Logika

Relációk:

– Def.:
Legyen A egy halmaz.
Az $R \subseteq A \times A$ halmaz elemei között (bináris) relációnak nevezzük.

↳ Általánosítás:
Legyen A, B két halmaz.
Az $R \subseteq A \times B$ halmazt az A és B halmazok elemei közötti relációnak nevezzük.

↳ Tulajdonságok:
Legyen $x, y, z \in A$, $R \subseteq A \times A$
Azt mondjuk, hogy az R reláció
- reflexív: ha xRx minden $x \in A$ esetén
- irreflexív: ha xRy -ból következik, hogy $x \neq y$
- szimmetrikus: ha xRy-ból következik, hogy yRx minden $x, y \in A$ esetén
- aszimmetrikus: ha xRy -ból következik, hogy $y \not R x$ (azaz $(y, x) \notin R$) minden $x, y \in A$ e.
- antiszimmetrikus: ha xRy és yRx -ből következik, hogy $x = y$
- tranzitív: ha xRy és yRz-ből következik, hogy xRz minden $x, y, z \in A$ esetén
- teljes: ha xRy és yRx közül legalább az egyik fennáll minden $x, y \in A$ esetén

↳ Kategóriák:
Legyen $R \subseteq A \times A$
Azt mondjuk, hogy R reláció
- féligrendezés: ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív
- szigorú féligrendezés: ha irreflexív, aszimmetrikus és tranzitív
- (teljes) rendezés: ha féligrendezés és teljes
- ekvivalencia: ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív

– Tétel:
Az $R \subseteq A \times A$ ekvivalencia-reláció osztályozást indukál az A halmazon.
Osztályozás: A diszjunkt (ekvivalencia-) osztályokra bomlik.

Függvények:

— Def.:

Egy $R \subseteq A \times B$ reláció függvény, ha

- minden $a \in A$ és $b, c \in B$ esetén, ha $(a,b), (a,c) \in R$, akkor $b = c$
- minden $a \in A$ esetén van olyan $b \in B$, amelyikre $(a,b) \in R$.

(Ha a második feltétel nem teljesül, a fgv. parciális, egyébként totális)

jelölése: $R: A \to B$

↳ Tulajdonságok:

Legyen $f: A \to B$ egy függvény

- injektív, ha különböző elemeknek különböző a képe
- szürjektív, ha minden elem képpé válik
- bijektív, ha injektív és szürjektív

— Def.:

Legyen $f: A \to B$ és $g: B \to C$

A $(g \circ f): A \to C$ fgv.-t a $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ összefüggéssel definiáljuk, és az f és g függvények kompozíciójának nevezzük.

→ Boole-függvények:

— Def.:

Egy $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ függvényt n-változós Boole-függvénynek nevezünk.

Megadásának számtalan módja lehet:

1) értéktáblával
2) logikai formula segítségével
3) aritmetikai kifejezéssel.

   A $\{0,1\}$ halmazon értelmezhető egy redukált összeadás és szorzás művelet: $a \cdot b \bmod 2$ és a $a + b \bmod 2$ módon: a művelet szokásos eredményének maradékát vesszük 2-vel osztva

4) egyéb

Formális nyelvek:

— Def.:

Legyen A egy véges, nem üres halmaz (ábécé), elemei betűk (jelek, szimbólumok, karakterek, ...)

(Véges) szó: az A elemeiből képzett sorozat

Üres szó: λ az a szó, amelyik egyetlen betűt sem tartalmaz

Összefűzés: ha $w = w_1 \dots w_n$, $u = u_1 \dots u_m$ akkor $w \cdot u = w_1 \dots w_n \cdot u_1 \dots u_m$

A^*: az A ábécé fölötti véges szavak halmaza.

$A^+ = A^* \setminus \{\lambda\}$

(Formális) nyelv: $L \subseteq A$

Ítéletlogika (nulladrendű logikai nyelv):

— Def.:

Ítéletlogika: Egy olyan formális nyelv, melynek szavai bizonyos szabályos állítások.

Elemei: ítéletek

- ellentmondástalanság elve: Egy ítélet nem lehet egyszerre igaz és hamis
- kizárt harmadik elve: Nincs olyan ítélet, amely se nem igaz, se nem hamis
- kettős tagadás elve: Ha egy ítélet nem hamis (nem igaz, hogy nem igaz), akkor az ítélet igaz.

— Def.:

Legyen V szimbólumok egy halmaza

$Op = \{\neg, \wedge, \vee, \supset\}$

$\neg$	
0	1
1	0

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\supset$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\equiv$	0	1
0	1	0
1	0	1

feltétel: $V \cap (Op \cup \{ (,) \}) = 0$

$\mathcal{L}_0(Op, V)$ elemeit formuláknak, V elemeit atomi formuláknak nevezzük.

$\mathcal{L}_0(Op, V) \setminus V$: összetett formulák

— Tétel:

Szerkezeti indukció elve: Legyen T egy tulajdonság, amely $P \in \mathcal{L}_0(Op, V)$-re vagy teljesül, vagy nem.

Ha

- T teljesül minden $P \in V$-re és
- amennyiben $P, Q \in \mathcal{L}_0(Op, V)$ és T teljesül P, Q-ra abból következik, hogy teljesül $(\neg P)$, $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$ és $(P \supset Q)$-ra is,

akkor T teljesül minden $P \in \mathcal{L}_0(Op, V)$-re

— Def:

közvetlen részformula:

1) ha $A \in V$, akkor nincs közvetlen részformulája
2) $(\neg P)$ egyetlen közvetlen részformulája P
3) az $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, és $(P \supset Q)$ formulák közvetlen részformulái a P és Q részformulák

— Def:

Egy P formula részformuláinak halmaza az a legszűkebb halmaz (jelölés: $RF(P)$), amelyre teljesül, hogy:

- $P \in RF(P)$
- ha $Q \in RF(P)$ és R közvetlen részformulája Q-nak, akkor $R \in RF(A)$.

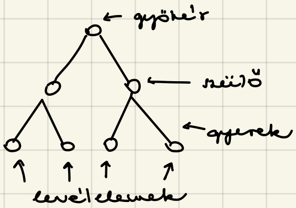
— Logikai összekötő jelek közötti sorrend:

$\neg$

$\wedge, \vee$

$\supset$

— Szerkezetfa:



↳ mélység: leghosszabb út (d)

↳ összetettség: azon csúcsok száma, amik nem levélelemek (ℓ)

— Def:

Az $L_0(Op, V)$ nyelv egy interpretációja: $\mathcal{I}: V \to \{0, 1\}$

— Def:

Legyen $\Gamma \subseteq L_0(Op, V)$ egy formulahalmaz, $\mathcal{I}: V \to \{0,1\}$ egy interpretációja $L_0(Op, V)$-nek.

Azt mondjuk, hogy $\mathcal{I}$ modellje a Γ formulahalmaznak, ha minden $P \in \Gamma$ esetén $|P|_{\mathcal{I}} = 1$.

— Def:

Legyen $\Gamma \subseteq L_0(Op, V)$ egy formulahalmaz.

Azt mondjuk, hogy Γ:

- kielégíthető: ha létezik modellje
- kielégíthetetlen: ha nem létezik modellje ($\approx$ ellentmondásos)

- Def.:
  $P \in \mathcal{L}_0(Op, V)$ kielégíthető, ha $T = \{P\}$ kielégíthető

- Def.:
  $P \in \mathcal{L}_0(Op, V)$ logikai törvény, ha $\mathcal{L}_0(Op, V)$ minden interpretációjában igaz.

- Tétel:
  Egy $P \in \mathcal{L}_0(Op, V)$ formula pontosan akkor logikai törvény, ha $\neg P$ kielégíthetetlen.

- Tétel:
  Egy kielégíthető formulahalmaz minden részhalmaza kielégíthető.

- Tétel:
  Egy kielégíthetetlen formulahalmaz minden bővítése kielégíthetetlen

- Def.:
  Legyen $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_0(Op, V)$ egy formulahalmaz és $P \in \mathcal{L}_0(Op, V)$
  Azt mondjuk, hogy P logikai következménye Γ-nak, ha $\Gamma \cup \{\neg P\}$ kielégíthetetlen.
  Jelölés: $\Gamma \models P$

- Tétel:
  $\Gamma \models P$ pontosan akkor, ha Γ minden modellje modellje P-nek is.

- Tétel:
  $P \in \mathcal{L}_0(Op, V)$ pontosan akkor logikai törvény, ha $\emptyset \models P$ (azaz $\{\neg P\}$ kielégíthetetlen)

- Def.:
  Legyen $P, Q \in \mathcal{L}_0(Op, V)$
  Azt mondjuk, hogy P és Q logikailag ekvivalensek, ha $P \models Q$ és $Q \models P$.
  Jelölés: $P \Leftrightarrow Q$

- Tétel:
  $P \Leftrightarrow Q$ pontosan akkor, ha $\mathcal{L}_0(Op, V)$ minden interpretációjában ugyanazokat az értékeket veszi fel.

- Fontosabb ekvivalenciák:
  - kettős tagadás: $\neg\neg P \Leftrightarrow P$
  - implikáció és diszjunkció: $P \supset Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
  - de Morgan azonosságok: $P \vee Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$
    $P \vee Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$
  - → (következménye): $P \supset Q \Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$
    $P \supset Q \Leftrightarrow \neg Q \supset \neg P$
  - disztributivitás: $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
    $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

- Tétel:

  Ha egy P formulát egy vele ekvivalens formulával helyettesítjük, a P-vel ekvivalens formulát kapunk

  pl.: $P \vee (Q \supset R) \Leftrightarrow P \vee (\neg Q \vee R)$