Könyv:
Wayne L. Winston: Operációkutatás

3 Bevezetés a lineáris programozásba

3.1. A lineáris programozási feladat 51

3.2. A kétváltozós lineáris programozási feladat grafikus megoldása 59

3.3. Speciális esetek 67

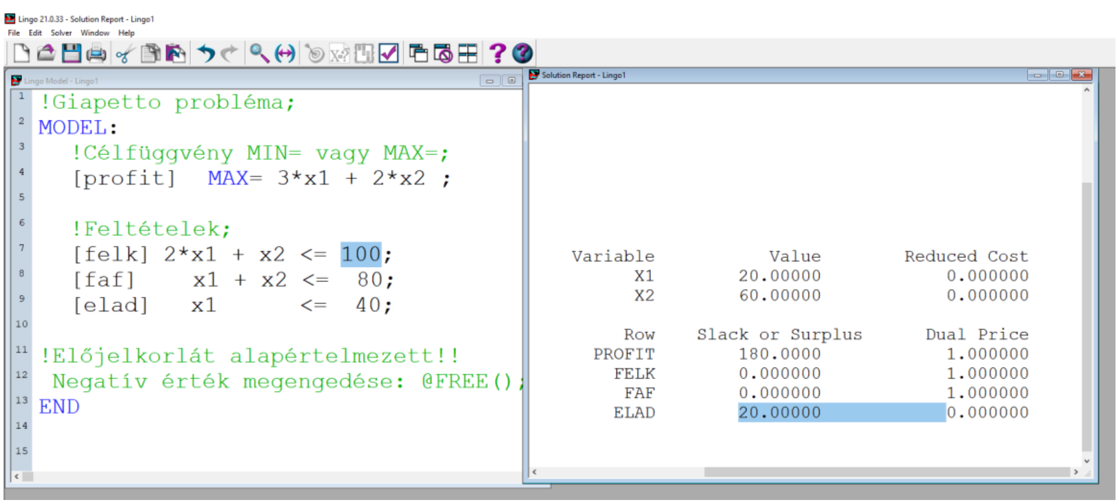
Modell építés probléma leírásból
Grafikus megoldás (Giapetto példa, speciális esetek) 3.1. fejezet 1. Példa

3.2. grafikus megoldás (1. Példa. 2 Példa – min, 3.példa – több megoldás, 4. Példa – üres halmaz,5 példa – nem korlátos)

Előjel korlát nélküli változóra példa: (4.10 Előjelkorlátozatlan változók / 1. Példa)

LINGO

Feladat megoldás LINGO-ban, mint pl:



Érzékenység vizsgálat LINGO-ban.

