

dollár. Tőkeköltségvetések készítése során gyakran élünk azzal a feltételezéssel, hogy a pénzáramlások esedékessége mindig az év vége, és ezért az éves kamatos kamat rátát használjuk. Néha azonban hasznosabb a folytonos pénzáramlások feltételezésével élünk. Ebben az esetben a folytonos kamatos kamatozás esetén nyerhető éves kamatlábbal dolgozunk.

Fontos megkülönböztetnünk a *nominális* (a ténylegesen kapott vagy fizetett dollárok számát) és a *reál pénzáramlásokat*, amelyeket már megtisztítottunk az inflációtól. Ha a befektetés magas *nominális hozamot* ígér, de az infláció magas, akkor a *reálhozam* alacsony, sőt negatív is lehet.

A fejezetet azzal zártuk, hogy a diszkontált cash flow számítás technikáját alkalmaztuk egy fix kamatot fizető amerikai államkötvény értékelésére.

Bevezettünk két olyan fogalmat, amely később még számtalanszor előkerül. Az egyik az a megállapítás, hogy a jelenértékek összeadhatók: $A + B$ jelenértéke egyenlő A jelenértéke $+ B$ jelenértéke. A másik az, hogy nincs lehetőség arbitrázsra, azaz a valóságban nem létezik „ingyen ebéd”.

AJÁNLOTT IRODALOM

A fejezetben leírtak elegendők a diszkontálás matematikájának megértéséhez. Ha mégis mélyebb ismeretekre vágyik, akkor ajánljuk a következőt:

Cissell, R.-Cissell, H.-Flaspohler, D. C.: The Mathematics of Finance. 8. kiadás, Houghton Mifflin Company, Boston, 1990.

FELADATOK

1. Évi 12 százalékos kamatláb mellett a 6 éves diszkonttényező $(1/1.12^6) = 0.507$. Hány dollárt ér 507 dollár 6 év múlva, ha évi 12 százalékos kamatláb mellett fektetjük be?

2. Ha 139 dollár jelenértéke 125 dollár, akkor mennyi a diszkonttényező?

3. Ha a 8 éves diszkonttényező 0.285, akkor mennyi a 8 év múlva esedékes 596 dollár jelenértéke?

4. Mennyi a 9 év múlva esedékes 374 dollár jelenértéke, ha a tőkeköltség évi 9 százalékos?

5. Egy beruházás a következő bevételeket eredményezi:

| Év | Bevétel |
|----|---------|
| 1 | 432 |
| 2 | 137 |
| 3 | 797 |

Mekkora a beruházás jelenértéke, ha a tőkeköltség 15 százalékos?

