a $b \in Q$. Řekneme, že zobrazení f **má v bodě** a **limitu** b **vzhledem k množině** A, jestliže platí

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in A\colon\ (0 < \operatorname{dist}(x,a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), b) < \varepsilon)\,.$$

Jestliže $A = P$, pak říkáme, že f **má v bodě** a **limitu** b.

10.4.13. Věta (jednoznačnost limity v metrickém prostoru)**.** Nechť (P,ϱ) a (Q,σ) jsou metrické prostory, $f\colon P \to Q$, $A \subset P$ a $a \in A'$. Potom f má v bodě a nejvýše jednu limitu vzhledem k množině A.

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že $b_1, b_2 \in Q$, $b_1 \neq b_2$, jsou limitami zobrazení f vzhledem k množině A. Zvolme $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}\sigma(b_1, b_2))$.

Potom existuje $\delta_1 > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in A\colon\ (0 < \operatorname{dist}(x,a) < \delta_1 \Rightarrow \sigma(f(x), b_1) < \varepsilon).$$

Dále existuje $\delta_2 > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in A\colon (0 < \varrho(x,a) < \delta_2 \Rightarrow \sigma(f(x), b_2) < \varepsilon).$$

Díky tomu, že $a \in A'$, nalezneme $x \in A$ takové, že $0 < \varrho(x,a) < \min(\delta_1, \delta_2)$. Potom platí

$$\sigma(b_1, b_2) < \sigma(b_1, f(x)) + \sigma(f(x), b_2) < 2\varepsilon < \sigma(b_1, b_2),$$

což je spor. ∎

10.4.14. Označení. Nechť (P,ϱ) a (Q,σ) jsou metrické prostory, $f\colon P \to Q$, $A \subset P$ a $a \in A'$. Pokud existuje limita zobrazení f v bodě a vzhledem k množině A, označujeme tuto limitu symbolem

$$\lim_{x\to a,\, x\in A} f(x).$$

Je-li $A = P$, píšeme jen $\lim_{x\to a} f(x)$.

10.4.15. Věta (Heine). Nechť (P,ϱ) a (Q,σ) jsou metrické prostory, $A \subset P$ a $f\colon P \to Q$. Nechť $a \in A'$ a $b \in Q$. Potom jsou následující dva výroky ekvivalentní.

(i) Platí $\lim_{x\to a,\, x\in A} f(x) = b$.
(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ prvků množiny $A\setminus\{a\}$ splňující $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Důkaz. (i)$\Rightarrow$(ii) Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in A,\ x \neq a\colon \varrho(x,a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), b) < \varepsilon.$$

Dále existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $x_n \in (B(a,\delta)\setminus\{a\}) \cap A$. Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $f(x_n) \in B(b,\varepsilon)$.

(ii)$\Rightarrow$(i) Předpokládejme pro spor, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\forall \delta > 0\ \exists x \in A,\ x \neq a\colon x \in B(a,\delta)\ \wedge\ f(x) \notin B(b,\varepsilon).$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Položme $\delta = \frac{1}{n}$. K tomuto δ nalezneme prvek x_n splňující $x_n \in (B(a,\frac{1}{n}) \setminus \{a\}) \cap A$ a $f(x_n) \notin B(b,\varepsilon)$. Potom posloupnost $\{x_n\}$ splňuje $x_n \to a$ v prostoru (P,ϱ), ale není pravda, že $f(x_n) \to b$ v prostoru (Q,σ). ∎

10.4.16. Věta. Nechť (P,ϱ) a (Q,σ) jsou metrické prostory a $f\colon P \to Q$ je spojité zobrazení. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků P a $x \in P$ je takové, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Potom $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

Důkaz. ∎

10.4.17. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $f, g\colon P \to \mathbb{R}$ jsou zobrazení definovaná na P s hodnotami v $\mathbb{R}$. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $A \subset \mathbb{R}$. Předpokládejme, že platí

$$\lim_{x\to a, x\in A} f(x) = \alpha \quad \text{a} \quad \lim_{x\to a, x\in A} g(x) = \beta.$$

Potom

(a) $\lim_{x\to a,x\in A}(f(x) + g(x)) = \alpha + \beta$;
(b) $\lim_{x\to a,x\in A}(f(x)\cdot g(x)) = \alpha \cdot \beta$;
(c) jestliže $\beta \neq 0$, pak $\lim_{x\to a,x\in A} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$.

10.4.18. Zcela obdobné tvrzení jako ve Větě 10.4.15 platí i pro spojitost funkce v daném bodě.

10.4.19. Věta (vztah mezi limitou a spojitostí v bodě)**.** Nechť (P,ϱ) a (Q,σ) jsou metrické prostory, $A \subset P$ a f je zobrazení z prostoru P do prostoru Q. Nechť $a \in A \cap A' \cap D(f)$. Potom zobrazení f je spojité v a vzhledem k množině A právě tehdy, když $\lim_{x\to a,x\in A} f(x) = f(a)$.

10.4.20. Věta (o spojitosti složeného zobrazení v bodě)**.** Nechť (X,ϱ), (Y,σ) a (Z,τ) jsou metrické prostory, $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to Z$. Nechť $A \subset X$, $a \in A$, $B \subset Y$, $f(a) \in B$ a platí:

- existuje $\delta > 0$ takové, že $f(B(a,\delta) \cap A) \subset B$;
- f je spojité v bodě a vzhledem k A;
- g je spojité v bodě $f(a)$ vzhledem k B.

Potom zobrazení $g \circ f$ je spojité v bodě a vzhledem k A.

10.4.21. Věta (o spojitosti složeného zobrazení)**.** Nechť (X,ϱ), (Y,σ) a (Z,τ) jsou metrické prostory, $f\colon X \to Y$ je spojité a $g\colon Y \to Z$ je spojité. Potom zobrazení $g \circ f\colon X \to Z$ je spojité.

Důkaz. Nechť $G \subset Z$ je otevřená množina v prostoru (Z,τ). Zobrazení g je spojité, a tedy podle věty o charakterizaci spojitého zobrazení (Věta 10.4.6, (i)$\Rightarrow$(ii)), je $g^{-1}(G)$ otevřená množina v prostoru (Y,σ). Zobrazení f je spojité, takže podle téže věty je množina $f^{-1}(g^{-1}(G))$ otevřená v prostoru (X,ϱ). Protože $(g\circ f)^{-1}(G) = f^{-1}(g^{-1}(G))$, plyne odtud pomocí Věty 10.4.6, (ii)$\Rightarrow$(i), že zobrazení $g \circ f\colon X \to Z$ je spojité. ■

10.4.22. Věta (o limitě složeného zobrazení)**.** Nechť (X,ϱ), (Y,σ) a (Z,τ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z X do Y a g je zobrazení z Y do Z. Nechť $A \subset X$, $a \in A'$, $B \subset Y$, $b \in B'$, $c \in Z$ a platí

- existuje $\delta > 0$ takové, že $f(A \cap (B(a,\delta) \setminus \{a\})) \subset B$;
- $\lim_{x\to a,x\in A} f(x) = b$;
- $\lim_{y\to b,y\in B} g(y) = c$.

Nechť je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(P) existuje $\eta > 0$ takové, že pro každé $x \in B(a, \eta) \cap A$, $x \neq a$, platí $f(x) \neq b$;

(S) zobrazení g je spojité v bodě b vzhledem k množině B.

Potom platí

$$\lim_{x \to a, x \in A} (g \circ f)(x) = c.$$

10.4.23. Příklad. Nechť $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}^2$, $Z = \mathbb{R}$, ϱ a σ jsou eukleidovské metriky na $\mathbb{R}^2$ a τ je eukleidovská metrika na $\mathbb{R}$. Nechť zobrazení $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definováno předpisem

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{pokud buď } x \neq 0 \text{ nebo } y \neq 0; \\ 0, & \text{pokud } x = y = 0. \end{cases}$$

(a) Nechť $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. Dokažte, že

$$\lim_{x \to 0} F(x, kx) = 0.$$

(b) Dokažte, že

$$\lim_{x \to 0} F(x, x^2) = \frac{1}{2}.$$

10.4.24. Definice. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f\colon P \to Q$ je zobrazení definované na P s hodnotami v Q. Řekneme, že zobrazení f je **homeomorfismus**, jestliže je prosté a na, navíc je spojité a zobrazení $f^{-1}\colon Q \to P$ je také spojité. Řekneme, že prostory (P, ϱ) a (Q, σ) jsou **homeomorní**, jestliže existuje homeomorfismus $f\colon P \to Q$.

10.4.25. Definice. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f\colon P \to Q$ je zobrazení. Řekneme, že zobrazení f je **stejnoměrně spojité** na P, jestliže platí výrok

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in P, \varrho(x, y) < \delta\colon \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

10.4.26. Definice. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f : P \to Q$. Řekneme, že zobrazení f je **lipschitzovské**, jestliže

$$\exists K > 0 \; \forall x, y \in P : \sigma(f(x), f(y)) \leq K\varrho(x, y).$$

10.4.27. Příklad. Dokažte, že každé lipschitzovské zobrazení je stejnoměrně spojité a že opačná implikace neplatí.

Řešení. Nechť $f : (P, \varrho) \to)Q, \sigma)$ je lipschitzovské zobrazení mezi metrickými prostory. Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$. Potom pro každé $x, y \in P$ splňující $\varrho(x, y) < \delta$ platí

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq K\varrho(x, y) < K\delta = \varepsilon.$$

Odtud plyne, že zobrazení f je stejnoměrně spojité.

K důkazu druhého tvrzení využijeme vlastností funkce $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$. Funkce f je zřejmě spojitá, a tedy podle Věty 9.2.18 také stejnoměrně spojitá na $[0, 1]$. Předpokládejme, že f je lipschitzovská na $[0, 1]$, tedy že existuje K takové, že

$$\forall x, y \in [0, 1]\colon |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq K|x - y|.$$

Tento vztah musí platit také pro speciální volbu $x = 0$, tedy

$$\forall y \in (0, 1]\colon \sqrt{y} \leq Ky,$$

to jest

$$\forall y \in (0, 1]\colon \frac{1}{\sqrt{y}} \leq K.$$

Tento odhad ale zřejmě neplatí, takže dostáváme spor. Odtud plyne, že funkce f není lipschitzovská na $[0, 1]$. ♣

10.5. Kompaktní prostory

10.5.1. Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je **kompaktní**, jestliže z každé posloupnosti prvků z P lze vybrat konvergentní podposloupnost. Řekneme, že množina $K \subset P$ je **kompaktní** v P, jestliže je metrický prostor (K, ϱ) kompaktní, tedy jestliže z každé posloupnosti prvků z K lze vybrat podposloupnost, která konverguje v P a jejíž limita je prvkem K.

10.5.2. Příklad. V každém metrickém prostoru je každá konečná množina kompaktní.

Řešení. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$ je konečná. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků z A. Potom existuje alespoň jeden prvek $x \in A$, který se v posloupnosti $\{x_n\}$ vyskytuje nekonečněkrát. Posloupnost $\{x_n\}$ tudíž obsahuje konstantní, a tedy konvergentní podposloupnost. ♣

10.5.3. Věta. Nechť metrický prostor (P, ϱ) obsahuje nekonečnou množinu A splňující

$$\exists \delta > 0\ \forall x, y \in A,\ x \neq y\colon \varrho(x, y) \geq \delta.$$

Potom P není kompaktní.

Důkaz. Z předpokladů věty vyplývá, že existuje prostá posloupnost $\{x_n\}$ prvků A. Předpokládejme, že P je kompaktní. Potom existuje podposloupnost

$\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in P$ takové, že $x_{n_k} \to x$. Nalezneme k_0 takové, že pro každé $k \geq k_0$ platí $\varrho(x_{n_k}, x) < \frac{\delta}{2}$. Potom pro $k \geq k_0$ platí

$$\delta \leq \varrho(x_k, x_{k+1}) \leq \varrho(x_k, x) + \varrho(x, x_{k+1}) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

což je spor. Prostor P tedy není kompaktní. ■

10.5.4. Příklad. Nechť P je množina. Dokažte, že metrický prostor $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je kompaktní právě tehdy, když je P konečná.

Řešení. $\Rightarrow$ Předpokládejme, že množina P je nekonečná. Pro každé $x, y \in P$, $x \neq y$, platí $\varrho(x, y) = 1$. Je tedy splněna podmínka z Věty 10.5.3 pro $\delta = 1$. Prostor $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ tedy není kompaktní.

$\Leftarrow$ Tato implikace plyne z Příkladu 10.5.2. ♣

10.5.5. Věta. Každý uzavřený interval je kompaktní v $\mathbb{R}$.

Důkaz. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků z $[a, b]$. Potom je $\{x_n\}$ omezená. Dle Bolzanovy-Weierstrassovy věty (Věta 2.4.6) existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in \mathbb{R}$ takové, že $x_{n_k} \to x$. Podle Příkladu 10.3.2 je $[a, b]$ uzavřená množina. Tedy $x \in [a, b]$. Odtud plyne, že $[a, b]$ je kompaktní množina v $\mathbb{R}$. ■

10.5.6. Věta. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $K \subset P$ je kompaktní. Potom je množina K uzavřená.

Důkaz. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků množiny K taková, že $\lim x_n = y$, kde $y \in P$. Protože K je kompaktní, existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in K$ takové, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Z věty o jednoznačnosti limity (Věta 10.2.4(b)) plyne $x = y$, takže $y \in K$. To podle definice znamená, že množina K je uzavřená. ■

10.5.7. Věta. Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor. Potom platí:

(a) Prostor P je omezený.
(b) Každá uzavřená podmnožina prostoru P je kompaktní.

Důkaz. (a) Předpokládejme, že prostor P není omezený. Zvolme libovolné $x \in P$. Protože $\operatorname{diam} P = \infty$, existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ prvek $x_n \in P$ takový, že $\varrho(x, x_n) \geq n$. Protože P je kompaktní prostor, existují podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $y \in P$ takový, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = y$. Tedy existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $\varrho(y, x_{n_k}) \leq 1$. Nechť $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, je takové, že $n_k > \varrho(x, y) + 1$. Potom

$$n_k \leq \varrho(x, x_{n_k}) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, x_{n_k}) \leq \varrho(x, y) + 1 < n_k,$$

což je spor. Prostor P je tedy omezený.

(b) Nechť $F \subset P$ je uzavřená množina a $\{x_n\}$ je posloupnost prvků F. Potom je $\{x_n\}$ také posloupnost prvků kompaktního prostoru P, takže existují podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in P$ takový, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Protože F je uzavřená, platí $x \in F$. Množina F je tedy kompaktní v P. ■

10.5.8. Věta (charakterizace kompaktnosti v $\mathbb{R}^n$)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}$. Množina K je kompaktní v $\mathbb{R}^n$ právě tehdy, když je omezená a uzavřená.

Důkaz. $\Rightarrow$ Tato implikace plyne z Věty 10.5.7(a) a z Věty 10.5.6.

$\Leftarrow$ Použijeme matematickou indukci podle n.

Nechť $n = 1$ a $\{x_k\}$ je posloupnost prvků z K. Množina K je omezená, a tedy i posloupnost $\{x_k\}$ je omezená. Podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty (Věta 2.4.6) lze z posloupnosti $\{x_k\}$ vybrat konvergentní podposloupnost s limitou $y \in \mathbb{R}$. Množina K je uzavřená, a tedy $y \in K$. Odtud plyne, že K je kompaktní v $\mathbb{R}$.

Nyní předpokládejme, že tvrzení platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Nechť $K \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ je omezená a uzavřená množina a $\{x^k\}$ je posloupnost prvků z K. Označme $x^k = [a^k, b^k]$, kde $a^k \in \mathbb{R}^n$ a $b^k \in \mathbb{R}$. Definujme zobrazení $\pi_1 : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ a $\pi_2 : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ předpisy

$$\pi_1(x_1, \dots, x_{n+1}) = [x_1, \dots, x_n], \quad \pi_2(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}.$$

Množiny $\pi_1(K)$ a $\pi_2(K)$ jsou omezené, neboť pro každé $x, y \in K$ platí

$$\varrho_2(\pi_1(x), \pi_1(y)) \le \varrho_2(x, y) \le \operatorname{diam} K$$

a

$$\varrho_2(\pi_2(x), \pi_2(y)) \le \varrho_2(x, y) \le \operatorname{diam} K.$$

Podle Věty 10.3.41(f) je množina $\overline{\pi_1(K)}$ také omezená. Podle indukčního předpokladu je množina $\overline{\pi_1(K)}$ kompaktní. Z posloupnosti $\{a^k\}$ vybereme konvergentní podposloupnost $\{a^{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$, kde $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Limitu posloupnosti $\{a^{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ označíme symbolem a. Potom $a \in \overline{\pi_1(K)}$. Označme

$$c^j = a^{k_j}, \quad d^j = b^{k_j} \quad \text{a} \quad y^j = [c^j, d^j], \quad j \in \mathbb{N}.$$

Posloupnost $\{d^j\}$ je omezená, neboť je podmnožinou omezené množiny $\pi_2(K)$. Existuje tedy rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{j_l\}_{l=1}^{\infty}$ a prvek $d \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{l\to\infty} d^{j_l} = d$. Potom

$$\lim_{l\to\infty} y^{j_l} = \lim_{l\to\infty} [c^{j_l}, d^{j_l}] = [a, d],$$

a $\{y^{j_l}\}_{l=1}^{\infty}$ je vybraná podposloupnost z $\{x^k\}$. Množina K je podle předpokladu uzavřená, a proto $[a, d] \in K$. Odtud plyne, že K je kompaktní v $\mathbb{R}^{n+1}$. ■

10.5.9. Tvrzení Věty 10.5.8 neplatí pro obecné metrické prostory. Například libovolná nekonečná množina v diskrétním metrickém prostoru je omezená a uzavřerná, avšak nikoli kompaktní. Následující příklad popisuje takovou situaci v případě velmi důležitého prostoru.

10.5.10. Příklad. Dokažte, že množina $\overline{B(0,1)}$, kde

$$B(0,1) = \{f \in C([0,1]);\ \forall x \in [0,1] \colon |f(x)| < 1\},$$

je v metrickém prostoru $(\mathcal{C}([0,1]), \varrho_{\sup})$ omezená a uzavřená, avšak nikoli kompaktní.

Řešení. Množina $\overline{B(0,1)}$ je zřejmě omezená. Podle Věty 10.3.41(d) je také uzavřená. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme funkci $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^n x, & x \in [0, \frac{1}{2^n}]; \\ 1, & x \in [\frac{1}{2^n}, 1]. \end{cases}$$

Zřejmě platí $f_n \in \overline{B(0,1)}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$. Potom $1 - 2^{m-n} \geq \frac{1}{2}$, a tedy

$$\varrho_{\sup}(f_n, f_m) \geq |f_n(\tfrac{1}{2^n}) - f_m(\tfrac{1}{2^n})| = 1 - 2^{m-n} \geq \frac{1}{2}.$$

Z Věty 10.5.3 tedy plyne, že $\overline{B(0,1)}$ není kompaktní. ♣

10.5.11. Věta (spojitý obraz kompaktu)**.** Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor, (Q, σ) je metrický prostor a $f \colon P \to Q$ je spojité zobrazení. Potom $f(P)$ je kompaktní množina.

Důkaz. Nechť $\{y_n\}$ je posloupnost prvků množiny $f(P)$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in P$ takové, že $f(x_n) = y_n$. Protože P je kompaktní, existuje rostoucí posloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ a prvek $x \in P$ takové, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Ze spojitosti zobrazení f plyne, že $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$. Označíme-li $y = f(x)$, pak $y \in f(P)$ a platí $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y$. Z libovolně zvolené posloupnosti prvků $f(P)$ jsme vybrali konvergentní podposloupnost. Odtud plyne, že množina $f(P)$ je kompaktní v Q. ■

10.5.12. Věta. Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor, (Q, σ) je metrický prostor a $f \colon P \to Q$ je spojité zobrazení. Potom f je stejnoměrně spojité.

Důkaz. Předpokládejme, že f není stejnoměrně spojité. Potom exituje $\varepsilon > 0$ a posloupnosti $\{x_n\}, \{y_n\}$ prvků z P splňující $\varrho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ a $\sigma(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. Z kompaktnosti P plyne, že existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a $x \in P$ takové, že $x_{n_k} \to x$. Potom také $y_{n_k} \to x$, neboť

$$\varrho(x, y_{n_k}) \leq \varrho(x, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, y_{n_k}) \to 0.$$

Ze spojitosti f tudíž plyne, že $f(x_{n_k}) \to f(x)$ a $f(y_{n_k}) \to f(x)$. Nalezneme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $\sigma(f(x_{n_k}), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ a $\sigma(f(y_{n_k}), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Potom

$$\varepsilon \leq \sigma(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leq \sigma(f(x_{n_k}), f(x)) + \sigma(f(y_{n_k}), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

což je spor. Zobrazení f je tedy stejnoměrně spojité. ■

10.5.13. Definice. Nechť (P, ϱ) je neprázdný metrický prostor a $f : P \to \mathbb{R}$. Řekneme, že zobrazení f **nabývá svého maxima** na P, jestliže existuje $x \in P$ takové, že $f(x) \geq f(y)$ pro každé $y \in P$. Obdobně řekneme, že f **nabývá svého minima** na P, jestliže existuje $x \in P$ takové, že $f(x) \leq f(y)$ pro každé $y \in P$.

10.5.14. Věta. Nechť (P, ϱ) je neprázdný kompaktní metrický prostor a $f : P \to \mathbb{R}$ je spojité zobrazení. Potom f nabývá na P svého maxima i minima.

Důkaz. Označme $y = \sup f(P)$. Podle Věty 10.5.11 je $f(P)$ kompaktní, a tedy dle Věty 10.5.7(a) omezená množina, takže $y \in \mathbb{R}$. Potom existuje posloupnost $\{y_n\}$ prvků z $f(P)$ taková, že $\lim y_n = y$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in P$ takové, že $f(x_n) = y_n$. Z kompaktnosti prostoru P plyne, že existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a $x \in P$ splňující $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Protože f je spojité zobrazení, platí také $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$. Podle věty o limitě vybrané posloupnosti platí $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y$. Protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $f(x_{n_k}) = y_{n_k}$, plyne odtud, že $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = y$. Z jednoznačnosti limity vyplývá, že $f(x) = y$. Tedy f nabývá na P svého maxima. Obdobně lze dokázat, že f nabývá na P svého minima. ■

10.5.15. Předpoklad spojitosti zobrazení i předpoklad kompaktnosti definičního oboru zobrazení ve Větě 10.5.14 jsou důležité. Nespojité zobrazení nemusí nabývat extrémů ani na kompaktní množině, příkladem je funkce f definovaná na kompaktní množině $[0, 1]$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x = 0, \text{ nebo } x = 1, \\ 2x - 1, & \text{pokud } x \in (0, 1). \end{cases}$$

Spojité zobrazení na nekompaktní množině rovněž nemusí nabývat svých extrémů, příkladem je funkce f definovaná na $(0, 1)$ předpisem $f(x) = x$.

10.5.16. Věta. Nechť (P,ϱ) je kompaktní metrický prostor, (Q,σ) je metrický prostor a $f\colon P \to Q$ je spojitá bijekce. Potom f je homeomorfismus.

Důkaz. Zobrazení f je bijekce, a tedy je zobrazení f^{-1} dobře definováno na Q. Předpokládejme, že $F \subset P$ je uzavřená množina. Podle Věty 10.5.7(b) je F kompaktní v P. Tudíž je podle Věty 10.5.11 také množina $f(F)$ kompaktní, a tedy dle Věty 10.5.6 uzavřená v Q. Podle Věty 10.4.6 je zobrazení f^{-1} spojité z Q do P. Zobrazení f je tedy homeomorfismus. ■

10.5.17. Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a E, F jsou jeho podmnožiny. Potom nezáporný prvek $\operatorname{dist}(E,F)$ množiny $\mathbb{R}^*$ definovaný předpisem

$$\operatorname{dist}(E,F) = \inf\{\varrho(x,y);\ x \in E,\ y \in F\}$$

nazýváme **vzdáleností množin** E **a** F. (Zde chápeme $\inf \emptyset = \infty$.)

10.5.18. Příklad. Nalezněte metrický prostor (P,ϱ) a uzavřené disjunktní množiny $E, F \subset P$ takové, že $\operatorname{dist}(E,F) = 0$.

Řešení. Položme $P = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{N}$ a $F = \{n + \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$. Potom E a F jsou disjunktní množiny v $\mathbb{R}$ a zřejmě platí $\operatorname{dist}(E,F) = 0$. Dále platí

$$\mathbb{R} \setminus E = (-\infty, 1) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (n, n+1)$$

a navíc podle Příkladu 10.3.12 je každý z intervalů $(-\infty, 1)$ a $(n, n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, otevřenou množinou v $\mathbb{R}$. Podle Věty 10.3.15(b) je tedy také $\mathbb{R} \setminus E$ otevřená množina v $\mathbb{R}$, takže podle Věty 10.3.17 je množina E uzavřená v $\mathbb{R}$. Obdobně lze dokázat, že také F je uzavřená množina v $\mathbb{R}$. ♣

10.5.19. Příklad 10.5.18 ukazuje, že dvě disjunktní uzavřené množiny mohou mít nulovou vzdálenost. Tato situace nemůže nastat, jestliže je alespoň jedna z množin kompaktní. Tento fakt bude podrobně dokázán v Příkladu 10.10.15.

10.5.20. Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor. Nechť dále $\varepsilon > 0$ a $H \subset P$. Řekneme, že H je ε-**síť** prostoru P, jestliže $P = \bigcup_{x \in H} B(x,\varepsilon)$. Řekneme, že prostor P je **totálně omezený**, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε-síť prostoru P.

Nechť $A \subset P$. Řekneme, že množina A je **totálně omezená** v P, jestliže je prostor (A,ϱ) totálně omezený.

10.5.21. Příklad. Dokažte, že každý konečný metrický prostor je totálně omezený.

Řešení. Platnost tvrzení bezprostředně vyplývá z definice totální omezenosti. ♣

10.5.22. Věta. Nechť (P, ϱ) je totálně omezený metrický prostor. Potom je P omezený.

Důkaz. Z definice totální omezenosti plyne, že existují $m \in \mathbb{N}$ a prvky $x_1, \dots, x_m \in P$ takové, že množina $\{x_1, \dots, x_m\}$ je konečná 1-síť prostoru P. Označme $M = \max\{\varrho(x_i, x_j);\ i, j \in \mathbb{N},\ 1 \le i, j \le m\}$. Nechť $x, y \in P$. Potom existují $i, j \in \mathbb{N}$, $1 \le i, j \le m$, takové, že $\varrho(x, x_i) < 1$ a $\varrho(y, x_j) < 1$. Tedy

$$\varrho(x, y) \le \varrho(x, x_i) + \varrho(x_i, x_j) + \varrho(x_j, y) < 1 + M + 1 = M + 2,$$

takže $\operatorname{diam} P \le M + 2$. Prostor P je tedy omezený. ■

10.5.23. Příklad. Nechť $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je diskrétní metrický prostor. Dokažte, že P je totálně omezený právě tehdy, když je konečný.

Řešení. $\Rightarrow$ Z totální omezenosti P plyne, že existuje konečná 1-síť $H \subset P$. Z Příkladu 10.3.9 plyne, že pro každé $x \in P$ je $B(x, 1) = \{x\}$. Tedy platí

$$P = \bigcup_{x \in H} B(x, 1) = \bigcup_{x \in H} \{x\} = H.$$

Odtud plyne, že prostor P je konečný.

$\Leftarrow$ Tvrzení plyne z Příkladu 10.5.21. ♣

10.5.24. Poznámka. Z Příkladu 10.5.23 vyplývá, že opačná implikace k implikaci uvedené ve Větě 10.5.22 obecně neplatí, neboť každý nekonečný diskrétní metrický prostor je omezený (viz Příklad 10.3.39), není však totálně omezený.

10.5.25. Věta. Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor. Potom je P totálně omezený.

Důkaz. Předpokládejme, že P není totálně omezený. Potom existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každou konečnou množinu $C \subset P$ je

$$P \setminus \bigcup_{x \in C} B(x, \varepsilon) \neq \emptyset.$$

Zvolme $x_1 \in P$ libovolně. Dále budeme pokračovat matematickou indukcí. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že máme zvoleny prvky $x_1, \dots, x_n$. Potom je množina $P \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$ neprázdná. Nechť x_{n+1} je její libovolný prvek. Touto konstrukcí získáme posloupnost $\{x_n\}$ prvků množiny P splňující $\varrho(x_j, x_k) \ge \varepsilon$ pro každé $j, k \in \mathbb{N}$, $j \neq k$. Z posloupnosti $\{x_n\}$ tedy nelze vybrat konvergentní podposloupnost, takže prostor P není kompaktní. ■

10.5.26. Věta. Metrický prostor (P, ϱ) je kompaktní právě tehdy, když pro každý systém $\mathcal{G}$ otevřených podmnožin P splňující $P = \bigcup \mathcal{G}$ existuje konečný systém $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}$ takový, že $P = \bigcup \mathcal{G}^*$.

10.5.27. Poznámka. Nechť P je metrický prostor. O systému $\mathcal{G}$, který splňuje $P = \bigcup \mathcal{G}$, říkáme, že pokrývá P nebo také, že je pokrytím P. Jestliže pokrytí $\mathcal{G}$ prostoru P sestává z otevřených množin, říkáme, že jde o otevřené pokrytí. Tvrzení Věty 10.5.26 lze pak přeformulovat následujícím způsobem. Metrický prostor je kompaktní právě tehdy, když z každého jeho otevřeného pokrytí lze vybrat konečné pokrytí.

Důkaz Věty 10.5.26. $\Rightarrow$ Nejprve dokážeme, že platí následující výrok:

$$\exists n \in \mathbb{N}\ \forall x \in P\ \exists G \in \mathcal{G}\colon B(x, \tfrac{1}{n}) \subset G. \tag{10.8}$$

Předpokládejme, že (10.8) neplatí, potom tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in P\ \forall G \in \mathcal{G}\colon B(x_n, \tfrac{1}{n}) \not\subset G.$$

Odtud získáváme posloupnost $\{x_n\}$. Díky kompaktnosti prostoru P můžeme nalézt podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in P$ takové, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. K prvku x nalezneme množinu $G \in \mathcal{G}$ splňující $x \in G$. Protože G je otevřená, můžeme nalézt $\delta > 0$ takové, že $B(x, \delta) \subset G$. K tomuto δ nalezneme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n_k \geq \frac{2}{\delta}$ a $\varrho(x_{n_k}, x) < \frac{\delta}{2}$. Potom pro každé $y \in B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k})$ platí

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, y) < \frac{\delta}{2} + \frac{1}{n_k} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

takže

$$B(x_{n_k}, \tfrac{1}{n_k}) \subset B(x, \delta) \subset G,$$

což je spor. Tím je dokázána platnost výroku (10.8). Ke každému $x \in P$ tedy lze nalézt množinu $G_x \in \mathcal{G}$ takovou, že $B(x, \frac{1}{n}) \subset G_x$. Prostor P je kompaktní, a tedy podle Věty 10.5.25 také totálně omezený. To znamená, že v něm existuje konečná $\frac{1}{n}$-síť $\{x_1, \dots, x_m\}$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$. Položme

$$\mathcal{G}^* = \{G_{x_i},;\ i \in \{1, \dots, m\}\}.$$

Potom $\mathcal{G}^*$ je konečný podsystém systému $\mathcal{G}$ a platí

$$P \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \tfrac{1}{n}) \subset \bigcup_{i=1}^{m} G_{x_i}.$$

Systém $\mathcal{G}^*$ tedy představuje konečné podpokrytí prostoru (P, ϱ).

$\Leftarrow$ Označme $A = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Předpokládejme, že existuje $y \in P$ takové, že pro všechna $r > 0$ je množina $B(y, r) \cap A$ nekonečná. Pak existuje

$n_1 \in \mathbb{N}$ splňující $x_{n_1} \in B(y,1)$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ máme zvolena přirozená čísla $n_1, \dots, n_{k-1}$. Protože $B(y, \frac{1}{k}) \cap A$ je nekonečná množina, existuje $n_k \in \mathbb{N}$, $n_k > n_{k-1}$, splňující $x_{n_k} \in B(y, \frac{1}{k})$. Tímto způsobem dostaneme indukcí rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ splňující $x_{n_k} \in B(y, \frac{1}{k})$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Potom je ale $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ podposloupnost posloupnosti $\{x_n\}$ splňující $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = y$. Nyní předpokládejme, že pro každé $y \in P$ existuje $r_y > 0$ takové, že $B(y, r_y) \cap A$ je konečná množina. Pro každé $y \in P$ je množina $B(y, r_y)$ otevřená a navíc zřejmě platí $P = \bigcup_{y\in P} B(y, r_y)$. Systém $\{B(y, r_y)\}_{y\in P}$ tudíž představuje otevřené pokrytí prostoru (P, ϱ), a tedy podle předpokladu existuje konečná množina $F \subset P$ taková, že $P = \bigcup_{y\in F} B(y, r_y)$. Platí

$$A = A \cap P = A \cap \bigcup_{y\in F} B(y, r_y) = \bigcup_{y\in F} (A \cap B(y, r_y)),$$

takže A je konečná množina, neboť je rovna konečnému sjednocení konečných množin. Odtud vyplývá, že se alespoň jeden prvek množiny A vyskytuje v posloupnosti $\{x_n\}$ nekonečněkrát. Posloupnost $\{x_n\}$ tudíž obsahuje konstantní, a tedy konvergentní podposloupnost. V obou případech jsme nalezli konvergentní podposloupnost libovolně zvolené posloupnosti prvků P, prostor P je tedy kompaktní. ∎

10.5.28. Důsledek (Borel). Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nechť $\mathcal{J}$ je systém neprázdných otevřených intervalů splňující $[a, b] \subset \bigcup \mathcal{J}$. Pak existuje konečný systém $\mathcal{J}^* \subset \mathcal{J}$ takový, že $[a, b] \subset \bigcup \mathcal{J}^*$.

Důkaz. Tvrzení bezprostředně vyplývá z Věty 10.5.5 a Věty 10.5.26. ∎

10.6. Úplné prostory

10.6.1. Z Kapitoly 2 víme, že posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ je konvergentní právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ m, n \geq n_0\colon \quad |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

V tomto odstavci budeme studovat otázku, ve kterých metrických prostorech platí analogie tohoto tvrzení.

10.6.2. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $\{x_n\}$ je posloupnost prvků P. Řekneme, že $\{x_n\}$ splňuje **Bolzanovu-Cauchyovu podmínku** (případně, že je **cauchyovská**), jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ m, n \geq n_0\colon \varrho(x_m, x_n) < \varepsilon. \tag{10.9}$$

10.6.3. Výrok (10.9) je ekvivalentní výroku

$$\exists K > 0 \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall m, n \in \mathbb{N}, \; m, n \geq n_0 \colon \varrho(x_m, x_n) < K\varepsilon.$$

Důkaz lze provést obdobně jako v případě limity posloupnosti reálných čísel (vizte Lemma 2.2.19).

10.6.4. Věta. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $\{x_n\}$ je konvergentní posloupnost prvků P. Potom $\{x_n\}$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.

Důkaz. Nechť $x \in P$ splňuje $\lim x_n = x$. Nechť $\varepsilon > 0$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\varrho(x_n, x) < \varepsilon$. Pak pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_0$, platí

$$\varrho(x_n, x_m) \leq \varrho(x_n, x) + \varrho(x_m, x) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

a tedy posloupnost $\{x_n\}$ podle 10.6.3 splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. ∎

10.6.5. Příklad. Nechť P je množina a $\{x_n\}$ je posloupnost prvků P. Dokažte, že $\{x_n\}$ je cauchyovská v $(P, \varrho_{\mathrm{diskr}})$ právě tehdy, když existují $x \in P$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $x_n = x$.

Řešení. $\Rightarrow$ Položme $\varepsilon = 1$. Z Bolzanovy-Cauchyovy podmínky plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_0$, platí $\varrho(x_m, x_n) < 1$. Z definice diskrétní metriky vyplývá, že pro každá taková m, n platí $x_n = x_m$. Odtud již snadno plyne dokazovaná implikace.

$\Leftarrow$ Z Věty 10.2.4(a) víme, že posloupnost $\{x_n\}$ je v $(P, \varrho_{\mathrm{diskr}})$ konvergentní. Podle Věty 10.6.4 je tedy v tomto prostoru cauchyovská. ♣

10.6.6. V důkazu Věty 10.6.4 jsme viděli, že důkaz nutnosti Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro konvergenci posloupnosti reálných čísel, jak jej známe z Věty 2.4.25, je možné snadno zobecnit pro obecný metrický prostor. V důkazu opačné implikace Věty 2.4.25, tedy v důkazu toho, že Bolzanova-Cauchyova podmínka pro posloupnost reálných čísel implikuje její konvergenci, jsme však podstatným způsobem využili pojmů limes superior a limes inferior, které závisí na uspořádání reálných čísel, což je vlastnost, kterou v obecném metrickém prostoru nemáme k dispozici. Není tedy příliš překvapivé to, že výše zmíněná implikace pro obecný metrický prostor neplatí. Vzhledem k její důležitosti však stojí za to vymezit třídu prostorů, ve kterých zůstává v platnosti.

10.6.7. Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je **úplný**, jestliže každá cauchyovská posloupnost prvků z P je konvergentní.

10.6.8. Příklad. Dokažte, že metrický prostor $\mathbb{R}$ je úplný.

Řešení. Tvrzení plyne z Věty 2.4.25. ♣

10.6.9. Příklad. Dokažte, že metrický prostor $(0, 1)$ není úplný.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ položme $x_n = \frac{1}{n}$. Potom $\{x_n\}_{n=2}^{\infty}$ je posloupnost prvků z $(0, 1)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Potom pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_0$, platí

$$|x_m - x_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Odtud plyne, že posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská v $(0, 1)$. Dokážeme, že $\{x_n\}$ není konvergentní v $(0, 1)$. Předpokládejme, že $x \in (0, 1)$. Potom existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n_1} < x$. Označme $\varepsilon = x - \frac{1}{n_1}$. Pak $\varepsilon > 0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí

$$|x_n - x| = x - \frac{1}{n} \geq x - \frac{1}{n_1} = \varepsilon,$$

a tedy $\lim x_n \neq x$. Protože $x \in (0, 1)$ bylo zvoleno libovolně, posloupnost $\{x_n\}$ nemá v prostoru $(0, 1)$ limitu, a tedy v něm není konvergentní. Prostor $(0, 1)$ tedy není úplný. ♣

10.6.10. Příklad. Dokažte, že metrický prostor $\mathbb{R}^n$ je úplný vzhledem ke kterékoli z metrik ϱ_1, ϱ_2 a ϱ_∞.

Řešení. Vzhledem k

♣

10.6.11. Příklad. Dokažte, že diskrétní metrický prostor $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je úplný.

Řešení. Tvrzení plyne z Příkladu 10.6.5 a Příkladu 10.2.5. ♣

10.6.12. Věta (vztah kompaktnosti a úplnosti)**.** Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor. Potom je P úplný.

Důkaz. Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost v P. Potom z kompaktnosti plyne, že existují podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a bod $x \in P$ takové, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Potom z Bolzanovy-Cauchyovy podmínky plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ splňující $m \geq n_0$ a $n \geq n_0$ platí $\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Díky konvergenci posloupnosti $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ dále existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $\varrho(x_{n_k}, x) < \varepsilon$. Protože $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, existuje $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, takové, že $n_k \geq n_0$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, díky trojúhelníkové nerovnosti platí

$$\varrho(x_n, x) \leq \varrho(x_n, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, x) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Odtud plyne, že $\lim x_n = x$. Dokázali jsme tedy, že každá cauchyovská posloupnost v P je konvergentní. Prostor P je tedy úplný. ∎

10.6.13. Poznámka. Opačná implikace ve Větě 10.6.12 neplatí. Příkladem je nekonečný diskrétní prostor, který je úplný, ale není kompaktní.

10.6.14. Příklad. Dokažte, že metrický prostor $[0, 1]$ je úplný.

Řešení. Platnost tvrzení bezprostředně vyplývá z Věty 10.6.12 a Věty 10.5.5. ♣

10.6.15. Věta. Nechť (P, ϱ) je úplný metrický prostor a $M \subset P$. Potom prostor (M, ϱ) je úplný právě tehdy, když M je uzavřená.

Důkaz. $\Rightarrow$ Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků z M, $x \in P$ a $\lim x_n = x$. Posloupnost $\{x_n\}$ je tedy konvergentní v prostoru (P, ϱ), a tedy podle Věty 10.6.4 je v tomto prostoru také cauchyovská. Tím pádem je cauchyovská také v prostoru (M, ϱ). To je úplný metrický prostor, takže existuje $y \in M$ takové, že $\lim x_n = y$ v prostoru (M, ϱ). Tím spíše platí $\lim x_n = y$ v prostoru (P, ϱ). Protože v metrickém prostoru je limita určena jednoznačně (vizte Poznámku 10.4.13), musí platit $x = y$. Množina M je tedy uzavřená.

$\Leftarrow$ Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků z M, která je cauchyovská v prostoru (M, ϱ). Potom je $\{x_n\}$ cauchyovská také v prostoru (P, ϱ), což je úplný metrický prostor, a tedy je v tomto prostoru konvergentní. Tudíž existuje $x \in P$ takové, že $\lim x_n = x$ v (P, ϱ). Protože M je uzavřená množina v (P, ϱ) a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $x_n \in M$, musí být $x \in M$. Tedy $\lim x_n = x$ také v (M, ϱ), takže (M, ϱ) je úplný metrický prostor. ∎

Úplnost metrického prostoru zásadním způsobem závisí na zvolené metrice. Tento fakt ilustrují následující dva příklady.

10.6.16. Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dokažte, že metrický prostor $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\sup})$ je úplný.

Řešení. Nechť $\{f_n\}$ je cauchyovská posloupnost v prostoru $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\sup})$. Potom je pro každé $x \in [a, b]$ posloupnost reálných čísel $\{f_n(x)\}$ cauchyovská v $\mathbb{R}$, a tedy podle Věty 2.4.25 má v $\mathbb{R}$ vlastní limitu, kterou označíme symbolem $f(x)$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, $n \geq n_0$, a pro každé $x \in [a, b]$ platí $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, a tedy také $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Dokážeme, že funkce f je spojitá na $[a, b]$. Zvolme libovolné $y \in [a, b]$ a $\varepsilon > 0$. K tomuto ε nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $x \in [a, b]$, $|x - y| < \varepsilon$, platí $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon$. Funkce f_{n_0} je spojitá na $[a, b]$, a tedy existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $z \in [a, b]$, $|z - y| < \delta$, platí $|f_{n_0}(z) - f_{n_0}(y)| < \varepsilon$. Potom pro každé $z \in [a,b]$, $|z-y| < \delta$, platí

$$|f(z) - f(y)| \leq |f(z) - f_{n_0}(z)| + |f_{n_0}(z) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| < 3\varepsilon.$$

Funkce f je tedy spojitá v bodě y. Protože bod y byl zvolen libovolně, je funkce f spojitá na $[a,b]$.

Dokázali jsme, že $\lim \varrho_{\sup}(f_n, f) = 0$. To znamená, že posloupnost $\{f_n\}$ je v prostoru $(\mathcal{C}([a,b]), \varrho_{\sup})$ konvergentní. Tento prostor je tedy úplný. ♣

10.6.17. Příklad. Dokažte, že metrický prostor $(\mathcal{C}([-1,1]), \varrho_{\mathrm{int}})$ není úplný.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme funkci f_n na $[-1,1]$ předpisem

$$f_n(x) = \operatorname{sign}(x) \sqrt[n]{|x|}.$$

Potom pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ splňující $m < n$ platí

$$\begin{aligned} \varrho_{\mathrm{int}}(f_n, f_m) &= \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)| \, \mathrm{d}x = 2 \int_0^1 (f_n(x) - f_m(x)) \, \mathrm{d}x \\ &= 2\Big(\frac{n}{n+1} - \frac{m}{m+1}\Big) = \frac{2(n-m)}{(n+1)(m+1)}. \end{aligned}$$

Nechť $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 + 1 > \frac{2}{\varepsilon}$. Potom pro $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, $n \geq n_0$, platí

$$\varrho_{\mathrm{int}}(f_n, f_m) = \frac{2(n-m)}{(n+1)(m+1)} \leq 2 \frac{n}{n+1} \frac{1}{m+1} \leq \frac{2}{n_0 + 1} < \varepsilon,$$

takže posloupnost $\{f_n\}$ je cauchyovská v prostoru $(\mathcal{C}([-1,1]), \varrho_{\mathrm{int}})$. Dokážeme však, že tato posloupnost není v prostoru $(\mathcal{C}([-1,1]), \varrho_{\mathrm{int}})$ konvergentní.

Nechť f je libovolná spojitá funkce na $[-1,1]$ a označme $a = f(0)$. Předpokládejme nejprve, že $a \leq 0$. Potom ze spojitosti funkce f v bodě 0 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in [0,\delta]$ platí $f(y) < \frac{1}{2}$. K tomuto δ existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $2^{-m} < \delta$. Označme

$$\gamma = \int_{2^{-m}}^{\delta} (f_m(x) - f(x)) \, \mathrm{d}x.$$

Potom $\gamma > 0$, neboť pro každé $x \in [2^{-m}, \delta]$ platí $f_m(x) > \frac{1}{2}$ a $f(x) \leq \frac{1}{2}$, takže $f_m(x) \geq f(x)$. Navíc pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, platí

$$\begin{aligned} \varrho(f_n, f) &= \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)| \, \mathrm{d}x \geq \int_{2^{-m}}^{\delta} |f_n(x) - f(x)| \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{2^{-m}}^{\delta} (f_n(x) - f(x)) \, \mathrm{d}x \geq \int_{2^{-m}}^{\delta} (f_m(x) - f(x)) \, \mathrm{d}x \\ &= \gamma, \end{aligned}$$

takže funkce f není limitou posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ v prostoru $(\mathcal{C}([-1,1]), \varrho_{\text{int}})$.

Nyní předpokládejme, že $a \geq 0$. Potom ze spojitosti funkce f v bodě 0 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in [-\delta, 0]$ platí $f(y) > -\frac{1}{2}$. K tomuto δ existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $2^{-m} < \delta$. Označme

$$\gamma = \int_{-\delta}^{-2^{-m}} (f(x) - f_m(x))\,\mathrm{d}x.$$

Potom $\gamma > 0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, platí

$$\begin{aligned}
\varrho(f_n, f) &= \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \geq \int_{-\delta}^{-2^{-m}} |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\delta}^{-2^{-m}} (f(x) - f_n(x))\,\mathrm{d}x \geq \int_{-\delta}^{-2^{-m}} (f(x) - f_m(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \gamma,
\end{aligned}$$

a tedy funkce f opět není limitou posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ v prostoru $(\mathcal{C}([-1,1]), \varrho_{\text{int}})$. Posloupnost $\{f_n\}$ tedy není v prostoru $((\mathcal{C}([-1,1]), \varrho_{\text{int}})$ konvergentní. Z toho plyne, že tento metrický prostor není úplný. ♣

10.6.18. Věta (Cantor)**.** Nechť (P, ϱ) je úplný metrický prostor a $\{F_n\}$ je posloupnost neprázdných uzavřených množin v P taková, že $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $F_{n+1} \subset F_n$. Potom je $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ jednobodovou množinou.

Důkaz. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolíme libovolně prvek $x_n \in F_n$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon$. Potom pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_0$, platí $x_m, x_n \in F_{n_0}$, a tedy $\varrho(x_m, x_n) < \varepsilon$. Posloupnost $\{x_n\}$ je tedy cauchyovská v (P, ϱ). Z úplnosti prostoru (P, ϱ) plyne, že existuje $x \in P$ takové, že $\lim x_n = x$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ obsahuje posloupnost $\{x_j\}_{j=n}^{\infty}$ pouze prvky množiny F_n a podle věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 10.2.4) konverguje v (P, ϱ) k prvku x. Protože F_n je uzavřená množina, platí $x \in F_n$. Protože $n \in \mathbb{N}$ bylo zvoleno libovolně, dostáváme $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Z Poznámky 10.3.40(a) pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\operatorname{diam}\bigl(\bigcap_{j=1}^{\infty} F_j\bigr) \leq \operatorname{diam} F_n$, a tedy $\operatorname{diam}\bigl(\bigcap_{j=1}^{\infty} F_j\bigr) = 0$, neboť $\lim \operatorname{diam} F_n = 0$. Podle Poznámky 10.3.38 je množina $\bigcap_{j=1}^{\infty} F_j$ prázdná nebo jednobodová. Odtud plyne, že x je jejím jediným prvkem. ■

10.6.19. Poznámka. Tvrzení Cantorovy věty platí v jistém smyslu i obráceně (vizte Příklad 10.10.29).

10.6.20. Poznámka. Bez předpokladu $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$ Cantorova věta neplatí. Příkladem je posloupnost množin $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovaná pro $n \in \mathbb{N}$ předpisem $F_n = [n, \infty)$ v metrickém prostoru $\mathbb{R}$. Podle Poznámky 10.3.12 a

Věty 10.3.17 je každá z těchto množin uzavřená v $\mathbb{R}$ a navíc zřejmě pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $F_{n+1} \subset F_n$. Nesplňují však požadavek $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$ a zřejmě platí $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.

10.6.21. Řekneme, že $x \in X$ je **pevným bodem** zobrazení $T\colon X \to X$, jestliže $T(x) = x$. Některé rovnice v pokročilejších partiích matematické analýzy lze řešit nalezením pevného bodu vhodného zobrazení. Banachova věta o kontrakci udává poměrně obecné postačující podmínky pro existenci pevného bodu. V Kapitole 13 ukážeme její aplikaci v teorii diferenciálních rovnic.

10.6.22. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $T\colon P \to P$ je zobrazení. Řekneme, že zobrazení T je **kontrakce** na (P, ϱ), jestliže existuje $\gamma \in [0, 1)$ takové, že pro každé $x, y \in P$ platí $\varrho(Tx, Ty) \le \gamma\varrho(x, y)$.

10.6.23. Věta (Banachova věta o kontrakci)**.** Nechť (P, ϱ) je úplný neprázdný metrický prostor a $T\colon P \to P$ je kontrakce. Potom T má na P právě jeden pevný bod.

Důkaz. Zvolme libovolný bod $x_1 \in P$ a předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ máme definovány body $x_1, \dots, x_n$. Potom definujeme bod x_{n+1} předpisem $x_{n+1} = T(x_n)$. Tímto způsobem získáme posloupnost $\{x_n\}$ prvků P. Dokážeme, že posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská v prostoru P.

Z předpokladu vyplývá, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}
\varrho(x_n, x_{n+1}) &= \varrho(T(x_{n-1}), T(x_n)) \\
&\le \gamma\varrho(x_{n-1}, x_n) = \gamma\varrho(Tx_{n-2}, Tx_{n-1}) \\
&\le \gamma^2\varrho(x_{n-2}, x_{n-1}) = \gamma^2\varrho(Tx_{n-3}, Tx_{n-2}) \\
&\;\vdots \\
&\le \gamma^{n-1}\varrho(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

Odtud a z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$,

$$\begin{aligned}
\varrho(x_m, x_n) &\le \varrho(x_m, x_{m+1}) + \varrho(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + \varrho(x_{n-1}, x_n) \\
&\le \left(\gamma^{m-1} + \gamma^m + \cdots + \gamma^{n-2}\right)\varrho(x_1, x_2) \\
&\le \frac{\gamma^{m-1}}{1-\gamma}\varrho(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\frac{\gamma^{n_0-1}}{1-\gamma}\varrho(x_1, x_2) < \varepsilon.$$

Potom pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_0$, platí

$$\varrho(x_m, x_n) \leq \frac{\gamma^{m-1}}{1-\gamma}\varrho(x_1, x_2) \leq \frac{\gamma^{n_0-1}}{1-\gamma}\varrho(x_1, x_2) < \varepsilon.$$

Posloupnost $\{x_n\}$ je tedy cauchyovská v (P, ϱ). Prostor (P, ϱ) je úplný, takže existuje $x \in P$ takové, že $\lim x_n = x$.

Dokážeme, že $Tx = x$. Podle věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 10.2.4(c)) platí

$$\lim x_{n+1} = x.$$

Navíc pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\varrho(Tx_n, Tx) \leq \gamma\varrho(x_n, x),$$

a tedy

$$\lim Tx_n = Tx,$$

neboť $\lim x_n = x$. Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$Tx_n = x_{n+1},$$

plyne z věty o jednoznačnosti limity (Věta 10.2.4(b)), že

$$Tx = x,$$

takže prvek x je hledaným pevným bodem zobrazení T. Zbývá dokázat jeho jednoznačnost. Předpokládejme, že x a y jsou pevné body zobrazení T. Pak

$$\varrho(x, y) = \varrho(Tx, Ty) \leq \gamma\varrho(x, y),$$

Protože $\gamma < 1$, musí platit $\varrho(x, y) = 0$, to jest $x = y$. Odtud plyne, že pevný bod zobrazení T je jednoznačně určen. ■

10.6.24. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že množina $A \subset P$ je **hustá** v (P, ϱ), jestliže $\overline{A} = P$.

10.6.25. Bude užitečné si uvědomit, že množina $A \subset P$ je hustá právě tehdy, když pro každé $x \in P$ existuje posloupnost $\{x_n\}$ prvků množiny A splňující $\lim x_n = x$.

10.6.26. Příklady. (a) Dokažte, že $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jsou husté v $(\mathbb{R}, \text{eukl})$;

(b) Dokažte, že množina všech polynomů na $[a, b]$, kde $[a, b] \subset \mathbb{R}$, je hustá v $C([a, b], \varrho_{\text{sup}})$;

(c) Nechť P je množina a $A \subset P$. Dokažte, že A je hustá v prostoru $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ právě tehdy, když $A = P$.

10.6.27. Věta. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A, B \subset P$, $A \subset B$. Jestliže A je hustá v (P, ϱ), pak také B je hustá v (P, ϱ).

Důkaz. Tvrzení ihned plyne z 10.6.25. ■

10.6.28. Věta. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A, Q \subset P$. Jestliže je množina A hustá v (P, ϱ), pak je množina $A \cap Q$ hustá v metrickém prostoru (Q, ϱ).

Důkaz. Tvrzení ihned plyne z 10.6.25. ■

10.6.29. Věta (charakterizace hustých množin)**.** Množina $A \subset P$ je hustá v metrickém prostoru (P, ϱ) právě tehdy, když pro každou neprázdnou množinu $G \subset P$ otevřenou v (P, ϱ) platí $G \cap A \neq \emptyset$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme že existuje neprázdná množina $G \subset P$ otevřená v prostoru (P, ϱ) splňující $G \cap A = \emptyset$. Potom je množina $P \setminus G$ uzavřená v prostoru (P, ϱ) podle Věty 10.3.17 a platí $A \subset P \setminus G$. Podle Věty 10.3.41(g) platí $\overline{A} \subset P \setminus G$. Množina G je podle předpokladu neprázdná, a tedy $P \setminus G \neq P$. Odtud plyne, že $\overline{A} \neq P$, a tedy A není hustá v prostoru (P, ϱ).

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že množina A není hustá v prostoru (P, ϱ). Potom $\overline{A} \neq P$, a tedy je množina $P \setminus \overline{A}$ neprázdná a otevřená v (P, ϱ) podle Věty 10.3.41(d) a Věty 10.3.17. Navíc zřejmě platí

$$(P \setminus \overline{A}) \cap A = \emptyset.$$

Nalezli jsme tedy otevřenou neprázdnou množinu, která má s množinou A prázdný průnik. Tvrzení je dokázáno. ■

10.6.30. Věta. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, G je otevřená hustá množina v (P, ϱ) a H je hustá množina v (P, ϱ). Potom $G \cap H$ je hustá množina v (P, ϱ).

Důkaz. Předpokládejme, že množina $G \cap H$ není hustá v prostoru (P, ϱ). Podle Věty 10.6.29 pak existuje neprázdná množina A otevřená v (P, ϱ) splňující

$$A \cap (G \cap H) = \emptyset.$$

Předpokládejme nejprve, že $A \cap G = \emptyset$. To podle Věty 10.6.29 znamená, že G není hustá v (P, ϱ), což je spor.

Nyní předpokládejme,že $A \cap G \neq \emptyset$. Potom je podle Věty 10.3.15(c) množina $A \cap G$ neprázdná a otevřená v (P, ϱ) a platí ■

$$(A \cap G) \cap H = \emptyset.$$

Podle Věty 10.6.29 to znamená, že H není hustá v (P, ϱ), což je opět spor. Tvrzení je dokázáno.

10.6.31. (a) Tvrzení Věty 10.6.30 neplatí bez předpokladu otevřenosti alespoň jedné z množin G a H. Například množiny $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jsou husté v prostoru $\mathbb{R}$, žádná z nich není v tomto prostoru otevřená a jejich průnik je prázdný.

(b) Tvrzení Věty 10.6.30 lze snadno rozšířit na libovolný konečný počet množin, neplatí však pro nekonečný počet množin. Například pro každé $r \in \mathbb{Q}$ je množina $\mathbb{Q} \setminus \{r\}$ hustá a otevřená v $\mathbb{Q}$, ale

$$\bigcap_{r \in \mathbb{Q}} (\mathbb{Q} \setminus \{r\}) = \emptyset.$$

10.6.32. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že množina $A \subset P$ je **řídká** v (P, ϱ), jestliže je množina $P \setminus \overline{A}$ je hustá v P.

10.6.33. Příklady. Dokažte, že

(a) pro každé $x \in \mathbb{R}$ je jednobodová množina $\{x\}$ řídká v $\mathbb{R}$,
(b) množina $\mathbb{N}$ je řídká v $\mathbb{R}$,
(c) množina $\mathbb{Q}$ není řídká v $\mathbb{R}$.

Řešení. (a) Podle Příkladu 10.3.3 je množina $\{x\}$ uzavřená v $\mathbb{R}$. Platí tedy $\mathbb{R} \setminus \overline{\{x\}} = \mathbb{R} \setminus \{x\}$. Nechť $y \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak definujeme $y_n \in \mathbb{R}$ předpisem

$$y_n = \begin{cases} y & \text{pokud } y \neq x, \\ x + \frac{1}{n} & \text{pokud } y = x. \end{cases}$$

Potom v každém případě platí $\lim y_n = y$, přičemž $y_n \in \mathbb{R} \setminus \{x\}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Odtud plyne, že $\overline{\mathbb{R} \setminus \{x\}} = \mathbb{R}$, takže množina $\{x\}$ je řídká v $\mathbb{R}$.

(b) Nejprve dokážeme, že množina $\mathbb{N}$ je uzavřená v prostoru $\mathbb{R}$. To plyne z toho, že množina

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} = (-\infty, 1) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n, n+1)$$

je v prostoru $\mathbb{R}$ otevřená díky Větě 10.3.20. Stačí tedy dokázat, že $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}}$.

Nechť $y \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak definujeme $y_n \in \mathbb{R}$ předpisem

$$y_n = \begin{cases} y & \text{pokud } y \notin \mathbb{N}, \\ y + \frac{1}{n+1} & \text{pokud } y \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Potom v každém případě platí $\lim y_n = y$, přičemž $y_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Odtud plyne, že $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}} = \mathbb{R}$.

(c) Podle Příkladu 10.6.26(a) je $\mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$, takže $\mathbb{Q}$ není řídká v $\mathbb{R}$. ♣

10.6.34. Příklad. Nechť P je množina a $A \subset P$. Dokažte, že množina A je řídká v metrickém prostoru $(P, \varrho_{\mathrm{diskr}})$ právě tehdy, když je prázdná.

Řešení. $\Rightarrow$ Předpokládejme, že $A \neq \emptyset$. Podle Příkladu 10.3.18 je množina A uzavřená v $(P, \varrho_{\mathrm{diskr}})$, a tedy $P \setminus \overline{A} = P \setminus A$. Množina $P \setminus A$ je podle téhož příkladu uzavřená v $(P, \varrho_{\mathrm{diskr}})$, a tedy $\overline{P \setminus \overline{A}} = P \setminus A$. Protože množina A je neprázdná, platí $P \setminus A \neq P$, a tedy také $\overline{P \setminus \overline{A}} \neq P$. Množina A tedy není řídká v $(P, \varrho_{\mathrm{diskr}})$.

$\Leftarrow$ Tato implikace je zřejmá a platí v jakémkoli metrickém prostoru.

♣

10.6.35. Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Označme

$$A = \{f \in C[a,b],\ -1 \leq f(x) \leq 1,\ x \in [a,b]\}.$$

Dokažte, že

(a) A je řídká v metrickém prostoru $(C[a,b], \varrho_{\mathrm{int}})$,
(b) A není řídká v metrickém prostoru $(C[a,b], \varrho_{\sup})$.

Řešení. (a) Nejprve dokážeme, že A je uzavřená v prostoru $(C[a,b], \varrho_{\mathrm{int}})$. Nechť $f \in C[a,b] \setminus A$. Potom existuje $c \in [a,b]$ takové, že $|g(c)| > 1$. Předpokládejme, že $c \neq b$. Ze spojitosti funkce g pak plyne, že existuje $d \in (c,b)$ takové, že pro každé $x \in (c,d)$ platí $|g(x)| > \frac{|g(c)|+1}{2}$. Potom pro každou funkci $f \in A$ a pro každé $x \in (c,d)$ platí

$$|f(x) - g(x)| \geq \frac{g(c)-1}{2},$$

a tedy

$$\begin{aligned}\varrho_{\mathrm{int}}(f,g) &= \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx \geq \int_c^d |f(x)-g(x)|\,dx \\ &\geq \int_c^d dx\,\frac{g(c)-1}{2} = (d-c)\frac{g(c)-1}{2}.\end{aligned}$$

To znamená, že $\varrho_{\mathrm{int}}(g, A) \geq (d-c)\frac{g(c)-1}{2} > 0$, a tedy podle Věty 10.3.41(c) platí $g \notin \overline{A}$. Z toho plyne, že $\overline{A} \subset A$, a tedy A je uzavřená v metrickém prostoru $(C[a,b], \varrho_{\mathrm{int}})$. V případě, že $c = b$, nalezneme $d \in (a,c)$ takové, že pro každé $x \in (d,c)$ platí $|g(x)| > \frac{|g(c)|+1}{2}$ a dále postupujeme obdobně (místo intervalu (c,d) pracujeme s intervalem (d,c)).

Z uzavřenosti množiny A a Věty 10.3.41(d) plyne, že $C[a,b] \setminus \overline{A} = C[a,b] \setminus A$. K důkazu řídkosti množiny A v prostoru $(C[a,b], \varrho_{\mathrm{int}})$ tedy stačí dokázat, že

$$\overline{C[a,b] \setminus A} = C[a,b].$$

Zvolme $h \in C[a,b]$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že $\frac{1}{n_0} < b-a$ (existence takového n_0 vyplývá z Archimédovy vlastnosti reálných čísel - viz Větu 1.6.27). Pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, položme

$$h_n(x) = \begin{cases} n(h(a+\frac{1}{n})-2)(x-a)+2, & \text{pokud } x \in (a, a+\frac{1}{n}), \\ h(x) & \text{pokud } x \in (a+\frac{1}{n}, b). \end{cases}$$

Potom $h \in C[a,b] \setminus A$, neboť f je zřejmě spojitá na $a,b]$ a navíc $f(a) = 2$. Dále pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, je funkce $h_n - h$ spojitá na $[a, a+\frac{1}{n}]$ a podle Věty 4.3.9 nabývá na tomto intervalu svého maxima, které označíme symbolem M. Pak platí

$$\varrho_{\text{int}}(h_n, h) = \int_a^b |h_n(x) - h(x)|\,dx = \int_a^{a+\frac{1}{n}} |h_n(x) - h(x)|\,dx = \frac{M}{n}.$$

Protože $\lim_{n\to\infty} \frac{M}{n} = 0$, plyne odtud, že

$$\lim_{n\to\infty} \varrho_{\text{int}}(h_n, h) = 0,$$

a tedy

$$h_n \overset{\varrho_{\text{int}}}{\to} h.$$

To znamená, že $h \in \overline{C[a,b] \setminus A}$, a tedy $C[a,b] \setminus A$ je hustá v $(C[a,b], \varrho_{\text{int}})$, takže A je v tomto prostoru řídká.

(b) Obdobně jako v případě (a) lze dokázat, že množina A je uzavřená v prostoru $(C[a,b], \varrho_{\text{sup}})$. Tedy k důkazu toho, že množina A není v tomto prostoru řídká stačí dokázat, že množina $C[a,b] \setminus A$ není hustá v $(C[a,b], \varrho_{\text{sup}})$. Položme $f(x) = 0$ pro každé $x \in [a,b]$. Nechť $g \in C[a,b] \setminus A$. Potom existuje $c \in [a,b]$ takové, že $|g(c)| > 1$, a tedy

$$\varrho_{\text{sup}}(f,g) \geq |f(c) - g(c)| = |g(c)| > 1,$$

takže

$$\varrho(f, C[a,b] \setminus A) > 1.$$

Odtud a z Věty 10.3.41(c) plyne, že množina $C[a,b] \setminus A$ není hustá v $C[a,b]$.

♣

10.6.36. Věta (charakterizace řídkých množin)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Potom jsou následující tři výroky ekvivalentní.

(i) Množina A je řídká.

(ii) Platí $\operatorname{Int}(\overline{A}) = \emptyset$.

(iii) Pro každou neprázdnou otevřenou množinu $G \subset P$ existuje neprázdná otevřená množina $H \subset G$ taková, že $H \cap A = \emptyset$.

Důkaz. (i)⇒(ii) Předpokládejme, že množina Int $(\overline{A})$ je neprázdná. Podle Věty 10.3.11 je tato množina otevřená v (P, ϱ) a navíc platí

$$G \cap (P \setminus \overline{A}) = \emptyset.$$

Množina $P \setminus \overline{A}$ tudíž podle Věty 10.6.29 není hustá v (P, ϱ), a tedy A není v tomto prostoru řídká.

(ii)⇒(iii) Položíme $H = G \cap (P \setminus \overline{A})$. Potom H je otevřená, neboť je průnikem dvou otevřených množin. Zřejmě platí $H \subset G$. Množina H je navíc neprázdná, neboť v opačném případě by platilo $G \subset \overline{A}$, což by znamenalo, že $\mathrm{Int}(\overline{A}) \supset G$, a tedy $\mathrm{Int}(\overline{A}) \neq \emptyset$, což by bylo ve sporu s předpokladem.

(iii)⇒(i) Nechť $G \subset P$ je libovolná neprázdná otevřená množina v (P, ϱ). Podle předpokladu existuje neprázdná množina $H \subset G$ splňující $H \cap A = \emptyset$. Podle Věty 10.8.8 platí $H \cap \overline{A} = \emptyset$, takže $H \subset P \setminus \overline{A}$. Tedy $G \cap (P \setminus \overline{A}) \neq \emptyset$. Podle Věty 10.6.29 je tudíž množina $P \setminus \overline{A}$ hustá v prostoru (P, ϱ), což znamená, že A je v tomto prostoru řídká. ■

10.6.37. Věta (vlastnosti řídkých množin)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Pak

(a) je-li A řídká v (P, ϱ), a $B \subset A$, pak také B je řídká v (P, ϱ),

(b) jsou-li A a B řídké v (P, ϱ), pak také $A \cup B$ je řídká v (P, ϱ),

(c) množina A řídká v (P, ϱ) právě tehdy, když $\overline{A}$ je řídká v (P, ϱ).

Důkaz. (a) Podle Věty 10.3.41(b) platí $\overline{B} \subset \overline{A}$, a tedy $P \setminus \overline{A} \subset P \setminus \overline{B}$. Z Věty 10.6.27 plyne, že množina $P \setminus \overline{B}$ je hustá v (P, ϱ), a tedy B je řídká v (P, ϱ).

(b) Podle Věty 10.3.41(e) a DeMorganových pravidel (Věta 1.3.11) platí

$$P \setminus \overline{A \cup B} = P \setminus (\overline{A} \cup \overline{B}) = (P \setminus \overline{A}) \cap (P \setminus \overline{B}).$$

Protože množiny A a B jsou řídké v (P, ϱ), jsou obě množiny $P \setminus \overline{A}$ a $P \setminus \overline{B}$ v tomto prostoru husté. Navíc jsou podle Věty 10.3.17 obě otevřené. Podle Věty 10.6.30 je tedy množina $(P \setminus \overline{A}) \cap (P \setminus \overline{B})$ hustá v (P, ϱ). Z výše uvedené rovnosti plyne, že množina $P \setminus \overline{A \cup B}$ hustá v (P, ϱ), tedy $A \cup B$ je v tomto prostoru řídká. Tvrzení je dokázáno.

(c) Z Věty 10.3.41(d) vyplývá, že $P \setminus \overline{\overline{A}} = P \setminus \overline{A}$. Odtud již tvrzení snadno plyne. ■

10.6.38. Věta. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $G \subset P$ je otevřená hustá množina v (P, ϱ). Potom je množina $P \setminus G$ uzavřená a řídká v (P, ϱ).

Důkaz. Podle Věty 10.3.17 je množina $P \setminus G$ uzavřená v (P, ϱ), a tedy

$$\overline{P \setminus G} = P \setminus G.$$

Protože G je hustá v (P, ϱ), dostáváme

$$\overline{P \setminus (\overline{P \setminus G})} = \overline{P \setminus (P \setminus G)} = \overline{G} = P.$$

Množina $P \setminus G$ je tedy řídká v (P, ϱ). Tvrzení je dokázáno. ∎

10.6.39. Definice. Nechť P je množina a $\mathfrak{M} \subset \mathcal{P}(P)$ je nějaký systém podmnožin P. Řekneme, že systém $\mathfrak{M}$ je **množinový ideál**, jestliže je uzavřený na podmnožiny a konečná sjednocení. Řekneme, že systém $\mathfrak{M}$ je **množinový σ-ideálem**, jestliže je uzavřený na podmnožiny a spočetná sjednocení.

10.6.40. Z tvrzení (a) a (b) Věty 10.6.37 plyne, že systém všech řídkých podmnožin každého metrického prostoru tvoří množinový ideál. Netvoří však množinový σ-ideál, protože například každá jednobodová množina obsahující některé racionální číslo je řídká v $\mathbb{R}$, ale jejich spočetné sjednocení tvoří množinu $\mathbb{Q}$, která již v $\mathbb{R}$ řídká není (je tam dokonce hustá).

10.6.41. Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je **první kategorie**, jestliže existuje posloupnost jeho podmnožin $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je A_n řídká v (P, ϱ) a $P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ (tedy P je spočetným sjednocením řídkých množin). Řekneme, že množina $A \subset P$ je **první kategorie** v metrickém prostoru (P, ϱ), jestliže je metrický prostor (A, ϱ) první kategorie. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je **druhé kategorie**, jestliže není první kategorie. Řekneme, že množina $A \subset P$ je **druhé kategorie** v metrickém prostoru (P, ϱ), jestliže není v tomto prostoru první kategorie. Řekneme, že množina $A \subset P$ je **residuální** v metrickém prostoru (P, ϱ), jestliže $P \setminus A$ je první kategorie v (P, ϱ).

10.6.42. Příklady. Dokažte, že

(a) prostor $\mathbb{Q}$ je první kategorie,
(b) množina $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je residuální v metrickém prostoru $\mathbb{R}$,
(c) prostor $(C([a, b]), \varrho_{\text{int}})$ je první kategorie.

Řešení. (a) Pro každé $r \in \mathbb{Q}$ je jednobodová množina $\{r\}$ řídká v $\mathbb{R}$ podle Příkladu 10.6.33(a). Navíc platí

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{r\}.$$

Množina $\mathbb{Q}$ je tedy spočetným sjednocením řídkých množin, tudíž je první kategorie v $\mathbb{R}$.

(b) Tvrzení je přímým důsledkem již dokázaného tvrzení (a).

(c) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme

$$A_n = \{f \in C([a, b]);\ -n \leq f(x) \leq n,\ x \in [a, b]\}.$$

Potom obdobně jako v Příkladu 10.6.35(a) dokážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je množina A_n řídká v prostoru $(C([a,b]), \varrho_{\mathrm{int}})$. Nechť $g \in C([a,b])$. Potom podle Věty 4.3.11 je g omezená na $[a,b]$. Existuje tedy $n \in \mathbb{N}$ takové, že $g \in A_n$. Odtud vyplývá, že

$$C([a,b]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Prostor $(C([a,b]), \varrho_{\mathrm{int}})$ je tudíž první kategorie. ♣

10.6.43. Věta. (a) Systém všech podmnožin první kategorie metrického prostoru tvoří σ-ideál.

(b) Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $A, B \subset P$ a $A \subset B$. Jestliže A je druhé kategorie v (P, ϱ), pak také B je druhé kategorie v (P, ϱ).

Důkaz. (a) Tvrzení ihned plyne z definice prostoru první kategorie a z 10.6.40.

(b) Kdyby byla množina B první kategorie v (P, ϱ), pak by podle tvrzení (a) musela být i množina A první kategorie v (P, ϱ). ■

10.6.44. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že množina A je **typu** G_δ v prostoru (P, ϱ), jestliže existuje posloupnost podmnožin $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ otevřených v prostoru (P, ϱ) splňující $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Řekneme, že množina A je **typu** F_σ v prostoru (P, ϱ), jestliže existuje posloupnost podmnožin $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ uzavřených v prostoru (P, ϱ) splňující $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

10.6.45. Věta (vztah množin typu G_δ a F_σ)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Potom M je množina typu G_δ v prostoru (P, ϱ) právě tehdy, když $P \setminus A$ je množina typu F_σ v prostoru (P, ϱ).

Důkaz. $\Rightarrow$ Nechť A je množina typu G_δ v prostoru (P, ϱ). Potom existuje posloupnost množin $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ otevřených v (P, ϱ) splňující $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $F_n = P \setminus G_n$. Podle Věty 10.3.17 je pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina F_n uzavřená v (P, ϱ). Podle De Morganových pravidel (Věta 1.3.11) platí

$$P \setminus A = P \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (P \setminus G_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

takže množina $P \setminus A$ je typu F_σ v (P, ϱ).

$\Leftarrow$ Důkaz této implikace je obdobný. ■

10.6.46. Příklady. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Dokažte, že

(a) každá uzavřená množina v (P, ϱ) je v tomto prostoru zároveň typu G_δ i F_σ,

(b) každá otevřená množina v (P, ϱ) je v tomto prostoru zároveň typu G_δ i F_σ.

Řešení. (a) Nechť F je uzavřená množina v (P, ϱ). Pro $n \in \mathbb{N}$ položíme

$$F_n = F.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ je zřejmě množina F_n uzavřená v prostoru (P, ϱ) a triviálně platí $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Množina F je tedy typu F_σ.

Dokážeme nyní, že množina F je také typu G_δ. Pro $n \in \mathbb{N}$ položíme

$$G_n = \begin{cases} \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in P;\ \varrho(x, F) < \frac{1}{n}\} & \text{pokud } F \neq \emptyset, \\ \emptyset & \text{pokud } F = \emptyset. \end{cases}$$

Potom je pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina G_n otevřená v (P, ϱ) podle Příkladu 10.3.14 a Věty 10.3.15(b). Navíc zřejmě platí $F \subset G_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a podle Věty 10.3.41(c) jest

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Množina F je tedy typu G_δ v prostoru (P, ϱ).

(b) Důkaz tvrzení plyne ihned z již dokázaného tvrzení (a) a Věty 10.6.45.

♣

10.6.47. Jestliže $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost množin typu G_δ v metrickém prostoru (P, ϱ), pak množina $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ nemusí být v tomto prostoru typu G_δ. Množiny tohoto tvaru nazýváme **typu** $G_{\delta\sigma}$. Obdobně definujeme množiny **typu** $F_{\sigma\delta}$ jako množiny tvaru $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, kde $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost množin typu F_σ v (P, ϱ). Takto můžeme induktivně postupovat dále a definovat množiny typu $G_{\delta\sigma\delta}$, $F_{\sigma\delta\sigma}$, $G_{\delta\sigma\delta\sigma}$, $F_{\sigma\delta\sigma\delta}$ a tak dále. Všechny množiny těchto typů označujeme souhrnným názvem **borelovské množiny**.

10.6.48. Věta (charakterizace množin druhé kategorie)**.** Metrický prostor (P, ϱ) je druhé kategorie právě tehdy, když platí následující implikace: je-li $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost otevřených hustých množin v (P, ϱ), pak $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset$. Potom je pro každé $n \in \mathbb{N}$ podle Věty 10.3.17 a Věty 10.6.38 množina $P \setminus G_n$ uzavřená a řídká v (P, ϱ). Navíc platí

$$P = P \setminus \emptyset = P \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} (P \setminus G_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (P \setminus G_n).$$

Odtud plyne, že prostor (P, ϱ) je první kategorie.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že prostor (P, ϱ) je první kategorie. Potom existuje posloupnost jeho řídkých podmnožin $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ splňující $P = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$. Podle Věty 10.6.37(c) je pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina $\overline{F_n}$ řídká v (P, ϱ). Navíc zřejmě platí $P = \bigcup_{n=1}^\infty \overline{F_n}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $G_n = P \setminus \overline{F_n}$. Pak je Věty 10.3.17 a Definice 10.6.32 pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina G_n otevřená a hustá v (P, ϱ). Dále platí

$$\bigcap_{n=1}^\infty G_n = \bigcap_{n=1}^\infty (P \setminus \overline{F_n}) = P \setminus \bigcup_{n=1}^\infty \overline{F_n} = P \setminus P = \emptyset.$$

■

10.6.49. Věta. Každá hustá množina typu G_δ v metrickém prostoru je residuální.

Důkaz. Nechť A je hustá množina typu G_δ v metrickém prostoru (P, ϱ). Pak existuje posloupnost $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ otevřených množin v (P, ϱ) splňující $A = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$. Protože A je hustá v (P, ϱ) je podle Věty 10.6.27 pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina G_n hustá v (P, ϱ). Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je podle Věty 10.6.38 množina $P \setminus G_n$ uzavřená a řídká v (P, ϱ). Navíc platí

$$P \setminus A = P \setminus \bigcap_{n=1}^\infty G_n = \bigcup_{n=1}^\infty (P \setminus G_n),$$

takže $P \setminus A$ je první kategorie v (P, ϱ), neboli A je v tomto prostoru residuální. ■

10.6.50. Věta. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor druhé kategorie. Nechť množiny $A, B \subset P$ jsou residuální v (P, ϱ). Potom platí $A \cap B \neq \emptyset$.

Důkaz. Předpokládejme, že $A \cap B = \emptyset$. Potom

$$P = P \setminus (A \cap B) = (P \setminus A) \cup (P \setminus B),$$

přičemž obě množiny $P \setminus A$ i $P \setminus B$ jsou první kategorie. Podle Věty 10.6.43 je tedy prostor (P, ϱ) první kategorie. ■

10.6.51. Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je **Baireův**[1], jestliže je každá jeho neprázdná otevřená podmnožina druhé kategorie v (P, ϱ).

10.6.52. Každý Baireův metrický prostor je zřejmě druhé kategorie.

10.6.53. Věta. Nechť (P, ϱ) je Baireův metrický prostor, $M \subset P$ a $\operatorname{Int} M \neq \emptyset$. Potom M je druhé kategorie.

[1] René-Louis Baire (1874–1932)

Důkaz. Díky Větě 10.3.11 víme, že $\operatorname{Int} M$ je otevřenou podmnožinou M. Z definice Baireova prostoru tedy plyne, že $\operatorname{Int} M$ je druhé kategorie. Z Věty 10.6.43 tedy vyplývá, že i množina M je druhé kategorie. ■

10.6.54. Věta. Nechť (P, ϱ) je Baireův metrický prostor a $M \subset P$ je otevřená množina. Potom (M, ϱ) je Baireův prostor.

Důkaz. Je-li M prázdná, je tvrzení zřejmé. Nechť $M \neq \emptyset$ a $G \subset M$ je neprázdná otevřená množina v prostoru (M, ϱ). Potom je G je neprázdná a otevřená také v prostoru (P, ϱ). Potom je $\operatorname{Int} G \neq \emptyset$, a tedy je podle Věty 10.6.53 množina G druhé kategorie. ■

10.6.55. Věta (charakterizace Baireových prostorů)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Pak jsou následující tři výroky ekvivalentní.

(i) Prostor P je Baireův.

(ii) Je-li $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost hustých otevřených množin v (P, ϱ), pak je množina $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ hustá v (P, ϱ).

(iii) Každá residuální množina v (P, ϱ) je v tomto prostoru hustá.

Důkaz. (i)⇒(ii) Předpokládejme, že množina $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ není hustá v (P, ϱ). Pak podle Věty 10.6.29 existuje neprázdná otevřená množina G v prostoru (P, ϱ) splňující

$$G \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset.$$

Podle Věty 10.3.44 a Věty 10.6.28 je pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina $G \cap G_n$ otevřená a hustá v metrickém prostoru (G, ϱ). Podle Věty 10.6.38 je pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina $G \setminus G_n$ uzavřená a řídká v prostoru (G, ϱ). Navíc platí

$$G = G \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (G \setminus G_n),$$

a tedy metrický prostor (G, ϱ) je první kategorie. Z toho plyne, že metrický prostor (P, ϱ) není Baireův.

(ii)⇒(iii) Předpokládejme, že neplatí výrok (iii). Pak existuje množina $A \subset P$, která je residuální, avšak nikoli hustá v (P, ϱ). Potom existuje posloupnost $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ řídkých množin v (P, ϱ) splňující $P \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Podle Věty 10.6.37(c) je pro každé $n \in \mathbb{N}$ také množina $\overline{F_n}$ řídká v (P, ϱ). Navíc zřejmě platí $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{F_n}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$G_n = \bigcap_{j=1}^{n} (P \setminus \overline{F_j}).$$

Podle Věty 10.3.17 a Definice 10.6.32 je pro každé $j \in \mathbb{N}$ množina $P \setminus \overline{F_j}$ otevřená a hustá v (P, ϱ). Podle Věty 10.3.15 a Věty 10.6.30 je pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina G_n otevřená a hustá v (P, ϱ). Navíc platí

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (P \setminus \overline{F_n}) = P \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{F_n} = A.$$

Protože A není hustá v (P, ϱ), není podle Věty 10.6.27 ani množina $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ hustá v (P, ϱ). Nalezli jsme tedy posloupnost otevřených hustých množin v prostoru (P, ϱ), jejichž průnik není v tomto prostoru hustý. Tedy neplatí výrok (ii).

(iii)$\Rightarrow$(i) Tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme, že prostor (P, ϱ) není Baireův. Pak existuje jeho otevřená neprázdná podmnožina G, která je v tomto prostoru první kategorie. Položme $M = P \setminus G$. Potom je množina M residuální, a tedy podle předpokladu hustá v prostoru (P, ϱ). Podle Věty 10.6.29 platí $G \cap M \neq \emptyset$. To ale znamená, že $G \cap (P \setminus G) \neq \emptyset$, což je spor. ∎

10.6.56. Věta. Nechť (P, ϱ) je Baireův metrický prostor a $A \subset P$. Pak je množina A residuální v (P, ϱ) právě tehdy, když existuje množina $B \subset A$ hustá a typu G_δ v (P, ϱ).

Důkaz. $\Rightarrow$ Nechť $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost řídkých množin v prostoru (P, ϱ) splňující

$$P \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Podle Věty 10.6.37(c) je pro každé $n \in \mathbb{N}$ také množina $\overline{F_n}$ řídká v (P, ϱ). Položme

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} (P \setminus \overline{F_n}).$$

Potom B je residuální množina typu G_δ v (P, ϱ) splňující $B \subset A$. Navíc je množina B spočetným průnikem hustých množin v (P, ϱ), a tedy je podle Věty 10.6.55 hustá v (P, ϱ).

$\Leftarrow$ Podle Věty 10.6.55 je množina B residuální. Množiny první kategorie ale tvoří σ-ideál (viz Větu 10.6.43), a tedy je také A residuální. ∎

Jedním z nejdůležitějších výsledků týkajících se úplných metrických prostorů je Baireova věta. V jejím důkazu využijeme pojem uzavřené koule, který nyní zavedeme.

10.6.57. Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor, $x \in P$ a $r > 0$. Množinu $\overline{B}(x,r)$ definovanou předpisem

$$\overline{B}(x,r) = \{y \in P;\ \varrho(x,y) \le r\}$$

nazýváme **uzavřenou koulí se středem** x **a poloměrem** r.

10.6.58. Příklad. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor, $x \in P$ a $r > 0$. Dokažte, že uzavřená koule $\overline{B}(x,r)$ je uzavřená množina.

Řešení. Nechť $y \in P \setminus \overline{B}(x,r)$, tedy $\varrho(x,y) > r$. Položme $s = \varrho(x,y) - r$. Pak platí $s > 0$. Nechť $z \in B(y,s)$. Potom

$$\varrho(x,z) \ge \varrho(x,y) - \varrho(y,z) > \varrho(x,y) - s = r,$$

takže $B(y,s) \subset P \setminus \overline{B}(x,r)$. Odtud vyplývá, že množina $P \setminus \overline{B}(x,r)$ je otevřená, a tedy podle Věty 10.3.17 je množina $\overline{B}(x,r)$ uzavřená. ♣

10.6.59. Věta (Baire)**.** Každý úplný metrický prostor je Baireův.

Důkaz. Předpokládejme, že $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost otevřených hustých množin v prostoru (P,ϱ) a že G je otevřená a neprázdná množina v (P,ϱ). Podle Věty 10.3.15(c) a Věty 10.6.29 je množina $G \cap G_1$ otevřená a neprázdná v (P,ϱ). Nechť $x_1 \in G \cap G_1$. Potom existuje $r_1 > 0$ takové, že $\overline{B}(x_1,r_1) \subset G \cap G_1$. Podle Příkladu 10.6.58 je množina $\overline{B}(x_1,r_1)$ uzavřená v (P,ϱ).

Otevřená koule $B(x_1,r_1)$ je podle Příklad 10.3.14 neprázdnou otevřenou množinou v (P,ϱ), a tedy podle Věty 10.3.15(c) a Věty 10.6.29 je množina $B(x_1,r_1) \cap G_2$ otevřená a neprázdná v (P,ϱ). Obdobně jako výše lze dokázat, že existuje bod $x_2 \in B(x_1,r_1) \cap G_2$ a $r_2 \in \mathbb{R}$, $0 < r_2 < \frac{1}{2}r_1$, takové, že

$$\overline{B}(x_2,r_2) \subset B(x_1,r_1) \cap G_2 \subset G \cap G_1 \cap G_2.$$

Opakováním tohoto postupu induktivně dostaneme posloupnost uzavřených koulí $\{\overline{B}(x_n,r_n)\}_{n=1}^{\infty}$ splňující pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\overline{B}(x_{n+1},r_{n+1}) \subset \overline{B}(x_n,r_n)$$

a

$$\lim \operatorname{diam}(\overline{B}(x_n,r_n)) = 0.$$

Prostor (P,ϱ) je ale úplný, a tedy podle Cantorovy věty (Věta 10.6.18) existuje $x \in P$ splňující

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n,r_n) \subset (G \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n).$$

Dokázali jsme tedy, že pro libovolnou posloupnost otevřených hustých množin $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ v prostoru (P, ϱ) a libovolnou množinu G otevřenou a neprázdnou v (P, ϱ) je

$$G \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset.$$

To podle Věty 10.6.29 znamená, že množina $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ je hustá v prostoru (P, ϱ). Tím je ověřen výrok (ii) z Věty 10.6.55, a tedy podle této věty je metrický prostor (P, ϱ) Baireův. ■

10.6.60. Příklady. Dokažte, že

(a) metrický prostor $[a, b]$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, je Baireův, a tedy druhé kategorie,

(b) metrický prostor (a, b), kde $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, je Baireův, a tedy druhé kategorie,

(c) metrický prostor $(C([0, 1]), \varrho_{\mathrm{sup}})$ je Baireův, a tedy druhé kategorie.

Řešení. (a) Podle Příkladu 10.6.14 je $[a, b]$ úplný, a tedy je podle Baireovy-Osgoodovy věty Baireův.

(b) Nechť $G \subset (a, b)$ je neprázdná otevřená množina a $x \in G$. Potom existuje $r > 0$ takové, že $(x - r, x + r) \subset G$. Nechť $s \in \mathbb{R}$, $s \in (0, r)$. Potom $[x - s, x + s] \subset G$. Podle tvrzení (a) je množina $[x - s, x + s]$ druhé kategorie, a podle Věty 10.6.43(b) je tedy také množina G druhé kategorie. Odtud plyne, že prostor (a, b) je Baireův.

(c) Podle Příkladu 10.6.16 je metrický prostor $(C([0, 1]), \varrho_{\mathrm{sup}})$ úplný, a tedy je podle Baireovy-Osgoodovy věty Baireův. ♣

10.6.61. Poznámka. Z Baireovy-Osgoodovy věty (Věta 10.6.59) plyne alternativní důkaz toho, že metrický prostor $(C([0, 1]), \varrho_{\mathrm{int}})$ není úplný (tento fakt byl dokázán elementárně v Příkladu 10.6.17). Kdyby byl tento prostor úplný, musel by být podle Baireovy-Osgoodovy věty Baireův, a tedy druhé kategorie. Z Příkladu 10.6.42(c) však víme, že je první kategorie, nemůže být tedy Baireův ani úplný.

10.6.62. Opačná implikace k tvrzení Baireovy-Osgoodovy věty (Věta 10.6.59) neplatí. Například metrický prostor $(0, 1)$ je Baireův (viz Příklad 10.6.60(b)), nikoli však úplný (viz Příklad 10.6.9).

10.6.63. Opačná implikace k pozorování uvedeném v 10.6.52 neplatí. Označme $P = (0, 1) \cup (\mathbb{Q} \cap (2, 3))$ a uvažujme metrický prostor $(P, \varrho_{\mathrm{eukl}})$. Množina $(0, 1)$ je zřejmě otevřená v (P, ϱ) a podle Příkladu 10.6.60(b) je druhé kategorie. Podle Věty 10.6.43(b) je tudíž i celý prostor P druhé kategorie. Označme dále $B = \mathbb{Q} \cap (2, 3)$. Potom platí $B = P \cap (2, 3)$, přičemž množina $(2, 3)$ je otevřená v $\mathbb{R}$, a tedy je podle Věty 10.3.44 množina B otevřená v

(P, ϱ). Množina B je ale první kategorie, jak vyplývá z Příkladu 10.6.42(a) a z Věty 10.6.43(a). Nalezli jsme tedy otevřenou podmnožinu prostoru P, která je první kategorie, takže prostor P není Baireův.

10.6.64. Příklad. Dokažte, že množina $\mathbb{Q}$ není typu G_δ.

Řešení. Tvrzení dokážeme sporem. Díky Příkladu 10.6.26(a) víme, že množina $\mathbb{Q}$ je hustá v metrickém prostoru $\mathbb{R}$. Kdyby byla navíc ještě typu G_δ, musela by být podle Věty 10.6.49 residuální v $\mathbb{R}$. Podle Příkladu 10.6.42(b) je také množina $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ residuální v $\mathbb{R}$. Metrický prostor $\mathbb{R}$ je podle Příkladu 10.6.60(b) druhé kategorie. Podle Věty 10.6.50 tedy platí $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$, což je ale spor. ♣

10.6.65. Definice. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f : (P, \varrho) \to (Q, \sigma)$ je funkce. Nechť $x \in P$. Potom **oscilací** funkce f v bodě x nazýváme nezáporný prvek $\operatorname{osc}_f(x)$ množiny $\mathbb{R}^*$, definovaný předpisem

$$\operatorname{osc}_f(x) = \lim_{\delta \to 0+} \operatorname{diam}_\sigma(f(B_\varrho(x, \delta))).$$

10.6.66. Věta. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f : (P, \varrho) \to (Q, \sigma)$ je funkce. Označme symbolem C_f množinu těch bodů $x \in P$, v nichž je funkce f spojitá. Potom platí

$$C_f = \{x \in P;\ \operatorname{osc}_f(x) = 0\}.$$

Důkaz. Označme $A = \{x \in P;\ \operatorname{osc}_f(x) = 0\}$. Nechť $x \in C_f$ a zvolme $\varepsilon > 0$. K němu existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in B_\varrho(x, \delta)$ platí $f(y) \in B_\sigma(f(x), \varepsilon)$. Nechť $y_1, y_2 \in B(x, \delta)$. Potom

$$\sigma(f(y_1), f(y_2)) \leq \sigma(f(y_1), f(x)) + \sigma(f(x), f(y_2)) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Odtud plyne, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\operatorname{diam}_\sigma(f(B_\varrho(x, \delta)) < \varepsilon,$$

tedy

$$\lim_{\delta \to 0+} \operatorname{diam}_\sigma(f(B_\varrho(x, \delta))) = 0.$$

To znamená, že $\operatorname{osc}_f(x) = 0$, a tedy $x \in A$. Dokázali jsme inkluzi $C_f \subset A$.

Nyní předpokládejme, že $x \in A$, tedy $\operatorname{osc}_f(x) = 0$. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta_\varepsilon > 0$, takové, že pro každé $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta \in (0, \delta_\varepsilon)$,

$$\operatorname{diam}_\sigma(f(B(x, \delta)) < \varepsilon.$$

Tedy pro každé $y \in B_\varrho(x, \delta)$ platí

$$\sigma(f(y), f(x)) \leq \operatorname{diam}_\sigma(f(B(x, \delta))) < \varepsilon.$$

To znamená, že funkce f je v bodě x spojitá, takže $x \in C_f$. Tím je dokázána inkluze $A \subset C_f$, a tedy i požadovaná rovnost $A = C_f$. ■

10.6.67. Věta. Nechť (P,ϱ) a (Q,σ) jsou metrické prostory a $f\colon (P,\varrho) \to (Q,\sigma)$ je funkce. Nechť C_f je množina bodů spojitosti funkce f. Potom C_f je typu G_δ.

Důkaz. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme

$$B_n = \{x \in P;\ \operatorname{osc}_f(x) < \frac{1}{n}\}.$$

Dokážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina B_n otevřená.

Nechť $\varepsilon > 0$ a položme

$$F_\varepsilon = \{x \in P;\ \operatorname{osc}_f(x) \geq \varepsilon\}.$$

Nechť $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ je posloupnost prvků množiny F_ε splňující $\lim_{k\to\infty} x_k = x$, kde $x \in P$. Potom pro každé $\delta > 0$ existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že

$$B(x_k, \frac{\delta}{2}) \subset B(x,\delta).$$

Tedy

$$\operatorname{diam}_\sigma(f(B(x,\delta))) \geq \operatorname{diam}_\sigma(f(B(x_k, \frac{\delta}{2}))) \geq \operatorname{osc}_f(x_k) \geq \varepsilon.$$

Odtud plyne, že $x \in F_\varepsilon$, a tedy je množina F_ε uzavřená. Položíme-li pro $n \in \mathbb{N}$ speciálně $\varepsilon = \frac{1}{n}$, dostaneme, že množina $F_{\frac{1}{n}}$ je uzavřená. Protože $B_n = P \setminus F_{\frac{1}{n}}$, dostáváme z Věty 10.3.17, že množina B_n je otevřená.

Množina C_f podle Věty 10.6.66 splňuje

$$C_f = \{x \in P;\ \operatorname{osc}_f(x) = 0\}$$

a navíc zřejmě platí

$$\{x \in P;\ \operatorname{osc}_f(x) = 0\} = \bigcap_{n=1}^\infty B_n.$$

Odtud vyplývá, že množina C_f je průnikem spočetně mnoha otevřených množin, tedy je typu G_δ. ■

Jak víme, Dirichletova funkce je spojitá právě ve všech iracionálních bodech množiny $\mathbb{R}$. Na otázku, zda existuje reálná funkce, která by byla spojitá naopak právě ve všech racionálních bodech, dostáváme z dokázaných tvrzení možná trochu překvapivě zápornou odpověď.

10.6.68. Důsledek. Neexistuje funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro kterou by platilo $C_f = \mathbb{Q}$.

Důkaz. Podle Věty 10.6.67 musí být C_f typu G_δ, avšak podle Příkladu 10.6.64 množina $\mathbb{Q}$ není typu G_δ. Odtud plyne tvrzení. ■

Metoda kategorií, založená na Baireově-Osgoodově větě, představuje důležitý příklad nekonstruktivní důkazové techniky. V tomto odstavci metodu kategorií podrobně popíšeme a ilustrujeme na příkladě.

10.6.69. Nechť X je množina a $V(x)$, $x \in X$ je nějaká výroková forma na X. Chceme-li dokázat výrok $\exists\ x \in X\colon V(x)$, stačí na X najít metriku ϱ, vzhledem k níž je metrický prostor (X, ϱ) úplný a dokázat, že vzhledem k této metrice je množina $\{y \in X,\ \neg V(y)\}$ první kategorie. Podle Baireovy-Osgoodovy věty pak nemůže platit

$$X = \{y \in X,\ \neg V(y)\},$$

protože úplný prostor nemůže být první kategorie, a tedy musí existovat nějaký prvek $x \in X$ splňující $V(x)$.

Metodu kategorií ilustrujeme na následujícím příkladu.

10.6.70. Příklad. Existuje spojitá funkce na $[0,1]$, která nemá v žádném bodě žádnou z jednostranných derivací.

10.6.71. Definice. Banachovým prostorem nazýváme úplný normovaný lineární prostor.

10.6.72. Příklad. Dokažte, že normovaný lineární prostor $(C([0,1]), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ je Banachův, ale $(C([0,1]), \|\cdot\|_{\text{int}})$ není Banachův.

Řešení. ♣

10.6.73. Příklad. Nechť $p \in [1, \infty)$. Definujme množinu

$$\ell^p = \left\{ \{x_n\},\ x_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

a funkcionál

$$\|\{x_n\}\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dokažte, že pak dvojice $(\ell^p, \|\cdot\|_{\ell^p})$ tvoří Banachův prostor.

Řešení. ♣

10.6.74. Příklad. Definujme množinu

$$\ell^\infty = \{\{x_n\},\ x_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ \exists K > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\colon |x_n| \le K\}$$

a funckionál

$$\|\{x_n\}\|_{\ell^\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

Dále definujeme množinu

$$c_0 = \{\{x_n\},\ x_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ \lim x_n = 0\},$$

Dokažte, že obě dvojice $(\ell^\infty, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ a $(c_0, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ tvoří Banachovy prostory.

Řešení. ♣

10.6.75. Věta (o algebraické bázi Banachova prostoru)**.** Banachův prostor nemůže mít spočetnou algebraickou bázi.

Důkaz. Nechť X je Banachův prostor a $\{x_n\}$ je nějaká jeho báze. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme symbolem E_n lineární obal množiny $\{x_1, \dots x_n\}$. Potom je pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina E_n uzavřená a řídká a platí

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

To je ale podle Věty 10.6.59 spor s úplností prostoru X. ■

10.6.76. Věta. Metrický prostor je kompaktní právě tehdy, když je totálně omezený a úplný.

Důkaz. $\Rightarrow$ Tato implikace vyplývá z Věty 10.6.12 a Věty 10.5.25.

$\Leftarrow$ Nechť (P, ϱ) je úplný a totálně omezený metrický prostor a $\{x_n\}$ je posloupnost jeho prvků. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ nalezneme konečnou $\frac{1}{k}$-síť D_k. Zkonstruujeme posloupnost $\{d_k\}$ takovou, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ jsou splněny následující dvě podmínky:

- $d_k \in D_k$,
- množina $A_k \subset \mathbb{N}$ definovaná předpisem

  $$A_k = \{j \in \mathbb{N};\ x_j \in B(d_1, 1) \cap \dots \cap B(d_k, \frac{1}{k})\}$$

  je nekonečná.

Nechť nejprve $k = 1$. Potom

$$\mathbb{N} = \bigcup_{d \in D_1} \{j \in \mathbb{N};\ x_j \in B(d, 1)\}.$$

Vyjádřili jsme množinu přirozených čísel jako sjednocení konečně mnoha množin. Alespoň jedna z nich tedy musí být nekonečná. To znamená, že existuje $d_1 \in D_1$ takové, že příslušná množina A_1 je nekonečná.

Nyní předpokládejme, že máme již zvoleny body $d_1, \dots, d_k$. Potom

$$A_k = \bigcup_{d \in D_{k+1}} \{j \in A_k;\ x_j \in B(d, \frac{1}{k+1})\}.$$

Opět jsme vyjádřili nekonečnou množinu A_k jako sjednocení konečně mnoha množin, a tedy alespoň jedna z nich musí být nekonečná. Tedy existuje $d_{k+1} \in D_{k+1}$ takové, že příslušná množina A_{k+1} je nekonečná.

Nyní zvolíme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $n_k \in A_k$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{2}{k_0} < \varepsilon$. Potom pro každé $k, k' \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, $k' \geq k_0$ platí

$$\varrho(x_k, x_{k'}) \leq \varrho(x_k, d_{k_0}) + \varrho(d_{k_0}, x_{k'}) < \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_0} = \frac{2}{k_0} < \varepsilon.$$

Posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je tedy cauchyovská. Protože P je úplný, je tato posloupnost konvergentní. Z libovolně zvolené posloupnosti prvků z P jsme tedy vybrali konvergentní podposloupnost. Jinými slovy, P je kompaktní. ■

10.7. Separabilní prostory

10.7.1. Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je **separabilní**, jestliže obsahuje spočetnou hustou podmnožinu.

10.7.2. Příklady. (a) Dokažte, že prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, jsou separabilní.

(b) Dokažte, že metrický prostor $(C([0,1]), \varrho_{\sup})$ je separabilní.

(c) Dokažte, že diskrétní metrický prostor je separabilní právě tehdy, když je spočetný.

Řešení. (a) Množina $\mathbb{Q}$ je spočetná a hustá v $\mathbb{R}$ a množina

$$\{z \in \mathbb{C};\ z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{Q}\}$$

je spočetná a hustá v $\mathbb{C}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ je množina bodů z $\mathbb{R}^n$ s racionálními souřadnicemi spočetná a hustá v $\mathbb{R}^n$ a množina těch bodů z $\mathbb{C}^n$, jejichž všechny reálné i imaginární souřadnice jsou racionální, je spočetná a hustá v $\mathbb{C}^n$.

(b) Nechť $f \in C([0,1])$ a zvolme $\varepsilon > 0$. Podle Weierstrassovy věty (Věta 12.2.6) pak existuje polynom P splňující

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Nechť $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ a pro každé $x \in [0,1]$. Nalezneme racionální čísla $b_0, \dots, b_n$ splňující

$$\sum_{j=0}^{n} |a_j - b_j| < \varepsilon.$$

Označme $\tilde{P}(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ Potom

$$\|P - \tilde{P}\|_{\sup} = \sup_{x\in[0,1]} |P(x) - \tilde{P}(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} \sum_{j=0}^{n} |a_j - b_j| x^j$$
$$\leq \sum_{j=0}^{n} |a_j - b_j| < \varepsilon.$$

Tedy

$$\|f - \tilde{P}\|_{\sup} \leq \|f - P\|_{\sup} + \|P - \tilde{P}\|_{\sup} < 2\varepsilon.$$

Dokázali jsme tudíž, že množina všech polynomů definovaných na $[0, 1]$, jejichž všechny koeficienty jsou racionální čísla, je hustá v metrickém prostoru $(C([0, 1]), \varrho_{\sup})$. Protože tato množina je zřejmě spočetná, je tento prostor separabilní.

(c) Nechť P je množina a ϱ je diskrétní metrika na P. Podle Příkladu 10.6.26 je jedinou hustou podmnožinou prostoru (P, ϱ) množina P. Odtud ihned plyne tvrzení. ♣

10.7.3. Věta. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Jestliže existuje nespočetná množina $A \subset P$ a $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $x, y \in A$, $x \neq y$, platí $\varrho(x, y) \geq \varepsilon$, pak P není separabilní.

