紅の魔術工房
Atelier kurenai

# CTF入門

# CRC32で誤りを検知する

@kurenaif

## 理論編

わからなくても大丈夫！

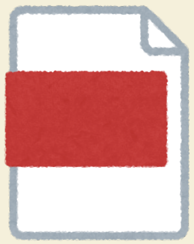
## CRC32 って？

Cyclic Redundancy Check

「誤りを検知する」検査方法

壊れたファイル？
仕様？

ファイル送信



壊れたファイル


何らかの外乱でファイルが破壊
（ネット調子悪いとか）

## なぜ CRC32 を解説するの？

符号理論は勉強してないので、体系的に説明できない… すまない…

- $GF(2^n)$ な多項式
- 「体」であることから得られる様々な恩恵
- 「線形性」が成り立つことからの様々な遊び

暗号で広く使われるこれらを使って、比較的簡単に応用ができる分野だから

# どこで CRC32 は使われているの？

## png ファイルとかに内蔵されている

今日のこの講義では
この CRC を求めるための
理論を勉強します

```
  IHDR Interlace: 0
  IHDR Compression algorithm is Deflate
  IHDR Filter method is type zero (None, Sub, Up, Average, Paeth)
  IHDR Interlacing is disabled
  Chunk CRC: -869110134
Chunk: Data Length 309 (max 2147483647), Type 1346585449 [iCCP]
  Ancillary, public, PNG 1.2 compliant, unsafe to copy
  ... Unknown chunk type
  Chunk CRC: -960355186
Chunk: Data Length 65536 (max 2147483647), Type 1413563465 [IDAT]
  Critical, public, PNG 1.2 compliant, unsafe to copy
  IDAT contains image data
  Chunk CRC: 1441794358
Chunk: Data Length 65536 (max 2147483647), Type 1413563465 [IDAT]
  Critical, public, PNG 1.2 compliant, unsafe to copy
  IDAT contains image data
  Chunk CRC: -1856956801
Chunk: Data Length 65536 (max 2147483647), Type 1413563465 [IDAT]
  Critical, public, PNG 1.2 compliant, unsafe to copy
  IDAT contains image data
  Chunk CRC: 126825411
Chunk: Data Length 19446 (max 2147483647), Type 1413563465 [IDAT]
  Critical, public, PNG 1.2 compliant, unsafe to copy
  IDAT contains image data
  Chunk CRC: -425976308
Chunk: Data Length 0 (max 2147483647), Type 1145980233 [IEND]
  Critical, public, PNG 1.2 compliant, unsafe to copy
  IEND contains no data
  Chunk CRC: -1371381630
```

## CRC32の理論を説明する道のり

- 体とは？
- 有限体とは？
- 多項式で有限体を作ろう！
- 多項式の体をコンピューターで扱ってみよう
- CRC32への応用

## 「体」とは？

直感的には、「足し算」、「引き算」、「掛け算」、「割り算」ができるもの。

ただし、いくつかの制約がある。

## 「引き算」と「割り算」は使わない。

「体」では、「足し算」と「掛け算」のみ行う。

「引き算」と「割り算」は、「逆元」を使って表現する

2と足して0になる数

$$1 - 2 = 1 + (-2)$$

$$4 \div 2 = 4 \times \frac{1}{2}$$

2とかけて1になる数

## 使える数（集合）の制限。

「体」では、まず使う数を制限する。

- 整数
- 有理数
- 複素数
- ベクトル
- 行列

etc...

使う範囲は自分で決めていい。

僕は「複素数のベクトル」にする！

私は「整数」だけ！

使って良い数たち全部のことを

「集合」という

**制限したら、計算前も、計算後もとにかくその数以外は使用不可。**

具体例は次のページで

## 使える数（集合）の制限。

整数だけの範囲で考えてみる。

$$1 + 2 = 3$$

$$1 \times 2 = 2$$

$$1 - 2 = 1 + (-2) = -1$$

$$4 \div 2 = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

分数は整数ではない！

アウト！

## 使える数（集合）の制限。

3次元ベクトルだけの範囲で考えてみる。

$$(1,2,3)+(2,3,4)=(3,5,7)$$
$$(1,2,3)-(2,3,4)=(-1,-1,-1)$$
$$(1,2,3)\cdot(2,3,4)=20$$

