**Gáll József**

# Pénzügyi modellek és alkalmazások

**Debreceni Egyetem**

**2021**

A tananyag elkészítését az EFOP-3.4.3-16-2016-00021 számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

# Tartalomjegyzék

# Előszó

Ez a jegyzet klasszikus pénzügyi bevezető fogalmaktól indulva tárgyal fontosabb pénzügyi problémákat és modelleket. Több évnyi pénzügyi és pénzügyi matematikai kurzusok oktatásának tapasztalata alapján írom ezt a jegyzetet.

Pénzügyi tárgyak oktatása számos egyetemi program keretében megvalósul, így találhatunk a klasszikus gazdaságtudományi területen túl számos mérnöki, informatikai –különösen gazdaságinformatikai–, matematikus és egyéb képzésekben is ilyen jellegű tárgyakat. Másrészt jegyezzük meg, hogy több kiváló tankönyv ismert a nemzetközi piacon, mely klasszikus pénzügyi, vállalati pénzügyi és pénzügyi matematikai területeken íródott. Ezen művek egy része már sokadik kiadását éli meg, több szerző több évtizedes oktatási tapasztalatát tükrözve. Itt kiemelem Brealy, Myers és Allen [11] bevezető pénzügyi könyvét klasszikus pénzügyi és vállalati pénzügyi témákban, illetve Hull [35] kiváló monográfiáját származtatott értékpapírok árazása és kockázatkezelés témakörében. Ezen könyvek széles célcsoportnak készült bevezető jellegű monográfiák, melyek kevés előismeretet feltételeznek, így elemi matematikai, főként bevezető szintű valószínűségszámítási és statisztikai ismeretekkel kényelmesen feldolgozhatóak; továbbá nyilván elemi gazdaságtudományi ismereteket, főként mikroökonómiai és kevés üzleti ismeretet is feltételeznek, de ezek is számos alapkurzuson elsajátíthatóak. A fenti két kiváló tankönyv magyar fordításai is megjelentek (ld. [12] és [34]), igaz, azóta több frissített kiadása jelent meg az eredeti angol nyelvű tankönyveknek. A fentiekben leírt okok miatt használjuk kollégáimmal is ezeket a tankönyveket bevezető pénzügyi illetve pénzügyi matematikai témakörökben egyetemi kurzusokon, így többek között gazdaságinformatikus képzések kurzusain. Természetesen a fentiekhez nagyon hasonló célt szolgáló, szintén kiváló –tipikusan más kiadók által jegyzett– monográfiákat is említhetnénk még a nemzetközi könyvpiacról.

Ahogy fent említettem, gazdaságtudományon belül elsősorban mikroökonómiai ismeretek segíthetik az olvasót a pénzügyi alapok megértésében. Ehhez szintén található számos kiváló monográfia, én Varian [61] művét ajánlom, mely számos egyetemi kurzus tankönyvét is adja és szintén elérhető magyar fordításban is (ld. [60]).

Megemlítem továbbá Pap Gyula szerzőtársammal írt bevezető pénzügyi matematikai jegyzetemet (ld. [28]), illetve az azokhoz tartozó Barczy Mátyás illetve Barczy Mátyással közösen írt pédatárakat (ld. [6] és [7]), előbbit Barczy Mátyás írta, utóbbit Barczy Mátyással együtt készítettünk. Ezen művek célja többek között az volt, hogy egyes klasszikus elméletek eredményeit részletesen, precíz bizonyításokkal ismertessük elsősorban matematikus hallgatók számára, illetve azok számára, akik már haladóbb tanulmányaokat folytatnak pénzügy, pénzügyi matematika területén.

A fentiek miatt egy sokadik általános pénzügyi jegyzet írását nem találnám szükségesnek és hasznosnak. Ugyanakkor számos olyan kérdés és problémakör van, melyeket a fenti klasszikus nemzetközi monográfiák és magyar nyelvű művek vagy nem tárgyalnak vagy nem részleteznek. Ennek a jegyzetnek az egyik fő célja, hogy *kiegészítést* adjon a fenti monográfiákhoz és korábbi jegyzeteimhez egy-egy specifikusabb témakörben. Ehhez azonban szükségesnek tartottam, hogy az alapvető pénzügyi ismereteket is röviden tárgyaljam, annak fontosabb összefüggéseit röviden összefoglaljam, mielőtt a specifikusabb témakörökre térnék át. A jegyzet így remélhetően egy minimális alapot ad azoknak is, akik nem ismerik a fenti monográfiákat, és akár az említett monográfiák nélkül is –"korlátozottan"– használható. Ugyanakkor ismételten hangsúlyozom, hogy pénzügyi alaptémákban, mint például a pénz időértéke, elemi árazási kérdések nem célom egy sokadik tankönyvet írni, így a fent említett kiváló monográfiákkal együtt ajánlom ezt a jegyzetet használni, ahogy teszem azt az általam tartott bevezető egyetemi pénzügyi kurzusok tematikáiban is.

A jegyzet másik fontos célja, hogy specifikusan segítséget adjon –ahogy fent leírtuk, kiegészítést adjon– informatikus, mérnök, természettudományi szakok hallgatóinak, továbbá azon gazdaságtudományi képzésen résztvevő hallgatóknak, akik egy-egy témában egzaktabb tárgyalást szeretnének látni.

A jegyzet I. része pénzügyi alapfogalmakat tárgyal, nagyrészt a pénz időértéke témakörében. Itt is teszünk már a fent említett monográfiákhoz kiegészítéseket, például egy-egy állítás igazolása, magyarázata kapcsán vagy éppen egy-egy téma alapfogalmait is kiegészítve. Utóbbira példa a kötvények értékelése, ahol az említett tankönyvek már alapfogalmakat feltételeznek (melyeket ideális esetben bevezető menedzsmentkurzusok fednek le).

A jegyzet II. része néhány specifikus, manapság megkerülhetetlen témát tárgyal részletesebben, így haladóbb kötvénypiaci és kamatlábmodelleket, portfólióanalízisbeli alapokat, kockázati mértékeket. Az utóbbi két témát korábbi jegyzetemben (ld. [28]) elsősorban matematikus és haladóbb pénzügyi-matematikai tanulmányokat folytató hallgatók számára már leírtam Pap Gyula szerzőtársammal (ld. [28]), bizonyítva az elméletekhez tartozó állításokat. Ám ebben a jegyzetben ezen két témában a korábbi tartalom átírása, bővítése szerepel úgy, hogy azt adaptáltam a fent említett informatikus, mérnöki, stb. célközönség számára. Így itt kevesebb bizonyítást, de több gyakorlati megjegyzést, értelmezést talál az olvasó. Továbbá kiegészítettem az elmúlt évek oktatási tapasztalatai alapján felgyűlt megjegyzésekkel ezen témákat.

# Első rész

# Pénzügyi alapok

# 1. fejezet

# Jelenértékszámítási összefoglaló

Ebben a részben összefoglaljuk a pénz időérétke témához kapcsolódó alapismereteket. Ismételten felhívjuk az olvasó figyelmét arra, hogy nem látjuk szerencsésnek egy sokadik általános célokat szolgáló pénzügy jegyzet írását. Ezért ezt a részt pusztán azt a célt szolgálja, hogy a klasszikus pénzügyi bevezető tankönyvekhez kiegészítész nyújtson. Az alapvető közgazdasági, mikroökonómiai fogalmak, koncepciók ismeretét nem kívánjuk ebben a jegyzetben részletesen bemutatni. Így nem célunk a pénz időértéke kapcsán felmerülő elemi mikroökonómiai és pénzügyi alapfogalomrendszer és alpaismeretek részletes bevezetése. Számos kiváló nemzetközi tankönyvet találhat az érdeklődő olvasó. A pénzügyi fogalmak bevezetésére ajánljuk Brealey, Myers és Allen [11] kiváló tankönyvét, melyet ezen jegyzet szerzője is több bevezető pénzügy kurzuson használ. Az egyéb pénzügyi és mikroökonómiai alapok (pénz időértékének koncepciója, intertemporális döntések, egyebek) kapcsán ajánljuk még a [35], [34] és [60] tankönyveket.

Ugyanakkor a jegyzet könnyebb használhatósága céljából, a későbbi fejezetek jobb érthetősége vagy ott használt jelölések bevezetése céljából a pénz időértéke témakör alapösszefüggéseit röviden ismertetjük, ám feltételezve, hogy az olvasó érti a pénz időértékének alapkoncepcióját és kapcsolódó alapfogalmakat (mint pl. diszkontálás, diszkontráta, diszkonttényező, stb.). Másrészt célunk az is, hogy a klasszikus tankönyveket néhány megjegyzéssel kiegészítsük egy-egy témánál az eddigi oktatási tapasztalataink alapján, például precízebb állításokkal, bizonyításokkal, általánosításokkal. Ehhez alapul ebben a részben leginkább a Brealey, Myers és Allen [11] tankönyvet választjuk, melyre több esetben is hivatkozunk.

## 1.1. A pénz időértéke, diszkontálás

Az alábbiakban –ha mást nem mondunk– azt feltételezzük, hogy az időegység 1 év. A **pénzáramlások** –vagy cash flow-k, röviden CF-ek– jelölésére rendre a $C_t$ jelölést vezetjük be, ahol $C_t \in \mathbb{R}$, továbbá a $t$ index azt jelenti– alapértelmezésünk szerint–, hogy az adott pénzáramlás a $t$ időpontban lesz realizálva. Ezen fejezetben a $t$ nemnegatív egész értéket vesz fel, azaz a részperiódusok az egyszerűség kedvéért évek lesznek. (Általánosabban, $C_t$ a $t$-edik időszak –nem feltétlen év– végén realizálandó pénzáramlás lesz egy sorozatban.)

A fentieknek megfelelően, rendre egy *projektet* fogunk tekinteni, mely egy általános elnevezése lesz egy befektetési vagy éppen beruházási példának. Nem célunk ebben a jegyzetben a befektetés és beruházás fogalmainak definiálása, sem a kettő különbségének taglalása, hiszen az egyszerű értékelési –jelen- és jövőértékszámítási problémák szempontjából ennek egyelőre nincs jelentősége. Ezért vezetjük be az egyszerűség kedvéért a projekt kifejezést.

Ennélfogva egy projektet úgy fogunk megadni, hogy megadjuk annak pénzáramlásait, mely egy véges vagy (megszámlálhatóan) végtelen sok elemből álló sorozat lesz, azaz $C_0, C_1, C_2, \ldots$. Hangsúlyozandó, hogy minden $C_t$ pénzáramlás előjeles mennyiség, azaz tetszőleges valós szám lehet, nyilván pozitív esetben mi realizáljuk a pénzáramlást, míg negatív esetben mi fizetjük azt.

Jelölje ekkor $r_t$ a $t$-edik időszakhoz (alapértelmezésben évhez) tartozó **diszkontrátát**, azaz a $[t-1, t]$ időintervallumon érvényes ez a diszkontráta. Természetesen feltesszük, hogy $r_t > -1$, bár ez nem igazán éles feltétel, hiszen tipikusan pozitív egy normális piaci helyzetben ez az elvárt hozamráta. Tudjuk, hogy egy adott projekt esetén ez a ráta nem más, mint a hasonló kockázattal bíró más befektetésektől, projektektől (a piac által) elvárt hozam.

Ekkor tudjuk, hogy egy egy év múlva jelentkező $C_1$ pénzáramlás **jelenértéke**

$$PV(C_1) = \frac{C_1}{1+r_1},$$

míg a

$$DF_1 = \frac{1}{1+r_1}$$

mennyiséget az egy éves időszakhoz tartozó **diszkonttényezőnek** vagy diszkontfaktornak nevezzük. Általánosabban, egy $t$ időpontban realizálandó $C_t$ pénzáramlás jelenértéke pedig

$$PV(C_t) = \frac{C_t}{(1+r_1)(1+r_2)\ldots(1+r_t)},$$

míg a $[0,t]$ időszakhoz tartozó diszkontfaktor nyilván

$$DF_t = \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)\ldots(1+r_t)}.$$

Jegyezzük meg, hogy a $DF_t$ tényező nem más, mint egy jövőbeli pénzegység (dollár, forint) jelenértéke.

Amennyiben a diszkontrátákról feltételezhetjük, hogy konstans sorozatot alkotnak a vizsgált időszakban, azaz $r = r_i$, minden $i = 1{,}2,\ldots,t$ esetén valamely $r$ ráta mellett, akkor nyilván

$$PV(C_t) = \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

és

$$DF_t = \frac{1}{(1+r)^t}.$$

Bevezetünk még egy másik diszkontrátát is: jelölje $r'_t$ a $[0,t]$ időszakhoz tartozó éves diszkontrátát. Ez az a diszkontráta, mely segítségével a teljes időszakra diszkontálva szintén megkaphatjuk a szóban forgó pénzáramlás jelenértékét, azaz két év esetén

$$PV(C_2) = \frac{C_2}{(1+r'_2)^2},$$

általában pedig

$$PV(C_t) = \frac{C_t}{(1+r'_t)^t}.$$

Szeretnénk hangsúlyozni, hogy $r_t$ a $t$-edik évhez tartozó diszkontráta, míg $r'_t$ pedig egy évesített, de $t$ évre, azaz a $[0,t]$ időszakhoz tartozó diszkontráta, röviden a $t$-éves diszkontráta. Nyilvánvalóan egyszerűen meg tudjuk fogalmazni a kettő közötti kapcsolatot:

$$DF_2 = \frac{1}{(1+r'_2)^2} = \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)}$$

és

$$DF_t = \frac{1}{(1+r'_t)^t} = \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)\dots(1+r_t)}.$$

Így tekinthetjük az $r'_t$ rátát egy éves átlagos diszkontrátának, az adott évek $r_1, r_2, \dots, r_t$ diszkontrátáinak ez egyfajta (mértani típusú) átlaga, hiszen nyilván

$$1+r'_t = \sqrt[t]{(1+r_1)(1+r_2)\dots(1+r_t)}.$$

*Jövőérték*

A jelenérték egy pénzáramlás esetén annak 0 időpontra vonatkozó (jelenlegi) értékét fejezi ki. Ennek mintájára általánosítható a gondolat és beszélhetünk egy pénzáramlás jövőbeli időpontra vonatkoztatott értékéről, azaz jövőértékéről (future value, FV).

Ehhez tekintsünk egy 0 időponthoz tartozó $C_0$ pénzáramlást. Ekkor a fenti jelölések mellett annak $t > 0$ időpontra –ahol $t$ egyelőre egész érték– vonatkozó **jövőértéke** alatt a

$$FV_t(C_0) = C_0(1+r_1)(1+r_2)\dots(1+r_t)$$

értéket értjük. Állandó $r$ éves diszkontráta esetén nyilván

$$FV_t(C_0) = C_0(1+r)^t.$$

Hasonlóan számolható tetszőleges projekt jövőértéke, azaz

$$FV_t(projekt) = PV(projekt)(1+r_1)(1+r_2)\dots(1+r_t),$$

és így az is adódik, hogy

$$FV_{t+k}(projekt) = FV_t(projekt)(1+r_{t+1})(1+r_{t+2})\dots(1+r_{t+k}),$$

ahol $t, k$ pozitív egészek esetén.

*Projektek értékelése, PV, NPV*

Tekintsünk először egy egyszerű egyéves projektet, azaz a projekthez mindössze kettő pénzáramlás tartozik: $C_0$ és $C_1$. Tipikusan $C_0$ negatív –ezt a továbbiakban feltételezzük–, a kezdeti beruházási/befektetési költséget mutatja, míg egyetlen pénzáramlást biztosít egy év múlva a projekt, ez tipikusan pozitív, ezt is feltesszük.

Ekkor a projektnek egyetlen jövőbeli pénzáramlása van, így annak a jövőbeli pénzáramlásnak a jelenértéke egyben a projekt teljes jelenértékét adja, azaz

$$PV(projekt) = \frac{C_1}{1+r}.$$

A projekt jelenértéke értelemszerűen kifejezi a projekt összes jövőbeli pénzáramlásának az értékét a jelenlegi (0) időpontra vonatkozóan, azaz "mai piaci áron", hiszen mindenzt egy alkalmas, a piac által meghatározott diszkontráta segítségével határoztuk meg.

Ha továbbá figyelembe vesszük a projekt kezdeti befektetési / beruházási költségeit is, akkor megkapjuk a projekt teljes értékét a 0 időpontban, ezt nevezzük **nettó jelenértéknek**, azaz

$$NPV(projekt) = C_0 + \frac{C_1}{1+r}.$$

Tekintsünk most általában egy projektet, melyhez tartozó pénzáramlások sorozata $C_0, C_1, C_2, \ldots$, mely akár véget ér véges időhorizonton, akár nem. Ekkor a projekt teljes jelenértéke

$$PV(projekt) = PV(C_1) + PV(C_2) + PV(C_3) + \cdots = \sum_{i=1} PV(C_i).$$

Vegyük észre, hogy minden pénzáramlást a 0 időpontbeli értéken fejezünk ki (jelenérték), így értelmet nyer ezek összegzése, hiszen az összeg is mai értéken adja meg a projekt teljes jövőbeli pénzáramlásainak értékét. Speciálisan, ha a teljes projektidőszakban konstans a diszkontráta, akkor

$$PV(projekt) = \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \frac{C_3}{(1+r)^3} + \cdots = \sum_{i=1} \frac{C_i}{(1+r)^i}.$$

Értelemszerűen ekkor is a nettó jelenérték a kezdeti pénzáramlás hozzáadásával adódik, azaz

$$NPV(projekt) = C_0 + PV(projekt).$$

## 1.2. Néhány döntési kritérium

Ebben a részben röviden felsorolunk két fontos döntési szabályt, mely segíthet projektekkel kapcsolatos döntéseinkben. Mindkét kritérium arra a kérdésre ad választ, hogy egy adott pénzáramlást biztosító projektet érdemes-e egyáltalán elkezdenünk, megvalósítanunk.

Ehhez ebben a részben először tekintsünk ismét egy egyéves projektet, azaz a projekthez mindössze kettő pénzáramlás tartozik: $C_0$ és $C_1$, ahol $C_0$ negatív –ahogy ezt korábban feltételeztük–, a kezdeti beruházási/befektetési költséget mutatja, míg egyetlen pénzáramlást biztosít egy év múlva a projekt, mely pozitív.

Ekkor a projekt nettó jelenértéke

$$NPV = C_0 + \frac{C_1}{1+r},$$

ahol $r$ az adott év diszkontrátája, azaz korábbi jelöléseinkkel $r = r_1 = r'_1$.

A **nettó jelenérték szabálya** ekkor azt mondja, hogy akkor érdemes az adott projektet elfogadni –azaz megvalósítani–, ha annak nettó jelenértéke pozitív.

Hangsúlyozandó, hogy ez csak egy döntési szabály, kritérium. Ennélfogva számos egyéb szempont is felmerülhet egy befektetési vagy beruházási döntésnél. Ugyanakkor vegyük észre, hogy egy teljesen természetes kritériumról van szó, mely alapján akkor válik vonzóvá egy projekt, ha az "mai értéken" kifejezve is pozitív értékkel bír. Vegyük észre azt is, hogy ez a pozitív érték már úgy adódott, hogy figyelembe vettük a pénz időértékét, azaz számoltunk az ilyen kockázatosságú projektek esetén elvárt hozammal (diszkontrátával).

Az előbbi mondat átvezet minket egy másik természetes döntési kritériumba: határozzuk meg az adott projekt által ígért hozamrátát (vagy megtérülési rátát) és vessük azt össze a piaci elvárt hozammal, mely a diszkontrátát adja. Lényegében ezt nevezzük **hozamráta-szabálynak**, vagy **metérülési ráta szabályának**, mely szerint: elfogadjuk azokat a projekteket, melyek hozamrátája meghaladja a diszkontrátát. Esetünkben a fenti egy éves projekt esetén a profit $C_0+C_1$, ennélfogva a hozamráta

$$\frac{C_0+C_1}{-C_0}. \tag{1.1}$$

(Itt a $C_0+C_1$ mennyiséget nevezhetjük egy egyszerű 'számviteli értelemben vett profitnak'.)

*Kapcsolat a két döntési kritérium között*

A fentiekben ismertetett két döntési kritérium egyaránt logikusnak tűnik, s mindkettő alapja, hogy figyelembe veszi a pénz időértékét vagy az annak meghatározásához szükséges piaci elvárt hozamot. Így nem meglepő az alábbi egyszerű állítás.

**1.2.1. Állítás.** *A két döntési kritérium ekvivalens, azaz egyéves projektek esetén a nettó jelenérték pontosan akkor pozitív, ha a hozamráta meghaladja a diszkontrátát.*

*Bizonyítás.* Könnyű látni, hogy a két kritérium alapján ugyanakkor érdemes egy projektet elkezdeni, hiszen ez a nettó jelenérték-szabály esetén azt jelenti, hogy

$$NPV = C_0 + \frac{C_1}{1+r} > 0,$$

azaz $(1+r)$-rel szorozva adódik, hogy

$$C_0(1+r)+C_1 > 0,$$

azaz

$$C_0 + C_1 > -C_0 r,$$

melyből adódik a hozamráta szabálya alapján, hogy a projektet érdemes elindítani, hiszen

$$\frac{C_0 + C_1}{-C_0} > r.$$

Végezetül jegyezzük meg, hogy a fenti triviális lépések mind ekvivalens átalakítások, továbbá felhasználtuk, hogy $1 + r > 0$, $C_0 < 0$. $\square$

*Döntési kritériumok több éves projektek esetén*

Felmerül a kérdés, hogy a fenti kritériumok használhatóak-e egy általánosabb projekt esetén, melyhez több év és több pénzáramlás tartozik, továbbá, hogy egyáltalán hogyan általánosíthatóak ilyen esetben a szóban forgó kritériumok.

Ami a nettó jelenéték-szabályt illeti, nagyon egyszerű a helyzet: az ugyanúgy fogalmazható meg bármely projekt esetén, és pontosan ugyanúgy alkalmazandó. Ez természetes, hiszen a nettó jelenérték a jelenlegi időpontban fejezi ki a projekt értékét, ha úgy tetszik, "mai árakon", ennélfogva a kritérium teljesen azonosan használható és használandó általánosságban is. Ismét elmondható, hogy ez még nem kell, hogy az egyetlen kritérium legyen a döntéseinknél, hiszen számos más szempontot és így akár szabályt is érdemes még a döntésnél megfontolnunk (például a projekt kockázatát vagy a megtérüléshez szükséges időt). Ugyanakkor későbbi tanulmányainkban láthatjuk, hogy ez a szabály nem igazán megkerülhető vagy helyettesíthető, azaz nehéz érvelni egy projekt elindítása mellett, ha annak nem pozitív a nettó jelenértéke.

A megtérülési ráta szabályát ugyanakkor nem ennyire egyszerű általánosítani. Már a megtérülési ráta fogalmának a definíciója sem ennyire egyszerű egy több időszakot felölelő projekt esetén. A korábbi "profit/beruházási költség" hányados logikája így nem általánosítható a több időszak miatt, hiszen figyelembe kell vennünk a pénz időértékét. A megfelelő fogalmat a későbbiekben ismertetjük (ld. 1.5. alfejezet), mely nem más, mint a belső megtérülési ráta fogalma. Ugyanakkor a hozamráta ezen általánosítása mellett sem lesz a hozamráta (vagy megtérülési ráta) szabálya annyira egyszerű, mint egyéves projektek esetén: azaz nem feltétlenül lesz igaz, hogy akkor vonzó egy projekt, ha annak megtérülési rátája meghaladja a diszkontrátát (azaz a hasonló kockázatú projetektől elvárt piaci hozamot). Ettől még látni fogjuk, hogy a fogalom használható lesz, ám körültekintően kell majd eljárnunk.

## 1.3. Örökjáradékok, annuitások

Ebben a részben néhány speciális esetet tekintünk, nevezetesen, speciális struktúrájú pénzáramlássorozatokat tekintünk, s a cél ezek jelenértékének a meghatározása. Ezek a speciális esetek részben vagy egészben így megtalálhatóak egyes pénzügyi termékek, projektek pénzáramlásaiban, mivel gyakran visszatérő esetek, számos árazási és értékelési problémában alkalmazzuk őket.

Mindegyik esetben a fő célunk az, hogy adjunk egy zárt formulát a pénzáramlássorozat jelenértékére. Látni fogjuk, hogy ez mindegyik esetben könnyen megoldható.

**Általános feltételek**, melyek mindegyik esetre vonatkoznak:

(a) Azonos hosszúságú időintervallumokat tekintünk (pl. évek) úgy, hogy az időszakokhoz tartozó diszkontráta is állandó, ezt jelölje $r$.

(b) A pénzáramlások rendre az egyes időintervallumok végén érleznek.

*Örökjáradék állandó taggal*

**További feltételek:**

(c) A pénzáramlások állandóak, azaz egy konstans sorazatot alkotnak.

(d) A pénzáramlások sorozata végtelen.

Összefoglalva, ekkor egy konstans

$$C_1 = C,\ C_2 = C,\ \ldots, C_t = C,\ \ldots,$$

sorozat adja a pénzáramlásokat, ahol $C \in \mathbb{R}$.

Határozzuk meg ennek a pénzáramlássorozatnak a jelenértékét. Nyilván

$$\begin{aligned} PV &= \sum_{i=1}^{\infty} PV(C_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i}{(1+r)^i} \\ &= \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \frac{C_3}{(1+r)^3} + \ldots, \end{aligned}$$

azaz látható, hogy egyszerűen egy mértani sor összegét kell meghatároznunk, ahol a kapcsolódó mértani sorozat –jelöljük $a_n$-nel– kvóciense $q = 1/(1+r)$, első tagja nyilván $a_1 = C/(1+r)$, így $r > 0$ esetén $0 < q < 1$, ennélfogva a szóban forgó sor konvergens és

$$\begin{aligned} PV &= a_1 \frac{1}{1-q} = \frac{C}{1+r} \frac{1}{1-\frac{1}{1+r}} \\ &= \frac{C}{1+r-1} = \frac{C}{r}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Jegyezzük meg továbbá, hogy $r = 0$ esetén $PV = \sum_{i=1}^{\infty} C = \infty$.

*Annuitás állandó taggal*

**További feltételek:**

(c) A pénzáramlások állandóak, azaz egy konstans sorazatot alkotnak.

(d') A pénzáramlások sorozata véges tagszámú, azaz létezik egy $t$ időpont, amikor az utolsó pénzáramlás érkezik (azaz a $t$-edik intervallum végén).

Összefoglalva, ekkor egy konstans sorozat első $t$ tagja adja a pénzáramlásokat, nevezetesen

$$C_1 = C,\ C_2 = C,\ \ldots, C_t = C,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$.

Ekkor

$$\begin{aligned} PV &= \sum_{i=1}^{t} PV(C_i) = \sum_{i=1}^{t} \frac{C_i}{(1+r)^i} \\ &= \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \frac{C}{(1+r)^3} + \ldots + \frac{C}{(1+r)^t}, \end{aligned}$$

azaz az állandó örökjáradéknál tárgyalt mértani sorozatnak ebben az esetben a részletösszegét (az első $t$ tag összegét) kell meghatároznunk, melyre a korábbi jelölések mellett $r > 0$ mellett

$$\begin{aligned} PV &= a_1 \frac{1-q^t}{1-q} = \frac{C}{1+r} \cdot \frac{1-\frac{1}{(1+r)^t}}{1-\frac{1}{1+r}} \\ &= \frac{C}{1+r-1}\left(1-\frac{1}{(1+r)^t}\right) = C\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+r)^t}\right). \end{aligned} \tag{1.3}$$

A fenti formulában található egyik tényezőt, nevezetesen az

$$AF_t = \frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+r)^t}$$

kifejezést ($t$ időszakhoz tartozó) annuitásfaktornak vagy annuitástényezőnek nevezzük, melyre nyilván az teljesül, hogy

$$PV = C \cdot AF_t.$$

Az (1.3) formulát az állandó örökjáradékokból is levezethetjük. Ezt mutatjuk most be. A szóban forgó annuitás felfogható kettő örökjáradék különbségének is. Ehhez tekintsük a következőket:

- az egyik örökjáradék –jelölje $P_1$– állandó tagú $C$ taggal, mely a 0 időpontban kezdődik (azaz az első pénzáramlás az 1 időpontban adódik ebből,
- míg a másik örökjáradék –jelölje $P_2$– szintén állandó tagú $C$ taggal, mely a $t$ időpontban kezdődik (azaz az első pénzáramlás a $t+1$ időpontban adódik ebből.

Ekkor nyilvánvalóan az annuitás felfogható a két örökjáradék különbségeként, azaz $P_1 - P_2$ adja az annuitást. Mindkét örökjáradék értéke azok indulásakor $C/r$, azaz az első ennyit ér a 0 időpontban, míg a másik a $t$ időpontban. Tehát utóbbinak $C/r$ a jövőértéke, melyből további diszkontálással kaphatjuk meg a jelenértékét. Ennélfogva

$$\begin{aligned} PV(\text{annuitás}) = PV(P_1) - PV(P_2) &= \frac{C}{r} - DF_t \frac{C}{r} \\ &= \frac{C}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^t}\right) = C \cdot AF_t. \end{aligned}$$

Mindeddig az $r > 0$ esetet tekintettük, mely egyben a gyakorlat szempontjából fontos, hiszen realisztikus piaci helyzetet tükröz. De röviden tekintsük át a többi lehetőséget.

Nyilván $r = 0$ esetén $PV = tC$.

Végül, mivel az annuitás jelenértéke egy véges összeg, így $-1 < r < 0$ esetén is létezik az összeg és véges (az megegyezik az $r > 0$ esetén kapott (1.3) formulával), ám ez célunk szempontjából nem igazán érdekes eset, azt részletesen nem tárgyaljuk.

*Növekvő örökjáradék (állandó növekedési rátával)*

**További feltételek:**

(c') A pénzáramlások növekvőek, méghozzá egy állandó $g$ rátával növekednek, ahol $r > g \geq 0$.

(d) A pénzáramlások sorozata végtelen.

