Категорная логика

Аннотация

В этом небольшом документе содержится общая информация о том, что такое топос, а также о том, как ввести в топосе пропозициональную логику. Изложение соответствует книге Гольдблатта (с третьей по шестую главу) и может быть использовано как сопроводительный материал — здесь разобраны некоторые упражнения.

Содержание

1 Введение

Некоторые категории похожи на категорию множеств больше, чем другие. Один из способов получить категорные аналоги привычных теоретико-множественных понятий — потребовать от категории, чтобы она была топосом:

Определение 1. *Топос — это декартово замкнутая категория с классификатором подобъектов.*

Топосы обладают многими свойствами, присущими категории множеств, и категория множеств действительно является топосом. В любом топосе оказываются определены многие понятия теории множеств и верны многие теоремы, которые верны в категории множеств.

В топосе определены характеры подобъектов — аналог характеристических функций подмножеств. Определены также поверобъекты, являющиеся обобщением множества всех подмножеств данного множества. В топосе определены пересечение, объединение и дополнение подобъектов — аналоги операций с подмножествами. Морфизмы, являющиеся одновременно мониками и эпиками, в топосе оказываются изоморфизмами. Многие понятия и идеи, которые вообще-то можно определить в гораздо более общей ситуации, — например, элемент объекта, подобъект, экстенсиональность, — в топосах обретают смысл и подвижность.

В категории с терминальным объектом можно определить элемент объекта следующим образом.

Определение 2. *Элемент x объекта A, $x \in A$ — это стрелка из терминального объекта в A, $x\colon 1 \to A$.*

(Например, в категории множеств элемент множества A — стрелка из фиксированного одноэлементного множества в A.)

В топосах естественным образом определяется логика: морфизмы $1 \to \Omega$ (где Ω — классификатор подобъектов, определение которого дано ниже), то есть элементы Ω, понимаются как значения истинности: на Ω в чисто категорных терминах вводятся конъюнкция, дизъюнкция, импликация и отрицание. Таким образом, если оценить в элементах Ω пропозициональные переменные, эта оценка естественно продолжается на все формулы с участием перечисленных операций.

Элементы Ω в любом топосе образуют ограниченную решётку. Оказывается, если некая формула верна при любой оценке в каком-нибудь топосе, то ее можно вывести в классической логике. Обратное, однако, неверно: не все теоремы классической логики истинны при любой оценке в любом топосе. В частности, аксиома $\alpha \vee \sim \alpha$ оказывается истинной при любой оценке ровно в тех ситуациях, когда элементы Ω образуют булеву алгебру. Аксиомы и теоремы интуиционистской логики истинны во всех топосах.

2 Декартово замкнутые категории

Определение 3. *Декартово замкнутая категория — конечно полная категория с экспоненциальными объектами.*

Далее будут доказаны некоторые утверждения о декартово замкнутых категориях с начальным объектом.

Утверждение 1. *Для любого объекта A верно $0 \cong 0 \times A$, то есть $0 \times A$ является начальным объектом.*

Доказательство. По определению экспоненциирования, для любого объекта X есть биекция

$$Hom(0 \times A, X) \cong Hom(0, X^A).$$

Поскольку в правом классе всегда ровно один элемент, то и в левом тоже, поэтому $0 \times A$ — начальный объект. □

Утверждение 2. *Если существует $f \colon A \to 0$, то $A \cong 0$.*

Доказательство. $pr_A \circ < f, 1_A >= 1_A$, как показывает правый треугольник в следующей диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "<f{,}1_A>"] \arrow[dr, "1_A"] & \\
0 & 0 \times A \arrow[l, "pr_0"] \arrow[r, "pr_A"'] & A
\end{tikzcd}$$

С другой стороны, $< f, 1_A > \circ pr_A = 1_{0\times A} \colon 0 \times A \to 0 \times A$, потому что есть только один морфизм из начального объекта в начальный. Поэтому $A \cong 0 \times A$, и поскольку $0 \times A$ — начальный объект, то и A — начальный объект. □

