

Könyv:

Wayne L. Winston: Operációkutatás

### 3

## Bevezetés a lineáris programozásba

- 3.1. A lineáris programozási feladat 51
- 3.2. A kétváltozós lineáris programozási feladat grafikus megoldása 59
- 3.3. Speciális esetek 67

Modell építés probléma leírásból

Grafikus megoldás (Giapetto példa, speciális esetek) 3.1. fejezet 1. Példa

3.2. grafikus megoldás (1. Példa. 2 Példa – min, 3.példa – több megoldás, 4. Példa – üres halmaz,5 példa – nem korlátos)

Előjel korlát nélküli változóra példa: (4.10 Előjelkorlátozatlan változók / 1. Példa)

## LINGO

Feladat megoldás LINGO-ban, mint pl:

The screenshot shows the Lingo 21.0.33 software interface. On the left, the 'Lingo Model - Lingo1' window displays the LINGO code for the Giapetto problem. The code includes sections for the model, objective function (MAX), constraints (felk,faf,elad), and a note about free variables. On the right, the 'Solution Report - Lingo1' window shows the optimal solution with variable values X1=20, X2=60, and reduced costs of 0. The dual price for the first constraint (felk) is 1.000000.

```
1 !Giapetto probléma;
2 MODEL:
3   !Célfüggvény MIN= vagy MAX=;
4   [profit]  MAX= 3*x1 + 2*x2 ;
5
6   !Feltételek;
7   [felk] 2*x1 + x2 <= 100;
8   [faf]    x1 + x2 <= 80;
9   [elad]   x1      <= 40;
10
11 !Előjelkorlát alapértelmezett!!
12 Negatív érték megengedése: @FREE();
13 END
```

Variable	Value	Reduced Cost
X1	20.00000	0.000000
X2	60.00000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
PROFIT	180.0000	1.000000
FELK	0.000000	1.000000
FAF	0.000000	1.000000
ELAD	20.00000	0.000000

# Érzékenység vizsgálat LINGO-ban.

## 5

### Érzékenységvizsgálat és dualitás

- 5.1. Grafikus bevezetés az érzékenységvizsgálatba 191 ←  
5.2. Néhány fontos képlet 197

Az 1. kötet részletes tartalma ↗

- 5.3. Érzékenységvizsgálat 205 ←  
5.4. Az LP feladat duálisa 219  
5.5. A duális feladat közgazdasági interpretációja 227  
5.6. A dualitás-tétel és következményei 229  
5.7. Árnyékárak 240 ←  
5.8. Dualitás és érzékenységvizsgálat 247  
5.9. Komplementaritás 250  
5.10. A duál simplex módszer 254  
5.11. Az árnyékárak egy alkalmazási példája: a Data Envelopment Analysis (DEA) 260  
Összefoglalás 268  
Áttekintő feladatok 273

The screenshot shows the Lingo 21.0.33 software interface. On the left, the 'Model Editor' window displays the following Lingo code:

```
!Butor;
MODEL:
[profit] MAX= 80*x1 + 60*x2;
[szakm] 2*x1 + 3*x2 <= 120;
[fa] 4*x1 + 2*x2 <= 160;
[uveg] 2*x2 <= 60;
END
```

On the right, the 'Solution Report - Lingo1' window shows the optimal solution:

Variable	Value	Reduced Cost
X1	30.00000	0.000000
X2	20.00000	0.000000

Below it, the 'Range Report - Lingo1' window displays sensitivity analysis:

Ranges in which the basis is unchanged:

Objective Coefficient Ranges:

Variable	Current	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1	80.00000	40.00000	40.00000
X2	60.00000	60.00000	20.00000

Righthand Side Ranges:

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
SZAKM	120.0000	20.00000	40.00000
FA	160.0000	80.00000	40.00000
UVEG	60.00000	INFINITY	20.00000

# Szállítási feladat

## 6.1. A szállítási feladatok megfogalmazása

A tárgyalást a szállítási feladat megfogalmazásával kezdjük. Ez azt jelenti, hogy a következő példával illusztrált helyzet leírására alkalmas lineáris programozási modellt állítunk fel.

