紅の魔術工房
Atelier kurenai

CTF 入門

乱数の次の値を予測する

@kurenaif

次でる値がわかる！

身の回りにある乱数

麻雀の次の牌

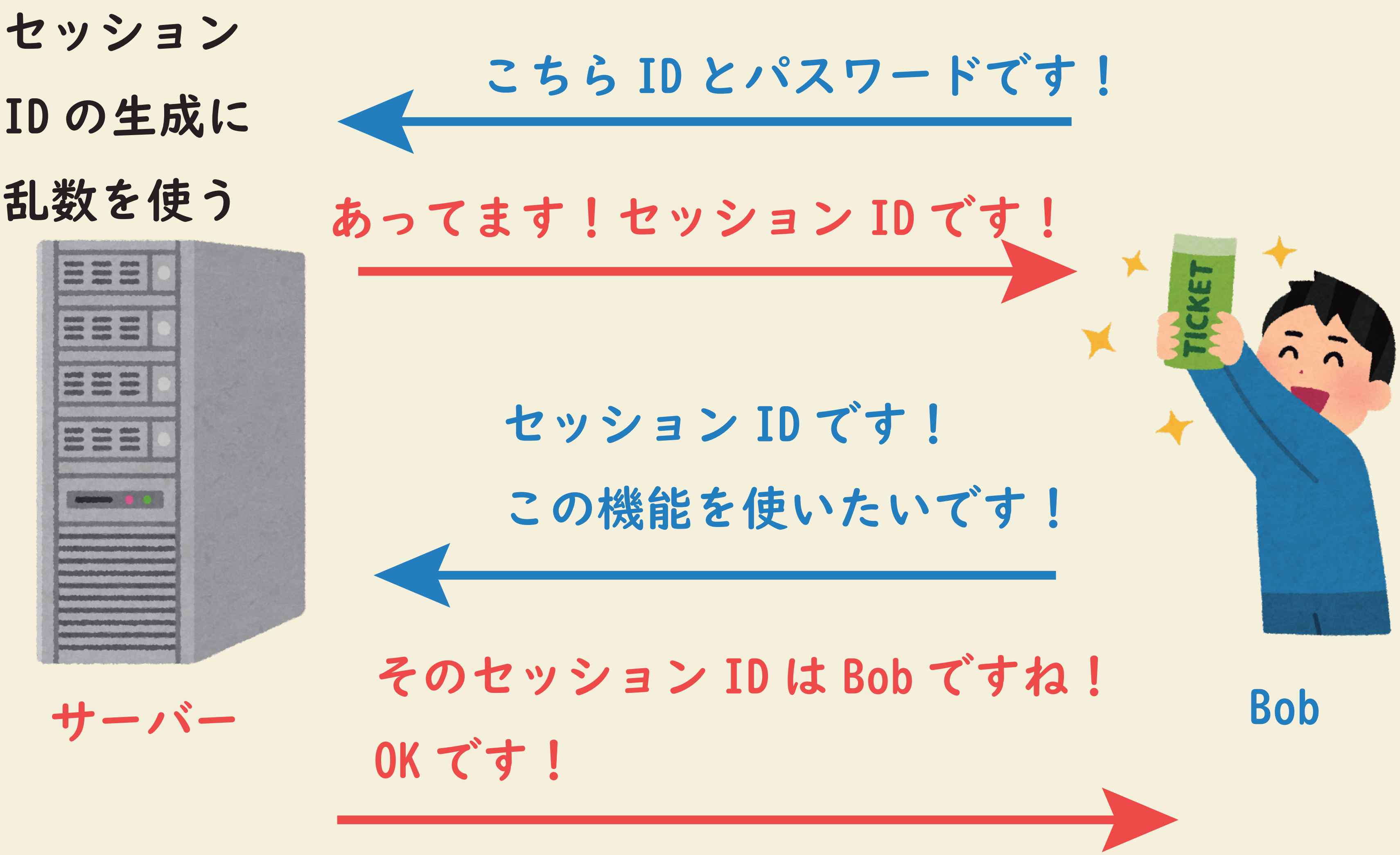
ゲームの次の出る敵キャラ・ダメージ

セッションID

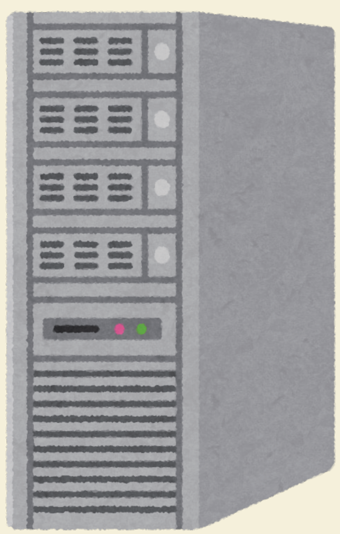
セッションID

ルーレットの次出る値

セッションIDとは？


セッション
IDの生成に
乱数を使う
こちらIDとパスワードです！
あってます！セッションIDです！
TICKET
セッションIDです！
この機能を使いたいです！
そのセッションIDはBobですね！
OKです！
サーバー
Bob

セッション ID が予測されると？



サーバー

セッション ID のやりとり

Marroly のセッション ID

セッション ID のやりとり

Bob のセッション ID

Bob のセッション ID はこれです
個人情報を教えて下さい

Bob ですね！個人情報です！

次の Bob のセッション
ID はこれだな…

Marroly

Bob

Marroly

Bob の
個人情報
獲得

予測される乱数と予測されない乱数

予測される乱数（疑似乱数）

線形合同法

メルセンヌ・ツイスタ

XorShift

予測されない乱数

PCから出る熱雑音から生成された乱数（遅い）

→/dev/random など

暗号論的疑似乱数生成器（CSPRNG）

→暗号やハッシュの技術を利用する

紅の魔術工房
Atelier kurenaif

予測される乱数と予測されない乱数

予測される乱数（疑似乱数）

線形合同法

メルセンヌ・ツイスタ

XorShift

今日はこちらの紹介

予測されない乱数

PC から出る熱雑音から生成された乱数（遅い）

→/dev/random など

暗号論的疑似乱数生成器 (CSPRNG)

