

Категорная логика

Аннотация

В этом небольшом документе содержится общая информация о том, что такое топос, а также о том, как ввести в топосе пропозициональную логику. Изложение соответствует книге Гольдблатта (с третьей по шестую главу) и может быть использовано как сопроводительный материал — здесь разобраны некоторые упражнения.

Содержание

1	Введение	2
2	Декартово замкнутые категории	3
3	Уравнители и моники	5
4	Подобъекты и характеры	6
5	Точечные и бивалентные топосы	11
6	Пропозициональная логика в топосе	13
	Список литературы	16

1 Введение

Некоторые категории похожи на категорию множеств больше, чем другие. Один из способов получить категорные аналоги привычных теоретико-множественных понятий — потребовать от категории, чтобы она была топосом:

Определение 1. *Топос — это декартово замкнутая категория с классификатором подобъектов.*

Топосы обладают многими свойствами, присущими категории множеств, и категория множеств действительно является топосом. В любом топосе оказываются определены многие понятия теории множеств и верны многие теоремы, которые верны в категории множеств.

В топосе определены характеры подобъектов — аналог характеристических функций подмножеств. Определены также поверобъекты, являющиеся обобщением множества всех подмножеств данного множества. В топосе определены пересечение, объединение и дополнение подобъектов — аналогии операций с подмножествами. Морфизмы, являющиеся одновременно мониками и эпиками, в топосе оказываются изоморфизмами. Многие понятия и идеи, которые вообще-то можно определить в гораздо более общей ситуации, — например, элемент объекта, подобъект, экстенциональность, — в топосах обретают смысл и подвижность.

В категории с терминальным объектом можно определить элемент объекта следующим образом.

Определение 2. *Элемент x объекта A , $x \in A$ — это стрелка из терминального объекта в A , $x: 1 \rightarrow A$.*

(Например, в категории множеств элемент множества A — стрелка из фиксированного одноэлементного множества в A .)

В топосах естественным образом определяется логика: морфизмы $1 \rightarrow \Omega$ (где Ω — классификатор подобъектов, определение которого дано ниже), то есть элементы Ω , понимаются как значения истинности: на Ω в чисто категорных терминах вводятся конъюнкция, дизъюнкция, импликация и отрицание. Таким образом, если оценить в элементах Ω пропозициональные переменные, эта оценка естественно продолжается на все формулы с участием перечисленных операций.

Элементы Ω в любом топосе образуют ограниченную решётку. Оказывается, если некая формула верна при любой оценке в каком-нибудь топосе, то ее можно вывести в классической логике. Обратное, однако, неверно: не все теоремы классической логики истинны при любой оценке в любом топосе. В частности, аксиома $\alpha \vee \sim \alpha$ оказывается истинной при любой оценке ровно в тех ситуациях, когда элементы Ω образуют булеву алгебру. Аксиомы и теоремы интуиционистской логики истинны во всех топосах.

2 Декартово замкнутые категории

Определение 3. Декартово замкнутая категория — конечно полная категория с экспоненциальными объектами.

Далее будут доказаны некоторые утверждения о декартово замкнутых категориях с начальным объектом.

Утверждение 1. Для любого объекта A верно $0 \cong 0 \times A$, то есть $0 \times A$ является начальным объектом.

Доказательство. По определению экспоненцирования, для любого объекта X есть биекция

$$\text{Hom}(0 \times A, X) \cong \text{Hom}(0, X^A).$$

Поскольку в правом классе всегда ровно один элемент, то и в левом тоже, поэтому $0 \times A$ — начальный объект. \square

Утверждение 2. Если существует $f: A \rightarrow 0$, то $A \cong 0$.

Доказательство. $\text{pr}_A \circ \langle f, 1_A \rangle = 1_A$, как показывает правый треугольник в следующей диаграмме:

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & \swarrow & \downarrow \langle f, 1_A \rangle & \searrow & \\ 0 & \xleftarrow{\text{pr}_0} & 0 \times A & \xrightarrow{\text{pr}_A} & A \end{array}$$

С другой стороны, $\langle f, 1_A \rangle \circ \text{pr}_A = 1_{0 \times A}: 0 \times A \rightarrow 0 \times A$, потому что есть только один морфизм из начального объекта в начальный. Поэтому $A \cong 0 \times A$, и поскольку $0 \times A$ — начальный объект, то и A — начальный объект. \square

Определение 4. Категория называется вырожденной, если все её объекты изоморфны.

