A mesterséges intelligencia alapjai

valószínűségi következtetés

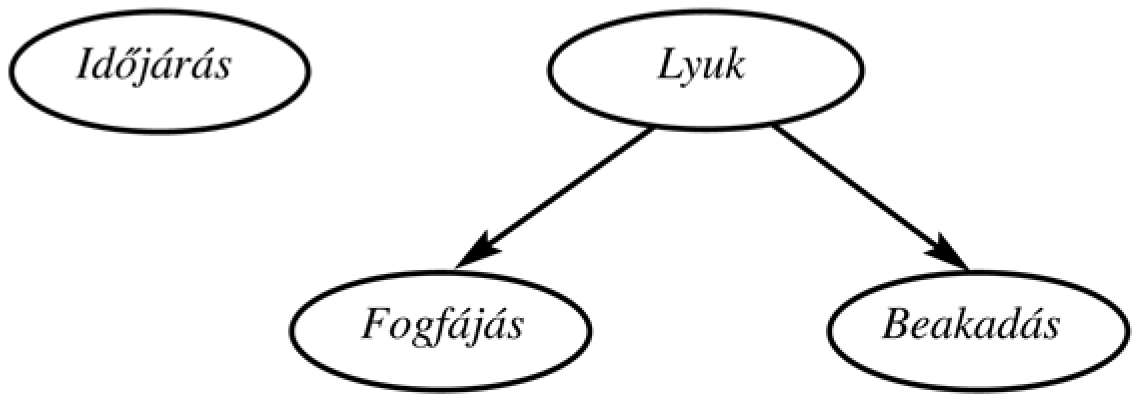
Áttekintés

- szintaxis
- szemantika
- egzakt következtetés felsorolással
- egzakt következtetés változó eleminációval

Bayes-háló

- irányított gráf, ahol minden csomóponthoz számszerű valószínűségi információk vannak hozzárendelve
- minden egyes csomópont egy valószínűségi változónak felel meg
- a hálózat topológiája (élek és csomópontok) megadja a tárgyterületen fennálló feltételes függetlenségi kapcsolatokat
- az X csomópontot az Y csomóponttal összekötő nyíl intuitív jelentése: X-nek közvetlen befolyása van Y-ra (azt mondjuk, hogy X szülője az Y-nak)
- minden X_i csomóponthoz tartozik egy $P(X_i|\text{Szülők}(X_i))$ feltételes valószínűségeloszlás, mely megadja a szülők hatását a csomóponti változóra
  - legegyszerűbb esetben ezt egy feltételes valószínűségi táblázat segítségével adjuk meg

