GAZDASÁGI MATEMATIKA I.

LOSONCZI LÁSZLÓ ANYAGAINAK FELHASZNÁLÁSÁVAL

1. A HALMAZELMÉLET ALAPJAI

1.1 Halmazok

A halmaz, halmaz eleme *alapfogalom* (nem definiáljuk őket). Szokásos jelölések: *halmazok* A, B, C (nagy betűk), *elemek* a, b, c (kis betűk), *tartalmazás* $a \in B$ (a eleme az A halmaznak) ill. $b \notin A$ (b nem eleme az A halmaznak).
Egy halmaz akkor adott, ha minden objektumról el tudjuk dönteni, hogy eleme a halmaznak vagy nem az. Halmazok megadási módjai:

- *felsorolás* pl. $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ (az első 5 prímszámból álló halmaz),
- *ismert halmaz adott tulajdonságú elemeinek megadása* pl. $A = \{\ n \in \mathbb{N}\ :\ n \text{ páros }\ \}$ ahol $\mathbb{N}$ a természetes számok halmaza, melyet ismertnek tekintünk.

Definíciók.

- Azt a halmazt melynek egyetlen eleme sincs *üres halmaznak* nevezzük és $\emptyset$-tel jelöljük.
- Az A és B halmazokat *egyenlőnek* nevezzük, ha elemei ugyanazok. Ezt $A = B$-vel jelöljük, tagadását $A \neq B$ jelöli.
- Azt mondjuk, hogy az A halmaz *részhalmaza* a B halmaznak, ha A minden eleme eleme B-nek. Jelölése: $A \subset B$. Ezt úgy is írhatjuk, hogy $B \supset A$, ezt úgy olvassuk, hogy B tartalmazza az A halmazt. Az A halmaz *valódi részhalmaza* a B halmaznak, ha $A \subset B$ és $A \neq B$.

Megjegyzések.
Definícióinkat, állításainkat egyszerűbben fogalmazhatjuk meg a *matematikai logika* jeleinek használatával.
Ítélet (állítás) alatt olyan kijelentést értünk melyről egyértelműen eldönthető, hogy igaz (i) vagy hamis (h).
Állításokból újabb állításokat kaphatunk az 5 *logikai művelet* (negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció, ekivivalencia) segítségével. Legyenek P, Q állítások. A logikai műveletek definíciói:

- $\neg P$ (nem P, vagy P tagadása) akkor és csakis akkor igaz, ha P hamis.
- $P \wedge Q$ (P és Q) akkor és csakis akkor igaz ha P és Q is igaz.
- $P \vee Q$ (P vagy Q) akkor és csakis akkor igaz ha P és Q legalább egyike igaz.
- $P \Longrightarrow Q$ (P-ből következik Q)akkor és csakis akkor igaz ha P hamis vagy ha Q igaz.
- $P \Longleftrightarrow Q$ (P ekvivalens Q-val) akkor és csakis akkor igaz ha P és Q vagy mindketten igazak vagy mindketten hamisak.

$P \Longrightarrow Q$ esetén azt mondjuk, hogy P *elegendő* Q teljesüléséhez, vagy Q *szükséges* P teljesüléséhez.
Belátható, hogy

$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\neg Q \Longrightarrow \neg P)$$

$P \Longleftrightarrow Q$ esetén azt mondjuk, hogy P *szükséges és elegendő* Q teljesüléséhez.

Használjuk még a *logikai kvantorokat*:

- *univerzális kvantor*: $\forall x$ = minden x-re

- *egzisztenciális kvantor*: $\exists x$ = létezik x

E jelölések segítségével pl.

$$A = B \iff (\forall x)((x \in A \Longrightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Longrightarrow x \in A)),$$
$$A \subset B \iff (\forall x)(x \in A \Longrightarrow x \in B).$$

Műveletek halmazokkal.
Célszerű a vizsgált halmazokat egy X alaphalmaz részhalmazainak tekinteni.
Definíciók.

$A \cup B$	$:= \{\ x \in X\ :\ x \in A \text{ vagy } x \in B\ \}$	az A és B halmazok uniója vagy egyesítése
$A \cap B$	$:= \{\ x \in X\ :\ x \in A \text{ és } x \in B\ \}$	az A és B halmazok metszete vagy közös része
$A \setminus B$	$:= \{\ x \in X\ :\ x \in A \text{ és } x \notin B\ \}$	az A és B halmazok különbsége
$\overline{A}$	$:= X \setminus A$	az A halmaz komplementere

$\cup, \cap, \setminus$ *binér* (kétváltozós) műveletek, a komplementerképzés *unér* (egyváltozós) művelet. Az A és B halmazokat *diszjunkt*nak nevezzük, ha metszetük üres.
Állítás. *Tetszőleges $A, B, C \subset X$ halmazokra teljesülnek az alábbi tulajdonságok.*

$$\begin{aligned}
A \cup B &= B \cup A, & A \cap B &= B \cap A,\\
A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C, & A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C,\\
A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), & A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C),\\
A \cup A &= A, & A \cap A &= A,\\
\overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B}, & \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B}.
\end{aligned}$$

A felsorolt tulajdonságok nevei rendre (azaz a felsorolás sorrendjében) az unió ill. metszetképzésre vonatkozó *kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás, idempotencia, és a de Morgan féle azonosságok.*

A halmazműveletek azonosságai az un. *Venn diagrammokkal* szemléltethetők.

1.2 Relációk

Definíció. Az A és B halmazok *Descartes szorzat*án (vagy direkt szorzatán) e halmazok elemeiből képezett összes (a, b) *rendezett párok* halmazát értjük, ahol $a \in A, b \in B$. Jelölésére az $A \times B$ szimbólumot használjuk. Azaz

$$A \times B = \{\ (a, b)\ :\ a \in A, b \in B\ \}.$$

Rendezett párok egyenlőségére megköveteljük azt, hogy

$$(a, b) = (c, d) \text{ akkor és csakis akkor ha } a = c, b = d.$$

Használjuk az $A \times A = A^2$ jelölést is. Megjegyezzük, hogy $A \times B$ általában *nem egyenlő* $B \times A$-val.

DEFINÍCIÓ. Az A és B halmazok Descartes szorzatának egy $R \subset A \times B$ részhalmazát az A és B halmazok közötti *(binér) relációnak* nevezzük. Ha $(a, b) \in R$ akkor azt mondjuk, hogy az *a elem R relációban van b-vel.* Ezt szokás $a\,R\,b$-rel is jelölni.

$A = B$ esetén az A és B közötti relációt *A-n értelmezett reláció*nak mondjuk.

DEFINÍCIÓ. Az A halmazon értelmezett $R \subset A \times A$ relációt *féligrendezésnek* nevezzük, ha R

- *reflexív,* azaz $(\forall a \in A)\ a\,R\,a$
- *antiszimmetrikus*, azaz $(\forall a, b \in A)\ a\,R\,b \wedge b\,R\,a \Longrightarrow a = b$
- *tranzitív,* azaz $(\forall a, b, c \in A)\ a\,R\,b \wedge b\,R\,c \Longrightarrow a\,R\,c.$

Az A halmazon értelmezett $R \subset A \times A$ relációt *rendezésnek* nevezzük, ha R féligrendezés, és

$$(\forall a, b \in A)\ a\,R\,b \vee b\,R\,a.$$

PÉLDÁK. Egy X halmaz összes részhalmazain a $\subset$ tartalmazási reláció *féligrendezés.*
Ha $A = \mathbb{R}$ a valós számok halmaza, akkor $\leq$ *rendezés.*

DEFINÍCIÓK. Tekintsük a valós számok $\mathbb{R}$ halmazát a $\leq$ rendezéssel és legyen $A \subset \mathbb{R}$.

- Az A halmazt *felülről korlátos*nak nevezzük, ha van olyan $k \in \mathbb{R}$ szám, hogy $(\forall a \in A)\, a \leq k$. A k számot A (egy) *felső korlát*jának nevezzük.
- Az A halmazt *alulról korlátos*nak nevezzük, ha van olyan $k' \in \mathbb{R}$ szám, hogy $(\forall a \in A)\, k' \leq a$. A k' számot A (egy) *alsó korlát*jának nevezzük.
- Az A halmazt *korlátos*nak nevezzük, ha alulról és felülről is korlátos.
- Az $s \in \mathbb{R}$ számot az A halmaz *pontos felső korlátjának (vagy suprémumának)* nevezzük, ha
  - s az A felső korlátja
  - A bármely s' felső korlátjára $s \leq s'$.

  Jelölés $s = \sup A$.
- Az $i \in \mathbb{R}$ számot az A halmaz *pontos alsó korlátjának (vagy infimumának)* nevezzük, ha
  - i az A alsó korlátja
  - A bármely i' alsó korlátjára $i' \leq i$.

  Jelölés $i = \inf A$.

PÉLDA. Legyen $A = \{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ a természetes számok reciprokainak halmaza. Akkor A korlátos és $\sup A = 1, \inf A = 0$.

DEFINÍCIÓ. Az A és B halmazok között értelmezett $F \subset A \times B$ relációt az *A halmazon definiált függvénynek* nevezzük, ha minden $a \in A$ elemhez pontosan egy olyan $b \in B$ elem létezik, melyre $a\,F\,b$ teljesül.
Ilyenkor a $b = F(a)$ jelölést használjuk, a függvény jelölésére pedig $F : A \to B$-t használjuk.

$\mathcal{D}_F = A$ az F függvény *értelmezési tartomány*a (domain of F).
$\mathcal{R}_F := \{\ F(a)\ :\ a \in A\ \}$ az F függvény *értékkészlet*e (range of F).

DEFINÍCIÓK.

- Az $F : A \to B$ függvényt *injektívnek* (vagy kölcsönösen egyértelműnek, invertálhatónak) nevezzük, ha
  $$(\forall a, b \in A) a \neq b \Longrightarrow F(a) \neq F(b),$$
  vagy, ami ugyanaz
  $$(\forall a, b \in A) F(a) = F(b) \Longrightarrow a = b.$$
- Az $F : A \to B$ függvényt *szürjektívnek* (vagy B-**re** képezőnek) nevezzük, ha $\mathcal{R}_F = B$.
- Az $F : A \to B$ függvényt *bijektívnek* (vagy kölcsönösen egyértelműen B-**re** képezőnek) nevezzük, ha injektív és szürjektív.

Definíció. *Ha $F : A \to B$ injektív*, akkor az $F^{-1} : \mathcal{R}_F \to A$ *inverz függvényét* az alábbi módon értelmezzük: *tetszőleges $b \in \mathcal{R}_F$-hez létezik egyetlen egy $a \in A$ úgy, hogy* $b = F(a)$, ekkor legyen

$$F^{-1}(b) := a.$$

Röviden, $F^{-1}(b) = a$ ha $F(a) = b$.

Azonnal látható, hogy

$$\begin{aligned} F\left(F^{-1}(b)\right) &= F(a) = b \quad \text{ha } b \in \mathcal{R}_F, \\ F^{-1}\left(F(a)\right) &= a \qquad \text{ha } a \in A. \end{aligned}$$

Ha F bijektív, akkor itt $\mathcal{R}_F = B$.

2. A VALÓS SZÁMOK

2.1 A valós számok aximómarendszere

Az $\mathbb{R}$ halmazt a *valós számok halmazának* nevezzük, ha teljesíti az alábbi 3 axiómacsoport axiómáit.

1.Testaxiómák

$\mathbb{R}$-ben két művelet van értelmezve, az

$$\begin{aligned} &\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \to x + y \qquad \text{összeadás} \\ &\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \to x \cdot y \qquad \text{szorzás} \end{aligned}$$

melyek teljesítik az alábbi axiómákat (melyeket testaxiómáknak nevezünk). A szorzás $\cdot$ jelét az alábbi axiómákban kiírjuk, de a továbbiakban nem, kivéve, ha elhagyása félrértéshez vezetne.

Az összeadás axiómái:	A szorzás axiómái:
$(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x + y = y + x,$	$(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x \cdot y = y \cdot x,$
$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x + (y + z) = (x + y) + z,$	$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$
$(\exists 0 \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\ x + 0 = x,$	$(\exists 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0)(\forall x \in \mathbb{R})\ x \cdot 1 = x,$
$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists - x \in \mathbb{R})\ x + (-x) = 0$	$(\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0)(\exists x^{-1} \in \mathbb{R})\ x \cdot x^{-1} = 1$

Ezek az axiómák rendre az összeadás ill. szorzás *kommutativitását, asszociativitását, a* 0 *ill.* 1 *létezését, és az additív ill. multiplikatív inverz létezését* fejezik ki.

Megköveteljük a szorzás *disztributivitását* az összeadásra nézve, azaz

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

2. Rendezési axiómák

R-en értelmezve van egy $\leq$ $(\subset \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ (olvasd kisebb vagy egyenlő) *rendezési reláció* (mely a korábban tárgyalt) négy axiómát teljesíti, továbbá

$$\begin{aligned} &(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x \leq y) \Longrightarrow x + z \leq y + z, \\ &(\forall x, y \in \mathbb{R})\ (0 \leq x \wedge 0 \leq y) \Longrightarrow 0 \leq x \cdot y. \end{aligned}$$

E tulajdonságokat az *összeadás és a szorzás monotonitásának* nevezzük.

Ha $0 \leq x$ de $0 \neq x (x \in \mathbb{R})$ akkor ezt $0 < x$ -szel (vagy $x > 0$-val) jelöljük, és x -et *pozitív*nak mondjuk. $x \in \mathbb{R}$-et *negatív*nak mondjuk, ha $-x$ pozitív.

3. Teljességi axióma

$\mathbb{R}$ (a rendezésre nézve) teljes, azaz $\mathbb{R}$ *bármely nemüres felülről korlátos részhalmazának van pontos felső korlátja.*

Összefoglalva, a valós számok $\mathbb{R}$ halmaza tehát egy *teljes rendezett test.* Megmutatható, hogy *létezik* ilyen halmaz, és ez bizonyos értelemben *egyértelmű.* A valós számokat a számegyenesen modellezhetjük.

A *testaxiómákat felhasználva igazolható*, hogy bármely $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{array}{llll} \text{ha } x+y=x+z, & \text{akkor } y=z; & \text{ha } xy=xz,\, x\neq 0, & \text{akkor } y=z; \\ \text{ha } x+y=x, & \text{akkor } y=0; & \text{ha } xy=x,\, x\neq 0, & \text{akkor } y=1; \\ \text{ha } x+y=0, & \text{akkor } y=-x; & \text{ha } xy=1,\, x\neq 0, & \text{akkor } y=x^{-1}; \\ & -(-x)=x; & \text{ha } x\neq 0, & \text{akkor } \left(x^{-1}\right)^{-1}=x, \end{array}$$

továbbá

$$\begin{array}{ll} 0x=0; & x\neq 0, y\neq 0 \Rightarrow xy\neq 0; \\ (-x)y=-(xy)=x(-y); & (-x)(-y)=xy. \end{array}$$

A rendezési és testaxiómákat (rendezett test axiómáit) felhasználva igazolható, hogy bármely $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{array}{rl} x\geq 0 & \text{akkor és csakis akkor, ha } -x\leq 0, \\ \text{ha } x\geq 0,\, y\leq z, & \text{akkor } xy\leq yz, \\ \text{ha } x\leq 0,\, y\leq z, & \text{akkor } xy\geq yz, \\ \text{ha } x\neq 0, & \text{akkor } x^2>0, \text{ speciálisan } 1>0, \\ \text{ha } 0<x\leq y, & \text{akkor } 0<y^{-1}\leq x^{-1}, \text{ és } x^2\leq y^2. \end{array}$$

A bizonyítással a *gyakorlaton* foglalkozunk majd.

2.1 $\mathbb{R}$ nevezetes részhalmazai, abszolút érték, távolság

Definíciók.

- Az $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4 \dots\}$ halmazt a *természetes számok halmazának* nevezzük. Végiggondolva azt, hogy $2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 4 = 3 + 1, \dots$ adódik, hogy $\mathbb{N}$ $\mathbb{R}$*-nek az a legszűkebb részhalmaza, melyre teljesül, az, hogy*
  - $1 \in \mathbb{N}$,
  - ha $n \in \mathbb{N}$ akkor $n + 1 \in \mathbb{N}$.

  Az, hogy $\mathbb{N}$ a *legszűkebb* ilyen halmaz azt jelenti, hogy ha egy $M \subset \mathbb{N}$-re is teljesülnek az $1 \in M$, és $n \in M \Longrightarrow n + 1 \in M$ tulajdonságok, akkor $M = \mathbb{N}$.
- A $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ halmazt az *egész számok halmazának* nevezzük.
- A $\mathbb{Q} = \{\ pq^{-1}\ :\ p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\ \}$ halmazt a *racionális számok halmazának* nevezzük.

Definíciók.
Legyen $a < b$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Az

$$\begin{aligned}]a,b[&:= \{\ x\in\mathbb{R}\ :\ a<x<b\ \} \\ [a,b] &:= \{\ x\in\mathbb{R}\ :\ a\leq x\leq b\ \} \\ ]a,b] &:= \{\ x\in\mathbb{R}\ :\ a<x\leq b\ \} \\ [a,b[&:= \{\ x\in\mathbb{R}\ :\ a\leq x<b\ \} \end{aligned}$$

számhalmazokat rendre (véges) *nyílt, zárt, balról nyílt jobbról zárt, balról zárt jobbról nyílt intervallumoknak* nevezzük.

$$[a,a] := \{\ x\in\mathbb{R}\ :\ a\leq x\leq a\ \} = \{a\}$$

elfajult (egyetlen pontból álló) zárt *intervallum.*

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$. Az

$$\begin{aligned}
&]a, \infty[:= \{ x \in \mathbb{R} \ : \ a < x \} \\
&[a, \infty[:= \{ x \in \mathbb{R} \ : \ a \le x \} \\
&]-\infty, b] := \{ x \in \mathbb{R} \ : \ x \le b \} \\
&]-\infty, b[:= \{ x \in \mathbb{R} \ : \ x < b \} \\
&]-\infty, \infty[:= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

számhalmazokat (végtelen) *nyílt, balról zárt jobbról nyílt stb. intervallumoknak* nevezzük.

Definíció. Az

$$|x| := \begin{cases} x \text{ ha } x \ge 0 \\ -x \text{ ha } x < 0 \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

számot az x valós szám *abszolút értékének* nevezzük.

Állítás. [az abszolút érték tulajdonságai] *Bármely* $x, y \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\begin{aligned}
&|x| \ge 0 \text{ és } |x| = 0 \iff x = 0, \\
&|xy| = |x|\,|y|, \\
&|x + y| \le |x| + |y|.
\end{aligned}$$

Az első tulajdonság nyilvánvaló, a többiek pl. esetszétválasztással bizonyíthatók.

További tulajdonságok:

$$||x| - |y|| \le |x - y| \quad (x, y \in \mathbb{R}),$$

$$|x| \le a \iff -a \le x \le a \text{ és hasonlóan } |x| < a \iff -a < x < a.$$

Definíció. Az $x, y \in \mathbb{R}$ számok *távolságát* a

$$d(x, y) := |x - y|$$

definiálja.

Állítás. [a távolság tulajdonságai] *Bármely* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\begin{aligned}
&d(x, y) \ge 0 \text{ és } d(x, y) = 0 \iff x = y, && \text{nemnegativitás} \\
&d(x, y) = d(y, x), && \text{szimmetria} \\
&d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y) && \text{háromszög egyenlőtlenség.}
\end{aligned}$$

E tulajdonságok egyszerűen következnek az abszolút érték tulajdonságaiból.

2.2 Topológikus fogalmak, Bolzano-Weierstrass tétel

Definíció. Egy $a \in \mathbb{R}$ *pont* $\varepsilon > 0$ *sugarú (nyílt) környezetén* a

$$K(a, \varepsilon) := \{ x \in \mathbb{R} \ : \ d(x, a) < \varepsilon \}$$

halmazt értjük.

Világos, hogy $K(a, \varepsilon)$ éppen az a pontra nézve *szimmetrikus* 2ε hosszúságú $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ *nyílt intervallum.*

Definíciók. Legyen $A \subset \mathbb{R}$.

- Az $a \in \mathbb{R}$ pontot az A halmaz *belső pontjának* nevezzük, ha *a-nak **van** olyan környezete* mely (teljesen) A-ban van, azaz

$$(\exists \varepsilon > 0)\,(K(a, \varepsilon) \subset A).$$

- Az $a \in \mathbb{R}$ pontot az A halmaz *izolált pontjának* nevezzük, ha $a \in A$ és *a-nak **van** olyan környezete* melyben nincs más A-beli pont, azaz
$$a \in A \wedge ((\exists \varepsilon > 0)(K(a,\varepsilon) \setminus \{a\}) \cap A = \emptyset)\,.$$
- Az $a \in \mathbb{R}$ pontot az A halmaz *torlódási pontjának* nevezzük, ha *a **bármely** környezetében* van a-tól különböző A-beli pont, azaz
$$(\forall \varepsilon > 0)\,(K(a,\varepsilon) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset)\,.$$
- Az $a \in \mathbb{R}$ pontot az A halmaz *határpontjának* nevezzük, ha *a **bármely** környezetében* van A-beli pont, és nem A-beli pont, azaz
$$(\forall \varepsilon > 0)\,\big(K(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \wedge K(a,\varepsilon) \cap \overline{A} \neq \emptyset\big)\,.$$

A belső pont és az izolált pont mindig pontja a halmaznak, torlódási és határpont lehet halmazpont, vagy nem halmazpont.

Definíciók.

- $A \subset \mathbb{R}$ összes belső pontjainak halmazát *A belsejének* nevezzük és A°-rel jelöljük.
- $A \subset \mathbb{R}$ összes határpontjainak halmazát *A határának* nevezzük és ∂A-rel jelöljük.

Definíciók.

- Az $A \subset \mathbb{R}$ halmazt *nyílt*nak nevezzük, ha minden pontja belső pont.
- Az $A \subset \mathbb{R}$ halmazt *zárt*nak nevezzük, ha komplementere nyílt.

Példa. Legyen $A := \{\ \frac{1}{n}\ :\ n \in \mathbb{N}\ \}$. Határozzuk meg A belső, izolált, torlódási és határpontjainak halmazát. Továbbá határozzunk meg A belsejét, határát, döntsük el, hogy nyílt vagy zárt halmaz-e!

Megoldás. A-nak nincs belső pontja, minden pontja izolált, egyetlen torlódási pontja 0, egyetlen határpontja 0, $A^\circ = \emptyset, \partial A = \{0\}$, az A halmaz sem nem nyílt, sem nem zárt.

Állítás. *Egy $A \subset \mathbb{R}$ halmaz akkor és csakis akkor zárt, ha tartalmazza összes torlódási pontját.*
Bizonyítás ld. gyakorlat.

