ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Теоретический материал к данной теме содержится в [1, глава 15].

Отчет по лабораторной работе должен содержать следующие материалы по каждой задаче: 1) постановка задачи; 2) необходимый теоретический материал; 3) **тестовый** пример и результаты вычислительного эксперимента по тесту (если необходимо); 4) полученные результаты и их анализ; 5) графический материал (если необходимо); 6) тексты программ.

Варианты заданий к задачам 10.1-10.6 даны в *ПРИЛОЖЕНИИ 10.А.*

Фрагмент решения задачи 10.1 дан в *ПРИЛОЖЕНИИ 10.В.*

Задача 10.1. Промоделировать стационарные процессы теплопроводности стержня в зависимости от входных данных задачи:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(K(x)\dfrac{du}{dx}\right) = f, \\ u(a) = UA, \quad u(b) = UB. \end{cases}$$

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Представить коэффициент теплопроводности *K(x)* в виде функции двух переменных *x* и *c*: *K(x)=K(x,c),* где *c* - параметр.
2. При заданных в индивидуальном варианте функциях *k(x)* *(*что соответ-ствует *K(x,*1*)), f(x)* и значениях *UA, UB* найти аналитическое решение задачи символьно (см. *ПРИЛОЖЕНИЯ 10.В* и *10.С*).
3. Изменяя значения параметра *c* в коэффициенте теплопроводности, найти решения задачи для наборов параметров 1-3 (см. таблицу ниже).
4. На одном чертеже построить графики найденных решений. Сравнить полученные результаты.
5. Аналогично п.2, найти аналитическое решение для набора параметров 4. На одном чертеже построить графики решений для наборов 1 и 4. Сравнить полученные результаты.
6. Изменяя граничные условия *UA, UB*, построить решения для наборов параметров 5-7.

Таблица наборов параметров

Параметры	1 набор	2 набор	3 набор	4 набор	5 набор	6 набор	7 набор
c	1	10	0.1	1	1	1	1
K(x)	*k(x)*	*ck(x)*	*ck(x)*	1/*k(x)*	*k(x)*	*k(x)*	*k(x)*
UA	*ua*	*ua*	*ua*	*ua*	*-ua*	*ua*	*-ua*
UB	*ub*	*ub*	*ub*	*ub*	*ub*	*-ub*	*-ub*

Задача 10.2. Найти приближенное решение краевой задачи методом конечных разностей:

$$\begin{cases} u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \quad x \in (a,b), \\ u(a) = UA, \quad u(b) = UB. \end{cases}$$

с заданной точностью ε и построить его график.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Составить разностную схему второго порядка точности и выписать коэффициенты матрицы системы уравнений и коэффициенты правой части.

2. Подготовить тестовый пример и провести расчет для него. Построить на одном чертеже графики приближенного и точного решений для тестового примера. После проверки правильности работы программы перейти к решению основной задачи.
3. Для вычисления решения задачи с заданной точностью произвести расчет с начальным шагом h, затем уменьшить шаг вдвое. Вывести на экран два соседних приближенных решения и сравнить результаты. Если заданная точность не достигнута, то продолжить уменьшение шага.
4. Построить график найденного решения и указать шаг, при котором заданная точность достигается.

Задача 10.3. Методом конечных разностей найти приближенное решение указанной в индивидуальном варианте краевой задачи с точностью ε и построить его график. Решение системы разностных уравнений найти, используя метод прогонки.

УКАЗАНИЯ.

1. Использовать разностную схему второго порядка точности. Для аппроксимации производных в граничных условиях воспользоваться разностными отношениями:

$$y_0' = \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} \quad \text{и} \quad y_n' = \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h}.$$

2. Организовать компактное хранение ненулевых элементов трехдиагональной матрицы системы разностных уравнений.
3. Подготовить самостоятельно тестовый пример и провести расчет для него. Построить на одном чертеже графики приближенного и точного решений для тестового примера. После проверки правильности работы программы перейти к решению основной задачи.

