Gazdasági matematika 2

Gyakorlati feladatsor

I. Lineáris algebra

1. Az $\mathbb{R}^n$ tér

1.1. feladat. Tekintsük az alábbi, vektorokra vonatkozó egyenletet.

$$3(x_1, x_2, x_3) + 5(-2, 1, 0) = (-1, 2, 12)$$

Mivel egyenlő az (x_1, x_2, x_3) vektor?

1.2. feladat. Tekintsük az alábbi W halmazokat. Zárt-e W a vektorösszeadásra, ill. a skalárral való szorzásra?

(a) $W = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$

(b) $W = \{(1, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$

(c) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = x_3\}$

(d) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$

(e) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = x_3\}$

(f) $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 \geq 0\}$

1.3. feladat. Tekintsük az alábbi v és w vektorokat. Fel lehet-e írni w-t λv alakban, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$?

(a) $\mathbb{R}^2$-ben: $v = (1, -3)$, $w = (-2, 6)$.

(b) $\mathbb{R}^2$-ben: $v = (3, 5)$, $w = (-4, 1)$.

(c) $\mathbb{R}^2$-ben: $v = (2, 7)$, $w = (0, 0)$.

(d) $\mathbb{R}^2$-ben: $v = (0, 0)$, $w = (2, 7)$.

(e) $\mathbb{R}^3$-ban: $v = (1, 4, -3)$, $w = (3, 12, -9)$.

(f) $\mathbb{R}^3$-ban: $v = (3, 3, 0)$, $w = (-6, -6, 1)$.

1.4. feladat. Írjuk fel az $(1, 2) \in \mathbb{R}^2$ vektort $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ alakban (ahol v_1, v_2 az alábbiakban adott, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$), amennyiben lehetséges!

(a) $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$.

(b) $v_1 = (-1, 2)$, $v_2 = (1, 1)$.

(c) $v_1 = (3, 1)$, $v_2 = (-3, -1)$.

(d) $v_1 = (1, -1)$, $v_2 = (6, 0)$.

1.5. feladat. Tekintve az alábbi v_1, v_2, v_3 vektorokat, az $\mathbb{R}^3$ tér mely vektorai írhatók fel $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ alakban, valamely $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ skalárokkal?

(a) $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1)$.

(b) $v_1 = (2, 3, 0)$, $v_2 = (-1, 8, 0)$, $v_3 = (-3, 5, 0)$.

(c) $v_1 = (2, 3, 0)$, $v_2 = (-1, 8, 0)$, $v_3 = (-3, 5, 100)$.

1.6. feladat. Állapítsuk meg, hogy alteret alkot-e

(a) $\mathbb{R}^2$-ben a $W = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$ halmaz,

(b) $\mathbb{R}^2$-ben a $W = \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$ halmaz,

(c) $\mathbb{R}^3$-ban a $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = x_3\}$ halmaz,

(d) $\mathbb{R}^2$-ben a $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$ halmaz,

(e) $\mathbb{R}^4$-ben a $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = x_3\}$ halmaz,

(f) $\mathbb{R}^2$-ben a $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 \geq 0\}$ halmaz,

(g) $\mathbb{R}^3$-ban a $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = x_3\}$ halmaz,

(h) $\mathbb{R}^2$-ben a $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ halmaz,

(i) $\mathbb{R}^3$-ban a $W = \{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$ halmaz.

1.7. feladat. Mutassuk meg, hogy az $(1, 2)$ és $(-3, 2)$ vektorok lineárisan függetlenek $\mathbb{R}^2$-ben!

1.8. feladat. Lineárisan függetlenek-e $\mathbb{R}^3$-ban az alábbi vektorrendszerek?

(a) $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 1, 1)$;
(b) $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1)$;
(c) $v_1 = (1, 2, 2)$, $v_2 = (-1, -1, 2)$, $v_3 = (2, 3, 0)$;
(d) $v_1 = (1, 1, 2)$, $v_2 = (2, 3, -1)$, $v_3 = (-1, 2, -17)$;
(e) $v_1 = (1, 1, 2)$, $v_2 = (-2, -2, -4)$;
(f) $v_1 = (-1, 2, 1)$, $v_2 = (2, -3, 1)$, $v_3 = (1, 1, 2)$;
(g) $v_1 = (-1, 2, 1)$, $v_2 = (2, -3, 1)$, $v_3 = (1, 1, 2)$, $v_4 = (5, 2, 0)$.

1.9. feladat. Írjuk fel az $(1, 2)$ vektor koordinátáit $\mathbb{R}^2$ alábbi bázisaira vonatkozóan!

(a) $(1, 0)$, $(0, 1)$;
(b) $(-1, 2)$, $(1, 1)$;
(c) $(3, 1)$, $(1, 2)$;
(d) $(1, -1)$, $(1, 3)$.

