A mesterséges intelligencia alapjai

bizonytalanság kezelése

Áttekintés

- bizonytalanság
- valószínűség
- szintaxis és szemantika
- következmény
- függetlenség és Bayes szabály

Bizonytalanság

- Jelölje A_t azt a műveletet, hogy *t* perccel a vonat indulása előtt elindulunk a pályaudvarra.
- A_t-vel időben odaérünk?
- Problémák
  - részlegesen megfigyelhető környezet (utak állapota, más sofőrök terve, stb.)
  - zajos észlelések (Útinfo, DKV applikáció jelzései)
  - a művelet kimenelének bizonytalansága (lapos gumi, stb.)
  - a közlekedés modellezésének és előrejelzésének hatalmas bonyolultsága
- Logikai megközelítés
  - kockázat elutasítása: „A_{25} esetén odaérek”
  - pontos megfogalmazás (túl határozatlan döntéshozatalhoz) „A_{25}-tel odaérek, ha nincs útközben baleset, útfelújítás, és nem történik addig a kocsival semmi, stb.”
- A_{120} biztosan elég (még gyalog is odaértek), de senki nem akar ennyi időt az állomáson tölteni.

Bizonytalanság kezelésének módszerei

- **Alapértelmezett vagy nem-monoton logika**
  - feltesszük, hogy a kocsinak nem lyukad ki a gumija
  - feltesszük, hogy A_{25} elég, hacsak nem mond ellent a nyilvánvaló tényeknek
  - Mely feltételek ésszerűek? Hogyan kezelhetjük az ellentmondásokat?
- **Szabályok tapasztalati tényezőkkel**
  - $A_{25} \Rightarrow_{0.3}$ Időben kiér az állomásra
  - locsol $\Rightarrow_{0.99}$ vizes a fű
  - vizes a fű $\Rightarrow_{0.7}$ esett az eső
  - szabályok kombinálása: A locsol következménye az esett az eső?
- **Fuzzy logika**
  - igazság foka (és nem bizonytalanság)
  - „a fű vizes” értéke 0.2
    - **nem** „100 esetben 20-szor vizes a fű”
    - hanem „enyhén vizes a fű”
- **Valószínűség**

Valószínűség

- próbálkozásaink az elsőrendű logika alkalmazására három fő okból is kudarcot vallanak:
  - **lustaság**: túl sok munkát jelent az ok és okozat teljes eseményhalmazának felsorolása
  - **elméleti tudatlanság**ot: a tudományterület elmélete nem teljes
  - **gyakorlati tudatlanság**ot: nem végezhető el az összes vizsgálat
- a logikai ágens tudása legjobb esetben is csak egy bizonyos **mértékű meggyőződés**t vagy **hiedelmet** nyújthat az adott kijelentésekkel kapcsolatban
- ezen meggyőződési értékek kezelésére az elsődleges eszközünk a **valószínűség-számítás** lesz

Valószínűség

- a valószínűség lehetőséget nyújt a lustaságunkból vagy tudáshiányunkból fakadó bizonytalanság kifejezésére
- a valószínűségi érték inkább az ágens meggyőződését fejezi ki, és nem közvetlenül a valóságra vonatkozik
- észlelések alkotják a tényt/tényállást, amelyen a valószínűségi kijelentések alapulnak:
  - a kihúzott lap pikk ász (1/52 valószínűséggel - lap megnézése nélkül)
  - megnézéssel 0 vagy 1 valószínűséggel
- egy kijelentéshez rendelt valószínűség inkább annak felel meg, hogy egy logikai állítás következik-e a tudásbázisból
  - mielőtt a tények birtokába jutunk **előzetes/a priori/feltétel nélküli** valószínűség
  - tények birtokában **utólagos/a posteriori/feltételes** valószínűség

