УДК 528.06

С. Г. ВАЛЕЕВ, В. А. ФАСХУТДИНОВА, Н. В. ЛЕВАНОВА

ПРИМЕНЕНИЕ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

Описываются алгоритм фрактального анализа для временных рядов, его программная реализация и результаты исследования временного ряда магнитуды землетрясений.

Ключевые слова: временные ряды, фрактальный анализ, показатель Херста, R/S анализ, нечёткие множества.

Введение

При моделировании и прогнозировании эволюционирующихся процессов и систем статистические данные представляются временными рядами (ВР) числовых значений основного показателя. Наиболее актуальной задачей является проблема прогнозирования его дальнейшего поведения. Для решения этой проблемы необходимо предварительное исследование динамики показателя. В данной статье рассматривается применение для этой цели фрактального анализа ВР.

Цель исследования – тестирование временных рядов сейсмической активности на наличие свойства фрактальности (наличие «долговременной памяти» или «эффекта памяти»).

Понятие «эффект памяти» было введено Э. Петерсом [1], предложившим анализировать финансовые ряды с учётом времени или, точнее, «предыстории» прогнозируемого события. «Предыстория» позволяет выявить наличие факта детерминированности исследуемого процесса.

В соответствии с указанной целью решались задачи:

1. Разработка модуля «Фрактальный анализ» и его интегрирование в ранее созданный программный комплекс «Автоматизированная система динамического регрессионного моделирования» (АС ДРМ) [2].

2. Исследование динамики сейсмической активности на Камчатке по характеристикам фрактального анализа.

Алгоритм

R/S анализ. В представленном ВР Z последовательно выделяем его начальные отрезки

$$Z_\tau = z_1, z_2, \dots z_\tau,\ \tau = 3,4\dots,n, \quad (1)$$

для каждого из которых вычисляем текущее среднее

$$\bar{Z}_\tau = \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{\tau} Z_i. \quad (2)$$

Далее для каждого фиксированного τ вычисляем накопленное отклонение для отрезков длины t:

$$X_{\tau,t} = \sum_{i=1}^{t} (z_i - z_\tau),\ t = \overline{1,\tau}. \quad (3)$$

После чего вычисляем разность между максимальным и минимальным накопленными отклонениями

$$R = R(\tau) = max(X_{\tau,t}) - min(X_{\tau,t}), \quad (4)$$

которую принято называть термином «размах R». Этот размах нормируется, т. е. представляется в виде дроби $R \backslash S$, где $S = S(\tau)$ – стандартное отклонение для отрезка ВР Z_τ, $3 \le \tau < n$.

Херст предложил новую статистику – показатель Херста (H). Этот показатель широко применяется при анализе временных рядов благодаря своей замечательной устойчивости. Он содержит минимальные предположения об изучаемой системе и может классифицировать временные ряды, отличая случайный ряд от неслучайного, даже если первый ряд не гауссовский.

Херст ввёл безразмерное отношение путём деления размаха на стандартное отклонение наблюдений. Этот способ анализа стал называться методом нормированного размаха (R/S -анализ) [1]. Сила тренда и уровень шума могут быть оценены по изменению нормированного размаха со временем.

Херст ввёл следующее соотношение:

$$R/S=(a\cdot N)^{H}, \quad (5)$$

где R/S – нормированный размах; N – число наблюдений; a – константа; H – показатель Херста.

Имеются три различных классификации для показателя Херста:

1) $\boldsymbol{H}$ = 0.5. Указывает на *случайный* ряд. События случайны и некоррелированны. Настоящее не влияет на будущее. Функция плотности вероятности может быть нормальной кривой, однако это не обязательное условие.

