

Könyv:

Wayne L. Winston: Operációkutatás

3

Bevezetés a lineáris programozásba

- 3.1. A lineáris programozási feladat 51
- 3.2. A kétváltozós lineáris programozási feladat grafikus megoldása 59
- 3.3. Speciális esetek 67

Modell építés probléma leírásból

Grafikus megoldás (Giapetto példa, speciális esetek) 3.1. fejezet 1. Példa

3.2. grafikus megoldás (1. Példa. 2 Példa – min, 3.példa – több megoldás, 4. Példa – üres halmaz, 5 példa – nem korlátos)

Előjel korlát nélküli változóra példa: (4.10 Előjelkorlátozatlan változók / 1. Példa)

LINGO

Feladat megoldás LINGO-ban, mint pl:

The screenshot displays the LINGO 21.0.33 interface. The left pane shows the model code, and the right pane shows the solution report.

Model Code:

```
1 !Giapetto probléma;
2 MODEL:
3 !Célfüggvény MIN= vagy MAX=;
4 [profit] MAX= 3*x1 + 2*x2 ;
5
6 !Feltételek;
7 [felk] 2*x1 + x2 <= 100;
8 [faf] x1 + x2 <= 80;
9 [elad] x1 <= 40;
10
11 !Előjelkorlát alapértelmezett!!
12 Negatív érték megengedése: @FREE();
13 END
14
15
```

Solution Report:

Variable	Value	Reduced Cost
X1	20.00000	0.000000
X2	60.00000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
PROFIT	180.0000	1.000000
FELK	0.000000	1.000000
FAF	0.000000	1.000000
ELAD	20.00000	0.000000

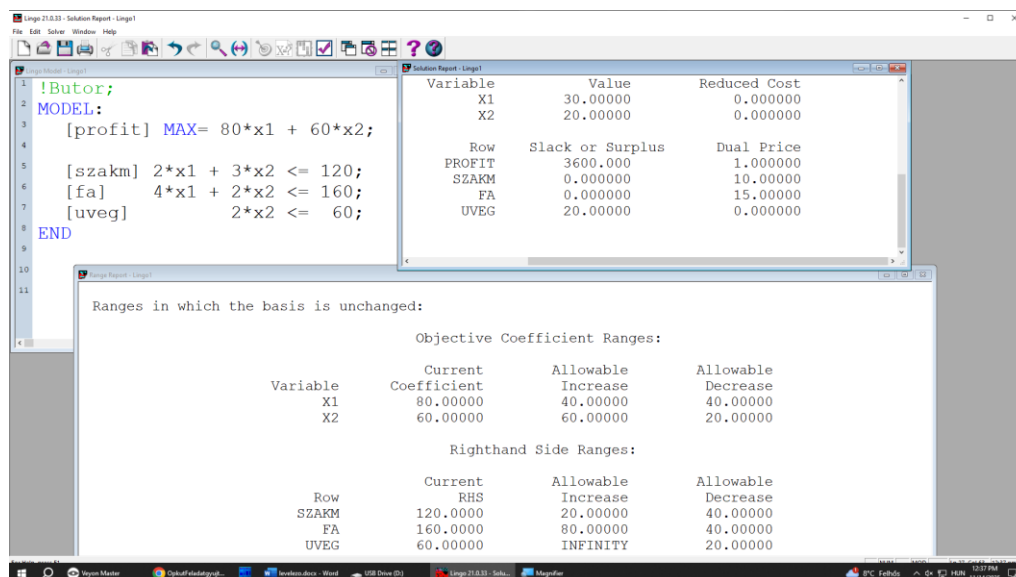
Érzékenység vizsgálat LINGO-ban.

5 Érzékenységvizsgálat és dualitás

- 5.1. Grafikus bevezetés az érzékenységvizsgálatba 191
- 5.2. Néhány fontos képlet 197

Az 1. kötet részletes tartalma

- 5.3. Érzékenységvizsgálat 205
- 5.4. Az LP feladat duálisa 219
- 5.5. A duális feladat közgazdasági interpretációja 227
- 5.6. A dualitás-tétel és következményei 229
- 5.7. Árnyékárak 240
- 5.8. Dualitás és érzékenységvizsgálat 247
- 5.9. Komplementaritás 250
- 5.10. A duál szimplex módszer 254
- 5.11. Az árnyékárak egy alkalmazási példája: a Data Envelopment Analysis (DEA) 260
- Összefoglalás 268
- Áttekintő feladatok 273



Szállítási feladat

6.1. A szállítási feladatok megfogalmazása

A tárgyalást a szállítási feladat megfogalmazásával kezdjük. Ez azt jelenti, hogy a következő példával illusztrált helyzet leírására alkalmas lineáris programozási modellt állítunk fel.

