Lineáris egyenletrendszerek

Lineáris egyenletrendszerek megoldása Matlab-bal

Példa

Oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ha

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -12 \end{bmatrix}$$

Megoldás. Használjuk a `backslash` operátort!

```
>>A=[-2 -1 4; 2 3 -1; -4 -10 -5];
>>b=[3; 1; -12];
>>x=A\b
x=
    3
   -1
    2
```

Ügyeljünk rá, hogy a b oszlopvektorként legyen megadva!

Ha az egyenletrendszer kibővített mátrixával meghívjuk az `rref` függvényt:

```
>>rref([A b])
ans=
   1 0 0  3
   0 1 0 -1
   0 0 1  2
```

akkor láthatjuk, hogy a Gauss-Jordan elimináció eredményeként valóban így állítható elő a b vektor az A oszlopvektoraiból, amelyek lineárisan függetlenek, tehát a megoldás egyértelmű.

Példa

Oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ha

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 2 \\ -2 & -7 & 3 \\ 2 & 12 & -5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ -13 \end{bmatrix}$$

Megoldás. Próbálkozzunk ismét a `backslash` operátorral!

```
>>A=[-4 -4 2; -2 -7 3; 2 12 -5];
>>b=[-2; 6; -13];
>>x=A\b
warning: matrix singular to machine precision
x =

   1.93162
  -1.27350
   0.31624
```

A Matlab arra figyelmeztetett, hogy a mátrix szinguláris (valóban, $\det(A) = 0$), de ellenőrizhetjük, hogy `Ax-b` kerekítési hiba nagyságrendű, azaz x-et tekinthetjük megoldásnak.

Próbálkozzunk az `rref` függvénnyel!

```
>>rref([A b])
ans=
   1.0000        0 -0.1000  1.9000
        0 1.0000 -0.4000 -1.4000
        0      0       0       0
```

Azt látjuk, hogy a mátrix oszlopvektorai lineárisan függőek, de a b vektor benne van az oszlopvektorok által felfeszített térben. Tudjuk, hogy ilyenkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, ezek közül egy:

$$x = \begin{bmatrix} 1.9 \\ -1.4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ha az egyenletrenszer összes megoldását szeretnénk tudni, akkor használjuk a `null` függvényt, amely előállítja a nulltér egy bázisát:

```
>>p=null(A)
p=
  -0.092450
  -0.369800
  -0.924500
```

Ezek szerint a lineáris egyenletrendszer általános megoldása:

$$\begin{bmatrix} 1.9 \\ -1.4 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda p$$

ahol $\lambda \in \mathbb{R}$. (A kapott x megoldás a $\lambda = -0.34207$ konstanshoz tartozik.)

Példa

Oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A `backslash` operátorral azt kapjuk, hogy

```
>>x=A\b
x=
  1.0000
  2.7000
```

Könnyen látható, hogy ez **nem megoldása** az egyenletrendszernek.

Az `rref` függvénnyel:

```
>>rref([A b])
ans=
   1 0 0
   0 1 0
   0 0 1
   0 0 0
```

láthatjuk, hogy a harmadik egyenlet jelentése: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 1$, azaz az egyenletrendszer **ellentmondásos**.

Ellentmondásos lineáris egyenletrendszerek esetén a backslash operátor egy olyan x vektort ad vissza, melyre az Ax és b vektorok eltérése euklideszi normában a legkisebb (azaz $\|Ax - b\|_2$ minimális). Ilyenkor azt mondjuk, hogy x az egyenletrendszer legkisebb négyzetes értelemben vett megoldása.

1. feladat

Hány egyenletből áll és hány ismeretlent tartalmaz az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer az alábbi esetekben? Oldja meg Matlab-bal az egyenletrendszereket.

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -5 \\ 24 \\ -23 \end{bmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 \\ -3 & 4 & -13 & 22 \\ 5 & -1 & 16 & -14 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 12 \\ 81 \\ -33 \\ 15 \end{bmatrix}$$

2. feladat

A következő feladatot Matlab-bal oldja meg.
Egy műkereskedő három festményt vásárolt. Ha az első és a harmadik festményt 20%-kal, a másodikat pedig 30%-kal a beszerzési ár fölött sikerül eladnia, akkor a bevétele 1.9 millió Ft lesz. Ha a három festményt rendre 40%-kal, 20%-kal és 10%-kal drágábban tudja eladni, mint amennyiért vette, akkor 1.885 millió Ft bevétele lesz. Viszont ha csak 5%-kal, 25%-kal és 20%-kal többért tudja eladni a festményeket, mint amennyiért vette őket, akkor 1.805 millió Ft-ot kap értük. Mennyiért vásárolta az egyes képeket?

