

Adatszerkezetek és algoritmusok

Fák

Dr. Fazekas Attila

A tananyag elkészítését az EFOP-3.4.3-16-2016-00021 számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.



DEBRECENI
EGYETEM



Fa adatszerkezet

- A **fa** egy hierarchikus adatszerkezet, amely véges csúcsot tartalmaz és teljesülnek a következő tulajdonságok:
 - Van a fának egy kitüntetett csúcsa, amelynek nincs őse. Ez a fa **gyökere**.
 - Két csúcs, amely között van él, az egyik a másik **őse**. A másik az egyik **leszármazottja**.
 - Minden csúcs – kivéve a gyökeret – esetén csak egy ős létezik.



Fa adatszerkezet (folyt.)

- A fa rekurzív definíciója:
 - A fa vagy üres, vagy
 - Van egy kitüntetett csomópontja, ez a gyökér.
 - A gyökérhez 0 vagy több diszjunkt fa kapcsolódik. Ezek a gyökérhez kapcsolódó részfák.
- A fával kapcsolatos algoritmusok gyakran rekurzívak, követve a fenti definíció gondolatmenetét.



DEBRECENI
EGYETEM

Fogalmak

- Az adatelemek a fa csúcsainak felelnek meg.
- Az élek az adatelemek egymás utáni sorrendjét határozzák meg.
- A **gyökérelem** a fa első eleme, amelynek nincs megelőzője.
- **Levélelem** a fa azon eleme, amelynek nincs rákövetkezője.
- **Közbenső elem** az összes többi adatelem.
- Minden közbenső elem egy **részfa** gyökerének tekinthető, így a fák részfákra bonthatók



DEBRECENI
EGYETEM

Fogalmak (folyt.)

- A **fa szintje** a gyökértől azonos távolságra lévő csúcsok halmaza. A gyökérelem a nulladik szinten van.
- A fa szintjeinek száma a **fa magassága**.
- **Útvonal** az egymást követő élek sorozata. Minden levélelem a gyökértől pontosan egy úton érhető el.
- **Ág** az az útvonal, amely levélben végződik.
- **Minimális magasságú** az a **fa**, amelynek a magassága az adott elemszám esetén a lehető legkisebb.



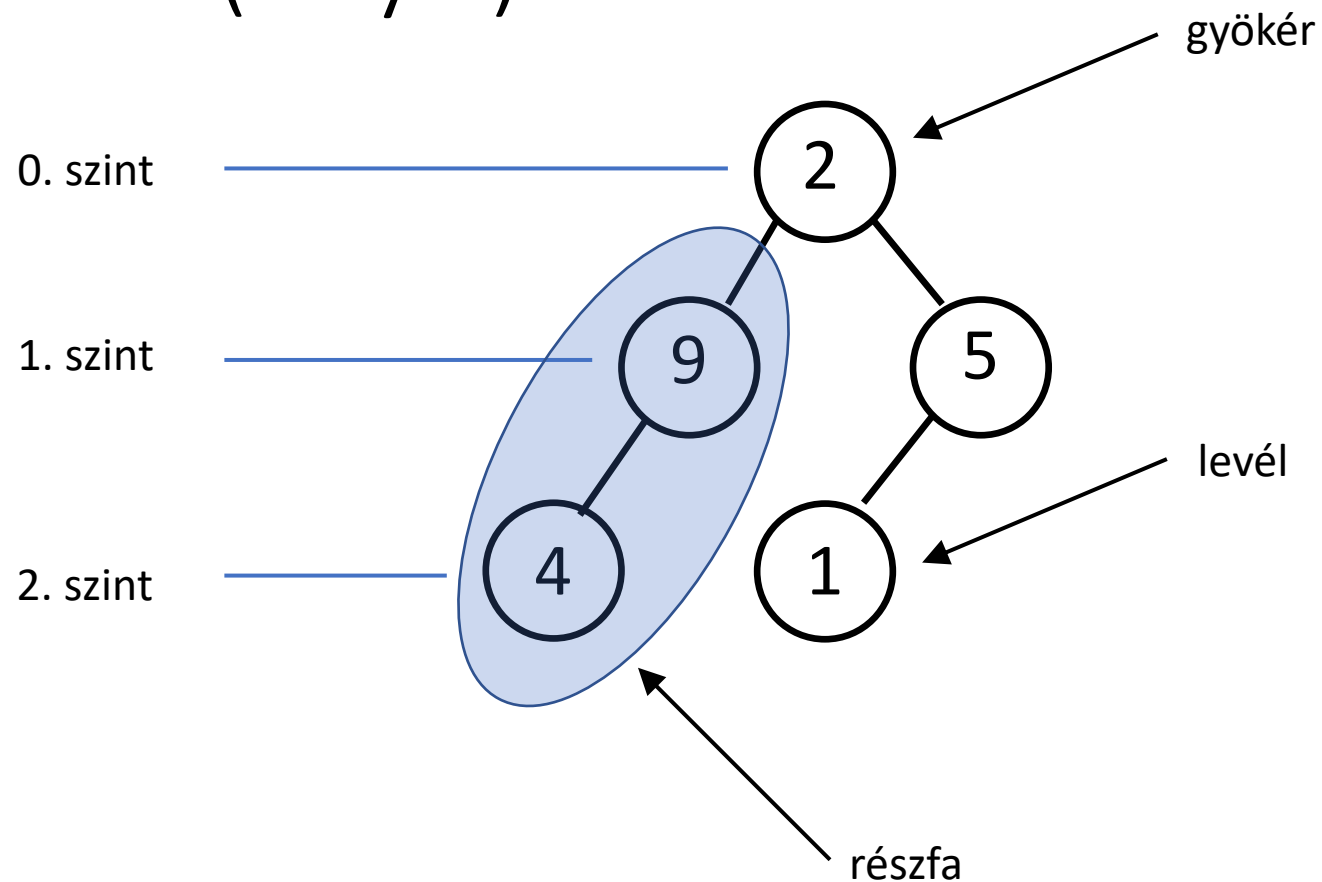
Fogalmak (folyt.)

- Egy fát **kiegyensúlyozottnak** nevezünk, ha csomópontjai azonos fokúak, és minden szinten az egyes részfák magassága nem ingadozik többet egy szintnél.
- **Rendezett fa**, ha egy szülőhöz tartozó részfák sorrendje meghatározott.



DEBRECENI
EGYETEM

Fogalmak (folyt.)