- 1. PÉLDA** A Powercónak három elektromos erőműtelepe van, ezek négy város szükségletét látják el.¹ Az egyes erőművek a következő mennyiségű kilowattóra (kWh) elektromos energiát képesek szolgáltatni: 1. erőmű: 35 millió; 2. erőmű: 50 millió; 3. erőmű: 40 millió (lásd 1. táblázat). Az egyszerre (délután 2-kor) megjelenő csúcsfogyasztási igények ezekben a városokban: 1. város: 45 millió; 2. város: 20 millió; 3. város: 30 millió; 4. város: 30 millió. 1 millió kWh áram szállítása valamelyik erőműből valamelyik városba attól függ, hogy milyen távolságra kell szállítani. Fogalmazzunk meg egy LP-t, amely minimalizálja annak a költségét, hogy mindegyik város csúcsfogyasztási igénye ki legyen elégítve!

1. TÁBLÁZAT
Szállítási költség
(\$), szolgáltatás és
kereslet a Powerco
feladatban

Honnan	Hová				Szolgáltatás (millió kWh)
	1. város	2. város	3. város	4. város	
1. erőmű	8	6	10	9	35
2. erőmű	9	12	13	7	50
3. erőmű	14	9	16	5	40
Igény (millió kWh)	45	20	30	30	

$$\min z = 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 9x_{14} + 9x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23} + 7x_{24} + 14x_{31} + 9x_{32} + 16x_{33} + 5x_{34}$$

$$\text{f.h.} \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 35 \quad (\text{kínálati feltételek})$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 50$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 40$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 45 \quad (\text{keresleti feltételek})$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 20$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 30$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 30$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4)$$

Részletes magyarázat 6.fejezet 1.példa

Lingo:

```
Lingo 21.0.33 - [Lingo Model - Lingo1]
File Edit Solver Window Help
[Icons]

1 !Szállítási;
2 MODEL:
3   SETS:
4     EROMU /E1..E3/: kap;
5     VAROS /V1..V4/: igeny;
6     UTAK (EROMU,VAROS): ktg, x;
7   ENDSETS
8   DATA:
9     kap = 35 50 40;
10    igeny = 45 20 30 30;
11    ktg = 8 6 10 9|
12          9 12 13 7
13          14 9 16 5;
14  ENDDATA
15
16    [osszktg] MIN= @SUM(UTAK: ktg*x);
17
18    !Igény feltételek;
19    @FOR(VAROS (j):
20      [ig] @SUM(EROMU (i): x(i,j)) >= igeny(j)
21    );
22    !Kapacitás;
23    @FOR(EROMU (i):
24      [kapacitas] @SUM(VAROS (j): x(i,j)) <= kap(i)
25    );
26
27 END
28
29
```

```
27 !Vezeték szakadás E1 - V2 között;
28 x(1,2) = 0;
29
30 !Szállítható mennyiség E3-V1 között legfeljebb 10 m Kwh;
31 x(3,1) <= 10;
32
33 END
34
```

Hozzárendelési feladatok

6.5. Hozzárendelési feladatok

A szállítási szimplex módszer nagyon hatékonynak tűnik, mégis van a szállítási feladatoknak egy olyan csoportja, ahol a szállítási szimplex módszer gyakran nem bizonyul elég jónak. Ezek a hozzárendelési feladatok. Ebben az alfejezetben definiáljuk a hozzárendelési feladatokat, és leírunk egy nagyon hatékony megoldó algoritmust.

4. PÉLDA A Machinecónak négy gépe van, és négy olyan munka, amelyeket ezeken a gépeken kell elvégezni. Minden egyes gépre egy munkát kell kijelölni, amelyet a gép teljesen elvégez. A 43. táblázat mutatja, hogy az egyes gépeknek az egyes munkákra való beállítása mennyi időt igényel. A Machineco minimalizálni szeretné a négy munka elvégzéséhez szükséges összes beállítási időt. Alkalmazzunk lineáris programozást a feladat megoldására!