Összefoglalva, ekkor egy mértani sorozat írja le a pénzáramlásokat, nevezetesen

$$C_1 = C,\ C_2 = C(1+g),\ \ldots, C_t = C(1+g)^{t-1},\ \ldots,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$.

Határozzuk meg ennek a pénzáramlássorozatnak is a jelenértékét. Nyilván

$$\begin{aligned}PV &= \sum_{i=1}^{\infty} PV(C_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C(1+g)^{i-1}}{(1+r)^i}\\ &= \frac{C}{1+r} + \frac{C(1+g)}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{C(1+g)^{t-1}}{(1+r)^t} + \ldots,\end{aligned}$$

azaz ismét látható, hogy egyszerűen egy mértani sor összegét kell meghatároznunk, ahol a kapcsolódó mértani sorozat –jelöljük $b_n$-nel– kvóciense $q = (1+g)/(1+r)$, első tagja nyilván $b_1 = C/(1+r)$, így $r > g \geq 0$ esetén $0 < q < 1$, ennélfogva a szóban forgó sor konvergens és

$$\begin{aligned}PV &= b_1 \frac{1}{1-q} = \frac{C}{1+r} \cdot \frac{1}{1-\frac{1+g}{1+r}}\\ &= \frac{C}{1+r-(1+g)} = \frac{C}{r-g}.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Vegyük észre, hogy $g = 0$ esetén (1.4) visszaadja az állandó tagú örökjáradékra levezetett (1.2) formulát természetesen.

Jegyezzük meg továbbá, hogy $r = g$ esetén $PV = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C}{1+r} = \infty$. Nyilván $PV = \infty$ akkor is, ha $g \geq r$.

*Növekvő annuitás (állandó növekedési rátával)*

**További feltételek:**

(c') (ld. fent),

(d') (ld. fent).

Összefoglalva, ekkor egy mértani sorozat első $t$ tagja írja le a pénzáramlásokat, nevezetesen $C \in \mathbb{R}$ és

$$C_1 = C,\ C_2 = C(1+g),\ \ldots, C_t = C(1+g)^{t-1}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} PV &= \sum_{i=1}^{t} PV(C_i) = \sum_{i=1}^{t} \frac{C_i(1+g)^{i-1}}{(1+r)^i} \\ &= \frac{C}{1+r} + \frac{C(1+g)}{(1+r)^2} + \frac{C(1+g)^2}{(1+r)^3} + \ldots + \frac{C(1+g)^{t-1}}{(1+r)^t}, \end{aligned}$$

azaz a növekvő örökjáradéknál tárgyalt mértani sorozatnak $(b_n)$ ebben az esetben a részletösszegét (az első $t$ tag összegét) kell meghatároznunk, melyre a korábbi jelölések mellett $r > g \geq 0$ mellett

$$\begin{aligned} PV &= b_1 \frac{1-q^t}{1-q} = \frac{C}{1+r} \cdot \frac{1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^t}{1-\frac{1+g}{1+r}} \\ &= \frac{C}{1+r-(1+g)} \left(1 - \frac{(1+g)^t}{(1+r)^t}\right) \qquad (1.5) \\ &= C\left(\frac{1}{r-g} - \frac{(1+g)^t}{(r-g)(1+r)^t}\right). \end{aligned}$$

A fenti formulában található utolsó tényezőt, nevezetesen az

$$AF_t' = \frac{1}{r-g} - \frac{(1+g)^t}{(r-g)(1+r)^t}$$

kifejezést ($t$ időszakhoz tartozó) annuitásfaktornak vagy annuitástényezőnek nevezzük a növekvő annuitás esetén, melyre nyilván az teljesül, hogy

$$PV = C \cdot AF_t'.$$

Vegyük észre, hogy $g=0$ esetén (1.5) visszaadja az állandó tagú annuitásra levezetett (1.3) formulát természetesen.

Az (1.5) formulát is levezethetjük a megfelelő –azaz növekvő tagú– örökjáradékokból. Ezt mutatjuk most be. A szóban forgó annuitás felfogható most is kettő növekvő örökjáradék különbségének. Ehhez tekintsük a következőket:

– az egyik örökjáradék –jelölje $\tilde{P}_1$– növekvő tagú $C$ első taggal és $g$ növekedési rátával, mely a 0 időpontban kezdődik (azaz az első pénzáramlás az 1 időpontban adódik ebből),

– míg a másik örökjáradék –jelölje $\tilde{P}_2$– szintén növekvő tagú $C(1+g)^t$ első taggal és $g$ növekedési rátával, mely a $t$ időpontban kezdődik (azaz az első pénzáramlás a $t+1$ időpontban adódik ebből).

Ekkor nyilvánvalóan a szóban forgó növekvő annuitás felfogható a két örökjáradék különbségeként, azaz $\tilde{P}_1 - \tilde{P}_2$ adja az annuitást. Az első örökjáradék értéke azok indulásakor $C/(r-g)$, azaz az első ennyit ér a 0 időpontban. A másik értéke a $t$ időpontban $C(1+g)^t/(r-g)$, tehát ennek ez a jövőértéke, melyből további diszkontálással kaphatjuk meg a jelenértékét. Ennélfogva

$$
\begin{aligned}
PV(\text{annuitás}) = PV(\tilde{P}_1) - PV(\tilde{P}_2) &= \frac{C}{r-g} - DF_t\,\frac{C(1+g)^t}{r-g} \\
&= \frac{C}{r-g}\left(1 - \frac{(1+g)^t}{(1+r)^t}\right) = C \cdot AF_t'.
\end{aligned}
$$

Mindeddig az $r > g \geq 0$ esetet tekintettük, mely egyben a gyakorlat szempontjából fontos, hiszen realisztikus piaci helyzetet tükröz. De röviden tekintsünk át más eseteket is.

Nyilván $-1 < r = g$ esetén $b_n$ konstans, $q = 1$, így $PV = tC/(1+r)$.

Végül, mivel az annuitás jelenértéke egy véges összeg, így $-1 < r < g$ esetén is létezik az összeg és véges (az megegyezik az $r > 0$ esetén kapott (1.3) formulával).

## 1.4. Kamatozási és hozamszámítási konvenciók

Ebben a részben áttekintjük a gyakorlatban és a szakirodalomban használt legfontosabb kamat- és hozamszámítási konvenciókat. Az elnevezés kapcsán több dologra érdemes felhívni a figyelmet. Ugyan a legtöbb esetben a szakirodalomban egyszerűen kamatozási konvencióként hivatkoznak ezekre, azonban fontos leszögeznünk, hogy ez általában vonatkozik tetszőleges hozam esetén arra, hogy azt milyen módon adjuk meg, milyen formában és milyen paraméterezéssel. Másfelől kiemeljük a konvenció szót, hiszen itt lehetséges számítási módokról van szó, melyek közül egy-egy szerződés vagy értékpapír esetén akár választhatnak is a felek. A lényeg pusztán az, hogy egyértelmű legyen az adott forma és paraméterezés esetén, hogy hogyan számítandó az adott termék vagy szerződés esetén a hozam.

Alapvetően kettő elterjedt konvenciót szokás említeni, ezeket tekintjük át, továbbá megemlítünk még egy kamatszámítást, mely néhány szerződés esetén hazsnálatos.

### 1.4.1. Klasszikus kamatozási konvenció ("kamatos kamat")

Ezt a konvenciót egyszerűen kamatos kamatként is szokás említeni, a klasszikus jelzőt csak azért használjuk, hogy így jobban elkülönítsük az egyéb konvencióktól, főként a folytonos kamatozási konvenciótól.

Tegyük fel, hogy egy adott pénzügyi eszközbe fektetünk $X$ összeget (pl. egy bankszámlán lekötjük) úgy, hogy az $k$-szor fizet évente hozamot (pl. kamatot), méghozzá egy $r$ nominális éves hozamráta (pl. kamatráta) mellett a "klasszikus" kamatozási konvenció szerint.

Ekkor a konvenció alapján $r/k$ az egy hozamfizetési periódusra jutó hozam, s ezt a hozamot realizáljuk az addig birtkolt teljes tőkénk után. Tehát a kiinduló tőkénk és a később kapott hozamok után egyaránt. Ezért szokás kamatos kamatnak nevezni az ilyen hozamszámítást, hiszen nem csak a kezdeti tőke után kapunk újabb hozamot. Ennélfogva egy év múlva a befektetésünk értéke

$$X\left(1+\frac{r}{k}\right)^{k},$$

míg $T$ év elteltével (ahol $T$ nem kell, hogy egész legyen, elég, ha $kT$ egész)

$$X\left(1+\frac{r}{k}\right)^{Tk}.$$

Megfordítva, amennyiben azt szeretnénk, hogy $Y$ összeget realizáljunk a $T$-edik év végére, akkor ehhez ezen hozamfizetés mellett a 0 időpontban

$$\frac{Y}{\left(1+\frac{r}{k}\right)^{Tk}}$$

összeget kell befektetnünk az adott eszközbe.

Érdemes ismételten kiemelni, hogy ez pusztán egy megegyezés arra vonatkozóan, hogy hogyan fogják egy ilyen szerződésben a felek a hozamot elszámolni. Ezt a megegyezést tehát kettő paraméter határozza meg, $k$ és $r$. Vegyük továbbá észre, hogy $r$ általában nem adja meg azt az éves hozamot, amelyet valóban realizálunk, azaz azt, hogy hány százalékkal növekszik a korábbi tőkénk egy ilyen eszközben.

Azt, hogy mekkora a valóban realizált éves hozam, az ún. **tényleges hozam**, másképpen **effektív hozam** adja meg. Ennek meghatározása egyszerű, hiszen ha egy év után $X$ dollár befektetésből $X\left(1+\frac{r}{k}\right)^{k}$ dollár lesz, akkor nyilván a tényleges hozam

$$\left(1+\frac{r}{k}\right)^{k}-1,$$

azaz $[(1+\frac{r}{k})^{k}-1]*100\%$ lesz az adott eszközben levő tőkénk növekedése.

Nyilvánvaló, hogy $k=1$ esetén a tényleges hozam egybeesik a nominális hozammal.

### 1.4.2. Folytonos kamatozási konvenció

Ennek a konvenciónak a jobb megértéséhez az alábbi egyszerű jelenséget vizsgáljuk meg: tegyük fel, hogy tekintünk egy $r$ és $k$ paraméterekkel definiált klasszikus hozamfizetési konvenciót és megvizsgáljuk, hogy mi történne akkor, ha elkezdenénk besűríteni az éven belüli hozamfizetések számát, azaz növelnénk a $k$-val megadott hozamfizetési periódusok számát rögzített $r$ nominális hozam mellett. Pédául képzeljük el, hogy először havonta, majd sűrűbben, hetente, vagy akár naponta, sőt, még annál is sűrűbben lenne hozamfizetés.

Ekkor egyszerűen azt kapjuk, hogy

$$\lim_{k\to\infty} X\left(1+\frac{r}{k}\right)^{Tk} = X\mathsf{e}^{rT}.$$

Érdemes tehát megállapítani, hogy ez a határérték véges, a tőkésített összeg konvergál. A végeredményt (határértéket) úgy is elképzelhetjük, hogy annyira sűrűn történik a hozamfizetés, hogy azt már időben folytonosan elszámolják.

A fenti egyszerű ötlet adja a folytonos kamatozási konvenció alábbi definícióját.

Tegyük fel, hogy befektetünk egy pénzügyi eszközbe $X$ dollárt (pl. bankszámlán lekötünk pénzt) úgy, hogy az $r$ nominális hozamráta mellett folytonos kamatozással fizet hozamot. Ekkor ez azt fogja jelenteni, hogy a befektetésünk értéke egy év múlva

$$X\mathsf{e}^r,$$

lesz és $T$ év elteltével (ahol $T$ tetszőleges pozitív érték, nem szükségképpen egész)

$$X\mathsf{e}^{rT}.$$

Megfordítva ez azt jelenti, hogy ha az a célunk, hogy $Y$ értéket (tőkét) realizáljunk $T$ év elteltével, akkor ehhez a 0 időpontban

$$Y/\mathsf{e}^{rT} = Y\mathsf{e}^{-rT}$$

dollárt kell befektetnünk.

Vegyük észre, hogy ez a konvenció akár azt is lehetővé teszi, hogy tetszőleges időpontban ekszámoljuk az addigi hozamot ("folytonosan"), így akár ez is kerülhetne egy ilyen pénzügyi eszközzel kapcsolatos szerződésbe. De hasonlóan a klasszikus hozamszámításhoz, itt is meg lehetne abban is egyezni, hogy bár folytonos kamatozással számolunk el, de hozamszámítási periódust (pl. nap) itt is megadunk, s csak az utolsó lezárt periódusig számolt hozamot fizetjük ki.

Ez a konvenció tehát egy láthatóan egyszerű formában, egyszerű függvénnyel megadható, mindössze egy paramétere van, az $r$ nominális hozamráta. Vegyük ugyanakkor észre, hogy a klasszikus kamatozási konvencióhoz hasonlóan ez a hozamráta sem egyezik meg azzal a ténylegesen realizált éves hozammal, amelyet egy ilyen eszköz biztosít.

Ebben az esetben a **tényleges (effektív) éves hozamráta**

$$\mathsf{e}^r - 1,$$

azaz $[\mathsf{e}^r - 1] * 100\%$ lesz az adott eszközbe fektetett tőkénk növekedése évente.

**1.4.1. Megjegyzés.** Ebben a megjegyzésben azt mutatjuk meg, hogy van egy egyszerű összefüggés a két konvenció között. Ez egyben azt is megmutatja majd, hogy kényelmesen át lehet egyikről a másikra térni.

Ehhez tekintsünk egy $r$ nominális éves hozamrátához és $k$ évenkénti hozamfizetési periódushoz tartozó klasszikus kamatozási konvenciót. Ekkor ehhez mindig található egy olyan ekvivalens $\tilde{r}$ nominális éves hozam folytonos hozamszámítás mellett, hogy a két konvenció ugyanazt a tényleges hozamot biztosítja, azaz

$$\left(1+\frac{r}{k}\right)^k = \mathsf{e}^{\tilde{r}}.$$

Triviálisan adódik, hogy

$$\tilde{r} = \ln\left(\left(1+\frac{r}{k}\right)^k\right) = k\ln\left(1+\frac{r}{k}\right).$$

Ez azt jelenti, hogy a két hozamszámítással pontosan ugyazaz a tőke adódik egy tetszőleges hozamszámítási periódus végén, azaz, ha a folytonos kamatozásnál abban egyezünk meg, hogy csak a teljes periódusok után fizetjük ki a hozamot, akkor a két hozamszámítás valóban ekvivalens szerződésekhez vezetne.

Vegyük észre, hogy pénzáramlások jelen- és jövőértékének meghatározásakor is bármelyik hozamszámítási konvenciót használhatjuk, amennyiben a diszkontrátát is abban a konvencióban adjuk meg.

### 1.4.3. Eszközök hozamrátái

Tekintsünk általában egy $S_t$, $t \geq 0$ árfolyamattal rendelkező pénzügyi eszközt. Az eszköz értéke tehát $S_0$ and $S_T$ a 0 és a $T > 0$ időpillanatokban (azaz $T$ év múlva).

Ekkor, ha $h$ jelöli az eszköz éves hozamát klasszikus kamatozási konvenció szerint $k$ évenkénti hozamfizetési periódus mellett, akkor $S_T = S_0(1+\frac{h}{k})^{Tk}$ és ennélfogva

$$h = ((S_T/S_0)^{1/(Tk)} - 1)k.$$

Itt feltesszük, hogy $Tk$ egész.

Másrészt, ha ugyanezen eszköz éves hozama $\tilde{h}$ folytonos hozamszámítási konvenció mellett, akkor

$$S_T = S_0 \mathsf{e}^{\tilde{h}T}$$

és ennélfogva

$$\tilde{h} = \frac{1}{T}\ln(S_T/S_0).$$

A szóban forgó folytonos kamatozással számolt hozamot szokás loghozamnak (logreturn) is nevezni.

## 1.5. Belső megtérülési ráta (IRR)

A pénz időértékének bevezető fogalmai kapcsán az 1.2. alfejezetben bevezettünk két lehetséges döntési kritériumot, melyek egyike az ún. megtérülési ráta szabálya volt. Ehhez szükséges volt a megtérülési ráta vagy hozamráta fogalmának tisztázására. Ezt ott csak egyszerű, egyéves prpjektek esetén adtuk meg az (1.1) formulában. Már ott hangsúlyoztuk, hogy a formula csak abban a speciális esetben használható.

Így természetes módon merül fel a kérdés, hogy hogyan tudjuk a hozamráta vagy megtérülési ráta fogalmát általánosítani egy általános projekt esetére. Ebben a részben ezt tekintjük át.

Ehhez tekintsünk egy projektet, melyhez a

$$C_0,\ C_1,\ \dots\ C_n$$

pénzáramlások tartoznak, melyek rendre a

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$$

időpontokhoz tartoznak. Ekkor a projekt jelenértéke $r$ diszkontráta mellett

$$NPV(r) = \sum_{i=0}^{n} PV(C_i),$$

ahol a nettó jelenérték esetén hangsúlyozzuk annak függését a diszkontrátától.

Ekkor a projekt **belső megtérülési rátája** alatt (internal rate of return, **IRR**) egy olyan $r_0$ diszkontrátát értünk, amely melett a projekt nettó jelenértéke 0, azaz teljesül az alábbi egyenlet:

$$NPV(r_0) = 0. \tag{1.6}$$

**1.5.1. Példa.** Tekintsünk ismét egy olyan egyéves projektet, mint az 1.2. alfejezetben, azaz a projekthez mindössze kettő pénzáramlás tartozik: $C_0$ és $C_1$, ahol $C_0$ negatív –ahogy ezt korábban feltételeztük–, a kezdeti beruházási/befektetési költséget mutatja, míg egyetlen pénzáramlást biztosít egy év múlva a projekt, mely pozitív. Ekkor tudjuk, hogy a projekt nettó jelenérték a diszkontrára $r$ diszkontráta mellett

$$NPV(r) = C_0 + \frac{C_1}{1+r}.$$

Tehát egy $r_0$ belső megtérülési rátára az teljesül, hogy

$$NPV(r_0) = C_0 + \frac{C_1}{1+r_0} = 0.$$

Innen pedig azt kapjuk, hogy

$$C_0(1+r_0)+C_1=0,$$

azaz

$$r_0=-\frac{C_1}{C_0}-1=\frac{C_1+C_0}{-C_0}.$$

Tehát a projekt belső megtérülési rátája visszaadja az 1.2. alfejezetben bevezetett (1.1) formulával megadott hozamrátáját a projektnek. Tehát az ebben a fejezetben bevezetett hozamráta, a belső megtérülési ráta (IRR) a korábbi hozamráta általánosítása.

Az előző példa kapcsán felvetődik az a kérdés is, hogy használhatjuk-e a megtérülési ráta szabályát is az IRR-rel általánosabb esetekben. Erre a rövid válasz az, hogy abban az egyszerű formájában, ahogy az 1.2. alfejezetben bevezettük, nem használhatjuk. Ugyanakkor kellő körültekintéssel ismét kaphatunk egy döntési kritériumot az IRR és a piaci diszkontráta összehasonlításából. Ennek megértéséhez néhány további egyszerű megjegyzést teszünk az IRR-rel kapcsolatban.

– Egyes projektek esetén az NPV szigorúan monoton csökkenő függvénye a diszkontrátának, így ha van egy $r_0$ megoldása az (1.6) egyenletnek, az egyértelmű. Ennélfogva $NPV(r)>0$ ha $r_0>r$, ahol $r$ jelöli a piaci diszkontrátát. Azaz ekkor ugyanúgy dönthetünk, mint a megtérülési ráta szabálya alapján tettük. Ilyen eset áll fenn például, ha $C_0 < 0$ és $C_i > 0$, $i = 1,2,\ldots,n$, hiszen pozitív pénzáramlások jelenértéke szigorúan csökkenő függvénye a diszkontrátának.

– Azonban akár az is előfordulhat, hogy az NPV szigorúan monoton növekvő függvénye a diszkontrátának. Például ez a helyzet egy egyszerű hitelfelvétel esetén, ahol $C_0 > 0$, ám $C_i < 0$, $i = 1,2,\ldots,n$. Ilyenkor nyilván éppen fordítva kell döntenünk, mint az előző esetben, hiszen $NPV(r) > 0$ akkor teljesül, ha $r_0 < r$.

– A fenti két eset természetesen nem fed le minden projektet, hiszen a $NPV$ függvény egyes részei akár növekvőek, míg más részei csökkenőek is lehetnek, továbbá nyilvánvalóan az (1.6) egyenletnek lehet több megoldása is. Ilyenkor is természetesen azt kell néznünk, hogy az $NPV$ függvény hol lesz pozitív. Ezt a kapott gyökök által meghatározott egyes intervallumok adják nyilván.

Összefoglalva a fenti eseteket, egy egyszerű függvényvizsgálatot kell tennünk, mely alapján megállapíthatjuk, hogy mely szakaszokon lesz az $NPV$ függvény pozitív. Ha ilyen intervallumba esik a piaci diszkontráta, akkor a projektet hozamát tekintve érdemes elindítanunk. Ám azt korábban is jeleztük, hogy az $NPV$ vizsgálata mellett számos egyéb kritérium is kiegészítheti a döntésünket a gyakorlatban. Például megfelelő időn belüli megtérülése a kezdeti befektetett tőkének, vagy éppen a projekt kockázatosságának további vizsgálata.

**1.5.2. Példa.** Egy másik kézenfekvő példa a belső megtérülési rátára a kötvények árazásánál ismertetett (ismertetendő) kötvényhozam, nevezetesen a lejáratig számított hozam. Ennek tárgyalását a 2.2. alfejezetben mutatjuk be.

# 2. fejezet

# Kötvénypiacok, kamatlábak, hozamok

## 2.1. Kötvények

Ebben a fejezetben rendre olyan kötvénypiaci modelleket vizsgálunk, melyeket egy véges időhorizonton, azaz egy $[0, T^*]$ időintervallumon definiálunk, ahol $T^* > 0$ egy jövőbeli időpont. Számos esetben végtelen időhorizontra is több definíció és eredmény általánosítható, de ezekre nem lesz szükségünk a tárgyalandó problémáknál.

Tekintsük most azt át, hogy egy kötvénynek melyek a legfontosabb elemei, jellemzői.

A **kötvény** egy pénzügyi eszköz, egy hitelviszonyt megtestesítő értékpapír, azaz lényegében egy értékpapírba csomagolt hitelszerződés. A kibocsátó azt vállalja, hogy a kötvény lejáratakor (maturity) kifizeti a kötvény tulajdonosának a kötvény névértékét (principal value, face value), továbbá a kötvénytől függően még egyéb pénzáramlást is ígér a kibocsátó, nevezetesen kamatfizetést adott rendszerességgel (interest vagy coupon payment).

Jelölések: ettől kezdve

- $V \in \mathbb{R}$ jelöli a kötvény névértékét,
- $d > 0$ az éves kamatrátát (vagy kuponrátát),
- $T > 0$ pedig a kötvény lejáratát,
- $k$ pedig egy olyan pozitív egész szám, mely azt mutatja, hogy évente hányszor van kamatfizetés.

Jegyezzük meg, hogy ez csak egy tipikus kötvényszerződés jellemzője. Számos kötvény esetén egyes feltételek különbözhetnek: így előfordulhat, hogy nem egy összegben a lejáratkor fizetik ki a névértéket, hanem több részletben, például két részletben az utolsó két félévében a futamidőnek, vagy a kamatfizetés alakul bonyolultabban (akár nincs is). Az utóbbi problémára hamarosan rátérünk. De más specifikus részei is lehetnek egy kötvénynek, melyek eltérnek a tipikus esettől.

Egy egyszerű állandó kamatlábbal rendelkező kötvénynél így $d$ az éves kamatláb értékét adja a névértékhez viszonyítva, azaz az éves kamatfizetési ígéret ekkor $dV$, függetlenül attól, hogy hányszori kamatfizetés van a szerződésben évente. Amennyiben $k \neq 1$, azaz évente többszöri kamatfizetést ígér a kibocsátó, akkor $1/k$ időszakonként rendre $dV/k$ kamatot fizet a kibocsátó.

Ugyanakkor a kötvények kamatozása nem mindig a fenti állandó kamatozású esetnek megfelelő. Valójában kamatozás szerint 3 alapesetet szokás elkülöníteni:

– állandó (fix) kamatozású eset: ahol a $d$ kamatláb rögzített a teljes futamidőre, így minden kamatfizetési periódus végén ugyanazt az értéket kapja a tulajdonos,

– változó kamatozású eset: ahol a $d$ értéke változhat időben, ugyanis valamilyen piaci referenciakamatlábhoz (pl. LIBOR, alapkamat, stb.) képest van meghatározva (pl. referenciakamat aktuális értéke +2%),

– kamatot nem fizető kötvények, az ún.˜kamatszelvény nélküli kötvények.

A kamatszelvény nélküli kötvények (Zero coupon bond) éppen onnan kapták a nevüket, hogy kamat hiányában okafogyottá vált a kamatszelvény használata, melynek szerepe korábban (a nem digitálisan nyilvántartott értékpapírok idejében) az volt, hogy azon rögzítették a megtörtént kamatfizetéseket. Ennélfogva ezen kötvények pusztán a névértéket fizetik lejáratkor. Nyilván ezt tekinthetnénk az állandó kamatozású kötvények egy speciális (elfajuló) esetének is, ahol $d = 0$.

A kamatszelvény nélküli kötvényekkel kapcsolatban az alábbi jelöléseket és terminológiát vezetjük be.

- Legyen $T \in [0, T^*]$, ekkor egy $T$-**kötvény** alatt egy olyan kamatszelvény nélküli kötvényt értünk, melynek névértéke 1 egységnyi pénz és lejárata $T$.
- Jelölés: egy $T$-kötvény $t$ időpontbeli értékére a $P(t, T)$ jelölést fogjuk használni és ezért feltesszük, hogy
- $P(T, T) = 1$, $0 \leq t \leq T \leq T^*$. Az utóbbi feltétel azt jelenti, hogy ezen esetekben, modellekben kizárjuk a kibocsátó csődjének lehetőségét, így az garantáltan (1 valószínűséggel) kifizeti az 1 dolláros névértéket. Bonyolultabb modellekben azzal is számolhatunk, hogy a névértéket nem vagy csak részben fizetik ki lejáratkor valamilyen csődnek vagy részleges csődnek köszönhetően. Ilyen esetben a modellben és a kötvény árában megjelenik az ún. hitelkockázat is.

**2.1.1. Megjegyzés.** Felhívjuk a figyelmet egy egyszerű összefüggésre az állandó kamatozású kötvények és a kamatszelvény nélküli kötvények között:

az állandó kamatozású kötvény értékét és kifizetéseit tekintve ekvivalens egy olyan portfólióval, mely csak kamatszelvény nélküli kötvényeket tartalmaz úgy, hogy az eredeti kötvény minden kifizetéséhez tartozik egy olyan kamatszelvény nélküli kötvény, melynek névértéke megegyzik a kifizetés értékével, lejárata pedig az adott pénzáramláshoz tartozó időponttal. Egy arbitrázsmentes piacon ennek a portfóliónak az értéke szükségképpen megegyezik a szóban forgó kötvény értékével.

Ez az oka annak, hogy a kötvénypiaci modellekben gyakran már csak a kamatszelvény nélküli kötvények jelennek meg.

**2.1.2. Megjegyzés.** A fentiekben szereplő $P(T,T)=1$ feltétel tehát azt jelenti, hogy a kötvény névértékét 1 valószínűséggel kifizetik. Másképpen fogalmazva az ilyen modellek nem tartalmaznak hitelkockázatot. Ezek az ún. non-defaultable bond-ok.

Ezzel szemben bonyolultabb modellekben azzal is számolhatunk, hogy a névértéket nem vagy csak részben fizetik ki lejáratkor valamilyen csődnek vagy részleges csődnek köszönhetően. Ilyen esetben a modellben és a kötvény árában megjelenik az ún.h̃itelkockázat is. Ezek az ún. defaultable bond-okat tartalmazó modellek.

Valójában számos szempont szerint lehet a sztochasztikus kamatlábmodelleket illetve a kapcsolódó kötvénypiaci modelleket csoportosítani. Íme néhány csoportosítás, mely segítheti az olvasót a modellekben rendkívül gazdag szakirodalomban való tájékozódásban.

– 'Non-defaultable bond' modellek versus csődeseményt is megengedő 'defaultable bond' modellek.

– Diszkrét idejű versus folytonos idejű modellek.

– 'Short (interest) rate' versus 'forward (interest) rate' modellek.

– Elsősorban a forward rate modelleken belül: egyetlen sztochasztikus folyamat által hajtott modellek versus véletlen mezős forward rate modellek.

## 2.2. Kötvények árazásásának alapjai

Tekintsünk általában egy kötvényt, mely a $C_1, C_2, \ldots, C_n$ pénzáramlásokat biztosítja (kamatfizetés és/vagy névérték okán) a $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ időpontokban.

Ekkor más befektetésekhez, projektekhez hasonlóan nyilván a kötvényt is árazhatjuk úgy, hogy tekintjük a jövőbeli pénzáramlásai teljes jelenértékét. Azaz a kötvény értéke

$$B = \sum_{i=1}^{n} PV(C_i).$$

A jelenérték meghatározásához természetesen szükségünk van egy alkalmas diszkontrátára. Egy megfelelő piaci hozam lehet erre a célra alkalmas, például ha próbálunk azonos kockázatú más kötvényeket keresni a piacon, s tekintjük az azoktól elvárt hozamot, mely így megadja az árazandó kötvény diszkontrátáját. Ehhez segítséget adhat a hitelminősítő szervezetek besorolása, kategorizálása. Amennyiben be tudjuk azonosítani a szóban forgó kötvény kockázati kategóriáját, akkor pusztán a kategória egyéb kötvényeit érdemes tekinteni, s kiszámolni azok hozamát. Ennek módját a későbbiekben tisztázzuk. De természetesen tekinthetünk más piaci befejtetéseket is, amennyiben azok esetén okunk van azt gondolni, hogy az azokhoz tartozó kockázat azonos az árazandó kötvény kockázatával.