5 Érzékenységvizsgálat és dualitás

5.1. Grafikus bevezetés az érzékenységvizsgálatba 191

5.2. Néhány fontos képlet 197

5.3. Érzékenységvizsgálat 205

5.4. Az LP feladat duálisa 219

5.5. A duális feladat közgazdasági interpretációja 227

5.6. A dualitás-tétel és következményei 229

5.7. Árnyékárak 240

5.8. Dualitás és érzékenységvizsgálat 247

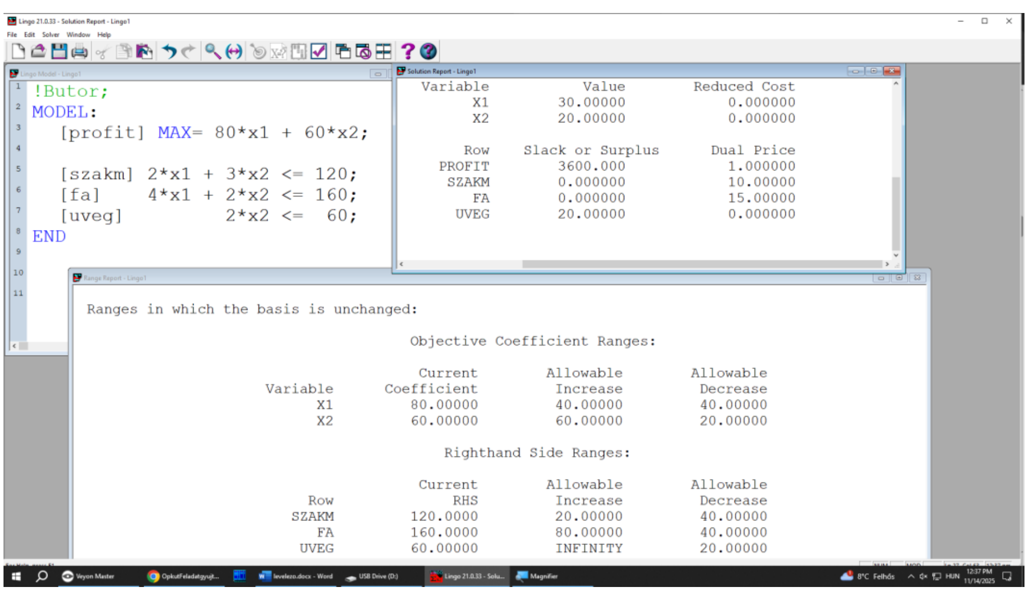
5.9. Komplementaritás 250

5.10. A duál szimplex módszer 254

5.11. Az árnyékárak egy alkalmazási példája: a Data Envelopment Analysis (DEA) 260

Összefoglalás 268

Áttekintő feladatok 273



Szállítási feladat

6.1. A szállítási feladatok megfogalmazása

A tárgyalást a szállítási feladat megfogalmazásával kezdjük. Ez azt jelenti, hogy a következő példával illusztrált helyzet leírására alkalmas lineáris programozási modellt állítunk fel.

1. PÉLDA A Powercónak három elektromos erőműtelepe van, ezek négy város szükségletét látják el.[1]

Az egyes erőművek a következő mennyiségű kilowattóra (kWh) elektromos energiát képesek szolgáltatni: 1. erőmű: 35 millió; 2. erőmű: 50 millió; 3. erőmű: 40 millió (lásd 1. táblázat). Az egyszerre (délután 2-kor) megjelenő csúcsfogyasztási igények ezekben a városokban: 1. város: 45 millió; 2. város: 20 millió; 3. város: 30 millió; 4. város: 30 millió. 1 millió kWh áram szállítása valamelyik erőműből valamelyik városba attól függ, hogy milyen távolságra kell szállítani. Fogalmazzunk meg egy LP-t, amely minimalizálja annak a költségét, hogy mindegyik város csúcsfogyasztási igénye ki legyen elégítve!

1. TÁBLÁZAT Szállítási költség ($), szolgáltatás és kereslet a Powerco feladatban

Honnan	Hová: 1. város	2. város	3. város	4. város	Szolgáltatás (millió kWh)
1. erőmű	8	6	10	9	35
2. erőmű	9	12	13	7	50
3. erőmű	14	9	16	5	40
Igény (millió kWh)	45	20	30	30	

$$
\begin{aligned}
\min z = {} & 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 9x_{14} + 9x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23} + 7x_{24} \\
& + 14x_{31} + 9x_{32} + 16x_{33} + 5x_{34} \\
\text{f.h.} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 35 \qquad \text{(kínálati feltételek)} \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le 50 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le 40 \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} \ge 45 \qquad \text{(keresleti feltételek)} \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} \ge 20 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} \ge 30 \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} \ge 30 \\
& x_{ij} \ge 0 \quad (i = 1,2,3;\ j = 1,2,3,4)
\end{aligned}
$$