Bináris fák

- A **bináris fa** olyan fa, amelynek csúcspontjaiból maximum 2 él fut ki (2 részfa nyílik, fokszáma 2).
- Egy bináris fa akkor **tökéletesen kiegyensúlyozott**, ha minden elem bal-, illetve jobboldali részfájában az elemek száma legfeljebb eggyel tér el.
- **Teljesnek** nevezünk egy bináris fát, ha minden közbenső elemének pontosan két leágazása van.
- **Majdnem teljes**, ha csak a levelek szintjén van esetleg hiány.



DEBRECENI
EGYETEM

Fa műveletek

- Lekérdező műveletek:
 - Üres-e a fa
 - Gyökérellem lekérdezése
 - Adott elem megkeresése
- Módosító műveletek:
 - Üres fa létrehozása
 - Új elem beszúrása
 - Meghatározott elem kitörlése



DEBRECENI
EGYETEM

Fa műveletek (folyt.)

- Összes elem kitörlése
 - Egy részfa törlése
 - Részfák kicserélése egymással
 - Gyökér megváltoztatása
-
- Fák bejárása



DEBRECENI
EGYETEM

Bejárások

- A fabejárási algoritmusok rekurzívan értendők. Összesen hatféle fabejárási módszer képzelhető el, de ebből csak háromnak van gyakorlati haszna.
- Az egyes módszerek esetén különbség csak az alábbi lépések sorrendjében van: **gyökérelem** feldolgozása, **bal oldali részfa** feldolgozása, **jobb oldali részfa** feldolgozása



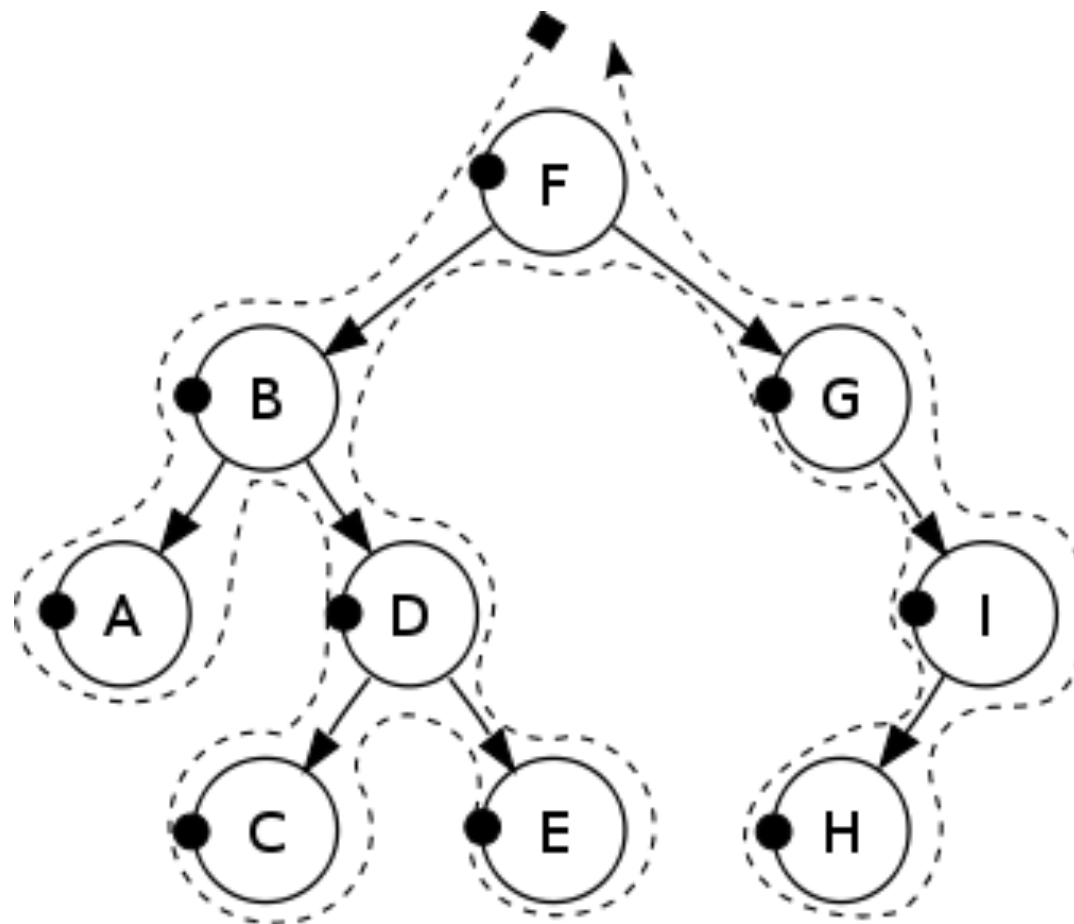
Bejárások

- **Pre-order** bejárási sorrend: gyökérelem, bal oldali részfa, jobb oldali részfa
- **Post-order** bejárási sorrend: bal oldali részfa, jobb oldali részfa, gyökérelem
- **In-order** bejárási sorrend: bal oldali részfa, gyökérelem, jobb oldali részfa
- Az in-order bejárást a bináris fák esetén értelmezzük.