Утверждение 3. Если $0 \cong 1$, то категория вырожденная.

Доказательство. Поскольку начальные объекты изоморфны друг другу, достаточно доказать, что все объекты начальные. Из произвольного объекта A получаем стрелку в 0:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{!_A} & 1 \\ & & \downarrow \cong \\ & & 0 \end{array}$$

Из предыдущего утверждения следует, что A — начальный объект. \square

Утверждение 4. Все морфизмы $f: 0 \rightarrow A$ с $\text{dom} = 0$ являются мониками.

Доказательство. Пусть $f \circ g = f \circ h$ для каких-то g и h :

$$B \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} 0 \xrightarrow{f} A$$

B — начальный объект, потому что из него есть стрелка в начальный. Но тогда $g = h$, поскольку в любой объект из начального объекта есть только одна стрелка. \square

Утверждение 5. $A^0 \cong 1$, то есть A^0 — терминальный объект.

Доказательство. По определению экспоненцирования, для любого объекта X

$$\text{Hom}(X \times 0, A) \cong \text{Hom}(X, A^0).$$

Поскольку $X \times 0$ — начальный объект, то в левом классе ровно один элемент. Следовательно, для любого X есть ровно одно отображение $!_X: X \rightarrow A^0$. \square

Утверждение 6. $1^A \cong 1$, то есть 1^A — терминальный объект.

Доказательство. По определению экспоненцирования, для любого объекта X

$$\text{Hom}(X \times A, 1) \cong \text{Hom}(X, 1^A).$$

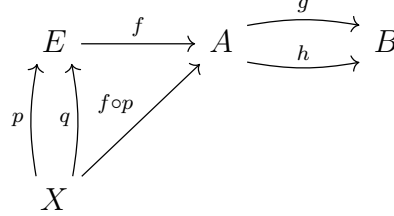
В левом классе ровно один элемент, поскольку из любого объекта есть ровно одно отображение в 1. Следовательно, для любого X есть ровно одно отображение $!_X: X \rightarrow 1^A$. \square

3 Уравнители и моники

Напомним некоторые факты из теории категорий.

Утверждение 7. *Любой уравнитель — моника.*

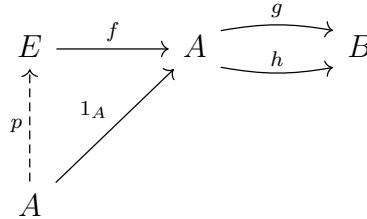
Доказательство. Пусть f уравнивает g и h , $g \circ f = h \circ f$, и возьмем произвольную пару стрелок p, q , для которых $f \circ p = f \circ q$.



Поскольку $g \circ f \circ p = h \circ f \circ p$, то по определению уравнителя, существует ровно один морфизм $X \rightarrow E$, при котором треугольник в этой диаграмме коммутует. Поэтому из $f \circ p = f \circ q$ сразу следует $p = q$, то есть f — моника. \square

Утверждение 8. *Эпические уравнители — изоморфизмы.*

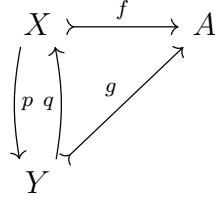
Доказательство. Пусть $f: E \rightarrow A$ — эпика, уравнивающая g и h . В этом случае сразу верно, что $g = h$, и поэтому из того, что E — уравнитель, следует, что любая стрелка с концом в A пропускается через f . В частности, должна существовать стрелка $p: A \rightarrow E$, при которой треугольник в этой диаграмме коммутативный:



Из диаграммы получаем $f \circ p = 1_A$, откуда $f \circ p \circ f = f = f \circ 1_A$. Но по предыдущему утверждению f — моника, и на нее можно сократить слева: $p \circ f = 1_A$. Получается, $f^{-1} = p$. \square

4 Подобъекты и характеры

Определение 5. Подобъект объекта A — класс по отношению эквивалентности, заданному на всех мониках с концом A : моники f и g эквивалентны (обозначение: $f \cong g$), если пропускаются друг через друга, $f = g \circ p$, $g = f \circ q$ для некоторых p и q .



