Numerikus matematika

Baran Ágnes

Nemlineáris egyenletek

Nemlineáris egyenletek

Az $f(x) = 0$ egyenlet gyökeit keressük, ahol $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nemlineáris függvény.

Példa:

$$\cos(x) - x = 0$$

vagy

$$x^5 - 3x^4 + x^3 - 5x^2 + 3 = 0$$

vagy

$$e^x - 4x^2 = 0$$

vagy

$$\ln(x) - x + 2 = 0$$

A gyök numerikus közelítése

Az $f(x) = 0$ egyenlet gyökét egy $\{x_k\}$, $k = 0, 1, 2, ...$ sorozattal (iteráció) fogjuk közelíteni.

A közelítés adott, ha adott

- az x_0 kiindulópont,
- az algoritmus x_{k+1} meghatározására, ha x_k már ismert,
- a leállási feltétel.

1. Felezési módszer

Tfh $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, és $f(a) \cdot f(b) < 0$
Ekkor az
$$f(x) = 0$$
egyenletnek van gyöke (a, b)-ben.

Az algoritmus

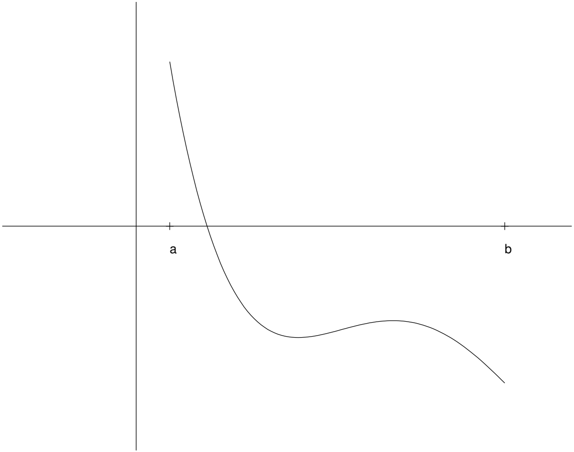
Adott a maximális iterációszám (maxit) és az ε pontosság.

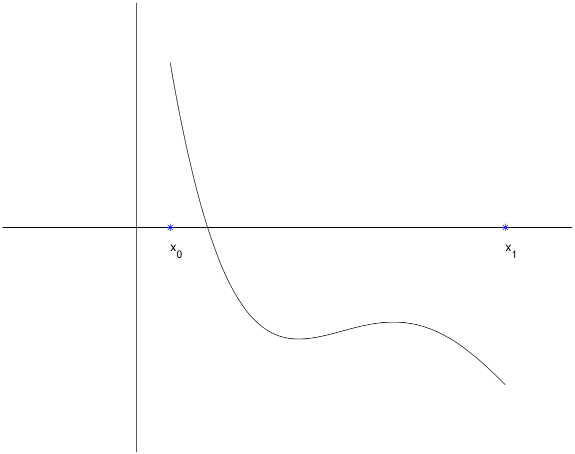
1. legyen $k = 1$, $x_0 = a$ és $x_1 = b$
2. legyen $x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2}$
3. a) ha $f(x_2) = 0$, akkor x_2 gyök $\to$ kilépés (eredmény: x_2)
   b) ha $f(x_0) \cdot f(x_2) < 0$, akkor $x_1 = x_2$
   c) ha $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, akkor $x_0 = x_2$

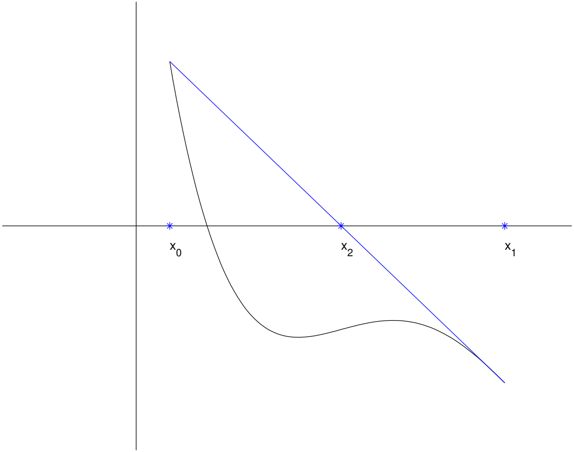
   ha $|x_1 - x_0| < \varepsilon \to$ kilépés (eredmény: x_2)
   $k := k + 1$
   ha $k = maxit \to$ kilépés (maxit lépésben nem találtunk gyököt)
   $\to 2.$