Определение 4. *Категория называется вырожденной, если все её объекты изоморфны.*

Утверждение 3. *Если $0 \cong 1$, то категория вырожденная.*

Доказательство. Поскольку начальные объекты изоморфны друг другу, достаточно доказать, что все объекты начальные. Из произвольного объекта A получаем стрелку в 0:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "!_A"] & 1 \arrow[d, "\cong"] \\
 & 0
\end{tikzcd}$$

Из предыдущего утверждения следует, что A — начальный объект. □

Утверждение 4. *Все морфизмы $f \colon 0 \to A$ с $dom = 0$ являются мониками.*

Доказательство. Пусть $f \circ g = f \circ h$ для каких-то g и h:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "h"'] & 0 \arrow[r, "f"] & A \end{tikzcd}$$

B — начальный объект, потому что из него есть стрелка в начальный. Но тогда $g = h$, поскольку в любой объект из начального объекта есть только одна стрелка. $\square$

Утверждение 5. $A^0 \cong 1$*, то есть* A^0 *— терминальный объект.*

Доказательство. По определению экспоненциирования, для любого объекта X

$$Hom(X \times 0, A) \cong Hom(X, A^0).$$

Поскольку $X \times 0$ — начальный объект, то в левом классе ровно один элемент. Следовательно, для любого X есть ровно одно отображение $!_X \colon X \to A^0$. $\square$

Утверждение 6. $1^A \cong 1$*, то есть* 1^A *— терминальный объект.*

Доказательство. По определению экспоненциирования, для любого объекта X

$$Hom(X \times A, 1) \cong Hom(X, 1^A).$$

В левом классе ровно один элемент, поскольку из любого объекта есть ровно одно отображение в 1. Следовательно, для любого X есть ровно одно отображение $!_X \colon X \to 1^A$. $\square$

3 Уравнители и моники

Напомним некоторые факты из теории категорий.

Утверждение 7. *Любой уравнитель — моника.*

Доказательство. Пусть f уравнивает g и h, $g \circ f = h \circ f$, и возьмем произвольную пару стрелок p, q, для которых $f \circ p = f \circ q$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] & A \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "h"'] & B \\ X \arrow[u, bend left, "p"] \arrow[u, bend right, "q"'] \arrow[ur, "f\circ p"] & & \end{tikzcd}$$

Поскольку $g \circ f \circ p = h \circ f \circ p$, то по определению уравнителя, существует ровно один морфизм $X \to E$, при котором треугольник в этой диаграмме коммутирует. Поэтому из $f \circ p = f \circ q$ сразу следует $p = q$, то есть f — моника. □

Утверждение 8. *Эпические уравнители — изоморфизмы.*

Доказательство. Пусть $f\colon E \to A$ — эпика, уравнивающая g и h. В этом случае сразу верно, что $g = h$, и поэтому из того, что E — уравнитель, следует, что любая стрелка с концом в A пропускается через f. В частности, должна существовать стрелка $p\colon A \to E$, при которой треугольник в этой диаграмме коммутативный:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] & A \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "h"'] & B \\ A \arrow[u, dashed, "p"] \arrow[ur, "1_A"] & & \end{tikzcd}$$

Из диаграммы получаем $f \circ p = 1_A$, откуда $f \circ p \circ f = f = f \circ 1_A$. Но по предыдущему утверждению f — моника, и на нее можно сократить слева: $p \circ f = 1_A$. Получается, $f^{-1} = p$. □

4 Подобъекты и характеры

Определение 5. *Подобъект объекта A — класс по отношению эквивалентности, заданному на всех мониках с концом A: моники f и g эквивалентны (обозначение: $f \cong g$), если пропускаются друг через друга, $f = g \circ p$, $g = f \circ q$ для некоторых p и q.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, bend right, "p"'] & A \\
Y \arrow[u, bend right, "q"'] \arrow[ur, tail, "g"] &
\end{tikzcd}$$