Tétel. [Bolzano-Weierstrass tétel] *Bármely korlátos végtelen számhalmaznak van torlódási pontja.*

Egy halmazt *véges*nek mondunk, ha üres, vagy ha elemeinek száma egy természetes szám. Egy halmazt *végtelen*nek mondunk, ha nem véges.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $A \subset \mathbb{R}$ korlátos végtelen halmaz, akkor van olyan $[a_1, b_1]$ zárt intervallum, hogy $A \subset [a_1, b_1]$.

Felezzük meg $[a_1, b_1]$-t és válasszuk ki azt a zárt $[a_2, b_2]$-vel jelölt felét, mely végtelen sok A-beli elemet tartalmaz. Ezután felezzük meg $[a_2, b_2]$-t és válasszuk ki azt a zárt $[a_3, b_3]$-mal jelölt felét, mely végtelen sok A-beli elemet tartalmaz, és így tovább.

Az így kapott $[a_n, b_n]$ $(n \in \mathbb{N})$ intervallumsorozat egymásba skatulyázott, ezért Cantor tétele miatt
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$
Mivel az $[a_n, b_n]$ intervallum hossza $\frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$ tetszőleges kicsi, ha n elég nagy, ezért az *intervallumok metszete csak egyetlen pontot tartalmazhat*, legyen ez az a pont. Azt állítjuk, hogy *a torlódási pontja A-nak.* Ugyanis véve egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot
$$[a_n, b_n] \subset K(a,\varepsilon) \text{ ha } n \text{ elég nagy.}$$
Ugyanis válasszuk n-et olyan nagyra, hogy $b_n - a_n < \varepsilon$ legyen, akkor $a \in [a_n, b_n]$ miatt az $[a_n, b_n]$ intervallum minden pontjának a-tól való távolsága $< \varepsilon$ így az intervallum pontjai $K(a,\varepsilon)$-ban vannak. Mivel minden intervallumban *végtelen sok* A-beli pont van így $K(a,\varepsilon)$ tartalmaz a-tól különböző A-beli pontot.

3. SOROZATOK

3.1 Sorozatok korlátossága, monotonitása, konvergenciája

Definíció. Egy $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényt (valós szám)*sorozatnak* nevezünk.

Ha A egy adott halmaz és $f : \mathbb{N} \to A$, akkor f-et *A-beli* (*értékű*) *sorozatnak* nevezzük. □

Jelöléseink: $f(n) = a_n$ a sorozat n-edik eleme, $f = (a_n)$ a sorozat maga, $\{ a_n : n \in \mathbb{N} \}$ a sorozat értékkészlete.

Sorozat megadása:

- képlettel pl. $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$,
- rekurzív módon pl. $a_1 = 1$, és $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ $(n \in \mathbb{N})$,
- szabállyal pl. $a_n = n$-edik prímszám.

Definíciók. Az (a_n) sorozatot $\begin{matrix}\textit{felülről korlátosnak}\\ \textit{alulról korlátosnak}\end{matrix}$ nevezzük, ha értékészlete $\begin{matrix}\textit{felülről korlátos}\\ \textit{alulról korlátos}\end{matrix}$.

Azaz, az (a_n) sorozatot $\begin{matrix}\textit{felülről korlátosnak}\\ \textit{alulról korlátosnak}\end{matrix}$ nevezzük, ha $\begin{matrix}\exists k \in \mathbb{R}\\ \exists k' \in \mathbb{R}\end{matrix}$ szám, melyet a sorozat egy $\begin{matrix}\textit{felső korlátjának}\\ \textit{alsó korlátjának}\end{matrix}$ nevezzünk, hogy

$$\begin{matrix}(\forall n \in \mathbb{N})\, a_n \le k\\ (\forall n \in \mathbb{N})\, a_n \ge k'\end{matrix}.$$

Az (a_n) sorozatot *korlátos*nak nevezzük, ha alulról és felülről is korlátos.

Könnyű belátni, hogy egy a_n sorozat *akkor és csakis akkor korlátos, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$ hogy $|a_n| \le K$ minden $n \in \mathbb{N}$-re.*

Az (a_n) sorozatot $\begin{matrix}\textit{monoton növekvőnek}\\ \textit{monoton csökkenőnek}\end{matrix}$ nevezzük, ha $\begin{matrix}(\forall n \in \mathbb{N})\, a_{n+1} \ge a_n\\ (\forall n \in \mathbb{N})\, a_{n+1} \le a_n\end{matrix}$.

Az (a_n) sorozatot $\begin{matrix}\textit{szigorúan monoton növekvőnek}\\ \textit{szigorúan monoton csökkenőnek}\end{matrix}$ nevezzük, ha $\begin{matrix}(\forall n \in \mathbb{N})\, a_{n+1} > a_n\\ (\forall n \in \mathbb{N})\, a_{n+1} < a_n\end{matrix}$.

Egy sorozatot *(szigorúan) monotonnak* mondunk, ha (szigorúan) monoton növekvő vagy csökkenő. □

Példa. Legyen $a_n := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Ez a sorozat alulról korlátos (pl. $k' = 0$ alsó korlát), és felülről is korlátos (pl. $k = 1$ felső korlát), így korlátos. Sorozatunk szigorúan monoton csökkenő.

Az is igaz, hogy n növekedésével a_n egyre közelebb kerül 0-hoz (jóllehet soha sem éri el a 0-t). Pontosabban, 0 akármilyen kis környezetét vesszük, azon belül van a sorozatnak *véges sok kivételével minden* eleme.

Definíciók. Az (a_n) sorozatot *konvergens*nek nevezzük, ha van olyan $a \in \mathbb{R}$ szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $N(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ szám, hogy

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad n > N(\varepsilon).$$

A a számot a sorozat *határérték*ének (limeszének) nevezzük és az

$$a_n \to a \ (n \to \infty) \qquad \text{vagy} \ \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

jelölést használjuk. $N(\varepsilon)$ az ε-hoz tartozó *küszöbszám.*

Az (a_n) sorozatot *divergens*nek nevezzük, ha nem konvergens. □

Állítás. [a konvergencia környezetes átfogalmazása] *Az (a_n) sorozat konvergens és határértéke a akkor és csakis akkor, ha az a pont bármely környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok eleme van.*

Bizonyítás. Ha $a_n \to a$ $(n \to \infty)$, akkor minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N(\varepsilon)$, hogy

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ ha } \ n > N(\varepsilon),$$

ami úgy is írható, hogy

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon, \text{ azaz } a_n \in K(a, \varepsilon) \text{ ha } \ n > N(\varepsilon).$$

De ez azt jelenti, hogy a $K(a, \varepsilon)$ környezeten belül vannak az $N(\varepsilon)$-nél nagyobb indexű elemek, míg kívül csak az $N(\varepsilon)$-nél nem nagyobb indexűek lehetnek, melyek száma éges.

Fordítva, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén a $K(a, \varepsilon)$ környezeten kívül csak véges sok elem van, pl. a p darab $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_p}$ elemek, akkor

$$N(\varepsilon) := \max\{k_1, k_2, \ldots, k_p\}$$

választással $|a_n - a| < \varepsilon$ ha $n > N(\varepsilon)$, azaz sorozatunk konvergens és határértéke a. □

Következmény. *Ha egy sorozatban*

- véges sok elemet teszőlegesen megváltoztatunk,
- a sorozatból véges sok elemet elhagyunk,
- a sorozathoz véges sok elemet hozzáveszünk,

akkor sem a sorozat konvergenciája (divergenciája) sem a határértéke nem változik.

Állítás. [a határérték egyértelműsége] *Konvergens sorozatnak pontosan egy határértéke van.*

Indirekt **bizonyítás**. Ha az $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ sorozatnak két határértéke volna, $a, b (a < b)$ akkor $\varepsilon = \dfrac{b-a}{3}$ választással a definícióból ellentmondásra jutunk. □

Példák.
$a_n = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ konvergens és határértéke nulla.
$a_n = (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ divergens.

Tétel. [konvergencia és korlátosság kapcsolata] *Konvergens sorozat korlátos.*
Van olyan korlátos sorozat mely divergens (nem konvergens).

Bizonyítás. $\varepsilon = 1$-gyel kapjuk, hogy $|a_n - a| < 1$ ha $n > N(1)$. Világos, hogy

$$k := \max\{a + 1, \text{ és a } K(a, 1) \text{ környezeten kívüli elemek}\}$$

a sorozat felső korlátja, míg

$$k' := \min\{a - 1, \text{ és a } K(a, 1) \text{ környezeten kívüli elemek}\}$$

a sorozat alsó korlátja.

$a_n = (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ korlátos de nem konverges. □

Tétel. [konvergencia és monotonitás kapcsolata] *Monoton $\begin{array}{c}\textit{növekvő és felülről}\\ \textit{csökkenő és alulról}\end{array}$ korlátos sorozat konvergens.*

Bizonyítás. Tegyük fel pl. hogy (a_n) növekvő felülről korlátos, és legyen

$$a := \sup\{\ a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\ \}.$$

Véve egy $\varepsilon > 0$ számot $a - \varepsilon$ nem felső korlátja a sorozatnak, így van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ index, hogy $a_{n_0} > a - \varepsilon$.

Legyen $N(\varepsilon) := n_0$, akkor $n > N(\varepsilon) = n_0$ esetén

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \le a_n \le a < a + \varepsilon \quad \text{azaz} \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

és ezt kellett bizonyítani. □

3.2 Műveletek, rendezés és konvergencia kapcsolata

Definíciók. Ha $(a_n),(b_n)$ sorozatok $c\in\mathbb{R}$, akkor az (a_n+b_n), (a_nb_n), $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$, (ca_n), $(|a_n|)$ sorozatokat rendre az $(a_n),(b_n)$ sorozatok *összegének, szorzatának, hányadosának, az* (a_n) *c-szeresének, abszolút értékének* nevezzük. A hányados definíciójában fel kell tennünk, hogy $b_n\neq 0$. □

Tétel. [konvergencia és műveletek kapcsolata] *Konvergens sorozatok összege, szorzata, hányadosa (ha értelmezve van), konstansszorosa, abszolút értéke is konvergens, és e sorozatok határértékeinek összegéhez, szorzatához, hányadosához, konstansszorosához, abszolút értékéhez konvergál, azaz ha* $a_n\to a$, $b_n\to b\,(n\to\infty)$ *akkor*

$$\begin{aligned} a_n+b_n &\to a+b \ \ (n\to\infty),\\ a_nb_n &\to ab \ \ (n\to\infty),\\ \frac{a_n}{b_n} &\to \frac{a}{b} \ \ (n\to\infty),\ \ ha\ b_n,b\neq 0,\\ ca_n &\to ca \ \ (n\to\infty),\\ |a_n| &\to |a| \ \ (n\to\infty). \end{aligned}$$

Bizonyítás. Itt csak az első állítást igazoljuk. Tetszőleges $\varepsilon>0$ mellett

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}\ \text{ ha }\ n>N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),\qquad \text{és}\qquad |b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}\ \text{ ha }\ n>N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

amiből

$$|(a_n+b_n)-(a+b)|<|a_n-a|+|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\ \text{ ha }\ n>N(\varepsilon):=\max\left\{N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}$$

és ezt kellett igazolni. □

Tétel. [konvergencia és a rendezés kapcsolata]

(1) *Konvergens sorozat jeltartó*, azaz ha $a_n\to a\neq 0\ (n\to\infty)$, akkor van olyan $n_0\in\mathbb{R}$, hogy $\operatorname{sg}a_n=\operatorname{sg}a$ ha $n>n_0$.
(2) *A konvergencia megőrzi a monotonitást*, azaz ha $a_n\le b_n\,(n\in\mathbb{N})$ és $a_n\to a,\ b_n\to b\ (n\to\infty)$, akkor $a\le b$.
(3) *Érvényes a rendőrtétel*, azaz ha $a_n\to a,\ b_n\to a\ (n\to\infty)$ és $a_n\le x_n\le b_n\,(n\in\mathbb{N})$, akkor (x_n) is konvergens és $x_n\to a\ (n\to\infty)$.

Az első állításban sg a *signum (előjel) függvény*t jelöli, melynek definíciója

$$\operatorname{sg}x:=\begin{cases} 1 & \text{ha } x>0\\ 0 & \text{ha } x=0\\ -1 & \text{ha } x<0\end{cases}.$$

Bizonyítás. Az *első* állítás igazolásához legyen $\varepsilon=|a|/2$, akkor $|a_n-a|<|a|/2$ ha $n>n_0:=N(|a|/2)$. Innen

$$a-|a|/2<a_n<a+|a|/2 \text{ ha } n>n_0$$

amiből $a>0$ ill. $a<0$ esetszétválasztással adódik állításunk. □

A *második* állítást indirekt úton igazoljuk. Ha $a>b$ volna, akkor $a-b>0$ így a jeltartóság miatt $a_n-b_n>0$ volna elég nagy n-re, ami ellentmondás. □

A *rendőrtétel igazolása.* Az $a_n\le x_n\le b_n\,(n\in\mathbb{N})$ feltételből a_n kivonásával kapjuk, hogy

$$0\le x_n-a_n\le b_n-a_n$$

vagy

$$|x_n-a_n|\le|b_n-a_n|<\varepsilon \text{ ha } n>N(\varepsilon)$$

ami éppen azt jelenti, hogy $x_n-a_n\to 0\,(n\to\infty)$ amiből $x_n=(x_n-a_n)+a_n\to 0+a=a$ ha $n\to\infty$. □

3.3 Bővített valós számok, végtelenhez tartó sorozatok

Definíció. Az $\mathbb{R}_b := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ halmazt a *bővített valós számok* halmazának nevezzük ($+\infty$ helyett gyakran csupán ∞-t írunk). □

Műveletek $\mathbb{R}_b$-ben: bármely $x \in \mathbb{R}$-re legyen

$$\begin{aligned} x + (\pm\infty) &= (\pm\infty) + x = \pm\infty \\ (\pm\infty) + (\pm\infty) &= \pm\infty \\ x(\pm\infty) &= (\pm\infty)x = \pm\infty \text{ ha } x > 0 \\ x(\pm\infty) &= (\pm\infty)x = \mp\infty \text{ ha } x < 0 \\ (\pm\infty)(\pm\infty) &= +\infty \\ (\pm\infty)(\mp\infty) &= -\infty \\ \frac{x}{\pm\infty} &= 0. \end{aligned}$$

Nincsennek értelmezve az alábbiak:

$$(\pm\infty) + (\mp\infty), \qquad 0(\pm\infty), \qquad (\pm\infty)0,$$
$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \frac{x}{0}.$$

Rendezés: minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, (a korábbi rendezés megtartása mellett)

$$-\infty < x < +\infty.$$

Megjegyzés. $\mathbb{R}_b$ nem test!

A határérték fogalmának kiterjesztése.

Az $a_n = (-1)^n$, $a_n = (-1)^n$, $a_n = n$, $a_n = -n^2\,(n \in \mathbb{N})$ valamennyien *divergens sorozatok*, de közülük az első kettő másképpen viselkedik, mint az utolsó kettő: azok nagy n esetén ∞-hez ill. $-\infty$-hez közelednek.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozatnak a *határértéke* $\begin{matrix}+\infty\\-\infty\end{matrix}$ *(vagy a sorozat tart a* $\begin{matrix}+\infty\\-\infty\end{matrix}$*-hez)* ha bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $N(K) \in \mathbb{R}$, hogy

$$\begin{matrix} a_n > K \\ a_n < K \end{matrix} \text{ ha } n > N(K).$$

Jelölése (az első esetben) $a_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. □

Ha $a_n \to \infty(-\infty)$ akkor a sorozat *divergens,* de *van határértéke.*

Ha a $+\infty$ *környezetein* a $]K, +\infty[$ intervallumokat, a $-\infty$ *környezetein* a $]-\infty, K[$ intervallumokat értjük,ahol $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor egyszerű belátni, hogy érvényes az alábbi
Állítás. *Egy sorozat határértéke $+\infty$ (vagy $-\infty$) akkor és csakis akkor, ha $+\infty$ (vagy $-\infty$) bármely környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok eleme van.*

Példák. Az $a_n = n\,(n \in \mathbb{N})$ sorozat határértéke $+\infty$.
Az $a_n = -n^2\,(n \in \mathbb{N})$ sorozat határértéke $-\infty$.

Definíció. Ha $A \subset \mathbb{R}$ felülről nem korlátos akkor $\sup A := \infty$.
Ha $A \subset \mathbb{R}$ alulról nem korlátos akkor $\inf A := -\infty$. □

Ezzel a kiegészítéssel *minden $A \subset \mathbb{R}$ halmaznak van supremuma és infimuma,* de lehet hogy ezek végtelenek azaz

$$-\infty \le \inf A \le \sup A \le +\infty.$$

Továbbá *minden monoton sorozatnak van határértéke ($\mathbb{R}_b$-ben)*: növekvő nem korlátos sorozat tart $+\infty$-hez, csökkenő nem korlátos sorozat tart $-\infty$-hez.

A határérték és műveletek kapcsolata is *kiterjeszthető,* az alábbi tétellel.

Tétel. *Ha $a_n \to a$, $b_n \to b\,(n \to \infty)$ ahol most $a, b \in \mathbb{R}_b$, $c \in \mathbb{R}$, akkor*

$$\begin{aligned} a_n + b_n &\to a + b \;\; (n \to \infty), && \textit{ha } a+b \textit{ értelmezve van,}\\ a_n b_n &\to ab \;\; (n \to \infty), && \textit{ha } ab \textit{ értelmezve van,}\\ \frac{a_n}{b_n} &\to \frac{a}{b} \;\; (n \to \infty), && \textit{ha } b_n \ne 0, \textit{ és } \frac{a}{b} \textit{ értelmezve van,}\\ ca_n &\to ca \;\; (n \to \infty), && \textit{ha } ca \textit{ értelmezve van,} \end{aligned}$$

továbbá ha $|a_n| \to \infty$ akkor $\dfrac{1}{a_n} \to 0 \ (n \to \infty)$.

3.4 Nevezetes határértékek

Tétel.

(1)
$$n^a \to \begin{cases} +\infty & \text{ha } a > 0, \\ 1 & \text{ha } a = 0, \quad (n \to \infty) \\ 0 & \text{ha } a < 0. \end{cases}$$

(2)
$$a^n \to \begin{cases} 0 & \text{ha } |a| < 1, \\ 1 & \text{ha } a = 1, \\ +\infty & \text{ha } a > 1, \quad (n \to \infty) \\ \text{divergens} & \text{ha } a \le -1. \end{cases}$$

(3) *Ha $a > 0$, akkor*
$$\sqrt[n]{a} \to 1 \quad (n \to \infty).$$

(4) *Ha $|a| < 1, k \in \mathbb{R}$, akkor*
$$n^k a^n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(5) $\sqrt[n]{n} \to 1 \quad (n \to \infty)$.

(6) *Ha $a \in \mathbb{R}$ akkor*
$$\frac{a^n}{n!} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(7) $\sqrt[n]{n!} \to +\infty \quad (n \to \infty)$.

(8) *Az $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat szigorúan monoton növekvő és felülről korlátos, $a_n < 3$, így konvergens. Határértéke egy nevezetes szám, amit e-vel jelölünk, közelitő értéke $e = 2,71\ldots$.*

(9) *Ha $0 \ne c_n \to 0$, akkor*
$$(1 + c_n)^{\frac{1}{c_n}} \to e \quad (n \to \infty).$$

□

Bizonyítások.

(1) Ha $a=0$, akkor az állítás nyilvánvaló, mert $n^0=1$ minden $n\in\mathbb{N}$-re.

Ha $a>0$, akkor tetszőleges (pozitív) K-t véve $n^a>K$ pontosan akkor, ha $n>K^{1/a}$ így definíció alapján $n^a\to+\infty$.

Ha $a<0$, akkor $n^a=\dfrac{1}{n^{-a}}\to\dfrac{1}{+\infty}=0$, mivel most $-a>0$.

(2) A Bernoulli egyenlőtlenség szerint

$$(1+x)^n\geq 1+nx,\qquad \text{ha } n\in\mathbb{N},\ x\geq -1$$

és itt egyenlőség akkor, és csakis akkor teljesül, ha $n=1$ vagy $x=0$.

Ha $a>1$ akkor $a=1+h$, ahol $h>0$, így $a^n=(1+h)^n\geq 1+nh,\ a^n\to+\infty$.

Legyen most $|a|<1$. Ha $a=0$, akkor $a^n=0^n=0\to 0$. Így feltehetjük, hogy $0<|a|<1$, ezért

$$|a|^n=\frac{1}{\left(\frac{1}{|a|}\right)^n}\to\frac{1}{+\infty}=0,\ \text{amiből } a^n\to 0.$$

Ha $a=1$, akkor $a^n=1\to 1$.

Ha $a=-1$, akkor $a^n=(-1)^n$ divergens.

Ha $a<-1$, akkor $a^{2n}=(a^2)^n\to+\infty$ mivel $a^2>1$, és $a^{2n-1}=\frac{(a^2)^n}{a}\to-\infty$, így sorozatunk divergens.

(3) Ha $a\geq 1$, akkor $b_n:=\sqrt[n]{a}-1\geq 0$, a Bernoulli egyenlőtlenség alapján kapjuk, hogy $a=(1+b_n)^n\geq 1+nb_n$, amiből

$$0\leq b_n\leq\frac{a-1}{n}.$$

Innen a rendőrtétellel adódik, hogy $b_n\to 0$, $\sqrt[n]{a}\to 1$.

Ha $0<a<1$, akkor $\frac{1}{a}\geq 1$, az előzőek miatt $\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\to 1$, $\sqrt[n]{a}\to 1$.

(4) Ha $k<0$, akkor a sorozat első és második tényezője is zérushoz tart, így a sorozat is.

Ha $k=0$ akkor a 2. Állítás miatt $n^0a^n=a^n\to 0$.

Ha $k>0$, akkor legyen k_0 egy k-nál nagyobb egész, és tegyük fel, hogy $n>k_0$. Van olyan $h>0$, hogy $|a|=\dfrac{1}{1+h}$, és

$$0\leq n^k|a|^n\leq\frac{n^{k_0}}{(1+h)^n}<\frac{n^{k_0}}{\binom{n}{k_0+1}h^{k_0+1}}.$$

A jobboldali kifejezést növelhetjük

$$\frac{n\cdot n\ldots n}{\dfrac{h^{k_0+1}}{(k_0+1)!}n(n-1)\ldots(n-k_0)}=\frac{(k_0+1)!}{h^{k_0+1}}\,\frac{1}{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k_0-1}{n}\right)(n-k_0)}\to 0,$$

mivel a jobboldali szorzat második tényezőjének nevezőjében az első k_0 db. tényező 1-hez tart, míg az utolsó $+\infty$-hez. Ezért a rendőrtétel miatt $n^k|a|^n\to 0$, és az abszolút érték elhagyásával kapott sorozat is nullához tart.