掛け算を内積と割り当てると、20は3次元ベクトルじゃないので
アウト！

（それぞれの要素の掛け算やわり算であれば、分数を認めればOKですね）

## 使える数（集合）の制限。

0を含む正の有理数だけの範囲で考えてみる。

$$1 + 2 = 3$$

負の数は正の数ではない！

アウト！

$$5 - 2 = 5 + (-2) = 3$$

$$1 \times 2 = 2$$

$$4 \div 2 = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

## 使える数（集合）の制限。

### 有理数だけの範囲で考えてみる。

$$1+2=3$$

$$5-2=5+(-2)=3$$

$$1\times 2=2$$

$$4\div 2=4\times\frac{1}{2}=2$$

すべて有理数で表されているので ◎

0 で割るみたいな異常なものを除いて、

選んだ範囲すべてでこのようにならなければならない。

## 体とは

1. まず使える数の範囲を決める（「集合」を決める）
2. 足し算と掛け算を何にするか考える（ベクトルの内積はNG）
3. 引き算と割り算は、足し算と掛け算に直す。
4. どんなときでも、使えるのは集合の中の数だけ。

(0で割るみたいな例外を除いて、どんな計算をしても
集合の中の数字に収まらないといけない。)
（集合の中の数一個のことを「元」という）

厳密な定義は教科書とかでしっかり学んでね

## 有限体とは？

整数： 無限個存在する。

有理数： 無限個存在する。

複素数： 無限個存在する。

0を含む正の整数を5で割った値：5個しか存在しない

0を含む正の整数をNで割った値：N個しか存在しない。

この有限個しかないやつらで、もし
「体」を作ることができれば
有限体になる。

# 引き算と割り算を考える。

引き算は、足して 0 になるような数に変換してから、

足し算をする。

$$2 - 3 \xrightarrow{\text{変換}} 2 + (-3) = 1$$

$$2 - 3 = 2 + (-3) = 1$$

これは 3 と足すと、0 になる数。

---

割り算は、かけて 1 になるような数に変換してから、

掛け算をする。

$$2 \div 3 = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

これは 3 とかけると、1 になる数。

紅の魔術工房 Atelier kurenaif

## 正の整数 mod 5 は「体」にできるのか？

足し算と掛け算はできそう。

正の数だから負の数が存在しない。→ 引き算ができない。

整数だから分数は存在しない。→ 割り算ができない。

・引き算は、足して 0 になるような数に変換してから、足し算をする。

・割り算は、かけて 1 になるような数に変換してから、掛け算をする。

この方針で、引き算と割り算を考え直してみよう。

## 正の整数 mod 5 は「体」にできるのか？

余り５の世界での引き算

例えば...

１と足して０になるような数は４

変換

$$1 - 1 = 1 + 4 = 0 \mod 5$$

$$2 - 2 = 2 + 3 = 0 \mod 5$$

$$3 - 3 = 3 + 2 = 0 \mod 5$$

$$4 - 2 = 4 + 1 = 0 \mod 5$$

mod 5 の中のすべての数たちに対して、負の数的な数字が見つかった！

しかも全部 mod5 の中に入ってる！

## 正の整数 mod 5 は「体」にできるのか？

余り 5 の世界での割り算

例えば...

2 とかけて 1 になるような数は 3

$$\xrightarrow{\text{変換}}$$

$$1 \div 1 = 1 \times 1 = 1 \mod 5$$

$$2 \div 2 = 2 \times 3 = 1 \mod 5$$

$$3 \div 3 = 3 \times 2 = 1 \mod 5$$

$$4 \div 2 = 4 \times 1 = 1 \mod 5$$

mod 5 の中のすべての数たちに対して、逆数的な数字が見つかった！

しかも全部 mod5 の中に入ってる！

## 正の整数 mod 5 は「体」にできるのか？

使える範囲の数だけを使って、

「足し算」、「引き算」、「掛け算」、「割り算」

ができたので、これは体！

しかも使える数が５つだけの有限個なので、

有限体！

mod 素数 の世界であれば、有限体は作れる！

## 正の整数 mod 4 は「体」にできるのか？

2と掛け算して、1になる数字は存在しない。

$$2 * 1 = 2 \mod 4$$

$$2 * 2 = 4 \mod 4$$

$$2 * 3 = 2 \mod 4$$

2では割り算できないから、これは「体」ではない。

Q. 多項式って何？

A. こんなやつ↓

$$1 \times x^2 - 2 \times x + 1$$

xのn乗と、なにか係数がひっついてるやつ

## 係数で使える値を束縛する

$$x^2 - 1 = 0$$

この式解けますか？

## 係数で使える値を束縛する

$$
\begin{aligned}
x^2 - 1 &= 0 \\
(x+1)(x-1) &= 0 \\
x &= 1, -1
\end{aligned}
$$