Példa Bayes-hálóra

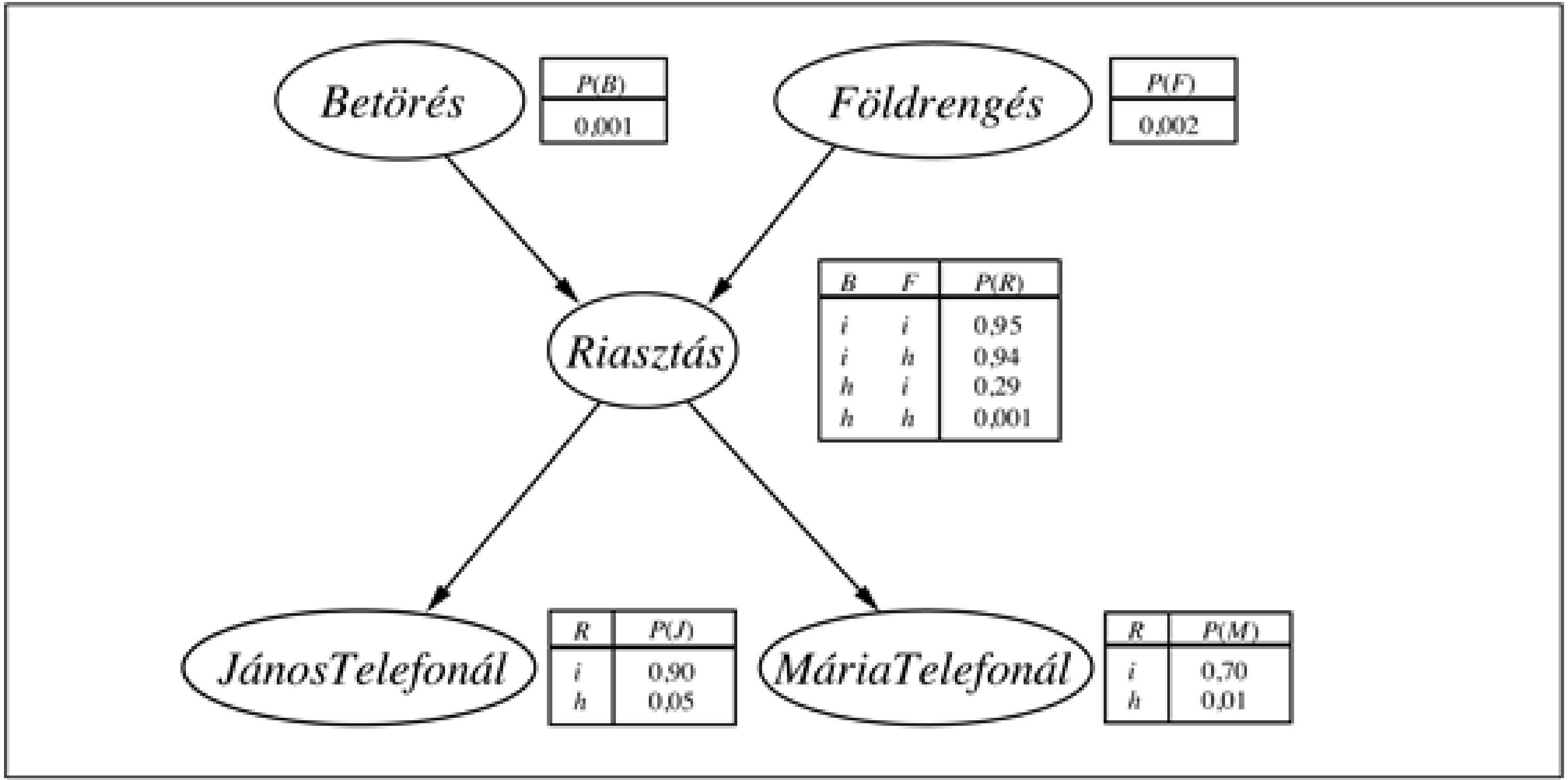


- az Időjárás független a többi változózól
- a Fogfájás és Beakadás feltételesen függetlenek a Lyuk ismeretében
- a Lyuk közvetlen oka a Fogfájásnak és a Beakadásnak
- nincs direkt kapcsolat a Fogfájás és Beakadás között

Földrengés példa

- A munkahelyen felhív János, hogy megszólalt a riasztóm, viszont Mária nem telefonál. Néha egy kisebb földrengés is elindítja a riasztót. Van betörő a lakásomban?
- Változók: Betörés, Földrengés, Riasztás, JánosTelefonál, MáriaTelefonál
- A háló topológiája tartalmazza az okozati ismereteinket:
  - a betörés beindíthatja a riasztót
  - a földrengés beindíthatja a riasztót
  - a riasztó miatt Mária telefonálhat
  - a riasztó miatt János telefonálhat

Teljes Bayes-háló (feltételes valószínűségekkel)