6. Mennyit ér 100 dollár 8 év múlva, ha évi 15 százalékos kamatra fektetjük be?

7. Egy évi 138 dollár örökjáradékot fizető kötvény árfolyama 1548 dollár. Évi 9 százalékos kamatláb esetén mennyi az örökjáradék nettó jelenértéke?
8. Egy közönséges részvény a következő évben 4 dollár osztalékot fizet, majd az osztalék várhatóan évi 4 százalékkal nő. Ha a piaci megtérülési ráta évi 14 százalékos, akkor mennyi az osztalékfizetések jelenértéke?
9. Ön 1.5 millió dollárt nyer a lottón. Sajnos ezt az összeget 10 éven keresztül egyenlő részletekben fizetik ki. Az első kifizetés a következő évben esedékes. Mennyit ér ténylegesen a nyeremény, ha a diszkontráta évi 8 százalékos?
10. Tegyük fel, hogy a kamatláb évi 10 százalékos. Válaszoljon a következő kérdésekre az A) függelék táblázatainak a használata nélkül:
- Mekkora egy évi 1 dollár járadékot fizető örökjáradék-kötvény jelenértéke?
 - Egy évi 10 százalékos hozamú befektetés értéke kb. 7 év alatt duplázódik meg. Hozzávetőlegesen mennyi a jelenértéke annak a befektetésnek, amely a 8. évtől kezdődően évi 1 dollár örökjáradékot fizet?
 - Mennyi a jelenértéke annak a befektetésnek, amely az elkövetkező 7 évben 1 dollár járadékot fizet?
 - Egy telek évi 5 százalékkal növekvő bevételt eredményez. Mennyit ér ez a telek, ha az első évi bevétel 10 000 dollár?
11. A következő számítások elvégzéséhez használja az A) függelékben található táblázatokat!
- Egy új gépkocsi 10 000 dollárba kerül. Ha a kamatláb évi 5 százalékos, akkor mennyit kellene most félretennie, hogy rendelkezésére álljon ez az összeg 5 év múlva?
 - A következő 6 évben minden év végén 12 000 dollárt kell kifizetnie tandíjként. Mennyit kellene ma félretennie ennek fedezetére, ha a kamatláb évi 8 százalékos?
 - Ön 60 476 dollárt fektetett be évi 8 százalékos kamatláb mellett. Ha kifizeti a (b) részben említett tandíjakat, akkor mennyi pénz fog a rendelkezésére állni a 6. év végén?
12. Lehetősége van 25 százalékos kamatláb mellett beruházni a Belgraviai Köztársaságban. Az inflációs ráta 21 százalékos, mennyi a reálkamatláb?
13. A folytonosan számított kamatos kamat évi 12 százalékos.
- Mennyi lesz a ma befektetett 1000 dollár értéke 5 év múlva?
 - Mennyi a jelenértéke a nyolcadik évben kapott 5 millió dollárnak?
 - Mi a jelenértéke egy olyan folytonos pénzáramlásnak, ami 2000 dollár évente, és máától 15 évig tart?
14. Ön évi 6 százalékos névleges kamatot kap egy 10 millió dolláros befektetésére. Mennyit ér a befektetése 4 év múlva, ha (a) éves, (b) havi, (c) folytonos kamatos kamatozás alapján számítja a bank a hozamot?
15. Tegyük fel, hogy 5 éves amerikai államkötvények elvárt hozama évi 4 százalékra zuhan. Határozza meg egy 7 százalékos kamatozású 2006-ban lejáró kötvény hozamát. (Nézzen utána a 3.5. fejezetben!)
16. Mit értünk egy kötvény lejáratig számított hozama alatt és hogyan számítjuk azt?

GYAKORLATOK

1. Használja az A) függelék 1. táblázatát azon 100 dollár jelenértékének a meghatározására a következő feltételekkel:
10. évben (1 százalékos diszkontráta mellett);
 10. évben (13 százalékos diszkontráta mellett);
 15. évben (25 százalékos diszkontráta mellett);
 - a következő három év mindegyikében (12 százalékos kamatláb mellett).

2. Használja az A) függelék 3. táblázatából az *annuitásfaktorokat* a következő feltételek mellett kapott 100 dollár jelenértékének meghatározására:

- (a) 1–20 években (23 százalékos diszkontráta mellett);
- (b) 1–5 években (3 százalékos diszkontráta mellett);
- (c) 3–12 években (9 százalékos diszkontráta mellett).

3. (a) Ha az egyéves diszkonttényező 0.88, mekkora az egyéves kamatláb?

(b) Ha a kétéves kamatláb évi 10.5 százalék, akkor mekkora a kétéves diszkonttényező?

(c) Felhasználva a korábban meghatározott diszkonttényezőket, határozza meg a kétéves annuitásfaktort.

(d) Ha a három éven keresztül kapott 10 dollár jelenértéke 24.49 dollár, akkor mekkora a hároméves annuitásfaktor?

(e) A (c) és (d) kérdésekre adott válasza alapján határozza meg a hároméves diszkonttényezőt.