Důkaz. Nechť A a ε splňují předpoklad věty. Předpokládejme, že D je libovolná hustá množina v P. Potom pro každé $x \in A$ existuje $d_x \in D \cap B(x, \frac{\varepsilon}{2})$. Nechť $x, y \in A$, $x \neq y$. Potom platí $B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B(y, \frac{\varepsilon}{2}) = \emptyset$, neboť kdyby existoval prvek $z \in B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B(y, \frac{\varepsilon}{2})$, pak bychom dostali

$$\varepsilon \leq \varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

což je spor. Odtud plyne, že $d_x \neq d_y$. To znamená, že zobrazení $F\colon A \to D$, které každému $x \in A$ přiřazuje prvek $d_x \in D$, je prosté. Tedy množina A má stejnou mohutnost jako množina $F(A)$. Protože A je nespočetná množina, je nespočetná i množina $F(A)$. Dále víme, že $F(A) \subset D$. Odtud vyplývá, že i D je nespočetná množina. Dokázali jsme, že prostor P neobsahuje žádnou spočetnou hustou množinu. Tudíž prostor P není separabilní. ■

10.7.4. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $\mathcal{B}$ je nějaký systém otevřených podmnožin P. Řekneme, že $\mathcal{B}$ je **báze otevřených množin** prostoru P, jestliže pro každou otevřenou množinu $G \subset P$ existuje $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{B}$ taková, že $\bigcup \mathcal{B}^* = G$.

10.7.5. Každou otevřenou množinu můžeme obdržet jako sjednocení množin báze, přičemž systém bázových množin může být podstatně menší než systém všech otevřených množin. Prázdná množina je rovna sjednocení prázdného systému množin, a proto báze nemusí, ale může, obsahovat prázdnou množinu.

10.7.6. Věta (charakterizace separabilních prostorů)**.** Metrický prostor je separabilní právě tehdy, když má spočetnou bázi otevřených množin.

Důkaz. $\Rightarrow$ Nechť (P, ϱ) je separabilní metrický prostor a D je spočetná hustá podmnožina P. Položme

$$\mathcal{B} = \{B(x,r);\ x \in D,\ r \in \mathbb{Q},\ r > 0\}.$$

Množina $D \times \mathbb{Q}$ je spočetná podle Věty 1.7.19(c). Systém $\mathcal{B}$ je obrazem množiny $D \times \mathbb{Q}$ při zobrazení $F : (x,r) \mapsto B(x,r)$, a tedy je podle Věty 1.7.19(d) také spočetný.

Dokážeme, že $\mathcal{B}$ je bází otevřených množin P. Množiny v $\mathcal{B}$ jsou otevřené koule, a tedy otevřené množiny. Nechť $G \subset P$ je otevřená množina. Položme $\mathcal{B}^* = \{H \in \mathcal{B};\ H \subset G\}$. Zřejmě platí $\bigcup \mathcal{B}^* \subset G$. Dokážeme opačnou inkluzi. Předpokládejme, že $x \in G$. Potom existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $B(x,\varepsilon) \subset G$. Nalezneme $y \in B(x, \frac{\varepsilon}{4}) \cap D$ a $r \in (\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{2}) \cap \mathbb{Q}$. Potom $\varrho(x,y) < r$, takže $x \in B(y,r)$. Dále pro každé $z \in B(y,r)$ platí

$$\varrho(x,z) \le \varrho(x,y) + \varrho(y,z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

a tedy $B(y,r) \subset B(x,\varepsilon) \subset G$. Odtud vyplývá, že $B(y,r) \in \mathcal{B}^*$. Protože $x \in B(y,r)$, plyne odtud, že $x \in \bigcup \mathcal{B}^*$. Platí tedy $G = \bigcup \mathcal{B}^*$.

$\Leftarrow$ Nechť $\mathcal{B} = \{B_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je spočetná báze neprázdných otevřených množin metrického prostoru (P, ϱ). Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolíme $x_n \in B_n$ a položíme $D = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Množina D je zřejmě spočetná. Předpokládejme, že G je neprázdná otevřená množina. Potom existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $B_n \subset G$. Potom máme $x_n \in G$, a tedy $G \cap D \neq \emptyset$. Podle Věty 10.6.29 je tudíž množina D hustá v P. Odtud plyne, že prostor P je separabilní. ∎

10.7.7. Důsledek. Nechť (P, ϱ) je separabilní metrický prostor a $Q \subset P$. Potom je metrický prostor (Q, ϱ) separabilní.

Důkaz. Podle Věty 10.7.6 existuje spočetná báze $\mathcal{B}$ otevřených množin prostoru P. Definujme systém $\mathcal{B}_Q = \{Q \cap B;\ B \in \mathcal{B}\}$. Dokážeme, že $\mathcal{B}_Q$ je bází otevřených množin prostoru Q.

Systém $\mathcal{B}_Q$ zřejmě spočetný a každý jeho prvek je otevřená množina v Q podle Věty 10.3.44. Předpokládejme, že $G \subset Q$ je otevřená množina v Q. Podle Věty 10.3.44 existuje množina $\tilde{G} \subset P$ otevřená v P splňující $G = \tilde{G} \cap Q$. Pro množinu $\tilde{G}$ nalezneme systém $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{B}$ splňující $\tilde{G} =$

$\bigcup \mathcal{B}^*$. Položme $\mathcal{B}_Q^* = \{Q \cap B;\ B \in \mathcal{B}^*\}$. Potom zřejmě $\mathcal{B}_Q^* \subset \mathcal{B}_Q$ a $\bigcup \mathcal{B}_Q^* = Q \cap \bigcup \mathcal{B}^* = Q \cap \tilde{G} = G$.

Prostor (Q, ϱ) je separabilní podle Věty 10.7.6, neboť má spočetnou bázi otevřených množin. ■

10.7.8. Definice. Nechť X je množina a $A \subset X$. **Charakteristickou funkcí** množiny A nazýváme funkci $\chi_A \colon X \to \mathbb{R}$, definovanou předpisem

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \in A \\ 0 & \text{pokud } x \notin A. \end{cases}$$

Speciálně pro $X = \mathbb{N}$ a $A \subset \mathbb{N}$ definujeme **charakteristickou posloupnost** $\{\chi_A\}_{n=1}^{\infty}$ množiny A předpisem

$$(\chi_A)_n = \begin{cases} 1 & \text{pokud } n \in A \\ 0 & \text{pokud } n \notin A. \end{cases}$$

10.7.9. Věta. (a) Prostor ℓ^∞ není separabilní.

(b) Prostor c_0 je separabilní.

Důkaz. (a) Nechť $A, B \subset \mathbb{N}$, $A \neq B$. Potom zřejmě platí

$$\|\chi_A - \chi_B\|_{\ell^\infty} = 1,$$

neboť posloupností χ_A a χ_B obsahují pouze nuly a jedničky a nejsou stejné. Z Věty 10.7.3 tedy vyplývá, že prostor ℓ^∞ není separabilní.

(b) Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$D_n = \{x \in c_0;\ x = \{x_j\}_{j=1}^{\infty},\ x_j \in \mathbb{Q},\ \ x_j = 0 \text{ pro } j > n\}$$

a

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n.$$

Potom D_n je spočetná pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy je také D spočetná. Dokážeme, že D je hustá v c_0.

Nechť $y = \{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ je prvek z c_0, tedy y je posloupnost reálných čísel splňující $\lim_{j\to\infty} y_j = 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|y_j| < \varepsilon$ pro každé $j > n$. Dále pro každé $j \in \{1, \dots, n_0\}$ nalezneme $r_j \in \mathbb{Q}$ splňující $|r_j - y_j| < \varepsilon$. Posloupnost $x = \{x_j\}_{j=1}^{\infty}$, definovaná předpisem

$$x_j = \begin{cases} r_j & \text{pokud } j = 1, \dots, n_0, \\ 0 & \text{pokud } j > n_0, \end{cases}$$

potom splňuje $x \in D_{n_0}$, tedy $x \in D$, a

$$\begin{aligned}\|x - y\|_{\ell^\infty} &= \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j - y_j| = \max\{\sup_{j \in \mathbb{N},\, j \le n_0} |x_j - y_j|, \sup_{j \in \mathbb{N}\; j > n_0} |0 - y_j|\} \\ &< \max\{\varepsilon, \varepsilon\} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Množina D je tedy hustá v c_0. Odtud vyplývá, že prostor c_0 je separabilní. ∎

10.7.10. Věta (vztah totální omezenosti a separability)**.** Nechť (P, ϱ) je totálně omezený metrický prostor. Potom je P separabilní.

Důkaz. Podle definice totální omezenosti existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ konečná $\frac{1}{n}$-síť D_n prostoru P. Položme $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Podle Věty 1.7.19(b) je potom množina D spočetná. Zvolme $x \in P$ a $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Poněvadž D_n je $\frac{1}{n}$-síť, existuje $y \in D_n$ takové, že $\varrho(x, y) < \frac{1}{n}$. Potom $y \in D$ a platí $\varrho(x, y) < \varepsilon$. Odtud plyne, že D je hustá v P. Prostor P je tedy separabilní. ∎

10.7.11. Důsledek. Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor. Potom je P separabilní.

Důkaz. Tvrzení plyne z Věty 10.5.25 a Věty 10.7.10. ∎

10.8. Souvislé prostory

10.8.1. Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je **souvislý**, jestliže není sjednocením dvou neprázdných disjunktních otevřených množin. Řekneme, že množina $A \subset P$ je **souvislá**, jestliže je metrický prostor (A, ϱ) souvislý.

10.8.2. Poznámka. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $x \in P$. Potom je množina $\{x\}$ souvislá v prostoru (P, ϱ).

10.8.3. Příklady. (a) Dokažte, že metrický prostor $\mathbb{R}$ je souvislý.

(b) Dokažte, že metrický prostor $[0, 1] \cup (2, 3)$ není souvislý.

(c) Dokažte, že metrický prostor $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je souvislý právě tehdy, když je množina P buď prázdná nebo jednobodová.

Řešení. (a) Předpokládejme, že $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}$ jsou neprázdné disjunktní otevřené množiny splňující $G_1 \cup G_2 = \mathbb{R}$. Podle věty o struktuře otevřených množin v $\mathbb{R}$ (Věta 10.3.20) je množina G_1 nejvýše spočetným sjednocením disjunktních otevřených intervalů. Protože $G_2 \neq \emptyset$, neplatí $G_1 = \mathbb{R}$, a tedy alespoň jeden z krajních bodů alespoň jednoho z těchto intervalů je prvkem $\mathbb{R}$. Označme tento bod symbolem a. Potom $a \notin G_1$, a tedy $a \in G_2$. Protože G_2 je otevřená v $\mathbb{R}$, existuje $r > 0$ takové, že $(a - r, a + r) \subset G_2$. Protože a je krajním bodem některého intervalu ležícího v G_1, musí platit $(a - r, a + r) \cap G_1 \neq \emptyset$. To je však spor s tím, že množiny G_1 a G_2 jsou disjunktní.

(b) Množina $[0, 1]$ je otevřená, protože pro každé $x \in [0, 1]$ a pro každé $r \in \mathbb{R}$, $0 < r < 1$, platí $B(x, r) \subset [0, 1]$. Ze stejného důvodu je také otevřená množina $(2, 3)$. Daný metrický prostor je sjednocením těchto dvou neprázdných disjunktních otevřených množin, a je tedy nesouvislý.

(c) $\Rightarrow$ Předpokládejme, že množina P má alespoň dva různé prvky x a y. Potom množina $\{x\}$ i množina $P \setminus \{x\}$ jsou podle Příkladu 10.3.18 v prostoru $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ otevřené, zřejmě jsou neprázdné a disjunktní a množina P je jejich sjednocením. Prostor $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je tedy nesouvislý.

$\Leftarrow$ Tvrzení platí zřejmě, dokonce pro libovolný metrický prostor. ♣

10.8.4. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $H \subset P$. Řekneme, že H je **obojetná**, jestliže je zároveň otevřená i uzavřená.

10.8.5. Poznámky. (a) V každém metrickém prostoru (P, ϱ) jsou prázdná množina a množina P obojetné.

(b) V metrickém prostoru $[0, 1] \cup (2, 3)$ jsou množiny $[0, 1]$ a $(2, 3)$ obojetné.

(c) Každá podmnožina metrického prostoru $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ je obojetná.

10.8.6. Věta (charakterizace souvislých prostorů)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Pak jsou následující čtyři výroky ekvivalentní.

(i) Prostor P není souvislý.

(ii) Existují dvě neprázdné disjunktní množiny $F_1, F_2 \subset P$ uzavřené v (P, ϱ) a takové, že $P = F_1 \cup F_2$.

(iii) Existuje obojetná neprázdná množina H splňující $H \neq P$.

(iv) Existuje spojité surjektivní zobrazení $f : (P, \varrho) \to (\{0, 1\}, \varrho_{\text{diskr}})$.

Důkaz. (i)$\Rightarrow$(ii) Nalezneme neprázdné disjunktní otevřené množiny G_1 a G_2 splňující $P = G_1 \cup G_2$. Položme $F_1 = G_1$ a $F_2 = G_2$. Podle Věty 10.3.17 jsou množiny F_1 a F_2 uzavřené. Navíc jsou zřejmě disjunktní a neprázdné a platí $P = F_1 \cup F_2$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Položme $H = F_1$. Potom H je neprázdná, uzavřená a různá od P. Protože F_2 je uzavřená, je H také otevřená, a tedy obojetná.

(iii)$\Rightarrow$(iv) Položme $f = \chi_H$. Protože $H \neq \emptyset$ a $H \neq P$, je f je surjektivní zobrazení. Dokážeme, že f je spojité. V prostoru $\{0, 1\}$ existují pouze tři neprázdné otevřené množiny, a sice $\{0\}$, $\{1\}$ a $\{0,1\}$. Podle předpokladu jsou množiny $f^{-1}(\{0\}) = H$ i $f^{-1}(\{1\}) = P \setminus H$ otevřené. Množina $f^{-1}(\{0,1\}) = P$ je otevřená triviálně. Podle Věty 10.4.6 je tedy f spojité.

(iv)$\Rightarrow$(i) Podle Příkladu 10.3.18 jsou množiny $\{0\}$ a $\{1\}$ otevřené. Ze spojitosti zobrazení f a Věty 10.4.6 plyne, že množiny $f^{-1}(\{0\})$ a $f^{-1}(\{1\})$ jsou otevřené v prostoru (P,ϱ). Navíc jsou tyto dvě množiny zřejmě neprázdné a disjunktní a platí $P = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1)$. Prostor P tedy není souvislý. ■

10.8.7. Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že A je **komponenta**, jestliže A je souvislá a každá množina $B \subset P$ splňující $A \subset B$ a $A \neq B$ je nesouvislá.

10.8.8. Věta. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor, $G \subset P$ je otevřená množina v (P,ϱ), $A \subset P$ a $G \cap A = \emptyset$. Potom $G \cap \overline{A} = \emptyset$.

Důkaz. Předpokládejme, že $x \in G \cap \overline{A}$. Potom díky otevřenosti množiny G v (P,ϱ) existuje $r > 0$ splňující $B(x,r) \subset G$. Protože $x \in \overline{A}$, buď platí $x \in A$ nebo $x \in \partial A$. V každém případě však existuje $s > 0$ takové, že $B(x,s) \cap A \neq \emptyset$. Položme $t = \min\{r,s\}$. Potom platí $B(x,t) \subset G$ a $B(x,t) \cap A \neq \emptyset$. To je ale spor s tím, že $G \cap A = \emptyset$. Tvrzení je dokázáno. ■

10.8.9. Věta (vlastnosti souvislých prostorů)**.** Nechť (P,ϱ) je metrický prostor.

(a) Nechť (Q,σ) je metrický prostor a $f\colon (P,\varrho) \to (Q,\sigma)$ je spojité zobrazení. Nechť $A \subset P$ je souvislá množina v prostoru (P,ϱ). Pak $f(A)$ je souvislá množina v prostoru (Q,σ).

(b) Nechť $A \subset P$ je souvislá množina v prostoru (P,ϱ) a $A \subset B \subset \overline{A}$. Pak je množina B souvislá v prostoru (P,ϱ). Speciálně, množina $\bar{A}$ je souvislá v (P,ϱ).

(c) Nechť $I \neq \emptyset$ je indexová množina a nechť pro každé $\alpha \in I$ je A_α souvislá množina v prostoru (P,ϱ). Nechť platí

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \neq \emptyset.$$

Potom je $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ souvislá množina v prostoru (P,ϱ).

Důkaz. (a) Předpokládejme, že množina $f(A)$ není souvislá v prostoru (Q,σ). Označme symbolem g zúžení zobrazení f na množinu A. Potom $g\colon (A,\varrho) \to (Q,\sigma)$ je spojité zobrazení a $f(A) = g(A)$. Existují tedy neprázdné disjunktní množiny $G_1, G_2 \subset Q$ otevřené v prostoru (Q,σ) splňující $g(A) = G_1 \cup G_2$. Ze spojitosti zobrazení g a z Věty 10.4.6 plyne, že množiny $g^{-1}(G_1)$, $f^{-1}(G_2)$ jsou otevřené v prostoru (A,ϱ). Navíc jsou zřejmě neprázdné a disjunktní a platí $A = g^{-1}(G_1) \cup g^{-1}(G_2)$. Množina A tudíž není souvislá v prostoru (A, ϱ), a tedy ani v prostoru (P, ϱ).

(b) Předpokládejme, že $B = G_1 \cup G_2$, přičemž G_1, G_2 jsou neprázdné, disjunktní a otevřené v prostoru (P, ϱ). Podle Věty 10.3.44 jsou množiny $A \cap G_1$ a $A \cap G_2$ otevřené v prostoru (A, ϱ). Navíc jsou tyto dvě množiny zřejmě disjunktní a platí

$$A = (A \cap G_1) \cup (A \cap G_2).$$

Dokážeme, že obě tyto množiny jsou neprázdné. Předpokládejme, že například $A \cap G_1 = \emptyset$. Potom $A \subset G_2$. Víme ale, že existuje bod $x \in B \cap G_1$. Protože $B \subset \overline{A}$, platí $x \in \overline{A}$, a tedy díky Větě 10.3.41(c) máme $\varrho(x, A) = 0$. Množina G_1 je ale otevřená v prostoru (P, ϱ) a disjunktní s G_2, takže existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset G_1$. Pak ale $\varrho(x, G_2) \geq r > 0$, a tím spíše $\operatorname{dist}(x, A) > 0$, což je spor. Obdobně lze dokázat, že $A \cap G_2 \neq \emptyset$. Množina A je tedy nesouvislá, což je spor.

(c) Nechť G_1, G_2 jsou disjunktní a otevřené množiny v (P, ϱ) a platí $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = G_1 \cup G_2$. Pak pro každé $\alpha \in I$ máme

$$A_\alpha = (A_\alpha \cap G_1) \cup (A_\alpha \cap G_2),$$

přičemž množiny $A_\alpha \cap G_1$ a $A_\alpha \cap G_2$ jsou disjunktní a podle Věty 10.3.44 otevřené v metrickém prostoru (A_α, ϱ). Tento metrický prostor je ale souvislý, takže alespoň jedna z množin $A_\alpha \cap G_1$ a $A_\alpha \cap G_2$ musí být prázdná. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $A_\alpha \cap G_2 = \emptyset$. Potom $A_\alpha \subset G_1$. Dokázali jsme, že pro každé $\alpha \in I$ platí buď $A_\alpha \subset G_1$ nebo $A_\alpha \subset G_2$. Protože ale průnik všech G_α je neprázdný, plyne odtud, že pro každé $\alpha \in I$ platí $A_\alpha \subset G_1$. Množina G_2 je tudíž prázdná. Množina $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ je tedy souvislá v prostoru (P, ϱ). ∎

10.8.10. Věta (charakterizace souvislých množin v $\mathbb{R}$). Nechť $A \subset \mathbb{R}$. Pak A je souvislá množina v prostoru $\mathbb{R}$ právě tehdy, když A je buď prázdná nebo interval.

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme, že A je neprázdná množina a není to ani interval. To speciálně znamená, že A není ani degenerovaným intervalem, a tedy je alespoň dvoubodová. Existují tudíž body $a, b \in A$ a $c \in \mathbb{R}$, $c \notin A$, takové, že $a < c < b$. Potom

$$A = [A \cap (-\infty, c)] \cup [A \cap (c, \infty)].$$

Množiny $A \cap (-\infty, c)$ a $A \cap (c, \infty)$ jsou zřejmě neprázdné a disjunktní. Podle Věty 10.3.44 jsou navíc otevřené v metrickém prostoru (A, ϱ), kde ϱ je zděděná eukleidovská metrika na $\mathbb{R}$. Množina A tedy není souvislá v prostoru $\mathbb{R}$.

$\Leftarrow$ Je-li množina A prázdná, pak je zřejmě souvislá podle Definice 10.8.1. Je-li množina A degenerovaným intervalem v $\mathbb{R}$, pak je jednobodová, a tedy souvislá podle Poznámky 10.8.2.

Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Předpokládejme, že $[a, b]$ není souvislý v prostoru $\mathbb{R}$. Pak existují neprázdné disjunktní množiny G_1, G_2 otevřené v $\mathbb{R}$ splňující $[a, b] = G_1 \cup G_2$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme že $b \in G_2$. Pak díky otevřenosti G_2 existuje $\delta > 0$ takové, že $(b - \delta, b) \subset G_2$. Položme

$$\xi = \sup G_1.$$

Potom $\xi < b$. Nechť $\xi \in G_1$. Potom díky otevřenosti množiny G_1 existuje $r > 0$ takové, že $(\xi, \xi + r) \subset G_1$. To je však spor s tím, že $\xi = \sup G_1$. Nechť tedy $\xi \in G_2$. Potom díky otevřenosti množiny G_2 existuje $s > 0$ takové, že $(\xi - s, \xi) \subset G_2$. To je ovšem opět spor s tím, že $\xi = \sup G_1$. K obdobnému sporu dojdeme, jestliže předpokládáme, že $b \in G_1$. Odtud plyne, že interval $[a, b]$ je souvislý v prostoru $\mathbb{R}$.

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a $a < b$. Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{n}$ je rostoucí posloupnost reálných čísel splňující $a < x_1$ a $\lim x_n = b$. Taková posloupnost vždy existuje, neboť pro $b \in \mathbb{R}$ stačí volit

$$x_n = b - \frac{b - a}{n + 1}$$

a pro $b = \infty$ stačí volit $x_n = a + n$. Potom platí

$$[a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a, x_n].$$

Podle již dokázaného tvrzení je pro každé $n \in \mathbb{N}$ interval $[a, x_n]$ souvislou množinou v $\mathbb{R}$. Navíc platí

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a, x_n] \neq \emptyset,$$

neboť například

$$a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a, x_n].$$

Podle Věty 10.8.9(c) je tedy interval $[a, b)$ souvislou množinou v prostoru $\mathbb{R}$.

Obdobně lze dokázat, že pro každé $a \in \mathbb{R}^*$ a $b \in \mathbb{R}$ takové, že $a < b$, je interval $(a, b]$ souvislou množinou v prostoru $\mathbb{R}$.

Konečně nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$ a platí $a < b$. Zvolíme libovolný bod $c \in (a, b)$. Potom platí

$$(a, b) = (a, c] \cup [c, b)$$

a $(a, c] \cap [c, b) \neq \emptyset$. Podle již dokázaného tvrzení jsou oba intervaly $(a, c]$ a $[c, b)$ souvislé v $\mathbb{R}$. Podle speciálního případu Věty 10.8.9(c) je tedy interval (a, b) souvislou množinou v prostoru $\mathbb{R}$.

Tím jsou vyčerpány všechny možnosti typů intervalů a tvrzení je dokázáno. ■

10.8.11. Příklad. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je souvislá otevřená množina v prostoru $\mathbb{R}^n$ a $f: G \to \mathbb{R}$ je zobrazení takové, že pro každé $x \in G$ platí $f'(x) = 0$. Dokažte, že potom f je konstantní na G.

10.8.12. Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $J \subset P$. Řekneme, že J je **křivka** v prostoru (P, ϱ), jestliže existuje spojité zobrazení $f: [0, 1] \to (P, \varrho)$ takové, že $f([0, 1]) = J$.

Řekneme, že množina $A \subset P$ je **křivkově souvislá** v prostoru (P, ϱ), jestliže pro každé $a, b \in A$ existuje spojité zobrazení $f: [0, 1] \to (A, \varrho)$ takové, že $f(0) = a$ a $f(1) = b$.

10.8.13. Věta (o vztahu souvislosti a křivkové souvislosti)**.** Každá křivkově souvislá množina v metrickém prostoru je v tomto prostoru souvislá.

Důkaz. Nechť A je křivkově souvislá množina v prostoru (P, ϱ), která není v tomto prostoru souvislá. Potom existují neprázdné disjunktní množiny $G_1, G_2 \subset P$ otevřené v (P, ϱ) splňující $A = G_1 \cup G_2$. Zvolíme libovolné body $a \in G_1$ a $b \in G_2$. Podle předpokladu existuje spojitá funkce $f: [0, 1] \to (A, \varrho)$ taková, že $f(0) = a$ a $f(1) = b$. Potom ale $[0, 1] = f^{-1}(G_1) \cup f^{-1}(G_2)$. Ze spojitosti zobrazení f a Věty 10.4.6 plyne, že množiny $f^{-1}(G_1)$ a $f^{-1}(G_2)$ jsou otevřené v prostoru $[0, 1]$. Zároveň jsou zřejmě disjunktní a neprázdné. Interval $[0, 1]$ je tedy nesouvislý. To je ale spor s Větou 10.8.10. ■

10.8.14. Příklad. Dokažte, že množina $A \subset R^2$ definovaná předpisem

$$A = \{[x, y] \in R^2;\ x \in \mathbb{R},\ y = f(x)\},$$

kde

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0], \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pokud } x \in (0, \infty), \end{cases}$$

je souvislou podmnožinou prostoru $\mathbb{R}^2$, která ale není křivkově souvislá.

Řešení. Položme

$$A_1 = \{[x, y] \in R^2;\ x \in (0, \infty),\ y = f(x)\}.$$

Nechť $[x_1, y_1], [x_2, y_2] \in A_1$. Definujme zobrazení $g: [0, 1] \to A_1$ předpisem

$$g(t) = [(1-t)x_1 + tx_2, \sin(\frac{1}{(1-t)x_1 + tx_2})].$$

Potom g je spojité zobrazení splňující $g(0) = [x_1, y_1]$ a $g(1) = [x_2, y_2]$. Množina A_1 je tudíž křivkově souvislá, a tedy i souvislá v R^2.

Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $x_n = \frac{1}{n\pi}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $[x_n, 0] \in A_1$ a $\lim x_n = 0$. Odtud plyne, že $[0, 0] \in \overline{A_1}$. Označíme-li tedy

$$A_2 = A_1 \cup \{[0, 0]\},$$

pak dostaneme $A_1 \subset A_2 \subset \overline{A_1}$. Podle Věty 10.8.9(b) je tudíž A_2 souvislá v prostoru $\mathbb{R}^2$.

Konečně označme

$$A_3 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x \in (-\infty, 0],\ y = 0\}.$$

Potom A_3 je zřejmě souvislá v $\mathbb{R}^2$ a navíc platí $A_2 \cap A_3 = \{[0, 0]\}$, takže $A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$. Podle Věty 10.8.9(c) je tedy také množina $A_2 \cup A_3$ souvislá v $\mathbb{R}^2$. Vzhledem k tomu, že $A = A_2 \cup A_3$, dokázali jsme, že množina A je souvislá v $\mathbb{R}^2$.

Předpokládejme pro spor, že množina A je navíc křivkově souvislá v $\mathbb{R}^2$. Položme $a = [-1, 0]$ a $b = [\frac{1}{\pi}, 0]$. Pak existuje spojité zobrazení $h\colon [0, 1] \to A$ takové, že $h(0) = a$ a $h(1) = b$. Tvrdíme, že pro každé $x \in [-1, \frac{1}{\pi}]$ existuje $t \in [0, 1]$ takové, že $h(t) = x$. Kdyby tomu tak nebylo, pak by platilo $h\colon [0, 1] \to A_4$, kde $A_4 = A \setminus \{[x, f(x)]\}$. Protože množiny $(-\infty, x) \times \mathbb{R}$ a $(x, \infty) \times \mathbb{R}$ jsou otevřené v $\mathbb{R}^2$, jsou podle Věty 10.3.44 množiny $A_4 \cap ((-\infty, x) \times \mathbb{R})$ a $A_4 \cap ((x, \infty) \times \mathbb{R})$ otevřené v A_4 a díky spojitosti zobrazení h a Větě 10.4.6 jsou také množiny $h^{-1}(A_4 \cap ((-\infty, x) \times \mathbb{R}))$ a $h^{-1}(A_4 \cap ((x, \infty) \times \mathbb{R}))$ otevřené v $[0, 1]$. Protože jsou také zřejmě neprázdné a disjunktní a interval $[0, 1]$ je jejich sjednocením, plyne odtud, že interval $[0, 1]$ je nesouvislý, což je spor s Větou 10.8.10. Tím je dokázáno naše tvrzení. Speciálně tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $t_n \in [0, 1]$ takové, že $h(t_n) = [(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)^{-1}, 1]$. Zřejmě platí $\lim h(t_n) = [0, 1]$. Podle Věty 10.5.11 a Věty 10.5.5 je množina $h([0, 1])$ kompaktní v $\mathbb{R}^2$. Podle Věty 10.5.6 je tato množina uzavřená v $\mathbb{R}^2$. Podle již dokázaného tvrzení obsahuje množina $h([0, 1])$ posloupnost $\{[(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)^{-1}, 1]\}_{n=1}^{\infty}$. Jak jsme již uvedli, tato posloupnost je v prostoru $\mathbb{R}^2$ konvergentní a její limitou je bod $[0, 1]$, takže $[0, 1] \in A$. To ale neplatí, takže dostáváme spor. Množina A tedy není křivkově souvislá v prostoru $\mathbb{R}^2$. ♣

10.8.15. Poznámky. (a) Spojitý obraz křivkově souvislé množiny je křivkově souvislá množina.

(b) Nechť A je křivkově souvislá množina. Pak $\overline{A}$ nemusí být křivkově souvislá množina.

(c) Nechť $\{A_\alpha\} \subset P$ jsou křivkově souvislé množiny s neprázdným průnikem $\bigcap_\alpha A_\alpha$, přičemž α probíhá indexovou množinu libovolné mohutnosti. Pak $\bigcup_\alpha A_\alpha$ je křivkově souvislá množina.

(d) Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a souvislá. (Taková množina se nazývá *oblast*.) Pak A je křivkově souvislá.

10.9. Součin metrických prostorů

10.9.1. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $(P_1, \varrho_1), \dots, (P_n, \varrho_n)$ jsou metrické prostory. Definujme množinu $P = P_1 \times \cdots \times P_n$ a funkci $\sigma_\infty \colon P \times P \to [0, \infty)$ předpisem

$$\sigma_\infty(x, y) = \max\{\varrho_1(x_1, y_1), \dots, \varrho_n(x_n, y_n)\},$$

kde $x, y \in P$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ a $y = (y_1, \dots, y_n)$. Potom dvojice (P, σ_∞) tvoří metrický prostor.

Důkaz. Tvrzení plyne ihned z toho, že ϱ_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, jsou metriky a z vlastností metriky ϱ zavedené v Příkladu 10.1.10. ■

10.9.2. Definice. Metrický prostor (P, σ_∞) zavedený v 10.9.1 nazýváme **kartézským součinem metrických prostorů** $(P_1, \varrho_1), \dots, (P_n, \varrho_n)$.

10.10. Teoretické příklady k metrickým prostorům

10.10.1. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Dokažte, že pro každá $x, y, u, v \in P$ platí

$$|\varrho(x, y) - \varrho(u, v)| \leq \varrho(x, u) + \varrho(y, v).$$

Řešení. Platí

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, u) + \varrho(u, v) + \varrho(v, y),$$

takže

$$\varrho(x, y) - \varrho(u, v) \leq \varrho(x, u) + \varrho(y, v).$$

Ze symetrie dostáváme

$$\varrho(u, v) - \varrho(x, y) \leq \varrho(x, u) + \varrho(y, v).$$

Tvrzení plyne z kombinace předcházejících dvou odhadů. ♣

10.10.2. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $\{x_n\}$ je konvergentní posloupnost prvků P s limitou $x \in P$ a $\{y_n\}$ je konvergentní posloupnost prvků P s limitou $y \in P$. Dokažte, že $\varrho(x_n, y_n) \to \varrho(x, y)$.

Řešení. Podle Příkladu 10.10.1 platí

$$|\varrho(x_n, y_n) - \varrho(x, y)| \leq \varrho(x_n, x) + \varrho(y_n, y).$$

Podle předpokladu konverguje pravá strana k nule, a tedy i levá. Odtud plyne tvrzení. ♣

10.10.3. Příklad. Označme symbolem ℓ^∞ množinu všech omezených posloupností reálných čísel. Definujme funkci $\|\cdot\|_{\ell^\infty} : \ell^\infty \to [0, \infty)$ předpisem

$$\|\{x_n\}\|_{\ell^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dokažte, že $(\ell^\infty, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ je normovaný lineární prostor.

10.10.4. Příklad. Označme symbolem c_0 množinu všech posloupností reálných čísel s nulovou limitou. Dokažte, že $(c_0, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ je normovaný lineární podprostor prostoru c, a tedy také prostoru ℓ^∞.

10.10.5. Příklad. Nechť $p \in [1, \infty)$. Označme ℓ^p množinu všech posloupností reálných čísel $\{x_n\}$ splňujících

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty.$$

Definujme funkci $\|\cdot\|_{\ell^p} : \ell^p \to [0, \infty)$ předpisem

$$\|\{x_n\}\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dokažte, že $(\ell^p, \|\cdot\|_{\ell^p})$ je normovaný lineární prostor.

10.10.6. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Dokažte následující tvrzení:

(a) pro každé $x \in P$ a pro každé $r > 0$, platí $\overline{B(x, r)} \subset \overline{B}(x, r)$,
(b) opačná inkluze obecně neplatí.

Řešení. (a) Nechť $x \in P$, $r > 0$ a $y \in \partial B(x, r)$. Předpokládejme pro spor, že $\varrho(x, y) > r$. Položme $s = \varrho(x, y) - r$. Potom $s > 0$ a pro každé $z \in B(y, s)$ platí

$$\varrho(x, z) \geq \varrho(x, y) - \varrho(y, z) > \varrho(x, y) - s = r,$$

takže $z \notin B(x, r)$. To znamená, že $B(y, s) \cap B(x, r) = \emptyset$. To je ale spor s tím, že $y \in \partial B(x, r)$. Musí tedy platit $\varrho(x, y) \leq r$, a tedy $\partial B(x, r) \subset \overline{B}(x, r)$. Celkem tedy máme

$$\overline{B(x, r)} = B(x, r) \cup \partial B(x, r) \subset \overline{B}(x, r).$$

(b) Nechť P je diskrétní metrický prostor obsahující alespoň dva různé body a $x \in P$. Potom

$$B(x,1) = \overline{B(x,1)} = \{x\},$$

ale $\overline{B}(x,1) = P$. Protože P má alespoň dva různé body, inkluze $\overline{B}(x,r) \subset \overline{B(x,r)}$ neplatí. ♣

10.10.7. Příklad. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $\{F_n\}$ je nerostoucí posloupnost uzavřených množin v P. Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $x_n \in F_n$, přičemž posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k nějakému bodu $x \in P$. Dokažte, že $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

Řešení. Nechť $k \in \mathbb{N}$ je dáno. Pak $\{x_n\}_{n=k}^{\infty}$ je posloupnost bodů v F_k konvergující k x. Protože množiny F_k jsou uzavřené, platí $x \in F_k$. Tedy $x \in F_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, a proto $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$. ♣

10.10.8. Příklad. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Dokažte, že potom platí

$$\operatorname{Int} A = P \setminus \overline{P \setminus A}.$$

Řešení. Nechť $x \in \operatorname{Int} A$. Potom existuje $r > 0$ takové, že $B(x,r) \subset A$. Tedy $B(x,r) \cap (P \setminus A) = \emptyset$. Tudíž $x \notin \partial(P \setminus A)$. Navíc zřejmě platí $x \notin P \setminus A$, takže $x \notin \overline{P \setminus A}$. Dokázali jsme tedy inkluzi $\operatorname{Int} A \subset P \setminus \overline{P \setminus A}$.

Nyní předpokládejme, že $x \in P \setminus \overline{P \setminus A}$. Potom $x \notin \overline{P \setminus A}$, takže existuje $r > 0$ takové, že buď $B(x,r) \cap (P \setminus A) = \emptyset$ nebo $B(x,r) \cap A = \emptyset$. Druhá možnost ale nemůže nastat, neboť

$$x \in P \setminus \overline{P \setminus A} \subset P \setminus (P \setminus A) = A.$$

Tedy $B(x,r) \cap (P \setminus A) = \emptyset$, neboli $B(x,r) \subset A$. To znamená, že $x \in \operatorname{Int} A$. Tím je dokázána inkluze $P \setminus \overline{P \setminus A} \subset \operatorname{Int} A$, a tedy i požadovaná rovnost $\operatorname{Int} A = P \setminus \overline{P \setminus A}$. ♣

10.10.9. Příklad. Definujme zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^* \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ předpisem

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \text{pro } x = -\infty, \\ \operatorname{arctg} x, & \text{pro } x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{pro } x = \infty \end{cases}$$

a funkci $\varrho\colon \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \to [0,\infty)$ předpisem $\varrho(u,v) = |\varphi(u) - \varphi(v)|$. Dokažte, že $(\mathbb{R}^*, \varrho)$ je metrický prostor.

Řešení. Zřejmě pro každá $x, y \in \mathbb{R}^*$ platí $\varrho(x,y) \geq 0$, přičemž $\varrho(x,y) = 0$ právě tehdy, když $x = y$. Dále pro každá $x, y \in \mathbb{R}^*$ pro zřejmě platí $\varrho(x,y) = \varrho(y,x)$. Nechť $x, y, z \in \mathbb{R}^*$. ♣

10.10.10. Příklad. Nechť $M \subset \mathbb{R}^*$ je neprázdná uzavřená množina v prostoru $(\mathbb{R}^*, \varrho)$, kde ϱ je metrika zavedená v Příkladu 10.10.9. Dokažte, že pak existuje posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ taková, že množina hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}$ zavedená v Definici 2.4.15 je rovna množině M.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{Z}$ položíme

$$I_{n,k} = [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}].$$

Označme $A = \{[n,k] \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z};\ I_{n,k} \cap M \neq \emptyset\}$. Pro každé $[n,k] \in A$ nalezneme $x_{n,k} \in I_{n,k} \cap M$. Označme

$$D = \{x_{n,k};\ [n,k] \in A\}.$$

Potom množina D je spočetná, a můžeme tedy její prvky označit symboly $y_1, y_2, \dots$. Definujme posloupnost

$$y_1, y_2, y_1, y_3, y_2, y_1, y_4, y_3, y_2, y_1, \dots,$$

a označme ji symbolem $\{a_m\}$. V posloupnosti $\{a_m\}$ se každý prvek množiny D vyskytuje nekonečněkrát. Zřejmě platí $D \subset H(\{a_m\})$. Dále je $\{a_m;\ m \in \mathbb{N}\} \subset M$, takže z Příkladu 2.5.11 plyne, že $H(\{a_m\}) \subset M$.

Nechť $b \in M \cap \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $b \in I_{n,k} \subset B(b,\varepsilon)$. Z konstrukce posloupnosti $\{a_m\}$ pak plyne, že je množina $\{m \in \mathbb{N} : a_m \in B(b,\varepsilon)\}$ nekonečná. Protože ε bylo zvoleno libovolně, vyplývá odtud, že $b \in H(\{a_m\})$. Takže jestliže $M \subset \mathbb{R}$, pak $H(\{a_m\}) = M$, a tedy $\{a_m\}$ je hledaná posloupnost.

Jestliže $\infty \in M$, pak položíme

$$a'_m = \begin{cases} m, & \text{pokud } m \text{ je sudé,} \\ a_m, & \text{pokud } m \text{ je liché.} \end{cases}$$

Pak zřejmě platí $H(\{a'_m\}) = M$, a tedy jednou z možných hledaných posloupností je posloupnost $\{a'_m\}$. Je-li $-\infty \in M$, postupujeme obdobně. ♣

10.10.11. Příklad. Dokažte, že spojitý obraz uzavřené množiny nemusí být uzavřená množina a spojitý obraz otevřené množiny nemusí být otevřená množina.

Řešení. Uvažujme spojité zobrazení $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zobrazující $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ na $x \in \mathbb{R}$. Dále položme

$$A = \{[x, \frac{1}{x}];\ x \in (0,\infty)\}$$

Dokážeme, že A je uzavřená množina v $\mathbb{R}^2$. Definujme funkci $g : (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$ předpisem $g(x,y) = y - \frac{1}{x}$. Potom g je zřejmě spojitá. Navíc platí $A =$

$g^{-1}(\{0\})$. Množina $\{0\}$ je kompaktní, a tedy uzavřená v $\mathbb{R}$, takže podle Věty 10.4.6 je A uzavřená v $(0,\infty)^2$, a tedy i v $\mathbb{R}^2$. Zřejmě však platí $\pi(A) = (0,\infty)$, což není uzavřená množina v $\mathbb{R}$.

Funkce $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce zobrazující otevřenou množinu $\mathbb{R}$ na $[-1,1]$, což není otevřená množina. ♣

10.10.12. Příklad. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků metrického prostoru P splňující $x_n \to x$ pro nějaké $x \in P$. Dokažte, že množina $K = \{x_n; x \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ je kompaktní.

Řešení. Nechť $\mathcal{G}$ je nějaký systém otevřených podmnožin pokrývající K. Potom existuje $G \in \mathcal{G}$ taková, že $x \in G$. Protože $x_n \to x$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $x_n \in G$. Pro každé $k \in \{1,\dots,n_0\}$ existuje $G_k \in \mathcal{G}$ splňující $x_k \in G_k$. Potom soubor množin $\mathcal{G}^* = \{G, G_1, \dots, G_{n_0}\}$ tvoří konečný podsystém systému $\mathcal{G}$, který zřejmě pokrývá K. Podle Věty 10.5.26 je tedy množina K kompaktní. ♣

10.10.13. Příklad. Nechť P je nekompaktní metrický prostor. Sestrojte neomezenou spojitou funkci $f\colon P \to \mathbb{R}$.

10.10.14. Příklad. Dokažte, že metrický prostor (P,ϱ) je kompaktní právě tehdy, když pro libovolnou posloupnost $\{F_n\}$ neprázdných uzavřených množin v P splňujících $F_{n+1} \subset F_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

Řešení. $\Rightarrow$ Nechť $\{F_n\}$ je posloupnost neprázdných uzavřených množin v P splňující $F_{n+1} \subset F_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ vybereme libovolný prvek $x_n \in F_n$. Protože P je kompaktní prostor, existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in P$ takové, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Z předpokladu plyne, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$ splňující $n_k > n$ platí $x_{n_k} \in F_n$. Protože F_n je uzavřená, vyplývá odtud, že také $x \in F_n$. Protože n bylo zvoleno libovolně, platí $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Množina $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ je tedy neprázdná.

$\Leftarrow$ Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků z P. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme

$$F_n = \overline{\{x_j;\ j \in \mathbb{N},\ j \geq n\}}.$$

Potom je pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina F_n uzavřená v P a platí $F_{n+1} \subset F_n$. Podle předpokladu věty tedy existuje $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Protože $x \in F_1$, plyne z definice množiny F_1, že existuje index $n_1 \in \mathbb{N}$ takový, že $\varrho(x_{n_1}, x) < 1$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ máme zvoleny indexy $n_1,\dots,n_k$. Protože $x \in F_{k+1}$, plyne z definice této množiny, že existuje index $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ splňující $n_{k+1} > n_k$ a $\varrho(x_{n_{k+1}}, x) < \frac{1}{k+1}$. Takto získáme rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, takovou, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\varrho(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k}$. Tedy

$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Z libovolné posloupnosti jsme tedy vybrali konvergentní podposloupnost. To znamená, že prostor P je kompaktní. ♣

10.10.15. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $K \subset P$ je kompaktní, $F \subset P$ je uzavřená a $\operatorname{dist}(K, F) = 0$. Dokažte, že potom $K \cap F \neq \emptyset$.

Řešení. Nalezneme posloupnosti $\{x_n\}$ prvků F a $\{y_n\}$ prvků K takové, že $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n) = \operatorname{dist}(K, F) = 0$. Protože K je kompaktní, lze z $\{y_n\}$ vybrat konvergentní podposloupnost $\{y_{n_k}\}$ s limitou $y \in K$. Potom

$$\varrho(x_{n_k}, y) \leq \varrho(x_{n_k}, y_{n_k}) + \varrho(y_{n_k}, y) \to 0,$$

takže $x_{n_k} \to y$. Protože F je uzavřená, platí $y \in F$. Tedy $y \in K \cap F$. ♣

10.10.16. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $\varepsilon > 0$ a existuje nekonečná množina $A \subset P$ splňující $\varrho(x, y) > \varepsilon$ pro různé body $x, y \in A$. Dokažte, že pak prostor P není kompaktní.

Řešení. Mějme množinu $A \subset P$ splňující předpoklady tvrzení. Protože je A nekonečná, obsahuje podle Příkladu 1.7.22 posloupnost $\{x_n\}$ splňující

$$\varrho(x_n, x_m) > \varepsilon, \quad n, m \in \mathbb{N}, n \neq m. \tag{10.10}$$

Pak $\{x_n\}$ nemá converegentní podposloupnost. To nahlédneme takto. Kdyby $\{x_{n_k}\}$ byla konvergentní podposloupnost posloupnosti $\{x_n\}$, byla by podle Věty 10.6.4 cauchyovská. To ale díky (10.10) zjevně není. ♣

10.10.17. Příklad. Dokažte, že množina $A = \{\{x_n\} \in \ell^2;\ |x_n| \leq \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ je kompaktní v ℓ_2.

Řešení. Protože ℓ^2 je úplný prostor, stačí dokázat totální omezenost A. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \varepsilon^2$. Zobrazená $\pi\colon \ell^2 \to (\mathbb{R}^{n_0}, \|\cdot\|_{\mathrm{eukl}})$ definované jako

$$\pi(\{x_n\}) = (x_1, \dots, x_{n_0}), \quad \{x_n\} \in \ell^2,$$

je lineární a $\|\pi\| \leq 1$. Protože je množina A omezená, je omezená i množina $\pi(A)$. Tedy je v $\mathbb{R}^{n_0}$ totálně omezená (viz Věta 10.5.8). Proto existuje konečná množina $F \subset \pi(A)$, která tvoří ε-síť. Pro každé $x \in F$ vybereme $y_x \in A$ takové, že $\pi(y_x) = x$. Pak je množina $\{y_x;\ x \in F\}$ 3ε-síť v A.

Abychom to ukázali, definujeme lineární zobrazení $\sigma\colon \ell^2 \to \ell^2$ jako

$$\sigma(\{x_n\}) = (x_1, \dots, x_{n_0}, 0, \dots), \quad \{x_n\} \in \ell^2.$$

Pak $\|\sigma(\{x_n\})\|_{\ell^2} = \|\pi(\{x_n\})\|_{\mathrm{eukl}}$ pro každé $\{x_n\} \in \ell^2$.

Mějme $z \in A$. Vybereme $x \in \pi(A)$ takové, že $\|\pi(z) - x\| < \varepsilon$. Pak

$$\begin{aligned}\|z - y_x\| &\leq \|z - \sigma(z)\| + \|\sigma(z) - \sigma(y_x)\| + \|\sigma(y_x) - y_x\| \\ &\leq \varepsilon + \|\pi(z) - \pi(y_x)\| + \varepsilon \\ &= 2\varepsilon + \|\pi(z) - x\| < 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy A je totálně omezená, a tudíž kompaktní. ♣

10.10.18. Příklad. Dokažte, že množina $B = \{\{x_n\} \in c_0;\ \|\{x_n\}\| \leq 1\}$ není kompaktní v c_0.

Řešení. Uvažujme vektory $e^n \in c_0$, $n \in \mathbb{N}$, kde e^n je n-tý kanonický vektor v c_0, tj

$$e^n = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots),$$

kde 1 je na n-tém místě.

Pak

$$\|e_n - e_m\| = 1, \quad n, m \in \mathbb{N}, n \neq m,$$

a tedy mnnožina

$$D = \{e^n;\ n \in \mathbb{N}\}$$

je nekonečná množina splňující předpoklady Příkladu 10.10.16. Proto není A kompaktní. ♣

10.10.19. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $K, L \subset P$ jsou kompaktní neprázdné podmnožiny P. Dokažte, že existují $x \in K$ a $y \in L$ splňující $\operatorname{dist}(K, L) = \varrho(x, y)$.

Řešení. Nechť $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ jsou posloupnosti v K, respektive v L, takové, že $\varrho(x_n, y_n) \to \operatorname{dist}(K, L)$. Díky kompaktnosti K vybereme podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ konvergující k nějakému bodu $x \in K$. Dále využijeme kompaktnost L k nalezení podposloupnosti $\{y_{n_{k_j}}\}$ konvergující k nějakému $y \in L$. Pak ale $x_{n_{k_j}} \to x$, a tedy díky Příkladu 10.10.2 máme

$$\operatorname{dist}(K, L) = \lim_{j \to \infty} \varrho(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) = \varrho(x, y).$$

♣

10.10.20. Příklad. Nalezněte příklad metrického prostoru, jeho kompaktní podmnožiny K a uzavřené podmnožiny F, jejichž vzdálenost není realizována, tedy neexistují $x \in K$ a $y \in F$, taková že $\operatorname{dist}(K, F) = \varrho(x, y)$.

Řešení. Definujme funkci $\varrho\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to [0, \infty)$ předpisem $\varrho(m, n) = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$. Potom $(\mathbb{N}, \varrho)$ je metrický prostor. Položme $K = \{1\}$ a $F = \mathbb{N} \setminus K$. Potom je

K jednobodová množina, a tedy je kompaktní. Zároveň platí $B(1,1) \subset K$, takže K je otevřená, a tedy je F uzavřená. Dále platí

$$\operatorname{dist}(K,F) = \inf\{\varrho(1,n);\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2\} = \inf\{1 + \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2\} = 1.$$

Na druhé straně ale pro každé $m \in F$ platí $\varrho(1,m) = 1 + \frac{1}{m} > 1$, takže vzdálenost množin F a K není realizována. ♣

10.10.21. Příklad. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}^n$ jsou takové neprázdné množiny, že A je kompaktní a B je uzavřená. Dokažte, že existují body $x \in A$ a $y \in B$ splňující $\operatorname{dist}(A,B) = \varrho(x,y)$.

Dále najděte dvě disjunktní neprázdné uzavřené množiny v $\mathbb{R}^2$ splňující $\operatorname{dist}(A,B) = 0$.

Řešení. Nechť $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ jsou posloupnosti v A, respektive v B, splňující $\varrho(x_n, y_n) \to \operatorname{dist}(A,B)$. Díky kompaktnosti A existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ konvergující k nějakému $x \in A$. Dále platí, že $\{y_{n_k}\}$ je omezená. To plyne z následující úvahy. Nechť $k_0 \in \mathbb{N}$ je takový index, že $\varrho(x_{n_k}, y_{n_k}) < \operatorname{dist}(A,B) + 1$ a $\varrho(x_{n_k}, x) < 1$. Pak

$$\varrho(y_{n_k}, x) \leq \varrho(y_{n_k}, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, x) < \operatorname{dist}(A,B) + 1 + 1, \quad k \geq k_0.$$

Z tohoto odhadu již plyne omezenost $\{y_{n_k}\}$.

Díky Větě 10.5.8 lze z posloupnosti $\{y_{n_k}\}$ vybrat podposloupnost $\{y_{n_{k_j}}\}$ konvergující k nějakému $y \in \mathbb{R}^n$. Z uzavřenosti B dostáváme $y \in B$. Proto z Příkladu 10.10.2 máme

$$\operatorname{dist}(A,B) = \lim_{j\to\infty} \varrho(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) = \varrho(x,y).$$

Abychom dokázali druhé tvrzení, uvažujme množiny

$$A = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \mathbb{R}\}, \quad B = \{(x, \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2;\ x \in [0,\infty)\}.$$

Množina A je zřejmě uzavřená. Uzavřenost B pak plyne z Příkladu 10.10.11.

Dále jsou množiny A a B disjunktní. Platí však, že

$$\operatorname{dist}(A,B) \leq \inf\{\varrho((n,0),(n,\frac{1}{n}));\ n \in \mathbb{N}\} = 0.$$

♣

10.10.22. Příklad. Nechť (P,ϱ) je kompaktní neprázdný metrický prostor. Dokažte, že existují $x, y \in K$ splňující $\operatorname{diam} P = \varrho(x,y)$.

Řešení. Prostor P je omezený (Věta 10.5.7(a)), a tedy $\operatorname{diam} P < \infty$. Nalezneme posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ ve P splňující

$$\varrho(x_n, y_n) \to \operatorname{diam} P.$$

Díky kompaktnosti P lze z $\{x_n\}$ vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ konvergující k nějakému bodu $x \in P$. Podobně vybereme podposloupnost $\{y_{n_{k_j}}\}$ posloupnosti $\{y_{n_k}\}$ konvergující k bodu $y \in P$. Pak máme

$$\operatorname{diam} P = \lim_{j\to\infty} \varrho(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) = \varrho(x, y).$$

♣

10.10.23. Příklad. Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor a $f : P \to P$ je izometrie. Dokažte, že $f(P) = P$.

Řešení. Nechť $f(P) \neq P$. Vezmeme $x_0 \in P \setminus f(P)$ a označíme $d = \operatorname{dist}(x_0, f(P))$. Protože je f spojité, je $f(P)$ kompakt, a tedy $d > 0$. Položme $x_n = f^n(x_0)$. Pak jsou členy posloupnosti $\{x_n\}$ obsaženy v $f(P)$, a tedy $\varrho(x_0, x_n) \geq d$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Díky kompaktnosti vybereme podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ konevrgující k nějakému $y \in f(P)$. Tedy existují indexy $n < m$ takové, že $\varrho(x_n, x_m) < d$. Protože je f izometrie, platí

$$\begin{aligned} d &> \varrho(f^n(x_0), f^m(x_0)) = \varrho(f^{n-1}(x_0), f^{m-1}(x_0)) = \cdots \\ &= \varrho(x_0, f^{m-n}(x_0)) \geq d, \end{aligned}$$

což je spor. ♣

10.10.24. Příklad. Nalezněte příklad metrického prostoru a posloupnosti jeho prvků $\{x_n\}$ splňující

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon \varrho(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon,$$

která ale není cauchyovská.

Řešení. Položme například $x_n = \log n$, $n \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$|x_{n+1} - x_n| = \log(1 + \frac{1}{n}) \to 0,$$

ale posloupnost $\{x_n\}$ zřejmě není cauchyovská v $\mathbb{R}$. ♣

10.10.25. Příklad. Definujme na $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ metriky $\varrho(x, y) = |x-y|$ a $\sigma(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$. Nalezněte posloupnost, která je cauchyovská vzhledem k právě jedné z těchto dvou metrik. Dokažte, že prostor $(\mathbb{R}, \varrho_2)$ není úplný.

Řešení. Položme například $x_n = \log n$, $n \in \mathbb{N}$. Potom platí $|x_{n+1} - x_n| = \log(1 + \frac{1}{n}) \to 0$, ale posloupnost $\{x_n\}$ zřejmě není cauchyovská v $\mathbb{R}$. ♣

10.10.26. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $T \colon P \to P$ je zobrazení splňující

$$\forall x, y \in P, x \neq y : \varrho(Tx, Ty) < \varrho(x, y).$$

(takové zobrazení nazýváme **neexpanzívní**). Dokažte, že potom zobrazení $f : P \to [0, \infty)$ definované předpisem

$$f(x) = \varrho(x, Tx)$$

je spojité.

Řešení. Nechť $x, y \in P$. Potom buď $x = y$ nebo $\varrho(Tx, Ty) < \varrho(x, y)$, v každém případě však platí $\varrho(Tx, Ty) \le \varrho(x, y)$, a tedy

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \varrho(x, Tx) - \varrho(y, Ty) \\ &\le \varrho(x, y) + \varrho(y, Ty) + \varrho(Ty, Tx) - \varrho(y, Ty) \\ &= \varrho(x, y) + \varrho(Tx, Ty) \\ &\le \varrho(x, y) + \varrho(x, y) = 2\varrho(x, y). \end{aligned}$$

Obdobně platí (viz podmínku (b) z Definice 10.1.1)

$$f(y) - f(x) \le 2\varrho(x, y),$$

a tedy

$$|f(x) - f(y)| \le 2\varrho(x, y).$$

Nechť $x \in P$ a $\varepsilon > 0$. Položme $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$. Potom pro každé $y \in P$ splňující $\varrho(x, y) < \delta$ platí

$$|f(x) - f(y)| \le 2\varrho(x, y) < 2\delta = \varepsilon,$$

takže f je spojité v bodě x. Protože bod x byl zvolen libovolně, je f spojité na P. ♣

10.10.27. Příklad. Nechť (P, ϱ) je neprázdný kompaktní metrický prostor a $T : P \to P$ je neexpanzívní (pro definici tohoto pojmu viz Příklad 10.10.26). Dokažte, že potom T má na P právě jeden pevný bod.

Řešení. Definujme zobrazení $f : P \to [0, \infty)$ předpisem

$$f(x) = \varrho(x, Tx).$$

Podle Příkladu 10.10.26 je f je spojité, a tedy nabývá na kompaktním metrickém prostoru (P, ϱ) svého minima. Existuje tudíž bod $x_0 \in P$ takový, že pro všechna $y \in P$ platí

$$f(x_0) \le f(y).$$

Předpokládejme, že $f(x_0) > 0$. Potom z neexpanzívnosti zobrazení f vyplývá, že

$$f(Tx_0) = \varrho(Tx_0, T^2x_0) < \varrho(x_0, Tx_0),$$

což je spor. Tedy $f(x_0) = 0$. To znamená, že $\varrho(x_0, Tx_0) = 0$, neboli že x_0 je pevným bodem zobrazení T. Zbývá dokázat jeho jednoznačnost. Nechť $x, y \in P$ jsou dva různé pevné body zobrazení T. Potom

$$\varrho(x, y) = \varrho(Tx, Ty) < \varrho(x, y),$$

což je spor. Odtud vyplývá, že pevný bod zobrazení T je jednoznačně určen. ♣

10.10.28. Příklad. Nechť (P, ϱ) je neprázdný úplný metrický prostor a $T : P \to P$ je zobrazení. Nechť existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že T^n je kontrakce na (P, ϱ), kde $T^n = T \circ T \circ \cdots \circ T$ je n-krát složené zobrazení T. Dokažte, že potom má T na P právě jeden pevný bod.

Řešení. Podle Banachovy věty o kontrakci (Věta 10.6.23) má T^n v P právě jeden pevný bod, označme jej x_0. Potom

$$T^n(Tx_0) = T(T^n x_0) = Tx_0,$$

takže Tx_0 je také pevným bodem zobrazení T^n. Takový bod však existuje právě jeden, a tedy musí nutně platit $Tx_0 = x_0$. Bod x_0 je tedy pevným bodem zobrazení T. Zbývá dokázat jeho jednoznačnost. Nechť y je pevný bod zobrazení T. Dokážeme matematickou indukcí, že potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ je y pevným bodem zobrazení T^k. Pro $k = 1$ tvrzení platí. Nechť pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ je y pevným bodem zobrazení T^k. Potom

$$T^{k+1} y = T(T^k y) = Ty = y.$$

Tím je naše tvrzení dokázáno. Speciálně je tedy y pevným bodem zobrazení T^n. Zobrazení T^n má však právě jeden pevný bod, a to x_0, tedy platí $y = x_0$. Odtud vyplývá, že pevný bod zobrazení T je jednoznačně určen. ♣

10.10.29. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a nechť pro každou posloupnost neprázdných uzavřených množin $\{F_n\}$ v P splňující

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$$

a takovou, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $F_{n+1} \subset F_n$, je $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ jednobodovou množinou. Dokažte, že potom je prostor P úplný.

Řešení. Nechť $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost v (P, ϱ). Pro každé $n \in \mathbb{N}$ sestrojíme množinu

$$F_n = \overline{\{x_j;\ j \geq n\}}.$$

Podle Věty 10.3.41(b) a (d) je pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina F_n uzavřená v (P, ϱ) a platí

$$F_{n+1} \subset F_n.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Potom z Bolzanovy–Cauchyovy podmínky speciálně vyplývá, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\varrho(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon$. Odtud a z konstrukce množiny F_n plyne, že $\lim \operatorname{diam} F_n = 0$. Podle předpokladu je tedy množina $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ jednobodová. Označme symbolem x její jediný prvek. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\varrho(x, x_n) \leq \operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon.$$

Odtud plyne, že $\lim x_n = x$. ♣

10.10.30. Příklad. Nechť A je podmnožina separabilního metrického prostoru. Dokažte, že A je separabilní.

Řešení. Podle Věty 10.7.6 stačí ukázat, že A má spočetnou bázi. Prostor P však spočetnou bázi $\mathcal{B}$ má. Zjevně je pak

$$\{A \cap B;\ B \in \mathcal{B}\}$$

spočetná báze A. ♣

10.10.31. Příklad. Nalezněte úplný metrický prostor, jeho uzavřenou neprázdnou podmnožinu $F \subset P$ a bod $x \in P$ takové, že neexistuje $y \in F$ splňující $\operatorname{dist}(x, F) = \varrho(x, y)$.

Řešení. Uvažujme Banachův prostor ℓ^2. Nechť pro $n \in \mathbb{N}$ je e^n n-tý kanonický vektor v ℓ^2, tj.

$$e^n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots),$$

kde 1 je na n-tém místě.

Uvažujme množinu

$$A = \{(1 + \frac{1}{n})e^n;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Pak pro různé indexy $n, m \in \mathbb{N}$

$$\left\|(1 + \frac{1}{n})e^n - (1 + \frac{1}{m})e^m\right\|^2 = (1 + \frac{1}{n})^2 + (1 + \frac{1}{m})^2 \geq 2,$$

a tedy $\|e_n - e_m\| \geq \sqrt{2}$. Odtud plyne, že A je uzavřená v ℓ^2.

Dále uvažujme bod $0 \in \ell^2$. Pak

$$\operatorname{dist}(0, A) = \inf\{\left\|(1 + \frac{1}{n})e^n\right\|;\ n \in \mathbb{N}\} = \inf\{1 + \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\} = 1,$$

ale

$$\left\|0 - (1 + \frac{1}{n})\right\| = \left\|(1 + \frac{1}{n})\right\| > 1$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Neexistuje tedy $x \in A$ splňující

$$\|x - 0\| = \operatorname{dist}(0, A) = 1.$$

♣

10.10.32 (Cantorovo diskontinuum)**.** Nechť $P = ([0,1], \varrho_{\mathrm{eukl}})$. Uvažujme následující Cantorovo schéma neprázdných uzavřených intervalů v $[0,1]$. Položme $B_\emptyset = [0,1]$. Předpokládejme, že $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a máme zkontruovány intervaly B_s, $s \in \{0,1\}^{<N}$ pro $|s| \leq n$. Nechť $s \in \{0,1\}^n$ a $B_s = [a,b]$. Pak položme

$$B_{s^\wedge 0} = [a, a + \frac{1}{3}(b-a)], \quad B_{s^\wedge 1} = [b - \frac{1}{3}(b-a), b].$$

Nyní uvažujme množinu

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{s \in \{0,1\}^n} B_s.$$

Ukate, že C je homeomorfní s $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Dále ukažte, že C je perfektní, kompaktní řídká podmnožina [0,1] mohutnosti kontinua, ve které lze každé dva body oddělit obojetnou množinou.

Množina C se nazývá **Cantorovým diskontinuem**.

10.10.33. Příklad. Nechť A je množina typu F_σ v $\mathbb{R}$. Dokažte, že existuje funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že A je množina bodů nespojitosti f.

Řešení. Pišme $A = \bigcup A_n$, kde A_n jsou uzavřené množiny v $\mathbb{R}$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $\emptyset \neq A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$. Rozložme každé A_n na $A_n = B_n \cup C_n$, kde $B_n = \operatorname{Int} A_n$ a $C_n = A_n \setminus \operatorname{Int} A_n$. Je-li $B_n \neq \emptyset$, najdeme spočetnou hustou množinu $D_n \subset B_n$. Položme

$$f_n = \chi_{C_n \cup D_n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

a

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} f_n.$$

Pak f je dobře definovaná funkce na $\mathbb{R}$. Nechť $x \notin A$ je dán. Nechť $\varepsilon \in (0, \infty)$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{4^n} < \varepsilon$. Protože $x \notin F_{n_0}$, splňuje funkce f odhad

$$0 \leq f \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{4^n} f_n < \varepsilon$$

na nějakém okolí bodu x. Tedy f je spojitá v x.

Nechť $x \in A$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ je první index takový, že $x \in A_{n_0}$. Předpokládejme, že $x \in C_{n_0}$. Pak v libovolném okolí x existuje $y \in \mathbb{R} \setminus A_{n_0}$. Pro tato y pak je $f_{n_0}(y) = 0$, a tak

$$f(y) \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{4^n} f_n \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3 \cdot 4^{n_0}} < \frac{1}{4^{n_0}} \leq f(x).$$

Tedy f není spojitá v x.

Je-li $x \in D_{n_0}$, v libovolném okolí x existuje y splňující $f_{n_0}(y) = 0$. ($\operatorname{Int} A_n \cap I$ je nespočetná pro každý interval I protínající $\operatorname{Int} A_{n_0}$.) Pro tato y máme podobně jako výše odhad

$$f(x) \geq \frac{1}{4^{n_0}} > \frac{1}{3 \cdot 4^{n_0}} = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \geq f(y).$$

Opět tedy f není spojitá v x.

Konečně předpokládejme, že $x \in B_{n_0} \setminus D_{n_0}$. Pak $f_{n_0}(x) = 0$. V libovolně malém okolí x nalezneme $y \in D_{n_0}$. Pro tato y pak máme odhad

$$f(x) \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{4^n} f_n \leq \frac{1}{3 \cdot 4^{n_0}} < \frac{1}{4^{n_0}} \leq f(y).$$

Funkce f tedy není spojitá v x ani v tomto případě. ♣

10.10.34. Příklad. Nechť (P, ϱ), (Q, σ) jsou metrické prostory, $D \subset P$ hustá a $f, g\colon P \to Q$ spojitá zobrazení splňující $f(x) = g(x)$ pro $x \in D$. Dokažte, že $f = g$ na P.

Řešení. Množina $\{x \in P;\ f(x) = g(x)\}$ je uzavřená a podle předpokladu hustá v P. Tedy se rovná P. ♣

10.10.35. Příklad. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Množiny $A, B \subset P$ nazveme **separovanými** (v P), pokud

$$A \cap \overline{B} = \emptyset = \overline{A} \cap B.$$

Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(i) Prostor P je souvislý.
(ii) Pokud $P = A \cup B$ a A, B jsou separované, je alespoň jedna z nich prázdná.

Řešení. (i) $\Rightarrow$ (ii) Nechť $P = A \cup B$, kde A, B jsou separované neprázdné. Pak $A = P \setminus \overline{B}$ i $B = P \setminus \overline{A}$ jsou otevřené disjuktní neprázdné množiny pokrývající P. Tedy P není souvislý.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Nechť P není souvislý, tj. existují neprázdné disjunktní otevřené množiny A, B pokrývající P. Pak jsou zjevně separované, pokrývají P a jsou obě neprázdné. ♣

10.10.36. Příklad. Nechť (P, ϱ) je souvislý metrický prostor obsahující alespoň dva body. Potom je P nespočetný.

Řešení. Nechť $x, y \in P$, $x \neq y$. Předpokládejme, že P je spočetný. Potom existuje $r \in (0, \varrho(x, y))$ takové, že množina $\{z \in P;\ \varrho(x, z) = r\}$ je prázdná. To plyne z toho, že

$$\bigcup_{r \in (0, \varrho(x,y))} \{z \in P;\ \varrho(x, z) = r\} \subset P,$$

přičemž množiny v tomto sjednocení jsou po dvou disjunktní. Položme $H = B(x, r)$. Potom H je zřejmě neprázdná (neboť $x \in H$) a otevřená. Podle Příkladu 10.6.58 je $\overline{B}(x, r)$ uzavřená množina, a tedy podle Věty 10.3.41(g) platí $\overline{H} \subset \overline{B}(x, r)$. Celkem tedy podle Příkladu 10.10.6(a) máme

$$\overline{H} \subset \overline{B}(x, r) = B(x, r) \cup \{z \in P;\ \varrho(x, z) = r\} = B(x, r) = H,$$

takže H je uzavřená, a tedy obojetná. Protože $r < \varrho(x, y)$, platí $y \in P \setminus H$, takže $P \setminus H$ je neprázdná. To je podle Věty 10.8.6 spor s tím, že P je souvislý. Odtud plyne tvrzení. ♣

10.10.37. Příklad. Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Dokažte následující tvrzení.

(a) Konvexní množina v X je křivkově souvislá.

(b) Otevřené i uzavřené koule v X jsou křivkově souvislé.

(c) Prostor X je lokálně souvislý.

Řešení. (a) Nechť $A \subset X$ je konvexní a $x, y \in A$. Pak zobrazení $t \mapsto tx + (1 - t)y$ je spojité zobrazení $[0, 1]$ do A spojující body x a y. Tedy A je křivkově souvislá.

(b) Každá koule je v X konvexní, tedy tvrzení plyne z (a).

(c) Nechť $x \in X$ a $r \in (0, \infty)$. Pak lze díky (b) za množinu C v definici lokální souvislosti volit přímo $B(x, r)$. ♣

10.10.38. Příklad. Dokažte, že uzávěr křivkově souvislé množiny nemusí být křivkově souvislá množina.

Řešení. Položme

$$B = \{[x, \sin(\frac{1}{x})];\ x \in (0, 1]\}$$

a $C = \overline{B}$. Pak $\overline{B}$ není křivkově souvislá množina, zatímco B je. Bod $[0,0] \in \overline{B}$ nelze totiž spojit křivkou s bodem $[\frac{1}{\pi}, 0]$. Kdyby to bylo množné, měli bychom křivku spojující tyto dva body. Protože lze však křivkou spojit body $[-1,0]$ a $[0,0]$, šlo by spojit křivkou i body $[-1,0]$ a $[\frac{1}{\pi}, 0]$, což není možné. ♣

10.10.39. Příklad. Dokažte, že je-li $\mathcal{S}$ je systém neprázdných křivkově souvislých množin s neprázdným průnikem, pak $\bigcup \mathcal{S}$ je křivkově souvislá množina.

Řešení. Zvolme $x \in \bigcap \mathcal{S}$. Nechť body $a, b \in \bigcup \mathcal{S}$ jsou dány. Pak existují množiny $S_a, S_b \in \mathcal{S}$ splňující $a \in S_a$, $b \in S_b$. Spojíme křivkou v S_a body a a x a křivkou v S_b body x a b. Pak lze zjevně nalezené křivky použít ke konstrukci křivky spojujícího a a b v $\bigcup \mathcal{S}$. ♣

10.10.40. Příklad. Rozhodněte, zda součin dvou kompaktních prostorů je kompaktní prostor.

KAPITOLA 11

Funkce více proměnných

V této kapitole zavedeme a prozkoumáme základní pojmy diferenciálního počtu funkcí více proměnných.

11.1. Parciální derivace a totální diferenciál

11.1.1 ($\mathbb{R}^n$ jako lineární normovaný prostor se skalárním součinem)**.** Připomeňme, že množina $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) je množina všech uspořádaných n-tic reálných čísel, neboť jde o kartézský součin o n faktorech:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{-krát}}.$$

Je-li $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, potom jeho i-tou souřadnici značíme x_i, a můžeme tedy psát $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_n]$. Množina $\mathbb{R}^n$ obsahuje některé významné prvky. Je to především **počátek**, to jest prvek, jehož všechny souřadnice jsou nulové. Značíme jej $\boldsymbol{o}$. Zvolme $i \in \{1, \dots, n\}$ a definujme prvek $\boldsymbol{e}^i \in \mathbb{R}^n$ takto:

$$\boldsymbol{e}^i = [0, \dots, 0, \underset{\substack{i\text{-tá sou-}\\ \text{-řadnice}}}{1}, 0, \dots, 0].$$

I tyto prvky budou pro nás později důležité.

Prvky $\mathbb{R}^n$ můžeme mezi sebou sčítat a můžeme je násobit reálným číslem: je-li $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_n]$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y} = [y_1, \dots, y_n]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, pak definujeme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= [x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n], \\ \lambda \cdot \boldsymbol{x} &= [\lambda x_1, \dots, \lambda x_n]. \end{aligned}$$

Trojice $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, kde $+$ a $\cdot$ jsou výše uvedené operace, tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Množina $\left\{\boldsymbol{e}^i;\ i \in \{1, \dots, n\}\right\}$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^n$, tj. jde o lineárně nezávislou množinu a každý prvek $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$, můžeme psát ve tvaru $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{e}^i$.

O množině $\mathbb{R}^n$ s operacemi sčítání a násobení reálným číslem budeme mluvit jako o prostoru $\mathbb{R}^n$ a o prvcích z $\mathbb{R}^n$ jako o bodech tohoto prostoru.

Někdy je ovšem užitečné pohlížet na daný prvek $\boldsymbol{x}$ z $\mathbb{R}^n$ jako na *vektor*, tj. orientovanou úsečku s počátečním bodem v počátku a koncovým v bodě $\boldsymbol{x}$.

V průběhu celé kapitoly budeme na $\mathbb{R}^n$ uvažovat **eukleidovskou** normu

$$\|\boldsymbol{x}\| = \big\|[x_1,\dots,x_n]\big\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

a eukleidovskou metriku $\varrho_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. Termínem **reálná funkce** n **proměnných** budeme rozumět funkci z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$.

Skalární součin prvků $x, y \in \mathbb{R}^n$ definujeme předpisem $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Skalární součin má následující vlastnosti

(a) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\colon \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle = \|\boldsymbol{x}\|^2 \geq 0$,
(b) $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n\colon \langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle + \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle$,
(c) $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n\colon \langle \alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = \alpha\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$,
(d) $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n\colon \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle$.

11.1.2 (lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$)**.** Z lineární algebry budeme také potřebovat následující základní informaci o lineárních zobrazeních. Podrobný výklad teorie vektorových prostorů je obsažen v [**2**]. Řekneme, že zobrazení $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je **lineární**, jestliže splňuje

(a) $\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n\colon L(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{u}) + L(\boldsymbol{v})$,
(b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n\colon L(\alpha\boldsymbol{u}) = \alpha L(\boldsymbol{u})$.

Množinu všech lineárních zobrazení prostoru $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ budeme značit symbolem $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. Každé $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ je reprezentováno maticí $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..m\\ j=1..n}}$ o m řádcích a n sloupcích ve smyslu, že pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$L(\boldsymbol{x}) = \mathbb{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

11.1.3. Definice. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $i \in \{1,\dots,n\}$. Pak **parciální derivaci funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ podle i-té proměnné** definujeme předpisem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}}) - f(\boldsymbol{a})}{t}. \tag{11.1}$$

Symbolem $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ označujeme parciální derivaci funkce f podle i-té proměnné, tj. funkci z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\colon \boldsymbol{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}).$$

11.1.4. Poznámky. (a) V některých případech se používá místo symbolu $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ i značení $\partial_i f(\boldsymbol{a})$, $D_i f(\boldsymbol{a})$ a podobně.

(b)

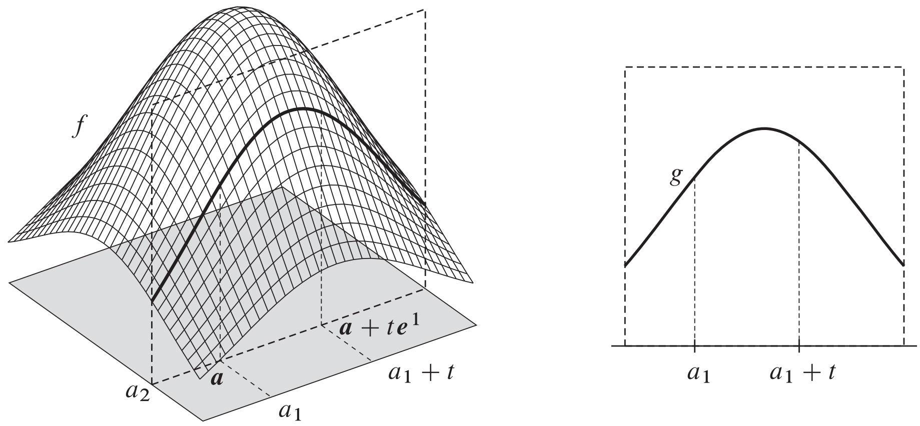
$$\text{Limita v (11.1)} \begin{cases} \text{neexistuje} \\ \text{existuje} \quad \begin{cases} \text{vlastní} \\ \text{nevlastní} \begin{cases} \infty \\ -\infty. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

(c) Pokud parciální derivace podle i-té proměnné v bodě $\boldsymbol{a}$ existuje, pak pro nějaké $\delta > 0$ platí $\{\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^i;\ |t| < \delta\} \subset \mathcal{D}(f)$.

(d) Položíme-li

$$g(y) = f(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \ldots, a_n),$$

pak $g'(a_j)$ existuje, právě když existuje $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$. Pokud obě derivace existují, pak jsou si rovny. Na následujícím obrázku je vidět geometrický význam funkce g.



Obrázek 1.

Pak zřejmě platí $g'(a_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$, pokud má alespoň jedna strana smysl. Odtud plynou některá pravidla pro výpočet parciálních derivací, například

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) + \frac{\partial g}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}),$$

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})g(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{a})\frac{\partial g}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}),$$

pokud $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$, $\frac{\partial g}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$ existují vlastní.

11.1.5. Úmluva. V dalším textu bude výrok „parciální derivace existuje“ znamenat, že parciální derivace existuje *vlastní*.

11.1.6. Příklad. Pro funkci $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem $f(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2^2}$ spočtěte $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ a $\frac{\partial f}{\partial x_2}$.

Řešení. Podle Poznámky 11.1.4(d) v každém bodě $[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2^2} x_2^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2^2} 2x_1 x_2.$$

♣

11.1.7. Definice. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je lineární zobrazení. Řekneme, že L je **totální diferenciál funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$**, pokud platí

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0. \tag{11.2}$$

11.1.8. Poznámky. (a) Výrok (11.2) je ekvivalentní výroku

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|} = 0.$$

(b) Z existence totálního diferenciálu v bodě $\boldsymbol{a}$ plyne, že funkce f je definována na nějakém okolí bodu $\boldsymbol{a}$.

11.1.9 (geometrický význam totálního diferenciálu)**.**

11.1.10. Věta (vztah totálního diferenciálu a parciálních derivací)**.** Nechť f je funkce n proměnných, která má v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ totální diferenciál L. Pak existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})$ a pro každé $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$L(\boldsymbol{h}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})h_n.$$

Důkaz. Zobrazení L je lineární, a proto existují reálná čísla $A_1, \dots, A_n$ taková, že pro každé $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$L(\boldsymbol{h}) = L(h_1, \dots, h_n) = A_1 h_1 + \cdots + A_n h_n.$$

Zvolme $i \in \{1, \dots, n\}$. Zobrazení $\varphi\colon t \mapsto t\boldsymbol{e}^i$ je spojité a $\varphi(t) \neq \boldsymbol{0}$ pro $t \neq 0$. Tedy dle Věty 10.4.22 platí

$$0 = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+\varphi(t)) - f(\boldsymbol{a}) - L(\varphi(t))}{\|\varphi(t)\|} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{e}^i) - f(\boldsymbol{a}) - A_i t}{|t|}.$$

Odtud
$$\lim_{t\to 0}\left|\frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{e}^i)-f(\boldsymbol{a})}{t}-A_i\right|=0,$$
neboli
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})=\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{e}^i)-f(\boldsymbol{a})}{t}=A_i.$$
Tím je důkaz dokončen. ■

11.1.11. Z Věty 11.1.10 plyne, že existuje-li totální diferenciál, je určen jednoznačně. To nás opravňuje k zavedení následujícího značení.

11.1.12. Označení. Nechť existuje totální diferenciál funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$. Pak jej značíme symbolem $f'(\boldsymbol{a})$.

11.1.13. Věta. Nechť f je funkce n proměnných, která má v bodě $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$ totální diferenciál. Potom je funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ spojitá.

Důkaz. Díky spojitosti zobrazení $\boldsymbol{x}\mapsto\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|$ a $\boldsymbol{h}\mapsto f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})$ máme
$$\begin{aligned}&\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})\\ &=\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\left(\frac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})-f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|}\cdot\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|+f(\boldsymbol{a})+f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\right)\\ &=0\cdot 0+f(\boldsymbol{a})+0=f(\boldsymbol{a}).\end{aligned}$$
Tedy f je spojitá v $\boldsymbol{a}$. ■

11.1.14. Poznámka. Z pouhé existence parciálních derivací v daném bodě ještě spojitost funkce v tomto bodě nevyplývá, jak ukazuje následující příklad. Definujme funkci $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ předpisem
$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}1, & \text{pokud } x_1=0 \text{ nebo } x_2=0,\\ 0, & \text{jinak.}\end{cases}$$
Pak platí $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{0})=\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{0})=0$, ale f není v $\boldsymbol{0}$ spojitá. Tedy ani $f'(\boldsymbol{0})$ neexistuje.

11.1.15. Lemma. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $I=(\alpha_1,\beta_1)\times\cdots\times(\alpha_n,\beta_n)\subset\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in I$. Nechť v každém bodě I existují všechny parciální derivace prvního řádu funkce f. Potom existují body $\boldsymbol{c}^1,\dots,\boldsymbol{c}^n\in I$ takové, že
$$f(\boldsymbol{b})-f(\boldsymbol{a})=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{c}^i)(b_i-a_i).$$

Důkaz. Označme

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}^0 &= (a_1, \dots, a_n) = \boldsymbol{a},\\
\boldsymbol{p}^1 &= (b_1, a_2, \dots, a_n),\\
\boldsymbol{p}^2 &= (b_1, b_2, a_3 \dots, a_n),\\
&\vdots\\
\boldsymbol{p}^{n-1} &= (b_1, \dots, b_{n-1}, a_n),\\
\boldsymbol{p}^n &= (b_1, \dots, b_n) = \boldsymbol{b}.
\end{aligned}$$

Potom platí

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} \big(f(\boldsymbol{p}^i) - f(\boldsymbol{p}^{i-1}) \big). \tag{11.3}$$

Pro $i \in \{1, \dots, n\}$ položme

$$g_i(x) = f(b_1, \dots, b_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n), \quad x \in (\alpha_i, \beta_i).$$

Funkce g_i má v (α_i, β_i) vlastní derivaci rovnou

$$g_i'(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(b_1, \dots, b_{i-1}, x, b_{i+1}, \dots, a_n). \tag{11.4}$$

Pokud $a_i \neq b_i$, existuje podle Lagrangeovy věty (Věta 5.2.4) bod z_i v intervalu s krajními body a_i a b_i takový, že

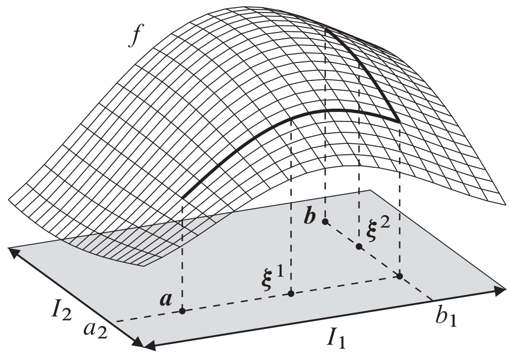
$$f(\boldsymbol{p}^i) - f(\boldsymbol{p}^{i-1}) = g_i(b_i) - g_i(a_i) = g_i'(z_i) \cdot (b_i - a_i) \tag{11.5}$$

V případě, že $a_i = b_i$, volme $z_i = a_i$. Pak (11.5) platí i v tomto případě. Položme

$$\boldsymbol{c}^i = (b_1, b_2, \dots, b_{i-1}, z_i, a_{i+1}, \dots, a_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Potom podle (11.4) a (11.5) platí $f(\boldsymbol{p}^i) - f(\boldsymbol{p}^{i-1}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{c}^i)(b_i - a_i)$. Odtud a z (11.3) dostáváme dokazovaný vztah.

Následující obrázek ilustruje základní myšlenku důkazu v situaci kdy $n = 2$.



Obrázek 2.

■

11.1.16. Věta. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ jsou spojité v bodě $\boldsymbol{a}$. Pak má funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ totální diferenciál.

Důkaz. Ukážeme, že lineární zobrazení $L \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definované předpisem

$$L(\boldsymbol{h}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) h_i, \quad \boldsymbol{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n,$$

je totálním diferenciálem funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\tilde{\delta} > 0$, takové, že

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \; \forall x \in B(\boldsymbol{a}, \tilde{\delta}) \colon \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) \right| < \varepsilon.$$

Položme $\delta = \frac{\tilde{\delta}}{\sqrt{n}}$ a označme

$$I = (a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times \cdots \times (a_n - \delta, a_n + \delta).$$

Potom platí $B(\boldsymbol{a}, \delta) \subset I \subset B(\boldsymbol{a}, \tilde{\delta})$. Nechť $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, \delta)$ je libovolné. Pak podle Lemmatu 11.1.15 existují body $\boldsymbol{c}^1, \dots, \boldsymbol{c}^n \in I$ takové, že

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{c}^i)(x_i - a_i).$$

Pak máme

$$\begin{aligned}|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})| &= \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{c}^i)(x_i - a_i) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})(x_i - a_i)\right| \\ &= \left|\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{c}^i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})\Big)(x_i - a_i)\right| \\ &\le \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{c}^i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})\right| |x_i - a_i| \le \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |x_i - a_i| \\ &\le \varepsilon n \, \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| \, .\end{aligned}$$

Tedy pro $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a},\delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\}$ máme

$$\frac{|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|} \le n\varepsilon,$$

čímž je důkaz proveden. ■

11.1.17. Definice. Nechť f je funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. Pak **derivací funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ podle vektoru $\boldsymbol{v}$** rozumíme (vlastní) limitu

$$D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t}.$$

11.1.18. Poznámky. (a) Zřejmě platí $D_{\boldsymbol{e}^i} f(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$.

(b) O derivaci podle vektoru lze vyslovit obdobné poznámky jako o parciálních derivacích.

11.1.19. Definice. Nechť f je funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $f'(\boldsymbol{a})$ existuje. Pak definujeme **gradient funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$** předpisem

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\Big) \in \mathbb{R}^n.$$

11.1.20. Poznámka. Podle Věty 11.1.10 máme $f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) = \langle \nabla f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{h}\rangle$, pokud $f'(\boldsymbol{a})$ existuje.

11.1.21. Věta. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ a existuje $f'(\boldsymbol{a})$. Potom platí

(a) $f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{v}) = D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a})$,
(b) $\max\{D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a});\ \|\boldsymbol{v}\| = 1\} = \|\nabla f(\boldsymbol{a})\|$.

Důkaz. (a) Pokud $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ potom dokazovaná rovnost zřejmě platí. Předpokládejme, že $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. Potom platí

$$\begin{aligned} D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \left(\frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a}) - f'(\boldsymbol{a})(t\boldsymbol{v})}{\|t\boldsymbol{v}\|} \cdot \frac{\|t\boldsymbol{v}\|}{t} + f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{v}) \right). \end{aligned}$$

Funkce $t \mapsto \frac{\|t\boldsymbol{v}\|}{t}$ je omezená na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a platí

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a}) - f'(\boldsymbol{a})(t\boldsymbol{v})}{t} = 0.$$

Odtud plyne $D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = 0 + f'(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{v})$.

(b) Z Cauchyovy nerovnosti (Věta 10.1.6) máme

$$\begin{aligned} D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) &= f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) v_i \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})\right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} = \|\nabla f(\boldsymbol{a})\| \, \|\boldsymbol{v}\|. \end{aligned} \tag{11.6}$$

Pokud $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$, pak dokazovaná rovnost platí, neboť obě strany jsou rovny nule. Předpokládejme, že platí $\nabla f(\boldsymbol{a}) \neq \boldsymbol{0}$. Položme

$$\boldsymbol{v} = \|\nabla f(\boldsymbol{a})\|^{-1} \cdot \nabla f(\boldsymbol{a}).$$

Pak podle již dokázané části (a) platí $D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{v})$ a můžeme psát

$$D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{v}) = \|\nabla f(\boldsymbol{a})\|^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \|\nabla f(\boldsymbol{a})\|.$$

Odtud a z (11.6) již plyne (b). ■

11.1.22. Poznámka. Pokud $\nabla f(\boldsymbol{a}) \neq \boldsymbol{0}$, pak se v (b) nabývá maxima právě pro $\boldsymbol{v} = \|\nabla f(\boldsymbol{a})\|^{-1} \cdot \nabla f(\boldsymbol{a})$.

11.1.23. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, funkce $h\colon G \to \mathbb{R}$ má spojité parciální derivace prvního řádu na G, $z \in G$, $\nabla h(z) \neq \boldsymbol{o}$ a $v \in \mathbb{R}^n$. Jestliže platí

$$\langle \nabla h(z), v \rangle < 0,$$

pak existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $t \in (0, \delta)$ platí $h(z + tv) < 0$. To plyne z toho, že funkce g definovaná předpisem

$$g(t) = h(z + tv) < 0 \quad \text{pro } t \in (-\delta, \delta)$$

splňuje
$$g'(0) = \langle \nabla h(z), v \rangle < 0.$$

11.1.24. Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\boldsymbol{a} \in G$ a $f : G \to \mathbb{R}$. **Tečnou nadrovinou** ke grafu f v bodě $[\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a})]$ rozumíme množinu
$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1};\ x_{n+1} - f(\boldsymbol{a}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})(x_j - a_j)\}.$$
Jestliže $n = 2$, pak hovoříme o **tečné rovině**. Je-li $n = 1$, pak hovoříme o **tečné přímce (tečně)**.

Pojem totálního diferenciálu pro funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ je možné zobecnit i pro funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$. To je provedeno v následující definici.

11.1.25. Definice. Nechť F je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární zobrazení. Řekneme, že L je **derivací zobrazení** F **v bodě** $\boldsymbol{a}$, pokud platí
$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{\|F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h})\|}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0.$$

11.1.26. Poznámky. (a) Zobrazení F z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ má v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ derivaci právě tehdy, když každá jeho složka, tedy každé zobrazení F_i z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, m\}$, má v bodě $\boldsymbol{a}$ totální diferenciál.

(b) Je-li $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineární zobrazení, pak v každém bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ platí $L'(\boldsymbol{a}) = L$, neboť pro každé $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ platí
$$\|L(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - L(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h})\| = \|\boldsymbol{0}\| = 0.$$

11.1.27 (geometrický význam derivace)**.**

11.1.28. Věta. Nechť F je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, které má v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ derivaci L. Pak je L reprezentováno maticí
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Složky zobrazení L označme L_j a složky zobrazení F označme F_j, $j \in \{1, \dots, m\}$. Zvolme $i \in \{1, \dots, n\}$ a $j \in \{1, \dots, m\}$. Víme, že platí
$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{\|F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h})\|}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0,$$
a proto také
$$\lim_{t\to 0} \frac{\left\|F(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{e}^i) - F(\boldsymbol{a}) - L(t\boldsymbol{e}^i)\right\|}{\left\|t\boldsymbol{e}^i\right\|} = 0.$$

Platí

$$0 \le \left|F_j(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{e}^i) - F_j(\boldsymbol{a}) - tL_j(\boldsymbol{e}^i)\right| = \left|F_j(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{e}^i) - F_j(\boldsymbol{a}) - L_j(t\boldsymbol{e}^i)\right|$$
$$\le \left\|F(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{e}^i) - F(\boldsymbol{a}) - L(t\boldsymbol{e}^i)\right\|,$$

takže také

$$\lim_{t\to 0}\left|\frac{F_j(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{e}^i) - F_j(\boldsymbol{a})}{t} - L_j(\boldsymbol{e}^i)\right| = 0.$$

Odtud máme

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t\to 0}\frac{F_j(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{e}^i) - F_j(\boldsymbol{a})}{t} = L_j(\boldsymbol{e}^i).$$

Jelikož je lineární zobrazení L reprezentováno maticí

$$\big(L_j(\boldsymbol{e}^i)\big)_{\substack{i=1..m,\\ j=1..n}}$$

je tvrzení dokázáno. ■

11.1.29. Označení. (a) Z předchozí věty plyne, že derivace zobrazení F v bodě $\boldsymbol{a}$ je určena jednoznačně, pokud existuje. Pokud totiž derivace existuje, pak je jednoznačně určena reprezentující maticí, která je jednoznačně určena parciálními derivacemi. O parciálních derivacích ji víme, že jsou určeny jednoznačně, pokud existují. Derivaci funkce F v bodě $\boldsymbol{a}$ budeme značit $F'(\boldsymbol{a})$.

(b) Matice reprezentující $F'(\boldsymbol{a})$ se nazývá **Jacobiho matice**. Pokud $m = n$, pak determinant Jacobiho matice nazýváme **jacobián** a značíme ho $J_F(\boldsymbol{a})$, případně

$$\frac{D(F_1,\dots,F_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}(\boldsymbol{a}).$$

11.1.30. Věta (vztah derivace zobrazení k derivacím jeho složek)**.** Nechť F je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$. Derivace $F'(\boldsymbol{a})$ existuje právě tehdy, když existují derivace $F_1'(\boldsymbol{a}),\dots,F_m'(\boldsymbol{a})$.

11.1.31. Věta. Nechť F je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, které má v bodě $\boldsymbol{a} \in \ RN$ derivaci $F'(\boldsymbol{a})$. Pak F je spojité v $\boldsymbol{a}$.

Důkaz. Podle Poznámky 11.1.26(a) existují totální diferenciály $F_i'(\boldsymbol{a})$, $i = 1,\dots,m$, takže všechny funkce F_i jsou spojité v $\boldsymbol{a}$. Platí tedy $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} F_i(\boldsymbol{x}) = F_i(\boldsymbol{a})$, $i = 1,\dots,m$. Odtud plyne

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\|F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{a})\| = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\sqrt{\sum_{i=1}^{m}|F_i(\boldsymbol{x}) - F_i(\boldsymbol{a})|^2} = 0,$$

a tedy $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} F(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{a})$. ■

11.1.32. Věta. Nechť F je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $\frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ jsou spojité v $\boldsymbol{a}$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$. Pak $F'(\boldsymbol{a})$ existuje.

Důkaz. Podle Věty 11.1.16 existují totální diferenciály $F_1'(\boldsymbol{a}), \dots, F_m'(\boldsymbol{a})$. Z Poznámky 11.1.26(a) dostáváme existenci $F'(\boldsymbol{a})$. ■

11.1.33. Lemma. Nechť $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární zobrazení. Pak existuje $C \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\colon \ \|L\boldsymbol{x}\| \leq C\,\|\boldsymbol{x}\|\,.$$

Důkaz. Nechť matice $\mathbb{A} = \left(a_{ji}\right)_{\substack{j=1..m\\ i=1..n}} \in M(m\times n)$ reprezentuje L. Pak máme z Cauchyovy nerovnosti (Věta 10.1.6)

$$\begin{aligned}\|L\boldsymbol{x}\| &= \sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left(L(\boldsymbol{x})_j\right)^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i\Big)^2}\\ &\leq \sqrt{\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\Big)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}^2}\;\|\boldsymbol{x}\|\,.\end{aligned}$$

Položíme-li

$$C = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}^2},$$

dostáváme požadovaný výsledek. ■

11.1.34. Definice. Na množině $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ zavedeme operace sčítání prvků a násobení prvku reálným číslem takto

$$\begin{aligned}(L_1 + L_2)(\boldsymbol{x}) &= L_1(\boldsymbol{x}) + L_2(\boldsymbol{x}), \qquad && L_1, L_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\\ (cL)(\boldsymbol{x}) &= cL(\boldsymbol{x}), && L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), c \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Vzhledem k těmto operacím tvoří $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ vektorový prostor nad reálnými čísly. Definujeme pro $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ normu

$$\|L\| = \sup\left\{\frac{\|L(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|};\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}\right\}.$$

11.1.35. Lemma. Vektorový prostor $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ je s výše definovanou normou normovaný lineární prostor.

Důkaz. Musíme ověřit, že zobrazení $L \mapsto \|L\|$ je norma na $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Zjevně je norma nulového zobrazení rovna nule a $\|L\| = 0$ právě tehdy, když $\|L(\boldsymbol{x})\| = 0$ pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, tj. když $L = 0$.

Snadno též odvodím pro $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a $c \in \mathbb{R}$ rovnost

$$\begin{aligned}\|cL\| &= \sup\left\{\frac{\|cL(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|};\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}\right\}\\ &= |c| \sup\left\{\frac{\|L(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|};\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}\right\}\\ &= |c|\, \|L\|\,.\end{aligned}$$

Co se týče trojúhelníkové nerovnosti, máme pro $L_1, L_2 \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$$\begin{aligned}\|L_1 + L_2\| &= \sup\left\{\frac{\|L_1(\boldsymbol{x}) + L_2(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|};\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}\right\}\\ &\leq \sup\left\{\frac{\|L_1(\boldsymbol{x})\| + \|L_2(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|};\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}\right\}\\ &\leq \sup\left\{\frac{\|L_1(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|};\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}\right\} + \sup\left\{\frac{\|L_2(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|};\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}\right\}\\ &= \|L_1\| + \|L_2\|\,.\end{aligned}$$

■

11.1.36. Poznámka. Povšimněme si, že pro každé $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ platí $\|L(\boldsymbol{x})\| \leq \|L\|\, \|\boldsymbol{x}\|$. Mějme totiž $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ v $\mathbb{R}^n$ dáno. Pak

$$\frac{\|L(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \|L\|\,,$$

a tedy

$$\|L(\boldsymbol{x})\| \leq \|L\|\, \|\boldsymbol{x}\|\,.$$

Pro $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ platí nerovnost triviálně.

11.1.37. Lemma. Nechť F je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ mající derivaci v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Pak existují $c \in \mathbb{R}$ a $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ takové, že

$$\forall h \in B(\boldsymbol{0}, \delta) : \|F(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a})\| \leq C\, \|\boldsymbol{h}\|\,.$$

Důkaz. Nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že pro každé $\boldsymbol{h} \in B(\boldsymbol{0}, \delta)$ platí

$$\left\|F(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a}) - F'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})\right\| \leq \|\boldsymbol{h}\|\,.$$

Potom pro $\boldsymbol{h} \in B(\boldsymbol{0}, \delta)$ máme

$$\begin{aligned}\|F(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a})\| &\leq \left\|F(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a}) - F'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})\right\| + \left\|F'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})\right\|\\ &\leq \|\boldsymbol{h}\| + \left\|F'(\boldsymbol{a})\right\|\, \|\boldsymbol{h}\|\\ &= (1 + \left\|F'(\boldsymbol{a})\right\|)\, \|\boldsymbol{h}\|\,.\end{aligned}$$

Číslo $C = 1 + \|F'(\boldsymbol{a})\|$ tedy vyhovuje požadované nerovnosti. ■

11.1.38. Věta (derivace složeného zobrazení)**.** Nechť $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^s$, F má derivaci v $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a G má derivaci v $\boldsymbol{b} = F(\boldsymbol{a}) \in \mathbb{R}^k$. Pak existuje $(G \circ F)'(\boldsymbol{a})$ a platí

$$(G \circ F)'(\boldsymbol{a}) = G'(\boldsymbol{b}) \circ F'(\boldsymbol{a}).$$

Důkaz. Z Lemmatu 11.1.37 najdeme $C \in \mathbb{R}$ a $\delta_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 >$, takové, že

$$\forall \boldsymbol{h} \in B(\boldsymbol{0}, \delta_0) : \|F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a})\| \leq C \|\boldsymbol{h}\| . \tag{11.7}$$

Ukážeme, že lineární zobrazení $G'(\boldsymbol{b}) \circ F'(\boldsymbol{a}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ je derivací zobrazení $G \circ F$ v bodě $\boldsymbol{a}$. Mějme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, dáno. K němu nalezneme $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že

$$\forall \boldsymbol{u} \in B(\boldsymbol{0}, \eta) : \left\|G(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{u}) - G(\boldsymbol{b}) - G'(\boldsymbol{b})(\boldsymbol{u})\right\| \leq \varepsilon \|\boldsymbol{u}\| . \tag{11.8}$$

Dále nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall \boldsymbol{h} \in B(\boldsymbol{0}, \delta) : \left\|F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a}) - F'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})\right\| \leq \varepsilon \|\boldsymbol{h}\| \tag{11.9}$$

a

$$\forall \boldsymbol{h} \in B(\boldsymbol{0}, \delta) : \|F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a})\| \leq C \|\boldsymbol{h}\| < \eta. \tag{11.10}$$

Pak pro $\boldsymbol{h} \in B(\boldsymbol{0}, \delta)$ máme díky (11.8) a (11.10) odhad

$$\begin{aligned}
&\left\|G(\boldsymbol{b} + (F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a}))) - G(\boldsymbol{b}) - G'(\boldsymbol{b})(F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a}))\right\| \\
&\leq \varepsilon \|F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a})\| \\
&\leq C\varepsilon \|\boldsymbol{h}\| .
\end{aligned}$$

Dále pro tato $\boldsymbol{h}$ platí z (11.9)

$$\begin{aligned}
&\left\|G'(b)(F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a})) - G'(\boldsymbol{b}) \circ F'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})\right\| \\
&\leq \left\|G'(\boldsymbol{b})\right\| \left\|F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a}) - F'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})\right\| \\
&\leq \varepsilon \left\|G'(\boldsymbol{b})\right\| \|\boldsymbol{h}\| .
\end{aligned}$$

Kombinací předcházejících dvou odhadů dostaneme

$$\begin{aligned}
&\left\|G(F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})) - G(F(\boldsymbol{a})) - G'(\boldsymbol{b}) \circ F'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})\right\| \\
&\leq \left\|G(\boldsymbol{b} + (F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a}))) - G(\boldsymbol{b}) - G'(\boldsymbol{b})(F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a}))\right\| \\
&\quad \cdot \left\|G'(\boldsymbol{b})(F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a})) - G'(\boldsymbol{b}) \circ F'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})\right\| \\
&\leq (C + \left\|G'(\boldsymbol{b})\right\|)\varepsilon \|\boldsymbol{h}\| ,
\end{aligned}$$

čímž je důkaz hotov. ∎

11.1.39. Poznámka. Diferenciál $(G \circ F)'(\boldsymbol{a})$ je reprezentován součinem matic, které reprezentují $F'(\boldsymbol{a})$ a $G'(\boldsymbol{b})$. Tedy $(G \circ F)'(\boldsymbol{a})$ je reprezentován maticí

$$\left(\frac{\partial g_l}{\partial y_j}\right)_{\substack{l=1..s \\ j=1..k}} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_{\substack{j=1..j \\ i=1..n}} .$$

11.1.40. Věta (řetízkové pravidlo)**.** Nechť funkce $f_1, \dots, f_k$ z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ mají v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ totální diferenciál a funkce g z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}$ má v bodě $\boldsymbol{b} = (f_1(\boldsymbol{a}), \dots, f_k(\boldsymbol{a}))$ totální diferenciál. Definujme funkci h z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ předpisem

$$h(\boldsymbol{x}) = g(f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \dots, f_k(\boldsymbol{x})).$$

Pak má h v $\boldsymbol{a}$ totální diferenciál a pro $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}((\boldsymbol{a}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial g}{\partial y_j}(\boldsymbol{b}) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}). \tag{11.11}$$

Důkaz. Existence totálního diferenciálu plyne z Věty 11.1.38. Dle Poznámky 11.1.39 platí (11.11), jelikož

$$\left(\tfrac{\partial h}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \dots, \tfrac{\partial h}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right) = \left(\tfrac{\partial g}{\partial y_1}(\boldsymbol{b}), \dots, \tfrac{\partial g}{\partial y_k}(\boldsymbol{b})\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}.$$

■

11.1.41. Příklad. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má totální diferenciál v každém bodě. Definujme $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ předpisem

$$h(r,t) = f(r\cos t, r\sin t), \quad (r,t) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}.$$

Potom pro $(r,t) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$ platí

$$\left(\tfrac{\partial h}{\partial r}(r,t), \tfrac{\partial h}{\partial t}(r,t)\right) = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t), \tfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos t, r\sin t)\right) \begin{pmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t \end{pmatrix},$$

a tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial r}(r,t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t)\cos t + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos t, r\sin t)\sin t, \\ \frac{\partial h}{\partial t}(r,t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t)(-r\sin t) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos t, r\sin t)(r\cos t). \end{aligned}$$

11.1.42. Poznámka. Nechť f_1, f_2 jsou funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, které mají v $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ derivaci. Pak platí

(a) $(f_1 + f_2)'(a) = f_1'(a) + f_2'(a)$,
(b) $(f_1 f_2)'(a) = f_2(a) f_1'(a) + f_1(a) f_2'(a)$,
(c) $(f_1/f_2)'(a) = f_2^{-2}(a)\left(f_2(a) f_1'(a) - f_1(a) f_2'(a)\right)$, pokud $f_2(a) \neq 0$.