Замечание 1. *p и q взаимнообратны, а $X \cong Y$.*

Доказательство. Поскольку f — моника, её можно сократить:

$$f \circ 1_X = f = g \circ p = f \circ q \circ p.$$

Аналогично, $1_Y = p \circ q$. □

Определение 6. $[f] \subseteq [g]$, *если f пропускается через g.*

Доказательство. Докажем, что не зависит от выбора представителей классов. Пусть $f_1 \cong f_2$ и $g_1 \cong g_2$, и $f_1 = g_1 \circ h$. Крайние треугольники в этой диаграмме существуют благодаря тому, что соответствующие стрелки, ведущие в A, эквивалентны:

$$\begin{tikzcd}
X_2 \arrow[r, "h_1"] \arrow[drr, tail, "f_2"] & X_1 \arrow[r, "h"] \arrow[dr, tail, "f_1"] & Y_1 \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, tail, "g_1"] & Y_2 \arrow[dl, tail, bend left, "g_2"] \\
& & A &
\end{tikzcd}$$

Получается, $f_2 = g_2 \circ h_2 \circ h \circ h_1$, так что f_2 пропускается через g_2. □

Собрание всех подобъектов A обозначается $Sub(A)$. Отношение $\subseteq$ превращает $Sub(A)$ в частично упорядоченное множество, а в топосе $Sub(A)$ оказывается ограниченной решёткой, meet и join которой — пересечение и объединение подобъектов.

Определение 7. *Классификатор подобъектов — объект Ω и морфизм $true$, такие что для любой моники $f\colon A \rightarrowtail B$ существует единственный морфизм $\chi_f\colon B \to \Omega$, для которого следующая диаграмма — пулбэк:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!_A"] & B \arrow[d, "\chi_f"] \\
1 \arrow[r, "true"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

χ_f называют характером f. Стрелку $true$ ещё обозначают $\top$. Композиция $true \circ !_A$ обозначается $true_A$. Докажем некоторые факты о классификаторе.

Утверждение 9. *Характером* $true\colon 1 \rightarrowtail \Omega$ *является тождественный морфизм* 1_Ω*, то есть* $\chi_{true} = 1_\Omega$.

Доказательство. Диаграмма коммутирует:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, tail, "true"] \arrow[d, "!_1"] & \Omega \arrow[d, "1_\Omega"] \\
1 \arrow[r, "true"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Кроме того, пусть даны $f\colon X \to \Omega$ и $g\colon X \to 1$, такие что периметр коммутирует:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "g"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& 1 \arrow[r, tail, "true"] \arrow[d, "!_1"] & \Omega \arrow[d, "1_\Omega"] \\
& 1 \arrow[r, "true"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

В таком случае $f = true \circ g$, так что треугольники в этой диаграмме коммутируют. Кроме того, g — единственная стрелка, при которой это происходит: для произвольной стрелки h в правом треугольнике $h =!_1 \circ h = g$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& 1 \arrow[r, tail, "true"] \arrow[d, "!_1"] & \Omega \arrow[d, "1_\Omega"] \\
& 1 \arrow[r, "true"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

□

Утверждение 10. *Характером* 1_Ω *является* $true_\Omega$*, то есть* $\chi_{1_\Omega} = true \circ !_\Omega$.

Доказательство. Диаграмма коммутирует:

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, tail, "1_\Omega"] \arrow[d, "!_\Omega"] & \Omega \arrow[d, "true \circ !_\Omega"] \\
1 \arrow[r, "true"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

С другой стороны, пусть при $f\colon X \to \Omega$ и $g\colon X \to 1$ периметр коммутирует:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[dr, dashed, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& \Omega \arrow[r, tail, "1_\Omega"] \arrow[d, "!_\Omega"] & \Omega \arrow[d, "true \circ !_\Omega"] \\
& 1 \arrow[r, "true"] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Тогда $true \circ !_\Omega \circ f = true \circ g$. Поскольку $true$, будучи морфизмом из терминального объекта, является моникой, его можно сократить слева: $!_\Omega \circ f = g$. Поэтому треугольники в этой диаграмме коммутируют. Из-за тождественного морфизма в верхнем треугольнике ничего кроме f выбрать не получится. □