### 1. PÉLDA

A Powercónak három elektromos erőműtelepe van, ezek négy város szükségletét látják el.<sup>1</sup>

Az egyes erőművek a következő mennyiségű kilowattóra (kWh) elektromos energiát képesek szolgáltatni: 1. erőmű: 35 millió; 2. erőmű: 50 millió; 3. erőmű: 40 millió (lásd 1. táblázat). Az egyszerre (délután 2-kor) megjelenő csúcsfogyasztási igények ezekben a városokban: 1. város: 45 millió; 2. város: 20 millió; 3. város: 30 millió; 4. város: 30 millió. 1 millió kWh áram szállítása valamelyik erőműből valamelyik városba attól függ, hogy milyen távolságra kell szállítani. Fogalmazzunk meg egy LP-t, amely minimalizálja annak a költséget, hogy minden város csúcsfogyasztási igénye ki legyen elégítve!

**1. TÁBLÁZAT**  
Szállítási költség (\$), szolgáltatás és kereslet a Powerco feladatban

Honnan	Hová				Szolgáltatás (millió kWh)
	1. város	2. város	3. város	4. város	
1. erőmű	8	6	10	9	35
2. erőmű	9	12	13	7	50
3. erőmű	14	9	16	5	40
Igény (millió kWh)	45	20	30	30	

$$\begin{aligned} \min z = & 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 9x_{14} + 9x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23} + 7x_{24} \\ & + 14x_{31} + 9x_{32} + 16x_{33} + 5x_{34} \end{aligned}$$

$$\text{f.h. } x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 35 \quad (\text{kínálati feltételek})$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 50$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 40$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 45 \quad (\text{keresleti feltételek})$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 20$$

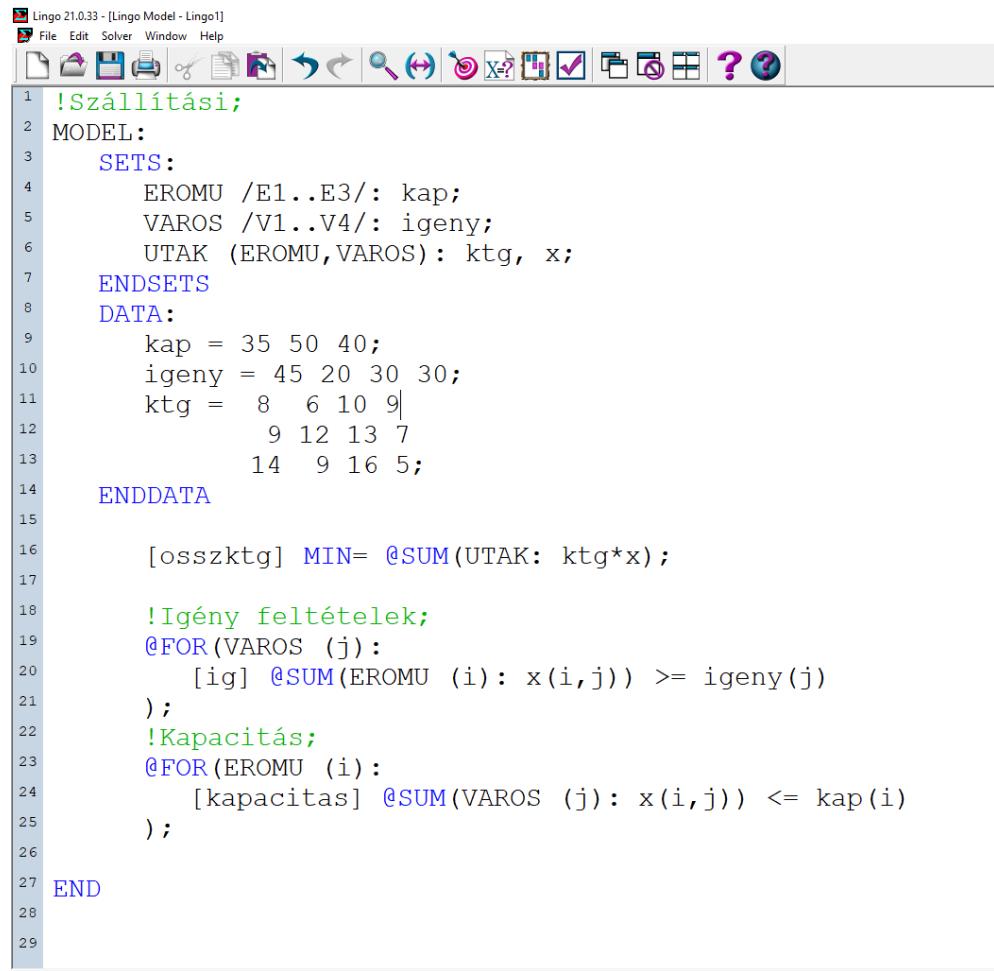
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 30$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 30$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4)$$

