A számítástudomány alapjai

Halmazelmélet

Halmazelmélet

Relációk

Definíció

Legyen A egy halmaz.

Az $R \subseteq A \times A$ halmazt az A halmaz elemei közötti (bináris) relációnak nevezzük.

Általánosítás:

Legyen A, B két halmaz.

Az $R \subseteq A \times B$ halmazt az A és B halmazok elemei közötti relációnak nevezzük.

Legyenek $A_1, \dots, A_n$ halmazok.

Az $R \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$ halmazt az $A_1, \dots, A_n$ halmazok elemei közötti relációnak nevezzük.

Jelölés

$(x, y) \in R \;\dot{\Leftrightarrow}\; xRy$

Relációk

Definíció (tulajdonságok)

Legyen $x, y, z \in A, R \subseteq A \times A$.

Azt mondjuk, hogy az R reláció

- reflexív: ha xRx minden $x \in A$ esetén,
- irreflexív: ha xRy-ból következik, hogy $x \neq y$,
- szimmetrikus: ha xRy-ból következik, hogy yRx minden $x, y \in A$ esetén,
- aszimmetrikus : ha xRy-ból következik, hogy $y\not{R}x$ (azaz $(y, x) \notin R$) minden $x, y \in A$ esetén,
- antiszimmetrikus : ha xRy és yRx-ből következik, hogy $x = y$,
- tranzitív: ha xRy és yRz-ből következik, hogy xRz minden $x, y, z \in A$ esetén,
- teljes: ha xRy és yRx közül legalább az egyik fennáll minden $x, y \in A$ esetén.

Relációk

Definíció (kategóriák)

Legyen $R \subseteq A \times A$.

Azt mondjuk, hogy az R reláció

- félig(parciális)rendezés: ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív;
- szigorú féligrendezésa: ha irreflexív, aszimmetrikus és tranzitív;
- (teljes) rendezés: ha féligrendezés és teljes;
- ekvivalencia: ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív;

Tétel

Az $R \subseteq A \times A$ ekvivalencia-reláció osztályozást indukál az A halmazon.

Osztályozás: A diszjunkt (ekvivalencia-)osztályokra bomlik.

Függvények

Definíció

Legyen $f \subseteq A \times B$ egy reláció.

Azt mondjuk, hogy f egy (totális) függvény, ha

1. minden $x \in A$ esetén létezik $y \in B$, amelyikre xfy;
2. minden $x \in A$ és $y_1, y_2 \in B$ esetén, ha xfy_1 és xfy_2, akkor $y_1 = y_2$.

Jelölés

$xfy \dot{\Leftrightarrow} f(x) = y.$
$f \subseteq A \times B \dot{\Leftrightarrow} f: A \to B$

Definíció

Legyen $f \subseteq A \times B$.

Azt mondjuk, hogy f egy parciális függvény, ha

1. minden $x \in A$ és $y_1, y_2 \in B$ esetén, ha xfy_1 és xfy_2, akkor $y_1 = y_2$.

Függvények

Definíció (tulajdonságok)

Legyen $f: A \to B$.

Azt mondjuk, hogy f **injektív**, ha

a) minden $x_1, x_2 \in A$ esetén, ha $f(x_1) = f(x_2)$, akkor $x_1 = x_2$.

Azt mondjuk, hogy f **szürjektív**, ha

b) minden $y \in B$ esetén létezik a $x \in A$, amelyikre $f(x) = y$.

Azt mondjuk, hogy f **bijektív**, ha injektív és szürjektív.

Függvények

Definíció

Legyen $f: A \to B$ és $g: B \to C$.

A $(g \circ f): A \to C$ függvényt a $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$ összefüggéssel definiáljuk, és az f és g függvények **kompozíciójának** nevezzük.

Példa

$f(x) = 2x, \; g(x) = x^2$

$(g \circ f)(x) = 4x^2$

$(f \circ g)(x) = 2x^2$

$f^{(2)}(x) = (f \circ f)(x) = 4x$

$g^{(2)}(x) = (g \circ g)(x) = x^4$

Boole-függvények

Definíció

Egy $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ függvényt n-változós Boole-függvénynek nevezünk.

