WAYNE L. WINSTON

OPERÁCIÓKUTATÁS

Módszerek és alkalmazások

1. kötet

Csodálatos családomnak,
Viviannek, Gregorynak és Jennifernek

WAYNE L. WINSTON

OPERÁCIÓKUTATÁS

Módszerek és alkalmazások

1. kötet

Aula, 2003

Az eredeti mű címe:
Operations Research. Applications and Algorithms, 3rd edition by Wayne L. Winston.

International Thomson Publishing, Duxbury Press.
A fordítás a Brooks Cole © 1997 kiadása alapján készült.

Fordították: Dobos Imre (14–16. fejezet)
Fiala Tibor (5., 18. fejezet)
Fülöp János (9., 10. fejezet)
Kádas Sándor (4. fejezet)
Medvegyev Péter (17. fejezet)
Solymosi Tamás (7–8., 13. fejezet)
Szentpéteri Szabolcsné (1–3., 6., 11. fejezet)
Temesi József (Előszó, 12. fejezet)
Temesi Péter (22. fejezet, Megoldások)
Zaupper Bence (19–21. fejezet)

A fordítást az eredetivel egybevetette: Forgó Ferenc és Temesi József
Szakmai lektor: Temesi József

A könyv a Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem támogatásával jelent meg.

ISBN 963 9478 59 8 (1. kötet)
ISBN 963 9478 60 1 (2. kötet)
ISBN 963 9478 61 X (közös)

Nyomdai előkészítés: Typotex Elektronikus Kiadó Kft.
Műszaki szerkesztő: Hesz Gábor

Az 1. kötet tartalma

A 2. kötet tartalma

Az 1. kötet részletes tartalma

8 Egészértékű programozás

9 A lineáris programozás fejlettebb módszerei

10 Nemlineáris programozás

Bevezetés

Új igények kielégítése

Az elmúlt évek során mind a személyi számítógépeken, mind a nagy számítógépes rendszerekben rendkívül elterjedtté vált az operációkutatási szoftverek elérhetőségének biztosítása. Ez a fejlődés azonban csak akkor fejtheti ki hasznos hatását, ha a felhasználók megfelelő tudással rendelkeznek a szoftverek céljairól és alkalmazhatóságáról. Biztosaknak kell lenniük abban, hogy a modellek hátterében meghúzódó matematikai feltételek pontosan megfelelnek az általuk megoldani kívánt valós problémáknak, és hogy a számszerű eredmények is jól tükrözik a problémák megoldását. Mindezek tudatában ez a könyv a modellépítés és a modellek matematikai formulákba öntésének kérdéseit állítja előtérbe, valamint az eredmények értelmezésében nyújt eligazítást.

A feltételezett olvasók

Ez a könyv azzal a szándékkal íródott, hogy az operációkutatással, a vezetéstudomány kvantitatív eszközeivel vagy a matematikai programozással ismerkedők, illetve már némi ismerettel rendelkezők tanulhassanak belőle. A felsőoktatásban haszonnal forgathatják az üzleti képzés kvantitatív módszereit, az operációkutatást, vezetéstudományt vagy rendszertervezést tanuló alsóbb évfolyamos diákok, azok az MBA hallgatók, akik alkalmazásorientált kurzusokra járnak, azok a felsőbb éves egyetemisták, akik az operációkutatás vagy a vezetéstudomány főbb tárgyköreiben szeretnének tájékozódni, végül pedig mindazok a gyakorló közgazdászok, akiknek egy jó kézikönyvre van ezen a területen szükségük.

A könyv szerkezete

Ez a könyv három félévre elegendő tananyagot tartalmaz, ezáltal a főiskolai-egyetemi oktatóknak kellő rugalmasságot biztosítva a céljaiknak megfelelő tantárgyak kialakításához. Az alábbi kurzusok könnyen felépíthetőek a könyv bizonyos fejezeteit felhasználva:

- lineáris programozás: a 2-től 9-ig terjedő fejezetekből,
- az operációkutatás determinisztikus modelljei: a 2–10., 13–14. és 18. fejezetek anyaga,
- az operációkutatás valószínűségi modelljei: a 11–13., 15–17. és 19–22. fejezetekből,
- a modellépítést előtérbe helyező operációkutatási vagy vezetéstudományi tantárgy: a 3–4., 6–8., 10–11. fejezetek egyes alfejezeteiből, valamint a 12., 14., 15., 17. és 20. fejezetekből, kiegészítve a 21. és 22. fejezet egyes részeivel.

A tanulást és a tanítást segítő jellemvonások

A könyvet a következő jellemzők felhasználásával igyekeztünk felhasználóbaráttá tenni:

- Mindegyik alfejezet végén feladatok, a fejezetek végén pedig áttekintő feladatok segítik az olvasót abban, hogy azonnali visszacsatolást kapjon a tanultak megértéséről és alkalmazásáról. Több mint 1400 feladat van a könyvben, s ezeket nehézség szerinti csoportokba rendeztük: az A csoportba az alapvető technikákat gyakoroltató feladatok kerültek, a B csoport főleg elméleti kérdéseket tartalmaz, a C csoport pedig az elmélet továbbgondolására ösztönzi az olvasót.
- A könyvben a kimerítő matematikai tárgyalással szemben a példákon keresztül történő bemutatást, az alkalmazásorientált megközelítést helyeztük előtérbe. Több olyan feladatot közlünk, amelyek már publikált feladatokon alapulnak. Az egyes fejezetekben a mégoly komplex témákat is lépésről lépésre, sok példával megvilágítva vezetjük be és bontjuk ki. Az operációkutatás egyes algoritmusait ennek ellenére teljes részletességgel tárgyaljuk: a lineáris programozási feladatokat megoldó Karmarkar-algoritmusnak például részletes leírását adjuk.
- A diákokat a vizsgára való felkészülésben segítik a fejezetek végén található elméleti összefoglalók.
- Mindegyik fejezetet úgy próbáltuk megírni, hogy a többi fejezettől többé-kevésbé függetlenül is érthető legyen. Ez megerősíti a könyvnek azt a jellegzetességét, hogy ezekből a fejezetekből a tanárok különböző tantárgyakat tudnak összerakni.

A könyv lineáris programozással foglalkozó 2–9. fejezetei önmagukban is teljes egészet alkotnak, a szükséges matematikai hátteret a 2. fejezet adja meg. Ha az olvasó legalább a mátrixok szorzásával tisztában van, máris olvasni tudja ezeket a fejezeteket. A fennmaradó fejezetek már ennél több analízis- és valószínűségszámítási tudást igényelnek. Elegendő azonban az, ha valaki egy-egy félévet tanulta ezeket a matematikai ismeretköröket.

Köszönetnyilvánítás

Sokan vannak, akik jelentős szerepet játszottak e könyv harmadik kiadásának elkészültében. Az operációkutatás oktatásáról vallott nézeteimet nagyban befolyásolták az olyan kiváló tanárok, mint Gordon Bradley, Eric Denardo, George Fishman, Gordon Kaufman, Richard Larson, John Little, Robert Mifflin, Martin Shubik, Matthew Sobel, Arthur Veinott Jr., Harvey Wagner és Ward Whitt. Különösképpen köszönettel tartozom Wagner professzornak, akinek „Principles of Operations Research” című könyve többet tanított meg nekem az operációkutatásról, mint bármely egyéb mű.

Köszönetet szeretnék mondani Ashok Soni kollégámnak a 23. fejezethez nyújtott közreműködéséért.

A Lagrange-szorzóknak és a Kuhn–Tucker-feltételeknek az előző kiadásoktól eltérő tárgyalásához szükséges megjegyzéseket John Hookernek, a Carnegie-Melon Egyetem professzorának kell megköszönnöm.

Végül köszönettel tartozom mindazoknak, akik elolvasva a harmadik kiadás szövegét, észrevételeikkel javították a tárgyalás minőségét: Esther Arkin, State University of New York at Stony Brook; James W. Chrissis, Air Force Institute of Technology; Rebecca E. Hill, Rochester Institute of Technology; James G. Morris, University of Wisconsin, Madison voltak ezek a kollégák.

Az előző kiadás lektorainak is hálával tartozom, ők: Sant Arora, Harold Benson, Warren J. Boe, Bruce Bowerman, Jerald Dauer, S. Selcuk Erenguc, Yahya Fathi, Robert Freund, Irwin Greenberg, John Hooker, Sidney Lawrence, Patrick Lee, Edward Minieka, Joel A. Nachlas, David L. Olson, Sudhakar Pandit, David W. Pentico, Bruce Pollack-Johnson, Michael Richey, Gary D. Scudder, Lawrence Seiford, Michael Sinchcomb és Paul Stiebitz.

A könyvben fellelhető minden hibáért azonban természetesen magamnak kell vállalnom a felelősséget.

1

Bevezetés az operációkutatásba

A második világháború alatt brit katonai vezetők tudósokat és mérnököket különböző katonai problémák elemzésére kértek fel: radarok harcba vetése, konvojok irányítása, bombázás, tengeralattjáró-elhárítás és aknalerakás szerepelt a feladatok között. A matematika és a tudományos módszerek katonai alkalmazását operációkutatásnak nevezték el. Manapság az *operációkutatás* (operations research), vagy ahogyan gyakran szintén nevezik: *menedzsment tudomány* (management science), azt jelenti, hogy a döntéshozatalt olyan tudományos módszerekkel közelítjük meg, amelyek segítségével meghatározható egy rendszer legjobb felépítése és működtetése, mégpedig rendszerint olyan körülmények között, amikor a források csak szűkösen állnak rendelkezésünkre.

1.1. Az operációkutatás módszertana

Amikor egy szervezet problémáit az operációkutatás segítségével szeretnénk megoldani, akkor a következő hétlépéses eljárást kell követnünk (1. ábra).

1. lépés. A probléma megfogalmazása

Az operációkutatás (OR) segítségével dolgozó elemző először definiálja a szervezet problémáját. Ennek a definíciónak tartalmaznia kell a szervezet céljainak pontos megfogalmazását, valamint a szervezet (vagy rendszer) azon részeit, amelyeket a probléma megoldása előtt részletesen tanulmányozni kell.

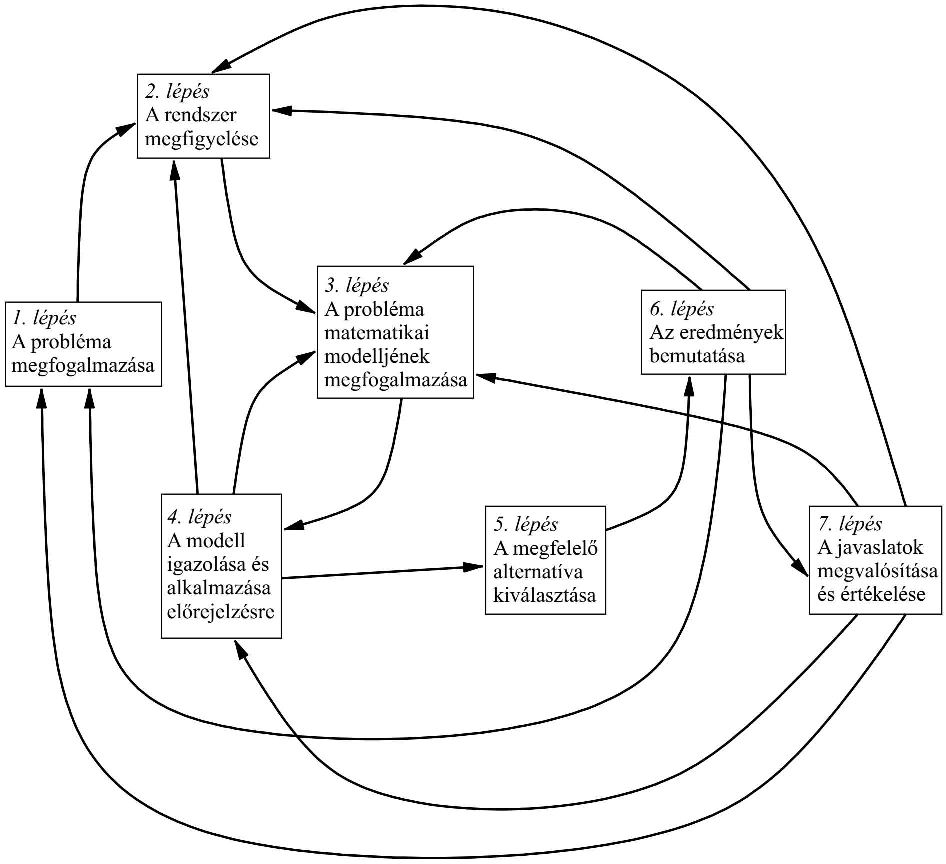
Bemutatunk egy példát a probléma megfogalmazására. Tegyük fel, hogy egy bankmenedzser egy operációkutatási elemzőt alkalmaz abból a célból, hogy a szolgáltatás megfelelő színvonalának fenntartása mellett csökkenteni lehessen a pénztárosok és más, az ablakoknál dolgozó alkalmazottak bérköltségét. A vezetővel történt részletes megbeszélés után hogyan fogalmazza meg az elemző a bank céljait? Három lehetőséget sorolunk fel:

1. Lehetséges, hogy a bank azokat a heti költségeket szeretné minimalizálni, amelyek azt biztosítják, hogy egy ügyfél átlagosan legfeljebb 3 percig álljon sorban.

2. Az is megeshet, hogy a bank azon heti költségeket kívánja minimalizálni, amelyek azt biztosítják, hogy az ügyfeleknek csak 5%-a álljon 3 percnél hosszabb ideig sorban.

3. A bank esetleg hajlandó hetente legfeljebb 1000 dollárt költeni a pénztárosok és az ablakoknál dolgozók fizetésére az adott kereteken belül azért, hogy minimalizálja az ügyfelek átlagos várakozási idejét.

1. ÁBRA
Az operációkutatás módszertana



Az elemzőnek természetesen a bank működésének azokat a szempontjait is fel kell ismernie, amelyek a bank fent megfogalmazott céljainak elérését befolyásolják. Például:

1. Átlagosan hány ügyfél érkezik a bankba óránként? Minél több az ügyfél, annál több alkalmazott szükséges a megfelelő szolgáltatáshoz.

2. Óránként átlagosan hány ügyfelet tud egy alkalmazott kiszolgálni?

3. Mi felel meg jobban a bank céljainak: egyetlen hosszú sorban várjanak-e az ügyfelek, vagy inkább legyen több sor, több ablaknál?

4. Ha minden ablak előtt áll egy sor, vajon az ügyfelek mindig a legrövidebb sort választják-e? Hogyha egy vagy több sor nagyon hosszúvá válik, vajon átmennek-e az ügyfelek egyik sorból a másikba?

2. lépés. A rendszer megfigyelése

Az első lépés után az elemző-szakértő adatokat gyűjt abból a célból, hogy megbecsülhesse a szervezet problémáját befolyásoló paraméterek értékeit. Ezeket a becsléseket használja majd a szakértő arra, hogy kialakítsa (a 3. lépésben) és értékelje (a 4. lépésben) a szervezet problémájának matematikai modelljét.

Például a mi bankunkban az elemző (egyebek között) a következő rendszer-paraméterekre vonatkozó adatokat fogja gyűjteni:

1. Átlagosan hány ügyfél érkezik a bankba óránként? Függ-e az ügyfelek érkezése a napszaktól?

2. Átlagosan hány ügyfelet tud egy banki alkalmazott kiszolgálni óránként? Az ügyfelekkel való foglalkozás sebessége függ-e attól, hogy hányan állnak a sorban?

3. Vajon az ügyfelek mindig a legrövidebb sort választják-e? Ha egy ügyfél egy hosszú sor végén áll, átmegy-e egy rövidebb sorba?

3. lépés. A probléma matematikai modelljének megfogalmazása

Ebben a lépésben az elemző megfogalmazza a probléma egy matematikai modelljét (vagy idealizált reprezentációját). Ebben a könyvben több olyan matematikai technikát is leírunk, amelyek rendszerek modellezésére alkalmasak.

A mi bankpéldánkban kialakítható egy matematikai modell, amely a következő értékek előrejelzését végezheti:

$W_q =$ az ügyfél átlagos sorbanállási ideje
$P =$ annak a valószínűsége, hogy egy ügyfél legalább 3 percet várakozik a sorban

Ezek a következő paraméterek ismeretén alapulnak:

$\lambda =$ a bankba óránként érkező ügyfelek átlagos száma,
$\mu =$ átlagosan ennyi ügyfelet képes az alkalmazott óránként kiszolgálni,
$s =$ az alkalmazottak száma,
valamint az alkalmazottak és sorbanállási helyek elhelyezkedése a bankban.

Azt a matematikai modellt, amelyik egyenlőség típusú kapcsolatot teremt W_q, illetve P és a fenti négy paraméter között, **analitikus modellnek** nevezzük. (A sorbanállási problémák analitikus modelljeit a 20. fejezetben tárgyaljuk.)

Kimutatható például, hogy ha csak egy banki alkalmazott van, akkor bizonyos feltételek mellett

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \tag{1}$$

Így az elemző a paraméterek ismeretében az (1) egyenlőséget alkalmazhatja annak meghatározására, hogy milyen jól kontrollálja a rendszer (a bank) W_q értékét.

Mindazonáltal nagyon sok valóságos helyzet olyan bonyolult, hogy nem található számára analitikus modell. Például, ha az ügyfelek átjárkálnak egyik sorból a másikba, akkor az esetek többségében nincs olyan könnyen kezelhető matematikai egyenlőség, amelyet W_q, illetve P kifejezésére használhatnánk a négy paraméter segítségével. Az olyan esetekben, amikor nem létezik jól kezelhető analitikus modell, a **szimulációs modellekhez** fordulunk segítségért. Ezek a modellek képessé teszik a komputert arra, hogy közelítést adjanak a rendszer aktuális viselkedéséről (A szimulációs modelleket a 21. fejezetben tárgyaljuk.)

4. lépés. A modell igazolása és alkalmazása előrejelzésre

Az elemző ebben a lépésben megpróbálja eldönteni, hogy a 3. lépésben kifejlesztett matematikai modell valóban jól jellemzi-e a valóságot? Annak eldöntéséhez, hogy mennyire jól írja le a modell a valóságot, megvizsgáljuk a jelenlegi helyzetre való érvényességét. A bank példájára gondolva tegyük föl, hogy a jelenlegi helyzet megfelel azoknak a feltételeknek, amelyek mellett az (1) egyenlőség érvényes. Ekkor a paraméterek aktuális becsült értékeit behelyettesítjük (1)-be, és megfigyelhetjük, hogy az (1) egyenlőség milyen jól adja vissza W_q megfigyelt értékeit. Hogyha W_q-nak és P-nek a modellel előrejelzett értékei nem állnak közel a valódi értékekhez (melyeket a bank megfigyelése révén ismerünk), akkor természetesen új modellre van szükségünk. Ebben az esetben vissza kell térnünk vagy a 2. vagy a 3. lépéshez (ez jól látható az 1. ábra visszacsatolási nyilain), és egy új modellt kell megfogalmaznunk, amelyik jobban leírja az aktuális helyzetet. Ha az első modell jól illeszkedik a valós helyzethez, még akkor is tartózkodnunk kell attól, hogy körültekintés nélkül alkalmazzuk. Például felállítottunk egy banki modellt, amelyik nagyon jól megadja W_q és P értékeit, ha a bankban nincsenek sokan. Ha viszont a banknak egyre több és több ügyfele lesz, és ezáltal nő a zsúfoltság, akkor az új helyzetben a modell érvényességét nagyon alaposan ellenőrizni kell.

5. lépés. Megfelelő alternatíva kiválasztása

Adott modell és alternatívák ismeretében az elemző kiválasztja azt az alternatívát (ha van ilyen), amelyik a legjobban megfelel a szervezet céljainak. Például a mi bankunk esetében az elemző meghatározhat egy olyan munkaadói politikát, amelyik minimalizálja a heti fizetésekre fordított költséget abból a szempontból, hogy biztosítva legyen az, hogy egy ügyfél átlagosan legfeljebb három percet áll sorban.

Néha a rendelkezésre álló alternatívák halmazára bizonyos feltételek és megszorítások érvényesek. Tegyük fel például, hogy a bank felvehet teljes munkaidős és részmunkaidős alkalmazottakat (ez utóbbiak napi négy órát dolgoznak egyfolytában). Tegyük föl, hogy a részidős dolgozók kevesebbe kerülnek, mint a teljes munkaidősek, de lassabban dolgoznak. Ekkor az ügyfelek átlagos sorbanállási idejét a következő feltételek mellett minimalizálhatjuk:

1. A banki dolgozók fizetésére hetenként legfeljebb 2000 dollárt költhetünk.

2. A részidős dolgozók legfeljebb annyi munkaórát dolgozhatnak, amennyi az egész heti összes munkaóra egynegyede.

Nagyon sok esetben a legjobb alternatíva meghatározása esetleg lehetetlen, vagy túlságosan költséges. Például egy cég azon gondolkodik, hogy egy miniszámítógépet vásároljon, amelyik az alábbi feltételeknek felel meg:

1. a leggazdaságosabb,

2. könnyen kezelhető,

3. a legfontosabb szoftverek rendelkezésre állnak hozzá,

4. gyors.

Nagyon valószínű, hogy egyetlen számítógép sem lesz minden szempontból egyszerre a legjobb. Tegyük fel, hogy a cég három számítógép közül óhajt választani. Előfordulhat, hogy az A számítógép a legjobb az 1. és 3. szempont szerint, de a legrosszabb a 2. és 4. szempontból, a B számítógép a legjobb a 2. és 4. feltétel szerint, de egyebekben kevésbé jó, és a C számítógép esetleg mindegyik szempontból a második legjobb. Melyik számítógép felel meg legjobban a cég céljainak? Ez egy nagyon bonyolult kérdés, melynek megválaszolásához a többcélú döntéshozatal elméletére van szükség (ezt a 12. fejezetben tárgyaljuk).

Ha a legjobb alternatíva esetleg létezik is, nagyon gyakran túlságosan költséges lehet. Tekintsük a Foodco nevű élelmiszer-feldolgozó vállalatot. Ez a cég konzervet gyárt és minimalizálni szeretné a raktározás és elosztás költségeit. 200 helyszín áll rendelkezésre a raktárak elhelyezésére. A Foodco cég célja az, hogy az összraktározási költséget minimalizálja (beleértve az épületek felépítését, fenntartását és működtetését), és egyúttal minimalizálja a gyártelepekről a raktárakba, valamint a raktárakból a fogyasztókhoz történő szállítási költségeket. Világos, hogy a Foodco a következő kérdésekre keresi a válaszokat:

1. Hány raktárt kell építeni?

2. Hová kell a raktárakat telepíteni?

3. Mekkorák legyenek az egyes raktárak (azaz mekkora legyen a tárolási kapacitásuk)?

4. Egy adott fogyasztó melyik raktárból kapja majd a szállítmányokat?

A Foodco problémájára nem túlságosan nehéz egy matematikai modellt felállítani (lásd 8. fejezet), de erre a problémára az egzakt megoldást megadni néha meghaladja a mai számítógépek teljesítőképességét. Mindazonáltal léteznek olyan megoldási módszerek, amelyek (ésszerű számítástechnikai költségek mellett) meghatározzák azt a raktározási és elosztási stratégiát, amelyik elég közel (1-2%-nyira) jár a lehetséges minimális költségtől.

6. lépés. Az eredmények és a vizsgálatokból levont következtetések bemutatása

Ebben a lépésben az elemző bemutatja a modellt és az 5. lépés alapján tett javaslatokat a döntéshozó egyén vagy csoport számára. Néhány esetben az elemző több alternatívát is bemutathat, és a megrendelő szervezet (cég, vállalat) választja ki a neki legjobban megfelelő cselekvési lehetőséget.

Miután az elemző bemutatta az operációkutatási vizsgálat eredményeit a megrendelőnek, előfordulhat, hogy a szervezetnek nem felelnek meg a javaslatok. Ez az eset vagy abból adódhat, hogy a szervezet problémáinak meghatározása nem volt jó, vagy pedig abból, hogy a döntéshozó nem kapcsolódott be és nem vett részt a folyamatban elejétől a végéig. Ilyen esetben az elemzőnek vissza kell térnie az 1., 2. vagy 3. lépéshez (lásd 1. ábra).

7. lépés. A javaslatok megvalósítása és értékelése

Amennyiben a megrendelő szervezet elfogadta a tanulmányt, az elemzőnek segítenie kell a javaslatok megvalósításában. A rendszert állandóan ellenőrizni-felügyelni kell (dinamikusan naprakésszé kell tenni aszerint, ahogyan a környezet változik). Ezáltal lehet biztosítani, hogy a javaslatok valóban képessé tegyék a szervezetet céljai elérésére. Például a bank esetében tegyük fel, hogy az a cél, hogy az ügyfeleknek legfeljebb 5%-a várakozzék 3 percnél tovább. Tételezzük fel, hogy miután az elemző javaslatait elfogadták és megvalósították, az ügyfelek 80%-a tölt három percnél hosszabb időt sorbanállással. Ekkor a bank céljai nyilvánvalóan nem valósultak meg, és az elemzőnek vissza kell térnie az 1., 2. vagy 3. lépéshez és át kell vizsgálnia a modellt (lásd 1. ábra).

1.2. Az operációkutatás sikeres alkalmazásai

Ebben a részben felsorolunk néhány operációkutatási alkalmazást. Ezek közül sok esetben az üzleti élet vagy az illetékes kormányhivatal dollármilliókat takarított meg azzal, hogy sikeresen alkalmazta az operációkutatási modelleket.

1. *Rendőrjárőr szervezése San Franciscóban*. Taylor és Huxley (1989) kifejlesztett egy módszert a rendőrjárőrök beosztására a San Franciscói rendőrség számára. Ebben lineáris programozást (lásd 3. fejezet), célprogramozást (lásd 12. fejezet) és egészértékű programozást (lásd 8. fejezet) használtak fel. Taylor és Huxley módszerét alkalmazva a rendőrség évente 11 millió dollárt takarított meg, 20%-kal javította a reakciósebességet, és évente 3 millió dollárral növelte a közlekedési büntetésekből befolyt összeget.

2. *Üzemanyagköltség csökkentése az elektromos energiaiparban*. Sztochasztikus (valószínűségeken alapuló) dinamikus programozás (lásd 19. fejezet) és szimulációs modell (lásd 21. fejezet) segítségével Chao és mások (1989) 79 áramszolgáltatónak takarítottak meg több, mint 125 millió dollárt a beruházások, a készletezés és a hiánygazdálkodás területén.

3. *Öntvényformák lehéjazására készített konstrukció a Bethlehem Acélművek számára*. Vasko és társai (1989) egészértékű programozást (lásd 8. fejezet) használtak egy új konstrukcióhoz az öntvényformák lehéjazására. Az egészértékű programozási modell a Bethlehem cégnek évi 8 millió dollár üzemeltetési költséget takarított meg.

4. *Benzinkeverés a Texaco cégnél*. A 3.8. alfejezetben tárgyalt keverési modellt és a nemlineáris programozást (lásd 10. fejezet) felhasználva Dewitt és mások (1989) kifejlesztettek egy modellt a Texaco olajfinomítói számára. Ebben a modellben meghatározták a beérkező nyersolaj keverésének azt a módját, hogy a végtermék ólmozott normál, ólommentes normál, ólommentes plusz és ólommentes szuperbenzin legyen. Becslések szerint ez a modell a Texacónak évi 30 millió dollárnál is több megtakarítást jelentett. A modell még azt is lehetővé tette a Texaco számára, hogy megvizsgáljon bizonyos fajta „mi lenne, ha” típusú kérdéseket. Például azt, hogy mennyivel változik a normálbenzin előállítási költsége, ha a normálbenzin kéntartalmát 0.01%-kal emelik? Azt a módszert, amelyik az ilyenfajta „mi lenne, ha” kérdéseket vizsgálja, **érzékenységvizsgálatnak** nevezzük és az 5. fejezetben tárgyaljuk.

5. *Az Észak-amerikai Teherfuvarozó cégnél a teherautók járatbeosztása*. Hálózati modellek (lásd 7. fejezet) és dinamikus programozás (lásd 18. fejezet) alkalmazásával Powell és mások (1988) kifejlesztettek egy modellt. Ez kijelöli az Észak-amerikai Teherfuvarozó sofőrjeinek járatbeosztását. A modell alkalmazása jelentősen javította a fogyasztók kiszolgálását és évi 2.5 millió dollárral csökkentette a költségeket.

6. *Készletezés menedzselése a Blue Bell cégnél*. A Blue Bell farmernadrágokat és sportruházati cikkeket gyárt tisztviselők számára. Lineáris programozás (lásd 3. fejezet) és sztochasztikus készletezési modellek (lásd 15. fejezet) felhasználásával Edwards, Wagner és Wood (1985) a Blue Bell átlagos készletszintjét 31%-kal csökkentette.

7. *Lineáris programozás alkalmazása kötvényportfóliók kialakítására*. Lineáris programozást (lásd 3. fejezet) többen is alkalmaztak (pl. Chandy és Kharabe, 1986) arra, hogy olyan kötvényportfóliókat állítsanak össze, amelyek a várható megtérülést a kockázati és diverzifikációs szint bizonyos korlátozásai mellett maximalizálják.

8. *Lineáris programozás alkalmazása tejtermékek előállításának tervezésére*. Sullivan és Secrest (1985) lineáris programozást (lásd 3. fejezet) alkalmaztak annak meghatározására, hogy egy tejtermék-előállító üzem hogyan szervezze meg a termelési folyamatokat, amelyek révén az íróból, nyers tejből, édes savóból és tejszínből krémsajtot, túrót, tejfölt és tejszínkrémet állít elő. A modell alkalmazása évi 48 000 dollárral növelte az üzem profitját.

9. *Gépjárművek cseréje a Phillips Petroleum cégnél.* Hány éves legyen egy autó vagy teherautó, amikor a cégnek újat kell beállítani az öregek helyett? A Phillips Petroleum (lásd Waddell, 1983) gépkocsi-lecserélési modelleket (lásd a 7.2 és 18.5 alfejezeteket) használt e kérdés megválaszolására. A becsült megtakarítás a modellek alkalmazásakor évi 90 000 dollár lett.

10. *Hol legyen a város új repülőtere?* Egy új repülőtér telepítésénél nagyon sok szempontot kell figyelembe venni, többek között a következőket:

- **(a)** A repülőtér építési költsége.
- **(b)** Mekkora kapacitásra van szükség?
- **(c)** A repülőtérre való kijutás ideje.
- **(d)** A rendszer biztonsága.
- **(e)** A repülőtér építése által okozott társadalmi problémák.
- **(f)** A repülőtér működtetése által keltett zajártalom.

Ha nincs olyan lehetséges helyszín, amelyik minden célnak a legjobban megfelel, akkor hogyan döntsön a város az új repülőtér elhelyezéséről? A többcélú hasznosságelmélet (lásd 12.2 alfejezet) felhasználásával Keeney (1973) segítséget nyújtott Mexikóvárosnak az új repülőtér helyszínének megtalálásában.

1.3. Néhány operációkutatási olvasnivaló

Nagyon sok folyóirat közöl operációkutatási alkalmazásokról és az elméletről szóló cikkeket, egyebek között: *Operations Research*, *Management Science*, *Interfaces*, *Mathematics of Operations Research*, *Marketing Science*, *AIIE Transactions*, *Decision Sciences*, *Mathematical Programming*, *European Journal of Operations Research*, *Production and Inventory Management*, *Omega* és a *Naval Research Logistics*. Az olyan olvasó számára, akit a legmodernebb OR-alkalmazások érdekelnek, melegen ajánljuk az Interfaces című folyóiratot.

1.4. Néhány szó erről a könyvről

Ebben a könyvben nagyon sok olyan matematikai modellt vizsgálunk, amelyeket az operációkutatással dolgozó elemzők a szervezetek és rendszerek modellezésénél alkalmaznak. A fejezetek többségében a matematikai modellek megfogalmazásának tudományával legalább annyit foglalkozunk, mint a matematikai modellek megoldásával (azaz a legjobb alternatíva kiválasztásával). Még abban az esetben is, ha az olvasó a könyvünkben tárgyalt modellek többségét nem alkalmazza, a matematikai modellek megfogalmazásának hangsúlyozása segítségül szolgál számára más, kvantitatív jellegű tanulmányokban és minden olyan munkánál, ahol fontos a kvantitatív gondolkodás.

Megpróbáltuk ezt a könyvet önmagában annyira olvashatóvá tenni, amennyire csak lehetséges. Bizonyos fejezetekhez elemi analízis és valószínűségszámítási ismeretek szükségesek. Az egyes tárgykörökhöz szükséges lineáris algebrai ismereteket a 2. fejezetben tekintjük át.

Minden alfejezet végén adunk megoldandó feladatokat, ezekhez járulnak még a fejezetek végén megadott áttekintő jellegű problémák. Javasoljuk, hogy az olvasó oldjon meg annyi feladatot, amennyit csak tud. A legjobb módja annak, hogy ezt az anyagot elsajátítsa valaki az, hogy az egyetemi előadás meghallgatása után megoldja a megfelelő alfejezet végén található feladatokat. Ne feledjük, hogy a könyvben tárgyalt anyag alapos megtanulásának egyetlen módja a feladatok megoldása!

Irodalom

Chandy, P., and K. Kharabe. „Pricing in the Government Bond Market," *Interfaces* 16(1986, no. 1):65–71.

Chao, H., et al. „EPRI Reduces Fuel Inventory Costs in the Electric Utility Industry," *Interfaces* 19(1989, no. 1):48–67.

Dewitt, C., et al. „OMEGA: An Improved Gasoline Blending System for Texaco," *Interfaces* 19(1989, no. 1):85–101.

Edwards, J., H. Wagner, and W. Wood. „Blue Bell Trims Its Inventory," *Interfaces* 15(1985, no. 1):34–53.

Keeney, R. L. „A Decision Analysis with Multiple Objectives: The Mexico City Airport," *Bell Journal of Economics and Management Science* 4(1973):101–117.

Powell, W., et al. „Maximizing Profits for North American Van Lines' Truckload Division: A New Framework for Pricing and Operations," *Interfaces* 18(1988, no. 1):21–41.

Sullivan, R., and S. Secrest. „A Simple Optimization DSS for Production Planning at Dairyman's Cooperative Creamery Association," *Interfaces* 15(1985, no. 5):46–53.

Taylor, P., and S. Huxley. „A Break from Tradition for the San Francisco Police: Patrol Officer Scheduling Using an Optimization-Based Decision Support System," *Interfaces* 19(1989, no. 1):4–24.

Vasko, F., et al. „Selecting Optimal Ingot Size for Bethlehem Steel," *Interfaces* 19(1989, no. 1):68–84.

Waddell, R. „A Model for Equipment Replacement Decisions and Policies," *Interfaces* 13(1983, no. 4):1–7.

2

A lineáris algebra alapjai

Ebben a fejezetben a lineáris algebrából azokat a témaköröket tanulmányozzuk, amelyekre a könyv hátralévő részében szükség lesz. A lineáris algebrában használatos számtáblázatok: mátrixok és vektorok vizsgálatával kezdjük a tárgyalást. Ezután a mátrixok és vektorok körében szerzett tudásunkat arra használjuk fel, hogy a lineáris egyenletrendszerek megoldására megtanuljuk a Gauss–Jordan módszert, amelyre a mátrixok invertálása során is szükségünk lesz. A fejezet végén bevezetjük a determináns fogalmát.

Az ebben a fejezetben tárgyalt tananyagot a lineáris programozás, a nemlineáris programozás és a Markov-láncok tanulmányozásában fogjuk felhasználni.

2.1. Mátrixok és vektorok

Mátrixok

DEFINÍCIÓ

A **mátrix** számoknak egy téglalap alakú elrendezése.

Például az

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

számtáblázatok mind mátrixok.

Ha egy A mátrixnak m sora és n oszlopa van, akkor A-t $m \times n$-es mátrixnak nevezzük. Az $m \times n$ szorzatot a mátrix **típusának** nevezzük. Egy általános $m \times n$-es A mátrix a következőképpen írható fel:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

DEFINÍCIÓ

Az A mátrix i-edik sorában és j-edik oszlopában álló elem az A mátrix ij**-edik eleme**, és jele a_{ij}.

Például, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

akkor $a_{11} = 1$, $a_{23} = 6$ és $a_{31} = 7$.

Néha az $A = [a_{ij}]$ jelölést használjuk, azt jelezve, hogy A az a mátrix, melynek ij-edik eleme a_{ij}.

DEFINÍCIÓ

Két mátrix, $A = [a_{ij}]$ és $B = [b_{ij}]$ akkor és csak akkor **egyenlők**, ha A és B azonos típusúak, és minden i-re és j-re $a_{ij} = b_{ij}$.

Például, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad B = \begin{bmatrix} x & y \\ w & z \end{bmatrix}$$

akkor $A = B$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x = 1$, $y = 2$, $w = 3$ és $z = 4$.

Vektorok

Bármely mátrix, amelynek csak egy oszlopa van (azaz bármely $m \times 1$-es mátrix) felfogható úgy, mint egy **oszlopvektor**. Egy oszlopvektorban található sorok száma az oszlopvektor **dimenziója**. Így

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

egyrészt egy 2×1-es mátrix, másrészt egy kétdimenziós oszlopvektor. R^m-mel jelöljük az összes m-dimenziós oszlopvektor halmazát.

Hasonló módon elképzelhetünk olyan mátrixot, amelynek csak egy sora van ($1 \times n$-es mátrix), ez egy **sorvektor**. Egy sorvektor dimenziója a vektor oszlopainak száma. Így $\begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ tekinthető egy 1×3-as mátrixnak, vagy egy háromdimenziós sorvektornak. Ebben a könyvben a vektorokat vastagbetűs írásmóddal jelöljük: például $\mathbf{v}$ vektor. Egy m-dimenziós sor- vagy oszlopvektort **nullvektor**nak nevezünk (jelölése $\mathbf{0}$), ha minden eleme nulla. Így

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

kétdimenziós nullvektorok.

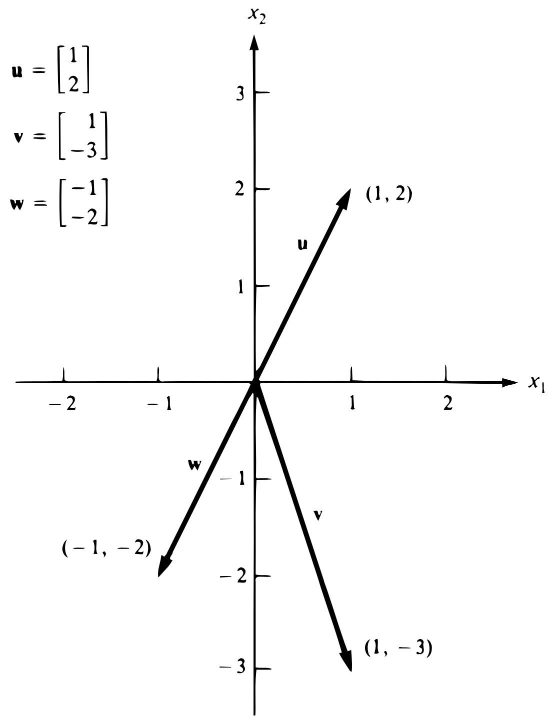
Bármely m-dimenziós vektor megfeleltethető egy irányított egyenes szakasznak az m-dimenziós térben. Például, a kétdimenziós térben (a síkon) az

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

vektorhoz az az irányított egyenes szakasz tartozik, amelyik a

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{pontot az} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ponttal köti össze.



1. ÁBRA
Vektorok, mint irányított egyenes szakaszok

Az 1. ábrán bemutatjuk az

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

vektorokat.

Két vektor skalárszorzata

Nagyon fontos művelet két vektor skaláris szorzata (vagy skalárszorzata). Két vektor skalárszorzatának definíciójához tegyük fel, hogy van egy sorvektorunk $\mathbf{u} = [u_1\ u_2\ \dots\ u_n]$, és egy oszlopvektorunk

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

ahol **u** és **v** azonos dimenziójúak. Ekkor **u** és **v** **skalárszorzata** a következő szám: $u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$.

Ahhoz, hogy két vektor skalárszorzatát képezzük, az első vektornak sorvektornak, a második vektornak oszlopvektornak kell lennie. Például, ha

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

akkor $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1(2) + 2(1) + 3(2) = 10$. A skalárszorzat ilyen kiszámítási szabálya miatt, ha

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$$

akkor $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ nincs definiálva. Ugyancsak, ha

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

akkor $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ nincs definiálva a dimenziók különbözősége miatt.

Jegyezzük meg, hogy két vektor akkor és csak akkor merőleges, ha skalárszorzatuk 0. Így például az $\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ vektorok merőlegesek. Megjegyezzük továbbá, hogy $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \| \mathbf{u} \| \, \| \mathbf{v} \| \cos\theta$, ahol $\| \mathbf{u} \|$ az $\mathbf{u}$ vektor hossza, és θ az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok által bezárt szög.

Műveletek mátrixokkal

Ebben az alfejezetben a mátrixaritmetikának azt a részét írjuk le, amelyre a könyv további fejezeteiben szükség lesz.

Mátrix szorzása skalárral

Ha adott egy A mátrix és egy c szám (szám helyett gyakran skalár-t mondunk, írunk), akkor a cA mátrixot úgy kapjuk meg, hogy A minden egyes elemét megszorozzuk c-vel. Például, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

akkor

$$3A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Ha $c = -1$, akkor az A mátrix -1-szeresét $-A$-nak írjuk.

Két mátrix összeadása

Legyen $A = [a_{ij}]$ és $B = [b_{ij}]$ két azonos típusú (mondjuk $m \times n$-es) mátrix. Akkor a $C = A + B$ összegmátrix definíció szerint az az $m \times n$-es mátrix, amelynek ij-edik eleme $a_{ij} + b_{ij}$. Így két adott A és B mátrix összegét úgy kapjuk meg, hogy rendre összeadjuk A és B megfelelő elemeit. Például, ha

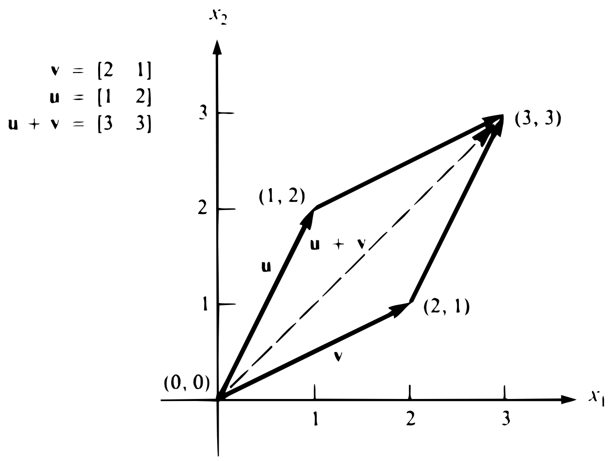
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

akkor

$$A + B = \begin{bmatrix} 1-1 & 2-2 & 3-3 \\ 0+2 & -1+1 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ez a mátrix-összeadási szabály felhasználható két azonos dimenziójú vektor összeadására is. Például, ha $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$, akkor $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix}$. Kétdimenziós vektorok összegét a parallelogramma szabály segítségével geometriailag is bemutathatjuk (lásd 2. ábra). A skalárral való szorzás és az összeadás műveleteinek felhasználásával meghatározhatjuk a szakasz fogalmát. Egy pillantás az 1. ábrára meggyőzheti

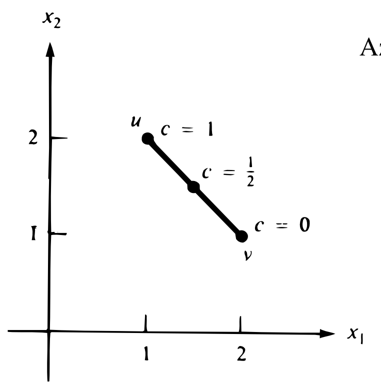
2. ÁBRA
Vektorok összeadása



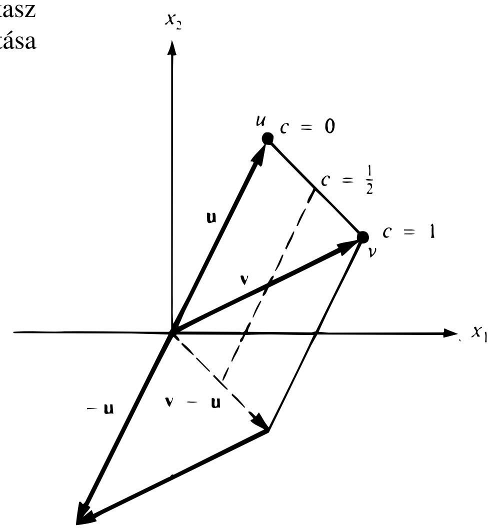
az Olvasót arról, hogy az m-dimenziós tér bármely u pontja megfeleltethető annak az m-dimenziós $\mathbf{u}$ vektornak, amelyik az origót az u ponttal köti össze. Az m-dimenziós sík két u és v pontja által meghatározott **szakasznak** nevezzük (uv szakasz) az m-dimenziós tér összes olyan pontjainak halmazát, amelyek $c\mathbf{u} + (1 - c)\mathbf{v}$ alakban állíthatók elő, ahol $0 \leq c \leq 1$ (3. ábra). Például, ha $u = (1,2)$ és $v = (2,1)$, akkor az uv szakasz olyan pontokból áll, amelyek $c[1 \quad 2] + (1 - c)[2 \quad 1] = [2 - c \quad 1 + c]$ alakban írhatók, ahol $0 \leq c \leq 1$. $c = 0$-ra és $c = 1$-re az uv szakasz végpontjait kapjuk, ha pedig $c = \frac{1}{2}$, akkor az uv szakasz $(0.5\mathbf{u} + 0.5\mathbf{v})$ alakban felírható felezőpontját kapjuk.

Ha a parallelogramma szabályt alkalmazzuk, akkor az uv szakasz úgy tekinthető, mint az $\mathbf{u} + c(\mathbf{v} - \mathbf{u})$ vektorokhoz tartozó pontok összessége, ahol $0 \leq c \leq 1$ (4. ábra). Figyeljük meg, hogy $c = 0$ esetén az $\mathbf{u}$ vektort kapjuk (az u pontnak megfelelő vektort), $c = 1$-re pedig a $\mathbf{v}$ vektort kapjuk (a v pontnak megfelelő vektort).

3. ÁBRA
Az $u = (1,2)$ és $v = (2,1)$ által meghatározott szakasz



4. ÁBRA
Az uv szakasz bemutatása



Mátrix transzponáltja

Egy adott $m \times n$-es

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

mátrix **transzponáltja** (jelölése A^T, vagy A^*) az $n \times m$-es

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

mátrix.

Az A^T tehát úgy kapható meg A-ból, hogy az A első sora lesz az A^T első oszlopa, A második sora lesz A^T második oszlopa, és így tovább. Például,

$$\text{ha} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \text{akkor} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Megfigyelhetjük, hogy $(A^T)^T = A$. Legyen $B = [1 \quad 2]$; akkor

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad (B^T)^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = B.$$

Mátrixok szorzása

Ha adott két mátrix, A és B, akkor A és B mátrixszorzata (jelölése AB) akkor és csak akkor definiálható, ha

$$\text{az } A \text{ mátrix oszlopainak száma} = \text{a } B \text{ mátrix sorainak számával.} \tag{1}$$

Tegyük fel most, hogy A-nak r oszlopa és B-nek r sora van. Ekkor valamely m és n pozitív egészekre A egy $m \times r$ típusú mátrix, B pedig egy $r \times n$ típusú mátrix.

DEFINÍCIÓ

A $C = AB$ **mátrixszorzat** egy olyan $m \times n$-es C mátrix, melynek ij-edik elemét a következőképpen határozzuk meg:

$$C\text{-nek az } ij\text{-edik eleme} = \text{az } A\ i\text{-edik sorának és a } B\ j\text{-edik oszlopának skalárszorzata} \tag{2}$$

Ha az (1) egyenlőség teljesül, akkor A minden egyes sora ugyanannyi elemet tartalmaz, mint B minden egyes oszlopa, így a (2) egyenlőségben szereplő skalárszorzat létezik. A $C = AB$ szorzatmátrixnak ugyanannyi sora lesz, mint az A mátrixnak, és ugyanannyi oszlopa, mint a B mátrixnak.

1. PÉLDA Számítsa ki a $C = AB$ szorzatot, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás Mivel A egy 2×3-as mátrix és B egy 3×2-es mátrix, így az AB szorzat értelmezhető, és C egy 2×2-es mátrix lesz. A (2) egyenlőségből

$$c_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1(1) + 1(2) + 2(1) = 5$$

$$c_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 1(1) + 1(3) + 2(2) = 8$$

$$c_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2(1) + 1(2) + 3(1) = 7$$

$$c_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 2(1) + 1(3) + 3(2) = 11$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$$

2. PÉLDA Számítsa ki AB-t, ha

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás Mivel A-nak egy oszlopa és B-nek egy sora van, $C = AB$ létezik. A (2) egyenlőség alapján tudjuk, hogy C egy 2×2-es mátrix, ahol

$$c_{11} = 3(1) = 3 \qquad c_{21} = 4(1) = 4$$
$$c_{12} = 3(2) = 6 \qquad c_{22} = 4(2) = 8$$

Így

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

3. PÉLDA Számítsa ki $D = BA$-t a 2. példában szereplő A és B-re!

Megoldás Ebben az esetben D egy 1×1-es mátrix (azaz egy skalár) lesz. A (2) egyenlőségből

$$d_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 1(3) + 2(4) = 11$$

Így $D = [11]$. Ebben a példában a mátrixszorzat egy sorvektor és egy oszlopvektor skalárszorzata.

Emlékezzünk arra, hogy ha két valós számot, a-t és b-t összeszorzunk, akkor $ab = ba$. Ez a jelenség a szorzás kommutatív tulajdonsága. A 2. és 3. példa azt mutatja, hogy mátrixszorzat esetén előfordulhat, hogy $AB \neq BA$. Mátrixok szorzása nem szükségszerűen kommutatív. (Mindazonáltal bizonyos esetben $AB = BA$ fennállhat.)

4. PÉLDA Mutassa meg, hogy AB nincs definiálva, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás Mivel A-nak két oszlopa és B-nek három sora van, így az (1) egyenlőség nem teljesül.

Nagyon sok olyan számítási művelet, amely az operációkutatásban (és a matematika más ágaiban is) gyakran előfordul, röviden és tömören kifejezhető mátrixok szorzásának segítségével. Ennek bemutatására tegyük fel, hogy egy olajfinomító cég háromféle benzint állít elő: prémium ólommentes, normál ólommentes és normál ólmozott benzint. Ezek az üzemanyagok kétféle típusú nyersolaj: az 1. nyersolaj és a 2. nyersolaj keverésével állíthatók elő. Az 1. táblázatban megadjuk, hogy az egyes nyersolajfajtákból mennyi szükséges 1-1 liter benzin előállításához.

Ezen adatok segítségével ki tudjuk számítani, hogy a kívánt benzinmennyiségek előállításához mennyi szükséges az egyes nyersolajokból. Tegyük fel például, hogy a cég 10 litert akar gyártani a prémium ólommentes benzinből, 6 litert a normál ólommentesből és 5 litert a normál ólmozottból. Ebben az esetben a nyersolajigény a következő lesz:

$$\text{szükséges mennyiség az 1. nyersolajból} = \left(\tfrac{3}{4}\right)(10) + \left(\tfrac{2}{3}\right)(6) + \left(\tfrac{1}{4}\right)5 = 12.75 \text{ liter}$$
$$\text{szükséges mennyiség a 2. nyersolajból} = \left(\tfrac{1}{4}\right)(10) + \left(\tfrac{1}{3}\right)(6) + \left(\tfrac{3}{4}\right)5 = 8.25 \text{ liter}$$

1. TÁBLÁZAT Nyersolajszükséglet 1 liter benzin előállításához, literben

	Prémium ólommentes	**Normál ólommentes**	**Normál ólmozott**
1. nyersolaj	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$
2. nyersolaj	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$

Kicsit általánosabban, vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned}
p_U &= \text{az előállított prémium ólommentes benzin mennyisége}\\
r_U &= \text{az előállított normál ólommentes benzin mennyisége}\\
r_L &= \text{az előállított normál ólmozott benzin mennyisége}\\
c_1 &= \text{szükséges mennyiség az 1. nyersolajból}\\
c_2 &= \text{szükséges mennyiség a 2. nyersolajból}
\end{aligned}$$

Így a fenti változók között az összefüggések kifejezhetők a

$$\begin{aligned}
c_1 &= \left(\tfrac{3}{4}\right) p_U + \left(\tfrac{2}{3}\right) r_U + \left(\tfrac{1}{4}\right) r_L\\
c_2 &= \left(\tfrac{1}{4}\right) p_U + \left(\tfrac{1}{3}\right) r_U + \left(\tfrac{3}{4}\right) r_L
\end{aligned}$$

alakban.

Mátrixszorzás alkalmazásával pedig az összefüggés a

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_U \\ r_U \\ r_L \end{bmatrix}$$

alakban írható.

Mátrixok szorzásának tulajdonságai

Ennek az alfejezetnek a lezárásaként még megtárgyaljuk a mátrixok szorzásának néhány fontos tulajdonságát. Feltételezzük, hogy a következőkben szereplő mátrixszorzatok mind léteznek.

1. Az AB i-edik sora egyenlő az A i-edik sorának a B-vel való szorzatával. Illusztrációként legyen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Így a 2×2-es AB mátrix második sora:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 11 \end{bmatrix}$$

Ez az eredmény megfelel az 1. példában kapott eredménynek.

2. Az AB j-edik oszlopa egyenlő az A-nak a B j-edik oszlopával való szorzatával. Így az adott A és B mátrixok esetében az első oszlop

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Az 1. és 2. tulajdonság nagyon hasznos akkor, amikor az AB mátrixnak csak egy *részét* kell kiszámítanunk.

3. A mátrixok szorzása asszociatív. Azaz $A(BC) = (AB)C$. Például legyen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ekkor $AB = [10 \quad 13]$ és $(AB)C = 10(2) + 13(1) = [33]$. Másrészt

$$BC = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix}$$

így $A(BC) = 1(7) + 2(13) = [33]$. Ebben az esetben valóban fennáll, hogy $A(BC) = (AB)C$.

4. A mátrixok szorzása disztributív. Azaz $A(B+C) = AB + AC$ és $(B+C)D = BD + CD$.

Feladatok

A csoport

1. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Számítsa ki a következőket:

(a) $-A$ **(b)** $3A$ **(c)** $A + 2B$
(d) A^T **(e)** B^T **(f)** AB
(g) BA

2. A Metropolis nevű városban csak háromféle sör kapható (1. sör, 2. sör, 3. sör). Időről időre a lakosok kipróbálják az egyik vagy a másik sört. Tegyük fel, hogy minden hónap elején az emberek a következők szerint változtatják sörivási szokásaikat:

Az 1. sört ivók 30%-a áttér a 2. sörre.
Az 1. sört ivók 20%-a áttér a 3. sörre.
A 2. sört ivók 30%-a áttér a 3. sörre.
A 3. sört ivók 30%-a áttér a 2. sörre.
A 3. sört ivók 10%-a áttér az 1. sörre.

Jelölje x_i $(i = 1, 2, 3)$ azoknak a számát, akik az i-edik sört isszák e hónap elején, és jelölje y_i azoknak a számát, akik az i-edik sört isszák a következő hónap elején. Mátrixszorzás segítségével értelmezze a következőket:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

B csoport

3. Bizonyítsa be, hogy a mátrixok szorzása asszociatív!

4. Mutassa meg, hogy bármely két A és B mátrixra igaz, hogy $(AB)^T = B^T A^T$!

2.2. Mátrixok és lineáris egyenletrendszerek

Tekintsünk egy adott

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{3}$$

lineáris egyenletrendszert. A (3) egyenlőségekben $x_1, x_2, \ldots, x_n$-et **változók**nak vagy ismeretleneknek nevezzük, az a_{ij}-k és b_i-k a **konstansok**. Egy ilyen egyenletrendszert, mint a (3) alatti, n változós m egyenletből álló lineáris egyenletrendszernek nevezünk.

DEFINÍCIÓ

Egy n-változós, m egyenletből álló lineáris egyenletrendszer **megoldás**ának nevezzük az ismeretlenek értékeinek azon halmazát, amelyek kielégítik a rendszer mind az m egyenletét.

Ahhoz, hogy a lineáris programozást megértsük, sok mindent kell tudnunk a lineáris egyenletrendszerek megoldásainak tulajdonságairól. Erre gondolván alaposan tanulmányozzuk az ilyen rendszereket.

A (3) egyenletrendszer egy lehetséges megoldását az az n-elemű $\mathbf{x}$ oszlopvektor jelöli, amelyben az $\mathbf{x}$ i-edik eleme x_i. A következő példa szemlélteti a lineáris egyenletrendszer megoldásának fogalmát.

5. PÉLDA Mutassa meg, hogy

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

egy megoldása az

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

lineáris egyenletrendszernek, és az

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

nem megoldása a (4) egyenletrendszernek!

Megoldás Annak belátására, hogy

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

megoldása a (4) egyenletrendszernek, helyettesítsünk $x_1 = 1$-et és $x_2 = 2$-t mindkét egyenletbe, és ellenőrizzük, hogy az egyenlőségek fennállnak-e: $1 + 2(2) = 5$ és $2(1) - 2 = 0$. Az

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vektor nem megoldása (4)-nek, mert $x_1 = 3$ és $x_2 = 1$ nem elégíti ki a $2x_1 - x_2 = 0$ egyenletet.

Ha mátrix-jelölést alkalmazunk, sokkal egyszerűbb formában tudjuk felírni magát az egyenletrendszert és a megoldást is. Most megmutatjuk, hogyan írható fel a (3) egyenletrendszer mátrixok segítségével. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Így a (3) egyenletrendszer

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{5}$$

alakban írható. Figyeljük meg, hogy az (5) egyenlet mindkét oldala $m \times 1$-es mátrix (vagy m-elemű oszlopvektor). Ahhoz, hogy az $A\mathbf{x}$ mátrix egyenlő legyen a $\mathbf{b}$ mátrixszal (illetve az $A\mathbf{x}$ oszlopvektor egyenlő legyen a $\mathbf{b}$ vektorral), megfelelő elemeiknek egyenlőknek kell lenniök. Az $A\mathbf{x}$ első eleme nem más, mint A első sorának $\mathbf{x}$-szel képezett skalárszorzata. Ez a következőképpen írható:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n$$

Ennek meg kell egyeznie $\mathbf{b}$ első elemével (azaz b_1-gyel). Így (5) magában foglalja azt az állítást, hogy $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$. Ez nem más, mint a (3) rendszer első egyenlete. Hasonlóan gondolkozva láthatjuk, hogy az (5) egyenlőség tartalmazza azt is, hogy A i-edik sorának az $\mathbf{x}$-szel való skalárszorzata b_i-vel kell hogy egyenlő legyen, ami nem más, mint a (3) rendszer i-edik egyenlősége. Ez a gondolatmenetünk azt mutatja, hogy (3) és (5) ugyanannak a lineáris egyenletrendszernek két különböző leírási változata. Azt mondjuk, hogy (5) nem más, mint a (3) **mátrix formája**. Például a (4) egyenletrendszer mátrix formája:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Néha még az (5) írásmódot is rövidítjük, így:

$$A|\mathbf{b} \tag{6}$$

Amennyiben A egy $m \times n$-es mátrix, akkor feltételezzük, hogy a (6)-ban szereplő változók $x_1, x_2, \dots, x_n$. Így (6) is egy felírási módja a (3)-nak. Például az

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

mátrix jelöli tömören az

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszert.

Feladat

A csoport

1. Írja fel a következő egyenletrendszert mátrix jelölés felhasználásával két különböző módon:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 &= 8 \end{aligned}$$

2.3. A lineáris egyenletrendszerek megoldásának Gauss–Jordan módszere

Ebben az alfejezetben megtanulunk egy igen hatékony módszert (a Gauss–Jordan módszert) a lineáris egyenletrendszerek megoldására. A Gauss–Jordan módszer segítségével megmutatjuk, hogy bármely lineáris egyenletrendszer esetében a következő három eset egyike állhat fenn:

1. eset A rendszernek nincs megoldása.

2. eset A rendszernek egyértelmű megoldása van.

3. eset A rendszernek végtelen sok megoldása van.

A Gauss–Jordan módszer azért is nagyon fontos, mert a megoldás során alkalmazott lépések többségét akkor is használhatjuk, amikor lineáris programozási problémákat oldunk meg a szimplex módszer segítségével (lásd 4. fejezet).

Elemi műveletek sorokkal

Mielőtt ténylegesen hozzákezdünk a Gauss–Jordan módszerhez, definiálnunk kell az **elemi sorművelet** (esm) fogalmát. Egy esm egy adott A mátrixot egy A' mátrix-ba visz át a következő 3 művelet egyikének segítségével.

1. típusú esm

A'-t úgy kapjuk, hogy A valamelyik sorát egy nemnulla számmal megszorozzuk. Például, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

akkor egy 1. típusú esm, amelyik A második sorát 3-mal szorozza, az

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 9 & 15 & 18 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrixot adja.

2. típusú esm

Induljunk el úgy, hogy A valamelyik sorát (mondjuk, az i-ediket) megszorozzuk egy c nemnulla skalárral. Valamely $j \neq i$-re legyen az A' j-edik sora egyenlő c-szer az A i-edik sora plusz az A j-edik sora, és legyen az A' összes többi sora változatlanul az A összes többi sorával egyenlő. Például szorozzuk meg A második sorát 4-gyel, és helyettesítsük az A harmadik sorát a $4(A \text{ második sora}) + (A \text{ harmadik sora})$ kifejezéssel. Így az A' harmadik sora:

$$4\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 13 & 22 & 27 \end{bmatrix}$$

és

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 13 & 22 & 27 \end{bmatrix}$$

3. típusú esm

Felcseréljük A két tetszőleges sorát. Például, ha az első és a harmadik sort felcseréljük, akkor azt kapjuk, hogy:

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Az 1. és 2. típusú esm-ek gyakorlatilag a lineáris egyenletrendszerek megoldásánál alkalmazott műveleteket formalizálják. Az

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 7 \end{aligned} \tag{7}$$

egyenletrendszer megoldásánál például a következőképpen dolgozunk. Először a (7) alatti második egyenlet helyébe beírjuk az első egyenlet -2-szeresének és a második egyenletnek az összegét. Ez a következő egyenletrendszert adja:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 2x_2 &= 3 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Ezután a (7.1) alatti második egyenletet szorozzuk $\frac{1}{2}$-del, így az

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_2 &= \tfrac{3}{2} \end{aligned} \tag{7.2}$$

egyenletrendszert kapjuk. Végül, a (7.2) alatti egyenletrendszert úgy változtatjuk meg, hogy a (7.2) második egyenletének -1-szeresét hozzáadjuk az első egyenlethez. Így kapjuk azt, hogy

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{2} \\ x_2 &= \tfrac{3}{2} \end{aligned} \tag{7.3}$$

A (7.3) egyenletrendszernek egyértelmű megoldása van, $x_1 = \frac{1}{2}$ és $x_2 = \frac{3}{2}$. A (7), (7.1), (7.2) és (7.3) egyenletrendszerek *ekvivalensek* abban az értelemben, hogy mindegyiknek ugyanaz a megoldáshalmaza. Ez azt jelenti, hogy $x_1 = \frac{1}{2}$ és $x_2 = \frac{3}{2}$ egyúttal az eredeti, (7) alatti egyenletrendszernek az egyértelmű megoldása.

Most az előzőekben alkalmazott technikát végigvesszük a (7) egyenletrendszer megoldására az $(A|\mathbf{b})$ kibővített mátrix formában. Így látni fogjuk, hogy a (7) megoldásánál alkalmazott lépések valójában az $A|\mathbf{b}$-re vonatkozó 1. és 2. típusú esm-ek. Kezdjük a (7) rendszer kibővített változatával:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 7 \end{array}\right] \tag{7'}$$

Most hajtsunk végre egy 2. típusú esm-et úgy, hogy (7′) második sora helyébe beírjuk: (-2) (7′) első sora) + (7′ második sora) kifejezést, azaz (7′)-ben az első sort változatlanul hagyjuk, a második sorhoz pedig hozzáadjuk az első sor -2-szeresét:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{array}\right] \tag{7.1'}$$

ami nem más, mint (7.1) kibővített formája. Ezután a (7.1′) második sorát $\frac{1}{2}$-del szorozzuk (1. típusú esm), így a következőt kapjuk:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right] \tag{7.2'}$$

Ez nem más, mint (7.2) kibővített alakban. Végül egy 2. típusú esm segítségével (7.2′) első sora helyébe beírjuk a második sor -1-szeresének és az első sornak az összegét. Eredményünk

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right] \tag{7.3′}$$

és ez a (7.3) kibővített alakja. Ezt lineáris egyenletrendszerré visszaalakítva megkapjuk az $x_1 = \frac{1}{2}$ és $x_2 = \frac{3}{2}$ eredményt, ami azonos (7.3)-mal.

Megoldás Gauss–Jordan módszerrel

Az előző alfejezetben tárgyaltak azt mutatják, hogy ha az $A'|\mathbf{b}'$ mátrix az $A|\mathbf{b}$-ből egy esm-mel jött létre, akkor az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ és az $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ rendszerek ekvivalensek. Így az esm műveletek bármely, az $A|\mathbf{b}$ kibővített mátrixon végrehajtott sorozata az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszerrel ekvivalens lineáris egyenletrendszert szolgáltat.

A Gauss–Jordan módszer úgy oldja meg a lineáris egyenletrendszert, hogy az esm műveleteket egy bizonyos rendszerben alkalmazza. Illusztrációként keressük a következő lineáris egyenletrendszer megoldását:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned} \tag{8}$$

A kibővített alak

$$A|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right] \tag{8′}$$

Tegyük fel, hogy (8′)-n az esm-k bizonyos sorozatát végrehajtva (8′)-t a következő alakra tudtuk hozni:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \tag{9′}$$

Itt jegyezzük meg, hogy amikor egy esm-et végrehajtunk egy egyenletrendszeren, akkor ugyanazt az eredményt kapjuk, mintha a lineáris egyenletrendszer mátrix formájának mindkét oldalát egy bizonyos mátrixszal szoroztuk volna. Ez a magyarázata annak, hogy az esm-ek miért nem változtatják meg az egyenletrendszer megoldáshalmazát.

A (9′) alatti mátrix a következő lineáris egyenletrendszerhez tartozik:

$$\begin{aligned} x_1 \phantom{{}+x_2+x_3} &= 1 \\ x_2 \phantom{{}+x_3} &= 2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned} \tag{9}$$

A (9) egyenletrendszer egyértelmű megoldása $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$. Mivel (9′)-t a (8′)-ből esm-ek egymásutánjával kaptuk, tudjuk, hogy (8) és (9) ekvivalens lineáris egyenletrendszerek. Így $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ egyúttal a (8) egyenletrendszer egyértelmű megoldása is. Most megmutatjuk, hogy hogyan kell az esm-eket használni ahhoz, hogy egy viszonylag bonyolult egyenletrendszert, mint a (8), egy viszonylag egyszerű egyenletrendszerré tudjunk változtatni, mint amilyen (9). Ez a Gauss–Jordan módszer lényege.

Azzal kezdjük hogy esm-ek segítségével a ($8'$) első oszlopát

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

alakra hozzuk. Ezután esm-ek segítségével a kapott mátrix második oszlopát

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

alakra hozzuk. Végül, esm-ek segítségével a kapott mátrix harmadik oszlopát

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

alakra hozzuk. Végeredményül a ($9'$) alatti alakhoz jutunk. Most részletesen is bemutatjuk a Gauss–Jordan módszert a (8) egyenletrendszer megoldására. Először is, egy 1. típusú esm segítségével a ($8'$) első sorának első elemét 1-re változtatjuk. Ezután az első sor skalárszorzatát hozzáadjuk először a második sorhoz, azután a harmadik sorhoz (ezek 2. típusú esm-ek). Ezeknek a 2. típusú esm-eknek az a céljuk, hogy az első oszlop többi elemét nullává változtassuk. Az esm-ek következő sorozata bemutatja, hogyan érjük el ezeket a célokat.

1. lépés Megszorozzuk ($8'$) első sorát $\frac{1}{2}$-del. Ez az 1. típusú esm a következőt adja:

$$A_1|\mathbf{b}_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

2. lépés Az így kapott $A_1|\mathbf{b}_1$ második sora helyébe a következőt írjuk: $(-2)(A_1|\mathbf{b}_1$ első sora$) + (A_1|\mathbf{b}_1$ második sora). E 2. típusú esm eredménye:

$$A_2|\mathbf{b}_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

3. lépés Az $A_2|\mathbf{b}_2$ harmadik sora helyébe $(-1)(A_2|\mathbf{b}_2$ első sora$) + (A_2|_2$ harmadik sora) kerül. Ennek a 2. típusú esm-nek az eredménye:

$$A_3|\mathbf{b}_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Ezzel a ($8'$) első oszlopát

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

alakra hoztuk.

Ezzel az eljárással biztosítottuk, hogy az x_1 változó csak egy egyenletben szerepel és ott az együtthatója 1. Ezután az $A_3|\mathbf{b}_3$ második oszlopát alakítjuk át úgy, hogy az

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

legyen.

Azzal kezdjük, hogy egy 1. típusú esm-mel az $A_3|\mathbf{b}_3$ második oszlopának második elemét 1-gyé alakítjuk át. Ezután az új második sort és 2. típusú esm-eket alkalmazva a második oszlop többi elemét nullává alakítjuk. A 4–6. lépések segítségével érjük el a kívánt célt.

4. lépés Az $A_3|\mathbf{b}_3$ második sorát $-\frac{1}{3}$-dal szorozzuk. Ez egy 1. típusú esm, eredménye

$$A_4|\mathbf{b}_4 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

5. lépés Írjuk az $A_4|\mathbf{b}_4$ első sorának helyébe a $(-1)(A_4|\mathbf{b}_4$ második sora$) + (A_4|\mathbf{b}_4$ első sora$)$ kifejezést. Ez egy 2. típusú esm, eredménye:

$$A_5|\mathbf{b}_5 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

6. lépés Az $A_5|\mathbf{b}_5$ harmadik sorának helyébe írjuk be a $2(A_5|\mathbf{b}_5$ második sora$) + (A_5|\mathbf{b}_5$ harmadik sora$)$ kifejezést. A 2. típusú esm eredménye

$$A_6|\mathbf{b}_6 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{5}{2} \end{array}\right]$$

Ezzel a második oszlopot

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

alakra hoztuk.

Figyeljük meg, hogy a második oszlop átalakítása nem változtatta meg az első oszlopot. A Gauss–Jordan módszer befejezéséhez az $A_6|\mathbf{b}_6$ harmadik oszlopát

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

alakúvá kell tennünk. Először egy 1. típusú esm-et alkalmazunk ahhoz, hogy $A_6|\mathbf{b}_6$ harmadik sorának harmadik eleme 1 legyen. Ezután 2. típusú esm-eket használunk arra, hogy a harmadik oszlop többi eleme 0 legyen. A 7–9. lépések mutatják a teendőket.

7. lépés Az $A_6|\mathbf{b}_6$ harmadik sorát megszorozzuk $\frac{6}{5}$-del. Ez 1. típusú esm, eredménye

$$A_7|\mathbf{b}_7 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

8. lépés $A_7|\mathbf{b}_7$ első sora helyébe $(-\frac{5}{6})$ ($A_7|\mathbf{b}_7$ harmadik sora) + ($A_7|\mathbf{b}_7$ első sora) kerül. A 2. típusú esm eredménye

$$A_8|\mathbf{b}_8 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

9. lépés $A_8|\mathbf{b}_8$ második sorának helyébe $(\frac{1}{3})$($A_8|\mathbf{b}_8$ harmadik sora) + ($A_8|\mathbf{b}_8$ második sora) kerül. Ennek a 2. típusú esm-nek az eredménye:

$$A_9|\mathbf{b}_9 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$A_9|\mathbf{b}_9$ az

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &= 1 \\ x_2 \quad &= 2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned} \tag{9}$$

egyenletrendszert képviseli.
Így (9)-nek egyértelmű megoldása van: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$. Mivel (9)-et a (8)-ból esm-ek egy sorozatával nyertük, a (8) egyértelmű megoldásának is az $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ értékeknek kell lenniük.

Az olvasó elgondolkozhatott azon, vajon miért definiáltuk a 3. típusú esm-eket (sorok cseréje). Bemutatunk egy olyan példát, ahol a 3. típusú esm-re szükség lehet. Tegyük fel, hogy meg szeretnénk oldani a

$$\begin{aligned} 2x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + \ x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + \ x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned} \tag{10}$$

egyenletrendszert. A Gauss–Jordan módszerrel való megoldáshoz írjuk fel a kibővített mátrixot:

$$A|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Az első sor első helyén álló 0 azt jelenti, hogy 1. típusú esm-mel nem tudunk 1-et előállítani az első sor első elemének a helyén. Viszont, ha felcseréljük az első és második sort (3. típusú esm), akkor a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \tag{10$'$}$$

mátrixot kapjuk. Így már folytathatjuk a Gauss–Jordan módszert a szokásos módon.

Speciális esetek: nincs megoldás, vagy végtelen sok megoldás van

Néhány lineáris egyenletrendszernek nincs megoldása, néhánynak azonban végtelen sok megoldása van. A következő két példa bemutatja, hogy a Gauss–Jordan módszerrel hogyan ismerhetjük fel ezeket az eseteket.

6. PÉLDA Keressük a következő lineáris egyenletrendszer összes megoldását:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 4 \end{aligned} \tag{11}$$

Megoldás Alkalmazzuk a Gauss–Jordan módszert az

$$A|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

mátrixra! Kezdjük azzal, hogy a második sor helyébe a $(-2)(A|\mathbf{b}$ első sora$) + (A|\mathbf{b}$ második sora$)$ kerül. Ennek a 2. típusú esm-nek az eredménye:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right] \tag{12}$$

Most szeretnénk a (12) második oszlopát átalakítani úgy, hogy

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

legyen, ez azonban nem lehetséges. A (12) rendszer ekvivalens a következő egyenletrendszerrel:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 0x_1 + 0x_2 &= -2 \end{aligned} \tag{12'}$$

Bármilyen értékeket adnánk x_1-nek és x_2-nek, a (12′) második egyenlete nem elégíthető ki. Így a (12′)-nek nincs megoldása. Mivel (12′)-t a (11)-ből esm-ek segítségével kaptuk, ezért a (11)-nek sincs megoldása.

A 6. példa a következő elvet illusztrálja: *Ha a Gauss–Jordan módszert alkalmazzuk egy lineáris egyenletrendszer megoldására, és közben egy* $[0 \quad 0 \quad \dots \quad 0|c]$, $(c \neq 0)$ *alakú sorhoz jutunk, akkor az eredeti lineáris egyenletrendszernek nincs megoldása*.

7. PÉLDA Alkalmazzuk a Gauss–Jordan módszert a következő lineáris egyenletrendszerre:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned} \tag{13}$$

Megoldás A (13) kibővített formája

$$A|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Kezdjük azzal, hogy $A|\mathbf{b}$ harmadik sorának helyére (mivel a második sor első eleme már eleve 0) a $(-1)(A|\mathbf{b}$ első sora$) + (A|\mathbf{b}$ harmadik sora$)$ kifejezést írjuk. Ennek a 2. típusú esm-nek az eredménye:

$$A_1|\mathbf{b}_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \tag{14}$$

Ezután $A_1|\mathbf{b}_1$ első sorát változtatjuk: $(-1)(A_1|\mathbf{b}_1$ második sora$) + (A_1|\mathbf{b}_1$ első sora$)$ kerül a helyébe. Ez egy 2. típusú esm, melynek eredménye

$$A_2|\mathbf{b}_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Most $A_2|\mathbf{b}_2$ harmadik sora helyére a (-1) $(A_2|\mathbf{b}_2$ második sora$) + (A_2|\mathbf{b}_2$ harmadik sora$)$ kifejezést írjuk. Ennek a 2. típusú esm-nek az eredménye:

$$A_3|\mathbf{b}_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Most szeretnénk $A_3|\mathbf{b}_3$ harmadik oszlopát a következő formára hozni

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ez azonban nem lehetséges. Az $A_3|\mathbf{b}_3$ a következő lineáris egyenletrendszernek felel meg:

$$x_1 \qquad - \ x_3 = -2 \tag{14.1}$$

$$x_2 + \ x_3 = 3 \tag{14.2}$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \tag{14.3}$$

Tegyük fel, hogy x_3-ra kijelölünk egy tetszőleges k értéket. Ebben az esetben (14.1) teljesül, ha $x_1 - k = -2$, azaz $x_1 = k - 2$. Hasonló módon láthatjuk, hogy (14.2) teljesül, ha $x_2 + k = 3$, azaz $x_2 = 3 - k$. Természetesen a (14.3)-at bármely x_1, x_2, x_3 értékek kielégítik. Így, tetszőleges k számra $x_1 = k - 2$, $x_2 = 3 - k$, $x_3 = k$ egy megoldása (14)-nek. Ezáltal (14)-nek végtelen sok megoldása van (minden egyes k értékhez egy-egy). Mivel (14)-et a (13)-ból esm-ek segítségével kaptuk, (13)-nak is végtelen sok megoldása van. Azokkal a lineáris egyenletrendszerekkel, amelyeknek végtelen sok megoldásuk van, még egyszer, formálisabban fogunk foglalkozni, előbb azonban összefoglaljuk a Gauss–Jordan módszert.

A Gauss–Jordan módszer összefoglalása

1. lépés Az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ megoldásához írjuk fel az $A|\mathbf{b}$ kibővített mátrixot.

2. lépés Bármelyik helyzetben vagyunk, definiáljunk egy aktuális sort, aktuális oszlopot és aktuális elemet (az az elem, amelyik az aktuális sor aktuális oszlopában áll). Kezdjük az első sorral mint aktuális sor, az első oszloppal mint aktuális oszlop, és a_{11} legyen az aktuális elem. (**a**) Ha a_{11} (az aktuális elem) nem nulla, akkor alkalmazzunk esm-eket úgy, hogy az első oszlopot (az aktuális oszlop)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

alakra hozzuk. Ezután válasszuk ki a következő aktuális sort, oszlopot és elemet úgy, hogy egy sorral lejjebb és egy oszloppal jobbra lépünk, majd folytassuk a harmadik lépéssel. (**b**) Ha a_{11} (az aktuális elem) nulla, akkor alkalmazzunk egy 3. típusú esm-et, amelyben az aktuális sor az egyik szereplő, a másik pedig egy olyan sor, amelynek az aktuális oszlopban van nemnulla eleme. Alkalmazzunk esm-eket úgy, hogy az első oszlopból

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

legyen. Ezután jelöljük ki az új aktuális sort, oszlopot és elemet úgy, hogy egy sorral lejjebb és egy oszloppal jobbra lépünk. Lépjünk ezután a harmadik lépésre. (**c**) Amennyiben az első oszlopban csak nullák állnak, keressünk egy új aktuális oszlopot és elemet úgy, hogy egy oszloppal jobbra megyünk. Ezután a harmadik lépés következik.

3. lépés (**a**) Ha az új aktuális elem nem nulla, akkor esm-ek segítségével alakítsuk át 1-gyé, és az aktuális oszlop többi elemét nullává. Ha ezzel készen vagyunk, keressünk egy új aktuális sort, oszlopot és elemet. Ha ez lehetetlen, akkor álljunk meg. Ha lehetséges, akkor ismételjük a harmadik lépést. (**b**) Ha az aktuális elem nulla, akkor egy 3. típusú esm-et hajtsunk végre az aktuális és egy másik olyan sorral, amelyiknek az aktuális oszlopban nem nulla eleme van. Ezután esm-ek alkalmazásával változtassuk az aktuális elemet 1-gyé és az aktuális oszlop többi elemét nullává. Amikor ez megtörtént, válasszunk új aktuális sort, oszlopot és elemet. Ha ez lehetetlen, álljunk meg. Ha lehetséges, ismételjük a harmadik lépést. (**c**) Ha az aktuális oszlopnak csak nulla elemei vannak az aktuális sor alatt, váltsunk át új aktuális oszlopra és elemre, és ismételjük a harmadik lépést. Ha ez lehetetlen, álljunk meg. Ez az eljárás néha azzal jár, hogy átlépünk egy vagy több oszlopot anélkül, hogy megváltoztatnánk őket (lásd 8. feladat).

4. lépés A harmadik lépés befejezése után írjuk le az $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ egyenletrendszert, amelyik az $A'|\mathbf{b}'$ mátrixhoz tartozik. Így az $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ és az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszereknek ugyanaz a megoldáshalmaza.

Bázisváltozók és lineáris egyenletrendszerek megoldása

Ahhoz, hogy megfelelően leírhassuk az $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ (és az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$) rendszer megoldásait, be kell vezetnünk a bázisváltozó és a nembázis-változó fogalmakat.

DEFINÍCIÓ

Lineáris egyenletrendszerben **bázisváltozónak** nevezzük azt a változót, amelynek az egyik egyenletben 1 az együtthatója, az összes többi egyenletben pedig 0 az együtthatója.

DEFINÍCIÓ

Bármely változót, amelyik nem bázisváltozó, **nembázis-változónak** nevezünk.

Legyen BV az $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ rendszer bázisváltozóinak halmaza, és NBV az $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ rendszer nembázis-változóinak halmaza. Az $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ rendszer megoldásainak jellege attól függ, hogy a következő esetek közül melyik fordul elő.

1. eset Az $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ rendszernek van legalább egy $[0 \quad 0 \quad \dots \quad 0|c], (c \neq 0)$ alakú sora. Ilyenkor az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ rendszernek nincs megoldása (emlékeztetünk a 6. példára). Az 1. eset egy példájaként tegyük fel, hogy a Gauss–Jordan módszernek az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ rendszerre való alkalmazásakor a következő mátrixhoz jutottunk:

$$A'|\mathbf{b}' = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Ebben az esetben az $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ (és egyúttal az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$) rendszernek nincs megoldása.

2. eset Tegyük fel, hogy az 1. eset nem áll fenn és a nembázis-változók NBV halmaza üres. Ilyenkor az $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ (és egyúttal az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$) rendszernek egyértelmű megoldása van. Ennek bemutatására emlékeztetünk a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldására. A Gauss–Jordan módszerrel az

$$A'|\mathbf{b}' = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

mátrixhoz jutottunk. Ebben az esetben $BV = \{x_1, x_2, x_3\}$ és NBV üres halmaz. Így az $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ (és $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$) egyértelmű megoldása $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

3. eset Tegyük fel, hogy az 1. eset nem áll fenn és NBV nem üres halmaz. Ilyenkor az $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ (és $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$) rendszernek végtelen sok megoldása van. Ha a végtelen sok megoldást meg akarjuk kapni, akkor először is mindegyik nembázis-változónak kijelölünk valamely tetszőleges értéket. Ezután a nembázis-változókkal kifejezzük a bázisváltozókat. Például tegyük fel, hogy

$$A'|\mathbf{b}' = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{15}$$

Mivel az 1. eset nem áll fenn, és $BV = \{x_1, x_2, x_3\}$ valamint $NBV = \{x_4, x_5\}$, a 3. esettel van dolgunk: $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$-nek (és $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$-nek) végtelen sok megoldása lesz. Nézzük meg, milyenek ezek a megoldások! Írjuk le $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$-t:

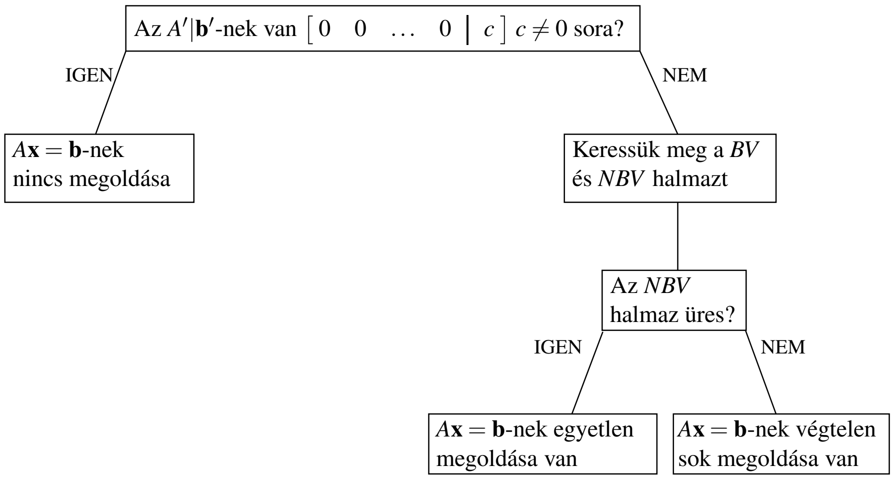
$$x_1 \qquad\qquad + x_4 + x_5 = 3 \tag{15.1}$$

$$x_2 \qquad + 2x_4 \qquad = 2 \tag{15.2}$$

$$x_3 \qquad + x_5 = 1 \tag{15.3}$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0 \tag{15.4}$$

5. ÁBRA
Szemléltetés: a Gauss–Jordan módszer alkalmazása lineáris egyenletrendszerek megoldására



Most adjunk az (x_4 és x_5) nembázis-változóknak egy-egy tetszőleges értéket, legyen $x_4 = c$ és $x_5 = k$. A (15.1)-ből: $x_1 = 3 - c - k$. A (15.2)-ből láthatjuk, hogy $x_2 = 2 - 2c$. A (15.3)-ból $x_3 = 1 - k$. Mivel (15.4) a változóknak minden értékére fennáll, $x_1 = 3 - c - k$, $x_2 = 2 - 2c$, $x_3 = 1 - k$, $x_4 = c$, és $x_5 = k$ lesz az $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ (és $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$) megoldása, c és k bármely értékeire.

A Gauss–Jordan módszerrel foglalkozó, az eddigiekben tárgyalt ismeretek jól összefoglalhatók az 5. ábrában.

Azért tárgyaltuk ilyen részletesen a Gauss–Jordan módszert, mert a lineáris programozási feladatok megoldása során a 3. eset példái (lineáris egyenletrendszerek végtelen sok megoldással) rendszeresen előfordulnak majd. Mivel ha a Gauss–Jordan módszert alkalmazzuk, akkor a végeredménynek az 1–3. esetek valamelyikének kell lennie, megmutattuk, hogy bármelyik lineáris egyenletrendszernek vagy nincs megoldása, vagy egyértelmű megoldása van, vagy végtelen sok megoldása van.

Feladatok

A csoport

Alkalmazza a Gauss–Jordan módszert annak eldöntésére, hogy a következő lineáris egyenletrendszereknek nincs megoldása, egyértelmű megoldása van, vagy végtelen sok megoldása van! Keresse meg a megoldásokat (amennyiben léteznek)!

1.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} + x_4 &= 3 \\ x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 8 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} &= 6 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 4 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} &= 4 \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} x_1 \phantom{{}+x_2+x_3} + x_4 &= 5 \\ x_2 + 2x_4 &= 5 \\ x_3 + 0.5x_4 &= 1 \\ 2x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} 2x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

7.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{{}+2x_3} &= 2 \\ -x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} &= 1 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &= 2 \\ x_4 &= 3 \end{aligned}$$

B csoport

9. Tegyük fel, hogy az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszerben több változó van, mint egyenlet. Mutassa meg, hogy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$-nek nem lehet egyértelmű megoldása!

2.4. Lineáris függetlenség és lineáris összefüggőség[1]

Ebben a részben a vektorok lineárisan független rendszerének fogalmát, a lineárisan összefüggő rendszer fogalmát, valamint a mátrixok rangját tárgyaljuk. Ezek a fogalmak többek között a mátrixok inverzének tanulmányozásához szükségesek.

Mielőtt a lineárisan független vektorhalmazt (vagy vektorrendszert) definiálnánk, meg kell ismerkednünk a vektorok lineáris kombinációjával. Legyen $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ azonos dimenziójú sorvektorok halmaza.

DEFINÍCIÓ

A V-ben szereplő vektorok **lineáris kombinációjának** nevezzük a $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$ alakban felírható bármely vektort, ahol $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tetszőleges skalárok.

Például, ha $V = \{[1 \quad 2], [2 \quad 1]\}$, akkor

$$\begin{aligned} 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 &= 2([1 \quad 2]) - [2 \quad 1] = [0 \quad 3] \\ \mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 &= [1 \quad 2] + 3([2 \quad 1]) = [7 \quad 5] \\ 0\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 &= [0 \quad 0] + 3([2 \quad 1]) = [6 \quad 3] \end{aligned}$$

mind a V-beli vektorok lineáris kombinációi. A fenti definíció ugyanígy alkalmazható oszlopvektorokra is.

Tegyük fel, hogy adott egy $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ m-dimenziós vektorrendszer. Legyen $\mathbf{0} = [0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0]$ az m-dimenziós $\mathbf{0}$ vektor. Annak eldöntésére, hogy V egy lineárisan független vektorrendszer-e, megpróbáljuk a V vektorainak egy olyan lineáris kombinációját megtalálni, amely a $\mathbf{0}$ vektort adja eredményül. Világos, hogy $0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_k$ a V vektorainak egy olyan lineáris kombinációja, amelyik a $\mathbf{0}$-t adja eredményül. A V vektorainak olyan lineáris kombinációját, amelyben $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$, triviális lineáris kombinációnak nevezzük. E fogalom segítségével már definiálhatjuk a lineárisan független és a lineárisan összefüggő vektorrendszereket.

DEFINÍCIÓ

m-dimenziós vektorok egy V halmazát (rendszerét) **lineárisan függetlennek** nevezzük, ha az egyetlen lineáris kombináció, amelyik V vektoraival előállítja a nullvektort, a triviális lineáris kombináció.

DEFINÍCIÓ

m-dimenziós vektorok V rendszere **lineárisan összefüggő**, ha a nullvektor nemtriviális lineáris kombinációként is előállítható a V vektoraival.

A következő példák megkönnyítik a definíciók megértését.

[1] Ezen alfejezet kihagyása nem szakítja meg a tárgyalás folytonosságát.

8. PÉLDA Mutassuk meg, hogy minden olyan vektorrendszer, amelyik tartalmazza a nullvektort, összefüggő rendszer!

Megoldás Illusztrációként megmutatjuk, hogy ha $V = \{[0 \quad 0], [1 \quad 0], [0 \quad 1]\}$, akkor V lineárisan összefüggő. Legyen például $c_1 \neq 0$, ezzel $c_1([0 \quad 0]) + 0([1 \quad 0]) + 0([0 \quad 1]) = [0 \quad 0]$. Ez pedig a V vektorainak egy olyan nemtriviális lineáris kombinációja, amelyik a nullvektort állítja elő.

9. PÉLDA Mutassuk meg, hogy a $V = \{[1 \quad 0], [0 \quad 1]\}$ egy lineárisan független vektorrendszer!

Megoldás Keresünk egy olyan nemtriviális lineáris kombinációt, amelyik a V vektorai segítségével a $\mathbf{0}$-t állítja elő. Ehhez olyan c_1 és c_2 skalárokat (melyeknek legalább az egyike nem nulla) kell találnunk, amelyek kielégítik a $c_1([1 \quad 0]) + c_2([0 \quad 1]) = [0 \quad 0]$ egyenlőséget. Így, mint látható, c_1-re és c_2-re $[c_1 \quad c_2] = [0 \quad 0]$ kell, hogy legyen. Ez viszont azt mutatja, hogy $c_1 = c_2 = 0$. Az egyetlen lineáris kombináció tehát, amelyik a V vektoraival előállítja a $\mathbf{0}$-t, a triviális lineáris kombináció. Ezáltal V egy lineárisan független vektorrendszer.

10. PÉLDA Mutassuk meg, hogy $V = \{[1 \quad 2], [2 \quad 4]\}$ egy lineárisan összefüggő vektorrendszer!

Megoldás Mivel $2([1 \quad 2]) - 1([2 \quad 4]) = [0 \quad 0]$, ezért létezik a vektoroknak olyan nemtriviális lineáris kombinációja, amelyik előállítja a $\mathbf{0}$-t $c_1 = 2$ és $c_2 = -1$ együtthatókkal. Így V egy lineárisan összefüggő vektorrendszer.

Gondoljuk meg, mit is jelent az, hogy egy vektorrendszer lineárisan összefüggő! Ahhoz, hogy megértsük a lineáris függőség fogalmát, figyeljük meg, hogy egy V vektorrendszer (amelyik nem tartalmazza a nullvektort) akkor és csak akkor lineárisan összefüggő, ha V valamelyik (vagy néhány) vektora felírható a V többi vektorainak nemtriviális lineáris kombinációjaként (lásd a 9. feladatot az alfejezet végén). Például a 10. példában $[2 \quad 4] = 2([1 \quad 2])$. Így, ha egy V vektorrendszer lineárisan összefüggő, akkor a V vektorai bizonyos értelemben nem mind „különböző” vektorok. A „különbözőség” alatt azt értjük, hogy V valamelyik vektora által kijelölt irány nem fejezhető ki úgy, hogy V más vektorainak többszöröseit összeadjuk. Például két dimenzióban könnyen kimutatható, hogy két vektor akkor és csak akkor lineárisan összefüggő, ha ugyanazon az egyenesen fekszenek (lásd a 6. ábrát).

Mátrixok rangja

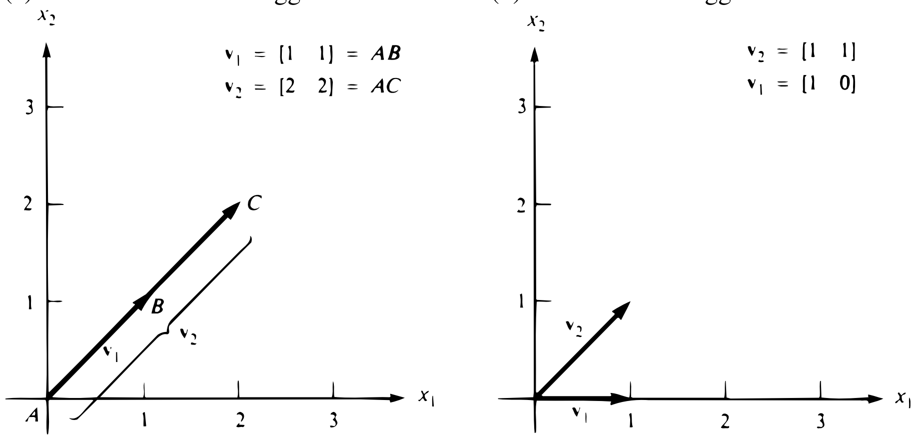
A Gauss–Jordan módszer felhasználható annak eldöntésére, hogy egy vektorrendszer lineárisan független vagy lineárisan összefüggő. Mielőtt bemutatnánk az eljárást, definiáljuk a mátrix rangjának a fogalmát.

Legyen A egy $m \times n$-es mátrix, és jelöljük A sorait $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m$-mel. Továbbá legyen $R = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m\}$.

DEFINÍCIÓ

A **rangja** az R legnagyobb olyan részhalmazában található vektorok száma, amely vektorok még lineárisan függetlenek.

6. ÁBRA (a) Két lineárisan összefüggő vektor (b) Két lineárisan független vektor



A következő három példa rámutat a mátrix rangjának fogalmára.

11. PÉLDA Mutassuk meg, hogy A rangja $= 0$ a következő mátrixra:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás Az $R = \{[0 \quad 0], [0,0]\}$ vektorrendszerben lehetetlen olyan részhalmazt találni, amelyik lineárisan független volna (lásd a 8. példát).

12. PÉLDA Mutassuk meg, hogy a következő A mátrix rangja $= 1$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás Itt $R = \{[1 \quad 1], [2 \quad 2]\}$. Az $\{[1 \quad 1]\}$ részhalmaz az R-nek lineárisan független részhalmaza, így A rangja legalább 1. Ha azonban megpróbálunk R-ben két lineárisan független vektort találni, ez nem sikerülhet, mivel $2([1 \quad 1]) - [2 \quad 2] = [0 \quad 0]$. Ez azt jelenti, hogy A rangja nem lehet 2. Így tehát A rangja 1.

13. PÉLDA Mutassuk meg, hogy a következő A mátrix rangja $= 2$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás Itt $R = \{[1 \quad 0], [0 \quad 1]\}$. A 9. példából tudjuk, hogy R egy lineárisan független vektorokból álló halmaz. Így A rangja 2.

Ahhoz, hogy megtaláljuk egy adott A mátrix rangját, egyszerűen alkalmazzuk a Gauss–Jordan módszert az A mátrixra. Jelöljük a végeredményt $\bar{A}$-val. Bizonyítható, hogy ha egy mátrixon esm-ek valamely sorozatát hajtjuk végre, az nem változtatja meg a mátrix rangját. Ez azt jelenti, hogy A rangja egyenlő $\bar{A}$ rangjával. Az is nyilvánvaló, hogy $\bar{A}$ rangja nem más, mint az $\bar{A}$-ban található nemnulla sorok száma. Ezeket a tényeket összefoglalva mondhatjuk, hogy A rangja egyenlő $\bar{A}$ rangjával, és ez egyenlő $\bar{A}$ nemnulla sorainak számával.

14. PÉLDA Keressük A rangját, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Megoldás A Gauss–Jordan módszer a mátrixok következő sorozatát adja:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \bar{A}$$

Így tehát A rangja $= \bar{A}$ rangja $= 3$.

Egy vektorrendszer lineáris függetlenségének eldöntése

Most leírunk egy módszert, amelynek segítségével eldönthetjük, hogy a $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ vektorrendszer lineárisan független-e.

Alakítsunk a vektorrendszerből mátrixot úgy, hogy annak i-edik sora $\mathbf{v}_i$ legyen. A-nak m sora lesz. Ha A rangja $= m$, akkor a V egy lineárisan független vektorrendszer, ha viszont A rangja $< m$, akkor V egy lineárisan függő vektorrendszer.

15. PÉLDA Döntsük el, hogy $V = \{[1 \quad 0 \quad 0], [0 \quad 1 \quad 0], [1 \quad 1 \quad 0]\}$ lineárisan független vektorok halmaza-e?

Megoldás A Gauss–Jordan módszer a mátrixok következő sorozatát adja:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{A}$$

Így A rangja $= \bar{A}$ rangja $= 2 < 3$. Ez azt mutatja, hogy V egy lineárisan összefüggő vektorokból álló halmaz. Valóban, az alkalmazott esm-ek azt mutatják, hogy $[1 \quad 1 \quad 0] = [1 \quad 0 \quad 0] + [0 \quad 1 \quad 0]$, vagyis, hogy V egy lineárisan összefüggő vektorrendszer.

Feladatok

A csoport

Döntse el, hogy a következő vektorrendszerek lineárisan függetlenek, vagy lineárisan összefüggők!

1. $V = \{[1 \quad 0 \quad 1], [1 \quad 2 \quad 1], [2 \quad 2 \quad 2]\}$

2. $V = \{[2 \quad 1 \quad 0], [1 \quad 2 \quad 0], [3 \quad 3 \quad 1]\}$

3. $V = \{[2 \quad 1], [1 \quad 2]\}$

4. $V = \{[2 \quad 0], [3 \quad 0]\}$

5. $V = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$

6. $V = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

B csoport

7. Mutassa meg, hogy az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris rendszernek akkor és csak akkor van megoldása, ha $\mathbf{b}$ előállítható A oszlopainak lineáris kombinációjaként!

8. Tegyük fel, hogy van egy kétdimenziós vektorokból álló, három vagy több vektorból álló halmazunk. Mutasson be olyan gondolatmenetet, amelynek eredménye az, hogy e vektorok lineárisan összefüggők!

9. Mutassa meg, hogy egy V vektorrendszer (amely nem tartalmazza a $\mathbf{0}$ vektort) akkor és csak akkor lineárisan összefüggő, ha V-ben található néhány olyan vektor, amely előállítható a V többi vektorának lineáris kombinációjaként!

2.5. Mátrix inverze

Egy egyedülálló lineáris egyenlet, mint például $4x = 3$ megoldásakor egyszerűen megszorozzuk az egyenlet mindkét oldalát a 4 multiplikatív inverzével, azaz a 4^{-1} kifejezéssel, vagyis $\frac{1}{4}$-del. Ezzel $4^{-1}(4x) = (4^{-1})3$, azaz $x = \frac{3}{4}$. (Természetesen ez a módszer nem alkalmazható a $0x = 3$ egyenletre, mert a nullának nincs multiplikatív inverze.) Ebben az alfejezetben bemutatjuk ennek a technikának egy olyan általánosítását, amely jól használható „kvadratikus” (egyenletek száma = ismeretlenek száma) lineáris egyenletrendszerek megoldására. Kezdjük néhány előzetes definícióval.

DEFINÍCIÓ

Kvadratikus mátrixoknak (vagy négyzetes mátrixoknak) nevezzük azokat a mátrixokat, amelyekben a sorok és oszlopok száma egyenlő.

DEFINÍCIÓ

A **főátló elemei** (vagy a fődiagonális elemei) a kvadratikus mátrixoknak azon a_{ij} elemei, amelyekre $i = j$.

DEFINÍCIÓ

Egységmátrixnak nevezzük azokat a kvadratikus mátrixokat, amelyekben a fődiagonális minden eleme 1, és a mátrix összes többi eleme 0.

Az $m \times m$-es egységmátrixot I_m-mel jelöljük. Így

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \ldots$$

Amennyiben az I_mA és AI_m mátrixszorzatok értelmezhetők, akkor könnyen bizonyítható, hogy $I_mA = AI_m = A$. Ez azt jelenti, hogy az I_m mátrix ugyanúgy egységként szerepel a mátrixok szorzásánál, mint ahogy az 1-es szám a valós számok szorzásánál az egység.

Emlékezzünk arra, hogy $\frac{1}{4}$ a 4 multiplikatív inverze. Ez azt jelenti, hogy $4(\frac{1}{4}) = (\frac{1}{4})4 = 1$. Ez motiválja a mátrixok inverzének következő definícióját.

DEFINÍCIÓ

Egy adott $m \times m$-es A mátrixnak az $m \times m$-es B mátrix az **inverze**, ha

$$BA = AB = I_m \tag{16}$$

(Bizonyítható, hogy ha $BA = I_m$, akkor $AB = I_m$ és fordítva.)

Néhány kvadratikus mátrixnak nincs inverze. Ha létezik egy $m \times m$-es B mátrix, amelyik kielégíti a (16) egyenlőséget, akkor így írjuk: $B = A^{-1}$. Például, ha

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

akkor az olvasó könnyen beláthatja, hogy

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

és

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Így

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Tegyük fel, hogy meg szeretnénk oldani az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszert, amelyben m egyenlet és m ismeretlen van. Ekkor jól látjuk, hogy miért is fontos a mátrix inverzének a fogalma. Tegyük fel ugyanis, hogy A^{-1} létezik. Az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mindkét oldalát megszorozva A^{-1}-gyel, látható, hogy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ bármely megoldása kielégíti az $A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{b}$ egyenlőséget. Alkalmazva az asszociatív tulajdonságot és a mátrix inverzének definícióját, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & (A^{-1}A)\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \\ \text{vagy} \quad & I_m\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \\ \text{vagy} \quad & \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

Ez azt mutatja, hogy A^{-1} ismeretében megtaláltuk egy kvadratikus lineáris egyenletrendszer egyértelmű megoldását. Ez annak analógiájára történt, hogy a $4x = 3$ egyenlet megoldásakor az egyenlet mindkét oldalát megszoroztuk 4^{-1}-gyel.

A Gauss–Jordan módszert felhasználhatjuk A^{-1} kiszámítására (vagy annak bemutatására, hogy A^{-1} nem létezik). Illusztrációként alkalmazzuk a Gauss–Jordan módszert az inverzmátrix kiszámítására, ha

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ez azt jelenti, hogy találjunk egy olyan A^{-1} mátrixot:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A^{-1}$$

amely kielégíti a

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

egyenletet.

A (17) egyenletből a következő szimultán egyenletrendszer-párt kapjuk, amelyeket a, b, c és d-nek ki kell elégítenie:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Az

$$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$$

megtalálásához (azaz az A^{-1} első oszlopának kiszámításához) alkalmazhatjuk a Gauss–Jordan módszert a

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

kibővített mátrixra.

Amint esm-ek segítségével

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

I_2-vé alakul, akkor

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

átalakul A^{-1} első oszlopává. A

$$\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

megtalálásához (azaz az A^{-1} második oszlopának kiszámításához) esm-eket alkalmazunk a

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

kibővített mátrixra. Amikor

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

I_2-vé alakul, akkor

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

átalakul A^{-1} második oszlopává. Ezek szerint ahhoz, hogy A^{-1} mindkét oszlopát megtaláljuk, esm-ek olyan sorozatát kell végrehajtanunk, amelyek a

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrixot I_2-vé transzformálják. Mindezek együtt azt az ötletet adják, hogy A^{-1}-et úgy tudjuk kiszámítani, hogy esm-eket alkalmazunk a 2×4-es

$$A|I_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

mátrixra. Amikor

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

átalakul I_2-vé, akkor

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

átváltozik A^{-1} első oszlopává, és

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

átváltozik A^{-1} második oszlopává. Ez azt jelenti, hogy *amint A az I_2 alakba transzformálódik, I_2 ezalatt A^{-1} alakba megy át.* Az A^{-1} kiszámításához szükséges számítások a következők:

1. lépés Szorozzuk meg $A|I_2$ első sorát $\frac{1}{2}$-del. Így a következőt kapjuk:

$$A'|I_2' = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2. lépés Helyettesítsük $A'|I_2'$ második sorának helyébe a következőt:

$$(-1)(A'|I_2' \text{ első sora}) + (A'|I_2' \text{ második sora}).$$

Így a következő kifejezéshez jutunk:

$$A''|I_2'' = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

3. lépés Szorozzuk meg $A''|I_2''$ második sorát 2-vel. Ezáltal:

$$A'''|I_2''' = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

4. lépés Helyettesítsük $A'''|I_2'''$ első sora helyébe $(-\frac{5}{2})(A'''|I_2'''$ második sora$) + (A'''|I_2'''$ első sora). Eredményünk:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Mivel A az eljárás során I_2-vé vált, készen vagyunk, I_2 átváltozott A^{-1}-gyé. Ezáltal

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Az olvasó könnyen igazolhatja, hogy $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$.

Lehet, hogy egy mátrixnak nincs inverze

Vannak mátrixok, amelyeknek nincs inverzük. Illusztrációként legyen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \tag{18}$$

A^{-1} kiszámításához meg kell oldanunk a következő szimultán egyenletrendszer-párt:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{18.1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{18.2}$$

Amikor (18.1)-et a Gauss–Jordan módszerrel szeretnénk megoldani, azt találjuk, hogy

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

így alakul át:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

Ez azt mutatja, hogy (18.1)-nek nincs megoldása, így A^{-1} nem létezhet.

Figyeljük meg, hogy (18.1)-nek azért nincs megoldása, mert az A mátrixot a Gauss–Jordan módszer olyanná alakítja, hogy a mátrix alsó sora csupa nulla. Ez csak akkor történhet meg, ha A rangja < 2. Ha az $m \times m$-es A mátrix rangja $< m$, akkor A^{-1} nem létezik.

A Gauss–Jordan módszer $m \times m$-es A mátrixok invertálására

1. lépés Írjuk fel az $m \times 2m$-es $A|I_m$ mátrixot.

2. lépés Alkalmazzunk esm-eket $A|I_m$-nek $I_m|B$ alakúvá transzformálására. Ez csak akkor lehetséges, ha A rangja $= m$. Ebben az esetben $B = A^{-1}$. Ha A rangja $< m$, akkor A-nak nincs inverze.

Mátrix inverzek alkalmazása lineáris egyenletrendszerek megoldására

Ahogy korábban is állítottuk, mátrix inverzek segítségével megoldhatunk olyan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris rendszereket, amelyekben az egyenletek és a változók száma azonos. Egyszerűen megszorozzuk az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mindkét oldalát A^{-1}-gyel, hogy megkapjuk az $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ megoldást. Példaként oldjuk meg:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &= 7 \\ x_1 + 3x_2 &= 4 \end{aligned} \tag{19}$$

Írjuk föl a (19) mátrix formáját:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{20}$$

Itt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Az előzőekben már kiszámítottuk, hogy

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Szorozzuk meg (20) mindkét oldalát A^{-1}-gyel, így a következőt kapjuk:

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Így $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ a (19) rendszer egyértelmű megoldása.

Feladatok

A csoport

Számítsa ki A^{-1}-et (ha létezik) a következő mátrixokra:

1. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **4.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

5. Az 1. feladat megoldását felhasználva oldja meg a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 &= 7 \end{aligned}$$

6. A 2. feladat megoldását felhasználva oldja meg a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 4 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

B csoport

7. Mutassa meg, hogy egy kvadratikus mátrixnak akkor és csak akkor van inverze, ha sorai lineárisan független vektorrendszert alkotnak!

8. Tekintsük a B kvadratikus mátrixot, melynek inverze az adott B^{-1}.

(a) Fejezze ki a $100B$ mátrix inverzét B^{-1}-gyel!

(b) Legyen B' az a mátrix, amelyet B-ből a B első sora minden elemének kétszeresével kaptunk. Magyarázza meg, hogyan írhatjuk föl B' inverzét B^{-1} ismeretében!

(c) Legyen B' a B-ből az első oszlop minden elemének kétszeresével kapott mátrix. Írja fel B' inverzét B^{-1} ismeretében!

9. Tegyük fel, hogy A-nak és B-nek is van inverze. Keresse meg az AB mátrix inverzét!

10. Tegyük fel, hogy A-nak van inverze. Mutassa meg, hogy $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$! (*Útmutatás:* Alkalmazza azt az összefüggést, hogy $AA^{-1} = I$ és transzponálja mindkét oldalt!)

11. Egy kvadratikus mátrixot *ortogonálisnak* nevezünk, ha $AA^T = I$. Milyen tulajdonságai vannak egy ortogonális mátrix oszlopainak?

2.6. Determinánsok

Minden kvadratikus A mátrixhoz hozzárendelhető egy szám, amelyet A determinánsának nevezünk (a rövidítése gyakran $\det A$ vagy $|A|$). A nemlineáris programozási tanulmányainkban nagy segítségünkre lesz, ha ismerjük a kvadratikus mátrixhoz tartozó determináns kiszámításának módját.

Egy 1×1-es $A = [a_{11}]$ mátrixhoz tartozó determináns

$$\det A = a_{11} \tag{21}$$

Egy 2×2-es mátrixhoz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$
$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \tag{22}$$

determináns tartozik. Például

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = 2(5) - 3(4) = -2$$

Mielőtt megtanuljuk, hogyan kell nagyobb méretű kvadratikus mátrixok determinánsát kiszámítani, definiáljuk a minor mátrix fogalmát.

DEFINÍCIÓ

Ha A egy $m \times m$-es mátrix, akkor bármely i és j értékre az A ij-edik **minor**-ának nevezzük (jelölése A_{ij}) azt az $(m-1) \times (m-1)$-es mátrixot, amelyet A-ból úgy kapunk, hogy elhagyjuk az i-edik sort és a j-edik oszlopot.

Például

$$\text{ha} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \text{akkor} \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad A_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Legyen A egy $m \times m$-es mátrix. A-t így is felírhatjuk:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

Most következik $\det A$ kiszámítása. Válasszunk ki egy tetszőleges i értéket ($i = 1, 2, \dots, m$) és számítsuk ki $\det A$-t:

$$\begin{aligned} \det A = (-1)^{i+1}a_{i1}(\det A_{i1}) + (-1)^{i+2}a_{i2}(\det A_{i2}) + \cdots \\ + (-1)^{i+m}a_{im}(\det A_{im}) \end{aligned} \tag{23}$$

A (23) formulára azt mondjuk, hogy ez a kifejezés a $\det A$ i-edik sor szerinti kifejtése. A (23) előnye az, hogy a $\det A$ kiszámításához szükséges számolásokat (ahol A egy $m \times m$-es mátrix) visszavezeti olyanokra, amelyekben már csak $(m-1) \times (m-1)$-es mátrixok szerepelnek. Alkalmazzuk a (23) formulát addig, amíg végül $\det A$ kifejezhető 2×2-es mátrixokkal. Ezután alkalmazzuk a (22) egyenlőséget a megfelelő 2×2-es mátrixokhoz tartozó determinánsok kiszámítására.

A (23) felhasználásának illusztrálására kiszámítjuk $\det A$-t a következő A mátrixra:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

det$A$-t az első sor szerinti kifejtéssel számítjuk ki. Látjuk, hogy $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, és $a_{13} = 3$. Ezenkívül

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

így (22) segítségével: $\det A_{11} = 5(9) - 8(6) = -3$;

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

így (22) segítségével: $\det A_{12} = 4(9) - 7(6) = -6$; és

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

így (22) segítségével: $\det A_{13} = 4(8) - 7(5) = -3$. Ezután (23) alkalmazásával:

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{1+1} a_{11}(\det A_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12}(\det A_{12}) + (-1)^{1+3} a_{13}(\det A_{13}) \\ &= (1)(1)(-3) + (-1)(2)(-6) + (1)(3)(-3) = -3 + 12 - 9 = 0 \end{aligned}$$

Az érdeklődő olvasó könnyen beláthatja, hogy ha det$A$ kiszámítását a második vagy a harmadik sor szerinti kifejtéssel csináltuk volna, ugyanerre az eredményre jutottunk volna. A determinánsokra vonatkozó rövid tárgyalásunkat azzal zárjuk, hogy megjegyezzük, hogy a determinánsok felhasználhatók kvadratikus mátrixok invertálására és lineáris egyenletrendszerek megoldására is. Mivel már megtanultuk, hogy a Gauss–Jordan módszerrel hogyan számítsuk ki mátrixok inverzét és hogyan oldjunk meg lineáris egyenletrendszereket, a determinánsok ilyen irányú felhasználását nem tárgyaljuk.

Feladatok

A csoport

1. Igazolja, hogy

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = 0$$

úgy, hogy a második sor, majd a harmadik sor szerinti kifejtést alkalmazza!

2. Számítsa ki a következő determinánst:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

3. Egy mátrixot felső háromszögmátrixnak nevezünk, ha minden $i > j$-re $a_{ij} = 0$. Mutassa meg, hogy bármely 3×3-as felső háromszögmátrix determinánsa egyenlő a mátrix fődiagonális elemeinek szorzatával! (Az eredmény bármely felső háromszögmátrixra igaz.)

B csoport

4. (a) Mutassa meg, hogy bármely 1×1-es és 3×3-as mátrixra: $\det(-A) = -\det A$!

(b) Mutassa meg, hogy bármely 2×2-es és 4×4-es mátrixra: $\det(-A) = \det A$!

(c) Általánosítsa az (a) és (b) alatti eredményeket!

Összefoglalás

Mátrixok

Mátrixnak nevezzük számok bármilyen téglalap alakú elrendezését. Az A mátrixban a_{ij}-vel jelöljük az A mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának elemét.

