Gazdasági matematika 2 előadás

Aradi Bernadett

2020 tavasz

A kurzushoz tartozó oktatási anyagok:
`https://arato.inf.unideb.hu/aradi.bernadett`

Témakörök

1. Lineáris algebra
   - Az $\mathbb{R}^n$ tér
   - Mátrixok, determinánsok
   - Lineáris egyenletrendszerek
   - Lineáris transzformációk
   - Kvadratikus formák, euklideszi terek
2. Valószínűségszámítás
   - Kombinatorika
   - Valószínűségi mező
   - Feltételes valószínűség, függetlenség
   - Valószínűségi változók

Az $\mathbb{R}^n$ tér

Legyen $n \in \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Definíció – az $\mathbb{R}^n$ tér

Az $\mathbb{R}^n$ (vektor)tér:

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ \text{minden } i \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ esetén}\}.$$

Ekkor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ egy pont vagy vektor $\mathbb{R}^n$-ben, azaz a valós szám n-esek terében.

Továbbá $\mathbb{R}^0 = \{0\}$.

Definíció – műveletek $\mathbb{R}^n$-ben

Összeadás. Ha $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ és $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, akkor

$$x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Skalárral való szorzás. Ha $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor

$$\lambda x := (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Példa. $\mathbb{R}^2$: a sík vektorai. Elemei: (x_1, x_2) alakú számpárok, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Műveletek tulajdonságai, altér

Állítás – a műveletek tulajdonságai

Összeadás. Legyen $u, v, w \in \mathbb{R}^n$. Létezik egy $0 \in \mathbb{R}^n$ nullvektor, valamint minden $v \in \mathbb{R}^n$ vektorhoz egy $-v$-vel jelölt ún. ellentett vektor, melyekre

$$(u+v)+w = u+(v+w) \quad \text{(asszociativitás)}$$
$$v+w = w+v \quad \text{(kommutativitás)}$$
$$v+0 = v \quad \text{és} \quad v+(-v) = 0.$$

Skalárral való szorzás. Ha $v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, akkor

$$(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v \quad \text{és} \quad \lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w,$$
$$\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \quad \text{és} \quad 1v = v.$$

Definíció – altér

Az $\mathbb{R}^n$ tér egy nemüres W részhalmazát altérnek nevezzük, ha zárt a vektorösszeadásra és a skalárral való szorzásra.

Példák:

1. $\mathbb{R}^n$-ben $\{0\}$ és $\mathbb{R}^n$ mindig altér. Ezeket triviális altereknek nevezzük.
2. Ha $\mathbb{R}^2$-ben v tetsz. rögzített vektor, $W = \{\lambda v \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ altér.

Példák alterekre

$\mathbb{R}^2$ összes altere:

- $\{0\}$
- Az origón áthaladó egyenesek.
- $\mathbb{R}^2$ (a teljes sík).

$\mathbb{R}^3$ összes altere:

- $\{0\}$
- Az origón áthaladó egyenesek.
- Az origón áthaladó síkok.
- $\mathbb{R}^3$ (a teljes tér).

Mik lesznek $\mathbb{R}$, azaz a valós számegyenes alterei?

Lineáris kombináció

Definíció – lineáris kombináció

Az $\mathbb{R}^n$ tér $v_1, v_2, \dots, v_k$ vektorainak lineáris kombinációi a

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k; \qquad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R},$$

alakú ($\mathbb{R}^n$-beli) vektorok.

Megj.: A nullvektor mindig előáll ún. triviális lineáris kombinációként, azaz csupa nulla együtthatókkal: $\lambda_i = 0$.

Példák:

1. Egy rögzített $v \neq 0$ vektor lineáris kombinációi: λv alakú vektorok.
2. $v = (2, 1), w = (0, 3) \in \mathbb{R}^2$.
   A sík mely pontjai kaphatók meg v és w lineáris kombinációjaként?

Tétel és definíció – generált (vagy kifeszített) altér

Legyenek $v_1, v_2, \dots, v_k$ vektorok $\mathbb{R}^n$-ben. Ekkor a $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ vektorrendszer összes lineáris kombinációi alteret alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben, melyet a vektorrendszer által generált altérnek, a $v_1, v_2, \dots, v_k$ vektorok lineáris lezártjának, vagy a vektorok által kifeszített altérnek nevezünk.
Jele: $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_k)$.

Lineáris függőség, függetlenség

Vektorrendszer: $\mathbb{R}^n$ vektorainak egy halmaza. (Itt: véges halmaz.)

Definíció – lineáris függőség, függetlenség

Az $\mathbb{R}^n$ tér egy $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ vektorrendszerét lineárisan függőnek nevezzük, ha léteznek olyan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ nem mind 0 skalárok, hogy

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k = 0.$$

Azaz ha a nullvektor nemtriviálisan is kikombinálható a vektorrendszer tagjaiból. Ellenkező esetben a vektorrendszer lineárisan független.

Megjegyzés

A lineárisan független esetben tehát a

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k = 0$$

vektoregyenlet csak úgy állhat fenn, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$.

Példa: $v = (2, 1), w = (0, 3) \in \mathbb{R}^2$; v és w függetlenek-e?

Lineáris függőség, függetlenség

Tétel

$\mathbb{R}^n$-ben egy legalább kételemű vektorrendszer pontosan akkor lineárisan függő, ha a vektorrendszer valamely tagja előáll a többi tag lineáris kombinációjaként, tehát ha

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \lambda_k v_k,$$

valamilyen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_k$ valós számokkal.

Következmények

1. Ha egy vektorrendszerben egy vektor egy másiknak skalárszorosa, akkor a vektrorrendszer lineárisan függő.
2. Ha a nullvektor benne van egy vektorrendszerben, akkor az függő, tehát lineárisan független vektorrendszer nem tartalmazhatja a nullvektort.
3. Ha egy vektorrendszer valamely részrendszere lineárisan függő, akkor maga a vektorrendszer is az. Lineárisan független vektorrendszer bármely részrendszere is lineárisan független.

Bázis, dimenzió

Tétel

Ha $\mathbb{R}^n$-ben tekintünk egy n elemű, lineárisan független vektorrendszert, akkor a vektorrendszer által generált altér a teljes $\mathbb{R}^n$ tér.

Azaz minden vektor előáll a vektorrendszer tagjaiból képzett lineáris kombinációként.

Definíció – bázis, dimenzió

Az $\mathbb{R}^n$ tér bármely n darab lineárisan független vektorát $\mathbb{R}^n$ bázisának nevezzük. Az n számot az $\mathbb{R}^n$ tér dimenziójának is mondjuk.
Tehát: $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

- Ha a $\mathcal{B}$ vektorrendszer bázis, akkor $\mathbb{R}^n$ minden eleme pontosan egyféleképpen kombinálható ki lineárisan $\mathcal{B}$ elemeiből.
- $\mathbb{R}^n$-nek több (végtelen sok) bázisa van.

Példák bázisra

1. $\mathbb{R}^n$ egy bázisa: $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, a természetes (vagy kanonikus) bázis.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. $\mathbb{R}^2$ természetes bázisa: $\{e_1, e_2\}$, ahol $e_1 = \binom{1}{0}$, $e_2 = \binom{0}{1}$.

   Másik bázis: $\{v, w\} = \{\binom{2}{1}, \binom{0}{3}\}$.

Bázisra vonatkozó koordináták

Bázis $\mathbb{R}^n$-ben: n darab lineárisan független vektor

Definíció – bázisra vonatkozó koordináták

Legyen $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ egy bázisa $\mathbb{R}^n$-nek. Ekkor a fentiek szerint $\forall v \in \mathbb{R}^n$ egyértelműen kombinálható lineárisan $\mathcal{B}$ vektoraiból, azaz egyértelműen léteznek $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ skalárok, hogy

$$v = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n.$$

Ezeket a skalárokat a v vektor $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozó koordinátáinak nevezzük. Ekkor v alakja a $\mathcal{B}$ bázisban:

$$v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Tehát egy bázis megadása ekvivalens egy koordináta-rendszer megadásával.

Mátrixok

Definíció – mátrix

Egy m sorral és n oszloppal rendelkező számtáblázatot $m \times n$-es mátrixnak nevezünk.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A \text{ elemei: } a_{ij} \qquad A = (a_{ij})$$

Az összes $m \times n$-es mátrix halmazát $\mathcal{M}_{m\times n}$-nel jelöljük.

Definíció – mátrixokhoz kapcsolódó alapfogalmak

- Ha $n = m$, akkor a mátrix négyzetes vagy kvadratikus.
- Egy mátrix főátlója alatt az $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk})$ szám k-ast értjük ($k = \min\{m, n\}$).
- Két mátrix egyenlő, ha azonos típusúak (azaz ugyanannyi soruk és oszlopuk van), és a megfelelő elemeik megegyeznek.
- Azon $n \times n$-es mátrixot, melynek főátlójában csupa 1-es áll, minden más eleme 0, n-edrendű vagy n-dimenziós egységmátrixnak nevezzük. Jele: E_n vagy I_n.

Mátrixműveletek

1. Mátrixok összeadása

Csak azonos típusú mátrixokat tudunk összeadni.
Legyenek $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ $m \times n$-es mátrixok.
Ekkor $C = A + B$, ha $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$; $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

2. Mátrixok skalárral való szorzása

Elemenként végezzük, azaz ha $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}$, akkor $\lambda A = (\lambda a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}$.

Speciálisan: ha A és B sor-, vagy oszlopvektorok, akkor a fenti 2 művelet éppen a vektorok szokásos összeadása és skalárral való szorzása.

3. Mátrixszorzás

Legyen $A = (a_{ij})$ egy $m \times k$, $B = (b_{ij})$ pedig egy $k \times n$ típusú mátrix.
Ekkor A és B szorzata az a $C = (c_{ij})$ $m \times n$ típusú mátrix, amelyre

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir} b_{rj}.$$

Tétel – a mátrixszorzás tulajdonságai

- Ha A $m \times n$ típusú, akkor $E_m \cdot A = A$ és $A \cdot E_n = A$.
- Legyenek A, B mátrixok és tegyük fel, hogy létezik AB. Ha $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
- Ha A, B, C olyan mátrixok, hogy AB és BC létezik, akkor $(AB)C = A(BC)$. Azaz a mátrixszorzás asszociatív.
- Ha A és B azonos típusú mátrixok és létezik AC, akkor BC is létezik és $(A+B)C = AC + BC$. Azaz teljesül a disztributivitás.
- A mátrixszorzás nem kommutatív, azaz általában $AB \neq BA$.

Definíció – mátrix transzponáltja

Legyen A egy $m \times n$-es mátrix. Azt az A^T-vel jelölt $n \times m$-es mátrixot, amelynek sorai az A oszlopai A transzponáltjának nevezzük.

Állítás – a transzponálás tulajdonságai

- $(A^T)^T = A$. Azaz a transzponálás involutív művelet.
- A transzponálás és a mátrixszorzás kapcsolata: $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

Definíció – szimmetrikus, ferdeszimmetrikus mátrix

Legyen A egy n-edrendű kvadratikus mátrix (azaz $n \times n$-es).

- A szimmetrikus, ha $A^T = A$,
- A ferdeszimmetrikus, ha $A^T = -A$.

Példák:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & -1 & 7 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -5 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Itt A szimmetrikus, B ferdeszimmetrikus mátrix.

Állítás – szimmetrikus és ferdeszimmetrikus mátrixok tulajdonságai

- Ferdeszimmetrikus mátrix főátlójában 0-k állnak.
- Szimmetrikus mátrixok összege szimmetrikus.
- Ferdeszimmetrikus mátrixok összege ferdeszimmetrikus.
- Szimmetrikus mátrixok szorzata nem feltétlenül szimmetrikus.

Mátrixok inverze

Definíció – mátrix invertálhatósága

Azt mondjuk az A n-edrendű négyzetes mátrixról, hogy invertálható, vagy létezik az inverze, ha létezik olyan B n-edrendű kvadratikus mátrix, hogy

$$AB = BA = E_n.$$

Tétel

Ha A invertálható, akkor az inverze egyértelmű. Jele: A^{-1}.

Példa:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$$

Állítás – a mátrixinvertálás tulajdonságai

- Ha A invertálható, akkor A^{-1} is az és $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Ha A és B invertálható és létezik AB, akkor ez is invertálható és $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Ha A invertálható, akkor A^T is az és $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Determinánsok, előkészítés

Determináns: négyzetes mátrixhoz rendelt valós szám.

Definíció – permutációk inverziói

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és jelölje σ az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz egy permutációját, azaz legyen

$$\sigma \colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}, \ i \mapsto \sigma(i)$$

bijektív függvény. (Itt $\sigma(i)$ jelöli a permutációban az i. helyen álló elemet.) Azt mondjuk, hogy a σ permutációnál az i és j elem inverzióban áll, ha $i < j$ és $\sigma(i) > \sigma(j)$. Egy σ permutáció páros, ha benne az inverzióban álló párok száma páros, és páratlan, ha ez a szám páratlan.

Példa: Halmaz: $\{1, 2, 3, 4\}$

$\sigma_1 = (1, 3, 4, 2)$	Inverziók száma: 2
$\sigma_2 = (1, 2, 3, 4)$	Inverziók száma: 0
$\sigma_3 = (4, 3, 2, 1)$	Inverziók száma: 6
$\sigma_4 = (2, 3, 4, 1)$	Inverziók száma: 3

Determinánsok

Definíció – determináns

Legyen $A = (a_{ij})$ egy $n \times n$-es mátrix. Az A mátrix n^2 db eleméből válasszunk ki úgy n elemet, hogy minden sorból és oszlopból pontosan egyet választunk. A kiválasztott elemek alakja:

$$a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \ldots, a_{n\sigma(n)}.$$

Az A mátrix determinánsa:

$$\det(A) = |A| = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}.$$

Ez az összeg $n!$ tagú. Itt: $\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \sigma \text{ páros,} \\ -1, & \text{ha } \sigma \text{ páratlan.} \end{cases}$

Példa:

1. $n = 2$: $\det(A) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
2. $n = 3$: $\det(A) = \ldots$.

Tétel – a determinánsok szorzástétele

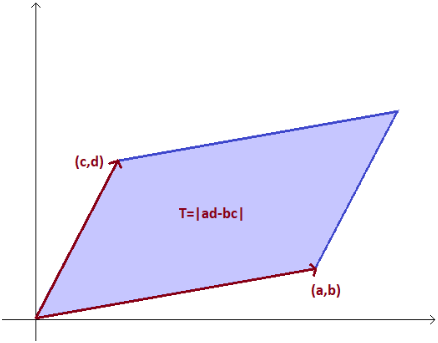
Ha A és B azonos rendű négyzetes mátrixok, akkor

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

A determináns szemléletes jelentése

- másodrendű (2x2-es) determináns: a determináns sorai, mint vektorok által kifeszített parallelogramma előjeles területe

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$



- harmadrendű (3x3-as) determináns: a determináns sorai, mint vektorok által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata

Állítás – a determináns tulajdonságai

- $\det(A) = \det(A^T)$
- Ha A valamely sora csupa 0 elemből áll, akkor $\det(A) = 0$.
- Ha A két sorát felcseréljük, a determináns -1-szeresére változik.
- Ha A két sora egyenlő, akkor $\det(A) = 0$.
- Ha A valamely sorát megszorozzuk egy λ valós számmal, akkor az így kapott mátrix determinánsa $\lambda \cdot \det(A)$.
- Ha A minden sorát megszorozzuk egy λ számmal és A n-edrendű, akkor a kapott mátrix determinánsa $\lambda^n \cdot \det(A)$.
- Ha A két sora egymás skalárszorosa, akkor $\det(A) = 0$.
- Egy mátrix determinánsa nem változik, ha valamely sorához hozzáadjuk egy másik sor λ-szorosát.
- Ha A valamely sora előállítható a többi sor lináris kombinációjaként, akkor $\det(A) = 0$.
- A fentiek igazak sorok helyett oszlopokra is.

Következmény

Ha $\det(A) \neq 0$, akkor A sorai (vagy oszlopai) lineárisan független vektorok. Ekkor ha A $n \times n$-es: sorai $\mathbb{R}^n$ egy bázisát alkotják.

Speciális alakú mátrixok determinánsa

Állítás

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén az egységmátrix determinánsa 1.

$$\det(E_n) = 1$$

Állítás

Legyen A egy felső háromszög alakú mátrix, azaz olyan kvadratikus mátrix, melynek főátlója alatt csupa nulla szerepel:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ekkor A determinánsa éppen a főátlóbeli elemek szorzata.

A determináns kapcsolata az invertálással

Definíció – mátrixok regularitása

Azt mondjuk, hogy az A négyzetes mátrix szinguláris, ha determinánsa 0. Ellenkező esetben (azaz ha $\det(A) \neq 0$) A reguláris.

Tétel

Egy négyzetes mátrix pontosan akkor invertálható, ha reguláris.

Megjegyzés: Legyen A egy reguláris mátrix. Mivel $A \cdot A^{-1} = E$, ahol E az A-val azonos méretű egységmátrix, ezért a determinánsok szorzástétele alapján

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(E) = 1.$$

A fenti egyenletből következik, hogy A és A^{-1} determinánsa egymás reciproka:

$$\det(A)^{-1} = \det(A^{-1}).$$

A determináns kiszámítási módjai

1. Sarrus-szabály: 2×2-es és 3×3-as mátrixok determinánsára
2. Gauss-elimináció: bizonyos – a fenti tulajdonságokat használó – átalakítások révén a mátrixot felső háromszög alakúra hozzuk (főátló alatt csupa 0), ekkor a determináns éppen a főátlóbeli elemek szorzata. Ezek az átalakítások:
   - sorcsere, ekkor a determináns előjelet vált;
   - $\lambda \in \mathbb{R}$ kiemelése egy sorból;
   - egy sor λ-szorosának hozzáadása egy másik sorhoz.
3. Kifejtési tétel: Legyen A egy n-edrendű mátrix.
   - Kiválasztjuk A egy tetszőleges sorát (vagy oszlopát),
   - ennek minden elemét megszorozzuk az elemhez tartozó algebrai aldeterminánssal,
   - majd a kapott szorzatokat összeadjuk.