## 係数で使える値を束縛する

$$x^2 + 1 = 0$$

この式解けますか？

## 係数で使える値を束縛する

複素数が使えなかったら
この式変形はできない。

$$x^2 + 1 = 0$$

$$(x + i)(x - i) = 0$$

$$x = i, -i$$

複素数を使っていいテスト以外ではバツになりそう

使える係数の範囲を絞る。
明確に、複素数は使っていけませんと明記すると
答えが変わる。

## 多項式の「足し算」、「掛け算」、「引き算」

多項式も、整数と同じように、足し算や掛け算、引き算ができる。

### 多項式の足し算

$$(x^2+2x+1)+(x^3+2x^2+3)=x^3+2x^2+2x+4$$

### 多項式の引き算

$$(x^2+2x+1)-(x^3+2x^2+3)=-x^3-x^2-2$$

### 多項式の掛け算

$$(x+1)(x+2)=x^2+3x+2$$

## 多項式の「足し算」、「掛け算」、「引き算」

できないときもある

多項式も、整数と同じように、足し算や掛け算、引き算が~~できる~~。

### 多項式の足し算

$$(x^2+2x+1)+(x^3+2x^2+3)=x^3+2x^2+2x+4$$

### 多項式の引き算

もし係数に負の数が使えなければ

ここで計算できなくなる

$$(x^2+2x+1)-(x^3+2x^2+3)=-x^3-x^2-2$$

### 多項式の掛け算

もし係数で掛け算ができなければ

ここで計算ができなくなる

$$(x+1)(x+2)=x^2+3x+2$$

紅の魔術工房 Atelier kurenaif

## 多項式の「割り算」

(x+1) とかけて 1 になる多項式を

求めなければならない。

$$\frac{1}{x+1} = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots$$

単項式の割り算を、なんとかしてこの形に落とし込まなければならない。

難しそう…

## 多項式の割り算の「あまり」

正の整数は引き算や割り算はできなかったが、
「あまり」を導入することで「有限体」にできた。

実は、多項式でも「あまり」を使うことで、「体」にすることができる。

## 多項式の割り算の「あまり」

$$
\begin{array}{rl}
 & x + 2 \\
x^2+x+1 \!\!\!\! & \big) \overline{\, x^3+3x^2+5x+5 \,} \\
 & x^3+x^2+x \\ \hline
 & 2x^2+4x+5 \\
 & 2x^2+2x+2 \\ \hline
 & \boxed{2x+3}
\end{array}
$$

これが

$x^3+3x^2+5x+5$ を

$x^2+x+1$ で割ったあまり。

## 多項式の世界の「体」

正の整数の世界では、「素数の」mod を取ることによって、
「有限体」にすることができた。

実は、多項式でも「素数的な存在」であまりを求めることによって
「体」を作ることができる。

## 多項式の世界の「素数」

掛け算で表すことができる。

$$49 = 7 \times 7$$

多項式の掛け算で表現できる

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

$$28 = 4 \times 7$$

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

$$7 \longrightarrow$$ 掛け算で表現できない

$$x^2 + 1 \longrightarrow$$ 虚数がない世界だと
掛け算で表現できない。

## 多項式の世界の「素数」

掛け算で表すことができる。

$$49 = 7 \times 7$$

多項式の掛け算で表現できる

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

$$28 = 4 \times 7$$

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

多項式の世界の

素数っぽい！

$$7 \longrightarrow$$ 掛け算で表現できない

$$x^2 + 1 \longrightarrow$$ 虚数がない世界だと

掛け算で表現できない。

既約多項式という

## 多項式の世界で「体」を作る

1.は「体」でなければダメ。

1. 係数に使っていい数の種類を決める。( 有理数、虚数、etc...)
2. 既約多項式 ( 素数的存在 ) を決める。(1 で決めた範囲内で。)
3. (1 で決めた範囲内の ) 多項式を既約多項式でわった「あまり」