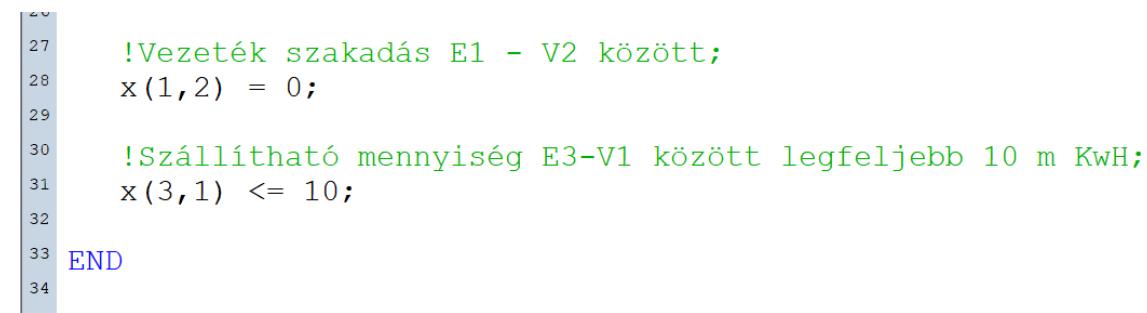
Részletes magyarázat 6. fejezet 1. példa

Lingo:



The screenshot shows the Lingo 21.0.33 software interface. The window title is "Lingo 21.0.33 - [Lingo Model - Lingo1]". The menu bar includes File, Edit, Solver, Window, and Help. Below the menu is a toolbar with various icons. The main area contains the Lingo model code:

```
1 !Szállítási;
2 MODEL:
3   SETS:
4     EROMU /E1..E3/: kap;
5     VAROS /V1..V4/: igeny;
6     UTAK (EROMU,VAROS): ktg, x;
7   ENDSETS
8   DATA:
9     kap = 35 50 40;
10    igeny = 45 20 30 30;
11    ktg =  8  6 10 9|
12      9 12 13 7
13      14 9 16 5;
14   ENDDATA
15
16   [osszktg] MIN= @SUM(UTAK: ktg*x);
17
18   !Igény feltételek;
19   @FOR(VAROS (j):
20     [ig] @SUM(EROMU (i): x(i,j)) >= igeny(j)
21   );
22   !Kapacitás;
23   @FOR(EROMU (i):
24     [kapacitas] @SUM(VAROS (j): x(i,j)) <= kap(i)
25   );
26
27 END
28
29
```



The screenshot shows a text editor window with the following Lingo code:

```
27 !Vezeték szakadás E1 - V2 között;
28 x(1,2) = 0;
29
30 !Szállítható mennyiség E3-V1 között legfeljebb 10 m KwH;
31 x(3,1) <= 10;
32
33 END
34
```

# Hozzárendelési feladatok

## 6.5. Hozzárendelési feladatok

A szállítási szimplex módszer nagyon hatékonyak tűnik, mégis van a szállítási feladatoknak egy olyan csoportja, ahol a szállítási szimplex módszer gyakran nem bizonyul elég jónak. Ezek a hozzárendelési feladatok. Ebben az alfejezetben definiáljuk a hozzárendelési feladatokat, és leírunk egy nagyon hatékony megoldó algoritmust.

- 4. PÉLDA** A Machinecónak négy gépe van, és négy olyan munka, amelyeket ezeken a gépeken kell elvégezni. minden egyes gépre egy munkát kell kijelölni, amelyet a gép teljesen elvégez. A 43. táblázat mutatja, hogy az egyes gépeknek az egyes munkákra való beállítása mennyi időt igényel. A Machineco minimalizálni szeretné a négy munka elvégzéséhez szükséges összes beállítási időt. Alkalmazzunk lineáris programozást a feladat megoldására!