(5) Legyen $\varepsilon>0$ adott, alkalmazzuk az előző állítást $a=\dfrac{1}{1+\varepsilon}$, $k=1$-nél, akkor

$$\frac{n}{(1+\varepsilon)^n}\to 0,\ \text{amiből } \frac{n}{(1+\varepsilon)^n}<1,\ \text{ha } n>N(1)=N^*(\varepsilon).$$

Innen átrendezéssel, majd gyökvonással kapjuk, hogy

$$1\leq n<(1+\varepsilon)^n,\ \ 1-\varepsilon<1\leq\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon$$

azaz

$$|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon \text{ ha } n>N^*(\varepsilon)$$

bizonyítva állításunkat.

(6) Legyen n_0 egy $|a|$-nél nagyobb természetes szám, $n > n_0$, akkor

$$0 \le \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} = \frac{|a|^n}{n_0!(n_0+1)(n_0+2)\dots n} \le \frac{|a|^n}{n_0!(n_0+1)^{n-n_0}} = \frac{(n_0+1)^{n_0}}{n_0!}\left(\frac{|a|}{n_0+1}\right)^n.$$

A jobboldali sorozat 0-hoz tart, mivel a zárójeles tört abszolút értéke kisebb mint 1, így a rendőrtétel miatt $\left|\frac{a^n}{n!}\right| \to 0$ es $\frac{a^n}{n!} \to 0$.

(7) A sorozatunk szigorúan monoton növekvő, mert az

$$\sqrt[n]{n!} < \sqrt[n+1]{(n+1)!}$$

egyenlőtlenség ekvivalens az

$$1 < \frac{(n+1)^n}{n!} = \frac{n+1}{1}\frac{n+1}{2}\dots\frac{n+1}{n}$$

egyenlőtlenséggel, ami igaz, mert a jobboldalon levő szorzat minden tényezője 1-nél nagyobb.

Másrészt sorozatunk nem korlátos felülről, ugyanis ha az volna, akkor

$$\sqrt[n]{n!} \le K, \quad n! \le K^n, \quad 1 \le \frac{K^n}{n!}$$

következne, ami nem lehet, mert $\dfrac{K^n}{n!} \to 0$ a 6. Állítás szerint.

(8) A monotonitás igazolása: ha $n > 1$ akkor

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{n}{n-1}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{n}{n-1}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n$$

$$= \frac{n}{n-1}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > \frac{n}{n-1}\left(1-n\cdot\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n}{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1,$$

ahol a Bernoulli egyenlőtlenség szigorú változatát használtuk.

A korlátosság igazolása: a binomiális tételt használva kapjuk, hogy

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}.$$

Az $1 - \dfrac{l}{n} \le 1$ $(l = 0, \dots, k-1)$ egyenlőtlenséget használva az előző összeg általános tagját felülről megbecsüljük:

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k\cdot n!} = 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}$$

$$\le \frac{1}{k!} = \frac{1}{1\cdot 2\dots k} \le \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\dots 2} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$a_n \le 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{(1/2)^n - 1}{1/2 - 1} = 1 + 2\left(1 - 1/2^n\right) < 3.$$

(9) Nem bizonyítjuk. □

4. SOROK

4.1 Definíció, konvergencia, divergencia, összeg

Definíció. Egy (a_n) (szám)sorozat elemeit az összeadás jelével összekapcsolva kapott

$$a_1 + a_2 + \dots \quad \text{vagy} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (\text{röviden } \sum a_n)$$

összeget (szám)*sornak* (vagy numerikus sornak) nevezzük.

a_n a sor n-edik (vagy általános) tagja,

$$s_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (n \in \mathbb{N})$$

pedig a sor *n-edik részletösszege.*

A $\sum a_n$ sort *konvergens*nek nevezzük, ha *részletösszegeinek (s_n) sorozata konvergens*, a

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

határértéket a *sor összegének* nevezzük és azt irjuk, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$, azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n.$$

A $\sum a_n$ sort *divergensnek* nevezzük, ha nem konvergens. □

Megjegyzések. 1. Az összegezés kezdődhet $n = 0$-val is. Kissé zavaró, hogy a sort és (konvergens sor esetén) az összegét is ugyanazzal a szimbólummal jelöltük. Ezt elkerülendő a sorokra inkább a $\sum a_n$ (ill. ha az összegzés $n = 0$-val kezdődik a $\sum\limits_{0} a_n$) jelölést használjuk, a sor összegét pedig inkább $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$-nel jelöljük majd.

2. *Ha egy sorban véges sok tagot megváltoztatunk, a sorból véges sok tagot elhagyunk, vagy véges sok tagot a sorhoz hozzáveszünk, akkor a sor konvergenciája/divergenciája nem változik, az összege viszont változhat!* Ez abból következik, hogy ha az eredeti sor részletösszegeinek sorozata (s_n), akkor a fenti változtatások után kapott sor (S_n) részletösszegeire

$$S_n = s_n + A \quad \text{ha } n > n_0$$

teljesül, valamilyen $A \in \mathbb{R}$ és $n_0 \in \mathbb{N}$ mellett, ahol A az új (megváltoztatott) tagok és a régiek különbsége. Innen látható, hogy (s_n) és (S_n) vagy mindketten konvergensek vagy divergensek, konvergencia esetén viszont

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n + A$$

azaz az összegek eltérése A.

Divergens sornak természetesen nincs összege (bár, ha $s_n \to \infty(-\infty)$ akkor szokás azt mondani, hogy a sor összege $\infty(-\infty)$).

Példák. **1. Geometriai sor**. A

$$\sum aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots$$

sort, ahol $a \neq 0, a \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}$ *geometriai sor*nak nevezzük. a a sor *első tag*ja, q a sor *hányadosa, vagy kvociense.* Vizsgáljuk meg e sor konvergenciáját. A részletösszegek sorozata

$$s_n = a + aq + \dots + aq^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

amit q-val megszorozva
$$s_nq = aq + \cdots + aq^{n-1} + aq^n,$$
így kivonással
$$s_n - s_nq = a - aq^n \quad \text{vagy} \quad s_n(1-q) = a(1-q^n),$$
amiből (a $q \neq 1$ és $q = 1$ eseteket szétválasztva kapjuk, hogy
$$s_n = \begin{cases} \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}, & \text{ha } q \neq 1, \\ na, & \text{ha } q = 1. \end{cases}$$
Figyelembevéve a (q^n) sorozat viselkedését kapjuk, hogy
$$s_n \to \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, & \text{ha } |q| < 1, \\ \text{divergens}, & \text{ha } q > 1, \text{ vagy } q \leq -1, \\ \text{divergens}, & \text{ha } q = 1. \end{cases}$$
Ezzel igazolást nyert a következő

Állítás. [geometriai sor konvergenciája] *A*
$$\sum aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots, \quad (a \neq 0, a, q \in \mathbb{R})$$
geometiai sor akkor és csakis akkor konvergens, ha $|q| < 1$ és akkor a sor összege
$$s = \frac{a}{1-q} = \frac{\text{első tag}}{1 - \text{kvociens}}.$$

2. Harmónikus sor. A $\sum \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ sort *harmónikus sornak* nevezzük.

Állítás. [harmónikus sor divergenciája] *A harmónikus sor divergens.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy a sor s_{2^n} alakú részletösszegeire
$$\begin{aligned} s_2 &= \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2} \\ s_{2^2} &= s_2 + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) > \tfrac{3}{2} + 2\tfrac{1}{4} = \tfrac{4}{2} \\ s_{2^3} &= s_{2^2} + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) > \tfrac{4}{2} + 2^2\tfrac{1}{8} = \tfrac{5}{2} \\ s_{2^4} &= s_{2^3} + \left(\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \cdots + \tfrac{1}{16}\right) > \tfrac{5}{2} + 2^3\tfrac{1}{16} = \tfrac{6}{2} \end{aligned}$$
áll fenn, és indukcióval könnyen igazolható, hogy
$$s_{2^n} > \frac{n+2}{2} \quad (n = 2, 3, \dots)$$
így $s_{2^n} \to \infty$ $(n \to \infty)$ amiből (s_n) szigorú monoton növekedése miatt $s_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, igazolva állításunkat.□

Tétel. [sor konvergenciájának szükséges feltétele] *Konvergens sor általános tagja nullához konvergál.*

Azaz, ha a $\sum a_n$ sor konvergens, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Így, ha (a_n) divergens, vagy ha (a_n) konvergens, de határértéke nem 0, akkor a $\sum a_n$ sor divergens.

Bizonyítás. Világos, hogy $a_n = s_n - s_{n-1}$ így konvergens sor esetén $s_n \to s, s_{n-1} \to s$ miatt $a_n \to s - s = 0$ amint állítottuk. □

Ha $a_n \to 0$ akkor a $\sum a_n$ sor lehet konvergens is és divergens is, utóbbira példa a harmónikus sor.

A továbbiakban a *sorokat tagjaik előjele szerint osztályozzuk*, és vizsgáljuk.

Definíciók. Egy sort *alternáló sornak* nevezzünk, ha tagjainak előjele váltakozik (pozitív tagot negatív tag követ vagy fordítva).

Egy sort *pozitív (negatív) tagú sornak* nevezzünk, ha tagjai pozitívok (negatívok). □

Tetszőleges előjelű tagok esetén a sor tagjainak az abszolút értékeiből alkotott sort vizsgáljuk.

Alternáló sorokra vonatkozik

Leibniz tétele. [elegendő feltétel alternáló sorok konvergenciájára] *A*

$$\sum(-1)^{n+1}a_n \ (a_n \geq 0,\ n \in \mathbb{N})$$

alternáló sor konvergens, ha (a_n) monoton csökkenően tart nullához, és ekkor a sor s összegére, és részletösszegeinek (s_n) sorozatára érvényes az

$$|s - s_n| \leq a_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

becslés.

Bizonyítás. (a_n) monoton csökkenése miatt

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + (-1)^{2n+1}a_{2n} + (-1)^{2n+2}a_{2n+1} = s_{2n-1} + (-a_{2n} + a_{2n+1}) \leq s_{2n-1}$$

$$s_{2n+2} = s_{2n} + (-1)^{2n+2}a_{2n+1} + (-1)^{2n+3}a_{2n+2} = s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \geq s_{2n}$$

$$s_{2n} = s_{2n-1} + (-1)^{2n+1}a_{2n} = s_{2n-1} - a_{2n} \leq s_{2n-1}$$

azaz (s_{2n-1}) monoton csökkenő, (s_{2n}) monoton növekvő, és $s_{2n} \leq s_{2n-1}$, amiből egy

$$[s_2, s_1] \subset [s_4, s_3] \subset [s_6, s_5] \ldots$$

intervallumskatulyázást kapunk, ahol az intervallumok (Cantor tétele szerint nemüres) metszete csak egy pontból állhat, mert az intervallumok $s_{2n-1} - s_{2n} = -(-1)^{2n+1}a_{2n} = a_{2n} \to 0\ (n \to \infty)$ hossza nullához tart. Legyen s a fenti intervallumok egyetlen közös pontja, akkor $s_{2n} \to s$, $s_{2n-1} \to s\,(n \to \infty)$ ezért $s_n \to s\,(n \to \infty)$ igazolva a konvergenciára vonatkozó állítást. A becslés igazolása:

$$\begin{aligned}|s - s_n| &= |(-1)^{n+2}a_{n+1} + (-1)^{n+3}a_{n+2} + (-1)^{n+4}a_{n+3} + (-1)^{n+5}a_{n+4} + (-1)^{n+6}a_{n+5} \ldots|\\ &= |(a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + (a_{n+5} - a_{n+6}) + \ldots|\\ &= (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + (a_{n+5} - a_{n+6}) + \ldots\\ &= a_{n+1} - [(a_{n+2} - a_{n+3}) + (a_{n+4} - a_{n+5}) + \ldots] \leq a_{n+1}.\end{aligned}$$

Itt a második sorban az abszolút érték elhagyható, mivel a tagok összege nemnegatív, az utolsó sorban levő egyenlőtlenség pedig azért igaz, mert a szögletes zárójelben levő összeg nemnegatív. □

Példa. A

$$\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

sor *konvergens*, mert $a_n = \frac{1}{n} \searrow 0\ (n \to \infty)$ (csökkenően). Érdekes megjegyezni, hogy e sor összege $\ln 2$.

4.2 Pozitív tagú sorok

A $\sum a_n$ sort akkor neveztük pozitív tagúnak, ha $a_n > 0\,(n \in \mathbb{N})$ teljesül. Ilyen sorok részletösszegeire

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} > s_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

azaz a részletösszegek sorozata monoton növekvő, ezért (s_n) *akkor és csakis akkor konvergens ha felülről korlátos.*

Ezért *pozitív tagú sor akkor és csakis akkor konvergens ha részletösszegeinek a sorozata felülről korlátos.* Ez a megállapítás az alapja a konvergenciakritériumok (vagy konvergenciatesztek) bizonyításának.

Tétel. [majoráns- minoráns teszt] *Ha* $0 < a_n \leq b_n\ (k \in \mathbb{N})$ *és*

$$\sum b_n \text{ sor konvergens, akkor a } \sum a_n \text{ sor is konvergens,}$$

$$\text{ha a} \quad \sum a_n \text{ sor divergens, akkor a } \sum b_n \text{ sor is divergens.}$$

Megjegyzés. Azt mondjuk, hogy a $\sum b_n$ sor *majorálja* a $\sum a_n$ sort (vagy ami ugyanaz, a $\sum a_n$ sor *minorálja* a $\sum b_n$ sort) ha $a_n \le b_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Bizonyítás. Jelölje $(s_n(a))$ a $\sum a_n$ sor részletösszegeinek sorozatát, $(s_n(b))$ pedig a $\sum b_n$ sor részletösszegeinek sorozatát, akkor

$$s_n(a) \le s_n(b) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Az első esetben a $\sum b_n$ sor konvergens, így $(s_n(b))$ felülről korlátos, a részletösszegekre vonatkozo előbbi egyenlőtlenség miatt $(s_n(a))$ is felülről korlátos, ezért $\sum a_n$ sor konvergens.

A második esetben a $\sum a_n$ sor divergens, így $(s_n(a))$ felülről nem korlátos, a részletösszegekre vonatkozo egyenlőtlenség miatt $(s_n(b))$ sem korlátos felülről, ezért $\sum b_n$ sor divergens. □

Tétel. [hányados vagy D'Alembert teszt] *Legyen $\sum a_n$ pozitív tagú sor.*

$$\textit{Ha } \frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1 \ (n \in \mathbb{N}) \textit{ akkor a } \sum a_n \textit{ sor konvergens,}$$

$$\textit{ha } \frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1 \ (n \in \mathbb{N}) \textit{ akkor a } \sum a_n \textit{ sor divergens.}$$

Ezt a tételt egy másik alakban (limeszes alak) is kimondjuk.

Legyen $\sum a_n$ pozitív tagú sor és tegyük fel, hogy

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \quad (L \in \mathbb{R}_b).$$

(i) *Ha $L < 1$ akkor a $\sum a_n$ sor konvergens,*

(ii) *ha $L > 1$ akkor a $\sum a_n$ sor divergens,*

(iii) *ha $L = 1$ akkor a $\sum a_n$ sor lehet konvergens, és lehet divergens is.*

Bizonyítás. Ha az első feltétel teljesül, akkor az

$$\frac{a_2}{a_1} \le q,\ \frac{a_3}{a_2} \le q,\ \frac{a_4}{a_3} \le q,\ \dots,\ \frac{a_n}{a_{n-1}} \le q$$

egyenlőltlenségeket összeszorozva kapjuk, hogy $\dfrac{a_n}{a_1} \le q^{n-1}$, amiből $a_n \le a_1 q^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Ez azt jelenti, hogy a $\sum a_n$ sort a $\sum a_1 q^{n-1}$ konvergens (mert $0 \le q < 1$ miatt $|q| < 1$) geometriai sor majorálja, így a majoráns teszt alapján a $\sum a_n$ sor konvergens.

Ha a második feltétel teljesül, akkor $a_{n+1} \ge a_n$ miatt a konvergencia szükséges feltétele, az $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ feltétel nem teljesül, a sor divergens.

A limeszes alak **bizonyítása.** Ha (i) teljesül akkor legyen $r = \dfrac{1-L}{2} > 0$. Az L határérték r sugarú környezete 1-nél kisebb értékeket tartalmaz, e környezetén kívül az $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ sorozatnak csak véges sok eleme van, így

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q \ (:= L + r < 1) \quad \text{ha} \quad n \ge n_0$$

valamely n_0 mellett, így (4) véges sok index kivételével teljesül, a 4.1 szakasz 2. megjegyzése alapján következik állításunk.

(ii) mellett hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy (5) véges sok index kivételével teljesül, amiből következik, hogy (a_n) nem tarthat 0-hoz, a sor divergens.

(iii) Végül, a harmónikus sornál $L = 1$ és e sor divergens, a $\sum \frac{1}{n^2}$ sor konvergens, és e sornál szintén $L = 1$. Utóbbi sor konvergenciája pl. abból következik, hogy

$$\begin{aligned}\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} &\leq 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\\ &= 1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}<2\end{aligned}$$

így a részletösszegek sorozata korlátos, a sor konvergens. □

Tétel. [gyök vagy Cauchy teszt] *Tegyük fel, hogy* $a_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$.

$$\textit{Ha } \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \ \ (n \in \mathbb{N}) \ \textit{akkor a } \sum a_n \textit{ sor konvergens,}$$

$$\textit{ha } \sqrt[n]{a_n} \geq 1 \ \ (n \in \mathbb{N}) \ \textit{akkor a } \sum a_n \textit{ sor divergens.}$$

Ezt a tételt is kimondjuk limeszes alakban.

Legyen $a_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, *és tegyük fel, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \quad (L \in \mathbb{R}_b).$$

(j) *Ha* $L < 1$ *akkor a* $\sum a_n$ *sor konvergens,*

(jj) *ha* $L > 1$ *akkor a* $\sum a_n$ *sor divergens,*

(jjj) *ha* $L = 1$ *akkor a* $\sum a_n$ *sor lehet konvergens, és lehet divergens is.*

Bizonyítás. Ha a tétel első feltétele teljesül, akkor az $a_n \leq q^n$, $(n \in \mathbb{N})$ ami azt jelenti, hogy a $\sum a_n$ sort a $\sum q^n$ konvergens geometriai sor majorálja, így a majoráns teszt alapján a $\sum a_n$ sor konvergens.

Ha a tétel második feltétele feltétele teljesül, akkor $a_n \geq 1$ miatt a konvergencia szükséges feltétele, az $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ feltétel, nem teljesül, a sor divergens.

A limeszes alak **bizonyítása.** Ha (j) teljesül akkor legyen $r = \frac{1-L}{2} > 0$. Az L határérték r sugarú környezete 1-nél kisebb értékeket tartalmaz, e környezetén ívül az $(\sqrt[n]{a_n})$ sorozatnak csak véges sok eleme van, így

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q \ (:= L + r < 1) \quad \text{ha} \quad n \geq n_0$$

valamely n_0 mellett, így (6) véges sok index kivételével teljesül, a 4.1 szakasz 2. megjegyzése alapján adódik állításunk.

(jj) mellett hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy (7) véges sok index kivételével teljesül, amiből következik, hogy (a_n) nem tarthat 0-hoz, a sor divergens.

(jjj) Végül, a harmónikus sornál $L = 1$ és e sor divergens, a $\sum \frac{1}{n^2}$ sor konvergens, és e sornál szintén $L = 1$.□

Igazolható, hogy a *gyök teszt erősebb*, mint a hányados teszt (azaz, ha a hányados teszt eldönti a konvergenciát/divergenciát akkor ugyanezt teszi a gyök teszt is), a *hányados teszt alkalmazása viszont általában egyszerűbb.*

PÉLDÁK. 1. A $\sum \frac{2^n}{n!}$ sor konvergens, mert a hányados teszt limeszes alakját alkalmazva

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \to 0 = L < 1.$$

2. A $\sum \frac{1}{n^p}$ ahol $p \in \mathbb{R}$ (hiperharmonikus) sor divergens, ha $p \leq 0$, mert ekkor az általános tag nem tart 0-hoz. $p > 0$ mellett mind a hányados, mind a gyök teszt limeszes alakja $L = 1$-et ad, segítségükkel a konvergencia nem dönthető el. A *Cauchy-féle kondenzációs teszt* segítségével (ld. pl Lajkó jegyzet) kaphatjuk, hogy

A $\sum \frac{1}{n^p}$ $(p \in \mathbb{R})$ sor akkor és csakis akkor konvergens, ha $p > 1$.

Ugyancsak ezzel a teszttel adódik, hogy

A $\sum_2 \frac{1}{n(\ln n)^p}$ $(p \in \mathbb{R})$ sor akkor és csakis akkor konvergens, ha $p > 1$. Itt az összegezést $n = 2$-nél kell kezdenünk, mivel $\ln 1 = 0$.

4.3 Abszolút konvergencia, műveletek sorokkal

DEFINÍCIÓK. A $\sum a_n$ sort *abszolút konvergens*nek nevezzük, ha a $\sum |a_n|$ sor konvergens.
A $\sum a_n$ sort *feltételesen konvergens*nek nevezzük, ha a sor konvergens de nem abszolút konvergens. □

Igazolható, hogy abszolút konvergens sor konvergens, a fordított állítás viszont nem igaz, amint ezt a $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ sor mutatja. Utóbbi sor feltételesen konvergens.

Az abszolút konvergencia eldöntésere alkalmazhatók az elő ző szakaszban tárgyalt tesztek.

Ha $a_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ és

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \textit{ akkor a } \sum a_n \textit{ sor abszolút konvergens, ha}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \textit{ akkor a } \sum a_n \textit{ sor divergens.}$$

$$\textit{Ha } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \textit{ akkor a } \sum a_n \textit{ sor abszolút konvergens, ha}$$

$$\textit{ha } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \textit{ akkor a } \sum a_n \textit{ sor divergens.}$$

Legyen $\sum a_n$ egy adott sor és $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy bijektív leképezése $\mathbb{N}$-nek önmagára, akkor a $\sum a_{\varphi(n)}$ sort a $\sum a_n$ sor (φ bijekcióhoz tartozó) *átrendezésének* nevezzük.

Például a

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

sor egy átrendezése a

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$$

sor, ahol két pozitív tagot egy negatív tag követ.

Az abszolút konvergens sorok fontos tulajdonsága, az, hogy bármely átrendezésük is konvergens, és az átrendezett sor összege megegyezik az eredeti sor összegével.

Feltételesen konvergens sorokra ez nem igaz, sőt, *feltételesen konvergens sornak van olyan átrendezése, mely divergens, vagy melynek összege egy tetszőlegesen előírt szám.*

Könnyű belátni, hogy konvergens sor tetszőlegesen zárójelezhető, és a zárójelezett sor összege egyenlő az eredeti sor összegével.