4. Egy gyár 800 000 dollárba kerül. 10 éven keresztül minden évben a bevételei 170 000 dollárral haladják meg a működési költségeket. Mekkora a gyár megvásárlásának nettó jelenértéke, ha a tőke alternatívaköltsége évi 14 százalék? Mennyit fog érni a gyár 5 év múlva?

EXCEL

5. Herold Filbert 30 éves, a következő évi fizetése 20 000 dollár lesz. Azt jósolja, hogy fizetése konstans 5 százalékos ütemben fog nőni 60 éves koráig, amikor nyugdíjba vonul.

EXCEL

(a) Mennyi a jövőbeli fizetéseinek a jelenértéke, ha a diszkontráta évi 8 százalék?

(b) Ha minden évben fizetése 5 százalékat takarítja meg, majd évi 8 százalékon befekteti, akkor mennyit fog megtakarítani 60 éves korára?

(c) Ha Harold a következő 20 évben azonos összegeket szeretne költeni, akkor mennyit költhet évente?

6. Egy gyár 400 000 dollárba kerül, s megítélése szerint az első évben 100 000 dollár, a másodikban 200 000 dollár, a harmadikban 300 000 dollár jövedelmet termel. A tőkeköltség évi 12 százalék. Számítsa ki a befektetés nettó jelenértékét!

7. A Halcyon Lines egy teherhajó megvásárlását tervezi 8 millió dolláros áron. A becsült bevétel 5 millió dollár évente, míg a működési költségek évente 4 millió dollárt tesznek ki. Az 5. és a 10. évet követően nagy felújítást kell végezni, egyenként 2 millió dolláros költséggel. 15 év után a hajót ócskavasként 1.5 millió dollárért lehet értékesíteni. Ha a diszkontráta évi 8 százalék, mekkora a hajóvásárlás nettó jelenértéke?

8. Ön megnyerte egy kukoricapehely-gyártó cég nyereményét. A következő nyeremények közül választhat:

EXCEL

(a) 100 000 dollár azonnal;

(b) 180 000 dollár 5 év múlva;

(c) évi 11 400 dolláros örökjáradék;

(d) évi 19 000 dollár 10 éven keresztül.

(e) évi 5 százalékkal növekvő örökjáradék, ami a következő évben 6500 dollárról indul.

Ha a kamatláb évi 12 százalék, melyik a legértékesebb nyeremény?

9. Emlékezzen vissza Mrs. Kraft történetére a 3.1. alfejezetből.

(a) Ha az egyéves kamatláb 25 százalék lenne, hányszor kellene Mrs. Kraftnak játszania, hogy milliomos lehessen? (Könnyebb, ha egy kalkulátor segítségével próbálkozik.)

(b) Mit szűrhetünk le Mrs. Kraft történetéből az egyéves (DF_1) és a kétéves (DF_2) diszkonttényezőre vonatkozóan?

10. Siegfried Basset 65 éves és még várhatóan 12 évig él. 20 000 dollárért szeretne egy annuitást vásárolni, ami élete végéig azonos összeget fizet. Ha a kamatláb évi 8 százalék, mekkora éves jövedelemre számíthat Mr. Basset az annuitásból?