DEBRECENI
EGYETEM

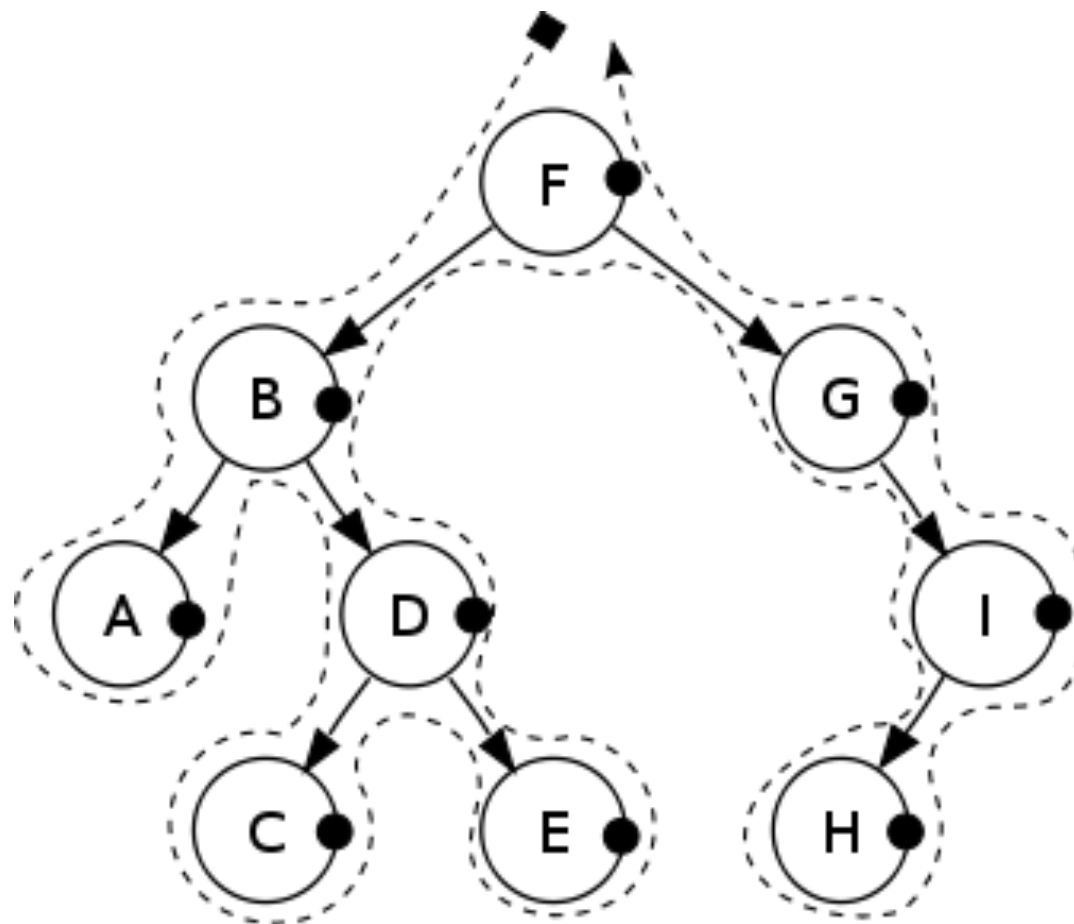
Bejárások (folyt.) – Pre-order - FBADCEGIH



DEBRECENI
EGYETEM

Source: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sorted_binary_tree_preorder.svg

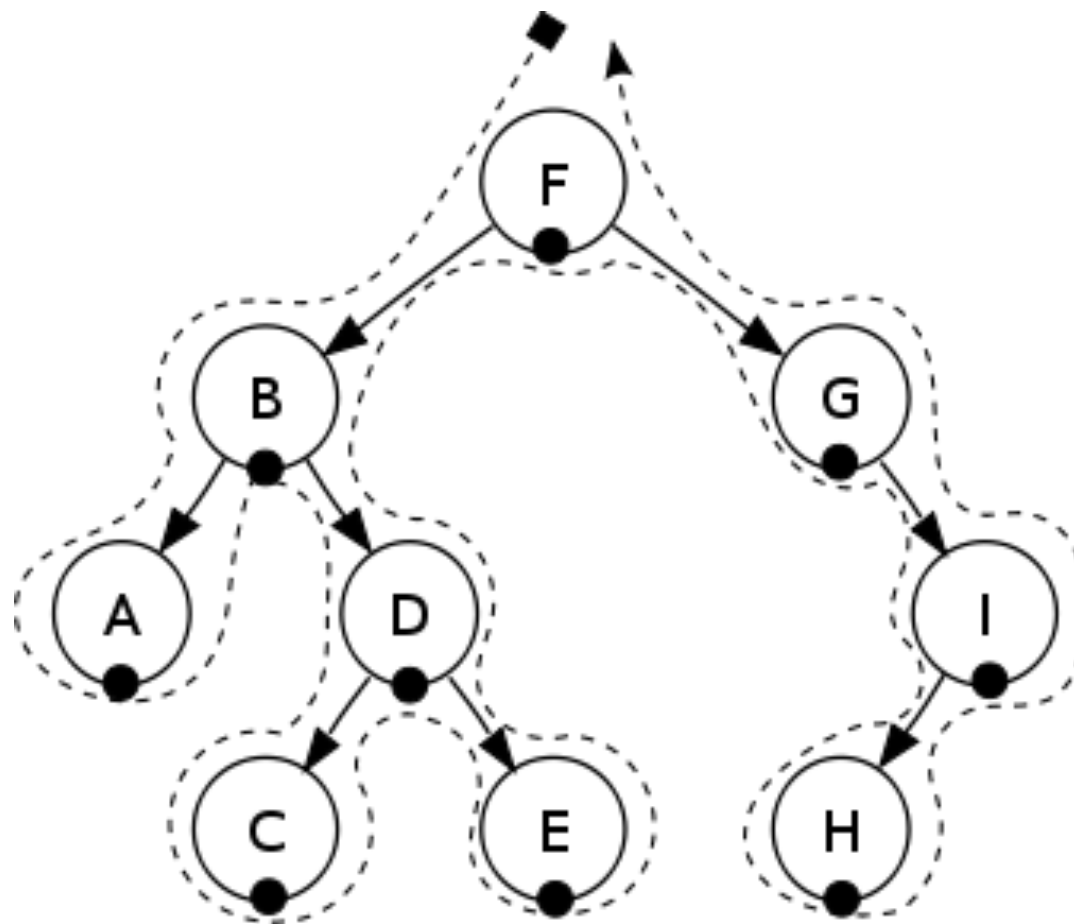
Bejárások (folyt.) – Post-order - ACEDBHIGHF



DEBRECENI
EGYETEM

Source: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sorted_binary_tree_postorder.svg

Bejárások (folyt.) – In-order - ABCDEFGHI



DEBRECENI
EGYETEM

Source: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sorted_binary_tree_inorder.svg

Bejárások – Pre-order

```
def Preorder(root):  
    if root:  
        print(root.element),  
        Preorder(root.left)  
        Preorder(root.right)
```



DEBRECENI
EGYETEM

Source: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sorted_binary_tree_inorder.svg

Bejárások – Post-order

```
def Postorder(root):  
    if root:  
        Postorder(root.left)  
        Postorder(root.right)  
        print(root.element)
```



DEBRECENI
EGYETEM

Source: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sorted_binary_tree_inorder.svg

Bejárások – In-order

```
def Inorder(root):  
    if root:  
        Inorder(root.left)  
        print(root.element),  
        Inorder(root.right)
```



DEBRECENI
EGYETEM

Source: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sorted_binary_tree_inorder.svg

