Lineáris egyenletrendszerek

Példa (Delta fedezet)

Egy jövőbeli kötelezettségünk, piaci folyamatoktól függően, kétféleképpen realizálódhat: vagy 1000\$-t kell fizetnünk, vagy 0\$-t. Erre felkészülve, a kockázatokat előre kezelve, be akarunk fektetni valamennyi pénzt. Két befektetési lehetőségünk van: a pénz egy részét leköthetjük a bankszámlánkon 2% kamatozással, másik részéből 100\$ darabáron részvényeket vásárolhatunk. A részvénynek két lehetséges hozama van: $+6\%$, vagy -6%, a kötelezettségeink: ha a részvény hozama pozitív, akkor 1000\$-t kell fizetnünk, ha negatív, akkor 0\$-t. Megoldható-e a feladat, ha igen, akkor mekkora összeget kell befektetnünk?

Példa

Egy kisvállalkozás háromféle terméket gyárt (I., II., és III.), mindháromhoz szükség van az N_1, N_2 és N_3 nyersanyagokra. Az egyes termékekből 1 csomag legyártásához a táblázatban adott egységek szükségesek az adott nyersanyagokból.

	I.	II.	III.
N_1	2	1	2
N_2	4	4	5
N_3	2	5	5

Ha tudjuk, hogy egy adott napon az egyes nyersanyagokból rendre 171, 431 és 376 egység fogyott, akkor melyik termékből hány csomagot gyártottak?

Megoldás:

x_1, x_2, x_3: az I., II., III. termékből legyártott csomagok száma

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} 171 \\ 431 \\ 376 \end{bmatrix}$$

Hogy lehet kikombinálni az I., II., III. termékek egy csomagjához szükséges nyersanyagok vektorából az összes nyersanyag vektorát?

Mátrix-vektor alakban:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 171 \\ 431 \\ 376 \end{bmatrix},$$

azaz $Ax = b$.

Gauss-elimináció

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 171 \\ 4 & 4 & 5 & 431 \\ 2 & 5 & 5 & 376 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 171 \\ 0 & 2 & 1 & 89 \\ 0 & 4 & 3 & 205 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 171 \\ 0 & 2 & 1 & 89 \\ 0 & 0 & 1 & 27 \end{array}\right]$$

Visszahelyettesítéssel: (alulról felfelé)

$$x_3 = 27$$
$$2x_2 + x_3 = 89 \rightarrow x_2 = 31$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 171 \rightarrow x_1 = 43$$

A megoldás: 43 csomag I. termék, 31 csomag II. termék, 27 csomag III. termék.

A visszahelyettesítés helyett folytathattuk volna az eliminációt (Gauss-Jordan elimináció):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 171 \\ 0 & 2 & 1 & 89 \\ 0 & 0 & 1 & 27 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 117 \\ 0 & 2 & 0 & 62 \\ 0 & 0 & 1 & 27 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 86 \\ 0 & 1 & 0 & 31 \\ 0 & 0 & 1 & 27 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 34 \\ 0 & 1 & 0 & 31 \\ 0 & 0 & 1 & 27 \end{array}\right]$$

Ekkor a jobb oldalon a megoldásvektort kapjuk.

Matlab-ban

- A backslash operátorral: Az A mátrix és b vektor megadása után

```
>> x=A\b
x =
    43
    31
    27
```

- Az rref függvénnyel:

```
  >> rref([A b])
ans =
     1     0     0    43
     0     1     0    31
     0     0     1    27
```

Ez a Gauss-Jordan elimináció végén kapott mátrixot adja vissza.

Példa

Egy kisvállalkozás háromféle terméket gyárt (I., II., és III.), mindháromhoz szükség van az N_1, N_2 és N_3 nyersanyagokra. Az egyes termékekből 1 csomag legyártásához a táblázatban adott egységek szükségesek az adott nyersanyagokból.

	I.	II.	III.
N_1	2	1	5
N_2	4	4	8
N_3	2	5	1

Miután a nap végén a raktáros jelenti, hogy aznap az egyes nyersanyagokból rendre 252, 512 és 266 egység fogyott, a gyártásvezető elrendelt egy ellenőrzést. Miért?