Az a_{ij} elemhez tartozó algebrai aldetermináns $(-1)^{i+j}A_{ij}$, ahol A_{ij} annak az $(n-1)$-edrendű determinánsnak az értéke, amelyet A-ból az i. sor és j. oszlop kihúzásával kapunk.

Vektorrendszer rangja

Definíció – altér dimenziója

Az $\mathbb{R}^n$ tér egy altere k dimenziós, ha tartalmaz k lineárisan független vektort, de $k+1$ darabot már nem.

Definíció – vektorrendszer rangja

Tekintsük $\mathbb{R}^n$ egy $\mathcal{A}$ vektorrendszerét. Az $\mathcal{A}$ vektorrendszer rangja az általa generált altér dimenziója:

$$\operatorname{rang}(\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{L}(\mathcal{A})).$$

Példa: $\mathbb{R}^3$-ban legyen $\mathcal{A} = \{u, v, w\}$, ahol

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Mivel $w = 2u + v$, ezért w benne van a másik 2 vektor által generált altérben. Viszont u és v lineárisan független, ezért $\operatorname{rang}(\mathcal{A}) = 2$.

Megjegyzés: Tekintsük $\mathbb{R}^n$ egy vektorrendszerét: $\mathcal{A} = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$. Ekkor $\operatorname{rang}(\mathcal{A}) \leq n$ és $\operatorname{rang}(\mathcal{A}) \leq m$.

Ranginvariáns átalakítások

Tétel – ranginvariáns átalakítások

Egy vektorrendszer rangja nem változik, ha

- valamelyik vektort megszorozzuk egy nem-nulla skalárral;
- valamelyik vektorhoz hozzáadjuk egy másik vektor tetszőleges skalárszorosát;
- elhagyunk a vektorrendszerből olyan vektort, mely a többi vektor lineáris kombinációja.

Definíció – mátrix rangja

Egy mátrix rangja alatt a mátrix sorai (vagy oszlopai), mint vektorok által alkotott vektorrendszer rangját értjük. Jelölés: $\text{rang}(A)$.

Tehát egy $m \times n$ típusú mátrix rangja legfeljebb m és n közül a kisebbik.

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció – lineáris egyenletrendszer

Az

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

alakú egyenletrendszert, ahol az a_{ij} ($i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$) és a b_k ($k \in \{1, \dots, m\}$) valós számok ismertek, $x_1, \dots, x_n$ ismeretlenek, lineáris egyenletrendszernek nevezzük.

- a_{ij}: az egyenletrendszer együtthatói
- b_k: szabad tagok, vagy konstansok
- az egyenletrendszer alapmátrixa, ill. kibővített mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága

A lineáris egyenletrendszer mátrixos alakja: $Ax = b$.

Definíció – a megoldhatósággal kapcsolatos elnevezések

A lineáris egyenletrendszer

- megoldható, ha van megoldása, azaz létezik olyan $(x_1, \ldots, x_n)$ vektor, hogy $Ax = b$ fennáll;
  - határozott, ha pontosan 1 megoldása van;
  - határozatlan, ha több megoldása van;
- ellentmondásos, ha nincs megoldása.

Tétel – rangkritérium

- Egy lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A|b)$.
- Ha megoldható és $\mathrm{rang}(A) = n$ (ahol n az ismeretlenek száma), akkor határozott, ha $\mathrm{rang}(A) < n$, akkor határozatlan.

Lineáris egyenletrendszerek megoldáshalmaza

Definíció – lineáris egyenletrendszer homogenitása

A lineáris egyenletrendszer homogén, ha $b = 0$, azaz ekkor mátrixos alakja $Ax = 0$. Egyébként a lineáris egyenletrendszer inhomogén.

Megjegyzés: egy homogén lineáris egyenletrendszernek a nullvektor mindig megoldása.

Állítás – homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai

Egy homogén lineáris egyenletrendszer összes megoldása alteret alkot $\mathbb{R}^n$-ben, melynek dimenziója $n - \text{rang}(A)$. Ezt az alteret megoldástérnek nevezzük.

Állítás – inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásai

Ha $Ax = b$ megoldható, akkor megoldáshalmaza $x_0 + H$ alakú, ahol

- x_0 a lineáris egyenletrendszer egy rögzített megoldása;
- H a megfelelő homogén lineáris egyenletrendszer (azaz $Ax = 0$) megoldástere.

Lineáris egyenletrendszerek megoldása Gauss-eliminációval

Lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa: sorok $\approx$ egyenletek.

Nem változik a lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza, ha:

- egyenletet (sort) szorzunk $\lambda \neq 0$-val;
- egyenlethez (sorhoz) hozzáadjuk egy másik egyenlet (sor) λ-szorosát;
- megcserélünk két egyenletet (sort);
- elhagyunk olyan egyenletet (sort), mely egy másiknak skalárszorosa.

Egyenletrendszer kibővített mátrixa $\rightsquigarrow$ trapéz alak (főátló alatt csupa 0), innen visszahelyettesítéssel adódnak a megoldások.

- Ha elimináció közben $(0 \dots 0| \neq 0)$ sor adódik, akkor az egyenletrendszer ellentmondásos.
- Ha az elimináció végén n sor marad, akkor az egyenletrendszer határozott, ha kevesebb, akkor határozatlan.

Példa:

$$\begin{aligned} x + 4y - 3z &= 1 \\ 2x + 9y - z &= -3 \\ -2x - 10y + 16z &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 12x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 10x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Lineáris transzformációk

Ebben a részben rögzítjük n-et, és az $\mathbb{R}^n$ térben fogunk dolgozni. Feltesszük, hogy adott ebben a térben egy bázis, és minden vektornak erre a bázisra vonatkozóan adottak a koordinátái.

Definíció – lineáris transzformáció

Legyen adott egy A $n \times n$-es mátrix. Az

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \ v \mapsto Av$$

leképezést az $\mathbb{R}^n$ tér egy *lineáris transzformációjának* hívjuk. (Azaz a v vektort megszorozzuk balról az A négyzetes mátrixszal.)
Ezt a transzformációt gyakran φ_A-val jelöljük, azaz $\varphi_A(v) = Av$.

Példák:

- Forgatások, tükrözések, λ-nyújtások.
- Vetítések, pl. $\mathbb{R}^3$ egy rögzített, origón áthaladó síkjára merőlegesen.

Forgatások és tükrözések mátrixa $\mathbb{R}^2$-ben a természetes bázisban:

$$\mathrm{rot}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \mathrm{refl}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$$

A λ-nyújtás mátrixa $\mathbb{R}^n$-ben a természetes bázisban: λE_n.

Lineáris transzformációk tulajdonságai

Lineáris transzformációk tulajdonságai

Minden lineáris transzformáció

- additív, azaz $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$: $A(v + w) = Av + Aw$;
- homogén, azaz $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$: $A(\lambda v) = \lambda Av$.

Megjegyzés: lineáris transzformációnál nullvektor képe nullvektor.

Tétel – lineáris transzformációk alaptétele

Egy lineáris transzformációt egyértelműen meghatároz egy bázison való hatása. Tehát ha $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ bázisa $\mathbb{R}^n$-nek, $w_1, w_2, \ldots, w_n$ tetszőleges vektorai $\mathbb{R}^n$-nek, akkor egyértelműen létezik olyan A $n \times n$ mátrix, hogy $Ab_i = w_i$. Továbbá ekkor tetszőleges $v \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén

$$Av = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_n w_n,$$

ha $v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_n b_n$.

Állítás

A $v \mapsto Av$ lineáris transzformáció pontosan akkor bijektív, ha A reguláris, azaz $\det(A) \neq 0$. Ekkor a transzformáció bázist bázisba visz.

Példa lineáris transzformációk kompozíciójára

Tegyük fel, hogy $\mathbb{R}^2$-ben szeretnénk alkalmazni a következő lineáris transzformációt:

- tükrözzük a vektort az x-tengellyel 30°-ot bezáró (origón áthaladó) egyenesre;
- a tükörképnek vegyük az ellentettjét, valamint ennek kétszeres nagyítottját;
- a kapott vektort vetítsük le merőlegesen az y-tengelyre.

Hogy néz ki az így kapott lineáris transzformáció?

$$(x,y) \mapsto \mathrm{refl}_{30^\circ}(x,y) \mapsto -2(\mathrm{refl}_{30^\circ}(x,y)) \mapsto \mathrm{proj}_y\left(-2(\mathrm{refl}_{30^\circ}(x,y))\right)$$

Mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Így a kapott transzformáció:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}x + y \end{pmatrix}, \text{ azaz } (x,y) \mapsto (0, -\sqrt{3}x + y).$$

Lineáris transzformáció sajátértékei, sajátvektorai

Definíció – sajátérték, sajátvektor

Tekintsünk $\mathbb{R}^n$-ben egy A mátrixszal adott lineáris transzformációt. Egy nem-nulla $v \in \mathbb{R}^n$ vektort A sajátvektorának hívunk, ha $\exists \lambda \in \mathbb{R}$: $Av = \lambda v$. Ekkor λ-t a transzformáció v-hez tartozó sajátértékének mondjuk.

Példák: sajátvektorok forgatás, tükrözés, λ-nyújtás esetén.

Megjegyzések:

- Ha v sajátvektora A-nak, akkor a hozzá tartozó sajátérték egyértelmű.
- Ha λ sajátérték, akkor a hozzá tartozó sajátvektorok halmaza altér: $L_\lambda := \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = \lambda v\}$ altér $\mathbb{R}^n$-ben: a λ-hoz tartozó sajátaltér.

Definíció és tétel

- Egy A lineáris transzformáció (vagy mátrix) karakterisztikus polinomja a $\det(A - \lambda E_n)$ n-edfokú polinom, ahol n a tér dimenziója.
- Ennek gyökei éppen a lineáris transzformáció sajátértékei.
- A sajátértékek szorzata éppen a mátrix determinánsa.

Példa: Határozzuk meg az alábbi lin. trf. sajátértékeit és sajátvektorait!

$$(x, y) \mapsto (2x - y, -12x + 3y)$$

Kvadratikus függvények

Kvadratikus: négyzetes, másodfokú (akár többváltozós) függvények.

Definíció – kvadratikus függvény

Legyen A egy $n \times n$-es szimmetrikus mátrix, és $\mathbb{R}^n$ elemeit tekintsük a természetes bázisban felírt oszlopvektorokként. Ekkor a

$$Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto Q(x) := x^T A x$$

függvényt kvadratikus függvénynek vagy kvadratikus formának nevezzük.

Alkalmazás: Közgazdaságtani modellekben: költségfüggvény, profitfüggvény gyakran kvadratikus.

Példa: Mi $\mathbb{R}^3$-ban az A mátrix által meghatározott kvadratikus függvény?

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Általában az n-változós kvadratikus alak:

$$Q(x) = Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + \dots + a_{nn} x_n^2$$

Kvadratikus formák definitsége

Definíció – definitség

Egy Q kvadratikus függvény, valamint az őt definiáló A mátrix

- pozitív definit, ha $Q(x) > 0$ minden $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ esetén;
- pozitív szemidefinit, ha $Q(x) \geq 0$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén;
- negatív definit, ha $Q(x) < 0$ minden $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ esetén;
- negatív szemidefinit, ha $Q(x) \leq 0$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén;
- indefinit, ha $Q(x)$ felvesz pozitív és negatív értékeket is.

Tétel

A $Q(x) = x^T Ax$ kvadratikus függvény pontosan akkor

- pozitív definit, ha A összes sajátértéke pozitív;
- pozitív szemidefinit, ha A összes sajátértéke ≥ 0;
- negatív definit, ha A összes sajátértéke negatív;
- negatív szemidefinit, ha A összes sajátértéke ≤ 0;
- indefinit, ha A-nak van pozitív és negatív sajátértéke is.

Definitség eldöntése a determináns segítségével

Tétel

Tekintsük ismét az A szimmetrikus mátrixból származó Q kvadratikus formát, és jelölje Δ_k az A mátrix bal felső k-adrendű sarokdeterminánsát (vagy sarokfőminorát), azaz

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \Delta_n = |A|.$$

A Q kvadratikus függvény pontosan akkor

- pozitív definit, ha $\Delta_k > 0$ minden $k = 1, \dots, n$ esetén;
- negatív definit, ha $(-1)^k \Delta_k > 0$ minden $k = 1, \dots, n$ esetén.

Példák:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

A: pozitív definit, B: negatív definit

Euklideszi terek

Definíció – Skaláris (vagy belső) szorzat

Legyen A egy $n \times n$-es szimmetrikus, pozitív definit mátrix, és $\mathbb{R}^n$ elemeit tekintsük a természetes bázisban felírt oszlopvektorokként. Ekkor az

$$\langle x, y \rangle_A := x^T A y$$

mennyiséget az x és y vektorok skaláris vagy belső szorzatának nevezzük. Az $\mathbb{R}^n$ teret ellátva egy $\langle\ ,\ \rangle_A \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvénnyel (skaláris szorzattal) euklideszi térnek mondjuk. Jele: $\mathbb{E} = (\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle_A)$.

Megjegyzés: Ha A egyértelmű, akkor $\langle\ ,\ \rangle_A$ helyett írhatunk $\langle\ ,\ \rangle$ -t.

Példák: (1) Mi $\mathbb{R}^3$-ban az A mátrix által meghatározott skaláris szorzat?

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $\mathbb{R}^2$-ben az egységmátrix választásával:

$$\langle x, y \rangle_E = \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2, \text{ ha } x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2)$$

Ez ugyanaz, mint amikor $\langle x, y \rangle = |x||y| \cos \angle$.

További példák; a skaláris szorzat tulajdonságai

Az előző oldali (2) általánosítása tetszőleges dimenzióra:

(3) Tekintsünk $\mathbb{R}^n$-ben két vektort (a természetes bázisban felírva): $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ és $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Ekkor a 2 vektornak az $n \times n$ típusú egységmátrix által meghatározott skaláris szorzata:

$$\langle x, y \rangle = x^T E_n y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

A (3) példában szereplő skaláris szorzatot $\mathbb{R}^n$ kanonikus vagy természetes skaláris szorzatának hívjuk.

Skaláris szorzat tulajdonságai

Tekintsünk egy A szimmetrikus, pozitív definit mátrix által meghatározott $\langle\, , \,\rangle$ skaláris szorzatot $\mathbb{R}^n$-en. Ekkor ez a skaláris szorzat

a. első változójában additív: $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;
b. első változójában homogén: $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$;
c. szimmetrikus: $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$;
d. pozitív definit: $\forall x \in \mathbb{R}^n : \langle x, x \rangle \geq 0$, és $(\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0)$.

- (a)+(b) $\Rightarrow$ a skaláris szorzat első változójában lineáris
- $\dots$+(c) $\Rightarrow$ a skaláris szorzat a második változójában is lineáris

Vektorok normája euklideszi terekben

Definíció – vektorok normája (hossza)

Tekintsünk egy $\mathbb{E} = (\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ euklideszi teret, ahol a skaláris szorzatot az A mátrix származtatja. Egy $x \in \mathbb{R}^n$ vektor normája vagy hossza

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x^T A x}.$$

Megj.: a gyökvonás elvégezhető az A mátrix pozitív definitsége miatt.

Példa: $\mathbb{R}^2$-ben a kanonikus belső szorzat esetén: $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = |x|$.

Tétel – a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség

Az $\mathbb{E} = (\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ euklideszi tér tetszőleges x, y vektoraira

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha x és y egymás skalárszorosa.

Definíció – vektorok által bezárt szög

Legyen x és y az $\mathbb{E}$ euklideszi tér 2 nem-nulla vektora. Ekkor az x és y által bezárt szög

$$\arccos \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Vektorok ortogonalitása

Skaláris szorzat lényege

Skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-en $\rightsquigarrow$ szögmérés, távolságmérés!

Megj.: Ha x vagy y nullvektor, akkor a bezárt szögük definíció szerint $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

Definíció – ortogonalitás

- Azt mondjuk, hogy x és y merőlegesek vagy ortogonálisak, ha $\langle x, y \rangle = 0$. Jelölés: $x \perp y$.
- Azt mondjuk, hogy $x \in \mathbb{R}^n$ egységvektor, ha $\|x\| = 1$.

Megj.: $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ esetén $\frac{x}{\|x\|}$ egységvektor.

Állítás

Legyen e egységvektor. Ekkor $\langle x, e \rangle$ az x vektor e-re eső merőleges vetületének a hossza, $\langle x, e \rangle e$ pedig x-nek az e-re eső merőleges vetülete.

Szimmetrikus és ortogonális mátrixok

Tekintsük most a természetes skaláris szorzattal ellátott $\mathbb{R}^n$ teret.

Definíció – ortogonális mátrix

Egy négyzetes Q mátrix ortogonális, ha $Q^{-1} = Q^T$.

Tétel – ortogonalitással ekvivalens állítások

Egy négyzetes Q mátrix esetén a következő állítások ekvivalensek:

- A Q mátrix ortogonális.
- $Q \cdot Q^T = E$.
- Q sorai páronként merőleges egységvektorok.
- Q oszlopai páronként merőleges egységvektorok.

Tétel – szimmetrikus mátrixok sajátértékei

Legyen A négyzetes szimmetrikus mátrix, azaz $A^T = A$. Ekkor

- A sajátértékei (a $\det(A - \lambda E_n) = 0$ egyenlet gyökei) valós számok.
- A különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok ortogonálisak.
- A-hoz létezik olyan Q ortogonális mátrix, hogy $Q^{-1}AQ$ diagonális alakú (azaz a főátlóján kívül minden elem nulla), és a főátlóban éppen A sajátértékei vannak.

Valószínűségszámítás – bevezetés

Valószínűségszámítás tárgya: véletlen jelenségek, véletlen kísérletek vizsgálata.

Véletlen jelenség vagy véletlen esemény alatt azt értjük, amikor a (figyelembevehető) körülmények nem határozzák meg egyértelműen a jelenség kimenetelét.
Kísérlet: több alkalommal lényegében azonos módon megismételhető.