1.10. feladat. Írjuk fel az $(1, -1, 2)$ vektor koordinátáit az $\mathbb{R}^3$ alábbi bázisaira vonatkozóan!

(a) $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$;
(b) $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$;
(c) $(-1, 2, 1)$, $(2, -3, 1)$, $(1, 1, 2)$;
(d) $(1, 2, 2)$, $(-1, -1, 3)$, $(2, 3, 0)$.

2. Mátrixok, determinánsok, lineáris egyenletrendszerek

2.1. feladat. Legyenek adottak az A, B, C és D mátrixok a következőképpen:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 10 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Végezzük el az alábbi műveleteket, amennyiben lehetséges!

$$A + B,\ 3A - 2B,\ A^T + B^T,\ AD,\ CB,\ CD,\ AC + BC,\ (A + B)C$$

2.2. feladat. Legyen

$$v = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki a következő kifejezések értékét!

$$Av, \quad Aw \quad A(u + v), \quad w^T A^T, \quad A + B, \quad (-2C)^T, \quad 2A - 3B, \quad (A + B)^T, \quad AB, \quad BA,$$
$$B^T A^T, \quad AE, \quad EA, \quad AC, \quad A(B + C), \quad C(A - 2B), \quad A^T A, \quad AA^T.$$

2.3. feladat. Legyen

$$v = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -3 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & -6 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki a következő kifejezések értékét!

$$Av, \quad Aw \quad A(u+v), \quad w^T A^T, \quad A+B, \quad (-2C)^T, \quad 2A-3B, \quad (A+B)^T, \quad AB, \quad BA,$$
$$B^T A^T, \quad AE, \quad EA, \quad AC, \quad A(B+C), \quad C(A-2B), \quad A^T A, \quad AA^T.$$

2.4. feladat. Számoljuk ki az alábbi mátrixok determinánsát a Sarrus-szabály segítségével.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & -7 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.5. feladat. Számoljuk ki az alábbi mátrixok determinánsát kifejtési tétellel, vagy Gauss-eliminációval.

(a) $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -6 & -6 & 5 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ -1 & -6 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 1 \\ -4 & -2 & 4 & -8 \\ 8 & -6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (i) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2.6. feladat. Határozzuk meg az alábbi mátrixok inverzét, amennyiben az létezik.

(a) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -12 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -10 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ (i) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -6 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$

2.7. feladat. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket!

(a)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 3 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &= 5 \\ 2x_1 + 8x_2 &= 10 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 &= 0 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 2 \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 + 2x_3 &= -2 \\ 4x_1 - 6x_2 - x_3 &= 17 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 &= 10 \end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x + 2y + 2z &= 5 \\ 3x + 5y + 6z &= 14 \\ 2x + 4y + 5z &= 11 \\ x + 2y + 3z &= 6 \end{aligned}$$

2.8. feladat. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket a Cramer-szabály alkalmazásával, amennyiben ez lehetséges!

(a)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 &= 9 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 &= 0 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -5 \end{aligned}$$

2.9. feladat. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket!

(a)
$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ -4x_1 - 10x_2 - 5x_3 &= -12 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} -4x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= -2 \\ -2x_1 - 7x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 12x_2 - 5x_3 &= -13 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 6x_1 - 3x_2 - 4x_3 &= -8 \\ -4x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 &= 4 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= -5 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 5x_4 &= 8 \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= -2 \\ -4x_1 + 6x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 &= 3 \\ -x_1 + 7x_2 + 7x_3 &= 20 \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 &= -11 \end{aligned}$$

2.10. feladat. Határozzuk meg az alábbi mátrixok rangját!

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

2.11. feladat. Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek rangját!

(a) $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (3, 1)$;

(b) $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (2, -4)$, $v_3 = (0, 2)$;

(c) $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 1, 1)$;

(d) $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1)$;

(e) $v_1 = (1, 2, 2)$, $v_2 = (-1, -1, 2)$, $v_3 = (2, 3, 0)$;

(f) $v_1 = (1, 1, 2)$, $v_2 = (2, 3, -1)$, $v_3 = (-1, 2, -17)$;

(g) $v_1 = (-1, 2, 1)$, $v_2 = (2, -3, 1)$, $v_3 = (1, 1, 2)$;

(h) $v_1 = (-1, 2, 1)$, $v_2 = (2, -3, 1)$, $v_3 = (1, 1, 2)$, $v_4 = (5, 2, 0)$.

3. Lineáris transzformációk

Ebben a részben végig a tekintett $\mathbb{R}^n$ tér természetes bázisában dolgozunk.

3.1. feladat. Döntsük el, hogy az alábbi leképezések lineáris transzformációk-e, és ha igen, akkor adjuk meg a mátrixukat!