Утверждение 11. *Для любой стрелки $f\colon A \to B$ верно $true_B \circ f = true_A$.*

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "true_A"'] & B \arrow[d, "true_B"] \\
& \Omega
\end{tikzcd}
$$

Доказательство. Дело в том, что $true_A = true \circ !_A$, а $true_B \circ f = true \circ !_B \circ f$, но $!_A = !_B \circ f$, поскольку обе стрелки идут из A в терминальный объект. □

Утверждение 12. *Характеры моник $f\colon A \rightarrowtail D$ и $g\colon B \rightarrowtail D$ равны, $\chi_f = \chi_g$, тогда и только тогда, когда $f \cong g$.*

Доказательство. Пусть $\chi_f = \chi_g$. Тогда в этой диаграмме внутренний квадрат — пулбэк, а внешний коммутирует (потому что тоже пулбэк), поэтому существует h, пропускающая g через f:

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[drr, tail, bend left, "g"] \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[ddr, bend right, "!_B"'] & & \\
& A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!_A"] & \Omega \arrow[d, "\chi_f"] \\
& 1 \arrow[r, "true"] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Аналогично f пропускается через g, и поэтому $f \cong g$. С другой стороны, если $f \cong g$, то стрелка h на приведенной диаграмме существует — с её помощью покажем коммутативность периметра:

$$\chi_f \circ g = \chi_f \circ f \circ h = true \circ !_A \circ h = true \circ !_B.$$

Пусть p, $!_C$ — пара стрелок, с которыми периметр у этой диаграммы коммутирует:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, dashed, "t"] \arrow[ddrr, bend left, "p"] \arrow[dddr, bend right, "!_C"'] & & \\
& A \arrow[dr, "h^{-1}"] \arrow[drr, tail, bend left, "f"] \arrow[dd, bend right, "!_A"'] & & \\
& & B \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, "!_B"] & \Omega \arrow[d, "\chi_f"] \\
& & 1 \arrow[r, "true"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Морфизм t существует, потому что квадрат с вершиной в A — пулбэк, и поэтому $p = f \circ t$. Морфизм h^{-1} существует и треугольники с ним коммутируют потому, что по условию f пропускается через g. Все левые треугольники коммутируют автоматически из-за терминального объекта в одной из вершин. Таким образом, $h^{-1} \circ t$ — искомая стрелка, делающая оба внешних треугольника коммутативными. Если z — ещё одна такая стрелка, то есть $g \circ z = p$, то $f \circ h \circ z = p$ — значит, $h \circ z = t$ в силу единственности t с условием $f \circ t = p$. Но тогда $z = h^{-1} \circ h \circ z = h^{-1} \circ t$, что и требовалось. $\square$

Напомним, что изоморфизмы в любой категории являются мониками и эпиками. Если, например, для изоморфизма f верно $f \circ g = f \circ h$, то

$$g = f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ f \circ h = h,$$

то есть f — моника. Эпичность f доказывается аналогично.

Утверждение 13. *Эпические моники в топосе — изоморфизмы.*

Доказательство. Ранее было доказано, что эпические уравнители — изоморфизмы; поэтому достаточно показать, что любая моника $f \colon A \rightarrowtail B$ что-нибудь уравнивает. Покажем, что она уравнивает свой характер с $true_B$. Заметим, что $\chi_f \circ f = true_A = true_B \circ f$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "!_X"'] & & \\
& A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!_A"] & B \arrow[dl, "!_B"] \arrow[d, "\chi_f"] \\
& 1 \arrow[r, "true"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Пусть есть $g \colon X \to B$, такой что $\chi_f \circ g = true_B \circ g$. Но $true_B \circ g = true_X$, так что $\chi_f \circ g = true_X$ — периметр диаграммы коммутирует. Значит, согласно определению пулбэка, существует морфизм h, для которого верно $g = f \circ h$. Такой морфизм оказывается единственным, потому что правый треугольник в диаграмме коммутирует при любом морфизме на месте h. Таким образом, f — уравнитель. $\square$