Legyen a $[0, t_i]$ időszakhoz tartozó éves névleges diszkontráta $r_i$, $i = 1,2,\ldots,n$. Ekkor a kötvény értéke

$$B = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{\left(1+\frac{r_i}{k}\right)^{kt_i}}, & \text{klasszikus kamatozás mellett,} \\ \sum_{i=1}^{n} C_i \mathrm{e}^{-r_i t_i}, & \text{folytonos kamatozás esetén.} \end{cases} \tag{2.1}$$

A fenti formulákban klasszikus kamatozás esetén évi $k$ kamatfizetés mellett értendő a formula, így a diszkontráta is, míg folytonos esetben nyilván a folytonos kamatozáshoz tartozó éves névleges diszkontrátát adja $r_i$.

Speciálisan, ha feltételezhetjük, hogy az éves névleges diszkontráta (pl. a hasonló kockázatú kötvényektől elvárt hozam) a kötvény futamideje alatt konstans, akkor a fenti formulák nyilván az alábbira egyszerűsödnek:

$$B = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt_i}} & \text{klasszikus kamatozásnál,} \\ \\ \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{e}^{-rt_i} & \text{folytonos kamatozásnál.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Amennyiben körültekintően határoztuk meg a diszkonrátát és a piac hatékonyan működik, úgy $B$ meg fog egyben egyezni a kötvény piaci árával is (ha az már létezik a piacon).

*Kötvények hozama*

A fentiekben már említettük, hogy az árazáshoz szükségünk lehet más kötvényektől elvárt hozam meghatározására. Ehhez ebben a részben definiáljuk a **lejáratig számított hozam (yield to maturity, YTM)** fogalmát.

Ennek a fogalomnak nagyon egyszerű a definíciója: tekintsünk a korábbi jelölések mellett egy kötvényt, melynek ismert a piaci ára, legyen ez $B_{piaci}$. Ekkor azt az $r$ diszkontrátát, amely mellett a

$$B_{piaci} = B = \sum_{i=1}^{n} PV(C_i)$$

egyenlet teljesül, a kötvény lejáratig számított hozamának nevezzük.

Nyilván a fenti egyenletbe a (2.1) egyik formuláját alkalmazhatjuk.

Ha megvesszük a kötvényt, ahhoz a kezdeti pénzáramlás éppen $C_0 = -B_{piaci}$ lesz, így átrendezve az egyenletet azt kapjuk erre a befektetésre

–melyet a kötvény lejáratáig tervezünk tartani–, hogy

$$NPV = -B_{piaci} + \sum_{i=1}^{n} PV(C_i) = 0. \tag{2.3}$$

Azaz vegyük észre, hogy a (2.3) egyenlet az (1.6) egyenlet speciális esete. Ennélfogva a YTM éppen a kötvény belső megtérülési rátája (ld. 1.5. alfejezet), azaz ez a piac által a kötvénytől a hátralevő futamidő alatt elvárt éves hozam az alkalmas kamatozási konvenció mellett, ahogy azt az 1.5.2 példában megelőlegeztük.

### 2.2.1. Duration, átlagos hátralevő futamidő

Ebben a részben a duration fogalmával foglalkozunk. Magyarul ezt szokták több módon fordítani a szakirodalomban, így megtalálható a hátralevő átlagos futamidő, az átlagos kifizetési idő, vagy egyszerűen az átlagidő kifejezés is, sőt még a nem túl szofisztikált duráció fordítás is. Először definiáljuk a fogalmat különböző esetekben, majd ezt követően bemutatunk a duration és a kötvény értékelése kapcsán néhány nevezetes összefüggést. Ennek során látni fogjuk, hogy a dzration egy érzékenységmutató, s ez a fő oka annak, hogy tárgyaljuk, hiszen ennem nagy a jelentősége a gyakorlatban.

A duration, azaz átlagos hátrelevő futamidő vagy másképpen fogalmazva az átlagos kifizetési idő egyszerűen a kötvény még hátralevő $t_i$ kifizetési időpontjainak egy adott súlyozott átlaga, méghozzá úgy, hogy a súlyokat a hozzájuk tartozó pénzáramlások jelenértékei, azaz a $PV(C_i)$ értékek adják.

Jelöljük a duration-t $D$-vel. Ekkor tehát

$$D := \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i\, PV(C_i)}{\sum_{i=1}^{n} PV(C_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i\, PV(C_i)}{B}.$$

A fenti formulát különböző kamatozási konvenció mellett felírhatjuk (2.2) alapján:

$$D = \begin{cases} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i\, C_i}{\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt_i}}}{B}, & \text{klasszikus kamatozás mellett,} \\ \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{e}^{-rt_i}}{B}, & \text{folytonos kamatozás esetén,} \end{cases} \tag{2.4}$$

ahol $B$ értékét a nevezőben (2.2) adja.

*A duration, mint érzékenységmutató*

A duration egyik legfontosabb szerepe, hogy egyfajta érzékenységmutatóként használható: azaz a kötvény piaci értékének az érzékenységét mutatja a piaci hozamok változására vonatkozóan. Az alábbiakban ezt a kapcsolatot mutatjuk be mindkét kamatozási konvenció mellett. Pontosabban azt fogjuk vizsgálni, hogy a piaci hozam és így a diszkontráta változására hogyan reagál a kötvény piaci értéke. Erre adunk egy egyszerű approximációt.

*Először tekintsük a folytonos kamatozási konvenció esetét.*

Induljunk ki a (2.2) második formulájából.

Azt fogjuk megbecsülni, hogy az $r$ piaci hozam –mely a kötvény árazásához hasynált alkalmas diszkontráta– változása esetén mennyi lesz a kötvény árváltozása. Ehhez meghatározzuk a $\partial B/\partial r$ deriváltat, hiszen segítségével adhatunk egy elsőrendű közelítést a változásra. (Valójában így minden más változó változatlansága mellett fogunk egy közelítést adni a kötvény árváltozására.) A szóban forgó deriváltra azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial B}{\partial r} = \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{e}^{-rt_i}\right)}{\partial r} = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{e}^{-rt_i} \left(-t_i\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} t_i \, C_i \mathbf{e}^{-rt_i} = -D \cdot B,$$

ahol az utolsó lépés egyszerűen a duration definíciójából adódik, ahogy az a a (2.4) második formulájában látszik.

Innen már természetesen módon adódik a becslésünk:

$$\frac{\Delta B}{\Delta r} \approx -D \cdot B, \tag{2.5}$$

így a kötvény árváltozását tudjuk becsülni (közelíteni) a

$$\Delta B \approx -D \cdot B \cdot \Delta r,$$

összefüggéssel, míg a relatív árváltozásra pedig azt kapjuk, hogy

$$\frac{\Delta B}{B} \approx -D \cdot \Delta r.$$

Azaz 1%-os hozamváltozásra a kötvény ára közelítően $-D$ %-os árváltozással reagál. Nyilvánvaló, hogy minél nagyobb a duration abszolút értéke, annál érzékenyebb tehát a kötvény értéke a piaci változásokra. Természetesen a negatív előjel sem meglepő a fenti formulákban, hiszen a kötvény pozitív pénzáramlásokat biztosít, így azok jelenértéke a diszkontráta monoton csökkenő függvénye.

*Most pedig tekintsük a klasszikus kamatozási konvenció esetét, évenkénti k kamatfizetési periódussal.*

Ehhez most is először meghatározzuk a $\partial B/\partial r$ deriváltat az elsőrendű közelítéshez. Esetünkben

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial r} &= \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt_i}}\right)}{\partial r}\\ &= \sum_{i=1}^{n} C_i\left(1+\frac{r}{k}\right)^{-kt_i-1}(-t_ik)\frac{1}{k}\\ &= -\sum_{i=1}^{n} t_i\,\frac{C_i}{\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt_i+1}} = -\frac{1}{1+\frac{r}{k}}\,D\cdot B,\end{aligned}$$

ahol az utolsó lépés itt is a duration definíciójából adódik, ahogy az a (2.4) első formulájában látszik.

Innen ebben az esetben is adódik egy közelítés:

$$\frac{\Delta B}{\Delta r} \approx -\frac{1}{1+\frac{r}{k}}\,D\,B,$$

azonban ennek alakja nem egyezik meg a folytonos kamatozási konvenció mellett kapott (2.5) közelítéssel. Ez az oka annak, hogy egy ún. **módosított (vagy korrigált) duration** fogalmat szokás bevezetni ebben az esetben, melynek definíciója:

$$D^* := \frac{1}{1+\frac{r}{k}}\, D.$$

Ennek segítségével már teljesen azonos alakú közelítéseket kapunk a kötvény árváltozására, mint a folytonos kamatozási konvenció mellett, hiszen a kötvény árváltozását tudjuk becsülni a

$$\Delta B \approx -D^* \cdot B \cdot \Delta r,$$

összefüggéssel, míg a relatív árváltozásra pedig azt kapjuk, hogy

$$\frac{\Delta B}{B} \approx -D^* \cdot \Delta r.$$

Azaz 1%-os hozamváltozásra a kötvény ára közelítően $-D^*$ %-os árváltozással reagál. Így klasszikus kamatozási konvenció mellett szerencsésebb a módosított $D^*$ mutatót használni az érzékenység bemutatására, mint az eredeti duration fogalmát. A fentiekben leírt módosítás egy újabb érv a folytonos kamatozási konvenció használata mellett, illetve az arra való áttérésre, ahol csak lehetséges.

## 2.3. Időszakszámítási konvenciók

Ebben a részben azt tárgyaljuk, hogy hogyan szokásos pénzügyi szerződésekben, így akár értékpapírok esetén is az egyes időintervallumok számításában megegyezni. Szokás ezeket napszámítási konvencióknak is nevezni. Valójában az a kérdés, hogy egy adott naptól egy adott napid terjedő időintervallum hosszát hogyan váltjuk át évekre. Ezek a konvenciók általában egyszerűsítéseket tartalmaznak.

Tegyük fel, hogy $0 \leq t \leq T \leq T^*$. Ekkor a $t$ és $T$ időpontok közti megyezéses időt években kifejezve $\tau(t,T)$ fogja jelölni.

A legtermészetes módja lenne a következő definíciót alkalmazni:

$$\tau(t,T) = T - t.$$

Ugyanakkor a piaci, pénzügyi gyakorlatban ettől sokszor eltérnek, s különböző változatokat definiálnak a naptár sajátosságait figyelembe véve.

Ebben a jegyzetben, ha nem mondunk mást, mi is azt feltételezzük, hogy $\tau(t,T) = T - t$.

*Alternatív időszakszámítások*

Napok száma / 365 számítási mód ("Actual/365"): ekkor

$$\tau(t,T) = \frac{D_2 - D_1}{365},$$

ahol $D_2 - D_1$ jelöli a napok (valódi) számát a $t$ és $T$ időpontok között, méghozzá úgy, hogy a $t$ időponthoz tartozó $D_1$ napot beleszámoljuk, de a $T$ időponthoz tartozó $D_2$ napot nem számoljuk bele).

Azaz ez a időszakszámítási mód azzal az egyszerűsítéssel él, hogy 365 napos az év.

Napok száma / 360 számítási mód ("Actual/360"): ekkor

$$\tau(t,T) = \frac{D_2 - D_1}{360},$$

azaz itt azzal az egyszerűsítéssel élünk, hogy egy év 360 (érdemi) napból áll.

Végezetül tekintsünk egy harmadik módot. Ehhez legyenek a $D_i$ napokhoz tartozó dátumok rendre $(d_i, m_i, y_i)$, $i=1,2$, ahol a dátum formátuma (nap, hónap, év). Ekkor legyen

$$\tau(t,T) = \frac{360(y_2-y_1)+30(m_2-m_1-1)+\max(30-d_1,0)+\min(d_2,30)}{360}.$$

## 2.4. Kamatlábmódozatok, hozamgörbék

Ebben a részben a kötvénypiaci hozamokat vizsgálunk. Nevezetesen a kötvények árából különböző módon számított piac által elvárt hozamokat definiálunk, melyeket gyakorta egyszerűen 'kamatlábaknak' neveznek. Látni fogjuk, hogy ezek rendre egy adott kamatozási konvenció mellett azt a diszkontrátát adják meg, amellyel a piac árazza a különböző lejáratú kötvényeket. Tehát ezek valójában elvárt hozamok, de a szakirodalomban gyakorta egyszerűen azonnali kamatlábként hivatkoznak rájuk.

### 2.4.1. Azonnali hozamok / kamatlábak

*Folytonos kamatozással számolt azonnali kamatláb* a $t$ időpontban a $T$ lejárathoz tartozóan:

$$R(t,T) := -\frac{\ln P(t,T)}{\tau(t,T)}.$$

Vegyük észre, hogy ez az az éves nominális hozamráta folytonos kamatozás mellett, amellyel a piac beárazta a $T$-kötvényt, azaz

$$P(t,T) = \mathsf{e}^{-R(t,T)\tau(t,T)}.$$

Amennyiben veszünk a $t$ időpontban egy ilyen kötvényt és azt nem adjuk el lejáratig, akkor ez lesz az a névleges hozamráta folytonos kamatozás mellett, amelyet évente átlagosan realizálunk ezen a befektetésen.

*Egyszerű kamatozással számolt azonnali kamatláb* a $t$ időpontban a $T$ lejárathoz tartozóan:

$$L(t,T) := \frac{1-P(t,T)}{\tau(t,T)P(t,T)}.$$

Ez pedig az az éves nominális hozamráta egyszerű kamatozás mellett, amellyel a piac beárazta a $T$-kötvényt, azaz

$$P(t,T) = \frac{1}{1+L(t,T)\tau(t,T)}.$$

Ezt gyakorta csak egy éven belüli hozamok számítására szokás használni.

*Éves kamatozással számolt azonnali kamatláb* a $t$ időpontban a $T$ lejárathoz tartozóan:

$$Y(t,T) := \frac{1}{P(t,T)^{1/\tau(t,T)}} - 1.$$

Ez pedig az az éves nominális hozamráta klasszikus kamatozás mellett, amellyel a piac beárazta a $T$-kötvényt, ahol $k=1$, azaz egy év egy hozamfizetési periódusnak felel meg. Valóban, ekkor

$$P(t,T) = \frac{1}{[1+Y(t,T)]^{\tau(t,T)}}.$$

Nyilván ezt csak akkor szokás használni, ha $\tau(t,T)$ egész. Amennyiben veszünk a $t$ időpontban egy ilyen kötvényt és azt nem adjuk el lejáratig, akkor ez lesz az a névleges hozamráta klasszikus éves kamatozás mellett, amelyet évente átlagosan realizálunk ezen a befektetésen.

A következő eset ennek általánosítása több éven belüli hozamfizetési periódus esetére.

*Évente $k$-szori kamatozással számolt azonnali kamatláb* a $t$ időpontban a $T$ lejárathoz tartozóan:

$$Y_k(t,T) := k\left(\frac{1}{P(t,T)^{1/[k\tau(t,T)]}} - 1\right) = \frac{k}{P(t,T)^{1/[k\tau(t,T)]}} - k.$$

Ez tehát az az éves nominális hozamráta klasszikus kamatozás és éven belüli $k$ hozamszámítási periódus mellett, amellyel a piac beárazta a $T$-kötvényt, ahol $k \geq 1$. Valóban, ekkor

$$P(t,T) = \frac{1}{\left[1 + \frac{Y_k(t,T)}{k}\right]^{k\tau(t,T)}}.$$

### 2.4.2. Hozamgörbék

**Hozamgörbe (yield curve)** vagy **zero-coupon görbe** alatt a $t$ időpontban az alábbi függvényt értjük:

$$T \mapsto \begin{cases} L(t,T) & \text{for } t < T \leq t+1, \\ Y(t,T) & \text{for } t+1 < T \leq T^*. \end{cases}$$

Ez a függvény egyszerűen összefoglalja, hogy a piaci szereplők milyen hozamokat várnak el a kötvénypiacon különböző lejáratokra vonatkozóan.

**Folytonos kamatozással számított hozamgörbe (yield curve)** vagy **zero-coupon görbe** alatt a $t$ időpontban az alábbi függvényt értjük:

$$T \mapsto R(t,T), \quad T \in [t, T^*].$$

Ez a függvény tehát ugyancsak azt foglalja össze, hogy a piaci szerpelők milyen hozamokat várnak el a kötvénypiacon különböző lejáratokra vonatkozóan, ám folytonos hozamszámítási konvencióval kifejezve.

**Zero bond görbe** alatt a $t$ időpontban az alábbi függvényt értjük:

$$T \mapsto P(t,T), \quad T \in [t, T^*].$$

Ez tehát nem más, mint az aktuális piaci kötvényárak bemutatását szolgáló függvény.

### 2.4.3. Határidős hozamok / kamatlábak (forward interest rates)

A kötvénypiaci árak további (elvárt) hozamfogalmakat is tartalmaznak, ezeket tekintjük át ebben a részben. Bár ezek általánosságban elvárt hozamok, a szakirodalomban rendre egyszerűen kamatlábként hivatkoznak rájuk.

*Egyszerű kamatozással számolt határidős kamatláb (Simply-compounded forward interest rate)* a $t$ időpontban a jövőbeli $T,S$ időintervallumra vonatkozóan, ahol $0 \leq t \leq T \leq S \leq T^*$:

$$F(t,T,S) := \frac{1}{\tau(T,S)}\left(\frac{P(t,T)}{P(t,S)} - 1\right).$$

Ez tehát az az egyszerű hozamszámítással vett éves hozamráta, melyet $T$-kötvény tartalmaz $[T,S]$ intervallumra vonatkozóan, azaz a piac ezen jövőbeli időintervallumra vonatkozóan ezt az elvárt hozamot használta az árazásokban. Másképpen

$$P(t,S) = P(t,T)\frac{1}{1+F(t,T,S)\tau(T,S)}.$$

*Folytonos kamatozással számolt határidős kamatláb (Continuously-compounded forward interest rate)* a $t$ időpontban a jövőbeli $T,S$ időintervallumra vonatkozóan, ahol $0 \le t \le T \le S \le T^*$:

$$\tilde{F}(t,T,S) := -\frac{1}{\tau(T,S)} \ln \frac{P(t,S)}{P(t,T)} = \frac{1}{\tau(T,S)} \ln \frac{P(t,T)}{P(t,S)}.$$

Ez tehát az a folytonos hozamszámítási konvencióval vett éves névleges hozamráta, melyet $T$-kötvény tartalmaz $[T,S]$ intervallumra vonatkozóan, azaz a piac ezen jövőbeli időintervallumra vonatkozóan ezt az elvárt hozamot használta az árazásokban. Tehát

$$P(t,S) = P(t,T)\mathsf{e}^{-\tilde{F}(t,T,S)\tau(T,S)}.$$

*Pillanatnyi határidős kamatláb (Instantaneous forward interest rates)*

Ehhez tegyük fel, hogy a kamatszelvény nélküli kötvénygörbe, a zero bond curve differenciálható a lejárati időpontra nézve, és tegyük fel, hogy a $\tau(t,T) = T - t$ időszámítási módot alkalmazzuk. Ekkor

$$\begin{aligned}\lim_{S\to T+} F(t,T,S) &= -\lim_{S\to T+} \frac{1}{P(t,S)} \frac{P(t,S) - P(t,T)}{S-T} \\ &= -\frac{1}{P(t,T)} \frac{\partial P(t,T)}{\partial T} = -\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T}.\end{aligned}$$

A $T$ lejárathoz tartozó *pillanatnyi határidős kamatláb (instantaneous forward interest rate)* alatt a $t$ időpontban az alábbit értjük:

$$f(t,T) := \lim_{S\to T+} F(t,T,S) = -\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T},$$

és ennélfogva

$$P(t,T) = \mathsf{e}^{-\int_t^T f(t,u)\,du}.$$

Természetesen merül fel, hogy ugyanezt egy analóg fogalmat vezessünk le a folytonos kamatozással számolt határidős kamatlábból. Ehhez tekintsük a következőt:

$$\begin{aligned}
\lim_{S\to T+} \tilde{F}(t,T,S) &:= \lim_{S\to T+} -\frac{\ln P(t,S) - \ln P(t,T)}{S-T} \\
&= -\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T} = -\frac{1}{P(t,T}\frac{\partial P(t,T)}{\partial T} \\
&= f(t,T).
\end{aligned}$$

## 2.5. Kötvény- és kamatlábderivatívák

Természetesen a kötvénypiacokhoz kapcsolódóan is kialakultak alapvető derivatívák, amelyek a kockázatkezelés fontos eszközetit adják a piaci szereplők számára. Ebben a részben a legfontosabb ilyen származtatott értékpapírokat tekintjük át. Látni fogjuk, hogy a kifizetéseik hasonlóak a részvényekre kiírt alapvető derivatívák kifizetéseihez. Itt leginkább a határidős ügyletekre gondolunk és az egyszerű opciókra. Ugyanakkor az alaptermék egyes esetekben egy kötvény lesz, míg más esetekben pedig egy korábbiakban definiált piaci kamatláb (hozam), melyet szintén a piaci kötvényárakból származtatunk.

Ezen derivatívák esetén az eredeti angol elnevezést használjuk, hiszen ezek a magyar piacon is így használatosak.

*FRA (Forward Rate Agreement)*

Legyen $K(>0)$ egy rögzített kamatlábérték, továbbá $0 \le t < T < S \le T^*$.

A Forward rate agreement (FRA) a tulajdonosa egy egy kamatlábcserét hajt végre, méghozzá a rögzített $K$ kamatláb melletti kamatfizetést cseréli el az $L(T,S)$ változó azonnali kamatláb melletti kamatfizetésre a $[T,S]$ időintevallum fölött. A $t$ időpontban az FRA-t megkötik, melynek első lejárati időpontja a $T$ időpont, névértéke $N$ (azaz ennyi egységnyi pénz –valuta– után fizetik a szóban forgó kamatokat). A $S$ második lejárati időpontban az FRA tulajdonosa az

$$N\tau(T,S)(K - L(T,S))$$

kifizetést kapja, ahol feltételezzük, hogy mindkét kamatláb esetén ugyanazt az időszámítási módot alkalmazzák.

*FRA versus határidős kamatlábak*

Tekintsünk egy FRA szerződést, melyet a korábbiakban ismertettünk. Tudjuk, hogy a kifizetés az $S$ időpontban

$$N\tau(T,S)(K - L(T,S)) = N\left(\tau(T,S)K - \frac{1}{P(T,S)} + 1\right).$$

Tegyük fel, hogy $P(t,S)N[\tau(T,S)K + 1]$ dollárt fektetünk be a $t$ időpontban $S$-kötvényekbe, mely így $N[\tau(T,S)K + 1]$ értékkel bír a $S$ időpontban.

Hasonlóan, ha befektetünk $NP(t,T)$ dollárt $T$-kötvényekbe a $t$ időpontban, akkor $N$ dollárt realizálunk a $T$ időpontba, melyet újra befektethetünk $S$-kötvényekbe, azaz vehetünk $N/P(T,S)$ darab $S$-kötvényt, amely így $N/P(T,S)$ dollárt fog érni a $S$ időpontban.

Ennélfogva az FRA értéke a $t$ időpontban az alábbi értékkel kell, hogy egyenlő legyen:

$$\begin{aligned} P(t,S)N[\tau(T,S)K+1]-NP(t,T) \\ = P(t,S)\tau(T,S)N[K-F(t,T,S)]. \end{aligned}$$

Ezért azt kapjuk, hogy $K$ értéke éppen $F(t,T,S)$ kell hogy legyen, ha azt akarjuk elérni, hogy az FRA értéke a $t$ kibocsátási időpontban nulla legyen.

*Jelölések*

Ebben a részben visszatérő módon a következő jelöléseket és feltételeket fogjuk használni a különböző kamatlábderivatívák definiálásához. From now on we shall use the following notations for the definitions of further interest derivatives.

Legyen

– $t$ a jelenlegi időpont és feltesszük, hogy most írják ki az adott szerződést,

– $[T_\alpha, T_\beta]$ egy jövőbeli időintervallum, melyet felosztunk részintervallumokra az alábbi osztópontokkal: $0 \leq t < T_\alpha < T_{\alpha+1} < \ldots < T_{\alpha+n} = T_\beta \leq T^*$,

– $N$ a szerződés névértéke (azaz az a pénzmennyiség, melyre a kontraktusokat kiírtál,

– $K$ egy rögzített kamatráta.

*Kamatláb-swap (Interest rate swap, IRS, RFS)*

**Receiver IRS** vagy másképpen **Receiver (Forward-start) interest rate swap (RFS)**: ebben a szerződésben a tulajdonos egy sorozatát kapja kamatlábcseréknek, ahol a $K$ kamatláb alaján adódó pénzáramlások (kamatfizetések) van elcserélve a változó azonnali $L(T_{\alpha+i}, T_{\alpha+i+1})$ kamatlábra vonatkozó pénzáramlásokkal (kamatfizetésekkel) a $[T_{\alpha+i}, T_{\alpha+i+1}]$ intervallumra és az $N$ névértékre számolva minden $i = 0, 1, \ldots, n-1$ esetére.

A fentiek alapján tehát a $t$ időpontban létrejön a szerződés, mely a $T_{\alpha+i+1}$ időpontban a

$$N\tau(T_{\alpha+i}, T_{\alpha+i+1})(K - L(T_{\alpha+i}, T_{\alpha+i+1}))$$

kifizetést biztosítja a pozíció tulajdonosa számára, minden $i = 0, 1, \ldots, n-1$ esetén.

Vegyük észre tehát, hogy az RFS nem más, mint FRA szerződések sorozata.

**Payer IRS** vagy másképpen **Payer (Forward-start) interest rate swap (PFS)**: ez nem más, mint az RFS másik szerződőjének pozíciója, azaz ez egy olyan szerződés, mely a pozíció tulajdonosának pénzáramlás cserék sorozatát biztosítja, ahol a pénzáramlások kamatfizetések úgy, hogy a változó azonnali $L(T_{\alpha+i}, T_{\alpha+i+1})$ kamatlábhoz tartozó pénzáramlást cseréljük a fix $K$ kamatlábhoz tartozóval, ahol a kamatfizetések a $[T_{\alpha+i}, T_{\alpha+i+1}]$ időintervallumhoz és a $N$ névérték mellett vannak meghatározva minden $i = 0, 1, \ldots, n-1$ esetén.

Tehát a $t$ időpontban létrejön a szerződés és a $T_{\alpha+i+1}$ időpontban

$$N\tau(T_{\alpha+i}, T_{\alpha+i+1})(L(T_{\alpha+i}, T_{\alpha+i+1}) - K)$$

kifizetést biztosít a pozíció tulajdonosának, ahol $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

*Caplet*

Legyen ebben az esetben $i$ egy rögzített érték.

A *caplet* szerződéshez tartozik egy első lejárat, legyen ez $T_{\alpha+i}$ és egy második lejárat, mely $T_{\alpha+i+1}$ lesz. A szerződés a tulajdonosának a

$$N\tau(T_{\alpha+i}, T_{\alpha+i+1})(L(T_{\alpha+i}, T_{\alpha+i+1}) - K)^{+}$$

kifizetést biztosítja a $T_{\alpha+i+1}$ időpontban.

Tegyük fel, hogy kamatfizetési kötelezettségünk van a változó $L(T_{\alpha+i}, T_{\alpha+i+1})$ kamatláb mellett a $[T_{\alpha+i}, T_{\alpha+i+1}]$ időintervallumra számolva. Ha van egy caplet szerződésünk, akkor ezzel azt a jogot birtokoljuk tehát, hogy legfeljebb $K$ kamatláb mellett fizetjük meg a szóban forgó kötelezettséget.

*Floorlet*

Ismét tekintsünk egy rögzített $i$ értéket.

Egy **floorlet** szerződés szintén rendelkezik egy első $T_{\alpha+i}$ és egy második $T_{\alpha+i+1}$ lejárati időponttal. A szerződés pedig az

$$N\tau(T_{\alpha+i}, T_{\alpha+i+1})(K - L(T_{\alpha+i}, T_{\alpha+i+1}))^+$$

kifizetést biztosítja a tulajdonosának a $T_{\alpha+i+1}$ időpontban.

Ennek megértéséhez tegyük fel most, hogy részesülünk egy kamatfizetésben a változó $L(T_{\alpha+i}, T_{\alpha+i+1})$ mellett a $[T_{\alpha+i}, T_{\alpha+i+1}]$ időintervallumra vonatkozóan. Amennyiben van egy floorlet szerződésünk, úgy a pozíció azt a jogot biztosítja számunkra, hogy legalább $K$ kamatlábérték mellett realizáljuk a kamatfizetést.

*Cap és floor*

A cap egyszerűen caplet szerződések egy (véges) sorozata.

A **cap** szerződés a tulajdonosának a

$$N\tau(T_{\alpha+i}, T_{\alpha+i+1})(L(T_{\alpha+i}, T_{\alpha+i+1}) - K)^+$$

pénzáramlás-sorozatot biztosítja rendre a $T_{\alpha+i+1}$ időpontokban, ahol $i =$

$= 0, 1, \ldots, n-1$.

A **floor** szerződés pedig a tulajdonosának az

$$N\tau(T_{\alpha+i}, T_{\alpha+i+1})(K - L(T_{\alpha+i}, T_{\alpha+i+1}))^+$$

kifizetéseket biztosítja a $T_{\alpha+i+1}$ időpontokban, ahol $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

*Swap opciók (Swaption, Swap option)*

Legyen $T \in [t, T_\alpha]$ az értékpapírok lejárati időpontja.

Ekkor az Európai **payer swaption** vagy **payer swap opció** azt a jogot biztosítja a tulajdonosának, hogy belépjen egy payer IRS (PFS) pozícióba a $T$ időpontban.

Hasonlóan, egy Európai **receiver swaption** vagy **receiver swap opció** pedig azt a jogot biztosítja a tulajdonosának, hogy belépjen egy receiver IRS (RFS) pozívióba a $T$ időpontban.

Ilyen szerződéseknél gyakran az a megegyezés, hogy a szerződés lejárata egyben az első 'cseredátuma'az IRS-nek, azaz a $T_\alpha$ időpont.

Korábban láttuk, hogy több kamatlábderivatíva egyszerűen felfogható egyszerűbb derivatívák véges sorozataként. Például ilyenek voltak a cap és floor értékpapírok, amelyek caplet illetve floorlet kontraktusok összességére (véges halmazára, azaz lényegében azok portfóliójára) bonthatóak fel.

Ugyanakkor vegyük észre, hogy a swaption nem ilyen, azaz ez az értékpapír nem bonthatóó fel elemibb értékpapírok összességére.

## 2.6. Szakirodalmi megjegyzések

Nagyon gazdag a kötvénymodellek, kamatlábmodellek és kötvény- illetve kamatlábderivatívák szakirodalma, benne számos modellel és kiváló összefoglaló monográfiákkal. Ezek közül ajánlunk most néhányat, melyek egyben az alapjait jelentették ezen jegyzet megírásának is.

Ami a legfontosabb kötvénypiaci alapfogalmakat illeti, az érdeklődő olvasónak kiemeljük és ajánljuk Brigo & Mercurio [13] művét (leginkább 1. fejezet), és Cairns (2004) könyvét (ld. szintén 1. fejezet). De érdemes megjegyezni, hogy számos más munkában megtalálhatóak ezek a közismert alapfogalmak. Szintén kiemeljük Musiela & Rutkowski [44] kiváló munkáját (az alafogalmak tekintetében a 9. fejezetet), továbbá általános kapcsolódó pénzügyi alapfogalmak tisztázásához itt is javasoljuk Hull [35] könyvét (a téma szempontjából különösen a 4.,6. és 7. fejezeteket).

# Második rész

# Modern pénzügyi modellek

# 3. fejezet

# Diszkrét idejű kamatlábmodellek

## 3.1. Alapfogalmak a diszkrét idejű kötvénypiacokhoz

### 3.1.1. Jelölések, általános feltételek

A diszkrét idejű kamatlábmodellek esetén általánosan számos természetes feltételezéssel élünk. Az alábbiakban ezeket foglaljuk először össze, egyben a legfontosabb jelöléseket is bevezetve.

– Mindig egy véges $[0, T^*]$ időintervallumon fogjuk a modelljeinket definiálni, ahol $T^*$ egy egész, mely az utolsó, nevezetesen a $T^*$-adik kereskedési időpontot fogja jelölni a piacon.

- A piaci kereskedési időpontok tehát az alábbiak lesznek: $0, 1, 2, 3, \ldots, T^*$ $* - 1, T^*$. Jelölje $\mathcal{T}$ a kereskedési időpontok halmazát, azaz nyilvánvalóan $\mathcal{T} = \{0, 1,2, \ldots, T^*\}$.

- Mindig feltételezünk egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőt a háttérben, továbbá egy

- $\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_k\}_{k=0}^{T^*}$ filtrációt is, mely a piacon folyamatosan érkező információk folyamát írja le.

- Egy $T$-kötvény árát a $t$ időpontban $P(t, T)$ fogja rendre jelölni, amiről feltesszük, hogy assumed $\mathcal{F}_t$-mérhető,

- továbbá azt is feltesszük, hogy $P(T, T) = 1$, minden $T \in [0, T^*]$ esetén.

- A $[t, t+1)$ időintervallumhoz tartozó kockázatmentes azonnali kamatlábat $r(t)$ fogja jelölni. Nyilván feltesszük, hogy $r(t)$ mérhető az $\mathcal{F}_t$ $\sigma$-algebrára nézve, ahol $t \in \mathcal{T}$.

A fentiekben tett $P(T, T)$=1 feltétel alapján az ebben a részben vizsgált modellcsaládok mind ún. non-defaultable típusúak, azaz kizárják a kötvény kibocsátójának a csődjét. Tehát ezekben a modellekben külön hitelkockázat nem jelenik meg.

Érdemes hangsúlyozni, hogy az $r(t)$ kamatráta az egyszerűség kedvéért nem éves kamatráta, hanem a $[t, t+1)$ időintervallumhoz tartozó kamatot adja meg, melyet realizálhatunk ezen időszak alatt, ha a kockázatmentes értékpapírba fektetünk. Továbbá jegyezzük meg, hogy folytonos kamatozási konvenció mellett használjuk a továbbiakban ezt a kamatrátát.

*A bankszámla-folyamat*

A piacon lehetséges a kockázatmentes kamatláb mellett befektetni, a kockázatmentes befektetést reprezentálja lényegében a bankszámlának nevezett árfolyamat. Jegyezzük meg, hogy ha a $t-1$ időpontban vásárlunk egy $t$-kötvényt, akkor ugyanúgy realizáljuk a következő időszakra a kockázatmentes kamatlábat, hiszen a kötvény egy valószínűséggel kifizeti a névértékét.

– A bankszámla (másképpen a piaci kockázatmentes eszköz) egy olyan eszköz, melynek hozama a kockázatmentes kamatláb, ennélfogva a bankszámla árfolyamata

$$B(0) = 1, \quad \text{és} \quad B(t) = \mathsf{e}^{\sum_{s=0}^{t-1} r(s)}, \quad t \in \mathcal{T}.$$

Jegyezzük meg, hogy a $B$ folyamat előrejelezhető a $\mathbb{F}$ filtrációra nézve.

– Az azonnali kamatlábra nyilván teljesül a modellünkben az alábbi összefüggés:

$$P(t, t+1) = \mathsf{e}^{-r(t)} \text{ és ezért } r(t) = -\ln P(t, t+1),$$

$t \in \mathcal{T}$, $t < T^*$.

*Határidős kamatlábak*

– $F(t, T_1, T_2)$ fogja jelölni a $t$ időpontban a $[T_1, T_2]$ időintervallumhoz tartozó határidős kamatlábat folytonos kamatozási konvenció mellett, ahol $0 \le t \le T_1 < T_2 \le T^*$, $t, T_1, T_2 \in \mathcal{T}$.

– Jegyezzük meg, hogy elégséges az egylépéses intervallumokhoz tartozó határidős kamatlábakkal dolgoznunk, azaz a $F(t, T, T+1)$ kamatlábakkal (hozamokkal), hiszen azok az összes többi határidős kamatlábat már egyértelműen definiálják.

– A határidős kamatlábakra teljesül a tárgyalandó modellekben, hogy

$$P(t, T+1) = P(t, T)\mathsf{e}^{-F(t,T,T+1)}$$

és ennélfogva

$$F(t, T, T+1) = \ln \frac{P(t, T)}{P(t, T+1)}, \quad t \le T < T^*, \ t, T \in \mathcal{T}.$$

Általánosan azt kapjuk, hogy

$$P(t, T) = \mathsf{e}^{-\sum_{s=t}^{T-1} F(t,s,s+1)}, \quad t \le T < T^*, \ t, T \in \mathcal{T}.$$

Így speciálisan

$$r(t) = F(t, t, t+1), \quad t < T^*, \quad t \in \mathcal{T}.$$

Jegyezzük meg, hogy a 0 kedeti időpontban rendelkezésünkre állnak (azaz ismertek a piacon) a $P(0,T)$ kötvényárak, ahol $T \in \mathcal{T}$, így egyben a kezdeti $F(0,T,T+1)$ határidős kamatlábak és az azonnali $r(0) = F(0{,}0{,}1)$ kamatláb is ismert a piacon.

### 3.1.2. Egy determinisztikus piaci modell

Mielőtt a sztochasztikus piaci modellek tárgyalásába kezdünk, egy egyszerű gondolatkísérletbe kezdünk: nézzük meg, hogy milyen összefüggés élne a kamatlábak és a kötvényárak között, amennyiben nincs véletlen a modellben.

Természetesen itt is abból indulunk ki, hogy arbitrázsmentes modellt kívánunk létrehozni. Ebből pedig az következik, hogy

$$r(T) = F(0,T,T+1) = F(t,T,T+1),$$

$0 \le t \le T < T^*$, $t, T \in \mathcal{T}$, hiszen egyébként ugyanarra a $[T, T+1]$ időintervallumra vonatkozóan kettő különböző és egyben kockázatmentes kamatlábunk lenne.

Ennélfogva, a kiinduló piaci $P(0,T)$, $T \in \mathcal{T}$, kötvényárak meghatározzák a határidős kamatlábakat, azokból pedig az azonnali és minden más kamatláb a piacon adódik (ld. alul).

Így tehát azt kapjuk, hogy $0 \le t \le T \le T^*$, $t, T \in \mathcal{T}$, esetén a kötvényárakra teljesül, hogy $P(t,T) = \exp(-\sum_{s=t}^{T-1} F(0,s,s+1)) = P(0,T)/P(0,t)$.

Nyilván ez egy egyszerű modell, s a gyakorlatban nincs nagy jelentősége, de reményeink szerint segít a bonyolultabb modellek megismerésében.

### 3.1.3. Arbitrázsmentes kötvényárcsaládok

**3.1.1. Definíció.** *Egy modellben definiált $P(t,T)$, $0 \le t \le T \le T^*$, kötvényárak halmazát arbitrázsmentes kötvényárcsaládnak fogjuk nevezni az $r(t)$ kockáztamentes kamatlábakra vonatkozóan, ha*

- *létezik egy $\mathbb{P}^*$ valószínűségi mérték, mely ekvivalens a $\mathbb{P}$ mértékkel és*

- *a*

$$Z(t,T) = \frac{P(t,T)}{B(t)}, \quad 0 \le t \le T,$$

  *diszkontált kötvényár-folyamatok rendre $\mathbb{P}^*$-martingálok minden $T$ lejárat esetén.*

Jegyezzük meg, hogy a fenti definícióban a $\mathbb{P}^*$ mérték nyilván teljesíti az ekvivalens martingálmérték (EMM) fogalmát.

*Kötvényárak az EMM mellett*

Amennyiben adott egy arbitrázsmentes kötvényárcsalád, akkor a kötvényárakra egyben az is teljesül, hogy

$$\begin{aligned} P(t,T) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\frac{B(t)}{B(T)}\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(e^{-\sum_{s=t}^{T-1} r(s)}\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right) \\ &= P(t,t+1)\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(P(t+1,T)\,|\,\mathcal{F}_t\right). \end{aligned}$$

*Befektetési stratégiák kötvényekkel*

**3.1.2. Definíció.** *Egy kötvényekből álló portfólióstratégia alatt (mely véges sok kötvényből áll) egy*

$$\pi_n = (\beta_0^{(n)}, \beta_1^{(n)}, \ldots, \beta_M^{(n)}), \qquad 0 \le n \le N,$$

*sorozatot értünk, ahol $N > 0$ és $M \ge 0$ egészek, melyekre $N + M \le T^*$, továbbá $\beta_i^{(n)}$ egy valószínűségi változó, mely azt jelöli, hogy hány $(n+i)$-kötvényt tartalmaz a stratégia $\pi_n$ portfóliója, melyet az $n-1$ időpontban hozunk létre és tartunk az $n$ időpontig. Ennélfogva feltesszük, hogy $\beta_i^{(n)}$ mérhető az $\mathcal{F}_{n-1}$ $\sigma$-algebrára nézve.*

A stratégia értéke az $n$ időpontban

$$X_n^\pi = \sum_{i=0}^{M} \beta_i^{(n)} P(n, n+i).$$

*Önfinanszírozó stratégiák*

**3.1.3. Definíció.** *Egy $\pi$ stratégiát önfinanszírozónak fogunk nevezni, ha az értékfolymata teljesíti az*

$$X^{\pi}_{n-1} = \sum_{i=0}^{M} \beta_i^{(n)} P(n-1, n+i)$$

*összefüggést is.*

A fenti önfinanszírozó feltétel egy ekvivalens alapja az alábbi:

$$\sum_{i=0}^{M-1} \left(\beta_i^{(n)} - \beta_{i+1}^{(n-1)}\right) P(n-1, n+i)$$
$$+\beta_M^{(n)} P(n-1, n+M) - \beta_0^{(n-1)} P(n-1, n-1) = 0.$$

*Az eszközárazási alaptétel*

**3.1.4. Tétel.** – *Egy arbitrázsmentes kötvényárcsaládban minden $\pi$ portfólióstratégia $\frac{X_t^{\pi}}{B(t)}$ diszkontált értékfolyamata $\mathbb{P}^*$-martingál.*

– *Egy ilyen piacon nem létezik arbitrázsstratégia, azaz ilyen modellekben teljesül az eszközárazási alaptétel egyik iránya.*

Utóbbi állítás tehát azt mondja ki, hogy a ilyen modellekben teljesül a klasszikus eszközárazási alaptétel, pontosabban annak egyik iránya, hasonlóan egyszerűbb diszkrét piaci modellekhez, például részvényárazási modellekhez lásd például a [28] jegyzetben az arbitrázst tárgyaló fejezetét. Egyben azt is láthatjuk, hogy az ott közölt bizonyítás megismételhető ezen esetben is. Jegyezzük meg, hogy gyakorlati szempontból ez az iránya igazán fontos az eszközárazási alaptételnek: ez az oka annak, hogy egy-egy modellben rendre először azt fogjuk belátni, hogy a kötvények árfolyamata teljesíti az arbitrázsmentes kötvényárcsalád definícióját. Egyben a fenti tétel indokolja, hogy miért neveztük az EMM létezése esetén a kötvényárcsaládot arbitrázsmentesnek.

## 3.2. Bináris kamatlábmodellek

*Bináris valószínűségi mezők*

A bináris piaci modellek esetén egy egyszerű bináris sztochasztikus hátteret feltételezünk. Ezt írjuk le az alábbiakban.

– Feltesszük ilyenkor, hogy van egy "bináris véletlen" a modell hátterében, azaz azt tesszük fel, hogy $|\Omega| = 2^{T^*}$, méghozzá úgy, hogy az elemi események halmaza lényegében bináris véges hosszúságú sorozatok halmaza, azaz az alábbi alakú:

$$\Omega = \{\, (x_1, x_2, \ldots, x_{T^*}) \mid x_i \in \{a_i, b_i\},\ i = 1, 2, \ldots, T^* \,\}.$$

Itt az $a_i$ értékek egy-egy "lefelé" történő piaci ugrást reprezentálnak, míg a $b_i$ értékek pedig egy "felfelé" történő ugrást az $i$ időpontban, azaz az $i$-edik lépésben.

– Valójában a "felfele" irány csak annyit kell, hogy jelentsen, hogy az ahhoz ($b_i$) tartozó árváltozás nagyobb lesz, mint a másik értékhez ($a_i$) tartozó árváltozás. Tehát akár mindkettő jelenthet csökkenést vagy növekedést az árban.

*A filtráció*

A fenti bináris bázison mindig az alábbi természetes filtrációt fogjuk feltételezni.

– Legyen két triviális $\sigma$-algebra az időintervallum két végpontján, azaz $\mathcal{F}_{T^*} := 2^\Omega$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

– Minden $i$ egész esetén, ahol $0 \le i \le T^*$, és $y_j \in \{a_j, b_j\}$, $j = 1,2,\ldots,t$, értékek esetén tekintsük az alábbi definíciót:

$$(y_1,y_2,\ldots,y_i,\cdot)$$
$$= \{\ (x_1,x_2,\ldots,x_{T^*}) \in \Omega \mid x_j = y_j,\ j = 1,2,\ldots,i\ \}.$$

Ekkor a filtráció $\mathcal{F}_t$ $\sigma$-algebráját könnyen definiálhatjuk úgy, mint az $(y_1,y_2,\ldots,y_i,\cdot)$, $1 \le i \le t$, események által generált $\sigma$-algebrát. Azaz minden olyan esemény generálja a $\sigma$-algebrát, melyet meghatároz az első $t$ lépése a piacnak.

### 3.2.1. A Ho-Lee bináris piaci modell

*A Ho-Lee modell feltételrendszere*

Tegyük fel, hogy adott egy –a fentiekben leírt– bináris valószínűségi mező, és legyen minden $t \in \mathcal{T}$, $t < T^*$ esetén

$$P(t+1,T) = \begin{cases} u(t,T-t)\mathrm{e}^{r(t)}P(t,T) & \text{ha a } t+1 \text{ időpontban} \\ & \text{a piac felfele megy,} \\ d(t,T-t)\mathrm{e}^{r(t)}P(t,T) & \text{ha a } t+1 \text{ időpontban} \\ & \text{a piac lefele megy,} \end{cases}$$

ahol $u(t,T-t)$, $d(t,T-t)$ valós számok úgy, hogy $u(t,T-t) \geq d(t,T-t) > 0$.

Itt megjegyezzük, hogy lehetne ennél akár általánosabb feltételek mellett is definiálni a modellt, azaz pusztán azt megkövetelni, hogy $u(t,\cdot)$ és $d(t,\cdot)$ valószínűségi változók is lehetnek úgy, hogy azok adaptáltak, azaz azok rendre mérhetőek az $\mathcal{F}_t$ $\sigma$-algebrára.

A fenti definíció mellett érdemes kiemelnünk néhány egyszerű tulajdonságot.

– Ekkor nyilvánvalóan

$$u(t,T-t)\mathrm{e}^{r(t)}P(t,T) = u(t,T-t)\frac{P(t,T)}{P(t,t+1)},$$

és

$$d(t, T-t)\mathrm{e}^{r(t)}P(t,T) = d(t, T-t)\frac{P(t,T)}{P(t,t+1)}.$$

– Továbbá vegyük észre, hogy a $P(t,T)$ árak a definíció alapján $\mathcal{F}_t$-mérhetőek.

– Végül szükségképpen $u(1) = d(1) = 1$ kell, hogy teljesüljön, hiszen az utolsó lépésben a lejárat előtt már minden kötvény kockázatmentes.

A továbbiakban csak olyan modelleket fogunk tekinteni, ahol az együtthatókra egyben az is teljesül, hogy léteznek olyan (időfüggetlen) $u(s)$, $d(s)$, $s\in\mathcal{T}$, $s\geq 2$, konstansok, melyekre $u(s)=u(t,s)$ és $d(s)=d(t,s)$ minden $t\in\mathcal{T}$, $t<T^*$ esetén, azaz másképpen fogalmazva az együtthatók időben homogének.

*Arbitrázsmentesség a Ho-Lee modellben*

Ahogy korábban jeleztük, egy kamatlábmodellben is az első természetes kérdés, hogy milyen feltételekkel lehet annak arbitrázsmentességét biztosítani.

**3.2.1. Tétel.** *Tekintsünk egy fentiekben leírt Ho-Lee modellt és tegyük fel, hogy az arbitrázsmentes.*

– *Ekkor az együtthatókra teljesül, hogy $d(s) < 1 < u(s)$ minden $s \in \mathcal{T}$, $s \geq 2$ esetén.*

– *Vezessük be az alábbi jelölést:*

$$q(s) := \frac{1-d(s)}{u(s)-d(s)}, \quad s \in \mathcal{T}, s \geq 2.$$

*Ekkor létezik egy* $q \in (0,1)$ *szám, melyre* $q = q(s)$ *minden* $s \in \mathcal{T}$, $s \geq 2$ *esetén.*

– *Definiáljuk továbbá a* $\mathbb{P}^*$ *valószínűségi mértéket az alábbi módon. Legyen minden* $\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_{T^*}) \in \Omega$ *esetén*

$$\mathbb{P}^*(\omega) := q^k(1-q)^{T^*-k},$$

*ahol* $k$ *egy egész,* $0 \leq k \leq T^*$*, mely azt mutatja, hogy hány felfele ugrás történt a piacon az* $\omega$ *bekövetkezése esetén (azaz azon esetk száma, ahol* $x_i = b_i$, $i \in \mathcal{T}$*).*

*Ekkor a* $\mathbb{P}^*$ *egy EMM a piacon.*

A tétel igazolását itt nem közöljük, de az érdeklődő olvasónak megjegyezzük, hogy egyszerű bináris részvényárazása diszkrét idejű piacokon hasonló tétel érvényes az arbitrázsmentességre: azaz egy fentihez hasonló feltétel esetén az eszközök hozamára –azaz, hogy a kockázatos eszköz hozamai között helyezkedik el a kockázatmentes hozam– ott igazolható, hogy létezik és csak egy EMM, s ez egyben ott ekvivalens is a piac arbitrázsmentességével. Ezt az eerdményt felhasználva itt is adódik az állítás, igaz, itt több kockázatos eszköz is van a piacon.

A fentiek után egyszerű látni az alábbi állítást is, mely megfordítása a fentieknek.

- Ha van egy EMM a Ho-Lee modellben, akkor a piac kizárja az arbitrázst, ennélfogva az EMM az előző tételbeli alakot kell, hogy felvegye, mely az egyetlen EMM lesz a piacon.
- Amennyiben létezik $\mathbb{P}^*$, akkor $u(s) = \frac{1-d(s)(1-q)}{q}$ minden $s \in \mathcal{T}$, $s \geq 2$ esetén.

*Binomiális Ho-Lee modell*

Ebben a részben azt a speciális, ám gyakolrta szempontjából különösen fontos esetet vizsgáljuk, ahol a kötvényárakat ún. binomiális fákkal írhatjuk le. Ez azt jelenti, hogy –hasonlóan részvényárazása alapesetekben ismert modellekhez–, hogy az eszközök (kötvények) árát meghatározza egy-egy időpillanatban az, hogy addig hányszor ugrott a piac felfele, de annak nincs jelentősége, hogy mely időpontokban történtek konkrétan a felele ugrások.

Így a fenti tulajdonság először a második piaci lépésben jön elő, ahol $P(2, T)$ kötvényár értéke ugyanannyi kell, hogy legyen akkor, ha először felfele, majd lefele megy a piac, vagy ha fordítva, először felfele, aztán lefele. Mindezt precízebben formalizálva azt követeljük meg tehát, hogy $P(2, T)(\omega) = P(2, T)(\omega')$ minden $\omega \in (a_1, b_2, \cdot)$ és $\omega' \in (b_1, a_2, \cdot)$ esetén.

Hasonlóan a további lépésekben is megköveteljük az analóg tulajdonságot.

**3.2.2. Következmény. Corollary.** *Egy arbitrázsmentes binomiális Ho-Lee modellben*

$$\frac{d(s)}{u(s)} = k^{s-1}, \quad s \in \mathcal{T},\ s \geq 2,$$

*ahol* $k := \frac{d(2)}{u(2)}$.

*Határidős kamatlábak dinamikája binomiális Ho-Lee piacokon*

**3.2.3. Tétel.** *Egy arbitrázsmentes binomiális Ho-Lee modellben a határidős kamatlábak az alábbiak szerint fejlődnek:*

$$\begin{aligned} F(t, T-1, T) &= \ln \frac{P(t, T-1)}{P(t, T)} \\ &= F(0, T-1, T) + \ln \frac{u(T-t)}{u(T)} - D(t) \ln k, \end{aligned}$$

*ahol* $D(t)$ *azt jelöli, hogy hányszor ugrottak a piac kötvényárak lefele a* $t$ *időpontig, azaz* $D(t) = \sum_{s=1}^{t} I(s)$ *és*

$$I(s) = \begin{cases} 1 & \text{ha a kötvényárak lefele ugranak az } s \text{ időpontban,} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A fentiek miatt egyben az azonnali kockázatmentes kamatláb dinamikájára is kapunk egy érdekes összefüggést, melyet a következő állítás ír le.

**3.2.4. Következmény.** *A kockázatmentes kamatlábakra az arbitrázsmentes Ho-Lee modellben teljesül, hogy*

$$r(t) = F(t,t,t+1) = F(0,t,t+1) + \ln\frac{u(1)}{u(t+1)} - D(t)\ln k.$$

Jegyezzük meg, hogy nyilvánvalóan $t = D(t)+U(t)$, ahol $U(t)$ a felfele történő ugrások számát jelöli a $t$ időpontig.

A fenti állítás szerint az $r$ értékére kaptunk egy véletlen bolyongást jellegű folyamatot egy konstans volatilitással (ezt a $D(t)\ln k$ tag mutatja), azonban egy időtől függő drift-taggal.

### 3.2.2. Egy kockázatmentes kamatlábból származtatott bináris modell

*A modell feltételei*

Egy olyan bináris kötvénypiaci modellt definiálunk és vizsgálunk ebben a részben, melyet a kockázatmentes kamatláb $r$ folyamatából származtatunk, mely kamatláb a binomiális piacon az alábbi módon fejlődik időben:

$$\mathbb{P}(r(t+1) = r_{i-1} \mid r(t) = r_i) = 1 - \mathbb{P}(r(t+1) = r_{i+1} \mid r(t) = r_i),$$

ahol $r_i$ egy valós konstans minden $i \in \mathbb{Z}$ esetén, továbbá $t \in \mathcal{T}$.

Jegyezzük meg, hogy movel a $T^*$ időhorizont véges, így csak véges sok $r_i$ értékre van szükség a modell megadásához.

*EMM a modellben*

Legyen $\mathbb{P}^*$ egy valószínűségi mérték, melyet az alábbi feltételes valószínűségek segítségével definiálunk: legyen $q_i \in (0{,}1)$, $i \in \mathbb{Z}$, úgy, hogy minden $i \in \mathbb{Z}$, $t \in cT$ esetén

$$q_i = \mathbb{P}^*(r(t+1) = r_{i+1} \mid r(t) = r_i),$$

és ezért

$$1 - q_i = \mathbb{P}^*(r(t+1) = r_{i-1} \mid r(t) = r_i).$$

Tegyük fel továbbá, hogy

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(P(t,t+2) \mid r(t) = r_i) = \mathsf{e}^{-r_i}\left(\mathsf{e}^{-r_{i+1}} q_i + \mathsf{e}^{-r_{i-1}}(1-q_i)\right).$$

Az alábbi tételben itt is először az arbitrázsmentesség kérdését vizsgáljuk.

**3.2.5. Tétel.** *A fenti feltételek mellett $\mathbb{P}^*$ egy EMM a piacon és ennélfogva a kötvényárakra teljesül, hogy*

$$\begin{aligned} P(t,T) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\mathsf{e}^{-\sum_{s=t}^{T-1} r(s)} \mid \mathcal{F}_t\right) \\ &= P(t,t+1)\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(P(t+1,T) \mid \mathcal{F}_t\right), \end{aligned}$$

$t, T \in \mathcal{T}$, $0 \le t \le T \le T^*$.

**3.2.6. Példa. (Egy véletlen bolyongásos speciális eset)** Tekintsük az alábbi speciális esetet. Legyen $q \in (0{,}1)$ és tegyük fel, hogy $q = q_i$ minden $i \in \mathbb{Z}$ esetén, továbbá legyen $r_i := r_0 + i\delta$, ahol $\delta$ egy pozitív konstans.

Ebben az esetben tehát az azonnali –egy időszakra vonatkozó– kamatláb mindig $\delta$ vagy $-\delta$ értékkel változhat minden lépésben, továbbá az ezekhez tartozó valószínűségek időben állandóak. Azaz erre az azonnali kamatlábra kapunk egy egyszerű bolyongást.

*Derivatívák árazása*

Nézzük most azt meg, hogy egy tetszőleges kamatláb- vagy kötvénydefivatívát hogyan lehet egy ilyen modellben árazni.

**3.2.7. Tétel.** *Tekintsünk egy ebben a részben tárgyalt modellt. Legyen $f(P(T,S))$ a kifizetése egy európai típusú opciónak, melynek lejárata $S$, és egy $T$-kötvényre van a derivatíva kiírva, ahol $0 \leq T < S \leq T^*$.*

*Ekkor az egyetlen arbitrázsmentes ára az opciónak a $t$ időpontban*

$$V(t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\mathsf{e}^{-\sum_{s=t}^{T-1} r(s)} f(P(T,S)) \mid \mathcal{F}_t\right),$$

*$t \in \mathcal{T}$, $0 \leq t \leq T$.*

Vegyük észre, hogy az egyszerű részvényárazási modellekben kapott opcióárazási formuláknál a fenti formula leginkább abban tér el, hogy a diszkontfaktor a várható értéken belül van. Ez a véletlen diszkontfaktor nem mérhető a feltételre nézve, így természetesen nem emelhető ki. Minden másban megeygezik a formula jellege a (determinisztikus kockázatmenets kamatlábat tartalmazó) egyszerű részvényopciós modellekben kapott árformulákkal, azaz itt is az EMM mellett kapjuk az árat, mely a kifizetés diszkontáé értékének a (feltételes) várható értéke.

*Forward versus futures árak*

Az alábbiakban határidős ügyletek árazására térünk ki. Látni fogjuk, hogy azonos paraméterekhez (alaptermék, lejárat) tartozó tőzsdei (futures) és tőzsdén kívüli határidős ügyletek árai ilyen modellekben általában különböznek ilyen modellekben.

Vezessük be az alábbi jelöléseket.

– Tekintsünk egy $T$-kötvényt és legyen $0 \leq t \leq S < T < T^*$.

– Tekintsünk egy futures ügyletet $S$ lejárati idővel a $T$-kötvényre kiírva.

– Jelölje a futures esetén a határidős árat a $t$ időpontban a $T$-kötvényre vonatkozóan az $S$ lejárattal $f(t, S, T)$.

– Hasonlóan tekintsünk most egy forward ügyletet $S$ lejárattal a $T$-kötvényre kiírva.

– Legyen ekkor a $t$ időpontban a $T$-kötvényre kiírt $S$ lejáratú forward határidős ár jelölése $\tilde{f}(t, S, T)$.

*A forward ügylet*

Ennek a tőzsdén kívüli ügyletnek az értéke a kibocsátáskor nulla, továbbá egyetlen pénzáramlás tartozik az ügylethez, melynek ideje a lejárat. Ez a pénzáramlás egyben a kifizetése az ügyletnek, mely (a long pozíció szemszögéből nézve):

$$P(S,T) - K,$$

ahol $K$ a kötési ára a szerződésnek, amely az ügylet kiírásakor megegyezik a kötvény akkori határidős forward árával, azaz $K = \tilde{f}(t, S, T)$, amennyiben a $t$ időpontban írták ki az ügyletet.

A következő tételben megadjuk a forward határidős árat.

**3.2.8. Tétel.** *A foward határidős árra teljesül, hogy*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\frac{B(t)}{B(S)}(P(S,T) - \tilde{f}(t,S,T)) \mid \mathcal{F}_t\right) = 0.$$

*Mivel egy ilyen ügylet értéke nulla a kiíráskor, így azt kapjuk, hogy*

$$\tilde{f}(t,S,T) = \frac{P(t,T)}{P(t,S)},$$

$0 \leq t \leq S < T < T^*$.

*A futures ügylet*

Nézzük a fentiekkel szemben most azt, hogy egy tőzsdei határidős ügylet miben különbözik ettől.

A tőzsdei határidős ügylet értéke is nulla az ügylet kiírásakor, mondjuk a $t$ időpontban. Azonban ennél az ügyletnél minden kereskedési időpontban történik elszámolás, mégpedig a long pozíció által realizált pénzáramlás az $n$ időpontban éppen a futires határidős árak különbsége, azaz

$$f(n,S,T)-f(n-1,S,T), \quad t \le n \le S.$$

Az ügylet $K$ kötési árát a kibocsátáskor rögzítik, nevezetesen $K=f(t,S,T)$, amennyiben a $t$ időpontban történik a kibocsátás.

Ekkor az alábbi állítás fogalmazható meg a futures határidős ár értékéről.

**3.2.9. Tétel.** *A futures határidős árra teljesül, hogy*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\sum_{n=t+1}^{S}\frac{B(t)}{B(n)}(f(n,S,T)-f(n-1,S,T)) \mid \mathcal{F}_t\right)=0,$$

*minden* $t\in\mathcal{T}$, $t<S$ *esetén, ebből pedig adódik, hogy*

$$f(t,S,T)=\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(f(t+1,S,T)\mid\mathcal{F}_t)=\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(P(S,T)\mid\mathcal{F}_t),$$

$0\le t\le S<T<T^*$.

*A tőzsdei és tőzsdén kívüli határidős árak összevetése*

A fentiekből láthatjuk, hogy a forward és a futures ügyletek esetén ugyanazon paraméterekkel kiírt határidős árak nem fognak általában megegyezni. Ennek fő oka az, hogy a kockázatmentes kamatláb is egy véletlen folyamattal van leírva. Ugyanis így az azokból számolt diszkontfaktor és a kötvény –melyre az ügyletet kiírták– árfolyamata nem lesznek függetlenek.

Ha az determinisztikus lenne a kockázatmentes kamatláb, vagy független az alaptermék árától, akkor a két formula ugyanazt a határidős árat adná. Emlékeztetjük az olvasót, hogy egyszerűbb opcióárzási modellekben (pl. Black-Scholes, CRR) ezt tapasztaltuk.

## 3.3. Határidős (Forward rate) kamatlábmodellek

Ebben a részben végül az eddigieknél általánosabb és rugalmasabb modelleket vezetünk be. Ennek alapja, hogy a piaci határidős kamatlábak seregének a dinamikáját vezetjük be először, ami így nagy ruglmasságot ad a modellnek. Majd mindent, így a kötvényárakat is ezekből származtatjuk.

*A modell felépítése, feltételek*

– Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező egy $\{\mathcal{F}_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ filtrációval, és tegyük fel, hogy $S_k$ egy adaptált sztochasztikus folymaat, $k \in \mathcal{T}$.

– Jelölés: $\Delta S_k := S_{k+1} - S_k$.

Ekkor az alábbi határidős kamatlábstruktúrát vezetjük be.

– A határidős kamatlábakra az alábbi jelölést vezetjük be: $f_{k,j} := F(k, k+ +j, k+j+1)$, azaz

– $f_{k,j}$ a $k$ időpontban a $k+j$ lejárathoz tartozó határidő kamatláb, mely a $[k+j \;,\; k+j+1]$ időszakhoz tartozik,

– a $j$ paraméter tehát a lejáraig hátralevő időt jelöli (és nem a lejárat idejét),

– $r_k$ pedig a $[k, k+1)$ időszakhoz tartozó azonnali kamatlábat jelöli, azaz

$$r(k) = f_{k,0} \qquad \forall \quad k \in \mathcal{T}.$$

A kamatlábak mozgását az alábbi egyenletek fogják leírni:

$$f_{k+1,j} = f_{k,j} + \alpha_{k,j} + \beta_{k,j}(S_{k+1} - S_k),$$

ahol $\sigma(\alpha_{k,j}), \sigma(\beta_{k,j}) \subset \mathcal{F}_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \mathbb{Z}_+$, vagy másképpen felírva

$$f_{k,j} = f_{0,j} + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{i,j} + \sum_{i=0}^{k-1} \beta_{i,j} \Delta S_i.$$

Ahogy korábban jeleztük, minden más piaci objektumot a fenti határidős kamatlábakból származtatjuk. Így az alábbiakat kapjuk a kamatszelvény nélküli kötvényárakra.

Folytonos kamatozási konvenció mellett a kamatszelvény nélküli kötvény $P(k,\ell)$ árára $\ell$ lejárat estén a $k$ időpontban az alábbi teljesül:

$P(k,k) := 1$ (azaz itt is csődmetes a modell)

továbbá minden $0 \le k \le \ell \le T^*$ esetén

$$P(k,\ell+1) := P(k,\ell)\mathsf{e}^{-F(k,\ell,\ell+1)} = P(k,\ell)\mathsf{e}^{-f_{k,\ell-k}},$$

azaz

$$P(k,\ell) = \mathsf{e}^{-\sum_{j=k}^{\ell-1} F(k,j,j+1)} = \mathsf{e}^{-\sum_{j=0}^{\ell-k-1} f_{k,j}}.$$

Tekintsük most a diszkontált kötvények árfolyamatát, ekkor a $t=0$ időpontra diszkontálva:

$$\frac{1}{\prod\limits_{j=0}^{k-1} \mathbf{e}^{r_j}}\, P(k,\ell) = \mathsf{e}^{-\sum_{j=0}^{k-1} r_j} P_{k,\ell},$$

ahol a diszkontfaktor

$$D_k = \mathsf{e}^{-\sum_{j=0}^{k-1} r(j)},$$

tehát

$$\frac{D_{k+1}}{D_k} = \mathsf{e}^{-r(k)}.$$

Most bevezetünk egy úgynevezett sztochasztikus diszkontfaktort és a piaci kockázati árparamétereket, melyek a piaci árazás alapját adják majd meg.

Feltesszük, hogy létezik egy olyan sztochasztikus piaci diszkontfaktor –ennek folyatatát $M$ fogja jelölni–, mely alapján meghatározódnak a piacon az eszközárak.

Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(\exp\{\phi_k \Delta S_k\}) < \infty$ minden $k \in \mathcal{T}$ esetén, ahol $\phi_k$ egy $\mathcal{F}_k$-mérhető valószínűségi változó. Legyen ekkor

$$M_0 := 1$$

és

$$M_{k+1} := M_k \frac{\mathsf{e}^{-r(k)+\phi_k \Delta S_k}}{\mathbb{E}\left(\mathsf{e}^{\,\phi_k \Delta S_k} \mid \mathcal{F}_k\right)},$$

ahol $\phi_k$-kat piaci kockázati áraknak fogjuk nevezni.

*Arbitrázsmentesség*

Mint minden modellben, itt is a legfontosabb kezdőkérdés, hogy milyen feltételek mellett tudjuk a modellt arbitrázsmentessé tenni. Az alábbi alaptétel erre ad választ.

**3.3.1. Tétel.** *Tekintsünk egy árazási ('mag')folyamatot ('sűrűségfolyamatot'), nevezetesen legyen* $\frac{d\mathbb{P}^*{}_K}{d\mathbb{P}_K} = \Lambda_K$, *ahol* $\mathbb{P}_K = \mathbb{P}|_{\mathcal{F}_K}$, $K \in \mathcal{T}$, $\Lambda_0 := 1$, *és*

$$\Lambda_{K+1} := \frac{\mathsf{e}^{\sum_{k=0}^{K} \phi_k \Delta S_k}}{\prod_{k=0}^{K} \mathbb{E}\left(\mathsf{e}^{\phi_k \Delta S_k} \middle| \mathcal{F}_k\right)}.$$

*Ekkor a* $\{\mathbb{P}^*{}_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ *mértékek kompatibilisek, azaz* $\mathbb{P}^*{}_{K_1}(A) = \mathbb{P}^*{}_{K_2}(A)$ *minden* $0\leq K_1\leq K_2\leq\mathcal{T}$, $A\in\mathcal{F}_{K_1}$ *esetén és* $\mathbb{P}^*=\mathbb{P}^*{}_{T^*}$ *ekvivalens a* $\mathbb{P}$ *mértékkel.*

*Továbbá* $M_kP_{k,\ell}$ *egy* $\mathbb{P}$*-martingál* $\forall\ell$ *pontosan akkor, ha a piac arbitrázsmentes.*

Feltétel. *A fenti tétel miatt ettől kezdve feltesszük, hogy* $M_kP_{k,\ell}$ *egy* $\mathbb{P}$*-martingál* $\forall\ell$.

Az arbitrázsmentességi feltétel ilyen modellekben átírható úgy, hogy az a kamatlábmodell drift-jeire ad egy megszorítást, ezért szokták ezt egyszerűen drift-feltételnek nevezni.

Először egy általános alakot mutatunk be.

**3.3.2. Tétel.** *Jel0lje* $G_k$ *a* $\Delta S_k$ *feltételes momentumgeneráló függvényét a* $\mathcal{F}_k$ *feltételre nézve a* $\mathbb{P}$ *mérték szerint. (Nyilvánvalóan* $G_k$ *egy nem feltételes momentumgeneráló függvény, amennyiben* $\Delta S_k$ *és* $\mathcal{F}_k$ *függetlenek.)*

*Ekkor a fentiekben defniált piac arbitrázsmentes akkor és csak akkor, ha minden* $0\leq k<\ell$ *esetén teljesül, hogy*

$$G_k\left(\phi_k-\sum_{j=0}^{\ell-k-2}\beta_{k,j}\right)=G_k\left(\phi_k\right)\mathsf{e}^{r_k-f_{k,\ell-k-1}+\sum_{j=0}^{\ell-k-2}\alpha_{k,j}},$$

*m.b. minden* $0\leq k<\ell\leq\mathcal{T}$ *esetén.*

A fenti drift-feltétel normális eloszlású meghajtófolyamat esetén egy egyszerűbb alakot vesz fel, ezt mutatja be a következő tétel. *Drift condition for normal case*

**3.3.3. Tétel.** *Tegyük fel, hogy minden $k \in \mathcal{T}$, $k < T^*$ esetén $\Delta S_k$ $\mathbb{P}$-független az $\mathcal{F}_k$-tól és normális eloszlású a piaci $\mathbb{P}$ mértékre nézve.*

*Ekkor az arbitrázsmentességi kritérium a piacon felírható az alábbi alakban:*

$$f_{k,m} = r(k) + \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_{k,j} - \frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{m-1} \beta_{k,j}\right)^2 + \phi_k \sum_{j=0}^{m-1} \beta_{k,j},$$

*m.b. minden lehetséges $k, m$ esetén.*

*Továbbá azt kapjuk, hogy*

$$f_{k,m} = f_{0,m+k} + \sum_{i=0}^{k-1} a_{i,m+k-i-1} + \sum_{i=0}^{k-1} \beta_{i,m+k-i-1} \Delta S_i,$$

*m.b., ahol*

$$a_{i,\ell} := \beta_{i,\ell} \left[\sum_{j=0}^{\ell-1} \beta_{i,j} - \phi_i + \frac{1}{2}\beta_{i,\ell}\right].$$

Vegyük észre, hogy a drift-feltétel lényege, hogy a modell eredeti $\alpha_{i,j}$ drift–jei nem szerepelnek a fenti egyenletekben, azaz azokat a modell többi része már az arbitrázsmentességi feltétel are not in the equations.)

*Véletlen mezős határidős kamatlábmodellek*

A fentiekben tárgyalt határidős kamatlábmodellek egy további általánosítását kaphatjuk, ha a modellben az $S$ meghajtó folyamatot egy egész véletlen mezővel helyettesítjük. Azaz azt tesszük fel, hogy van egy halmaza az $S_{i,j}$, $i, j \in \mathcal{T}$, valószínűségi változóknak, nevezetesen $S_{i,j}$, $i, j \in \mathcal{T}$, úgy, hogy $S_{i,j}$ mérhető $\mathcal{F}_i$-re nézve és ekkor a határidős kamatlábakra az alábbi dinamika teljesül:

$$f_{k+1,j} = f_{k,j} + \alpha_{k,j} + \beta_{k,j}(S_{k+1,j} - S_{k,j}).$$

Ezzel a korábbiaknál egy sokkal általánosabb és a piaci kamatmozgásokat rugalmasabban leíró truktúrát kaphatunk, melyben a különböző lejáratokhoz tartozó kamatlábakat nem ugyanaz a véletlen mozgatja egy adott időpontban.

Ennek a családnak a további tárgyalásától ebben a jegyzetben eltekintünk, az érdeklődő olvasónak javasoljuk a Gáll, Pap & Zuijlen (2006) cikket, melyben a modell be van vezetve és az arbitrázsmentesség a fentiekhez hasonló drift-feltételekkel van jellemezve.

## 3.4. Szakirodalmi megjegyzések

Az ebben a részben leírt diszkrét idejű kamatlábmodellekhez leginkább Cairns [14] könyvének 3. fejezetére támaszkodtunk, továbbá a határidős kamatlábak esetén a Gáll, Pap & Zuijlen (2006) cikkre. Jegyezzük meg, hogy a kamatlábmodelleket tárgyaló könyvek, monográfiák többsége csak a folytonos idejű modelleket mutatja be, azonban kivételként megemlítjük a fent említetteken túl Jarrow (1996) művét, mely egy egyszerű bevezetést nyújt a diszkrét idejű modellek alapjaiba. Érdemes továbbá megemlítenünk Hull [35] közismert tankönyvét itt is, amelyben szintén tárgyalásra kerülnek a legfontosabb alapfogalmak azok pénzügyi, közgazdasági értékelésével együtt, továbbá kamatlábakra felírt famodelleket is tárgyal a szerző (pl. a 30. és 31. fejezetekben).

# 4. fejezet

# Mean-variance portfólióanalízis

Ebben a fejezetben egy klasszikus portfólióelméleti modellt, a Markowitz nevéhez fűződő mean-variance portfólióanalízis legfontosabb eredményeit tekintjük át, továbbá az arra épülő Capital Asset Pricing Model (CAPM) eredményeit. Mindkét modell meglehetősen híres és elismert, amit az 1990-es "Közgazdasági Nobel díj" (pontosabban emlékérem) odaítélése is alátámaszt, melyet előbbiért Harry Markowitz, utóbbiért William Sharpe kapta. Igaz, a CAPM több független szerzőhöz is kapcsolódik. Látni fogjuk, hogy a Markowitz modell egy természetes és egyszerű kérdést vizsgál nagyon kevés feltétel mellett. A CAPM esetén több kritika is felvetődik az alkalmazhatósága kapcsán, melyekből néhányat megemlítünk ebben a fejezetben. Ezek ellenére fontos részét képezi a modern pénzügynek.

Ezen modellek alapja, hogy a portfóliók, illetve azok hozamának leírásához pusztán két egyszerű mutatót vizsgálunk: azok várható értékét (így a várható vagy elvárt hozamot), és kockázatát, melyet a hozam szórásával fogunk mérni.

Ebben a részben nem célunk minden állítás igazolása, a szükséges matematikai alapok részletes tárgyalása. Ugyanakkor fontosnak tartom bemutatni a modellekkel kapcsolatos legfontosabb eredményeket matematikailag is precízen, továbbá tárgyalni az alkalmazásukkal kapcsolatos megjegyzéseket. Azok számára, akik érdeklődnek a teljes matematikai háttér bemutatása és így az eredmények teljeskörű igazolása iránt, ajánljuk a [28] tankönyvet, ahol szerzőtársammal, Pap Gyulával ismertetjük az ebben a fejezetben található állítások bizonyítását. Ebben a fejezetben szintén megtalálhatóak a szóban forgó elméletekkel kapcsolatos fontos eredmények, de célunk azok kimondásán túl az értelmezésükkel és alkalmazásukkal kapcsolatos megjegyzések tárgyalása, mely így a [28] jegyzetet is kiegészíti (felhasználva az annak megírás óta felgyűlt oktatási tapasztalatot és visszajelzéseket).

## 4.1. Hozam és kockázat, továbbá a Markowitz-féle feladatok

Ebben a fejezetben mindvégig feltételezzük, hogy adott egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, r, n)$ valószínűségi mező a háttérben, s tekintünk egy értépapírpiacot, melyen $n+$ $+1$ féle értékpapír található. Ebből $n$ kockázatos, melyeket a gyakran az egyszerűség kedvéért részvényeknek fogunk nevezni, továbbá adott egy kockázatmentes értékpapír.

A kockázatmentes hozamot $r_0$ jelöli majd. Az $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ pedig a kockázatos értékpapírok hozamvektora. Nyilván az $r_i$, $i = 1{,}2, \ldots, n$ hozamok valószínűségi változók, melyekre feltesszük, hogy $r_i > -1$ egy valószínűséggel $\mathbb{P}(r_i > -1) = 1$. Ezzel valójában csak annyit feltételezünk, hogy teljes csőd nem fordulhat elő egyetlen értékpapír (és azt kibocsátó) esetén sem.

A hozamokra két további technikai feltételezést teszünk. Látni fogjuk, hogy ezek sem jelentenek érdemi megszorítást egy piaci modellben.

Legyen

$$e_i := \mathbb{E} r_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\mathbf{e} := (e_1, e_2, \ldots, e_n)^\top.$$

Feltesszük, hogy az összes részvény elvárt hozama nem egyezik meg, azaz $\mathbf{e} \neq x\mathbf{1}$, ahol $x \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$.

Másrészt feltesszük, hogy a hozamvektor $V$ kovariancia-mátrixa ($V := = (v_{i,j})_{n\times n}$, $v_{i,j} = \mathrm{cov}(r_i, r_j)$) létezik és pozitív definit.

Ezek a feltételezések nem erős megszorítások. Az első momentumra vonatkozó feltétel nélkül csak egyetlen várható hozam kombinálható ki az értékpapírokból tetszőleges portfólióval, így a hamarosan ismertetendő a (4.3) feladat is csak egy $y \in \mathbb{R}$ esetén lenne érdekes. A szórásokra vonatkozó feltétel pedig biztosított, ha az $r_1 - e_1, r_2 - e_2, \ldots, r_n - e_n$ valószínűségi változók lineárisan függetlenek, azaz belőlük egy valószínűséggel az azonosan nulla változó nem kombinálható ki lineárisan. Hiszen ekkor nulla varianciájú nem triviális kombináció nem lenne, s mivel a kombinációk varianciáját a $V$ által meghatározott kvadratikus forma adja, így az pozitív definit ekkor. Jegyezzük meg, hogy ekkor létezik $V^{-1}$ és az is pozitív definit. Azt is megjegyezzük, hogy a piac fenti általános definíciójában a hozamok $-1$-nél nagyobbak, amely egy ésszerű feltevés, de látni fogjuk, hogy valójában ezt nem használjuk ebben a fejezetben.

A kockázatos értékpapírokat az egyszerűség kedvéért részvényeknek (is) fogjuk nevezni, a kockázatmentest pedig kötvénynek (is) ebben a fejezetben.

A fentiekben megadott piacon az alábbi jelöléseket vezetjük be. Egy $\pi \in \mathbb{R}^n$ vektort portfóliónak nevezzük, s ebben a fejezetben kényelmi okokból oszlopvektornak fogunk tekinteni minden portfóliót, azaz $\pi = (\beta_1, \ldots, \beta_n)^\top$, ahol $\top$ transzponáltat jelöl. Ekkor $\beta_i$ ($i = 1,2,\ldots,n$) jelöli az $i$-edik értékpapírba fektetett pénzmennyiséget.

Legyen $X_0 \in \mathbb{R}$ és

$$C^*_{X_0} = \left\{ \pi \;\middle|\; \pi = (\beta_1, \ldots, \beta_n)^\top \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i=1}^n \beta_i = X_0 \right\},$$

azaz $C^*_{X_0}$ az összes olyan portfólió halmaza, amelyet az $X_0$ kezdőtőkéből meg lehet valósítani úgy, hogy a kockázatmentes értékpapírból nem vásárolunk. A többi értékpapír esetén nincs korlátozás a kereskedésre, így például negatív mennyiség is megengedett, amelyet részvények esetén short sellingnek felel meg.

Most pedig bevezetünk egy bővebb megnegedett portfólióhalmazt, ezt jelöli majd $C_{X_0}$. Ez a halmaz az összes olyan portfólió halmaza lesz, amelyet az $X_0$ kezdőtőkéből meg lehet valósítani úgy, hogy a részvények mellett a kockázatmentes értékpapírba is fektethetünk, azaz tekintsük a

$$A_{X_0} = \left\{ \pi \;\middle|\; \pi = (\beta_0, \ldots, \beta_n)^\top \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \sum_{i=0}^n \beta_i = X_0 \right\},$$

halmazt, mely $\mathbb{R}^{n+1}$-ben egy hipersík. Itt sincs korlátozás az értékpapírok kereskedésére, short selling itt is lehetséges, mint ahogy kötvénykölcsön is, azaz negatív mennyiség a kockázatmentes értékpapírból. Jegyezzük meg, hogy az esetünkben egy $A_{X_0}$-beli portfólió $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ alakban van felírva, ám ennek az $\mathbb{R}^{n+1}$-beli vektornak megfeleltethetjük az $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ vektort, hiszen minden $\pi \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén létezik olyan $\beta_0 \in \mathbb{R}$, hogy $\sum_{i=0}^n \beta_i = X_0$. Így a bővített megengedett $A_{X_0}$ halmazt megfeleltethetjük kölcsönösen egyértelműen a $C_{X_0} = \mathbb{R}^n$ halmazzal. Ennélfogva mindkét megengedett halmaz esetén dolgozhatunk az $n$ dimenziós térben.

Legyen $\pi \in C^*_{X_0}$ portfólió és legyen $\pi' = (\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_n) \in C^*_1$ az a portfólió, amelyre $X_0\pi' = \pi$, azaz $\beta'_i = \beta_i/X_0$. Ekkor tehát $\pi'$-ben a részvényekbe fektetett pénz aránya megegyezik a $\pi$-ben a megfelelő arányokkal, de $\pi'$ esetén a kezdőtőke 1, így itt $\beta'_i$, az $i$-edik részvénybe fektetett összeg, egyben megegyezik az $i$-edik részvénybe fektetett relatív összeggel, azaz tőkénk részvénybe fektetett (%-os) arányával. Ekkor $\pi$ lejáratkori értékére azt kapjuk, hogy

$$X_T^\pi = \sum_{i=1}^n \beta_i(1+r_i) = X_0 \sum_{i=1}^n \beta'_i(1+r_i),$$

másképpen felírva

$$X_T^\pi = X_0 \left[\sum_{i=1}^n \beta'_i + \sum_{i=1}^n \beta'_i r_i.\right] = X_0 \left[1 + \sum_{i=1}^n \beta'_i r_i.\right]$$

Ennélfogva a a portfólió (pénzben kifejezett) hozama

$$r_\pi := X_T^\pi - X_0 = \sum_{i=1}^n \beta_i r_i = X_0 \sum_{i=1}^n \beta'_i r_i,$$

míg a hozamrátája pedig

$$r'_\pi := \sum_{i=1}^n \beta'_i r_i.$$

Ennélfogva a portfólió (jövőbeli értékének) várható értéke

$$\mathbb{E}X_T^\pi = \sum_{i=1}^n \beta_i(1+e_i) = X_0 \sum_{i=1}^n \beta'_i(1+e_i) = X_0 \left(1 + \mathbf{e}^\top \pi'\right),$$

azaz várható hozama

$$e_\pi := X_0 \mathbf{e}^\top \pi',$$

várható hozamrátája, azaz elvárt hozamrátája pedig

$$e'_\pi := \sum_{i=1}^n \beta'_i e_i = \mathbf{e}^\top \pi'.$$

Ha $\pi \in C_{X_0}$, és $X_0\pi' = \pi$ továbbra is, akkor $\pi$ lejáratkori értéke

$$X_T^\pi = \sum_{i=0}^n \beta_i(1+r_i) = \left(X_0 - \sum_{i=1}^n \beta_i\right)(1+r_0) + \sum_{i=1}^n \beta_i(1+e_i)$$
$$= X_0\left[\left(1-\sum_{i=1}^n \beta'_i\right)(1+r_0) + \sum_{i=1}^n \beta'_i(1+e_i)\right],$$

a portfólió hozama

$$r_\pi := X_T^\pi - X_0 = \sum_{i=0}^n \beta_i r_i = X_0 \sum_{i=1}^n \beta'_i r_i = X_0\left[\left(1-\sum_{i=1}^n \beta'_i\right) r_0 + \sum_{i=1}^n \beta'_i e_i\right],$$

tehát hozamrátája

$$r'_\pi := \sum_{i=1}^n \beta'_i r_i = \left[\left(1-\sum_{i=1}^n \beta'_i\right) r_0 + \sum_{i=1}^n \beta'_i e_i\right],$$

Így a portfólió várható értéke

$$\mathbb{E}X_T^\pi = X_0\left[\left(1-\sum_{i=1}^n \beta'_i\right)(1+r_0) + \sum_{i=1}^n \beta'_i(1+e_i)\right]$$
$$= X_0\left[\left(1-\pi'^\top\mathbf{1}\right)(1+r_0) + \left(1+\mathbf{e}^\top\pi'\right)\right],$$

azaz várható hozama

$$e_\pi = X_0\left[\left(1-\pi'^\top\mathbf{1}\right) r_0 + \mathbf{e}^\top\pi'\right],$$

várható hozamrátája pedig

$$e'_\pi = \left(1-\pi'^\top\mathbf{1}\right) r_0 + \mathbf{e}^\top\pi'.$$

Mindkét fenti esetben, azaz akár $\pi \in C^*_{X_0}$, akár $\pi \in C_{X_0}$ esetében a $\pi$ portfólió jövőbeli értékének szórásnégyzete (varianciája)

$$\begin{aligned}
\mathrm{var} X_T^\pi &= \mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^n \beta_i(1+r_i)\right) = X_0^2\,\mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^n \beta_i'(1+r_i)\right) \\
&= X_0^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_i'\beta_j' \operatorname{cov}(r_i, r_j) = X_0^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_i'\beta_j' v_{i,j} \\
&= X_0^2 \pi'^\top V \pi' = \pi^\top V \pi
\end{aligned}$$

Jegyezzük meg továbbá, hogy nyilvánvalóan a portfólió hozamára és hozamrátájára is ezzel megkapjuk a kockázatot és azok között az alábbi egyszerű összefüggést:

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(r_\pi) &= \mathrm{var}(X_T^\pi - X_0) = \mathrm{var} X_T^\pi \\
&= X_0^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_i'\beta_j' \operatorname{cov}(r_i, r_j) \\
&= X_0^2 \mathrm{var}\Big(\sum_{i=1}^n \beta_i' r_i\Big) \\
&= X_0^2 \mathrm{var}(r_\pi').
\end{aligned}$$

A bevezetőben említett célok alapján ebben a fejezetben a következő problémát vizsgáljuk: ha rögzítjük a portfóliónkkal szemben támasztott elvárt hozamot, akkor melyik az a portfólió, amely ezt a legkisebb szórás (kockázat) mellett biztosítja. Ennek alapján tehát a vizsgálandó szélsőérték feladatok az alábbi módon adhatóak meg. Keressük azt a $\pi^{opt}$ portfóliót egy $z \in \mathbb{R}$ elvárt hozam esetén, melyre

$$\mathrm{var} X_T^{\pi^{opt}} = \min_{\pi \in C^*_{X_0},\, \mathbb{E}X_T^\pi = z} \mathrm{var} X_T^\pi, \tag{4.1}$$

illetve

$$\mathrm{var} X_T^{\pi^{opt}} = \min_{\pi \in C_{X_0},\, \mathbb{E}X_T^\pi = z} \mathrm{var} X_T^\pi. \tag{4.2}$$

Tehát a (4.1) feladatban csak a részvényekbe fektetve keressük a legkisebb kockázatú portfóliót adott hozam mellett, míg a (4.2) feladatban pedig megengedett a kockázatmentes értékpapírba való befektetés is. Itt fontos hangsúlyozni, hogy a fentiekben a portfólió kockázatát —másképpen a benne rejlő bizonytalanságot— szórásban (szórásnégyzetben) mérjük. Ez nem az egyetlen mód a kockázat mérésére, sőt, a következő fejezetben látni fogjuk, hogy más célokra más mérőszámok alkalmasabbak. Jegyezzük meg továbbá, hogy akár $\pi \in C_{X_0}$, akár $\pi \in C^*{}_{X_0}$ esetén $\mathrm{var} X_T^\pi = \mathrm{var}\, r_\pi$, így a portfólió értéke szórásának a minimalizálása helyett mondhatnánk, hogy a portfólió hozamának a szórását minimalizáljuk a fenti feladatokban. A fenti feladatok természetesen egy más értelemben vett optimumot adnak, mint a korábbi fejezetekben tárgyalt várható hasznosság értelmében vett optimumok.

Vegyük észre, hogy a fentiekben a portfólió jövőbeli értékére megadott várható érték és variancia esetén a kezdőtőke egyaránt kiemelhető ezen két momentumból, így a fenti feladatokat elég egységnyi kezdőtőke ($X_0$) esetén megoldanunk. Az optimális megoldás ugyanis tetszőleges kezdőtőke esetén az egységnyi kezdőtőkénél kapott optimális portfólió konstansszorosa lesz.

Másképpen megfogalmazva, az egységnyi kezdőtőke esetén megkapjuk az optimális portfólióban a részvények részarányát ($\beta_i'$). Ennélfogva a fenti (4.1) és (4.2) feladatok helyett az alábbi két feladattal foglalkozunk az elkövetkezőek során. Keressük azt a $\pi^{opt}$ portfóliót egy $y \in \mathbb{R}$ elvárt hozamráta esetén, melyre

$$\frac{1}{2}\,\pi^{opt\top} V \pi^{opt} = \min_{\pi^\top \mathbf{1} = 1,\ \mathbf{e}^\top \pi = y} \frac{1}{2}\,\pi^\top V \pi, \tag{4.3}$$

illetve

$$\frac{1}{2}\,\pi^{opt\top} V \pi^{opt} = \min_{\pi \in \mathbb{R},\ (1-\pi'^\top \mathbf{1}) r_0 + \mathbf{e}^\top \pi = y} \frac{1}{2}\,\pi^\top V \pi, \tag{4.4}$$

ahol a feladatokba az $1/2$ szorzóként pusztán kényelmi szempontok miatt került, az az optimum helyét nem változtatja.

Ettől lezdve tehát egységnyi kezdőtőkére tekintjük a feladatot, azaz másképpen fogalmazva a hozamráta első két momentumára elég az optimális portfóliókat megkeresnünk. Ebben az esetben

$$e_\pi = e'_\pi.$$

További kényelmi szempontok miatt a portfóliók hozamának kockázatára is bevezetünk egy egyszerűsítő jelölést:

$$\sigma_\pi := \sqrt{\operatorname{var}(r'_\pi)}.$$

Ebben a fejezetben optimális portfólió alatt mindig a fenti feladatok megoldásait értjük, azaz az optimális minimális szórást jelent valamely elvárt hozam mellett.

## 4.2. Portfólióhatár

Ebben a részben a szűkített (azaz kockázatmentes eszköz nélküli) a (4.3) feladat megoldásával foglalkozunk. Célunk bemutatni a feladat megoldásait, majd a megoldásoknak tulajdonságait. Ugyanakkor nem célunk minden eredmény igazolása, az érdeklődő olvasónak ajánljuk a [28] könyvet, ahol a bizonyítások részletesen be vannak mutatva.

Először az alaptételt írjuk le, mely választ ad arra természetes kérdésre, hogy milyen esetben van megoldás, továbbá mi annak az alakja.

**4.2.1. Tétel.** *Legyen* $A := \mathbf{1}^\top V^{-1}\mathbf{e}$, $B := \mathbf{e}^\top V^{-1}\mathbf{e}$, $C := \mathbf{1}^\top V^{-1}\mathbf{1}$, *továbbá* $D := BC - A^2$. *Ekkor a (4.3) feladatnak a* $\pi \in C_1^*$ *portfólió valamely* $y = \mathbb{E}r_\pi$ *várható hozamhoz tartozó megoldása akkor és csak akkor, ha felírható* $\pi = g + yh$ *alakban, ahol a* $g, h \in \mathbb{R}^n$ *az alábbi alakúak:*

$$g := \frac{BV^{-1}\mathbf{1} - AV^{-1}\mathbf{e}}{D} \qquad h := \frac{CV^{-1}\mathbf{e} - AV^{-1}\mathbf{1}}{D}.$$

Bár a bizonyítást teljeskörűen nem kívánjuk megadni, az megoldást nagyon egyszrű eszközökkel meg lehet keresni, így azt vázlatosan bemutatjuk.

A (4.3) szélsőérték feladatot a Lagrange féle multiplikátor módszerrel kényelmesen meg lehet oldani. Esetünkben a Lagrange függvény

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\pi^\top V\pi + \lambda\left(y - \mathbf{e}^\top\pi\right) + \gamma\left(1 - \pi^\top\mathbf{1}\right).$$

Innen kapjuk a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_i} = \sum_{j=1}^{n} v_{i,j}\beta_j - \lambda e_i - \gamma = 0, \quad i = 1,2,\dots,n,$$

$$y = \mathbf{e}^\top \pi$$

$$1 = \pi^\top \mathbf{1}$$

egyenletrendszert, vagy másképpen felírva

$$V\pi - \lambda \mathbf{e} - \gamma \mathbf{1} = 0, \quad y = \mathbf{e}^\top \pi \quad \text{és} \quad 1 = \pi^\top \mathbf{1}. \tag{4.5}$$

Az első egyenletből $\pi$ kifejezhető, és azt kapjuk, hogy $\pi = V^{-1}(\lambda \mathbf{e} + \gamma \mathbf{1})$, így ezt a (4.5) másik két egyenletébe visszahelyettesítve adódik, hogy

$$\lambda \mathbf{e}^\top V^{-1} \mathbf{e} + \gamma \mathbf{1}^\top V^{-1} \mathbf{e} = y,$$

$$\lambda \mathbf{e}^\top V^{-1} \mathbf{1} + \gamma \mathbf{1}^\top V^{-1} \mathbf{1} = 1$$

azaz a tételben bevezetett jelölések mellett egy egyszerű kétismeretlenes lineáris egyenletrendszert kaptunk, nevezetesen

$$\lambda B + \gamma A = y \quad \text{és} \quad \lambda A + \gamma C = 1.$$

Ennek az egyenletrendszernek pedig

$$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} y & A \\ 1 & C \end{vmatrix}}{D} = \frac{Cy - A}{D} \quad \text{és} \quad \gamma = \frac{\begin{vmatrix} B & y \\ A & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{B - Ay}{D}.$$

a megoldása.

A további részleteit a bizonyításnak nem tárgyaljuk ebben a jegyzetben, ugyanakkor megjegyezzük, hogy a kapott megoldásról igazolható, hogy minimumot ad valóban. Továbbá a tételbeli konstansok közül $B$, $C$ és $D$ pozitív, így a fenti megoldás mindig létezik. A teljes bizonyítás a [28] jegyzetben részletesen megtalálható.

A fenti eredmények alapján definiáljuk a portfólióhatár fogalmát, mely nem más, mint a kapott megoldások halmaza. Látni fogjuk, hogy az elvárt hozam és kockázat síkján ábrázolva az portfóliókat a megoldások valóban egy határt képeznek.

**4.2.2. Definíció.** *A*

$PF := \{\pi \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}$ *úgy, hogy* $\pi$ *megoldása a (4.3) feladatnak és* $e_\pi = y\}$

*halmazt, amely tehát* (4.3) *megoldásainak halmaza, portfólió határnak (portfolio frontier) nevezzük.*

**4.2.3. Következmény.** *Ha* $\pi_j \in PF$ *és* $\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,2,\ldots,m$, *akkor* $\pi = \sum_{j=1}^m \alpha_j \pi_j \in PF$ *és* $e_\pi = \sum_{j=1}^m \alpha_j e_j$.

**Bizonyítás.** Léteznek olyan $y_j \in \mathbb{R}$ elvárt hozamok, hogy $e_{\pi_j} = y_j$, ezért

$$\pi = \sum_{j=1}^m \alpha_j (g + h y_j) = g \sum_{j=1}^m \alpha_j + h \sum_{j=1}^m \alpha_j y_j = g + h \sum_{j=1}^m \alpha_j y_j.$$

Azaz $\pi$ is előáll $\pi = g + yh$ alakban, ahol $e_\pi = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_j$. $\square$

Tehát megoldások affin lineáris kombinációja is megoldás, méghozzá úgy, hogy a megoldások elvárt hozamainak affin lineáris kombinációja adja a kombináció elvárt hozamát.

A következő tétel a mean-variance analízis egyik alaperedményét adja. Egyrészt ad egy egyszerű összefüggést a megoldások koordinátái között, másrészt a megoldások közötti kapcsolatot is jellemzi, mely előkészíti későbbi egyik alaptételünket.

**4.2.4. Tétel.** *Ha $\pi_1, \pi_2 \in PF$, akkor*

$$\operatorname{cov}(r_{\pi_1}, r_{\pi_2}) = \frac{C}{D}\left(e_{\pi_1} - \frac{A}{C}\right)\left(e_{\pi_2} - \frac{A}{C}\right) + \frac{1}{C}.$$

*Speciálisan*

$$\sigma_\pi^2 = \frac{C}{D}\left(e_\pi - \frac{A}{C}\right)^2 + \frac{1}{C}, \tag{4.6}$$

*ha $\pi \in PF$.*

Ennek az állításnak az igazolásával itt nem foglalkozunk, az megtalálható a [28] jegyzetben. Annyit azonban megjegyzünk, hogy a fenti eredmények egyszerűen számíthatóak a várható hozamok vektorából és a hozamok kovarianciamátrixából –illetve az azok által meghatározott konstansokból– a megoldások alakjának ismeretében (lényegében definíció szerint).

**4.2.5. Megjegyzés.** Minden $\pi \in C_1 = \mathbb{R}^n$ portfólió esetén tekintsük az első két momentumot jellemző $(\sigma_\pi^2, e_\pi) \in \mathbb{R}^2$ pontot a síkon. Másképpen fogalmazva legyen az $x$ tengelyen a portfóliók kockázata —szórásnégyzete—, míg az $y$ tengelyen az elvárt hozama ábrázolva. Ekkor a 4.2.4. Tételből az adódik, hogy a (4.3) feladat megoldásainak, azaz a $PF$ halmaz elemeinek megfeleltetett (szórásnégyzet, várható érték) pontok a síkon egy parabola mentén helyezkednek el. Ezért szokták a $PF$ halmazt portfólió határnak említeni, hiszen ezen görbétől jobbra helyezkednek a (4.3) feladat értelmében nem optimális portfólióknak megfelelő pontok, míg balra nincs olyan pont, amihez tartozna portfólió. Tehát a lehetséges portfóliókhoz tartozó pontok halmazának a határát adja a szóban forgó parabola, s az egyben az optimális portfóliók halmaza. Ennek a parabolának a csúcsa, azaz az ún. minimális varianciájú (vagy szórású) optimális portfóliónak megfelelő pont, ez a $(1/C, A/C)$ pont, s a portfólió pedig $\pi_0 = g + hA/C$. Jegyezzük meg, hogy minden $y \in \mathbb{R}$ (várható hozam) esetén van megoldása a (4.3) feladatnak, azaz a teljes parabola adja a $PF$-nek megfelelő halmazt. Vegyük azt is észre, hogy a szóban forgó parabolának csak az egyik ága tartozik olyan optimális portfóliókhoz, melyekbe érdemes befektetnünk: ez pedig a parabola felső ága, azaz a legalább $A/C$ várható hozamot ígérő optimális portfólióknak megfelelő ág. Hiszen, ha $e_\pi < A/C$, $\pi \in PF$ esetén van a parabolának egy másik pontja a felső ágon, ez éppen a parabola 'szemben levő' pontja, mely ugyanazon kockázat (szórás) mellett nagyobb várható hozamot ígér. Ez motiválja az alábbi definíciót.

Hangsúlyozzuk, hogy (4.6) esetén az $y$ tengelyen a portfólió elvárt hozama van, amennyiben a portfólió elvárt értékét akarnánk az $y$ tengelyen megjeleníteni, akkor értelemszerűen

$$\sigma_\pi^2 = \frac{C}{D}\left(\mathbb{E}X_T^\pi - 1 - \frac{A}{C}\right)^2 + \frac{1}{C},$$

lenne a görbe egyenlete. A szórás esetén nincs ilyen gondunk, hiszen a portfólió jövőbeli értékének és a hozamának megegyezik a szórása. Azt is megjegyezzük, hogy nem egységnyi alaptőkénél is megmutattuk a korábbiakban, hogy hogyan lehet az optimumot felírni, ha ismerjük egységnyi alaptőkére a feladat megoldását.

Végül megjegyezzük, hogy szokás a portfólióknak a fenti $(\sigma_\pi^2, e_\pi) \in \mathbb{R}^2$ (variancia, várható hozam) pontok helyett a $(\sigma_\pi, e_\pi) \in \mathbb{R}^2$ (szórás, várható hozam) pontokkal is megfeleltetni, és ezeket ábrázolni a koordináta rendszerben, amely egyszerűen a fentiekhez képest az $x$ tengely áttranszformálását jelenti. A következő fejezetben élünk is ezzel a lehetőséggel, a (4.4) feladat megoldásait ábrázoljuk analóg módon az itteniekhez, s ott szerencsésebb lesz a (szórás, várható hozam) pontokat ábrázolni. Jegyezzük meg, hogy a $PF$-nek megfelelő pontok ebben az esetben egy hiperbolát adnak. $\triangle$

Bár a $PF$ görbe adja a Markowitz-féle első feladat megoldásait, a fentiekben megállapítottuk, hogy a kapott hiperbola alsó ágát nem érdemes választani, s nyilván a hiperbolán belül sincsenek optimális prtfóliók, amennyiben a Markowitz-féle reláció értelmében keresünk optimális portfóliót. Ugyanakkor a hiperbola felső ágán található portfóliók a Markowitz-féle reláció tekintetében nincsenek relációban, egyik sem jobb a másiknál, azaz mindegyik egy legjobb portfóliónak tekinthető a relációra nézve.

A fentiek miatt a felső ághoz tartozó portfóliók külön elnevezést is kaptak, ezek a hatékony portfóliók, ennek jelölését vezetjük be a következő definícióban.

**4.2.6. Definíció.** *Az*

$$EPF := \left\{ \pi \in PF \mid e_\pi \geq \frac{A}{C} \right\}$$

*halmazt hatékony portfóliók határának (efficient portfolio frontier) nevezzük.*

A következő tétel előkészíti ennek a résznek az alaperedményét.

**4.2.7. Tétel.** *Ha $\pi \in PF$ és $\pi$ nem a minimális varianciájú optimális portfólió (azaz $\pi \neq g + hA/C$, másképpen $e_\pi \neq A/C$), akkor létezik egy olyan $\pi_{zc} \in$ $\in PF$ portfólió, amellyel hozama korrelálatlan, azaz melyre $\operatorname{cov}(r_\pi, r_{\pi_{zc}}) = 0$. Továbbá*

$$e_{\pi_{zc}} = \frac{A}{C} - \frac{D/C^2}{e_\pi - A/C}. \tag{4.7}$$

**Bizonyítás.** A tétel állítása azonnal adódik az előző tételből egyszerű számítással. A 4.2.4. Tétel szerint olyan $\pi_{zc}$ portfóliót keresünk, melyre

$$\frac{C}{D}\left(e_\pi - \frac{A}{C}\right)\left(e_{\pi_{zc}} - \frac{A}{C}\right) + \frac{1}{C} = 0.$$

Mivel $e_\pi \neq A/C$, hiszen $\pi$ nem a minimális varianciájú optimális portfólió, így a fenti egyenletetből könnyen kifejezhető $e_{\pi_{zc}}$, melyre éppen (4.7) adódik. $\square$

**4.2.8. Megjegyzés.** A tétel állítása szerint tehát, ha veszünk egy megoldást a portfólióhatárról, akkor ahhoz lehet ugyanonnan egy másik megoldást találni, melyek hozamai –ha nem is lesznek függetlenek– korrelálatlanok lesznek, azaz nem lesz közöttük lineáris kapcsolat.

Azt is vegyük észre, hogy ha $e_\pi > A/C$ akkor $e_{\pi_{zc}} < A/C$, és ha $e_\pi < A/C$ akkor $e_{\pi_{zc}} > A/C$, azaz egy optimális portfólió és a 'zéró kovarianciájú megfelelője' (innen adódik a 'zc' jelölés) a $PF$-et megjelenítő parabola különböző ágain vannak. Továbbá, a $\pi$ portfólió minél közelebb van a minimális varianciájú portfólióhoz, annál messzebb lesz attól a másik ágon a zéró kovarianciás párja, és fordítva. Ennélfova, minél kisebb az egyik kockázata, annál nagyobb a másiké. $\triangle$

A következő tétel az eddig vizsgált szűkített Markowitz-féle feladat esetén egy alaptételt ad meg, melyet gyakran *two fund separation* tételként is emlegetnek a szakirodalomban. Ennek oka, amint azt látni fogjuk, hogy két portfólióval, melyek egymás zéró kovarianciás párjai, az egész piacot egyszerűen tudjuk leírni.

Ehhez először bevezetjük portfóliók bétájának az általános definícióját.

**4.2.9. Definíció.** *Legyen $\pi \in PF$ úgy, hogy $\pi$ nem a minimális varianciájú optimális portfólió (azaz $\pi \neq g + hA/C$) és $\pi' \in C_1^*$ egy tetszőleges portfólió.*

*Ekkor $\pi'$ portfólió $\pi$-re vonatkozó bétája alatt a*

$$\beta_{\pi',\pi} := \frac{\operatorname{cov}(r_\pi, r_{\pi'})}{\sigma_\pi^2} \tag{4.8}$$

*mennyiséget értjük.*

A portfólió bétája tehát egy relatív mérőszám, melyet egy rögzített portfólióhoz képest határozhatunk meg. Később látni fogjuk, hogy a gyakorlatban egy kitüntetett portfóliót szokás választani referenciaként $\pi$-nek, az ún. piaci portfóliót, melyet a következő részben vezetünk be. Azt is látni fogjuk a későbbi eredményekből, hogy a béta egyfajta érzékenységi mutatónak is felfogható.

**4.2.10. Tétel.** *Legyen $\pi \in PF$ úgy, hogy $\pi$ nem a minimális varianciájú optimális portfólió (azaz $\pi \neq g + hA/C$) és $\pi' \in C_1^*$ egy tetszőleges portfólió.*

*Ekkor*

**(a)** $e_{\pi'} = \beta_{\pi',\pi} e_\pi + (1 - \beta_{\pi',\pi})\, e_{\pi_{zc}}$,

**(b)** $r_{\pi'} = \beta_{\pi',\pi} r_\pi + (1 - \beta_{\pi',\pi})\, r_{\pi_{zc}} + \varepsilon_{\pi',\pi}$, *ahol $\varepsilon_{\pi',\pi}$ egy valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}\varepsilon_{\pi',\pi} = \operatorname{cov}(r_\pi, \varepsilon_{\pi',\pi}) = \operatorname{cov}(r_{\pi_{zc}}, \varepsilon_{\pi',\pi}) = 0$,*

**(c)** $r_{\pi'} = \beta_{\pi',\pi} r_\pi + (1 - \beta_{\pi',\pi})\, r_{\pi_{zc}}$, *ha speciálisan $\pi' \in PF$.*

Ennek a tételnek a bizonyítását itt nem tárgyaljuk, az érdeklődő olvasónak ismét a [28] jegyzetet ajánljuk.

A 4.2.10. Tétel alapján láthatjuk, hogy elég tekintenünk egy $PF$-beli portfóliót, s belőle illetve a zéró kovarianciájú párjából (mint 'magyarázó tényezőkből') minden más portfólió előállítható egy nulla várható értékű, tőlük korrelálatlan zajtól eltekintve, s ez az előállítás optimális portfólió esetén zajmentes. Így ez a két portfólió ("fund") szinte teljesen leírja a piacot. Azt is láthatjuk, hogy az előállításhoz az előállítandó portfólióról szinte csak (zajtól eltekintve) az adott portfólió 'bétája' ($\beta_{\pi',\pi}$) szükséges.

Végezetül a béta néhány tulajdonságára hívjuk fel a figyelmet.

**4.2.11. Megjegyzés. (A béta tulajdonságai)** Először kiemeljük, hogy könnyen igazolható, hogy $\beta_{\pi',\pi_{zc}} = 1 - \beta_{\pi',\pi}$.

Másrészt van egy egyszerű összefüggés a portfólió bétája és a portfóliót lkotó pénzügyi eszközök bétája között: utóbbiak súlyozott átlagaként (általánosabban affin kombinációjaként) adódik az előbbi.

Ehhez tekintsük azt az egyszerű portfóliót, amely esetén csak az $i$-edik részvénybe fektetünk pénzt ($X_0 = 1$), azaz $\pi_i := (\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \ldots, \beta_{i,n})$, ahol $\beta_{i,j} = \delta_{i,j} = \mathbb{1}_{\{i=j\}}$. Ekkor ezen egyszerű portfóliók esetén

$$\beta_{\pi_j, r_\pi} = \frac{\operatorname{cov}(r_\pi, \pi_j)}{\sigma^2_{r_\pi}},$$

amely mennyiségeket nevezhetjük a részvények bétájának. Továbbá $\pi' =$

$= \sum_{j=1}^{n} \beta'_j \pi_j$, ezért

$$\beta_{\pi',\pi} = \frac{\operatorname{cov}\left(r_\pi, \sum_{j=1}^{n} \beta'_j \pi_j\right)}{\sigma^2_{r_\pi}} = \sum_{j=1}^{n} \beta'_j \beta_{\pi_j,\pi}.$$

Tehát egy portfólió bétáját lineárisan ki tudjuk kombinálni a részvények bétájából.

Így a portfóliók bétájához elég ismernünk (pl. megbecsülnünk) a piaci pénzügyi eszközök bétéját. △

## 4.3. A bővített feladat és a tőkepiaci egyenes

Ebben az alfejezetben rátérünk a kockázatmentes értékpapírral kiegészített (4.4) feladat megoldására. Valójában látni fogjuk, hogy számos lépés analóg a korábban elvégzetthez. Azt könnyű látni, hogy $C_1^* \subset C_1 = \mathbb{R}^n$, így világos, hogy rögzített $y \in \mathbb{R}$ elvárt hozam esetén a (4.4) feladat optimumának szórása (kockázatossága) legfeljebb annyi, mint a (4.3) feladat optimumának szórása (kockázatossága).

**4.3.1. Tétel.** *A (4.4) feladatnak a $\pi \in C_1 = \mathbb{R}^n$ portfólió valamely $y = e_\pi$ várható hozamhoz tartozó megoldása akkor és csak akkor, ha felírható*

$$\pi = (e_\pi - r_0) \frac{V^{-1}(\mathbf{e} - r_0 \mathbf{1})}{K} \tag{4.9}$$

*alakban, ahol $K := (\mathbf{e} - r_0 \mathbf{1})^\top V^{-1} (\mathbf{e} - r_0 \mathbf{1})$, azaz másképpen fogalmazva, ha* *felírható*

$$\pi = \tilde{g} + y\tilde{h} \tag{4.10}$$

*alakban, ahol*

$$\tilde{h} := \frac{V^{-1}(\mathbf{e} - r_0\mathbf{1})}{K}$$

*és*

$$\tilde{g} := -r_0 \frac{V^{-1}(\mathbf{e} - r_0\mathbf{1})}{K} = -r_0\tilde{h}$$

**Bizonyítás.** Ennek az állításnak a bizonyítását bemutatjuk, hiszen ez is demonstrálja, hogy egy milyen egyszerű eszközökkel belátható az állítás.

A bizonyítás teljesen analóg a korábbi részben leírt szűkített feladat megoldásához, nevezetesen a A (4.4) szélsőérték feladatot is a Lagrange féle multiplikátor módszerrel oldjuk meg. Esetünkben a Lagrange függvény $\mathcal{L} = = \frac{1}{2}\pi^\top V\pi + \lambda\left[y - \pi^\top\mathbf{e} - \left(1 - \pi^\top\mathbf{1}\right)r_0\right]$. Innen kapjuk a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_i} = \sum_{j=1}^{n} v_{i,j}\beta_j + \lambda(r_0 - e_i) = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

$$y = \pi^\top\mathbf{e} + \left(1 - \pi^\top\mathbf{1}\right)r_0$$

egyenletrendszert, vagy másképpen felírva

$$V\pi + \lambda(r_0\mathbf{1} - \mathbf{e}) = 0 \quad \text{és} \quad y = \pi^\top\mathbf{e} + \left(1 - \pi^\top\mathbf{1}\right)r_0. \tag{4.11}$$

A (4.11) első egyenletéből $\pi$-t kifejezve azt kapjuk, hogy $\pi = \lambda V^{-1}(\mathbf{e} - r_0\mathbf{1})$, amelyet a második egyenletbe írva kapjuk, hogy

$$e_\pi - r_0 = \pi^\top(\mathbf{e} - r_0\mathbf{1}) = \lambda(\mathbf{e} - r_0\mathbf{1})^\top V^{-1}(\mathbf{e} - r_0\mathbf{1}) = \lambda K.$$

Innen pedig $\lambda = \frac{e_\pi - r_0}{K}$. Itt jegyezzük meg, hogy $K > 0$, mely abból is adódik, hogy egy pozitív definit kvadratikus forma értéke, a kockázati prémiumok vektora nem nullvektor.

A másik irány bizonyításához vegyük észre, hogy ha $\pi$-re teljesül (4.9), akkor nyilvánvalóan az a fentiek miatt nyilván az $y{=}e_\pi$-hez tartozó megoldása a (4.4) feladatnak. $\square$

A korábbiakhoz hasonlóan itt is bevezetjük a megoldások halmazát, melyet ismét nevezhetünk portfólióhatárnak.

**4.3.2. Definíció.** *A*

$$PF^+{:=}\{\pi \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R} \text{ úgy, hogy } \pi \text{ megoldása a (4.4) feladatnak és } e_\pi = y\}$$

*halmazt, amely tehát* (4.4) *megoldásainak halmaza, a (4.4) feladathoz tartozó portfólió határnak (portfolio frontier) nevezzük.*

Érdemes észrevennünk, hogy a bővített feladat megoldása is teljesen hasonló alakban írható fel, mint a korábbi feladat megoldásai, ezt mutatja a 4.10. Így nem meglepő, hogy ebben az esetben is megismételhető az az állítás, mely szerint megoldások affin kombinációja ismét megoldást ad. Ezt mondja ki a következő tétel.

**4.3.3. Következmény.** *Ha* $\pi_j \in PF^+$ *és* $\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,2,\ldots,m$, *akkor* $\pi = \sum_{j=1}^m \alpha_j \pi_j \in PF^+$ *és* $e_\pi = \sum_{j=1}^m \alpha_j e_j$.

**Bizonyítás.** Léteznek olyan $y_j \in \mathbb{R}$ elvárt hozamok, hogy $e_{\pi_j} = y_j$, ezért

$$\pi = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \left[ (y_j - r_0) \frac{V^{-1}(\mathbf{e} - r_0 \mathbf{1})}{K} \right] = \left[ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_j - r_0 \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \right] \frac{V^{-1}(\mathbf{e} - r_0 \mathbf{1})}{K}$$
$$= \left[ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_j - r_0 \right] \frac{V^{-1}(\mathbf{e} - r_0 \mathbf{1})}{K}.$$

Azaz $\pi$ is előáll (4.9) alakban, ahol $\pi$ az $y = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_j$ elvárt hozamhoz tartozó megoldás. □

A megoldások tulajdonságainak vizsgélata kapcsány követjük a szűkített feladatnál leírt utat. Így a következő kérdés az, hogy hol helyezkednek el a megoldások a várható hozam és kockázat síkban ábrázolva. Ezt mutatja be a következő állítás.

**4.3.4. Tétel.** *Ha $\pi \in PF^+$ akkor*

$$\sigma_\pi = \begin{cases} \frac{e_\pi - r_0}{\sqrt{K}}, & \text{ha } e_\pi > r_0, \\ -\frac{e_\pi - r_0}{\sqrt{K}}, & \text{ha } e_\pi \leq r_0. \end{cases}$$

*ahol $K$ a 4.3.1. Tételben definiált.*

**Bizonyítás.** Mivel az állítás közvetlenül adódik a megoldások alakjából, így azt röviden bemutatjuk.

A 4.3.1. Tétel alapján

$$\sigma_\pi^2 = \pi^\top V \pi = \left( \frac{e_\pi - r_0}{K} \right)^2 (\mathbf{e} - r_0 \mathbf{1})^\top V^{-1} V V^{-1} (\mathbf{e} - r_0 \mathbf{1}) = \left( \frac{e_\pi - r_0}{K} \right)^2 K,$$

amiből közvetlenül adódik az állítás. □

Itt is láthatjuk, hogy a portfólióhatár felső félegyenese tartalmazza azon portfóliókat, melyeket érdemes választani, azaz, melyek a Markowitz-féle reláció szerint a legjobbak, azaz nincs náluk a Markowitz-féle relációban jobbak.

**4.3.5. Definíció.** *Az*

$$EPF^+ := \left\{\pi \in PF^+ \mid e_\pi \geq r_0\right\}$$

*halmazt a (4.4) feladathoz tartozó hatékony portfóliók határának (efficient portfolio frontier) nevezzük.*

*Ugyanezt a félegyenest szokták* **Capital Market Line***-nak,* **CML***-nek nevezni, azaz tőkepiaci egyenesnek.*

**4.3.6. Megjegyzés.** Ahogy említettük az alfejezet elején, ez az eset analóg módon kezelhető a korábbi esettel, ahol még nem volt kockázatmentes értékpapír. Ha ismét $\mathbb{R}^2$-ben ábrázoljuk a portfólióknak megfeleltetett (szórás, elvárt hozam) pontokat, akkor itt $PF^+$ két félegyenesből áll, ahogy azt a 4.3.4. Tétel mutatja. A félegyenesek az $y$ tengelytől indulnak, a tengelyt a $(0, r_0)$ pontban metszik, amely annak az optimális portfóliónak felel meg, amelyben az összes kezdőtőkét a kockázatmentes értékpapírba fektettük. Ez a portfólió egyben az ehhez a feladathoz tartozó minimális varianciájú portfólió. Vegyük észre, hogy a (4.4) feladatnak is van minden $y \in \mathbb{R}$ várható hozam esetén megoldása.

A két félegyenes közül a felső adja a $EPF^+$ halmaznak megfeleltetett pontokat. A másik ág ugyan valamely elvárt hozamhoz tartozó megoldása a (4.4) feladatnak, de azt racionális befektető nem választaná, hiszen a felső félegyenesen található egy vele azonos szórást (kockázatot), de magasabb elvárt hozamot biztosító optimális portfóliónak megfelelő pont. Ezért nevezzük a $EPF^+$-beli portfóliókat hatékonynak.