- Egy kísérlettel kapcsolatos eseményeknek fogunk valószínűséget tulajdonítani.
- Leszámlálási problémák megoldásához szükségünk van a kombinatorikai fogalmakra.

Kombinatorika – Permutáció

Definíció – permutáció

Legyen A egy halmaz n különböző elemmel ($n \in \mathbb{N}$). A egy permutációján egy, az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz és A közötti bijektív leképezést értünk, azaz az A elemeinek valamilyen sorrendben való felsorolását.

Jelölje P_n az A halmaz összes permutációinak számát.

- Ekkor $P_1 = 1$.
- Belátjuk, hogy $P_n = n \cdot P_{n-1}$.
  Az n elemű halmazból rögzítünk egy elemet. A maradék $n-1$ elemet P_{n-1}-féleképpen rendezhetjük sorba, majd a rögzített elemet n helyre sorolhatjuk be. Így $P_n = n \cdot P_{n-1}$, azaz $P_n = n \cdot (n-1) \dots 2 \cdot 1 = n!$.

Tétel

n különböző elem lehetséges sorbarendezéseinek a száma $P_n = n!$.

Példák: (1) Hányféleképpen érhet célba 10 futó egy futóversenyen?
(2) Hány 5-jegyű szám írható fel a 3,4,5,7,9 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet? És a 2,2,2,7,7 számjegyekből?

Ismétléses permutáció

Hány 5-jegyű szám írható fel a 2,2,2,7,7 számjegyekből?

Megoldás: Ha megkülönböztetnénk egymástól a ketteseket és a heteseket, akkor 5! lenne a sorrend, viszont a kettesek illetve a hetesek cserélgetésével nem kapunk új 5-jegyű számot. ⇒ Az ismétlődő elemek lehetséges sorrendjeivel osztanunk kell az 5!-t, azaz a végeredmény:

$$\frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 10.$$

Tétel

Ha n elemünk van k különböző fajtából, az 1. fajtából ℓ_1, a 2.-ból ℓ_2, stb. (azaz $\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_k = n$), akkor az n elem lehetséges sorrendjeinek a száma

$$P_n^{\ell_1,\ldots,\ell_k} = \frac{n!}{\ell_1!\ldots\ell_k!}$$

Ismétléses perm.: n elem sorbarendezése, melyek között vannak azonosak.

Példa: Van 7 különböző színű, de egyébként egyforma bögrénk: 2 sárga, 1 zöld, 1 lila és 3 kék. Hányféleképpen rakhatjuk sorba a bögréket a konyhaszekrényben?

Variáció

Variáció: kiválasztás és sorbarendezés.

Definíció és tétel – ismétlés nélküli variáció

Egy n elemű halmaz *k-ad osztályú ismétlés nélküli variációi* alatt a halmaz elemeiből kiválasztott k hosszúságú sorozatokat értjük. Ezek száma:

$$V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \dots (n-k+1).$$

Itt szükségképpen $n \geq k$.

$\Rightarrow$ Olyan kiválasztás, ahol számít a sorrend.

Példák:

(1) Hányféleképpen alakulhatnak a dobogós helyezések egy 10 fős futóversenyen?

(2) Egy nyereménysorsoláson 5 különböző díj van, a résztvevők száma 200 fő. Hány lehetséges kimenetele van a sorsolásnak, ha mindenki csak egyszer nyerhet? $\rightsquigarrow$ visszatevés nélküli mintavétel

És ha az egyes nyertesek kihúzása után „visszadobják a győztes nevét a kalapba"? $\rightsquigarrow$ visszatevéses kiválasztás

Ismétléses variáció

Definíció és tétel – ismétléses variáció

Egy n elemű halmaz *k-ad osztályú ismétléses variációi* alatt a halmaz elemeiből *visszatevéssel* kiválasztott k hosszúságú sorozatokat értjük.
Ezek száma:

$$V_{n,k}^{i} = n^k.$$

Ismétléses variáció: kiválasztás és sorbarendezés, de mivel egy elemet többször is választhatunk, ezért itt $n < k$ is lehetséges.

Példák:

(1) Hányféleképpen tölthetünk ki egy totószelvényt?

(2) Hány részhalmaza van egy k elemű halmaznak?

Megoldás: Minden elem esetén döntünk arról, hogy igen (1) vagy nem (0), azaz bekerüljön-e az elem a részhalmazba, vagy nem.
Tehát a 2 lehetőségből k-szor választunk visszatevéssel.
Így az összes részhalmaz megkapható. Összesen $V_{2,k}^{i} = 2^k$ lehetőség.
A részhalmazok megfelelnek a k hosszúságú bináris sorozatoknak:

$$1001\ldots110.$$

Kombináció

Kombináció: kiválasztás. (Sorrend nem számít.)

Definíció és tétel – ismétlés nélküli kombináció

Egy n elemű halmaz k elemű részhalmazait a halmaz k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációinak nevezzük. Számuk:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}.$$

Definíció szerint $0! = 1$.
Itt szükségképpen $n \geq k$.

Példák:
(1) Hányféleképpen tölthetünk ki egy ötöslottó szelvényt?
(2) Egy nyereménysorsoláson 5 *egyforma* díj van, a résztvevők száma 200 fő. Hány lehetséges kimenetele van a sorsolásnak, ha mindenki csak egyszer nyerhet? $\rightsquigarrow$ visszatevés nélküli mintavétel
És ha az egyes nyertesek kihúzása után „visszadobják a győztes nevét a kalapba"? $\rightsquigarrow$ visszatevéses kiválasztás

Ismétléses kombináció

Definíció és tétel – ismétléses kombináció

Ha egy n elemű halmaz elemeiből úgy képezünk k elemű halmazt, hogy egy elemet többször is választhatunk (azaz visszatevéssel), akkor az n elem k-ad osztályú ismétléses kombinációjáról beszélünk. Számuk:

$$C^i_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Ismétléses kombináció: kiválasztás, de mivel egy elemet többször is választhatunk, ezért itt $n < k$ is lehetséges.

Példák:

(1) Hányféleképpen oszthatunk szét 10 (egyforma) almát 4 ember között?

(2) Feldobva 3 dobókockát, hányféleképpen alakulhat a dobott számok eloszlása? Megoldás: $n = 6, k = 3$, $C^i_{6,3} = \binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = 56$.

Állítás

Legyen $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \geq k$. Ekkor

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Binomiális tétel

Tétel – binomiális tétel

Legyen $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$(x+y)^n = \binom{n}{n}x^n + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y + \binom{n}{n-2}x^{n-2}y^2 + \\ + \cdots + \binom{n}{1}xy^{n-1} + \binom{n}{0}y^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}.$$

Definíció – binomiális együttható

Az $\binom{n}{k}$ kifejezést binomiális együtthatónak nevezzük.

Megjegyzés: együtthatók a Pascal-háromszögben

Állítás

Minden $n \in \mathbb{N}$, $0 < k < n$ esetén

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Valószínűségi mező – bevezetés

A valószínűséget egy függvényként fogjuk interpretálni, ami eseményekhez hozzárendeli azok bekövetkezésének a valószínűségét. Ehhez először az értelmezési tartományt, azaz az eseményeket kell megadnunk.

- Szükséges matematikai struktúra: eseményalgebra.

Definíció – eseménytér, elemi események

Legyen Ω rögzített, nemüres halmaz: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$. Ezt eseménytérnek, az elemeit pedig elemi eseményeknek nevezzük.

- Elemi események: egy kísérlet, vizsgált jelenség lehetséges kimenetelei.
- Események: Ω (bizonyos) részhalmazai, amiknek valószínűséget fogunk tulajdonítani.

Példa: Tekintsük a kockadobás kísérletét.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$, ahol ω_k azt jelenti, hogy a dobás eredménye k.

$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} \subset \Omega$ egy esemény: a dobás eredménye páros.

Példa: Számoljuk meg, hogy egy adott üzletben hányan vásárolnak egy rögzített napon. Ekkor $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$.

$A = \{0, 1, 2, 3, 4\} \subset \Omega$: a vizsgált napon 5-nél kevesebben vásároltak az üzletben.

Események

Definíció – esemény bekövetkezése

Az Ω eseménytér egy $A \subset \Omega$ eseménye bekövetkezik, ha az $\omega \in \Omega$ elemi esemény valósul meg és $\omega \in A$.
Ellenkező esetben, azaz ha ω a jelenség kimenetele és $\omega \notin A$, akkor azt mondjuk, hogy A nem következik be.

Példa: kockadobás, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$.
Legyen $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ és $B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Ha 4-est dobunk, akkor az A esemény bekövetkezik, a B nem.

Definíció

Az $\emptyset$ üres halmaz, mint Ω részhalmaza a lehetetlen esemény, ez sohasem következik be.
Ω, amely maga az eseménytér, mindig bekövetkezik, ezt biztos eseménynek is nevezzük.

Műveletek eseményekkel

Definíció – műveletek eseményekkel

Tekintsünk egy Ω eseményteret, valamint ennek A, B részhalmazait.

- Az A esemény ellentett vagy komplementer eseménye az az esemény, amely pontosan akkor következik be, ha A nem következik be. Jele: $\overline{A}$.
- Az A és B események összege vagy uniója az az esemény, amely pontosan akkor következik be, ha a két esemény legalább egyike bekövetkezik. Jele: $A + B$ vagy $A \cup B$.
- Az A és B események szorzata vagy metszete az az esemény, amely pontosan akkor következik be, ha mindkét esemény bekövetkezik. Jele: $A \cdot B$ vagy $A \cap B$.
- Az A és B események különbsége az az esemény, amely pontosan akkor következik be, ha A bekövetkezik, B nem. Jele: $A - B$ vagy $A \setminus B$.

Állítás

Tekintve az A és B eseményeket $A - B = A \cdot \overline{B}$.

Kapcsolat az események között

Definíció – események közötti relációk

Tekintsünk egy Ω eseményteret, valamint ennek A, B részhalmazait.

- Az A és B események diszjunktak vagy egymást kizáró események, ha egyszerre nem következhetnek be.
- Az A esemény maga után vonja a B eseményt, ha az A esemény bekövetkezése esetén szükségképpen B is bekövetkezik.
  Jele: $A \Rightarrow B$ vagy $A \subset B$.

Megj.: az A és B események diszjunkt volta azt jelenti, hogy szorzatuk a lehetetlen esemény: $A \cdot B = \emptyset$.

Állítás

Tekintve az A és B eseményeket a következők ekvivalensek:

$$A \Rightarrow B \qquad \text{és} \qquad \overline{B} \Rightarrow \overline{A}.$$

Példa: kockadobás, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$.
Legyen $A = \{\omega_1, \omega_2\}$ és $B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$. Ekkor $A \Rightarrow B$.

Eseményalgebra

Definíció – eseményalgebra

Tekintsünk egy Ω eseményteret. Ennek bizonyos részhalmazait akkor nevezzük eseményeknek, valamint ezen halmazok $\mathcal{A}$ halmazát eseményalgebrának, ha

- a biztos esemény esemény: $\Omega \in \mathcal{A}$;
- ha A esemény, akkor az $\overline{A}$ komplementere is az: ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\overline{A} \in \mathcal{A}$;
- ha $A_1, A_2, \dots$ események, akkor ezek uniója (összege) is esemény: ha $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, akkor

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

A fentiekből következik, hogy a lehetetlen esemény is esemény: $\emptyset \in \mathcal{A}$.

Példák eseményalgebrára.

- Tetszőleges Ω esetén $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$.
- Tetszőleges Ω esetén $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$.
- Kockadobás.
- Pénzérme feldobása.
- Pénzérme feldobása *n*-szer egymás után.
  - Vizsgálhatjuk a különböző dobássorozatokat.
  - Vizsgálhatjuk azt, hogy összesen hány fejdobás történt.
- Számoljuk meg, hogy egy adott üzletben hányan vásárolnak egy rögzített napon. Ekkor $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$. Mi lehet itt az eseményalgebra?
- Legyen most a kísérlet az, hogy célbalövünk egy kör alakú céltáblára. Mik lehetnek itt az események, illetve az eseményalgebra? (Tegyük fel, hogy a céltáblát mindenképpen eltaláljuk.)

Gyakoriság, relatív gyakoriság

Tekintsünk egy kísérlettel kapcsolatos A eseményt. Hajtsuk végre a kísérletet n-szer egymás után.

Definíció

Az A esemény gyakorisága az a szám, ahányszor az A esemény bekövetkezik az n kísérlet során. Jele: $k_n(A)$. Ekkor $k_n(A) \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
Az A esemény relatív gyakorisága a bekövetkezések számának és n-nek a hányadosa:

$$r_n(A) = \frac{k_n(A)}{n}.$$

Tapasztalat: a kísérletek számának növelésével az A esemény $r_n(A)$ relatív gyakorisága tart egy (a $[0, 1]$ intervallumba eső) számhoz. Logikus ezt tekinteni A valószínűségének.

A relatív gyakoriság tulajdonságai

Állítás

Tekintsünk egy kísérletet. Egy ezzel a kísérlettel kapcsolatos A esemény relatív gyakoriságát (n végrehajtás esetén) jelölje továbbra is $r_n(A)$. Ekkor

- $0 \leq r_n(A) \leq 1$;
- $r_n(\emptyset) = 0$, $r_n(\Omega) = 1$;
- ha A és B egymást kizáró események, akkor
$$r_n(A + B) = r_n(A) + r_n(B);$$
- ha $A_1, A_2, \ldots$ egymást páronként kizáró események, akkor
$$r_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}(r_n(A_i));$$
- $r_n(\overline{A}) = 1 - r_n(A)$;
- ha $A \Rightarrow B$, akkor $r_n(A) \leq r_n(B)$.

Valószínűségi mező

Legyen Ω egy nemüres halmaz, az eseménytér, $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ pedig (Ω bizonyos részhalmazaiból álló) eseményalgebra.

Definíció

Tekintsünk egy $P\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre

1. $P(A) \geq 0$, tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esetén;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. ha $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ egymást páronként kizáró események, akkor

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} (P(A_i)).$$

   Ez a valószínűség σ-additivitása.

Ekkor P-t valószínűségnek vagy valószínűségi függvénynek, $P(A)$-t pedig az A esemény valószínűségének mondjuk.
Az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármast valószínűségi mezőnek hívjuk.

A valószínűség további tulajdonságai

Tétel

Tekintsünk egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt. A P valószínűségi függvény rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal.

- $P(\emptyset) = 0$.
- P (végesen) additív, azaz ha $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ páronként diszjunktak, akkor

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- P monoton: ha $A \Rightarrow B$ (azaz $A \subset B$), akkor $P(A) \leq P(B)$.
- Tetszőleges A és B események esetén

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Diszkrét valószínűségi mező

Definíció

Az Ω eseményteret, valamint az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt diszkrétnek mondjuk, ha Ω megszámlálható halmaz, tehát véges: $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, vagy megszámlálhatóan végtelen: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, továbbá $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$.

Állítás és definíció

Diszkrét valószínűségi mezőben a

$$p_i := P(\{\omega_i\}), \quad i = 1, 2, \ldots$$

számok (azaz az elemi események valószínűségei) egyértelműen meghatározzák a P valószínűségi függvényt.
Ekkor a fenti valószínűségek nemnegatívak: $p_i \geq 0$, és összegük 1, hiszen

$$\sum_i p_i = \sum_i P(\{\omega_i\}) = P\left(\sum_i \{\omega_i\}\right) = P(\Omega) = 1.$$

Ekkor a $\{p_1, p_2, \ldots\}$ számok eloszlást alkotnak.

Példa: szabályos, ill. „szabálytalan” dobókocka esete.

Klasszikus valószínűségi mező

Definíció

Az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező klasszikus valószínűségi mező, ha Ω véges, azaz

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\},$$

$\mathcal{A} = 2^\Omega$, továbbá minden elemi esemény egyenlően valószínű.

Ekkor a valószínűségi függvény tulajdonságai miatt

$$P(\omega_i) := P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Állítás

Klasszikus valószínűségi mezőben egy k elemű A esemény valószínűsége kiszámítható a

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}}$$

képlettel, ahol $n = |\Omega|$.

Geometriai valószínűségi mező

Ha az eseményteret $\mathbb{R}^n$ egy véges részhalmazával tudjuk beazonosítani, az elemi események pedig „egyenletesen oszlanak el” ezen a halmazon, akkor geometriai valószínűségi mezőről beszélünk.

Állítás

Geometriai valószínűségi mezőben egy $A \subset \Omega$ halmaz valószínűsége A mértékével arányos, azaz

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

ahol μ a halmaz mértékét jelöli, tehát például

- $n = 1$ dimenzió esetén μ a hossz,
- $n = 2$ dimenzió esetén μ a terület,
- $n = 3$ dimenzió esetén μ a térfogat.

Példa: Egy 1 méter hosszú rudat találomra kettétörünk. Mekkora a valószínűsége, hogy a 2 kapott darabból, valamint egy fél méter hosszúságú rúdból egy háromszöget tudunk összerakni?

Feltételes valószínűség

Tekintsünk egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt, valamint ebben egy pozitív valószínűségű B eseményt:

$$B \in \mathcal{A}, \quad P(B) > 0.$$

Ha tudjuk, hogy B bekövetkezett, az módosíthatja a következtetéseinket az adott valószínűségi mezőben.

Példa: Tekintsük a szabályos dobókockával történő kockadobás kísérletét. Legyen A az az esemény, hogy párosat dobunk, B pedig az, hogy 3-nál nagyobbat dobunk. Mivel egyenlő A valószínűsége, és ez hogyan változik, ha tudjuk, hogy B bekövetkezett?

Definíció

Az A esemény feltételes valószínűsége a B feltétel mellett (tehát ha tudjuk, hogy B bekövetkezett)

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \qquad \text{ha } P(B) > 0.$$

A feltételes valószínűség láncszabálya

Állítás

Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ olyanok, hogy $P(A_1 A_2 \ldots A_n) > 0$. Ekkor

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \ldots P(A_n|A_1 \ldots A_{n-1}).$$

Példa: Egy követségi fogadásra 5 angol, 8 német és 3 japán diplomata hivatalos. Egyenként érkeznek, véletlenszerű időpontban. Mennyi a valószínűsége annak, hogy elsőként angol, másodikként német, harmadikként japán diplomata érkezik meg a fogadásra?

