Numerikus matematika

Baran Ágnes

Numerikus integrálás

Integrálközelítések.

Az

$$\mathcal{I}(f) := \int_a^b f(x)dx$$

határozott integrált szeretnénk kiszámítani, ahol $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Miért lehet szükség integrálközelítésre?

- f nem elemien integrálható
- f primitív függvényének felírása bonyolult
- nagyszámú integrál kiszámítására van szükségünk
- f nem explicit képlettel adott, csak bizonyos pontokban ismerjük az értékét

Az $\mathcal{I}(f)$ közelítését

$$\mathcal{I}_n(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)$$

alakban keressük, ahol

$x_1, \ldots, x_n$ a közelítés alappontjai, ($x_i \in [a, b]$),

$a_1, \ldots, a_n$ súlyok (melyek az f függvénytől nem függnek).

$\mathcal{I}_n(f)$: kvadratúraképlet (szabad paraméterei: n, $x_1, \ldots, x_n$, $a_1, \ldots, a_n$)

Interpolációs kvadratúraképletek.

Legyenek adottak az $x_1, \dots, x_n$ alappontok.

Közelítsük f-et az $x_1, \dots, x_n$-re támaszkodó Lagrange polinomjával:

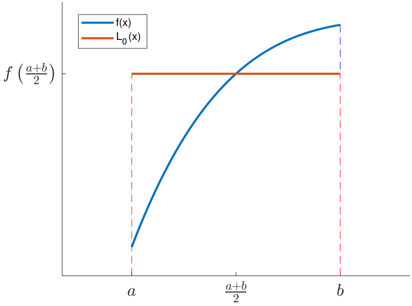
$$f(x) \approx L_{n-1}(x).$$

$$\mathcal{I}(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_{n-1}dx = \mathcal{I}_n(f)$$

Egyszerű érintőképlet.

$n = 1$, azaz 1 alappont adott, és ez az $\frac{a+b}{2}$ pont.

Ekkor a közelítő polinom egy konstansfüggvény: $L_0(x) \equiv f\left(\frac{a+b}{2}\right)$



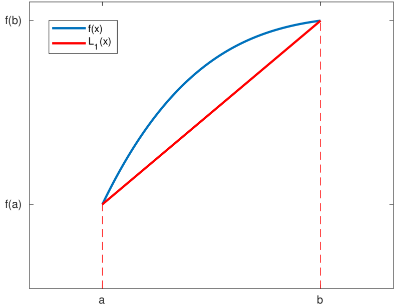
$$\boxed{\mathcal{I}_1(f) = (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

A képlet pontos minden legfeljebb elsőfokú polinom esetén.

Egyszerű trapéz-képlet.

$n = 2$, azaz 2 alappont adott, és ezek az intervallum végpontjai: a és b.

Ekkor a f-et az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ adatokra illeszkedő egyenessel közelítjük.



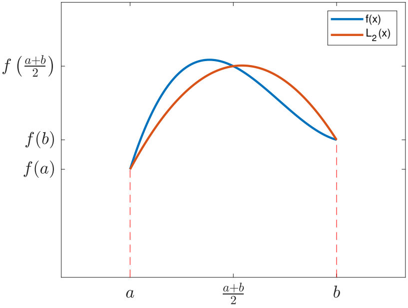
$$\boxed{\mathcal{I}_2(f) = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}}$$

A képlet pontos minden legfeljebb elsőfokú polinom esetén.

Egyszerű Simpson-képlet.

$n = 3$, azaz 3 alappont adott, és ezek az a, $\frac{a+b}{2}$ és b pontok.

Az f-et egy másodfokú polinommal közelítjük.



$$\boxed{\mathcal{I}_3(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)}$$

A képlet pontos minden legfeljebb harmadfokú polinom esetén.

Összetett képletek.

Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot m egyforma hosszúságú részintervallumra:

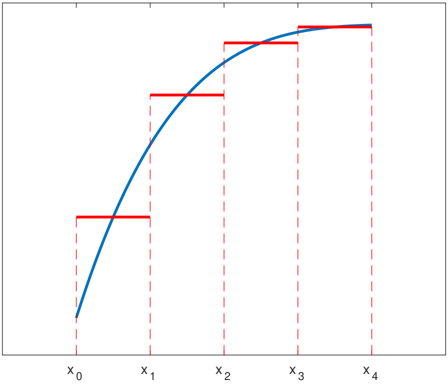
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b,$$

A részintervallumok hosszát jelölje h:

$$h := \frac{b-a}{m} = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Minden részintervallumon alkalmazzuk ugyanazt az egyszerű képletet.

Összetett érintőképlet



Összetett érintőképlet

$$\mathcal{I}_{m\times 1}(f) = h\left[f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)+f\left(x_1+\frac{h}{2}\right)+\dots f\left(x_{m-1}+\frac{h}{2}\right)\right]$$

azaz

$$\mathcal{I}_{m\times 1}(f) = h\sum_{i=0}^{m-1} f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)$$

Az összetett érintőképlet hibája:

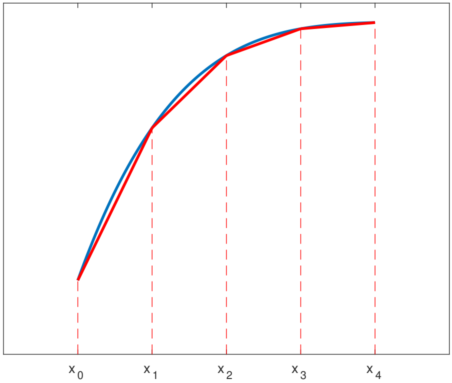
Ha f kétszer folytonosan differenciálható, akkor

$$|\mathcal{I}(f)-\mathcal{I}_{m\times 1}(f)| \le \frac{(b-a)^3}{24m^2}M_2,$$

ahol $M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$

A képlet pontos minden legfeljebb elsőfokú polinom esetén.

Összetett trapéz-képlet



Összetett trapéz-képlet.

$$\mathcal{I}_{m\times 2}(f) = h\left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{m-1}) + \frac{f(x_m)}{2}\right].$$

azaz

$$\mathcal{I}_{m\times 2}(f) = h\left[\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + \frac{f(x_m)}{2}\right]$$

Az összetett trapéz-képlet hibája:

Ha f kétszer folytonosan differenciálható, akkor

$$|\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_{m\times 2}(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12m^2} M_2,$$

ahol $M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

A képlet pontos minden legfeljebb elsőfokú polinom esetén.

Összetett Simpson-képlet.

$$\mathcal{I}_{m\times 3} = \frac{h}{6}\left[f(x_0) + 4f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + 2f(x_1) + 4f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + \dots \right.$$
$$\left. + 2f(x_{m-1}) + 4f\left(x_{m-1} + \frac{h}{2}\right) + f(x_m)\right].$$

azaz

$$\mathcal{I}_{m\times 3} = \frac{h}{6}\left[f(x_0) + 4\sum_{i=0}^{m-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + f(x_m)\right]$$

Az összetett Simpson-képlet hibája:
Ha f négyszer folytonosan differenciálható, akkor

$$|\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_{m\times 3}(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880m^4} M_4,$$

ahol $M_4 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$.

A képlet pontos minden legfeljebb harmadfokú polinom esetén.

Összetett képletek konvergenciája

Tétel.

Ha az n pontra épülő egyszerű képlet pontos a konstans függvények esetén, akkor

$$\lim_{m\to\infty} \mathcal{I}_{m\times n}(f) = \int_a^b f(x)dx$$

minden Riemann-integrálható f függvény esetén.

Példa.

Közelítsük

$$\int_4^{5.2} \ln x dx$$

értékét összetett trapéz-képlettel úgy, hogy az intervallumot 6 részintervallumra osztjuk! Becsüljük meg a közelítés hibáját!