2) $0 \le \boldsymbol{H} < 0.5$. Данный диапазон соответствует *антиперсистентным* или *эргодическим* рядам. Такой тип системы часто называют – «возврат к среднему». Если система демонстрирует «рост» в предыдущий период, то, скорее всего, в следующем периоде начнется спад. И наоборот, если шло снижение, то вероятен близкий подъём. Устойчивость такого антиперсистентного поведения зависит от того, насколько $\boldsymbol{H}$ близко к нулю. Такой ряд более изменчив, чем ряд случайный, так как состоит из частых реверсов спад-подъём.

3) $0.5 < \boldsymbol{H} < 1.0$. Имеем *персистентные* или *трендоустойчивые* ряды. Если ряд возрастает (убывает) в предыдущий период, то, вероятно, что он сохранит эту тенденцию какое-то время в будущем. Чем ближе $\boldsymbol{H}$ к 0.5, тем более зашумлён ряд и тем менее выражен его тренд. Персистентный ряд – это обобщённое броуновское движение, или смещённые случайные блуждания. Сила этого смещения зависит от того, насколько $\boldsymbol{H}$ больше 0.5.

Одной из основных фрактальных характеристик ВР является цвет шума, который соответствует этому ряду на том или другом временном отрезке. Значения H > 3/5 определяют собой чёрный цвет шума. Чем больше значение $H\in[3/5,1]$, тем большая трендоустойчивость присуща соответствующему отрезку ВР. Значения H в окрестности $0{,}4<H<0{,}6$ определяют собой нечётко область белого шума, который соответствует «хаотичному поведению ВР» и, следовательно, наименьшей надёжности прогноза. Значения H в окрестности ~0,3 ±0.1 определяют собой пребывание соответствующего отрезка ВР в области розового шума. Розовый шум говорит о присущем рассматриваемому отрезку ВР свойстве антиперсистентности, которое означает, что ВР реверсирует чаще, чем ряд случайный (частый возврат к среднему).

R\S и H траектории. Показатель Херста $H=H(\tau)$, характеризующий фрактальную размерность рассматриваемого ВР и соответствующий ему цвет шума, получаем из соотношения $R/S=(a*\tau)^{H}$, $H = H(\tau)$. Логарифмируя обе части этого равенства и полагая значение a=1/2, получаем последовательность декартовых координат (x_τ, y_τ) точек H-траектории, ординаты которых

$$y_\tau = H(\tau) = \frac{\log(R(\tau)/S(\tau))}{Log(\tau/2)} \quad , \quad (6)$$

а абсциссы

$$x_\tau = \tau, \tau = 3,4,..n\,. \quad (7)$$

Требуемая для фрактального анализа ряда R/S-траектория представляется в логарифмических координатах последовательностью точек, абсциссы которых $x_\tau = log(\tau/2)$, а ординаты $y_\tau = \log(R(\tau)/S(\tau))$. Соединяя отрезком соседние точки (x_τ,y_τ) и ($x_{\tau+1}, y_{\tau+1}$), τ=3,4,…n-1, получаем графическое представление R/S-траектории (H-траектории) в логарифмических координатах (в обычных декартовых координатах).

О наличии долговременной памяти в ВР невозможно дать заключение в случае, если его H-траектория не находится некоторое продолжительное время в области чёрного шума, а поведение R/S-траектории носит хаотический характер, начиная с её начальных точек.

Основанием для утверждения о том, что некоторый ВР обладает долговременной памятью, является выполнение следующих условий:

1. Его H-траектория через несколько своих начальных точек оказывается в области чёрного шума, а для его R/S-траектории указанные точки вхождения в чёрный шум демонстрируют собой наличие тренда. Глубину этой памяти определяет такой первый по порядку (в области чёрного шума) номер $\tau = l$, для которого выполняется следующее условие: в точке l H-траектория получает отрицательное приращение, а R/S-траектория в этой точке демонстрирует так называемый «срыв с тренда», т. е. резкое изменение тренда предшествующих точек R/S-траектории.