(a) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$,
(b) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: $(x, y) \mapsto (y, x)$,
(c) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: $(x, y) \mapsto (x + y, y - 3)$,
(d) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 2x_2, 2x_2 + 3x_3, x_1 + 5x_2 - 8x_3)$,
(e) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (|x_1 + x_2|, |x_2 - x_3|, |x_1|)$,
(f) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 - x_2, 0)$,
(g) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 - x_2, 3)$,
(h) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: $(x, y) \mapsto (x - y, -x)$,
(i) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: $(x, y, z) \mapsto (x - y, y^2, z - x)$.

3.2. feladat. Tekintsük az alábbi mátrixszal adott $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformációt:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mivel egyenlő egy általános vektornak, valamint az $x = (-1, 3, 2)$ vektornak a lineáris transzformáció általi képe? Adjuk meg azt a vektort, melynek a transzformáció általi képe $y = (2, 1, 0)$!

3.3. feladat. Írjuk fel az alábbi lineáris transzformációk mátrixát!

(a) $\mathbb{R}^2$-beli vektorok tükrözése a koordinátarendszer x-tengelyére,
(b) $\mathbb{R}^3$-beli vektorok vetítése merőlegesen az x és y-tengelyek által meghatározott síkra,
(c) $\mathbb{R}^2$-beli vektorok tükrözése az $y = x$ egyenesre,
(d) $\mathbb{R}^2$-beli vektorok elforgatása az origó körül pozitív irányba 60 fokkal,
(e) $\mathbb{R}^3$-beli vektorok 3-szoros nagyítása.

Mi lesz annak a lineáris transzformációnak a mátrixa, amely során először a (d)-beli, majd az (a)-beli transzformációt alkalmazzuk egy vektorra?

3.4. feladat. Létezik-e olyan $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció, mely eleget tesz mindhárom feltételnek?

(a) $(1, 1, 1) \mapsto (1, 2, 3)$, $(1, 0, 1) \mapsto (1, -1, 1)$, $(0, 1, 1) \mapsto (0, 2, 1)$;
(b) $(1, 1, 1) \mapsto (1, 2, 3)$, $(1, 0, 1) \mapsto (1, -1, 1)$, $(0, 1, 0) \mapsto (0, 2, 1)$.

Ha igen, akkor hogyan tudnánk megadni a lineáris transzformáció mátrixát?

3.5. feladat. Határozzuk meg az alábbi lineáris transzformációk sajátértékeit és sajátvektorait!

(a) $(x_1, x_2) \mapsto (4x_1 + x_2, 3x_1 + 2x_2)$
(b) $(x, y) \mapsto (2x, 4y)$
(c) $(x, y) \mapsto (x - 3y, 4x - 2y)$
(d) $(x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, 2y + 3z, 3z)$
(e) $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (4x_1 - 2x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_3, -x_1 + x_2 + x_3)$

(f) $(x,y,z) \mapsto (3x+y, 2y+z, 3z)$
(g) $(x_1,x_2) \mapsto (2x_1+x_2, x_1+2x_2)$
(h) $(x_1,x_2,x_3) \mapsto (x_1+x_2, x_1-x_2, 2x_3)$
(i) $(x,y,z) \mapsto (x+y+z, 5y+z, z)$
(j) $(x,y,z) \mapsto (2x+y+z, 2x+y+z, z)$
(k) $\mathbb{R}^2$-ben az $y=x$ egyenesre való tükrözés

4. Kvadratikus formák, euklideszi terek

Ebben a részben végig a tekintett $\mathbb{R}^n$ tér természetes bázisában dolgozunk.

4.1. feladat. Írjuk fel az alábbi mátrixokkal definiált kvadratikus formák „képletét”, azaz x^TAx-et, ahol x az $\mathbb{R}^2$, ill. $\mathbb{R}^3$ tér tetszőleges vektora.

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4.2. feladat. Mit mondhatunk az alábbi $Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ill. $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ kvadratikus formák definitségéről? (Ennek eldöntéséhez gyakran célszerű felírni a mátrixot, ami származtatja a kvadratikus formát.)

(a) $Q(x_1,x_2) = -2x_1^2 - 4x_2^2$,
(b) $Q(x_1,x_2) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$,
(c) $Q(x_1,x_2) = 4x_1^2 + 2x_1x_2$,
(d) $Q(x_1,x_2) = 5x_1^2$,
(e) $Q(x_1,x_2) = x_1^2 - 2x_2^2$,
(f) $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2$,
(g) $Q(x_1,x_2,x_3) = -3x_1^2 - x_2^2 - 4x_3^2$,
(h) $Q(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$,
(i) $Q(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 - 2x_3^2$,
(j) $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2$.

4.3. feladat. Tekintsük az előző feladat pozitív definit kvadratikus formáinak mátrixait. Mi az ezek a mátrixok által meghatározott skaláris szorzat $\mathbb{R}^2$-ben, illetve $\mathbb{R}^3$-ban?

4.4. feladat. Tekintsük $\mathbb{R}^2$-ben a kanonikus skaláris szorzatot, azaz legyen $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$, ha $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$. Határozzuk meg az alábbi vektorok normáját és a vektorok által bezárt szöget (vagy annak koszinuszát).