43. TÁBLÁZAT
Beállítási idők a
Machineco
feladatban

	Idő (órában)			
	1. munka	2. munka	3. munka	4. munka
1. gép	14	5	8	7
2. gép	2	12	6	5
3. gép	7	8	3	9
4. gép	2	4	6	10

Megoldás A Machinecónak el kell döntenie, hogy melyik gép melyik munkát végezze el. Definiáljuk a következő változókat ($i, j = 1, 2, 3, 4$ -re):

$x_{ij} = 1$, ha az i -edik gépet jelöljük ki a j -edik munkára

$x_{ij} = 0$, ha az i -edik gépet nem jelöljük ki a j -edik munkára

Ekkor a Machineco problémája így írható fel:

$$\begin{aligned} \min z &= 14x_{11} + 5x_{12} + 8x_{13} + 7x_{14} + 2x_{21} + 12x_{22} + 6x_{23} + 5x_{24} \\ &\quad + 7x_{31} + 8x_{32} + 3x_{33} + 9x_{34} + 2x_{41} + 4x_{42} + 6x_{43} + 10x_{44} \\ \text{f.h.} \quad &x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \quad (\text{gép feltételek}) \\ &x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \\ &x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \\ &x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \\ &x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \quad (\text{munka feltételek}) \\ &x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1 \\ &x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1 \\ &x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1 \\ &x_{ij} = 0 \quad \text{or} \quad x_{ij} = 1 \end{aligned} \tag{13}$$

Lingo megoldás

```

1 !Hozzárendelési;
2 MODEL:
3   SETS:
4     GEP /G1..G4/;
5     MUNKA /M1..M4/;
6     PAROK (GEP,MUNKA): ido,x;
7   ENDSETS
8   DATA:
9     ido = 14 5 8 7
10           2 12 6 5
11           7 8 3 9
12           2 4 6 10;
13   ENDDATA
14
15   [osszido] MIN= @SUM(PAROK: ido*x);
16
17   !Gép feltételek;
18   @FOR(GEP (i):
19     @SUM(MUNKA (j): x(i,j)) = 1
20   );
21
22   !Munka feltételek;
23   @FOR(MUNKA (j):
24     @SUM(GEP (i): x(i,j)) = 1
25   );
26
27 END

```

Solution Report - Lingo1

Integer variables: 0
Total constraints: 9
Nonlinear constraints: 0
Total nonzeros: 48
Nonlinear nonzeros: 0

Variable	Value
IDO (G1, M1)	14.000000
IDO (G1, M2)	5.000000
IDO (G1, M3)	8.000000
IDO (G1, M4)	7.000000
IDO (G2, M1)	2.000000
IDO (G2, M2)	12.000000
IDO (G2, M3)	6.000000
IDO (G2, M4)	5.000000
IDO (G3, M1)	7.000000
IDO (G3, M2)	8.000000
IDO (G3, M3)	3.000000
IDO (G3, M4)	9.000000
IDO (G4, M1)	2.000000
IDO (G4, M2)	4.000000
IDO (G4, M3)	6.000000
IDO (G4, M4)	10.000000
X (G1, M1)	0.000000
X (G1, M2)	1.000000
X (G1, M3)	0.000000
X (G1, M4)	0.000000
X (G2, M1)	0.000000
X (G2, M2)	0.000000
X (G2, M3)	0.000000
X (G2, M4)	1.000000
X (G3, M1)	0.000000
X (G3, M2)	0.000000
X (G3, M3)	1.000000
X (G3, M4)	0.000000
X (G4, M1)	1.000000
X (G4, M2)	0.000000
X (G4, M3)	0.000000
X (G4, M4)	0.000000

Row	Slack or Surplus
OSSZIDO	15.000000
2	0.000000
3	0.000000
4	0.000000
5	0.000000
6	0.000000
7	0.000000
8	0.000000

For Help, press F1

Veyon Master | winston1.dvi - Goo... | levelezo.docx - Word | USB Drive (D:) | Lingo 21.0.33 - Solu... | Magnifier

```

27   !G1 alkatrész hiba miatt a M2-t nem tudja elvégezni;
28   x(1,2) = 0;
29
30 END

```

MAGYAR módszer 6.5 fejezet a könyvben

HÁTIZSÁK probléma 8.2. fejezet Stock co példa és Josie példa

2. Egy olyan IP-t, mint a (9) is, amelyben csak egy feltétel van, **hátizsák feladatnak** hívunk. Tegyük fel, hogy Josie Camper egy kétnapos túrára készül. Négy tárgy van, amire szüksége lehet. Ezen tárgyak súlya, illetve haszna (Josie szerint) az 1. táblázatban található.