Задача 10.4. Промоделировать стационарные процессы теплопроводности стержня в зависимости от входных данных задачи – переменного коэффициента теплопроводности $k(x)$ и плотности источников тепла $f(x)$:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(k(x)\dfrac{du}{dx}\right) = f, \\ u(a) = UA, \quad u(b) = UB. \end{cases}$$

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Составить разностную схему второго порядка точности для решения указанной задачи.
2. Взять исходные данные из 1-го набора параметров для задачи 10.1.Шаг сетки положить равным $h = (b-a)/150$.

3. Промоделировать процесс теплопроводности в зависимости от коэффициента *k(x):*

3.1. Пусть стержень состоит из 2-х материалов с различными свойствами:

$$k(x) = \begin{cases} k1, a \le x \le 0.5\cdot(b+a) \\ k2, 0.5(b+a) < x \le b \end{cases}, \quad \text{а) } k1 << k2, \qquad \text{б) } k1 >> k2.$$

3.2. Пусть стержень состоит из 3-х материалов с различными свойствами:

$$k(x)=\begin{cases} k1, & a\le x\le a+(b-a)/3 \\ k2, & a+(b-a)/3\le x\le a+2(b-a)/3 \\ k2, & a+2(b-a)/3< x\le b \end{cases}$$

а) *k1<k2 <k1*, б) *k1>k2 >k3*,

в) *k1=k, k2=10k, k3=k*, г) *k1=100k, k2=k, k3=100k*.

4. Промоделировать процесс теплопроводности в зависимости от правой части – функции *f(x),* предполагая, что *f(x)* - точечный источник тепла. Задать точечный источник тепла можно следующим образом: $f(x)=c\cdot\delta(x-x0)$, где c - некоторая константа (мощность источника), $\delta(x)$- дельта-функция, $x0$ - точка из отрезка [*a,b*], в которую ставится источник.

Рассмотреть следующие варианты расположения источника:

а) точечный источник поставлен в середину отрезка [*a,b*];

б) два одинаковых по мощности источника поставлены в разные точки отрезка, симметричные относительно середины отрезка;

в) два различных по мощности источника поставлены симметрично;

г) предложить свой вариант расположения источников.

Задача 10.5. Методом конечных разностей найти приближенное решение краевой задачи

$$\begin{cases} -(k(x)u')'+q(x)u=f(x), \quad x\in(a,b), \\ -k(a)u'(a)+0.5u(a)=0, \\ \ \ k(b)u'(b)+0.5u(b)=0. \end{cases}$$

с тремя верными значащими цифрами. Решение системы разностных уравнений найти, используя метод прогонки.

УКАЗАНИЯ.

1. Использовать разностную схему второго порядка точности.
2. При аппроксимации производных в граничных условиях использовать метод баланса.

Задача 10.6. Промоделировать нестационарные процессы теплопроводности в зависимости от входных данных задачи - коэффициента теплопроводности *k(x)* и начальной температуры $\phi(x)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+f(x)(1-e^{-t}), & 0<x<l, \quad 0<t<T, \\ u(0,t)=UA, \quad u(l,t)=UB, & 0\le t\le T, \\ u(x,0)=\phi(x), & 0\le x\le l. \end{cases}$$

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Найти приближенное решение задачи с шагами $\tau=0.05$ и *h*=0.1, используя явную разностную схему. Построить графики решений при значениях $t=0.5\tau$, 10τ, 20τ.

2. Используя результаты задачи 10.1, экспериментально определить момент времени *t*, при котором происходит установление процесса (визуально).
3. Произвести анимацию процесса установления.
4. Исследовать, как влияет начальная температура на процесс установления, взяв другие функции $\phi(x)$ (согласованные с граничными условиями).

УКАЗАНИЕ.

Для создания анимационного клипа нужно:
- выбрать пункт меню **Animate**,
- заключить в выделяющий пунктирный прямоугольник поле графика, который нужно анимировать,
- в диалоговом окне установить значение переменной **FRAME**, например,10,
- нажать кнопку **Create** (или **Animate**),
- воспроизвести анимацию.