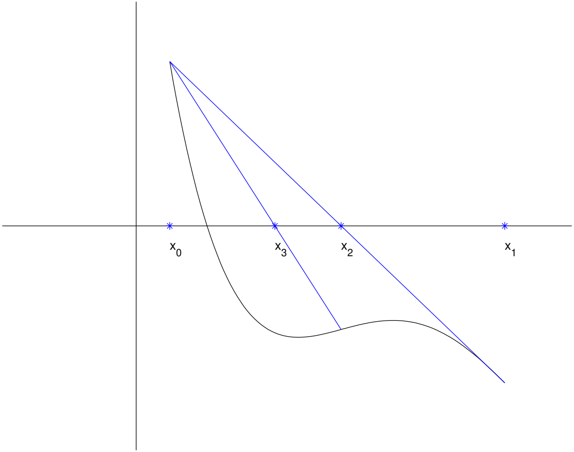
2. Húrmódszer

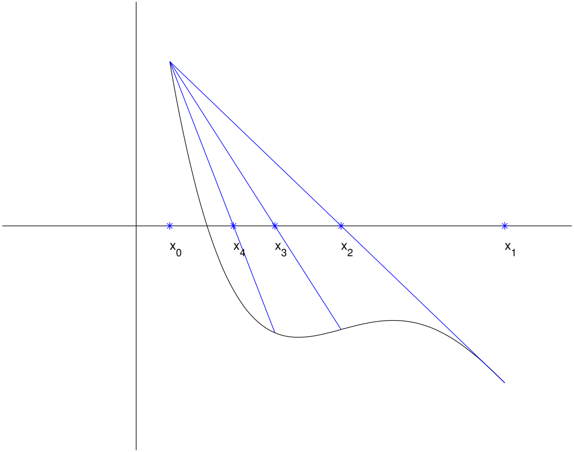
Az $f(x) = 0$ nemlineáris egyenlet gyökét keressük, ahol $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, továbbá $f(a) \cdot f(b) < 0$ és f folytonos.



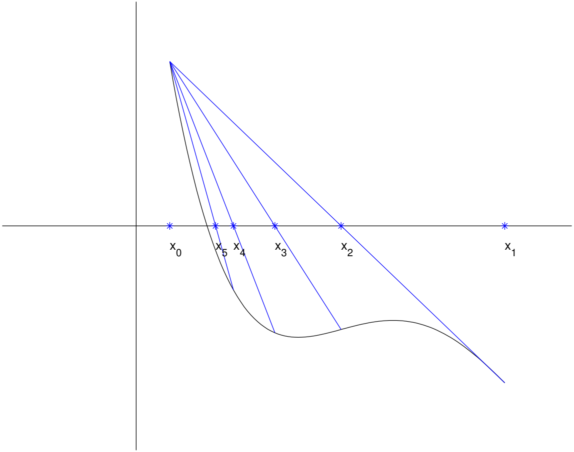

x0
x1


x
0
x
2
x
1


x0
x3
x2
x1



x0
x4
x3
x2
x1


x0
x5
x4
x3
x2
x1

Húrmódszer

$x_0 = a$, $x_1 = b$.
Az x_2 pont meghatározása:

Az $(x_0, f(x_0))$ és $(x_1, f(x_1))$ pontokra illeszkedő egyenes egyenlete (Lagrange-interpoláció):

$$\begin{array}{c|cc} x_0 & f(x_0) & \\ & & \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \\ x_1 & f(x_1) & \end{array}$$

$y(x) = f(x_1) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \cdot (x - x_1)$

Ott metszi az x-tengelyt, ahol $y(x) = 0$:

$$x_2 = x_1 - f(x_1) \cdot \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$

Húrmódszer

x_2 kiszámítása után ismételjük meg az előző lépéseket az $[x_0, x_2]$, illetve $[x_2, x_1]$ intervallumok közül azzal, ahol előjelet vált a függvény.

A húrmódszer esetén

- x_2 kiszámítása jól definiált
- az eljárás minden folytonos f esetén konvergál f egy gyökéhez
- csak páratlan multiplicitású gyök közelítésére
- két pontra támaszkodó iteráció

Az algoritmus:

Adott a maximális iterációszám (maxit) és az ε pontosság.