Boole-függvények megadásának számtalan módja lehetséges.

1. Értéktáblával (Look-Up-Table)
2. Logika formula segítségével
3. Aritmetikai kifejezésként
4. Egyéb.

Példa

1-változós BF.

2-változós BF.

3-változós BF.

Aritmetikai kifejezés:

A $\{0,1\}$ halmazon értelmezhető egy redukált összeadás és szorzás művelet:
$a \cdot b \; mod \; 2$ és $a + b \; mod \; 2$ módon: a művelet szokásos eredményének maradékát vesszük 2-vel osztva.

Példa

Kompozícióval.

Formális nyelvek

Definíció

Legyen A egy véges, nem üres halmaz (ábécé), elemei betűk (jelek, szimbólumok, karakterek,…).

(Véges) szó: az A elemeiből képzett (véges hosszúságú) sorozat.

Üres szó: λ az a szó, amelyik egyetlen betűt sem tartalmaz.

Összefűzés (konkatenáció): ha $w = w_1 \dots w_n$, $u = u_1 \dots u_m$ akkor

$$w \cdot u = wu = w_1 \dots w_n u_1 \dots u_m \ .$$

A^*: az A ábécé fölötti véges szavak halmaza (a konkatenáció lezárása).

$A^+ = A^* \setminus \{\lambda\}$

(Formális) nyelv: $L \subseteq A^*$.

Ítéletlogika (nulladrendű logikai nyelv)

Egy olyan formális nyelv, melynek szavai bizonyos szabályos állítások.

A nyelvhez (mint általában) értelmezést fogunk rendelni (igazságértékelés).

Elemei (szavai): ítéletek (állítások) ;
Hétköznapi megfogalmazás: olyan értelmes, zárt kijelentő mondatok, amelyek egyértelműen igazak vagy hamisak.

- Egy ítélet nem lehet egyszerre igaz és hamis. (ellentmondástalanság elve)
- Nincs olyan ítélet, amely se nem igaz, se nem hamis. (kizárt harmadik elve)
- Ha egy ítélet nem hamis (nem igaz, hogy nem igaz), akkor az az ítélet igaz. (kettős tagadás elve)

Definíció (nulladrendű logikai nyelv, predikátumkalkulus)

Legyen V szimbólumok egy (véges vagy megszámlálhatóan végtelen) halmaza

$Op = \{\neg, \wedge, \vee, \supset\}$ (műveleti jelek, logikai összekötőjelek; negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció)

feltétel: $V \cap (Op \cup \{(,)\}) = \emptyset$.

$\mathcal{L}_0(Op, V) \subseteq (V \cup Op \cup \{(,)\})^*$, amire a következő teljesül:

$\mathcal{L}_0(Op, V)$ a legszűkebb olyan halmaz, amelyre

1. $V \subseteq \mathcal{L}_0(Op, V)$
2. Ha $P, Q \in \mathcal{L}_0(Op, V)$, akkor
   a) $(\neg P) \in \mathcal{L}_0(Op, V)$
   b) $(P \wedge Q\ ) \in \mathcal{L}_0(Op, V)$
   c) $(P \vee Q\ ) \in \mathcal{L}_0(Op, V)$
   d) $(P\ \supset\ Q\ ) \in \mathcal{L}_0(Op, V)$

$\mathcal{L}_0(Op, V)$ elemeit (szavait) (ítéletlogikai) formuláknak, V elemeit atomi formuláknak (prímformuláknak) nevezzük.

$\mathcal{L}_0(Op, V) \backslash V$: összetett formulák.

Jelölés

A könnyebb megkülönböztethetőség kedvéért V elemeit az ábécé elején,
$\mathcal{L}_0(Op, V)$ elemeit általánosan az ábécé végén levő nagybetűkkel jelöljük.

$$V = \{A, B, C, \dots\}$$
$$\mathcal{L}_0(Op, V) = \{P, Q, R, \dots\}$$

Az ítéletlogika nyelvét induktív definícióval adtuk meg.