$m = 6$
A részintervallumok hossza: $h = (b - a)/m = 0.2$

Az alappontok:
$x_0 = 4,\ x_1 = 4.2,\ x_2 = 4.4,\ x_3 = 4.6,\ x_4 = 4.8,\ x_5 = 5,\ x_6 = 5.2$

Az integrálközelítés:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{6\times 2} &= 0.2\left(\frac{\ln 4}{2} + \ln 4.2 + \ln 4.4 + \cdots + \ln 5 + \frac{\ln 5.2}{2}\right)\\ &= 1.82765.\end{aligned}$$

A közelítés hibája:

$$|\mathcal{I} - \mathcal{I}_{m\times 2}| \leq \frac{(b-a)^3}{12 \cdot m^2} M_2,$$

ahol $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

Esetünkben $f(x) = \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $M_2 = \frac{1}{16}$,

$$|\mathcal{I} - \mathcal{I}_{6\times 2}| \leq \frac{1.2^3}{12 \cdot 6^2} \cdot \frac{1}{16} = 0.00025.$$

Példa.

Közelítsük

$$\int_4^{5.2} \ln x dx$$

értékét összetett Simpson-képlettel úgy, hogy az intervallumot 3 részintervallumra osztjuk! Becsüljük meg a közelítés hibáját!

$m = 3,\ h = (b - a)/m = 0.4$

$x_0 = 4,\ x_1 = 4.4,\ x_2 = 4.8,\ x_3 = 5.2$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{3\times 3} &= \frac{0.4}{6}\left(\ln 4 + 4\ln 4.2 + 2\ln 4.4 + \cdots + 4\ln 5 + \ln 5.2\right)\\ &= 1.82785.\end{aligned}$$

A közelítés hibája:

$$|\mathcal{I} - \mathcal{I}_{m\times 3}| \leq \frac{(b-a)^5}{2880 \cdot m^4} M_4,$$

ahol $M_4 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$.

Esetünkben $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$, $f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$, $M_4 = \frac{6}{4^4} = \frac{3}{128}$,

$$|\mathcal{I} - \mathcal{I}_{3\times 3}| \leq \frac{1.2^5}{2880 \cdot 3^4} \cdot \frac{3}{128} = 0.00000025.$$

Példa.

Becsüljük meg hány részintervallumra kell osztani az alapintervallumot, ha

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x)dx$$

értékét összetett trapéz-képlettel szeretnénk közelíteni úgy, hogy a hiba kisebb legyen, mint $0.5 \cdot 10^{-2}$.

$$|\mathcal{I} - \mathcal{I}_{m\times 2}| \leq \frac{(b-a)^3}{12 \cdot m^2} M_2.$$

Itt $f(x) = \ln(\cos x)$,

$f'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$

$f''(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$,

tehát $M_2 = 2$.

$$\frac{(b-a)^3}{12\cdot m^2}M_2=\left(\frac{\pi}{4}\right)^3\cdot\frac{1}{12m^2}\cdot 2$$

m értékét úgy határozzuk meg, hogy

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^3\cdot\frac{1}{12m^2}\cdot 2<0.5\cdot 10^{-2}$$

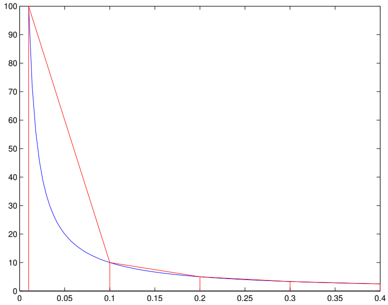
teljesüljön:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3\cdot 10^2<m^2,$$

$$4.019<m.$$

Adaptív eljárások

- a kvadratúra képlet költsége arányos a függvénykiértékelések (alappontok) számával
- az ekvidisztáns alappontrendszer időnként indokolatlanul sok számítást igényel



Adaptív eljárások

A függvény viselkedését figyelembe véve a számítás költsége csökkenthető

- Az aktuális intervallumon végezzük el az integrál közelítését két különböző módon (vagy ugyanazt a kvadratúra képletet alkalmazzuk két különböző -pl n és $2n$- alappontszám esetén, vagy ugyanarra az alappontszámra két különböző kvadratúra képletet)
- ha a két közelítés eltérése abszolútértékben nagyobb, mint $h_i\varepsilon/(b-a)$ (ahol ε adott, h_i az aktuális intervallum hossza), akkor az intervallumot osszuk fel két egyforma hosszúságú részintervallumra, és mindkettőre ismételjük meg az eljárást