Azokat a mátrixokat, amelyeknek csak egy soruk vagy egy oszlopuk van, **vektoroknak** nevezzük. A vektorokat félkövér betűkkel ($\mathbf{v}$) jelöljük. Ha azonos dimenziószámmal adott egy sorvektor: $\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n]$ és egy oszlopvektor:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix},$$

akkor $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ **skalárszorzata** (jelölése $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$) az $u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$ szám.

Két adott mátrix, A és B esetén a **mátrixszorzat** (jelölése AB) akkor és csak akkor létezik, ha A oszlopainak száma egyenlő B sorainak számával. Tegyük fel, hogy ez teljesül és A-nak m sora, B-nek pedig n oszlopa van. Ekkor az A és B mátrixok $C = AB$ mátrixszorzata az az $m \times n$-es C mátrix, amelynek ij-edik eleme a következő: C-nek az ij-edik eleme $=$ A i-edik sorának és B j-edik oszlopának skalárszorzata.

Mátrixok és lineáris egyenletrendszerek

A következő **lineáris egyenletrendszer**

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \;&= \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

felírható $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ vagy $A|\mathbf{b}$ alakban is, ahol

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

A Gauss–Jordan módszer

Elemi sorműveletek (esm-ek) alkalmazásával bármilyen lineáris egyenletrendszert megoldhatunk. Egy A mátrixból egy esm egy új A' mátrixot ad. Az esm-ek háromfélék lehetnek.

1. típusú esm

A tetszőleges sorát egy nemnulla számmal szorozva kapjuk A'-t.

2. típusú esm

Szorozzuk meg A bármelyik sorát (legyen például az i-edik sor) egy nemnulla c skalárral. Valamely $j \neq i$-re legyen az (A' j-edik sora) $= c$(A i-edik sora) + (A j-edik sora), és A' más sorai változatlanul megmaradnak A-ból.

3. típusú esm

Cseréljük föl A bármelyik két sorát.

A Gauss–Jordan módszer esm-eket alkalmaz a lineáris egyenletrendszerek megoldására. Az eljárás lépései a következők:

1. lépés $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ megoldásához először írjuk fel az $A|\mathbf{b}$ kibővített mátrixot.

2. lépés Kezdjük az első sorral mint aktuális sor, az első oszloppal mint aktuális oszlop, és a_{11}-gyel mint aktuális elem. (**a**) Ha a_{11} (az aktuális elem) nem nulla, akkor alkalmazzunk esm-eket az első oszlop (aktuális oszlop)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

alakúvá alakítására.
Ezután válasszunk új aktuális sort, oszlopot és elemet úgy, hogy egy sorral lejjebb és egy oszloppal jobbra lépünk. Ezután a 3. lépés következik. (**b**) Ha a_{11} (az aktuális elem) 0, akkor egy 3. típusú esm-mel cseréljünk sorokat úgy, hogy az aktuális oszlopban egy nemnulla elem legyen. Esm-ekkel tegyük az első oszlopot

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

alakúvá, és haladjunk tovább a 3. lépésre új aktuális sor, oszlop és elem választásával. (**c**) Ha az első oszlopban nincs nemnulla elem, válasszunk új aktuális oszlopot és elemet. Lépjünk a 3. lépésre.

3. lépés (**a**) Ha az aktuális elem nem nulla, esm-ekkel változtassuk 1-gyé és az aktuális oszlop többi elemét 0-vá. Válasszunk új aktuális sort, oszlopot és elemet. Ha ez lehetetlen, álljunk meg. Ha lehetséges, ismételjük a 3. lépést. (**b**) Ha az aktuális elem 0, akkor 3. típusú esm-mel cseréljünk sorokat úgy, hogy az aktuális elem ne legyen 0. Transzformáljuk az oszlopot esm-ekkel és lépjünk tovább a következő aktuális elemre. Ha ez lehetetlen, álljunk meg. Egyébként ismételjük a 3. lépést. (**c**) Ha az aktuális oszlopnak nincs nullától különböző eleme az aktuális sor alatt, válasszunk új aktuális oszlopot és elemet, és ismételjük a 3. lépést. Ha ez lehetetlen, álljunk meg.
Ez az eljárás egy vagy több oszlopot változtatás nélkül „átléphet”.

4. lépés Írjuk fel az $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ mátrixhoz tartozó $A'|\mathbf{b}'$ egyenletrendszert a 3. lépés befejezése után. Így az $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ rendszernek ugyanaz a megoldáshalmaza, mint $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$-nek.

Bármely lineáris egyenletrendszerben **bázisváltozónak** nevezzük azt a változót, amelyik egyetlen egyenletben 1-es együtthatóval és az összes többi egyenletben 0 együtthatóval jelenik meg. Minden olyan változót, amelyik nem bázisváltozó, **nembázis-változónak** nevezünk.

Legyen BV az $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ rendszer bázisváltozóinak halmaza és legyen NBV az $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ nembázis-változóinak halmaza.

1. eset $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$-nek van legalább egy $[0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0|c], (c \neq 0)$ sora. Ebben az esetben $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$-nek nincs megoldása.

2. eset Ha az 1. eset nem áll fenn, valamint NBV, a nembázis-változók halmaza üres, akkor $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$-nek egyértelmű megoldása van.

3. eset Ha az 1. eset nem áll fenn és NBV nem üres, akkor $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$-nek végtelen sok megoldása van.

Lineáris függetlenség, lineáris függőség és a mátrixok rangja

Az m-dimenziós vektorok egy V halmaza **lineárisan független**, ha az egyetlen olyan lineáris kombinációja a V vektorainak, amely előállítja a $\mathbf{0}$ vektort, a triviális lineáris kombináció. Az m-dimenziós vektorok egy V halmaza **lineárisan összefüggő**, ha a vektoroknak van olyan nemtriviális lineáris kombinációja, amelyik $\mathbf{0}$-t ad.

Legyen A egy $m \times n$-es mátrix és jelöljék az A sorait $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m$. Legyen $R = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m\}$. Az A **rangjának** nevezzük a maximálisan kiválasztható lineárisan független részhalmaz számosságát. A rangjának kiszámításához alkalmazzuk a Gauss–Jordan módszert az A mátrixra. Legyen a végeredmény mátrix $\bar{A}$. Ekkor A rangja $=$ $\bar{A}$ rangja $=$ az $\bar{A}$-ban található nemnulla sorok számával.

Annak meghatározására, hogy a vektorok $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ rendszere lineárisan független-e, írjuk fel az A mátrixot úgy, hogy az i-edik sor $\mathbf{v}_i$ legyen. A-nak m sora lesz. Ha A rangja $= m$, akkor V egy lineárisan független vektorrendszer; ha A rangja $< m$, akkor V egy lineárisan összefüggő vektorrendszer.

Mátrix inverze

Egy adott $(m \times m)$-es kvadratikus A mátrix esetén B az A mátrix **inverze** (jelölése $B = A^{-1}$), ha $AB = BA = I_m$. A Gauss–Jordan módszerrel az $(m \times m)$-es A mátrix A^{-1} inverzének kiszámítása a következőképpen történik:

1. lépés Írjuk le az $m \times 2m$-es $A|I_m$ mátrixot.

2. lépés Esm-ek alkalmazásával alakítsuk át $A|I_m$-et $I_m|B$-vé. Ez csak akkor lehetséges, ha A rangja $= m$. Ebben az esetben $B = A^{-1}$. Ha A rangja $< m$, akkor A-nak nincs inverze.

Determinánsok

Minden $(m \times m)$-es kvadratikus A mátrixhoz hozzárendelhető egy szám, az A **determinánsa** (jelölése $\det A$ vagy $|A|$). Egy 1×1-es mátrixnál $\det A = a_{11}$. Egy 2×2-es mátrixra $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. Egy általános $m \times m$-es mátrix esetén $\det A$ kiszámítása a következő formula ismételt alkalmazásával történhet ($i = 1, 2, \ldots, m$):

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} (\det A_{i1}) + (-1)^{i+2} a_{i2} (\det A_{i2}) + \cdots + (-1)^{i+m} a_{im} (\det A_{im})$$

Itt A_{ij} az A mátrix ij-edik **minora**, amely A-ból az i-edik sor és a j-edik oszlop elhagyásával keletkezik.

Áttekintő feladatok

A csoport

1. Keresse meg a következő lineáris egyenletrendszer összes megoldását:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

2. Számítsa ki a $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét!

3. Minden évben az Állami Egyetem (ÁE) tanári karának szerződéses tagjai közül 20% válik állandósított (véglegesített) tanárrá, 5% kilép és 75% szerződéses marad. Minden évben az ÁE véglegesített tanárainak 90%-a marad, 10%-a kilép. Legyen U_t a szerződéses tanárok száma a t-edik év elején, és legyen T_t a véglegesített tanárok száma. Használjon mátrixszorzást az $\begin{bmatrix} U_{t+1} \\ T_{t+1} \end{bmatrix}$ vektornak az $\begin{bmatrix} U_t \\ T_t \end{bmatrix}$ vektorral való kapcsolatának kifejezésére!

4. Gauss–Jordan módszerrel határozza meg a következő lineáris rendszer összes megoldását:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 3 \\ x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 &= 2 \end{aligned}$$

5. Számítsa ki a $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét!

6. Az Állami Egyetem két hallgatójának előző félévi osztályzatait a 2. táblázat mutatja.

2. TÁBLÁZAT

	Tantárgy			
	1.	2.	3.	4.
1. hallgató	3.6	3.8	2.6	3.4
2. hallgató	2.7	3.1	2.9	3.6

Az 1. és 2. tantárgy 4 kredites, a 3. és 4. tantárgy 3 kredites. Legyen A_i az i-edik hallgató félévi átlaga. Mátrixszorzás alkalmazásával fejezze ki a $\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ vektort az adott információk segítségével!

7. Gauss–Jordan módszerrel keresse meg a következő lineáris egyenletrendszer összes megoldását:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

8. Számítsa ki a $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét!

9. Legyen C_t az Indiana állambeli gyermekek száma a t-edik év elején, és A_t legyen a felnőttek száma Indianában a t-edik év elején. Egy adott évben a gyermekek 5%-a felnőtté válik, és 1%-uk meghal. Egy adott évben a felnőttek 3%-a meghal. Mátrixszorzás alkalmazásával fejezze ki a $\begin{bmatrix} C_{t+1} \\ A_{t+1} \end{bmatrix}$ vektort $\begin{bmatrix} C_t \\ A_t \end{bmatrix}$ segítségével!

10. Gauss–Jordan módszerrel keresse meg a következő lineáris egyenletrendszer összes megoldását:

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &= 5 \end{aligned}$$

11. Gauss–Jordan módszerrel számítsa ki az

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix inverzét!

12. Egy adott évben a falusi lakosság 10%-a költözik be a városba és a városi lakosság 20%-a költözik falura (más mindenki helyben marad!). Legyen R_t a falusi lakosok száma a t-edik év elején, és C_t legyen a városi lakosok száma a t-edik év elején. Mátrixszorzással írja fel a kapcsolatot az $\begin{bmatrix} R_{t+1} \\ C_{t+1} \end{bmatrix}$ vektor és az $\begin{bmatrix} R_t \\ C_t \end{bmatrix}$ vektor között!

13. Döntse el, hogy a $V = \{[1 \quad 2 \quad 1], [2 \quad 0 \quad 0]\}$ vektorhalmaz lineárisan független rendszer-e?

14. Döntse el, hogy a

$$V = \{[1 \quad 0 \quad 0], [0 \quad 1 \quad 0], [-1 \quad -1 \quad 0]\}$$

lineárisan független vektorrendszer-e?

15. Legyen $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$.

(a) a, b, c, d milyen értékeire létezik A^{-1}?

(b) Ha A^{-1} létezik, számítsa ki azt!

16. Mutassa meg, hogy a következő lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

17. A szövetségi és állami adók, valamint az alkalmazottak jutalmainak kifizetése előtt a vállalat profitja 60 000$. Az alkalmazottak jutalma az adók kifizetése után megmaradt profit 5%-a. Az állami adó a profit 5%-a (a jutalmak kifizetése után). Végül a szövetségi adó a profit 40%-a (a jutalmak és az állami adók kifizetése után). Állítson föl egy lineáris egyenletrendszert abból a célból, hogy megállapíthassa a kifizetett jutalmakat, az állami adót és a szövetségi adót!

18. Számítsa ki az $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix determinánsát!

19. Mutassa meg, hogy minden olyan 2×2-es A mátrixnak, amelyiknek nincs inverze, a determinánsa: $\det A = 0$!

B csoport

20. Legyen A egy $m \times m$-es mátrix.

(a) Mutassa meg, hogy ha A rangja $= m$, akkor $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$-nak egyértelmű megoldása van! Mi ez az egyértelmű megoldás?

(b) Mutassa meg, hogy ha A rangja $< m$, akkor $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$-nak végtelen sok megoldása van!

21. A következő lineáris egyenletrendszerrel fogunk találkozni a Markov-láncokra vonatkozó tanulmányainkban (lásd 17. fejezet):

$$[x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n] = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]P$$

ahol

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Ha a P mátrix minden sorában az elemek összege 1, akkor a 20. feladat segítségével mutassa meg, hogy ennek a lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van!

22.[2] Egy ország egyik iparága háromféle terméket gyárt: acélt, autókat és gépeket. (1) Egy dollár értékű acél előállításához 30 centnyi acél, 15 centnyi autó és 40 centnyi gép szükséges. (2) Egy dollár értékű autóhoz 45 cent acél, 20 cent autó és 10 cent gép kell. (3) Egy dollárnyi gép szükséglete 40 cent acél, 10 cent autó és 45 cent gép. A következő évben az iparág értékben fel akar használni d_s dollárnyi acélt, d_c dollárnyit autót és d_m dollárnyi gépet.
A következő évre legyen

$$\begin{aligned} s &= \text{az acéltermelés dollárban} \\ c &= \text{az autótermelés dollárban} \\ m &= \text{a géptermelés dollárban} \end{aligned}$$

Definiálja azt a 3×3-as A mátrixot, amelyben az ij-edik elem jelentése a következő: az i-edik termékből mennyi szükséges dollárban számolva egy dollárnyi j-edik termék előállításához (acél = 1-es termék, autó = 2-es termék, gépek = 3-as termék).

(a) Határozza meg az A mátrixot!

(b) Mutassa meg, hogy

$$\begin{bmatrix} s \\ c \\ m \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} s \\ c \\ m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_s \\ d_c \\ d_m \end{bmatrix} \tag{24}$$

(*Útmutatás:* Vegye észre, hogy a következő évi acéltermelés = (a jövő évi acélkereslet) + (a jövő évi acél előállításához szükséges acél) + (a jövő évi autók előállításához szükséges acél) + (a jövő évi acéligény a gépek előállításához).

(c) Mutassa meg, hogy a (24) egyenlőség átírható

$$(I - A) \begin{bmatrix} s \\ c \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_s \\ d_c \\ d_m \end{bmatrix}$$

alakba!

(d) Ha d_s, d_c és d_m értékei adottak, magyarázza meg, hogyan tudná felhasználni az $(I - A)^{-1}$ mátrixot annak eldöntésére, hogy az iparág ki tudja-e elégíteni a jövő évi fogyasztói igényeket!

(e) Tegyük fel, hogy a jövő évi acéligény egy dollárral növekszik. Ez megnöveli az acél, autók és gépek jövő évi termelését. Fejezze ki $(I - A)^{-1}$ segítségével a jövő évi termelési szükségleteket!

[2] Leontief (1966) alapján. Lásd a fejezet végén a hivatkozásokat.

Irodalom

A következő hivatkozásokban a lineáris algebra magasabb szintű tárgyalása található. Ahhoz, hogy megértsük a lineáris és nemlineáris programozás elméletét, a következő könyvek közül legalább az egyiket alaposan meg kell tanulni.

Dantzig, G. *Linear Programming and Extensions*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1963.

Hadley, G. *Linear Algebra*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1961.

Strang, G. *Linear Algebra and Its Applications*, 3d ed. Orlando, Fla.: Academic Press, 1988.

Leontief, W. *Input–Output Economics*. New York: Oxford University Press, 1966.

Teichroew, D. *An Introduction to Management Science: Deterministic Models*. New York: Wiley, 1964.

3

Bevezetés a lineáris programozásba

A lineáris programozás az optimalizálási problémák megoldásának egyik eszköze. George Dantzig 1947-ben fejlesztette ki a szimplex algoritmust lineáris programozási feladatok (röviden LP) megoldására. Ez a módszer nagyon hatékonynak bizonyult. A szimplex módszer kifejlesztése óta az LP-t a gazdaság legkülönbözőbb ágazataiban használják fel optimalizálási feladatok megoldására, például bankügyleteknél, az oktatásban, vagy erdészeti, olajipari, közlekedési problémák esetén. A Fortune című üzleti újság 500 céget érintő felmérésében a megkérdezettek 85%-a válaszolta azt, hogy már alkalmazott lineáris programozási modellt. A lineáris programozás fontosságát az operációkutatásban az is mutatja, hogy ennek a könyvnek körülbelül a 40%-a lineáris programozással és az ehhez kapcsolódó optimalizálási technikákkal foglalkozik.

A 3.1. alfejezetben lineáris programozási tanulmányainkat azzal kezdjük, hogy leírjuk azokat az általános tulajdonságokat, amelyek minden lineáris programozási feladatra jellemzők. A 3.2. és a 3.3. alfejezetekben megtanuljuk grafikusan megoldani a kétváltozós lineáris programozási feladatokat. Ezeknek az egyszerű LP-knek a megoldása hasznos útmutatásul szolgál bonyolultabb LP-k megoldásához. A fejezet többi része a valós szituációkban felhasználható lineáris programozási modellekkel foglalkozik.

3.1. A lineáris programozási feladat

Ebben a fejezetben bevezetjük a lineáris programozási modellt, és definiálunk a lineáris programozási feladatok tanulmányozásához szükséges néhány fontos fogalmat.

1. PÉLDA Giapetto Fafaragó Cége kétfajta fából készült játékot gyárt: katonákat és vonatokat. Egy katonát 27\$-ért lehet eladni, és előállításához 10\$ értékű nyersanyag szükséges. Minden legyártott katona 14 dollárral növeli Giapetto bérben jelentkező változó költségét és az általános költséget. Egy vonat 21\$-ért adható el, előállításához 9\$ értékű nyersanyag szükséges. Minden legyártott vonat 10 dollárral növeli a változó- és általános költségeket. A fakatonák és favonatok gyártása kétféle szakképzett munkát igényel: fafaragó és felületkezelő munkát. Egy katona előállításához 2 óra felületkezelő munka és 1 óra fafaragó munka szükséges. Egy vonathoz 1 óra felületkezelő és 1 óra fafaragó munka kell. Giapettónak minden héten korlátlan mennyiségű nyersanyag áll rendelkezésére, de csak 100 felületkezelő munkaóra és 80 fafaragó munkaóra használható fel. A vonatok iránti kereslet korlátlan, katonákból azonban legfeljebb csak 40-et vesznek meg hetente. Giapetto maximalizálni szeretné a heti profitot (bevételek – költségek). Keressünk Giapetto helyzetének leírására egy olyan matematikai modellt, amely a heti profitot maximalizálja!

Megoldás Giapetto modelljének kialakítása során végigmegyünk azokon a jellemzőkön, amelyek minden lineáris programozási feladatban előfordulnak.

Döntési változók. Kezdjük azzal a modellfelírást, hogy definiáljuk a megfelelő **döntési változókat.** A döntési változóknak egy tetszőleges lineáris programozási modellben képesnek kell lenniük a jövőben meghozandó döntések leírására (ebben az esetben Giapetto döntéséről van szó). Világos, hogy Giapettónak minden egyes hétre vonatkozóan el kell döntenie, hogy hány katonát és hány vonatot gyártson. Ez az alapja annak, hogy

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{a hetente gyártott katonák száma} \\ x_2 &= \text{a hetente gyártott vonatok száma} \end{aligned}$$

legyen.

Célfüggvény. Minden lineáris programozási feladatban a döntéshozó vagy maximalizálni szeretné a döntési változóknak valamilyen függvényét (rendszerint jövedelmét vagy a profitot), vagy minimalizálni szeretné azt (rendszerint a költségeket). A maximálandó vagy minimálandó függvényt **célfüggvénynek** nevezzük. A Giapetto problémában először is megjegyezzük, hogy a *fix költségek* (mint a bérleti díj és a biztosítás) nem függnek x_1 és x_2 értékeitől. Így Giapetto arra koncentrálhat, hogy a (heti bevételek) – (nyersanyag vásárlási költségek) – (egyéb változó költségek) kifejezést maximalizálja.

Giapetto heti bevételei és költségei kifejezhetők az x_1 és x_2 döntési változók segítségével. Giapetto részéről oktalanság volna több katonát gyártani, mint amennyit el tud adni, így feltételezhetjük, hogy az összes legyártott játékot el tudja adni, és ezáltal

$$\begin{aligned} \text{heti bevételek} &= \text{heti bevételek a katonák eladása révén} \\ &\quad + \text{heti bevételek a vonatok eladása révén} \\ &= \left(\frac{\text{dollár}}{\text{katonák}}\right)\left(\frac{\text{katona}}{\text{hét}}\right) \\ &\quad + \left(\frac{\text{dollár}}{\text{vonat}}\right)\left(\frac{\text{vonat}}{\text{hét}}\right) \\ &= 27x_1 + 21x_2 \end{aligned}$$

A törtekkel kifejezett képletek itt és a továbbiakban arra szolgálnak, hogy lássuk: mindent a helyes mértékegységben adtunk meg.

Hasonló módon felírva:

$$\begin{aligned} \text{heti nyersanyagköltség} &= 10x_1 + 9x_2 \\ \text{egyéb heti változó költségek} &= 14x_1 + 10x_2 \end{aligned}$$

Giapetto ezek szerint a következő kifejezést szeretné maximalizálni:

$$(27x_1 + 21x_2) - (10x_1 + 9x_2) - (14x_1 + 10x_2) = 3x_1 + 2x_2$$

Más módon is megközelíthetjük a Giapetto által maximalizálni kívánt $3x_1 + 2x_2$ értékét, ha megfigyeljük, hogy

$$\begin{aligned}\text{bevételek} &= \text{a katonák eladásából származó profit}\\ &\quad - \text{(nem fix) költségek}\\ &\quad + \text{a vonatok eladásából származó profit}\\ &= \left(\frac{\text{profit}}{\text{katona}}\right)\left(\frac{\text{katona}}{\text{hét}}\right) + \left(\frac{\text{profit}}{\text{vonat}}\right)\left(\frac{\text{vonat}}{\text{hét}}\right)\end{aligned}$$

mivel

$$\frac{\text{profit}}{\text{katona}} = 27 - 10 - 14 = 3$$

$$\frac{\text{profit}}{\text{vonat}} = 21 - 9 - 10 = 2$$

Így, akárcsak az előbb, azt kapjuk, hogy

$$\text{heti bevételek} - \text{heti (nem fix) költségek} = 3x_1 + 2x_2$$

Ezáltal Giapetto célja az, hogy úgy válassza meg x_1-et és x_2-t, hogy $3x_1 + 2x_2$ maximális legyen. Bármelyik LP feladatban a z változót fogjuk használni a célfüggvény jelölésére. Giapetto célfüggvénye

$$\text{maximalizálandó } z = 3x_1 + 2x_2 \tag{1}$$

(A következőkben „maximalizálandó” és „minimalizálandó” helyett a *max* és *min* rövidítéseket használjuk.) Egy változónak a célfüggvényben szereplő együtthatóját így nevezzük: a változó **célfüggvény együtthatója**. Például az x_1 célfüggvény együtthatója 3 és az x_2 célfüggvény együtthatója 2. Ebben a példában (és még sok másikban is) az egyes változók célfüggvény együtthatója egyszerűen nem más, mint a változó által képviselt hozzájárulás a vállalat profitjához.

Feltételek. Ahogy x_1 és x_2 növekszik, Giapetto célfüggvénye egyre nagyobb lesz. Ez azt jelenti, hogy ha Giapetto teljesen szabadon választhatna értékeket x_1-nek és x_2-nek, akkor a vállalat tetszőlegesen nagy profitot érhetne el azáltal, hogy x_1-et és x_2-t nagyon nagynak választaná. Sajnos azonban x_1 és x_2 értékeit a következő három megszorítás korlátozza (gyakran **korlátozó feltételeknek** nevezik ezeket):

1. feltétel Hetenként legfeljebb 100 felületkezelő óra használható fel.

2. feltétel Hetenként legfeljebb 80 fafaragó óra használható fel.

3. feltétel A kereslet korlátozottsága miatt legfeljebb 40 katonát szabad gyártani hetente.

Mivel feltételeztük, hogy korlátlan nyersanyagmennyiség áll rendelkezésre, ebből nem adódnak korlátozó feltételek.

A Giapetto problémához tartozó matematikai modell felállításában a következő lépés az, hogy az 1., 2., 3. feltételeket felírjuk az x_1 és x_2 változók segítségével. Az 1. feltétel esetében ahhoz, hogy ezt x_1-gyel és x_2-vel kifejezhessük, vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}\frac{\text{összes felületkezelés órákban}}{\text{hét}} &= \left(\frac{\text{felületkezelés órákban}}{\text{katona}}\right)\left(\frac{\text{készre gyártott katonák}}{\text{hét}}\right)\\ &\quad + \left(\frac{\text{felületkezelés órákban}}{\text{vonat}}\right)\left(\frac{\text{készre gyártott vonatok}}{\text{hét}}\right)\\ &= 2(x_1) + 1(x_2) = 2x_1 + x_2\end{aligned}$$

Így most már fel tudjuk írni az 1. feltételt:

$$2x_1 + x_2 \leq 100 \tag{2}$$

Figyeljük meg, hogy a (2) minden tagjában az egységek a felületkezelő órák hetenként. *Ahhoz, hogy egy feltétel ésszerű legyen, a feltételben szereplő tagokat ugyanabban az egységben kell kifejezni.* Másképpen almákat és narancsokat adnánk össze, és a feltételek nem jelentenének semmit.

A 2. feltétel x_1 és x_2 változókkal való kifejezéséhez figyeljük meg, hogy

$$\begin{aligned}\frac{\text{összes fafaragó munka órákban}}{\text{hét}} &= \left(\frac{\text{fafaragó munka órákban}}{\text{katona}}\right)\left(\frac{\text{katona}}{\text{hét}}\right) \\ &\quad + \left(\frac{\text{fafaragó munka órákban}}{\text{vonat}}\right)\left(\frac{\text{vonat}}{\text{hét}}\right) \\ &= 1(x_1) + 1(x_2) = x_1 + x_2\end{aligned}$$

A 2. feltétel tehát így írható fel:

$$x_1 + x_2 \leq 80 \tag{3}$$

Ismét felhívjuk a figyelmet arra, hogy (3)-ban minden tag azonos egységben van felírva (ebben az esetben fafaragó munkaórák hetenként).

Végül fejezzük ki azt a tényt, hogy hetenként legfeljebb 40 katona adható el. Korlátozzuk tehát a hetente gyártott katonák számát legfeljebb 40 katonára. Ez a következő feltételt adja:

$$x_1 \leq 40 \tag{4}$$

Így most már (2),(3),(4) az 1–3 korlátozó feltételeket a döntési változók segítségével fejezi ki; (2),(3),(4) tehát Giapetto lineáris programozási problémájának a *feltételei*. A döntési változóknak a feltételekben szereplő együtthatóit **technológiai együtthatóknak** nevezzük. Ennek az az oka, hogy a technológiai együtthatók nagyon gyakran arra utalnak, hogy milyen technológiát alkalmaznak a különböző termékek előállítására. Például az x_2 technológiai együtthatója (3)-ban 1, s ez arra utal, hogy egy vonat előállításához 1 fafaragó órára van szükség. Az egyes feltételek jobb oldalán szereplő számokat a feltételek **jobb oldalának** nevezzük (röviden: **j.o.**). Leggyakrabban a feltételben szereplő j.o. egy bizonyos erőforrásból rendelkezésre álló mennyiséget jelenti.

Előjelkorlátozások. Egy lineáris programozási feladat felírásának teljessé tételéhez minden döntési változóra fel kell tennünk a következő kérdést: csak nemnegatív lehet-e a döntési változó, vagy pedig pozitív és negatív értékeket egyaránt felvehet?

Ha egy x_i döntési változó csak nemnegatív értékeket vehet fel, akkor még hozzátesszük a feltételekhez az **előjelkorlátozó feltételt**: $x_i \geq 0$. (Ezt más szóval nemnegativitási feltételnek is nevezzük.) Ha egy x_i változó felvehet pozitív és negatív értékeket is (vagy nullát), akkor azt mondjuk, hogy x_i **előjelkorlátozatlan** vagy más szóval előjelkötetlen (rövidítve **ekn**). Giapetto problémájában világos, hogy $x_1 \geq 0$ és $x_2 \geq 0$. Mindazonáltal más problémákban előfordulhatnak ekn változók is. Például, ha x_i egy cégnél a készpénzállományt jelentené, akkor x_i negatívnak tekinthető abban az esetben, ha a cég több pénzzel tartozik, mint amennyi készpénze van. Ebben az esetben x_i-t az előjelkorlátozatlan változók osztályába sorolnánk. Más ekn változók előfordulásáról a 4.10. alfejezetben lesz szó.

A teljes modell összeállításában három csoportot különböztetünk meg: vannak nemnegativitási feltételek $x_1 \geq 0$ és $x_2 \geq 0$, célfüggvény (1), és a (2)–(3)–(4) korlátozó feltételek. Ezek együttese adja a következő optimalizálási modellt:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 \qquad \text{(célfüggvény)} \qquad (1)$$

a következő feltételekkel:

$$\begin{array}{lll}
2x_1 + x_2 \le 100 & \text{(felületkezelő feltétel)} & (2) \\
x_1 + x_2 \le 80 & \text{(fafaragó feltétel)} & (3) \\
x_1 \qquad \le 40 & \text{(a katonák iránti kereslet feltétele)} & (4) \\
x_1 \qquad \ge 0 & \text{(nemnegativitási feltétel)}^{1} & (5) \\
\qquad x_2 \ge 0 & \text{(nemnegativitási feltétel)} & (6)
\end{array}$$

Mielőtt formálisan definiálnánk a lineáris programozási feladatot, definiáljuk a lineáris függvény és a lineáris egyenlőtlenség fogalmát.

DEFINÍCIÓ

Az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ akkor és csak akkor **lineáris függvénye** az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változóknak, ha valamely $c_1, c_2, \ldots, c_n$, konstansokra $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$.

Például $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ az x_1 és x_2 lineáris függvénye, de $f(x_1, x_2) = x_1^2x_2$ nem lineáris függvénye x_1-nek és x_2-nek.

DEFINÍCIÓ

Bármely $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ lineáris függvény és tetszőleges b szám esetén $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b$ és $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge b$ **lineáris egyenlőtlenségek**.

Így, $2x_1 + 3x_2 \le 3$ és $2x_1 + x_2 \ge 3$ lineáris egyenlőtlenségek, de $x_1^2x_2 \ge 3$ nem lineáris egyenlőtlenség.

DEFINÍCIÓ

A **lineáris programozási feladat** (LP) egy olyan optimalizálási feladat, amelyben a következők történnek:

1. Maximalizáljuk (vagy minimalizáljuk) a döntési változók egy *lineáris* függvényét. A maximalizálandó vagy minimalizálandó függvényt *célfüggvénynek* nevezzük.

2. A döntési változók értékeinek ki kell elégíteniük a *korlátozó feltételeket*. Minden feltételnek vagy lineáris egyenletnek vagy lineáris egyenlőtlenségnek kell lennie.

3. Minden változóhoz tartozik egy *előjelkorlátozás* (vagy annak hiánya). Bármely x_i változóra az előjelkorlátozás vagy azt írja elő, hogy x_i csak nemnegatív lehet ($x_i \ge 0$), vagy azt írja elő, hogy x_i előjelkorlátozatlan (ekn).

Mivel Giapetto célfüggvénye x_1 és x_2-nek lineáris függvénye, és Giapetto minden feltétele lineáris egyenlőtlenség, így Giapetto problémája egy lineáris programozási feladat. Megjegyezzük, hogy a Giapetto probléma a lineáris programozási feladatoknak egy nagyon tág kategóriájába tartozik, melyekben a döntéshozó célja a profit maximalizálása korlátozott erőforrások mellett.

[1] A nemnegativitási feltételek korlátozzák ugyan a döntési változók értékeit, általában azonban mégis külön kezeljük ezeket a többi feltételtől. Ennek oka azonnal nyilvánvaló lesz, amikor a 4. fejezetben a szimplex algoritmust fogjuk tanulmányozni.

Arányossági és additivitási feltevések

Az a tény, hogy egy LP célfüggvényének a döntési változók lineáris függvényének kell lennie, két dolgot von maga után.

1. A célfüggvénynek minden egyes döntési változóhoz tartozó része arányos a döntési változó értékével. Például a célfüggvénynek a négy katonából származó része $(4 \times 3 = 12\$)$ pontosan négyszer akkora, mint a célfüggvénynek az egy katona gyártásából származó része $(3\$)$.

2. A célfüggvénynek bármelyik változóból származó része független a többi döntési változó értékeitől. Például, teljesen mindegy, hogy az x_2 változónak milyen értéke van, x_1 darab katona gyártása mindig $3x_1$ dollárral járul hozzá a célfüggvényhez.

A fentiekhez hasonlóan, az a tény, hogy minden LP feltétel vagy lineáris egyenlőtlenség, vagy lineáris egyenlőség, szintén két dolgot jelent.

1. Minden egyes feltételben az egyes változók hozzájárulása a feltétel bal oldalához arányos a változó értékével. Például három katona gyártása pontosan háromszor annyi felületkezelő órát igényel ($2 \times 3 = 6$ felületkezelő óra), mint ahány felületkezelő órára szükség van egy katonához (2 felületkezelő óra).

2. Minden egyes feltétel bal oldalán egy változó szerepe független a többi változótól. Például, teljesen mindegy, hogy az x_1 változónak milyen értéke van, x_2 darab vonat legyártása x_2 felületkezelő órát és x_2 fafaragó órát igényel.

Mindkét felsorolás első megjegyzésében szereplő tulajdonság a **lineáris programozás arányossági feltevése.** Az első listában a 2. megállapítás azt jelenti, hogy a célfüggvény értéke az egyedi változókból származó hozzájárulások összege. A második listában a 2. megállapítás azt jelenti, hogy mindegyik feltételben a bal oldal az egyes változókból származó részek összege. Ezért mindkét felsorolásban a második megjegyzésben szereplő tulajdonságot a **lineáris programozás additivitási feltevésének** nevezzük.

Ahhoz, hogy egy LP egy valódi életből származó helyzetet megfelelően írjon le, a döntési változóknak meg kell felelniük az arányossági és az additivitási feltevéseknek. Ezenkívül még az oszthatósági és bizonyossági feltevéseknek is meg kell felelnie egy valós helyzetet leíró LP-nek.

Oszthatósági feltevés

Az **oszthatósági feltevés** azt jelenti, hogy mindegyik döntési változó felvehet tört értékeket is. Például Giapetto problémájában az oszthatósági feltevés azt jelenti, hogy elfogadhatónak tekintjük 1.5 katona vagy 1.63 vonat gyártását. Mivel a valóságban Giapetto nem tud törtrész katonát vagy vonatot gyártani, az oszthatósági feltevés a Giapetto problémában nem teljesül. Egy olyan lineáris programozási feladatot, amelyikben néhány, vagy minden változó csak nemnegatív egész értékeket vehet fel, **integer programozási feladatnak** (vagy egészértékű programozási feladatnak) nevezünk. Az integer programozási problémákat a 8. fejezetben tárgyaljuk.

Nagyon sokszor adódik olyan helyzet, amikor az oszthatósági feltevés nem teljesül, ám ésszerű és jó megoldást kaphatunk, ha az LP optimális megoldásában a változók értékeit egész számmá kerekítjük. Tegyük fel, hogy egy LP optimális megoldásának az az eredménye, hogy egy autógyár gyártson 150 000.4 autót a vizsgált évben. Ilyen esetben nyugodtan mondhatjuk az autógyárnak, hogy gyártson 150 000 vagy 150 001 darab autót, és meglehetősen magabiztosak lehetünk abban, hogy ez ésszerűen megközelíti az optimális termelési tervet. Másrészt azonban, ha egy LP egyik változója azt jelentené, hogy hány rakétakilövő állomást használjon az Egyesült Államok, és az LP optimális megoldásában azt kapnánk, hogy 0.4 rakétakilövő állomást kell építeni, óriási különbséget jelentene, ha a számot 0-ra lefelé vagy 1-re fölfelé kerekítenénk. Ebben az esetben a 8. fejezetben tárgyalt integer programozási módszereket kell alkalmaznunk, mivel a rakétakilövő állomások száma semmiképpen sem osztható törtrészekre.

Bizonyossági feltevés

A **bizonyossági feltevés** azt mondja ki, hogy minden paraméter (a célfüggvény-együtthatók, a jobb oldala, a technológiai együtthatók) biztosan ismert. Ha nem lennénk biztosak abban, hogy pontosan hány fafaragó és hány felületkezelő óra szükséges egy vonat gyártásához, akkor megsértenénk a bizonyossági feltevést.

Lehetséges megoldások halmaza és az optimális megoldás

A lineáris programozási feladathoz kapcsolódó két legfontosabb fogalom a lehetséges megoldások halmaza és az optimális megoldás. E két fogalom definiálásához a *pont* kifejezést használjuk: egy pontnak a döntési változók valamely meghatározott értékét tekintjük.

DEFINÍCIÓ

Egy LP **lehetséges megoldásainak halmaza** az összes olyan pontok halmaza, amelyek kielégítik az LP valamennyi feltételét és az összes előjelkorlátozást. (A lehetséges megoldások halmaza helyett használhatjuk még a következő kifejezéseket is: megvalósítható megoldások halmaza, megvalósítható tartomány, lehetséges tartomány.)

Például Giapetto problémájában az $(x_1 = 40, x_2 = 20)$ pont a lehetséges megoldások halmazában van. Figyeljük meg, hogy $x_1 = 40$ és $x_2 = 20$ kielégíti a (2)–(4) korlátozó feltételeket és az (5)–(6) nemnegativitási feltételeket:

(2) feltétel: $2x_1 + x_2 \leq 100$, teljesül, mert $2(40) + 20 \leq 100$.

(3) feltétel: $x_1 + x_2 \leq 80$, teljesül, mert $40 + 20 \leq 80$.

(4) feltétel: $x_1 \leq 40$, teljesül, mert $40 \leq 40$.

(5) nemnegativitási feltétel: $x_1 \geq 0$, teljesül, mert $40 \geq 0$.

(6) nemnegativitási feltétel: $x_2 \geq 0$, teljesül, mert $20 \geq 0$.

Másrészt az $(x_1 = 15, x_2 = 70)$ pont nincs benne a lehetséges megoldások halmazában. Igaz ugyan, hogy $x_1 = 15$ és $x_2 = 70$ kielégíti a (2),(4),(5) és (6)-ot, de nem elégíti ki (3)-at: $15 + 70$ nem kisebb vagy egyenlő, mint 80. Minden olyan pont, amelyik nincs az LP lehetséges megoldásainak halmazában, egy **nemlehetséges pont.** A nemlehetséges pont egy másik példájaként tekintsük $(x_1 = 40, x_2 = -20)$-at. Annak ellenére, hogy ez a pont kielégíti az összes korlátozó feltételt és az (5) nemnegativitási feltételt, mégsem lehetséges, mert nem elégíti ki a (6) nemnegativitási $(x_2 \geq 0)$ feltételt. Giapetto problémájában a lehetséges megoldások halmaza az olyan lehetséges gyártási tervek összessége, amelyeket Giapettónak figyelembe kell vennie, amikor az optimális gyártási tervet keresi.

DEFINÍCIÓ

Egy maximalizálási problémában az LP **optimális megoldása** egy olyan pont a lehetséges megoldások halmazában, amelyikhez a legnagyobb célfüggvényérték tartozik. Hasonló módon egy minimalizálási problémában az optimális megoldás egy olyan pont a lehetséges megoldások halmazában, ahol a célfüggvény értéke a legkisebb.

A legtöbb LP-nek csak egy optimális megoldása van. Mindazonáltal bizonyos LP-knek nincs optimális megoldása, másoknak pedig végtelen sok optimális megoldásuk is lehet (ezeket az eseteket a 3.3 alfejezetben tárgyaljuk). A 3.2 alfejezetben megmutatjuk, hogy a Giapetto problémának egyetlen optimális megoldása van ($x_1 = 20, x_2 = 60$). Ez a megoldás a

$$z = 3x_1 + 2x_2 = 3(20) + 2(60) = 180\$$$

célfüggvényértéket adja.

Amikor azt mondjuk, hogy ($x_1 = 20, x_2 = 60$) a Giapetto probléma optimális megoldása, akkor azt állítjuk, hogy a lehetséges megoldások halmazában nincsen olyan pont, amelyhez 180-nál nagyobb célfüggvényérték tartozna. Giapetto úgy tudja maximalizálni a profitját, ha 20 katonát és 60 vonatot gyárt hetenként. Ha Giapetto elhatározza, hogy minden héten 20 katonát és 60 vonatot gyárt, akkor a heti profitja: 180$ mínusz a heti fix költségek. Például, ha Giapetto egyetlen fix költsége a 100$ heti bérleti díj, akkor a heti profit $180 - 100 = 80\$$ lenne.

Feladatok

A csoport

1. Jones farmernek el kell döntenie, hogy ebben az évben hány hold kukoricát és hány hold búzát ültessen. Egy hold hozama 25 mázsa búza, és ez az egy hold heti 10 óra munkát igényel. Egy hold hozama 10 mázsa kukorica, és ez az egy hold heti 4 óra munkát igényel. A búza mázsánként 4$-ért adható el, és a kukorica eladási ára 3$ mázsánként. A farmernak hét hold földje van és heti 40 munkaóra áll rendelkezésére. Kormányzati előírás értelmében ebben az évben legalább 30 mázsa kukoricát kell termelni. Legyen $x_1 =$ ahány hold kukoricát ültet Jones farmer és $x_2 =$ ahány hold búzát ültet. Ezeket a döntési változókat használva írja fel azt az LP-t, amelynek megoldása megadja Jones farmernek a választ arra, hogy hogyan maximalizálja a búzából és kukoricából származó teljes jövedelmet!

2. Válaszolja meg az 1. feladatra vonatkozó alábbi kérdéseket!

(a) Benne van-e a lehetséges megoldások halmazában ($x_1 = 2, x_2 = 3$)?

(b) Benne van-e a lehetséges megoldások halmazában ($x_1 = 4, x_2 = 3$)?

(c) Benne van-e a lehetséges megoldások halmazában ($x_1 = 2, x_2 = -1$)?

(d) Benne van-e a lehetséges megoldások halmazában ($x_1 = 3, x_2 = 2$)?

3. Vezessük be Jones farmer problémájában a következő változókat: $x_1 =$ ahány mázsa kukoricát termel Jones farmer és $x_2 =$ ahány mázsa búzát termel. Írja át Jones LP-jét az új változók segítségével!

4. A Truckco cég kétféle teherautót gyárt: 1-est és 2-est. A gyártás során minden teherautónak végig kell mennie a festőműhelyen és az összeszerelő műhelyen. Ha a festőműhelyben kizárólag csak 1-es típusú teherautókat festenének, akkor naponta 800 teherautót lehetne befesteni, viszont ha kizárólag csak 2-es típusú teherautókat festenének, akkor napi 700-at lehetne megcsinálni. Ha az összeszerelő műhely kizárólag csak 1-es típusú teherautó motorokat szerelne össze, akkor naponta 1500 darabot tudnának összeszerelni, viszont ha az összeszerelő műhely kizárólag 2-es típusú teherautókhoz való motorokkal dolgozna, akkor ebből naponta 1200-at lehetne összeszerelni. Minden 1-es típusú teherautó 300 dollárral járul hozzá a profithoz; minden 2-es típusú teherautó 500 dollárral járul hozzá a profithoz. Fogalmazzon meg egy LP-t, amely maximalizálja a Truckco cég profitját!

B csoport

5. Miért nem engedhető meg egy LP-ben $<$ vagy $>$ alakú feltétel?

3.2. A kétváltozós lineáris programozási feladat grafikus megoldása

Bármely LP, amelyben csak két változó van, megoldható grafikusan. A változókat mindig x_1 és x_2-vel jelöljük, és a koordináta tengelyeket x_1 tengelynek és x_2 tengelynek tekintjük. Tegyük fel, hogy ábrázolni akarjuk azon pontok halmazát, amelyek kielégítik a következő egyenlőtlenséget:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6 \tag{7}$$

Ugyanezek az (x_1, x_2) pontok kielégítik a

$$3x_2 \leq 6 - 2x_1$$

egyenlőtlenséget is. Ez utóbbi egyenlőtlenség átírható

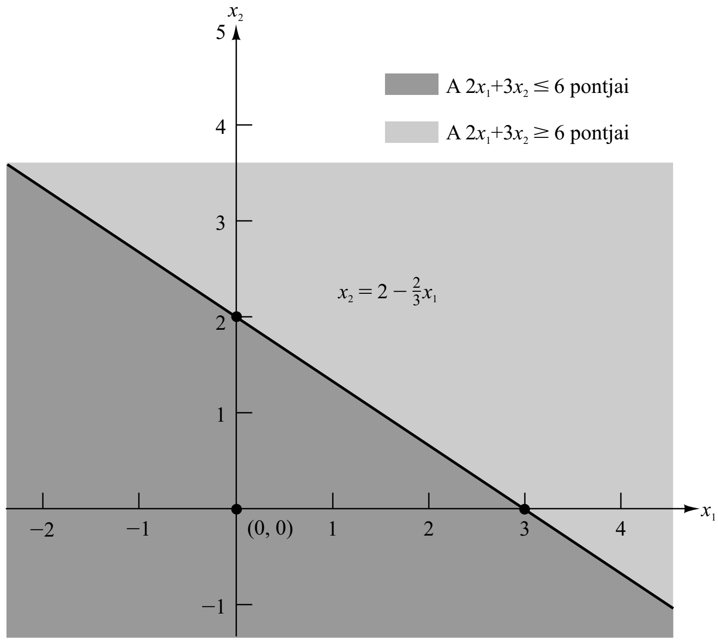
$$x_2 \leq \tfrac{1}{3}(6 - 2x_1) = 2 - \tfrac{2}{3}x_1 \tag{8}$$

alakba is.

Mivel az ábrán lefelé mozogva x_2 értékei csökkennek (lásd 1. ábra), azon pontok, amelyek kielégítik (8)-at és (7)-et, az $x_2 = 2 - \frac{2}{3}x_1$ egyenesen vagy alatta fekszenek. A pontoknak ez a halmaza az 1. ábrán sötétebbre árnyalva látható. Megjegyezzük mindazonáltal, hogy $x_2 = 2 - \frac{2}{3}x_1$, $3x_2 = 6 - 2x_1$ és $2x_1 + 3x_2 = 6$ mind ugyanazt az egyenest adják. Ez azt jelenti, hogy azok a pontok, amelyek kielégítik a (7) egyenlőtlenséget, a $2x_1 + 3x_2 = 6$ egyenesen vagy alatta fekszenek. Hasonlóan, azok a pontok, amelyek kielégítik a $2x_1 + 3x_2 \geq 6$ egyenlőtlenséget, a $2x_1 + 3x_2 = 6$ egyenesen vagy fölötte fekszenek. (Ez utóbbi pontok az 1. ábrán világosabbra árnyalva láthatók.)

Tekintsünk egy lineáris egyenlőtlenséggel adott feltételt az $f(x_1, x_2) \geq b$ vagy $f(x_1, x_2) \leq b$ formában. Általában be lehet bizonyítani, hogy két dimenzióban azon pontok halmaza, amelyek kielégítenek egy lineáris egyenlőtlenséget, tartalmazza az $f(x_1, x_2) = b$ egyenes pontjait, valamint az egyenes egyik oldalán levő pontokat.

1. ÁBRA
Lineáris egyenlőtlenség ábrázolása



Nagyon könnyen kitalálhatjuk annak a módját, hogy megtaláljuk az egyenesnek azt az oldalát, amely az $f(x_1,x_2) \leq b$ vagy $f(x_1,x_2) \geq b$ feltételeknek felel meg. Egyszerűen választunk egy tetszőleges P pontot, amelyik nincs rajta az egyenesen. Ezután eldöntjük, hogy P kielégíti-e az egyenlőtlenségünket. Ha igen, akkor az egyenesnek *ugyanezen* az oldalán levő minden pont kielégíti az egyenlőtlenséget. Ha P nem elégíti ki a vizsgált egyenlőtlenséget, akkor az $f(x_1,x_2) = b$ egyenes *másik* oldalán levő pontok (tehát amelyik oldal nem tartalmazza P-t) elégítik ki az egyenlőtlenséget. Például annak eldöntésére, hogy vajon a $2x_1 + 3x_2 \geq 6$ egyenlőtlenséget a $2x_1 + 3x_2 = 6$ egyenes alatti vagy fölötti pontok elégítik-e ki, észrevesszük, hogy $(0,0)$ nem elégíti ki a $2x_1 + 3x_2 \geq 6$-ot. Mivel $(0,0)$ a $2x_1 + 3x_2 = 6$ egyenes *alatt* van, a $2x_1 + 3x_2 \geq 6$-ot kielégítő pontok halmaza tartalmazza a $2x_1 + 3x_2 = 6$ egyenes pontjait, valamint a $2x_1 + 3x_2 = 6$ egyenes *fölötti* pontokat. Ez megegyezik azzal, amit az 1. ábrán látunk.

A lehetséges megoldások előállítása

Egy kétváltozós LP megoldását Giapetto problémájával illusztráljuk. Először is grafikusan meghatározzuk a lehetséges megoldások halmazát. A lehetséges megoldások halmaza Giapetto problémájában az összes olyan (x_1,x_2) pontok halmaza, amelyek kielégítik a következő feltételeket:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &\leq 100 && \text{(korlátozó feltételek)} && (2)\\
x_1 + x_2 &\leq 80 && && (3)\\
x_1 \qquad &\leq 40 && && (4)\\
x_1 \qquad &\geq 0 && \text{(nemnegativitási feltételek)} && (5)\\
x_2 &\geq 0 && && (6)
\end{aligned}
$$

Ahhoz, hogy egy (x_1,x_2) pont a lehetséges megoldások között legyen, (x_1,x_2)-nek ki kell elégítenie a (2)–(6) egyenlőtlenségek mindegyikét. Figyeljük meg, hogy azok a pontok, amelyek (5) és (6)-nak megfelelnek, az x_1–x_2 sík első negyedében vannak. Ezt a 2. ábra úgy szemlélteti, hogy az x_1 és x_2 tengelyeken nyilak mutatnak az x_2 tengelytől jobbra, illetve az x_1 tengelytől felfelé.

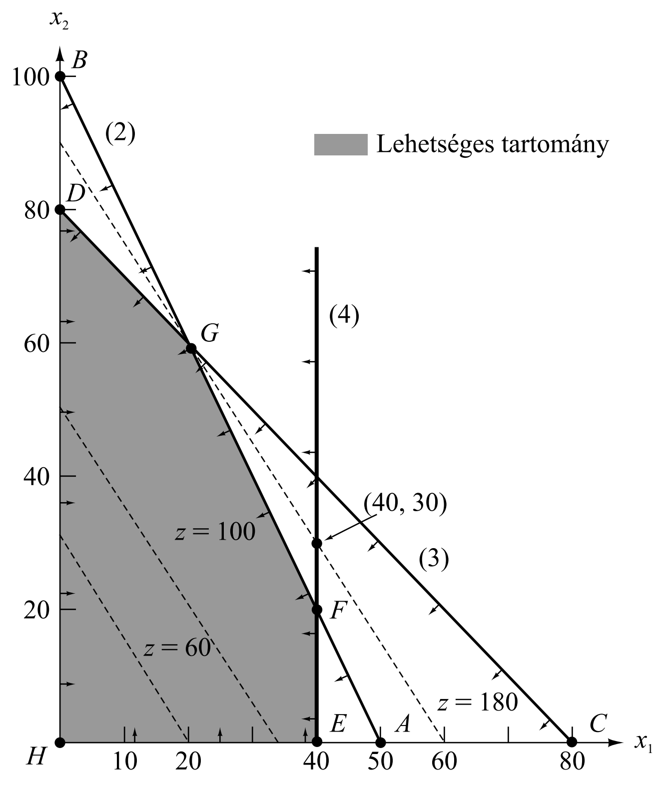
Így azok a pontok, amelyek az első negyeden kívül fekszenek, nem lehetnek benne a lehetséges megoldások halmazában. Ez azt jelenti, hogy a lehetséges megoldások halmaza azon pontok összessége lesz az első negyedben, amelyek kielégítik a (2)–(4) feltételeket.

A lineáris egyenlőtlenségeket kielégítő pontok halmazának meghatározására szolgáló módszerünk segít abban, hogy megtaláljuk a (2)–(4)-et kielégítő pontokat. A 2. ábrából látható, hogy a (2) feltétel az AB egyenesen lévő és az alatta fekvő pontokra teljesül (AB a $2x_1 + x_2 = 100$ egyenes). A (3) egyenlőtlenséget a CD egyenes pontjai és az alatta fekvő pontok elégítik ki (CD az $x_1 + x_2 = 80$ egyenes). Végül, a (4) feltétel minden olyan pontra teljesül, amelyek vagy rajta vannak az EF egyenesen, vagy tőle balra helyezkednek el (EF az $x_1 = 40$ egyenes). Az egyeneseknek az egyenlőtlenségeket kielégítő oldalait a 2. ábrán kis nyilakkal jelezzük.

A 2. ábrából láthatjuk, hogy azok a pontok az első negyedben, amelyek kielégítik a (2), (3) és (4)-et, a $DGFEH$ ötszög által határolt területen helyezkednek el. Ennek az ötszögnek vagy a belsejének minden pontja benne van a lehetséges megoldások halmazában. Minden más pontja a síknak a (2)–(6) feltételek közül legalább egynek nem felel meg. Például a $(40,30)$ pont a $DGFEH$ ötszögön kívül fekszik, mert az AB egyenes szakasz fölött van. Így a $(40,30)$ pont nem lehetséges megoldás, mivel nem elégíti ki a (2) feltételt.

Egy nagyon egyszerű módszer a lehetséges megoldások halmazának meghatározására az is, ha a nemlehetséges pontok halmazát keressük meg. Vegyük észre, hogy az AB egye-

2. ÁBRA
Giapetto problémájának grafikus megoldása



nes fölötti pontok a 2. ábrán nem lehetséges pontok, mert nem elégítik ki (2)-t. Hasonló módon láthatjuk, hogy minden CD fölötti pont nemlehetséges, mert nem elégítik ki (3)-at. Továbbá az EF-től jobbra fekvő pontok sem lehetségesek, mert nem elégítik ki (4)-et. Amint kizártuk a nemlehetséges pontokat, megmarad a $(DGFEH)$ alakzat, vagyis a lehetséges megoldások halmaza.

Az optimális megoldás

Miután a Giapetto problémában megtaláltuk a lehetséges megoldások halmazát, megkeressük az optimális megoldást. Az optimális megoldás az a pont a lehetséges megoldások halmazában, amelyhez a $z = 3x_1 + 2x_2$ függvény legnagyobb értéke tartozik. Ahhoz, hogy az optimális megoldást megtaláljuk, be kell rajzolnunk az ábrába egy olyan egyenest, amelyen a rajta fekvő pontokhoz ugyanaz a z érték tartozik. Egy max problémában egy ilyen egyenest **profit szintvonalnak** nevezünk (egy min problémában pedig **költség szintvonalnak** nevezzük). Egy profit szintvonal berajzolásához kiválasztunk egy tetszőleges pontot a lehetséges megoldások halmazából, és kiszámítjuk a hozzátartozó z értéket. Válasszuk például a $(20,0)$ pontot. Ekkor $z = 3(20) + 2(0) = 60$. Így a $(20,0)$ pont a $z = 3x_1 + 2x_2 = 60$ szintvonalon fekszik. Ha átírjuk a $3x_1 + 2x_2 = 60$ egyenletet $x_2 = 30 - \frac{3}{2}x_1$ alakba, látjuk, hogy a $3x_1 + 2x_2 = 60$ szintvonalnak $-\frac{3}{2}$ a meredeksége. Mivel minden szintvonal $3x_1 + 2x_2 =$ konstans alakú, a profit szintvonalaknak (ebben a problémában) azonos iránytangensük van. *Ez azt jelenti, hogy amint egyszer már berajzoltunk egy profit szintvonalat, az összes többit úgy találhatjuk meg, hogy a berajzolt szintvonalat önmagával párhuzamosan eltoljuk.*

Most már világos, hogyan találjuk meg egy kétváltozós LP optimális megoldását. Miután berajzoltunk egyetlen profit szintvonalat, létrehozunk más szintvonalakat úgy, hogy a berajzolt profit szintvonalat párhuzamosan eltoljuk abba az irányba, amerre z értéke nő (egy max problémában). Egy bizonyos pont után az eltolt szintvonal többé már nem metszi a lehetséges megoldások halmazát. A legutolsó pont, ahol a szintvonal metszi (érinti) a lehetséges halmazt, megadja a legnagyobb z értéket a lehetséges megoldások halmazának pontjaihoz tartozó értékek közül. Ezzel egyúttal megmutatja az LP optimális megoldását. A mi problémánkban a $z = 3x_1 + 2x_2$ célfüggvény értékei nőnek, ha abban az irányban mozdulunk, amerre x_1 is és x_2 is növekszik. Így most olyan újabb profit szintvonalakat rajzolunk, amelyek párhuzamosak a $3x_1 + 2x_2 = 60$-nal és attól északkeletre vannak (azaz fölfelé és jobbra mozgunk párhuzamosan). A 2. ábrából láthatjuk, hogy a G ponton átmenő szintvonal az utolsó, amelyiknek még van közös pontja a lehetséges halmazzal. Így G az a pont a lehetséges megoldások halmazában, amelyhez a legnagyobb z érték tartozik, és ezáltal a Giapetto probléma optimális megoldása. Figyeljük meg, hogy G a $2x_1 + x_2 = 100$ és az $x_1 + x_2 = 80$ egyenesek metszéspontja. Az e két egyenletből álló egyenletrendszert megoldva azt kapjuk, hogy $(x_1 = 20, x_2 = 60)$ a Giapetto probléma optimális megoldása. A z függvény optimális értékét úgy kapjuk, hogy x_1 és x_2 ezen értékeit a célfüggvénybe helyettesítjük. Így a z optimális értéke $z = 3(20) + 2(60) = 180$.

Aktív és nemaktív feltételek

Amint megtaláltuk egy LP optimális megoldását, a feltételek osztályozása nagyon hasznos (lásd 5. és 6. fejezet) abból a szempontból, hogy aktív vagy nemaktív feltételekről van-e szó?

DEFINÍCIÓ

Egy feltétel **aktív**, ha a döntési változóknak az optimális megoldáshoz tartozó értékeit a feltételbe helyettesítve a feltétel bal oldala egyenlő a jobb oldallal.

Így (2) és (3) aktív feltételek.

DEFINÍCIÓ

Egy feltétel **nemaktív**, ha a döntési változóknak az optimális megoldáshoz tartozó értékeit a feltételbe helyettesítve a bal oldal nem egyenlő a jobb oldallal.

Mivel $x_1 = 20$ kisebb, mint 40, ezáltal (4) egy nemaktív feltétel.

Konvex halmazok, extremális pontok és az LP

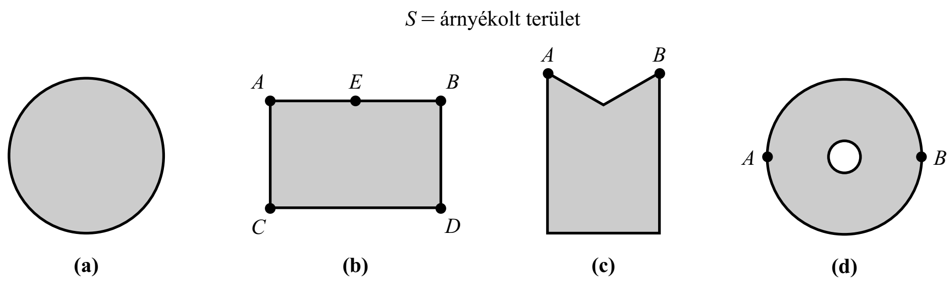
A Giapetto probléma lehetséges megoldásainak halmaza a konvex halmazok egy példája.

DEFINÍCIÓ

Pontok S halmaza **konvex halmaz**, ha S bármely két pontját összekötő szakasz teljes egészében S-ben van.

A 3. ábra erre a definícióra mutat négy példát. A 3a és 3b ábrákban S bármely két pontját összekötő szakasz csak S elemeit tartalmazza. Így e két ábrában S konvex halmaz. A 3c és 3d ábrákban S nemkonvex. Mindkét ábrában A és B benne vannak az S halmazban, de az AB szakasznak vannak olyan pontjai, amelyek nem elemei az S halmaznak. A lineáris programozásra vonatkozó tanulmányainkban különleges jelentősége van egy konvex halmaz bizonyos típusú pontjainak (amelyeket extremális pontoknak nevezünk).

3. ÁBRA
Konvex és nemkonvex halmazok



DEFINÍCIÓ

Egy konvex S halmaz egy P pontja az S **extremális pontja**, ha a P végpontja minden olyan szakasznak, amelyik teljes egészében S-ben fekszik és tartalmazza a P pontot.

Például a 3a ábrán a kör kerületének minden pontja a kör extremális pontja. A 3b ábrán A, B, C és D pontok extremális pontjai S-nek. Bár az E pont az S határán van a 3b ábrán, E nem extremális pontja S-nek. Mint látható, E az AB szakaszon fekszik (AB teljes egészében S-ben van), de E nem végpontja az AB szakasznak. Az extremális pontokat néha **csúcspontoknak** is nevezik, mert ha S egy sokszög, akkor az S extremális pontjai valóban a sokszög csúcspontjai.

Giapetto problémájában a lehetséges megoldások halmaza konvex halmaz. Ez nem véletlen: bizonyítható, hogy bármely LP lehetséges megoldásainak halmaza konvex halmaz. A 2. ábrán láthatjuk, hogy a lehetséges megoldások halmazának extremális pontjai egyszerűen a D, F, E, G és H pontok. Bizonyítható, hogy bármely LP lehetséges halmazában az extremális pontok száma véges. Figyeljük meg azt is, hogy a Giapetto probléma optimális megoldása (G pont) a lehetséges megoldások halmazának extremális pontja. Bizonyítható, hogy *minden olyan LP, amelynek van optimális megoldása, tartalmaz egy olyan extremális pontot, amelyik optimális*. Ez az eredmény nagyon fontos, mert így elegendő az optimális megoldást az extremális pontok halmazában keresni (a lehetséges megoldások halmaza rendszerint *végtelen* sok pontból áll, míg az extremális pontok halmaza *véges* sok pontot tartalmaz).

Giapetto problémájában nagyon könnyű belátni, hogy az optimális megoldás szükségképpen a lehetséges halmaz egy extremális pontja. Észrevettük, hogy z értéke növekszik, amint a profit szintvonalat északkeleti irányba eltoljuk, ezáltal biztos volt, hogy a legnagyobb z érték egy olyan P ponthoz tartozik, amelytől északkeletre már nincs pontja a lehetséges halmaznak. Ez azt jelenti, hogy az optimális megoldásnak valahol a $DGFEH$ lehetséges halmaz határán kell lennie. Az LP-nek szükségképpen kell hogy legyen egy optimális pontja, mivel minden olyan szakaszra, amelyik a lehetséges halmaz határán fekszik, a legnagyobb z érték a szakasz valamelyik végpontjához tartozik.

Ennek belátására tekintsük a 2. ábrán az FG szakaszt. FG része a $2x_1 + x_2 = 100$ egyenesnek és a meredeksége -2. Ha FG mentén elmozdulunk és x_1-et 1-gyel csökkentjük, akkor x_2 2-vel növekedni fog. Egyúttal z értéke a következőképpen változik: $3x_1$ értéke $3(1) = 3$-mal csökken és $2x_2$ értéke $2(2) = 4$-gyel növekszik. Így összességében z értéke $4 - 3 = 1$-gyel növekszik. Ez azt jelenti, hogy FG mentén a csökkenő x_1 irányába elmozdulva, z értéke növekszik. Így a z értékének a G pontban meg kell haladnia a z-nek az FG szakasz bármely más pontjában felvett értékét.

Hasonló okoskodással belátható, hogy tetszőleges célfüggvény esetén z értéke egy adott szakaszon a szakasz egyik végpontjában lesz maximális. Ezért bármely LP esetén a lehetséges halmazhoz tartozó legnagyobb z érték egy olyan szakasz valamelyik végpontjában lesz elérhető, amely szakasz éppen a lehetséges megoldások halmazát határolja. Röviden, a lehetséges halmaz valamelyik extremális pontjának optimálisnak kell lennie. (Ha az olvasó ellenőrizni szeretné az eddigiek megértését, akkor mutassa meg, hogy ha Giapetto célfüggvénye $z = 6x_1 + x_2$ lenne, akkor az F pont lenne az optimális, míg ha Giapetto célfüggvénye $z = x_1 + 6x_2$ lenne, akkor a D pont lenne az optimális.)

Annak a bizonyítása, hogy egy LP-nek mindig van optimális extremális pontja, nagyon komolyan támaszkodik arra a tényre, hogy mind a célfüggvény, mind pedig a feltételek lineáris függvények. A 10. fejezetben megmutatjuk, hogy egy olyan optimalizálási problémában, ahol a célfüggvény, vagy néhány feltétel nem lineáris, az optimalizálási probléma optimális megoldása esetleg nem extremális pontban van.

Minimalizálási problémák grafikus megoldása

2. PÉLDA A Dorian Auto cég luxusautókat és teherautókat gyárt. A vállalat úgy gondolja, hogy vásárlói legnagyobb valószínűséggel magas jövedelmű nők és férfiak. Ennek a fogyasztói csoportnak a megnyerésére a Dorian Auto egy komoly tévé-hirdetési kampányt indított és elhatározta, hogy 1 perces reklámhelyeket vásárol kétféle típusú tévéműsorban: vidám műsorokban és futballmeccsek alatt. Minden kabarébeli reklámot 7 millió magas jövedelmű nő és 2 millió magas jövedelmű férfi néz. Minden futballmeccs alatti reklámot 2 millió magas jövedelmű nő és 12 millió magas jövedelmű férfi néz. Az egyperces kabarébeli reklám 50 000 dollárba kerül, és az egyperces futballmeccs alatti reklám ára 100 000 dollár. Dorian azt szeretné, ha hirdetéseit legalább 28 millió magas jövedelmű nő és 24 millió magas jövedelmű férfi látná. Alkalmazzuk a lineáris programozást arra, hogy a Dorian cég a reklámcéljait minimális költségek mellett érje el!

Megoldás Dorian-nek el kell döntenie, hogy hány egyperces kabaré- és futball-reklámot vegyen, így a döntési változók:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \text{ a kabaré alatti egyperces reklámok száma} \\
x_2 &= \text{ a futballmeccs alatti egyperces reklámok száma}
\end{aligned}
$$

Dorian minimalizálni akarja a teljes reklámköltséget (ezer dollárban):

$$
\begin{aligned}
\text{Teljes reklámköltség} &= \text{kabaré alatti} + \text{futballmeccs alatti reklám költsége} \\
&= \left(\frac{\text{költség}}{\text{kabaré alatti reklám}}\right)\begin{pmatrix}\text{összes kabaré} \\ \text{alatti reklám}\end{pmatrix} \\
&\quad + \left(\frac{\text{költség}}{\text{futballmeccs alatti reklám}}\right)\begin{pmatrix}\text{összes futballmeccs} \\ \text{alatti reklám}\end{pmatrix} \\
&= 50x_1 + 100x_2
\end{aligned}
$$

Ezáltal Dorian célfüggvénye

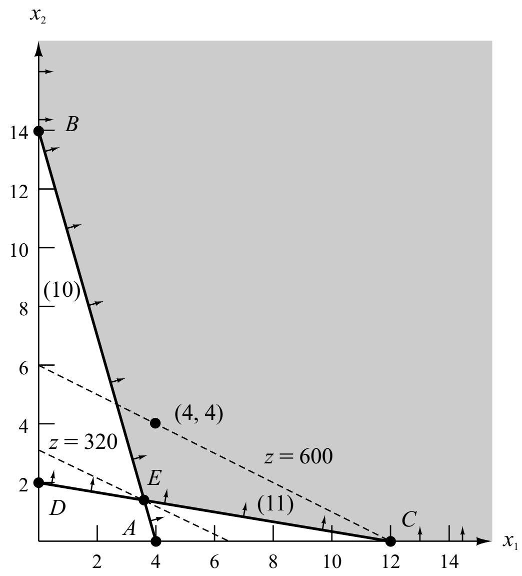
$$\min z = 50x_1 + 100x_2 \tag{9}$$

A feltételek a következők:

1. feltétel A reklámokat lássa legalább 28 millió magas jövedelmű nő.

2. feltétel A reklámokat lássa legalább 24 millió magas jövedelmű férfi.

4. ÁBRA
A Dorian probléma grafikus megoldása



Most az 1. és 2. feltételt kifejezzük x_1 és x_2 segítségével. MJN-nel jelöljük azon magas jövedelmű nők számát, akik néznek reklámot, MJF pedig a reklámot néző magas jövedelmű férfiak számát jelöli (milliókban).

$$\begin{aligned}
\text{MJN} &= \left(\frac{\text{MJN}}{\text{kabaré alatti reklám}}\right)\begin{pmatrix}\text{összes kabaré}\\ \text{alatti reklám}\end{pmatrix}\\
&\quad + \left(\frac{\text{MJN}}{\text{futballmeccs alatti reklám}}\right)\begin{pmatrix}\text{összes futballmeccs}\\ \text{alatti reklám}\end{pmatrix}\\
&= 7x_1 + 2x_2\\
\text{MJF} &= \left(\frac{\text{MJF}}{\text{kabaré alatti reklám}}\right)\begin{pmatrix}\text{összes kabaré}\\ \text{alatti reklám}\end{pmatrix}\\
&\quad + \left(\frac{\text{MJF}}{\text{futballmeccs alatti reklám}}\right)\begin{pmatrix}\text{összes futballmeccs}\\ \text{alatti reklám}\end{pmatrix}\\
&= 2x_1 + 12x_2
\end{aligned}$$

Így most már felírhatjuk az 1. feltételt:

$$7x_1 + 2x_2 \geq 28 \tag{10}$$

és a 2. feltételt:

$$2x_1 + 12x_2 \geq 24 \tag{11}$$

Az $x_1 \geq 0$ és $x_2 \geq 0$ nemnegativitási feltételek is szükségesek, ezáltal Dorian LP-je a következő:

$$\begin{aligned}
\min\ z &= 50x_1 + 100x_2 \\
\text{f.h.}\quad 7x_1 + \ \ 2x_2 &\geq 28 \qquad \text{(MJN)}\\
2x_1 + 12x_2 &\geq 24 \qquad \text{(MJF)}\\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Ez a feladat az LP alkalmazásoknak egy igen széleskörűen alkalmazott típusa, amelyben a döntéshozó minimalizálni akarja a költségeket bizonyos adott feltételek mellett. Ennek az

LP-nek a grafikus megoldásához először is felrajzoljuk a lehetséges megoldások halmazát (4. ábra).

Figyeljük meg, hogy a (10) feltételt kielégítő pontok az AB egyenesen vagy fölötte vannak (AB a $7x_1 + 2x_2 = 28$ egyenes egy része), a (11) feltételt kielégítő pontok pedig a CD egyenesen vagy fölötte vannak (CD a $2x_1 + 12x_2 = 24$ egyenes része). A 4. ábrán láthatjuk, hogy az első síknegyednek csak azok a pontjai felelnek meg a (10) és (11)-nek egyszerre, amely pontok halmazát az x_1 tengely, CEB és az x_2 tengely határolja. Ez árnyékolva látható.

Hasonlóan a Giapetto problémához, a Dorian problémában is konvex a lehetséges megoldások halmaza. Másrészt azonban a Dorian problémában, a Giapettóéval ellentétben, a lehetséges megoldások halmaza olyan, hogy legalább egy változó tetszőlegesen nagy értékeket vehet fel. Egy ilyen lehetséges halmazt **nemkorlátos lehetséges megoldáshalmaznak** nevezünk.

Mivel Dorian minimalizálni akarja a teljes reklámköltséget, az optimális megoldás ebben a feladatban a lehetséges halmaznak az a pontja, amelyhez a *legkisebb* z érték tartozik. Az optimális megoldás megtalálásához be kell rajzolnunk egy *költség szintvonalat*, amely metszi a lehetséges megoldások halmazát. Egy költség szintvonal egy olyan egyenes, amelynek mentén minden ponthoz ugyanakkora z érték tartozik (vagyis ugyanakkora költség). Választunk egy tetszőleges pontot ($x_1 = 4$, $x_2 = 4$) és megrajzoljuk az ezen a ponton átmenő szintvonalat. Mivel erre a pontra $z = 50(4) + 100(4) = 600$, a szintvonal a $z = 50x_1 + 100x_2 = 600$ egyenes lesz.

Most tekintsük az $50x_1 + 100x_2 = 600$ költség szintvonallal párhuzamos olyan szintvonalakat, amelyek az előbbitől délnyugatra, azaz a csökkenő z irányában vannak. A lehetséges megoldások halmazának utolsó olyan pontja, amely még metszésben van egy szintvonallal, lesz a lehetséges halmaznak az a pontja, amelyhez a *legkisebb* z érték tartozik. A 4. ábrából láthatjuk, hogy E pont az, amelyikhez a legkisebb lehetséges z érték tartozik; ez a Dorian probléma optimális megoldása. Vegyük észre, hogy az E pont a $7x_1 + 2x_2 = 28$ és $2x_1 + 12x_2 = 24$ egyenesek metszéspontja. E két egyenletet egyenletrendszerként megoldva kapjuk az optimális megoldást ($x_1 = 3.6$, $x_2 = 1.4$). Az optimális z értéket ezután megkapjuk, ha x_1 és x_2-nek ezeket az értékeit behelyettesítjük a célfüggvénybe. Így az optimális z érték $z = 50(3.6) + 100(1.4) = 320 = 320\,000\$$. Mivel az E pontnál az MJN és MJF feltételek mindegyike egyenlőség formájában teljesül, mindkét feltétel aktív.

Megfelel-e a Dorian modell a 3.1. alfejezetben vázolt négy lineáris programozási feltevésnek?

Ahhoz, hogy az arányossági feltevés érvényesüljön, minden egyes kabaréreklámnak 7 millió MJN-t és 2 millió MJF-et kell hoznia. Ez ellentmond a gyakorlati tapasztalatoknak, melyek azt mutatják, hogy egy bizonyos idő után a reklámok által növelt fogyasztás csökkenő tendenciát mutat. Ha például 500 egyperces reklám lement a tévében, akkor az emberek többsége már látott egyet, így nem sok értelme van annak, hogy tovább sugározzák a reklámokat. Ez pedig azt jelenti, hogy az arányossági feltevés nem teljesül.

A Dorian modell felírásakor alkalmaztuk az additivitási feltevést a korlátozó feltételek részletezésénél: (MJN nézők) = (MJN kabaré-nézők) + (MJN futball-nézők). A valóságban nagyon sok ember fogja látni mindkét Dorian reklámot, a kabaré alatt is és a futballmeccs alatt vetítettet is. Ezeket az embereket mi duplán számoltuk, ezáltal a Dorian reklámokat látott emberek összlétszámáról pontatlan képet kaptunk. Az a tény, hogy egy személy egynél több reklámot is láthat, azt jelenti, hogy például a kabaréreklám hatékonysága függ a futballreklámok számától. Így az additivitási feltevés nem teljesül.

Amennyiben csak egyperces reklámok állnak rendelkezésre, ésszerűtlen azt mondani, hogy Dorian vegyen 3.6 kabaréreklámot és 1.4 futballreklámot. Így az oszthatósági feltevés sem teljesül, és a Dorian problémát egészértékű programozási feladatként kell felfogni. A 8.3. alfejezetben megmutatjuk, hogy ha Dorian problémáját integer programozással oldjuk meg, a minimális költség vagy az $(x_1 = 6,\ x_2 = 1)$ vagy az $(x_1 = 4,\ x_2 = 2)$ optimális megoldáshoz tartozik. Bármelyik megoldás esetén a minimális költség 400 000$. Ez 25%-kal több, mint amit az LP optimális megoldásaként kaptunk.

Mivel nincs rá mód, hogy bizonyossággal tudjuk azt, hogy a tévéreklámokat hányan nézik, a bizonyossági feltevés sem teljesül. Így arra jutottunk, hogy a Dorian Auto problémában a lineáris programozás négy feltevése közül egyik sem teljesül. Ezeknek a hátrányoknak az ellenére az elemzők ehhez hasonló modelleket alkalmaznak arra a célra, hogy a vállalatok megtalálják az optimális média-mixet.[2]

Feladatok

A csoport

1. Oldja meg grafikusan a 3.1. alfejezet 1. feladatát!

2. Oldja meg grafikusan a 3.1. alfejezet 4. feladatát!

3. A Leary Vegyiművek háromféle vegyszert gyárt: A, B és C vegyszereket. Ezeket az 1-es és 2-es eljárás kombinációjával gyártják. Az 1-es eljárást egy órán keresztül működtetve a költség 4 dollár és az eredmény: 3 egység A, 1 egység B és 1 egység C. A 2-es eljárás egy órája egy dollárba kerül és eredménye 1 egység A és 1 egység B. A kereslet kielégítésére naponta legalább 10 egység A, 5 egység B és 3 egység C állítandó elő. Grafikus megoldás segítségével adjon meg egy olyan napi termelési tervet, amely minimalizálja a költségeket és kielégíti a napi keresletet!

4. A következő célfüggvények mindegyikére határozza meg azt az irányt, amerre a célfüggvény növekszik:

(a) $z = 4x_1 - x_2$

(b) $z = -x_1 + 2x_2$

(c) $z = -x_1 - 3x_2$

5. A Furnco vállalat íróasztalokat és székeket gyárt. Minden íróasztalhoz 4 egység fa, a székekhez 3 egység fa szükséges. Egy íróasztalból 40$, egy székből 25$ profit származik. A piaci feltételeknek megfelelően a legyártott székek számának legalább kétszer annyinak kell lennie, mint az íróasztalok száma. 20 egység fa áll rendelkezésre. Írjon fel egy LP-t a Furnco profitjának maximalizálására! Ezután oldja meg grafikusan az LP-t!

6. Jane farmernek 45 hold földje van. Minden holdon búzát vagy kukoricát vet. Egy hold elvetett búza 200$ profitot, egy hold kukorica 300$ profitot hoz. Az 1. táblázat mutatja az egy-egy hold megműveléséhez szükséges munka- és talajjavítóvegyszer-szükségletet.
Rendelkezésre áll 100 munkás és 120 tonna talajjavító szer. Használjon lineáris programozást annak eldöntésére, hogyan tudja Jane a maximális profitot elérni!

1. TÁBLÁZAT

	Búza	**Kukorica**
Munka	3 munkás	2 munkás
Talajjavító	2 tonna	4 tonna

3.3. Speciális esetek

Mind a Giapetto problémában, mind Dorian problémájában egyértelmű (azaz egyetlen) optimális megoldást kaptunk. Ebben az alfejezetben három olyan LP típust vizsgálunk meg, amelyeknek nincs egyértelmű megoldása.

1. Néhány LP-nek végtelen számú optimális megoldása van (*alternatív* vagy *többszörös optimális megoldások*).

2. Néhány LP-nek nincs lehetséges megoldása (*nem megoldható* LP-k).

3. Néhány LP *nemkorlátos:* egy maximum problémában a lehetséges megoldások halmazán a célfüggvény tetszőlegesen nagy z értékeket vehet fel.

[2]Lilien és Kotler (1983).

Alternatív optimális megoldások

3. PÉLDA Egy autógyár személyautókat és teherautókat gyárt. A gyártás során minden egyes járműnek végig kell mennie a festőműhelyen és a karosszéria összeszerelő műhelyen. Ha a festőműhely csak teherautókat festene, naponta 40 darabot tudna lefesteni. Ha a festőműhely csak személyautókat festene, naponta 60 darabot tudna elkészíteni. Ha a karosszériaműhely csak személyautókat állítana össze, naponta 50-et tudna megcsinálni. Ha a karosszériaműhely csak teherautókkal foglalkozna, naponta 50-et tudna összeállítani. Minden teherautó 300 dollárral és minden személyautó 200 dollárral járul hozzá a profithoz. Alkalmazzunk lineáris programozást a napi termelési terv meghatározásához úgy, hogy a vállalat profitja maximális legyen!

Megoldás A vállalatnak el kell döntenie, hogy naponta hány személyautót és teherautót gyártson. Ennek értelmében a döntési változók:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \text{a naponta gyártott teherautók száma}\\
x_2 &= \text{a naponta gyártott személyautók száma}
\end{aligned}
$$

A vállalat napi profitja (száz dollárban) $3x_1 + 2x_2$, így a cég célfüggvénye:

$$\max\ z = 3x_1 + 2x_2 \tag{12}$$

A korlátozó feltételek a következők:

1. feltétel A munkanapnak az a része, amíg a festőműhely dolgozik, kisebb vagy egyenlő, mint 1.

2. feltétel A munkanapnak az a része, amíg a karosszériaműhely dolgozik, kisebb vagy egyenlő, mint 1.

Eddig tehát a következőket tudjuk:

A festőműhelyben a munkanap teherautókra fordított része

$$= \left(\frac{\text{teherautókra fordított munkanap rész}}{\text{teherautók}}\right)\left(\frac{\text{teherautók}}{\text{nap}}\right) = \tfrac{1}{40}x_1$$

A festőműhelyben a munkanap személyautókra fordított része $= \frac{1}{60}x_2$

A karosszériaműhelyben a munkanap teherautókra fordított része $= \frac{1}{50}x_1$

A karosszériaműhelyben a munkanap személyautókra fordított része $= \frac{1}{50}x_2$

Az 1. feltétel tehát így fejezhető ki:

$$\frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 \le 1 \qquad \text{(festőműhely feltétel)} \tag{13}$$

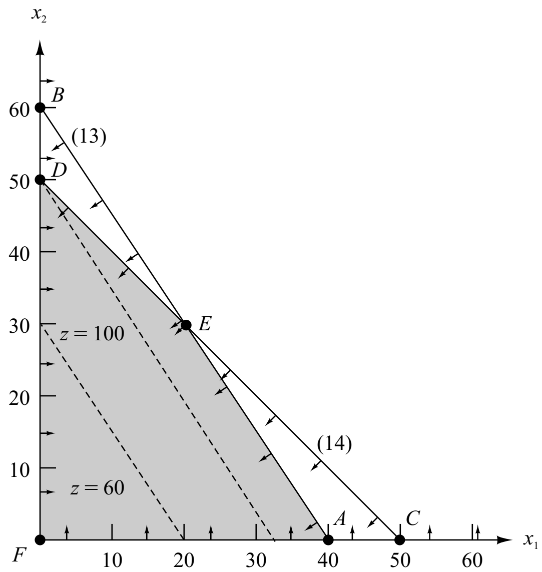
A 2. feltétel pedig így fejezhető ki:

$$\frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \le 1 \qquad \text{(karosszériaműhely feltétel)} \tag{14}$$

Mivel $x_1 \ge 0$ és $x_2 \ge 0$ feltételeknek is teljesülniük kell, a megfelelő LP:

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= 3x_1 + 2x_2 && (12)\\
\text{f.h.}\quad \frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 &\le 1 && (13)\\
\frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 &\le 1 && (14)\\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

5. ÁBRA
A 3. példa grafikus megoldása



Ehhez az LP-hez tartozó lehetséges halmaz az 5. ábrán árnyékolva látható $AEDF$ tartomány.[3]

Első profit szintvonalnak válasszuk azt az egyenest, amelyik átmegy a $(20,0)$ ponton. Mivel a $(20,0)$ ponthoz a $3(20)+2(0)=60$ z érték tartozik, ezzel a $z=3x_1+2x_2=60$ profit szintvonalhoz jutottunk. Most megvizsgáljuk az ezzel párhuzamos profit szintvonalakat a növekvő z (északkeleti) irányában. Azt találjuk, hogy az utolsó „pont” a lehetséges halmazban, amely metszi az egyik profit szintvonalat, az *egész AE* szakasz. Ez azt jelenti, hogy az AE szakasz minden pontja optimális. AE bármelyik pontját felhasználhatjuk az optimális z érték kiszámítására. Például az A pont, $(40,0)$ adja a $z=3(40)=120$ értéket.

Összefoglalva, az autógyár LP-jének végtelen sok megoldása van, vagy más szóval *alternatív optimális megoldásai* vannak. Ezt onnan vehetjük észre, hogy ahogyan egy profit szintvonal elhagyja a lehetséges megoldások halmazát, egy teljes szakasszal fog egybeesni. Ez a szakasz egy aktív feltételhez tartozik (ebben az esetben AE).

Ebből a példából ésszerűnek látszik (és bizonyítható, hogy igaz is), hogy ha két pont (itt A és E) optimális, akkor az e két pont által meghatározott szakasz *minden* pontja optimális.

Ha az eredményünk egy alternatív optimum, akkor a döntéshozó még egy újabb kritériumot felvehet a problémába, abból a célból, hogy választani tudjon az optimális megoldások közül. Az autógyár igazgatóinak esetleg szimpatikusabb az A pont, mert ez egyszerűsíti a technológiát és az üzletet (és még így is lehetővé teszi a maximális profit elérését) azzal, hogy elég egyféle terméket gyártani (teherautókat).

A **célprogramozást** (lásd 12.1. alfejezet) gyakran alkalmazzák arra, hogy segítségével az alternatív optimális megoldások közül egyet kiválasszanak.

[3]A (13) feltételt az AB-n fekvő vagy alatta lévő pontok elégítik ki (AB az $\frac{1}{40}x_1+\frac{1}{60}x_2=1$ egyenes), a (14) feltételt pedig a CD-n lévő vagy az alatti pontok elégítik ki (CD az $\frac{1}{50}x_1+\frac{1}{50}x_2=1$ egyenes).

Nem megoldható LP

Előfordulhat, hogy egy LP lehetséges megoldásainak halmaza üres, ennek eredménye egy *nem megoldható* LP. Mivel egy LP optimális megoldása a lehetséges megoldások halmazának a legjobb pontja, ezért egy nem megoldható LP-nek nincs optimális megoldása.

4. PÉLDA Tegyük fel, hogy az autókereskedők azt szeretnék, hogy a 3. példában szereplő autógyár legalább 30 teherautót és 20 személyautót gyártson. Keressük meg az új LP optimális megoldását!

Megoldás A 3. példa LP-jéhez hozzávesszük az $x_1 \geq 30$ és $x_2 \geq 20$ feltételeket. Így a következő LP adódik:

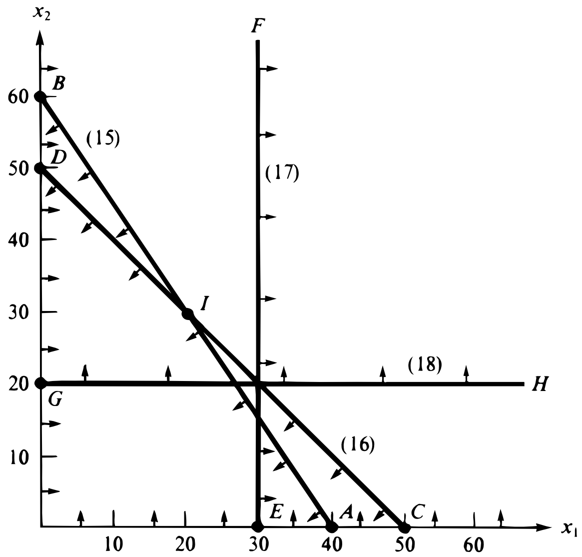
$$
\begin{aligned}
&\max z = 3x_1 + 2x_2 \\
&\text{f.h.} \quad \frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 \leq 1 && (15)\\
&\qquad \frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \leq 1 && (16)\\
&\qquad x_1 \geq 30 && (17)\\
&\qquad x_2 \geq 20 && (18)\\
&\qquad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

A lehetséges megoldások halmaza a 6. ábrán látható.

A (15) feltételt az AB egyenesen és alatta fekvő pontok elégítik ki (AB az $\frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 = 1$ egyenes).

A (16) feltételt a CD egyenesen és alatta fekvő pontok elégítik ki (CD az $\frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 = 1$ egyenes).

6. ÁBRA Üres lehetséges megoldások halmaza (nem megoldható LP)



A (17) feltételt kielégítő pontok az EF egyenesen és attól jobbra vannak (EF az $x_1 = 30$ egyenes).

A (18) feltételt kielégítő pontok a GH egyenesen és fölötte vannak (GH az $x_2 = 20$ egyenes).

A 6. ábrából nyilvánvaló, hogy nincs olyan pont, amelyik a (15)–(18) feltételek mindegyikét kielégítené. Ez azt jelenti, hogy a 4. példa lehetséges megoldásainak halmaza üres, ezáltal ez egy nem megoldható LP.

A 4. példában az LP azért nem megoldható, mert 30 teherautó és 20 személyautó gyártása több munkaórát igényel a festőműhelytől, mint amennyi rendelkezésre áll.

Nemkorlátos LP

A következő speciális LP a *nemkorlátos* típus. Egy max problémában a nemkorlátos LP akkor fordul elő, ha a lehetséges megoldások halmazában találhatók olyan pontok, amelyekhez tetszőlegesen nagy z értékek tartoznak. Ez azt jelentené, hogy a döntéshozó tetszőlegesen nagy jövedelemre vagy profitra tehet szert. Ez az okoskodás azt is mutatja, hogy ha egy problémához korrekt módon írjuk fel az LP-t, akkor nemkorlátos optimális megoldás nem fordulhat elő. Így, ha az olvasó valamikor számítógéppel megold egy LP-t és azt látja, hogy az LP nemkorlátos, akkor valószínűleg vagy az LP felírásakor, vagy az adatok számítógépbe vitelekor történt hiba.

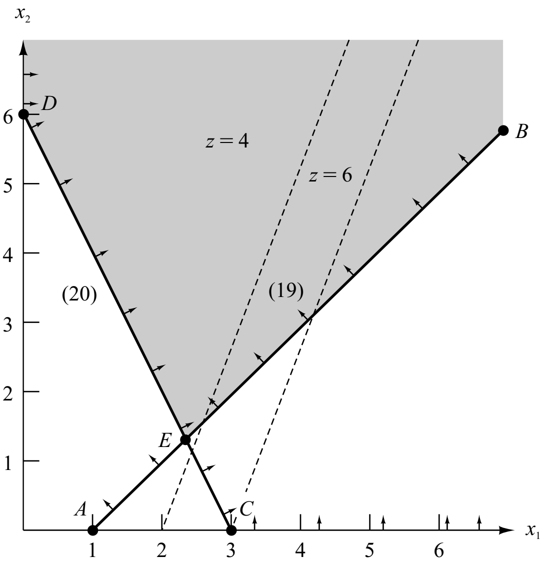
Egy minimalizálási probléma esetén egy LP nemkorlátos akkor, ha a lehetséges megoldások halmazában találhatók olyan pontok, amelyekhez tetszőlegesen kicsi z érték tartozik. Amikor egy LP-t grafikusan oldunk meg, akkor a nemkorlátos LP a következő módon látható: egy max probléma nemkorlátos abban az esetben, ha amikor az eredeti profit szintvonalat a növekvő z-k irányába mozgatjuk, soha nem hagyjuk el a párhuzamos egyenesekkel a lehetséges megoldások halmazát. Egy minimalizálási probléma nemkorlátos, ha soha nem hagyjuk el a lehetséges megoldások halmazát, amikor a csökkenő z-k irányába mozgunk.

5. PÉLDA Oldjuk meg grafikusan a következő LP-t:

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= 2x_1 - x_2 \\
\text{f.h.} \quad x_1 - x_2 &\le 1 && (19)\\
2x_1 + x_2 &\ge 6 && (20)\\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Megoldás A 7. ábrából láthatjuk, hogy (19)-et kielégítik az összes olyan pontok, amelyek AB-n vagy fölötte vannak (AB az $x_1 - x_2 = 1$ egyenes). A (20) feltételt azok a pontok elégítik ki, amelyek a CD egyenesen vagy fölötte vannak (CD a $2x_1 + x_2 = 6$ egyenes). Így az 5. példához tartozó lehetséges megoldások halmaza az (árnyékolt) nemkorlátos tartomány a 7. ábrán. Ezt a tartományt csak az x_2 tengely, a DE szakasz és az AB egyenesnek E-ből induló része határolja. Az optimális megoldás megkereséséhez rajzoljunk egy profit szintvonalat, amely átmegy a $(2,0)$ ponton. Ehhez a szintvonalhoz a $z = 2x_1 - x_2 = 2(2) - 0 = 4$ érték tartozik. Növekvő z értékekhez a délkeleti irány tartozik (ez x_1-et növeli és x_2-t csökkenti). Amint a $z = 2x_1 - x_2$-vel párhuzamosan délkeleti irányban mozgunk, látjuk, hogy bármely szintvonal, amit rajzolunk, metszi a lehetséges halmazt. (Ez azért van így, mert bármely szintvonal meredekebb, mint az $x_1 - x_2 = 1$ egyenes.)

7. ÁBRA
Egy nemkorlátos LP



Így a lehetséges megoldások halmazában vannak olyan pontok, amelyekhez tetszőlegesen nagy z érték tartozik. Például, ha szeretnénk a lehetséges tartományban egy olyan pontot találni, amelyre $z \geq 1\,000\,000$, akkor bármelyik olyan pontot kiválaszthatjuk a lehetséges megoldások halmazából, amelyik a $z = 1\,000\,000$ profit szintvonaltól délkeletre van.

Az utóbbi két alfejezetből láthatjuk, hogy minden kétváltozós LP-re a következő négy eset egyike áll fenn:

1. eset Az LP-nek egyértelmű megoldása van.

2. eset Az LP-nek alternatív optimuma van: két vagy több extremális pont optimális, és ezáltal az LP-nek végtelen sok megoldása van.

3. eset Az LP nem megoldható: a lehetséges megoldások halmaza üres.

4. eset Az LP nemkorlátos: a lehetséges tartományban vagy tetszőleges nagy z értékű pontok (max feladat), vagy tetszőlegesen kis z értékű pontok (min feladat) vannak.

A 4. fejezetben megmutatjuk, hogy minden LP-re (nem csak a kétváltozós LP-re) a fenti 1–4. esetek egyike áll fenn.

Ennek a fejezetnek a hátralevő részében végigvezetjük az olvasót néhány bonyolultabb lineáris programozási modell megfogalmazásán. Egy LP modell felállításának legfontosabb lépése a döntési változók megfelelő megválasztása. Ha a döntési változókat jól választottuk meg, akkor a célfüggvény és a feltételek felírása már nem okozhat túl nagy nehézséget. Ha nehezen megy az LP célfüggvényének és feltételeinek felírása, ez rendszerint azt jelenti, hogy ügyetlenül választottuk meg a döntési változókat.

Feladatok

A csoport

Azonosítsa a következő LP-ket aszerint, hogy az 1–4. esetek melyike áll fenn:

1.

$$\begin{aligned} \max\ & z = x_1 + x_2 \\ \text{f.h.}\quad & x_1 + x_2 \le 4 \\ & x_1 - x_2 \ge 5 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \max\ & z = 4x_1 + x_2 \\ \text{f.h.}\quad & 8x_1 + 2x_2 \le 16 \\ & 5x_1 + 2x_2 \le 12 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \max\ & z = -x_1 + 3x_2 \\ \text{f.h.}\quad & x_1 - x_2 \le 4 \\ & x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \max\ & z = 3x_1 + x_2 \\ \text{f.h.}\quad & 2x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_1 + 3x_2 \le 9 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

5. Igaz vagy hamis: Egy nemkorlátos LP esetén az LP lehetséges megoldásainak halmaza szükségképpen nem korlátos.

6. Igaz vagy hamis: Minden olyan LP-nek, amelyiknek a lehetséges tartománya nemkorlátos, nemkorlátos optimális megoldása van.

7. Ha egy LP lehetséges megoldásainak halmaza nem nemkorlátos, akkor azt mondjuk, hogy az LP lehetséges halmaza korlátos. Tegyük fel, hogy egy LP-nek korlátos lehetséges tartománya van. Magyarázza meg, miért tudja az LP optimális megoldását megtalálni (profit szintvonal vagy költség szintvonal nélkül) egyszerűen úgy, hogy kiszámítja a z értékeket a lehetséges halmaz minden egyes extremális pontjában! Miért lehet ez a módszer sikertelen, ha az LP lehetséges megoldásainak halmaza nemkorlátos?

8. Keresse meg a következő LP összes megoldását grafikusan:

$$\begin{aligned} \min\ & z = x_1 - x_2 \\ \text{f.h.}\ & x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_1 - x_2 \ge 0 \\ & x_2 - x_1 \ge 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

9. Keressen két optimális megoldást a következő LP-re:

$$\begin{aligned} \min\ & z = 3x_1 + 5x_2 \\ \text{f.h.}\ & 3x_1 + 2x_2 \ge 36 \\ & 3x_1 + 5x_2 \ge 45 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

B csoport

10. Boris Milkem bróker francia pénzzel (frank) és amerikai pénzzel (dollár) foglalkozik. Éjfélkor 0.25 dollárért tud frankot vásárolni, dollárt pedig három frankért vehet. Legyen $x_1 =$ a megvásárolt dollármennyiség (frankért) és $x_2 =$ a megvásárolt frankmennyiség (dollárért). Tételezzük fel, hogy a kétfajta tranzakció egyszerre történhet, és az egyetlen feltétel az, hogy éjfél után egy perccel Boris pénze csak nemnegatív lehet frankban is és dollárban is.

(a) Állítson föl egy LP-t, amely lehetővé teszi, hogy Borisnak a tranzakciók végrehajtása után maximális mennyiségű dollárja legyen!

(b) Oldja meg az LP-t grafikusan és elemezze a választ!

3.4. Egy étrendi feladat

Nagyon sok LP megfogalmazásának (mint például a 2. példa és az itt következő étrendi probléma) szükségessége abból adódik, hogy a döntéshozó minimalizálni szeretné azokat a költségeket, amelyek egy meghatározott követelményrendszerből adódnak.

6. PÉLDA Az étrendem azt írja elő, hogy minden étel, amit megeszem, a négy „alapvető élelmiszercsoport” egyikéhez tartozzék. Jelenleg a következő négyféle étel áll a rendelkezésemre:

csokis sütemény, csokifagylalt, kóla és ananászos túrótorta. A csokis sütemény darabja 50 centbe kerül, a csokifagylaltból egy gombóc 20 cent, minden üveg kóla 30 cent, és minden darab ananászos túrótorta 80 centbe kerül. Minden nap el kell fogyasztanom legalább 500 kalóriát, 6 deka csokoládét, 10 deka cukrot és 8 deka zsiradékot. A 2. táblázat mutatja az élelmiszerek fajtánkénti tápértékét. Fogalmazzunk meg egy lineáris programozási modellt, amelynek segítségével minimális költséggel elégíthetem ki a napi tápértékszükségletemet!

Megoldás Mint mindig, először is határozzuk meg, hogy a döntéshozónak milyen döntéseket kell hoznia: mennyit kell ennem naponta az egyes élelmiszerfajtákból. Így már definiálhatjuk a döntési változókat:

$$x_1 = \text{a naponta megevett csokis sütemények száma}$$
$$x_2 = \text{a naponta megevett csokifagylalt, gombócban számolva}$$
$$x_3 = \text{a naponta megivott kóla, üvegben számolva}$$
$$x_4 = \text{a naponta megevett ananászos túrótorta, szeletekben}$$

2. TÁBLÁZAT Tápértékek

	Kalória	**Csokoládé (dekában)**	**Cukor (dekában)**	**Zsiradék (dekában)**
Csokis sütemény	400	3	2	2
Csokifagylalt (1 gombóc)	200	2	2	4
Kóla (1 üveg)	150	0	4	1
Ananászos túrótorta (1 szelet)	500	0	4	5

Célom, hogy minimalizáljam az étrendem költségeit. Az étrend költsége meghatározható a következőképpen: (az étrend teljes költsége) = (a csokis sütemények költsége) + (a fagylalt költsége) + (a kóla költsége) + (a túrótorta költsége). A teljes költség kiszámításához nézzük meg például, hogy

$$\text{a kóla költsége} = \left(\frac{\text{költség}}{\text{üveg kóla}}\right)\left(\begin{array}{c}\text{a megivott üveg}\\ \text{kólák száma}\end{array}\right) = 30x_3$$

Ugyanezt a gondolatmenetet a másik három élelmiszerre is alkalmazva (centben):

$$\text{Az étrend teljes költsége} = 50x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 80x_4$$

Így a célfüggvény

$$\min z = 50x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 80x_4$$

A döntési változóknak a következő négy feltételt kell kielégíteniük:

1. feltétel A napi kalóriafelvétel legalább 500 kalória.

2. feltétel A napi csokoládéfelvétel legalább 6 deka.

3. feltétel A napi cukorfelvétel legalább 10 deka.

4. feltétel A napi zsiradékfelvétel legalább 8 deka.

Az 1. feltételnek a döntési változókkal való kifejezéséhez jegyezzük meg, hogy (napi kalória-felvétel) = (a csokis süteményből származó kalória) + (a csokifagylaltból származó kalória) + (a kólából származó kalória) + (az ananászos túrótortából származó kalória).

A csokis süteményben fogyasztott kalória meghatározása:

$$\text{a csokis sütemény kalóriaértéke} = \left(\frac{\text{kalória}}{\text{csokis sütemény}}\right)\left(\begin{array}{c}\text{megevett csokis}\\ \text{sütemény}\end{array}\right) = 400x_1$$

Hasonló okoskodást követve a másik három élelmiszerre, azt kapjuk, hogy

$$\text{a napi kalória-felvétel} = 400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4$$

Az 1. feltétel tehát így fejezhető ki:

$$\begin{array}{lrcl}
 & 400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 \geq 500 & \text{(kalória feltétel)} & (21)\\
\text{A 2. feltétel:} & 3x_1 + \quad 2x_2 \qquad\qquad\qquad \geq \ \ 6 & \text{(csokoládé feltétel)} & (22)\\
\text{A 3. feltétel:} & 2x_1 + \quad 2x_2 + \quad 4x_3 + \quad 4x_4 \geq 10 & \text{(cukor feltétel)} & (23)\\
\text{A 4. feltétel:} & 2x_1 + \quad 4x_2 + \quad x_3 + \quad 5x_4 \geq \ \ 8 & \text{(zsiradék feltétel)} & (24)
\end{array}$$

Végül a nemnegativitási feltételeknek is teljesülniük kell: $x_i \geq 0$ $(i = 1,2,3,4)$.
Összefoglalva a célfüggvényt, a (21)–(24) feltételeket és a nemnegativitási feltételeket, a következőt kapjuk:

$$\begin{array}{rlll}
\min z = & 50x_1 + \ \ 20x_2 + \ \ 30x_3 + \ \ 80x_4 & & \\
\text{f.h.} & 400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 \geq 500 & \text{(kalória feltétel)} & (21)\\
 & 3x_1 + \quad 2x_2 \qquad\qquad\qquad \geq \ \ 6 & \text{(csokoládé feltétel)} & (22)\\
 & 2x_1 + \quad 2x_2 + \quad 4x_3 + \quad 4x_4 \geq 10 & \text{(cukor feltétel)} & (23)\\
 & 2x_1 + \quad 4x_2 + \quad x_3 + \quad 5x_4 \geq \ \ 8 & \text{(zsiradék feltétel)} & (24)\\
 & x_i \geq 0\,(i = 1,2,3,4) & \text{(nemnegativitási feltételek)} &
\end{array}$$

Ennek az LP-nek az optimális megoldása $x_1 = x_4 = 0, x_2 = 3, x_3 = 1, z = 90$. Így a minimális költségű étrend napi 90 centbe kerül úgy, hogy naponta 3 gombóc fagylaltot kell enni és egy üveg kólát meginni. Az optimális z értéket úgy kaphatjuk meg, hogy a döntési változók optimális értékét behelyettesítjük a célfüggvénybe. Így az összköltségre $z = 3(20) + 1(30) = 90$ cent adódik. Ez az optimális étrend a következőket tartalmazza:

$$\begin{aligned}
200(3) + 150(1) &= 750 \text{ kalória}\\
2(3) &= \ \ 6 \text{ deka csokoládé}\\
2(3) + 4(1) &= 10 \text{ deka cukor}\\
4(3) + 1(1) &= 13 \text{ deka zsiradék}
\end{aligned}$$

Eszerint a csokoládé és cukor feltételek aktív feltételek, de a kalória és a zsiradék feltétel nemaktív feltétel.

Az étrendi problémának egy olyan változata, amelyben sokkal reálisabb élelmiszerlista és tápanyag-előírás van, az első olyan LP-k egyike volt, amelyet számítógéppel oldottak meg. Stigler (1945) egy olyan étrendi problémát állított fel, amelyben 77-féle élelmiszer állt rendelkezésre, és 10 tápanyagra vonatkozó követelményt (A-vitamin, C-vitamin, és így tovább) kellett kielégíteni. Amikor számítógép segítségével megoldották a feladatot, az optimális megoldás a következő élelmiszerekből tevődött össze: kukoricaliszt, búzaliszt, tejpor, földimogyoróvaj, zsír, marhahús, máj, burgonya, spenót és káposzta. Az igaz, hogy egy ilyen étrend rendkívül jó a tápértékek szempontjából, mégis nagyon kevés ember volna elégedett vele, hiszen ez az étrend láthatóan a jóízűség minimális színvonalának sem felel meg (és Stigler modellje szerint minden napra ugyanaz az étrend lenne előírva). Egy tetszőleges LP modell optimális megoldása a valóságnak csak azokat a szempontjait tudja figyelembe venni, amelyek a célfüggvényben és feltételekben benne foglaltatnak. A Stigler-féle megfogalmazás (akárcsak a miénk) az étrendi problémában egyáltalán nincs tekintettel az embereknek arra az igényére, hogy jóízű és változatos étrendet szeretnének. Egészértékű programozást alkalmaztak más intézmények menüszerű étkeztetésének heti vagy havi tervezésére.[4] A menü-tervezési modellek tartalmaznak olyan feltételeket is, amelyek a jóízűségre és a változatosságra is tekintettel vannak.

Feladatok

A csoport

1. Három gyár (1, 2 és 3) települt a Momiss folyóra. Mindegyik gyár kétféle szennyező anyagot (1 és 2) enged a folyóba. Ha a gyárakból kibocsátott szennyező anyagot kezelik, akkor a folyó szennyeződése csökkenthető. Az 1-es gyárból származó hulladék egy tonnájának kezelése 15 dollárba kerül, és minden kezelt tonna a szennyezést a következőképpen csökkenti: az 1-es szennyező anyagot 0.1 tonnával, a 2-es szennyező anyagot pedig 0.45 tonnával. A 2-es gyár hulladékának kezelése 10 dollárba kerül tonnánként, és minden kezelt tonna az 1-es szennyező anyagot 0,2 tonnával és a 2-es szennyező anyagot 0.25 tonnával csökkenti. A 3-as gyár hulladékának kezelése 20 dollár tonnánként, és minden kezelt tonna hulladék az 1-es fajta szennyező anyagot 0.40 tonnával és a 2-es fajta szennyező anyagot 0.30 tonnával csökkenti. Az állam legalább 30 tonnával csökkenteni szeretné a folyóba kerülő 1-es szennyező anyagot, a 2-es szennyező anyagot pedig legalább 40 tonnával. Fogalmazzon meg egy LP-t, amellyel minimalizálni lehet a szennyező anyagoknak a kívánt mennyiséggel való csökkentésének költségét! Gondolkozzon azon, hogy az LP feltevések (arányosság, additivitás, oszthatóság és bizonyosság) ésszerűek-e ebben a problémában?

2.[5] Az U.S. Labs cég szívbillentyűket gyárt disznók szívbillentyűiből. Különböző szívműtétekhez különböző méretű billentyűk szükségesek. Az U.S. Labs három különböző szállítótól vásárolja a disznóbillentyűket. A 3. táblázat mutatja a költségeket és a méreteket a vásárlandó billentyűkre vonatkozóan. Az U.S. Labs mindegyik szállítótól havonta rendel. A havi szükséglet legalább 500 nagy, 300 közepes és 300 kisméretű billentyű. Mivel a disznók szívbillentyűi erősen korlátozott mennyiségben állnak rendelkezésre, mindegyik szállítótól legfeljebb 500 billentyűt lehet rendelni havonta. Fogalmazzon meg egy LP-t a szükséges billentyűk beszerzési költségének minimalizálására!

3. TÁBLÁZAT

		Százalékos megoszlása		
	Egységára ($)	**nagy**	**közepes**	**kicsi**
1. szállító	5	40	40	20
2. szállító	4	30	35	35
3. szállító	3	20	20	60

3. Peg és Al Fundy csak keveset költhet élelmiszerre, így Peg megpróbálja olyan olcsón etetni a családját, amennyire csak lehet. Mindazonáltal Peg biztos akar lenni abban, hogy a család minden tagja megkapja a napi szükséges tápértéket. Peg kétféle élelmiszert vásárolhat. Az 1-es élelmiszer 7 dollárba kerül fontonként, és ennek minden fontja 3 egység A-vitamint és 1 egység C-vitamint tartalmaz. A 2-es élelmiszer 1 dollár fontonként, és minden fontban 1 egység van mindkét vitaminból. A család szükséglete naponta legalább 12 egység A-vitamin és 6 egység C-vitamin.

(a) Igazolja, hogy Pegnek naponta 12 egységnyi 2-es élelmiszert kell vásárolnia, és így a C-vitamin-szükséglet 6 egységgel felülmúlja az előírt mennyiséget!

(b) Al a sarkára állt, és azt követeli Pegtől, hogy a napi vitaminszükséglet pontosan 12 egység A-vitaminnal és 6 egység C-vitaminnal legyen kielégítve. Ennek az új feladatnak az optimális megoldása kisebb C-vitamin-fogyasztást fog tartalmazni, mégis drágább lesz. Miért?

4. Goldilocksnak legalább 12 font aranyat és legalább 18 font ezüstöt kell találnia ahhoz, hogy a havi lakbérét kifizesse. Két bánya van, amelyekben Goldilocks aranyat és ezüstöt találhat. Minden olyan napon, amit Goldilocks az 1-es bányában tölt el, talál 2 font aranyat és 2 font ezüstöt. Minden olyan napon, amit Goldilocks a 2-es bányában tölt el, talál 1 font aranyat és 3 font ezüstöt. Fogalmazzon meg egy LP-t úgy, hogy Goldilocks teljesíteni tudja a követelményeket, és a lehető legkevesebb időt töltse a bányákban! Oldja meg az LP-t grafikusan!

[4] Bálintfy (1976).
[5] Hilal és Erickson (1981) alapján.

3.5. Egy munkaszervezési probléma

A lineáris programozás nagyon sok alkalmazása arra vonatkozik, hogy minimális költség mellett bizonyos fajta munkaerő-követelményeket kell kielégíteni. A következő példa azokat az alapvető jellegzetességeket illusztrálja, amelyek az ilyen típusú alkalmazás többségénél előfordulnak.

7. PÉLDA Egy postahivatalban a hét különböző napjain eltérő számú teljes munkaidejű alkalmazott munkájára van szükség. A 4. táblázat mutatja az egyes napokra vonatkozó teljes munkaidejű munkaerő-szükségletet.

4. TÁBLÁZAT Munkaerő-szükséglet a postahivatalban

	Hány teljes munkaidejű alkalmazott kell
Hétfő	17
Kedd	13
Szerda	15
Csütörtök	19
Péntek	14
Szombat	16
Vasárnap	11

A szakszervezeti törvény értelmében minden teljes munkaidejű alkalmazottnak 5 egymást követő napon kell dolgoznia, és ezután 2 szabadnap jár. Például egy olyan alkalmazott, aki hétfőtől péntekig dolgozik, szombat-vasárnap szabadnapos lesz. A postahivatal úgy akarja napi munkaerő-szükségletét kielégíteni, hogy csak teljes munkaidejű alkalmazottakat foglalkoztat. Fogalmazzunk meg egy LP-t, amelyet a postahivatal arra tud használni, hogy a lehető legkevesebb teljes munkaidős alkalmazottat foglalkoztassa!

Megoldás Mielőtt megadnánk a probléma korrekt megfogalmazását, foglalkozzunk egy *nem korrekt* megoldással. Nagyon sokan úgy kezdenének hozzá a feladathoz, hogy x_i legyen az i-edik napon dolgozó alkalmazottak száma (1. nap = hétfő, 2. nap = kedd, stb.). Ezután úgy okoskodnának, hogy: (a teljes munkaidejű alkalmazottak száma) = (hétfőn dolgozó alkalmazottak száma) + (kedden dolgozó alkalmazottak száma) + $\cdots$ + (vasárnap dolgozó alkalmazottak száma). Ez az okoskodás a következő célfüggvényhez vezet: min $z = x_1 + x_2 + \cdots + x_6 + x_7$.

Azt biztosítandó, hogy minden nap a megfelelő számú teljes munkaidejű alkalmazott dolgozzon a postahivatalban, ezután hozzávennénk az $x_i \geq$ (az i-edik napon szükséges dolgozók száma) feltételeket. Például hétfőre az $x_1 \geq 17$ feltétel vonatkozna. Figyelembe véve az $x_i \geq 0$ $(i = 1,2,\ldots,7)$ nemnegativitási feltételeket, a következő LP állna elő:

$$
\begin{array}{lllllllll}
\min & z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 & & & & & & & \\
\text{f.h.} & x_1 & & & & & & & \geq 17 \\
& & x_2 & & & & & & \geq 13 \\
& & & x_3 & & & & & \geq 15 \\
& & & & x_4 & & & & \geq 19 \\
& & & & & x_5 & & & \geq 14 \\
& & & & & & x_6 & & \geq 16 \\
& & & & & & & x_7 & \geq 11 \\
& & & & & & & x_i & \geq 0 \quad (i = 1,2,\ldots,7)
\end{array}
$$

Ennek a megfogalmazásnak legalább két hibája van. Először is a célfüggvény *nem* a teljes munkaidejű postai alkalmazottak száma. Ez a fenti célfüggvény minden alkalmazottat ötször számol, nem egyszer. Például, minden olyan alkalmazott, aki hétfőn kezd dolgozni, hétfőtől péntekig dolgozik és beleszámítódik x_1, x_2, x_3, x_4 és x_5-be. Másodszor az $x_1, x_2, \dots, x_7$ változók összefüggnek egymással, és ez az összefüggés a fenti feltételrendszerből nem tűnik ki. Például néhány olyan ember, aki hétfőn dolgozik (az x_1 emberek), kedden is dolgozni fog. Ez azt jelenti, hogy x_1 és x_2 összefügg, de a feltételek nem mutatják, hogy x_1 értéke befolyásolja x_2 értékét.