K důkazu (a) uvažujme $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované jako

$$g(y_1, y_2) = y_1 + y_2$$

a $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$. Pak $(g \circ f)(\boldsymbol{x}) = f_1(\boldsymbol{x}) + f_2(\boldsymbol{x})$ a $g'(\boldsymbol{b}) = (1, 1)$ pro každý bod $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$. V bodě $\boldsymbol{a}$ tedy platí

$$\begin{aligned}
(f_1 + f_2)'(\boldsymbol{a}) &= (g \circ f)'(\boldsymbol{a}) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix} \\
&= f_1'(\boldsymbol{a}) + f_2'(\boldsymbol{a}).
\end{aligned}$$

Podobně postupujeme v případech (b) a (c) za pomoci funkcí $g(y_1, y_2) = y_1 y_2$, respektive $g(y_1, y_2) = y_1 / y_2$.

11.1.43. Věta (o přírůstku funkce)**.** Nechť f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, která má diferenciál v každém bodě otevřené množiny $G \subset \mathbb{R}^n$. Nechť $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G$ a úsečka L spojující body $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ je obsažena v G, tj. $\{t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b};\ t \in [0, 1]\} \subset G$. Pak existuje $\boldsymbol{c} \in L$ takové, že

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}).$$

Důkaz. Definujme funkci $g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ předpisem

$$g(t) = f\big((1 - t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}\big), \quad t \in [0, 1].$$

Zobrazení $t \mapsto (1 - t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ má spojitou derivaci, takže g je spojité na $[0, 1]$ a v každém bodě $(0, 1)$ má derivaci. Potom podle Lagrangeovy věty (Věta 5.2.4) existuje $t_0 \in (0, 1)$ takové, že

$$g(1) - g(0) = g'(t_0),$$

neboli pro $\boldsymbol{c} = (1 - t_0)\boldsymbol{a} + t_0\boldsymbol{b}$ máme

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) &= g(1) - g(0) = g'(t_0) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{c})(b_i - a_i) \\
&= f'(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}).
\end{aligned}$$

■

11.1.44. Definice. Nechť A je množina v $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že je **konvexní**, pokud pro každé dva body z A platí, že úsečka je spojující je obsažena v A.

11.1.45. Příklad. Pro zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ nemusí analogie Věty 11.1.43 platit. Uvažujme zobrazení $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definované předpisem

$$F(t) = (\cos t, \sin t)$$

Pak $F'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq \mathbf{0}$ pro každé $t \in \mathbb{R}$,

$$F(2\pi) - F(0) = (1,0) - (1,0) = (0,0),$$

ale

$$F'(c)(2\pi - 0) = 2\pi(-\sin c, \cos c) \neq (0,0), \quad c \in (0,1).$$

11.1.46. Věta. Nechť $n, k \in \mathbb{N}$, $K \in \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená konvexní množina, $F : G \to \mathbb{R}^k$ je zobrazení mající derivaci v každém bodě G a nechť

$$\sup\left\{\left\|F'(\boldsymbol{x})\right\| ;\ \boldsymbol{x} \in G\right\} \leq K.$$

Pak F je **lipschitzovské s konstantou** K, tj.

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G : \|F(\boldsymbol{b}) - F(\boldsymbol{a})\| \leq K \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|.$$

Důkaz. Mějme $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in$ dány. Pokud $f(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{b})$, tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $f(\boldsymbol{b}) \neq f(\boldsymbol{a})$ a položme

$$\boldsymbol{v} = \frac{f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a})}{\|f(b) - f(a)\|}.$$

Definujeme-li funkci $\varphi : G \to \mathbb{R}$ jako

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \langle f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v}\rangle = \sum_{j=1}^{k} f_j(\boldsymbol{x}) v_j,$$

platí

$$|\varphi(\boldsymbol{b}) - \varphi(\boldsymbol{a})| = |\langle f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{v}\rangle| = \|f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a})\|.$$

Dále máme

$$\varphi'(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{k} v_j f_j'(\boldsymbol{x}), \quad x \in G,$$

a pro libovolné $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$, $\|h\| \leq 1$, platí

$$\begin{aligned} \left|\varphi'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h})\right| &= \left|\sum_{j=1}^{k} v_j f_j'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h})\right| = \left|\langle f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h}), \boldsymbol{v}\rangle\right| \\ &\leq \left\|f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h})\right\| \|\boldsymbol{v}\| \leq \left\|f'(\boldsymbol{x})\right\| \|\boldsymbol{v}\| \\ &\leq \left\|f'(\boldsymbol{x})\right\| \leq K. \end{aligned}$$

Tedy

$$\left\|\varphi'(\boldsymbol{x})\right\| = \sup\left\{\left|\varphi'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h})\right| ;\ \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{h}\| \leq 1\right\} \leq K.$$

Podle Věty 11.1.43 existuje $\boldsymbol{c} \in G$ splňující

$$\varphi(\boldsymbol{b}) - \varphi(\boldsymbol{a}) = \varphi'(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}).$$

Tedy

$$\|f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a})\| = \left|\varphi'(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})\right| \leq \left\|\varphi'(\boldsymbol{c})\right\| \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\| \leq K \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\| .$$

■

11.2. Parciální derivace a diferenciály vyšších řádů

11.2.1. Definice. Nechť f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ a $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Parciální derivaci funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ podle j-té proměnné v bodě $\boldsymbol{a}$ značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{a})$, pokud $i \neq j$, případně $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\boldsymbol{a})$, pokud $i = j$. Analogicky značíme parciální derivace vyšších řádů.

11.2.2. Poznámka. Všimněte si pořadí symbolů

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}).$$

11.2.3. Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f : G \to \mathbb{R}$ a $p \in \mathbb{N}$. Řekneme, že f je **třídy** C^k, pokud jsou všechny parciální derivace funkce f až do řádu k včetně spojité na G. Množinu všech funkcí $f : G \to \mathbb{R}$ třídy C^k označujeme $C^k(G)$ a klademe $C^\infty(G) = \bigcap_{k=1}^\infty C^k(G)$.

O funkci g řekneme, že je **třídy** C^k **na** G ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), pokud $g|_G \in C^k(G)$.

11.2.4. Příklad. Dokažte, že funkce $\pi_i(\boldsymbol{x}) = x_i$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, leží v množině $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Řešení. ♣

11.2.5. Poznámky. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina.

(a) Jestliže $f \in C^1(G)$, pak má dle Věty 11.1.16 totální diferenciál v každém bodě G.

(b) Zřejmě platí

$$C^0(G) \supset C^1(G) \supset C^2(G) \supset \dots,$$

přičemž funkcemi třídy $C^0(G)$ se rozumí spojité funkce na G.

(c) Nechť $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Pokud $f, g \in C^k(G)$, pak i $f + g$, fg a cf, $c \in \mathbb{R}$, leží v $C^k(G)$. Je-li navíc g nenulová na G, tak i $f/g \in C^k(G)$. K ověření těchto tvrzení stačí použít vzorce pro výpočet derivace součtu, součinu, podílu a matematickou indukci dle k.

11.2.6. Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}$ je otevřená množina, $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ a f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$. Řekneme, že F je zobrazení **třídy** C^k, pokud jeho složky $f_1, \dots, f_m$ jsou třídy C^k.

11.2.7. Poznámka. Zobrazení třídy C^1 na otevřené množině G má derivaci v každém bodě množiny G.

11.2.8. Věta. Nechť $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbb{R}^n$, $H \subset \mathbb{R}^k$ jsou otevřené množiny, $f : G \to \mathbb{R}^k$, $g : H \to \mathbb{R}^s$ jsou třídy C^p a platí $f(G) \subset H$. Pak zobrazení $g \circ f$ je třídy C^p.

Důkaz. Označme $h = (h_1, \dots, h_s) = g \circ f$. Poněvadž $f : G \to \mathbb{R}^k$, $g : H \to \mathbb{R}^s$ a $f(G) \subset H$, je zobrazení h definované na G. Dále budeme postupovat pomocí matematické indukce podle p. Předpokládejme nejprve, že $p = 1$. Pro každé $\boldsymbol{x} \in G$ existují podle Věty 11.1.16 derivace $f'(\boldsymbol{x})$ a $g'\big(f(\boldsymbol{x})\big)$. Podle Věty 11.1.40 pak platí pro každé $\boldsymbol{x} \in G$, $l \in \{1, \dots, s\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ vztah

$$\frac{\partial h_l}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial g_l}{\partial y_j}\big(f(\boldsymbol{x})\big)\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}). \tag{11.12}$$

Funkce $\boldsymbol{x} \mapsto \frac{\partial g_l}{\partial y_j}\big(f(\boldsymbol{x})\big)$, $\boldsymbol{x} \mapsto \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$ jsou spojité, a proto je funkce $\frac{\partial h_l}{\partial x_i}$ podle (11.12) spojitá. Odtud již okamžitě vyplývá, že zobrazení $g \circ f$ je třídy C^1 na G.

Předpokládejme nyní platnost tvrzení pro $p - 1$, kde $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, a dokažme ho pro p. Stejně jako v předchozím případě platí pro každé $\boldsymbol{x} \in G$, $l \in \{1, \dots, s\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ vztah (11.12).

Nechť $l \in \{1, \dots, s\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ a $j \in \{1, \dots, k\}$. Funkce $\boldsymbol{x} \mapsto \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$ je třídy C^{p-1} na G. Funkce $x \mapsto \frac{\partial g_l}{\partial y_j}\big(f(\boldsymbol{x})\big)$ je dle indukčního předpokladu třídy C^{p-1} na G, neboť $y \mapsto \frac{\partial g_l}{\partial y_j}(\boldsymbol{y})$ je třídy C^{p-1} na H a $f \in C^p(G) \subset C^{p-1}(G)$. Podle Poznámky 11.2.5(c) je funkce $\boldsymbol{x} \mapsto \frac{\partial h_l}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$ též třídy C^{p-1} na G. Tedy je tato funkce třídy C^p a indukční krok je dokončen.

Je-li $p = \infty$, tvrzení plyne přímo z definice podle předchozího. ∎

11.2.9. Věta (záměnnost parciálních derivací)**.** Nechť f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Jestliže funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ a $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ mají totální diferenciál v bodě $\boldsymbol{a}$, pak platí $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{a})$.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $n = 2$. Nechť $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2] \in \mathbb{R}^2$ a $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, je takové, že

$$(a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times (a_2 - \delta, a_2 + \delta) \subset \mathcal{D}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) \cap \mathcal{D}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big).$$

Označme D množinu na pravé straně inkluze. Definujme pomocnou funkci $W\colon (0,\delta) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$W(t) = \frac{1}{t^2}\big(f(a_1 + t, a_2 + t) - f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2 + t) + f(a_1, a_2)\big).$$

Zvolme nyní pevné $t \in P_+(0,\delta)$. Definujme další pomocnou funkci $\varphi\colon [a_1, a_1 + \delta) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\varphi(x) = f(x, a_2 + t) - f(x, a_2).$$

Potom platí

$$W(t) = \frac{1}{t^2}\big(\varphi(a_1 + t) - \varphi(a_1)\big)$$

a dále

$$\varphi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, a_2 + t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, a_2), \quad x \in (a_1, a_1 + \delta).$$

Podle Lagrangeovy věty (Věta 5.2.4) existuje $c(t) \in (a_1, a_1 + t)$ takové, že

$$\varphi(a_1 + t) - \varphi(a_1) = \varphi'(c(t)) \cdot t.$$

Pak pro každé $t \in (0,\delta)$ platí

$$W(t) = \frac{1}{t}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(c(t), a_2 + t) - \frac{\partial f}{\partial x}(c(t), a_2)\Big). \tag{11.13}$$

Funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ má v bodě $\boldsymbol{a}$ totální diferenciál, a proto existuje funkce $z_1\colon (-\delta,\delta)^2 \to \mathbb{R}$ taková, že pro každé $[\alpha, \beta] \in (-\delta,\delta) \times (-\delta,\delta)$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1 + \alpha, a_2 + \beta) = \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a}) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{a})\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\boldsymbol{a})\beta + z_1(\alpha, \beta), \tag{11.14}$$

a

$$\lim_{[\alpha,\beta]\to\mathbf{0}} \frac{z_1(\alpha,\beta)}{\|(\alpha,\beta)\|} = 0. \tag{11.15}$$

Dosadíme-li do (11.14) za $[\alpha, \beta]$ bod $[c(t) - a_1, t]$, respektive $[c(t) - a_1, 0]$, kde $t \in (0\delta)$, obdržíme rovnosti

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c(t), a_2 + t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a}) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{a})(c(t) - a_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\boldsymbol{a})t + z_1(c(t) - a_1, t),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c(t), a_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a}) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{a})(c(t) - a_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\boldsymbol{a}) \cdot 0 + z_1(c(t) - a_1, 0).$$

Tyto výrazy dosadíme do (11.13) a dostaneme

$$W(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{t}\big(z_1(c(t) - a_1, t) - z_1(c(t) - a_1, 0)\big), \quad t \in (0, \delta).$$

Platí

$$\lim_{t \to 0+} \frac{z_1(c(t) - a_1, t)}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{z_1(c(t) - a_1, t)}{\|(c(t) - a_1, t)\|} \cdot \frac{\|(c(t) - a_1, t)\|}{t} = 0,$$

neboť první člen konverguje k 0 podle (11.15) a absolutní hodnota druhého členu je omezena číslem $\sqrt{2}$, neboť

$$\|(c(t) - a_1, t)\| \leq \sqrt{(c(t) - a_1)^2 + t^2} \leq \sqrt{t^2 + t^2} = \sqrt{2}|t|.$$

Podobně dostaneme

$$\lim_{t \to 0+} \frac{z_1(c(t) - a_1, 0)}{t} = 0.$$

Máme tedy

$$\lim_{t \to 0+} W(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\boldsymbol{a}).$$

Nyní vyjádříme $W(t)$ jiným způsobem. Použijme pomocnou funkci $\psi\colon [a_2, a_2 + \delta) \to \mathbb{R}$ definovanou pro pevné $t \in (0, \delta)$ předpisem

$$\psi(y) = f(a_1 + t, y) - f(a_1, y).$$

Pak máme

$$W(t) = \frac{1}{t^2}\left(\psi(a_2 + t) - \psi(a_2)\right).$$

Analogicky jako výše odvodíme

$$W(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{t}\big(z_2(t, d(t) - a_1) - z_2(0, d(t) - a_2)\big), \quad t \in (0, \delta),$$

kde z_2 je funkce splňující

$$\lim_{[\alpha, \beta] \to \mathbf{0}} \frac{z_2(\alpha, \beta)}{\|(\alpha, \beta)\|} = 0.$$

Odtud plyne podobně jako v předchozím případě

$$\lim_{t\to 0+} W(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{a}).$$

Platí tedy $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{a})$.

Uvažujme nyní obecnou $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i < j$. Definujme funkci $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ předpisem

$$g(x, y) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \dots, a_n).$$

Položme ještě

$$\gamma(x, y) = (a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \dots, a_n).$$

Pak

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(x, y)) & \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\gamma(x, y)) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(x, y)) & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\gamma(x, y)). \end{aligned} \tag{11.16}$$

Zobrazení $\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ má derivaci v každém bodě $\mathbb{R}^2$, a tedy $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ mají totální diferenciál v (a_i, a_j). Z předchozího a (11.16) dostáváme požadované tvrzení. ■

11.2.10. Parciální derivace nejsou obecně záměnné, jak ukazuje následující příklad.

11.2.11. Příklad. Dokažte, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{jestliže } [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & \text{jestliže } [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

splňuje

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

Řešení. Platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right), & \text{jestliže } [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & \text{jestliže } [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} x\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right), & \text{jestliže } [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & \text{jestliže } [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

Odtud vyplývá, že $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Dále pro každá $x, y \in \mathbb{R}$ platí
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y$$
a
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x,$$
takže
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$$
a
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1.$$
Odtud plyne tvrzení. ♣

11.2.12. Věta. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $p \in \mathbb{N}$ a $f \in C^p(G)$. Nechť $\boldsymbol{a} \in G$ a $\pi: \{1, \dots, p\} \to \{1, \dots, p\}$ je permutace a $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$. Potom platí
$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \cdots \partial x_{i_1}}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_{\pi(p)}} \cdots \partial x_{i_{\pi(1)}}}(\boldsymbol{a}).$$

Důkaz. Je-li $p = 1$, tvrzení zřejmě platí. Pro $p > 1$ stačí tvrzení dokázat pro permutaci ve formě „sousední transpozice“. Nechť $j \in \{1, \dots, p-1\}$ a
$$\pi(l) = \begin{cases} j+1, & l = j, \\ j, & l = j+1, \quad l \in \{1, \dots, p\}. \\ l, & \text{jinak}, \end{cases}$$
Každá permutace je totiž složením permutací uvedeného typu. Označme
$$g = \frac{\partial^{j-1} f}{\partial x_{i_{j-1}} \cdots \partial x_{i_1}}.$$
Potom g je třídy C^2 na G a podle předpokladu Věty 11.2.9 platí
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_{j+1} \partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_{j+1}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_{\pi(j+1)} \partial x_{\pi(j)}}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in G.$$
Odtud již dostáváme tvrzení. ■

11.2.13. Definice. Nechť $n, p \in \mathbb{N}$. Zobrazení $L : (\mathbb{R}^n)^p \to \mathbb{R}^k$ se nazývá p-**lineární**, jestliže
$$\boldsymbol{u} \mapsto L(\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^{i-1}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}^{i+1}, \dots, \boldsymbol{v}^p)$$
je lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$ pro každé $i \in \{1, \dots, p\}$, $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^{i-1}, \boldsymbol{v}^{i+1}, \dots, \boldsymbol{v}^p \in \mathbb{R}^n$. Množinu všech p-lineárních zobrazení z $(\mathbb{R}^n)^p$ do $\mathbb{R}^k$ značíme $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$.

11.2.14. Poznámky. (a) Pro $B \in L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ platí pro $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$

$$B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = B\Big(\sum_{i=1}^n u_i \boldsymbol{e^i}, \sum_{j=1}^n v_j \boldsymbol{e^j}\Big) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j B(\boldsymbol{e^i}, \boldsymbol{e^j})$$

Obdobně pro $L \in L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ a $\boldsymbol{u^1}, \dots, \boldsymbol{u^p} \in \mathbb{R}^n$ dostaneme

$$L(\boldsymbol{u^1}, \dots, \boldsymbol{u^p}) = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_p=1}^n u^1_{i_1} \cdots u^p_{i_p} L(\boldsymbol{e^{i_1}}, \dots, \boldsymbol{e^{i_p}}). \tag{11.17}$$

(b) Pokud $L \in L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ a $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$, pak zobrazení

$$(\boldsymbol{u^2}, \dots, \boldsymbol{u^p}) \mapsto L(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{u^2}, \dots, \boldsymbol{u^p})$$

patří do $L_{p-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$.

11.2.15. Lemma. Nechť $L \in L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$. Pak existuje $C \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall (\boldsymbol{u^1}, \dots, \boldsymbol{u^p}) \in (\mathbb{R}^n)^p : \left\| L(\boldsymbol{u^1}, \dots, \boldsymbol{u^p}) \right\| \le C \left\| \boldsymbol{u^1} \right\| \cdots \left\| \boldsymbol{u^p} \right\|.$$

Důkaz. Položme

$$K = \max \left\{ \left\| L(\boldsymbol{e^{i_1}}, \dots, \boldsymbol{e^{i_p}}) \right\| ; \, i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Pak pro $\boldsymbol{u^1}, \dots, \boldsymbol{u^p} \in \mathbb{R}^n$ máme dle Poznámky 11.2.14

$$\left\| L(\boldsymbol{u^1}, \dots, \boldsymbol{u^p}) \right\| \le K \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_p=1}^n \left\| \boldsymbol{u^1} \right\| \cdots \left\| \boldsymbol{u^p} \right\| \le K n^p \left\| \boldsymbol{u^1} \right\| \cdots \left\| \boldsymbol{u^p} \right\|.$$

Tedy $C = Kn^p$ splňuje požadované. ∎

11.2.16. Definice. Normou $L \in L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ rozumíme číslo

$$\|L\| = \sup \left\{ \left\| L(\boldsymbol{u^1}, \dots, \boldsymbol{u^p}) \right\| ; \, \left\| \boldsymbol{u^1} \right\|, \dots, \left\| \boldsymbol{u^p} \right\| \le 1 \right\}$$

11.2.17. Poznámka. Prostor $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ je s výše definovanou normou normovaný lineární prostor. Důkaz proběhne obdobně jako v Lemmatu 11.1.35.

11.2.18. Definice. Nechť f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$, $p \in \mathbb{N}$ a $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Jeho **$p$-tou derivací v bodě $\boldsymbol{a}$** rozumíme p-lineární zobrazení $L \in L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ splňující

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} \frac{\left\| f^{(p-1)}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f^{(p-1)}(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h}, ., \dots, .) \right\|}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0.$$

11.2.19. Poznámky. (a) Povšimněme si, že přecházející definice má induktivní charakter, tj. p-tá derivace je definována na základě znalosti definice $(p-1)$-ní derivace.

(b) Navíc je definice korektní, jelikož pro $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$f^{(p-1)}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}), f^{(p-1)}(\boldsymbol{a}), L(\boldsymbol{h}, ., \dots, .) \in L_{p-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k),$$

a tedy

$$\left\| f^{(p-1)}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f^{(p-1)}(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h}, ., \dots, .) \right\|$$

je dobře definovaný výraz.

11.2.20. Věta. Nechť $L \in L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ je p-tou derivací funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Pak mají všechny parciální derivace funkce f řádu $p-1$ totální diferenciál v bodě $\boldsymbol{a}$ a platí

$$L(\boldsymbol{e}^{i_1}, \dots, \boldsymbol{e}^{i_p}) = \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}}(\boldsymbol{a}), \quad i_1 \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}.$$

Důkaz. Budeme postupovat matematickou indukcí dle p. Pokud $p = 1$, tvrzení plyne z definice.

Předpokládejme nyní, že $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, a tvrzení platí pro $p-1$. Zvolme $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$. Předpokládejme, že $L \in L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ je p-tá derivace f v bodě a. Tím pádem existují $(p-1)$-derivace na okolí $\boldsymbol{a}$ a můžeme na tomto okolí dle indukčního předpokladu psát

$$f^{(p-1)}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{u}^2, \dots, \boldsymbol{u}^p) = \sum_{j_2=1}^{n} \cdots \sum_{j_p=1}^{n} \frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_p}}(\boldsymbol{x}) u^2_{j_2} \dots u^p_{j_p}.$$

Opět dle indukčního předpokladu máme pro funkci

$$g(x) = f^{(p-1)}(\boldsymbol{e}^{i_2}, \dots, \boldsymbol{e}^{i_p})$$

rovnost

$$g(x) = \frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}}(\boldsymbol{x})$$

na okolí $\boldsymbol{a}$. Označme

$$\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{e}^{i_2}, \dots, \boldsymbol{e}^{i_p}).$$

Pak pro $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$, $\|\boldsymbol{h}\| \leq 1$, platí

$$\begin{aligned} &\frac{\left| f^{(p-1)}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})(\boldsymbol{w}) - f^{(p-1)}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{w}) - L(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{w}) \right|}{\|\boldsymbol{h}\|} \\ &\quad \leq \frac{\left\| f^{(p-1)}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f^{(p-1)}(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h}, ., \dots, .) \right\|}{\|\boldsymbol{h}\|}, \end{aligned}$$

a tedy

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{\left| f^{(p-1)}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})(\boldsymbol{w}) - f^{(p-1)}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{w}) - L(\boldsymbol{h},\boldsymbol{w})\right|}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0.$$

Tedy máme

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{1}{\|\boldsymbol{h}\|} |g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - g(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h},\boldsymbol{w})| = 0,$$

což dává pro $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i_1}}$ rovnosti

$$\frac{\partial g}{\partial x_{i_1}}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_p}}(\boldsymbol{a}) = L(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i_1}}, \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i_2}}, \dots, \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i_p}}).$$

Tím je důkaz dokončen. ■

11.2.21. Poznámky. (a) Podle předchozí Věty 11.2.20 je $f^{(p)}(\boldsymbol{a})$ určena jednoznačně.

(b) Pro $f = (f_1, \dots, f_k)$ z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$ opět platí, že $f^{(p)}(\boldsymbol{a})$ existuje právě tehdy, když existují $f_1^{(p)}(\boldsymbol{a}), \dots, f_k^{(p)}(\boldsymbol{a})$. Navíc platí, že $L \in L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ je p-tá derivace f v bodě $\boldsymbol{a}$ právě tehdy, když j-tá složka L je p-tou derivací f_j v bodě $\boldsymbol{a}$, $j = 1, \dots, k$.

11.2.22. Věta. Nechť f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $f^{(p)}(\boldsymbol{a})$ existuje. Potom je $f^{(p)}(\boldsymbol{a})$ symetrické zobrazení, tj. pokud $\pi : \{1, \dots, p\} \to \{1, \dots, p\}$ je permutace, pak

$$f^{(p)}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{1}}, \dots, \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{p}}) = f^{(p)}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\pi(1)}}, \dots, \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\pi(p)}})$$

pro každé $\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{1}}, \dots, \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^n$.

Důkaz. Nechť $f = (f_1, \dots, f_k)$ jsou složky f, tj. $f_1, \dots, f_k$ jsou funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ takové, že $f(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \dots, f_k(\boldsymbol{x}))$. Vzhledem k Poznámce 11.2.21 stačí dokázat tvrzení pro každou funkci f_l, $l \in \{1, \dots, k\}$.

Díky předchozí Větě 11.2.20 a Poznámce 11.2.14 stačí dokázat, že pro $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$ a permutaci $\pi : \{1, \dots, p\} \to \{1, \dots, p\}$ platí

$$\frac{\partial^p f_l}{\partial x_{i_p}\dots\partial x_{i_1}}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^p f_l}{\partial x_{i_{\pi(p)}}\dots\partial x_{i_{\pi(1)}}}(\boldsymbol{a}). \tag{11.18}$$

Uvedený vztah opět stačí dokázat pro sousední transpozice. Nechť tedy $j \in \{1, \dots, p-1\}$ a

$$\pi(s) = \begin{cases} j+1, & s = j, \\ j, & s = j+1, \\ s & \text{jinak}, \end{cases} \quad s \in \{1, \dots, p\}.$$

Potom funkce

$$g(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^{j-1} f_l}{\partial x_{i_{j-1}} \dots \partial x_{i_1}}(\boldsymbol{x})$$

splňuje

$$g(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^{j-1} f_l}{\partial x_{i_{\pi(j-1)}} \dots \partial x_{i_{\pi(1)}}}(\boldsymbol{x})$$

na okolí bodu $\boldsymbol{a}$.

Funkce f má derivaci $(j+1)$-ního řádu v $\boldsymbol{a}$, a proto mají funkce

$$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x_{i_j}}(\boldsymbol{x}), \quad x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x_{i_{j+1}}}(\boldsymbol{x})$$

totální diferenciál v $\boldsymbol{a}$ (Věta 11.2.20). Platí tedy podle Věty 11.2.9

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_{j+1}} \partial x_{i_j}}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_j} \partial x_{i_{j+1}}}(\boldsymbol{a}).$$

Odtud již plyne rovnost (11.18) ∎

11.2.23. Věta. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f : G \to \mathbb{R}^k$ je třídy C^p na G. Pak $f^{(p)}(\boldsymbol{x})$ existuje pro každé $\boldsymbol{x} \in G$.

Důkaz. Důkaz stačí provést pro jednotlivé složky f dle Poznámky 11.2.21, tedy lze předpokládat, že $k = 1$.

Použijeme matematickou indukci podle p. Pro $p = 1$ tvrzení platí díky Větě 11.1.32.

Předpokládejme nyní, že $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, a že tvrzení platí pro $p - 1$. Označme $A = \{1, \dots, n\}^{p-1}$. Pro $\alpha = (i_1, \dots, i_{p-1}) \in A$ je funkce

$$g_\alpha(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{p-1}}}(\boldsymbol{x})$$

třídy C^1 na G a má na G totální diferenciál. Zvolme $\boldsymbol{a} \in G$ a nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\delta \in \mathbb{R}$ kladné takové, že

$$\forall \alpha \in A \ \forall \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{h}\| \le \delta : \left| g_\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - g_\alpha(\boldsymbol{a}) - g'_\alpha(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) \right| \le \varepsilon \|h\|.$$

Položme

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^{p-1}) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha \in A} \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) h_i v^1_{\alpha_1} \cdots v^{p-1}_{\alpha_{p-1}} \\ &= \sum_{\alpha \in A} g'_\alpha(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) v^1_{\alpha_1} \cdots v^{p-1}_{\alpha_{p-1}}. \end{aligned}$$

Zvolme $\boldsymbol{u^1}, \dots, \boldsymbol{u^{p-1}} \in \mathbb{R}^n$, přičemž $\|\boldsymbol{u^1}\|, \dots, \|\boldsymbol{u^{p-1}}\| \leq 1$. Označme

$$\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u^1}, \dots, \boldsymbol{u^{p-1}}).$$

Pak pro $\|\boldsymbol{h}\| < \delta$ máme

$$\begin{aligned}
&\left| f^{(p-1)}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})(\boldsymbol{w}) - f^{(p-1)}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{w}) - L(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{w}) \right| \\
&= \left| \sum_{\alpha \in A} g_\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) u^1_{\alpha_1} \cdots u^{p-1}_{\alpha_{p-1}} - \sum_{\alpha \in A} g_\alpha(\boldsymbol{a}) u^1_{\alpha_1} \cdots u^{p-1}_{\alpha_{p-1}} - \sum_{\alpha \in A} g'_\alpha(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) u^1_{\alpha_1} \cdots u^{p-1}_{\alpha_{p-1}} \right| \\
&\leq \sum_{\alpha \in A} \left| g_\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - g_\alpha(\boldsymbol{a}) - g'_\alpha(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) \right| \\
&\leq |A| \varepsilon \, \|\boldsymbol{h}\| .
\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen, neboť $L = f^p(\boldsymbol{a})$. ■

11.2.24. Poznámky. (a) Nechť f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $f''(\boldsymbol{a})$ existuje. Potom je $f''(\boldsymbol{a})$ bilineární zobrazení reprezentované maticí

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

ve smyslu

$$\begin{aligned}
&\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n : \; f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \\
&\qquad = \begin{pmatrix} u_1, & \dots, & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Reprezentující matici bilineární formy $f''(\boldsymbol{a})$ nazýváme **Hessovou** maticí. Podle Věty 11.2.22 jde o symetrickou matici.

(b) **Druhým diferenciálem** funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ rozumíme kvadratickou formu $\boldsymbol{h} \mapsto f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h})$. Podobně diferenciálem p-tého řádu rozumíme zobrazení $\boldsymbol{h} \mapsto f^{(p)}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}, \dots, \boldsymbol{h})$.

11.2.25. Definice. Nechť pro funkci f z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ v bodě $\boldsymbol{a}$ existuje $f^{(p)}(\boldsymbol{a})$. Potom **Taylorovým polynomem p-tého řádu funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$** rozumíme polynom n proměnných

$$T_p^{f,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{j!} f^{(j)}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}, \dots, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}),$$

přičemž symbolem $f^{(0)}(\boldsymbol{a})$ rozumíme funkční hodnotu $f(\boldsymbol{a})$.

11.2.26. Věta (Lagrangeův tvar zbytku)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená konvexní množina, $f \in C^{(p+1)}(G)$, kde $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \in G$. Potom existuje $\boldsymbol{c}$ ležící na úsečce spojující body $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}$ takové, že

$$f(\boldsymbol{x}) = T_p^{f,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{(p+1)!} f^{(p+1)}(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}, \dots, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}).$$

Důkaz. Definujme pomocnou funkci $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\varphi(t) = f(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})).$$

Zobrazení $t \mapsto \boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$ je třídy C^∞ na $\mathbb{R}$, a tak podle Věty 11.2.8 je φ třídy C^p na jistém otevřeném intervalu, který obsahuje $[0,1]$ (pro vhodný interval $I \supset [0,1]$ je totiž $\{\boldsymbol{a} + s(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a});\ s \in I\} \subset G$). Podle Věty 7.1.17 existuje $t_0 \in (0,1)$ takové, že

$$\varphi(1) = \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{j!}\varphi^{(j)}(0) + \frac{1}{(p+1)!}\varphi^{(p+1)}(t_0). \tag{11.19}$$

Použitím Věty 11.11 postupně dostáváme

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}))(x_{i_1} - a_{i_1}),\\
\varphi''(t) &= \sum_{i_2=1}^{n}\sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_2}\partial x_{i_1}}(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}))(x_{i_1} - a_{i_1})(x_{i_2} - a_{i_2}),\\
&\ \vdots\\
\varphi^{(j)}(t) &= \sum_{i_j=1}^{n}\cdots\sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial^j f}{\partial x_{i_j}\dots\partial x_{i_1}}(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}))(x_{i_1} - a_{i_1})\cdots(x_{i_j} - a_{i_j}).
\end{aligned}$$

Položíme $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + t_0(x - \boldsymbol{a})$ a dosadíme spočtené derivace φ do (11.19). Tak dostaneme požadované tvrzení. ■

11.2.27. Věta (Peanův tvar zbytku)**.** Nechť f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, která je třídy C^p, $p \in \mathbb{N}$, na jistém okolí bodu $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Pak platí

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - T_p^{f,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|^p} = 0.$$

Důkaz. Nalezneme nejprve $\delta \in \mathbb{R}$ kladné takové, že f je třídy C^p na $B(\boldsymbol{a}, \delta)$. Podle Věty 11.2.26 pro každé $x \in B(\boldsymbol{a}, \delta)$ existuje $c(\boldsymbol{x})$ ležící na úsečce spojující $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{x}$ takové, že

$$f(\boldsymbol{x}) = T_{p-1}^{f,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{p!} f^{(p)}(c(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}, \dots, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}).$$

Potom platí

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) - T_p^{f,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{p!} \left(f^{(p)}(c(\boldsymbol{x})) - f^{(p)}(\boldsymbol{a}) \right) (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}, \dots, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_p=1}^{n} \left(\frac{\partial^p f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p}}(c(\boldsymbol{x})) - \frac{\partial^p f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p}}(\boldsymbol{a}) \right) (x_{j_1} - a_{j_1}) \cdots (x_{j_p} - a_{j_p}). \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} &\left| f(\boldsymbol{x}) - T_p^{f,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{p!} \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_p=1}^{n} \left(\frac{\partial^p f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p}}(c(\boldsymbol{x})) - \frac{\partial^p f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p}}(\boldsymbol{a}) \right) (x_{j_1} - a_{j_1}) \cdots (x_{j_p} - a_{j_p}) \right| \\ &\leq \left(\frac{1}{p!} \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_p=1}^{n} \left| \frac{\partial^p f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p}}(c(\boldsymbol{x})) - \frac{\partial^p f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p}}(\boldsymbol{a}) \right| \right) \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|^p . \end{aligned}$$

Pak máme

$$0 \leq \frac{\left| f(\boldsymbol{x}) - T_p^{f,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) \right|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|^p} \leq \frac{1}{p!} \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_p=1}^{n} \left| \frac{\partial^p f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p}}(c(\boldsymbol{x})) - \frac{\partial^p f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p}}(\boldsymbol{a}) \right| .$$

Pravá strana přecházejícího výrazu však konverguje k 0 pro $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$, jelikož všechny parciální derivace až do řádu p jsou spojité v $\boldsymbol{a}$ a

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \|c(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{a}\| \leq \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| = 0.$$

■

11.2.28. Poznámka. Symbol o můžeme zřejmým způsobem definovat i pro funkce více proměnných. Pak lze tvrzení věty přeformulovat jako

$$f(\boldsymbol{x}) = T_p^{f,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) + o(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|^p).$$

11.3. Věty o implicitně zadaných funkcích

11.3.1. Věta (o implicitně zadané funkci)**.** Nechť $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $F : G \to \mathbb{R}$, $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}] \in G$ a nechť platí

(i) $F \in C^p(G)$,
(ii) $F(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}) = 0$,
(iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}) \neq 0$.

Pak existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\tilde{\boldsymbol{x}}$ a okolí $V \subset \mathbb{R}$ bodu $\tilde{y}$ tak, že $U \times V \subset G$ a pro každé $\boldsymbol{x} \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(\boldsymbol{x}, y) = 0$. Označíme-li toto y jako $\varphi(\boldsymbol{x})$, pak $\varphi \in C^p(U)$ a platí

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{x}))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{x}))}, \quad \boldsymbol{x} \in U, j \in \{1, \dots, n\}. \tag{11.20}$$

Důkaz. Důkaz rozdělíme na několik kroků.

Existence φ. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}) > 0$. Díky spojitosti funkce $\frac{\partial F}{\partial y}$ v bodě $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}]$ nalezneme $\delta_1 \in \mathbb{R}, \delta_1 > 0$, a $\xi_1 \in \mathbb{R}, \xi_1 > 0$, taková, že

$$\forall [\boldsymbol{x}, y] \in B(\tilde{\boldsymbol{x}}, \delta_1) \times [\tilde{y} - \xi_1, \tilde{y} + \xi_1] : \frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}, y) > 0. \tag{11.21}$$

Funkce $t \mapsto F(\tilde{\boldsymbol{x}}, t)$ je díky (11.21) rostoucí na intervalu $[\tilde{y} - \xi_1, \tilde{y} + \xi_1]$. Máme proto

$$F(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y} - \xi_1) < 0 \quad \text{a} \quad F(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y} + \xi_1) > 0.$$

Spojitost funkce F implikuje existenci $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ takového, že

$$\forall \boldsymbol{x} \in B(\tilde{\boldsymbol{x}}, \delta_2) \colon F(\boldsymbol{x}, \tilde{y} - \xi_1) < 0 \ \wedge\ F(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y} + \xi_1) > 0.$$

Položme $U = B(\tilde{\boldsymbol{x}}, \delta_2)$ a $V = (\tilde{y} - \xi_1, \tilde{y} + \xi_1)$. Nechť $\boldsymbol{x} \in U$ je dáno. Funkce $t \mapsto F(\boldsymbol{x}, t)$ je na $[\tilde{y} - \xi_1, \tilde{y} + \xi_1]$ rostoucí, spojitá a splňuje $F(\boldsymbol{x}, \tilde{y} - \xi_1) < 0$ a $F(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y} + \xi_1) > 0$. To znamená, že existuje právě jedno $y \in (\tilde{y} - \xi_1, \tilde{y} + \xi_1)$ takové, že $F(x, y) = 0$.

Spojitost φ. Zvolme $\boldsymbol{x}^* \in U$. Budeme dokazovat, že φ je spojitá v $\boldsymbol{x}^*$. Mějme tedy kladné $\varepsilon \in \mathbb{R}$ dáno. Položme $G^* = U \times \big((\varphi(\boldsymbol{x}^*) - \varepsilon, \varphi(\boldsymbol{x}^*) + \varepsilon) \cap V)\big)$ a $F^* = F|_{G^*}$. Pak

$$F^* \in C^p(G^*),\ F^*(\boldsymbol{x}^*, \varphi(\boldsymbol{x}^*)) = 0,\ \frac{\partial F^*}{\partial y}(\boldsymbol{x}^*, \varphi(\boldsymbol{x}^*)) > 0.$$

Podle již dokázaného existuje okolí $U^* \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\boldsymbol{x}^*$ a $V^* \subset \mathbb{R}$ bodu $\varphi(x^*)$ takové, že $U^* \times V^* \subset G^*$ a

$$\forall \boldsymbol{x} \in U^*\ \exists! y \in V^* : F^*(\boldsymbol{x}, y) = 0$$

Odtud ale plyne

$$\varphi(U^*) \subset V^* \subset (\varphi(\boldsymbol{x}^*) - \varepsilon, \varphi(\boldsymbol{x}^*) + \varepsilon).$$

Tím je dokázána spojitost φ v bodě $\boldsymbol{x}^*$.

Platí $\varphi \in C^1(U)$. Tvrzení dokážeme pro $F \in C^1(G)$. Zvolme $i \in \{1, \dots, n\}$ a $\boldsymbol{x}^* \in U$. Nalezneme $\delta, \eta \in \mathbb{R}$ kladné takové, že $B(\boldsymbol{x}^*, \delta) \subset U$, $\varphi(B(\boldsymbol{x}^*, \delta)) \subset V$ a

$$B(\boldsymbol{x}^*, \delta) \times \varphi(B(\boldsymbol{x}^*, \delta)) \subset B([\boldsymbol{x}^*, \varphi(\boldsymbol{x}^*)], \eta) \subset G.$$

Pro $0 < |t| < \delta$ existuje bod $c(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ na úsečce spojující body $[\boldsymbol{x}^*, \varphi(\boldsymbol{x}^*)]$ a $[\boldsymbol{x}^* + t\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}}, \varphi(\boldsymbol{x}^* + t\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}})]$ takový, že

$$\begin{aligned} 0 &= F(\boldsymbol{x}^* + t\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}}, \varphi(\boldsymbol{x}^* + t\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}})) - F(\boldsymbol{x}^*, \varphi(\boldsymbol{x}^*)) \\ &= F'(c(t))(t\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}}, \varphi(\boldsymbol{x}^* + t\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}}) - \varphi(\boldsymbol{x}^*)). \end{aligned}$$

Máme tedy

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x_i}(c(t)) \cdot t + \frac{\partial F}{\partial y}(c(t))(\varphi(\boldsymbol{x}^* + t\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}}) - \varphi(\boldsymbol{x}^*)).$$

Odtud

$$\frac{\varphi(\boldsymbol{x}^* + t\boldsymbol{e}^i) - \varphi(\boldsymbol{x}^*)}{t} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(c(t))}{\frac{\partial F}{\partial y}(c(t))}.$$

Platí $\lim_{t \to 0} c(t) = [\boldsymbol{x}^*, \varphi(\boldsymbol{x}^*)]$, jelikož

$$\left\| c(t) - [\boldsymbol{x}^*, \varphi(\boldsymbol{x}^*)] \right\| \le |t| + \left| \varphi(\boldsymbol{x}^* + t\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}}) - \varphi(\boldsymbol{x}^*) \right|.$$

Pak tedy

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^*) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^*, \varphi(\boldsymbol{x}^*))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}^*, \varphi(\boldsymbol{x}^*))}$$

Platí $\varphi \in C^p(U)$. Tvrzení platí pro $p = 1$ dle předchozího kroku. Předpokládejme, že tvrzení platí pro nějaké $p - 1$, kde $p > 1$ je přirozené číslo. Pak je zobrazení $\boldsymbol{x} \mapsto (\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{x}))$ třídy C^{p-1} na U. Funkce $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}, \frac{\partial F}{\partial y}$ jsou třídy C^{p-1}, a tedy podle Věty 11.2.8 jsou také funkce $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}$ třídy C^{p-1} na U podle (11.20). Proto φ je třídy C^p na U. ■

11.3.2. Příklad. Uvažujme množinu

$$M = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2) - 2(x^2 - y^2) = 0 \right\}.$$

Ukažte, že v jistém okolí bodu $[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$ lze množinu M popsat jako graf nějaké funkce φ proměnné x. Spočtěte též $\varphi'(\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Řešení. Položme ve Větě 11.3.1

$$F(x,y) = (x^2+y^2) - 2(x^2-y^2) \quad \text{a} \quad [\tilde{x},\tilde{y}] = [\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}].$$

Pak

(i) $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$,
(ii) $F(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = 0$,
(iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = (2(x^2+y^2)2y + 4y)_{[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]} = 4 \neq 0$.

Tedy dle Věty 11.3.1 existuje na nějakém okolí bodu $\frac{\sqrt{3}}{2}$ funkce φ třídy C^∞, která splňuje $F(x,\varphi(x)) = 0$. Dále platí

$$\begin{aligned}\varphi'(\frac{\sqrt{3}}{2}) &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})}{\frac{\partial F}{\partial y}(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})} \\ &= \left(-\frac{(2(x^2+y^2)2y+4y)}{2(x^2+y^2)2x-4x}\right)\Big|_{[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]} = 0.\end{aligned}$$

♣

11.3.3. Věta. Nechť $n, m \in \mathbb{N}$ a $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Nechť $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$ je otevřená množina, $F : G \to \mathbb{R}^m$, $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}] \in G$ a nechť platí

(i) $F \in C^p(G)$,
(ii) $F(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{0}$,
(iii)
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pak existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\tilde{\boldsymbol{x}}$ a okolí $V \subset \mathbb{R}^m$ bodu $\tilde{\boldsymbol{y}}$ takové, že

$$\forall \boldsymbol{x} \in U \ \exists! \boldsymbol{y} \in V : F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}.$$

Označíme-li toto $\boldsymbol{y}$ jako $\varphi(\boldsymbol{x})$, pak $\varphi \in C^p(U)$.

Důkaz. Použijeme matematickou indukci podle m. Je-li $m = 1$, platí tvrzení podle Věty 11.3.1.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro nějaké $m \in \mathbb{N}$. Dokažme ho pro $m+1$. Nechť tedy máme F a $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}]$ jako v předpokladech věty. Matice

$$\mathbb{A}_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m+1}}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_{m+1}}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) & \dots & \frac{\partial F_{m+1}}{\partial y_{m+1}}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) \end{pmatrix}$$

je regulární dle předpokladu.

Ukážeme, že bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $\mathbb{A}_F = \mathbb{I}$, kde $\mathbb{I}$ označuje jednotkovou matici typu $M(m+1 \times m+1)$. Uvažujme zobrazení z $L\colon \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$ definované předpisem $L(\boldsymbol{y}) = (\mathbb{A}_F)^{-1}\boldsymbol{y}$. Toto zobrazení je bijekce $\mathbb{R}^{m+1}$ na $\mathbb{R}^{m+1}$ a je třídy C^∞ na $\mathbb{R}^{m+1}$. Dále uvažujme zobrazení $T\colon G \to \mathbb{R}^{m+1}$ definované předpisem $T = L \circ F$. Zobrazení T má následující vlastnosti:

- $T \in C^p(G)$,
- $\forall [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] \in G\colon T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$,
- $\mathbb{A}_T = \mathbb{A}_F^{-1} \circ \mathbb{A}_F = \mathbb{I}$.

První dvě vlastnosti jsou zřejmě splněny. Ověřme ještě třetí vlastnost. Zobrazení $\boldsymbol{y} \mapsto F(\tilde{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})$ má derivaci v bodě $\tilde{\boldsymbol{y}}$ reprezentovanou maticí $\mathbb{A}_F$. Derivace zobrazení $\boldsymbol{y} \mapsto T(\tilde{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) = L \circ F(\tilde{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})$ je v bodě $\tilde{\boldsymbol{y}}$ reprezentována maticí $(\mathbb{A}_F)^{-1}\mathbb{A}_F = \mathbb{I}$ (Věta 11.1.38), což je ovšem matice $\mathbb{A}_T$.

Protože

$$F_{m+1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial F_{m+1}}{\partial y_{m+1}}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) = 1 \neq 0,$$

existuje dle Věty 11.3.1 okolí $U^* \subset \mathbb{R}^{n+m}$ bodu $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m]$ a okolí $V^* \subset \mathbb{R}$ bodu $\tilde{y}_{m+1}$ takové, že

$$\forall [\boldsymbol{x}, y_1, \dots, y_m] \in U^* \ \exists! y_{m+1} \in V^* : F_{m+1}(\boldsymbol{x}, y_1, \dots, y_m, y_{m+1}) = 0.$$

Označme tento bod jako $\psi(\boldsymbol{x}, y_1, \dots, y_m)$. Pak $\psi \in C^p(U^*)$. Definujme $H : U^* \to \mathbb{R}^m$ předpisem

$$H_i(\boldsymbol{x}, y_1, \dots, y_m) = F_i(\boldsymbol{x}, y_1, \dots, y_m, \psi(\boldsymbol{x}, y_1, \dots, y_m)), \quad i = 1, \dots, m.$$

Pak H je Třídy C^p na U^* (Věta 11.2.8) a platí $H(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m) = \boldsymbol{0}$. Parciální derivace H spočteme pomocí

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_i}{\partial y_j}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m) &= \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m) + \frac{\partial F_i}{\partial y_{m+1}}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m)\frac{\partial \psi}{\partial y_j}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m) \\ &= \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Můžeme tedy aplikovat indukční předpoklad na H v bodě $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m]$. Nalezneme okolí $S \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\tilde{\boldsymbol{x}}$ a okolí $T \subset \mathbb{R}^n$ bodu $[\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m]$ takové, že $S \times T \subset U^*$ a

$$\forall \boldsymbol{x} \in S \ \exists! [y_1, \dots, y_m] \in T\colon H(\boldsymbol{x}, y_1, \dots, y_m) = \boldsymbol{0}$$

Označíme-li $y_i = \varphi_i(\boldsymbol{x})$, $i = 1\dots,m$, a $\varphi_{m+1}(\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x},\varphi_1(\boldsymbol{x}),\dots,\varphi_m(\boldsymbol{x}))$, potom $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_{m+1})$ je třídy C^p na S. Pak pro $\boldsymbol{x} \in S$ máme

$$\begin{aligned} F_i(\boldsymbol{x},\varphi(\boldsymbol{x})) &= F_i(x,\varphi_1(\boldsymbol{x}),\dots,\varphi_m(\boldsymbol{x}),\varphi_{m+1}(\boldsymbol{x})) \\ &= F_i(x,\varphi_1(\boldsymbol{x}),\dots,\varphi_m(\boldsymbol{x}),\psi(\boldsymbol{x},\varphi_1(x),\dots,\varphi_m(\boldsymbol{x}))) \\ &= \begin{cases} H_i(\boldsymbol{x},\varphi_1(\boldsymbol{x}),\dots,\varphi_m(\boldsymbol{x})) = 0, & i = 1,\dots,m, \\ 0, & i = m+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Zvolme $V \subset T \times V^* \subset \mathbb{R}^{m+1}$ okolí bodu $\tilde{y}$ a okolí $U \subset \varphi^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\tilde{\boldsymbol{x}}$. Pokud $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}] \in U \times V$ splňuje $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$, pak $\boldsymbol{x} \in S$ a $\boldsymbol{y} \in T \times V^*$, a tedy $[x,y_1,\dots,y_m] \in S \times T \subset U^*$. Pak nutně $y_{m+1} = \psi(\boldsymbol{x},y_1,\dots,y_m)$, neboť $y_{m+1} \in V^*$. Dále $y_i = \varphi_i(\boldsymbol{x})$, $i = 1,\dots,m$, takže $y_{m+1} = \varphi_{m+1}(x)$, a jsme hotovi. ∎

11.3.4 (vzorec pro výpočet parciálních derivací)**.** I v případě věty o implicitních funkcích je možné odvodit analogii vzorce (11.20), tj. explicitní vzorec pro hodnotu parciálních derivací vypočtených funkcí. Nechť $n,m,p,G,\tilde{\boldsymbol{x}},\tilde{\boldsymbol{y}}$ a F jsou jako ve znění Věty 11.3.3, podle které existuje okolí U bodu $\tilde{\boldsymbol{x}}$ a okolí V bodu $\tilde{\boldsymbol{y}}$ taková, že platí

$$\forall \boldsymbol{x} \in U\ \exists!\boldsymbol{y} \in V\colon F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}.$$

Označme toto $\boldsymbol{y}$ jako $\varphi(\boldsymbol{x})$. Pak víme, že platí $\varphi \in C^p(U)$. Ukážeme, jak lze vypočítat parciální derivace složek funkce φ. Zvolme $i \in \{1,\dots,n\}$ (číslo proměnné podle které budeme derivovat). Potom pro každé $j \in \{1,\dots,m\}$ má parciální derivace funkce $\boldsymbol{x} \mapsto F_j(\boldsymbol{x},\varphi(\boldsymbol{x}))$ podle proměnné x_i tvar

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},\varphi(\boldsymbol{x})) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_j}{\partial y_k}(\boldsymbol{x},\varphi(\boldsymbol{x}))\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$$

pro každé $\boldsymbol{x} \in U$. Protože platí $F_j(\boldsymbol{x},\varphi(\boldsymbol{x})) = 0$ pro každé $\boldsymbol{x} \in U$, musí být právě uvedená derivace rovna nule. Za $\boldsymbol{x}$ dosadíme $\tilde{\boldsymbol{x}}$, potom $\varphi(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \tilde{\boldsymbol{y}}$ a dostáváme tedy soustavu m rovnic

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\tilde{\boldsymbol{x}},\varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_j}{\partial y_k}(\tilde{\boldsymbol{x}},\varphi(\tilde{\boldsymbol{x}}))\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = 0, \qquad j = 1,\dots,m,$$

kde neznámými jsou hodnoty $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\tilde{\boldsymbol{x}})$, $k = 1, \ldots, m$. Soustavu můžeme přepsat tedy jako

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_1}{\partial y_k}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\tilde{\boldsymbol{x}}) &= -\frac{\partial F_1}{\partial x_i}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) \\
\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_2}{\partial y_k}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\tilde{\boldsymbol{x}}) &= -\frac{\partial F_2}{\partial x_i}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) \\
&\vdots \\
\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_m}{\partial y_k}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\tilde{\boldsymbol{x}}) &= -\frac{\partial F_m}{\partial x_i}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})).
\end{aligned}$$

Hodnotu $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\tilde{\boldsymbol{x}})$ můžeme vypočítat pomocí Cramerova pravidla takto

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) & \ldots & -\frac{\partial F_1}{\partial x_i}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) & \ldots & -\frac{\partial F_2}{\partial x_i}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) & \ldots & -\frac{\partial F_m}{\partial x_i}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_k}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial y_k}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_k}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}})) \end{vmatrix}}.$$

Matice ve výše uvedeném vzorci se liší pouze ve vyznačeném k-tém sloupci.

11.3.5. Příklad. Jsou dány vztahy

$$\begin{aligned}
\exp(u/x)\cos(v/y) &= \frac{x}{\sqrt{2}}, \\
\exp(u/x)\sin(v/y) &= \frac{y}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Dokažte, že vztahy definují na okolí bodu $[1, 1, 0, \frac{\pi}{4}]$ funkce $[x, y] \mapsto u(x, y)$, $[x, y] \mapsto v(x, y)$ třídy C^{∞}. Spočtěte parciální derivace u a v v bodě $[1, 1]$.

Řešení. Definujme $F : \mathbb{R}^{2+2} \to \mathbb{R}^2$ jako $F = (F_1, F_2)$, kde

$$F_1(x, y, u, v) = \exp(u/x)\cos(v/y) - \frac{x}{\sqrt{2}},$$
$$F_2(x, y, u, v) = \exp(u/x)\sin(v/y) - \frac{y}{\sqrt{2}}.$$

Pak F je třídy C^∞ na $(0,\infty) \times (0,\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a $F(1, 1, 0, \frac{\pi}{4}) = [0, 0]$. Dále máme

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix}_{[x,y,u,v]=[1,1,0,\frac{\pi}{4}]} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x}\exp(u/x)\cos(v/y) & -\frac{1}{y}\exp(u/x)\cos(v/y) \\ \frac{1}{x}\exp(u/x)\sin(v/y) & \frac{1}{y}\exp(u/x)\cos(v/y) \end{pmatrix}_{[x,y,u,v]=[1,1,0,\frac{\pi}{4}]}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

a tedy

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(1, 1, 0, \frac{\pi}{4}) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(1, 1, 0, \frac{\pi}{4}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(1, 1, 0, \frac{\pi}{4}) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(1, 1, 0, \frac{\pi}{4}) \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Díky Větě 11.3.3 tedy existují na nějakém okolí U bodu $[1, 1]$) funkce $u, v : U \to \mathbb{R}$ třídy C^∞ splňující

$$F_1(x, y, u(x, y), v(x, y)) = F_2(x, y, u(x, y), v(x, y)) = 0.$$

Derivováním těchto vztahů podle x dostáváme

$$\exp(u/x)\frac{\frac{\partial u}{\partial x} \cdot x - u}{x^2}\cos(v/y) + \exp(u/x)(-\sin(v/y)\frac{1}{y}\frac{\partial v}{\partial x}) - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,$$
$$\exp(u/x)\frac{\frac{\partial u}{\partial x} \cdot x - u}{x^2}\sin(v/y) + \exp(u/x)\cos(v/y)\frac{1}{y}\frac{\partial v}{\partial x}) = 0.$$

Dosazením $x = y = 1$, $u(1, 1) = 0$ a $v(1, 1) = \frac{\pi}{4}$ dostaneme soustavu

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, 1)\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, 1)\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) = 0,$$

jejímž řešením je

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, 1) = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) = -\frac{1}{2}.$$

Výpočet parciálních derivací $\frac{\partial u}{\partial y}(1, 1)$ a $\frac{\partial v}{\partial y}(1, 1)$ by proběhl obdobně. ♣

11.4. Lokální extrémy funkce více proměnných

11.4.1. Věta. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $\boldsymbol{a} \in G$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Nechť funkce $f : G \to \mathbb{R}$ má v bodě $\boldsymbol{a}$ lokální extrém. Pak buď $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$ neexistuje nebo je rovna 0.

Důkaz. Položme $g(t) = f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}})$. Pak má g v bodě 0 lokální extrém, a tedy $g'(0)$ buď neexistuje nebo je rovna 0 (Věta 5.1.30). Odtud plyne tvrzení věty. ∎

11.4.2. Lemma. Nechť $Q : \mathbb{R}^n \to$ je pozitivně definitivní kvadratická forma. Pak existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}$ kladné takové, že

$$\forall \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n : Q(\boldsymbol{h}) \geq \varepsilon \|\boldsymbol{h}\|^2.$$

Důkaz. Zobrazení Q je spojité na $\mathbb{R}^n$, neboť platí

$$Q(\boldsymbol{h}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j .$$

Označme

$$\varepsilon = \inf\{Q(\boldsymbol{h});\ \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{h}\| = 1\}.$$

Množina $M = \{\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n;\ \|\boldsymbol{h}\| = 1\}$ je omezená a uzavřená, a tedy kompaktní (Věta 10.5.8). Podle Věty 10.5.14 nabývá tedy na M funkce Q svého minima, a proto $\varepsilon > 0$. Mějme $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ nenulové. Pak

$$Q(\boldsymbol{h}) = Q\left(\|\boldsymbol{h}\| \frac{\boldsymbol{h}}{\|\boldsymbol{h}\|}\right) = \|\boldsymbol{h}\|^2\, Q(\frac{\boldsymbol{h}}{\|\boldsymbol{h}\|}) \geq \varepsilon \|h\|^2.$$

Pro $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{0}$ pak nerovnost zjevně platí. Tím je důkaz hotov. ∎

11.4.3. Věta. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f \in C^2(G)$, $\boldsymbol{a} \in G$ a $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$. Pak platí:

- Je-li kvadratická forma $\boldsymbol{h} \mapsto f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h})$ negativně definitní, nabývá f v bodě $\boldsymbol{a}$ ostrého lokálního maxima.
- Je-li kvadratická forma $\boldsymbol{h} \mapsto f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h})$ pozitivně definitní, nabývá f v bodě $\boldsymbol{a}$ ostrého lokálního minima.
- Je-li kvadratická forma $\boldsymbol{h} \mapsto f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h})$ indefinitní, funkce f nemá v bodě $\boldsymbol{a}$ lokální extrém.

Důkaz. Předpokládejme, že $\boldsymbol{h} \mapsto f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h})$ je pozitivně definitní. Podle Lemmatu 11.4.2 nalezneme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že

$$\forall \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n : f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}) \geq \varepsilon \, \|\boldsymbol{h}\|^2 .$$

Označme

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \frac{f(\boldsymbol{x}) - T_2^{f,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|^2}, \quad \boldsymbol{x} \in G \setminus \{\boldsymbol{a}\}.$$

Podle Věty 11.2.27 platí $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \omega(\boldsymbol{x}) = 0$. Existuje tedy $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall \boldsymbol{x} \in P(\boldsymbol{a},\delta) : \omega(\boldsymbol{x}) > -\frac{1}{4}\varepsilon.$$

Pro $\boldsymbol{x} \in P(\boldsymbol{a},\delta)$ pak

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) &- \frac{1}{2}f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) \\ &= f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - \frac{1}{2}f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) \\ &> -\frac{1}{4}\varepsilon\,\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|^2. \end{aligned}$$

Odtud platí

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &> f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) - \frac{1}{4}\varepsilon\,\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|^2 \\ &\geq f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{4}\varepsilon\,\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|^2 \\ &> f(\boldsymbol{a}). \end{aligned}$$

Tedy má f v bodě $\boldsymbol{a}$ lokální minimum.

Případ, kdy je kvadratická forma negativně definitní, lze dokázat obdobně nebo přechodem k funkci $-f$.

Nechť je nyní kvadratická forma $\boldsymbol{h} \mapsto f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h},\boldsymbol{h})$ indefinitní. Potom existují $\boldsymbol{h^1}, \boldsymbol{h^2} \in \mathbb{R}^n$ takové, že

$$f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h^1},\boldsymbol{h^1}) > 0 \quad \text{a} \quad f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h^2},\boldsymbol{h^2}) < 0.$$

Položme $g_1(t) = f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{h^1})$. Potom

$$g_1'(0) = f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h^1}) = 0, \quad g_1''(0) = f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h^1},\boldsymbol{h^1}) > 0.$$

Tedy g_1 má v 0 ostré lokální minimum. Podobně se odvodí, že funkce $g_2(t) = f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{h^2})$ má v 0 ostré lokální maximum. Odtud plyne, že f nemá v $\boldsymbol{a}$ lokální extrém. ∎

11.4.4. Poznámka. Je-li kvadratická forma $\boldsymbol{h} \mapsto f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h},\boldsymbol{h})$ pozitivně či negativně semidefinitní, o existenci lokálního extrému funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ nelze nic říct, jak ukazují příklady $f(x,y) = \pm x^4 \pm y^4$ v bodě $[0,0]$.

11.4.5. Příklad. Nalezněte lokální extrémy funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, jestliže

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y - y^2.$$

Řešení. Z rovnic

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 2x - 2y \\
0 &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 - 2x - 2y
\end{aligned}
$$

dostáváme, že $x = y$. Tedy máme rovnici

$$4x^3 - 4x = 0.$$

Body splňující nutnou podmínku extrému jsou tedy $[-1, -1]$, $[0, 0]$, $[1, 1]$. Protože

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2 - 2 \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2 - 2,$$

máme

$$f''([1, 1]) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}, f''([0, 0]) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, f''([-1, -1]) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Vzhledem k tomu, že v bodech $[1, 1]$ a $[-1, -1]$ je druhá derivace f pozitivně definitní, má v těchto bodech f lokální minimum. V bodě $[0, 0]$ lze pomocí vektorů $(1, 1)$ a $(1, -1)$ odvodit indefinitnost $f''(0, 0)$. Tedy f nemá extrém v $[0, 0]$. ♣

11.4.6. Věta (Lagrangeova věta o multiplikátorech)**.** Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f, g_1, \dots, g_m \in C^1(G)$. Nechť

$$M = \{z \in G;\ g_1(z) = 0, \dots, g_m(z) = 0\}$$

a $\tilde{z}$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Pak je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(I) vektory $\nabla g_1(\tilde{z}), \dots, \nabla g_m(\tilde{z})$ jsou lineárně závislé,

(II) existují reálná čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ splňující

$$\nabla f(\tilde{z}) + \lambda_1 \nabla g_1(\tilde{z}) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(\tilde{z}) = \mathbf{0}.$$

Důkaz. Předpokládejme, že (I) neplatí. Ukážeme platnost (II). Označíme $s = n - m$ a $g = (g_1, \dots, g_m)$. Pišme $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^m$, přičemž proměnné z $\mathbb{R}^s$ značíme jako $\boldsymbol{x}$ a proměnné z $\mathbb{R}^m$ jako $\boldsymbol{y}$. Dle předpokladu o lineární nezávislosti platí

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\tilde{z}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(\tilde{z}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1}(\tilde{z}) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m}(\tilde{z}) \end{vmatrix} \neq 0,$$

a tedy dle Věty 11.3.3 existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^s$ bodu $\tilde{\boldsymbol{x}} = [\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_s]$ a okolí $V \subset \mathbb{R}^m$ bodu $\tilde{\boldsymbol{y}} = [\tilde{z}_{s+1}, \dots, \tilde{z}_m]$ takové, že pro každé $\boldsymbol{x} \in U$ existuje právě jedno $\boldsymbol{y} \in V$ (označme ho $\varphi(\boldsymbol{x})$) splňující

$$g(\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{x})) = 0.$$

Definujme funkci $\psi : U \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\psi(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{x})).$$

Jelikož $\varphi \in C^1(U)$, je i $\psi \in C^1(U)$. Funkce ψ má v bodě $\tilde{\boldsymbol{x}}$ lokální extrém, a tedy platí $\nabla\psi(\tilde{\boldsymbol{x}}) = 0$. Pro $j = 1, \dots, s$ tak máme

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\tilde{\boldsymbol{z}}) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_i}(\tilde{\boldsymbol{z}}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\tilde{\boldsymbol{x}}). \tag{11.22}$$

Dále platí

$$\frac{\partial g_l}{\partial x_j}(\tilde{\boldsymbol{z}}) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_l}{\partial y_i}(\tilde{\boldsymbol{z}}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = 0, \quad l \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, s\}. \tag{11.23}$$

Označme

$$\boldsymbol{u^j} = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \dots, 0, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(\tilde{\boldsymbol{x}}), \dots, \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j}(\tilde{\boldsymbol{x}})) \in \mathbb{R}^n, \quad j \in \{1, \dots, s\},$$

a

$$H = \operatorname{lin}\{\boldsymbol{u^1}, \dots, \boldsymbol{u^s}\}.$$

Potom

$$\nabla g_l(\tilde{\boldsymbol{z}}) \in H^\perp, \quad l \in \{1, \dots, m\},$$

dle (11.23). Dále platí, že dimenze H je s a dimenze $H^\perp$ je m. Podle (11.22) pak platí $\nabla f(\tilde{\boldsymbol{z}}) \in H^\perp$. Musí tedy být $\nabla f(\tilde{\boldsymbol{z}})$ lineární kombinací vektorů $\nabla g_1(\tilde{\boldsymbol{z}}), \dots, \nabla g_m(\tilde{\boldsymbol{z}})$, které tvoří bázi $H^\perp$. ∎

11.5. Regulární zobrazení

11.5.1. Definice. Řekneme, že zobrazení f z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$ je **difeomorfismus** na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}$, pokud

(i) f je prosté na U,
(ii) $W = f(U)$ je otevřená v $\mathbb{R}^n$,
(iii) $f \in C^1(U)$,
(iv) $f^{-1} \in C^1(W)$.

11.5.2. Věta (o lokálním difeomorfismu)**.** Nechť f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, které je třídy C^1 na jistém okolí V bodu $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $f'(\boldsymbol{a})$ je regulární. Pak existuje otevřená množina $U \subset \mathbb{R}^n$ obsahující $\boldsymbol{a}$ taková, že $f|_U$ je difeomorfismus na U.

Důkaz. Položme $G = \mathbb{R}^n \times V$, $\boldsymbol{b} = f(\boldsymbol{a})$ a definujme $F\colon G \to \mathbb{R}^n$ předpisem

$$F(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y}.$$

Pak

$$F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}, \quad F \in C^1(G),$$

a

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Podle Věty 11.3.3 existuje okolí $U_1 \subset V$ bodu $\boldsymbol{a}$ a okolí $W \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\boldsymbol{b}$, že pro každé $\boldsymbol{y} \in W$ existuje právě jedno $\boldsymbol{x} \in U_1$ (označme ho $\varphi(\boldsymbol{y})$) takové, že $F(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$. Navíc platí $\varphi \in C^1(W)$. Pak ale máme

$$\boldsymbol{0} = F(\boldsymbol{y}, \varphi(\boldsymbol{y})) = f(\varphi(\boldsymbol{y})) - \boldsymbol{y},$$

tj.

$$f(\varphi(\boldsymbol{y})) = \boldsymbol{y}.$$

Zobrazení f je tedy prosté na množině $U_1 \cap f^{-1}(W)$. Položme $U = U_1 \cap f^{-1}(W)$. Pak U je otevřená množina, $\boldsymbol{a} \in U \subset V$ a $(f|_U)^{-1} = \varphi \in C^1(W)$. ∎

11.5.3. Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Zobrazení $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ je regulární, jestliže

(i) $f \in C^1(G)$,
(ii) jacobián f je nenulový v každém bodě množiny G.

11.5.4. Věta. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f : G \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení. Pak f je difeomorfismus na G právě tehdy, když f je regulární a prosté.

Důkaz. Předpokládejme, že f je na G difeomorfismus. Pak f je zřejmě prosté a třídy C^1 na G. Pro $\boldsymbol{a} \in G$ platí

$$\operatorname{Id}(\boldsymbol{a}) = \operatorname{Id}'(\boldsymbol{a}) = (f^{-1} \circ f)'(\boldsymbol{a}) = (f^{-1})'(f(\boldsymbol{a})) \circ f'(\boldsymbol{a}),$$

a proto je $f'(\boldsymbol{a})$ regulární v každém bodě $a \in G$. Tedy je jacobián $f'(\boldsymbol{a})$ nenulový v každém bodě $\boldsymbol{a} \in G$.

Obráceně, nechť je f regulární a prosté. Pak $f \in C^1(G)$. Pokud $\boldsymbol{y} \in f(G)$, pak existuje $\boldsymbol{x} \in G$ splňující $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$. Podle Věty 11.5.2 existuje otevřená množina $U \subset G$ obsahující $\boldsymbol{x}$ taková, že $f|_U$ je difeomorfismus, tj. $y \in f(U) \subset f(G)$, kde $f(U)$ je otevřená. Tedy $f(G)$ je otevřená. Navíc je f^{-1} třídy C^1 na $f(U)$, takže $f^{-1} \in C^1(f(G))$. ■

11.6. Teoretické příklady

11.6.1. Příklad. Uvažujte funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & [x,y] \neq [0,0], \\ 0, & [x,y] = [0,0], \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & [x,y] \neq [0,0], \\ 0, & [x,y] = [0,0], \end{cases}$$

a

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}y}{e^{-\frac{2}{x^2}}+y^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Dokažte následující tvrzení.

(a) Funkce f je spojitá v počátku vzhledem k ose x i y, ale není v počátku spojitá.
(b) Funkce g je spojitá v počátku vzhledem ke každé přímce počátkem procházející, ale není v počátku spojitá.
(c) Funkce h je spojitá v počátku vzhledem ke každé křivce tvaru $y = c\,|x|^d$, $c \in \mathbb{R}$, $d \in (0,\infty)$, ale h není spojitá v počátku.
(d) Funkce f, g, i h mají v počátku obě parciální derivace.

Řešení. (a) Položme

$$\varphi(x) = f(x,0), \quad x \in \mathbb{R},$$

tj. $\varphi(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$. Zjevně existuje $\lim_{x\to 0} \varphi(x)$ a rovná se 0. Obdobně odvodíme, že $\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$. Blížíme-li se však k počátku po přímce $y = x$,

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}.$$

Limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ tedy neexistuje.

(b) Zjevně platí, že

$$\lim_{y\to 0} g(0,y) = 0 \lim_{x\to 0} g(x,0).$$

Pro přímku tvaru $y = cx$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, platí

$$\lim_{x\to 0} g(x, cx) = \lim_{x\to 0} \frac{c^2x^3}{x^4 + c^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{c^2x}{x^2 + c^2} = 0.$$

Ale

$$\lim_{x\to 0} g(x, x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}.$$

Limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y)$ tedy neexistuje.

(c) Zřejmě máme $\lim_{y\to 0} h(0, y) = 0 = \lim_{x\to 0} h(x, 0)$. Nechť $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ a $d \in (0, \infty)$. Pak pro křivku $y = c\,|x|^d$ dle Příkladu **??** platí

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} h(x, c\,|x|^d) &= \lim_{x\to 0} \frac{ce^{-\frac{1}{x^2}}\,|x|^d}{e^{-\frac{2}{x^2}} + c^2\,|x|^{2d}}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{ce^{-\frac{1}{x^2}}\,|x|^{-d}}{e^{-\frac{2}{x^2}}\,|x|^{-2d} + c^2} = 0.\end{aligned}$$

Funkce h však není spojitá v počátku, neboť vzhledem ke křivce $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ platí

$$\lim_{x\to 0} f(x, e^{-\frac{1}{x^2}}) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}e^{-\frac{1}{x^2}}}{e^{-\frac{2}{x^2}} + e^{-\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x, y)$ tedy neexistuje.

(d) Tvrzení je zřejmé z faktu, že všechny tři funkce jsou nulové na osách x a y. ♣

11.6.2. Příklad. Nechť $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ a f je reálná funkce definována $\mathbb{R}^2 \setminus (a, b)$ mající vlastní limitu v (a, b). Nechť pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ existují limity $\lim_{y\to b} f(x, y)$ a $\lim_{x\to a} f(x, y)$. Pak

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \lim_{x\to a} \lim_{y\to b} f(x, y) = \lim_{y\to b} \lim_{x\to a} f(x, y).$$

Řešení. Označme pro $x \in \mathbb{R}$ funkci $\varphi_x(y) = f(x, y)$, $y \in \mathbb{R} \setminus \{b\}$, a pro $y \in \mathbb{R}$ nechť $\psi_y(x) = f(x, y)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$. Dle předpokladu existují pro $x, y \in \mathbb{R}$ limity $\lim_{y\to b} \varphi_x(y)$ a $\lim_{x\to a} \psi_y(x)$. Označme je symboly $\varphi_x(b)$ a $\psi_y(a)$.

Nechť $L = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ a $\varepsilon \in (0, \infty)$ je dáno. Najdeme $r \in (0, \infty)$ takové, že $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ pro $(x, y) \in B((a, b), r) \setminus \{(a, b)\}$. Vezměme $\delta \in (0, \infty)$ takové, že $(a - \delta, a + \delta) \times (b - \delta, b + \delta) \subset B((a, b), r)$. Nechť $x \in P^\delta(a)$ je pevné. Nalezneme $r_x \in (0, \infty)$ takové, že $B((x, b), r_x) \subset B((a, b), r)$. Pak pro $y \in \mathbb{R}$ splňující $(x, y) \in B((x, b), r_x)$ platí $|f(x, y) - L| < \varepsilon$. Tedy pro hodnotu $\varphi_x(b)$ máme odhad

$$L - \varepsilon \le \varphi_x(b) \le L + \varepsilon.$$

Tedy pro $x \in P^{\delta}(a)$ platí
$$|\varphi_x(b) - L| \le \varepsilon,$$
tj.
$$L = \lim_{x\to a} \varphi_x(b) = \lim_{x\to a} \lim_{y\to b} f(x, y).$$
Obdobně odvodíme, že $L = \lim_{y\to b} \lim_{x\to a} f(x, y)$. ♣

11.6.3. Příklad. Uvažujte funkce
$$f(x, y) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{y}) + y\sin(\frac{1}{x}), & xy \ne 0, \\ 0, & xy = 0, \end{cases}$$
$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} + y\sin(\frac{1}{x}), & x \ne 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$
a
$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & y \ne 0, \\ 0 & , y = 0. \end{cases}$$
Dokažte následující tvrzení.

(a) Limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$ existuje, ale limity $\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x, y)$ a $\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x, y)$ neexistují.
(b) Limita $\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} g(x, y) = 0$ existuje , ale limity $\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} g(x, y)$ a $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y)$ neexistují.
(c) Limita $\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} h(x, y) = 0$ existuje, ale limity $\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} h(x, y)$ a $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x, y)$ neexistují.

Řešení. (a) Jelikož
$$|f(x, y)| \le |x| + |y|, (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$
máme $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$. Na druhou stranu však pro x, y nenulové limity $\lim_{y\to 0} f(x, y)$ a $\lim_{x\to 0} f(x, y)$ neexistují.

(b) Máme
$$\lim_{x\to 0} g(x, 0) = 0 = \lim_{y\to 0} g(0, y).$$
Na druhou stranu však platí
$$\lim_{x\to 0} g(x, x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} + x\sin(\frac{1}{x}) = \frac{1}{2}.$$
Limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y)$ proto neexistuje.

Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ však existuje limita
$$\lim_{y\to 0} g(x, y) = \lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} + y\sin(\frac{1}{x}) = 0.$$

Tedy $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} g(x,y) = 0$.

Zřejmě však pro žádné $y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ neexistuje $\lim_{x\to 0} g(x,y)$.

(c) Důkaz tvrzení je analogický důkazu tvrzení (b). ♣

11.6.4. Příklad. Uvažujte funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0,\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} y + x\sin(\frac{1}{y}), & y \neq 0,\\ 0, & y=0,\end{cases}$$

a

$$h(x,y) = \begin{cases} x + y\sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Dokažte následující tvrzení.

(a) Limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ neexistuje, ale limity $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$ a $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$ existují a rovnají se.

(b) Limita $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} g(x,y) = 0$ neexistuje, ale limity $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} g(x,y)$ a $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ existují a rovnají se.

(c) Limita $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} h(x,y) = 0$ neexistuje, ale limity $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} h(x,y)$ a $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y)$ existují a rovnají se.

Řešení. (a) Tvrzení plyne z Příkladu 11.6.1(a).

Tvrzení (b) a (c) se dokáží obdobně jako v Příkladu 11.6.3. ♣

11.6.5. Příklad. Uvažujte funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0,\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} 1, & xy \neq 0,\\ 0, & xy = 0.\end{cases}$$

Dokažte následující tvrzení.

(a) Limity $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$ a $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$ existují a nerovnají se. Navíc neexistuje $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(b) Limity $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} g(x,y)$ a $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} g(x,y)$ existují a rovnají se, ale $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ neexistuje.

Řešení. (a) Máme

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1$$

a

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

Limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ neexistuje dle Příkladu 11.6.2.

(b) Zřejmě platí

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} g(x,y) = \lim_{x\to 0} 1 = 1 = \lim_{y\to 0} 1 = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} g(x,y),$$

ale

$$\lim_{x\to 0} g(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ tedy neexistuje dle Heineovy věty pro metrické prostory (Věta 10.4.15) a Příkladu 11.6.2. ♣

11.6.6. Příklad. Uvažujte funkci

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0,\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$$

Ukažte, že f je diferencovatelná všude, ale neplatí $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

Řešení. Zřejmě je f diferencovatelná v $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Protože $f=0$ na osách x a y, platí $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Pak je zobrazení $(x,y)\mapsto 0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, totální diferenciál f v $(0,0)$. Máme totiž odhady

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|f(x,y)-f(0,0)|}{\|(x,y)\|} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\\
&\le \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|xy|\,(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \le \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\\
&\le \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} = 0.
\end{aligned}$$

Funkce f má tedy v každém bodě roviny totální diferenciál.

Zřejmě $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Spočtěme dále pro body (x,y) mimo počátek derivace

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= xy\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} + y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= xy\frac{-4xy^2}{(x^2+y^2)^2} + x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.
\end{aligned}$$

Tedy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = \lim_{y\to 0} \frac{-y}{y} = -1.$$

♣

11.6.7. Příklad. Uvažujte funkci

$$f(x,y) = (y - x^2)(y - 3x^2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ukažte, že f je má ostré lokální minimum v počátku vzhledem ke každé přímce procházející počátkem, ale nemá v počátku lokální minimum.

Řešení. Pro přímku $x = 0$ platí $f(0,y) = y^2$, což je funkce mající v počátku ostré minimum. Pro přímku $y = 0$ platí $f(x,0) = 3x^4$, což je opět funkce mající v počátku ostré minimum. Je-li přímka $y = cx$ pro $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dána, platí

$$g(x) = f(x,cx) = (cx - x^2)(cx - x^3) = c^2x^2 - 4cx^3 + 3x^4.$$

Protože $g'(0) = 0$ a $g''(0) = 2c^2 > 0$, má funkce g v počátku ostré lokální minimum.

Funkce f však nemá v počátku lokální minimum, neboť pro křivku $y = 2x^2$ platí

$$g(x) = f(x, 2x^2) = -x^2,$$

tj. g má v počátku ostré maximum. ♣

11.7. Početní příklady k funkcím více proměnných

11.7.1. Příklad. U následujících množin $A \subset \mathbb{R}$ určete vnitřek, uzávěr a hranici:

$$A = \mathbb{N}, \quad A = \left\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Řešení. (a) Pokud $A = \mathbb{N}$, pak $\operatorname{Int} A = \emptyset$. Zjevně totiž dle Věty 1.6.29 vidíme, že žádný interval v $\mathbb{R}$ není obsažen v A. Dále si uvědomíme, že A je uzavřená. Vezmeme totiž libovolnou posloupnost $\{x_n\}$ bodů v A konvergující k nějakému $x \in \mathbb{R}$. Jelikož je $\{x_n\}$ cauchyovská a vzdálenost libovolných dvou různých prvků A je alespoň 1, musí být $\{x_n\}$ od jistého indexu konstantní. Tedy zřejmě $x \in A$. To podle definice znamená, že A je uzavřená. Konečně $\partial A = A$, neboť

$$\partial A \subset \partial A \cup A = \overline{A} = A$$

a obrácená inkluze $A \subset \partial A$ plyne z faktu $\operatorname{Int} A = \emptyset$.

(b) Nechť $A = \left\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$. Stejně jako výše odvodíme z Věty 1.6.29, že $\operatorname{Int} A = \emptyset$. Dále platí $\partial A = \{0\} \cup A$. Vskutku, posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$ konverguje k 0 a je obsažena v A a $0 \notin A$, a proto $0 \in \partial A$. Na druhou stranu máme z faktu $\operatorname{Int} A = \emptyset$, že $A \subset \partial A$. Proto $\{0\} \cup A \subset \partial A$. Pro důkaz druhé inkluze uvažujme bod $x \notin \{0\} \cup A$. Pokud $x < 0$, pak interval $B(x, \frac{|x|}{2})$ neprotíná A, a tedy $x \notin \partial A$. Pokud $x > 0$, vezmeme $n_0 \in \mathbb{N}$ a $\delta > 0$ splňující $\frac{1}{n_0} < x - \delta < x$. Pak interval $(x - \delta, x + \delta)$ protíná A v konečné množině, a tedy existuje $\eta \in (0, \delta)$ takové, že $(x - \eta, x + \eta) \cap A = \emptyset$. Proto $x \notin \partial A$. Tím je druhá inkluze ukázána. Uzávěr A je tedy roven $\overline{A} = A \cup \partial A = \{0\} \cup A$. ♣

11.7.2. Příklad. U následujících množin $A \subset \mathbb{R}^2$ určete vnitřek, uzávěr a hranici:

$$A = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x > 0, y \leq 0\right\}, \quad A = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + e^y > 17\right\},$$
$$A = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 + 2xy = 5\right\}.$$

Řešení. (a) V prvním případě platí

$$\operatorname{Int} A = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x > 0, y < 0\right\}.$$

Vskutku, označme $G = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x > 0, y < 0\right\}$. Pak pro kanonické projekce $\pi_x, \pi_y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ platí

$$G = \pi_x^{-1}((0, \infty)) \cap \pi_y^{-1}((-\infty, 0)),$$

a tedy je díky Příkladu 10.4.4 a Větě 10.4.6 množina G otevřená. Jelikož $G \subset A$, dle Věty 10.3.11 plyne $\operatorname{Int} A \supset G$.

Pro důkaz obrácené inkluze uvažujme $\boldsymbol{a} = [x, y] \in \operatorname{Int} A \setminus G \subset A \setminus G$. Pak $x > 0$ a $y = 0$. Posloupnost bodů $\{[x, \frac{1}{n}]\}$ pak neleží v A a konverguje k $\boldsymbol{a}$, tedy $\boldsymbol{a} \notin \operatorname{Int} A$, což je spor. Proto $\operatorname{Int} A = G$.

Dále máme

$$\overline{A} = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0, y \leq 0\right\}.$$

Vskutku, označme $F = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0, y \leq 0\right\}$. Pak jako výš odvodíme, že F je uzavřená, a jelikož obsahuje A, platí $\overline{A} \subset F$ (viz Věta 10.3.41(g)). Nechť nyní $\boldsymbol{a} \in F$ je dáno. Pak body $[x + \frac{1}{n}, y - \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$, leží v A konvergují k $\boldsymbol{a}$. Tedy $\boldsymbol{a} \in \overline{A}$.

Konečně určíme ∂A. Pokud $\boldsymbol{a} = [x, y] \in \partial A$, pak $\boldsymbol{a} \in \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A = F \setminus G$, a tedy $x \geq 0$, $y \leq 0$ a alespoň jedno z čísel x, y je nulové. Obráceně, nechť $\boldsymbol{a} = [x, y]$, kde $x \geq 0$, $y \leq 0$ a $xy = 0$. Nechť například $x = 0$. Pak body $[\frac{1}{n}, y - \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$, leží v A konvergují k $\boldsymbol{a}$. Dále body $[-\frac{1}{n}, y]$, $n \in \mathbb{N}$, leží v doplňku A konvergují k $\boldsymbol{a}$. Tedy $\boldsymbol{a} \in \partial A$. Podobně se ověří, že $\boldsymbol{a} \in \partial A$ v případě $y = 0$. Tedy

$$\partial A = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0, y \leq 0, xy = 0\right\}.$$

(b) Nechť

$$A = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + e^y > 17\right\}.$$

Jelikož je funkce $f : [x, y] \mapsto x^2 + e^y$ spojitá, je množina

$$A = f^{-1}((17, \infty))$$

otevřená (viz Věta 10.4.6). Proto $\operatorname{Int} A = A$.

Označme

$$F = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + e^y \geq 17\right\}.$$

Pak $\overline{A} = F$. Vskutku, množina F je uzavřená (to opět plyne z Věty 10.4.6), obsahuje A, a tedy $\overline{A} \subset F$. Pro důkaz opačné inkluze uvažujme $\boldsymbol{a} = [x, y] \in F$. Pokud $\boldsymbol{a} \in A$, je zjevně $\boldsymbol{a} \in \overline{A}$. Nechť tedy $\boldsymbol{a} \in F \setminus A$, tj. $x^2 + e^y = 17$. Pak body $[x, y + \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$, splňují

$$17 = x^2 + e^y < x^2 + e^{y + \frac{1}{n}},$$

tj. leží v A. Jelikož tyto body konvergují k $\boldsymbol{a}$, leží $\boldsymbol{a}$ v $\overline{A}$.

Hranice A je pak rovna množině

$$H = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + e^y = 17\right\}.$$

Vskutku,

$$\partial A \subset \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A = F \setminus A = H.$$

Na druhou stranu, je-li $\boldsymbol{a} = [x, y] \in H$ dáno, dle předchozího již víme, že $\boldsymbol{a} \in \overline{A}$. Jelikož $\boldsymbol{a} \notin A$, je i v $\overline{\mathbb{R}^2 \setminus A}$. Tedy $\boldsymbol{a} \in \partial A$ a $H = \partial A$.

(c) Nechť

$$A = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 + 2xy = 5\right\}.$$

Postupem analogickým k přechozímu odvodíme, že A je uzavřená. Dokážeme, že $\partial A = A$. Vskutku, je-li $[x, y] \in A$ dáno, body $[x, y + \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$, splňují

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{n}\right)^2 + 2x\left(y + \frac{1}{n}\right) = 5 + \frac{1}{n}\left(2x + 2y + \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tedy všechny až nejvýše na jeden leží mimo množinu A. Jelikož konvergují k $\boldsymbol{a}$, je $\boldsymbol{a} \in \partial A$.

Na závěr si uvědomme, že vztah $\overline{A} = A = \partial A$ implikuje $\operatorname{Int} A = \emptyset$. ♣

11.7.3. Příklad. U množiny

$$A = \{[x, y, z] \in R^3;\ x \geq 0, y > 0, z \geq 0, x + y = 2\}$$

určete vnitřek, uzávěr a hranici.

Řešení. Nejprve si uvědomme, že $\operatorname{Int} A = \emptyset$. Vskutku, pokud $\boldsymbol{a} = [x, y, z] \in A$, pak body $[x + \frac{1}{n}, y, z]$, $n \in \mathbb{N}$, leží v doplňku A a konvergují k $\boldsymbol{a}$. Tedy $\boldsymbol{a} \notin \operatorname{Int} A$ a $\boldsymbol{a} \in \partial A$. Dále označme

$$F = \{[x, y, z] \in R^3;\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y = 2\}.$$

Pak platí $\partial A = \overline{A} = F$. Vskutku, F je uzavřená množina, neboť obsahuje A a pro spojitou funkci $f\colon [x, y, z] \mapsto x + y$ platí

$$F = \pi_x^{-1}([0, \infty)) \cap \pi_y^{-1}([0, \infty) \cap \pi_z^{-1}([0, \infty)) \cap f^{-1}(\{2\}).$$

Tedy

$$\partial A \subset \overline{A} \subset F.$$

Mějme $\boldsymbol{a} = [x, y, z] \in F$ dáno. Pomocí bodů $[x + \frac{1}{n}, y, z]$, $n \in \mathbb{N}$, jako výše odvodíme, že $\boldsymbol{a} \in \overline{\mathbb{R}^3 \setminus A}$. Pokud $\boldsymbol{a} \in A$, je dle přechozího prvkem ∂A. Pokud $\boldsymbol{a} \in F \setminus A$, pak $z \geq 0$, $x \geq 0$, $y = 0$ a $x + y = 2$, tj. $x = 2$. Body $[x - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, z]$, $n \in \mathbb{N}$, pak leží v A a konvergují k $\boldsymbol{a}$. Proto $\boldsymbol{a} \in \overline{A}$. Jelikož $\partial A = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{R}^3 \setminus A}$, máme $F \subset \partial A$. ♣

11.7.4. Příklad. Nechť $[a, b] \in \mathbb{R}^2$. Spočtěte limitu

$$\lim_{[x,y]\to[a,b]} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Řešení. Funkce $f\colon [x, y] \mapsto x$ a $g\colon [x, y] \mapsto y$ jsou spojitá na $\mathbb{R}^2$ dle Příkladu 10.4.4. Tedy dle Věty 10.4.21 máme

$$\begin{aligned}
\lim_{[x,y]\to[a,b]} \sqrt{x^2 + y^2} &= \lim_{[x,y]\to[a,b]} \sqrt{(f(x, y))^2 + (g(x, y))^2} \\
&= \sqrt{\left(\lim_{[x,y]\to[a,b]} f(x, y)\right)^2 + \left(\lim_{[x,y]\to[a,b]} g(x, y)\right)^2} \\
&= \sqrt{a^2 + b^2}.
\end{aligned}$$

♣

11.7.5. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Řešení. Položíme-li ve funkce $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ $y = 0$, dostáváme

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Obdobně pro $x = 0$ máme

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

Dle Heineovy věty 10.4.15 tedy limita neexistuje. ♣

11.7.6. Příklad. Spočtěte $\lim_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y)$, kde

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \quad [x,y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}.$$

Řešení. Jelikož

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} |y| = 0$$

a platí

$$0 \le |f(x,y)| = \left|\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}\right| \le \left|\frac{x^2 y}{x^2}\right| \le |y|,$$

dostáváme $\lim_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y) = 0$. ♣

11.7.7. Příklad. Spočtěte $\lim_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y)$, kde

$$f(x,y) = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad [x,y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}.$$

Řešení. Povšimneme si, že k bodu $[0,0]$ se můžeme blížit po ose y zprava a dostaneme

$$\lim_{x\to 0+} f(x,0) = \lim_{x\to 0+} \frac{x^2 + 0}{\sqrt{x^2 + 0^2}} = 1.$$

K bodu $[0,0]$ se však můžeme blížit i po přímce $y = x$ a pak dostaneme

$$\lim_{x\to 0_+} f(x,x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{x + x}{\sqrt{x^2 + x^2}} = \sqrt{2}.$$

Podle Věty 10.4.15 tedy limita neexistuje. ♣

11.7.8. Příklad. Spočtěte $\lim_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y)$, kde

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad [x,y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}.$$

Řešení. Zadanou funkci můžeme odhadnout

$$0 \le \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \le \left| \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \le \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}.$$

Jelikož $\lim_{[x,y]\to[0,0]} \sqrt{x^2+y^2} = 0$, je zadaná limita rovna 0. ♣

11.7.9. Příklad. Spočtěte

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{\sqrt{x^6+y^6}}}.$$

Řešení. Nejprve si rozmyslíme, že existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $[x,y] \in P(\mathbf{0},\delta)$ platí odhad

$$\log(1+x^2y^2) \le 2x^2y^2. \tag{11.24}$$

Vskutku, díky platnosti vztahu $\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$ lze nalézt $\eta > 0$ takové, že $\log(1+t) \le 2t$ pro libovolné $t \in P(0,\eta)$. Jelikož $\lim_{[x,y]\to[0,0]} x^2y^2 = 0$, existuje $\delta > 0$ splňující $x^2y^2 \in B(0,\eta)$ kdykoliv $[x,y] \in B(\mathbf{0},\delta)$. To je však již hledané δ, neboť pokud $[x,y] \in P(\mathbf{0},\delta)$ splňuje $xy = 0$, pak nerovnost (11.24) zjevně platí. Pokud $xy \ne 0$, je $x^2y^2 \in P(0,\eta)$, a tedy (11.24) platí díky volbě η.

Nyní můžeme pro $[x,y] \in P(\mathbf{0},\delta)$ odhadnout

$$\begin{aligned} 0 &\le \frac{1}{\sqrt{x^6+y^6}} \log(1+x^2y^2) \le \frac{2x^2y^2}{\sqrt{x^6+y^6}} \le \frac{x^4+y^4}{\sqrt{x^6+y^6}} \\ &\le \frac{x^4}{\sqrt{x^6}} + \frac{y^4}{\sqrt{y^6}} \le |x| + |y|. \end{aligned}$$

Jelikož limita posledního výrazu v bodě $[0,0]$ je 0, dostáváme z Věty 10.4.22 rovnost $\lim_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y) = e^0 = 1$.

(Poznamenejme, že výpočet je možno zjednodušit použitím odhadu $\log(1+t) \le t$, $t \in (0,\infty)$.) ♣

11.7.10. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{2-\cos x-\cos y}{x^2+y^2}.$$

Řešení. Pišme $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \varphi(t)$, kde $\lim_{t0} \frac{\varphi(t)}{t^2} = 0$. Pak

$$\frac{2 - \cos x - \cos y}{x^2 + y^2} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2}{x^2 + y^2} + \frac{\varphi(x)}{x^2 + y^2} + \frac{\varphi(y)}{x^2 + y^2}.$$

Jelikož

$$0 \leq \left| \frac{\varphi(x)}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{\varphi(x)}{x^2} \right|$$

a pravá strana konverguje k 0 pro x jdoucí k 0, máme $\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\varphi(x)}{x^2+y^2} = 0$. Obdobně odvodíme nulovost limity druhého členu.

Celkem tedy vyjde

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{2 - \cos x - \cos y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}.$$

♣

11.7.11. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^6}}.$$

Řešení. Nejprve si všimneme rovnosti

$$0 \leq \left| \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^6}} \right| = \frac{|x|\, y^2}{\sqrt{x^4 + y^6}} = \sqrt{\frac{x^2 y^4}{x^4 + y^6}}.$$

Dále platí

$$\left| \frac{x^2 y^4}{x^4 + y^6} \right| = \frac{x^2 |y|^3}{x^4 + y^6} \cdot |y| = \frac{x^2 |y|^3}{(x^2)^2 + (|y|^3)^2} \cdot |y| \leq |y|,$$

neboť

$$\frac{ab}{a^2 + b^2} \leq \frac{2ab}{a^2 + b^2} \leq 1, \quad a, b \geq 0, (a, b) \neq (0, 0).$$

Tedy

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^6}} = 0.$$

♣

11.7.12. Příklad. Rozhodněte, zda lze funkci $\frac{\sin xy}{x}$ rozšířit spojitě na celou rovinu $\mathbb{R}^2$.

Řešení. Uvažujme spojitou funkci $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou jako

$$g(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Pak je funkce

$$f(x, y) = g(xy) \cdot y, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2,$$

spojitá dle Věty 10.4.21 a pro $[x, y] \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$, platí

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{xy} \cdot y = \frac{\sin xy}{x}, & y \neq 0, \\ 0 = \frac{\sin xy}{x}, & y = 0. \end{cases}$$

Funkce f je tak spojité rozšíření zadaná funkce na $\mathbb{R}^2$. ♣

11.7.13. Příklad. Spočtěte parciální derivace funkce

$$f(x, y) = x^2 \sin y, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2,$$

v každém bodě roviny $\mathbb{R}^2$.

Řešení. Nechť $\boldsymbol{a} = (a, b)$ je daný bod v $\mathbb{R}^2$. Spočteme nejprve $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a})$. Podle Poznámky 11.1.4(d) platí pro funkci

$$g_1(t) = f(t, b) = t^2 \sin b, \quad t \in \mathbb{R},$$

vztah $g_1'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a})$. Tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a}) = g_1'(a) = [t \mapsto t^2 \sin b]'_{t=a} = [t \mapsto 2t \sin b]_{t=a} = 2a \sin b.$$

Analogicky máme pro funkci

$$g_2(t) = f(a, t) = a^2 \sin t, \quad t \in \mathbb{R},$$

vztah $g_2'(b) = \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{a})$. Tedy

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{a}) = g_2'(b) = [t \mapsto a^2 \sin t]'_{t=b} = [t \mapsto a^2 \cos t]_{t=b} = a^2 \cos b.$$

♣

11.7.14. Příklad. Spočtěte parciální derivace funkce

$$f(x, y, z) = x^{y^z}, \quad [x, y, z] \in (0, \infty)^3,$$

a najděte rovnici tečné nadroviny ke grafu f v bodě $[2, 1, 2, 2]$.

Řešení. Funkci f vyjádříme jako

$$f(x,y,z) = e^{y^z \log x} = e^{e^{z\log y}\log x}.$$

Tedy pro $[x,y,z] \in (0,\infty)^3$ máme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}([x,y,z]) &= e^{e^{z\log y}\log x} \cdot e^{z\log y} \cdot \frac{1}{x} = y^z \cdot x^{y^z-1}\\
\frac{\partial f}{\partial y}([x,y,z]) &= e^{e^{z\log y}\log x} \cdot \log x \cdot e^{z\log y} \cdot \frac{z}{y} = x^{y^z} y^z \frac{z\log x}{y},\\
\frac{\partial f}{\partial z}([x,y,z]) &= e^{e^{z\log y}\log x} \cdot \log x \cdot e^{z\log y} \cdot \log y = x^{y^z} y^z \log x \log y.
\end{aligned}$$

Parciální derivace jsou zjevně spojité na $(0,\infty)^3$, a tedy v každém bodě definičního oboru existuje totální diferenciál (Věta 11.1.16). Z právě provedených výpočtů plyne, že

$$\nabla f([2,1,2]) = [1, 4\log 2, 0].$$

Dle Definice 11.1.24 je tedy rovnice tečné nadroviny rovna

$$\begin{aligned}
t(x,y,z) &= 2 + 1(x-2) + 4\log 2(y-1) + 0(z-2)\\
&= 2 + (x-2) + 4\log 2(y-1), \quad [x,y,z] \in \mathbb{R}^3.
\end{aligned}$$

♣

11.7.15. Příklad. Zjistěte, ve kterých bodech existují parciální derivace a totální diferenciál funkce

$$f(x,y) = |x|\,|y|, \quad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Řešení. Pro body $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ mimo souřadnicové osy platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}([x,y]) = (\operatorname{sign} x)\,|y|, \quad \frac{\partial f}{\partial y}([x,y]) = |x| \operatorname{sign} y.$$

Tyto funkce jsou spojité v každém bodě mimo souřadnicové osy, a tedy v nich existuje totální diferenciál. Dle Věty 11.1.10 platí

$$\begin{aligned}
f'(x,y)\colon (h_1,h_2) \mapsto \langle \nabla f(x,y), h\rangle &= \frac{\partial f}{\partial x}([x,y])h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}([x,y])h_2\\
&= ((\operatorname{sign} x)y\,|y|)h_1 + (|x| \operatorname{sign} y)h_2, \quad ([h_1,h_2] \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Podívejme se nyní na body ležící na ose x, tj. na body tvaru $[x,0]$, kde $x \in \mathbb{R}$. Pak

$$\frac{\partial f}{\partial x}([x,0]) = [t \mapsto f(t,0)]'_{t=x} = [t \mapsto 0]'_{t=x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Naproti tomu pro $x \neq 0$ parciální derivace podle y v bodě $[x, 0]$ neexistuje, neboť pro funkci

$$g(t) = f(x,t) = |x|\,|t|\,, \quad t \in \mathbb{R},$$

platí

$$g'_+(0) = |x|\,, \quad g'_-(0) = -\,|x|\,,$$

což implikuje neexistenci

$$\frac{\partial f}{\partial y}([x,0]) = g'(0).$$

V bodech $[x, 0]$, $x \neq 0$, tak neexistuje ani totální diferenciál.

Pro body tvaru $[0, y]$, $y \in \mathbb{R}$, podobně jako výše odvodíme, že $\frac{\partial f}{\partial y}([0, y]) = 0$ a že $\frac{\partial f}{\partial x}([0, y])$ neexistuje, pokud $y \neq 0$. To opět implikuje neexistenci totálního diferenciálu v bodech $[0, y]$, $y \neq 0$.

Zbývá nám vyšetřit bod $[0, 0]$. Z přechozího víme, že parciální derivace f v $[0, 0]$ jsou nulové. Dle Věty 11.1.10 je tak jediným kandidátem na totální diferenciál nulové zobrazení. Dle definice tak totální diferenciál existuje právě thedy, když

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{f([0,0]+[x,y]) - f([0,0] - \langle[0,0],[x,y]\rangle}{\|[x,y]\|} = 0.$$

Tedy zkoumáme výraz

$$\frac{|x|\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|.$$

Ten má však dle Příkladu 11.7.8 limitu rovnou nule. Tedy totální diferenciál f v bodě $[0, 0]$ je rovne $[0, 0]$. ♣

11.7.16. Příklad. Zjistěte, ve kterých bodech existují parciální derivace a totální diferenciál funkce

$$f(x,y) = \sqrt[5]{x^5+y^5}, \quad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Řešení. V bodech $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ mimo přímku $y = -x$ máme spojité parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}([x,y]) = \frac{x^4}{\sqrt[5]{(x^5+y^5)^4}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}([x,y]) = \frac{y^4}{\sqrt[5]{(x^5+y^5)^4}},$$

a tedy v těchto bodech existuje totální diferenciál a je roven $\nabla f([x, y])$.

Uvažujme nyní bod $\boldsymbol{a} = (a, -a)$, kde $a \neq 0$. Pak pro funkci

$$g(x) = \sqrt[5]{x^5 - a^5}$$

platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a}) = [x \mapsto f(x, -a)]'_{x=a} = g'(a).$$

Derivace $g'(a)$ je však nevlastní, neboť díky spojitosti g lze odvodit

$$g'(a) = \lim_{x \to a} g'(x) = \lim_{x \to a} \frac{x^4}{\sqrt[5]{(x^5 - a^5)^4}} = \infty.$$

Obdobně obdržíme, že $\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{a})$ neexistuje.