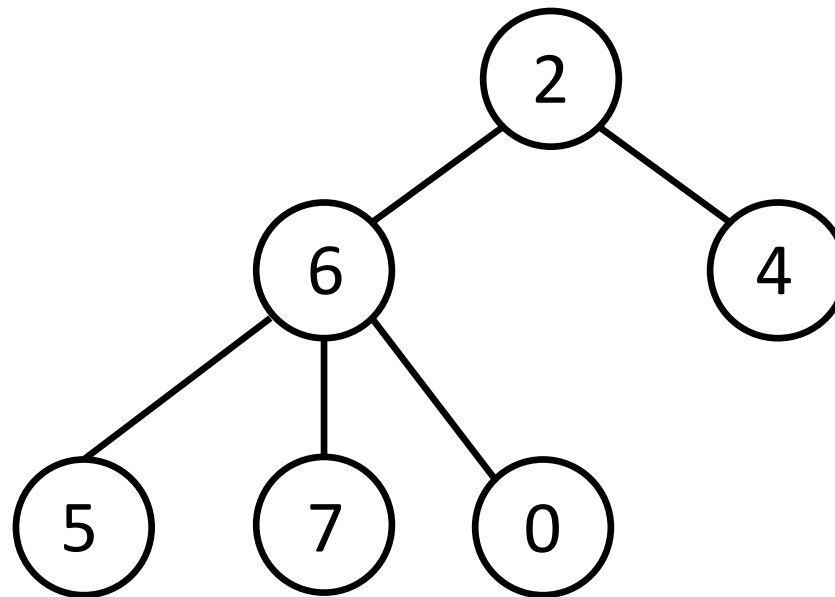
Fa reprezentáció

- **Balgyerek-jobbtestvér:** Minden csomópont ismeri a szülőjét, egyetlen (legbaloldalibb) gyermekét és a közvetlen jobbtestvérét. Ezzel lehetséges, hogy bármely csomópontnak tetszőleges gyereke legyen, amik gyakorlatilag egy láncolt listát alkotnak.
- **Multilistas ábrázolás:** Minden csomópont egy láncolt lista. A lista eleme tartalmazza az adatot, a többi csomópont már csak hivatkozásokat a leszármazottakra.