Részletes magyarázat 6.fejezet 1.példa

Lingo:

```
!Szállítási;
MODEL:
   SETS:
      EROMU /E1..E3/: kap;
      VAROS /V1..V4/: igeny;
      UTAK (EROMU,VAROS): ktg, x;
   ENDSETS
   DATA:
      kap = 35 50 40;
      igeny = 45 20 30 30;
      ktg =   8   6 10 9
               9 12 13 7
              14   9 16 5;
   ENDDATA

      [osszktg] MIN= @SUM(UTAK: ktg*x);

      !Igény feltételek;
      @FOR(VAROS (j):
         [ig] @SUM(EROMU (i): x(i,j)) >= igeny(j)
      );
      !Kapacitás;
      @FOR(EROMU (i):
         [kapacitas] @SUM(VAROS (j): x(i,j)) <= kap(i)
      );

END
```

```
   !Vezeték szakadás E1 - V2 között;
   x(1,2) = 0;

   !Szállítható mennyiség E3-V1 között legfeljebb 10 m KwH;
   x(3,1) <= 10;

END
```

Hozzárendelési feladatok

6.5. Hozzárendelési feladatok

A szállítási szimplex módszer nagyon hatékonynak tűnik, mégis van a szállítási feladatoknak egy olyan csoportja, ahol a szállítási szimplex módszer gyakran nem bizonyul elég jónak. Ezek a hozzárendelési feladatok. Ebben az alfejezetben definiáljuk a hozzárendelési feladatokat, és leírunk egy nagyon hatékony megoldó algoritmust.

4. PÉLDA A Machinecónak négy gépe van, és négy olyan munka, amelyeket ezeken a gépeken kell elvégezni. Minden egyes gépre egy munkát kell kijelölni, amelyet a gép teljesen elvégez. A 43. táblázat mutatja, hogy az egyes gépeknek az egyes munkákra való beállítása mennyi időt igényel. A Machineco minimalizálni szeretné a négy munka elvégzéséhez szükséges összes beállítási időt. Alkalmazzunk lineáris programozást a feladat megoldására!

43. TÁBLÁZAT Beállítási idők a Machineco feladatban

	Idő (órában)			
	1. munka	**2. munka**	**3. munka**	**4. munka**
1. gép	14	5	8	7
2. gép	2	12	6	5
3. gép	7	8	3	9
4. gép	2	4	6	10