2. Факт наличия долговременной памяти в рассматриваемом ВР можно обосновать также с помощью процедуры перемешивания элементов этого ВР. Если в данном ВР случайным образом перетасовать его элементы и полученный ряд

представить на вход алгоритма *R/S*-анализа, то на выходе этого алгоритма максимальное значение показателя Херста траектории окажется явно меньше по сравнению со значениями исходного ВР в случае, если этот ВР обладает долговременной памятью.

Модуль пакета АС ДРМ «Фрактальный анализ»

Отдельный модуль «Фрактальный анализ» интегрирован в ранее созданный программный пакет АС ДРМ [1]. Модуль выполняет следующие функции:

- R/S анализ исходного ВР, с помощью которого можно классифицировать временные ряды. Он позволяет отличить случайный ряд от неслучайного, даже если случайный ряд не гауссовский (то есть не нормально распределённый);
- построение R\S и H траекторий, позволяющих определить наличие долговременной памяти ВР;
- формирование нечётких множеств [3, 4];
- построение фазовой траектории для ВР, которая даёт не только геометрическое изображение отдельных движений, состояний равновесия, периодических, хаотических движений, но и определяет «логику» поведения системы, его зависимость от параметров;
- выполнение процедуры агрегирования [4].

Интерфейс модуля представлен на рис. 1.

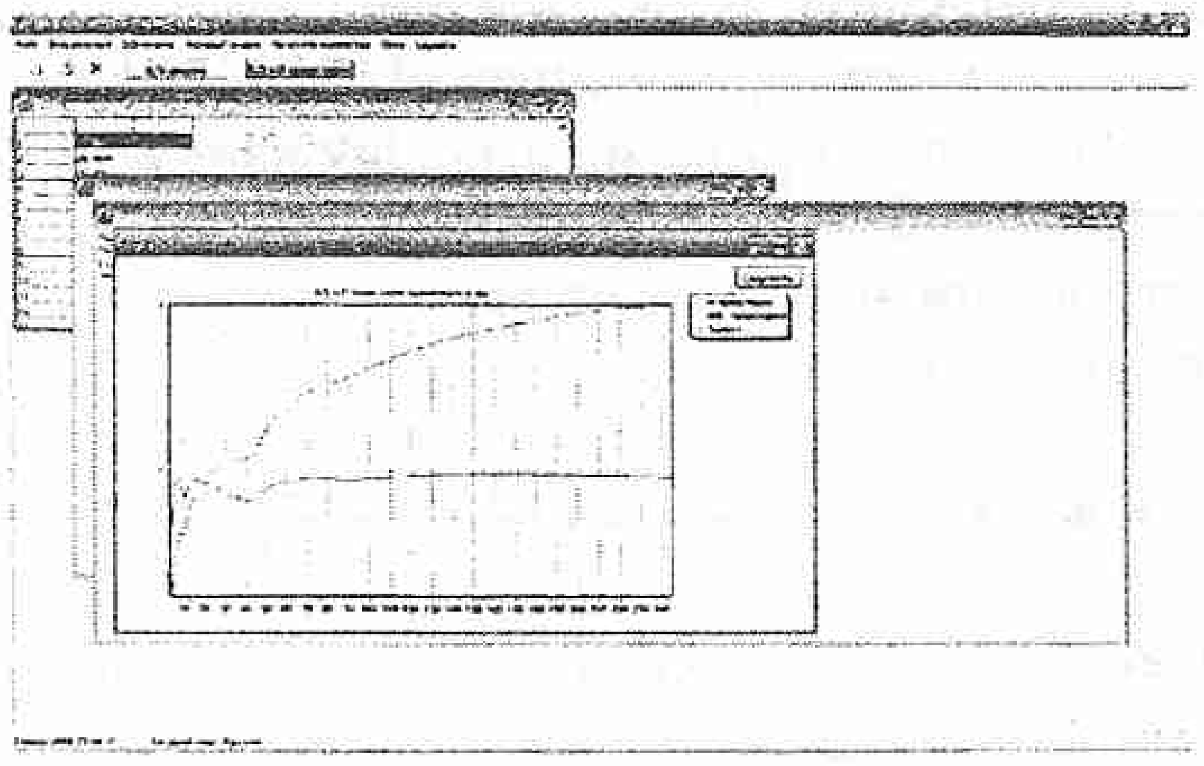

Рис. 1. Интерфейс модуля «Фрактальный анализ»