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha pozitív valószínűségűek, az eseménytér egy diszjunkt felbontását alkotják, azaz egymást páronként kizárják, és összegük a teljes eseménytér.

Egy teljes eseményrendszer tagjai közül tehát mindig pontosan egy következik be.

A teljes valószínűség tétele

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ teljes eseményrendszer: az Ω eseménytér egy diszjunkt lefedése

Tétel – teljes valószínűség tétele

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező és tekintsünk egy $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ teljes eseményrendszert. Ekkor tetszőleges B esemény esetén

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i).$$

Példa: Három termelőtől almát szállítanak egy üzletbe. Az első termelőtől származik a mennyiség fele, melyből 40% elsőosztályú. A második termelőtől szállítják a tétel 30%-át, amely 2/3 részben elsőosztályú. A többi gyümölcs a harmadik termelőtől kerül az üzletbe, és mind elsőosztályú. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az üzletben e szállítmányból találomra kiválasztva egy almát, az elsőosztályú?

Bayes-tétel

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező.

Tétel – Bayes-formula

Ha A és B tetszőleges, pozitív valószínűségű események, akkor

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$$

Tétel – Bayes-tétel

Tekintsünk egy $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ teljes eseményrendszert, valamint egy pozitív valószínűségű B eseményt: $P(B) > 0$. Ekkor

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{\sum_i P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$$

Példa: Tekintsük a korábbi „almás” feladatot. Kiderül, hogy a találomra kiválasztott alma elsőosztályú. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ez az alma az első, a második, ill. a harmadik termelőtől került az üzletbe?

Teljes valószínűség tétele és a Bayes-tétel

Példa: Egy tesztrendszerű vizsgánál minden kérdéshez 4 válasz van megadva, amelyek közül csak egy a helyes. A vizsgázónak ezt a lapot kell kitölteni a helyesnek vélt válasz megjelölésével. Tegyük fel, hogy egy vizsgázó p valószínűséggel tudja a helyes választ ($p \in [0, 1]$). Ha nem tudja a választ, akkor véletlenszerűen (azaz $\frac{1}{4}$ valószínűséggel) jelöli meg a 4 lehetséges válasz közül az egyiket. Tekintsünk egy rögzített kérdést.

- Mennyi a valószínűsége, hogy a vizsgázó helyesen válaszol?
- A vizsgalap átnézése során kiderül, hogy helyes a válasz. Mennyi a valószínűsége, hogy a vizsgázó azért adott helyes választ, mert tudta a helyes eredményt?

Események függetlensége

Tekintsük az A és B eseményeket, és tegyük fel, hogy $P(B) > 0$. Az A esemény akkor nem függ B-től, ha

$$P(A) = P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Definíció

Azt mondjuk, hogy az A és B események függetlenek, ha

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Ha az A és B események pozitív valószínűségűek, akkor az alábbiak ekvivalensek:

- A és B függetlenek;
- $P(A) = P(A|B)$;
- $P(B) = P(B|A)$.

Feladat: A szabályos dobókockával történő kockadobás kísérlete esetén mondjuk példát független és nem független eseményekre!

A lehetetlen, valamint a biztos esemény minden eseménytől független.

Kettőnél több esemény függetlensége

Definíció

- Az $A_1, A_2, \ldots$ események páronként függetlenek, ha közülük bármely két esemény független.
- Az $A_1, A_2, \ldots$ események (teljesen) függetlenek, ha tetszőleges $i_1, i_2, \ldots i_k$ indexek esetén

$$P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_k}).$$

Három esemény, pl. A, B, C esetén a teljes függetlenség:

$$P(AB) = P(A)P(B), \quad P(AC) = P(A)P(C), \quad P(BC) = P(B)P(C),$$
$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

Megjegyzés

A teljes függetlenségből következik a páronkénti függetlenség, azonban ez fordítva nem igaz: dobjunk fel két pénzérmét, és legyen $A = \{\text{első érmével fejet dobunk}\}$, $B = \{\text{másodikkal írást dobunk}\}$, $C = \{\text{mindkét érmével fejet, vagy mindkettővel írást dobunk}\}$. Ekkor A, B és C páronként függetlenek, azonban teljesen nem.

Valószínűségi változók

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező.

Definíció

A $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ függvény valószínűségi változó, ha tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}.$$

(Azaz, a $(-\infty, x)$ alakú intervallumok ξ általi inverzképe esemény, tehát létezik a valószínűsége.)

Definíció

Legyen ξ valószínűségi változó az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Ennek eloszlásfüggvénye alatt az

$$F_\xi\colon \mathbb{R} \to [0, 1],\ x \mapsto F_\xi(x) := P(\xi < x)$$

függvényt értjük.

Az eloszlásfüggvény

$$F_\xi : \mathbb{R} \to [0,1],\ x \mapsto F_\xi(x) := P(\xi < x)$$

Példa: Dobjunk fel egy szabályos dobókockát! Tegyük fel, hogy

- 1000 Ft-ot nyerünk, ha 6-ost dobunk;
- 500 Ft-ot veszítünk, ha 1-est dobunk;
- 100 Ft-ot veszítünk az összes többi esetben.

Jelölje ξ a nyereményünket. Adjuk meg ξ eloszlásfüggvényét!

Tétel – az eloszlásfüggvények tulajdonságai

Egy $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ függvény pontosan akkor eloszlásfüggvénye valamely $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változónak, ha

- monoton növekvő;
- balról folytonos;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Megj.: két különböző valószínűségi változónak lehet azonos az eloszlásfüggvénye.

Diszkrét valószínűségi változók

Definíció

A $\xi \colon \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó diszkrét, ha értékkészlete megszámlálható.

Példák:

1. Az előző dián szereplő példa. Itt ξ értékkészlete véges.
2. Dobáljunk addig egy dobókockát, amíg az első 6-os dobás be nem következik. Jelölje ξ a szükséges dobások számát. Ekkor ξ értékkészlete megszámlálhatóan végtelen.

Definíció

A ξ diszkrét valószínűségi változó eloszlása az a P_ξ függvény a ξ lehetséges értékeinek $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ halmazán, melyre

$$P_\xi(x_i) = P(\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) = x_i), \quad x_i \in X.$$

Egy diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye olyan lépcsős függvény, mely ξ értékkészletének x_i elemeinél $P(\xi = x_i)$ mennyiséget ugrik felfelé.

Nevezetes diszkrét eloszlások – Binomiális eloszlás

Egy dobozban N golyó van, M db kék és $N-M$ db zöld. Visszatevéssel húzzunk ki n golyót. Jelölje ξ a kihúzott kék golyók számát. Ekkor

$$\xi \text{ értékkészlete: } \{0,1,2,\dots,n\},$$

továbbá

$$P(\xi=k) := P(\omega\in\Omega \mid \xi(\omega)=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k}.$$

Itt $\frac{M}{N}\in(0,1)$ az egyszeri kék golyó kihúzásának a valószínűsége.

Definíció

Legyen $p\in(0,1)$, $n\in\mathbb{N}$. Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó n-edrendű, p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó, ha értékkészlete $\{0,1,2,\dots,n\}$, és

$$P(\xi=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

ξ-t ebben az esetben n és p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változónak is hívjuk. Jelölés: $\xi\sim\mathrm{Bin}(n,p)$.

Binomiális eloszlás, Bernoulli-eloszlás

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Ha azt vizsgáljuk, hogy egy kísérlet n független ismétlése esetén egy rögzített esemény hányszor következik be, akkor binomiális eloszláshoz jutunk. Speciálisan, $n = 1$ választással kapjuk a Bernoulli-eloszlást.

Definíció

Legyen $p \in (0, 1)$. Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó *p paraméterű Bernoulli-eloszlású valószínűségi változó*, ha értékkészlete $\{0, 1\}$, és

$$P(\xi = 1) = p \qquad P(\xi = 0) = 1 - p.$$

Állítás

Egy n-edrendű, p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó felírható n darab p paraméterű Bernoulli-eloszlású valószínűségi változó összegeként.

Hipergeometrikus eloszlás

Egy dobozban N golyó van, M db kék és $N-M$ db zöld. Visszatevés nélkül húzzunk ki n golyót ($n \leq N$). Jelölje ξ a kihúzott kék golyók számát. Ekkor

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

ahol az értékkészlet elemei olyan k értékek, melyekre

$$0 \leq k \leq n, \ k \leq M \text{ és } n-k \leq N-M.$$

Definíció

Ha a ξ valószínűségi változó eloszlása a fenti alakú, akkor $(n, M, N-M)$ paraméterű hipergeometrikus eloszlásúnak mondjuk.

Példa: 50 termékből, melyek között 5 selejtes található, találomra kiválasztunk ötöt.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy ezek között 2 selejtest találunk, ha a mintavétel visszatevéssel történik?

(b) Megváltozik-e az előbbi valószínűség, ha 100 termékből történik a mintavétel, változatlan selejtarány mellett?

(c) Oldjuk meg a feladatot visszatevés nélküli mintavétel esetén is!

Negatív binomiális eloszlás, geometriai eloszlás

Tekintsünk egy kísérletet, ebben egy p valószínűségű A eseményt. Ismételjük a kísérletet addig, amíg A r-szer be nem következik. Jelölje ξ a szükséges kísérletek számát. Ekkor ξ eloszlása ún. negatív binomiális eloszlású:

Definíció

Legyen $p \in (0,1)$, $r \in \mathbb{N}$. Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó r-edrendű, p paraméterű negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó, ha értékkészlete $\{r, r+1, r+2, \dots\}$, és

$$P(\xi = k + r) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

Speciális eset: $r = 1$, tehát az esemény első bekövetkezését figyeljük.

Definíció

Legyen $p \in (0,1)$. Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó p paraméterű geometriai eloszlású (vagy elsőrendű negatív binomiális) valószínűségi változó, ha értékkészlete $\{1, 2, \dots\}$, és

$$P(\xi = k + 1) = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

Poisson-eloszlás

Definíció

Legyen $\lambda > 0$. Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó λ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó, ha értékkészlete $\{0, 1, 2, \dots\}$, és
$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Példa: ha $\lambda = 3$, akkor

$$P(\xi = 0) = 0.0498 \quad P(\xi = 2) = 0.2240 \quad P(\xi = 4) = 0.1680$$
$$P(\xi = 1) = 0.1494 \quad P(\xi = 3) = 0.2240 \quad P(\xi = 5) = 0.1008$$

- A $P(\xi = k)$ valószínűségek növekvőek, amíg k eléri $[\lambda]$-t, utána csökkenőek. (Ha λ egész szám, akkor két maximum érték van.)
- A sorösszeg kiszámolásával ellenőrizhető, hogy
$$\sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = 1.$$

Példa: egy boltban egy időegység alatt bekövetkező vásárlások száma Poisson-eloszlású, ahol a λ paraméter éppen az időegység alatti vásárlások átlagos értéke.

Diszkrét valószínűségi változók várható értéke

Diszkrét valószínűségi változók várható értéke

Definíció

Tekintsünk egy $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változót, legyen ennek értékkészlete $\{x_1, x_2, \dots\}$. Az

$$\mathbb{E}\xi = \sum_k x_k \cdot P(\xi = x_k)$$

mennyiséget ξ várható értékének nevezzük,

Diszkrét valószínűségi változók várható értéke

Definíció

Tekintsünk egy $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változót, legyen ennek értékkészlete $\{x_1, x_2, \dots\}$. Az

$$\mathbb{E}\xi = \sum_k x_k \cdot P(\xi = x_k)$$

mennyiséget ξ várható értékének nevezzük, amennyiben ez a sor abszolút konvergens, azaz $\sum_k |x_k| \cdot P(\xi = x_k) < \infty$.

Diszkrét valószínűségi változók várható értéke

Definíció

Tekintsünk egy $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változót, legyen ennek értékkészlete $\{x_1, x_2, \dots\}$. Az

$$\mathbb{E}\xi = \sum_k x_k \cdot P(\xi = x_k)$$

mennyiséget ξ várható értékének nevezzük, amennyiben ez a sor abszolút konvergens, azaz $\sum_k |x_k| \cdot P(\xi = x_k) < \infty$.

A várható érték tehát a valószínűségi változók által felvett értékek súlyozott számtani közepe (átlaga), a súlyok éppen a felvételi valószínűségek.

Diszkrét valószínűségi változók várható értéke

Definíció

Tekintsünk egy $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változót, legyen ennek értékkészlete $\{x_1, x_2, \dots\}$. Az

$$\mathbb{E}\xi = \sum_k x_k \cdot P(\xi = x_k)$$

mennyiséget ξ várható értékének nevezzük, amennyiben ez a sor abszolút konvergens, azaz $\sum_k |x_k| \cdot P(\xi = x_k) < \infty$.

A várható érték tehát a valószínűségi változók által felvett értékek súlyozott számtani közepe (átlaga), a súlyok éppen a felvételi valószínűségek.

Példák:

- A szabályos dobókockával történő kockadobás kísérlete esetén mi a dobás eredményének várható értéke?

Diszkrét valószínűségi változók várható értéke

Definíció

Tekintsünk egy $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változót, legyen ennek értékkészlete $\{x_1, x_2, \dots\}$. Az

$$\mathbb{E}\xi = \sum_k x_k \cdot P(\xi = x_k)$$

mennyiséget ξ várható értékének nevezzük, amennyiben ez a sor abszolút konvergens, azaz $\sum_k |x_k| \cdot P(\xi = x_k) < \infty$.

A várható érték tehát a valószínűségi változók által felvett értékek súlyozott számtani közepe (átlaga), a súlyok éppen a felvételi valószínűségek.

Példák:

- A szabályos dobókockával történő kockadobás kísérlete esetén mi a dobás eredményének várható értéke?
- Egy játékos a pénzfeldobás „szerencsejáték” esetén úgy játszik, hogy mindig az írásra fogad. Ha nem nyer, duplázza a tétet, és az első nyerésnél abbahagyja a játékot. Mennyi a nyereményének a várható értéke?

A várható érték tulajdonságai

Állítás – a várható érték tulajdonságai

A várható érték tulajdonságai

Állítás – a várható érték tulajdonságai

Legyenek ξ és η valószínűségi változók, amelyeknek létezik a várható értékük, továbbá $a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor

- $\mathbb{E}(a\xi) = a \cdot \mathbb{E}\xi$, azaz a várható érték homogén;

A várható érték tulajdonságai

Állítás – a várható érték tulajdonságai

Legyenek ξ és η valószínűségi változók, amelyeknek létezik a várható értékük, továbbá $a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor

- $\mathbb{E}(a\xi) = a \cdot \mathbb{E}\xi$, azaz a várható érték homogén;
- $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$, azaz a várható érték additív;

A várható érték tulajdonságai

Állítás – a várható érték tulajdonságai

Legyenek ξ és η valószínűségi változók, amelyeknek létezik a várható értékük, továbbá $a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor

- $\mathbb{E}(a\xi) = a \cdot \mathbb{E}\xi$, azaz a várható érték homogén;
- $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$, azaz a várható érték additív;
- $\mathbb{E}(a\xi + b\eta) = a \cdot \mathbb{E}\xi + b \cdot \mathbb{E}\eta$, azaz a várható érték lineáris;

A várható érték tulajdonságai

Állítás – a várható érték tulajdonságai

Legyenek ξ és η valószínűségi változók, amelyeknek létezik a várható értékük, továbbá $a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor

- $\mathbb{E}(a\xi) = a \cdot \mathbb{E}\xi$, azaz a várható érték homogén;
- $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$, azaz a várható érték additív;
- $\mathbb{E}(a\xi + b\eta) = a \cdot \mathbb{E}\xi + b \cdot \mathbb{E}\eta$, azaz a várható érték lineáris;
- ha $\xi \leq \eta$, akkor $\mathbb{E}\xi \leq \mathbb{E}\eta$, azaz a várható érték monoton;

A várható érték tulajdonságai

Állítás – a várható érték tulajdonságai

Legyenek ξ és η valószínűségi változók, amelyeknek létezik a várható értékük, továbbá $a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor

- $\mathbb{E}(a\xi) = a \cdot \mathbb{E}\xi$, azaz a várható érték homogén;
- $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$, azaz a várható érték additív;
- $\mathbb{E}(a\xi + b\eta) = a \cdot \mathbb{E}\xi + b \cdot \mathbb{E}\eta$, azaz a várható érték lineáris;
- ha $\xi \leq \eta$, akkor $\mathbb{E}\xi \leq \mathbb{E}\eta$, azaz a várható érték monoton;
- $|\mathbb{E}\xi| \leq \mathbb{E}|\xi|$.

A várható érték tulajdonságai

Állítás – a várható érték tulajdonságai

Legyenek ξ és η valószínűségi változók, amelyeknek létezik a várható értékük, továbbá $a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor

- $\mathbb{E}(a\xi) = a \cdot \mathbb{E}\xi$, azaz a várható érték homogén;
- $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$, azaz a várható érték additív;
- $\mathbb{E}(a\xi + b\eta) = a \cdot \mathbb{E}\xi + b \cdot \mathbb{E}\eta$, azaz a várható érték lineáris;
- ha $\xi \leq \eta$, akkor $\mathbb{E}\xi \leq \mathbb{E}\eta$, azaz a várható érték monoton;
- $|\mathbb{E}\xi| \leq \mathbb{E}|\xi|$.

Tétel – valószínűségi változó függvényének várható értéke

A várható érték tulajdonságai

Állítás – a várható érték tulajdonságai

Legyenek ξ és η valószínűségi változók, amelyeknek létezik a várható értékük, továbbá $a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor

- $\mathbb{E}(a\xi) = a \cdot \mathbb{E}\xi$, azaz a várható érték homogén;
- $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$, azaz a várható érték additív;
- $\mathbb{E}(a\xi + b\eta) = a \cdot \mathbb{E}\xi + b \cdot \mathbb{E}\eta$, azaz a várható érték lineáris;
- ha $\xi \leq \eta$, akkor $\mathbb{E}\xi \leq \mathbb{E}\eta$, azaz a várható érték monoton;
- $|\mathbb{E}\xi| \leq \mathbb{E}|\xi|$.