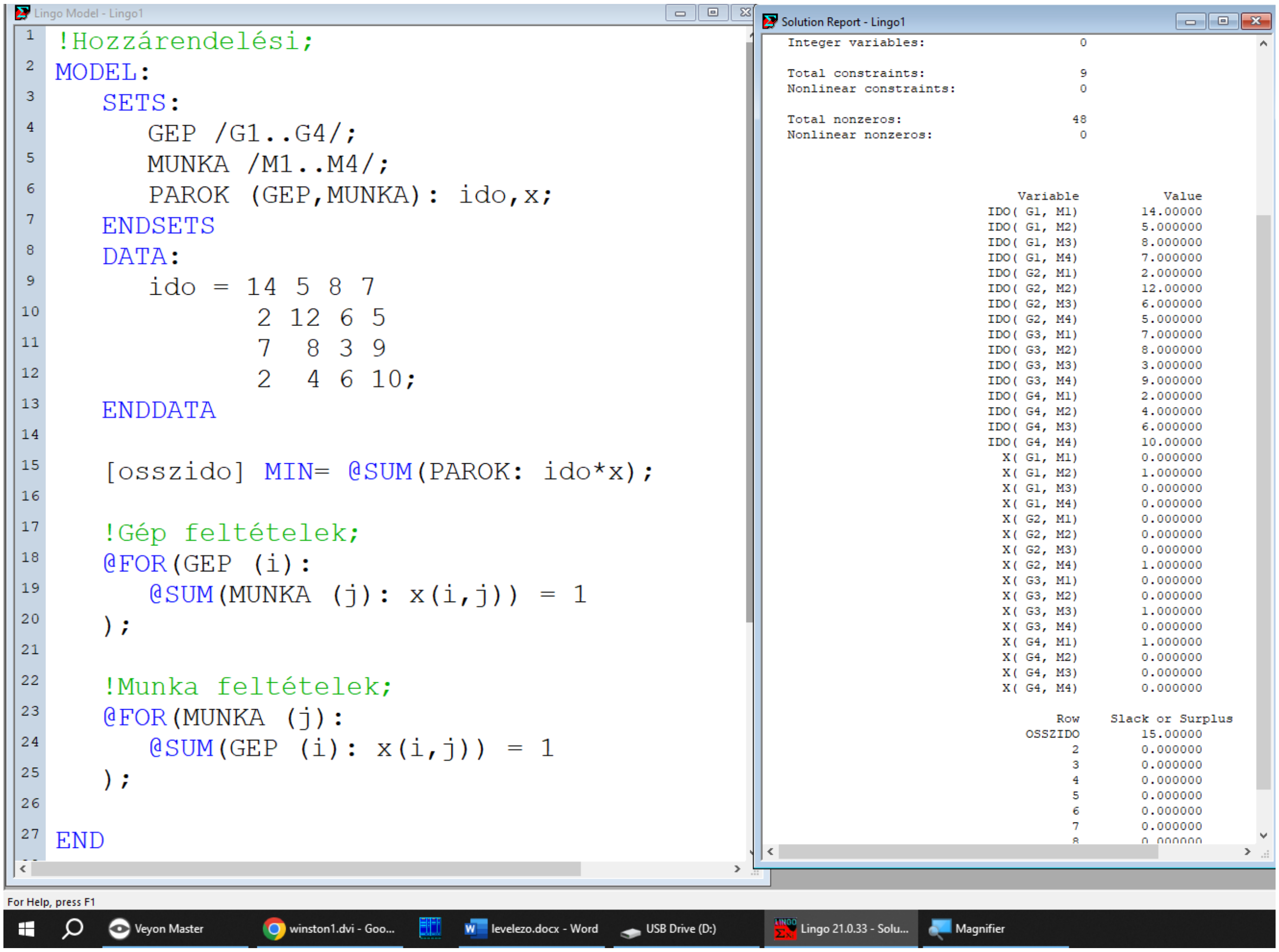
Megoldás A Machinecónak el kell döntenie, hogy melyik gép melyik munkát végezze el. Definiáljuk a következő változókat ($i, j = 1, 2, 3, 4$-re):

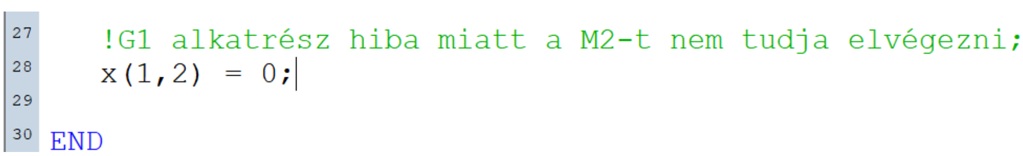
$$x_{ij} = 1,\ \text{ha az } i\text{-edik gépet jelöljük ki a } j\text{-edik munkára}$$
$$x_{ij} = 0,\ \text{ha az } i\text{-edik gépet nem jelöljük ki a } j\text{-edik munkára}$$

Ekkor a Machineco problémája így írható fel:

$$\begin{aligned}
\min z = {} & 14x_{11} + 5x_{12} + 8x_{13} + 7x_{14} + 2x_{21} + 12x_{22} + 6x_{23} + 5x_{24} \\
& + 7x_{31} + 8x_{32} + 3x_{33} + 9x_{34} + 2x_{41} + 4x_{42} + 6x_{43} + 10x_{44} \\
\text{f.h.}\quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \qquad \text{(gép feltételek)} \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \\
& x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \qquad \text{(munka feltételek)} \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1 \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1 \\
& x_{ij} = 0 \quad \text{or} \quad x_{ij} = 1
\end{aligned} \tag{13}$$

Lingo megoldás





MAGYAR módszer 6.5 fejezet a könyvben

HÁTIZSÁK probléma 8.2. fejezet Stock co példa és Josie példa

2. Egy olyan IP-t, mint a (9) is, amelyben csak egy feltétel van, **hátizsák feladatnak** hívunk. Tegyük fel, hogy Josie Camper egy kétnapos túrára készül. Négy tárgy van, amire szüksége lehet. Ezen tárgyak súlya, illetve haszna (Josie szerint) az 1. táblázatban található.

