Numerikus matematika

Baran Ágnes

Gyakorlat
Lagrange-interpoláció

Lagrange-interpoláció

Példa

Határozzuk meg a $(-2,-5),(-1,3),(0,1),(2,15)$ pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

Megoldás. Készítsük el az osztott differenciák táblázatát!
Az első két oszlopba az alappontok és a megfelelő függvényértékek kerülnek:

$$\begin{array}{r|r} -2 & -5 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 15 \end{array}$$

Számítsuk ki az elsőrendű osztott differenciákat!

$$
\begin{array}{r|r}
-2 & -5 & \\
 & & \frac{3-(-5)}{-1-(-2)} = 8 \\
-1 & 3 & \\
 & & \frac{1-3}{0-(-1)} = -2 \\
0 & 1 & \\
 & & \frac{15-1}{2-0} = 7 \\
2 & 15 &
\end{array}
$$

Számítsuk ki a másodrendű osztott differenciákat!

$$
\begin{array}{r|rrr}
-2 & -5 & & \\
 & & 8 & \\
-1 & 3 & & \frac{-2-8}{0-(-2)} = -5 \\
 & & -2 & \\
0 & 1 & & \frac{7-(-2)}{2-(-1)} = 3 \\
 & & 7 & \\
2 & 15 & &
\end{array}
$$

Számítsuk ki a harmadrendű osztott differenciát!

$$
\begin{array}{r|rrrl}
-2 & -5 & & & \\
 & & 8 & & \\
-1 & 3 & & -5 & \\
 & & -2 & & \frac{3-(-5)}{2-(-2)} = 2 \\
0 & 1 & & 3 & \\
 & & 7 & & \\
2 & 15 & & &
\end{array}
$$

A táblázat felső élét használva írjuk fel a polinomot!

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-2 & -5 & & & \\
 & & 8 & & \\
-1 & 3 & & -5 & \\
 & & -2 & & 2 \\
0 & 1 & & 3 & \\
 & & 7 & & \\
2 & 15 & & & \\
\end{array}
$$

$$L_3(x) = -5 + 8(x+2) - 5(x+2)(x+1) + 2(x+2)(x+1)x$$

Megj.:

A Lagrange-polinom nem függ az adatok sorrendjétől, így választhattuk volna a táblázat alsó élét is:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-2 & -5 & & & \\
 & & 8 & & \\
-1 & 3 & & -5 & \\
 & & -2 & & 2 \\
0 & 1 & & 3 & \\
 & & 7 & & \\
2 & 15 & & &
\end{array}
$$

$$L_3(x) = 15 + 7(x-2) + 3(x-2)x + 2(x-2)x(x+1)$$

Mindkét esetben

$$L_3(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$$

Lagrange-interpoláció

1. feladat

Írja fel az alábbi pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

(a) $(-3,-6)$, $(-2,-17)$, $(-1,-8)$, $(1,-2)$, $(2,19)$,
(b) $(-3,-31)$, $(-2,-8)$, $(1,1)$, $(2,24)$,
(c) $(-2,-13)$, $(-1,-4)$, $(1,2)$,
(d) $(-2,-5)$, $(-1,3)$, $(0,1)$, $(2,15)$,
(e) $(-1,4)$, $(1,2)$, $(2,10)$, $(3,40)$,
(f) $(-2,38)$, $(-1,5)$, $(1,-1)$, $(2,-10)$, $(3,-7)$,
(g) $(-2,-33)$, $(-1,-2)$, $(1,6)$, $(2,7)$, $(3,-18)$.

2. feladat

Horner-algoritmussal határozza meg a $p(-3)$ értéket, ha

$$p(x) = -x^5 + 3x^3 - 4x^2 - 3x + 5$$

Lagrange-interpoláció Octave/Matlab-bal

A `polyfit` függvény

`polyfit(x,f,n-1)` Ha x és f n-elemű vektorok, akkor megadja annak a legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinomnak az együtthatóit, amely illeszkedik az (x_i, f_i), $i = 1, \ldots, n$ adatokra.

Példa

Határozzuk meg a $(-2,-5),(-1,3),(0,1),(2,15)$ pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

Megoldás.

```
>>x=[-2, -1, 0, 2];
>>f=[-5, 3, 1, 15];
>>p=polyfit(x,f,3)
p=
   2.0000 1.0000 -3.0000 1.0000
```

Ábrázoljuk a pontokat és az illesztett függvényt!

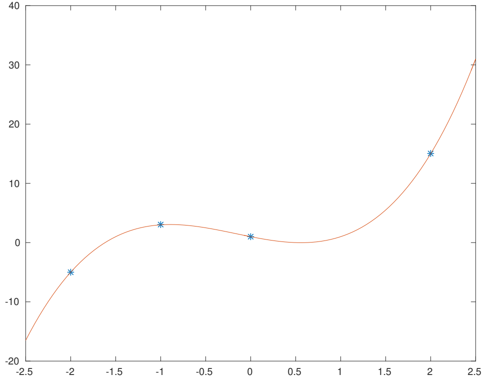
```
x=[-2, -1, 0, 2];
f=[-5, 3, 1, 15];
p=polyfit(x,f,3);
xx=linspace(-2.5,2.5);
yy=polyval(p,xx);
figure; plot(x,f,'*',xx,yy)
```