	Súly (font)	Haszon
1-es tárgy	5	16
2-es tárgy	7	22
3-es tárgy	4	12
4-es tárgy	3	8

Tegyük fel, hogy Josie a hátizsákjában legfeljebb 14 fontot bír el. Definíáljuk $j = 1, 2, 3, 4$ -re

Lingo modell:

Lingo Model - Lingo1

```
1 !hátizsák feladat;
2 MODEL:
3
4 [hasznosság] MAX= 16*x1 + 22*x2 + 12*x3 + 8*x4;
5
6 [súly] 5*x1 + 7*x2 + 4*x3 + 3*x4 <= 14;
7
8 @BIN(x1);
9 @BIN(x2);
10 @BIN(x3);
11 @BIN(x4);
12 END
13
14
15
16
17
```

Solution Report - Lingo1

Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.000000	-16.00000
X2	1.000000	-22.00000
X3	1.000000	-12.00000
X4	1.000000	-8.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
HASZNOSSAG	42.00000	1.000000
SULY	0.000000	0.000000

```

10 @BIN(x3);
11 @BIN(x4);
12
13 !Ha az T1 viszi akkor a T2 is kell;
14 x1 <= x2;
15
16 !A T2 és T3 közül legfeljebb csak az egyiket viheti;
17 x2 + x3 <= 1;
18
19 !T1 és T4 közül legalább az egyiket vinni kell;
20 x1 + x4 >= 1;
21
22

```

Halmazlefedési probléma

Könyv: 8.2 Fejezet 5. Példa

5. PÉLDA Egy megye vezetése el akarja dönteni, hogy a megye hat városa közül melyekben legyen tűzoltóállomás. A lehető legkevesebb állomást akarják építeni azon előírás mellett, hogy mindegyik város elérhető legyen valamelyik tűzoltóállomásról 15 percen belül. A 6. táblázat tartalmazza a városok közötti elérési időket. Adjunk meg egy IP-t, amellyel meghatározható, hogy hány tűzoltóállomásra van szükség, és azokat hová telepítsék!

6. TÁBLÁZAT
A városok közötti
elérési idő (perc)

Honnan	Hová					
	1-es város	2-es város	3-as város	4-es város	5-ös város	6-os város
1-es város	0	10	20	30	30	20
2-es város	10	0	25	35	20	10
3-as város	20	25	0	15	30	20
4-es város	30	35	15	0	15	25
5-ös város	30	20	30	15	0	14
6-os város	20	10	20	25	14	0



$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$\text{f.h.} \quad x_1 + x_2 \geq 1 \quad (1\text{-es város feltétel})$$

$$x_1 + x_2 + x_6 \geq 1 \quad (2\text{-es város feltétel})$$

$$x_3 + x_4 \geq 1 \quad (3\text{-as város feltétel})$$

$$x_3 + x_4 + x_5 \geq 1 \quad (4\text{-es város feltétel})$$

$$x_4 + x_5 + x_6 \geq 1 \quad (5\text{-ös város feltétel})$$

$$x_2 + x_5 + x_6 \geq 1 \quad (6\text{-os város feltétel})$$

$$x_i = 0 \text{ vagy } 1 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

További magyarázat a könyvben.

Lingo modell, feltételes szummával:

```
Lingo Model - Lingo1
1 !halmazlefedés;
2 MODEL:
3   SETS:
4     VAROS /v1..v6/: x ;
5     TAV (VAROS, VAROS): d;
6   ENDSETS
7   DATA:
8     d = 0 10 20 30 30 20
9         10 0 25 35 20 10
10        20 25 0 15 30 20
11        30 35 15 0 15 25
12        30 0 30 15 0 14
13        20 10 20 25 14 0;
14   ENDDATA
15   [allomasDB] MIN= @SUM(VAROS: x);
16
17   @FOR(VAROS (i):
18     @SUM(VAROS (j) | d(i,j) #LE# 15 : x(j)) >= 1
19   );
20
21
22 END
23
```