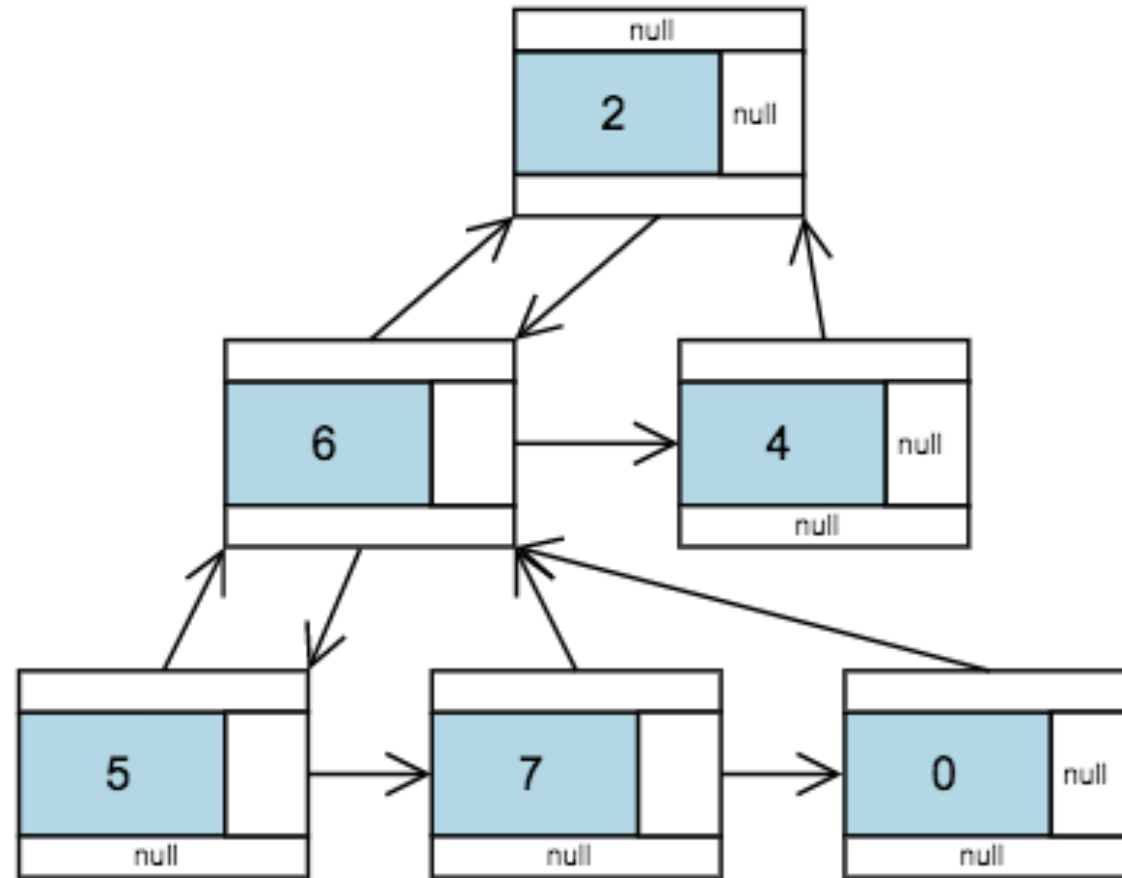
DEBRECENI
EGYETEM

Példa

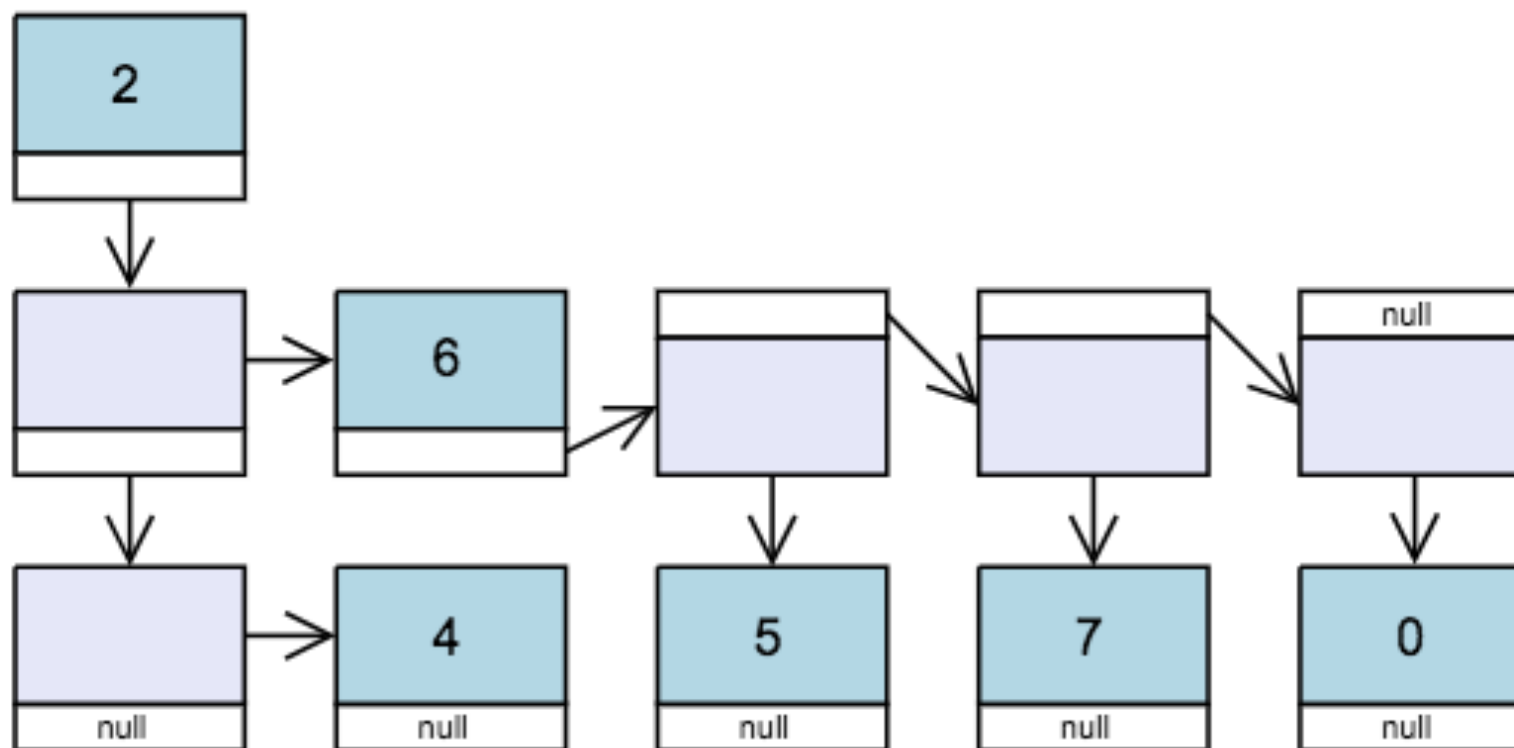


DEBRECENI
EGYETEM

Fa reprezentáció – balgyerek-jobbtestvér



Fa reprezentáció - multilistás

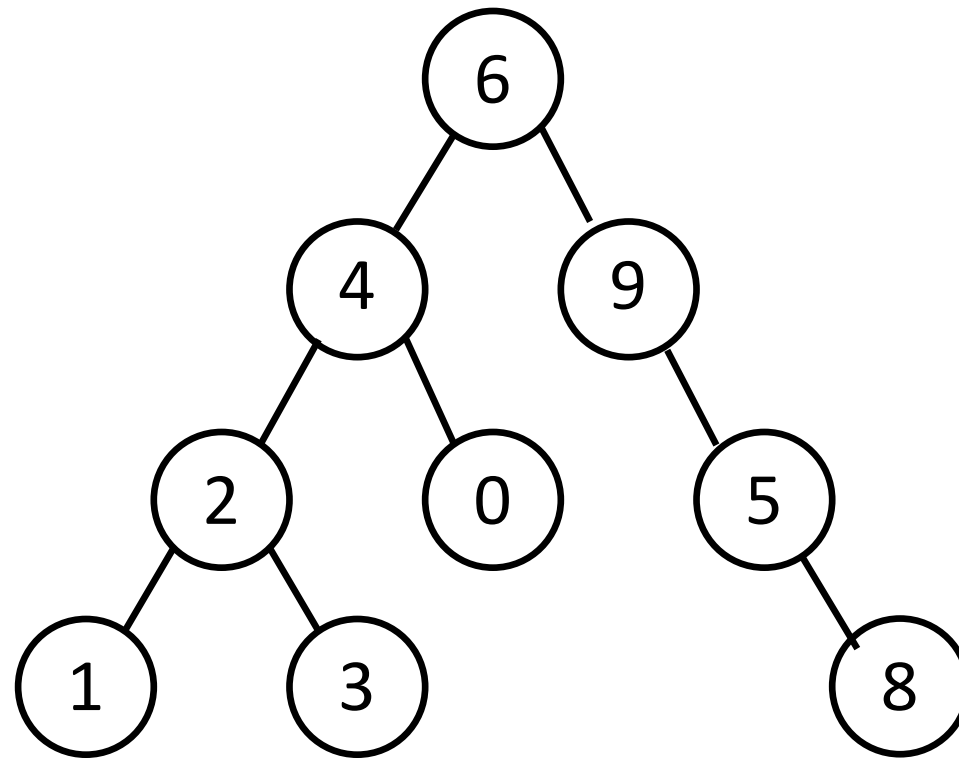


Bináris fák reprezentációja

- Bináris fák esetén használhatjuk az **aritmetikai ábrázolást**, ami a fák csúcsain ábrázolt értékek szintfolytonos, balra tömörített ábrázolása. Tömbben is lehetséges a tárolása.
- **Láncolt ábrázolás**. Minden csomópont ismeri a szülőjét, valamint a jobb- és balgyerekeit.