$P(B)$
0,001

$P(F)$
0,002

B	F	$P(R)$
i	i	0,95
i	h	0,94
h	i	0,29
h	h	0,001

R	$P(J)$
i	0,90
h	0,05

R	$P(M)$
i	0,70
h	0,01

Tömörség

- a logikai, *k* logikai szülős X_i valószínűségi változó feltételes valószínűségi táblázatában 2^k sor van (minden lehetséges kombináció esetére)
- minden sorban szükséges egy *p* valószínűség X_i = igaz esetére (X_i = hamis esetén a valószínűség *1-p*)
- ha egyik változónak sincs k-nál több szülője, akkor a teljes hálóban $O(n \times 2^k)$ számra van szükség
- a teljes együttes eloszlás $O(2^n)$ számot igényel, a háló pedig lineáris n-ben
- a betörés táblázatában 1+1+4+2+2=10 számra van szükség, nem pedig 31-re

Együttes valószínűség-eloszlás

- $P(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n)$ helyett csak $P(x_1,\ldots x_n)$-et írunk
- $P(x_1,\ldots x_n) = \prod^{n}_{i=1} P(x_i|\text{szülők}(X_i))$
    - szorzatszabály felhasználásával, ahol megfelelő sorrendjét kell venni a változóknak
- például $P(j \wedge m \wedge r \wedge \neg b \wedge \neg f) = P(j|r)P(m|r)P(r|\neg b, \neg f)P(\neg b)P(\neg f) = 0{,}9 \times 0{,}7 \times 0{,}001 \times 0{,}999 \times 0{,}998 \simeq 0{,}00063$

Valószínűségi következtetés

- Alapfeladat: kiszámítja a célváltozók egy halmazának a posteriori valószínűség-eloszlását egy adott megfigyelt esemény esetén, azaz bizonyítékváltozók egy halmazához történő értékhozzárendelés esetén
- egyszerű kérdések: $P(X_i|E = e)$
  - P(NincsBenzin|Mutató=üres, Áram=van, Indul = nem)
- $P(X_i,X_j|E = e) = P(X_i|E = e)P(X_j|X_i,E = e)$
- Optimális döntés: döntési háló, hasznosságértékekkel
  - valószínűségi következmény szükséges a P(kimenet|művelet,tény) meghatározásához
- Információ értéke: melyik tényt kell megvizsgálni?
- érzékenység vizsgálat: mely valószínűségi érték a legkritikusabb?
- magyarázat: miért kell egy új önindító?

Egzakt következtetés felsorolással

- Ez előző fóliasorozat bemutatta, hogy bármely feltételes valószínűség kiszámítható a teljes együttes eloszlás tagjainak összegzésével.
- $\mathit{P}(\mathrm{B}|\mathrm{j},\mathrm{m})=\mathit{P}(\mathrm{B},\mathrm{j},\mathrm{m})/\mathrm{P}(\mathrm{j},\mathrm{m})=\alpha \mathit{P}(\mathrm{B},\mathrm{j},\mathrm{m})=\alpha\Sigma_{\mathrm{f}}\Sigma_{\mathrm{r}}\mathit{P}(\mathrm{B},\mathrm{f},\mathrm{r},\mathrm{j},\mathrm{m})$
- teljes együttes eloszlások átírása a táblázatok elemeit felhasználva:
- $\mathit{P}(\mathrm{B}|\mathrm{j},\mathrm{m}) = \alpha\Sigma_{\mathrm{f}}\Sigma_{\mathrm{r}}\mathit{P}(\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{f})\mathit{P}(\mathrm{r}|\mathrm{B},\mathrm{f})\mathrm{P}(\mathrm{j}|\mathrm{r})\mathrm{P}(\mathrm{m}|\mathrm{r})=\alpha \mathit{P}(\mathrm{B})\Sigma_{\mathrm{f}}\mathrm{P}(\mathrm{f})\Sigma_{\mathrm{r}}\mathit{P}(\mathrm{r}|\mathrm{B},\mathrm{f})\mathrm{P}(\mathrm{j}|\mathrm{r})\mathrm{P}(\mathrm{m}|\mathrm{r})$
- mélységi rekurziós kiértékelés esetén O(n) hely- és O(d^n) időbonyolultság

