Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Образовательная программа
«Прикладная математика»

ОТЧЕТ
По лабораторной работе № 3

По предмету
«Численные методы»

По теме
«Решение систем алгебраических уравнений итерационными методами»

Выполнил
студент группы БПМ211
Кудряшов Максим Дмитриевич

Проверил
Брандышев Петр Евгеньевич

Москва - 2024

Содержание

1 Метод Ньютона (№ 4.1.8)

1.1 Формулировка задания

Найти с точностью $\epsilon = 10^{-6}$ все корни системы нелинейных уравнений:

$$f_1(x_1,x_2) = 0$$

$$f_2(x_1,x_2) = 0$$

Использовать метод Ньютона для системы нелинейных уравнений, найти корни с помощью встроенного функционала решения уравнений.

1. Используя встроенные функции, локализовать корни системы уравнений графически.

2. Написать программу-функцию, вычисляющую корень системы двух нелинейных уравнений по методу Ньютона с точностью ε. Предусмотреть подсчет количества итераций. Для решения соответствующей системы линейных алгебраических уравнений использовать встроенную функцию.

3. Используя написанную программу, вычислить все корни заданной системы с точностью ε

4. Используя встроенные функции, найти все корни системы с точностью ε. Сравнить с результатами, полученнными в п. 3.

1.2 Код на Python

1.2.1 Построение графика

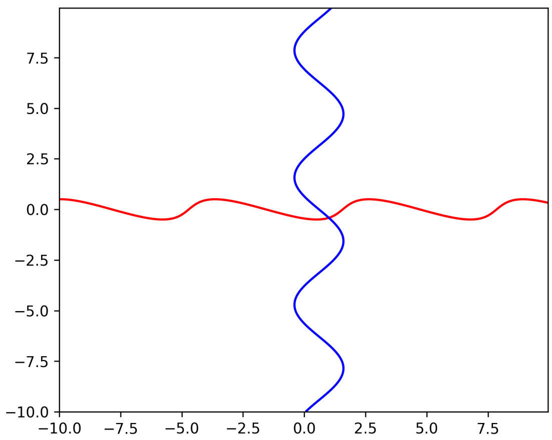
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x1, x2 = np.meshgrid(np.arange(-10, 10, 0.05), np.arange(-10, 10, 0.05))
plt.contour(x1, x2, np.cos(x1 + x2) + 2 * x2, [0], colors=['red'])
plt.contour(x1, x2, x1 + np.sin(x2) - 0.6, [0], colors=['blue'])
plt.savefig('nonlinear_newton.png', dpi=300)
plt.show()
```

1.2.2 Решение системы методом Ньютона

```
import numpy as np
import sympy as sp
import scipy
import matplotlib.pyplot as plt

x1 = sp.Symbol('x1')
x2 = sp.Symbol('x2')

f1 = sp.cos(x1 + x2) + 2 * x2
f2 = x1 + sp.sin(x2) - 0.6

F = sp.Matrix([f1, f2])
```

```python


def eq(vars):
    x1, x2 = vars
    f1 = sp.cos(x1 + x2) + 2 * x2
    f2 = x1 + sp.sin(x2) - 0.6
    return [f1, f2]


def calculate_root(F, X_num: np.array, eps: float = 0.000001) -> np.array:
    iter_count = 0
    jacobian = F.jacobian([x1, x2]).inv() * F
    while True:
        jacobian_num = jacobian.subs([(x1, X_num[0]), (x2, X_num[1])])
        X_num -= np.array(jacobian_num, dtype=float).flatten()
        iter_count += 1
        norm = np.linalg.norm(np.array(F.subs([(x1, X_num[0]), (x2, X_num[1])]), dtype=float).flatten())
        if norm < eps:
            break
    return X_num, iter_count


X1 = np.array([2.5, 0.1])
X2 = np.array([-4.5, -0.1])

X1_my, count1 = calculate_root(F, X1, 0.000001)
X2_my, count2 = calculate_root(F, X2, 0.000001)