→暗号やハッシュの技術を利用する

乱数を作る一般的な話

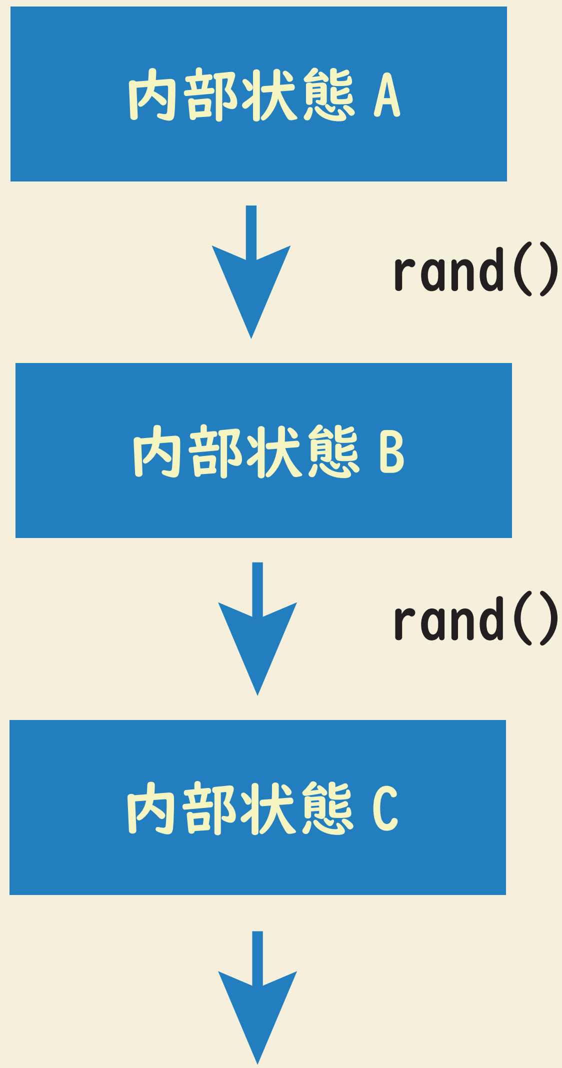
乱数を生成するときに引数を渡さない。
でも、次々違う値が出てくる

乱数は、内部状態を持っている

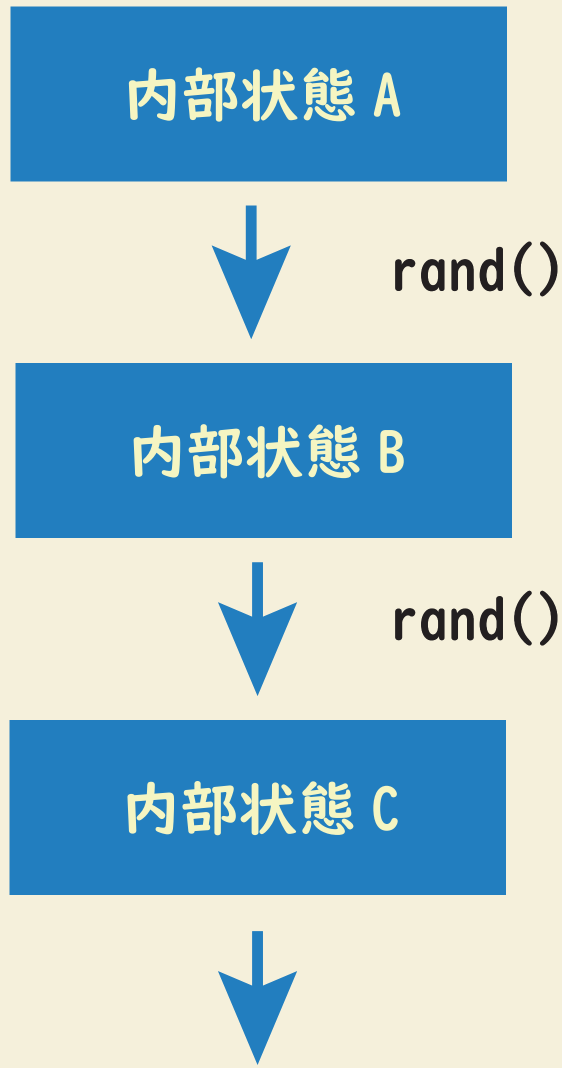
```
void solve() {
    printf("%d", rand());
}
```

紅の魔術工房
Atelier kurenaif

乱数を作る一般的な話



乱数を作る一般的な話



内部状態と

randのアルゴリズムと

乱数生成のパラメータ

がわかれば、次の

値がわかる。

乱数を作る一般的な話

初期パラメータは
seed 値
というもので決める
srand() など

内部状態 A

rand()

内部状態 B

rand()

内部状態 C

内部状態と
rand のアルゴリズムと
乱数生成のパラメータ
がわかれば、次の
値がわかる。

乱数生成アルゴリズム

randのアルゴリズム

乱数生成のパラメータ

はソースコードに書いてある

```java
protected synchronized int next(int bits)
{
  seed = (seed * 0x5DEECE66DL + 0xBL) & ((1L << 48) - 1);
  return (int) (seed >>> (48 - bits));
}
```

java.util.Random

内部状態と

randのアルゴリズムと

乱数生成のパラメータ

がわかれば、次の

値がわかる。

実装している言語＋使用しているライブラリ＋

内部状態で次の値を特定できる

線形合同法

次はここに入る

$$X_{n+1} = (A \times X_n + B) \mod M$$

A = 0x5DEECE66DL

B = 0xBL

M = 2^48 - 1

```java
*/
protected synchronized int next(int bits)
{
  seed = (seed * 0x5DEECE66DL + 0xBL) & ((1L << 48) - 1);
  return (int) (seed >>> (48 - bits));
}

/**
```

X は乱数の結果なので、得られる。(java の seed 相当)

(実際には java はここから加工されているので

工夫が必要)