Mivel ennek a feladatnak az optimuma ugyanazon elvárt hozam mellett nem adhat nagyobb szórású megoldást, mint a kockázatmentes értékpapír nélküli feladat megoldása, így az már látszik, hogy a $PF$-nek megfelelő korábbiakban tárgyalt görbe (hiperbola, ld. 4.2.5. Megjegyzés) a két félegyenes között helyezkedik el.

Az eddigiek alapján ismerjük mindkét feladat esetén a portfólióhatár elhelyezkedését. Felvetődik az a természetes kérdés, hogy egymáshoz képest hogyan helyezkednek el ezek a görbél. Az nyilvánvaló, hogy minden rögzített várható hozam esetén az $PF^+$ megfelelő pontja a síkban balra helyezkedik el –nem szigurú értelemben– az $PF$ megfelelő pontjához képest, azaz nem adhat a bővített feladat rosszabb kockázatú portfóliót, hiszen a szűkített feladat megoldása egy megengedett portfólió a bővített feladat esetén. Így felvetődik a kérdés, hogy van-e közös pontja –azaz érintési pontja– a $PF$-nek és a $PF^+$-nak. Ezt a következő tétel tárgyalja. $\triangle$

**4.3.7. Tétel.** *Ha $A/C{\neq}r_0$, akkor egyértelműen létezik $\pi{\in}PF{\cap}PF^+$, melyre*

$$\pi \in EPF^+ \Longleftrightarrow e_\pi \geq r_0 \Longleftrightarrow \frac{A}{C} \geq r_0,$$
$$\pi \in PF^+ \backslash EPF^+ \Longleftrightarrow e_\pi < r_0 \Longleftrightarrow \frac{A}{C} < r_0.$$

*Ha $A/C{=}r_0$, akkor nem létezik olyan $\pi$ portfólió, melyre $\pi{\in}PF{\cap}PF^+$.*

A tétel igazolása nem célunk ebben a jegyzetben, az érdeklődő olvasónak ajánljuk ismét a [28] jegyzetet.

A következő tétel a korábban tárgyalt two fund separation tétel analógja a bővített feladat esetére. Magát a tételt szokás *one fund separation tételként* is hivatkozni.

**4.3.8. Tétel.** *Legyen $\pi \in PF^+$ úgy, hogy $\pi$ nem a minimális varianciájú optimális portfólió (azaz $e_\pi{\neq}r_0$) és $\pi'{\in}C_1$ egy tetszőleges portfólió. Tekintsük a (4.8)-ben megadott $\beta_{\pi',\pi}$ bétáját a $\pi'$ portfóliónak. Ekkor*

**(a)** $e_{\pi'} = (1-\beta_{\pi',\pi})\, r_0 + \beta_{\pi',\pi} e_\pi$,

**(b)** $r_{\pi'} = (1-\beta_{\pi',\pi})\, r_0 + \beta_{\pi',\pi} r_\pi + \varepsilon_{\pi',\pi}$, *ahol* $\varepsilon_{\pi',\pi}$ *egy valószínűségi változó, melyre* $\mathbb{E}\varepsilon_{\pi',\pi} = \operatorname{cov}(r_\pi, \varepsilon_{\pi',\pi}) = 0$,

**(c)** $r_{\pi'} = (1-\beta_{\pi',\pi})\, r_0 + \beta_{\pi',\pi} r_\pi$, *ha speciálisan* $\pi' \in PF$.

Ennek a tételnek a bizonyítása is megtalálható a [28] jegyzetben.

## 4.4. CML, SML, CAPM

*A tőkepiaci egyenesről (CML)*

Tekintsük ismét a tőkepiaci egyenest, melynek portfólióiról a 4.3.8. Tétel ad további információt. Láthatjuk, hogy minden hatékony, sőt, valójában minden $PF^+$-beli portfóliót elő tudunk állítani alkalmas affin kombinációval egy rögzített $PF^+$-beli (referencia)-portfólióból és a kockázatmentes értékpapírból. A kombinációhoz szükséges együtthatót pedig az előállítandó portfólió bétája adja.

Legyen például a rögzített referencia-portfólió a $PF$ és $PF^+$ érintési pontja, s vizsgáljuk például a $A/C > r_0$ esetet. Ekkor az érintési ponthoz tartozó portfólió $EPF^+$-beli, jelöljük $\pi_m$-mel. Ezt szokás piaci portfóliónak is nevezni. Az elnevezést a későbbiekben indokoljuk, hiszen a CAPM ad magyarázatot arra.

Ekkor tehát a fentiek és a 4.3.8. Tétel értelmében minden $PF^+$-beli portfólió úgy áll elő, hogy konstansszorosát vásároljuk a $\pi_m$ portfóliónak és a maradék összeget (mely lehet negatív is) a kockázatmentes értékpapírba rakjuk. Így az $EPF^+$-nak megfelelő félegyenes két szakaszra bontható. A $(0, r_0)$ és $(\sigma^2_{\pi_m}, e_{\pi_m})$ pontok közötti szakasz konvex lineáris kombinációval áll elő, azaz itt pozitív a kockázatmentes értékpapírba befektetett rész. Így a létrehozandó portfólió bétája nemnegatív és legfeljebb 1. Ezen a szakaszon az elvárt hozam nyilván $r_0$ és $e_{\pi_m}$ között van. A félegyenes maradék része magasabb elvárt hozamot ígér, mint amennyit a piaci portfólió ígér, ám ez magasabb kockázattal (szórás) is párosul. Ezeket a portfóliókat úgy lehet megvalósítani, hogy az affin kombinációban $\pi_m$ együtthatója, azaz a létrehozandó portfólió bétája 1-nél nagyobb, de ennek az az ára, hogy azt csak a kockázatmentes értékpapírban felvett kölcsönből tudjuk csak finanszírozni. Harmadrészt, a $PF^+ \backslash EPF^+$-beli portfóliók bétája negatív.

A fentiekből az adódik, hogy bármelyik hatékony portfólióban a részvényekbe fektetett pénzmennyiségek arányai mindig azonosak, hiszen azok a $\pi_m$-beli arányok. Ennek a CAPM kapcsán lesz jelentősége, így ott erre a tulajdonságra visszatérünk.

*Az értékpapírpiaci egyenes (SML)*

A 4.3.8. Tétel **(a)** pontja megadja, hogy a portfólió elvárt hozama hogyan kapható meg a bétája segítségével. Ezt az összefüggést leíró egyenest **tőkepiaci egyenesnek** is szokás nevezni. Ez alapján a portfólió kockázati prémiuma vagy másképpen kockázati díja

$$e_{\pi'} - r_0 = \beta_{\pi',\pi} \left(e_\pi - r_0\right).$$

Tehát egy portfólió $e_{\pi'} - r_0$ kockázati prémiumát a piaci portfólió $e_\pi - r_0$ kockázati prémiuma és a portfólió bétája határozza meg. Másképpen, egy portfólió bétája és kockázati felára között lineáris összefüggés van, azt az $x \mapsto (e_\pi - r_0)\, x$ összefüggés adja $\mathbb{R}^2$-ben, amelyben a portfóliókat ábrázoltuk (a kockázatuk és várható hozamuk alapján).

Átrendezve a fenti egyenletet, kifejezhetjük egy eszköz vagy portfólió elvárt hozamát:

$$e_{\pi'} = r_0 + \beta_{\pi',\pi} \left( e_\pi - r_0 \right).$$

Ezt szokás az értékpapírpiaci egyenesnek, azaz securities market line (SML) néven hivatkozni. Az összefüggés, ahogy fent láttuk, azt mutatja, hogy egy pénzügyi eszköz vagy portfólió várható hozamának kiszámolásához elég ismernünk annak bétáját, továbbá mindössze két piaci információt, a piaci portfólió várható hozamát és a kockázatmentes hozamot.

Ez az összefüggés egyben azt jelenti, hogy segítségével egy becslési utat is kapunk az elvárt hozamhoz: a piaci információk ismeretében, vagy azok becslése után pusztán a portfólió bétáját kell tudnunk becsülni. Ehhez egy utat a tételbeli **(b)** összefüggés nyújt, hiszen az alapján a portfólió bétája becsülhető egy kétváltozós lineáris modellből, melynek magyarázó változója a piaci kockázati felár, főegyütthatója maga a béta. Emlékezzünk továbbá arra, hogy elég a piaci pénzügyi eszközök bétáját ismernünk vagy becsülnünk, hiszen a portfóliók bétája azok affin kombinációjaként adódik.

*A Capital Asset Pricing Modell*

Végezetül bemutatjuk a Capital Asset Pricing Model (CAPM, tőkepiaci árfolyamok modellje) alapjait. Az elméletet W. Sharp, J. Lintner és J.

Treynor dolgozta ki egymástól függetlenül az 1960-as években. Az elmélet, mely egy egyensúlyi piaci modellt kíván nyújtani, egy egyszerű magyarázatot adott a kockázati díjra a bétán keresztül.

A modell legfontosabb eredményét röviden összefoglaljuk.

A modellben a befektetőkről feltételezzük, hogy

– ugyanazon információk állnak rendelkezésre számukra a piaci hozamok és kockázat (szórás, kovariancia) tekintetében, továbbá

– ugyanazon időhorizontra optimalizálják befektetésüket, és

– figyelembe veszik a befektetésüknél a Markowitz féle szempontokat.

Lényegében a fenti feltételeket úgy foglalhatjuk össze, hogy a befektetők ugyanazon hatékony portfóliók görbéjéről választ egy-egy kockázatvállalásának (kockázatkerülésének) megfelelő portfóliót. Azaz a bővített feladatot tekintve ugyanazon CML egy pontjához tartozó portfóliót választja befektetésnek.

A fentiekből az következik, hogy a befektők a kockázatmentes értékpapír mellett –melyből akár pozitív, akár negatív mennyiséget vásárolnak– a piaci portfólióba fentetik maradék tőkéjüket. Ennélfogva, amennyiben egy ilyen piacon kialakul az egyensúly, úgy az értékpapírok piaci kapitalizációs arányai meg kell, hogy egyezzenek a piaci portfólióban szereplő súlyokkal (arányokkal). Ez magyarázza, hogy miért nevezik az érintési portfóliót piaci portfóliónak, hiszen az a piaci arányokat tükrözi.

Az elmélet részletes leírásával és további feltételezéseinek (pl. trazakciós költségek hiánya) részletezésével nem foglalkozunk. Az érdeklődő olvasó az elmélettel, eredményeinek pénzügyi értelmezésével és empirikus tesztelésével kapcsolatban számos megjegyzést találhat többek között a [8], [33] és [11] monográfiákban. $\triangle$

Végül megjegyezzük, hogy a jegyzetben tárgyalt Markowitz féle feladatok esetében egy egyszerű szempontrendszerünk volt, hiszen a portfóliók várható hozama és kockázata (hozamának szórása) alapján kerestünk optimális portfóliókat. Nyilván felmerülhet más célfüggvény is a portfóliók optimalizálása során, így például hasznosságelméleti megközelítés, azaz a várható hasznosság értelmében vett optimalizálás.

Ebben a jegyzetben ilyen problémákat nem tárgyalunk, az érdeklődő olvasónak ajánljuk a [28] jegyzetet, ahol mind a várható hasznosság koncepciója részletesen kerül tárgyalásra, mind annak alkalmazása portfólióoptimalizálásra. Továbbá ugyanott sztochasztikus dominanciafogalmak is tárgyalásra kerülnek, melyek segítségével pénzügyi eszközöket vagy portfóliókat hasonlíthatunk össze ('rendezhetünk').

Az Markowitz féle feladatok megoldásai kapcsán is szokás egyszerű hasznosságelméleti megfontolásokat tenni, azaz szokás olyan egyszerű hasznosságfogalmat (nem várható hasznosságot) bevezetni a portfóliók esetére, melyek segítségével a hatékony portfóliók közötti választást lehet egyszerűen modellezni. Az érdeklődő olvasó néhány megjegyzést találhat erre vonatkozóan például Barucci [8] könyvében.

# 5. fejezet

# Kockázati mértékek

Ebben a részben –ahogy a cím is jelzi– kockázati mérőszámokat mutatunk be, melyek fontos szerepet játszanak a pénzügyi gyakorlatban, különösen pénzintézetek, hitelintézetek, biztosítók esetén. Ahogy a bevezetőben már írtuk, ez a rész a Pap Gyulával írt korábbi [28] tankönyv megfelelő fejezetének átdolgozott és bővített változata. Kevesebb hangsúlyt fektetünk néhány mélyebb bizonyításra, többet ugyanakkor gyakorlati kérdésekre, értelmezésekre.

A pénzügy egyik központi kérdése, hogy olyan eszközöket biztosítson, amelyek lehetővé teszik pénzügyi eszközök és kiváltképp portfóliók (pozíciók) kockázatosságának leírását. Ehhez számos eszközt, mérőszámot lehet képezni, különböző elvárások mellett. Ezeket a mutatókat fogjuk kockázati mértékeknek nevezni.

Több célnak, elvárt tulajdonságnak szeretnénk, ha megfelelnének ezek a mutatók.

Jegyezzük itt meg, hogy számos egyszerű mutatót már sok évtizeddel ezelőtt használtak és használnak ma is. Gondolhatunk itt az egyszerű pénzügyi mutatókra, melyek pusztán a pénzügyi beszámoló egy-egy aggregált sorából képzett alkalmas viszonyszám, vagy olyan tőketartalék, mely egy-egy ilyen sor adott százaléka (ld. egyszerű tartalékelőírások). Azonban a klasszikus mutatók nem igazán adnak információt egy vállalkozás portfóliójának kockázatosságáról. Nyilván valószínűségi változókban hordozott kockázatra is van számos klasszikus mérőszám, így például a szóródásmutatók. Ugyanakkor esetünkben a legfőbb cél az, hogy a képzett mutatók tőkefedezet képzésére alkalmas információt adjanak, azaz egyszerűen fogalmazva segítségükkel határozzuk meg, hogy egy adott portfólióra mennyi fedezetet kell képezni ahhoz, hogy például a következő év esetleges veszteségeit az fedezze. Ehhez megfelelő tulajdonságokat fogunk elvárni a kockázati mértékektől, s keresni olyan mutatókat, melyek minél többet teljesítenek ezekből.

Ilyen elvárásoknak is (részben) megfelelő kockázati mértékekből is számos jelent meg a szakirodalomban. Ezek közül minden kétséget kizáróan a Value at Risk terjedt el a leginkább a banki és biztosítási, továbbá nagyvállalati gyakorlatban. Ma már számos pénzpiaci, pénzintézeti törvény megköveteli a pénz– és hitelintézetektől, biztosítóktól és esetleg egyéb piaci szereplőktől ennek számítását és ezzel kapcsolatos szabályok betartását (pl. tőketartalék képzése). Az érdeklődő olvasónak megemlítjük, hogy a Bázeli Bizottság (Basel Committee on Banking Supervision) részletesen foglalkozott kockázati mértékekkel, szabályozási kérdésekkel és azokhoz kapcsolódó problémákkal banki, hitelintézeti szektorokra vonatkozóan, és egyben javaslatot tett számos standard bevezetésére (ld. International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards). Ezen standardok ma már egyszerűen 'Basel I', 'Basel II' és 'Basel III' néven ismertek a szakmában, amely standardokban többek között a VaR és azzal kapcsolatos területek fontos szerepet kaptak és a standardok bevezetését és alkalmazását javasolják az egyes országoknak. Hasonló említhetjük az Európai Unió esetén a 'Szolvencia I' és 'Szolvencia II' folyamatokat, melyek a biztosítási területen az európai piacokon egyfajta harmonizációt jelentettek, s ennek részeként fontos igények merültek fel abban is ilyen kockázati mértékek alkalmazására a biztosítási piacon. A fentieknek a magyar szabályozásban is megtalálhatjuk a természetes következményeit, így ezek ma már szerves részét adják a magyar banki és biztosítási piac szabályozásának. (Ugyanakkor a tételesen a megfelelő törvények, rendelek felsorolása és tárgyalása természetesen ennek a jegyzetnek nem célja.)

Látni fogjuk azt is, hogy nem állíthatjuk, hogy a VaR lenne a legmegfelelőbb mérték azon célra, amelyeket a fentiekben említettünk, továbbá, hogy az alkalmasság kérdéséhez pontosan meg kell fogalmaznunk igényeinket is egy ilyen mutatóval szemben, így ez lesz az első kérdés, melyet körbejárunk, azaz az 5.1. alfejezetben éppen ezen felmerülő igényekkel foglalkozunk, míg azt követően a VaR és tulajdonságai kerülnek elemzésre az 5.2. alfejezetben. Végül az 5.3. alfejezetben rátérünk egy másik kockázati mérték, az expected shortfall tárgyalására, mely számos szerző által ajánlott a VaR alternatívájaként éppen a VaR egyes nem megfelelő tulajdonságai miatt. Ez egyben egyike azon modern mértékeknek, melyek alkalmazása egyre inkább napirenden van a gyakorlatban és a szábályozási változásokban is.

Ennek a fejezetnek a megírása során nagy segítséget jelentettek számunkra az alábbi munkák: [1], [2], ahol a VaR és az expected shortfall tárgyalása igen részletes; [20], ahol a koherencia fogalmának egy rendkívül hasznos tárgyalását találhatjuk; [21], amelyben egy nagy áttekintését olvashatjuk a VaR fogalmának, közgazdasági hasznosításának és becslésének. Megjegyezzük, hogy a kvantilisek tárgyalásához nagyszerű forrásnak bizonyult [2] és [43]. Végezetül kiemeljük Paul Embrechts munkáit (szakcikkek, előadás fóliák, stb.), amelyekben számos gyakorlati és elméleti kérdés tárgyalását találhatjuk kockázati mértékekkel kapcsolatban (ld. http://www.math.ethz.ch/~embrechts/).

## 5.1. Kockázati mértékek tulajdonságai

Ahogy már említettük, számos igényt fogalmazhatunk meg egy kockázati mutatóval szemben. Természetesen ez szubjektív is egyben, nem állíthatjuk, hogy ugyanazon tulajdonságokat találja mindenki fontosnak. Az irodalomban is számos tulajdonság merül fel igényként. A leginkább előforduló, leggyakrabban megkövetelt tulajdonságokat tömöríti a koherencia fogalma, melyet az alábbiakban ismertetünk. Ezt követően pedig alternatív tulajdonságokat is tárgyalunk.

A kockázati mértékeket valószínűségi változók egy halmazán értelmezhetjük. Hiszen ha adott egy portfólió, befektetés vagy értékpapír, akkor egy valószínűségi változó reprezentálja az abból származó jövőbeli profitot. Ám hasonlóan, magát a jövőbeli értéket is jelölheti a valószínűségi változó, amelyhez a kockázatot meghatározzuk.

**5.1.1. Definíció.** *Legyen $V$ (pénzügyi eszközök, portfóliók profitját reprezentáló) valószínűségi változók egy halmaza egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn.*

*Ekkor egy $\varrho : V \to \mathbb{R}$ függvényt kockázati mértéknek nevezünk.*

*Egy $V$ kockázati mérték*

**(1)** *monoton, ha $X, Y \in V$ és $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$, akkor $\varrho(X) \geq \varrho(Y)$;*

**(2)** *pozitív homogén, ha $h > 0$, $X, hX \in V$, akkor $\varrho(hX) = h\varrho(X)$;*

**(3)** *szubadditív, ha $X, Y, X+Y \in V$, akkor $\varrho(X+Y) \leq \varrho(X) + \varrho(Y)$;*

**(4)** *eltolás invariáns, ha $a \in \mathbb{R}$, $X, X+a \in V$, akkor $\varrho(X+a) = \varrho(X) - a$.*

*Egy $V$ kockázati mértéket koherensnek nevezünk, ha teljesíti az* **(1)-(4)** *tulajdonságokat.*

**5.1.2. Feltétel.** *Az egész fejezetben az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy $V$ zárt az összeadásra, pozitív skalárral való szorzásra és eltolásra, azaz $V+V$, $h\cdot V$, $a+V \subset V$ minden $h>0$, $a \in \mathbb{R}$ esetén. Feltesszük továbbá, hogy $V$ tartalmazza az $X \equiv 0$ ( $\mathbb{P}(X=0)=1$) elemet.*

A kozkázati mértékek nevezetes tulajdonságait (monotonitás, szubadditivitás, stb.) néha axiómáknak is fogjuk nevezni.

A fenti tulajdonságokat az alábbi módon értelmezhetjük, az alábbi pénzügyi motivációt fedezhetjük fel bennük. Ha egy portfólió minden esetben többet ígér, mint egy másik, akkor annak ne legyen nagyobb a kockázata (monotonitás). Két portfóliót egybetéve ne növekedhessen a kockázat, azaz a portfóliók kocázatának összegét nem haladhatjuk meg (szubadditivitás). Megtöbbszörözve a portfóliót, ám megtartva annak összetételét, a kozkázatosság a nagysággal arányosan változzon (pozitív homogenitás). Ha biztosan realizálunk egy pótlólagos adott összegű pénzáramlást, akkor a portfólió kockázatossága éppen ennek a pénzáramlásnak a nagyságával csökkenjen (eltolás invariancia).

Azonban fontosnak tartjuk hangsúlyozni, hogy számos egyéb, a fentiekhez hasonlóan pénzügyi szempontból indokoltnak látszó tulajdonságot is lehetne még említenünk, mint ahogy a fentiek szükségességét is megkérdőjelezhetjük. Kettő a sok felmerülő tulajdonságok közül a következő.

**5.1.3. Definíció.** *Egy $\varrho : V \to \mathbb{R}$ kockázati mérték*

**(5)** pozitív, *ha $X \in V$, $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$ esetén $\varrho(X) \leq 0$;*

**(6)** konvex, *ha $\lambda \in [0,1]$ és $X, Y, \lambda X + (1-\lambda)Y \in V$ esetén $\varrho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq$ $\leq \lambda\varrho(X) + (1-\lambda)\varrho(Y)$.*

**5.1.4. Tétel.** *Legyen $\varrho$ egy kockázati mérték.*

(a) *Ha $\varrho$ pozitív homogén és $X \equiv 0$, akkor $\varrho(X) = 0$.*

(b) *Ha $\varrho$ pozitív homogén és eltolás invariáns, akkor $\varrho(a) = -a$ minden $a \in \mathbb{R}$ esetén.*

(c) *Egy monoton és pozitív homogén kockázati mésték teljesíti a pozitivitást.*

(d) *Tegyük fel, hogy $V$ zárt a különbségképzésre, azaz $V - V \subset V$. Ekkor a $\varrho$ kockázati mérték pontosan akkor koherens, ha teljesülnek rá a* **(2)-(5)** *axiómák.*

(e) *Ha $\varrho$ szubadditív és pozitív homogén akkor konvex.*

**Bizonyítás.** **(a)** Legyen $X \equiv 0$. Ekkor $X \in V$, így az első állítás rögtön adódik a pozitív homogenitásból, hiszen $\varrho(X) = \varrho(2X) = 2\varrho(X)$.

**(b)** Ha $a \in \mathbb{R}$, akkor az eltolás invariancia és az **(a)** állítás miatt $\varrho(a) =$ $= \varrho(0 + a) = \varrho(0) - a = -a$.

**(c)** Egy nemnegatív $X$ változó ($\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$) esetén a monotonitásból és az első állításból adódik, hogy $\varrho(X) \leq \varrho(0) = 0$, azaz beláttuk a pozitivitást.

**(d)** Az **(1)-(4)** $\Longrightarrow$ **(2)-(5)** irány igazolásához a pozitivitást kell megmutatni, ami **(c)** alapján adódik.

A **(2)-(5)** $\Longrightarrow$ **(1)-(4)** irány igazolásához a monotonitást kell megmutatnunk. Ehhez legyen $X, Y \in V$ olyan, hogy $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$. Ekkor a pozitivitás alapján, mivel $\mathbb{P}(Y - X \geq 0) = 1$, így $\varrho(Y - X) \leq 0$, továbbá a szubadditivitást használva $\varrho(Y) \leq \varrho(Y - X) + \varrho(X) \leq \varrho(X)$.

**(e)** Először a szubadditivitást, majd a pozitív homogenitást használva azonnal adódik az állítás. □

A **(b)** állítás azt jelenti, hogy egy biztos pénzáramlás kockázati mértéke éppen -1-szerese önmagának. Tehát egy biztos veszteség kockázata pozitív és éppen a veszteség nagyságával egyenlő, miközben, ha egy befektetés biztos (fix) nyereséget hoz, annak kockázata negatív, 'nagysága' a nyereség nagysága. A **(d)** állításból láthatjuk, hogy alkalmas $V$ esetén a kockázati mértékeknél a monotonitást felcseréljük a koherencia definíciójában a pozitivitással (úgy, hogy ezzel egy ekvivalens axiómarendszert kapunk). Végül megemlítjük, hogy számos szerző egy gyengébb axiómarendszert javasol a koherencia helyett, nevezetesen a koherencia 4 axiómájában a szubadditivitást és a pozitív homogenitást a gyengébb konvexitás tulajdonságával javasolják kicserélni (ld. **(f)**).

A pénzügyben a portfóliók és pénzügyi eszközök kockázatosságát szokás és korábban különösen elterjedt volt az eszköz jövőbeli értékének szórásával vagy szórásnégyzetével jellemezni. Fontos azonban kiemelni, hogy a mi céljainkra ezen fogalmak nem alkalmasak, hiszen azok számos kívánatos tulajdonságot nem teljesítenek. Nyilvánvaló például, hogy egyik sem monoton, mint ahogy azt is könnyű látni, hogy a pozitivitást sem elégítik ki.

## 5.2. Value at Risk

**Jelölés.** Egy $X$ valószínűségi változó esetén $F_X$ fogja jelölni annak eloszlásfüggvényét, azaz $F_X(z) = \mathbb{P}(X < z)$. Az eloszlásfüggvény jobbról folytonos verzióját pedig $\tilde{F}_X$ fogja jelölni, azaz $\tilde{F}_X(z) = \mathbb{P}(X \leq z)$. Ennek azért van jelentősége, mert számos szerző $\tilde{F}_X$-t definiálja $X$ eloszlásfüggvényének. Ennéfogva a későbbiek során számos helyen felhívjuk az olvasó figyelmét azon kölünbségekre, amelyeket ezen különbségtétel okoz.

Azt könnyű látni, hogy természetesen mindkettő definíció esetén az eloszlásfüggvény egyértelműen definiálja az eloszlást. Közismert, hogy melyek az eloszlásfüggvények karakterizációs tulajdonságai. E tekintetben a kétféle definíció között az érdemi különbség abban van, hogy az egyik esetben jobbról, a másik esetben pedig balról lesz a függvény folytonos. Nyilván anszolút folytonos eloszlások esetén a különbségnek a definícióban nincs jelentősége.

**5.2.1. Definíció.** *Legyen $X$ egy valószínűségi változó, $\alpha \in (0{,}1)$. Ekkor az $X$ alsó $\alpha$-kvantilise*

$$q_\alpha(X) = \sup\{y \mid F_X(y) < \alpha\},$$

*ahol $F_X$ az $X$ eloszlásfüggvényét jelöli, valamint*

$$q^\alpha(X) = \inf\{y \mid F_X(y) > \alpha\}$$

*az $X$ felső $\alpha$-kvantilise.*

*Ha $X$ egy (portfólió, pénzügyi eszköz) profitját leíró valószínűségi változó egy valószínűségi mezőn és $\alpha \in (0{,}1)$, akkor $X$ alsó $\alpha$-Value at Risk értéke alatt a*

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = -q_\alpha(X)$$

*mennyiséget értjük. Hasonlóan, $X$ felső $\alpha$-Value at Risk értékének definíciója:*

$$\mathrm{VaR}^\alpha(X) = -q^\alpha(X).$$

Az $X$ $\alpha$-kvantilisét leegyszerűsítve úgy értelmezhetjük, hogy az $X$ jövőbeli lehetséges kimeneteit (profitértékeit) két részre osztja: az esetek legrosszabb $\alpha * 100$ százalékában ennél az értéknél kisebb lesz a profit, $1 - \alpha * 100$ százalékában pedig nagyobb. Másképpen, $(1-\alpha)$ valószínűséggel legalább a kvantilis által mutatott érték lesz a profit (kimenet). Ennélfogva, az $\alpha$-VaR azt a veszteségértéket mutatja, aminél $(1-\alpha)$ valószínűséggel nem fogunk nagyobb veszteséget realizálni. Tehát $\alpha*100$ százaléknyi legrosszabb lehetséges veszteségértékek legjobbikát mutatja a VaR, másképpen, az $(1-\alpha)*100$ százaléknyi legjobb lehetséges kimenetek legrosszabbikát mutatja a VaR. Azonban fontos hangsúlyozni, hogy ezek nem pontos állítások, ráadásul az alsó és felső VaR nem feltétlenül egyezik meg. A későbbiekben erre részletesen visszatérünk.

Az alábbiakban néhány kvantilisekkel kapcsolatos hasznos tulajdonságot foglalunk össze, majd áttekintjük az ezek következményeként adódó VaR tulajdonságokat.

**5.2.2. Megjegyzés.** Könnyű látni, hogy a kvantilisek más alakban is megadhatóak, hiszen

$$q_\alpha(X) = \inf\{y \mid F_X(y) \geq \alpha\}, \quad \text{ill.} \quad q^\alpha(X) = \sup\{y \mid F_X(y) \leq \alpha\}.$$

Továbbá jegyezzük meg, hogy ha az 5.2.1. Definícióban, vagy annak fenti átírásában az $y \mapsto F_X(y) = \mathbb{P}(X < y)$ eloszlásfüggvényt helyettesítenénk az $y \mapsto \tilde{F}_X(y) = \mathbb{P}(X \leq y)$ (jobbról folytonos) függvénnyel, az $q_\alpha(X)$ és $q^\alpha(X)$ értékét nem változtatná.