Tétel – valószínűségi változó függvényének várható értéke

Tekintsünk egy ξ diszkrét valószínűségi változót, amelynek értékkészlete $\{x_1, x_2, \dots\}$, valamint egy $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt. Ekkor $g(\xi)$ is diszkrét valószínűségi változó, amelynek várható értéke

A várható érték tulajdonságai

Állítás – a várható érték tulajdonságai

Legyenek ξ és η valószínűségi változók, amelyeknek létezik a várható értékük, továbbá $a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor

- $\mathbb{E}(a\xi) = a \cdot \mathbb{E}\xi$, azaz a várható érték homogén;
- $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$, azaz a várható érték additív;
- $\mathbb{E}(a\xi + b\eta) = a \cdot \mathbb{E}\xi + b \cdot \mathbb{E}\eta$, azaz a várható érték lineáris;
- ha $\xi \leq \eta$, akkor $\mathbb{E}\xi \leq \mathbb{E}\eta$, azaz a várható érték monoton;
- $|\mathbb{E}\xi| \leq \mathbb{E}|\xi|$.

Tétel – valószínűségi változó függvényének várható értéke

Tekintsünk egy ξ diszkrét valószínűségi változót, amelynek értékkészlete $\{x_1, x_2, \dots\}$, valamint egy $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt. Ekkor $g(\xi)$ is diszkrét valószínűségi változó, amelynek várható értéke

$$\mathbb{E}g(\xi) = \sum_k g(x_k) \cdot P(\xi = x_k),$$

amennyiben ez a mennyiség létezik (azaz a sor abszolút konvergens).

Diszkrét valószínűségi változók szórása, szórásnégyzete

Tekintsünk 2 szerencsejátékot! Feldobunk egy szabályos pénzérmét.

1. Ha az eredmény fej, nyerünk 2000 Ft-ot, ha írás, veszítünk 1000 Ft-ot.
2. Ha az eredmény fej, nyerünk 1 millió Ft-ot, ha írás, veszítünk 999 ezer Ft-ot.

Melyiket „érdemes” választani?

Diszkrét valószínűségi változók szórása, szórásnégyzete

Tekintsünk 2 szerencsejátékot! Feldobunk egy szabályos pénzérmét.

1. Ha az eredmény fej, nyerünk 2000 Ft-ot, ha írás, veszítünk 1000 Ft-ot.
2. Ha az eredmény fej, nyerünk 1 millió Ft-ot, ha írás, veszítünk 999 ezer Ft-ot.

Melyiket „érdemes” választani?

Definíció

Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó véges várható értékkel, legyen $m := \mathbb{E}\xi$. A

$$\mathbb{D}^2\xi := \mathbb{E}(\xi - m)^2$$

mennyiséget, amennyiben létezik, ξ szórásnégyzetének vagy varianciájának nevezzük.

Diszkrét valószínűségi változók szórása, szórásnégyzete

Tekintsünk 2 szerencsejátékot! Feldobunk egy szabályos pénzérmét.

1. Ha az eredmény fej, nyerünk 2000 Ft-ot, ha írás, veszítünk 1000 Ft-ot.
2. Ha az eredmény fej, nyerünk 1 millió Ft-ot, ha írás, veszítünk 999 ezer Ft-ot.

Melyiket „érdemes” választani?

Definíció

Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó véges várható értékkel, legyen $m := \mathbb{E}\xi$. A

$$\mathbb{D}^2\xi := \mathbb{E}(\xi - m)^2$$

mennyiséget, amennyiben létezik, ξ *szórásnégyzeté*nek vagy *varianciájá*nak nevezzük. Másik jelölés: $\mathrm{Var}(\xi)$.

Diszkrét valószínűségi változók szórása, szórásnégyzete

Tekintsünk 2 szerencsejátékot! Feldobunk egy szabályos pénzérmét.

1. Ha az eredmény fej, nyerünk 2000 Ft-ot, ha írás, veszítünk 1000 Ft-ot.
2. Ha az eredmény fej, nyerünk 1 millió Ft-ot, ha írás, veszítünk 999 ezer Ft-ot.

Melyiket „érdemes" választani?

Definíció

Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó véges várható értékkel, legyen $m := \mathbb{E}\xi$. A

$$\mathbb{D}^2\xi := \mathbb{E}(\xi - m)^2$$

mennyiséget, amennyiben létezik, ξ szórásnégyzetének vagy varianciájának nevezzük. Másik jelölés: Var(ξ). Ennek pozitív négyzetgyöke,

$$\mathbb{D}\xi := \sqrt{\mathbb{D}^2\xi}$$

a szórás.

Diszkrét valószínűségi változók szórása, szórásnégyzete

Tekintsünk 2 szerencsejátékot! Feldobunk egy szabályos pénzérmét.

1. Ha az eredmény fej, nyerünk 2000 Ft-ot, ha írás, veszítünk 1000 Ft-ot.
2. Ha az eredmény fej, nyerünk 1 millió Ft-ot, ha írás, veszítünk 999 ezer Ft-ot.

Melyiket „érdemes” választani?

Definíció

Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó véges várható értékkel, legyen $m := \mathbb{E}\xi$. A

$$\mathbb{D}^2\xi := \mathbb{E}(\xi - m)^2$$

mennyiséget, amennyiben létezik, ξ szórásnégyzetének vagy varianciájának nevezzük. Másik jelölés: $\mathrm{Var}(\xi)$. Ennek pozitív négyzetgyöke,

$$\mathbb{D}\xi := \sqrt{\mathbb{D}^2\xi}$$

a szórás.

Szórásnégyzet: a valószínűségi változó értékeinek a várható értéktől való átlagos négyzetes eltérése. ξ ingadozásának mérőszáma.

A szórásnégyzet tulajdonságai

Állítás – a szórásnégyzet kiszámítása

A szórásnégyzet tulajdonságai

Állítás – a szórásnégyzet kiszámítása

Ha ξ szórásnégyzete véges, akkor ez számolható az alábbi képlettel:

$$\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{E}\xi^2 - \mathbb{E}^2\xi.$$

A szórásnégyzet tulajdonságai

Állítás – a szórásnégyzet kiszámítása

Ha ξ szórásnégyzete véges, akkor ez számolható az alábbi képlettel:

$$\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{E}\xi^2 - \mathbb{E}^2\xi.$$

Tehát ha ξ diszkrét valószínűségi változó, amelynek értékkészlete $\{x_1, x_2, \dots\}$, akkor

$$\mathbb{D}^2\xi = \sum_k x_k^2 \cdot P(\xi = x_k) - \left(\sum_k x_k \cdot P(\xi = x_k)\right)^2.$$

A szórásnégyzet tulajdonságai

Állítás – a szórásnégyzet kiszámítása

Ha ξ szórásnégyzete véges, akkor ez számolható az alábbi képlettel:

$$\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{E}\xi^2 - \mathbb{E}^2\xi.$$

Tehát ha ξ diszkrét valószínűségi változó, amelynek értékkészlete $\{x_1, x_2, \dots\}$, akkor

$$\mathbb{D}^2\xi = \sum_k x_k^2 \cdot P(\xi = x_k) - \left(\sum_k x_k \cdot P(\xi = x_k)\right)^2.$$

Állítás – a szórásnégyzet tulajdonságai

Legyen ξ valószínűségi változó véges szórással, $a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor

- $\mathbb{D}^2\xi \geq 0$;

A szórásnégyzet tulajdonságai

Állítás – a szórásnégyzet kiszámítása

Ha ξ szórásnégyzete véges, akkor ez számolható az alábbi képlettel:

$$\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{E}\xi^2 - \mathbb{E}^2\xi.$$

Tehát ha ξ diszkrét valószínűségi változó, amelynek értékkészlete $\{x_1, x_2, \ldots\}$, akkor

$$\mathbb{D}^2\xi = \sum_k x_k^2 \cdot P(\xi = x_k) - \left(\sum_k x_k \cdot P(\xi = x_k)\right)^2.$$

Állítás – a szórásnégyzet tulajdonságai

Legyen ξ valószínűségi változó véges szórással, $a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor

- $\mathbb{D}^2\xi \geq 0$;
- $\mathbb{D}^2(a\xi) = a^2\mathbb{D}^2\xi$;

A szórásnégyzet tulajdonságai

Állítás – a szórásnégyzet kiszámítása

Ha ξ szórásnégyzete véges, akkor ez számolható az alábbi képlettel:

$$\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{E}\xi^2 - \mathbb{E}^2\xi.$$

Tehát ha ξ diszkrét valószínűségi változó, amelynek értékkészlete $\{x_1, x_2, \dots\}$, akkor

$$\mathbb{D}^2\xi = \sum_k x_k^2 \cdot P(\xi = x_k) - \left(\sum_k x_k \cdot P(\xi = x_k)\right)^2.$$

Állítás – a szórásnégyzet tulajdonságai

Legyen ξ valószínűségi változó véges szórással, $a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor

- $\mathbb{D}^2\xi \geq 0$;
- $\mathbb{D}^2(a\xi) = a^2\mathbb{D}^2\xi$;
- $\mathbb{D}^2(\xi + b) = \mathbb{D}^2\xi$.

Nevezetes diszkrét eloszlások várható értéke, szórásnégyzete

Nevezetes diszkrét eloszlások várható értéke, szórásnégyzete

- binomiális eloszlás:

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np$$

Nevezetes diszkrét eloszlások várható értéke, szórásnégyzete

- binomiális eloszlás:

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np$$

$$\mathbb{D}^2\xi = np(1-p)$$

Nevezetes diszkrét eloszlások várható értéke, szórásnégyzete

- binomiális eloszlás:

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np$$

$$\mathbb{D}^2\xi = np(1-p)$$

- hipergeometrikus eloszlás: $\mathbb{E}\xi = \frac{nM}{N}$

Nevezetes diszkrét eloszlások várható értéke, szórásnégyzete

- binomiális eloszlás:

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np$$

$$\mathbb{D}^2\xi = np(1-p)$$

- hipergeometrikus eloszlás: $\mathbb{E}\xi = \frac{nM}{N}$

$$\mathbb{D}^2\xi = n \cdot \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)$$

Nevezetes diszkrét eloszlások várható értéke, szórásnégyzete

- binomiális eloszlás:

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np$$

$$\mathbb{D}^2\xi = np(1-p)$$

- hipergeometrikus eloszlás: $\mathbb{E}\xi = \frac{nM}{N}$

$$\mathbb{D}^2\xi = n \cdot \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)$$

- negatív binomiális eloszlás: $\mathbb{E}\xi = \frac{r}{p}$

Nevezetes diszkrét eloszlások várható értéke, szórásnégyzete

- binomiális eloszlás:

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np$$

$$\mathbb{D}^2\xi = np(1-p)$$

- hipergeometrikus eloszlás: $\mathbb{E}\xi = \frac{nM}{N}$

$$\mathbb{D}^2\xi = n \cdot \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right)$$

- negatív binomiális eloszlás: $\mathbb{E}\xi = \frac{r}{p}$

$$\mathbb{D}^2\xi = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Nevezetes diszkrét eloszlások várható értéke, szórásnégyzete

- binomiális eloszlás:

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np$$

$$\mathbb{D}^2\xi = np(1-p)$$

- hipergeometrikus eloszlás: $\mathbb{E}\xi = \frac{nM}{N}$

$$\mathbb{D}^2\xi = n \cdot \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right)$$

- negatív binomiális eloszlás: $\mathbb{E}\xi = \frac{r}{p}$

$$\mathbb{D}^2\xi = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

- Poisson-eloszlás: $\mathbb{E}\xi = \lambda$, $\mathbb{D}^2\xi = \lambda$.

Folytonos valószínűségi változók

Valószínűségi változó: $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ függvény, $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}, \qquad \text{azaz } \xi^{-1}(-\infty, x) \text{ esemény.}$$

Folytonos valószínűségi változók

Valószínűségi változó: $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ függvény, $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}, \quad \text{azaz } \xi^{-1}(-\infty, x) \text{ esemény.}$$

Eloszlásfüggvény: $F_\xi\colon \mathbb{R} \to [0,1]$, $x \mapsto F_\xi(x) := P(\xi < x)$

Folytonos valószínűségi változók

Valószínűségi változó: $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ függvény, $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}, \qquad \text{azaz } \xi^{-1}(-\infty, x) \text{ esemény.}$$

Eloszlásfüggvény: $F_\xi\colon \mathbb{R} \to [0,1]$, $x \mapsto F_\xi(x) := P(\xi < x)$

Definíció

Tekintsünk egy ξ valószínűségi változót F eloszlásfüggvénnyel. Ha létezik olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (mérhető) függvény, melyre

Folytonos valószínűségi változók

Valószínűségi változó: $\xi \colon \Omega \to \mathbb{R}$ függvény, $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}, \qquad \text{azaz } \xi^{-1}(-\infty, x) \text{ esemény.}$$

Eloszlásfüggvény: $F_\xi \colon \mathbb{R} \to [0,1]$, $x \mapsto F_\xi(x) := P(\xi < x)$

Definíció

Tekintsünk egy ξ valószínűségi változót F eloszlásfüggvénnyel. Ha létezik olyan $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (mérhető) függvény, melyre

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

akkor ezt az f függvényt ξ sűrűségfüggvényének nevezzük, ξ-ről pedig azt mondjuk, hogy eloszlása abszolút folytonos, vagy folytonos valószínűségi változó.

Folytonos valószínűségi változók

Valószínűségi változó: $\xi \colon \Omega \to \mathbb{R}$ függvény, $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}, \qquad \text{azaz } \xi^{-1}(-\infty, x) \text{ esemény.}$$

Eloszlásfüggvény: $F_\xi \colon \mathbb{R} \to [0,1]$, $x \mapsto F_\xi(x) := P(\xi < x)$

Definíció

Tekintsünk egy ξ valószínűségi változót F eloszlásfüggvénnyel. Ha létezik olyan $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (mérhető) függvény, melyre

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

akkor ezt az f függvényt ξ sűrűségfüggvényének nevezzük, ξ-ről pedig azt mondjuk, hogy eloszlása abszolút folytonos, vagy folytonos valószínűségi változó.

Egy valószínűségi változó lehet diszkrét, folytonos, vagy egyik sem.

A sűrűségfüggvény

Állítás – a sűrűségfüggvény tulajdonságai

A sűrűségfüggvény

Állítás – a sűrűségfüggvény tulajdonságai

Legyen ξ folytonos valószínűségi változó F eloszlás- és f sűrűségfüggvénnyel.

A sűrűségfüggvény

Állítás – a sűrűségfüggvény tulajdonságai

Legyen ξ folytonos valószínűségi változó F eloszlás- és f sűrűségfüggvénnyel. Ekkor

- $f(x) \geq 0$ (majdnem minden) $x \in \mathbb{R}$ esetén;

A sűrűségfüggvény

Állítás – a sűrűségfüggvény tulajdonságai

Legyen ξ folytonos valószínűségi változó F eloszlás- és f sűrűségfüggvénnyel. Ekkor

- $f(x) \geq 0$ (majdnem minden) $x \in \mathbb{R}$ esetén;
- $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1;$$

A sűrűségfüggvény

Állítás – a sűrűségfüggvény tulajdonságai

Legyen ξ folytonos valószínűségi változó F eloszlás- és f sűrűségfüggvénnyel. Ekkor

- $f(x) \geq 0$ (majdnem minden) $x \in \mathbb{R}$ esetén;
- $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1;$$
- ha f folytonos az $x \in \mathbb{R}$ pontban, akkor $F'(x) = f(x)$;

A sűrűségfüggvény

Állítás – a sűrűségfüggvény tulajdonságai

Legyen ξ folytonos valószínűségi változó F eloszlás- és f sűrűségfüggvénnyel. Ekkor

- $f(x) \geq 0$ (majdnem minden) $x \in \mathbb{R}$ esetén;
- $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = 1;$$
- ha f folytonos az $x \in \mathbb{R}$ pontban, akkor $F'(x) = f(x)$;
- ha $a < b$, akkor
$$P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\, dt.$$

A sűrűségfüggvény

Állítás – a sűrűségfüggvény tulajdonságai

Legyen ξ folytonos valószínűségi változó F eloszlás- és f sűrűségfüggvénnyel. Ekkor

- $f(x) \geq 0$ (majdnem minden) $x \in \mathbb{R}$ esetén;
- $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = 1;$$
- ha f folytonos az $x \in \mathbb{R}$ pontban, akkor $F'(x) = f(x)$;
- ha $a < b$, akkor
$$P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Példa. Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 2, \\ \frac{c}{x^3}, & \text{ha } x > 2. \end{cases}$$

Határozzuk meg c értékét!

Példa. Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 2, \\ \frac{c}{x^3}, & \text{ha } x > 2. \end{cases}$$

Határozzuk meg c értékét! Mekkora valószínűséggel esik ξ az $[1, 3]$ intervallumba?

Példa. Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 2, \\ \frac{c}{x^3}, & \text{ha } x > 2. \end{cases}$$

Határozzuk meg c értékét! Mekkora valószínűséggel esik ξ az $[1,3]$ intervallumba? Milyen x érték esetén lesz $P(\xi \geq x) = \frac{1}{2}$?

Folytonos valószínűségi változók tulajdonságai

Állítás

Egy folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye folytonos függvény.

Folytonos valószínűségi változók tulajdonságai

Állítás

Egy folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye folytonos függvény.

Megj.: Diszkrét valószínűségi változóknak nem létezik sűrűségfüggvénye.

Folytonos valószínűségi változók tulajdonságai

Állítás

Egy folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye folytonos függvény.

Megj.: Diszkrét valószínűségi változóknak nem létezik sűrűségfüggvénye.