Döntések bizonytalanság mellett

- Tekintsük a következő feltételezéseket:
  - P(A_{25}-tel időben odaérek|...) = 0.04
  - P(A_{30}-cal időben odaérek|...) = 0.23
  - P(A_{75}-tel időben odaérek|...) = 0.74
  - P(A_{120}-szal időben odaérek|...) = 0.9999
- Melyik műveletet válasszuk?
  - függ a személyes preferenciáktól: lekésett vonat, várakozás
  - preferencia-sorrend felállítása
- **Hasznosságelmélet**: preferenciák ábrázolása és felhasználása
- **Döntéselmélet** = hasznosságelmélet + valószínűség

Valószínűségszámítás alapjai

- Legyen Ω az elemi események egy halmaza
  - például a kockadobás hat lehetséges kimenetele
  - $\omega \in \Omega$ egy elemi esemény, egy lehetséges világ (kölcsönösen kizárják egymást)
- minden elemi eseményhez rendelhetünk egy valószínűséget
  - $0 \leq P(\omega) \leq 1$
  - $\Sigma P(\omega) = 1$
- Ha egy A **esemény** adott elemi események uniója, akkor az A valószínűsége az adott elemi események valószínűségének összege:

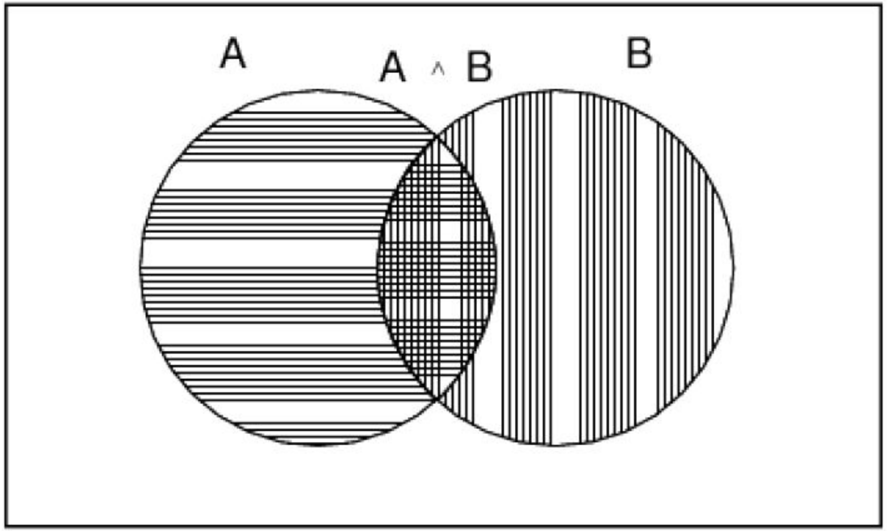
$$P(A) = \sum_{\omega \epsilon A} P(\omega)$$

Állítások

- állításnak azt tekintjük, amikor egy esemény (elemi események halmaza) teljesül
- legyen A és B két véletlen változó
  - a esemény = azon elemi események halmaza, ahol $A(\omega)$ = igaz
  - $\neg a$ esemény = azon elemi események halmaza, ahol $A(\omega)$ = hamis
  - $a \wedge b$ esemény = azon elemi események halmaza, ahol $A(\omega)$ = igaz és $B(\omega)$ = igaz
- MI alkalmazásokban az elemi eseményeket a valószínűségi változók értékei határozzák meg, pl. az elemi események halmaza az értékkészletek Descartes szorzata
- logikai változók esetén az elemi esemény = nulladrendű interpretáció
- állítás = elemi állítások diszjunkciója

Miért használunk valószínűségeket?