Most a megfelelő egyenletrendszer kibővített mátrixával elvégezve a Gauss-eliminációt:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & 252 \\ 4 & 4 & 8 & 512 \\ 2 & 5 & 1 & 266 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccr|r} 2 & 1 & 5 & 252 \\ 0 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & 4 & -4 & 14 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccr|r} 2 & 1 & 5 & 252 \\ 0 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

A 3. egyenlet jelentése: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -2$, ami ellentmondás.

Ha folytatnánk az eliminációt:

$$\left[\begin{array}{ccr|c} 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccr|c} 2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Matlab-ban

- A backslash operátorral: Az A mátrix és b vektor megadása után

```
>> x=A\b
```

Warning: Matrix is close to singular or badly scaled. Results may be inaccurate. RCOND = 7.930164e-19.

```
x =
   1.0e+16 *
    3.6029
   -1.2010
   -1.2010
```

Figyelmeztet, hogy az eredmény pontatlan lehet. Valóban, ha ellenőrzésképpen kiszámítjuk Ax értékét, akkor

```
>> A*x
ans =
   256
   528
   274
```

ami nem egyenlő b-vel.

Matlab-ban

- Az rref függvénnyel:

```
  >> rref([A b])
ans =
    1    0    3    0
    0    1   -1    0
    0    0    0    1
```

Ez a Gauss-Jordan elimináció végén kapott mátrixot adja vissza.

Innen azonnal látjuk, hogy a rendszer ellentmondásos, nincs olyan x_1, x_2, x_3, mely kielégíti a megadott egyenleteket.

Példa

Egy kisvállalkozás háromféle terméket gyárt (I., II., és III.), mindhárómhoz szükség van az N_1, N_2 és N_3 nyersanyagokra. Az egyes termékekből 1 csomag legyártásához a táblázatban adott egységek szükségesek az adott nyersanyagokból.

	I.	II.	III.
N_1	2	1	5
N_2	4	4	8
N_3	2	5	1

Ha tudjuk, hogy egy adott napon az egyes nyersanyagokból rendre 109, 308 és 289 egység fogyott, akkor melyik termékből hány csomagot gyártottak?

Gauss-eliminációval:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 5 & 109 \\ 4 & 4 & 8 & 308 \\ 2 & 5 & 1 & 289 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 5 & 109 \\ 0 & 2 & -2 & 90 \\ 0 & 4 & -4 & 180 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 5 & 109 \\ 0 & 2 & -2 & 90 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A 3. egyenlet jelentése: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$, ami semmilyen korlátozást nem jelent az ismeretlenekre.
Folytatva az eliminációt:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 5 & 109 \\ 0 & 1 & -1 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 6 & 64 \\ 0 & 1 & -1 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & 32 \\ 0 & 1 & -1 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ha eltekintünk attól a feltételtől, hogy nemnegatív egész megoldásokat keresünk, akkor a rendszernek végtelen sok megoldása van. Pl. egy megoldás: $x_1 = 32$, $x_2 = 45$, $x_3 = 0$

Matlab-ban

- A backslash operátorral: Az A mátrix és b vektor megadása után

```
>> x=A\b
```

Warning: Matrix is close to singular or badly scaled. Results may be inaccurate. RCOND = 7.930164e-19.

```
x =
   167
     0
   -45
```

Újra figyelmeztetést kaptunk, de Ax most egyenlő b-vel:

```
>> A*x
ans =
   109
   308
   289
```

Matlab-ban

- Az rref függvénnyel:

```
  >> rref([A b])
ans =
     1     0     3    32
     0     1    -1    45
     0     0     0     0
```

Ez a Gauss-Jordan elimináció végén kapott mátrixot adja vissza, innen egy megoldást azonnal leolvashatunk.

Gyengén meghatározott lineáris egyenletrendszerek

Példa. Az

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

egy.rendszer megoldása:

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{bmatrix}$$

egy.rendszer megoldása:

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Gyengén meghatározott lineáris egyenletrendszerek

Példa. Tekintsük a következő 100×100-as lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{99} \\ x_{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -98 \\ -97 \\ -96 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ez egyértelműen megoldható:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_{99} = x_{100} = 1.$$

Perturbáljuk egy kicsit a rendszert!

