Debreceni Egyetem, Informatikai Kar

Feladatok a Gazdasági matematika I. tárgy gyakorlataihoz

♠ a megoldásra feltétlenül ajánlott feladatokat jelöli, e feladatokat a félév végére megoldottnak tekintjük

★ a nehezebb feladatokat jelöli

Halmazelmélet

(1) ♠ Legyen $A = \{2, 3, 4\}, B = \{2, 5, 6\}, C = \{5, 6, 2\}, D = \{6\}$.
(a) Melyik igaz az alábbi állítások közül: $4 \in C, A \subset B, D \subset C, B = C, A = B$.
(b) Határozzuk meg az $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, (A \cup B) \setminus (A \cap B), A \cap B \cap C$ halmazokat!

(2) ♠ (a) A költők között a legnagyobb festő és a festők között a legnagyobb költő vajon ugyanaz a személy-e?
(b) A költők között a legöregebb festő és a festők között a legöregebb költő vajon egy és ugyanaz a személy?

(3) ♠ Legyen X a DE hallgatóinak összessége, L a hallgatólányok halmaza, K a közgazdászhallgatók halmaza, C az egyetemi kórus tagjainak halmaza, B a biológia tárgyat felvett hallgatók halmaza, T pedig a teniszezőké. Fogalmazzuk meg az alábbi állításokat a halmazelmélet nyelvén:
(a) Minden biológiát tanuló hallgató közgazdász.
(b) Az egyetem kórusában van biológiát felvett hallgató.
(c) Azon hallgatólányok, akik se nem teniszeznek, se nem énekkarosok mind tanulnak biológiát.

(4) ♠ Egy társaságban végzett felmérés szerint a társaságból ötvenen kávéznak és negyvenen teáznak. Harmincöt olyan személy van, aki kávézni és teázni is szokott, valamint tíz olyan személy van, aki egyiket sem. Hány tagú a társaság?

(5) ♠ Legyen

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

az A és B halmazok *szimmetrikus differenciája*. Igazoljuk, hogy bármely két halmaz esetén

$$A \triangle B = B \triangle A, \qquad A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

(6) ★ Az alábbi halmazazonoságok közül az egyik nem igaz. Melyik?

$$\begin{aligned} (A \triangle B) \triangle C &= A \triangle (B \triangle C), \\ (A \cap C) \triangle B &= (A \triangle B) \cap (C \triangle B), \\ A \triangle A &= \emptyset. \end{aligned}$$

(7) Igazoljuk, hogy ha $A \setminus B = B \setminus A$, akkor $A = B$.

(8) Állapítsuk meg, hogy a következő összefüggések közül melyek igazak tetszőleges A, B, és C halmazokra.

(a) ♠ $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$,
(b) $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (B \cup C)$,
(c) $\left[A \setminus \left(A \setminus \bar{B}\right)\right] \cup B = A \cup B$.

(9) Legyen $A = \{n \in N \mid n \, \text{páros}\}, \ B = \{n \in N \mid n < 4\}, \ C = \{n \in N \mid n > 2\}$. Állapítsuk meg, mik lesznek az $X = [A \setminus (B \cap C)] \cup [(A \setminus B) \setminus C]$ halmaz elemei.

(10) Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

(a) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$,
(b) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$,
(c) $(A \cup B) \cap (B \cup \bar{A}) \cap (A \cup \bar{B})$.

(11) Vizsgáljuk meg, hogy milyen kapcsolat áll fenn az A és B halmazok között, ha teljesül az $A \cap B = A$ egyenlőség.

(12) Állapítsuk meg, milyen esetben állhat fenn az $A \cup B = \bar{A}$ egyenlőség.

(13) Vizsgáljuk meg, hogy milyen kapcsolat áll fenn az A és B halmazok között, ha teljesül az $A \cup B = A$ egyenlőség.

(14) Vizsgáljuk meg, milyen A és B kapcsolata, ha $A \cup B = A \cap B$ teljesül.

(15) Milyen kapcsolat áll fenn az A és B halmazok között, ha az $A \cup (B \cap \bar{A}) = B$ igaz?

(16) Vizsgáljuk meg, hogy milyen esetben teljesül az $(A \cup B) \setminus B = A$ egyenlőség.

(17) Mutassuk meg, hogy tetszőleges A és B esetén $[A \setminus (A \cap B)] \cup B = A \cup B$.

(18) ♠ Legyen $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$. Írjuk fel az

$$(A \times B) \cap (B \times A) \quad \text{és az} \quad (A \times B) \setminus (B \times A)$$

halmazok elemeit.

(19) Legyen $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = ax + b\}$ és $B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = cx + d\}$.
Mit mondhatunk az a, b, c, és d paraméterekről, ha tudjuk, hogy
(a) $A \setminus B = A$, (b) $A \cap B = \{(0, 0)\}$,
(c) $A \setminus B = \emptyset$, (d) $\{(1, 0), (0, 1)\} \subset A \cap B$.

(20) ♠ Ábrázoljuk a $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ és $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ halmazokat a koordinátasíkon.

(21) Lássuk be, hogy tetszőleges A, B és C halmazokra

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C), \\ \text{(b)} & A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C), \\ \text{(c)} & (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C), \\ \text{(d)} & (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C). \end{array}$$

(22) Igazoljuk, hogy tetszőleges A és $B_1, B_2, \dots B_n$ halmazokra

$$\begin{aligned} A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) &= \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i), \\ A \cup (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) &= \bigcap_{i=1}^{n} (A \cup B_i) \\ \overline{\bigcup_{i=1}^{n} B_i} &= \bigcap_{i=1}^{n} \bar{B}_i, \\ \overline{\bigcap_{i=1}^{n} B_i} &= \bigcup_{i=1}^{n} \bar{B}_i. \end{aligned}$$

(23) Legyen a D reláció $\mathbb{N}$-en az alábbi

$$(\forall m, n \in \mathbb{N})(m \, D \, n \iff \text{ ha } m \text{ osztója } n\text{-nek.}$$

Igazolja, hogy D féligrendezés $\mathbb{N}$-en.

(24) ♠ Tekintsük a következő leképezéseket:

$$\begin{array}{ll} F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, & F(n) = 2n \ (n \in \mathbb{N}) \\ G : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, & G(x) = 2x \ (x \in \mathbb{Q}) \\ H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & H(x) = x^2 \ (x \in \mathbb{R}) \\ L : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, & L(n) = n^2 \ (n \in \mathbb{N}). \end{array}$$

Állapítsuk meg közülük melyik injektív, szürjektív, ill. bijektív.