A probléma korrekt megfogalmazásának kulcsa az, hogy felismerjük: a postahivatal elsődleges döntése nem az, hogy hány ember dolgozik az egyes napokon, hanem sokkal inkább az, hogy az egyes napokon hány ember *kezdi* meg a munkát. Erre gondolva, a döntési változókat így is fogalmazzuk meg, azaz

$$x_i = \text{azon alkalmazottak száma, akik az } i\text{-edik napon kezdenek dolgozni}$$

Például x_1 azoknak az embereknek a száma, akik hétfőn kezdenek dolgozni (ezek az emberek hétfőtől péntekig dolgoznak). Miután a változókat megfelelő módon definiáltuk, már könnyű lesz a jó célfüggvényt és a korrekt feltételeket megfogalmazni. A célfüggvény meghatározásához vegyük észre, hogy (a teljes munkaidejű alkalmazottak száma) $=$ (a hétfőn dolgozni kezdő alkalmazottak száma) $+$ (a kedden dolgozni kezdő alkalmazottak száma) $+ \cdots +$ (a vasárnap dolgozni kezdő alkalmazottak száma). Miután minden egyes alkalmazott a hét egy meghatározott napján kezd dolgozni, így nem számoljuk az alkalmazottakat többször. Tehát amikor már korrekt módon definiáltuk a változókat, a célfüggvény

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

A postahivatalnak biztosítania kell, hogy a hét minden napján elég alkalmazott dolgozzon. Például hétfőn legalább 17 alkalmazottnak kell dolgoznia. Kik dolgoznak hétfőn? Mindenki, kivéve azokat az alkalmazottakat, akik kedden vagy szerdán kezdenek dolgozni (nekik a vasárnap és hétfő, illetőleg a hétfő és a kedd a szabadnap). Ez azt jelenti, hogy azon alkalmazottak száma, akik hétfőn dolgoznak: $x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$. Még biztosítani kell, hogy hétfőn legalább 17 alkalmazott dolgozzon, tehát ki kell elégíteni az $x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 17$ feltételt. Az ehhez hasonló feltételeket a hét másik hat napjára vonatkozóan is hozzávesszük a modellhez, majd az $x_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \dots, 7)$ nemnegativitási feltételekkel kiegészítve a postahivatal problémája a következőképpen írható fel:

$$\begin{array}{lrl}
\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 & & \\
\text{f.h.} \quad x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 17 & & \text{(hétfői feltétel)} \\
x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 13 & & \text{(keddi feltétel)} \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 15 & & \text{(szerdai feltétel)} \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 19 & & \text{(csütörtöki feltétel)} \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 14 & & \text{(pénteki feltétel)} \\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 16 & & \text{(szombati feltétel)} \\
x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11 & & \text{(vasárnapi feltétel)} \\
x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 7) & & \text{(nemnegativitási feltételek)}
\end{array}$$

Az LP optimális megoldása: $z = \frac{67}{3}$, $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = \frac{10}{3}$, $x_3 = 2$, $x_4 = \frac{22}{3}$, $x_5 = 0$, $x_6 = \frac{10}{3}$, $x_7 = 5$. Mivel csak teljes munkaidejű alkalmazottakról lehet szó, a változóknak egész értékeket kell felvenniük, az oszthatósági feltevés nem érvényesül. Kíséreljük meg, hogy egy olyan ésszerű megoldást találjunk, amelyben az összes változó értéke egész szám! Megpróbálhatjuk a törteket fölfelé kerekíteni, így egy lehetséges megoldást kapunk, melyben

$z = 25, x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 2, x_4 = 8, x_5 = 0, x_6 = 4, x_7 = 5$. Mindazonáltal az az igazság, hogy ha integer programozással oldjuk meg a feladatot, akkor a postahivatal problémájának optimális megoldása: $z = 23, x_1 = 4, x_2 = 4, x_3 = 2, x_4 = 6, x_5 = 0, x_6 = 4, x_7 = 3$. Megjegyezzük, hogy általában nincs mód arra, hogy a lineáris programozási feladat optimális megoldásából kerekítéssel kapjuk meg az egész számú programozási feladat optimális megoldását.

Baker (1974) kidolgozott egy hatékony technikát (lineáris programozás felhasználása nélkül) annak meghatározására, hogy mennyi a minimális számú alkalmazott, ha az emberek úgy dolgoznak, hogy két egymásután következő szabadnapjuk van.

Feladatok

A csoport

1. A postahivatal példájában tegyük fel, hogy minden teljes munkaidejű alkalmazott napi 8 órát dolgozik. Így az a szükséglet, hogy hétfőn 17 ember dolgozzon, úgy is tekinthető, mint egy olyan követelmény, hogy hétfőn $8(17) = 136$ munkaóra álljon rendelkezésre. A postahivatal úgy is kielégítheti napi munkaóra-szükségletét, hogy teljes munkaidejű és részmunkaidejű dolgozókat is foglalkoztat. Minden héten egy teljes munkaidejű alkalmazott napi 8 órát dolgozik öt egymás utáni napon, egy részmunkaidős alkalmazott napi 4 órát dolgozik öt egymás utáni napon. Egy teljes munkaidejű alkalmazott a postának óránként 15 dollárba kerül, míg a részmunkaidős (a csökkentett járulékok miatt) csak 10 dollárba kerül óránként. A szakszervezeti szabályok értelmében részmunkaidős dolgozókkal a heti szükséges munkaóráknak legfeljebb 25%-át szabad kitölteni. Fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek a megoldása minimalizálja a postahivatal heti munkabérre fordított költségeit!

2. Kisváros rendőrségénél minden 4 órás periódusra az ügyeleti szolgálatot teljesítő rendőrök száma a következő: éjféltől 4-ig 8 rendőr, 4-től 8-ig 7 rendőr, 8-tól 12-ig 6 rendőr, 12-től 16-ig 6 rendőr, 16-tól 20-ig 5 rendőr, 20-tól éjfélig 4 rendőr. Minden rendőr két egymásután következő 4 órás ügyeletben dolgozik. Fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek a megoldása úgy minimalizálja Kisváros rendőreinek számát, hogy a napi ügyeletek el legyenek látva!

B csoport

3. Tegyük fel, hogy a postahivatal heti egy munkanapnyi túlórára kötelezheti az alkalmazottakat. Például egy olyan alkalmazott, akinek a normális beosztása hétfőtől péntekig terjed, berendelhető szombati munkára is. Minden alkalmazott 50 dollárt kap az első öt napért és 62 dollárt kap a túlmunkaidőért (ha van ilyen). Fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek megoldása lehetővé teszi, hogy a postahivatal minimalizálja a heti munkabért, természetesen úgy, hogy a szükséges munkát teljesíti!

4. Tegyük fel, hogy a postahivatalnak 25 teljes munkaidejű alkalmazottja van, és nem vehet fel, de el sem bocsáthat embereket. Fogalmazzon meg egy LP-t az alkalmazottak munkaidejének megszervezésére úgy, hogy maximalizálja a dolgozók által kapott hétvégi szabadnapokat!

5. A Gotham városi rendőrség dolgozói minden nap 6 órás műszakokban dolgoznak, ezek időpontjai: éjféltől 6-ig, 6-tól 12-ig, 12-től 18-ig és 18-tól éjfélig. Az egyes műszakokban a következő számú dolgozóra van szükség: éjféltől 6-ig 15 dolgozó, 6-tól délig 5 dolgozó, déltől 6-ig 12 dolgozó, 6-tól éjfélig 6 dolgozó. Az olyan dolgozók, akik két egymás utáni műszakban dolgoznak, 12 dollárt kapnak óránként; akik nem egymás utáni műszakokban dolgoznak, azok 18 dollárt kapnak óránként. Fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek a megoldása minimalizálja a költségeket, miközben kielégíti a napi munkaerőigényt a Gotham városi rendőrségen!

6. Az 5. táblázat azt mutatja, hogy a Bloomington városi rendőrségen hány rendőr szükséges az egyes 6 órás periódusokban. A rendőröket úgy veszik alkalmazásba, hogy vagy 12 órát dolgoznak egyfolytában, vagy 18 órát. A rendőrök 4 dollárt kapnak óránként az első 12 órára és 6 dollárt kapnak óránként a következő 6 órára. Fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek a megoldása minimalizálja a költségeket úgy, hogy Bloomington napi rendőrigénye teljesül!

5. TÁBLÁZAT

Periódus	Szükséges minimális rendőrszám
0– 6	12
6–12	8
12–18	6
18–24	15

3.6. Tőkeallokáció

Ebben az alfejezetben (és a 3.7. és 3.11. alfejezetekben is) azt vizsgáljuk meg, hogy a lineáris programozás hogyan alkalmazható pénzügyi döntések optimalizálására. Ez az alfejezet egy egyszerű tőkeallokációs modellel foglalkozik.[6]

Először röviden elmagyarázzuk a nettó jelenérték (NPV) fogalmát, ami arra használható, hogy különböző befektetések előnyeit össze tudjuk hasonlítani. Az induló időpontot 0-val jelöljük.

Tegyük fel, hogy az 1-es befektetésnek a 0. időpontban 10 000$ készpénzköltsége van, két év múlva 14 000$ készpénzköltsége lesz, és ezért egy év múlva 24 000$ készpénz folyik be. A 2-es befektetésnek a 0. időpontban 6000$ készpénzköltsége van, mostantól számított két év múlva 1000$ készpénzköltsége lesz, és mostantól számított egy év múlva 8000$ folyik be. Melyik befektetést részesítsük előnyben?

Az 1-es befektetés tiszta készpénzértéke

$$-10000+24000-14000=0\$$$

és a 2-es befektetés tiszta készpénzértéke

$$-6000+8000-1000=1000\$$$

Ezen az alapon a 2-es befektetés jobbnak látszik, mint az 1-es befektetés. Amikor a befektetéseket a nettó készpénzáramlásra alapozva hasonlítjuk össze, akkor feltételezzük, hogy egy dollár bevétel bármely időpontban ugyanakkora értékkel bír. Ez azonban nem igaz! Tegyük fel, hogy létezik olyan befektetés (mint például egy pénzpiaci alap), amelyiknél egy bizonyos időpontban befektetett 1 dollár egy évvel később (bizonyossággal) $(1+r)$ dollárt jövedelmez. Azt mondjuk, hogy r az *évi kamatláb*. Mivel a jelenlegi 1 dollár mostantól számított egy év múlva $(1+r)$ dollárrá változik, leírhatjuk, hogy

$$1\$ \text{ most} = (1+r)\$ \text{ egy év múlva}$$

Ezt az okoskodást újból alkalmazva most már az egy év múlva kapott $(1+r)$\$-ra, azt látjuk, hogy

$$1\$ \text{ most} = (1+r)\$ \text{ egy év múlva} = (1+r)^2\$ \text{ két év múlva}$$

és

$$1\$ \text{ most} = (1+r)^k\$ \ k \text{ év múlva}$$

Az egyenlőség mindkét oldalát elosztva $(1+r)^k$-nal, azt kapjuk, hogy

$$1\$ \text{ amit } k \text{ év múlva kapunk} = (1+r)^{-k}\$ \text{ most}$$

Más szavakkal, egy olyan dollár, amit k év múlva kapunk meg, ugyanaz, mintha most kapnánk $(1+r)^{-k}$\$ dollárt.

Ezt a gondolatmenetet alkalmazhatjuk arra is, hogy a 0. időpontbeli dollárral fejezzünk ki minden készpénzáramlást (ezt az eljárást úgy nevezik, hogy a készpénz diszkontálása a 0. időpontra). Diszkontálás segítségével bármilyen befektetés készpénzáramlásának teljes értékét kiszámíthatjuk (0. időpontbeli dollárban). Bármely befektetés készpénzáramlásának összértéke (0. időpontbeli dollárban) a **nettó jelenérték**, vagy **NPV** (net present value). Egy befektetés NPV-je az az összeg, amellyel a befektetés növeli a cég értékét (0. időpontbeli dollárban kifejezve).

[6] Az alfejezet Weingartner (1963) alapján készült.

Feltételezzük, hogy $r = 0.20$, így ki tudjuk számítani az 1-es és 2-es befektetések NPV-jét.

$$\begin{aligned}\text{NPV az 1-es befektetésnél} &= -10000 + \frac{24000}{1+0.20} - \frac{14000}{(1+0.20)^2}\\ &= 277.78\$\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy ha egy cég az 1-es befektetést választaná, a cég értéke (0. időpontbeli dollárban) 277.78$-ral növekedne. A 2-es befektetés esetén:

$$\begin{aligned}\text{NPV a 2-es befektetésnél} &= -6000 + \frac{8000}{1+0.20} - \frac{1000}{(1+0.20)^2}\\ &= -27.78\$\end{aligned}$$

Tehát ha a cég a 2-es befektetést választaná, a cég értéke (0. időpontbeli dollárban) 27.78$-ral csökkenne.

Így az NPV koncepció azt mondja, hogy az 1-es befektetés jobb, mint a 2-es befektetés. Ez a következtetés ellentmond annak, mint amire a két befektetés tiszta készpénzáramlásainak összehasonlítása vezetett. Vegyük észre, hogy a befektetések összehasonlítása attól függ, hogy mennyi az r értéke. Például az alfejezet végén az első feladatban az olvasót felkérjük arra, hogy mutassa meg, hogy $r = 0.02$ esetén a 2-es befektetés NPV-je magasabb, mint az 1-es befektetésé. Természetesen a mi elemzésünkben feltételezzük, hogy egy befektetés jövőbeli készpénzértéke bizonyossággal ismert.

Ezen háttérinformációk ismeretében készen állunk arra, hogy elmagyarázzuk, hogyan alkalmazható a lineáris programozás olyan problémákra, amelyekben korlátozottan rendelkezésre álló befektetésre váró összegeket különböző befektetési lehetőségek között kell szétosztani. Az ilyen problémákat **tőkeallokációs problémáknak** nevezzük.

8. PÉLDA

A Star Oil Company öt különböző befektetési lehetőséget vizsgál. A pénzkiáramlások és nettó jelenértékek (millió dollárban) a 6. táblázatban láthatók.

A Star Oil-nak 40 millió dollár áll rendelkezésére befektetési célokra most (0. időpont); becslések szerint egy év múlva még lesz 20 millió dollárja (1. időpont) befektetési célra. A Star Oil bármelyik befektetés bármilyen törtrészét is megvásárolhatja. Ilyen esetben a pénzkiáramlások és az NPV megfelelő módon átszámítódnak. Például, ha a Star Oil a 3-as befektetés egyötödét veszi meg, akkor $\frac{1}{5}(5) = 1\$$, azaz egymillió dolláros pénzkiáramlás szükséges a 0. időpontban és $\frac{1}{5}(5) = 1$ millió dolláros pénzkiáramlás az 1. időpontban. A 3-as befektetés egyötödös részesedésének NPV-je $\frac{1}{5}(16) = 3.2$ millió dollár. A Star Oil maximalizálni szeretné az 1–5. befektetésekből származó NPV-t. Fogalmazzunk meg egy LP-t, amelyik segíti e cél elérését! Tegyük fel, hogy a 0. időpontból fennmaradó alapok már nem használhatók fel az 1. időpontban.

6. TÁBLÁZAT Készpénzáramlások és nettó jelenértékek a befektetéseknél ($-ban)

	1. bef.	**2. bef.**	**3. bef.**	**4. bef.**	**5. bef.**
0. időpontbeli készpénzkiáramlás	11	53	5	5	29
1. időpontbeli készpénzkiáramlás	3	6	5	1	34
NPV	13	16	16	14	39

Megoldás A Star Oil-nak el kell döntenie, hogy az egyes befektetésekből mekkora részeket vásároljon. Definiáljuk a változókat a következőképpen:

$$x_i = \text{az } i\text{-edik befektetési lehetőségből a Star Oil által megvásárolt rész} \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

A vállalat célja, hogy maximalizálja a befektetésekből származó NPV-t. (Teljes NPV) $=$ (az 1-es befektetésből származó NPV) + (a 2-es befektetésből származó NPV) $+\cdots+$ (az 5-ös befektetésből származó NPV). Jegyezzük meg, hogy

$$\text{NPV az 1-es befektetésből} = (\text{egységnyi 1-es befektetés NPV-je}) \cdot (\text{az 1-es befektetés megvásárolt része}) = 13x_1$$

Hasonló okoskodást alkalmazva a 2–5. befektetésekre, azt láthatjuk, hogy a Star Oil maximalizálni szeretné a

$$z = 13x_1 + 16x_2 + 16x_3 + 14x_4 + 39x_5 \tag{25}$$

függvényt. A Star Oil feltételei a következőket jelentik:

1. feltétel A 0. időpontban a Star nem fektethet be többet, mint 40 millió dollárt.

2. feltétel Az 1. időpontban a Star nem fektethet be 20 millió dollárnál többet.

3–7. feltétel A Star nem vásárolhat többet, mint az i-edik $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ befektetés 100%-a.

Az 1. feltétel matematikai kifejezéséhez figyeljük meg, hogy (a 0. időpontban befektetett dollármennyiség) = (az 1-esbe fektetett dollár a 0. időpontban) + (a 2-esbe fektetett dollár a 0. időpontban) $+\cdots+$ (az 5-ösbe fektetett dollár a 0. időpontban). Részletezve, millió dollárban számolva

$$\begin{aligned}&\text{az 1-es befektetésbe befektetett dollár a 0. időpontban}\\ &= \begin{pmatrix}\text{a 0. időpontban az 1.}\\ \text{befektetéshez szükséges összeg}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{az 1. befektetés}\\ \text{megvásárolt része}\end{pmatrix}\\ &= 11x_1\end{aligned}$$

Hasonlóan okoskodva a 2–5. befektetésekre:

$$\text{a 0. időpontban befektetett dollár} = 11x_1 + 53x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 29x_5$$

Ezáltal az 1. feltétel így alakul:

$$11x_1 + 53x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 29x_5 \le 40 \qquad \text{(0. időponti feltétel)} \tag{26}$$

A 2. feltétel leegyszerűsödik:

$$3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_4 + 34x_5 \le 20 \qquad \text{(1. időponti feltétel)} \tag{27}$$

A 3–7. feltételeket pedig így írhatjuk:

$$x_i \le 1 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \tag{28–32}$$

Ezekhez a (26)–(32) feltételekhez még hozzávesszük az $x_i \geq 0\,(i = 1,2,3,4,5)$ nemnegativitási feltételeket, és így a következő LP-t kapjuk:

$$
\begin{array}{llr}
\max & z = 13x_1 + 16x_2 + 16x_3 + 14x_4 + 39x_5 & \\
\text{f.h.} & 11x_1 + 53x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 29x_5 \leq 40 & \text{(0. időbeli feltétel)} \\
& 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_4 + 34x_5 \leq 20 & \text{(1. időbeli feltétel)} \\
& x_1 \leq 1 & \\
& x_2 \leq 1 & \\
& x_3 \leq 1 & \\
& x_4 \leq 1 & \\
& x_5 \leq 1 & \\
& x_i \geq 0 \quad (i = 1,2,3,4,5) &
\end{array}
$$

Ennek az LP-nek az optimális megoldása $x_1 = x_3 = x_4 = 1$, $x_2 = 0.201$, $x_5 = 0.288$, $z = 57.449$. A Star Oil vásároljon 100%-ot az 1-es, 3-as és 4-es befektetésből; 20.1%-ot a 2-es befektetésből és 28.8%-ot az 5-ös befektetésből. Ezekből a befektetésekből származó összes NPV = 57 449 000$.

Elég gyakran előfordul, hogy csak úgy lehet egy befektetés törtrészét megvásárolni, hogy fel kell áldozni a befektetés kedvező készpénzáramlásait. Tegyük fel, hogy 12 millió dollárba kerül egy új olajkút fúrása éppen csak olyan mélyre, hogy elérjünk egy 30 millió dolláros kőolajforrást. Ha egy egyedülálló befektető volna ebben a helyzetben, aki 6 millió dollárért megvenné a projekt felét, ez az ember azonnal elvesztené az egész befektetett összeget és semmi pozitív készpénzt nem kapna. Mivel ebben a példában a befektetett pénz 50%-kal való csökkentése a hozamot 50%-nál többel csökkentené, ez a helyzet tehát nem felel meg az arányossági feltevésnek.

Nagyon sok tőkeallokációs problémában ésszerűtlen volna megengedni, hogy x_i tört is lehessen. Ilyenkor minden egyes x_i változó csak két értéket vehet fel: az egyik lehetséges érték a 0 (egyáltalán nem befektetni az i-edik befektetésbe), a másik lehetséges érték az 1 (az egész i-edik befektetés megvásárlása). A tőkeallokációs problémák többsége megsérti az oszthatósági feltevést.

A 8.2. alfejezetben tárgyalni fogunk egy olyan tőkeallokációs modellt, amelyben minden x_i csak 0 vagy 1 lehet.

Feladatok

A csoport

1. Mutassa meg, hogy ha $r = 0.02$, akkor a 2-es befektetéshez nagyobb NPV tartozik, mint az 1-es befektetéshez!

2. Két befektetés közül lehet választani, a pénzáramlásokat (ezer dollárban) a 7. táblázat mutatja. A 0. időpontban 10 000$ áll rendelkezésre befektetési célra, az 1. időpontban 7000$ áll rendelkezésre. Feltéve, hogy $r = 0.10$, fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek a megoldása maximalizálja a befektetésekből származó NPV-t! Keresse meg grafikusan az LP optimális megoldását! (Tegyük fel, hogy a befektetések bármilyen törtrésze is megvásárolható.)

7. TÁBLÁZAT

	Pénzáramlás (ezer dollárban)			
	időpontok			
	0	**1**	**2**	**3**
1. befektetés	−6	−5	7	9
2. befektetés	−8	−3	9	7

3. Tegyük fel, hogy az r évi kamatláb 0.20, és azt is, hogy a bankban lévő összes pénz minden évben 20% kamatnyereségre tesz szert (azaz, ha egy dollár egy évig a bankban volt, az 1\$ 1.20\$-ra növekszik). Ha beteszünk 100 dollárt a bankba egy évre, mennyi az NPV?

B csoport

4. A Finco cégnek el kell döntenie, hogy a következő évben mennyi befektetése és mennyi adóssága legyen. Minden befektetett dollár 10 centtel csökkenti a vállalat NPV-jét, és minden dollár tartozás növeli az NPV-t 50 centtel (mivel a kamatkifizetések az adóból leírhatók). A Finco jövőre legfeljebb 1 millió dollárt fektethet be. A tartozás legfeljebb a befektetés 40%-a lehet. Jelenleg a Fincónak 800 000\$ áll rendelkezésére, készpénzben. Minden befektetésért vagy készpénzben, vagy kölcsönpénzből kell fizetni. Fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek a megoldása a Finco NPV-jét maximalizálja! Ezután oldja meg grafikusan az LP-t![7]

3.7. Rövidtávú pénzügyi tervezés[8]

LP modellek gyakran használhatók arra, hogy segítsenek egy cég rövid- vagy hosszútávú pénzügyi tervezésében (lásd még a 3.11. alfejezetet is). Itt most egy egyszerű példát mutatunk be annak illusztrálására, hogyan használható a lineáris programozás egy vállalat rövidtávú pénzügyi tervezéséhez.[9]

9. PÉLDA A Semicond egy kis elektronikai vállalat, amelyik magnókat és rádiókat gyárt. Az egységnyi munkaköltségek, nyersanyagköltségek és minden termék eladási ára a 8. táblázatban látható.

8. TÁBLÁZAT A Semicond költségei (\$-ban)

	Magnó	Rádió
Eladási ár	100	90
Munkaköltség	50	35
Nyersanyagköltség	30	40

1998. december elsején a Semicondnak elég nyersanyag állt rendelkezésére 100 magnó és 100 rádió gyártásához. Ugyanerre a napra vonatkozó vállalati mérleg a 9. táblázatban látható. A Semicond eszköz/forrás aránya (vagyis az aktuális arány) $20\,000/10\,000 = 2$.

9. TÁBLÁZAT A Semicond mérlege (\$-ban)

	Eszközök	Források
Készpénz	10000	
Követelések[10]	3000	
Raktárkészlet[11]	7000	
Bankkölcsön		10000

A Semicond-nak el kell döntenie, hogy decemberben hány magnót és hány rádiót gyártson. A kereslet elég nagy ahhoz, hogy a gyártott termékeket mind el tudják adni. Mindazonáltal az eladás hitelre történik és a decemberben gyártott termékek kifizetése 1999. február

[7] Myers és Pogue (1974) alapján.
[8] Ezen alfejezet kihagyása nem szakítja meg a tárgyalás folytonosságát.
[9] Ez az alfejezet Neave és Wiginton (1981) egy példáján alapul.
[10] Követelések alatt azt a pénzt értjük, amivel a Semicond vevői tartoznak korábban megvásárolt Semicond termékekért.
[11] 1998. december 1-jei készletérték $= 30(100) + 40(100) = 7000$\$.

1. előtt nem érkezik meg. December folyamán a Semicondnak beérkezik a követelésekből 2000 dollárja, ezenkívül a Semicondnak vissza kell fizetnie 1000\$ kölcsönt és 1000\$ havi bérleti díjat is. 1999. január 1-jén a Semicondhoz beérkezik egy 2000\$ értékű nyersanyag-szállítmány, amelyet 1999. február 1-jén kell kifizetni. A Semicond vezetősége elhatározta, hogy 1999. január 1-jén a készpénzegyenlegnek legalább 4000 dollárnak kell lennie. A Semicond bankja megköveteli, hogy az eszközök/források hányados január elején legalább 2 legyen. Mit kell gyártania a Semicondnak decemberben ahhoz, hogy maximálisan járuljon hozzá az éves profithoz ((leendő bevételek) − (változó termelési költségek))?

Megoldás A Semicondnak el kell döntenie, hogy decemberben hány magnót és hány rádiót gyártson. Így legyen

$$x_1 = \text{a decemberben gyártott magnók száma}$$
$$x_2 = \text{a decemberben gyártott rádiók száma}$$

A célfüggvény felírásához jegyezzük meg, hogy

$$\frac{\text{profit}}{\text{magnó}} = 100 - 50 - 30 = 20\$$$
$$\frac{\text{profit}}{\text{rádió}} = 90 - 35 - 40 = 15\$$$

Ezáltal, ugyanúgy, mint a Giapetto problémában, a következő célfüggvényt kapjuk:

$$\max z = 20x_1 + 15x_2 \tag{33}$$

A Semicondnak a következő megkötöttségekkel kell szembenéznie:

1. feltétel A rendelkezésre álló nyersanyag korlátozott mennyisége miatt decemberben legfeljebb 100 magnó gyártható.

2. feltétel A rendelkezésre álló nyersanyag korlátozott mennyisége miatt decemberben legfeljebb 100 rádió gyártható.

3. feltétel 1999. január 1-jén legalább 4000\$ készpénze legyen.

4. feltétel (eszközök január 1-jén)/(források január 1-jén) ≥ 2 legyen.

Az 1. feltétel:

$$x_1 \leq 100 \tag{34}$$

A 2. feltétel:

$$x_2 \leq 100 \tag{35}$$

Ahhoz, hogy a 3. feltételt felírhassuk, figyelembe kell vennünk, hogy

$$\begin{aligned}\text{készpénzkészlet január elsején} &= \text{készpénzkészlet december elsején}\\ &\quad + \text{a december folyamán beérkező követelések}\\ &\quad - \text{a kölcsön decemberben visszafizetendő része}\\ &\quad - \text{decemberi bérleti díj} - \text{decemberi munkabér}\\ &= 10000 + 2000 - 1000 - 1000 - 50x_1 - 35x_2\\ &= 10000 - 50x_1 - 35x_2\end{aligned}$$

Most már felírhatjuk a 3. feltételt:

$$10000 - 50x_1 - 35x_2 \geq 4000 \tag{36'}$$

A számítógépes programok nagy része megköveteli, hogy az LP feltételek olyan alakban legyenek felírva, ahol az összes, változót tartalmazó tagok a bal oldalon vannak, és a konstans van a jobb oldalon. Így a számítógépes megoldáshoz (36′)-t át kell írnunk, így

$$50x_1 + 35x_2 \leq 6000 \tag{36}$$

A 4. feltétel felírásához meg kell határoznunk a Semicond január elsejei készpénzhelyzetét, követeléseit, készlethelyzetét és forrásait x_1 és x_2 segítségével. Már megmutattuk, hogy

$$\text{készpénzhelyzet január elsején} = 10000 - 50x_1 - 35x_2$$

Továbblépve:

$$\begin{aligned}
\text{követelések január 1-jén} &= \text{december 1-jei követelések} \\
&\quad + \text{a decemberi eladásból adódó követelések} \\
&\quad - \text{a decemberben behajtott követelések} \\
&= 3000 + 100x_1 + 90x_2 - 2000 \\
&= 1000 + 100x_1 + 90x_2
\end{aligned}$$

Most nézzük tovább:

$$\begin{aligned}
\text{készletérték január 1-jén} &= \text{készletérték december 1-jén} \\
&\quad - \text{a készletből decemberben felhasznált érték} \\
&\quad + \text{a január 1-jei készletérték} \\
&= 7000 - (30x_1 + 40x_2) + 2000 \\
&= 9000 - 30x_1 - 40x_2
\end{aligned}$$

Így már kiszámíthatjuk a január 1-jei eszközhelyzetet:

$$\begin{aligned}
\text{január 1-jei eszközök} &= \text{január 1-jei készpénz} + \text{január 1-jei követelések} \\
&\quad + \text{január 1-jei készlet} \\
&= (10000 - 50x_1 - 35x_2) + (1000 + 100x_1 + 90x_2) \\
&\quad + (9000 - 30x_1 - 40x_2) \\
&= 20000 + 20x_1 + 15x_2
\end{aligned}$$

Végül:

$$\begin{aligned}
\text{január 1-jei források} &= \text{december 1-jei források} - \text{decemberi kölcsön-visszafizetés} \\
&\quad + \text{január elsején esedékes raktárba szállítás} \\
&= 10000 - 1000 + 2000 \\
&= 11000\$
\end{aligned}$$

A 4. feltétel most már így írható:

$$\frac{20000 + 20x_1 + 15x_2}{11000} \geq 2$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát 11 000-rel szorozva

$$20000 + 20x_1 + 15x_2 \geq 22000$$

Most a számítógépes inputhoz megfelelő formába átírva azt kapjuk, hogy

$$20x_1 + 15x_2 \geq 2000 \tag{37}$$

Összefoglalva, a (33)–(37), valamint az $x_1 \geq 0$ és $x_2 \geq 0$ nemnegativitási feltételek a következő LP-t szolgáltatják:

$$\begin{array}{lrl}
\max & z = 20x_1 + 15x_2 & \\
\text{f.h.} & x_1 \qquad \leq 100 & \text{(magnó feltétel)} \\
 & x_2 \leq 100 & \text{(rádió feltétel)} \\
 & 50x_1 + 35x_2 \leq 6000 & \text{(készpénzhelyzet feltétel)} \\
 & 20x_1 + 15x_2 \geq 2000 & \text{(eszközök/források feltétel)} \\
 & x_1, x_2 \geq 0 & \text{(nemnegativitási feltétel)}
\end{array}$$

Akár grafikusan, akár számítógéppel oldjuk meg a feladatot, az optimális megoldás: $z = 2500$, $x_1 = 50$, $x_2 = 100$. Ez azt jelenti, hogy a Semicond úgy tudja profitjának decemberi részét maximalizálni, ha 50 magnót és 100 rádiót gyárt. Így a decemberi hozzájárulás a profithoz: $20(50) + 15(100) = 2500$\$.

Feladatok

A csoport

1. Oldja meg grafikusan a Semicond problémát!

2. Tegyük fel, hogy a január 1-jei szállítmány 7000\$-ra volt értékelve. Mutassa meg, hogy Semicond LP-je most nem megoldható!

3.8. Keverési problémák

Az olyan feladatok, amelyekben különböző hozzávalókat kell elegyíteni-keverni bizonyos kívánt arányokban ahhoz, hogy az eladható termék létrejöjjön, gyakran felírhatók lineáris programozási modell segítségével. Ezeket a feladatokat **keverési problémáknak** nevezzük. A következőkben felsorolunk néhány olyan helyzetet, amelyekben keverési problémákat lineáris programozással oldottak meg.

1. Eltérő típusú nyersolajok keverése különböző benzinfajták és más olajtermékek (mint például fűtőolaj) előállításához.

2. Különféle vegyszerek keverése más vegyszerek gyártásához.

3. Különféle típusú fémötvözetek elegyítése különböző acélfajták gyártásához.

4. Különféle állateledelek keverése minimális költségű szarvasmarha tápok elkészítéséhez.

5. Különféle ércek keverése speciális minőségű ércek nyerésére.

6. Különféle alkotórészek (hús, töltelékanyag, víz stb.) összekeverése valamely termék, például párizsi előállításához.

7. Különféle típusú papírok keverése újrafelhasznált papír előállításához.

A következő példa a keverési problémák LP modellé fogalmazásában használható főbb szempontokat illusztrálja.

10. PÉLDA A Sunco Oil háromféle benzint állít elő (1. benzin, 2. benzin, 3. benzin). Mindegyik típus háromféle nyersolaj keverékéből áll elő (1. nyersolaj, 2. nyersolaj, 3. nyersolaj). A benzin hordónkénti eladási ára és a nyersolaj hordónkénti ára a 10. táblázatban látható.

10. TÁBLÁZAT Benzin és nyersolaj árak ($-ban)

	Eladási ár hordónként		Vételár hordónként
1. benzin	70	1. nyersolaj	45
2. benzin	60	2. nyersolaj	35
3. benzin	50	3. nyersolaj	25

A Sunco naponta legfeljebb 5000 hordóval vásárolhat bármelyik típusú nyersolajból.

A három benzintípus oktánszámban és kéntartalomban különbözik egymástól. Az 1-es típusú benzinbe kerülő nyersolajoknak átlagosan legalább 10 oktánszámúnak kell lenniük és legfeljebb 1% ként tartalmazhatnak. A 2-es típusú benzint előállító nyersolajoknak átlagosan legalább 8 oktánszámúnak kell lenniük és legfeljebb 2% ként tartalmazhatnak. A 3-as típusú benzinbe kerülő nyersolajoknak átlagosan legalább 6 oktánszámúnak kell lenniük és legfeljebb 1% ként tartalmazhatnak. Az oktánszámok és a kéntartalom a 11. táblázatból olvasható ki.

11. TÁBLÁZAT Oktánszámok és kéntartalom a keveréshez

	Oktánszám	Kéntartalom (%)
1. nyersolaj	12	0.5
2. nyersolaj	6	2.0
3. nyersolaj	8	3.0

Egy hordó nyersolajnak egy hordó benzinné alakítása 4 dollárba kerül, és a Sunco finomító üzeme naponta legfeljebb 14 000 hordó benzint képes előállítani.

A Sunco fogyasztói a következő mennyiségeket rendelik: 1. benzinből naponta 3000 hordó, 2. benzinből naponta 2000 hordó, 3. benzinből naponta 1000 hordó. A vállalat kötelességének tekinti, hogy kielégítse a megrendeléseket. A Sunco ezenkívül még reklámozhatja is a termékeit a kereslet ösztönzése céljából. Minden dollár, amit egy bizonyos benzinfajtánál naponta reklámra költenek, abból a fajtából a napi keresletet 10 hordóval növeli meg. Például, ha a Sunco elhatározza, hogy naponta 20 dollárt költ a 2-es benzin reklámozására, ez a napi keresletet a 2-es benzinből $20(10) = 200$ hordóval növeli meg. Fogalmazzunk meg egy LP-t, amelynek a megoldása maximalizálja a Sunco napi profitját (profit = bevétel − költségek)!

Megoldás A Suncónak kétféle döntést kell hoznia: először is, mennyi pénzt érdemes a különböző benzinfélék reklámozására költeni, másodszor pedig: hogyan keverje a háromféle nyersolajat különböző típusú benzinekké? Például a Suncónak el kell döntenie, hogy hány hordó 1-es nyersolajat használjon fel az 1-es típusú benzin előállításához. Definiáljuk a döntési változókat a következőképpen:

a_i = hány dollárt költenek naponta az i-edik típusú benzin reklámjára ($i = 1,2,3$)

x_{ij} = az i-edik nyersolajból a j-edik benzinhez felhasznált napi hordómennyiség ($i = 1,2,3;\ j = 1,2,3$)

Például, x_{21} azt jelenti, hogy ennyi hordó 2. nyersolajat használnak fel naponta az 1. benzin előállításához.

Ezeknek a változóknak a megválasztása már elég volna a Sunco célfüggvényének és feltételeinek felírásához, de mielőtt ezt megtennénk, jegyezzük meg, hogy a döntési változóink definíciója magában foglalja azt is, hogy

$$\begin{aligned} x_{11}+x_{12}+x_{13} &= \text{naponta felhasznált 1. nyersolaj hordókban számolva} \\ x_{21}+x_{22}+x_{23} &= \text{naponta felhasznált 2. nyersolaj hordókban számolva} \\ x_{31}+x_{32}+x_{33} &= \text{naponta felhasznált 3. nyersolaj hordókban számolva} \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} x_{11}+x_{21}+x_{31} &= \text{naponta előállított 1. benzin hordókban számolva} \\ x_{12}+x_{22}+x_{32} &= \text{naponta előállított 2. benzin hordókban számolva} \\ x_{13}+x_{23}+x_{33} &= \text{naponta előállított 3. benzin hordókban számolva} \end{aligned} \tag{39}$$

Hogy egy kicsit egyszerűsítsük a dolgokat, tegyük fel, hogy a benzin nem tárolható, vagyis az előállított benzinmennyiséget aznap el kell adni. Ez azt jelenti, hogy $i = 1,2,3$-ra a naponta termelt i-edik típusú benzin mennyiségének egyenlőnek kell lennie az i-edik típusú benzin napi keresletével. Tegyük fel, hogy a naponta termelt i-edik típusú benzin mennyisége meghaladja a napi keresletet. Ekkor szükségtelen vásárlási és előállítási költségeknek tettük volna ki magunkat. Másrészt, ha a naponta előállított i-edik típusú benzin mennyisége kisebb, mint a kereslet, akkor nem sikerült a kötelező megrendelést teljesíteni és szükségtelen reklámköltségeknek is kitettük magunkat.

Most már készen állunk a Sunco célfüggvényének és feltételeinek felírására. Kezdjük a Sunco célfüggvényével. (39)-ből adódik, hogy

$$\begin{aligned} \text{napi bevétel benzin eladásból} = {} & 70(x_{11}+x_{21}+x_{31}) + 60(x_{12}+x_{22}+x_{32}) \\ & + 50(x_{13}+x_{23}+x_{33}), \end{aligned}$$

a (38)-ból pedig

$$\begin{aligned} \text{a nyersolaj vásárlásának napi költsége} = {} & 45(x_{11}+x_{12}+x_{13}) + 35(x_{21}+x_{22}+x_{23}) \\ & + 25(x_{31}+x_{32}+x_{33}) \end{aligned}$$

Ezenkívül még

$$\begin{aligned} \text{napi reklámköltség} &= a_1+a_2+a_3 \\ \text{napi termelési költség} &= 4(x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{31}+x_{32}+x_{33}) \end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned} \text{napi profit} &= \text{napi bevétel benzineladásból} \\ &\quad - \text{napi nyersolaj-vásárlási költség} \\ &\quad - \text{napi reklámköltség} - \text{napi termelési költség} \\ &= (70-45-4)x_{11} + (60-45-4)x_{12} + (50-45-4)x_{13} \\ &\quad + (70-35-4)x_{21} + (60-35-4)x_{22} + (50-35-4)x_{23} \\ &\quad + (70-25-4)x_{31} + (60-25-4)x_{32} \\ &\quad + (50-25-4)x_{33} - a_1 - a_2 - a_3 \end{aligned}$$

A Sunco célja az, hogy maximalizálja a következő kifejezést:

$$\begin{aligned} z = 21x_{11} + 11x_{12} + x_{13} + 31x_{21} + 21x_{22} + 11x_{23} \\ + 41x_{31} + 31x_{32} + 21x_{33} - a_1 - a_2 - a_3 \end{aligned} \tag{40}$$

A Sunco feltételeire vonatkozóan látható, hogy a következő 13 feltételt kell kielégíteni:

1. feltétel Az 1. benzin napi termelt mennyisége egyenlő legyen a napi kereslettel.

2. feltétel A 2. benzin napi termelt mennyisége egyenlő legyen a napi kereslettel.

3. feltétel A 3. benzin napi termelt mennyisége egyenlő legyen a napi kereslettel.

4. feltétel Naponta legfeljebb 5000 hordó 1. nyersolaj vásárolható.

5. feltétel Naponta legfeljebb 5000 hordó 2. nyersolaj vásárolható.

6. feltétel Naponta legfeljebb 5000 hordó 3. nyersolaj vásárolható.

7. feltétel A finomító korlátozott kapacitása miatt naponta legfeljebb 14 000 hordó benzint lehet előállítani.

8. feltétel Az 1. benzinhez használt nyersolajoknak átlagosan legalább 10 oktánszámúnak kell lenniük.

9. feltétel A 2. benzinhez használt nyersolajoknak átlagosan legalább 8 oktánszámúnak kell lenniük.

10. feltétel A 3. benzinhez használt nyersolajoknak átlagosan legalább 6 oktánszámúnak kell lenniük.

11. feltétel Az 1. benzinhez használt nyersolajkeverékben legfeljebb 1% kén lehet.

12. feltétel A 2. benzinhez használt nyersolajkeverékben legfeljebb 2% kén lehet.

13. feltétel A 3. benzinhez használt nyersolajkeverékben legfeljebb 1% kén lehet.

Fejezzük ki az 1. feltételt a döntési változókkal, megjegyezve, hogy

$$\text{napi kereslet 1. benzinből} = 3000 + \text{1. benzin iránti reklámok által generált kereslet}$$

$$\text{1. benzin reklámok által generált kereslete} = \left(\frac{\text{1. benzin kereslete}}{\text{dollár}}\right)\left(\begin{matrix}\text{elköltött}\\ \text{dollár}\end{matrix}\right) = 10a_1\text{[12]}$$

Így a napi kereslet az 1. benzinből $= 3000 + 10a_1$. Most már felírhatjuk az 1. feltételt:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 3000 + 10a_1 \tag{41'}$$

Ezt így írhatjuk át:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} - 10a_1 = 3000 \tag{41}$$

A 2. feltétel:

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} - 10a_2 = 2000 \tag{42}$$

[12]Sokan azt hiszik, hogy az 1. benzin reklámok által generált keresletét $\frac{1}{10}a_1$ alakban kell felírni. Elemezve ezt a kifejezést, rájövünk arra, hogy ez nem helyes. Nézzük a mértékegységeket! $\frac{1}{10}$ mértékegysége az elköltött dollármennyiség, és a_1 is az elköltött dollármennyiség. Így $\frac{1}{10}a_1$-nek (elköltött dollár)^2 lenne az egysége, és ez nem lehet helyes!

A 3. feltétel:

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} - 10a_3 = 1000 \tag{43}$$

(38)-ból a 4. feltétel:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 5000 \tag{44}$$

Az 5. feltétel:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 5000 \tag{45}$$

A 6. feltétel:

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 5000 \tag{46}$$

Figyeljük meg, hogy

$$\begin{aligned}\text{a napi teljes benzintermelés} &= \text{megtermelt 1. benzin} + \text{megtermelt 2. benzin}\\ &\quad + \text{megtermelt 3. benzin}\\ &= (x_{11} + x_{21} + x_{31}) + (x_{12} + x_{22} + x_{32})\\ &\quad + (x_{13} + x_{23} + x_{33})\end{aligned}$$

Így a 7. feltétel a következő:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 14000 \tag{47}$$

A 8–10. feltételek felírásához képesnek kell lennünk arra, hogy meghatározzuk az „átlagos” oktánszámot a nyersolajok különböző típusainak keverékeiben. Feltesszük, hogy a különböző nyersolajok oktánszámai lineárisan keverednek. Például, ha összekeverünk két hordó 1. nyersolajat, három hordó 2. nyersolajat és egy hordó 3. nyersolajat, akkor az átlagos oktánszám ebben a keverékben így adódik:

$$\frac{\text{összes oktánszám a keverékben}}{\text{hordók száma a keverékben}} = \frac{12(2) + 6(3) + 8(1)}{2 + 3 + 1} = \frac{50}{6} = 8\frac{1}{3}$$

Általánosítva, a 8. feltételt kifejezhetjük így:

$$\frac{\text{összes oktánszám a 1. benzinben}}{\text{1. benzin mennyisége}} = \frac{12x_{11} + 6x_{21} + 8x_{31}}{x_{11} + x_{21} + x_{31}} \geq 10 \tag{48$'$}$$

Sajnos a (48′) egyenlőtlenség nem lineáris. Ha át akarjuk alakítani (48′)-t egy lineáris egyenlőtlenséggé, nem kell mást tennünk, mint mindkét oldalt megszorozni a bal oldal nevezőjével. Eredményül azt kapjuk, hogy:

$$12x_{11} + 6x_{21} + 8x_{31} \geq 10(x_{11} + x_{21} + x_{31})$$

és ez a következőképpen írható át:

$$2x_{11} - 4x_{21} - 2x_{31} \geq 0 \tag{48}$$

Ehhez hasonlóan, a 9. feltétel:

$$\frac{12x_{12} + 6x_{22} + 8x_{32}}{x_{12} + x_{22} + x_{32}} \geq 8$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozva $x_{12} + x_{22} + x_{32}$-vel és összevonva

$$4x_{12} - 2x_{22} \geq 0 \tag{49}$$

Mivel bármelyik nyersolajtípusnak az oktánszáma 6 vagy több, akárhogyan is keverjük őket a 3. benzin előállításához, az átlagos oktánszám biztosan legalább 6 lesz. Ez azt jelenti, hogy a változók bármely értékei kielégítik a 10. feltételt. Ezt igazolandó, fejezzük ki a 10. feltételt így:

$$\frac{12x_{13}+6x_{23}+8x_{33}}{x_{13}+x_{23}+x_{33}} \geq 6$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát $x_{13}+x_{23}+x_{33}$-mal szorozva és összevonva, ezt kapjuk:

$$6x_{13}+2x_{33} \geq 0 \tag{50}$$

Miután $x_{13} \geq 0$ és $x_{33} \geq 0$ mindig teljesül, (50) is automatikusan teljesül és így nem kell felvenni a modellbe. Egy ilyen feltételt, mint (50), amelyik a modell más feltételeiben már bennefoglaltatik, **redundáns feltételnek** nevezünk, és azt nem kell a modell felírásában szerepeltetni.

A 11. feltétel így írható:

$$\frac{\text{összes kén az 1. benzin keverékben}}{\text{hordók száma a keverékben}} \leq 0.01$$

Ezután, felhasználva az egyes olajtípusok kénszázalékait, láthatjuk, hogy

$$\begin{aligned}\text{összes kén az 1. benzin keverékben} &= \text{kén az 1. benzinhez használt 1. nyersolajban}\\ &\quad + \text{kén az 1. benzinhez használt 2. nyersolajban}\\ &\quad + \text{kén az 1. benzinhez használt 3. nyersolajban}\\ &= 0.005x_{11}+0.02x_{21}+0.03x_{31}\end{aligned}$$

Most már felírhatjuk a 11. feltételt:

$$\frac{0.005x_{11}+0.02x_{21}+0.03x_{31}}{x_{11}+x_{21}+x_{31}} \leq 0.01$$

Ismét egy nemlineáris egyenlőtlenséghez jutottunk, de megszorozhatjuk az egyenlőtlenség mindkét oldalát $x_{11}+x_{21}+x_{31}$-gyel és összevonva kapjuk, hogy

$$-0.005x_{11}+0.01x_{21}+0.02x_{31} \leq 0 \tag{51}$$

Ehhez hasonlóan a 12. feltétel a következő:

$$\frac{0.005x_{12}+0.02x_{22}+0.03x_{32}}{x_{12}+x_{22}+x_{32}} \leq 0.02$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozva $x_{12}+x_{22}+x_{32}$-vel és összevonva:

$$-0.015x_{12}+0.01x_{32} \leq 0 \tag{52}$$

Végül a 13. feltétel így írható:

$$\frac{0.005x_{13}+0.02x_{23}+0.03x_{33}}{x_{13}+x_{23}+x_{33}} \leq 0.01$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozva $x_{13}+x_{23}+x_{33}$-mal és összevonva, az LP feltétel:

$$-0.005x_{13}+0.01x_{23}+0.02x_{33} \leq 0 \tag{53}$$

12. TÁBLÁZAT A célfüggvény és a keverési feltételek

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	a_1	a_2	a_3		
21	11	1	31	21	11	41	31	21	-1	-1	-1	(max)	
1	0	0	1	0	0	1	0	0	-10	0	0	$=$	3000
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	-10	0	$=$	2000
0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	-10	$=$	1000
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\leq$	5000
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	$\leq$	5000
0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	$\leq$	5000
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	$\leq$	14000
2	0	0	-4	0	0	-2	0	0	0	0	0	$\geq$	0
0	4	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	$\geq$	0
-0.005	0	0	0.01	0	0	0.02	0	0	0	0	0	$\leq$	0
0	-0.015	0	0	0	0	0	0.01	0	0	0	0	$\leq$	0
0	0	-0.005	0	0	0.01	0	0	0.02	0	0	0	$\leq$	0

A (40)–(53) feltételeket összefoglalva, kivéve a redundáns (50) feltételt, valamint az $x_{ij} \geq 0$ és $a_i \geq 0$ nemnegativitási feltételeket is figyelembe véve, egy olyan LP-t kapunk, amelyet táblázatos formában is kifejezhetünk (lásd 12. táblázat).

A 12. táblázatban az első sor (max) a célfüggvényt képviseli, a második sor az első feltételt, a harmadik sor a másodikat és így tovább. Számítógéppel megoldva, a Sunco LP-jének egy optimális megoldása:

$$
\begin{array}{ccc}
 & z = 287500 & \\
x_{11} = 2222.22 & x_{12} = 2111.11 & x_{13} = 666.67 \\
x_{21} = 444.44 & x_{22} = 4222.22 & x_{23} = 333.34 \\
x_{31} = 333.33 & x_{32} = 3166.67 & x_{33} = 0 \\
a_1 = 0 & a_2 = 750 & a_3 = 0
\end{array}
$$

A Sunco termeljen tehát $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 3000$ hordó 1. benzint, felhasználva 2222.22 hordó 1. nyersolajat, 444.44 hordó 2. nyersolajat és 333.33 hordó 3. nyersolajat. A cég termeljen $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 9500$ hordó 2. benzint, felhasználva 2111.11 hordó 1. nyersolajat, 4222.22 hordó 2. nyersolajat és 3166.67 hordó 3. nyersolajat. A Sunco állítson elő továbbá $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1000$ hordó 3. benzint, felhasználva 666.67 hordó 1. nyersolajat és 333.34 hordó 2. nyersolajat. A cég költsön 750 dollárt a 2. benzin reklámozására. Így a Sunco profitja 287 500 dollár.

Figyeljük meg, hogy bár az 1. benzin látszik a legnyereségesebbnek, mégis a 2. benzin keresletét ösztönözzük. Ennek az az oka, hogy a rendelkezésre álló nyersolajok minősége miatt (az oktánszámra és kéntartalomra való tekintettel) elég bonyolult az 1. benzin előállítása. Ezért aztán a Sunco több pénzt tud keresni úgy, hogy többet termel az alacsonyabb minőségű 2. benzinből, mintha extra mennyiségű 1. benzint állítana elő.

Feladatok

A csoport

1. Ön elhatározta, hogy beszáll az édesség üzletbe. Kétféle édesség gyártásán gondolkodik: Nehézédes és Könnyűédes. Mindkettő kizárólag cukorból, magokból és csokoládéból áll. Jelenleg Önnek 100 deka cukor, 20 deka mag és 30 deka csokoládé áll rendelkezésére. A Könnyűédest előállító keverékben legalább 20% magtartalomnak kell lennie. A Nehézédesben legalább 10% magnak és 10% csokoládénak kell lennie. Egy deka Könnyűédest 25 centért lehet eladni, egy deka Nehézédest pedig 20 centért. Fogalmazzon meg egy LP-t, amely az Ön édességeladásból származó bevételének maximalizálására!

2. Az O.J. Juice Company előrecsomagolt narancsot és narancslét árul, ez utóbbit kartonszámra. O.J. a narancsot 1-től (gyenge) 10-ig (kiváló) osztályozza. Jelenleg O.J.-nél 100 000 font 9 pontos narancs és 120 000 font 6 pontos narancs van raktáron. A becsomagolt (zacskós) narancs átlagminőségének legalább 7 pontosnak kell lennie, és a narancsléhez felhasznált narancsok átlagminősége legalább 8 pont kell hogy legyen. Minden font narancsléhez használt narancs 1.50$ jövedelmet ad és 1.05$ változó költséget (munkabér, rezsiköltség, raktározási költség stb.) tartalmaz. Minden font zacskóban eladott narancsból 50 cent jövedelem származik, és 20 cent változó költsége van. Fogalmazzon meg egy LP-t, amely maximalizálja O.J. profitját!

3. Egy bank megpróbálja eldönteni, hogy hová fektessen be az idén. Jelenleg 500 000$ áll rendelkezésére befektetési célra: kötvényekbe, lakáskölcsönökbe, autóvásárlási kölcsönökbe és személyi kölcsönökbe. Az éves kamathozam az egyes befektetésekben a következő: 10% a kötvényekből, 16% a lakáskölcsönökből, 13% az autóvásárlási kölcsönökből, 20% a személyi kölcsönökből. A bank befektetési igazgatója biztosítani akarja, hogy a befektetések ne legyenek túl kockázatosak, ezért három szigorító feltételt állít fel:

(a) A személyi kölcsönökbe fektetett összeg nem lehet nagyobb, mint a kötvényekbe fektetett összeg.

(b) A lakáskölcsönökbe fektetett összeg nem lehet nagyobb, mint az autóvásárlási kölcsönökbe fektetett összeg.

(c) Személyi kölcsönökbe legfeljebb a teljes befektetési összeg 25%-át szabad befektetni.

A bank célja, hogy maximalizálja portfoliójának évi nyereségét. Fogalmazzon meg egy LP-t, amely segíti a bankot célja elérésében!

4. Erica Cudahy egy fiatal MBA hallgatónő. Van 1000 dollárja, amit értékpapírokba és kölcsönökbe fektethet. Minden egyes értékpapírba fektetett dollár 10 cent hasznot hoz, és minden egyes kölcsönbe fektetett dollár 15 cent hasznot hoz. Az egész pénznek legalább 30%-át értékpapírba kell fektetni, és legalább 400 dollárt kölcsönbe. Fogalmazza meg azt az LP-t, ami arra alkalmas, hogy Erica befektetéséből maximális profitot hozzon ki! Ezután oldja meg az LP-t grafikusan!

5. A Chandler Oil Company rendelkezésére áll 5000 hordó 1. nyersolaj és 10 000 hordó 2. nyersolaj. A vállalat kétféle terméket árul: benzint és fűtőolajat. Mindkét termék az 1. nyersolaj és a 2. nyersolaj keverésével állítható elő. A nyersanyagok minőségi szintje a következő: 1. nyersolaj 10-es, 2. nyersolaj 5-ös. A benzin átlagos minőségi szintjének legalább 8-nak, a fűtőolajénak pedig legalább 6-nak kell lennie. Mindkét termék keresletét reklám útján ösztönzik. Minden dollár, amit benzinreklámra költenek, 5 hordónyi keresletet generál, és minden dollár, amit fűtőolajreklámra költenek, 10 hordónyi keresletet hoz. A benzin eladási ára 25$ hordónként, a fűtőolajé 20$. Fogalmazzon meg egy LP-t, amely maximalizálja a Chandler profitját! Feltételezzük, hogy a rendelkezésre álló mennyiségen felül egyik olajtípusból sem vásárolhat a vállalat.

6. A Bullco szilíciumot és nitrogént keverve kétféle típusú műtrágyát állít elő. Az 1. műtrágya legalább 40% nitrogént kell hogy tartalmazzon, és eladási ára 70$ fontonként. A 2. műtrágyának legalább 70% szilíciumot kell tartalmaznia, és eladási ára 40$ fontonként. A Bullco legfeljebb 80 font nitrogént vásárolhat, fontját 15$-ért, és legfeljebb 100 font szilíciumot vásárolhat, fontonként 10$-ért. Tételezzük fel, hogy bármennyi műtrágya eladható. Fogalmazzon meg egy LP-t, amely maximalizálja a Bullco profitját!

7. Eli Daisy az 1. és 2. vegyszerből kétféle gyógyszert kever. Az 1. gyógyszerben legalább 70% 1. vegyszernek kell lennie, a 2. gyógyszerben pedig legalább 60% 2. vegyszernek kell lennie. Legfeljebb 40 deka 1. gyógyszer adható el, dekánként 6 dollárért; és legfeljebb 30 deka 2. gyógyszer adható el, dekánként 5 dollárért. Legfeljebb 45 deka 1. vegyszer vásárolható dekánként 6 dollárért és végül legfeljebb 40 deka 2. vegyszer vásárolható dekánként 4 dollárért. Fogalmazzon meg egy LP-t, amely maximalizálja Daisy profitját!

8. A Highland tévé-rádió boltnak el kell döntenie, hogy hány tévét és hány rádiót készletezzen. Egy tévéhez 1 négyzetméter alapterület kell, míg egy rádióhoz 0.4 négyzetméter. 20 négyzetméter terület áll rendelkezésre. A Highland 60 dollárt keres egy tévén és 20 dollárt egy rádión. A boltban mást nem raktároznak, csak tévét és rádiót. A piaci előírások értelmében kötelező, hogy a raktározott készülékeknek legalább 60%-a rádió legyen. Végül, egy tévé 200 dollár tőkét köthet le legfeljebb, egy rádió pedig 50-et. A Highland azt szeretné, hogy egy-egy időpontban legfeljebb 3000 dollárnyi tőkéje volna lekötve. Fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek megoldása maximalizálja a Highland profitját!

9. Sok Wall Street-i cég használ lineáris programozási modelleket arra, hogy a legkedvezőbb kötvény portfoliót válassza. A következő egy ilyen modell egyszerűsített változata. A Solodrexnek egymillió dollárja van befektetési célra. Négyféle kötvényben gondolkoznak. A 13. táblázat mutatja az egyes kötvények várható évi hozamát, a legrosszabb esetben való évi hozamot és az egyes kötvények „tartamát”. Egy kötvény tartama azt méri, hogy a kötvény mennyire érzékeny a kamatlábra. A Solodrex maximalizálni akarja a kötvénybefektetésekből származó várható nyereséget, három feltétel mellett.

13. TÁBLÁZAT

	Várható hozam (%)	**Legrosszabb hozam (%)**	**Tartam**
1. kötvény	13	6	3
2. kötvény	8	8	4
3. kötvény	12	10	7
4. kötvény	14	9	9

1. feltétel A portfólió nyeresége a legrosszabb esetben is legalább 8% legyen.

2. feltétel A portfólió átlagos tartama legfeljebb 6 lehet. Például, ha a portfólióban 600 000$ van az 1-es kötvényben és 400 000$ a 4-esben, akkor az átlagos tartam:

$$\frac{600000(3)+400000(9)}{1000000} = 5.4$$

3. feltétel A diverzifikációs előírások miatt egyféle kötvénybe legfeljebb a teljes befektetett összeg 40%-a fektethető be.

Fogalmazzon meg egy LP-t, amely a Solodrex számára lehetővé teszi, hogy maximalizálja befektetésének várható nyereségét!

10. A Coalco három helyen bányászik szenet és ezt négy fogyasztóhoz szállítja. A 14. táblázatból kiolvasható a szén tonnánkénti kitermelési költsége, a szén tonnánkénti salak- és kéntartalma, valamint az egyes bányák kapacitása (tonnában). Az egyes fogyasztók által rendelt szénmennyiség (tonnában) a 15. táblázatban látható. A szállítási költségek (dollárban) a 16. táblázatban láthatók, és egy tonna szén szállítására vonatkoznak. Előírás, hogy a teljes leszállított

14. TÁBLÁZAT

	Kitermelési költség ($)	**Kapacitás**	**Salak-**	**Kén-**
			tartalom (t)	
1. bánya	50	120	.08	.05
2. bánya	55	100	.06	.04
3. bánya	62	140	.04	.03

szénmennyiségben legfeljebb 5% salak és legfeljebb 4% kén lehet. Fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek a megoldása minimalizálja a kereslet kielégítésének költségét!

15. TÁBLÁZAT

Fogyasztó			
1.	**2.**	**3.**	**4.**
80	70	60	90

16. TÁBLÁZAT

	Fogyasztó			
	1.	**2.**	**3.**	**4.**
1. bánya	4	6	8	12
2. bánya	9	6	7	11
3. bánya	8	12	3	5

11. Eli Daisy négyféle vegyszerből állítja elő a Rozac nevű gyógyszert. Ma 1000 fontot kell belőle előállítani. A Rozacban lévő három aktív alkotórész A, B és C. Súly szerint a Rozac-nak legalább 8% A-t, legalább 4% B-t és legalább 2% C-t kell tartalmaznia. Az egyes vegyszerek fontonkénti egységára, valamint az, hogy az egyes vegyszerek 1 fontja mennyi aktív alkotórészt tartalmaz, a 17. táblázatban látható. Mindenképpen fel kell használni legalább 100 fontnyi 2. vegyszert. Fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek a megoldása megadja a mai adag Rozac előállításának a legolcsóbb módját!

17. TÁBLÁZAT

Vegyszer	**Költség (fontban)**	A	B	C
1	8	.03	.02	.01
2	10	.06	.04	.01
3	11	.10	.03	.04
4	14	.12	.09	.04

12. Egy befektetés *kockázati indexe* kiszámítható a befektetés megtérüléséből (ROI) úgy, hogy vesszük a befektetés értékének százalékos változását minden évben, és ezeket átlagoljuk. Tegyük fel, hogy Ön megpróbálja eldönteni, hogy pénzének hány százalékát fektesse be kincstárjegybe, aranyba és részvényekbe. A 18. táblázat mutatja az éves hozamokat (értékváltozást) ezekre a befektetésekre az 1968–1988 években.

Legyen egy portfólió kockázati indexe (az egyes befektetésekbe befektetni szándékozott pénzrésznek megfelelően) az egyes egyedi befektetések kockázati indexének súlyozott átlaga. Tegyük fel, hogy minden egyes befektetésnek a teljes befektetett összeg 20%-a és 50%-a között kell lennie. Ön azt szeretné, ha portfóliójának kockázati indexe 0.15

lenne. Az Ön célja, hogy maximalizálja portfóliójának várható hozamát. Fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek a megoldása maximalizálja az Ön portfóliójának várható hozamát, az adott feltételek mellett! Használja mindegyik befektetésnél az 1968–1988-as évek átlagos hozamát, mint az Ön becslését a várható megtérülésre.[13]

18. TÁBLÁZAT

Év	Részvény	Arany	Kincstárjegy
1968	11	11	5
1969	−9	8	7
1970	4	−14	7
1971	14	14	4
1972	19	44	4
1973	−15	66	7
1974	−27	64	8
1975	37	0	6
1976	24	−22	5
1977	−7	18	5
1978	7	31	7
1979	19	59	10
1980	33	99	11
1981	−5	−25	15
1982	22	4	11
1983	23	−11	9
1984	6	−15	10
1985	32	−12	8
1986	19	16	6
1987	5	22	5
1988	17	−2	6

B csoport

13. A Sunco tulajdonosa nem hiszi el, hogy az általunk felírt LP optimális megoldása maximalizálni fogja a napi profitot. Így okoskodik: „Nekünk napi 14 000 hordó finomító kapacitásunk van, de az önök optimális megoldása csak 13 500 hordónyit termelne. Ezért ez nem maximalizálhatja a profitot.” Hogyan válaszolnánk neki?

14. Az Oilco két terméket állít elő: normálbenzint és szuperbenzint. Mindkét termék .15 gramm ólmot tartalmaz literenként. A két termék hat alkotórészből tevődik össze: reformát, folyékony katalitikusan előállított benzin (FCG), isomerát (ISO), polymer (POL), MTBE (MTB) és bután (BUT). Mindegyik összetevőnek négy jellemzője van:

1. tulajdonság Oktánszám (RON)

2. tulajdonság RVP

3. tulajdonság ASTM illékonyság 70 °C-on

4. tulajdonság ASTM illékonyság 130 °C-on

A jellemzők és a naponta az egyes alkotórészekhez rendelkezésre álló mennyiség (literben) a 19. táblázatban láthatók. A végtermékekre vonatkozó előírások a 20. táblázatban láthatók.

A napi keresletet (ezer literben) mindkét termékből ki kell elégíteni, de annál többet is szabad termelni. A RON és ASTM előírások minimumokat jelentenek. A normálbenzin literje 29.49 centért adható el, a szuper 31.43 centért. Mielőtt bármelyik terméket el lehetne adni, literenként .15 gramm ólmot ki kell vonni belőlük. A literenkénti .1 gramm ólomtalanítás költsége 8.5 cent. Bármelyik típusú benzin legfeljebb 38% FCG-t tartalmazhat. Fogalmazza meg és oldja meg az LP-t, amelynek megoldása megadja az Oilcónak, hogy miként maximalizálja napi profitját![14]

19. TÁBLÁZAT

	Rendelkezésre álló mennyiség	RON	RVP	ASTM(70)	ASTM(130)
Reformát	15 572	98.9	7.66	−5	46
FCG	15 434	93.2	9.78	57	103
ISO	6709	86.1	29.52	107	100
POL	1190	97	14.51	7	73
MTB	748	117	13.45	98	100
BUT	Korlátlan	98	166.99	130	100

20. TÁBLÁZAT

	Kereslet	RON	RVP	ASTM(70)	ASTM(130)
Normál	9.8	90	21.18	10	50
Szuper	30	96	21.18	10	50

[13]Chandy (1987) alapján.

[14]Magoulas és Marinos-Kouris (1988) alapján.

3.9. Termelési modellek

Most rátérünk néhány egyszerű termelési eljárás LP modellként való megfogalmazására.[15] A legfontosabb lépés annak meghatározása, hogy egy későbbi állapot végtermékei hogyan viszonyulnak egy korábbi állapot végtermékeihez.

11. PÉLDA A Rylon Corporation Brute és Chanelle parfümöt gyárt. Mindkét típusú parfüm gyártásához a szükséges nyersanyagot fontonként 3 dollárért lehet megvásárolni. 1 font nyersanyag feldolgozása a laboratóriumban 1 óra munkát igényel. Minden font feldolgozott nyersanyag 3 deka Normál Brute parfümöt és 4 deka Normál Chanelle parfümöt szolgáltat. A Normál Brute eladási ára dekánként 7 dollár, a Normál Chanelle-é dekánként 6 dollár. A Rylon-nak ezenkívül lehetősége van arra is, hogy a Normál Brute és Normál Chanelle parfümöket további eljárás alá vetve előállítsa a Luxus Brute és a Luxus Chanelle parfümöket, melyeknek eladási ára sorrendben 18$/deka, illetve 14$/deka. Minden deka Normál Brute továbbfeldolgozása újabb 3 óra laboratóriumi munkát igényel, 4$ feldolgozási költséggel jár és 1 deka Luxus Brute parfümöt ad. Minden deka Normál Chanelle további feldolgozása újabb 2 óra laboratóriumi munkát igényel, 4$ feldolgozási költséggel jár és 1 deka Luxus Chanelle-t szolgáltat. A Rylon-nak minden évben 6000 óra laboratóriumi idő áll rendelkezésére és 4000 font a nyersanyagvásárlás felső határa. Fogalmazzunk meg egy LP-t, amelynek megoldása maximalizálja a Rylon profitját! Tételezzük fel, hogy a laboratóriumi órák költsége fix költség.

Megoldás A Rylon-nak el kell döntenie, hogy mennyi nyersanyagot vegyen, és az egyes parfümtípusokból mennyit állítson elő. Ezért a döntési változókat így definiáljuk:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \text{hány deka az évente eladott Normál Brute}\\
x_2 &= \text{hány deka az évente eladott Luxus Brute}\\
x_3 &= \text{hány deka az évente eladott Normál Chanelle}\\
x_4 &= \text{hány deka az évente eladott Luxus Chanelle}\\
x_5 &= \text{hány font nyersanyagot vásárolnak évente.}
\end{aligned}$$

A Rylon a következő kifejezést szeretné maximalizálni:

$$\begin{aligned}
\text{hozzájárulás a profithoz} &= \text{bevétel a parfümeladásból} - \text{feldolgozási költségek}\\
&\quad - \text{nyersanyag-vásárlási költségek}\\
&= 7x_1 + 18x_2 + 6x_3 + 14x_4 - (4x_2 + 4x_4) - 3x_5\\
&= 7x_1 + 14x_2 + 6x_3 + 10x_4 - 3x_5
\end{aligned}$$

A Rylon célfüggvénye

$$\max\ z = 7x_1 + 14x_2 + 6x_3 + 10x_4 - 3x_5 \tag{54}$$

A feltételek:

1. feltétel Évente legfeljebb 4000 font nyersanyag vásárolható.

2. feltétel Évente legfeljebb 6000 laboratóriumi óra használható fel.

[15] Az alfejezet Hartley (1971) alapján készült.

Az 1. feltételt így fejezhetjük ki:

$$x_5 \le 4000 \tag{55}$$

A 2. feltétel felírásához figyeljük meg, hogy

$$\begin{aligned}
&\text{az évente felhasznált összes laboratóriumi órák száma}\\
&\quad = \text{a nyersanyag feldolgozására évente felhasznált idő}\\
&\qquad + \text{a Luxus Brute-hoz felhasznált évi idő}\\
&\qquad + \text{a Luxus Chanelle-hez felhasznált évi idő}\\
&\quad = x_5 + 3x_2 + 2x_4
\end{aligned}$$

Ezáltal a 2. feltétel így alakul:

$$3x_2 + 2x_4 + x_5 \le 6000 \tag{56}$$

Ezután a modellhez hozzávesszük az $x_i \ge 0$ ($i = 1,2,3,4,5$) nemnegativitási feltételeket. Azt gondolhatnánk, hogy a Rylon-nak a következő LP-t kell megoldania:

$$\begin{aligned}
\max\ z = 7x_1 + 14x_2 + 6x_3 + 10x_4 - 3x_5&\\
\text{f.h.} \qquad x_5 &\le 4000\\
3x_2 + 2x_4 + x_5 &\le 6000\\
x_i \ge 0 \quad (i = 1,2,3,4,5)&
\end{aligned}$$

Ez a megfogalmazás azonban hibás. Figyeljük meg, hogy az x_1 és x_3 változók egyik feltételben sem szerepelnek. Ez azt jelenti, hogy minden olyan pont, amelyre $x_2 = x_4 = x_5 = 0$, valamint x_1 és x_3 nagyon nagy, a lehetséges megoldások halmazában van. Ezek a pontok tehát tetszőlegesen nagy profitot szolgáltatnának. Így ez az LP nemkorlátos. Azt a hibát követtük el, hogy ez a megfogalmazás nem mutatja ki azt, hogy a megvásárolt nyersanyagmennyiség meghatározza a Brute-nak és a Chanelle-nek az eladható vagy továbbfeldolgozható mennyiségét. Pontosabban fogalmazva, a 8. ábrából (és abból a tényből, hogy 1 deka tovább-feldolgozott Brute pontosan 1 deka Luxus Brute-ot ad) az következik, hogy

$$\begin{aligned}
\begin{matrix}\text{eladott Normál Brute dekában}\\ +\,\text{eladott Luxus Brute dekában}\end{matrix} &= \left(\frac{\text{megtermelt Brute dekában}}{\text{nyersanyag fontja}}\right)\left(\begin{matrix}\text{ahány fontot}\\ \text{vásároltak}\end{matrix}\right)\\
&= 3x_5
\end{aligned}$$

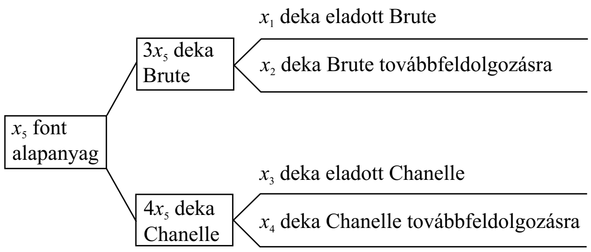
Ez az összefüggés a következő feltételben tükröződik:

$$x_1 + x_2 = 3x_5 \qquad \text{vagy} \qquad x_1 + x_2 - 3x_5 = 0 \tag{57}$$

Hasonlóképpen, amint az a 8. ábrából nyilvánvaló

$$\text{az eladott Normál Chanelle dekában} + \text{az eladott Luxus Chanelle dekában} = 4x_5$$

8. ÁBRA
A Brute–Chanelle probléma termelési folyamata



Ezáltal a megfelelő feltétel

$$x_3 + x_4 = 4x_5 \qquad \text{vagy} \qquad x_3 + x_4 - 4x_5 = 0 \tag{58}$$

Az (57) és (58) feltételek a változók közötti kapcsolatokat mutatják. Ezekről sokan gyakran megfeledkeznek, és kihagyják az ilyen típusú feltételeket. Mint ahogy ez a probléma is mutatja, ha csak egyetlen feltételt kihagyunk, az már elfogadhatatlan megoldásra vezet (mint például egy nemkorlátos LP). Ha (53)–(58)-hoz hozzávesszük a szokásos nemnegativitási feltételeket, akkor a *helyes* LP megfogalmazást kapjuk:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max & z = 7x_1 & + & 14x_2 & + & 6x_3 & + & 10x_4 & - & 3x_5 & & \\
\text{f.h.} & & & & & & & & & x_5 & \le & 4000 \\
& & & 3x_2 & & & + & 2x_4 & + & x_5 & \le & 6000 \\
& x_1 & + & x_2 & & & & & - & 3x_5 & = & 0 \\
& & & & & x_3 & + & x_4 & - & 4x_5 & = & 0 \\
& & & & & & & & & & & x_i \ge 0 \; (i = 1,2,3,4,5)
\end{array}$$

Az optimális megoldás $z = 172\ 666.667$, $x_1 = 11\ 333.333$ deka, $x_2 = 666.667$ deka, $x_3 = 16\ 000$ deka, $x_4 = 0$, és $x_5 = 4000$ font. Vagyis Rylon vásárolja meg az egész rendelkezésre álló 4000 font nyersanyagot és állítson elő a Normál Brute-ból 11 333.333 dekát, a Luxus Brute-ból 666.667 dekát és a Normál Chanelle-ből 16 000 dekát. Ez a termelési terv 172 666.667 dollárral járul hozzá a Rylon profitjához. Ebben a problémában a dekák törtrésze ésszerűnek látszik, ezért az oszthatósági feltevés fennáll.

A Rylon probléma tárgyalását azzal zárjuk, hogy még egy, sokak által elkövetett hibára hívjuk fel a figyelmet. Néhányan úgy okoskodnak, hogy

$$1 \text{ font nyersanyag} = 3 \text{ deka Brute} + 4 \text{ deka Chanelle}$$

Mivel $x_1 + x_2 =$ az összes előállított Brute mennyiségével dekában, és $x_3 + x_4 =$ az összes előállított Chanelle mennyiségével dekában, a rosszul okoskodók arra a következtetésre jutnak, hogy

$$x_5 = 3(x_1 + x_2) + 4(x_3 + x_4) \tag{59}$$

Ennek az egyenlőségnek egy számítógépes program számára van értelme: bizonyos értelemben az x_5 változó az (59) jobb oldalával helyettesíthető. Mindazonáltal, mint egy LP feltételnek, (59)-nek nincs értelme. Hogy ezt beláthassuk, vegyük észre, hogy az egyenlőség bal oldala „hány font nyersanyag”, és a jobb oldalon a $3x_1$ tagban szereplő mértékegység

$$\left(\frac{\text{a Brute dekái}}{\text{a nyersanyag fontjai}}\right)(\text{a Brute dekái})$$

Mivel tehát az egyenlőség két oldalának nem ugyanaz a mértékegysége, (59) nem lehet helyes. *Ha egy feltétellel szemben kétségeink vannak, akkor a feltételt úgy kell felírni, hogy biztosak legyünk abban, hogy minden tag ugyanabban a mértékegységben van kifejezve.* Így elkerülhetjük a megfogalmazási hibákat. (Természetesen, még akkor is lehet rossz a feltétel, ha a mértékegységek a feltétel mindkét oldalán azonosak.)

Feladatok

A csoport

1. A Sunco Oil három különböző eljárással többféle benzint állíthat elő. Mindegyik eljárásban szerepel az, hogy olajokat keverünk a vállalat katalitikus krakkolójában. Az 1-es eljárás egyórás futtatása 5 dollárba kerül és 2 hordó 1. nyersolaj valamint 3 hordó 2. nyersolaj kell hozzá. Ennek az egyórás futtatásnak az eredménye 2 hordó 1. benzin és 1 hordó 2. benzin. A 2-es eljárás egyórás futtatása 4 dollárba kerül, és 1 hordó 1. nyersolaj és 3 hordó 2. nyersolaj szükséges hozzá. Ennek eredménye 3 hordó 2. benzin. A 3-as eljárás egyórás futtatása 1 dollárba kerül, kell hozzá 2 hordó 2. nyersolaj és 3 hordó 2. benzin. Ennek hozatala 2 hordó 3. benzin. Minden héten 200 hordó 1. nyersolaj vásárolható, hordónként 2 dollárért és 300 hordó 2. nyersolaj, hordónként 3 dollárért. Minden előállított benzin eladható a következő hordónkénti árakon: 1. benzin 9$, 2. benzin 10$, 3. benzin 24$. Fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek megoldása maximalizálni fogja a bevétel és költségek különbségét! Tételezze fel, hogy a katalitikus krakkolónak csak heti 100 órája áll rendelkezésre!

2. A Furnco asztalokat és székeket gyárt. Egy asztalhoz 40 egységnyi fa kell, egy székhez 30 egység. A fa beszerzési ára 1$ egységenként. 40 000 egységnyi fát lehet vásárolni. Egy kikészítetlen asztal vagy kikészítetlen szék gyártása 2 órányi szakképzett munkát igényel. Egy kikészítetlen asztal befejezéséhez újabb három órányi szakképzett munka kell, míg egy kikészítetlen szék befejezéséhez újabb két óra szakmunka szükséges. Rendelkezésre áll 6000 szakmunkásóra (és ez már ki is van fizetve). Minden legyártott bútordarab eladható a következő egységárakon: 70$-ért egy kikészítetlen asztal, 140$-ért egy kész asztal, 60$-ért egy kikészítetlen szék, 110$-ért egy kikészített szék. Fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek megoldása maximalizálja az asztalok és székek gyártásából származó profitot!

3. Tegyük fel, hogy a 11. példában 1 font nyersanyagból vagy 3 deka Brute *vagy* 4 deka Chanelle állítható elő. Hogy változtatná ez meg a feladat felírását?

4. A Chemco 3 terméket gyárt: 1, 2 és 3. Minden font nyersanyag 25 dollárba kerül. A nyersanyag 1 fontjából feldolgozás után 3 deka 1. termék és 1 deka 2. termék lesz. Egy font nyersanyag feldolgozása egy dollárba kerül és 2 munkaórát vesz igénybe. Az 1-es termék egy-egy dekája háromféleképpen használható fel:

Eladható 10$-ért.

Tovább feldolgozható 1 deka 2-es termékké, ez 1$-ba kerül és két munkaórát igényel.

Tovább feldolgozható 1 deka 3-as termékké. Ez 2$-ba kerül és 3 munkaórát igényel.

A 2-es termék minden dekája kétféleképpen használható fel:

Eladható 20$-ért.

Feldolgozható 1 deka 3-as termékké. Ez 6$-ba kerül és munkaigénye 1 óra.

21. TÁBLÁZAT

Termék	Deka
1	5000
2	5000
3	3000

A 3-as termék egy dekája 30$-ért adható el. Legfeljebb annyi deka adható el az egyes termékekből, amennyi a 21. táblázatban látható. Legfeljebb 2500 munkaóra áll rendelkezésre. Határozza meg, hogyan maximalizálhatja a Chemco a profitját!

B csoport

5. Egy vállalat az A, B és C termékeket gyártja, és ezeket korlátlan mennyiségben el tudja adni a következő egységárakon: A: 10$; B: 56$; C: 100$. Egységnyi A előállításához 1 munkaóra szükséges; egységnyi B-hez 2 munkaóra plusz 2 egység A kell; végül egységnyi C-hez 3 munkaóra, valamint egy egységnyi B szükséges. A B termék előállításához felhasznált A egységek nem adhatók el, hasonlóan a C előállításához felhasznált B sem adható el. Rendelkezésre áll 40 munkaóra. Fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek megoldása maximalizálja a vállalat árbevételét!

6. A Daisy Drugs kétféle drogériai terméket állít elő: 1 és 2. A termékek kétféle vegyszer keverésével állíthatók elő: 1 és 2. Súly szerint számolva az 1. termékben legalább 65% 1-es vegyszernek kell lennie, és a 2-es termék legalább 55%-ának 1-es vegyszernek kell lennie. Az 1-es termék dekánként 6 dollárért, a 2-es termék dekánként 4 dollárért adható el. A végtermékekhez szükséges vegyszerek: 1 és 2, kétféle lehetséges eljárás egyikével állíthatók elő. Az 1-es eljárás egyórai futtatásához 3 deka nyersanyag és 2 órányi szakképzett munka szükséges, eredménye pedig 3 deka mindegyik vegyszerből. A 2-es eljárás egyórás alkalmazásához 2 deka nyersanyag és 3 órányi szakképzett munka szükséges, eredménye 3 deka 1-es vegyszer és 1 deka 2-es vegyszer. Rendelkezésre áll 120 óra szakmunka és 100 deka nyersanyag. Fogalmazzon meg egy LP-t, ami a Daisy eladási bevételének maximalizálására használható!

7. Lizzie Tejtermléküzeme krémsajtot és túrót állít elő. E két termék előállításához tejet és tejszínt kell összekeverni. A krémsajt és a túró előállításához magas zsírtartalmú és alacsony zsírtartalmú tej egyaránt felhasználható. A magas zsírtartalmú tej 60%-a zsír, az alacsony zsírtartalmú tej 30%-a zsír. A krémsajt előállításához felhasznált tejnek átlagosan 50% zsírtartalmúnak kell lennie, és a túróhoz legalább 35% zsírtartalom szükséges. Súly szerint a krémsajtot szolgáltató anyagok legalább 40%-ának és a túrót előállító anyagok legalább 20%-ának tejszínnek kell lennie. Mind a túró, mind pedig a krémsajt úgy állítható elő, hogy a tejet és tejszínt a sajtgépen kell átfuttatni. 1 fontnyi alkotórésznek 1 font krémsajttá alakítása 40 centbe kerül. 1 font túró előállítása is 40 centbe kerül, de az 1 font alkotórészből csak 0.9 font túró lesz és 0.1 font hulladék.[16]

A tejszín úgy állítható elő, hogy magas zsírtartalmú és alacsony zsírtartalmú tejet párologtatni kell. Minden fontnyi párologtatott magas zsírtartalmú tej 0.6 font tejszínt ad. A költség 40 cent fontonként (a tejből). Ugyancsak 40 centbe kerül 1 font alacsony zsírtartalmú tej párologtatása. 1 font párologtatott alacsony zsírtartalmú tejből 0.3 font tejszín lesz. Naponta legfeljebb 3000 fontnyi anyag futtatható át a sajtgépen. Naponta legalább 1000 font túrót és 1000 font krémsajtot kell előállítani. Naponta legfeljebb 1500 font krémsajt és 2000 font túró adható el. A túró eladási ára 1.20$, a krémsajté 1.50$ fontonként. A magas zsírtartalmú tej beszerzési ára 80 cent/font, az alacsony zsírtartalmú tejé 40 cent/font. A párologtató berendezés naponta legfeljebb 2000 font tejet tud feldolgozni. Fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek megoldása maximalizálja Lizzie napi profitját!

8. Egy vállalat hat terméket gyárt a következő módon. Minden egységnyi nyersanyagból négy egységnyi 1. termék, két egységnyi 2. termék és egy egységnyi 3. termék lesz. Legfeljebb 1200 egység 1. termék adható el és legfeljebb 300 egység 2. termék adható el. Minden egység előállított 1. termék vagy eladható, vagy további eljárás alá vehető. Minden egységnyi továbbgyártott 1. termék egy egység 4. terméket szolgáltat. A kereslet a 3-as és 4-es termék iránt korlátlan. Minden egység 2. termék eladható, vagy további eljárás alá vonható. Minden egység továbbgyártott 2. termék 0.8 egység 5-ös terméket és 0.3 egység 6-os terméket szolgáltat. Legfeljebb 1000 egység 5. termék és legfeljebb 800 egység 6. termék adható el. Legfeljebb 3000 egység nyersanyagot lehet vásárolni, egységenként 6 dollárért. Az 5-ös és 6-os termékből az eladatlan maradékot meg kell semmisíteni. Minden megmaradt egység 5-ös termék megsemmisítése 4 dollárba kerül, és minden megmaradt egység 6-os termék megsemmisítése 3 dollárba kerül. A nyersanyag-vásárlási költséget elhagyva, az egységenkénti eladási ár és az egyes termékek termelési költségei a 22. táblázatban láthatók. Fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek megoldása profit-maximalizáló termelési tervet ad!

22. TÁBLÁZAT

	Eladási ár ($)	**Termelési költség ($)**
1. termék	7	4
2. termék	6	4
3. termék	4	2
4. termék	3	1
5. termék	20	5
6. termék	35	5

9. A Chemco minden héten korlátlan mennyiségű nyersanyagot vásárolhat fontonként 6 dollárért. Minden font megvásárolt nyersanyag vagy az 1. input vagy a 2. input előállítására használható fel. Minden egyes font nyersanyag 2 deka 1. inputot ad, amelyhez 2 órányi feldolgozási időre van szükség, és 2$ feldolgozási költsége van. Minden egyes font nyersanyag 3 deka 2. inputot ad, amelyhez 2 órányi feldolgozási időre van szükség, és 4$ feldolgozási költsége van.

Kétféle termelési eljárás áll rendelkezésre. Az 1-es eljárás 2 óra hosszat tart, és 2 deka 1. input és 1 deka 2. input kell hozzá. Az 1-es eljárás költsége 1$. Minden alkalommal, amikor az 1-es eljárást futtatják, 1 deka A termék és 1 deka szennyvíz keletkezik. A 2-es eljárás 3 óra hosszat tart, és 2 deka 2. input és 1 deka 1. input kell hozzá. A 2-es eljárás költsége 8$.

A Chemco úgy tud megszabadulni a szennyvíztől, hogy vagy beleengedi a Charles folyóba, vagy feldolgozza C és D termékekké. Kormányrendelet szabályozza, hogy a Chemco hetenként legfeljebb 1000 deka szennyvizet engedhet bele a folyóba. Egy deka C termék előállítási költsége 4$, és 11$-ért adható el. Egy deka C termék előállításához 1 óra feldolgozási idő, 2 deka 1. input és .8 deka szennyvíz szükséges. Egy deka D termék előállítása 5$-ba kerül és 7$-ért adható el. Egy deka D termék előállításához 1 óra feldolgozási idő, 2 deka 2. input és 1.2 deka szennyvíz kell.

Hetenként legfeljebb 5000 deka A termék és 5000 deka B termék adható el, de a C és D termékek iránti kereslet korlátlan. Az A termék eladási ára dekánként 18$, a B termék eladási ára 24$ dekánként. Minden héten 6000 óra feldolgozási idő áll rendelkezésre. Fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek megoldása megadja a Chemcónak, hogyan maximalizálja a heti profitját!

10. A LIMECO-nak van egy mészkészítő üzeme, és hatféle minőségű meszet árul (osztályozás 1-től 6-ig). A fontonkénti eladási árak a 23. táblázatban láthatók.

23. TÁBLÁZAT

Osztály	1	2	3	4	5	6
Ár ($)	12	14	10	18	20	25

A meszet mészégető kemencékben gyártják. Ha egy mészégető kemence egy 8 órás műszakot működik, akkor a különböző osztályú előállított mész mennyisége (fontban) a

[16] Sullivan és Secrest (1985) alapján.

24. táblázatban látható. Egy mészégető kemence 8 órás működtetése 150 dollárba kerül. A gyár véleménye szerint naponta (fontban) legfeljebb a 25. táblázatban felsorolt mennyiségek adhatók el.

24. TÁBLÁZAT

Osztály	1	2	3	4	5	6
Előállított mennyiség	2	3	1	1.5	2	3

25. TÁBLÁZAT

Osztály	1	2	3	4	5	6
Maximális kereslet	20	30	40	35	25	50

A mészégető kemencékből kikerült mész tovább is feldolgozható a 26. táblázatban bemutatott öt eljárás bármelyikével. Például 1$ fontonkénti költséggel egy font 4-es osztályú mészből 0.5 font 5-ös és 0.5 font 6-os osztályú mész állítható elő.
Minden nap végén meg kell szabadulni a megmaradt mészmennyiségtől a 27. táblázatban megadott fontonkénti megsemmisítési költségért.

26. TÁBLÁZAT

Input (1 font)	**Output**	**Költség ($) (input fontonként)**
1-es osztályú	0.3 font 3-as oszt. 0.2 font 4-es oszt. 0.3 font 5-ös oszt. 0.2 font 6-os oszt.	2
2-es osztályú	1.0 font 6-os oszt.	1
3-as osztályú	0.8 font 4-es oszt.	1
4-es osztályú	0.5 font 5-ös oszt. 0.5 font 6-os oszt.	1
5-ös osztályú	0.9 font 6-os oszt.	2

27. TÁBLÁZAT

Osztály	1	2	3	4	5	6
Megsemmisítési költség fontonként ($)	3	2	3	2	4	2

Fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek megoldása megmondja a LIMECO-nak, hogyan maximalizálja a profitját!

11. A Chemco három terméket gyárt: A, B és C. Legfeljebb 30 font adható el az egyes termékekből a következő fontonkénti árakon: A termék 10$-ért; B termék 12$-ért; C termék 20$-ért. A Chemco a nyersanyagot fontonként 5 dollárért vásárolja. Egy-egy font nyersanyagból *vagy* 1 font A, *vagy* 1 font B termék állítható elő. 3 dollár fontonként a költsége annak az eljárásnak, amely 1 font A terméket 0.6, font B terméket és 0.4 font C terméket állít elő. 2 dollár költséggel 1 font B termékből 0.8 font C termék nyerhető. Fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek megoldása megmondja a Chemcónak, hogyan maximalizálja a profitját!

12. A Chemco 3 vegyszert gyárt: B, C és D. Először az A vegyszerből vásárolnak 100 literenként 6 dollárért. További 3 dollár költségért és 3 órás szakmunkával 100 liter A-ból 40 liter C és 60 liter B állítható elő. A C vegyszer akár eladható, akár tovább feldolgozható. 100 liter C terméknek 60 liter D-vé és 40 liter B-vé alakítása egy dollárba kerül és egyórai szakmunkát igényel. Az egyes vegyszerekre a 100 literenkénti eladási ár és az eladható mennyiség maximuma (100 literben) a 28. táblázatban látható.

28. TÁBLÁZAT

	B	C	D
Ár ($)	12	16	26
Kereslet maximuma	30	60	40

Legfeljebb 200 munkaóra áll rendelkezésre. Fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek megoldása megadja a Chemcónak, hogyan maximalizálja a profitját!

3.10. Lineáris programozás alkalmazása többperiódusos döntési problémák megoldására: egy készletezési modell

Egészen mostanáig az általunk tárgyalt lineáris programozási feladatok mind *statikus*, vagy *egyperiódusú modellek* voltak. Egy statikus modellben azt feltételezzük, hogy a döntések mindegyike egy adott időpontban történik. A fejezet hátralévő részében a példák a lineáris programozásnak az optimális döntések meghatározására való felhasználását mutatják be **többperiódusos** vagy **dinamikus modellekben**. Dinamikus modellekkel akkor állunk szemben, amikor a döntéshozó egynél több időpontban hoz döntéseket. Egy dinamikus modellben a jelen periódusban hozott döntések befolyásolják a jövőben hozott döntéseket. Tekintsünk például egy vállalatot, amelyiknek azt kell eldöntenie, hogy havonta hány egység terméket állítson elő. Ha a vállalat egy adott hónapban nagyszámú egységet állít elő, akkor ez csökkenti a következő hónapokban előállítandó termékegységek számát. A 3.10–3.12. alfejezetekben tárgyalt példák azt illusztrálják, hogy korábbi döntések hogyan befolyásolják a későbbi döntéseket. Amikor majd a 18. és 19. fejezetekben a dinamikus programozást tanulmányozzuk, újra vissza fogunk térni a dinamikus döntési modellekre.

12. PÉLDA

A Sailcónak el kell döntenie, hogy hány vitorláshajót gyártson a következő négy negyedévben. A következő négy negyedév kereslete a következő: 40 vitorláshajó az első negyedévben, 60 vitorláshajó a második negyedévben, 75 vitorláshajó a harmadik negyedévben, 25 vitorláshajó a negyedik negyedévben. A Sailcónak a keresletet mindig időben kell kielégítenie. Az első negyedév elején a Sailco 10 vitorláshajóval rendelkezik. Minden egyes negyedév elején a Sailcónak el kell döntenie, hogy abban a negyedévben hány vitorláshajót gyártson. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy egy bizonyos negyedévben gyártott vitorláshajók már a szóban forgó negyedévi igények kielégítésére is szolgálhatnak. Normál munkaidőben a Sailco egy negyedév alatt 40 vitorláshajót tud gyártani, egy-egy hajó előállításának teljes költsége 400$. Ha a Sailco az alkalmazottakat túlórában dolgoztatja, akkor még készülhetnek újabb vitorláshajók is, de a túlóradíjjal együtt egy-egy vitorláshajó teljes előállítási költsége 450$.

Minden negyedév végén (amikor a gyártás már megtörtént és a folyó negyedév kereslete ki lett elégítve), vitorláshajónként 20$ tárolási költség merül fel. (A tárolási költségek főbb összetevőiről a 14. fejezetben lesz szó.) Alkalmazzunk lineáris programozást egy olyan termelési terv meghatározására, amely minimalizálja a gyártási és készletezési költségeket a következő négy negyedévre!

Megoldás A Sailcónak minden negyedévre meg kell határoznia a normál munkaidőben, valamint a túlóraidőben előállított vitorláshajók számát. Így a következő döntési változókat definiáljuk:

$x_t =$ a normál munkaidőben (hajónként 400$-ért) gyártott vitorláshajók száma a t-edik negyedévben ($t = 1,2,3,4$)

$y_t =$ a túlóraidőben (hajónként 450$-ért) gyártott vitorláshajók száma a t-edik negyedévben ($t = 1,2,3,4$)

Kézenfekvő a készletekre (a meglévő vitorláshajók száma) vonatkozó döntési változókat egy-egy negyedév végére definiálni:

$i_t =$ a meglévő vitorláshajók száma a t-edik negyedévben ($t = 1,2,3,4$)

A Sailco összes költsége a következőképpen határozható meg:

$$\begin{aligned}\text{összes költség} &= \text{a normál munkaidőben előállított hajók költsége}\\&\quad + \text{túlmunkaidőben előállított hajók költsége} + \text{tárolási költség}\\&= 400(x_1+x_2+x_3+x_4)+450(y_1+y_2+y_3+y_4)\\&\quad +20(i_1+i_2+i_3+i_4)\end{aligned}$$

Így a Sailco célfüggvénye:

$$\begin{aligned}\min z = {}& 400x_1+400x_2+400x_3+400x_4+450y_1+450y_2\\&+450y_3+450y_4+20i_1+20i_2+20i_3+20i_4\end{aligned} \tag{60}$$

Mielőtt meghatározzuk a Sailco probléma feltételeit, két megjegyzést teszünk, amelyek segítségünkre lesznek többperiódusos termelési tervek modelljeinek megfogalmazásában.

A t-edik negyedévre

$$\begin{aligned}\text{a } t\text{-edik negyedév végén fennálló készlet} &= \text{a } (t-1)\text{-edik negyedév végi készlet}\\&\quad + \text{a } t\text{-edik negyedévi termelés}\\&\quad - \text{a } t\text{-edik negyedévi kereslet}\end{aligned}$$

Ez az összefüggés kulcsszerepet játszik majdnem minden többperiódusos termelési terv megfogalmazásában. Ha d_t-nek nevezzük a t-edik periódus keresletét (itt $d_1 = 40$, $d_2 = 60$, $d_3 = 75$, és $d_4 = 25$), akkor megfigyelésünk a következő tömör formában fejezhető ki:

$$i_t = i_{t-1} + (x_t + y_t) - d_t \quad (t = 1,2,3,4) \tag{61}$$

(61)-ben $i_0 =$ készlet a nulladik negyedév végén = készlet az első negyedév elején = 10. Például, ha a második negyedév végén 20 vitorláshajónk volt ($i_2 = 20$), és 65 vitorláshajót gyártottunk a 3. negyedévben (ez azt jelenti, hogy $x_3 + y_3 = 65$), akkor mi lesz a 3. negyedév végi készletünk? Egyszerűen nem más, mint a 2. negyedév végén meglévő vitorláshajók száma, plusz a 3. negyedévben gyártott hajók száma, mínusz a 3. negyedév kereslete, azaz 75. Ebben az esetben $i_3 = 20 + 65 - 75 = 10$, ami megegyezik (61)-gyel. A (61) egyenlőség olyan döntési változók közötti összefüggést fejez ki, amelyek különböző időperiódusokhoz tartoznak. Egy többperiódusos LP modell megfogalmazásakor általában a legnehezebb lépés megtalálni azt a relációt (mint itt a (61)), amelyik a különböző periódusbeli döntési változók közötti összefüggést írja le.

Azt is megjegyezzük, hogy a t-edik negyedév kereslete akkor és csak akkor lesz kielégítve, ha $i_t \geq 0$. Hogy ezt megértsük, figyeljük meg, hogy $i_{t-1} + (x_t + y_t)$ áll rendelkezésünkre a t-edik periódus keresletének kielégítésére, így tehát a t-edik periódus kereslete akkor és csak akkor elégíthető ki, ha

$$i_{t-1} + (x_t + y_t) \geq d_t \qquad \text{vagy} \qquad i_t = i_{t-1} + (x_t + y_t) - d_t \geq 0$$

Ez azt jelenti, hogy az $i_t \geq 0$ ($t = 1,2,3,4$) nemnegativitási feltételek biztosítják, hogy az egyes negyedévek keresletei megfelelő időben ki lesznek elégítve.

Most már meghatározhatjuk a Sailco probléma feltételeit. Először is a következő négy feltételt használjuk arra, hogy normál időben a termelés nem lehet több, mint 40: $x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 40$. Ezután a (61) alakú feltételeket vesszük sorra minden periódusra ($t = 1,2,3,4$). Így a következő négy feltételt kapjuk:

$$\begin{aligned}i_1 &= 10 + x_1 + y_1 - 40 &\qquad i_2 &= i_1 + x_2 + y_2 - 60\\ i_3 &= i_2 + x_3 + y_3 - 75 &\qquad i_4 &= i_3 + x_4 + y_4 - 25\end{aligned}$$

A modellhez hozzávéve az $x_t \geq 0$ nemnegativitási feltételeket (hogy kizárhassuk a negatív termelést), és az $i_t \geq 0$ feltételeket (minden periódusban biztosítva a kereslet kielégítését), a következő alakú feladathoz jutunk:

$$\begin{aligned}
\min z = {} & 400x_1 + 400x_2 + 400x_3 + 400x_4 + 450y_1 + 450y_2 + 450y_3 + 450y_4 \\
& + 20i_1 + 20i_2 + 20i_3 + 20i_4 \\
\text{f.h.} \quad & x_1 \leq 40, \quad x_2 \leq 40, \quad x_3 \leq 40, \quad x_4 \leq 40 \\
& i_1 = 10 + x_1 + y_1 - 40, \quad i_2 = i_1 + x_2 + y_2 - 60 \\
& i_3 = i_2 + x_3 + y_3 - 75, \quad i_4 = i_3 + x_4 + y_4 - 25 \\
& i_t \geq 0, \quad y_t \geq 0, \quad \text{és} \quad x_t \geq 0 \quad (t = 1, 2, 3, 4)
\end{aligned}$$

Ennek a problémának az optimális megoldása $z = 78\,450$; $x_1 = x_2 = x_3 = 40$; $x_4 = 25$; $y_1 = 0$; $y_2 = 10$; $y_3 = 35$; $y_4 = 0$; $i_1 = 10$; $i_2 = i_3 = i_4 = 0$. Így a Sailco problémában a minimális összköltség 78 450\$. Ez a költség akkor áll elő, ha Sailco 40 vitorláshajót gyárt normál munkaidőben az 1., 2., 3. negyedévekben, és 25 vitorláshajót gyárt normál munkaidőben a negyedik negyedévben. Ezenkívül a Sailcónak még 10 vitorláshajót kell gyártania túlóraidőben a 2. negyedévben és 35 vitorláshajót túlórában a 3. negyedévben. Készletezési költségek csak az első negyedévben merülnek fel.

Néhány olvasó esetleg aggódik amiatt, hogy ez a megfogalmazás lehetővé teszi a Sailco számára, hogy túlórában termeljen a t. negyedév alatt még akkor is, ha a t. periódusban a normál munkaidős termelés kevesebb mint 40. Valóban, a mi megfogalmazásunk nem tesz lehetetlenné egy ilyen munkatervet. Mindazonáltal egy olyan termelési terv sem lehet optimális, amelyikben $y_t > 0$ és $x_t < 40$. Tekintsük például a következő két termelési tervet:

$$\begin{aligned}
\text{A termelési terv} = {} & x_1 = x_2 = x_3 = 40; \quad x_4 = 25; \\
& y_2 = 10; \quad y_3 = 25; \quad y_4 = 0 \\
\text{B termelési terv} = {} & x_1 = 40; \quad x_2 = 30; \quad x_3 = 30; \quad x_4 = 25; \\
& y_2 = 20; \quad y_3 = 35; \quad y_4 = 0
\end{aligned}$$

Az A és B munkatervekben a termelési szint megegyezik az egyes periódusokban. Ez azt jelenti, hogy a két tervben azonos készletezési költségek merülnek fel. Mindkét munkaterv megvalósítható, de a B munkaterv nagyobb túlóraköltséget tartalmaz, mint az A munkaterv. Így a költségek minimalizálásakor a B munkatervet (vagy egyáltalán, egy olyan munkatervet, amelyben $y_t > 0$ és $x_t < 40$) soha nem választanánk.

A valóságban a 12. példának megfelelő LP-t a **mozgó tervezés** alkalmazásával hajtanánk végre. Ez a következőképpen működik. Miután megoldottuk a 12. példát, a Sailco csak az első negyedévre alkalmazza a termelési stratégiát (40 hajó gyártása normál munkaidőben). Ezután a vállalat megfigyeli az első negyedév keresletét. Tegyük fel, hogy a valódi kereslet 35 hajó. Ekkor a 2. negyedév $10 + 40 - 35 = 15$ hajóból álló készlettel indul. Most adunk egy előrejelzést az 5. negyedév keresletére (tegyük fel, hogy az előrejelzés 36). Ezután következik a 2. negyedévi termelés meghatározása úgy, hogy megoldunk egy LP-t, amelyben a 2. negyedév játssza az első negyedév szerepét, az 5. negyedév lesz az utolsó negyedév, az induló készlet pedig 15 hajó. Ekkor a 2. negyedév termelését a következő LP megoldása mutatná meg:

$$\begin{aligned}
\min z = 400(x_2+x_3+x_4+x_5) + 450(y_2+y_3+y_4+y_5) + 20(i_2+i_3+i_4+i_5)\\
\text{f.h.} \quad x_2 \le 40, \quad x_3 \le 40, \quad x_4 \le 40, \quad x_5 \le 40\\
i_2 = 15 + x_2 + y_2 - 60, \quad i_3 = i_2 + x_3 + y_3 - 75\\
i_4 = i_3 + x_4 + y_4 - 25, \quad i_5 = i_4 + x_5 + y_5 - 36\\
i_t \ge 0, \quad y_t \ge 0, \quad \text{és} \quad x_t \ge 0 \quad (t = 2,3,4,5)
\end{aligned}$$

Itt $x_5 =$ az 5. negyedév normál munkaidőbeli termelése, $y_5 =$ az 5. negyedév túlórás termelése és $i_5 =$ az 5. negyedév zárókészlete. Ennek az LP-nek az optimális megoldásában szereplő x_2 és y_2 fogja meghatározni a 2. negyedév termelését. Így minden negyedévre megoldunk egy LP-t, amely meghatározza a folyó negyedév termelését (négy negyedévből álló mozgó tervezéssel). Ezután megfigyeljük a jelenlegi keresletet, előrejelezzük e keresletet a következő négy negyedévre, és az eljárás ismétli önmagát. Ez a „mozgó tervezési" technika az a módszer, amelyet a legtöbb dinamikus vagy többperiódusos LP modellnél a valós helyzetekben alkalmazni szoktak.

A Sailco probléma általunk adott megfogalmazásának még egyéb korlátai is vannak.

1. Lehet, hogy a termelési költség a megtermelt mennyiségnek nem lineáris függvénye. Ez nem felelne meg az arányossági feltevésnek. A 8. és a 18. fejezetben fogjuk tárgyalni az ilyen típusú problémákat.

2. A jövőbeli keresletet esetleg nem tudjuk biztosan. Ebben az esetben a bizonyossági feltevés nem teljesül. A 19. fejezetben elmagyarázzuk, hogyan lehet a jelenlegi modellt úgy kiterjeszteni, hogy bizonytalan keresletekkel is foglalkozhassunk.

3. Előírtuk, hogy Sailco minden keresletet azonnal elégítsen ki. Gyakran az a helyzet, hogy a vállalatok későbbi periódusokban ki tudják elégíteni a keresletet, de büntető költséget kell fizetniük a nem időben kielégített keresletek után. Például, ha a kereslet időben nincs kielégítve, a fogyasztónak okozott kellemetlenség eredményeként elveszhetnek a jövőbeli bevételek. Ha a keresletet későbbi periódusban is ki lehet elégíteni, akkor azt mondjuk, hogy a keresletek **késleltethetők**. A mi jelenlegi LP fogalmazásunk módosítható úgy, hogy tartalmazzon késleltethetőséget (lásd a 4.10. alfejezet 1. feladatát).

4. Nem voltunk tekintettel arra a tényre, hogy a megtermelt mennyiség negyedévről negyedévre való változtatása esetleg extra költségekkel járhat (**termeléskiegyenlítő költségek**). Például, ha egyik negyedévről a másikra nagyon megnöveljük a termelést, ez valószínűleg azzal járna, hogy új munkásokat kellene nagy költséggel betanítani. Másrészt, ha a termelés egyik negyedévről a következőre nagyon lecsökken, akkor extra költségek származhatnak a munkások elbocsátásából. A 4.10. alfejezetben a jelenlegi modellünket majd úgy módosítjuk, hogy figyelembe vesszük a kiegyenlítő költségeket.

5. Ha az utolsó negyedév végén megmarad vitorláshajó, ezekhez nulla értéket rendeltünk hozzá. Ez nyilvánvalóan irreális. Egy véges horizontú készletezési modellben az utolsó periódusban megmaradt készlethez egy **maradvány értéket** kell hozzárendelni, ami jelzi az utolsó periódus készletének értékét. Például, ha a Sailco úgy érzi, hogy a 4. negyedév végén megmaradt vitorláshajók mindegyike 400$-t ér, akkor egy $-400i_4$ tagot kell a célfüggvényhez hozzáadni ($-400i_4$ méri, hogy mennyit ér a 4. negyedévi készlet).

Feladatok

A csoport

1. Egy vevő igéyei egy árucikkből a következő négy hónapra sorrendben 50, 65, 100 és 70 egység (késleltetés nincs megengedve). A szóban forgó hónapokban a termelési költségek 5$, 8$, 4$ és 7$ egységenként. A raktározási költség egyik hónapról a másikra egységenként 2$ (a zárókészletre kivetítve). Becslések szerint a 4. hónap végén minden meglévő egység 6 dollárért eladható. Fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek megoldása minimalizálja a következő négy hónap keresletének kielégítése révén keletkező nettó költségeket!

2. Egy vállalatnak a keresletre vonatkozó várakozásai az elkövetkező három periódusban: 20 egység az 1. periódusban, 10 egység a 2. periódusban, 15 egység a 3. periódusban. Az egységnyi előállítási költségek az egyes periódusokban a következők: 13$ az 1. periódusban; 14$ a 2. periódusban; 15$ a 3. periódusban. Egységenként 2$ tárolási költség van minden periódus zárókészletére. Az 1. periódus kezdetén a vállalatnak 5 meglévő egysége van.
A valóságban egy bizonyos hónapban megtermelt javaknak nem mindegyike használható fel a folyó hónapban előálló kereslet kielégítésére. Ezt a tényt most úgy modellezzük, hogy feltételezzük, hogy az egyik periódusban megtermelt javaknak csak a fele használható fel az ugyanazon periódusbeli kereslet kielégítésére. Fogalmazzon meg egy LP-t, amely minimalizálja a következő három periódus keresletkielégítési költségeit! (*Útmutatás:* Mindenképpen szükség lesz olyan feltételekre, mint példánkban az $i_1 = x_1 + 5 - 20$. A mi példánkkal ellentétben azonban az $i_1 \geq 0$ feltétel nem biztosítja azt, hogy az 1. periódus kereslete ki lesz elégítve. Például, ha $x_1 = 20$, akkor $i_1 \geq 0$ teljesül, de mivel csak $\frac{1}{2}(20) = 10$ egység első periódusbeli termék használható fel az 1. periódus keresletének kielégítésére, $x_1 = 20$ nem megvalósítható érték. Próbáljon meg olyan típusú feltételen gondolkodni, amelyik biztosítja azt, hogy ami az egyes periódusokban rendelkezésre áll a kereslet kielégítésére, az legalább akkora legyen, mint az illető periódus kereslete!)

B csoport

3. James Beerd túrótortákat és Feketeerdő tortákat süt. Egy hónapban legfeljebb 65 tortát tud készíteni. A tortánkénti költségek és az azonnal kielégítendő kereslet tortafajtánként a 29. táblázatban látható. 50 centbe kerül egy túrótorta és 40 centbe kerül egy Feketeerdő torta raktározása egy hónapra. Fogalmazzon meg egy LP-t, amely minimalizálja a következő három hónapra a kereslet kielégítésének költségeit!

29. TÁBLÁZAT

	1. hónap		2. hónap		3. hónap	
	Kereslet	**Költség ($)**	**Kereslet**	**Költség ($)**	**Kereslet**	**Költség ($)**
Túrótorta	40	3.00	30	3.40	20	3.80
Feketeerdő torta	20	2.50	30	2.80	10	3.40

4. Egy gyártó cég A és B típusú terméket állít elő. A cég hajlandó a termékeket a 30. táblázatban látható terv szerint szállítani. A cégnek két futószalagja van: 1. szalag, 2. szalag. A rendelkezésre álló termelési időt órákban a 31. táblázat mutatja. Az egyes termékek egységének előállításához szükséges időt pedig a 32. táblázat mutatja:

30. TÁBLÁZAT

	A	B
Március 31	5000	2000
Április 30	8000	4000

31. TÁBLÁZAT

	Rendelkezésre álló munkaórák	
	1. szalag	**2. szalag**
Március	800	2000
Április	400	1200

32. TÁBLÁZAT

	Termelési idők	
	1. szalag	**2. szalag**
A termék	0.15	0.16
B termék	0.12	0.14

0.15 óra szükséges egy egység A termék előállításához az 1. szalagon, stb. Bármelyik terméknek az előállításához 1 óra szalagidő 5 dollárba kerül. A készletezési költség mindkét termékre havonta 20 cent egységenként (minden hónap zárókészletére). Jelenleg 500 egység A és 750 B van készleten. A cég vezetősége azt szeretné, ha április végére mindkét termékből legalább 1000 egység volna készleten. Fogalmazzon meg egy LP-t, amely meghatározza azt a termelési tervet, amelyik minimalizálja a kereslet azonnali kielégítésének összköltségét!

5. A következő két hónapban a General Cars vállalatnak (azonnal) ki kell elégítenie a következő, teherautókra és személyautókra vonatkozó keresletet: az 1. hónapban 400 teherautó, 800 személyautó; a 2. hónapban 300 teherautó, 300 személyautó. Havonta legfeljebb 1000 járművet tudnak gyártani. Minden teherautóhoz 2 tonna acél, minden személyautóhoz 1 tonna acél szükséges. Az első hónapban az acél ára 400$ tonnánként, a második hónapban 600$ tonnánként. Havonta legfeljebb 1500 tonna acél vásárolható (az acélt csak abban a hónapban szabad felhasználni, amikor vásárolják). Az első hónap elején az árukészlet 100 teherautó és 200 személyautó. Minden hónap végén járművenként 150$ raktárköltséget számolnak fel. A személyautók üzemanyag-teljesítménye 20 mpg (mérföld per gallon, kb. 12 liter/100 km), a teherautóké 10 mpg. A vállalat által gyártott járművek átlagteljesítményének minden hónapban a legalább 16 mpg-nek kell lennie. Fogalmazzon meg egy LP-t, amellyel a vállalat kielégítheti a keresletet és az adott üzemanyaggal teljesíthető mérföldek előírt számát (mpg) minimális költség mellett (vegye bele a megfogalmazásba az acél árát és a tárolási költségeket)!

6. A Gandhi Ruházati Vállalat ingeket és nadrágokat gyárt. Minden inghez 2 négyzetméter anyag kell, minden nadrághoz pedig 3. A legközelebbi két hónapban az ingek és nadrágok iránti kereslet (amit azonnal kell kielégíteni) a következő: az első hónapban 10 ing, 15 nadrág; a második hónapban 12 ing és 14 nadrág. Mindkét hónapban a következő források állnak rendelkezésre: az 1. hónapban 90 négyzetméter, a 2. hónapban 60 négyzetméter anyag. (A ruhaanyag, ami az első hónapban rendelkezésre állt, de nem lett felhasználva, felhasználható a második hónapban.)
Mindkét hónapban 4 dollárba kerül egy-egy darab ruházati cikk elkészítése normál munkaidőben, és 8 dollárba kerül túlmunkaidőben. Havonta legfeljebb összesen 25 darab ruházati cikket tudnak előállítani normál munkaidőben, de a túlórában előállítható ruházati cikkek száma nincs korlátozva. Mindegyik hónap végén ruházati cikkenként 3$ tárolási költség merül fel. Fogalmazzon meg egy LP-t, amellyel minimalizálni lehet a következő három negyedév kereslete kielégítésének költségét! Feltételezzük, hogy az első hónap elején 1 ing és 2 nadrág áll rendelkezésre.

7. A Paynothing Cipőgyárnak minden évben azonnal ki kell elégítenie a 33. táblázatban látható keresletet. A munkások három egymás utáni negyedévben dolgoznak és azután egy negyedévük szabad. Például egy munkás dolgozhat az egyik év 3. és 4. negyedévében és a következő év első negyedévében.