ПРИЛОЖЕНИЕ 10.А

Схема вариантов к лабораторной работе 10

N	Выполняемые задачи	N	Выполняемые задачи	N	Выполняемые задачи
1	10.1.1, 10.2.1, 10.4.1, 10.5.1, 10.6.1	11	10.1.11, 10.2.6, 10.4.11, 10.5.11, 10.6.11	21	10.1.21, 10.2.11, 10.4.21, 10.5.21, 10.6.21
2	10.1.2, 10.3.1,10.4.2, 10.5.2, 10.6.2	12	10.1.12, 10.3.6, 10.4.12, 10.5.12, 10.6.12	22	10.1.22, 10.3.12,10.4.22, 10.5.22, 10.6.22
3	10.1.3, 10.2.2, 10.4.3, 10.5.3, 10.6.3	13	10.1.13, 10.2.7,10.4.13, 10.5.13, 10.6.13	23	10.1.23, 10.2.12, 10.4.23, 10.5.23, 10.6.23
4	10.1.4, 10.3.2, 10.4.4, 10.5.4, 10.6.4	14	10.1.14, 10.3.7, 10.4.14, 10.5.14, 10.6.14	24	10.1.24, 10.3.12, 10.4.24, 10.5.24, 10.6.24
5	10.1.5, 10.2.3, 10.4.5, 10.5.5, 10.6.5	15	10.1.15, 10.2.8, 10.4.15, 10.5.15, 10.6.15	25	10.1.25, 10.2.13, 10.4.25, 10.5.25, 10.6.25
6	10.1.6, 10.3.3, 10.4.6, 10.5.6, 10.6.6	16	10.116, 10.3.8, 10.4.16, 10.5.16, 10.6.16	26	10.1.26, 10.3.13, 10.4.26, 10.5.26, 10.6.26
7	10.1.7, 10.2.4, 10.4.7, 10.5.7, 10.6.7	17	10.1.17, 10.2.9, 10.4.17, 10.5.17, 10.6.17	27	10.1.27, 10.2.14, 10.4.27, 10.5.27, 10.6.27
8	10.1.8, 10.3.4, 10.4.8, 10.5.8, 10.6.8	18	10.1.18, 10.3.9,10.4.18, 10.5.18, 10.6.18	28	10.1.28, 10.3.14, 10.4.28, 10.5.28, 10.6.28
9	10.1.9, 10.2.5, 10.4.9, 10.5.9, 10.6.9	19	10.1.19, 10.2.10, 10.4.19, 10.5.19, 10.6.19	29	10.12.9, 10.2.15, 10.4.29, 10.5.29, 10.6.29
10	10.1.10, 10.3.5,10.4.10, 10.5.10, 10.6.10	20	10.1.20, 10.3.10, 10.4.20, 10.5.20, 10.6.20	30	10.1.30, 10.3.15,10.4.30, 10.5.30, 10.6.30

Окончание схемы вариантов к лабораторной работе 10

Таблица к задаче 10.1

№	*k(x)*	*f(x)*	*a*	*UA*	*b*	*UB*
10.1.1	x^3	$10x^{1/4}$	1	3	2	0
10.1.2	x	$\sqrt{x}+4$	0.5	0	1.5	5
10.1.3	x^{-2}	$-2x^2-2x$	0.5	2	1.5	6
10.1.4	x^3	$1+x^{1/3}$	0.2	4	1.2	1
10.1.5	x	x^3+2	0.1	2	1.1	4
10.1.6	e^x	e^{2x}	0.5	1	1.5	5

10.1.7	x	$3x+x^2$	1	3	2	3
10.1.8	x	$x+x^{\frac{1}{3}}$	0.1	6	0.8	0.6
10.1.9	$\cos(x)$	$10\sin(x)$	0.1	3	0.8	1
10.1.10	x	$\ln(x)$	0.1	1	0.6	5
10.1.11	$\cos(x)$	$10\cos(x)$	1	2	1.5	1
10.1.12	x	x^{-1}	1	3	2	3
10.1.13	x^{-2}	$6x^2-3x$	1	-2	2.2	2
10.1.14	e^x	$x+e^x$	1	2	2.5	-2