(25) Legyen A és B, véges halmaz. Mit mondhatunk A és B elemeinek a számáról, ha tudjuk, hogy létezik olyan $F : A \to B$ leképzés, amely:
(a) injektív, (b) szürjektív, (c) bijektív.

Indukció

(26) Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy minden $n \in \mathbb{N}$–re, vagy a megadott n–ekre

(a) ♠ $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$,

(b) ♠ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$,

(d) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$,

(e) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$,

(f) ♠ $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots \dfrac{1}{n \cdot (n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$,

(g) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \ldots \dfrac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$,

(h) $2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = (n-1)2^n$,

(i) ♠ $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$,

(j) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{j}} \geq 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right)$,

(k) $4^{n+4} > (n+4)^4$,

(l) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} > \frac{13}{24} \quad (n \geq 2)$,

(m) $n^3 < 2^{n+1} \quad (n > 8)$,

(n) $\dfrac{1}{\sqrt{3n+1}} \geq \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdots \dfrac{2n-1}{2n}$,

(o) ♠ $(n+1)! > 2^{n+3}, \ (n \geq 5)$,

(p) $\dfrac{n^3}{3} + \dfrac{n^5}{5} + \dfrac{7n}{15}$ egész szám,

(q) ♠ $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ osztható 9-cel,

(r) $n^3 + 5n + 6$ osztható 3-mal.

(27) ♠ Mutassuk meg, hogy

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1},$$

ahol $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

(28) ★ Bizonyítsuk be a binomiális tételt:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n,$$

ahol n tetszőleges természetes szám, a, b tetszőleges valós számok. A fenti egyenlőség tömörebb formája:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

(29) ♠ Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes szám és $x \geq -1$ szám esetén teljesül a Bernoulli egyenlőtlenség:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx,$$

és itt egyenlőség akkor, és csakis akkor teljesül, ha $n = 1$ vagy $x = 0$.

(30) ★ Bizonyítsuk be, hogy ha $x_1, x_2, \dots, x_n$ $(n \geq 2)$ nemnegatív valós számok, akkor teljesül a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Valós számok

(31) Bizonyítsuk be következő egyenlőtlenségeket $(a > 0, b > 0)$:

(a) $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$,

(b) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$,

(c) $\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| \geq 2$.

(32) ♠ Mutassuk meg, hogy

$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} < n.$$

(33) A valós számok (test)axiómáit felhasználva igazolja, hogy bármely $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{array}{llll}
\text{ha } x+y=x+z, & \text{akkor } y=z, & \text{ha } xy=xz,\ x\neq 0, & \text{akkor } y=z, \\
\text{ha } x+y=x, & \text{akkor } y=0, & \text{ha } xy=x,\ x\neq 0, & \text{akkor } y=1, \\
\text{ha } x+y=0, & \text{akkor } y=-x, & \text{ha } xy=1,\ x\neq 0, & \text{akkor } y=x^{-1}, \\
 & -(-x)=x, & \text{ha } x\neq 0, & \text{akkor } \left(x^{-1}\right)^{-1}=x,
\end{array}$$

továbbá

$$\begin{array}{ll}
0x = 0, & x\neq 0, y\neq 0 \Rightarrow xy\neq 0, \\
(-x)y = -(xy) = x(-y), & (-x)(-y) = xy.
\end{array}$$

(34) A valós számok (rendezett test) axiómáit felhasználva igazolja, hogy bármely $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{array}{rl}
x \geq 0 & \text{akkor és csakis akkor, ha } -x \leq 0, \\
\text{ha } x\geq 0,\ y\leq z, & \text{akkor } xy \leq yz, \\
\text{ha } x\leq 0,\ y\leq z, & \text{akkor } xy \geq yz, \\
\text{ha } x\neq 0, & \text{akkor } x^2 > 0, \text{ speciálisan } 1 > 0, \\
\text{ha } 0 < x \leq y, & \text{akkor } 0 < y^{-1} \leq x^{-1}, \text{ és } x^2 \leq y^2.
\end{array}$$

(35) Bizonyítsuk be, hogy ha $r \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, akkor $r + x$, és ha $r \neq 0$, akkor $rx \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(36) ♠ Bizonyítsuk be, hogy x irracionális, ha a) $x^2 = 2$, b) $x^2 = 6$, c) $x^3 = 5$.

(37) Mivel egyenlő $\inf H$, $\sup H$, $\min H$, $\max H$, ha $H =$

$$♠ \quad \left\{(-1)^n\left(1 - \frac{1}{n}\right) \;:\; n \in \mathbb{N}\right\}, \quad ♠ \quad \left\{\frac{3^n}{n!} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\},$$

$$★ \quad \left\{\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} \;:\; m, n \in \mathbb{N}\right\}, \quad ★ \quad \left\{\frac{n}{|n| + m} \;:\; m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

(Utóbbi két feladatnál helyettesítsünk $r = \frac{m}{n}$-et!)

(38) ♠ Legyen

$$E=[0,1]\cup\{2,3\},\quad F=\{\ r\ :\ r\in\mathbb{Q},0\le r<1\ \},\quad G=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2n+1},\frac{1}{2n}\right],$$

Határozzuk meg e halmazok belső, izolált, torlódási és határpontjait!

Sorozatok

(39) ♠ Állapítsuk meg, hogy az alábbi sorozatok közül melyek konvergensek, melyek divergensek.

$$\begin{array}{lll} a_n=(-1)^n, & b_n=2^n, & c_n=\log_2(n^2+n), \\ d_n=8\sin(7,2n^\circ), & e_n=\sin(2\pi n^2), & f_n=\dfrac{2n+1}{7n-3} \end{array}\qquad (n\in\mathbb{N}).$$

(40) ♠ Vizsgáljuk meg a következő sorozatokat monotonitás és korlátosság szempontjából. Határozzuk meg a sorozatok határértékét is.

(a) $a_n=\dfrac{1+2+\cdots+n}{(n+1)(n+10)}$, (b) $a_n=\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+4}-\dfrac{n}{2}$, (c) $a_n=\dfrac{5^{n+1}}{n!}$.

(41) ♠ Vizsgáljuk meg, hogy hányadik tagtól kezdve esnek a sorozat elemei a határérték $\varepsilon>0$ sugarú környezetébe:

(a) ♠ $a_n=\dfrac{n+2}{3n-8}$, (b) $a_n=1-\dfrac{(-1)^n}{n}$.