Zbývá vyšetřit bod $[0, 0]$. Pro něj platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}([0, 0]) = [x \mapsto f(x, 0)]'_{x=0} = \left[x \mapsto \sqrt[5]{x^5}\right]'_{x=0} = 1$$

a podobně $\frac{\partial f}{\partial y}([0, 0]) = 1$. Pokud tedy existuje totální diferenciál, je reprezentován vektorem $[1, 1]$. Nutnou a postačující podmínkou pro jeho existenci je nulovost limity

$$\begin{aligned} &\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{f([0, 0] + [x, y]) - f([0, 0]) - \langle[1, 1], [x, y]\rangle}{\|[x, y]\|} \\ &= \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sqrt{x^5 + y^5} - (x + y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Uvažujeme-li přímku $y = x$, dostáváme

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\sqrt{x^5 + x^5} - (x + x)}{\sqrt{x^2 + x^2}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{\sqrt[5]{2x^5} - 2x}{\sqrt{2x^2}} = \frac{\sqrt[5]{2} - 2}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

Dle Věty 10.4.15 tak totální diferenciál v $[0, 0]$ neexistuje. ♣

11.7.17. Příklad. Zjistěte, zdali má funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5+y^4}{x^4+y^2}, & [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & [x, y] = [0, 0], \end{cases}$$

totální diferenciál v $[0, 0]$.

Řešení. Jelikož

$$x \mapsto f(x, 0) = x, \quad x \in \mathbb{R},$$

a

$$y \mapsto f(0, y) = y^2, \quad y \in \mathbb{R},$$

máme $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{0}) = 1$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{0}) = 0$. Existence totálního diferenciálu tak odvisí od nulovosti limity

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\frac{x^5+y^4}{x^4+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{y^4 - xy^2}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Uvažujeme-li přímku $y = x$, obdržíme

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^4 - x^3}{(x^4+x^2)\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x-1}{\sqrt{2}(x^2+1)} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

Tedy totální $f'(\mathbf{0})$ neexistuje. ♣

11.7.18. Příklad. Spočtěte parciální derivace a totální diferenciál funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{x^2+y^2}), & [x,y] \neq [0,0], \\ 0, & [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

Ukažte navíc, že parciální derivace f nejsou spojité v počátku.

Řešení. Pro $[x,y] \neq [0,0]$ spočteme parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}([x,y]) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + (x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\frac{-1}{(x^2+y^2)^2}2x$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial y}([x,y]) = 2y \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + (x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\frac{-1}{(x^2+y^2)^2}2y.$$

Obě parciální derivace jsou spojité funkce na $\mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}$, a proto podle Věty 11.1.16 existuje totální diferenciál pro všechna $[x,y] \neq [0,0]$. Ten má tvar

$$f'(x,y)\colon [h_1,h_2] \mapsto \langle [\frac{\partial f}{\partial x}([x,y]), \frac{\partial f}{\partial y}([x,y]), [h_1,h_2]\rangle, \quad [h_1,h_2] \in \mathbb{R}^2.$$

V bodě $[0,0]$ spočteme parciální derivace dle definice

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2\sin(\frac{1}{t^2}) - 0}{t} = \lim_{t\to 0} t\sin\left(\frac{1}{t^2}\right) = 0$$

a analogicky

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2\sin(\frac{1}{t^2}) - 0}{t} = 0.$$

Ukažme nyní, že $\frac{\partial f}{\partial x}$ není spojitá v počátku. Již však její restrikce na přímku $y = 0$ není spojitá, neboť

$$\lim_{x\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}([x,0]) = \lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x^2} - x^2\left(\cos\frac{1}{x^2}\right)\frac{2x}{x^4}\right)$$

neexistuje vlastní. (K tomu stačí uvažovat body $[\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}, 0]$, $n \in \mathbb{N}$.)

Přesto v bodě $\mathbf{0}$ existuje totální diferenciál

$$f'(0,0)(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{0})h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{0})h_2 = 0h_1 + 0h_2.$$

Vskutku, pro nulové linární zobrazení máme totiž

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right).$$

Jelikož

$$\left|\sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \le \sqrt{x^2+y^2},$$

je limita nulová. Tím je existence totálního diferenciálu ověřena. ♣

11.7.19. Příklad. Ukažte, že funkci

$$f(x,y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2+xy}}$$

lze spojitě rozšířit do bodu $[0,0]$ a že má v tomto bodě totální diferenciál.

Řešení. Nejprve ukážeme, že $x^2 + y^2 + xy > 0$ pro $[x,y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}$. Vyjádříme totiž bod $[x,y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}$ v polárních souřadnicích jako

$$[x,y] = [r\cos\alpha, r\sin\alpha], \quad r > 0, \alpha \in [0,2\pi).$$

Pak

$$x^2 + y^2 + xy = r^2 + r^2\cos\alpha\sin\alpha = r^2\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right) > 0$$

(Mohli bychom též použít odhad $x^2 + y^2 + xy \ge \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$.)

Dále odhadneme

$$x^2 + y^2 + xy \le x^2 + y^2 + \frac{1}{2}(x^2+y^2) \le 2(x^2+y^2),$$

a tedy

$$0 \le e^{-\frac{1}{x^2+y^2+xy}} \le e^{-\frac{1}{2(x^2+y^2)}}.$$

Jelikož

$$\lim_{t\to 0_+} \frac{e^{-\frac{1}{2t}}}{t} = 0,$$

existuje $\delta > 0$ tak, že pro $[x, y] \in P([0, 0], \delta)$ platí

$$0 \le e^{-\frac{1}{x^2+y^2+xy}} \le e^{-\frac{1}{2(x^2+y^2)}} \le (x^2 + y^2)\,.$$

Tedy vidíme, že danou funkci lze spojitě dodefinovat v bodě $[0, 0]$ hodnotou 0.

Parciální derivace v počátku spočteme z definice:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{t^2}}}{t} = 0$$

a analogicky $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{0}) = 0$.

Existence totálního diferenciálu je pak ekvivalentní s nulovostí limity

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f'(0, 0)(x, y)}{\|[x, y]\|} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2+xy}}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Jelikož pro $[x, y] \in P(\mathbf{0}, \delta)$ platí

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2+xy}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \le \frac{e^{-\frac{1}{2(x^2+y^2)}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \le \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

je daná limita nulová. Tedy totální diferenciál funkce f v počátku existuje. ♣

11.7.20. Příklad. Ukažte, že totální diferenciál funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y(|x|+|y|)}{x^4+y^2}, & [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

v počátku neexistuje.

Řešení. Jelikož je funkce f nulová na osách, jsou parciální derivace f v počátku nulové. Totální diferenciál v $\mathbf{0}$ tak existuje právě tehdy, když je limita

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{f(x, y)}{\|[x, y]\|} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2 y(|x| + |y|)}{(x^4 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

nulová. Uvažujeme-li však parabolu $y = x^2$, dostáváme

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{x^2 x^2(|x| + |x^2|)}{(x^4 + x^4)\sqrt{x^2 + x^4}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{x + x^2}{2x\sqrt{1 + x^2}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{1 + x}{2\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Totální diferenciál v počátku proto neexistuje. ♣

11.7.21. Příklad. Spočtěte totální diferenciál funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2+y}\,\log(x^2+y^2), & [x,y] \neq [0,0], \\ 0, & [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

všude, kde existuje.

Řešení. Nejprve si uvědomme, že f je spojitá na $\mathbb{R}^2$. K tomu je třeba ověřit, že $\lim_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y) = 0$. To však plyne z odhadu

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &\le \sqrt[3]{|x^2| + |y|}\,\log(x^2+y^2) \le \sqrt[3]{|x| + |y|}\,\log(x^2+y^2) \\ &\le \sqrt[6]{2(x^2+y^2)}\,\log(x^2+y^2) \end{aligned}$$

platného pro $[x,y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ splňující $|x| \le 1$ a z faktu $\lim_{r\to 0+} r^{\frac{1}{6}} \log r = 0$.

V každém bodě $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ splňujícím $y \neq -x^2$ platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}([x,y]) &= \frac{1}{3}\left(x^2+y\right)^{-\frac{2}{3}} 2x\log(x^2+y^2) + \sqrt[3]{x^2+y}\,\frac{2x}{x^2+y^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}([x,y]) &= \frac{1}{3}\left(x^2+y\right)^{-\frac{2}{3}} \log(x^2+y^2) + \sqrt[3]{x^2+y}\,\frac{2y}{x^2+y^2}, \end{aligned}$$

Uvažujme nyní bod $\boldsymbol{a} = (a, -a^2)$, kde $a \neq 0$ a $a^2 + a^4 \neq 1$. Protože

$$\lim_{x\to a} \frac{\partial f}{\partial x}([x,-a^2]) = \lim_{x\to a} \left(\frac{1}{3}\left(x^2-a^2\right)^{-\frac{2}{3}} 2x\log(x^2+a^4) + \sqrt[3]{x^2-a^2}\,\frac{2x}{x^2+a^4} \right)$$

neexistuje vlastní, neexistuje ani

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a}) = \lim_{x\to a} \frac{\partial f}{\partial x}([x,-a^2]).$$

Podobně neexistuje $\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{a})$, protože

$$\lim_{y\to -a^2} \frac{\partial f}{\partial y}([a,y]) = \lim_{y\to -a^2} \left(\frac{1}{3}\left(a^2+y\right)^{-\frac{2}{3}} 2a\log(a^2+y^2) + \sqrt[3]{a^2+y}\,\frac{2a}{a^2+y^2} \right)$$

neexistuje vlastní.

Uvažujme nyní bod $\mathbf{0}$. Pak $x \mapsto f(x,0) = \sqrt[3]{x^2}\log x^2$, a tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{t^2}\log t^2}{t}$$

neexistuje vlastní. Podobně

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{t}\log t^2}{t}$$

neexistuje.

Konečně vezměme do úvahy bod $\boldsymbol{a} = (a, -a^2)$, kde $a^2 + a^4 = 1$. Počítejme $\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a})$ jako limitu parciálních derivací. Pak

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a}) &= \lim_{x\to a} \frac{\partial f}{\partial x}([x, -a^2]) \\ &= \lim_{x\to a} \left(\frac{1}{3} \left(x^2 - a^2\right)^{-\frac{2}{3}} 2x \log(x^2 + a^4) + \sqrt[3]{x^2 - a^2} \frac{2x}{x^2 + a^4} \right) \\ &= \lim_{x\to a} \frac{1}{3} \left(x^2 - a^2\right)^{-\frac{2}{3}} 2x \log(x^2 + a^4) \\ &= \lim_{x\to a} \frac{2x}{3} \frac{\log(x^2 + a^4)}{x^2 + a^4 - 1} \cdot \frac{x^2 + a^4 - 1}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}} = 0,\end{aligned}$$

neboť dle Věty 5.3.1(a) platí

$$\lim_{x\to a} \frac{x^2 + a^4 - 1}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{x\to a} \frac{2x}{\frac{2}{3} 2x (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{3}}} = 0.$$

Podobně pro $\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{a})$ máme

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{a}) &= \lim_{y\to -a^2} \frac{\partial f}{\partial x}([a, y]) = \lim_{y\to -a^2} \left(\frac{1}{3} \left(a^2 + y\right)^{-\frac{2}{3}} \log(a^2 + y^2) + \sqrt[3]{a^2 + y} \frac{2y}{a^2 + y^2} \right) \\ &= \lim_{y\to -a^2} \frac{1}{3} \left(a^2 + y\right)^{-\frac{2}{3}} \log(a^2 + y^2) \\ &= \lim_{y\to -a^2} \frac{1}{3} \frac{\log(a^2 + y^2}{a^2 + y^2 - 1} \cdot \frac{a^2 + y^2 - 1}{(a^2 + y)^{\frac{2}{3}}} = 0,\end{aligned}$$

jelikož

$$\lim_{y\to -a^2} \frac{a^2 + y^2 - 1}{(a^2 + y)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{y\to -a^2} \frac{2y}{\frac{2}{3} (a^2 + y)^{-\frac{1}{3}}} = 0.$$

Zbývá vyšetřit existenci totálního diferenciálu v bodě $\boldsymbol{a}(a) = (a, -a^2)$, kde $a^2 + a^4 = 1$. Dle předchozího výpočtu je kandidát na $f'(\boldsymbol{a})$ roven 0.

Vyšetřujeme tedy výraz

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f([a,-a^2]+[x,y])-f([a,-a^2])}{\|[x,y]\|}\right| \\
&= \left|\frac{\sqrt[3]{(a+x)^2+(-a^2+y)}\log\left((a+x)^2+(-a^2+y)^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \\
&= \left|\frac{\sqrt[3]{x^2+2ax+y}\log(x^2+y^2+2ax-2a^2y+1)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \\
&\le \frac{\sqrt[3]{\left|x^2+2ax+y\right|}\left|x^2+y^2+2ax-2a^2y\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&\le \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\sqrt[3]{\left|x^2+2ax+y\right|}\left(\left(x^2+y^2\right)+2\,|a|\,(|x|+|a|\,|y|)\right)\right) \\
&\le \sqrt[3]{\left|x^2+2ax+y\right|}\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt[3]{\left|x^2+2ax+y\right|}\frac{|2a|\max\{1,|a|\}\,(|x|+|y|)}{\sqrt{x^2+y^2}},
\end{aligned}$$

přičemž jsme použili odhad $\log(t+1)\le t$, $t\in(-1,\infty)$. Poslední výraz však konverguje k 0 pro $[x,y]\to[0,0]$, neboť

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]}\sqrt[3]{\left|x^2+2ax+y\right|}=0 \quad \text{a} \quad \frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\sqrt{2}.$$

Tím je existence totálního diferenciálu v bodě $\boldsymbol{a}$ dokázána. ♣

11.7.22. Příklad. Vypočtěte derivaci $D_{\boldsymbol{v}}f(1,1,2)$ funkce

$$f(x,y,z)=x^y+y^z, \quad [x,y,z]\in(0,\infty)^3,$$

kde $\boldsymbol{v}=[1,1,1]$.

Řešení. Funkce f má zřejmě všechny parciální derivace na svém definičním oboru, a tedy existuje $\nabla f(1,1,2)=f'(1,1,2)$. Jelikož $f'(1,1,2)(\boldsymbol{v})=D_{\boldsymbol{v}}f(1,1,2)$ (viz Věta 11.1.21), stačí nalézt $\nabla f(1,1,2)$. Protože na $\mathcal{D}(f)$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^y\log x+zy^{z-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}=y^z\log y,$$

máme

$$\nabla f(1,1,2)=[1,2,0].$$

Proto

$$D_{\boldsymbol{v}}f(1,1,2)=\langle[1,2,0],[1,1,1]\rangle=3.$$

♣

11.7.23. Příklad. Nechť $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce třídy $C^1(\mathbb{R})$. Vyjádřete parciální derivace funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pomocí parciálních derivací funkce g, pokud

$$f(x,y) = g(x+y, x-y), \quad f(x,y) = g(\sin x, xy), \quad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Řešení. (a) Uvažujme zobrazení $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definované jako $h(x,y) = [x+y, x-y]$, $[x,y] \in \mathbb{R}^2$. To má složky $h_1(x,y) = x+y$ a $h_2(x,y) = x-y$. Funkce h je třídy $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, a tak dle řetízkového pravidla (Věta 11.1.40) platí

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x,y) &= \sum_{j=1}^{2} \partial_j g(h(x,y))\partial_1 h_j(x,y)\\ &= \partial_1 g(x+y, x-y)\cdot 1 + \partial_2 g(x+y, x-y)\cdot 1\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\partial_2 f(x,y) &= \sum_{j=1}^{2} \partial_j g(h(x,y))\partial_2 h_j(x,y)\\ &= \partial_1 g(x+y, x-y)\cdot 1 + \partial_2 g(x+y, x-y)\cdot(-1).\end{aligned}$$

(b) Podobně jako výše počítáme pro $h(x,y) = [\sin x, xy]$, $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x,y) &= \sum_{j=1}^{2} \partial_j g(h(x,y))\partial_1 h_j(x,y)\\ &= \partial_1 g(\sin x, xy)\cdot \cos x + \partial_2 g(\sin x, xy)\cdot y\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\partial_2 f(x,y) &= \sum_{j=1}^{2} \partial_j g(h(x,y))\partial_2 h_j(x,y)\\ &= \partial_1 g(\sin x, xy)\cdot 0 + \partial_2 g(\sin x, xy)\cdot x.\end{aligned}$$

♣

11.7.24. Příklad. Nechť $f\colon \mathbb{R}^2 \to (0,\infty)$ je funkce třídy $C^1(\mathbb{R}^2)$. Vyjádřete parciální derivace funkce $g(x,y) = f(x,y)^{f(y,x)}$, $[x,y] \in \mathbb{R}^2$, pomocí parciálních derivací f a hodnot f.

Řešení. Uvažujme zobrazení $h(x,y) = [f(x,y), f(y,x)]$, $[x,y] \in \mathbb{R}^2$, a funkci $u(x,y) = x^y$, $[x,y] \in (0,\infty)^2$. Pak $f(x,y) = (u \circ h)(x,y)$, $[x,y] \in \mathbb{R}^2$. Dle Věty 11.1.38 platí $f'(x,y) = u'(h(x,y)) \circ h'(x,y)$. Máme

$$\begin{aligned}u'(a,b) &= [ba^{b-1}, a^b \log a], \quad [a,b] \in (0,\infty)^2,\\ h_1'(x,y) &= [\partial_1 f(x,y), \partial_2 f(x,y)]\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\partial_1 h_2(x,y) &= \partial_1 f(y,x)\cdot 0 + \partial_2 f(y,x)\cdot 1 = \partial_2 f(y,x),\\ \partial_2 h_2(x,y) &= \partial_1 f(y,x)\cdot 1 + \partial_2 f(y,x)\cdot 0 = \partial_1 f(y,x),\end{aligned}$$

tj.

$$h_2'(x,y) = [\partial_2 f(y,x), \partial_1 f(y,x)].$$

Tedy

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} ba^{b-1} & a^b \log a\end{pmatrix}_{[a,b]=[f(x,y),f(y,x)]}\cdot\begin{pmatrix}\partial_1 f(x,y) & \partial_2 f(x,y)\\ \partial_2 f(y,x) & \partial_1 f(y,x)\end{pmatrix},$$

tj.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= f(y,x) f(x,y)^{f(y,x)-1}\partial_1 f(x,y)\\ &\quad + f(x,y)^{f(y,x)}\log f(x,y)\partial_2 f(y,x),\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= f(y,x) f(x,y)^{f(y,x)-1}\partial_2 f(x,y)\\ &\quad + f(x,y)^{f(y,x)}\log f(x,y)\partial_1 f(y,x).\end{aligned}$$

♣

11.7.25. Příklad. Nechť existuje $f'(1,1)$ a $g(x,y) = f(f(y,x), f(x,y))$. Určete $g'(1,1)$, pokud $f(1,1) = \partial_1 f(1,1) = 1$ a $\partial_2 f(1,1) = 2$.

Řešení. Zobrazení $h(x,y) = [f(y,x), f(x,y)]$ splňuje $h(1,1) = [1,1]$, přičemž dle Věty 11.1.38 existuje i $h'(1,1)$ a $g'(1,1)$. Dále platí

$$g'(1,1) = (f\circ h)'(1,1) = f'(h(1,1))\circ h'(1,1) = f'(1,1)\circ h'(1,1).$$

Jelikož

$$f'(1,1) = [\partial_1 f(1,1), \partial_2 f(1,1)] = [1,2]$$

a

$$\begin{aligned}\partial_1 h_1(x,y) &= \partial_1 f(y,x)\cdot 0 + \partial_2 f(y,x)\cdot 1 = \partial_2 f(y,x),\\ \partial_2 h_1(x,y) &= \partial_1 f(y,x)\cdot 1 + \partial_2 f(y,x)\cdot 0 = \partial_1 f(y,x),\\ h_2'(x,y) &= [\partial_1 f(x,y), \partial_2 f(x,y)],\end{aligned}$$

tj.

$$h'(x,y) = \begin{pmatrix} h_1'(x,y)\\ h_2'(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_2 f(y,x) & \partial_1 f(y,x)\\ \partial_1 f(x,y) & \partial_2 f(x,y)\end{pmatrix}.$$

Proto

$$g'(1,1) = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 5\end{pmatrix}.$$

♣

11.7.26. Příklad. Vypočtěte $g'(1,1)$, pokud pro $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivace $g'(1,1)$ existuje a funkce $f(r,\alpha) = g(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ splňuje $f'\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) = [0,4]$.

Řešení. Zobrazení $h(r,\alpha) = [r\cos\alpha, r\sin\alpha]$ splňuje $h\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) = [1,1]$ a

$$h'(r,\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{pmatrix},$$

tj.

$$h'\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Z Věty 11.1.38 tak máme

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix} &= f'\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) = g'(1,1) \circ h'\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \partial_1 g(1,1) & \partial_2 g(1,1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tedy máme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \partial_1 g(1,1)\frac{1}{\sqrt{2}} + \partial_2 g(1,1)\frac{1}{\sqrt{2}} &= 0 \\ -\partial_1 g(1,1) + \partial_2 g(1,1) &= 4, \end{aligned}$$

jejímž řešením je dvojice

$$g'(1,1) = [-2,2].$$

♣

11.7.27. Příklad. Ukažte, že rovnice

$$\sin(xy) + \cos(xy) = \pi$$

určuje v jistém okolí bodu $[\pi, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x. Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě π a nalezněte tečnou přímku ke grafu této funkce v bodě $[\pi, 0]$.

Řešení. Položme

$$F(x,y) = \sin(xy) + \cos(xy) - 1, \quad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Funkce F je zjevně třídy $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ a platí $F(\pi,0) = 0$ a

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\pi,0) = [\cos(xy)\cdot x - \sin(xy)\cdot x]_{[x,y]=[\pi,0]} = \pi \neq 0.$$

Dle Věty 11.3.1 tak existuje interval $(\pi - \delta, \pi + \delta)$ a interval $(-\delta, \delta)$ tak, že pro každé $x \in B(\pi, \delta)$ existuje právě jedno $y \in B(0, \delta)$ splňující $F(x, y) = 0$. Označme tuto funkci definovanou na $B(\pi, \delta)$ jako φ. Dle Věty 11.3.1 je φ třídy $C^\infty(B(\pi, \delta))$, $\varphi(\pi) = 0$ a splňuje vztah

$$\sin(x\varphi(x)) + \cos(x\varphi(x)) - 1 = 0, \quad x \in B(\pi, \delta).$$

Dvojnásobným derivováním této rovnice obdržíme postupně pro $x \in B(\pi, \delta)$ rovnosti

$$\begin{aligned} \cos(x\varphi) \cdot (\varphi + x\varphi') - \sin(x\varphi) \cdot (\varphi + x\varphi') &= 0, \\ -\sin(x\varphi) \cdot (\varphi + x\varphi')^2 + \cos(x\varphi) \cdot (2\varphi' + x\varphi'') & \\ -\cos(x\varphi) \cdot (\varphi + x\varphi')^2 - \sin(x\varphi) \cdot (2\varphi' + x\varphi'') &= 0, \end{aligned}$$

kde píšeme $\varphi, \varphi', \varphi''$ místo $\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)$. Dosadíme-li bod $x = \pi$, dostáváme $\varphi'(\pi) = \varphi''(\pi) = 0$. Tedy tečná přímka ke grafu φ v bodě π má tvar

$$t(x) = \varphi(\pi) + \varphi'(\pi)(x - \pi) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

11.7.28. Příklad. Dokažte, že množina

$$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ e^y + \log x + xy = 0\}$$

je grafem nějaké funkce f třídy C^2 na $(0, \infty)$.

(a) Najděte nulový bod x_0 funkce f a $f'(x_0)$.
(b) Vypočtěte $\lim_{x \to 0+} f(x)$ a $\lim_{x \to \infty} f(x)$.
(c) Dokažte, že f nabývá absolutního minima právě v jednom bodě.

Řešení. Pro pevné $x \in (0, \infty)$ uvažujme funkci $f_x(y) = e^y + \log x + xy$, $y \in \mathbb{R}$. Jelikož $f_x'(y) = e^y + x$, je f_x rostoucí na $\mathbb{R}$. Dále platí $\lim_{y \to -\infty} f_x(y) = -\infty$ a $\lim_{y \to \infty} f_x(y) = \infty$. Existuje tedy právě jedno $y(x) = f(x) \in \mathbb{R}$ takové, že $f_x(y(x)) = 0$. Množina A je tedy grafem funkce f. Jelikož pro funkci $F(x, y) = e^y + \log x + xy$ platí $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = e^y + x > 0$, popisuje rovnice $F(x, y) = 0$ lokálně funkci třídy C^∞. Tedy f je nekonečně diferencovatelná funkce na $(0, \infty)$.

(a) Pokud $f(x) = 0$, pak z rovnice

$$e^{f(x)} + \log x + xf(x) = 0 \tag{11.25}$$

vidíme, že $x = e^{-1}$. Derivováním této rovnice obdržíme

$$e^{f(x)} f'(x) + \frac{1}{x} + f(x) + xf'(x) = 0, \tag{11.26}$$

což po dosazení $x = e^{-1}$ dává $f'(e^{-1}) = -\frac{e^2}{e+1}$. Funkce f je tak kladná na $(0, e^{-1})$ a záporná na (e^{-1}, ∞).

(b) Jelikož

$$|f(x)| = \left|\frac{-e^{f(x)} - \log x}{x}\right| \leq \frac{e^{f(x)}}{x} + \frac{|\log x|}{x} \leq \frac{1}{x} + \frac{|\log x|}{x}, \quad x \in (e^{-1}, \infty),$$

je $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Dále ukážeme, že $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$. Vskutku, pokud by tomu tak nebylo, existuje posloupnost $\{x_n\}$ kladných čísel konvergující k 0 taková, že $\{f(x_n)\}$ je omezená. Limitním přechodem v (11.25) pak dostaneme $-\infty = 0$, což je spor. Proto $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$.

(c) Jelikož $f(e^{-1}) = 0$, $f(x) < 0$ pro $x \in (e^{-1}, \infty)$ a $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, existuje alespoň jeden bod, kde funkce nabývá svého absolutního minima. Předpokládejme, že existují dva takové body $x_1 < x_2$. Pak $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ a $f(x_1) = f(x_2)$. Z rovnice (11.26) nyní plyne

$$\frac{1}{x_1} + f(x_1) = 0 = \frac{1}{x_2} + f(x_2),$$

tedy $x_1 = x_2$. To je však spor s naším předpokladem.

♣

11.7.29. Příklad. Uvažujte množinu

$$A = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^3 + y^3 - 2xy = 0\right\}.$$

(a) Ukažte, že $A \cap \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x < 0\right\}$ je grafem funkce f, která je třídy $C^\infty((0, \infty))$.

(b) Ukažte, že f je klesající a $\mathcal{H} f = (0, \infty)$.

(c) Existuje $a > 0$ a funkce $f_1\colon [0, \infty) \to (-\infty, 0]$, $f_2, f_3\colon [0, a] \to [0, \infty)$ takové, že množina $A \cap \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0\right\}$ je sjednocením grafů f_1, f_2, f_3 a $f_1 < 0$ na $(0, \infty)$ a $0 < f_2 < f_3$ na $(0, a)$.

(d) Funkce f_1, f_2, f_3 jsou třídy C^∞ na vnitřku svého definičního oboru.

(e) Ukažte, že jsou funkce f_1, f_2, f_3 spojité a vyšetřete jejich supremum a infimum.

Řešení. (a) Pro pevné $x < 0$ uvažujeme funkci $f_x(y) = x^3 + y^3 - 2xy$, $y \in \mathbb{R}$. Pak $f_x'(y) = 3y^2 - 2x > 0$, $\lim_{y\to 0+} f_x(y) = x^3 < 0$ a $\lim_{y\to\infty} f_x(y) = \infty$. Existuje tedy právě jeden bod $y(x) = f(x) \in (0, \infty)$ splňující

$$x^3 + f(x)^3 - 2xf(x) = 0, \quad x \in (-\infty, 0). \tag{11.27}$$

(b) Ukažme, že $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0$. Kdyby tomu tak nebylo, existuje posloupnost $\{x_n\}$ záporných čísel konvergující k 0 zleva taková, že $f(x_n) \to M \in (0, \infty]$. Pak ale z rovnice

$$f(x)\left(f(x)^2 - 2x\right) = -x^3$$

plyne $M^3 = 0$, což je spor.

Podobně ukážeme, že $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Jinak by totiž existovala posloupnost $\{x_n\}$ záporných čísel konvergující do $-\infty$ taková, že $f(x_n) \to M \in [0,\infty)$. Pak ale z (11.27) máme

$$f(x_n) = \frac{-x_n^3}{f(x_n)^2 - 2x_n} = \frac{x^2}{2 - \frac{f(x_n)}{x_n}},$$

což v limitním přechodu dá rovnost $M = \infty$.

Dále si uvvědomme, že z Věty 11.3.1 plyne, že $f \in C^\infty((-\infty, 0))$. Vskutku, funkce $F(x,y) = x^3 + y^3 - 2xy$ třídy $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ a splňuje $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 2x > 0$ kdykoliv $x < 0$. Tedy rovnice $F(x,y) = 0$ lokálně určuje nekonečně diferencovatelnou funkci. Proto je f třídy C^∞.

Vzhledem k vypočteným limitám funkce f musí existovat bod, kde je její derivace záporná. Předpokládejme, že v nějakém bodě $a < 0$ platí $f'(a) = 0$. Pak derivováním rovnice (11.27) dostáváme

$$3x^2 + 3f(x)^2 f'(x) - 2f(x) - 2xf'(x) = 0, \quad x \in (-\infty, 0),$$

což po dosazení $x = a$ implikuje rovnost $2f(x) = 3x^2$. Další dosazení do (11.27) dává rovnici,

$$x^3 + \left(\frac{3}{2}x^2\right)^3 - 2x\frac{3}{2}x^2 = 0$$

jež nemá řešení v intervalu $(-\infty, 0)$. Proto $f'(x) \neq 0$ pro $x \in (-\infty, 0)$. Z Darbouxovy vlastnosti derivace (viz Věta 9.1.10) nyní plyne, že f' je záporná na $(-\infty, 0)$. Z výše uvedených vlastností nyní plyne, že f je klesající $\mathcal{H}(f) = (0, \infty)$.

(c) Pro pevné $x \geq 0$ opět uvažujme funkci $f_x(y) = x^3 + y^3 - 2xy$, $y \in \mathbb{R}$. Pokud $x = 0$, má funkce $f_x(y)$ jediný kořen, a to 0. Nechť tedy $x > 0$. Pak $\lim_{y\to-\infty} f_x(y) = 0$ a $\lim_{y\to\infty} f_x(y) = \infty$. Dále $f_x'(y) = 0$ právě tehdy, když $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}x}$. Označme $y_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}x}$ a $y_2 = \sqrt{\frac{2}{3}x}$. Pak f_x má v y_1 lokální maximum, y_2 lokální minimum, f_x roste na $(-\infty, y_1]$ a $[y_2, \infty$ a klesá na $[y_1, y_2]$. Dále platí $f_x(y_1) > f_x(0) > 0$. Položme $a = \frac{2}{3}2^{\frac{2}{3}}$. Pokud $x < a$, je $f_x(y_2) < 0$, pokud $x = a$, platí $f_x(y_2) = 0$ a pokud $x > a$, platí $f_x(y_2) > 0$. Z těchto informací nyní plyne, že pro interval $(0, a)$ má rovnice $f_x(y) = 0$ tři kořeny $f_1(x) < 0 < f_2(x) < f_3(x)$, pro $x = a$ má dva kořeny $f_1(x) < 0 < f_2(x) = f_3(x)$ a pro $x > a$ má pouze jeden kořen $f_1(x) < 0$.

(d) Nekonečná diferencovatelnost funkcí f_1, f_2, f_3 nyní plyne z Věty 11.3.1, neboť pro funkci $F(x,y) = x^3 + y^3 - 2xy$ platí $\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 2x = 0$ v nějakém bodě $[x,y] \in A$ právě tehdy, když $[x,y] = [a, \sqrt{\frac{2}{3}a}]$.

(e) Uvažujme libovolnou funkci f_i. Pak pro její derivaci platí

$$3x^2 + 3f_i(x)^2 f_i'(x) - 2f_i(x) - 2xf_i'(x) = 0, \quad x \in \operatorname{Int} \mathcal{D}(f_i).$$

Pokud $f_i'(x) = 0$ pro nějaké x, pak x splňuje $f_i(x) = \frac{3}{2}x^2$. Po dosazení do rovnice $x^3 + f_i^3(x) - 2xf_i(x) = 0$ pak dostáváme $x = \frac{2}{3}2^{\frac{1}{3}}$ a $f_i(x) = \frac{2}{3}2^{\frac{2}{3}}$. Přímým výpočtem vidíme, že $\frac{2}{3}2^{\frac{2}{3}}$ je největší z tří kořenů funkce $f_{\frac{2}{3}2^{\frac{1}{3}}}(y)$, a proto pouze funkce f_3 má v nějakém bodě nulovou derivaci (konkrétně v bodě $b = \frac{2}{3}2^{\frac{1}{3}}$).

Ukážeme, že $\lim_{x\to 0_+} f_i(x) = 0$. Kdyby tomu tak nebylo, pro nějaké $i \in \{1, 2, 3\}$ existuje posloupnost $\{x_n\}$ kladných čísel konvergující k 0, pro niž $f(x_n) \to M \in [-\infty, \infty] \setminus \{0\}$. Z rovnice $x_n^3 + f_i(x_n)(f_i^2(x_n) - 2x_n) = 0$ pak ale plyne limitním přechodem $M^3 = 0$, což je spor.

Podobně ukážeme, že $\lim_{x\to\infty} f_1(x) = -\infty$. Kdyby tomu tak nebylo, nalezneme posloupnost $\{x_n\}$ konvergující do ∞, pro niž $f_1(x_n) \to M \in (-\infty, 0]$. Pak z rovnosti

$$f_1(x) = \frac{-x^3}{f_1^2(x) - 2x} = \frac{-x^2}{\frac{f_1(x)}{x} - 2}$$

plyne limitním přechodem $M = \infty$, tj. spor.

Z výše uvedených faktů nyní máme, že $f_1' < 0$ na $(-\infty, 0)$, $f_2' > 0$ na $(0, a)$ a $f_3' > 0$ na $(0, b)$.

Dále ukážeme, že $\lim_{x\to a_-} f_2(x) = \lim_{x\to a_-} f_3(x) = \sqrt{\frac{2}{3}a}$. K tomuto účelu nejdříve dokážeme omezenost množiny A v prvním kvadrantu. Nechť tedy $[x, y] \in A$ splňuje $x \geq 0$, $y \geq 0$. Zřejmě můžeme předpokládat, že $\max\{x, y\} > 0$. Pak máme

$$0 = x^3 + y^3 - 2xy \geq (\max\{x, y\})^3 - 2(\max\{x, y\})^2,$$

neboli

$$2(\max\{x, y\})^2 \geq (\max\{x, y\})^3.$$

To implikuje $\max\{x, y\} \leq 2$. Dostáváme tedy, že funkce f_2 i f_3 jsou omezené. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v $[0, a)$ konvergující k a. Pokud $f_2(x_n) \not\to \sqrt{\frac{2}{3}a}$, existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ a $M \neq \sqrt{\frac{2}{3}a}$ takové, že $f_2(x_{n_k}) \to M$. Limitním přechodem v rovnosti $x^3 + f_2^3(x_{n_k}) - 2xf(x_{n_k}) = 0$ pak máme, že M je nezáporným kořenem funkce f_a různým od $\sqrt{\frac{2}{3}a}$. To je však spor s úvahami v (c). Tedy $f(x_n) \to \sqrt{\frac{2}{3}a}$. Podobně se ukáže, že $\lim_{x\to a_-} f_3(x) = \sqrt{\frac{2}{3}a}$.

Nyní již můžeme učinit závěr. Funkce f_1 je klesající a $\mathcal{H}(f_1) = (-\infty, 0]$, $\mathcal{H}(f_2) = [0, \sqrt{\frac{2}{3}a}]$ a $\mathcal{H}(f_3) = [0, f_3(b)] = [0, \frac{2}{3}2^{\frac{2}{3}}]$. ♣

11.7.30. Příklad. Dokažte, že existuje okolí V bodu $[3, -2, 2]$ takové, že množina $\{[x, y, z] \in V;\ z^3 - xz + y = 0\}$ je grafem funkce $z = z(x, y)$. Vypočtěte tečnou rovinu ke grafu funkce z v bodě $[3, -2, 2]$ a $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}([3, -2])$.

Řešení. Použijeme Větu 11.3.1 pro funkci $F(x, y, z) = z^3 - xz + y$ a bod $[3, -2, 2]$. Zjevně je F třídy $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $F(3, -2, 2) = 0$ a

$$\frac{\partial F}{\partial z}(3, -2, 2) = \left[3z^2 - x\right]_{[x,y,z]=[3,-2,2]} = 9 \neq 0.$$

Předpoklady Věty 11.3.1 jsou tak splněny, a tedy máme existenci požadovaného okolí V. Tedy $z = z(x, y)\colon U \to \mathbb{R}$ je funkce t5ídy C^∞ definovaná na nějakém okolí U obsahujícím bod $[3, -2]$ a splňující $F(x, y, z(x, y)) = 0$ splou s podmínkou $z(3, -2) = 2$.

Derivujme rovnost $z^3 - xz + y = 0$ podle x a podle y na U. Dostáváme tak

$$0 = 3z^2 z_x - z - xz_x \quad \text{a} \quad 3z^2 z_y - xz_y + 1 = 0. \tag{11.28}$$

Po dosazení $[x, y, z] = [3, -2, 2]$ máme $z_x(3, -2) = \frac{2}{9}$ a $z_y(3, -2) = -\frac{1}{9}$. Tedy tečná nadrovina t k funkci z v bodě $[3, -2, 2]$ je

$$t(x, y, z) = 2 + \frac{2}{9}(x - 3) - \frac{1}{9}(y + 2), \quad [x, y, z] \in \mathbb{R}^3.$$

Derivujeme-li druhou rovnici v (11.28) podle y, dostáváme

$$6z(z_y)^2 + 3z^2 z_{yy} - xz_{yy} = 0.$$

Po dosazení $[x, y, z] = [3, -2, 2]$ a $z_y = -\frac{1}{9}$ vyjde $z_{yy}(3, -2) = -\frac{4}{243}$. ♣

11.7.31. Příklad. Nechť je funkce $z = z(x, y)$ třídy C^1 na nějakém okolí U bodu $[a, b]$ a splňuje na něm rovnici $z = x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}$.

(a) Vyjádřete z_x pomocí x, y a $z(x, y)$ na U.
(b) Ukažte, že pro každý bod $[a, b]$, kde $b > 0$, existuje U a $z(x, y)$ s výše uvedenými vlastnostmi.

Řešení. (a) Nechť $[x, y, z]$ splňuje rovnici $z = x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}$. Pokud $y = 0$, $z = x$ a pravá strana rovnosti není definována. Tedy $y \neq 0$. Jelikož $z - x = arctg \frac{y}{z-x}$, je $z - x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Proto

$$y = (z - x)\operatorname{tg}(z - x) > 0$$

(funkce $u \operatorname{tg} u$ je kladná na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Derivujeme-li rovnost $z = x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}$ podle x, dostáváme
$$z_x = 1 - \frac{y(z_x - 1)}{(z-x)^2 + y^2}.$$
Úpravou obdržíme
$$z_x((z-x)^2 + y^2 + y) = (z-x)^2 + y^2 + y,$$
tj. $z_x = 1$ (díky předchozím úvahám víme, že $(z-x)^2 + y^2 + y > 0$).

(b) Nechť $[a,b] \in \mathbb{R}^2$ splňující $b > 0$ je dáno. Uvažujme funkci $f(z) = -z + a + \operatorname{arctg} \frac{b}{z-a}$. Pak f je spojitá na (a,∞) a splňuje $\lim_{z\to a+} f(z) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{z\to\infty} f(z) = -\infty$. Existuje tedy $c \in (a,\infty)$ splňující $f(c) = 0$. Uvažujme nyní bod $[a,b,c]$ a funkci $F(x,y,z) = -z+x+\operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}$. Pak $F(a,b,c) = 0$, F je třídy C^∞ na nějakém okolí $[a,b,c]$ a
$$\frac{\partial F}{\partial z}([a,b,c]) = -1 - \frac{b}{(c-a)^2 + b^2} < 0.$$
Dle Věty 11.3.1 existuje požadované okolí bodu $[a,b,c]$ a příslušná funkce z. ♣

11.7.32. Příklad. Ukažte, že existují funkce $u = u(x,y)$ a $v(x,u)$ definované na nějakém okolí U bodu $[1,2]$, které jsou na U třídy C^1, splňují $u(1,2) = 0$, $v(1,2) = 0$ a platí pro ně rovnice
$$xe^{u+v} + 2uv = 1, \quad ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x.$$
Dále vypočtěte $u'(1,2)$ a $v'(1,2)$.

Řešení. Uvažujme bod $\boldsymbol{a} = [1,2,0,0]$ a funkci
$$F\colon [x,y,u,v] \mapsto \left[xe^{u+v} + 2uv - 2, ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} - 2x\right].$$
Pak $F(\boldsymbol{a}) = 0$, F je třídy C^∞ na nějakém okolí $\boldsymbol{a}$ a platí
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(\boldsymbol{a}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(\boldsymbol{a}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} xe^{u+v} + 2v & xe^{u+v} + 2u \\ ye^{u-v} - \frac{1}{1+v} & -ye^{u-v} + \frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix}_{[x,y,u,v]=[1,2,0,0]}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3.$$
Jsou tak splněny předpoklady Věty 11.3.3. Existuje proto okolí U obsahující $[1,2]$ a V obsahující $[0,0]$ takové, že pro každé $\boldsymbol{x} \in U$ existuje právě jedno $\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x}) \in V$ splňující $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$. Označíme-li složky φ jako $u(x,y)$ a $v(x,y)$, dostáváme požadované funkce třídy C^∞ na U.

Derivujeme-li nyní vztahy

$$\begin{aligned} xe^{u+v} + 2uv - 2 &= 0 \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} - 2x &= 0 \end{aligned} \tag{11.29}$$

podle x, dostáváme

$$\begin{aligned} e^{u+v} + xe^{u+v}(u_x + v_x) + 2u_x v + 2uv_x &= 0 \\ ye^{u-v}(u_x - v_x) - \frac{1}{(1+v)^2}\,(u_x(1+v) - uv_x) &= 0. \end{aligned}$$

Po dosazení $[x, y, u, v] = [1, 2, 0, 0]$ máme systém

$$\begin{aligned} u_x + v_x &= -1 \\ u_x - 2v_x &= 2, \end{aligned}$$

jehož řešením je $u_x(1,2) = 0$ a $v_x(1,2) = -1$.
Zderivováním (11.29) podle y dostaneme

$$\begin{aligned} xe^{u+v}(u_y + v_y) + 2u_y v + 2uv_y &= 0 \\ e^{u-v} + ye^{u-v}(u_y - v_y) - \frac{1}{(1+v)^2}\big(u_y(1+v) - uv_y\big) &= 0. \end{aligned}$$

Po dosazení máme rovnice

$$\begin{aligned} u_y + v_y &=0 \\ y_y - 2v_y &= -1. \end{aligned}$$

Řešení je $u_y(1,2) = -\frac{1}{3}$ a $v_y(1,2) = \frac{1}{3}$.
Proto $u'(1,2) = [0, -\frac{1}{3}]$ a $v'(1,2) = [-1, \frac{1}{3}]$. ♣

11.7.33. Příklad. Dokažte, že existují funkce $z(x, y)$, $t(x, y)$, které jsou třídy C^∞ na nějakém okolí U obsahujícím $[1, -1]$ a splňují rovnice

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 = 0, \quad x + y + z - t - 2 = 0,$$

spolu se vztahy $z(1,-1) = 2$, $t(1,-1) = 0$.
Spočtěte $z''(1,-1)$.

Řešení. Uvažujme bod $\boldsymbol{a} = [1, -1, 2, 0]$ a funkci

$$F: [x, y, z, t] \mapsto \left[x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3, x + y + z - t - 2\right].$$

Pak $F(\boldsymbol{a}) = 0$, F je třídy C^∞ na$\mathbb{R}^4$ a platí

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial F_1}{\partial t}(\boldsymbol{a}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial z}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial F_2}{\partial t}(\boldsymbol{a}) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -z & -3t^2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}_{[x,y,z,t]=[1,-1,2,0]} \\ &= \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2.\end{aligned}$$

Jsou tak splněny předpoklady Věty 11.3.3. Existuje proto okolí U obsahující $[1,-1]$ a V obsahující $[2,0]$ takové, že pro každé $\boldsymbol{x} \in U$ existuje právě jedno $\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x}) \in V$ splňující $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$. Označíme-li složky φ jako $z(x,y)$ a $t(x,y)$, dostáváme požadované funkce třídy C^∞ na U.

Derivujeme-li nyní rovnice

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 &= 0 \\ x + y + z - t - 2 &= 0 \end{aligned}$$

podle x, máme

$$\begin{aligned} 2x - zz_x - 3t^2 t_x &= 0 \\ 1 + z_x - t_x &= 0. \end{aligned} \tag{11.30}$$

Po dosazení $[x,y,z,t] = [1,-1,2,0]$ dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} -2z_z &= 0 \\ z_x - t_x &= -1, \end{aligned}$$

jejímž řešením je $z_x(1,-1) = 1$ a $t_x(1,-1) = 2$.

Zderivováním podle y dostáváme

$$\begin{aligned} 2y - zz_y - 3t^2 t_y &= 0 \\ 1 + z_y - t_y &= 0. \end{aligned}$$

Po dosazení obdržíme $z_y(1,-1) = -1$, $t_y(1,-1) = 0$.

Obdržené vztahy znovu zderivujeme podle x, y a (11.30) podle y a dostaneme

$$\begin{aligned} 2 - (z_x)^2 - zz_{xx} - 6t(t_x)^2 - 3t^2 t_{xx} &= 0 \\ z_{xx} - t_{xx} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 - (z_y)^2 - zz_{yy} - 6t(t_y)^2 - 3t^2 t_{yy} &= 0 \\ z_{yy} - t_{yy} &= 0, \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} -z_y z_x - zz_{xy} - 6tt_y t_x - 3t^2 t_{xy} &= 0 \\ z_{xy} - t_{xy} &= 0. \end{aligned}$$

Po dosazení vyjde $z_{xx}(1,-1) = t_{xx}(1,-1) = \frac{1}{2}$, $z_{yy}(1,-1) = t_{yy}(1,-1) = \frac{1}{2}$ a $z_{xy}(1,-1) = t_{xy}(1,-1) = \frac{1}{2}$. Tedy

$$z''(1,-1)\colon [h_1,h_2] \mapsto \frac{1}{2}h_1^2 + h_1h_2 + \frac{1}{2}h_2^2.$$

♣

11.7.34. Příklad. Ukažte, že rovnice

$$x = u + v^2, \quad y = u^2 - v^3$$

definují na jistém okolí bodu $[3,3]$ funkce $u(x,y)$, $v(x,y)$ třídy C^∞, které splňují $u(3,3) = 2$, $v(3,3) = 1$. Spočtět $z_{xy}(3,3)$, pokud $z = 2uv$.

Řešení. Uvažujme bod $\boldsymbol{a} = [3,3,2,1]$ a funkci

$$F\colon [x,y,u,v] \mapsto \left[x - y - v^2, y - u^2 + v^3\right].$$

Pak $F(\boldsymbol{a}) = 0$, F je třídy C^∞ na$\mathbb{R}^4$ a platí

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(\boldsymbol{a}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(\boldsymbol{a}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2v \\ -2u & 3v^2 \end{vmatrix}_{[x,y,u,v]=[3,3,2,1]}$$
$$= \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -11.$$

Jsou tak splněny předpoklady Věty 11.3.3. Existuje proto okolí U obsahující $[3,3]$ a V obsahující $[2,1]$ takové, že pro každé $\boldsymbol{x} \in U$ existuje právě jedno $\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x}) \in V$ splňující $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$. Označíme-li složky φ jako $u(x,y)$ a $v(x,y)$, dostáváme požadované funkce třídy C^∞ na U.

Vzhledem k tomu, že

$$z_{xy} = 2\left(u_{xy}v + u_xv_y + u_yv_x + uv_{xy}\right), \tag{11.31}$$

potřebujeme vypočítat jednotlivé derivace u a v. K tomuto účelu derivujeme rovnice

$$u + v^2 = x$$
$$u^2 - v^3 = y$$

podle x a podle y. Dostaneme tak systémy

$$u_x + 2vv_x = 1$$
$$2uu_x - 3v^2v_x = 0$$

a

$$u_y + 2vv_y = 0$$
$$2uu_y - 3v^2v_y = 1.$$

Po dosazení máme

$$u_x(3,3) = \frac{3}{11}, v_x(3,3) = \frac{4}{11}, u_y(3,3) = \frac{2}{11}, v_y(3,3) = -\frac{1}{11}.$$

Dalším derivováním obdržíme soustavu

$$u_{yx} + 2v_x v_y + 2v v_{yx} = 0$$
$$2u_x u_y + 2u u_{yx} - 6v v_x v_y - 3v^2 v_{yx} = 0,$$

jejímž řešením po dosazení je

$$u_{yx}(3,3) = \frac{224}{11^3}, \quad v_{yx}(3,3) = -\frac{68}{11^3}.$$

Díky záměnnosti parciálních derivací můžeme dosadit do (11.31) a obdržet $z_{xy}(3,3) = \frac{26}{121}$. ♣

11.7.35. Příklad. Nechť C^1-funkce $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ splňuje rovnici

$$xu_y - yu_x = 0.$$

Zjistěte, jakou rovnici splňuje na $\mathbb{R}^2$ funkce $u^*(r,\alpha) = u(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$, $(r,\alpha) \in \mathbb{R}^2$. Výsledek použijte k nalezení nějakého nekonstantního řešení původní rovnice.

Řešení. Pomocí Věty 11.1.40 máme

$$u_r^* = u_x \cos\alpha + u_y \sin\alpha$$
$$u_\alpha^* = u_x(-r\sin\alpha) + u_y(r\cos\alpha).$$

Vyjádříme u_x a u_y a dostáváme

$$-ru_x = -r\cos\alpha u_r^* + \sin\alpha u_\alpha^*$$
$$ru_y = r\sin\alpha u_r^* + \cos\alpha u_\alpha^*.$$

Pro $r \neq 0$ tak platí

$$-u_x = -\cos\alpha u_r^* + \frac{1}{r}\sin\alpha u_\alpha^*$$
$$u_y = \sin\alpha u_r^* + \frac{1}{r}\cos\alpha u_\alpha^*.$$

Tedy pro $r \neq 0$ platí

$$0 = xu_y - yu_x = r\cos\alpha u_x - r\sin\alpha u_y = ru_\alpha^*.$$

Tedy $u_\alpha^* = 0$ na $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$. Jelikož je u^* třídy C^1, plat9 tato rovnost na $\mathbb{R}^2$.

Nyní stačí zvolit funkci nezvislou na α, například $u^*(r,\alpha) = r^2$. Pak $u(x,y) = x^2 + y^2$, $[x,y] \in \mathbb{R}^2$, je nekonstantní řešení zadané rovnice.

♣

11.7.36. Příklad. Nechť C^2-funkce $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ splňuje Laplaceovu rovnici

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Zjistěte, jakou rovnici splňuje funkce $u^*(r,\alpha) = u(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ na množině $(0,\infty)\times\mathbb{R}$.

Řešení. Z Příkladu 11.7.35 víme, že

$$\begin{aligned}
\partial_1 u(r\cos\alpha, r\sin\alpha) &= \cos\alpha\, u_r^*(r,\alpha) - \frac{1}{r}\sin\alpha\, u_\alpha^*(r,\alpha)\\
\partial_2 u(r\cos\alpha, r\sin\alpha) &= \sin\alpha\, u_r^*(r,\alpha) + \frac{1}{r}\cos\alpha\, u_\alpha^*(r,\alpha).
\end{aligned}$$

Označíme $f(x,y) = \partial_1 u(x,y)$ a

$$f^*(r,\alpha) = f(r\cos\alpha, r\sin\alpha) = \partial_1 u(r\cos\alpha, r\sin\alpha).$$

Dosazením do přechozích vztahů za $u = f$ dostáváme

$$\begin{aligned}
&\partial_{11}u(r\cos\alpha, r\sin\alpha) = \partial_1\left(\partial_1 u(r\cos\alpha, r\sin\alpha)\right) = \partial_1\left(f(r\cos\alpha, r\sin\alpha)\right)\\
&\quad= \frac{\partial f^*}{\partial r}(r,\alpha)\cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{r}\frac{\partial f^*}{\partial\alpha}(r,\alpha)\\
&\quad= \frac{\partial}{\partial r}\left(f(r\cos\alpha, r\sin\alpha)\right)\cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(f(r\cos\alpha, r\sin\alpha)\right)\\
&\quad= \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\alpha\, u_r^*(r,\alpha) - \frac{\sin\alpha}{r}u_\alpha^*(r,\alpha)\right)\\
&\quad- \frac{\sin\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\cos\alpha\, u_r^*(r,\alpha) - \frac{\sin\alpha}{r}u_\alpha^*(r,\alpha)\right)\\
&\quad= \cos\alpha\left(\cos\alpha\, u_{rr}^* + \frac{\sin\alpha}{r^2}u_\alpha^* - \frac{\sin\alpha}{r}u_{\alpha r}^*\right)\\
&\quad- \frac{\sin\alpha}{r}\left(u_{r\alpha}^*\cos\alpha - \sin\alpha\, u_r^* - \frac{\sin\alpha}{r}u_{\alpha\alpha}^* - \frac{\cos\alpha}{r}u_\alpha^*\right)\\
&\quad= u_{rr}^*\cos^2\alpha - \frac{2}{r}u_{r\alpha}^*\cos\alpha\sin\alpha + \frac{1}{r^2}u_{\alpha\alpha}^*\sin^2\alpha\\
&\quad+ \frac{1}{r}u_r^*\sin^2\alpha + \frac{2}{r^2}u_\alpha^*\sin\alpha\cos\alpha.
\end{aligned}$$

Obdobně vyjde

$$\begin{aligned}
\partial_{22}u(r\cos\alpha, r\sin\alpha) &= u_{rr}^*\sin^2\alpha + \frac{2}{r}u_{r\alpha}^*\sin\alpha\cos\alpha + \frac{1}{r^2}u_{\alpha\alpha}^*\cos^2\alpha\\
&\quad- \frac{2}{r^2}u_\alpha^*\sin\alpha\cos\alpha + \frac{1}{r}u_r^*\cos^2\alpha.
\end{aligned}$$

Tedy dostáváme rovnost

$$\begin{aligned}0 &= \partial_{11}u(r\cos\alpha, r\sin\alpha) + \partial_{22}u(r\cos\alpha, r\sin\alpha)\\ &= u^*_{rr} + \frac{1}{r^2}u^*_{\alpha\alpha} + \frac{1}{r}u^*_r.\end{aligned}$$

♣

11.7.37. Příklad.

11.7.38. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M, pokud

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2, \quad M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ |x| + |y| \le 1\right\}.$$

Řešení. Množina M je zjevně omezená a uzavřená, tj. kompaktní (Věta 10.5.8). Funkce f je třídy C^∞ na R^2, a tedy nabývá na M svého minima a maxima. Máme $\operatorname{Int} M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ |x| + |y| < 1\right\}$. Bod podezřelý z extrému ležící v $\operatorname{Int} M$ musí splňovat $\nabla f(x,y) = [0,0]$ (viz Věta 11.4.1), tj.

$$[2x - y, 2y - x] = [0,0].$$

To nastává právě tehdy, když $[x,y] = [0,0]$.

Další body podezřelé z extrému budeme hledat na $\partial M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ |x| + |y| = 1\right\}$. Hranici M můžeme popsat pomocí čtyř úseček, například

$$M_1 = \{[x, 1-x];\ x \in [0,1]\}.$$

Pak funkce $g(x) = f(x, 1-x)$ má tvar

$$g(x) = x^2 - x(1-x) + (1-x)^2 = 3x^2 - 3x + 1, \quad x \in [0,1],$$

která má body podezřelé z extrému v krajních bodech intervalu $[0,1]$ a dále v bodě, kde $g'(x) = 0$, tj. v bodě $\frac{1}{2}$. Celkově dostáváme $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $[1,0]$, $[0,1]$ jako body, kde f může nabývat extrému na M.

Podobným způsobem popíšeme zbývající hrany ∂M a dostaneme další body

$$[-1,0], [0,-1], [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}].$$

Porovnáním hodnot funkce f ve všech podezřelých bodech zjistíme, že $\min f(M) = f(0,0) = 0$ a

$$\max f(M) = f(1,0) = f(0,1) = f(-1,0) = f(0,-1) = 1.$$

♣

11.7.39. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M, pokud $a > 0$, $b > 0$ a

$$f(x,y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, \quad M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 1\right\}.$$

Řešení. Množina M je zjevně kompaktní, takže C^∞ funkce f na ní nabývá svých extrémů. Jelikož $\nabla f(x,y) = [\frac{1}{a}, \frac{1}{b}]$, žádný bod podezřelý z extrému neleží v $\operatorname{Int} M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2<1\}$. Parametrizujeme ∂M jako dvě půlkružnice

$$M_1 = \left\{[x, \sqrt{1-x^2}];\ x \in [0,1]\right\}, \quad M_2 = \left\{[x, -\sqrt{1-x^2}];\ x \in [0,1]\right\}.$$

Pak funkce $f|_{M_1}$ má tvar

$$g(x) = f(x, \sqrt{1-x^2}) = \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{b}, \quad x \in [0,1].$$

Její derivace je rovna

$$g'(x) = \frac{1}{a} - \frac{x}{b\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (0,1).$$

Tedy pokud $g'(x) = 0$, pak $x = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Máme tedy podezřelé body $[\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}]$. Zahrneme ještě do úvahy krajní body $[1,0]$ a $[-1,0]$.

Při vyšetřování f na M_2 nám vyjdou body $[\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}]$. Porovnáním hodnot ve všech podezřelých bodem zjistíme, že

$$\min f(M) = f\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab},$$
$$\max f(M) = f\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}.$$

♣

11.7.40. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M, pokud

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z, \quad M = \mathbb{R}^3.$$

Řešení. Množina M není omezená. Vzhledem k tomu, že

$$f(x,y,z) = (x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2-14, \quad [x,y,z] \in \mathbb{R}^3,$$

nabývá f svého minima $\min f(M) = -14$ v bodě $[-1,-2,3]$. Jelikož

$$\lim_{n\to\infty} f(n,-2,3) = \infty,$$

supremum f na M je rovno ∞. ♣

11.7.41. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M, pokud

$$f(x,y,z) = (x+y+z)e^{-(x+2y+3z)}, \quad M = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 x>0, y>0, z>0\right\}.$$

Řešení. Funkce f je třídy C^∞ na $\mathbb{R}^3$ a $\overline{M} = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. Ze spojitosti f na $\mathbb{R}^3$ plyne rovnost $\sup f(M) = \sup f(\overline{M})$ a $\inf f(M) = \inf f(\overline{M})$. Vyšetříme nejprve body podezřelé z extrému, které leží v $\operatorname{Int} \overline{M} = M$. V Těchto bodech musí být $\nabla f(x,y,z) = \mathbf{0}$, tj.

$$e^{-(x+2y+3z)}\,[1-(x+y+z), 1-2(x+y+z), 1-3(x+y+z)] = \mathbf{0}.$$

Tato soustava však nemá řešení, a tedy v M žádný bod podezřelý z extrému neleží.

Uvažujme nyní jednu ze „stěn“ tvořící ∂M, například

$$M_1 = \{[x,y,0];\ x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Pak máme funkci $g(x,y) = f(x,y,0) = (x+y)e^{-(x+2y)}$ na $N = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0, y \geq 0\}$. Jako výše dostaneme, že g nemá v $\operatorname{Int} N$ podezřelý bod. Musíme tedy uvažovat $\partial N = N_1 \cup N_2$, kde

$$N_1 = \{[x,0];\ x \geq 0\}, \quad N_2 = \{[0,y];\ y \geq 0\}.$$

Funkce $h(x) = g(x,0) = xe^{-x}$, $x \in [0,\infty)$, má bod podezřelý z extrému v 0 a v bodě, kde $h'(x) = e^{-x}(1-x) = 0$, tj. v $x = 1$. Dostáváme tak body

$$[0,0,0], [1,0,0].$$

V množině N_2 dostáváme další podezřelý bod $[0, \frac{1}{2}, 0]$. Tím máme vyřešenu otázku množiny N.

Zbývající stěny tvořící ∂M poskytnou bod $[0, 0, \frac{1}{3}]$.

Funkce f je zjevně nezáporná na $\overline{M}$, tedy

$$\in f(M) = \min f(\overline{M}) = f(0,0,0) = 0.$$

Zbývá dokázat, že

$$\sup f(M) = \max f(\overline{M}) = f(1,0,0) = e^{-1}.$$

K tomuto účelu uvažujme odhad

$$f(x,y,z) \leq \frac{x+y+z}{e^{x+y+z}}, \quad [x,y,z] \in \overline{M}. \tag{11.32}$$

Jelikož $\lim_{r\to\infty} \frac{r}{e^r} = 0$, existuje $r > 1$ takové, že $\frac{r}{e^r} < e^{-1}$. Uvažujme množinu

$$K = \{[x,y,z] \in \overline{M};\ x+y+z \leq r\}.$$

Pak K je omezená a uzavřená, tedy kompaktní. Funkce f tedy nabývá na K svého maxima, přičemž z výpočtů výše a (11.32) plyne, že $\max f(K) = f(1,0,0)$. Díky (11.32) dále máme, že $\max f(K) = \max f(\overline{A})$. Tím je důkaz dokončen. ♣

11.7.42. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M, pokud

$$f(x, y, z) = (x + y)^2 + (x - y)^2 + z, \quad M = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1].$$

Řešení. Množina M je zjevně kompaktní a f je třídy C^∞ na $\mathbb{R}^3$. Proto nabývá na M svých extrémů. Pokud $x, y, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ splňují $z_1 < z_2$, pak $f(x, y, z_1) < f(x, y, z_2)$. Tedy f nabývá své maximum na $M_1 = [-1, 1] \times [-1, 1] \times \{1\}$ a minimum na $M_2 = [-1, 1] \times [-1, 1] \times \{-1\}$.

K určení maxima tak vyšetřujeme maximum funkce $g(x, y) = (x + y)^2 + (x - y)^2 + 1 = 2x^2 + 2y^2 + 1$ na množině $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Jelikož $g(x, y) = 2 \operatorname{dist}([x, y], 0) + 1$, vidíme, že body v $[-1, 1] \times [-1, 1]$ nejvzdálenější od počátku jsou $[1, 1], [-1, 1], [-1, -1], [1, -1]$.

Podobně postupujeme přř hledání minima a dospějeme k bodu $[0, 0]$. Tedy

$$\begin{aligned} \min f(M) &= f(0, 0, -1) = -1, \\ \max f(M) &= f(1, 1, 1) = f(1, -1, 1) = f(-1, -1, 1) = f(-1, 1, 1) = 5. \end{aligned}$$

♣

11.7.43. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M, pokud

$$f(x, y) = x + y, \quad M = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \geq 0, y \geq 0\right\}.$$

Řešení. Množina M je zjevně uzavřená. Díky Příkladu 11.7.29 víme, že M je omezená. Tedy je M kompaktní a $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ funkce f na ní nabývá svých extrémů. Použijeme Větu 11.4.6 pro otevřenou množinu $G = \mathbb{R}^2$, vazební funkci $g(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$ a funkci f. Funkce g má gradient

$$\nabla g(x, y) = [3x^2 - 2y, 3y^2 - 2x],$$

který je roven $\mathbf{0}$ právě tehdy, když $[x, y] = [0, 0]$. Máme tedy podezřelý bod z extrému prvního druhu.

Jelikož $\nabla f(x, y) = [1, 1]$, dostáváme systém rovnic

$$\begin{aligned} 1 + \lambda(3x^2 - 2y) &= 0 \\ 1 + \lambda(3y^2 - 2x) &= 0 \\ x^3 + y^3 - 2xy &= 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice vidíme, že $\lambda \neq 0$. Odečtením druhé od první rovnice tak dostáváme

$$3x^2 - 3y^2 = 2y - 2x,$$

tj.

$$(x - y)\,(3(x + y) + 2) = 0.$$

Jelikož uvažujeme pouze body v prvním kvadrantu, plyne odtud vztah $y = x$. Po dosazení do třetí rovnice máme

$$x = y = 0 \quad \text{nebo} \quad x = y = 1.$$

Tedy

$$\max f(M) = f(1,1) = 2, \quad \min f(M) = f(0,0) = 0.$$

♣

11.7.44. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M, pokud

$$f(x,y) = xyz, \quad M = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\right\}.$$

Řešení. Množina M je zjevně kompaktní a f je třídy $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Použijeme Větu 11.4.6 pro funkci f a vazební funkce $g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ a $g_2(x,y,z) = x + y + z$. Jelikož

$$\nabla g_1(x,y,z) = 2[x,y,z], \quad \nabla g_2(x,y,z) = [1,1,1],$$

jsou vektory $[x,y,z]$ a $[1,1,1]$ lineárně závislé právě tehdy, když $x = y = z$. Takový bod však splňuje rovnice $g_1(x,x,x) = 3x^2 - 1 = 0$ a $g_2(x,x,x) = 3x = 0$, což nelze.

Jelikož $\nabla f(x,y,z) = [yz, xz, xy]$, řešíme tuto soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}
yz + \lambda_1 2x + \lambda_2 &= 0\\
xz + \lambda_1 2y + \lambda_2 &= 0\\
xy + \lambda_1 2z + \lambda_2 &= 0\\
x^2 + y^2 + z^2 &= 1\\
x + y + z &= 0.
\end{aligned}$$

Odečtením první rovnice od druhé dostáváme

$$-z(x-y) + 2\lambda_1(x-y) = 0.$$

Odtud plyne, že musí být $x = y$ nebo $z = 2\lambda_1$. Podobně odečtením třetí rovnice od druhé obdržíme

$$-x(y-z) + 2\lambda_1(y-z) = 0.$$

Toto dává $x = 2\lambda_1$ nebo $y = z$. Dostáváme proto, že musí být buď $x = y$ nebo $y = z$ nebo $x = z$. Podívejme se nejprve na případ $x = y$. Z páté rovnice máme $z = -2x$, což po dosazení do čtvrté rovnice dá $6x^2 = 1$. K bodům $x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ dopočítáme y a z. Případy $y = z$ a $z = x$ pak vyřešíme obdobně. Obdržíme tak tyto podezřelé body:

$$\left[\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right], \left[\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right], \left[\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right],$$
$$\left[\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right], \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right], \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right].$$

Výpočtem hodnot f v jednotlivých bodech zjistíme, že f nabývá maxima v bodech z prvního řádku a minima v bodech druhého řádku. ♣

11.7.45. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M, pokud

$$f(x,y,z) = x^2+2xz+y^2+z, \quad M = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1, x = y^2+z^2\right\}.$$

Řešení. Množina M je zjevně kompaktní a f je třídy $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Nabývá tak na M svých extrémů. Povšimneme si, že bod $[x,y,z] \in M$ splňuje $x \geq 0$ a zároveň pro něj platí $x^2 + x - 1 = 0$, tj. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$. Označme $a = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$. Pak lze M popsat jako

$$\left\{[a,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ a = y^2+z^2\right\}.$$

Tedy extremalizujeme funkci

$$g(y,z) = f(a,y,z) = a^2 + 2az + y^2 + z$$

na kružnici

$$N = \left\{[y,z] \in \mathbb{R}^2;\ a = y^2+z^2\right\}.$$

Na tuto úlohu použijeme Větu 11.4.6. Vazební podmínka $g(y,z) = y^2 + z^2 - a$ má gradient roven $\nabla g(y,z) = [2y, 2z]$, který je roven $\mathbf{0}$ pouze v počátku, což však není prvek N. Musíme tedy vyřešit soustavu

$$\begin{aligned} 2y + \lambda 2y &= 0 \\ 2a + 1 + \lambda 2z &= 0 \\ y^2 + z^2 &= a. \end{aligned}$$

Z první rovnice odvodíme $\lambda = -1$ nebo $y = 0$. Pokud $y = 0$, z třetí rovnice máme $z = \pm\sqrt{a}$. Pokud $\lambda = -1$, druhá rovnice implikuje $z = a + \frac{1}{2}$. Dosadíme-li do třetí rovnice, máme

$$y^2 = a - z^2 = a - \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 = -a^2 - \frac{1}{4} < 0,$$

což je nemožné.

Dostali jsem tedy dva podezřelé body

$$[a, 0, \sqrt{a}], \quad [a, 0, -\sqrt{a}].$$

Dosazením zjistíme, že v prvním bodě nabývá f maxima a v druhém minima. ♣

11.7.46. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M, pokud

$$f(x, y, z) = 10z+x-y, \quad M = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1, x + y \ge 0\right\}.$$

Řešení. Množima M je zjevně kompaktní a f je třídy $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Rozdělíme M na množiny

$$\begin{aligned}
M_1 &= \operatorname{Int} M = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 < 1, x + y > 0\right\},\\
M_2 &= \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y > 0\right\},\\
M_3 &= \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 < 1, x + y = 0\right\},\\
M_4 &= \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y = 0\right\}.
\end{aligned}$$

Jelikož $\nabla f = [1, -1, 10]$, nemá dle Věty 11.4.1 funkce f v M_1 bod podezřelý z extrému.

Použijeme nyní Větu 11.4.6 pro

$$G = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x + y \ge 0\right\}$$

a vazební funkci $g(x, y, z) = x^2+y^2+z^2-1$. Jelikož $\nabla g(z, y, z) = [2x, 2y, 2z]$, je ∇g nenulový na množině $\{\boldsymbol{x} \in G;\ g(\boldsymbol{x}) = 0\}$. Musíme tak vyřešit soustavu

$$\begin{aligned}
1 - 2\lambda x &= 0\\
-1 - 2\lambda y &= 0\\
10 - 2\lambda z &= 0\\
x^2 + y^2 + z^2 &= 1.
\end{aligned}$$

Zjevně platí $\lambda \neq 0$. Dostáváme tak

$$x = \frac{1}{2\lambda}, \quad y = \frac{-1}{2\lambda}, \quad z = \frac{5}{\lambda}.$$

Tedy

$$x + y = 0,$$

což znamená, že $[x, y, z] \notin G$. Nemáme tak žádný podezřelý bod ležící v množině M_2.

Uvažujme nyní množinu M_3. Pro body $[x, y, z] \in M_3$ platí $y = -x$, tj. $2x^2 + z^2 < 1$. Extremalizujeme tak funkci

$$h(x, z) = 10z + 2x$$

na množině
$$N = \{[x,z] \in \mathbb{R}^2;\ 2x^2 + z^2 < 1\}.$$
Jelikož $\nabla h = [2, 10]$, nemá h v N bod podezřelý z extrému.

Zbývá nám tak množina M_4. Použijeme-li rovnost $y = -x$, dostáváme extremalizaci funkce
$$h(x,z) = 10z + 2x$$
na množině
$$N = \{[x,z] \in \mathbb{R}^2;\ 2x^2 + z^2 = 1\}.$$
Evidentně neexistují v N podezřelé body prvního druhu. Řešíme tak soustavu
$$\begin{aligned} 2 - \lambda 4x &= 0 \\ 10 - \lambda 2z &= 0 \\ 2x^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$
Z první a druhé rovnice máme $\lambda \neq 0$, a tedy $x = \frac{1}{2\lambda}$, $y = \frac{5}{\lambda}$. Po dosazení do třetí rovnice dostáváme
$$\lambda^2 = \frac{51}{2}.$$
Máme tak body
$$\left[\frac{1}{\sqrt{102}}, -\frac{1}{\sqrt{102}}, \frac{10}{\sqrt{102}}\right], \quad \left[-\frac{1}{\sqrt{102}}, \frac{1}{\sqrt{102}}, -\frac{10}{\sqrt{102}}\right].$$
V prvním z nich má f maximum o hodnotě $\sqrt{102}$, v druhém minimum o hodnotě $-\sqrt{102}$. ♣

11.7.47. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M, pokud
$$f(x,y) = y, \quad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ (x^2+y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0\}.$$

Řešení. Množina M je zjevně uzavřená a f třídy $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Množina M je též omezená. Vskutku, uvažujme libovolné $\boldsymbol{a} = [x,y] \in M$. Zapišme ho v polárních souřadnicích jako $[r\cos\alpha, r\sin\alpha]$, kde $r \geq 0$ a $\alpha \in [0, 2\pi)$. Pak $\boldsymbol{a}$ splňuje rovnici
$$0 = r^4 - 2r^2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha).$$
Uvažujeme-li $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, máme rovnost
$$r^2 = 2\cos(2\alpha).$$
Tedy $r \leq \sqrt{2}$. Proto je množina M obsažena v kruhu o středu $\boldsymbol{0}$ a poloměru $\sqrt{2}$.

Funkce f tak nabývá na M svých extrémů. Pro vazební funkci $g(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$ platí

$$\nabla g(x, y) = \left[4x(x^2 + y^2 - 1), 4y(x^2 + y^2 + 1)\right] = \mathbf{0}$$

právě tehdy, když $[x, y] = [0, 0]$.

Dále řešíme soustavu

$$\begin{aligned} \lambda 4x(x^2 + y^2 - 1) &= 0 \\ 1 - \lambda 4y(x^2 + y^2 + 1) &= 0 \\ (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) &= 0. \end{aligned}$$

První dvě rovnice implikují $\lambda \neq 0$. Pokud $x = 0$, pak ze třetí rovnice plyne $y = 0$. Pak však neplatí druhá rovnice. Tedy $x \neq 0$, což dává $x^2 + y^2 = 1$. Ze třetí rovnice tak máme $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$, což spolu s rovností $x^2 + y^2 = 1$ dává body

$$\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right], \left[\frac{-\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right].$$

Tedy

$$\min f(M) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

a

$$\max f(M) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

♣

11.7.48. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M, pokud

$$f(x, y) = x^2 + y, \quad M = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ 4y^3 - 4y + x^2 = 0, y \geq 0\right\}.$$

Řešení. Nejprve ověříme, že (zřejmě) uzavřená množina M je omezená. Nechť $\{[x_n, y_n]\}$ je libovolná posloupnost bodů v M splňující $\|[x_n, y_n]\| \to \infty$. Pokud $y_{n_k} \to \infty$ pro nějakou podposloupnost $\{y_{n_k}\}$ (připomeňme, že $y_n \geq 0$ dle definice M), platí

$$0 = x_{n_k}^2 + 4y_{n_k}(y_{n_k}^2 - 1) \geq 4y_{n_k}(y_{n_k}^2 - 1) \to \infty,$$

což je zřejmý spor. Tedy $\{y_n\}$ je omezená posloupnost. Pak je ale i $\{x_n\}$ omezená, neboť v případě nějaké podposloupnosti $\{x_{n_k}\}$ splňující $|x_{n_k}| \to \infty$ máme

$$0 = x_{n_k}^2 + 4y_{n_k}(y_{n_k}^2 - 1) \to \infty,$$

tedy opět spor. Proto je M omezená množina.

Rozdělíme M na množiny

$$M_1 = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ 4y^3 - 4y + x^2 = 0, y > 0\right\},$$
$$M_2 = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ 4y^3 - 4y + x^2 = 0, y = 0\right\} = \{[0, 0]\}.$$

Pro množinu M_1 použijeme Větu 11.4.6, kde

$$G = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ y > 0\right\}.$$

Snadno zjistíme, že podezřelé body prvního druhu neexistují. Řešíme tak soustavu

$$2x + \lambda 2x = 0$$
$$1 + \lambda(12y^2 - 4) = 0$$
$$4y^3 - 4y + x^2 = 0.$$

Pokud $x = 0$, máme z třetí rovnice $y = 1$, tj. bod $[0, 1]$. Pokud $x \neq 0$, platí $\lambda = -1$. Tedy druhá rovnice dává $y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$. Z třetí rovnice pak dopočteme body

$$\left[\sqrt{\frac{7}{6}\sqrt{\frac{5}{3}}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}\right], \quad \left[-\sqrt{\frac{7}{6}\sqrt{\frac{5}{3}}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}\right].$$

Maximum nabývá f v těchto bodech, minimum pak v $[0, 0]$.

♣

11.7.49. Příklad. Nalezněte $C^2(\mathbb{R}^2)$-funkci $z(x, y)$ splňující

$$\frac{\partial z}{\partial x \partial y} = x + y, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2,$$

přičemž pro ni platí $z(x, 0) = x$ a $z(0, y) = y^2$.

Řešení. Funkce

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} + yx + \varphi_0(y),$$

kde φ_0 je spojitě diferencovatelná funkce, zjevně splňuje $u_x = x + y$. Tedy

$$z(x, y) = \frac{x^2 y}{2} + \frac{y^2 x}{2} + \varphi(y) + \psi(x),$$

kde φ je primitivní k φ_0, $\varphi(0) = 0$ a ψ je třídy C^1, splňuje $z_y = u$. Tedy $z_{yx} = x + y$.

Jelikož

$$x = z(x, 0) = \psi(x)$$

a
$$y^2 = z(0, y) = \varphi(y),$$
máme
$$z(x, y) = \frac{x^2 y}{2} + \frac{y^2 x}{2} + y^2 + x$$

♣

11.7.50. Příklad. Rozviňte funkci $f(x, y) = x^y$ do Taylorova polynomu řádu 2 na okolí bodu $[1, 1]$.

Řešení. Počítejme pro $[x, y] \in (0, \infty)^2$:
$$f_x = yx^{y-1}, \quad f_y = x^y \log x$$
a dále
$$f_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, \; f_{xy} = (1 + y \log x)x^{y-1}, \; f_{yy} = x^y \log^2 x.$$
Tedy $f(1, 1) = 1$, $\nabla f(1, 1) = [1, 0]$ a
$$f''(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Proto
$$T_2^{f,[1,1]}(x, y) = 1 + (x - 1) + (x - 1)(y - 1).$$

♣

11.7.51. Příklad. Vyšetřete extrémy funkce
$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \log x - 10 \log y, \quad [x, y] \in (0, \infty)^2.$$

Řešení. Máme
$$\nabla f(x, y) = \left[2x + y - \frac{4}{x}, 2y + x - \frac{10}{y}\right].$$
Soustavu
$$2x + y = \frac{4}{x}$$
$$x + 2y = \frac{10}{y}$$
upravíme na soustavu
$$2x^2 + yx = 4$$
$$xy + 2y^2 = 10.$$
Odečtením rovnic dostáváme $y^2 - x^2 = 3$, tj. $y = \sqrt{3 + x^2}$. Po dosazení do druhé rovnice máme
$$2(3 + x^2) + x\sqrt{3 + x^2} = 10.$$

Řešením této rovnice je bod $x = 1$, a tedy $y = 2$.

Dále je

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{4}{x^2} & 1 \\ 1 & 2 + \frac{10}{y^2} \end{pmatrix},$$

a tedy

$$f''(1, 2) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}.$$

Z pozitivní definitnosti této matice nyní vyplývá, že f má v $[1, 2]$ lokální minimum o hodnotě $m = 7 - 10 \log 2$. Ukážeme, že se jedná o globální minimum.

Jelikož

$$f(x, y) \geq x \left(x - 4\frac{\log x}{x} \right) + y \left(y - 10\frac{\log y}{y} \right),$$

existuje $c_1 > 0$ takové, že pokud $\max\{x, y\} \geq c_1$, pak $f(x, y) > m$. Dále platí

$$f(x, y) > -4 \log x - 10 \log y,$$

z tedy existuje $c_2 \in (0, c_1)$ takové, že $f(x, y) > m$ kdykoliv $0 < \min\{x, y\} < c_2$. Tedy $f(x, y) > m$, kdykoliv $[x, y] \in (0, \infty)^2 \setminus ((c_2, c_1) \times (c_2, c_1))$. Na kompaktní množině $[c_2, c_1] \times [c_2, c_1]$ nabývá f svého minima. Vzhledem k předchozím úvahám je bod $[1, 2]$ jediný kandidát na toto minimum.

Tedy f má vskutku v $[1, 2]$ globální minimum. Zjevně také platí $\sup f(\mathcal{D}(f)) = \infty$. ♣

11.7.52. Příklad. Vyšetřete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xy - 3xz - 3yz, \quad [x, y, z] \in \mathbb{R}^3.$$

Řešení. Jelikož

$$\nabla f(x, y, z) = \left[3x^2 - 3y - 3z, 3y^2 - 3x - 3z, 3z^2 - 3x - 3y\right],$$

řešíme soustavu

$$\begin{aligned} x^2 &= y + z \\ y^2 &= x + z \\ z^2 &= x + y. \end{aligned}$$

Odečtením druhé rovnice od prvé dostáváme

$$x^2 - y^2 = y - x.$$

Tedy $x = y$ nebo $x + y = -1$. V prvním případě mám ze třetí rovnice $y = \frac{z^2}{2}$, což po dosazení do druhé rovnice dává

$$\frac{z^4}{4} = \frac{z^2}{2} + z.$$

Pokud $z = 0$, máme podezřelý bod $[0, 0, 0]$. V opačném případě platí

$$0 = z^3 - 2z - 4 = (z - 2)(z^2 + 2z + 2),$$

tj. $z = 2$ a máme bod $[2, 2, 2]$. Pokud $x + y = -1$, máme ve třetí rovnici vztah $z^2 = -1$, což nelze. Tedy body $[0, 0, 0]$ a $[2, 2, 2]$ jsou jediné podezřelé z lokálního extrému.

Jelikož

$$f''(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x & -3 & -3 \\ -3 & 6y & -3 \\ -3 & -3 & 6z \end{pmatrix},$$

platí

$$f''(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad f''(2, 2, 2) = \begin{pmatrix} 12 & -3 & -3 \\ -3 & 12 & -3 \\ -3 & -3 & 12 \end{pmatrix}.$$

První matici upravíme pomocí symetrických elementárních úprav na matici

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix},$$

která je indefinitní, a tedy f nemá v $[0, 0, 0]$ lokální extrém. Druhou matici převedeme na

$$\begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & \frac{45}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{54}{5} \end{pmatrix},$$

což je pozitivně definitní matice. Funkce f má tak v $[2, 2, 2]$ lokální minimum. ♣

KAPITOLA 12

Stejnoměrná konvergence posloupností a řad funkcí

12.1. Stejnoměrná konvergence posloupností funkcí

12.1.1. Definice. Nechť M je množina a nechť (Q, σ) je metrický prostor. Nechť f a f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou zobrazení definovaná na M s hodnotami v Q. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje bodově** k f na M, jestliže $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pro každé $x \in M$, neboli

$$\forall x \in M\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Bodovou konvergenci posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ k funkci f značíme symbolem $f_n \to f$.

Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje stejnoměrně** k f na M, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall x \in M\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ k funkci f značíme symbolem $f_n \rightrightarrows f$.

12.1.2. Poznámka. Bude užitečné si uvědomit negaci výroku, který definuje stejnoměrnou konvergenci. Nechť M je množina a nechť (Q, σ) je metrický prostor. Nechť f a f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou zobrazení definovaná na M s hodnotami v Q. Potom posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nekonverguje stejnoměrně k f na M, jestliže

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists x \in M\ \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon \sigma(f_n(x), f(x)) \geq \varepsilon.$$

12.1.3. Příklady. (a) Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme zobrazení $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ předpisem $f_n(x) = x^n$. Označme dále

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Dokažte, že potom posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje bodově, avšak nikoli stejnoměrně k funkci f na intervalu $[0,1]$.

(b) Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme zobrazení $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ předpisem

$$g_n(x) = \frac{1}{2^n} \sin(nx).$$

Označme dále $g(x) = 0$ pro $x \in [0,1]$. Dokažte, že potom posloupnost $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně, k funkci g na intervalu $[0,1]$.

Řešení. (a) Pro každé $x \in [0,1)$ zřejmě platí $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ a pro $x = 1$ dokonce platí $x^n = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Dostáváme tedy triviálně také $\lim_{n\to\infty} x^n = 1$. Odtud plyne bodová konvergence posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ k funkci f na intervalu $[0,1]$.

Dokážeme, že tato konvergence není stejnoměrná na $[0,1]$. Zvolme například $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$. Potom platí

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = |x_n^n - 0| = \frac{1}{2},$$

a tedy podle Poznámky 12.1.2 posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nekonverguje stejnoměrně k funkci f na intervalu $[0,1]$.

(b) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro každé $x \in [0,1]$ platí

$$|g_n(x) - g(x)| = \frac{|\sin(nx)|}{2^n} \le \frac{1}{2^n}.$$

Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, aby platilo $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$. Potom zřejmě pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$, platí $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, a tedy pro každé $x \in [0,1]$ dostáváme

$$|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Podle Definice 12.1.1 tedy posloupnost $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k funkci g na intervalu $[0,1]$. ♣

12.1.4. Definice. Nechť (M,ϱ) a (Q,σ) jsou metrické prostory. Nechť f, f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou zobrazení definovaná na M s hodnotami v Q. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje lokálně stejnoměrně** k f na M, jestliže pro každé $x \in M$ existuje $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, takové, že $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k f na $B_\varrho(x,r)$. Lokálně stejnoměrnou konvergenci značíme symbolem $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$.

12.1.5. Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ z Příkladu 12.1.3(a) konverguje na intervalu $[0,1)$ lokálně stejnoměrně k nulové funkci.

Řešení. Zvolme $x \in [0,1)$. K němu nalezneme $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, takové, aby platilo $(x-r, x+r) \subset (0,1)$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Protože $\lim_{n\to\infty}(x+r)^n = 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ splňující $n \ge n_0$

platí $(x+r)^n < \varepsilon$. Nechť $y \in (x-r, x+r)$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $y^n < (x+r)^n$, a tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$|f_n(y) - 0| = y^n < \varepsilon.$$

Odtud a z Definice 12.1.1 plyne, že $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k nulové funkci na $(x-r, x+r)$. Protože $B_\varrho(x,r) = (x-r, x+r)$, podle Definice 12.1.4 tedy posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje lokálně stejnoměrně k nulové funkci na intervalu $[0,1)$. ♣

12.1.6. Věta (charakterizace stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí)**.** Nechť M je množina a (Q,σ) je metrický prostor. Nechť f, f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou zobrazení definovaná na M s hodnotami v Q. Pak posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k funkci f na množině M právě tehdy, když platí

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{\sigma(f_n(x), f(x));\ x \in M\} = 0.$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall x \in M\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Pak tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$0 \leq \sup\{\sigma(f_n(x), f(x));\ x \in M\} \leq \varepsilon.$$

Odtud plyne požadované tvrzení.

$\Leftarrow$ Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\sup\{\sigma(f_n(x), f(x));\ x \in M\} < \varepsilon.$$

Potom zřejmě pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, a pro každé $x \in M$ platí

$$\sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon,$$

a tedy posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k funkci f na množině M. ■

12.1.7. Věta (Moore-Osgood)**.** Nechť (P,ϱ) je metrický prostor, $x_0 \in P$ a nechť funkce f_n, f z P do $\mathbb{R}$ splňují

(i) existuje $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, takové, že $f_n \rightrightarrows f$ na množině $B(x_0,r)\setminus\{x_0\}$,

(ii) pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$, kde $a_n \in \mathbb{R}$.

Potom existují vlastní limity $\lim_{n\to\infty} a_n$ a $\lim_{x\to x_0} f(x)$ a jsou si rovny.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall x \in B(x_0,r) \setminus \{x_0\}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Potom platí

$$\forall x \in B(x_0,r) \setminus \{x_0\}\ \forall n,m \in \mathbb{N}, n,m \geq n_0 \colon |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Odtud vyplývá, že platí

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq n_0 \colon |a_n - a_m| \leq \varepsilon.$$

Tím je ověřena Bolzanova-Cauchyova podmínka, a tedy platí $\lim a_n = a$, kde $a \in \mathbb{R}$.

Dokážeme, že $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|a_{n_0} - a| < \varepsilon$ a zároveň

$$\forall x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\} \colon |f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

K tomuto n_0 nyní nalezneme $\delta \in (0, r)$ takové, že

$$\forall x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \colon |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| < \varepsilon.$$

Potom pro každé $x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ platí

$$|f(x) - a| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| + |a_{n_0} - a| < 3\varepsilon.$$

Odtud již plyne tvrzení. ■

12.1.8. Věta. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory. Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost spojitých funkcí definovaných na P s hodnotami v Q. Nechť dále $f \colon P \to Q$. Nechť $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na P. Potom f je spojité zobrazení na P.

Důkaz. Zvolme $a \in P$. K němu nalezneme $r > 0$ takové, že $f_n \rightrightarrows$ na $B(a, r)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall x \in B(a, r) \colon |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

K tomuto n_0 dále nalezneme $\delta \in (0, r)$ takové, že

$$\forall x \in B(a, \delta) \colon |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| < \varepsilon.$$

Potom pro každé $x \in (a, \delta)$ platí

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f(a)| \\ &< 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Funkce f je tedy spojitá v bodě a. Protože bod a byl zvolen libovolně, je f spojitá na P. ■

12.1.9. Rovnost $\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to a} f_n(x) = \lim_{x \to a} \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ ovšem neplatí obecně. Uvažujme funkce $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$ a bod $a = 1$. Zřejmě platí $\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to 1-} x^n = 1$, ale $\lim_{x \to 1-} \lim_{n \to \infty} x^n = 0$. Předpoklad lokálně stejnoměrné konvergence ve Větách 12.1.7 a 12.1.8 tedy nelze vynechat.

Z uvedených vět je zřejmé, že lokálně stejnoměrná konvergence je velice důležitým pojmem. Ověřit lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí z definice může však být velice obtížné. V případě, kdy definičním oborem funkcí je otevřený interval, existuje snazší způsob ověření stejnoměrné konvergence, jak vyplývá z následující věty.

12.1.10. Věta (charakterizace lokálně stejnoměrné konvergence na intervalu)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $\{f_n\}$ konverguje lokálně stejnoměrně na (a, b) právě tehdy, když $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na každém intervalu $[c, d] \subset (a, b)$, kde $c, d \in (a, b)$, $c < d$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Nechť $c, d \in (a, b)$. Pro každé $x \in [c, d]$ existuje otevřený interval $I_x \subset (a, b)$ takový, že $x \in I_x$ a $f_n \rightrightarrows f$ na I_x. Potom

$$[c, d] \subset \bigcup_{x \in (a,b)}^{k} I_x.$$

To je otevřené pokrytí kompaktní množiny, a tedy (Věta 10.5.26) existují body $x_1, \dots, x_k \in [c, d]$ takové, že $[c, d] \subset \bigcup_{j=1}^{k} I_{x_j}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$ platí

$$\forall x \in I_{x_i}\ \forall n \geq n_i : |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Položme $n^* = \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Potom pro každé $n \geq n^*$ a každé $x \in I_{x_i}$ platí $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $[c, d]$.

$\Leftarrow$ Pro $x_0 \in (a, b)$ nalezneme $r > 0$ takové, že $[x_0 - r, x_0 + r] \subset (a, b)$. Potom $f_n \rightrightarrows f$ na $(x_0 - r, x_0 + r)$. ■

12.1.11. Definice. Nechť M je množina a $g_n : M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že posloupnost $\{g_n\}$ je **cauchyovská** na M, jestliže v každém bodě $x \in M$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku, tedy

$$\forall x \in M\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0 : |g_n(x) - g_m(x)| < \varepsilon.$$

Řekneme, že posloupnost $\{g_n\}$ je **stejnoměrně cauchyovská** na M, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0\ \forall x \in M : |g_n(x) - g_m(x)| < \varepsilon.$$

12.1.12. Věta (o vztahu stejnoměrné konvergence a stejnoměrné cauchyovskosti)**.** Nechť M je množina a $g_n : M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{g_n\}$ je stejnoměrně konvergentní na M právě tehdy, když je stejnoměrně cauchyovská na M.

Důkaz. $\Leftarrow$ Pro každé $x \in M$ je číselná posloupnost $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská, a má tedy vlastní limitu, kterou označíme symbolem $g(x)$. Zvolme

$\varepsilon > 0$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_0$, platí
$$\forall x \in M : |g_n(x) - g_m(x)| < \varepsilon.$$
Protože $\lim_{m\to\infty} g_m(x) = g(x)$, dostáváme odtud
$$\forall x \in M : |g_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon.$$
Posloupnost $\{g_n\}$ je tedy stejnoměrně konvergentní na M.

$\Rightarrow$ Zvolme $\varepsilon > 0$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí
$$\forall x \in M : |g_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon.$$
Nechť $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$. Potom
$$\forall x \in M : |g_n(x) - g_m(x)| \leq |g_n(x) - g(x)| + |g(x) - g_m(x)| < 2\varepsilon,$$
a tedy je posloupnost $\{g_n\}$ stejnoměrně cauchyovská na M. ■

12.1.13. Věta (stejnoměrná konvergence derivací)**.** Nechť (a, b) je omezený interval a nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí z (a, b) do $\mathbb{R}$. Nechť

(i) pro každé $n \in \mathbb{N}$ má f_n vlastní derivaci na intervalu (a, b),
(ii) existuje $x_0 \in (a, b)$ takové, že posloupnost reálných čísel $\{f_n(x_0)\}$ je konvergentní,
(iii) posloupnost $\{f_n'\}$ je stejnoměrně konvergentní na (a, b).

Potom existuje funkce f taková, že $f_n \rightrightarrows f$ na (a, b), f má vlastní derivaci na (a, b) a platí $f_n' \rightrightarrows f'$ na (a, b).

Důkaz. Nejprve dokážeme existenci limitní funkce f. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že
$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ m, n \geq n_0,\ \forall x \in (a, b) : |f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon$$
(to je možné díky Větě 12.1.12) a zároveň
$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ m, n \geq n_0, : |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon.$$
Potom pro libovolné $x \in (a, b)$ platí
$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|.$$
Podle Lagrangeovy věty pro funkci $f_n - f_m$ existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že
$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| = |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| \cdot |x - x_0|.$$
Dle předpokladu platí
$$|f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| < \varepsilon$$
a navíc zřejmě
$$|x - x_0| \leq b - a$$

(připomeňme, že interval (a, b) je dle předpokladu omezený). Celkem tedy dostáváme odhad

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon(b - a) + \varepsilon = \varepsilon(b - a + 1).$$

Posloupnost $\{f_n\}$ je tedy stejnoměrně cauchyovská na (a, b), a podle Věty 12.1.12 tedy také stejnoměrně konvergentní na (a, b). Zbývá dokázat, že $f_n' \rightrightarrows f'$ na (a, b).

Zvolme $z \in (a, b)$ a $n \in \mathbb{N}$ a definujme funkci φ_n předpisem

$$\varphi_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z}, \quad x \in (a, b) \setminus \{z\}.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ (obecně jiné než v prvním kroku důkazu). K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ m, n \geq n_0,\ \forall x \in (a, b)\colon |f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon.$$

Opět použijeme Lagrangeovu větu na funkci $f_m - f_n$. Podle této věty existuje ξ ležící mezi x a z takové, že

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(z) - f_m(z))| = |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| \cdot |x - z|.$$

Potom dle předpokladu platí pro každé $x \in (a, b) \setminus \{z\}$

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \frac{|f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| \cdot |x - z|}{|x - z|} = |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| < \varepsilon.$$

To znamená, že posloupnost $\{\varphi_n\}$ je stejnoměrně cauchyovská, a tedy také stejnoměrně konvergentní na $(a, b) \setminus \{z\}$.

Podle Mooreovy-Osgoodovy věty (Věta 12.1.7) platí

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to z} \varphi_n(x) = \lim_{x\to z} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x).$$

Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\lim_{x\to z} \varphi_n(x) = f_n'(z),$$

plyne odtud, že

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(z) = \lim_{x\to z} \frac{f(x) - f(z)}{x - z} = f'(z).$$

■

12.1.14. Poznámka. Důležitým předpokladem Věty 12.1.13 je omezenost intervalu (a, b). Bez tohoto předpokladu věta neplatí. Použijeme-li však Větu 12.1.10, pak můžeme zformulovat variantu Věty 12.1.13 pro libovolný otevřený interval (nejen omezený), avšak pouze pro lokálně stejnoměrnou konvergenci.

12.1.15. Věta (o konvergenci Newtonových integrálů). Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na neprázdném omezeném intervalu (a,b) a nechť $f_n \in \mathcal{N}(a,b)$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $f \in \mathcal{N}(a,b)$ a platí

$$\lim_{n\to\infty}(N)\int_a^b f_n(x)\,dx = (N)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Důkaz. Zvolme $x_0 \in (a,b)$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje funkce $F_n\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ taková, že $F_n' = f_n$ na (a,b) a $F_n(x_0) = 0$. Potom podle Věty 12.1.13 je posloupnost $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně konvergentní na (a,b). Označme $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$, $x \in (a,b)$. Podle Věty 12.1.13 potom platí $F' = f$ na (a,b). Podle Mooreovy-Osgoodovy věty pak platí

$$\lim_{x\to a+} F(x) = \lim_{x\to a+}\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a+} F_n(x)$$

a

$$\lim_{x\to b-} F(x) = \lim_{x\to b-}\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to b-} F_n(x),$$

přičemž obě tyto limity jsou vlastní. Celkem tedy dostáváme vztah

$$\begin{aligned}(N)\int_a^b f(x)dx &= \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x)\\ &= \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to b-} F_n(x) - \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a+} F_n(x)\\ &= \lim_{n\to\infty}(N)\int_a^b f_n(x)dx.\end{aligned}$$

Tím je tvrzení věty dokázáno. ∎

12.1.16. Poznámka. Nechť M je množina a f, g, f_n jsou funkce z M do $\mathbb{R}$. Píšeme $f \le g$ na M, jestliže $f(x) \le g(x)$ pro každé $x \in M$. Speciálně symbolem $f \ge 0$ na M značíme, že f je nezáporná funkce na M. Řekneme, že posloupnost funkcí f_n je **neklesající** na M, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f_n \le f_{n+1}$ na M. Obdobně definujeme posloupnost funkcí **nerostoucí**, **klesající**, **rostoucí**, **monotónní** a **ryze monotónní** na M.

12.1.17. Věta (Dini). Nechť (K,ϱ) je kompaktní metrický prostor. Nechť $\{f_n\}$ je monotónní posloupnost spojitých funkcí na K, která na K bodově konverguje ke spojité funkci $f\colon K \to \mathbb{R}$. Potom $f_n \rightrightarrows f$ na K.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $f(x) = 0$ pro každé $x \in K$, jinak bychom uvažovali posloupnost $\{f_n - f\}$. Pro korektnost tohoto kroku je třeba si uvědomit, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je funkce $f_n - f$ spojitá na K, neboť funkce f_n i funkce f jsou podle předpokladu spojité. Dále můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že na K platí

$$f_1 \ge f_2 \ge \cdots \ge 0,$$

neboť v opačném případě bychom uvažovali posloupnost $\{-f_n\}$.

Důkaz tvrzení provedeme sporem. Předpokládejme, že tvrzení věty neplatí. Podle Poznámky 12.1.2 to znamená, že existují $\varepsilon > 0$ a posloupnost $\{x_n\}$ prvků množiny K takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f_n(x_n) \geq \varepsilon$. Protože K je kompakt, existují podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a bod $x^* \in K$ takové, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x^*$. Protože posloupnost $\{f_n\}$, a tedy i podposloupnost $\{f_{n_k}\}$. konverguje na K k nulové funkci, existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $f_{n_m}(x^*) < \varepsilon$. Ze spojitosti funkce f_{n_m} plyne, že existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in B(x^*, \delta)$ platí $f_{n_m}(x) < \varepsilon$. Protože $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x^*$, existuje $l \in \mathbb{N}$, $l \geq m$, takové, že $x_{n_l} \in B(x^*, \delta)$. Posloupnost $\{f_{n_k}(x_{n_l})\}_{k=1}^{\infty}$ je podle předpokladu nerostoucí, a tedy

$$\varepsilon \leq f_{n_l}(x_{n_l}) \leq f_{n_m}(x_{n_l}) < \varepsilon,$$

což je spor. Tím je tvrzení věty dokázáno. ∎

12.1.18. Definice. Nechť M je množina a $A \subset M$. Pak **charakteristickou funkcí** množiny A nazýváme funkci $\chi_A : M \to \mathbb{R}$, definovanou předpisem

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{pokud } x \in A; \\ 0, & \text{pokud } x \in M \setminus A. \end{cases}$$

12.1.19. Příklad. Dokažte, že jestliže vynecháme kterýkoli z předpokladů Diniovy věty (kompaktnost množiny K, spojitost funkcí $\{f_n\}$, spojitost funkce f nebo monotonii posloupnosti $\{f_n\}$), pak věta neplatí.

Řešení. (a) Položme $K = [0, 1)$ a $f_n(x) = x^n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0, 1)$. Potom K není kompaktní. Posloupnost $\{f_n\}$ je nerostoucí na K a její bodovou limitou f je nulová funkce. Zřejmě jsou tedy všechny funkce f_n i funkce f spojité na K. Posloupnost $\{f_n\}$ ale nekonverguje k f stejnoměrně. To lze dokázat obdobně jako v Příkladu 12.1.3(a).

(b) Položme $K = [0, 1]$ a $f_n(x) = \chi_{(0,\frac{1}{n})}(x)$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0, 1]$. Potom K je kompaktní, posloupnost $\{f_n\}$ je nerostoucí na K a její bodovou limitou f je nulová funkce. Funkce f je tedy zřejmě spojitá na $[0, 1]$, ale funkce f_n spojité nejsou. Posloupnost $\{f_n\}$ nekonverguje k f stejnoměrně, neboť pro $x_n = \frac{1}{2n}$ platí $f_n(x_n) \geq \frac{1}{2}$ a stačí použít Poznámku 12.1.2.

(c) Položme $K = [0, 1]$ a $f_n(x) = x^n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0, 1]$. Potom K je kompaktní, všechny funkce f_n jsou spojité na K, posloupnost $\{f_n\}$ je nerostoucí na K a její bodovou limitou je funkce f definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Funkce f tedy není spojitá na $[0,1]$. Z Příkladu 12.1.3(a) víme, že posloupnost $\{f_n\}$ nekonverguje k f stejnoměrně.

(d) Položme $K = [0,1]$ a definujme pro $n \in \mathbb{N}$ funkce f_n předpisem

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx, & x \in [0, \frac{1}{2n}], \\ 2 - 2nx, & x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}], \\ 0, & x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Potom K je kompaktní, všechny funkce f_n jsou spojité na K a bodovou limitou f posloupnosti $\{f_n\}$ je nulová funkce, kter8 je z5ejm2 spojit8. Posloupnost $\{f_n\}$ ovšem není monotónní na K a nekonverguje k f stejnoměrně, neboť pro $x_n = \frac{1}{n}$ platí $f_n(x_n) = 1$. ♣

12.2. Weierstrassova věta

12.2.1. Definice. Nechť L je lineární zobrazení z $(\mathcal{C}([0,1]), \sup)$ do $(\mathcal{C}([0,1]), \sup)$. Řekneme, že L je **pozitivní operátor**, jestliže pro každou funkci $f \in \mathcal{C}([0,1])$ splňující $f \geq 0$ na $[0,1]$ platí $L(f) \geq 0$ na $[0,1]$.

12.2.2. Poznámka. Je-li L pozitivní operátor na $\mathcal{C}([0,1])$, pak pro každé funkce $f, g \in \mathcal{C}([0,1])$ splňující $f \leq g$ na $[0,1]$ platí $L(f) \leq L(g)$ na $[0,1]$. To plyne z linearity operátoru L, neboť

$$0 \leq L(g - f) = L(g) - L(f).$$

12.2.3. Věta (Bohmanova-Korovkinova věta o třech funkcích)**.** Označme pro $j = 0, 1, 2$ symbolem g_j funkce definované předpisem $g_j(x) = x^j$, $x \in [0,1]$. Nechť $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost pozitivních lineárních operátorů z $\mathcal{C}([0,1])$ do $\mathcal{C}([0,1])$. Předpokládejme, že pro $j = 0, 1, 2$ platí

$$L_n(g_j) \rightrightarrows g_j \text{ na } [0,1].$$

Potom

$$L_n(f) \rightrightarrows f \quad \text{na } [0,1]$$

pro každou funkci $f \in \mathcal{C}([0,1])$.