X1_scipy = scipy.optimize.fsolve(eq, X1)
X2_scipy = scipy.optimize.fsolve(eq, X2)

print(f'{X1_my = }')
print(f'Количество итераций: {count1}')
print()

print(f'{X1_my = }')
print(f'Количество итераций: {count1}')
print()

print(f'{X1_scipy = }')
print(f'{X2_scipy = }')

plt.plot(*X1_my, marker='o', color='green', ls='')
x1, x2 = np.meshgrid(np.arange(-10, 10, 0.05), np.arange(-10, 10, 0.05))
plt.contour(x1, x2, np.cos(x1 + x2) + 2 * x2, [0], colors=['red'])
plt.contour(x1, x2, x1 + np.sin(x2) - 0.6, [0], colors=['blue'])
plt.savefig('nonlinear_newton_with_point.png', dpi=300)
plt.show()
```

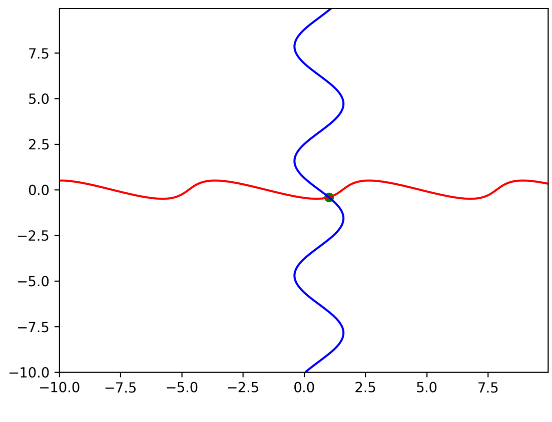
1.3 Результаты



Видно, что корень находится в пределах (0, 2.5) по оси x, и (-1, 1) по оси y.

Результат работы программы:

```
X1_my = array([ 1.00410184, -0.41599671])
Количество итераций: 4

X1_my = array([ 1.00410184, -0.41599671])
Количество итераций: 4

X1_scipy = array([ 1.00410184, -0.41599671])
X2_scipy = array([ 1.00410184, -0.41599671])
```



2 Расстояния от поверхности до точки (№ 4.5.2)

2.1 Формулировка задания

Даны координаты точек и уравнение поверхности S в пространстве 3^2 . Определить ближайшую к поверхности точку и наиболее удаленную от поверхности точку. Построить на одном чертеже точечный график поверхности S и заданные точки.

2.2 Код на Python

```python
import numpy as np
import sympy as sp

N = 2
a1 = 8.5 - N * 0.25
a2 = 2.3 + N * 0.3
a3 = 4.0 + N * 0.1

P_list = np.array([
    [16, 5.8, 11.879],
    [8.485, 5.328, 8.91],
    [15.0, 3.139, 5.25],
])

x1, x2, x3 = sp.symbols('x1 x2 x3')
phi, teta = sp.symbols('alpha teta')
Angle = np.array([phi, teta])


def from_angles_to_x(Angle):
    phi, teta = Angle
    x1 = a1 * sp.sin(phi) * sp.sin(teta)
    x2 = a2 * sp.cos(phi) * sp.sin(teta)
    x3 = a3 * sp.cos(phi)
    return np.array([x1, x2, x3])


X = from_angles_to_x(Angle)


def find_min_newton(H, X0, X_sym):
    Angle = X_sym
    X_num = X0

    g = sp.Matrix([H.diff(angle) for angle in Angle])
    G = sp.Matrix([[H.diff(angle1).diff(angle2) for angle1 in Angle] for angle2 in Angle])

    eps = 0.01
    count_iteration = 0
    while True:
        g_num = np.array(g.subs(zip(Angle, X_num)), dtype=float)
        G_num = np.array(G.subs(zip(Angle, X_num)), dtype=float)
        # p_num = np.linalg.solve(G_num, -g_num).flatten()
        p_num = (np.linalg.inv(G_num) @ (-g_num)).flatten()
        alpha = 1
        X_new = X_num + alpha * p_num
```

```
        if np.linalg.norm(X_new - X_num) < eps:
            break
        X_num = X_new

        count_iteration += 1

    dist = H.subs(zip(Angle, X_num))
    return X_num, dist, count_iteration


for P in P_list:

    H = sum((X - P) ** 2)

    min_dist = np.inf
    min_X_num = None
    min_count = None
    for angle in np.arange(0, np.pi, np.pi / 12):
        X_num = np.array([angle, 0], dtype=float)
        X_num, dist, count = find_min_newton(H, X_num, Angle)
        if dist < min_dist:
            min_dist = dist
            min_X_num = X_num
            min_count = count

    print(f'P = {[*P]}')
    print(f'Минимальное расстояние: {min_dist}')
    print(f'Точка соответв. мин. раст.: {[*min_X_num]}')
    print(f'Количество итераций: {min_count}')
    print()

print(a1, a2, a3)
```

2.3 Код на Wolfram

```
Graphics3D[{
    Green, Point[{16.0, 5.8, 11.879}],
    Red, Point[{8.485, 5.328, 8.91}],
    Blue, Point[{15.0, 3.139, 5.25}],
    White, Ellipsoid[{0, 0, 0}, {8.0, 2.9, 4.2}]}]
```

2.4 Результаты