Állítás

Legyen ξ abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változó. Ekkor tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$P(\xi = x) = 0.$$

Nevezetes folytonos eloszlások – Egyenletes eloszlás

Nevezetes folytonos eloszlások – Egyenletes eloszlás

Ha az $[a, b]$ intervallumra úgy dobunk egy pontot, hogy bármely részintervallumba esés annak hosszával arányos, akkor a ledobott pont nagysága egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon.

Nevezetes folytonos eloszlások – Egyenletes eloszlás

Ha az $[a, b]$ intervallumra úgy dobunk egy pontot, hogy bármely részintervallumba esés annak hosszával arányos, akkor a ledobott pont nagysága egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon.

Definíció

A ξ valószínűségi változót az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlásúnak nevezzük, ha eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{ha } a < x \leq b, \\ 1, & \text{ha } x > b. \end{cases}$$

Nevezetes folytonos eloszlások – Egyenletes eloszlás

Ha az $[a, b]$ intervallumra úgy dobunk egy pontot, hogy bármely részintervallumba esés annak hosszával arányos, akkor a ledobott pont nagysága egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon.

Definíció

A ξ valószínűségi változót az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlásúnak nevezzük, ha eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{ha } a < x \leq b, \\ 1, & \text{ha } x > b. \end{cases}$$

Jele: $\xi \sim \mathcal{U}(a, b)$.

Nevezetes folytonos eloszlások – Egyenletes eloszlás

Ha az $[a, b]$ intervallumra úgy dobunk egy pontot, hogy bármely részintervallumba esés annak hosszával arányos, akkor a ledobott pont nagysága egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon.

Definíció

A ξ valószínűségi változót az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlásúnak nevezzük, ha eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{ha } a < x \leq b, \\ 1, & \text{ha } x > b. \end{cases}$$

Jele: $\xi \sim \mathcal{U}(a, b)$.

Állítás

Ekkor ξ folytonos valószínűségi változó,

Nevezetes folytonos eloszlások – Egyenletes eloszlás

Ha az $[a, b]$ intervallumra úgy dobunk egy pontot, hogy bármely részintervallumba esés annak hosszával arányos, akkor a ledobott pont nagysága egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon.

Definíció

A ξ valószínűségi változót az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlásúnak nevezzük, ha eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{ha } a < x \leq b, \\ 1, & \text{ha } x > b. \end{cases}$$

Jele: $\xi \sim \mathcal{U}(a, b)$.

Állítás

Ekkor ξ folytonos valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Normális eloszlás

Definíció

A ξ valószínűségi változót normális eloszlásúnak nevezzük, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

alakú, ahol $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

Normális eloszlás

Definíció

A ξ valószínűségi változót normális eloszlásúnak nevezzük, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

alakú, ahol $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Jele: $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Normális eloszlás

Definíció

A ξ valószínűségi változót normális eloszlásúnak nevezzük, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

alakú, ahol $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Jele: $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

ξ sűrűségfüggvényének grafikonja: haranggörbe, vagy Gauss-görbe.

Normális eloszlás

Definíció

A ξ valószínűségi változót normális eloszlásúnak nevezzük, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

alakú, ahol $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Jele: $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

ξ sűrűségfüggvényének grafikonja: haranggörbe, vagy Gauss-görbe.

A normális eloszlásfüggvényre nincs zárt formula, értékei csak numerikusan számolhatók.

Normális eloszlás

Definíció

A ξ valószínűségi változót normális eloszlásúnak nevezzük, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

alakú, ahol $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Jele: $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

ξ sűrűségfüggvényének grafikonja: haranggörbe, vagy Gauss-görbe.

A normális eloszlásfüggvényre nincs zárt formula, értékei csak numerikusan számolhatók.

Definíció

A ξ valószínűségi változót standard normális eloszlásúnak nevezzük, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Normális eloszlás

Definíció

A ξ valószínűségi változót normális eloszlásúnak nevezzük, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

alakú, ahol $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Jele: $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

ξ sűrűségfüggvényének grafikonja: haranggörbe, vagy Gauss-görbe.

A normális eloszlásfüggvényre nincs zárt formula, értékei csak numerikusan számolhatók.

Definíció

A ξ valószínűségi változót standard normális eloszlásúnak nevezzük, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ekkor tehát $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Exponenciális eloszlás

Exponenciális eloszlás

Jelölje ξ egy radioaktív atom élettartamát. Ez rendelkezik az ún. örökifjú tulajdonsággal:

Exponenciális eloszlás

Jelölje ξ egy radioaktív atom élettartamát. Ez rendelkezik az ún. örökifjú tulajdonsággal: ha $x, h > 0$, akkor

$$P(\xi \geq x + h \mid \xi \geq x) = P(\xi \geq h).$$

Exponenciális eloszlás

Jelölje ξ egy radioaktív atom élettartamát. Ez rendelkezik az ún. örökifjú tulajdonsággal: ha $x, h > 0$, akkor

$$P(\xi \geq x + h \mid \xi \geq x) = P(\xi \geq h).$$

Belátható, hogy ekkor a folytonos $G(x) := P(\xi \geq x)$ túlélési függvényhez létezik olyan $\lambda > 0$, hogy $G(x) = e^{-\lambda x}$.

Exponenciális eloszlás

Jelölje ξ egy radioaktív atom élettartamát. Ez rendelkezik az ún. örökifjú tulajdonsággal: ha $x, h > 0$, akkor

$$P(\xi \geq x + h \mid \xi \geq x) = P(\xi \geq h).$$

Belátható, hogy ekkor a folytonos $G(x) := P(\xi \geq x)$ túlélési függvényhez létezik olyan $\lambda > 0$, hogy $G(x) = e^{-\lambda x}$.

Definíció

A ξ valószínűségi változót λ paraméterű exponenciális eloszlásúnak nevezzük, ha eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0, \end{cases}$$

ahol $\lambda > 0$ rögzített.

Exponenciális eloszlás

Jelölje ξ egy radioaktív atom élettartamát. Ez rendelkezik az ún. örökifjú tulajdonsággal: ha $x, h > 0$, akkor

$$P(\xi \geq x + h \mid \xi \geq x) = P(\xi \geq h).$$

Belátható, hogy ekkor a folytonos $G(x) := P(\xi \geq x)$ túlélési függvényhez létezik olyan $\lambda > 0$, hogy $G(x) = e^{-\lambda x}$.

Definíció

A ξ valószínűségi változót λ paraméterű exponenciális eloszlásúnak nevezzük, ha eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0, \end{cases}$$

ahol $\lambda > 0$ rögzített.

Állítás

Ekkor ξ folytonos valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

Folytonos valószínűségi változók várható értéke

Folytonos valószínűségi változók várható értéke

Definíció

Tekintsünk egy $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változót f sűrűségfüggvénnyel. Ekkor ξ várható értéke

$$\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx,$$

Folytonos valószínűségi változók várható értéke

Definíció

Tekintsünk egy $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változót f sűrűségfüggvénnyel. Ekkor ξ várható értéke

$$\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx,$$

amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens, azaz $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f(x)\, dx < \infty$.

Folytonos valószínűségi változók várható értéke

Definíció

Tekintsünk egy $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változót f sűrűségfüggvénnyel. Ekkor ξ várható értéke

$$\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx,$$

amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens, azaz $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f(x)\, dx < \infty$.

Példa: Mi az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlás várható értéke?

Folytonos valószínűségi változók várható értéke

Definíció

Tekintsünk egy $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változót f sűrűségfüggvénnyel. Ekkor ξ várható értéke

$$\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx,$$

amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens, azaz $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f(x)\, dx < \infty$.

Példa: Mi az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlás várható értéke?

Állítás – a várható érték tulajdonságai

A várható érték fenti tulajdonságai a folytonos esetben is teljesülnek.

Folytonos valószínűségi változók várható értéke

Definíció

Tekintsünk egy $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változót f sűrűségfüggvénnyel. Ekkor ξ várható értéke

$$\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx,$$

amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens, azaz $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f(x)\, dx < \infty$.

Példa: Mi az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlás várható értéke?

Állítás – a várható érték tulajdonságai

A várható érték fenti tulajdonságai a folytonos esetben is teljesülnek.

Tétel – valószínűségi változó függvényének várható értéke

Folytonos valószínűségi változók várható értéke

Definíció

Tekintsünk egy $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változót f sűrűségfüggvénnyel. Ekkor ξ várható értéke

$$\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx,$$

amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens, azaz $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f(x)\, dx < \infty$.

Példa: Mi az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlás várható értéke?

Állítás – a várható érték tulajdonságai

A várható érték fenti tulajdonságai a folytonos esetben is teljesülnek.

Tétel – valószínűségi változó függvényének várható értéke

Legyen ξ folytonos valószínűségi változó f sűrűségfüggvénnyel, valamint tekintsünk egy $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt.

Folytonos valószínűségi változók várható értéke

Definíció

Tekintsünk egy $\xi \colon \Omega \to \mathbb{R}$ abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változót f sűrűségfüggvénnyel. Ekkor ξ várható értéke

$$\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx,$$

amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens, azaz $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f(x)\, dx < \infty$.

Példa: Mi az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlás várható értéke?

Állítás – a várható érték tulajdonságai

A várható érték fenti tulajdonságai a folytonos esetben is teljesülnek.

Tétel – valószínűségi változó függvényének várható értéke

Legyen ξ folytonos valószínűségi változó f sűrűségfüggvénnyel, valamint tekintsünk egy $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt. Ekkor

$$\mathbb{E}g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)\, dx.$$

Folytonos valószínűségi változók szórása, szórásnégyzete

Definíció

Legyen ξ folytonos valószínűségi változó véges várható értékkel. A

$$\mathbb{D}^2\xi := \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$$

mennyiséget, amennyiben létezik, ξ szórásnégyzetének vagy varianciájának nevezzük.

Folytonos valószínűségi változók szórása, szórásnégyzete

Definíció

Legyen ξ folytonos valószínűségi változó véges várható értékkel. A

$$\mathbb{D}^2\xi := \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$$

mennyiséget, amennyiben létezik, ξ szórásnégyzetének vagy varianciájának nevezzük. Ennek pozitív négyzetgyöke a szórás:

$$\mathbb{D}\xi := \sqrt{\mathbb{D}^2\xi}.$$

Folytonos valószínűségi változók szórása, szórásnégyzete

Definíció

Legyen ξ folytonos valószínűségi változó véges várható értékkel. A

$$\mathbb{D}^2\xi := \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$$

mennyiséget, amennyiben létezik, ξ szórásnégyzetének vagy varianciájának nevezzük. Ennek pozitív négyzetgyöke a szórás:

$$\mathbb{D}\xi := \sqrt{\mathbb{D}^2\xi}.$$

Állítás – a szórásnégyzet kiszámítása

Folytonos valószínűségi változók szórása, szórásnégyzete

Definíció

Legyen ξ folytonos valószínűségi változó véges várható értékkel. A

$$\mathbb{D}^2\xi := \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$$

mennyiséget, amennyiben létezik, ξ szórásnégyzetének vagy varianciájának nevezzük. Ennek pozitív négyzetgyöke a szórás:

$$\mathbb{D}\xi := \sqrt{\mathbb{D}^2\xi}.$$

Állítás – a szórásnégyzet kiszámítása

Ha ξ szórásnégyzete véges, akkor ez számolható az alábbi képlettel:

$$\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{E}\xi^2 - \mathbb{E}^2\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx\right)^2.$$

Folytonos valószínűségi változók szórása, szórásnégyzete

Definíció

Legyen ξ folytonos valószínűségi változó véges várható értékkel. A

$$\mathbb{D}^2\xi := \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$$

mennyiséget, amennyiben létezik, ξ szórásnégyzetének vagy varianciájának nevezzük. Ennek pozitív négyzetgyöke a szórás:

$$\mathbb{D}\xi := \sqrt{\mathbb{D}^2\xi}.$$

Állítás – a szórásnégyzet kiszámítása

Ha ξ szórásnégyzete véges, akkor ez számolható az alábbi képlettel:

$$\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{E}\xi^2 - \mathbb{E}^2\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx\right)^2.$$

Állítás – a szórásnégyzet tulajdonságai

A szórásnégyzet fenti tulajdonságai a folytonos esetben is teljesülnek.

Nevezetes folytonos eloszlások várható értéke, szórásnégyzete

Nevezetes folytonos eloszlások várható értéke, szórásnégyzete

- egyenletes eloszlás: ha $\xi \sim \mathcal{U}(a, b)$, akkor

$$\mathbb{E}\xi = \frac{a+b}{2}$$

Nevezetes folytonos eloszlások várható értéke, szórásnégyzete

- egyenletes eloszlás: ha $\xi \sim \mathcal{U}(a, b)$, akkor

$$\mathbb{E}\xi = \frac{a+b}{2} \qquad \mathbb{D}^2\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Nevezetes folytonos eloszlások várható értéke, szórásnégyzete

- egyenletes eloszlás: ha $\xi \sim \mathcal{U}(a, b)$, akkor

$$\mathbb{E}\xi = \frac{a+b}{2} \qquad \mathbb{D}^2\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- normális eloszlás: ha $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$,

Nevezetes folytonos eloszlások várható értéke, szórásnégyzete

- egyenletes eloszlás: ha $\xi \sim \mathcal{U}(a, b)$, akkor

$$\mathbb{E}\xi = \frac{a+b}{2} \qquad \mathbb{D}^2\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- normális eloszlás: ha $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, akkor $\mathbb{E}\xi = m$, $\mathbb{D}^2\xi = \sigma^2$.

Nevezetes folytonos eloszlások várható értéke, szórásnégyzete

- egyenletes eloszlás: ha $\xi \sim \mathcal{U}(a, b)$, akkor

$$\mathbb{E}\xi = \frac{a+b}{2} \qquad \mathbb{D}^2\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- normális eloszlás: ha $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, akkor $\mathbb{E}\xi = m$, $\mathbb{D}^2\xi = \sigma^2$.
- exponenciális eloszlás:

$$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{\lambda} \qquad \mathbb{D}^2\xi = \frac{1}{\lambda^2}$$

Nevezetes folytonos eloszlások várható értéke, szórásnégyzete

- egyenletes eloszlás: ha $\xi \sim \mathcal{U}(a, b)$, akkor

$$\mathbb{E}\xi = \frac{a+b}{2} \qquad \mathbb{D}^2\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- normális eloszlás: ha $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, akkor $\mathbb{E}\xi = m$, $\mathbb{D}^2\xi = \sigma^2$.
- exponenciális eloszlás:

$$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{\lambda} \qquad \mathbb{D}^2\xi = \frac{1}{\lambda^2}$$

Élettartamok és várakozási idők eloszlása gyakran exponenciális.

Nevezetes folytonos eloszlások várható értéke, szórásnégyzete

- egyenletes eloszlás: ha $\xi \sim \mathcal{U}(a, b)$, akkor

$$\mathbb{E}\xi = \frac{a+b}{2} \qquad \mathbb{D}^2\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- normális eloszlás: ha $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, akkor $\mathbb{E}\xi = m$, $\mathbb{D}^2\xi = \sigma^2$.
- exponenciális eloszlás:

$$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{\lambda} \qquad \mathbb{D}^2\xi = \frac{1}{\lambda^2}$$

Élettartamok és várakozási idők eloszlása gyakran exponenciális.

Példák:

- Alkatrészek élettartama a megfigyelések szerint közelítőleg exponenciális eloszlású.

Nevezetes folytonos eloszlások várható értéke, szórásnégyzete

- egyenletes eloszlás: ha $\xi \sim \mathcal{U}(a, b)$, akkor

$$\mathbb{E}\xi = \frac{a+b}{2} \qquad \mathbb{D}^2\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- normális eloszlás: ha $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, akkor $\mathbb{E}\xi = m$, $\mathbb{D}^2\xi = \sigma^2$.
- exponenciális eloszlás:

$$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{\lambda} \qquad \mathbb{D}^2\xi = \frac{1}{\lambda^2}$$

Élettartamok és várakozási idők eloszlása gyakran exponenciális.

Példák:

- Alkatrészek élettartama a megfigyelések szerint közelítőleg exponenciális eloszlású. Ha egy alkatrész esetén a paraméter λ, akkor az átlagos élettartam $\frac{1}{\lambda}$.

Nevezetes folytonos eloszlások várható értéke, szórásnégyzete

- egyenletes eloszlás: ha $\xi \sim \mathcal{U}(a, b)$, akkor

$$\mathbb{E}\xi = \frac{a+b}{2} \qquad \mathbb{D}^2\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- normális eloszlás: ha $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, akkor $\mathbb{E}\xi = m$, $\mathbb{D}^2\xi = \sigma^2$.
- exponenciális eloszlás:

$$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{\lambda} \qquad \mathbb{D}^2\xi = \frac{1}{\lambda^2}$$

Élettartamok és várakozási idők eloszlása gyakran exponenciális.

Példák:

- Alkatrészek élettartama a megfigyelések szerint közelítőleg exponenciális eloszlású. Ha egy alkatrész esetén a paraméter λ, akkor az átlagos élettartam $\frac{1}{\lambda}$.
- Egy boltban az, hogy mennyit kell várni a következő vásárlóra, exponenciális eloszlású.

Valószínűségi vektorváltozók

Definíció

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók. Ekkor a

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$$

függvényt valószínűségi vektorváltozónak nevezzük.

Valószínűségi vektorváltozók

Definíció

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók. Ekkor a

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$$

függvényt valószínűségi vektorváltozónak nevezzük. Eloszlásfüggvénye:

$$F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ F(x_1, \ldots, x_n) := P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n).$$

Valószínűségi vektorváltozók

Definíció

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók. Ekkor a

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$$

függvényt valószínűségi vektorváltozónak nevezzük. Eloszlásfüggvénye:

$$F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \; F(x_1, \ldots, x_n) := P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n).$$

Definíció

A $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ valószínűségi vektorváltozó diszkrét, ha értékkészlete megszámlálható halmaz $\mathbb{R}^n$-ben.