11. James és Helen Turnip 5 éven keresztül ugyanakkora összeget akar megtakarítani, hogy az ötödik év végén egy hajót vásárolhassanak. Ha a hajó 20 000 dollárba kerül, és a megtakarításuk hozama évi 10 százalék, akkor mennyit kell félretenniük az egyes évek végén?
12. Kangaroo Autos ingyenes hitelt biztosít egy új 10 000 dolláros autó megvásárlásához. Most le kell tenni 1000 dollárt, majd 300 dollárt a következő 30 hónapban. Turtle Motors nem ad ingyenes hitelt, de 1000 dollárt enged a listaárból. Ha a kamatláb 10 százalék, melyik cég ajánlata kedvezőbb?
13. Számolja ki újra a 3.1. fejezet irodaberuházásának nettó jelenértékét 5, 10, 15 százalékos éves kamatláb esetén. Ábrázolja a kapott eredményeket úgy, hogy az NPV kerül a függőleges tengelyre, a diszkontráta a vízszintes tengelyre. Milyen diszkontráta esetén lesz nulla az NPV? Ellenőrizze a választ!
14. (a) Mennyit fog érni 10 év múlva egy ma befektetett 100 dollár, évi 15 százalékos egyszerű kamatszámítás esetén?
 (b) Mennyit fog érni évi 15 százalékos kamatos kamat esetén?
 (c) Mennyi idő alatt duplázódik meg a befektetés értéke 15 százalékos kamatos kamat esetén.
15. Ön egy olajcsővezeték tulajdonosa, amely 2 millió dollár bevételt hoz a következő évben. A csővezeték működési költségei elhanyagolhatók, és még nagyon hosszú ideig használható. Mivel azonban olajszállítási kapacitása csökken, ezért a várható pénzáramlása 4 százalékkal csökken évente. A diszkontráta évi 10 százalék.
 (a) Mekkora a csővezeték pénzáramlásának jelenértéke, ha az a végtelenségig működik?
 (b) Mekkora a csővezeték pénzáramlásának jelenértéke, ha az 20 év elteltével felmondja a szolgáltatást?
 [Segítség a (b) részhez: Kezdje az (a) megválaszolásával, majd vonja ki egy a 21. évtől kezdődő csökkenő örökjáradék jelenértékét. Figyeljen arra, hogy a 21. évre előrejelzett pénzáramlás sokkal kevesebb kell legyen, mint az első évi pénzáramlás!]
16. Mekkora az értéke a következő három befektetésnek, ha a kamatláb évi 7 százalék?
 (a) Minden év végén 100 dollárt fizető örökjáradék.
 (b) Az előzőhöz hasonló befektetés, ahol minden év *elején* történik a fizetés.
 (c) Az előzőhöz hasonló befektetés, ahol a kifizetés egyenletesen oszlik el az év során.
17. Lapozzon vissza a 3.2 részhez! Ha a kamatláb évi 8, és nem 10 százalék, mennyit kellene a jötevőnknek félretennie ahhoz, hogy a következőket biztosíthassa?
 (a) Minden év végén 100 000 dollárt fizető örökjáradék.
 (b) Évi 4 százalékos növekedésű örökjáradék, ami az első év végén 100 000 dollárt fizet.
 (c) Az elkövetkező 20 évben minden év végén 100 000 dollárt fizet.
 (d) Az elkövetkező 20 évben minden évben 100 000 dollár, éven belül egyenletesen elosztva.
18. 1000 dolláros befektetésért cserébe a Tiburon Pénzügyi Társaság 1600 dollár visszafizetését ígéri a 8. év végén. Mennyi az éves kamatos kamat? Mennyi a folytonosan számított kamatos kamat?
19. Mennyi pénze lesz a huszadik év végén, ha ma évi 15 százalékos kamatos kamat mellett 100 dollárt fektet be? Mennyi pénze lenne, ha 15 százalékos folytonosan számított kamatos kamat mellett fektetett volna be?
20. Ön éppen most olvasott egy újsághirdetést, ami az állítja, „Fizessen nekünk 100 dollárt 10 éven keresztül, és mi azt követően 100 dollárt fizetünk önnek a végtelenségig.” Ha ez tisztességes ajánlat, mekkora a kamatláb?
21. Melyiket preferálná?
 (a) Egy 12 százalékos kamatot fizető befektetés éves kamatos kamat esetén.
 (b) Egy 11.7 százalékos kamatot fizető befektetés, féléves kamatos kamatfizetés esetén.
 (c) Egy 11.5 százalékos kamatot fizető befektetés, folytonos kamatos kamatfizetés esetén.
 Számítsa ki ezen befektetések értékét 1, 5, 20 év elteltével!

