Numerikus matematika labor

Baran Ágnes

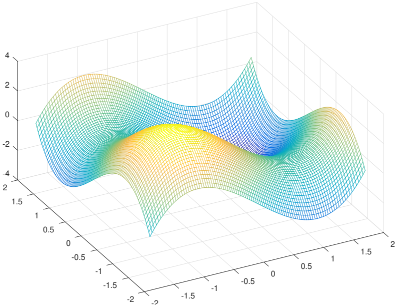
Optimalizálás 2.

Felületek ábrázolása

Példa

Rajzoltassuk ki az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 - 3x_2$ felületet a $[-2, 2] \times [-2, 2]$ tartomány felett.

```
xx=linspace(-2,2);
yy=xx;
[X,Y]=meshgrid(xx,yy);
Z=X.^3+Y.^3-3*X-3*Y;
figure; mesh(X,Y,Z)
```

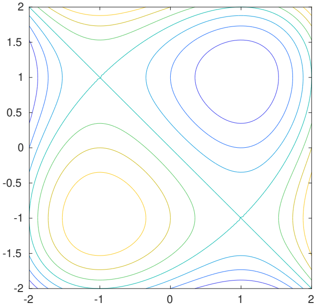


Megjegyzés: a **mesh** helyett használhattuk volna az **fmesh** függvényt is (akkor az ábrázolandó függvényt másképp kell definiálni).

Példa

Rajzoltassuk ki az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 - 3x_2$ felület szintvonalait a $[-2, 2] \times [-2, 2]$ tartomány felett.

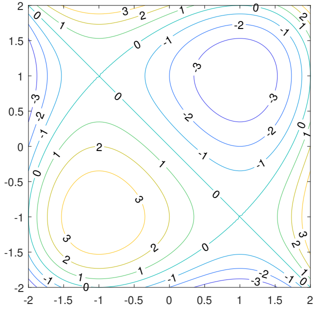
```
xx=linspace(-2,2);
yy=xx;
[X,Y]=meshgrid(xx,yy);
Z=X.^3+Y.^3-3*X-3*Y;
figure; contour(X,Y,Z)
axis equal
```



Megjegyzés: a `contour` helyett használhattuk volna az `fcontour` függvényt is (akkor az ábrázolandó függvényt másképp kell definiálni).

A szintvonalakra ráírathatjuk a „magassági számokat" is:

```
xx=linspace(-2,2);
yy=xx;
[X,Y]=meshgrid(xx,yy);
Z=X.^3+Y.^3-3*X-3*Y;
figure; contour(X,Y,Z,'ShowText','on')
axis equal
```



Többváltozós függvények minimalizálása

Példa

Határozzuk meg az $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 - 3x_2$ függvény gradiensét és a stacionárius pontjait.

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - 3 \\ 3x_2^2 - 3 \end{bmatrix}$$

Stacionárius pont: ahol $\nabla f(x) = 0$.

A függvénynek 4 stacionárius pontja van:

$$(-1, -1), \quad (-1, 1), \quad (1, -1), \quad (1, 1)$$

Példa

Rajzoltassuk ki az $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 - 3x_2$ függvény szintvonalait és a gradiens mezőt a $[-2, 2] \times [-2, 2]$ tartomány felett.

A gradiens mező rajzolásához nagyobb beosztású rácsot használjunk, pl. itt 11-11 pontot veszünk fel mindkét tengelyen:

```
xx=linspace(-2,2,11); yy=xx;
[X,Y]=meshgrid(xx,yy);
```

Ezekben a pontokban meg kell adnunk a gradiensvektor koordinátáit:

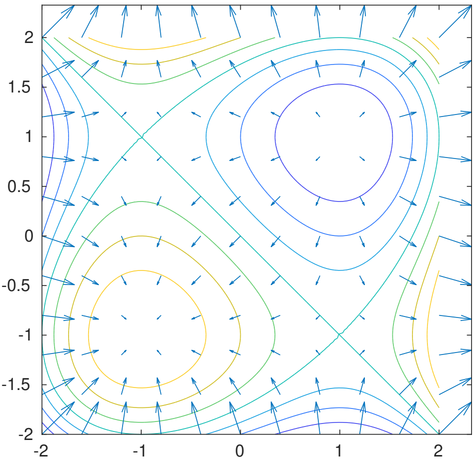
```
dX=3*X.^2-3;
dY=3*Y.^2-3;
```

A nyilak kirajzolásához a `quiver` függvényt használjuk. (Első két input érték a nyilak talppontjának x- és y-koordinátái, második két input érték a nyilak hegyének x- és y-koordinátái.

```
quiver(X,Y,dX,dY)
```