Модуль «Фрактальный анализ» применяется в начале исследования временного ряда. Перед тем как построить модель с целью её использования для прогнозирования, необходимо предварительно уточнить, имеется ли в поведении исходного ряда какая-либо закономерность. При обнаружении закономерности (регулярности) строится модель ВР представлением её в виде трендовой, гармонических, авторегрессионных и другого вида составляющих, включая случайные. Для проверки ВР на наличие гармоник проводится спектральный анализ и вейвлет-анализ.

Фрактальный анализ ряда магнитуды сейсмической активности

Данные по землетрясениям за 1995–2007 годы на Камчатке, усреднённые еженедельно, взяты с сайта http://data.emsd.iks.ru/dbquaketxt_min/index_r.htm#tops . Из имеющихся характеристик сейсмической активности был выбран ряд магнитуды (баллы по шкале Рихтера).

Проведём R/S анализ исходного ВР.

Показатель Херста H=0,597 ($0.5 < \boldsymbol{H} < 1.0$), следовательно, имеем персистентный или трендоустойчивый ряд.

Если ряд возрастает (убывает) в предыдущий период, то, вероятно, что он будет сохранять эту тенденцию какое-то время в будущем.

Чем ближе H к 0.5, как в нашем случае, тем более зашумлён ряд и тем менее выражен его тренд.

Фрактальная размерность временного ряда C=1,4027.

Размерность фазового пространства ρ= 2.

Строим *R/S* и *H* траектории временного ряда:

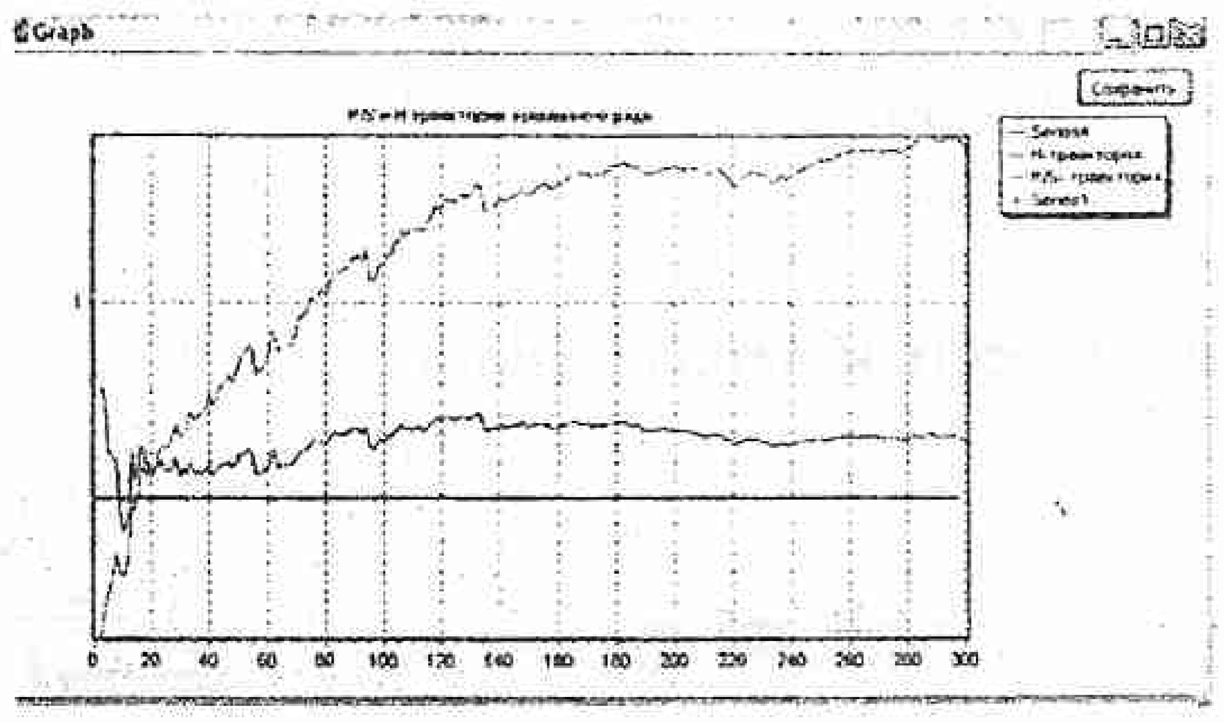

Рис. 2. R/S и H траектории временного ряда магнитуды землетрясений

Формируем нечёткое множество $M(Z)$

$M(Z)$={
(10;0,0085)
(3;0,9000)
(8;0,0042)
(7;0,0127)
(6;0,0254)
(4;0,2070)
(5;0,0718)
}

Центр тяжести нечёткого множества = 3,4536.

Максимальное значение функции принадлежности нечёткому множеству 0,9 достигается для минимально возможной глубины памяти 3.

Это говорит о весьма низкой трендоустойчивости этого временного ряда

Для улучшения предпрогнозных характеристик рассматриваемого временного ряда проведём процедуру агрегирования (рис. 3), усредняя данные по месяцам.