22. Töltse ki a következő táblázat üresen hagyott részeit:

| Nominális kamatláb (%) | Inflációs ráta (%) | Reálkamatláb (%) |
|------------------------|--------------------|------------------|
| 6 | 1 | ... |
| ... | 10 | 12 |
| 9 | ... | 3 |

23. Néha a reálkamatlábát úgy kapjuk, ha a nominális kamatlábból kivonjuk az inflációs rátát. Ez jó becslés, ha az inflációs ráta alacsony. Mekkora egy ilyen becslés hibája a következő esetekben?

| Nominális kamatláb (%) | Inflációs ráta (%) |
|------------------------|--------------------|
| 6 | 2 |
| 9 | 5 |
| 21 | 10 |
| 70 | 50 |

24. 1880-ban öt ausztrál őslakos nyomkövető mindegyike számára 100 ausztrál dollárnak megfelelő összeget ígértek, ha segítenek elkapni Ned Kellyt, a hírhedt törvénytelen kívülit. 1993-ban két egykori nyomkövető unokái bejelentették, hogy a díjat nem fizették ki. Victoria miniszterelnöke kijelentette, amennyiben az állítás igaz, a kormány szívesen kifizeti a 100 dollárt. Az unokák állították, hogy jogosultak a kamatos kamatokra is. Mekkora összegre lennének jogosultak, ha a kamatláb évi 5 százalék volt? Mekkora, ha évi 10 százalék?

25. Egy lízingszerződés szerint 100 000 dollárt kell most fizetni, majd kilenc féléven keresztül, alkalmanként újabb 100 000 dollárt. Mi a jelenértéke ezeknek a kifizetéseknek, ha az éves diszkontráta évi 8 százalék?

26. Egy híres középhátvéd éppen most írt alá egy évi 3, összesen 15 millió dolláros szerződést. Egy kevésbé híres játékos 14 millió dolláros szerződést írt alá a következő elosztásban: 4 millió a szerződés aláírásakor, majd 2 millió évente. Ki a jobban fizetett játékos? A kamatláb évi 10 százalék.

27. 1994 augusztusában azt jelentette a *The Wall Street Journal*, hogy a massachusettsi állami lottó nyertese csődbe ment és börtönbe került csalásért. A nyeremény 9 420 713 dollár volt, amely 19 éves részletben került kifizetésre. (Eredetileg 20 részlet volt, de a nyertes már megkapta az első részletet.) A csődbíróság úgy döntött, hogy a nyereményt el kell adni a legnagyobb ajánlattevőnek, és ebből kell kielégíteni a hitelezőket.

(a) Ha a kamatláb évi 8 százalék volt, ön mennyit ajánlott volna?

(b) A jelentések szerint az Enhance Reinsurance Company 4.2 millió dollárt ajánlott. Használja az A) függelék 3. táblázatát annak a megállapítására, hogy milyen hozammal kalkulált a nevezett cég!

28. Becslése szerint – mire 35 év múlva nyugdíjba vonul – 2 millió dollárnyi megtakarítása lesz. Ha a kamatláb évi 8 százalék, és 15 évig fog élni a nyugdíjba vonulását követően, milyen éves kiadást tesz ez lehetővé?

Sajnos az infláció csökkenti a nyugdíjaskori jövedelmét. Dolgozzon ki egy megtakarítási tervet, amely 4 százalékos infláció mellett azonos összegű reáljövödelmet biztosít minden évben.

29. Egy apartmankomplexum megvásárlását tervezi, ami 400 000 dolláros éves nettó jövedelmet biztosít önnek. Általában évi 10 százalékos hozamot vár el egy ilyen befektetés után. A jövőbeli pénzáramlások 4 százalékkal növekednek évente, ami arányos az inflációs rátával. Mennyit fizetne a komplexumért, ha

(a) az örökjáradékszerű pénzáramlást biztosít?

(b) 20 év múlva bezár? A telek a bontási költségeket leszámítva 5 millió dollárt fog érni. (Az 5 millió dollár tartalmazza a 20 éves inflációt.)