Valószínűségi vektorváltozók

Definíció

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók. Ekkor a

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$$

függvényt valószínűségi vektorváltozónak nevezzük. Eloszlásfüggvénye:

$$F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ F(x_1, \ldots, x_n) := P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n).$$

Definíció

A $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ valószínűségi vektorváltozó diszkrét, ha értékkészlete megszámlálható halmaz $\mathbb{R}^n$-ben.

Definíció

A $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ valószínűségi vektorváltozó eloszlását abszolút folytonosnak nevezzük, ha létezik olyan $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény, melyre

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n.$$

Valószínűségi vektorváltozók

Definíció

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók. Ekkor a

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$$

függvényt valószínűségi vektorváltozónak nevezzük. Eloszlásfüggvénye:

$$F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ F(x_1, \ldots, x_n) := P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n).$$

Definíció

A $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ valószínűségi vektorváltozó diszkrét, ha értékkészlete megszámlálható halmaz $\mathbb{R}^n$-ben.

Definíció

A $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ valószínűségi vektorváltozó eloszlását abszolút folytonosnak nevezzük, ha létezik olyan $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény, melyre

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n.$$

Ekkor f a ξ valószínűségi vektorváltozó sűrűségfüggvénye.

Valószínűségi vektorváltozók függetlensége

Állítás és definíció

Tekintsük a ξ és η valószínűségi változókat, ezek együttes eloszlásfüggvényét jelölje F. (Tehát $F(x, y) = P(\xi < x, \eta < y)$.)

Valószínűségi vektorváltozók függetlensége

Állítás és definíció

Tekintsük a ξ és η valószínűségi változókat, ezek együttes eloszlásfüggvényét jelölje F. (Tehát $F(x, y) = P(\xi < x, \eta < y)$.) Ekkor

$$F_\xi(x) = \lim_{y\to\infty} F(x, y) \quad \text{és} \quad F_\eta(y) = \lim_{x\to\infty} F(x, y)$$

rendre ξ és η eloszlásfüggvénye,

Valószínűségi vektorváltozók függetlensége

Állítás és definíció

Tekintsük a ξ és η valószínűségi változókat, ezek együttes eloszlásfüggvényét jelölje F. (Tehát $F(x, y) = P(\xi < x, \eta < y)$.) Ekkor

$$F_\xi(x) = \lim_{y \to \infty} F(x, y) \quad \text{és} \quad F_\eta(y) = \lim_{x \to \infty} F(x, y)$$

rendre ξ és η eloszlásfüggvénye, amelyeket az együttes eloszlás marginális (vagy perem-) eloszlásfüggvényeinek is nevezünk.

Valószínűségi vektorváltozók függetlensége

Állítás és definíció

Tekintsük a ξ és η valószínűségi változókat, ezek együttes eloszlásfüggvényét jelölje F. (Tehát $F(x,y) = P(\xi < x, \eta < y)$.) Ekkor

$$F_\xi(x) = \lim_{y\to\infty} F(x,y) \quad \text{és} \quad F_\eta(y) = \lim_{x\to\infty} F(x,y)$$

rendre ξ és η eloszlásfüggvénye, amelyeket az együttes eloszlás marginális (vagy perem-) eloszlásfüggvényeinek is nevezünk.

Definíció

A ξ és η valószínűségi változók függetlenek, ha együttes eloszlásfüggvényük felbomlik a két marginális eloszlásfüggvény szorzatára, azaz

$$F(x,y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y), \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Valószínűségi vektorváltozók függetlensége

Állítás

Ha ξ és η diszkrét valószínűségi változók, akkor függetlenségük azt jelenti, hogy

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(\xi = x_i) \cdot P(\eta = y_j),$$

ahol x_i ξ értékkészletének, y_j pedig η értékkészletének tetszőleges eleme.

Valószínűségi vektorváltozók függetlensége

Állítás

Ha ξ és η diszkrét valószínűségi változók, akkor függetlenségük azt jelenti, hogy

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(\xi = x_i) \cdot P(\eta = y_j),$$

ahol x_i ξ értékkészletének, y_j pedig η értékkészletének tetszőleges eleme.

Állítás

Ha a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó abszolút folytonos, azaz létezik f sűrűségfüggvénye, akkor ξ és η is folytonosak, sűrűségfüggvényük:

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy, \qquad \text{és} \qquad f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx.$$

Valószínűségi vektorváltozók függetlensége

Állítás

Ha ξ és η diszkrét valószínűségi változók, akkor függetlenségük azt jelenti, hogy

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(\xi = x_i) \cdot P(\eta = y_j),$$

ahol x_i ξ értékkészletének, y_j pedig η értékkészletének tetszőleges eleme.

Állítás

Ha a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó abszolút folytonos, azaz létezik f sűrűségfüggvénye, akkor ξ és η is folytonosak, sűrűségfüggvényük:

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy, \qquad \text{és} \qquad f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx.$$

Ekkor ξ és η pontosan akkor függetlenek, ha

$$f(x, y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y), \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Példa valószínűségi vektorváltozóra

A (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi vektorváltozó együttes eloszlását a következő kontingencia táblázat tartalmazza:

Példa valószínűségi vektorváltozóra

A (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi vektorváltozó együttes eloszlását a következő kontingencia táblázat tartalmazza:

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1
-1	p	$3p$	$6p$
1	$5p$	$15p$	$30p$

Példa valószínűségi vektorváltozóra

A (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi vektorváltozó együttes eloszlását a következő kontingencia táblázat tartalmazza:

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1
-1	p	$3p$	$6p$
1	$5p$	$15p$	$30p$

- Mennyi p értéke?

Példa valószínűségi vektorváltozóra

A (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi vektorváltozó együttes eloszlását a következő kontingencia táblázat tartalmazza:

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1
-1	p	$3p$	$6p$
1	$5p$	$15p$	$30p$

- Mennyi p értéke?
- Adjuk meg a peremeloszlásokat!

Példa valószínűségi vektorváltozóra

A (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi vektorváltozó együttes eloszlását a következő kontingencia táblázat tartalmazza:

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1
-1	p	$3p$	$6p$
1	$5p$	$15p$	$30p$

- Mennyi p értéke?
- Adjuk meg a peremeloszlásokat!
- Független-e ξ és η?

Kovariancia

Kovariancia

Definíció

Legyenek ξ és η valószínűségi változók véges szórással. Ekkor a

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)]$$

mennyiség ξ és η kovarianciája.

Kovariancia

Definíció

Legyenek ξ és η valószínűségi változók véges szórással. Ekkor a

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta) = \mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)]$$

mennyiség ξ és η kovarianciája.

- $\mathbb{D}^2\xi = \mathrm{cov}(\xi,\xi)$

Kovariancia

Definíció

Legyenek ξ és η valószínűségi változók véges szórással. Ekkor a

$$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)]$$

mennyiség ξ és η kovarianciája.

- $\mathbb{D}^2\xi = \mathrm{cov}(\xi, \xi)$
- A kovariancia kiszámítása: $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$.

Kovariancia

Definíció

Legyenek ξ és η valószínűségi változók véges szórással. Ekkor a

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)]$$

mennyiség ξ és η kovarianciája.

- $\mathbb{D}^2\xi = \operatorname{cov}(\xi,\xi)$
- A kovariancia kiszámítása: $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$.

Állítás

Legyenek ξ és η valószínűségi változók véges szórással. Ekkor

$$\mathbb{D}^2(\xi + \eta) = \mathbb{D}^2\xi + 2\operatorname{cov}(\xi,\eta) + \mathbb{D}^2\eta.$$

Kovariancia

Definíció

Legyenek ξ és η valószínűségi változók véges szórással. Ekkor a

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)]$$

mennyiség ξ és η kovarianciája.

- $\mathbb{D}^2\xi = \text{cov}(\xi, \xi)$
- A kovariancia kiszámítása: $\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$.

Állítás

Legyenek ξ és η valószínűségi változók véges szórással. Ekkor

$$\mathbb{D}^2(\xi + \eta) = \mathbb{D}^2\xi + 2\,\text{cov}(\xi, \eta) + \mathbb{D}^2\eta.$$

Ha ξ és η függetlenek,

Kovariancia

Definíció

Legyenek ξ és η valószínűségi változók véges szórással. Ekkor a

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta) = \mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)]$$

mennyiség ξ és η kovarianciája.

- $\mathbb{D}^2\xi = \mathrm{cov}(\xi,\xi)$
- A kovariancia kiszámítása: $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$.

Állítás

Legyenek ξ és η valószínűségi változók véges szórással. Ekkor

$$\mathbb{D}^2(\xi+\eta) = \mathbb{D}^2\xi + 2\,\mathrm{cov}(\xi,\eta) + \mathbb{D}^2\eta.$$

Ha ξ és η függetlenek, akkor

- $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$;

Kovariancia

Definíció

Legyenek ξ és η valószínűségi változók véges szórással. Ekkor a

$$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)]$$

mennyiség ξ és η kovarianciája.

- $\mathbb{D}^2\xi = \mathrm{cov}(\xi, \xi)$
- A kovariancia kiszámítása: $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$.

Állítás

Legyenek ξ és η valószínűségi változók véges szórással. Ekkor

$$\mathbb{D}^2(\xi + \eta) = \mathbb{D}^2\xi + 2\,\mathrm{cov}(\xi, \eta) + \mathbb{D}^2\eta.$$

Ha ξ és η függetlenek, akkor

- $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$;
- $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = 0$;

Kovariancia

Definíció

Legyenek ξ és η valószínűségi változók véges szórással. Ekkor a

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)]$$

mennyiség ξ és η kovarianciája.

- $\mathbb{D}^2\xi = \operatorname{cov}(\xi,\xi)$
- A kovariancia kiszámítása: $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$.

Állítás

Legyenek ξ és η valószínűségi változók véges szórással. Ekkor

$$\mathbb{D}^2(\xi+\eta) = \mathbb{D}^2\xi + 2\operatorname{cov}(\xi,\eta) + \mathbb{D}^2\eta.$$

Ha ξ és η függetlenek, akkor

- $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$;
- $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 0$;
- $\mathbb{D}^2(\xi+\eta) = \mathbb{D}^2\xi + \mathbb{D}^2\eta$.

Korrelációs együttható

Definíció

Legyenek ξ és η valószínűségi változók véges, pozitív szórással, azaz $0 < \mathbb{D}\xi < \infty$ és $0 < \mathbb{D}\eta < \infty$. Ekkor ξ és η korrelációja a

$$\text{corr}(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta}$$

Korrelációs együttható

Definíció

Legyenek ξ és η valószínűségi változók véges, pozitív szórással, azaz $0 < \mathbb{D}\xi < \infty$ és $0 < \mathbb{D}\eta < \infty$. Ekkor ξ és η korrelációja a

$$\text{corr}(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta} = \frac{\mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta}{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta}.$$

Korrelációs együttható

Definíció

Legyenek ξ és η valószínűségi változók véges, pozitív szórással, azaz $0 < \mathbb{D}\xi < \infty$ és $0 < \mathbb{D}\eta < \infty$. Ekkor ξ és η korrelációja a

$$\operatorname{corr}(\xi, \eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta} = \frac{\mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta}{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta}.$$

Amennyiben $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = 0$, úgy ξ-t és η-t korrelálatlanoknak nevezzük.

Korrelációs együttható

Definíció

Legyenek ξ és η valószínűségi változók véges, pozitív szórással, azaz $0 < \mathbb{D}\xi < \infty$ és $0 < \mathbb{D}\eta < \infty$. Ekkor ξ és η korrelációja a

$$\operatorname{corr}(\xi, \eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta} = \frac{\mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta}{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta}.$$

Amennyiben $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = 0$, úgy ξ-t és η-t korrelálatlanoknak nevezzük.

Állítás

- Ha ξ és η függetlenek, akkor korrelálatlanok, de lehetséges, hogy korrelálatlan valószínűségi változók *nem* függetlenek.

Korrelációs együttható

Definíció

Legyenek ξ és η valószínűségi változók véges, pozitív szórással, azaz $0 < \mathbb{D}\xi < \infty$ és $0 < \mathbb{D}\eta < \infty$. Ekkor ξ és η korrelációja a

$$\mathrm{corr}(\xi, \eta) = \frac{\mathrm{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta} = \frac{\mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta}{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta}.$$

Amennyiben $\mathrm{corr}(\xi, \eta) = 0$, úgy ξ-t és η-t korrelálatlanoknak nevezzük.

Állítás

- Ha ξ és η függetlenek, akkor korrelálatlanok, de lehetséges, hogy korrelálatlan valószínűségi változók *nem* függetlenek.
- $-1 \leq \mathrm{corr}(\xi, \eta) \leq 1$.

Korrelációs együttható

Definíció

Legyenek ξ és η valószínűségi változók véges, pozitív szórással, azaz $0 < \mathbb{D}\xi < \infty$ és $0 < \mathbb{D}\eta < \infty$. Ekkor ξ és η korrelációja a

$$\mathrm{corr}(\xi, \eta) = \frac{\mathrm{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta} = \frac{\mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta}{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta}.$$

Amennyiben $\mathrm{corr}(\xi, \eta) = 0$, úgy ξ-t és η-t korrelálatlanoknak nevezzük.

Állítás

- Ha ξ és η függetlenek, akkor korrelálatlanok, de lehetséges, hogy korrelálatlan valószínűségi változók *nem* függetlenek.
- $-1 \leq \mathrm{corr}(\xi, \eta) \leq 1$.
- $|\mathrm{corr}(\xi, \eta)| = 1$ csak úgy lehetséges,

Korrelációs együttható

Definíció

Legyenek ξ és η valószínűségi változók véges, pozitív szórással, azaz $0 < \mathbb{D}\xi < \infty$ és $0 < \mathbb{D}\eta < \infty$. Ekkor ξ és η korrelációja a

$$\mathrm{corr}(\xi, \eta) = \frac{\mathrm{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta} = \frac{\mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta}{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta}.$$

Amennyiben $\mathrm{corr}(\xi, \eta) = 0$, úgy ξ-t és η-t korrelálatlanoknak nevezzük.

Állítás

- Ha ξ és η függetlenek, akkor korrelálatlanok, de lehetséges, hogy korrelálatlan valószínűségi változók *nem* függetlenek.
- $-1 \leq \mathrm{corr}(\xi, \eta) \leq 1$.
- $|\,\mathrm{corr}(\xi, \eta)| = 1$ csak úgy lehetséges, ha 1 valószínűséggel

$$\eta = a\xi + b, \text{ valamely } a, b \in \mathbb{R}, \; a \neq 0,$$

Korrelációs együttható

Definíció

Legyenek ξ és η valószínűségi változók véges, pozitív szórással, azaz $0 < \mathbb{D}\xi < \infty$ és $0 < \mathbb{D}\eta < \infty$. Ekkor ξ és η korrelációja a

$$\operatorname{corr}(\xi, \eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta} = \frac{\mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta}{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta}.$$

Amennyiben $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = 0$, úgy ξ-t és η-t korrelálatlanoknak nevezzük.

Állítás

- Ha ξ és η függetlenek, akkor korrelálatlanok, de lehetséges, hogy korrelálatlan valószínűségi változók *nem* függetlenek.
- $-1 \leq \operatorname{corr}(\xi, \eta) \leq 1$.
- $|\operatorname{corr}(\xi, \eta)| = 1$ csak úgy lehetséges, ha 1 valószínűséggel

  $$\eta = a\xi + b, \text{ valamely } a, b \in \mathbb{R}, \; a \neq 0,$$

  tehát ha ξ és η kapcsolata determinisztikus és lineáris.

Korrelációs együttható

Definíció

Legyenek ξ és η valószínűségi változók véges, pozitív szórással, azaz $0 < \mathbb{D}\xi < \infty$ és $0 < \mathbb{D}\eta < \infty$. Ekkor ξ és η korrelációja a

$$\operatorname{corr}(\xi, \eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta} = \frac{\mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta}{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta}.$$

Amennyiben $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = 0$, úgy ξ-t és η-t korrelálatlanoknak nevezzük.

Állítás

- Ha ξ és η függetlenek, akkor korrelálatlanok, de lehetséges, hogy korrelálatlan valószínűségi változók *nem* függetlenek.
- $-1 \leq \operatorname{corr}(\xi, \eta) \leq 1$.
- $|\operatorname{corr}(\xi, \eta)| = 1$ csak úgy lehetséges, ha 1 valószínűséggel

$$\eta = a\xi + b, \text{ valamely } a, b \in \mathbb{R}, \ a \neq 0,$$

tehát ha ξ és η kapcsolata determinisztikus és lineáris.

Érdekességek: `http://guessthecorrelation.com`
`http://www.tylervigen.com/spurious-correlations`

Konvolúció

Definíció

Legyenek ξ és η független valószínűségi változók.

Konvolúció

Definíció

Legyenek ξ és η független valószínűségi változók. Ekkor $\xi + \eta$ eloszlását ξ és η konvolúciójának nevezzük.

Konvolúció

Definíció

Legyenek ξ és η független valószínűségi változók. Ekkor $\xi + \eta$ eloszlását ξ és η konvolúciójának nevezzük.

Állítás

Tegyük fel, hogy ξ és η független *diszkrét* valószínűségi változók. Ekkor $\xi + \eta$ eloszlása

$P(\xi+\eta = z) =$

Konvolúció

Definíció

Legyenek ξ és η független valószínűségi változók. Ekkor $\xi + \eta$ eloszlását ξ és η **konvolúciójá**nak nevezzük.

Állítás

Tegyük fel, hogy ξ és η független *diszkrét* valószínűségi változók. Ekkor $\xi + \eta$ eloszlása

$$P(\xi+\eta = z) = \sum_{x_n+y_m=z} P(\xi = x_n, \eta = y_m) =$$

Konvolúció

Definíció

Legyenek ξ és η független valószínűségi változók. Ekkor $\xi + \eta$ eloszlását ξ és η *konvolúciójá*nak nevezzük.