**43. TÁBLÁZAT**  
Beállítási idők a  
Machineco  
feladatban

	Idő (órában)			
	1. munka	2. munka	3. munka	4. munka
1. gép	14	5	8	7
2. gép	2	12	6	5
3. gép	7	8	3	9
4. gép	2	4	6	10

- Megoldás** A Machinecónak el kell döntenie, hogy melyik gép melyik munkát végezze el. Definiáljuk a következő változókat ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ -re):

$$\begin{aligned} x_{ij} &= 1, \text{ ha az } i\text{-edik gépet jelöljük ki a } j\text{-edik munkára} \\ x_{ij} &= 0, \text{ ha az } i\text{-edik gépet nem jelöljük ki a } j\text{-edik munkára} \end{aligned}$$

Ekkor a Machineco problémája így írható fel:

$$\begin{aligned} \min z &= 14x_{11} + 5x_{12} + 8x_{13} + 7x_{14} + 2x_{21} + 12x_{22} + 6x_{23} + 5x_{24} \\ &\quad + 7x_{31} + 8x_{32} + 3x_{33} + 9x_{34} + 2x_{41} + 4x_{42} + 6x_{43} + 10x_{44} \\ \text{f.h.} \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1 \quad (\text{gép feltételek}) \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 1 \quad (\text{munka feltételek}) \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 1 \\ x_{ij} &= 0 \quad \text{or} \quad x_{ij} = 1 \end{aligned} \tag{13}$$

Lingo megoldás

Lingo Model - Lingo1

```

1 !Hozzárendelési;
2 MODEL:
3   SETS:
4     GEP /G1..G4/;
5     MUNKA /M1..M4/;
6     PAROK (GEP,MUNKA): ido,x;
7   ENDSETS
8   DATA:
9     ido = 14 5 8 7
10    2 12 6 5
11    7 8 3 9
12    2 4 6 10;
13 ENDDATA
14
15 [oszzido] MIN= @SUM(PAROK: ido*x);
16
17 !Gép feltételek;
18 @FOR(GEP (i):
19   @SUM(MUNKA (j): x(i,j)) = 1
20 );
21
22 !Munka feltételek;
23 @FOR(MUNKA (j):
24   @SUM(GEP (i): x(i,j)) = 1
25 );
26
27 END

```

Solution Report - Lingo1

Integer variables:	
Total constraints:	9
Nonlinear constraints:	0
Total nonzeros:	48
Nonlinear nonzeros:	0
Variable Value	
IDO( G1, M1)	14.00000
IDO( G1, M2)	5.000000
IDO( G1, M3)	8.000000
IDO( G1, M4)	7.000000
IDO( G2, M1)	2.000000
IDO( G2, M2)	12.000000
IDO( G2, M3)	6.000000
IDO( G2, M4)	5.000000
IDO( G3, M1)	7.000000
IDO( G3, M2)	8.000000
IDO( G3, M3)	3.000000
IDO( G3, M4)	9.000000
IDO( G4, M1)	2.000000
IDO( G4, M2)	4.000000
IDO( G4, M3)	6.000000
IDO( G4, M4)	10.000000
X( G1, M1)	0.000000
X( G1, M2)	1.000000
X( G1, M3)	0.000000
X( G1, M4)	0.000000
X( G2, M1)	0.000000
X( G2, M2)	0.000000
X( G2, M3)	0.000000
X( G2, M4)	1.000000
X( G3, M1)	0.000000
X( G3, M2)	0.000000
X( G3, M3)	1.000000
X( G3, M4)	0.000000
X( G4, M1)	1.000000
X( G4, M2)	0.000000
X( G4, M3)	0.000000
X( G4, M4)	0.000000
Row Slack or Surplus	
OSSZIDO	15.000000
2	0.000000
3	0.000000
4	0.000000
5	0.000000
6	0.000000
7	0.000000
8	0.000000