Határozza meg az évi 10 százalékos nominális kamatlábnak megfelelő reálkamatlábát. Számítsa ki újra a feladat (a) és (b) részét reál pénzáramlásokat használva. (Ellenőrzés: a kapott válaszoknak egyformának kell lennie!)

30. Vernal Pool szabadúszó herpetológus, jövedelme fix részét akarja megtakarítani a nyugdíjba vonulásáig. 40 éves és 40 000 dollárt keres egy évben. Arra számít, hogy jövedelme az inflációt 2 százalékponttal meghaladó mértékben emelkedik. (Például 4 százalékos infláció esetén 6 százalékkal.) 70 éves koráig, amikor is nyugdíjba vonul, 500 000 dollárt szeretne összegyűjteni, reálértékben. A jövedelme mekkora részét tegye félre minden évben? Tételezzük fel, hogy megtakarításait konzervatívan fektette be, évi 5 százalékos várható hozamot biztosítva. Hagyja figyelmen kívül az adókat!

31. 2001 júniusának végén a 2006-ban lejáró amerikai államkötvények lejáratig számított hozama évi 4.8 százalék volt. Értékeljen egy kötvényt 6 százalékos éves névleges kamat és 2006. júniusi lejárat mellett. A kötvény névértéke 10 000 dollár. A kamatfizetés évente történik. Hogyan változna a válasza, ha félévente történne kamatfizetés és a féléves diszkontráta 2.4 százalék?

32. Tekintsük újra a 31. gyakorlatot. Hogyan változna a válasza, ha az éves kamatláb visszaesne 3.5 százalékra?

33. Tekintsünk egy kétéves lejáratú, 1000 dollár névértékű 10 százalék éves névleges kamatot fizető kötvényt. Ha a kötvény 960 dollárért kerül eladásra, mekkora a lejáratig számított hozam. Segítség: Próbálkozzon találgatással!

GONDOLKODTATÓ KÉRDÉSEK

1. Tekintsünk két hasznos hüvelykujjszabályt. A „72-es szabály” azt mondja, hogy egy befektetés nagyjából 72/kamatláb (százalék) idő alatt duplázódik meg. Folytonos kamatszámítás esetén a „69-es szabály” azt mondja, hogy egy befektetés pontosan (69.3/kamatláb)-nyi (százalék) idő alatt duplázódik meg.

(a) Ha az éves kamatos kamat 12 százalék, használja a „72-es szabályt” annak a meghatározására, hogy a pénze mennyi idő alatt duplázódik meg. Aztán számítsa ki pontosan is.

(b) Tudná bizonyítani a „69-es szabályt”?

2. Egy táblázatkezelő program segítségével dolgozza ki a saját annuitástáblázatát.

3. Egy olajkútnak 100 000 hordó az éves termelése. A kút még 18 évig termel, de a termelés 4 százalékkal csökken évente. Az olajárak 2 százalékkal nőnek évente. A diszkontráta évi 8 százalék. Mekkora az olajtermelés jelenértéke, ha egy hordó olaj ára ma 14 dollár?

4. Vezesse le a növekvő (csökkenő) annuitásra vonatkozó képletet.

5. Határozza meg annak a 7 százalékos éves kamatot fizető amerikai államkötvénynek a reálpénzáramlását, ami a 3.5. részben szerepelt, ha az inflációs ráta 2 százalék. Mutassa meg, hogy a reálpénzáramlást a reálkamatlábbal diszkontálva, ugyanaz a jelenérték adódik, mintha a nominális pénzáramlást a nominális kamatlábbal diszkontálta volna.

6. Táblázatkezelő program segítségével készítsen olyan kötvénytáblázatot, amely meghatározza egy kötvény jelenértékét a névleges kamat, a lejárat és a lejáratig számított hozam ismeretében. Tételezze fel, hogy a kamatfizetések félévente esedékesek, és a hozamok féléves kamatos kamat alapján számíthatók.