- A definíciók szerint a logikailag összekapcsolódó események valószínűségei is összekapcsolódnak
  - $P(a \lor b) = P(a) + P(b) - P(a \land b)$



Valószínűségi változók

- a valószínűség-elmélet alap eleme a **valószínűségi** változó melyhez mindig tartozik egy **értéktartomány (domain)** amelyből az értékeit veheti.
    - *Lyuk* tartománya az ⟨igaz, hamis⟩ lehetne
    - *Időjárás* tartománya a ⟨napos, esős, felhős, havazik⟩ lehetne

- a **P** bármely **X** valószínűségi változó konkrét értékéhez egy feltétel nélküli/ a priori valószínűséget rendel
    - $P(Lyuk = igaz) = 0.1$ vagy rövidebben $P(lyukas) = 0.1$
    - $P(Időjárás = napos) = 0.1$ vagy rövidebben $P(napos) = 0.1$

- ha egy véletlen változó összes lehetséges értékének valószínűségéről szeretnénk beszélni, akkor a **valószínűség-eloszlást** kell vennünk

Valószínűségi változók típusai

- (Boole-típusú) logikai véletlen változók
  - Lyuk (lyukas a fogam?)
  - „Lyuk = igaz” egy állítás, leírható „ lyukas” alakban is
- Diszkrét valószínűségi változó (véges vagy végtelen)
  - az Időjárás a (napos, esős, felhős és havas) egyike
  - „Időjárás = esős” egy állítás
  - az értékeknek egymást kizárónak kell lenniük, és ki kell adniuk az összes lehetőséget
- Folytonos valószínűségi változó (korlátos vagy nem korlátos)
  - „Hőmérséklet = 21,6”
  - „Hőmérséklet < 22,1” egy-egy állítás

Előzetes valószínűség (a priori)

- Állítások előzetes vagy feltétel nélküli valószínűsége
  - azt a meggyőződési mértéket jelenti, amely bármely más információ hiányában az állításhoz kapcsolható
  - $P(lyukas) = 0.1$, $P(Időjárás = napos) = 0.73$
- A valószínűségi eloszlás értéket rendel minden lehetséges értékadáshoz:
  - $\mathbf{P}(Időjárás) = (0.73;\ 0.1;\ 0.07;\ 0.1)$ (normalizált, az összegük 1)
- Együttes valószínűségi eloszlás – véletlen változóhalmaz összes lehetséges kombinációjának valószínűsége
  - *P*(Időjárás,Lyuk)=

	Időjárás=napos	Időjárás=esős	Időjárás=felhős	Időjárás=havas
Lyuk = igaz	0,073	0,01	0,007	0,01
Lyuk = hamis	0,657	0,09	0,063	0,09

Folytonos változók valószínűsége

- A lehetséges értékek száma végtelen, így táblázatban nem foglalható össze
- Annak valószínűsége, hogy egy valószínűségi változó egy adott *x* értéket vesz fel, általában *x* egy paraméterezett függvényeként definiálható.
  - Pl. P(Hőmérséklet = x) = U[18, 26](x) - azaz egyenletes eloszlású 18 és 26 C között.
- Valószínűség-sűrűségfüggvény
  - a sűrűségfüggvény integrálja 1
- P(X=20,5) = 0,125 értelmezése

$$\lim_{dx \to 0} P(20{,}5 \leq X \leq 20{,}5+dx)/dx = 0{,}125$$

Feltételes valószínűség

- Feltételes vagy a posterior valószínűség
  - ha az ágens bizonyos tények birtokába jut a korábban ismeretlen, a tartományra jellemző véletlen változóra vonatkozóan, az a priori valószínűségek nem használhatóak
  - $P(Lyuk = igaz|Fogfájás = igaz) = 0.8$
    - adott, hogy a betegnek fáj a foga; ezt és csak ezt tudjuk
    - nem arról van szó, hogy „ha fáj a foga, akkor 80% eséllyel lyukas”
    - hanem „ha fáj a foga és semmilyen más információnk nincs, akkor 80% eséllyel lyukas”
- a *P*(Lyuk|Fogfájás) feltételes eloszlás egy 2✕2 táblázat
- ha még többet tudunk: P(lyukas|fogfájás, lyukas) = 1
- a kevésbé specifikus feltétel továbbra is érvényes marad új ismeret érkezésekor, de ez nem minden esetben hasznos
- Az új ismeret lehet irreleváns, ekkor egyszerűsíthetünk: az irrelevánst figyelmen kívül hagyhatjuk