For Help, press F1

Windows Search icon Veyon Master Google chrome winston1.dvi - Goo... Microsoft Word levelező.docx - Word USB Drive (D:) Lingo 21.0.33 - Solu... Magnifier

```

27 !G1 alkatrész hiba miatt a M2-t nem tudja elvégezni;
28 x(1,2) = 0;
29
30 END

```

## MAGYAR módszer 6.5 fejezet a könyvben

## HÁTIZSÁK probléma 8.2. fejezet Stock co példa és Josie példa

2. Egy olyan IP-t, mint a (9) is, amelyben csak egy feltétel van, **hátizsák feladatnak** hívunk. Tegyük fel, hogy Josie Camper egy kétnapos túrára készül. Négy tárgy van, amire szüksége lehet. Ezen tárgyak súlya, illetve haszna (Josie szerint) az 1. táblázatban található.

	Súly (font)	Haszon
1-es tárgy	5	16
2-es tárgy	7	22
3-es tárgy	4	12
4-es tárgy	3	8

Tegyük fel, hogy Josie a hátizsákjában legfeljebb 14 fontot bír el. Definiáljuk  $j = 1, 2, 3, 4$ -re

Lingo modell:

The screenshot shows two windows from the Lingo software interface. The main window, titled 'Lingo Model - Lingo1', contains the following Lingo code:

```
1 !hátizsák feladat;
2 MODEL:
3
4 [hasznossag] MAX= 16*x1 + 22*x2 + 12*x3 + 8*x4;
5
6 [suly] 5*x1 + 7*x2 + 4*x3 + 3*x4 <= 14;
7
8 @BIN(x1);
9 @BIN(x2);
10 @BIN(x3);
11 @BIN(x4);
12 END
```

The second window, titled 'Solution Report - Lingo1', displays the results of the optimization:

Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.000000	-16.000000
X2	1.000000	-22.000000
X3	1.000000	-12.000000
X4	1.000000	-8.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
HASZNOSSAG	42.000000	1.000000
SULY	0.000000	0.000000

```

10  GOTO(1);
11  @BIN(x3);
12  @BIN(x4);

13 !Ha az T1 viszi akkor a T2 is kell;
14  x1 <= x2;
15

16 !A T2 és T3 közül legfeljebb csak az egyiket viheti;
17  x2 + x3 <= 1;
18

19 !T1 és T4 közül legalább az egyiket vinni kell;
20  x1 + x4 >= 1;
21
22

```

## Halmazlefedési probléma

### Könyv: 8.2 Fejezet 5. Példa

#### 5. PÉLDA

Egy megye vezetése el akarja dönteni, hogy a megye hat városa közül melyekben legyen tűzoltóállomás. A lehető legkevesebb állomást akarják építeni azon előírás mellett, hogy minden város elérhető legyen valamelyik tűzoltóállomásról 15 percen belül. A 6. táblázat tartalmazza a városok közötti elérési időket. Adjunk meg egy IP-t, amellyel meghatározható, hogy hány tűzoltóállomásra van szükség, és azokat hová telepítsék!

#### 6. TÁBLÁZAT A városok közötti elérési idő (perc)

Honnan	Hová					
	1-es város	2-es város	3-as város	4-es város	5-ös város	6-os város
1-es város	0	10	20	30	30	20
2-es város	10	0	25	35	20	10
3-as város	20	25	0	15	30	20
4-es város	30	35	15	0	15	25
5-ös város	30	20	30	15	0	14
6-os város	20	10	20	25	14	0



$$\begin{aligned}
 \min z &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\
 \text{f.h.} \quad x_1 + x_2 &\geq 1 && (1\text{-es város feltétel}) \\
 x_1 + x_2 &+ x_6 \geq 1 && (2\text{-es város feltétel}) \\
 x_3 + x_4 &\geq 1 && (3\text{-as város feltétel}) \\
 x_3 + x_4 + x_5 &\geq 1 && (4\text{-es város feltétel}) \\
 x_4 + x_5 + x_6 &\geq 1 && (5\text{-ös város feltétel}) \\
 x_2 &+ x_5 + x_6 \geq 1 && (6\text{-os város feltétel}) \\
 x_i &= 0 \text{ vagy } 1 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)
 \end{aligned}$$

További magyarázat a könyvben.