Окончание таблицы к задаче 10.1

10.1.15	$x^{-1/3}$	$x+\sqrt{x}$	1.5	3	2.5	-3
10.1.16	x^3	$10x^{-1/4}$	0.1	3	1.1	0
10.1.17	x^{-1}	$4-\sqrt{x}$	1.5	-2	2.5	-4
10.1.18	x^2	$2x^2+2x$	0.5	2	1.6	6
10.1.19	x^{-3}	$4x^3+6$	0.2	4	1.2	1
10.1.20	x^{-2}	$5x^4-5$	1.5	-1	2.5	4
10.1.21	e^x	$2-e^{2x}$	0.3	-1	2.3	1
10.1.22	x^{-1}	x	1	3	2	3
10.1.23	$1/\cos(x)$	$5\sin(x)$	0.5	1	1.5	1
10.1.24	$1/\cos^2(x)$	$6\cos^3(x)$	0.5	2	1.3	2
10.1.25	$1/\sin^2(x)$	$15\sin^3(x)$	0.2	-1	1.2	-1
10.1.26	x^{-1}	$3\ln(x)$	0.3	3	2.3	1
10.1.27	x^{-1}	$2x^2-x$	2	-4	3	2
10.1.28	x^{-2}	$3x^2+4$	1.2	-4	2.4	1
10.1.29	$x^{1/2}$	$15(x-\sqrt{x})$	0.5	1	1.5	1
10.1.30	e^{-x}	$3+e^{3x}$	0.3	3	2.3	1

Таблица к задаче 10.2

№	*p(x)*	*q(x)*	*f(x)*	*a*	*b*	*UA*	*UB*	ε
10.2.1	$0.5+\sin^2 x$	$2(1+x^2)$	$10(1+\sin^2 x)$	0	2	0	4	0.02

10.2.2	e^{-x^2}	$5(2+\sin 2x)$	$e^x(1+\sin 2x)$	0	2	0	5	0.05
10.2.3	$e^{-(x^2+1)}$	$10(1+e^{-x})$	$e^{2.5x}(0.5+x)$	0	1	4	0	0.03
10.2.4	e^{-2x}	$16/(1+x^2)$	$e^{3x}(2-x^2)$	0	1	1	3	0.05
10.2.5	$\ln(1+x)$	$10/(1+x)$	$x+9/(1+x)$	0	2	5	0	0.01
10.2.6	$\cos^2(x)$	$\dfrac{10}{1+\sin^2(x)}$	$e^{-0.5x}(12-x^2)$	0	2	3	0	0.05

Окончание таблицы к задаче 10.2

10.2.7	$\ln(1+x^2)$	$e^{-x}(8+x^2)$	$8-x^2$	0	2	4	0	0.01
10.2.8	$1+\cos^2(x)$	x^2+1	$(x^2+1)\cos(x)$	1	3	–1	4	0.05
10.2.9	$0.5(1.5-x^2)$	$e^x(4-x)$	$5x^2e^{-x}$	1	2	0	3.5	0.02
10.2.10	$\sin(2x)$	$8(1+\sin^2 x)$	$10\cos x$	1	3	0	0	0.05
10.2.11	$0.25(1-x^2)$	$5(1+\cos^2(x))$	$15\cos x$	0	2	0	4	0.02
10.2.12	$-0.5+\sin x$	$\dfrac{8}{1+0.25x^2}$	$5(1-x^2)$	0	2	0	0	0.01
10.2.13	$\sin(x-2)$	$5(x+1/x)$	8	1	3	0	5	0.04
10.2.14	$1/(1+x^2)$	$10-x$	$e^{1.5x}(1+x^2)$	0	2	0	5	0.05
10.2.15	$0.5e^{-x}$	$10(1+\sin^2 x)$	12	0	1	-1	4	0.02
10.2.16	$0.5(1-0.4x^2)$	$e^{-x}(9+x)$	$10\sin x$	0	1.5	0	4	0.03
10.2.17	$0.5\sin x$	$7(1+\sin^2 x)$	$6(1+x^2)$	0	2	4	0	0.05
10.2.18	$0.4\sqrt{1+x^2}$	$4(1+x^2)$	$20e^{-x}$	0	2.5	0	0	0.05
10.2.19	$0.3\sqrt{4-x^2}$	$5(1+x^2)$	$8e^{0.5x}$	0	2	-1	3	0.1
10.2.20	$0.5/(1+x^2)$	$7(1+\sin^2 x)$	$20/(1+0.5x^2)$	0	1.5	2	-1	0.005
10.2.21	$\sin x$	$4(1+x^2)$	$6e^{0.5x}$	0	2	0	5	0.05
10.2.22	$\sin x$	$6\sqrt{1+x^2}$	$7(1+\sin^2 x)$	0	2	0	0	0.05
10.2.23	$\cos(x)$	$5(1+\cos^2 x)$	$10/(1+0.5x^2)$	0	1.5	5	0	0.05
10.2.24	$\cos(x)$	$5(1+\sin^2 x)$	$4e^{0.5x}$	0	2	0	4	0.02
10.2.25	e^{-x}	$8(1+\sin^2 x)$	$20-x^2$	1	3	0	0	0.01
10.2.26	$0.5e^x$	$5(1+\sin^2 x)$	10	0	1	1	4	0.02
10.2.27	$2/(1+x^2)$	$2-x$	$e^{1.5x}(1+x^2)$	0	2	2	5	0.05
10.2.28	$\ln(1+x)$	$5/(1+x)$	$5/(1+x)$	0	2	5	0	0.05
10.2.29	$5\sin x$	$5(1+x^2)$	$5e^{0.5x}$	0	2	0	5	0.2
10.2.30	$0.5\sqrt{1+x^2}$	$5(1+x^2)$	$10e^{-x}$	0	2.5	0	0	0.2