たちの集合が、「体」になる！

ちゃんと証明するためにはもっと色々準備する必要があり、
辛いので今日はやりません…
教科書を読んで勉強してください！

## 多項式の「体」まとめ

| | | |
|---|---|---|
| 一つの多項式<br>$x^3+3x^2+2x+4$ | $\xleftrightarrow{\text{対応}}$ | 一つの数字<br>$18$ |
| 既約多項式（有理数の世界で）<br>$x^2+1$ | $\xleftrightarrow{\text{対応}}$ | 素数<br>$7$ |
| あまり（有理数の世界で）<br>$x+1$ | $\xleftrightarrow{\text{対応}}$ | あまり<br>$4$ |

## 多項式の「体」まとめ

0x00007bb57df7537f5d7d

対応

| 一つの多項式 | | 一つの数字 |
| --- | --- | --- |
| $x^3 + 3x^2 + 2x + 4$ | $\longleftrightarrow$ | $18$ |
| **既約多項式（有理数の世界で）** | | **素数** |
| $x^2 + 1$ | $\longleftrightarrow$ | $7$ |
| **あまり（有理数の世界で）** | | **あまり** |
| $x + 1$ | $\longleftrightarrow$ | $4$ |

係数に使える数が
無限個存在するので、この多項式のあまりも「有限体」
ではない。

## 多項式で「有限体」を作る

多項式のあまりで有限体を作るためには、

係数に使っていい数字も有限体にしなければならない。

→ おもいきって、係数を **mod 2 の世界**にしてみよう！

# mod 2の世界の四則演算

## 足し算（XOR）

$$0+0 = 0 \bmod 2$$

$$0+1 = 1 \bmod 2$$

$$1+0 = 1 \bmod 2$$

$$1+1 = 0 \bmod 2$$

## 引き算（XOR）

復習：

1と足して0になる数は

1なので、$-1 = 1 \bmod 2$

$$0-0 = 0+0 = 0 \bmod 2$$

$$0-1 = 0+1 = 1 \bmod 2$$

$$1-0 = 1+0 = 1 \bmod 2$$

$$1-1 = 1+1 = 0 \bmod 2$$

## 掛け算（AND）

$$0*0 = 0 \bmod 2$$

$$1*0 = 0 \bmod 2$$

$$0*1 = 0 \bmod 2$$

$$1*1 = 1 \bmod 2$$

## 割り算（AND）

復習：

1とかけて1になる数は

1なので、$1^{-1} = 1$

$$1/1 = 1*1 \bmod 2$$

コンピューターで演算しやすい！

## 係数が mod 2 の世界の既約多項式

実は、mod 2 の世界では $x^2+1$ は既約多項式ではない。

$$(x+1)(x+1) = x^2 + (1+1)x + 1 = x^2 + 1$$

例えば、

$$x^2 + x + 1$$

は mod 2 の世界で既約多項式。

## 多項式の世界の四則演算

$x^2+x+1$ の世界の足し算

| $+$ | $1$ | $x$ | $x+1$ |
|---|---|---|---|
| $1$ | $0$ | $x+1$ | $x$ |
| $x$ | $x+1$ | $0$ | $1$ |
| $x+1$ | $x$ | $1$ | $0$ |

各桁ごとに XOR を取るイメージ。（やってみよう！）

x^2 以上の項はあまりを求める過程で消滅。

紅の魔術工房
Atelier kurenaif

## 多項式の世界の四則演算

$x^2+x+1$ の世界の引き算

| $-$ | $1$ | $x$ | $x+1$ |
|---|---|---|---|
| $1$ | $0$ | $x+1$ | $x$ |
| $x$ | $x+1$ | $0$ | $1$ |
| $x+1$ | $x$ | $1$ | $0$ |

各桁ごとに XOR を取るイメージ。（やってみよう！）

足し算も引き算も XOR で計算するから、同じ結果になる。

## 多項式の世界の四則演算

$x^2+x+1$ の世界の掛け算

| $\times$ | $1$ | $x$ | $x+1$ |
|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $x$ | $x+1$ |
| $x$ | $x$ | $x^2$ | $x(x+1)=x^2+x$ |
| $x+1$ | $x+1$ | $1$ | $x^2+1$ |