Lingo modell, feltételes szummával:

```
1 !halmazlefedés;
2 MODEL:
3   SETS:
4     VAROS /v1..v6/: x ;
5     TAV (VAROS, VAROS) : d;
6   ENDSETS
7   DATA:
8     d = 0 10 20 30 30 20
9       10 0 25 35 20 10
10      20 25 0 15 30 20
11      30 35 15 0 15 25
12      30 0 30 15 0 14
13      20 10 20 25 14 0;
14   ENDDATA
15   [allomasDB] MIN= @SUM(VAROS: x);
16
17   @FOR(VAROS (i):
18     @SUM(VAROS (j) | d(i,j) #LE# 15 : x(j)) >= 1
19   );
20
21
22 END
23
```

# Hálózati folyam feladatok

## Legrövidebb út:

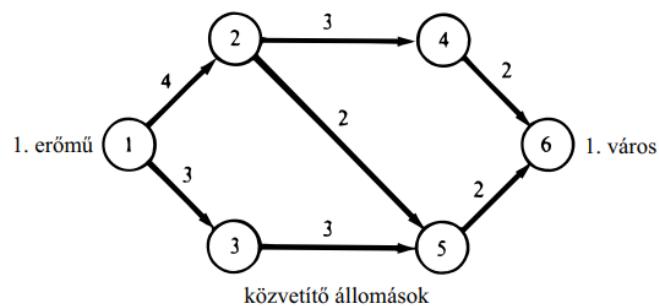
### 7.2. A legrövidebb út probléma

Ebben az alfejezetben feltezzük, hogy a hálózat minden egyik élénk van adott hossza. Válasszunk ki egy csúcspontot (mondjuk az 1-es csúcsot). Az 1-es csúcsból a hálózat összes többi csúcsába vezető legrövidebb utak (minimális összhosszúságú utak) keresését nevezzük a **legrövidebb út problémának**. Az 1. és 2. példák legrövidebb út feladatok.

#### 1. PÉLDA

Vegyük a Powerco példáját (2. ábra). Tegyük fel, hogy amikor az 1-es erőműből (1-es csúcs) elektromos energia áramlik az 1-es városba (6-os csúcs), közvetítőállomásokon kell áthaladnia (2–5 csúcsok). Ha két csúcs között lehetséges áramot küldeni, a köztük lévő távolságot (mérföldben) a 2. ábra mutatja. Például, a 2-estől a 4-es közvetítő állomásig 3 mérföld az út, viszont nem haladhat áram a 4-es és 5-ös állomások között. A Powerco az áramot úgy akarja az 1-es erőműből az 1-es városba küldeni, hogy az a lehető legkisebb távolságot tegye meg. A Powerco feladata tehát a 2. ábrán lévő hálózatban az 1-es csúcsból a 6-osba vezető legrövidebb út megkeresése.

#### 2. ÁBRA A Powerco hálózata



The screenshot shows the Lingo software interface. On the left, the 'Lingo Model - Lingo1' window displays the following LP code:

```

1 !legrövidebb út;
2 MODEL:
3 [ossztav] MIN= 4*x12 + 3*x13 + 3*x24 + 2*x25 + 3*x35 +
4 2*x46 + 2*x56;
5
6 !1-ből el kell indulni;
7
8 [start] x12 + x13 = 1;
9 !Ahova beérkezem onnan menjek tovább;
10 !Bemenő = kimenő;
11
12 [v2] x12 = x24 + x25;
13 [V3] x13 = x35;
14 [V4] x24 = x46;
15 [v5] x25 + x35 = x56;
16
17 !Célállomásra meg kell érkezni;
18 [finish] x46 + x56 = 1;
19 END
20
21
22
23
24
25
26
27

```

On the right, the 'Solution Report - Lingo1' window shows the following results:

Variable	Value	Reduced Cost
X12	0.000000	0.000000
X13	1.000000	0.000000
X24	0.000000	0.000000
X25	0.000000	0.000000
X35	1.000000	0.000000
X46	0.000000	1.000000
X56	1.000000	0.000000