Důkaz. Zvolme $f \in C([0,1])$ a $\varepsilon > 0$. Pak je f omezená a spojitá, a tedy i stejnoměrně spojitá na $[0,1]$. To znamená, že existují $M > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in [0,1]$ platí $|f(x)| \leq M$ a pro každé $x, y \in [0,1]$ splňující $|x - y| < \delta$ platí $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Nyní zvolíme pevné, ale libovolné $y \in [0,1]$. Potom pro každé $x \in [0,1]$ nastane buď $|x-y| < \delta$ a potom $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$, nebo $|x-y| \geq \delta$ a potom

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq 2M \leq \frac{2M(x-y)^2}{\delta^2}.$$

V každém případě (pro libovolné $x \in [0,1]$) tedy platí

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \frac{2M(x-y)^2}{\delta^2}.$$

Definujeme funkce g_* a g^* na $[0,1]$ předpisem

$$g_*(x) = f(y) - \varepsilon - \frac{2M(x-y)^2}{\delta^2},$$
$$g^*(x) = f(y) + \varepsilon + \frac{2M(x-y)^2}{\delta^2}.$$

Povšimněme si, že pro speciální volbu $x = y$ dostáváme

$$g_*(y) = f(y) - \varepsilon \text{ a } g^*(y) = f(y) + \varepsilon.$$

Pro takto zvolené funkce platí

$$g_* \leq f \leq g^* \quad \text{na } [0,1],$$

a tedy z monotonie operátorů L_n a Poznámky 12.2.2 plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$L_n(g_*) \leq L_n(f) \leq L_n(g^*) \quad \text{na } [0,1].$$

Nyní rozepíšeme funkci g^* ve tvaru

$$g(x) = (f(y) + \varepsilon + \frac{2My^2}{\delta^2}) - \frac{4My}{\delta^2}x + \frac{2M}{\delta^2}x^2, \quad x \in [0,1],$$

tedy

$$g(x) = c_0 + g_0(x) + c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x), \quad x \in [0,1],$$

pro vhodně zvolená reálná čísla c_0, c_1 a c_2. Potom pro každé $x \in [0,1]$ platí

$$|L_n(g^*)(x) - g^*(x)| \leq c_0 |L_n(g_0)(x) - g_0(x)| +$$
$$+ |c_1| |L_n(g_1)(x) - g_1(x)| + c_2 |L_n(g_2)(x) - g_2(x)|.$$

Podle předpokladu platí $L_n(g_j) \rightrightarrows g_j$ na $[0,1]$ pro $j = 0,1,2$, takže

$$L_n(g^*) \rightrightarrows g^* \quad \text{na } [0,1].$$

Existuje tudíž $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, a každé $x \in [0,1]$ platí

$$|L_n(g^*)(x) - g^*(x)| < \varepsilon.$$

Speciálně pro $x = y$ platí

$$L_n(f)(y) \leq L_n(g^*)(y) \leq g^*(y) + \varepsilon = f(y) + 2\varepsilon.$$

Obdobně lze dokázat, že

$$L_n(f)(y) \geq f(y) - 2\varepsilon.$$

Protože y bylo zvoleno libovolně, dostáváme celkem

$$\sup_{y\in[0,1]} |L_n(f)(y) - f(y)| \leq 2\varepsilon,$$

což podle Věty 12.1.6 znamená, že

$$L_n(f) \rightrightarrows f \quad \text{na } [0,1].$$

Tvrzení věty je dokázáno. ■

12.2.4. Definice. Nechť $f \in \mathcal{C}[0,1]$ a $n \in \mathbb{N}$. Potom polynom

$$B_n f(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme **Bernsteinovým polynomem** funkce f stupně n.

12.2.5. Poznámka. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je zobrazení $B_n : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$, definované předpisem $B_n : f \mapsto B_n f$ přiřazující každé funkci $f \in \mathcal{C}[0,1]$ „její" Bernsteinův polynom stupně n pozitivním lineárním operátorem na $\mathcal{C}[0,1]$.

12.2.6. Věta (Weierstrassova)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a,b]$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje polynom $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takový, že

$$\forall x \in [a,b] : |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $[a,b] = [0,1]$. Víme, že $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost pozitivních lineárních operátorů na $\mathcal{C}([0,1])$. Tvrzení věty tedy vyplyne z Bohmanovy-Korovkinovy věty pokud ověříme, že pro $j = 0, 1, 2$ platí

$$B_n(g_j) \rightrightarrows g_j \quad \text{na } [0,1].$$

Pro $j = 0$, $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0,1]$ jest

$$B_n(g_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + 1 - x)^n = 1 = g_0(x),$$

takže platí dokonce $L_n(g_0) = g_0$ na $[0,1]$.

Připomeneme, že pro každé $k, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, platí

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Pro $j = 1$, $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0,1]$ jest

$$\begin{aligned}
B_n(g_1)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} \\
&= x(x+1-x)^{n-1} = x = g_1(x),
\end{aligned}$$

a tedy i pro $j = 1$ platí $L_n(g_1) = g_1$ na $[0,1]$.

Zbývá ověřit případ $j = 2$. Pro tuto funkci a pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0,1]$ máme

$$\begin{aligned}
B_n(g_2)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^2 x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} k x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (k-1) \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{x}{n} \\
&= x^2 \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{n-2-(k-2)} + \frac{x}{n} \\
&= \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{x}{n}.
\end{aligned}$$

To znamená, že pro každé $n \in N$ a $x \in [0,1]$ máme

$$|B_n(g_2)(x) - g_2(x)| = \frac{x(1-x)}{n} \le \frac{1}{4n},$$

a tedy

$$B_n(g_2) \rightrightarrows g_2 \quad \text{na } [0,1].$$

Tím je ověřeno tvrzení věty ve speciálním případě $[a,b] = [0,1]$.

Nechť nyní je $[a,b]$ obecný interval. Definujeme zobrazení $\varphi : [0,1] \to [a,b]$ předpisem

$$\varphi(x) = (b-a)x + a.$$

Potom φ je bijekce $[0,1]$ na $[a,b]$. Položme $\tilde{f} = f \circ \varphi$. Podle již dokázaného tvrzení nalezneme polynom $\tilde{P}$ takový, že pro každé $x \in [0,1]$ platí

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{P}(x)| < \varepsilon.$$

Položíme dále $P = \tilde{P} \circ \varphi^{-1}$. Protože funkce φ^{-1} má tvar

$$\varphi^{-1}(y) = \frac{1}{b-a}(y-a), \quad y \in [a,b],$$

je P zřejmě polynom. Navíc pro každé $y \in [a,b]$ platí

$$|f(y) - P(y)| = |\tilde{f}(\varphi^{-1}(y) - \tilde{P}(\varphi^{-1}(y)| < \varepsilon.$$

Tím je tvrzení věty dokázáno. ■

12.2.7. Poznámka. Weierstrassova věta by neplatila, pokud by interval nebyl omezený a uzavřený. To lze doložit na následujících příkladech: pro $f(x) = e^x$ na $(0,\infty)$ a libovolný polynom P platí $\lim_{x\to\infty} |f(x) - P(x)| = \infty$, podobně pro $f(x) = \frac{1}{x}$ na $(0,1)$ a libovolný polynom P platí $\lim_{x\to 0+} |f(x) - P(x)| = \infty$.

12.2.8. Poznámka. Nechť $f_n, n \in \mathbb{N}$, je posloupnost funkcí z $\mathcal{C}[0,1]$. Potom $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1]$ právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\sup} = 0$.

12.3. Stejnoměrná konvergence řad funkcí

12.3.1. Definice. Nechť M je množina, $(Q, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor, $f_n : M \to Q$, $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že řada zobrazení $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je **bodově konvergentní** na M, jestliže posloupnost funkcí $\{\sum_{k=1}^{n} f_k\}_{n=1}^{\infty}$ je bodově konvergentní na M. Obdobně definujeme pojmy **stejnoměrné konvergence** a **lokálně stejnoměrné konvergence** řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Stejnoměrnou konvergenci značíme symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$, lokálně stejnoměrnou konvergenci symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$.

12.3.2. Poznámky. Nechť M je množina a $f_n, g_n : M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) *Bolzanova-Cauchyova podmínka*: řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na množině M právě tehdy, když platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ m \geq n \geq n_0\ \forall x \in M : \left| \sum_{j=n}^{m} f_j(x) \right| < \varepsilon.$$

(b) *Nutná podmínka konvergence*: pokud $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M, potom $f_n \rightrightarrows 0$ na M, neboť $|f_n(x)| = \left|\sum_{j=n}^{n} f_j(x)\right|$.

(c) *Linearita*: pokud $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$, $\sum_{n=1}^{\infty} g_n \rightrightarrows$ na M a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak také řady $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha f_n)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} (f_n \pm g_n)$ konvergují stejnoměrně na M.

12.3.3. Věta (Weierstrassovo kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada reálných funkcí definovaných na neprázdné množině M. Označme

$$\sigma_n = \sup_{x \in M} |f_n(x)|.$$

Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0 \colon \sum_{j=n}^{m} \sigma_j < \varepsilon.$$

Potom pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ splňující $m \geq n \geq n_0$ a pro každé $x \in M$ platí

$$|\sum_{j=n}^{m} f_j(x)| \leq \sum_{j=n}^{m} |f_j(x)| \leq \sum_{j=n}^{m} \sigma_j < \varepsilon.$$

Ověřili jsme Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Řada je tedy konvergentní podle Poznámky 12.3.2(a). ∎

12.3.4. Příklad. Nechť $\alpha > 1$. Dokažte, že řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{\alpha}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^{\alpha}}$$

jsou stejnoměrně konvergentní na $\mathbb{R}$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$\sigma_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|\cos(nx)|}{n^{\alpha}}.$$

Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty,$$

a tedy je řada konvergentní podle Weierstrassova kritéria. Důkaz stejnoměrné konvergence druhé řady je možné provést obdobně. ♣

12.3.5. Poznámka. Weierstrassovo kritérium nedává odpověď na otázku, zda jsou řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$$

stejnoměrně konvergentní na $\mathbb{R}$ pro $\alpha \in (0, 1]$.

12.3.6. Věta (Abelovo kritérium stejnoměrné konvergence)**.** Nechť M je množina, $f_n : M \to \mathbb{R}$, $g_n : M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Nechť platí

(i) pro každé $x \in M$ je posloupnost reálných čísel $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ monotónní (libovolným způsobem),

(ii) $\{g_n\}$ je posloupnost stejně omezených funkcí, tj.

$$\exists K > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in M : |g_n(x)| \leq K,$$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M.

Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows \quad \text{na } M.$$

Důkaz. Označíme $M^{\downarrow}$ množinu všech $x \in M$, pro která je posloupnost $\{g_n(x)\}$ nerostoucí a $M^{\uparrow}$ množinu všech $x \in M$, pro která je posloupnost $\{g_n(x)\}$ neklesající. Předpokládejme nejprve, že funkce g_n jsou nezáporné. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $i, n \in \mathbb{N}$ splňující $i \geq n \geq n_0$ a pro každé $x \in M$ platí

$$\Big|\sum_{j=n}^{i} f_j(x)\Big| < \varepsilon. \tag{12.1}$$

Nyní zvolíme pevné $m, n \in \mathbb{N}$ splňující $m \geq n \geq n_0$ a pro každé $i \in \mathbb{N}$, $i \in \{n, \dots, m\}$, a každé $x \in M$ označíme

$$\sigma_i(x) = \sum_{j=n}^{i} f_j(x).$$

Potom z Abelovy parciální sumace (Věta 3.3.4) vyplývá, že

$$|\sum_{j=n}^{m} f_j(x)g_j(x)| \leq g_n(x) \max_{i\in\{n,\dots,m\}} |\sigma_i(x)|. \tag{12.2}$$

Z předpokladu (ii) a z odhadu (12.1) tedy dostáváme, že

$$|\sum_{j=n}^{m} f_j(x)g_j(x)| \leq K \max_{i\in\{n,\dots,m\}} |\sigma_i(x)| < K\varepsilon.$$

Tím je ověřena Bolzanova-Cauchyova podmínka, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ stejnoměrně konverguje na $M^{\downarrow}$.

Nechť nyní je posloupnost $\{g_n(x)\}$ obecná (tedy ne nutně nezáporná). Pak z předpokladu (ii) plyne, že posloupnost $\{g_n + K\}$ je nezáporná. Tedy z již dokázaného tvrzení vyplývá, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(g_n + K)$ je stejnoměrně konvergentní na $M^{\downarrow}$. Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je podle předpokladu (iii) stejnoměrně konvergentní na M, vyplývá z linearity množiny stejnoměrně konvergentních řad (Poznámka 12.3.2(c)), že také řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ je stejnoměrně konvergentní na $M^{\downarrow}$.

Obdobně lze dokázat, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ je stejnoměrně konvergentní na $M^{\uparrow}$, a tedy i na $M = M^{\downarrow} \cup M^{\uparrow}$. Tvrzení věty je dokázáno. ■

12.3.7. Věta (Dirichletovo kritérium stejnoměrné konvergence)**.** Nechť M je množina, $f_n : M \to \mathbb{R}$, $g_n : M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Nechť platí

(i) pro každé $x \in M$ je posloupnost reálných čísel $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ monotónní (libovolným způsobem),

(ii) $g_n \rightrightarrows 0$,

(iii) řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ má **stejnoměrně omezené částečné součty na** M, tj.

$$\exists K \in \mathbb{R}\ \forall m \in \mathbb{N}\ \forall x \in M : \left|\sum_{j=1}^{m} f_j(x)\right| \leq K.$$

Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows \quad \text{na } M.$$

Důkaz. Obdobně jako v důkazu Abelova kritéria stačí tvrzení dokázat za předpokladu, že $g_1 \geq g_2 \geq \cdots \geq 0$ na M (jinak můžeme opět uvažovat množiny $M^{\downarrow}$ a $M^{\uparrow}$, případně přejít k posloupnosti $\{-g_n\}$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ a každé $x \in M$ platí $g_n(x) < \varepsilon$. Vezměme pevné $m, n \in \mathbb{N}$ splňující

$m \geq n \geq n_0$. Potom platí odhad (12.2). Tedy

$$\begin{aligned} |\sum_{j=n}^{m} f_j(x)g_j(x)| &\leq g_n(x) \max_{i\in\{n,\dots,m\}} |\sigma_i(x)| \\ &= g_n(x) \max_{i\in\{n,\dots,m\}} |\sum_{j=1}^{i} f_j(x) - \sum_{j=1}^{n-1} f_j(x)| \\ &\leq g_n(x)(\max_{i\in\{n,\dots,m\}} |\sum_{j=1}^{i} f_j(x)| + |\sum_{j=1}^{n-1} f_j(x)|) \\ &< \varepsilon(K+K) = 2K\varepsilon. \end{aligned}$$

Tím je ověřena Bolzanova-Cauchyova podmínka, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ stejnoměrně konverguje na M. Tvrzení věty je dokázáno. ■

12.3.8. Poznámka. Pro každé $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ mají řady $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$ stejnoměrně omezené částečné součty na $[\delta, \pi - \delta]$. To plyne ihned z Příkladu 3.3.7.

12.3.9. Příklady. (a) Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) \arccos(\frac{n-1}{n})$ je lokálně stejnoměrně konvergentní na $(0, \pi)$.

(b) Dokažte, že řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$, kde $\alpha \in (0, \infty)$, jsou lokálně stejnoměrně konvergentní na $(0, \pi)$.

(c) Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x^2}} \operatorname{arctg}(nx)$ je stejnoměrně konvergentní na $\mathbb{R}$.

Řešení. (a) Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $f_n(x) = \sin(nx)$ a $g_n(x) = \arccos(\frac{n-1}{n})$, $x \in (0, \pi)$ (funkce g_n jsou tedy konstantní na $(0, \pi)$). Nechť $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Podle poznámky 12.3.8 má řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ má stejnoměrně omezené částečné součty na $[\delta, \pi - \delta]$. Posloupnost $\{g_n(x)\}$ je klesající a splňuje $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$. Protože tato posloupnost nezávisí na x, máme $g_n \rightrightarrows 0$ na $(0, \pi)$. Z Dirichletova kritéria tedy plyne, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows$ na $[\delta, \pi - \delta]$. Je-li $[a, b]$ libovolný interval splňující $0 < a < b < \pi$, potom k němu nalezneme $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ takové, že $[a, b] \subset [\delta, \pi - \delta]$. Z již dokázaného tvrzení víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows$ na $[\delta, \pi - \delta]$, a tedy i na $[a, b]$. Odtud a z Věty 12.1.10 vyplývá, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ na $(0, \pi)$.

(b) Důkaz je podobný jako u tvrzení (a), přičemž klademe $g_n(x) = n^{-\alpha}$, $x \in \mathbb{R}$. Stačí si pouze uvědomit, že i v tomto případě platí $g_n \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$ a $\{g_n\}$ je klesající posloupnost.

(c) Důkaz provedeme ve dvou krocích. Nejprve se budeme věnovat řadě $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x^2}}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položíme $f_n(x) = (-1)^n$ a $g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n+x^2}}$.

Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ má stejnoměrně omezené částečné součty na $\mathbb{R}$ a posloupnost $\{g_n(x)\}$ je pro každé $x \in \mathbb{R}$ klesající. Navíc pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $|g_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, takže $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)| = 0$, a tedy $g_n \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$. Z Dirichletova kritéria tedy plyne, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x^2}} \rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$.

Ve druhém kroku položíme $f_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x^2}}$ a $g_n = \operatorname{arctg}(nx)$. Z prvního kroku víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$. Posloupnost $\{g_n(x)\}$ je pro každé $x \in \mathbb{R}$ monotónní (nerostoucí pro $x \in (-\infty, 0]$ a neklesající pro $x \in [0, \infty)$. Navíc pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|g_n(x)| \leq \frac{\pi}{2}$. Z Abelova kritéria tedy plyne, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x^2}} \operatorname{arctg}(nx) \rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$. ♣

12.3.10. Věta (záměna sumy a derivace)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ splňující

(i) f_n má vlastní derivaci na omezeném intervalu (a, b), $n \in \mathbb{N}$,

(ii) existuje $x_0 \in (a, b)$ takové, že je číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ konvergentní,

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \rightrightarrows$ na (a, b).

Potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na (a, b) a pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Důkaz. Položme $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in (a, b)$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ má g_n vlastní derivaci na (a, b), posloupnost $\{g_n(x_0)\}$ je konvergentní a posloupnost $\{g_n'\}$ je stejnoměrně konvergentní na (a, b). Podle Věty 12.1.13 tedy existuje funkce $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ taková, že $g_n \rightrightarrows g$ a $g_n' \rightrightarrows g'$ na (a, b). Odtud plyne tvrzení věty, neboť zřejmě platí $g = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$. ■

12.3.11. Věta (záměna sumy a Newtonova integrálu)**.** Nechť (a, b) je omezený neprázdný interval a nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada funkcí splňující

(i) $f_n \in \mathcal{N}(a, b)$,

(ii) řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně k funkci f na (a, b).

Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (N) \int_a^b f_n = (N) \int_a^b f.$$

Důkaz. Použijeme Větu 12.1.15 na posloupnost funkcí $\{\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Odtud ihned plyne tvrzení. ■

12.3.12. Věta (o lokálně stejnoměrné konvergenci mocninné řady)**.** Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ je mocninná řada, přičemž $x_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, s poloměrem konvergence $\varrho \in (0, \infty]$. Potom tato řada konverguje lokálně stejnoměrně na intervalu $(x_0 - \varrho, x_0 + \varrho)$.

Důkaz. Nechť $r \in (0, \varrho)$. Potom pro každé $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ platí $|a_n(x - x_0)^n| \leq |a_n| r^n$. Číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n$ je konvergentní, a tedy podle Weierstrassova kritéria je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ stejnoměrně konvergentní na $[x_0 - r, x_0 + r]$. Odtud a z Věty 12.1.10 vyplývá, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ stejnoměrně konvergentní na $[x_0 - r, x_0 + r]$. Odtud a z Věty 12.1.10 vyplývá, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ lokálně stejnoměrně konvergentní na $(x_0 - \varrho, x_0 + \varrho)$. ∎

12.3.13. Poznámka. Ukážeme, jak z Abelova kritéria snadno vyplývá tvrzení Abelovy věty (Věta 8.3.2). Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ je mocninná řada a nechť ϱ je její poloměr konvergence, přičemž $\varrho \in (0, \infty)$. Předpokládejme, že $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n$ konverguje. Pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [x_0, x_0 + \varrho]$ položme $f_n(x) = a_n \varrho^n$ a $g_n(x) = \frac{(x - x_0)^n}{\varrho^n}$. Potom je řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ stejnoměrně konvergentní na $[x_0, x_0 + \varrho]$, $\{g_n\}$ je posloupnost stejně omezených funkcí (s konstantou omezenosti rovnou jedné) a pro každé $x \in [x_0, x_0 + \varrho]$ je posloupnost $\{g_n(x)\}$ nerostoucí. Podle Abelova kritéria je tedy řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ stejnoměrně konvergentní na $[x_0, x_0 + \varrho]$. Podle Mooreovy-Osgoodovy věty pak platí

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0 + \varrho} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n &= \lim_{x \to x_0 + \varrho} \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} a_n(x - x_0)^n \\
&= \lim_{k \to \infty} \lim_{x \to x_0 + \varrho} \sum_{n=0}^{k} a_n(x - x_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n.
\end{aligned}$$

Odtud vyplývá tvrzení Abelovy věty.

Nyní uvedeme důkaz Abelovy věty o Cauchyově součinu, jejíž tvrzení jsme uvedli v Kapitole 3.

Důkaz Věty 3.6.5. Položme $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ a $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$. Obě tyto řady mají poloměr konvergence větší nebo roven jedné, neboť číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou podle předpokladu konvergentní. Odtud vyplývá, že obě řady jsou absolutně konvergentní pro každé $x \in (-1, 1)$. Podle

Mertensovy věty (Věta 3.6.2) tedy pro každé $x \in [0,1)$ platí

$$f(x)g(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i}x^{k+1-i}b_i x^i) = \sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i}b_i)x^{k+1}.$$

Z Abelovy věty (Věta 8.3.2) pak plyne

$$\lim_{x\to 1_-} f(x)g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{i=1}^{k} a_{k+i-1}b_i).$$

■

12.4. Teoretické příklady ke stejnoměrné konvergenci posloupností a řad funkcí

12.4.1. Příklad. Nechť (M,ρ) je metrický prostor a $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ jsou posloupnosti funkcí z M do $\mathbb{C}$ konvergující stejnoměrně k $f: M \to \mathbb{C}$, respektive $g: M \to \mathbb{C}$. Ukažte následující tvrzení.

(a) Platí $f_n + g_n \rightrightarrows f + g$.
(b) Jsou-li posloupnosti $\{f_n\}$ a $\{g_n\}$ omezené, platí $f_n g_n \rightrightarrows fg$.
(c) Dokažte, že bez předpokladu omezenosti je tvrzení (b) obecně neplatné.
(d) Jsou-li funkce f_n stejnoměrně spojité, je f stejnoměrně spojitá.

Řešení. (a) Tvrzení plyne z odhadu

$$\|(f_n + g_n) - (f+g)\|_\infty \le \|f_n - f\|_\infty + \|g_n - g\|_\infty .$$

(b) Nechť $M \in (0,\infty)$ splňuje $\|f_n\|_\infty + \|g_n\|_\infty \le M$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak platí

$$\|g\|_\infty = \sup_{x\in M}|g(x)| = \sup_{x\in M}(\lim|g_n(x)|) \le \sup_{x\in M}|g_n(x)| = \|g_n\|_\infty \le M,$$

tj. g je též omezená číslem M. Tedy máme odhad

$$\begin{aligned}\|f_n g_n - fg\|_\infty &= \|f_n g_n - f_n g + f_n g - fg\|_\infty \\ &\le \|f_n\|\,\|g_n - g\| + \|g\|\,\|f_n - f\| \\ &\le M\,(\|g_n - g\| + \|f_n - f\|)\,,\end{aligned}$$

který implikuje $f_n g_n \rightrightarrows fg$.

(c) Uvažujme prostor $\mathbb{R}$ s funkcemi definovanými pro $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ jako $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$, $f(x) = x$, $g_n(x) = \frac{1}{n}$, $g = 0$. Pak

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \to 0$$

a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)| = \frac{1}{n} \to 0.$$

Tedy $f_n \rightrightarrows f$ a $g_n \rightrightarrows g$. Na stranu druhou však neplatí $f_n g_n \rightrightarrows fg$, jelikož

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}x \right| = \infty.$$

(d) Nechť $\varepsilon \in (0,\infty)$ je dáno. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Nechť $\delta \in (0,\infty)$ ˇje takové, že $|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ pro každou dvojici $x, y \in M$ splňující $\rho(x,y) < \delta$. Pak pro taková x, y platí

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Tedy f je stejnoměrně spojitá. ♣

12.4.2. Příklad. Nechť M je množina a $f_n \colon M \to \mathbb{C}$ je posloupnost funkcí splňující

$$\|f_n - f_m\|_\infty \le |a_n - a_m|, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

pro nějakou konvergentní posloupnost čísel $\{a_n\}$. Pak $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na M.

Řešení. Mějme $\varepsilon \in (0,\infty)$ dáno. Jelikož je posloupnost $\{a_n\}$ konvergentní, splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku, a tak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|a_n - a_m| < \varepsilon$ pro každé indexy $n, m \ge n_0$. Pro tato n, m pak máme

$$\sup_{x\in M} |f_n(x) - f_m(x)| \le |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Tedy posloupnost $\{f_n\}$ splňuje podmínku z Věty 12.1.12, a tedy $\{f_n\}$ je stejnoměrně konvergentní. ♣

12.4.3. Příklad. Nechť $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná, přičemž f' je stejnoměrně spojitá. Pak posloupnost

$$g_n(x) = n\left(f(x + \frac{1}{n}) - f(x) \right), \quad x \in \mathbb{R},$$

konverguje stejnoměrně k f'.

Ukažte, že pouhá spojitost f' ke stejnému závěru nestačí.

Řešení. Jelikož

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad x \in \mathbb{R},$$

platí dle Heineovy věty 4.2.16

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f'(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

K dokončení důkazu stačí ověřit, že je posloupnost $\{g_n\}$ stejnoměrně cauchyovská. Mějme tedy $\varepsilon \in (0,\infty)$ dáno. Zvolme $\delta \in (0,\infty)$ takové, že $|f'(x) - f'(y)| < \varepsilon$, kdykoliv $x, y \in \mathbb{R}$ splňují $|x-y| < \delta$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je větší než $\frac{1}{\delta}$ a nechť $n, m \in \mathbb{N}$ jsou větší než n_0. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ najdeme dle Lagrangeovy věty 5.2.4 $\alpha \in (x, x+\frac{1}{n})$ a $\beta \in (x, x+\frac{1}{m})$ splňující

$$n\left(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\right) = f'(\alpha), \quad m\left(f(x+\frac{1}{m}) - f(x)\right) = f'(\beta).$$

Pak $|\alpha - \beta| \le \max\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\} \le \frac{1}{n_0} < \delta$, a tedy

$$|g_n(x) - g_m(x)| = \left|f'(\alpha) - f'(\beta)\right| < \varepsilon.$$

Protože $x \in \mathbb{R}$ bylo libovolné, máme

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x) - g_m(x)| \le \varepsilon.$$

Tím je důkaz první části tvrzení dokončen.

Uvažujme nyní funkci $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Pak platí pro $x \in \mathbb{R}$ rovnosti

$$g_n(x) = n\left((x+\frac{1}{n})^3 - x^3\right) = n\left(3x^2\frac{1}{n} + 3x\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) = 3x^2 + 3x\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Tedy pro různé indexy n, m platí

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x) - g_m(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|3x(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}) + (\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2})\right| = \infty.$$

Proto není posloupnost $\{g_n\}$ stejnoměrně cauchyovská, a tedy ani stejnoměrně konvergentní. ♣

12.4.4. Příklad. Nechť $s \in \mathbb{N}$, X značí prostor všech polynomů na $\mathbb{R}$ stupně nejvýše s a $\{p_n\}$ je posloupnost v X. Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(i) Posloupnost $\{p_n\}$ konverguje lokálně stejnoměrně.
(ii) Existuje $s+1$ různých bodů $x_0, \dots, x_s$ v $\mathbb{R}$, takové, že $\{P_n(x_i)\}$ konverguje pro každé $i \in \{1, \dots, s+1\}$.
(iii) Posloupnosti koeficientů p_n konvergují.

Řešení. (i) $\Rightarrow$ (ii) platí zřejmě.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Nechť $p_n(x) = a_{n,s}x^p + a_{n,s-1}x^{s-1} + \cdots + a_{n,1}x^+ a_{n,0}$, $n \in \mathbb{N}$. Matice systému lineárních rovnic pro neznámé $a_{n_0}, \dots, a_{n,s}$ je

$$\begin{aligned} a_{n,0} + a_{n,1}x_0 + \cdots + a_{n,s}x_0^s &= p_n(x_0), \\ a_{n,0} + a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,s}x_1^s &= p_n(x_1), \\ &\cdots \\ a_{n,0} + a_{n,1}x_s + \cdots + a_{n,s}x_s^s &= p_n(x_s). \end{aligned} \tag{12.3}$$

je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^s \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_s & x_s^2 & \cdots & x_s^p \end{pmatrix},$$

což je matice s nenulovým determinantem číslo dle [**2**,]. Tedy má systém (12.3) jednoznačné řešení $a_{n,0}, \dots, a_{n,s}$. Toto řešení lze navíc vyjádřit jako

$$a_{n,i} = \frac{\det A_{n,i}}{\det A}, \quad i \in \{0, \dots, s\},$$

kde matice $A_{n,i}$ vznikne z matice A nahrazením i-tého sloupce vektorem pravých stran rovnice (12.3). Tedy konvergence hodnot posloupností $\{p_n(x_i)\}$, $i \in \{0, \dots, s\}$, implikuje konvergenci posloupností $\{a_{n,i}\}$, $i \in \{0, \dots, s\}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Nechť $p_n(x) = a_{n,s}x^p + a_{n,s-1}x^{s-1} + \cdots + a_{n,1}x^+ a_{n,0}$, $n \in \mathbb{N}$, přičemž posloupnosti $\{a_{n,i}\}$ konvergují pro $i \in \{0, \dots, s\}$. Pak pro každý interval tvaru $[-M, M]$, $M \geq 1$, platí

$$\sup_{x \in [-M,M]} |p_n(x) - p_m(x)| \leq sM^s \sup_{i \in \{0,\dots,s\}} |a_{n,i} - a_{m,i}|,$$

tedy $\{p_n\}$ konverguje stejnoměrně na každém takovém intervalu, a proto lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}$. ♣

12.4.5. Příklad. Nechť $\{p_n\}$ je posloupnost polynomů na $\mathbb{R}$ stejnoměrně konvergující k f. Pak f je polynom.

Řešení. Nejprve ukažme, že existuje $s \in \mathbb{N}$ takové, že všechny polynomy p_n jsou stupně nejvýše s. Vezmeme totiž $\varepsilon = 1$ a nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m \geq n_0$ platí

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |p_n(x) - p_m(x)| < 1. \tag{12.4}$$

Jsou-li nyní p, q dva polynomy splňující (12.4), pak $\operatorname{st} p = \operatorname{st} q$, Vskutku, je-li

$$p(x) = a_i x^i + a_{i-1} x^{i-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \text{a}$$
$$q(x) = b_j x^j + b_{j-1} x^{j-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

přičemž $a_i b_j \neq 0$, $i < j$, pak $p - q$ je polynom stupně j, a tedy

$$\lim_{x \to \infty} |q(x) - p(x)| = \infty.$$

To je ovšem spor s (12.4). Proto $\operatorname{st} p = \operatorname{st} q$.

Tedy dostáváme, že všechny polynomy p_n jsou stupně nejvýše s pro nějaké $s \in \mathbb{N}$. Dle Příkladu 12.4.4 proto konvergují posloupnosti koeficientů polynomů p_n, řekněme k číslům $a_s, a_{s-1}, \cdots, a_0$. Pak zjevně $p_n(x) \to p(x) = a_s x^s + a_{s-1} x^{s-1} + \cdots + a_x + a_0$. Protože však $p_n \rightrightarrows f$, platí $f = p$, a f je tedy polynom. ♣

12.4.6. Příklad. Nechť $f_n : (M, \rho) \to \mathbb{C}$ je bodově konvergentní stejně spojitá posloupnost na kompaktním metrickém prostoru M. Pak $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně.

Nalezněte příklad ukazující, že bez předpokladu kompaktnosti prostoru M tvrzení obecně neplatí.

Řešení. Nechť $\varepsilon \in (0, \infty)$ je dáno. Pro každé $x \in M$ nalezneme $r_x \in (0, \infty)$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $y \in B(x, r_x)$ platí $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$. Díky kompaktnosti vybereme body $x_1, \ldots, x_k \in M$ takové, že $M \subset \bigcup_{i=1}^k B(x_i, r_{x_i})$. Protože $\{f_n\}$ konverguje bodově, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n, m \geq n_0$ platí

$$|f_n(x_i) - f_m(x_i)| < \varepsilon, \quad i \in \{1, \ldots, k\}.$$

Nechť nyní $x \in M$ je libovolné. Nalezneme $i \in \{1, \ldots, k\}$ splňující $x \in B(x_i, r_{x_i})$. Pak pro $n, m \geq n_0$ máme

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f_m(x_i)| + |f_m(x_i) - f_m(x)| \\ &< 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy $\{f_n\}$ je stejnoměrně cauchyovská, a proto stejnoměrně konvergentní.

Abychom nalezli požadovaný příklad, uvažujme funkce $f_n(x) = \frac{x}{n}$, $x \in \mathbb{R}$. Pak $f_n \to 0$. Dále jsou všechny funkce f_n 1-lipschitzovské, a tedy je systém $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ stejně spojitý. Posloupnost $\{f_n\}$ však nekonverguje stejnoměrně k 0, jelikož

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \infty.$$

♣

12.4.7. Příklad. Najděte posloupnost $\{f_n\}$ spojitých funkcí na $[0,1]$ s hodnotami v $[0,1]$ takovou, že $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \infty$, ale $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně.

Řešení. Uvažujme spojité funkce $f_n\colon [0,1] \to [0,\frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$, s těmito vlastnostmi:

$$f_n = \begin{cases} 0, & \text{vně intervalu } [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}], \\ \frac{1}{n}, & \text{v nějakém bodě intervalu } [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]. \end{cases}$$

Pak zjevně $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Na druhou stranu však platí pro $n_0 \in \mathbb{N}$ a každé $k \in \mathbb{N}$ odhad

$$\sup_{x\in[0,1]} \sum_{n=n_0}^{n_0+k} f_n(x) \le \frac{1}{n_0}.$$

Tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ stejnoměrně konvergentní. ♣

12.4.8. Příklad. Nechť $f_n\colon (M,\rho) \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou takové funkce, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je stejnoměrně konvergentní. Nechť $f\colon M \to \mathbb{C}$ je omezená funkce na M. Pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} f(x) f_n(x)$ stejnoměrně konvergentní.

Ukažte, že bez předpokladu omezenosti f je tvrzení obecně neplatné.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $g_n = f$. Pak je pro každé $x \in M$ posloupnost $\{g_n(x)\}$ konstantní, a tudíž monotónní. Navíc je $\{g_n\}$ posloupnost stejně omezených funkcí. Podle Abelova kritéria (Věta 12.3.6) je tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} f(x) f_n(x)$ stejnoměrně konvergentní na M. ♣

12.4.9. Příklad. Nechť M je množina a $f_n\colon M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a $\sup_{x\in M} \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x) < \infty$. Nechť $\{c_n\}$ je posloupnost reálných čísel splňující $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$ konverguje absolutně stejnoměrně.

Řešení. Mějme $\varepsilon \in (0,\infty)$ dáno. Nechť $K = \sup_{x\in M} \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x)$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\sum_{n=n_0}^{n_0+k} c_n^2 < \varepsilon$. Pak pro $k \in \mathbb{N}$ a $x \in M$ platí dle Cauchyovy nerovnosti

$$\sum_{n=n_0}^{n_0+k} |c_n f_n(x)| \le \left(\sum_{n=n_0}^{n_0+k} c_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=n_0}^{n_0+k} f_n^2(x)\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{\varepsilon K}.$$

Tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$ stejnoměrně cauchyovská, a tedy stejnoměrně konvergentní. ♣

12.4.10. Příklad. Nechť je $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ řada spojitých funkcí na $[0,1]$. Nechť konverguje stejnoměrně na $[0,1)$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(1)$ konverguje.

Řešení. Jelikož jsou funkce f_n spojité na $[0,1]$, platí pro každé $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $m_1 \le m_2$, odhad

$$\sup_{x\in[0,1)} \left|\sum_{n=m_1}^{m_2} f_n(x)\right| = \sup_{x\in[0,1]} \left|\sum_{n=m_1}^{m_2} f_n(x)\right|.$$

Díky stejnoměrné cauchyovskosti řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na $[0,1)$ tedy dostáváme stejnoměrnou cauchyovskost této řady na $[0,1]$. Speciálně proto zadaná řada konverguje v bodě 1. ♣

12.4.11. Příklad. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada nezáporných spojitých funkcí na kompaktním metrickém prostoru M bodově konvergující ke spojité funkci f. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně k f na M.

Řešení. Posloupnost $\{s_n\}$ částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je neklesající. Tvrzení tedy plyne z Diniovy věty (Věta 12.1.17). ♣

12.4.12. Příklad. Nalezněte řadu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ reálných funkcí na metrickém prostoru M konvergující stejnoměrně na M, která je v každém $x \in M$ absolutně konvergentní, ale $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ nekonverguje stejnoměrně na M.

Řešení. Uvažujme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n, \quad x \in [0,1].$$

Definujme pro $x \in [0,1]$ a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ funkce $f_n(x) = (-1)^n$, $g_n(x) = (1-x)x^n$. Pak $\{g_n(x)\}$ je nerostoucí posloupnost pro každé $x \in [0,1]$. Dále platí

$$\sup_{x\in[0,1]} g_n(x) = g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to 0.$$

Tedy $g_n \rightrightarrows 0$. Konečně, řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ má stejně omezené částečné součty. Tedy naše řada konverguje stejnoměrně.

Dále $\sum_{n=0}^{\infty} |(-1)^n (1-x)x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$ je konvergentní v každém bodě $x \in [0,1]$.

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} |(-1)^n (1-x)x^n|$ však nekonverguje stejnoměrně, neboť

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n = \begin{cases} 1, & x \in [0,1), \\ 0, & x = 1, \end{cases}$$

což je nespojitá funkce na $[0,1]$. Řada spojitých funkcí tedy nemůže konvergovat stejnoměrně. ♣

12.4.13. Příklad. Nechť $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou monotónní funkce. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ konverguje pro $x \in \{a,b\}$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ konverguje stejnoměrně na $[a,b]$.

Řešení. Díky monotonii funkcí f_n máme odhad

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \max\{|f_n(a)|, |f_n(b)|\}, \quad x \in [a,b].$$

Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} \max\{|f_n(a)|, |f_n(b)|\}$ je konvergentní, je dle Weierstrassova kritéria (Věta 12.3.3) řada $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ stejnoměrně konvergentní. ♣

12.4.14. Příklad. Ukažte, že na prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ neexistuje metrika ρ, která pro každou posloupnost $\{f_n\}$ v $\mathcal{C}([0,1])$ a $f \in \mathcal{C}([0,1])$ splňuje

$$\rho(f_n, f) \to 0 \iff f_n \to f.$$

Řešení. Nechť ρ je metrika splňující předepsanou podmínku. Přivedeme tento předpoklad ke sporu. Nechť $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ značí množinu všech konečných posloupností přirozených čísel. Pro $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ značíme délku s jako $|s|$. Symbol $s^\wedge n$, kde $n \in \mathbb{N}$, značí posloupnost s prodlouženou o n, tj. $s^\wedge n = (s_1, \dots, s_{|s|}, n)$. Symbolem $\emptyset$ značíme prázdnou posloupnost. V intervalu $[0,1]$ zkonstruujeme systémy nedegenerovaných intervalů $\{I_s;\ s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ a $\{J_s;\ s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ takové, že

(a) $I_\emptyset = J_\emptyset = [0,1]$,
(b) pro každé $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ platí $\overline{I_s} \subset J_s$,
(c) pro každé $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ je J_s otevřený interval,
(d) pro každé $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ a $n \in \mathbb{N}$ je $\overline{J_{s^\wedge n}} \subset I_s$,
(e) pro každé $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ je systém $\{\overline{J_{s^\wedge n}};\ n \in \mathbb{N}\}$ disjunktní.

Po chvilce rozvažování je zřejmé, že takové systémy množin je snadné sestrojit.

Pro každé $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ nyní najdeme spojitou funkci $f_s \in \mathcal{C}([0,1])$ s hodnotami v intervalu $[0,1]$, které splňuje

$$f_s(x) = \begin{cases} 1, & x \in \overline{I_s}, \\ 0, & x \notin J_s. \end{cases}$$

Z vlastnosti (e) je vidět, že

$$\lim_{n\to\infty} f_{s^\wedge n} = 0, \quad s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}.$$

Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \rho(f_{s^\wedge n}, 0) = 0, \quad s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}. \tag{12.5}$$

Indukcí nyní sestrojíme posloupnost $\{s^n\}$ v $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ takovou, že s^n je délky n, s^{n+1} prodlužuje s^n a $\rho(f_{s^n}, 0) < \frac{1}{n}$. V prvním kroku využijeme vlastnost (12.5) pro $s = \emptyset$ a najdeme $s^1 \in \mathbb{N}^1$ takové, že $\rho(f_{s^1}, 0) < 1$.

Mějme nyní posloupnosti $s_1, \dots, s_n$ v $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ takové, že pro $i \in \{1, \dots, n\}$ je s^i délky i, $\rho(f_{s^i}, 0) < \frac{1}{i}$ a s^i prodlužuje s^{i-1} pro $i \in \{2, \dots, n\}$. Použijeme vlastnost (12.5) pro s^n a najdeme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $\rho(f_{s^n \wedge k}, 0) < \frac{1}{n+1}$. Položíme $s^{n+1} = s^n \wedge k$. Tím je konstrukce ukončena.

Vzhledem k tomu, že $\rho(f_{s^n}, 0) \to 0$, $f_{s^n} \to 0$ dle našeho předpokladu. Vezmeme-li však posloupnost intervalů $\{\overline{I_{s^n}}\}$, pak se jedná a monotónní posloupnost kompaktních množin v $[0, 1]$. Jejich průnik tedy obsahuje nějaký bod (viz Věta ??). V tomto bodě jsou ale všechny funkce f_{s^n} rovny 1, což je spor s jejich bodovou konvergencí k 0. ♣

12.5. Početní příklady ke stejnoměrné konvergenci posloupností a řad funkcí

12.5.1. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupností funkcí

$$f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \quad g_n(x) = x^{2n} - x^{3n}, \quad x \in (0, 1).$$

Řešení. Zjevně platí $f_n \to 0$ a $g_n \to 0$ na $(0, 1)$. Jelikož

$$f_n'(x) = x^{n-1} \left(n - (n+1)x\right), \quad x \in (0, 1),$$

nabývá f_n maxima v bodě $x = \frac{n}{n+1}$ o hodnotě

$$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}.$$

Tedy

$$\max_{x\in(0,1)} |f_n(x)| = \max_{x\in(0,1)} f_n(x) = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) \to 0.$$

Proto $f_n \rightrightarrows 0$ na $(0, 1)$.

Naproti tomu $\{g_n\}$ nekonverguje stejnoměrně na $(0, 1)$. Spočítáme-li totiž

$$g_n'(x) = nx^{2n-1}\left(2 - 3x^n\right), \quad x \in (0, 1),$$

dostaneme, že

$$\max_{x\in(0,1)} |g_n(x)| = \max_{x\in(0,1)} g_n(x) = g_n\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 \nrightarrow 0.$$

Platí však, že $g_n \rightrightarrows 0$ na každé množině tvaru $(0,q)$, kde $q \in (0,1)$, a tedy $g_n \rightrightarrows 0$ lokálně stejnoměrně na $(0,1)$. Mějme totiž $q \in (0,1)$ libovolné. Zvolíme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n}} > q$ pro $n \geq n_0$. Pak

$$\max_{x\in(0,q)} g_n(x) = g_n(q), \quad n \geq n_0,$$

a tedy $\max_{x\in(0,q)} g_n(x) \to 0$. ♣

12.5.2. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupností funkcí

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Řešení. Zřejmě $f_n(x) \to f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Odhadneme rozdíl $|f_n - f|$ na $\mathbb{R}$ a dostaneme

$$0 \leq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2} = \frac{1}{n^2} \frac{1}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}} \leq \frac{1}{n} \to 0,$$

a tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$. ♣

12.5.3. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupností funkcí

$$f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right), \quad x \in (0,\infty).$$

Řešení. Jelikož

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}},$$

konvergují funkce f_n bodově k fubnkci $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x \in (0,\infty)$.

Odhadujeme $|f - f_n|$ jako

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} &= \frac{\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{n}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}\right)^2} \end{aligned}$$

Z tohoto vyjádření vidíme, že

$$\sup_{x\in(0,\infty)} |f(x) - f_n(x)| \geq \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{n}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}\right)^2} = \infty,$$

tj. $\{f_n\}$ nekonvergují stejnoměrně na $(0,\infty)$.

Na druhou stranu $f_n \rightrightarrows f$ na každém intervalu tvaru (q,∞), kde $q > 0$. Vskutku, je-li $q > 0$, z přechozího máme odhad

$$\sup_{x\in(q,\infty)} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2\sqrt{q}\left(2\sqrt{q}\right)^2} \to 0.$$

Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na (q,∞). Proto $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na $(0,\infty)$. ♣

12.5.4. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupností funkcí

$$f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Zjevně

$$f_n(x) \to f(x) = x\frac{\pi}{2} \operatorname{sign} x = \frac{\pi}{2}|x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Označme $g(y) = \left|y \operatorname{arctg} y - \frac{\pi}{2}|y|\right|$, $y \in \mathbb{R}$. Pak pro $x \in \mathbb{R}$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|x \operatorname{arctg} nx - \frac{\pi}{2}|x|\right| = \frac{1}{n}\left|nx \operatorname{arctg} nx - \frac{\pi}{2}|nx|\right|.$$

Tedy

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \sup_{y\in\mathbb{R}} g(y).$$

K dokončení důkazu stejnoměrné konvergence tak stačí ukázat omezenost funkce g. Ta je však na $\mathbb{R}$ zjevně spojitá a platí

$$\lim_{y\to\infty} g(y) = \left|\lim_{y\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} y - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{y}}\right| = 1,$$

$$\lim_{y\to-\infty} g(y) = \left|\lim_{y\to-\infty} \frac{\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{y}}\right| = 1,$$

tedy g je omezená na $\mathbb{R}$. ♣

12.5.5. Příklad. Nechť M je množina a $f_n\colon M \to \mathbb{R}$ jsou nenulové funkce stejnoměrně konvergující k 0 na M. Nechť f je reálná funkce splňující $\lim_{t\to 0} f(t) = L$, kde $L \in \mathbb{R}$. Pak $f \circ f_n \rightrightarrows L$ na M.

Řešení. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Zvolíme $\delta > 0$ takové, že $f(P(0,\delta) \subset B(L,\varepsilon)$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že $\sup_{x \in M} |f_n(x)| < \delta$ pro $n \geq n_0$. Pak pro $n \geq n_0$ a $x \in M$ platí $f_n(x) \in P(0,\delta)$, a tedy

$$|f(f_n(x)) - L| < \varepsilon.$$

Proto $f \circ f_n \rightrightarrows L$ na M. ♣

12.5.6. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupností funkcí

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Jelikož

$$f_n(x) = \begin{cases} e^{x \frac{\log(1+\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}}}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

platí $f_n(x) \to f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Jelikož

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \geq \lim_{x \to \infty} \left| \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - e^x \right| = \infty,$$

konvergence není stejnoměrná.

Uvažujme však libovolný interval tvaru $[-q,q]$, kde $q > 0$. Uvažujme funkce $x \mapsto \frac{x}{n}$, $x \in [-q,q]$. Jelikož $\left|\frac{x}{n}\right| \leq \frac{q}{n}$, platí $\frac{x}{n} \rightrightarrows 0$ na $[-q,q]$. Jelikož $\lim_{t \to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$, Příklad 12.5.5 dává

$$\frac{\log(1 + \frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} \rightrightarrows 1, \quad \text{na } [-q,q] \setminus \{0\}.$$

Díky omezenosti funkce $x \mapsto x$ na $[-q,q]$ pak plyne

$$n \log(1 + \frac{x}{n}) - x = x \left(\frac{\log(1 + \frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} - 1 \right) \rightrightarrows 0 \quad \text{na } [-q,q] \setminus \{0\}.$$

Opětovným použitím Příkladu 12.5.5 a z omezenosti funkce $x \mapsto e^x$ na $[-q,q]$ dostáváme

$$e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x - e^{n \log(1+\frac{x}{n})} = e^x \left(1 - e^{n \log(1+\frac{x}{n}) - x}\right) \rightrightarrows 0$$

na $[-q,q] \setminus \{0\}$. Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $[-q,q] \setminus \{0\}$. Jelikož $f_n(0) = f(0)$, platí $f_n \rightrightarrows f$ na množině $\{0\}$. Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $[-q,q]$.

Proto $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na $\mathbb{R}$. ♣

12.5.7. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupností funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}.$$

Řešení. pokud $x = -1$ a $n \in]N$ je liché, není $f_n(x)$ definována. Tedy uvažujeme pouze $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^{-n}+1} = 1, & x \in (-\infty,-1), \\ 0, & x \in (-1,1), \\ \frac{1}{2}, & x = 1, \\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^{-n}+1} = 1, & x \in (1,\infty). \end{cases}$$

Jelikož limitní funkce f není spojitá v bodě 1, konvergence není stejnoměrná na žádném okolí 1. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Ukážeme, že $f_n \rightrightarrows f$ na $(-\infty,-1-\varepsilon] \cup [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon] \cup [1+\varepsilon,\infty)$. Vskutku, toto plyne z odhadů

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} \left|\frac{1}{1+x^n}\right| \leq |1|\,|x|^n - 1 \leq \frac{1}{|-1-\varepsilon|^n - 1}, & x \in (-\infty,-1-\varepsilon], \\ |x^n| \leq (1-\varepsilon)^n, & x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon], \\ \left|\frac{1}{1+x^n}\right| \leq \frac{1}{(1+\varepsilon)^n}, & x \in [1+\varepsilon,\infty). \end{cases}$$

Nakonec ukažme, že konvergence není stejnoměrné na žádném levém nebo pravém okolí bodu -1. Pro $x < -1$ totiž máme

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{|x^n+1|},$$

což je výraz konvergující k ∞ pro každé $n \in \mathbb{N}$ liché $x \to -1_-$. Tedy

$$\sup_{x\in(-\infty,-1)} |f_n(x) - f(x)| = \infty, \quad n \in \mathbb{N} \text{ liché}.$$

Podobně pro x z pravého okolí bodu -1 a $n \in \mathbb{N}$ sudé máme

$$\lim_{x\to-1_+} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{x\to-1_+} \frac{|x|^n}{1+x^n} = \frac{1}{2}.$$

♣

12.5.8. Příklad. Vyšetřet bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = \log\left(1 + \frac{1}{nx^2}\right)\sqrt{n^2+1}.$$

Řešení. Zjevně je třeba uvažovat $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pro tato x máme

$$f_n(x) = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{nx^2}\right)}{\frac{1}{nx^2}} \cdot \sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}} \frac{1}{x^2} \to f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Jelikož

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \geq \left| f_n\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right) - f\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right)\right| = \left|\log 2 \sqrt{n^2+2} - n\right|$$
$$= n\left(\log 2 \sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}} - 1\right) \to \infty,$$

konvergence není na $\mathbb{R}$ stejnoměrná.

Uvažujme libovolné $q > 0$ a množinu $(-\infty, -q] \cup [q, \infty)$. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Jelikož $\log(1+t) = t + \varphi(t)$, kde $\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t)}{t} = 0$, existuje $\delta \in (0, \varepsilon)$ takové, že $\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right| < \varepsilon$ kdykoliv $t \in P(0, \delta)$. Nechť $M > 0$ je takové, že

$$\frac{\sqrt{n^2+2}}{n} \leq M, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že $\frac{1}{nq^2} < \delta$ a

$$\left|\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}} - 1\right| < \varepsilon$$

pro $n \geq n_0$. Pak pro libovolné $x \in (-\infty, -q] \cup [q, \infty)$ a $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, máme

$$\frac{1}{nx^2} \leq \frac{1}{nq^2} < \delta,$$

a tedy

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\sqrt{n^2+2}\left(\frac{1}{nx^2} + \frac{\varphi\left(\frac{1}{nx^2}\right)}{\frac{1}{nx^2}} \cdot \frac{1}{nx^2}\right) - \frac{1}{x^2}\right|$$
$$\leq \left|\frac{1}{x^2}\left(\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}} - 1\right)\right| + \varepsilon \frac{1}{q^2} \frac{\sqrt{n^2+2}}{n}$$
$$\leq \varepsilon\left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^2} M\right).$$

Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $(-\infty, -q] \cup [q, \infty)$. ♣

12.5.9. Příklad. Vyšetřet bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = (x+1)^3 \operatorname{arccotg}(-nx^3), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Jelikož

$$-nx^3 \to \begin{cases} -\infty, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ \infty, & x < 0, \end{cases}$$

platí

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} (x+1)^3\pi, & x > 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Jelikož f není spojitá v 0, konveregence není stejnoměrná na žádném okolí bodu 0.

Uvažujme libovolné $q > 0$ a množinu $(-\infty, -q]$. Funkce $g(y) = y \operatorname{arccotg} y$, $y \in [0, \infty)$, je omezená, neboť je spojitá a

$$\lim_{y\to\infty} g(y) = \lim_{y\to\infty} \frac{\operatorname{arccotg} y}{\frac{1}{y}} = 1.$$

Pro $x \in (-\infty, -q]$ máme odhad

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= \left| (x+1)^3 \frac{1}{nx^3} \left((-nx^3) \operatorname{arccotg}(-nx^3) \right) \right| \\ &\le \frac{1}{n} \sup_{x\in(-\infty,-q]} \left| \frac{x+1}{x} \right|^3 \sup_{y\in[0,\infty)} g(y), \end{aligned}$$

což je výraz konvergující pro $n \to \infty$ k 0. Tedy $f_n \rightrightarrows 0$ na $(-\infty, -q]$.

Uvažujeme-li množinu $[q, \infty)$, dostaneme též stejnoměrnou konvergenci. Funkce

$$y \mapsto \left| (\pi - \operatorname{arccotg} y) y \right|, \quad y \in (-\infty, 0],$$

je totiž omezená, takže z odhadu platného pro $x \in [q, \infty)$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| (x+1)^3 \left(\pi - \operatorname{arccotg}(-nx^3) \right) \right| \\ &= \frac{1}{n} \left| \frac{x+1}{x} \right|^3 \left| (-nx^3)(\pi - \operatorname{arccotg}(-nx^3)) \right| \\ &\le \frac{1}{n} \sup_{x\in[q,\infty)} \left| \frac{x+1}{x} \right|^3 \sup_{y\in[0,\infty)} g(y) \end{aligned}$$

dostáváme stejnoměrnou konvergenci na $[q, \infty)$. ♣

12.5.10. Příklad. Vyšetřet bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = \sqrt{x}n^{-\sqrt{x}}logn, \quad x \in [0, \infty).$$

Řešení. Jelikož

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \sqrt{x}\log n e^{-\sqrt{x}\log}, & x > 0 \end{cases}$$

a $\lim_{t\to\infty} te^{-t} = 0$, platí $f_n \to 0$ na $[0, \infty)$.

Počítejme $\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,\infty)} f_n(x)$. Platí

$$f_n'(x) = e^{-\sqrt{x}\log n} \frac{\log n}{2} \left(-\log n + \frac{1}{\sqrt{x}} \right), \quad x > 0.$$

Tedy pokud $n \geq 2$, $f_n' > 0$ na $(0, \log^{-2} n)$ a $f_n' < 0$ na $(\log^{-2} n, \infty)$. Proto má f_n v bodě $\log^{-2} n$ maximum o hodnotě e^{-1}. Posloupnost $\{f_n\}$ tak nekonverguje stejnoměrně na $[0, \infty)$.

Uvažujeme-li však libovolný interval $[q, \infty)$, kde $q > 0$, dostaneme již na této množině stejnoměrnou konvergenci. Nalezneme totiž $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\log^{-2} n < q$ pro $n \geq n_0$. Pak pro $n \geq n_0$ platí

$$\sup_{x\in[q,\infty)} |f_n(x)| = f_n(q) \to 0,$$

což znamená $f_n \rightrightarrows 0$ na $[q, \infty)$. ♣

12.5.11. Příklad. Vyšetřet bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x^n + 3^n}, \quad x \in [0, \infty).$$

Řešení. Máme

$$3 \leq \sqrt[n]{x^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{23^n} = 3\sqrt[n]{2}, \quad x \in [0, 3],$$

a

$$x \leq \sqrt[n]{x^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{2x^n} = x\sqrt[n]{2}, \quad x \in (3, \infty).$$

Dle Věty2.2.47 platí

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [0, 3], \\ x, & x \in (3, \infty). \end{cases}$$

Jelikož

$$(f_n - f)'(x) = \frac{1}{n} \left(x^n + 3^n\right)^{\frac{1}{n}-1} nx^{n-1} > 0, \quad x \in (0, 3),$$

je $f_n - f$ nezáporná a rostoucí na $[0,3]$. Tedy

$$\sup_{x\in[0,3]} |f_n(x) - f(x)| \le \sqrt[n]{23^n} - 3 = 3\left(\sqrt[n]{2} - 1\right) \to 0,$$

což znamená, že $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,3]$.

Na intervalu $[3,\infty)$ platí

$$(f_n - f)'(x) = \frac{1}{n}\left(x^n + 3^n\right)^{\frac{1}{n}-1} n x^{n-1} - 1 < 0, \quad x \in (3,\infty),$$

a tedy je $f_n - f$ klesající na $[3,\infty)$. Zjevně je $f_n - f > 0$, a proto

$$\sup_{x\in[3,\infty]} |f_n(x) - f(x)| \le \sqrt[n]{23^n} - 3 = 3\left(\sqrt[n]{2} - 1\right) \to 0.$$

Tedy $f_n \rightrightarrows f$ i na $[3,\infty)$. Proto $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,\infty)$. ♣

12.5.12. Příklad. Vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^5 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je funkce $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^5x^2}$ lichá a v nekonečnu má limitu 0. Jelikož

$$f_n'(x) = \frac{n}{(1 + n^5 x^2)^2}\left(1 - n^5 x^2\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

Má funkce v bodě $-\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ minimum a v bodě $\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ maximum. V absolutní hodnotě lze tak funkci f_n odhadnout číslem $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Jelikož řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ konverguje, zadaná řada konverguje stejnoměrně dle Věty 12.3.3. ♣

12.5.13. Příklad. Vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{x^2}{n \log^2 n}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Jelikož $\log(1+t) \le t$, $t \in (-1,\infty)$, a řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log^2 n}$ konverguje, konverguje bodově i zadaná řada. Protože však

$$\lim_{x\to\infty} \log\left(1 + \frac{x^2}{n \log^2 n}\right) = \infty, \quad n \in \mathbb{N},$$

nekonvergují členy řady stejnoměrně k 0. Proto daná řada nekonverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ dle Poznámky 12.3.2.

Uvažujme nyní libovolný interval $[-q,q]$, kde $q>0$. Pak

$$\sup_{x\in[-q,q]} \log\left(1+\frac{x^2}{n\log^2 n}\right) \le \frac{q^2}{n\log^2 n},$$

a tedy dle Věty 12.3.3 řada konverguje stejnoměrně na $[-q,q]$. ♣

12.5.14. Příklad. Ukažte, že řada

$$\sum_{n=+}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

nekonverguje stejnoměrně na $(0,\pi)$.

Řešení. Použijeme Poznámku 12.3.2(a), tj. ukážeme, že daná řada na $(0,\pi)$ nesplňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Uvažujme libovolné $n\in\mathbb{N}$. Pak

$$\begin{aligned}\sup_{x\in(0,\pi)} \left|\sum_{k=n}^{2n}\frac{\sin kx}{k}\right| &\ge \sum_{k=n}^{2} n\frac{\sin(\frac{k}{2n})}{2n}\\ &\ge \frac{\sin(\frac{n}{2n})}{2n}\sum_{k=n}^{2n} 1 \ge \frac{\sin\frac{1}{2}}{2} \not\to 0.\end{aligned}$$

Tedy řada nekonverguje stejnoměrně na $(0,\pi)$. ♣

12.5.15. Příklad. Zjistěte, zda je funkce

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \operatorname{arctg} x^n}{\sqrt{n+1}}$$

spojitá na svém definičním oboru.

Řešení. Vyzkoumejme nejprve, pro jaké $x\in\mathbb{R}$ je řada konvergentní. Nechť nejprve $x\in[0,\infty)$. Položíme-li $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ a $b_n=\operatorname{arctg}(x^n)$, je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní (Věta 3.3.1) a posloupnost $\{b_n\}$ je omezená a monotónní (neklesající pro $x\ge 1$ a nerostoucí pro $x\in[0,1]$). Dle Věty 3.3.5 tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje. Pokud $x\in(-1,0)$, máme

$$(-1)^n \operatorname{arctg}(x^n)=\operatorname{arctg}(|x|^n)\le |x|^n,$$

a tedy řada konverguje dle Věty 3.2.2.

Pokud $x\in(-\infty,-1]$, platí

$$(-1)^n \operatorname{arctg}(x^n)=\operatorname{arctg}(|x|^n)\ge \operatorname{arctg} 1,$$

a proto
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} x^n}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \infty.$$
Tedy $\mathcal{D}(f) = (-1, \infty)$.

Vyšetříme stejnoměrnou konvergenci na $[0, \infty)$. Položíme
$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}, \quad g_n(x) = \operatorname{arctg}(x^n), \quad x \in [0, \infty).$$
Pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$, pro každé $x \in [0, \infty)$ je $\{g_n(x)\}$ monotónní a $|g_n(x)| \leq \frac{\pi}{2}$, $x \in [0, \infty)$. Dle Věty 12.3.6 daná řada konverguje stejnoměrně na $[0, \infty)$.

Ukážeme nyní, že $\sum \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} x^n}{\sqrt{n+1}}$ nekonverguje stejnoměrně na žádném pravém okolí bodu -1. Předpokládejme pro spor, že řada konverguje stejnoměrně na nějakém intervalu $(-1, -1+\delta)$. Položme
$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} x^n}{\sqrt{n+1}}, \quad x \in (-1, -1+\delta).$$
Jelikož
$$\lim_{x \to -1_+} f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\pi}{4\sqrt{n+1}} = a_N \in \mathbb{R},$$
dle Věty 12.1.7 existuje vlastní limita $\lim_{N\to\infty} a_N$. To je však zřejmá nepravda, a tedy náš předpoklad o stejnoměrné konvergenci byl chybný.

Ukážeme však, že řada konverguje stejnoměrně na každém intervalu $[q, 0]$, kde $q \in (-1, 0)$. Pro $x \in [q, 0]$ totiž platí
$$\left| \frac{(-1)^n \operatorname{arctg}(x^n)}{\sqrt{n+1}} \right| \leq \frac{\operatorname{arctg}(|x|^n)}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{|x|^n}{\sqrt{n+1}} \leq |q|^n .$$
Jelikož je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |q|^n$ konvergentní, konverguje daná řada stejnoměrně na $[q, 0]$ dle Věty 12.3.3.

Řada tak konverguje lokálně stejnoměrně na $(-1, \infty)$, což zaručuje spojitost f na tomto intervalu, viz Věta 12.1.8. ♣

12.5.16. Příklad. Spočtěte $f'(0)$, pokud
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(1 + \frac{x}{n})}{\sqrt{n}}.$$

Řešení. Označíme
$$f_n(x) = (-1)^n \frac{\sin(1 + \frac{x}{n})}{\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak
$$\left|f_n'(x)\right| = \left|(-1)^n \frac{\cos(1+\frac{x}{n})}{n\sqrt{n}}\right| \le \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$
Tedy na každém intervalu tvaru $(-q,q)$, kde $q>0$, je $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \rightrightarrows$ dle Věty 12.3.3. Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) = \sin(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konverguje, jsou splněny předpoklady Věty **??**. Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na $(-q,q)$ a navíc
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \quad x \in (-q,q).$$
Tedy
$$f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos 1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$
♣

12.5.17. Příklad. Určete definiční obor funkce
$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\operatorname{sign}(\cos x))^n(2\cos(x))^{2n}}{\sqrt{\log n}}, \quad x\in\mathbb{R},$$
a zjistěte, zda je na něm spojitá.

Řešení. Položme
$$f_n(x) = \frac{(\operatorname{sign}(\cos x))^n(2\cos(2x))^{2n}}{\sqrt{\log n}} = \left(\operatorname{sign}(\cos x)\right)^n \frac{\left(4\cos^2 x\right)^n}{\sqrt{\log n}}, \quad x\in\mathbb{R}.$$
Pokud $x\in\mathbb{R}$ splňuje $|\cos^x| < \frac{1}{2}$, tj. $x \in \left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right) + k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, tak
$$|f_n(x)| \le \left(4\cos^2 x\right)^n,$$
a tedy řada $\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$ konverguje absolutně. Pokud $|\cos^x| > \frac{1}{2}$, tj. $x \in \left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) + k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, tak $f_n(x) \nrightarrow 0$, a tedy řada $\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$ diverguje. Pokud $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ nebo $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, pak $\cos x = \frac{1}{2}$ a $\operatorname{sign}\cos x = 1$, tedy
$$\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\log n}}$$
diverguje. Pokud $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ nebo $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, pak $\cos x = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{sign}\cos x = -1$, a tedy
$$\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{\log n}}$$

konverguje dle Věty 3.3.1. Definiční obor f je tak

$$\mathcal{D}(f) = \left[\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)\right] + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Zkoumejme nyní stejnoměrnou konvergenci na intervalu $\left[\frac{\pi}{3} + \varepsilon, \frac{\pi}{2}\right]$. Zde platí

$$|f_n(x)| \leq \frac{\left(4\cos^2(\frac{\pi}{3} + \varepsilon)\right)^{2n}}{\sqrt{\log n}},$$

přičemž

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(4\cos^2(\frac{\pi}{3} + \varepsilon)\right)^{n}}{\sqrt{\log n}}$$

konverguje. Tedy $\sum_{n=2}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na $\left[\frac{\pi}{3} + \varepsilon, \frac{\pi}{2}\right]$ dle Věty 12.3.3.

Na intervalu $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ použijeme Větu 12.3.6. Řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\log n}}$ totiž konverguje stejnoměrně, pro každé $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ je $\left\{(4\cos^2 x)^n\right\}$ monotónní a $\left|(4\cos^2 x)^n\right| \leq 1$. Tedy

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\log n}} (4\cos^2 x)^n$$

konverguje stejnoměrně na $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$. Tedy $\sum_{n=2}^{\infty} f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ na $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

Na intervalu $\left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$ postupujeme obdobně.

Díky Větě 12.1.8 je tak f spojitá na $\mathcal{D}(f)$.

Ukažme ještě, že $\sum_{n=2}^{\infty} f_n$ nekonverguje stejnoměrně na $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$. Kdyby tomu tak bylo, tak z Věty 12.1.7 plyne existence vlastní limity

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} f_n\left(\frac{\pi}{3}\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\sqrt{\log n}},$$

což není pravda. ♣

12.5.18. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konveregenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{2x}{x^2 + n^2}\right), \quad x \in [0, \infty).$$

Řešení. Jelikož $\log(1+t) \le t$, $t \in [0,\infty)$, máme pro $f_n(x) = \log\left(1 + \frac{2x}{x^2+n^2}\right)$ odhad

$$0 \le \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2+n^2} \le 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{i} nftyf_n(x)$ konverguje na $[0,\infty)$.

Pro libovolný interval $[0,q]$ též máme odhad

$$|f_n(x)| = f_n(x) \le \frac{q}{n^2}, \quad x \in [0,q],$$

což dle Věty 12.3.3 implikuje stejnoměrnou konvergenci na $[0,q]$.

Řada však nekonverguje stejnoměrně na $[0,\infty)$, neboť pro libovolné $N \in \mathbb{N}$ máme odhad

$$\begin{aligned}\sum_{n=N}^{2N} f_n(N) &= \sum_{n=N}^{2N} \log\left(1 + \frac{2N}{N^2+n^2}\right) \ge \sum_{n=N}^{2N} \log\left(1 + \frac{2N}{N^2+(2N)^2}\right)\\ &\ge N\log\left(1+\frac{2}{5N}\right) \to \frac{2}{5}\end{aligned}$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ nesplňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku na $[0,\infty)$, takže daná řada zde nekonverguje stejnoměrně. ♣

12.5.19. Příklad. Nechť $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ jsou takové, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$$

konverguje. Ukažte, že pak řada konverguje stejnoměrně na $[x_0,\infty)$.

Řešení. Pro $x \in [x_0,\infty)$ máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}}.$$

Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \rightrightarrows$ a $\left\{\frac{1}{n^{x-x_0}}\right\}$ je monotónní omezená posloupnost, tvrzení plyne z Věty 12.3.6. ♣

12.5.20. Příklad. Ukažte, že funkce

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \quad x \in \mathbb{R},$$

má spojitou derivaci na $\mathbb{R}$ a spojitou druhou derivaci na $(0,2\pi)$.

Řešení. Zjevně platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Označme $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^3}$ a uvažujme řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\sin nx}{n}.$$

Z odhadu $|f_n'(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ a Věty 12.3.3 plyne stejnoměrná konvergence řady derivací na $\mathbb{R}$. Z Příkladu **??** plyne lokálně stejnoměrná konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n''$ na $(0, 2\pi)$. Z Věty **??** a 12.1.8 tak plyne spojitost $f' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ na $\mathbb{R}$ a spojitost $f'' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n''$ na $(0, 2\pi)$. ♣

12.5.21. Příklad. Dokažte, že Riemannova funkce zeta

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

je třídy C^∞ na $(1, \infty)$.

Řešení. Postupujeme indukcí. Nechť $q > 1$ je libovolné. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$ konverguje, a tedy z Příkladu 12.5.19 plyne stejnoměrná konvergence dané řady na $[q, \infty)$. Tedy ζ je spojitá na $(1, \infty)$.

Dokážeme nyní, že pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$\zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^k n}{n^x}, \quad x \in (1, \infty).$$

Pro $k = 0$ vzorec zjevně platí. Předpokládejme jeho platnost pro nějaké $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^{k+1} n}{n^x}$$

konverguje lokálně stejnoměrně na $(1, \infty)$ (viz Příklad 12.5.19), a tedy platí díky Větě **??** rovnost

$$\zeta^{(k+1)}(x) = \left(\zeta^k(x)\right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \log^k n}{n^x}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \log^{k+1} n}{n^x}.$$

Tedy ζ je třídy C^∞ na $(1, \infty)$. ♣

12.5.22. Příklad. Zjistěte, kde jsou diferencovatelné funkce

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n + x}, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}.$$

Řešení. (a) Označme

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n x}{n+x}, \quad g_n(x) = \frac{|x|}{n^2+x^2}.$$

Nechť $N = \{-n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Ukážeme, že

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

na každé množině tvaru $[-q,q] \setminus N$. Nechť tedy $q > 0$ je libovolné. Zvolíme $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 > q$. Pak pro $x \in [-q,q]$ a $n \geq n_0$ platí

$$\frac{1}{(n+x)^2} \leq \frac{1}{(n-q)^2}.$$

Tedy máme

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{n^2}{(n+x)^2},$$

přičemž $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \rightrightarrows$, $\frac{n^2}{(n+x)^2} \leq \frac{n^2}{(n-q)^2}$ a pro každé $x \in [-q,q]$ je posloupnost $\left\{\frac{n^2}{(n+x)^2}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ monotónní. (Vskutku,

$$\frac{n^2}{(n+x)^2} \geq \frac{(n+1)^2}{(n+1+x)^2}$$

právě tehdy, když

$$1 + \frac{1}{n+x} \geq 1 + \frac{1}{n}.$$

To však nastává právě tehdy, když $x \leq 0$. Tedy daná posloupnost je nerostoucí, pokud $x \in [-q,0]$, a neklesající, pokud $x \in [0,q]$.) Řada $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n'$ tak konverguje stejnoměrně na $[-q,q]$. Protože původní řada konverguje v bodě $x = 0$, máme

$$\left(f(x) - \sum_{n=1}^{n_0-1} f_n(x)\right)' = \sum_{n=n_0}^{\infty} f_n'(x), \quad x \in [-q,q] \setminus N.$$

Z toho však dostáváme

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \quad x \in [-q,q] \setminus N.$$

Jelikož q bylo libovolné, je f diferencovatelná na $\mathbb{R} \setminus N$.

(b) Z odhadu $|g_n(x)| \leq \frac{q}{n^2}$ platného pro $x \in [-q, q]$ vidíme, že řada definující g konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}$. Máme

$$g_n'(x) = \operatorname{sign} x \frac{n^2 - x^2}{n^2 + x^2}, \quad x \neq 0,$$

a tedy pro interval $(0, q)$ platí

$$\left|g_n'(x)\right| \leq \frac{q(n^2 + q^2)}{n^4}.$$

Jelikož je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q(n^2+q^2)}{n^4}$ konveregentní, $\sum_{n=1}^{\infty} g_n' \rightrightarrows$ na $(0, q)$. Tedy

$$g' = \sum_{n=1}^{\infty} g_n'$$

na $(0, \infty)$. Obdobně odvodíme, že $g' = \sum_{n=1}^{\infty} g_n'$ na $(-\infty, 0)$.

Ukážeme nyní, že $g'(0)$ neexistuje. Díky Větě 12.1.7 máme

$$g_+'(0) = \lim_{h \to 0_+} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0_+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + h^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

a obdobně $g_-'(0) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Tedy $g'(0)$ neexistuje. ♣

12.5.23. Příklad. Dokažte, že platí

$$\lim_{x \to 1_-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(1 + x^n)} = \lim_{x \to 1_-} (1 - x) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{1 - x^{2n}} = \frac{\log 2}{2}$$

Řešení. (a) Dokážeme nejprve rovonost

$$\lim_{x \to 1_-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(1 + x^n)} = \frac{\log 2}{2}.$$

K tomu dle Věty 12.1.7 stačí ověřit stejnoměrnou konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(1+x^n)}$ na nějakém levém okolí bodu 1. Avšak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \rightrightarrows$, $0 \leq \frac{x^n}{1+x^n} \leq 1$ pro $x \in (0, 1)$ a posloupnost $\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\}$ je pro každé $x \in (0, 1)$ monotónní. (To plyne ze vztahu

$$\frac{x^n}{1 + x^n} = 1 - \frac{1}{1 + x^n}.)$$

Tedy daná řada konverguje stejnoměrně a lze zaměnit limitní přechody. Dostáváme tak

$$\lim_{x \to 1_-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(1 + x^n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to 1_-} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(1 + x^n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n} = \frac{\log 2}{2},$$

přičemž poslední rovnost plyne z Příkladu **??**.

(b) K důkazu druhé rovnosti též použijeme Větu 12.1.7, a tedy je třeba ověřit stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n(1-x)}{1-x^{2n}}$$

na nějakém levém okolí bodu 1. Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ má omezené částečné součty. Stejnoměrná konvergence naší řady tak bude dle Věty 12.3.7 zaručena, pokud dokážeme, že funkce

$$f_n(x)=\frac{x^n(1-x)}{1-x^{2n}}$$

jsou pro každé $x\in(0,1)$ monotónní a platí $f_n \rightrightarrows 0$ na $(0,1)$. Pišme

$$\begin{aligned} f_n(x)&=\frac{x^n}{\frac{1-x^{2n}}{1-x}}=\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-2}+x^{2n-1}}\\ &=\frac{\sqrt{x}}{x^{-n+\frac{1}{2}}+x^{-n+\frac{3}{2}}+\cdots+x^{n-\frac{3}{2}}+x^{n-\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Jelikož $y+\frac{1}{y}\geq 2$ pro každé $y\in(0,\infty)$, máme z předchozího odhad

$$0\leq f_n(x)\leq\frac{\sqrt{x}}{2n},$$

z kterého plyne $f_n \rightrightarrows 0$. Též obdržíme monotonii, neboť

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x)&=\frac{\sqrt{x}}{x^{-n-\frac{1}{2}}+x^{-n+\frac{1}{2}}+\cdots+x^{n-\frac{1}{2}}+x^{n+\frac{1}{2}}}\\ &\leq\frac{\sqrt{x}}{x^{-n+\frac{1}{2}}+x^{-n+\frac{3}{2}}+\cdots+x^{n-\frac{3}{2}}+x^{n-\frac{1}{2}}}=f_n(x). \end{aligned}$$

Proto daná řada konverguje stejnoměrně na $(0,1)$. Jelikož

$$\lim_{x\to 1_-} f_n(x)=\frac{1}{2n},$$

máme

$$\lim_{x\to 1_-}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\lim_{x\to 1_-} f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n}=\frac{\log 2}{2}.$$

♣

KAPITOLA 13

Diferenciální rovnice

13.0.1. Definice. **Diferenciální rovnicí** rozumíme rovnici tvaru

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x) = 0, \tag{13.1}$$

kde F je reálná funkce $n+2$ proměnných.

13.0.2. Definice. **Řešením diferenciální rovnice** (13.1) rozumíme reálnou funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I, která má v každém bodě intervalu I vlastní n-tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (13.1) v každém bodě intervalu I, tj. pro každé $x \in I$ platí

$$F(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \dots, y'(x), y(x), x) = 0.$$

Řešení y rovnice (13.1) je **maximální**, pokud neexistuje takové řešení z, pro které $\mathcal{D}(y) \subsetneq \mathcal{D}(z)$ a které se na $\mathcal{D}(y)$ shoduje s y.

13.1. Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

13.1.1. Definice. **Rovnice se separovanými proměnnými** je rovnice tvaru

$$y' = g(y)h(x). \tag{13.2}$$

13.1.2. Věta (Lemma o lepení řešení)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $\delta, \eta \in (0, \infty)$ a F je spojitá funkce na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^2$. Nechť y_l je řešením diferenciální rovnice

$$y' = F(x, y) \tag{13.3}$$

na intervalu $(a-\delta, a)$ a y_r je řešením této rovnice na $(a, a+\eta)$. Nechť $[a, A] \in G$ a platí

$$\lim_{x \to a_-} y_l(x) = \lim_{x \to a_+} y_r(x) = A.$$

Pak funkce

$$y = \begin{cases} y_l(x), & x \in (a-\delta, a), \\ A, & x = a, \\ y_r(x), & x \in (a, a+\eta) \end{cases}$$

je řešením rovnice (13.3) na intervalu $(a-\delta, a+\eta)$.

Důkaz. Jediný bod intervalu $(a-\delta, a+\eta)$, kde není jasné, že y splňuje rovnici (13.3), je bod a. Počítejme tedy jednostranné derivace y v bodě a pomocí Věty **??** jako

$$y'_-(a) = \lim_{x \to a_-} y'_l(x) = \lim_{x \to a_-} F(x, y_l(x)) = F(a, A)$$

a

$$y'_+(a) = \lim_{x \to a_+} y'_r(x) = \lim_{x \to a_+} F(x, y_r(x)) = F(a, A).$$

Tedy

$$y'(a) = F(a, A) = F(a, y(a))$$

a y je řešením (13.3) na $(a-\delta, a+\eta)$. ■

13.1.3. Věta. Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ a $c < d$, nechť $h : (a, b) \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce a $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ je spojitá a nenulová. Nechť $[x_0, y_0] \in (a, b) \times (c, d)$. Označme

$$H(x) = \int_{x_0}^{x} h(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in (a, b),$$

a

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t, \quad y \in (c, d).$$

Potom existuje právě jedno maximální řešení y rovnice (13.2) splňující podmínku $y(x_0) = y_0$. Definičním intervalem I tohoto řešení je maximální interval ze všech intervalů tvaru $(x_0-\delta, x_0+\eta)$, které splňují $(x_0-\delta, x_0+\eta) \subset (a, b)$ a

$$H(x) \in G\left((c, d)\right), \quad x \in I.$$

Důkaz. Nejprve si povšimněme, že g nemění znaménko na (c, d), a tedy G je ryze monotónní funkce na (c, d). Proto je $G\left((c, d)\right)$ otevřený interval obsahující $H(x_0) = 0$. Dále existuje G^{-1} (viz Věta **??**). Funkce H je spojitá dle Věty **??**, a proto je $H^{-1}\left(G\left((c, d)\right)\right)$ otevřená množina v (a, b) obsahující x_0. Dle Věty **??** existuje maximální otevřený interval $I = (x_0 - \delta, x_0 + \eta)$ v (a, b) splňující $H(I) \subset G\left((c, d)\right)$.

Dále víme, že jsou G', H' spojité (viz Věta **??**) a $G' = \frac{1}{g}$ je nenulová, a tedy je spojitá i $(G^{-1})' = \frac{1}{G' \circ G^{-1}}$. Proto je funkce $y = G^{-1} \circ H$ spojitě diferencovatelná na I. Dle aritmetiky derivací a větě o derivaci inverzní funkce (Věta **??** a **??**) platí

$$y'(x) = (G^{-1})'(H(x))H'(x) \frac{1}{G'(G^{-1}(H(x)))} H'(x) = g(y(x))h(x), \quad x \in I,$$

tj. y řeší na I rovnici (13.2).

Ukažme, že $I = (x_0 - \delta, x_0 + \eta)$ je maximální interval s vlastnostmi $I \subset (a,b)$ a $H(x) \in G\,((c,d))$ pro $x \in I$. Nejprve ověříme, že řešení y nelze prodloužit vlevo od bodu $x_0 - \delta$. Pokud $x_0 - \delta = a$, zjevně nelze interval δ zvětšit bez porušení vlastnosti $I \subset (a,b)$. Pokud $a < x_0 - \delta$, pak máme $H(x_0 - \delta) \notin G((c,d))$, protože jinak by byl interval I díky své maximalitě prodloužen vlevo od bodu $x_0 - \delta$. To ale znamená, že

$$\lim_{x \to (x_0 - \delta)+} y(x) = \lim_{x \to (x_0 - \delta)+} G^{-1}(H(x)) \in \{c, d\}.$$

Tedy bod

$$[x_0 - \delta, \lim_{x \to (x_0 - \delta)+} y(x)] \notin (a,b) \times (c,d).$$

Proto řešení y nelze prodloužit vlevo od bodu $x_0 - \delta$. Obdobně bychom ukázali, že y nelze prodloužit vpravo od bodu $x_0 + \eta$. Tedy I je vskutku maximální vzhledem k popsaným vlastnostem a y je maximální řešení.

Předpokládejme nyní, že z je jiné maximální řešení (13.2) na otevřeném intervalu $\tilde{I} \subset (a,b)$ splňující $z(x_0) = y_0$. Pak máme

$$\frac{z'(x)}{g(z(x))} = h(x), \quad x \in \tilde{I},$$

a tedy pro $x \in \tilde{I}$ máme díky $z(x) \in (c,d)$ rovnost

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_{x_0}^{x} h(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} \frac{z'(t)}{g(z(t))}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{y_0}^{z(x)} \frac{1}{g(s)}\,\mathrm{d}s = G(z(x)). \end{aligned} \tag{13.4}$$

Protože $z(x) \in (c,d)$, je $G(z(x)) \in G((c,d))$. Tedy je $H(x) \in G((c,d))$. Z maximality I máme tedy $\tilde{I} \subset I$ a z (13.4) dostáváme

$$z(x) = G^{-1}(H(x)) = y(x), \quad x \in \tilde{I}.$$

Z maximality řešení z pak plyne $\tilde{I} = I$. Tedy řešení z splývá s řešením y. ∎

13.1.4 (Postup při řešení (13.2))**.** Nechť f, h jsou spojité funkce reálné proměnné. Při hledání maximálních řešení rovnice (13.2) postupujeme následujícím způsobem.

(1) Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v $\mathcal{D}(h)$.
(2) Najdeme všechny nulové body funkce g. Je-li totiž $g(c) = 0$, pak na každém intervalu z 1. kroku je funkce $y(x) = c$ řešením rovnice (13.2). Těmto řešením se říká **singulární** nebo také **stacionární**.
(3) Určíme maximální otevřené intervaly, na kterých je g nenulová.
(4) Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je spojitá na I a g je spojitá a nenulová na J. Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J. Je-li $y(x)$ takové řešení, pak pro něj platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Nechť H je primitivní funkce k h na I a G je primitivní funkce k funkci $\frac{1}{g}$ na J. Existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že platí $G(y(x)) = H(x) + c$ na definičním oboru řešení y, který nalezneme v následujícím kroku.
(5) Nyní zafixujeme c a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I;\ H(x) + c \in G(J)\}.$$

Na každém z těchto intervalů musí mít řešení tvar

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c).$$

(Zde G^{-1} je inverzní funkce ke G. Existuje, protože G je intervalu J buď rostoucí nebo klesající.)
(6) Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku „slepíme“ všechna maximální řešení pomocí Věty 13.1.2.

13.1.5. Příklad. Najděte všechna maximální řešení rovnice $y' = \sqrt{1 - y^2}$.

Řešení. V tomto případě máme v rovnici (13.2) $h(x) = 1$ a $g(y) = \sqrt{1 - y^2}$.

(1) Protože $\mathcal{D}(h) = \mathbb{R}$, budeme řešení hledat na $\mathbb{R}$.
(2) Nulové body funkce g jsou 1 a -1. Tedy $y = 1$ a $y = -1$ jsou stacionárními řešeními naší rovnice.
(3) Maximální otevřený interval, kde je g nenulová, je $(-1, 1)$. Budeme tedy hledat řešení s hodnotami v tomto intervalu.

(4) Je-li y řešení s hodnotami v $(-1,1)$, platí

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{1-y^2(x)}}=1.$$

Primitivní funkce k levé straně je $\arcsin y(x)$ a primitivní funkce k pravé straně je x. Existuje tedy konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\arcsin y(x)=x+c.$$

(5) Protože hledáme řešení s hodnotami v $(-1,1)$, pro pevné $c \in \mathbb{R}$ máme

$$y_c(x)=\sin(x+c), \quad x \in (-\frac{\pi}{2}-c, \frac{\pi}{2}-c).$$

(6) Lepením singulárních řešení s řešeními z bodu 5 dostaneme pro pevné $c \in \mathbb{R}$ maximální řešení

$$y_c(x)=\begin{cases}-1, & x \in (-\infty, -\frac{\pi}{2}-c],\\ \sin(x+c), & x \in (-\frac{\pi}{2}-c, \frac{\pi}{2}-c),\\ 1, & x \in [\frac{\pi}{2}-c, \infty)\end{cases}$$

♣

13.1.6. Příklad. Najděte všechna maximální řešení rovnice $y' = x\sqrt[3]{y^2}$.

Řešení. Zadaná rovnice je tvaru (13.2), kde $h(x)=x$ a $g(y)=\sqrt[3]{y^2}$.

(1) Protože $\mathcal{D}(h)=\mathbb{R}$, budeme hledat řešení na $\mathbb{R}$.
(2) Nulový bod funkce g je 0, tedy $y=0$ je stacionární řešení.
(3) Maximální otevřené intervaly, kde je g nenulová, jsou $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$.
(4) Je-li y řešení s hodnotami v intervalu $(-\infty,0)$ nebo $(0,\infty)$, platí pro něj rovnost

$$\frac{y'(x)}{\sqrt[3]{y^2}}=x.$$

Primitivní funkce k levé straně je $G(y)=3y^{\frac{1}{3}}(x)$, primitivní funkce k pravé straně je $H(x)=\frac{x^2}{2}$. Existuje tedy konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že

$$3y^{\frac{1}{3}}(x)=\frac{x^2}{2}+c.$$

(5) Vezměme nyní $c \in \mathbb{R}$ pevné. Pro intervaly $J=(0,\infty)$ a $J=(-\infty,0)$ hledáme otevřený interval I_c takový, že $\frac{x^2}{2}+c \in J$ pro $x \in I_c$.
- Nechť $J=(0,\infty)$. Pak výše uvedený požadavek dává tři možnosti:

- $c > 0$, $I_c = \mathbb{R}$ a $y_c(x) = \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3$,
- $c \leq 0$, $I_c = (-\infty, -\sqrt{-2c})$ a $y_c(x) = \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3$,
- $c \leq 0$, $I_c = (\sqrt{-2c}, \infty)$ a $y_c(x) = \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3$.

• Nechť $J = (-\infty, 0)$. Hledáme otevřený interval I_c takový, že $\frac{x^2}{2} + c \subset (-\infty, 0)$ pro $x \in I_c$. Toto je možné pouze pro $c < 0$. Pak $I_c = (-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c})$ a $y_c(x) = \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3$.

(6) Nalezená řešení z bodu (5) a (2) nyní lze lepit dohromady v bodech osy x, protože

$$\lim_{x\to\pm\sqrt{-2c}} \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3 = 0.$$

To nám dává následujících devět různých typů maximálních řešení:

• $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$,
• $y(x) = \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3$, $x \in \mathbb{R}$, pro $c > 0$.
• pro $c \leq 0$,

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c}), \\ 0, & x \in [-\sqrt{-2c}, \infty), \end{cases}$$

• pro $c \leq 0$,

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c}], \\ \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2c}, \infty), \end{cases}$$

• pro $c \leq 0$,

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c}], \\ \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}), \\ 0, & x \in [\sqrt{-2c}, \infty). \end{cases}$$

- pro $c_1, c_2, c_2 \le 0$, $c_1 \ge c_2 \ge c_3$,

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c_1}), \\ 0, & x \in [\sqrt{-2c_1}, -\sqrt{-2c_2}], \\ \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2c_2}, \sqrt{-2c_2}), \\ 0, & x \in [\sqrt{-2c_2}, \sqrt{-2c_3}], \\ \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3, & x \in (\sqrt{-2c_3}, \infty), \end{cases}$$

- pro $c_1, c_2 \le 0$, $c_1 \ge c_2$,

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c_1}), \\ 0, & x \in [-\sqrt{-2c_1}, -\sqrt{-2c_2}], \\ \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2c_2}, \sqrt{-2c_2}), \\ 0, & x \in [\sqrt{-2c_2}, \infty), \end{cases}$$

- pro $c_1, c_2 \ge 0$, $c_1 \ge c_2$,

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c_1}), \\ \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2c_1}, \sqrt{-2c_1}), \\ 0, & x \in [\sqrt{-2c_1}, \sqrt{-2c_2}], \\ \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3, & x \in (\sqrt{-2c_2}, \infty), \end{cases}$$

- pro $c_1, c_2 \ge 0$,

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c_1}), \\ 0, & x \in [\sqrt{-2c_1}, \sqrt{-2c_2}], \\ \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3, & x \in (\sqrt{-2c_2}, \infty). \end{cases}$$

♣

13.1.7. Příklad. Nechť $p : (a, b) \to \mathbb{R}$ je spojitá. Najděte všechna maximální řešení rovnice $y' + p(x)y = 0$.

Řešení. Rovnici přepíšeme do tvaru $y' = -p(x)y$. Položíme-li $h(x) = -p(x)$ a $g(y) = y$, vidíme, že se jedná o speciální případ (13.2). Řešme tedy tuto rovnici metodou popsanou v 13.1.4.

(1) Funkce $h(x) = -p(x)$ je spojitá na (a, b), budeme tedy hledat řešení na tomto intervalu.

(2) Existuje jediné stacionární řešení, a to $y(x) = 0$, $x \in (a, b)$.

(3) Maximální intervaly, kde je funkce g spojitá a nenulová, jsou $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Budeme tedy hledat řešení s hodnotami v těchto intervalech.

(4) Je-li y řešení s hodnotami v $(-\infty, 0)$ nebo $(0, \infty)$, pak y splňuje
$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -p(x).$$
Primitivní funkce k levé straně je $\log |y(x)|$. Funkce p je spojitá, a tudíž má primitivní funkci (viz Věta **??**). Označme ji P. Pak je $-P$ primitivní funkce k $-p$. Existuje tedy konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že
$$\log |y(x)| = c - P(x)$$
na definičním oboru y.

(5) Protože $\mathcal{H}(\log) = \mathbb{R}$, nedostaneme žádnou omezující podmínku na x. Řešení jsou tudíž definovaná na celém (a, b) a splňují
$$|y(x)| = e^c \cdot e^{-P(x)},$$
neboli
$$y(x) = ke^{-P(x)}, \quad x \in (a, b), k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(6) Nalezená řešení nelze nalepovat, neboť jsou zřejmě všechna maximální.

Nyní si zbývá uvědomit, že řešení nalezená v 5. kroku lze spolu se stacionárním řešením napsat jako
$$y(x) = ke^{-P(x)}, \quad x \in (a, b), k \in \mathbb{R}.$$

♣

13.2. Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Budeme se zabývat rovnicemi typu
$$y' + p(x)y = q(x), \tag{13.5}$$

kde $p.q$ jsou spojité funkce na daném intervalu (a,b), $a,b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Této rovnici říkáme **lineární diferenciální rovnice prvního řádu**.

13.2.1. Věta. Maximální řešení rovnice (13.5) splňující podmínku $y(x_0) = y_0$, kde $x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in \mathbb{R}$, má tvar

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} q(t) e^{P(t)} \, \mathrm{d}t \right) e^{-P(x)} + y_0 e^{-P(x)}, \quad x \in (a,b),$$

kde P je primitivní funkce k p na (a,b) splňující $P(x_0) = 0$.

Důkaz. Ukažme nejprve, že y řeší rovnici (13.5). Díky Větě **??** je y spojitě diferencovatelná. Dostáváme tedy

$$y'(x) = q(x) e^{P(x)} e^{-P(x)} - p(x) e^{-P(x)} \left(\int_{x_0}^{x} q(t) e^{P(t)} \, \mathrm{d}t \right) - p(x) y_0 e^{-P(x)}.$$

Dále

$$p(x) y(x) = p(x) e^{-P(x)} \left(\int_{x_0}^{x} q(t) e^{P(t)} \, \mathrm{d}t \right) + p(x) y_0 e^{-P(x)},$$

a tedy

$$y'(x) + p(x) y(x) = q(x).$$

Zjevně $y(x_0) = y_0$.

Nechť z je nějaké jiné řešení rovnice (13.5). Pak $u = y - z$ řeší rovnici $u' + pu = 0$. Díky Příkladu 13.1.7 existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $u(x) = ce^{-P(x)}$ na (a,b). Protože $u(x_0) = 0$, je $c = 0$. Tedy $0 = u = y - z$ na (a,b). Tím je jednoznačnost dokázána. ∎

13.3. Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficenty

13.3.1. Definice. **Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty** je rovnice tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t), \tag{13.6}$$

kde $a_0, \ldots, a_{n-1}$ jsou reálná čísla a f je spojitá funkce na daném intervalu (a,b). **Homogenní rovnicí** k rovnici (13.6) rozumíme rovnici

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{13.7}$$

13.3.2. Věta. Nechť $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $z_0, \dots, z_{n-1} \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jedno maximální řešení y rovnice (13.6), které splňuje podmínky

$$y(t_0) = z_0, y'(t_0) = z_1, \dots y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}.$$

Toto řešení je definováno na celém intervalu (α, β).

Důkaz. Položme

$$x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad \cdots, \quad x_n = y^{(n-1)}$$

a uvažujme soustavu

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n, \\ x_n' &= f - (a_{n-1}x_n + \cdots + a_0 x_1) \end{aligned}$$

s počáteční podmínkou

$$\boldsymbol{x}(t_0) = [x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)] = [z_0, z_1, \dots, z_{n-1}].$$

Dle Věty 13.5.1 má tato soustava právě jedno řešení $\boldsymbol{x}$ na (α, β), které splňuje počáteční podmínku. Pak je zřejmě funkce $y = x_1$ n-krát spojitě diferencovatelná a řeší (13.6). ∎

13.3.3. Věta. (a) Maximální řešení rovnice (13.7) jsou definována na celém $\mathbb{R}$ a tvoří vektorový podprostor dimenze n prostoru $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$.

(b) Nechť y_p je maximální řešení rovnice (13.6). Pak funkce y je jejím maximálním řešením právě tehdy, když ji lze zapsat ve tvaru $y = y_p + y_h$, kde y_h je vhodné řešení rovnice 13.7.

Důkaz. (a) Dle Věty 13.3.2 jsou maximální řešení definovaná na $\mathbb{R}$. Označíme-li $L : \mathcal{C}^n(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$ definované jako

$$Ly = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y,$$

pak L je lineární zobrazení a množina řešení rovnice 13.7 je rovna $\operatorname{Ker} L$. Tedy je to vektorový prostor. K důkazu tvrzení o dimenzi použijeme Větu 13.3.2. Podle ní existují řešení rovnice 13.7 splňující

$$\begin{array}{cccc} y_1(0) = 1 & y_2(0) = 0 & \dots & y_n(0) = 0 \\ y_1'(0) = 0 & y_2'(0) = 1 & \dots & y_n'(0) = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(0) = 0 & y_2^{(n-1)}(0) = 0 & \dots & y_n^{(n-1)}(0) = 1. \end{array}$$

Ukážeme, že množina $\{y_1, \dots, y_n\}$ je bází prostoru $\operatorname{Ker} L$. Nejprve ověříme jejich lineární nezávislost. Nechť $c_1, \dots, c_n$ jsou reálná čísla splňující

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n = 0.$$

Pak všechny derivace funkce vlevo jsou nulové, a tedy

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\} : c_1 y_1^{(k)}(x) + \cdots + c_n y_n^{(k)}(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dosadíme-li postupně do těchto rovností bod 0, dostaneme $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Tedy jsou řešení $\{y_1, \dots, y_n\}$ lineárně nezávislá.

Nyní ukažme, že každé maximální řešení (13.7) leží v lineárním obalu těchto funkcí. Nechť y je maximální řešení 13.7. Položme

$$c_1 = y(0), \quad c_2 = y'(0), \quad \dots, \quad c_n = y^{(n-1)}(0)$$

a

$$z = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n.$$

Pak z je maximálním řešením rovnice (13.7), přičemž platí

$$z(0) = c_1, \quad z'(0) = c_2, \quad \dots, \quad z^{(n-1)}(0) = c_n.$$

Z jednoznačnosti maximálního řešení s danými počátečními podmínkami plyne dle Věty 13.3.2 rovnost $y = z$ na $\mathbb{R}$.

(b) Řeší-li y_p rovnici (13.6) a y_h rovnici (13.7), pak z linearity zobrazení L plyne, že $y_p + y_h$ řeší rovnici (13.6). Obráceně, je-li y maximální řešení rovnice (13.6), pak $y - y_p \in \operatorname{Ker} L$, tj. $y_h = y - y_p$je maximální řešení rovnice (13.7). Tím je důkaz dokončen. ∎

13.3.4. Definice. Charakteristickým polynomem rovnice (13.7) rozumíme polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Bázi prostoru všech maximálních řešení rovnice (13.7) nazýváme **fundamentální systém** rovnice (13.7).

13.3.5. Věta. Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ jsou všechny různé reálné kořeny charakteristického polynomu χ s násobnostmi $r_1, \dots, r_s$. Nechť $\alpha_1 + i\beta_1, \dots, \alpha_l + i\beta_l$

jsou všechny navzájem různé kořeny polynomu χ s kladnou imaginární částí a násobnostmi $q_1, \dots, q_l$. Pak funkce

$$\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1}(t), & \dots & t^{r_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\
\vdots & & & \\
e^{\lambda_s t}, & te^{\lambda_s}(t), & \dots & t^{r_s-1}e^{\lambda_s t}, \\
e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, \\
e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, \\
\vdots & & & \\
e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, \\
e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t
\end{array}$$

tvoří fundamentální sytém rovnice (13.7).

13.3.6. Označení. Množinu všech komplexních polynomů značíme $\mathcal{P}$.

13.3.7. Lemma. Nechť $\omega \in \mathbb{C}$ a $L : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ je definováno předpisem $L(P) = \omega P + P'$. Potom pro $k \in \mathbb{N}$ a $P \in \mathcal{P}$ platí

$$L^k(P) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \omega^{k-j} P^{(j)}.$$

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí dle k. Je-li $k = 1$, platí $L(P) = \omega P + P'$.

Nechť tvrzení platí pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Pak pomocí indukčního předpokladu a identity $\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1} = \binom{k+1}{j}$ dostáváme pro $k + 1$ rovnost

$$\begin{aligned}
L^{(k+1)}(P) = L(L^k(P)) &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \omega^{k+1-j} P^{(j)} + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \omega^{k-j} P^{(j+1)} \\
&= \omega^{k+1} P + \sum_{j=1}^{k} \left(\binom{k}{j} \omega^{k+1-j} P^{(j)} + \binom{k}{j-1} \omega^{k-j+1} P^{(j)} \right) + P^{(k+1)} \\
&= \omega^{k+1} P \sum_{j=1}^{k} \binom{k+1}{j} \omega^{k+1-j} P^{(j)} + P^{(k+1)} \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \omega^{k+1-j} P^{(j)}.
\end{aligned}$$

Dle principu matematické indukce tedy tvrzení platí pro všechna $k \in \mathbb{N}$. ■

13.3.8. Lemma. Nechť Q je polynom a ω je jeho kořen násobnosti $s \in \mathbb{N}$. Pak

$$Q(\omega) = Q'(\omega) = \cdots = Q^{(s-1)}(\omega).$$

13.3.9. Lemma. Nechť $\omega \in \mathbb{C}$ je d-násobný kořen polynomu $Q(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ a P je polynom splňující st $P < d$. Pak

$$\sum_{k=0}^{n} a_k L^k(P) = 0,$$

kde $L(P) = \omega P + P'$.

Důkaz. Vzhledem k linearitě L stačí dokázat požadovanou rovnost pro polynom $P(z) = z^l$, kde $l \in \{0, \ldots, d-1\}$. Platí

$$P^{(j)}(z) = \frac{l!}{(l-j)!} z^{l-j}, \quad j = 0, \ldots, l, \quad P^{(j)}(z) = 0, \quad j > l.$$

Tedy máme z Lemmatu 13.3.7

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k L^k(P) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \omega^{k-j} P^{(j)} = \sum_{j=0}^{l} \sum_{k=j}^{n} a_k \binom{k}{j} \omega^{k-j} P^{(j)} \\
&= \sum_{j=0}^{l} \sum_{k=j}^{n} a_k \binom{k}{j} \omega^{k-j} \frac{l!}{(l-j)!} z^{l-j} \\
&= \sum_{j=0}^{l} \frac{l! z^{l-j}}{(l-j)! j!} \sum_{k=j}^{n} a_k \frac{k!}{(k-j)!} \omega^{(k-j)} \\
&= \sum_{j=0}^{l} \frac{l! z^{l-j}}{(l-j)! j!} Q^{(j)}(\omega) = 0,
\end{aligned}$$

jelikož máme $Q(\omega) = Q'(\omega) = \cdots = Q^{(d-1)}(\omega) = 0$ dle Lemmatu 13.3.8. ∎

Důkaz. Nechť $\alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je s-násobný kořen charakteristického polynomu χ, $s \in \mathbb{N}$. Položme

$$y(t) = e^{\alpha t}(\cos \beta t P_0(t) + \sin \beta t S_0(t)),$$

kde P_0, S_0 jsou polynomy, $\operatorname{st} P_0, \operatorname{st} S_0 < s$. Ukážeme, že y řeší (13.7). Platí

$$\begin{aligned} y'(t) = e^{\alpha t}(&\alpha \cos \beta t P_0(t) + \alpha \sin \beta t S_0(t) \\ &- \beta \sin \beta t P_0(t) + \beta \cos \beta t S_0(t) \\ &+ \cos \beta t P_0'(t) + \sin \beta t S_0'(t)) \\ = e^{\alpha t}&(\cos \beta t(\alpha P_0 + \beta S_0 + P_0') + \sin \beta t(\alpha S_0 - \beta P_0 + S_0')), \end{aligned}$$

kde

$$P_1 = \alpha P_0 + \beta S_0 + P_0', \quad S_1 = \alpha S_0 - \beta P_0 + S_0'$$

jsou polynomy stupně menšího než s.