```
P = [16.0, 5.8, 11.879]
Минимальное расстояние: 196.027120357951
Точка соответв. мин. раст.: [0.9671526893722328, 1.5708236352329208]
Количество итераций: 3
```

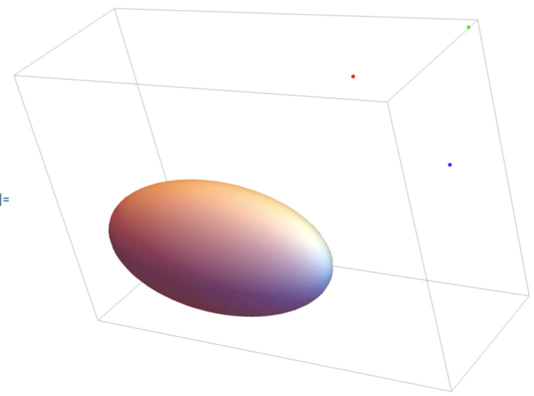
```
P = [8.485, 5.328, 8.91]
Минимальное расстояние: 53.2246496513000
Точка соответв. мин. раст.: [0.6906666746646668, 1.5708325009542858]
Количество итераций: 7

P = [15.0, 3.139, 5.25]
Минимальное расстояние: 84.3910607557738
Точка соответв. мин. раст.: [-1.4150994348103347, 4.712434958235683]
Количество итераций: 6
```

Самая близкая точка — вторая ([8.485, 5.328, 8.91])

Самая дальняя точка — первая ([16.0, 5.8, 11.879])

```
In[78]:= Graphics3D[{
    Green, Point[{16.0, 5.8, 11.879}],
    Red, Point[{8.485, 5.328, 8.91}],
    Blue, Point[{15.0, 3.139, 5.25}],
    White, Ellipsoid[{0, 0, 0}, {8.0, 2.9, 4.2}]}]
```

Out[78]=



Картинка подтверждает, что найденные точки правильные.

3 Метод Зейделя (№ 5.1.8)

3.1 Формулировка задания

Дана система уравнений $Ax = b$. Найти решение системы с помощью метода Гаусса. Выполнить 10 итераций по методу Зейделя. Принимая решение, полученное с помощью метода Гаусса за точное, найти величину абсолютной погрешности итерационного решения.

1. Задать матрицу системы A и вектор правой части b. Найти решение системы Ax=b с помощью метода Гаусса.

2. Преобразовать систему $Ax = b$ к виду $x = Bx + c$, удобному для итераций. Проверить выполнение достаточного условия сходимости итерационных методов $\|B\|_\infty < \infty$

3. Написать программу-функцию zeid, решающую систему уравнений с помощью метода Зейделя, выполнить 10 итераций по методу Зейделя; взять любое начальное приближение. Принимая решение, полученное в п. 1 за точное, найти величину абсолютной погрешности итерационного решения.

4. Взять другое начальное приближение. Объяснить полученные результаты.

3.2 Код на Python

```python
import numpy as np


def zeid(A, b, x0, n):
    B = np.empty(A.shape, dtype=float)
    for i in range(A.shape[0]):
        for j in range(A.shape[1]):
            B[i, j] = - A[i, j] / A[i, i] if i != j else 0

    c = np.empty(b.shape, dtype=float)
    for i in range(c.shape[0]):
        c[i] = b[i] / A[i, i]

    # B1 = np.zeros(B.shape)
    # B2 = np.zeros(B.shape)
    # for i in range(A.shape[0]):
    #     for j in range(A.shape[1]):
    #         if j < i:
    #             B1[i, j] = B[i, j]
    #         if j > i:
    #             B2[i, j] = B[i, j]

    x = x0
    for _ in range(n):
        x_new = np.zeros(x.shape, dtype=float)
        for i in range(B.shape[0]):  # x_new = B1 @ x_new + B2 @ x + c
            x_new[i] = np.sum(B[i][:i] * x_new[:i]) + np.sum(B[i][i:] * x[i:]) + c[i]
        x = x_new
    return x, B





A = np.array([[118.8, -14, -5, -89.1],
              [-59.4, 194, 5, 128.7],
              [148.5, 12, -310, 148.5],
              [0, 18.5, 90, -108.9]])

b = np.array([92.5, -340.1, -898, 184.1])

x_true = np.linalg.solve(A, b)

x1 = np.zeros(b.shape[0])
x2 = np.ones(b.shape[0])

x1_zaid, B = zeid(A, b, x1, 10)
x2_zaid, _ = zeid(A, b, x2, 10)
```

```python

error1_abs = np.linalg.norm(x_true - x1_zaid, ord=np.inf)
error2_abs = np.linalg.norm(x_true - x2_zaid, ord=np.inf)

print(f'Решение методом Гаусса: {x_true}')
print()

print(f'Начальная точка: {x1}')
print(f'Решение методом Зейделя: {x1_zaid}')
print(f'Абсолютная погрешность: {error1_abs}')
print()

print(f'Начальная точка: {x2}')
print(f'Решение методом Зейделя: {x2_zaid}')
print(f'Абсолютная погрешность: {error2_abs}')

print(f'Норма матрицы B: {np.linalg.norm(B, ord=np.inf)}')
```

3.3 Результаты

```
Решение методом Гаусса: [ 1.90875981 -2.36310552  4.49843079  1.62572378]