Утверждение 14. *$true$ уравнивает 1_Ω и $true_\Omega$.*

Доказательство.

$$1_\Omega \circ true = true \circ 1_1 = true \circ !_\Omega \circ true = true_\Omega \circ true$$

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "true"] \arrow[rr, bend right, "1_1"'] & \Omega \arrow[r, "!_\Omega"] \arrow[rr, bend left, "1_\Omega"] & 1 \arrow[r, "true"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Кроме того, пусть для некоторого $h\colon X \to \Omega$ выполняется $1_\Omega \circ h = true_\Omega \circ h$, то есть $h = true \circ !_\Omega \circ h = true \circ !_A$. Последнее означает, что h пропускается через $true$ с помощью $!_A$. Другую стрелку взять не получится, потому что конец необходимой стрелки — терминальный объект.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "true"] & \Omega \arrow[r, "!_\Omega"] \arrow[rr, bend left, "1_\Omega"] & 1 \arrow[r, "true"] & \Omega \\
A \arrow[u, dashed, "!_A"] \arrow[ur, "h"] \arrow[urr, "!_A"'] & & &
\end{tikzcd}$$

$\square$

5 Точечные и бивалентные топосы

Определение 8. *Ненулевой объект — объект, неизоморфный начальному.*

Определение 9. *Непустой объект — объект, у которого есть хотя бы один элемент.*

Определение 10. *Принцип экстенсиональности. Если $f\colon A \to B$, $g\colon A \to B$ — пара разных стрелок с общими началом и концом, то существует элемент $x\colon 1 \to A$, такой что $f \circ x \neq g \circ x$.*

Определение 11. *Точечный топос — невырожденный топос, в котором выполнен принцип экстенсиональности.*

Утверждение 15. *В точечном топосе любой ненулевой объект непуст.*

Доказательство. Пусть A — ненулевой объект. Возьмем характеры стрелок $0_A\colon 0 \to A$ и $1_A\colon A \to A$. Если бы χ_{0_A} оказалось равным χ_{1_A}, это бы означало, что $0_A \cong 1_A$ и, следовательно, $0 \cong A$, что противоречит выбору A. Значит, есть две различные стрелки с общим началом в A и с общим концом. Из экстенсиональности следует существование элемента $x\colon 1 \to A$, то есть A непуст. □

Определение 12. *Ложь, стрелка $false$ или $\perp$ — это характер $0_1\colon 0 \rightarrowtail 1$.*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, tail, "0_1"] \arrow[d, "!_0"] & 1 \arrow[d, "false"] \\
1 \arrow[r, "true"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Замечание 2. 0_1 *— моника.*

Доказательство. Как было доказано, в декартово замкнутых категориях все стрелки с началом в начальном объекте — моники. □

Утверждение 16. *Морфизм $\perp \circ !_A$ — характер 0_A.*

Доказательство. Нужно доказать, что периметр — пулбэк. Для этого достаточно доказать, что оба внутренних квадрата — пулбэки.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, tail, "0_A"] \arrow[d, "1_0"] \arrow[dd, bend right, "!_0"'] & A \arrow[d, "!_A"] \arrow[dd, bend left, "\perp \circ !_A"] \\
0 \arrow[r, tail, "0_1"] \arrow[d, "0_1"] & 1 \arrow[d, "\perp"] \\
1 \arrow[r, "true"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Нижний квадрат — пулбэк, по определению лжи. Верхний квадрат коммутирует, потому что есть только одна стрелка $0 \to 1$. Для вершины X любого конуса над верхним квадратом существует стрелка $X \to 0$, что в декартово замкнутых категориях означает, что X — начальный объект, поэтому искомой стрелкой для любого конуса будет единственный морфизм $X \to 0$. □

Утверждение 17. *В невырожденном топосе ложь и истина различны, $\perp \neq \top$.*