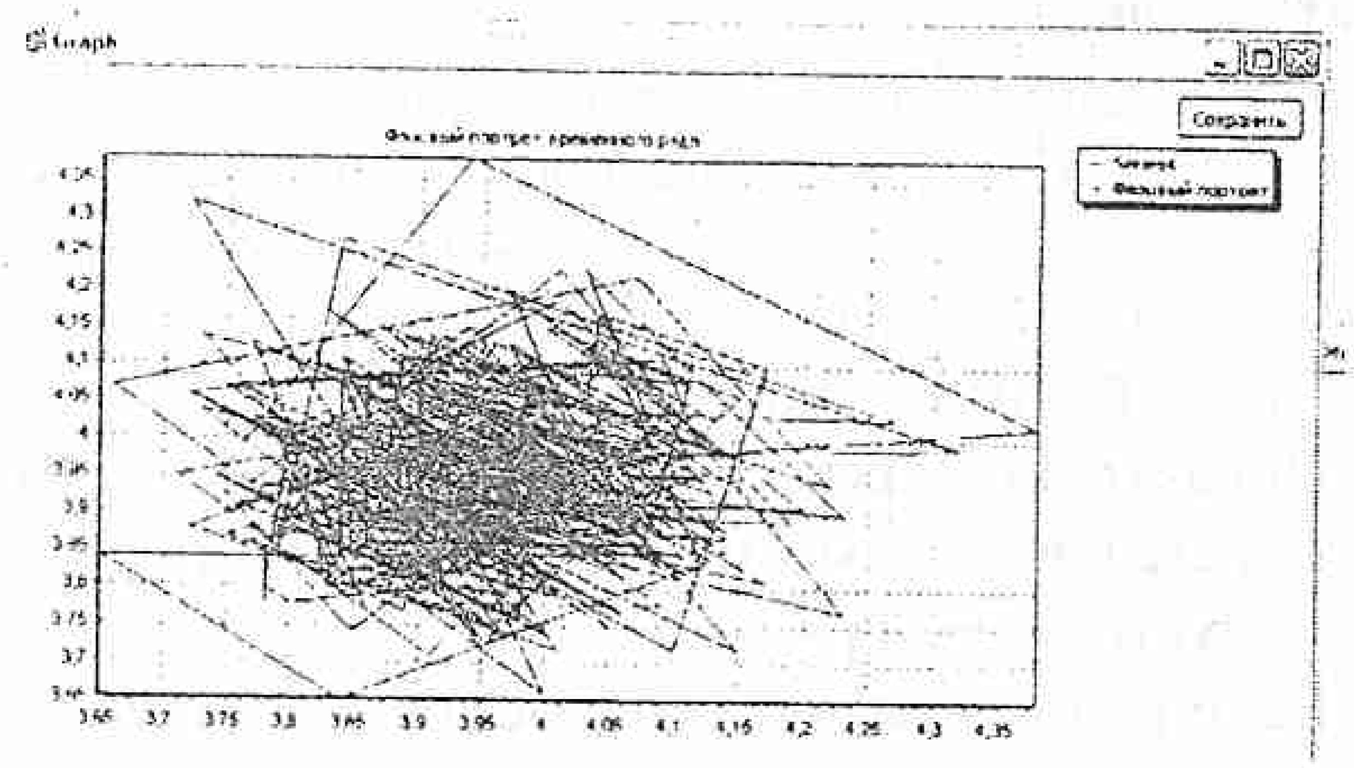

Рис. 3. Фазовый портрет временного ряда магнитуды землетрясений

После применения процедуры агрегирования формируем нечёткое множество $M(Z)$

$M(Z)$={
(7;0,1440)
(3;0,7200)
(4;0,9000)
(8;0,0720)
(5;0,3600)
(6;0,1800)
}

Центр тяжести нечёткого множества = 4,3030.

