Numerikus matematika

Baran Ágnes

Gyakorlat
Interpoláció 2.

Hermite-interpoláció

1. feladat

Határozzuk meg az alábbi adatokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot, illetve az illesztett polinom értékét a megadott x_0 pontban!

(a)

x_i	-1	1
$f(x_i)$	-1	3
$f'(x_i)$		0

$x_0 = 0$

(b)

x_i	-1	2
$f(x_i)$	7	1
$f'(x_i)$	-11	-2

$x_0 = 1$

(c)

x_i	-2	1
$f(x_i)$	23	2
$f'(x_i)$	-25	
$f''(x_i)$	18	

$x_0 = -1$

(d)

x_i	-2	2
$f(x_i)$	16	-20
$f'(x_i)$	-21	-29

$x_0 = 0$

2. feladat

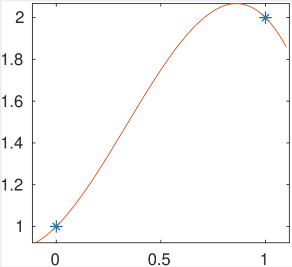
Írja fel az $f(x) = \cos(x) - 3x$ függvény $x_0 = 0$-beli érintőjének az egyenletét!

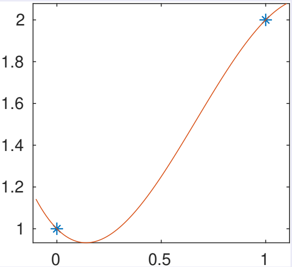
3. feladat

Meghatároztuk az alábbi adatokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot:

x_i	0	1
$f(x_i)$	1	2
$f'(x_i)$	1	-1

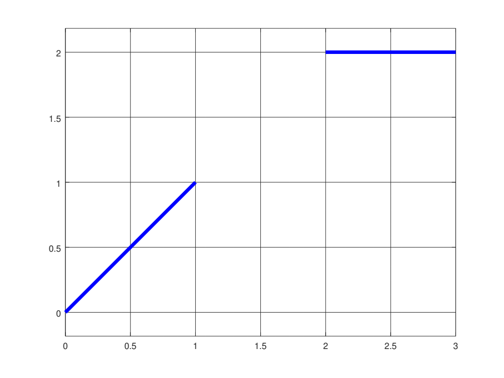
A pontokat és a kapott polinomot ábrázoltuk. Matlab használata nélkül döntse el, hogy melyik ábrát kaptuk az alábbiak közül. (Válaszát indokolja.)





4. feladat

Az ábrán kékkel jelölt két útszakaszt szeretnénk összekötni úgy, hogy a végeredményként kapott út vonalában ne legyen törés. Adja meg az összekötő útszakaszt leíró függvényt. Rajzoltassa ki az összekötő útszakaszt, az eredeti szakaszokkal együtt.



Spline interpoláció Octave/Matlab-bal

Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokhoz tartozó harmadfokú spline-t!

x_i	-2	-1	0	1	2	3
S	4	1	7	4	12	9
S'	15					8

Megoldás. Használjuk a `spline` függvényt!

```
p=spline(x,y)
```

Előállítja a szakaszonként harmadfokú spline együtthatóit. Itt `x` az alappontok vektora, az `y` vektor első és utolsó koordinátája a két végpontban adott deriváltérték, a többi koordináta a függvényértékek.

```
>>x=-2:3; y=[15 4 1 7 4 12 9 8]; p=spline(x,y)
p =
  scalar structure containing the fields:
    form = pp
    breaks =
      -2  -1   0   1   2   3

    coefs =
       19.0000  -37.0000   15.0000    4.0000
      -12.0000   20.0000   -2.0000    1.0000
       11.0000  -16.0000    2.0000    7.0000
      -12.0000   17.0000    3.0000    4.0000
       15.0000  -19.0000    1.0000   12.0000

    pieces =  5
    order =  4
    dim =  1
```

A spline együtthatói: `p.coefs`

Figyeljünk arra, hogy a polinomok együtthatóit a részintervallumok kezdőpontjaihoz viszonyítva kapjuk!

Az 5 illesztett polinom:

$$
\begin{aligned}
p_1(x) &= 19(x+2)^3 - 37(x+2)^2 + 15(x+2) + 4 \\
p_2(x) &= -12(x+1)^3 + 20(x+1)^2 - 2(x+1) + 1 \\
p_3(x) &= 11x^3 - 16x^2 + 2x + 7 \\
p_4(x) &= -12(x-1)^3 + 17(x-1)^2 + 3(x-1) + 4 \\
p_5(x) &= 15(x-2)^3 - 19(x-2)^2 + (x-2) + 12
\end{aligned}
$$

Ellenőrizzük az illeszkedési feltételeket!

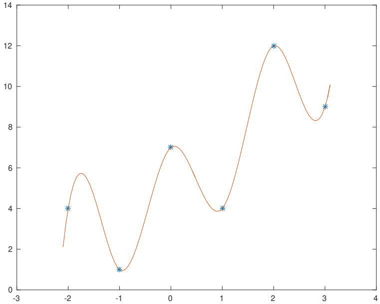
Ha nem az együtthatókat szeretnénk tudni, hanem a spline értékét valamely pont(ok)ban, akkor

```
yy=spline(x,y,xx)
```

ahol `x` és `y` az előbbi vektorok, `xx` azon pontok vektora, ahol a helyettesítési értéket keressük. Ekkor `yy`-ba kerülnek a kiszámolt függvényértékek.

```
>> x=-2:3;
>> y=[15 4 1 7 4 12 9 8];
>> xx=linspace(-2.1,3.1);
>> yy=spline(x,y,xx);
>> plot(x,y(2:end-1),'*',xx,yy)
```

```
x=-2:3;
y=[15 4 1 7 4 12 9 8];
xx=linspace(-2.1,3.1);
yy=spline(x,y,xx);
plot(x,y(2:end-1),'*',xx,yy)
```



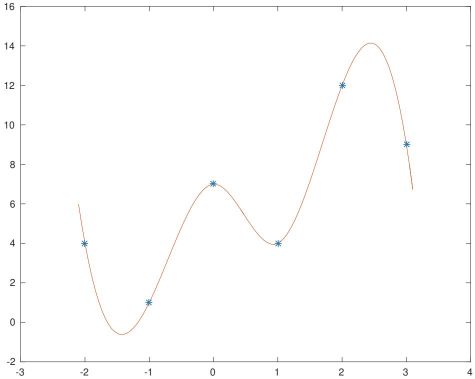
Az így kapott függvény teljesíti az illeszkedési feltételeket, és az első két deriváltja folytonos.

Megjegyzés

Ha a `spline` függvényt olyan `x` és `y` vektorokkal hívjuk, amelyek ugyanannyi koordinátát tartalmaznak, akkor a hiányzó két feltételt az Octave/Matlab azzal helyettesíti, hogy az első és utolsó két részintervallum találkozásánál a harmadik deriváltat is folytonosnak tekinti.

```
x=-2:3;
y=[4 1 7 4 12 9];
xx=linspace(-2.1,3.1);
yy=spline(x,y,xx);
plot(x,y,'*',xx,yy)
```

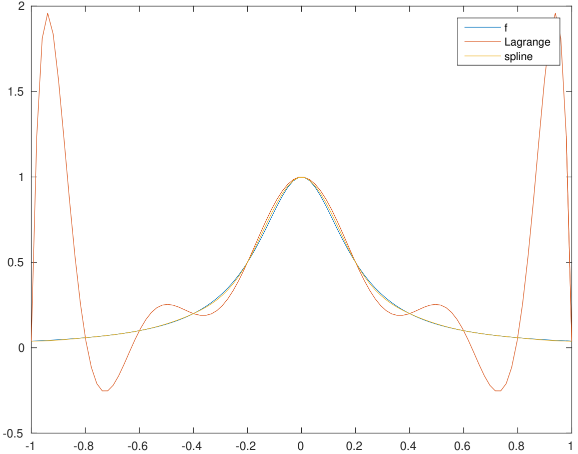
```
x=-2:3;
y=[4 1 7 4 12 9];
xx=linspace(-2.1,3.1);
yy=spline(x,y,xx);
plot(x,y,'*',xx,yy)
```



5. feladat

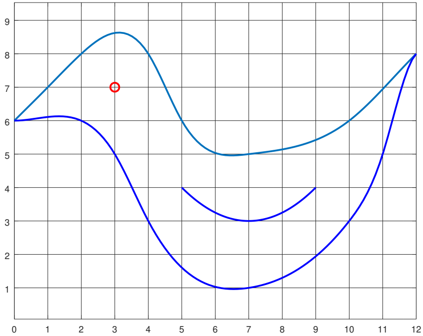
Rajzoltassuk ki közös ábrán az alábbi 3 függvényt:

- az
$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$
függvényt a $[-1, 1]$ intervallumon
- az f függvény
$$-1, -0.8, -0.6, ..., 0.6, 0.8, 1$$
egyenlő lépésközű (ekvidisztáns) alappontokhoz tartozó Lagrange-polinomját
- az f függvény
$$-1, -0.8, -0.6, ..., 0.6, 0.8, 1$$
alappontokhoz tartozó harmadfokú spline polinomját. (A végpontokban a deriváltértékeket tekintsük 0-nak.)


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
f
Lagrange
spline

6. feladat (szorgalmi)

Készítse el Octave-val az ábrán látható rajzot.



Útmutatás: használja a bejelölt (egész koordinátájú) pontokat és a `spline` függvényt.