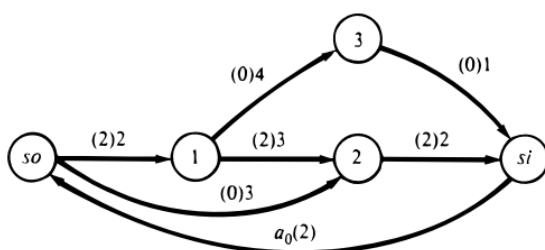
Row	Slack or Surplus	Dual Price
OBJECTIVE	8.000000	-1.000000
START	0.000000	-4.000000
V2	0.000000	1.000000
V4	0.000000	-3.000000
V5	0.000000	-2.000000
FINISH	0.000000	-4.000000

$V_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_5 \rightarrow v_6$  össztáv= 8km

Maximális folyam:

**3. PÉLDA** A Sunco olajtársaság a lehető legnagyobb mennyiséggű olajat akarja (óránként) eljuttatni a 6. ábrán látható csővezetéken keresztül a *so* csúcsból a *si* csúcsba. A *so*-ból a *si*-be vezető útján az olaj esetleg átmegy az 1, 2 és 3 szivattyú-állomásokon, ahol különböző átmérőjű csővezetékek kapcsolódnak egymáshoz. A 8. táblázat mutatja, hogy az egyes éleken maximálisan hányszor millió hordó olaj nyomható keresztül (óránként). Ezeket a számokat hívjuk **élkapacitásnak**. Írunk fel egy olyan LP-t, amelyikkel meghatározható a *so*-ból a *si*-be küldhető olaj maximális mennyisége (óránként).

**6. ÁBRA**  
A Sunco hálózata



$$\begin{aligned}
\max z &= x_0 \\
\text{f.h.} \quad x_{so,1} &\leq 2 && (\text{élkapacitás korlátok}) \\
x_{so,2} &\leq 3 \\
x_{12} &\leq 3 \\
x_{2,si} &\leq 2 \\
x_{13} &\leq 4 \\
x_{3,si} &\leq 1 \\
x_0 &= x_{so,1} + x_{so,2} && (so csúcs folyam feltétel) \\
x_{so,1} &= x_{12} + x_{13} && (1-es csúcs folyam feltétel) \\
x_{so,2} + x_{12} &= x_{2,si} && (2-es csúcs folyam feltétel) \\
x_{13} &= x_{3,si} && (3-as csúcs folyam feltétel) \\
x_{3,si} + x_{2,si} &= x_0 && (si csúcs folyam feltétel) \\
x_{ij} &\geq 0
\end{aligned}$$

The screenshot shows the Lingo software interface. On the left, the 'Lingo Model - Lingo1' window displays the following MIP code:

```

1 !maximális folyam;
2 MODEL:
3   [osszFolyadek] MAX= x;
4 !Csatorna kapacitások;
5   x01 <= 2;
6   x02 <= 3;
7   x12 <= 3;
8   x13 <= 4;
9   x2v <= 2;
10  x3v <= 1;
11
12 !Folyam feltételek;
13  [indulas] x = x01 + x02;
14  [v1] x01 = x12 + x13;
15  [v2] x12 + x02 = x2v;
16  [v3] x13 = x3v;
17  [veg] x3v + x2v = x;
18 END
19
20
21
22
23
24
25
26
27

```

On the right, the 'Solution Report - Lingo1' window shows the following statistics and variable values:

Solution Report - Lingo1		
Elapsed runtime seconds: 0.05		
Model Class: LP		
Total variables:	7	
Nonlinear variables:	0	
Integer variables:	0	
Total constraints:	12	
Nonlinear constraints:	0	
Total nonzeros:	21	
Nonlinear nonzeros:	0	
Variable	Value	Reduced Cost
X	3.000000	0.000000
X01	2.000000	0.000000
X02	0.000000	0.000000
X12	1.000000	0.000000
X13	1.000000	0.000000
X2V	2.000000	0.000000
X3V	1.000000	0.000000
Row	Slack or Surplus	Dual Price
OSSZFOLYADEK	0.000000	1.000000
x	0.000000	0.000000
3	2.000000	0.000000
4	2.000000	0.000000
5	3.000000	0.000000
6	0.000000	1.000000
7	0.000000	1.000000
INDULAS	0.000000	0.000000
V1	0.000000	0.000000
V2	0.000000	0.000000
V3	0.000000	0.000000
VEG	0.000000	-1.000000