1. $x_0 := a$, $x_1 := b$, $f0 := |f(x_0)|$
2. $$x_2 := x_1 - f(x_1) \cdot \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$
3. a) Ha $f(x_2) = 0$, akkor kilépés (x_2 gyök).
   b) ha $f(x_2) \cdot f(x_1) < 0$, akkor $x_0 = x_2$
   c) ha $f(x_2) \cdot f(x_0) < 0$, akkor $x_1 = x_2$

   ha $|f(x_2)| < \varepsilon * (1 + f0)$, akkor kilépés (eredmény: x_2)

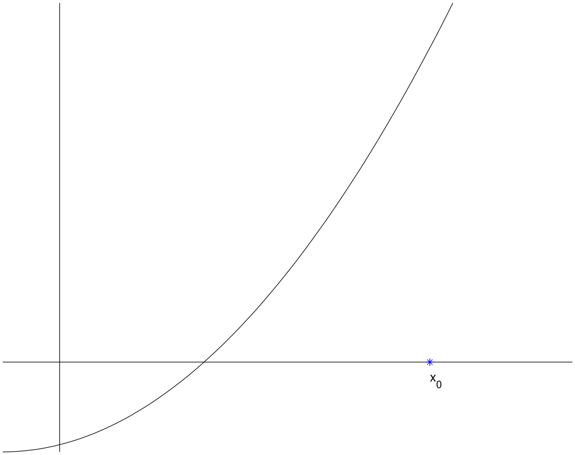
   $k := k + 1$

   ha $k = maxit$, akkor kilépés (maxit lépésben nem találtunk gyököt)

   $\to 2.$

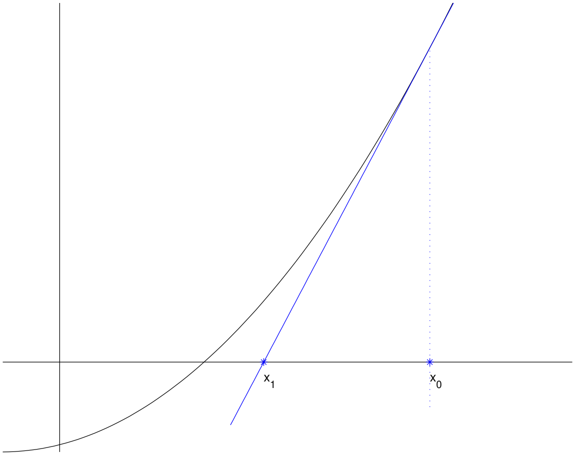
3. Newton-módszer

Az $f(x) = 0$ nemlineáris egyenlet gyökét keressük.



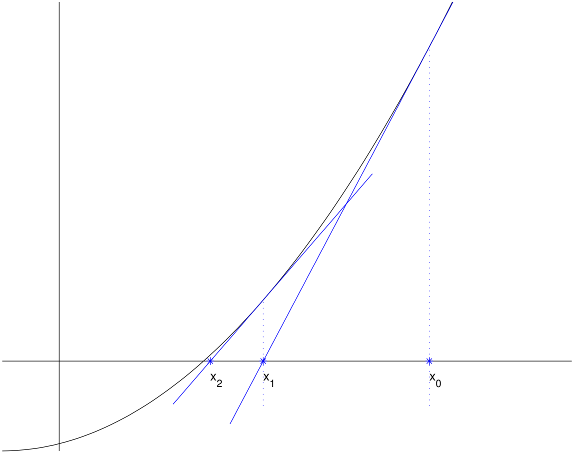
3. Newton-módszer

Az $f(x) = 0$ nemlineáris egyenlet gyökét keressük.



3. Newton-módszer

Az $f(x) = 0$ nemlineáris egyenlet gyökét keressük.