(42) Határozzuk meg az alábbi a_n $(n\in\mathbb{N})$ sorozatok határértékét, amennyiben az létezik.

(a) ♠ $a_n=\dfrac{\sqrt[3]{4n^2+3n}}{n+2}$,

(b) ♠ $a_n=\sqrt{n^2+1}-n$,

(c) ♠ $a_n=\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}$,

(d) $a_n=\dfrac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}+\sqrt[5]{n}}{\sqrt{5n+1}}$,

(e) $a_n=\dfrac{\sqrt{2n^2+2n+3}-\sqrt{2n^2+6n+5}}{\sqrt{3n^2+5n+1}-\sqrt{3n^2+7n-1}}$,

(f) ♠ $a_n=\left(\dfrac{n-3}{n-5}\right)^5$,

(g) ♠ $a_n=\left(\dfrac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n^2+5}$,

(h) $a_n=(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\dots\left(1+\frac{1}{n}\right)$,

(i) ♠ $a_n=\dfrac{10^n+10^2}{5^n+2^n+10^5}$,

(j) ♠ $a_n=\dfrac{2+8n}{3+9n}$,

(k) $a_n=\dfrac{2+8n^2}{3n+9n^3}$,

(l) $a_n=\dfrac{2+8n}{3+9n}+\log_{10}\left(\dfrac{2+8n}{3+9n}\right)$,

(m) $a_n=\dfrac{n^3+7n+49n^2}{231a-1+13n^2}$, $(a\in\mathbb{R}$ adott$)$,

(n) ♠ $a_n=\dfrac{\log_3(n^2+n+1)}{\log_3 n}$,

(o) ★ $a_n = \dfrac{\log_{n^2}(\sqrt{n}+3)}{\log_n(n^2+n)}$,

(p) ♠ $a_n = \dfrac{2^{\frac{n+1}{n}}}{2^{\frac{n-3}{n}}}$.

(43) Tudjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}(\log_2(n^2+n+4)) = +\infty$. Tetszőleges $K > 0$ számhoz határozzunk meg egy olyan N természetes számot, hogy $\log(n^2+n+4) > K$, ha $n > N$.

(44) ♠ Tegyük fel hogy $a_n \to +\infty$, $b_n \to 0$. Lehetséges-e, hogy $a_n b_n \to 0$, $a_n b_n \to -1, 2, 3$, $a_n b_n \to \infty$, $a_n b_n \to -\infty$?

(45) Tegyük fel, hogy $a_n \to 1/2$. Képezzük a

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = a_1 a_2, \quad b_3 = a_1 a_2 a_3, \quad b_4 = a_1 a_2 a_3 a_4, \quad \ldots$$

sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy $b_n \to 0$.

(46) ♠ Bizonyítsuk be, hogy ha $a_n \to a$, és $a_n > 0$ bármely $n \in N$-re, akkor $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$.

(47) Tegyük fel, hogy $a_n \to +\infty$. Bizonyítsuk be, hogy $\log_2 a_n \to +\infty$.

(48) Tegyük fel, hogy $a_n \to 13$. Bizonyítsuk be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$.

(49) ♠ Tegyük fel, hogy egy sorozatnak végtelen sok pozitív, és végtelen sok negatív eleme van. Lehet-e ez a sorozat konvergens?

(50) Legyen $a_1 = \frac{1}{1\cdot 2}$, $a_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3}$, $a_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4}, \ldots$. Bizonyítsuk be, hogy az a_n sorozat konvergens.

(51) Legyen $a_1 = 1$, $a_2 = 1 + \frac{1}{2^2}$, $a_3 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}, \ldots$. Bizonyítsuk be, hogy az a_n sorozat konvergens.

(52) Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ határértéket, ahol

(a) $s_n = \dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$,

(b) ♠ $s_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$.

(53) Tegyük fel, hogy az a_n sorozat konvergens. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan N, hogy $|a_n - a_m| < \varepsilon$, ha $n > N$ és $m > N$.

(54) Igazoljuk az előző állítás megfordítását! Tegyük fel, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan N, hogy $|a_n - a_m| < \varepsilon$, ha $n > N$. Bizonyítsuk be, hogy a_n konvergens.

Sorok

(55) ♠ Határozzuk meg, hogy az alábbiak közül melyik geometriai sor, és a konvergenseknek számítsuk ki az összegét!

(a) $8 + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \dots$ (b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + + \frac{1}{4} \dots$

(c) $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots$ (d) $1 + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + \dots$

(e) $\sum x^{2n+1}$ (f) $x + \sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \dots$

(56) Határozzuk meg a

$$\sum_{k=0}^{\infty} b \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{-k}$$

sor összegét.

(57) ♠ 1971-ben a világ teljes vasfelhasználása kb. 794 millió tonna volt. Ha a világ teljes vas-készlete 249 milliárd tonna, és a felhasználás évi 5%-kal nő, akkor mennyi ideig lesz elég a készlet?

(58) ♠ Számítsuk ki a következő végtelen sorok összegét:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^{2n+1}}$, (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{10^n}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

(59) ♠ Mutassuk meg, hogy az alábbi sorok divergensek!

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{101}{100}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$.

(60) Konvergensek-e a következő sorok: (alkalmazzuk a majoráns, hányados vagy gyök tesztet)

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$, (b)♠ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3n}$,

(d) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$, (e)♠ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k!}$, (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(2n)!}$,

(g)♠ $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{p}}$, (h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{n}}$, (i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k(k+2)}$,

(j)♠ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3+1}$, (k) $\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(2s)!}{s^s}$, (l)♠ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n}\right)^n$.

(61) Számítsuk ki a következő hatványsorok konvergenciasugarát:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$, (b)♠ $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{n+1} x^n$, (c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$.

Függvények határértéke és folytonossága

(62) ♠ Az $f(x) = \dfrac{5}{2-x}$ függvény az $x = 2$ helyen nincs értelmezve. Közelítsük meg a 2-t először az

$$x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \quad \text{sorozattal, majd az} \quad y_n = 2 + \frac{1}{n} \ (n \in \mathbb{N})$$

sorozattal, és határozzuk meg a megfelelő függvényértékek sorozatának határértékét. Értelmezzük az eredményt.

(63) Határozzuk meg a következő határértékeket:

(a) ♠ $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{2-\sqrt{x-1}}{x^2-25}$,

(c) ♠ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{x^3+x^2+x}$, (d) ♠ $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}$,

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3}\right)$, (f) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,

(g) ♠ $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{1+4x^2}}{1-x}$, (h) ♠ $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left[x\left(\frac{1}{a+\frac{1}{x}} - \frac{1}{a}\right)\right]$,

(i) ♠ $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+5x} - x\right)$, (j) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt[4]{x^3+x}-x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}}$,

(k) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x}{x+\sqrt[3]{x^3+1}}$, (l) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{1-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[3]{2x^2}+\sqrt[4]{x^2+x}}$,

(m) ♠ $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{1+2x}$, (n) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(\frac{2x+3}{1+2x}\right)^{x+2}$.

(64) Igazoljuk, hogy fennállnak a következő összefüggések:

(a) $\displaystyle\lim_{y\to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{1+3x} = e^3$,

(c)♠ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e, \quad (a>0,\ a\neq 1)$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+ax)^{\frac{n}{x}} = e^{na}, \quad (a>0,\ n\in\mathbb{N})$.

(65) Döntsük el, monotonok-e a következő függvények:

(a) $f(x) = 1-x^2 \quad (x<1)$, (b)♠ $f(x) = \dfrac{1}{x+1} \quad (x\neq -1)$,

(c) $f(x) = \dfrac{x}{4-x^2} \quad (-2<x<2)$, (d)♠ $f(x) = |1-x^2| \quad (x>1)$.

(66) ♠ Lehetséges-e, hogy nem folytonos függvények összege, illetve szorzata folytonos?

(67) ♠ Bizonyítsuk be, hogy minden páratlan fokú, valós együtthatós egyenletnek van valós gyöke.

(68) Vizsgáljuk meg, hogy viselkednek a következő függvények szakadási helyeik környezetében és a végtelenben:

(a) ♠ $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$ ha $x \neq 1$, $f(1) = 1$ (b) $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^2-5x+6}$,

(c)♠ $f(x) = 3^{\frac{1}{x+1}}$ ha $x \neq -1$, $f(-1) = 0$, (d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-x}$,

(e) ♠ $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2, & \text{ha } x \leq 2, \\ x, & \text{ha } x > 2, \end{cases}$ (f) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & \text{ha } x \leq 0, \\ (1-x)^2, & \text{ha } 0 < x \leq 2, \\ 4-x, & \text{ha } x > 2. \end{cases}$

(69) ♠ Állapítsuk meg, hogy vannak-e olyan pontok, melyben az

$$f(x) = \begin{cases} 4-x^2, & \text{ha } x \text{ racionális }, \\ 4+x^2, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

függvény folytonos.

(70) ♠ Hol vannak értelmezve és hol folytonosak a következő függvények?

(a) $f(x) = x^5 + 4x$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ (d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

(e) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$ (f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + (x+2)^{3/2}$.

(71) ♠ Legyen

$$f(x) := \frac{1}{x} \quad (x \in]0,1]), \qquad g(x) := \frac{1}{x} \quad (x \in [1, \infty[).$$

Igazoljuk, hogy mindkét függvény folytonos (mindenütt ahol értelmezve van), de f nem korlátos, g nem veszi fel a függvényértékek pontos alsó korlátját.

(72) ♠ Melyek azok a függvények, amelyek valószinűleg az időnek folytonos függvényei?
(a) Egy uncia arany ára a zürichi arany piacon.
(b) Egy növekedő gyermek magassága.
(c) Egy repülőgép föld feletti magassága.
(d) Egy autó által megtett út.

Differenciálszámítás

Deriváltak kiszámítása

(73) ♠ Számítsuk ki az $f(x) = 1/x^2$ függvény deriváltját $x = 2$-ben a definíció segítségével, azaz határozzuk meg a $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1/x^2 - 1/2^2}{x-2}$ határértéket.

(74) ♠ Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = |x|$ függvény nem differenciálható $x = 0$-ban. Ez pl. igazolható egy olyan $x_n \to 0$ sorozat megadásával, melyre az $\frac{|x_n|-|0|}{x_n-0} = \frac{|x_n|}{x_n}$ sorozat nem konvergens.

(75) Ábrázoljuk az

$$♠ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ x^2 & \text{ha } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{és a} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ x & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

függvényeket. Differenciálható-e f és g az $x = 0$-ban?

(76) ♠ Deriváljuk a következő függvényeket:

$f(x) = \dfrac{x^2 - x}{5}$; $\quad g(x) = x + \dfrac{4}{2x^2}$; $\quad h(x) = \dfrac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$;

$i(x) = \sin 2x$; $\quad j(x) = 2\sin x \cos x$; $\quad k(x) = \sin x^3$;

$\ell(x) = \sin(\cos x)$; $\quad m(x) = \ln(\sin x)$; $\quad n(x) = x^x$;

$o(x) = x^{\operatorname{tg} x}$; $\quad p(x) = \left(\operatorname{tg}\sqrt{x^2 + \cos x}\right)^3$; $\quad q(x) = \operatorname{tg} x / \cos x$.

(77) ♠ Adjuk meg a következő függvények deriváltját:

$f(x) = \ln \dfrac{\sqrt{2x+1}}{\sin x}$; $\quad g(x) = \ln\left(\dfrac{\cos x \sin(2x)^2}{x^3 + (3x-1)^2}\right)$;

$h(x) = x^{\cos x}$; $\quad i(x) = x^2 + (\sin x)^{\sin x}$;

$j(x) = (\ln 2x)^{3x^2}$; $\quad k(x) = (3x^2)^{\sqrt[3]{x-4}}$;

$\ell(x) = \lg\{5x^3 + 3x^2 - \sin^2(2-x)\}$; $\quad m(x) = \left(\left(\sqrt[7]{(x-4)}\right)x^6\right)^{\sqrt[3]{x-4}}$.

(78) Hol nem differenciálhatók az alábbi függvények? Számítsuk ki a differenciálhányadosukat ott, ahol differenciálhatók!

$f(x) = |x^3|$; $\quad g(x) = |\ln x|$; $\quad$ ♠$h(x) = |\ln x^3|$; $\quad$ ♠$i(x) = |x-2| \cdot |x-3|$.

(79) Létezik-e a deriváltja az

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

függvénynek az $x = 0$ pontban?