33. TÁBLÁZAT

	Negyedév		
1.	**2.**	**3.**	**4.**
600	300	800	100

Egy ledolgozott negyedév alatt egy munkás vagy munkásnő legfeljebb 50 pár cipőt tud készíteni. A munkások bére negyedévenként 500$. Minden negyedév végén egy-egy pár cipő után 50$ készletezési költség van. Fogalmazzon meg egy LP-t, amely minimalizálja a cipők iránti kereslet kielégítéséből adódó éves költségeket (munka + tárolás)! A dolgok egyszerűsítése végett feltételezzük, hogy minden év végén a zárókészlet nulla. (*Útmutatás:* megengedhető az a feltételezés is, hogy egy adott munkás minden évben ugyanabban a negyedévben megy szabadságra.)

8. Egy vállalatnak (azonnal) ki kell elégítenie a következő kereslateket: 30 egység az első negyedévben, 20 egység a második negyedévben, 40 egység a harmadik negyedévben. Minden negyedévben legfeljebb 27 egység állítható elő normál munkaidőben, egységenként 40$-ért. Mindegyik negyedévben korlátlan számú egység állítható elő túlmunkaidőben, egységenként 60$-ért. A megtermelt egységek 20%-a általában nem megfelelő, és nem alkalmas a kereslet kielégítésére. Ezenkívül még minden negyedév végére a meglévő egységeknek 10%-a megromlik, és nem használható fel jövőbeli kereslet kielégítésére. Egy-egy negyedév végén a kereslet kielégítése és a romlott egységek elszámolása után a zárókészletre egységenként 15$ költség van. Fogalmazzon meg egy LP-t, amely alkalmas arra, hogy minimalizálja a következő három negyedévre vonatkozó kereslet kielégítésének költségeit! Feltételezzük, hogy az első negyedév elején 20 használható egység áll rendelkezésre.

9. A Donovan cég elektromos mixereket gyárt. A legközelebbi négy negyedévben a következő kereslateket kell megfelelő időben kielégítenie: 4000 darab az első negyedévben; 2000 a második negyedévben; 3000 a harmadik negyedévben; 10 000 a negyedik negyedévben. Donovan munkásai három negyedévet dolgoznak és egy negyedévük szabad. Így például egy munkás dolgozhat az 1., 2. és 4. negyedévben, és a 3. negyedévben szabadságra megy. Minden munkás évi 30 000$ fizetést kap, és (amikor dolgozik) legfeljebb 500 mixert tud gyártani egy negyedévben. Minden negyedév végén mixerenként 30$ tárolási költség van, a készletben található összes mixerre. Fogalmazzon meg egy LP-t, amely segít Donovannak abban, hogy minimalizálja a költségeket (munka- és raktárköltség), miközben a jövő évi igényeket megfelelő időben kielégíti! Az első negyedév elején 600 mixer áll rendelkezésre.

3.11. Többperiódusos pénzügyi modellek

A következő példa bemutatja azt, hogy a lineáris programozás miként alkalmazható többperiódusos pénzügyi problémák megoldására. A modellek felállításában a kritikus pont a különböző periódusokban meglévő készpénzek közötti összefüggések meghatározása.

13. PÉLDA A Finco Befektetési Vállalatnak meg kell határoznia befektetési stratégiáját a következő három évre. Jelenleg (0. időpont) 100 000$ áll rendelkezésére befektetési célra. A választható befektetések: A, B, C, D és E. A 34. táblázatban látható mindegyik esetre az 1$ befektetéshez tartozó készpénzáramlás.

Például a B befektetésbe invesztált 1$ az 1. időpontban 1$ pénzkiáramlással jár, a hozamok pedig: a 2. időpontban 50 cent és a 3. időpontban 1$. A vállalat portfóliójának diverzifikációját biztosítandó, a Finco előírja, hogy egy bizonyos befektetésbe legfeljebb 75 000$ helyezhető el. Az A–E befektetési lehetőségeken kívül a Finco úgy is kereshet pénzt, hogy a nem befektetett készpénzt pénzpiaci alapokban tartja évi 8% kamaton. A befektetések megtérüléseit azonnal újra be lehet fektetni. Például az 1. időpontban a C befektetésből adódó pozitív készpénzáramlás azonnal újra befektethető a B befektetésbe. A Finco nem tud pénzt kölcsönkérni, ezáltal a befektetési célra rendelkezésre álló pénz a meglévő készpénzre korlátozódik. Fogalmazzunk meg egy LP-t, amelynek megoldása maximalizálja a 3. időpontban meglévő készpénzt!

Megoldás A Fincónak el kell döntenie, hogy az egyes befektetésekbe mennyi pénzt helyezzen el (a pénzpiaci alapokat is beleértve). Így a következő döntési változókat definiáljuk:

$A =$ az A befektetésbe elhelyezett dollárok

$B =$ a B befektetésbe elhelyezett dollárok

$C =$ a C befektetésbe elhelyezett dollárok

$D =$ a D befektetésbe elhelyezett dollárok

$E =$ az E befektetésbe elhelyezett dollárok

$S_t =$ a t időben ($t = 0, 1, 2$) pénzpiaci alapokba elhelyezett dollárok

A Finco maximalizálni akarja a 3. időpontban meglévő készpénzt. A 3. időpontban a Finco meglévő készpénze az összes, a 3. időpontban beáramló készpénzek összege lesz. Az A–E befektetési lehetőségek leírásából és abból a tényből, hogy a 2. és 3. időpontok között S_2 $1.08S_2$-re fog növekedni, az adódik, hogy a

$$\text{3. időpontban meglévő készpénz} = B + 1.9D + 1.5E + 1.08S_2$$

Így a Finco célfüggvénye

$$\max z = B + 1.9D + 1.5E + 1.08S_2 \tag{62}$$

34. TÁBLÁZAT Készpénzáramlás a Finco számára

	Készpénzáramlás különböző időpontokban, $-ban			
	0.	**1.**	**2.**	**3.**
A	−1	+0.50	+1	0
B	0	−1	+0.50	+1
C	−1	+1.2	0	0
D	−1	0	0	+1.9
E	0	0	−1	+1.5

Többperiódusos pénzügyi modelleknél általában a következő típusú feltételeket használják a különböző periódusbeli döntési változók összefüggéseinek leírására:

$$\begin{array}{c}\text{rendelkezésre álló}\\ \text{készpénz a } t.\text{ időpontban}\end{array} = \text{befektetett készpénz a } t.\text{ időpontban}$$
$$+ \begin{array}{c}\text{nem befektetett készpénz a } t.\text{ időpontban,}\\ \text{amit átvisznek a } (t+1).\text{ időpontra}\end{array}$$

Ha a pénzpiaci alapokat is a befektetések osztályába soroljuk, akkor azt látjuk, hogy

$$\begin{array}{c}\text{a rendelkezésre álló}\\ \text{készpénz a } t.\text{ időpontban}\end{array} = \text{a } t.\text{ időpontban befektetett készpénz} \tag{63}$$

Mivel a 0. időpontban az A, C, D és S_0 befektetések állnak rendelkezésre, valamint a cégnek 100 000\$-ja van a 0. időpontban, a 0. időpontra (63) a következő alakot ölti:

$$100\,000 = A + C + D + S_0 \tag{64}$$

Az 1. időpontban befektetési célra rendelkezésre áll, $0.5A + 1.2C + 1.08S_0$, ezenkívül B és S_1 a befektetési lehetőségek. Ezáltal $t = 1$ esetén (63)-at így írhatjuk:

$$0.5A + 1.2C + 1.08S_0 = B + S_1 \tag{65}$$

A 2. időpontban $A + 0.5B + 1.08S_1$ áll rendelkezésre befektetési célra, valamint az E és S_2 befektetésekbe lehet befektetni. Így $t = 2$ esetén (63):

$$A + 0.5B + 1.08S_1 = E + S_2 \tag{66}$$

Ne felejtsük el azonban, hogy az A–E befektetések bármelyikébe legfeljebb 75 000\$ fektethető be. Ezt biztosítjuk a következő feltételek hozzávételével:

$$A \le 75\,000 \tag{67}$$
$$B \le 75\,000 \tag{68}$$
$$C \le 75\,000 \tag{69}$$
$$D \le 75\,000 \tag{70}$$
$$E \le 75\,000 \tag{71}$$

És most összefoglaljuk (62)-t és (64)–(71)-et, valamint a nemnegativitási feltételeket (minden változó ≥ 0) a következő LP-be:

$$\begin{aligned}
\max\ z = B + 1.9D + 1.5E + 1.08S_2 & \\
\text{f.h.} \qquad A + C + D + S_0 &= 100\,000\\
0.5A + 1.2C + 1.08S_0 &= B + S_1\\
A + 0.5B + 1.08S_1 &= E + S_2\\
A &\le 75\,000\\
B &\le 75\,000\\
C &\le 75\,000\\
D &\le 75\,000\\
E &\le 75\,000\\
A, B, C, D, E, S_0, S_1, S_2 &\ge 0
\end{aligned}$$

Az optimális megoldás $z = 218\,500$, $A = 60\,000$, $B = 30\,000$, $D = 40\,000$, $E = 75\,000$, $C = S_0 = S_1 = S_2 = 0$. Ez azt jelenti, hogy a Finco ne helyezzen el pénzt pénzpiaci alapokba. A 0. időpontban a Finco fektessen be 60 000$-t az A lehetőségbe és 40 000$-t a D lehetőségbe. Ezután az 1. időpontban az A-ból származó 30 000$ beáramló pénzt a B-be kell befektetni. Végül a 2. időpontban az A-ból beáramló 60 000$ készpénzt és a B-ből beáramló 15 000$ készpénzt E-be kell befektetni. A 3. időpontra a Finco 100 000$-ja 218 500$-ra fog nőni.

Az olvasó esetleg kíváncsi arra, hogy a mi megfogalmazásunk hogyan biztosítja azt, hogy Finco soha nem fektet be több pénzt, mint amennyi a cég rendelkezésére áll. Ezt egész egyszerűen az biztosítja, hogy minden S_i változónak nemnegatívnak kell lennie. Például az $S_0 \geq 0$ azt jelenti, hogy $100\,000 - A - C - D \geq 0$, ami biztosítja, hogy a 0 időpontban legfeljebb 100 000$ lesz befektetve.

Feladatok

A csoport

1. A Finco cég problémájában az egyik konzultáns azt állítja, hogy a Finco meglévő készpénze a 3. időpontban az összes befektetésből származó pénzbeáramlások összege, és nem csak azokból a befektetésekből áll, amelyek a 3. időpontban pénzbeáramlást eredményeznek. Így a konzultáns szerint a Finco célfüggvényét

$$\begin{aligned}\max\ z = {} & 1.5A + 1.5B + 1.2C + 1.9D + 1.5E \\ & + 1.08S_0 + 1.08S_1 + 1.08S_2\end{aligned}$$

formában kellene felírni.
Magyarázza meg, hogy ez miért helytelen!

2. Mutassa meg, hogy a Finco célfüggvénye a következő formában is felírható:

$$\begin{aligned}\max\ z = {} & 100\,000 + 0.5A + 0.5B + 0.2C + 0.9D \\ & + 0.5E + 0.08S_0 + 0.08S_1 + 0.08S_2\end{aligned}$$

3. A 0. időpontban van 10 000 dollárunk. Rendelkezésre áll az A és B befektetés, a hozzájuk tartozó készpénzáramlásokat (dollárban) a 35. táblázat mutatja.

35. TÁBLÁZAT

	A	B
0. időpont	-1	0
1. időpont	0.2	-1
2. időpont	1.5	0
3. időpont	0	1.9

Tegyük fel, hogy a sem az A-ba, sem a B-be nem befektetett pénz *nem* kamatozik. Fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek megoldása maximalizálja a 3. időpontban meglévő készpénzt! Esetleg ki tudja találni az LP nélkül is, hogy mi lesz ennek a problémának az optimális megoldása?

B csoport

4.[17] Steve Johnson bróker jelenleg a kötvénypiacon próbálja a profitját maximalizálni. Négyféle kötvény áll rendelkezésére vételre és eladásra. A megajánlott és kért árakat a 36. táblázat mutatja.

36. TÁBLÁZAT

	Árajánlat	**Kért ár**
1. kötvény	980	990
2. kötvény	970	985
3. kötvény	960	972
4. kötvény	940	954

Steve maximum 1000 egységig vásárolhat mindegyik kötvényből a kért áron, vagy eladhat legfeljebb 1000 egységig mindegyik kötvényből a megajánlott áron. A következő három év mindegyike során az, aki elad egy kötvényt, a kötvény tulajdonosának a 37. táblázatban szereplő készpénzt fizeti ki.

37. TÁBLÁZAT

	Kötvény			
Év	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**
1	100	80	70	60
2	110	90	80	50
3	1100	1120	1090	1110

[17] Rohn (1987) alapján.

Steve célja az, hogy maximalizálja a kötvények eladásából származó bevételének és a kötvények vételére költött kifizetéseknek a különbségét. Mindehhez az a feltétel járul, hogy az egyes években azután, hogy a pénzt megkapta, az aktuális készpénzhelyzete (csak a kötvénykifizetésekről van szó, nem a kötvények vásárlásáról vagy eladásáról) nem negatív. Tételezze fel, hogy a készpénzkifizetések diszkontálva vannak, azaz a mostantól számított egy év múlva esedékes 1$ kifizetés egy mostani 90 centtel ekvivalens. Fogalmazzon meg egy LP-t, amely maximalizálja a kötvények vételéből és eladásából származó nettó profitot a fentiekben leírt arbitrázs feltételek teljesítése mellett. Mit gondol, miért korlátozzuk az eladható és megvehető kötvények számát?

5. Egy kis játéküzlet, a Toyco a havi pénzáramlásokat (ezer dollárban) a 2000-es évre a 38. táblázatban olvasható módon tervezi.

38. TÁBLÁZAT

	Pénzáramlás		Pénzáramlás
január	-12	július	-7
február	-10	augusztus	-2
március	-8	szeptember	15
április	-10	október	12
május	-4	november	-7
június	5	december	45

Egy negatív pénzáramlás azt jelenti, hogy a pénzkiáramlás meghaladja a pénz beáramlását az üzletbe. A számlái kifizetéséhez a Toycónak az év elején kölcsön kell kérnie pénzt. A pénzkölcsönzésnek kétféle módja van:

(a) Januárban fel lehet venni egy hosszabb távú (egyéves) kölcsönt. Erre havonta 1% kamat jön rá, és a kölcsönt december végéig vissza kell fizetni.

(b) Minden hónapban van rövidtávú (havi) hitellehetőség is a banknál. Ekkor a havi kamatláb 1.5%. Az összes kölcsönt december végéig vissza kell fizetni.

Minden hónap végén a többletpénz 0.4% kamatot hoz. Fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek a megoldása hozzásegíti Toycót készpénzhelyzetének maximalizálásához 2001. január elejére!

6. Tekintse az 5. feladatot a következő módosítással: a Toyco minden hónapban késleltetheti a szóban forgó hónapban esedékes összes pénz kifizetését, vagy a pénz egy részének kifizetését. Ezt úgy nevezik, hogy „késleltetett kifizetés”. A fizetnivaló legfeljebb 1 hónappal késleltethető, és a késleltetett összegre 1% büntetőkamatot kell fizetni. Így, ha egy januári 10 000$-os tartozást késleltetnek, akkor februárban 10 000$(1.01) = 10\,100$$-t kell fizetniük. Ezzel a módosítással fogalmazza meg azt az LP-t, amelynek megoldása hozzásegíti Toycót 2001. január elsején meglévő készpénzének maximalizálásához!

3.12. Többperiódusos munkaszervezés

A 3.5. alfejezetben láttuk, hogy az alkalmazottak munkabeosztásának tervezését meg lehet oldani lineáris programozás segítségével egy statikus környezetben, ahol a kereslet az időben nem változik. A következő példa (Wagner (1975) problémájának módosított változata) azt mutatja, hogyan használható az LP az alkalmazottak betanításának ütemezésére, ha a vállalat időben változó kereslettel áll szemben.

14. PÉLDA A CSL számítógépek javításával foglalkozó szervizboltok hálózata. A következő öt hónapra a CSL szakképzett technikusokra vonatkozó szükséglete (munkaórában) a következő:

1. hónap (január): 6000 óra
2. hónap (február): 7000 óra
3. hónap (március): 8000 óra
4. hónap (április): 9500 óra
5. hónap (május): 11000 óra

Január elején 50 szakképzett technikus dolgozik a CSL-nél. Egy-egy szakképzett technikus havonta legfeljebb 160 órát tud dolgozni. A jövőbeli igények kielégítésére új technikusokat kell képezni. Egy új technikus kiképzése egy hónapig tart. A kiképzés egy hónapja alatt a tanulót 50 óra hosszat egy tapasztalt technikusnak kell felügyelnie. Mindegyik tapasztalt technikus 2000$-t kap egy hónapra (még akkor is, ha nem dolgozza le a teljes 160 órát). A betanulás hónapjára a tanuló 1000$ fizetést kap. Minden hónap végén a CSL tapasztalt technikusainak 5%-a kilép és átmegy a Plum Computers céghez. Fogalmazzunk meg egy LP-t, amelynek megoldása segít a CSL-nek abban, hogy a következő öt hónapra minimalizálja a munkabérköltségeket, miközben kielégíti a szervizigényeket.

Megoldás A CSL-nek el kell döntenie, hogy a t-edik hónapban hány technikust képezzen ($t = 1, 2, 3, 4, 5$). A változók:

$$x_t = \text{a } t\text{-edik hónapban kiképzett technikusok száma} \quad (t = 1, 2, 3, 4, 5)$$

A CSL minimalizálni szeretné a munkabérek összköltségét a következő 5 hónapra. Jegyezzük meg, hogy

$$\begin{aligned}\text{összes munkabérköltség} = {} & \text{a betanulók munkabérköltsége} \\ & + \text{a tapasztalt technikusok munkabérköltsége}\end{aligned}$$

Ki kell fejeznünk a tapasztalt technikusok munkabérköltségét. Ehhez $t = 1, 2, 3, 4, 5$-re definiáljuk az

$$y_t = \text{a } t\text{-edik hónap elején a gyakorlott technikusok száma}$$

változókat. Így az

$$\begin{aligned}\text{összes munkabérköltség} = {} & (1000x_1 + 1000x_2 + 1000x_3 + 1000x_4 + 1000x_5) \\ & + (2000y_1 + 2000y_2 + 2000y_3 + 2000y_4 + 2000y_5)\end{aligned}$$

Ezáltal a CSL célfüggvénye

$$\begin{aligned}\min z = {} & 1000x_1 + 1000x_2 + 1000x_3 + 1000x_4 + 1000x_5 \\ & + 2000y_1 + 2000y_2 + 2000y_3 + 2000y_4 + 2000y_5\end{aligned}$$

Most nézzük meg, milyen feltételeket fogalmazhatunk meg a CSL számára. Vegyük észre, hogy $y_1 = 50$ már adott, és $t = 1, 2, 3, 4, 5$ esetén a CSL-nek biztosítania kell azt, hogy

$$\begin{aligned}& \text{a } t\text{-edik hónapban rendelkezésre álló technikusi munkaórák száma} \\ & \geq \text{a } t\text{-edik hónapban a technikusi munkaórákra fennálló igény}\end{aligned} \tag{72}$$

Mivel minden betanulónak szüksége van 50 óra gyakorlott technikusi időre, és minden szakképzett technikus havonta 160 óra hosszat áll rendelkezésre,

$$\text{a rendelkezésre álló technikusi órák száma a } t\text{-edik hónapban} = 160y_t - 50x_t$$

Így (72) a következő öt feltételt adja:

$$\begin{aligned}
160y_1 - 50x_1 &\geq 6000 && \text{(első hónap feltétel)} \\
160y_2 - 50x_2 &\geq 7000 && \text{(második hónap feltétel)} \\
160y_3 - 50x_3 &\geq 8000 && \text{(harmadik hónap feltétel)} \\
160y_4 - 50x_4 &\geq 9500 && \text{(negyedik hónap feltétel)} \\
160y_5 - 50x_5 &\geq 11000 && \text{(ötödik hónap feltétel)}
\end{aligned}$$

Mint ahogy más többperiódusos problémában is, itt is szükségünk van olyan feltételekre, amelyekben különböző periódusokra vonatkozó változók összefüggései szerepelnek. A CSL problémában nagyon fontos észrevenni azt, hogy bármely hónap kezdetén a szakképzett technikusok számát egyrészt az előző hónapban rendelkezésre álló szakképzett technikusok száma, másrészt az előző hónapban kiképzett technikusok száma határozza meg:

$$\begin{aligned}\text{a } t\text{. hónap elején rendelkezésre} \quad & \text{rendelkezésre álló gyakorlott techni-}\\ \text{álló gyakorlott technikusok száma} = & \text{kusok száma a } (t-1)\text{. hónap elején}\\ & + \text{a } (t-1)\text{. hónapban kiképzettek száma}\\ & - \text{a gyakorlott technikusok száma, akik}\\ & \quad \text{elhagyták a céget a } (t-1)\text{. hónapban}\end{aligned} \tag{73}$$

Például februárban (73) a következő alakú:

$$y_2 = y_1 + x_1 - 0.05y_1 \qquad \text{vagy} \qquad y_2 = 0.95y_1 + x_1$$

Ehhez hasonlóan, márciusra (73) a következő:

$$y_3 = 0.95y_2 + x_2$$

áprilisra

$$y_4 = 0.95y_3 + x_3$$

és májusra

$$y_5 = 0.95y_4 + x_4$$

Hozzávéve a modellhez az $x_t \geq 0$ és $y_t \geq 0$ $(t = 1,2,3,4,5)$ nemnegativitási feltételeket a következő LP-t kapjuk:

$$\begin{aligned}
\min z = {} & 1000x_1 + 1000x_2 + 1000x_3 + 1000x_4 + 1000x_5\\
& + 2000y_1 + 2000y_2 + 2000y_3 + 2000y_4 + 2000y_5\\
\text{f.h.} \quad & 160y_1 - 50x_1 \geq 6000 \qquad y_1 = 50\\
& 160y_2 - 50x_2 \geq 7000 \qquad 0.95y_1 + x_1 = y_2\\
& 160y_3 - 50x_3 \geq 8000 \qquad 0.95y_2 + x_2 = y_3\\
& 160y_4 - 50x_4 \geq 9500 \qquad 0.95y_3 + x_3 = y_4\\
& 160y_5 - 50x_5 \geq 11000 \qquad 0.95y_4 + x_4 = y_5\\
& x_t, y_t \geq 0 \quad (t = 1,2,3,4,5)
\end{aligned}$$

Az optimális megoldás: $z = 593\,777$; $x_1 = 0$; $x_2 = 8.45$; $x_3 = 11.45$; $x_4 = 9.52$; $x_5 = 0$; $y_1 = 50$; $y_2 = 47.5$; $y_3 = 53.58$; $y_4 = 62.34$ és $y_5 = 68.75$.

A valóságban y_t csak egész értéket vehet fel, így a mi megoldásunkat nehéz volna interpretálni. Megfogalmazásunk hibája annak feltételezése, hogy az alkalmazottaknak pontosan 5%-a hagyja el a céget minden hónapban. Ez azt eredményezheti, hogy az alkalmazottak száma az egyik hónapbeli egész számról a következő hónapra törtszámmá válik. Esetleg élhetnénk azzal a feltételezéssel, hogy az egy-egy hónapban kilépő alkalmazottak száma a teljes munkaerő 5%-ához legközelebb eső egész szám, ez viszont egy nem lineáris programozási problémára vezetne!

Feladatok

A csoport

1. Mi lenne a CSL probléma optimális megoldása ha $y_1 = 38$ lenne?

2. Egy biztosítási cég úgy gondolja, hogy a következő hat hónapra a személyiszámítógép-igénye a következő lesz: januárban 9; februárban 5; márciusban 7; áprilisban 9; májusban 10; júniusban 5. A gépek egy, két vagy három hónapos periódusokra bérelhetők a következő egységárakon: egy hónapos bérlet 200\$, két hónapos bérlet 350\$ és a három hónapos bérlet 450\$. Fogalmazzon meg egy LP-t, amely arra használható, hogy minimalizáljuk a szükséges gépszám bérleti díját! Feltételezhetjük, hogy ha egy gépet olyan időtartamra bérelnek, amelyik túlnyúlna júniuson, akkor a bérleti díj átszámítódik. Például, ha egy számítógépet május elején három hónapra vesznek bérbe, akkor a bérleti díj majd $\frac{2}{3}(450) = 300$\$, és nem 450\$. Ezt figyelembe kell venni a célfüggvény felírásánál.

3. Az IRS (az USA szövetségi adóhivatala) eldöntötte, hogy a következő tizenkét hónapra a 39. táblázatban megadott számú szuperszámítógépekre lesz szüksége. Az igények kielégítésére az IRS szuperszámítógépeket bérel egy, két vagy három hónapos periódusokra. A bérleti költségek: egy hónapra 100\$, két hónapra 180\$ és három hónapra 250\$. Az első hónap elején az IRS-nek nincs szuperszámítógépe. Határozza meg azt a bérleti tervet, amely minimális költséggel elégíti ki a következő 12 hónap igényeit! *Megjegyzés:* Feltételezheti, hogy törtszámot adó optimális megoldás is megfelel. Így, ha az Ön megoldása szerint 140.6 gépet kell bérelni egy hónapra, akkor akár fölfelé, akár lefelé kerekíthetünk (141-re vagy 140-re) anélkül, hogy ez az összköltségre nagyobb hatással lenne.

39. TÁBLÁZAT

Hónap	Számítógép-igény
1	800
2	1000
3	600
4	500
5	1200
6	400
7	800
8	600
9	400
10	500
11	800
12	600

B csoport

4. Önnek van egy 20 000 mázsa kapacitású búzaraktára. Az első hónap elején 6000 mázsa búza van a raktárban. Minden hónapban eladhat és vásárolhat is búzát. Az 1000 mázsára vonatkozó árakat a 40. táblázat mutatja.

40. TÁBLÁZAT

Hónap	Eladási ár (\$)	Vételár (\$)
1	3	8
2	6	8
3	7	2
4	1	3
5	4	4
6	5	3
7	5	3
8	1	2
9	3	5
10	2	5

Az események sorozata minden hónapban azonos:

(a) Megállapítja az induló készletet búzából.

(b) Bármennyit eladhat az induló készletből (annak nagysága által korlátozva) a folyó havi eladási áron.

(c) Annyi búzát vásárolhat (a folyó havi vételáron), amennyit akar, a raktár kapacitásának erejéig.

Írja fel azt az LP-t, amelynek megoldása maximalizálja a következő 10 hónapban elérhető profitot!

Összefoglalás

Lineáris programozási definíciók

Egy **lineáris programozási feladat (LP)** három részből áll:

1. A döntési változóknak (legyenek mondjuk $x_1, x_2, \ldots, x_n$) egy lineáris függvényéből (a **célfüggvényből**), amelyet maximalizálni vagy minimalizálni kell.

2. **Feltételek** egy véges halmazából (ahol mindegyiknek vagy lineáris egyenlőségnek, vagy lineáris egyenlőtlenségnek kell lennie), amely feltételek a döntési változók által felvehető értékeket korlátozzák.

3. Az **előjelkorlátozásokból**, amelyek minden egyes x_j döntési változóra előírják, hogy vagy (1) az x_j változó csak nemnegatív lehet, $x_j \geq 0$; vagy (2) az x_j változó lehet pozitív, nulla, vagy negatív, x_j **nem előjelkorlátozott (ekn).**

A célfüggvényben szereplő változó együtthatóját a változó **célfüggvény együtthatójának** nevezzük. A változó együtthatója egy feltételen belül a **technológiai együttható**. Minden feltétel jobb oldalát **jobb oldalnak (j.o.)** nevezzük.

Egy *pont* alatt a döntési változók egy konkrét értékét (mint szám n-est) értjük. A **lehetséges megoldások halmaza**, vagy más szóval a **megvalósítható megoldások halmaza** (egyszerűbben a **megvalósítható tartomány**) az LP-ben az összes olyan pontok halmaza, amelyek kielégítik az LP feltételeit és előjelkorlátozásait. Az LP egy **optimális megoldása** bármely olyan pont a lehetséges megoldások tartományában, amelyhez az összes pontok közül a legnagyobb z érték tartozik (egy max problémánál). Egy LP-nek lehet, hogy nincs optimális megoldása, lehet, hogy egy optimális megoldása van, és lehet, hogy végtelen sok optimális megoldása van.

Az LP egy feltételét **aktívnak** nevezzük, ha a feltételben az optimális értékeket helyettesítve a változók helyébe, a bal oldal egyenlő a jobb oldallal.

Lineáris programozási feladatok grafikus megoldása

Bármely LP lehetséges megoldásainak halmaza **konvex halmaz.** Ha az LP-nek van optimális megoldása, akkor a lehetséges megoldások halmazának van olyan extremális (vagy csúcs-) pontja, amely az LP-nek optimális megoldása.

Egy kétváltozós LP-t (itt most max feladat) grafikusan is megoldhatunk a következőképpen:

1. lépés Ábrázoljuk a lehetséges tartományt.

2. lépés Rajzoljunk egy profit szintvonalat.

3. lépés Mozogjunk a szintvonallal párhuzamosan a növekvő z értékek irányában. Az utolsó olyan pont, amelyik még benne van a megvalósítható tartományban és érintkezik egy profit szintvonallal, az LP optimális megoldása.

LP megoldások: négy eset

Egy LP megoldásakor a következő négy eset egyike következik be:

1. eset Az LP-nek egyértelmű megoldása van.

2. eset Az LP-nek egynél több (ekkor mindig végtelen számú) optimális megoldása van. Ez az **alternatív optimális megoldások** esete. Grafikus megoldás esetén úgy ismerjük fel ezt az esetet, hogy a profit szintvonal egy egész szakasszal esik egybe, mielőtt elhagyja a lehetséges megoldások halmazát.

3. eset Az LP **nem megoldható** (nincs lehetséges vagy megvalósítható megoldása). Ez azt jelenti, hogy a megvalósítható megoldások tartománya üres.

4. eset Az LP nemkorlátos. Ez azt jelenti (egy max problémában), hogy a lehetséges megoldások halmazában vannak olyan pontok, amelyekhez tetszőleges nagy z érték tartozik. Grafikus megoldás esetén úgy ismerjük fel ezt az esetet, hogy a profit szintvonallal párhuzamosan mozogva a növekvő z-k irányába, soha nem kerülünk ki az LP lehetséges tartományából.

LP-k megfogalmazása

Az LP-k megfogalmazásának legfontosabb lépése a döntési változók helyes meghatározása.

Bármelyik feltételben a tagokat ugyanabban a mértékegységben kell kifejezni. Például nem lehet egy feltételen belül az egyik tag „nyersanyag fontban”, míg a másik tag „nyersanyag dekában”.

Áttekintő feladatok

A csoport

1. A Bloomington Sörfőzde pilzenit és angol világos sört állít elő. A pilzeni eladási ára 5$ hordónként, az angol világosé 2$ hordónként. Egy hordó pilzeni előállításához 5 font kukorica és 2 font komló szükséges. Egy hordó angol világos sörhöz pedig 2 font kukorica és 1 font komló kell. Rendelkezésre áll 60 font kukorica és 25 font komló. Fogalmazzon meg egy LP-t, amellyel maximalizálható a bevétel! Oldja meg az LP-t grafikusan!

2. Jones farmer kétféle süteményt süt (csokoládés és vaníliás), hogy kiegészítse jövedelmét. Egy csokoládés sütemény 1 dollárért adható el, a vaníliás pedig 50 centért. Minden csokoládés süteménybe kell 4 tojás, és 20 percig kell sütni. Minden vaníliás süteménybe kell 1 tojás, és 40 percig kell sütni. Rendelkezésre áll 8 óra sütési idő és 30 tojás. Fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek megoldása maximalizálja Jones farmer bevételét! Ezután oldja meg a feladatot grafikusan! (Törtszámú sütemény is lehetséges.)

3. Van 100 dollárom. A következő három évben a következőkben felsorolt befektetések állnak rendelkezésemre:

A. beruházás Minden most befektetett dollár egy év múlva 0.10$ és három év múlva 1.30$ többletet szolgáltat.

B. beruházás Minden most befektetett dollár egy év múlva 0.20$-t és két év múlva 1.10$-t ad.

C. beruházás Minden egy év múlva befektetett dollár három év múlva 1.50$-t ad.

Bármelyik évben a nem befektetett készpénz pénzpiaci alapokba tehető, ez évi 6%-os kamatot fizet. Az A, B és C befektetések bármelyikébe legfeljebb 50$ fektethető be. Fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek megoldása maximalizálja a három év múlva meglevő pénzemet!

4. A Sunco olajat dolgoz fel repülőbenzinné és fűtőolajjá. 40 dollárért vásárol 1000 hordó olajat, amelyet desztillál és így nyer belőle 500 hordó repülőbenzint és 500 hordó fűtőolajat. A desztillálás utáni termék azonnal eladható, vagy tovább feldolgozható a katalitikus krakkolóban. Ha rögtön desztillálás után eladják a temékeket, akkor 1000 hordó repülőbenzint 60 dollárért lehet eladni, 1000 hordó fűtőolajat pedig 40 dollárért. 1000 hordó repülőbenzin továbbfeldolgozása a katalitikus krakkolóban 1 óra hosszat tart, és az eredményül kapott 1000 hordó terméket 130 dollárért lehet eladni. 1000 hordó fűtőolajhoz 45 perc szükséges a krakkolóban, és a végtermék 1000 hordót 90 dollárért lehet eladni. Naponta legfeljebb 20 000 hordó olajat lehet vásárolni, és 8 óra áll rendelkezésre a krakkolóban. Fogalmazzon meg egy LP-t a Sunco profitjának maximalizálására!

5. A Fincónak a következő befektetési lehetőségek állnak rendelkezésre (0. időpont = most, 1. időpont = egy év múlva, stb.):

A. beruházás Minden 0. időpontban befektetett dollárért 0.10$-t kapunk az 1. időpontban és 1.30$-t a 2. időpontban.

B. beruházás Minden egyes 1. időpontban befektetett dollárért 1.60$-t kapunk a 2. időpontban.

C. beruházás Minden egyes 2. időpontban befektetett dollárért 1.20$-t kapunk a 3. időpontban.

Bármely időpontban a megmaradt pénz befektethető kincstárjegybe, ami évi 10% kamatot fizet. A 0. időpontban 100 dollárunk van. Az A, B és C befektetési lehetőségek mindegyikébe legfeljebb 50$ fektethető be. Fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek megoldása maximalizálja a Finco 3. időpontban meglévő készpénzét!

6. A Steelco által gyártott minden acélnak eleget kell tennie a következő előírásoknak: 3.2–3.5% szén; 1.8–2.5% szilícium; 0.9–1.2% nikkel; valamint legalább 45 000 font/négyzethüvelyk (pounds per square inch = psi) szakítószilárdság. A Steelco két ötvözet kombinálásával gyártja az acélt. A költségek és az egyes ötvözetek tulajdonságai a 41. táblázatban láthatók.

41. TÁBLÁZAT

	1. ötvözet	**2. ötvözet**
Költség tonnánként	190$	200$
Szilícium százalék	2%	2.5%
Nikkel százalék	1%	1.5%
Szén százalék	3%	4%
Szakítószilárdság	42000 psi	50000 psi

Feltételezzük, hogy a két ötvözet keverékének szakítószilárdsága kiszámítható úgy, hogy átlagoljuk az összekevert ötvözetek szakítószilárdságait. Például egy 40% 1-es ötvözetből és 60% 2-es ötvözetből álló keverék szakítószilárdsága $0.4(42\ 000)+0.6(50\ 000)$. Írjon fel egy lineáris programozási modellt annak meghatározására, hogy egy tonna acél gyártási költségét hogyan minimalizáljuk!

7. A Steelco kétféle acélt gyárt három különböző acélgyárban. Egy adott hónapban mind a három gyárban 200 óra áll rendelkezésre az olvasztókemencékben. Mivel a kemencék különbözők az egyes gyárakban, egy tonna acél gyártásának ideje és költsége más és más gyáranként. Az egyes gyárakra vonatkozó idő- és költségadatok a 42. táblázatban láthatók.

42. TÁBLÁZAT Egy tonna acél gyártásához

	1. acél		**2. acél**	
	költség ($)	**idő (percben)**	**költség ($)**	**idő (percben)**
1. gyár	10	20	11	22
2. gyár	12	24	9	18
3. gyár	14	28	10	30

A Steelcónak minden hónapban elő kell állítania legalább 500 tonna 1. acélt és legalább 600 tonna 2. acélt. Fogalmazzon meg egy LP-t a kívánt mennyiségű acél gyártási költségének minimalizálására!

8.[18] A Walnut Orchard cégnek két farmja van, ahol búzát és kukoricát termesztenek. A különböző talajviszonyok miatt a két farmon különböző hozamok vannak, és különbözők a termelési költségek is. A hozamok és költségek a 43. táblázatban láthatók.

43. TÁBLÁZAT

	1. farm	**2. farm**
Kukoricahozam/hold	500 mázsa	650 mázsa
Költség 1 hold kukoricára	100$	120$
Búzahozam/hold	400 mázsa	350 mázsa
Költség 1 hold búzára	90$	80$

Mind a két farmon 100 hold művelhető terület áll rendelkezésre. Meg kell termelni 11 000 mázsa búzát és 7000 mázsa kukoricát. Határozzon meg egy növénytelepítési tervet, amely minimalizálja a fenti követelmények kielégítésének költségeit! Hogyan lehetne ennek a modellnek a kiterjesztésével hatékonyan elosztani a gabonatermelést egy egész országban?

9. A Candy Kane Cosmetics (CKC) a Leslie parfümöt gyártja. Ehhez vegyszerek és munka szükséges. Két termelési eljárás áll rendelkezésre: az 1. eljárás, ez egy egység munkát és 2 egység vegyszert alakít át 3 deka parfümmé. A 2. eljárás két egység munkát és 3 egység vegyszert 5 deka parfümmé alakít át. A CKC-nek 3$-ba kerül egy munkaegység megvétele és 2$-ba kerül egy egység vegyszer. Minden évben legfeljebb 20 000 egységnyi munkát és 35 000 egységnyi vegyszert tudnak beszerezni. A CKC úgy gondolja, hogy reklámozás nélkül 1000 deka parfümöt tud eladni. A Leslie iránti kereslet ösztönzésére a CKC felkérheti a bájos Jenny Nelson modellt. Jenny óránként 100 dollárt kap. Minden Jenny által ledolgozott óra a vállalat becslése szerint 200 dekával növeli a Leslie parfüm iránti keresletet. A Leslie parfüm dekánként 5$-ért adható el. Alkalmazzon lineáris programozási modellt a CKC profitjának maximalizálására!

10. A Carcónak 150 000$-ja van reklámozási célra. Az autó eladások számának növelésére a cég újságokban és televízióban való reklámozáson gondolkodik. Minél többet használ a Carco egy bizonyos médiumot, annál kevésbé hatékony egy-egy újabb hirdetés. A 44. táblázat azt mutatja, hogy egyes hirdetések hány új vásárlót eredményeznek.
Egy-egy újsághirdetés 1000$-ba kerül, egy televízióreklám pedig 10 000 dollár. Legfeljebb 30 újsághirdetés és legfeljebb 15 televízióreklám adható fel. Hogyan tudja a Carco maximalizálni a reklámozás által generált új vevők számát?

[18]Heady és Egbert (1964) alapján.

44. TÁBLÁZAT

	Reklámok száma	Új vevők
Újság	1–10	900
	11–20	600
	21–30	300
Televízió	1–5	10000
	6–10	5000
	11–15	2000

11. A Sunco Oil-nak Los Angelesben és Chicagóban vannak finomító üzemei. A Los Angeles-i finomító évente legfeljebb 2 millió hordó olajat képes feldolgozni, a chicagói pedig legfeljebb 3 milliót. Finomítás után az olajat két elosztó helyre szállítják: Houstonba és New York Citybe. A Sunco becslése szerint mind a két elosztóhely legfeljebb évi 5 millió hordót tud eladni. A szállítási és finomítási költségek különbözősége miatt az előállított olaj millió hordónkénti profitja (dollárban) függ attól, hogy az olajat hol finomították, és attól is, hogy melyik elosztóhelyre került (lásd 45. táblázat). A Sunco azon gondolkodik, hogy mindkét finomító kapacitását megnöveli. Az évi finomító kapacitás évi egymillió hordóval való megnövelése évente 120 000$-ba kerül a Los Angeles-i finomító számára, és 150 000$-ba a chicagói finomító számára. Írjon fel egy lineáris programozási modellt, amelynek megoldása maximalizálja a profitnak a kapacitásnövelési költségekkel csökkentett összegét egy tízéves periódusra!

45. TÁBLÁZAT

	Profit ($) millió hordónként	
	Houstonba	New Yorkba
Los Angelesből	20000	15000
Chicagóból	18000	17000

12. Egy telefonos felmérés során egy piackutató csoportnak legalább 150 feleséggel, 120 férjjel, 100 egyedülálló felnőtt férfival és 110 egyedülálló felnőtt nővel kell kapcsolatba lépnie. 2 dollárba kerül egy nappali telefonhívás, és (a magasabb munkaköltség miatt) 5 dollárba kerül egy esti hívás. A 46. táblázat mutatja az eredményeket.

46. TÁBLÁZAT

Válaszoló személy	Nappali hívások százaléka	Esti hívások százaléka
Feleség	30	30
Férj	10	30
Egyedülálló férfi	10	15
Egyedülálló nő	10	20
Senki	40	5

A korlátozott létszámú személyzet miatt a hívásoknak legfeljebb a fele lehet esti hívás. Fogalmazzon meg egy LP-t, amely a felmérést minimális költséggel valósítja meg!

13. A Feedco kétféle szarvasmarhatápot állít elő, mindkettő csak búzából és lóheréből áll. Az 1-es tápnak legalább 80% búzát kell tartalmaznia, míg a 2-es tápnak legalább 60% lóherét kell tartalmaznia. Az 1-es táp eladási ára fontonként 1.50$, a 2-es táp eladási ára fontonként 1.30$. A Feedco legfeljebb 1000 font búzát vásárolhat, fontját 50 centért, és legfeljebb 800 font lóherét vásárolhat, fontját 40 centért. A kereslet mindkét fajta tápra korlátlan. Fogalmazzon meg egy LP-t a Feedco profitjának maximalizálására!

14. A Feedco (lásd 13. feladat) elhatározta, hogy vevőjének (tegyük fel, hogy csak egy vevője van) mennyiségi árengedményt ad. Ha a fogyasztó több mint 300 font 1-es tápot vesz, akkor minden egyes 300 font feletti font tápot 1.25$-ért kaphat meg. Ehhez hasonlóan, ha a vevő több mint 300 font 2-es tápot vásárol, akkor a 300 font fölötti minden font tápért csak 1.00$-t fizet. Módosítsa a 13. feladat LP-jét úgy, hogy figyelembe veszi a mennyiségi árengedményt! (*Útmutatás:* definiáljon változókat minden, különböző áron eladott táphoz.)

15. A Chemco kétféle vegyszert gyárt: A és B. Ezeknek a vegyszereknek két gyártási folyamaton kell végigmenniük. Az 1. folyamathoz 2 óra munka és 1 font nyersanyag szükséges, melynek eredménye 2 deka A és 1 deka B. A 2. folyamathoz 3 óra munka és 2 font nyersanyag szükséges, melynek eredménye 3 deka A és 2 deka B. Rendelkezésre áll 60 óra munka és 40 font nyersanyag. Az A iránti kereslet korlátlan, de B-ből csak 20 dekával lehet eladni. Az A eladási ára 16$ dekánként és B-é 14$ dekánként. A B-ből eladatlan mennyiségtől meg kell szabadulni, ennek költsége 2$/deka. Fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek megoldása maximalizálja a Chemcónál a veszteségből származó költséggel csökkentett bevételt!

16. Tegyük fel, hogy a 3.12. alfejezetben szereplő CSL számítógépes példában két hónapig tart egy technikus betanítása, és a betanulás második hónapjában a tanulónak 10 óra gyakorlott technikusi időre van szüksége. Módosítsa a szövegben szereplő megfogalmazást úgy, hogy ezeket a változásokat figyelembe veszi!

17. A Furnco asztalokat és székeket gyárt. Minden asztalnak és széknek vagy teljes egészében tölgyből, vagy teljes egészében fenyőből kell készülnie. A rendelkezésre álló nyersanyag tölgyből 150 lap és fenyőből 210 lap. Egy asztalhoz vagy 17 lap tölgy, vagy 30 lap fenyő szükséges. Egy székhez vagy 5 lap tölgy, vagy 13 lap fenyő kell. Az asztal darabja 40$-ért adható el, a szék pedig 15$-ért. Fogalmazzon meg egy, a bevétel maximalizálására használható LP-t!

18.[19] Busville városában három iskolakörzet van. A 47. táblázatban az egyes körzetekben élő kisebbségi és nem kisebbségi tanulók száma látható.

47. TÁBLÁZAT

Körzet	Kisebbségi diákok	Nem kisebbségi diákok
1	50	200
2	50	250
3	100	150

Az összes tanulók 25%-a kisebbségi.
A helyi bíróság úgy határozott, hogy a városka mindkét középiskolájában (Cooley Középiskola és Walt Whitman Középiskola) közelítőleg ($\pm$5%-on belüli eltéréssel) ugyanolyan százalékban legyenek kisebbségi diákok, mint az egész városban. A 48. táblázatban láthatók az iskolakörzetek és a középiskolák közötti távolságok.

48. TÁBLÁZAT

Körzet	Cooley középiskola	Walt Whitman középiskola
1	1	2
2	2	1
3	1	1

A középiskolákba 300 és 500 közötti diáklétszám kell. Írja fel azt a lineáris programozási modellt, amelynek megoldása úgy osztja be a diákokat az iskolákba, hogy a diákoknak a lehető legkisebb távolságot kelljen utazniuk iskolába menetelkor!

19.[20] A Brady Corporation szekrényeket gyárt. Minden héten szükségük van 90 000 köbméter feldolgozott fűrészelt fára. A faanyagot kétféle módon szerezhetik be. Az egyik mód az, hogy külső ellátótól megvásárolják a faanyagot, és a saját szárítókemencéjükben szárítják. A másik lehetőség az, hogy a saját földjükön vágják ki a fát, a saját fűrésztelepükön fölszabják, és végül a saját kemencéjükben megszárítják. Vásárlás esetén Brady első osztályú és másodosztályú fűrészárut vehet. Az első osztályú fa 7$-ba kerül köbméterenként, és szárítás után 0.9 köbméter felhasználható fát ad. A másodosztályú fa 3$-ba kerül köbméterenként, és szárítás után 0.7 köbméter felhasználható fát ad. A cégnek 3 dollárjába kerül egy kivágott fa felaprítása. Méretre vágva és szárítva egy kivágott fa 0.8 köbméter használható fűrészárut ad. A szárítás költsége köbméterenként 4$. Köbméterenként 2.50$ a fűrészmalom munkadíja. A fűrészmalom hetenként legfeljebb 35 000 köbméter fát tud feldolgozni. Hetenként legfeljebb 60 000 köbméter első osztályú és 40 000 köbméter másodosztályú faáru vásárolható. Szárításra hetenként 40 órányi idő áll rendelkezésre. A szárítási idők egy köbméter első osztályú fára, másodosztályú fára, vagy szálfára a következők: első osztályúra 0.8 másodperc, másodosztályúra 2 másodperc, szálfára 1.3 másodperc. Fogalmazzon meg egy LP-t, amely segít Bradynak minimalizálni a feldolgozott faáruszükséglet kielégítésének heti költségét.

20.[21] A Kanadai Parkfelügyelőség két földterületet ellenőriz. Az 1. földterület 300 hold nagyságú, a 2. földterület pedig 100 hold nagyságú. Az 1-es föld bármelyik holdja használható lucfenyőtermesztésre, vadászatra vagy mindkettőre. A 2-es föld minden holdja felhasználható lucfenyők termesztésére, kempingezésre vagy mindkettőre. A 49. táblázatból kiolvasható, hogy az egyes földterületek fenntartásához mennyi tőke (száz dollárban) és mennyi munka (emberben és napban) szükséges területegységenként (hold), valamint hogy a föld engedélyezett felhasználásánál egységnyi területről mennyi profit (ezer dollárban) származik.
A rendelkezésre álló tőke 150 000$ és 200 ember-nap munka használható fel. Hogyan kellene a földeket különböző használati célokra elosztani, hogy a két földterületről származó profit maximális legyen?

49. TÁBLÁZAT

	Tőke	Munka	Profit
1. föld, fenyő	3	0.1	0.2
1. föld, vadászat	3	0.2	0.4
1. föld, mindkettő	4	0.2	0.5
2. föld, fenyő	1	0.05	0.06
2. föld, kemping	30	5	0.09
2. föld, mindkettő	10	1.01	1.1

21.[22] A Chandler Vállalat kétféle terméket gyárt: A és B. E két termék egymással is versenyez. A vállalat kétféle vevőcsoportnak akarja eladni ezeket a termékeket: 1-es csoport és 2-es csoport. Az 50. táblázat azt mutatja, hogy a vevők mennyire taksálnak egy egységnyi A terméket és egy egységnyi B terméket ($-ban).

50. TÁBLÁZAT

	1-es vevőcsoport	2-es vevőcsoport
A vevők szerint A értéke	10	12
A vevők szerint B értéke	8	15

[19] Franklin és Koenigsberg (1973) alapján.
[20] Carino és Lenoir (1988) alapján.
[21] Cheung és Auger (1976) alapján.
[22] Dobson és Kalish (1988) alapján.

Az egyes vevők vagy A terméket vesznek, vagy B-t, de mindkettőt nem. Egy vevő akkor hajlandó A terméket vásárolni, ha úgy gondolja, hogy

$$\begin{aligned}&\text{az A termék értéke} - \text{az A termék ára}\\&\geq \text{a B termék értéke} - \text{a B termék ára}\end{aligned}$$

és

$$\text{az A termék értéke} - \text{az A termék ára} \geq 0$$

Egy vevő akkor fog B terméket vásárolni, ha úgy gondolja, hogy

$$\begin{aligned}&\text{a B termék értéke} - \text{a B termék ára}\\&\geq \text{az A termék értéke} - \text{az A termék ára}\end{aligned}$$

és

$$\text{a B termék értéke} - \text{a B termék ára} \geq 0$$

Az első csoportban 1000 ember van, a második csoportban 1500. Chandler úgy szeretné az egyes termékek árát megállapítani, hogy biztosítani tudja azt, hogy az első csoport tagjai az A terméket, a második csoport tagjai pedig a B terméket vásárolják. Fogalmazzon meg egy LP-t, amely segít Chandlernek a bevétel maximalizálásában!

22.[23] Az Alden Vállalat két terméket gyárt. Mindegyik termék két gép valamelyikén állítható elő. Az egyes termékek előállításához szükséges idő (órában) az egyes gépeken az 51. táblázatban látható.

51. TÁBLÁZAT

	1. gép	**2. gép**
1. termék	4	3
2. termék	7	4

Minden hónapban mindegyik gépen 500 órányi idő áll rendelkezésre. Az 52. táblázatban látható, hogy legfeljebb hány terméket hajlandók megvenni a fogyasztók egy-egy hónapban a megadott árakon.

52. TÁBLÁZAT

	Kereslet		**Árak ($)**	
	hónap			
	1.	**2.**	**1.**	**2.**
1. termék	100	190	55	12
2. termék	140	130	65	32

A vállalat célja, hogy maximalizálja a következő két hónapban eladott termékegységekből származó bevételt. Fogalmazzon meg egy LP-t, amely segít elérni ezt a célt!

23. A Kiriakis Electronics háromféle terméket gyárt. Mindegyik termék előállításában három különböző gép vesz részt. Amikor egy gépet használnak, ahhoz egy munkás is kell. Az 53. táblázatban látható, hogy mennyi idő (órában) szükséges az egyes gépeken az egyes termékekhez.

53. TÁBLÁZAT

	1. termék	**2. termék**	**3. termék**
1. gép	2	3	4
2. gép	3	5	6
3. gép	4	7	9
Profit ($)	6	8	10

Jelenleg öt 1-es típusú gép, három 2-es típusú gép és négy 3-as típusú gép áll rendelkezésre. A vállalatnak tíz munkása van, és el kell döntenie, hogy az egyes gépekhez hány munkást jelöljön ki. Az üzem hetenként 40 órát van nyitva, a munkások mindegyike heti 35 órát dolgozik. Fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek megoldása lehetővé teszi Kiriakis számára, hogy úgy állítsa munkásait a gépekhez, hogy a heti profit maximális legyen! (*Megjegyzés:* Egy munkásnak nem kell az egész heti munkáját egy bizonyos gép kezelésével töltenie.)

24. A Gotham Városi Kórház négy különböző diagnóziscsoport (DRG) eseteivel foglalkozik. Az 54. táblázatban a következő adatok láthatók: hozzájárulás a profithoz, diagnosztikai szolgáltatás (órában), kórházi kezelés (ágynapokban), nővérszolgálat (órában) és gyógyszerfelhasználás (dollárban).
Jelenleg a kórháznak rendelkezésére áll hetenként 570 óra diagnosztikai szerviz, 1000 ágynap, 50 000 nővéróra és 50 000$ értékű gyógyszer. A városi egészségügyi követelmények értelmében hetente legalább 10 DRG 1, 15 DRG 2, 40 DRG 3 és 160 DRG 4 esettel kell foglalkoznia a kórháznak. Írjon fel egy LP-t annak meghatározására, hogy a kórház szempontjából mi a DRG esetek optimális keveréke![24]

54. TÁBLÁZAT

	Profit	**Diagnosztikai szolgáltatás**	**Ágy-nap**	**Nővér**	**Gyógy-szer**
DRG 1	2000	7	5	30	800
DRG 2	1500	4	2	10	500
DRG 3	500	2	1	5	150
DRG 4	300	1	0	1	50

25. Az Oliver Winery négy díjnyertes bort állít elő Bloomingtonban (Indiana állam). Az 55. táblázatban látható a különböző típusú borok egy literjének a hozzájárulása a profithoz, a munkaórák száma és a tartályigény (órában).

[23] Jain, Stott és Vasold (1978) alapján.
[24] Robbins és Tuntiwonpiboon (1989) alapján.

55. TÁBLÁZAT

	Profit ($)	Munka	Tartály
1. bor	6	.2 óra	.5 óra
2. bor	12	.3 óra	.5 óra
3. bor	20	.3 óra	1 óra
4. bor	30	.5 óra	1.5 óra

A törvény értelmében évente legfeljebb 100 000 liter bor termelhető. Rendelkezésre áll 12 000 munkaóra és 32 000 tartályóra évente. Minden liter 1. bor átlagosan $\frac{1}{3}$ évet a pincében tölt; minden liter 2. bor átlagosan 1 évet érik; a 3. bor átlagosan két évet, míg végül a 4. bor átlagosan 3.333 évet tölt a pincében. A borászat nagy átlagban 50 000 liter raktározásával tud megbirkózni évente. Határozza meg, hogy melyik fajta borból mennyit termeljen az Oliver Winery, hogy maximális profitjuk legyen!

26. Oldja meg grafikusan a következő LP-t:

$$\begin{aligned} \min z &= 5x_1 + x_2 \\ \text{f.h.} \quad 2x_1 + x_2 &\geq 6 \\ x_1 + x_2 &\geq 4 \\ 2x_1 + 10x_2 &\geq 20 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

27. A Grummins Engine dízelmeghajtású teherautókat gyárt. A kormány által előírt új emissziós szabvány szerint kötelező, hogy a következő három évben gyártott teherautók átlagos szennyezőanyag-kibocsátása nem haladhatja meg a 10 grammot. Grummins kétféle teherautót gyárt. Minden 1-es típusú teherautót 20 000$-ért lehet eladni, 15 000$-ba kerül az előállítása, és 15 gramm szennyezőanyagot bocsát ki. Minden 2-es típusú teherautót 17 000$-ért lehet eladni, 14 000$ a gyártási költsége, és 5 gramm szennyezőanyagot bocsát ki. A gyártási kapacitás korlátozottsága miatt évente legfeljebb 320 teherautót lehet gyártani. A Grummins tudja, hogy az egyes típusú teherautókból évente maximum annyit lehet eladni a következő három évben, mint amit az 56. táblázat mutat.

56. TÁBLÁZAT Teherautók maximális kereslete

Év	1. típus	2. típus
1	100	200
2	200	100
3	300	150

Így például a 3. évben *legfeljebb* 300 darab 1-es típusú teherautót lehet eladni. A kereslet kielégíthető akár a folyó évi termelésből, akár az előző éviből. Bármelyik típusú teherautó egyéves raktározási költsége 2000$. Fogalmazzon meg egy LP-t, amely segít a profit maximalizálásában a következő három évre!

28. Írja le a következő LP összes optimális megoldásait:

$$\begin{aligned} \min z &= 4x_1 + x_2 \\ \text{f.h.} \quad 3x_1 + x_2 &\geq 6 \\ 4x_1 + x_2 &\geq 12 \\ x_1 &\geq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

29. A Juiceco kétféle terméket állít elő: szuper narancslét és normál narancslét. Mindkét termék kétféle típusú narancs kombinációjával állítható elő: 6-os osztályú és 3-as osztályú narancsokból. A szuper narancslében az átlagos osztályszámnak legalább 5-nek kell lennie, míg a normál narancslében átlag legalább 4-es kell. A következő két hónap mindegyikében a Juiceco legfeljebb 1000 liter szuper narancslét és legfeljebb 2000 liter normál narancslét tud eladni. A szuper narancslé eladási ára 1.00$ literenként, míg a normál narancslét literenként 80 centért lehet eladni. Az első hónap elején a Juicecónak van 3000 liter 6-os osztályú és 2000 liter 3-as osztályú narancsa. A második hónap elején a Juiceco még vásárolhat további 3-as osztályú narancsot, literenként 40 centért, és további 6-os osztályú narancsot literenként 60 centért. A narancslé a hónap végére megromlik, tehát annak semmi értelme sem volna, hogy az első hónapban többletet állítsanak elő a narancsléből, abban a reményben, hogy az hozzájárulna a második hónapbeli kereslet kielégítéséhez. Az első hónap végén megmaradt narancs viszont felhasználható a második hónapban narancslégyártásra. Az első hónap végén minden liter maradék 3-as osztályú narancsra literenként 5 cent tárolási költség van, a 6-os osztályú narancsra pedig 10 cent a linterenkénti tárolási költség. A költségekben a narancs árán kívül még benne van a narancslé előállítási költsége, ez literenként 10 cent (normál vagy szuper). Fogalmazzon meg egy LP-t, amely a profitot maximalizálja a következő két hónapban!

30. Oldja meg grafikusan a következő lineáris programozási feladatot:

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 - x_2 \\ \text{f.h.} \quad 2x_1 + 3x_2 &\geq 12 \\ x_1 - 3x_2 &\geq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

31. Keresse meg grafikus módszerrel a következő LP összes megoldását:

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 - 2x_2 \\ \text{f.h.} \quad x_1 &\geq 4 \\ x_1 + x_2 &\geq 8 \\ x_1 - x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

32. Az Eastinghouse kondenzátorokat gyárt minden nap három műszakban: 8-tól 16-ig; 16-tól éjfélig és éjféltől 8-ig. Az 57. táblázatból kiolvasható az egyes műszakokban az alkalmazottaknak fizetett órabér, a különböző műszakokban gyártott kondenzátorok eladási ára, valamint az adott műszakban legyártott kondenzátorokban előforduló hibák száma.

57. TÁBLÁZAT

Műszak	**Órabér ($)**	**Hibák száma (egy kondenzátorra)**	**Eladási ár ($)**
8-tól 16-ig	12	4	18
16-tól éjfélig	16	3	22
éjféltől 8-ig	20	2	24

A vállalat 25 munkásának mindegyike beosztható a három műszak egyikébe. Egy munkás egy műszak alatt 10 kondenzátort csinál, de a géppark korlátozottsága miatt egy-egy műszakba legfeljebb tíz munkást lehet beosztani. Naponta legfeljebb 250 kondenzátor adható el, és az egynapi termelésben gyártott kondenzátorokban az átlagos hibaszám nem haladhatja meg a hármat. Fogalmazzon meg egy LP-t Eastinghouse napi profitjának (eladásból származó jövedelem – munkabér) maximalizálására!

33. Keresse meg grafikus módszerrel a következő LP összes megoldását:

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + x_2 \\ \text{f.h.} \quad 8x_1 + 2x_2 &\le 16 \\ x_1 + x_2 &\le 12 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

34. A legközelebbi három hónapban az Aircónak ki kell elégítenie (késleltetés nélkül) a következő, légkondicionáló berendezések iránti keresletet: 1. hónapban 300; 2. hónapban 400; 3. hónapban 500. A légkondicionálókat New Yorkban vagy Los Angelesben gyártják. Egy légkondicionáló gyártása Los Angelesben 1.5 órát vesz igénybe, míg New Yorkban 2 órát, mindkét helyen szakképzett munkás által. A gyártási költség egy légkondicionálóra 400$ Los Angelesben és 350$ New Yorkban. Minden hónapban mindkét városban 420 óra szakképzett munka áll rendelkezésre. Egy légkondicionáló egy hónapig tartó raktározása 100$-ba kerül. Az 1. hónap elején az Aircónak 200 légkondicionálója van készleten. Fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek megoldása megmondja az Aircónak, hogyan lehet minimalizálni a légkondicionálók keresletének kielégítéséhez tartozó költségeket a következő három hónapban!

35. Fogalmazza meg a következő problémát lineáris programozási feladat formájában: egy melegház tulajdonosa azt tervezi, hogy versenybe száll a városi parkok virágellátásáért. A terve az, hogy tulipánokat, nárciszokat és virágzó bokrokat használ fel három különböző típusú elrendezésben. Az 1-es típusú elrendezéshez 30 tulipán, 20 nárcisz és 4 virágzó bokor kell. A 2-es típusú elrendezésben 10 tulipán, 40 nárcisz és 3 virágzó bokor szerepelne. A 3-as típusban 20 tulipán, 50 nárcisz és 2 virágzó bokor lenne felhasználható. A nettó profit 50$ minden egyes 1-es típusú elrendezésre, 30$ minden 2-es elrendezésre és 60$ minden 3-as típusú elrendezésre. Rendelkezésre áll 1000 tulipán, 800 nárcisz és 100 virágzó bokor. A maximális profit eléréséhez hányszor szerepeljenek az egyes elrendezések?

36. Magyarázza meg, hogy a 35. feladathoz tartozó modell hogyan változik meg, ha a következő két feltételt hozzávesszük a problémához:

(a) Az 1-es típusú elrendezések száma nem haladhatja meg a 2-es típusú elrendezések számát.

(b) Mindegyik elrendezésnek legalább ötször elő kell fordulnia a tervben.

37. Oldja meg grafikusan a következő LP problémát:

$$\begin{aligned} \min z &= 6x_1 + 2x_2 \\ \text{f.h.} \quad 3x_1 + 2x_2 &\ge 12 \\ 2x_1 + 4x_2 &\ge 12 \\ x_2 &\ge 1 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

B csoport

38. A Gotham Városi Nemzeti Bank hétfőtől péntekig tart nyitva, naponta reggel 9-től délután 5-ig. Múltbeli tapasztalataiból a bank már tudja, hogy az egyes időközökben hány pultnál dolgozó alkalmazottra van szüksége; ez az 58. táblázatban látható.

A bank kétféle alkalmazottat vesz fel. A teljes munkaidős alkalmazottak 9-től 5-ig dolgoznak, heti öt napot, kivéve 1 óra ebédidőt. (A bank dönti el, hogy egy teljes munkaidős alkalmazottja mikor veheti ki az ebédidejét: déltől délután 1-ig, vagy délután 1-től 2-ig.)

A teljes munkaidős alkalmazottak (a járulékokat is beleértve) 8$ órabért kapnak (az egyórás ebédidő is fizetett). A bank felvehet részmunkaidős alkalmazottakat is. Minden részmunkaidős alkalmazottnak pontosan 3 óra hosszat kell folyamatosan dolgoznia. Egy részmunkaidős alkalmazott 5$ órabért kap (járulékok nincsenek). A megfelelő minőségű kiszolgálás fenntartása érdekében a bank úgy döntött, hogy legfeljebb öt részmunkaidős dolgozót vesznek fel. Fogalmazzon meg egy LP-t, amely lehetővé teszi, hogy minimális költségek mellett az alkalmazotti szükséglet kielégíthető legyen! Oldja meg a feladatot! Az LP megoldásának ismeretében kísérletezzen ki olyan munkáltatói politikát, amelyik közel járna a munkabérköltség minimalizálásához!

58. TÁBLÁZAT

Időperiódus	Pultnál dolgozó alkalmazott
9–10	4
10–11	3
11–12	4
12– 1	6
1– 2	5
2– 3	6
3– 4	8
4– 5	8

39.[25] A Gotham városi rendőrség 30 rendőrt alkalmaz. Minden rendőr heti 5 napot dolgozik. A bűnözési ráta naponta változik, ezáltal a szükséges rendőrök száma attól függ, hogy a hét melyik napjáról van szó: szombaton 28, vasárnap 18, hétfőn 18, kedden 24, szerdán 25, csütörtökön 16, pénteken 21. A rendőrség olyan szolgálati tervet akar készíteni, hogy minimális legyen azoknak a rendőröknek a száma, akiknek a szabadnapjai nem egymás után következő napokra esnek. Fogalmazzon meg egy LP-t e cél elérésének érdekében. (*Útmutatás:* Írjon fel a hét minden napjára olyan feltételt, amelyik azt biztosítja, hogy a megfelelő számú rendőr az adott napon *nem* dolgozik.)

40.[26] Alexis Cornby kukorica vételéből és eladásából tartja fönn magát. Január elsején van 50 tonna kukoricája és 1000 dollárja. Minden hónap első napján Alexis a következő tonnánkénti vételárakon vásárolhat kukoricát: januárban 300$; februárban 350$; márciusban 400$; áprilisban 500$. Minden hónap utolsó napján Alexis a következő tonnánkénti eladási árakon adhat el kukoricát: januárban 250$; februárban 400$; márciusban 350$; áprilisban 550$. Alexis a meglévő kukoricáját egy raktárban tárolja, ahová legfeljebb 100 tonna kukorica fér be. A megvásárolt kukoricáért azonnal készpénzben kell fizetnie. Alkalmazzon lineáris programozást annak eldöntésére, hogyan tudja Alexis a meglévő készpénzét április végére maximalizálni!

41.[27] Az 1. hónap elején a Fincónak 400$-ja van készpénzben. Az 1., 2., 3. és 4. hónapok elején a Fincónak vannak bizonyos bevételei, ezután fizeti ki számláit (59. táblázat).

59. TÁBLÁZAT

	Bevétel ($)	Számlák ($)
1. hónap	400	600
2. hónap	800	500
3. hónap	300	500
4. hónap	300	250

A megmaradó pénz befektethető egy hónapra, havi 0.1% kamatra; vagy két hónapra, havi 0.5% kamatra; vagy 3 hónapra, havi 1% kamatra; vagy 4 hónapra, havi 2% kamatra. Alkalmazzon lineáris programozást egy olyan befektetési stratégia meghatározására, amely az 5. hónap elejére maximalizálja a meglévő készpénzt!

42. Az A város napi 500 tonna szemetet produkál, a B város napi 400 tonna szemetet termel. A szemetet el kell égetni az 1-es vagy 2-es szemétégetőben, és mindkét szemétégető legfeljebb napi 500 tonna szemetet tud feldolgozni. A szemétégetés költsége tonnánként 40 dollár az 1-es égetőben, és tonnánként 30 dollár a 2-esben. A szemétégetés minden egyes tonna szemetet 0.2 tonna törmelékké alakít, amelyet aztán két földfeltöltő hely egyikében raknak le. Mind a két földfeltöltő hely legfeljebb napi 200 tonna törmeléket tud fogadni. Mérföldenként 3$ a tonnánkénti szállítási költség, akár szemétről, akár törmelékről van szó. A 60. táblázat mutatja a szóban forgó helyszínek közötti távolságokat mérföldben. Fogalmazzon meg egy LP-t, amely arra használható, hogy a két város számára minimalizálja a szeméttől való megszabadulás költségét!

43.[28] A Silicon Valley Corporation (Silco) tranzisztorokat gyárt. A tranzisztorgyártásnak nagyon fontos része a germánium nevű elem (a tranzisztorok egyik fő komponense) olvasztása kemencében. Sajnos, az olvasztási eljárás olyan, hogy nagyon különböző minőségű eredményeket ad.

60. TÁBLÁZAT

	1.	Szemétégető	2.
A város	30		5
B város	36		42
	1.	**Feltöltőhely**	**2.**
1. szemétégető	5		8
2. szemétégető	9		6

Kétféle módszerrel lehet germániumot olvasztani: az 1-es módszer tranzisztoronként 50$-ba kerül, a 2-es módszer pedig tranzisztoronként 70$. A 61. táblázat mutatja az 1-es és 2-es módszerrel kapott germánium minőségét.
A Silco megteheti azt is, hogy újrahevíti az olvasztott germániumot abból a célból, hogy a minőségét javítsa. Egy tranzisztorhoz való germánium újrahevítése 25$-ba kerül. Az újrahevítés eredményei a 62. táblázatban láthatók.
A Silcónak elég nagy kemencekapacitása van a germánium olvasztására vagy újrahevítésére, de ez is csak havonta legfeljebb 20 000 tranzisztorig elegendő. A Silco havi kereslete 4. fokozatú tranzisztorból 1000; 3. fokozatúból 2000; 2.

[25] Rothstein (1973) alapján.
[26] Charnes és Cooper (1955) alapján.
[27] Robichek, Teichroew és Jones (1965) alapján.
[28] Smith (1965) alapján.

fokozatúból 3000 és 1. fokozatúból ugyancsak 3000. Használjon lineáris programozást a szükséges tranzisztorok előállítási költségének minimalizálására!

61. TÁBLÁZAT

Az olvasztott germánium fokozata	Olvasztás után százalékban 1. módszer	2. módszer
Selejtes	30	20
1. fokozat	30	20
2. fokozat	20	25
3. fokozat	15	20
4. fokozat	5	15

Megjegyzés: 1. fokozat: gyenge; 4. fokozat: kiváló. A germánium minősége meghatározza az ebből gyártott tranzisztor minőségét.

62. TÁBLÁZAT

Újrahevített germánium minősége	Újrahevítés után százalékban selejtes	fokozat 1.	2.	3.
Selejtes	30	0	0	0
1. fokozat	25	30	0	0
2. fokozat	15	30	40	0
3. fokozat	20	20	30	50
4. fokozat	10	20	30	50

44. Egy papír-újrafeldolgozó telep dobozokat, selyempapírárut, újságokat és könyvpapírt dolgoz fel olyan péppé, amelyik háromféle fokozatú újrafeldolgozott papír előállítására (fokozatok: 1, 2 és 3) használható fel. A 63. táblázat mutatja a négyféle feldolgozandó papírnemű tonnánkénti árát és péptartalmát. A péppé alakításnak kétféle módszere van: festéktelenítés és aszfaltdiszperzió. Bármelyik input festéktelenítése tonnánként 20$-ba kerül. A festéktelenítési eljárás kivonja az input péptartalmának 10 százalékát is, így az eredeti péptartalomnak csak 90%-a marad. Az aszfaltdiszperzió alkalmazása egy tonna anyagra 15$-ba kerül. Ez az eljárás elviszi az input péptartalmának 20%-át. A festéktelenítési eljárás és az aszfaltdiszperziós eljárás is legfeljebb 3000 tonna inputot képes felvenni. 1-es fokozatú papír csak újságpapírpépből vagy könyvpapírpépből gyártható; 2-es fokozatú papír csak könyvpapír, selyempapír vagy dobozpapír pépjéből gyártható; végül a 3-as fokozatú papír csak újság, selyempapír vagy doboz pépjéből gyártható. A jelenlegi igények kielégítésére a vállalatnak 500 tonna 1-es fokozatú papírhoz való pépre, 500 tonna 2-es fokozatú papírhoz való pépre és 600 tonna 3-as fokozatú papírhoz való pépre van szüksége. Fogalmazzon meg egy LP-t, amely minimalizálja a pépszükséglet kielégítésének költségeit![29]

[29]Glassey és Gupta (1975) alapján.

63. TÁBLÁZAT

	Költség ($)	Péptartalom (%)
Doboz	5	15
Selyempapír	6	20
Újságpapír	8	30
Könyvpapír	10	40

45. A Turkeyco kétféle típusú pulykakotlettet állít elő, és ezeket gyorséttermeknek adja el. Mindkét típusú kotlett pulykamellből és egyéb (nem fehér húsú) részekből áll. Az 1. kotlett fontonként 4 dollárért adható el, és legalább 70% fehérhúst kell tartalmaznia. A 2. kotlett fontonként 3 dollárért adható el, és legalább 60% fehérhús tartalma kell legyen. Legfeljebb 50 font 1. kotlett és 30 font 2. kotlett adható el. A kotlettek előállításához szükséges kétféle típusú pulykát a Gobble-Gobble Turkey Farmról vásárolják. Minden 1-es típusú pulyka 10$-ba kerül és 5 font fehérhúst és 2 font egyéb húst szolgáltat. Minden 2-es típusú pulyka 8$-ba kerül és 3 font fehérhúst és 3 font egyéb húst ad. Fogalmazzon meg egy LP modellt a Turkeyco profitjának maximalizálására!

46. A Priceler személyautókat és kisteherautókat gyárt. A 64. táblázat mutatja, hogy a következő három hónapban melyik fajta járműből mennyi adható el.
Minden személyautó eladási ára 8000$, és minden kisteherautó eladási ára 900$. A gyártási költségek: 6000$ a személyautóé és 7500$ a kisteherautóé. A készletezési költség egy hónapra 150$ egy személyautóra és 200$ egy kisteherautóra. Havonta legfeljebb 1500 járművet lehet gyártani. A technológiai előírások kötöttsége miatt az első hónapban az összes gyártott autóknak legalább kétharmadának személyautónak kell lennie. Az első hónap elején 200 személyautó és 100 kisteherautó áll rendelkezésre. Fogalmazzon meg egy LP-t, amely arra alkalmas, hogy maximalizálja a Priceler profitját a következő három hónapra!

64. TÁBLÁZAT

	Személyautó	Kisteherautó
1. hónap	1100	600
2. hónap	1500	700
3. hónap	1200	500

47. A Grummins Engine vállalatnál a szalagon dolgozó alkalmazottak hetenként négy napot dolgoznak, naponta tíz órát. A hét egyes napjain a szalag mellett dolgozó alkalmazottakból (legalább) a következő számú emberre van szükség: hétfőtől péntekig 7 alkalmazott; szombaton és vasárnap 3 alkalmazott. A Grumminsnak 11 szalag mellett dolgozó alkalmazottja van. Fogalmazzon meg egy LP-t, amely arra alkalmazható, hogy maximalizálja az alkalmazottak számára kivehető egymásután következő szabadnapok számát! (Például egy olyan alkalmazott, akinek vasárnap, hétfőn és szerdán van szabadnapja, csak két egymásután következő napon szabadnapos.)

48. A Bank 24 naponta 24 órán át tart nyitva. Azok az alkalmazottak, akik két egymásután következő 6 órás műszakban dolgoznak, 10$ órabért kapnak. A lehetséges műszakok a következők: éjféltől 6-ig; 6-tól délig; déltől 18-ig és 18-tól éjfélig. Az egyes műszakokban a bank ügyfeleinek száma: éjféltől 6-ig 100; 6-tól délig 200; déltől 18-ig 300; 18-tól éjfélig 200. Egy alkalmazott egy műszakban legfeljebb 50 ügyfelet tud kiszolgálni. Ahhoz, hogy modellezni tudjuk az „ügyfél-türelmetlenség” költségét, feltételezzük, hogy egy olyan ügyfél, aki műszakváltáskor van jelen, a banknak 5 dollárjába „kerül”. Feltesszük még, hogy minden nap éjfélig minden ügyfelet ki kell szolgálni, és ezáltal mindegyik éjféltől 6-ig tartó műszak úgy kezdődik, hogy 0 ügyfél van a bankban. Fogalmazzon meg egy LP-t, amely arra használható, hogy minimalizálja a bank munkabér- és ügyfél-türelmetlenségi költségeit!

49.[30] A Transeast Airlines repülőgépei a következő útvonalon repülnek: Los Angeles – Houston – New York – Miami – Los Angeles. Az egyes szakaszok mérföldben mért távolságai a következők: L.A. – Houston 1500 mérföld; Houston – N.Y. 1700 mérföld; N.Y. – Miami 1300 mérföld; Miami – L.A. 2700 mérföld. Minden megálláskor a repülőgép legfeljebb 10 000 liter üzemanyagot vásárolhat be. Az egyes városokban az üzemanyagárak a következők: L.A. 88 cent; Houston 15 cent; N.Y. 1.05$; Miami 95 cent. A repülőgép üzemanyagtartályába legfeljebb 12 000 liter fér be. Egy-egy leszállási hely fölötti körözést is lehetővé kell tenni, ezért előírjuk, hogy minden útszakasz végén a repülőben az üzemanyagszint legalább 600 liter legyen. A teljes útvonal minden egyes szakaszán a mérföldenként felhasznált literek száma

$$1 + (\text{átlagos üzemanyagszint a}\\ \text{repülés útszakaszán}/2000)$$

A dolgok egyszerűsítése céljából tegyük fel, hogy az átlagos üzemanyagszint a teljes repülés bármelyik útszakaszán:

$$\frac{1}{2}(\text{üzemanyagszint az útszakasz elején})\\ +\frac{1}{2}(\text{üzemanyagszint az útszakasz végén})$$

Fogalmazzon meg egy LP-t, amely arra használható, hogy minimalizálja a teljes repülés teljesítéséhez szükséges üzemanyagköltséget!

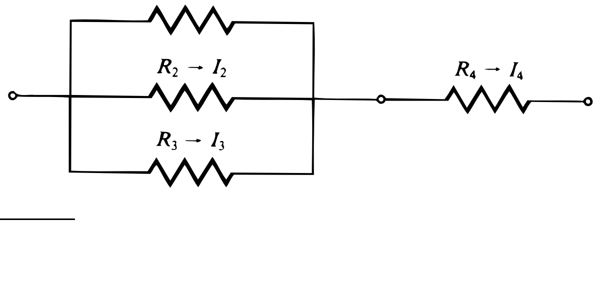
50.[31] A jövedelemadó-bevallási formanyomtatványok feldolgozásához az USA Adóhivatala (IRS) minden formanyomtatványt először az adat-előkészítő osztályra küld, ahol az információkat kódolják. Ezután az adatbeviteli osztályon beviszik a bevallásokat a számítógépbe. A következő három héten át a következő számú formanyomtatványok érkeznek: első héten 40 000; második héten 30 000, harmadik héten 60 000. Az IRS a csúcsforgalommal úgy birkózik meg, hogy felvesz alkalmazottakat, akik heti 40 órát dolgoznak, és ezért 200$-t kapnak fizetésül. Egy-egy adóív adat-előkészítéséhez 15 perc szükséges, és az adatbevitel 10 percet vesz igénybe. Egy-egy héten egy alkalmazott vagy az adat-előkészítéshez, vagy az adatbevitelhez van beosztva. Az IRS-nek az ötödik hét végére be kell fejeznie az összes adópapír feldolgozását, továbbá minimalizálni szeretné ezen célja elérésének költségét. Fogalmazzon meg egy LP-t, amely meghatározza, hogy hány dolgozónak kell dolgoznia az egyes heteken, és hogyan kell a dolgozókat beosztani a következő öt hétben!

51. A 9. ábrán látható elektromos áramkörben $I_t =$ a t ellenálláson átfolyó áram (amperben), $V_t =$ feszültségesés (voltban) a t ellenálláson, és $R_t =$ a t ellenállás ellenállása (ohmban).
Kirchoff feszültség- és áramtörvényei értelmében $V_1 = V_2 = V_3$ és $I_1 + I_2 + I_3 = I_4$. A t ellenálláson átfolyó áram által disszipált energia: $I_t^2 R_t$. Ohm törvénye szerint $V_t = I_t R_t$.
Ennek a problémának a két részét egymástól függetlenül kell megoldani.

(a) Tegyük fel, hogy előre tudjuk, miszerint $I_1 = 4$, $I_2 = 6$, $I_3 = 8$ és $I_4 = 18$ a követelmények. Ezenkívül mindegyik ellenálláson a feszültségesésnek 2 és 10 volt között kell lennie. Válassza meg az R_t-ket úgy, hogy a teljes disszipált energia minimális legyen! Fogalmazzon meg egy LP-t, amely megoldja a problémát!

(b) Tegyük fel, hogy előre megadták, miszerint az előírás $V_1 = 6$, $V_2 = 6$, $V_3 = 6$ és $V_4 = 4$. Ezenkívül minden egyes ellenálláson az átfolyó áramnak 2 és 6 amper között kell lennie. Válassza meg úgy az R_t-ket, hogy a teljes disszipált energia minimális legyen! Fogalmazzon meg egy LP-t, amely megoldja ezt a problémát! (*Útmutatás:* Legyenek $\frac{1}{R_t}$ $(t = 1, 2, 3, 4)$ a döntési változók.)

9. ÁBRA



[30] Darnell és Loflin (1977) alapján.
[31] Lanzenauer és mások (1987) alapján.

52. Llanview polgármestere szeretné megmondani, hogy hány bíróval tudnának megbirkózni a bírósági esetek sokaságával. A 65. táblázatban látható, hogy az év egyes hónapjaiban becslése szerint hány bírói munkaóra szükséges.

65. TÁBLÁZAT

	Órák
január	400
február	300
március	200
április	600
május	800
június	300
július	200
augusztus	400
szeptember	300
október	200
november	100
december	300

(a) Minden bíró mind a 12 hónapban dolgozik, és egy-egy bíró havonta legfeljebb 120 órát tud esetekkel foglalkozni. A késések elkerülésére december végéig minden esetet le kell zárni. Fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek a megoldása eldönti, hogy hány bíró szükséges Llanview-ban!

(b) Hogyan változik a megoldás, ha minden bíró évente 1 hónapig szabadságon van?

C csoport

53.[32] Az E.J. Korvair Áruháznak 1000$ készpénze van. A következő hat hónapban minden hónap elején E.J.-nek lesznek bevételei és kifizetendő számlái, ahogy azt a 66. táblázat mutatja.

66. TÁBLÁZAT

	Bevételek ($)	**Számlák ($)**
július	1000	5000
augusztus	2000	5000
szeptember	2000	6000
október	4000	2000
november	7000	2000
december	9000	1000

E.J.-nek rövid távú készpénzproblémái lesznek egészen addig, amíg az áruháznak a karácsonyi bevásárlási szezonban nagyobb bevételei nem lesznek. Ennek áthidalására E.J.-nek pénzt kell kölcsönkérnie.
Július elején, E.J. kaphat egy hat hónapos kölcsönt. A hat hónapos periódusra kölcsönvett pénzt december végéig vissza kell fizetni a 9% kamattal együtt (korábbi visszafizetés nem csökkenti a kölcsön kamatterheit). E.J. esetleg hónapról-hónapra kölcsönzésre is gondolhat. Egy hónapra kölcsönzött pénzre havi 4%-os kamatot kell fizetni. Használjunk lineáris programozást annak meghatározására, hogy hogyan lehet E.J. költségeit minimalizálni, ha minden számláját időben akarja kifizetni!

54.[33] Az Olé Oil háromféle terméket állít elő: fűtőolajat, benzint és repülőgép-üzemanyagot. Az átlagos oktánszámnak legalább 4.5-nek kell lennie a fűtőolajnál, 8.5-nek a benzinnél és 7.0-nek a repülőgép-üzemanyagnál. Ezeknek a termékeknek az előállításához az Olé kétféle olajat vásárol: 1. nyersolaj (hordónként 12$) és 2. nyersolaj (hordónként 10$). Naponta legfeljebb 10 000 hordó vásárolható mindegyik nyersolajból.
Mielőtt a nyersolajból eladható termék lenne, előbb desztillálni kell. Naponta legfeljebb 15 000 hordó olajat lehet desztillálni. Ennek költsége hordónként 10 cent. A desztillálás eredménye a következő: (1) Minden hordó 1. nyersolajból 0.6 hordó nafta, 0.3 hordó 1. desztillált olaj és 0.1 hordó 2. desztillált olaj lesz. (2) Minden hordó 2. nyersolajból 0.4 hordó nafta, 0.2 hordó 1. desztillált olaj és 0.4 hordó 2. desztillált olaj lesz. A nafta csak benzin vagy repülőgép-üzemanyag előállítására használható. Desztillált olajból fűtőolajat lehet előállítani, vagy keresztülvinni a katalitikus krakkolón (hordónként 15 centért). Naponta legfeljebb 5000 hordó desztillált olaj mehet a krakkolóba. Minden hordó 1. desztillált olaj, ami krakkolva lett, 0.8 hordó 1. krakkolt olajat és 0.2 hordó 2. krakkolt olajat ad. Minden hordó 2. desztillált olaj a krakkolás után 0.7 hordó 1. krakkolt olajat és 0.3 hordó 2. krakkolt olajat ad. A krakkolt olajból benzint és repülőgép-üzemanyagot lehet előállítani, de fűtőolajat nem.
A különböző típusú olajok oktánszámai a következők: 8 a naftáé; 4 az 1. desztillált olajé; 5 a 2. desztillált olajé; 9 az 1. krakkolt olajé; 6 a 2. krakkolt olajé.
A fűtőolaj 14$ hordónkénti áron adható el; a benzin hordónként 18$-ért, a repülőgép üzemanyag pedig 16$-ért hordónként. Marketing meggondolásokból adódóan legalább 3000 hordónyit kell gyártani mindegyik termékből. Fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek megoldása maximalizálja az Olé napi profitját!

55. Donald Rump a Countribank nemzetközi alapok osztályának igazgatója. Donaldnak minden nap meg kell határoznia, hogy a banknak aznap mekkora készlete legyen dollárból, fontból, márkából és jenből, hogy ki tudják elégíteni a pénzkeresletet. A különböző valuták közötti átváltási rá-

[32] Robichek, Teichroew és Jones (1965) alapján.
[33] Garvin és mások (1957) alapján.

ták a 67. táblázatban láthatók. Például egy dollár átváltható .58928 fonttá, vagy 1 font átváltható 1.697 dollárrá.

67. TÁBLÁZAT

	-ba			
-ból	**dollár**	**font**	**márka**	**jen**
Dollár	1	.58928	1.743	138.3
Font	1.697	1	2.9579	234.7
Márka	.57372	.33808	1	79.346
Jen	.007233	.00426	.0126	1

A nap elején a Countribank készletei a 68. táblázatban láthatók. A nap végén a Countribanknak legalább akkora mennyiségnek kell birtokában lennie, amint az a 69. táblázatban látható.

68. TÁBLÁZAT

Pénzfajta	**Egységek (milliárdban)**
Dollár	8
Font	1
Márka	8
Jen	0

69. TÁBLÁZAT

Pénzfajta	**Egységek (milliárdban)**
Dollár	6
Font	3
Márka	1
Jen	10

Donald célja az, hogy a pénzmozgatás végén aznap a valutakészletek kielégítsék a fent leírt minimum előírásokat úgy, hogy maximalizálja a pénzkészlet értékét dollárban.
Egy font dollárértékét például úgy lehet kiszámítani, hogy átlagoljuk a két konvertálási hányadost. Így egy font körülbelül

$$\frac{1.697+(1/.58928)}{2} = 1.696993 \text{ dollárt ér.}$$

Írjuk fel a megfelelő LP-t!

Irodalom

A következő hat könyv mindegyike érdekesebbnél érdekesebb LP problémák tárháza:

Bradley, S., A. Hax, and T. Magnanti. *Applied Mathematical Programming.* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1977.

Lawrence, K., and S. Zanakis. *Production Planning and Scheduling: Mathematical Programming Applications.* Atlanta, Ga: Industrial Engineering and Management Press, 1984.

Schrage, L. *Linear Integer and Quadratic Programming With LINDO.* Palo Alto, Calif.: Scientific Press, 1986.

Shapiro, J. *Optimization Models for Planning and Allocation: Text and Cases in Mathematical Programming.* New York: Wiley, 1984.

Wagner, H. *Principles of Operations Research,* 2d ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1975.

Williams, H. *Model Building in Mathematical Programming*, 2d ed. New York: Wiley, 1985.

További olvasmányok:

Baker, K. „Scheduling a Full-Time Work Force to Meet Cyclic Staffing Requirements," *Management Science* 20(1974):1561–1568.

Balintfy, J. „A Mathematical Programming System for Food Management Applications," *Interfaces* 6(no. 1, pt 2, 1976):13–31.

Carino, H., and C. Lenoir. „Optimizing Wood Procurement in Cabinet Manufacturing," *Interfaces* 18(no. 2, 1988):11–19.

Chandy, K. „Pricing in the Government Bond Market," *Interfaces* 16(1986):65–71.

Charnes, A., and W. Cooper. „Generalization of the Warehousing Model," *Operational Research Quarterly* 6(1955):131–172.

Cheung, H., and J. Auger. „Linear Programming and Land Use Allocation," *Socio-Economic Planning Science* 10(1976):43–45.

Darnell, W., and C. Loflin. „National Airlines Fuel Management and Allocation Model," *Interfaces* 7(no. 3, 1977):1–15.

Dobson, G., and S. Kalish „Positioning and Pricing a Product Line," *Marketing Science* 7(1988):107–126.

Forgionne, G. „Corporate MS Activities: An Update," *Interfaces* 13(1983):20–23.

Franklin, A., and E. Koenigsberg. „Computed School Assignments in a Large District," *Operations Research* 21(1973):413–426.

Garvin, W., et al. „Applications of Linear Programming in the Oil Industry," *Management Science* 3(1957):407–430.

Glassey, R., and V. Gupta. „An LP Analysis of Paper Recycling." In *Studies in Linear Programming,* ed. H. Salkin and J. Saha. New York: North-Holland, 1975.

Hartley, R. „Decision Making When Joint Products Are Involved," *Accounting Review* (1971):746–755.

Heady, E., and A. Egbert. „Regional Planning of Efficient Agricultural Patterns," *Econometrica* 32(1964):374–386.

Hilal, S., and W. Erickson. „Matching Supplies to Save Lives: Linear Programming the Production of Heart Valves," *Interfaces* 11(1981):48–56.

Jain, S., K. Stott, and E. Vasold. „Orderbook Balancing Using a Combination of LP and Heuristic Techniques," *Interfaces* 9(no. 1, 1978):55–67.

Lanzenauer, C., et al. „RRSP Flood: LP to the Rescue," *Interfaces* 17(no. 4, 1987):27–41.

Lilien, G., and P. Kotler. *Marketing Decision Models.* New York: Harper and Row, 1983.

Magoulas, K., and D. Marinos-Kouris. „Gasoline Blending LP," *Oil and Gas Journal* (July 18, 1988):44–48.

Moondra, S. „An LP Model for Workforce Scheduling in Banks," *Journal of Bank Research* (1976).

Myers S., and C. Pogue. „A Programming Approach to Corporate Financial Management," *Journal of Finance* 29(1974):579–599.

Neave, E., and J. Wiginton. *Financial Management: Theory and Strategies.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1981.

Robbins, W., and N. Tuntiwonpiboon. „Linear Programming a Useful Tool in Case-Mix Management," *HealthCare Financial Management* (1989):114–117.

Robichek, A., D. Teichroew, and M. Jones. „Optimal Short-Term Financing Decisions," *Management Science* 12(1965):1–36.

Rohn, E. „A New LP Approach to Bond Portfolio Management," *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 22(1987):439–467.

Rothstein, M. „Hospital Manpower Shift Scheduling by Mathematical Programming," *Health Services Research* (1973).

Smith, S. „Planning Transistor Production by Linear Programming," *Operations Research* 13(1965):132–139.

Stigler, G. „The Cost of Subsistence," *Journal of Farm Economics* 27(1945).

Sullivan, R., and S. Secrest. „A Simple Optimization DSS for Production Planning at Dairyman's Cooperative Creamery Association," *Interfaces* 15(no. 5, 1985):46–54.

Weingartner, H. *Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1963.

4

A szimplex algoritmus

A 3. fejezetben láttuk, hogyan kell a kétváltozós lineáris programozási feladatokat grafikusan megoldani. Sajnos a legtöbb, a valós életből származó LP feladatnak sok változója van, s így szükség van a két változónál többet tartalmazó LP feladatokat is megoldó módszerre. Ennek a fejezetnek a nagy részét a szimplex algoritmus tárgyalásának szenteljük, amellyel akár igen nagy méretű LP feladatokat is meg tudunk oldani. Sok ipari alkalmazásban több ezer feltételt és változót tartalmazó LP feladat megoldása is kiszámolható a szimplex algoritmussal. Ebben a fejezetben azt írjuk le, hogyan használható a szimplex algoritmus LP feladatok optimális megoldásainak megtalálására. Röviden kitérünk Karmarkar izgalmas, újszerű megközelítésére is.

4.1. Hogyan alakítsunk át egy LP feladatot standard alakúvá?

Láttuk, hogy egy LP feladatnak mind egyenlőség, mind egyenlőtlenség feltételei lehetnek. Lehetnek benne olyan változók, amelyek nemnegatívak és olyanok is, amelyek előjelkorlátozatlanok. Mielőtt a szimplex algoritmust alkalmaznánk egy LP feladat megoldására, át kell alakítani olyan formára, melyben minden feltétel egyenlőség, és minden változó nemnegatív. Egy ilyen alakú feladatot **standard feladatnak** nevezünk.[1]

Ahhoz, hogy egy LP feladatot standard alakúvá alakítsunk, minden egyenlőtlenség típusú feltételt ki kell cserélnünk egyenlőség feltétellel. Ezt az eljárást a következő feladaton szemléltetjük.

1. PÉLDA A Bőripari Kft. kétfajta övet készít: a luxus modellt és az egyszerűt. Mindegyikhez 1 négyzetméter bőr szükséges. Az egyszerű öv elkészítéséhez 1 órányi, a luxushoz pedig 2 órányi szakmunka szükséges. Minden héten 40 négyzetméter bőr és 60 órányi szakmunkakeret áll rendelkezésre. Minden közönséges övből 3$, minden luxus övből pedig 4$ profit származik. Az

$$x_1 = \text{a hetente gyártott luxus övek száma}$$
$$x_2 = \text{a hetente gyártott közönséges övek száma}$$

változókkal felírható LP feladat:

[1] A fejezet első részében végig feltételezzük, hogy az összes változónak nemnegatívnak kell lennie (≥ 0). Az előjelkorlátozatlan (ekn) változók nemnegatív változókká történő átalakítását a 4.10. alfejezetben tárgyaljuk.

$$\begin{array}{llr} \max\ z = 4x_1 + 3x_2 & & \text{(LP 1)} \\ \text{f.h.} \quad x_1 + \ x_2 \le 40 & \text{(anyagfelhasználási feltétel)} & (1) \\ \quad 2x_1 + \ x_2 \le 60 & \text{(munkafelhasználási feltétel)} & (2) \\ \quad x_1, x_2 \ge 0 & & \end{array}$$

Hogyan alakíthatjuk át az (1) és (2) feltételeket egyenlőségekké? Definiálunk minden $\le$ feltételre egy s_i **kiegészítő változót:** $s_i =$ az i-edik feltételhez tartozó kiegészítő változó, amely az i-edik erőforrás fel nem használt mennyisége. Mivel $x_1 + x_2$ négyzetméternyi bőrt használnak fel és 40 négyzetméter áll rendelkezésre, azért s_1-et a következőképpen definiáljuk:

$$s_1 = 40 - x_1 - x_2 \quad \text{vagy} \quad x_1 + x_2 + s_1 = 40$$

Hasonlóan adódik s_2:

$$s_2 = 60 - 2x_1 - x_2 \quad \text{vagy} \quad 2x_1 + x_2 + s_2 = 60$$

Vegyük észre, hogy egy (x_1, x_2) pont akkor és csak akkor elégíti ki az i-edik feltételt, ha $s_i \ge 0$. Például, $x_1 = 15, x_2 = 20$ kielégíti (1)-et, mert $s_1 = 40 - 15 - 20 = 5 \ge 0$.

Egyszerű okoskodással: (1)-et kielégíti a $(15, 20)$ pont, mert $s_1 = 5$ négyzetméter bőr felhasználatlan marad. Hasonlóan, $(15, 20)$ kielégíti a (2) feltételt, mert $s_2 = 60 - 2(15) - 20 = 10$ munkaóra marad felhasználatlan. Végül figyeljük meg, hogy az $x_1 = x_2 = 25$ pont nem elégíti ki a (2) feltételt, mert $s_2 = 60 - 2(25) - 25 = -15$ azt mutatja, hogy a $(25, 25)$ termelés-vektor több munkát használ fel, mint amire kapacitás van.

Összegezve: az (1) feltétel egyenlőséggé alakítása céljából helyettesítsük (1)-et az $s_1 = 40 - x_1 - x_2$ (vagy $x_1 + x_2 + s_1 = 40$) és $s_1 \ge 0$ feltételekkel. A (2) feltétel egyenlőséggé alakításakor pedig kicseréljük (2)-t az $s_2 = 60 - 2x_1 - x_2$ (vagy $2x_1 + x_2 + s_2 = 60$) és $s_2 \ge 0$ feltételekkel. Ezek a változások az (LP 1) feladatot a következő alakra hozzák:

$$\begin{array}{ll} \max\ z = 4x_1 + 3x_2 & \\ \text{f.h.} \quad x_1 + \ x_2 + s_1 \quad = 40 & \\ \quad 2x_1 + \ x_2 \quad + s_2 = 60 & \text{(LP 1}'\text{)} \\ \quad x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0 & \end{array}$$

Az LP $1'$ tehát standard alakú. Összefoglalva, *ha egy LP feladat i-edik feltétele egy $\le$ feltétel, akkor a feltétel bal oldalához egy s_i kiegészítő változót hozzáadva alakítjuk egyenlőséggé, egyúttal hozzávéve a modellhez az $s_i \ge 0$ előjelkorlátozást.* Egy $\ge$ feltétel egyenlőségi feltétellé alakításának szemléltetésére tekintsük a 3.4. alfejezetben ismertetett étrendi feladatot.

$$\begin{array}{lllr} \min\ z = & 50x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 80x_4 & & \\ \text{f.h.} & 400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 \ge 500 & \text{(kalória feltétel)} & (3) \\ & 3x_1 + 2x_2 \ge 6 & \text{(csokoládé feltétel)} & (4) \\ & 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 \ge 10 & \text{(cukor feltétel)} & (5) \\ & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 \ge 8 & \text{(zsiradék feltétel)} & (6) \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 & & \end{array}$$

Az i-edik $\geq$ feltétel egyenlőséggé átalakításához bevezetünk egy e_i **kiegyenlítő változót** (néha többlet-változónak is nevezik). e_i mindig az i-edik feltétel kiegyenlítő változója lesz. Az e_i-t azon mennyiségként definiáljuk, amennyivel az i-edik feltétel „túlteljesített”. Így, az étrendi feladat esetében

$$e_1 = 400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 - 500, \quad \text{vagy} \tag{3'}$$
$$400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 - e_1 = 500$$
$$e_2 = 3x_1 + 2x_2 - 6, \quad \text{vagy} \quad 3x_1 + 2x_2 - e_2 = 6 \tag{4'}$$
$$e_3 = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 10, \quad \text{vagy} \quad 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 - e_3 = 10 \tag{5'}$$
$$e_4 = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 - 8, \quad \text{vagy} \quad 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 - e_4 = 8 \tag{6'}$$

Egy (x_1, x_2, x_3, x_4) pont akkor és csak akkor elégíti ki az i-edik $\geq$ feltételt, ha e_i nemnegatív. Például $(4')$ alapján az adódik, hogy $e_2 \geq 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $3x_1 + 2x_2 \geq 6$. Számpéldaként vegyük az $x_1 = 2, x_3 = 4, x_2 = x_4 = 0$, pontot, amely kielégíti az étrendi probléma mind a négy feltételét. Ezt a következő számolás mutatja:

$$\begin{aligned}
e_1 &= 400(2) + 150(4) - 500 = 900 \geq 0 \\
e_2 &= 3(2) - 6 = 0 \geq 0 \\
e_3 &= 2(2) + 4(4) - 10 = 10 \geq 0 \\
e_4 &= 2(2) + 4 - 8 = 0 \geq 0
\end{aligned}$$

Másik példaként vegyük a következő értékeket: $x_1 = x_2 = 1, x_3 = x_4 = 0$. Ez a pont nem megengedett; megsérti a csokoládé-, a cukor- és a zsiradék-korlátokat kifejező feltételeket. A nem megengedettség a következőképpen látható:

$$\begin{aligned}
e_2 &= 3(1) + 2(1) - 6 &&= -1 < 0 \\
e_3 &= 2(1) + 2(1) - 10 &&= -6 < 0 \\
e_4 &= 2(1) + 4(1) - 8 &&= -2 < 0
\end{aligned}$$

Ahhoz tehát, hogy az étrendi problémát standard alakra hozzuk, helyettesítsük (3)-at $(3')$-vel; (4)-et $(4')$-vel; (5)-öt $(5')$-vel; és (6)-ot $(6')$-vel. Emellett a feltételekhez hozzá kell vennünk még az $e_i \geq 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ előjelkorlátokat. Az eredményül kapott LP feladat standard alakú és a következőképpen írható fel:

$$\begin{array}{lrrrrrrrrl}
\min z = & 50x_1 + & 20x_2 + & 30x_3 + & 80x_4 & & & & & \\
\text{f.h.} & 400x_1 + & 200x_2 + & 150x_3 + & 500x_4 & - e_1 & & & & = 500 \\
 & 3x_1 + & 2x_2 & & & & - e_2 & & & = 6 \\
 & 2x_1 + & 2x_2 + & 4x_3 + & 4x_4 & & & - e_3 & & = 10 \\
 & 2x_1 + & 4x_2 + & x_3 + & 5x_4 & & & & - e_4 & = 8 \\
 & & & x_i, e_i \geq 0 & \multicolumn{4}{l}{(i = 1, 2, 3, 4)} & &
\end{array}$$

Összefoglalva, *ha egy LP probléma i-edik feltétele egy $\geq$ feltétel, akkor ez a feltétel úgy alakítható át egyenlőség alakú feltétellé, hogy az i-edik korlátozó feltételből kivonunk egy e_i kiegyenlítő változót és hozzávesszük a modellhez az $e_i \geq 0$ előjelkorlátozásokat*.

Ha egy LP problémában $\leq$ és $\geq$ feltételek egyaránt előfordulnak, akkor a most leírt módszert alkalmazzuk az egyes feltételekre. Példaként a 3.7. alfejezet rövid távú pénzügyi tervezési modelljét hozzuk standard alakra! Idézzük fel az eredeti LP feladatot:

$$\begin{aligned}
\max\ z &= 20x_1 + 15x_2 \\
\text{f.h.}\quad & x_1 \le 100 \\
& x_2 \le 100 \\
& 50x_1 + 35x_2 \le 6000 \\
& 20x_1 + 15x_2 \ge 2000 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

Az előbb leírt módszert követve ezt az LP feladatot standard alakúvá transzformáljuk az s_1, s_2 és s_3 kiegészítő változókat az első 3 feltételhez hozzáadva, és egy e_4 kiegészítő változót a negyedik feltételből kivonva. Ezután bevezetjük az $s_1 \ge 0, s_2 \ge 0, s_3 \ge 0$ és $e_4 \ge 0$ feltételeket. Ez a következő standard alaku LP feladatra vezet:

$$\begin{aligned}
\max\ z &= 20x_1 + 15x_2 \\
\text{f.h.}\quad & x_1 + s_1 = 100 \\
& x_2 + s_2 = 100 \\
& 50x_1 + 35x_2 + s_3 = 6000 \\
& 20x_1 + 15x_2 - e_4 = 2000 \\
& x_i \ge 0\ (i = 1,2);\ s_i \ge 0\ (i = 1,2,3);\ e_4 \ge 0
\end{aligned}$$

Természetesen jelölhettük volna a negyedik feltételhez tartozó kiegyenlítő változót e_1-gyel is (mivel ez az első kiegyenlítő változó). Mégis inkább az e_4 jelölést használjuk, mint az e_1-et, arra utalva hogy e_4 a negyedik feltételhez tartozó kiegyenlítő változó.

Feladatok

A csoport

1. Hozzuk a Giapetto problémát (az 1. példa a 3. fejezetben) standard alakra!

2. Hozzuk a Dorian problémát (a 2. példa a 3. fejezetben) standard alakra!

3. Hozzuk a következő LP problémát standard alakra:

$$\begin{aligned}
\min\ z &= 3x_1 + x_2 \\
\text{f.h.}\quad & x_1 \ge 3 \\
& x_1 + x_2 \le 4 \\
& 2x_1 - x_2 = 3 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

4.2. A szimplex algoritmus előzetes áttekintése

Tegyük fel, hogy egy m feltételt tartalmazó LP feladatot átalakítottunk standard alakra. Feltéve, hogy a standard alak n változót tartalmaz (amelyeket a legkényelmesebb lehetőséget választva $x_1, x_2, \dots, x_n$-nel jelölünk), a standard alak erre az LP feladatra nézve a következő:

$$\begin{aligned}
\max\ z = &\ c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&(\text{vagy min}) \\
\text{f.h.}\quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_i \ge 0\ (i = 1,2,\dots,n)
\end{aligned} \tag{7}$$

Legyen:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

és

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Ekkor a (7) feladat feltételei az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszerként írhatók fel. Mielőtt továbblépnénk a szimplex módszer tárgyalásában, definiálnunk kell a lineáris egyenletrendszer bázismegoldásának fogalmát.

Bázisváltozók és bázison kívüli (nembázis) változók

Vegyünk egy m számú egyenletből álló n változós $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszert (tegyük fel, hogy $n \geq m$).

DEFINÍCIÓ

Az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer egy bázismegoldása úgy kapható meg, hogy $n - m$ változót nullának veszünk és megoldjuk az egyenletrendszert a fennmaradó m változóra. Ez azt feltételezi, hogy $n - m$ változót 0-nak véve egyértelmű megoldást kapunk a fennmaradó m változóra, illetve, ami ugyanezt jelenti, a fennmaradó m változó oszlopai lineárisan függetlenek.

Ahhoz, hogy az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer egy bázismegoldását megtaláljuk, kiválasztunk egy $n - m$ változóból álló rendszert (ezek a **nembázis változók**, vagy NBV) és ezeket mind 0-nak vesszük. Ezután meghatározzuk a maradék $n - (n - m) = m$ változó (a **bázisváltozók**, vagy BV) olyan értékeit, amelyek kielégítik az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ rendszert.

Természetesen a bázison kívüli változók különböző megválasztása különböző bázismegoldásokhoz vezet. Ezt szemléltetendő, keressük meg a következő három változós, két egyenletből álló egyenletrendszer összes bázismegoldását:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &= 3 \\ -x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned} \tag{8}$$

Azzal kezdjük, hogy kiválasztunk egy $3 - 2 = 1$ (3 változó, 2 egyenlet) nembázis változóból álló halmazt. Például, ha $NBV = \{x_3\}$, akkor $BV = \{x_1, x_2\}$. A bázisváltozók értékeit megkapjuk az $x_3 = 0$ helyettesítés után megoldva a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ -x_2 &= -1 \end{aligned}$$

Azt kapjuk, hogy $x_1 = 2, x_2 = 1$. Így $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0$ egy bázismegoldása (8)-nak. Ha viszont $NBV = \{x_1\}$ és így $BV = \{x_2, x_3\}$ a választásunk, akkor az $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 2$ bázismegoldást kapjuk. Ha $NBV = \{x_2\}$-t választjuk, akkor az $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = -1$ bázismegoldást kapjuk. Az olvasó ellenőrizheti ezeket az eredményeket.

Egyes m változóból álló egyenletrendszereknek nincs bázismegoldásuk. Tekintsük például a következő lineáris egyenletrendszert:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 3$$

Ha a következő a választásunk: $NBV = \{x_3\}$ és $BV = \{x_1, x_2\}$, akkor az ehhez tartozó bázismegoldást a következő egyenletrendszer megoldásával kapjuk:

$$x_1 + 2x_2 = 1$$
$$2x_1 + 4x_2 = 3$$

Mivel ennek az egyenletrendszernek nincs megoldása, nem létezik a $BV = \{x_1, x_2\}$ választáshoz tartozó bázismegoldás.

Lehetséges megoldások

Az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ bázismegoldásainak egy bizonyos részhalmaza fontos szerepet játszik a lineáris programozás elméletében.

DEFINÍCIÓ

A (7) egyenletrendszer bármely olyan bázismegoldása, amelyben minden változó nemnegatív, egy **lehetséges bázismegoldás** (vagy **lbm**).

Tehát a (8)-ban megadott korlátozó feltételekkel rendelkező LP feladat $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0$ és $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 2$ bázismegoldásai *lehetséges* bázismegoldások, de az $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = -1$ bázismegoldás már nem lehetséges (mert $x_3 < 0$).

A következő két tétel megmagyarázza, hogy a lehetséges bázismegoldások fogalma miért olyan fontos a lineáris programozásban (további részletek iránt érdeklődőknek ajánljuk Luenberger [1984] művét).

1. TÉTEL

Bármely lineáris programozási feladat lehetséges tartománya konvex halmaz. Továbbá, ha egy LP feladatnak van optimális megoldása, akkor a lehetséges tartományban lennie kell egy olyan extremális pontnak, amelyik optimális.

Amikor LP feladatok grafikus megoldásával foglalkoztunk a 3.2. alfejezetben, akkor intuitív módon beláttuk az 1. tételt. Idézzük fel azt a megállapítást, hogy ha egy kétváltozós LP feladatnak van optimális megoldása, akkor van optimális extremális pontja is!

2. TÉTEL

Bármely LP feladat esetében igaz, hogy az LP lehetséges tartományában minden egyes lehetséges bázismegoldáshoz egyetlen extremális pont tartozik. Ugyanakkor a lehetséges tartomány minden extremális pontjához pedig legalább egy lbm (lehetséges bázismegoldás) tartozik.

Az extremális pontok és lehetséges bázismegoldások között a 2. tételben megfogalmazott kapcsolat szemléltetésére tekintsük a 4.1. alfejezetben ismertetett Bőripari Kft.-vel kapcsolatos példát. Emlékezzünk vissza, hogy az LP feladat a következő volt:

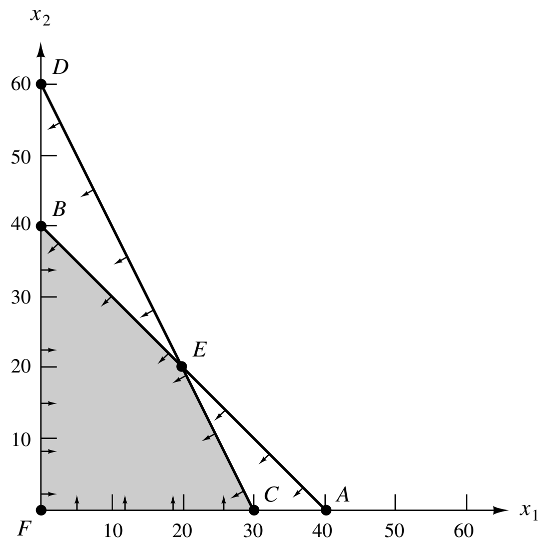
$$\begin{aligned} \max\ z &= 4x_1 + 3x_2 && \text{(LP 1)}\\ \text{f.h.}\quad x_1 + x_2 &\le 40 && (1)\\ 2x_1 + x_2 &\le 60 && (2)\\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Az s_1 és s_2 kiegészítő változókat az (1), illetve a (2) feltételhez hozzáadva az LP 1 feladatot standard alakban kapjuk meg:

$$\left.\begin{aligned} \max\ z &= 4x_1 + 3x_2\\ \text{f.h.}\quad x_1 + x_2 + s_1 &= 40\\ 2x_1 + x_2 + s_2 &= 60\\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\ge 0 \end{aligned}\right.\qquad \text{(LP 1}'\text{)}$$

A Bőripari Kft.-vel kapcsolatos feladat lehetséges tartományát az 1. ábra szemlélteti. Mindkét egyenlőtlenség teljesül azokra a pontokra, melyek: (1) az $AB(x_1 + x_2 = 40)$ egyenesen vagy alatta, s egyben: (2) a $CD(2x_1 + x_2 = 60)$ egyenesen vagy alatta helyezkednek el. Így az LP 1 feladat lehetséges tartománya a besötétített $BECF$ négyszögtartomány. A lehetséges tartomány extremális pontjai a következők: $B = (0, 40), C = (30, 0), E = (20, 20)$ és $F = (0, 0)$.

1. ÁBRA
Lehetséges tartomány a Bőripari Kft. problémájánál



Az 1. táblázat bemutatja a megfeleltetést az LP 1′ feladat lehetséges bázismegoldásai és az LP 1 feladat lehetséges tartományának extremális pontjai között. Ez a példa azt világítja meg számunkra, hogy egy LP feladat standard alakjának lehetséges bázismegoldásai hogyan feleltethetők meg természetes módon az eredeti LP feladat extremális pontjainak.

Most már meg tudjuk indokolni az 1. és 2. tétel fontosságát. Az 1. tétel azt mondja ki, hogy amikor az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ feltételrendszerű LP feladat optimális megoldását keressük, akkor elég ezt csak a feladat lehetséges megoldástartománya extremális pontjai között megtennünk. A 2. tétel értelmében az LP feladat lehetséges megoldástartományának extremális pontjai teljes egészében kiadják az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer lehetséges bázismegoldásait. Összerakva ezeket az állításokat láthatjuk, hogy *egy LP feladat* megoldásához csak az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer legjobb megengedett bázismegoldását (*a legnagyobb z értéket max probléma esetében, vagy a legkisebb z értéket min probléma esetén*) kell megtalálnunk.

1. TÁBLÁZAT A Bőripari Kft.-hez kapcsolódó probléma lehetséges bázismegoldásai és csúcspontjai közötti megfeleltetés

Bázis-változók	**Nembázis változók**	**Lehetséges bázismegoldás**	**A megfelelő csúcspont**
x_1, x_2	s_1, s_2	$s_1 = s_2 = 0, x_1 = x_2 = 20$	E
x_1, s_1	x_2, s_2	$x_2 = s_2 = 0, x_1 = 30, s_1 = 10$	C
x_1, s_2	x_2, s_1	$x_2 = s_1 = 0, x_1 = 40, s_2 = -20$	nem lbm, mert $s_2 < 0$
x_2, s_1	x_1, s_2	$x_1 = s_2 = 0, s_1 = -20, x_2 = 60$	nem lbm, mert $s_1 < 0$
x_2, s_2	x_1, s_1	$x_1 = s_1 = 0, x_2 = 40, s_2 = 20$	B
s_1, s_2	x_1, x_2	$x_1 = x_2 = 0, s_1 = 40, s_2 = 60$	F

Szomszédos lehetséges bázismegoldások

Mielőtt általánosságban leírjuk a szimplex algoritmust, definiálnunk kell a szomszédos lehetséges bázismegoldások fogalmát.

DEFINÍCIÓ

Tetszőleges m feltétellel rendelkező **LP** feladat esetében két lehetséges bázismegoldást szomszédosnak nevezünk, ha bázisváltozóik halmazában $m-1$ változó közös.