Az algoritmus:

x_0 a gyök egy kezdeti közelítése,
x_{k+1} meghatározása:
Az f függvény x_k-beli érintője (Hermite-interpoláció):

$$\begin{array}{c|cc} x_k & f(x_k) & \\ & & f'(x_k) \\ x_k & f(x_k) & \end{array}$$

$$y(x) = f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x - x_k)$$

Ott metszi az x-tengelyt, ahol $y(x) = 0$:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

A Newton-iteráció:

x_0 kezdőpont,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

- nem feltétlenül definiált
- egy pontra támaszkodó iteráció

Tétel. Legyen x^* az f egy gyöke. Ha

- f kétszer folytonosan diff.ható,
- $|f'(x)| \geq m_1 > 0$,
- $|f''(x)| \leq M_2$,
- $|x_0 - x^*| < \frac{2m_1}{M_2}$,

akkor a Newton-iteráció jól definiált, $x_k \to x^*$, ha $k \to \infty$, továbbá

$$|x_{k+1} - x^*| \leq C|x_k - x^*|^2$$

Mit jelent a gyakorlatban a

$$|x_{k+1} - x^*| \leq C|x_k - x^*|^2$$

becslés?

Ha valamely k-ra $|x_k - x^*| \approx 0.1$, akkor a sorozat következő néhány tagjának a távolsága a gyöktől kb

$$0.01$$
$$0.0001$$
$$0.00000001$$

A Newton-módszer konvergenciája **kvadratikus**, vagy másodrendű.

Példa

Közelítsük az $x^3 - 3x - 2 = 0$ egyenlet gyökét Newton–módszerrel az $x_0 = 1.5$ pontból indulva!

$f(x) = x^3 - 3x - 2$ és $f'(x) = 3x^2 - 3$.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 3x_k - 2}{3x_k^2 - 3}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1.5\\
x_1 &= 2.33333333333333\\
x_2 &= 2.\underline{0}5555555555556\\
x_3 &= 2.\underline{00}194931773879\\
x_4 &= 2.\underline{00000}252829797\\
x_5 &= 2.\underline{00000000000}426
\end{aligned}$$

2. példa

Közelítsük $\sqrt{a}$, $(a > 0)$ értékét Newton–módszerrel!

$f(x) = x^2 - a$ és $f'(x) = 2x$. Ekkor

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right)$$

$a = 5$, $x_0 = 2$ esetén:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2.\underline{2}5 \\ x_2 &= 2.\underline{236}111111111 \\ x_3 &= 2.\underline{236067977}91580 \\ x_4 &= 2.\underline{23606797749979} \end{aligned}$$

3. példa

Közelítsük az $x^3 - 3x + 2 = 0$ egyenlet gyökét Newton–módszerrel az $x_0 = 1.5$ pontból indulva!

$f(x) = x^3 - 3x + 2$ és $f'(x) = 3x^2 - 3$.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 3x_k + 2}{3x_k^2 - 3}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1.5 \\
x_1 &= 1.26666666666667 \\
x_2 &= 1.13856209150327 \\
x_3 &= 1.\underline{0}7077733565581 \\
x_4 &= 1.\underline{0}3579185227111 \\
\ldots & \\
x_9 &= 1.\underline{00}113136084711
\end{aligned}$$

Hasonlítsuk össze az eredmény az 1. példa eredményével! Bár az egyenlet gyökéhez konvergál a sorozat, de a konvergencia nem kvadratikus. Miért?

A probléma: az 1 kétszeres gyöke f-nek (a konvergenciatétel 2. feltétele nem teljesül).

Ha az

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

iteráció helyett az

$$x_{k+1} = x_k - 2\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

iterációt alkalmazzuk:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1.5\\
x_1 &= 1.\underline{0}3333333333333\\
x_2 &= 1.\underline{000}18214936248\\
x_3 &= 1.\underline{00000000}552926
\end{aligned}$$

A Newton-iteráció nem feltétlenül konvergál, ezért fontos, hogy programozásakor az $\{x_k\}$ sorozatot legfeljebb egy megadott `maxit` iterációszámig határozzuk meg.

4. példa

Vizsgáljuk meg mi történik, ha a Newton-módszert az $f(x) = x^3 - 5x$ függvény gyökének közelítésére alkalmazzuk az $x_0 = 1$ pontból indulva!

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3 - 5x_k}{3x_k^2 - 5}$$

$$x_0 = 1, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \ldots$$

4. Szelőmódszer

A Newton-iteráció minden lépésében szükséges a derivált adott pontbeli értéke.

Ha a derivált számítása nem lehetséges, vagy túl költséges, akkor az $f'(x_k) \approx [x_{k-1}, x_k]f$ közelítést alkalmazhatjuk.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{[x_{k-1}, x_k]f} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Ez a **szelőmódszer**.