Továbbá (a sorozatokra vonatkozó műveleti tulajdonságok miatt) konvergens sorok összegsora (a tagok összeadásával keletkező sor) és konvergens sor számszorosa is konvergens és összegük a kiinduló sorok összege és számszorosa, azaz,

ha $\sum a_n, \sum b_n$ konvergensek, $c \in \mathbb{R}$ akkor a $\sum(a_n + b_n), \sum(ca_n)$ is konvergensek és

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(ca_n) = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

A sorok szorzása lényegesen komplikáltabb.

Definíció. A $\sum\limits_0 a_n$ és $\sum\limits_0 b_n$ sorok *Cauchy-féle szorzatsora* a $\sum\limits_0 c_n$ sor, melynek tagjai

$$c_n := a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

$\square$

Tétel. *Abszolút konvergens sorok Cauchy-féle szorzatsora is abszolút konvergens, és összege a tényezősorok összegének szorzata.*

4.4 Függvénysorok, hatványsorok

Definíciók. Ha egy sor tagjai (azonos halmazon értelmezett) függvények, akkor a sort *függvénysornak* nevezzük.

Legyenek $f_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ a valós számok D részhalmazán értelmezett függvények. A $\sum f_n(x)$ *függvénysor konvergenciahalmazát/divergenciahalmazát* azon $x \in D$ pontok alkotják melyekre a sor konvergens/divergens. A konvergenciahalmaz pontjaiban értelmezhető a sor *összegfüggvénye* (mint a részletösszegek határértéke). $\square$

Definíció. A $\sum\limits_0 a_n(x-a)^n$ alakú függvénysort *hatványsor*nak nevezzük. a_n az n-edik *együttható, a* pedig *a sorfejtés középpontja.* $\square$

Vizsgáljuk meg a

$$\sum_0 a_n(x-a)^n$$

hatványsor abszolút konvergenciáját a gyökteszttel. Ha

$$\sqrt[n]{|a_n(x-a)^n|} = |x-a|\sqrt[n]{|a_n|} \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} |x-a|\cdot L \quad \begin{matrix} <1 & \text{a hatványsor abszolút konvergens,} \\ >1 & \text{a hatványsor divergens,} \end{matrix}$$

ahol feltételeztük, hogy az $(\sqrt[n]{|a_n|})$ sorozatnak létezik az L határértéke, $0 \le L \le \infty$.

1. $L = 0$ esetén $|x-a|\cdot L = 0 (< 1,)$ így a hatványsor minden $x \in \mathbb{R}$ mellett abszolút konvergens.
2. $0 < L < \infty$ esetén $|x-a|\cdot L < 1 (> 1)$ akkor és csakis akkor, ha $|x-a| < \frac{1}{L} \left(> \frac{1}{L}\right)$, ezért $|x-a| < \frac{1}{L}$ esetén a sor abszolút konvergens, míg $|x-a| > \frac{1}{L}$ mellett a sor divergens.

3. $L = \infty$ esetén $|x-a| \cdot L = \infty > 1$ ha $x \neq a$, így ekkor a sor divergens, míg $x = a$ esetén a sor nyilván konvergens (ugyanis a nulladik tag kivételével az összes tag nulla).

Definíció. Az

$$r := \frac{1}{L} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \left(\frac{1}{0} := \infty, \ \frac{1}{\infty} := 0\right)$$

bővített valós számot a $\sum\limits_0 a_n(x-a)^n$ hatványsor *konvergenciasugará*nak nevezzük. □

Az előbbiek alapján állíthatjuk:
Ha $|x-a| < r$, akkor hatványsorunk abszolút konvergens,
ha $|x-a| > r$, akkor hatványsorunk divergens.

Példa. A geometriai sor esetén

$$1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad \text{ha} \quad |x| < 1$$

a konvergenciasugár $r = 1$.

5. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

5.1 Függvény határértéke

A torlódási pont fogalmát már korábban bevezettük. Ezt most *kiterjesztjük arra az esetre amikor a torlódási pont $\mathbb{R}_b$-beli.* Azt mondjuk, hogy $+\infty$ $(-\infty)$ torlódási pontja a D halmaznak, ha D nem korlátos felülről (alulról). Egy $D \subset \mathbb{R}$ halmaz $\mathbb{R}_b$-beli torlódási pontjainak halmazát D'-vel fogjuk jelölni.

Definíció. [Sorozatos definíció] Legyen $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és legyen $x_0 \in D'$. Azt mondjuk, hogy f**-nek van (véges, vagy végtelen) határértéke az x_0 pontban**, ha van olyan $a \in \mathbb{R}_b$ bővített valós szám, hogy bármely olyan D-beli $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra, melyre $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ és $x_n \neq x_0$, teljesül a $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$ egyenlőség.

a-t az f függvény x_0 pontbeli határértékének nevezzük, és $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$-val, vagy $f(x) \to a$ $(x \to x_0)$-lal jelöljük. □

Másképpen megfogalmazva: *az f függvény értelmezési tartományának egy $x_0 \in \mathbb{R}_b$ torlódási pontjában akkor és csakis akkor lesz f határértéke az $a \in \mathbb{R}_b$ bővített valós szám, ha az értelmezési tartományból bármely x_0-hoz konvergáló $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot véve, melynek elemei x_0-tól különbözőek, a függvényértékek $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata a-hoz tart.*

A definícióból következik az alábbi
Állítás. *Függvény határértéke, ha létezik, akkor egyértelmű.*

Megjegyzés. Határérték *létezhet az x_0 pontban akkor is, ha a függvény nincs értelmezve a pontban* de torlódási pontja annak (egy halmaz torlódási pontja ui. nem feltétlenül pontja a halmaznak). Éppen emiatt *lényeges a definícióban a $x_n \neq x_0$ feltétel*, ez biztosítja azt, hogy $f(x_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ akkor is definiálva van, ha az x_0 torlódási pont nincs D-ben.

Definíció. [Függvény leszűkítése és bővítése] Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ és legyen $E \subset D$, akkor az f **függvény E-re való $f_{|E} : E \to \mathbb{R}$ leszűkítését**

$$f_{|E}(x) : f(x) \quad \text{ha } x \in E$$

-vel definiáljuk. Azt is mondjuk, hogy f **bővítése** $f_{|E}$-nek.

Láthatjuk, hogy $f_{|E}$ csak az E halmazon van definiálva és ott megegyezik f-fel. □

DEFINÍCIÓ. [Jobb- és baloldali határérték] Legyen $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és legyen $x_0 \in \mathbb{R}_b$ a $D^+_{x_0} := D \cap]x_0, +\infty[$ ($D^-_{x_0} := D \cap]-\infty, x_0[$) halmaz torlódási pontja. Akkor mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathbb{R}_b$ bővített valós szám **jobboldali (baloldali) határértéke** az x_0 pontban, ha $a \in \mathbb{R}_b$ az x_0 pontbeli határértéke az $f_{|D^+_{x_0}}$ ($f_{|D^-_{x_0}}$) leszűkített függvénynek. □

Jobboldali (baloldali) határérték jelölése: $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = a$ ($\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = a$)
Világos, hogy $+\infty$-ben csak baloldali, $-\infty$-ben csak jobboldali határérték definiálható.

Függvény határértékére a fentivel ekvivalens definíció adható, de ekkor a véges és végtelenben vett véges és végtelen határértékek definíciója kissé eltérő.

DEFINÍCIÓ. [Függvény véges határértéke véges pontban, ε, δ-s definíció] Legyen $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és legyen $x_0 \in D'$ véges torlódási pontja D-nek. Azt mondjuk, hogy **f-nek van (véges) határértéke az x_0 pontban**, ha van olyan $a \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy
$$|f(x) - a| < \varepsilon \qquad \text{ha} \qquad 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \quad \text{és} \quad x \in D.$$
□

Tétel. [Átviteli elv] *Legyen $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $x_0 \in D'$ véges torlódási pont, akkor a kétféle definíció (sorozatos és ε, δ-s definíció) ekvivalens.*
Nem **bizonyítjuk.** A továbbiakban a sorozatos definíciót használjuk.

PÉLDÁK. ld. előadás.

DEFINÍCIÓ. [Műveletek függvényekkel] Legyenek $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, akkor e *függvények (pontonkénti) összegét, f $c \in \mathbb{R}$-szeresét, szorzatukat, hányadosukat az*
$$\begin{aligned} (f+g)(x) :&= f(x) + g(x) \quad (x \in D) \\ (cf)(x) :&= cf(x) \quad (x \in D) \\ (fg)(x) :&= f(x)g(x) \quad (x \in D) \\ (f/g)(x) :&= f(x)/g(x) \quad (x \in D, g(x) \neq 0) \end{aligned}$$
képletekkel értelmezzük. □

Tétel. [Határérték, monotonitás és műveletek kapcsolata] *Legyenek $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$, és tegyük fel, hogy*
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}_b, \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = b \in \mathbb{R}_b.$$
Akkor bármely $c \in \mathbb{R}$ mellett
$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) &= a + b, && \textit{ha } a + b \textit{ értelmezve van,} \\ \lim_{x \to x_0} c \cdot f(x) &= c \cdot a, && \textit{ha } c \cdot a \textit{ értelmezve van,} \\ \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) &= a \cdot b, && \textit{ha } a \cdot b \textit{ értelmezve van,} \\ \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{a}{b}, && \textit{ha } \frac{a}{b} \textit{ értelmezve van.} \end{aligned}$$

Ha $f(x) \leq g(x)$ $(x \in D,\, x \neq x_0)$, akkor $a \leq b$.

Ha $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ $(x \in D,\ x \neq x_0)$, *és* $a = b$, *akkor* $\lim_{x \to x_0} h(x) = a$. □

Bizonyítás. A sorozatok megfelelő tulajdonságaiból következik.

Definíció. A $h(x) := g(f(x))$ $(x \in D)$ függvényt, ahol $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : f(D) \to \mathbb{R}$, az f *és* g *függvényekből összetett függvénynek nevezzük,* f a belső, g a külső függvény. h jelölésére használjuk $h = g \circ f$-t is (itt $f(D) = \{\ f(x)\ :\ x \in D\ \}$ az f függvény értékkészlete). □

Tétel. [Összetett függvény határértéke] *Legyen* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : f(D) \to \mathbb{R}$, *és* $h(x) := g(f(x))$ $(x \in D)$. *Ha* $x_0 \in D'$,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a,\ a \notin f(D \setminus \{x_0\}),\ \text{és}\ \lim_{y \to a} g(x) = b$$

akkor

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = b.$$

Bizonyítás. Legyen $x_0 \neq x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ akkor $y_n := f(x_n) \to a$ $(n \to \infty)$ és $y_n \in f(D \setminus \{x_0\})$ ezért $y_n \neq a$, így $h(x_n) = g(y_n) \to b$ $(n \to \infty.)$ □

5.2 Függvény folytonossága

Definíció. Az $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt **folytonosnak** nevezzük az $x_0 \in D$ pontban, ha bármely D-beli x_0-hoz konvergáló $x_n \in D\,(n \in \mathbb{N})$, $x_n \to x_0\,(n \to \infty)$ sorozat esetén a függvényértékek $f(x_n)\,(n \in \mathbb{N})$ sorozata az x_0 pontbeli függvényértékhez tart $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$. □

Röviden: az f függvény $x_0 \in D$ pontbeli folytonossága azt jelenti, hogy ha $D \ni x_n \to x_0\,(n \to \infty)$ akkor $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to \infty} x_n) = f(x_0)$.

Definíció. Az $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt jobbról (balról) **folytonosnak** nevezzük az $x_0 \in D$ pontban, ha bármely D-beli x_0-hoz konvergáló $x_n \in D\,(n \in \mathbb{N})$, $x_n \geq x_0\,(x_n \leq x_0)$, $x_n \to x_0\,(n \to \infty)$ sorozat esetén a függvényértékek $f(x_n)\,(n \in \mathbb{N})$ sorozata az x_0 pontbeli függvényértékhez tart $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$. □

- *Ha* $x_0 \in D \cap D'$, *akkor* f *folytonos* x_0*-ban akkor, és csakis akkor, ha* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- *Ha* $x_0 \in D$, *de* $x_0 \notin D'$, *akkor* x_0 *a* D ***izolált pontja****, izolált pontokban* f *a definíció alapján mindig folytonos.*

Definíció.[Függvény folytonossága,ε, δ-s ekivivalens definíció] Az $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt az $x_0 \in D$ pontban **folytonosnak** nevezzük, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \text{ha} \qquad |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \quad \text{és} \quad x \in D.$$

□

Tétel. [Folytonosság és műveletek] *Ha* $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *folytonosak az* $x_0 \in D$ *pontban, akkor* $f + g$, cf, fg, f/g *(ha* $g(x_0) \neq 0$*) is folytonosak* x_0*-ban.*
Továbbá, a $h(x) = g(f(x))$ $(x \in D)$ *összetett függvény (ahol* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : f(D) \to \mathbb{R}$*) folytonos* x_0*-ban, ha* f *folytonos* x_0*-ban és* g *folytonos az* $y_0 := f(x_0)$ *pontban.*
Bizonyítás. A sorozatok megfelelő tulajdonságaiból következik.

5.3 Folytonos függvények globális tulajdonságai

Definíciók. Az $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt $\begin{matrix}\textit{alulról}\\ \textit{felülről}\end{matrix}$ *korlátosnak* nevezzük, ha értékkészlete $\begin{matrix}\text{alulról}\\ \text{felülről}\end{matrix}$ korlátos.

Az $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt *monoton* $\begin{matrix}\textit{növekvőnek}\\ \textit{csökkenőnek}\end{matrix}$ nevezzük $D-n$, ha bármely $x_1 < x_2, x_1, x_2 \in D$ esetén

$$\begin{matrix} f(x_1) \le f(x_2) \\ f(x_1) \ge f(x_2) \end{matrix} \text{ teljesül.}$$

Az $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt *szigorúan monoton* $\begin{matrix}\textit{növekvőnek}\\ \textit{csökkenőnek}\end{matrix}$ nevezzük $D-n$, ha bármely $x_1 < x_2, x_1, x_2 \in D$ esetén

$$\begin{matrix} f(x_1) < f(x_2) \\ f(x_1) > f(x_2) \end{matrix} \text{ teljesül.}$$

Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek *lokális (helyi)* $\begin{matrix}\textit{maximuma}\\ \textit{minimuma}\end{matrix}$ az $x_0 \in D$ pontban, ha van olyan $\varepsilon > 0$ hogy

$$\begin{matrix} f(x_0) \ge f(x) \\ f(x_0) \le f(x) \end{matrix} \text{ teljesül minden } x \in K(x_0, \varepsilon) \cap D$$

esetén.

Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek *szigorú lokális (helyi)* $\begin{matrix}\textit{maximuma}\\ \textit{minimuma}\end{matrix}$ az $x_0 \in D$ pontban, ha van olyan $\varepsilon > 0$ hogy

$$\begin{matrix} f(x_0) > f(x) \\ f(x_0) < f(x) \end{matrix} \text{ teljesül minden } x \in K(x_0, \varepsilon) \cap D, x \neq x_0$$

esetén.

Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek *globális (abszolút)* $\begin{matrix}\textit{maximuma}\\ \textit{minimuma}\end{matrix}$ van az $x_0 \in D$ pontban, ha

$$\begin{matrix} f(x_0) \ge f(x) \\ f(x_0) \le f(x) \end{matrix} \text{ teljesül minden } x \in D \text{ esetén.}$$

Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek *szigorú globális (abszolút)* $\begin{matrix}\textit{maximuma}\\ \textit{minimuma}\end{matrix}$ van az $x_0 \in D$ pontban, ha

$$\begin{matrix} f(x_0) > f(x) \\ f(x_0) < f(x) \end{matrix} \text{ teljesül minden } x \in D, x \neq x_0 \text{ esetén.}$$

□

Tétel. [Folytonos függvény jeltartó] *Folytonos függvény jeltartó, azaz ha $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos az $x_0 \in D$ pontban, és $f(x_0) \neq 0$ akkor van olyan $\delta > 0$ hogy*

$$\operatorname{sg} f(x) = \operatorname{sg} f(x_0) \text{ ha } x \in K(x_0, \delta) \cap D,$$

ahol sg *a szignum (előjel) függvényt jelöli.*

Bizonyítás. A határozottság kedvéért tegyük fel, hogy $f(x_0) > 0$, a másik eset igazolása hasonló. **Indirekt úton bizonyítunk**. Tegyük fel, hogy $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos az $x_0 \in D$ pontban, és $f(x_0) > 0$ de nincs olyan $\delta > 0$ hogy $f(x) > 0$ ha $x \in K(x_0, \delta) \cap D$.

Ez azt jelenti, hogy akárhogyan is választunk egy pozitív számot, pl. $\delta = 1/n/,/,(n \in \mathbb{N})$-et, akkor van olyan $x_n \in K(x_0, 1/n) \cap D$, hogy $f(x_n) \leq 0$. Mivel $x_n \to x_0$ ha $n \to \infty$ ezért az x_0 pontbeli folytonosság miatt $f(x_n) \to f(x_0) > 0$, másrészt $f(x_n) \leq 0$ miatt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \leq 0$ ami ellentmondás, igazolva állításunkat. □

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *folytonos az $A \subset D$ halmazon,* ha f az A halmaz minden pontjában folytonos. □

Tétel. [Folytonos függvény korlátossága] *Korlátos zárt intervallumon folytonos függvény korlátos.*

Azaz ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos $[a, b]$-n, akkor vannak olyan $k, K \in \mathbb{R}$ amelyekre $k \leq f(x) \leq K$ minden $x \in [a, b]$ mellett.

Megjegyzés. Korlátos zárt intervallum helyett tetszőleges korlátos zárt halmazt véve is igaz az előző állítás.

Bizonyítás. Tegyük fel állításunkkal ellentétben, hogy pl. f nem korlátos felülről. Akkor minden $n \in \mathbb{N}$-hez van olyan $x_n \in [a, b]$, hogy $f(x_n) > n$. Tekintsük az

$$A := \{\ x_n\ :\ n \in \mathbb{N}\ \}$$

halmazt.

Ha A véges halmaz, akkor van olyan x_{k_0} eleme A-nak, hogy $x_n = x_{k_0}$ véges sok n index kivételével, azaz, $x_n = x_{k_0}$ ha $n > n_0$.

Ha A végtelen halmaz, akkor a Bolzano-Weierstrass tétel alapján A-nak van (legalább egy) x_0 torlódási pontja. $x_n \in [a, b]$ és $[a, b]$ zártsága miatt $x_0 \in [a, b]$. Vegyünk az x_0 pont $K(x_0, 1)$ környezetéből egy x_0-tól különböző A-beli x_{n_1} pontot. Ezután az x_0 pont $K(x_0, d_1)$ környezetéből, ahol $d_1 = |x_{n_1} - x_0|$, válasszunk egy olyan x_0-tól különböző $x_{n_2} \in A$ pontot melyre $n_2 > n_1$ legyen (ilyen biztosan van, mert az x_0 pont bármely környezete végtelen sok A-beli pontot tartalmaz, egyébként x_0 nem lehetne A torlódási pontja). Az x_{n_3} pontot a $K(x_0, d_2)$ környezetből választjuk, ahol $d_2 = |x_{n_2} - x_0|$, úgy, hogy $x_{n_3} \neq x_0$, és $n_3 > n_2$ legyen. Hasonlóan folytatva, egy olyan $x_{n_k} \in A$ $(k \in \mathbb{N})$ sorozatot kapunk mely x_0-hoz konvergál. (Az x_{n_k} $(k \in \mathbb{N})$ sorozatot az x_n $(n \in \mathbb{N})$ sorozat *részsorozatának* nevezzük).

Mivel véges A esetén $x_{n_k} := x_k$ $(k \in \mathbb{N}), x_0 := x_{k_0}$-t véve ugyanez a helyzet, így mondhatjuk, hogy az x_n $(n \in \mathbb{N})$ sorozatból mind véges, mind végtelen A esetén kiválasztható egy $x_0 \in [a, b]$-hez konvergáló részsorozat.

Mivel feltevésünk szerint

$$f(x_{n_k}) > n_k \quad (k \in \mathbb{N}) \text{ így } k \to \infty\text{-vel } f\ x_0\text{-beli folytonossága miatt kapjuk, hogy } f(x_0) \geq \infty,$$

ami ellentmondás, bizonyítva állításunkat. □

Tétel. [maximum, minimum létezése] *Korlátos zárt intervallumon folytonos függvény felveszi a függvényértékek szuprémumát és infimumát függvényértékként.*

Azaz ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos $[a, b]$-n, és

$$m := \inf\{\ f(x)\ :\ x \in [a, b]\ \}, \quad M := \sup\{\ f(x)\ :\ x \in [a, b]\ \}$$

akkor vannak olyan $x_m, x_M \in [a, b]$ amelyekre

$$f(x_m) = m, \quad f(x_M) = M.$$

Azt is mondhatjuk, hogy *korlátos zárt intervallumon folytonos függvénynek van maximuma és minimuma ezen az intervallumon.*

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg, hogy van olyan $x_M \in [a, b]$ melyre $f(x_M) = M$, a másik állítás igazolása hasonló.

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $M - \frac{1}{n}$ nem felső korlátja a függvényértékeknek, igy van olyan $x_n \in [a,b]$, hogy

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M \quad (n \in N).$$

Az előző tétel bizonyításához hasonlóan, kiválasztható az x_n $(n \in \mathbb{N})$ sorozatból egy olyan x_{n_k} $(k \in \mathbb{N})$ részsorozat, mely valamely $x_M \in [a,b]$ elemhez konvergál. De akkor

$$M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq M \quad (k \in N), \text{ amiből } k \to \infty\text{-vel a folytonosság miatt } M \leq f(x_M) \leq M$$

adódik, azaz $f(x_M) = M$. □

DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *egyenletesen folytonos a $D_1 \subset D$ halmazon*, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan (csak ε-tól függő) $\delta(\varepsilon) > 0$ amelyre

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{ ha } \quad |x - y| < \delta(\varepsilon) \text{ és } x, y \in D_1$$

teljesül. □

Ha f *csupán folytonos* D_1-en akkor a bármely $\varepsilon > 0$-hoz és bármely $y \in D_1$-hez van olyan (*y-tól is függő*!) $\delta(\varepsilon, y) > 0$ amelyre

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{ ha } \quad |x - y| < \delta(\varepsilon, y) \text{ és } x \in D_1$$

teljesül.