A `polyval` függvény:

```
yy=polyval(p,xx);
```

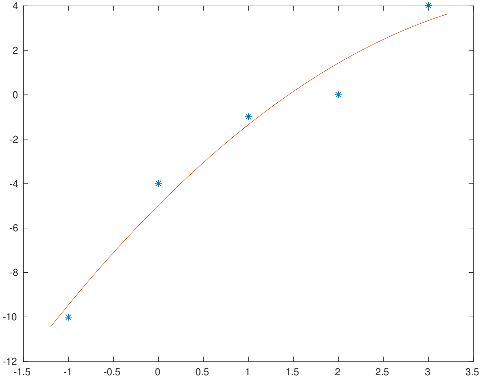
a `p` együtthatójú polinom értékeit adja az `xx` vektor koordinátáiban. (p-ben a polinom együtthatói a főegyütthatóval kezdve szerepelnek)

```
x=[-2, -1, 0, 2];
f=[-5, 3, 1, 15];
p=polyfit(x,f,3);
xx=linspace(-2.5,2.5);
yy=polyval(p,xx);
figure; plot(x,f,'*',xx,yy)
```



Fontos! Ha a `polyfit` függvényben nem megfelelően írjuk elő a polinom fokszámát, akkor a polinom nem feltétlenül illeszkedik az adatokra.

```
x=[-1 0 1 2 3]; f=[-10 -4 -1 0 4]; p=polyfit(x,f,2);
xx=linspace(-1.2,3.2); ff=polyval(p,xx);
figure; plot(x,f,'*',xx,ff)
```



3. feladat

Közelítse az

$$f(x) = e^x - \sin(\pi x)$$

függvényt a $[0, 1]$ intervallumon egy másodfokú polinommal. Ábrázolja az eredeti és az illesztett függvényt közös ábrán.

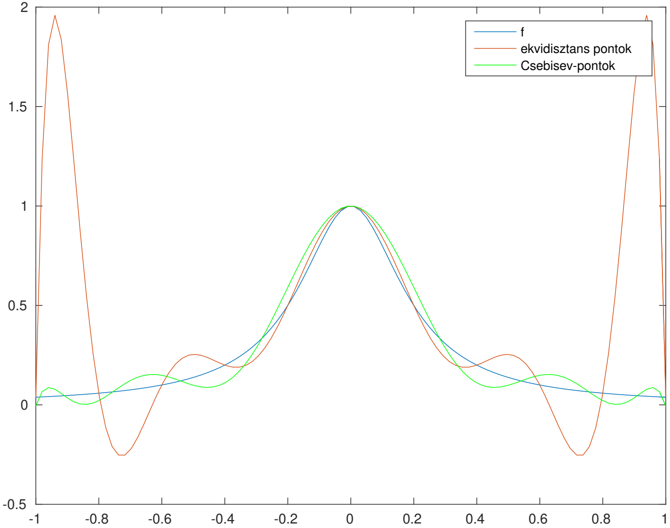
4. feladat

Tudjuk, hogy egy test méterben számolva s_0 utat tett meg, egyenletes v_0 (m/s) sebességgel, majd ezután egyenletesen gyorsítani kezdett a (m/s^2) gyorsulással. A gyorsulás kezdetétől számítva a 2., 4. és 5. másodperc végén az összes megtett út rendre 16, 38 és 52 m. Határozza meg s_0, v_0 és a értékét.

5. feladat (Szorgalmi)

Rajzoltassuk ki közös ábrára az alábbi 3 függvényt:

- az
$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$
függvényt a $[-1, 1]$ intervallumon
- az f függvény
$$-1, -0.8, -0.6, ..., 0.6, 0.8, 1$$
egyenlő lépésközű (ekvidisztáns) alappontokhoz tartozó Lagrange-polinomját
- az f függvény
$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{22}\pi\right), \quad k = 1, 2, \dots, 11$$
alappontokhoz (Csebisev-pontok) tartozó Lagrange-polinomját.


f
ekvidisztans pontok
Csebisev-pontok
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

6. feladat (Szorgalmi)

Írjon egy kódot, mely adott alappontok és függvényértékek esetén az osztott differenciák táblázatát határozza meg.
Tesztelje a kódját a legelső példával, illetve az első feladatban adott pontpárokkal.

7. feladat

Írjon egy Matlab-függvényt, mely Horner-algoritmus segítségével kiszámítja egy polinom értékét egy megadott x helyen. (Ne használja a polyval függvényt.) A függvény bemenetei: a polinom együtthatóit tartalmazó vektor és az x érték.
Módosítsa a kódját úgy, hogy egyszerre több helyen is ki tudja számolni a helyettesítési értéket (ekkor x vektorként adott).

8. feladat

Egy pontszerű testet a $(0, y_0)$ pontból, a vízszintessel α szöget bezáró irányban felfelé v_0 $[m/s]$ kezdősebességgel elhajítunk, akkor a test pályája:

$$y = y_0 + x \tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2,$$

ahol g $[m/s^2]$ a nehézségi gyorsulás.
Ha tudjuk, hogy a test pályája áthalad a $(1, 2.3957)$, $(2, 2.4280)$, $(4, 1.4027)$ pontokon, akkor mi lesz a földetérési helyének x koordinátája? (Feltételezzül, hogy a talaj vízszintes).

Használhatja a `roots` függvényt.