Vegyük észre, hogy $q^\alpha(X) = -q_{1-\alpha}(-X)$ és $q_\alpha(X) = -q^{1-\alpha}(-X)$. Ez azonnal adódik az előző megjegyzésünket is figyelmebe véve, hiszen például az első esetben:

$$\begin{aligned}
q^\alpha(X) &= \inf\{y \mid F_X(y) > \alpha\} = \inf\{y \mid \mathbb{P}(-X \le -y) < 1-\alpha\} \\
&= -\sup\{-y \mid \mathbb{P}(-X \le -y) < 1-\alpha\} = -\sup\left\{y \mid \tilde{F}_{-X}(y) < 1-\alpha\right\} \\
&= -q_{1-\alpha}(-X).
\end{aligned}$$

Mivel $\{y \mid F_X(y) > \alpha\} \subset \{y \mid F_X(y) \ge \alpha\}$, így ezek alsó korlátjára teljesül, hogy

$$q_\alpha(X) \le q^\alpha(X).$$

Ebből azt is láthatjuk, hogy az alsó és felső kvantilisek nem feltétlenül azonosak, nevezetesen, figyelembe véve az eloszlásfüggvény monotonitását, adódik, hogy

$$q_\alpha(X) = q^\alpha(X) \Longleftrightarrow \text{ ha az } \{y \in \mathbb{R} \mid F_X(y) = \alpha\} \text{ halmaz legfeljebb egyelemű}$$

(hiszen az eloszlásfüggvény monotonitása miatt $\{y \mid F_X(y) > \alpha\}$ és $\{y \mid F_X(y) \ge \alpha\}$ intervallumok, melyeknek jobb végpontja $\infty$). Az is nyilvánvaló, hogy az $\{y \in \mathbb{R} \mid F_X(y) = \alpha\}$ halmaz pontosan akkor legfeljebb egyelemű, ha a $\{y \in \mathbb{R} \mid \tilde{F}_X(y) = \alpha\}$ halmaz legfeljebb egyelemű.

Ez tehát azt jelenti, hogy ha az eloszlásfüggvény egy szakaszon konstans és értéke éppen $\alpha$, akkor az azon $\alpha$-hoz tartozó alsó és felső kvantilisek nem azonosak. Folytonos eloszlásoknál például ilyen esetet nem tapasztalhatunk, diszkrét eloszlásoknál viszont minden olyan $\alpha \in (0,1)$ érték esetén eltérnek az alsó és felső kvantilisek, ahol $\alpha$ eleme az eloszlásfüggvény értékkészletének. Azt is mondhatjuk, hogy a két kvantilis „kifeszíti” azt az intervallumot, ahol az eloszlásfüggvény az $\alpha$ értéket veszi fel, pontosabban: ha $q_\alpha(X) < q^\alpha(X)$, akkor

$$\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) = \alpha\} = \begin{cases} (q_\alpha(X), q^\alpha(X)], & \text{ha } \mathbb{P}(X = q_\alpha(X)) > 0 \\ [q_\alpha(X), q^\alpha(X)], & \text{ha } \mathbb{P}(X = q_\alpha(X)) = 0, \end{cases}$$

vagy másképpen

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \tilde{F}_X(x) = \alpha\} = \begin{cases} [q_\alpha(X), q^\alpha(X)), & \text{ha } \mathbb{P}(X = q^\alpha(X)) > 0 \\ [q_\alpha(X), q^\alpha(X)], & \text{ha } \mathbb{P}(X = q^\alpha(X)) = 0. \end{cases}$$

△

**5.2.3. Tétel.** *Legyen $U$ egyenletes eloszlású a (0,1) intervallumon és $X$ egy tetszőleges valószínűségi változó. Ekkor $\eta_1 = q_U(X)$, $\eta_2 = q^U(X)$ és $X$ azonos eloszlásúak.*

Szokás egy $X$ valószínűségi változó esetén az eloszlásfüggvényének $F_X^{-1}$ általánosított inverzét

$$F_X^{-1}(y) := q_y(X), \qquad y \in (0,1),$$

módon definiálni, amely nyilvánvalóan megegyezik az eloszlásfüggvény inverzével, amennyiben az invertálható. Így a fenti tétel értelmében $F_X^{-1}(U)$ eloszlásfüggvénye $F_X$, ha $U$ egyenletes eloszlású a (0,1) intervallumon.

Az 5.2.3. Tétel bizonyítását ebben a jegyzetben nem célunk részletesen megadni. Az érdeklődő olvasónak ajánljuk korábbi Gáll-Pap [28] tankönyvet a bizonyításhoz.

**5.2.4. Tétel.** *Az alsó és felső VaR egyaránt monoton, pozitív homogén és eltolás invariáns (egy valószínűségi mező összes valószínűségi változóinak halmazán).*

*A Value at Risk felírható* $\mathrm{VaR}_\alpha(X) = q^{1-\alpha}(-X)$ *és* $\mathrm{VaR}^\alpha(X) = q_{1-\alpha}(-X)$ *alakokban is.*

*Továbbá egy* $X$ *valószínűségi változó esetén az* $\alpha \mapsto \mathrm{VaR}_\alpha(X)$ *és* $\alpha \mapsto \mathrm{VaR}^\alpha(X)$ *függvények* $(\alpha \in (0,1))$ *monoton csökkenőek.*

**Bizonyítás.** Az alsó VaR esetére ismertetjük a bizonyítást, a felső VaR esetére hasonlóan egyszerűen adódnak az állítások.

*Monotonitás.* Ha $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$, akkor $F_X(y) \geq F_Y(y)$ minden $y \in \mathbb{R}$ esetén. Ezért $\{y \mid F_X(y) < \alpha\} \subset \{y \mid F_Y(y) < \alpha\}$, azaz

$$-\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \sup\{y \mid F_X(y) < \alpha\} \leq \sup\{y \mid F_Y(y) < \alpha\} = -\mathrm{VaR}_\alpha(Y).$$

*Pozitív homogenitás.* Ha $h > 0$, akkor $F_{hX}(y) = F_X(y/h)$, $y \in \mathbb{R}$, ezért $-$
$-\mathrm{VaR}_\alpha(hX) = \sup\{y \mid F_{hX}(y) < \alpha\} = \sup\{y \mid F_X(y/h) < \alpha\} = h \sup\{z \mid F_X(z) < \alpha\} =$
$= -h\mathrm{VaR}_\alpha(X)$.

*Eltolás invariancia.* Egy tetszõleges $a \in \mathbb{R}$ esetén $F_{X+a}(y) = F_X(y-a)$, $y \in \mathbb{R}$, ezért $-\mathrm{VaR}_\alpha(X+a) = \sup\{y \mid F_{X+a}(y) < \alpha\} = \sup\{y \mid F_X(y-a) < \alpha\} = a +$ $+ \sup\{z \mid F_X(z) < \alpha\} = a - \mathrm{VaR}_\alpha(X)$.

A VaR ekvivalens átírásai adódnak az 5.2.2. Megjegyzésben leírtakból.

Végül, $\alpha < \beta$ esetén $\{z \mid F_X(z) < \alpha\} \subset \{z \mid F_X(z) < \beta\}$, ezért $q_\alpha(X) <$ $< q_\beta(X)$, amiből pedig adódik a $\mathrm{VaR}_\alpha$ függvény monotonitása $\alpha$-ban.

A bizonyítás az eloszlásfüggvény jobbról folytonos változatát ($\tilde{F}$) használva a balról folytonos ($F$) helyett lényegében teljesen azonos. $\square$

**5.2.5. Megjegyzés.** Az 5.2.4. Tétel bizonyításában láthattuk, hogy az alsó és felső kvantilisek egyaránt pozitív homogén mutatók, továbbá $\mathbb{P}(X \le Y) = 1$ esetén $q_\alpha(X) \le q_\alpha(Y)$, $q^\alpha(X) \le q^\alpha(Y)$, végül bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $q_\alpha(X +$ $+ a) = q_\alpha(X) + a$, $q^\alpha(X + a) = q^\alpha(X) + a$. $\triangle$

A fentiekben a szubadditivitás kivételével bizonyítottuk, hogy a VaR teljesíti a koherenciához szükséges 3 axiómát. Azonban a VaR nem szubadditív, így nem is koherens. A VaR szubadditivitásának cáfolására könnyű példát konstruálni, ilyeneket ismertetünk most.

**5.2.6. Példa.** Tekintsünk egy egyszerű $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőt, ahol legyen $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, és legyen $\mathbb{P}(\omega_1) = 0{,}01$, $\mathbb{P}(\omega_2) = \mathbb{P}(\omega_3) = 0{,}03$. Legyen

$X$ és $Y$ egy-egy portfólióból származó nyereség, ahol

$$X(\omega_1) = -30, \quad X(\omega_2) = -20, \quad X(\omega_3) = -5, \quad X(\omega_4) = 20, \tag{5.1}$$

$$Y(\omega_1) = -30, \quad Y(\omega_2) = -5, \quad Y(\omega_3) = -20, \quad Y(\omega_4) = 20. \tag{5.2}$$

Ekkor $\mathrm{VaR}_{0,05}(X) = \mathrm{VaR}^{0,05}(X) = \mathrm{VaR}_{0,05}(Y) = \mathrm{VaR}^{0,05}(X) = 5$, viszont

$$\mathbb{P}(X+Y = -60) = 0{,}01, \quad \mathbb{P}(X+Y = -25) = 0{,}06, \quad \mathbb{P}(X+Y = 40) = 0{,}93,$$

azaz $\mathrm{VaR}_{0,05}(X+Y) = \mathrm{VaR}^{0,05}(X+Y) = 25$. △

A következő példa ötlete Paul Embrechtstől származik.

**5.2.7. Példa.** Legyenek az $Y_i$ valószínűségi változók ($i = 1, \dots, 100$) függetlenek és azonos eloszlásúak az alábbi eloszlással:

$$\mathbb{P}(Y_i = 2) = 0{,}99 \quad \text{és} \quad \mathbb{P}(Y_i = -100) = 0{,}01.$$

Képzeljük például azt, hogy egy pénzintézet hiteleket ad, 1 évre, 2%-os kamatra, 100 ezer dollár értékben. Ekkor $Y_i$ a pénzintézet egy ilyen szerződésből származó nyereségét írja le: egy év alatt keres 2 ezer dollárt a szerződésen nagy valószínűséggel, ám 1 % esélye van annak, hogy a hitel nem kerül visszafizetésre, mert például fizetésképtelenné válik az ügyfél. (Az egyszerűség kedvéért eltekintünk jelenértékek kalkulálásától az esetlegesen különböző időben érkező pénzforgalom miatt.)

Ekkor nyilvánvaló, hogy $\mathrm{VaR}_{0,05}(Y_i) = -2$. Tekintsük most annak az $L_1$ portfóliónak a $VaR$ értékét, amely tartalmazza a fenti 100 hitelszerződést, azaz $L_1 = \sum_{i=1}^{100} Y_i$. Ekkor a portfóliót másképpen is felírhatjuk, nevezetesen

$$L_1 = \sum_{i=1}^{100} Y_i = \sum_{i=1}^{100} (102\xi_i - 100) = -100^2 + 102 \sum_{i=1}^{100} \xi_i,$$

ahol a $\xi_i$, $i = 1, 2, \ldots, 100$, változók alkalmas Bernoulli eloszlású változók, paraméterük 0,99, függetlenek. Másképpen, $\sum_{i=1}^{100} \xi_i = \eta$, ahol $\eta$ binomiális eloszlású (100; 0,99) paraméterértékekkel. Az eltolásinvarianciát és a pozitív homogenitást használva

$$\mathrm{VaR}_{0,05}(L_1) = 102\mathrm{VaR}_{0,05}(\eta) + 100^2.$$

Továbbá vegyük észre, hogy

$$\mathrm{VaR}_{0,05}(\eta) = -q_{0,05}(\eta) > -100,$$

hiszen $\eta$ legnagyobb lehetséges értéke 100.

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\mathrm{VaR}_{0,05}\left(\sum_{i=1}^{100} Y_i\right) > \sum_{i=1}^{100} \mathrm{VaR}_{0,05}(Y_i),$$

tehát ezen esetben sem teljesül a szubadditivitás.

Ezen példa több szempontból is meglepő, sőt, a szakemberek és a pénzintézetek számára valósággal rémisztő. Egyrészt azért, mert a szubadditivitás egy független és azonos eloszlású esetben nem teljesül, szemben az előző példával.

Másrészt azért, mert másképpen is értelmezhetjük az eredményt. Legyen $L_2$ egy olyan portfólió, amely egyetlen hitelszerződésből áll, ennek feltételei megegyeznek a fenti $Y_1$ szerződéssel, ám annak értéke legyen 10000 dollár, azaz $L_2 = 100Y_1$. Mivel a pozitív homogenitás miatt $\mathrm{VaR}_{0,05}(L_2) = 100\mathrm{VaR}_{0,05}(Y_1)$, így a fentieket úgy is interpretálhatjuk, hogy

$$\mathrm{VaR}_{0,05}(L_1) > \mathrm{VaR}_{0,05}(L_2).$$

Azaz a példánk éppen az ellenkezőjét mondja annak, amit hittünk és hiszünk portfóliók diverzifikálásáról. Kisebb a $VaR$-ban kifejezett kockázata egy egyösszegű nagy kölcsönnek, mint annak a portfóliónak, ahol ugyanilyen kölcsönöket diverzifikálnak független ügyfelek között azonos teljes összegben! Ráadásul jegyezzük meg azt is, hogy $\mathrm{VaR}_\alpha(Y_1) = -2$ minden olyan esetben, amikor $0{,}01 < \alpha < 1$. Miközben ugyanezen tartományban $\mathrm{VaR}_\alpha(L_2)$ értéke érzékenyen változik $\alpha$ változtatásával. $\triangle$

Mint láthatjuk, a VaR a fentiek miatt nem koherens kockázati mérték. Ráadásul éppen a sokak által legfontosabbnak tartott szubadditivitást nem teljesíti. Azaz, ezen mutatóval két portfólió kockázatosságát külön mérve, majd összeadava kevesebbet kaphatunk, mint a portfóliók egyesítésével létrehozott mutató esetén. Pedig azt várnánk, hogy az egyesítés során a kockázat egy részét elimináltuk. A fentiek miatt újabb kockázati mutatókat hoztak létre és vizsgáltak a szakirodalomban. Ezek közül az expected shortfall vált –tulajdonságai miatt– a legelfogadottabbá.

## 5.3. Expected shortfall

Az expected shortfall egy egyszerű ötleten alapszik: tekintsük a portfólió jövőbeli lehetséges kimeneteleinek legrosszabb $\alpha * 100$ százalékát, akárcsak a VaR esetén. Ám most ezek felső határa (legjobbika) helyett vegyük ezek átlagát. Azaz, az expected shortfall a legrosszabb $\alpha * 100$ százalék esetén mutatja a profit (veszteség) várhatóértékét. A pontos definíció az alábbi.

**5.3.1. Definíció.** *Legyen $X$ egy valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X)^- < \infty$ és legyen $\alpha \in (0,1)$, ahol $(X)^-$ az $X$ negatív részét jelöli*[1]*. Ekkor az $X$ $\alpha$-expected shortfall értéke*

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\left(\mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{\{X \le q_\alpha(X)\}}\right] + q_\alpha(X)\left[\alpha - \mathbb{P}(X \le q_\alpha(X))\right]\right).$$

**5.3.2. Megjegyzés.** Az $\mathbb{E}(X)^- < \infty$ feltétel természetesen azért szükséges, hogy a definícióbeli $\mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{\{X \le q_\alpha(X)\}}\right]$ mennyiség létezzen. Ezzel kapcsolatban a [6] példatár tartalmaz további részleteket. △

Az expected shortfall megértésében segít a következő állítás, amely egy ekvivalens átírását adja a fogalomnak.

[1]Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor $x$ pozitív része:

$$(x)^- = \begin{cases} x & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Az $x$ negatív része pedig $(x)^- = (-x)^+$.

**5.3.3. Tétel.** *Legyen $X$ egy valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X)^- < \infty$ és legyen $\alpha \in (0,1)$. Ekkor*

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha q_u(X)du = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha F_X^{-1}(u)du.$$

Az 5.3.3. Tétel bizonyítását ebben a jegyzetben nem célunk részletesen megadni. Az érdeklődő olvasónak ajánljuk korábbi Gáll-Pap [28] tankönyvet a bizonyításhoz. Ugyanakkor meghegyezzük, hogy a bizonyításból lehet megérteni, hogy miért szükséges az expected shortfall definíciójában a korrekciós tagot is figyelembe venni. Láthatjuk, hogy a tétel által ajánlott alternatív számolása a kockázati mértéknek ezzel szemben nem tartalmaz korrekciós tagot.

*Alternatív definíciók*

Felvetődik a kérdés, hogy a Value at Risk mutatóhoz hasonlóan van-e expected shortfall esetén is több nem ekvivalens definíció (ld. alsó és felső VaR). Az 5.3.3. Tétel állítását ugyanis könnyen átírhatnánk felső kvantilisekre is. Könnyen látható, hogy ez nem adna újabb mutatót, hiszen $\int_0^\alpha q_u(X)du = \int_0^\alpha q^u(X)du$, így $\mathrm{ES}_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha q^u(X)du$.

De ugyanez felmerül az eredeti definíció kapcsán is, azaz hasonlóan, az 5.3.1. Definícióban is kicserélhetnénk az alsó kvantiliseket a megfelelő felső kvantilisekre. Ám érdekes módon ez sem ad újabb mutatót, azaz ettől az expected shortfall értéke nem változna, azaz ez az alternatív definíció is ugyanazt a kockázati mértéket adná. Ennek megmutatásához először jegyezzük meg, hogy $q^\alpha(X) = q_\alpha(X)$ esetén az állítás triviális. Ha pedig $q^\alpha(X) > > q_\alpha(X)$, akkor $\mathbb{P}(X \leq q_\alpha(X)) = \alpha$ és ezért azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{\{X\leq q^\alpha(X)\}}\right] + q^\alpha(X)\left[\alpha - \mathbb{P}(X \leq q^\alpha(X))\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{\{X\leq q_\alpha(X)\}}\right] + q^\alpha(X)\mathbb{P}(X = q^\alpha(X)) \\
&\qquad + q^\alpha(X)\left[\alpha - \mathbb{P}(X \leq q_\alpha(X)) - \mathbb{P}(X = q^\alpha(X))\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{\{X\leq q_\alpha(X)\}}\right] = -\alpha \mathrm{ES}_\alpha(X).
\end{aligned}$$

Tehát, a VaR-ral ellentétben itt nincs megkülönböztetve alsó és felső expected shortfall. Sőt, azt is láthatjuk, hogy egyéb formában is felírhatjuk az expected shortfallt, nevezetesen:

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\left(\mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{\{X<q_\alpha(X)\}}\right] + q_\alpha(X)\left[\alpha - \mathbb{P}(X < q_\alpha(X))\right]\right),$$

vagy

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\left(\mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{\{X\leq s\}}\right] + s\left[\alpha - \mathbb{P}(X \leq s)\right]\right), \quad \forall s \in [q_\alpha(X), q^\alpha(X)].$$

Összefoglalva, a fentiekben láthattuk, hogy csak egy expected shortfall van, bár azt számos különböző ekvivalens módon tudjuk definiálni.

*Az expected shortfall tulajdonságai*

**5.3.4. Tétel.** *Legyen $V = \{X \text{ valószínűségi változó} \mid \mathbb{E}(X)^- < \infty\}$ egy valószínűségi mezőn. Ekkor az expected shortfall koherens a $V$ halmazon.*

**Bizonyítás.** A kvantilisek 5.2.5. Megjegyzésben ismertetett tulajdonságai az 5.3.3. Tétellel együtt azt eredményezik, hogy az expected shortfall kielégíti a monotonitást, pozitív homogenitást és az eltolás invarianciát.

A szubadditivitás bizonyítását nem tárgyaljuk ebben a jegyzetben. Az több technikai előkészületet igényelne. Az érdeklődő olvasónak ajánljuk korábbi Gáll-Pap [28] tankönyvet a bizonyításhoz.

□

**5.3.5. Tétel.** *Ha $X$ egy valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X)^- < \infty$, akkor az*

$$\alpha \mapsto \mathrm{ES}_\alpha(X), \qquad \alpha \in (0,1)$$

*függvény folytonos és monoton csökkenő.*

**Bizonyítás.** Az 5.3.3. Tételből látszik, hogy az expected shortfall folytonos függvénye az $\alpha$ biztonsági szintnek, hiszen a tételbeli integrál folytonos függvénye az $\alpha$ felsõ határnak. Mivel $-q_\alpha(X)$ csökkenő $\alpha$-ban, ezért

$$\frac{\int_0^\alpha -q_u(X)du}{\alpha}$$

is az, amiből adódik, hogy az expected shortfall monoton $\alpha$-ban. Ennek részletesebb bizonyításához legyen $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$. A kvantilis monotonitásából adódóan létezik egy olyan $m \in \mathbb{R}$, amelyre teljesül, hogy $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} -q_u(X)\, du =$ $= m\,(\alpha_2 - \alpha_1)$ és $m \leq -q_{\alpha_1}(X)$. Ezért az is teljesül, hogy $m \leq \mathrm{ES}_{\alpha_1}(X)$. Ennélfogva

$$\begin{aligned}\mathrm{ES}_{\alpha_2}(X) &= \frac{1}{\alpha_2}\int_0^{\alpha_2} -q_u(X)\,du + \frac{1}{\alpha_2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} -q_u(X)\,du \\ &= \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\mathrm{ES}_{\alpha_1}(X) + \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) m \le \mathrm{ES}_{\alpha_1}(X).\end{aligned}$$

$\square$

# Irodalomjegyzék


[1] Acerbi, C. (2004): „Coherent Representations of Subjective Risk Aversion”, in Giorgio Szegö (Ed): *Risk Measures for the 21st Century*, Wiley, New York.

[2] Acerbi, C. (2002): *„On the coherence of Expected Shortfall”*, http://www.gloriamundi.org/detailpopup.asp?ID=453054765.

[3] Arató, M. (2001): *„Nem-élet biztosítási matematika”*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest.

[4] Bachelier, L.: „Théorie de la spéculation”, *Ann. EcoleNorm. Sup.*, **17**, 1900, pp. 21-81. (Reprinted in „The random Character of Stock Market Prices”, ed. by Coothner, P. H., MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1967, pp. 17-78.).

[5] Baxter, M. and Rennie, A. (1996): *„Financial calculus”* An introduction to derivative pricing, Cambridge University Press.

[6] Barczy, M. (2009): *„Pénzügyi matematika példatár I. rész"*, Polygon Kiadó, Szeged.

[7] Barczy, M. és Gáll, J. (2009): *„Pénzügyi matematika példatár II. rész"*, Polygon Kiadó, Szeged.

[8] Barucci, E. (2003): *„Financial Markets Theory"*, Springer.

[9] Berde, É. és Petró, K. (1995): „A különféle hasznosságfogalmak szerepe a közgazdaságtanban", *Közgazdasági Szemle*, **1995/5**, pp. 511-529.

[10] Black, F. and Scholes, M. (1973): „The pricing of options and corporate liabilities", *J. Polit. Econ.*, **3**, pp. 637–659.

[11] Brealey, R. A., Myers, S. C. and Allen, F. (2008): *„Principles of Corporate Finance"*, 9th ed., McGraw-Hill.

[12] Brealey, R. A. és Myers, S. C. (2011): *„Modern Vállalati pénzügyek"*, Panem.

[13] Brigo, D. and Mercurio, F. (2006), *Interest Rate Models - Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit*, Springer, Berlin Heidelberg New York.

[14] Cairns, A. J. G. (2004), *Interest Rate Models - An introduction*, Princeton University Press, Princeton and Oxford.

[15] Capinski, M. and Zastawniak, T. (2003): *„Mathematics for Finance"*, Springer.

[16] Chung, K. L. and Williams, R. J. (1990): *„Introduction to Stochastic Integration”*, 2nd ed., Birkhäuser, Boston.

[17] Cohn, D. L. (1980): *„Measure Theory”*, Birkhäuser Boston.

[18] Cox, J. C., Ross, R. A., Rubinstein, M. (1979): „Option pricing: a simplified approach”, *J. Finan. Econ.*, **3**, pp. 229–263.

[19] Dzhaparidze, K., van Zuijlen, M. (1996): „Introduction to Option Pricing in a Securities Market I Binary Models”, *CWI Quaterly*, **Vol. 9, number 4**, pp. 319–356.

[20] Delbaen, F. (2000): *„Coherent risk measures on general probability spaces”*, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich.

[21] Dowd, K. (1999): *„Beyond Value at Risk”*, The New Science of Risk Management, John Wiley & Sons.

[22] Duffie, D. (1992): *„Dynamic Asset Pricing Theory”*, Princeton University Press, New Jersey.

[23] Dupacova, J., Hurt, J. and Stepán, J. (2002): *„Stochastic Modeling in Economics and Finance”*, Kluwer Academic Pub., London.

[24] Elliott, R. J. és Kopp, P. E. (2000): *„Pénzpiacok matematikája”*, Typotex.

[25] Elton, E. J. and Gruber M. J. (1995): *„Modern portfolio theory and investment analysis”*, John Wiley & Sons, Inc..

[26] Eső, P. és Lóránd, G. (1993): „A racionalitás közgazdasági értelmezéséről", *Közgazdasági Szemle*, **1993, 4**, pp. 311–324.

[27] Föllmer, H. and Scheid, A. (2004): *„Stochastic Finance, An Introduction in Discrete Time"*, Walter de Gruyter, Berlin, New York.

[28] Gáll, J. és Pap, Gy. (2010): *„Bevezetés a pénzügyi matematikába"*, Polygon.

[29] Gáll, J., Pap, G. and Zuijlen, M. v. (2006), *Forward interest rate curves in discrete time settings driven by random fields*, Computers & Mathematics with Applications, **51(3-4)**, 387–396.

[30] Harrison, J. M. and Kreps, D. M. (1979): „Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", *J. Econ. Theory*, **20**, pp. 381–408.

[31] Jarrow, R. A. (1996), *Modeling Fixed Income Securities and Interest Rate Options*, The McGraw-Hill Companies, Inc., New York.

[32] Harrison, J. M. and Pliska, S. R. (1981): „Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading", *Stoch. Proc. Appl.*, **11**, pp. 215–260.

[33] Huang, Chi-Fu and Litzenberger, R. H. (1988): *„Foundations for financial economics"*, Prentice Hall.

[34] Hull, J. C. (1999): *„Opciók, határidős ügyletek és egyéb származtatott termékek"*, Panem–Prentice-Hall International, Inc..

[35] Hull, J. C. (2012): *„Options, futures, and other derivative securities”*, 8th ed., Prentice-Hall International, Inc..

[36] Ingersoll, J. E. (1987): *„Theory of Financial Decision Making”*, Rowman & Littlefield.

[37] Jorion P. (1999): *„A kockáztatott érték”*, Panem.

[38] Kallianpur, G. and Karandikar, R. L. (2000): *„Introduction to Option Pricing Theory”*, Birkhäuser, Boston.

[39] Korn, R. (1998): *„Optimal portfolios”*, World Scientific.

[40] Kreps, D. M. (1990): *„A course in microeconomic theory”*, Princeton University Press, Princeton.

[41] Lang, S. (1968, 1969): *„Analysis”* I., II., Addison-Wesley Publishing Company.

[42] Liptser, R. Sh. and Shiryayev, A. N. (1989): *„Theory of Martingales”* (translation), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.

[43] Major, P. (2005): *„ The relation between the closeness of random variables and their distributions”*, http://www.renyi.hu/˜major/probability/couple.html.

[44] Musiela, M. and Rutkowski, M. (2005), *Martingale Methods in Financial Modeling*, second edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

[45] Prigent, J. (2003): *„Weak Convergence of Financial Markets"*, Springer.

[46] Rachev, S. T. and Rüschendorf, L. (1994): „Models for option prices", *Theory Probab. Appl.* **39**, 120–152.

[47] Nordhaus, W. D. and Samuelson, P. A. (1992): *„Economics"*, McGraw-Hill.

[48] Pliska, S. R. (1997): *„Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models"*, Wiley.

[49] Potters, J.A.M. (1996): *„Mathematische economie"*, kézirat, Universiteit Nijmegen.

[50] Potters, J.A.M. (1998): *„Preferences on stochastic outcomes"*, kézirat, Universiteit Nijmegen.

[51] Rockafellar, R. T. (1970): *„Convex Analysis"*, Princeton, New Jersey.

[52] Rogers, L.C.G. and Williams, D. (1990): *„Diffusions, Markov Processes, and Martingales"*, vol. 1-2., John Wiley & Sons.

[53] Rolski, T, Schmidli, H, Schmidt, V and Teugels, J (1999): *„Stochastic Processes for Insurance and Finance"*, John Wiley & Sons.

[54] Samuelson, P. A. (1965): „Rational theory of warrant pricing", *Industrial Management Review*, **6, 1965**, pp. 13–31.

[55] Schmidt, U. (1998): *„Axiomatic Utility Theory under Risk”*, Springer, Berlin.

[56] Shiryaev, A. N. (1994): „On some basic concepts and some basic stochastic models used in finance I. *Discrete time”*, *Theory Probab. Appl.*, **39**, pp. 1–13.

[57] Shiryaev, A. N. (1999): *„Essentials of Stochastic Finance”*, World Scientific, Singapore.

[58] Shiryaev, A. N., Kabanov, Yu. M., Kramkov, D. O., Mel'nikov, A. V. (1994): „Towards the theory of pricing of options of both European and American types. I. *Discrete time”*, *Theory Probab. Appl.*, **39**, pp. 14–60.

[59] Shiryaev, A. N., Kabanov, Yu. M., Kramkov, D. O., Mel'nikov, A. V. (1994): „Towards the theory of pricing of options of both European and American types. II. *Continuous time”*, *Theory Probab. Appl.*, **39**, pp. 61–102.

[60] Hal R. Varian (2012): *"Mikroökonómia középfokon (bővített átdolgozott kiadás)"*, Akadémiai Kiadó, Budapest.

[61] Hal R. Varian (2010): *"Intermediate Microeconomics, A Modern Approach"*, Eighth Edition, W. W. Norton & Company, New York.