Példa



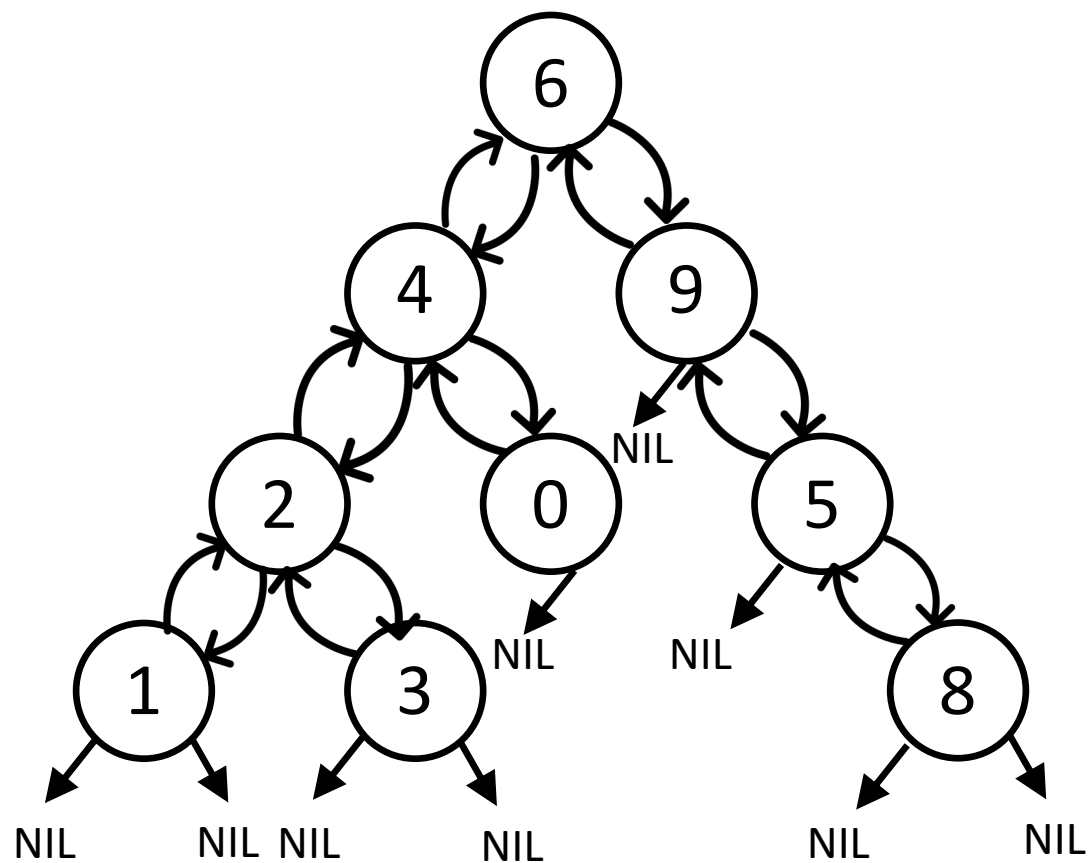
Példa – aritmetikai ábrázolás

6	4	9	2	0	-	5	1	3	-	-	-	-	-	8
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---



DEBRECENI
EGYETEM

Példa – láncolt ábrázolás



Bináris kereső fa

- A **kereső fa** egy olyan adatszerkezet, amelynek kialakítása a különböző adatelemek között meglévő rendezési relációt követi.
- A fa felépítése olyan, hogy minden csúcsra igaz az, hogy a csúcs értéke nagyobb, mint tetszőleges csúcsé a tőle balra lévő leszálló ágon és a csúcs értéke kisebb minden, a tőle jobbra lévő leszálló ágon található csúcs értékénél.
- In-order bejárással az elemek rendezett sorozatát kapjuk meg.
- Alap algoritmusok: **keresés**, **minimum** és **maximum** megkeresése.



Elem beszúrása bináris keresőfába

- A beszúrás során ügyelnünk kell a keresőfa tulajdonságának megőrzésére.
- Ugyanazok az elemek többféleképpen is elhelyezkedhetnek egy bináris keresőfában, így több stratégia is létezik.
- Használjunk olyan módszert, amikor a már meglévő elemeket nem kell átmozgatnunk.
- Rekurzív algoritmus:
 - Ha a fa üres, akkor az adott elemet gyökérként beszúrjuk az üres fába.
 - Ha a fa nemüres, és gyökere megegyezik a beszúrandó elemmel, akkor hiba.
 - Ha a beszúrandó elem kisebb, mint a fa gyökere, akkor a baloldali részfába, ha nagyobb, akkor a jobboldali részfába szúrjuk be az elemet.



Elem törlése bináris keresőfából

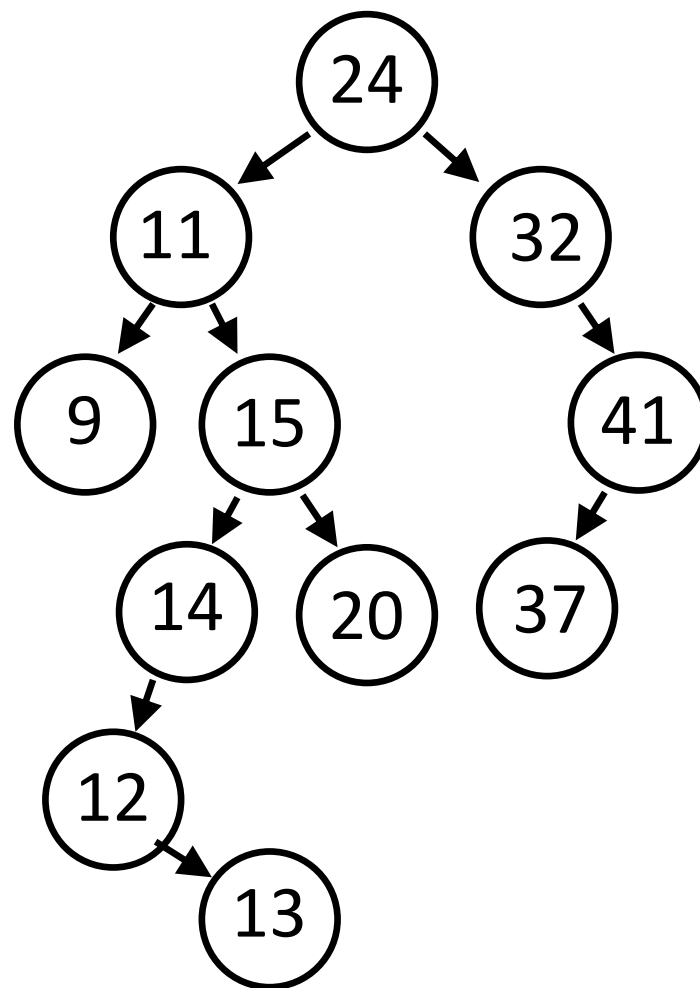
Lehetőségek:

- A törlendő csúcsnak még nincs gyereke. Ekkor szülőjének mutatóját NIL-re állítjuk.
- A törlendő csúcsnak egy gyereke van. Ekkor a szülője és a gyermeke között építünk ki kapcsolatot.
- A törlendő csúcsnak két gyereke van. Átszervezzük a fát. Kivágjuk azt a legközelebbi rákövetkezőjét, aminek nincs balgyereke, így a korábbi típusok valamelyike fordul elő, majd ennek tartalmát beírjuk a törlendő csúcsba.