Hálózati folyam feladatok

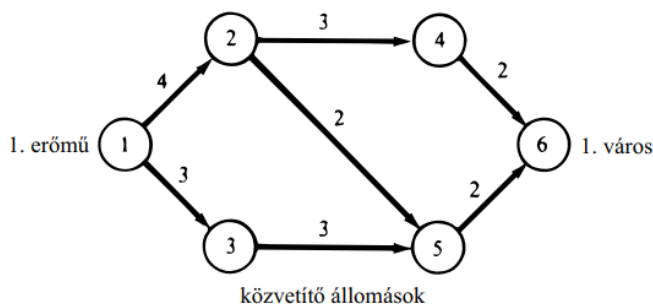
Legrövidebb út:

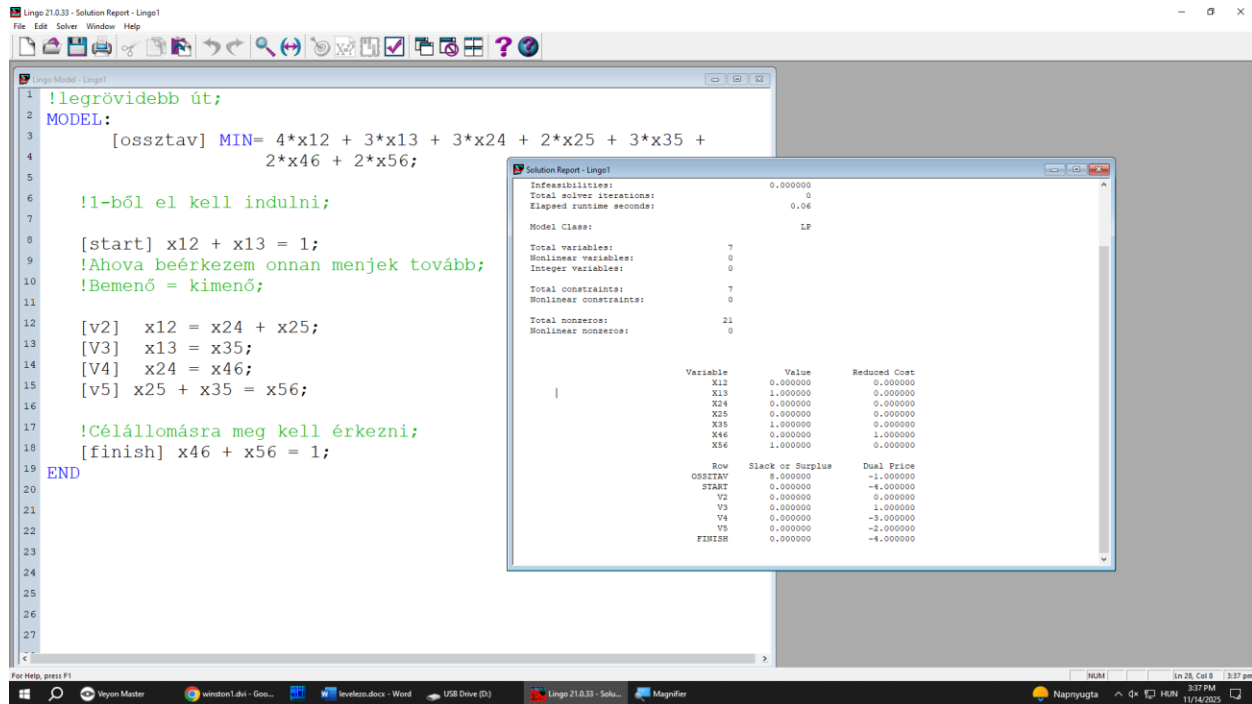
7.2. A legrövidebb út probléma

Ebben az alfejezetben feltesszük, hogy a hálózat mindegyik élének van adott hossza. Válasszunk ki egy csúcspontot (mondjuk az 1-es csúcsot). Az 1-es csúcsból a hálózat összes többi csúcsába vezető legrövidebb utak (minimális összhosszúságú utak) keresését nevezzük a **legróvidebb út problémának**. Az 1. és 2. példák legrövidebb út feladatok.

- 1. PÉLDA** Vegyük a Powerco példáját (2. ábra). Tegyük fel, hogy amikor az 1-es erőműből (1-es csúcs) elektromos energia áramlik az 1-es városba (6-os csúcs), közvetítőállomásokon kell áthaladnia (2–5 csúcsok). Ha két csúcs között lehetséges áramot küldeni, a köztük lévő távolságot (mérőföldben) a 2. ábra mutatja. Például, a 2-esről a 4-es közvetítő állomásig 3 mérőföld az út, viszont nem haladhat áram a 4-es és 5-ös állomások között. A Powerco az áramot úgy akarja az 1-es erőműből az 1-es városba küldeni, hogy az a lehető legkisebb távolságot tegye meg. A Powerco feladata tehát a 2. ábrán lévő hálózatban az 1-es csúcsból a 6-osba vezető legrövidebb út megkeresése.