Az 1. ábrán például két lehetséges bázismegoldás szomszédos lesz, ha $2-1=1$ bázisváltozójuk közös. Így, az 1. ábrán az E pontnak megfelelő lbm (lehetséges bázismegoldás) szomszédos a C pontnak megfelelő lbm-mel. Az E pont azonban nem szomszédos az F lbm-mel. Szemléletesen kifejezve: két bázismegoldás akkor szomszédos, ha mindketten a lehetséges tartomány határának ugyanazon az élén fekszenek.

Most megadjuk az LP feladatok szimplex megoldó algoritmusának általános leírását maximum probléma esetére.

1. lépés Keressünk egy lbm-et az LP feladathoz! Ezt az lbm-et induló lehetséges bázismegoldásnak nevezzük. Általánosságban, a legutoljára kiszámított lbm-et aktuális lbm-nek nevezzük, s így a feladat megoldásának kezdetén az induló lbm az aktuális lbm.

2. lépés Döntsük el, hogy az aktuális lbm optimális megoldása-e az LP feladatnak! Ha nem, keressünk egy olyan szomszédos lbm-et, mely esetében nagyobb a hozzátartozó z érték.

3. lépés Térjünk vissza a 2. lépéshez az új lbm-et aktuális lbm-nek használva fel.

Ha egy standard alakú LP feladatnak m feltétele és n változója van, akkor a nembázis változók minden különböző megválasztásához tartozhat egy bázismegoldás. n változóból $n-m$ nembázis változó (vagy ezzel egyenértékűen m bázisváltozó)

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

különböző módon választható ki. Így, egy LP feladatnak legfeljebb

$$\binom{n}{m}$$

bázismegoldása lehet. Mivel egyes bázismegoldások esetleg nem lehetséges megoldások, egy LP feladatnak legfeljebb

$$\binom{n}{m}$$

lehetséges bázismegoldása lehet. Ha az aktuális lbm-ből mindig egy jobb lbm-re lépnénk át (anélkül, hogy valaha is visszatérnénk egy korábbi lbm-hez), akkor biztosan megtalálnánk az optimális lbm-et legfeljebb

$$\binom{n}{m}$$

lehetséges bázismegoldás megvizsgálása után. Ez azt jelenti (feltéve, hogy egyetlen lbm sem ismétlődik), hogy a szimplex algoritmus véges számú lépésben meg fogja találni az optimális megoldást. A 4.7. alfejezetben vissza fogunk térni még ehhez a gondolatmenethez.

Elvben leszámlálhatnánk egy LP feladat összes lehetséges bázismegoldását, megtalálva a legnagyobb z értéket adó lbm-et. Ezzel a megközelítéssel az a gond, hogy még kis LP feladatoknak is igen nagy számú lehetséges bázismegoldása van. Egy 20 változóval és 10 feltétellel rendelkező standard alakú LP-nek például (ha minden bázismegoldás lehetséges megoldás) akár

$$\binom{20}{10} = 184\,756$$

lehetséges bázismegoldása is lehet. Szerencsére a szimplex algoritmussal szerzett óriási mennyiségű tapasztalat igazolja, hogy amikor ezt az algoritmust egy n változóval és m feltétellel rendelkező, standard alakú LP feladatra alkalmazzuk, általában már kevesebb, mint $3m$ lehetséges bázismegoldás megvizsgálása után találunk egy optimális megoldást. Így egy 20-feltételes, 10-változós standard alakú LP feladat esetén a szimplex algoritmus általában kevesebb mint $3(10) = 30$ lehetséges bázismegoldás megvizsgálása után meg fogja találni az optimális megoldást. Összehasonlítva ezt 184 756 bázismegoldás megvizsgálásának alternatívájával, a szimplex módszer egészen hatékony![2]

Háromdimenziós LP feladatok geometriája

Tekintsük a következő LP feladatot:

$$\begin{aligned}
\max z = {}& x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\
\text{f.h.} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\
& x_3 \leq 10 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

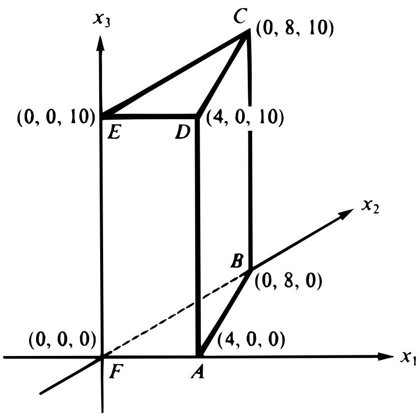
Egy három- (vagy több-) dimenziós lineáris egyenlőtlenséget kielégítő pontok **félteret** alkotnak. Például a $2x_1 + x_2 \leq 8$ egyenlőtlenséget a háromdimenziós térben kielégítő pontok egy félteret alkotnak. Így, az előbb megadott LP feladatunk lehetséges tartománya a következő öt féltér metszete: $2x_1 + x_2 \leq 8, x_3 \leq 10, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, és $x_3 \geq 0$. Félterek metszetét **poliédernek** nevezzük. LP feladatunk lehetséges tartománya a 2. ábrán látható hasáb.

A lehetséges tartomány minden oldallapjához tartozik egy korlátozó feltétel (vagy előjelkorlátozás), amely e lap összes pontjában aktív. Például a $2x_1 + x_2 \leq 8$ feltétel aktív az $ABCD$ lapon; $x_3 \geq 0$ aktív az ABF lapon; $x_3 \leq 10$ aktív a DEC lapon; $x_2 \geq 0$ aktív az $ADEF$ lapon; $x_1 \geq 0$ pedig aktív a $CBFE$ lapon.

Nyilvánvalóan a csúcs- (vagy extremális) pontok az LP feladat lehetséges tartományában az A, B, C, D, E és F lesznek. Ennél az esetnél az lbm-ek és csúcspontok közötti megfeleltetést a 2. táblázat mutatja.

[2]Nagyon sok 50 változót és $m \leq 50$ feltételt tartalmazó LP feladatot megoldva Chvàtal (1983) azt találta, hogy a szimplex algoritmus átlagosan $2m$ lehetséges bázismegoldást vizsgált meg, mielőtt megtalálta az LP feladat optimális megoldását.

2. ÁBRA
Lehetséges tartomány három dimenzióban



2. TÁBLÁZAT
A lehetséges bázismegoldások (lbm-ek) és csúcspontok közötti megfeleltetés

Bázis-változók	**Lehetséges bázismegoldás**	**Megfelelő csúcspont**
x_1, x_3	$x_1 = 4, x_3 = 10, x_2 = s_1 = s_2 = 0$	D
s_1, s_2	$s_1 = 8, s_2 = 10, x_1 = x_2 = x_3 = 0$	F
s_1, x_3	$s_1 = 8, x_3 = 10, x_1 = x_2 = s_2 = 0$	E
x_2, x_3	$x_2 = 8, x_3 = 10, x_1 = s_1 = s_2 = 0$	C
x_2, s_2	$x_2 = 8, s_2 = 10, x_1 = x_3 = s_1 = 0$	B
x_1, s_2	$x_1 = 4, s_2 = 10, x_2 = x_3 = s_1 = 0$	A

A szomszédos lehetséges bázismegoldások fogalmának szemléltetésére figyeljük meg, hogy az A, E és B csúcspontok azok, amelyek az F csúcsponttal szomszédosak. Így, ha a szimplex algoritmus F-ből indul, akkor biztosak lehetünk abban, hogy a következő lbm az A, E vagy B lesz.

Feladatok

A csoport

1. A Giapetto problémában (a 3. fejezet 1. példája) vizsgáljuk meg, hogy a standard alakú LP feladat lehetséges megoldásai hogyan felelnek meg a lehetséges tartomány extremális pontjainak!

2. A Dorian problémában (a 3. fejezet 2. példája) vizsgáljuk meg, hogy a standard alakú LP feladat lehetséges megoldásai hogyan felelnek meg a lehetséges tartomány extremális pontjainak!

3. A Widgetco cég két terméket állít elő: az 1. és 2. terméket. Az ezekhez szükséges nyersanyag és munka mennyisége, valamint eladási áruk a 3. táblázatban látható.

3. TÁBLÁZAT

	1. termék	**2. termék**
Nyersanyag	1 egység	2 egység
Munka	2 óra	1 óra
Eladási ár	7$	8$

350 egységnyi mennyiségig a nyersanyag egységenkénti 2.00$-os áron szerezhető be, míg 400 óráig a munkaerő 1.50$/óra áron biztosítható. A profit maximalizálására a Widgetcónak a következő LP feladatot kell megoldania:

$$
\begin{aligned}
&\max\ z = 2x_1 + 2.5x_2 \\
&\text{f.h.} \quad x_1 + 2x_2 \le 350 \qquad \text{(nyersanyag)} \\
&\qquad\quad 2x_1 + x_2 \le 400 \qquad \text{(munka)} \\
&\qquad\quad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Itt x_i = az i-edik termékből termelt mennyiség. Szemléltessük a csúcspontok és a lehetséges bázismegoldások közötti megfeleltetést!

4.3. A szimplex algoritmus

Ebben az alfejezetben bemutatjuk, hogyan lehet a szimplex algoritmust olyan LP feladatok megoldására felhasználni, amelyekben a célfüggvény maximalizálása a feladat. A minimalizálási feladatok megoldását a 4.4. alfejezet tárgyalja.

A szimplex algoritmus a következőképpen működik:

1. lépés Hozzuk az LP feladatot standard alakra (lásd a 4.1. alfejezetet)!

2. lépés Állítsunk elő egy lbm-et (lehetséges bázismegoldást) – ha tudunk – a standard alakból!

3. lépés Döntsük el, hogy az aktuális lbm optimális-e!

4. lépés Ha az aktuális lbm nem optimális, határozzuk meg, melyik nembázis változónak kell bekerülnie a bázisba, s melyik bázisváltozónak kikerülnie onnan, hogy egy új, jobb célfüggvényértékkel rendelkező lbm-et kapjunk!

5. lépés Használjunk a feltételrendszert ekvivalensen változtató elemi sorműveleteket (esm) egy jobb célfüggvényértékkel rendelkező lbm előállítására! Térjünk vissza a 3. lépéshez!

A szimplex algoritmus végrehajtásakor a

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

célfüggvényt írjuk át a következő formára:

$$z - c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n = 0$$

A célfüggvénynek ezt az alakját a **0-ra rendezett változatnak** nevezzük (röviden célfüggvénysornak vagy a 0. sornak).

2. PÉLDA A Dakota Bútorkészítő Cég íróasztalokat, asztalokat és székeket gyárt. Mindegyik bútortípus gyártásához faanyag és kétféle szakmunka szükséges: durva asztalosmunka és felületkezelés. Az egyes bútortípusok előállításához a különböző erőforrásokból szükséges mennyiséget a 4. táblázat adja meg.

4. TÁBLÁZAT Erőforrás-szükségletek a Dakota Bútorkészítőnél

Erőforrás	**Íróasztal**	**Asztal**	**Szék**
Faanyag	8 egység	6 egység	1 egység
Felületkezelés	4 óra	2 óra	1.5 óra
Asztalosmunka	2 óra	1.5 óra	0.5 óra

Jelenleg 48 egység faanyag, 20 órányi felületkezelés és 8 órányi asztalosmunka kapacitás áll rendelkezésre. Egy íróasztal 60, egy asztal 30, egy szék pedig 20$-ért adható el. A Dakota cég azt gondolja, hogy íróasztalokra és székekre korlátlan kereslet van, de legfeljebb 5 asztal adható el. Mivel az erőforrásokat már megvásárolták, a Dakota cég az összjövedelmét kívánja maximalizálni. A döntési változókat a következőképp definiálva:

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{a gyártott íróasztalok száma} \\ x_2 &= \text{a gyártott asztalok száma} \\ x_3 &= \text{a gyártott székek száma} \end{aligned}$$

5. TÁBLÁZAT
0. kanonikus alak

			Bázis-változó
0. sor	$z - 60x_1 - 30x_2 - 20x_3$	$= 0$	$z = 0$
1. sor	$8x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1$	$= 48$	$s_1 = 48$
2. sor	$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + s_2$	$= 20$	$s_2 = 20$
3. sor	$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + s_3$	$= 8$	$s_3 = 8$
4. sor	$x_2 + s_4$	$= 5$	$s_4 = 5$

könnyen látható, hogy a Dakota cégnek a következő LP feladatot kell megoldania:

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\
\text{f.h.}\quad & 8x_1 + 6x_2 + x_3 \le 48 && \text{(faanyag feltétel)} \\
& 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \le 20 && \text{(felületkezelési feltétel)} \\
& 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \le 8 && \text{(asztalosmunka feltétel)} \\
& x_2 \le 5 && \text{(az asztal keresleti korlátja)} \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

Az LP feladat átalakítása standard formára

A szimplex algoritmust az LP feladat feltételeinek a 4.1. alfejezetben tárgyaltaknak megfelelően standard formára történő átalakításával kezdjük. Ezután az LP célfüggvényét a „0. sor” alakra hozzuk. A feltételek standard alakra hozásához egyszerűen rendre mindegyikhez hozzáadjuk az s_1, s_2, s_3 és s_4 kiegészítő változókat. Megszámozzuk a sorokat, és a feltételrendszerhez még hozzátesszük az $s_i \ge 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ előjelkorlátozó feltételeket. Figyeljük meg, hogy a „0. sor” alak célfüggvényünkre most a következő:

$$z - 60x_1 - 30x_2 - 20x_3 = 0$$

Összerakva az 1–4. sorokat, a 0. sort és az előjelkorlátokat, az 5. táblázatban található egyenleteket és bázisváltozókat kapjuk. Lineáris egyenletek egy olyan rendszerét (mint a 0. kanonikus alak, amit az 5. táblázat mutat), amelynél minden egyenletben van egy 1 együtthatójú változó (melynek az összes többi egyenletben 0 az együtthatója) kanonikus formának nevezzük. Hamarosan látni fogjuk, hogy ha egy kanonikus alakú rendszerben minden feltétel jobb oldala nemnegatív, akkor ránézésre meg tudunk adni egy lehetséges bázismegoldást.[3]

A 4.2. alfejezetből tudjuk, hogy a szimplex módszer egy induló bázismegoldással kezd, s megpróbál ebből egyre jobbakat előállítani. Ezért a kanonikus alak előállítása után egy induló lbm-et (lehetséges bázismegoldást) keresünk. Azonnal látható, hogy $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ választással az egyenletrendszert megoldhatjuk az s_1, s_2, s_3 és s_4 változókra úgy, hogy s_i-t egyenlőnek vesszük az i-edik sor jobb oldalával:

$$BV = \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \quad \text{és} \quad NBV = \{x_1, x_2, x_3\}$$

[3]Ha nem áll rendelkezésre egy nemnegatív jobb oldallal rendelkező kanonikus alak, akkor a 4.8.-ban és 4.9.-ben leírt módszer használható a kanonikus alak és egy lehetséges bázismegoldás előállítására.

A lehetséges bázismegoldás erre a bázisváltozó halmazra nézve a következő: $z = 0, s_1 = 48, s_2 = 20, s_3 = 8, s_4 = 5, x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Itt fontos észrevenni azt, hogy minden bázisváltozó hozzárendelhető a kanonikus alak azon sorához, amelyben ennek a bázisváltozónak 1 az együtthatója. Így a 0. kanonikus alaknál s_1 tekinthető az 1. sorhoz tartozó bázisváltozónak, csakúgy, mint s_2 a 2., s_3 a 3. és s_4 a 4. sorhoz tartozónak.

A szimplex algoritmus végrehajtásához szükségünk van egy a 0. sorhoz tartozó (nem szükségszerűen nemmnegatív) bázisváltozóra is. Mivel z az 1 együtthatóval szerepel a 0. sorban és nem szerepel egyetlen más sorban sem, ezért z-t e sor bázisváltozójaként használjuk. Ezzel a megállapodással az induló kanonikus alak bázismegoldásában:

$$BV = \{z, s_1, s_2, s_3, s_4\} \quad \text{és} \quad NBV = \{x_1, x_2, x_3\}$$

Erre a lehetséges bázismegoldásra $z = 0, s_1 = 48, s_2 = 20, s_3 = 8, s_4 = 5, x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Ahogy ez a példa is mutatja, egy kiegészítő változó akkor használható bázisváltozóként egy egyenlőségben, ha a jobb oldala nemnegatív.

Optimális-e az aktuális lehetséges bázismegoldás?

Amikor megkaptunk egy lehetséges bázismegoldást, meg kell határoznunk, hogy optimális-e? Ha egy lbm nem optimális, akkor megpróbálunk találni egy, a kiinduló lbm-mel szomszédos, nagyobb z értékkel rendelkező lbm-et. Ennek elérésére megpróbáljuk eldönteni, hogy van-e mód arra, hogy a z-t növeljük valamelyik bázison kívüli változó értékének – az aktuális 0 szintről való – növelésével, miközben az összes többi bázison kívüli változót jelenlegi 0 szintjén tartjuk. Ha z-t a 0. sorból átrendezéssel kifejezzük, akkor

$$z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \tag{9}$$

Minden bázison kívüli változó esetén használhatjuk (9)-et annak eldöntésére, hogy ennek növelése (közben a többi nembázis változót zéró szinten tartva) növeli-e z-t? Például tegyük fel, hogy x_1-et 1 értékkel növeljük (közben a többi nembázis változót, x_2-t és x_3-at zéró szinten tartva). Ekkor (9)-ből az adódik, hogy z 60 egységgel nő. Hasonlóan, ha úgy döntünk, hogy x_2-t növeljük 1-gyel (x_1 és x_3-at 0-nak rögzítve), akkor (9) azt adja, hogy z 30 egységgel nő. Végül, ha x_3-at növeljük 1-gyel (x_1-et és x_2-t 0-nak rögzítve), akkor (9)-ből adódik, hogy z 20 egységgel fog növekedni. Így azt látjuk, hogy a nembázis változók bármelyikének növelése növelni fogja z-t. Mivel egységnyi növelés x_1 esetén idézi elő a legnagyobb arányú növekedést a z-ben, ezért azt választjuk, hogy x_1-et növeljük meg jelenlegi 0 értékéről. Ha x_1 az eddigi 0 értékéről pozitív irányban elmozdul, akkor bázisváltozóvá válik. Ezért x_1-et a (bázisba) **belépő változónak** nevezzük. Figyeljük meg, hogy x_1-nek van a legnagyobb abszolút értékű negatív együtthatója a 0. sorban.

A belépő változó meghatározása

A belépő változónak (egy maximum feladatban) azt a nembázis változót választjuk, melynek együtthatója a 0. sorban levő negatív számok közül a legnagyobb abszolút értékű (ha több ilyen lenne, akkor tetszőlegesen választunk közülük). Mivel x_1 minden egy egységnyi növelése 60-nal növeli z-t, x_1-et olyan nagyra szeretnénk növelni, amilyenre csak lehet. Mi korlátoz abban, hogy milyen nagyra növelhetjük x_1-et? Gondoljunk arra, hogy ahogy x_1 növekszik, az aktuális bázisváltozók, (s_1, s_2, s_3 és s_4) értéke is változni fog. Ez azt jelenti, hogy x_1 növelése miatt egy bázisváltozó negatívvá válhat. Ezt szem előtt tartva megvizsgáljuk, hogy x_1 növelése (közben megtartva az $x_2 = x_3 = 0$ értékeket) hogyan változtatja meg az aktuális bázisváltozók értékét. Az első sorból látjuk, hogy $s_1 = 48 - 8x_1$ (emlékezzünk arra, hogy $x_2 = x_3 = 0$). Mivel az $s_1 \geq 0$ előjelkorlátozásnak teljesülnie kell, csak addig növelhetjük x_1-et, amíg $s_1 \geq 0$, tehát $48 - 8x_1 \geq 0$, azaz $x_1 \leq \frac{48}{8} = 6$. A 2. sorból: $s_2 = 20 - 4x_1$. Most x_1-et csak addig növelhetjük, amíg $s_2 \geq 0$, tehát x_1 ki kell elégítse a $20 - 4x_1 \geq 0$ azaz $x_1 \leq \frac{20}{4} = 5$ egyenlőtlenséget. A 3. sorból: $s_3 = 8 - 2x_1$ tehát $x_1 \leq \frac{8}{2} = 4$. A 4. sorból hasonlóképpen kapjuk, hogy $s_4 = 5$. Így, akármi legyen is az értéke x_1-nek, s_4 nemnegatív lesz. Összegezve:

$$
\begin{array}{lll}
s_1 \geq 0, & \text{ha} & x_1 \leq \dfrac{48}{8} = 6 \\
s_2 \geq 0, & \text{ha} & x_1 \leq \dfrac{20}{4} = 5 \\
s_3 \geq 0, & \text{ha} & x_1 \leq \dfrac{8}{2} = 4 \\
s_4 \geq 0, & \multicolumn{2}{l}{x_1 \text{ bármely értékére}}
\end{array}
$$

Ez azt jelenti, hogy ahhoz, hogy minden bázisváltozót nemnegatívan tartsunk, x_1 lehető legnagyobb értéke $\min\left\{\frac{48}{8}, \frac{20}{4}, \frac{8}{2}\right\} = 4$. Ha $x_1 > 4$, akkor s_3 negatívvá válik, és megoldásunk már nem lesz lehetséges bázismegoldás. Figyeljük meg, hogy minden olyan sor, amiben a belépő változó együtthatója pozitív volt, adott egy felső korlátot erre a változóra. Továbbá minden olyan sorban, amiben a belépő változó együtthatója pozitív volt, a sor bázisváltozója negatívvá vált, amikor a belépő változó meghaladta a

$$\frac{\text{a sor jobb oldala}}{\text{a sorba belépő változó együtthatója}} \tag{10}$$

értéket. Ha a belépő változónak nempozitív az együtthatója egy sorban (mint pl. x_1-nek a 4. sorban), akkor a sor bázisváltozója a belépő változó minden értékére pozitív marad. (10)-et felhasználva gyorsan meg tudjuk határozni, hogy milyen nagyra növelhető x_1 úgy, hogy egy bázisváltozó még ne váljon negatívvá.

$$
\begin{array}{rl}
\text{Az 1. sor adta (felső) korlát: } x_1 = \dfrac{48}{8} = 6 & \\
\text{A 2. sor adta korlát: } x_1 = \dfrac{20}{4} = 5 & \\
\text{A 3. sor adta korlát: } x_1 = \dfrac{8}{2} = 4 & \\
\text{A 4. sor adta korlát: } x_1 = \text{nincs korlát} & \text{(mivel } x_1 \text{ együtthatója a} \\
 & \text{4. sorban nempozitív)}
\end{array}
$$

Most már megfogalmazhatjuk a szabályt arra, hogy mekkora lehet a belépő változó legnagyobb értéke.

Hányados teszt

Amikor egy változó belép a bázisba, számítsuk ki a (10)-beli hányadost minden olyan feltételre, amelyben a belépő változó pozitív együtthatóval szerepel. A legkisebb hányadost adó feltételt a **hányados teszt győztese** (vagy más szóval a szűk keresztmetszet) névvel illetjük. Ez a legkisebb hányados a belépő változó olyan lehetséges legnagyobb értéke, ami az összes aktuális bázisváltozót nemnegatívan tartja. Példánkban a 3. sor volt a hányados teszt győztese az x_1 bázisba történő belépésekor.

Egy új lehetséges bázismegoldás keresése: báziscsere a belépő változó révén

Visszatérve a példánkhoz, tudjuk, hogy x_1 lehetséges legnagyobb értéke 4. Ahhoz, hogy x_1 4 legyen, bázisváltozóvá kell válnia. Megvizsgálva az 1–4. sorokat azt látjuk, hogy ha x_1 bázisváltozó az 1. sorban, akkor x_1 értéke $\frac{48}{8} = 6$ lesz; hasonlóan a 2. sorban bázisváltozóként x_1 értéke $\frac{20}{4} = 5$; a 3. sorban pedig $\frac{8}{2} = 4$. Továbbá, mivel x_1 nem szerepel a 4. sorban, x_1 ott nem válhat bázisváltozóvá. Így, ha $x_1 = 4$-et szeretnénk elérni, akkor bázisváltozóvá kell tennünk a 3. sorban.

Az a tény, hogy a hányados teszt „győztese" a 3. sor volt, példát mutat a következő szabály alkalmazására.

Melyik sorban válik a belépő változó bázisváltozóvá?

A belépő változót mindig abban a sorban tegyük bázisváltozóvá, amelyik a hányados teszt „győztese" (lásd előbb). Hogy x_1-et a 3. sorban bázisváltozóvá tegyük, elemi sorműveleteket végzünk, x_1 együtthatóját 1-gyé téve a 3. sorban és 0-vá az összes többi sorban. Ezt az eljárást a 3. sorban történő **báziscserének** nevezzük: a 3. sor a **generáló elem sora**. Végeredményben az x_1 bázisváltozóként a 3. sorban az s_3 helyébe lép. A báziscsere sorának az a tagja, amelyik a belépő változót tartalmazza, a **generáló elem** (az angol nyelvű szakirodalomban „pivot"-tag, az eljárás maga pedig a „pivotálás"). Úgy járva el, mint amikor a 2. fejezetben a Gauss–Jordan módszert alkalmaztuk, x_1-et a 3. sor bázisváltozójává tesszük a következő elemi sorműveletek (esm-ek) végrehajtásával.

1. esm Ahhoz, hogy a 3. sorban x_1 együtthatója 1 legyen, a 3. sort megszorozzuk $\frac{1}{2}$-del. Az eredményül kapott sor (egy vesszővel jelöljük ezt, hogy jelezzük, ez az első iteráció) a következő:

$$x_1 + 0.75x_2 + 0.25x_3 + 0.5s_3 = 4 \qquad (3'.\ \text{sor})$$

2. esm Ahhoz, hogy a 0. sorban az x_1 együtthatója zéró legyen, cseréljük ki a 0. sort a következővel: $60(3'.\ \text{sor}) +$ a 0. sor

$$z + 15x_2 - 5x_3 + 30s_3 = 240 \qquad (0'.\ \text{sor})$$

3. esm Ahhoz, hogy az 1. sorban az x_1 együtthatója zéró legyen, cseréljük ki az 1. sort a következővel: $-8(3'.\ \text{sor}) +$ az 1. sor

$$-x_3 + s_1 - 4s_3 = 16 \qquad (1'.\ \text{sor})$$

4. esm Ahhoz, hogy a 2. sorban az x_1 együtthatója zéró legyen, cseréljük ki az 2. sort a következővel: $-4(3'.\ \text{sor}) +$ a 2. sor

$$-x_2 + 0.5x_3 + s_2 - 2s_3 = 4 \qquad (2'.\ \text{sor})$$

Mivel x_1 nem szerepel a 4. sorban, nem szükséges végrehajtanunk elemi sorműveletet x_1-nek a 4. sorból való kiküszöbölésére. Így, az „új" 4. sort (nevezzük $4'$ sornak, hogy összhangban legyen a többi jelöléssel) a következőképp írhatjuk:

$$x_2 + s_4 = 5 \qquad (4'\ \text{sor})$$

A $0'$–$4'$. sorokat egymás után rakva a 6. táblázatban levő kanonikus alakot kapjuk.

6. TÁBLÁZAT
1. kanonikus alak

					Bázis-változó
$0'$. sor	$z \;+\; 15x_2 - \;\; 5x_3$		$+\; 30s_3$	$= 240$	$z = 240$
$1'$. sor	$-\;\; x_3 + s_1$		$-\;\; 4s_3$	$= 16$	$s_1 = 16$
$2'$. sor	$-\;\; x_2 + \;0.5x_3$	$+s_2 -$	$2s_3$	$= 4$	$s_2 = 4$
$3'$. sor	$x_1 + 0.75x_2 + 0.25x_3$		$+0.5s_3$	$= 4$	$x_1 = 4$
$4'$. sor	x_2			$+s_4 = 5$	$s_4 = 5$

Az aktuális kanonikus forma minden sorában megkeresve a bázisváltozókat az adódik, hogy

$$BV = \{z, s_1, s_2, x_1, s_4\} \quad \text{és} \quad NBV = \{s_3, x_2, x_3\}$$

Így, az 1. kanonikus alakból a $z = 240, s_1 = 16, s_2 = 4, x_1 = 4, s_4 = 5, x_2 = x_3 = s_3 = 0$ lehetséges bázismegoldást kapjuk. Megjósolhattuk volna azt, hogy az 1. kanonikus alakban z értéke 240 lesz, abból a tényből, hogy x_1 növelésének minden egysége 60 egységgel növeli z-t. Mivel x_1-et 4 egységgel növeltük ($x_1 = 0$-ról $x_1 = 4$-re), azt várjuk, hogy

$$\begin{aligned}\text{az 1. kanonikus alakbeli } z \text{ érték} &= \text{kezdeti } z \text{ érték } +4(60)\\ &= 0 + 240 = 240\end{aligned}$$

Amikor az 1. kanonikus alakot a kiinduló kanonikus alakból előállítottuk, akkor az egyik lbm (lehetséges bázismegoldás)-ról egy másik, jobb (nagyobb z értéket adó) lbm-re tértünk át. Figyeljük meg, hogy az induló és a javítás utáni lbm szomszédosak. Ez annak a következménye, hogy a két lehetséges bázismegoldásban $4 - 1 = 3$ közös bázisváltozó: (s_1, s_2 és s_4) szerepel (nem számítva z-t, ami minden kanonikus alakban bázisváltozó). Így azt látjuk, hogy egy kanonikus alakról a következőre áttérve az egyik lbm-ről egy vele szomszédos, jobb lbm-re tértünk át. Azt az eljárást, amelyben egy lbm-ről egy vele szomszédos, nagyobb célértékű lbm-re térünk át a szimplex algoritmus egy **iterációjának** (vagy egy báziscserének, bázistranszformációnak) nevezzük.

Most megpróbálunk egy olyan lbm-et találni, melyre az eddiginél még nagyobb a hozzátartozó z érték. Az 1. kanonikus alakot (6. táblázat) megvizsgáljuk abból a szempontból, hogy lássuk, tudjuk-e a z értékét valamely nembázis változó értékének megváltoztatásával növelni (miközben az összes többi nembázis változót zéró szinten tartjuk). A $0'$. sort z-re átrendezzük:

$$z = 240 - 15x_2 + 5x_3 - 30s_3 \tag{11}$$

A (11)-ből láthatjuk, hogy az x_2 nembázis változót 1-gyel növelve (közben biztosítva azt, hogy $x_3 = s_3 = 0$ maradjon) z 15 egységgel csökken. Ezt azonban nem szeretnénk. Az s_3 nembázis változót 1-gyel növelve (közben $x_2 = x_3 = 0$ értékeit megtartva) z 30-cal csökken. Ezt sem akarjuk. Másrészt, x_3-at 1-gyel növelve (közben rögzítve azt, hogy $x_2 = s_3 = 0$) z 5 egységgel nő. Így x_3 bázisba történő bevitelét választjuk. Emlékezzünk vissza, hogy a belépő változó meghatározására szolgáló szabályunk szerint azt a változót kell választanunk, amelynek az aktuális 0. sorban a legnagyobb abszolút értékű negatív együtthatója van. Mivel x_3 az egyetlen olyan változó, amelyhez negatív együttható tartozik a $0'$. sorban, ezt kell bevinni a bázisba.

Mivel x_3 1 egységgel történő megnövelése z-t 5 egységgel növeli, számunkra előnyös az x_3 értékét olyan nagyra növelni, amilyenre csak lehet. x_3-at addig növelhetjük, amíg az aktuális bázisváltozók, (s_1, s_2, x_1 és s_4) nemnegatívak maradnak. Az x_3 legnagyobb értékének meghatározásához ki kell fejeznünk az aktuális bázisváltozók értékét x_3-mal (rögzítve közben azt, hogy $x_2 = s_3 = 0$). Ekkor a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned}
\text{Az } 1'.\text{ sorból: } & s_1 = 16 + x_3 \\
\text{A } 2'.\text{ sorból: } & s_2 = 4 - 0.5x_3 \\
\text{A } 3'.\text{ sorból: } & x_1 = 4 - 0.25x_3 \\
\text{A } 4'.\text{ sorból: } & s_4 = 5
\end{aligned}$$

Ezekből az egyenletekből az adódik, hogy $s_1 \geq 0$ és $s_4 \geq 0$ x_3 minden értékére fennáll. A $2'$. sorból látjuk, hogy $s_2 \geq 0$ igaz lesz, ha $4 - 0.5x_3 \geq 0$, azaz $x_3 \leq \frac{4}{0.5} = 8$. A $3'$ sorból: $x_1 \geq 0$ fennáll, ha $4 - 0.25x_3 \geq 0$,azaz $x_3 \leq \frac{4}{0.25} = 16$. Ez azt mutatja, hogy az x_3-nak adható lehető legnagyobb érték a következő: min $\{\frac{4}{0.5}, \frac{4}{0.25}\} = 8$. Ezt megállapíthattuk volna a (10) és a hányados teszt használatával is a következő módon:

$1'$. sor:	nincs hányados	(x_3-nak negatív együtthatója van az 1. sorban)
$2'$. sor:	$\dfrac{4}{0.5} = 8$	
$3'$. sor:	$\dfrac{4}{0.25} = 16$	
$4'$. sor:	nincs hányados	(x_3-nak nempozitív együtthatója van az 4. sorban)

Így a legkisebb együttható a $2'$. sorban található és a $2'$. sor a hányados teszt győztese. Ez azt jelenti, hogy esm-eket (elemi sorműveleteket) kell végeznünk ahhoz, hogy az x_3 változót a $2'$. sor bázisváltozójává tegyük.

1. esm x_3 együtthatóját a $2'$. sorban 1-nek állítjuk be, e sort helyettesítve a 2-szeresével:

$$-2x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 = 8 \qquad (2''.\text{ sor})$$

2. esm x_3 együtthatóját a $0'$. sorban 0-vá tesszük, kicserélve e sort a következővel: $5(2''.\text{ sor}) + 0'.$ sor

$$z + 5x_2 + 10s_2 + 10s_3 = 280 \qquad (0''.\text{ sor})$$

3. esm x_3 együtthatóját az $1'$. sorban 0-vá tesszük, kicserélve e sort a következővel: $2''.\text{ sor} + 1'.$ sor

$$-2x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 24 \qquad (1''.\text{ sor})$$

4. esm x_3 együtthatóját a $3'$. sorban 0-vá tesszük, kicserélve e sort a következővel: $-\frac{1}{4}(2''.\text{ sor}) + 3'.$ sor

$$x_1 + 1.25x_2 - 0.5s_2 + 1.5s_3 = 2 \qquad (3''.\text{ sor})$$

Mivel x_3-nak már zéró az együtthatója a $4'$. sorban, ezért

$$x_2 + s_4 = 5 \qquad (4''.\text{ sor})$$

Egybegyűjtve a $0''$–$4''$. sorokat megkapjuk a 7. táblázatban látható kanonikus alakot. A 2. kanonikus alak minden sorában keresve egy bázisváltozót azt találjuk, hogy:

$$BV = \{z, s_1, x_3, x_1, s_4\} \quad \text{és} \quad NBV = \{s_2, s_3, x_2\}$$

A 2. kanonikus alak a következő lbm-et adja: $z = 280, s_1 = 24, x_3 = 8, x_1 = 2, s_4 = 5, s_2 = s_3 = x_2 = 0$. Előre tudhattuk volna, hogy a 2. kanonikus alak esetén $z = 280$ annak alapján, hogy az x_3 belépő változó minden egysége 5-tel növeli z-t, és mi 8 egységgel növeltük meg x_3-at, azaz

$$\begin{aligned} z \text{ érték a 2. kanonikus alakban} &= z \text{ érték az 1. kanonikus alakban } + 8(5) \\ &= 240 + 40 = 280 \end{aligned}$$

Mivel az 1. és 2. kanonikus alakhoz tartozó lbm-eknek (z-n kívül) az (s_1, s_4, x_1) a $4 - 1 = 3$ közös bázisváltozója van, ezek szomszédos lehetséges bázismegoldások.

7. TÁBLÁZAT
2. kanonikus alak

		Bázis-változó
$0''$. sor	$z + 5x_2 + 10s_2 + 10s_3 = 280$	$z = 280$
$1''$. sor	$-2x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 24$	$s_1 = 24$
$2''$. sor	$-2x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 = 8$	$x_3 = 8$
$3''$. sor	$x_1 + 1.25x_2 - 0.5s_2 + 1.5s_3 = 2$	$x_1 = 2$
$4''$. sor	$x_2 + s_4 = 5$	$s_4 = 5$

Most, miután befejeztük a szimplex algoritmus 2. iterációját (a 2. báziscserét), megvizsgáljuk a 2. kanonikus alakot, hogy találunk-e hozzá az előzőnél jobb lbm-et. Ha átrendezzük a $0''$. sort és megoldjuk z-re, akkor

$$z = 280 - 5x_2 - 10s_2 - 10s_3 \tag{12}$$

(12)-ből látjuk, hogy x_2-t 1-gyel növelve (miközben $s_2 = s_3 = 0$ értékeket rögzítjük) z csökken 5-tel; s_2-t 1-gyel növelve (és közben rögzítve az $s_3 = x_2 = 0$ értékeket) z csökken 10-zel; s_3-at növelve 1-gyel (miközben $x_2 = s_2 = 0$) z 10 egységgel csökken. Vagyis bármely nembázis változó növelése z csökkenését eredményezi. Ez azt sugallja, hogy az aktuális, a 2. kanonikus alakhoz tartozó lbm egy optimális megoldás. Ez valóban így is van! Ennek belátásához vizsgáljuk meg (12)-t. Tudjuk, hogy a Dakota Bútorgyárra vonatkozó feladatban minden lehetséges megoldásra fenn kell álljon: $x_2 \geq 0, s_2 \geq 0$, $s_3 \geq 0$, és $-5x_2 \leq 0, -10s_2 \leq 0$, valamint $-10s_3 \leq 0$. Ezen egyenlőtlenségekhez még hozzávéve (12)-t, világos, hogy minden lehetséges megoldásra $z = 280 +$ olyan tagok, amelyek ≤ 0-k, és így $z \leq 280$. A 2. kanonikus alakhoz tartozó aktuális lbm esetében $z = 280$, s így ez az optimális érték.

Az érvelés, amit épp most annak kimutatására használtunk, hogy a 2. kanonikus alak optimális, azon alapult, hogy minden nembázis változóhoz nemnegatív együttható tartozott a $0''$. sorban. Ez azt jelenti, hogy egy kanonikus alak lbm-jéről a következő egyszerű szabály alkalmazásával dönthetjük el, hogy optimális-e?

Optimális-e az adott kanonikus alak (a maximum feladatra)?

Egy kanonikus alak optimális (egy maximum feladat esetén), ha a kanonikus alak célfüggvénysorában minden nembázis változónak nemnegatív az együtthatója.

MEGJEGYZÉSEK

1. Egy döntési változó célfüggvénysorbeli együtthatóját gyakran a változó **redukált költségének** nevezik. Így a mi optimális kanonikus alakunkban a redukált költség x_1 és x_3 esetében 0, míg x_2 esetében 5. A redukált költség egy nembázis változó esetén az az érték, amivel z nagysága csökkenni fog, ha a nembázis változó értékét 1-gyel növeljük (miközben az összes többi nembázis változó 0 marad). Például legyen az „asztalok” változóra (x_2) a redukált költség a 2. kanonikus alakban 5. Ekkor (12)-ből látható, hogy x_2-t 1-gyel növelve z értéke 5-tel csökken. Figyeljük meg, hogy mivel a célfüggvénysorban az összes bázisváltozónak (természetesen z-t kivéve) 0 az együtthatója, azért egy bázisváltozó költsége mindig 0 lesz. Az 5. fejezetben részletesebben is megvizsgáljuk majd a redukált költség fogalmát. Ezek a megjegyzések csak akkor maradnak érvényben, ha az összes bázisváltozó értéke nemnegatív marad, miután a nembázis változó értékét 1-gyel növeltük. Mivel x_2 növelése 1-re x_1, x_3 és s_1 értékét meghagyja nemnegatívnak, megjegyzéseink érvényesek.

2. A 2. kanonikus alakból látható, hogy az optimális megoldás értelmében a Dakota Bútorkészítő 2 íróasztalt $(x_1 = 2)$ és 8 széket $(x_3 = 8)$ gyárt. Mivel $x_2 = 0$ asztalt nem kell gyártania. Az $s_1 = 24$ is racionális érték, mivel csak $8 + 8(2) = 24$ egységnyi faanyagot használnak fel, tehát $48 - 24 = 24$ egységnyi faanyagot nem használtak fel. Hasonlóan, $s_4 = 5$ is logikus, mivel akár 5 asztalt is lehetett volna ugyan gyártani, ténylegesen mégis 0 darabot gyártottak. Így a kiegészítő változó értéke a 4. feltételben $5 - 0 = 5$. Mivel $s_2 = s_3 = 0$, az összes befejező- és asztalosmunka-kapacitást felhasználták, ezért az ezekre vonatkozó korlátozó feltételek egyenlőségként teljesülnek.

3. A belépő változót úgy választottuk meg, hogy annak legyen a legnagyobb abszolút értékű negatív együtthatója a célfüggvénysorban, bár ez nem mindig vezet gyorsan az optimális lbm megtalálásához (lásd a 11. áttekintő feladatot). Valóban, még ha az (abszolút értékben) legkisebb negatív együtthatóval rendelkező változót is választjuk, a szimplex algoritmus végül meg fogja találni az LP optimális megoldását.

4. Bár akármelyik negatív célfüggvénybeli együtthatóval rendelkező változó beléphetne a bázisba, mégis a hányados teszt értelmében a generáló elem sorát *kell* választanunk (a bázist elhagyó változó kijelölésére). Hogy ezt formálisan belássuk, tegyük fel, hogy x_i-t választottuk a bázisba kerülő változónak, és az aktuális táblázatban x_i a k-adik sorban bázisváltozó. Ekkor a k-adik sor a következőképp írható:

$$\bar{a}_{ki}x_i + \cdots = \bar{b}_k$$

Vegyünk most egy tetszőleges másik feltételt (mondjuk a j-edik sort) a kanonikus alakban. A j-edik sor az aktuális kanonikus alakban így írható fel:

$$\bar{a}_{ji}x_i + \cdots = \bar{b}_j$$

Ha a k-adik sorban végezzük a báziscserét, akkor a k-adik sor a következő alakú lesz:

$$x_i + \cdots \quad = \frac{\bar{b}_k}{\bar{a}_{ki}}$$

A báziscsere utáni új j-edik sor az aktuális kanonikus alakbeli j-edik sorhoz az utolsó egyenlet $-\bar{a}_{ji}$-szeresének hozzáadásával képződik. Ez a következő új j-edik sort eredményezi:

$$0x_i + \cdots \quad = \bar{b}_j - \frac{\bar{b}_k \bar{a}_{ji}}{\bar{a}_{ki}}$$

Tudjuk, hogy a báziscsere után is minden korlátozó feltételnek nemnegatív jobb oldallal kell rendelkeznie. Így $\bar{a}_{ki} > 0$ teljesül, azt biztosítandó, hogy a k-adik sornak a báziscsere után nemnegatív legyen a jobb oldala. Tegyük fel, hogy $\bar{a}_{ji} > 0$. Ekkor, azt biztosítandó, hogy a j-edik sornak nemnegatív jobb oldala legyen a báziscsere után, igaznak kell lennie a következő egyenlőtlenségnek:

$$\bar{b}_j - \frac{\bar{b}_k \bar{a}_{ji}}{\bar{a}_{ki}} \geq 0$$

vagy (mivel $\bar{a}_{ji} > 0$)

$$\frac{\bar{b}_j}{\bar{a}_{ji}} \geq \frac{\bar{b}_k}{\bar{a}_{ki}}$$

Így a k-adik sornak „győztes”-nek kell lennie a hányados tesztben, hogy azt biztosítsa, hogy a j-edik sornak nemnegatív legyen a jobb oldala a báziscsere után is.

Ha $\bar{a}_{ji} \le 0$, akkor a j-edik sor jobb oldala biztosan nemnegatív lesz a báziscsere után. Ez abból következik, hogy most

$$-\frac{\bar{b}_k \bar{a}_{ji}}{\bar{a}_{ki}} \ge 0$$

teljesül.

Ahogy ígértük, egy olyan algoritmust mutattunk be, amely egy lbm-ről egy jobb lbm-re tér át. Az algoritmus leáll, ha egy optimális megoldást találtunk. A szimplex algoritmus konvergenciáját még tovább vizsgáljuk majd a 4.7. alfejezetben.

A szimplex algoritmus összegzése maximum feladat esetében

1. lépés Hozzuk az LP feladatot standard alakra!

2. lépés Keressünk egy lehetséges bázismegoldást! Ez könnyen adódik, ha az összes feltétel $\le$ típusú, nemnegatív jobb oldali értékkel. Ekkor az s_i kiegészítő változó az i-edik sor számára bázisváltozóként használható. Ha lbm nem adódik nyilvánvaló módon, akkor a majd a 4.8. és 4.9. alfejezetben tárgyalandó technikákat kell alkalmaznunk egy lbm előállítására.

3. lépés Ha a célfüggvénysorban minden nembázis változónak nemnegatív az együtthatója, akkor az aktuális lbm optimális. Ha a célfüggvénysorban valamelyik változónak negatív az együtthatója, akkor vegyük a legnagyobb abszolút értékű negatív együtthatójú változót a bázisba belépő változónak. Ezt a változót nevezzük belépő változónak.

4. lépés Elemi sorműveletek segítségével tegyük a belépő változót bázisváltozóvá minden olyan sorban, amelyik „győztese” a hányados tesztnek. Miután elkészítettünk egy új kanonikus alakot az esm-ek segítségével, térjünk vissza a 3. lépéshez az új (aktuális) kanonikus alakot használva.

Amikor a szimplex algoritmust használjuk feladatok megoldására, sohasem lehet negatív jobb oldallal rendelkező korlátozó feltételünk (negatív jobb oldal előfordulhat viszont a célfüggvény sornál: lásd a 4.4. alfejezetet). Negatív jobb oldallal rendelkező feltétel rendszerint a hányados tesztnél, ill. egy vagy több esm végrehajtásánál elkövetett hiba eredménye. Ha egy (vagy több) korlátozó feltételnek negatív a jobb oldala, akkor már nincs új lbm (a korábbi értelemben) és a szimplex algoritmus végrehajtási szabályai már nem vezetnek egy jobb lbm-hez.

Szimplex táblázatok megadása

Ahelyett, hogy minden változót beleírnánk minden korlátozó feltételbe, gyakran egy rövidített írásmódot használunk, amit **szimplex táblának** nevezünk. Például a következő kanonikus alak:

$$\begin{aligned} z + 3x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 6 \\ x_1 \qquad + s_1 \qquad &= 4 \\ 2x_1 + x_2 \qquad + s_2 &= 3 \end{aligned}$$

rövidített formában a 8. táblázatnak megfelelő lesz (ahol J.o. = jobb oldal). Ez a formátum nagyon egyszerűvé teszi a bázisváltozók megtalálását: egyszerűen megkeressük azon oszlopokat, ahol egyetlen 1 együttható áll (s az összes többi 0). Ezek az s_1 és s_2. Szimplex

8. TÁBLÁZAT
A szimplex tábla

z	x_1	x_2	s_1	s_2	**J.o.**	**Bázis-változó**
1	3	1	0	0	6	$z = 6$
0	1	0	1	0	4	$s_1 = 4$
0	2	1	0	1	3	$s_2 = 3$

tábláinkban be fogjuk karikázni a generáló elemet és egy * jellel jelöljük meg a hányados teszt „győztesét”.

Feladatok

A csoport

1. Használjuk a szimplex algoritmust a Giapetto probléma (a 3. fejezet 1. példája) megoldására!

2. Oldjuk meg a szimplex algoritmus használatával a következő LP feladatot:

$$\begin{aligned} \max\ & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{f.h.}\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

3. Használjunk szimplex módszert a következő feladat megoldására:

$$\begin{aligned} \max\ & z = 2x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{f.h.}\ & 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 60 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \leq 20 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

4. Tegyük fel, hogy szimplex algoritmussal akarjuk megoldani a Dorian problémát (a 3. fejezet 2. példája)! Milyen nehézség fog itt felmerülni?

B csoport

5. Eddig azt sugalltuk, hogy a szimplex algoritmus minden egyes iterációjánál az legyen a belépő változó (egy maximalizálási feladatban), amelynek a belépése a legnagyobb növekedést hozza magával a célfüggvényben. Bár ennek eredményeként általában kevesebb báziscserét kell végrehajtanunk, mintha a legnagyobb abszolút értékű célfüggvénysorbeli negatív számnak megfelelően transzformálnánk, a legnagyobb növekedés szerinti választás előbbi szabályát szinte soha nem használják. Vajon miért?

4.4. A szimplex algoritmus alkalmazása minimalizálási feladatok megoldására

A szimplex algoritmust két különböző módon alkalmazhatjuk minimalizálási feladatok megoldására. Ezt a következő LP feladat megoldásán mutatjuk be:

$$\begin{aligned} \min\ & z = 2x_1 - 3x_2 \\ \text{f.h.}\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{LP 2}$$

1. módszer

Az LP 2 optimális megoldása az LP 2 lehetséges tartományának azon (x_1, x_2) pontja, amelyre a $z = 2x_1 - 3x_2$ függvényérték a legkisebb. Ezzel ekvivalens módon azt is mondhatjuk, hogy LP 2 optimális megoldása a lehetséges tartomány azon pontja, amelyen $-z = -2x_1 + 3x_2$ a lehető legnagyobb. Ez azt jelenti, hogy LP 2 optimális megoldását megkaphatjuk LP 2′ megoldásával:

$$\begin{aligned} \max\ -z &= -2x_1 + 3x_2 \\ \text{f.h.}\quad x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1 - x_2 &\le 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned} \qquad \text{(LP 2}'\text{)}$$

LP 2′ megoldásánál $-z$-t a célfüggvénysor bázisváltozójának fogjuk használni. Hozzáadva s_1 és s_2 kiegészítő változókat a két feltétel bal oldalához a 9. táblázatban megadott induló táblát kapjuk. Mivel x_2 az egyetlen negatív együtthatójú változó a célfüggvénysorban, x_2-t bevisszük a bázisba. A hányados teszt azt mutatja, hogy x_2 az első feltételnél – tehát az 1. sornál – kerül be a bázisba. Az eredmény a 10. táblázatban látható. Mivel a célfüggvénysorban minden változó együtthatója nemnegatív, ez egy optimális tábla. Így az LP 2′ optimális megoldása $-z = 12, x_2 = 4, s_2 = 10, x_1 = s_1 = 0$. Az LP 2 optimális megoldása tehát $z = -12, x_2 = 4, s_2 = 10, x_1 = s_1 = 0$, mivel x_1 és x_2 értékét az LP 2′ célfüggvényébe behelyettesítve azt kapjuk, hogy:

$$z = 2x_1 - 3x_2 = 2(0) - 3(4) = -12$$

9. TÁBLÁZAT
Induló tábla az LP 2 feladathoz – 1. módszer

z	x_1	x_2	s_1	s_2	**J.o.**	**Bázis-változó**	**Hányados**
1	2	-3	0	0	0	$-z = 0$	
0	1	1	1	0	4	$s_1 = 4$	$\frac{4}{1} = 4$
0	1	-1	0	1	6	$s_2 = 6$	nincs

Összegezve: szorozzuk meg a min feladat célfüggvényét -1-gyel és oldjuk meg a maximum feladatot a $-z$ célfüggvénnyel! Ennek a maximalizálási feladatnak az optimális megoldása az eredeti minimalizálási feladat optimális megoldását adja. Gondoljunk azonban arra, hogy (a min feladat optimális z értéke) $= -$(a max feladat optimális z célfüggvény értéke).

2. módszer

A szimplex algoritmus egy egyszerű módosítása felhasználható a min feladatok közvetlen megoldására. Módosítsuk az algoritmus 3. lépését a következőképpen: Ha a célfüggvénysor

10. TÁBLÁZAT
Optimális tábla az LP 2 feladathoz – 1. módszer

$-z$	x_1	x_2	s_1	s_2	**J.o.**	**Bázis-változó**
1	5	0	3	0	12	$-z = 12$
0	1	1	1	0	4	$x_2 = 4$
0	2	0	1	1	10	$s_2 = 10$

minden nembázis változójának együtthatója nempozitív, akkor az aktuális lbm optimális. Ha a célfüggvénysorban valamely nembázis változónak pozitív az együtthatója, akkor vegyük ezek közül a legnagyobb értékű („legpozitívabb") együtthatóval rendelkezőt, s ezt vigyük be a bázisba.

11. TÁBLÁZAT Induló tábla az LP 2 feladat számára – 2. módszer

z	x_1	x_2	s_1	s_2	**J.o.**	**Bázis-változó**	**Hányados**
1	-2	3	0	0	0	$z=0$	
0	1	1	1	0	4	$s_1=4$	$\frac{4}{1}=4$
0	1	-1	0	1	6	$s_2=6$	nincs

A szimplex algoritmus ilyen módosítása azért működik, mert a célfüggvénysorban pozitív együtthatóval rendelkező nembázis változó növelése *csökkenti* z-t. Ha ezt a módszert használjuk az LP 2 megoldására, akkor az induló táblánk a 11. táblázatban látható. Mivel x_2 rendelkezik a legnagyobb pozitív együtthatóval a célfüggvénysorban, vonjuk be x_2-t a bázisba. A hányados teszt szerint x_2 az 1. sorhoz tartozó változó helyére lép be a bázisba, s az eredményt a 12. táblázat mutatja. Mivel a célfüggvénysorban minden változónak nempozitív az együtthatója, ez egy optimális tábla.[4] Így LP 2 optimális megoldása (ahogy azt már láttuk) $z=-12, x_2=4, s_2=10, x_1=s_1=0$.

12. TÁBLÁZAT Optimális tábla az LP 2 feladat számára – 2. módszer

z	x_1	x_2	s_1	s_2	**J.o.**	**Bázis-változó**
1	-5	0	-3	0	-12	$z=-12$
0	1	1	1	0	4	$x_2=4$
0	2	0	1	1	10	$s_2=10$

Feladatok

A csoport

1. A szimplex módszer segítségével keressük meg a következő LP feladat optimális megoldását:

$$\begin{aligned} \min\ & z = 4x_1 - x_2 \\ \text{f.h.}\quad & 2x_1 + x_2 \le 8 \\ & x_2 \le 5 \\ & x_1 - x_2 \le 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

2. A szimplex módszer segítségével keressük meg a következő LP feladat optimális megoldását:

$$\begin{aligned} \min\ & z = -x_1 - x_2 \\ \text{f.h.}\quad & x_1 - x_2 \le 1 \\ & x_1 + x_2 \le 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

[4] Ennek a táblának az optimalitásának a belátásához átalakítjuk a célfüggvénysort: $z=-12+5x_1+3s_1$. Mivel $x_1 \ge 0$ és $s_1 \ge 0$, ezért $z \ge -12$. Az aktuális lbm tehát (amire a $z=-12$), optimális.

4.5. Alternatív optimális megoldások

Idézzük fel a 3.3. alfejezet 3. feladatait, ahol egyes LP feladatoknál egynél több extremális pont lett optimális. Ha egy LP feladatnak egynél több optimális megoldása van, akkor azt mondjuk, hogy többszörös vagy **alternatív optimális megoldásai** vannak. Most bemutatjuk, hogyan használható a szimplex algoritmus annak eldöntésére, hogy egy LP feladatnak alternatív optimális megoldásai vannak-e.

Újra elővesszük a 4.3. alfejezet Dakota Bútorkészítő Cégre vonatkozó példáját azzal a módosítással, hogy az asztalokat 35$ áron lehet eladni 30$ helyett (lásd a 13. táblázatot). Mivel x_1-nek van a legnagyobb abszolút értékű negatív együtthatója a célfüggvénysorban, x_1-et visszük be a bázisba. A hányados teszt azt mutatja, hogy x_1-et a 3. sorhoz kapcsolódó változó helyére kell bevinnünk a bázisba. Mivel csak x_3-nak van a célfüggvénysorban negatív együtthatója, x_3-at visszük be a bázisba (lásd a 14. táblázatot). A hányados teszt szerint most x_3 kell belépjen a bázisba a 2. sorbeli változó helyére. Az eredményül adódó (optimális) tábla a 15. táblázatban szerepel. Akárcsak a 4.3. alfejezetben, ezen tábla szerint is a Dakota Bútorkészítő Cég feladatának optimális megoldása $s_1 = 24, x_3 = 8, x_1 = 2, s_4 = 5$ és $x_2 = s_2 = s_3 = 0$.

13. TÁBLÁZAT Induló tábla a Dakota Bútorkészítő Cég feladatára (35$/asztal ár mellett)

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	**J.o.**	**Bázis-változó**	**Hányados**
1	−60	−35	−20	0	0	0	0	0	$z = 0$	
0	8	6	1	1	0	0	0	48	$s_1 = 48$	$\frac{48}{8} = 6$
0	4	2	1.5	0	1	0	0	20	$s_2 = 20$	$\frac{20}{4} = 5$
0	2	1.5	0.5	0	0	1	0	8	$s_3 = 8$	$\frac{8}{2} = 4^*$
0	0	1	0	0	0	0	1	5	$s_4 = 5$	nincs

14. TÁBLÁZAT Első tábla a Dakota feladatára (35$/asztal esetén)

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	**J.o.**	**Bázis-változó**	**Hányados**
1	0	10	−5	0	0	30	0	240	$z = 240$	
0	0	0	−1	1	0	−4	0	16	$s_1 = 16$	nincs
0	0	−1	0.5	0	1	−2	0	4	$s_2 = 4$	$\frac{4}{0.5} = 8^*$
0	1	0.75	0.25	0	0	0.5	0	4	$s_3 = 4$	$\frac{4}{0.25} = 16^*$
0	0	1	0	0	0	0	1	5	$s_4 = 5$	nincs

15. TÁBLÁZAT Második (és optimális) tábla a Dakota feladatára (35$/asztal esetén)

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	**J.o.**	**Bázis-változó**
1	0	0	0	0	10	10	0	280	$z = 280$
0	0	−2	0	1	2	−8	0	24	$s_1 = 24$
0	0	−2	1	0	2	−4	0	8	$s_2 = 8$
0	1	1.25	0	0	−0.5	1.5	0	2	$s_3 = 2^*$
0	0	1	0	0	0	0	1	5	$s_4 = 5$

16. TÁBLÁZAT Egy másik optimális tábla a Dakota feladatára (35$/asztal esetén)

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	**J.o.**	**Bázis-változó**
1	0	0	0	0	10	10	0	280	$z = 280$
0	1.6	0	0	1	1.2	−5.6	0	27.2	$s_1 = 27.2$
0	1.6	0	1	0	1.2	−1.6	0	11.2	$x_3 = 11.2$
0	0.8	1	0	0	−0.4	1.2	0	1.6	$x_2 = 1.6$
0	−0.8	0	0	0	0.4	−1.2	1	3.4	$s_4 = 3.4$

Emlékezzünk vissza, hogy itt minden bázisváltozónak zéró együtthatójának kell a célfüggvénysorban lennie (ugyanis egyébként nem lennének bázisváltozók). Azonban az optimális táblánkban van egy nembázis változó, az x_2, amelynek szintén zéró az együtthatója a célfüggvénysorban. Nézzük meg, mi történik, ha x_2-t bevisszük a bázisba! A hányados teszt szerint x_2-nek a 3. sorbeli változó helyére kell bekerülnie (ellenőrizzük ezt!). Az eredményül kapott táblát a 16. táblázat mutatja. Itt fontos észrevennünk, hogy *mivel x_2 zéró együtthatóval szerepel az optimális tábla célfüggvénysorában, a generáló elem, aminek révén x_2 belép a bázisba, nem változtatja meg a célfüggvénysort.* Ez azt jelenti, hogy az új célfüggvénysorunk összes változójának még mindig nemnegatív lesz az együtthatója. Így az új táblázatunk is optimális. Mivel a báziscsere nem változtatta meg a Dakota céggel kapcsolatos példánk célfüggvényértékét, egy alternatív optimális megoldás a következő: $z = 280, s_1 = 27.2, x_3 = 11.2, x_2 = 1.6, s_4 = 3.4$ és $x_1 = s_3 = s_2 = 0$.

Összefoglalva tehát, ha az asztalokat 35 dollárért adja el, a Dakota 280 dollár árbevételre tesz szert akkor is, ha 2 íróasztalt és 8 széket, vagy ha 1.6 asztalt és 11.2 széket gyárt. Így a Dakota feladatának többszörös (vagy alternatív) optimális extremális pontjai vannak.

Ahogy a 3. fejezetben kifejtettük, belátható, hogy két optimális extremális pontot összekötő egyenes szakasz bármely pontja optimális. Ennek a ténynek az illusztrálására vegyünk két optimális extremális pontot:

$$\text{Az 1. optimális extremális pont} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{A 2. optimális extremális pont} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6 \\ 11.2 \end{bmatrix}$$

A $0 \leq c \leq 1$ értékek mellett a

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} + (1-c) \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6 \\ 11.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c \\ 1.6 - 1.6c \\ 11.2 - 3.2c \end{bmatrix}$$

vektor is optimális lesz. Ez azt mutatja, hogy habár a Dakota cégre vonatkozó feladatnak csak két optimális extremális pontja van, mégis végtelen sok optimális megoldása létezik. Például $c = 0.5$-öt választva, a következő optimális megoldást kapjuk: $x_1 = 1$, $x_2 = 0.8$, $x_3 = 9.6$.

Ha nincs zéró együtthatóval rendelkező nembázis változó az optimális tábla célfüggvénysorában, akkor az LP feladatnak egyetlen optimális megoldása van (lásd a 3. feladatot). Még ha van is zéró együtthatójú nembázis változó az optimális tábla célfüggvénysorában, még akkor is lehetséges, hogy a feladatnak nincsenek alternatív optimális megoldásai (lásd a 25. áttekintő feladatot).

Feladatok

A csoport

1. Mutassuk meg, hogy ha egy játékkatonának 28$ lenne az ára, a Giapetto feladatnak lennének alternatív optimális megoldásai!

2. Mutassuk meg, hogy a következő LP feladatnak vannak alternatív optimális megoldásai és keressünk meg hármat közülük!

$$\begin{aligned} \max\ z &= -3x_1 + 6x_2 \\ \text{f.h.}\quad 5x_1 + 7x_2 &\le 35 \\ -x_1 + 2x_2 &\le 2 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

B csoport

3. Tegyük fel, hogy 17. táblázatban látható optimális táblát kaptuk egy maximalizálási feladatra. Felhasználva azt,

17. TÁBLÁZAT

z	x_1	x_2	s_1	s_2	**J.o.**
1	0	0	2	3	10
0	1	0	3	2	4
0	0	1	1	1	3

hogy a célfüggvénysorban minden nembázis változónak szigorúan pozitív együtthatója van, bizonyítsuk be, hogy $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $s_1 = s_2 = 0$ az egyetlen optimális megoldása az LP feladatnak! (*Útmutatás*: Lehet-e valamely extremális pont esetén, amelyre $s_1 > 0$ vagy $s_2 > 0$, igaz, hogy $z = 10$?)

4. Magyarázzuk meg, hogy miért konvex egy LP feladat megoldásainak halmaza!

5. Tekintsünk egy LP feladatot, melynek az optimális táblája a 18. táblázatban látható.

18. TÁBLÁZAT

z	x_1	x_2	x_3	x_4	**J.o.**
1	0	0	0	2	2
0	1	0	−1	1	2
0	0	1	−2	3	3

(a) Van-e ennek az LP feladatnak egynél több optimális lbm-je?

(b) Hány optimális megoldása van ennek az LP feladatnak? (*Útmutatás*: Ha az x_3 értéke nő, hogyan befolyásolja ez a változás a bázisváltozók és a z értékét?)

6. Határozzuk meg a következő LP feladat összes optimális megoldását:

$$\begin{aligned} \max\ z &= \qquad\qquad -8x_5 \\ \text{f.h.}\quad x_1 + \quad x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 5 \\ \text{minden } x_i &\ge 0 \end{aligned}$$

4.6. Nemkorlátos LP feladatok

Emlékezzünk vissza a 3.3. alfejezetből arra, hogy egyes LP feladatoknál a lehetséges tartománynak vannak olyan pontjai, melyben z (max feladatokban) tetszőlegesen nagy, vagy (min feladatokban) tetszőlegesen kicsi értéket vehet fel. Ha ez a helyzet lép fel, akkor azt mondjuk, hogy az LP feladat nem korlátos. Ebben az alfejezetben bemutatjuk, hogy a szimplex algoritmus hogyan használható annak eldöntésére, hogy az adott LP feladat nemkorlátos-e.

3. PÉLDA A Breadco Pékség kétféle kenyeret süt: francia kenyeret és barna kenyeret. Egy egész francia kenyér 36 centért, egy egész barna kenyér pedig 30 centért adható el. Egy egész francia kenyérhez 1 csomag élesztőre és 6 deka lisztre van szükség, egy egész barna kenyérhez pedig 1 csomag élesztőre és 5 deka lisztre. Jelenleg a Breadcónak 5 csomag élesztője és 10 deka lisztje van. További élesztő csomagonként 3 centért, liszt pedig dekánként 4 centért szerezhető be. Fogalmazzuk meg és oldjuk meg a Breadco profitját (jövedelmek – költségek) maximalizáló LP feladatot!

Megoldás Legyenek

$$\begin{aligned}
x_1 &= \text{az elkészített francia kenyerek száma}\\
x_2 &= \text{az elkészített barna kenyerek száma}\\
x_3 &= \text{a vásárolt élesztőcsomagok száma}\\
x_4 &= \text{a vásárolt liszt mennyisége (dekában)}
\end{aligned}$$

Ekkor a Breadco célfüggvénye: $z = \text{bevételek} - \text{költségek}$ maximalizálása, ahol

$$\text{bevételek} = 36x_1 + 30x_2 \quad \text{és} \quad \text{költségek} = 3x_3 + 4x_4$$

A Breadco célfüggvénye tehát a következő:

$$\max\ z = 36x_1 + 30x_2 - 3x_3 - 4x_4$$

A Breadco a következő két feltételt veszi figyelembe:

1. feltétel A kenyérsütéshez felhasznált élesztőcsomagok száma nem haladhatja meg a rendelkezésre álló + vásárolt mennyiséget.

2. feltétel A felhasznált liszt mennyisége nem haladhatja meg a rendelkezésre álló + beszerzett mennyiséget.

Mivel

$$\begin{aligned}
\text{meglévő élesztő} + \text{vásárolt élesztő} &= 5 + x_3\\
\text{meglévő liszt} + \text{vásárolt liszt} &= 10 + x_4
\end{aligned}$$

ezért az 1. feltétel így írható:

$$x_1 + x_2 \le 5 + x_3, \quad \text{azaz} \quad x_1 + x_2 - x_3 \le 5$$

a 2. feltétel pedig:

$$6x_1 + 5x_2 \le 10 + x_4, \quad \text{vagy} \quad 6x_1 + 5x_2 - x_4 \le 10.$$

Ehhez hozzávéve az $x_i \ge 0$ $(i = 1,2,3,4)$ előjelkorlátozásokat a következő LP feladatot kapjuk:

$$\begin{array}{lllll}
\max\ z = 36x_1 + 30x_2 - 3x_3 - 4x_4 & & & \\
\text{f.h.} & x_1 + x_2 - x_3 & \le 5 & \text{(élesztő feltétel)}\\
 & 6x_1 + 5x_2 - x_4 & \le 10 & \text{(liszt feltétel)}\\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 & &
\end{array}$$

Hozzáadva a két feltételhez s_1 és s_2-t, a 19. táblázatot kapjuk.

19. TÁBLÁZAT Induló tábla a Breadco problémához

z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	**J.o.**	**Bázis-változó**	**Hányados**
1	-36	-30	3	4	0	0	0	$z = 0$	
0	1	1	-1	0	1	0	5	$s_1 = 5$	$\frac{5}{1} = 5$
0	6	5	0	-1	0	1	10	$s_2 = 10$	$\frac{10}{6} = \frac{5}{3}^*$

Mivel $-36 < -30$, x_1-et visszük be a bázisba. A hányados teszt szerint x_1-nek a 2. sorbeli bázisváltozó helyére kell belépnie a bázisba. Ennek megtörténte után a 20. táblázatot kapjuk.

20. TÁBLÁZAT Első tábla a Breadco problémához

z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	**J.o.**	**Bázis-változó**	**Hányados**
1	0	0	3	-2	0	6	60	$z = 60$	
0	0	$\frac{1}{6}$	-1	$\frac{1}{6}$	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{10}{3}$	$s_1 = \frac{10}{3}$	$\left(\frac{10}{3}\right)/\left(\frac{1}{6}\right) = 20^*$
0	1	$\frac{5}{6}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{3}$	$s_2 = \frac{5}{3}$	nincs

Mivel itt egyedül x_4-nek van negatív együtthatója a célfüggvénysorban, x_4-et visszük be a bázisba. A hányados teszt szerint x_4-nek az 1. sorbeli bázisváltozó helyére kell belépnie, s eredményül a 21. táblázatban megadott tábla adódik.

21. TÁBLÁZAT Második tábla a Breadco problémához

z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	**J.o.**	**Bázis-változó**	**Hányados**
1	0	2	-9	0	12	4	100	$z = 100$	
0	0	1	-6	1	6	-1	20	$x_4 = 20$	nincs
0	1	1	-1	0	1	0	5	$x_1 = 5$	nincs

Ezután, mivel x_3-nak van a legnagyobb abszolút értékű negatív együtthatója a célfüggvénysorban, ezt a változót szeretnénk bevonni a bázisba. A hányados teszt azonban nem képes megadni, hogy melyik sorhoz tartozó bázisváltozó helyére lehet belépni a bázisba. Mi történjen? A hányados teszthez vezető kiinduló megfontolásainkhoz visszatérve azt látjuk, hogy x_3 növelésével (miközben a többi nembázis változó zéró szinten marad), x_4 és x_1 – az aktuális bázisváltozók – a következőképpen változnak:

$$x_4 = 20 + 6x_3 \tag{13}$$
$$x_1 = 5 + x_3 \tag{14}$$

Ahogy x_3 növekszik, x_4 és x_1 is növekszik. Ez azt jelenti, hogy függetlenül attól, milyen nagyra is növeljük x_3-at, az $x_4 \geq 0$ és $x_1 \geq 0$ egyenlőtlenségek teljesülni fognak. Mivel x_3 minden egységnyi növelése 9 egységgel növeli z-t, tudunk olyan pontokat találni a lehetséges tartományban, ahol z előre megadott, tetszőlegesen nagy értéket vesz fel. Tudunk-e például olyan lehetséges pontot találni, amelyre $z \geq 1000$? Hogy ezt elérjük, z-t $1000 - 100 = 900$ egységgel kell növelnünk. Mivel x_3 minden egységnyi növelése z-t 9 egységgel növeli, x_3-t $\frac{900}{9} = 100$ egységgel növelve ez $z = 1000$-et ad számunkra. Ha az $x_3 = 100$ értéket vesszük (és a többi nembázis változót zéró szinten tartjuk), akkor (13) és (14) alapján x_4 és x_1 a következő:

$$x_4 = 20 + 6(100) = 620$$
$$x_1 = \ \ 5 + \ \ \ 100 = 105$$

Így, $x_1 = 105, x_3 = 100, x_4 = 620, x_2 = 0$ a lehetséges tartomány egy pontja, $z = 1000$ értékkel. Hasonlóan, tudunk olyan pontokat találni a lehetséges tartományban, amelyekhez tartozó z érték tetszőlegesen nagy. Ez azt jelenti, hogy a Breadco probléma egy nemkorlátos LP feladat.

A Breadco példából látjuk, hogy egy LP (maximalizálási) feladat akkor nem korlátos, ha van egy negatív együtthatóval rendelkező nembázis változó a célfüggvénysorban és nincs olyan korlátozó feltétel, amely határt szabna annak, hogy milyen nagy lehet ez a nembázis változó. Ez a helyzet akkor, ha valamely nembázis változó (mint x_3) a célfüggvénysorban nemnegatív együtthatóval rendelkezik, ugyanakkor pedig minden feltételben nempozitív az együtthatója. Összegezve, *az LP feladat max célfüggvény mellett akkor lesz nemkorlátos, ha egy a célfüggvénysorban negatív együtthatóval rendelkező változó együtthatója az összes feltételben nempozitív*.

Ha egy LP feladat nemkorlátos, végül egy olyan táblához jutunk, amelynél egy változót (mint pl. x_3) be akarunk vinni a bázisba, de a hányados tesztet nem tudjuk végrehajtani. Valószínűleg ez a legegyszerűbb módja egy nemkorlátos LP feladat felismerésének. Ahogy a 3. fejezetben megjegyeztük, a nemkorlátos LP feladat általában az elhibázott modellfelírás eredménye. A Breadco példában abból adódott az LP nemkorlátos volta, hogy megengedtük a Breadcónak, hogy 3 + 6(4) = 27 centet fizessen a francia kenyérhez felhasznált alapanyagokért, és aztán 36 centért adja el a kész kenyeret. Így minden egyes francia kenyér 9 cent profitot biztosít számára. Mivel korlátlan mennyiségű élesztő és liszt beszerzése lehetséges, világos, hogy modellünk a Breadco cégnek megengedi, hogy annyi francia kenyeret termeljen, amennyit csak akar, s ezáltal tetszőlegesen nagy profitra tegyen szert. Ez okozza a nemkorlátos LP feladat fellépését.

Természetesen a Breadco példa általunk történt megfogalmazása a valóság számos aspektusát elhanyagolta. Először is feltételeztük, hogy a kereslet a Breadco terméke iránt korlátlan. Másrészt, elhanyagoltuk, hogy bizonyos erőforrások, amelyek a kenyér gyártásához szükségesek (mint pl. kemencék és munkaerő) korlátozott mennyiségben állnak rendelkezésre. Végül pedig azzal az irreális feltételezéssel éltünk, hogy tetszőleges mennyiségű élesztő és liszt vásárolható.

Feladatok

A csoport

1. Mutassuk meg, hogy a következő LP feladat nemkorlátos:

$$\begin{aligned} \max z = & \quad 2x_2 \\ \text{f.h.} \quad & x_1 - x_2 \le 4 \\ & -x_1 + x_2 \le 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Keressünk egy olyan pontot a lehetséges tartományban, melyre $z \ge 10\,000$!

2. Fogalmazzunk meg egy szabályt, amely arra használható, hogy eldöntsük, vajon egy minimum feladatnak nemkorlátos az optimuma (vagyis z tetszőlegesen kicsivé tehető)! Használjuk fel ezt a szabályt annak kimutatására, hogy a következő feladat nemkorlátos:

$$\begin{aligned} \min z = & -2x_1 - 3x_2 \\ \text{f.h.} \quad & x_1 - x_2 \le 1 \\ & x_1 - 2x_2 \le 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

3. Tegyük fel, hogy egy LP feladat megoldása közben a 22. táblázatban található táblához jutunk. x_1 ugyan bevihető a bázisba, ez az LP feladat mégis nemkorlátos. Miért?

22. TÁBLÁZAT

z	x_1	x_2	x_3	x_4	**J.o.**
1	−3	−2	0	0	0
0	1	−1	1	0	3
0	2	0	0	1	4

4. A szimplex módszer segítségével oldjuk meg a 3.3. alfejezet 10. feladatát!

4.7. Degeneráció és konvergencia a szimplex algoritmus esetén

Elméletileg előfordulhat, hogy a szimplex algoritmus (a leírt formában alkalmazva) nem találja meg egy LP feladat optimális megoldását. Azonban tényleges alkalmazásokból származó LP feladatok ritkán viselkednek ilyen kellemetlen módon. A teljesség kedvéért most mégis megvizsgáljuk azt a helyzetet, amikor a szimplex módszer nem találja meg az optimális megoldást. Vizsgálatunk döntően (egy max feladatra vonatkozóan) az aktuális lbm és az új (azaz a következő báziscsere utáni) lbm közötti következő összefüggésen alapul:

$$\begin{aligned}z \text{ érték az új lbm-re} = z &\text{ érték az aktuális lbm-re}\\ &- (\text{a belépő változó értéke az új lbm-ben})(\text{a belépő}\\ &\quad \text{változó együtthatója az aktuális lbm célfüggvénysorában})\end{aligned} \tag{15}$$

A (15) egyenlet abból következik, hogy a belépő változót egységnyivel növelve a z értékének növekedése: $-$(a belépő változó együtthatója az aktuális lbm célfüggvénysorában). Emlékezzünk vissza, hogy (a belépő változó együtthatója a célfüggvénysorban) < 0 és (a belépő változó értéke az új lbm-ben) ≥ 0. Ezeket figyelembe véve, a (15) segítségével a következőkre jutunk:

1. Ha (a belépő változó értéke az új lbm-ben) > 0, akkor (az új lbm z értéke) $>$ (az aktuális lbm z értéke).

2. Ha (a belépő változó értéke az új lbm-ben) $= 0$, akkor (az új lbm z értéke)$=$ (az aktuális lbm z értéke).

Egyelőre tegyük fel, hogy az LP feladat, amit meg kell oldanunk, rendelkezik a következő tulajdonsággal: minden lehetséges bázismegoldásában az összes bázisváltozó pozitív. Egy ilyen tulajdonságú LP feladatot **nemdegenerált LP feladatnak** nevezünk.

Ha a szimplex módszert egy nemdegenerált LP feladat megoldására használjuk, akkor az előbbi felsorolásban szereplő 1. tulajdonság szerint a módszer minden iterációja *növelni fogja z-t*. Ennek a következménye az, hogy amikor a szimplex módszert egy nemdegenerált LP feladat megoldására használjuk, akkor lehetetlen az, hogy kétszer forduljon elő ugyanaz az lbm. Ennek belátásához tegyük fel, hogy egy olyan lehetséges bázismegoldásban vagyunk (nevezzük ezt 1. lbm-nek), amelyre $z = 20$. Az 1. tulajdonság azt mondja, hogy a következő bázistranszformációnk egy olyan lbm-be visz bennünket (nevezzük ezt 2. lbm-nek), amelyre $z > 20$. Mivel további báziscserékkel z értékét nem tudjuk csökkenteni, ezért soha nem tudunk visszatérni egy olyan lbm-hez, melyre $z = 20$. Így nem tudunk visszatérni az 1. lbm-hez sem. Most idézzük fel azt a tényt, hogy tetszőleges LP feladatnak csak véges sok lehetséges bázismegoldása van. Mivel egy lbm soha nem ismétlődik meg, ezért ha a szimplex algoritmust alkalmazzuk egy nemdegenerált LP feladat megoldására, akkor véges számú iterációval garantáltan megtaláljuk az optimális megoldást. Például tegyük fel, hogy egy 10 változóval és 5 feltétellel rendelkező nemdegenerált LP feladatot oldunk meg. Ennek az LP feladatnak legfeljebb

$$\binom{10}{5} = 252$$

lehetséges bázismegoldása van. Mivel soha nem ismétlődik meg egy lbm, tudjuk, hogy erre a feladatra a szimplex módszer maximálisan 252 iteráció után garantáltan talál egy optimális megoldást. Egy degenerált LP feladatnál viszont előfordulhat, hogy a szimplex módszer nem működik.

DEFINÍCIÓ

Egy LP feladat **degenerált**, ha van legalább egy olyan lbm, amelyben egy bázisváltozó 0 értékű.

A következő LP feladat degenerált:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 5x_1 + 2x_2 \\ \text{f.h.}\quad x_1 + x_2 &\le 6 \\ x_1 - x_2 &\le 0 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Mi történik, ha a szimplex algoritmust használjuk a (16) feladat megoldására? Miután a két feltételhez hozzáadtuk az s_1 és s_2 kiegészítő változókat, a 23. táblázatban található induló táblát kapjuk. Az ehhez tartozó lbm-ben, egy bázisváltozó, $s_2 = 0$. Így (16) egy degenerált LP feladat. Minden olyan lbm, amelynek legalább egy bázisváltozója zéró értékű (vagy ekvivalens módon van legalább egy korlátozó feltétele zéró jobb oldallal), **degenerált lbm**. Mivel $-5 < -2$, x_1-et bevisszük a bázisba. Itt a „győztes" hányados a 0 lesz. Ez azt jelenti, hogy miután x_1 belép a bázisba, x_1 zéró lesz az új lbm-ben. Elvégezve a bázistranszformációt a 24. táblázatot kapjuk. Az új lbm-hez ugyanaz a z érték tartozik, mint a régihez. Ez összhangban van a korábban megfogalmazott 2. tulajdonsággal. Az új lbm-ben az összes változónak ugyanaz az értéke, ami a báziscsere előtt volt. Így az új lbm is degenerált. Folytatva a szimplex algoritmust az x_2 változót visszük be a bázisba az 1. sornál. Az eredményül kapott tábla a 25. táblázatban látható. Ez egy optimális tábla, így a (16) feladat optimális megoldása a következő: $z = 21, x_2 = 3, x_1 = 3, s_1 = s_2 = 0$.

23. TÁBLÁZAT
Egy degenerált LP feladat

z	x_1	x_2	s_1	s_2	**J.o.**	**Bázis-változó**	**Hányados**
1	-5	-2	0	0	0	$z = 0$	
0	1	1	1	0	6	$s_1 = 6$	6
0	1	-1	0	1	0	$s_2 = 0$	0^*

24. TÁBLÁZAT
A (16)-os feladat első táblája

z	x_1	x_2	s_1	s_2	**J.o.**	**Bázis-változó**	**Hányados**
1	0	-7	0	5	0	$z = 0$	
0	0	2	1	-1	6	$s_1 = 6$	$\frac{6}{2} = 3$
0	1	-1	0	1	0	$s_2 = 0$	0^*

25. TÁBLÁZAT
A (16)-os feladat optimális táblája

z	x_1	x_2	s_1	s_2	**J.o.**	**Bázis-változó**
1	0	0	3.5	1.5	21	$z = 21$
0	0	1	0.5	-0.5	3	$x_2 = 3$
0	1	0	0.5	0.5	3	$x_1 = 3$

26. TÁBLÁZAT Bázisváltozók három halmaza felel meg a C csúcspontnak

Bázis-változók	Megfelelő lehetséges bázismegoldás	Extremális pont
x_1, x_2	$x_1 = x_2 = 3, s_1 = s_2 = 0$	D
x_1, s_1	$x_1 = 0, s_1 = 6, x_2 = s_2 = 0$	C
x_1, s_2	$x_1 = 6, s_2 = -6, x_2 = s_1 = 0$	nincs megoldás
x_2, s_1	$x_2 = 0, s_1 = 6, x_1 = s_2 = 0$	C
x_2, s_2	$x_2 = 6, s_2 = 6, s_1 = x_1 = 0$	B
s_1, s_2	$s_1 = 6, s_2 = 0, x_1 = x_2 = 0$	C

Most már meg tudjuk magyarázni, hogy a szimplex módszernek miért lehetnek gondjai egy degenerált LP feladat megoldásánál. Tegyük fel, hogy egy olyan degenerált LP feladatot oldunk meg, amire az optimális z érték $z = 30$. Ha egy olyan lbm-mel kezdünk, amire mondjuk $z = 20$, akkor tudjuk (nézzük meg az éppen megoldott LP feladat esetét), hogy egy báziscsere során lehetséges, hogy a z értéke változatlan maradjon. Ez azt jelenti, hogy bázistranszformációk egy sorozatára megeshet a következő:

induló lbm (1. lbm): $z = 20$
az első bázistranszformáció után (2. lbm): $z = 20$
a második bázistranszformáció után (3. lbm): $z = 20$
a harmadik bázistranszformáció után (4. lbm): $z = 20$
a negyedik bázistranszformáció után (5. lbm): $z = 20$

Ebben az esetben kétszer találkozunk ugyanazzal az lbm-mel. Ezt a jelenséget **ciklizálás**nak nevezzük. Ha ciklizálás lép fel, akkor mindörökre bolyongani, ciklikusan keringeni fogunk lehetséges bázismegoldások egy halmazában és soha nem jutunk el az optimális megoldáshoz ($z = 30$, a fenti példában). A ciklizálás nemcsak elméleti lehetőség, hanem ténylegesen is felléphet (lásd a 3. feladatot ennek az alfejezetnek a végén). Szerencsére a szimplex algoritmus módosítható úgy, hogy a ciklizálás soha ne lépjen fel (a részleteket e vonatkozásban lásd a Bland (1977) vagy Dantzig (1963) munkákban).[5] A gyakorlatban azonban a ciklizálás rendkívül ritka jelenség.[6] Emiatt a legtöbb számítógépes LP programcsomag nem alkalmaz védelmet a ciklizálás lehetősége ellen.

Ha egy LP-nek sok degenerált lehetséges bázismegoldása van (vagy egy olyan lbm-je, amiben sok a zérus értékű bázisváltozó), akkor a szimplex algoritmus alacsony hatékonyságúvá válik. Hogy lássuk miért, tekintsük a (16)-os feladat 3. ábrán látható lehetséges tartományát, a besötétített BCD háromszöget. Ennek a lehetséges tartománynak az extremális pontjai B, C és D. A 4.2. alfejezetben ismertetett eljárást követve, vizsgáljuk meg a (16) feladat lehetséges bázismegoldásainak és a lehetséges tartomány extremális pontjainak az egymással történő megfeleltetését (lásd a 26. táblázatot). A C extremális ponthoz bázisváltozók három halmaza tartozik. Megmutatható, hogy ahhoz, hogy egy n döntési változóval rendelkező LP feladat degenerált legyen, a feladat korlátozó feltételei közül legalább $n+1$-nek (az $x_i \geq 0$ előjelkorlátokat is beleszámítva) aktívnak kell lennie egy extremális pontban.

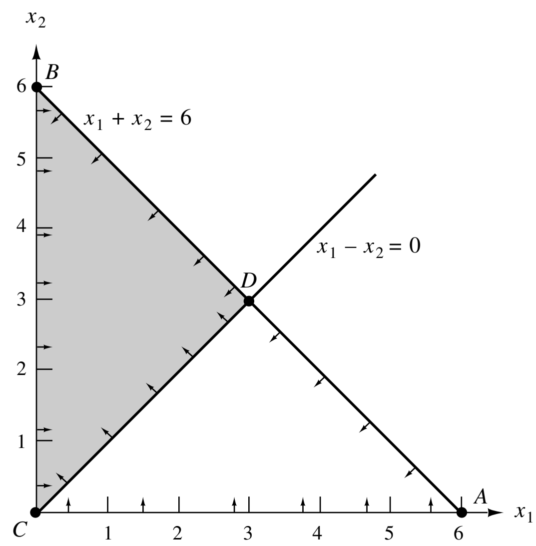
[5] Bland megmutatta, hogy a ciklizálás elkerülhető a következő szabályok alkalmazásával (tegyük fel, hogy a kiegészítő- és többlet-változók jelölése: $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$) :

1 Belépő változónak (egy max feladatban) válasszuk mindig azt a negatív együtthatójú változót a célfüggvénysorban, amelyiknek a legkisebb az indexe.

2 Ha a hányados tesztben egyszerre több helyen valósul meg a minimum, akkor ezt a „döntetlen”-t úgy oldjuk fel, hogy a lehető legkisebb legyen a bázist elhagyó változó indexe (a szóbajövők közül).

[6] A ciklizálásra egy gyakorlati példa található pl. Kotiah és Slater (1973) munkájában.

3. ÁBRA
A (16) LP feladat lehetséges tartománya



A (16) feladatban az $x_1 - x_2 \le 0$, $x_1 \ge 0$ és $x_2 \ge 0$ feltételek mind aktívak a C pontban. Minden olyan extremális pont, amelyben három vagy több feltétel aktív, egynél több bázisváltozó halmaznak fog megfelelni. A C pontban például s_1 az egyik bázisváltozó, a másik bázisváltozó azonban lehet az x_2, x_1 vagy s_2 bármelyike.

Most már megvizsgálhatjuk, hogy a szimplex eljárás miért lehet rossz hatékonyságú a degenerált LP feladatok megoldására! Tegyük fel, hogy egy LP feladat degenerált! Ekkor sok bázisváltozó halmaz (akár több száz is) megfelelhet egy nemoptimális extremális pontnak. A szimplex algoritmus akár mindegyiket megvizsgálhatja, mielőtt megállapítja, hogy az extremális pont nemoptimális. Ezt a problémát szemléltette (kis méretben) a (16) feladat megoldása: a szimplex eljárás két báziscserét végzett, mielőtt meg tudta állapítani, hogy a C pont csak szuboptimális. Szerencsére egyes degenerált LP feladatoknak olyan speciális szerkezete van, ami lehetővé teszi a megoldásukat a szimplextől eltérő, más módszerrel (lásd például a hozzárendelési feladat megoldását a 6. fejezetben).

Feladatok

A csoport

1. Még ha egy LP feladat induló táblája nemdegenerált is, egy későbbi táblában felléphet a degeneráció. Degenerált megoldás sok esetben akkor adódik a táblában, ha a hányados teszt alkalmazásánál alternatív minimumok fordulnak elő. Ennek a szemléltetésére oldjuk meg a következő LP feladatot:

$$
\begin{aligned}
\max z = {} & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{f.h.} \quad & 4x_1 + 2x_2 \le 12 \\
& 4x_1 + x_2 \le 10 \\
& x_1 + x_2 \le 4 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Rajzoljuk is fel a lehetséges tartományt és mutassuk meg, hogy mely extremális pontok felelnek meg egynél több bázisváltozó halmaznak!

2. Keressük meg a következő LP feladat optimális megoldását:

$$
\begin{aligned}
\min z = {} & -x_1 - x_2 \\
\text{f.h.} \quad & x_1 + x_2 \le 1 \\
& -x_1 + x_2 \le 0 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

B csoport

3. Mutassuk meg, hogy ha a hányados tesztnél az eldöntetlen helyzetet az 1. sor 2. sorral szembeni preferálásával döntjük el, akkor a következő LP feladat szimplex módszerrel történő megoldása során ciklizálás lép fel:

$$
\begin{aligned}
\max z = \quad & 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 12x_4 \\
\text{f.h.} \quad & -2x_1 - 9x_2 + x_3 + 9x_4 \leq 0 \\
& \tfrac{1}{3}x_1 + x_2 - \tfrac{1}{3}x_3 - 2x_4 \leq 0 \\
& x_i \geq 0 \quad (i = 1,2,3,4)
\end{aligned}
$$

4.8. A „nagy M” módszer

Emlékezzünk arra, hogy a szimplex algoritmusnak szüksége van egy induló lbm-re. Az összes eddig megoldott feladatban az induló lbm-et a kiegészítő változók bázisváltozókként való felhasználásával kaptuk. Ha egy LP feladatnak vannak $\geq$ vagy egyenlőség feltételei, akkor nem magától értetődő egy induló lbm megtalálása. A 4. példa azt fogja szemléltetni, hogy milyen nehézségek merülhetnek fel ilyen esetben. Ha nem magától értetődő egy lbm megtalálása, akkor a „nagy M” módszer (vagy a 4.9. alfejezet kétfázisú szimplex módszere) használható a probléma megoldására. Ebben az alfejezetben a „nagy M” módszert mutatjuk be, amely a szimplexalgoritmusnak egy olyan változata, amely úgy jut el egy első lbm-hez, hogy „mesterséges” változókkal bővíti a problémát. Az eredeti LP célfüggvénye természetesen módosítandó úgy, hogy az összes mesterséges változó 0 legyen a szimplex algoritmus befejezésekor. A következő példa szemlélteti a „nagy M” módszert.

4. PÉLDA A Bevco cég egy Oranj nevű narancs ízesítésű üdítőitalt gyárt narancs-szóda és narancslé kombinálásával. Egy deka narancs-szóda 0.5 deka cukrot és 1 mg C-vitamint, 1 deka narancslé pedig 0.25 deka cukrot és 3 mg C-vitamint tartalmaz. A Bevcónak 1 deka narancs-szóda 2 centbe kerül, 1 deka narancslé pedig 3 centbe. A Bevco marketing osztálya elhatározta, hogy minden 10 dekás Oranj-palack legalább 20 mg C-vitamint és legfeljebb 4 deka cukrot tartalmazhat. Lineáris programozás segítségével határozzuk meg, hogy a Bevco cég hogyan tud eleget tenni a marketing osztály követelményeinek minimális költségek mellett!

Megoldás Legyen

x_1 = a narancs-szóda mennyisége egy palack Oranj-ban dekában mérve
x_2 = a narancslé mennyisége egy palack Oranj-ban dekában mérve

Ekkor a megfelelő LP feladat a következő:

$$
\begin{aligned}
\min z = \; & 2x_1 + 3x_2 \\
\text{f.h.} \quad & \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 \leq 4 && \text{(cukor feltétel)} \\
& x_1 + 3x_2 \geq 20 && \text{(C-vitamin feltétel)} \\
& x_1 + x_2 = 10 && \text{(egy palack Oranj 10 deka)} \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned} \tag{17}
$$

(A megoldást ebben az alfejezetben később folytatjuk.)

A (17) standard alakra hozatala céljából egy s_1 kiegészítő változót adunk a cukortartalom feltételéhez és kivonunk egy e_2 többlet változót a C-vitamin feltételből. A célfüggvényt a $z - 2x_1 - 3x_2 = 0$ alakba átírva a következő standard alakot kapjuk:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\text{0. sor:} & z & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & = & 0 \\
\text{1. sor:} & & & \frac{1}{2}x_1 & + & \frac{1}{4}x_2 & + & s_1 & & & = & 4 \\
\text{2. sor:} & & & x_1 & + & 3x_2 & & & - & e_2 & = & 20 \\
\text{3. sor:} & & & x_1 & + & x_2 & & & & & = & 10
\end{array}$$

minden változó nemnegatív

Egy lbm keresése során azt látjuk, hogy az 1. sorban $s_1 = 4$ egy lehetséges bázisváltozó érték lehetne. Ha a 2. sort megszorozzuk -1-gyel, láthatjuk, hogy $e_2 = -20$ lenne a bázisváltozó értéke a 2. sorra. Sajnos az $e_2 = -20$ érték megsérti az előjelkorlátozást ($e_2 \geq 0$). Végül pedig a 3. sorban nincs magától adódó bázisváltozó. Így ahhoz, hogy a szimplex algoritmust a (17) feladat megoldására használjuk, a 2. és 3. sor mindegyikének szüksége van egy bázis- (és egyben lehetséges megoldást adó) változóra. Ezen probléma orvoslása céljából egyszerűen „kitalálunk” egy lehetséges bázisváltozót minden olyan feltételhez, amelynek erre szüksége van. Mivel ezeket a változókat mi találtuk ki és nem valódi változók, **mesterséges változóknak** nevezzük őket. Ha egy mesterséges változót az i-edik sorhoz adunk hozzá, akkor a_i-vel jelöljük. A jelen feladatnál egy a_2 mesterséges változót kell hozzáadnunk a 2. sorhoz és egy a_3 mesterséges változót a 3. sorhoz. Az így adódó egyenletrendszer a következő:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
z - 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & & & = & 0 \\
\frac{1}{2}x_1 & + & \frac{1}{4}x_2 & + s_1 & & & & & & = & 4 \\
x_1 & + & 3x_2 & & & - e_2 + a_2 & & & & = & 20 \\
x_1 & + & x_2 & & & & & + a_3 & & = & 10
\end{array} \qquad (18)$$

Ekkor már van egy lbm-ünk: $z = 0, s_1 = 4, a_2 = 20, a_3 = 10$. Sajnos nincs garancia arra, hogy a (18) feladat optimális megoldása ugyanaz lesz, mint a (17)-é. (18) megoldásánál kaphatunk olyan optimális megoldást, amelyben egy vagy több mesterséges változó pozitív. Egy ilyen megoldás esetleg nem lehetséges megoldása az eredeti (17) feladat. Például (18) optimális megoldása könnyen beláthatóan a következő: $z = 0, s_1 = 4, a_2 = 20, a_3 = 10, x_1 = x_2 = 0$. Ez a „megoldás” nem tartalmaz C-vitamint és 0 deka szódát tesz egy palackba, s így nem lehet az eredeti feladatunk megoldása! Ha azt akarjuk, hogy a (18) optimális megoldása egyben (17) megoldása is legyen, akkor biztosítanunk kell, hogy a (18) optimális megoldásában az összes mesterséges változó 0 legyen. Egy minimalizálási feladatban ezt úgy tudjuk megtenni, hogy a célfüggvényhez minden a_i mesterséges változó esetében hozzáadunk egy Ma_i kifejezést. (Egy max feladatban a $-Ma_i$ kifejezést adjuk a célfüggvényhez.) Itt M egy „nagyon nagy” pozitív számot jelent. A (18) célfüggvényünk tehát így változik meg:

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + Ma_2 + Ma_3$$

A megváltozott célfüggvénysor:

$$z - 2x_1 - 3x_2 - Ma_2 - Ma_3 = 0$$

Így módosítva a célfüggvényt (amely egy költségfüggvény) rendkívül költségessé válik az, ha egy mesterséges változó pozitív. Ezzel a módosított célfüggvénnyel ezért logikusnak tűnik az, hogy a (18) optimális megoldásában $a_2 = a_3 = 0$ teljesüljön. Ez esetben a (18) optimális megoldása az eredeti (17) feladatnak is megoldása lesz. Azonban néha megtörténik, hogy a (18)-nak megfelelő feladatot megoldva, néhány mesterséges változó az optimális megoldásban pozitív értéket vesz fel. Ha ez a helyzet, akkor az eredeti feladatnak nincs lehetséges megoldása.

A leírtakból kézenfekvő, hogy a módszert miért nevezik „nagy M” módszernek. Most megadjuk az eljárás formális leírását.

A „nagy M” módszer leírása

1. lépés Alakítsuk át úgy a feltételeket, hogy minden feltétel jobb oldala nemnegatív legyen. Ehhez az szükséges, hogy minden negatív jobb oldallal rendelkező feltételt -1-gyel szorozzunk meg. Gondoljunk arra, hogy ha egy egyenlőtlenséget tetszőleges negatív számmal szorzunk meg, akkor az egyenlőtlenség iránya megfordul. Például ez az eljárásunk az $x_1 + x_2 \geq -1$ egyenlőtlenséget $-x_1 - x_2 \leq 1$-re változtatja, az $x_1 - x_2 \leq -2$-t pedig $-x_1 + x_2 \geq 2$-re.

1′. lépés Keressük meg az összes olyan feltételt, amely most (az 1. lépés után) $=$ vagy $\geq$ feltétel. A 3. lépésben egy mesterséges változót fogunk adni ezen feltételek mindegyikéhez.

2. lépés Alakítsuk át mindegyik egyenlőtlenség feltételt standard alakra. Ez azt jelenti, hogy ha az i-edik feltétel $\leq$ feltétel, akkor egy s_i kiegészítő változót adunk hozzá, és ha az i-edik feltétel $\geq$ feltétel, akkor egy e_i többlet változót vonunk ki belőle.

3. lépés Ha (miután az 1. lépés befejeződött) az i-edik feltétel $\geq$ vagy $=$ feltétel, akkor adjunk hozzá egy a_i mesterséges változót. Vegyük hozzá a feltételekhez az $a_i \geq 0$ előjelkorlátozást is.

4. lépés Jelöljön M egy nagyon nagy pozitív számot. Ha az LP feladat egy min probléma, akkor adjunk hozzá (minden egyes mesterséges változóhoz tartozóan) egy Ma_i tagot a célfüggvényhez. Ha az LP feladat egy max probléma, akkor (minden egyes mesterséges változó esetében) adjunk hozzá $-Ma_i$-t a célfüggvényhez.

5. lépés Mivel minden mesterséges változó benne lesz az induló bázisban, mindegyiküket ki kell küszöbölni a célfüggvénysorból, mielőtt megkezdjük a szimplex eljárást. Ez biztosítja, hogy egy kanonikus alakkal tudjunk kezdeni. A belépő változó megválasztásánál emlékezzünk arra, hogy M egy nagyon nagy pozitív szám. Például $4M - 2$ pozitívabb, mint $3M + 900$, és $-6M - 5$ negatívabb, mint $-5M - 40$. Most pedig oldjuk meg az átalakított feladatot a szimplex módszerrel. Ha minden mesterséges változó zéró az optimális megoldásban, akkor megtaláltuk az eredeti feladat optimális megoldását. Ha bármelyik mesterséges változó pozitív az optimális megoldásban, akkor az eredeti feladatnak nincs lehetséges megoldása.[7]

Ha egy mesterséges változó elhagyja a bázist, oszlopa elhagyható a későbbi táblázatokból. Ez azért tehető meg, mivel egy mesterséges változó használatának célja egy induló lehetséges bázismegoldás előállítása. Amint egy mesterséges változó kikerül a bázisból, tovább már nincs rá szükségünk. Ennek ellenére gyakran megőrizzük a mesterséges változókat az összes táblában. Ennek az oka az 5.7. alfejezetben derül ki.

[7]Elhanyagoltuk azt a lehetőséget, hogy amikor az LP feladatot (a mesterséges változók segítségével) megoldottuk, akkor az utolsó tábla mutathatja azt is, hogy az LP feladat nemkorlátos. Ha az utolsó tábla azt mutatja, hogy az LP feladat nemkorlátos és az összes mesterséges változó a táblában 0 értékű, akkor az eredeti LP feladat nemkorlátos. Ha az utolsó tábla azt mutatja, hogy az LP feladat nemkorlátos és legalább egy mesterséges változó pozitív, akkor az eredeti LP feladatnak nincs lehetséges megoldása. Lásd Bazaraa és Jarvis (1990) munkáját a részletekről.

Megoldás
4. példa (folytatás)

1. lépés Mivel egyik korlátozó feltételnek sem negatív a jobb oldala, egyik feltételt sem kell megszoroznunk -1-gyel.

1′. lépés A 2. és 3. feltételben mesterséges változókra lesz szükség.

2. lépés Adjunk egy s_1 kiegészítő változót az 1. sorhoz és vonjunk le egy e_2 többletváltozót a 2. sorból. Az eredmény:

$$\begin{array}{lrcl} & \min z = & 2x_1 + 3x_2 & \\ \text{1. sor:} & & \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + s_1 & = 4 \\ \text{2. sor:} & & x_1 + 3x_2 \quad - e_2 & = 20 \\ \text{3. sor:} & & x_1 + \ x_2 & = 10 \end{array}$$

3. lépés Adjunk egy a_2 mesterséges változót a 2. sorhoz és a_3-at a 3.-hoz. Az eredmény:

$$\begin{array}{lrcl} & \min z = & 2x_1 + 3x_2 & \\ \text{1. sor:} & & \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + s_1 & = 4 \\ \text{2. sor:} & & x_1 + 3x_2 \quad - e_2 + a_2 & = 20 \\ \text{3. sor:} & & x_1 + \ x_2 \quad + a_3 & = 10 \end{array}$$

Ebből a táblából látjuk, hogy induló lbm-ünk a következő lesz: $s_1 = 4$, $a_2 = 20$ és $a_3 = 10$.

4. lépés Mivel egy min feladatot oldunk meg, $Ma_2 + Ma_3$-t hozzáadunk a célfüggvényhez (ha egy max feladatot oldanánk meg, akkor $-Ma_2 - Ma_3$-at adnánk hozzá). Ez „rossz színben tünteti fel” a_2-t és a_3-at a z minimalizálása során, és ezért az értékük 0-ra állítására fog törekedni. A célfüggvény most tehát

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + Ma_2 + Ma_3$$

5. lépés A célfüggvénysor

$$z - 2x_1 - 3x_2 - Ma_2 - Ma_3 = 0$$

Mivel a_2 és a_3 benne vannak az induló lbm-ben (ti. ezért vezettük be őket), ezért kiküszöbölendők a célfüggvénysorból. Hogy ezt megtegyük, egyszerűen helyettesítsük ezt a sort a célfüggvénysor $+M$(2. sor) $+M$ (3. sor) kifejezéssel. Ez azt adja, hogy

$$\begin{array}{llllll} \text{0. sor:} & z - & 2x_1 - & 3x_2 & - Ma_2 - Ma_3 & = 0 \\ M(\text{2. sor}): & & Mx_1 + & 3Mx_2 - Me_2 + Ma_2 & & = 20M \\ M(\text{3. sor}): & & Mx_1 + & Mx_2 & + Ma_3 & = 10M \\ \text{új 0. sor:} & z + (2M-2)x_1 + (4M-3)x_2 - Me_2 & & & & = 30M \end{array}$$

Egyesítve az új célfüggvénysort (0. sort) az 1–3. sorokkal a 27. táblázatot kapjuk.

Mivel egy min feladatot oldunk meg, a célfüggvénysorban a legnagyobb pozitív együtthatóval rendelkező változó lép be a bázisba. Mivel $4M - 3 > 2M - 2$, az x_2 változónak kell belépnie a bázisba. A hányados teszt azt mutatja, hogy az x_2 beléphet a bázisba a 2. sorban, ami azt jelenti, hogy az a_2 változó el fogja hagyni a bázist. A bázistranszformáció elvégzésének legnehezebb része x_2 kiküszöbölése a célfüggvénysorból. Először helyettesítsük a 2. sort az $\frac{1}{3}$(2. sor) kifejezéssel. Így az új 2. sor:

$$\frac{1}{3}x_1 + x_2 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{1}{3}a_2 = \frac{20}{3}$$

27. TÁBLÁZAT
A Bevcó feladat induló táblája

z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	**J.o.**	**Bázis-változó**	**Hányados**
1	$2M-2$	$4M-3$	0	$-M$	0	0	$30M$	$z\ =30M$	
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	4	$s_1=4$	16
0	1	3	0	1	1	0	20	$a_2=20$	$\frac{20}{3}$*
0	1	1	0	0	0	1	10	$a_3=10$	10

28. TÁBLÁZAT
A Bevco feladat első táblája

z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	**J.o.**	**Bázis-változó**	**Hányados**
1	$\frac{2M-3}{3}$	0	0	$\frac{M-3}{3}$	$\frac{3-4M}{3}$	0	$\frac{60+10M}{3}$	$z\ =\frac{60+10M}{3}$	
0	$\frac{5}{12}$	0	1	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{7}{3}$	$s_1=\frac{7}{3}$	$\frac{28}{5}$
0	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{20}{3}$	$x_2=\frac{20}{3}$	20
0	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{10}{3}$	$a_3=\frac{10}{3}$	5*

Most kiküszöbölhetjük x_2-t a célfüggvénysorból hozzáadva ehhez a $-(4M-3)$(új 2. sor) kifejezést, vagy ami ugyanaz, a $(3-4M)$(új 2. sor)-t. Így

$$
\begin{array}{lr}
 & (3-4M)(\text{új 2. sor}) \qquad = \\
\dfrac{(3-4M)x_1}{3} & +(3-4M)x_2-\dfrac{(3-4M)e_2}{3}+\dfrac{(3-4M)a_2}{3}=\dfrac{20(3-4M)}{3} \\
\text{célfüggvénysor:} & z+(2M-2)x_1+(4M-3)x_2-Me_2=30M \\
\text{új célfüggvénysor:} & z+\dfrac{(2M-3)x_1}{3}+\dfrac{(M-3)e_2}{3}+\dfrac{(3-4M)a_2}{3}=\dfrac{60+10M}{3}
\end{array}
$$

Az x_2 1. és 3. sorból való kiküszöbölésére elemi sorműveleteket végezve a 28. táblázatot kapjuk. Mivel $\frac{2M-3}{3}>\frac{M-3}{3}$, ezért következőnek x_1-et visszük be a bázisba. A hányados teszt azt mutatja, hogy most x_1-nek az aktuális tábla harmadik sorához tartozó bázisváltozó helyére kell a bázisba kerülnie. Ekkor a_3 elhagyja a bázist és a következő táblánkban $a_2=a_3=0$. Hogy x_1-et a 3. sorbeli a_3 változó helyére bevigyük a bázisba, először kicseréljük ezt a sort $\frac{3}{2}$(3. sor)-ra. Így az új 3. sor:

$$x_1+\frac{e_2}{2}-\frac{a_2}{2}+\frac{3a_3}{2}=5$$

A célfüggvénysorból x_1 kiküszöböléséhez ezt most helyettesítjük a régi célfüggvénysor $+\,(3-2M)$(új 3. sor)/3 kifejezéssel.

$$
\begin{array}{ll}
\text{célfüggvénysor:} & z+\dfrac{(2M-3)x_1}{3}+\dfrac{(M-3)e_2}{3}+\dfrac{(3-4M)a_2}{3}=\dfrac{60+10M}{3} \\
\dfrac{(3-2M)(\text{új 3. sor})}{3}: & \dfrac{(3-2M)x_1}{3}+\dfrac{(3-2M)e_2}{6}+\dfrac{(2M-3)a_2}{6} \\
 & \qquad +\dfrac{(3-2M)a_3}{2}=\dfrac{15-10M}{3} \\
\text{Az új célfüggvénysor:} & z-\dfrac{e_2}{2}+\dfrac{(1-2M)a_2}{2}+\dfrac{(3-2M)a_3}{2}=25
\end{array}
$$

29. TÁBLÁZAT
A Bevco feladat optimális táblája

z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	**J.o.**	**Bázis-változó**
1	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1-2M}{2}$	$\frac{3-2M}{2}$	25	$z\ = 25$
0	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$s_1 = \frac{1}{4}$
0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	5	$x_2 = 5$
0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	5	$x_1 = 5$

Az új 1. és 2. sort a szokásos módon számítjuk ki, és eredményül a 29. táblázatot kapjuk. Mivel a célfüggvénysorban minden változónak nempozitív az együtthatója, ez egy optimális tábla, s mivel ebben a táblában minden mesterséges változó 0 értékű, így megtaláltuk a Bevco feladat optimális megoldását: $z = 25, x_1 = x_2 = 5, s_1 = \frac{1}{4}, e_2 = 0$. Ez azt jelenti, hogy a Bevco cég a 10 dekás Oranj palack gyártási költségét 25 centen tudja tartani 5 deka narancs-szódát keverve 5 deka narancslével. Figyeljük meg, hogy az a_2 oszlopát elhagyhattuk volna a táblából, miután a_2 elhagyta a bázist (az első báziscsere eredményeként), és az a_3 oszlopát is elhagyhattuk volna miután a_3 kikerült a bázisból (a második báziscsere eredményeként).

Hogyan ismerjünk fel egy lehetséges megoldás nélküli LP feladatot?

Most úgy módosítjuk a Bevco feladatot, hogy előírjuk, hogy egy 10 dekás Oranj palack legalább 36 mg C-vitamint tartalmazzon. Mivel még 10 deka narancslé is csak $3(10) = 30$ mg C-vitamint tartalmaz, tudjuk, hogy a Bevco feltehetően nem tudja teljesíteni az új C-vitamin-követelményt. Ez azt jelenti, hogy a Bevco LP feladatának most nincs lehetséges megoldása. Nézzük, hogyan mutatja ki a „nagy M” módszer az LP feladat lehetséges megoldáshalmazának ürességét! A Bevco LP feladatát a következőre változtattuk:

$$
\begin{array}{lrl}
\min z = 2x_1 + 3x_2 & & \\
\text{f.h.} & \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \le 4 & \text{(cukor korlát)} \\
& x_1 + 3x_2 \ge 36 & \text{(C-vitamin korlát)} \\
& x_1 + \ \ x_2 = 10 & \text{(10 dekás összmennyiség korlátja)} \\
& x_1, x_2 \ge 0 &
\end{array}
\tag{19}
$$

Miután elvégeztük a „nagy M” módszer 1–5. lépéseit, megkapjuk a 30. táblázatban lévő induló táblát. Mivel $4M - 3 > 2M - 2$, x_2-t bevisszük a bázisba. A hányados teszt azt mutatja, hogy x_2-t a 3. sorhoz tartozó változó helyére kell bevonnunk, tehát a_3 elhagyja a bázist. Az x_2 bázisba történt bevitele után a 31. táblázatot kapjuk. Mivel a célfüggvénysorban minden változónak nempozitív az együtthatója, ez a tábla optimális. A tábla által adott optimális megoldás: $z = 30 + 6M, s_1 = \frac{3}{2}, a_2 = 6, x_2 = 10, a_3 = e_2 = x_1 = 0$. Mivel az a_2 mesterséges változó pozitív az optimális táblában, az 5. lépés azt mutatja, hogy az eredeti LP feladatnak nincs lehetséges megoldása.[8]

[8]Annak magyarázatául, hogy a (19) feladatnak miért nem lehet megoldása, tegyük fel az ellenkezőjét, tehát hogy van: $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. Világos, hogy ha $a_3 = a_2 = 0$, akkor $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ lehetséges megoldás lesz a módosított LP feladatunkra (az LP feladat mesterséges változókkal) vonatkozóan. Ha behelyettesítünk $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$-t a módosított célfüggvénybe $(z = 2\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2 + Ma_2 + Ma_3)$, akkor azt kapjuk, hogy $z = 2\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2$ (ez abból következik, hogy $a_3 = a_2 = 0$). Mivel M nagy, ez a z érték biztosan kisebb, mint $6M + 30$. Ez ellentmond annak a ténynek, hogy módosított célfüggvényünkre a legjobb z érték $6M + 30$. Ez azt jelenti, hogy eredeti (19) LP feladatunknak nem lehet megoldása.

30. TÁBLÁZAT
A Bevco feladat induló táblája (nincs lehetséges megoldás)

z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	**J.o.**	**Bázis-változó**	**Hányados**
1	$2M-2$	$4M-3$	0	$-M$	0	0	$46M$	$z=46M$	
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	4	$s_1=4$	16
0	1	3	0	-1	1	0	36	$a_2=36$	12
0	1	1	0	0	0	1	10	$a_3=10$	10*

31. TÁBLÁZAT
A Bevco feladatnál a lehetséges megoldás hiányát jelző tábla

z	x_1	s_2	s_1	e_2	a_2	a_3	**J.o.**	**Bázis-változó**
1	$1-2M$	0	0	$-M$	0	$3-4M$	$30+6M$	$z=6M+30$
0	$\frac{1}{4}$	0	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$s_1=\frac{3}{2}$
0	-2	0	0	-1	1	-3	6	$a_2=6$
0	1	1	0	0	0	1	10	$x_2=10$

Összegezve, *ha bármely mesterséges változó is pozitív az optimális „nagy M” táblában, akkor az eredeti LP feladatnak nincs lehetséges megoldása.*

Figyeljük meg, hogy amikor a „nagy M” módszert használjuk, nehéz meghatározni, milyen nagy legyen az M értéke. Általában M-et úgy választjuk meg, hogy legalább 100-szor nagyobb legyen, mint a legnagyobb együttható az eredeti célfüggvényben. Ilyen nagy számoknak a bevezetése a feladatba kerekítési hibákat és más számítástechnikai jellegű nehézségeket okozhat. Ezért a legtöbb számítógépes programcsomag az LP feladatokat a kétfázisú szimplex módszerrel oldja meg.