Доказательство. $true$ — характер $1_1 \colon 1 \rightarrowtail 1$, а $false$ — характер $0_1 \colon 0 \rightarrowtail 1$, так что если $true = false$, то $1_1 \cong 0_1$, и следовательно, $1 \cong 0$, из чего следует вырожденность. $\square$

Определение 13. *Невырожденный топос называют бивалентным, если $true$ и $false$ — единственные элементы Ω.*

Утверждение 18. *Точечный топос бивалентен.*

Доказательство. Возьмем произвольный подобъект 1:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "h"] \arrow[d, "!"] & 1 \arrow[d, "\chi_f"] \\ 1 \arrow[r, "true"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Если $A \cong 0$, то $h = 0_1$ и $\chi_h = \perp$. В противном случае A непуст, и существует $f \colon 1 \to A$. Следующие две диаграммы показывают, что $h \cong 1_1$.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, tail, "1_1"] \arrow[d, "f"] & 1 \\ A \arrow[ur, tail, "h"] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, tail, "1_1"] & 1 \\ A \arrow[u, "h"] \arrow[ur, tail, "h"] & \end{tikzcd}$$

Поэтому $\chi_h = true$. $\square$

6 Пропозициональная логика в топосе

Определение 14. *Отрицание* $\neg$ *— характер лжи.*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, tail, "\perp"] \arrow[d, "1_1"'] & \Omega \arrow[d, "\neg"] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Определение 15. *Конъюнкция* $\cap\colon \Omega\times\Omega \to \Omega$ *— характер произведения пары true* $<\top,\top>\colon 1 \rightarrowtail \Omega\times\Omega$.

Определение 16. *Дизъюнкция* $\cup\colon \Omega\times\Omega \to \Omega$ *— характер образа стрелки*

$$[< true_\Omega, 1_\Omega >, < 1_\Omega, true_\Omega >]\colon \Omega+\Omega \to \Omega\times\Omega.$$

Определение 17. *Импликация* $\Rightarrow\colon \Omega\times\Omega \to \Omega$ *— характер стрелки* $e\colon\ \leq\rightarrowtail \Omega\times\Omega$, *которая уравнивает конъюнкцию и проекцию на первый множитель* $pr_1\colon \Omega\times\Omega \to \Omega$.

Теперь есть всё необходимое для работы с пропозициональной логикой в топосе.

Определение 18. ξ*-оценка — это функция* $V\colon \Phi_0 \to Hom_\xi(1,\Omega)$, *которая каждой пропозициональной переменной* π_i *сопоставляет значение истинности* $V(\pi_i)\colon 1 \to \Omega$. V *продолжается на все формулы* Φ *следующим образом:*

$$V(\sim\alpha) = \neg\circ V(\alpha)$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "V(\alpha)"] \arrow[dr, "V(\sim\alpha)"] & \Omega \arrow[d, "\neg"] \\ & \Omega \end{tikzcd}$$

$$V(\alpha\wedge\beta) = \cap\circ < V(\alpha), V(\beta) >$$

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, bend right, "V(\alpha)"'] \arrow[d, dashed, "<V(\alpha),V(\beta)>"] \arrow[dr, bend left, "V(\beta)"] & \\ \Omega & \Omega\times\Omega \arrow[l, "pr_1"] \arrow[r, "pr_2"'] \arrow[d, "\cap"] & \Omega \\ & \Omega & \end{tikzcd}$$

$$V(\alpha\vee\beta) = \cup\circ < V(\alpha), V(\beta) >$$

$$V(\alpha\supset\beta) = \Rightarrow\circ < V(\alpha), V(\beta) >$$

Обозначение 1. *Если* $< f, g >: 1 \to \Omega \times \Omega$ *— пара значений истинности, то вводятся следующие обозначения:*