Tétel (Szerkezeti indukció elve)

Legyen T egy tulajdonság, amely egy $P \in \mathcal{L}_0(Op, V)$-re vagy teljesül, vagy nem.

Ha

1. T teljesül minden $P \in V$-re és
2. amennyiben $P, Q \in \mathcal{L}_0(Op, V)$ és T teljesül P, Q-ra abból következik, hogy teljesül
   $(\neg P), (P \wedge Q\ ), (P \vee Q)$ és $(P \supset Q)$-re is,

akkor T teljesül minden $P \in \mathcal{L}_0(Op, V)$-re.

Bizonyítás

$\Gamma = \{P | P \in \mathcal{L}_0(Op, V),\ T \text{ teljesül } P - \text{re}\}$

i. $\quad \Gamma \subseteq \mathcal{L}_0(Op, V)$

(1) miatt $V \subseteq \Gamma$ (2) miatt, ha $P, Q \in \Gamma$, akkor

$$(\neg P), (P \wedge Q\ ), (P \vee Q), (P \supset Q) \in \Gamma$$

Mivel $\mathcal{L}_0(Op, V)$ a legszűkebb ilyen halmaz, ezért

ii. $\quad \Gamma \supseteq \mathcal{L}_0(Op, V)$.

i. + ii. együtt azt jelenti, hogy $\Gamma = \mathcal{L}_0(Op, V)$.

Következmény

$\mathcal{L}_0(Op, V)$ minden eleme előállítható V elemeiből az a., b., c. és d. „szabályok” véges sokszori alkalmazásával.

Bizonyítás

Legyen T az a tulajdonság, hogy amely egy formulára fennáll, ha az előállítható V elemeiből az a., b., c. és d. „szabályok” véges sokszori alkalmazásával.

1. T teljesül minden $P \in V$-re és
2. amennyiben $P, Q \in \mathcal{L}_0(Op, V)$ és T teljesül P, Q-ra abból következik, hogy teljesül
   $(\neg P), (P \wedge Q\ ), (P \vee Q)$ és $(P \supset Q)$-re is.

Az előző tétel alapján ekkor T teljesül minden $P \in \mathcal{L}_0(Op, V)$-re.

Definíció (közvetlen részformula)

1. Ha $A \in V$, akkor nincs közvetlen részformulája;
2. $(\neg P)$ egyetlen közvetlen részformulája P;
3. az $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q\ )$ és $(P \supset Q\ )$ formulák közvetlen részformulái az P és Q formulák.

Egy formula elsődleges (fő-) logikai összekötő jele a közvetlen részformulái közötti jel. (Ha létezik.)

Ha Q közvetlen részformulája P-nek, akkor P-t a Q szülőformulájának nevezzük.

Definíció

Egy P formula részformuláinak halmaza az a legszűkebb halmaz [jelölés: $RF(P)$], amelyre teljesül, hogy

1. $P \in RF(P)$,
2. ha $Q \in RF(P)$ és R közvetlen részformulája Q-nak, akkor $R \in RF(A)$

Jelölés (Zárójelelhagyási konvenció)

A formulák egyszerűbb áttekinthetősége érdekében bevezetünk egy zárójelelhagyási szabályt.

Ennek érdekében a logikai összekötő jelek között megállapítunk egy sorrendet (precedencia, prioritás):

$$\neg \succ \wedge,\vee \succ \supset$$

1. Egy összetett formula külső zárójele elhagyható.
2. Egy részformula zárójele elhagyható, ha elsődleges művelete jele előrébb szerepel a precedencia-sorban, mint a szülőformulájának logikai összekötő jele.
3. Az $\wedge$ ($\vee$, $\neg$) logikai összekötő jelek által meghatározott részformula zárójele elhagyható, ha az őt közvetlenül magában foglaló formula műveleti jele ugyanaz. (Csoportosítás.)

Definíció (szerkezetfa)

A P formula szerkezeti fáján egy olyan véges rendezett fát értünk, amelynek csúcsai $RF(P)$ formulái:

1. gyökere a P formula;
2. $(\neg Q)$ alakú csúcsának egyetlen gyermeke a Q formula;
3. a $(Q \wedge R)$, $(Q \vee R)$ és $(Q \supset R)$ alakú csúcsainak két gyermekét (bal- és jobboldali) a Q és R formulák alkotják;
4. levelei atomi formulák.