Таблица к задаче 10.3

№	Задача	ε	№	Задача	ε
10.3.1	$u'' - xu' + 0.2u = x + 1$ $u(0.9) - 0.5u'(0.9) = 2$ $u(2.9) = 1$	0.04	10.3.11	$u'' + u' + 2xu = x^2 + 1$ $u(0.3) + 0.5u'(0.3) = 3$ $u(2.7) = 1$	0.03
10.3.2	$u'' - 0.5xu' + u = 2$ $u(0.4) = 1.2$ $u(1.4) + 2u'(1.4) = 3.2$	0.005	10.3.12	$u'' - xu = 2x$ $u(1.5) - 2u'(1.5) = 4.5$ $u'(3.5) = 3$	0.1
10.3.3	$u'' - 0.5u' + 0.5xu = 2x$ $u'(1) = 0.5$ $2u(3) - u'(3) = 2$	0.05	10.3.13	$u'' + xu' - u = x$ $u'(3) = 6$ $u(4) + u'(4) = 2$	0.1
10.3.4	$u'' - xu' + 2xu = 2.8$ $u(1.2) - 0.2u'(1.2) = 0.2$ $u'(2.2) = 4$	0.07	10.3.14	$u'' - u'/x + u = 2x$ $u(1.5) + 0.5u'(1.5) = 1.5$ $u'(4.5) = 5$	0.05
10.3.5	$u'' - u' + 2x^2u = x + 1$ $u(1.3) = 1$ $u(2.4) + u'(2.4) = 3.2$	0.1	10.3.15	$u'' - xu' + 2xu = x^2 + 1$ $u(1.2) + 10u'(1.2) = 2.2$ $u(3.6) = 1$	0.03
10.3.6	$u'' - 4xu' + 5u = 2x$ $u'(2) = 0$ $u(4) - 3u'(4) = 2$	0.07	10.3.16	$u'' - \cos(x^2)u = 2x + 1$ $u'(1) - 3u(1) = 1$ $u(3) = 10$	0.02
10.3.7	$u'' - 3u' + 8xu = 8$ $u(1.8) - 0.5u'(1.8) = 2$ $u(3.8) = 5$	0.1	10.3.17	$u'' + u' - x^2u = 2$ $u(1) + 0.5u'(1) = 2$ $u(4) = 4$	0.02
10.3.8	$u'' - 6xu' + 0.5u = -3$ $u(2.2) + 0.1u'(2.2) = 0.2$ $u'(4.2) = 4$	0.03	10.3.18	$u'' - 5u = e^x$ $u'(2) = 0$ $u(4) = 2$	0.2
10.3.9	$u'' - 1.5u' - 5xu = 0.5$ $2u(1.3) - 0.5u'(1.3) = 1$ $u(3.9) = 4$	0.05	10.3.19	$u'' + 2u' - 1.5xu = 2/x$ $u'(0.8) = 1$ $u(3.8) + 2u'(3.8) = 1$	0.1
10.3.10	$u'' - 3u'/x + xu = 3$ $u'(0.7) = 0.2$ $u'(3.6) + 20u(3.6) = 4$	0.03	10.3.20	$u'' - u'/4 + 2u/x = x/2$ $1.5u(1.3) - u'(1.3) = 0.6$ $u(2.6) = 2$	0.03

Таблица к задаче 10.5

№	*a*	*b*	*c*	*k(x)*		*q (x)*		*f (x)*
				$a<x<c$	$c<x<b$	$a<x<c$	$c<x<b$	
10.5.1	0	1.5	1.125	0.5	1.4	3.2	8.5	$8x^2(2-x)$
10.5.2	0	1.8	1.275	0.4	1.4	3.2	12	$8x(2-x^2)$
10.5.3	0	2.0	1.515	0.5	1.8	3.5	8.2	$10x(2.5-x)$
10.5.4	0	2.3	1.875	0.4	1.8	3.5	12.8	$10x(1.2-x^2)$
10.5.5	0	2.5	1.875	1.2	0.5	8.3	3.5	$9/(1+0.5x^2)$
10.5.6	0	2.8	1.875	1.2	0.4	8.3	2.8	$9/(2+0.3x^2)$
10.5.7	0	3.0	1.875	1.5	0.6	8.3	12	$7e^{-0.5x}$
10.5.8	0	1.5	0.925	1.5	0.4	7.5	12	$7e^{-x}$

Окончание таблицы к задаче 10.5

10.5.9	0	1.7	0.925	1.8	0.4	7.0	12	$8x/(2+x^3)$
10.5.10	0	2	1.125	1.8	0.6	6.5	7.8	$8x(2.5-x)$
10.5.11	0	2.2	1.125	0.5	1.8	3.5	7.8	$10x^2(2.5-x)$
10.5.12	0	2.5	1.515	0.3	1.8	3.5	8.3	$10x(1.5-0.3x^2)$
10.5.13	0	2.7	1.815	0.5	1.2	5.6	12.3	$9(x+1/(1+x^3))$
10.5.14	0	3	1.815	0.3	1.2	5.6	10	$9x(3.5-x)$
10.5.15	0	1.5	0.875	0.5	1.8	5.6	8.5	$9x(3.5-x)$
10.5.16	0	1.8	1.215	0.4	1.2	3.2	8.5	$8x(2-x)$
10.5.17	0	2	1.215	0.4	1.5	3.2	12	$8x(1.5-0.5x^2)$
10.5.18	0	2.3	1.725	0.5	1.2	3.5	8.2	$10x(2.5-x)$
10.5.19	0	2.5	1.725	0.5	1.5	3.5	12.08	$10x(1.3-0.2x^2)$
10.5.20	0	2.8	1.725	1.5	0.4	8.3	3.5	$9e^{-x}$
10.5.21	0	3.0	2.015	1.5	0.5	8.3	2.8	$8/(1+x^2)$
10.5.22	0	1.5	0.925	1.2	0.4	8.3	12	$7(x+1/(x+0.5))$
10.5.23	0	1.7	0.925	1.2	0.5	7.5	12	$7e^{-x}$
10.5.24	0	2.0	1.215	1.8	0.4	7.0	12	$8x(2.5-x)$
10.5.25	0	2.2	1.215	1.8	0.5	6.5	12	$8x(1.5+0.2x^2)$
10.5.26	0	2.5	1.515	0.3	1.8	3.5	8.3	$10x(1.5-0.3x^2)$
10.5.27	0	3.0	1.875	1.5	0.6	8.3	12	$7e^{-0.5x}$
10.5.28	0	1.5	0.875	0.5	1.8	5.6	8.5	$9x(3.5-x)$
10.5.29	0	2	1.215	0.4	1.5	3.2	12	$8x(1.5-0.5x^2)$
10.5.30	0	2.3	1.725	0.5	1.2	3.5	8.2	$10x(2.5-x)$