Feltételes valószínűség – képlet

- A feltételes valószínűség definíciója (ha P(b) ≠ 0)

$$P(a|b) = \frac{P(a \wedge b)}{P(b)} \longrightarrow P(a \wedge b) = P(a|b)P(b)$$

- A **szorzat szabály** egy alternatív megfogalmazás:

$$P(a \wedge b) = P(a|b)P(b) = P(b|a)P(a)$$

- Ugyanez megfogalmazható az eloszlásokra is, ám ez nem mátrixszorzás lesz, hanem 8 egyenlet:

Láncszabály

A szorzatszabály többszöri alkalmazásával kapjuk meg a láncszabályt:

$$P(X_1, \dots, X_n) =$$

$$= P(X_n|X_1, \dots X_{n-1})P(X_1, \dots X_{n-1})$$

$$= P(X_n|X_1, \dots X_{n-1})P(X_{n-1}|X_1, \dots X_{n-2})P(X_1, \dots X_{n-2})$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i|X_1, \dots X_{i-1})$$

Teljes együttes valószínűség-eloszláson alapuló következtetés

	fogfájás		*¬ fogfájás*	
	beakadás	*¬ beakadás*	*beakadás*	*¬ beakadás*
lyuk	0,108	0,012	0,072	0,008
¬ lyuk	0,016	0,064	0,144	0,576

- Bármely állítás esetén össze kell adnunk az azt teljesítő elemi események valószínűségét: P(fogfájás)=0,108+0,012+0,016+0,064 = 0,2

(marginalizálás: $P(Y) = \mathbf{\Sigma}_z P(Y, z)$ illetve

feltételfeloldás: $P(Y) = \mathbf{\Sigma}_z P(Y|z)P(z)$)

P(lyuk v fogfájás) = 0,108+0,012+0,072+0,008+0,016+0,064

Feltételes valószínűség kiszámítása

$$P(lyuk|fogfájás) = \frac{P(lyuk \wedge fogfájás)}{P(fogfájás)} = \frac{0,108+0,012}{0,108+0,012+0,016+0,064} = 0,6$$

$$P(\neg lyuk|fogfájás) = \frac{P(\neg lyuk \wedge fogfájás)}{P(fogfájás)} = \frac{0,016+0,064}{0,108+0,012+0,016+0,064} = 0,4$$

A nevező tekinthető normalizáló konstansnak, így ***P***(Lyuk|fogfájás) = α*P*(Lyuk,fogfájás) = α[*P*(Lyuk, fogfájás,beakadás) + *P*(Lyuk,fogfájás,¬beakadás)] = α[(0,108, 0,016) + (0,012, 0,064)] = α (0,12; 0,08) = (0,6;0,4)

Ötlet: számoljuk ki a kérdésben szereplő változó eloszlását rögzítve az evidenciákat,és szummázva a rejtett változókat.

Feltételes valószínűség kiszámítása – folytatás

Legyen X az összes változó halmaza! Rendszerint a keresés Y változóinak és az E tényváltozók e megfigyelt értékeinek feltételes együttes eloszlását kívánjuk kiszámítani. A rejtett változók halmaza legyen H = X-Y-E

Ekkor a szükséges összegzéseket a rejtett változók összegzésével kapjuk meg:

$$P(Y|E=e) = \alpha\, P(Y, E=e) = \alpha\, \Sigma_h P(Y, E=e, H=h)$$

A szummában szereplő értékek együttes valószínűségek, mert Y, E és H együtt szerepel, és kiadják a valószínűségi változók halmazát.