Állítás

Tegyük fel, hogy ξ és η független *diszkrét* valószínűségi változók. Ekkor $\xi + \eta$ eloszlása

$$P(\xi+\eta = z) = \sum_{x_n+y_m=z} P(\xi = x_n, \eta = y_m) = \sum_{x_n+y_m=z} P(\xi = x_n)P(\eta = y_m),$$

ahol x_n jelöli ξ, valamint y_m jelöli η értékkészletének az elemeit.

Konvolúció

Definíció

Legyenek ξ és η független valószínűségi változók. Ekkor $\xi + \eta$ eloszlását ξ és η **konvolúciójá**nak nevezzük.

Állítás

Tegyük fel, hogy ξ és η független *diszkrét* valószínűségi változók. Ekkor $\xi + \eta$ eloszlása

$$P(\xi+\eta = z) = \sum_{x_n+y_m=z} P(\xi = x_n, \eta = y_m) = \sum_{x_n+y_m=z} P(\xi = x_n)P(\eta = y_m),$$

ahol x_n jelöli ξ, valamint y_m jelöli η értékkészletének az elemeit.
Speciálisan, ha ξ és η értékei nemnegatív egész számok, akkor

$$P(\xi + \eta = k) =$$

Konvolúció

Definíció

Legyenek ξ és η független valószínűségi változók. Ekkor $\xi + \eta$ eloszlását ξ és η *konvolúciójá*nak nevezzük.

Állítás

Tegyük fel, hogy ξ és η független *diszkrét* valószínűségi változók. Ekkor $\xi + \eta$ eloszlása

$$P(\xi+\eta = z) = \sum_{x_n+y_m=z} P(\xi = x_n, \eta = y_m) = \sum_{x_n+y_m=z} P(\xi = x_n)P(\eta = y_m),$$

ahol x_n jelöli ξ, valamint y_m jelöli η értékkészletének az elemeit.
Speciálisan, ha ξ és η értékei nemnegatív egész számok, akkor

$$P(\xi + \eta = k) = \sum_{j=0}^{k} P(\xi = j)P(\eta = k - j), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Konvolúció

Definíció

Legyenek ξ és η független valószínűségi változók. Ekkor $\xi+\eta$ eloszlását ξ és η konvolúciójának nevezzük.

Állítás

Tegyük fel, hogy ξ és η független *diszkrét* valószínűségi változók. Ekkor $\xi+\eta$ eloszlása

$$P(\xi+\eta=z)=\sum_{x_n+y_m=z} P(\xi=x_n,\eta=y_m)=\sum_{x_n+y_m=z} P(\xi=x_n)P(\eta=y_m),$$

ahol x_n jelöli ξ, valamint y_m jelöli η értékkészletének az elemeit.
Speciálisan, ha ξ és η értékei nemnegatív egész számok, akkor

$$P(\xi+\eta=k)=\sum_{j=0}^{k} P(\xi=j)P(\eta=k-j), \quad k=0,1,\ldots$$

Példa: Legyenek ξ és η független, n_1, illetve n_2 rendű, p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változók. Ekkor $\xi+\eta$ is binomiális

Konvolúció a folytonos esetben

Konvolúció a folytonos esetben

Állítás

Ha ξ és η független *folytonos* valószínűségi változók f_ξ és f_η sűrűségfüggvénnyel,

Konvolúció a folytonos esetben

Állítás

Ha ξ és η független *folytonos* valószínűségi változók f_ξ és f_η sűrűségfüggvénnyel, akkor $\xi + \eta$ konvolúciójuk sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi+\eta}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) f_\eta(z-x)\, dx, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Konvolúció a folytonos esetben

Állítás

Ha ξ és η független *folytonos* valószínűségi változók f_ξ és f_η sűrűségfüggvénnyel, akkor $\xi + \eta$ konvolúciójuk sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi+\eta}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) f_\eta(z-x)\, dx, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Példa:

Legyenek ξ és η független, normális eloszlású valószínűségi változók:

$$\xi \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2) \quad \text{és} \quad \eta \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2).$$

Konvolúció a folytonos esetben

Állítás

Ha ξ és η független *folytonos* valószínűségi változók f_ξ és f_η sűrűségfüggvénnyel, akkor $\xi + \eta$ konvolúciójuk sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi+\eta}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) f_\eta(z-x)\, dx, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Példa:

Legyenek ξ és η független, normális eloszlású valószínűségi változók:

$$\xi \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2) \quad \text{és} \quad \eta \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2).$$

Ekkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{(z-x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}}\, dx =$$

Konvolúció a folytonos esetben

Állítás

Ha ξ és η független *folytonos* valószínűségi változók f_ξ és f_η sűrűségfüggvénnyel, akkor $\xi + \eta$ konvolúciójuk sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi+\eta}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) f_\eta(z-x)\, dx, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Példa:

Legyenek ξ és η független, normális eloszlású valószínűségi változók:

$$\xi \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2) \quad \text{és} \quad \eta \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2).$$

Ekkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{(z-x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} e^{-\frac{(z-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}},$$

Konvolúció a folytonos esetben

Állítás

Ha ξ és η független *folytonos* valószínűségi változók f_ξ és f_η sűrűségfüggvénnyel, akkor $\xi + \eta$ konvolúciójuk sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi+\eta}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) f_\eta(z-x)\,dx, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Példa:

Legyenek ξ és η független, normális eloszlású valószínűségi változók:

$$\xi \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2) \quad \text{és} \quad \eta \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2).$$

Ekkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{(z-x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} e^{-\frac{(z-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}},$$

ezért ξ és η konvolúciója szintén normális eloszlású, mégpedig

$$\xi + \eta \sim \mathcal{N}(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2).$$

Momentumok, alakmutatók

Momentumok, alakmutatók

Definíció

Legyen ξ valószínűségi változó, k pozitív egész. Ekkor

- $\mathbb{E}(\xi^k)$ a ξ k-adik momentuma;

Momentumok, alakmutatók

Definíció

Legyen ξ valószínűségi változó, k pozitív egész. Ekkor

- $\mathbb{E}(\xi^k)$ a ξ *k-adik momentuma*;
- $\mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)^k]$ a ξ *k-adik centrális* (vagy *centrált*) *momentuma*;

Momentumok, alakmutatók

Definíció

Legyen ξ valószínűségi változó, k pozitív egész. Ekkor

- $\mathbb{E}(\xi^k)$ a ξ k-adik momentuma;
- $\mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)^k]$ a ξ k-adik centrális (vagy centrált) momentuma;
  Példa: a várható érték az első momentum, a szórásnégyzet a második centrális momentum.

Momentumok, alakmutatók

Definíció

Legyen ξ valószínűségi változó, k pozitív egész. Ekkor

- $\mathbb{E}(\xi^k)$ a ξ *k*-adik momentuma;
- $\mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)^k]$ a ξ *k*-adik centrális (vagy centrált) momentuma;
  Példa: a várható érték az első momentum, a szórásnégyzet a második centrális momentum.
- $\frac{\mathbb{E}(\xi-\mathbb{E}\xi)^3}{(\mathbb{D}\xi)^3}$ a ξ ferdesége;

Momentumok, alakmutatók

Definíció

Legyen ξ valószínűségi változó, k pozitív egész. Ekkor

- $\mathbb{E}(\xi^k)$ a ξ *k*-adik momentuma;
- $\mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)^k]$ a ξ *k*-adik centrális (vagy centrált) momentuma;
  Példa: a várható érték az első momentum, a szórásnégyzet a második centrális momentum.
- $\frac{\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^3}{(\mathbb{D}\xi)^3}$ a ξ ferdesége;
- $\frac{\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^4}{(\mathbb{D}^2\xi)^2} - 3$ a ξ csúcsossága vagy lapultsága.

Momentumok, alakmutatók

Definíció

Legyen ξ valószínűségi változó, k pozitív egész. Ekkor

- $\mathbb{E}(\xi^k)$ a ξ *k*-adik momentuma;
- $\mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)^k]$ a ξ *k*-adik centrális (vagy centrált) momentuma;
  Példa: a várható érték az első momentum, a szórásnégyzet a második centrális momentum.
- $\frac{\mathbb{E}(\xi-\mathbb{E}\xi)^3}{(\mathbb{D}\xi)^3}$ a ξ ferdesége;
- $\frac{\mathbb{E}(\xi-\mathbb{E}\xi)^4}{(\mathbb{D}^2\xi)^2} - 3$ a ξ csúcsossága vagy lapultsága.

A standard normális eloszlás ferdesége és csúcsossága is 0.

Momentumok, alakmutatók

Definíció

Legyen ξ valószínűségi változó, k pozitív egész. Ekkor

- $\mathbb{E}(\xi^k)$ a ξ k-adik momentuma;
- $\mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)^k]$ a ξ k-adik centrális (vagy centrált) momentuma;
  Példa: a várható érték az első momentum, a szórásnégyzet a második centrális momentum.
- $\frac{\mathbb{E}(\xi-\mathbb{E}\xi)^3}{(\mathbb{D}\xi)^3}$ a ξ ferdesége;
- $\frac{\mathbb{E}(\xi-\mathbb{E}\xi)^4}{(\mathbb{D}^2\xi)^2} - 3$ a ξ csúcsossága vagy lapultsága.

A standard normális eloszlás ferdesége és csúcsossága is 0.

- A szimmetrikushoz képest „jobbra elnyúló” eloszlás esetén a ferdeség pozitív, „balra elnyúló” eloszlás esetén negatív.

Momentumok, alakmutatók

Definíció

Legyen ξ valószínűségi változó, k pozitív egész. Ekkor

- $\mathbb{E}(\xi^k)$ a ξ *k*-adik momentuma;
- $\mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)^k]$ a ξ *k*-adik centrális (vagy centrált) momentuma;
  Példa: a várható érték az első momentum, a szórásnégyzet a második centrális momentum.
- $\frac{\mathbb{E}(\xi-\mathbb{E}\xi)^3}{(\mathbb{D}\xi)^3}$ a ξ ferdesége;
- $\frac{\mathbb{E}(\xi-\mathbb{E}\xi)^4}{(\mathbb{D}^2\xi)^2} - 3$ a ξ csúcsossága vagy lapultsága.

A standard normális eloszlás ferdesége és csúcsossága is 0.

- A szimmetrikushoz képest „jobbra elnyúló” eloszlás esetén a ferdeség pozitív, „balra elnyúló” eloszlás esetén negatív.
- A haranggörbénél „csúcsosabb” eloszlásokra a csúcsosság pozitív, „laposabb” eloszlásokra negatív.

Valószínűségi változó kvantilisei

Definíció

Legyen $q \in (0, 1)$. A ξ valószínűségi változó q-kvantilisén azt a Q_q számot értjük, melyre
$$P(\xi < Q_q) \leq q \quad \text{és} \quad P(\xi > Q_q) \leq 1 - q.$$

Valószínűségi változó kvantilisei

Definíció

Legyen $q \in (0,1)$. A ξ valószínűségi változó *q-kvantilisén* azt a Q_q számot értjük, melyre

$$P(\xi < Q_q) \leq q \quad \text{és} \quad P(\xi > Q_q) \leq 1 - q.$$

Megj.: A q-kvantilis nem mindig egyértelmű!

Valószínűségi változó kvantilisei

Definíció

Legyen $q \in (0, 1)$. A ξ valószínűségi változó q-kvantilisén azt a Q_q számot értjük, melyre
$$P(\xi < Q_q) \leq q \quad \text{és} \quad P(\xi > Q_q) \leq 1 - q.$$

Megj.: A q-kvantilis nem mindig egyértelmű!

Állítás

- Ha az $F_\xi(x) = q$ egyenletnek egyetlen megoldása van, akkor ez az $F_\xi^{-1}(q)$ érték az egyetlen q-kvantilis.

Valószínűségi változó kvantilisei

Definíció

Legyen $q \in (0, 1)$. A ξ valószínűségi változó q-kvantilisén azt a Q_q számot értjük, melyre
$$P(\xi < Q_q) \leq q \quad \text{és} \quad P(\xi > Q_q) \leq 1 - q.$$

Megj.: A q-kvantilis nem mindig egyértelmű!

Állítás

- Ha az $F_\xi(x) = q$ egyenletnek egyetlen megoldása van, akkor ez az $F_\xi^{-1}(q)$ érték az egyetlen q-kvantilis. Tehát ha az F_ξ eloszlásfüggvény a teljes számegyenesen invertálható, akkor a kvantilis éppen az eloszlásfüggvény inverze.

Valószínűségi változó kvantilisei

Definíció

Legyen $q \in (0,1)$. A ξ valószínűségi változó *q-kvantilisén* azt a Q_q számot értjük, melyre

$$P(\xi < Q_q) \leq q \quad \text{és} \quad P(\xi > Q_q) \leq 1 - q.$$

Megj.: A q-kvantilis nem mindig egyértelmű!

Állítás

- Ha az $F_\xi(x) = q$ egyenletnek egyetlen megoldása van, akkor ez az $F_\xi^{-1}(q)$ érték az egyetlen q-kvantilis. Tehát ha az F_ξ eloszlásfüggvény a teljes számegyenesen invertálható, akkor a kvantilis éppen az eloszlásfüggvény inverze.
- Ha az $F_\xi(x) = q$ egyenletnek nincs megoldása, akkor egyetlen q-kvantilis van, mégpedig az az érték, ahol az F_ξ eloszlásfüggvény átugorja a q értéket.

Valószínűségi változó kvantilisei

Definíció

Legyen $q \in (0,1)$. A ξ valószínűségi változó q-kvantilisén azt a Q_q számot értjük, melyre

$$P(\xi < Q_q) \leq q \quad \text{és} \quad P(\xi > Q_q) \leq 1 - q.$$

Megj.: A q-kvantilis nem mindig egyértelmű!

Állítás

- Ha az $F_\xi(x) = q$ egyenletnek egyetlen megoldása van, akkor ez az $F_\xi^{-1}(q)$ érték az egyetlen q-kvantilis. Tehát ha az F_ξ eloszlásfüggvény a teljes számegyenesen invertálható, akkor a kvantilis éppen az eloszlásfüggvény inverze.
- Ha az $F_\xi(x) = q$ egyenletnek nincs megoldása, akkor egyetlen q-kvantilis van, mégpedig az az érték, ahol az F_ξ eloszlásfüggvény átugorja a q értéket.
- Ha az $F_\xi(x) = q$ egyenletnek több megoldása van, akkor a megoldáshalmaz az $(a, b]$ vagy $[a, b]$ intervallum, ekkor a q-kvantilisek éppen az $[a, b]$ intervallum pontjai.

Speciális kvantilisek, medián

Definíció

Az $\frac{1}{2}$-kvantilist mediánnak nevezzük.

Speciális kvantilisek, medián

Definíció

Az $\frac{1}{2}$-kvantilist mediánnak nevezzük.

Tehát a medián esetén $q = \frac{1}{2}$, azaz $P(\xi < Me) \leq \frac{1}{2}$ és $P(\xi > Me) \leq \frac{1}{2}$.
Azaz a medián legfeljebb az értékek felénél kisebb, és legfeljebb a felüknél nagyobb.

Speciális kvantilisek, medián

Definíció

Az $\frac{1}{2}$-kvantilist mediánnak nevezzük.

Tehát a medián esetén $q = \frac{1}{2}$, azaz $P(\xi < Me) \leq \frac{1}{2}$ és $P(\xi > Me) \leq \frac{1}{2}$. Azaz a medián legfeljebb az értékek felénél kisebb, és legfeljebb a felüknél nagyobb.

További speciális kvantilisek elnevezése, jelölése

Speciális kvantilisek, medián

Definíció

Az $\frac{1}{2}$-kvantilist mediánnak nevezzük.

Tehát a medián esetén $q = \frac{1}{2}$, azaz $P(\xi < Me) \leq \frac{1}{2}$ és $P(\xi > Me) \leq \frac{1}{2}$. Azaz a medián legfeljebb az értékek felénél kisebb, és legfeljebb a felüknél nagyobb.

További speciális kvantilisek elnevezése, jelölése

q	név	jelölés	kvantilisek
$\frac{1}{2}$	medián	Me	Me
$\frac{k}{4}$	kvartilis	Q_k	Q_1, Q_2, Q_3
$\frac{k}{5}$	kvintilis	K_k	K_1, K_2, K_3, K_4
$\frac{k}{10}$	decilis	D_k	$D_1, D_2, \ldots, D_9$
$\frac{k}{100}$	percentilis	P_k	$P_1, P_2, \ldots, P_{99}$

Speciális kvantilisek, medián

Definíció

Az $\frac{1}{2}$-kvantilist *medián*nak nevezzük.

Tehát a medián esetén $q = \frac{1}{2}$, azaz $P(\xi < Me) \leq \frac{1}{2}$ és $P(\xi > Me) \leq \frac{1}{2}$. Azaz a medián legfeljebb az értékek felénél kisebb, és legfeljebb a felüknél nagyobb.

További speciális kvantilisek elnevezése, jelölése

q	név	jelölés	kvantilisek
$\frac{1}{2}$	medián	Me	Me
$\frac{k}{4}$	kvartilis	Q_k	Q_1, Q_2, Q_3
$\frac{k}{5}$	kvintilis	K_k	K_1, K_2, K_3, K_4
$\frac{k}{10}$	decilis	D_k	$D_1, D_2, \ldots, D_9$
$\frac{k}{100}$	percentilis	P_k	$P_1, P_2, \ldots, P_{99}$

A $Q_3 - Q_1$ értéket *interkvartilis terjedelem*nek nevezzük.

Módusz

Definíció

Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \ldots$ lehetséges értékekkel. Ekkor x_k ξ **módusza**, ha x_k-t a legnagyobb valószínűséggel veszi fel, azaz

$$P(\xi = x_k) = \sup_i P(\xi = x_i).$$

Módusz

Definíció

Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \ldots$ lehetséges értékekkel. Ekkor x_k ξ **módusza**, ha x_k-t a legnagyobb valószínűséggel veszi fel, azaz

$$P(\xi = x_k) = \sup_i P(\xi = x_i).$$

Definíció

Legyen ξ folytonos valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel. Ekkor x ξ **módusza**, ha globális maximumhelye a sűrűségfüggvénynek, azaz

$$f_\xi(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} f_\xi(y).$$