Pro derivace y tedy platí

$$y^{(j)}(t) = e^{\alpha t}\left(\cos \beta t P_j(t) + \sin \beta t S_j(t)\right), \quad j = 0, \dots, n,$$

kde

$$P_j = \alpha P_{j-1} + \beta S_{j-1} + P_{j-1}', \quad S_j = \alpha S_{j-1} - \beta P_{j-1} + S_{j-1}'.$$

Dosadíme derivace y do (13.7) a dostaneme

$$\sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)}(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t \sum_{j=0}^{n} a_j P_j(t) + e^{\alpha t} \sin \beta t \sum_{j=0}^{n} a_j S_j(t).$$

Stačí tedy odvodit rovnosti

$$\sum_{j=0}^{n} a_j P_j = \sum_{j=0}^{n} a_j S_j = 0.$$

Označme

$$C_j = P_j + i S_j \quad \text{a} \quad \omega = \alpha - i\beta.$$

Pak máme

$$\begin{aligned} C_{j+1} = P_{j+1} + i S_{j+1} &= \alpha P_j + \beta S_j + P_j' + i\alpha S_j - i\beta P_j + i S_j' \\ &= (\alpha - i\beta) P_j + i(\alpha - i\beta) S_j + P_j' + i S_j' \\ &= \omega C_j + C_j'. \end{aligned}$$

Definujeme-li $L(P) = \omega P + P'$, potom $C_j = L^j(C_0)$. Máme tak dle Lemmatu 13.3.9

$$0 = \sum_{j=0}^{n} a_j L^j(C_0) = \sum_{j=0}^{n} a_j C_j = \sum_{j=0}^{n} a_j P_j + i \sum_{j=0}^{n} a_j S_j,$$

takže

$$\sum_{j=0}^{n} a_j P_j = \sum_{j=0}^{n} a_j S_j = 0.$$

Dokažme nyní lineární nezávislost našeho systému. Stačí dokázat, že pokud $\omega_1, \dots, \omega_k \in \mathbb{C}$ jsou navzájem různá komplexní čísla a $P_1, \dots, P_k$ jsou polynomy takové, že

$$\forall x \in (a,b) : P_1(x)e^{\omega_1 x} + P_2(x)e^{\omega_2 x} + \cdots + P_k(x)e^{\omega_k x} = 0,$$

potom $P_1 = P_2 = \cdots = P_k = 0$.

Důkaz provedeme matematickou indukcí dle k. Pokud $k = 1$ a pro každé $x \in (a,b)$ platí $P_1(x)e^{\omega_1 x} = 0$, pak nutně $P_1(x) = 0$ pro každé $x \in (a,b)$, a tedy $P_1 = 0$.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $k \in \mathbb{N}$. Povšimněme si nejprve, že pokud P je polynom a $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, pak

$$\begin{aligned}(P(x)e^{\omega x})' &= P'(x)e^{\omega x} + P(x)\omega e^{\omega x} \\ &= (P'(x) + \omega P(x))e^{\omega x} = R(x)e^{\omega x},\end{aligned}$$

kde R je polynom stejného stupně jako P.

Předpokládejme nyní, že

$$\forall x \in (a,b) : P_1(x)e^{\omega_1 x} + \cdots + P_{k+1}(x)e^{\omega_{k+1} x} = 0,$$

tedy

$$\forall x \in (a,b) : P_1(x)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})x} + \cdots + P_k(x)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})x} + P_{k+1}(x) = 0,$$

Po opakovaném derivování dostaneme

$$\forall x \in (a,b) : R_1(x)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})x} + \cdots + R_k(x)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})x} = 0,$$

kde $\operatorname{st} R_1 = \operatorname{st} P_1, \dots, \operatorname{st} R_k = \operatorname{st} P_k$. Podle indukčního předpokladu musí být $R_1 = R_2 = \cdots = R_k = 0$, a tedy $P_1 = P_2 = \cdots = P_k = 0$. Potom

$$\forall x \in (a,b) : P_{k+1}(x)e^{\omega_{k+1} x} = 0,$$

a tedy i $P_{k+1} = 0$. ∎

13.3.10. Věta. Nechť

$$f(t) = e^{\mu t} \cdot (P(t)\cos \nu t + Q(t)\sin \nu t),$$

kde $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ a P, Q jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice (13.6) ve tvaru

$$y(t) = t^m e^{\mu t} \cdot (R(t)\cos \nu t + S(t)\sin \nu t),$$

kde R, S jsou vhodné polynomy stupně ne většího než $\max \operatorname{st} P, \operatorname{st} Q$ a $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ udává, jakou násobnost má číslo $\mu + i\nu$ jakožto kořen charakteristického polynomu.

13.3.1. Metoda variace konstant.

13.3.11. Lemma. Nechť $y_1, \dots, y_n$ tvoří fundamentální systém rovnice (13.7). Pak je matice

$$U(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

regulární pro každé $t \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Pokud $U(t_0)$ není regulární pro nějaké $t_0 \in \mathbb{R}$, pak existuje $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$ nenulové takové, že $U(t_0)\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$. Položme

$$z_1 = d_1 y_1 + \dots + d_n y_n.$$

Potom z řeší rovnici (13.7) a splňuje

$$\begin{aligned} z(t_0) &= d_1 y_1(t_0) + \dots + d_n y_n(t_0) = 0, \\ z'(t_0) &= d_1 y_1'(t_0) + \dots + d_n y_n'(t_0) = 0, \\ &\vdots \\ z^{(n-1)}(t_0) &= d_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + \dots + d_n y_n^{(n-1)}(t_0) = 0. \end{aligned}$$

Podle Věty 13.3.2 máme $z = 0$ na $\mathbb{R}$. Funkce $y_1, \dots, y_n$ tvoří fundamentální systém, a proto je $d_1 = d_2 = \dots = d_n = 0$. To je ale spor s nenulovostí vektoru $\boldsymbol{d}$, čímž je důkaz dokončen. ■

13.3.12. Hledejme řešení rovnice (13.6) ve tvaru

$$y(t) = c_1(t)y_1(t) + \dots + c_n(t)y_n(t), \quad t \in (a, b),$$

kde $c_1, \dots, c_n$ jsou spojitě diferencovatelné funkce na (a, b) a $\{y_1, \dots, y_n\}$ je fundamentální systém rovnice (13.7). Počítejme

$$y'(t) = c_1 y_1' + \dots + c_n y_n' + c_1' y_1 + \dots + c_n' y_n$$

a položme $c_1' y_1 + \dots + c_n' y_n = 0$. Dále

$$y''(t) = c_1 y_1'' + \dots + c_n y_n'' + c_1' y_1' + \dots + c_n' y_n'$$

a opět položíme $c_1' y_1' + \dots + c_n' y_n' = 0$. Pokračováním tohoto procesu se dobereme až k rovnici

$$y^{(n)} = c_1 y_1^{(n)} + \dots + c_n y_n^{(n)} + c_1' y_1^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)}.$$

Dosadíme do (13.6) a dostaneme tuto sadu podmínek:

$$\begin{aligned} c_1' y_1 + \cdots + c_n' y_n &= 0, \\ &\vdots \\ c_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)} &= 0, \\ c_1' y_1^{(n)} + \cdots + c_n' y_n^{(n)} &= f, \end{aligned}$$

neboli

$$U(t) \cdot \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f \end{pmatrix}.$$

Tedy c_i' spočteme ze vzorce

$$c_i'(t) = (\det U(t))^{-1} \begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_{i-1}(t) & 0 & y_{i+1}(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \dots & y_{i-1}'(t) & 0 & y_{i+1}'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ y_1^{(n-2)}(t) & \dots & y_{i-1}^{(n-2)}(t) & 0 & y_{i+1}^{(n-2)}(t) & \dots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_{i-1}^{(n-1)}(t) & f(t) & y_{i+1}^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

13.4. Soustavy diferenciálních rovnic

Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ x_2' &= f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{13.8}$$

kde f_i, $i = 1, \dots, n$, jsou dané funkce definované na jisté neprázdné otevřené množině $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Vektorový tvar je

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)),$$

kde $\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$, $\boldsymbol{x}'(t) = [x_1'(t), \dots, x_n'(t)]$ a $\boldsymbol{f} = [f_1, \dots, f_n]$.

13.4.1. Definice. Řešením soustavy (13.8) rozumíme vektorovou funkci $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_n]$ definovanou na otevřeném neprázdném intervalu J s hodnotami v $\mathbb{R}^n$ takovou, že pro každé $t \in J$ existují $x_i'(t)$, $i = 1, \dots, n$, a platí (13.8).

Počáteční úlohou pro (13.8) rozumíme úlohu, kdy hledáme řešení (13.8) splňující navíc předem zadanou podmínku $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$, kde $[t_0, \boldsymbol{x}^0] \in G$ (této podmínce se říká **počáteční podmínka**).

Maximální řešení soustavy (13.8) je takové řešení $\boldsymbol{x}$ definované na intervalu J, které již nelze prodloužit, tj. je-li $\boldsymbol{y}$ řešení definované na intervalu I, $J \subset I$ a $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}(t)$ pro každé $t \in J$, pak $J = I$.

13.4.2. Poznámka. Mějme rovnici

$$y^{(n)} = h(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{13.9}$$

Uvažujme soustavu

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n, \\ x_n' &= h(t, x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{13.10}$$

Pokud $\boldsymbol{x}$ řeší (13.10), pak x_1 řeší (13.9). Obráceně, pokud y řeší (13.9), pak $[y, \dots, y^{(n-1)}]$ řeší (13.10).

13.4.3. Definice. Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory. Řekneme, že množina $\mathcal{F}$ zobrazení P do Q je **stejně spojitá**, pokud platí

$$\forall x \in P \; \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \; \forall y \in B_\rho(x, \delta) \; \forall f \in \mathcal{F} : f(y) \in B_\sigma(f(x), \varepsilon).$$

13.4.4. Je jednoduché si rozmyslet, že každá konečná množina spojitých zobrazení je stejně spojitá.

13.4.5 (Prostor $\mathcal{C}(K, X)$)**.** Nechť K je kompaktní metrický prostor a X je Banachův prostor. Pak symbol $\mathcal{C}(K, X)$ značí množinu všech spojitých zobrazení K do X. Položíme-li

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x), \quad x \in K, \quad f, g \in \mathcal{C}(K, X), \\ (\alpha f)(x) &= \alpha f(x), \quad x \in K, \alpha \in \mathbb{R}, \quad f \in \mathcal{C}(K, X), \end{aligned}$$

obdržíme dle Věty **??** vektorový prostor. Nechť $f \in \mathcal{C}(K, X)$. Pak $\mathcal{H}(f)$ je kompaktní množina v X (viz Věta **??**), a tedy omezená (Věta **??**). Proto má smysl položit

$$\|f\|_{\mathcal{C}(K,X)} = \|f\|_\infty = \sup_{x \in K} \|f(x)\|_X.$$

Je lehké si rozmyslet, že $\|\cdot\|_\infty$ je vskutku norma na $\mathcal{C}(K, X)$.

Dále si uvědomme, že prostor $\mathcal{C}(K, X)$ je v této normě díky Větě **??** úplný.Jedná se tedy o Banachův prostor.

13.4.6. Věta (Arzela-Ascoli)**.** Nechť (K, ρ) je kompaktní metrický prostor a $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$. Pak $\mathcal{F}$ je relativně kompaktní v $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$ právě tehdy, když je omezená a stejně spojitá.

Důkaz. $\Leftarrow$ Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{F}$.

*Krok 1.*Nechť nejprve $n \in \mathbb{N}$ je pevné. Pro každé $x \in K$ najdeme $r_x > 0$ takové, že

$$\forall f \in \mathcal{F}\ \forall y \in B(x, r_x) : \|f(x) - f(y)\| < \frac{1}{n}. \tag{13.11}$$

Díky kompaktnosti lze použít Větu **??** k výběru konečně mnoha bodů $x_1^n, \dots, x_{k_n}^n \subset K$ takových že

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{k_n} B(x_i^n, r_{x_i^n}).$$

Krok 2. Nyní položme

$$C = \{x_i^n;\ i \in \{1, \dots, k_n\}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Diagonálním výběrem pak vybereme podposloupnost $\{f_{n_j}\}$ z posloupnosti $\{f_n\}$ takovou, že posloupnost $\{f_{n_j}(c)\}$ je cauchyovská pro každé $c \in C$. Očíslujeme totiž prvky C jako $C = \{c_l;\ l \in \mathbb{N}\}$ a induktivně sestrojíme nekonečné množiny $N_1 \supset N_2 \supset \cdots$ v $\mathbb{N}$ takové, že pro každé $l \in \mathbb{N}$ je posloupnost $\{f_n(c_l)\}_{n \in N_l}$ cauchyovská v $\mathbb{R}^n$.

V prvním kroku využijeme omezenosti $\{f_n(c_1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ a najdeme nekonečnou množinu $N_1 \subset \mathbb{N}$ takovou, že posloupnost $\{f_n(c_1)\}_{n \in N_1}$ je cauchyovská.

Mějme nyní nekonečné množiny $N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_l$, pro které je posloupnost $\{f_n(c_i)\}_{n \in N_i}$ cauchyovská pro každé $i \in \{1, \dots, l\}$. Opět použijeme omezenosti $\{f_n(c_{l+1})\}_{n \in N_l}$ a vybereme nekonečnou množinu $N_{l+1} \subset N_l$ takovou, že $\{f_n(c_{l+1})\}_{n \in N_{l+1}}$ je cauchyovská v X. Tím je konstrukce množin ukončena.

Nyní induktivně najdeme indexy $n_1 < n_2 < \cdots$ takové, že $n_l \in N_l$ pro $l \in \mathbb{N}$. Zvolme nejprve libovolné $n_1 \in N_1$. Máme-li již vybrané prvky $n_1 < n_2 < \cdots < n_l$, díky nekonečnosti množiny N_{l+1} lze nalézt $n_{l+1} \in N_{l+1}$, $n_{l+1} > n_l$.

Povšimněme si nyní, že pro každé $l \in \mathbb{N}$ jsou indexy n_j, $j \geq l$, obsaženy v N_l. Tedy $\{f_{n_j}(c_l)\}_{j=1}^{\infty}$ je od indexu n_l vybraná z $\{f_n(c_l)\}_{n \in N_l}$, a tedy též cauchyovská.

Krok 3. Ukažme, že $\{f_{n_j}\}$ je cauchovská v $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ a najděme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Protože jsou posloupnosti

$$\{f_{n_j}(x_1^n)\}_{j=1}^{\infty}, \dots, \{f_{n_j}(x_{k_n}^n)\}_{j=1}^{\infty}$$

cauchyovské, existuje $j_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall j, j' \in \mathbb{N}, j, j' \geq j_0 \ \forall i \in \{1, \dots, k_n\} : \| f_{n_j}(x_i^n) - f_{n_{j'}}(x_i^n) \| < \varepsilon$$

Mějme nyní $x \in K$ dáno. Najdeme takové $i \in \{1, \dots, k_n\}$, že $x \in B(x_i^n, r_{x_i^n})$. Pak pro $j, j' \geq j_0$ platí díky (13.11)

$$\begin{aligned} \| f_{n_j}(x) - f_{n_{j'}}(x) \| &\leq \| f_{n_j}(x) - f_{n_j}(x_i^n) \| + \| f_{n_j}(x_i^n) - f_{n_{j'}}(x_i^n) \| \\ &\quad + \| f_{n_{j'}}(x_i^n) - f_{n_{j'}}(x) \| \\ &\leq \frac{1}{n} + \varepsilon + \frac{1}{n} < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy pro $j, j' \geq j_0$ platí

$$\| f_{n_j} - f_{n_{j'}} \|_\infty = \sup_{x \in K} \| f_{n_j}(x) - f_{n_{j'}}(x) \| \leq 3\varepsilon.$$

Krok 4. Z dané množiny jsme tedy vybrali cauchyovskou podposloupnost $\{f_{n_j}\}$. Protože je $\mathcal{C}(K, X)$ úplný, je tato podposloupnost konvergentní. A tedy je $\mathcal{F}$ relativně kompaktní.

$\Rightarrow$ Nechť $\mathcal{F}$ je relativně kompaktní množina v $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$. Pak je $\overline{\mathcal{F}}$ kompaktní, a tedy omezená. Proto je i $\mathcal{F}$ omezená v $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$. Ukažme dále, že je stejně spojitá. Mějme tedy dáno $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Protože je $\overline{\mathcal{F}}$ kompaktní, je totálně omezená, a tedy existují funkce $f_1, \dots f_n \in \overline{\mathcal{F}}$ takové, že množina $\{f_1, \dots, f_n\}$ tvoří konečnou ε-síť v $\overline{\mathcal{F}}$. Jelikož je $\{f_1, \dots, f_n\}$ konečná, je stejně spojitá dle 13.4.4. Mějme nyní dáno $x \in K$. Najdeme tedy $\delta \in (0, \infty)$ splňující

$$\forall y \in B(x, \delta) \ \forall i \in \{1, \dots, n\} : \| f_i(y) - f_i(x) \| < \varepsilon.$$

Vezměme nyní libovolné $f \in \mathcal{F}$. K němu nalezneme $i \in \{1, \dots, n\}$ splňující $\| f_i - f \|_\infty < \varepsilon$. Pak pro $y \in B(x, \delta)$ platí

$$\| f(y) - f(x) \| \leq \| f(y) - f_i(y) \| + \| f_i(y) - f_i(x) \| + \| f_i(x) - f(x) \| < 3\varepsilon.$$

Tedy $\mathcal{F}$ je stejně spojitá. ∎

13.4.7. Lemma. Nechť $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $\boldsymbol{f} : G \to \mathbb{R}^n$ je spojitá na G a $[t_0, \boldsymbol{x}_0] \in G$. Pak $\boldsymbol{x} : I \to \mathbb{R}^n$ řeší na otevřeném intervalu I obsahujícím t_0 rovnici (13.8) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ právě tehdy, když je $\boldsymbol{x}$ spojité, $[t, \boldsymbol{x}(t)] \in G$ pro $t \in I$ a pro každé $t \in I$ platí

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s)) \, \mathrm{d}s.$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Je-li $\boldsymbol{x}$ řešení, pak $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$, $[t, \boldsymbol{x}(t)] \in G$ a

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)), \quad t \in I.$$

Pro $t \in I$ dostáváme integrací od t_0 do t vztah

$$\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s,$$

neboli

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s.$$

$\Leftarrow$ Nechť $\boldsymbol{x}$ je spojité zobrazení s popsanými vlastnostmi. Protože je zobrazení $s \mapsto \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))$ dobře definované a spojité, díky Větě **??** je $\boldsymbol{x}$ diferencovatelné zobrazení a platí

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)), \quad t \in I.$$

Zjevně $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$. ■

13.4.8. Věta (Peanova věta o existenci)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $\boldsymbol{f} : G \to \mathbb{R}^n$ je spojitá na G. Pak pro každé $[t_0, \boldsymbol{x}_0] \in G$ existuje maximální řešení rovnice (13.8) splňující $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$.

Důkaz. V první části důkazu budeme hledat řešení definované na *nějakém* otevřeném intervalu obsahujícím t_0.

Krok 1. Rozmysleme si, že řešení stačí hledat na nějakém intervalu tvaru $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ (Řešením na tomto intervalu rozumíme spojité zobrazení $\boldsymbol{x} : [t_0, t_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ splňující $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$ a (13.8) na $(t_0, t_0 + \varepsilon)$). Mějme totiž vyřešenou takovouto úlohu. Pak lze uvažovat úlohu s obráceným časem

$$\boldsymbol{x}' = -\boldsymbol{f}(-t, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}(-t_0) = \boldsymbol{x}^0. \tag{13.12}$$

Je-li $\phi(t)$ řešení (13.12) na intervalu $[-t_0, -t_0 + \varepsilon_2]$ a $\psi(t)$ je řešení (13.8) na $[t_0, t_0 + \varepsilon_1]$ s počáteční podmínkou $\psi(t_0) = \boldsymbol{x}_0$, pak

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{cases} \phi(-t), & t \in [t_0 - \varepsilon_2, t_0], \\ \psi(t), & t \in [t_0, t_0 + \varepsilon_1] \end{cases}$$

je řešení (13.8) splňující $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$.

Krok 2. Vezměme $a, b \in (0, \infty)$ takové, že

$$K = [t_0, t_0 + a] \times \overline{B}(\boldsymbol{x}^0, b) \subset G.$$

Protože je K kompaktní, je dle Věty **??** zobrazení $\boldsymbol{f}$ na K stejnoměrně spojitá a omezené (viz Věta **??**). Tedy existuje $L \in \mathbb{R}$, $L > 0$ takové, že

$$\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})\| \le L, \quad t \in [t_0, t_0 + a], \boldsymbol{y} \in \overline{B}(\boldsymbol{x}_0, b).$$

Položme

$$c = \min\{a, \frac{b}{L}\}, \quad I = [t_0, t_0 + c]$$

a
$$\mathcal{F} = \{\boldsymbol{y} : I \to \mathbb{R}^n;\ (\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{x}^0)\ \&\ (\|\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}(s)\| \le L|t-s|,\ t,s \in I)\}.$$

Krok 3. Povšimněme si, že $\mathcal{F}$ sestává z L-lipschitzovských zobrazení, a tedy se jedná o stejně spojitou množinu. Dále platí
$$\forall \boldsymbol{y} \in \mathcal{F}\ \forall t \in I : \|\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{x}^0\| = \|\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}(t_0)\| \le L|t - t_0| \le Lc \le b.$$
Tedy $\mathcal{F}$ je množina omezená v $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$. Snadno se pak ověří, že je uzavřená. Tedy je dle Věty **??** kompaktní.

Krok 3. Definujme $F : \mathcal{F} \to [0, \infty)$ jako
$$F(\boldsymbol{y}) = \max_{t\in I} \left\| \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{x}^0 - \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{y}(s))\, \mathrm{d}s \right\| = \left\| \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{x}^0 - \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{y}(s))\, \mathrm{d}s \right\|_\infty .$$
Zobrazení F je dobře definované. Zobrazení $s \mapsto \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{y}(s))$ je totiž spojité na I, a tedy je dle Věty **??** spojité i zobrazení
$$t \mapsto \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{x}^0 - \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{y}(s))\, \mathrm{d}s.$$
Protože je norma spojitá funkce na $\mathbb{R}^n$, je funkce
$$t \mapsto \left\| \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{x}^0 - \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{y}(s))\, \mathrm{d}s \right\|$$
spojitá na I.

Krok 4. Nyní ukážeme, že je zobrazení F spojité na $\mathcal{F}$. Mějme tedy dáno $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Díky stejnoměrné spojitosti f na K existuje $\delta \in (0, \varepsilon)$ takové, že
$$\forall [t, \boldsymbol{z}], [t', \boldsymbol{z}'] \in K : \big(|t - t'| < \delta\ \&\ \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}'\| < \delta\big) \Rightarrow \|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{z}) - \boldsymbol{f}(t', \boldsymbol{z}')\| < \varepsilon.$$
Nechť $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in \mathcal{F}$, $\|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2\|_\infty < \delta$. Pak máme $\sup_{s\in I} \|\boldsymbol{y}_1(s) - \boldsymbol{y}_2(s)\| < \delta$, a tedy
$$\begin{aligned}
|F(\boldsymbol{y}_1) - F(\boldsymbol{y}_2)| &= \left\| \boldsymbol{y}_1(t) - \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{y}_1(s))\, \mathrm{d}s - \left(\boldsymbol{y}_2(t) - \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{y}_2(s))\, \mathrm{d}s \right) \right\|_\infty \\
&\le \|\boldsymbol{y}_1(t) - \boldsymbol{y}_2(t)\|_\infty + \sup_{t\in I} \int_{t_0}^{t} \|\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{y}_1(s)) - \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{y}_2(s))\| \\
&\le \varepsilon + \int_{t_0}^{t_0+c} \varepsilon\, \mathrm{d}s = \varepsilon(1 + c).
\end{aligned}$$
Tím je spojitost F ukázána.

Krok 5. Jelikož je F spojitá funkce na kompaktní množině, nabývá svého minima v nějakém bodě $\boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$. Zbytek důkazu bude věnován ověření $F(\boldsymbol{x}) = 0$, což dle Lemmatu 13.4.7 stačí k nalezení řešení na intervalu I.

Krok 6. Nyní zkonstruujeme funkce $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ v $\mathcal{F}$ splňující $F(\boldsymbol{x}_k) \to 0$. K tomuto účelu vezměme $k \in \mathbb{N}$ pevné. Induktivně sestrojíme zobrazení $\boldsymbol{x}_k : I \to \overline{B}(\boldsymbol{x}^0, b)$ takové, že $\boldsymbol{x}_k \in \mathcal{F}$ a $F(\boldsymbol{x}_k) \leq \frac{Lc}{k}$.

Položme nejprve

$$\boldsymbol{x}_k(t) = \boldsymbol{x}^0, \quad t \in [t_0, t_0 + \frac{c}{k}].$$

Dále definujme

$$\boldsymbol{x}_k(t) = \boldsymbol{x}^0 + \int_{t_0+\frac{c}{k}}^{t} \boldsymbol{f}(s - \frac{c}{k}, \boldsymbol{x}_k(s - \frac{c}{k}))\,\mathrm{d}s, \quad t \in (t_0 + \frac{c}{k}, t_0 + \frac{2c}{k}].$$

Předpokládejme nyní, že pro nějaké $j \in \{2, \ldots, k-1\}$ je zobrazení $\boldsymbol{x}_k$ definované na $[t_0, t_0 + \frac{jc}{k}]$ a splňuje

$$\boldsymbol{x}_k(t) = \boldsymbol{x}^0 + \int_{t_0+\frac{c}{k}}^{t} \boldsymbol{f}(s - \frac{c}{k}, \boldsymbol{x}_k(s - \frac{c}{k}))\,\mathrm{d}s, \quad t \in [t_0 + \frac{c}{k}, \frac{jc}{k}]. \tag{13.13}$$

Pak máme z (13.13)

$$\begin{aligned}\left\|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}_k(t)\right\| &= \left\|\int_{t_0+\frac{c}{k}}^{t} \boldsymbol{f}(s - \frac{c}{k}, \boldsymbol{x}_k(s - \frac{c}{k}))\,\mathrm{d}s\right\| \\ &\leq \int_{t_0+\frac{c}{k}}^{t} \left\|\boldsymbol{f}(s - \frac{c}{k}, \boldsymbol{x}_k(s - \frac{c}{k}))\right\|\,\mathrm{d}s \\ &\leq L(t - t_0 - \frac{c}{k}) \leq Lc \leq b, \quad t \in (t_0 + \frac{c}{k}, \frac{jc}{k}].\end{aligned}$$

Tedy je zobrazení $s \mapsto \boldsymbol{f}(s - \frac{c}{k}, \boldsymbol{x}_k(s - \frac{c}{k}))$ dobře definované na $(t_0 + \frac{jc}{k}, t_0 + \frac{(j+1)c}{k}]$ a můžeme položit

$$\boldsymbol{x}_k(t) = \boldsymbol{x}_k(t_0 + \frac{jc}{k}) + \int_{\frac{jc}{k}}^{t} \boldsymbol{f}(s - \frac{c}{k}, \boldsymbol{x}_k(s - \frac{c}{k}))\,\mathrm{d}s, \quad t \in (\frac{jc}{k}, \frac{(j+1)c}{k}].$$

Pak zřejmě platí

$$\boldsymbol{x}_k(t) = \boldsymbol{x}^0 + \int_{t_0+\frac{c}{k}}^{t} \boldsymbol{f}(s - \frac{c}{k}, \boldsymbol{x}_k(s - \frac{c}{k}))\,\mathrm{d}s, \quad t \in (\frac{jc}{k}, \frac{(j+1)c}{k}].$$

Tím je konstrukce zobrazení $\boldsymbol{x}_k$ na celém intervalu $[t_0, t_0 + c]$ ukončena. Povšimněme si, že z konstrukce vyplývá rovnost

$$\boldsymbol{x}_k(t) = \begin{cases} \boldsymbol{x}^0, & t \in [t_0, t_0 + \frac{c}{k}], \\ \boldsymbol{x}^0 + \int_{t_0+\frac{c}{k}}^{t} \boldsymbol{f}(s - \frac{c}{k}, \boldsymbol{x}_k(s - \frac{c}{k}))\,\mathrm{d}s, & t \in (t_0 + \frac{c}{k}, t_0 + c] \end{cases} \tag{13.14}$$

Po substituci $s - \frac{c}{k} = u$ obdržíme rovnost

$$x_k(t) = \begin{cases} x^0, & t \in [t_0, t_0 + \frac{c}{k}], \\ x^0 + \int_{t_0}^{t-\frac{c}{k}} f(u, x_k(u))\,\mathrm{d}u, & t \in (t_0 + \frac{c}{k}, t_0 + c] \end{cases} \tag{13.15}$$

Krok 7. Ukážeme, že $x_k \in \mathcal{F}$. K tomu je třeba ověřit L-lipschitzovskost x_k. Mějme tedy dány body $t, s \in [t_0, t_0 + c]$ splňující $t < s$. Pokud $t, s \in [t_0, t_0 + \frac{c}{k}]$, nerovnost

$$\|x_k(s) - x_k(t)\| \le L(s - t)$$

zjevně platí. Pokud $t_0 + \frac{c}{k} \le t$, pak máme z (13.14) odhad

$$\|x_k(s) - x_k(t)\| \le \int_t^s \left\| f(u - \frac{c}{k}, x_k(u - \frac{c}{k}))\right\| \mathrm{d}u \le L(s - t).$$

Pokud $t \le t_0 + \frac{c}{k} \le s$, pak

$$\|x_k(s) - x_k(t)\| = \left\| \int_{t_0+\frac{c}{k}}^{s} f(u - \frac{c}{k}, x_k(u - \frac{c}{k}))\,\mathrm{d}u \right\| \le L(s - t_0 - \frac{c}{k}) \le L(s - t).$$

Tedy $x_k \in \mathcal{F}$.

Krok 8. Nyní ověříme, že

$$F(x_k) \le \frac{Lc}{k}. \tag{13.16}$$

Nechť $t \in [t_0, t_0 + c]$ je dáno. Pokud $t \in [t_0, t_0 + \frac{c}{k}]$, pak

$$\left\| x_k(t) - x^0 - \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))\,\mathrm{d}s \right\| \le \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_k(s))\|\,\mathrm{d}s \le \frac{Lc}{k}.$$

Pokud $t \in [t_0, t_0 + \frac{c}{k}]$, pak

$$\begin{aligned} \left\| x_k(t) - x^0 - \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))\,\mathrm{d}s \right\| &= \left\| \int_{t_0}^{t-\frac{c}{k}} f(s, x_k(s))\,\mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))\,\mathrm{d}s \right\| \\ &\le \int_{t-\frac{c}{k}}^{t} \|f(s, x_k(s))\|\,\mathrm{d}s \le \frac{Lc}{k}. \end{aligned}$$

Tedy

$$F(x_k) = \max_{t \in I} \left\| x_k(t) - x^0 - \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))\,\mathrm{d}s \right\| \le \frac{Lc}{k}.$$

Funkce x tedy splňuje

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s,$$

a tedy na intervalu I řeší rovnici (13.8) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$ (viz Lemma 13.4.7).

Hledejme nyní nějaké *maximální* řešení procházející bodem $[t_0, \boldsymbol{x}^0]$. Položme

$$\mathcal{A} = \{\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{x} \text{ řeší (13.8) a } \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0\}.$$

Definujme na $\mathcal{A}$ částečné uspořádání vztahem

$$\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \operatorname{graf} \boldsymbol{x} \subset \operatorname{graf} \boldsymbol{y}.$$

Pokud $\mathbb{R} \subset \mathcal{A}$ je řetězec, je $\bigcup \mathcal{R}$ horní závora $\mathcal{R}$. Maximální prvek $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}$ je potom maximálním řešením (13.8), který splňuje $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$. Tím je důkaz dokončen. ∎

13.4.9. Věta (Picard)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $\boldsymbol{f} : [t, \boldsymbol{x}] \to \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení na G a je „lokálně lipschitzovské v x“, tj. pro každý bod $[t, \boldsymbol{x}] \in G$ existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ a $L \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé dva body $[s, \boldsymbol{x}^1], [s, \boldsymbol{x}^2] \in B([t, \boldsymbol{x}], \varepsilon)$ máme

$$\left\| \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}^1) - \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}^2) \right\| \le L \left\| \boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2 \right\|.$$

Jestliže $[t_0, \boldsymbol{x}^0] \in G$, potom existuje právě jedno maximální řešení $\boldsymbol{x}$ rovnice (13.8) splňující $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$.

13.4.10. Poznámka. Pokud $\boldsymbol{f}$ je třídy $\mathcal{C}^1$ na G, potom $\boldsymbol{f}$ splňuje podmínky Věty 13.4.9. Stačí totiž použít Větu **??** o přírůstku vektorové funkce.

Důkaz. Krok 1. Pro $[t_0, \boldsymbol{x}^0] \in G$ nalezneme L a ε svědčící o lispchitzovskosti $\boldsymbol{f}$ ve druhé proměnné na $B(\boldsymbol{x}^0, \varepsilon)$, tj.

$$\forall [s, \boldsymbol{x}^1], [s, \boldsymbol{x}^2] \in B([t_0, \boldsymbol{x}^0], \varepsilon) : \left\| \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}^1) - \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}^2) \right\| \le L \left\| \boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2 \right\|.$$

Navíc můžeme předpokládat, že existuje $K \in \mathbb{R}$ splňující

$$\forall [s, \boldsymbol{x}] \in B([t_0, \boldsymbol{x}^0], \varepsilon) : |\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x})| \le K.$$

Zvolme $\delta \in (0, \frac{\varepsilon}{2})$ takové, že

$$2L\delta < 1 \quad \text{a} \quad K\delta < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Položme $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Pak máme

$$I \times B(\boldsymbol{x}^0, \frac{\varepsilon}{2}) \subset \overline{B}([t_0, \boldsymbol{x}^0], \varepsilon) \subset G.$$

Krok 2. Uvažujme Banachův prostor $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ a jeho podmnožinu $M = \overline{B}(\boldsymbol{g}^0, \frac{\varepsilon}{2})$, kde $\boldsymbol{g}^0(t) = \boldsymbol{x}^0$, $t \in I$. Pak M je uzavřená podmnožina úplného prostoru $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n)$, a tedy je sama úplná (viz Věta ??). Definujme zobrazení $T : M \to M$ předpisem

$$T\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s, \quad t \in I, \boldsymbol{x} \in M.$$

Ukažme, že T je dobře definováno. Pokud $\boldsymbol{x} \in M$, pak

$$[s,\boldsymbol{x}(s)] \in I \times \overline{B}(\boldsymbol{x}^0, \frac{\varepsilon}{2}) \subset G, \quad s \in I.$$

Funkce $s \mapsto \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))$ je spojitá na I, a tedy $T\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n)$. Dále platí

$$\begin{aligned}\left\|T\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{g}^0(t)\right\| &= \left\|\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s\right\| \le \int_{t_0}^{t} \|\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))\|\,\mathrm{d}s\\ &\le K\delta < \frac{\varepsilon}{2}, \quad t \in I.\end{aligned}$$

Odtud máme $\left\|T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{g}^0\right\| \le \frac{\varepsilon}{2}$,a tedy $T\boldsymbol{x} \in M$.

Krok 3. Dále ověříme, že zobrazení T je kontrakce na prostoru M. Pro $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M$ totiž máme

$$\begin{aligned}\|T\boldsymbol{x} - T\boldsymbol{y}\| &= \sup_{t\in I}\left\|\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{y}(s))\,\mathrm{d}s\right\|\\ &\le \sup_{t\in I}\int_{t_0}^{t} \|\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s)) - \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{y}(s))\|\,\mathrm{d}s\\ &\le \sup_{t\in I}\int_{t_0}^{t} L\,\|\boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{y}(s)\|\,\mathrm{d}s\\ &\le L\cdot 2\delta\,\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.\end{aligned}$$

Protože $2L\delta < 1$, T je vskutku kontrakce.

Krok 4. Použitím Banachovy věty o kontrakci ?? najdeme jednoznačně určený prvek $\boldsymbol{x} \in M$ splňující $T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, neboli

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s.$$

Dle Lemmatu 13.4.7 je $\boldsymbol{x}$ řešení (13.8) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$.

Krok 5. Ukažme, že řešení $\boldsymbol{x}$ je určeno na okolí bodu t_0 jednoznačně, tj., je-li $\boldsymbol{y} : J \to \mathbb{R}^n$ řešení (13.8), kde J je otevřený interval obsahující t_0 a $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$, pak $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ na nějakém otevřeném intervalu obsaženém v $J \cap I$. Mějme tedy takové řešení $\boldsymbol{y} : J \to \mathbb{R}^n$. Vezmeme $\tilde{\delta} \in (0,\delta)$ takové, že $[t_0 - \tilde{\delta}, t_0 + \tilde{\delta}] \subset J$ a $\left\|\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{x}^0\right\| \le \frac{\varepsilon}{2}$ pro každé $t \in [t_0 - \tilde{\delta}, t_0 + \tilde{\delta}]$. Položíme $\tilde{I} = [t_0 - \tilde{\delta}, t_0 + \tilde{\delta}]$ a uvažujme objekty $\mathcal{C}(\tilde{I},\mathbb{R}^n)$, $\tilde{M}$ a $\tilde{T}$ definované analogicky jako v předešlém. Předchozí postup dává, že existuje právě jedno $\tilde{x} \in \tilde{M}$ takové, že $\tilde{T}\tilde{x} = \tilde{x}$. Protože $x|_{\tilde{I}}, y|_{\tilde{I}} \in \tilde{M}$ a splňují

$$x|_{\tilde{I}} = \tilde{T}(x|_{\tilde{I}}), \quad y|_{\tilde{I}} = \tilde{T}(y|_{\tilde{I}}),$$

platí díky jednoznačnosti $\tilde{x}$ rovnost $x|_{\tilde{I}} = y|_{\tilde{I}}$.

Krok 6. Stejně jako v důkazu Peanovy věty 13.4.8 najdeme nyní maximální řešení $x : I \to \mathbb{R}^n$ rovnice (13.8) s počáteční podmínkou $x(t_0) = x^0$.

Krok 7. Ukažme jednoznačnost tohoto maximálního řešení. Nechť $y : J \to \mathbb{R}^n$ je jiné maximální řešení (13.8) splňující $y(t_0) = x^0$. Označme

$$S = \{t \in I \cap J;\ x(t) = y(t)\}.$$

Ze spojitosti řešení je S uzavřená v $I \cap J$, díky Kroku 5. je množina S otevřená v $I \cap J$. Máme-li totiž $s \in S$, pak na nějakém okolí s má rovnice (13.8) pouze jedno řešení procházející bodem $[s, x(s)]$. Na tomto okolí se tedy řešení x a y rovnají. Nakonec si uvědomíme, že S je neprázdná díky bodu t_0. Protože je množina $I \cap J$ souvislá (viz Věta **??**), platí $S = I \cap J$ dle Věty **??**.

Nakonec ukažme, že $I = J$. Pokud by existoval $I \setminus J \neq \emptyset$, pak by funkce

$$z(t) = \begin{cases} x(t), & t \in I \setminus J, \\ y(t), & t \in J, \end{cases}$$

byla řešením striktně větším než y, což by byl spor s maximalitou y. Tedy $I \subset J$. Analogicky pak odvodíme $J \subset I$. Tím je důkaz dokončen. ■

13.4.11. Lemma. Nechť x je řešení (13.8) na intervalu (α, β) s počáteční podmínkou $x(t_0) = x^0$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.

(i) Existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ takové, že řešení x lze prodloužit na interval $(\alpha, \beta + \varepsilon)$;

(ii) Existuje posloupnost $\{t_n\}$ ležící v (α, β) a $y \in \mathbb{R}^n$ takové, že

$$\lim_{m \to \infty} [t_n, x(t_n)] = [\beta, y] \in G.$$

Důkaz. (ii) $\Rightarrow$ (i) Existuje-li řešení $\tilde{x}$ rozšiřující x za bod β, pak pro každou posloupnost $\{t_m\}$ konvergující k β platí

$$\lim_{m \to \infty} [t_m, x(t_m)] = [\beta, \tilde{x}(\beta)] \in G.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Nechť $\{t_m\}$ a y splňují podmínku popsanou v (ii). Ukážeme nejprve, že

$$\lim_{t \to \beta_+} x(t) = y. \tag{13.17}$$

Zvolme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ takové, že

$$[\beta - \delta, \beta] \times \overline{B}(y, \delta) \subset G$$

a nechť $M \in \mathbb{R}$ splňuje

$$\sup\{f([t,z]);\ [t,z] \in [\beta-\delta,\beta] \times \overline{B}(y,\delta)\} \leq M.$$

Předpokládejme, že (13.17) neplatí. Z Heineovy věty (viz Věta **??**) existuje posloupnost $\{\tau_n\}$ v (α,β) konvergující k β a číslo $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ takové, že $\|\boldsymbol{x}(\tau_m) - \boldsymbol{y}\| \geq \gamma$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $\gamma < \delta$. Postupným vybíráním členů posloupností $\{t_n\}$ a $\{\tau_n\}$ lze zařídit, aby $t_1 < \tau_1 < t_2 < \tau_2 < \cdots$ a $\|\boldsymbol{x}(t_n) - y\| < \gamma$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$s_n = \inf\{t \in [t_n,\tau_n];\ \|\boldsymbol{x}(t) - y\| \geq \gamma\}.$$

Pak $s_n \in (t_n,\tau_n]$ (máme $\|\boldsymbol{x}(t_n) - y\| < \gamma$ a funkce $t \mapsto \|\boldsymbol{x}(t) - y\|$ je spojitá v t_n). Ze spojitosti funkce $t \mapsto \|\boldsymbol{x}(t) - y\|$ dostáváme $\|\boldsymbol{x}(s) - y\| \geq \gamma$. Pokud by tato norma byla větší než γ, byla by větší i na nějakém okolí bodu s_n. Tedy by existoval bod t nalevo od s_n splňující $\|\boldsymbol{x}(t) - y\| \geq \gamma$, což je spor s definici infima. Tedy $\|\boldsymbol{x}(s_n) - y\| = \gamma$.

Dále platí $\|\boldsymbol{x}(t) - y\| \leq \gamma$ pro $t \in [t_n,s_n]$. To nahlédneme opět sporem; pokud by $\|\boldsymbol{x}(t) - y\| > \gamma$ pro nějaké $t \in [t_n,s_n)$, dostali bychom znovu spor s definici bodu s_n. Tedy

$$\forall t \in [t_n,s_n] : \|\boldsymbol{x}(t) - y\| \leq \gamma < \delta.$$

Pak ale máme $[s,\boldsymbol{x}(s)] \in [\beta-\delta,\beta] \times \overline{B}(\boldsymbol{y},\delta)$ pro $s \in [t_n,s_n]$, a tedy

$$\begin{aligned}\gamma = \|\boldsymbol{x}(s_n) - y\| &\leq \|\boldsymbol{x}(s_n) - \boldsymbol{x}(t_n)\| + \|\boldsymbol{x}(t_n) - y\| \\ &\leq \int_{t_n}^{s_n} \|\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s)\|\ \mathrm{d}s + \|\boldsymbol{x}(t_n) - y\| \\ &\leq M\,\|s_n - t_n\| + \|\boldsymbol{x}(t_n) - y\|\,.\end{aligned}$$

Tím dostáváme spor, neboť pravá strana konverguje k 0 pro n jdoucí do nekonečna. Tedy platí (13.17).

Nyní uvažujme nějaké řešení $\boldsymbol{y}$ úlohy (13.8) na intervalu $(\beta-\varepsilon,\beta+\varepsilon)$ s počáteční podmínkou $\boldsymbol{x}(\beta) = y$. Pak je funkce

$$\boldsymbol{z}(t) = \begin{cases}\boldsymbol{x}(t), & t \in (\alpha,\beta),\\ \boldsymbol{y}(t), & t \in [\beta,\beta+\varepsilon).\end{cases}$$

prodloužením řešení $\boldsymbol{x}$ za bod β (viz Lemma 13.1.2). ∎

13.4.12. Věta. Nechť $\boldsymbol{x} : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^n$ je řešení (13.8) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$. Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompakt takový, že $[t_0,\beta] \times K \subset G$ a nechť existuje posloupnost $\{t_n\}$ konvergující k β a splňující $\boldsymbol{x}(t_m) \in K$. Pak existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, a řešení $\boldsymbol{y} : (\alpha,\beta+\varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ rovnice (13.8) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$ shodující se na (α,β) s $\boldsymbol{x}$.

Důkaz. Mějme posloupnost $\{t_n\}$ konvergující k β a splňující $\boldsymbol{x}(t_m) \in K$. Protože K je kompaktní, lze po eventuálním výběru podposloupnosti předpokládat, že $\boldsymbol{x}(t_n) \to \boldsymbol{y}$ pro nějaké $\boldsymbol{y} \in K$. Lemma 13.4.11 tedy dává rozšíření řešení za bod β. ∎

13.4.13. Lemma (Gronwallova nerovnost)**.** Nechť funkce x je spojitá na intervalu $[\alpha, \beta)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^*$. Nechť existují čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $c \geq 0$ taková, že pro každé $t \in [\alpha, \beta)$ platí

$$x(t) \leq a + \int_\alpha^t (bx(s) + c)\, \mathrm{d}s.$$

Pak pro každé $t \in [\alpha, \beta)$ platí

$$u(t) \leq \left(a + \frac{c}{b}\right) e^{b(t-\alpha)}.$$

Důkaz. Označme

$$y(t) = a + \int_\alpha^t (bx(s) + c)\, \mathrm{d}s, \quad t \in [\alpha, \beta).$$

Platí

$$y(\alpha) = a \quad \text{a} \quad y'(t) = bx(t) + c \leq by(t) + c, \quad t \in [\alpha, \beta).$$

Proto také

$$y'(t)e^{-bt} \leq by(t)e^{-bt} + ce^{-bt}, \quad t \in [\alpha, \beta).$$

Odtud plyne

$$\left(y(t)e^{-bt}\right)' \leq ce^{-bt}, \quad t \in [\alpha, \beta).$$

Použitím Věty **??** a úpravou postupně dostáváme pro každé $s \in [\alpha, \beta)$

$$\int_\alpha^s \left(y(t)e^{-bt}\right)' \mathrm{d}t \leq \int_\alpha^s ce^{-bt}\, \mathrm{d}t,$$
$$\left[y(t)e^{-bt}\right]_\alpha^s \leq \left[-\frac{c}{b}e^{-bt}\right]_\alpha^s,$$
$$y(s)e^{-bs} - y(\alpha)e^{-b\alpha} \leq -\frac{c}{b}e^{-bs} + \frac{c}{b}e^{-b\alpha}.$$

Odtud již dostáváme

$$x(s) \leq y(s) \leq a + e^b(s-\alpha) - \frac{c}{b} + \frac{c}{b}e^{b(s-\alpha)} \leq \left(a + \frac{c}{b}\right) e^{b(s-\alpha)}$$

pro každé $s \in [\alpha, \beta)$. ∎

13.4.14. Věta. Nechť I je otevřený interval a $G = I \times \mathbb{R}^n$. Nechť pro každý uzavřený omezený interval $J \subset I$ existují nezáporné konstanty M_J, L_J takové, že

$$\forall [t, \boldsymbol{x}] \in J \times \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})\| \leq M_J + L_J \|\boldsymbol{x}\| .$$

Pak je každé maximální řešení (13.8) definováno na celém I.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že všechny konstanty L_J jsou kladné. Nechť $\boldsymbol{x}$ je řešení (13.8) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$ a $J \subset I$ je libovolný omezený uzavřený interval obsahující t_0. Pak máme pro $t \in J$

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}(t)\| &= \left\| \boldsymbol{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\, \mathrm{d}s \right\| \\ &\leq \left\| \boldsymbol{x}^0 \right\| + \int_{t_0}^{t} \|\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\|\, \mathrm{d}s \\ &\leq \left\| \boldsymbol{x}^0 \right\| + \int_{t_0}^{t} (M_J + L_J \|\boldsymbol{x}(s)\|)\, \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Dle Gronwallovy nerovnosti 13.4.13 pak obdržíme pro $t \in J$

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \leq \left(\left\| \boldsymbol{x}^0 \right\| + \frac{M_J}{L_J} \right) e^{L_J(t - t_0)}.$$

Protože je funkce $e^{L_J(t-t_0)}$ na J omezená (viz Věta **??**), leží řešení $\boldsymbol{x}$ na J v nějaké uzavřené kouli. Podle Věty 13.4.12 lze řešení $\boldsymbol{x}$ prodloužit z J na nějaký otevřený interval $\tilde{J}$, $J \subset \tilde{J} \subset I$. Protože je $\boldsymbol{x}$ maximální, obsahuje jeho definiční obor $\tilde{J}$. Tedy $\boldsymbol{x}$ je definováno na každém omezeném uzavřeném podintervalu I, a tedy na I. ∎

13.5. Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ x_2' &= a_{21}(t)x_1 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t), \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t), \end{aligned} \tag{13.18}$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a_{ij} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $b_i : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ jsou spojité funkce.

Vektorový tvar je

$$\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t),$$

kde

$$\mathbb{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

13.5.1. Věta. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$. Nechť $\mathbb{A} : (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$, $\boldsymbol{b} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ jsou spojitá zobrazení. Potom existuje právě jedno maximální řešení $\boldsymbol{x}$ soustavy (13.18) splňující $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$. Toto řešení je definováno na celém intervalu (α, β).

Důkaz. Definujme $\boldsymbol{f} : (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ předpisem

$$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) = \mathbb{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t).$$

Zobrazení $\boldsymbol{f}$ je na množině $(\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n$ spojité.

Dále ukažme, že je „lipschitzovské v druhé proměnné“. Mějme $[t, \boldsymbol{x}] \in (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n$ dáno. Zvolme uzavřený omezený interval J, $t \in J \subset (\alpha, \beta)$. Položme

$$M_J = \sup_{t \in J} \|\boldsymbol{b}(t)\| \quad \text{a} \quad L_J = \sup_{t \in J} \|\mathbb{A}(t)\|,$$

což jsou díky spojitosti uvažovaných funkcí nezáporná reálná čísla. Pak pro $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\left\| \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}^1) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}^2) \right\| = \left\| \mathbb{A}(t)(\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2) \right\| \le L_J \left\| \boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2 \right\|.$$

Tedy dle Věty 13.4.9 existuje maximální řešení $\boldsymbol{x}$ splňující počáteční podmínku a je určeno jednoznačně.

Dále ukažme, že pro každý omezený uzavřený interval $J \subset (\alpha, \beta)$ obsahující t_0 splňují konstanty M_J, L_J definované výše odhady Věty 13.4.14. Vskutku,

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})\| &= \|\mathbb{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)\| \le \|\mathbb{A}(t)\| \, \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{b}(t)\| \\ &\le L_J \|\boldsymbol{x}\| + M_J, \quad [t, \boldsymbol{x}] \in J \times \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Věta 13.4.14 tedy říká, že řešení $\boldsymbol{x}$ je definováno na celém intervalu (α, β). ∎

13.5.2. Definice. Je-li $\mathbb{A}$ jako v (13.18), pak **homogenní soustavou** rozumíme soustavu rovnic

$$\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}(t)\boldsymbol{x}. \tag{13.19}$$

13.5.3. Věta. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha < \beta$ a $\mathbb{A} : (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$ je spojité zobrazení. Potom množina všech maximálních řešení soustavy (13.19) tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}^1((\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$. Dimenze tohoto podprostoru je rovna n.

Důkaz. Podle Věty 13.5.1 je každé maximální řešení (13.19) definováno na (α, β). Množina maximálních řešení je rovna jádru $\operatorname{Ker} L$ lineárního zobrazení $L : \mathcal{C}^1((\alpha, \beta), \mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}((\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$ definovaného předpisem $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}' - \mathbb{A}\boldsymbol{y}$. Tedy se jedná o vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}^1((\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$.

K důkazu jeho n-dimenzionality zvolme $t_0 \in (\alpha, \beta)$ pevně. Vezměme řešení $\boldsymbol{x}^1, \dots, \boldsymbol{x}^n$ soustavy (13.19) na (α, β) splňující $\boldsymbol{x}^i(t_0) = \boldsymbol{e}^i$, $i = 1, \dots, n$. Funkce $\{\boldsymbol{x}^1, \dots, \boldsymbol{x}^n\}$ jsou lineárně nezávislé, jelikož jsou vektory $\{\boldsymbol{e}^1, \dots, \boldsymbol{e}^n\}$ lineárně nezávislé. Nechť $\boldsymbol{y}$ je maximální řešení (13.19). Pak $\boldsymbol{y}$ je definováno na (α, β). Označme

$$\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{y}_1(t_0)\boldsymbol{x}^1(t) + \dots + \boldsymbol{y}_n(t)\boldsymbol{x}^n(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Potom $z(t_0) = \boldsymbol{y}(t_0)$ a $\boldsymbol{z}$ řeší (13.19) na (α, β). Z jednoznačnosti řešení plyne

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{y}_1(t_0)\boldsymbol{x}^1(t) + \dots + \boldsymbol{y}_n(t)\boldsymbol{x}^n(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Tedy $\{\boldsymbol{x}^1, \dots, \boldsymbol{x}^n\}$ je báze prostoru $\operatorname{Ker} L$. ■

13.5.4. Věta. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha < \beta$ a $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$. Nechť $\mathbb{A} : (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$, $\boldsymbol{b} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ jsou spojitá zobrazení. Nechť $\boldsymbol{y}$ je řešení (13.18) na (α, β). Potom každé řešení soustavy (13.18) na intervalu (α, β) má tvar $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$, kde $\boldsymbol{z}$ je jisté řešení (13.19).

Důkaz. Jelikož je zobrazení $L : \boldsymbol{y} \mapsto \boldsymbol{y}' - \mathbb{A}\boldsymbol{y}$ lineární na prostoru $\mathcal{C}^1((\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$, máme pro maximální řešení $\boldsymbol{x}$ rovnice (13.18) rovnost

$$L(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = L\boldsymbol{x} - L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0},$$

a tedy $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ řeší (13.19). ■

13.5.5. Definice. Nechť tvoří vektorové funkce $\boldsymbol{y}^1, \dots, \boldsymbol{y}^n$ bázi prostoru řešení rovnice (13.19) na (α, β). Takovouto množinu nazýváme **fundamentální systém** rovnice (13.19). Označme

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} y_1^1(t) & \dots & \boldsymbol{y_1}^n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_n^1(t) & \dots & y_n^n(t) \end{pmatrix}, \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Matici ϕ nazýváme **fundamentální maticí** soustavy (13.19).

13.5.6. Lemma. Nechť ϕ je fundamentální matice rovnice (13.19). Pak $\phi(t)$ je regulární pro každé $t \in (\alpha, \beta)$.

Důkaz. Předpokládejme, že pro jisté $t_0 \in (\alpha, \beta)$ není matice $\phi(t_0)$ regulární. Pak existují čísla $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ taková, že alespoň jedno je nenulové a

$$c_1 \boldsymbol{y}^1(t_0) + \dots + c_n \boldsymbol{y}^n(t_0) = \boldsymbol{0}.$$

Potom řešení

$$\boldsymbol{y} = c_1 \boldsymbol{y}^1 + \dots + c_n \boldsymbol{y}^n$$

splňuje $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{0}$. Díky jednoznačnosti řešení pak platí $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$. To je ale spor s lineární nezávislostí funkcí $\boldsymbol{y}^1, \dots, \boldsymbol{y}^n$. ■

13.5.7. Věta (Variace konstant)**.** Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbb{R}^n$. Pak maximální řešení $\boldsymbol{y}$ rovnice (13.18) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}^0$ má tvar

$$\boldsymbol{y}(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)\boldsymbol{y}^0 + \phi(t) \int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)\boldsymbol{b}(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in (\alpha, \beta),$$

kde ϕ je fundamentální matice soustavy (13.19).

Důkaz. Matice $\phi^{-1}(s)$ je díky Lemmatu 13.5.6 definována pro každé $s \in (\alpha, \beta)$. Z Cramerova pravidla plyne spojitost zobrazení $s \mapsto \phi^{-1}(s)\boldsymbol{b}(s)$, a tedy je $\boldsymbol{y}$ dobře definováno. Použitím $\phi'(t) = \mathbb{A}(t)\phi(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, dostaneme

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}'(t) &= \phi'(t)\phi^{-1}(t_0)\boldsymbol{y}^0 + \phi'(t) \int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)\boldsymbol{b}(s)\,\mathrm{d}s + \phi(t)\phi^{-1}(t)\boldsymbol{b}(t) \\
&= \mathbb{A}(t)\phi(t)\phi^{-1}(t_0)\boldsymbol{y}^0 + \mathbb{A}(t)\phi(t) \int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)\boldsymbol{b}(s)\,\mathrm{d}s + \boldsymbol{b}(t) \\
&= \mathbb{A}(t)\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{b}(t).
\end{aligned}$$

Zřejmě platí $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}^0$. ■

13.6. Řešení lineárních soustav s konstantními koeficienty

13.6.1. Věta. Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ a vektorová funkce $\boldsymbol{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ je řešením soustavy $\boldsymbol{y}' = \mathbb{A}\boldsymbol{y}$. Pak $\boldsymbol{y}$ je třídy $\mathcal{C}^\infty$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\boldsymbol{y}^{(k)}(t) = \mathbb{A}^k \boldsymbol{y}(t)$ pro $t \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí dle k. Pro $k = 1$ máme $\boldsymbol{y}' = \mathbb{A}\boldsymbol{y}$ z předpokladu. Předpokládejme nyní, že pro $k \in \mathbb{N}$ je $\boldsymbol{y}$ je třídy $\mathcal{C}^k$ a $\boldsymbol{y}^{(k)} = \mathbb{A}^k \boldsymbol{y}$. Pak máme

$$(\mathbb{A}^k \boldsymbol{y})' = \mathbb{A}^k \boldsymbol{y}' = \mathbb{A}^k \mathbb{A} \boldsymbol{y} = \mathbb{A}^{k+1} \boldsymbol{y}.$$

Tedy je funkce $\boldsymbol{y}^k$ diferencovatelná a platí

$$\boldsymbol{y}^{(k+1)} = \left(\mathbb{A}^k \boldsymbol{y}\right)' = \mathbb{A}^{(k+1)} \boldsymbol{y}.$$

Funkce $\boldsymbol{y}$ je tedy třídy $\mathcal{C}^{k+1}$ a platí požadovaný vztah.

Tím je důkaz dokončen. ■

13.6.2. Definice. Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ, nazýváme **λ-maticí**.

Řádkovými úpravami λ-matice rozumíme

- záměnu dvou řádků,
- vynásobení řádku nenulovou konstantou,
- přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde P je polynom v proměnné λ.

13.6.3. Lemma. Nechť $\Lambda = (P_1, \dots, P_n)^t$ je λ-matice o rozměrech $n \times 1$. Potom ji lze konečnou posloupností řádkových úprav převést na λ-matici $\tilde{\Lambda} = (\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n)^t$, kde nejvýše jeden z polynomů $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n$ je nenulový.

Důkaz. Předpokládejme, že v Λ existují dva nenulové polynomy. Označme

$$k = \min\{\operatorname{st} P_i;\ i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Použijeme matematickou indukci podle k.

Je-li $k = 0$. Pak lze předpokládat, že $P_1(\lambda) = c \neq 0$. Potom lze pomocí třetí řádkové úpravy převést Λ na $(c, 0, \dots, 0)^t$.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro všechna $j \in \mathbb{N}$ menší než nějaké $k \in \mathbb{N}$. Opět pak lze předpokládat, že $\operatorname{st} P_1 = k$. Pokud Q je nenulový prvek Λ, $Q \neq P_1$, pak můžeme psát $Q = N \cdot P_1 + \tilde{Q}$, kde $N, \tilde{Q}$ jsou polynomy a $\operatorname{st} \tilde{Q} < \operatorname{st} P_1$. Pomocí třetí řádkové úpravy lze prvek Q nahradit prvkem $\tilde{Q}$. Matici Λ tak lze převést na na matici $(P_1, \tilde{P}_2, \dots, \tilde{P}_n)^t$, kde je buď jediný nenulový polynom P_1, nebo minimum ze stupňů nenulových polynomů je ostře menší než k a lze aplikovat indukční předpoklad. ■

13.6.4. Věta. Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Pak lze matici $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ převést konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou λ-matici. Výsledná λ-matice má na diagonále nenulové polynomy součet jejichž stupňů je n.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že každou λ-matici lze převést konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou λ-matici. Použijeme matematickou indukci podle n.

Je-li $n = 1$, je tvrzení zřejmé.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Nechť Λ je λ matice typu $(n+1) \times (n+1)$. Na Λ aplikujeme řádkové úpravy, které převedou

Λ na $\tilde{\Lambda}$, jejíž první sloupec má tvar $(\tilde{P}, 0, \dots, 0)^t$ (viz Lemma 13.6.3). Na submatici matice $\tilde{\Lambda}$, která vznikne vynecháním první řádku a první sloupce, pak aplikujeme indukční předpoklad.

Rozmysleme si nyní druhé tvrzení. Nechť $\tilde{\Lambda}$ je horní trojúhelníková λ-matice vzniklá z $\lambda\mathbb{I}-\mathbb{A}$ pomocí řádkových úprav. Potom $\det\tilde{\Lambda} = c\det(\lambda\mathbb{I}-\mathbb{A})$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ nenulové (toto plyne z vlastností determinantů a polynomů). Polynom $\lambda \mapsto c\det(\lambda\mathbb{I}-\mathbb{A})$ je n-tého stupně, a tak dostáváme požadované tvrzení. ■

13.6.5. Označení. Nechť $P(\lambda) = a_n\lambda^n + \cdots + a_0$ je polynom a $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce mající vlastní derivaci n-tého řádu na $\mathbb{R}$. Pak symbol $P\left(\frac{d}{dx}\right) y$ značí funkci

$$a_n y^{(n)} + a_{n_1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y.$$

Nechť $\mathbb{P} = \left(P_{ij}\right)_{\substack{i=1..n\\ j=1..n}}$ je λ-matice typu $n \times n$. Soustavou diferenciálních rovnic odpovídající $\mathbb{P}$ rozumíme soustavu

$$\begin{aligned} P_{11}\left(\frac{d}{dx}\right) y_1 + \cdots + P_{1n}\left(\frac{d}{dx}\right) y_n &= 0,\\ &\vdots\\ P_{n1}\left(\frac{d}{dx}\right) y_1 + \cdots + P_{nn}\left(\frac{d}{dx}\right) y_n &= 0. \end{aligned}$$

13.6.6. Lemma. Nechť P, Q jsou polynomy a $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Pak

(a) $(P+Q)\left(\frac{d}{dx}\right) y = P\left(\frac{d}{dx}\right) y + Q\left(\frac{d}{dx}\right) y$,
(b) $(PQ)\left(\frac{d}{dx}\right) y = P\left(\frac{d}{dx}\right)\left(Q\left(\frac{d}{dx}\right)\right) y$.

Důkaz. Tvrzení (a) je zřejmé. Pro $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k$ a $Q(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} b_j \lambda^j$ máme

$$\begin{aligned}
(PQ)\left(\frac{d}{dx}\right) y &= \left(\sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j \lambda^j\right)\left(\frac{d}{dx}\right) y \\
&= \left(\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_k b_j \lambda^{k+j}\right)\left(\frac{d}{dx}\right) y \\
&= \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_k b_j y^{(k+j)} \\
&= \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_k b_j y^{(j+k)} \\
&= \sum_{k=0}^{m} a_k \left(\sum_{j=0}^{n} b_j y^{(j)}\right)^{(k)} \\
&= P\left(\frac{d}{dx}\right)\left(Q\left(\frac{d}{dx}\right)\right) y,
\end{aligned}$$

a tedy platí (b). ■

13.6.7. Věta. Nechť λ-matice $\tilde{\mathbb{P}}$ vznikla konečnou posloupností řádkových úprav z λ-matice $\mathbb{P}$. Potom vektorová funkce $\boldsymbol{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ třídy $\mathcal{C}^\infty$ je řešením soustavy odpovídající λ-matici $\mathbb{P}$ právě tehdy, když je řešením soustavy odpovídající λ-matici $\tilde{\mathbb{P}}$.

Důkaz. Stačí ukázat, že pokud $\boldsymbol{y}$ řeší soustavu odpovídající $\mathbb{P}$, pak řeší i soustavu odpovídající $\tilde{\mathbb{P}}$, která vznikla z $\mathbb{P}$ aplikací jedné řádkové úpravy (řádkové úpravy jsou invertibilní).

Toto jistě platí, pokud vyměníme dva řádky či řádek vynásobíme nenulovou konstantou.

Uvažme nyní řádkovou úpravu spočívající k přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že přičítáme $P(\lambda)$-násobek druhého řádku k řádku prvnímu. Máme

$$\begin{aligned}
P_{11}\left(\frac{d}{dx}\right) y_1 + \cdots + P_{1n}\left(\frac{d}{dx}\right) y_n &= P_{1,n+1}\left(\frac{d}{dx}\right) b_1, \\
P_{21}\left(\frac{d}{dx}\right) y_1 + \cdots + P_{2n}\left(\frac{d}{dx}\right) y_n &= P_{2,n+1}\left(\frac{d}{dx}\right) b_2.
\end{aligned}$$

Potom

$$
\begin{aligned}
&(P_{11} + P \cdot P_{21})\left(\frac{d}{dx}\right) y_1 + \cdots + (P_{1n} + P \cdot P_{2n})\left(\frac{d}{dx}\right) y_n = \\
&= P_{11}\left(\frac{d}{dx}\right) y_1 + \cdots + P_{jn}\left(\frac{d}{dx}\right) y_n + (P \cdot P_{21})\left(\frac{d}{dx}\right) y_1 + \cdots + (P \cdot P_{2n})\left(\frac{d}{dx}\right) y_n \\
&= P_{1,n+1}\left(\frac{d}{dx}\right) b_1 + P\left(\frac{d}{dx}\right)\left(P_{21}\left(\frac{d}{dx}\right) y_1 + \cdots + P_{2n}\left(\frac{d}{dx}\right) y_n\right) \\
&= P_{1,n+1}\left(\frac{d}{dx}\right) b_1 + P\left(\frac{d}{dx}\right) P_{2,n+1}\left(\frac{d}{dx}\right) b_2.
\end{aligned}
$$

■

13.6.8. Homogenní soustava odpovídá λ-matici $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$, kterou pomocí konečné posloupnosti řádkových úprav převedeme na horní trojúhelníkovou λ-matici

$$
\begin{pmatrix}
P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\
0 & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\
\vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & P_{nn}
\end{pmatrix}.
$$

Soustavu

$$
\begin{aligned}
P_{11}\left(\frac{d}{dx}\right) y_1 + \cdots + P_{1n}\left(\frac{d}{dx}\right) y_n &= 0, \\
&\vdots \\
P_{nn}\left(\frac{d}{dx}\right) y_n &= 0,
\end{aligned}
$$

pak vyřešíme „odzadu“.

Nehomogenní soustavu vyřešíme pomocí variace konstant, případně variantou výše uvedené metody, pokud je pravá strana $\mathcal{C}^\infty$.

13.6.9. Příklad. Vyřešte soustavu

$$
\begin{aligned}
y_1' &= 4y_1 + 5y_2, \\
y_2' &= -2y_1 - 2y_2.
\end{aligned}
$$

Řešení. Příslušná λ-matice $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ má tvar

$$
\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -5 \\ 2 & \lambda + 2 \end{pmatrix},
$$

kterou pomocí řádkových úprav převedeme na

$$\begin{pmatrix} \lambda-4 & -5 \\ 2 & \lambda+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\lambda+1 \\ 0 & -5-(\frac{1}{2}\lambda+1)(\lambda-4) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\lambda+1 \\ 0 & -\frac{1}{2}\lambda^2+\lambda-1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\lambda+1 \\ 0 & \lambda^2-2\lambda+2 \end{pmatrix},$$

Rovnice

$$y_2''-2y'+2y=0$$

má kořeny charakteristického polynomu rovny

$$\lambda_1 = 1+i, \quad \lambda_2 = 1-i.$$

Obecný tvar řešení je tedy

$$y_2 = \alpha_1 e^t \sin t + \alpha_2 e^t \cos t, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Pak

$$y_2' = \alpha_1 e^t \sin t + \alpha_2 e^t \cos t - \alpha_2 e^t \sin t + \alpha_2 e^t \cos t,$$

což dosazením do první rovnice znamená

$$\begin{aligned} y_1 &= -\alpha_1 e^t \sin t - \alpha_2 e^t \cos t - \frac{1}{2}\alpha_1 e^t \sin t - \frac{1}{2}\alpha_1 e^t \cos t \\ &\quad + \frac{1}{2}\alpha_2 e^t \sin t - \frac{1}{2}\alpha_2 e^t \cos t \\ &= (-\frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2)e^t \sin t + (-\frac{3}{2}\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1)e^t \cos t. \end{aligned}$$

Fundamentální matice naší soustavy je tedy

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t & \frac{1}{2}\sin t - \frac{3}{2}\cos t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} e^t.$$

♣

13.7. Početní příklady na diferenciální rovnice

13.7.1. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = x^3(y^2+2y-3).$$

Řešení. Řešíme rovnici

$$y' = g(y)h(x),$$

kde $g(y) = (y+3)(y-1)$ a $h(x) = x^3$.

(1) Zjevně platí $\mathcal{D}(h) = \mathbb{R}$.
(2) Dále máme, že $y = 1$ a $y = -3$ jsou stacionární řešení na $\mathbb{R}$.

(3) Intervaly, kde je g nenulová, jsou po řadě $J_1 = (-\infty, -3)$, $J_2 = (-3, 1)$ a $J_3 = (1, \infty)$.

(4) Pro $I = \mathbb{R}$ a jeden z intervalů J_1, J_2, J_3 řešíme rovnici

$$\frac{y'}{(y+3)(y-1)} = x^3.$$

Jelikož $\int x^3 \, dx = \frac{1}{4}x^4$ a

$$\int \frac{1}{(y+3)(y-1)} \, dy = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+3} \right) dy = \frac{1}{4} \log \left| \frac{y-1}{y+3} \right|,$$

existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\frac{1}{4} \log \left| \frac{y-1}{y+3} \right| = \frac{1}{4} x^3 + c,$$

kde x probíhá níže určený interval. Tedy

$$\log \left| \frac{y-1}{y+3} \right| = x^3 + 4c$$

na tomto intervalu.

(5) Uvažujme nejprve interval J_1. Ten zobrazuje funkce $\log \left| \frac{y-1}{y+3} \right|$ na interval $(0, \infty)$. Pokud $c > 0$, je $\mathcal{H}(x^4 + c) \subset (0, \infty)$, a tedy pro $x \in \mathbb{R}$ a platí

$$\left| \frac{y-1}{y+3} \right| = \frac{y-1}{y-3} = e^{x^4+4c}.$$

Tedy

$$y(x) = \frac{1 + 3e^{x^4+4c}}{1 - e^{x^4+4c}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pokud $c \leq 0$, $x^4+4c \in (0, \infty)$ právě tehdy, když $x \in (-\infty, -\sqrt[4]{-4c}) \cup (\sqrt[4]{-4c}, \infty)$. Jako výše pak odvodíme, že

$$y(x) = \frac{1 + 3e^{x^4+4c}}{1 - e^{x^4+4c}}, \quad x \in (-\infty, -\sqrt[4]{-4c}), \quad x \in (\sqrt[4]{-4c}, \infty).$$

Uvažujme nyní interval J_2. Pro $y \in J_2$ platí $\left| \frac{y-1}{y+3} \right| = \frac{1-y}{y+3}$ a dále funkce $\log \left| \frac{y-1}{y+3} \right|$ zobrazuje J_2 na $\mathbb{R}$. Tedy na c není žádné omezení a dostáváme

$$y(x) = \frac{1 - 3e^{x^4+4c}}{1 + e^{x^4+4c}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pro interval J_3 platí, že ho funkce $\log\left|\frac{y-1}{y+3}\right|$ zobrazuje na $(-\infty, 0)$. Tedy $x^4 + 4c \in (-\infty, 0)$, pokud $c < 0$ a $x \in (-\sqrt[4]{-4c}, \sqrt[4]{-4c})$. Pak

$$y(x) = \frac{1 + 3e^{x^4+4c}}{1 - e^{x^4+4c}}, \quad x \in (-\sqrt[4]{-4c}, \sqrt[4]{-4c}).$$

(6) Zjistěme nyní, zdali lze získat slepením požadovaná maximální řešení. Má smysl se zaobírat pouze řešeními, která nejsou definovaná na $\mathbb{R}$, neboť ta definovaná na $\mathbb{R}$ jsou zřejmě maximální. Uvažujme tedy řešení

$$y(x) = \frac{1 + 3e^{x^4+4c}}{1 - e^{x^4+4c}}, \quad x \in (-\infty, -\sqrt[4]{-4c}), \quad x \in (\sqrt[4]{-4c}, \infty),$$

kde se blížíme k bodu $-\sqrt[4]{-4c}$ nebo $\sqrt[4]{-4c}$. Pak ale $|y(x)|$ konverguje do ∞, takže není možné řešení nalepit. Podobně vyloučíme možnost lepení u řešení

$$y(x) = \frac{1 + 3e^{x^4+4c}}{1 - e^{x^4+4c}}, \quad x \in (-\sqrt[4]{-4c}, \sqrt[4]{-4c}).$$

♣

13.7.2. Příklad. Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$x(y-4)y' = y^2 - 5y + 6$$

splňující $y(1) = \frac{7}{2}$.

Řešení. Pro $x \neq 0$ a $y \neq 4$ rovnici upravíme na

$$y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{(y-2)(y-3)}{y-4}.$$

(1) Pro funkci $h(x) = \frac{1}{x}$ dostáváme intervaly $I_1 = (-\infty, 0)$ a $I_2 = (0, \infty)$
(2) Stacionární řešení jsou $y = 2$ a $y = 3$ na I_1 a I_2.
(3) Funkce g je nenulová na intervalech $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$ a $(4, \infty)$.
(4) Pro každou dvojici intervalů I z 1. kroku a J z 3. kroku pak platí

$$y' \frac{y-4}{(y-2)(y-3)} = \frac{1}{x}.$$

Jelikož

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log|x|$$

a

$$\int \frac{y-4}{(y-2)(y-3)}\,\mathrm{d}y = \int \left(\frac{2}{y-2} - \frac{1}{y-3}\right) \mathrm{d}y = \log \frac{(y-2)^2}{|y-3|},$$

existuje $k > 0$ takové, že

$$\log \frac{(y-2)^2}{|y-3|} = \log k\,|x|\,.$$

(5) Vzhledem k tomu, že nás zajímá řešení procházející bodem $[1, \frac{7}{2}]$, uvažujme intervaly $I = (0, \infty)$ a $J = (3, 4)$. Pak funkce $\log \frac{(y-2)^2}{|y-3|}$ zobrazuje $(3, 4)$ na $(\log 4, \infty)$. Tedy pro $k > 0$ pak dostáváme podmínku $\log(k\,|x|) > \log 4$, neboli $x \in (\frac{4}{k}, \infty)$. Pro tato x pak platí

$$\frac{(y-2)^2}{y-3} = kx,$$

což vede na rovnici

$$y^2 + y(-4 - kx) + (4 + 3kx) = 0.$$

Ta má řešení

$$y_{1,2} = \frac{1}{2}\left(4 + kx \pm \sqrt{(4+kx)^2 - 4(4+3kx)}\right) = 2 + \frac{kx}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{kx(kx-4)}.$$

Jelikož platí $\frac{kx}{2} > 2$ a $y(x) \in (3, 4)$, zajímá nás řešení

$$y(x) = 2 + \frac{kx}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{kx(kx-4)}.$$

Požadavek $y(1) = \frac{7}{2}$ implikuje $k = \frac{9}{2}$, což dává řešení

$$y(x) = 2 + \frac{9}{4}x - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{2}x(\frac{9}{2}x - 4)}, \quad x \in (\frac{8}{9}, \infty).$$

(6) Zkoumejme chování řešení pro $x \to \frac{8}{9}+$. Pak $y(x) \to 4$, avšak v bodě $[\frac{8}{9}, 4]$ není rovnice splněna, neboť se levá strana rovnice

$$\frac{8}{9} \cdot 0 \cdot y'(\frac{8}{9})$$

nemůže rovnat pravé straně, totiž 2.

♣

13.7.3. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = \frac{y}{x} - \sqrt[3]{\frac{y}{x} + 1}.$$

Řešení. Uvažujme substituci $y = zx$. Pak $y' = z'x + z$, a tedy zadaná rovnice přejde na tvar
$$z'x + z = z = \sqrt[3]{z+1},$$
tj.
$$z' = \frac{-\sqrt[3]{z+1}}{x}.$$
Dostáváme tak rovnici se separovanými proměnnými.

(1) Zjevně $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, \infty)$.
(2) Stacionární řešení je $z = -1$ na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.
(3) Intervaly pro z jsou tvaru $(-\infty, -1)$ a $(-1, \infty)$.
(4) Jelikož
$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log|x|$$
a
$$\int -\frac{1}{\sqrt[3]{z+1}}\,\mathrm{d}z = -\frac{3}{2}(z+1)^{\frac{2}{3}},$$
existuje $k > 0$ takové, že platí
$$-\frac{3}{2}(\sqrt[3]{z+1})^2 = \log(k\,|x|).$$
(5) Na intervalu $J_1 = (-\infty, -1)$ platí, že ho funkce $-\frac{3}{2}(\sqrt[3]{z+1})^2$ zobrazuje na $(-\infty, 0)$. Tedy $\log(k\,|x|) < 0$, což znamená $x \in (0, \frac{1}{k})$ nebo $x \in (-\frac{1}{k}, 0)$. Máme tak řešení
$$z(x) = -1 - \left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3}\log(k\,|x|)}\right)^3, \quad x \in (0, \frac{1}{k}), \quad x \in (-\frac{1}{k}, 0).$$
Pro interval $((-1, \infty)$ platí, že ho funkce $-\frac{3}{2}(\sqrt[3]{z+1})^2$ též zobrazuje na $(-\infty, 0)$. Jako výše tak dostáváme řešení
$$z(x) = -1 + \left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3}\log(k\,|x|)}\right)^3, \quad x \in (0, \frac{1}{k}), \quad x \in (-\frac{1}{k}, 0).$$
(6) Eventuální lepení nelze provést v 0, neboť zde rovnice nemá smysl. V bodech $\pm\frac{1}{k}$ však $z(x)$ konverguje k -1, a tedy lze lepit na stacionární řešení. Dostáváme tak maximální řešení
$$z(x) = \begin{cases} -1 \pm \left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3}\log(k\,|x|)}\right)^3, & x \in (0, \frac{1}{k}),\\ -1, & x \in [\frac{1}{k}, \infty),\end{cases}$$

respektive

$$z(x) = \begin{cases} -1 \pm \left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3}\log(k\,|x|)} \right)^3, & x \in (-\frac{1}{k}, 0), \\ -1, & x \in (-\infty, -\frac{1}{k}]. \end{cases}$$

Přechodem k původní rovnici tak máme řešení

$$y(x) = \begin{cases} -x \pm x \left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3}\log(k\,|x|)} \right)^3, & x \in (0, \frac{1}{k}), \\ -x, & x \in [\frac{1}{k}, \infty), \end{cases}$$

respektive

$$z(x) = \begin{cases} -x \pm x \left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3}\log(k\,|x|)} \right)^3, & x \in (-\frac{1}{k}, 0), \\ -x, & x \in (-\infty, -\frac{1}{k}]. \end{cases}$$

(Konstanta k je kladná.) Navíc pak ještě máme řešení

$$y(x) = -x, \quad x \in (-\infty, 0), \quad x \in (0, \infty).$$

♣

13.7.4. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = \frac{3(y^2+1)}{2x(x+3)}.$$

Řešení. Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými, kde $h(x) = \frac{3}{x(x+3)}$ a $g(y) = \frac{1}{2}(y^2+1)$.

(1) Intervaly pro funkci h jsou $(-\infty, -3)$, $(-3, 0)$ a $(0, \infty)$.
(2) Stacionární řešení žádná nejsou.
(3) Funkce g je nenulová na $\mathbb{R}$, tj. $J = \mathbb{R}$.
(4) Jelikož

$$\int \frac{2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = 2\operatorname{arctg} y$$

a

$$\int \frac{3}{x(x+3)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} \right) \mathrm{d}x = \log\left| \frac{x}{x+3} \right|,$$

existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$2\operatorname{arctg} y = \log\left| \frac{x}{x+3} \right| + c.$$

Tedy
$$y(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\log\left|\frac{x}{x+3}\right| + \frac{c}{2}\right) \tag{13.20}$$
na intervalech, které určíme v následujícím kroku.

(5) Nechť $I = (0,\infty)$. Funkce $2\operatorname{arctg} y$ zobrazuje $\mathbb{R}$ na $(-\pi,\pi)$ a $\left|\frac{x}{x+3}\right| = \frac{x}{x+3}$ na $(0,\infty)$. Tedy řešíme nerovnici
$$\log\frac{x}{x+3} + c \in (-\pi,\pi).$$
Nerovnost
$$\frac{x}{x+3} > e^{-\pi-c}$$
není nikdy splněna, pokud $c \le -\pi$, a pro $c > -\pi$ vede na nerovnost
$$x > \frac{3e^{-\pi-c}}{1-e^{-\pi-c}}.$$
Druhá nerovnost
$$\frac{x}{x+3} < e^{\pi-c}$$
je pro $c \le \pi$ splněna vždy, zatímco pro $c > \pi$ implikuje nerovnost
$$x < \frac{3e^{\pi-c}}{1-e^{-\pi-c}}.$$
Tedy máme řešení (13.20) na intervalech
$$x \in \left(\frac{3e^{-\pi-c}}{1-e^{-\pi-c}}, \frac{3e^{\pi-c}}{1-e^{\pi-c}}\right), \quad c > \pi,$$
$$x \in \left(\frac{3e^{-\pi-c}}{1-e^{-\pi-c}}, \infty\right), \quad c \in (-\pi,\pi].$$

Nechť nyní $I = (-3,0)$. Zde $|x|\,x+3 = \frac{-x}{x+3}$, a tedy řešíme nerovnosti
$$e^{-\pi-c} < \frac{-x}{x+3} < e^{\pi-c}.$$
Jejich řešením je interval
$$\left(\frac{-3e^{\pi-c}}{1+e^{\pi-c}}, \frac{-3e^{-\pi-c}}{1+e^{-\pi-c}}\right).$$

Pokud $I + (-\infty,-3)$, pak $|x|\,x+3 = \frac{-x}{-x-3}$. Tedy řešíme nerovnosti
$$e^{-\pi-c} < \frac{-x}{-x-3} < e^{\pi-c}.$$

Ty vedou na intervaly

$$x \in \left(-\infty, \frac{3e^{\pi-c}}{1-e^{\pi-c}}\right), \quad c \in [-\pi, \pi),$$

$$x \in \left(\frac{3e^{-\pi-c}}{1-e^{-\pi-c}}, \frac{3e^{\pi-c}}{1-e^{\pi-c}}\right), \quad c \in (-\infty, -\pi).$$

(6) Lepení v krajních bodech nalezených intervalů nepřichází do úvahy, neboť limity řešení v těchto bodech jsou nekonečné.

♣

13.7.5. Příklad. Nalzeněte všechna maximální řešení rovnice

$$yy' = \sin x + \cos x.$$

Řešení. Rovnice má tvar

$$y' = \frac{1}{y}(\sin x + \cos x).$$

(1) Máme $I = \mathbb{R}$.
(2) Dále $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$ a stacionární řešení neexistuje.
(3) Jelikož

$$\int y \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2}y^2$$

a

$$\int (\sin x + \cos x) \, \mathrm{d}x = -\cos x + \sin x,$$

existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\frac{1}{2}y^2 = -\cos x + \sin x + c.$$

(4) Funkce $\frac{1}{2}y^2$ zobrazuje J_1 i J_2 na $(0, \infty)$. Pro $c \in \mathbb{R}$ tak řešíme nerovnici

$$0 < -\cos x + \sin x + c = \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) + c,$$

tj.

$$\sin(x - \frac{\pi}{4}) > -\frac{c}{\sqrt{2}}.$$

Pokud $c \leq -\sqrt{2}$, nerovnice není splněna pro žádné x. Je-li $c > \sqrt{2}$, je splněna pro $x \in \mathbb{R}$. Pokud $c \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, pak $x \in (a, b)$, kde

$$a = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \arcsin(\frac{c}{\sqrt{2}}), \quad b = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi + \arcsin(\frac{c}{\sqrt{2}}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Na intervalech výše nalezeného tvaru má pak řešení tvar

$$y(x) = \pm\sqrt{2(\sin x - \cos x + c)} = \pm\sqrt{2(\sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) + c)}.$$

(5) Zjistíme nyní, zdali jsou řešení maximální. Pokud $c > \sqrt{2}$, je $\mathcal{D}(y) = \mathbb{R}$, a tedy se jedná o maximální řešení. Pokud $c \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, pak

$$\lim_{x\to a_+} y(x) = \lim_{x\to b_-} y(x) = 0.$$

Pokud má být rovnice splněna i v bodech a, b, musí být

$$0 = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}),$$

tj.

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Jelikož

$$a = -\frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow \arcsin(\frac{c}{\sqrt{2}}) = \pm\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow c = \pm\sqrt{2},$$
$$b = -\frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow \arcsin(\frac{c}{\sqrt{2}}) = \pm\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow c = \pm\sqrt{2},$$

pro $c \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ máme již řešení maximální.

Pokud $c = \sqrt{2}$, máme

$$y'(x) = \sqrt{2\sqrt{2}}\frac{\cos(x - \frac{\pi}{4})}{2\sqrt{\sin(x - \frac{\pi}{4}) + 1}},$$

takže

$$y'_{\pm}(-\frac{\pi}{4}) = \pm\frac{\sqrt{2\sqrt{2}}\sqrt{2}}{2}.$$

Proto funkce

$$y(x) = (-1)^k\sqrt{2\sqrt{2}(\sin(x - \frac{\pi}{4}) + 1)}, \quad x \in (-\frac{\pi}{4}+2k\pi, -\frac{\pi}{4}+2k\pi+2\pi], \quad k \in \mathbb{Z}$$

a

$$y(x) = (-1)^{k+1}\sqrt{2\sqrt{2}(\sin(x - \frac{\pi}{4}) + 1)}, \quad x \in (-\frac{\pi}{4}+2k\pi, -\frac{\pi}{4}+2k\pi+2\pi], \quad k \in \mathbb{Z}$$

jsou řešení definované na $\mathbb{R}$.

♣

13.7.6. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{e^{2x} - 5e^x + 6}.$$

Řešení. Homogenní rovnice $y'' - 3y' + 2y = 0$ má charakteristický polynom roven $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$, a tedy fundamentální systém rovnice má tvar $\{e^x, e^{2x}\}$. Maximální řešení budou existovat na těch intervalech, kde je definovaná pravá strana, tj. na intervalech $(-\infty, \log 2)$, $(\log 2, \log 3)$, $(\log 3, \infty)$. Hledejme metodou variace konstant partikulární řešení. Pišme tedy $y_p = c(x)e^x + d(x)e^{2x}$. Pak máme soustavu

$$\begin{aligned} c'e^x + d'e^{2x} &= 0 \\ c'e^x + d'2e^{2x} &= \frac{e^{3x}}{e^{2x} - 5e^x + 6}. \end{aligned}$$

Odečtením prvé rovnice od druhé dostáváme

$$d'e^{2x} = \frac{e^{3x}}{e^{2x} - 5e^x + 6},$$

tj.

$$d' = \frac{e^x}{e^{2x} - 5e^x + 6}.$$

Máme tak

$$d(x) = \int \frac{e^x}{e^{2x} - 5e^x + 6}\,\mathrm{d}x = \log\left|\frac{e^x - 3}{e^x - 2}\right|.$$

Jelikož

$$c'e^x = -d'e^{2x} = -\frac{e^{3x}}{e^{2x} - 5e^x + 6},$$

platí

$$c(x) = \int -\frac{e^{3x}}{e^{2x} - 5e^x + 6}\,\mathrm{d}x = -3\log|e^x - 3| + 2\log|e^x - 2|.$$

Tedy

$$y_p(x) = e^x\big(2\log|e^x - 2| - 3\log|e^x - 3|\big) + e^{2x}\big(\log|e^x - 3| - \log|e^x - 2|\big)$$

všechna řešení mají tvar

$$y(x) = e^x\big(2\log|e^x - 2| - 3\log|e^x - 3| + a\big) + e^{2x}\big(\log|e^x - 3| - \log|e^x - 2| + b\big),$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $x \in (-\infty, \log 2)$, $(\log 2, \log 3)$, $(\log 3, \infty)$. ♣

13.7.7. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 5xe^x.$$

Řešení. Charakteristický polynom $\lambda^4+8\lambda^2+16=(\lambda^2+4)^2$ má dvojnásobné kořeny $\pm 2i$. Tedy fundamentální systém dané rovnice má tvar

$$\{\sin 2x, \cos 2x, x\sin 2x, x\cos 2x\}.$$

Pravá strana je ve speciálním tvaru, a tedy budeme partikulární řešení y_p hledat ve tvaru

$$y_p = (ax+b)e^x,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$.

Pak dostáváme postupně

$$\begin{aligned} y_p' &= (ax+(a+b))e^x,\\ y_p'' &= (ax+(2a+b))e^x,\\ y_p''' &= (ax+(3a+b))e^x,\\ y_p'''' &= (ax+(4a+b))e^x, \end{aligned}$$

a tedy po dosazení do rovnice

$$(ax+(4a+b))e^x + 8(ax+(2a+b))e^x + 16(ax+b)e^x = 5xe^x.$$

Tedy máme

$$25ax + 20a + 25b = 5x,$$

což znamená, že $a=\frac{1}{5}$ a $b=-\frac{4}{25}$.

Všechna řešení pak mají tvar

$$y(x) = a\sin 2x + b\cos 2x + cx\sin 2x + dx\cos 2x + (\frac{1}{5}x - \frac{4}{25})e^x, \quad x\in\mathbb{R},$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. ♣

13.7.8. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y'' - 4y' + 8y = (5x-3)e^x\cos x.$$

Řešení. Charakteristický polynom homogenní rovnice má tvar $\lambda^2 - 4\lambda + 8$, který má kořeny $2\pm 2i$. Tedy fundamentální systém je $\{e^2x\cos 2x, e^{2x}\sin 2x\}$.

Jelikož je pravá strana ve speciálním tvaru, hledáme partikulární řešení y_p jako

$$y_p = (ax+b)e^x\cos x + (cx+d+e^x\sin x.$$

Po zderivování a dosazení do rovnice dostáváme

$$\begin{aligned}(5x-3)e^x\cos x = {}& e^x\cos x\,(2cx+2a+2c+2d-4(ax+cx+b+a+d)+8(ax+b))\\ &+e^x\sin x\,(-2ax-2a-2b+2c-4(cx-ax+c+d-b)+8(cx+d))\,.\end{aligned}$$

Porovnáním koeficentů u $e^x\cos x$ a $e^x\sin x$ máme

$$\begin{aligned} -2cx+4ax-2a+4b+2c-2d &= 5x-3\\ 2ax+4cx-2a+2b-2c+4d &= 0. \end{aligned}$$

Řešením je

$$a = 1, c = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{10}, d = \frac{2}{10}.$$

Tedy všechna řešení mají tvar

$$y(x) = ae^{2x}\cos 2x + be^{2x}\sin 2x + (x + \frac{1}{10})e^x\cos x + (-\frac{1}{2}x + \frac{2}{10})e^x\sin x,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}$. ♣

13.7.9. Příklad. Nalezněte maximální řešení rovnice

$$y' + \frac{y}{1-x^2} = x\sqrt{1-x}$$

splňující $y(0) = 0$.

Řešení. Maximální řešení dané rovnice budou definována na intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$. Tedy hledané řešení bude definováno na intervalu $(-1, 1)$. Budeme postupovat metodou integračního faktoru. Platí

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|.$$

Jelikož

$$e^{\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

na intervalu $(-1, 1)$ naše rovnice dostává tvar

$$\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}y\right)' = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}x\sqrt{1-x} = x\sqrt{1+x}.$$

Máme

$$\int x\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}.$$

Odtud

$$\begin{aligned} y(x) &= \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + c\right) \\ &= \sqrt{1-x}\left(\frac{2}{5}(x+1)^2 - \frac{2}{3}(x+1)\right) + c\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}. \end{aligned}$$

Vzhledem k počáteční podmínce $y(0) = 0$ platí $c = \frac{4}{15}$, a tedy výsledné řešení má tvar

$$y(x) = \sqrt{1-x}\left(\frac{2}{5}(x+1)^2 - \frac{2}{3}(x+1)\right) + \frac{4}{15}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

♣

13.7.10. Příklad. Nalezněte maximální řešení rovnice

$$y' + |x|\, y = x^5.$$

Řešení. Maximální řešení budou definována na celém $\mathbb{R}$. Postupujme metodou integračního faktoru. Máme

$$\int |x| \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & x \geq 0, \\ -\frac{1}{2}x^2, & x < 0. \end{cases}$$

Na intervalu $(0, \infty)$ tak dostáváme

$$\left(e^{\frac{1}{2}x^2} y\right)' = e^{\frac{1}{2}x^2} x^5.$$

Jelikož $\int e^{\frac{1}{2}x^2} x^5$ převedem substitucí $z = \frac{1}{2}x^2$ na $\int e^z 4z^2 \,\mathrm{d}z$, máme pomocí per partes

$$\int e^z 4z^2 \,\mathrm{d}z = 4z^2 e^z - 8ze^z + 8e^z.$$

Odtud máme

$$\int e^{\frac{1}{2}x^2} x^5 = e^{\frac{1}{2}x^2}(x^4 - 4x^2 + 8) + k_1.$$

Tedy

$$y(x) = x^4 - 4x^2 + 8 + k_1 e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Analogicky dostaneme na $(-\infty, 0)$ rovnost

$$\left(e^{-\frac{1}{2}x^2} y\right)' = e^{-\frac{1}{2}x^2} x^5.$$

a tedy

$$\int e^{-\frac{1}{2}x^2} x^5 \,\mathrm{d}x = e^{-\frac{1}{2}x^2}(-x^4 - 4x^2 - 8) + k_2.$$

Odtud plyne

$$y(x) = -x^4 - 4x^2 - 8 + k_2 e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

Nakonec řešení nalepíme v 0. Dostaneme tak

$$y(x) = \begin{cases} x^4 - 4x^2 + 8 + ke^{-\frac{1}{2}x^2}, & x \geq 0, \\ -x^4 - 4x^2 - 8 + (k + 16)e^{-\frac{1}{2}x^2}, & x < 0, \end{cases}$$

kde $k \in \mathbb{R}$. ♣

13.7.11. Příklad. Nalezněte omezené maximální řešení rovnice

$$(x^2 - 1)y' + (x^2 + 2x - 1)y = (x - 1).$$

Řešení. Pro $x \notin \{-1, 1\}$ máme rovnici

$$y' + \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} y = \frac{x - 1}{x^2 - 1}.$$

Jelikož

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} \, dx = x + \log\left|x^2 - 1\right|,$$

dostáváme integrační faktor $e^x \left|x^2 - 1\right|$. Zvolíme ho jako $e^x(x^2 - 1)$. Pak

$$\left(e^x(x^2 - 1)y\right)' = e^x(x^2 - 1)y' + e^x(x^2 + 2x - 1)y = e^x(x - 1).$$

Jelikož

$$\int e^x(x - 1) \, dx = e^x(x - 2),$$

dostáváme

$$y(x) = \frac{x - 2 + ce^{-x}}{x^2 - 1}, \quad x \in (-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty).$$

Nyní hledáme omezené maximální řešení. Máme

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = \begin{cases} 0, & c = 0, \\ \notin \mathbb{R}, & c \neq 0, \end{cases}$$

a

$$\lim_{x \to -1_-} y(x) \notin \mathbb{R}, \text{ pokud } c = 0.$$

Tedy na $(-\infty, -1)$ řešení nebude omezené pro žádné $c \in \mathbb{R}$.

Dále platí

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = 0$$

a

$$\lim_{x \to 1} y(x) \begin{cases} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} \frac{x-1+e^{-(x-1)}-1}{x-1} = 0, & c = e, \\ \notin \mathbb{R}, & c \neq e. \end{cases}$$

Tedy jediná možnost na omezené řešení je případ $c = e$. Pak

$$\begin{aligned} y'(1) &= \lim_{x \to 1} \frac{y(x) - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x + 1} \frac{x - 2 + e^{-x+1}}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \to 1} \frac{x - 2 + 1 + (1 - x) + \frac{1}{2}(1 - x)^2 + o((1 - x)^2)}{(x - 1)^2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Tedy $y'(1) \in \mathbb{R}$ a rovnice je splněna, lze proto nalepit řešení v bodě 1. Avšak

$$\lim_{x \to -1_+} y(x) = \infty,$$

a proto je slepené řešení neomezené. Závěrem tedy lze říci, že neexistují neomezená maximální řešení.

♣

13.7.12. Příklad. Vyřešte soustavu

$$\begin{aligned}
y_1' &= -5y_1 - y_2 + 3y_3 + 9y_4,\\
y_2' &= -20y_1 - 4y_2 + 12y_3 + 32y_4,\\
y_3' &= -5y_1 - y_2 + 3y_3 + 7y_4,\\
y_4' &= -5y_1 - y_2 + 3y_3 + 9y_4.
\end{aligned}$$

Řešení. Příslušná λ-matice $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ má tvar

$$\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda+5 & 1 & -3 & -9\\ 20 & \lambda+4 & -12 & -32\\ 5 & 1 & \lambda-3 & -7\\ 5 & 1 & -3 & \lambda-9 \end{pmatrix}.$$

Postupnými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \lambda+5 & 1 & -3 & -9\\ 20 & \lambda+4 & -12 & -32\\ 5 & 1 & \lambda-3 & -7\\ 5 & 1 & -3 & \lambda-9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & -\lambda\\ 0 & \lambda & 0 & -4\lambda+4\\ 0 & 0 & \lambda & -\lambda+2\\ 5 & 1 & -3 & \lambda-9 \end{pmatrix}\\
&\sim \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 3\lambda & -5\lambda-\lambda^2+9\lambda\\ 0 & \lambda & 0 & 4(1-\lambda)\\ 0 & 0 & \lambda & 2-\lambda\\ 5 & 1 & -3 & \lambda-9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3\lambda & -\lambda^2+4\\ 0 & \lambda & 0 & 4(1-\lambda)\\ 0 & 0 & \lambda & 2-\lambda\\ 5 & 1 & -3 & \lambda-9 \end{pmatrix}\\
&\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\lambda^2+3\lambda-2\\ 0 & \lambda & 0 & 4(1-\lambda)\\ 0 & 0 & \lambda & 2-\lambda\\ 5 & 1 & -3 & \lambda-9 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Jelikož $-\lambda^2 + 3\lambda - 2 = -(\lambda-2)(\lambda-1)$, dostáváme

$$y_4(t) = ae^t + be^{2t}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Ze třetí rovnice

$$y_3'(t) = y_4'(t) - 2y_4(t) = -ae^t,$$

tj.

$$y_3(t) = -ae^t + c.$$

Druhá rovnice pak implikuje

$$y_2'(t) = 4y_4'(t) - 4y_4(t) = 4be^{2t},$$

tj.

$$y_2(t) = 2be^{2t} + d.$$

Konečně pak čtvrtá rovnice dává

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{1}{5}\left(-y_2(t) + 3y_3(t) + 9y_4(t) - y_4'(t)\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(-d + 3c + 5be^{2t} + 5ae^t\right). \end{aligned}$$

Fundamentální systém naší soustavy má tak tvar

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 2e^{2t} & 0 & 1 \\ -e^t & 0 & 1 & 0 \\ e^t & e^{2t} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

♣

13.7.13. Příklad. Vyřešte soustavu

$$\begin{aligned} y' &= -8y - 6z + 12w + 2e^x, \\ z' &= -3y - 2z + 3w, \\ w' &= -9y - 6z + 13w + 2e^x. \end{aligned}$$

Řešení. Upravujeme příslušnou λ-matici s nenulovou pravou stranou:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda+8 & 6 & -12 & 2e^x \\ 3 & \lambda+2 & -3 & 0 \\ 9 & 6 & \lambda-13 & 2e^x \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3\lambda+24 & 18 & -36 & 6e^x \\ 3 & \lambda+2 & -3 & 0 \\ 0 & -3\lambda & \lambda-4 & 2e^x \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 24 & -\lambda^2-2\lambda+18 & 3\lambda-36 & 6e^x \\ 3 & \lambda+2 & -3 & 0 \\ 0 & -3\lambda & \lambda-4 & 2e^x \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -\lambda^2-10\lambda+2 & 3\lambda-12 & 6e^x \\ 3 & \lambda+2 & -3 & 0 \\ 0 & -3\lambda & \lambda-4 & 2e^x \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -\lambda^2-\lambda+2 & 0 & 0 \\ 3 & \lambda+2 & -3 & 0 \\ 0 & -3\lambda & \lambda-4 & 2e^x \end{array}\right).$$

Jelikož $\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda_1)$, platí

$$z(x) = ae^{-2x} + be^x.$$

Dále

$$w'(x) - 4w(x) = 2e^x + 3z' = (2 + 3b)e^x - 6ae^{-2x}.$$

Fundamentální systém pro rovnici $w' - 4w = 0$ je e^{4x}. Hledejme partikulární řešení w_1 a w_2 splňující

$$w_1' - 4w_1 = (2 + 3b)e^x, \quad w_2' - 4w_2 = -6ae^{-2x}.$$

V prvním případě hledáme w_1 jako pe^x a máme rovnici

$$pe^x - 4pe^x = (2+3b)e^x.$$

Tedy

$$p = -\frac{2}{3} - b$$

a $w_1(x) = (-\frac{2}{3} - b)e^x$. Podobně dostaneme $w_2(x) = ae^{-2x}$. Dohromady máme

$$w(x) = ce^{4x} - (\frac{2}{3} + b)e^x + ae^{-2x}.$$

Z druhé rovnice soustavy konečně dostáváme

$$y(x) = \frac{1}{3}\big(3w - z' - 2z\big) = ce^{4x} - (\frac{2}{3} + 2b)e^x + ae^{-2x}.$$

♣

13.7.14. Příklad. Vyřešte soustavu

$$\begin{aligned} y'' + z'' - 3y' - y + 2z &= x, \\ 3y'' + y' + z' + 2y - z &= 2. \end{aligned}$$

Řešení. Upravujeme příslušnou λ-matici a vyjde nám

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda^2 - 3\lambda - 1 & \lambda^2 + 2 & x \\ 3\lambda^2 + \lambda + 2 & \lambda - 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -3\lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda - 3 & 3 & x - 2 \\ 3\lambda^2 + \lambda + 2 & \lambda - 1 & 2 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} -\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda - 1 & 1 & \frac{x-2}{3} \\ 3\lambda^2 + \lambda + 2 & \lambda - 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda - 1 & 1 & \frac{x-2}{3} \\ \lambda^4 + 4\lambda^2 + 1 & 0 & 1 + \frac{x}{3} \end{array}\right).$$

Jelikož $\lambda^4 + 4\lambda^2 + 1 = 0$ právě thedy, když

$$\lambda = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}i.$$

Tedy fundamentální systém pro y je

$$\{\sin\sqrt{2+\sqrt{3}}x, \cos\sqrt{2+\sqrt{3}}x, \sin\sqrt{2-\sqrt{3}}x, \cos\sqrt{2-\sqrt{3}}x\}.$$

Hledáme partikulární řešení rovnice

$$y^{(4)} + 4y'' + y = 1 + \frac{x}{3}$$

ve tvaru $y_p = ax + b$. Po zderivování a dosazení vyjde $y_p = 1 + \frac{x}{3}$. Tedy

$$y(x) = 1 + \frac{x}{3} + a\sin\sqrt{2+\sqrt{3}}x + b\cos\sqrt{2+\sqrt{3}}x + c\sin\sqrt{2-\sqrt{3}}x + d\cos\sqrt{2-\sqrt{3}}x.$$

Jelikož
$$z(x) = \frac{x-2}{3} + y''' + y'' + 2y' + y,$$
dostáváme
$$\begin{aligned} z(x) = \frac{2}{3}x + 1 &+ \sin\sqrt{2+\sqrt{3}}x\left(a(-1-\sqrt{3}) + b\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{3}\right)\\ &+ \cos\sqrt{2+\sqrt{3}}x\left(b(-1-\sqrt{3}) - a\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{3}\right)\\ &+ \sin\sqrt{2-\sqrt{3}}x\left(c(-1+\sqrt{3}) - d\sqrt{2-\sqrt{3}}\sqrt{3}\right)\\ &+ \cos\sqrt{2-\sqrt{3}}x\left(d(-1+\sqrt{3}) + c\sqrt{2-\sqrt{3}}\sqrt{3}\right). \end{aligned}$$

♣

13.7.15. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice
$$x^2y' = y(x-y).$$

Řešení. Řešení hledáme na intervalech $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Pro $x \neq 0$ uvažujme
$$y' = \frac{y}{x}\left(1 - \frac{y}{x}\right).$$
Jelikož je pravá strana homogenní funkce, použijeme substituci $y(x) = z(x)x$. Pak dostáváme rovnici
$$x^3z' = -z^2x^2,$$
která po úpravě na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ přejde na
$$z' = -\frac{z^2}{x}.$$
To je již rovnice se separovanými proměnnými.