- A bonyolultság $O(d^n)$, ahol *d* a legnagyobb számosság
- a tárigény $O(d^n)$, mivel tárolni kell az együttes eloszlásokat
- hogyan lehet ennyi értéket meghatározni?

Függetlenség

- A és B független, ha
  - $P(A|B) = P(A)$ vagy $P(B|A) = P(B)$ vagy $P(A,B) = P(A)P(B)$
- *P*(Fogfájás,Beakadás,Lyuk,Időjárás)=*P*(Fogfájás,Beakadás,Lyuk)*P*(Időjárás)
  - a 32 értékből (Időjárásnak 4 értéke lehet) ez alapján egy 8 és 4 elemes táblázat készíthető
- n pénzérme feldobása esetén 2^n helyett n eset.
- A teljes függetlenség hatékony, de igen ritka
- A fogászatban több száz változó szerepelhet (tünetek, összefüggő betegségek), finomabb eszköz szükséges.

Feltételes függetlenség

- P(Fogfájás,Lyuk,Beakadás) eloszlásnak 8-1=7 független bejegyzése van
- ha lyukas a fog, a szonda beakadásának valószínűsége független a fogfájástól
    - P(beakad|fogfájás, lyukas) = P(beakad|lyukas)
- hasonló függetlenség igaz akkor is, ha nincs lyuk
    - P(beakad|fogfájás, ¬lyukas) = P(beakad|¬lyukas)
- A Beakadás feltételesen független a Fogfájástól a Lyuk esetén
    - P(Beakad|Fogfájás,Lyuk) = P(Beakad|Lyuk)
    - hasonló állítások:
        - P(Fogfájás|Beakad,Lyuk) = P(Fogfájás|Lyuk)
        - P(Beakad,Fogfájás|Lyuk) = P(Fogfájás|Lyuk)P(Beakad|Lyuk)

Feltételes függetlenség – folytatás

- Írjuk fel a teljes együttes valószínűség-eloszlást a láncszabály segítségével:
  - P(Fogfájás,Beakadás,Lyuk) = P(Fogfájás|Beakadás,Lyuk) P(Beakadás,Lyuk) = P(Fogfájás|Beakadás,Lyuk) P(Beakadás|Lyuk) P(Lyuk) = P(Fogfájás|Lyuk) P(Beakadás|Lyuk) P(Lyuk)
- 5 független érték (2 + 2 + 1)
- rendszerint a feltételes függetlenség használata n-ben exponenciálisról n-ben lineárisra csökkenti az együttes valószínűség-elosztás reprezentálásához szükséges helyet
- a feltételes valószínűség a leginkább használt és legrobusztusabb módja a tudás reprezentálásának bizonytalan környezetekben

Bayes-szabály

- a szorzat szabály szerint $P(a \wedge b) = P(a|b)P(b) = P(b|a)P(a)$
- ez alapján a Bayes-szabály:

$$P(b|a) = \frac{P(a|b)P(b)}{P(a)}$$

- általánosabban eloszlásokra:

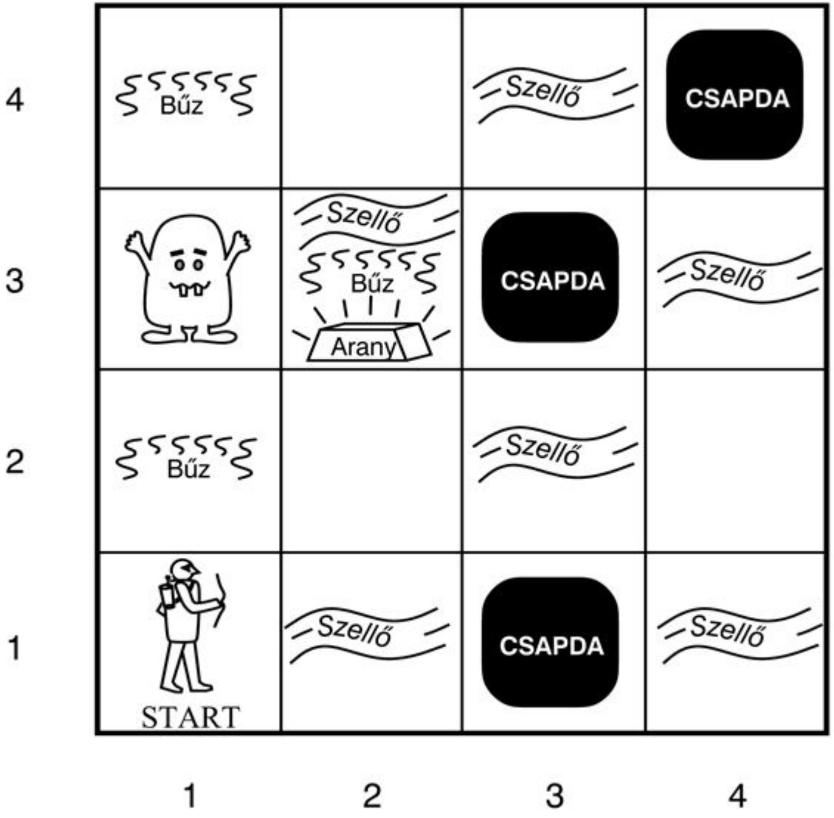
$$\mathrm{P}(Y|X) = \frac{\mathrm{P}(X|Y)\mathrm{P}(Y)}{\mathrm{P}(X)}$$

- hasznos diagnosztikai valószínűséget nyerni okozati valószínűségből:
  - P(ok|hatás) = P(hatás|ok)P(ok)/P(hatás)
  - P(agyhártyagyulladás|merev nyak)=P(m|a)P(a)/P(m) = 0,8*0,0001/0,1 = 0,0008

Bayes-szabály és feltételes függetlenség

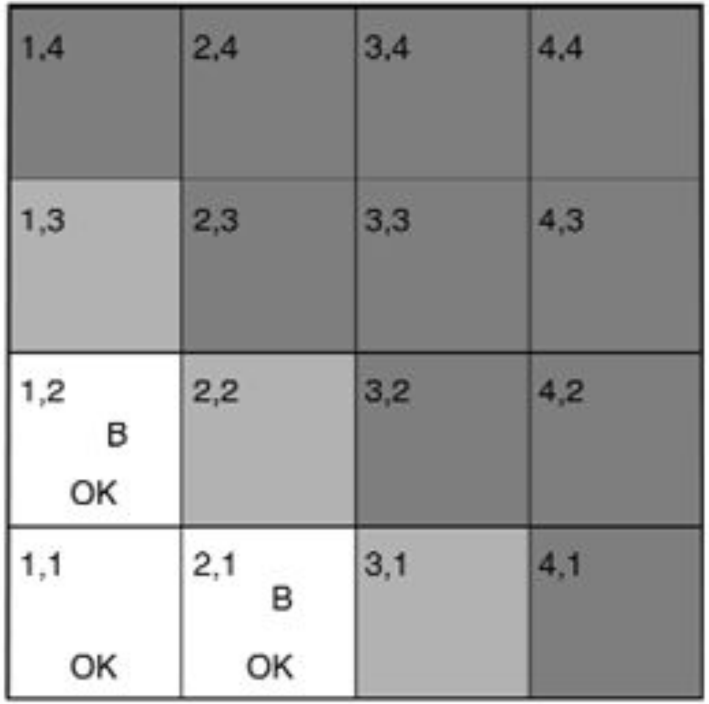
- P(Lyuk|fogfájás, beakad) = αP(fogfájás,beakad|Lyuk) P(Lyuk) = αP(fogfájás|Lyuk) P(beakad|Lyuk) P(Lyuk)
- egy példa a naiv Bayes-modellre:
  - $P(Ok, Hatás_1, \ldots Hatás_n) \;=\; P(Ok)\prod_i P(Hatás_i|Ok)$
- a paraméterek száma n-ben lineáris