Feladatok

A csoport

Használjuk a „nagy M” módszert a következő LP feladatok megoldására:

1.

$$\begin{aligned} \min z &= 4x_1+4x_2+x_3 \\ \text{f.h.}\quad x_1+x_2+x_3 &\le 2 \\ 2x_1+x_2 &\le 3 \\ 2x_1+x_2+3x_3 &\ge 3 \\ x_1,x_2,x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1+3x_2 \\ \text{f.h.}\quad 2x_1+x_2 &\ge 4 \\ x_1-x_2 &\ge -1 \\ x_1,x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1+x_2 \\ \text{f.h.}\quad x_1+x_2 &\ge 3 \\ 2x_1+x_2 &\le 4 \\ x_1+x_2 &= 3 \\ x_1,x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \min z &= 3x_1 \\ \text{f.h.}\quad 2x_1+x_2 &\ge 6 \\ 3x_1+2x_2 &= 4 \\ x_1,x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

4.9. A kétfázisú szimplex módszer[9]

Ha egy lehetséges bázismegoldás nem adódik kézenfekvő módon, akkor a kétfázisú szimplex módszer a „nagy M” módszer alternatívájaként használható. A kétfázisú szimplex módszerben mesterséges változókat adunk hozzá ugyanazokhoz a feltételekhez, mint a „nagy M” módszerben. Ezután az eredeti LP feladathoz megkeresünk egy lbm-et az 1. fázisbeli LP feladat megoldásával. Ebben az LP feladatban a célfüggvényt az összes mesterséges változó összegének minimalizálásával képezzük. Az 1. fázis befejezésekor újra bevezetjük az eredeti LP feladat célfüggvényét és meghatározzuk az ezzel kapható optimális megoldást. A következő lépések írják le a kétfázisú szimplex módszert. Figyeljük meg, hogy a kétfázisú szimplex módszer 1–3. lépései azonosak a „nagy M” módszer 1–3. lépéseivel.

1. lépés Alakítsuk át a feltételeket úgy, hogy a feltételek jobb oldala pozitív legyen. Ehhez az szükséges, hogy minden olyan feltételt, aminek a jobb oldala negatív, megszorzunk -1-gyel.

1′. lépés Jelöljünk meg minden olyan feltételt, amely most (az 1. lépés után) $=$ vagy $\geq$ feltétel. A 3. lépésben minden ilyen feltételhez egy mesterséges változót fogunk hozzáadni.

2. lépés Hozzunk minden egyenlőtlenség feltételt standard alakra. Ha az i-edik feltétel $\leq$ alakú, akkor adjunk hozzá egy s_i kiegészítő változót. Ha viszont $\geq$ szerepel a feltételben, akkor vonjunk ki belőle egy e_i többlet változót.

3. lépés Ha (az $1'$ lépés után) az i-edik feltétel $\geq$ vagy $=$ feltétel, adjunk hozzá egy a_i mesterséges változót. Vegyük hozzá a modellhez az $a_i \geq 0$ előjelkorlátozási feltételt is.

4. lépés Egyelőre tekintsünk el az eredeti LP feladat célfüggvényétől. Ehelyett oldjunk meg egy olyan LP feladatot, amelynek célfüggvénye min $w' =$ (az összes mesterséges változó összege). Ezt az **1. fázisbeli LP feladatnak** nevezzük. Az 1. fázisbeli LP feladat megoldása a mesterséges változókra 0 értéket kényszerít.

Mivel minden $a_i \geq 0$, az 1. fázisbeli LP feladat megoldása a következő 3 eset egyikére vezet:

1. eset A w' optimális értéke nagyobb zérónál. Ebben az esetben az eredeti LP feladatnak nincs lehetséges megoldása.

2. eset w' optimális értéke zéró, és nincs mesterséges változó az 1. fázisbeli feladat optimális bázisában. Ebben az esetben elhagyjuk az összes olyan oszlopot az 1. fázisbeli optimális táblából, amelyek mesterséges változóknak felelnek meg. Most együtt alkalmazzuk az eredeti célfüggvényt és az 1. fázisbeli optimális tábla korlátozó feltételeit. Ez a **2. fázisbeli LP**-t eredményezi. Ennek az optimális megoldása az eredeti LP feladat optimális megoldása lesz.

3. eset A w' optimális értéke zéró és legalább egy mesterséges változó benne van az 1. fázisbeli optimális bázisban. Ebben az esetben megkapjuk az eredeti LP feladat optimális megoldását, ha az 1. fázis végén az optimális 1. fázisbeli táblából elhagyjuk az összes bázison kívüli mesterséges változót és az eredeti feladat minden olyan változóját, amelynek negatív együtthatója van az 1. fázisbeli optimális tábla célfüggvénysorában.

Mielőtt az 1. és 2. esetet szemléltető példákat oldanánk meg, röviden megvizsgáljuk, hogy $w' > 0$ miért felel meg annak, hogy az eredeti LP feladatnak nincs lehetséges megoldása, $w' = 0$ pedig annak az esetnek, hogy az eredeti LP feladatnak legalább egy lehetséges megoldása van.

[9] Ezen alfejezet kihagyása nem szakítja meg a tárgyalás folytonosságát.

Az 1. és a 2. fázisbeli lehetséges megoldások

Tegyük fel, hogy az eredeti LP feladatnak nincs lehetséges megoldása. Ekkor az egyetlen lehetőség arra, hogy az 1. fázisbeli LP feladatra egy lehetséges megoldást kapjunk az, hogy legalább egy mesterséges változónál megengedjük a pozitivitást. Ebben az esetben $w' > 0$ (1. eset) lesz az eredmény. Másrészt, ha az eredeti LP feladatnak van egy lehetséges megoldása, akkor ez (minden $a_i = 0$ mellett) az 1. fázisbeli LP lehetséges megoldása és $w' = 0$-ra vezet. Ez azt jelenti, hogy ha az eredeti LP feladatnak van lehetséges megoldása, akkor az optimális 1. fázisbeli megoldásra $w' = 0$. A továbbiakban az eljárást a kétfázisú szimplex módszer 1. és 2. esetének megfelelő példák megoldásán keresztül mutatjuk be.

5. PÉLDA Először a kétfázisú szimplex módszert a 4.8. alfejezet Bevco feladatának megoldására használjuk. Emlékezzünk vissza, hogy a Bevco feladat a következő volt:

$$\begin{aligned}
\min\ & z = 2x_1 + 3x_2 \\
\text{f.h.}\ & \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 \le 4 \\
& x_1 + 3x_2 \ge 20 \\
& x_1 + x_2 = 10 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

Megoldás Mint a „nagy M” módszerben, az 1–3. lépésekben most is a következőképpen alakulnak át a feltételek:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + s_1 \qquad\qquad\qquad &= 4 \\
x_1 + 3x_2 \qquad - e_2 + a_2 \qquad &= 20 \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad + a_3 &= 10
\end{aligned}$$

A 4. lépés a következő 1. fázisbeli LP feladatot eredményezi:

$$\begin{aligned}
\min\ & w' = a_2 + a_3 \\
\text{f.h.}\ & \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + s_1 = 4 \\
& x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 = 20 \\
& x_1 + x_2 + a_3 = 10
\end{aligned}$$

Ez az egyenletrendszer az 1. fázisra egy induló lbm-et ad $(s_1 = 4, a_2 = 20, a_3 = 10)$. Figyeljük meg azonban, hogy a tábla célfüggvénysora $(w' - a_2 - a_3 = 0)$ tartalmazza az a_2 és a_3 bázisváltozókat. Mint a „nagy M” módszernél, a_2 és a_3 itt is kiküszöbölendő a célfüggvénysorból, mielőtt megoldjuk az 1. fázis feladatát. Az a_2 és a_3 célfüggvénysorból történő kiküszöbölése céljából egyszerűen adjuk hozzá a 2. és 3. sort a 0. sorhoz (célfüggvénysorhoz):

$$\begin{array}{lllr}
\text{0. sor:} & w' & \qquad\qquad - a_2 - a_3 & = 0 \\
+\,\text{2. sor:} & & x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 & = 20 \\
+\,\text{3. sor:} & & x_1 + x_2 \qquad\quad + a_3 & = 10 \\
=\text{új 0. sor:} & w' + 2x_1 + 4x_2 - e_2 & & = 30
\end{array}$$

Az új célfüggvénysort az 1. fázisbeli korlátozó feltételekkel összekapcsolva megkapjuk a 32. táblázatban látható 1. fázisbeli induló táblát. Mivel az 1. fázisbeli feladat *mindig* min feladat (még akkor is, ha az eredeti LP probléma egy max feladat), x_2-t bevisszük a bázisba.

32. TÁBLÁZAT
Induló 1. fázisbeli tábla a Bevco problémára

w'	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	**J.o.**	**Bázis-változó**	**Hányados**
1	2	4	0	-1	0	0	30	$w' = 30$	
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	4	$s_1 = 4$	16
0	1	3	0	-1	1	0	20	$a_2 = 20$	$\frac{20}{3}$*
0	1	1	0	0	0	1	10	$a_3 = 10$	10

33. TÁBLÁZAT
1. fázisbeli tábla a Bevco problémára egy iteráció után

w'	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	**J.o.**	**Bázis-változó**	**Hányados**
1	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{10}{3}$	$w' = \frac{10}{3}$	
0	$\frac{5}{12}$	0	1	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{7}{3}$	$s_1 = \frac{7}{3}$	$\frac{28}{5}$
0	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{20}{3}$	$a_2 = \frac{20}{3}$	20
0	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{10}{3}$	$a_3 = \frac{10}{3}$	5*

34. TÁBLÁZAT
Optimális 1. fázisbeli tábla a Bevco problémára

w'	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	**J.o.**	**Bázis-változó**
1	0	0	0	0	-1	-1	0	$w' = 0$
0	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$s_1 = \frac{1}{4}$
0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	5	$x_2 = 5$
0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	5	$x_1 = 5$

A hányados teszt azt mutatja, hogy x_2 a bázisba a 2. sorbeli a_2 helyére lép be, amely pedig elhagyja a bázist. A szükséges elemi sortranszformációk elvégzése után a 33. táblázatot kapjuk. Mivel $\frac{2}{3} > \frac{1}{3}$, x_1 lép be a bázisba a 3. sorbeli bázisváltozó helyére. Így a_3 elhagyja a bázist. Mivel a_2 és a_3 az aktuális báziscsere után bázison kívüli lesz, már tudjuk, hogy a következő tábla optimális lesz az 1. fázisban. Egy pillantás a 34. táblázatra megerősíti ezt a tényt.

Mivel $w' = 0$, az 1. fázis befejeződött. A lehetséges bázismegoldást: $s_1 = \frac{1}{4}, x_2 = 5, x_1 = 5$ megtaláltuk. Mivel nincsenek mesterséges változók az 1. fázis végén levő bázisban, a feladat a 2. eset egy példája. Most elhagyjuk az a_2 és a_3 mesterséges változók oszlopát (tovább nincs szükségünk rájuk), és újra bevezetjük az eredeti célfüggvényt.

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 \quad \text{vagy} \quad z - 2x_1 - 3x_2 = 0$$

Mivel x_1 és x_2 egyaránt az 1. fázisbeli optimális bázisban vannak, ki kell küszöbölni őket a 2. fázis célfüggvénysorából. Ehhez a sorhoz hozzáadjuk az optimális 1. fázisbeli tábla soraiból számított 3(2. sor) + 2(3. sor) kifejezést.

$$\begin{array}{lrcl}
\text{A 2. fázis 0. sora:} & z - 2x_1 - 3x_2 & & = 0 \\
+\ 3(2.\ \text{sor}): & 3x_2 & - \frac{3}{2}e_2 & = 15 \\
+\ 2(3.\ \text{sor}): & 2x_1 & + \ e_2 & = 10 \\
=\ \text{Az új 2. fázisbeli 0. sor:} & z & - \frac{1}{2}e_2 & = 25
\end{array}$$

A 2. fázist most a következő egyenletrendszerrel kezdjük:

$$\begin{aligned} \min z - \tfrac{1}{2}e_2 &= 25 \\ s_1 - \tfrac{1}{8}e_2 &= \tfrac{1}{4} \\ x_2 \quad - \tfrac{1}{2}e_2 &= 5 \\ x_1 \qquad + \tfrac{1}{2}e_2 &= 5 \end{aligned}$$

Ez a megoldás optimális. Ebben a feladatban tehát a 2. fázis nem igényel báziscserét az optimális megoldás megkereséséhez. Ha a 2. fázisbeli célfüggvénysor nem jelez optimumot, akkor egyszerűen folytassuk a szimplex eljárást mindaddig, amíg nem kapunk egy optimális célfüggvénysort.

Összegezve: 2. fázisbeli optimális táblánk azt mutatja, hogy a Bevco probléma optimális megoldása $z = 25, x_1 = 5, x_2 = 5, s_1 = \frac{1}{4}$ és $e_2 = 0$. Ez természetesen megegyezik a „nagy M” módszer által a 4.8. alfejezetben talált optimális megoldással.

---

6. PÉLDA A 2. eset szemléltetéséhez úgy módosítjuk a Bevco feladatát, hogy a szükséges C-vitamin-mennyiség 36 mg legyen. A 4.8. alfejezetből tudjuk, hogy ennek a feladatnak nincs lehetséges megoldása. Ez azt jelenti, hogy az 1. fázisbeli optimális megoldásra $w' > 0$ (1. eset). Ennek igazolásául kezdjük az eredeti feladattal:

$$\begin{aligned} \min z = {} & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{f.h.} \quad & \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 \le 4 \\ & x_1 + 3x_2 \ge 36 \\ & x_1 + x_2 = 10 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Megoldás A kétfázisú szimplex módszer 1–4. lépéseit elvégezve, a következő 1. fázisbeli feladatot kapjuk:

$$\begin{aligned} \min w' = {} & a_2 + a_3 \\ \text{f.h.} \quad & \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + s_1 = 4 \\ & x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 = 36 \\ & x_1 + x_2 + a_3 = 10 \end{aligned}$$

Ebből az egyenletrendszerből látjuk, hogy az induló 1. fázisbeli lbm: $s_1 = 4$, $a_2 = 36$ és $a_3 = 10$. Mivel az a_2 és a_3 bázisváltozók szerepelnek az 1. fázisbeli célfüggvényben, ezért ki kell őket küszöbölni az 1. fázisbeli célfüggvénysorból. Hogy ezt elérjük, a 2. és 3. sort hozzáadjuk a 0. sorhoz (célfüggvénysorhoz):

$$\begin{array}{ll} \text{0. sor:} & w' - a_2 - a_3 = 0 \\ +\ \text{2. sor:} & x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 = 36 \\ +\ \text{3. sor:} & x_1 + x_2 + a_3 = 10 \\ =\ \text{Az új 0. sor:} & w' + 2x_1 + 4x_2 - e_2 = 46 \end{array}$$

Az új célfüggvénysorral felépített 1. fázisbeli induló táblát a 35. táblázatban láthatjuk. Mivel 4 > 2, x_2-t kell bevinnünk a bázisba. A hányados teszt azt mutatja, hogy x_2-nek a 3. sorban kell a bázisba kerülnie, így a_3-at annak elhagyására kényszerítve. Az eredményül adódó tábla a 36. táblázatban látható. Mivel a célfüggvénysorban egy változónak sincs pozitív komponense, ez egy optimális 1. fázisbeli tábla, de mivel a w'-nek $6 > 0$ az optimális értéke, az eredeti LP feladatnak a táblázatbeli megoldás nem lehetséges megoldása. Ez logikus is, mivel ha az eredeti LP feladatnak lenne lehetséges megoldása, akkor az lehetséges megoldás lenne az 1. fázisbeli LP számára is (miután rögzítettük az $a_2 = a_3 = 0$ értékeket), és ez a lehetséges megoldás $w' = 0$-t eredményezett volna. Mivel a szimplex eljárás nem tudott olyan első fázisbeli megoldást találni, amelyre $w' = 0$ lenne, ezért az eredeti LP feladatnak nincs lehetséges megoldása.

35. TÁBLÁZAT
Az 1. fázis induló táblája a Bevco feladatra (nem tartalmaz lehetséges megoldást)

w'	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	**J.o.**	**Bázis-változó**	**Hányados**
1	2	4	0	-1	0	0	46	$w' = 46$	
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	4	$s_1 = 4$	16
0	1	3	0	-1	1	0	36	$a_2 = 36$	12
0	1	1	0	0	0	1	10	$a_3 = 0$	10*

36. TÁBLÁZAT
A Bevco feladatnak az a táblája, amely jelzi, hogy nincs lehetséges megoldás

w'	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	**J.o.**	**Bázis-változó**
1	-2	0	0	-1	0	-4	6	$w' = 6$
0	$\frac{1}{4}$	0	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$s_1 = \frac{3}{2}$
0	-2	0	0	-1	1	-3	6	$a_2 = 6$
0	1	1	0	0	0	1	10	$x_2 = 10$

MEGJEGYZÉSEK

1. Akárcsak a „nagy M” módszernél, a mesterséges változókra vonatkozó oszlopok itt is elhagyhatók a további táblákból, amint az adott mesterséges változó elhagyta a bázist. A Bevco probléma megoldásánál tehát az a_2 oszlopa elhagyható az első 1. fázisbeli bázistranszformáció után, míg a_3 oszlopa a második bázistranszformáció után hagyható el.

2. Megmutatható, hogy (a hányados tesztnél a többszörös legkisebb hányados esetét kizárva) a „nagy M” módszer és a kétfázisú módszer első fázisa ugyanazt a báziscsere sorozatot hajtja végre. Ennek az ekvivalenciának az ellenére a legtöbb számítógépes programcsomag a kétfázisú módszert használja egy induló lbm megkeresésére. Ennek az az oka, hogy az M, egy nagy pozitív szám lévén, kerekítési hibákat és más számítástechnikai jellegű nehézségeket idézhet elő. A kétfázisú módszer nem vezet be semmilyen nagy számot a célfüggvénybe, s így elkerüli az ilyen jellegű problémákat.

Feladatok

A csoport

1. Használjuk a kétfázisú szimplex módszert a 4.8. alfejezet feladatainak megoldására!

2. Magyarázzuk meg, hogy az 1. fázisbeli LP feladatnak általában miért vannak alternatív optimális megoldásai!

4.10. Előjelkorlátozatlan változók esete

LP feladatok szimplex algoritmussal történő megoldásánál a hányados tesztet használtuk annak eldöntésére, hogy az egyes sorokhoz tartozó bázisváltozók helyére melyik bázisváltozó kerüljön. Emlékezzünk, hogy a hányados teszt működése azon alapult, hogy minden lehetséges pontban az összes változónak nemnegatívnak kellett lennie. Ezért, ha egyes változóknak megengedjük, hogy előjelkorlátozatlanok (ekn-ek) legyenek, akkor a hányados teszt és a szimplex algoritmus már nem használható. Ebben az alfejezetben bemutatjuk, hogyan lehet egy előjelkorlátozatlan változókkal rendelkező LP feladatot átalakítani egy olyan LP feladattá, amelyben már az összes változó nemnegatív.

Minden ekn (előjelkorlátozatlan) x_i változóra két új változó: x_i' és x_i'' bevezetésével kezdjük. Ezután $x_i' - x_i''$-t helyettesítünk x_i helyére minden korlátozó feltételben és a célfüggvényben. Továbbá vegyük még hozzá a többihez az $x_i' \geq 0$ és $x_i'' \geq 0$ előjelkorlátozásokat. Ennek a helyettesítésnek a célja x_i-t két nemnegatív változó, x_i' és x_i'' különbségeként kifejezni. Mivel most minden változónak nemnegatívnak kell lennie, elindulhatunk a szimplex eljárással. Mint ahogyan rövidesen látjuk majd, egyetlen lehetséges bázismegoldásban sem teljesülhet egyidejűleg $x_i' > 0$ és $x_i'' > 0$. Ez azt jelenti, hogy minden lehetséges bázismegoldásra minden egyes x_i ekn változó a következő három eset egyikébe tartozik:

1. eset $x_i' > 0$ és $x_i'' = 0$. Ez az eset akkor lép fel, ha egy lbm-ben $x_i > 0$. Ekkor $x_i = x_i' - x_i'' = x_i'$. Így, $x_i = x_i'$. Például, ha $x_i = 3$ egy lbm-ben, akkor ezt $x_i' = 3$ és $x_i'' = 0$ mutatja.

2. eset $x_i' = 0$ és $x_i'' > 0$. Ez az eset lép fel, ha $x_i < 0$. Mivel $x_i = x_i' - x_i''$, azt kapjuk, hogy $x_i = -x_i''$. Például, ha $x_i = -5$ egy lbm-ben, akkor $x_i' = 0$ és $x_i'' = 5$ lesz. S így $x_i = 0 - 5 = -5$.

3. eset $x_i' = x_i'' = 0$. Ebben az esetben $x_i = 0 - 0 = 0$.

A következő példa megoldásánál látni fogjuk, hogy egy lbm-re miért nem állhat fenn egyszerre $x_i' > 0$ és $x_i'' > 0$ is.

7. PÉLDA Egy péknek 30 deka lisztje és 5 csomag élesztője van. Egy vekni kenyér sütéséhez 5 deka lisztre és 1 csomag élesztőre van szükség. Egy rúd kenyér 30 centért adható el. A pék még beszerezhet további lisztet 4 cent/deka áron, vagy eladhatja a megmaradt lisztet ugyanilyen áron. Írjuk fel és oldjuk meg azt az LP feladatot, amely segít a péknek a profitját maximalizálni!

Megoldás Definiáljuk a változókat:

x_1 = az elkészített kenyerek száma

x_2 = a rendelkezésre álló lisztmennyiség növelése (dekában) készpénzes vásárlással

Ezért $x_2 > 0$ azt jelenti, hogy x_2 deka lisztet vásárolunk, $x_2 < 0$ jelentése pedig az, hogy $-x_2$ mennyiséget eladunk a lisztből, végül $x_2 = 0$ azt jelzi, hogy sem nem veszünk, sem nem adunk el lisztet. Megjegyezve, hogy $x_1 \geq 0$ és x_2 ekn változó, a megfelelő LP feladat a következő:

$$\begin{aligned}
&\max z = 30x_1 - 4x_2 \\
&\text{f.h.} \quad 5x_1 \leq 30 + x_2 \qquad \text{(liszt feltétel)} \\
&\qquad\quad x_1 \leq 5 \qquad\qquad \text{(élesztő feltétel)} \\
&\qquad\quad x_1 \geq 0, x_2 \text{ ekn}
\end{aligned}$$

Mivel x_2 ekn, $x_2' - x_2''$-t helyettesítsük be x_2 helyére a célfüggvénybe és a feltételekbe. Ebből

$$\begin{aligned} \max\ z &= 30x_1 - 4x_2' + 4x_2'' \\ \text{f.h.}\quad 5x_1 &\le 30 + x_2' - x_2'' \\ x_1 &\le 5 \\ x_1, x_2', x_2'' &\ge 0 \end{aligned}$$

A célfüggvény „0. sor formára” hozása és az s_1 és s_2-nek a feltételekhez történő hozzáadása után a 37. táblázatban található induló táblát kapjuk. Figyeljük meg, hogy az x_2'-höz tartozó oszlop egyszerűen az ellentettje az x_2''-höz tartozó oszlopnak. Látjuk majd, hogy *akárhány báziscserét csinálunk is, az x_2' oszlop mindig az ellentettje marad az x_2'' oszlopának*. (Lásd a 6. feladatot ennek az állításnak a bizonyítására.)

37. TÁBLÁZAT Induló tábla az ekn változót tartalmazó LP-re

z	x_1	x_2'	x_2''	s_1	s_2	**J.o.**	**Bázis-változó**	**Hányados**
1	−30	4	−4	0	0	0	$z = 0$	
0	5	−1	1	1	0	30	$s_1 = 30$	6
0	1	0	0	0	1	5	$s_2 = 5$	5*

38. TÁBLÁZAT Első tábla az ekn LP-re

z	x_1	x_2'	x_2''	s_1	s_2	**J.o.**	**Bázis-változó**	**Hányados**
1	0	4	−4	0	30	150	$z = 150$	
0	0	−1	1	1	−5	5	$s_1 = 5$	6
0	1	0	0	0	1	5	$x_1 = 5$	5*

39. TÁBLÁZAT Optimális tábla az ekn LP-re

z	x_1	x_2'	x_2''	s_1	s_2	**J.o.**	**Bázis-változó**
1	0	0	0	4	10	170	$z = 170$
0	0	−1	1	1	−5	5	$x_2'' = 5$
0	1	0	0	0	1	5	$x_1 = 5$

Mivel x_1-nek van a legnagyobb abszolút értékű negatív együtthatója a 0. sorban, ezért x_1 lép be a bázisba a 2. sorban (az ehhez tartozó bázisváltozó helyére). Az eredményt a 38. táblázat mutatja. Itt is megfigyelhetjük, hogy x_2' oszlopa az x_2'' oszlopának ellentettje.

Mivel most az x_2''-nek van a legnagyobb abszolút értékű negatív együtthatója a 0. sorban, bevisszük x_2''-t a bázisba az 1. sorbeli bázisváltozó helyére. Az eredmény a 39. táblázatban látható. Figyeljük meg, hogy x_2' oszlopa itt is az x_2'' oszlopának ellentettje. Ez a tábla optimális, így az optimális megoldás a pék feladatára $z = 170, x_1 = 5, x_2'' = 5, x_2' = 0, s_1 = s_2 = 0$. A pék tehát 5 kenyér elkészítésével 170 cent profitra tesz szert. Mivel $x_2 = x_2' - x_2'' = 0 - 5 = -5$, a péknek el kell adnia 5 deka lisztet. A pék számára az optimális lehetőség a liszt eladása, mivel az 5 csomag meglevő élesztője legfeljebb 5 rúd kenyér elkészítését teszi lehetővé. Ehhez az 5 kenyérhez $5(5) = 25$ deka liszt szükséges, s így $30 - 25 = 5$ deka eladni való liszt megmarad.

Az x_2' és x_2'' változók sohasem lesznek ketten együtt bázisváltozók ugyanabban a táblában. Annak belátására, hogy ez miért van így, tegyük fel, hogy x_2'' bázisváltozó (ahogyan az optimális táblában látjuk). Ekkor az x_2'' oszlopa egyetlen 1-es értéket tartalmaz, s az összes többi eleme 0 lesz. Mivel az x_2' oszlopa mindig az x_2'' oszlopának az ellentettje, ezért az x_2' oszlopa egyetlen -1-t tartalmaz, s az összes többi eleme 0 lesz. Egy ilyen táblának nem lehet az x_2' is lehetséges bázisváltozója. Ugyanez az okoskodás mutatja, hogy ha x_i egy ekn (előjelkorlátozatlan) változó, akkor x_i' és x_i'' mindegyike nem lehet bázisváltozó ugyanabban a táblában. Ez azt jelenti, hogy egy tetszőleges táblában x_i' és x_i'' egyike, vagy mindkettő 0, és hogy az 1–3. esetek egyike mindig be fog következni.

A következő példa azt mutatja be, hogy hogyan használhatók ekn változók a termelés-kiegyenlítési költségek modellezésére (amit a 3.10. alfejezet Sailco példájában tárgyaltunk).

8. PÉLDA A Mondo motorkerékpár üzemnek döntenie kell a következő 4 negyedévre vonatkozó termelési tervéről. A kereslet motorkerékpárok iránt a következő lesz: 1. negyedév: 40; 2. negyedév: 70; 3. negyedév: 50; 4. negyedév: 20. A Mondo üzemet négyféle költség terheli.

1. Egy motorkerékpár gyártási költsége 400$.

2. Minden negyedév végén, legyártott motorkerékpáronként 100$ készletezési költség merül fel.

3. A termelésnek az egyik negyedévről a következőre történő növelése alkalmazottak betanítási költségével jár együtt. Becslések szerint motorkerékpáronként 700$ költség származik abból, ha a termelést az egyik negyedévről a következőre megnöveljük.

4. A termelésnek az egyik negyedévről a következőre történő csökkentéséből olyan költségek származnak, mint például végkielégítések kifizetése, a munkamorál romlásából származó veszteségek, stb. Becslések szerint ha a termelés csökken az egyik negyedévről a következőre, akkor ez 600$ költséget eredményez motorkerékpáronként.

Minden keresletet időben ki kell elégíteni, s egy adott negyedév termelése már felhasználható az aktuális negyedév igényének kielégítésére. Az 1. negyedévet közvetlenül megelőző negyedévben 50 Mondo motorkerékpárt gyártottak. Tegyük fel, hogy az 1. negyedév elején nincsen motorkerékpár raktáron. Fogalmazzunk meg egy olyan LP feladatot, amely minimalizálja a Mondo üzem teljes költségét a következő négy negyedévben!

Megoldás A raktározási és termelési költségek megadásához definiáljuk $t = 1, 2, 3, 4$-re a következő változókat:

$$p_t = \text{a } t\text{-edik negyedév alatt gyártott motorkerékpárok száma}$$
$$i_t = \text{raktárkészlet a } t\text{-edik negyedév végén}$$

A termelési mennyiség változásakor fellépő kiegyenlítési költségek (lásd a 3. és 4. pontot), meghatározásához bevezetett változók:

$$x_t = \text{az a mennyiség, amennyivel a } t\text{-edik negyedév termelése meghaladja az előzőt}$$

Mivel x_t nem előjelkorlátozott, felírhatjuk így: $x_t = x_t' - x_t''$, ahol $x_t' \geq 0$ és $x_t'' \geq 0$. Tudjuk, hogy ha $x_t \geq 0$, akkor $x_t = x_t'$ és $x_t'' = 0$. Hasonlóan, ha $x_t \leq 0$, akkor $x_t = -x_t''$ és $x_t' = 0$.

Ez azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned}
x'_t &= \text{a } t\text{-edik negyedév termelésnövekedése a } (t-1)\text{-edikhez képest} \\
&\quad (x'_t = 0 \text{ ha a } t\text{-edik periódus termelése kevesebb, mint a } (t-1)\text{-ediké}) \\
x''_t &= \text{a termelés csökkenése a } t\text{-edik negyedben a } (t-1)\text{-edikhez képest} \\
&\quad (x'_t = 0 \text{ ha a } t\text{-edik periódus termelése kisebb, mint az előzőé})
\end{aligned}$$

Például, ha $p_1 = 30$ és $p_2 = 50$, akkor $x_2 = 50 - 30 = 20, x'_2 = 20, x''_2 = 0$. Hasonlóan, ha $p_1 = 30$ és $p_2 = 15$, akkor $x_2 = 15 - 30 = -15, x'_2 = 0$ és $x''_2 = 15$. Az x'_t és x''_t változók tehát felhasználhatók a termelés mennyiségi változásainak kiegyenlítésével kapcsolatos t-edik negyedévi költségek kifejezésére.

Most már kifejezhetjük a Mondo teljes költségét:

$$\begin{aligned}
\text{teljes költség} &= \text{termelési költség} + \text{raktározási költség} \\
&\quad + \text{a termelés növelése miatti kiegyenlítési költség} \\
&\quad + \text{a termelés csökkentése miatti kiegyenlítési költség} \\
&= 400(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) + 100(i_1 + i_2 + i_3 + i_4) \\
&\quad + 700(x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4) + 600(x''_1 + x''_2 + x''_3 + x''_4)
\end{aligned}$$

A modell teljessé tételéhez az eddigiekhez még hozzáveszünk 2 feltételtípust. Először is szükségünk van raktározási feltételekre (mint a Sailco feladatnál a 3.8. alfejezetben), amelyek összekapcsolják a mostani negyedév raktárkészletét az előző negyedévével, s a jelen negyedévbeli termeléssel. A t-edik negyedévre a raktárkészlet-feltételnek a következő lesz az alakja:

$$\begin{aligned}
\text{A } t\text{-edik negyedévbeli raktárkészlet} &= ((t-1)\text{-edik negyedéves raktárkészlet}) \\
&\quad + (t\text{-edik negyedéves termelés}) \\
&\quad - (t\text{-edik negyedéves kereslet})
\end{aligned}$$

Ez $t = 1, 2, 3, 4$-re a következő négy korlátozó feltételt adja:

$$\begin{aligned}
i_1 &= 0 + p_1 - 40 \qquad & i_2 &= i_1 + p_2 - 70 \\
i_3 &= i_2 + p_3 - 50 \qquad & i_4 &= i_3 + p_4 - 20
\end{aligned}$$

Az előjelkorlátozások $i_t \geq 0$ $(t = 1, 2, 3, 4)$ biztosítják, hogy minden negyedév keresletét időben kielégítik.

A második feltételtípus azt tükrözi, hogy a p_t, p_{t-1}, x'_t és x''_t kapcsolatban vannak egymással. Ezt a kapcsolatot fejezik ki a következő összefüggések:

$$\begin{aligned}
&(\text{a } t\text{-edik negyedévbeli termelés}) \\
&-(\text{a } (t-1)\text{-edik negyedévbeli termelés}) = x_t = x'_t - x''_t
\end{aligned}$$

Ekkor $t = 1, 2, 3, 4$-re ez a kapcsolat a következő négy korlátozó feltételt adja:

$$\begin{aligned}
p_1 - 50 &= x'_1 - x''_1 \qquad & p_2 - p_1 &= x'_2 - x''_2 \\
p_3 - p_2 &= x'_3 - x''_3 \qquad & p_4 - p_3 &= x'_4 - x''_4
\end{aligned}$$

Egymás mellé téve a célfüggvényt, a négy raktárkészlet-feltételt, az utolsó négy feltételt és az előjelkorlátozásokat ($i_t, p_t, x'_t, x''_t \geq 0$ ha $t = 1,2,3,4$), a következő LP feladatot kapjuk:

$$
\begin{aligned}
\min z &= 400p_1 + 400p_2 + 400p_3 + 400p_4 + 100i_1 + 100i_2 + 100i_3 + 100i_4 \\
&\quad +700x'_1 + 700x'_2 + 700x'_3 + 700x'_4 + 600x''_1 + 600x''_2 + 600x''_3 + 600x''_4 \\
\text{f.h.} \quad i_1 &= 0 + p_1 - 40 \\
i_2 &= i_1 + p_2 - 70 \\
i_3 &= i_2 + p_3 - 50 \\
i_4 &= i_3 + p_4 - 20 \\
p_1 &- 50 = x'_1 - x''_1 \\
p_2 &- p_1 = x'_2 - x''_2 \\
p_3 &- p_2 = x'_3 - x''_3 \\
p_4 &- p_3 = x'_4 - x''_4 \\
i_t, &\, p_t, x'_t, x''_t \geq 0 \quad (t = 1,2,3,4)
\end{aligned}
$$

Mint a 7. példában, x'_t oszlopa a feltételrendszerben most is ellentettje az x''_t oszlopának. Így, csakúgy mint a 7. példában, egyetlen lbm-re sem lehet egyidejűleg $x'_t > 0$ és $x''_t > 0$ is igaz. Ez azt jelenti, hogy x'_t ténylegesen a t-edik negyedévbeli termelésnövekedést jelenti, x''_t pedig az esetleges termeléscsökkenést ebben az időszakban.

Van egy másik mód is arra, hogy megmutassuk, hogy az optimális megoldásban nem teljesül egyszerre $x'_t > 0$ és $x''_t > 0$. Tegyük fel például, hogy $p_2 = 70$ és $p_1 = 60$. Ekkor a

$$p_2 - p_1 = 70 - 60 = x'_2 - x''_2 \tag{20}$$

feltétel az x'_2 és x''_2 számos kombinációjával teljesíthető. Például, $x'_2 = 10$ és $x''_2 = 0$ kielégíti (20)-at, ha $x'_2 = 20$ és $x''_2 = 10$; továbbá $x'_2 = 40$ és $x''_2 = 30$ esetében is; és így tovább. Ha $p_2 - p_1 = 10$, akkor az optimális LP megoldásban mindig $x'_2 = 10$ és $x''_2 = 0$ lesz, minden egyéb lehetőséggel szemben. Annak belátásához, hogy ez miért van így, vizsgáljuk meg a Mondo feladatának célfüggvényét! Ha $x'_2 = 10$ és $x''_2 = 0$, akkor x'_2 és x''_2 $10(700) = 7000\$$ értékben járulnak hozzá a kiegyenlítési költségekhez. Másrészt, az x'_2 és x''_2 bármely más választása, amely kielégíti (20)-at, több mint 7000$ értékben fog hozzájárulni a kiegyenlítési költségekhez. Például $x'_2 = 20$ és $x''_2 = 10$ $20(700) + 10(600) = 20\,000\$$ összeggel járul hozzá a kiegyenlítési költségekhez. Mivel minimalizáljuk a teljes költséget, a szimplex eljárás soha nem fog egy olyan megoldást választani, amelynél $x'_t > 0$ és $x''_t > 0$ egyaránt fennáll. A Mondo feladat optimális megoldása $p_1 = 55, p_2 = 55, p_3 = 50, p_4 = 50$. Ez a megoldás 95 000$ teljes költséget jelent. Az optimális termelési terv összesen 210 Mondo motorkerékpár gyártását teszi lehetővé. Mivel a teljes kereslet a négy negyedévre összesen csak 180 Mondo motorkerékpár, marad még egy $210 - 180 = 30$ darabos zárókészlet. Figyeljük meg, hogy ez ellentétben áll a 3.8. alfejezetben tárgyalt Sailco raktárkészlet modellel, amelyben a zárókészlet mindig 0 volt. A Mondo feladat optimális megoldása nemzéró raktárkészletet tartalmaz a 4. negyedévben, mivel ahhoz, hogy ebben a negyedévben a raktárkészlet 0 legyen, a termelésnek ekkor alacsonyabbnak kell lennie, mint a 3. negyedévben. Azoknak az igen nagy kiegyenlítési költségeknek az elfogadása helyett, amelyek ezzel a stratégiával járnak, az optimális megoldás 30 Mondo motor raktáron tartása a 4. negyedév végén.

Feladatok

A csoport

1. Tegyük fel, hogy a Mondo cégnek nem kell határidőre kielégítenie az igényeket. Minden olyan negyedévre, amikor a motorkerékpárok iránti igény nincs kielégítve, bevezetünk egy hiányzó motorkerékpáronként 110$ nagyságú büntető- vagy hiányköltséget. Így a kereslet most késleltethető. Azonban az összes keresletet ki kell elégíteni a 4. negyedév végéig. Módosítsuk a Mondo feladat megfogalmazását úgy, hogy megengedünk késleltetett keresletet. (*Útmutatás*: A nem kielégített kereslet $i_t \leq 0$-nek felel meg. Így i_t most ekn változó, tehát a szokásos módon helyettesítenünk kell: $i_t = i'_t - i''_t$. Itt i''_t lesz a t-edik negyedévben nem kielégített kereslet értéke.)

2. Használjuk a szimplex algoritmust a következő LP feladat megoldására:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{f.h.}\quad 3x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\ \text{ekn} \end{aligned}$$

B csoport

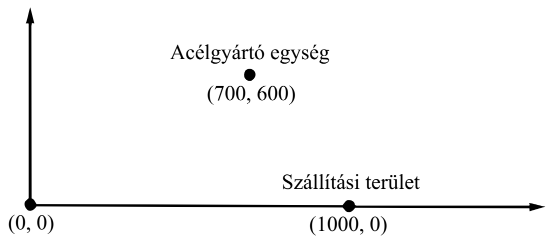
3. A következő 3 hónap folyamán a Steelco acélüzem a következő acélkeresletre számíthat: 100 tonna (1. hónap); 200 tonna (2. hónap); 50 tonna (3. hónap). Bármelyik hónap folyamán egy munkás maximum 15 tonna acélt tud termelni. A munkások fizetése 5000$ havonta. Egy munkás munkába állításának vagy elbocsátásának költségei a következők: 3000$ az elbocsátás és 4000$ a munkába állítás költsége munkásonként (a munkába állítás nem igényel időt). Egy tonna acél egy havi készletezési költsége 100$. A kereslet 70$ tonnánkénti költség révén 1 hónapig késleltethető. Tehát, ha 1 tonna 1. havi keresletet a 3. hóban elégítenek ki, akkor a késleltetés költsége 140$. Az első hónap elején a Steelco üzemnek 8 munkása van. Bármely hónap folyamán legfeljebb 2 új munkás állítható munkába. Az összes keresletet ki kell elégíteni a 3. hónap végére. Az egy tonna acél előállítására felhasználandó nyersanyag 300$-ba kerül. Fogalmazzunk meg egy LP feladatot, amely a Steelco költségeit minimalizálja!

4. Mutassuk meg, hogyan használható a lineáris programozás a következő feladat megoldására:

$$\begin{aligned} \max\ z &= |2x_1 - 3x_2| \\ \text{f.h.}\quad 4x_1 + x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 0.5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

5.[10] A Steelco acélüzem fő telepén jelenleg egy acélgyártási terület és egy szállítási célú terület van, ahogyan azt a 4. ábra mutatja (a távolságok méterben adottak). A cégnek döntenie kell arról, hogy hova telepít egy acélgyártó és egy összeszerelő egységet, valamint egy raktárrészleget úgy, hogy minimalizálja az üzemen belüli anyagmozgatás napi költségét.

4. ÁBRA



A napi utak (mozgatások) száma a 40. táblázatban látható. Feltéve, hogy az összes szállítás csak kelet–nyugat vagy észak–dél irányban történhet, fogalmazzunk meg egy olyan LP feladatot, amellyel meghatározhatjuk, hol helyezkedjen el az acélgyártó és az összeszerelő üzemrész, valamint a raktárrészleg, ha minimalizálni akarjuk a napi szállítási költségeket. (*Útmutatás*: Ha az acélgyártó részleg koordinátái:

[10] Love and Yerex (1976) alapján.

40. TÁBLÁZAT

Honnan	Hová	A napi utak száma	Költség per 100 méter megtett távolság
öntés	összeszerelés és tárolás	40	10¢
acélgyártás	öntés	8	10¢
acélgyártás	összeszerelés és tárolás	8	10¢
elszállítás	összeszerelés és tárolás	2	20¢

(c1, c2), akkor hogyan értelmezhető a $c1 - 700 = e_1 - w_1$ feltétel?)

6. Mutassuk meg, hogy tetszőleges számú báziscsere után az x_i' változó együtthatója a szimplex tábla minden sorában egyenlő lesz az x_i'' azonos sorbeli együtthatójának ellentettjével!

7. A Clothco cég nadrágokat készít. A következő hat hónap mindegyikében *maximum* akkora mennyiséget (db) tudnak ebből eladni, amennyi a 41. táblázatban látható. Az a kereslet, amit nem elégítenek ki egy hónapban, az elveszett a cég számára. A Clothco az 1. hónapban maximum 500 nadrágot tud eladni. Egy nadrág ára 40$, s elkészítéséhez 2 óra munkára és 10$ értékű nyersanyagra van szükség. Az 1. hónap kezdetén a Clothcónak 4 dolgozója van. Egy dolgozó nadrágok készítésén havonta 200 órát tud dolgozni és 2000$ a havi fizetése (tekintet nélkül arra, hogy hány órát dolgozott a hónapban). Minden hónap elején dolgozókat lehet felvenni és elbocsátani. 1500$-ba kerül munkába állítani és 1000$-ba kerül elbocsátani valakit. Becsülhetően 5$ nadrágonként a tárolási költség a hóvégi zárókészletre vonatkozóan. Határozzuk meg, hogyan tudja a Clothco cég maximalizálni a profitját a következő hat hónapban! Hanyagoljuk el azt a körülményt, hogy a munkába állított és elbocsátott dolgozók számának egészértékűnek kell lennie.

41. TÁBLÁZAT

Hónap	Maximális kereslet
1	500
2	600
3	300
4	400
5	300
6	800

4.11. Karmarkar módszere LP feladatok megoldására

Ebben az alfejezetben Karmarkar LP feladatok megoldására kidolgozott módszerének egy rövid leírását adjuk. Részletesebb magyarázat a 9.6. alfejezetben található. Karmarkar módszere megkívánja, hogy az LP feladatot a következő formában írjuk fel:

$$\begin{aligned} \min\ & z = \mathbf{cx} \\ \text{f.h.}\ \ & K\mathbf{x} = 0 \\ & x_1 + x_2 + \cdots x_n = 1 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

és hogy:

1. Az $\mathbf{x}^0 = [\frac{1}{n} \quad \frac{1}{n} \quad \ldots \quad \frac{1}{n}]$ pont az LP feladat lehetséges megoldása legyen.
2. Ezen LP optimális z értéke legyen 0.

Meglepő módon, minden LP feladat ilyen alakra hozható. Karmarkar módszere egy projektív geometriai transzformációt használ arra, hogy az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ transzformált változóknak egy halmazát definiálja. Ez a transzformáció (nevezzük f-nek) az aktuális pontot mindig a lehetséges tartomány „közepébe” fogja leképezni a transzformált változók által definiált térben. Ha a transzformáció az $\mathbf{x}$ pontot az $\mathbf{y}$ pontba viszi, akkor ezt így fejezzük ki: $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Az algoritmus a transzformált térben azzal kezdődik, hogy az $f(\mathbf{x}^0)$-ból egy „jó” irányba mozdulunk el (egy olyan irányba, amely várhatóan javítja z-t és fenntartja a lehetségességet). Ez aztán egy olyan $\mathbf{y}^1$ pontot eredményez a transzformált térben, amely közel van a lehetséges tartomány határához. Új pontunk $\mathbf{x}^1$, amelyre: $f(\mathbf{x}^1) = \mathbf{y}^1$. Az eljárást addig ismételjük (ekkor $\mathbf{x}^1$ helyettesíti $\mathbf{x}^0$-t), amíg az $\mathbf{x}^k$-hoz tartozó z érték elég közel kerül 0-hoz.

Ha az aktuális pontunk $\mathbf{x}^k$, akkor a transzformáció a következő tulajdonsággal rendelkezik: $f(\mathbf{x}^k) = [\frac{1}{n} \quad \frac{1}{n} \quad \ldots \quad \frac{1}{n}]$. Így, egy transzformált térben mindig elmozdulunk a lehetséges tartomány „középpontjától”.

Karmarkar módszerére bizonyított, hogy **polinomiálisan növekvő számítási időt igénylő algoritmus**. Ez azt jelenti, hogy ha egy n méretű LP-t oldunk meg Karmarkar módszerével, akkor léteznek olyan a és b pozitív számok bármely n-hez, hogy egy n méretű LP feladat maximálisan an^b idő alatt megoldható.[11]

Karmarkar módszerével szemben a szimplex algoritmus LP feladatok megoldására egy **a mérettel exponenciálisan növő időt igénylő algoritmus**. Ha egy n méretű LP feladatot a szimplex módszerrel oldunk meg, akkor létezik egy olyan c pozitív szám, hogy bármely n esetén a szimplex algoritmus meg fogja találni az optimális megoldást maximum $c2^n$ idő alatt. Elég nagy n-re (pozitív a, b és c) esetén $c2^n > an^b$. Ez azt jelenti, hogy elméletben a polinomiálisan növő időszükségletű algoritmus előnyösebb egy exponenciálisan növő időszükségletűnél. A Karmarkar-módszer előzetes tesztelése (Karmarkar által) azt mutatta, hogy gyakorlati alkalmazásokban felmerülő nagyméretű LP feladatokra ez a módszer akár 50-szer olyan gyors lehet, mint a szimplex algoritmus. Remélhetőleg Karmarkar módszere lehetővé teszi majd a kutatóknak sok olyan nagyméretű LP feladat megoldását, amelyek jelenleg a szimplex módszerrel megoldva elviselhetetlenül sok számítógép időt igényelnek. Ha Karmarkar módszere beváltja a hozzáfűzött reményeket, akkor az LP modellek megfogalmazásának készsége még fontosabb lesz, mint ma.

Karmarkar módszerét használta a Katonai Légihíd Parancsnokság annak meghatározására, hogy milyen gyakran repüljenek az egyes útvonalakon, és hogy mely repülőgépeket használják. A kapott LP feladat 150 000 változót és 12 000 feltételt tartalmazott, és egy óra számítógép időre volt szükség a megoldására Karmarkar módszerével. A szimplex módszer használatakor egy hasonló struktúrájú, 36 000 változót és 10 000 feltételt tartalmazó LP feladat megoldása négy óra számítógép időt igényelt. A Delta Légitársaság nemrég kezdett el kifejleszteni a Karmarkar-módszer használatával egy havi menetrendet 7000 pilóta és több mint 400 repülőgép számára. A projekt befejezésével a Delta Légitársaság dollármilliók megtakarítását reméli.

Összefoglalás

Egy LP feladat előkészítése a szimplex módszer számára

Egy LP feladat **standard alakú**, ha összes korlátozó feltétele egyenlőség feltétel, s az összes változó nemnegatív. Ahhoz, hogy egy LP feladatot standard alakra hozzunk, a következőket kell tenni:

1. lépés Ha az i-edik feltétel $\leq$ feltétel, akkor egyenlőség típusú feltétellé alakítjuk, hozzáadva a bal oldalhoz egy s_i eltérésváltozót és hozzávéve a modellhez az $s_i \geq 0$ előjelkorlátozási feltételt.

2. lépés Ha az i-edik feltétel $\geq$ korlát, akkor ezt egyenlőséggé alakítjuk a bal oldalból kivonva egy e_i eltérés változót és hozzávéve a modellhez az $e_i \geq 0$ előjelkorlátozásokat.

3. lépés Ha az x_i változó előjelkorlátozatlan (ekn) akkor x_i helyére mind a célfüggvényben, mind a feltételekben $x_i' - x_i''$-t írunk, ahol $x_i' \geq 0$ és $x_i'' \geq 0$.

Tegyük fel, hogy egy standard alakra hozott LP-nek m feltétele és n változója van. Az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer egy bázismegoldása megkapható úgy, hogy $n - m$ változónak 0

[11] Egy LP feladat mérete azon karakterek számával jellemezhető, amelyek az LP feladat bináris rendszerben történő megadásához szükségesek.

értéket adunk és ezután megoldjuk a rendszert a maradék m változóra. Minden olyan bázismegoldás, amiben minden változó nemnegatív, egy **lehetséges bázismegoldás** (lbm) az LP számára.

Minden LP feladatra igaz, hogy az LP lehetséges tartományában minden lbm-nek pontosan egy extremális pont felel meg. Továbbá, a lehetséges tartomány minden extremális pontjához tartozik legalább egy lbm.

Ha egy LP feladatnak van optimális megoldása, akkor van olyan extremális pontja, amelyik optimális. Így, amikor egy LP feladat optimális megoldását keressük, a keresést az LP lehetséges bázismegoldásaira korlátozhatjuk.

A szimplex algoritmus

Ha egy LP standard alakú, és egy lbm kézenfekvően adódik, akkor a szimplex algoritmus (max feladatra) a következőképpen működik:

1. lépés Ha az összes nembázis változónak a célfüggvénysorban nemnegatív az együtthatója, akkor az aktuális lbm optimális. Ha valamely változóknak a célfüggvénysorban negatív együtthatójuk van, akkor a bázisba belépő változóként válasszuk a célfüggvénysorban a legnagyobb abszolút értékű negatív együtthatóval rendelkező változót.

2. lépés Minden olyan feltételre, amelynél a belépő változónak pozitív az együtthatója, számítsuk ki a következő hányadost:

$$\frac{\text{a feltétel jobb oldala}}{\text{a belépő változó együtthatója a feltételben}}$$

Minden olyan feltétel, amelynél ennek a hányadosnak az értéke minimális, „győztese” a **hányados tesztnek**. Használjunk elemi sortranszformációkat (esm-eket) arra, hogy a belépő változó egy olyan feltételben legyen bázisváltozó, amely „győztese” a hányados tesztnek. Ezután térjünk vissza az 1. lépéshez.

Ha az LP feladat (egy max feladat) **nemkorlátos**, akkor végül eljutunk egy olyan táblához, amelyben van egy olyan nembázis változó, aminek a célfüggvénysorban negatív az együtthatója, a feltételekben pedig nempozitív az együtthatója. Ettől az esettől eltekintve (kizárva a nagyon ritka *ciklizálás* lehetőségét) a szimplex algoritmus meg fogja találni az LP feladat egy optimális megoldását.

Ha nincs induló lbm, akkor a „nagy M” módszer, vagy a kétfázisú szimplex módszer használandó egy lbm előállítására.

A „nagy M” módszer

1. lépés Módosítsuk a korlátozó feltételeket úgy, hogy mindegyikük jobb oldala nemnegatív legyen.

1′. lépés Keressünk meg minden olyan feltételt, amely most (az 1. lépés után) $=$ vagy $\geq$ feltétel. A 3. lépésben mindegyik ilyen feltétel bal oldalához egy mesterséges változót adunk hozzá.

2. lépés Alakítsunk át minden egyenlőtlenség feltételt standard alakra.

3. lépés Ha (miután az 1. lépést befejeztük) az i-edik feltétel $\geq$ vagy $=$ feltétel, akkor adjunk hozzá a bal oldalához egy a_i mesterséges változót, s vegyük hozzá a modellhez az $a_i \geq 0$ előjelmegkötéseket is.

4. lépés Jelöljön M egy nagyon nagy pozitív számot. Ha az LP egy min feladat, akkor adjunk hozzá a célfüggvényhez (minden mesterséges változónak megfelelően) Ma_i-t, max feladat esetén pedig $-Ma_i$-t.

5. lépés Mivel minden mesterséges változó benne lesz az induló bázisban, mindegyiket ki kell küszöbölni a célfüggvénysorból, mielőtt megkezdjük a szimplex eljárást. Ha minden mesterséges változó 0-val egyenlő az optimális megoldásban, akkor megtaláltuk az eredeti feladat optimális megoldását. Ha valamely mesterséges változó pozitív az optimális megoldásban, akkor az eredeti feladatnak nincs lehetséges megoldása.

A kétfázisú módszer

1. lépés Alakítsuk át a feltételeket úgy, hogy minden feltétel jobb oldala nemnegatív legyen.

1′. lépés Keressünk meg minden olyan feltételt, amely most (az 1. lépés után) $=$ vagy $\geq$ típusú. A 3. lépésben egy mesterséges változót fogunk hozzáadni minden ilyen feltétel bal oldalához.

2. lépés Alakítsunk át minden egyenlőtlenség feltételt standard alakúra.

3. lépés Ha (az $1'$ lépés után) az i-edik feltétel $\geq$ vagy $=$ típusú, akkor bal oldalához adjunk hozzá egy a_i mesterséges változót, és írjuk elő az $a_i \geq 0$ előjelkorlátozást.

4. lépés Átmenetileg tegyük félre az eredeti LP feladat célfüggvényét. Ehelyett oldjunk meg egy olyan LP feladatot, amelynek a célfüggvénye min $w' =$ (az összes mesterséges változó összege). Ezt az **1. fázis LP feladatának nevezzük**.

Mivel minden $a_i \geq 0$, az 1. fázisbeli LP feladat megoldása a következő három eset egyikére vezet:

1. eset w' optimális értéke nagyobb nullánál. Ebben az esetben az eredeti LP feladatnak nincs lehetséges megoldása.

2. eset w' optimális értéke nulla, és nincsenek mesterséges változók az optimális 1. fázisbeli bázisban. Ebben az esetben hagyjunk el minden olyan oszlopot az optimális 1. fázisbeli táblából, amelyek mesterséges változóknak felelnek meg, és használjuk az eredeti célfüggvényt az 1. fázisbeli táblában maradt feltételekkel. Ez eredményezi a **2. fázisbeli LP feladatot**. A 2. fázisbeli és az eredeti LP feladat optimális megoldásai azonosak.

3. eset w' optimális értéke nulla, és legalább egy mesterséges változó marad az optimális 1. fázisbeli bázisban.

Minimalizálási feladatok megoldása

Egy minimalizálási feladat szimplex módszerrel való megoldása céljából válasszuk bázisba belépő változónak a célfüggvénysorban a legnagyobb pozitív együtthatóval rendelkező nembázis változót. Egy tábla vagy kanonikus forma akkor mutat optimális megoldást, ha a célfüggvénysorban minden változónak nempozitív az együtthatója.

Alternatív optimális megoldások

Ha egy nembázis változónak az optimális táblában nulla az együtthatója a célfüggvénysorban, és ez a változó egy bázistranszformációval bevihető a bázisba, akkor az LP feladatnak

alternatív optimális megoldásai lehetnek. Ha két lehetséges bázismegoldás optimális, akkor az ezeket összekötő egyenes szakasz bármely pontja szintén optimális megoldás.

Előjelkorlátozatlan változók

Ha egy x_i ekn változót $x_i' - x_i''$-vel helyettesítünk, akkor az LP optimális megoldásában vagy x_i', vagy x_i'', vagy mind x_i' és x_i'' egyenlő nullával.

Áttekintő feladatok

A csoport

1. Alkalmazzuk a szimplex algoritmust a következő LP feladat *két* optimális megoldásának megtalálására:

$$\begin{aligned} \max z = {} & 5x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{f.h.} \quad & x_1 + x_2 + 3x_3 \le 6 \\ & 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 \le 15 \\ & x_3, x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

2. Oldjuk meg a következő LP feladatot a szimplex algoritmussal:

$$\begin{aligned} \min z = {} & -4x_1 + x_2 \\ \text{f.h.} \quad & 3x_1 + x_2 \le 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \le 0 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

3. Alkalmazzuk a „nagy M” módszert és a kétfázisú eljárást a következő LP feladat optimális megoldásának megtalálására:

$$\begin{aligned} \max z = {} & 5x_1 - x_2 \\ \text{f.h.} \quad & 2x_1 + x_2 = 6 \\ & x_1 + x_2 \le 4 \\ & x_1 + 2x_2 \le 5 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

4. A szimplex algoritmus segítségével oldjuk meg a következő LP feladatot:

$$\begin{aligned} \max z = {} & 5x_1 - x_2 \\ \text{f.h.} \quad & x_1 - 3x_2 \le 1 \\ & x_1 - 4x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

5. A szimplex algoritmus segítségével keressük meg a következő LP feladat optimális megoldását:

$$\begin{aligned} \min z = {} & -x_1 - 2x_2 \\ \text{f.h.} \quad & 2x_1 + x_2 \le 5 \\ & x_1 + x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

6. Alkalmazzuk a „nagy M” módszert és a kétfázisú eljárást a következő LP feladat optimális megoldásának megkereséséhez:

$$\begin{aligned} \max z = {} & x_1 + x_2 \\ \text{f.h.} \quad & 2x_1 + x_2 \ge 3 \\ & 3x_1 + x_2 \le 3.5 \\ & x_1 + x_2 \le 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

7. A szimplex módszer segítségével keressük meg *két* optimális megoldását a következő LP feladatnak! Hány optimális megoldása van? Keressük meg egy harmadik optimális megoldását is:

$$\begin{aligned} \max z = {} & 4x_1 + x_2 \\ \text{f.h.} \quad & 2x_1 + 3x_2 \le 4 \\ & x_1 + x_2 \le 1 \\ & 4x_1 + x_2 \le 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

8. A szimplex módszer segítségével keressük meg a következő LP feladat optimális megoldását:

$$\begin{aligned} \max z = {} & 5x_1 + x_2 \\ \text{f.h.} \quad & 2x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_1 - x_2 \le 0 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

9. A „nagy M” módszer és a kétfázisú eljárás segítségével keressük meg a következő LP feladat optimális megoldását:

$$\begin{aligned} \min z = {} & -3x_1 + x_2 \\ \text{f.h.} \quad & x_1 - 2x_2 \ge 2 \\ & -x_1 + x_2 \ge 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

10. Tegyük fel, hogy a Dakota Bútorkészítő feladatánál 10 különböző típusú bútort lehetett gyártani.Az optimális megoldásban (maximum) hány különböző típust kell gyártani?

11. Tekintsük a következő LP feladatot:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 10x_1 + x_2 \\ \text{f.h.}\quad x_1 &\le 1 \\ 20x_1 + x_2 &\le 100 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

(a) Keressük meg a feladat összes lehetséges bázismegoldást!

(b) Mutassuk meg, hogy ha a szimplex módszert használjuk ennek az LP feladatnak a megoldására, akkor minden lehetséges bázis megoldást meg kell vizsgálni, mielőtt az optimális megoldást megtaláljuk!

Ezt a példát általánosítva Klee és Minty (1972-es cikkükben) konstruáltak ($n = 2, 3, \ldots$ esetén) egy olyan LP feladatot n döntési változóval és n feltétellel, amelyre a szimplex algoritmus $2^n - 1$ lehetséges bázismegoldást vizsgál meg, mielőtt az optimális megoldást megtalálja. Létezik tehát például egy LP feladat 10 változóval és 10 feltétellel, amelynél a szimplex algoritmus alkalmazása esetén $2^{10} - 1 = 1023$ bázistranszformációra van szükség az optimális megoldás megtalálásához. Szerencsére ilyen „patologikus” LP feladatok ritkán fordulnak elő gyakorlati alkalmazásokban.

B csoport

12. Tekintsünk egy olyan maximalizálási feladatot, melynek az optimális tábláját a 42. táblázat mutatja. Ennek az LP feladatnak az optimális megoldása $z = 10, x_3 = 3, x_4 = 5, x_1 = x_2 = 0$. Határozzuk meg a második legjobb lbm-et ehhez az LP feladathoz! (*Útmutatás*: Mutassuk meg, hogy a második legjobb megoldás egy olyan lbm lesz, amely „egy bázistranszformáció távolságra” van az optimális megoldástól.)

42. TÁBLÁZAT

z	x_1	x_2	x_3	x_4	**J.o.**
1	2	1	0	0	10
0	3	2	1	0	3
0	4	3	0	1	5

13. Egy túrázónak meg kell fontolnia, hogy két tárgyból hányat vigyen magával egy kempingtúrára? Az első tárgy súlya a_1 kg, a másodiké a_2 kg. Egy első típusú tárgy a kempingező számára c_1 egység hasznot, egy második típusú tárgy pedig c_2 egység hasznot jelent. A hátizsákba maximum b kg összsúlyú tárgy tehető.

(a) Feltételezve, hogy a kempingező a tárgyak törtrészét is magával viheti az útra, fogalmazzunk meg egy olyan LP feladatot, amely maximalizálja a hasznát!

(b) Mutassuk meg, hogy ha

$$\frac{c_2}{a_2} \ge \frac{c_1}{a_1}$$

akkor a kempingező úgy tudja maximalizálni a hasznát, ha a hátizsákot $\frac{b}{a_2}$ mennyiségű 2. típusú tárggyal tölti meg!

(c) A lineáris programozás melyik feltételét sértjük meg a kempingező optimalizálási feladatának ilyen megfogalmazásával?

14. Adott egy maximalizálási feladathoz a 43. táblázatban levő tábla. Adjunk meg olyan feltételeket az a_1, a_2, a_3, b és c paraméterekre, amelyek mellett teljesülnek a következő állítások:

(a) Az aktuális megoldás optimális.

(b) Az aktuális megoldás optimális, és vannak alternatív optimális megoldások.

(c) Az LP feladat célfüggvénye nemkorlátos (ebben az alfejezetben feltételezzük, hogy $b \ge 0$).

43. TÁBLÁZAT

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**J.o.**
1	$-c$	2	0	0	0	10
0	-1	a_1	1	0	0	4
0	a_2	-4	0	1	0	1
0	a_3	3	0	0	1	b

15. Tegyük fel, hogy egy maximalizálási feladat megoldása során a 44. táblázatban látható táblát kaptuk. Fogalmazzunk meg feltételeket a_1, a_2, a_3, b, c_1 és c_2-re, amelyek ahhoz szükségesek, hogy a következő állítások igazak legyenek:

(a) Az aktuális megoldás optimális, és vannak alternatív optimális megoldások.

(b) Az aktuális bázismegoldás nem lehetséges bázismegoldás.

(c) Az aktuális bázismegoldás degenerált.

(d) Az aktuális bázismegoldás lehetséges, de az LP feladat nemkorlátos.

(e) Az aktuális bázismegoldás lehetséges, de a célfüggvényérték javítható az x_6-nak mint bázisváltozónak x_1-gyel való cseréjével.

44. TÁBLÁZAT

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	**J.o.**
1	c_1	c_2	0	0	0	0	10
0	4	a_1	1	0	a_2	0	b
0	-1	-5	0	1	-1	0	2
0	a_3	-3	0	0	-4	1	3

16. Tegyük fel, hogy egy maximalizálási feladatot oldunk meg és az x_r változó éppen elhagyja a bázist.

(a) Mi az együtthatója az x_r-nek az aktuális célfüggvénysorban?

(b) Mutassuk meg, hogy miután az aktuális báziscserét elvégeztük, az x_r együtthatója a célfüggvénysorban nem lehet 0-nál kisebb!

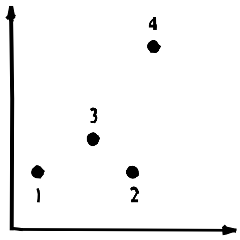
(c) Magyarázzuk meg, hogy egy olyan változó, amely elhagyta a bázist, miért nem léphet oda vissza a következő bázistranszformációnál!

17. Egy busztársaság úgy gondolja, hogy a következő számú buszvezetőre lesz szüksége a következő 5 év folyamán: 1. év: 60 buszvezető; 2. év: 70 buszvezető; 3. év: 50 buszvezető; 4. év: 65 buszvezető; 5. év: 75 buszvezető. Minden év kezdetén a busztársaságnak el kell döntenie, hogy hány új buszvezetőt vegyen fel, vagy hány eddigi alkalmazottat bocsásson el. 4000$-ba kerül felvenni és 2000$-ba elbocsátani egy buszvezetőt. Egy buszvezető fizetése 10 000$ évente. Az 1. év kezdetén a társaságnak 50 buszvezetője van. Egy olyan buszvezető, akit az év elején állítottak munkába, felhasználható az adott évi igény kielégítésére és teljes fizetést kap erre az évre. Írjunk fel egy LP feladatot, amely minimalizálja a busztársaságot a következő 5 év folyamán terhelő bér-, munkába állítási és elbocsátási költségeket!

18. Az „Amerikai Cipőkészítők" cég a következő keresletet jelzi előre a következő hat hónap mindegyikére: 1. hónap: 5000 pár; 2. hónap: 6000 pár; 3. hónap: 5000 pár; 4. hónap: 9000 pár; 5. hónap: 6000 pár; 6. hónap: 5000 pár. Egy cipőkészítőnek 15 percre van szüksége egy pár cipő elkészítéséhez. Minden cipőkészítő 150 órát dolgozik havonta, plusz maximum 40 óra túlóraidőt. Egy cipőkészítő 2000$ havi rendes fizetést kap és óránként 50$-t a túlóraidőre. Minden hónap elején a cég felvehet, vagy elbocsáthat munkásokat. Egy új munkás felvétele 1500$-ba, elbocsátása pedig 1900$-ba kerül a cégnek. Egy pár cipő egy havi raktáron tartási költsége az előállítási költség (csak normál munkaidőt használva) 3%-a. (Az egy pár cipőhöz szükséges nyersanyagok 10$-ba kerülnek.) Fogalmazzunk meg egy LP feladatot, amely minimalizálja a következő 6 havi kereslet időben történő kielégítésének költségét! Az 1. hónap elején a cégnek 13 munkása van.

19. Monroe megye megpróbálja meghatározni, hova helyezzék a megyei tűzoltóállomást. A megye négy nagyobb városának az elhelyezkedése az 5. ábrán látható. Az 1. város koordinátái: $(10, 20)$; a 2. városé: $(60, 20)$; a 3. városé: $(40, 30)$; a 4. városé: $(80, 60)$. Az 1. városban a tűzesetek éves átlagos száma 20; a 2. városban 30; a 3. városban 40; és a 4. városban 25. A megye olyan helyre akarja építeni a tűzoltóállomást, amely minimalizálja a tűzoltóautók riasztás alkalmával megtett átlagos útját. Mivel a legtöbb út vagy kelet–nyugat, vagy észak–dél irányban fut, feltételezzük, hogy a tűzoltóautó is csak ilyen irányban közlekedhet. Így, ha a tűzoltóállomás a $(30, 40)$ pontban lenne elhelyezve, és tűz ütne ki a 4. városban, akkor a tűzoltóautónak $(80 - 30) + (60 - 40) = 70$ mérföldet kellene megtennie, míg odaér a tűzhöz. Használjunk lineáris programozást annak eldöntésére, hogy hova helyezzük el a tűzoltóállomást! (*Útmutatás*: Ha a tűzoltóállomást az (x, y) pontba helyezzük el és az (a, b) pontban van egy város, akkor definiáljuk az e, w, n, s (kelet, nyugat, észak, dél) változókat úgy, hogy kielégítsék az $x - a = w - e$ és $y - b = n - s$ egyenleteket. Most már könnyen felírhatjuk a megfelelő LP-t.)

5. ÁBRA



20.[12] Az 1972. évi labdarúgó szezon folyamán a Miami Dolphins, a Buffalo Bills és a New York Jets a 45. táblázatban felsorolt mérkőzéseket játszotta. Tegyük fel, hogy ezen mérkőzések alapján értékelni akarjuk ezt a három csapatot. Legyen $M =$ a Miami csapat értékelése, $J =$ a Jets csapat értékelése, és $B =$ a Bills csapat értékelése. Ha adottak az M, J és B értékek, akkor előrejelzésünk szerint amikor például a Bills játszik a Miamival, akkor várhatólag a Miami $M - B$ ponttal fog győzni. Így, az első Miami Bills mérkőzésre az előrejelzésünk a hibatartományba kerülne $|M - B - 1|$ ponttal. Vizsgáljuk meg, hogyan használható a lineáris programozás arra, hogy minden csapatra olyan értékelést határozzon meg, amely az előrejelzési hibák összes mérkőzésre vett összegét minimalizálja!

45. TÁBLÁZAT

Miami	Bills	Jets
27	—	17
28	—	24
24	23	—
30	16	—
—	24	41
—	3	41

A szezon befejezésekor ezt a módszert használtuk arra, hogy értékeléseket határozzunk meg az iskolai labdarúgásra és iskolai kosárlabdára. Milyen problémák láthatók előre, ha ezt a módszert használjuk a csapatok szezon eleji értékelésére?

[12]Wagner (1954)-en alapul.

21. A következő 4 negyedév folyamán a Dorian Autógyárnak a következő autóvásárlási igényeket kell kielégítenie: 1. negyedév: 4000; 2. negyedév: 2000; 3. negyedév: 5000; 4. negyedév: 1000. Az 1. negyedév kezdetén 300 autó van raktáron, s a gyárnak negyedévenként legfeljebb 3000 autó gyártására van kapacitása. Minden negyedév kezdetén a gyár a gyártási kapacitását egy egységgel (autóval) meg tudja változtatni. A negyedéves gyártási kapacitás egységnyi növelése 100$-ba kerül. 50$-ba kerül negyedévenként egy autó gyártási kapacitását fenntartani (még akkor is, ha ez nincs hasznosítva az aktuális negyedévben). Egy autó gyártási költsége 2000$. Egy autó készletezési költsége 150$ (ez szorzandó a negyedév végi zárókészlettel). Megkívánjuk, hogy a 4. negyedév végén az üzem kapacitása legalább 4000 autó legyen. Fogalmazzunk meg egy olyan LP feladatot, amely minimalizálja a következő 4 negyedév folyamán felmerülő összes költséget!

22. A „Szelleműzők” cég azzal foglalkozik, hogy megszabadítja az embereket a szellemektől. A következő három hónapban a következő számú telefonhívást kapja olyan emberektől, akik ki akarják űzetni szellemeiket: januárban 100, februárban 300, márciusban 200 hívás érkezik be. A „Szelleműzők”-nek 800$-t fizetnek minden kiűzött szellem után abban a hónapban, amelyben az ügyfél megrendelte a szolgáltatást. A telefonhívásokat nem kell feltétlenül megválaszolni abban a hónapban, amikor beérkeztek, de ha egy hívásra csak a beérkezés után egy hónappal érkezik válasz, akkor a „Szelleműzők”-et 100$ veszteség éri a jóhírén esett csorba miatt, ha pedig egy hívásra csak két hónap múlva reagálnak, akkor ez a veszteség 200$. A „Szelleműzők” minden alkalmazottja 10 szellemet tud havonta kiűzni. Minden alkalmazott 4000$ fizetést kap havonta. Január elején a cégnek 8 dolgozója van. Az alkalmazottak felvétele és kiképzése (aminek nincsen időszükséglete) személyenként 5000$ költséget jelent. Az alkalmazottak elbocsátásának költsége 4000$ személyenként. Írjon fel egy LP feladatot, amely maximalizálja a „Szelleműzők” profitját (a költségekkel csökkentett jövedelmet) a következő három hónapra! Tegyük fel, hogy minden megrendelést fel kell dolgozni március végéig.

23. A Carco cég robotokat használ az autógyártásban. A következő autók iránti igényeket (darabszámban megadva) kell kielégíteni (nem feltétlenül azonnal, de minden igényt ki kell elégíteni a 4. negyedév végére): 1. negyedév: 600; 2. negyedév: 800; 3. negyedév: 500; 4. negyedév: 400. Az év kezdetén Carcónak két robotja van. Robot minden negyedév elején szerezhető be, de legfeljebb kettő darab negyedévenként. Minden robot legfeljebb 200 autót tud készíteni negyedévenként. Egy robot beszerzése 5000$-ba kerül. Egy robot fenntartása negyedévenként (karbantartása) 500$-ba kerül (akkor is, ha egyetlen autót sem gyártanak vele). A robotokat minden negyedév elején el is lehet adni 3000$-ért. Minden negyedév végén autónként 200$ készletezési költség is felmerül. Ha egy autó iránti igényt késleltetnek, akkor 300$ autónkénti késleltetési költség is felmerül minden olyan negyedévben, amikor a késleltetés életben van. A 4. negyedév végén a Carcónak legalább két robotjának kell lennie. Fogalmazzunk meg egy LP feladatot, amely minimalizálja a következő 4 negyedév igényeinek kielégítéséhez kapcsolódó összes költséget!

24. Tegyük fel, hogy találtunk egy optimális táblát egy LP feladat számára, és az ehhez tartozó lbm nem degenerált. Tegyük fel azt is, hogy van egy nembázis változó a célfüggvénysorban, amelynek 0 az együtthatója. Bizonyítsuk be, hogy az LP-nek egynél több optimális megoldása van!

25. Tegyük fel, hogy egy optimális táblához tartozó lbm degenerált, és a célfüggvénysorban egy nembázis változónak 0 az együtthatója. Mutassunk példát arra, amikor a következő esetek valamelyike áll fenn:

1. eset Az LP-nek egynél több optimális megoldása van.

2. eset Az LP-nek egyetlen optimális megoldása van.

Irodalom

Sok kiváló lineáris programozási szakkönyv, tankönyv van, ilyen például a következő könyvek bármelyike:

Bazaraa, M., and J. Jarvis. *Linear Programming and Network Flows*. New York: Wiley, 1990.

Bradley, S., A. Hax, and T. Magnanti. *Applied Mathematical Programming*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1977.

Chvàtal, V. *Linear Programming*. San Francisco: Freeman, 1983.

Dantzig, G. *Linear Programming and Extensions*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1963.

Gass, S. *Linear Programming: Methods and Applications*, 5th ed. New York: McGraw-Hill, 1985.

Luenberger, D. *Linear and Nonlinear Programming*, 2d ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1984.

Murty, K. *Linear Programming*. New York: Wiley, 1983.

Simmons, D. *Linear Programming for Operations Research*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1972.

Simonnard, M. *Linear Programming*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1966.

Wu, N., and R. Coppins. *Linear Programming and Extensions*. New York: McGraw-Hill, 1981.

Bland, R. „New Finite Pivoting Rules for the Simplex Method," *Mathematics of Operations Research* 2(1977):103–107.

Karmarkar, N. „A New Polynomial Time Algorithm for Linear Programming," *Combinatorica* 4(1984):373–395.

Klee, V., and G. Minty. „How Good Is the Simplex Algorithm?" In *Inequalities–III*, ed. O. Shisha. New York: Academic Press, 1972.

Kotiah, T., and N. Slater. „On Two-Server Poisson Queues with Two Types of Customers," *Operations Research* 21(1973):597–603.

Love, R., and L. Yerex. „An Application of a Facilities Location Model in the Prestressed Concrete Industry," *Interfaces* 6(no. 4, 1976):45–49.

Papadimitriou, C., and K. Steiglitz. *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1982.

Wagner, H. „Linear Programming Techniques for Regression Analysis," *Journal of the American Statistical Association* 54(1954):206–212.

5

Érzékenységvizsgálat és dualitás

Az érzékenységvizsgálat és a dualitás a lineáris programozás két fontos témaköre. Ezek tanulmányozása során az olvasó megismerkedik a lineáris programozás logikájával és szépségeivel, továbbá képes lesz olyan haladó szintű LP témakörök elsajátítására is, mint amelyek például a 9. fejezetben találhatók. Az 5.1. alfejezetben egy grafikus példán keresztül mutatjuk be az érzékenységvizsgálat fogalmát.

Az 5.2. alfejezetben mátrix-ismereteink segítségével néhány fontos összefüggést vezetünk le. Ezek felhasználásával az 5.3. és 5.4. alfejezetekben kidolgozzuk az érzékenységvizsgálat eszköztárát. A fejezet hátralévő része a dualitás kulcsfontosságú fogalmát tárgyalja. A dualitáson keresztül mélyebben megismerhetjük a lineáris programozás belső logikáját, eljutunk az árnyékár rendkívül hasznos fogalmához, és könnyebben megérthetjük az érzékenységvizsgálatot. Mindez egy szükséges alap azoknak a hallgatóknak, akik a lineáris és nemlineáris programozás fejlettebb módszereit is tanulmányozni akarják.

5.1. Grafikus bevezetés az érzékenységvizsgálatba

Az érzékenységvizsgálat azt elemzi, hogy egy LP feladat paramétereinek változásai hogyan hatnak az optimális megoldásra.

Tekintsük ismét a 3.1. alfejezetben tárgyalt Giapetto feladatot:

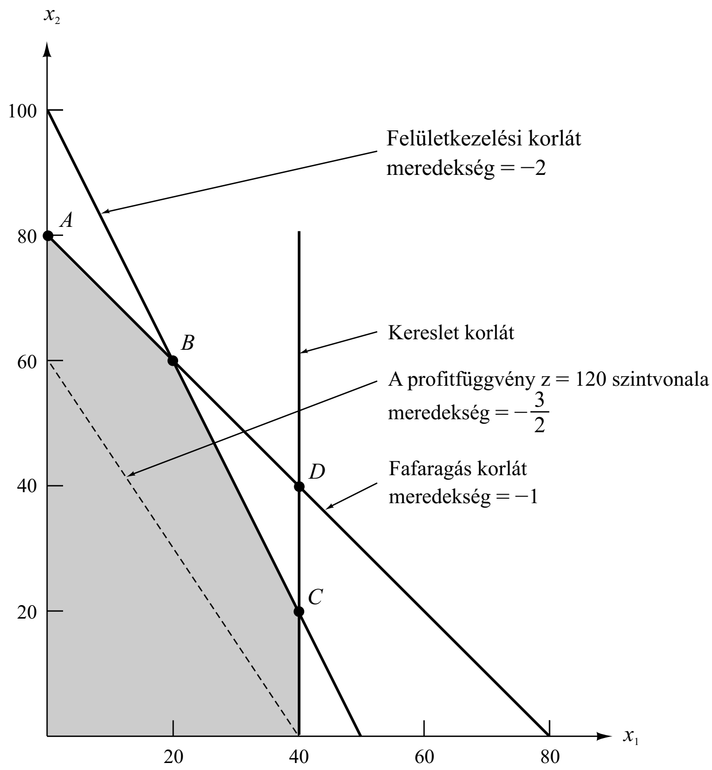
$$\begin{array}{lrl}
\max\ z = 3x_1 + 2x_2 & & \\
\text{f.h.} & 2x_1 + \ x_2 \leq 100 & \text{(felületkezelési korlát)} \\
 & x_1 + \ x_2 \leq 80 & \text{(fafaragás korlát)} \\
 & x_1 \qquad \leq 40 & \text{(keresleti korlát)} \\
 & x_1, x_2 \geq 0 &
\end{array}$$

ahol

$$\begin{aligned}
x_1 &= \text{egy hét alatt gyártott katonák száma} \\
x_2 &= \text{egy hét alatt gyártott vonatok száma.}
\end{aligned}$$

Ennek a feladatnak az optimális megoldása $z = 180, x_1 = 20, x_2 = 60$ (az 1. ábra B pontja), továbbá x_1, x_2 és s_3 (a keresleti korlát maradékváltozója) a bázisváltozók. Hogyan változik ez az optimális megoldás, ha a célfüggvény együtthatóit vagy a feladat jobb oldalát megváltoztatjuk?

1. ÁBRA
c_1 milyen értékei esetén nem változik az optimális bázis a Giapetto feladatban?



A célfüggvény-módosítás hatásának grafikus vizsgálata

Ha egy katona lényegesen nagyobb mértékben járulna hozzá a profithoz, Giapettónak érdemes lenne több katonát gyártani (és az optimális megoldásban s_3 nem lenne bázisváltozó). Ugyanígy, ha egy katona lényegesen kisebb mértékben járulna hozzá a profithoz, Giapetto számára az lenne optimális, ha csak vonatot gyártana (ekkor x_1 nem lenne bázisváltozó). Most meghatározzuk, hogy milyen határok között változhat (a célfüggvényben) a katonák számának együtthatója úgy, hogy a jelenlegi optimális bázis optimális maradjon.

Legyen c_1 a katonák számának együtthatója a célfüggvényben. c_1 milyen értékeire marad az aktuális bázis optimális?

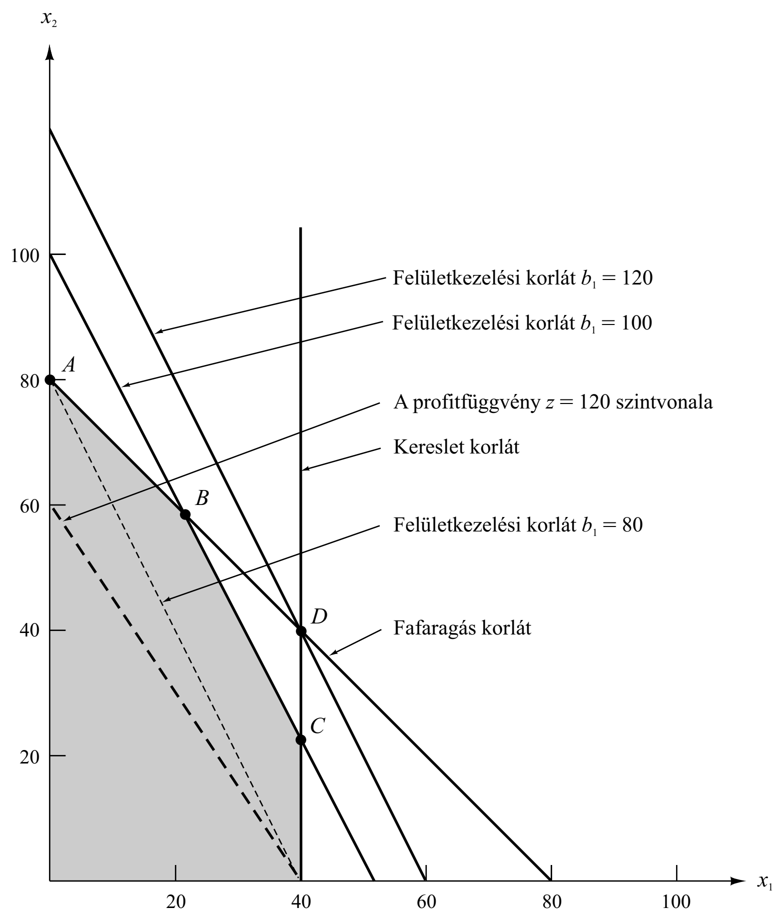
Jelenleg $c_1 = 3$, és a profitfüggvény valamennyi szintvonala $3x_1 + 2x_2 =$ konstans, vagy $x_2 = -\frac{3x_1}{2} + \frac{\text{konstans}}{2}$ egyenletű egyenes, melyeknek a meredeksége $-\frac{3}{2}$. Az 1. ábrán látjuk, hogy amikor c_1 változásának hatására a célfüggvény szintvonala laposabb lesz, mint a fafaragás korlát szintvonala, akkor az optimális megoldás elmozdul a jelenlegi B pontból az A pontba. Ha az egy katonára eső profit nem 3, hanem c_1, a profitfüggvény szintvonalainak meredeksége $-\frac{c_1}{2}$ lesz. Mivel a fafaragás korlát szintvonalának meredeksége -1, akkor lesz a profit szintvonala laposabb a fafaragás korláténál, ha $-\frac{c_1}{2} > -1$, vagy $c_1 < 2$, és ilyenkor az eredeti bázis már nem lesz optimális. Az új optimális megoldás az 1. ábra $A(0,80)$ pontja.

Ha a profitfüggvény szintvonala meredekebb, mint a felületkezelési korláté, akkor az optimális megoldás elmozdul a B pontból a C pontba. A felületkezelési korláthoz tartozó meredekség -2. Ha $-\frac{c_1}{2} < -2$, vagy $c_1 > 4$, az aktuális bázis nem marad optimális, és a $C(40,20)$ pont lesz az új optimumhely. Összefoglalva: megmutattuk, hogy az aktuális bázis akkor marad optimális, ha (minden más paraméter változatlanul tartása mellett) $2 \le c_1 \le 4$, és ilyenkor Giapettónak 20 katonát és 60 vonatot kell készítenie. Természetesen Giapetto nyeresége akkor is változni fog, ha $2 \leq c_1 \leq 4$. Például $c_1 = 4$ esetén Giapetto nyeresége $4(20) + 2(60) = 200$\$ lesz 180\$ helyett.

Az LP feladat jobb oldalán történő módosítás hatásának grafikus vizsgálata

Grafikus módszerrel azt is meg tudjuk vizsgálni, hogy egy korlátozó feltétel jobb oldalán történő változás módosítja-e az optimális bázist. Legyen b_1 a felületkezelésre fordítható munkaórák száma. Jelenleg $b_1 = 100$. b_1 milyen értékei esetén marad a mostani bázis optimális? A 2. ábrán látjuk, hogy b_1 módosítása önmagával párhuzamosan tolja el a felületkezelési korlát egyenesét. Jelenleg a B pontban van az optimum, ahol a fafaragás korlát és a felületkezelési korlát aktív. Amikor b_1 értékét megváltoztatjuk, *a felületkezelési illetve fafaragás korlát egyeneseinek metszéspontja marad az optimális megoldás mindaddig, amíg ez a pont még lehetséges*. A 2. ábrán látható, hogy $b_1 > 120$ esetén ez a metszéspont a fafaragás korlát egyenesének a D pont alatti részén lesz. Megjegyezzük, hogy a D pontban a felületkezelési munkaórák száma $2(40) + 40 = 120$. Ezen a szakaszon $x_1 > 40$, és a katonákra vonatkozó keresleti korlát nem teljesül. Ezért $b_1 > 120$ esetén az aktuális bázis már nem optimális. Ugyanígy $b_1 < 80$ esetén a fafaragás korlát és a felületkezelési korlát

2. ÁBRA
A felületkezelési munkaórák számának mely értékei esetén nem változik az optimális bázis a Giapetto feladatban?



egy olyan nem lehetséges pontban lesz egyszerre aktív, ahol $x_1 < 0$, és az aktuális bázis ismét nem lesz optimális. Jegyezzük meg, hogy az A pontban a felületkezelési munkaórák száma $0+80=80$. Ezért (minden más paraméter változatlanul hagyása mellett) akkor lesz az aktuális bázis optimális, ha $80 \leq b_1 \leq 120$.

Jegyezzük meg, hogy miközben $80 \leq b_1 \leq 120$ esetén az optimális bázis változatlan marad, a célfüggvény értéke és a döntési változók értékei megváltoznak. Például $80 \leq b_1 \leq 100$ esetén az optimális megoldás a B pontból az AB szakasz valamelyik másik pontjába mozdul el. Ugyanígy $100 \leq b_1 \leq 120$ esetén az optimális megoldás a B pontból a BD egyenes egy másik pontjába mozdul el. Mindaddig, amíg az adott bázis optimális marad, rutin eljárással meghatározható, hogy milyen mértékben módosítja egy jobb oldali korlát változása a döntési változókat. Ennek bemutatására legyen b_1 a felületkezelésre fordítható órák száma. Ha b_1 értékét $100+\Delta$ -ra növeljük, tudjuk, hogy az aktuális bázis $-20 \leq \Delta \leq 20$ esetén optimális marad. b_1 változása közben (amíg $-20 \leq \Delta \leq 20$), az LP feladat optimális megoldása az a pont, ahol a felületkezelési korlát és a fafaragás korlát egyenesei metszik egymást. Ezért $b_1 = 100+\Delta$ esetén a döntési változók új értékeit az alábbi egyenletrendszer megoldásaként kapjuk meg:

$$2x_1 + x_2 = 100 + \Delta \qquad \text{és} \qquad x_1 + x_2 = 80$$

Ebből $x_1 = 20+\Delta$ és $x_2 = 60-\Delta$ adódik. Így a felületkezelésre szánt órák számának növelése esetén több katonát és kevesebb vonatot célszerű gyártani.

Ha b_2 (tehát a rendelkezésre álló fafaragási munkaórák számának) értéke $80+\Delta$, akkor megmutatható (lásd 2. feladat), hogy az aktuális bázis $-20 \leq \Delta \leq 20$ esetén marad optimális. Miközben b_2 értéke (a $-20 \leq \Delta \leq 20$ korlátokat betartva) változik, az LP feladat optimális megoldása továbbra is a felületkezelési korlát és a fafaragás korlát egyeneseinek metszéspontja. Ezért $b_2 = 80+\Delta$ esetén az LP feladat optimális megoldását az alábbi egyenletrendszer megoldása adja:

$$2x_1 + x_2 = 100 \qquad \text{és} \qquad x_1 + x_2 = 80 + \Delta$$

Ebből $x_1 = 20-\Delta$ és $x_2 = 60+2\Delta$ adódik, ami azt mutatja, hogy a fafaragásra fordítható órák számának növelése esetén kevesebb katonát, viszont több vonatot érdemes gyártani.

Tegyük fel, hogy b_3, tehát a katonák iránti kereslet 40 helyett $40+\Delta$ lesz. Ekkor megmutathatjuk (lásd 3. feladat), hogy $\Delta \geq -20$ esetén az aktuális bázis optimális marad. Amíg Δ ebben a tartományban mozog, az LP feladat optimális megoldása továbbra is a felületkezelési korlát és a fafaragás korlát egyeneseinek metszéspontja. Ezért az alábbi egyenletrendszer megoldása adja az optimális megoldást:

$$2x_1 + x_2 = 100 \qquad \text{és} \qquad x_1 + x_2 = 80$$

Ebből természetesen $x_1 = 20$ és $x_2 = 60$ következik, ami egy fontos jelenséget tükröz. Ha egy LP feladat optimális megoldásában egy korlátozó feltétel nem aktív (tehát a hiány vagy a maradék pozitív), akkor a jobb oldali korlát kellően kismértékű (tehát az optimális bázist nem módosító) megváltozása nem módosítja az LP feladat optimális megoldását.

Árnyékárak

Amint azt az 5.7. alfejezetben látni fogjuk, egy vezető számára gyakran fontos annak meghatározása, hogyan módosítja egy korlátozó feltétel jobb oldalának megváltozása az LP feladat célfüggvényének, z-nek, az optimális értékét. Ezt szem előtt tartva megfogalmazzuk a következő definíciót. Egy LP feladat i-edik korlátozó feltételéhez tartozó **árnyékár** az az érték, amennyivel az optimális z érték javul (maximumfeladat esetén a javulás növekedést, minimumfeladat esetén pedig csökkenést jelent), amikor az i-edik korlátozó feltétel jobb oldalát 1-gyel növeljük. Ez a definíció csak arra az esetre érvényes, amikor az i-edik korlátozó feltétel jobb oldalának növelése nem módosítja az optimális bázist.

Tetszőleges kétváltozós LP feladat esetén könnyen meghatározhatjuk akármelyik korlátozó feltétel árnyékárát. Tudjuk például, hogy ha a felületkezelésre felhasználható óraszám $100+\Delta$ (és az aktuális bázis optimális marad), akkor az LP feladat optimális megoldása $x_1 = 20+\Delta$ és $x_2 = 60-\Delta$. Emiatt $3x_1+2x_2 = 3(20+\Delta)+2(60-\Delta) = 180+\Delta$ lesz az optimális z érték. Így mindaddig, amíg az adott bázis optimális marad, a felületkezelésre fordítható órák számának egy egységgel való növelése 1\$-ral fogja az optimális z értéket növelni. Tehát az első (felületkezelési) korlát árnyékára 1\$.

A második (fafaragás) korlát esetén tudjuk, hogy ha a fafaragásra fordítható óraszám $80+\Delta$ (és az aktuális bázis optimális marad), akkor az LP feladat optimális megoldása $x_1 = 20-\Delta$ és $x_2 = 60+2\Delta$. Emiatt $3x_1+2x_2 = 3(20-\Delta)+2(60+2\Delta) = 180+\Delta$ lesz az új optimális z érték. Tehát (mindaddig, míg az aktuális bázis optimális marad), a fafaragásra fordítható óraszám egy egységnyi növelése 1\$-ral fogja az optimális z értéket növelni. Így a második (fafaragás) korlát árnyékára 1\$.

Most kiszámítjuk a harmadik (kereslet) korlát árnyékárát. Ha a jobb oldal értéke $40+\Delta$, akkor mindaddig, amíg az aktuális bázis optimális marad, a döntési változók optimális értékei sem változnak. Ezért az optimális z érték is változatlan marad, ami azt mutatja, hogy a harmadik (kereslet) korlát árnyékára 0\$. Ezáltal nyilvánvalóvá vált a következő szabály: Ha egy LP feladat optimális megoldásában egy korlátozó feltételhez tartozó hiány- vagy maradékváltozó értéke pozitív, akkor a szóban forgó korlátozó feltétel árnyékára nulla.

Tegyük fel, hogy egy LP feladat i-edik korlátozó feltételének jobb oldalát Δb_i-vel növeljük ($\Delta b_i < 0$ esetén a jobb oldal csökken), és az aktuális bázis optimális marad. Ekkor (maximumfeladat esetén) az i-edik korlát jobb oldalának minden egyes egységnyi növelése az árnyékárral fogja növelni az optimális z értéket. Így az új optimális z értéket az alábbi összefüggés adja meg:

$$\begin{aligned}(\text{új optimális } z \text{ érték}) &= (\text{régi optimális } z \text{ érték})\\ &\quad + (i\text{-edik korlát árnyékára})\,\Delta b_i\end{aligned}$$

Minimumfeladat esetén,

$$\begin{aligned}(\text{új optimális } z \text{ érték}) &= (\text{régi optimális } z \text{ érték})\\ &\quad - (i\text{-edik korlát árnyékára})\,\Delta b_i\end{aligned}$$

Például, ha 95 óra fordítható fafaragásra, akkor $\Delta b_2 = 15$, és az új z értéket az alábbi képlet adja:

$$\text{új optimális } z \text{ érték} = 180+15(1) = 195\$$$

Az árnyékárak vizsgálatát az 5.7. alfejezetben folytatjuk.

Az érzékenységvizsgálat jelentősége

Az érzékenységvizsgálat sok szempontból fontos. Számos alkalmazásban az LP feladat paraméterei változhatnak. Például változhat a katonák és vonatok eladási ára éppúgy, mint a fafaragásra, illetve felületkezelésre fordítható óraszám. Az érzékenységvizsgálatnak köszönhető, hogy sokszor nem kell újra megoldani a feladatot, amikor egy paraméter megváltozik. Például, amikor az egy katona eladásából származó nyereség 3.50\$-ra nő, nem kell újra megoldanunk a Giapetto problémát, hiszen az optimális bázis nem változik. Természetesen a Giapetto probléma újbóli megoldása nem nagy munka, de egy több ezer változóval és feltétellel rendelkező LP feladat ismételt megoldása túlzott ráfordítás lenne. Az érzékenységvizsgálat ismerete gyakran lehetővé teszi, hogy egy elemző az eredeti megoldásból megállapítsa, milyen mértékben változik az LP feladat optimális megoldása a paraméterek módosításának hatására.

Említettük, hogy időnként nem ismerjük az LP feladat paramétereinek pontos értékét, például azt, hogy mekkora a katonák iránti kereslet egy hét alatt. A grafikus módszerrel megmutatható, hogy ha ez a kereslet legalább 20, akkor $(20,60)$ marad a Giapetto probléma optimális megoldása (lásd 3. feladat ennek az alfejezetnek a végén). Így még akkor is, amikor Giapetto a katonák iránti keresletet illetően bizonytalan, a cég teljesen biztos lehet abban, hogy 20 katona és 60 vonat gyártása optimális.

Természetesen, kettőnél több változó esetén egy LP feladat érzékenységvizsgálatához a grafikus megközelítés nem célravezető. Mielőtt rátérnénk egy tetszőleges LP feladat érzékenységvizsgálatának ismertetésére, szükségünk lesz a szimplex-táblák mátrix-alakjának előállítására. Ez lesz az 5.2. alfejezet tárgya.

Feladatok

A csoport

1. Mutassuk meg, hogy optimális marad az aktuális bázis, ha a vonatok számának együtthatója a célfüggvényben 1.50$ és 3$ között marad! Mi lesz az új optimális megoldás, ha ez az együttható 2.50$?

2. Mutassuk meg, hogy ha a rendelkezésre álló fafaragási munkaórák száma 60 és 100 között marad, akkor az optimális bázis nem változik! Ebben az esetben is 20 katonát és 60 vonatot fog Giapetto gyártani?

3. Mutassuk meg, hogy ha a katonák iránti kereslet egy hét alatt legalább 20, akkor nem változik az optimális bázis, és Giapettónak továbbra is 20 katonát, illetve 60 vonatot érdemes gyártania.

4. A Dorian autó problémával kapcsolatban (3. fejezet 2. példa),

(a) Határozzuk meg a kabaréhirdetésekre költhető összeg értékének azt a tartományát, melynél optimális marad az aktuális bázis!

(b) Határozzuk meg a futballhirdetésekre költhető összeg értékének azt a tartományát, melynél optimális marad az aktuális bázis!

(c) Határozzuk meg az MJN (magas jövedelmű nő) elérések előírt számának azt a tartományát, amelynél optimális marad az aktuális bázis! Írjuk fel az új optimális megoldást $28+\Delta$ millió MJN elérés esetén!

(d) Határozzuk meg az MJF (magas jövedelmű férfi) elérések előírt számának azt a tartományát, amelynél optimális marad az aktuális bázis! Írjuk fel az új optimális megoldást $24+\Delta$ millió MJF elérés esetén!

(e) Határozzuk meg valamennyi korlátozó feltételhez az árnyékárakat!

(f) Határozzuk meg az új optimális z értéket 26 millió MJN elérés esetén!

5. Egy cég kétféle rádiót gyárt. A gyártási folyamat egyetlen szűk kapacitása a munkaerő. Jelenleg két dolgozója van a cégnek. Az 1. dolgozó legfeljebb 40 órát hajlandó dolgozni hetente, és az óradíja 5$. A 2. dolgozó legfeljebb 50 órát tud dolgozni egy hét alatt, az óradíja pedig 6$. Az 1. táblázat tartalmazza a rádiók elkészítéséhez szükséges erőforrásokat és költségeket, valamint a rádiók árát.

1. TÁBLÁZAT

1. rádió		**2. rádió**	
Ár ($)	**Erőforrás-igény**	**Ár ($)**	**Erőforrás-igény**
25	1. dolgozó: 1 óra 2. dolgozó: 2 óra nyersanyag-költség: 5$	22	2. dolgozó: 2 óra 2. dolgozó: 1 óra nyersanyag-költség: 4$

Legyen x_i az i-edik típusú rádióból egy hét alatt gyártott mennyiség. Ekkor a következő LP feladatot kell a cégnek megoldania:

$$\begin{aligned}
\max\ z &= 3x_1 + 2x_2 \\
\text{f.h.}\quad x_1 + 2x_2 &\le 40 \\
2x_1 + \ \ x_2 &\le 50 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}$$

(a) Az 1. típusú rádió árának mely értékeinél nem változik az optimális bázis?

(b) A 2. típusú rádió árának mely értékeinél nem változik az optimális bázis?

(c) Változatlan marad-e az optimális bázis, ha az 1. dolgozó hetente csak 30 órát hajlandó dolgozni? Határozzuk meg az LP feladat új optimális megoldását!

(d) Változatlan maradna-e az optimális bázis, ha a 2. dolgozó hajlandó lenne hetente 60 órát dolgozni? Határozzuk meg az LP feladat új optimális megoldását!

(e) Határozzuk meg valamennyi korlátozó feltételhez az árnyékárakat!

5.2. Néhány fontos képlet

Ebben az alfejezetben mátrixalgebrai eszközökkel megmutatjuk, hogyan lehet az optimális LP táblát az LP feladat paramétereiből előállítani. Az itt előállított képleteket az érzékenységvizsgálatban, továbbá a dualitás és más haladó LP témakörök tanulmányozásakor fogjuk használni. Tegyük fel, hogy egy olyan maximumfeladatot oldunk meg, melyet a „nagy M” módszerrel készítettünk elő megoldásra, és az LP feladat jelenleg m korlátozó feltételt és n változót tartalmaz. Annak ellenére, hogy maradék-, hiány-, illetve mesterséges változók is szerepelhetnek, a változókat egységesen $x_1, x_2, \dots, x_n$ -nel fogjuk jelölni. Ekkor az LP feladat a következőképpen írható fel:

$$\begin{array}{lrcl}
\max\ z = & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n & & \\
\text{f.h.} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots & & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \\
 & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) & &
\end{array} \tag{1}$$

Ebben a fejezetben gyakran fogjuk példaként használni a 4.3. alfejezetben ismertetett Dakota bútorproblémát (az $x_2 \leq 5$ korlát nélkül). A Dakota probléma (1) alakja a következő:

$$\begin{array}{lrcl}
\max\ z = & 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 & & \\
\text{f.h.} & 8x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 & = & 48 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + s_2 & = & 20 \\
 & 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + s_3 & = & 8 \\
 & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 & &
\end{array} \tag{1'}$$

Tegyük fel, hogy előállítottuk az (1) feladat optimális megoldását. Legyen BV_i az optimális tábla i-edik sorához tartozó bázisváltozó. Legyen továbbá $BV = \{BV_1, BV_2, \dots, BV_m\}$ az optimális tábla bázisváltozóinak halmaza, és vezessük be az

$$\mathbf{x}_{BV} = \begin{bmatrix} x_{BV_1} \\ x_{BV_2} \\ \vdots \\ x_{BV_m} \end{bmatrix}$$

$m \times 1$-es oszlopvektort! Legyen továbbá

$$
\begin{aligned}
NBV &= \text{az optimális tábla nembázis változóinak halmaza} \\
\mathbf{x}_{NBV} &= \text{a nembázis változókból (tetszőleges sorrendben) képzett} \\
&\quad (n-m) \times 1\text{-es oszlopvektor}
\end{aligned}
$$

Ezeknek a definícióknak az illusztrálása céljából emlékeztetünk arra, hogy a Dakota probléma optimális táblája a következő:

$$
\begin{array}{rcl}
z + 5x_2 + 10s_2 + 10s_3 &=& 280 \\
-2x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 &=& 24 \\
-2x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 &=& 8 \\
x_1 + 1.25x_2 - 0.5s_2 + 1.5s_3 &=& 2
\end{array} \tag{2}
$$

Ebben az esetben $BV_1 = s_1$, $BV_2 = x_3$ és $BV_3 = x_1$. Ezért

$$
\mathbf{x}_{BV} = \begin{bmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}
$$

$NBV = \{x_2, s_2, s_3\}$, így egy lehetséges sorrend szerint

$$
\mathbf{x}_{NBV} = \begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}
$$

Most mátrixalgebrai eszközöket használva az eredeti LP feladat (1) alakjából a BV bázisváltozók segítségével állítjuk elő az optimális táblát. Emlékeztetünk arra, hogy a célfüggvényben $c_1, c_2, \ldots, c_n$ jelöli az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változók együtthatóit. (A változók között maradék-, hiány-, illetve mesterséges változók is szerepelhetnek.)

DEFINÍCIÓ

$\mathbf{c}_{BV}$ az $1 \times m$-es $[c_{BV_1} \quad c_{BV_2} \quad \cdots \quad c_{BV_m}]$ sorvektor.

Tehát a $\mathbf{c}_{BV}$ vektor koordinátái az optimális tábla bázisváltozóihoz tartozó célfüggvény-együtthatók. A Dakota probléma esetén $BV = \{s_1, x_3, x_1\}$, ezért $(1')$-ből $\mathbf{c}_{BV} = [0 \quad 20 \quad 60]$ adódik.

DEFINÍCIÓ

$\mathbf{c}_{NBV}$ az az $1 \times (n-m)$-es sorvektor, melynek koordinátái a nembázis változók együtthatói (NBV sorrendjében).

Ha a Dakota probléma nembázis változóit a $NBV = \{x_2, s_2, s_3\}$ sorrendben adjuk meg, akkor $\mathbf{c}_{NBV} = [30 \quad 0 \quad 0]$.

DEFINÍCIÓ

Legyen B az az $m \times m$-es mátrix, melynek j-edik oszlopa az (1)-ben a BV_j változóhoz tartozó oszlopvektor.

A Dakota probléma esetén B első oszlopa $(1')$-ben az s_1-hez tartozó oszlop, míg a második oszlop x_3, a harmadik pedig x_1 oszlopa. Így:

$$
B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1.5 & 4 \\ 0 & 0.5 & 2 \end{bmatrix}
$$

DEFINÍCIÓ

Legyen $\mathbf{a}_j$ (1) korlátozó feltételeiben az x_j-hez tartozó oszlopvektor!

Például a Dakota probléma esetén, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

DEFINÍCIÓ

N az az $m \times (n-m)$-es mátrix, melynek oszlopai (1)-ben a nembázis változókhoz tartozó oszlopok (NBV sorrendjében).

Ha a Dakota problémában $NBV = \{x_2, s_2, s_3\}$ a sorrend, akkor

$$N = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DEFINÍCIÓ

Az $m \times 1$-es $\mathbf{b}$ oszlopvektor az (1) előállítás jobb oldalán álló korlátokból álló vektor.

A Dakota probléma esetén,

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Az eredeti Dakota probléma i-edik korlátozó feltételének jobb oldalát b_i-vel jelöljük. $b_2 = 20$.

Ezekután mátrixalgebrai eszközökkel megmutatjuk, hogyan függ egy LP feladat optimális táblája az LP feladat eredeti (1) alakjától és a BV bázistól.

Egy tetszőleges táblázat korlátozó feltételeinek felírása B^{-1} és az eredeti LP segítségével

Először is vegyük észre, hogy (1) az alábbi alakban írható fel:

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{c}_{BV}\mathbf{x}_{BV} + \mathbf{c}_{NBV}\mathbf{x}_{NBV} \\ \text{f.h.} \quad & B\mathbf{x}_{BV} + N\mathbf{x}_{NBV} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_{BV}, \mathbf{x}_{NBV} \geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

A (3) képleteket használva, a Dakota probléma a

$$\max z = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{f.h.} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1.5 & 4 \\ 0 & 0.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

alakban írható fel. A (3)-ban szereplő korlátozó feltételeket B^{-1}-gyel szorozva

$$B^{-1}B\mathbf{x}_{BV}+B^{-1}N\mathbf{x}_{NBV}=B^{-1}\mathbf{b} \qquad \text{vagyis} \qquad \mathbf{x}_{BV}+B^{-1}N\mathbf{x}_{NBV}=B^{-1}\mathbf{b} \tag{4}$$

adódik. A (4) képletben BV_i-nek az i-edik korláthoz tartozó együtthatója 1, és az összes többi együtthatója 0. Ezért BV a (4) alak bázisváltozóinak halmaza, és a (4) képlet adja az optimális tábla korlátozó feltételeit.

A Dakota probléma esetén a Gauss–Jordan eljárással kapható, hogy

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -8\\ 0 & 2 & -4\\ 0 & -0.5 & 1.5\end{bmatrix}$$

Ezért (4)-ből

$$\begin{bmatrix}s_1\\ x_3\\ x_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 2 & -8\\ 0 & 2 & -4\\ 0 & -0.5 & 1.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1.5 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\ s_2\\ s_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -8\\ 0 & 2 & -4\\ 0 & -0.5 & 1.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}48\\ 20\\ 8\end{bmatrix}$$

illetve

$$\begin{bmatrix}s_1\\ x_3\\ x_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 2 & -8\\ -2 & 2 & -4\\ 1.25 & -0.5 & 1.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\ s_2\\ s_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24\\ 8\\ 2\end{bmatrix} \tag{4'}$$

adódik. Ez természetesen azonos a Dakota probléma (2) optimális táblájának korlátozó feltételeivel.

(4)-ből látható, hogy az optimális tábla korlátozó feltételeiben egy x_j nembázis változó oszlopát a B^{-1} mátrix adja. [(1)-ben az x_j-hez tartozó oszlop $= B^{-1}\mathbf{a}_j$.] Például B^{-1}-nek az x_2-höz tartozó oszlopa (vagyis N első oszlopa) $= B^{-1}\mathbf{a}_2$. (4)-ből az is látható, hogy a korlátozó feltételek jobb oldalán a $B^{-1}\mathbf{b}$ vektor áll. Előző fejtegetéseinket összegzi a következő két képlet:

$$x_j \text{ oszlopa az optimális tábla korlátaiban } = B^{-1}\mathbf{a}_j \tag{5}$$

$$\text{az optimális tábla korlátainak jobb oldala } = B^{-1}\mathbf{b} \tag{6}$$

(5)-re példaként megállapíthatjuk, hogy:

$$\begin{aligned}\begin{matrix}x_2 \text{ oszlopa}\\ \text{az optimális Dakota táblában}\end{matrix} &= B^{-1}\mathbf{a}_2\\ &=\begin{bmatrix}1 & 2 & -8\\ 0 & 2 & -4\\ 0 & -0.5 & 1.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ 2\\ 1.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ -2\\ 1.25\end{bmatrix}\end{aligned}$$

(6)-ra példaként, azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}\begin{matrix}\text{a jobb oldali korlátok}\\ \text{az optimális Dakota táblában}\end{matrix} &= B^{-1}\mathbf{b}\\ &=\begin{bmatrix}1 & 2 & -8\\ 0 & 2 & -4\\ 0 & -0.5 & 1.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}48\\ 20\\ 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24\\ 8\\ 2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Az optimális tábla célfüggvény-sorának előállítása

Most megmutatjuk, hogyan lehet az optimális tábla célfüggvény-sorát a BV mátrix és az LP feladat eredeti (1) alakjának segítségével kifejezni. Első lépésként megszorozzuk a $B\mathbf{x}_{BV} + N\mathbf{x}_{NBV} = \mathbf{b}$ alakban felírt korlátozó feltételeket a $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ vektorral:

$$\mathbf{c}_{BV}\mathbf{x}_{BV} + \mathbf{c}_{BV}B^{-1}N\mathbf{x}_{NBV} = \mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{b} \tag{7}$$

és az eredeti $z = c_{BV}\mathbf{x}_{BV} + \mathbf{c}_{NBV}\mathbf{x}_{NBV}$ célfüggvényt átalakítjuk a következőképpen:

$$z - \mathbf{c}_{BV}\mathbf{x}_{BV} - \mathbf{c}_{NBV}\mathbf{x}_{NBV} = 0 \tag{8}$$

(7)-et (8)-hoz adva kiesnek az optimális tábla bázisváltozói, ugyanakkor megkapjuk a célfüggvény sorát:

$$z + (\mathbf{c}_{BV}B^{-1}N - \mathbf{c}_{NBV})\mathbf{x}_{NBV} = \mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{b} \tag{9}$$

(9) szerint x_j együtthatója a célfüggvényben

$$\mathbf{c}_{BV}B^{-1}(x_j \text{ oszlopa } N\text{-ben}) - (x_j \text{ együtthatója } \mathbf{c}_{NBV}\text{-ben}) = \mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{a}_j - c_j$$

és a célfüggvény sorának jobb oldala $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{b}$.

Az előző okfejtés összegzése céljából jelöljük $\bar{c}_j$-sal x_j együtthatóját az optimális tábla célfüggvényében. Ekkor azt mutattuk meg, hogy

$$\bar{c}_j = \mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{a}_j - c_j \tag{10}$$

és

$$\text{az optimális tábla célfüggvényének jobb oldala} = \mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{b} \tag{11}$$

(10) és (11) illusztrálása céljából előállítjuk a Dakota probléma optimális táblájának a célfüggvényét. Láttuk, hogy

$$\mathbf{c}_{BV} = [0 \quad 20 \quad 60] \quad \text{és} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix}$$

Ezért $\mathbf{c}_{BV}B^{-1} = [0 \quad 10 \quad 10]$, továbbá (10)-ből következik, hogy az optimális tábla célfüggvényében a nembázis változók együtthatói

$$\bar{c}_2 = \mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{a}_2 - c_2 = [0 \quad 10 \quad 10]\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} - 30 = 20 + 15 - 30 = 5$$

továbbá

$$s_2 \text{ együtthatója az optimális célfüggvényben} = \mathbf{c}_{BV}B^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 10$$

$$s_3 \text{ együtthatója az optimális célfüggvényben} = \mathbf{c}_{BV}B^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 10$$

Természetesen az (x_1, x_3 és s_1) bázisváltozók együtthatói az optimális célfüggvényben nullák.

(11) miatt a célfüggvény sorának jobb oldala

$$\mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{b} = [0 \quad 10 \quad 10] \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} = 280$$

Mindezt egybevetve látható, hogy a célfüggvény sora

$$z + 5x_2 + 10s_2 + 10s_3 = 280$$

alakú. Ez természetesen összhangban áll a (2) összefüggéssel.

A (10) formula egyszerűsítése maradék-, hiány- és mesterséges változók esetén

Jelentős mértékben egyszerűsíthető a (10) képlet, hogyha x_j egy maradék-, hiány- vagy mesterséges változó. Például amikor x_j az s_i maradékváltozóval azonos, s_i együtthatója a célfüggvényben 0, továbbá s_i oszlopa az eredeti táblában egy 1-est tartalmaz az i-edik sorban és 0-kat a többi sorban. Ekkor (10) következményeként

$$\begin{aligned} &s_i \text{ együtthatója az optimális célfüggvényben} \\ &\qquad = \mathbf{c}_{BV}B^{-1} i\text{-edik eleme} - 0 \\ &\qquad = \mathbf{c}_{BV}B^{-1} i\text{-edik eleme} \end{aligned} \tag{10'}$$

Hasonlóan, amikor x_j az e_i feleslegváltozóval azonos, e_i együtthatója a célfüggvényben 0, továbbá e_i oszlopa az eredeti táblában egy -1-est tartalmaz az i-edik sorban és 0-kat a többi sorban. Ekkor (10)-ből a következő adódik:

$$\begin{aligned} &e_i \text{ együtthatója az optimális célfüggvényben} \\ &\qquad = -(\mathbf{c}_{BV}B^{-1}) i\text{-edik eleme} - 0 \\ &\qquad = -(\mathbf{c}_{BV}B^{-1}) i\text{-edik eleme} \end{aligned} \tag{10''}$$

Végül, ha x_j egy a_i mesterséges változóval azonos, akkor a_i együtthatója a célfüggvényben (maximumfeladat esetén) $-M$, továbbá az eredeti táblában a_i oszlopa egy 1-est tartalmaz az i-edik sorban és 0-kat a többi sorban. Ekkor (10) a következőképpen alakul:

$$\begin{aligned} &a_i \text{ együtthatója az optimális célfüggvényben} \\ &\qquad = (\mathbf{c}_{BV}B^{-1}) i\text{-edik eleme} - (-M) \\ &\qquad = (\mathbf{c}_{BV}B^{-1}) i\text{-edik eleme} + (M) \end{aligned} \tag{10'''}$$

Ennek az alfejezetnek a levezetései nem voltak egyszerűek. Szerencsére (5), (6), (10) és (11) akkor is használhatóak, ha valaki nem értette meg teljes mértékben ezeket a levezetéseket. Most összegezzük az LP feladat optimális táblájának kiszámítására eddig levezetett képleteket.