	Súly (font)	**Haszon**
1-es tárgy	5	16
2-es tárgy	7	22
3-es tárgy	4	12
4-es tárgy	3	8

Tegyük fel, hogy Josie a hátizsákjában legfeljebb 14 fontot bír el. Definiáljuk $j = 1, 2, 3, 4$-re

Lingo modell:

Lingo Model - Lingo1

```
!hátizsák feladat;
MODEL:

   [hasznossag]  MAX= 16*x1 + 22*x2 +  12*x3 + 8*x4;

   [suly]  5*x1 + 7*x2 + 4*x3 + 3*x4 <= 14;

   @BIN(x1);
   @BIN(x2);
   @BIN(x3);
   @BIN(x4);
END
```

Solution Report - Lingo1

```
   Variable           Value        Reduced Cost
         X1        0.000000           -16.00000
         X2        1.000000           -22.00000
         X3        1.000000           -12.00000
         X4        1.000000           -8.000000

        Row    Slack or Surplus      Dual Price
 HASZNOSSAG         42.00000           1.000000
       SULY         0.000000           0.000000
```

```
   @BIN(x2);
   @BIN(x3);
   @BIN(x4);

!Ha az T1 viszi akkor a T2 is kell;
   x1 <= x2;

!A T2 és T3 közül legfeljebb csak az egyiket viheti;
  x2 + x3 <= 1;

!T1 és T4 közül legalább az egyiket vinni kell;
   x1 + x4 >= 1;
```

Halmazlefedési probléma

Könyv: 8.2 Fejezet 5. Példa

5. PÉLDA Egy megye vezetése el akarja dönteni, hogy a megye hat városa közül melyekben legyen tűzoltóállomás. A lehető legkevesebb állomást akarják építeni azon előírás mellett, hogy mindegyik város elérhető legyen valamelyik tűzoltóállomásról 15 percen belül. A 6. táblázat tartalmazza a városok közötti elérési időket. Adjunk meg egy IP-t, amellyel meghatározható, hogy hány tűzoltóállomásra van szükség, és azokat hová telepítsék!

6. TÁBLÁZAT A városok közötti elérési idő (perc)

	Hová					
Honnan	**1-es város**	**2-es város**	**3-as város**	**4-es város**	**5-ös város**	**6-os város**
1-es város	0	10	20	30	30	20
2-es város	10	0	25	35	20	10
3-as város	20	25	0	15	30	20
4-es város	30	35	15	0	15	25
5-ös város	30	20	30	15	0	14
6-os város	20	10	20	25	14	0

$$
\begin{array}{lll}
\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 & & \\
\text{f.h.} \quad x_1 + x_2 & \geq 1 & \text{(1-es város feltétel)} \\
\quad x_1 + x_2 + x_6 & \geq 1 & \text{(2-es város feltétel)} \\
\quad x_3 + x_4 & \geq 1 & \text{(3-as város feltétel)} \\
\quad x_3 + x_4 + x_5 & \geq 1 & \text{(4-es város feltétel)} \\
\quad x_4 + x_5 + x_6 & \geq 1 & \text{(5-ös város feltétel)} \\
\quad x_2 + x_5 + x_6 & \geq 1 & \text{(6-os város feltétel)} \\
x_i = 0 \text{ vagy } 1 \quad (i = 1,2,3,4,5,6) & &
\end{array}
$$

További magyarázat a könyvben.