Szelőmódszer

x_0, x_1 kezdőpontok,

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots$$

A képlet hasonló a húrmódszerhez, de itt nem vizsgáljuk az új pontban a függvény előjelét, mindig a 2 utolsó pontból számítjuk a következőt.

- a képlet nem feltétlenül definiált ($f(x_k) = f(x_{k-1})$ lehet)
- 2 pontra támaszkodó

Szelőmódszer

Konvergencia feltételei ugyanazok, mint a Newton-iterációnál, csak még $|x_1 - x^*| < \frac{2m_1}{M_2}$ is kell.

A konvergenciarend alacsonyabb, mint a Newton-iterációnál:

$$|x_{k+1} - x^*| \le C|x_k - x^*|^p,$$

ahol $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$.

(Húrmódszernél $p = 1$, Newton-módszernél $p = 2$.)

5. Fixpont-iteráció.

$g(x) = x$ gyökét keressük, ahol $g : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Az algoritmus:
x_0 kezdőpont, $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots$

Tétel

Ha $g([a, b]) \subseteq [a, b]$, és $\exists \quad 0 \le \alpha < 1$:

$$|g(x) - g(y)| \le \alpha \cdot |x - y| \quad \forall x, y \in [a, b], \tag{1}$$

akkor egyértelműen létezik olyan $x^* \in [a, b]$, hogy $g(x^*) = x^*$, továbbá $\forall x_0 \in [a, b]$ esetén az $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots$ sorozat tart x^*-hoz.

Megjegyzés: Ha $|g'(x)| \le \alpha < 1$, akkor (1) teljesül.

Megjegyzés

Ha egy g függvény teljesíti az (1) tulajdonságot, akkor összehúzó leképezésnek (kontrakciónak) nevezzük.

Feladat

Mutassa meg, hogy az $f(x) = e^x - 4x^2$ függvénynek van zérushelye a $[0,1]$ intervallumban! Igazolja, hogy az

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}e^{\frac{x_k}{2}}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

iteráció tetszőleges $x_0 \in [0,1]$ kezdőpont esetén tart ehhez a gyökhöz!

Példa

Az

$$xe^x - 1 = 0, \quad x \in [0.25, 1]$$

egyenlet gyökét szeretnénk közelíteni fixpont-iterációval. Vizsgáljuk meg az

$$x_0 = 0.5, \quad x_{k+1} = g(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots$$

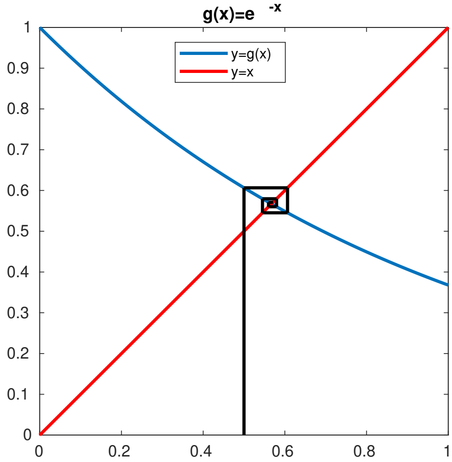
iteráció konvergenciáját, ha

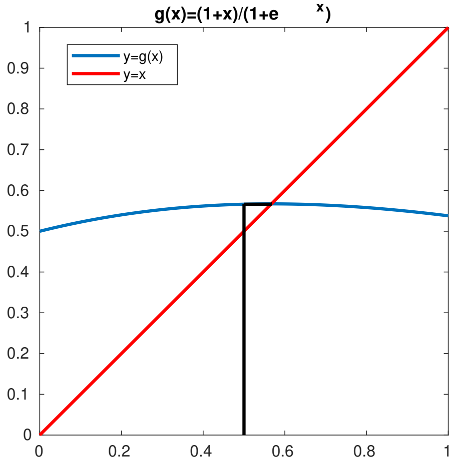
(a) $g(x) = e^{-x}$

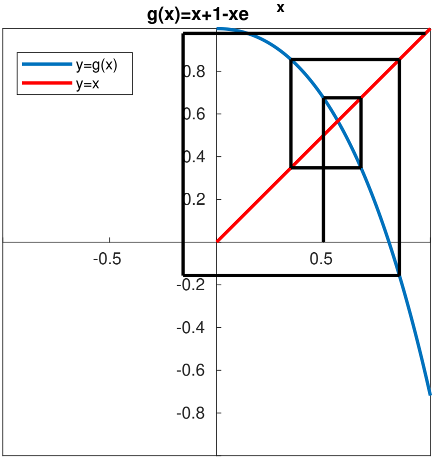
(b) $g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$

