

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования**

**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
"ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ"**

Московский институт электроники и математики имени А. Н. Тихонова  
Программа "Прикладная математика"

Кудряшов Максим Дмитриевич

ЛАБОРАТНАЯ РАБОТА

Теория погрешностей и машинная арифметика

3 курс, группа БПМ203

**Преподаватель:**  
Брандышев Петр Евгеньевич

Москва, 2021 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Расчет частичных сумм ряда</b>	<b>1</b>
1.1	Формулировка задачи . . . . .	1
1.2	Аналитический расчет суммы ряда . . . . .	1
1.3	Код на Python . . . . .	2
1.4	Результат работы программы . . . . .	2
1.5	Графики точности результата . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Квадратное уравнение</b>	<b>2</b>
2.1	Формулировка задачи . . . . .	2
2.2	Теоретическая оценка погрешности . . . . .	2
2.3	Код на Python . . . . .	3
2.4	Результат работы программы . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Машинная точность</b>	<b>3</b>
3.1	Формулировка задачи . . . . .	3
3.2	Код на Python . . . . .	3
3.3	Результат работы программы . . . . .	3
3.4	Код на C++ . . . . .	3
3.5	Результат работы программы . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Вычисления с ограниченной разрядностью</b>	<b>3</b>
4.1	Формулировка задачи . . . . .	3
4.2	Код на Python . . . . .	3
4.3	Результат работы программы . . . . .	3
4.4	Графики точности результата . . . . .	3

## 1 Расчет частичных сумм ряда

### 1.1 Формулировка задачи

Дан ряд, надо найти сумму аналитически как предел частичных сумм, затем вычислить частичные суммы в зависимости от  $N$  и сравнить абсолютную погрешность и кол-во верных цифр в частичной сумме.

$$S(N) = \sum_0^N a_n$$
$$a_n = \frac{32}{n^2 + 5n + 6}$$

### 1.2 Аналитический расчет суммы ряда

Выпишем формулу суммы ряда:

$$S = \sum_0^{\infty} \frac{32}{n^2 + 5n + 6}$$

Разделим знаменатель выражения на простые многочлены и на разные слагаемые:

$$a_n = \frac{32}{(n+2)(n+3)} = \frac{A}{n+2} + \frac{B}{n+3}$$
$$a_n = \frac{A}{n+2} + \frac{B}{n+3} = \frac{An + 3A + Bn + 2B}{(n+2)(n+3)}$$

Вычислим значения в методе неопределенных коэффициентов:

$$3A + 2B = 32, A = -B$$

$$A = 32, B = -32$$

Распишем первые несколько членов ряда и заметим, что соседние сокращаются:

$$S(N) = \frac{32}{0+2} - \frac{32}{0+3} + \frac{32}{1+2} - \frac{32}{1+3} \dots + \frac{32}{n+2} - \frac{32}{n+3}$$

Перейдем к пределу и выведем аналитическое значение предела суммы:

$$S(N) = \frac{32}{0+2} - \frac{32}{n+3}$$

$$S = \lim_{s \rightarrow \infty} S_N = 16 - 0 = 16$$

### 1.3 Код на Python

### 1.4 Результат работы программы

### 1.5 Графики точности результата

## 2 Квадратное уравнение

### 2.1 Формулировка задачи

Дано квадратное уравнение. Предполагается, что один из коэффициентов уравнения (помечен \*) получен в результате округления. Произвести теоретическую оценку погрешностей корней в зависимости от погрешности коэффициента. Вычислить корни уравнения при нескольких различных значениях коэффициента в пределах заданной точности, сравнить.

$$x^2 + bx + c = 0$$

$$b = -30.9$$

$$c^* = 238.7$$

### 2.2 Теоретическая оценка погрешности

Выпишем формулу уравнения и погрешности переменных и общую формулу для функций:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$c^* = c \pm \Delta c$$

$$\bar{\Delta}x = |x|\bar{\delta}x$$

$$\bar{\Delta}f(x) = |f'(x)|\bar{\Delta}x$$

Оценим погрешность корня уравнения в зависимости от коэффициента  $c$ :

$$\frac{\bar{\Delta}f(x)}{|f(x)|} = \bar{\delta}f(x) = \frac{|xf'(x)|}{|f(x)|}\bar{\delta}x$$

$$\bar{\delta}x_{1,2} = \left| \frac{c}{x_{1,2}} \frac{\partial x_{1,2}}{\partial c} \right| \times \bar{\delta}c$$

Запишем общую формулу корня квадратного уравнения и вычислим производную:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{\partial x_{1,2}}{\partial c} = -\frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} = -10$$

Рассчитаем теоретические погрешности корней в зависимости от относительной погрешности  $c$ :

$$\bar{\delta}x_1 = \frac{30.9}{15.5} \times 10 \times \bar{\delta}c = 19.935 \times \bar{\delta}c$$

$$\bar{\delta}x_2 = \frac{30.9}{15.4} \times 10 \times \bar{\delta}c = 20.065 \times \bar{\delta}c$$

## 2.3 Код на Python

## 2.4 Результат работы программы

# 3 Машинная точность

## 3.1 Формулировка задачи

Вычислить значения машинного нуля, машинной бесконечности и машинного эпсилон в режимах одинарной, двойной и расширенной точности на двух алгоритмических языках.

## 3.2 Код на Python

## 3.3 Результат работы программы

## 3.4 Код на C++

## 3.5 Результат работы программы

# 4 Вычисления с ограниченной разрядностью

## 4.1 Формулировка задачи

Составить программу, моделирующую вычисления на ЭВМ с ограниченной разрядностью  $m$ . Решить задачу о вычислении суммы ряда для случая  $n = 10000$ , используя эту программу. Составить график зависимости погрешности от количества разрядов  $m = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ .

## 4.2 Код на Python

## 4.3 Результат работы программы

## 4.4 Графики точности результата