Замечание 1. p и q взаимнообратны, а $X \cong Y$.

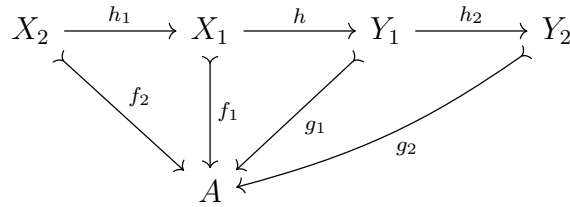
Доказательство. Поскольку f — моника, её можно сократить:

$$f \circ 1_X = f = g \circ p = f \circ q \circ p.$$

Аналогично, $1_Y = p \circ q$. □

Определение 6. $[f] \subseteq [g]$, если f пропускается через g .

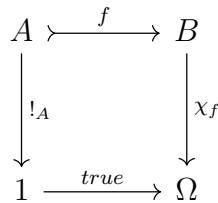
Доказательство. Докажем, что не зависит от выбора представителей классов. Пусть $f_1 \cong f_2$ и $g_1 \cong g_2$, и $f_1 = g_1 \circ h$. Крайние треугольники в этой диаграмме существуют благодаря тому, что соответствующие стрелки, ведущие в A , эквивалентны:



Получается, $f_2 = g_2 \circ h_2 \circ h \circ h_1$, так что f_2 пропускается через g_2 . □

Собрание всех подобъектов A обозначается $Sub(A)$. Отношение \subseteq превращает $Sub(A)$ в частично упорядоченное множество, а в топосе $Sub(A)$ оказывается ограниченной решёткой, meet и join которой — пересечение и объединение подобъектов.

Определение 7. Классификатор подобъектов — объект Ω и морфизм $true$, такие что для любой моники $f: A \rightarrowtail B$ существует единственный морфизм $\chi_f: B \rightarrow \Omega$, для которого следующая диаграмма — пулбэк:



χ_f называют характером f . Стрелку $true$ ещё обозначают \top . Композиция $true \circ !_A$ обозначается $true_A$. Докажем некоторые факты о классификаторе.

Утверждение 9. Характером $true: 1 \rightarrow \Omega$ является тождественный морфизм 1_Ω , то есть $\chi_{true} = 1_\Omega$.

Доказательство. Диаграмма коммутует:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{true} & \Omega \\ \downarrow !_1 & & \downarrow 1_\Omega \\ 1 & \xrightarrow{true} & \Omega \end{array}$$

Кроме того, пусть даны $f: X \rightarrow \Omega$ и $g: X \rightarrow 1$, такие что периметр коммутует:

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & \\ & \searrow g & & \searrow f & \\ & 1 & \xrightarrow{true} & \Omega & \\ & \downarrow !_1 & & \downarrow 1_\Omega & \\ & 1 & \xrightarrow{true} & \Omega & \end{array}$$

В таком случае $f = true \circ g$, так что треугольники в этой диаграмме коммутуют. Кроме того, g — единственная стрелка, при которой это происходит: для произвольной стрелки h в правом треугольнике $h = !_1 \circ h = g$.

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & \\ & \searrow h & & \searrow f & \\ & 1 & \xrightarrow{true} & \Omega & \\ & \downarrow !_1 & & \downarrow 1_\Omega & \\ & 1 & \xrightarrow{true} & \Omega & \end{array}$$

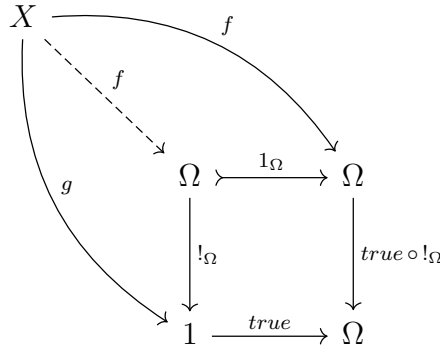
□

Утверждение 10. Характером 1_Ω является $true_\Omega$, то есть $\chi_{1_\Omega} = true \circ !_\Omega$.

Доказательство. Диаграмма коммутует:

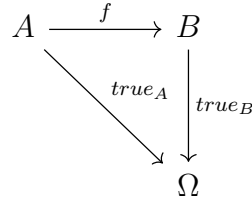
$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{1_\Omega} & \Omega \\ \downarrow !_\Omega & & \downarrow true \circ !_\Omega \\ 1 & \xrightarrow{true} & \Omega \end{array}$$

С другой стороны, пусть при $f: X \rightarrow \Omega$ и $g: X \rightarrow 1$ периметр коммутует:



Тогда $true \circ !_\Omega \circ f = true \circ g$. Поскольку $true$, будучи морфизмом из терминального объекта, является моникой, его можно сократить слева: $!_\Omega \circ f = g$. Поэтому треугольники в этой диаграмме коммутируют. Из-за тождественного морфизма в верхнем треугольнике ничего кроме f выбрать не получится. \square

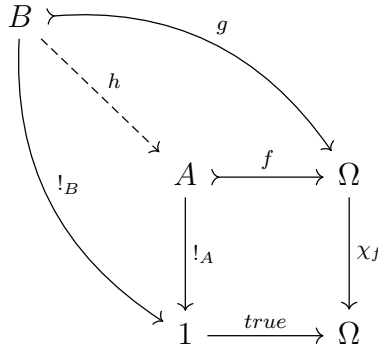
Утверждение 11. Для любой стрелки $f: A \rightarrow B$ верно $true_B \circ f = true_A$.



Доказательство. Дело в том, что $true_A = true \circ !_A$, а $true_B \circ f = true \circ !_B \circ f$, но $!_A = !_B \circ f$, поскольку обе стрелки идут из A в терминальный объект. \square

Утверждение 12. Характеры моник $f: A \rightarrowtail D$ и $g: B \rightarrowtail D$ равны, $\chi_f = \chi_g$, тогда и только тогда, когда $f \cong g$.

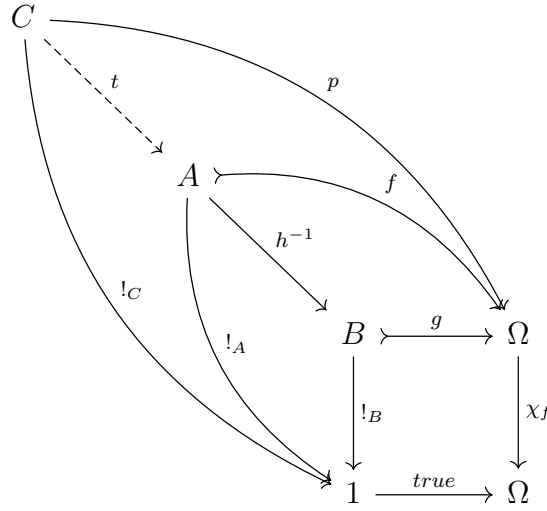
Доказательство. Пусть $\chi_f = \chi_g$. Тогда в этой диаграмме внутренний квадрат — пулбэк, а внешний коммутирует (потому что тоже пулбэк), поэтому существует h , пропускающая g через f :



Аналогично f пропускается через g , и поэтому $f \cong g$. С другой стороны, если $f \cong g$, то стрелка h на приведенной диаграмме существует — с её помощью покажем коммутативность периметра:

$$\chi_f \circ g = \chi_f \circ f \circ h = true \circ !_A \circ h = true \circ !_B.$$

Пусть $p, !_C$ — пара стрелок, с которыми периметр у этой диаграммы коммутирует:



Морфизм t существует, потому что квадрат с вершиной в A — пулбэк, и поэтому $p = f \circ t$. Морфизм h^{-1} существует и треугольники с ним коммутируют потому, что по условию f пропускается через g . Все левые треугольники коммутируют автоматически из-за терминального объекта в одной из вершин. Таким образом, $h^{-1} \circ t$ — искомая стрелка, делающая оба внешних треугольника коммутативными. Если z — ещё одна такая стрелка, то есть $g \circ z = p$, то $f \circ h \circ z = p$ — значит, $h \circ z = t$ в силу единственности t с условием $f \circ t = p$. Но тогда $z = h^{-1} \circ h \circ z = h^{-1} \circ t$, что и требовалось. \square

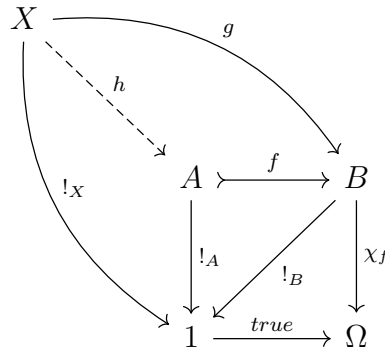
Напомним, что изоморфизмы в любой категории являются мониками и эпиками. Если, например, для изоморфизма f верно $f \circ g = f \circ h$, то

$$g = f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ f \circ h = h,$$

то есть f — моника. Эпичность f доказывается аналогично.

Утверждение 13. *Эпические моники в топосе — изоморфизмы.*

Доказательство. Ранее было доказано, что эпические уравниватели — изоморфизмы; поэтому достаточно показать, что любая моника $f: A \rightarrow B$ что-нибудь уравнивает. Покажем, что она уравнивает свой характер с $true_B$. Заметим, что $\chi_f \circ f = true_A = true_B \circ f$.



Пусть есть $g: X \rightarrow B$, такой что $\chi_f \circ g = true_B \circ g$. Но $true_B \circ g = true_X$, так что $\chi_f \circ g = true_X$ — периметр диаграммы коммутирует. Значит, согласно определению

пулбэка, существует морфизм h , для которого верно $g = f \circ h$. Такой морфизм оказывается единственным, потому что правый треугольник в диаграмме коммутует при любом морфизме на месте h . Таким образом, f — уравниватель. \square

Утверждение 14. $true$ уравнивает 1_Ω и $true_\Omega$.

Доказательство.

$$1_\Omega \circ true = true \circ 1_1 = true \circ !_\Omega \circ true = true_\Omega \circ true$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{true} & \Omega & \xrightarrow{!_\Omega} & 1 & \xrightarrow{true} & \Omega \\ & & \downarrow 1_1 & & \uparrow 1_\Omega & & \\ & & 1 & & \Omega & & \end{array}$$

Кроме того, пусть для некоторого $h: X \rightarrow \Omega$ выполняется $1_\Omega \circ h = true_\Omega \circ h$, то есть $h = true \circ !_\Omega \circ h = true \circ !_A$. Последнее означает, что h пропускается через $true$ с помощью $!_A$. Другую стрелку взять не получится, потому что конец необходимой стрелки — терминальный объект.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{true} & \Omega & \xrightarrow{!_\Omega} & 1 & \xrightarrow{true} & \Omega \\ \uparrow !_A & & \uparrow h & & \uparrow !_A & & \\ A & & & & & & \end{array}$$

\square

5 Точечные и бивалентные топосы

Определение 8. *Ненулевой объект — объект, неизоморфный начальному.*

Определение 9. *Непустой объект — объект, у которого есть хотя бы один элемент.*

Определение 10. *Принцип экстенциональности. Если $f: A \rightarrow B$, $g: A \rightarrow B$ — пара разных стрелок с общими началом и концом, то существует элемент $x: 1 \rightarrow A$, такой что $f \circ x \neq g \circ x$.*

Определение 11. *Точечный топос — невырожденный топос, в котором выполнен принцип экстенциональности.*

Утверждение 15. *В точечном топосе любой ненулевой объект непуст.*

Доказательство. Пусть A — ненулевой объект. Возьмем характеры стрелок $0_A: 0 \rightarrow A$ и $1_A: A \rightarrow A$. Если бы χ_{0_A} оказалось равным χ_{1_A} , это бы означало, что $0_A \cong 1_A$ и, следовательно, $0 \cong A$, что противоречит выбору A . Значит, есть две различные стрелки с общим началом в A и с общим концом. Из экстенциональности следует существование элемента $x: 1 \rightarrow A$, то есть A непуст. \square

Определение 12. *Ложь, стрелка $false$ или \perp — это характер $0_1: 0 \rightarrow 1$.*

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{0_1} & 1 \\ \downarrow !_0 & & \downarrow false \\ 1 & \xrightarrow{true} & \Omega \end{array}$$

Замечание 2. 0_1 — моника.