Gyengén meghatározott lineáris egyenletrendszerek

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{99} \\ x_{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -98 \\ -97 \\ -96 \\ \vdots \\ 0 \\ \color{red}{1.00001} \end{bmatrix}$$

Ez is egyértelműen megoldható, de

$$x_1 \approx 3.1691 \cdot 10^{24}.$$

Egy pici perturbáció az adatokban $\rightarrow$ hatalmas különbség a megoldásban.

Normák, kondíciószámok

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható, $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$
az $Ax = b$ lin. egyenletrendszer megoldását keressük.

Tfh b hibával terhelten ismert: b helyett $b + \delta b$ adott. Ekkor a lineáris egyenletrendszer:

$$Ay = b + \delta b$$

vagy

$$A(x + \delta x) = b + \delta b$$

A kérdés: mekkora lehet a megoldás hibája?

A jobb oldali vektor változása mekkora hatással van a megoldás változására?

vektorokat kell mérnünk $\to$ normák

Norma

Legyen X egy lineáris tér $\mathbb{R}$ felett. Az $d : X \to \mathbb{R}$ leképezés **norma**, ha

1. $d(x) \geq 0$ minden $x \in X$ esetén
2. $d(x) = 0 \iff x = 0$
3. $d(\lambda x) = |\lambda| d(x)$, minden $\lambda \in \mathbb{R}$ és $x \in X$ esetén
4. $d(x + y) \leq d(x) + d(y)$ minden $x, y \in X$ esetén (háromszög-egyenlőtlenség)

A továbbiakban $d(x)$ helyett $\|x\|$

Példák:

Legyen $X = \mathbb{R}^n$

1. Az 1-norma, vagy oktaéder norma:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

2. A 2-norma, vagy euklideszi norma:

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$$

3. A ∞-norma, vagy maximum norma:

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$$

Példa.

Ha

$$x = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

akkor

$$\|x\|_1 = |-3| + |0| + |1| = 4$$
$$\|x\|_2 = \left(|-3|^2 + |0|^2 + |1|^2\right)^{1/2} = \sqrt{10}$$
$$\|x\|_\infty = \max\{|-3|, |0|, |1|\} = 3$$

Abszolút hiba, relatív hiba

Az $A(x + \delta x) = b + \delta b$ rendszerben:

- $\|\delta b\|$: a jobb oldal abszolút hibája
- $\|\delta x\|$: a megoldás abszolút hibája

Ezek önmagukban nem elég informatívak.

Sokkal érdekesebb számunkra:

- $\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$: a jobb oldal relatív hibája
- $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$: a megoldás relatív hibája

Meg lehet mutatni, hogy a megoldás relatív hibája a jobb oldali vektor relatív hibájától függ, és egy olyan mennyiségtől, ami csak az A mátrixtól függ. Ez utóbbi a mátrix kondíciószáma, ami egy 1-nél nem kisebb valós szám.

A kondíciószám azt mutatja meg, hogy adott mátrix esetén hányszor nagyobb lehet a megoldás relatív hibája a jobboldali vektor relatív hibájánál.

$$\boxed{\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \operatorname{cond}(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}}$$

$\operatorname{cond}(A) \geq 1$ minden A invertálható mátrixra.

A kondíciószám meghatározására a Matlabot használhatjuk.

A kondíciószám értéke függ attól, hogy milyen vektornormát használunk.

Legyen b relatív hibája $\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \approx \varepsilon_1$ (inputhiba nagyságrendű).
Ekkor ha

$$cond(A) \geq \frac{1}{\varepsilon_1}$$

akkor

$$cond(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \geq 1$$

azaz a megoldásra rakódó hiba ugyanakkora lehet, mint maga a megoldás.
Az egyenletrendszer rosszul kondícionált.

Ahhoz, hogy a megoldásnak legalább 1 helyes számjegye legyen

$$cond(A) \leq \frac{1}{a\varepsilon_1}$$

kell, mert ekkor

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{1}{a}$$