Tétel. [Cantor tétele] *Korlátos zárt intervallumon folytonos függvény ott egyenletesen folytonos.*
Nem **bizonyítjuk.**

Tétel. [közbenső értékek tétele] *Egy intervallumon folytonos függvény felvesz bármely két függvényérték közötti értéket is függvényértékként.*

Azaz, ha $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos az I intervallumon, és

$$f(\alpha) \leq y_0 \leq f(\beta)$$

valamely $\alpha, \beta \in I$-re, akkor van olyan x_0 az α, β között, amelyre

$$f(x_0) = y_0.$$

Ebből következik, hogy egy intervallumon folytonos függvény *értékkészlete is egy intervallum.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy

$$f(\alpha) < y_0 < f(\beta).$$

A határozottság miatt tegyük fel, hogy $\alpha < \beta$ és legyen

$$A = \{\ x \in [\alpha, \beta] \ : \ f(x) < y_0\ \}.$$

Az A halmaz felülről korlátos, nemüres halmaz, így van pontos felső korlátja: $\sup A = x_0 \in [\alpha, \beta]$. Megmutatjuk, hogy $f(x_0) = y_0$.

Ha $f(x_0) > y_0$ volna, akkor az $x \to f(x) - y_0$ függvény x_0-beli jeltartósága miatt x_0 egy $[\alpha, \beta]$-ba eső környezetében is $f(x) > y_0$ volna, de akkor x_0 csak ugy lehetne felső korlátja A-nak, ha $x_0 = \alpha$, amiből $f(\alpha) = f(x_0) > y_0$ adódik, ami ellentmond feltételezésünknek.

Ha $f(x_0) < y_0$ volna, akkor az $x \to f(x) - y_0$ függvény x_0-beli jeltartósága miatt x_0 egy $[\alpha, \beta]$-ba eső környezetében is $f(x) < y_0$ volna, de akkor x_0 csak ugy lehetne felső korlátja A-nak, ha $x_0 = \beta$, amiből $f(\beta) = f(x_0) < y_0$ adódik, ami ismét ellentmond feltételezésünknek.

Így csak $f(x_0) = y_0$ lehet, bizonyítva állításunkat. □

Tétel. [inverz függvény folytonossága] *Egy intervallumon folytonos, szigorúan monoton függvény injektív, és inverze is folytonos, és szigorúan monoton (ugyanolyan értelemben mint az eredeti függvény).*

Azaz ha $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton az I intervallumon akkor f injektív, és az $f^{-1} : J \to I$ (létező) inverz függvény folytonos J-n, és ugyanolyan értelemben monoton, mint f (ahol $J := f(I) = \{\ f(x)\ :\ x \in I\ \}$ az f függvény értékkészlete).
Nem **bizonyítjuk.**

Szigorú monotonitás helyett injektivitást feltéve is folytonos az inverz függvény.

Tétel. [inverz függvény folytonossága] *Egy intervallumon folytonos és injektív függvény inverze is folytonos.*

Azaz ha $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos és injektív az I intervallumon és $J := f(I) = \{\ f(x)\ :\ x \in I\ \}$ az f függvény értékkészlete, akkor az $f^{-1} : J \to I$ inverz függvény folytonos J-n.
Nem **bizonyítjuk.**

5.4 Az elemi függvények folytonossága

Az exponenciális és trigonometrikus függvények középiskolában tanult definícióját elfogadva további fontos függvényeket definiálunk.
Definíciók.

$$\begin{aligned}
\ln x &:= \text{az } e^x \text{ függvény inverze, } \ln :]0,\infty[\to \mathbb{R}, \\
a^x &:= e^{x \ln a} \quad (x \in \mathbb{R}) \text{ ahol } a > 0, \\
\log_a x &:= \text{az } a^x \text{ függvény inverze, ahol } 0 < a \neq 1, \ \log_a :]0,\infty[\to \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

□

A *trigonometrikus függvények inverzeit* az alábbi módon definiáljuk.
Definíciók.

$$\begin{aligned}
\arcsin x &:= \text{a } \sin\big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} x && \text{függvény inverze, } \arcsin : [-1,1] \to -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}, \\
\arccos x &:= \text{a } \cos\big|_{[0,\pi]} x && \text{függvény inverze, } \arccos : [-1,1] \to 0, \pi, \\
\arctan x &:= \text{a } \tan\big|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} x && \text{függvény inverze, } \arctan : \mathbb{R} \to]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[, \\
\operatorname{arcctg} x &:= \text{a } \operatorname{ctg}\big|_{]0,\pi[} x && \text{függvény inverze, } \operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to]0,\pi[
\end{aligned}$$

□

Definíció. Az $f(x) = c$ $(x \in \mathbb{R})$, (ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans), $f(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$, $f(x) = e^x$ $(x \in \mathbb{R})$, $f(x) = \ln x$ $(x > 0)$, $f(x) = \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$, $f(x) = \arcsin x$ $(x \in [-1,1])$ függvényeket, és ezekből a
4 alapművelet (összeadás, kivonás, szorzás, osztás),
összetett függvény képzése,
leszűkítés egy intervallumra
operációk véges sokszori alkalmazásával keletkező függvényeket *elemi függvényeknek* nevezzük.

Tétel. *A $f(x) = x^\alpha := e^{\alpha \ln x}$ $(x > 0)$ általános hatványfüggvény, a trigonometrikus függvények és inverzeik, polinomok, racionális törtfüggvények (azaz polinomok hányadosai) elemi függvények.*
Bizonyítás. Ezen függvények ismert azonosságok felhasználásával kifejezhetők a definíció első részében felsorolt 6 elemi függvény segítségével a 4 alapművelet és összetett függvény képzése által. □

Tétel. *Az elemi függvények folytonosak.*

Bizonyítás. Elég az $f(x) = c, x, e^x, \sin x$ függvények folytonosságát igazolni (ezekből az inverz függvény folytonosságára vonatkozó tétel miatt következik az $f(x) = \ln x, \arcsin x$ folytnossága, majd a folytonosság és műveletek kapcsolata miatt a tétel.

$f(x) = c, f(x) = x$ folytonossága a definíció alapján nyilvánvaló.

A sin függvény folytonossága

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \leq |x-x_0| < \varepsilon \text{ ha } |x-x_0| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon$$

miatt következik. Utóbbi becslésben felhasználtuk azt, hogy $w\sin x| \leq |x|$ ennek igazolását ld. a következő tétel bizonyításában.

Az exponenciális függvény folytonosságat nehezebb igazolni, itt nem bizonyitjuk. □

5.5 Nevezetes függvényhatárértékek

Tétel.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Bizonyítás. Az első állítás a sorozatok határértékére vonatkozó

$$\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e \text{ ha } 0 \neq x_n \to 0 \ (n \to \infty)$$

egyenlőségből következik.

A másodikat úgy igazolhatjuk, hogy $y = e^x - 1$ transzformációval $y \to 0$ ha $x \to 0$, így

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(y+1)} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}} = \frac{1}{\ln e} = 1.$$

Az utolsó igazolásához felhasználjuk a geometriai meggondolásból adódó

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \text{ ha } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

egyenlőtlenséget. Ebből $\sin x$-szel való osztással

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

és $x \to 0$-val a rendőrtétel alapján adódik állításunk. □

6. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

6.1 Differenciálhatóság, differenciálási szabályok

Definíció. Az $f : I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ egy nem elfajult intervallum) függvényt *differenciálhatónak* nevezzük az $x_0 \in I$ pontban, ha létezik a

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

(véges) határérték.

E határértéket az f függvény x_0 pontbeli *differenciálhányados*ának *vagy derivált*jának nevezzük, és $\frac{df}{dx}(x_0)$-lal, vagy $f'(x_0)$-lel jelöljük. □

A DERIVÁLT JELENTÉSE. Az $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ hányadost az f függvény $[x_0, x]$ intervallumon vett *differenciahányadosának* nevezzük. Ez a függvény változásának *átlagsebességét* adja, $f'(x_0)$ pedig az x_0 pontbeli sebességet. Speciálisan, ha x =idő, $f(x)$= út, akkor $f'(x_0)$ az x_0 időpontban az f által leírt mozgás *pillanatnyi sebessége.*

A DERIVÁLT GEOMETRIAI JELENTÉSE. Az $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *differenciahányados* az f gráfjának $(x_0, f(x_0))$ és $(x, f(x))$ pontjait összekötő *szelőjének az iránytangense*, míg $f'(x_0)$ az f gráfjához az $(x_0, f(x_0))$ pontban húzott *érintő iránytangense.*

Megjegyzések. Ha x_0 az I intervallum valemelyik végpontja, akkor a fenti definíció egyoldali deriváltat ad.
A differenciálhatóság *pontbeli tulajdonság.* Az $f(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény az $x_0 = 0$ pont kivételével mindenütt differenciálható, de $x_0 = 0$-*ban nem differenciálható.*
Minden olyan $x \in I$ pontban ahol f differenciálható, értelmezhetjük az $f'(x)$ *derivált függvényt.*

ÁLLÍTÁS. *Ha f differenciálható egy pontban, akkor ott folytonos is.*
Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f differenciálható az x_0 pontban, akkor

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \to f'(x_0) \cdot 0 = 0 \quad \text{ha} \quad x \to x_0,$$

így $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, azaz f folytonos x_0-ban. □

Tétel. [differenciálási szabályok] *Tegyük fel, hogy $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenciálhatók x_0-ban, $c \in \mathbb{R}$ akkor*

$$\begin{array}{lll}
 & f+g & \text{is differenciálható } x_0\text{-ban és} \quad (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \\[2ex]
 & cf & \text{is differenciálható } x_0\text{-ban és} \quad (cf)'(x_0) = cf'(x_0), \\[2ex]
 & fg & \text{is differenciálható } x_0\text{-ban és} \quad (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0), \\[2ex]
\text{ha } g(x_0) \neq 0 \text{ akkor} & \dfrac{f}{g} & \text{is differenciálható } x_0\text{-ban és} \quad \left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.
\end{array}$$

Bizonyítás. A határérték tulajdonságait figyelembevéve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0) + g'(x_0), \text{ ha } x \to x_0 \\
\frac{(cf)(x) - (cf)(x_0)}{x - x_0} &= c\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to cf'(x_0), \text{ ha } x \to x_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\ &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \to f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0), \text{ ha } x\to x_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x-x_0} &= \frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} = \frac{1}{g(x)g(x_0)}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{x-x_0}\\ &= \frac{1}{g(x)g(x_0)}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{x-x_0}\\ &= \frac{1}{g(x)g(x_0)}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0)-f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)\\ &\to \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}, \text{ ha } x\to x_0\end{aligned}$$

bizonyítva tételünket. □

Tétel. [differenciálhatóság és lineáris approximálhatóság] *Az $f: I\to\mathbb{R}$ függvény akkor és csakis akkor differenciálható az $x_0\in I$ pontban, ha van olyan A konstans, hogy*

(1) $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)}{x-x_0}=0.$$

Ha (1) *teljesül, akkor $A=f'(x_0)$.*

Bizonyítás. *Ha f differenciálható x_0-ban*, úgy $A=f'(x_0)$-lal kapjuk, hogy,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right)=f'(x_0)-f'(x_0)=0,$$

azaz (1) teljesül.

Fordítva, ha (1) *teljesül*, akkor

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)+A(x-x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)}{x-x_0}-A\to 0+A=A,$$

így f differenciálható x_0-ban, és $f'(x_0)=A$, amint állítottuk. □

Megjegyzés. Ha (1)-ben a limesz jel utáni törtfüggvényt $\varepsilon(x)$-szel jelöljük, akkor,

(2) $$f(x)-f(x_0)=A(x-x_0)+\varepsilon(x)(x-x_0) \text{ és } \lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0.$$

Ezért az előző tétel megfogalmazható az alábbi módon is.

Az $f: I\to\mathbb{R}$ függvény akkor és csakis akkor differenciálható az $x_0\in I$ pontban, ha van olyan A konstans, és $\varepsilon: I\to\mathbb{R}$ függvény, hogy (2) *teljesül. Továbbá, ha* (2) *teljesül, akkor $A=f'(x_0)$.*

(2) alapján

$$f(x)-f(x_0)\approx A(x-x_0)$$

azaz, *az f függvény $f(x)-f(x_0)$ növekménye az $A(x-x_0)$ lineáris függvénnyel approximálható* (közelíthető), a közelítés $\varepsilon(x)(x-x_0)$ hibája kicsi, mivel $\varepsilon(x)$ nullához tart, ha x tart x_0-hoz.

Tétel. [összetett függvény differenciálhatósága] *Legyen $f: I\to\mathbb{R}$, $J:=f(I)$ az f értékészlete, $g: J\to\mathbb{R}$ és $h=g\circ f$. Ha f differenciálható $x_0\in I$-ben, g differenciálható $y_0:=f(x_0)\in J$-ben, akkor a h összetett függvény* *differenciálható x_0-ban, és*

$$h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Bizonyítás. (2) felhasználásával, feltételeink miatt

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= (A + \varepsilon(x))(x - x_0), \quad \text{ahol } A = f'(x_0), \ \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0, \\ g(y) - g(y_0) &= (B + \eta(y))(y - y_0), \quad \text{ahol } B = g'(y_0), \ \lim_{y \to y_0} \eta(y) = 0, \end{aligned}$$

amiből $y = f(x)$-szel

$$\begin{aligned} h(x) - h(x_0) &= g(f(x)) - g(f(x_0)) = g(y) - g(y_0) = (B + \eta(y))(y - y_0) = (B + \eta(y))(A + \varepsilon(x))(x - x_0) \\ &= BA(x - x_0) + (B\varepsilon(x) + A\eta(y) + \eta(y)\varepsilon(x))(x - x_0). \end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy $B\varepsilon(x) + A\eta(y) + \eta(y)\varepsilon(x) \to 0$ $(x \to x_0)$. Mivel $x \to x_0$ esetén $y = f(x) \to y_0 = f(x_0)$ így $\eta(y) = \eta(f(x)) \to 0$, ezért az előbbi háromtagú összeg minden tagja nullához tart.

Ebből következik, hogy h differenciálható x_0-ban és $h'(x_0) = BA = g'(f(x_0))f'(x_0)$ igazolva állításunkat. □

Tétel. [inverz függvény differenciálhatósága] *Tegyük fel, hogy $f : I \to \mathbb{R}$ invertálható, folytonos I-n, differenciálható $x_0 \in I$-ben, és $f'(x_0) \neq 0$. Akkor az $f^{-1} : f(I) \to I$ inverz függvény differenciálható $y_0 := f(x_0)$-ban, és*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Bizonyítás. Legyen $y_n \in f(I), y_0 \neq y_n \to y_0$ $(n \to \infty)$, akkor f^{-1} folytonossága miatt $x_n = f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y_0) = x_0$ and $x_n \neq x_0$ (az invertálhatóság miatt). Ezért

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0)}} \to \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

□

6.2 Az elemi függvények deriváltjai

A legfontosabb elemi függvények deriváltjait határozzuk meg az alábbi tételben.

Tétel. [az elemi függvények deriváltjai]

$$
\begin{aligned}
(c)' &= 0 && (x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges konstans}),\\
(e^x)' &= e^x && (x \in \mathbb{R}),\\
(\sin x)' &= \cos x && (x \in \mathbb{R}),\\
(\cos x)' &= -\sin x && (x \in \mathbb{R}),\\
(\ln x)' &= \frac{1}{x} && (x > 0),\\
(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} && (x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}),\\
(\operatorname{ctg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} && (x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}),\\
(a^x)' &= a^c \ln a && (x \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1),\\
(x^\alpha)' &= \alpha x^{\alpha-1} && (x > 0, \text{ ha } \alpha \in \mathbb{R}; x \in \mathbb{R}, \text{ ha } \alpha \in \mathbb{N}),\\
(\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a} && (x > 0, 0 < a \neq 1),\\
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} && (|x| < 1),\\
(\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} && (|x| < 1),\\
(\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2} && (x \in \mathbb{R}),\\
(\operatorname{arcctg} x)' &= -\frac{1}{1+x^2} && (x \in \mathbb{R}),
\end{aligned}
$$

Bizonyítás. Az első három állítást a derivált definíciója alapján igazoljuk, felhasználva a nevezetes határértékeket. Ha $x \to x_0$ akkor

$$
\frac{c-c}{x-x_0} = 0 \to 0, \qquad \frac{e^x - e^{x_0}}{x-x_0} = e^{x_0}\frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0} \to e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0},
$$

$$
\frac{\sin x - \sin x_0}{x-x_0} = \frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0} = \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\cos\frac{x+x_0}{2} \to \cos x_0.
$$

Az összetett függvény differenciálási szabályát alkalmazva kapjuk, hogy

$$
(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\sin x.
$$

Mivel ln az exponenciális függvény inverze, így

$$
(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.
$$

Tört ill. összetett függvény differenciálási szabályát használva

$$\begin{aligned}
(\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},\\
(\operatorname{ctg} x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(-\sin x)\sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x},\\
(a^x)' &= \left(e^{x\ln a}\right)' = e^{x\ln a}\,\ln a = a^x\,\ln a,\\
(x^\alpha)' &= \left(e^{\alpha\ln x}\right)' = e^{\alpha\ln x}\,\frac{\alpha}{x} = x^\alpha\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1},\\
(\log_a x)' &= \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{\frac{1}{x}}{\ln a} = \frac{1}{x\ln a}.
\end{aligned}$$

A trigonometrikus függvények inverzeinek deriváltjaira vonatkozó állítások közül csak az elsőt igazoljuk, a többi hasonlóan bizonyítható.

Mivel

$$\arcsin = \sin\Big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}^{(-1)}, \quad \text{a } [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}]\text{-re leszűkített sin függvény inverze}$$

így

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

ahol felhasználtuk azt, hogy $|x| < 1$ mellett $-\dfrac{\pi}{2} < \arcsin x < \dfrac{\pi}{2}$, ezért $\cos(\arcsin x) > 0$, a négyzetgyöknek a pozitív értékét kellett vennünk. Megjegyezzük, hogy arcsin, arccos értelmezési tartománya $|x| \le 1$ de ezen intervallum $1, -1$ végpontjaiban e függvények nem differenciálhatók (deriváltjuk ($+\infty$ vagy $-\infty$ lesz). □

Tétel. [az elemi függvények differenciálhatósága] *Az elemi függvények értelmezési tartományuk belső pontjaiban differenciálhatók.*

Bizonyítás. Állításunk következik az előző tételből, és az összetett függvény differenciálhatósági tételéből.□

6.3 Középértéktételek és alkalmazásaik

Tétel. [lokális szélsőérték szükséges feltétele] *Ha $f : I \to \mathbb{R}$ differenciálható az $x_0 \in I^\circ$ (I° jelöli I belső pontjainak halmazát, vagy belsejét) belső pontban, és f-nek x_0-ban lokális szélsőértéke van, akkor*

$$f'(x_0) = 0.$$

Bizonyítás. Ha pl. x_0-ban lokális maximum van akkor $f(x_0) \ge f(x)$, feltéve, hogy x elég közel van x_0-hoz, így

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0, \text{ ha } x > x_0, \text{ amiből } x \to x_0 \text{ határátmenettel } f'(x_0) \le 0,$$

és hasonlóan

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0, \text{ ha } x < x_0, \text{ amiből } x \to x_0 \text{ határátmenettel } f'(x_0) \ge 0,$$

így $f'(x_0) = 0$. □

Lényeges, hogy x_0 az I intervallum **belső pontja**!

Tétel. [Cauchy-féle középértéktétel] *Legyenek* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonosak* $[a, b]$*-n, differenciálhatók* $]a, b[$*-n, akkor van olyan* $\xi \in]a, b[$ *melyre*

$$(f(b) - f(a))\, g'(\xi) = (g(b) - g(a))\, f'(\xi),$$

vagy, ha $g'(x) \neq 0\, (x \in]a, b[)$ *akkor*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Bizonyítás. Legyen

$$h(x) := (f(b) - f(a))\, g(x) - (g(b) - g(a))\, f(x) \quad (x \in [a, b]),$$

akkor a h függvény folytonos $[a, b]$-n, differenciálható $]a, b[$-n, és $h(a) = h(b)$. Azt kell igazolnunk, hogy valamely $\xi \in]a, b[$-re $h'(\xi) = 0$.

Ha h *konstans az* $[a, b]$*-n,* akkor ξ-nek $]a, b[$ bármely pontját választhatjuk.

Ha h *nem konstans az* $[a, b]$*-n,* akkor h-nak van $h(a) = h(b)$-nél nagyobb, vagy kisebb függvényértéke, például van olyan x melyre $h(x) > h(a)$. Mivel folytonos függvény felveszi a függvényértékek suprémumát, így van olyan ξ, hogy

$$h(\xi) = \sup_{x \in [a,b]} h(x).$$

$\xi \neq a, \xi \neq b$ miatt ξ belső pontja $[a, b]$-nek, az előző tétel alapján $h'(\xi) = 0$. ☐

A tétel *geometriai jelentése*: létezik olyan $\xi \in]a, b[$, hogy az $x = g(t), y = f(t)$ $(t \in [a, b])$ paraméteres alakban megadott görbe $(g(a), f(a))$ és $(g(b), f(b))$ végpontjait összekötő szelő párhuzamos a görbe $(g(\xi), f(\xi))$ pontbeli érintőjével.

Tétel. [Lagrange-féle középértéktétel] *Legyen* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonos* $[a, b]$*-n, differenciálható* $]a, b[$*-n, akkor van olyan* $\xi \in]a, b[$ *melyre*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bizonyítás. Az előző tétel speciális esete $g(x) = x$ választással. ☐

A tétel *geometriai jelentése*: létezik olyan $\xi \in]a, b[$, hogy az f gráfjának, $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ végpontjait összekötő szelő párhuzamos a gráf $(\xi, f(\xi))$ pontbeli érintőjével.