Начальная точка: [0. 0. 0. 0.]
Решение методом Зейделя: [ 1.90048704 -2.35749698  4.48910538  1.61896961]
Абсолютная погрешность: 0.00932540991025288

Начальная точка: [1. 1. 1. 1.]
Решение методом Зейделя: [ 1.90673816 -2.36173495  4.49615191  1.62407324]
Абсолютная погрешность: 0.0022788803781175204

Норма матрицы B: 0.996774193548387
```

4 Метод релаксации (№ 5.5.1)

4.1 Формулировка задания

Дана система уравнений $Ax = b$, где A – симметричная положительно определенная матрица. Найти решение системы с точностью $\varepsilon = 10^-5$ с помощью метода релаксации (для этого модифицировать функцию zeid из задачи 5.2, реализующую метод Зейделя). Определить экспериментально параметр релаксации ω, при котором точность ε достигается при наименьшем числе итераций. Построить график зависимости числа итераций от параметра релаксации.

4.2 Код на Python

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


```

```python
def relax(A, b, x0, eps, w):
    B = np.empty(A.shape, dtype=float)
    for i in range(A.shape[0]):
        for j in range(A.shape[1]):
            B[i, j] = - A[i, j] / A[i, i] if i != j else 0

    c = np.empty(b.shape, dtype=float)
    for i in range(c.shape[0]):
        c[i] = b[i] / A[i, i]

    B1 = np.zeros(B.shape)
    B2 = np.zeros(B.shape)
    for i in range(A.shape[0]):
        for j in range(A.shape[1]):
            if j < i:
                B1[i, j] = B[i, j]
            if j > i:
                B2[i, j] = B[i, j]

    x = x0
    count = 0
    while True:
        count += 1
        x_new = np.zeros(x.shape, dtype=float)
        for i in range(B.shape[0]):  # x_new = B1 @ x_new + B2 @ x + c
            x_new[i] = np.sum(B[i][:i] * x_new[:i]) + np.sum(B[i][i:] * x[i:]) + c[i]
            x_new[i] = w * x_new[i] + (1 - w) * x[i]
        norma = np.linalg.norm(x_new - x)
        x = x_new

        eps_new = ((1 - np.linalg.norm(B, ord=np.inf)) * eps) / np.linalg.norm(B2, ord=np.inf)
        if norma < eps_new:
            break
    return x, count


A = np.array([[3.5,-1, 0.9, 0.2, 0.1],
              [-1, 7.3, 2, 0.3, 2],
              [0.9, 2, 4.9, -0.1, 0.2],
              [0.2, 0.3, -0.1, 5, 1.2],
              [0.1, 2, 0.2, 1.2, 7]])

b = np.array([1.0, 2, 3, 4, 5])

x_true = np.linalg.solve(A, b)

w_list = []
count_list = []
x_list = []
for w in np.arange(0.1, 1.9, 0.01):
```

```
    w = round(w, 2)
    x_relax, count = relax(A, b, np.zeros(b.shape[0]), 0.00001, w)
    x_list.append(x_relax)
    w_list.append(w)
    count_list.append(count)

best_w = None
best_count = np.inf
best_x = None
for w, count, x in zip(w_list, count_list, x_list):
    if count < best_count:
        best_count = count
        best_w = w
        best_x = x

print(f'Решение методом Гаусса: {x_true}')
print('Решение иетодом релаксации при минимальном количестве итераций:')
print(f'Решение системы методом релаксации: {best_x}')
print(f'Количество итераций: {best_count}')
print(f'Параметр w: {best_w}')

plt.plot(w_list, count_list)
plt.savefig('w_count.png', dpi=300)
plt.show()
```

4.3 Результаты

```
Решение методом Гаусса: [ 0.04424026 -0.08535775  0.62794735  0.67068044  0.6051265 ]
Решение иетодом релаксации при минимальном количестве итераций:
Решение системы методом релаксации: [ 0.04424041 -0.08535777  0.62794732  0.67068048  0.6051265
Количество итераций: 8
Параметр w: 1.1
```

Зависимость количества итераций от w: