2024. november 27-i gyakorlat

Statisztikai táblázatok használata

1. (a) Legyen $\xi \sim t(7)$ valószínűségi változó. $P(\xi < x) = 0.9$ Adja meg az x értékét!
   (b) Legyen $\xi \sim t(13)$ valószínűségi változó. $P(\xi < x) = 0.99$ Adja meg az x értékét!
   (c) Legyen $\xi \sim t(9)$ valószínűségi változó. $P(\xi < x) = 0.05$ Adja meg az x értékét!

2. (a) Legyen $\xi \sim \chi^2(11)$ valószínűségi változó. $P(\xi < x) = 0.95$ Adja meg az x értékét!
   (b) Legyen $\xi \sim \chi^2(22)$ valószínűségi változó. $P(\xi < x) = 0.01$ Adja meg az x értékét!

Pontbecslés

Várható érték torzítatlan becslése: átlag

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Szórásnégyzet torzítatlan becslése: korrigált tapasztalati (empirikus) szórásnégyzet

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\overline{y}^2\right]$$

Intervallumbecslés

Sokasági várható érték becslése

- Normális eloszlású, ismert σ^2 szórásnégyzetű sokaság
  $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, σ^2 ismert
  Az $1-\alpha$ megbízhatósági szinthez tartozó konfidencia intervallum:

$$P\left(\overline{y} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ < \ \mu \ < \ \overline{y} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

  azaz

$$\mathrm{Int}_{1-\alpha}(\mu) = \overline{y} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Normális eloszlású, ismeretlen σ^2 szórásnégyzetű sokaság
  $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, σ^2 ismeretlen
  Az $1-\alpha$ megbízhatósági szinthez tartozó konfidencia intervallum:

$$P\left(\overline{y} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)\frac{s}{\sqrt{n}} \ < \ \mu \ < \ \overline{y} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

  azaz

$$\mathrm{Int}_{1-\alpha}(\mu) = \overline{y} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)\frac{s}{\sqrt{n}}, \qquad \text{ahol} \quad \nu = df = n-1.$$

Sokasági szórásnégyzet becslése
$Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ normális eloszlású sokaság
Az $1-\alpha$ megbízhatósági szinthez tartozó konfidencia intervallum:

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)} \ < \ \sigma^2 \ < \ \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(\nu)}\right) = 1-\alpha$$

azaz

$$\mathrm{Int}_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(\nu)}\right), \qquad \text{ahol} \quad \nu = df = n-1.$$

Sokasági arány becslése (Nagy mintás eset)
Az $1-\alpha$ megbízhatósági szinthez tartozó konfidencia intervallum:

$$P\left(p - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \ < \ P \ < \ p + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 1-\alpha$$

azaz

$$\mathrm{Int}_{1-\alpha}(P) = p \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

1. Valamely azonnal oldódó kávékivonatot automata tölti az üvegekbe. Előző adatfelvételekből ismeretes, hogy a gép által töltött súly normális eloszlású valószínűségi változó 1.5 g szórással. A gép pontosságának ellenőrzésére vett 16 elemű mintában az üvegekben lévő kávégranulátum súlya (g):

   55, 54, 54, 56, 57, 56, 55, 57, 54, 56, 55, 54, 57, 54, 56, 50.

   (a) Adja meg a töltősúly várható értékének és szórásnégyzetének torzítatlan becslését!
   (b) Készítsen 95%-os megbízhatósággal intervallumbecslést a várható átlagos töltősúlyra a megadott feltételek alapján!
   (c) Készítsen 95%-os megbízhatósággal intervallumbecslést a várható átlagos töltősúlyra feltételezve, hogy az eloszlás normális, de a szórás ismeretlen!
   (d) Készítsen 95%-os megbízhatósággal intervallumbecslést a szórásra, feltételezve, hogy nincs előző adatfelvételből erre vonatkozó információnk!

2. A belvárosi *Fushima Mashina* márkaszervizben a tapasztalatok alapján a televíziók képcsövének kicserélése átlagosan 3.5 órát vesz igénybe, a szórása pedig 30 perc. A munkára fordított idő normális eloszlásúnak tekinthető.

   A szerviz műszaki vezetői kifejlesztettek egy új módszert a képcsőcserére és ezt ki akarták próbálni a gyakorlatban. 10 véletlenszerűen kiválasztott szerelőnek bemutatták az új módszert és mérték a képcsövek cseréjére fordított x időt. Az eredményeket az alábbi módon összegezték:

   $$\sum x = 34.2, \qquad \sum x^2 = 121.6.$$

   (a) Adja meg a az új módszerrel végzett képcsőcsereidő várható értékének és szórásának torzítatlan becslését!
   (b) Adjon 90%-os konfidencia intervallumot az új módszerrel végzett képcsőcsere átlagos idejére és szórására!
   (c) A régi módszerrel javított képcsőcsereidőkre is vettek egy 10 elemű mintát és $\sum y = 35.8$ adódott. Adjon 90%-os konfidencia intervallumot a régi módszerrel végzett képcsőcsere átlagos idejére. Tegyük fel, hogy újabb mintavételt tervezünk úgy, hogy a becslés hibája felére csökkenjen, és a becslés biztonsága is növekedjen 99%-ra. Elég lesz-e ehhez várhatóan egy 100 elemű minta?

3. Egy orvosi rendelő feljegyzései szerint 1 000 légzőszervi megbetegedésben szenvedő beteg közül 610 volt a férfi és 390 a nő. Készítsen 95%-os megbízhatósággal intervallumbecslést ezen minta alapján a férfiak arányára!