Wumpus világ



- Teljesítménymérték:
  - arany: 1000, halál: -1000, lépés darabja: -1, nyíl használata -10
- Környezet
  - Wumpus melletti mezők büdösek
  - Csapda melletti mezők huzatosak
  - Az arany fénylik a saját mezőjében
  - A lövés elpusztítja a szörnyet, ha eltalálja
  - Egyetlen nyílvessző van
  - A megragad-dal megszerezzük az aranyat, ha ugyanazon a mezőn vagyunk
  - Az eldob-bal az aktuális mezőre ejtjük az aranyat.
- Műveletek:
  - balra/jobbra fordul, előre, megragad, elejt, lő
- Érzékelő:
  - szag, csillogás, szellő

Wumpus világ



- P_{ij} = igaz, ha [i,j] csapdát rejt
- B_{ij} = igaz, ha [i,j] huzatos
- csak B_{11}, B_{12}, B_{21} szerepel a modellben

Valószínűségi modell

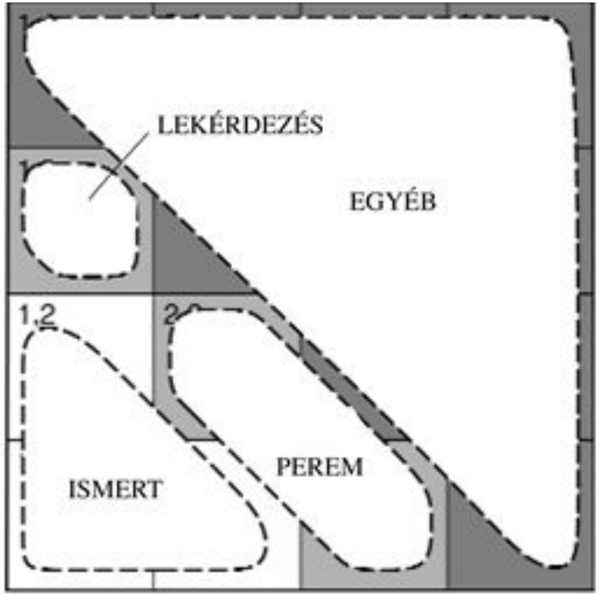
- teljes együttes valószínűségi-eloszlás: $P(P_{11},\ldots,P_{44}, B_{11},B_{12},B_{21})$
- szorzat szabály alapján $P(B_{11},B_{12},B_{21}|P_{11},\ldots,P_{44},)P(P_{11},\ldots,P_{44})$
    - első tag 1, ha a csapdák szomszédosak a huzattal, 0 egyébként
    - második tag: a csapdák egyenletes valószínűséggel (0,2) vannak elszórva
        - $P(P_{11},\ldots,P_{44}) = \prod_{ij} P(P_{ij}) = 0{,}2^n\, 0{,}8^{16-n}$
        - n csapda esetén

Észlelések és kérdés

- tudjuk a következő tényeket:
  - $b = \neg b_{11} \wedge b_{12} \wedge b_{21}$
  - $ismert = \neg p_{11} \wedge \neg p_{12} \wedge \neg p_{21}$
- a kérdés: $\mathbf{P}(P_{13}|ismert,b)$
- definiáljuk: *ismeretlen* = a P_{13} és *ismert* -en kívüli P_{ij}-k
- $\mathbf{P}(P_{13}|ismert, b) = \alpha \Sigma_{ismeretlen}\, \mathbf{P}(P_{13}, ismeretlen, ismert, b)$
  - a mezők számával exponenciálisan növekszik!