Felsorolás algoritmusa – 1

function Enumeration-Ask(X, e, bn): returns X input feletti eloszlás

X: kérdés változója

e: E változók megfigyelt értékei

bn: X U E U Y változójú Bayes-háló

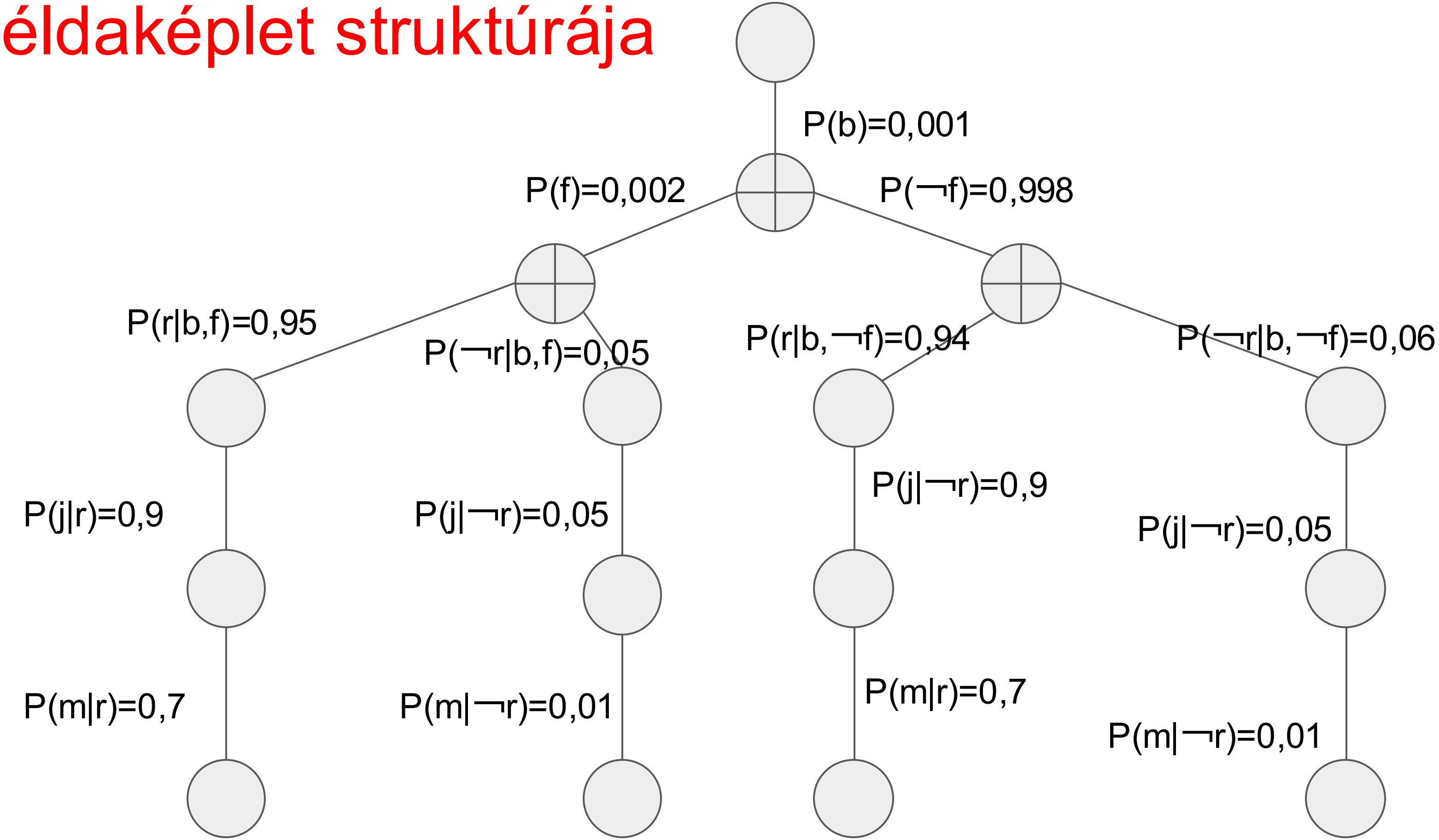
Q(X) := X feletti eloszlás, kezdetben üres

```
for each x_i ∊ X do
    extend e with x_i for X
    Q(x_i) := Enumerate-All(Vars[bn], e)
return Normalize(Q(X))
```