A szintvonalak és a gradiensmező egyben:

```
%a szintvonalak
xx=linspace(-2,2); yy=xx;
[X,Y]=meshgrid(xx,yy);
Z=X.^3+Y.^3-3*X-3*Y;
figure; contour(X,Y,Z)
axis equal
%a gradiensmezo
xx=linspace(-2,2,11); yy=xx;
[X,Y]=meshgrid(xx,yy);
dX=3*X.^2-3;
dY=3*Y.^2-3;
hold on; quiver(X,Y,dX,dY)
```

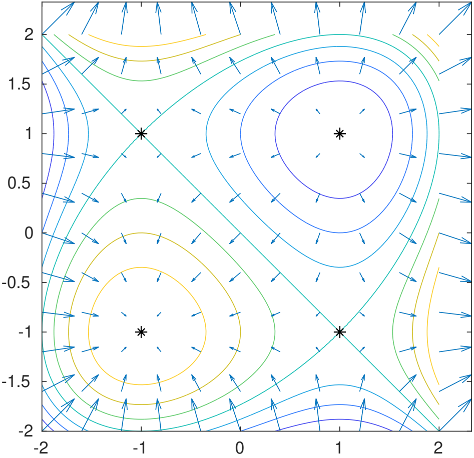


Az $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 - 3x_2$ függvény szintvonalai és a gradiensmező.

A gradiensmező kirajzolásához használhatjuk a beépített gradient függvényt is. (Ekkor nem kell kiszámolnunk a gradienst, a Matlab numerikusan közelíti azt)

```
%a szintvonalak
xx=linspace(-2,2); yy=xx;
[X,Y]=meshgrid(xx,yy);
Z=X.^3+Y.^3-3*X-3*Y;
figure; contour(X,Y,Z)
axis equal

%a gradiensmezo
xx=linspace(-2,2,11); yy=xx;
[X,Y]=meshgrid(xx,yy);
Z=X.^3+Y.^3-3*X-3*Y;
[dX,dY]=gradient(Z);
hold on; quiver(X,Y,dX,dY)
```

Tegyük rá az ábrára a stacionárius pontokat is!

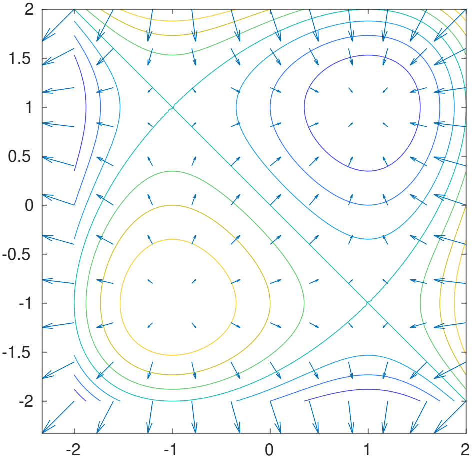


Az előző ábrán megfigyelhetjük, hogy

- a gradiensvektor merőleges az adott pontbeli szintvonalra
- a vektorok hossza a gradiens nagyságát, az iránya a gradiens irányát mutatja
- a stacionárius pontokban a gradiensvektor hossza 0

A gradiensvektor az adott pontban a legmeredekebb emelkedés irányába mutat, a (-1)-szerese (a negatív gradiens) pedig a legmeredekebb csökkenés irányába.

Ha a gradiensmező helyett a negatív gradiensmezőt rajzoltatjuk ki, akkor a nyilak a csökkenés irányába mutatnak.



Az $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 - 3x_2$ függvény szintvonalai és a negatív gradiensmező.

Példa

Határozzuk meg az $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 - 3x_2$ függvény stacionárius pontjainak típusát!

A függvény Hesse-mátrixa:

$$H(x) = \begin{bmatrix} 6x_1 & 0 \\ 0 & 6x_2 \end{bmatrix}$$

Ha $x = (-1, -1)$, akkor

$$H(x) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix},$$

így $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, tehát ez a pont lokális maximumhely.

Ha $x = (-1, 1)$, akkor

$$H(x) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix},$$

így $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 < 0$, tehát ez a pont nyeregpont.

Ha $x = (1, -1)$, akkor

$$H(x) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix},$$

így $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$, tehát ez a pont nyeregpont.

Ha $x = (1, 1)$, akkor

$$H(x) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix},$$

így $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, tehát ez a pont lokális minimumhely.