3. feladat

Tekintsük a következő mikrogazdasági modellt: földművesek, állattanyésztők és bányászok egy-egy csoportja rendre gabonát, húst és szenet "állít elő". Az előállított termék egy részét minden csoport maga használja fel, egy részét a többiek veszik igénybe, egy részét pedig külső piacon értékesíti. Az alábbi táblázatban látható, hogy az egyes csoportoknak egy egységnyi áru előállításához hány egységnyire van szükségük a többi nyersanyagból, illetve hány egység a külső igény. Matlab-bal határozza meg az előállított termékek mennyiségét úgy, hogy minden igény ki legyen elégítve, és ne keletkezzen felesleg.

	földműves	állattenyésztő	bányász	külső igény
növény	0.1	0.7	0.1	2
hús	0.2	0.1	0.3	3
szén	0.4	0.3	0.1	5

Több jobboldali vektor

Példa

Oldjuk meg az $Ax = b$ és $Ax = c$ egyenletrendszereket, ha

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -12 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 17 \\ 1 \\ -42 \end{bmatrix}$$

Megoldás. Mivel a két rendszer mátrixa azonos, ezért megoldhatjuk őket egyszerre.

```
>>A=[-2 -1 4; 2 3 -1; -4 -10 -5];
>>b=[3; 1; -12]; c=[17; 1; -42];
>>x=A\[b c]
x=
    3  -2
   -1   3
    2   4
```

Több jobboldali vektor

Nagyméretű mátrixok esetén a futási időt jelentősen befolyásolhatja, hogy az azonos mátrixszal adott rendszereket egyszerre, vagy külön-külön oldjuk meg:

```
>> A=rand(10000);
>> b=ones(10000,1);
>> c=zeros(10000,1);
>> tic;x=A\[b,c];toc
Elapsed time is 6.116513 seconds.
>> tic;x=A\b; x2=A\c; toc
Elapsed time is 11.571959 seconds.
```

(A fenti eredmény egy Intel Core i5-4590 processzorral, 7.7 GiB memóriával rendelkező gépen született).

Mátrix inverze Matlab-bal

Az `inv` függvénnyel számítható. Ha a mátrix nem négyzetes, vagy a determinánsa 0 (vagy 0-hoz közeli), akkor hibaüzenetet, illetve figyelmeztetést kapunk.

Nagyméretű mátrixok inverzének kiszámítása túl költséges lehet. Csak akkor számoljuk ki, ha ténylegesen szükségünk van az inverzre.

Pl. az $Ax = b$ négyzetes mátrixú lineáris egyenletrendszer megoldása $x = A^{-1}b$ módon kb háromszor annyi műveletbe kerül, mint az $x = A \backslash b$ megoldás.

Gyengén meghatározott lineáris egyenletrendszerek

4. feladat

Oldja meg Matlab-bal az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1.99 \\ 1.97 \end{bmatrix} \text{. ill. } b = \begin{bmatrix} 1.98 \\ 1.98 \end{bmatrix}.$$

Hasonlítsa össze a relatív eltérést a jobboldali vektorok között, illetve a megoldásvektorok között. Számítsa ki a mátrix kondíciószámát!

5. feladat

Tegyük fel, hogy az $Ax = b$ egyenletrendszert akarjuk megoldani, ahol a b vektor esetlegesen hibával terhelt. Legfeljebb mekkora lehet a megoldás relatív hibája (∞-normában), ha tudjuk, hogz a b vektor relatív hibája legfeljebb 0.01 (∞-normában)?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Gyengén meghatározott lineáris egyenletrendszerek

6. feladat

Matlab-bal oldjuk meg a következő 100×100-as lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{99} \\ x_{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -98 \\ -97 \\ -96 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A mátrix előállításához használhatjuk a ones, triu és eye függvényeket. Ezután perturbáljuk egy kicsit a jobb oldalt: legyen `b(100)=1.00001`. Oldjuk meg újra a rendszert! Számítsuk ki a mátrix kondíciószámát!