Felsorolás algoritmusa – 2

```
function Enumerate-All(vars, e): egy valós szám
    if Empty?(vars) then return 1.0
    Y := First(vars)
    if Y has value y in e
        return P(y|Parent(Y))*Enumerate-All(Rest(vars), e)
    else return sum_y P(y|Parent(Y))*Enumerate-All(Rest(vars), e_y)
        where e_y is e extended with Y=y
```

Példaképlet struktúrája



Számítás

- végighaladva az összes ágon $P(b|j,m)=\alpha\ 0{,}0005922$
- hasonló táblázattal $P(\neg b|j,m)=\alpha\ 0{,}0014919$
- ezért $P(B|j,m) = \alpha\ (0{,}0005922;\ 0{,}0014919) = (0{,}284;\ 0{,}716)$
  - azaz a betörés valószínűsége 28%

Változó elemináció

- a számolást jobbról-balra végezzük, és tároljuk a köztes eredményeket
- $P(B|j,m) = \alpha P(B)\Sigma_f P(f)\Sigma_r P(r|B,f)P(j|r)P(m|r)$
- $= \alpha P(B)\Sigma_f P(f)\Sigma_r P(r|B,f)P(j|r)f_M(r)$
- $= \alpha P(B)\Sigma_f P(f)\Sigma_r P(r|B,f)f_J(r)f_M(r)$
- $= \alpha P(B)\Sigma_f P(f)\Sigma_r f_r(r,b,f)f_J(r)f_M(r)$
- $= \alpha P(B)\Sigma_f P(f)f_{\underline{r}JM}(b,f)$ (r *kiszummázása*)
- $= \alpha P(B)f_{frJM}(b)$ (f *kiszummázása*)
- $= \alpha\ f_B(b)\ f_{frJM}(b)$

Változó eleminác ió – műveletek

- változó **kiszummázása** a faktorok szorzatából
  - minden konstans faktort vigyünk a szummán kívülre
  - az összegzés mátrixoknak **pontokénti szorzás**ával történik
- $f_M(R) = (\ P(m|r);\ P(m|\neg r)\ )^T = (0{,}7;\ 0{,}01)^T$
- $f_J(R) = (\ P(j|r);\ P(j|\neg r)\ )^T = (0{,}9;\ 0{,}05)^T$
- $f_R(R,B,F) = ((0{,}95;0{,}94;0{,}29;0{,}001);(0{,}05;0{,}06;0{,}71;0{,}999))$
- $f_{rJM}(B,F) = (0{,}5985;\ 0{,}5922;\ 0{,}1830;\ 0{,}0012)$
- $f_{frJM}(B) = (0{,}5922;\ 0{,}0015)$

Változó elemináció algoritmusa

```
function Elimination-Ask(X, e, bn): X feletti eloszlás
    X: kérdés változója,
    e: evidencia (mint esemény)
    bn: Bayes-háló, mely megadja a P(X1,...,Xn) együttes eloszlást

    factors:=[], vars:= Reverse(Vars[bn])
    for each var in vars do
        factors:= [Make-Factor(var, e)| factors]
        if var is a hidden variable then factors:= Sum-Out(var, factors)
    return Normalize(Pointwise-Product(factors))
```

További lehetőségek

- nagy, többszörösen összekötött hálóban nehézkes az egzakt következtetés
  - közelítő módszerek, pl. **Monte Carlo**
- minta generálása az a priori együttes eloszlásból
- a válasz a minta megszámolásán alapul
- **elutasító mintavételezés**
  - elutasítjuk azokat a mintákat, melyen nem illeszkednek az evidenciához
- **valószínűségi súlyozás**
  - evidenciát rögzíti, csak a maradék változókat generálja
- **MCMC algoritmus**
  - véletlen bolyongás