Tétel. [Rolle-féle középértéktétel] *Legyen* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonos* $[a, b]$*-n, differenciálható* $]a, b[$*-n,* $f(a) = f(b)$*, akkor van olyan* $\xi \in]a, b[$ *melyre*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Bizonyítás. Az előző tétel speciális esete. ☐

A monotonitás és deriváltak kapcsolatát írja le a következő

Tétel. [monotonitás és deriváltak] *Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ differenciálható I-n, akkor*

$$\begin{aligned} &f \text{ monoton növekvő } I\text{-n}, && \text{akkor és csakis akkor, ha } f'(x) \geq 0\ (x \in I), \\ &f \text{ monoton csökkenő } I\text{-n}, && \text{akkor és csakis akkor, ha } f'(x) \leq 0\ (x \in I), \\ &f \text{ konstans } I\text{-n}, && \text{akkor és csakis akkor, ha } f'(x) = 0\ (x \in I), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &f \text{ szigorúan monoton növekvő } I\text{-n}, && \text{ha } f'(x) > 0\ (x \in I), \\ &f \text{ szigorúan monoton csökkenő } I\text{-n}, && \text{ha } f'(x) < 0\ (x \in I). \end{aligned}$$

Bizonyítás. Csak az első állítást bizonyítjuk, a többi bizonyítás hasonló.
Ha f monoton növekvő, úgy $x, x_0 \in I$ mellett

$$x > x_0 \text{ esetén } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

$$x < x_0 \text{ esetén } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

így $x \to x_0$ határátmenettel $f'(x_0) \geq 0$ $(x_0 \in I)$.
Fordítva, ha $f'(x) \geq 0$ $(x \in I)$ akkor tetszőleges $x, y \in I, x < y$ esetén a Lagrange-féle középértéktétel alapján

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x) \geq 0$$

így f monoton növekvő. □

Tétel. [L'Hospital szabály] *Legyenek $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenciálhatók $]a, b[$-n, (ahol most $a, b \in \mathbb{R}_b$) és $g'(x) \neq 0$ $(x \in]a, b[)$. Ha*

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \tag{3}$$

véges vagy végtelen határérték létezik, és

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a+0} g(x) = 0 \quad \textit{vagy} \quad \lim_{x \to a+0} g(x) = +\infty(-\infty), \tag{4}$$

akkor

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Megjegyzés. A tétel akkor is érvényes, ha $x \to a + 0$ helyett mindenütt $x \to b - 0$-t, illetve $x \to c$-t írunk ahol c az $]a, b[$ egy belső pontja.

Bizonyítás. Csak abban a speciális esetben bizonyítunk amikor $a, A \in \mathbb{R}$, és

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a+0} g(x) = 0$$

teljesül.
Először kiterjesztjük f, g-t az $[a, b[$ intervallumra, az

$$f(a) = g(a) := 0$$

definíciók által. Ezzel f, g folytonosak $[a, b[$-n. Az $[a, x]$ $(a < x < b)$-re a Rolle tételt alkalmazva,

$$g(x) = g(x) - g(a) = g'(\xi)(x - a) \neq 0,$$

így $g(x) \neq 0$, $(x \in]a, b[)$. A Cauchy-féle középértéktételt az $[a, x]$ intervallumon alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \to A$$

ha $x \to a + 0$, ugyanis, ekkor $a < \xi < x$ miatt, $\xi \to a + 0$ is teljesül. □

6.4 Magasabbrenű deriváltak, konvexitás

Definíció. Tegyük fel, hogy az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény első deriváltja létezik az $x_0 \in I$ pontnak egy (legalább egyoldali) környezetében, akkor f *második deriváltját*

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

-szel, vagy

$$f''(x_0) := (f')'(x_0)$$

-lal definiáljuk, és hasonlóan, az f függvény $(n+1)$-*edik deriváltja*

$$f^{(n+1)}(x_0) := \left(f^{(n)}\right)'(x_0).$$

□

Ahhoz, hogy $f^{(n+1)}(x_0)$ létezhessen $f^{(n)}$-nek x_0 egy (legalább egyoldali) környezetében léteznie kell.

Néhány függvény magasabbrendű deriváltjait egyszerűen kiszámolhatjuk: $f(x) = e^x$ esetén $f^{(n)}(x) = e^x$, ha $g(x) = \sin x$ akkor $g'(x) = \cos x, g''(x) = -\sin x, g'''(x) = -\cos x, g^{IV}(x) = \sin x$, az n-edik deriváltra $g^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.
Ugyanakkor összetett függvények magasabbrendű deriváltjai általában nagyon komplikáltak.

Definíció. Az $f : I \to \mathbb{R}$ függvényt *konvex*nek nevezzük az I intervallumon, ha

(5) $$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad (x_1, x_2 \in I, \lambda \in [0, 1])$$

teljesül.
f-et *konkáv*nak nevezzük I-n , ha $-f$ konvex I-n. □

Az (5) konvexitási egyenlőtlenség *geometriai jelentése*: $x_1 < x_2$ mellett a $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ pont az $[x_1, x_2]$ intervallumot $1 - \lambda : \lambda$ arányban osztja ketté, (5) baloldala éppen f értéke ebben a pontban.
Az $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ pontokon átmenő egyenes (szelő) egyenlete:

$$y - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Könnyű ellenőrizni, hogy ennek értéke a $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ pontban éppen (5) jobboldala. Így (5) geometriai jelentése: az f gráfjának bármely szelője a metszési pontok közötti szakaszon a gráf felett van.

Indukcióval könnyen igazolható a következő
Tétel. [Jensen egyenlőtlenség] *$f : I \to \mathbb{R}$ akkor és csakis akkor konvex az I intervallumon, ha teljesül a Jensen egyenlőtlenség,*

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n),$$

ahol $x_1, \ldots, x_n \in I, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. f konkáv akkor és csakis akkor, ha az előbbi egyenlőtlenség megfordítása teljesül.

Tétel. [konvex/konkáv függvények jellemzése]
(i) *Legyen* $f : I \to \mathbb{R}$ *differenciálható* I*-n, akkor*

$$f \text{ konvex } I\text{-n}, \qquad \text{akkor és csakis akkor, ha } f'(x) \text{ monoton növekvő } I\text{-n},$$

$$f \text{ konkáv } I\text{-n}, \qquad \text{akkor és csakis akkor, ha } f'(x) \text{ monoton csökkenő } I\text{-n}.$$

(ii) *Legyen* $f : I \to \mathbb{R}$ *kétszer differenciálható* I*-n, akkor*

$$f \text{ konvex } I\text{-n}, \qquad \text{akkor és csakis akkor, ha } f''(x) \geq 0 \ (x \in I),$$

$$f \text{ konkáv } I\text{-n}, \qquad \text{akkor és csakis akkor, ha } f''(x) \leq 0 \ (x \in I).$$

Bizonyítás. Elég az (i) állítást igazolni konvex függvény esetére.
Ha f *konvex* I*-n akkor* $x_1 < x_2$-t feltételezve, $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$-ből

$$\lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, 1 - \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

így az (5) átírható

$$f(x) \leq \frac{(x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2)}{x_2 - x_1} \tag{6}$$

alakba. A jobboldali tört számlálóját átalakítva

$$f(x) \leq \frac{(x - x_1)\left(f(x_2) - f(x_1)\right) + (x_2 - x + x - x_1)f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$f(x) \leq (x - x_1)\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} + f(x_1),$$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ amiből } x \to x_1 + 0\text{-val}$$

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

(6) egy másik átalakításával

$$f(x) \leq \frac{(x_2 - x)\left(f(x_1) - f(x_2)\right) + (x - x_1 + x_2 - x)f(x_2)}{x_2 - x_1},$$

$$f(x) \leq (x_2 - x)\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_2 - x_1} + f(x_2),$$

$$\frac{f(x) - f(x_2)}{x_2 - x} \leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_2 - x_1}, \ (-1)\text{-gyel szorozva}$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \text{ amiből } x \to x_2 - 0\text{-val}$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2).$$

A kapott egyenlőtlenségeket összevetve

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2),$$

ami mutatja, hogy f' monoton növekvő.

Fordítva, ha f' monoton növekvő, akkor Lagrange tételét az $[x_1, x]$, $[x, x_2]$ intervallumokon alkalmazva, léteznek olyan $\xi_1 \in]x_1, x[$, $\xi_2 \in]x, x_2[$, melyekre f' növekedése és $\xi_1 < \xi_2$ miatt

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

amiből átrendezéssel

$$\frac{f(x)}{x - x_1} + \frac{f(x)}{x_2 - x} \leq \frac{f(x_1)}{x - x_1} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x} \qquad \text{ezt } (x - x_1)(x_2 - x)\text{-szel szorozva}$$

$$f(x)(x_2 - x + x - x_1) \leq f(x_1)(x_2 - x) + f(x_2)(x - x_1), \quad \text{vagy} \quad f(x) \leq \frac{(x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2)}{x_2 - x_1},$$

amiből

$$\lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$$

-gyel éppen f konvexitását kapjuk. □

A Jensen egyenlőtlenség és az előző tétel segítségével können megkaphatjuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget. Mivel $(\ln x)' = 1/x, (\ln x)'' = (1/x)' = -1/x^2 < 0$ $(x > 0)$, így az ln függvény konkáv a $]0, \infty[$ intervallumon. A Jensen egyenlőtlenség szerint

$$\ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 \ln x_1 + \lambda_2 \ln x_2 + \cdots + \lambda_n \ln x_n,$$

vagy

$$\ln\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \ln x_k = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k^{\lambda_k}\right)$$

amiből a logaritmus elhagyása után

$$\lambda_k = \frac{p_k}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

nel, ahol $p_1, \ldots, p_n > 0$ (súlyok) azt kapjuk, hogy

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k} \geq \left(\prod_{k=1}^{n} x_k^{p_k}\right)^{\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} p_k}} \qquad (x_k > 0, p_k > 0, k = 1, \ldots, n)$$

a súlyozott számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség.

Definíció. Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ és $x_0 \in I^\circ$ belső pontja I-nek. x_0-t az f függvény *inflexiós helyénk,* $(x_0, f(x_0))$-t *inflexiós pontjának* nevezzük, ha x_0 az I intervallum konvex és konkáv szakaszait választja el, azaz, ha van olyan $\delta > 0$, hogy

f konvex $]x_0 - \delta, x_0[$-n, konkáv $]x_0, x + 0 + \delta[$-n, vagy
f konkáv $]x_0 - \delta, x_0[$-n, konvex $]x_0, x + 0 + \delta[$-n. □

Az előző tétel alapján érvényes az alábbi

Tétel. [inflexiós pontok megkeresése]
Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható I-n.
(i) *Ha $x_0 \in I^\circ$ pont inflexiós helye f-nek, akkor $f''(x_0) = 0$.*
(ii) *Ha $f''(x_0) = 0$ és f'' előjelet vált x_0-ban, akkor x_0 inflexiós helye f-nek.*

6.5 Taylor tétele

Tétel. [Taylor tétele] *Tegyük fel, hogy* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $f^{(0)}:=f$, *és*
$f^{(n)}$ *folytonos* $[a,b]$*-n,*
$f^{(n)}$ *differenciálható* $]a,b[$*-n,*
akkor bármely $x,x_0\in[a,b]$*-hoz van olyan* ξ *az* x *és* x_0 *között (szigorúan közöttük, ha* $x\neq x_0$*), hogy*

$$f(x)=\left(f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Megjegyzés. A

$$T_n(x):=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

polinomot az f függvény n-edfokú *Taylor polinomjának* ($x_0=0$ *esetén Mc Laurin polinomjának*) nevezzük az x_0 pont körül, míg az

$$R_n(x):=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

a Taylor formula *n-edik maradéktag*ja a Lagrange-féle alakban. $R_n(x)$ azt mutatja meg, hogy $f(x)$-et a $T_n(x)$ Taylor polinom milyen hibával közelíti.

Bizonyítás. Legyen

$$\begin{aligned} F(x) &:= f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=f(x)-T_n(x),\\ G(x) &:= (x-x_0)^{n+1}, \end{aligned}$$

akkor $G^{(m)}(x)\neq 0$, ha $x\neq x_0, m=0,1,\dots,n+1$, továbbá

$$\begin{aligned} &F^{(m)}(x_0)=G^{(m)}(x_0)\quad (m=0,1,\dots,n),\\ &F^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x),\\ &G^{(n+1)}(x)=(n+1)!. \end{aligned}$$

A határozottság miatt tegyük fel, hogy $x>x_0$. A Cauchy-féle középértéktétel alapján van olyan ξ_1 melyre $x_0<\xi_1<x$ és

$$\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)}=\frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}.$$

Most a Cauchy-féle középértéktételt F',G'-re alkalmazva, van olyan ξ_2 melyre $x_0<\xi_2<\xi_1$ és

$$\frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}=\frac{F'(\xi_1)-F'(x_0)}{G'(\xi_1)-G'(x_0)}=\frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)}.$$

Hasonlóan folytatva, kapjuk, hogy $x_0<\xi_{n+1}<\xi_n<\cdots<\xi_1$ és

$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{G(x)} &= \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}=\frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)}=\cdots=\frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)}\\ &= \frac{F^{(n)}(\xi_n)-F^{(n)}(x_0)}{G^{(n)}(\xi_n)-G^{(n)}(x_0)}=\frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})}=\frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Innen $\xi=\xi_{n+1}$ választással

$$F(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}G(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

igazolva állításunkat. $x < x_0$-nál a bizonyítás hasonló, $x = x_0$-nál pedig a tétel állítása nyilvánvaló. $\square$

Példák Taylor polinomra.
$f(x) = e^x,\ x_0 = 0$ mellett

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

ahol

$$R_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Mivel $\xi < |x|$

$$0 \le |R_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|} \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty,$$

azt kapjuk, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ mellett

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Ezt a sort az *exponenciális függvény Mc Laurin sorának, vagy $x_0 = 0$ körüli Taylor sorának* nevezzük . Lehetne az e^x-et ezzel a sorösszeggel is definiálni.

Hasonlóan $f(x) = \sin x,\ x_0 = 0$ mellett

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

ahol

$$R_{2n+1}(x) = \frac{\sin\left(\xi + (2n+2)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

Mivel

$$0 \le |R_{2n+1}(x)| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \to 0 \quad \text{ha} \quad n \to \infty$$

azt kapjuk, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ mellett

$$\sin x = \lim_{n\to\infty} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ezt a sort a sin *függvény Mc Laurin sorának, vagy $x_0 = 0$ körüli Taylor sorának nevezzük.* $\square$

6.6 Szélsőértékszámítás

Lokális szélsőérték megkeresése

Már igazoltuk a lokális szélsőérték alábbi szükséges feltételét.

Ha $f : I \to \mathbb{R}$ differenciálható az $x_0 \in I^\circ$ belső pontban, és ott lokális szélsőértéke van, akkor $f'(x_0) = 0$.

Definíció. Azokat az x_0 pontokat, amelyekre $f'(x_0) = 0$ teljesül, az f függvény *stacionárius pontjainak* nevezzük. $\square$

E pontokban az érintő párhuzamos az x tengellyel. *Stacionárius pontban lehet lokális szélsőérték, de nem biztos, hogy van.*

Milyen $x_0 \in I$ pontokban lehet egy $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek lokális szélsőértéke?

- $x_0 \in I^\circ$ belső pont, ahol $f'(x_0) = 0$,
- x_0 az I intervallum valamely végpontja (ha az I-hez tartozik),
- x_0 az I-nek olyan pontja ahol f nem differenciálható.

Az előbb megfogalmazott szükséges feltételből könnyen kaphatunk elegendő feltételt a lokális szélsőértékre.

Tétel. [elsőrendű elegendő feltétel a szélsőértékre] *Tegyük fel hogy $f : I \to \mathbb{R}$ differenciálható az $x_0 \in I^\circ$ belső pont egy környezetében, és x_0 stacionárius pontja f-nek (azaz $f'(x_0) = 0$).*

- *Ha van olyan $r > 0$, hogy $f'(x) \geq 0$, ha $x \in]x_0 - r, x_0[\cap I$, és $f'(x) \leq 0$, ha $x \in]x_0, x_0 + r[\cap I$, akkor f-nek lokális maximuma van x_0-ban.*
- *Ha van olyan $r > 0$, hogy $f'(x) \leq 0$, ha $x \in]x_0 - r, x_0[\cap I$, és $f'(x) \geq 0$, ha $x \in]x_0, x_0 + r[\cap I$, akkor f-nek lokális minimuma van x_0-ban.*
- *Ha van olyan $r > 0$, hogy $f'(x) > 0$, ha $x \in]x_0 - r, x_0 + r[\cap I$, $x \neq x_0$, vagy $f'(x) < 0$, ha $x \in]x_0 - r, x_0 + r[\cap I$, $x \neq x_0$, akkor f-nek nincs lokális szélsőértéke x_0-ban, x_0 inflexiós helye f-nek.*

Tétel. [a szélsőérték n-edrendű elegendő feltétele] *Tegyük fel, hogy $f : I \to \mathbb{R}$ n-szer folytonosan differenciálható az $x_0 \in I^\circ$ belső pont egy környezetében (azaz $f^{(n)}$ folytonos e környezetben) és*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad de \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

• *Ha n páros, akkor f-nek szigorú lokális szélsőértéke van x_0-ban, maximum, ha $f^{(n)}(x_0) < 0$, minimum, ha $f^{(n)}(x_0) > 0$.*
• *Ha n páratlan, akkor f-nek nincs szélsőértéke x_0-ban.*

Bizonyítás. A Taylor formula szerint

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Ha n páros, és $f^{(n)}(x_0) < 0$, akkor f^n folytonossága miatt $f^{(n)}(x) < 0$ ha $x \in K(x_0, \delta)$ valamely $\delta > 0$ mellett, így $f^{(n)}(\xi) < 0$, amiből a Taylor formula miatt

$$f(x) - f(x_0) < 0, \quad \text{ha} \quad x \in K(x_0, \delta).$$

Ha $f^{(n)}(x_0) > 0$, akkor f^n folytonossága miatt $f^{(n)}(x) > 0$ ha $x \in K(x_0, \delta)$ valamely $\delta > 0$ mellett, így $f^{(n)}(\xi) > 0$, és

$$f(x) - f(x_0) > 0, \quad \text{ha} \quad x \in K(x_0, \delta).$$

Ha n páratlan, akkor $(x - x_0)^n$ előjelet vált x_0-nál, így $f(x) - f(x_0)$ is előjelet vált x_0-nál, ezért f-nek nem lehet szélsőértéke x_0-ban. □

Globális szélsőérték megkeresése

Ha $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos az I korlátos és zárt intervallumon, akkor, amint azt 5.3-ban bebizonyítottuk, f-nek van (globális) maximuma és minimuma I-n. Ez abban az esetben is igaz, amikor f egy korlátos és zárt halmazon van értelmezve és ott folytonos (a bizonyítás hasonló az 5.3-ban leírthoz).

Ha I nem korlátos, vagy korlátos, de nem zárt akkor előfordulhat, hogy f-nek nincs szélsőértéke I-n.

Például az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x \in]0, 1])$ folytonos függvénynek *nincs se lokális, se globális maximuma.*
Hasonlóan az $f(x) = x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ folytonos függvénynek *nincs se lokális, se globális maximuma, minimuma.*

Tegyük fel most, hogy $f : I \to \mathbb{R}$ (elég sokszor) differenciálható a korlátos és zárt I intervallumon. Akkor f-nek van globális maximuma és minimuma, melyet a következőképpen keresünk meg:

• *Megkeressük f lokális szélsőértékeit I belső pontjaiban.*
• *Kiszámítjuk f értékét I végpontjaiban.*
• *A lokális szélsőértékek és a végpontokban felvett értékek közül a legnagyobb adja a globális maximum értékét, a legkisebb adja a globális minimum értékét.*

7. KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

7.1 Metrika és topológia $\mathbb{R}^2$-ben

Definíció. Az $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ **vektor hossza/normája** $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Tétel. (A hossz/norma tulajdonságai) *Bármely* $x, y \in \mathbb{R}^2$ *és bármely* $\lambda \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\|x\| \geq 0, \qquad \text{és } \|x\| = 0 \text{ akkor és csakis akkor, ha } x = 0,$$
$$\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|,$$
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Definíció. Az $x, y \in \mathbb{R}^2$ pontok **távolsága** $d(x, y) := \|x - y\|$.

Definíció. Egy $a \in \mathbb{R}^2$ **pont** $\varepsilon > 0$ **sugarú (nyílt) környezetén** a

$$K(a, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, a) = \|x - a\| < \varepsilon\}$$

halmazt értjük.

$K(a, \varepsilon)$ az $a = (a_1, a_2)$ pont körüli ε sugarú **nyílt körlap**.

Egy halmaz belső pontjának, izolált pontjának, torlódási pontjának és határpontjának fogalma, valamint a nyílt és zárt halmaz fogalma a valós esethez hasonlóan definiálhatók.

Definíció. Egy $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$ függvényt $\mathbb{R}^2$-beli **sorozatnak** nevezünk. Jelölés: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ahol $a_n := a(n)$, és $a_n = (a_{n1}, a_{n2})$, ha $n \in \mathbb{N}$.

Definíció. Az $\mathbb{R}^2$-beli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot **konvergensnek** nevezzük, ha van olyan $b \in \mathbb{R}^2$, hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $N(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ szám, hogy

$$\|a_n - b\| < \varepsilon \quad \text{amennyiben} \quad n > N(\varepsilon).$$

A b pontot a sorozat **határértékének** (limeszének) nevezzük. Jelölés:

$$a_n \to b \quad \text{ha} \quad n \to \infty, \qquad \text{vagy} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = b.$$

Egy $\mathbb{R}^2$-beli sorozatot **divergensnek** nevezünk, ha nem konvergens.

Tétel. ($\mathbb{R}^2$-beli konvergencia = koordinátánkénti konvergencia)

$$a_n = (a_{n1}, a_{n2}) \to b = (b_1, b_2) \quad \text{ha} \quad n \to \infty$$

akkor és csakis akkor, ha

$$a_{ni} \to b_i \quad \text{ha} \quad n \to \infty \qquad i = 1, 2 \quad \text{esetén.}$$

Ez azt jelenti, hogy egy vektorsorozat akkor és csakis akkor konvergens, ha a sorozat mindkét koordinátája konvergens, és határértéke a határvektor megfelelő koordinátája.

7.2 Kétváltozós függvény határértéke és folytonossága

Egy $D \subset \mathbb{R}^2$ halmaz torlódási pontjainak halmazát D'-vel jelöljük. Definíció. Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és legyen $(x_0, y_0) \in D'$. Azt mondjuk, hogy f-nek van (véges, vagy végtelen) **határértéke** az (x_0, y_0) pontban, ha van olyan $a \in \mathbb{R}_b$ bővített valós szám, hogy bármely olyan D-beli $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra, melyre $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0)$ és $(x_n, y_n) \neq (x_0, y_0)$, teljesül a $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = a$ egyenlőség.

$a \in \mathbb{R}_b$-t az f függvény (x_0, y_0) pontbeli határértékének nevezzük, jelölése $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a$, vagy $f(x,y) \to a \ \ ((x,y) \to (x_0, y_0))$.

Definíció. Másképpen megfogalmazva: az f függvény értelmezési tartományának egy $(x_0, y_0) \in D'$ torlódási pontjában akkor és csakis akkor lesz f határértéke az $a \in \mathbb{R}_b$ bővített valós szám, ha az értelmezési tartományból bármely (x_0, y_0)-hoz konvergáló $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot véve, melynek elemei (x_0, y_0)-tól különbözőek, a függvényértékek $(f(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata a-hoz tart.

Tétel. (Határérték egyértelműsége) *Függvény határértéke, ha létezik, akkor egyértelmű.*

Határérték **létezhet az** (x_0, y_0) **pontban akkor is, ha a függvény nincs értelmezve a pontban**, de torlódási pontja annak (egy halmaz torlódási pontja ugyanis nem feltétlenül pontja a halmaznak).