(a) $x=(2,1)$, $y=(1,3)$
(b) $x=(3,\sqrt{3})$, $y=(2,0)$
(c) $x=(1,3)$, $y=(-4,-2)$
(d) $x=(-2,3)$, $y=(-6,-4)$

4.5. feladat. Tekintsük $\mathbb{R}^3$-ban a kanonikus skaláris szorzatot, azaz $x=(x_1,x_2,x_3)$ és $y=(y_1,y_2,y_3)$ esetén legyen $\langle x,y\rangle = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$. Határozzuk meg az alábbi vektorok normáját és a vektorok által bezárt szöget (vagy annak koszinuszát).

(a) $x=(1,-2,3)$, $y=(2,4,2)$
(b) $x=(1,1,0)$, $y=(1,1,-\sqrt{2})$
(c) $x=(0,-1,0)$, $y=(1,-\sqrt{3},0)$

4.6. feladat. Írjuk fel azokat a vektorokat, amelyek $\mathbb{R}^3$-ban a tér kanonikus skaláris szorzatát tekintve ortogonálisak

(a) az $x=(-2,3,4)$ vektorra;
(b) az $x=(-2,3,4)$ és az $y=(1,-2,1)$ vektorra is!

4.7. feladat. Határozzuk meg az x vektornak a v vektor irányába eső merőleges vetületét $\mathbb{R}^2$, illetve $\mathbb{R}^3$ természetes skaláris szorzatára vonatkozóan.

(a) $x = (4, -3), \quad v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(b) $x = (10, 1), \quad v = (2, 3)$

(c) $x = (2, -1, 3), \quad v = (1, 3, -1)$

(d) $x = (3, 2, -2), \quad v = (2, 0, 0)$

(e) $x = (-1, 1, 6), \quad v = (3, -3, 1)$

(f) $x = (2, 1, 1), \quad v = (4, 2, 2)$

4.8. feladat. Az alábbi mátrixok közül melyek ortogonálisak?

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, (e) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, (f) $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

II. Valószínűségszámítás

5. Kombinatorika

5.1. feladat. Melyikből van több: csupa különböző számjegyből álló tízjegyű, vagy csupa különböző számjegyből álló kilencjegyű számból?

5.2. feladat. Hányféleképpen rakhatunk sorba 12 könyvet, ha 3 bizonyos könyvet egymás mellé akarunk rakni és
(a) a három könyv sorrendje nem számít? (b) a három könyv sorrendje számít?

5.3. feladat. Hányféleképpen lehet a sakktáblán elhelyezni 8 egyforma bástyát úgy, hogy egyik se üsse a másikat? Mennyi lesz az eredmény, ha a 8 bástyát meg tudjuk különböztetni egymástól?

5.4. feladat. Hányféleképpen ültethetünk egy kerek asztal köré 5 házaspárt úgy, hogy a házastársak egymás mellett üljenek? (A forgatással egymásba vihető ülésrendeket azonosnak tekintjük.)

5.5. feladat. Hány olyan hatjegyű szám van, melyben három 1-es, két 2-es és egy 3-as számjegy szerepel?

5.6. feladat. Egy urnában 5 piros, 7 fehér és 3 zöld golyó található. Egyesével kihúzzuk a golyókat és a húzás sorrendjében feljegyezzük a kihúzott golyók színét. Hányféle színsorozatot kaphatunk?

5.7. feladat. Egy kiránduláson 10 diák vesz részt. Hányféleképpen helyezhetjük el őket egy két-, egy három- és egy ötágyas szobában?

5.8. feladat. Hányféleképpen oszthatunk szét 12 gyerek között 15 könyvet, ha nem muszáj minden gyereknek könyvet adnunk?

5.9. feladat. Hat ajánlott levelet kell kikézbesíteni, ehhez három postás áll rendelkezésre. Hányféleképpen oszthatjuk szét a leveleket közöttük?

5.10. feladat. Hányféleképpen választhatunk ki egy csomag francia kártyából (4 szín, színenként 13 lap) négy páronként különböző színű lapot? Hányféleképpen választhatunk akkor, ha azt is megköveteljük, hogy ne legyen két azonos értékű sem?

5.11. feladat. Hányféleképpen ültethetünk egymás mellé 10 különböző életkorú embert úgy, hogy a legidősebb és a legfiatalabb ne üljön egymás mellett?

5.12. feladat. A számegyenesen az origóból indulva 10-et lépünk úgy, hogy minden lépésnél 1 egységet lépünk jobbra, vagy balra. Hányféleképpen fordulhat elő, hogy a 10 lépés után visszaérünk az origóba?

5.13. feladat. Hányféleképpen juthatunk el a síkbeli koordinátarendszerben az origóból a $(4, 3)$ pontba, ha mindig csak jobbra, vagy felfelé léphetünk 1 egységet?