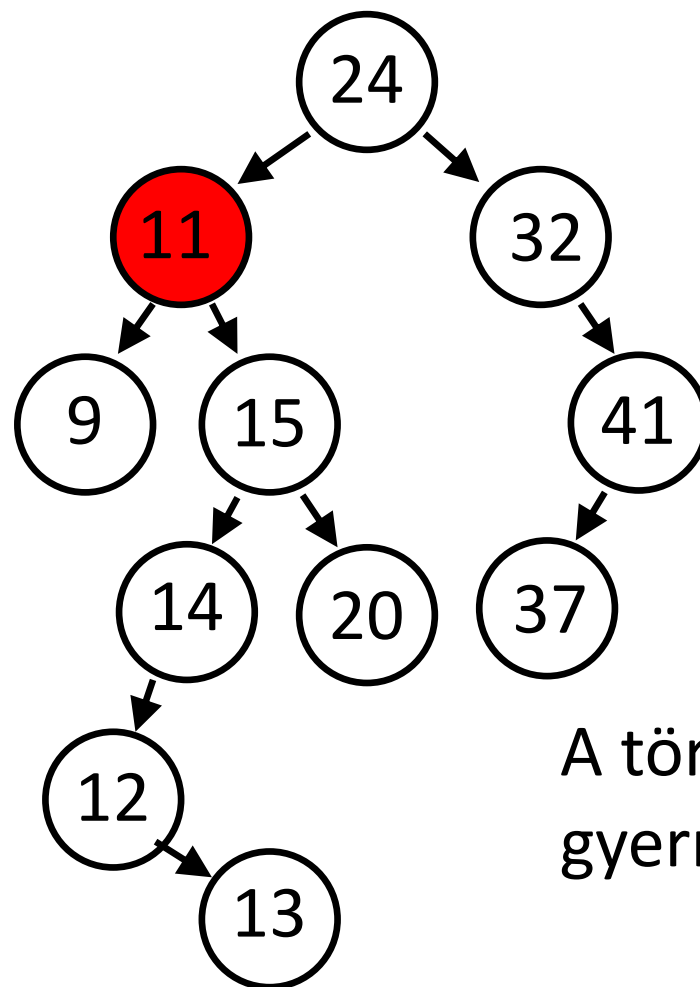


DEBRECENI
EGYETEM

Példa - Elem törlése bináris keresőfából



Példa - Elem törlése bináris keresőfából

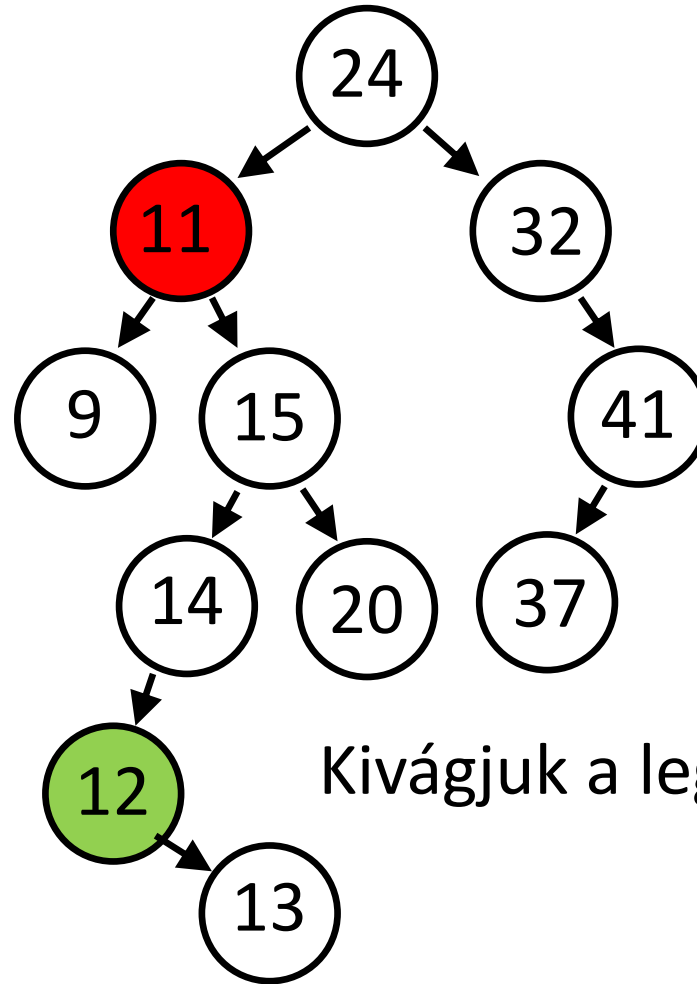


A törlendő elemnek (11) két gyermeke van.



Példa - Elem törlése bináris keresőfából

A legközelebbi
rákövetkezőnek nincs
baloldali gyermeke,
így a korábbi törlések
valamelyikével
„kivágható”.



Kivágjuk a legközelebbi rákövetkezőjét!