Доказательство. Как было доказано, в декартово замкнутых категориях все стрелки с началом в начальном объекте — моники. \square

Утверждение 16. *Морфизм $\perp \circ !_A$ — характер 0_A .*

Доказательство. Нужно доказать, что периметр — пулбэк. Для этого достаточно доказать, что оба внутренних квадрата — пулбэки.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \xrightarrow{0_A} & A & & \\ \downarrow !_0 & & \downarrow !_A & & \\ \downarrow !_0 & 0 & \xrightarrow{0_1} & 1 & \downarrow \perp \\ & \downarrow 0_1 & & & \downarrow \perp \\ 1 & \xrightarrow{true} & \Omega & & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{пулбэк} \\ \text{пулбэк} \end{array}$$

Нижний квадрат — пулбэк, по определению лжи. Верхний квадрат коммутирует, потому что есть только одна стрелка $0 \rightarrow 1$. Для вершины X любого конуса над верхним квадратом существует стрелка $X \rightarrow 0$, что в декартово замкнутых категориях означает, что X — начальный объект, поэтому искомой стрелкой для любого конуса будет единственный морфизм $X \rightarrow 0$. \square

Утверждение 17. В невырожденном топосе ложь и истина различны, $\perp \neq \top$.

Доказательство. $true$ — характер $1_1: 1 \rightarrow 1$, а $false$ — характер $0_1: 0 \rightarrow 1$, так что если $true = false$, то $1_1 \cong 0_1$, и следовательно, $1 \cong 0$, из чего следует вырожденность. \square

Определение 13. Невырожденный топос называют бивалентным, если $true$ и $false$ — единственные элементы Ω .

Утверждение 18. Точечный топос бивалентен.

Доказательство. Возьмем произвольный подобъект 1 :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & 1 \\ \downarrow ! & & \downarrow \chi_f \\ 1 & \xrightarrow{true} & \Omega \end{array}$$

Если $A \cong 0$, то $h = 0_1$ и $\chi_h = \perp$. В противном случае A непуст, и существует $f: 1 \rightarrow A$. Следующие две диаграммы показывают, что $h \cong 1_1$.

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{1_1} & 1 \\ \downarrow f & \nearrow h & \\ A & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{1_1} & 1 \\ \uparrow h & \nearrow h & \\ A & & \end{array}$$

Поэтому $\chi_h = true$. \square

6 Пропозициональная логика в топосе

Определение 14. Отрицание \neg — характер лжи.

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\perp} & \Omega \\ \downarrow 1_1 & & \downarrow \neg \\ 1 & \xrightarrow{\top} & \Omega \end{array}$$

Определение 15. Конъюнкция $\cap: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ — характер произведения пары $true < \top, \top >: 1 \rightarrow \Omega \times \Omega$.

Определение 16. Дизъюнкция $\cup: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ — характер образа стрелки

$$[< true_\Omega, 1_\Omega >, < 1_\Omega, true_\Omega >]: \Omega + \Omega \rightarrow \Omega \times \Omega.$$

Определение 17. Импликация $\Rightarrow: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ — характер стрелки $e: \leq \rightarrow \Omega \times \Omega$, которая уравнивает конъюнкцию и проекцию на первый множитель $pr_1: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$.

Теперь есть всё необходимое для работы с пропозициональной логикой в топосе.

Определение 18. ξ -оценка — это функция $V: \Phi_0 \rightarrow Hom_\xi(1, \Omega)$, которая каждой пропозициональной переменной π_i сопоставляет значение истинности $V(\pi_i): 1 \rightarrow \Omega$. V продолжается на все формулы Φ следующим образом:

$$V(\sim \alpha) = \neg \circ V(\alpha)$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{V(\alpha)} & \Omega \\ & \searrow V(\sim \alpha) & \downarrow \neg \\ & & \Omega \end{array}$$

$$V(\alpha \wedge \beta) = \cap \circ < V(\alpha), V(\beta) >$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & \swarrow & \vdots & \searrow & \\ & V(\alpha) & & V(\beta) & \\ \Omega & \xleftarrow{pr_1} & \Omega \times \Omega & \xrightarrow{pr_2} & \Omega \\ & & \downarrow \cap & & \\ & & \Omega & & \end{array}$$

$$V(\alpha \vee \beta) = \cup \circ < V(\alpha), V(\beta) >$$

$$V(\alpha \supset \beta) = \Rightarrow \circ < V(\alpha), V(\beta) >$$

Обозначение 1. Если $\langle f, g \rangle: 1 \rightarrow \Omega \times \Omega$ — пара значений истинности, то вводятся следующие обозначения:

$$f \cap g = \cap \circ \langle f, g \rangle$$

$$f \cup g = \cup \circ \langle f, g \rangle$$

$$f \Rightarrow g = \Rightarrow \circ \langle f, g \rangle$$

Утверждение 19. $\neg \circ \perp = \top$

Доказательство. Сразу следует из определения отрицания \neg . □

Утверждение 20. $\neg \circ \top = \perp$

Доказательство. Докажем, что периметр — пулбэк, это будет означать, что характером 0_1 является $\neg \circ \top$, из чего будет следовать утверждение, поскольку \perp — характер 0_1 по определению.