今日の本題

$$X_{n+1} = (A \times X_n + B) \mod M$$

Q. A も B も M もわからないとき、
X の値のみで、乱数予測はできるのか？

B だけわからないとき

note: X0 は初期状態なので未知とする

$$X_1 = (A \times X_0 + B) \mod M$$
$$X_2 = (A \times X_1 + B) \mod M$$

$$B = X_2 - AX_1 \mod M$$

X1, X2 から X3 を求めることができた。

$$X_3 = A \times X_2 + B \mod M$$

紅の魔術工房

Atelier kurenaif

A も B もわからないとき

$$X_1 = (A \times X_0 + B) \mod M$$

$$X_2 = (A \times X_1 + B) \mod M \tag{1}$$

$$X_3 = (A \times X_2 + B) \mod M \tag{2}$$

(2) - (1) は

$$\underbrace{X_3 - X_2}_{\text{Y2 と置く}} = A(\underbrace{X_2 - X_1}_{\text{Y1 と置く}}) \mod M$$

$$Y_2 = A(Y_1) \mod M$$

$$A = Y_2(Y_1)^{-1} \mod M$$

(Y1)^-1 とは…？

$$A = Y_2(Y_1)^{-1} \mod M$$

を求めるために、$(Y_1)^{-1}$ が必要

普通だったら、例えば2だったら $\dfrac{1}{2} = 0.5$

でもMODの世界には、小数は存在しない。

紅の魔術工房 Atelier kurenaif

(Y1)^-1 とは…？

X^(-1）は、Xと掛け合わせたら1になるものを言う

逆行列もA^(-1）と表現する

1/2も2^(-1）と表現する

じゃあMODの世界で、かけ合わせたら1になる数は？

紅の魔術工房
Atelier kurenaif

MOD7 の世界の X^(-1)

1	→	$1 * \boxed{1} \bmod 7 = 1$
2	→	$2 * \boxed{4} \bmod 7 = 8 \bmod 7 = 1$
3	→	$3 * \boxed{5} \bmod 7 = 15 \bmod 7 = 1$
4	→	$4 * \boxed{2} \bmod 7 = 8 \bmod 7 = 1$
5	→	$5 * \boxed{3} \bmod 7 = 15 \bmod 7 = 1$
6	→	$6 * \boxed{6} \bmod 7 = 36 \bmod 7 = 1$

これが X^(-1)

の正体！（全部バラバラ！）

M が素数のとき限定

どうやって求めるの？

$$YY^{-1} = 1 \mod M$$

$$YY^{-1} = XM + 1$$

$$YY^{-1} - XM = 1$$ （ベズーの等式という）

Y と M が互いに素なとき、

ユークリッドの互除法を用いて

Y^(-1) と X を求めることができる！

紅の魔術工房 Atelier kurenaif

Y と M が互いに疎なときのみ、求めれる！

$$A = Y_2(Y_1)^{-1} \mod M$$

$$X_1 = (A \times X_0 + B) \mod M$$
$$X_2 = (A \times X_1 + B) \mod M$$
$$X_3 = (A \times X_2 + B) \mod M$$

A が既知になったので、あとは B を求めるだけ

A も B も M もわからないとき

6 つの値を使用する

$$X_1 = (A \times X_0 + B) \mod M \quad (1)$$

$$X_2 = (A \times X_1 + B) \mod M \quad (2)$$

$$X_3 = (A \times X_2 + B) \mod M \quad (3)$$

$$X_4 = (A \times X_3 + B) \mod M \quad (4)$$

$$X_5 = (A \times X_4 + B) \mod M \quad (5)$$

$$X_6 = (A \times X_5 + B) \mod M \quad (6)$$

A も M もわからないとき

さっきと同じ要領で引き算する

$$X_2 - X_1 = A(X_1 - X_0) \mod M$$ (2) - (1)

$$X_3 - X_2 = A(X_2 - X_1) \mod M$$ (3) - (2)

$$X_4 - X_3 = A(X_3 - X_2) \mod M$$ (4) - (3)

$$X_5 - X_4 = A(X_4 - X_3) \mod M$$ (5) - (4)

$$X_6 - X_5 = A(X_5 - X_4) \mod M$$ (6) - (5)