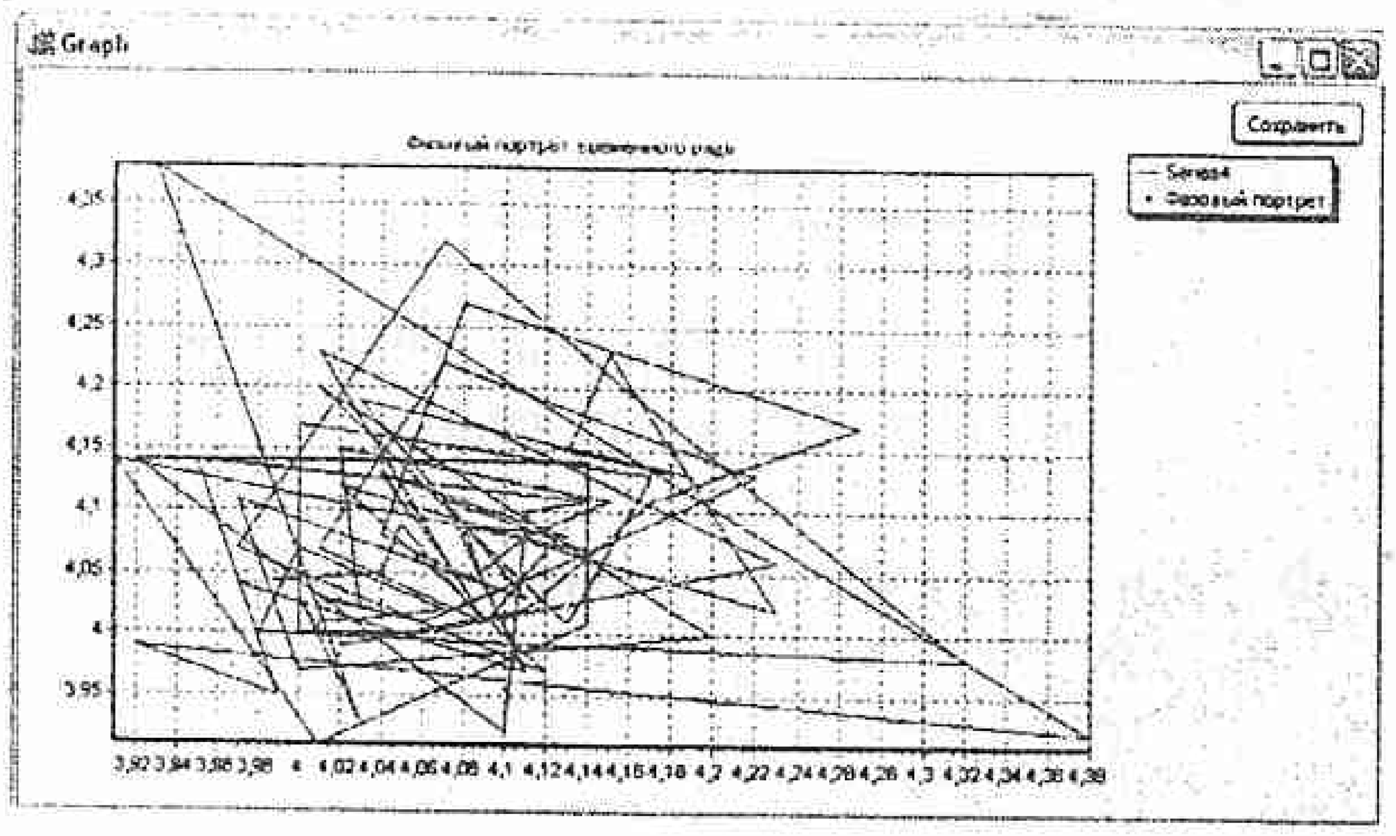

Рис. 4. Фазовый портрет временного ряда магнитуды землетрясений после применения процедуры агрегирования месячным интервалом

Из всего сказанного можно сделать вывод, что прогноз получится надёжнее, если модель ВР строить в будущем по месяцам.

Заключение

Фрактальный анализ – достаточно новый инструмент, уже нашедший своё применение в различных областях научных исследований, таких как физика, химия, биология, лингвистика, музыка, изобразительное искусство, математика, экономика и т. д. Это связано с тем, что любые достаточно сильные нерегулярности в природе стремятся обрести самоподобие, или фрактальность.

Проведённый фрактальный анализ ряда сейсмической активности на Камчатке дал вполне практические результаты перед математическим моделированием ВР:

1. Недельный ряд ВР обладает слабой регулярностью, хотя она и присутствует.
2. При переходе к другому масштабу (месячному интервалу) трендоустойчивость возрастает.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Цветков, В. П. Фрактальный анализ валютных временных рядов/ В. П. Цветков, И. В. Цветков, О. С. Гуляева// Финансы и кредит.– 2007. – №9. – С.30–35.
2. Валеев, С. Г. Программная реализация ДРМ-подхода для обработки и анализа временных рядов/ С. Г. Валеев, С. В. Куркина// Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 2006. – №5. – С. 10–21.
3. Перепелица, В. А. Исследование R/S-траектории одного временного ряда страхования/ В. А. Перепелица, Д. А. Тамбиева, К. А. Комисарова //Известия вузов Северо-Кавказского региона. Естественные науки. –2006. – №2. – С.8–15.
4. Ярушкина, Н. Г. Основы теории нечётких и гибридных систем/ Н. Г. Ярушкина. – М., 2005.
5. Перепелица, В. А. Предпрогнозный анализ микро- и макроэкономических рядов на базе фазовых траекторий и агрегирования/ В. А. Перепелица, Ф. М. Джашеева, М. А. Темирова// Электронный научный журнал «Исследования в России». – 2006.

Валеев Султан Галимзянович, *доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика» УлГТУ. Имеет монографии и статьи в области астрометрии и небесной механики, математической статистики и разработки информационных технологий.*

Фасхутдинова Венера Арифзяновна, *аспирант, ассистент кафедры «Прикладная математика и информатика» Ульяновского государственного технического университета.*

Леванова Наталья Владимировна, *студентка группы ПМд-51 экономико-математического факультета Ульяновского государственного технического университета.*