Definíció

Egy formula mélysége: $\delta(P)$

1. ha $P \in V$, akkor $\delta(P) = 0$
2. $\delta(\neg P) = \delta(P) + 1$
3. $\delta(P \wedge Q) = \delta(P \vee Q) = \delta(P \supset Q) = \max\{\delta(P), \delta(Q)\} + 1$

Egy formula mélysége a hozzá tartozó szerkezeti fa mélysége (leghosszabb út).

Definíció

Egy formula (funkcionális) összetettsége: $\varphi(P)$

1. ha $P \in V$, akkor $\varphi(P) = 0$
2. $\varphi(\neg P) = \varphi(P) + 1$
3. $\varphi(P \wedge Q) = \varphi(P \vee Q) = \varphi(P \supset Q) = \varphi(P) + \varphi(Q) + 1$

Egy formula összetettsége a hozzá tartozó szerkezeti fa azon csúcsainak száma, amelyek nem levélelemek.

Definíció

Az $\mathcal{L}_0(Op, V)$ nyelv egy interpretációja (~ értelmezése):

$$\mathcal{I}: V \to \{0,1\}$$

Definíció (igazságérték, szemantika)

Az $P \in \mathcal{L}_0(Op, V)$ formula igazságértéke az $\mathcal{I}$ interpretációban: $|P|_{\mathcal{I}} \in \{0,1\}$.

1. Ha $P \in V$, akkor $|P|_{\mathcal{I}} = \mathcal{I}(P)$.
2. Ha $P, Q \in \mathcal{L}_0(Op, V)$, akkor
   a. $|(\neg P)|_{\mathcal{I}} = 1 - |P|_{\mathcal{I}}$
   b. $|(P \wedge Q)|_{\mathcal{I}} = \min\{|P|_{\mathcal{I}}, |Q|_{\mathcal{I}}\}$
   c. $|(P \vee Q)|_{\mathcal{I}} = \max\{|P|_{\mathcal{I}}, |Q|_{\mathcal{I}}\}$
   d. $|(P \supset Q)|_{\mathcal{I}} = \begin{cases} 0, & \text{ha } |P|_{\mathcal{I}} = 1 \text{ és } |Q|_{\mathcal{I}} = 0 \\ 1, & \text{egyébként} \end{cases}$

Definíció

Legyen $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_0(Op, V)$ egy formulahalmaz, $\mathcal{J}: V \to \{0,1\}$ egy interpretációja $\mathcal{L}_0(Op, V)$-nek.

Azt mondjuk, hogy $\mathcal{J}$ modellje a Γ formulahalmaznak, ha minden $P \in \Gamma$ esetén $|P|_{\mathcal{J}} = 1$.

Megjegyzés

$\mathcal{J}$ modellje $P \in \mathcal{L}_0(Op, V)$-nek, ha modellje $\{P\}$-nak.

Példák:

Definíció

Legyen $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_0(Op, V)$ egy formulahalmaz. Azt mondjuk, hogy Γ

1. kielégíthető: ha létezik modellje. (Van olyan interpretációja $\mathcal{L}_0(Op, V)$-nek, amelyben Γ minden formulája igaz.)
2. kielégíthetetlen: ha nem létezik modellje ($\approx$ ellentmondásos).

Példák:

Definíció

$P \in \mathcal{L}_0(Op, V)$ kielégíthető (kielégíthetetlen), ha $\Gamma = \{P\}$ kielégíthető (kielégíthetetlen).

Definíció

$P \in \mathcal{L}_0(Op, V)$ logikai törvény, ha $\mathcal{L}_0(Op, V)$ minden interpretációjában igaz.

Példák:

Tétel

Egy $P \in \mathcal{L}_0(Op, V)$ formula pontosan akkor logikai törvény, ha $\neg P$ kielégíthetetlen.

Tétel

Egy kielégíthető formulahalmaz minden részhalmaza kielégíthető.