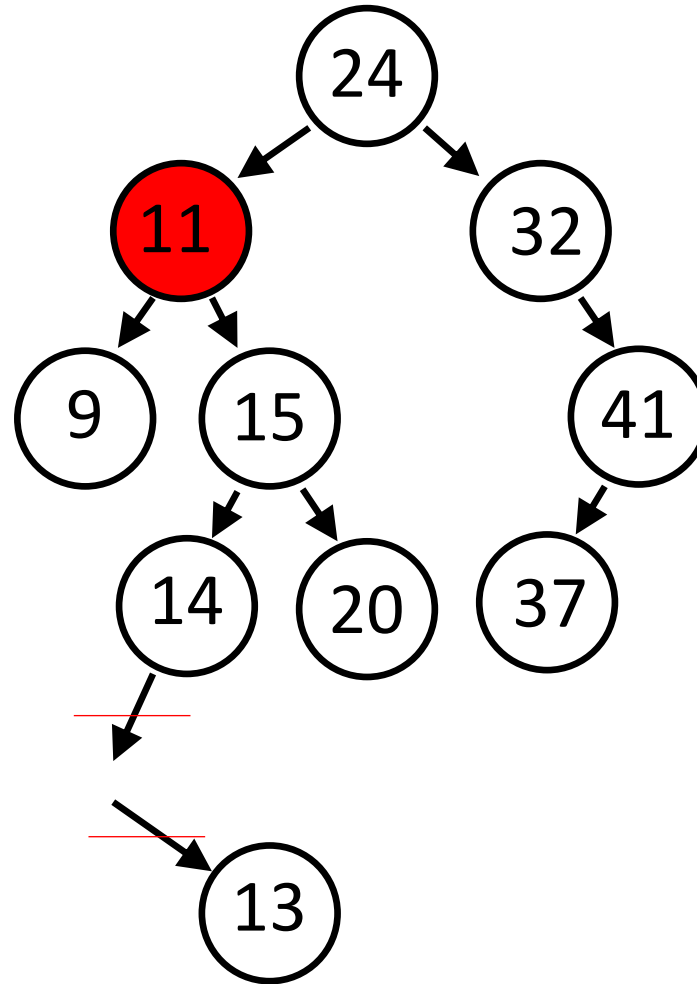


DEBRECENI
EGYETEM

Példa - Elem törlése bináris keresőfából

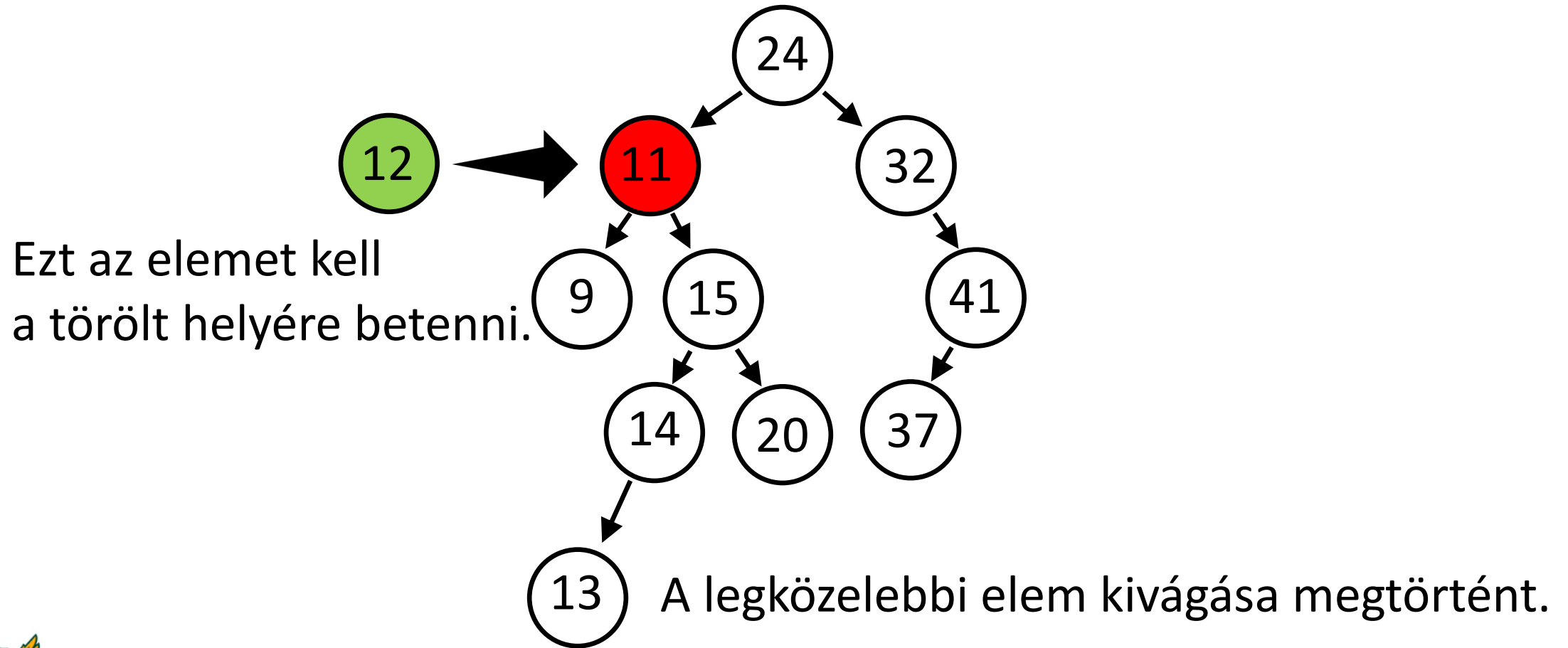
12

Ez az elem a második pont alapján leírt módon törölhető.

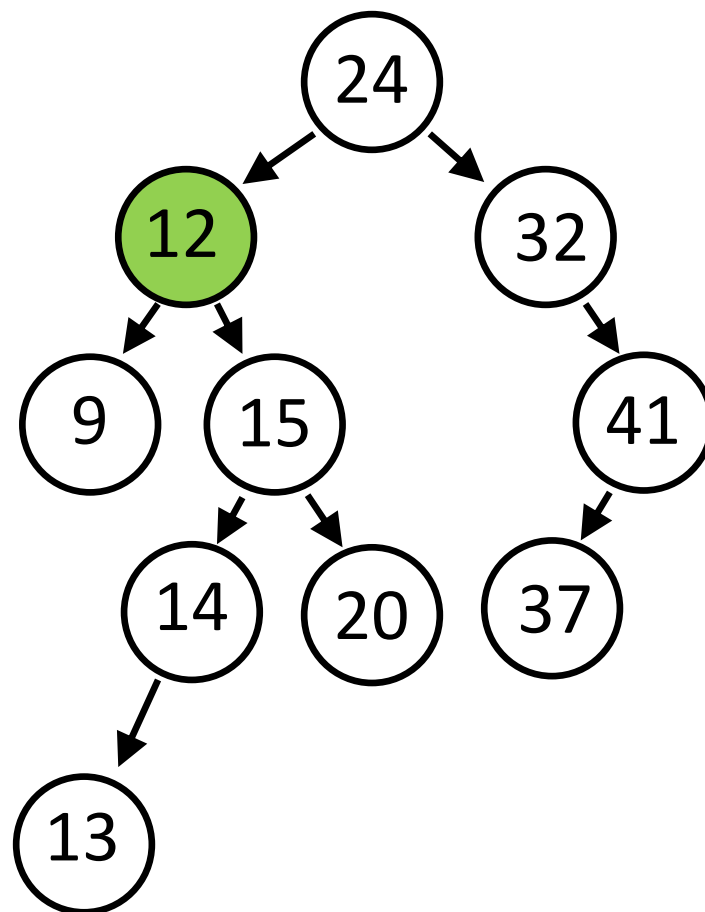


DEBRECENI
EGYETEM

Példa - Elem törlése bináris keresőfából



Példa - Elem törlése bináris keresőfából



Köszönöm a figyelmet!