(1) Máme intervaly $I = (-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.
(2) Stacionární řešení je $z = 0$.
(3) Intervaly J jsou $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.
(4) Vezměme interval I a interval J, Zde platí
$$-\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{x},$$
neboli
$$\frac{1}{z} = \log k\,|x|\,, \quad k > 0.$$

(5) Fixujme $k > 0$. Pak dostáváme

$$z(x) = \frac{1}{\log k\,|x|}, \quad x \in (-\infty, -\frac{1}{k}), (-\frac{1}{k}, 0), (0, \frac{1}{k}), (\frac{1}{k}, \infty).$$

(6) Dosazením do substituce $y = zx$ máme řešení $y(x) = \frac{x}{\log k|x|}$, které lze napojit v 0. Maximální řešení pak budou

$$y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$y(x) = \frac{x}{\log c\,|x|}, \quad x \in (-\infty, -\frac{1}{c}), x \in (\frac{1}{c}, \infty), \quad c > 0,$$

$$y(x) = \begin{cases} \frac{x}{\log c|x|}, & x \in (-\frac{1}{c}, 0], c > 0, \\ \frac{x}{\log d|x|}, & x \in (0, \frac{1}{d}), d > 0, \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0], \\ \frac{x}{\log c|x|}, & x \in (0, \frac{1}{c}), c > 0, \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} \frac{x}{\log c|x|}, & x \in (-\frac{1}{c}, 0], c > 0, \\ 0, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

♣

13.7.16. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = \frac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}.$$

Řešení. Předpokládáme, že y řeší rovnici. Pak pro vhodné $A, B \in \mathbb{R}$ řeší funkce

$$Y(X) = y(X - A) + B$$

homogenní rovnici. Vskutku, zvolme $A = \frac{1}{3}$ a $B = -\frac{1}{3}$. Pak

$$\begin{aligned} Y'(X) = y'(X - A) &= \frac{2(X - A) - y(X - A) + 1}{X - A - 2y(X - A) + 1} \\ &= \frac{2X - 2A - Y(X) + B + 1}{X - A - 2Y(X) + 2B + 1} = \frac{2X - Y(X)}{X - 2Y(X)}, \end{aligned}$$

tj. Y řeší rovnici

$$Y' = \frac{2X - Y}{X - 2Y}.$$

Tuto rovnici řešíme další substitucí $Y = XZ$, čímž přejde na rovnici

$$Z' = 2\frac{Z^2 - Z + 1}{1 - 2Z} \cdot \frac{1}{X}.$$

Pro $X \in (-\infty, 0), (0, \infty)$ a $Z \in (-\infty, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \infty)$ platí

$$\log(Z^2 - Z + 1) = -2\log|X| + C.$$

Funkce na levé straně zobrazuje každý z intevalů $(-\infty, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \infty)$ na $(\log\frac{3}{4}, \infty)$, tj.

$$-2\log|X| + C > \log\frac{3}{4}.$$

Odtud dostáváme

$$X \in \left(0, \frac{2e^{\frac{C}{2}}}{\sqrt{3}}\right), \quad \text{respektive } X \in \left(-\frac{2e^{\frac{C}{2}}}{\sqrt{3}}, 0\right).$$

Ze vztahu mezi Z a X máme

$$Z^2 - Z + 1 - e^C X^{-2} = 0,$$

neboli

$$Z = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{4e^C X^{-2} - 3}\right).$$

Dosazením do substituce dostáváme

$$Y(X) = \frac{1}{2}\left(X \pm X\sqrt{4e^C X^{-2} - 3}\right) = \frac{1}{2}\left(X \pm \sqrt{4e^C - 3X^2}\right).$$

Vidíme, že toto řešení lze dodefinovat v 0 a bude zde vyhovovat naší rovnici.

Dále pak máme

$$y(x) = Y(x + A) - B = \frac{1}{2}\left(x + 1 \pm \sqrt{4e^C - 3(x + \frac{1}{3})^2}\right)$$

na intervalu

$$\left(-\frac{2e^{\frac{C}{2}}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}, \frac{2e^{\frac{C}{2}}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\right).$$

Tento interval je maximální, neboť v jeho krajních bodech platí $y = \frac{1}{2}(x+1)$ a pravá strana rovnice není definována.

Nyní si rozmyslíme, že jsme obdrželi všechna řešení. Uvažujme výraz

$$\left(y_0 - \frac{x_0 + 1}{2}\right)^2 + 3\left(x_0 + \frac{1}{3}\right)^2,$$

který je kladný všude mimo bod $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$. Existuje tak $C > 0$, že

$$4e^C = \left(y_0 - \frac{x_0 + 1}{2}\right)^2 + 3\left(x_0 + \frac{1}{3}\right)^2.$$

Pokud $y_0 \neq \frac{1}{2}(x_0 + 1)$, dostáváme z poslední rovnice řešení procházející bodem $[x_0, y_0]$. ♣

13.7.17. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y' - xy = -y^3 e^{-x^2}.$$

Řešení. Jedná se o Bernoulliovu rovnici , a tedy použijeme substituci $z = \frac{1}{y^2}$. Pak $z > 0$ a platí

$$z' = -2y^{-3}y'.$$

Po vydělení dané rovnice y^3 dostáváme

$$-\frac{1}{2}z' - xz = y'y^{-3} - xy^{-2} = -e^{-x^2},$$

♣

tj. rovnici

$$z' + xz = 2e^{-x^2}.$$

Metodfou integračního faktoru máme

$$\left(e^{x^2}z\right)' = 2,$$

neboli

$$z(x) = e^{-x^2}(2x + c).$$

Zajímají nás pouze kladná řešení z, takže dostáváme řešení

$$y = \pm\left(e^{-x^2}(2x + c)\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad x > -\frac{c}{2}, \quad c \in \mathbb{R},$$

a stacionární řešení

$$y = 0.$$

Z tvaru řešení je patrné, že lepení nepřichází do úvahy.

KAPITOLA 14

Křivkový a plošný integrál

Až doposud jsme v těchto skriptech nepředpokládali – kromě několika faktů z lineární algebry – žádné znalosti z vyšší matematiky, které by nebyly v těchto skriptech vyloženy. V této a ve zbývajících dvou kapitolách však budeme u čtenáře předpokládat základní znalosti o míře a abstraktním Lebesgueově integrálu. S touto částí matematiky se čtenář může seznámit například v učebnicích [**8**] a [**14**]. My se budeme ale odkazovat na text [**13**], který látku potřebnou pro další četbu obsahuje v kapitolách 1–5, 7, 8, 11, 12 a 18.

Lebesgueova míra je matematickým vyjádřením intuitivního pojmu objem (v dimenzi 3) nebo povrch (v dimenzi 2). Podobně chceme matematicky vyjádřit pojem délky nebo povrchu v dimenzi 3.

14.1. Hausdorffovy míry

14.1.1. Označení. Symbolem λ^n budeme značit n-dimenzionální Lebesgueovu míru na $\mathbb{R}^n$. Symbolem λ^{n*} budeme značit n-dimenzionální vnější Lebesgueovu míru na $\mathbb{R}^n$.

14.1.2. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$, $A \subset \mathbb{R}^n$. Pro $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, položme

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^k(A,\delta) = \inf\Big\{&\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_k(\operatorname{diam} A_j)^k;\\ &A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \mathbb{R}^n,\ \operatorname{diam} A_j \leq \delta\Big\},\end{aligned} \tag{14.1}$$

kde normalizační člen $\alpha_k \in (0,\infty)$ bude určen později. Položme dále $\mathcal{H}^k(A) = \sup\{\mathcal{H}^k(A,\delta);\ \delta \in (0,\infty)\}$.

Přímo z definice infima vyplývá, že pro $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ splňující $0 < \delta_1 < \delta_2$ platí $\mathcal{H}^k(A,\delta_1) \geq \mathcal{H}^k(A,\delta_2)$. Funkce $\delta \mapsto \mathcal{H}^k(A,\delta)$ je tedy nerostoucí, a proto existuje limita $\lim_{\delta\to 0_+}\mathcal{H}^k(A,\delta)$, která se rovná $\mathcal{H}^k(A)$.

V definici $\mathcal{H}^k(A,\delta)$ můžeme pokrývat jen uzavřenými množinami a dostaneme stejnou hodnotu $\mathcal{H}^k(A,\delta)$. Pokrytí $\{A_j\}$ množiny A totiž můžeme nahradit pokrytím $\{\overline{A_j}\}$, neboť uzávěr množiny nezvětšuje diametr (vizte Větu **??**).

14.1.3. Věta. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$. Potom je $\mathcal{H}^k$ vnější míra na $\mathbb{R}^n$.

Důkaz. Pro každé $\delta > 0$ platí $\mathcal{H}^k(\emptyset,\delta) = 0$, a proto také $\mathcal{H}^k(\emptyset) = 0$.

Pro každé $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ a $\delta > 0$ platí podle definice $\mathcal{H}^k(A,\delta) \leq \mathcal{H}^k(B,\delta)$. Odtud potom plyne $\mathcal{H}^k(A) \leq \mathcal{H}^k(B)$.

K dokončení důkazu zbývá ověřit σ-subaditivitu $\mathcal{H}^k$. Nechť $M_i, i \in \mathbb{N}$, jsou podmnožiny $\mathbb{R}^n$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$. Pro každé $i \in \mathbb{N}$ nalezneme množiny $A_{i,j} \subset \mathbb{R}^k$, $j \in \mathbb{N}$, takové, že

- $M_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j}$,
- $\operatorname{diam} A_{i,j} < \delta$,
- $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k (\operatorname{diam} A_{i,j})^k < \mathcal{H}^k(M_i,\delta) + \varepsilon 2^{-i}$.

Potom

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^k\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i, \delta\Big) &\leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k (\operatorname{diam} A_{i,j})^k \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^k(M_i,\delta) + \varepsilon 2^{-i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^k(M_i) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\mathcal{H}^k\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^k(M_i) + \varepsilon,$$

a tedy také

$$\mathcal{H}^k\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^k(M_i).$$

■

14.1.4. Definice. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$. Množinovou funkci

$$A \mapsto \mathcal{H}^k(A), \quad A \subset \mathbb{R}^n,$$

nazýváme k**-dimenzionální vnější Hausdorffova**[1] **míra** na $\mathbb{R}^n$.

[1] Felix Hausdorff (1868–1942)

14.1.5. Definice. Nechť (P, ρ) je metrický prostor. Řekneme, že vnější míra γ na P je **metrická**, jestliže pro každé dvě množiny $A, B \subset P$ splňující

$$\inf\{\rho(x, y);\ x \in A, y \in B\} > 0$$

platí $\gamma(A \cup B) = \gamma(A) + \gamma(B)$.

14.1.6. Věta. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$. Potom je vnější míra $\mathcal{H}^k$ na $\mathbb{R}^n$ metrická a translačně invariantní.

Důkaz. Nejprve ověříme, že vnější míra $\mathcal{H}^k$ je metrická. Mějme $A, B \subset \mathbb{R}^n$ splňující $\inf\{\|x - y\|;\ x \in A, y \in B\} = \delta_0 > 0$. Nechť $\delta \in (0, \delta_0)$. Pro $M \subset A \cup B$, $\operatorname{diam} M \leq \delta$, platí $M \subset A$ nebo $M \subset B$. Odtud plyne

$$\mathcal{H}^k(A \cup B, \delta) = \mathcal{H}^k(A, \delta) + \mathcal{H}^k(B, \delta).$$

Limitním přechodem $\delta \to 0+$ dostaneme

$$\mathcal{H}^k(A \cup B) = \mathcal{H}^k(A) + \mathcal{H}^k(B).$$

K dokončení důkazu ověříme translační invariantnost $\mathcal{H}^k$. Zvolme $A \subset \mathbb{R}^n$ a $y \in \mathbb{R}^n$. Vzhledem k tomu, že pro každé $M \subset \mathbb{R}^n$ a $x \in \mathbb{R}^n$ platí $\operatorname{diam}(M) = \operatorname{diam}(M + x)$, dostáváme také $\mathcal{H}^k(A + y, \delta) = \mathcal{H}^k(A, \delta)$ pro každé $\delta > 0$. Odtud plyne $\mathcal{H}^k(A + y) = \mathcal{H}^k(A)$. ■

14.1.7. Věta. Nechť γ je metrická vnější míra na metrickém prostoru (P, ρ). Potom je každá borelovská podmnožina P γ-měřitelná.

Důkaz. ■

Následující tvrzení vyplývá okamžitě z Vět 14.1.6 a 14.1.7.

14.1.8. Důsledek. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$, a $A \subset \mathbb{R}^n$ je borelovská množina. Potom je A $\mathcal{H}^k$-měřitelná.

14.1.9. Lemma. Nechť $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Potom $0 < \mathcal{H}^k\big([0, 1)^k \times \{0\}^{n-k}\big) < \infty$.

Důkaz. Označme $K = [0, 1)^k \times \{0\}^{n-k}$. Nejprve ukážeme, že platí $\mathcal{H}^k(K) < \infty$. Zvolme $\delta > 0$. Nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{\sqrt{k}}{m} < \delta$. Označme $I(j) = [\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m})$, $j = 1, \dots, m$. Položme

$$K(j_1, \dots, j_k) = \prod_{i=1}^{k} I(j_i) \times \{0\}^{n-k}, \qquad (j_1, \dots, j_k) \in \{1, \dots, m\}^k.$$

Potom platí $\operatorname{diam} K(j_1, \dots, j_k) = \frac{\sqrt{k}}{m} < \delta$ pro každé $(j_1, \dots, j_k) \in \{1, \dots, m\}^k$ a také

$$K = \bigcup\{K(j_1, \dots, j_k);\ (j_1, \dots, j_k) \in \{1, \dots, m\}^k\}.$$

Potom
$$\mathcal{H}^k(K,\delta) \le \alpha_k m^k (\frac{\sqrt{k}}{m})^k = \alpha_k(\sqrt{k})^k.$$
Odtud plyne $H^k(K) \le \alpha_k(\frac{\sqrt{k}}{m})^k < \infty$.

Nyní dokážeme $\mathcal{H}^k(K) > 0$. Nechť $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je zobrazení definované předpisem $\pi(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_k)$. Pro $A \subset \mathbb{R}^n$ definujme $\mu(A) = \lambda^{k*}(\pi(A))$. Pro každou množinu $A \subset \mathbb{R}^n$ platí $\mu(A) \le (\operatorname{diam} A)^k$. Nechť $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ je posloupnost množin taková, že $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = K$. Potom
$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k(\operatorname{diam} A_j)^k \le \alpha_k \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \le \alpha_k \mu(K) = \alpha_k > 0.$$
Platí tedy $\mathcal{H}^k(K) > 0$. ■

14.1.10. Označení. Koeficient α_k zvolíme tak, aby $\mathcal{H}^k\big([0,1)^k \times \{0\}^{n-k}\big) = 1$.

14.1.11. Poznámka. Lze dokázat, že
$$\alpha_k = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^k}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)2^k},$$
kde $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx$, $s > 0$.

14.1.12. Věta (regularita Hausdorffovy míry)**.** Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \le n$, a $A \subset \mathbb{R}^n$. Potom existuje borelovská množina $B \subset \mathbb{R}^n$ taková, že $A \subset B$ a $\mathcal{H}^k(A) = \mathcal{H}^k(B)$.

Důkaz. Pokud $\mathcal{H}^k(A) = \infty$, stačí položit $B = \mathbb{R}^n$. Pokud $\mathcal{H}^k(A) < \infty$, nalezneme F_σ množinu $F_n, n \in \mathbb{N}$, takovou, že $\mathcal{H}^k(F_n, \frac{1}{n}) < \mathcal{H}^k(F_n, \frac{1}{n}) + \frac{1}{n}$ a $A \subset F_n$. Položme $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Potom $A \subset B$ a
$$\mathcal{H}^k(A, \frac{1}{n}) \le \mathcal{H}^k(B, \frac{1}{n}) \le \mathcal{H}^k(F_n, \frac{1}{n}) < \mathcal{H}^k(A, \frac{1}{n}) + \frac{1}{n},$$
takže $\mathcal{H}^k(A) \le \mathcal{H}^k(B) \le \mathcal{H}^k(A)$, a tedy $\mathcal{H}^k(A) \le \mathcal{H}^k(B)$. Množina B je tedy $F_{\sigma\delta}$, a proto je borelovská. ■

14.1.13. Věta. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $A \subset \mathbb{R}^n$. Potom $\mathcal{H}^n(A) = \lambda^{n*}(A)$.

Důkaz. Platí $\mathcal{H}^n([0,1)^n) = \lambda^{n*}([0,1)^n)$. Z translační invariantnosti $\mathcal{H}^n$ a λ^{n*} obdržíme rovnost $\mathcal{H}^n(Q) = \lambda^{n*}(Q)$, kde Q je množina tvaru
$$\prod_{i=1}^{n}[\frac{l_i}{2^m}, \frac{l_i+1}{2^m}), l_i \in \mathbb{Z}, i = 1,\dots,n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Označme $\mathcal{Q}$ systém všech množin v tomto tvaru. Pro každé $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$, platí $Q_1 \subset Q_2$ nebo $Q_2 \subset Q_1$ nebo $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Potom lze G zapsat jako spočetné disjunktní sjednocení množin z $\mathcal{Q}$. Položme $\mathcal{S} = \{Q \in \mathcal{Q};\ Q \subset G\}$. Potom platí $G = \bigcup \mathcal{S}$. Pro každou $Q \in \mathcal{S}$ nalezneme $M(Q)\ in \mathcal{S}$, která $M(Q) \in \mathcal{S}$, která je maximální vzhledem k inkluzi a splňuje $Q \subset M(Q)$. Taková množina $M(Q)$ existuje díky vlastnostem $\mathcal{Q}$. Oynečme $\mathcal{S}^* = \{M(Q);\ Q \in \mathcal{S}\}$. Potom platí

- $\bigcup \mathcal{S}^* = G$,
- $\mathcal{S}^*$ je disjunktní.

První vlastnost je zřejmá. Ověřme druhou vlastnost. Pokud $M(Q_1) \cap M(Q_2) = \emptyset$, potom platí $M(Q_1) \subset M(Q_2)$ nebo $M(Q_2) \subset M(Q_1)$. Z maximality potom dostáváme $M(Q_1) = M(Q_2)$. Dostáváme $\mathcal{H}^n(G) = \lambda^n(G) = \lambda^{n*}(G)$ pro každou $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřenou. Označme $\mathcal{G}$ systém všech otevřených podmnožin $\mathbb{R}^n$. Systém $\mathcal{G}$ je uzavřený na konečné průniky. Potom podle Věty **??** platí $\mathcal{H}^n = \lambda^n$ na borelovských množinách.

Nechť nyní $A \subset \mathbb{R}^n$. Nalezneme borelovské množiny $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^n$ splňující $A \subset B_1$, $A \subset B_2$ a $\mathcal{H}^n(A) = \mathcal{H}^n(B_1)$, $\lambda^{n*}(A) = \lambda^n(B_2)$. Položme $B = B_1 \cap B_2$. Potom

$$\mathcal{H}^n(A) = \mathcal{H}^n(B) = \lambda^n(B) = \lambda^{n*}(A).$$

■

14.1.14. Věta (vlastnosti Hausdorffovy míry)**.**

(a) Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$, $Q \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je izometrie a $A \subset \mathbb{R}^k$. Potom $\mathcal{H}^k\big(Q(A)\big) = \lambda^{k*}(A)$.

(b) Nechť $k, n, m \in \mathbb{N}$, $k \leq n, k \leq m$, $A \subset \mathbb{R}^n$ a $f \colon A \to \mathbb{R}^m$ je β-lipschitzovské. Potom

$$\mathcal{H}^k\big(f(A)\big) \leq \beta^k\, \mathcal{H}^k(A).$$

(c) Nechť $k_1, k_2, n \in \mathbb{N}$, $k_1 < k_2 \leq n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ a platí $\mathcal{H}^{k_1}(A) < \infty$. Potom $\mathcal{H}^{k_2}(A) = 0$.

Důkaz. (a) Nechť $\delta > 0$. Vezměme množiny A_j, $j \in \mathbb{N}$ splňující $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ a $\operatorname{diam} A_j < \delta$ pro každé $j \in \mathbb{N}$. Potom platí $\operatorname{diam} Q(A_j) = \operatorname{diam} A_j < \delta$ pro každé $j \in \mathbb{N}$. Dále platí $Q(A) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q(A_j)$ a

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam} Q(A_j))^k = \sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam} A_j)^k.$$

Odtud plyne $\mathcal{H}^k(Q(A),\delta) \le \mathcal{H}^k(A,\delta)$. Poslední nerovnost platí pro libovolné $\delta > 0$, a tedy $\mathcal{H}^k(Q(A)) \le \mathcal{H}^k(A)$.

Nechť opět $\delta > 0$. Vezměme množiny C_j, $j \in \mathbb{N}$ splňující $Q(A) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$ a $\operatorname{diam} C_j < \delta$ pro každé $j \in \mathbb{N}$. Položme $A_j = Q^{-1}(Q(A) \cap C_j)$, $j \in \mathbb{N}$. Potom platí $\operatorname{diam} A_j \le \operatorname{diam} C_j < \delta$ a $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Odtud plyne

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\operatorname{diam} A_j)^k \le \sum_{j=1}^{\infty}(\operatorname{diam} C_j)^k.$$

Podobně jako v předchozí části důkazu dostáváme $\mathcal{H}^k(A,\delta) \le \mathcal{H}^k(Q(A),\delta)$ a $\mathcal{H}^k(A) \le \mathcal{H}^k(Q(A))$. Tím je důkaz proveden.

(b) Zvolme $\delta > 0$. Nechť dále množiny A_j, $j \in \mathbb{N}$, splňují $A \subset \bigcup_{j-1}^{\infty} A_j$ a $\operatorname{diam} A_j < \delta$ pro každé $j \in \mathbb{N}$. Položme $B_j = f(A \cap A_j)$, $j \in \mathbb{N}$. Potom platí $f(A) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ a $\operatorname{diam} B_j \le \beta \operatorname{diam}(A \cap A_j) \le \beta \operatorname{diam} A_j \le \beta\delta$. Potom platí

$$\mathcal{H}^k(f(E),\beta\delta) \le \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k (\operatorname{diam} B_j)^k \le \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k \beta^k (\operatorname{diam} A_j)^k.$$

Odtud plyne $\mathcal{H}^k(f(A),\beta\delta) \le \beta^k\, \mathcal{H}^k(A,\delta)$. Limitním přechodem $\delta \to 0+$, pak dostáváme $\mathcal{H}^k(f(A)) \le \beta^k\, \mathcal{H}^k(A)$.

(c) Zvolme $\delta > 0$. Nechť dále množiny A_j, $j \in \mathbb{N}$, splňují $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ a $\operatorname{diam} A_j < \delta$ pro každé $j \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$\mathcal{H}^{k_2}(A,\delta) \le \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{k_2} (\operatorname{diam} A_j)^{k_2} \le \frac{\alpha_{k_2}}{\alpha_{k_1}} \delta^{k_2-k_1} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{k_1} (\operatorname{diam} A_j)^{k_2}.$$

Odtud plyne

$$\mathcal{H}^{k_2}(A,\delta) \le \frac{\alpha_{k_2}}{\alpha_{k_1}} \delta^{k_2-k_1}\, \mathcal{H}^{k_1}(A,\delta).$$

Odtud plyne $\mathcal{H}^{k_2}(A) = 0$. ∎

14.1.15. Lemma. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \le n$, a $L\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je prosté lineární zobrazení. Potom pro každou λ^k-měřitelnou množinu $A \subset \mathbb{R}^k$ platí

$$\mathcal{H}^k(L(A)) = \sqrt{\det L^T L} \cdot \lambda^k(A).$$

Důkaz. Platí $\dim L(\mathbb{R}^k) = k$. Existuje tedy lineární izometrie $Q\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ taková, že $Q(\mathbb{R}^k) = L(\mathbb{R}^k)$. Potom platí

$$\mathcal{H}^k(L(A)) = \mathcal{H}^k(Q^{-1} \circ L(A)) = \lambda^k(Q^{-1} \circ L(A)) = \det(Q^{-1}L)\lambda^k(A).$$

Počítejme

$$\begin{aligned}\det(Q^{-1}L)^2 &= \det((Q^{-1}L)^T Q^{-1}L)) = \det((\langle Q^{-1}Le_i, Q^{-1}Le_j\rangle)_{i,j=1}^n)\\ &= \det((\langle Le_i, Le_j\rangle)_{i,j=1}^n = \det(L^T L).\end{aligned}$$

■

14.1.16. Označení. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$, a $L\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení. Budeme značit $\operatorname{vol} L = \sqrt{\det L^T L}$.

14.1.17. Symbol vol je zvolen podle anglického slova *volume*, které znamená objem. Matice $L^T L$ se nazývá Gramova matice. Podle Lemmatu 14.1.15 platí $\mathcal{H}^k(L([0,1]^k)) = \operatorname{vol} L$, takže číslo $\operatorname{vol} L$ vyjadřuje k-dimenzionální objem rovnoběžnostěnu $L([0,1]^k)$. ray Je-li $\varphi \in \mathcal{C}^1(G)$, pak je zobrazení $t \mapsto \operatorname{vol} \varphi'(t)$ spojité na množině G.

14.1.18. Definice. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$, $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina a $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$. Řekneme, že φ je **regulární** na G, jestliže je třídy $\mathcal{C}^1$ na G a $\varphi'(x)$ je prosté pro každé $x \in G$.

14.1.19. Lemma. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$, $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina, $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení, $x \in G$ a $\beta > 1$. Potom existuje okolí V bodu x takové, že

(a) zobrazení $y \mapsto \varphi\big(\varphi'(x)^{-1}(y)\big)$ je β-lipschitzovské na $\varphi'(x)(V)$,
(b) zobrazení $z \mapsto \varphi'(x)\big(\varphi^{-1}(z)\big)$ je β-lipschitzovské na $\varphi(V)$.

Důkaz. Před vlastním důkazem tvrzení (a) a (b) odvodíme několik pomocných nerovností. Lineární zobrazení $v \mapsto \varphi'(x)(v)$ je prosté, a proto existuje $\eta > 0$ takové, že

$$\forall v \in \mathbb{R}^k\colon \|\varphi'(x)(v)\| \geq \eta\|v\|. \tag{14.2}$$

Stačí položit $\eta = \inf\big\{\|\varphi'(x)(v)\|;\ v \in \mathbb{R}^k, \|v\| = 1\big\}$. Zobrazení $v \mapsto \varphi'(x)(v)$ je spojité a jednotková sféra $\{v \in \mathbb{R}^k;\ \|v\| = 1\}$ je kompaktní množina, proto se infima nabývá v jistém bodě v_0. Poněvadž $\varphi'(x)(v_0) \neq 0$, je η kladné.

Nalezneme $\varepsilon \in (0, \eta)$ takové, že

$$\frac{2\varepsilon}{\eta} + 1 < \beta. \tag{14.3}$$

Dále nalezneme okolí V bodu x takové, že

$$\forall y \in V\colon \|\varphi'(y) - \varphi'(x)\| \leq \varepsilon$$

Ukážeme, že potom pro každé $u, v \in V$ platí

$$\|\varphi(u) - \varphi(v) - \varphi'(x)(u - v)\| \leq \varepsilon\|u - v\|. \tag{14.4}$$

Pro pevné $v \in V$ uvažujme zobrazení

$$g\colon w \mapsto \varphi(w) - \varphi(v) - \varphi'(x)(w - v), \qquad w \in V.$$

Pro $w \in V$ máme $g'(w) = \varphi'(w) - \varphi'(x)$. Pak podle Věty **??** platí

$$\begin{aligned}\|\varphi(u) - \varphi(v) - \varphi'(x)(u - v)\| &= \|g(u) - g(v)\| \\ &\le \sup\{\|g'(w)\| \cdot \|u - v\|;\ w \in V\} \\ &\le \varepsilon\|u - v\|,\end{aligned}$$

což dokazuje (14.4).

Dále pro každé $u, v \in V$ platí

$$\|\varphi(u) - \varphi(v)\| \ge \frac{1}{2}\eta\|u - v\|. \tag{14.5}$$

Pro $u, v \in V$ počítejme

$$\begin{aligned}\|\varphi(u) - \varphi(v)\| &\ge -\|\varphi(u) - \varphi(v) - \varphi'(x)(u - v)\| + \|\varphi'(x)(u - v)\| \\ &\ge -\varepsilon\|u - v\| + \eta\|u - v\| \ge \frac{1}{2}\eta\|u - v\|,\end{aligned}$$

tím je vztah (14.5) dokázán.

(a) Zvolme $a, b \in \varphi'(x)(V)$. k nim nalezneme $u, v \in V$ takové, že $\varphi'(x)(u) = a$, $\varphi'(x)(v) = b$. Počítejme

$$\begin{aligned}\|\varphi\bigl(\varphi'(x)^{-1}(a)\bigr) - \varphi\bigl(\varphi'(x)^{-1}(b)\bigr)\| &= \|\varphi(u) - \varphi(v)\| \\ &\le \|\varphi(u) - \varphi(v) - \varphi'(x)(u - v)\| + \|\varphi'(x)(u - v)\| \\ &\overset{(14.4)}{\le} \varepsilon\|u - v\| + \|\varphi'(x)(u - v)\| \\ &\overset{(14.2)}{\le} \frac{\varepsilon}{\eta}\|a - b\| + \|a - b\| + \bigl(\tfrac{\varepsilon}{\eta} + 1\bigr)\|a - b\| \\ &\overset{(14.3)}{\le} \beta\|a - b\|.\end{aligned}$$

(b) Zvolme $p, q \in \varphi(V)$. K nim nalezneme $u, v \in V$ takové, že $\varphi(u) = p$, $\varphi(v) = q$. Počítejme

$$\begin{aligned}
\|\varphi'(x)\big(\varphi^{-1}(p)\big) - \varphi'(x)\big(\varphi^{-1}(q)\big)\| &= \|\varphi'(x)(u) - \varphi'(x)(v)\| \\
&= \|\varphi'(x)(u-v)\| \\
&\le \|\varphi(u) - \varphi(v) - \varphi'(x)(u-v)\| + \|\varphi(u) - \varphi(v)\| \\
&\overset{(14.4)}{\le} \varepsilon\|u-v\| + \|p-q\| \\
&\overset{(14.5)}{\le} \tfrac{2\varepsilon}{\eta}\|\varphi(u) - \varphi(v)\| + \|p-q\| = (\tfrac{2\varepsilon}{\eta} + 1)\|p-q\| \\
&\overset{(14.3)}{\le} \beta\|p-q\|.
\end{aligned}$$

Tím je i druhé tvrzení lemmatu dokázáno. ■

14.1.20. Lemma. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \le n$, $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina, $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení, $x \in G$ a $\alpha > 1$. Potom existuje okolí V bodu x takové, že pro každou λ^k-měřitelnou $E \subset V$ platí

$$\alpha^{-1} \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t) \,\mathrm{d}\lambda^k(t) \le \mathcal{H}^k(\varphi(E)) \le \alpha \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t) \,\mathrm{d}\lambda^k(t).$$

Důkaz. Nalezneme reálná čísla $\beta > 1$ a $\tau > 1$ taková, že

$$\beta^k \tau < \alpha. \tag{14.6}$$

Podle Lemmatu 14.1.19 nalezneme okolí V_1 bodu x takové, že je splněn závěr lemmatu. Díky spojitosti zobrazení $t \mapsto \operatorname{vol} \varphi'(t)$ na množině G nalezneme okolí V_2 bodu x takové, že platí

$$\forall t \in V_2\colon \tau^{-1} \operatorname{vol} \varphi'(x) \le \operatorname{vol} \varphi'(t) \le \tau \operatorname{vol} \varphi'(x). \tag{14.7}$$

Položme $V = V_1 \cap V_2$. Ukážeme, že V je hledaným okolím.

Nechť $E \subset V$ je λ^k-měřitelná. Potom díky (14.7) dostáváme

$$\tau^{-1} \operatorname{vol} \varphi'(x) \lambda^k(E) \le \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t) \,\mathrm{d}\lambda^k(t) \le \tau \operatorname{vol} \varphi'(x) \lambda^k(E). \tag{14.8}$$

Podle Lemmatu 14.1.15 máme $\operatorname{vol} \varphi'(x) \lambda^k(E) = \mathcal{H}^k\big(\varphi'(x)(E)\big)$, a tedy můžeme psát

$$\tau^{-1}\, \mathcal{H}^k\big(\varphi'(x)(E)\big) \le \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t) \,\mathrm{d}\lambda^k(t) \le \tau\, \mathcal{H}^k\big(\varphi'(x)(E)\big). \tag{14.9}$$

Dále díky Lemmatu 14.1.19(a) a volbě okolí V_1 dostáváme

$$\mathcal{H}^k\big(\varphi(E)\big) = \mathcal{H}^k\big(\varphi \circ \varphi'(x)^{-1} \circ \varphi'(x)(E)\big) \le \beta^k\, \mathcal{H}^k\big(\varphi'(x)(E)\big)$$
$$\overset{(14.1.20)}{\le} \beta^k \tau \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t)\, \mathrm{d}\lambda^k(t) \overset{(14.6)}{\le} \alpha \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t)\, \mathrm{d}\lambda^k(t).$$

Podobně díky Lemmatu 14.1.19(b) a volbě okolí V_1 dostáváme

$$\mathcal{H}^k\big((\varphi(E)\big) \ge \beta^{-k}\, \mathcal{H}^k\big(\varphi'(x) \circ \varphi^{-1} \circ \varphi(E)\big) = \beta^{-k}\, \mathcal{H}^k\big(\varphi'(x)(E)\big)$$
$$\overset{(14.1.20)}{\ge} \beta^{-k} \tau^{-1} \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t)\, \mathrm{d}\lambda^k(t) \overset{(14.6)}{\ge} \alpha^{-1} \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t)\, \mathrm{d}\lambda^k(t).$$

■

14.1.21. Věta (area formule)**.** Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \le n$, $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina, $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení a $f : \varphi(G) \to \mathbb{R}$ je borelovská. Potom platí

$$\int_{\varphi(G)} f(x)\, \mathrm{d}\, \mathcal{H}^k(x) = \int_G f(\varphi(t)) \operatorname{vol} \varphi'(t)\, \mathrm{d}\lambda^k(t),$$

pokud integrál na pravé straně konverguje.

Důkaz. Zobrazení φ je prosté, a proto existuje inverzní zobrazení φ^{-1}. Nejprve učiníme pozorování ohledně měřitelnosti tohoto zobrazení. Každá otevřená množina $H \subset G$ je spočetným sjednocením kompaktních množin, proto také $\varphi(H)$ je spočetným sjednocením kompaktních množin. Dostáváme tedy, že zobrazení φ^{-1} je borelovské. Množina $\varphi(G)$ je tedy borelovská.

Důkaz věty si rozdělíme do několika kroků. Postupně budeme dokazovat area formuli pro stále obecnější zobrazení f.

1. Předpokládejme, že $f = \chi_L$, kde $L \subset \varphi(G)$ je borelovská. Ukážeme, že platí

$$\mathcal{H}^k(L) = \int_{\varphi^{-1}(L)} \operatorname{vol} \varphi'(t)\, \mathrm{d}\lambda^k(t). \tag{14.10}$$

Zvolme $\alpha > 1$. Podle Lemmatu 14.1.20 nalezneme pro každé $y \in G$ okolí $V_y \subset G$ bodu y takové, že pro každou λ^k-měřitelnou množinu $E \subset V_y$ platí

$$\alpha^{-1} \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t)\, \mathrm{d}\lambda^k(t) \le \mathcal{H}^k(\varphi(E)) \le \alpha \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t)\, \mathrm{d}\lambda^k(t). \tag{14.11}$$

Platí $\bigcup\{V_y;\ y \in G\} = G$. Podle Věty **??** existuje posloupnost $\{y_j\}$ prvků množiny G taková, že platí $\bigcup_{j=1}^{\infty} V_{y_j} = G$. Položme

$$A_j = \varphi^{-1}(L) \cap \big(V_{y_j} \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} V_{y_i}\big).$$

Potom platí

(a) množina A_j je borelovská pro každé $j \in \mathbb{N}$,
(b) $A_j \subset V_{y_j}$ pro každé $j \in \mathbb{N}$,
(c) $\forall j, j' \in \mathbb{N}, j \neq j' \colon A_j \cap A_{j'} = \emptyset$,
(d) $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \varphi^{-1}(L)$,
(e) pro každé $j \in N$ máme

$$\alpha^{-1} \int_{A_j} \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\lambda^k(t) \leq \mathcal{H}^k(\varphi(A_j)) \leq \alpha \int_{A_j} \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\lambda^k(t),$$

(f) pro každé $j \in N$ je množina $\varphi(A_j)$ borelovská.

Z (**??**), (a), (c)-(e) plyne

$$\alpha^{-1} \int_{\varphi^{-1}(L)} \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\lambda^k(t) \leq \mathcal{H}^k(\varphi(\varphi^{-1}(L))) \leq \alpha \int_{\varphi^{-1}(L)} \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\lambda^k(t).$$

Vzhledem k tomu, že $\alpha > 1$ bylo voleno libovolně, dostáváme (14.10).

2. Předpokládejme, že f je nezáporná jednoduchá borelovská funkce, tj. $f = \sum_{j=1}^{p} c_j \chi_{L_j}$, kde $L_j \subset \varphi(G)$ je borelovská a $c_j \leq 0$, $j = 1, \dots, p$. Potom podle (14.10) platí

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(G)} f(x) \, \mathrm{d}\,\mathcal{H}^k(x) &= \sum_{j=1}^{p} c_j \, \mathcal{H}^k(L_j) = \sum_{j=1}^{p} c_j \int_{\varphi^{-1}(L_j)} \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\lambda^k(t) \\ &= \sum_{j=1}^{p} c_j \int_G \chi_{L_j} \circ \varphi(t) \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\lambda^k(t) \\ &= \int_G f \circ \varphi(t) \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\lambda^k(t). \end{aligned} \tag{14.12}$$

3. Nechť f je nezáporná borelovská funkce. Nalezneme nezáporné jednoduché borelovské funkce $f_j \colon \varphi(G) \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, takové, že $f_j \to f$ a $f_j \leq f_{j+1}$. Potom podle Leviho věty dostáváme

$$\lim_{j \to \infty} \int_{\varphi(G)} f_j(x) \, \mathrm{d}\,\mathcal{H}^k(t) = \int_{\varphi(G)} f(x) \, \mathrm{d}\,\mathcal{H}^k(x),$$
$$\lim_{j \to \infty} \int_G f_j(\varphi(t)) \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\lambda^k(t) = \int_G f(\varphi'(t)) \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\lambda^k(t).$$

Poněvadž podle bodu 3 platí pro každé $j \in \mathbb{N}$ rovnost

$$\int_{\varphi(G)} f_j(x) \, \mathrm{d}\,\mathcal{H}^k(x) = \int_G f_j(\varphi(t)) \operatorname{vol} \varphi'(t) \, \mathrm{d}\lambda^k(t)$$

dostáváme rovnost
$$\int_{\varphi(G)} f(x)\,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^k(x) = \int_G f(\varphi(t))\operatorname{vol}\varphi'(t)\,\mathrm{d}\lambda^k(t).$$

5. Nechť f je borelovská funkce a integrál $\int_G f(\varphi(t))\operatorname{vol}\varphi'(t)\,\mathrm{d}\lambda^k(t)$ konverguje. Položme $f^+ = \max\{f, 0\}$ a $f^- = \max\{-f, 0\}$. Potom podle bodu 4 platí
$$\int_{\varphi(G)} f^+(x)\,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^k(x) = \int_G f^+(\varphi(t))\operatorname{vol}\varphi'(t)\,\mathrm{d}\lambda^k(t). \tag{14.13}$$
Poslední integrál je roven $\int_G (f(\varphi(t))\operatorname{vol}\varphi'(t))^+\,\mathrm{d}\lambda^k(t)$, a je tedy podle předpokladu konečný. Podobně dostáváme
$$\int_{\varphi(G)} f^-(x)\,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^k(x) = \int_G (f(\varphi(t))\operatorname{vol}\varphi'(t))^-\,\mathrm{d}\lambda^k(t), \tag{14.14}$$
přičemž poslední integrál je opět konečný. Odtud tedy plyne
$$\int_{\varphi(G)} f(x)\,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^k(x) = \int_G f(\varphi(t))\operatorname{vol}\varphi'(t)\,\mathrm{d}\lambda^k(t).$$

■

14.1.22. Poznámka. Area formule platí i v případě, kdy je zobrazení φ lokálně lipschitzovské (vizte [**13**]).

14.1.23. Věta. Nechť $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ je λ^k-integrovatelná funkce. Potom platí
$$\int_{\mathbb{R}^k} f(x)\,\mathrm{d}\lambda^k(x) = \int_0^\infty \Big(\int_{\{x\in\mathbb{R}^k;\ \|x\|=r\}} f(x)\,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^{k-1}(x)\Big)\,\mathrm{d}\lambda^1(r).$$

Důkaz. ■

14.2. Křivky, plochy a jejich orientace

14.2.1. Definice. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \le n$. Řekneme, že neprázdná množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je k-**dimenzionální plocha** (krátce k-**plocha**), jestliže pro každé $x \in M$ existuje otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^k$ a regulární homeomorfismus $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ takový, že $x \in \varphi(G) \subset M$ a $\varphi(G)$ je otevřená v M.

14.2.2. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \le n$. Jestliže $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená a neprázdná a $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je regulární homeomorfismus, potom je $\varphi(G)$ k-plocha, neboť $\varphi(G)$ je otevřená ve $\varphi(G)$.

14.2.3. Příklad. Ukažte, že množina $\{0\} \times (0, 1)^2 \subset \mathbb{R}^3$ je 2-plocha.

Řešení. ♣

14.2.4. Věta. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k < n$, $H \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $F: H \to \mathbb{R}^{n-k}$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^1$. Označme $M = \{x \in H;\ F(x) = 0\}$. Jestliže $M \neq \emptyset$ a pro každé $x \in M$ platí rank $F'(x) = n - k$, potom je M k-plocha.

Důkaz. ■

14.2.5. Příklad. Ukažte, že sféra $S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| = 1\}$ je $(n-1)$-plocha.

Řešení. Definujme $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ předpisem $F(x) = \|x\|^2 - 1$. Zobrazení F je třídy $\mathcal{C}^1$ a platí $S_{n-1} = \{x \in H;\ F(x) = 0\}$. Dále platí

$$F'(x) = (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n) = 2x,$$

a tedy rank $F'(x) = 1$ pro každé $x \in S_{n-1}$. Podle Věty 14.2.4 je tedy množina S_{n-1} $(n-1)$-plochou. ♣

14.2.6. Definice. Nechť $k, n \in \mathbb{R}^n, k \leq n$, M je k-plocha a $x \in M$. Pak vektor $v \in \mathbb{R}^n$ nazveme **tečným vektorem** k ploše M v bodě x, jestliže existuje otevřený interval I, a spojité zobrazení $c: I \to M$ a $t_0 \in I$ takové, že $c(t_0) = x$ a $c'(t_0) = v$.

Množinu všech tečných vektorů k ploše M v bodě x nazýváme **tečným prostorem** k ploše M v bodě x a značíme $T_x(M)$.

14.2.7. Věta. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$, $M \subset \mathbb{R}^n$ je k-plocha a $x \in M$.

(a) Potom $T_x(M)$ je k-dimenzionální vektorový prostor.

(b) Nechť $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina, $a \in G$ a $\varphi: G \to \mathbb{R}^n$ je regulární homeomorfismus takový, že $x = \varphi(a) \in \varphi(G) \subset M$ a $\varphi(G)$ je otevřená v M. Potom $\varphi'(a)(\mathbb{R}^k) = T_x(M)$.

Důkaz. Tvrzení (a) plyne z bodu (b), neboť $\varphi'(a)(\mathbb{R}^n)$ je lineárním podprostorem. K důkazu bodu (b) dokážeme dvě inkluze. Začneme s inkluzí $\varphi'(a)(\mathbb{R}^k) \subset T_x(M)$. Zvolme $v \in \varphi'(a)(\mathbb{R}^k)$. Nalezneme $u \in \mathbb{R}^k$ takové, že $\varphi'(a)(u) = v$. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že $B(a, \delta) \subset G$. Nalezneme $r > 0$ takové, že $r\|u\| < \delta$, a definujeme $c: (-r, r) \to \mathbb{R}^n$ předpisem $c(t) = \varphi(a + tu)$. Potom je c spojité zobrazení a pro jeho derivaci v bodě 0 platí $c'(0) = \varphi'(a)(u) = v$. Platí tedy $v \in \varphi'(a)(\mathbb{R}^n)$.

Nyní dokážeme inkluzi $T_x(M) \subset \varphi'(a)(\mathbb{R}^k)$. Nechť $v \in T_x(M)$. Existuje tedy otevřený interval I, bod $t_0 \in I$, spojité zobrazení $c: I \to M$ splňující

$c'(t_0) = v$. Reprezentující matice $\varphi'(a)$ má hodnost k. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k}(a) \end{pmatrix} \in M(k \times k)$$

je regulární. Definujme zobrazení $\pi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ předpisem $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k)$. Potom

$$(\pi \circ \varphi)'(a) = \pi'(\varphi(a)) \circ \varphi'(a) = \pi \circ \varphi'(a) = \mathbb{A}.$$

Rovnost $\pi'(\varphi(a)) = \pi$ plyne z Poznámky 11.1.26(b). Zobrazení $\pi \circ \varphi$ je třídy $\mathcal{C}^1$ a $(\pi \circ \varphi)'(a)$ je regulární. Podle věty o lokálním difeomorfismu (Věta 11.5.2) existuje okolí $U \subset G$ bodu a takové, že $\pi \circ \varphi|_U$ je difeomorfismus. Zobrazení $\pi|_{\varphi(U)}$ je prosté, neboť zobrazení $\pi \circ \varphi|_U$ je prosté. Označme $W = c^{-1}(\varphi(U))$. Množina $\varphi(U)$ je otevřená v M, a tedy W je otevřená. Navíc $t_0 \in W$. Definujme zobrazení $\xi \colon W \to G$ předpisem $\xi(t) = \varphi^{-1} \circ c(t)$. Platí

$$\xi(t) = \varphi^{-1} \circ (\pi|_{\varphi(U)})^{-1} \circ \pi|_{\varphi(U)} \circ c(t) = (\pi \circ \varphi|_U)^{-1} \circ (\pi \circ c)(t), \qquad t \in W.$$

Potom platí, že zobrazení $(\pi \circ \varphi|_U)^{-1}$ je třídy $\mathcal{C}^1$ na množině $\pi(\varphi(U))$ a zobrazení $\pi \circ c$ je třídy $\mathcal{C}^1$ na množině W. Zobrazení ξ je tedy třídy $\mathcal{C}^1$ na W a platí $c|_W = \varphi \circ \xi$. Odtud plyne $c'(t_0) = \varphi'(a)(\xi'(t_0))$. Máme tedy $c'(t_0) \in \varphi'(a)(\mathbb{R}^k)$. ■

14.2.8. Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je $(n-1)$-plocha a $x \in M$. Řekneme, že $v \in \mathbb{R}^n$ je **normálový vektor** k ploše M v bodě x, jestliže $v \in T_x(M)^{\perp}$.

14.2.9. Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}, n > 1, u^1, \dots, u^{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Pak definujeme **vektorový součin** vektorů $u^1, \dots, u^{n-1}$ předpisem

$$u^1 \times \dots \times u^{n-1} = \big(\det([e^i, u^1, \dots, u^{n-1}]\big)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n.$$

14.2.10. Věta (vlastnosti vektorového součinu)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}, n > 1$, a $u^1, \dots, u^{n-1} \in \mathbb{R}^n$.

(a) Pro každé $v \in \mathbb{R}^n$ platí
$$\langle v, u^1 \times \dots \times u^{n-1} \rangle = \det[v, u^1, \dots, u^{n-1}].$$
(b) Vektory $u^1, \dots, u^{n-1}$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když $u^1 \times \dots \times u^{n-1} = \boldsymbol{o}$.
(c) Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $\langle u^i, u^1 \times \dots \times u^{n-1} \rangle = 0$.
(d) Platí $\|u^1 \times \dots \times u^{n-1}\| = \operatorname{vol}[u^1, \dots, u^{n-1}]$.

Důkaz. (a) Zvolme $v \in \mathbb{R}^n$ a počítejme

$$\begin{aligned}\langle v, u^1 \times \cdots \times u^{n-1}\rangle &= \sum_{i=1}^{n} v_i \det(e^i, u^1, \dots, u^{n-1})\\ &= \sum_{i=1}^{n} \det(v_i e^i, u^1, \dots, u^{n-1})\\ &= \sum_{i=1}^{n} \det(v, u^1, \dots, u^{n-1}).\end{aligned}$$

Tím je požadovaný vztah dokázán.

(b) $\Rightarrow$ Tato implikace zřejmě platí.

$\Leftarrow$ Pokud $u^1 \times \cdots \times u^{n-1} = \boldsymbol{o}$, potom je matice $[v, u^1, \dots, u^{n-1}]$ podle (a) singulární pro každé $v \in \mathbb{R}^n$.

(c) Tvrzení snadno plyne z (a).

(d) Označme $w = u^1 \times \cdots \times u^{n-1}$. Pokud jsou $u^1, \dots, u^{n-1}$ lineárně závislé, potom $w = \boldsymbol{o}$ a $\operatorname{vol}(u^1, \dots, u^{n-1}) = 0$. Předpokládejme tedy $w \neq \boldsymbol{o}$. Potom platí

$$\begin{aligned}\|w\|^4 &= \langle w, u^1 \times \cdots \times u^{n-1}\rangle = (\det[w, u^1, \dots, u^{n-1}])^2\\ &= \det[w, u^1, \dots, u^{n-1}]^T [w, u^1, \dots, u^{n-1}]\\ &= \det\begin{pmatrix} \langle w, w\rangle & 0 & \dots & 0\\ 0 & \langle u^1, u^1\rangle & \dots & \langle u^1, u^{n-1}\rangle\\ 0 & \langle u^2, u^1\rangle & \dots & \langle u^2, u^{n-1}\rangle\\ 0 & \vdots & \dots & \vdots\\ 0 & \langle u^{n-1}, u^1\rangle & \dots & \langle u^{n-1}, u^{n-1}\rangle \end{pmatrix}\\ &= \|w\|^2 \det(\langle u^i, u^j\rangle).\end{aligned}$$

Odtud pak plyne $\|w\| = \operatorname{vol}(u^1, \dots, u^{n-1})$. ■

14.2.11. Poznámka. Je-li $M \subset \mathbb{R}^n$ $(n-1)$-plocha, $x \in M$ a φ je příslušný regulární homeomorfismus $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ splňující $\varphi(a) = x \in \varphi(G) \subset M$. Potom

$$\nu(x) = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\varphi^{-1}(x)) \times \cdots \times \frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}}(\varphi^{-1}(x))}{\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\varphi^{-1}(x)) \times \cdots \times \frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}}(\varphi^{-1}(x))\|},$$

kde $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(t) = (\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}(t), \dots, \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_i}(t))$, je jednotkový normálový vektor k ploše M. Zobrazení ν je spojité na jisté otevřené množině v M obsahující x.

14.2.12. Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}, n > 1$, a $M \subset \mathbb{R}^n$ je $(n-1)$-plocha. **Orientací** M rozumíme spojité zobrazení $\nu\colon M \to \mathbb{R}^n$ takové, že $\nu(x) \in T_x(M)^\perp$ a $\|\nu(x)\| = 1$ pro každé $x \in M$.

14.2.13. Poznámka. Zobrazení ν je spojité pole jednotkových normálových vektorů.

14.2.14. Příklad. Pro plochu $M = \{0\} \times (0,1)^2$ určete $\nu(x), x \in M$.

Řešení. $\nu(x) = (1,0,0), x \in M$ ♣

14.2.15. Příklad. Pro plochu $\mathbb{S}_2$ určete $\nu(x), x \in M$.

Řešení. $\nu(x) = x, x \in M$ ♣

14.2.16 (Möbiova páska a počet orientací).

14.2.17. Lemma. Nechť $n \in \mathbb{N}, n > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $z \in H(\Omega)$.

(R) Nechť existuje okolí U bodu z a **rozhraničující** funkce $h\colon U \to \mathbb{R}$ taková, že $h \in \mathcal{C}^1(U)$, $\nabla h(z) \neq \boldsymbol{o}$ a $U \cap \Omega = \{x \in U;\ h(x) < 0\}$.

Potom existuje okolí $V \subset U$ bodu z takové, že $V \cap H(\Omega)$ je $(n-1)$-plocha. Vektor $\nu_\Omega(z) = \frac{1}{\|\nabla h(z)\|}\nabla h(z)$ je jednotkový normálový vektor v bodě z k $V \cap H(\Omega)$ a nezávisí na volbě rozhraničující funkce h.

Důkaz. Platí $h(z) \geq 0$, neboť $z \notin \Omega$. Bod z je prvkem hranice Ω, a proto můžeme nalézt posloupnost $\{z^j\}$ prvků množiny Ω, která konverguje k z. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí $h(z^j) < 0$, a proto dostáváme $h(z) \leq 0$. Máme tedy $h(z) = 0$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $\frac{\partial h}{\partial x_n}(z) \neq 0$. Použijeme větu Větu 11.3.1 o implicitní funkci. Funkce h splňuje

- $h(z) = 0$,
- $h \in \mathcal{C}^1(U)$,
- $\frac{\partial h}{\partial x_n}(z) \neq 0$.

Nalezneme okolí W bodu $[z_1, \dots, z_{n-1}]$, okolí H bodu z_n a funkci $\varphi\colon W \to H$ takovou, že

- $\varphi(z_1, \dots, z_{n-1}) = z_n$,
- $\varphi \in \mathcal{C}^1(W)$,
- $\{x \in \mathbb{R}^n;\ h(x) = 0\} \cap (W \times H) = \operatorname{graf}\varphi$,
- $W \times H \subset U$.

Nyní ověříme rovnost $\operatorname{graf}\varphi = H(\Omega) \cap (W \times H)$. Inkluze $\operatorname{graf}\varphi \subset W \times H$ zřejmě platí. Vezměme $w = (y, \varphi(y)) \in \operatorname{graf}\varphi$. Potom $w \notin \Omega$, neboť $h(w) = 0$. Podle 11.1.23 nalezneme $\delta > 0$ takové, že $h(w + t\nabla h(w)) < h(w)$ pro každé $t \in (-\delta, 0)$. Odtud plyne $h(w + t\nabla h(w)) < 0$ pro každé $t \in (-\delta, 0)$, a tedy $h(w + t\nabla h(w)) \in \Omega$ pro každé $t \in (-\delta, 0)$. Odtud plyne $w \in H(\Omega)$.

Nyní vezměme $w \in H(\Omega) \cap (W \times H)$. Potom platí $h(w) \leq 0$, neboť $w \notin \Omega$. Dále nalezneme posloupnost $\{w^j\}$ prvků množiny Ω konvergující k w a splňující $h(w^j) < 0$ pro každé $j \in \mathbb{N}$. Odtud plyne $h(w) \leq 0$. Dohromady tedy máme $h(w) = 0$, takže $w \in \operatorname{graf} \varphi$. Tím je rovnost dokázána.

Položme $\psi(y) = (y, \varphi(y))$, $y \in W$. Platí

- $\psi \in \mathcal{C}^1(W)$,
- $\psi(W) = \operatorname{graf} \varphi = H(\Omega) \cap (W \times H)$,
- $\operatorname{rank} \psi'(y) = n - 1$, $y \in W$,
- $\psi^{-1}(w) = \pi(w)$.

Podle 14.2.2 dostáváme, že $\psi(W)$ je $(n-1)$-plocha. Zvolme okolí V bodu z tak, aby $V \subset W \times H$. Potom $\psi(W) \cap V = H(\Omega) \cap V$ je $(n-1)$-plocha.

Ortogonalita $\nu_\Omega(z)$. Pro každé $y \in W$ platí $h(y, \varphi(y)) = 0$. Derivujeme-li funkci $y \mapsto h(y, \varphi(y))$ podle i-té proměnné, dostaneme

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(y, \varphi(y)) + \frac{\partial h}{\partial x_n}(y, \varphi(y)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(y) = \langle \nabla h(y, \varphi(y)), \psi'(y, \varphi(y))(\boldsymbol{e}^i) \rangle = 0.$$

Pro bod z tedy platí $\nabla h(z) \in T_z(\psi(W) \cap V)^\perp$.

Jednoznačnost $\nu_\Omega(z) = 0$. Předpokládejme, že $\tilde{h}$ je rozhraničující funkce. Podle předchozího je $\nabla \tilde{h}(z) \in T_z(\psi(W) \cap V)^\perp$. Dimenze prostoru $T_z(\psi(W) \cap V)$ je $n-1$, a proto ortogonální doplněk $T_z(\psi(W) \cap V)^\perp$ má dimenzi rovnou 1. Proto existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že $\nabla h(z) = \alpha \nabla \tilde{h}(z)$. Díky 14.2.2 dostáváme $\alpha > 0$, a proto platí

$$\frac{\nabla h(z)}{\|\nabla h(z)\|} = \frac{\nabla \tilde{h}(z)}{\|\nabla \tilde{h}(z)\|}.$$

■

14.2.18. Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}, n > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $z \in H(\Omega)$. Řekneme, že bod z je **regulárním bodem** hranice Ω, pokud je splněna podmínka (R) z Lemmatu 14.2.17 pro Ω a z. Vektor $\nu_\Omega(z)$ nazýváme **vnějším jednotkovým normálovým vektorem** k Ω v bodě z. Množinu všech regulárních bodů hranice Ω značíme $H_*(\Omega)$.

14.2.19. Věta. Nechť $n \in \mathbb{N}, n > 1$, a $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná omezená otevřená množina. Pokud $H_*(\Omega) \neq \emptyset$, pak $H_*(\Omega)$ je $(n-1)$-plocha orientovaná normálovým polem ν_Ω.

14.2.20. Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je 1-plocha. **Orientací** M rozumíme spojité zobrazení $\tau\colon M \to \mathbb{R}^n$ takové, že $\tau(x) \in T_x(M)$ a $\|\tau(x)\| = 1$ pro každé $x \in M$.

14.2.21. Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

(a) Řekneme, že zobrazení $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je **(parametrická) křivka**, jestliže je spojité.

(b) Řekneme, že parametrická křivka $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je **skoro regulární**, pokud existuje dělení $\{t_i\}_{i=0}^p$ intervalu $[a,b]$ takové, že
- c je třídy $\mathcal{C}^1$ na $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, p$,
- $\forall t \in [a,b] \setminus \{t_0, \dots, t_p\}\colon c'(t) \neq 0$.

(c) Řekneme, že křivka $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je **jednoduchá** a **uzavřená**, jestliže $c|_{[a,b)}$ je prosté a $c(a) = c(b)$.

14.2.22. Věta (Jordan)**.** Nechť $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ je jednoduchá uzavřená křivka. Pak existují disjunktní otevřené souvislé množiny $\operatorname{Int} c$ a $\operatorname{Ext} c$ takové, že $\operatorname{Int} c$ je omezená a $\operatorname{Ext} c$ je neomezená a platí $\mathbb{R}^2 = \operatorname{Int} c \cup \operatorname{Ext} c \cup c([a,b])$. Navíc platí $H(\operatorname{Int} c) = H(\operatorname{Ext} c) = c([a,b])$.

14.2.23. Věta. Nechť $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ je skoro regulární jednoduchá uzavřená křivka. Potom všechny body množiny $H(\operatorname{Int} c)$ až na konečně mnoho jsou regulárními body $H(\operatorname{Int} c)$.

Důkaz. Nechť $x \in H(\operatorname{Int} c)$ je takový bod, že existuje $\delta > 0$ a $t_0 \in (a,b)$ takové, že $c(t_0) = x$, c' je spojité na $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ a $c'(t_0) \neq 0$. Takový je každý bod z $H(\operatorname{Int} c)$ vyjma konečně mnoha bodů, neboť podle Jordanovy věty máme $H(\operatorname{Int} c) = c([a,b])$ a c je skoro regulární. Pro naše x můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $c_1'(t_0) \neq 0$. Potom existuje okolí $U \subset (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ bodu t_0 takové, že c_1 je difeomorfismus na U. Označme $V = c_1(U)$. Položme $\psi(z) = c_2 \circ c_1^{-1}(z), z \in V$. Potom pro každé $z \in V$ existuje $t \in U$ takové, že $c_1(t) = z$. pak máme $[z, \psi(z)] = [c_1(t), c_2 \circ c_1^{-1}(c_1(t))] = [c_1(t), c_2(t)] = c(t)$. Máme tedy $\operatorname{graf} \psi \subset c(U)$. Pro $t \in U$ pak máme

$$c(t) = [\underbrace{c_1(t)}_{\in V}, c_2(t)] = [c_1(t), c_2 \circ c_1^{-1}(\underbrace{c_1(t)}_{\in V})] = [c_1(t), \psi(c_1(t))] \in \operatorname{graf} \psi.$$

Máme tedy $\operatorname{graf} \psi = c(U)$. Množina $F = [a,b] \setminus U$ je kompaktní a neprázdná, a tedy $c(F)$ je kompaktní. Platí $x \notin c(F)$ díky jednoduchosti a uzavřenosti c. Množina $c(F)$ má tedy od bodu $x = c(t_0)$ kladnou vzdálenost. Existují tudíž okolí W bodu $c_1(t_0)$ a okolí W bodu $c_2(t_0)$ taková, že $(W \times F) \cap c(F) = \emptyset$. Platí tedy

$$(W \times H) \cap c([a,b]) = (W \times H) \cap c(U) = (W \times H) \cap \operatorname{graf} \psi.$$

Množina $P = \{[x,y] \in W \times H;\ y < \psi(x)\}$ je otevřená a souvislá. Souvislost vyplývá z křivkové souvislosti. Podobně množina $N = \{[x,y] \in W \times H;\ y > \psi(x)\}$ je otevřená a souvislá. Poněvadž

$$H(\operatorname{Int} c) = H(\operatorname{Ext} c) = c([a,b]), \tag{14.15}$$

máme $P \cap (\operatorname{Int} c \cup \operatorname{Ext} c) \neq \emptyset$ a $N \cap (\operatorname{Int} c \cup \operatorname{Ext} c) \neq \emptyset$. Souvislost P implikuje, že platí buď $P \subset \operatorname{Int} c$ nebo $P \subset \operatorname{Ext} c$. Podobně platí buď $N \subset \operatorname{Int} c$ nebo $N \subset \operatorname{Ext} c$. Z (14.15) pak plyne, že platí buď

$$P \subset \operatorname{Int} c \text{ a } N \subset \operatorname{Ext} c, \tag{14.16}$$

nebo

$$P \subset \operatorname{Ext} c \text{ a } N \subset \operatorname{Int} c. \tag{14.17}$$

Předpokládejme, že nastane případ (14.16). Potom položme

$$h(u, v) = -\psi(u) + v, \quad [u, v] \in W \times H.$$

Platí $h \in \mathcal{C}^1(W \times H)$, $\nabla h(u, v) = (-\psi'(u), 1) \neq 0$ a

$$\{[u, v] \in W \times H;\ h(u, v) < 0\} = P = \operatorname{Int} c \cap (W \times H).$$

Pokud nastane případ (14.17), pak postupujeme obdobně. ■

14.3. Gaussova, Greenova a Stokesova věta

14.3.1. Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je $(n-1)$-plocha orientovaná normálovým polem ν a $f : M \to \mathbb{R}^n$. **Tok vektorového pole** f orientovanou plochou (M, ν) definujeme jako

$$\int_M \langle f(y), \nu(y) \rangle \, \mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y),$$

pokud integrál konverguje.

14.3.2. Definice. Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f : U \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^1$. Pro $x \in U$ definujeme **divergenci vektorového pole** f v bodě $x \in U$ předpisem

$$\operatorname{div} f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x).$$

14.3.3. Věta (Gaussova věta o divergenci)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}, n > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená otevřená neprázdná množina, $\mathcal{H}^{n-1}\big(H(\Omega)\big) < \infty$, $\mathcal{H}^{n-1}\big(H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)\big) = 0$ a f je vektorové pole z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, které je třídy $\mathcal{C}^1$ na otevřené množině obsahující $\overline{\Omega}$. Pak platí

$$\int_{H(\Omega)} \big\langle f(y), \nu_\Omega(y) \big\rangle \, \mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_\Omega \operatorname{div} f(x) \, \mathrm{d}\lambda^n(x).$$

14.3.4. Lemma (rozklad jednotky)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Pak existují funkce $\omega_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, takové, že pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí

(a) ω_j je nezáporná,
(b) ω_j je třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$,
(c) $\operatorname{diam} \operatorname{spt} \omega_j < \varepsilon$,

a pro každé $x \in \mathbb{R}^n$

(d) $\sum_{j=1}^{\infty} \omega_j(x) = 1$,
(e) existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu x takové, že množina $\{j \in \mathbb{N};\ \operatorname{spt} \omega_j \cap U \neq \emptyset\}$ je konečná.

Důkaz. Nechť $\eta\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ je $\mathcal{C}^1$-funkce taková, že

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \neq 0, \\ 1 & \text{pro } x \geq 1. \end{cases} \tag{14.18}$$

Například lze volit

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\bigl(\pi(x - \frac{1}{2})\bigr) & \text{pro } x \in (0,1), \\ 1 & \text{pro } x \geq 1. \end{cases} \tag{14.19}$$

Nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{2\sqrt{n}}{m} < \varepsilon$. Definujme

$$\xi_k(t) = \eta\bigl(m(t - \tfrac{k}{m}\bigr) - \eta\bigl(m(t - \tfrac{k+1}{m})\bigr), \qquad t \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Platí $\operatorname{spt} \xi_k \subset [\frac{k}{m}, \frac{k+2}{m}]$ a $\xi_k(\mathbb{R}) \subset [0,1]$. Nechť $t \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $t \in [\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m})$. Potom platí

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \xi_k(t) = \xi_{k-1}(t) + \xi_k(t) = \eta\bigl(m(t - \tfrac{k-1}{m})\bigr) - \eta\bigl(m(t - \tfrac{k+1}{m})\bigr) = 1 - 0 = 1.$$

Pro $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ definujme

$$\psi_\alpha(x_1, \dots, x_n) = \xi_{\alpha_1}(x_1) \cdots \xi_{\alpha_n}(x_n), \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Vlastnosti (a) a (b) ze znění dokazovaného lemmatu jsou zřejmě splněny. ■

14.3.5. Lemma. Nechť V je reálný unitární prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$, $v \in V$ a $v \neq 0$. Potom existují vektory $u^1, \dots, u^n \in V$, které tvoří ortonormální bázi V a pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $\langle v, u^i \rangle > 0$.

Důkaz. Máme-li unitární prostor V takový, že $\dim V = 1$, a $v \in V$, $v \neq 0$, pak stačí položit $u^1 = \frac{1}{\|v\|} v$. Mějme nyní V dimenze $n > 1$ a předpokládejme, že tvrzení platí pro každý unitární prostor dimenze k, kde $1 \leq k < n$. Pro $v \in V$, $v \neq 0$, nalezneme $u^1 \in V$ takové, že $\|u^1\| = 1$, $\langle v, u^1 \rangle > 0$ a $u^1 \notin \operatorname{lin}\{v\}$. Označme $W = \operatorname{lin}\{u^1\}^\perp$ a jako w označme ortogonální projekci v do W, tj.,

$w = v - \langle v, u^1 \rangle u^1$. Platí $w \neq 0$, neboť $u^1 \notin \operatorname{lin}\{v\}$. Nyní aplikujeme indukční předpoklad na W a w. Obdržíme ortonormální bázi $u^2, \dots, u^n$ prostoru W. Potom množina $\{u^1, u^2, \dots, u^n\}$ je ortonormální bází V a $\langle v, u^i \rangle = \langle w, u^i \rangle > 0$, $i = 2, \dots, n$. ∎

14.3.6. Označení. Nechť $n \in \mathbb{N}, n > 1, i \in \{1, \dots, n\}$. Potom definujeme zobrazení $\psi^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ předpisem

$$\psi^i(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

14.3.7. Lemma. Nechť $n \in \mathbb{N}, n > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $z \in H(\Omega)$ je regulární bod hranice Ω, $i \in \{1, \dots, n\}$ a $\nu_\Omega(z)_i > 0$. Potom existuje otevřená množina $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$ obsahující bod $z^* = \psi^i(z)$, otevřená množina $H \subset \mathbb{R}$ obsahující bod z_i a funkce $\varphi \colon W \to H$ taková, že $\varphi \in \mathcal{C}^1(W)$ a

$$\{x \in \mathbb{R}^n;\ \psi^i(x) \in W, x_i \in H, x_i < \varphi \circ \psi_i(x)\} = \{x \in \Omega;\ \psi_i(x) \in W, x_i \in H\}.$$

Důkaz. Důkaz provedeme pro $i = n$. Ostatní případy lze provést obdobně. Nechť $h \colon U \to \mathbb{R}$ je rozhraničující funkce pro z a Ω, tj.

- $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $z \in U$,
- $h \in \mathcal{C}^1(W)$, $\frac{\partial h}{\partial x_n}(z) > 0$,
- $\{x \in U;\ h(x) < 0\} = U \cap \Omega$.

Použijeme větu o implicitních funkcích (Věta 11.3.3) na rovnici

$$h(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = 0.$$

Stejně jako v důkazu Lemmatu 14.2.17 nalezneme okolí $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$ bodu z^*, okolí $H \subset \mathbb{R}$ bodu z_n a funkci $\varphi \colon W \to H$ takovou, že

- $\varphi(z^*) = z_n$,
- $\varphi \in \mathcal{C}^1(W)$,
- $\{x \in \mathbb{R}^n;\ h(x) = 0\} \cap (W \times H) = \operatorname{graf} \varphi$,
- $W \times H \subset U$,
- $\frac{\partial h}{\partial x_n}(x) > 0$ pro každé $x \in W \times H$.

Dokážeme rovnost

$$\{[u, y] \in W \times H;\ y < \varphi(u)\} = \Omega \times (W \times H).$$

Pokud $[u, y] \in W \times H$, potom

$$h(u, \varphi(u)) - h(u, y) = \frac{\partial h}{\partial x_n}(u, \xi) \cdot (\varphi(u) - y)$$

pro $\xi \in [\varphi(u), y]$. Poněvadž $h(u, \varphi(u)) = 0$ a $\frac{\partial h}{\partial x_n}(u, \xi) > 0$, máme $h(u, y) < 0$, právě když $y < \varphi(u)$. Platí tedy

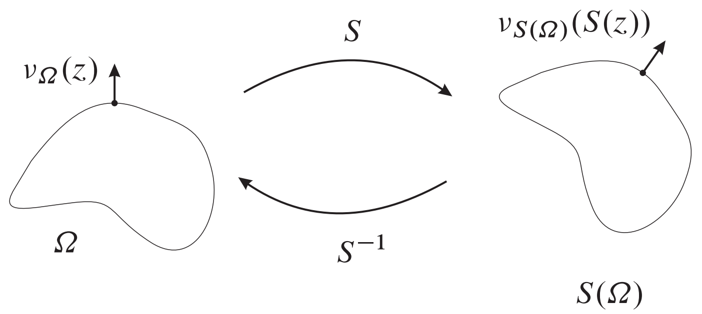
$$\begin{aligned}\{[u, y] \in W \times H;\ y < \varphi(u)\} &= \{[u, y] \in W \times H;\ h(y, u) < 0\} \\ &= (U \cap \Omega) \cap (W \times H) = \Omega \cap (W \times H).\end{aligned}$$

■

14.3.8. Lemma. Nechť Ω a f jsou jako ve Větě 14.3.3 a $S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární izometrie. Potom pro každý regulární bod z hranice Ω je bod $S(z)$ regulárním bodem hranice $S(\Omega)$ a platí $\nu_{S(\Omega)}(S(z)) = S(\nu_\Omega(z))$. Dále platí

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x)\,\mathrm{d}\lambda^n(x) = \int_{S(\Omega)} \operatorname{div}(S \circ f \circ S^{-1})(\tilde{x})\,\mathrm{d}\lambda^n(\tilde{x}),$$

$$\begin{aligned}&\int_{H(\Omega)} \langle f(y), \nu_\Omega(y)\rangle\,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y) \\ &\qquad = \int_{H(S(\Omega))} \langle S \circ f \circ S^{-1}(\tilde{y}), \nu_{S(\Omega)}(\tilde{y})\rangle\,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(\tilde{y}).\end{aligned}$$



Důkaz. Nechť $h\colon U \to \mathbb{R}$ je rozhraničující funkce pro z a Ω. Potom $h \circ S^{-1}$ je rozhraničující funkce pro bod $S(z)$ a množinu $S(\Omega)$. Platí

$$\tilde{h}'(S(z)) = (h \circ S^{-1})'(S(z)) = h'(z) \circ S^{-1}.$$

Pak pro každé $u \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\begin{aligned}\langle S(\nabla h(z)), u\rangle &= \langle \nabla h(z), S^{-1}(u)\rangle = h'(z)(S^{-1}(u)) \\ &= h'(z) \circ S^{-1}(u) = \tilde{h}'(S(z))(u) = \langle \nabla \tilde{h}(S(z)), u\rangle.\end{aligned}$$

Odtud plyne rovnost $S(\nabla h(z)) = \nabla\tilde{h}(S(z))$, takže také $S(\nu_\Omega(z)) = \nu_{S(\Omega)}(S(z))$. Počítejme

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(S \circ f \circ S^{-1})(\tilde{x}) &= \operatorname{tr}(S \circ f'(S^{-1}(\tilde{x})) \circ S^{-1}) = \operatorname{tr}(S \circ S^{-1} \circ f'(S^{-1}(\tilde{x}))\\ &= \operatorname{tr}(f'(S^{-1}(\tilde{x}))) = \operatorname{div} f(S^{-1}(\tilde{x})).\end{aligned}$$

Poněvadž S je izometrie, platí $\operatorname{vol} S = 1$. Odtud a z předchozí rovnosti plyne

$$\begin{aligned}&\int_{S(\Omega)} \operatorname{div}(S \circ f \circ S^{-1})(\tilde{x}) \, d\lambda^n(\tilde{x}) = \int_{S(\Omega)} \operatorname{div} f(S^{-1}(\tilde{x})) \, d\lambda^n(\tilde{x})\\ &= \int_\Omega \operatorname{div} f(x) \operatorname{vol} S \, d\lambda^n(x) = \int_\Omega \operatorname{div} f(x) \, d\lambda^n(x).\end{aligned}$$

Dále platí $H(S(\Omega)) = S(H(\Omega))$ a

$$\begin{aligned}&\int_{H(S(\Omega))} \langle S \circ f \circ S^{-1}(\tilde{y}), \nu_{S(\Omega)}(\tilde{y})\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(\tilde{y})\\ &= \int_{S(H(\Omega))} \langle S \circ f \circ S^{-1}(\tilde{y}), S(\nu_\Omega(S^{-1}(\tilde{y})))\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(\tilde{y}) \qquad (\text{rovnost } H(S(\Omega)) = S(H(\Omega)))\\ &= \int_{S(\Omega)} \langle S \circ f(y), S(\nu_\Omega(y))\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(y) \qquad (\text{Lemma } \textbf{??})\\ &= \int_{S(\Omega)} \langle f(y), \nu_\Omega(y)\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(y).\end{aligned}$$

■

14.3.9. Lemma. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená omezená množina a $z \in H_*(\Omega) \cup \Omega$. Potom existuje otevřená množina $U \subset \mathbb{R}^n$ obsahující z taková, že pro každé vektorové pole f z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, které je třídy $\mathcal{C}^1$ na otevřené množině obsahující $\overline{\Omega}$ a $\operatorname{spt} f \subset U$, platí

$$\int_{H(\Omega)} \big\langle f(y), \nu_\Omega(y)\big\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_\Omega \operatorname{div} f(x) \, d\lambda^n(x).$$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $z \in H_*(\Omega)$. Příslušnou rozhraničující funkci označme jako h. Díky Lemmatům **??** a **??** můžeme předpokládat, že $\nu_\Omega(z)_i > 0$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$. Za S stačí zvolit zobrazení splňující $S^{-1}(e^i) = u^i$, kde vektory $u^1, \dots, u^n$ tvoří ortonormální bázi a $\langle \nu_\Omega(z), u^i\rangle > 0, i = 1, \dots, n$.

Podle Lemmatu **??** nalezneme pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ množiny W_i, H_i a zobrazení $\varphi_i \colon W_i \to H_i$. označme

$$G_i = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \psi_i(x) \in W_i, x_i \in H_i\}, \qquad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Položme $U = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$. Nechť f je příslušné vektorové pole splňující spt $f \subset U$. Ukážeme, že platí

$$\int_{H(\Omega)} f_i(y)\nu_\Omega(z)_i \,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_\Omega \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}\lambda^n(x), \qquad i \in \{1,\dots,n\}.$$

Odtud již plyne dokazovaný vztah. Zvolme opět $i = n$. Ostatní případy lze dokázat obdobně. Víme, že platí

(1) $\{x \in W_n \times H_n;\ x_n < \varphi_n(\psi_n(x))\} = \Omega \cap (W_n \times H_n)$,
(2) $\operatorname{graf}\varphi_n = H(\Omega) \cap (W_n \times H_n)$,
(3) $h(w, \varphi_n(w)) = 0$ pro každé $w \in W_n$,
(4) $\frac{\partial h}{\partial x_n}(w, \varphi_n(w)) > 0$ pro každé $w \in W_n$.

Výpočet pravé strany. Počítejme

$$\int_\Omega \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x)\,\mathrm{d}\lambda^n(x) = \int_{(W_n\times\mathbb{R})\cap\Omega} \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\,\mathrm{d}\lambda^n(x) = \int_{W_n}\int_{-\infty}^{\varphi_n(w)} \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(w,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\lambda^{n-1}(w)$$
$$= \int_{W_n} f_n(w,\varphi_n(w))\,\mathrm{d}\lambda^{n-1}(w).$$

Výpočet levé strany. Definujme $\psi\colon W_n \to \mathbb{R}^n$ předpisem $\psi(w) = [w, \varphi_n(w)]$. Počítejme

$$\begin{aligned}\int_{H(\Omega)} f_n(y)\nu_\Omega(y)_n \,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y) &= \int_{H(\Omega)\cap(W_n\times H_n)} f_n(y)\nu_\Omega(y)_n \,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y)\\ &= \int_{W_n} f_n(\psi(w))\nu_\Omega(\psi(w))_n \cdot \operatorname{vol}\psi'(n)\,\mathrm{d}\lambda^{n-1}(w).\end{aligned} \tag{14.20}$$

Pro $w \in W_n$ platí

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_i}(w) = -\frac{\frac{\partial h}{\partial x_i}(\psi(w))}{\frac{\partial h}{\partial x_n}(\psi(w)}.$$

Potom máme

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}(w)\times\cdots\times\frac{\partial\psi}{\partial x_{n-1}}(w)=\begin{vmatrix} e^1 & 1 & 0 & \dots & 0\\ e^2 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ e^n & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}(w) & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2}(w) & \dots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}(w)\end{vmatrix}$$

$$=\Big[(-1)^{1+1}\cdot(-1)^{n-2}\cdot\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}(w),(-1)^{1+2}\cdot(-1)^{n-3}\cdot\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2}(w),\dots$$

$$\dots,(-1)^{1+n-1}\cdot(-1)^{n-(n-1)}\cdot\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2}(w),(-1)^{1+n}\cdot 1\Big]$$

$$=(-1)^{n-1}\left[\frac{\frac{\partial h}{\partial x_1}(\psi(w))}{\frac{\partial h}{\partial x_n}(\psi(w))},\dots,\frac{\frac{\partial h}{\partial x_{n-1}}(\psi(w))}{\frac{\partial h}{\partial x_n}(\psi(w))},1\right]$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{1}{\frac{\partial h}{\partial x_n}(\psi(w))}\nabla h(\psi(w)).$$

Nyní budeme pokračovat ve výpočtu (14.20).

$$\int_{H(\Omega)} f_n(y)\nu_\Omega(y)_n\,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y)$$

$$=\int_{W_n} f_n(\psi(w))\cdot\frac{\frac{\partial h}{\partial x_n}(\psi(w))}{\|\nabla h(\psi(w))\|}\cdot\frac{1}{\frac{\partial h}{\partial x_n}(\psi(w))}\cdot\|\nabla h(\psi(w))\|\,\mathrm{d}\lambda^{n-1}(w)$$

$$=\int_{W_n} f_n(\psi(w))\,\mathrm{d}\lambda^{n-1}(w).$$

Tím je rovnost dokázána, neboť poslední člen v předchozím výpočtu je roven poslednímu členu z výpočtu levé strany.

Předpokládejme nyní, že $z\in\Omega$. Potom položme $U=\prod_{j=1}^n I_j$, kde I_j je omezený otevřený interval, $j=1,\dots,n$, a platí $\overline{U}\subset\Omega$.

Pravá strana.

$$\int_\Omega\frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x)\,\mathrm{d}\lambda^n(x)=\int_{I_1\times\cdots\times I_n}\frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x)\,\mathrm{d}\lambda^n(x)=\int_{I_1}\cdots\int_{I_n}0\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n=0$$

Levá strana.

$$\int_{H(\Omega)} f_j(y)\nu_\Omega(y)_j\,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y)=0$$

Tím je důkaz proveden. ■

14.3.10. Lemma. Nechť Ω a f jsou jako ve Větě 14.3.3 a $\operatorname{spt} f \cap (H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)) = \emptyset$. Potom

$$\int_{H(\Omega)} \big\langle f(y), \nu_\Omega(y)\big\rangle \,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_\Omega \operatorname{div} f(x)\,\mathrm{d}\lambda^n(x).$$

Důkaz. Označme $K = \overline{\Omega} \cap \operatorname{spt} f$. Pro každý bod $z \in K$ nalezneme podle Lemmatu 14.3.9 otevřenou množinu $U(z)$ takovou, že

- $z \in U(z)$,
- pro každé vektorové pole $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ třídy $\mathcal{C}^1$ splňující $\operatorname{spt} g \subset U(z)$ platí

$$\int_{H(\Omega)} \langle g(y), \nu_\Omega(y)\rangle \,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_\Omega \operatorname{div} g(x)\,\mathrm{d}\lambda^n(x).$$

Množina K je kompaktní, a proto můžeme nalézt body $z^1, \dots, z^k$ takové, že $K \subset U(z^1) \cup \dots \cup U(z^k)$. Potom existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $x \in K$ existuje $i \in \{1, \dots, k\}$ splňující $B(x, \varepsilon) \subset U(z^i)$. Pro toto ε nalezneme rozklad jednotky ω_j, $j \in \omega$, podle Lemmatu 14.3.4. Označme $I = \{j \in \mathbb{N};\ \operatorname{spt}\omega_j \cap K \neq \emptyset\}$. Množina I je díky kompaktnosti K a vlastnosti (e) z Lemmatu 14.3.4 konečná. Dále platí

- $\sum_{j\in I} \omega_j(x) = 1$ pro každé $x \in K$,
- pro každé $j \in I$ existuje $i \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $\operatorname{spt}\omega_j f \subset U(z^i)$, a tedy

$$\int_{H(\Omega)} \langle \omega_j f(y), \nu_\Omega(y)\rangle \,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_\Omega \operatorname{div}(\omega_j f)(x)\,\mathrm{d}\lambda^n(x).$$

Potom platí

$$\begin{aligned}
\int_{H(\Omega)} \langle f(y), \nu_\Omega(y)\rangle \,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y) &= \int_{H(\Omega)\cap K} \langle f(y), \nu_\Omega(y)\rangle \,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y)\,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y)\\
&= \sum_{j\in I} \int_{H(\Omega)} \langle \omega_j f(y), \nu_\Omega(y)\rangle \,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y)\\
&= \sum_{j\in I} \int_\Omega \operatorname{div}(\omega_j f)(x)\,\mathrm{d}\lambda^n(x)\\
&= \int_\Omega \operatorname{div}(f)(x)\,\mathrm{d}\lambda^n(x).
\end{aligned}$$

■

14.3.11. Lemma. Nechť $n \in \mathbb{N}, n > 1$, $N \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní a $\mathcal{H}^{n-1}(N) = 0$. Potom existují $\mathcal{C}^1$ funkce $v_m\colon \mathbb{R}^n \to [0, 1]$, $m \in \mathbb{N}$, takové, že platí:

(a) $v_m \to \chi_{\mathbb{R}^n \setminus N}$,
(b) $\int \|\nabla v_m(x)\| \, d\lambda^n(x) \to 0$,
(c) pro každé $m \in \mathbb{N}$ existuje otevřená množina $G_m \subset \mathbb{R}^n$ obsahující N taková, že $v_m|_{G_m} = 0$.

Důkaz. Nalezneme $\omega\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ takovou, že ω je třídy $\mathcal{C}^1$ a

$$\omega(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

Označme $\eta(x) = \omega(\|x\|)$, $x \in \mathbb{R}^n$, a $c = \int \|\nabla\eta(x)\| \, d\lambda^n(x)$. Zvolme $m \in \mathbb{N}$. Nalezneme množiny A_j, $j \in \mathbb{N}$, takové, že $N \subset \bigcup_{j=1}^\infty A_j$, $N \cap A_j \neq \emptyset$, $0 < \operatorname{diam} A_j \leq 2^{-m}$ a $\sum_{j=1}^\infty \alpha_m (\operatorname{diam} A_j)^{n-1} \leq 2^{-m}$. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ nalezneme kouli $B(x_j, r_j)$ takovou, že $A_j \subset B(x_j, r_j)$ a $r_j \leq 2 \operatorname{diam} A_j$. Množina N je kompaktní, a proto existuje $p \in \mathbb{N}$ takové, že $N \subset \bigcup_{j=1}^p B(x_j, r_j)$. Položme

$$\eta_j(x) = \eta(\frac{x - x^j}{r_j}), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$v_m(x) = \prod_{j=1}^p \eta_j(x).$$

Potom platí

$$\frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{r_j} \cdot \frac{\partial\eta}{\partial x_i}(\frac{x - x^j}{r_j}), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dále máme

$$\frac{\partial v_m}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}(x) \prod_{k=1, k\neq j}^p \eta_j(x).$$

Odtud plyne

$$|\frac{\partial v_m}{\partial x_i}(x) \leq \sum_{j=1}^p |\frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}(x)| \leq \sum_{j=1}^p \|\nabla\eta - j(x)\|$$

$$\|\nabla v_m(x) \leq \sqrt{n} \sum_{j=1}^p \|\nabla\eta_j(x)\|.$$

Platí také

$$\int \|\nabla\eta_j(x)\| \, d\lambda^n(x) = \int \|\nabla\eta(y)\| r_j^{n-1} \, dy = c r_j^{n-1}.$$

Platí tedy

$$\int \|\nabla v_m(x)\|\,\mathrm{d}\lambda^n(x) \le \sqrt{n}\int \sum_{j=1}^{p} \|\nabla \eta_j(x)\|\,\mathrm{d}\lambda^n(x)$$
$$\sqrt{n}\sum_{j=1}^{p} c r_j^{n-1} \le \sqrt{n}\sum_{j=1}^{p} c2^{n-1}(\operatorname{diam} A_j)^{n-1}$$
$$\sqrt{n}c2^{n-1}\frac{1}{\alpha_n}2^{-m}.$$

Odtud plyne $\int \|\nabla v_m\| \to 0$. Položme $G_m = \bigcup_{j=1}^{p} B(x^j, r_j)$. Pokud $\operatorname{dist}(x, N) > 2^{-m+3}$, pak $x \notin \bigcup_{j=1}^{p} B(x_j, 2r_j)$, a tedy $v_m(x) = 1$. Pokud $x \in G_m$, potom $v_m(x) = 0$. Odtud plyne $v_m \to \chi_{\mathbb{R}^n \setminus N}$. Vlastnosti (a)-(d) jsou snadno ověřitelné. ■

Důkaz Gaussovy věty (Věta **??**). Označme $N = H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)$. Množina N je kompaktní a $\mathcal{H}^{n-1}(N) = 0$. Nechť $\{v_m\}$ je posloupnost funkcí z předchozího lemmatu. Položme $f^m = v_m f$. Potom f^m splňuje předpoklady Lemmatu **??**, a tedy platí

$$\int_{H(\Omega)} \langle f^m(y), \nu_\Omega(y)\,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_\Omega \operatorname{div} f^m(x)\,\mathrm{d}\lambda^n(x).$$

Platí $f^m \to f$ $\mathcal{H}^{n-1}$-s.v. a máme

$$\int_{H(\Omega)} \langle f^m(y), \nu_\Omega(y)\rangle\,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^{n-1}(y) \to \int_{H(\Omega)} \langle f(y), \nu_\Omega(y)\rangle\,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^[n-1)(y).$$

Limitní přechod je v pořádku, neboť ■

14.3.12. Definice.

(a) Nechť $U \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^1$. Pro $x \in U$ definujeme **rotaci** vektorového pole f v bodě $x \in U$ předpisem

$$\operatorname{rot} f(x) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x).$$

(b) Nechť $U \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená množina a $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^1$. Pro $x \in U$ definujeme **rotaci** vektorového pole f v bodě $x \in U$ předpisem

$$\operatorname{rot} f(x) = \left[\tfrac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) - \tfrac{\partial f_2}{\partial x_3}(x), \tfrac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) - \tfrac{\partial f_3}{\partial x_1}(x), \tfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \tfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x)\right].$$

14.3.13. Věta (Green)**.** Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená otevřená neprázdná množina, $\mathcal{H}^1\big(H(\Omega)\big) < \infty$, $\mathcal{H}^1\big(H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)\big) = 0$ a f je vektorové pole z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, které je třídy $\mathcal{C}^1$ na otevřené množině obsahující $\overline{\Omega}$. Nechť $\tau_\Omega \colon H_*(\Omega) \to \mathbb{R}^2$ je tečné vektorové pole k $H_*(\Omega)$ definované předpisem $\tau_\Omega(y) = - \times \nu_\Omega(y)$. Pak platí

$$\int_{H(\Omega)} \big\langle f(y), \tau_\Omega(y)\big\rangle \, \mathrm{d}\,\mathcal{H}^1(y) = \int_\Omega \operatorname{rot} f(x) \, \mathrm{d}\lambda^2(x).$$

14.3.14. Definice. Nechť $c \colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je skoro regulární křivka.

(a) Nechť g je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$. **Křivkový integrál prvního druhu** $\int_c g \, \mathrm{d}s$ definujeme jako

$$\int_a^b g(c(t)) \cdot \|c'(t)\| \, \mathrm{d}t,$$

pokud tento integrál konverguje.

(b) Nechť f je vektorové pole z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$. **Křivkový integrál druhého druhu** $\int_c f \cdot \mathrm{d}c$ definujeme jako

$$\int_a^b \langle f(c(t)), c'(t)\rangle \, \mathrm{d}t,$$

pokud tento integrál konverguje.

14.3.15. Věta. Nechť $c \colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ je skoro regulární jednoduchá uzavřená křivka a f je vektorové pole z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, které je třídy $\mathcal{C}^1$ na otevřené množině obsahující $\overline{\operatorname{Int} c}$. Jestliže existuje $t \in [a,b]$ takové, že $\det[\nu_\Omega(c(t)), c'(t)] > 0$, pak platí

$$\int_c f \cdot \mathrm{d}c = \int_{\operatorname{Int} c} \operatorname{rot} f(x) \, \mathrm{d}\lambda^2(x).$$

14.3.16. Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^3$ je 2-plocha orientovaná normálovým polem ν, $\Omega \subset G$ je relativně otevřená v G a $\overline{\Omega} \setminus \Omega \subset G$. Řekneme, že $z \in H_G(\Omega)$ je **regulárním** bodem hranice Ω vzhledem ke G, jestliže existuje okolí U bodu z a funkce $h \colon U \to \mathbb{R}$ třídy $\mathcal{C}^1$ taková, že $\nu(z) \times \nabla h(z) \neq 0$ a $\{x \in G \cap U;\ h(x) < 0\} = \Omega \cap U$. V takovém bodě definujeme

$$\tau_{\Omega,\nu}(z) = \frac{\nu(z) \times \nabla h(z)}{\|\nu(z) \times \nabla h(z)\|}.$$

14.3.17. Věta. Nechť G, ν a Ω jsou jako v předchozí definici. Označme $H_G(\Omega)_*$ množinu všech regulárních bodů hranice Ω vzhledem ke G. Potom je $H_G(\Omega)_*$ 1-plocha a $\tau_{\Omega,\nu}$ je orientace $H_G(\Omega)_*$.

14.3.18. Věta (Stokes). Nechť G, ν a Ω jsou jako v předchozí definici. Předpokládejme dále, že Ω je omezená, $\mathcal{H}^1(H_G(\Omega)) < \infty$ a $\mathcal{H}^1(H_G(\Omega) \setminus H_G(\Omega)_*) = 0$. Nechť vektorové pole f z $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ je třídy $\mathcal{C}^1$ na otevřené množině obsahující $\overline{\Omega}$. Potom

$$\int_{H_G(\Omega)} \langle f(y), \tau_{\Omega,\nu}(y) \rangle \,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^1(y) = \int_{\Omega} \langle \operatorname{rot} f(x), \nu(x) \rangle \,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^2(x).$$

14.4. Hlavní věta teorie pole

14.4.1. Věta (věta o potenciálu). Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Nechť $c\colon [a,b] \to \Omega$ je skoro regulární křivka a $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ je funkce třídy $\mathcal{C}^1$. Potom

$$u\big(c(b)\big) - u\big(c(a)\big) = \int_c \nabla u \cdot \mathrm{d}c.$$

14.4.2. Definice. Řekneme, že množina $U \subset \mathbb{R}^n$ je **hvězdicovitá**, jestliže existuje $a \in U$ takový, že pro každé $x \in U$ platí $\{a + t(x-a);\ t \in [0,1]\} \subset U$.

14.4.3. Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je množina, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ je vektorové pole a $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Řekneme, že u je **potenciál** pole f na Ω, jestliže pro každé $x \in \Omega$ platí $\nabla u(x) = f(x)$. Vektorové pole, které má potenciál, nazýváme **potenciální**.

14.4.4. Věta (hlavní věta teorie pole). Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojité vektorové pole. Uvažujme následující výroky:

(i) Vektorové pole f je potenciální.
(ii) Pro každé skoro regulární křivky $c_i\colon [a,b] \to \Omega$, $i \in \{1,2\}$, splňující $c_1(a) = c_2(a)$ a $c_1(b) = c_2(b)$ platí $\int_{c_1} f \cdot \mathrm{d}c_1 = \int_{c_2} f \cdot \mathrm{d}c_2$.
(iii) Pro každé $i, j \in \{1,\dots,n\}$ a $x \in \Omega$ platí $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$.

Potom platí:

(a) (i) $\Leftrightarrow$ (ii)
(b) Je-li f třídy $\mathcal{C}^1$, pak (i) $\Rightarrow$ (iii).
(c) Je-li f třídy $\mathcal{C}^1$ a Ω je hvězdicovitá, pak (iii) $\Rightarrow$ (i).

14.4.5. Definice.

(a) Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$, $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená, $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^1$ a g je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$. **Plošný integrál prvního druhu** $\int_\Phi g \,\mathrm{d}S$ definujeme jako

$$\int_G g(\Phi(t)) \cdot \operatorname{vol} \Phi'(t) \,\mathrm{d}t,$$

pokud tento integrál konverguje.

(b) Nechť $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ je otevřená, $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^1$ a f je vektorové pole z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$. **Plošný integrál druhého druhu** $\int_\Phi f \cdot \mathrm{d}\Phi$ definujeme jako

$$\int_G \Big\langle f(\Phi(t)), \frac{\partial \Phi}{\partial t_1}(t) \times \cdots \times \frac{\partial \Phi}{\partial t_{n-1}}(t) \Big\rangle \, \mathrm{d}t,$$

pokud tento integrál konverguje.

KAPITOLA 15

Absolutně spojité funkce a funkce s konečnou variací

15.1. Přehled výsledků z teorie míry a integrálu

15.2. Derivace monotónní funkce

15.2.1. Definice. Nechť $\mathcal{I}$ je soubor nedegenerovaných intervalů v $\mathbb{R}$ a $A \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že $\mathcal{I}$ **pokrývá ve Vitaliově smyslu**, pokud platí:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \forall x \in A \; \exists I \in \mathcal{I} : (x \in I) \,\&\, (|I| < \varepsilon).$$

15.2.2. Věta (Vitali)**.** Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je množina konečné vnější míry a $\mathcal{I}$ je soubor nedegenerovaných intervalů pokrývající A ve Vitaliově smyslu. Pak pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje disjunktní konečná množina $\{I_1, \dots, I_n\} \subset \mathcal{I}$ taková, že

$$\lambda^* \left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j \right) < \varepsilon.$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že intervaly v $\mathcal{I}$ jsou uzavřené. (V obecném případě bychom nahradili intervaly jejich uzávěry a použili pozorování, že koncové body intervalu mají míru 0.) Zvolme otevřenou množinu $G \supset A$ konečné míry. Protože je $\mathcal{I}$ vitaliovské pokrytí, můžeme předpokládat, že $\bigcup \mathcal{I} \subset G$. Mějme $\varepsilon \in (0, \infty)$ dáno.

Zvolme nyní induktivně posloupnost $\{I_n\}$. V prvním kroku vezměme libovolný interval $I_1 \in \mathcal{I}$. Mějme nyní disjunktní intervaly $\{I_1, \dots, I_j\}$ vybrány. Pokud $A \subset \bigcup_{i=1}^{j} I_i$, konstrukci ukončíme. Jinak položme

$$s_j = \sup\{|I|;\ I \in \mathcal{I}, I \cap \bigcup_{i=1}^{j} I_i = \emptyset\}.$$

Všimněme si, že s_j je dobře definováno, jelikož existuje $x \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{j} I_i$. Protože $\bigcup_{i=1}^{j} I_i$ ke kompaktní množina a $\mathcal{I}$ je vitaliovské pokrytí, existuje

$I \in \mathcal{I}$ obsahující x neprotínající $\bigcup_{i=1}^{j} I_i$. Tedy je množina intervalů z $\mathcal{I}$ neprotínající $\bigcup_{i=1}^{j} I_i$ neprázdná. Proto s_j je kladné číslo. Dále platí pro každé $I \in \mathcal{I}$ odhad $|I| \le \lambda(G) < \infty$, a tedy $s_j \le \lambda G < \infty$. Zvolme nyní I_{n+1} disjunktní s $\bigcup_{i=1}^{j} I_i$ takové, že $|I_{j+1}| > \frac{1}{2} s_j$. Tím je konstrukce ukončena.

Tím jsem zkonstruovali disjunktní posloupnost intervalů $\{I_j\}$ v G, a tedy

$$\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| \le \lambda(G) < \infty.$$

Zvolme $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} |I_j| < \frac{\varepsilon}{5}$$

Nyní již stačí jen dokázat, že $\lambda^*(A \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j) < \varepsilon$.

Nechť x je libovolný prvek $A \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j$. Protože je $\bigcup_{j=1}^{n} I_j$ kompaktní množina a $\mathcal{I}$ je vitaliovské pokrytí, existuje $I \in \mathcal{I}$ obsahující x a splňující $I \cap \bigcup_{j=1}^{n} I_j = \emptyset$. Je-li $k \in \mathbb{N}$ a $I \cap \bigcup_{j=1}^{k} I_j = \emptyset$, z volby intervalu I_{k+1} plyne, že

$$|I| \le s_k < 2|I_{k+1}|.$$

Protože $\lim_k |I_{k+1}| = 0$, musí tedy existovat $m \in \mathbb{N}$ takové, že $I \cap I_m \neq \emptyset$.

Nechť $k \in \mathbb{N}$ je první index splňující $I \cap I_k \neq \emptyset$. Pak

$$k > n \quad \text{a} \quad |I| \le s_{k-1} \le 2|I_k|.$$

Zvolme $y \in I \cap I_k$ a označme střed intervalu I_k jako $\tilde{y}$. Pak

$$|x - \tilde{y}| \le |x - y| + |y - \tilde{y}| \le |I| + \frac{1}{2}|I_k| \le \frac{5}{2}|I_k|. \tag{15.1}$$

Označíme-li tedy

$$J_k = [\tilde{y} - \frac{5}{2}|I_k|, \tilde{y} + \frac{5}{2}|I_k|],$$

máme díky (15.1) $x \in J_k$.

Jelikož $x \in A \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ bylo libovolné, dokázali jsme, že

$$A \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j \subset \bigcup_{k=n+1}^{\infty} J_k.$$

Tedy

$$\lambda^* \left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j \right) \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |J_k| = 5 \sum_{k=n+1}^{\infty} |I_k| < \varepsilon.$$

Tím je důkaz dokončen. ■

15.2.3. Definice. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Položme

$$D^+ f(a) = \limsup_{h \to 0_+} \frac{1}{h}(f(a+h) - f(a)),$$

$$D^- f(a) = \limsup_{h \to 0_+} \frac{1}{h}(f(a) - f(a-h)),$$

$$D_+ f(a) = \liminf_{h \to 0_+} \frac{1}{h}(f(a+h) - f(a)),$$

$$D_- f(a) = \liminf_{h \to 0_+} \frac{1}{h}(f(a) - f(a-h)).$$

Tato čísla nazýváme **horní** a **dolní derivovaná čísla**.

15.2.4. Zřejmě platí

$$D^+ f(a) \geq D_+ f(a) \quad \text{a} \quad D^- f(a) \geq D_- f(a).$$

Dále $D^+ f(a) = D_+ f(a)$ právě tehdy, když $f'_+(a)$ existuje. Obdobně platí, že $D^- f(a) = D_- f(a)$ právě tehdy, když $f'_-(a)$ existuje. Dále jsou všechna čtyři čísla rovna právě tehdy, když existuje $f'(a)$ (vlastní či nevlastní).

15.2.5. Věta. Nechť f je neklesající reálná funkce na intervalu $[a,b]$. Pak

(a) f je měřitelná,
(b) $f'(x)$ existuje vlastní pro skoro všechny body $x \in [a,b]$,
(c) f' je měřitelná,
(d) $\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x \leq f(b) - f(a)$.

Důkaz. (a) Zvolme libovolné $c \in \mathbb{R}$. Díky monotonii f je pak množina

$$\{x \in [a,b];\ f(x) > c\}$$

interval, tedy měřitelná. Proto je f měřitelná.

(b) Ukažme, že množina bodů, kde se nějaká derivovaná čísla liší, má míru 0. Ukažme toto pro případ $A = \{x \in [a,b];\ , D^+ f(x) > D_- f(x)\}$, u zbývajících množin lze postupovat analogicky. Rozložme množinu A jako $A = \bigcup_{p,q \in \mathbb{Q}} A_{p,q}$, kde

$$A_{p,q} = \{x \in [a,b];\ D^+ f(x) > p > q > D_- f(x)\}, \quad p,q \in \mathbb{Q}.$$

Díky spočetnosti množiny $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tedy stačí dokázat $\lambda^*(A_{p,q}) = 0$ pro každou dvojici racionálních čísel $p > q$.