5.14. feladat. Az (x, y, z) térbeli koordináta-rendszerben hányféleképpen juthatunk el az origóból a $(4, 3, 2)$ pontba, ha minden lépésnél az x-, y-, vagy z-tengely mentén léphetünk egy egységnyit pozitív irányban?

5.15. feladat. Hányféleképpen rakhatunk sorba 5 piros és 8 fehér golyót úgy, hogy ne legyen egymás mellett 2 piros golyó?

5.16. feladat. Hányféleképpen rakhatunk sorba n darab nullát és k darab 1-est $(k \leq n + 1)$ úgy, hogy két egyes ne kerüljön egymás mellé?

5.17. feladat. Hányféleképpen állíthatunk sorba 4 fiút és 6 lányt úgy, hogy két fiú ne álljon egymás mellett?

5.18. feladat. Hányféleképpen választhatunk ki 6 fiúból és 8 lányból 4 táncoló párt? (A párok tagjai különböző neműek.)

5.19. feladat. Egy társaságban 15 férfi és 16 nő van. Hányféleképpen választhatunk ki belőlük 7 embert úgy, hogy pontosan 4 férfi legyen közöttük?

5.20. feladat. Egy adott héten hányféleképpen fordulhat elő, hogy pontosan három találatunk van az ötöslottón? Az ötöslottón 90 számból húznak 5-öt, a sorrend nem számít.

5.21. feladat. Egy adott héten egy szelvénnyel játszva hányféleképpen fordulhat elő, hogy legalább három találatunk van az ötöslottón?

5.22. feladat. Egy csomag francia kártyából kihúzunk 10 lapot. Hány esetben lesz ezek között
(a) ász?
(b) pontosan egy ász?
(c) legfeljebb egy ász?
(d) pontosan két ász?
(e) legalább két ász?

5.23. feladat. Hányféleképpen oszthatunk szét 4 gyerek között 7 almát és 9 körtét?

5.24. feladat. A $(2 + x)^8$ hatványozást elvégezve mi az x^3 tag együtthatója?

5.25. feladat. Elvégezve az $(1 + a)^{17}$ hatványozást, mi lesz az a^{10} tag együtthatója?

6. Események, eseménytér

6.1. feladat. Jelentse A azt az eseményt, hogy egy pakli magyar kártyából (32 lap, 4 szín) pirosat húzunk, B pedig azt, hogy hetest. Mit jelentenek az $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, valamint $\overline{A}$ események?

6.2. feladat. Egy cukrászdában három hűtőpult működik. Jelentse A_i azt az eseményt, hogy az i-edik hűtőpult 1 éven belül elromlik $(i = 1, 2, 3)$. Fejezzük ki az A_i eseményekkel a következőket:

(a) csak az első romlik el;
(b) mindhárom elromlik;
(c) egyik sem romlik el;
(d) az első és a második nem romlik el;
(e) az első és második elromlik, a harmadik nem;
(f) csak egy hűtőpult romlik el;
(g) legfeljebb egy hűtőpult romlik el;
(h) legfeljebb két hűtőpult romlik el;
(i) legalább egy hűtőpult romlik el.

6.3. feladat. 10 darab terméket megvizsgálunk abból a szempontból, hogy hány selejtes darabot találunk köztük. Mik lesznek a kísérletet leíró eseménytér pontjai?

6.4. feladat. Feldobunk egy pénzérmét. Ha az eredmény fej, akkor még egyszer dobunk, ha írás, akkor még kétszer. Mik lesznek a kísérletet leíró eseménytér pontjai?

7. Diszkrét valószínűségi mező

7.1. feladat. Egy szabályos dobókockát egymás után hatszor feldobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

(a) az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok mindegyike felülre kerül?
(b) az első dobás eredménye 6-os, a többi pedig ettől különböző?
(c) az első két dobás 6-os, a többi pedig 6-tól és egymástól is különböző?
(d) pontosan egy 6-os dobás van?
(e) legalább egy 6-os dobás van?
(f) mind a hat dobás páros szám?

7.2. feladat. Két szabályos kockával dobunk. Tekintsük az

$$A = \{\text{az összeg páratlan}\} \quad \text{és} \quad B = \{\text{van a dobások között 1-es}\}$$

eseményeket. Írjuk fel az $A \cup B$ és $A \cap B$ eseményeket, és határozzuk meg a valószínűségüket!

7.3. feladat. Egy egyetem 500 hallgatója közül 300 beszél német nyelven, 200 beszél angolul, 50 beszél franciául, 20 beszél németül és franciául, 30 beszél angolul és franciául, 20 beszél németül és angolul, 10 beszél mindhárom nyelven. Ha találomra kiválasztunk egy hallgatót, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy az illető

(a) mindhárom nyelven beszél?
(b) angolul beszél?
(c) csak angolul beszél?