Lingo modell, feltételes szummával:

Lingo Model - Lingo1

```
!halmazlefedés;
MODEL:
   SETS:
      VAROS /v1..v6/: x ;
      TAV (VAROS, VAROS): d;
   ENDSETS
   DATA:
      d =  0 10 20 30 30 20
          10  0 25 35 20 10
          20 25  0 15 30 20
          30 35 15  0 15 25
          30  0 30 15  0 14
          20 10 20 25 14 0;
   ENDDATA
      [allomasDB] MIN= @SUM(VAROS: x);

   @FOR(VAROS (i):
         @SUM(VAROS (j) | d(i,j) #LE# 15 : x(j)) >= 1
   );


END
```

Hálózati folyam feladatok

Legrövidebb út:

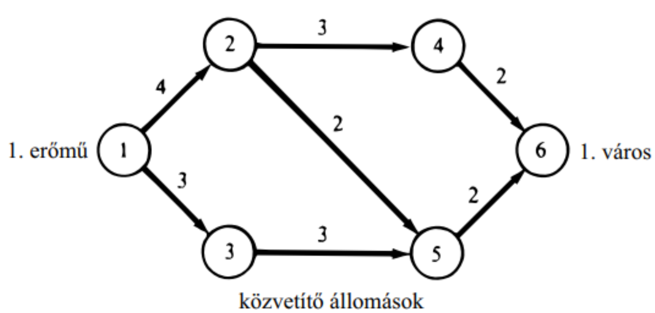
7.2. A legrövidebb út probléma

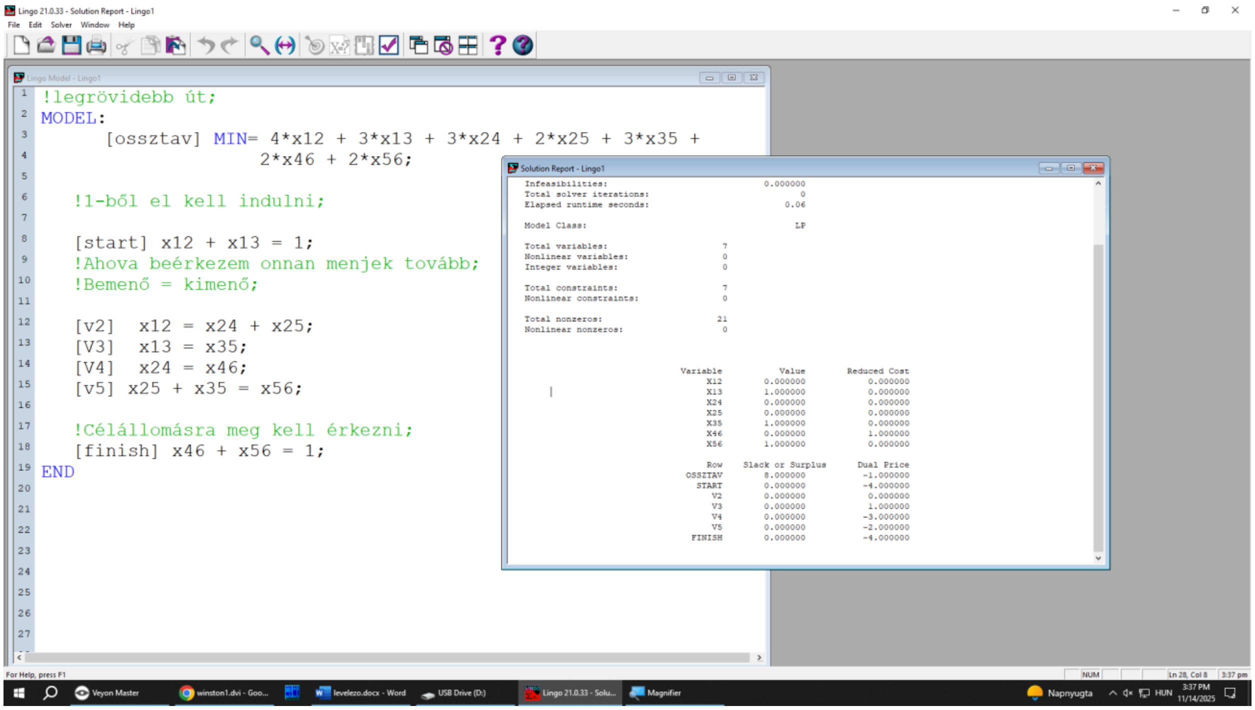
Ebben az alfejezetben feltesszük, hogy a hálózat mindegyik élének van adott hossza. Válasszunk ki egy csúcspontot (mondjuk az 1-es csúcsot). Az 1-es csúcsból a hálózat összes többi csúcsába vezető legrövidebb utak (minimális összhosszúságú utak) keresését nevezzük a **legrövidebb út problémának**. Az 1. és 2. példák legrövidebb út feladatok.