A műveletek, egyenlőtlenségek és határérték kapcsolata most is érvényes.

Definíció. Az $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt **folytonosnak** nevezzük az $(x_0, y_0) \in D$ pontban, ha bármely D-beli (x_0, y_0)-hoz konvergáló $D \ni (x_n, y_n) \to (x_0, y_0)\,(n \to \infty)$ sorozat esetén a függvényértékek $f(x_n, y_n)\,(n \in \mathbb{N})$ sorozata az (x_0, y_0) pontbeli függvényértékhez tart, azaz $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = f(x_0, y_0)$.

Röviden: az f függvény $(x_0, y_0) \in D$ pontbeli folytonossága azt jelenti, hogy ha $D \ni (x_n, y_n) \to (x_0, y_0)\,(n \to \infty)$ akkor $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n)) = f(x_0, y_0)$.

Tétel.

- *Ha* $(x_0, y_0) \in D \cap D'$, *akkor* f *folytonos* (x_0, y_0)*-ban akkor, és csakis akkor, ha* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.
- *Ha* $(x_0, y_0) \in D$, *de* $(x_0, y_0) \notin D'$, *akkor* (x_0, y_0) *a* D ***izolált pontja****, izolált pontokban* f *a definíció alapján mindig folytonos.*

Folytonos függvények tulajdonságai ugyanazok, mint az egyváltozós esetben.

7.3 Kétváltozós függvények differenciálhatósága

Definíció. Az $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt az $(x_0, y_0) \in D$ belső pontban **(totálisan) differenciálhatónak** nevezzük, ha van olyan $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ vektor, hogy

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - A(x - x_0) - B(y - y_0)}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} = 0.$$

Az $f'(x_0, y_0) := (A, B)$ vektort az f függvény (x_0, y_0) **pontbeli deriváltjának** nevezzük.

Geometriai jelentés: a függvény $f(x,y) - f(x_0, y_0)$ növekményét az $A(x - x_0) + B(y - y_0)$ lineáris függvény jól közelíti (x_0, y_0) közelében; a függvény által meghatározott felületnek (x_0, y_0)-ban **van érintősíkja**, melynek $\mathbb{R}^3$-beli egyenlete:

$$z = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0).$$

Definíció. Az $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek az $(x_0, y_0) \in D$ belső pontban létezik az x illetve y változója szerinti **parciális deriváltja**, ha létezik a

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t} \quad \text{illetve} \quad \lim_{t\to 0} \frac{f(y_0 + te) - f(y_0)}{t}$$

véges határérték. Ha mindkét véges határérték létezik, a függvényt **parciálisan differenciálhatónak** nevezzük az (x_0, y_0) pontban.

Jelölés: $\partial_1 f(x_0, y_0)$, $\partial_2 f(x_0, y_0)$.

Egyéb jelölések: $\partial_x f(x_0, y_0)$, $\partial_y f(x_0, y_0)$ vagy $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ vagy $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$.

Tétel.((totális) deriválhatóság $\Longrightarrow$ parciális differenciálhatóság) *Legyen* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *Ha* f *(totálisan) differenciálható egy* $(x_0, y_0) \in D$ *pontban, akkor ott parciálisan is differenciálható. Továbbá*

$$f'(x_0, y_0) = (\partial_1 f(x_0, y_0), \partial_2 f(x_0, y_0)).$$

TÉTEL.((totális) differenciálhatóság $\Longrightarrow$ folytonosság) *Ha* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *az* $(x_0, y_0) \in D$ *belső pontban (totálisan) differenciálható, akkor* f *folytonos* (x_0, y_0)*-ban.*

TÉTEL.(parciális derivált folytonossága $\Longrightarrow$ (totális) differenciálhatóság) *Ha az* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *függvénynek az* $(x_0, y_0) \in D$ *belső pont egy környezetében folytonos parciális deriváltjai vannak, akkor* f *az* (x_0, y_0) *pontban (totálisan) differenciálható.*

7.4 Magasabbrendű parciális deriváltak

DEFINÍCIÓ. Tegyük fel, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek az $(x_0, y_0) \in D$ belső pont egy környezetében létezik az i-edik változó szerinti $\partial_i f$ parciális deriváltja. Ha ez parciálisan differenciálható a j-edik változó szerint, úgy a deriválást elvégezve kapjuk a

$$\partial_j \partial_i f(x_0, y_0) := \partial_j (\partial_i f(x_0))$$

második parciális deriváltját f-nek az (x_0, y_0) pontban az i-edik és j-edik változók szerint (ebben a sorrendben!).

Hasonlóan értelmezhetjük a harmadrendű, negyedrendű stb. parciális deriváltakat is.

TÉTEL. (Young tétel: a vegyes parciális deriváltak függetlensége a deriválás sorrendjétől) *Ha az* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *függvénynek az* $(x_0, y_0) \in D$ *belső pont egy környezetében valamely* $m \geq 2$ *esetén az összes* m*-edik parciális deriváltja létezik és az* (x_0, y_0) *pontban azok folytonosak, akkor az* f *függvény* m*-edik parciális deriváltjai az* (x_0, y_0) *pontban a differenciálás sorrendjétől függetlenek.*

7.5 Kétváltozós függvények szélsőértéke

DEFINÍCIÓ. Az $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek az $(x_0, y_0) \in D$ pontban

- **lokális/helyi maximuma (minimuma)** van, ha $\exists \varepsilon > 0$:
$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad (f(x_0, y_0) \leq f(x, y)) \quad \forall (x, y) \in K((x_0, y_0), \varepsilon) \cap D.$$
- **szigorú lokális/helyi maximuma (minimuma)** van, ha $\exists \varepsilon > 0$:
$$f(x_0, y_0) > f(x, y) \quad (f(x_0, y_0) < f(x, y)) \quad \forall (x, y) \in K((x_0, y_0), \varepsilon) \cap D,$$
$$(x, y) \neq (x_0, y_0).$$
- **globális/abszolút maximuma (minimuma)** van, ha
$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad (f(x_0, y_0) \leq f(x, y)) \quad \forall (x, y) \in D.$$
- **szigorú globális/abszolút maximuma (minimuma)** van, ha
$$f(x_0, y_0) > f(x, y) \quad (f(x_0, y_0) < f(x, y)) \quad \forall x \in D, \ (x, y) \neq (x_0, y_0).$$

TÉTEL.(A szélsőérték létezésének elegendő feltétele) *Korlátos, zárt halmazon folytonos függvény felveszi a függvényértékek infimumát és szuprémumát függvényértékként, ami azt jelenti, hogy a függvénynek van minimuma és maximuma (az illető korlátos, zárt halmazon).*

TÉTEL.(A szélsőérték létezésének szükséges feltétele) *Ha az* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *függvénynek az* $(x_0, y_0) \in D$ *belső pontban lokális szélsőértéke van, és léteznek* f *első parciális deriváltjai* (x_0, y_0)*-ban, akkor*

$$\partial_1 f(x_0, y_0) = \partial_2 f(x_0, y_0) = 0.$$

(E feltételnek eleget tevő (x_0, y_0) pontokat az f függvény **stacionárius pontjainak** nevezzük.)

TÉTEL.(Kétváltozós függvény szélsőértéke) Tegyük fel, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ összes második parciális deriváltja folytonos az $(x_0, y_0) \in D$ belső pont egy környezetében, továbbá

$$\partial_1 f(x_0, y_0) = \partial_2 f(x_0, y_0) = 0.$$

Legyen $\Delta_1 = \partial_1 \partial_1 f(x_0, y_0) > 0$, $\Delta_2 = \partial_1 \partial_1 f(x_0, y_0) \partial_2 \partial_2 f(x_0, y_0) - \partial_1 \partial_2 f(x_0, y_0) \partial_2 \partial_1 f(x_0, y_0)$.

(1) Ha $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, akkor f-nek **szigorú lokális minimuma** van (x_0, y_0)-ban,
(2) ha $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, akkor f-nek **szigorú lokális maximuma** van (x_0, y_0)-ban,
(3) ha $\Delta_2 < 0$, akkor f-nek **nincs szélsőértéke** (x_0, y_0)-ban.

8. HATÁROZATLAN INTEGRÁL

8.1 Definíció és alapintegrálok

Definíció. Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ adott függvény ($I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum). A $F : I \to \mathbb{R}$ függvényt a f függvény *primitív függvényének* nevezzük I-n, ha

$$F \text{ differenciálható } I\text{-n},$$

$$F'(x) = f(x) \quad (x \in I).$$

Példa. Ha $f(x) = \sin x$ akkor $F(x) = -\cos x + c$ $(x \in \mathbb{R})$.

Állítás. *Ha F a f függvény primitív függvénye I-n, akkor*

$$G(x) = F(x) + c \quad (x \in I, c \in \mathbb{R} \text{ konstans})$$

is primitív függvénye f-nek, és fordítva, f minden primitív függvénye $F(x) + c$ alakú.

Bizonyítás. G primitív függvény mert

$$G'(x) = F'(x) + c' = F'(x) = f(x).$$

Fordítva, ha F, G a f függvény primitív függvényei, akkor

$$(G(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0 \quad (x \in I)$$

amiből $G(x) - F(x) = c$ =konstans, ha $x \in I$. □

Definíció. Egy f függvény összes primitív függvényeinek halmazát f *határozatlan integráljának* nevezzük, és $\int f(x)\,dx$-szel, vagy $\int f$-fel jelöljük.

Azaz

$$\int f(x)\,dx = \{\ F(x) + c\ :\ c \in \mathbb{R}, F \text{ a } f \text{ egy primitív függvénye }\},$$

amit egyszerűen úgy írunk, hogy

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

A legfontosabb elemi függvények differenciálási szabályaiból kapjuk az *alapintegrálokat*:

$$\int e^x\,dx = e^x + c \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \qquad (x \in \mathbb{R}, 1 \neq a > 0)$$

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad (x > 0, -1 \neq \alpha \in \mathbb{R})$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c \qquad (x > 0 \text{ vagy } x < 0)$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad (x \in \mathbb{R}, n = 0, 1, \dots)$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c \qquad (k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z})$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + c \qquad (k\pi < x < (k+1)\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c \qquad (|x| < 1)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Bizonyítás. Például az utolsó képlet igazolása:

$$(\operatorname{arctg} x + c)' = \frac{1}{1+x^2},$$

a többi hasonlóan, differenciálással igazolható.

8.2 Integrálási szabályok

Ha f, g-nek van primitív függvénye, akkor $f+g, cf$ $(c \in \mathbb{R})$-nek is van, és

$$\int (f+g) = \int f + \int g$$

$$\int (cf) = c \int f.$$

Ez következik abból, hogy összeg tagonként differenciálható, és konstans kiemelhető a differenciálás jele elé.

A szorzat differenciálási szabályából kapjuk a **parciális integrálás szabályát**: *ha f, g differenciálhatók és fg'-nek van primitív függvénye, akkor $f'g$-nek is van primitív függvénye, és*

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

ugyanis

$$\left(fg - \int fg'\right)' = f'g + fg' - fg' = f'g.$$

Az összetett függvény differenciálási szabályából kapjuk a **helyettesítéses integrálás szabályát**: *ha f-nek van primitív függvénye I-n, $g : J \to I$ differenciálható a J intervallumon, akkor $(f \circ g) \cdot g'$-nek is van primitív függvénye J-n és*

$$\int (f \circ g) \cdot g' = \left(\int f\right) \circ g$$

vagy

$$\int f\left(g(x)\right) g'(x)\, dx = \int f(u) du_{|u=g(x)}.$$

Ugyanis, ha $\int f(u)du = F(u)$, akkor a jobboldali függvény deriváltja

$$\left(\int f(u)du_{|u=g(x)}\right)' = (F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x),$$

és ezt kellett igazolni.

A szabály **másik alakj**a: *ha $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to I$ differenciálható a J intervallumon, $g'(x) \neq 0$ $(x \in J)$ és $(f \circ g) \cdot g'$-nek van primitív függvénye, akkor f-nek is van primitív függvénye I-n és*

$$\int f = \int ((f \circ g) \cdot g') \circ g^{-1}$$

vagy

$$\int f(x)\, dx = \int f(g(u))g'(u)\, du_{|u=g^{-1}(x)}.$$

Ugyanis, ha $\int f(g(u))g'(u)\, du = F(u)$, akkor a jobboldali függvény deriváltja az inverz függvény differenciálási szabálya alapján

$$\begin{aligned}\left(\int f(g(u))g'(u)\, du_{|u=g^{-1}(x)}\right)' &= \left(F\left(g^{-1}(x)\right)\right)' = F'\left(g^{-1}(x)\right)\left(g^{-1}(x)\right)' \\ &= f(x)g'\left(g^{-1}(x)\right)\frac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)} = f(x),\end{aligned}$$

és ezt kellett igazolni.

$f(x) = x^\alpha$ választással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int g^\alpha g' &= \frac{g^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1) \\ \int \frac{g'}{g} &= \ln|g| + c\end{aligned}$$

Utóbbi képlet felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg} x\, dx &= -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\, dx = -\ln|\cos x| + c \\ \int \operatorname{ctg} x\, dx &= \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}\, dx = \ln|\sin x| + c\end{aligned}$$

Egy másik fontos speciális eset a **lineáris helyettesítés**: *ha f primitív függvénye F, $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$ akkor*

$$\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}\int f(u)\, du_{|u=ax+b} = \frac{1}{a}F(ax+b) + c.$$

Ennek felhasználásával (vagy differenciálással) lehet igazolni a következő képleteket, melyek kiegészítik az alapintegrálok táblázatát:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + c \qquad (|x| < a)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c \qquad (x \in \mathbb{R} \text{ vagy } |x| > a)$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + c \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c \qquad (|x| < a \text{ vagy } |x| > a)$$

ahol $a > 0$ konstans.

8.3 Elemien integrálható függvények osztályai

Definíció. Egy függvényt *elemien integrálhatónak* nevezünk, ha primitív függvénye elemi.

Nem minden elemi függvény ilyen: például ismeretes, hogy

$$\int e^{(x^2)}\,dx, \qquad \int \sin(x^2)\,dx, \qquad \int \frac{x}{\sin x}\,dx$$

nem elemi függvények.

1. Parciálisan integrálható függvények

Ha $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \quad (a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R})$ *polinom*, akkor

$P(x)e^x$	parciálisan integrálható	$f'(x) = e^x, g(x) = P(x)$	választással
$P(x)\sin x$	parciálisan integrálható	$f'(x) = \sin x, g(x) = P(x)$	választással
$P(x)\cos x$	parciálisan integrálható	$f'(x) = \cos x, g(x) = P(x)$	választással
$P(x)\ln x$	parciálisan integrálható	$f'(x) = P(x), g(x) = \ln x$	választással
$P(x)\arcsin x$	parciálisan integrálható	$f'(x) = P(x), g(x) = \arcsin x$	választással
$P(x)\mathrm{arctg}\,x$	parciálisan integrálható	$f'(x) = P(x), g(x) = \mathrm{arctg}\,x$	választással.

Hasonlóan parciálisan integráljuk az

$$e^x\sin x, \quad e^x\cos x, \quad \sin^n x, \quad \cos^n x$$

függvényeket. Az integrálás eredménye elemi függvény.

Példa.

$$\int \ln x\,dx = \int 1\cdot\ln x\,dx$$

amiből $f'(x) = 1, g(x) = \ln x$ választással $f(x) = x, g'(x) = \dfrac{1}{x}$ így

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + c.$$

2. Racionális törtfüggvények integrálása.

A két polinom hányadosaként előállítható függvényeket *racionális törtfüggvényeknek* nevezzük. **Ezek mindig elemien integrálhatók**.

Az integrálás lépései:

a) *Ha a számláló fokszáma nagyobb vagy egyenlő a nevező fokszámánál, akkor osztás* után a tört egy polinom és egy olyan racionális tört összege lesz, ahol a számláló fokszáma kisebb a nevező fokszámánál. Mivel egy polinomot könnyen integrálhatunk, így feltehetjük, hogy

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

ahol P, Q polinomok, és P fokszáma kisebb mint Q fokszáma.

b) A *nevezőt szorzattá alakítjuk*, ezáltal a Q nevező $(x-a)^k$ és $(x^2+px+q)^l$ alakú tényezők szorzataként írható fel, ahol a másodfokú kifejezés diszkriminánsa $p^2-4q<0$, $k, l \in N$.

c) *f-et parciális törtek összegére bontjuk fel*: a nevező $(x-a)^k$ faktorának megfelelő parciális törtek:

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

ahol $A_1, \dots, A_k$ alkalmas konstansok.

Az $(x^2+px+q)^l$ faktornak megfelelő parciális törtek:

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_lx+C_l}{(x^2+px+q)^l}$$

ahol $B_1, C_1, \dots B_l, C_l$ alkalmas konstansok.

Az A_i, $(i=1,\dots,k)$, B_j, C_j $(j=1,\dots,l)$ *konstansokat* az együtthatók összehasonlításával, vagy alkalmas értékek helyettesítésével kapott *lineáris egyenletrendszerből határozzuk meg.*

d) *Integráljuk a parciális törteket*:

$$\int \frac{A_i}{(x-a)^i}\,dx = \begin{cases} \dfrac{A_i}{(1-i)(x-a)^{i-1}} + c & \text{ha } i \neq 1 \\[2ex] A_i \ln|x-a| + c & \text{ha } i = 1 \end{cases}$$

A második típusú parciális törtek integrálása: a

$$\frac{Bx+C}{x^2+px+q} = \frac{B}{2}\,\frac{(2x+p)}{x^2+px+q} + \frac{C - \dfrac{Bp}{2}}{\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}\right)^2}$$

felbontás alapján

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} = \frac{B}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{C-\dfrac{Bp}{2}}{\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\dfrac{p}{2}}{\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}} + c.$$

Ha a nevezőben $(x^2+px+q)^k$ $(k>1)$ szerepel akkor először a számlálóból leválasztjuk a lineáris tagot (e tag integrálását az $\int g^{-k}g'$-re vonatkozó képlet alapján végezzük el), majd a k tól függő

$$I_k = \int \frac{1}{(x^2+px+q)^k}\,dx$$

integrált egy (parciális integrálással kapott) rekurziós képlet segítségével határozzuk meg.

9. HATÁROZOTT INTEGRÁL

9.1 Az integrál definíciója és alaptulajdonságai

Definíció. Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ egy zárt intervallum. A

$$P = \{\ x_i\ :\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\ \} \quad (n \in \mathbb{N})$$

ponthalmazt az $[a, b]$ intervallum egy *felosztásának* nevezzük. x_i *az* i*-edik osztópont*, $[x_{i-1}, x_i]$ az i-edik intervallum, $x_i - x_{i-1}$ az i*-edik intervallum hossza*, a

$$\|P\| = \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1})$$

számot a P *felosztás finomságának* nevezzük.

Definíció. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, P az $[a, b]$ egy felosztása, $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ közbenső értékek. Az

$$s(f, P, t) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

összeget az f függvény P felosztáshoz és $t = (t_1, \ldots, t_n)$ közbenső érték rendszerhez tartozó *integrálközelítő összegének* nevezzük.

$s(f, P, t)$ *geometriai jelentése* : a felosztás és a közbenső értékek által meghatározott téglalapok területének (előjeles) összege, ami annál jobban közelíti a görbe alatti (előjeles) területet minél finomabb a felosztás.

Definíció. [a Riemann integrálhatóság és Riemann integrál definíciója] Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvényt *Riemann integrálhatónak* nevezzük $[a, b]$-n, ha van olyan $\mathcal{I} \in \mathbb{R}$ szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta(\varepsilon)$, hogy

(7) $$|s(f, P, t) - \mathcal{I}| < \varepsilon \quad \text{ha } \|P\| < \delta(\varepsilon)$$

bármely $t = (t_1, \ldots, t_n)$ közbenső érték rendszer mellett teljesül.

Az $\mathcal{I}$ számot az f függvény $[a, b]$-n vett *Riemann integráljának* nevezzük és $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ vagy $\int\limits_a^b f$-fel jelöljük.

Az $[a, b]$-n *Riemann integrálható függvények osztályát* $\mathcal{R}[a, b]$-vel fogjuk jelölni.

(7)-tel egy (új típusú) határértéket definiáltunk, így az **integrál definícióját egyszerűen**

$$\mathcal{I} = \int_a^b f(x)\, dx := \lim_{\|P\| \to 0} s(f, P, t) \qquad \text{ahol } s(f, P, t) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

alakban is írhatjuk (ahol természetesen meg kell mondani, hogy f, P, t_i, t mit jelentenek).

Az $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ **geometriai jelentése**: az $x = a, x = b, y = 0$ egyenesek és az $y = f(x)$ függvény gráfja által meghatározott síkidom *előjeles területe* (az x *tengely alatti részt az integrál negatív előjellel számolja*).

Példa. Legyen $f(x) = c$=konstans ha $x \in [a, b]$. Ekkor bármely P felosztás esetén

$$s(f, P, t) = \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) = c \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = c(b - a)$$

így $\int\limits_a^b c\, dx = c(b - a)$.

Tétel. [az integrál alaptulajdonságai] *Ha* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}, f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, *akkor bármely* $c \in \mathbb{R}$ *és bármely* $a < d < b$ *mellett*

$$\begin{array}{lll}
f + g \in \mathcal{R}[a, b] & \text{és} & \displaystyle\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \\[2ex]
cf \in \mathcal{R}[a, b] & \text{és} & \displaystyle\int_a^b (cf) = c \int_a^b f, \\[2ex]
f \in \mathcal{R}[a, d],\ f \in \mathcal{R}[d, b] & \text{és} & \displaystyle\int_a^b f = \int_a^d f + \int_d^b f, \\[2ex]
\text{ha } f(x) \le g(x)\ (x \in [a, b]) & \text{akkor} & \displaystyle\int_a^b f \le \int_a^b g, \\[2ex]
\text{ha } m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x),\ M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x) & \text{akkor} & \displaystyle m(b - a) \le \int_a^b f \le M(b - a).
\end{array}$$

A fenti tulajdonságokat rendre, az integrál *(függvény szerinti) additivitásának, homogenitásának, (intervallum szerinti) additivitásának, monotonitásának* nevezzük, az utolsó állítás az *integrálszámítás középértéktétele* melyet egy másik alakban is megfogalmazunk.