Položme $s = \lambda^*(A_{p,q})$. Nechť $\varepsilon \in (0,\infty)$ je libovolné pevné. Zvolme otevřenou množinu $G \supset A_{p,q}$ splňující $\lambda(G) < s + \varepsilon$. Pro každé $x \in A_{p,q}$ existuje libovolně malý interval tvaru $[x-h, x] \subset G$ takový, že

$$f(x) - f(x-h) < qh.$$

Díky Větě 15.2.2 vybereme konečně mnoho takovýchto disjunktních intervalů $\{I_1, \dots, I_n\}$ takových, že

$$\lambda^*\left(A_{p,q} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{Int}(I_i)\right) < \varepsilon.$$

Označíme-li tedy

$$B = A_{p,q} \cap \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{Int}(I_i),$$

máme $\lambda^*(B) > s - \varepsilon$. Pak platí

$$\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_i - h_i)) < q \sum_{i=1}^{n} h_i \le q\lambda(G) < q(s + \varepsilon). \tag{15.2}$$

Pro každý bod y množiny B lze najít libovolně malý interval tvaru $[y, y+k]$ takový, že je obsažen v nějakém I_j a $f(y + k) - f(y) > pk$. Opět použijeme Věty 15.2.2 a vybereme konečně mnoho disjunktních intervalů $\{J_1, \dots, J_m\}$ výše uvedeného typu tak, že $B \cap \bigcup_{j=1}^{m} J_j$ má vnější míru větší než $s - 2\varepsilon$. Pak dostaneme

$$\sum_{j=1}^{m} (f(y_j + k_j) - f(y_j)) > p \sum_{j=1}^{m} k_j > p(s - 2\varepsilon). \tag{15.3}$$

Vezměme nyní pevný interval I_i a uvažujme všechny indexy $F = \{j \in \{1, \dots, m\};\ J_j \subset I_i\}$. Protože f je neklesající a intervaly J_j jsou disjunktní, dostáváme

$$\sum_{j \in F} (f(y_j + k_j) - f(y_j)) \le f(x_i) - f(x_i - h_i).$$

Proto platí

$$\sum_{j=1}^{m} (f(y_i + k_i) - f(y_i)) \le \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_i - h_i)).$$

Z (15.2) a (15.3) pak obdržíme

$$p(s - 2\varepsilon) < \sum_{j=1}^{m} (f(y_j + k_j) - f(y_j)) \le \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_i - h_i)) < q(s + \varepsilon).$$

Tedy

$$p(s - 2\varepsilon) < q(s + \varepsilon)$$

pro libovolné $\varepsilon \in (0, \infty)$. Proto $ps \le qs$. Protože $p > q$, nutně $s = 0$. Tím je ukázáno, že $\lambda^*(A_{p,q}) = \lambda(A_{p,q})) = 0$, tedy i $\lambda(A) = 0$. Proto je f

diferencovatelná skoro všude. Z bodu (c) pak vyplyne, že f' je vlastní skoro všude.

(c) a (d) Rozšiřme definici funkce f za bod b pomocí $f(x) = f(b)$, $x \geq b$. Definujme funkci

$$g(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x))$$

pro ta x, kde limita existuje. Dle (b) je funkce g definována pro skoro všechna $x \in [a,b]$ a zřejmě platí, že $f'(x)$ je vlastní v těch bodech, kde g je konečná. Položme

$$g_n(x) = n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x)), \quad x \in [a,b], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Díky bodu (a) jsou g_n měřitelné a podle (b) konvergují bodově skoro všude ke g. Tedy je g skoro všude definovaná měřitelná funkce.

Zjevně je g skoro všude nezáporná. Z Fatouova lemmatu tedy dostáváme

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \liminf g_n(x)\,\mathrm{d}x \leq \liminf \int_a^b g_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \liminf n \int_a^b (f(x + \frac{1}{n}) - f(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \liminf \left(n \int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \liminf \left(f(b) - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \right) \\
&\leq f(b) - f(a).
\end{aligned}$$

Tedy g je integrovatelná, a proto konečná ve skoro všech bodech. Tedy $f'(x)$ existuje vlastní ve skoro všech bodech a $g = f'$ skoro všude. Proto je f' měřitelná a platí $\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x \leq f(b) - f(a)$. ■

15.3. Funkce s konečnou variací

15.3.1. Definice. Nechť f je reálná funkce na intervalu $[a, b]$. Pro každé dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ položme

$$p_D = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})]^+,$$

$$n_D = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})]^-,$$

$$v_D = n_D + p_D = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

Dále definujme

$$P(f; a, b) = \sup\{p_D;\ D \text{ dělení } [a, b]\},$$
$$N(f; a, b) = \sup\{n_D;\ D \text{ dělení } [a, b]\},$$
$$V(f; a, b) = \sup\{v_D;\ D \text{ dělení } [a, b]\}.$$

Čísla $P(f; a, b), N(f; a, b), V(f, a, b)$ nazveme po řadě **pozitivní, negativní** a **totální variací** funkce f na intervalu $[a, b]$. Je-li $V(f; a, b) < \infty$, řekneme, že f je **konečné variace** na $[a, b]$.

15.3.2. Zřejmě pro dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ platí

$$\begin{aligned} p_D - n_D &= \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})]^+ - \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})]^- \\ &= \sum_{i=1}^n \big([f(x_i) - f(x_{i-1})]^+ - [f(x_i) - f(x_{i-1})]^-\big) \\ &= \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &= f(b) - f(a). \end{aligned}$$

Dále máme

$$V(f; a, b) \leq P(f; a, b) + N(f; a, b)$$

a

$$\max P(f; a, b), N(f; a, b) \leq V(f; a, b).$$

15.3.3. Věta. Je-li f konečné variace na $[a, b]$, platí

$$V(f; a, b) = P(f; a, b) + N(f; a, b)$$

a

$$f(b) - f(a) = P(f; a, b) - N(f; a, b).$$

Důkaz. Pozitivní i negativní variace f jsou konečné díky předpokladu a 15.3.2. Pro každé dělení D intervalu $[a, b]$ máme

$$p_D = n_D + f(b) - f(a). \tag{15.4}$$

Tedy pro každé dělení D platí

$$P(f; a, b) \geq p_D = n_D + f(b) - f(a).$$

Vezmeme-li supremum pravé strany přes všechna dělení D, dostaneme

$$P(f; a, b) \geq N(f; a, b) + f(b) - f(a).$$

Dále máme z (15.4) pro každé dělení odhad

$$p_D = n_D + f(b) - f(a) \leq N(f; a, b) + f(b) - f(a).$$

Přechodem k supremu na levé straně obdržíme

$$P(f; a, b) \leq N(f; a, b) + f(b) - f(a).$$

Tedy platí druhý požadovaný vzorec.

Dále máme pro každé dělení D rovnost

$$v_D = p_D + n_D = p_D + p_D - (f(b) - f(a)).$$

Obdobně jako výše obdržíme

$$V(f; a, b) = 2P(f; a, b) - (f(b) - f(a)) = P(f; a, b) + N(f; a, b).$$

■

15.3.4. Věta. Nechť f je reálná funkce na intervalu $[a, b]$. Pak f je konečné variace na $[a, b]$ právě tehdy, když je f rozdílem dvou neklesajících funkcí na $[a, b]$.

Důkaz. Nechť f je konečné variace. Položme

$$g(x) = P(f; a, x), \quad h(x) = N(f; a, x), \quad x \in [a, b].$$

Protože pro $x \in [a, b]$ máme

$$\begin{aligned} 0 &\leq P(f; a, x) \leq V(f; a, x) \leq V(f; a, b) < \infty \quad \text{a} \\ 0 &\leq N(f; a, x) \leq V(f; a, x) \leq V(f; a, b) < \infty, \end{aligned}$$

g, h jsou reálné funkce na $[a, b]$. Zjevně jsou neklesající. Dle Věty 15.3.3 platí

$$f(x) = g(x) - h(x) + f(a) = g(x) - (h(x) - f(a)), \quad x \in [a, b].$$

Tedy f je rozdílem dvou neklesajících funkcí g a $h - f(a)$.

Obráceně, nechť $f = g - h$, kde g, h jsou neklesající. Pak pro každé dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ máme

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| &\le \sum_{i=1}^n |g(x_i) - g(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^n |h(x_i) - h(x_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^n (g(x_i) - g(x_{i-1})) + \sum_{i=1}^n (h(x_i) - h(x_{i-1})) \\ &= g(b) - g(a) + h(b) - h(a).\end{aligned}$$

Tedy $V(f; a, b) < \infty$. ■

15.3.5. Důsledek. Nechť f je funkce konečné variace na $[a, b]$. Pak má vlastní integrovatelnou derivaci ve skoro všech bodech.

Důkaz. Rozložme f jako $f = g - h$, kde g, h jsou neklesající funkce. Dle Věty 15.2.5 existují množiny N_g a N_h nulové míry takové, že $g'(x)$ existuje vlastní pro x mimo N_g a $h'(x)$ existuje vlastní pro x mimo N_h. Navíc jsou g' a h' integrovatelné. Pak $f'(x) = g'(x) - h'(x)$ je vlastní pro body mimo nulovou množinu $N_g \cup N_h$ a navíc je f' integrovatelná. ■

15.4. Absolutně spojité funkce

15.4.1. Definice. Reálná funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se nazývá **absolutně spojitá**, pokud platí následující podmínka: Pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ takové, že pro každý soubor $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ disjunktních intervalů v $[a, b]$ splňujících

$$\sum_{i=1}^n (y_i - x_i) < \delta$$

platí

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(y_i)| < \varepsilon.$$

15.4.2. Je snadné si rozmyslet, že absolutně spojité funkce tvoří algebru.

15.4.3. Věta. Absolutně spojitá funkce na $[a, b]$ je stejnoměrně spojitá a konečné variace.

Důkaz. Nechť f je absolutně spojitá funkce na $[a, b]$. Pak je okamžitě z definice patrné, že je stejnoměrně spojitá

Pro důkaz její konečné variace zvolme $\varepsilon = 1$ a k němu nalezneme odpovídající $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, z definice absolutní spojitosti. Vezměme libovolné $\delta' \in (0, \delta)$. Uvažujme ekvidistantní dělení $D' = \{y_j\}_{j=0}^K$ intervalu $[a, a + K\delta']$, kde K je přirozené číslo splňující $\frac{b-a}{\delta'} \leq K < 1 + \frac{b-a}{\delta'}$ a

$$y_j = a + j\delta', \quad j \in \{0, \dots, K\}.$$

Pak

$$a + (K-1)\delta' < b \leq a + K\delta'.$$

Je-li $a + K\delta > b$, zaměňme bod $y_K = a + K\delta'$ bodem b. Získáme tak dělení intervalu $[a, b]$, jehož norma je menší nebo rovna než δ', a tedy menší než δ.

Nechť $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ je dané dělení $[a, b]$. Vezmeme dělení D'' sestávající z bodů D' a D. Pak $D'' = \{z_l\}_{l=1}^m$ je dělení, které lze rozdělit na K souborů intervalů, z nichž každý je dělením intervalu délky δ'. Dostáváme tedy

$$v_D = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sum_{l=1}^m |f(z_l) - f(z_{l-1})| \leq K\varepsilon = K.$$

Tím je důkaz dokončen. ∎

15.4.4. Věta. Nechť f je integrovatelná reálná funkce na $[a, b]$.

(a) Pak je funkce

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a, b],$$

absolutně spojitá na $[a, b]$.

(b) Je-li f v $c \in [a, b]$ spojitá zprava, existuje $F'_+(c)$ vlastní a platí $F'_+(c) = f(c)$. Analogicky pro derivaci zleva.

Důkaz. (a) Ukažme nejdříve absolutní spojitost. Dokažme nejprve následující fakt:

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \\ &\qquad \forall E \subset [a, b] \text{ měřitelná}, \lambda(E) < \delta : \int_E |f(t)|\,\mathrm{d}t < \varepsilon. \end{aligned} \tag{15.5}$$

Předpokládáme-li opak, máme $\varepsilon \in (0, \infty)$ a měřitelné množiny $E_n \subset [a, b]$ takové, že $\lambda(E_n) < 2^{-n}$ a $\int_{E_n} |f(t)|\,\mathrm{d}t \geq \varepsilon$. Položíme-li $F_n = \bigcup_{k=n}^\infty E_k$ a $F = \bigcap_{n=1}^\infty F_n$, máme

$$\lambda(F) = \lim_n \lambda(F_n) \leq \limsup_n \sum_{k=n}^\infty \lambda(E_k) = \limsup_n 2^{-n+1} = 0.$$

Na stranu druhou máme z Lebesgueovy věty

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_F |f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b \chi_F |f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lim \chi_{F_n} |f(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= \lim \int_a^b \chi_{F_n}(t) |f(t)|\,\mathrm{d}t = \lim \int_{F_n} |f(t)|\,\mathrm{d}t \geq \varepsilon,
\end{aligned}
$$

což je zjevný spor. Tedy (15.5) platí.

Ukažme nyní, že F je absolutně spojitá. Pro dané $\varepsilon \in (0, \infty)$ najdeme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ dle (15.5). Mějme nyní disjunktní intervaly $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ o úhrnné délce menší než δ. Pak $\lambda(\bigcup_{i=1}^n (x_i, y_i)) < \delta$, a tedy

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |F(y_i) - F(x_i)| &= \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_i}^{y_i} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{y_i} |f(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\bigcup_{i=1}^n (x_i, y_i)} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

(b) Předpokládejme nyní, že f je bodě $c \in [a, b)$ spojitá zprava. Pak pro dané $\varepsilon \in (0, \infty)$ existuje $\delta \in (0, \infty)$, že pro $y \in (c, c+\delta)$ platí $|f(y) - f(c)| < \varepsilon$. Pak tedy máme pro $h \in (0, \delta)$ odhad

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{h}(F(c+h) - F(c)) - f(c) &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t \right) - f(c) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_c^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_c^{c+h} f(c)\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{1}{h} \int_c^{c+h} (f(t) - f(c))\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Tedy

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{1}{h}(F(c+h) - F(c)) - f(c) \right| &\leq \frac{1}{h} \int_c^{c+h} |f(t) - f(c)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \varepsilon \frac{1}{h} \int_c^{c+h} 1\,\mathrm{d}t = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Tedy $F'_+(c) = f(c)$. Analogicky bychom postupovali pro derivaci zleva. ■

15.4.5. Lemma. Nechť f je integrovatelná reálná funkce na $[a, b]$ a $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pro každé $c \in [a, b]$. Pak $f = 0$ skoro všude.

Důkaz. Předpokládejme, že $E = \{x \in [a, b];\ f(x) > 0\}$ je množina kladné míry. Z regularity Lebesgueovy míry pak existuje uzavřená množina $F \subset$

$(a, b) \cap E$ kladné míry. Podle Věty **??** lze psát množinu $G = (a, b) \setminus F$ jako $G = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$, kde $\{(a_n, b_n)\}$ jsou navzájem disjunktní. Protože

$$0 = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_F f(t)\,\mathrm{d}t + \int_G f(t)\,\mathrm{d}t,$$

platí

$$\int_G f(t)\,\mathrm{d}t \neq 0.$$

Z Lebesgueovy věty máme

$$\begin{aligned}\int_G f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{\bigcup(a_n,b_n)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{(a_n,b_n)} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \chi_{(a_n,b_n)} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Tedy alespoň jeden integrál $\int_{a_n}^{b_n} f(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$. Pak ale máme pro toto $n \in \mathbb{N}$

$$0 \neq \int_{a_n}^{b_n} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{b_n} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Tedy buď pro $c = b_n$ nebo pro $c = a_n$ platí $0 \neq \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$, což je spor s předpokladem. Tedy $\lambda(E) = 0$.

Obdobně bychom postupovali u množiny $\{x \in [a, b];\ f(x) < 0\}$. ∎

15.4.6. Lemma. Nechť f je omezená měřitelná funkce na $[a, b]$ a $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pro $x \in [a, b]$. Pak pro skoro všechna $x \in [a, b]$ platí $F'(x) = f(x)$.

Důkaz. Dle Věty 15.4.4 je F absolutně spojitá na $[a, b]$. Tudíž je konečné variace (viz Věta 15.4.3), a proto má skoro všude konečnou derivaci F', která je integrovatelná (Důsledek 15.3.5). Rozšiřme definiční obor f za bod b pomocí vzorce $f(x) = 0$, $x \geq b$, a nechť $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ i pro $x \geq b$. Nechť $K \in \mathbb{R}$ splňuje $|f| \leq K$ na $[a, b]$. Definujme

$$f_n(x) = n\Big(F\big(x + \frac{1}{n}\big) - F(x)\Big), \quad x \in (a, b), n \in \mathbb{N}.$$

Pak

$$f_n(x) = n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

a tedy $|f_n| \leq K$ na $[a, b]$.

Dále platí

$$f_n \to F' \text{ skoro všude a } \lim n \int_c^{c+\frac{1}{n}} F(x)\,\mathrm{d}x = F(c), \quad c \in [a, b],$$

(viz Věta 15.4.4(b)). Z Lebesgueovy věty tedy máme pro každé $c \in [a,b]$

$$\begin{aligned}\int_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x &= \lim \int_a^c f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim n \int_a^c (F(x+\frac{1}{n}) - F(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim n \left(\int_c^{c+\frac{1}{n}} F(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{a+\frac{1}{n}} F(x)\,\mathrm{d}x \right) \\ &= F(c) - F(a) = F(c) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Tedy

$$\forall c \in [a,b] : \int_a^c \big(F'(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Dle Lemmatu 15.4.5 je $F' = f$ skoro všude. ∎

15.4.7. Věta. Nechť f je integrovatelná funkce na $[a,b]$ a $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $x \in [a,b]$. Pak $F' = f$ skoro všude.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $f \geq 0$. Pak F je neklesající funkce na $[a,b]$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq n, \\ n, & f(x) > n. \end{cases}$$

Pak $f - f_n$ je integrovatelná nezáporná funkce. Tedy

$$G_n(x) = \int_a^x (f(t) - f_n(t))\,\mathrm{d}, \quad x \in [a,b],$$

je neklesající funkce. Tedy má dle Věty 15.2.5 skoro všude vlastní derivaci, která musí být nezáporná. Funkce

$$H_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b], n \in \mathbb{N},$$

splňují $H_n' = f_n$ skoro všude podle Lemmatu 15.4.6.

Dohromady máme pro skoro všechna $x \in [a,b]$

$$F'(x) = (G_n(x) + H_n(x))' = G_n'(x) + f_n(x) \geq f_n(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Protože tato nerovnost platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$, dostáváme $F' \geq f$ skoro všude.

Podle Věty 15.2.5 tedy máme

$$F(b) - F(a) \geq \int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Z tohoto faktu a nezápornosti $F' - f$ máme

$$0 \leq \int_a^b \big(F'(x) - f(x)\big)\, \mathrm{d}x = 0.$$

Tedy $F' = f$ skoro všude.

Je-li f obecná, pišme $f = f^+ - f^-$ a nechť F^+, F^- jsou příslušné funkce získané integrací. Pak máme skoro všude $(F^+)' = f^+$ a $(F^-)' = f^-$. Tedy pro skoro všechna $x \in [a, b]$ platí

$$F'(x) = (F^+(x) - F^-(x))' = f^+(x) - f^-(x) = f(x).$$

Tím je důkaz dokončen. ■

15.4.8. Věta. Je-li f absolutně spojitá funkce na $[a, b]$ s derivací skoro všude rovnou 0, pak f je konstantní.

Důkaz. Mějme dáno $c \in [a, b]$. Chceme ukázat, že $f(a) = f(c)$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, je dáno. Označíme-li $E = \{x \in (a, c);\ f'(x) = 0\}$, pak $\lambda(E) = (c - a)$ dle předpokladu. Nechť je $\delta \in (0, \infty)$ vybrané dle definice stejnoměrné spojitosti pro ε. Pro každé $x \in E$ existuje libovolně malý interval tvaru $[x, x+h]$ obsažený v (a, c), pro který platí $|f(x + h) - f(x)| < \varepsilon h$. Z tohoto vitaliovského pokrytí vybereme díky Větě 15.2.2 konečně mnoho disjunktních intervalů $\{[x_i, y_i]\}_{i=1}^n$, které splňují

$$\lambda(E \setminus \sum_{i=1}^n (y_i - x_i)) < \delta.$$

Předpokládejme, že máme intervaly označeny tak, že $x_i \leq x_{i+1}$ pro $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Pak platí

$$y_0 = a \leq x_1 < y_1 \leq x_2 < y_2 \leq \dots \leq x_n < y_n \leq c = x_{n+1}$$

a

$$\sum_{j=0}^n \left| x_{j+1} - y_j \right| < \delta.$$

Z konstrukce intervalů $\{[x_i, y_i]\}$ máme

$$\sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(x_i)| \leq \sum_{i=1}^n \varepsilon(y_i - c_i) \leq \varepsilon(c - a),$$

z absolutní spojitosti f pak dostáváme

$$\sum_{j=0}^n \left| f(x_{j+1}) - f(y_j) \right| < \varepsilon.$$

Dohromady obdržíme

$$|f(c) - f(a)| = \left|\sum_{j=0}^{n} \big(f(x_{j+1}) - f(y_j)\big) + \sum_{i=1}^{n} (f(y_i) - f(x_i))\right| \leq \varepsilon + \varepsilon(c-a).$$

Tedy $f(c) = f(a)$. ■

15.4.9. Věta. Nechť F je reálná funkce na $[a, b]$. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) F je absolutně spojitá,
(ii) F' existuje vlastní skoro všude, F' je integrovatelná a $F(x) = \int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t + F(a)$ pro $x \in [a, b]$,
(iii) existuje integrovatelná f na $[a, b]$ taková, že $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + F(a)$ pro $x \in [a, b]$.

Důkaz. (i) $\implies$ (ii) Nechť F je absolutně spojitá na $[a, b]$. Pak je konečné variace (Věta 15.4.3), a tedy má skoro všude vlastní derivaci F', která je integrovatelná. (Důsledek 15.3.5). Položme $G(x) = \int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t$. Pak G je absolutně spojitá na $[a, b]$ (Věta 15.4.4), stejně jako funkce $H = F - G$ (viz 15.4.2). Navíc je $G' = F'$ skoro všude dle Věty 15.4.7. tedy je $H' = 0$ skoro všude, což podle Věty 15.4.8 znamená, že $H = c$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$. Ale

$$c = H(a) = F(a) - G(a) = F(a),$$

což znamená

$$F(x) = G(x) + c = \int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t + F(a), \quad x \in [a, b].$$

(ii) $\implies$ (iii) je zřejmé a (iii) $\implies$ (i) plyne z Věty 15.4.4. ■

15.4.10. Věta (Per partes pro absolutně spojité funkce)**.** Nechť f, g jsou absolutně spojité funkce na $[a, b]$. Pak platí

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Dle 15.4.2 je funkce fg absolutně spojitá. Má tedy integrovatelnou derivaci skoro všude konečnou (Věta 15.4.9) a platí $h = (fg)' = f'g + fg'$ (Věta **??**). Dále máme dle Věty 15.4.9

$$f(b)g(b) = \int_a^b (fg)'(x)\,\mathrm{d}x + f(a)g(a). \tag{15.6}$$

Vzhledem k tomu, že f je omezená spojitá a g' integrovatelná, existuje $\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$. Analogicky pro $\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. Tedy z (15.6) dostáváme

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = (f(b)g(b) - f(a)g(a)) - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

■

15.4.11. Definice. Nechť f je integrovatelná funkce na $[a,b]$. Řekneme, že $x \in [a,b]$ je **Lebesgueovým bodem** f, pokud platí

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,\mathrm{d}t = 0.$$

15.4.12. Věta. Nechť f je integrovatelná funkce na $[a,b]$. Pak jsou skoro všechny body intervalu (a,b) Lebesgueovými body f.

Důkaz. Nechť r je libovolné racionální číslo. Pak je funkce $f - r$ integrovatelná na $[a,b]$, a tedy existuje dle Věty15.4.7 množina $A_r \subset (a,b)$ taková, že $\lambda(A_r) = 0$ a

$$\lim_{h\to 0} \int_x^{x+h} |f(t) - r|\,\mathrm{d}t = |f(x) - r| < \infty, \quad x \in (a,b) \setminus A_r. \tag{15.7}$$

Položme $A = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} A_r$. Pak $\lambda(A) = 0$.

Nechť $x \in (a,b) \setminus A$ a ukažme, že x je Lebesgueovým bodem f. Nutně platí $|f(x)| < \infty$. Nechť $\varepsilon \in (0,\infty)$ je dáno. Zvolme $r \in \mathbb{Q}$ takové, že $|f(x) - r| < \varepsilon$. Dále najdeme $\delta \in (0,\infty)$ takové, že

$$\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - r|\,\mathrm{d}t \right| < |f(x) - r| + \varepsilon$$

pro $0 < |h| < \delta$ (viz (15.7)). Pak ale platí pro tato h odhad

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,\mathrm{d}t \right| &\le \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (|f(t) - r| + |r - f(x)|)\,\mathrm{d}t \right| \\
&\le \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - r|\,\mathrm{d}t \right| + |r - f(x)| \\
&\le |f(x) - r| + \varepsilon + |r - f(x)| \\
&\le 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. ■

KAPITOLA 16

Fourierovy řady

16.1. Luzinova věta a její důsledky

16.1.1. Věta (Luzin)**.** Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ je měřitelná funkce a $\varepsilon \in (0,\infty)$. Pak existuje $F \subset [a,b]$ uzavřená taková, že $\lambda([a,b] \setminus F) < \varepsilon$ a $f|_F$ je spojitá.

Důkaz. Nechť $\{V_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je báze otevřených množin v $\mathbb{C}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ najdeme z regularity λ uzavřenou množinu F_n a otevřenou množinu U_n v $[a,b]$ takové, že

$$F_n \subset f^{-1}(V_n) \subset U_n \quad \text{a} \quad \lambda(U_n \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Pak pro

$$A = [a,b] \setminus \bigcup (U_n \setminus F_n)$$

platí

$$\lambda([a,b] \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}$$

a $f|_A$ je spojitá, protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ je množina

$$(f|_A)^{-1}(V_n) = f^{-1}(V_n) \cap A = U_n \cap A$$

otevřená v A. Nyní z regularity najdeme $F \subset A$ uzavřenou tak, že $\lambda(A \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pak $\lambda([a,b] \setminus F) < \varepsilon$ a $f|_F$ je spojitá. ■

16.1.2. Věta (Tietze)**.** Nechť $F \subset \mathbb{R}$ je uzavřená množina a $f : F \to \mathbb{C}$ je spojitá. Pak existuje $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ spojitá funkce splňující $g = f$ na F, $\sup_{x \in F} |f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$.

Důkaz. Předpokládejme, že $F \neq \emptyset$. Díky Větě **??** lze psát $\mathbb{R} \setminus F = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$, kde $\{(a_n, b_n)\}$ jsou disjunktní otevřené intervaly. Definujme

$$g(x) = \begin{cases} \frac{b_n - x}{b_n - a_n} f(a_n) + \frac{x - a_n}{b_n - a_n} f(b_n), & x \in (a_n, b_n), (a_n, b_n) \text{ omezený}, \\ f(b_n), & x \in (-\infty, b_n), \\ f(a_n), & x \in (a_n, \infty), \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N},$$

tedy g je na intervalu $[a_n, b_n]$ lineární funkce spojující body $[a_n, f(a_n)]$ a $[b_n, f(b_n)]$. Zjevně je g dobře definovaná, navíc zřejmě splňuje $\sup_{x\in F} |f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)|$.

Ukažme, že je spojitá. Zřejmě je g spojitá na každém z intervalů (a_n, b_n). Nechť $x \in F$. Ukážeme například spojitost zprava. Pokud x je izolovaným bodem množiny $F \cap (x, \infty)$, je g spojitá v x zprava, jelikož je na nějakém pravém okolí x rovna lineární funkci. Nechť tedy $x \in (F \cap (x, \infty))'$. Díky spojitosti f na F v bodě x zprava pro dané $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro $y \in F \cap [x, x+\delta)$ platí $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Zvolme $\tilde{y} \in F \cap (x, x+\delta)$ a $\tilde{\delta} \in (0, \infty)$ takové, že $(x, x+\tilde{\delta}) < \tilde{y}$. Nechť $y \in (x, x+\tilde{\delta})$ je libovolné. Pokud $y \in F$, máme $|f(x) - f(y)|$ z volby δ. Pokud $y \notin F$, vezměme jednoznačně určený interval (a_n, b_n) obsahující y. Protože $x, \tilde{y} \in F$, máme $(a_n, b_n) \subset [x, \tilde{y}]$. Tedy krajní body intervalu (a_n, b_n) splňují $|f(a_n) - f(x)| < \varepsilon$, $|f(b_n) - f(x)| < \varepsilon$. Z definice g na intervalu (a_n, b_n) tedy máme $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Tím je důkaz dokončen. ■

16.1.3. Věta. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je měřitelná.

(a) Pak existuje borelovská funkce g rovnající se f skoro všude.

(b) Je-li $p \in [1, \infty)$, $|f|^p$ je integrovatelná a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a spojitá funkce $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ takové, že $g = 0$ vně $[a, b]$ a $\|f - g\|_p < \varepsilon$.

Důkaz. (a) Aplikací Luzinovy věty 16.1.1 na intervaly $[-n, n]$ dostaneme uzavřené množiny $F_n \subset [-n, n]$, $n \in \mathbb{N}$, takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f|_{F_n}$ je spojitá a $\lambda([-n, n] \setminus F_n) < 2^{-n}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $F_1 \subset F_2 \subset \cdots$. Označme $F_0 = \emptyset$, $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ a položme

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in F, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus F. \end{cases}$$

Pak pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$\mathbb{R} \setminus F = \bigcup_{k=1}^{\infty} [-k, k] \setminus F \subset \bigcup_{k=m}^{\infty} [-k, k] \setminus F \subset \bigcup_{k=m}^{\infty} [-k, k] \setminus F_k.$$

Tedy pro každé $m \in \mathbb{N}$ máme

$$\lambda(\mathbb{R}\setminus F) \le \lambda\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} [-k, k] \setminus F_k\right) \le \sum_{k=m}^{\infty} \lambda\left([-k, k] \setminus F_k\right) \le \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-m+1}.$$

Proto $\lambda(\mathbb{R} \setminus F) = 0$.

Množina F i $\mathbb{R} \setminus F$ je borelovská. Nechť $U \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Pak

$$g^{-1}(U) = \begin{cases} \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \setminus F_{n-1}) \cap f^{-1}(U), & 0 \notin U, \\ \bigcup_{n=1}^{\infty} \big((F_n \setminus F_{n-1}) \cap f^{-1}(U)\big) \cup (\mathbb{R} \setminus F), & 0 \in U. \end{cases}$$

Díky spojitosti f na $F_n \setminus F_{n-1}$ máme v obou případech borelovskost množiny $g^{-1}(U)$. Tedy g je borelovská a rovná se f skoro všude.

(b) Mějme funkci f na $\mathbb{R}$ splňující $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x < \infty$ a $\varepsilon \in (0, \infty)$. Můžeme předpokládat, že f je reálná.

Krok 1. Uvažujme funkce $f_n = f\chi_{[-n,n]}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $|f_n - f|^p \to 0$ a $|f_n - f|^p \le (2|f|)^p$. Z Lebesgueovy věty tedy máme

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)|^p \, \mathrm{d}x \to 0.$$

Lze tedy zvolit $n \in \mathbb{N}$ splňující $\|f - f_n\|_p^p < \varepsilon$. Označme $f_1 = f_n$.

Krok 2. Uvažujme funkce

$$g_k(x) = \begin{cases} k, & f_1(x) > k, \\ f_1(x), & |f_1(x)| \le k, , \quad k \in \mathbb{N}. \\ -k, & f_1(x) < -k. \end{cases}$$

Pak $|g_k - f_1| \to 0$ skoro všude a $|g_k - f_1|^p \le |f_1|^p$. Opět z Lebesgueovy věty dostáváme

$$\int_{\mathbb{R}} |g_k(x) - f_1(x)|^p \, \mathrm{d}x = \int_{[-n,n]} |g_k(x) - f_1(x)|^p \, \mathrm{d}x \to_{k\to\infty} 0.$$

Zvolme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $\|g_k - f_1\|_p^p < \varepsilon$ a označme $f_2 = g_k$.

Krok 3. Nechť K je kladná konstanta omezující $|f_2|$ na $\mathbb{R}$. Víme, že $f_2 = 0$ vně intervalu $[-n, n]$. Pomocí Luzinovy věty 16.1.1 najdeme $F \subset [-n, n]$ uzavřenou takovou, že $\lambda([-n, n] \setminus F) < \frac{\varepsilon}{(2K)^p}$ a $f_2|_F$ je spojitá. Díky Větě 16.1.2 najdeme spojitou funkci f_3 na $\mathbb{R}$ rozšiřující $f_2|_F$ a splňující $|f_3| \le K$. Konstrukci dokončíme nalezením spojité funkce f_4 na $\mathbb{R}$ splňující $0 \le f_4 \le 1$, $f_4 = 1$ na $[-n, n]$, $f_4 = 0$ na $\mathbb{R} \setminus [-n-1.n+1]$ a $\int_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]} f_4(x)^p \, \mathrm{d}x <$

$\frac{\varepsilon}{K^p}$ a položením $f_5 = f_3 \cdot f_4$. Pak

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} |f_2(x) - f_5(x)|^p \,\mathrm{d}x \\
&\le \int_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]} |f_3(x) f_4(x)|^p \,\mathrm{d}x + \int_{[-n,n]\setminus F} |f_2(x) - f_3(x)|^p \,\mathrm{d}x + \int_F |f_2(x) - f_3(x)|^p \,\mathrm{d}x \\
&\le K^p \int_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]} f_4(x)^p \,\mathrm{d}x + \lambda([-n,n] \setminus F)(2K)^p + 0 \\
&\le K^p \frac{\varepsilon}{K^p} + (2K)^p \frac{\varepsilon}{(2K)^p} = 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Krok 4. Našli jsme tedy spojitou funkci f_5 na $\mathbb{R}$ splňující

$$\|f - f_5\|_p \le \|f - f_1\|_p + \|f_1 - f_2\|_p + \|f_2 - f_5\|_p \le 2\sqrt[p]{\varepsilon} + \sqrt[p]{2\varepsilon}.$$

Navíc je $f_5 = 0$ vně intervalu $[-n-1, n+1]$. Tím je důkaz dokončen. ■

16.2. Základní pojmy Fourierových řad

16.2.1. Definice. Trigonometrickou řadou rozumíme řadu funkcí

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \tag{16.1}$$

kde $c_k \in \mathbb{C}$ a $k \in \mathbb{Z}$.

Trigonometrickým polynomem rozumíme funkci tvaru

$$x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \tag{16.2}$$

kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $c_k \in \mathbb{C}$, $k = -n, \dots, n$.

16.2.2. Poznámky. (a) Řada (16.1) konverguje, pokud konverguje posloupnost $\{\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}\}_{n=0}^{\infty}$.

(b) **Stupněm** trigonometrického polynomu (16.2) rozumíme největší $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, že $|c_k| + |c_{-k}| \neq 0$. Později uvidíme, že definice je korektní, neboť koeficenty $c_{-n}, \dots, c_n$ jsou pro trigonemtrický polynom určeny jednoznačně (Lemma 16.2.3).

16.2.3. Lemma. Nechť posloupnost $\{\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k funkci f na $\mathbb{R}$. Pak pro každé $k \in \mathbb{Z}$ platí

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} \,\mathrm{d}t.$$

Důkaz. Vezměme $m \in \mathbb{Z}$ pevné. Pak

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i(k-m)t} \rightrightarrows f(t)e^{-imt} \text{ na } \mathbb{R},$$

a tedy z Věty **??** máme

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-imt}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i(k-m)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i(k-m)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-m)t}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi c_m,\end{aligned}$$

jelikož

$$\int_0^{2\pi} e^{ijt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (\cos jt + i \sin jt) = \begin{cases} 0, & j \neq 0, \\ 2\pi, & j = 0. \end{cases}$$

Tím je důkaz hotov. ∎

16.2.4. Označení. Množinu všech 2π-periodických funkcí s hodnotami v $\mathbb{C}$, které jsou integrovatelné na intervalu $[0, 2\pi]$ budeme značit $\mathcal{P}([0, 2\pi])$.

16.2.5. Definice. Nechť $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$. Definujme

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Čísla $\hat{f}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, nazveme **komplexními Fourierovými koeficienty**. Řadu $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx}$ nazýváme **komplexním tvarem Fourierovy řady** funkce f a jejím n**-tým částečným součtem** rozumíme

$$s_n^f(x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikx}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Řekneme, že **součet Fourierovy řady** v bodě $x \in \mathbb{R}$ je roven $s \in \mathbb{C}$, pokud $\lim_{n\to\infty} s_n^f(x) = s$.

16.2.6. Poznámky. (a) Často se místo funkcí $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ pracuje s funkcemi $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$. Pak (komplexním) trigonometrickým polynomem, trigonometrickou řadou a Fourierovou řadou pro $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ rozumíme postupně

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C}),$$

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C}),$$

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), \text{ kde}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \,\mathrm{d}t, \; k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \sin kt \,\mathrm{d}t, \; k = 1, 2, \dots.$$

(b) Výše uvedené pojmy lze uvažovat i pro l-periodické funkce. Pak pracujeme se systémy $\{e^{i\frac{2\pi}{l}kx}\}$ nebo $1, \cos\frac{2\pi}{l}x, \sin\frac{2\pi}{l}x, \cos\frac{2\pi}{l}2x, \dots$.

16.2.7. Lemma. Nechť $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ a $a \in \mathbb{R}$. Pak $\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{a+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Důkaz. Z věty o substituci **??** dostáváme $\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha+2k\pi}^{\beta+2k\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$, $\alpha < \beta$, $k \in \mathbb{Z}$. Nalezneme $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $a \le 2k\pi < a + 2\pi$. Potom

$$\begin{aligned}\int_a^{a+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^{2k\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{2k\pi}^{a+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{a-2(k-1)\pi}^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{a-2(k-1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

■

16.2.8. Definice. (a) Nechť $f, g \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$. Pak **konvoluci** funkcí f a g definujeme jako

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ve Větě 16.2.9 ukážeme, že $f * g$ je dobře definovaná skoro všude konečná měřitelná funkce.

(b) Pro $f \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ definujeme pseudonormu $\|\cdot\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])}$ předpisem

$$\|f\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

16.2.9. Věta (Vlastnosti konvoluce)**.** Nechť $f, g \in \mathcal{P}([0,2\pi])$. Potom je pro skoro všechny $x \in [0,2\pi]$ integrál

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x-t)g(t)|\,\mathrm{d}t \tag{16.3}$$

konečný. Definujeme pro tato x funkci

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t. \tag{16.4}$$

Pak $h \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ a $\|h\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} \le \|f\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])}\,\|g\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])}$.

Pokud g je esenciálně omezená, platí $\|h\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} \le \|f\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])}\,\|g\|_{\infty}$.

Důkaz. Dle Věty 16.1.3(a) existují borelovské funkce f_0, g_0 na $\mathbb{R}$ takové, že se rovnají f, respektive g, skoro všude. Integrály 16.3 a 16.4 se pro žádné x nezmění, nahradíme-li funkci f funkcí f_0 a funkci g funkcí g_0. Proto lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že f i g jsou borelovské.

Vzhledem k tomu, že máme v úmyslu užít Fubiniovy věty, je třeba ukázat, že funkce

$$F(x,t) = f(x-t)g(t)$$

je měřitelná na $[0,2\pi]^2$. Ale zobrazení $[x,t] \mapsto x-t$, $[x,t] \mapsto t$ jsou borelovská na $[0,2\pi]^2$, tedy i složení $[x,t] \mapsto f(x-t)$ a $[x,t] \mapsto g(t)$ jsou borelovská. Proto je součin $F(x,t) = f(x-t)g(t)$ borelovský. Protože

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{[0,2\pi]^2} |F(x,t)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(t)|\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x-t)|\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t \\ &= \|f\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])}\,\|g\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} < \infty, \end{aligned}\tag{16.5}$$

je $|F|$ integrovatelná na $[0,2\pi]^2$. Z Fubiniovy věty vyplývá, že integrál (16.4) existuje pro skoro všechna $x \in [0,2\pi]$ a že $|h|$ je integrovatelná na $[0,2\pi]$. Zjevně je h 2π-periodická, a tedy $h \in \mathcal{P}([0,2\pi])$.

Navíc z 16.5 dostáváme

$$\begin{aligned}\|h\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |h(x)|\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{[0,2\pi]^2} |F(x,t)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &= \|f\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])}\,\|g\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])}\,.\end{aligned}$$

Je-li g esenciálně omezená, je požadovaný odhad zřejmý. ■

16.2.10. Všimněme si, že operace $f * g$ je komutativní, tj. $f * g = g * f$. Z věty o substituci totiž dostáváme

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) g(t) \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x-2\pi}^{x} f(s) g(x-s) \, \mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x-s) f(s) \, \mathrm{d}s \\ &= g * f(x). \end{aligned}$$

16.3. Cesarovská sčítatelnost Fourierových řad

16.3.1. Definice. Řekneme, že řada komplexních čísel $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je **sčítatelná Cesarovou metodou** k číslu $\sigma \in \mathbb{C}$, pokud platí

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1} = \sigma,$$

kde $s_k = \sum_{j=0}^{k} a_j$. Píšeme $(C) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sigma$.

16.3.2. Poznámky. (a) Pokud $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sigma$, pak i $(C) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sigma$ (viz Příklad **??**).

(b) Příkladem cesarovsky sčítatelné řady, která není konvergentní, je řada $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$. Ta není konvergentní, ale $(C) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

16.3.3. Označení. Pro $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ položíme

$$\sigma_n^f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} s_j^f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ označme

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \quad \text{a} \\ K_n(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} D_j(x). \end{aligned}$$

Funkci D_n nazýváme **Dirichletovým jádrem**, K_n pak **Fejérovým jádrem**.

16.3.4. Lemma (Vlastnosti Dirichletova jádra). (a) Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ platí

$$D_n(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x}.$$

(b) Funkce D_n je spojitá, sudá, 2π-periodická a $D_n(0) = 2n+1$.

(c) Platí $\int_0^{2\pi} D_n(x) = 2\pi$.

(d) Pro každé $f \in \mathcal{P}([0,2\pi])$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí $s_n^f(x) = f * D_n(x)$.

Důkaz. (a) Počítejme pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\begin{aligned}
D_n(x) &= \sum_{j=-n}^{n} e^{ijx} = e^{-inx}\sum_{j=0}^{2n}(e^{ix})^j \\
&= e^{-inx}\frac{e^{i(2n+1)x}-1}{e^{ix}-1} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} \\
&= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x}
\end{aligned}$$

(všimněme si, že $e^{i\frac{x}{2}} \neq e^{-i\frac{x}{2}}$).

Tvrzení (b) a (c) jsou zřejmá.

(d) Máme

$$\begin{aligned}
s_n^f(x) &= \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t\right)e^{ikx} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(t)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)D_n(x-t)\,\mathrm{d}t \\
&= D_n * f(x) = f * D_n(x).
\end{aligned}$$

■

16.3.5. Lemma (Vlastnosti Fejérova jádra). (a) Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ platí

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\right)^2.$$

(b) Funkce K_n je spojitá, nezáporná, sudá, 2π-periodická a $K_n(0) = n+1$.

(c) $\int_0^{2\pi} K_n(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi$.

(d) Pro každé $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí $\sigma_n^f(x) = f * K_n(x)$.

(e) Posloupnost $\{K_n(t)\}$ konverguje k 0 lokálně stejnoměrně na $(0, 2\pi)$.

Důkaz. (a) Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ máme $e^{ix} \neq e^{-ix}$ a lze tak psát

$$\left(e^{ix} + e^{3ix} + \cdots + e^{(2n+1)ix}\right) = e^{ix} \frac{1 - e^{2(n+1)ix}}{1 - e^{2ix}}$$
$$= \frac{1}{\sin x} \frac{1}{-2i} \left(1 - \cos 2(n+1)x - i \sin 2(n+1)x\right).$$

Tedy

$$(\sin x + \sin 3x + \cdots + \sin(2n+1)x) = \operatorname{Im}\left(e^{ix} + e^{3ix} + \cdots + e^{(2n+1)ix}\right)$$
$$= \operatorname{Im} \frac{1}{\sin x} \frac{1}{-2i} \left(1 - \cos 2(n+1)x - i \sin 2(n+1)x\right)$$
$$= \frac{1}{\sin x} \frac{1}{2} (1 - \cos 2(n+1)x)$$
$$= \frac{(\sin(n+1)x)^2}{\sin x}.$$

Tedy dle Lemmatu 16.3.4(a) máme pro $\{x \notin 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ rovnosti

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} D_j(x)$$
$$= \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin \frac{1}{2}x} \left(\sin \frac{1}{2}x + \sin \frac{3}{2}x + \cdots + \sin(n + \frac{1}{2})x\right)$$
$$= \frac{1}{n+1} \frac{(\sin(n+1)\frac{x}{2})^2}{(\sin \frac{x}{2})^2}.$$

Tvrzení (b) a (c) jsou zřejmá.

(d) Platí

$$f * K_n(x) = \frac{1}{n+1} \int_0^{2\pi} f(x-t) \sum_{j=0}^{n} D_j(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} s_j^f(x) = \sigma_n^f(x).$$

(e) Zvolme $\delta \in (0, \pi)$ pevně. Potom pro $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ platí

$$0 \leq K_n(x) \frac{1}{n+1} \frac{1}{(\sin \frac{1}{2}\delta)^2}.$$

Odtud máme stejnoměrnou konvergenci jádra K_n k 0 na $[\delta, 2\pi - \delta]$. ∎

16.3.6. Věta (Fejér)**.** Nechť $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ a $x \in \mathbb{R}$.

(a) Má-li f v bodě x konečné jednostranné limity $f(x+)$ a $f(x-)$, pak
$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^f(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)).$$

(b) Je-li f spojitá na intervalu $(a,b) \subset \mathbb{R}$, pak $\{\sigma_n^f\}$ konverguje lokálně stejnoměrně k f na (a,b).

Důkaz. (a) Označme $s = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$. Protože
$$\int_{-\pi}^{0} (f(x-t)-s)K_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\pi}^{0} (f(x+z)-s)K_n(-z)(-1)\,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi} (f(x+t)-s)K_n(t)\,\mathrm{d}t,$$
máme
$$\begin{aligned}
\sigma_n^f(x) - s &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(x-t)-s)K_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t)-s)K_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} (f(x-t)-s)K_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} (f(x-t)-s)K_n(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t) - 2s)K_n(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$
Mějme dáno $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Protože $\lim_{t\to 0_+}(f(x+t) + f(x-t) - 2s) = 0$, existuje $\delta \in (0,\infty)$ takové, že
$$|f(x+t) + f(x-t) - 2s| < \varepsilon, \quad t \in (0,\delta).$$
K tomuto δ najdeme dle Lemmatu 16.3.5(e) index $n_0 \in \mathbb{N}$ takový, že $K_n(t) \le \varepsilon$ pro $n \ge n_0$ a $t \in [\delta,\pi]$. Pro tato n pak máme
$$\begin{aligned}
\left|\sigma_n^f(x) - s\right| &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} |f(x+t) + f(x-t) - 2s|\, K_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta} |f(x+t) + f(x-t) - 2s|\, K_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} |f(x+t) + f(x-t) - 2s|\, K_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&\le \varepsilon\frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta} K_n(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} |f(x+t) + f(x-t) - 2s|\,\varepsilon\,\mathrm{d}t \\
&\le \varepsilon + \varepsilon\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (|f(x+t)| + |f(x-t)| + 2s)\,\mathrm{d}t \\
&\le \varepsilon + \varepsilon\left(\int_x^{x+\pi} |f(u)|\,\mathrm{d}u + \int_{x-\pi}^{x} |f(u)|\,\mathrm{d}u + s\right) \\
&\le \varepsilon + \varepsilon\left(2\,\|f\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} + s\right).
\end{aligned}$$

Tedy $\sigma_n^f(x) \to s$ pro $n \to \infty$.

(b) Zvolme $[A, B] \subset (a, b)$ a najděme $\omega \in (0, \pi)$ takové, že $[A - \omega, B + \omega] \subset (a, b)$. Označíme-li $M = \sup\{|f(z)|;\ z \in [A, B]\}$, pak $M \in \mathbb{R}$ dle Věty **??**. Mějme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ dáno. Díky Větě **??** najdeme $\delta \in (0, \omega)$ takové, že

$$\forall x \in [A, B]\ \forall t \in (-\delta, \delta) : |f(x + t) - f(x)| < \varepsilon.$$

Dále nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ a $t \in [\delta, 2\pi - \delta]$ platí $K_n(t) \leq \varepsilon$. Potom pro každé $x \in [A, B]$ a $n \geq n_0$ platí

$$\begin{aligned}
&\left|\sigma_n^f(x) - f(x)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x - t) - f(x))\, K_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} |f(x - t) - f(x)|\, K_n(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |f(x - t) - f(x)|\, K_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} |f(x - t) - f(x)|\, K_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} |f(x - t) - f(x)|\, \varepsilon\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \varepsilon K_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} |f(x - t) - f(x)|\, \varepsilon\,\mathrm{d}t \\
&\leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(z)|\,\mathrm{d}z + |f(x)| + 1\right)\varepsilon \\
&\leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(z)|\,\mathrm{d}z + M + 1\right)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Tedy $\sigma_n^f \rightrightarrows f$ na $[A, B]$. ■

16.3.7. Důsledek. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je spojitá 2π-periodická funkce. Potom existuje posloupnost trigonometrických polynomů, která stejnoměrně konverguje k f na $\mathbb{R}$.

Důkaz. Podle Fejérovy věty 16.3.6 platí $\sigma_n^f \rightrightarrows f$ na $[0, 2\pi]$, tedy i na $\mathbb{R}$. Vzhledem k tomu, že σ_n^f jsou trigonometrické polynomy, je důkaz dokončen. ■

16.3.8. Poznámka. Je-li f reálná, jsou i funkce σ_n^f reálné.

16.3.9. Věta. Nechť $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$. Potom $\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sigma_n^f \right\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} = 0$.

Důkaz. Nechť $\varepsilon \in (0, \infty)$ je dáno. Nalezneme spojitou funkci $g \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ takovou, že $\|f - g\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} < \varepsilon$ (viz Věta 16.1.3(b)). Protože $\sigma_n^g \rightrightarrows g$ na $\mathbb{R}$, platí $\|g - \sigma_n^g\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} \to 0$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je zvoleno tak, že $\|g - \sigma_n^g\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} < \varepsilon$ pro $n \geq n_0$. Pro $n \geq n_0$ pak máme

$$\begin{aligned}\left\| f - \sigma_n^f \right\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} &\leq \|f - g\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} + \|g - \sigma_n^g\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} + \left\|\sigma_n^g - \sigma_n^f\right\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \|(g - f) * K_n\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} \\ &\leq 2\varepsilon + \|g - f\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} \|K_n\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} \\ &\leq 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. ■

16.3.10. Věta (Riemannovo-Lebesgueovo lemma)**.** Nechť $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$. Pak $\lim_{k\to\pm\infty} \hat{f}(k) = 0$.

Důkaz. Mějme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ dáno. Dle Věty 16.1.3(b) existuje spojitá funkce $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ taková, že $\|f - g\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} < \varepsilon$. Dále nalezneme díky Větě 16.3.7 trigonometrický polynom P takový, že $\|g - P\|_\infty < \varepsilon$. Pak máme

$$\|f - P\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} \leq \|f - g\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} + \|g - P\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} \leq 2\varepsilon.$$

Vezměme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{Z}, |n| \geq n_0 : \hat{P}(n) = 0.$$

Pak pro $n \in Z$, $|n| \geq n_0$ platí

$$\begin{aligned}\left|\hat{f}(n)\right| = \left|\hat{f}(n) - \hat{P}(n)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(t) - P(t))\, e^{-int}\right| \\ &\leq \|f - P\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} \leq 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy $\lim_{k\to\pm\infty} \hat{f}(k) = 0$. ■

16.3.11. Věta (O lokalizaci)**.** Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ a $f(t) = g(t)$ pro $t \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Potom $\lim_{n\to\infty} s_n^f(x) - s_n^g(x) = 0$.

Důkaz. Důkaz plyne z Riemannovo-Lebesgueovo lemmatu 16.3.10, jelikož

$$h(t) = \frac{f(x - t) - g(x - t)}{\sin \frac{t}{2}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

je dle předpokladu integrovatelná na $[0, 2\pi]$ ($h(t) = 0$ pro $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$), a tedy máme díky rovnostem

$$\begin{aligned} s_n^f(x) - g_n^f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - g(x-t))\, D_n(t)\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \sin(n + \frac{1}{2})t\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(h(t) \frac{1}{2i} e^{i\frac{t}{2}} e^{int} - h(t) \frac{1}{2i} e^{-i\frac{t}{2}} e^{-int} \right) \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

požadovaný výsledek $\lim_{n\to\infty} \left(s_n^f(x) - s_n^g(x) \right) = 0$. ■

16.3.12. Věta. Nechť $f, g \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$. Pokud $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$, potom $f = g$ skoro všude.

Důkaz. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme $\sigma_n^f = \sigma_n^g$. Podle Věty 16.3.9 platí $\left\| \sigma_n^f - f \right\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} \to 0$, $\left\| \sigma_n^g - g \right\|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} \to 0$, a tedy $\| f - g \|_{\mathcal{P}([0,2\pi])} = 0$. Proto $f = g$ skoro všude. ■

16.4. Bodová konveregence Fourierových řad

16.4.1. Věta (Hardy)**.** Nechť $\{a_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost komplexních funkcí na množině M taková, že existuje $K \in \mathbb{R}$ splňující $|k a_k(x)| \le K$ pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in M$. Pokud $(C) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) \rightrightarrows s(x)$ na množině M, potom $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) \rightrightarrows s(x)$ na M.

Důkaz. Označme pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in M$

$$\begin{aligned} s_n(x) &= a_0(x) + \cdots + a_n(x), \\ \sigma_n(x) &= \frac{1}{n+1} (s_0(x) + \cdots + s_n(x)). \end{aligned}$$

Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ je dáno. Nalezneme $\lambda \in (1, \infty)$ takové, že $K(\lambda - 1) < \varepsilon$. Potom

$$\sum_{n<k\le[\lambda n]} |a_k(x)| \le \frac{K}{n}(\lambda n - n) = K(\lambda - 1). \tag{16.6}$$

Elementárními úpravami obdržíme

$$\begin{aligned} &([\lambda n] + 1)\, \sigma_{[\lambda n]}(x) - (n+1)\sigma_n(x) = s_{n+1}(x) + \cdots + s_{[\lambda n]}(x) \\ &= ([\lambda n] - n)\, s_n(x) + ([\lambda n] - n)\, a_{n+1}(x) + ([\lambda n] - n - 1)\, a_{n+2}(x) + \cdots + a_{[\lambda n]}(x). \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned} &([\lambda n]-n)\,(s_n(x)-\sigma_n(x)) \\ &= ([\lambda n]+1)\,\sigma_{[\lambda n]}(x)-(n+1)\sigma_n(x)-\sum_{n<k\le[\lambda n]}([\lambda n]+1-k)\,a_k(x)-([\lambda n]-n)\,\sigma_n(x) \\ &= ([\lambda n]+1)\,\sigma_{[\lambda n]}(x)-([\lambda n]+1)\,\sigma_n(x)-\sum_{n<k\le[\lambda n]}([\lambda n]+1-k)\,a_k(x). \end{aligned}$$

Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $(\lambda-1)n_0-1>0$. Potom pro $n \ge n_0$ máme

$$s_n(x)-\sigma_n(x) = \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}\left(\sigma_{[\lambda n]}(x)-\sigma_n(x)\right)-\frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{n<k\le[\lambda n]}([\lambda n]+1-k)\,a_k(x),$$

a tedy z (16.6) platí

$$\begin{aligned} &|s_n(x)-\sigma_n(x)| \\ &\le \frac{\lambda n+2}{(\lambda-1)n-1}\left(\left|\sigma_{[\lambda n]}(x)-s(x)\right|+|\sigma_n(x)-s(x)|\right)-\frac{\lambda n+1-n}{[\lambda n]-n}\sum_{n<k\le[\lambda n]}|a_k(x)| \\ &\le \frac{\lambda n+2}{(\lambda-1)n-1}\left(\left|\sigma_{[\lambda n]}(x)-s(x)\right|+|\sigma_n(x)-s(x)|\right)+\frac{(\lambda-1)n+1}{(\lambda-1)n-1}K(\lambda-1). \end{aligned}$$

Tedy

$$\limsup_{n\to\infty}\|s_n(x)-\sigma_n(x)\|_\infty \le \frac{\lambda}{\lambda-1}\cdot 0+K(\lambda-1)<\varepsilon.$$

Jelikož ε bylo libovolné, platí

$$\lim_{n\to\infty}\|s_n(x)-\sigma_n(x)\|_\infty = 0,$$

a tedy

$$s_n(x) \rightrightarrows s(x).$$

■

16.4.2. Věta. Nechť f je 2π-periodická funkce s konečnou variací na $[0,2\pi]$. Pak existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $\left|k\hat{f}(k)\right| \le K$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$.

Důkaz. Jelikož pro $n \in \mathbb{Z}$ platí

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x,$$

substitucí $y = x-\frac{\pi}{n}$ pro $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ dostaneme

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{n}}^{2\pi-\frac{\pi}{n}} f(y+\frac{\pi}{n})e^{-iny+i\pi}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y+\frac{\pi}{n})e^{-iny}\,\mathrm{d}y.$$

Proto

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2}(\hat{f}(n) + \hat{f}(n)) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \Big(f(x) - f(x+\frac{\pi}{n})\Big)\, e^{-inx}\,\mathrm{d}x,$$

a tedy

$$\left|\hat{f}(n)\right| \leq \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(x) - f(x+\frac{\pi}{n})\right|\,\mathrm{d}x.$$

Po další substituci obdržíme použitím periodicity rovnost

$$\int_0^{2\pi} \left|f(x+k\frac{\pi}{n}) - f(x+(k-1)\frac{\pi}{n})\right|\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \left|f(x+\frac{\pi}{n}) - f(x)\right|\,\mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Máme tedy pro $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ odhad

$$\begin{aligned}
\left|\hat{f}(n)\right| &\leq \frac{1}{8\pi n}\sum_{k=1}^{2n}\int_0^{2\pi} \left|f(x+\frac{\pi}{n}) - f(x)\right|\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8\pi n}\sum_{k=1}^{2n}\int_0^{2\pi} \left|f(x+k\frac{\pi}{n}) - f(x+(k-1)\frac{\pi}{n})\right|\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8\pi n}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{2n} \left|f(x+k\frac{\pi}{n}) - f(x+(k-1)\frac{\pi}{n})\right|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{8\pi n}\int_0^{2\pi} V(f;0,2\pi)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{V(f;0,2\pi)}{4\pi n}.
\end{aligned}$$

■

16.4.3. Věta (Jordanovo-Dirichletovo kritérium)**.** Nechť $f \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ je funkce s konečnou variací na intervalu $[0,2\pi]$.

(a) Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom má funkce f v bodě x vlastní limitu zleva i zprava (označme je po řadě $f(x-)$ a $f(x+)$) a platí

$$\lim_{n\to\infty} s_n^f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+) + f(x-)\right).$$

(b) Je-li navíc f spojitá na otevřeném intervalu $(a,b) \subset \mathbb{R}$, pak $\{s_n^f\}$ konverguje lokálně stejnoměrně k f na (a,b).

Důkaz. (a) Nechť f je funkce s konečnou variací. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že f je reálná. Pak $f = f_1 - f_2$, kde f_1, f_2 jsou neklesající (viz Věta **??**). Protože každá neklesající funkce má vlastní jednostranné limity (Věta **??**), má je i f. Dle Věty 16.3.6 platí $\sigma_n(f)(x) \to \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$.

Protože dle Věty 16.4.2 splňují koeficienty odhady nutné pro použití Hardyho věty 16.4.1, konvergují k $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$ i součty $s_n^f(x)$.

(b) Postupujme obdobně jako v (a), jenom použijeme tvrzení (b) z Věty 16.3.6. ∎

16.4.4. Věta (Diniho kritérium)**.** Nechť $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$, $x \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{C}$ a nechť existuje $\delta \in (0, \infty)$ takové, že

$$\int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s}{t} \, \mathrm{d}t$$

konverguje. Potom $\lim_{n\to\infty} s_n^f(x) = s$.

Důkaz. Předpokládejme, že $\delta \in (0, \pi)$. Z Lemmatu 16.3.4(d),(c) máme

$$\begin{aligned}
s_n^f(x) - s &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) D_n(t) \, \mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s D_n(t) \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - s) \, D_n(t) \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} (f(x-t) - s) \, D_n(t) \, \mathrm{d}t + \int_0^{\pi} (f(x-t) - s) \, D_n(t) \, \mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t) - 2s) \, D_n(t) \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s}{\sin \frac{t}{2}} \sin(n + \frac{1}{2})t \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s}{t} \frac{t}{\sin \frac{t}{2}} \sin(n + \frac{1}{2})t \, \mathrm{d}t \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_\delta^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s}{\sin \frac{t}{2}} \sin(n + \frac{1}{2})t \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s}{t} \frac{t}{\sin \frac{t}{2}} \frac{1}{2i} (e^{i\frac{t}{2}} e^{int} - e^{-i\frac{t}{2}} e^{-int}) \, \mathrm{d}t \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_\delta^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s}{\sin \frac{t}{2}} \frac{1}{2i} (e^{i\frac{t}{2}} e^{int} - e^{-i\frac{t}{2}} e^{-int}) \, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Protože je funkce

$$t \mapsto \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s}{t} \frac{t}{\sin \frac{t}{2}}$$

integrovatelná dle předpokladu na na $(0, \delta)$, stejně jako je integrovatelná funkce
$$t \mapsto \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s}{\sin \frac{t}{2}}$$
na (δ, π), oba integrály konvergují k 0 dle Riemannovo-Lebesgueovo lemmatu 16.3.10. Tedy $s_n^f(x) - s \to 0$. ■

16.4.5. Věta. Nechť $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ a $x \in \mathbb{R}$.

(a) Existují-li vlastní jednostranné limity $f(x-)$ a $f(x+)$ a také konečné limity
$$\lim_{t \to x_-} \frac{f(t) - f(x-)}{t - x}, \quad \lim_{t \to x_+} \frac{f(t) - f(x+)}{t - x},$$
pak $s_n^f(x) \to \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$. Speciálně, pokud f má konečné jednostranné derivace v x, pak $s_n^f(x) \to f(x)$.

(b) Nechť existují čísla $\alpha, \delta, K \in (0, \infty)$ taková, že
$$\forall t \in (-\delta, \delta) : |f(x+t) - f(x)| \leq K\,|t|^{\alpha}.$$
Pak $s_n^f(x) \to f(x)$.

Důkaz. (a) Díky předpokladům vidíme, že existuje $\delta \in (0, \infty)$ takové, že obě funkce
$$t \mapsto \frac{1}{t}(f(x+t) - f(x+)), \quad t \mapsto \frac{1}{t}(f(x-t) - f(x-))$$
jsou omezené na $(0, \delta)$. Pro $s = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$ pak dostáváme omezenost funkce
$$t \mapsto \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s}{t} = \frac{f(x+t) - f(x+)}{t} + \frac{x(-t) - f(x-)}{t}$$
na $(0, \delta)$. Z Věty 16.4.4 pak plyne závěr.

(b) Mějme příslušná α, δ a K a položme $s = f(x)$. Pak pro $t \in (0, \delta)$ platí
$$\frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2s|}{t} \leq \frac{|f(x+t) - f(x)|}{t} + \frac{f(x-t) - f(x)}{t} \leq 2Kt^{\alpha-1}.$$
Tedy je funkce
$$t \mapsto \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2s|}{t}$$
integrovatelná na $(0, \delta)$, takže tvrzení opět plyne z Diniho kritéria 16.4.4. ■

16.5. Fourierovy řady v Hilbertových prostorech

Budeme pracovat s vektorovými prostory nad tělesem $\mathbb{F}$ reálných nebo komplexních čísel.

16.5.1. Věta (Cauchy-Schwarz)**.** Nechť $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je unitární prostor. Pak

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}, \quad x, y \in X.$$

Důkaz. K důkazu zvolme $x, y \in X$. Pak je funkce

$$t \mapsto \langle x - ty, y - ty\rangle, \quad t \in \mathbb{R},$$

reálný kvadratický polynom nezáporný na $\mathbb{R}$, protože

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x - ty, y - ty\rangle = \langle x, x\rangle + t^2\langle y, y\rangle - t\langle y, x\rangle - t\langle x, y\rangle \\ &= \|x\|^2 + t^2\|y\|^2 - t(\langle x, y\rangle + \overline{\langle y, x\rangle}) \\ &= t^2\|y\|^2 - 2t\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \|x\|^2. \end{aligned}$$

Tento polynom tedy musí mít nekladný diskriminant, tj.

$$4(\operatorname{Re}\langle x, y\rangle)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0.$$

Dostáváme

$$|\operatorname{Re}\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Vezměme nyní $\alpha \in \mathbb{C}$ z jednotkové kružnice splňující $|\langle x, y\rangle| = \alpha\langle x, y\rangle$. Pak z právě dokázané nerovnosti máme

$$\|x\|\|y\| = \|\alpha x\|\|y\| \geq |\operatorname{Re}\langle \alpha x, y\rangle| = |\operatorname{Re}\alpha\langle x, y\rangle| = |\langle x, y\rangle|.$$

■

16.5.2. Věta. Nechť $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je unitární prostor. Pak $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ je norma na X.

Důkaz. Vlastnosti normy pro zobrazení $x \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $x \in H$, snadno plynou z vlastností skalárního součinu. Trojúhelníková nerovnost pak platí díky Větě 16.5.1, protože

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

■

16.5.3. Lemma. Nechť X je unitární prostor. Pak je zobrazení $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{F}$ je spojité.

Důkaz. Nechť máme dány posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ v X konvergující po řadě k x a y. Pak $\|x_n\| \to \|x\|$ a tedy posloupnost $\{\|x_n\|\}$ je omezená. Proto rozdíl

$$\begin{aligned}|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \\ &= |\langle x_n, y_n - y\rangle + \langle x_n - x, y\rangle| \\ &\le \|x_n\|\,\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\,\|y\|\end{aligned}$$

konverguje k 0. ■

16.5.4. Definice. Nechť X je unitární prostor. Pokud X je úplný v metrice indukované normou $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, pak se nazývá **Hilbertovým prostorem**.

16.5.5. Definice. Nechť X je unitární prostor, Γ indexová množina a $\{x_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je systém prvků prostoru X.

- Řekneme, že systém $\{x_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je **ortogonální**, pokud platí
$$\forall \gamma, \gamma' \in \Gamma, \gamma \neq \gamma' : \langle x_\gamma, x_{\gamma'}\rangle = 0.$$
Je-li navíc $\|x_\gamma\| = 1$ pro každé $\gamma \in \Gamma$, nazýváme systém $\{x_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ **ortonormální**.
- Ortogonální systém $\{x_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je **úplný**, pokud jeho lineární obal je hustý v X.
- Ortogonální systém $\{x_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je **maximální**, jestliže neexistuje prvek $x \in X \setminus \{0\}$ kolmý na každý vektor x_γ, $\gamma \in \Gamma$.

16.5.6. Věta. Nechť $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je ortogonální posloupnost v Hilbertově prostoru X.

(a) Řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^2$.

(b) Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$, potom
$$\left\|\sum_{n=1}^\infty x_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^2.$$

Důkaz. (a) Nechť $\{s_k\}$ značí posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^\infty x_n$. Předpokládejme nejprve, že $s_n \to s$ pro nějaké $s \in X$, tj. řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje. Pak ale ze spojitosti skalárního součinu a ortogonality prvků $\{x_n\}$ máme

$$\begin{aligned}\langle s, s\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle s_k, s_k\rangle &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^k \sum_{m=1}^k \langle x_n, x_m\rangle \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^k \langle x_n, x_n\rangle = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^k \|x_n\|^2 .\end{aligned}$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ je konvergentní a její součet je $\|s\|^2$.

Předpokládejme na druhou stranu, že $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ konverguje. Ukážeme, že posloupnost $\{s_k\}$ je cauchyovská v X. Pro dané $\varepsilon \in (0, \infty)$ totiž najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $l \geq k \geq n_0$ platí

$$\sum_{n=k}^{l} \|x_n\|^2 < \varepsilon.$$

Pak pro $k, l \in \mathbb{N}$, $l > k \geq n_0$ dostáváme

$$\|s_l - s_k\|^2 = \langle x_{k+1} + \cdots + x_l, x_{k+1} + \cdots + x_l \rangle = \sum_{n=k+1}^{l} \|x_n\|^2 < \varepsilon.$$

Díky úplnosti prostoru X tedy částečné součty řady $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ tvoří konvergentní posloupnost, tj. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje.

Vzhledem k tomu, že tvrzení (b) jsme dokázali v první části důkazu (a), jsem s důkazem věty hotovi. ■

16.5.7. Věta. Nechť $\{v_n\}$ je ortogonální posloupnost nenulových prvků v unitárním prostoru X. Nechť $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n$, $c_n \in \mathbb{F}$. Potom $c_n = \frac{\langle x, v_n \rangle}{\|v_n\|^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Díky spojitosti skalárního součinu máme pro každé $n \in \mathbb{N}$ rovnost

$$\langle x, v_n \rangle = \lim_{k \to \infty} \langle \sum_{j=1}^{k} c_j v_j, v_n \rangle = c_n \langle v_n, v_n \rangle.$$

■

16.5.8. Definice. Nechť $\{v_n\}$ je ortogonální posloupnost nenulových prvků v unitárním prostoru X a $x \in X$. Platí-li $c_n = \frac{\langle x, v_n \rangle}{\|v_n\|^2}$, $n \in \mathbb{N}$, nazveme $\{c_n\}$ **Fourierovy koeficienty** x **vzhledem k** $\{v_n\}$.

16.5.9. Věta. Nechť X je unitární prostor a $\{v_n\}$ je ortonormální posloupnost v X. Nechť $x \in X$ a $\{c_n\}$ jsou Fourierovy koeficienty prvku x vzhledem k $\{v_n\}$. Potom platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \|x\|^2 \qquad \text{(Besselova nerovnost).}$$

Pokud $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \|x\|^2 \qquad \text{(Parsevalova rovnost)}$$

Důkaz. Vezměme $k \in \mathbb{N}$ pevné a položme $s_k = \sum_{n=1}^{k} c_n v_n$. Pak

$$\forall n \in \{1, \dots, k\} : \langle x - s_k, v_n \rangle = \langle x, v_n \rangle - c_n = 0.$$

Tedy i $\langle x - s_k, s_k \rangle = 0$. Proto

$$\|x\|^2 = \|x - s_k + s_k\|^2 = \|x - s_k\|^2 + \|s_k\|^2 \geq \|s_k\|^2 = \sum_{n=1}^{k} |c_n|^2.$$

Jelikož $k \in \mathbb{N}$ bylo libovolné, Besselova nerovnost je ověřena.

Platí-li $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n$, pak máme z Věty 16.5.6(b) vztah

$$\|x\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n \right\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|c_n v_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2,$$

tj. Parsevalovu rovnost. ■

16.5.10. Definice. Nechť X je normovaný lineární prostor. Posloupnost $\{v_n\}$ prvků z X se nazývá **Schauderova báze**, jestliže pro každý bod $x \in X$ existuje právě jedna posloupnost $\{c_n\}$ prvků z $\mathbb{F}$, pro kterou platí $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n$.

16.5.11. Věta. Nechť X je Hilbertův prostor a $\{v_n\}$ je ortogonální systém nenulových prvků prostoru X. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(i) $\{v_n\}$ je Schauderova báze,
(ii) $\{v_n\}$ je úplný ortogonální systém,
(iii) $\{v_n\}$ je maximální ortogonální systém.

Důkaz. (i) $\implies$ (ii) Nechť $\{v_n\}$ je Schauderova báze. Vzhledem k tomu, že každý prvek $x \in X$ je pak limitou lineárních kombinací prvků $\{v_n\}$, je lineární obal $\{v_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ hustý v X. Tedy $\{v_n\}$ je úplný.

(ii) $\implies$ (iii) Nechť x je vektor kolmý na všechny v_n, $n \in \mathbb{N}$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ je libovolné. Díky (ii) najdeme čísla $c_1, \dots, c_n$ taková, že $\left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \right\|^2 < \varepsilon$. Pak

$$\varepsilon > \left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \right\| = \|x\|^2 + \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \right\|^2 \geq \|x\|^2 .$$

Jelikož ε bylo libovolné, $\|x\| = 0$ a $\{v_n\}$ je maximální systém.

(iii) $\implies$ (i) Mějme dáno $x \in X$. Položme $c_n = \frac{\langle x, v_n \rangle}{\|v_n\|}$, $n \in \mathbb{N}$, tj. c_n jsou Fourierovy koeficienty x vzhledem k ortonormálnímu systému $\{\frac{v_n}{\|v_n\|}\}$. Díky Besselově nerovnosti (Věta 16.5.9 platí

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left\| c_n \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\|^2 .$$

Podle Věty 16.5.6(a) je řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{v_n}{\|v_n\|}$ konvergentní; označme tedy její součet jako y. Pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}\langle x - y, v_k \rangle &= \langle x - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{v_n}{\|v_n\|}, v_k \rangle = \lim_{j\to\infty} \langle x - \sum_{n=1}^{j} c_n \frac{v_n}{\|v_n\|}, v_k \rangle \\ &= \langle x, v_k \rangle - \langle x, v_k \rangle = 0.\end{aligned}$$

Tedy $x - y$ je vektor, jehož skalární součin se všemi vektory v_k, $k \in \mathbb{N}$, je 0. Z maximality systému $\{v_n\}$ plyne $x - y = 0$, neboli

$$x = y = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{v_n}{\|v_n\|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle x, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n.$$

Zbývá již jen dokázat, že koeficienty $c_n = \frac{\langle x, v_n \rangle}{\|v_n\|^2}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou jednoznačně určeny. To ale plyne z Věty 16.5.7. ■

16.5.12. Věta. Je-li X nekonečně-dimenzionální separabilní Hilbertův prostor, má ortonormální Schauderovu bázi.

Navíc je každý nekonečně-dimenzionální separabilní Hilbertův prostor s X izometricky izomorfní.

Důkaz. Vezměme spočetnou hustou množinu $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ v X a indukcí z ní vybereme množinu $\{x_{n_k}\}$ nenulových vektorů takovou, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ je množina $\{x_{n_1}, \dots, x_{n_k}\}$ lineárně nezávislá a její lineární obal je roven lineárnímu obalu množiny $\{x_1, \dots, x_{n_k}\}$.

Postupujeme takto: Bez újmy na obecnosti předpokládáme, že všechny vektory x_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou nenulové a položíme $n_1 = 1$. Předpokládejme nyní, že máme vybrány indexy $n_1, \dots, n_k$ takové, že vektory $\{x_{n_1}, \dots, x_{n_k}\}$ jsou lineárně nezávislé a jejich lineární obal M je roven lineárnímu obalu množiny $\{x_1, \dots, x_{n_k}\}$. Položme $n_{k+1} = \min\{n > n_k;\ x_n \notin M\}$. Pak $x_{n_k+1}, \dots, x_{n_{k+1}-1} \in M$, a tedy lineární obal množiny $\{x_{n_1}, \dots, x_{n_{k+1}}\}$ je roven lineárnímu obalu množiny $\{x_1, \dots, x_{n_{k+1}}\}$. Navíc je $x_{n_{k+1}} \notin M$, a tedy je množina $\{x_{n_1}, \dots, x_{n_{k+1}}\}$ lineárně nezávislá.

Označme nyní vektory $\{x_{n_k}\}$ jako $\{y_k\}$. Pak $\{y_k\}$ je lineárně nezávislá množina vektorů, jejíž lineární obal je roven lineárnímu obalu $\{x_n\}$, tj. je hustý v X. Gramovým-Schmidtovým ortogonalizačním procesem nyní sestrojíme vektory $\{u_k\}$, které budou navzájem kolmé a bude pro ně platit, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ je lineární obal $\{u_1, \dots, u_k\}$ roven lineárnímu obalu $\{y_1, \dots, y_k\}$. Opět postupujeme induktivně. V prvním kroku položíme

$u_1 = y_1$. Máme-li nyní navzájem kolmé vektory $\{u_1, \dots, u_k\}$, jejichž lineární obal souhlasí s lineárním obalem množiny $\{y_1, \dots, y_k\}$, položíme

$$u_{k+1} = y_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle y_{k+1}, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i .$$

Pak u_{k+1} je kolmý na všechny $u_1, \dots, u_k$, je nenulový a lineární obal $\{u_1, \dots, u_{k+1}\}$ je roven lineárnímu obalu množiny $\{y_1, \dots, y_k\}$. Tím je konstrukce ukončena.

Máme tedy ortogonální systém $\{u_k\}$ nenulových vektorů, jehož lineární obal je hustý v X. Uvažujeme-li nyní místo něj systém $\{\frac{u_k}{\|u_k\|}\}$, dostáváme úplný ortonormální systém, a tedy bázi (Věta 16.5.11).

K důkazu druhé části tvrzení stačí dokázat, že každý nekonečně-dimenzionální prostor je izometricky izomorfní s ℓ^2. Vezměme tedy ortonormální bázi $\{v_n\}$ prostoru X a definujme zobrazení $F : X \to \ell^2$ jako

$$Fx = \{\langle x, v_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}, \quad x \in X.$$

Dle Parsevalovy rovnosti 16.5.9 je

$$\|Fx\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, v_n \rangle|^2 = \|x\|_X^2 < \infty, \quad x \in X,$$

a tedy je F skutečně zobrazení do ℓ^2. Navíc je F izometrické a zjevně lineární. Zbývá ukázat jeho surjektivitu. Máme-li tedy dán prvek $c = \{c_n\} \in \ell^2$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n$ je konvergentní dle Věty 16.5.6. Položíme-li $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n$, pak $Fx = c$ dle Věty 16.5.7, a F je tedy na. Tím je důkaz dokončen. ■

16.5.13. Věta. Prostor $L^2(0, 2\pi)$ se skalárním součinem

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g}(x)\,\mathrm{d}x, \quad f, g \in L^2(0, 2\pi),$$

tvoří Hilbertův prostor. Systém $e^{i0x}, e^{i1x}, e^{-i1x}, e^{i2x}, e^{-2x}, \dots$ tvoří ortonormální bázi $L^2(0, 2\pi)$.

Důkaz. Zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je zjevně skalární součin, přičemž nulovost funkce f splňující $\langle f, f \rangle = 0$ plyne snadno z vlastností integrálu. Úplnost prostoru $L^2(0, 2\pi)$ je pak dokázána v [,].

Funkce $e^{i0x}, e^{i1x}, e^{-i1x}, e^{i2x}, e^{-2x}, \dots$ zřejmě tvoří ortonormální systém. Ukažme, že jeho lineární obal je hustý v $L^2(0, 2\pi)$. Mějme tedy danou funkci $f \in L^2(0, 2\pi)$ a $\varepsilon \in (0, \infty)$. Z Věty 16.1.3(b) najdeme spojitou funkci

$g : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$ takovou, že $\|f - g\|_2 < \varepsilon$. Podle Věty 16.3.7 existuje trigonometrický polynom P splňující $\|g - P\|_\infty < \varepsilon$. Pak

$$\begin{aligned}\|f - P\|_2 &\le \|f - g\|_2 + \|g - P\|_2 \le \varepsilon + \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} |g(x) - P(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \varepsilon\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right).\end{aligned}$$

Dle Věty 16.5.11 je tedy systém $e^{i0x}, e^{i1x}, e^{-i1x}, e^{i2x}, e^{-2x}, \ldots$ ortonormální bází v $L^2(0, 2\pi)$. ■

16.5.14. Důsledek. Nechť $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ a $|f|^2$ je integrovatelná na $[0, 2\pi]$. Potom

(a) f je integrovatelná na $[0, 2\pi]$,

(b) platí

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx} \quad \text{v } L^2(0, 2\pi)$$

(c) a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(n)\right|^2.$$

Důkaz. (a) Je-li $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x$ konečný, je z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti konečný i integrál

$$\int_0^{2\pi} |f(x)| \,\mathrm{d}x \le \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

(b) Protože je systém $e^{i0x}, e^{i1x}, e^{-i1x}, e^{i2x}, e^{-2x}, \ldots$ ortonormální bází v $L^2(0, 2\pi)$ podle Věty 16.5.13, ve smyslu prostoru $L^2(0, 2\pi)$ platí

$$\begin{aligned}f &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, e^{inx}\rangle e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx} \,\mathrm{d}x\right) e^{inx} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx}.\end{aligned}$$

(c) Parsevalova rovnost 16.5.9 pak dostává tvar

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \|f\|_{L^2(0,2\pi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\langle f, e^{inx}\rangle\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(n)\right|.$$

■

16.5.15. Věta (Riesz-Fischer). Nechť c_n, $n \in \mathbb{Z}$, jsou komplexní čísla splňující $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$. Pak existuje $f \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ taková, že $|f|^2$ je integrovatelná na $[0,2\pi]$ a $\hat{f}(n) = c_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Důkaz. Opět použijeme fakt, že systém $e^{i0x}, e^{i1x}, e^{-i1x}, e^{i2x}, e^{-2x}, \dots$ tvoří ortonormální bázi v $L^2(0,2\pi)$. Tedy podle Věty 16.5.6 je funkce

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

prvkem $L^2(0,2\pi)$. Věta 16.5.7 pak dává, že

$$c_n = \langle f, e^{inx} \rangle = \hat{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

■

16.6. Teoretické příklady k Fourierovým řadám

16.6.1. Příklad. Dokžte, že reálná funkce $f(x)$ na $\mathbb{R}$ je trigonometrický polynom právě thedy, když existuje polynom dvou proměnných $P(u,v)$ takový, že platí $f(x) = P(\cos x, \sin x)$.

Řešení. Předpokládejm nejprve, že f je trigonometrický polynom, tj.

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zjevně stačí dokázat, že každý výraz $\cos kx$ a $\sin kx$ je vyjádřitelný jako $P(\cos x, \sin x)$ pro nějaký polynom $P(u,v)$ dvou proměnných. Budeme postupovat indukcí podle k. Je zjevné, že $\cos x$ i $\sin x$ je vyjádřitelný jako $P(\cos x, \sin x)$ pro nějaký polynom dvou proměnných. Tedy tvrzení platí pro $k = 1$. Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro každé $j \in \{1, \dots, k\}$ a dokažme, že $\cos(k+1)x$ a $\sin(k+1)x$ lze takto vyjádřit. Ze vzorců

$$\cos(k+1)x = \cos kx \cos x - \sin kx \sin x,$$
$$\sin(k+1)x = \sin kx \cos x + \cos kx \sin x$$

a indukčního předpokladu však požadované tvrzení plyne.

Nechť nyní $f(x) = P(\cos x, \sin x)$ pro nějaký polynom P dvou proměnných. Zřejmě stačí dokázat, že $\cos^n x \sin^m x$ je trigonometrický polynom pro každé $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Postupujme indukcí podle m. Nechť $m = 0$ a indukcí podle n dokazujme, že $\cos^n x$ je trigonometrický polynom. To je zřejmé pro

$n = 0$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro každé $j \in \{0, \dots, n\}$. Pak lze dle indukčního předpokladu psát

$$\cos^n x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{l} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) .$$

Tedy

$$\begin{aligned} \cos^{n+1} x = \cos^n x \cos x &= \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{l} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right) \cos x \\ &= \frac{a_0}{2} \cos x + \sum_{k=1}^{l} \Big(\frac{a_k}{2} (\cos(kx - x) + \cos(kx + x)) \\ &\qquad + \frac{b_k}{2} (\sin(kx + x) + \sin(kx - x)) \Big), \end{aligned}$$

přičemž na pravé straně máme trigonometrický polynom. Tedy $\cos^n x$ je trigonometrický polynom pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tvrzení tak platí pro $m = 0$.

Předpokládejme nyní, že $\cos^n x \sin^j x$ je trigonometrický polynom pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $j \in \{0, \dots, m\}$. Pak lze pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dle indukčního předpokladu psát

$$\cos^n x \sin^m x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{l} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

pro nějaké $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a koeficienty $a_0, \dots a_l, b_1, \dots, b_l$ v $\mathbb{R}$. Z toho pak dostáváme

$$\begin{aligned} \cos^n x \sin^{m+1} x &= \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{l} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right) \sin x \\ &= \frac{a_0}{2} \sin x + \sum_{k=1}^{l} (a_k \cos kx \sin x + b_k \sin kx \sin x) \\ &= \frac{a_0}{2} \sin x + \sum_{k=1}^{l} \Big(\frac{a_k}{2} (\sin(kx + x) - \sin(kx - x)) \\ &\qquad + \frac{b_k}{2} (\cos(kx - x) - \cos(kx + x)) \Big), \end{aligned}$$

kde na pravé straně figuruje trigonometrický polynom. Tvrzení je tak dokázáno. ♣

16.6.2. Příklad. Pro $q \in (-1, 1)$ sečtěte řadu $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx$ a ukažte, že je tato řada Fourierovou řadou svého součtu.

Řešení. Uvažujme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n (\cos nx + i \sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty} (qe^{ix})^n.$$

Z Weierstrassova kritéria 12.3.3 plyne stejnoměrná konvergence této řady, označme $h(x)$ jako její součet.

Pak

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{qe^{ix}}{1 - qe^{ix}} = \frac{qe^{ix}(1 - qe^{-ix})}{(1 - qe^{ix})(1 - qe^{-ix})} \\ &= \frac{qe^{ix} - q^2}{1 - 2q\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} + q^2} = \frac{q(\cos x - 1) + iq \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx = \operatorname{Im} h(x) = \frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2}.$$

Závěrečné tvrzení pak plyne z Lemmatu 16.2.3.

♣

16.6.3. Příklad. Sečtěte řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$ a vypočtěte

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos nx \, dx, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Řešení. Z definice komplexní exponenciely máme pro $x \in \mathbb{R}$ rovnost

$$e^{e^{ix}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} &= \operatorname{Re} e^{e^{ix}} = \operatorname{Re} \left(e^{\cos x} (\cos(\sin x) + i \sin(\sin x) \right) \\ &= e^{\cos x} \cos(\sin x). \end{aligned}$$

Jelikož je zadaná řada stejnoměrně konvergentní, máme

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos nx \, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos nx \, \mathrm{d}x$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 2\pi, & n = 0, \\ \frac{\pi}{n!}, & n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

♣

16.6.4. Příklad. Nalezněte separabilní prostor se skalárním součinem H a ortonormální systém $\mathcal{B} \subset H$ takový, že $\mathcal{B}$ je maximální (tj. žádný nenulový prvek H není kolmý na všechny prvky $\mathcal{B}$) a není úplný (tj. lineární obal $\mathcal{B}$ není hustý v H).

Řešení. Uvažujme prostor ℓ^2 a v něm prvky $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$ a e_n, $n \geq 2$. Nechť H je lineární obal množiny $\{x\} \cup \{e_n;\ n \geq 2\}$ se skalárním součinem zděděným z ℓ^2. Pak $\mathcal{B} = \{e_n;\ n \geq 2\}$ je ortonormální systém v H, který je maximální.

Vskutku, nechť $y = cx + \sum_{n=2}^{k} c_k e_k$ je prvek H kolmý na všechny prvky $\mathcal{B}$. Zvolíme $m > k$, pak máme

$$0 = \langle y, e_m \rangle = c \frac{1}{2^m},$$

z čehož plyne $c = 0$. Dále

$$0 = \langle y, e_n \rangle = c_n, \quad n \in \{2, \dots, k\},$$

a tedy $y = 0$.

Na druhou stranu není systém $\mathcal{B}$ úplný, neboť vektor x má od linárního obalu $\mathcal{B}$ vzdálenost alespoň $\frac{1}{2}$. ♣

16.6.5. Příklad. Nechť $f\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je 2π-periodická funkce mající spojitou derivaci a nechť $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x = 0$. Pak platí

$$\int_{\pi}^{\pi} f^2(x) \, \mathrm{d}x \leq \int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 \, \mathrm{d}x.$$

Řešení. Jelikož má funkce f spojitou derivaci, leží f i f' v prostoru $L^2([-\pi, \pi])$. Označíme-li koeficienty f a f' ve Fourierově rozvoji jako a_n^f, b_n^f, respektive

$a_n^{f'}, b_n^{f'}$, máme dle Věty **??** rovnosti

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(a_0^f)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi((a_n^f)^2 + (b_n^f)^2),$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(f'(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(a_0^{f'})^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi((a_n^{f'})^2 + (b_n^{f'})^2).$$

Mezi koeficenty f a f' však platí následující vztahy:

$$a_0^{f'} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(f(\pi) - f(-\pi)\right) = 0,$$
$$a_0^f = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x = 0$$

a dále pro $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_n^{f'} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[f(x)\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) n \sin nx \, \mathrm{d}x \\ &= n b_n^f, \\ b_n^{f'} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[f(x)\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) n \cos nx \, \mathrm{d}x \\ &= -n a_n^f. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \, \mathrm{d}x &= \frac{\pi}{2}(a_0^f)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi((a_n^f)^2 + (b_n^f)^2) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \pi((a_n^f)^2 + (b_n^f)^2) \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} \pi((n a_n^f)^2 + (n b_n^f)^2) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \pi((a_n^{f'})^2 + (b_n^{f'})^2) \\ &= \frac{\pi}{2}(a_0^{f'})^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi((a_n^{f'})^2 + (b_n^{f'})^2) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(f'(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

♣

16.6.6. Příklad. Nechť $\alpha \in (0,1)$ a

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \cos(1/x), & x \in [-\pi,\pi] \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Ukažte, že f nemá konečnou variaci na $[-\pi,\pi]$.
(b) Nechť g je 2π-periodická funkce integrovatelná na $[-\pi,\pi]$, která je rovna f na nějakém okolí 0. Dokažte, že $s_n^g(0) \to 0$.

Řešení. (a) Uvažujme libovolné $N \in \mathbb{N}$ a dělení $\mathcal{D}$ obsahující body

$$\left\{ \frac{1}{(2N+1)\pi}, \frac{1}{2N\pi}, \dots, \frac{1}{3\pi}, \frac{1}{2\pi} \right\}.$$

Pak

$$\begin{aligned} V(f;-\pi,\pi) &\geq \left| f\left(\frac{1}{2\pi}\right) - f\left(\frac{1}{3\pi}\right) \right| + \cdots + \left| f\left(\frac{1}{2N\pi}\right) - f\left(\frac{1}{(2N+1)\pi}\right) \right| \\ &\geq \sum_{k=1}^{N} \left| f\left(\frac{1}{2k\pi}\right) - f\left(\frac{1}{(2k+1)\pi}\right) \right| \\ &= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\pi^\alpha} \left(\frac{1}{(2k)^\alpha} + \frac{1}{(2k+1)^\alpha} \right) \\ &\geq \frac{1}{(2\pi)^\alpha} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^\alpha}. \end{aligned}$$

Jelikož $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \infty$ a N bylo libovolné, $V(f;-\pi,\pi) = \infty$.

(b) Nejprve si uvědomíme, že diky Větě 16.3.11 platí $\lim_{n\to\infty}(s_n^f - s_n^g)(0) \to 0$. Stačí tedy dokázat, že $s_n^f(0) \to 0$. To však plyne z Věty 16.4.5(b), neboť máme

$$|f(t) - f(0)| \leq |t|^\alpha, \quad t \in (-\pi,\pi).$$

♣

16.7. Početní příklady k Fourierovým řadám

16.7.1. Příklad. Rozviňte funkci

$$f(x) = \pi^2 - x^2, \quad x \in (-\pi,\pi),$$

do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda řada konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady pak určete součty číselných řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

Řešení. Funkce f je po 2π-periodickém dodefinování na $\mathbb{R}$ spojitá. Navíc je monotónní na $[-\pi, 0]$ a $[0, \pi]$, a tedy má na těchto intervalech konečnou variaci. Proto je f konečné variace na libovolném omezeném intervalu v $\mathbb{R}$. Dle Věty 16.4.3 tak Fourierova řada funkce f konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ k f. Máme

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\pi^2$$

a

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) \cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi \left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{x^2 \sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{2x \sin nx}{n}\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{n\pi} \left(\left[-\frac{x \cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n}\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{4}{n\pi} \left(-\frac{\pi \cos n\pi}{n} \right) \\
&= \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}.
\end{aligned}$$

Dále $b_n = 0$ díky sudosti funkce f. Tedy

$$f(x) = \frac{2}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dosadíme-li za x postupně 0 a π, obdržíme rovnosti

$$\pi^2 = \frac{2}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad 0 = \frac{2}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n^2}.$$

Z nich plynou vztahy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

♣

16.7.2. Příklad. Rozviňte funkci

$$f(x) = e^x, \quad x \in (-\pi, \pi),$$

do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda řada konverguje na $\mathbb{R}$ a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady pak určete součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

Řešení. Definujme funkci g na $\mathbb{R}$ jako

$$g(x) = \begin{cases} e^{x-2k\pi}, & x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2}, & x = (2k-1)\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Pak je g funkce s konečnou variací na každém konečném podintervalu $\mathbb{R}$ a dle Věty 16.4.3 konverguje Fourierova řada funkce f ke g na $\mathbb{R}$.

Počítáme-li její koeficenty, dostáváme

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \,\mathrm{d}x = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}.$$

Dále pro $I_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos kx \,\mathrm{d}x$, $k \in \mathbb{N}$, máme

$$\begin{aligned} I_k &= \left[e^x \cos kx\right]_{-\pi}^{\pi} + k \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin kx \,\mathrm{d}x \\ &= \cos(k\pi)\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right) + k\left(\left[e^x \sin kx\right]_{-\pi}^{\pi} - k\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos kx \,\mathrm{d}x\right) \\ &= \cos(k\pi)\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right) - k^2 I_k. \end{aligned}$$

Tedy

$$I_k = (-1)^k \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{k^2+1}$$

a

$$a_n = \frac{1}{\pi} I_n = (-1)^n \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi(n^2+1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dále máme z již provedeného výpočtu rovnost pro koeficenty b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{-n}{\pi} I_n = (-1)^{n+1} \frac{n(e^{\pi} - e^{-\pi})}{n^2+1}.$$

Tedy

$$g(x) = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{2\sinh\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}(\cos nx - n \sin nx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dosadíme-li za $x = 0$, dostáváme

$$1 = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}.$$

Odtud

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\sinh \pi} - 1 \right).$$

♣

16.7.3. Příklad. Rozviňte funkci

$$f(x) = \sin 3x + 4x, \quad x \in (-\pi, \pi],$$

do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda řada konverguje na $\mathbb{R}$ a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady pak určete součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n}{n}.$$

Řešení. Definujme funkci g na $\mathbb{R}$ jako

$$g(x) = \begin{cases} \sin 3(x - 2k\pi) + 4(x - 2k\pi), & x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}, \\ 0, & x = (2k-1)\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Pak je g funkce s konečnou variací na každém konečném podintervalu $\mathbb{R}$ a dle Věty 16.4.3 konverguje Fourierova řada funkce f ke g na $\mathbb{R}$.

Jelikož je f lichá na $(-\pi, \pi)$, je $a_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dále platí

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 3x \sin nx \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 1, & n = 3, \\ 0, & n \neq 3, \end{cases}$$

a

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 4x \sin nx \, \mathrm{d}x &= \frac{8}{\pi} \left(\left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} \, \mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{8}{\pi} \left(-\frac{\pi \cos(n\pi)}{n} \right) = (-1)^{n+1} \frac{8}{n}. \end{aligned}$$

Tedy

$$g(x) = \sin 3x + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pro $x = 1$ dostáváme

$$\sin 3 + 4 = \sin 3 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin n}{n},$$

a tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin n}{n}=\frac{1}{2}.$$

♣

16.7.4. Příklad. Rozviňte funkci

$$f(x)=\sin x,\quad x\in[0,\pi),$$

do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$, která obsahuje pouze členy s $\cos nx$. Rozhodněte, zda řada konverguje na $\mathbb{R}$ a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady pak určete součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin n}{n}.$$

Řešení. Položme

$$g(x)=|\sin x|,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Pak dle Věty 16.4.3 konverguje Fourierova řada funkce g ke g stejnoměrně na $\mathbb{R}$.

Spočtěme koeficienty této Fourieorovy řady. Jelikož je g sudá, jsou členy $b_n - 0$, $n\in\mathbb{N}$. Dále máme

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}$$

a

$$\begin{aligned}
a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{2}{\pi}[\sin x\sin nx]_0^{\pi}-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin nx\,\mathrm{d}x\\
&=-\frac{2}{n\pi}\left[-\cos x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}+\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin x\frac{\cos nx}{n}\,\mathrm{d}x\\
&=-\frac{2}{n\pi}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n}\right]+\frac{1}{n^2}a_n.
\end{aligned}$$

Odtud plyne

$$a_n=\begin{cases}0, & n\text{ liché},\\ -\frac{4}{\pi(n^2-1)}, & n\text{ sudé}.\end{cases}$$

Tedy

$$g(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Pro $x = \frac{\pi}{2}$ pak dostáváme

$$1 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1},$$

a tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

♣

16.7.5. Příklad. Pro $a > 0$ rozviňte funkci

$$f(x) = \cos ax, \quad x \in [0, \pi],$$

do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$, která obsahuje pouze členy se $\sin nx$. Rozhodněte, zda řada konverguje na $\mathbb{R}$ a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady pak určete součet číselné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+1)}{(2k+1)^2-4}.$$

Řešení. Položme

$$g(x) = \begin{cases} \cos ax, & x \in (0,\pi) + 2k\pi, \\ 0, & x = k\pi, \\ -\cos ax, & x \in (-\pi, 0) + 2k\pi, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Pak g je lichá funkce s konečnou variací, a tedy její Fourierova řada konverguje ke g.

Při výpočtu jejích koeficentů máme $a_n = 0$ díky lichosti g a

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos ax \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{a}\sin nx \sin ax\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{n}{a}\cos nx \sin ax \, dx \\ &= -\frac{2n}{\pi a}\int_0^{\pi}\cos nx \sin ax \\ &= \frac{-2n}{\pi a}\left[\frac{-1}{a}\cos nx \cos ax\right]_0^{\pi} + \frac{2n}{\pi a}\int_0^{\pi}\frac{n}{a}\sin nx \cos ax \, dx \\ &= \frac{2n}{\pi a^2}\left[(-1)^n\cos(a\pi) - 1\right] + \frac{n^2}{a^2}b_n. \end{aligned}$$

Předpokládejme nejprve, že $a \notin \mathbb{N}$. Pak z předchozího plyne

$$b_n = \frac{2n}{\pi(a^2 - n^2)} \big[(-1)^n \cos(a\pi) - 1\big], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pokud $a = k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, pak

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin kx \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin 2kx = 0.$$

Tedy Fourierova řada g má tvar

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1, n \neq a}^{\infty} \frac{n}{a^2 - n^2} \big[(-1)^n \cos(a\pi) - 1\big] \sin nx.$$

Nyní uvažujme $a = 2$ a $x = \frac{\pi}{2}$, pak máme

$$\begin{aligned} -1 = \cos\pi &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1, n\neq 2}^{\infty} \big[(-1)^n - 1\big] \sin n\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)(-1)^k (2k+1)}{4 - (2k+1)^2} \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{(2k+1)^2 - 4}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{(2k+1)^2 - 4} = -\frac{\pi}{4}.$$

♣

16.7.6. Příklad. Rozviňte funkci

$$f(x) = \operatorname{sign}(\sin 3x), \quad x \in [0, \pi],$$

do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$, která obsahuje pouze členy s $\cos nx$. Rozhodněte, zda řada konverguje na $\mathbb{R}$ a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady pak určete součet číselné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)}.$$

Řešení. Uvažujme sudé 2π-periodické rozšíření f na R, tj. funkci

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left((-\pi, -\frac{2}{3}\pi) \cup (-\frac{\pi}{3}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{2}{3}\pi, \pi)\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ 0, & x = \frac{\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}, \\ -1, & x \in \left((-\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi)\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Dle Věty 16.4.3 konverguje Fourierova řada g k funkci

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x = k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ g(x), & \text{jinak.} \end{cases}$$

Spočtěme koeficienty této řady. Jelikož je g sudá, platí $b_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Jinak máme

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

a

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \cos nx \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos nx \,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \cos nx \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \cos nx \,\mathrm{d}x \right)$$
$$= \frac{4}{\pi n} \left(\sin(\frac{n\pi}{3}) - \sin(\frac{2n\pi}{3}) \right).$$

Tedy

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \in \{6k, 6k+1, 6k+3, 6k+5\}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \frac{4\sqrt{3}}{\pi n}, & n = 6k+2, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ -\frac{4\sqrt{3}}{\pi n}, & n = 6k+4, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Proto má Fourierova řada funkce g tvar

$$\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6k+2} \cos(6k+2)x - \frac{1}{6k+4} \cos(6k+4)x \right).$$

Pro $x = 0$ máme

$$1 = h(x) = \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6k+2} - \frac{1}{6k+4} \right)$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)}.$$

Odtud plyne

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

$\clubsuit$

16.7.7. Příklad. Pro $\alpha \in [0, \pi]$ sečtěte řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}$.

Řešení. Uvažujme funkci $f(x) = \chi_{[-\alpha,\alpha]} \in$ ¶$([-\pi, \pi])$ a rozviňme ji do Fourierovy řady. Máme

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\alpha}{\pi}$$

a

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{2 \sin n\alpha}{n\pi}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Díky sudosti funkce f jsou pak všechny koeficienty b_n nulové.

Podle Věty **??** platí

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi (a_n^2 + b_n^2).$$

Tedy dostáváme

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4\alpha^2}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \pi \frac{4 \sin^2 n\alpha}{n^2 \pi^2},$$

z čehož plyne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} = \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2}.$$

Dále platí dle Příkladu **??** vztah

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2},$$

z kterého plyne rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2} = \frac{\pi^2 - 3\pi\alpha + 3\alpha^2}{6}.$$

$\clubsuit$

Literatura

1. A. Anzenbacher, *Úvod do filozofie*, SPN, Praha 1990.
2. J. Bečvář, *Lineární algebra*, Matfyzpress 2010.
3. J. H. Conway, *The weird and wonderful chemistry of audioactive decay*, Open Problems in Communication and Computation, T.M. Cover and B. Gopinath, eds., Springer, 1987, pp. 173–188.
4. J. H. Conway a R.K. Guy, *The book of numbers*, New York: Copernicus 1996.
5. B. Balcar, P. Štěpánek, *Teorie množin*, Academia, 2005.
6. K. M. Ball, *Strange curves, counting rabbits, and other mathematical explorations*, Princeton University Press, 2003.
7. A. Gelfond, *Sur le septieme Probleme de Hilbert*, Bull. Acad. Sci. URSS. Sér. Math. **7** (1934), 623–630.
8. P. R. Halmos, *Measure theory*, Springer 1978.
9. V. Jarník, *Diferenciální počet (I)*, Academia, Praha 1974.
10. V. Jarník, *Diferenciální počet (II)*, Academia, Praha 1956.
11. V. Jarník, *Integrální počet (I)*, Academia, Praha 1974.
12. T. Jech, *Set theory*, Springer 2002.
13. J. Lukeš, J. Malý, *Measure and integral*, Matfyzpress.
14. W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, 1964.
15. T. Schneider, *Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen. I.*, J. Reine Angew. Math. **172** (1934), 65–69.
16. A. Sochor, *Klasická matematická logika*, Karolinum, Praha 2001.
17. R. Smullyan, *Jak se jmenuje tahle knížka?*, Mladá Fronta, 1986.
18. A. Tarski, *Úvod do logiky a metodologie deduktivních věd*, Academia, Praha 1969.