$$f \cap g = \cap \circ < f, g >$$

$$f \cup g = \cup \circ < f, g >$$

$$f \Rightarrow g = \Rightarrow \circ < f, g >$$

Утверждение 19. $\neg \circ \bot = \top$

Доказательство. Сразу следует из определения отрицания $\neg$. □

Утверждение 20. $\neg \circ \top = \bot$

Доказательство. Докажем, что периметр — пулбэк, это будет означать, что характером 0_1 является $\neg \circ \top$, из чего будет следовать утверждение, поскольку $\bot$ — характер 0_1 по определению.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0_1"] \arrow[d, "0_1"] & 1 \arrow[d, "\top"] \\
1 \arrow[r, "\bot"] \arrow[d, "1_1"] & \Omega \arrow[d, "\neg"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Нижний квадрат — пулбэк, это определение отрицания $\neg$. Верхний квадрат — тоже пулбэк, это отражённое определение лжи $\bot$. Поэтому периметр — пулбэк. □

Утверждение 21. *(Без доказательства.) Конъюнкция, дизъюнкция и импликация в применении к* $\top$ *и* $\bot$ *имеют обычные таблицы истинности.* $\top \cap \bot = \bot$, $\bot \Rightarrow \top = \top, \ldots$

Пусть $V : \Phi_0 \to 2$ — классическая оценка. Определим ξ-оценку $V' : \Phi \to Hom_\xi(1, \Omega)$:
$V'(\pi_i) = \top$, если $V(\pi_i) = 1$
$V'(\pi_i) = \bot$, если $V(\pi_i) = 0$

Утверждение 22. *Для любой формулы* $\alpha \in \Phi$ *верно либо* $V'(\alpha) = \top$, $V'(\alpha) = \bot$, *и кроме того,* $V'(\alpha) = \top$ *тогда и только тогда, когда* $V(\alpha) = 1$.

Доказательство. Доказывается с помощью структурной индукции по формуле α, которая сработает, поскольку таблицы истинности у каждой из операций совпадают с классическими. □

Утверждение 23. *В любом топосе* ξ *верно, что если* $\xi \models \alpha$, *то* $\vdash_{CL} \alpha$.

Доказательство. Возьмем произвольную классическую оценку V и ассоциированную с ней оценку V'. Поскольку $\xi \models \alpha$, то при оценке V' формула α тоже верна: $V'(\alpha) = \top$, — значит, согласно предыдущему утверждению, $V(\alpha) = 1$. Получается, $V(\alpha) = 1$ при любой классической оценке V, а из этого следует, что $\vdash_{CL} \alpha$. □

Утверждение 24. *Если топос ξ бивалентен, $\xi \models \alpha$ тогда и только тогда, когда $\vdash_{CL} \alpha$.*

Доказательство. В одну сторону доказано в предыдущем утверждении. В обратную сторону, пусть $\vdash_{CL} \alpha$, то есть α верно при любой классической оценке. Пусть V' — произвольная ξ-оценка; построим по V' классическую оценку V: $V(\pi_i) = 1$, если $V'(\pi_i) = \top$, $V(\pi_i) = 0$, если $V'(\pi_i) = \bot$, — поскольку топос бивалентный, других значений истинности нет, и V построится. Но тогда V и V' оказываются ассоциированными, и поскольку α верно при любой классической оценке, то $V(\alpha) = 1$, и значит, $V'(\alpha) = \top$. $\square$

Заметим, что существуют топосы, для которых из $\vdash_{CL} \alpha$ не следует $\xi \models \alpha$. Например, $\alpha \vee \sim \alpha$ не равно $\top$ при любой оценке в категории всех стрелок $Set^{\rightarrow}$. В этой категории у Ω три элемента: $0 \mapsto 0$ $(\bot)$, $\frac{1}{2} \mapsto 1$, $1 \mapsto 1$ $(\top)$. Тогда после подстановки $\frac{1}{2} \mapsto 1$ вместо α получаем:

$$(\frac{1}{2} \mapsto 1) \vee \sim (\frac{1}{2} \mapsto 1) =$$

$$(\frac{1}{2} \mapsto 1) \vee (0 \mapsto 0) =$$

$$\frac{1}{2} \mapsto 1$$

Список литературы

[1] R. Goldblatt. Topoi: The Categorial Analysis of Logic.