1. feladat

Számolja ki az alábbi függvények gradiensét és a stacionárius pontjaikat. Rajzoltassa ki a felületeket, illetve egy másik ábrán a függvény szintvonalait és a negatív gradiens mezőt. Ezek alapján mit tud mondani a stacionárius pontok típusáról?

(a) $f(x_1, x_2) = 10 - x_1^2 - x_2^2$
(b) $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 - 2x_1 x_2^2 + 3x_1 x_2 + 2$
(c) $f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_1^2 x_2^2 - x_1 + x_2^2$

Többváltozós függvények minimalizálása Matlab-bal

Az `fminsearch` vagy az `fminunc` függvényeket használhatjuk.

Példa: Keressük meg az $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 - 3x_2$ függvény egy lokális minimumhelyét.

Mindkét függvény hívásához meg kell adnunk a minimumhely egy kezdeti közelítését.

```
>> f=@(x) x(1)^3+x(2)^3-3*x(1)-3*x(2);
>> [xopt,fopt]=fminsearch(f,[0.5,0.5])

xopt =
    0.99996    1.00000

fopt =
   -4.0000
```

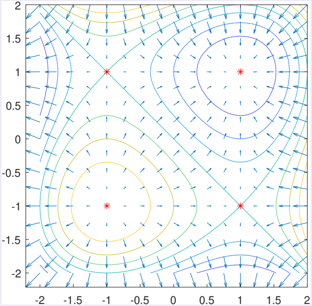
Az `fminunc` függvénnyel:

```
>> f=@(x) x(1)^3+x(2)^3-3*x(1)-3*x(2);
>> [xopt,fopt]=fminunc(f,[0.5,0.5])

xopt =
   1.0000   1.0000

fopt = -4.0000
```

A kezdővektor megválasztása erősen befolyásolhatja az algoritmus sikeres lefutását.

2. feladat

Vizsgáljuk meg milyen eredményt kapunk az `fminunc` `fminsearch` függvényeket az $f(x) = x_1^3 - 3x_1 + x_2^3 - 3x_2$ függvénnyel és az alábbi kezdővektorokkal meghívva:



$$x_0 = [-0.5, -0.5],$$
$$x_0 = [-0.5, 0],$$
$$x_0 = [-1, -0.5],$$
$$x_0 = [-1.5, -1.5]$$

3. feladat

Matlab segítségével határozza meg azt a téglatestet, melynek térfogata 1000 cm^3 és éleinek összhossza minimális.

4. feladat (szorgalmi)

Egy cég 20000 \$-t költött egy új termék kifejlesztésére. A termék előállítási költsége darabonként 2 \$. Egy piackutató szerint, ha a cég R \$-t költene reklámra, és ezután a terméket darabonként A \$-ért árulná, akkor a kereslet

$$2000 + 4\sqrt{R} - 20A$$

darab lenne. Mennyit érdemes reklámra költeni, és milyen áron érdemes kínálni a terméket, ha a hasznot maximalizálni szeretnék? Használja a Matlab-ot!

5. feladat

Rajzoltassa ki a megadott tartomány felett az alábbi kétváltozós függvényeket, a szintvonalaikat, a negatív gradiensmezőt és közelítse az adott tartományon belül a minimumhelyüket.

- $f(x_1, x_2) = \frac{1}{6}x_1^3 - x_1 + \frac{1}{4}x_1 x_2^2$, ha $x \in [-2.5, 2.5]^2$
- $f(x_1, x_2) = \sin(x_1)\cos(x_2)$, ha $x \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$
- $f(x_1, x_2) = x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$, ha $x \in [-1.5, 1.5]^2$

6. feladat (szorgalmi)

Egy téli üdülőövezetben a mentőhelikopter bázisállomását úgy szeretnénk elhelyezni, hogy az n adott síközponttól mért legnagyobb távolsága minimális legyen. Írjon egy Matlab-függvényt, melynek input paramétere az az $A \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ mátrix, melynek soraiban a síközpontok koordinátái találhatóak, output paramétere pedig a mentőhelikopter bázisállomásának koordinátáit tartalmazó kételemű vektor.

7. feladat (szorgalmi)

Adott egy bolthálózat n üzletének elhelyezkedése. Helyezzük el az áruraktárat úgy, hogy az üzletektől vett távolságainak összege minimális legyen. Írjon egy Matlab-függvényt, melynek input paramétere az az $A \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ mátrix, melynek soraiban az üzletek koordinátái találhatóak, output paramétere pedig az áruraktár koordinátáit tartalmazó kételemű vektor.