Bizonyítás

Legyen Γ kielégíthető, és $\mathcal{I}$ modellje Γ-nak, azaz minden $P \in \Gamma$ esetén $|P|_{\mathcal{I}} = 1$. Ha $\Gamma' \subseteq \Gamma$, akkor $\mathcal{I}$ modellje Γ'-nek is, mivel minden $P \in \Gamma'$ esetén $P \in \Gamma$ és így $|P|_{\mathcal{I}} = 1$.

Tétel

Egy kielégíthetetlen formulahalmaz minden bővítése kielégíthetetlen.

Bizonyítás

Legyen Γ kielégíthetetlen. Ekkor minden $\mathcal{I}$ interpretácóban van olyan $P_{\mathcal{I}} \in \Gamma$, amelyre $|P_{\mathcal{I}}|_{\mathcal{I}} = 0$. Ha $\Gamma \subseteq \Gamma'$, akkor minden $\mathcal{I}$ interpretácóban van olyan $P_{\mathcal{I}} \in \Gamma$, azaz$P_{\mathcal{I}} \in \Gamma'$, amelyre $|P_{\mathcal{I}}|_{\mathcal{I}} = 0$.

Definíció

Legyen $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_0(Op, V)$ egy formulahalmaz és $P \in \mathcal{L}_0(Op, V)$.
Azt mondjuk, hogy P logikai következménye Γ-nak, ha $\Gamma \cup \{\neg P\}$ kielégíthetetlen.
Jelölés: $\Gamma \vDash P$

Megjegyzés

Indirekt bizonyítás elve.

Tétel

$\Gamma \vDash P$ pontosan akkor, ha Γ minden modellje modellje P-nek is.

$P \in \mathcal{L}_0(Op, V)$ pontosan akkor logikai törvény, ha $\emptyset \vDash P$ (azaz $\{\neg P\}$ kielégíthetetlen). (Gyakran: $\vDash P$)

Példák:

Definíció

Legyen $P, Q \in \mathcal{L}_0(Op, V)$. Azt mondjuk, hogy P és Q logikailag ekvivalensek, ha $P \vDash Q$ és $Q \vDash P$.
Jelölés: $P \Leftrightarrow Q$

Tétel

$P \Leftrightarrow Q$ pontosan akkor, ha $\mathcal{L}_0(Op, V)$ minden interpretációjában ugyanazokat az értékeket veszik fel.

Definíció

Igazságtábla

Néhány fontosabb ekvivalencia

Kettős tagadás:

$$\neg\neg P \Leftrightarrow P$$

Implikáció és diszjunkció:

$$P \supset Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$$

de Morgan-azonosságok:

$$P \vee Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$$

$$P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$$

(Következménye):

$$P \supset Q \Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$$

$$P \supset Q \Leftrightarrow \neg Q \supset \neg P$$

Disztributivitás:

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

Tétel

Ha egy P formulában az egyik részformulát egy vele ekvivalens formulával helyettesítjük, a P-vel ekvivalens formulát kapunk.

pl. $P \vee (Q \supset R) \Leftrightarrow P \vee (\neg Q \vee R)$

Megjegyzés

Egy formula megfelelő értelmezéssel tekinthető Boole-függvénynek.

Pl. A $A \vee B$ formulának megfelel egy 2-változós Boole-függvény ($A, B \in V$).

Jelölés

Legyen $V = \{A_1, A_2, \dots\}$ és $P \in \mathcal{L}_0(Op, V)$, egy formula, amely az $A_1, \dots, A_n$ atomi formulákból (változókból) épül fel logikai összekötőjelek (műveletek) segítségével. $f_P\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ azt a Boole-függvényt jelenti, amelyre

$$|P|_{\mathcal{J}} = f_P\big(\mathcal{J}(A_1), \dots, \mathcal{J}(A_n)\big)$$

minden $\mathcal{J}$ interpretáció esetén.

Tétel

Legyen $P, Q \in \mathcal{L}_0(Op, V)$. $f_P = f_Q$ pontosan akkor, ha $P \Leftrightarrow Q$.

Tétel

Bármely f Boole-függvényhez létezik P formula, amelyre $f = f_P$.