Feltételes valószínűség használata

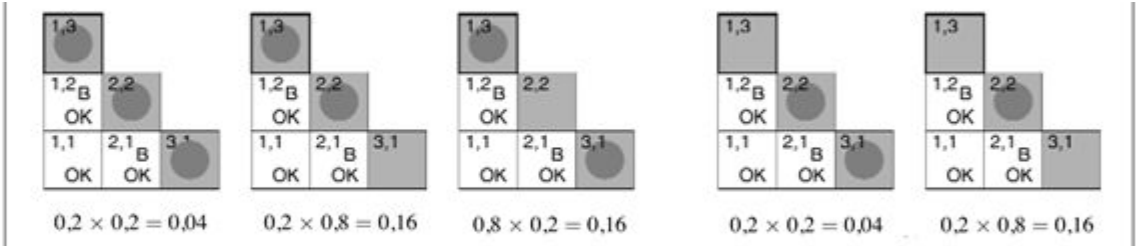
- alapötlet: a megfigyelések feltételesen függetlenek a rejtett mezőktől tekintve a szomszédos rejtett mezőket
- definiáljuk: ismeretlen = perem U egyéb
- $P(b|P_{13},\text{ismert},\text{ismeretlen}) = P(b|P_{13},\text{ismert},\text{perem})$
- alakítsuk a kérdést olyan formára, hogy ezt tudjuk használni



Feltételes valószínűség használata – folytatás

- $P(P_{13}|\text{ismert},b) = \alpha\Sigma_{\text{ismeretlen}}\ P(P_{13}, \text{ismeretlen}, \text{ismert}, b) =$
- $\alpha\Sigma_{\text{ismeretlen}}\ P(b|P_{13}, \text{ismeretlen}, \text{ismert})P(P_{13}, \text{ismeretlen}, \text{ismert}) =$
- $\alpha\Sigma_{\text{perem}}\Sigma_{\text{egyéb}}P(b|P_{13},\text{ismert}, \text{perem}, \text{egyéb})P(P_{13}, \text{ismert}, \text{perem}, \text{egyéb}) =$
- $\alpha\Sigma_{\text{perem}}\Sigma_{\text{egyéb}}P(b|P_{13},\text{ismert}, \text{perem})P(P_{13}, \text{ismert}, \text{perem}, \text{egyéb}) =$
- $\alpha\Sigma_{\text{perem}}P(b|P_{13},\text{ismert}, \text{perem})\Sigma_{\text{egyéb}}P(P_{13}, \text{ismert}, \text{perem}, \text{egyéb}) =$
- $\alpha\Sigma_{\text{perem}}P(b|P_{13},\text{ismert}, \text{perem})\Sigma_{\text{egyéb}}P(P_{13})P(\text{ismert})P(\text{perem})P(\text{egyéb}) =$
- $\alpha P(\text{ismert})P(P_{13})\Sigma_{\text{perem}}P(b|P_{13},\text{ismert}, \text{perem})P(\text{perem})\Sigma_{\text{egyéb}}P(\text{egyéb}) =$
- $\alpha' P(P_{13})\Sigma_{\text{perem}}P(b|P_{13},\text{ismert}, \text{perem})P(\text{perem})$

Feltételes valószínűség használata – folytatás



- $P(P_{13}|\text{ismert,b}) = \alpha'(0{,}2(0{,}04+0{,}16+0{,}16); 0{,}8(0{,}04+0{,}16)) \approx (0{,}31; 0{,}69)$
- $P(P_{22}|\text{ismert,b}) \approx (0{,}86; 0{,}14)$

Összegzés

- A valószínűség egy szigorú formalizmus a bizonytalan környezet esetére.
- Az együttes valószínűségi eloszlás megadja az elemi események valószínűségét.
- A kérdések az elemi események összegzésével válaszolhatóak meg
- Nem triviális esetekben a méreteket valamilyen úton csökkenteni kell
- A függetlenség illetve a feltételes függetlenség ehhez eszközt biztosít