Таблица к задаче 10.6

В задаче 10.6 взять входные данные *k(x)*, *f(x)*, *ua*, *ub* из задачи 10.1,
$\phi(x) = (ub - ua)(x - a)/l + ua, \quad l = b - a$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 10.B

Фрагмент решения задачи 10.1.0

Плотность источников тепла $f(x) := \frac{4}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}}$

Коэффициент теплопроводности $k(x, c) := c\cdot x$

Граничные условия $a := 0.5$ $ua := 1$ $b := 1$ $ub := 2$

Символьное вычисление точного решения краевой задачи

$$\int \frac{\int -f(x)\,dx}{k(x,c)}\,dx + \int \frac{c1}{k(x,c)}\,dx + c2 \rightarrow \frac{-3}{4}\cdot\frac{x^{\frac{4}{3}}}{c} + \frac{c1}{c}\cdot\ln(x) + c2$$

Найденное решение: $u(x,c,c1,c2) := \frac{-3}{4}\cdot\frac{x^{\frac{4}{3}}}{c} + \frac{c1}{c}\cdot\ln(x) + c2$

Найденное решение: $u(x,c,c1,c2) := \frac{-3}{4}\cdot\frac{x^{\frac{4}{3}}}{c} + \frac{c1}{c}\cdot\ln(x) + c2$

Нахождение констант c1, c2 при условии c=1, то есть k(x,1)

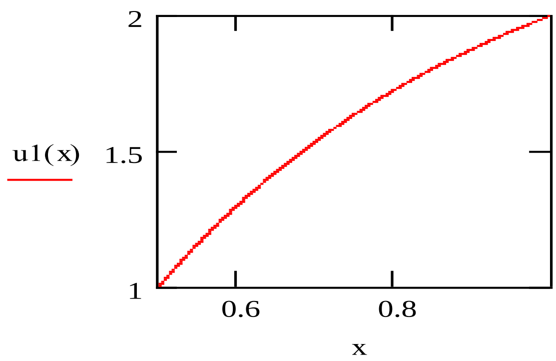
Given

$u(a,1,c1,c2) = ua$

$u(b,1,c1,c2) = ub$

$$\mathrm{Find}(c1,c2) \rightarrow \begin{pmatrix} 2.0953158917601025127 \\ 2.7500000000000000000 \end{pmatrix}$$ -c1 -c2

$c1 := 2.0953158917601025127$ $c2 := 2.75$ $u1(x) := u(x,1,c1,c2)$



ПРИЛОЖЕНИЕ 10.С

Для нахождения решения уравнения $-\frac{d}{dx}\left(k(x,c)\frac{du}{dx}\right) = f(x)$ дважды проинтегрируем его. Первое интегрирование дает такой результат $u'(x) = -\frac{1}{k(x,c)}\int f(x)dx + c_1$.

Проинтегрируем полученное соотношение еще раз:

$$u(x) = -\int\left(\frac{\int f(x)dx}{k(x,c)}\right)dx + c_1 x + c_2 .$$

Константы c_1, c_2 находятся из граничных условий:

$u(a) = ua$, $\quad u(b) = ub$.

Пример решения задачи 10.1.0. Пусть $k(x,c) = cx$.

$$-\frac{d}{dx}\left(cx\frac{du}{dx}\right) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}},$$
$$u(0.5) = 1, \quad u(1) = 2.$$

Проинтегрируем уравнение: $cxu' = -x^{\frac{4}{3}} + c_1$. Повторное интегрирование дает соотношение: $u(x) = -\frac{3}{4c}x^{\frac{4}{3}} + \frac{c_1}{c}\ln x + c_2$.

Найдем константы c_1 и c_2, при условии, что $c = 1$: $u(1) = -\frac{3}{4} + c_2 = 2$; $c_2 = 2.75$

$u(0.5) = -\frac{3}{4}(0.5)^{4/3} + c_1 \cdot \ln(0.5) + 2.75 = 1$, поэтому $c_1 = 1.780827$.

Окончательно, решение примет вид:

$$u(x, k(x,1)) = -\frac{3}{4}x^{4/3} + 1.780827\ln x + 2.75.$$

Для проверки можно подставить найденное решение в исходное уравнение и проверить выполнение граничных условий.