(80) ♠ Határozzuk meg a következő függvények magasabbrendű deriváltjait:

(a) $f(x) = 8x^4 + 4x^5 + 3x^2 + 5$ $\qquad f^{(5)}(x) =$

(b) $f(x) = e^{-x^2}$ $\qquad f^{(2)}(x) =$

(c) $f(x) = e^x \cos x$ $\qquad f^{(3)}(x) =$

(d) $f(x) = x^2 \ln x$ $\qquad f^{(2)}(x) =$

(e) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ $\qquad f^{(3)}(x) =$

Középértéktételek, Taylor tétel

(81) ♠ Legyen $f(x) = x^2$. Lagrange tétele szerint létezik egy olyan $\xi \in (1,2)$ szám, hogy $\frac{2^2-1^2}{2-1} = 3 = f'(\xi)$. Keressük meg ξ-t.

(82) ♠ Határozzuk meg az $y = \cos x$ függvény Maclaurin-sorát, valamint az $x = \pi$ körül a Taylor sorát.

(83) Legyen $g(x) = 6x^6 - 25x^5 + 8x^4 - 9x^3 + 4x^2 + 1$. Írjuk fel a függvény $x = 2$ körüli Taylor-formuláját, azaz alakítsuk át a függvényt úgy, hogy benne csak az $(x-2)$ hatványai szerepeljenek.

(84) Határozzuk meg az $y = e^x$ függvény Taylor-sorát az $x = 1$ pont körül.

Függvényvizsgálat, monotonitás, konvexitás, szélsőérték

(85) Vizsgáljuk meg a következő függvényeket. (Határozzuk meg a zérushelyeket, határértékeket, azokat az intervallumokat, ahol monoton növekvő, illetve csökkenő, konvex illetve konkáv, végül ábrázoljuk a függvényt.)

(a)♠$f_1(x) = 8(x^3 - 9x)$; (b)♠$f_2(x) = (x-1)^2(x+3)^2$;

(c) $f_3(x) = \dfrac{x^2}{x^2-2x+1}$; (d)♠$f_4(x) = \dfrac{1+x^3}{x^2}$;

(e) $f_5(x) = \dfrac{x}{(x-1)e^x}$; (f) $f_6(x) = \sin 2x + 2\cos x$;

(g) $f_7(x) = \dfrac{\sin x}{2-\cos x}$ $0 < x < 2\pi$.

(86) Határozzuk meg a következő függvények lokális szélsőértékeit, és azokat az intervallumokat, amelyekben a függvény monoton, konvex/konkáv.

(a)♠$f(x) = x^4 - x^2$; (b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$;

(c)♠$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; (d) $f(x) = \sin x + \cos x$;

(e) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$; (f)♠$f(x) = -x\ln x$.

(87) A következő függvényeknél vizsgáljuk meg, hogy a függvény görbéje mely intervallumban konvex, illetve konkáv. Határozzuk meg a függvény inflexiós helyeit is.

(a)♠$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$; (b)♠$g(x) = (x-2)^2 - 5$;

(c) $h(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$; (d) $i(x) = 1 + \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^2$;

(e)♠$j(x) = \dfrac{x^2}{2} + \ln x$; (f) $k(x) = \operatorname{arc\,tg} x$;

(g) $\ell(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$; (h) $m(x) = x(\ln x)^{-1}$;

(k) $n(x) = -x^3 + 2x^2 - x$; $o(x) = x^5 - 5x^2$.

(88) Ha f differenciálható az x_0 belső pontban, és f-nek ott helyi szélső értéke van, akkor $f'(x_0) = 0$. Adjunk meg egy olyan konkrét függvényt, hogy $f'(x_0) = 0$, de f-nek nincs helyi szélsőértéke x_0-ban.

(89) L'Hospital szabály alkalmazásával határozzuk meg az alábbi határértékeket:

$(a)\spadesuit \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos kx}{1-\cos mx}$; (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\ln(x+1)}$; (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{\sin x}$;

(d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x-\sin x}$; (e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{a^{\ln x}-x}$; (f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$;

$(g)\spadesuit \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{x-2}$; (h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}$; $(i)\spadesuit \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{7^x-5^x}{x^2}$;

(j) $\lim\limits_{x\to+0} 2x\ln x$; (k) $\lim\limits_{x\to+0} x^{\sin x}$; (l) $\lim\limits_{x\to 0} 2x \operatorname{ctg} 3x$;

$(m)\spadesuit \lim\limits_{x\to+0} (\sin x)^{\frac{1}{x}}$; (n) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)}$; (o) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-2x-1}{5x^2-x-4}$;

(p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$; (q) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x}{\sin^2 x}$; (r) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{9x+7+1/x^2}{7x-3}$;

(s) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{5x-1/x^2}$; (t) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$; $(u)\spadesuit \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$.

(90) Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenségeket

(a) $\log_a x < (x-1)\log_a e$ ha $x>1$ $a>1$;

$(b)\spadesuit \ln(1+x) > \dfrac{x}{x+1}$ ha $x>0$;

(c) $(ax+1)e^{-ax} < 1$ ha $a>0,\ x>0$;

(d) $\dfrac{1+x}{1-x} > e^{2x}$ ha $0<x<1$.

(91) ♠ A $K = 1$ cm kerületű téglalapok közül melyiknek a legnagyobb a területe?

(92) Az 1 m^2 területű téglalapok közül melyiknek a legnagyobb a kerülete?

(93) Az $r = 2$m sugarú körbe írható téglalapok közül melyiknek a legnagyobb a területe? És a kerülete?

(94) Határozza meg az $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ függvény infimumát és szuprémumát a $]0,\infty[$ intervallumon!

(95) ♠ Egy d átmérőjű kör alakú fatörzsből gerendát faragnak, melynek keresztmetszete b alapú és h magasságú téglalap. Mikor lesz a gerenda (bh^2-tel arányos) szilárdsága a maximális?

(96) ♠ Az R sugarú gömbbe írjunk maximális térfogatú hengert!

(97) ♠ Határozzuk meg azt a legnagyobb térfogatú kúpot, amelynek alkotója adott l hosszúságú!

(98) Egymással ϑ szöget bezáró egyenesek mentén egy-egy hajó halad állandó u ill. v sebességgel. Határozzuk meg a hajók közti legrövidebb távolságot, ha egy adott időpillanatban a hajók távolsága az egyenesek metszéspontjától számítva a ill. b!