(c) $g(x) = x + 1 - xe^x$

	$g(x)=e^{-x}$	$g(x)=\frac{1+x}{1+e^x}$	$g(x)=x+1-xe^x$
$x^{(1)}$	0.60653	0.56631	0.67564
$x^{(2)}$	0.54524	0.56714	0.34781
$x^{(3)}$	0.57970	0.56714	0.85532
$x^{(4)}$	0.56006	0.56714	-0.15651
$x^{(5)}$	0.57117	0.56714	0.97733
$x^{(6)}$	0.56486	0.56714	-0.61976
$x^{(7)}$	0.56844	0.56714	0.71371
$x^{(8)}$	0.56641	0.56714	0.25663
$x^{(9)}$	0.56756	0.56714	0.92492
$x^{(10)}$	0.56691	0.56714	-0.40742


g(x)=e -x
y=g(x)
y=x
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


g(x)=(1+x)/(1+e x)
y=g(x)
y=x
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


g(x)=x+1-xe^x
y=g(x)
y=x
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.5
0.5
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8

Nemlineáris egyenletrendszerek.

$f(x) = 0$, ahol $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Másképpen:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

Példa: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_1 x_2 - 3x_2 + 3 &= 0 \\ -3x_1^2 + x_2^2 - x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Newton-módszer több dimenzióban

$x^{(0)}$ kezdővektor,

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left(J(x^{(k)})\right)^{-1} \cdot f(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

ahol J a Jacobi-mátrix:

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

A mátrixinvertálás helyett: a

$$J(x^{(k)}) \cdot \underbrace{\left(x^{(k+1)} - x^{(k)}\right)}_{\delta x :=} = -f(x^{(k)})$$

lineáris egyenletrendszert oldjuk meg. Ezután

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \delta x.$$

Leállási feltétel:

$$\|f(x^{(k+1)})\|_\infty < \varepsilon \cdot (1 + \|f(x^{(0)})\|_\infty)$$

Fixpont-iteráció egyenletrendszerekre

A $g(x) = x$ gyökét keressük, ahol $g : T \to \mathbb{R}^n$, $T \subseteq \mathbb{R}^n$.

Példa:

$$\frac{1}{4}\cos(2x_1 - x_2) - \frac{3}{4} = x_1$$
$$\frac{1}{3}\sin(x_1) - \frac{2}{3} = x_2$$

Az algoritmus:
$x^{(0)}$ kezdővektor, $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$, $k = 0, 1, \ldots$.

Fixpont-iteráció egyenletrendszerekre

A $g(x) = x$ gyökét keressük, ahol $g : T \to \mathbb{R}^n$, $T \subseteq \mathbb{R}^n$.

Az algoritmus

$x^{(0)}$ kezdővektor, $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$, $k = 0, 1, \ldots$.

Tétel.

Ha T konvex, $g(T) \subseteq T$, és g differenciálható, továbbá $\|J(x)\| \leq \alpha < 1$ minden $x \in T$-re, akkor az egyenletrendszer egyértelműen megoldható, és $\forall x^{(0)} \in T$ esetén az $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$, $k = 0, 1, \ldots$ sorozat tart a megoldáshoz.

Feladat

Az

$$\cos(x_1 - x_2) - \sin(x_2) - 4x_1 = 0$$
$$\cos(x_1 + x_2) - \sin(x_1 - x_2) - 5x_2 = 0$$

egyenletrendszer megoldását keressük a $[-1, 1]^2$ tartományon. Mit mondhatunk a rendszer megoldhatóságáról és az

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}\cos(x_1^{(k)} - x_2^{(k)}) - \frac{1}{4}\sin(x_2^{(k)}),$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5}\cos(x_1^{(k)} + x_2^{(k)}) - \frac{1}{5}\sin(x_1^{(k)} - x_2^{(k)})$$

$k = 0, 1, \ldots$ eljárás konvergenciájáról?