A も M もわからないとき

さっきと同じ要領で変数に置く

$$Y_1 = A(Y_0) \mod M \quad (7)$$

$$Y_2 = A(Y_1) \mod M \quad (8)$$

$$Y_3 = A(Y_2) \mod M \quad (9)$$

$$Y_4 = A(Y_3) \mod M \quad (10)$$

$$Y_5 = A(Y_4) \mod M \quad (11)$$

少し計算してみる

$$Y_1 = A(Y_0) \mod M \tag{7}$$

$$Y_2 = A(Y_1) = A(A(Y_0)) = A^2Y_0 \mod M \tag{8}$$

$$Y_3 = A(Y_2) = A(A^2Y_0) = A^3Y_0 \mod M \tag{9}$$

$$Y_4 = A(Y_3) = A(A^3Y_0) = A^4Y_0 \mod M \tag{10}$$

$$Y_5 = A(Y_4) = A(A^4Y_0) = A^5Y_0 \mod M \tag{11}$$

A も M もわからないとき

$$Y_1 = AY_0 \mod M \quad (7)$$

$$Y_2 = A^2Y_0 \mod M \quad (8)$$

$$Y_3 = A^3Y_0 \mod M \quad (9)$$

$$Y_4 = A^4Y_0 \mod M \quad (10)$$

$$Y_5 = A^5Y_0 \mod M \quad (11)$$

さらに少し計算してみる

この左辺を求めるときは

剰余を求めないこと！！

(7)×(10) - (8)×(9)

$$\underbrace{Y_1 \times Y_4 - Y_2 \times Y_3}_{\text{Z1 と置く}} = AY_0 \times A^4Y_0 - A^2Y_0 \times A^3Y_0$$
$$= A^5Y_0 - A^5Y_0$$
$$= 0 \mod M$$

(8)×(11) - (9)×(10)

$$\underbrace{Y_2 \times Y_5 - Y_3 \times Y_4}_{\text{Z2 と置く}} = 0 \mod M$$

Mがわからないとき

$$Z_1 = 0 \mod M$$

$$Z_2 = 0 \mod M$$

つまり、何らかのIとJが存在して、

$$Z_1 = MI$$

$$Z_2 = MJ$$

M、I、Jがわからない状態で、

Mを抽出したい→最大公約数を使う

紅の魔術工房 Atelier kurenaif

M がわからないとき

$$Z_1 = MI$$

$$Z_2 = MJ$$

最大公約数：Z1 と Z2 を割り切る値。

両方とも M の倍数なので、M が必ず出てくる！

M がわかったら→A と B がわからないときの話になるので、解ける。

注：I と J の最大公約数が 1 でない場合、誤った値が出てきますが、その可能性は低いです。

Z の数を増やして 3 つの最大公約数を取れば、より安全になります。

今日のまとめ。

$$X_{n+1} = ({\color{red}A} \times X_n + {\color{red}B}) \mod {\color{red}M}$$

Xの値だけでAとBとMを求めることができた！

これで、内部状態、アルゴリズム、パラメータ

すべてわかるので、次の値を求めることができる

次回：実際にライブラリの乱数予測をする

紅の魔術工房

Atelier kurenaif

問題１

ＡもＢもＭも与えられます。
一つのＸが与えられるので、
次のＸを予測してください。

https://github.com/kurenaif/kurenaifCTF/tree/master/lcg_1

紅の魔術工房
Atelier kurenaif

問題 2

A と M が与えられます。

2 つの X が与えられるので、

次の X を予測してください。

https://github.com/kurenaif/kurenaifCTF/tree/master/lcg_2

問題 3

M が与えられます。

3 つの X が与えられるので、

次の X を予測してください。

https://github.com/kurenaif/kurenaifCTF/tree/master/lcg_3

問題 4

6つのXが与えられるので、

次のXを予測してください。

https://github.com/kurenaif/kurenaifCTF/tree/master/lcg_4