7.4. feladat. Egy szabályos dobókockával kétszer dobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az első dobás eredménye nagyobb, mint a másodiké?

7.5. feladat. Egy urnában 4 piros, 3 fehér és 2 zöld golyó van. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha egyszerre két golyót kihúzunk, azok egyforma színűek lesznek?

7.6. feladat. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kitöltött ötöslottó-szelvényen 0, 1, 2, 3, 4, 5 találatunk lesz?

7.7. feladat. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy ötven fős társaságban van legalább két olyan ember, akiknek egy napra esik a születésnapjuk? (365 napos évekkel számolva)

7.8. feladat. Egy 9 tagú társaság felszáll a három kocsiból álló villamosra; a nagy tolongásban a társaság minden tagja csak azt nézi, hogy feljusson a villamosra és nem törődik azzal, hogy társai melyik kocsiba szállnak. Mennyi a valószínűsége, hogy mind a három kocsiba a társaság 3-3 tagja jut?

7.9. feladat. Feldobunk egy érmét. Ha az eredmény fej, még egyszer dobunk, ha írás, még kétszer. Mennyi a valószínűsége, hogy összesen egy fejet dobunk?

7.10. feladat. Anna és Kata teniszeznek. Anna 0,4, Kata 0,6 valószínűséggel nyer meg egy játszmát. Összesen három játszmát játszanak, és az a győztes, aki több játszmát nyer meg. Mennyi annak a valószínűsége, hogy Anna nyeri a játékot?

7.11. feladat. Egy cinkelt dobókockával a 6-os dobás valószínűsége $\frac{1}{3}$, a többi dobás valószínűsége azonos. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ezt a dobókockát kétszer feldobva a dobott számok összege 10?

7.12. feladat. Egy szabályos érmével addig dobunk, míg kétszer egymás után azonos eredményeket nem kapunk. Adjuk meg ennek a kísérletnek egy valószínűségi modelljét! Mennyi a valószínűsége annak, hogy legfeljebb 5 dobásra van szükség?

8. Geometriai valószínűségi mező

8.1. feladat. Egy távbeszélőállomás és a központ közötti vezeték hossza 450 méter. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha hiba lép fel, akkor az a vezetéknek a központtól 180 méternél távolabbi helyén történik, ha a vezeték mentén mindenhol azonos a meghibásodás veszélye?

8.2. feladat. Ketten megbeszélik, hogy délelőtt 10 és 11 óra között egy adott helyen találkoznak. Érkezésük a megbeszélt időn belül véletlenszerű.

(a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a korábban érkezőnek nem kell egy negyed óránál többet várnia a másikra?
(b) Tegyük fel, hogy érkezés után 20 percet várnak, majd elmennek. Mennyi annak a valószínűsége, hogy találkoznak?

8.3. feladat. Hajótöröttek egy lakatlan, növényzet nélküli szigeten azt tervezik, hogy a viharban zátonyra futott eredeti vitorlás hajójuk darabjaiból új, kisebb hajót építenek. A vihar az árbócot véletlenszerűen három darabra törte. Tudjuk, hogy ha az eredeti 40 méter hosszú árbócnak maradt egy legalább 20 méteres darabja, akkor a hajó megépíthető. Mi a valószínűsége, hogy amikor visszaúsznak a hajóroncshoz, találnak ilyen darabot?

8.4. feladat. Egy egységnyi hosszúságú szakaszon találomra választunk két pontot. Így a szakaszt három részre bontottuk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ezekből a szakaszokból háromszög szerkeszthető?

8.5. feladat. Válasszunk ki két számot a $[0, 1]$ intervallumban egymástól függetlenül és véletlenszerűen (azaz egyenletes eloszlással). Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott számok mértani közepe kisebb mint $\frac{1}{2}$?

9. Feltételes valószínűség

9.1. feladat. Egy dobókockát egyszer feldobunk. Legyen A az az esemény, hogy 6-nál kisebb számot dobunk, B pedig az, hogy páros számot dobunk. Számítsuk ki a $P(B)$ és $P(B|A)$ valószínűségeket!

9.2. feladat. Tíz azonos alakú doboz közül az első 9-ben 4-4 golyó van, mégpedig 2 piros és 2 kék. A tizedik dobozban 5 piros és 1 kék golyó található. Az egyik találomra kiválasztott dobozból véletlenszerűen kiveszünk egy golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy a golyó a tizedik dobozból való, ha a kihúzott golyó piros színű?

9.3. feladat. Egy céllövöldében 3 rekeszben vannak puskák. Az első rekeszben 3 puska van, ezekkel 0,5 a találat valószínűsége. A második rekeszben egy puska van, ezzel 0,7 a találat valószínűsége. A harmadik rekeszben két puska található, és ezekkel 0,8 valószínűséggel találunk célba. Mennyi a találat valószínűsége egy találomra kiválasztott puskával?

9.4. feladat. Három termelőtől almát szállítanak egy üzletbe. Az első termelőtől származik a mennyiség fele, melyből 40% elsőosztályú. A második termelőtől szállítják a tétel 30%-át, amely 2/3 részben elsőosztályú. A többi gyümölcs a harmadik termelőtől kerül az üzletbe, és mind elsőosztályú.

(a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az üzletben e szállítmányból találomra kiválasztva egy almát, az elsőosztályú?

(b) Kiderül, hogy a találomra kiválasztott alma elsőosztályú. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ez az alma az első, a második, ill. a harmadik termelőtől került az üzletbe?

9.5. feladat. A tapasztalat azt mutatja, hogy a férfiak 5%-a és a nők 2%-a dohányos. Egy 20 nőből és 5 férfiból álló csoportból egy személyt találomra kiválasztunk, és megállapítjuk, hogy dohányos. Mennyi annak a valószínűsége, hogy férfit választottunk ki?

9.6. feladat. Egy egyetemi vizsgán a fizika szakos hallgatók 60%-a, az informatika szakos hallgatók 80%-a szerepel sikeresen. Az informatika szakos hallgatók az évfolyam 75%-át, míg a fizika szakos hallgatók az évfolyam 25%-át teszik ki.

(a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy találomra kiválasztott hallgató sikeresen vizsgázik?

(b) Tudva azt, hogy a találomra kiválasztott hallgató sikeresen vizsgázott, mennyi a valószínűsége annak, hogy az illető informatika szakos?

9.7. feladat. Egy tesztrendszerű vizsgánál minden kérdéshez 4 válasz van megadva, amelyek közül csak egy a helyes. A vizsgázónak ezt a lapot kell kitölteni a helyesnek vélt válasz megjelölésével. Tegyük fel, hogy egy vizsgázó p valószínűséggel tudja a helyes választ ($p \in [0, 1]$). Ha nem tudja a választ, akkor véletlenszerűen (azaz $\frac{1}{4}$ valószínűséggel) jelöli meg a 4 lehetséges válasz közül az egyiket. Tekintsünk egy rögzített kérdést.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy a vizsgázó helyesen válaszol?

(b) A vizsgalap átnézése során kiderül, hogy helyes a válasz. Mennyi a valószínűsége, hogy a vizsgázó azért adott helyes választ, mert tudta a helyes eredményt?

10. Diszkrét valószínűségi változók

10.1. feladat. Feldobunk 2 szabályos dobókockát. Mi az eloszlása a dobott számok maximumának?

10.2. feladat. Két kockát dobunk fel egyszerre. A dobott számok különbségének abszolút értékét tekintsük valószínűségi változónak. Írjuk fel a valószínűségi változó eloszlását és eloszlásfüggvényét, továbbá számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy a valószínűségi változó értéke 2-nél nagyobb, de a 4-et nem haladja meg!

10.3. feladat. Egy ξ diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei $1, 2, \ldots, 10$, eloszlása

$$P(\xi = k) = c \cdot k, \qquad k = 1, 2, \ldots, 10,$$

ahol c alkalmas valós szám. Határozzuk meg c értékét! Milyen k pozitív egészekre teljesül, hogy $P(\xi \leq k) \leq \frac{1}{2}$?

10.4. feladat. Egy diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei -1 és 6, melyeket rendre $\frac{1}{3}$ és $\frac{2}{3}$ valószínűséggel vesz fel. Írjuk fel a valószínűségi változó eloszlásfüggvényét és ábrázoljuk is azt! Számítsuk ki értékét az $x = 0$ helyen.

10.5. feladat. Mi a lottón kihúzott 5 szám közül a legkisebbnek, illetve a legnagyobbnak az eloszlása?

10.6. feladat. Három készüléket választunk ki megbízhatósági vizsgálathoz. A készülékek egymás után kerülnek vizsgálatra, de a vizsgálat megszakad, amint valamelyik készülék nem felel meg a követelményeknek. Egy-egy készülék 0,7 valószínűséggel felel meg. Legyen a valószínűségi változó értéke a megvizsgált készülékek száma. Adjuk meg a valószínűségi változó eloszlását és eloszlásfüggvényét!

10.7. feladat. Legyen ξ 5-ödrendű, $\frac{1}{3}$ paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg a $P(\xi = 2)$ és $P(-2 \leq \xi < 3)$ valószínűségeket.

10.8. feladat. 50 termékből, melyek között 5 selejtes található, találomra kiválasztunk ötöt.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy ezek között 2 selejtest találunk, ha a mintavétel visszatevéssel történik?

(b) Megváltozik-e az előbbi valószínűség, ha 100 termékből történik a mintavétel, változatlan selejtarány mellett?

(c) Oldjuk meg a feladatot visszatevés nélküli mintavétel esetén is!

10.9. feladat. Csavarokat gyártó automata esztergagépen a selejtes csavar valószínűsége 0,01. Mi a valószínűsége annak, hogy a beindított gép

(a) már elsőre selejtes csavart gyárt?

(b) csak másodikra gyárt selejtes csavart?

(c) legfeljebb az első tíz csavar után gyártja az első selejteset?

(d) a tizedik csavar lesz a második selejtes?

(e) legfeljebb az első 10 csavar után készül el a második selejtes?

10.10. feladat. Egy augusztusi éjszakán átlagosan 10 percenként észlelhető csillaghullás (az adott idő alatt bekövetkező csillaghullások száma Poisson eloszlású). Mennyi annak a valószínűsége, hogy negyedóra alatt két csillaghullást látunk?

10.11. feladat. Egy részvény kiinduló ára 1000 Ft. Egy év múlva vagy kétszeresére növekszik az árfolyam, vagy felére csökken, vagy pedig változatlan marad, mindegyik lehetőség ugyanolyan valószínűségű. A következő évben ugyanez történik, az első évi változástól függetlenül.

(a) Mi lesz két év múlva a részvényár eloszlása? (Azaz milyen értékeket vehet fel milyen valószínűséggel?)

(b) Mennyi 2 év múlva a részvényárfolyam várható értéke?

10.12. feladat. Egy szabályos dobókockával tizenkétszer dobunk. Jelölje ξ a hármas dobások számát. Határozzuk meg ξ várható értékét és szórásnégyzetét!

10.13. feladat. Legyen a ξ valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $\{-2,-1,0,1,2,3\}$ halmazon, legyen továbbá $\eta := \xi^3$.

(a) Határozzuk meg η eloszlását!

(b) Mi lesz η várható értéke, illetve szórásnégyzete?

10.14. feladat. Tegyük fel, hogy íjjal tanulunk lőni, a céltáblát $\frac{1}{5}$ valószínűséggel találjuk el. Addig próbálkozunk, amíg egyszer el nem találjuk a táblát. Mennyi a szükséges lövések számának várható értéke és varianciája?

11. Folytonos valószínűségi változók

11.1. feladat. Az alábbi függvények közül melyek sűrűségfüggvények?

(a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{2}, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{ha } x \geq 1, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

11.2. feladat. Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{(1-x)^2}, & \text{ha } x \geq 2, \\ 0, & \text{ha } x < 2. \end{cases}$$

(a) Mekkora a c érték?

(b) Mennyi a $P(2 < \xi < 3)$ valószínűség?

(c) Írjuk fel ξ eloszlásfüggvényét!

11.3. feladat. Egy valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 1, \\ (x-1)^3, & \text{ha } 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{ha } x > 2. \end{cases}$$

Határozzuk meg és ábrázoljuk a valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

11.4. feladat. Egy valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & \text{ha } 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{3}, & \text{ha } 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg és ábrázoljuk a valószínűségi változó eloszlásfüggvényét!

11.5. feladat. Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & \text{ha } 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg c értékét és írjuk fel ξ eloszlásfüggvényét! Mekkora valószínűséggel esik ξ az $(1,3)$ intervallumba?

11.6. feladat. Válasszunk a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlással egy pontot. Jelölje ξ a pont távolságát a $[0,1]$ intervallum közelebbi végpontjától. Határozzuk meg ξ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

11.7. feladat. Legyen ξ egyenletes eloszlású az $[1,2]$ intervallumon. Határozzuk meg $\sqrt{\xi}$ várható értékét.

11.8. feladat. Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0,1]$ intervallumon. Határozzuk meg a $P(\xi = \frac{1}{5})$ és $P(-\frac{1}{2} < \xi < \frac{3}{4})$ valószínűségeket.

11.9. feladat. Legyen ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda = 5$ paraméterrel. Határozzuk meg a $P(\xi = 3)$ és $P(-2 < \xi < 1)$ valószínűségeket.

11.10. feladat. Annak a valószínűsége, hogy egy benzinkútnál a tankolásra 6 percnél többet kell várni a tapasztalatok szerint 0,1. A várakozási idő hossza exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Mennyi a valószínűsége, hogy véletlenszerűen a benzinkúthoz érkezve 3 percen belül sorra kerülünk?

11.11. feladat. Egy valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 2-2x, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Számítsuk ki a valószínűségi változó várható értékét és szórását!

11.12. feladat. Legyen ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg a $P(\xi = \pi)$, $P(\xi > 0)$ és $P(\xi \geq 0)$ valószínűségeket!

11.13. feladat. Tegyük fel, hogy egy bizonyos fajta izzólámpa élettartama normális eloszlású 1000 óra várható értékkel és 100 óra szórással. Számítsuk ki, hogy az első 900 órában a lámpák hány százaléka megy tönkre.

11.14. feladat. Legyen ξ egyenletes eloszlású a $(-2,3)$ intervallumon, legyen továbbá $\eta = \xi^3$. Határozzuk meg η eloszlásfüggvényét, sűrűségfüggvényét és várható értékét.