A $\{0,1\}$ halmazon értelmezhető egy redukált összeadás és szorzás művelet: $a \cdot b \; mod \; 2$ és $a + b \; mod \; 2$ módon: a művelet szokásos eredményének maradékát vesszük 2-vel osztva.

Ezzel a jelöléssel:

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$$f_{A \wedge B}(x, y) = x \cdot y$$

$$f_{A \,\mathrm{xor}\, B}(x, y) = x + y$$

$$f_{\neg A}(x) = 1 + x$$

Mivel $A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$:

$$f_{A \vee B}(x, y) = (1 + x) \cdot (1 + y) + 1 =$$
$$= 1 + x + y + x \cdot y + 1 = x + y + x \cdot y$$

Az Op halmaz változtatása, más formulákat enged meg. A logika ugyanaz.

Pl. $Op = \{\neg, \vee\}$, $Op = \{\neg, xor\}$, $Op = \{nand\}$

Egyszerűsítő jelölés: $nand : \overline{\wedge}$

$$A \mathbin{\overline{\wedge}} B \Leftrightarrow \neg(A \wedge B)$$

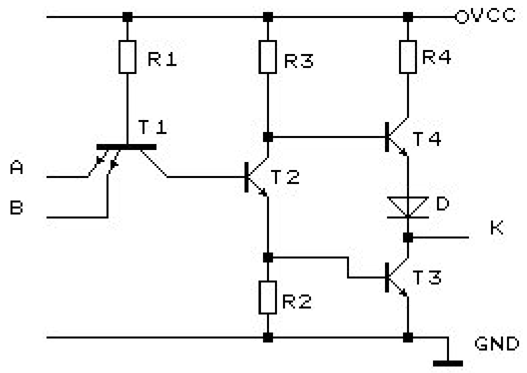
$$\neg A \Leftrightarrow A \mathbin{\overline{\wedge}} A$$

$$A \wedge B \Leftrightarrow \neg(A \mathbin{\overline{\wedge}} A) \Leftrightarrow (A \mathbin{\overline{\wedge}} A) \mathbin{\overline{\wedge}} (A \mathbin{\overline{\wedge}} A)$$

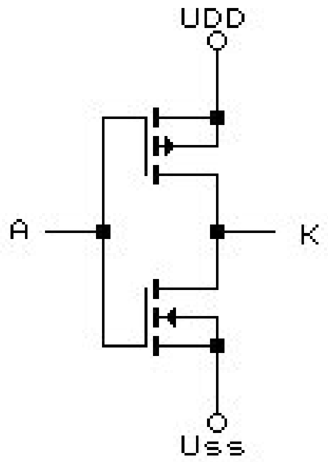
Minden Boole-függvény kifejezhető $\overline{\wedge}$-del.

Legyen $Op = \{\neg, \vee, \wedge, \supset, \overline{\wedge}\}$. Ekkor minden formulához létezik vele ekvivalens formula, ami csak $\overline{\wedge}$ műveleteket tartalmaz.

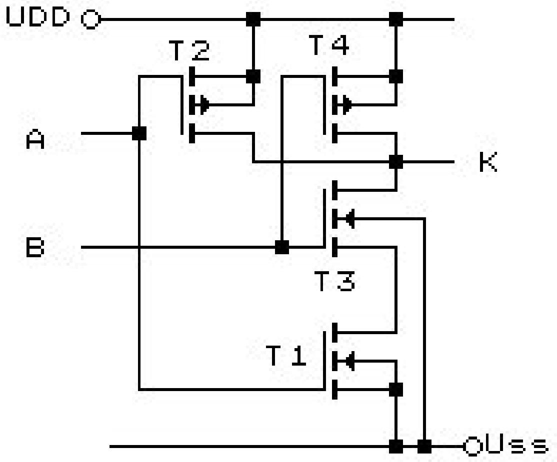
TTL Nand kapu:



CMOS not kapu:



CMOS Nand kapu:



Definíció

Legyen $\mathcal{L}_0(Op, V)$-ben $A \in V$. Ekkor az A és $\neg A$ formulákat literálnak nevezzük.

Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{L}_0(Op, V)$ formulák literálok. Az $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$ formulát elemi konjunkciónak, az $A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n$ formulát pedig elemi diszjunkciónak nevezzük.

Egy formula konjunktív normálalakban van (KNF), ha $D_1 \wedge D_2 \wedge \cdots \wedge D_k$ alakú, ahol D_i egy elemi diszjunkció minden $i = 1, \dots, k$ esetén.

Egy formula diszjunktív normálalakban van (DNF), ha $K_1 \vee K_2 \vee \cdots \vee K_k$ alakú, ahol K_i egy elemi konjunkció minden $i = 1, \dots, k$ esetén.

Megjegyzés

Speciális esetben, ha $n = 1$ az A_1 formula tekinthető elemi konjunkciónak és elemi diszjunkciónak is.

pl. $A \vee \neg B \vee C$: elemi diszjunkció, illetve DNF.

Tétel

Legyen $A \in \mathcal{L}_0(Op, V)$. Ekkor léteznek olyan $B, C \in \mathcal{L}_0(Op, V)$ formulák, amelyekre $A \Leftrightarrow B$ és
$A \Leftrightarrow C$, valamint B egy KNF, C pedig egy DNF.

Megjegyzés

Egy formula kielégíthetőségének eldöntése általában nem egyszerű feladat. (A neki megfelelő Boole-függvény felvehet-e 1 értéket.) Általános megoldás: az összes interpretációt végigpróbálni. Ha egy formulában n változó (atomi formula) van, ez rossz esetben 2^n próbát jelent.

Egy DNF-ről eldönteni, hogy kielégíthető-e: könnyű

Egy KNF-ről eldönteni, hogy kielégíthető-e: nehéz – jelenleg nincs ismert algoritmus, amelyik 2^n-től lényegesen kevesebb lépésben megoldaná a feladatot.

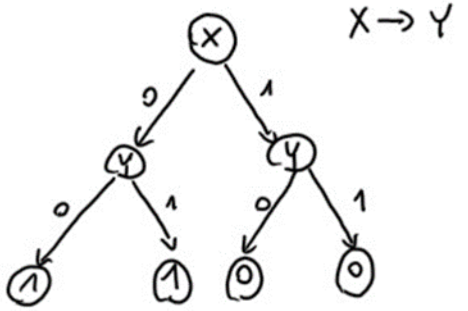
SAT: a kielégíthető KNF-k halmaza – nagyon fontos szerepe van a bonyolultságelméletben (az egyes feladatok nehézségének meghatározása)

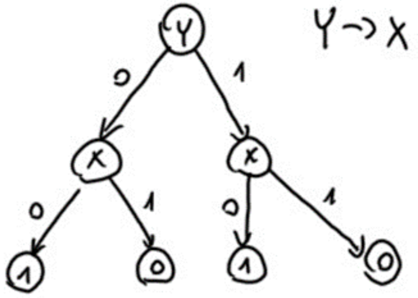
Döntési diagramok

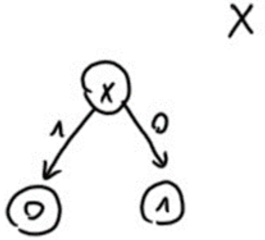
Boole-függvények (0. rendű formulák) reprezentációja

Legyen $f(x, y)$ a következő:

f	x	y
1	0	0
1	0	1
0	1	0
0	1	1

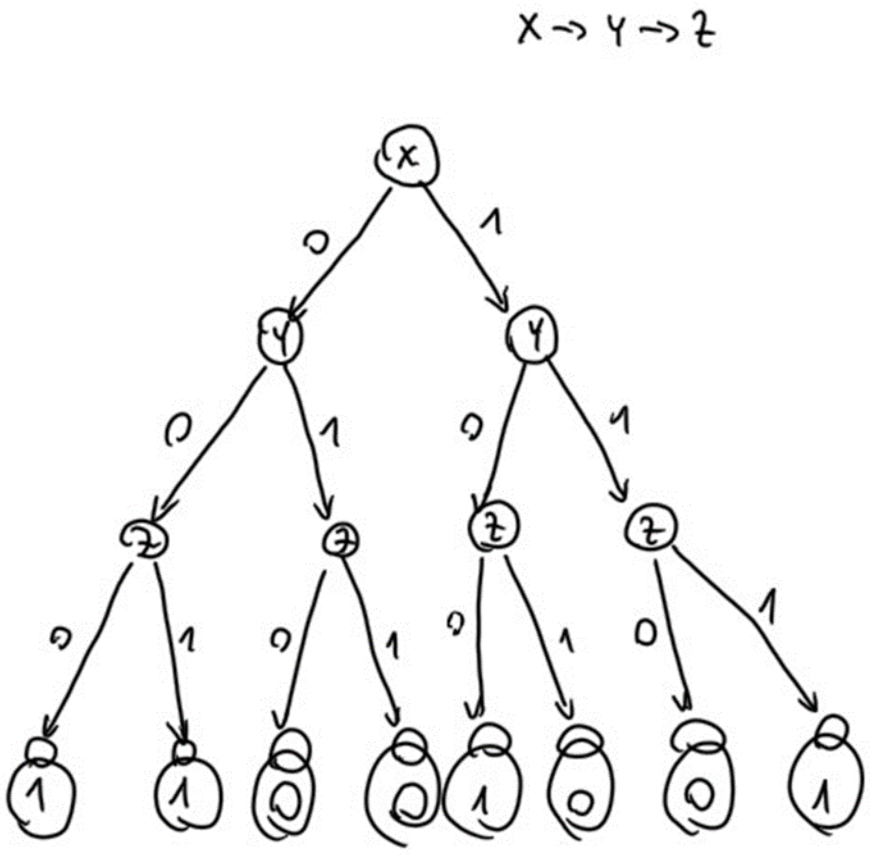






Pl: $f(x, y, z)$

f	x	y	z
1	0	0	0
1	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
1	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	1	1	1



Definíció

Döntési fa: olyan rendezett bináris fa, amely csúcspontjaiban feltételvizsgálatok szerepelnek, az egyes élei a vizsgálatok igaz-hamis értékeinek felelnek meg. A levélelemek értéke a döntés értéke.

Rendezett döntési fa: olyan döntési fa, amelyben az egyes szinteken ugyanazok a feltételek találhatók.

Bináris döntési diagram: olyan irányított körmentes gráf (DAG), melyben minden csúcsból legfeljebb két él vezet ki, és van benne pontosan egy olyan csúcs, amelyből az összes többi csúcs elérhető irányított úton. A csúcsokban feltételvizsgálatok szerepelnek, a kivezető élek a vizsgálat eredményének felelnek meg. A gráf szintekre bontható, egy szinteken azonos feltételvizsgálatok szerepelnek (és az összes ilyen egy szinten van).

Levélelem: 0 a kifoka.

Redukált rendezett bináris döntési diagram (RRBDD): olyan bináris döntési diagram, amelyben

1. csak két levélelem szerepel: 0, 1
2. nincs benne párhuzamos él
3. bármely két azonos szinten levő csúcs esetén vagy a 0, vagy az 1 élek különböző csúcsra mutatnak. ($P_a(0) \neq P_b(0)$ vagy $P_a(1) \neq P_b(1)$

Két rendezett bináris döntési diagram ekvivalens, ha ugyanazt a Boole-függvényt határozzák meg.

Tétel

Ha két azonosan rendezett RRBDD ekvivalens, akkor megegyezik.

Megjegyzés

Két rendezés akkor azonos, ha a diagramban az egymásnak megfelelő döntési szintek ugyanazt a feltételvizsgálatot tartalmazzák.

Algoritmus

A tétel alapján minden rendezett döntési fa átalakítható egy egyértelműen meghatározott RRBDD alakúra, a következő lépések tetszőleges sorrendben való alkalmazásával:

1. vonjuk össze az azonos értékű levélelemeket;
2. azon csúcsokat, melyekből párhuzamos él vezet ki, szüntessük meg. A megszüntetett csúcsba érkező éleket közvetlenül a gyerek-csúcsba kössük be.
3. az azonos szinten levő, megegyező részdiagrammal rendelkező csúcsokat vonjuk össze.