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{0_1} & 1 \\ \downarrow 0_1 & & \downarrow \top \\ 1 & \xrightarrow{\perp} & \Omega \\ \downarrow 1_1 & & \downarrow \neg \\ 1 & \xrightarrow{\top} & \Omega \end{array}$$

Нижний квадрат — пулбэк, это определение отрицания \neg . Верхний квадрат — тоже пулбэк, это отражённое определение лжи \perp . Поэтому периметр — пулбэк. □

Утверждение 21. (Без доказательства.) Конъюнкция, дизъюнкция и импликация в применении к \top и \perp имеют обычные таблицы истинности. $\top \cap \perp = \perp$, $\perp \Rightarrow \top = \top, \dots$

Пусть $V: \Phi_0 \rightarrow 2$ — классическая оценка. Определим ξ -оценку $V': \Phi \rightarrow \text{Hom}_\xi(1, \Omega)$:

$$V'(\pi_i) = \top, \text{ если } V(\pi_i) = 1$$

$$V'(\pi_i) = \perp, \text{ если } V(\pi_i) = 0$$

Утверждение 22. Для любой формулы $\alpha \in \Phi$ верно либо $V'(\alpha) = \top$, $V'(\alpha) = \perp$, и кроме того, $V'(\alpha) = \top$ тогда и только тогда, когда $V(\alpha) = 1$.

Доказательство. Доказывается с помощью структурной индукции по формуле α , которая сработает, поскольку таблицы истинности у каждой из операций совпадают с классическими. □

Утверждение 23. В любом топосе ξ верно, что если $\xi \models \alpha$, то $\vdash_{CL} \alpha$.

Доказательство. Возьмем произвольную классическую оценку V и ассоциированную с ней оценку V' . Поскольку $\xi \models \alpha$, то при оценке V' формула α тоже верна: $V'(\alpha) = \top$, — значит, согласно предыдущему утверждению, $V(\alpha) = 1$. Получается, $V(\alpha) = 1$ при любой классической оценке V , а из этого следует, что $\vdash_{CL} \alpha$. □

Утверждение 24. Если топос ξ бивалентен, $\xi \models \alpha$ тогда и только тогда, когда $\vdash_{CL} \alpha$.

Доказательство. В одну сторону доказано в предыдущем утверждении. В обратную сторону, пусть $\vdash_{CL} \alpha$, то есть α верно при любой классической оценке. Пусть V' — произвольная ξ -оценка; построим по V' классическую оценку V : $V(\pi_i) = 1$, если $V'(\pi_i) = \top$, $V(\pi_i) = 0$, если $V'(\pi_i) = \perp$, — поскольку топос бивалентный, других значений истинности нет, и V построится. Но тогда V и V' оказываются ассоциированными, и поскольку α верно при любой классической оценке, то $V(\alpha) = 1$, и значит, $V'(\alpha) = \top$. \square

Заметим, что существуют топосы, для которых из $\vdash_{CL} \alpha$ не следует $\xi \models \alpha$. Например, $\alpha \vee \sim \alpha$ не равно \top при любой оценке в категории всех стрелок Set^{\rightarrow} . В этой категории у Ω три элемента: $0 \mapsto 0$ (\perp), $\frac{1}{2} \mapsto 1$, $1 \mapsto 1$ (\top). Тогда после подстановки $\frac{1}{2} \mapsto 1$ вместо α получаем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \mapsto 1\right) \vee \sim \left(\frac{1}{2} \mapsto 1\right) &= \\ \left(\frac{1}{2} \mapsto 1\right) \vee (0 \mapsto 0) &= \\ \frac{1}{2} \mapsto 1 \end{aligned}$$

Список литературы

- [1] R. Goldblatt. Topoi: The Categorical Analysis of Logic.