Az LP feladat optimális tábláját előállító képletek összegzése

x_j oszlopa az optimális tábla korlátozó feltételeiben $= B^{-1}\mathbf{a}_j$ (5)

az optimális tábla korlátozó feltételeinek jobb oldala $= B^{-1}\mathbf{b}$ (6)

$\bar{c}_j = \mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{a}_j - c_j$ (10)

az s_i maradékváltozó együtthatója az optimális célfüggvényben

$= \mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ i-edik eleme (10′)

az e_i hiányváltozó együtthatója az optimális célfüggvényben

$= -(\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ i-edik eleme$)$ (10″)

az a_i mesterséges változó együtthatója az optimális célfüggvényben

$= (\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ i-edik eleme$) + M$ (maximumfeladat) (10‴)

az optimális célfüggvény jobb oldala $= \mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{b}$ (11)

Mindenekelőtt ki kell számítani B^{-1}-et, hiszen erre az optimális tábla valamennyi részénél szükség van. Hasonlóképpen az optimális tábla célfüggvényének meghatározásakor szükségünk van $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$-re.

Az alábbi példával ismét az előbb levezetett képleteket illusztráljuk.

1. PÉLDA A következő LP feladat optimális bázisa $BV = \{x_2, s_2\}$. Írjuk fel az optimális táblát!

$$\begin{aligned} \max\ z &= x_1 + 4x_2 \\ \text{f.h.}\quad x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ 2x_1 + x_2 &\le 8 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Megoldás Az s_1, illetve s_2 maradékváltozókat bevezetve az (1) alakhoz jutunk:

$$\begin{aligned} \max\ z &= x_1 + 4x_2 \\ \text{f.h.}\quad x_1 + 2x_2 + s_1 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + s_2 &= 8 \end{aligned}$$

Először kiszámítjuk a B^{-1} mátrixot. Mivel

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

B^{-1} előállítása céljából Gauss–Jordan eliminációt végzünk az alábbi mátrixon:

$$B|I_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Az olvasó könnyen ellenőrizheti, hogy

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Az optimális tábla korlátozó feltételeit (5) és (6) segítségével írjuk fel. Mivel

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

x_1 oszlopa az optimális táblában

$$B^{-1}\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

A másik nembázis változó s_1. Minthogy s_1 oszlopa az eredeti feladatban

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(5) szerint

$$s_1 \text{ oszlopa az optimális táblában} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Mivel

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

(6) alapján

$$\text{az optimális tábla jobb oldala} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Mivel BV az $\{x_2, s_2\}$ sorrendben van megadva, x_2 az első sor, s_2 pedig a második sor bázisváltozója. Ezért az optimális tábla korlátozó feltételei a következők:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2}s_1 \qquad &= 3 \\ \tfrac{3}{2}x_1 \qquad - \tfrac{1}{2}s_1 + s_2 &= 5 \end{aligned}$$

Mivel $\mathbf{c}_{BV} = [4 \quad 0]$,

$$\mathbf{c}_{BV}B^{-1} = [4 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = [2 \quad 0]$$

(10)-et felhasználva

$$\begin{aligned} x_1 \text{ együtthatója az optimális tábla célfüggvényében} &= \mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{a}_1 - c_1 \\ &= [2 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1 = 1 \end{aligned}$$

(10′) alapján

$$s_1 \text{ együtthatója az optimális táblában} = \mathbf{c}_{BV}B^{-1} \text{ első eleme} = 2$$

Mivel

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

(11) szerint az optimális tábla célfüggvényének jobb oldala

$$\mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{b} = [2 \quad 0]\begin{bmatrix}6\\8\end{bmatrix} = 12$$

Természetesen az x_2 és s_2 bázisváltozók együtthatója a célfüggvényben 0. Ezért az optimális tábla célfüggvénye $z + x_1 + 2s_1 = 12$ alakú, és a teljes optimális tábla a következő:

$$\begin{aligned}
z + \quad x_1 \qquad + 2s_1 \qquad &= 12\\
\tfrac{1}{2}x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2}s_1 \qquad &= 3\\
\tfrac{3}{2}x_1 \qquad - \tfrac{1}{2}s_1 + s_2 &= 5
\end{aligned}$$

Ennek az alfejezetnek a képleteit arra használtuk, hogy előállítsuk egy LP feladat optimális tábláját. Képleteinket azonban arra is használhatjuk, hogy bázisváltozók *tetszőleges* halmaza esetén felírjuk a bázishoz tartozó táblát. Ez az észrevétel fontos szerepet játszik majd a 9.1. alfejezetben, ahol a módosított szimplex módszert tanulmányozzuk.

Feladatok

A csoport

1. Az alábbi LP feladatban x_1 és x_2 az optimális bázisváltozók. Írjuk fel az optimális táblát ennek az alfejezetnek a képletei segítségével!

$$\begin{aligned}
\max z = \ & 3x_1 + x_2\\
\text{f.h.} \quad & 2x_1 - x_2 \le 2\\
& -x_1 + x_2 \le 4\\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

2. A következő LP feladatban x_2 és s_1 optimális bázisváltozók. Ennek az alfejezetnek a képleteit alkalmazva állítsuk elő az optimális táblát!

$$\begin{aligned}
\max z = \ & -x_1 + x_2\\
\text{f.h.} \quad & 2x_1 + x_2 \le 4\\
& x_1 + x_2 \le 2\\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

5.3. Érzékenységvizsgálat

Most azt fogjuk felderíteni, hogy egy LP feladat paramétereinek (célfüggvény együtthatók, jobb oldal, technológiai együtthatók) módosítása hogyan változtatja meg az optimális megoldást. Amint azt az 5.1. alfejezetben említettük, ezt a témakört nevezik érzékenységvizsgálatnak. Vizsgálataink során jelentős mértékben az 5.2. alfejezet képleteire támaszkodunk, és elsősorban maximumfeladatokra koncentrálunk. (A minimumfeladatok esetén szükséges módosítások magától értetődőek; lásd 8. feladat, ennek az alfejezetnek a végén.)

Ahogy az 5.2. alfejezetben, most is BV-vel jelöljük az optimális tábla bázisváltozóinak halmazát. El akarjuk dönteni, hogy az LP feladat egy adott módosítása esetén BV optimális marad-e. Az érzékenységvizsgálat módszertanának kulcspontja a következő észrevétel. *A 4. fejezetből tudjuk, hogy egy adott BV bázishoz tartozó szimplex tábla* (*maximumfeladat esetén*) *pontosan akkor optimális, ha mindegyik korlátozó feltétel jobb oldala nemnegatív, és a célfüggvény sorában valamennyi együttható nemnegatív*. Ez azért igaz, mert amikor mindegyik korlát jobb oldala nemnegatív, akkor a BV-hez tartozó bázismegoldás lehetséges, és amikor a célfüggvény valamennyi együtthatója nemnegatív, egyik BV-től különböző lehetséges bázis sem eredményezhet az aktuálisnál nagyobb z értéket. Emiatt kizárólag a jobb oldali korlátoktól és a célfüggvény együtthatóitól függ az, hogy egy adott tábla lehetséges és optimális-e. Például, ha egy LP feladat változói $x_1, x_2, \ldots, x_6$, akkor az alábbi tábla-rész már elegendő lenne az optimalitáshoz:

$$\begin{aligned} z + 2x_2 + x_4 + x_6 &= 6 \\ &= 1 \\ &= 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

A tábla kihagyott elemei az optimalitás tényét nem befolyásolják.

Tegyük fel, hogy megoldottunk egy LP feladatot, és találtunk egy BV optimális bázist. Az alábbi eljárással el tudjuk dönteni, hogy az LP feladat valamilyen módosításának hatására a BV bázis elveszíti-e optimalitását.

1. lépés Az 5.2. alfejezet képleteinek alkalmazásával meghatározzuk, hogy az LP feladat módosításának hatására hogyan változik a jelenleg optimális BV bázishoz tartozó tábla jobb oldala és célfüggvénye.

2. lépés Ha a célfüggvény valamennyi együtthatója nemnegatív, továbbá a korlátokhoz tartozó jobb oldali konstansok nemnegatívak, akkor BV továbbra is optimális. Egyébként BV már nem optimális.

Ha BV már nem optimális, akkor úgy kereshetjük meg az új optimális megoldást, hogy az 5.2. alfejezet képleteit alkalmazva felírjuk a BV-hez tartozó teljes táblát, és ezt kiinduló táblának tekintve folytatjuk a szimplex algoritmust.

Kétféle oka lehet annak, hogy egy LP feladat paraméter-módosításának hatására a BV bázis elveszti optimalitását. Az egyik esetben a célfüggvény valamely együtthatója (esetleg több is) negatív lesz. Ilyenkor úgy kaphatunk jobb lehetséges bázismegoldást (nagyobb z értéket), hogy a negatív célfüggény-együttható oszlopából választunk pivot-elemet. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a BV ezúttal egy **szuboptimális bázis**. A másik esetben valamely korlátozó feltétel (vagy feltételek) jobb oldala negatív. Ilyenkor legalább egy bázisváltozó negatív, tehát a BV bázis már nem ad lehetséges bázismegoldást. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a BV ezúttal egy **nem lehetséges bázis**.

Az érzékenységvizsgálat technikáját a Dakota bútorproblémán mutatjuk be. Emlékeztetünk arra, hogy

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{íróasztalok száma} \\ x_2 &= \text{asztalok száma} \\ x_3 &= \text{székek száma} \end{aligned}$$

A Dakota probléma célfüggvénye

$$\max\ z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

volt, az induló tábla pedig

$$\begin{array}{lll} z - 60x_1 - \ 30x_2 - \ 20x_3 & = 0 & \\ \quad 8x_1 + \quad 6x_2 + \quad x_3 + s_1 & = 48 & \text{(faanyag korlát)} \\ \quad 4x_1 + \quad 2x_2 + 1.5x_3 \quad + s_2 & = 20 & \text{(felületkezelési korlát)} \\ \quad 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \quad\quad + s_3 & = 8 & \text{(asztalosmunka korlát)} \end{array} \qquad (12)$$

alakú volt. Az optimális tábla az alábbi:

$$\begin{array}{rl} z + 5x_2 + 10s_2 + 10s_3 = 280 & \\ - 2x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 24 & \\ - 2x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 = 8 & \\ x_1 + 1.25x_2 - 0.5s_2 + 1.5s_3 = 2 & \end{array} \tag{13}$$

Megjegyezzük, hogy $BV = \{s_1, x_3, x_1\}$ és $NBV = \{x_2, s_2, s_3\}$. Az optimális bázismegoldás $z = 280$, $s_1 = 24$, $x_3 = 8$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$.

Most megvizsgáljuk, hogy az LP feladat paramétereit érintő 6 különböző típusú módosítás hogyan változtatja meg az optimális megoldást:

1. változás Egy nembázis változó együtthatóját módosítjuk a célfüggvényben.

2. változás Egy bázisváltozó együtthatóját módosítjuk a célfüggvényben.

3. változás Egy korlátozó feltétel jobb oldalát módosítjuk.

4. változás Egy nembázis változóhoz tartozó oszlopvektort módosítunk.

5. változás Új változót (vagy tevékenységet) vezetünk be.

6. változás Új korlátozó feltételt írunk fel (lásd 5.10. alfejezet).

Egy nembázis változó együtthatójának módosítása a célfüggvényben

A Dakota probléma (13) optimális megoldásában x_2 az egyetlen bázison kívüli döntési változó. Jelenleg x_2 együtthatója a célfüggvényben $c_2 = 30$. Hogyan érinti c_2 módosítása a Dakota probléma optimális megoldását? Pontosabban c_2 mely értékeire marad $BV = \{s_1, x_3, x_1\}$ optimális?

Tegyük fel, hogy 30-ról $30 + \Delta$-ra változik x_2 együtthatója a célfüggvényben. Δ milyen értékei esetén marad a bázisváltozók halmaza (tehát az aktuális bázis) optimális? Először meghatározzuk, hogy hogyan változik a BV-hez tartozó tábla, amikor c_2-t 30-ról $30 + \Delta$-ra módosítjuk. Vegyük észre, hogy B^{-1} és $\mathbf{b}$ nem változnak, ezért (6) miatt ($B^{-1}\mathbf{b}$), vagyis a BV-hez tartozó tábla jobb oldala, sem változik, tehát BV továbbra is lehetséges. Mivel x_2 nembázis változó, $\mathbf{c}_{BV}$ sem változik. (10)-ből láthatjuk, hogy x_2 az egyetlen olyan változó, melynek a célfüggvényben módosult az együtthatója. Tehát a BV optimális marad, ha $\bar{c}_2 \geq 0$, ugyanakkor szuboptimális lesz , ha $\bar{c}_2 < 0$. Az utóbbi esetben x_2-nek a bázisba történő bevonásával tudjuk z értékét javítani.

$$\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

és $c_2 = 30 + \Delta$. Az 5.2. alfejezetből azt is tudjuk, hogy $\mathbf{c}_{BV}B^{-1} = [0 \quad 10 \quad 10]$. (10)-ből következik, hogy

$$\bar{c}_2 = [0 \quad 10 \quad 10] \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} - (30 + \Delta) = 35 - 30 - \Delta = 5 - \Delta$$

Tehát a BV akkor marad optimális, amikor $\bar{c}_2 \geq 0$, tehát $5 - \Delta \geq 0$, vagyis $\Delta \leq 5$. Hasonlóképpen $\bar{c}_2 < 0$ akkor teljesül, ha $\Delta > 5$, ilyenkor viszont BV már nem optimális. Ez azt

2. TÁBLÁZAT Módosított (szuboptimális) Dakota tábla (egy asztal ára 40$)

	Bázisváltozó	**Hányados**
$z - 5x_2 + 10s_2 + 10s_3 = 280$	$z = 280$	
$- 2x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 24$	$s_1 = 24$	nincs
$- 2x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 = 8$	$x_3 = 8$	nincs
$x_1 + 1.25x_2 - 0.5s_2 + 1.5s_3 = 2$	$x_1 = 2$	1.6^*

3. TÁBLÁZAT Optimális Dakota tábla (egy asztal ára 40$)

	Bázisváltozó
$z + 4x_1 + 8s_2 + 16s_3 = 288$	$z = 288$
$1.6x_1 + s_1 + 1.2s_2 - 5.6s_3 = 27.2$	$s_1 = 27.2$
$1.6x_1 + x_3 + 1.2s_2 - 1.6s_3 = 11.2$	$x_3 = 11.2$
$0.8x_1 + x_2 - 0.4s_2 + 1.2s_3 = 1.6$	$x_2 = 1.6$

jelenti, hogy ha az asztalok árát legfeljebb 5$-ral növeljük, tehát $c_2 \leq 30 + 5 = 35$, akkor a BV optimális marad.

Ha egy nembázis változó célfüggvénybeli együtthatójának módosítása során optimális marad a BV bázis, akkor az optimális z érték és a döntési változók értékei sem változnak. Ez azért igaz, mert amikor a célfüggvényben egy nembázis változó együtthatója változik, akkor ez nem módosítja a korlátozó feltételek, valamint a célfüggvény sorának jobb oldalát. Például, ha az asztalok ára 33$-ra nő ($c_2 = 33$), a Dakota probléma optimális megoldása nem változik. (A Dakotának továbbra is 2 íróasztalt és 8 széket kell készítenie, és $z = 280$.) Ugyanakkor $c_2 > 35$ esetén BV már nem marad optimális, hiszen $\bar{c}_2 < 0$. Ebben az esetben úgy kapjuk meg az új optimális megoldást, hogy újraszámoljuk a BV-hez tartozó táblát, és folytatjuk a szimplex módszer alkalmazását. Például $c_2 = 40$ esetén tudjuk, hogy a BV-hez tartozó táblában egyedül x_2-nek a célfüggvénybeli együtthatója fog változni. Mivel $c_2 = 40$, ezért

$$\bar{c}_2 = [0 \quad 10 \quad 10] \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} - 40 = -5$$

A BV-hez tartozó módosított táblát a 2. táblázat mutatja. Ez nem optimális tábla (hanem szuboptimális). z értékét úgy növelhetjük, hogy a 3. sorban x_2-t bevonjuk a bázisba. Az új szimplex táblát a 3. táblázat mutatja.

Ez egy optimális tábla. Eszerint $c_2 = 40$ esetén a Dakota probléma új optimális megoldása $z = 288$, $s_1 = 27.2$, $x_3 = 11.2$, $x_2 = 1.6$, $x_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$. Tehát az asztalok ára olyan mértékben növekedett, hogy most már a Dakotának érdemes asztalokat gyártani. Megjegyezzük, hogy ha megváltoztatjuk a célfüggvényben egy nembázis változó együtthatóját, akkor általában nemcsak egy, hanem több bázistranszformációt is végre kell hajtani ahhoz, hogy az új optimális megoldást megkapjuk.

Most mutatunk egy meggyőzőbb érvelést annak belátására, hogy nem változik a Dakota probléma optimális bázisa, amíg az asztalok árát legfeljebb 5$-ral növeljük. (13) optimális célfüggvényéből látható, hogy $c_2 = 30$ esetén

$$z = 280 - 10s_2 - 10s_3 - 5x_2$$

Ez azt mutatja, hogy minden egyes elkészített asztal 5$-ral csökkenti a Dakota árbevételét (más szóval az asztalok redukált költsége 5$). Ha több mint 5$-ral emeljük az asztalok egységárát, akkor minden egyes elkészített asztal már növelni fogja a Dakota árbevételét. Például $c_2 = 36$ esetén minden asztal $6 - 5 = 1$$-ral növeli az árbevételt, és a Dakotának már érdemes asztalt gyártania. Tehát, ahogyan azt előbb már láttuk, $\Delta > 5$ esetén már változik az optimális bázismegoldás. Ilyen módon a nembázis változók redukált költségének egy új interpretációjához jutottunk: *Egy nembázis változó redukált költsége* (*maximumfeladat esetén*) *az a legnagyobb érték, amivel a változó célfüggvénybeli együtthatóját még növelhetjük, anélkül, hogy az aktuális bázis optimalitását elvesztené, és a nembázis változót az* (*új*) *optimális bázisba be kellene vonni* .

Összegezve, amikor a célfüggvényben megváltoztatjuk egy x_j nembázis változó együtthatóját, $\bar{c}_j \geq 0$ esetén az optimális bázis nem módosul. Ha viszont $\bar{c}_j < 0$, akkor az optimális bázis módosul, és x_j bázisváltozó lesz az új optimális bázisban.

Egy bázisváltozó együtthatójának módosítása a célfüggvényben

A Dakota problémában az x_1 (íróasztalok), illetve x_3 (székek) döntési változók bázisváltozók. Most megmutatjuk, hogy a célfüggvényben valamely bázisváltozó együtthatójának módosítása hogyan hat az LP feladat optimális megoldására. Először azt vizsgáljuk, hogyan érinti a BV-hez tartozó táblát egy ilyen módosítás. Mivel B (következésképpen B^{-1}) és $\mathbf{b}$ nem változnak, (6) miatt valamennyi korlátozó feltétel jobb oldala változatlan marad, és BV továbbra is lehetséges lesz. Ugyanakkor $\mathbf{c}_{BV}$ módosítása miatt $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ változni fog. (10)-ből látjuk, hogy $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ módosítása (egynél) több célfüggvénybeli együttható megváltozását is okozhatja. Annak eldöntésére, hogy BV optimális marad-e, újra kell számolnunk a BV-hez tartozó tábla célfüggvényét a (10) összefüggés segítségével. Ha a célfüggvény valamennyi együtthatója nemnegatív marad, akkor BV továbbra is optimális. Ellenkező esetben BV szuboptimális lesz. Az eddigi fejtegetés illusztrálása céljából megvizsgáljuk, hogy az x_1 (íróasztalok) célfüggvénybeli együtthatójának a jelenlegi $c_1 = 60$ értékről történő elmozdítása hogyan érinti a Dakota probléma optimális megoldását.

Tegyük fel, hogy c_1 új értéke $60 + \Delta$ lesz, s ezáltal $\mathbf{c}_{BV}$ módosított változata $\mathbf{c}_{BV} = [0 \quad 20 \quad 60 \quad + \quad \Delta]$. Az új célfüggvény felírásához szükségünk van B^{-1}-re. B^{-1} kiszámítását elvégezhetnénk a Gauss–Jordan módszerrel (mint pl. az 5.2. alfejezetben). Emlékeztetünk arra, hogy ez a módszer a 3×6 -os $B|I_3$ mátrix felírásával indul:

$$B|I_3 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ezután elemi sorműveletek sorozatával $B|I_3$ első három oszlopát I_3-má transzformáljuk. Amikor ez megtörtént, a kapott mátrix utolsó három oszlopa B^{-1} lesz.

Ugyanakkor az is igaz, hogy a Dakota problémának a szimplex algoritmussal történő megoldása során B^{-1}-et (észrevétlenül) már előállítottuk. Ennek belátásához vegyük észre, hogy amikor a (12) induló Dakota táblából a (13) optimális Dakota táblát kiszámítottuk, elemi sorműveletek sorozatát hajtottuk végre a korlátozó feltételeken. Ezek a lépések az (s_1, s_2, s_3) induló bázishoz tartozó oszlopokat

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{alakból} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{alakba}$$

transzformálták. Ugyanezekkel a lépésekkel a $BV = \{s_1, x_3, x_1\}$-hez tartozó

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} s_1 & x_3 & x_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1.5 & 4 \\ 0 & 0.5 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{alakból} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} s_1 & x_3 & x_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

lett. Ez azt jelenti, hogy a Dakota probléma szimplex algoritmussal történő megoldása során elemi bázistranszformációk sorozatával B-t I_3-má transzformáltuk. Ugyanezeknek a lépéseknek a hatására I_3-ból

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

lett. Ezzel egy rendkívül fontos tényt fedeztünk fel: *Tetszőleges szimplex táblában* a B^{-1} $m \times m$-es *mátrix az aktuális táblának azokból az oszlopaiból áll, melyek az induló tábla bázisváltozóihoz tartoznak* (*az eredeti sorrendben*). Eszerint amikor az LP feladat induló bázisa kizárólag maradék-változókból áll, akkor az optimális táblában a B^{-1} mátrixot a korlátozó feltételeknek a maradék-változókhoz tartozó oszlopai alkotják. Az általános esetben, ha az i-edik korlát induló bázisváltozója az a_i mesterséges változó, akkor B^{-1} i-edik oszlopa az optimális tábla korlátozó feltételeiben az a_i-hez tartozó oszlop. Ezért, nincs szükségünk a Gauss–Jordan algoritmusra ahhoz, hogy az optimális tábla B^{-1} mátrixát előállítsuk. B^{-1}-et a szimplex algoritmus végrehajtása során automatikusan megkapjuk.

Most már kiszámíthatjuk a $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ vektort $c_1 = 60 + \Delta$ esetén:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{BV}B^{-1} &= [0 \quad 20 \quad 60+\Delta] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \\ &= [0 \quad 10-0.5\Delta \quad 10+1.5\Delta] \end{aligned} \tag{14}$$

Vegyük észre, hogy $\Delta = 0$ esetén (14) az eredeti $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ vektort adja. Most kiszámítjuk a $c_1 = 60 + \Delta$ értékhez tartozó új célfüggvényt. Mivel

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix},\ c_1 = 60+\Delta,\ c_2 = 30,\ c_3 = 20$$

(10) segítségével előállíthatjuk az új célfüggvényt. Minthogy s_1, x_3 és x_1 bázisváltozók, együtthatójuk a célfüggvényben továbbra is 0 kell hogy legyen. A nembázis változók célfüggvénybeli együtthatói a következőképpen alakulnak:

$$\bar{c}_2 = \mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{a}_2 - c_2 = [0 \quad 10-0.5\Delta \quad 10+1.5\Delta] \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} - 30 = 5 + 1.25\Delta$$

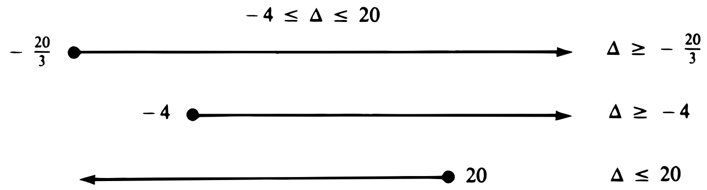
$$\begin{aligned} s_2 \text{ együtthatója a célfüggvényben} &= \mathbf{c}_{BV}B^{-1}\text{második eleme } = 10 - 0.5\Delta \\ s_3 \text{ együtthatója a célfüggvényben} &= \mathbf{c}_{BV}B^{-1}\text{harmadik eleme } = 10 + 1.5\Delta \end{aligned}$$

Emiatt az optimális tábla célfüggvénye

$$z + (5 + 1.25\Delta)x_2 + (10 - 0.5\Delta)s_2 + (10 + 1.5\Delta)s_3 = \ ?$$

A célfüggvény új alakjából látható, hogy BV pontosan akkor marad optimális, ha a következő feltételek teljesülnek:

$$\begin{aligned} 5 + 1.25\Delta \geq 0 &\quad (\text{tehát } \Delta \geq -4) \\ 10 - 0.5\Delta \geq 0 &\quad (\text{tehát } \Delta \leq 20) \\ 10 + 1.5\Delta \geq 0 &\quad (\text{tehát } \Delta \geq -(20/3)) \end{aligned}$$



3. ÁBRA
c_1 mely értékeire marad optimális az aktuális bázis?

Ezek szerint az aktuális bázis addig marad optimális, amíg $\Delta \ge -4$, $\Delta \le 20$ és $\Delta \ge -\frac{20}{3}$. A 3. ábrán látható, hogy az aktuális bázis akkor és csak akkor marad optimális, ha $-4 \le \Delta \le 20$: Ha c_1-et legfeljebb 4$-ral csökkentjük, illetve legfeljebb 20$-ral növeljük, nem változik az optimális bázis. Tehát, mindaddig míg $56 = 60 - 4 \le c_1 \le 60 + 20 = 80$, az aktuális bázis optimális marad. Ha viszont $c_1 < 56$ vagy $c_1 > 80$, akkor az aktuális bázis már nem lesz optimális.

Amikor optimális marad az aktuális bázis, a döntési változók értékei sem módosulnak, mert $B^{-1}\mathbf{b}$ sem változik. Ugyanakkor az optimális z érték módosul. Ennek bemutatására tegyük fel, hogy $c_1 = 70$. Mivel $56 \le 70 \le 80$, tudjuk, hogy a jelenlegi bázis optimális marad. Ezért a Dakotának továbbra is 2 íróasztalt ($x_1 = 2$) és 8 széket ($x_3 = 8$) kell gyártania. Ugyanakkor z új értéke $z = 70x_1 + 30x_2 + 20x_3$, tehát $70(2) + 20(8) = 300$\$ lesz. Azt, hogy z új értéke 300$, a következőképpen is beláthatjuk. Minden egyes íróasztalból származó bevétel $70 - 60 = 10$\$-ral nőtt. Mivel a Dakota 2 íróasztalt készít, a bevétele $2(10) = 20$\$-ral nő, tehát az új bevétel $= 280 + 20 = 300$\$.

Amikor az aktuális bázis már nem optimális

Megismételjük, hogy $c_1 < 56$, illetve $c_1 > 80$ esetén az adott bázis már nem lesz optimális. Érthető módon, amikor az íróasztalok ára kellő mértékben csökken (a többi ár változatlanul tartása mellett), már nem lesz érdemes íróasztalt gyártani. Vizsgálataink alapján ez akkor következik be, amikor az íróasztalok árának csökkenése nagyobb mint 4$. Az olvasó meggyőződhet arról (lásd 2. feladat az alfejezet végén), hogy $c_1 < 56$ esetén x_1 az új optimális megoldásban már nem lesz bázisváltozó. Másfelől $c_1 > 80$ esetén az íróasztal annyira vonzó termék lesz, hogy érdemes többet gyártani belőle; a nyereség már annyira nagy, hogy az aktuális bázis szuboptimális lesz. Ahhoz, hogy több íróasztalt gyártsunk, ki kell szorítani egy másik változót a bázisból. Tegyük fel, hogy $c_1 = 100$. Mivel $100 > 80$, az aktuális bázis elveszti optimalitását. Hogyan határozhatjuk meg az új optimális megoldást? Felírjuk a korábban optimális tábla $c_1 = 100$-hoz tartozó alakját, és folytatjuk a szimplex algoritmust. $c_1 = 100$ esetén $\Delta = 100 - 60 = 40$, és a célfüggvény új alakja

$$
\begin{aligned}
&\bar{c}_1 = 0, \qquad \bar{c}_2 = 5 + 1.25\Delta = 55, \qquad \bar{c}_3 = 0,\\
&s_1 \text{ együtthatója a célfüggvényben} = 0\\
&s_2 \text{ együtthatója a célfüggvényben} = 10 - 0.5\Delta = -10\\
&s_3 \text{ együtthatója a célfüggvényben} = 10 + 1.5\Delta = 70\\
&\text{A célfüggvény jobb oldala} = \mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{b} = [0 \quad -10 \quad 70]\begin{bmatrix}48\\20\\8\end{bmatrix} = 360
\end{aligned}
$$

(6) szerint c_1 módosítása nem változtatja meg a BV-hez tartozó tábla korlátozó feltételeit. Ez azt jelenti, hogy $c_1 = 100$ esetén a BV-hez tartozó táblát a 4. táblázat mutatja. $BV = \{s_1, x_3, x_1\}$ ezúttal szuboptimális. Annak érdekében, hogy meghatározzuk a Dakota probléma új optimális megoldását, bevonjuk a bázisba s_2-t a 2. sor segítségével (5. táblázat). Az eredmény egy új optimális tábla. $c_1 = 100$ esetén a Dakota probléma új optimális

4. TÁBLÁZAT Módosított (szuboptimális) tábla $c_1 = 100$ esetén

	Bázisváltozó	Hányados
$z + 55x_2 - 10s_2 + 70s_3 = 360$	$z = 360$	
$-2x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 24$	$s_1 = 24$	12
$-2x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 = 8$	$x_3 = 8$	4^*
$x_1 + 1.25x_2 - 0.5s_2 + 1.5s_3 = 2$	$x_1 = 2$	nincs

5. TÁBLÁZAT Optimális Dakota tábla $c_1 = 100$ esetén

	Bázisváltozó
$z + 45x_2 + 5x_3 + 50s_3 = 400$	$z = 400$
$- x_3 + s_1 - 4s_3 = 16$	$s_1 = 16$
$- x_2 + 05x_3 + s_2 - 2s_3 = 4$	$s_2 = 4$
$x_1 + 0.75x_2 + 0.25x_3 + 0.5s_3 = 4$	$x_1 = 4$

megoldása $z = 400$, $s_1 = 16$, $s_2 = 4$, $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Megjegyezzük, hogy az íróasztalgyártás jövedelmezőségének növekedése azt eredményezte, hogy a Dakota már nem gyárt székeket. A felszabaduló erőforrások segítségével a Dakota további $4 - 2 = 2$ íróasztalt készít.

Összegezve, az x_j bázisváltozó célfüggvény együtthatójának módosítása után csak akkor marad az aktuális bázis továbbra is optimális, ha a BV-hez tartozó tábla célfüggvénysorában mindegyik együttható nemnegatív marad. Ha valamelyik együttható negatív lesz, akkor az aktuális bázis már nem lesz optimális.

Egy korlátozó feltétel jobb oldalának módosítása

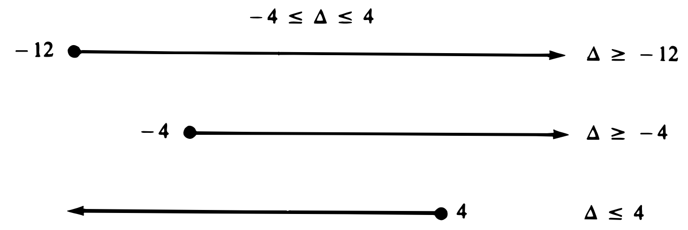
Mi történik az aktuális bázissal?

Ebben az alfejezetben azt vizsgáljuk, hogyan változik egy LP feladat optimális megoldása, amikor egy korlátozó feltétel jobb oldalát módosítjuk. Mivel **b** (10)-ben nem szerepel, egy korlát jobb oldalának módosítása változatlanul hagyja az optimális tábla célfüggvényét; a jobb oldali konstans megváltozásának hatására az aktuális bázis nem válik szuboptimálissá. Ugyanakkor (5) és (6) azt mutatják, hogy egy jobb oldali korlát módosítása megváltoztatja az optimális táblában a korlátozó feltételek jobb oldalát. *Az aktuális bázis lehetséges és optimális marad mindaddig, míg az optimális tábla jobb oldalán valamennyi korlát még nemnegatív. Amikor az optimális táblában legalább egy jobb oldali korlát negatív lesz, akkor az aktuális bázis már nem lehetséges, ezért már nem optimális.*

Tegyük fel, hogy meg akarjuk határozni, hogyan érinti a Dakota probléma optimális megoldását a felületkezelésre fordított munkaórák számának, (b_2)-nek a változása. Jelenleg $b_2 = 20$. Amikor b_2 értéke $20 + \Delta$ lesz, (6) miatt az optimális tábla korlátozó feltételeinek jobb oldala az alábbi módon alakul:

$$B^{-1}\begin{bmatrix} 48 \\ 20+\Delta \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 48 \\ 20+\Delta \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24+2\Delta \\ 8+2\Delta \\ 2-0.5\Delta \end{bmatrix}$$

Természetesen $\Delta = 0$ esetén vissza kell kapnunk az eredeti optimális tábla jobb oldalát. Ha ez nem következik be, valami hibát követtünk el.



4. ÁBRA
b_2 mely értékei esetén marad az aktuális bázis optimális?

Meg lehet mutatni (lásd 9. feladat), hogy amikor az i-edik korlát jobb oldalát Δ-val növeljük, az optimális tábla jobb oldalának megváltozása $\Delta(B^{-1}$ i-edik oszlopa) lesz. Mivel B^{-1} második oszlopa

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -0.5 \end{bmatrix}, \qquad \text{és az eredeti jobb oldal} \qquad \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix},$$

azt kapjuk, hogy az optimális tábla korlátozó feltételeinek jobb oldala

$$\begin{bmatrix} 24+2\Delta \\ 8+2\Delta \\ 2-0.5\Delta \end{bmatrix}$$

Ahhoz, hogy az aktuális bázis optimális maradjon, az optimális tábla valamennyi korlátozó feltételének jobb oldala továbbra is nemnegatív kell hogy legyen. Eszerint az aktuális bázis pontosan akkor marad optimális, ha a következők teljesülnek:

$$\begin{aligned} 24+2\Delta &\ge 0 \qquad (\text{vagyis } \Delta \ge -12) \\ 8+2\Delta &\ge 0 \qquad (\text{vagyis } \Delta \ge -4) \\ 2-0.5\Delta &\ge 0 \qquad (\text{vagyis } \Delta \le 4) \end{aligned}$$

Amíg $\Delta \ge -12$, $\Delta \ge -4$ és $\Delta \le 4$ teljesül, az aktuális bázis lehetséges, s következésképpen optimális marad. A 4. ábrán látható, hogy $-4 \le \Delta \le 4$ esetén az adott bázis továbbra is lehetséges, s így optimális lesz. Ez azt jelenti, hogy $20-4 \le b_2 \le 20+4$, vagyis $16 \le b_2 \le 24$ esetén az aktuális bázis optimális marad: Ha a felületkezelésre fordítható munkaórák száma 16 és 24 között marad, akkor $BV = \{s_1, x_3, x_1\}$ továbbra is optimális, és a Dakotának továbbra is íróasztalokat és székeket érdemes gyártania. Ugyanakkor $b_2 > 24$ vagy pedig $b_2 < 16$ esetén az aktuális bázis már nem lehetséges, tehát már nem optimális.

Hogyan változik a döntési változók és a z értéke?

A döntési változók és a z értéke akkor is megváltozik, amikor az optimális bázis változatlan marad ($16 \le b_2 \le 24$ esetén). Ezt láthattuk az 5.1. alfejezetben, a grafikus érzékenységvizsgálat bemutatásakor. A részletek ismertetése céljából emlékeztetünk arra, hogy az optimális megoldásban $B^{-1}\mathbf{b}$ adja a bázisváltozók értékeit, az optimális z érték pedig $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{b}$-vel egyenlő. $\mathbf{b}$ megváltozása módosítani fogja a bázisváltozókat, valamint az optimális z értéket. Ennek bemutatására tegyük fel, hogy a felületkezelésre fordítható munkaórák száma 22. Mivel $16 \le 22 \le 24$, az optimális bázis nem változik, és (6) szerint a bázisváltozók új értékei a következőképpen alakulnak (a nembázis változók értéke továbbra is 0 lesz, hiszen az optimális bázis változatlan):

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 22 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tehát 22 felületkezelésre fordítható munkaóra esetén a Dakotának 12 széket és mindössze 1 íróasztalt érdemes gyártania. Az optimális z érték megváltozását a (11) képlet segítségével fogjuk kiszámítani. Azt kapjuk, hogy 22 felületkezelésre fordítható munkaóra esetén

$$z \text{ új értéke} = \mathbf{c}_{BV}B^{-1}(\text{új } \mathbf{b}) = [0 \quad 10 \quad 10] \begin{bmatrix} 48 \\ 22 \\ 8 \end{bmatrix} = 300$$

Az 5.8. alfejezetben az árnyékár rendkívül fontos fogalmát fogjuk használni annak meghatározására, hogy hogyan változtatja meg az optimális z értéket egy jobb oldali korlát módosítása.

Amikor az aktuális bázis már nem optimális

Hogyan tudjuk előállítani az új optimális bázist, amikor olyan nagymértékben változtattuk meg valamelyik jobb oldali korlát értékét, hogy az aktuális bázis már nem optimális? Tegyük fel, hogy b_2 új értéke 30. Mivel $b_2 > 24$, az aktuális bázis már nem optimális. Ha aktualizáljuk az idáig optimális bázishoz tartozó táblát, akkor az 5.2. alfejezet képleteiből látható, hogy kizárólag a célfüggvény jobb oldala és a korlátozó feltételeinek jobb oldalai fognak változni. (6) szerint a $BV = \{s_1, x_3, x_1\}$ bázishoz tartozó táblában a korlátozó feltételek jobb oldala a következő:

$$B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 30 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ 28 \\ -3 \end{bmatrix}$$

(11) szerint a célfüggvény jobb oldalának értéke most

$$\mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{b} = [0 \quad 10 \quad 10] \begin{bmatrix} 48 \\ 30 \\ 8 \end{bmatrix} = 380$$

A korábban optimális $BV = \{s_1, x_3, x_1\}$ bázishoz tartozó táblát a 6. táblázat mutatja. Mivel $x_1 = -3$, a BV már nem lesz lehetséges, illetve optimális. Sajnálatos módon ebben a táblában nem találunk lehetséges bázismegoldást. Ha ezt használjuk induló táblának, akkor a szimplex módszerrel nem tudjuk előállítani a Dakota probléma új optimális megoldását. Az 5.10. alfejezetben LP feladatok megoldásának egy másik módszerét, a duál szimplex módszert, fogjuk ismertetni. Ennek segítségével olyan LP feladatokat lehet megoldani, ahol az induló táblában negatív jobb oldali konstansok is előfordulhatnak, viszont a célfüggvényben valamennyi együttható nemnegatív.

Összegezve, egy jobb oldali korlát módosítása esetén optimális marad az aktuális bázis, ha a hozzá tartozó táblában valamennyi jobb oldali korlát továbbra is nemnegatív. Ha viszont bármelyik jobb oldali korlát negatív lesz, akkor az aktuális bázis már nem lehetséges, és új optimális megoldást kell előállítani.

6. TÁBLÁZAT Módosított (nem lehetséges) Dakota tábla $b_2 = 30$ esetén

	Bázisváltozó
$z + 5x_2 + 10s_2 + 10s_3 = 380$	$z = 380$
$-2x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 44$	$s_1 = 44$
$-2x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 = 28$	$x_3 = 28$
$x_1 + 1.25x_2 - 0.5s_2 + 1.5s_3 = -3$	$x_1 = -3$

Egy nembázis változó oszlopának megváltoztatása

Jelenleg egy asztal elkészítésének erőforrásigénye 6 egységnyi faanyag, 2 munkaóra felületkezelés és 1.5 óra asztalosmunka. Egy asztal eladási ára 30\$. Az optimális megoldásban x_2 (az asztalok száma) nembázis változó. Ez azt jelenti, hogy jelenleg a Dakota nem gyárt asztalt. Tegyük most fel, hogy egy asztal eladási ára 43\$ lett, és a technológiaváltásnak köszönhetően az előállítás erőforrásigénye 5 egységnyi faanyag, 2 munkaóra felületkezelés és 2 óra asztalosmunka. Módosítja-e ez a változás a Dakota probléma optimális megoldását? Tehát az eredeti feladatban az x_2-höz tartozó oszlop elemeit változtattuk meg (beleértve a célfüggvény sorát is). Egy nembázis változó (pl. az asztalok) oszlopának módosítása nem változtatja meg B-t (tehát B^{-1}-et) és $\mathbf{b}$-t sem. Ezért változatlan marad az optimális tábla jobb oldala. (10)-ből első pillantásra látható, hogy a célfüggvény sorában kizárólag $\bar{c}_2$ módosul; az aktuális bázis pontosan akkor marad optimális, ha $\bar{c}_2 \geq 0$ teljesül. Most (10) felhasználásával meghatározzuk x_2 új együtthatóját a célfüggvényben. Ezt az eljárást x_2 **kiértékelésének** nevezzük. (10) miatt

$$\bar{c}_2 = \mathbf{c}_{BV} B^{-1} \mathbf{a}_2 - c_2$$

Vegyük észre, hogy $\mathbf{c}_{BV} B^{-1}$ még mindig a $[0 \quad 10 \quad 10]$ sorvektorral azonos, viszont $\mathbf{a}_2$ és c_2 megváltoztak.

$$c_2 = 43 \qquad \text{és} \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ezért

$$\bar{c}_2 = [0 \quad 10 \quad 10] \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - 43 = -3 < 0$$

Mivel $\bar{c}_2 < 0$, az aktuális bázis már nem optimális. $\bar{c}_2 = -3$ azt jelenti, hogy minden egyes legyártott asztal 3\$-ral növeli a Dakota bevételét. Tehát x_2 bevonása a bázisba nyilvánvalóan a Dakota érdekeit szolgálja. A Dakota feladat új optimális megoldásának előállításához aktualizáljuk a $BV = \{s_1, x_3, x_1\}$ bázishoz tartozó táblát, ezután pedig a szimplex módszert alkalmazzuk. (5) szerint x_2 oszlopa a BV-hez tartozó tábla korlátokhoz tartozó részében ezúttal

$$B^{-1}\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A $BV = \{s_1, x_3, x_1\}$ bázishoz tartozó táblát a 7. táblázat mutatja. Az új optimális megoldás érdekében x_2-t a 3. sor segítségével vonjuk be a bázisba. Ezáltal a 8. táblázatban látható optimális táblához jutunk. Tehát a Dakota probléma új optimális megoldása $z = 283$, $s_1 = 31$, $x_3 = 12$, $x_2 = 1$, $x_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$. Az x_2 nembázis változó (asztalok) oszlopának módosítása után a Dakotának 12 széket és egy asztalt érdemes gyártania.

7. TÁBLÁZAT Módosított (szuboptimális) Dakota tábla az új technológia esetén

	Bázisváltozó
$z - 3x_2 + 10s_2 + 10s_3 = 280$	$z = 280$
$-7x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 24$	$s_1 = 24$
$-4x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 = 8$	$x_3 = 8$
$x_1 + 2x_2 - 0.5s_2 + 1.5s_3 = 2^*$	$x_1 = 2^*$

8. TÁBLÁZAT
Optimális Dakota tábla az új technológia esetén

	Bázisváltozó
$z + 1.5x_1 \quad\quad + 9.25s_2 + 12.25s_3 = 283$	$z = 283$
$3.5x_1 \quad\quad + s_1 + 0.25s_2 - 2.75s_3 = 31$	$s_1 = 31$
$2x_1 \quad + x_3 \quad + s_2 - s_3 = 12$	$x_3 = 12$
$0.5x_1 + x_2 \quad\quad - 0.25s_2 + 0.75s_3 = 1$	$x_2 = 1$

Összegezve, amikor egy x_j nembázis változó oszlopa módosul, akkor $\bar{c}_j \geq 0$ esetén optimális marad az aktuális bázis. Ha viszont $\bar{c}_j < 0$, akkor az adott bázis már nem optimális, és x_j bázisváltozó lesz az új optimális megoldásban.

Ha egy bázisváltozó oszlopa változik, akkor általában nehéz eldönteni, hogy optimális marad-e az aktuális bázis. Ennek az az oka, hogy a változás nemcsak B-t (és ezáltal B^{-1}-et), hanem $\mathbf{c}_{BV}$-t is módosíthatja, és ezáltal a teljes célfüggvénysor és a tábla jobb oldala is megváltozhat. Mindenesetre most is pontosan akkor marad az aktuális bázis optimális, ha a célfüggvényben minden együttható nemnegatív, és mindegyik korlátozó feltétel jobb oldalán nemnegatív konstans áll.

Új tevékenység bevezetése

Sokszor adódik olyan helyzet, hogy újabb tevékenységek vállalására is lehetőség nyílik. Például a Dakota probléma bővíthető egy további bútortípus – mondjuk zsámolyok – gyártásának a lehetőségével. Egy ilyen új lehetőség értékelésekor azt kell megvizsgálnunk, hogy optimális marad-e az aktuális bázis, amikor egy bázison kívüli változó oszlopa változik meg. Ezt a következő példával világítjuk meg.

Tegyük fel, hogy a Dakota zsámolyok gyártását fontolgatja. Egy zsámoly eladási ára 15\$, előállításához 1 egységnyi faanyagra, 1 munkaóra felületkezelésre és 1 óra asztalosmunkára van szükség. Érdemes-e zsámolyokat gyártani? Jelöljük a Dakota által gyártott zsámolyok számát x_4-gyel! Az induló tábla megváltozik, hiszen megjelenik benne x_4 oszlopa. Az új induló tábla a következő:

$$\begin{aligned}
z - 60x_1 - 30x_2 - 20x_3 - 15x_4 \quad\quad\quad &= 0 \\
8x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 + s_1 \quad\quad &= 48 \\
4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + x_4 \quad + s_2 \quad &= 20 \\
2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + x_4 \quad\quad + s_3 &= 8
\end{aligned} \tag{15}$$

x_4 oszlopának a feladatba való beillesztését **új tevékenység bevezetésének** nevezzük. Hogyan módosítja az új tevékenység bevezetése a $BV = \{s_1, x_3, x_1\}$ optimális bázishoz tartozó táblát? (6)-ból látható, hogy az optimális tábla valamennyi korlátozó feltételének jobb oldala változatlan marad. (10) szerint a célfüggvény régi változóinak együtthatói sem változnak. Természetesen $\bar{c}_4$-et – az új tevékenység együtthatóját az optimális tábla célfüggvényében – kell kiszámítanunk. Mivel a jobb oldal változatlan marad, és a célfüggvényben kizárólag x_4-nek lehet negatív az együtthatója, optimális marad az aktuális bázis, ha $\bar{c}_4 \geq 0$, ellenben elveszíti optimalitását, amikor $\bar{c}_4 < 0$.

Annak eldöntéséhez, hogy egy új tevékenység bevezetésekor módosul-e az optimális bázis, újraárazzuk az új tevékenységet. Mivel

$$c_4 = 15 \qquad \text{és} \qquad \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

9. TÁBLÁZAT
Az érzékenységvizsgálat összefoglalása (maximumfeladat)

Az induló tábla változása	**A változás hatása az optimális táblára**	**Az aktuális bázis optimális marad, ha:**
Egy c_j nembázis együttható változása a célfüggvényben	x_j együtthatója megváltozik az optimális célfüggvényben	x_j együtthatója az adott bázis célfüggvényében nemnegatív marad
A c_j bázisegyüttható megváltozik a célfüggvényben	A teljes célfüggvénysor megváltozhat	A célfüggvény valamennyi együtthatója nemnegatív marad
Egy korlát jobbodalának változása	A korlátok és a célfüggvény jobb oldala változik	Mindegyik korlát jobb oldala nemnegatív
Egy x_j nembázis változó oszlopa változik, vagy új x_j változót vezetünk be	Megváltozik x_j együtthatója a célfüggvényben, és x_j oszlopa az optimális táblában	x_j együtthatója a célfüggvényben nemnegatív marad

(10) segítségével újraárazhatjuk x_4-et. Az eredmény a következő:

$$\bar{c}_4 = [0 \quad 10 \quad 10] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 15 = 5$$

Mivel $\bar{c}_4 \geq 0$, az aktuális bázis továbbra is optimális. A zsámolyok redukált költsége 5\$. Ez azt jelenti, hogy minden egyes elkészített zsámoly 5\$-ral csökkentené a bevételt. Következésképpen egyetlenegy zsámolyt sem érdemes gyártani.

Összegezve, amikor az LP feladatba egy (x_j változóhoz tartozó) új oszlopot illesztünk be, optimális marad az aktuális bázis, ha $\bar{c}_j \geq 0$ teljesül. Ugyanakkor $\bar{c}_j < 0$ esetén az aktuális bázis már nem lesz optimális, és x_j bázisváltozó lesz az új optimális megoldásban. A maximumfeladat érzékenységvizsgálatával kapcsolatos eredményeinket a 9. táblázat összegzi. Ennek az alfejezetnek a módszerei értelemszerűen alkalmazhatóak minimumfeladatra is, mindössze azt kell jól emlékezetünkbe vésni, hogy egy minimumfeladat táblája akkor és csak akkor optimális, ha a célfüggvény valamennyi együtthatója *nempozitív*, és a korlátozó feltételek jobb oldalai pedig nemnegatívak.

Feladatok

A csoport

1. A Dakota problémában mutassuk meg, hogy nem változik az optimális bázis, ha c_3, tehát egy szék ára, kielégíti a $15 \leq c_3 \leq 22.5$ korlátokat! Keressük meg az optimális megoldást, ha $c_3 = 21$! Határozzuk meg az optimális megoldást $c_3 = 25$ esetén is!

2. Igazoljuk, hogy a Dakota problémában $c_1 = 55$ esetén egyetlenegy íróasztal sem szerepel az új optimális megoldásban!

3. A Dakota problémában mutassuk meg, hogy nem változik az optimális bázis, ha a rendelkezésre álló faanyag (b_1) mennyiségére $b_1 \geq 24$ teljesül! Keressük meg az új optimális megoldást $b_1 = 30$ esetén!

4. Igazoljuk, hogy ha egy asztal ára 50$, és 1 egységnyi faanyagot, 3 felületkezelési munkaórát, valamint 1.5 óra asztalosmunkát vehetünk igénybe, akkor a Dakota feladat aktuális bázisa már nem lesz optimális! Határozzuk meg az új optimális megoldást!

5. A Dakota cég otthoni számítógépasztalok gyártását fontolgatja. Egy számítógépasztal eladási ára 36$, előállításához 6 egységnyi faanyagra, 2 felületkezelési munkaórára és 2 óra asztalosmunkára van szükség. Érdemes-e számítógépasztalokat gyártani?

6. Egy cukoripari cég háromféle cukorkát tud gyártani. Mindegyik cukorka cukorból és csokoládéból készül. Az egyes típusok összetételét és az értékesítésükből származó nyereségeket a 10. táblázat mutatja.

10. TÁBLÁZAT

	Cukor-tartalom	Csokoládé-tartalom	Nyereség
1. cukorka	1	2	3
2. cukorka	1	3	7
3. cukorka	1	1	5

Ötven egység cukor és 100 egység csokoládé áll rendelkezésre. Az i-edik típusú cukorkából gyártott mennyiséget x_i-vel jelölve az alábbi LP feladatot kell megoldani:

$$\begin{aligned}
&\max z = 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 \\
&\text{f.h.} \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 50 \quad \text{(cukor korlát)} \\
&\qquad 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 100 \quad \text{(csokoládé korlát)} \\
&\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Az s_1 és s_2 maradékváltozók bevezetése után adódó optimális táblát a 11. táblázat mutatja. Ennek segítségével adjunk választ a következő kérdésekre:

(a) Az 1. cukorka gyártásából származó nyereség mely értékeinél marad az aktuális bázis optimális? Mi lesz a feladat új optimális megoldása, ha az 1. cukorka gyártásából származó nyereség értéke 7 cent?

11. TÁBLÁZAT

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	J.o.	Bázis-változó
1	3	0	0	4	1	300	$z = 300$
0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	25	$x_3 = 25$
0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	25	$x_2 = 25$

(b) A 2. cukorka gyártásából származó nyereség mely értékeinél marad az aktuális bázis optimális? Mi lesz a feladat új optimális megoldása, ha a 2. cukorka gyártásából származó nyereség értéke 13 cent?

(c) A cukor korlát mely értékei esetén marad az aktuális bázis optimális?

(d) Mekkora lesz a cukoripari cég nyeresége, ha 60 egység cukor használható fel? Mennyit kell előállítani az egyes cukorkatípusokból? Megválaszolhatóak-e ezek a kérdések, ha csak 30 egység cukor áll rendelkezésre?

(e) Tegyük fel, hogy az 1. típusú cukorka csak 0.5 egység cukrot és 0.5 egység csokoládét tartalmaz. Érdemes-e ezt a cukorkát gyártani?

(f) A cukoripari cég egy 4. típusú cukorka bevezetését fontolgatja. Ez 3 egység cukrot és 4 egység csokoládét tartalmaz, az eladásából származó nyereség értéke 17 cent lenne. Érdemes-e ezt a 4. típust gyártani?

7. A következő kérdések a Giapetto problémára vonatkoznak (3.1. alfejezet). A Giapetto feladat alakja a következő:

$$\begin{aligned}
&\max z = 3x_1 + 2x_2 \\
&\text{f.h.} \quad 2x_1 + x_2 \leq 100 \quad \text{(felületkezelési korlát)} \\
&\qquad x_1 + x_2 \leq 80 \quad \text{(fafaragás korlát)} \\
&\qquad x_1 \leq 40 \quad \text{(korlátozott kereslet a katonák iránt)}
\end{aligned}$$

(x_1 = katonák és x_2 = vonatok.) Az s_1, s_2 és s_3 maradékváltozók bevezetése után adódó optimális táblát a 12. táblázat mutatja. Ennek segítségével válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket:

(a) Igazoljuk, hogy nem változik az optimális bázis mindaddig, amíg az egy katona eladásából származó nyereség (x_1 együtthatója) 2$ és 4$ között marad! Határozzuk meg az új optimális megoldást, amikor ennek a nyereségnek az értéke 3.50$!

(b) Igazoljuk, hogy nem változik az optimális bázis mindaddig, amíg az egy vonat eladásából származó nyereség (x_2 együtthatója) 1.5$ és 3$ között marad!

(c) Mutassuk meg, hogy optimális marad az aktuális bázis, ha a felületkezelésre fordítható munkaórák száma 80 és 120 között van! Határozzuk meg az új optimális megoldást, amikor ez az érték 90!

(d) Igazoljuk, hogy változatlan marad az optimális bázis, ha a katonák iránti kereslet értéke legalább 20!

(e) Giapetto játékcsónak gyártását fontolgatja. Egy csónakhoz 2 óra fafaragásra és 1 munkaóra felületkezelésre van szükség. A játékcsónakok iránti kereslet korlátlan. Érdemes-e ilyen csónakot gyártani, ha egy játékcsónakból 3.50$ nyereség származik?

12. TÁBLÁZAT

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	**J.o.**	**Bázis-változó**
1	0	0	1	1	0	180	$z = 180$
0	1	0	1	-1	0	20	$x_1 = 20$
0	0	1	-1	2	0	60	$x_2 = 60$
0	0	0	-1	1	1	20	$s_3 = 20$

B csoport

8. Tekintsük a Dorian problémát (3. fejezet 2. példa):

$$\begin{aligned}
&\min z = 50x_1 + 100x_2 \\
&\text{f.h.} \quad 7x_1 + 2x_2 \geq 28 \quad \text{(MJN)} \\
&\phantom{\text{f.h.}} \quad 2x_1 + 12x_2 \geq 24 \quad \text{(MJF)} \\
&\phantom{\text{f.h.}} \quad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

($x_1 =$ a kabaréhirdetések száma és $x_2 =$ a futballhirdetések száma.) Az optimális táblát a 13. táblázat mutatja. Emlékeztetünk arra, hogy minimumfeladat esetén akkor és csak akkor optimális egy tábla, ha a célfüggvényben mindegyik változó együtthatója nempozitív, és valamennyi korlátozó feltétel jobb oldala nemnegatív.

13. TÁBLÁZAT

z	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	**J.o.**
1	0	0	-5	-7.5	$5-M$	$7.5-M$	320
0	1	0	$-\frac{3}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{3}{20}$	$-\frac{1}{40}$	3.6
0	0	1	$\frac{1}{40}$	$-\frac{7}{80}$	$-\frac{1}{40}$	$\frac{7}{80}$	1.4

(a) Határozzuk meg egy kabaréhirdetés költségének (jelenleg 50 000$) azon értéktartományát, amelynél optimális marad az aktuális bázis.

(b) Határozzuk meg az MJN (magas jövedelmű nő) elérések előírt számának (jelenleg 28 millió) azt a tartományát, melynél optimális marad az aktuális bázis. Mi lesz az új optimális megoldás 40 millió MJN elérés esetén?

(c) Tegyük fel, hogy egy hírműsor előtt sugárzott hirdetés költsége 110 000$, és ezzel 12 millió magas jövedelmű nőt és 17 millió magas jövedelmű férfit lehet elérni. Érdemes-e ilyen hirdetésekre költeni?

9. Igazoljuk, hogy ha Δ-val növeljük az i-edik korlátozó feltétel jobb oldalát, akkor az új optimális tábla jobb oldalán az (eredeti optimális tábla jobb oldala) $+\Delta$(a B^{-1} mátrix i-edik oszlopa) fog állni.

5.4. Az LP feladat duálisa

Minden LP feladathoz tartozik egy másik LP probléma, amit az eredeti feladat **duálisának** nevezünk. Magasabb szintű lineáris, illetve nemlineáris programozási témakörök megértéséhez az eredeti feladat és duálisa közötti kapcsolat ismerete elengedhetetlen. Ez a kapcsolat azért fontos, mert érdekes közgazdasági jelenségekbe nyújt betekintést. A dualitás segítségével az érzékenységvizsgálat is új megvilágításba kerül.

Ebben az alfejezetben megmutatjuk, hogy hogyan lehet felírni egy tetszőleges LP feladat duálisát; az 5.5. alfejezetben a duál feladat közgazdasági értelmezését tárgyaljuk; az 5.6–5.9. alfejezetekben pedig azt elemezzük, hogy milyen kapcsolat van egy LP feladat és a duálisa között.

Egy adott LP feladat duálisának vizsgálatakor az eredeti feladatot **primálnak** nevezzük. Ha a primál feladat maximumfeladat, akkor a duál egy minimumfeladat lesz, és fordítva. A következőkben a maximumfeladat változóit $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$, a minimumfeladat változóit pedig $w, y_1, y_2, \ldots, y_m$ fogja jelölni. Először megmutatjuk, hogy hogyan lehet felírni egy olyan maximumfeladat duálisát, ahol minden változó nemnegatív kell hogy legyen, és valamennyi korlát $\leq$ alakú (ez az ún. **normál maximumfeladat**). Egy normál maximumfeladat a következőképpen írható fel:

$$
\begin{aligned}
\max z = \quad & c_1x_1 + \ c_2x_2 + \cdots + \ c_nx_n \\
\text{f.h.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
& \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
& \qquad\qquad x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned} \tag{16}
$$

A (16) alakban felírt normál maximumfeladat duálisát az alábbi módon definiáljuk:

$$
\begin{aligned}
\min w = \quad & b_1y_1 + \ b_2y_2 + \cdots + \ b_mx_m \\
\text{f.h.} \quad & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\
& a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\
& \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\
& a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_n \\
& \quad y_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)
\end{aligned} \tag{17}
$$

Egy (17) alakú minimumfeladatot, ahol minden korlátozó feltétel $\geq$ alakú, és valamennyi változó nemnegatív, **normál minimumfeladatnak** hívunk. Ha a primál feladat egy (17) alakban felírt normál minimumfeladat, akkor ennek a duálisa definíció szerint a (16) feladat.

Egy normál maximum-, illetve minimumfeladat duálisának felírása

A táblázatos felírás megkönnyíti egy LP feladat duálisának előállítását. Ha a primál feladat egy normál maximumprobléma, ezt soronként olvashatjuk (14. táblázat); a duált pedig oszloponként olvasva kapjuk meg. Hasonlóképpen, amikor a primál probléma egy normál minimumfeladat, akkor ezt oszloponként olvasva kapjuk meg; a duális esetében pedig soronként olvassuk a táblázatot. A tábla használatát a Dakota probléma, valamint a táplálási probléma duálisának felírásával mutatjuk be. A Dakota probléma

$$
\begin{aligned}
\max z = {} & 60x_1 + \ 30x_2 + \ 20x_3 & \\
\text{f.h.} \qquad & 8x_1 + \ 6x_2 + \quad x_3 \leq 48 & \text{(faanyag korlát)} \\
& 4x_1 + \ 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20 & \text{(felületkezelési korlát)} \\
& 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8 & \text{(asztalosmunka korlát)} \\
& \qquad\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 &
\end{aligned}
$$

alakú, ahol

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \text{az előállított íróasztalok száma} \\
x_2 &= \text{az előállított asztalok száma} \\
x_3 &= \text{az előállított székek száma}
\end{aligned}
$$

14. TÁBLÁZAT
Egy normál minimum-, illetve maximumfeladat duálisának felírása

min w		**max** z				
		$(x_1 \geq 0)$	$(x_2 \geq 0)$	$\ldots$	$(x_n \geq 0)$	
		x_1	x_2		x_n	
$(y_1 \geq 0)$	y_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}	$\leq b_1$
$(y_2 \geq 0)$	y_2	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}	$\leq b_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$(y_m \geq 0)$	y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}	$\leq b_m$
		$\geq c_1$	$\geq c_2$		$\geq c_n$	

15. TÁBLÁZAT
A Dakota probléma duálisának felírása

min w		**max** z			
		$(x_1 \geq 0)$	$(x_2 \geq 0)$	$(x_3 \geq 0)$	
		x_1	x_2	x_3	
$(y_1 \geq 0)$	y_1	8	6	1	≤ 48
$(y_2 \geq 0)$	y_2	4	2	1.5	≤ 20
$(y_3 \geq 0)$	y_3	2	1.5	0.5	≤ 8
		≥ 60	≥ 30	≥ 20	

A 14. táblázat formátumát használva a Dakota problémát soronként olvashatjuk a 15. táblázatban. Ugyanezt a táblázatot oszloponként olvasva megkapjuk a Dakota feladat duálisát:

$$\begin{aligned}
\min\ w = {} & 48y_1 + 20y_2 + 8y_3 \\
\text{f.h.}\quad & 8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 60 \\
& 6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 \geq 30 \\
& y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 \geq 20 \\
& y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}$$

A duális felírására használt táblázatos módszerből világosan látható, hogy az i-edik duál *korlát* az i-edik primál *változóhoz*, tehát x_i-hez tartozik. Például az első duál korlát x_1-hez (íróasztalok) tartozik, mert mindegyik paraméter a primál feladat x_1-hez tartozó oszlopából származik. Hasonlóképpen a második duál korlát x_2-höz (asztalok), a harmadik duál korlát pedig x_3-hoz (székek) tartozik. Ugyanígy az y_i duál *változó* az i-edik primál *korláthoz* tartozik. Például y_1 az első primál korláthoz (faanyag korlát) tartozik, mert a duál feladatban y_1 valamennyi együtthatója a faanyag korlátot leíró primál sorból származik. Ezeknek a primál-duál megfeleltetéseknek a jelentősége később, az 5.6. alfejezetben derül ki.

Most felírjuk az étrendi probléma duálisát. Mivel az étrendi probléma egy minimumfeladat, szokás szerint w-vel jelöljük a célfüggvényt, és y_1, y_2, y_3, y_4-gyel a változókat. Az étrendi probléma

$$\begin{aligned}
\min\ w = {} & 50y_1 + 20y_2 + 30y_3 + 80y_4 \\
\text{f.h.}\quad & 400y_1 + 200y_2 + 150y_3 + 500y_4 \geq 500 && \text{(kalória korlát)} \\
& 3y_1 + 2y_2 \geq 6 && \text{(csokoládé korlát)} \\
& 2y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 4y_4 \geq 10 && \text{(cukor korlát)} \\
& 2y_1 + 4y_2 + y_3 + 5y_4 \geq 8 && \text{(zsiradék korlát)} \\
& y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0
\end{aligned}$$

alakú, ahol

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \text{napi csokissütemény-fogyasztás}\\
y_2 &= \text{napi csokifagylalt-fogyasztás}\\
y_3 &= \text{napi üdítőital-fogyasztás}\\
y_4 &= \text{napi ananászostúrótorta-fogyasztás}
\end{aligned}
$$

Mivel a primál probléma egy normál minimumfeladat, ezt oszloponként, a duálját pedig soronként olvassuk a 16. táblázatban. Ezek szerint az étrendi probléma duálisa

$$
\begin{aligned}
\max\ z = 500x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 8x_4 & \\
\text{f.h.} \quad 400x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &\le 50\\
200x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 &\le 20\\
150x_1 \qquad + 4x_3 + x_4 &\le 30\\
500x_1 \qquad + 4x_3 + 5x_4 &\le 80\\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0
\end{aligned}
$$

alakú.

16. TÁBLÁZAT
Az étrendi feladat duálisának felírása

min w		**max** z $(x_1 \ge 0)$	$(x_2 \ge 0)$	$(x_3 \ge 0)$	$(x_4 \ge 0)$	
		x_1	x_2	x_3	x_4	
$(y_1 \ge 0)$	y_1	400	3	2	2	≤ 50
$(y_2 \ge 0)$	y_2	200	2	2	4	≤ 20
$(y_3 \ge 0)$	y_3	150	0	4	1	≤ 30
$(y_4 \ge 0)$	y_4	500	0	4	5	≤ 80
		≥ 500	≥ 6	≥ 10	≥ 8	

Akárcsak a Dakota probléma esetén, most is látható, hogy az i-edik duál korlát az i-edik primál változóhoz tartozik. Például a harmadik duál korlátot ital korlátnak tekinthetjük. Ugyanígy az i-edik duál változó az i-edik primál korláthoz tartozik. Példaként x_3-at (a harmadik duál változót) duális cukor-változónak tekinthetjük.

Nemnormál LP feladat duálisa

Sajnos számos LP probléma nemnormál maximum-, illetve minimumfeladat. Például

$$
\begin{aligned}
\max\ z = 2x_1 + x_2 & \\
\text{f.h.} \quad x_1 + x_2 &= 2\\
2x_1 - x_2 &\ge 3\\
x_1 - x_2 &\le 1\\
x_1 \ge 0, x_2 \text{ ekn} &
\end{aligned}
\tag{18}
$$

egy nemnormál maximumfeladat, mert $\ge$ és egyenlőség alakú korlátozó feltétel, továbbá tetszőleges (kötetlen) előjelű változó is található benne.

Másik nemnormál LP feladatra példa a következő:

$$\begin{array}{lrl} \min w = & 2y_1 + 4y_2 + 6y_3 & \\ \text{f.h.} & y_1 + 2y_2 + \ y_3 & \geq 2 \\ & y_1 \qquad\quad - \ y_3 & \geq 1 \\ & y_2 + \ y_3 & = 1 \\ & 2y_1 + \ y_2 \qquad & \leq 3 \\ & y_1 \text{ ekn}, y_2, y_3 & \geq 0 \end{array} \tag{19}$$

Ez egy nemnormál LP feladat, hiszen $\leq$ és egyenlőség alakú korlátozó feltétel, valamint tetszőleges előjelű változó is található benne. Szerencsés módon tetszőleges LP feladat vagy (16) vagy (17) típusú normál alakra transzformálható. Egy maximumfeladat normál alakra hozásához a következő lépések elegendőek:

1. lépés Mindegyik $\geq$ korlátozó feltételt megszorozzuk -1-gyel, s így $\leq$ alakra hozzuk. Például (18)-ban, $2x_1 - x_2 \geq 3$ helyett $-2x_1 + x_2 \leq -3$ adódik.

2. lépés Minden egyenlőség alakú korlátozó feltételt két egyenlőtlenséggel (egy $\leq$ alakúval és egy $\geq$ alakúval) helyettesítünk. Ezután a $\geq$ korlátozó feltételt $\leq$ típusúvá alakítjuk. Például (18)-ban az $x_1 + x_2 = 2$ egyenlőség helyett az $x_1 + x_2 \geq 2$ és $x_1 + x_2 \leq 2$ egyenlőtlenségeket írjuk fel. Ezután az $x_1 + x_2 \geq 2$ egyenlőtlenséget a $-x_1 - x_2 \leq -2$ egyenlőtlenséggel helyettesítjük. Végeredményben az $x_1 + x_2 = 2$ egyenlőséget az $x_1 + x_2 \leq 2$ és a $-x_1 - x_2 \leq -2$ egyenlőtlenségekre cseréltük.

3. lépés Ahogy azt a 4.10. alfejezetben tettük, egy tetszőleges kötetlen előjelű x_i változót $x_i = x_i' - x_i''$-vel helyettesítünk, ahol $x_i' \geq 0$, és $x_i'' \geq 0$. (18)-ban x_2 helyére $x_2' - x_2''$-t írunk.

Ezeket az átalakításokat elvégezve (18)-ból a következő ekvivalens LP feladatot kapjuk:

$$\begin{array}{lrl} \max z = & 2x_1 + x_2' - x_2'' & \\ \text{f.h.} & x_1 + x_2' - x_2'' & \leq 2 \\ & -x_1 - x_2' + x_2'' & \leq -2 \\ & -2x_1 + x_2' - x_2'' & \leq -3 \\ & x_1 - x_2' + x_2'' & \leq 1 \\ & x_1, x_2', x_2'' & \geq 0 \end{array} \tag{18$'$}$$

Mivel (18$'$) egy normál maximumfeladat, (18$'$) duálisát (16), illetve (17) segítségével felírhatjuk.

Amikor a primál feladat egy nemnormál minimumfeladat, akkor ezt az alábbi lépésekkel alakíthatjuk normál minimumfeladattá:

1. lépés Mindegyik $\leq$ korlátozó feltételt -1-gyel megszorozva $\geq$ típusúvá alakítjuk. Például (19)-ben a $2y_1 + y_2 \leq 3$ egyenlőtlenségből $-2y_1 - y_2 \geq -3$ adódik.

2. lépés Mindegyik egyenlőség alakú korlátozó feltételt egy $\leq$ és egy $\geq$ típusú egyenlőtlenséggel helyettesítünk. Ezután a $\leq$ típusú egyenlőtlenséget $\geq$ típusúvá transzformáljuk. Például (19)-ben az $y_2 + y_3 = 1$ korlát az $y_2 + y_3 \leq 1$ és $y_2 + y_3 \geq 1$ egyenlőtlenségekkel ekvivalens. $y_2 + y_3 \leq 1$ helyett $-y_2 - y_3 \geq -1$-et írva azt kapjuk, hogy az $y_2 + y_3 = 1$ korlát két egyenlőtlenséggel, $y_2 + y_3 \geq 1$-gyel és $-y_2 - y_3 \geq -1$-gyel helyettesíthető.

3. lépés Egy tetszőleges kötetlen előjelű y_i változót $y_i = y_i' - y_i''$-vel helyettesítünk, ahol $y_i' \geq 0$, és $y_i'' \geq 0$. Ezeknek a lépéseknek az elvégzésével (19)-ből a következő normál minimumfeladat adódik:

$$\begin{array}{ll} \min w = & 2y_1' - 2y_1'' + 4y_2 + 6y_3 \\ \text{f.h.} & y_1' - y_1'' + 2y_2 + y_3 \geq 2 \\ & y_1' - y_1'' - y_3 \geq 1 \\ & y_2 + y_3 \geq 1 \\ & -y_2 - y_3 \geq -1 \\ & -2y_1' + 2y_1'' - y_2 \geq -3 \\ & y_1', y_1'', y_2, y_3 \geq 0 \end{array} \tag{19'}$$

Mivel (19′) egy normál minimumfeladat, ennek duálisát (16) és (17) segítségével felírhatjuk.

Egy nemnormál LP feladat duálisát az előbb leírt transzformációs lépések nélkül is előállíthatjuk az alábbi szabályok alkalmazásával.[1]

Nemnormál maximumfeladat duálisának felírása

1. lépés Töltsük ki a 14. táblázatot úgy, hogy a primál feladat soronként olvasható legyen.

2. lépés A következő változtatások után a duális feladat a megszokott módon, oszloponként lesz olvasható: (a) Ha az i-edik primál korlát $\geq$ alakú, akkor a hozzátartozó y_i duál változóra az $y_i \leq 0$ kikötés érvényes. (b) Ha az i-edik primál korlát egyenlőség, akkor az y_i duál változóra nincs előjelmegkötés. (c) Ha az i-edik primál változó előjele kötetlen, akkor az i-edik duál korlátozó feltétel egyenlőség lesz.

Ha ezt a módszert a (18) feladatra alkalmazzuk, a 14. táblázatból a 17. táblázatot kapjuk.

17. TÁBLÁZAT A (18) LP feladat duálisa

min w		**max** z ($x_1 \geq 0$)	(x_2 **ekn**)*	
		x_1	x_2	
	y_1	1	1	$= 2^*$
	y_2	2	−1	$\geq 3^*$
($y_3 \geq 0$)	y_3	1	−1	≤ 1
		≥ 2	1	

18. TÁBLÁZAT A (18) LP feladat duálisa (folytatás)

min w		**max** z ($x_1 \geq 0$)	(x_2 **ekn**)	
		x_1	x_2	
($y_1$ekn)	y_1	1	1	$= 2$
($y_2 \leq 0$)	y_2	2	−1	≥ 3
($y_3 \geq 0$)	y_3	1	−1	≤ 1
		≥ 2	$= 1$	

[1] Az alfejezet végén, az 5. és 6. feladatban megmutatjuk, hogy a duális felírására szolgáló két módszer összhangban van egymással.

Ebben (*)-gal jelöljük azokat a pontokat, ahol a duális meghatározásakor az előbbi szabályokat kell alkalmazni. Például x_2 kötetlen előjelű, s ennek következményeként a második duál korlát egyenlőség alakú. Hasonlóan, mivel az első primál korlát egy egyenlőség, y_1 kötetlen előjelű kell hogy legyen, és a második primál korlát $\geq$ típusa miatt $y_2 \leq 0$. Bejelölve a csillagok oszlopában, illetve sorában a szabályok következményeit, a 18. táblázathoz jutunk. Oszloponként olvasva az alábbi duál feladathoz jutunk:

$$\begin{aligned} \min\ w &= 2y_1 + 3y_2 + y_3 \\ \text{f.h.} \qquad y_1 + 2y_2 + y_3 &\geq 2 \\ y_1 - \ y_2 - y_3 &= 1 \\ y_1 \text{ ekn}, y_2 \leq 0, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Az 5.7. alfejezetben egy szemléletes magyarázatot adunk arra, hogy miért tartozik egy egyenlőség alakú korláthoz kötetlen előjelű duál változó, és miért tartozik egy $\geq$ alakú korláthoz egy nemnegatív duál változó.

Egy nemnormál minimumfeladat duálisát a következő szabályok alkalmazásával is megkaphatjuk.

Nemnormál minimumfeladat duálisának felírása

1. lépés Írjuk fel a primál feladatot úgy, hogy azt a 14. táblázatban oszloponként olvashassuk.

2. lépés Az alábbi változtatások után a duális feladat soronként olvasható a táblázatból: (a) Ha az i-edik primál korlát $\leq$ típusú, akkor a hozzátartozó x_i duál változóra $x_i \leq 0$ kikötés érvényes. (b) Ha az i-edik primál korlát egyenlőség, akkor a megfelelő x_i duál változó kötetlen előjelű lesz. (c) Ha az i-edik primál változó, y_i, kötetlen előjelű, akkor az i-edik duál korlát egyenlőség alakú.

Ezeket a szabályokat a (19) feladatra alkalmazva a 19. táblázathoz jutunk. Csillagok (*) jelölik azokat a pontokat, ahol a duális felírásakor ezeket a szabályokat alkalmazni kell.

19. TÁBLÁZAT
A (19) LP feladat duálisa

min w		max z				
		$(x_1 \geq 0)$	$(x_2 \geq 0)$			
		x_1	x_2	x_3	x_4	
$(y_1$ ekn$)^*$	y_1	1	1	0	2	2
$(y_2 \geq 0)$	y_2	2	0	1	1	≤ 4
$(y_3 \geq 0)$	y_3	1	-1	1	0	≤ 6
		≥ 2	≥ 1	$= 1^*$	$\leq 3^*$	

20. TÁBLÁZAT
A (19) LP feladat duálisa (folytatás)

min w		max z				
		$(x_1 \geq 0)$	$(x_2 \geq 0)$	$(x_3$ **ekn**$)$	$(x_4 \leq 0)$	
		x_1	x_2	x_3	x_4	
$(y_1$ ekn$)$	y_1	1	1	0	2	$= 2$
$(y_2 \geq 0)$	y_2	2	0	1	1	≤ 4
$(y_3 \geq 0)$	y_3	1	-1	1	0	≤ 6
		≥ 2	≥ 1	$= 1$	≤ 3	

Mivel y_1 kötetlen előjelű, az első duál korlát egy egyenlőség. A harmadik primál korlát egy egyenlőség, ezért az x_3 duál változó kötetlen előjelű. Végül, mivel a negyedik primál korlát $\leq$ típusú, x_4-re, a negyedik duál változóra $x_4 \leq 0$ teljesül. A 19. táblázat átalakításával a 20. táblázathoz jutunk. Ebből soronként olvasható a duális feladat, vagyis

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \\ \text{f.h.} \quad & x_1 + x_2 \quad + 2x_4 = 2 \\ & 2x_1 \quad + x_3 + \ x_4 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 + x_3 \qquad \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0, x_3 \text{ ekn}, x_4 \leq 0 \end{aligned}$$

Az olvasó könnyen ellenőrizheti, hogy ezeket a szabályokat alkalmazva a duális duálisa mindig a primál feladat. Ez azonnal látszik a 14. táblázatból, hiszen a duális duálisát képezve eredeti alakjába írjuk vissza az LP feladatot.

Feladatok

A csoport

Írjuk fel az alábbi LP feladatok duálisait:

1. $$\begin{aligned} \max z = \ & 2x_1 + x_2 \\ \text{f.h.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \min w = \ & y_1 - y_2 \\ \text{f.h.} \quad & 2y_1 + y_2 \geq 4 \\ & y_1 + y_2 \geq 1 \\ & y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} \max z = \ & 4x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \text{f.h.} \quad & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 7 \\ & 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ & x_1 + x_3 = 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2, x_3 \text{ ekn} \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} \min w = \ & 4y_1 + 2y_2 - y_3 \\ \text{f.h.} \quad & y_1 + 2y_2 \leq 6 \\ & y_1 - y_2 + 2y_3 = 8 \\ & y_1, y_2 \geq 0, y_3 \text{ ekn} \end{aligned}$$

B csoport

5. Ez a feladat azt mutatja meg, hogy miért lesz egy egyenlőség alakú korlátozó feltételhez tartozó duál változó előjele kötetlen.

(a) Az ismertetett szabályok segítségével írjuk fel az alábbi feladat duálisát!

$$\begin{aligned} \max z = \ & x_1 + 2x_2 \\ \text{f.h.} \quad & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 = 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(b) Alakítsuk át az (a) LP feladatot normál feladattá! (16) és (17) segítségével képezzük az átalakított LP feladat duálisát! A $2x_1 + x_2 = 5$ korlátozó feltételből származtatott duál változókat jelöljük y_2'-vel és y_2''-vel!

(c) A (b) feladat megoldásában hajtsuk végre az $y_2 = y_2' - y_2''$ helyettesítést! Mutassuk meg, hogy a feladat (a) részében, illetve (b) részében kapott duálisok ekvivalensek!

6. Ebben a feladatban megmutatjuk, hogy miért kell egy $\geq$ típusú korlátozó feltételhez tartozó y_i duál változónak kielégíteni az $y_i \leq 0$ feltételt.

(a) Az ismertetett szabályok segítségével írjuk fel az alábbi feladat duálisát!

$$\begin{aligned} \max z = \ & 3x_1 + x_2 \\ \text{f.h.} \quad & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & -x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(b) Alakítsuk át az (a) LP feladatot normál maximumfeladattá! (16) és (17) segítségével képezzük az átalakított LP feladat duálisát! Legyen $\bar{y}_2$ a második primál korláthoz tartozó duál változó!

(c) Az $\bar{y}_2 = -y_2$ megfeleltetéssel élve mutassuk meg, hogy az (a) részben, illetve a (b) részben képzett duálisok ekvivalensek!

5.5. A duális feladat közgazdasági interpretációja

Maximumfeladat duálisának interpretációja

A Dakota probléma duálisa a következő:

$$
\begin{array}{llll}
\min w = 48y_1 + 20y_2 + 8y_3 & & \\
\text{f.h.} \quad 8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 60 & \text{(íróasztal korlát)} & \\
6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 \geq 30 & \text{(asztal korlát)} & (20) \\
y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 \geq 20 & \text{(szék korlát)} & \\
y_1, y_2, y_3, \geq 0 & &
\end{array}
$$

Az első duál korlát az íróasztalokhoz tartozik, a második az asztalokhoz, a harmadik pedig a székekhez. Ugyanakkor y_1 a felhasznált faanyaggal, y_2 a felületkezelésre fordítható óraszámmal, y_3 pedig az asztalosmunka mennyiségével kapcsolatos. A Dakota problémával kapcsolatos adatokat a 21. táblázat mutatja.

21. TÁBLÁZAT A Dakota probléma adatai

Erőforrás	**Erőforrás/Termék** íróasztal	asztal	szék	**Rendelkezésre álló erőforrás**
Faanyag	8 egységnyi	6 egységnyi	1 egységnyi	48 egységnyi
Felületkezelés	4 óra	2 óra	1.5 óra	20 óra
Asztalosmunka	2 óra	1.5 óra	0.5 óra	8 óra
Eladási ár	60$	30$	20$	

Lássuk ezek után a Dakota probléma (20) duálisának interpretációját! Tegyük fel, hogy egy vállalkozó a Dakota valamennyi erőforrását meg akarja vásárolni. Ekkor meg kell mondania, hogy mennyit hajlandó fizetni a szóban forgó erőforrások egy egységéért. Legyen ennek megfelelően

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \text{az 1 egységnyi faanyagért fizetendő ár} \\
y_2 &= \text{az 1 óra felületkezelésért fizetendő ár} \\
y_3 &= \text{az 1 óra asztalosmunkáért fizetendő ár}
\end{aligned}
$$

Az y_1, y_2 és y_3 erőforrás-árakat a Dakota probléma (20) duálisának megoldásával célszerű meghatározni. Ezeknek az erőforrásoknak az összesített ára $48y_1 + 20y_2 + 8y_3$. Mivel a vállalkozó minimalizálni akarja a vételárat,

$$\min w = 48y_1 + 20y_2 + 8y_3$$

lesz a Dakota probléma duálisának célfüggvénye.

Milyen korlátok kötik a vállalkozó kezét a vételárak megállapításakor? Az erőforrások vételárainak természetesen elegendően magasaknak kell lenni ahhoz, hogy a Dakota hajlandó legyen azokat eladni. Például egy 8 egységnyi faanyagból, 4 munkaóra felületkezelésből és 2 óra asztalosmunkából álló erőforráscsomagért legalább 60$-t kell a Dakota részére ajánlani, hiszen ezeknek az erőforrásoknak a felhasználásával a Dakota előállíthatna egy íróasztalt, amit eladhatna 60$-ért. Mivel a vállalkozó $8y_1 + 4y_2 + 2y_3$ összeget ajánl egy olyan erőforráscsomagért, amellyel egy íróasztalt lehetne elkészíteni, úgy kell megállapítania y_1, y_2 és y_3 értékét, hogy

$$8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 60$$

teljesüljön. Ez azonban a Dakota probléma duálisának csak az első (íróasztal-) korlátja. Hasonló érveléssel azt kapjuk, hogy legalább 30$-t kell kínálni az egy asztal előállításához elegendő erőforrás-kombinációért (6 egységnyi faanyag, 2 munkaóra felületkezelés és 1.5 óra asztalosmunka). Ezért y_1-nek, y_2-nek és y_3-nak ki kell elégítenie a

$$6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 \geq 30$$

egyenlőtlenséget. Ez a Dakota probléma duálisának második (asztal-) korlátja.

Hasonlóképpen a harmadik (szék-) duál korlát

$$y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 \geq 20$$

alakú. Ez azt mondja, hogy legalább 20$-t (egy szék árát) kell kínálni egy olyan erőforrás-csomagért, mellyel egy széket lehetne előállítani (1 egységnyi faanyag, 1.5 munkaóra felületkezelés és 0.5 óra asztalosmunka). Az $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$ és $y_3 \geq 0$ előjelmegkötéseknek is teljesülnie kell. Mindezt egybevetve látható, hogy a Dakota probléma duálisa meghatározza a faanyagra, felületkezelési munkaórára és asztalosmunkára vonatkozó árajánlatot. Az előbbi gondolatmenetből az is következik, hogy az i-edik duál változó valóban természetes módon az i-edik primál korláthoz tartozik.

Összegezve, amikor a primál feladat egy normál maximumfeladat, a duál változók a döntéshozó rendelkezésére álló erőforrások értékével kapcsolatosak. Ezért a duál változókat gyakran **erőforrás árnyékáraknak** nevezzük. Az árnyékárak alaposabb tanulmányozásával foglalkozik az 5.7. alfejezet.

Minimumfeladat duálisának interpretációja

Egy minimumfeladat duálisának interpretálása céljából tekintsük a 3.4. alfejezetben ismertetett étrendi problémát. Az 5.4. alfejezetben láttuk, hogy ennek a duálisa

$$\begin{array}{llll}
\max\ z = 500x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 8x_4 & & & \\
\text{f.h.} & 400x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 50 & \text{(sütemény korlát)} & \\
 & 200x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 20 & \text{(fagylalt korlát)} & \\
 & 150x_1 \qquad\quad + 4x_3 + x_4 \leq 30 & \text{(ital korlát)} & (21) \\
 & 500x_1 \qquad\quad + 4x_3 + 5x_4 \leq 80 & \text{(túrótorta korlát)} & \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & &
\end{array}$$

alakú. Az étrendi probléma adatait a 22. táblázat tartalmazza. (21) interpretálása céljából képzeljük el, hogy Candice „tápanyagok eladásával foglalkozó” üzletember, aki kalóriát, csokoládét, cukrot és zsírt árusít. Azt akarja elérni, hogy az ügyfél napi tápanyagigényét kalória, csokoládé, cukor és zsír beszerzésével elégítse ki. Candice-nak azt kell meghatároznia, hogy mennyi legyen

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1 \text{ egység kalória ára} \\
x_2 &= 1 \text{ egység csokoládé ára} \\
x_3 &= 1 \text{ egység cukor ára} \\
x_4 &= 1 \text{ egység zsír ára}
\end{aligned}$$

Candice maximalizálni akarja az ügyfél számára naponta szükséges tápanyagok eladásából származó bevételét. Mivel az ügyféltől származó bevétele $500x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 8x_4$ cent, Candice célja

$$\max\ z = 500x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 8x_4$$

22. TÁBLÁZAT Az étrendi probléma adatai

	Kalória	**Csokoládé (egység)**	**Cukor (egység)**	**Zsiradék (egység)**	**Ár (cent)**
Sütemény	400	3	2	2	50
Fagylalt	200	2	2	4	20
Ital	150	0	4	1	30
Túrótorta	500	0	4	5	80
Igény	500	6	10	8	

maximalizálása. Ez az étrendi probléma duálisának a célfüggvénye. A tápanyagok árának megállapításakor Candice-nak elegendően alacsony értékeket kell választani ahhoz, hogy az ügyfélnek anyagi érdeke legyen a tápanyagok vásárlása. Például 50 centért vehet az ügyfél egy piskótát, s ezzel 400 kalóriához, 3 egység csokoládéhoz, 2 egység cukorhoz és 2 egység zsiradékhoz jut hozzá. Emiatt Candice sem kérhet ezért a tápanyag-kombinációért 50 centnél többet. Ebből a következő (sütemény-) korlát adódik:

$$400x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 50$$

Ez az étrendi probléma duálisának első korlátozó feltétele. Hasonló okfejtés adja a második (fagylalt-), a harmadik (ital-) és negyedik (túrótorta-) duál korlátot is. Most is teljesülnie kell az $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ és $x_4 \geq 0$ előjel-kikötéseknek.

Okfejtésünk alapján x_i optimális értéke úgy interpretálható, mint az i-edik duál korláthoz tartozó tápanyag egy egységének ára. Tehát x_1 1 kalória ára, x_2 1 egység csokoládé ára, és így tovább. Most is látható az (x_i) duál változó és az i-edik primál korlát közötti természetes megfeleltetés.

Összegezve, megmutattuk, hogy ha a primál feladat egy normál maximumfeladat vagy egy normál minimumfeladat, akkor szemléletes közgazdasági jelentése van a duál feladatnak. Az 5.7. alfejezetben részletesebben megvilágítjuk a duál változók valódi jelentését.

Feladatok

A csoport

1. Írjuk fel a 3. fejezet 3. feladatának (egy autókereskedő cég) duálisát, és adjuk meg a duális feladat közgazdasági interpretációját!

2. Írjuk fel a 3. fejezet 2. feladatának (Dorian autó) duálisát, és adjuk meg a duális feladat közgazdasági interpretációját!

5.6. A dualitás-tétel és következményei

Ebben az alfejezetben a lineáris programozás egyik legfontosabb eredményét, a dualitástételt, tárgyaljuk. A dualitás-tétel röviden annyit állít, hogy a primál és duál feladat optimális célfüggvényértékei azonosak (ha mindkettőnek van optimuma). Ez az eredmény önmagában is érdekes, de látni fogjuk, hogy a dualitás-tétel bizonyítása ezenfelül is számos érdekes lineáris programozási kérdéskörbe nyújt betekintést.

A tárgyalás egyszerűsítése céljából feltesszük, hogy a primál feladat egy normál maximumfeladat m korlátozó feltétellel és n változóval. Ilyenkor a duál feladat egy m-változós n korlátozó feltételt tartalmazó normál minimumfeladat. A primál és a duál feladat az alábbi módon írható fel:

Primál feladat

$$\begin{aligned}
\max\ z = c_1x_1 &+ c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{f.h.}\quad a_{11}x_1 &+ a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
a_{21}x_1 &+ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
&\ \vdots \\
a_{i1}x_1 &+ a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i \\
&\ \vdots \\
a_{m1}x_1 &+ a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \\
x_j &\ge 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned} \tag{22}$$

Duál feladat

$$\begin{aligned}
\min\ w = b_1y_1 &+ b_2y_2 + \cdots + b_my_m \\
\text{f.h.}\quad a_{11}y_1 &+ a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\
a_{12}y_1 &+ a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \ge c_2 \\
&\ \vdots \\
a_{1j}y_1 &+ a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \ge c_j \\
&\ \vdots \\
a_{1n}y_1 &+ a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \ge c_n \\
y_i &\ge 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)
\end{aligned} \tag{23}$$

Gyenge dualitás

A primál és a duál feladat tetszőleges lehetséges megoldásai esetén a duál lehetséges megoldáshoz tartozó w érték legalább akkora, mint a primál lehetséges megoldáshoz tartozó z érték. Ezt az eredményt tartalmazza az 1. segédtétel.

1. SEGÉDTÉTEL (Gyenge dualitás). Legyen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

a primál feladat, $\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_m]$ pedig a duál feladat tetszőleges lehetséges megoldása. Ekkor (az $\mathbf{x}$-hez tartozó z érték) $\le$ (az $\mathbf{y}$-hoz tartozó w érték).

Bizonyítás Mivel $y_i \ge 0$, a (22)-ben szereplő i-edik primál korlátot y_i-vel szorozva a következő egyenlőtlenség adódik:

$$y_ia_{i1}x_1 + y_ia_{i2}x_2 + \cdots + y_ia_{in}x_n \le b_iy_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{24}$$

A (24)-ben szereplő m egyenlőtlenséget összeadva, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{i=m}\sum_{j=1}^{j=n} y_ia_{ij}x_j \le \sum_{i=1}^{i=m} b_iy_i \tag{25}$$

Mivel $x_j \ge 0$, a (23)-ban szereplő j-edik duál korlátot x_j-vel szorozva a következő egyenlőtlenség adódik:

$$x_j a_{1j} y_1 + x_j a_{2j} y_2 + \cdots + x_j a_{mj} y_m \geq c_j x_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{26}$$

A (26)-ban szereplő n egyenlőtlenséget összegezve

$$\sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} y_i a_{ij} x_j \geq \sum_{j=1}^{j=n} c_j x_j \tag{27}$$

adódik. (25)-öt és (27)-et összevetve, azt kapjuk, hogy

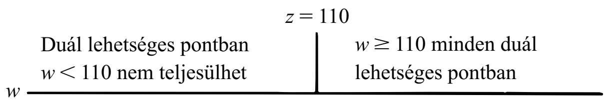
$$\sum_{j=1}^{j=n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} y_i a_{ij} x_j \leq \sum_{i=1}^{i=m} b_i y_i$$

és ezt kellett bizonyítani. □

Ha rendelkezésünkre áll a primál vagy a duál feladat egy lehetséges megoldása, akkor a gyenge dualitás segítségével korlátot állíthatunk fel a másik feladat optimális célfüggvényértékére. Például a Dakota probléma esetén könnyen látható, hogy $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ egy primál lehetséges megoldás. Az ehhez tartozó z érték $60 + 30 + 20 = 110$. A gyenge dualitásból ezért az következik, hogy tetszőleges (y_1, y_2, y_3) duál lehetséges megoldásra teljesül a

$$48y_1 + 20y_2 + 8y_3 \geq 110$$

egyenlőtlenség. Mivel a duál feladat egy minimumfeladat, és bármelyik duál lehetséges megoldás esetén $w \geq 110$, ezért a duál feladat optimális w értéke is ≥ 110 (lásd 5. ábra). Tehát a gyenge dualitás révén bármelyik primál lehetséges megoldás segítségével korlátot írhatunk fel a duál feladat optimális célfüggvényére.



5. ÁBRA
A gyenge dualitás ábrázolása

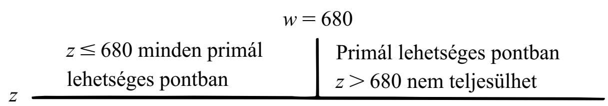
Analóg módon, a duál feladat tetszőleges lehetséges megoldása segítségével korlátot állíthatunk fel a primál célfüggvény optimális értékére. Például a Dakota probléma esetén könnyen ellenőrizhető, hogy $y_1 = 10$, $y_2 = 10$, $y_3 = 0$ egy duál lehetséges megoldás. Az ehhez tartozó duál célfüggvényérték $48(10) + 20(10) + 8(0) = 680$. A gyenge dualitásból következően tetszőleges

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

primál lehetséges megoldásra teljesül a

$$60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \leq 680$$

korlát. Mivel a primál feladat egy maximumfeladat, és bármely primál lehetséges megoldás esetén $z \leq 680$, ezért a primál feladat optimális célfüggvényértéke szintén ≤ 680 (lásd 6. ábra).



6. ÁBRA
A gyenge dualitás ábrázolása

Bevezetve a

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{c} = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n]$$

vektorokat, egy

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

pontban a primál célfüggvény értéke $\mathbf{cx}$, ugyanakkor egy $\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_m]$ pontban a duál célfüggvény értéke $\mathbf{yb}$ alakban írható fel. Most a gyenge dualitást alkalmazva bebizonyítjuk a következő fontos eredményt.

2. SEGÉDTÉTEL Legyen

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}$$

a primál-, és $\bar{\mathbf{y}} = [\bar{y}_1 \quad \bar{y}_2 \quad \dots \quad \bar{y}_m]$ pedig a duál feladat valamely lehetséges megoldása. Ha $\mathbf{c}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{y}}\mathbf{b}$, akkor $\bar{\mathbf{x}}$ a primál feladat optimális megoldása, $\bar{\mathbf{y}}$ pedig a duál feladat optimális megoldása.

Bizonyítás A gyenge dualitásból tudjuk, hogy tetszőleges primál lehetséges $\mathbf{x}$ pontban

$$\mathbf{cx} \le \bar{\mathbf{y}}\mathbf{b}$$

Ezért mindegyik primál lehetséges ponthoz olyan z érték tartozik, amelyik nem haladja meg $\bar{\mathbf{y}}\mathbf{b}$ értékét. Mivel $\bar{\mathbf{x}}$ primál lehetséges, és a hozzátartozó primál célfüggvény értékére $\mathbf{c}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{y}}\mathbf{b}$ teljesül, $\bar{\mathbf{x}}$ szükségképpen primál optimális. Hasonlóan, minthogy $\bar{\mathbf{x}}$ primál lehetséges, a gyenge dualitás következményeként tetszőleges duál lehetséges $\mathbf{y}$ pontban

$$\mathbf{c}\bar{\mathbf{x}} \le \mathbf{yb}$$

Tehát tetszőleges duál lehetséges pontban a célfüggvény értéke eléri, vagy meghaladja $\mathbf{c}\bar{\mathbf{x}}$ értékét. Mivel $\bar{\mathbf{y}}$ duál lehetséges, és a hozzátartozó duál célfüggvényértékre $\bar{\mathbf{y}}\mathbf{b} = \mathbf{c}\bar{\mathbf{x}}$ teljesül, $\bar{\mathbf{y}}$ szükségképpen egy duál optimális megoldás. □

A 2. segédtételt a Dakota probléma segítségével mutatjuk be. Könnyen ellenőrizheti az olvasó, hogy

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

primál, $\bar{\mathbf{y}} = [0 \quad 10 \quad 10]$ pedig duál lehetséges megoldás. Mivel $\mathbf{c}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{y}}\mathbf{b} = 280$, a 2. segédtételből az következik, hogy $\bar{\mathbf{x}}$ a primál Dakota probléma optimális megoldása, $\bar{\mathbf{y}}$ pedig a duál Dakota probléma optimális megoldása. A 2. segédtétel fontos szerepet játszik majd a dualitás-tétel bizonyításában.

A dualitás-tétel

Mielőtt rátérnénk a dualitás-tétel bizonyítására, megemlítjük, hogy a gyenge dualitás segítségével bebizonyíthatók a következő állítások:

3. SEGÉDTÉTEL Ha a primál feladat célfüggvénye nem korlátos, akkor a duál feladatnak nincs lehetséges megoldása.

Bizonyítás Lásd 7. feladat az alfejezet végén. □

4. SEGÉDTÉTEL Ha a duál feladat célfüggvénye nem korlátos, akkor a primál feladatnak nincs lehetséges megoldása.

Bizonyítás Lásd 8. feladat az alfejezet végén. □

A 3. és 4. segédtétel olyan esetekben írja le a primál és a duál feladat kapcsolatát, melyeknek nincs túl nagy gyakorlati jelentősége.[2]

Ezek az esetek nem igazán érdekesek. Minket elsősorban olyankor foglalkoztat a primál és a duál feladat kapcsolata, amikor a primál feladatnak létezik optimális megoldása. A továbbiakban $\bar{z}$-sal jelöljük a primál célfüggvény optimális értékét, $\bar{w}$-sal pedig a duál célfüggvény optimális értékét. Ha a primál feladatnak létezik optimális megoldása, akkor a következő fontos eredmény (a dualitás-tétel) rögzíti a primál és a duál feladat kapcsolatát.

1. TÉTEL **A dualitás-tétel** Legyen BV a primál feladat optimális bázisa. Ekkor $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ a duál feladat egyik optimális megoldása. Ezenkívül $\bar{z} = \bar{w}$.

Bizonyítás A dualitás-tétel bizonyításának lépései a következők:

1. Felhasználva azt, hogy BV a primál feladat optimális bázisa, megmutatjuk, hogy $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ lehetséges megoldása a duálnak (röviden: duál lehetséges).

2. Megmutatjuk, hogy a primál célfüggvény optimális értéke = a duál célfüggvény értéke a $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ pontban.

3. Találtunk egy (BV-hez tartozó) primál lehetséges és egy ($\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$) duál lehetséges megoldást, melyekhez azonos célfüggvényérték tartozik. A 2. segédtételből arra a következtetésre jutunk, hogy $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ duál optimális, és $\bar{z} = \bar{w}$.

Most igazoljuk az 1. lépés állítását arra az esetre, amikor a primál feladat egy normál maximumfeladat n változóval és m korlátozó feltétellel.[3] A primál feladatot az $s_1, s_2, \ldots, s_m$ maradék-változókkal kiegészítve a következőképpen írjuk fel a primál és a duál feladatot:

[2] Előfordulhat, hogy sem a primál, sem pedig a duál feladatnak nincs lehetséges megoldása, mint például a következő feladatnál:

$$\textbf{Primál}\quad \begin{array}{lrr} \max z = & x_2 & \\ \text{f.h.} & x_1 & \le -1 \\ & -x_2 & \le 1 \\ & x_1, x_2 & \ge 0 \end{array} \qquad \textbf{Duál}\quad \begin{array}{lrr} \min w = & -y_1 + y_2 & \\ \text{f.h.} & y_1 & \ge 0 \\ & -y_2 & \ge 1 \\ & y_1, y_2 & \ge 0 \end{array}$$

[3] A bizonyítás könnyen kiterjeszthető arra az esetre, amikor a primál feladat egy nemnormál maximumfeladat.

Primál feladat

$$\begin{aligned} \max z = {} & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{f.h.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + s_1 = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + s_2 = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + s_m = b_m \\ & x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n); \quad s_i \ge 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \end{aligned} \tag{28}$$

Duál feladat

$$\begin{aligned} \min w = {} & b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \\ \text{f.h.} \quad & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\ & a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \ge c_2 \\ & \vdots \\ & a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \ge c_n \\ & y_i \ge 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \end{aligned} \tag{29}$$

Legyen BV a primál feladat egyik optimális bázisa, és vezessük be a $\mathbf{c}_{BV}B^{-1} = [y_1, y_2, \ldots, y_m]$ jelölést! Tehát a BV optimális bázis esetén y_i a $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ vektor i-edik eleme. Mivel BV primál optimális, a BV-hez tartozó primál tábla célfüggvény sorában mindegyik együttható nemnegatív. (10) miatt x_j itteni együtthatója, vagyis ($\bar{c}_j$), a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned} \bar{c}_j &= \mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{a}_j - c_j \\ &= [y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_m] \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} - c_j \\ &= y_1a_{1j} + y_2a_{2j} + \cdots + y_ma_{mj} - c_j \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy $\bar{c}_j \ge 0$, ezért a $j = 1, 2, \ldots, n$ értékekre

$$y_1a_{1j} + y_2a_{2j} + \cdots + y_ma_{mj} - c_j \ge 0$$

Tehát $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ az n duál korlátozó feltétel mindegyikét kielégíti. Mivel BV egy primál optimális bázis, azt is tudjuk, hogy a BV-hez tartozó primál tábla célfüggvény sorában valamennyi maradékváltozó együtthatója ugyancsak nemnegatív. ($10'$)-ből tudjuk, hogy s_i együtthatója a BV-hez tartozó tábla célfüggvényében y_i, vagyis a $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ vektor i-edik eleme. Tehát az $i = 1, 2, \ldots, m$ értékekre $y_i \ge 0$. Ezzel megmutattuk, hogy $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ a (29)-ben szereplő n korlátozó feltétel mindegyikét kielégíti, és $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ valamennyi koordinátája nemnegatív. Eszerint $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ valóban duál lehetséges.

A dualitás-tétel második lépésének igazolásához meg kell mutatnunk, hogy

$$\begin{aligned} &\text{a duál célfüggvény értéke a } \mathbf{c}_{BV}B^{-1} \text{helyen} \\ &\quad = \text{a } BV\text{-hez tartozó primál célfüggvény értéke} \end{aligned} \tag{30}$$

(11)-ből következik, hogy a BV-hez tartozó primál célfüggvény értéke $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{b}$. Ugyanakkor a duál célfüggvény értéke a duál lehetséges $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ pontban nem más, mint

$$b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m = [y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_m] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \mathrm{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{b}$$

Ezzel a (30) összefüggést beláttuk.

A dualitás-tétel bizonyításának 1. és 2. lépését elvégeztük. A 3. lépéssel a bizonyítás végéhez érkeztünk. □

MEGJEGYZÉSEK

1. A dualitás-tétel bizonyításának 1. lépésében azt mutattuk meg, hogy egy primál lehetséges BV bázis akkor és csak akkor optimális, ha $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ duál lehetséges. Ennek az eredménynek a segítségével az 5.9. alfejezetben az érzékenységvizsgálat mélyebb megértéséhez jutunk.

2. Amikor a primál feladat optimális megoldását a szimplex módszerrel állítjuk elő, automatikusan megkapjuk a duál feladat optimális megoldását is.

A 2. megjegyzés igazolása céljából tegyük fel, hogy a primál feladat egy normál maximumfeladat m korlátozó feltétellel. Ahhoz, hogy ezt a feladatot a szimplex módszerrel megoldhassuk, az i-edik primál korláthoz hozzárendeljük az s_i maradékváltozót. Legyen BV egy primál optimális bázis. Ekkor a dualitás-tétel szerint $\mathbf{c}_{BV}B^{-1} = [y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_m]$ a duál feladat optimális megoldása. Ugyanakkor ($10'$)-ből tudjuk, hogy a (BV)-hez tartozó primál optimális tábla célfüggvényében s_i együtthatója y_i. Ezzel megmutattuk, hogy *ha a primál feladat egy normál maximumfeladat, akkor az i-edik duál változó optimális értéke s_i együtthatója a primál optimális tábla célfüggvényében*.

A 2. megjegyzést a Dakota probléma segítségével mutatjuk be. A 23. táblázat mutatja a Dakota probléma optimális tábláját. A primál feladat optimális megoldása $z = 280$, $s_1 = 24$, $x_3 = 8$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$. Az előző fejtegetés alapján a duál feladat optimális megoldása $y_1 = 0, y_2 = 10, y_3 = 10, w = 48(0) + 20(10) + 8(10) = 280$. Vegyük észre, hogy – a dualitás-tételnek megfelelően – a primál és a duál célfüggvény optimális értékei azonosak.

23. TÁBLÁZAT A Dakota probléma optimális megoldása

	Bázis-változó
$z + 5x_2 + 10s_2 + 10s_3 = 280$	$z = 280$
$- 2x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 24$	$s_1 = 24$
$- 2x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 = 8$	$x_3 = 8$
$x_1 + 1.25x_2 - 0.5s_2 + 1.5s_3 = 2$	$x_1 = 2$

A duál feladat optimális megoldását természetesen közvetlenül is kiszámíthatjuk a következőképpen:

$$\mathbf{c}_{BV}B^{-1} = [0 \quad 20 \quad 60] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} = [0 \quad 10 \quad 10]$$

A duál feladat megoldására ismertetett két eljárásnak nyilvánvalóan ugyanaz az eredménye.

A duál feladat optimális megoldását akkor is megtaláljuk a primál optimális táblában, amikor $\geq$ vagy egyenlőség alakú korlátok is szerepelnek a primál feladatban. Ezt igazolandó emlékeztetünk arra, hogy a dualitás-tétel szerint az (y_i) i-edik duál változó optimális értéke a $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ vektor i-edik koordinátája. $(10'')$ szerint, amikor a primál feladat i-edik korlátozó feltétele $\geq$ alakú, akkor

$$\text{az } i\text{-edik duál változó optimális értéke} = y_i = -\,(e_i \text{ együtthatója az optimális célfüggvényben})$$

Mivel e_i együtthatója az optimális célfüggvényben nemnegatív kell, hogy legyen, arra a következtetésre jutunk, hogy amikor a primál feladat i-edik korlátja $\geq$ alakú, akkor $y_i \leq 0$. Ez összhangban van azzal a korábbi szabállyal (lásd 5.4. alfejezet), hogy egy $\geq$ korláthoz nempozitív duál változó tartozik. A $(10''')$ összefüggésből látható, hogy amikor az i-edik primál korlát egyenlőség, akkor

$$y_i = (a_i \text{ együtthatója az optimális célfüggvényben}) - M$$

Annak ellenére, hogy a_i együtthatója az optimális célfüggvényben nemnegatív, $y_i \geq 0$, illetve $y_i \leq 0$ egyaránt lehetséges, hiszen M egy nagy pozitív szám. Ez összhangban van azzal a korábbi szabállyal, hogy egy egyenlőséghez tartozó duál változó kötetlen előjelű.

Hogyan kapjuk meg a primál optimális tábla célfüggvény sorából a duál optimális megoldást, amikor a primál feladat maximumfeladat?

$$\begin{array}{l}\text{az } y_i \text{ duál változó optimális értéke} \\ \text{amikor az } i\text{-edik korlát} \leq \text{alakú}\end{array} = \begin{array}{l}s_i \text{ együtthatója az optimális} \\ \text{célfüggvényben}\end{array} \tag{31}$$

$$\begin{array}{l}\text{az } y_i \text{ duál változó optimális értéke} \\ \text{amikor az } i\text{-edik korlát} \geq \text{alakú}\end{array} = \begin{array}{l}-(e_i \text{ együtthatója az} \\ \text{optimális célfüggvényben)}\end{array} \tag{31$'$}$$

$$\begin{array}{l}\text{az } y_i \text{ duál változó optimális értéke} \\ \text{amikor az } i\text{-edik korlát egy egyenlőség}\end{array} = \begin{array}{l}(a_i \text{ együtthatója az} \\ \text{optimális célfüggvényben}) - M\end{array} \tag{31$''$}$$

A következő példával megmutatjuk, hogyan kapjuk meg a duál optimális megoldást olyankor, amikor a primál feladatban $\leq$, $\geq$, és egyenlőség típusú korlátozó feltételek is szerepelnek.

2. PÉLDA A

$$\begin{array}{lrl} \max & z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 & \\ \text{f.h.} & x_1 + 3x_2 + 2x_3 & \leq 15 \\ & 2x_2 - \ \ x_3 & \geq 5 \\ & 2x_1 + \ \ x_2 - 5x_3 & = 10 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array} \tag{32}$$

LP feladat megoldása céljából bevezetünk egy s_1 maradékváltozót, kivonunk egy e_2 feleslegváltozót, továbbá bevezetjük az a_2 és a_3 mesterséges változókat. A 24. táblázat mutatja a (32) feladat optimális tábláját. Eszerint az optimális megoldás $z = \frac{565}{23}$, $x_3 = \frac{15}{23}$, $x_2 = \frac{65}{23}$,

24. TÁBLÁZAT
A (32) LP feladat optimális táblája

z	x_1	x_2	x_3	s_1	e_2	a_2	a_3	**J.o.**	**Bázis-változó**
1	0	0	0	$\frac{51}{23}$	$\frac{58}{23}$	$M-\frac{58}{23}$	$M+\frac{9}{23}$	$\frac{565}{23}$	$z=\frac{565}{23}$
0	0	0	1	$\frac{4}{23}$	$\frac{5}{23}$	$-\frac{5}{23}$	$-\frac{2}{23}$	$\frac{15}{23}$	$x_3=\frac{15}{23}$
0	0	1	0	$\frac{2}{23}$	$-\frac{9}{23}$	$\frac{9}{23}$	$-\frac{1}{23}$	$\frac{65}{23}$	$x_2=\frac{65}{23}$
0	1	0	0	$\frac{9}{23}$	$\frac{17}{23}$	$-\frac{17}{23}$	$\frac{7}{23}$	$\frac{120}{23}$	$x_1=\frac{120}{23}$

$x_1=\frac{120}{23}$, $s_1=e_2=a_2=a_3=0$. (32) duálisának optimális megoldását ennek alapján fogjuk előállítani.

Megoldás A (32) feladat duálisát a 25. táblázat segítségével az 5.4. alfejezetben ismertetett lépéseket követve írjuk fel

$$\begin{aligned} \min w &= 15y_1+5y_2+10y_3 \\ \text{f.h.} \quad & y_1 \qquad + 2y_3 \geq 3 \\ & 3y_1+2y_2+\ \ y_3 \geq 2 \\ & 2y_1-\ \ y_2-\ 5y_3 \geq 5 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 \text{ ekn} \end{aligned} \tag{33}$$

25. TÁBLÁZAT
A (32) LP feladat duálisa

min w		**max** z			
		$(x_1 \geq 0)$	$(x_2 \geq 0)$	$(x_3 \geq 0)$	
		x_1	x_2	x_3	
$(y_1 \geq 0)$	y_1	1	3	2	≤ 15
$(y_2 \leq 0)$	y_2	0	2	-1	$\geq 5^*$
$(y_3$ ekn$)$	y_3	2	1	-5	$= 10^*$
		≥ 3	≥ 2	≥ 5	

(31) és a primál optimális tábla segítségével a következőképpen kapjuk meg (33) optimális megoldását:

Mivel az első primál korlát $\leq$ alakú, (31) alapján

$$y_1 = (s_1 \text{ együtthatója az optimális célfüggvényben}) = \frac{51}{23}.$$

Mivel a második primál korlát $\geq$ alakú, (31′) szerint

$$y_2 = -(e_2 \text{ együtthatója az optimális célfüggvényben}) = -\frac{58}{23}.$$

Mivel a harmadik primál korlát egy egyenlőség, (31″) miatt

$$y_3 = (a_3 \text{ együtthatója az optimális célfüggvényben}) - M = \frac{9}{23}.$$

A dualitás-tétel szerint w, vagyis a duál célfüggvény optimális értéke $\frac{565}{23}$. Tehát a duál feladat optimális megoldása a következő:

$$\bar{w} = \frac{565}{23}, \quad y_1 = \frac{51}{23}, \quad y_2 = -\frac{58}{23}, \quad y_3 = \frac{9}{23}$$

Az olvasó ellenőrizheti, hogy ez a megoldás valóban lehetséges (az összes duál korlát egyenlőségként teljesül), és

$$\bar{w} = 15\frac{51}{23} + 5\left(-\frac{58}{23}\right) + 10\frac{9}{23} = \frac{565}{23}$$

A duál optimális megoldást akkor is kiolvashatjuk a primál optimális táblából, amikor a primál feladat egy minimumfeladat.