(99) ♠ Egy személy x Ft bruttó jövedelme utáni $A(x)$ Ft adóját az

$$A(x) = a(bx+c)^p + kx$$

képlettel számolhatjuk, ahol a, b, c pozitív állandók, $p > 1, k \in \mathbb{R}$. Milyen jövedelem mellett lesz az átlagos adóhányad

$$\bar{A}(x) = \frac{A(x)}{x}$$

minimális?

(100) ♠ Adott n darab szám, $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Keressük meg azt az x számot amely ezeket legjobban közelíti abban az értelemben, hogy a

$$d(x) := (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \cdots + (x-a_n)^2$$

a lehető legkisebb legyen!

(101) ♠ Keressük meg az $f(x) = x^3 - 3x + 8$ függvény (globális) maximumát és minimumát a $[-1, 2]$ intervallumon.

(102) ♠ Egy cég egyféle terméket gyárt. Egy adott időszakban termelt és eladott x mennyiségű termékből $B(x)$ bevétele van, míg költségei $K(x)$-t tesznek ki (valamilyen pénzegységben). Az x mennyiségű termék eladásából származó $P(x)$ profit

$$P(x) = B(x) - K(x).$$

Technikai korlátok miatt a cég egy adott időszakban legfeljebb $\bar{x}$ mennyiségű terméket tud előállítani, így $x \in [0, \bar{x}]$.

Milyen $x \in [0, 500]$ mellett lesz a profit maximális, ha

(a)	$B(x) = 1840x,$	$K(x) = 2x^2 + 40x + 5000,$
(b)	$B(x) = 2240x,$	$K(x) = 2x^2 + 40x + 5000,$
(c)	$B(x) = 1840x,$	$K(x) = 2x^2 + 1940x + 5000.$

(103) ♠ Az előző feladatban legyen $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ahol $a > 0, b \geq 0, c, d > 0$ adott konstansok. Igazolja, hogy az

$$A(x) := \frac{K(x)}{x}$$

átlagos költségfüggvénynek van minimuma a $]0, \infty[$ intervallumban. Keressük meg ezt a minimumhelyet, ha $b = 0$.

(104) ♠ Legyen most $K(x) = ax^b + c$ ahol $a > 0, b > 1, c \geq 0$. Igazolja, hogy az átlagos költségfüggvénynek van minimuma a $]0, \infty[$ intervallumban, és keresse is meg ezt a minimumhelyet!

(105) ♠ Határozza meg az $x^2, e^x, \sin x$ függvények elaszticitását!

Kétváltozós függvények

(106) Határozza meg a következő függvények értelmezési tartományát (és ábrázolja a kapott halmazokat $\mathbb{R}^2$-ben):

(a) ♠ $f(x, y) = \ln xy;$

(b) $f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (a, b > 0);$

(c) $f(x, y) = \sqrt{\sin \pi(x^2 + y^2)};$

(d) $f(x, y) = \dfrac{1}{\arccos(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)};$

(107) Határozza meg, milyen alakzatot alkotnak az $f(x, y) = z_0$ egyenlet megoldásai, ha

(a) ♠ $f(x, y) = x^2 + y^2, \ z_0 = 25;$

(b) $f(x, y) = \cos \pi(x + y), \ z_0 = 1;$

(c) $f(x, y) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} xy, \ z_0 = 1;$

(d) $f(x, y) = \sin \pi(x^2 + y^2), z_0 = 0.$

(108) (a) Szemléltessük az $f(x, y) = x^2 + y^2 \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$ függvényt!

(b) Szemléltessük az $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$ függvényt!

(109) Létezik-e határértéke az ($\mathbb{R}^2$-beli) (a_n) sorozatnak ? Ha igen, határozza meg.

(a) ♠ $a_n = \left(\frac{n^2}{n^3+1}, \ 2^{-n}\right);$

(b) $a_n = \left(\frac{\sin n}{n}, \ \frac{2n}{n+1}\right);$

(c) $a_n = \left(n,\ \frac{1}{n^2}\right)$.

(110) Léteznek-e a következő függvényhatárértékek ? Ha igen, határozza meg.

(a) ♠ $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-2)} \dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$;

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,0)} \dfrac{\sin xy}{y}$;

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{1}{x-y}$;

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+xy-y}{x+xy+y}$.

(111) Folytonosak-e az alábbi, az egész $\mathbb{R}^2$-n értelmezett függvények?

(a) $f(x,y) = x^2 - y$;

(b) $f(x,y) = \sin xy$;

(c) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1)$.

(112) Folytonosak-e $(0,0)$-ban a következő függvények ?

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0); \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0); \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Többváltozós függvények differenciálása

(113) ♠ Számítsa ki a következő függvények első parciális deriváltjait, majd hozza őket egyszerűbb alakra.

(a) $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 - x + 1$;

(b) $f(x,y) = (x^3 - 2x^2y + y^2)^7$;

(c) $f(x,y) = xy\cos x^2y^2$;

(d) $f(x,y) = e^{x^2+y^2-1}$;

(e) $f(x,y) = (2x+y)^{2x-y}$.

(114) ♠ Számítsa ki a következő függvények másodrendű parciális deriváltjait.

(a) $f(x,y) = x^3 - 3x^2y + xy^2 + y^3$;

(b) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$;

(c) $f(x,y) = \sin x\,\cos y$;

(d) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$.

(115) ★ Mutassa meg, hogy az alábbi függvény parciális differenciálhányadosai az origóban nem folytonosak, de ott a függvény mégis differenciálható.

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(116) Az $y^6 + y^5 - x^2 - x + 4 = 0$ egyenlet implicit módon meghatározza az $y = f(x)$ függvényt, és $f(2) = 1$. Határozza meg $f'(2)$-et!

Kétváltozós függvények szélsőértékszámítása

(117) Határozza meg az alábbi függvények stacionárius pontjait és lokális szélsőérték helyeit, azok típusát és nagyságát.

(a) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x - 2y - 1$, $(x,y \in \mathbb{R})$;

(b) ♠ $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$, $(x,y \in \mathbb{R})$;

(c) $f(x,y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$, $(x,y \in \mathbb{R})$;

(d) ♠ $f(x,y) = \frac{20}{x} + \frac{50}{y} + xy$, $(x > 0, y > 0)$;

(e) $f(x,y) = e^{-(x^2-2xy+2y^2)}$, $(x,y \in \mathbb{R})$;

(f) $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^3 + y^2 + 5$, $(x,y \in \mathbb{R})$;

(g) $f(x,y) = x(x^2 + y - 1)^2$, $(x,y \in \mathbb{R})$;

(h) $f(x,y) = e^{x^2-y}(5 - 2x + y)$, $(x,y \in \mathbb{R})$;

(k) ♠ $f(x,y) = x^3 + y^3 - 75x - 12y + 7$, $(x,y \in \mathbb{R})$;

(l) ★ $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$, $(x > 0, y > 0)$.