$x^2$ は $x^2+x+1$ のあまりの世界では存在しない。

## 多項式の世界の四則演算

$x^2$ はこんな感じで あまりの世界に落とす。

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & \;1 \\
x^2+x+1 \,\big) & \overline{\;x^2 \qquad\qquad\qquad\qquad} \\
 & \;\underline{x^2+x+1} \\
 & \qquad \boxed{x+1}
\end{array}
$$

# 多項式の世界の四則演算

$x^2+x+1$ の世界の掛け算

| $\times$ | $1$ | $x$ | $x+1$ |
|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $x$ | $x+1$ |
| $x$ | $x$ | $x+1$ | $1$ |
| $x+1$ | $x+1$ | $1$ | $x$ |

紅の魔術工房
Atelier kurenaif

## 多項式の世界の四則演算

$x^2+x+1$　の世界の掛け算

| $\times$ | $1$ | $x$ | $x+1$ |
|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $x$ | $x+1$ |
| $x$ | $x$ | $x+1$ | $1$ |
| $x+1$ | $x+1$ | $1$ | $x$ |

x とかけて
1 になる数
は
x+1

x+1 とかけて
1 になる数は
x

## 多項式の世界の四則演算

$x^2+x+1$ の世界の掛け算

| $\times$ | $1$ | $x$ | $x+1$ |
|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $x$ | $x+1$ |
| $x$ | $x$ | $x+1$ | $1$ |
| $x+1$ | $x+1$ | $1$ | $x$ |

すべてに対して、

逆元が存在している！

割り算ができる！

## 多項式をbitで表現する

mod 2の世界での多項式の係数はすべて1か0になる。

さらに、あまりを求めているので、xの次数の上限も決まってる。

$$x^n$$

例えば、nの最大値が8だったら、係数は8個あり、

さらにすべての係数は0か1なので、

8bitで表現できる！2^8個多項式があるので、

$$GF(2^8)$$

と表記されることが多い。（具体例は次のページ）

紅の魔術工房
Atelier kurenaif

## bit 列と多項式の対応

10110111

$$x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$$

このように対応させると、xor を計算するだけで

足し算や引き算をすることができる！

紅の魔術工房 Atelier kurenaif

# bit列と剰余の計算

$x^2 + x + 1$ :111

$x^4$ :10000

$x^4$ を $x^2 + x + 1$ で割ったあまりは？

```
       110
     ______
111 ) 10000
      111
      ---
       1100
       111
       ----
         10
```

XOR

割る数(111)より

bitが小さくなったので

終わり $x$

## CRC の概要

```
111 ) 1000000
      111
      ------
       110000
       111
       ------
         1000
         111
         ----
          110
          111
          ---
           01
```

1. 割られる数に、割る数の bit 数 -1 個分 0 を入れる

( 実は CRC では割る数は

既約多項式じゃなくても大丈夫

CRC では逆元は使わないので )

2. あまりを求める。

10000( 生データ ) と 01 を相手に送信する。

## CRC の概要

```
111 ) 1000001
      111
      -------
       110001
       111
       ------
         1001
         111
         ----
          111
          111
          ---
           00
```

1. 受信者は生データに 01 を付け加えたものの余りを求める。
2. データが書き換えられてなければ必ず 0 になる（0 にならなければ、データがなにかおかしい！）

**これで改ざん検知ができる。**

## なぜこれでできるのか？

1000000 を 111(3bit)

で割ったあまりは必ず 2bit 以内になる。

0 を 2 つ付け加えたのは、余りを付け加える場所を作るため説と

割られる数が割る数より小さくなるから説が僕の中である。わからん。

1000000 からあまりの値 (01) をひくと、必ず割り切れる。[ 参考参照 ]

mod 2 の世界では 足し算も引き算も XOR で表される。

1000001 は必ず割り切れる。

参考 :15/7 = 2 あまり 1 だから 15-1=14 は 7 で割り切れる。

紅の魔術工房

Atelier kurenaif

## 本日のまとめ。

CRC の理論を説明した。

多項式の有限体を構成して、あまりを求めることで
誤り検出をすることができた！

しかし、実用で使われているアルゴリズムはもう少し複雑に
なっているので次回説明する。

次回 png の CRC を求める