2. ÁBRA
A Powerco
hálózata

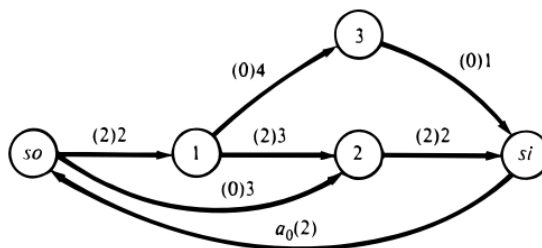




V1 → v3 → v5 → v6 osztáv= 8km
Maximális folyam:

3. PÉLDA A Sunco olajtársaság a lehető legnagyobb mennyiségű olajat akarja (óránként) eljuttatni a 6. ábrán látható csővezetéken keresztül a *so* csúcsból a *si* csúcsba. A *so*-ból a *si*-be vezető útján az olaj esetleg átmegy az 1, 2 és 3 szivattyú-állomásokon, ahol különböző átmérőjű csővezetékek kapcsolódnak egymáshoz. A 8. táblázat mutatja, hogy az egyes éleken maximálisan hány millió hordó olaj nyomható keresztül (óránként). Ezeket a számokat hívjuk **élkapacitásnak**. Írjunk fel egy olyan LP-t, amellyel meghatározható a *so*-ból a *si*-be küldhető olaj maximális mennyisége (óránként).

6. ÁBRA
A Sunco hálózata



$$\max z = x_0$$

$$\text{f.h.} \quad x_{so,1} \leq 2 \quad (\text{élkapacitás korlátok})$$

$$x_{so,2} \leq 3$$

$$x_{12} \leq 3$$

$$x_{2,si} \leq 2$$

$$x_{13} \leq 4$$

$$x_{3,si} \leq 1$$

$$x_0 = x_{so,1} + x_{so,2} \quad (\text{so csúcs folyam feltétel})$$

$$x_{so,1} = x_{12} + x_{13} \quad (\text{1-es csúcs folyam feltétel})$$

$$x_{so,2} + x_{12} = x_{2,si} \quad (\text{2-es csúcs folyam feltétel})$$

$$x_{13} = x_{3,si} \quad (\text{3-as csúcs folyam feltétel})$$

$$x_{3,si} + x_{2,si} = x_0 \quad (\text{si csúcs folyam feltétel})$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Lingo 21.0.33 - Solution Report - Lingo1

File Edit Solver Window Help

Lingo Model - Lingo1

```

1 !maximális folyam;
2 MODEL:
3   [összfolyadék] MAX= x;
4   !Csatorna kapacitások;
5   x01 <= 2;
6   x02 <= 3;
7   x12 <= 3;
8   x13 <= 4;
9   x2v <= 2;
10  x3v <= 1;
11
12 !Folyam feltételek;
13 [indulas] x = x01 + x02;
14 [v1] x01 = x12 + x13;
15 [v2] x12 + x02 = x2v;
16 [v3] x13 = x3v;
17 [veg] x3v + x2v = x;
18 END

```

Solution Report - Lingo1

Elapsed runtime seconds: 0.05

Model Class: LP

Total variables: 7
 Nonlinear variables: 0
 Integer variables: 0
 Total constraints: 12
 Nonlinear constraints: 0
 Total nonzeros: 21
 Nonlinear nonzeros: 0

Variable	Value	Reduced Cost
X	3.000000	0.000000
X01	2.000000	0.000000
X02	1.000000	0.000000
X12	1.000000	0.000000
X13	1.000000	0.000000
X2V	2.000000	0.000000
X3V	1.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
0SSZFOLYADEK	3.000000	1.000000
2	0.000000	0.000000
3	0.000000	0.000000
4	2.000000	0.000000
5	3.000000	0.000000
6	0.000000	1.000000
7	0.000000	1.000000
INDULAS	0.000000	0.000000
V1	0.000000	0.000000
V2	0.000000	0.000000
V3	0.000000	0.000000
VEG	0.000000	-1.000000

For Help, press F1

Windows taskbar: Veyon Master, winston1.dvi - Geo..., levelzo.docx - Word, USB Drive (D:), Lingo 21.0.33 - Solu...