(118) Határozza meg az alábbi függvényeknek a megadott korlátos, zárt (kompakt) D halmazon felvett minimumát és maximumát!

(a) $f(x,y) = x - 2y - 3$, $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y, x+y \in [0,1] \}$;

(b) ♠ $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + 3x - 3y$, $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, y \leq 2 - x \}$;

(c) ♠ $f(x,y) = x^2y(4 - x - y)$, $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, y \leq 6 - x \}$;

(d) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$, $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1 \}$;

(e) $f(x,y,z) = x + y + z$, $D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1 \}$.

(119) Egy vállalat kétféle terméket gyárt, A-t és B-t. Tegyük föl, hogy x egységnyi A és y egységnyi B termelésének napi költsége

$$C(x,y) = 0,04x^2 + 0,01xy + 0,01y^2 + 4x + 2y + 500 \quad \text{euro}.$$

Egységnyi A termék ára 15 euro, B ára 9 euro. Határozzuk meg x és y értékét úgy, hogy a profit maximális legyen.

Határozatlan integrál

(120) ♠ Az alapintegrálok, elemi átalakítások és lineáris helyettesítések segítségével számítsuk ki a következő integrálokat!

a) $\int \frac{1}{x^2}dx$

b) $\int \frac{x^2-1}{x+1}dx$

c) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$

d) $\int (1+e^{x-1})dx$

e) $\int (x^4+3x^2+5x+2)\,dx$

f) $\int (1-x^2)^2dx$

g) $\int x(1-x)(1-2x)\,dx$

h) $\int (\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3})\,dx$

i) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$

j) $\int \frac{1+x^2}{x^2}\,dx$

k) $\int (t^2+6t-5)dt$

l) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx$

m) $\int \left(2e^x+\frac{5}{x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

n) $\int \frac{1}{x+5}\,dx$

o) $\int (2x-3)^{10}\,dx$

p) $\int \sqrt[3]{1-3x}\,dx$

q) $\int \frac{1}{\sqrt{2-5x}}\,dx$

r) $\int \frac{1}{5+2x^2}\,dx$

s) $\int \frac{1}{2+3x^2}\,dx$

t) $\int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}\,dx$

(121) Az

$$\int f^\alpha f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ (\alpha \neq -1) \text{ és } \int \frac{f'}{f} = \ln|f|$$

formulák segítségével határozzuk meg a következő integrálokat!

a) $\int \frac{x+1}{x^2+2x-1}dx$ ♠

b) $\int \frac{x-2}{x(x-4)}dx$

c) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$ ♠

d) $\int \operatorname{tg} x\,dx$ ♠

e) $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx$

f) $\int \frac{8x-7}{4x^2-7x+11}dx$

g) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx$

h) $\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

i) $\int \frac{x}{2+3x^2}\,dx$

j) $\int \frac{5x}{\sqrt{1-2x^2}}\,dx$

k) $\int \frac{2x+5}{1+3x^2}\,dx$ ♠

l) $\int \frac{1+x}{2+3x^2}\,dx$

(122) Számítsuk ki (parciális integrálással) a következő határozatlan integrálokat !

a) $\int xe^x dx$ ♠

b) $\int x^3 e^x dx$

c) $\int x \sin x\, dx$

d) $\int x \ln x\, dx$ ♠

i) $\int (x^3 + 3x^2 + 1)e^x\ dx$

j) $\int (x^2 + 1) \cos x\ dx$

k) $\int (x^3 - 3x^2 - 7) \sin x\ dx$

l) $\int (x^2 + 1) \ln x\ dx$

e) $\int e^x \cos x\, dx$ ♠

f) $\int e^x \cos^2 x\, dx$ ♠

g) $\int e^{-x} \sin x\, dx$

h) $\int \ln x\, dx$

m) $\int x^7 \ln x\ dx$

n) $\int x \operatorname{arc\,tg} x\ dx$

o) $\int \operatorname{arc\,tg} x\ dx$ ♠

p) $\int \arcsin x\ dx$

(123) Alkalmas helyettesítésekkel határozzuk meg a következő határozatlan integrálokat!

a) $\int xe^{-x^2} dx$ ♠

b) $\int \frac{3x}{(2+3x^2)^3} dx$

c) $\int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$ ♠

d) $\int \frac{x}{(8x^2+27)^{\frac{2}{3}}} dx$

e) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

f) $\int \sin^3 x \cos x\, dx$ ♠

g) $\int \frac{3+x}{\sqrt{5-2x^2}}\ dx$

h) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\ dx$

i) $\int \frac{\operatorname{arc\,tg}^3 x}{1+x^2}\ dx$ ♠

j) $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}\ dx$

(124) Integráljuk a következő racionális törtfüggvényeket!

a) $\int \frac{x^3}{x^2+1} dx$ ♠

b) $\int \frac{1}{x^2-2x-3} dx$ ♠

c) $\int \frac{1}{x^2+2x+6} dx$

d) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10} dx$ ♠

e) $\int \frac{5}{(x-2)(x+5)}\ dx$ ♠

f) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\ dx$

g) $\int \frac{x}{x^2-2x-3}\ dx$

h) $\int \frac{3x+1}{x^2+5x+6}\ dx$

(125) Bontsa fel a

$$♠\ \frac{2x-1}{x^3(x+2)^2(x^2+1)}, \quad \frac{x^5-1}{(x-1)^3(x+2)^2(x^2+2x+2)}$$

racionális törteket parciális törtekre, és **az együtthatók kiszámolása nélkül** (határozatlan együtthatókkal) határozza meg e függvények integrálját!