Bizonyítás. Ha $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}, f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, P az $[a, b]$ egy felosztása, $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $t = (t_1, \ldots, t_n)$ akkor könnyű ellenőrizni, hogy az integrálközelítő összegekre érvényesek az

$$\begin{array}{rll}
s(f + g, P, t) & = s(f, P, t) + s(g, P, t) & \\[1ex]
s(cf, P, t) & = cs(f, P, t) & \text{ha } c \in \mathbb{R} \\[1ex]
s(f, P, t) & = s(f_{[a,d]}, P_{[a,d]}, t_{[a,d]}) + s(f_{[d,b]}, P_{[d,b]}, t_{[d,b]}) & \text{ha } a < d < b,\ d \text{ a } P \text{ osztópontja} \\[1ex]
s(f, P, t) & \le s(g, P, t) & \text{ha } f(x) \le g(x)\ (x \in [a, b]) \\[1ex]
m(b - a) & \le s(f, P, t) \le M(b - a) & \text{ha } m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x),\ M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)
\end{array}$$

tulajdonságok, ahol $f_{[a,d]}, P_{[a,d]}, t_{[a,d]}$ az f függvény, P felosztás, t közbenső értékrendszer *leszűkítése az* $[a, d]$ *intervallumra.*

E tulajdonságokból $\|P\| \to 0$ *határátmenettel* adódik a tétel állítása. □

Tétel. [az integrálszámítás középértéktétele] *Legyen* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *Riemann integrálható* $[a, b]$*-n, akkor*

$$m(b - a) \le \int_a^b f \le M(b - a),$$

ahol

$$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x), \qquad M = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Ha f folytonos $[a,b]$-n akkor van olyan $\xi \in [a,b]$ melyre

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{8}$$

Bizonyítás. Csak a folytonos függvényekre vonatkozó állítást kell igazolni. Mivel

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

és folytonos függvény felvesz minden (közbenső) értéket $[m,M]$-ben így van $\xi \in [a,b]$ melyre (8) teljesül. □

Az integrálhatóság analitikus kritériuma a

Tétel. [Lebesgue-féle integrálhatósági kritérium] *Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csakis akkor Riemann integrálható $[a,b]$-n, ha f egy Lebesgue szerint nullmértékű halmaztól eltekintve folytonos.*

Definíció. Egy $E \subset \mathbb{R}$ halmazt akkor nevezünk *Lebesgue szerint nullmértékűnek*, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $]a_n, b_n[$ $(n \in \mathbb{N})$ intervallumsorozat mely lefedi E-t és melynek összhosszúsága kisebb mint ε azaz

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n[\quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Ld. pl. Szőkefalvi, Valós függvények és függvénysorok, Tankönyvkiadó, Bp., 1977. □

Állítás. *Minden E megszámlálható halmaz (Lebesgue szerint) nullmértékű.*

Bizonyítás. Ugyanis, ha $E = \{\, x_i \in \mathbb{R} \;:\; i = 1,\dots,n \,\}$ *véges halmaz*, akkor mindegyik x_i pontot egy ε/n-nél kisebb hosszúságú nyílt intervallummal lefedve az intervallumok uniója lefedi E-t és összhossza kisebb mint ε.

Ha $E = \{\, x_i \in \mathbb{R} \;:\; i =\in \mathbb{N} \,\}$ megszámlálhatóan *végtelen halmaz*, akkor minden $i \in N$ mellett az x_i pontot egy $\varepsilon/2^n$-nél kisebb hosszúságú nyílt intervallummal lefedve az intervallumok uniója lefedi E-t és összhossza kisebb mint

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \varepsilon.$$

□

Így Lebesgue tételéből következik, hogy *egy pontsorozat kivételével folytonos függvény integrálható.*

Lebesgue tételével könnyű igazolni, hogy *ha $f,g \in \mathcal{R}[a,b]$ akkor $fg, f^2, |f| \in \mathcal{R}[a,b]$ és ha van olyan $k > 0$ hogy $|g(x)| \ge k$ ha $x \in [a,b]$ akkor $f/g \in \mathcal{R}[a,b]$ is teljesül.*

Továbbá fennáll a

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \tag{9}$$

egyenlőtlenség. Ennek igazolása: a

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$$

egyenlőtlenséget integrálva

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^b (-|f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

amiből az abszolút érték tulajdonságai miatt (9) következik.

9.2 Az integrál kiszámítása, Newton-Leibniz formula

Definíció. Legyen $f \in \mathcal{R}[a,b]$, akkor a

$$T(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad (x \in [a,b])$$

függvényt f *területmérő függvényének* nevezzük.

Tétel. [a területmérő függvény tulajdonságai] *Ha $f \in \mathcal{R}[a,b]$, és T az f területmérő függvénye,akkor*

(a) *T folytonos $[a,b]$-n,*
(b) *ha f folytonos $x_0 \in [a,b]$-ben, akkor T differenciálható x_0-ban, és $T'(x_0) = f(x_0)$.*

Bizonyítás. (a) Először kiegészítjük az integrál definícióját. Legyen

$$\int_a^a f(x)\,dx := 0, \qquad \int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{ha} \quad a < b.$$

Tegyük fel, hogy $|f(x)| \le M$ $(x \in I)$ ahol $I = [a,b]$ (vagy $b < a$ esetén) $I = [b,a]$, akkor érvényes az

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le M|b-a|$$

egyenlőtlenség.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $x > x_0$ akkor

$$|T(x) - T(x_0)| = \left| \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt \right| = \left| \int_{x_0}^x f(t)\,dt \right| \le M|x - x_0| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad |x - x_0| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon/M$$

ahol $|f(x)| \le M$ $(x \in [a,b])$, s ez éppen f folytonosságát jelenti.

(b) Ismét legyen $x > x_0$ akkor

$$\begin{aligned}\left| \frac{T(x) - T(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)\,dt - \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(x_0)\,dt \right| = \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \left(f(t) - f(x_0)\right)\,dt \right| \\ &\le \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|\,dt < \frac{1}{x - x_0} \varepsilon (x - x_0) = \varepsilon \quad \text{ha} \quad |x - x_0| < \delta(\varepsilon),\end{aligned}$$

mivel az x_0-beli folytonosság miatt $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ ha $t \in [x_0, x]$ és $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$.

Így

$$\frac{T(x) - T(x_0)}{x - x_0} \to f(x_0) \text{ ha } x \to x_0, \text{ amiből } T'(x_0) = f(x_0).$$

A bizonyítás $x < x_0$ esetén hasonló. □

Következmény. *Minden folytonos függvénynek van primitív függvénye, ti. a területmérő függvénye.*

Tétel. [Newton-Leibniz formula] *Tegyük fel, hogy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos $[a,b]$-n, és $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ a f egy primitív függvénye $[a,b]$-n, akkor*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b\,.$$

Bizonyítás. Láttuk, hogy $T(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ a f primitív függvénye, így F felírható $F(x) = T(x)+c$ alakban, ahol $c \in \mathbb{R}$ alkalmas konstans. Mivel $f(a) = T(a) + c = c$, így

$$\int_a^b f(x)\,dx = T(b) = F(b) - c = F(b) - F(a).$$

□

Megjegyzés. *A Newton-Leibniz formula akkor is érvényes, ha $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos $[a,b]$-n, és $F'(x) = f(x)$ $(x \in]a,b[)$.*

Példa.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\operatorname{arctg} x]_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \pi/4.$$

Tétel. [parciális integrálás határozott integrálra] *Ha $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálhatók $[a,b]$-n, akkor*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

ahol $[f(x)g(x)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

Bizonyítás. Legyen $F(x) = \int_a^x f'(t)g(t)\,dt - f(x)g(x) + f(a)g(a) + \int_a^x f(t)g'(t)\,dt$ $(x \in [a,b])$, akkor $F'(x) = 0$ $(x \in [a,b]), F(a) = 0$ így $F(x) = 0$ $(x \in [a,b])$ speciálisan $F(b) = F(a) = 0$ és ez éppen a bizonyítandó állítás. □

Tétel. [helyettesítéses integrálás határozott integrálra] *Ha $g : [a,b] \to [c,d]$ folytonosan differenciálhatók $[a,b]$-n, $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ folytonos $[c,d]$-n, akkor*

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Bizonyítás. Legyen $F(x) = \int_a^x f(g(t))\,g'(t)\,dt - \int_{g(a)}^{g(x)} f(u)\,du$ $(x \in [a,b])$, akkor $F'(x) = 0$ $(x \in [a,b]), F(a) = 0$ így $F(x) = 0$ $(x \in [a,b])$ speciálisan $F(b) = F(a) = 0$ és ez éppen a bizonyítandó állítás. □

9.3 Improprius integrál

A Riemann integrált korlátos (zárt) intervallumon értelmezett korlátos függvényekre definiáltuk. Most kiterjesztjük a definíciót végtelen (nem korlátos) intervallumok és nem korlátos függvények esetére is.

1. Integrál végtelen intervallumokon.

Definíciók. Legyen $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy minden $t < b$ mellett $f \in \mathcal{R}[t,b]$, akkor

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx$$

feltéve, hogy a jobboldali határérték véges. Ekkor azt mondjuk, hogy az $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ *improprius integrál konvergens*, ellenkező esetben (amikor a jobboldali határérték nem létezik, vagy létezik de végtelen) *divergens*.

Legyen $f : [a,\infty[\to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy minden $a < t$ mellett $f \in \mathcal{R}[a,t]$, akkor

$$\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{t\to\infty} \int\limits_{a}^{t} f(x)\,dx$$

feltéve, hogy a jobboldali határérték véges. Ekkor azt mondjuk, hogy az $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ *improprius integrál konvergens*, ellenkező esetben (amikor a jobboldali határérték nem létezik, vagy létezik de végtelen) *divergens*.

Végül, ha $f :]-\infty,\infty[\to \mathbb{R}$, és minden $s < t$, $s,t \in \mathbb{R}$ mellett $f \in \mathcal{R}[s,t]$, akkor tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ mellett

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx : &= \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{\infty} f(x)\,dx \\ &= \lim_{s\to-\infty} \int\limits_{s}^{c} f(x)\,dx + \lim_{t\to\infty} \int\limits_{c}^{t} f(x)\,dx\end{aligned}$$

feltéve, hogy mindkét jobboldali határérték véges. Ekkor azt mondjuk, hogy az $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ *improprius integrál konvergens*, ellenkező esetben (amikor a jobboldali határértékek közül legalább az egyik nem létezik, vagy létezik de végtelen) *divergens*.

2. Nem korlátos függvények integrálása.

Definíciók. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a,b \in \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy f *nem korlátos* $[a,b]$*-n, de minden* $a < t < b$ *mellett* $f \in \mathcal{R}[t,b]$, *(így* f *korlátos* $[t,b]$*-n!)*, akkor

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx := \lim_{t\to a+0} \int\limits_{t}^{b} f(x)\,dx$$

feltéve, hogy a jobboldali határérték véges. Ekkor azt mondjuk, hogy az $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ *improprius integrál konvergens*, ellenkező esetben (amikor a jobboldali határérték nem létezik, vagy létezik de végtelen) *divergens*.

Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a,b \in \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy f *nem korlátos* $[a,b]$*-n, de minden* $a < t < b$ *mellett* $f \in \mathcal{R}[a,t]$, *(így* f *korlátos* $[a,t]$*-n!)*, akkor

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx := \lim_{t\to b-0} \int\limits_{a}^{t} f(x)\,dx$$

feltéve, hogy a jobboldali határérték véges. Ekkor azt mondjuk, hogy az $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ *improprius integrál konvergens*, ellenkező esetben (amikor a jobboldali határérték nem létezik, vagy létezik de végtelen) *divergens*.

Végül, ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, és f *nem korlátos* $[a, b]$*-n, de van olyan* c, $a < c < b$ *hogy minden* $a < s < c < t < b$ *mellett* $f \in \mathcal{R}[a, s]$, $f \in \mathcal{R}[t, b]$ *(így* f *korlátos* $[a, s]$*-n és* $[t, b]$*-n*, azaz f a c pont egy környezetében nem korlátos!), akkor

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx :&= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \\ &= \lim_{s \to c-0} \int_a^s f(x)\,dx + \lim_{t \to c+0} \int_t^b f(x)\,dx \end{aligned}$$

feltéve, hogy mindkét jobboldali határérték véges. Ekkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f(x)\,dx$ *improprius integrál konvergens*, ellenkező esetben (amikor a jobboldali határértékek közül legalább az egyik nem létezik, vagy létezik de végtelen) *divergens.*

Megjegyzések. 1. A Riemann integrál definíciója segítségével könnyen belátható, hogy *a Riemann integrál (beleértve az improprius integrált is) értéke nem változik, ha a függvény értékét véges sok pontban megváltoztatjuk.* Ezért a nem korlátos függvények (improprius) integráljának pl. az (első) definíciójában (amikor f az a végpont egy környezetében nem korlátos) mindegy, hogy a kiinduló f függvény az a pontban definiálva van vagy sem, mert utóbbi esetben $f(a)$-t tetszőlegesen értelmezve az integrál nem változik. Mi mindhárom definíció esetében feltételeztük, hogy f értelmezve van abban a pontban, melynek környezetében f nem korlátos.

Improprius integrálra példaként tekintsük az

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$$

integrált, ahol $p > 0$ adott konstans.

Az $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ függvény $p > 0$ esetén ugyan nincs értelmezve az $x = 0$ pontban, de az előző megjegyzés alapján e függvény értelmezési tartományát kiterjeszthetjük az $x = 0$ pontra is, és ott tetszőlegesen, pl. az $f(0) = 0$ definícióval értelmezve, az (improprius) integrál (konvergenciája), értéke nem változik. Mivel függvényünk nem korlátos $x = 0$ egy környezetében, így

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{t \to 0+0} \int_t^1 \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \lim\limits_{t \to 0+0} \left[\dfrac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_t^1 & \text{ha } p \neq 1 \\ \lim\limits_{t \to 0+0} [\ln x]_t^1 & \text{ha } p = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{t \to 0+0} \left(\dfrac{1}{1-p} - \dfrac{t^{1-p}}{1-p} \right) & \text{ha } p \neq 1 \\ \lim\limits_{t \to 0+0} (\ln 1 - \ln t) & \text{ha } p = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p} & \text{ha } p < 1 \\ +\infty & \text{ha } p \geq 1. \end{cases}$$

A fenti improprius integrál ezért akkor és csakis akkor konvergens, ha $0 < p < 1$ és ekkor az integrál értéke $\frac{1}{1-p}$.

$p \leq 0$ esetén az integrandust x^{-p} alakba írva láthatjuk, hogy az folytonos $[0, 1]$-en, így, ekkor integrálunk közönséges (nem improprius!) Riemann integrál, értéke ugyanaz mint előbb: $\frac{1}{1-p}$.

2. A definiciókban tárgyalt *két eset egy improprius integrálban is felléphet.* Pl. az

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x-1}}$$

improprius integrált az

$$\int_1^\infty = \int_1^2 + \int_2^\infty$$

felbontást használva az

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x-1}} = \lim_{t\to 1+0} \int_t^2 \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x-1}} + \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x-1}}$$

segítségével számolhatjuk ki. Mivel

$$\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x-1}} = (\sqrt{x-1} = t \text{ helyettesítéssel, } x = t^2+1, dx = 2t\,dt)$$

$$= \int \frac{2t\,dt}{(t^2+4)t} = \int \frac{2\,dt}{t^2+4} = \operatorname{arctg}\frac{t}{2} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x-1}}{2} + C,$$

így

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x-1}} = \lim_{t\to 1+0}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2-1}}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{t-1}}{2}\right) + \lim_{t\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{t-1}}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2-1}}{2}\right)$$

$$= \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \operatorname{arctg} 0\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

9.4 Kettős integrál

Definíciók. Legyen $D = [a,b]\times[c,d]$ egy téglalap, és

$$\begin{aligned} P_x &= \{\ x_i\ :\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b\ \},\\ P_y &= \{\ y_j\ :\ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d\ \}\end{aligned}$$

az $[a,b], [c,d]$ intervallumok felosztásai, akkor a

$$P = P_x \times P_y = \{\ (x_i, y_j)\ :\ i = 0,1,\dots,m;\ j = 0,1,\dots,n\ \}$$

pontrendszert a D *egy felosztásának* nevezzük, $D_{ij} = [x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j]$ $(i = 0,1,\dots,m;\ j = 0,1,\dots,n)$ *a felosztás téglalapjai*

$$\|P\| = \max_{1\le i\le m, 1\le j\le n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}$$

a felosztás finomsága (a D_{ij} téglalapok átlói hosszának a maximuma).

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ korlátos függvény a D téglalapon, P a D egy felosztása, $(s_i, t_j) \in D_{ij}$ közbenső pontok,

$$v = ((s_1, t_1), (s_1.t_2), \dots, (s_m, t_n))$$

a közbenső pontok rendszere/vektora. Az

$$s(f,P,v)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(s_i,t_j)m(D_{ij})$$

összeget, ahol $m(D_{ij})=(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})$ a D_{ij} téglalap területe (mértéke), az f függvény P felosztáshoz és v közbenső pontrendszerhez tartozó *integrálközelítő összegének* nevezzük.

$s(f,P,v)$ *geometriai jelentése* : a felosztás és a közbenső értékek által meghatározott hasábok térfogatának (előjeles) összege, ami annál jobban közelíti az f által meghatározott felület alatti (előjeles) térfogatot, minél finomabb a felosztás.

Definíció. [kettős Riemann integrál definíciója] Az $f : D \to \mathbb{R}$ korlátos függvényt *Riemann integrálhatónak* nevezzük a D téglalapon, ha van olyan $\mathcal{I} \in \mathbb{R}$ szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta(\varepsilon)$, hogy

$$|s(f,P,v)-\mathcal{I}|<\varepsilon \quad \text{ha } \|P\|<\delta(\varepsilon) \tag{10}$$

bármely $v=((s_1,t_1),(s_1.t_2),\dots,(s_m,t_n))$ közbenső pontrendszer mellett teljesül.

Az $\mathcal{I}$ számot az f függvény D-n vett *Riemann integráljának* nevezzük és $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ vagy $\iint\limits_D f$-fel jelöljük.

Azt is írhatjuk, hogy

$$\mathcal{I}=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy := \lim_{\|P\|\to 0} s(f,P,v) \qquad \text{ahol } s(f,P,v)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(s_i,t_j)(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})$$

és a limesz jelentése (10)-zel van definiálva.

A kettős integrál tulajdonságai, hasonlóak az egyváltozós integrál tulajdonságaihoz, integrálható függvények összege, konstansszorosa is integrálható, és az összeg integrálja a tagok integráljainek összege, konstans szorzó kiemelhető az integráljel elé.

Tétel. [kettős integrál kiszámítása] *Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ folytonos a $D=[a,b]\times[c,d]$ téglalapon, akkor f integrálható D-n és*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$

vagy

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int_c^d\left(\int_s^b f(x,y)\,dx\right)dy.$$

Amint a tételből leolvasható, a kettős integrál kiszámítása *ismételt (iterált) integrálással történik, a sorrend* (az hogy először x szerint másodszor y szerint integrálunk, vagy fordítva) *nem számít.*

Ha D *nem téglalap*, hanem pl.

$$D=\{\ (x,y)\ :\ a\le x\le b, \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\ \}$$

(rajzoljon ábrát!) által megadott (un. *elsőfajú normáltartomány*, melyet az $x=a, x=b$ egyenesek és az $y=\varphi_1(x), y=\varphi_2(x)$ $(x\in[a,b]$ görbék határolnak, ahol $\varphi_1,\varphi_2 : [a,b]\to\mathbb{R}$ adott folytonos függvények, úgy, hogy $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ ha $x \in [a,b]$), akkor, válasszuk c, d-t úgy, hogy $D \subset [a,b] \times [c,d]$ teljesüljön. Legyen

$$f^*(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & \text{ha } (x,y) \in D \\ 0 & \text{ha } (x,y) \in [a,b] \times [c,d] \setminus D \end{cases}$$

ekkor az integrál definíciója:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy := \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f^*(x,y)\,dxdy.$$

Felhasználva a a kiszámításra vonatkozó tételt f folytonosságát feltételezve kapjuk, hogy

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f^*(x,y)\,dy \right) dx.$$

Mivel

$$\int_c^d f^*(x,y)\,dy = \int_c^{\varphi_1(x)} f^*(x,y)\,dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f^*(x,y)\,dy + \int_{\varphi_2(x)}^{d} f^*(x,y)\,dy$$

és a jobboldali első és harmadik integrál integrandusa zérus, a második integrál integrandusa f, ezért

$$\int_c^d f^*(x,y)\,dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

és végül

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Hasonóan, ha az integrációs tartomány

$$D = \{\ (x,y)\ :\ c \le y \le d, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\ \}$$

(rajzoljon ábrát!) által megadott (un. *másodfajú normáltartomány*, melyet az $y = c, y = d$ egyenesek és az $x = \psi_1(y), x = \psi_2(y)\,(y \in [c,d]$ görbék határolnak, ahol $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ adott folytonos függvények, úgy, hogy $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$ ha $y \in [c,d]$), akkor, f folytonosságát feltételezve, az integrált

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

képlet segítségével számolhatjuk ki.

Példák.

1. Legyen $D = [0,1] \times [2,5]$ akkor

$$\begin{aligned} \iint\limits_D (x^2y + 3x)\,dxdy &= \int_0^1 \left(\int_2^5 (x^2y+3x)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{x^2y^2}{2} + 3xy \right]_{y=2}^{y=5} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{21x^2}{2} + 9x \right) dx = \left[\frac{21x^3}{6} + \frac{9x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{21}{6} + \frac{9}{2} = 8. \end{aligned}$$

Számítsuk ki most ugyanezt az integrált a fordított sorrendben való integrálással!

$$\iint\limits_D (x^2y+3x)\,dxdy = \int\limits_2^5 \left(\int\limits_0^1 (x^2y+3x)\,dx\right) dy = \int\limits_2^5 \left[\frac{x^3y}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} dy$$

$$= \int\limits_2^5 \left(\frac{y}{3}+\frac{3}{2}\right) dy = \left[\frac{y^2}{6}+\frac{3y}{2}\right]_2^5 = \frac{21}{6}+\frac{9}{2} = 8.$$

2. Legyen most

$$D = \{\ (x,y)\ :\ 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le \sqrt{x}\ \}$$

(rajzoljon ábrát!) és $f(x,y)=x^2y^3$, akkor

$$\iint\limits_D (x^2y^3)\,dxdy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2y^3)\,dy\right) dx = \int\limits_0^1 \left[\frac{x^2y^4}{4}\right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^{10}}{4}\right) dx = \left[\frac{x^5}{20}-\frac{x^{11}}{44}\right]_0^1 = \frac{1}{20}-\frac{1}{44} = \frac{6}{220}.$$

Hasonlóan definiálhatjuk egy $f : D \to \mathbb{R}$ függvény *hármas integrálját* a $D=[a,b]\times[c,d]\times[e,g]$ téglatesten, a

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz := \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} f(s_i,t_j,u_k)m(D_{ijk})$$

határértékkel, ahol $m(D_{ijk})$ a felosztás D_{ijk} téglatestének térfogata, $(s_i,t_j,u_k)\in D_{ijk}$ közbenső pontok.

A hármasintegrál tulajdonságai, kiszámítása hasonlóak a kettős integráléhoz.