1. PÉLDA

Vegyük a Powerco példáját (2. ábra). Tegyük fel, hogy amikor az 1-es erőműből (1-es csúcs) elektromos energia áramlik az 1-es városba (6-os csúcs), közvetítőállomásokon kell áthaladnia (2–5 csúcsok). Ha két csúcs között lehetséges áramot küldeni, a köztük lévő távolságot (mérföldben) a 2. ábra mutatja. Például, a 2-estől a 4-es közvetítő állomásig 3 mérföld az út, viszont nem haladhat áram a 4-es és 5-ös állomások között. A Powerco az áramot úgy akarja az 1-es erőműből az 1-es városba küldeni, hogy az a lehető legkisebb távolságot tegye meg. A Powerco feladata tehát a 2. ábrán lévő hálózatban az 1-es csúcsból a 6-osba vezető legrövidebb út megkeresése.

2. ÁBRA
A Powerco hálózata



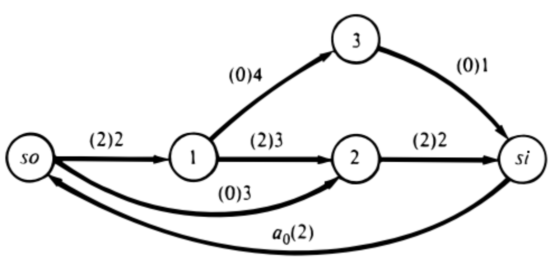


V1 → v3→ v5→ v6 össztáv= 8km

Maximális folyam:

3. PÉLDA A Sunco olajtársaság a lehető legnagyobb mennyiségű olajat akarja (óránként) eljuttatni a 6. ábrán látható csővezetéken keresztül a *so* csúcsból a *si* csúcsba. A *so*-ból a *si*-be vezető útján az olaj esetleg átmegy az 1, 2 és 3 szivattyú-állomásokon, ahol különböző átmérőjű csővezetékek kapcsolódnak egymáshoz. A 8. táblázat mutatja, hogy az egyes éleken maximálisan hány millió hordó olaj nyomható keresztül (óránként). Ezeket a számokat hívjuk **élkapacitásnak**. Írjunk fel egy olyan LP-t, amelyikkel meghatározható a *so*-ból a *si*-be küldhető olaj maximális mennyisége (óránként).

6. ÁBRA
A Sunco hálózata



$$
\begin{array}{lrll}
\max\ z = x_0 & & & \\
\text{f.h.} & x_{so,1} & \le 2 & \text{(élkapacitás korlátok)} \\
& x_{so,2} & \le 3 & \\
& x_{12} & \le 3 & \\
& x_{2,si} & \le 2 & \\
& x_{13} & \le 4 & \\
& x_{3,si} & \le 1 & \\
& x_0 & = x_{so,1} + x_{so,2} & (\textit{so} \text{ csúcs folyam feltétel}) \\
& x_{so,1} & = x_{12} + x_{13} & \text{(1-es csúcs folyam feltétel)} \\
& x_{so,2} + x_{12} & = x_{2,si} & \text{(2-es csúcs folyam feltétel)} \\
& x_{13} & = x_{3,si} & \text{(3-as csúcs folyam feltétel)} \\
& x_{3,si} + x_{2,si} & = x_0 & (\textit{si} \text{ csúcs folyam feltétel}) \\
& x_{ij} & \ge 0 &
\end{array}
$$