(126) Alkalmas helyettesítéssel számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+2\cos x}dx \quad (t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+(\sqrt{x+1})^3}dx$ ♠

c) $\displaystyle\int \frac{e^{4x}}{1+e^x}dx$

d) $\displaystyle\int \sqrt{e^x-1}dx \quad (e^x-1=t^2)$

e) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x dx \quad (t = \operatorname{tg} x)$

f) $\displaystyle\int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx$

g) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}dx \quad (x=\sin t)$

h) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\, dx$ ♠

i) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x+2)^4}dx$

k) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$

l) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}$

m) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\, dx$ ♠

n) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$

o) $\displaystyle\int \frac{dx}{5+3\cos x}$

p) $\displaystyle\int \sin(\ln x)\, dx$ ♠

Határozott integrál

(127) ♠ Számítsuk ki a következő határozott integrálokat!

$$\int_{22}^{3} 1\, dx \; ; \quad \int_{0}^{2\pi} \sin x\, dx \; ; \quad \int_{\sqrt{2}}^{-1} \cos x\, dx \; ; \quad \int_{-1}^{\pi} x^2\, dx \; ; \quad \int_{1}^{100} \frac{1}{x}\, dx.$$

(128) Legyen

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{ha} \quad x<1 \\ 3 & \text{ha} \quad x=1 \\ -1 & \text{ha} \quad x>1 \end{cases} \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} -1 & \text{ha} \quad x<0 \\ 2x & \text{ha} \quad x>0. \end{cases}$$

Mennyi a következő integrálok értéke ?

$$\int_{-5}^{3} f(x)\, dx \; ; \quad \int_{-1}^{2} g(x)\, dx.$$

(129) ♠ Számítsuk ki a következő integrálokat!

$$\int_{0}^{3} x^2e^{2x}\, dx \; ; \quad \int_{-2}^{2} \frac{2x}{(x^2-100)^7}\, dx \; ; \quad \int_{\pi/3}^{\pi/2} \operatorname{ctg}(x)\, dx.$$

(130) Számítsuk ki a következő határozott integrálokat!

$$\int_{2}^{3} \sqrt{x}\; e^{\sqrt{x}}\, dx \; ; \quad ♠ \int_{4}^{12} \frac{1}{1-x^2}\, dx \; ; \quad \int_{0}^{e} \frac{e^{4x}}{1+e^x}\, dx \; ; \quad \int_{2}^{4} \frac{1}{x^3-x}\, dx.$$

Improprius integrálok

(131) Léteznek-e a következő improprius integrálok ? Ha igen, számítsuk ki őket!

$$♠ \int_{1}^{\infty} \ln x\, dx \; ; \quad ♠ \int_{0}^{e} \ln x\, dx \; ; \quad \int_{-1}^{1} \ln|x|\, dx \; ; \quad \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x}\, dx \; ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x}\, dx \; ; \quad ♠ \int_{+\infty}^{0} e^{-x}\, dx \; ;$$

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^x \, dx \ ; \quad \int\limits_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^2} \, dx \ ; \quad \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2} \, dx \ ; \quad \int\limits_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx \ ; \quad \int\limits_{2}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} \, dx \quad \spadesuit \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

(132) Léteznek-e az alábbi improprius integrálok ? Ha igen, számítsuk ki őket !

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^3} \ ; \quad \int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{(1-x)^2} \ ; \quad \int\limits_{4}^{\infty} x e^{-2x} \, dx \ ; \quad \spadesuit \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2+6x}} \ ;$$

$$\int\limits_{0}^{\infty} x^2 e^{-x/3} \, dx \ ; \quad \int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x}} \ ; \quad \spadesuit \int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2-x}} \ ; \quad \int\limits_{0}^{1} \frac{x+1}{\sqrt{x}} \, dx.$$

Az integrál alkalmazásai

(133) Egy munkás bére egy adott év n-edik napján

$$b(n) = 500 + n \cdot 0,5 + n^2 \cdot 0,001$$

forint. Mennyit keres így egy év alatt? Helyes-e az integrálszámítást használni a feladat megoldásához?

(134) ♠ Egy üzem raktárában r egység anyagmennyiség van, és ezt T nap alatt dolgozzák fel. A rendelkezésre álló adatok szerint a raktárkészlet fogyásának grafikonja jól közelíthető egy $y = a(x-b)^2$ parabolával a $[0, T]$ intervallumon.
Számítsuk ki a -t és b -t, majd határozzuk meg a T napra fizetendő raktározási költségeket, ha egy egység raktározása R forintba kerül naponként .

(135) Legyen $A = \{(x, y) \mid y \geq x^2\}$ és $B = \{(x, y) \mid y \leq x + 2\}$.
Mennyi $A \cap B$ területe ?

(136) Mennyi az $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis területe ?

(137) ♠ A $t = 0$ időpillanatban kezdjük el kitermelni az olajat egy olyan kútból, amely 10^5 hordó olajat taralmaz. A kitermelés sebessége a t időpillanatban $u(t) = t^2 + t$. Mikor merül ki a kút?

Kettős integrál

(138) ♠ Számítsuk ki a következő integrálokat: $\displaystyle\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{0}^{1} xy \, dx \, dy \ ; \quad \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{2} e^{x+y} \, dy \, dx \ ; \quad \int\limits_{a}^{b}\int\limits_{c}^{d} xy^2 \, dx \, dy$

(139) Integrálja a következő függvényeket a megadott A tartományon !

♠ $\iint\limits_A (x^2+y^2)\,dx\,dy$ $\qquad A=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1\ ,\ x^2\le y\le\sqrt{x}\}$,

$\iint\limits_A (ax+by+c)\,dx\,dy$ $\qquad A=\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-1)^2\le 2\}$,

♠ $\iint\limits_A \cos(x+y)\,dx\,dy$ $\qquad A=\{(x,y)\mid x\ge 0\ ,\ y\ge 0\ ,\ x+y\le\pi\}$,

$\iint\limits_A (x^2+y^2+1)\,dx\,dy$ $\qquad A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\ ,nx\ge y\}$ $\quad$ ($n>0$ adott).

(140) ♠ Határozza meg a $\iint\limits_A x\,dxdy$ kettős integrál értéket, ahol
$A=\{\ (x,y)\ |2x^2-y\le 0,\ 2-2x^2\ge y\ \}$!

(141) Határozza meg a $\iint\limits_A x\,dxdy$ kettős integrál értéket, ahol A az $y=x^2-3x$ és az $y=-x^2-x+4$ parabolák által közrezárt tartomány!

(142) ♠ Határozza meg a $\iint\limits_A (x^2+2y)\,dxdy$ kettős integrál értéket, ahol A az $x=0$, $y=0$ és az $x+2y=2$ egyenletű egyenesek által határolt háromszög!

(143) Határozza meg a $\iint\limits_A e^{\frac{x}{y}}\,dxdy$ kettős integrál értéket, ahol A az $x=0$, $y=1$ és az $y^2=x$ egyenletű görbék által határolt síkrész!