Hogyan kapjuk meg a primál optimális tábla célfüggvény sorából a duál optimális megoldást, amikor a primál feladat minimumfeladat?

az x_i duál változó optimális értéke amikor az i-edik korlát $\leq$ alakú $=$ s_i együtthatója az optimális célfüggvényben

az x_i duál változó optimális értéke amikor az i-edik korlát $\geq$ alakú $=$ $-(e_i$ együtthatója az optimális célfüggvényben)

az x_i duál változó optimális értéke amikor az i-edik korlát egy egyenlőség $=$ (a_i együtthatója az optimális célfüggvényben)$+M$

A következő feladatban azt mutatjuk be, hogyan lehet egy minimumfeladat duálisának optimális megoldását az optimális primál táblából leolvasni.

$$\begin{aligned}
\min w = 3y_1 + 2y_2 + y_3 & \\
\text{f.h.} \quad y_1 + y_2 + y_3 &\geq 4 \\
y_2 - y_3 &\leq 2 \\
y_1 + y_2 + 2y_3 &= 6 \\
y_1, y_2, y_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

Ennek a feladatnak az optimális tábláját a 26. táblázat tartalmazza. Eszerint a primál optimális megoldás $w = 6$, $y_2 = y_3 = 2$, $y_1 = 0$. Az eredeti feladat duálisa a következő:

$$\begin{aligned}
\max z = 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 & \\
\text{f.h.} \quad x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 &\leq 3 \\
x_1 + x_2 + x_3 &\leq 2 \\
x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 1 \\
x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{ ekn} &
\end{aligned}$$

A primál optimális táblából megállapítható, hogy a duál feladat optimális megoldása $z = 6$, $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$.

26. TÁBLÁZAT A duál optimális megoldás megadása primál minimumfeladat esetén

w	y_1	y_2	y_3	e_1	s_2	a_1	a_3	**J.o.**
1	-1	0	0	-3	0	$3-M$	$-1-M$	6
0	1	1	0	-2	0	2	-1	2
0	-1	0	0	3	1	-3	2	2
0	0	0	1	1	0	-1	1	2

Feladatok

A csoport

1. A következő kérdések a Giapetto problémára vonatkoznak (lásd 5.3. alfejezet, 7. feladat).

(a) Írjuk fel a Giapetto probléma duálisát!

(b) A Giapetto probléma optimális táblájának segítségével írjuk fel a duál feladat optimális megoldását!

(c) Győződjünk meg arról, hogy ebben az esetben is teljesülnek a dualitás-tétel állításai!

2. Tekintsük a következő LP feladatot:

$$\begin{aligned} \max\ z &= -2x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{f.h.}\quad x_1 + x_2 + x_3 &\le 3 \\ x_2 + x_3 &\ge 2 \\ x_1 \quad + x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

(a) Írjuk fel a feladat duálisát!

(b) Az s_1 maradékváltozó, az a_2 és a_3 mesterséges változók bevezetése, valamint az e_2 felesleg-változó kivonása után az optimális tábla célfüggvénye a következő:

$$z + 4x_1 + e_2 + (M-1)a_2 + (M+2)a_3 = 0$$

Adjuk meg a duál feladat optimális megoldását!

3. Az alábbi

$$\begin{aligned} \max\ z &= -x_1 + 5x_2 \\ \text{f.h.}\quad x_1 + 2x_2 &\le 0.5 \\ -x_1 + 3x_2 &\le 0.5 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

LP feladat optimális célfüggvénye $z + 0.4s_1 + 1.4s_2 = ?$ Határozzuk meg a feladathoz tartozó optimális z értéket!

4. A következő kérdések a 4.8. alfejezetben ismertetett Bevco problémára vonatkoznak.

(a) Írjuk fel a Bevco probléma duálisát!

(b) A Bevco probléma 4.8. alfejezetben ismertetett optimális táblájának segítségével adjuk meg a duális feladat optimális megoldását! Győződjünk meg arról, hogy ebben az esetben is teljesülnek a dualitás-tétel állításai!

5. Tekintsük a következő LP feladatot!

$$\begin{aligned} \max\ z &= 4x_1 + \ x_2 \\ \text{f.h.}\quad 3x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ 6x_1 + 3x_2 &\le 10 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy a feladat megoldása során $z + 2x_2 + s_2 = \frac{20}{3}$ lesz az optimális célfüggvény. Mutassuk meg a dualitás-tétel segítségével, hogy számítási hibát követtünk el!

6. Mutassuk meg, hogy ha (egy maximumfeladat esetén) az i-edik primál korlát $\ge$ alakú, akkor az i-edik duál változó optimális értéke (a_i együtthatója az optimális célfüggvényben) $-M$!

B csoport

7. Ebben a feladatban a gyenge dualitás-tétel segítségével bebizonyítjuk a 3. segédtételt.

(a) Igazoljuk, hogy a 3. segédtétel a következő állítással ekvivalens: Ha van duál lehetséges megoldás, akkor a primál célfüggvény korlátos.

(b) A gyenge dualitás segítségével igazoljuk a 3. segédtételnek az (a) részben megadott ekvivalens alakját! (*Útmutatás*: Ha van duál lehetséges megoldás, akkor ehhez tartozik egy w érték, például w_o. A gyenge dualitás segítségével mutassuk meg, hogy a primál célfüggvény korlátos!)

8. A 7. feladat lépéseit követve igazoljuk a 4. segédtételt a gyenge dualitás segítségével!

9. Az 5.3. alfejezet 8. feladatának eredményeit felhasználva írjuk fel a Dorian autóprobléma duálisát, és a duál feladat optimális megoldását!

5.7. Árnyékárak

Most visszatérünk az árnyékár fogalmához, amit az 5.1. alfejezetben tárgyaltunk. Elsőként egy formális definíció következik.

DEFINÍCIÓ

Az i-edik korlátozó feltételhez tartozó **árnyékár** az az érték, amennyivel az optimális z érték javul (maximumfeladatnál nő, minimumfeladatnál csökken), amikor b_i-t 1-gyel növeljük (tehát b_i helyett $b_i + 1$ lesz a korlát).[4]

A dualitás-tétel segítségével könnyen felírható az i-edik korlátozó feltételhez tartozó árnyékár. Példaként megadjuk a Dakota probléma második korlátozó feltételéhez (felületkezelési korlát) tartozó árnyékárat. Legyen $\mathbf{c}_{BV}B^{-1} = [y_1 \quad y_2 \quad y_3] = [0 \quad 10 \quad 10]$ a maximumfeladat duálisának az optimális megoldása. A dualitás-tétel szerint

$$\begin{aligned}&\text{az optimális } z \text{ érték } b_1 = 48, b_2 = 20, b_3 = 8 \text{ jobb oldali korlátok esetén}\\ &\quad = 48y_1 + 20y_2 + 8y_3\end{aligned} \tag{34}$$

Mi történik az optimális z értékkel, ha b_2 értékét (ami jelenleg 20 munkaóra felületkezelés) 1 egységgel (21 órára növeljük)? Tudjuk, hogy a jobb oldal változtatásakor előfordulhat, hogy az aktuális bázis már nem lesz optimális (lásd 5.3. alfejezet). Jelenleg azonban feltételezzük, hogy az adott bázis optimális marad, amikor b_2-t 1-gyel növeljük. Ekkor $\mathbf{c}_{BV}$ és B^{-1} is változatlan marad, tehát a Dakota probléma duálisának az optimum-helye sem módosul. Következésképpen

$$\begin{aligned}&\text{az optimális } z \text{ érték, amikor a felületkezelési korlát jobb oldala 21}\\ &\quad = 48y_1 + 21y_2 + 8y_3\end{aligned} \tag{35}$$

(35)-ből (34)-et kivonva

$$\begin{aligned}&\text{az optimális } z \text{ érték változása, amikor a felületkezelési korlátot 1-gyel növeljük}\\ &\quad = \text{a 2. (felületkezelési) korlát árnyékára}\\ &\quad = y_2 = 10\end{aligned} \tag{36}$$

Ez a példa azt mutatja, hogy *egy maximumfeladat i-edik korlátozó feltételéhez tartozó árnyékár az i-edik duál változó optimális értéke*. Mivel az árnyékárak a duál változók értékei, azt is tudjuk, hogy $\leq$ alakú korlát esetén az árnyékár nemnegatív; $\geq$ korlát esetén nempozitív; egyenlőség esetén pedig kötetlen előjelű. A későbbiekben ismertetendő példák szemléletesen alátámasztják majd ezeket az előjelszabályokat.

Hasonló érveléssel megmutatható, hogy amikor (egy maximumfeladatban) az i-edik korlátozó feltétel jobb oldalát Δb_i-vel növeljük, akkor (f.h. az aktuális bázis optimális marad) az új optimális z értékre a következő összefüggés érvényes

$$\begin{aligned}\text{új optimális } z \text{ érték} &= \text{régi optimális } z \text{ érték}\\ &\quad + \Delta b_i(\text{az } i\text{-edik korlát árnyékára})\end{aligned} \tag{37}$$

Minimumfeladat esetén az i-edik korlátozó feltételhez tartozó árnyékár az az érték, amivel az optimális z érték javul, tehát csökken, amikor az adott korlát jobb oldalát egy egységgel növeljük (f.h. az aktuális bázis optimális marad). Meg lehet mutatni, hogy minimumfeladat esetén az i-edik korlát árnyékára $= -$(az i-edik duál változó optimális értéke). Ha

[4] Feltesszük, hogy amikor az i-edik feltétel jobb oldalát $b_i + 1$-re változtatjuk, az optimális bázis nem változik.

az i-edik korlátozó feltétel jobb oldalát Δb_i-vel növeljük, akkor (feltéve, hogy az aktuális bázis optimális marad) az új optimális z értékre a következő összefüggés érvényes:

$$\begin{aligned}\text{új optimális } z \text{ érték} &= \text{régi optimális } z \text{ érték} \\ &\quad - \Delta b_i(\text{az } i\text{-edik korlát árnyékára})\end{aligned} \tag{37'}$$

A következő példákkal az árnyékárak fogalmát igyekszünk megvilágítani.

3. PÉLDA

A Dakota problémában:

1. Számítsuk ki az árnyékárakat, és magyarázzuk meg a jelentésüket!

2. Mekkora lenne a Dakota bevétele, ha 18 felületkezelési munkaóra állna rendelkezésre? (Az 5.3. alfejezet módszerét alkalmazva megmutatható, hogy 16 és 24 munkaóra között az adott bázis optimális marad.)

3. Mekkora lenne a Dakota bevétele, ha 9 órát fordíthatna asztalosmunkára? ($\frac{20}{3}$ és 10 munkaóra között az adott bázis optimális marad.)

4. Mekkora lenne a Dakota bevétele, ha 30 egységnyi faanyag állna rendelkezésre? (24 egységnyi felett az adott bázis optimális marad.)

5. Miért nem tudjuk az árnyékár segítségével az új z értéket meghatározni abban az esetben, amikor az asztalosmunka korlát értéke 30 óra?

Megoldás

1. Az 5.6. alfejezetben azt kaptuk, hogy a Dakota probléma duálisának optimális megoldása $y_1 = 0$, $y_2 = 10$, $y_3 = 10$. Ezért a faanyag korlát árnyékára 0, a felületkezelési korláté 10, az asztalosmunka korláté pedig 10. Az a tény, hogy a faanyag korlát árnyékára 0, azt jelenti, hogy amikor a rendelkezésre álló faanyag mennyiségét 1 egységgel (vagy *bármekkora* értékkel) növeljük, nem fog növekedni a bevétel. Ez érthető, hiszen jelenleg is mindössze 24 egységet használunk a rendelkezésre álló 48-ból, s ezért a korlát növelése semmilyen pozitívumot nem jelent a Dakota számára. A Dakota bevétele 10\$-ral nőne, ha 1-gyel több felületkezelési munkaóra állna rendelkezésre. Hasonlóan eggyel több asztalos munkaóra 10\$-ral növelné a Dakota bevételét. Ennél a feladatnál az i-edik korlátozó feltételhez tartozó árnyékárat úgy képzelhetjük el, mint azt a maximális összeget, amit a cég az i-edik korláthoz tartozó erőforrás-mennyiség egy egységgel való növeléséért fizethet. Például +1 asztalos munkaóra hatására $y_3 = 10\$$ lenne a bevétel növekedése. (A 12. feladatban olyan maximumfeladatot ismertetünk, ahol ez az interpretáció nem használható.) Ezért a Dakota legfeljebb 10\$-t fizethet +1 asztalos-munkaóráért, anélkül, hogy rosszul járna. Hasonlóképpen a cég semmit sem (0\$-t) fizetne +1 egységnyi faanyagért, és legfeljebb 10\$-t +1 felületkezelési munkaóráért. A 2–4. kérdéseket (37) segítségével válaszoljuk meg, felhasználva azt a tényt, hogy a régi z érték $= 280$.

2. $y_2 = 10, \Delta b_2 = 18 - 20 = -2$. Az aktuális bázis most is optimális, hiszen $16 \le 18 \le 24$. (37)-ből következik, hogy (az új bevétel) $= 280 + 10(-2) = 260\$$.

3. $y_3 = 10, \Delta b_3 = 9 - 8 = 1$. Az aktuális bázis optimális marad, hiszen $\frac{20}{3} \le 9 \le 10$. (37) következményeként (az új bevétel)$= 280 + 10(1) = 290\$$.

4. $y_1 = 0, \Delta b_1 = 30 - 48 = -18$. Mivel $24 \le 30 \le \infty$, továbbra is optimális marad az adott bázis. (37) szerint (az új bevétel) $= 280 + 0(-18) = 280\$$.

5. $b_3 = 30$ esetén az eredeti bázis már nem optimális, mert $30 > 10$. Ez azt jelenti, hogy BV (és emiatt $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ is) megváltozik, tehát a jelenlegi árnyékárakat használva nem tudjuk kiszámítani az új bevételt.

Az árnyékárak előjelének szemléletes megvilágítása

Most egy természetes magyarázatot adunk arra a tényre, hogy (maximumfeladat esetén) egy $\leq$ korlátozó feltételhez mindig nemnegatív árnyékár tartozik. Képzeljük el a következő szituációt: Két LP feladatunk van, LP1 és LP2, és a két feladat célfüggvénye azonos. Tegyük fel, hogy minden olyan pont, amelyik LP1 számára lehetséges, LP2 számára is lehetséges. Ez azt jelenti, hogy LP2 lehetséges tartománya tartalmazza LP1 valamennyi lehetséges pontját, s valószínűleg további pontokat is. Ekkor LP2 optimális z értéke legalább akkora kell hogy legyen, mint LP1 optimális z értéke. Ezt igazolandó, tegyük fel, hogy az x' pont (amelyikhez a z' érték tartozik) az LP1 feladat optimális megoldása. Mivel x' LP2 számára is lehetséges (és a két célfüggvény közös), a z' érték az LP2 feladat egyik lehetséges célfüggvényértéke. Az is elképzelhető, hogy egy olyan pontban, amelyik csak LP2 számára lehetséges (tehát LP1 számára nem), a célfüggvény értéke nagyobb mint z'. Tehát *egy maximumfeladat lehetséges tartományának bővítése nem vezethet az optimális z érték csökkenéséhez*.

Ennek az észrevételnek a segítségével megmutatjuk, hogy egy $\leq$ korlátozó feltételhez tartozó árnyékár szükségképpen nemnegatív. Ha a Dakota probléma esetében az asztalosmunka korlát jobb oldalát 1-gyel (8-ról 9-re) növeljük, akkor minden korábban lehetséges pont továbbra is lehetséges lesz, és ezenkívül új lehetséges pontok (ahol az asztalosmunka korlát > 8 és ≤ 9) is előfordulhatnak. Emiatt az optimális z érték nem csökkenhet, és az asztalosmunkához tartozó árnyékár nem lehet negatív.

A következő példával azt akarjuk megmutatni, hogy (ellentétben számos könyv állításával) egy $\leq$ típusú korláthoz tartozó árnyékár értéke nem minden esetben az a maximális ár, amit a szóban forgó erőforrás-mennyiség 1 egységgel történő növeléséért még fizetni érdemes.

4. PÉLDA Leatherco, egy bőripari cég, öveket és cipőket gyárt. Egy öv elkészítéséhez 2 egységnyi bőrre és 1 óra szakmunkára van szükség. Egy pár cipő elkészítéséhez 3 egységnyi bőr és 2 óra szakmunka szükséges. Legfeljebb 25 egységnyi bőrt 5\$/egységnyi egységáron lehet beszerezni, a szakmunka-kapacitás 15 óra, és a szakmunka költsége 10\$/óra. Egy öv eladási ára 23\$, egy pár cipőt 40\$-ért lehet értékesíteni. A cég maximalizálni akarja a nyereségét (bevételek $-$ költségek). Írjunk fel egy olyan LP feladatot, melynek segítségével maximalizálni lehet a cég nyereségét! Ezután adjuk meg a feladatban szereplő árnyékárak közgazdasági jelentését!

Megoldás Legyen

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{az elkészített övek száma} \\ x_2 &= \text{ahány pár cipőt gyárt a cég} \end{aligned}$$

Mivel

$$\begin{aligned} \text{egy öv költsége } &= 2(5) + 1(10) = 20\$ \\ \text{egy pár cipő költsége } &= 3(5) + 2(10) = 35\$ \end{aligned}$$

a cég célfüggvénye a következő:

$$\max\ z = (23 - 20)x_1 + (40 - 35)x_2 = 3x_1 + 5x_2$$

Figyelembe kell venni két korlátozó feltételt:

1. korlát A cég legfeljebb 25 egységnyi bőrt dolgozhat fel.

2. korlát Legfeljebb 15 óra szakmunka vehető igénybe.

Az első korlátot a

$$2x_1 + 3x_2 \leq 25 \quad \text{(bőr korlát)}$$

egyenlőtlenség, a másodikat pedig az

$$x_1 + 2x_2 \leq 15 \quad \text{(szakmunka korlát)}$$

egyenlőtlenség adja meg. Figyelembe véve az $x_1 \geq 0$, illetve $x_2 \geq 0$ feltételeket, a következő LP feladatot kapjuk:

$$\begin{array}{lrl} \max & z = 3x_1 + 5x_2 & \\ \text{f.h.} & 2x_1 + 3x_2 \leq 25 & \text{(bőr korlát)} \\ & x_1 + 2x_2 \leq 15 & \text{(szakmunka korlát)} \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

A bőr, illetve szakmunka korláthoz tartozó maradékváltozókat rendre s_1-gyel, illetve s_2-vel jelölve, a 27. táblázatban látható optimális táblához jutunk. Eszerint a bőripari cég problémájának optimális megoldása $z = 40$, $x_1 = 5$, $x_2 = 5$. Az árnyékárak a következők

$y_1 =$ a bőr árnyékára $= s_1$ együtthatója az optimális célfüggvényben $= 1$

$y_2 =$ a szakmunka árnyékára $= s_2$ együtthatója az optimális célfüggvényben $0 = 1$

27. TÁBLÁZAT
A bőripari cég optimális táblája

	Bázis-változó
$z \quad + s_1 + s_2 = 40$	$z = 40$
$x_1 \quad + 2s_1 - 3s_2 = 5$	$x_1 = 5$
$x_2 - s_1 + 2s_2 = 5$	$x_2 = 5$

Az eddigiek szerint a bőr árnyékára azt jelentené, hogy ha eggyel több egységnyi bőrt lehetne felhasználni, akkor a célfüggvény (a cég nyeresége) 1\$-ral lenne nagyobb. Vizsgáljuk meg jobban, hogy mi történik akkor, ha $+1$ egységnyi bőrt lehet felhasználni. Mivel s_1 nembázis változó, a cég megvásárolja a $+1$ egységnyi bőrt is. Mivel s_2 sincs a bázisban, ezért a cég továbbra is igénybe vesz minden rendelkezésre álló munkaórát. Ez azt jelenti, hogy a nyereség 1\$-ral való növekedése a bőr beszerzési költségének emelkedése ($+1$ egységnyi bőr beszerzése) mellett következik be. Ha a nyereség 1\$-ral növekszik, akkor a bevételnek $1 + 5 = 6$\$-ral kellett emelkednie. Ezért az a legnagyobb ár, amit $+1$ egységnyi bőrért még fizetni érdemes, 6\$ (nem 1\$).

Ugyanezt másképpen is beláthatjuk: Ha a jelenlegi 5\$-os áron szerezzük be a $+1$ egységnyi bőrt, akkor a nyereség növekedése $y_1 = 1\$$. Ha viszont a $+1$ egységnyi bőr beszerzési ára $6\$ = 5\$ + 1\$$, akkor a nyereség növekedése $1\$ - 1\$ = 0\$$. Ezért 6\$ az a legmagasabb ár, amit $+1$ egységnyi bőr beszerzéséért még fizeni érdemes.

Hasonlóképpen, az a legmagasabb ár, amit $+1$ óra szakmunkáért fizetni érdemes y_2+ (egy óra szakmunka költsége) $= 1 + 10 = 11\$$. Ebben a feladatban azt láttuk, hogy egy erőforrás árnyékára azt a *többletköltséget* jelenti, amit $+1$ egységnyi erőforrás igénybevételéért *az eredeti költség felett* még fizetni érdemes.

Az előző két feladat azt mutatja, hogy egy $\leq$ típusú korlátozó feltételhez tartozó árnyékár interpretációja gondos elemzést igényel. Megismételjük, hogy maximumfeladat esetén az árnyékár az az érték, amivel a célfüggvény értéke növekszik, amikor a szóban forgó korlát jobb oldalát 1-gyel növeljük.

A következő példával a $\geq$, illetve egyenlőség típusú korlátozó feltételekhez tartozó árnyékárak interpretációját mutatjuk be.

5. PÉLDA A Steelco, egy acélipari cég, 100 tonna acél gyártására kapott megrendelést. A szállítmány nikkeltartalma legalább 3.5 tonna, széntartalma legfeljebb 3 tonna, mangántartalma pedig pontosan 4 tonna kell hogy legyen. A cég bevétele 20\$/tonna. A cég négyféle ötvözettel tudja teljesíteni a megrendelést, ezek kémiai összetétele a 28. táblázatban látható. A cég maximalizálni akarja a megrendelésből származó nyereséget (bevétel – költség). Írjuk fel a megfelelő LP feladatot! Magyarázzuk meg a különböző korlátozó feltételekhez tartozó árnyékárak jelentését!

Megoldás Jelöljük x_i-vel az i-edik ötvözet mennyiségét a szállítmányban (tonnában kifejezve)! Ekkor a következő LP feladatot kell megoldani:

$$
\begin{array}{lll}
\max & z=(20-12)x_1+(20-10)x_2+(20-8)x_3+(20-6)x_4 & \\
\text{f.h.} & 0.06x_1+0.03x_2+0.02x_3+0.01x_4 \geq 3.5 & \text{(nikkel korlát)} \\
& 0.03x_1+0.02x_2+0.05x_3+0.06x_4 \leq 3 & \text{(szén korlát)} \\
& 0.08x_1+0.03x_2+0.02x_3+0.01x_4 = 4 & \text{(mangán korlát)} \\
& x_1+\quad x_2+\quad x_3+\quad x_4 = 100 & \text{(mennyiség = 100 tonna)} \\
& x_1,x_2,x_3,x_4 \geq 0 &
\end{array}
$$

Az s_2 maradékváltozó, valamint az a_1, a_3 és a_4 mesterséges változók bevezetése, továbbá az e_1 feleslegváltozó kivonása után a következő optimális megoldást kapjuk: $z=1000$, $s_2=0.25$, $x_1=25$, $x_2=62.5$, $x_4=12.5$, $e_1=0$, $x_3=0$. Az optimális célfüggvény az alábbi

$$z+400e_1+(M-400)a_1+(M+200)a_3+(M+16)a_4=1000$$

Felhasználva a (31), (31′) és (31″) összefüggéseket, azt kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
\text{a nikkel korlát árnyékára} &= -(e_1 \text{ együtthatója az optimális célfüggvényben}) \\
&= -400 \\
\text{a szén korlát árnyékára} &= s_2 \text{ együtthatója az optimális célfüggvényben} \\
&= 0 \\
\text{a mangán korlát árnyékára} &= (a_3 \text{ együtthatója az optimális célfüggvényben}) - M \\
&= 200 \\
\text{a szállított mennyiség árnyékára} &= (a_4 \text{ együtthatója az optimális célfüggvényben}) - M \\
&= 16
\end{aligned}
$$

28. TÁBLÁZAT Az acélfajták adatai

	1. ötvözet	2. ötvözet	3. ötvözet	4. ötvözet
Nikkel	6%	3%	2%	1%
Szén	3%	2%	5%	6%
Mangán	8%	3%	2%	1%
Költség/tonna	12\$	10\$	8\$	6\$

Az 5.3. alfejezetben ismertetett érzékenységvizsgálati eljárást alkalmazva megmutatható, hogy $3.46 \leq b_1 \leq 3.6$ esetén nem változik az optimális bázis. Mindaddig, amíg a nikkel korlát ebben a tartományban marad, a korlát Δb_1-gyel való növelése $-400\Delta b_1$-vel fogja növelni a cég nyereségét. Például, ha 3.55 tonnára emeljük a nikkel korlátot ($\Delta b_1 = 0.05$), akkor a cég nyeresége $-400(0.05) = -20$\$-ral fog „növekedni" (valójában csökkenni). A nikkel korlát árnyékára negatív, hiszen a jobb oldal növelése megnehezíti a követelmény teljesítését. A nikkel korlát növelése valójában arra kényszeríti a céget, hogy többet szállítson az 1. típusú drága ötvözetből. Emiatt emelkednek a költségek, és csökken a nyereség. Ahogyan azt már láttuk (egy maximumfeladat esetén), egy $\geq$ típusú korlátozó feltételhez tartozó árnyékár szükségképpen nempozitív, hiszen a $\geq$ korlát jobb oldalának emelése leszűkíti a lehetséges pontok halmazát. Emiatt az optimális z érték vagy csökken, vagy pedig változatlan marad. Az 5.3. alfejezetben ismertetett érzékenységvizsgálati eljárás azt adja, hogy $2.75 \leq b_2 \leq \infty$ esetén nem változik az optimális bázis. Amint azt korábban állítottuk, a szén korlát árnyékára 0. Ez azt jelenti, hogy nem változik a cég profitja, amikor a szénmennyiség felső korlátját módosítjuk. Ez azért logikus, mert az eredeti optimális megoldásban $2.75 < 3$ tonna a széntartalom. Ezért a szén korlát enyhítése (emelése) esetén sem tudja csökkenteni a cég a költségeit, tehát a nyereség értéke nem változik.

Az érzékenységvizsgálati eljárásból adódik, hogy $3.83 \leq b_3 \leq 4.07$ esetén változatlan marad az optimális bázis. Mivel a harmadik (mangán) korlát árnyékára 200, ezért a korlát Δb_3-mal való emelése $200\Delta b_3$-mal fogja emelni a nyereséget mindaddig, amíg a mangán korlát ebben a tartományban marad. Például, ha 4.05 tonnára emeljük a mangán korlátot ($\Delta b_3 = 0.05$), akkor $(0.05)200 = 10$\$-ral növekszik a nyereség.

Ugyancsak az érzékenységvizsgálati eljárásból következik, hogy $91.67 \leq b_4 \leq 103.12$ esetén változatlan marad az optimális bázis. Mivel a negyedik (megrendelés méret) korláthoz tartozó árnyékár 16, a megrendelt mennyiség Δb_4-gyel történő emelése $16\Delta b_4$-gyel növeli a nyereséget (f.h. a nikkelre, a szénre és a mangánra vonatkozó korlátok nem változnak). Például egy 103 tonnás megrendelés nyeresége $1000 + 3(16) = 1048$\$ lenne, f.h. továbbra is ≥ 3.5 tonna nikkel, ≤ 3 tonna szén és pontosan 4 tonna mangán az előírás.

Ebben a feladatban mindkét egyenlőség alakú korlátozó feltétel árnyékára pozitív volt. Tudjuk azonban, hogy egy egyenlőség alakú korlátozó feltételhez tartozó duális változó értéke negatív is lehet. Ilyenkor az árnyékár is negatív. Ennek bemutatásához, képzeljük el, hogy a cég megrendelője pontosan 4.5 tonna mangánt ír elő. Mivel $4.5 > 4.07$, változni fog az optimális bázis. Újra megoldva az LP feladatot, azt kapjuk, hogy a mangán korláthoz tartozó árnyékár új értéke -54.55. Ez azt jelenti, hogy a megkövetelt mangántartalom emelése esetén az acélipari cég nyeresége csökkenni fog.

Feladatok

A csoport

1. Bizonyítsuk be a (37) állítást a dualitás-tétel segítségével!

2. A következő kérdések a Sugarco problémával kapcsolatosak (5.3. alfejezet, 6. feladat):

(a) Számísuk ki a Sugarco problémához tartozó árnyékárakat!

(b) Mekkora lenne a cég nyeresége, ha 60 deka cukrot lehetne felhasználni?

(c) És ha 40 dekát?

(d) Mekkora lenne a nyereség 30 deka cukor esetén?

3. Egy minimumfeladattal foglalkozunk, és növeljük egy $\geq$ alakú korlátozó feltétel jobb oldalát. Mi történhet az optimális z értékkel?

4. Egy minimumfeladattal foglalkozunk, és növeljük egy $\leq$ alakú korlátozó feltétel jobb oldalát. Mi történhet az optimális z értékkel?

5. Egy cég kétféle terméket gyárt (1 és 2). Az 1. termék eladási egységára 15\$, a 2. terméké 25\$. Mindkét termék előállításához nyersanyagra és kétféle (szakképzett, illetve szakképzetlen) munkára van szükség (lásd 29. táblázat). Jelenleg 100 óra szakmunka, 70 óra szakképzetlen munka és 30 egység nyersanyag áll rendelkezésre. Marketing célok miatt a 2. termékből legalább 3 egységet kell gyártani.

29. TÁBLÁZAT

	1. termék	**2. termék**
Szakmunka	3 óra	4 óra
Szakképzetlen munka	2 óra	3 óra
Nyersanyag	1 egység	2 egység

(a) Magyarázzuk meg, hogy miért az árbevétel maximalizálása a cél!

(b) A szóban forgó LP feladat a következő

$$\begin{aligned}
\max\ z &= 15x_1 + 25x_2 \\
\text{f.h.}\quad 3x_1 + 4x_2 &\le 100 \quad \text{(szakmunka korlát)} \\
2x_1 + 3x_2 &\le 70 \quad \text{(szakképzetlen munka korlát)} \\
x_1 + 2x_2 &\le 30 \quad \text{(nyersanyag korlát)} \\
x_2 &\ge 3 \quad \text{(a 2. termék korlátja)} \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}$$

Az optimális tábla célfüggvénye az alábbi:

$$z + 15s_3 + 5e_4 + (M-5)a_4 = 435$$

Az LP feladat optimális megoldása $z = 435$, $x_1 = 24$, $x_2 = 3$. Számítsuk ki valamennyi korlát árnyékárát, és magyarázzuk meg a jelentésüket! Mennyit lenne hajlandó fizetni a cég $+1$ munkaóráért a két különböző munkatípus esetén? Mennyit lenne hajlandó fizetni $+1$ egység nyersanyagért?

(c) Mekkora lenne a cég bevétele, ha 35 egység nyersanyag állna rendelkezésre, f.h. nem változik az optimális bázis (megmutatható, hogy valóban nem változik)?

(d) Változatlan optimális bázis mellett mekkora lenne a cég bevétele, ha 80 óra szakmunka állna rendelkezésre?

(e) Változatlan optimális bázis mellett mekkora lenne a cég bevétele, ha a 2. termékből legalább 5 egységet kellene gyártani? Mekkora lenne, ha legalább 2 egység lenne előírva?

6. Tegyük fel, hogy az 5. feladatban szereplő cég sem munkaerővel, sem pedig nyersanyaggal nem rendelkezik, de megvásárolhatja ezeket a következő áron: legfeljebb 100 óra szakmunka költsége 3\$/óra; legfeljebb 70 óra szakképzetlen munka díja 2\$/óra; legfeljebb 30 egységnyi nyersanyag ára egységenként 1\$. A cég maximalizálni akarja a nyereséget. Mutassuk meg, hogy a problémát az alábbi LP feladat írja le!

$$\begin{aligned}
\max\ z &= x_1 + 5x_2 \\
\text{f.h.}\quad 3x_1 + 4x_2 &\le 100 \\
2x_1 + 3x_2 &\le 70 \\
x_1 + 2x_2 &\le 30 \\
x_2 &\ge 3 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}$$

Az LP feladat optimális célfüggvénye

$$z + 1.5x_1 + 2.5s_3 + Ma_4 = 75$$

az optimális megoldás pedig $z = 75$, $x_1 = 0$, $x_2 = 15$. Az (a) és (b) kérdések megválaszolásakor tételezzük fel, hogy az optimális bázis változatlan marad.

(a) A cég mennyit lenne hajlandó fizetni $+1$ egységnyi nyersanyagért?

(b) Mennyit lenne érdemes $+1$ óra szakmunkáért, illetve szakképzetlen munkáért fizetni? (Fontoljuk meg a választ!)

7. Válaszoljuk meg a Dorian problémával (5.3. alfejezet 8. feladat) kapcsolatos következő kérdéseket!

(a) Mekkora lenne a Dorian költsége 40 millió MJN elérése esetén?

(b) Mekkora lenne a Dorian költsége, ha mindössze 20 millió MJN elérésére lenne igény?

8. Ezt a feladatot elsősorban azoknak javasoljuk, akik nehezen tudják elképzelni, hogy egy egyenlőség alakú korlátozó feltételhez tartozó árnyékár kötetlen előjelű. Tekintsük az alábbi két LP feladatot:

$$\textbf{(LP1)}\quad \begin{aligned}
\max\ z &= x_2 \\
\text{f.h.}\quad x_1 + x_2 &= 2 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}$$

$$\textbf{(LP2)}\quad \begin{aligned}
\max\ z &= x_2 \\
\text{f.h.}\quad -x_1 - x_2 &= -2 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}$$

Melyik feladat korlátozó feltételének lesz pozitív árnyékára? Melyiknek lesz negatív árnyékára?

B csoport

9. A Dakota probléma esetén tegyük fel, hogy 22 felületkezelési munkaóra és 9 asztalos-munkaóra áll rendelkezésre. Mekkora az új optimális z érték?

10. Az étrendi problémánál tételezzük fel, hogy legalább 8 egység csokoládé és legalább 9 egység cukor elfogyasztása szükséges (a többi követelmény nem változik). Mekkora az új optimális z érték?

5.8. Dualitás és érzékenységvizsgálat

A dualitás-tétel bizonyítása során hangsúlyoztuk a következő eredményt: *Legyen BV egy bázisváltozókból álló lehetséges bázis. BV akkor és csak akkor optimális (tehát pontosan akkor nemnegatív a célfüggvény valamennyi együtthatója), ha a hozzátartozó* $\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1}$ *duál megoldás duál lehetséges.*

Ennek az eredménynek a segítségével a korábbiaktól eltérő módon is elvégezhetjük az alábbi típusú érzékenységvizsgálatokat (vö. az 5.3. alfejezet elején található listával).

1. módosítás A célfüggvényben megváltozik egy nembázis változó együtthatója.

4. módosítás Megváltozik egy nembázis változó oszlopa.

5. módosítás Új tevékenységet vezetünk be.

A BV bázis mindegyik esetben lehetséges marad. BV akkor lesz továbbra is optimális, ha a hozzátartozó célfüggvénysor nemnegatív marad. Mivel a primál optimalitás a duál lehetségességgel ekvivalens, ezért *a fenti változások után pontosan akkor marad az aktuális bázis optimális, ha az aktuális duál megoldás*, tehát $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$, *duál lehetséges marad.* Ha az aktuális duál megoldás nem marad duál lehetséges, akkor BV szuboptimális lesz, és új optimális megoldást kell keresni.

Az érzékenységvizsgálatnak ezt a dualitáson alapuló megközelítését úgy mutatjuk be, hogy átdolgozzuk az 5.3. alfejezet néhány illusztrációját. Emlékezzünk arra, hogy az alábbi Dakota problémát vizsgáltuk:

$$\begin{array}{llll}
\max\ z = & 60x_1 + \ 30x_2 + \ 20x_3 & & \\
\text{f.h.} & 8x_1 + \ \ 6x_2 + \ \ \ \ x_3 \le 48 & & \text{(faanyag korlát)} \\
 & 4x_1 + \ \ 2x_2 + 1.5x_3 \le 20 & & \text{(felületkezelési korlát)} \\
 & 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \le 8 & & \text{(asztalosmunka korlát)} \\
 & \qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0 & &
\end{array}$$

Az optimális megoldás a következő volt: $z = 280$, $s_1 = 24$, $x_3 = 8$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$. Az optimális megoldásban az egyetlen nembázis döntési változó x_2 (asztalok). A Dakota probléma duálisa

$$\begin{array}{llll}
\min\ w = & 48y_1 + \ 20y_2 + \ \ 8y_3 & & \\
\text{f.h.} & 8y_1 + \ \ 4y_2 + \ \ 2y_3 \ge 60 & & \text{(íróasztal korlát)} \\
 & 6y_1 + \ \ 2y_2 + 1.5y_3 \ge 30 & & \text{(asztal korlát)} \\
 & y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 \ge 20 & & \text{(szék korlát)} \\
 & \qquad y_1, y_2, y_3 \ge 0 & &
\end{array}$$

Emlékeztetünk arra, hogy a duál optimális megoldás (és ezáltal a korlátokhoz tartozó árnyékárak értékei) $y_1 = 0$, $y_2 = 10$, $y_3 = 10$. Most megmutatjuk, hogy hogyan alkalmazhatjuk dualitással kapcsolatos tudásunkat az érzékenységvizsgálatban.

6. PÉLDA Módosítani akarjuk egy nembázis változó együtthatóját a célfüggvényben. Jelöljük c_2-vel az x_2 (asztalok) együtthatóját a Dakota probléma célfüggvényében. Más szóval c_2 egy asztal eladási ára. c_2 mely értékei esetén marad optimális az aktuális bázis?

Megoldás Ha $y_1 = 0$, $y_2 = 10$, $y_3 = 10$ továbbra is duál lehetséges, akkor az aktuális bázis – és valamennyi változó értéke – változatlan marad. Vegyük észre, hogy amikor x_2 együtthatója a célfüggvényben módosul, akkor nem változik az első és a harmadik duál korlátozó feltétel, változik viszont a második (asztalok) duál korlát a következőképpen:

$$6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 \geq c_2$$

Ha $y_1 = 0$, $y_2 = 10$, $y_3 = 10$ kielégítik ezt az egyenlőtlenséget, akkor a duál lehetségesség (és ezzel a primál optimalitás) továbbra is teljesül. Tehát optimális marad az aktuális bázis, ha c_2-re $6(0) + 2(10) + 1.5(10) \geq c_2$, vagyis $c_2 \leq 35$ teljesül. Ez azt mutatja, hogy $c_2 \leq 35$ esetén nem változik az optimális bázis. Fordítva, ha $c_2 > 35$, akkor az adott bázis elveszti optimalitását. Ugyanezt az eredményt kaptuk az 5.3. alfejezetben is.

Az árnyékárak segítségével másképpen is interpretálhatjuk ezt az eredményt. Az árnyékárak segítségével kiszámíthatjuk, hogy egy asztal előállításához mekkora értékben kell erőforrásokat felhasználni (lásd 30. táblázat). Mivel egy asztalhoz 35$ összértékű erőforrásra van szükség, csak akkor növelheti az asztalgyártás a Dakota nyereségét, ha egy asztal eladási ára 35$-nál nagyobb. Tehát $c_2 > 35$ esetén az aktuális bázis elveszti optimalitását, $c_2 \leq 35$ esetén viszont optimális marad.

30. TÁBLÁZAT Miért nyereséges az asztalgyártás > 35\$/asztal esetén

Egy asztalhoz szükséges erőforrás	Az erőforrás árnyékára ($)	Felhasznált erőforrás	Felhasznált erőforrás értéke ($)
Faanyag	0	6 egységnyi	$0(6) = 0$
Felületkezelés	10	2 óra	$10(2) = 20$
Asztalosmunka	10	1.5 óra	$10(1.5) = 15$
			Összesen: $= 35$

7. PÉLDA Módosítani akarjuk egy nembázis változóhoz tartozó tevékenység oszlopvektorát. Tegyük fel, hogy egy asztal előállításához 5 egységnyi faanyagra, 2 munkaóra felületkezelésre és 2 óra asztalosmunkára van szükség, az asztal eladási ára pedig 43$. Optimális marad-e az aktuális bázis?

Megoldás Az „asztalok” nembázis változó oszlopának módosításakor nem változik az első és a harmadik duál korlátozó feltétel, módosul viszont a második, a következőképpen:

$$5y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 43.$$

Mivel $y_1 = 0$, $y_2 = 10$, $y_3 = 10$ nem elégíti ki az új második duál korlátot, nem teljesül a duál lehetségesség, és az aktuális bázis elveszti optimalitását. Az árnyékárak oldaláról nézve logikus ez az eredmény (lásd 31. táblázat). Mivel minden egyes asztalhoz 40$ összértékű erőforrásra van szükség, és az asztal eladási ára 43$, asztalonként $43 - 40 = 3$\$-ral nő Dakota nyeresége. Ezért a régi bázis már nem optimális, és x_2 (asztalok) bázisváltozó lesz az új optimális megoldásban.

8. PÉLDA Egy új tevékenységet akarunk bevezetni. Tegyük fel, hogy a Dakota zsámolyok (x_4) gyártását fontolgatja. Egy zsámoly eladási ára 15$, előállításához 1 egységnyi faanyagra, 1 munkaóra felületkezelésre és 1 óra asztalosmunkára van szükség. Optimális marad-e az aktuális bázis?

31. TÁBLÁZAT
Árnyékárak az asztalgyártásról szóló döntésben (40$/asztal)

Egy asztalhoz szükséges erőforrás	Az erőforrás árnyékára ($)	Felhasznált erőforrás	Erőforrás értéke ($)
Faanyag	0	5 egységnyi	$0(5) = 0$
Felületkezelés	10	2 óra	$10(2) = 20$
Asztalosmunka	10	2 óra	$10(2) = 20$
			Összesen: $= 40$

Megoldás Az új termék (zsámolyok) bevezetésekor nem változik a három duál korlátozó feltétel, de az új x_4 változó miatt megjelenik egy (a zsámolyokhoz tartozó) negyedik duál korlátozó feltétel, mégpedig a következő.

$$y_1 + y_2 + y_3 \geq 15$$

Az aktuális bázis optimális marad, ha $y_1 = 0$, $y_2 = 10$, $y_3 = 10$ kielégítik az új duál korlátot. Mivel $0 + 10 + 10 \geq 15$, nem változik az optimális bázis. Az árnyékárak nyelvén fogalmazva azt mondhatjuk, hogy egy zsámolyba $1(0) = 0$$ értékű faanyag, $1(10) = 10$$ értékű felületkezelési munka és $1(10) = 10$$ értékű asztalosmunka épül be. Mivel egy zsámolyhoz $0+10+10 = 20$$ összértékű erőforrásra van szükség, az eladási ára viszont mindössze 15$, a Dakotának nem érdemes zsámolyokat gyártania, tehát nem változik az optimális bázis.

Feladatok

A csoport

1. Tegyük fel, hogy a Dakota problémában egy számítógépasztal eladási ára 35$, előállításához 6 egységnyi faanyagra, 2 munkaóra felületkezelésre és 1 óra asztalosmunkára van szükség. Optimális marad-e az aktuális bázis? Magyarázzuk meg az eredményt az árnyékárak segítségével!

2. A következő kérdések a Cukoripari cég problémájára vonatkoznak (5.3. alfejezet 6. feladat):

(a) Az 1. típusú cukorkából származó nyereség mely értékeinél marad optimális az aktuális bázis?

(b) Optimális marad-e az aktuális bázis, ha az 1. típusú cukorkához 0.5 deka cukorra és 0.75 deka csokoládéra van szükség?

(c) Egy 4. típusú cukorka gyártását fontolgatjuk. A 4. típusú cukorkából 10 cent profit származna, előállításához 2 deka cukorra és 1 deka csokoládéra lenne szükség. Optimális marad-e az aktuális bázis?

3. Tegyük fel, hogy a Dakota problémában egy íróasztal eladási ára továbbra is 60$, viszont az előállításához 8 egységnyi faanyagra, 4 munkaóra felületkezelésre és 15 óra asztalosmunkára van szükség. Állapítsuk meg, hogy optimális marad-e az aktuális bázis? Hol a hiba a következő okfejtésben?
Az íróasztalokhoz tartozó oszlop módosítása változatlanul hagyja a második és harmadik duál korlátozó feltételt, az első duál korlát pedig a következőképpen változik:

$$8y_1 + 4y_2 + 15y_3 \geq 60$$

Mivel $y_1 = 0$, $y_2 = 10$, $y_3 = 10$ kielégíti az új duál korlátot, az optimális bázis nem változik.

5.9. Komplementaritás

A komplementaritási tétel a primál, illetve duál optimális megoldások kapcsolatáról szóló fontos eredmény. Tegyük fel, hogy a primál feladat egy normál maximumfeladat $x_1, x_2, \dots, x_n$ változókkal és m $\leq$ típusú korlátozó feltétellel. Legyenek $s_1, s_2, \dots, s_m$ a primál feladat maradék-változói. Ekkor a duál feladat egy normál minimumfeladat $y_1, y_2, \dots, y_m$ változókkal és n $\geq$ típusú korlátozó feltétellel. Legyenek $e_1, e_2, \dots, e_n$ a duál feladat felesleg-változói. Most megfogalmazzuk a komplementaritási tétel állítását.

2. TÉTEL

Legyen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

egy primál lehetséges megoldás, $\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_m]$ pedig egy duál lehetséges megoldás. Ahhoz, hogy $\mathbf{x}$ primál optimális és $\mathbf{y}$ duál optimális legyen, szükséges és elégséges, hogy az alábbi két összefüggés teljesüljön:

$$s_i y_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \tag{38}$$

$$e_j x_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \tag{39}$$

A komplementaritási tétel bizonyítását az alfejezet végén, a 4. feladatban fogjuk vázolni, előbb azonban megvilágítjuk a tétel szemléletes jelentését.

(38)-ból az következik, hogy az optimális primál, illetve duál megoldásokra érvényesek az alábbi következtetések:

$$\text{ha az } i\text{-edik primál maradékváltozó} > 0, \text{ akkor az } i\text{-edik duál változó} = 0 \tag{40}$$

$$\text{ha az } i\text{-edik duál változó} > 0, \text{ akkor az } i\text{-edik primál maradékváltozó} = 0 \tag{41}$$

(39)-ből pedig az következik, hogy az optimális primál és duál változókra érvényesek az alábbi következtetések

$$\text{ha a } j\text{-edik duál felesleg-változó} > 0, \text{ akkor a } j\text{-edik primál változó} = 0 \tag{42}$$

$$\text{ha a } j\text{-edik primál változó} > 0, \text{ akkor a } j\text{-edik duál felesleg-változó} = 0 \tag{43}$$

(40) és (42) azt jelenti, hogy ha *egy primál vagy egy duál korlát nem aktív* (*tehát* $s_i > 0$ *vagy* $e_j > 0$), *akkor a másik (ún. komplementer) feladat megfelelő változójának értéke szükségképpen* 0. Innen származik a **komplementaritás** elnevezés.

A komplementaritási tétel jelentését a Dakota problémán keresztül világítjuk meg. A primál feladat

$$\begin{array}{llll}
\max & z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 & & \\
\text{f.h.} & 8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 & & \text{(faanyag korlát)} \\
 & 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20 & & \text{(felületkezelési korlát)} \\
 & 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8 & & \text{(asztalosmunka korlát)} \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & &
\end{array}$$

alakú, a duál feladat pedig a következő:

$$\begin{array}{lrll}
\min & w = 48y_1 + \ 20y_2 + \ \ 8y_3 & & \\
\text{f.h.} & 8y_1 + \ \ 4y_2 + \ \ 2y_3 \geq 60 & & \text{(íróasztal korlát)} \\
 & 6y_1 + \ \ 2y_2 + 1.5y_3 \geq 30 & & \text{(asztal korlát)} \\
 & y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 \geq 20 & & \text{(szék korlát)} \\
 & y_1, y_2, y_3 \geq 0 & &
\end{array}$$

Az optimális primál megoldás

$$\begin{aligned}
z &= 280, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 8 \\
s_1 &= 48 - (8(2) + 6(0) + 1(8)) = 24 \\
s_2 &= 20 - (4(2) + 2(0) + 1.5(8)) = 0 \\
s_3 &= 8 - (2(2) + 1.5(0) + 0.5(8)) = 0
\end{aligned}$$

A duál optimális megoldás pedig

$$\begin{aligned}
w &= 280, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 10, \quad y_3 = 10 \\
e_1 &= (8(0) + 4(10) + 2(10)) - 60 = 0 \\
e_2 &= (6(0) + 2(10) + 1.5(10)) - 30 = 5 \\
e_3 &= (1(0) + 1.5(10) + 0.5(10)) - 20 = 0
\end{aligned}$$

alakú. A Dakota probléma esetén (38) azt jelenti, hogy

$$s_1 y_1 = s_2 y_2 = s_3 y_3 = 0$$

ami valóban teljesül az optimális primál és duál megoldásokra. Ugyanakkor (39) jelenlegi alakja

$$e_1 x_1 = e_2 x_2 = e_3 x_3 = 0$$

ami az optimális primál és duál megoldásokra valóban teljesül.

Lássuk ezek után a (40)–(43) összefüggések interpretációját! (40) azt jelenti, hogy mivel a primál optimális megoldásban $s_1 > 0$, ezért a duál optimális megoldásban $y_1 = 0$. A Dakota probléma nyelvén ezt úgy mondjuk, hogy pozitív faanyagmaradék esetén a faanyag árnyékára 0 kell hogy legyen. Mivel a pozitív faanyagmaradék azt jelenti, hogy a szükségesnél több faanyag áll rendelkezésre, ezért az extra faanyag valóban értéktelen lenne.

(41)-ből az következik, hogy mivel a duál optimális megoldásban $y_2 > 0$, ezért a primál optimális megoldásban $s_2 = 0$-nak kell teljesülnie. Ez érthető, hiszen $y_2 > 0$ azt jelenti, hogy a felületkezelési erőforrás korlát növelése hasznos lenne. Ez azonban csak úgy fordulhat elő, ha a jelenlegi kapacitást teljes mértékben kihasználjuk (vagyis $s_2 = 0$).

A (42) összefüggés szerint, mivel a duál optimális megoldásban $e_2 > 0$, ezért a primál optimális megoldásban $x_2 = 0$-nak kell teljesülnie. Ez logikus, mert $e_2 = 6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 - 30$. Mivel y_1, y_2 és y_3 az erőforrások árnyékárai, e_2 felírható a következőképpen:

$$e_2 = (\text{egy asztalhoz felhasznált erőforrások értéke}) - (\text{egy asztal eladási ára})$$

Ezért $e_2 > 0$ esetén az asztalok eladási ára alacsonyabb, mint az elkészítésükhöz szükséges erőforrások összértéke. Ez azt jelenti, hogy nem érdemes asztalt gyártani (vagy, ami ezzel ekvivalens, $x_2 = 0$). Tehát amikor a duál optimális megoldásban $e_2 > 0$, akkor a primál optimális megoldásban $x_2 = 0$-nak kell teljesülnie.

Vegyük észre, hogy a Dakota problémában (43) azt jelenti, hogy amikor a primál optimális megoldásban $x_1 > 0$, akkor a duál optimális megoldásban $e_1 = 0$-nak kell teljesülnie. Ez az állítás a következő fontos tényt tükrözi. *A primál optimális bázis bármelyik x_j változója esetén az 1 egységnyi termék előállításából származó határbevétel értéke ugyanannyi, mint az a határköltség, amely az 1 egységnyi termékhez szükséges erőforrások felhasználásából származik.* Ez abból következik, hogy az optimális primál tábla célfüggvényében mindegyik bázisváltozó együtthatója 0. Röviden fogalmazva, a (43) összefüggés annak a jól ismert közgazdasági elvnek az LP változata, miszerint optimális termelési stratégia esetén a határ-bevétel és a határ-költség azonos.

Konkrétabban, vegyük észre, hogy $x_1 > 0$ azt jelenti, hogy íróasztalok is szerepelnek az optimális bázisban. Ekkor

$$+1 \text{ íróasztal gyártásából származó határ-bevétel} = 60\$$$

Ahhoz, hogy az íróasztalgyártással kapcsolatos határköltséget (az árnyékárak segítségével) kiszámítsuk, megjegyezzük, hogy

$$\begin{aligned}
&+1 \text{ íróasztal faanyagköltsége} = 8(0) = 0\$\\
&+1 \text{ íróasztalhoz szükséges felületkezelési költség} = 4(10) = 40\$\\
&+1 \text{ íróasztalhoz szükséges asztalosmunka költség} = 2(10) = 20\$\\
&+1 \text{ íróasztal határköltsége} = 0 + 40 + 20 = 60\$
\end{aligned}$$

Tehát, íróasztalok esetén a határ-bevétel és a határ-költség azonos.

LP feladatok megoldása a komplementaritás segítségével

Amikor ismerjük a primál vagy a duál feladat optimális megoldását, előfordulhat, hogy a komplementaritási tétel segítségével meg tudjuk határozni a másik (komplementer) feladat megoldását. Tegyük fel, például, hogy megkaptuk a Dakota probléma optimális megoldását, ami nem más, mint $z = 280$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 8$, $s_1 = 24$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$. Próbáljuk megkeresni a duális feladat optimális megoldását a 2. tétel segítségével! Mivel $s_1 > 0$, (40) szerint a duál optimális megoldásban $y_1 = 0$. Mivel $x_1 > 0$ és $x_3 > 0$, (43) következményeként a duál optimális megoldásban $e_1 = 0$ és $e_3 = 0$. Ez azt jelenti, hogy a duál optimális megoldásban az első és a harmadik korlátozó feltétel aktív. Mivel $y_1 = 0$ már ismert, y_2 és y_3 optimális értékeire nézve két egyenletünk van két ismeretlennel. Tehát y_2 és y_3 optimális értékei kielégítik az alábbi egyenleteket:

$$4y_2 + 2y_3 = 60 \qquad \text{és} \qquad 1.5y_2 + 0.5y_3 = 20$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldásával azt kapjuk, hogy a duál optimális megoldásban $y_2 = 10$ és $y_3 = 10$. Tehát a komplementaritás tétellel megkaptuk a duál feladat $y_1 = 0$, $y_2 = 10$, $y_3 = 10$ optimális megoldását. (A dualitás tételből tudjuk, természetesen, hogy a duál optimális célfüggvény értéke $\bar{w} = 280$.)

Feladatok

A csoport

1. Glassco, egy üvegipari cég poharakat gyárt: boros-, sörös-, pezsgős- és whiskyspoharat. Mindegyik pohárról tudjuk, hogy az előállításához mennyi üvegre van szükség, mennyi időt kell eltöltenie az öntőműhelyben, illetve a csomagolórészlegnél. A különböző poharak erőforrásigényét a 32. táblázat tartalmazza. Jelenleg az öntőműhely kapacitása 600 perc, a csomagolórészlegé 400 perc, a rendelkezésre álló üvegmennyiség pedig 500 egység. A bevétel maximalizálásához a következő LP feladatot kell megoldani:

$$\max z = 6x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 20x_4$$

$$\begin{aligned}
\text{f.h.}\quad 4x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 10x_4 &\le 600 && \text{(öntödei korlát)}\\
x_1 + x_2 + 3x_3 + 40x_4 &\le 400 && \text{(csomagolási korlát)}\\
3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 &\le 500 && \text{(nyersanyag korlát)}\\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0
\end{aligned}$$

Megmutatható, hogy a feladat optimális megoldása $z = \frac{2800}{3}, x_1 = \frac{400}{3}, x_4 = \frac{20}{3}, x_2 = 0, x_3 = 0, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = \frac{280}{3}$.

32. TÁBLÁZAT

	x_1 **Boros-pohár**	x_2 **Sörös-pohár**	x_3 **Pezsgős-pohár**	x_4 **Whiskys-pohár**
Öntési idő (perc)	4	9	7	10
Csomagolási idő	1	1	3	40
Üveg (egység)	3	4	2	1
Eladási ár ($)	6	10	9	20

(a) Írjuk fel a feladat duálisát!

(b) Határozzuk meg a duál feladat optimális megoldását a primál optimális megoldás és a komplementaritás tétel alkalmazásával!

(c) Mutassunk egy-egy példát a (40)–(43) komplementaritási feltételek mindegyikére! Példáinkat az alfejezetben ismertetett módon az árnyékárak segítségével fogalmazzuk meg!

2. Tekintsük az alábbi LP feladatot:

$$\begin{aligned}
\max z &= 5x_1 + 3x_2 + x_3\\
\text{f.h.}\quad 2x_1 + x_2 + x_3 &\le 6\\
x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 7\\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0
\end{aligned}$$

Oldjuk meg a feladat duálisát grafikusan! Ezután oldjuk meg az eredeti feladatot a komplementaritási tétel segítségével!

B csoport

3. Legyen $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad s_1 \quad s_2 \quad s_3]$ a Dakota probléma egyik primál lehetséges, $\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad e_1 \quad e_2 \quad e_3]$ pedig egy duál lehetséges pontja.

(a) Szorozzuk meg a (standard alakú) primál feladat i-edik korlátozó feltételét y_i-vel, és adjuk össze a kapott korlátozó feltételeket.

(b) Szorozzuk meg a (standard alakú) duál feladat j-edik korlátozó feltételét x_j-vel, és összegezzük őket.

(c) Számítsuk ki az (a) feladat eredményének és a (b) feladat eredményének különbségét.

(d) A (c) feladat eredményének és a dualitás-tételnek az alkalmazásával igazoljuk, hogy ha $\mathbf{x}$ primál, $\mathbf{y}$ pedig duál optimális, akkor (38) és (39) teljesülnek.

(e) A (c) feladat eredményét felhasználva mutassuk meg, hogy ha (38) és (39) teljesül, akkor $\mathbf{x}$ primál optimális, $\mathbf{y}$ pedig duál optimális. (*Útmutatás*: Alkalmazzuk a 2. segédtételt)

5.10. A duál szimplex módszer

Amikor a szimplex módszerrel oldunk meg egy maximumfeladatot (amit a továbbiakban primál feladatnak nevezünk), akkor egy primál lehetséges megoldással indítunk (hiszen az eredeti tábla jobb oldala nemnegatív). Mivel az induló tábla célfüggvényében negatív együttható is található, a primál induló megoldás nem duál lehetséges. Báziscserék sorozatát hajtjuk végre, miközben a primál lehetségességet megőrizzük, és akkor jutunk optimális megoldáshoz, amikor a duál lehetségességet (nemnegatív célfüggvény-sor) is elérjük. Ugyanakkor sokszor egyszerűbb egy LP feladat megoldása, ha olyan táblával indítunk, ahol a célfüggvény valamennyi együtthatója nemnegatív (tehát a tábla duál lehetséges), de legalább az egyik korlátozó feltétel jobb oldalán negatív konstans áll (tehát a tábla nem primál lehetséges). A duál szimplex módszer fenntartja a célfüggvény-sor nemnegativitását (tehát a duál lehetségességet), és általában egy olyan táblával ér véget, ahol mindegyik jobb oldali konstans nemnegatív (tehát a tábla primál lehetséges). Ebben az esetben egy optimális megoldáshoz jutottunk. Ezt a módszert azért hívjuk **duál szimplex módszernek**, mert az algoritmus lépései során minden pont duál lehetséges.

Duál szimplex módszer maximumfeladat esetén

1. lépés Mindegyik jobb oldali korlát nemnegatív? Ha igen, akkor egy optimális megoldáshoz jutottunk; ha nem, akkor legalább egy jobb oldali korlát negatív, és a 2. lépés következik.

2. lépés Kiválasztjuk a leginkább negatív bázisváltozót, és ez fog kilépni a bázisból. Ennek a változónak a sora lesz a belépő változó sora. A következőképpen döntjük el, hogy melyik változó lép be a bázisba: Minden olyan x_j változóra, amelynek *negatív* együtthatója van a belépő változó sorában, kiszámítjuk az alábbi hányadost:

$$\frac{x_j \text{ együtthatója a célfüggvényben}}{x_j \text{ együtthatója a belépő változó sorában}}$$

Ezután az a változó fog belépni a bázisba, amelyikre a fenti hányados (abszolút értékben) a legkisebb. Ez a kiválasztás megőrzi a tábla duál lehetségességét (a célfüggvény sorban továbbra is nemnegatív lesz minden együttható). Az új változót elemi sorműveletek sorozatával beléptetjük a bázisba.

3. lépés Ha van olyan korlátozó feltétel, ahol a jobb oldali konstans negatív, és valamennyi változó együtthatója nemnegatív, akor az LP feladatnak nincs primál lehetséges megoldása. Ha nincs ilyen korlátozó feltétel, akkor visszatérünk az 1. lépéshez.

A következő példában nem létezik primál lehetséges megoldás. Tegyük fel, hogy a duál szimplex módszer során az $x_1 + 2x_2 + x_3 = -5$ korlátozó feltételhez jutunk. Mivel $x_1 \geq 0$, $2x_2 \geq 0$ és $x_3 \geq 0$, ezért $x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 0$ és az $x_1 + 2x_2 + x_3 = -5$ feltételnek nem tudunk eleget tenni. Ezért az eredeti LP feladatnak nincs primál lehetséges megoldása.

Most felsorolunk három olyan esetet, ahol a duál szimplex módszer hasznos lehet:

1. Új optimális megoldás előállítása egy új korlátozó feltétel beiktatása után
2. Új optimális megoldás előállítása az LP feladat jobb oldalának megváltoztatása után
3. Normál minimumfeladat megoldása

Új optimális megoldás előállítása egy új korlátozó feltétel beiktatása után

Gyakran alkalmazzuk a duál szimplex módszert olyankor, amikor egy új korlátozó feltétel beiktatása után új optimális megoldást kell meghatározni. Egy új korlát beiktatásakor az alábbi három eset valamelyike következhet be:

1. eset A régi optimális megoldás kielégíti az új feltételt.

2. eset A régi optimális megoldás nem elégíti ki az új korlátozó feltételt, de az új LP feladatnak van primál lehetséges megoldása.

3. eset Az új korlátozó feltétellel kiegészített LP feladatnak nincs primál lehetséges megoldása.

Az 1. esetben az adott optimális megoldás eleget tesz az új korlátozó feltételnek, és továbbra is optimális marad. Ennek bemutatására, képzeljük el, hogy a Dakota problémát kiegészítjük az $x_1+x_2+x_3 \leq 11$ korláttal. A ($z=280, x_1=2, x_2=0, x_3=8$) eredeti optimális megoldás kielégíti ezt a korlátot. Az adott optimális megoldás azért marad az $x_1+x_2+x_3 \leq 11$ korlát beiktatása után is optimális, mert egy új korlátozó feltétel beiktatása után a lehetséges pontok halmaza vagy változatlan marad, vagy pedig szűkebb lesz. Ebből kifolyólag (maximumfeladatról lévén szó) az optimális z érték vagy változatlan marad, vagy pedig csökken, ahogyan azt az 5.7. alfejezetben láttuk. Emiatt, amikor a Dakota problémát az $x_1+x_2+x_3 \leq 11$ korlátozó feltétellel kiegészítjük, az új optimális z érték nem lehet 280-nál nagyobb. Mivel a jelenlegi megoldás továbbra is lehetséges, és $z=280$, ezért a jelenlegi megoldás a kiegészítés után is optimális.

A 2. esetben az aktuális megoldás már nem lesz lehetséges, ezért nem is optimális. Az új optimális megoldást meghatározhatjuk a duál szimplex módszer segítségével. Tegyük fel, hogy a Dakota problémában marketing megfontolások miatt legalább egy asztalt gyártani kell. Ezáltal az $x_2 \geq 1$ új korlátozó feltételhez jutunk. Az eredeti optimális megoldásban $x_2=0$, tehát ez az új feladatban nem lehetséges, ezért nem optimális. Az új optimális megoldás előállítása céljából bevezetünk egy e_4 felesleg-változót, és ezt az $x_2 \geq 1$ korlátból kivonjuk. Ilyen módon az $x_2-e_4=1$ korlátozó feltételhez jutunk. Ezt -1-gyel megszorozva $-x_2+e_4=-1$ adódik, és e_4 lehet az ehhez a korláthoz tartozó bázis-változó. Ezt az új korlátot beiktatva, a 33. táblázathoz jutunk.

33. TÁBLÁZAT
A Dakota probléma „régi” optimális megoldása $x_2 \geq 1$ kikötés mellett

	Bázisváltozó
$z \quad + 5x_2 \qquad\qquad + 10s_2 + 10s_3 \quad = 280$	$z = 280$
$- 2x_2 \quad + s_1 + \ 2s_2 - \ 8s_3 \quad = 24$	$s_1 = 24$
$- 2x_2 + x_3 \quad + \ 2s_2 - \ 4s_3 \quad = 8$	$x_3 = 8$
$x_1 + \frac{5}{4}x_2 \quad - \ \frac{1}{2}s_2 + \ \frac{3}{2}s_3 \quad = 2^*$	$x_1 = 2$
$- x_2 \qquad\qquad + e_4 = -1$	$e_4 = -1$

Mivel egy optimális tábla célfüggvénysorával van dolgunk, ezért minden célfüggvény-együttható nemnegatív, tehát alkalmazhatjuk a duál szimplex módszert. $e_4=-1$ a leginkább negatív bázisváltozó, ezért e_4 fog kilépni a bázisból, és a 4. sor lesz a belépő változó sora. Mivel x_2 az egyetlen olyan változó, melynek a 4. sorban negatív az együtthatója, ezért x_2 fog belépni a bázisba (lásd 34. táblázat).

Ez egy optimális tábla. Tehát, ha kiegészítjük a Dakota problémát az $x_2 \geq 1$ feltétellel, akkor $z=275$, $s_1=26$, $x_3=10$, $x_1=\frac{3}{4}$, $x_2=1$ lesz az új optimális megoldás, és a célfüggvény (tehát Dakota nyeresége) 5$-ral csökken (ez az asztal ún. redukált költsége).

34. TÁBLÁZAT
A Dakota probléma „új” optimális megoldása $x_2 \geq 1$ kikötés mellett

	Bázisváltozó
$z + 10s_2 + 10s_3 + 5e_4 = 275$	$z = 275$
$s_1 + 2s_2 - 8s_3 - 2e_4 = 26$	$s_1 = 26$
$x_3 + 2s_2 - 4s_3 - 2e_4 = 10$	$x_3 = 10$
$x_1 - \frac{1}{2}s_2 + \frac{3}{2}s_3 + \frac{5}{4}e_4 = \frac{3}{4}$	$x_1 = \frac{3}{4}$
$x_2 - e_4 = 1$	$x_2 = 1$

Azt is megtehettük volna, hogy az $x_2 \geq 1$ korláttal kiegészítjük az induló szimplex táblát, és a hagyományos szimplex módszerrel megoldjuk a módosított feladatot. Ebben az esetben egy mesterséges változót kellett volna az $x_2 \geq 1$ korláthoz bevezetni, és valószínűleg nagyszámú bázistranszformációra lett volna szükség. Amikor egy új korlát beiktatása után a duál szimplex módszerrel folytatjuk a feladat megoldását, akkor kihasználjuk azt az előnyt, hogy a célfüggvény együtthatói már nemnegatívak, és a jobb oldali korlátok nagy része szintén nemnegatív. Ez az oka annak, hogy viszonylag kevés báziscsere után megkaphatjuk az optimális megoldást, ha egy új korlát beiktatása után a duál szimplex módszerrel dolgozunk tovább.

A 3. esetben a duál szimplex módszer 3. lépéséhez érve ismerhetjük fel, hogy az LP feladatnak nincs primál lehetséges megoldása. Ennek bemutatása céljából egészítsük ki a Dakota problémát az $x_1 + x_2 \geq 12$ korlátozó feltétellel. Ha kivonjuk az e_4 felesleg-változót ebből a korlátból, akkor

$$x_1 + x_2 - e_4 = 12 \qquad \text{vagy} \qquad -x_1 - x_2 + e_4 = -12$$

adódik. Az eredeti optimális táblát ezzel kiegészítve a 35. táblázatot kapjuk

35. TÁBLÁZAT
A Dakota probléma „régi” optimális megoldása $x_1 + x_2 \geq 12$ feltétel mellett

	Bázisváltozó
$z + 5x_2 + 10s_2 + 10s_3 = 280$	$z = 280$
$-2x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 24$	$s_1 = 24$
$-2x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 = 8$	$x_3 = 8$
$x_1 + 1.25x_2 - 0.5s_2 + 1.5s_3 = 2$	$x_1 = 2$
$-x_1 - x_2 + e_4 = -12$	$e_4 = -12$

Mivel x_1 megjelenik az új korlátozó feltételben, ezért úgy tűnik, hogy x_1 nem lehet a 3. sorhoz tartozó bázisváltozó. Ennek a problémának a kiküszöbölése céljából fejezzük ki x_1-et (és általában az összes bázis változót) az új korlátból úgy, hogy a 4. sorhoz hozzáadjuk a 3. sort. (lásd 36. táblázat). Mivel $e_4 = -10$ a leginkább negatív bázisváltozó, ezért e_4 fog kilépni a bázisból és a 4. sor lesz a belépő változó sora. s_2 az egyetlen olyan változó, melynek a 4. sorban negatív együtthatója van, tehát s_2 kerül be a bázisba, és s_2 lesz a 4. sorhoz tartozó bázis változó (lásd 37. táblázat). Ezután x_3-nak kell kilépni a bázisból, és a

36. TÁBLÁZAT
e_4 a 4. sorhoz tartozó bázisváltozó

	Bázisváltozó
$z + 5x_2 + 10s_2 + 10s_3 = 280$	$z = 280$
$-2x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 24$	$s_1 = 24$
$-2x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 = 8$	$x_3 = 8$
$x_1 + 1.25x_2 - 0.5s_2 + 1.5s_3 = 2$	$x_1 = 2$
$0.25x_2 - 0.5s_2 + 1.5s_3 + e_4 = -10$	$e_4 = -10$

37. TÁBLÁZAT
s_2 a 4. sorban belép a bázisba

	Bázisváltozó
$z + 10x_2 + 40s_3 + 20e_4 = 80$	$z = 80$
$- x_2 + s_1 - 2s_3 + 4e_4 = -16$	$s_1 = -16$
$- x_2 + x_3 + 2s_3 + 4e_4 = -32$	$x_3 = -32$
$x_1 + x_2 - e_4 = 12$	$x_1 = 12$
$-0.5x_2 + s_2 - 3s_3 - 2e_4 = 20$	$e_4 = 20$

2. sor lesz a belépő változó sora. Mivel x_2 az egyetlen változó, melynek a 2. sorban negatív együtthatója van, ezért x_2 lép be a bázisba (lásd 38. táblázat). Most $x_1 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $2s_3 \geq 0$ és $3e_4 \geq 0$, tehát a 3. sor bal oldala mindenképpen nemnegatív, s ezért nem lehet -20. Ezért az $x_1 + x_2 \geq 12$ korláttal kiegészített Dakota problémának nincs primál lehetséges megoldása.

38. TÁBLÁZAT
A Dakota problémának $x_1 + x_2 \geq 12$ feltétel mellett nincs lehetséges megoldása

	Bázisváltozó
$z + 10x_3 + 60s_3 + 60e_4 = -240$	$z = -240$
$- x_3 + s_1 - 4s_3 = 16$	$s_1 = 16$
$x_2 - x_3 - 2s_3 - 4e_4 = 32$	$x_2 = 32$
$x_1 + x_3 + 2s_3 + 3e_4 = -20$	$x_1 = -20$
$-0.5x_3 + s_2 - 4s_3 - 4e_4 = 36$	$s_2 = 36$

Új optimális megoldás előállítása az LP feladat jobb oldalának módosítása után

Ha módosítjuk egy korlátozó feltétel jobb oldalát, és az aktuális bázis nem lesz lehetséges, akkor új optimális megoldást kereshetünk a duál szimplex módszer segítségével. Példaként tegyük fel, hogy a felületkezelésre fordítható munkaórák száma 30. Az 5.3. alfejezetben megmutattuk, hogy ebben az esetben a régi optimális tábla a 39. táblázatban látható alakot ölti.

39. TÁBLÁZAT
A Dakota probléma „régi” optimális megoldása 30 óra felületkezelési kapacitás mellett

	Bázisváltozó
$z + 5x_2 + 10s_2 + 10s_3 = 380$	$z = 380$
$- 2x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 44$	$s_1 = 44$
$- 2x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 = 28$	$x_3 = 28$
$x_1 + 1.25x_2 - 0.5s_2 + 1.5s_3 = -3$	$x_1 = -3$

A célfüggvény sorában minden változó együtthatója nemnegatív, ezért az új optimális megoldás megkereséséhez alkalmazhatjuk a duál szimplex módszert. Az x_1 változó veszi fel a leginkább negatív értéket, tehát x_1 fog kilépni a bázisból, és a 3. sor lesz a belépő változó sora. Mivel a 3. sorban kizárólag s_2 együtthatója negatív, ezért s_2 fog a bázisba belépni (lásd 40. táblázat).

Ez egy optimális tábla. Ha 30 munkaóra fordítható felületkezelésre, akkor az új optimális megoldás szerint 16 széket, 0 asztalt és 0 íróasztalt kell előállítani. Természetesen úgy is meg lehet változtatni egy korlátozó feltétel jobb oldalát, hogy egyetlen lehetséges megoldás se létezzen. A duál szimplex módszer 3. lépésében derül ki, hogy ez bekövetkezik-e, vagy sem.

40. TÁBLÁZAT
A Dakota probléma „új” optimális megoldása 30 óra felületkezelési kapacitás mellett

	Bázisváltozó
$z + 20x_1 + 30x_2 \qquad\qquad + 40s_3 = 320$	$z = 320$
$4x_1 + 3x_2 + s_1 - 2s_3 = 32$	$s_1 = 32$
$4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2s_3 = 16$	$x_3 = 16$
$-2x_1 - 2.5x_2 + s_2 - 3s_3 = 6$	$s_2 = 6$

Normál minimumfeladat megoldása

Most megmutatjuk, hogyan lehet egy normál minimumfeladatot megoldani a duál szimplex módszer alkalmazásával. Tekintsük a következő LP feladatot:

$$\begin{aligned} \min z = {} & x_1 + 2x_2 \\ \text{f.h.} \quad & x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 4 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Mindenekelőtt z-t megszorozzuk -1-gyel, mert ilyen módon egy maximumfeladatot kapunk, aminek $z' = -x_1 - 2x_2$ a célfüggvénye. A két korlátozó feltételből kivonjuk az e_1 és e_2 feleslegváltozókat, s ezáltal a 41. táblázatban látható induló táblához jutunk. Mivel a célfüggvényben valamennyi változó együtthatója nemnegatív, alkalmazhatjuk a duál szimplex módszert. Mielőtt tovább mennénk, meg kell találnunk a korlátozó feltételekhez tartozó bázis változókat. Ha mindkét korlátot megszorozzuk -1-gyel, akkor e_1 és e_2 lehet a két bázisváltozó. Ezáltal a 42. táblázatban látható táblát kapjuk. A korlátozó feltételek jobb oldalán negatív számok (is) szerepelnek, tehát a jelenlegi tábla nem optimális, ezért a 2. lépésre térünk rá.

41. TÁBLÁZAT
Normál minimumfeladat induló táblája

$z' + x_1 + 2x_2 = 0$
$x_1 - 2x_2 + x_3 - e_1 = 4$
$2x_1 + x_2 - x_3 - e_2 = 6$

42. TÁBLÁZAT
Az induló tábla kanonikus alakja

	Bázisváltozó
$z' + x_1 + 2x_2 = 0$	$z' = 0$
$-x_1 + 2x_2 - x_3 + e_1 = -4$	$e_1 = -4$
$-2x_1 + x_2 + x_3 + e_2 = -6$	$e_2 = -6$

A leginkább negatív bázisváltozó, (e_2), fog kilépni a bázisból. Mivel e_2 a második sorhoz tartozik, a 2. sor lesz a belépő változó sora. A bázisba bekerülő változó megkeresése céljából kiszámítjuk a következő hányadosokat:

$$\begin{aligned} x_1 \text{ hányados } &= 1/-2 = -\frac{1}{2} \\ x_2 \text{ hányados } &= 2/-1 = -2 \end{aligned}$$

Az x_1-hez tartozó hányados a legkisebb (abszolút értékben), ezért elemi sorműveletek alkalmazásával a 2. sorban x_1-et léptetjük be a bázisba (lásd 43. táblázat).[5]

[5] Az érdeklődő olvasó könnyen ellenőrizheti, hogy ha tévedésből x_2-t léptettük volna be a bázisba, akkor egy negatív együttható jelent volna meg a célfüggvényben, s ezáltal elvesztettük volna a duál lehetségességet.

43. TÁBLÁZAT
Az első duál szimplex tábla

	Bázisváltozó
$z' \quad + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \quad + \frac{1}{2}e_2 = -3$	$z' = -3$
$\frac{5}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 + e_1 - \frac{1}{2}e_2 = -1$	$e_1 = -1$
$x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \quad - \frac{1}{2}e_2 = 3$	$x_1 = 3$

Mivel egyik korlátozó feltétel sem mutatja azt, hogy ne lenne primál lehetséges megoldás (3. lépés), visszatérünk az 1. lépésre. Az első jobb oldali korlát negatív, tehát a tábla nem optimális, ezért a 2. lépés következik. Mivel $e_1 = -1$ a leginkább negatív bázis változó, e_1 fog kilépni a bázisból, és az 1. sor lesz a belépő változó sora. A bázisba bekerülő változóként x_3 és e_2 jöhet szóba. A szóban forgó hányadosok a következők:

$$x_3 \text{ hányadosa } = \frac{1}{2}/-\frac{3}{2} = -\frac{1}{3}$$
$$e_2 \text{ hányados } = \frac{1}{2}/-\frac{1}{2} = -1$$

Az (abszolút értékben) legkisebb hányados $-\frac{1}{3}$, tehát x_3 lép be a bázisba az 1. sorban. Az x_3-mal kapcsolatos bázistranszformációt végrehajtva a 44. táblázatban látható táblát kapjuk.[6] Mivel nemnegatív számok állnak a jobb oldalon, ez egy optimális tábla. Az eredeti feladat minimumfeladat volt, aminek az optimális megoldása $z = \frac{10}{3}$, $x_1 = \frac{10}{3}$, $x_3 = \frac{2}{3}$ és $x_2 = 0$.

44. TÁBLÁZAT
A duál szimplex példa optimális táblája

	Bázisváltozó
$z' \quad + \frac{7}{3}x_2 \quad + \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2 = -\frac{10}{3}$	$z' = -\frac{10}{3}$
$- \frac{5}{3}x_2 + x_3 - \frac{2}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2 = \frac{2}{3}$	$x_3 = \frac{2}{3}$
$x_1 - \frac{1}{3}x_2 \quad - \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 = \frac{10}{3}$	$x_1 = \frac{10}{3}$

Vegyük észre, hogy (az optimális duál szimplex táblát kivéve) mindegyik duál szimplex táblához tartozó z' érték nagyobb az optimális z' értéknél. Emiatt azt mondjuk, hogy a duál szimplex táblák szuperoptimálisak. A duál szimplex módszer alkalmazása során minden báziscsere közelebb hoz egy primál lehetséges megoldáshoz. Mindegyik báziscsere (a degenerációtól eltekintve) csökkenti z' értékét, és így lesz az eredmény egyre „kevésbé szuperoptimális”. Mihelyt primál lehetséges megoldáshoz jutunk, megtaláltuk az (egyik) optimális megoldást.

[6] Ha olyan változót léptettünk volna be a bázisba, amelyiknek pozitív együtthatója van a belépő változó sorában, akkor negatív lett volna a célfüggvény valamelyik együtthatója. Ez az oka annak, hogy csak olyan változó léphet be a bázisba, amelyiknek a belépő változó sorában negatív együtthatója van.

Feladatok

A csoport

1. Oldjuk meg a következő LP feladatot a duál szimplex módszerrel:

$$\begin{aligned} \max\ z &= -2x_1 - x_3 \\ \text{f.h.}\quad x_1 + x_2 - x_3 &\geq 5 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 &\geq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

2. Az alábbi LP feladat optimális megoldását a 45. táblázat mutatja:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 6x_1 + x_2 \\ \text{f.h.}\quad x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(a) Keressük meg a feladat optimális megoldását, ha beiktatjuk a $3x_1 + x_2 \leq 10$ új korlátozó feltételt!

45. TÁBLÁZAT

	Bázis-változó
$z \quad + 2x_2 \quad + 3s_2 = 18$	$z = 18$
$0.5x_2 + s_1 - 0.5s_2 = 2$	$s_1 = 2$
$x_1 + 0.5x_2 \quad + 0.5s_2 = 3$	$x_1 = 3$

(b) Állítsuk elő az optimális megoldást az $x_1 - x_2 \geq 6$ korlátozó feltétel beiktatása után!

(c) Állítsuk elő az optimális megoldást a $8x_1 + x_2 \leq 12$ korlátozó feltétel beiktatása után!

3. Határozzuk meg a Dakota probléma optimális megoldását, ha mindössze 20 egységnyi faanyag használható fel!

4. Keressük meg a Dakota probléma új optimális megoldását, ha 15 óra fordítható asztalosmunkára!

5.11. Az árnyékárak egy alkalmazási példája: a Data Envelopment Analysis (DEA)[7]

Gyakorta feltesszük a kérdést, hogy vajon egy egyetem, vagy egy kórház, étterem vagy más gazdasági egység hatékonyan működik-e? A **Data Envelopment Analysis** (DEA) módszere erre a kérdésre adja meg a választ. Tárgyalásunkat Callen (1991) cikkére alapozzuk. A DEA bemutatásához vizsgáljunk meg egy három kórházból álló csoportot. A helyzet egyszerűsítése céljából tegyük fel, hogy mindegyik kórház két input tényezőt „konvertál" output tényezőkké, s ez utóbbiakból három van. A két kórház által felhasznált input tényezők a következők:

1. input = eszközök (amelyeket a kórházi ágyak számával mérünk)
2. input = munkaerő (a havi felhasznált munkaórákban mérve)

Az output tényezők:

1. output = a 14 éven aluli betegekre fordított gyógyítási idő száz napban mérve
2. output = a 14 és 65 év közötti betegekre fordított gyógyítási idő (száz napban)
3. output = a 65 év fölötti betegekre fordított gyógyítási idő (száz napban)

Tételezzük fel, hogy az egyes kórházak input és output tényezői a 46. táblázat szerint adottak.

A kórházak hatékonyságának meghatározásához legyen t_r = az r-edik output egységének ára vagy értékelése, és legyen w_s = az s-edik input egységének a költsége. Az i-edik kórház *hatékonysága* a következőképpen definiált:

$$\frac{\text{az } i\text{-edik kórház outputjainak értéke}}{\text{az } i\text{-edik kórház inputjainak költsége}}$$

[7] Ezen alfejezet kihagyása nem szakítja meg a tárgyalás folytonosságát.

46. TÁBLÁZAT
A kórházak input és output tényezői

	Input		Output		
Kórház	1	2	1	2	3
1	5	14	9	4	16
2	8	15	5	7	10
3	7	12	4	9	13

A 46. táblázat adataival az egyes kórházak hatékonyságául az alábbiak adódnak:

$$\text{az 1. kórház hatékonysága} = \frac{9t_1+4t_2+16t_3}{5w_1+14w_2}$$
$$\text{a 2. kórház hatékonysága} = \frac{5t_1+7t_2+10t_3}{8w_1+15w_2}$$
$$\text{a 3. kórház hatékonysága} = \frac{4t_1+9t_2+13t_3}{7w_1+12w_2}$$

A DEA módszere az egyes kórházak hatékonyságának meghatározásához a következő négy elvi megfontolást használja fel:

1. Egyetlen kórház sem lehet hatékonyabb mint 100%. Az egyes kórházak hatékonysága így kisebb vagy egyenlő, mint 1. Az 1. kórházra tehát igaz, hogy $(9t_1+4t_2+16t_3)/(5w_1+14w_2) \leq 1$. Ha mindkét oldalt beszorozzuk a nevezővel, akkor egy LP feltételt kapunk: $5w_1+14w_2-9t_1-4t_2-16t_3 \geq 0$.

2. Tegyük fel, hogy az i-edik kórház hatékonyságát szeretnénk meghatározni. Olyan (t_1, t_2 és t_3) output értékeléseket és (w_1, w_2) input költségeket keresünk, amelyek a hatékonyságot maximalizálják. Ha az i-edik kórház hatékonysága 1-gyel egyenlő, akkor ez a kórház hatékony; ha azonban a hatékonysági érték egynél kisebb, akkor a kórház nem hatékony.

3. A számítások egyszerűsítése céljából az input árakat beskálázhatjuk úgy, hogy az i-edik kórház input költsége 1 legyen. A 2. kórház esetében tehát a $8w_1+15w_2=1$ feltételt kell a modellhez hozzáadni.

4. Biztosítanunk kell azt is, hogy az input költségek és az output értékelések szigorúan pozitívak legyenek. Ha ugyanis például a $t_i = 0$, akkor a DEA nem tudja megtalálni azokat a nem hatékony megoldásokat, amelyek az i-edik outputot tartalmazzák; ha pedig $w_j = 0$, akkor a DEA nem találja meg azokat a nem hatékony megoldásokat, amelyek a j-edik inputot tartalmazzák.

Az 1–4. pontokban leírtak alapján az egyes kórházak hatékonyságának tesztelésére a következő LP-t használhatjuk:

1. kórház LP

$$\begin{array}{llr}
\max z = & 9t_1+4t_2+16t_3 & (1)\\
\text{f.h.} & -9t_1-4t_2-16t_3+5w_1+14w_2 \geq 0 & (2)\\
& -5t_1-7t_2-10t_3+8w_1+15w_2 \geq 0 & (3)\\
& -4t_1-9t_2-13t_3+7w_1+12w_2 \geq 0 & (4)\\
& 5w_1+14w_2 = 1 & (5)\\
& t_1 \geq .0001 & (6)\\
& t_2 \geq .0001 & (7)\\
& t_3 \geq .0001 & (8)\\
& w_1 \geq .0001 & (9)\\
& w_2 \geq .0001 & (10)
\end{array}$$

2. kórház LP

$$
\begin{array}{llr}
\max z = & 5t_1 + 7t_2 + 10t_3 & (1) \\
\text{f.h.} & -9t_1 - 4t_2 - 16t_3 + 5w_1 + 14w_2 \geq 0 & (2) \\
& -5t_1 - 7t_2 - 10t_3 + 8w_1 + 15w_2 \geq 0 & (3) \\
& -4t_1 - 9t_2 - 13t_3 + 7w_1 + 12w_2 \geq 0 & (4) \\
& 8w_1 + 15w_2 = 1 & (5) \\
& t_1 \geq .0001 & (6) \\
& t_2 \geq .0001 & (7) \\
& t_3 \geq .0001 & (8) \\
& w_1 \geq .0001 & (9) \\
& w_2 \geq .0001 & (10)
\end{array}
$$

3. kórház LP

$$
\begin{array}{llr}
\max z = & 4t_1 + 9t_2 + 13t_3 & (1) \\
\text{f.h.} & -9t_1 - 4t_2 - 16t_3 + 5w_1 + 14w_2 \geq 0 & (2) \\
& -5t_1 - 7t_2 - 10t_3 + 8w_1 + 15w_2 \geq 0 & (3) \\
& -4t_1 - 9t_2 - 13t_3 + 7w_1 + 12w_2 \geq 0 & (4) \\
& 7w_1 + 12w_2 = 1 & (5) \\
& t_1 \geq .0001 & (6) \\
& t_2 \geq .0001 & (7) \\
& t_3 \geq .0001 & (8) \\
& w_1 \geq .0001 & (9) \\
& w_2 \geq .0001 & (10)
\end{array}
$$

Nézzük meg, hogy az 1. kórház LP modelljében miként érvényesülnek az (1)–(4) pontok. Az (1) pont az 1. kórház hatékonyságának maximalizálását jelenti. Ez az 5. feltételből következik, amely az 1. kórház inputjainak költségét 1-re állítja. A (2)–(4) feltételek azt biztosítják, hogy egyik kórház se legyen 100%-nál nagyobb hatékonyságú. A (6)–(10) feltételek mindegyik input költséget és output értékelést szigorúan pozitívvá tesznek (a .0001 a jobb oldalon tetszőleges érték: bármilyen kis pozitív számot használhatnánk).

A 7.(a)–(c) ábrák az LP feladatok megoldásának számítógépes eredménytáblái. Ezekből kiolvasva az optimális célfüggvényértéket ((OPTIMÁLIS CÉLFÜGGVÉNYÉRTÉK) azt találjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
&\text{az 1. kórház hatékonysága} = 1 \\
&\text{a 2. kórház hatékonysága} = .773 \\
&\text{a 3. kórház hatékonysága} = 1
\end{aligned}
$$

A 2. kórház tehát nem hatékony, az 1. és a 3. kórház viszont hatékonyan működik.

7. a) ÁBRA
1. KÓRHÁZ LP

```
MAX 9 T1 + 4 T2 + 16 T3
FELTÉVE, HOGY
       2)  - 9 T1 - 4 T2 - 16 T3 + 5 W1 + 14 W2 >=   0
       3)  - 5 T1 - 7 T2 - 10 T3 + 8 W1 + 15 W2 >=   0
       4)  - 4 T1 - 9 T2 - 13 T3 + 7 W1 + 12 W2 >=   0
       5)    W1 >=    0.0001
       6)    W2 >=    0.0001
       7)    T1 >=    0.0001
       8)    T2 >=    0.0001
       9)    T3 >=    0.0001
      10)    5 W1 + 14 W2 =    1

AZ OPTIMUMOT A 6. LÉPÉSBEN ÉRTÜK EL

        OPTIMÁLIS CÉLFÜGGVÉNYÉRTÉK

        1)    1.00000000

VÁLTOZÓ            ÉRTÉK            REDUKÁLT KÖLTSÉG
      T1            .110889              .000000
      T2            .000100              .000000
      T3            .000100              .000000
      W1            .000100              .000000
      W2            .071393              .000000


     SOR            ELTÉRÉS          ÁRNYÉKÁRAK
      2)            .000000            -1.000000
      3)            .515548              .000000
      4)            .411659              .000000
      5)            .000000              .000000
      6)            .071293              .000000
      7)            .110789              .000000
      8)            .000000              .000000
      9)            .000000              .000000
     10)            .000000             1.000000

ITERÁCIÓK SZÁMA=         6
```

7. b) ÁBRA
2. KÓRHÁZ LP

```
MAX  5 T1 + 7 T2 + 10 T3
FELTÉVE, HOGY
       2)  - 9 T1 - 4 T2 - 16 T3 + 5 W1 + 14 W2 >=    0
       3)  - 5 T1 - 7 T2 - 10 T3 + 8 W1 + 15 W2 >=    0
       4)  - 4 T1 - 9 T2 - 13 T3 + 7 W1 + 12 W2 >=    0
       5)    8 W1 + 15 W2 =    1
       6)    W1  >=  0.0001
       7)    W2  >=  0.0001
       8)    T1  >=  0.0001
       9)    T2  >=  0.0001
      10)    T3  >=  0.0001

AZ OPTIMUMOT A 0. LÉPÉSBEN ÉRTÜK EL

        OPTIMÁLIS CÉLFÜGGVÉNYÉRTÉK

        1)    773030000

VÁLTOZÓ            ÉRTÉK           REDUKÁLT KÖLTSÉG
      T1            .079821             .000000
      T2            .053275             .000000
      T3            .000100             .000000
      W1            .000100             .000000
      W2            .066613             .000000


     SOR           ELTÉRÉS          ÁRNYÉKÁRAK
      2)            .000000            -.261538
      3)            .226970             .000000
      4)            .000000            -.661538
      5)            .000000             .773333
      6)            .000000            -.248206
      7)            .066513             .000000
      8)            .079721             .000000
      9)            .053175             .000000
     10)            .000000           -2.784615

ITERÁCIÓK SZÁMA=        0
```

7. c) ÁBRA
3. KÓRHÁZ LP

```
MAX 4 TI + 9 + T2 + 13 T3
FELTÉVE, HOGY
       2) - 9 T1 - 4 T2 - 16 T3 + 5 W1 + 14 W2 >= 0
       3) - 5 T1 - 7 T2 - 10 T3 + 8 W1 + 15 W2 >= 0
       4) - 4 T1 - 9 T2 - 13 T3 + 7 W1 + 12 W2 >= 0
       5)   W1 >=   0.0001
       6)   W2 >=   0.0001
       7)   T1 >=   0.0001
       8)   T2 >=   0.0001
       9)   T3 >=   0.0001
      10)   7 W1 + 12 W2 = 1

AZ OPTIMUMOT A 7. LÉPÉSBEN ÉRTÜK EL

       OPTIMÁLIS CÉLFÜGGVÉNYÉRTÉK

       1)     1.00000000

VÁLTOZÓ            ÉRTÉK           REDUKÁLT KÖLTSÉG
       T1          .099815            .000000
       T2          .066605            .000000
       T3          .000100            .000000
       W1          .000100            .000000
       W2          .083275            .000000


      SOR           ELTÉRÉS          ÁRNYÉKÁRAK
       2)          .000000            .000000
       3)          .283620            .000000
       4)          .000000          -1.000000
       5)          .000000            .000000
       6)          .083175            .000000
       7)          .099715            .000000
       8)          .066505            .000000
       9)          .000000            .000000
      10)          .000000           1.000000

ITERÁCIÓK SZÁMA=       7
```

Az árnyékárak és a DEA

Az árnyékárak elemzése segítségül szolgál annak a kérdésnek a megválaszolásához, hogy mi okozza a 2. kórház nem hatékony működését (és ugyanezen a módon bármely, a DEA által nem hatékonynak minősített egységet elemezni tudunk). A 7.(b) ábrán tekintsük mindazokat a kórházakat, amelyek hatékonysági korlátai nemzéró árnyékárakat (ÁRNYÉKÁRAK) adnak a 2. kórház LP modelljének megoldásában. (Példánkban az 1. és 3. kórházhoz tartozó árnyékárak nem 0 értékűek.) Ha ezen kórházak input és output vektorait átlagoljuk (az árnyékárak abszolút értékeit használva súlyként mindegyik kórház esetében), akkor a következőt kapjuk:

Output átlagvektor

$$.261538\begin{bmatrix}9\\4\\16\end{bmatrix}+.661538\begin{bmatrix}4\\9\\13\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\7\\12.785\end{bmatrix}$$

Input átlagvektor

$$.261538\begin{bmatrix}5\\14\end{bmatrix}+.661538\begin{bmatrix}7\\12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5.938\\11.6\end{bmatrix}$$

Tegyük fel, hogy az 1. kórházból és a 3. kórházból a .261538 és .661538 súlyokkal „kikeverünk” egy kórházat. Az output átlagvektor ekkor az így összetett kórházra vonatkoztatva azt mutatja, hogy ez a kórház az 1. és 2. outputból ugyanazt a mennyiséget szolgáltatja, mint a 2. kórház, viszont a 3. output mennyisége (a 65 év fölötti betegekre fordított gyógyítási idő 100 napban mérve) ebben a kórházban $12.785-10=2.785$ egységgel több. Ha megnézzük az ilyen módon összetett kórházat jellemző input átlagvektort, akkor azt találjuk, ez a kórház a 2. kórháznál kevesebbet használ fel mindkét inputból. Láthatóvá vált tehát, hogy miért nem hatékony a 2. kórház!

Mellékesen azt is megfigyelhetjük, hogy a 2. kórház .7730 célfüggvényértéke szerint a hatékonyabb összetett kórház a magasabb output értékeket úgy állítja elő, hogy mindkét inputnak legfeljebb 77.30%-át használja fel. Figyeljük meg, hogy

$$\begin{aligned}&\text{az összetett kórház 1. input felhasználása}\\&\quad<.7730\cdot(\text{a 2. kórház 1. input felhasználása})=6.2186\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}&\text{az összetett kórház 2. input felhasználása}\\&\quad=.7730\cdot\ (\text{a 2. kórház 2. input felhasználása})=11.6\end{aligned}$$

Annak magyarázata, hogy miért az árnyékárakat kell egy nem hatékony kórházat domináló „összetett kórház” előállításához felhasználni, az 5–7. feladatokban található.

Feladatok

A csoport

1. A Salemi iskolaszék értékelni kívánja a város négy általános iskolájának hatékonyságát. Az iskolák számára három output tényezőt határoznak meg:

1. output = az olvasási osztályzatok átlaga
2. output = a matematika osztályzatok átlaga
3. output = a magatartásjegyek átlaga

Három input tényezőt definiálnak. Az 1. input = az anya iskolázottsági szintjének átlaga (a legmagasabb végzettséget figyelembe véve, egy olyan skálán mérve, ahol 12 a középiskolai és 16 a főiskolai végzettség)

2. input = az egy tanulóra vetített szülői iskolalátogatások száma
3. input = tanár/tanuló arány

A négy iskolára vonatkozó adatok a 47. táblázatban láthatók.
Mondjuk meg, hogy melyik iskola nem hatékony! A nem hatékony iskoláknál határozzuk meg ennek mibenlétét!

47. TÁBLÁZAT

	Input			Output		
Iskola	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**
1	13	4	.05	9	7	6
2	14	5	.05	10	8	7
3	11	6	.06	11	7	8
4	15	8	.08	9	9	9

2. A Pine Valley Bank három fiókot üzemeltet. Az Ön feladata ezeknek a bankfiókoknak a hatékonysági elemzése. Erre a célra a következő output és input tényezőket használhatja fel:

1. input = havi munkaóra (száz egységben)
2. input = hasznos alapterület (négyzetlábban)
3. input = felhasznált eszközök (dollárban)
1. output = kölcsönkérelmek száma havonta
2. output = havi pénzátutalások száma (ezer darab)
3. output = havonta beváltott csekkek száma (ezer db)

A megfelelő adatokat a 48. táblázatban adjuk meg. Ezek felhasználásával mondja meg, hogy van-e a fiókok között olyan, amelyik nem hatékony, és melyik az? A nem hatékony fiókokra végezzen elemző vizsgálatot!

48. TÁBLÁZAT

	Input			Output		
Bank	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**
1	15	20	50	200	15	35
2	14	23	51	220	18	45
3	16	19	51	210	17	20

3. Értékelnie kell a városi rendőrség munkáját. Három kerületi egység dolgozik a városban. A figyelembe veendő input és output tényezők a következők:

1. input = a rendőrök száma
2. input = a gépjárművek száma
1. output = a járőröző egységekhez beérkezett hívások száma (évi ezer darab)
2. output = az évente elfogott bűnözők száma (száz fő)

Az adatok a 49. táblázatban találhatók. Határozza meg a hatékony egységeket! Ha van nem hatékony egység, végezze el a szokásos elemzést erre az egységre vonatkozóan!

49. TÁBLÁZAT

	Input		Output	
Egység	**1**	**2**	**1**	**2**
1	200	60	6	8
2	300	90	8	9.5
3	400	120	10	11

4. Az Indiana Egyetemtől kapott megbízás alapján négy karra vonatkozóan kell hatékonysági vizsgálatot végeznie. Ezek a Gazdálkodási, a Tanárképző, a Természettudományi és az Egészségtudományi kar. Az 50. táblázatban lévő információkkal rendelkezik. Használja a DEA módszert arra, hogy kimutassa, melyek a nem hatékony karok. Ha talál ilyeneket, elemezze az okokat!

B csoport

5. Magyarázza meg, hogy az összetett kórház által az 1. és 3. kórház output tényezőinek átlagaként kapott output értékek (amelyekhez a súlyokat az árnyékárak abszolút értékei szolgáltatták) miért lesznek legalább akkorák, mint a 2. kórház megfelelő output értéke? (*Útmutatás*: Értékelje ki a t_1, t_2 és t_3 változókat, valamint használja fel azt a tényt, hogy ezeknek a változóknak a célfüggvény sorában található együtthatóinak az optimális megoldásban 0-nak kell lenniük.)

6. Magyarázza meg, hogy a $8w_1 + 15w_2 = 1$ feltételhez tartozó árnyékárnak miért kell a 2. kórház optimális z értékével egyenlőnek lennie!

(a) Magyarázza meg, hogy miért lesz az összetett kórház egyes inputjaiból felhasznált mennyiség legfeljebb akkora, mint (a 2. kórház hatékonysági értéke)·(a 2. kórház által felhasznált megfelelő input tényező mennyisége). (*Útmutatás*: Értékelje a w_1 és w_2-t és használja fel a 6. feladatot.)

(b) Magyarázza meg, hogy miért nem lehet az összetett kórház által felhasznált bármelyik input mennyisége nagyobb, mint ugyanennek az inputnak a 2. kórházban felhasznált mennyisége!

50. TÁBLÁZAT

	Oktatók	Nem-oktatók	Működési költség (millióban)	Kreditóraszám (ezerben)	Kutatási publikációk
Gazdálkodás	150	70	5	15	225
Tanárképzés	60	20	3	5.4	70
Természettudomány	800	140	20	56	1300
Egészségtudomány	30	15	1	2.1	40

Összefoglalás

Grafikus érzékenységvizsgálat

Amikor el kell döntenünk, hogy optimális marad-e az aktuális bázis a célfüggvény valamelyik együtthatójának módosítása után, figyeljünk arra, hogy a módosítás hatására megváltozik a profitfüggvény szintvonalának meredeksége. Az adott bázis abban az esetben marad optimális, ha a lehetséges pontok tartományában (maximumfeladat esetén) z növekedésének irányába haladva az aktuális optimumhely az utolsó olyan pont, amelyik a profitfüggvény valamelyik szintvonalán fekszik. Amikor nem változik az optimális bázis, akkor nem változnak a döntési változók értékei sem, de a z érték megváltozhat.

Ha el kell döntenünk, hogy optimális marad-e az aktuális bázis egy korlátozó feltétel jobb oldalának módosítása után, akkor keressük meg az adott optimumhelyen aktív korlátozó feltételeket (beleértve az előjelmegkötéseket is). A jobb oldali korlát módosítása során addig optimális az adott bázis, ameddig az a pont, ahol az említett korlátok aktívak, lehetséges marad. A döntési változók értékei, valamint az optimális z érték akkor is megváltozhatnak, ha nem változik az optimális bázis.

Árnyékárak

Egy lineáris programozási feladat i-edik korlátozó feltételéhez tartozó **árnyékár** az az érték, amennyivel az optimális z érték javul, amikor a jobb oldali korlátot 1-gyel növeljük.

Jelölések

$BV_i =$ az i-edik korláthoz tartozó bázisváltozó az optimális táblában

$\mathbf{c}_{BV} =$ az a sorvektor, melynek i-edik eleme BV_i együtthatója az LP feladat célfüggvényében

$\mathbf{a}_j =$ az x_j-hez tartozó oszlop az LP feladat korlátozó feltételeiben
$\mathbf{b} =$ az eredeti LP feladat jobb oldala
$\bar{c}_j = x_j$ együtthatója az optimális tábla célfüggvényében

Az eredeti LP feladat optimális táblájának kiszámítása

$$x_j \text{ oszlopa az optimális tábla korlátozó feltételeiben} = B^{-1}\mathbf{a}_j \tag{5}$$

$$\text{az optimális tábla jobb oldala} = B^{-1}\mathbf{b} \tag{6}$$

$$\bar{c}_j = \mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{a}_j - c_j \tag{10}$$

az s_i maradékváltozó együtthatója az optimális célfüggvényben

$$= \mathbf{c}_{BV}B^{-1}\, i\text{-edik eleme} \tag{10$'$}$$

az e_i feleslegváltozó együtthatója az optimális célfüggvényben

$$= (-\mathbf{c}_{BV}B^{-1}\, i\text{-edik eleme}) \tag{10$''$}$$

az a_i mesterséges változó együtthatója az optimális célfüggvényben

$$= \mathbf{c}_{BV}B^{-1}(i\text{-edik eleme}) + M \tag{10$'''$}$$

$$\text{az optimális célfüggvény jobb oldala} = \mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{b} \tag{11}$$

Érzékenységvizsgálat

Maximumfeladat esetén egy tábla akkor és csak akkor optimális, ha a célfüggvényben valamennyi változó együtthatója nemnegatív, és valamennyi korlátozó feltétel jobb oldalán nemnegatív konstans áll. Minimumfeladat esetén egy tábla pontosan akkor optimális, ha a célfüggényben valamennyi változó együtthatója nempozitív, és mindegyik korlátozó feltétel jobb oldalán nemnegatív konstans áll.

Ha egy nembázis változó célfüggvénybeli együtthatójának módosítása után optimális marad az aktuális bázis, akkor a döntési változók értékei és az optimális z érték is változatlanul maradnak. Bázisváltozó együtthatójának módosítása esetén a döntési változók értékei nem változnak, az optimális z érték azonban megváltozhat. A jobb oldal módosítása esetén a döntési változók értékei és az optimális z érték egyaránt megváltozhatnak. A döntési változók új értékeit B^{-1} (új jobb oldali vektor) kiszámításával kaphatjuk meg. Az új optimális z értéket vagy az árnyékárak segítségével vagy pedig a (11) összefüggés felhasználásával kaphatjuk meg.

Célfüggvény-együttható értéktartománya

Ha a célfüggvény valamelyik együtthatója nem lép ki ebből a tartományból, akkor nem változik meg az optimális bázis. A tartományon belül nem változnak a döntési változók értékei, az optimális z érték azonban megváltozhat.

Redukált költség

Egy nembázis változó redukált költsége az az érték, amivel a változó célfüggvénybeli együtthatóját javítani kell ahhoz, hogy az adott változó az LP feladat valamelyik optimális megoldásában bázisváltozó lehessen.

Jobboldali korlát értéktartománya

Ha a korlátozó feltétel jobb oldalán álló konstans értéke nem lép ki ebből a tartományból, akkor nem változik meg az optimális bázis. A döntési változók értéke viszont általában megváltozik.

Egy LP feladat duálisának felírása

Normál maximumfeladat (minden korlát $\leq$ alakú, és minden változó nemnegatív) vagy normál minimumfeladat (minden korlát $\geq$ alakú, és minden változó nemnegatív) esetén a következőképpen írjuk fel a duál feladatot:

Ha a 14. táblázatban soronként olvassuk a primál feladatot, akkor oszloponként olvassuk a duált. Ha ugyancsak a 14. táblázatban oszloponként olvassuk a primált, akkor soronként olvassuk a duált. Egy maximumfeladat változóit x_i-vel és z-vel, egy minimumfeladat változóit pedig y_j-vel és w-vel jelöljük.

Egy nemnormál maximumfeladat duálisát a következőképpen határozzuk meg:

1. lépés Kitöltjük a 14. táblázatot úgy, hogy soronként lehessen olvasni a primál feladatot.

2. lépés A következő módosítások után a megszokott módon, oszloponként olvashatjuk a duál feladatot: (a) Ha az i-edik primál korlát $\geq$ alakú, akkor a hozzá tartozó y_i duál változóra az $y_i \leq 0$ kikötésnek kell teljesülnie. (b) Ha az i-edik primál korlát egy egyenlőség, akkor az y_i duál változó kötetlen előjelű. (c) Ha az i-edik primál változó kötetlen előjelű, akkor az i-edik duál korlát egyenlőség lesz.

Egy nemnormál minimumfeladat duálisát a következőképpen határozzuk meg:

1. lépés Felírjuk a primál feladatot úgy, hogy azt a 14. táblázatban oszloponként lehessen olvasni.

2. lépés A duális feladat soronként olvasható a táblázatból, az alábbi változtatások figyelembevételével: (a) Ha az i-edik primál korlát $\leq$ alakú, akkor a hozzátartozó x_i duál változóra az $x_i \leq 0$ kikötés teljesül. (b) Ha az i-edik primál korlát egyenlőség, akkor a hozzátartozó x_i duál változó kötetlen előjelű. (c) Ha az i-edik primál változó kötetlen előjelű, akkor az i-edik duál korlát egyenlőség lesz.

A dualitás-tétel

Legyen BV a primál feladat egyik optimális bázisa. Ekkor $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ a duál feladat optimális megoldása. Ezenkívül $\bar{z} = \bar{w}$.

A duál optimális megoldás felírása

Ha a primál feladat maximumfeladat, akkor a duál optimális megoldást az optimális tábla célfüggvénysorából olvashatjuk ki a következő szabályok figyelembevételével:

$$\begin{array}{l} \text{az } y_i \text{ duál változó optimális értéke} \\ \text{ha az } i\text{-edik korlát} \leq \text{alakú} \end{array} = \begin{array}{l} s_i \text{ együtthatója az} \\ \text{optimális célfüggvényben} \end{array} \tag{31}$$

$$\begin{array}{l} \text{az } y_i \text{ duál változó optimális értéke} \\ \text{ha az } i\text{-edik korlát} \geq \text{alakú} \end{array} = \begin{array}{l} -(e_i \text{ együtthatója az} \\ \text{optimális célfüggvényben)} \end{array} \tag{31'}$$

$$\begin{array}{l} \text{az } y_i \text{ duál változó együtthatója} \\ \text{ha az } i\text{-edik korlát egyenlőség} \end{array} = \begin{array}{l} (a_i \text{ együtthatója az} \\ \text{optimális célfüggvényben)} - M \end{array} \tag{31''}$$

Ha a primál feladat minimumfeladat, akkor a duál optimális megoldást az optimális tábla célfüggvény-sorából olvashatjuk ki a következő szabályok figyelembevételével:

$$\begin{array}{lcl}
\text{az } x_i \text{ duál változó optimális értéke} & = & s_i \text{ együtthatója az} \\
\text{ha az } i\text{-edik korlát} \le \text{ alakú} & & \text{optimális célfüggvényben} \\
\text{az } x_i \text{ duál változó optimális értéke} & = & -(e_i \text{ együtthatója az} \\
\text{ha az } i\text{-edik korlát} \ge \text{ alakú} & & \text{optimális célfüggvényben)} \\
\text{az } x_i \text{ duál változó optimális értéke} & = & (a_i \text{ együtthatója az} \\
\text{ha az } i\text{-edik korlát egyenlőség} & & \text{optimális célfüggvényben)} + M
\end{array}$$

Árnyékárak (folytatás)

Maximumfeladat esetén az i-edik korlátozó feltételhez tartozó árnyékár nem más, mint az i-edik duál változó értéke a duál optimális megoldásban. Minimumfeladat esetén az i-edik korlátozó feltételhez tartozó árnyékár $= -$(az i-edik duál változó értéke a duál optimális megoldásban).

$$\begin{aligned}
\text{új optimális } z \text{ érték} &= (\text{régi optimális } z \text{ érték}) \\
&\quad + (\text{az } i\text{-edik korlát árnyékára})\,\Delta b_i \quad (\text{maximumfeladat}) \qquad (37) \\
\text{új optimális } z \text{ érték} &= (\text{régi optimális } z \text{ érték}) \\
&\quad - (\text{az } i\text{-edik korlát árnyékára})\,\Delta b_i \quad (\text{minimumfeladat}) \qquad (37')
\end{aligned}$$

$\geq$ típusú korlát árnyékára nempozitív; $\leq$ típusú korlát árnyékára nemnegatív; és egy egyenlőség alakú korlát árnyékára egyaránt lehet pozitív, negatív vagy 0.

Dualitás és érzékenységvizsgálat

A dualitás tételre adott bizonyításunkból következik, hogy egy lehetséges BV bázis akkor és csak akkor optimális (tehát minden célfüggvény együttható nemnegatív), ha a hozzátartozó $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ duál megoldás duál lehetséges.

Ennek az eredménynek a segítségével új lehetőség nyílik az érzékenységvizsgálat elvégzésére az alábbi esetekben:

1. módosítás Egy nembázis változó együtthatójának módosítása a célfüggvényben

4. módosítás Egy nembázis változó oszlopának megváltoztatása

5. módosítás Új tevékenység beiktatása

Mindegyik esetben könnyen eldönthető, hogy a változtatás után megmarad-e a duál lehetségesség. Ha igen, akkor nem változik az optimális bázis. Ha viszont megszűnik a duál lehetségesség, akkor az aktuális bázis elveszíti optimalitását.

Komplementaritás

3. TÉTEL

Legyen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

egy primál lehetséges megoldás, $\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_m]$ pedig egy duál lehetséges megoldás. Pontosan akkor lesz $\mathbf{x}$ primál optimális, $\mathbf{y}$ pedig duál optimális, ha

$$s_i y_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \tag{38}$$

$$e_j x_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \tag{39}$$

A duál szimplex módszer

A duál szimplex módszert (maximumfeladat esetén) akkor alkalmazzuk, amikor rendelkezésünkre áll egy bázismegoldás, ahol a célfüggvényben valamennyi változó együtthatója nemnegatív. Egy ilyen bázismegoldás birtokában a következőképpen működik a duál szimplex módszer:

1. lépés Ha valamennyi korlátozó feltétel jobb oldala nemnegatív, akkor találtunk egy optimális megoldást; ellenkező esetben legalább egy korlát jobb oldalán negatív konstans áll, és áttérünk a 2. lépésre.

2. lépés Kiválasztjuk a leginkább negatív bázisváltozót, és ez fogja elhagyni a bázist. Ennek a sora lesz a belépő változó sora. A bázisba belépő változó megkeresése céljából minden olyan x_j változóra, amelynek a belépő változó sorában negatív együtthatója van, kiszámítjuk az alábbi hányadost:

$$\frac{x_j \text{ együtthatója a célfüggvényben}}{x_j \text{ együtthatója a belépő változó sorában}}$$

Az a változó fog belépni a bázisba, amelyikhez (abszolút értékben) a legkisebb hányados tartozik. Az új változót bázistranszformációval léptetjük be a bázisba.

3. lépés Ha van olyan korlát, ahol a jobb oldali konstans negatív, és mindegyik változó együtthatója nemnegatív, akkor az LP feladatnak nincsen primál lehetséges megoldása. Ez a helyzet például abban az esetben, ha (néhány bázistranszformáció után) egy $x_1 + 2x_2 + x_3 = -5$ alakú korlátozó feltételhez jutunk. Ha nem találunk ilyen korlátot (amelyik a megoldhatatlanságot jelzi), visszatérünk az 1. lépéshez.

Gyakran alkalmazzuk a duál szimplex módszert a következő esetekben:

1. Meg kell keresni az új optimális megoldást egy új korlátozó feltétel beillesztése után.

2. Meg kell keresni az új optimális megoldást a jobb oldal módosítása után.

3. Egy normál minimumfeladat megoldását keressük.

Áttekintő feladatok

A csoport

1. Tekintsük az alábbi LP feladatot és az optimális tábláját (51. táblázat):

$$\begin{aligned}\max\ z &= 4x_1 + x_2 \\ \text{f.h.}\quad x_1 + 2x_2 &= 6 \\ x_1 - x_2 &\geq 3 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

(a) Írjuk fel a duál feladatot, és a duál optimális megoldást!

(b) Állapítsuk meg a b_3 korlát azon értékeinek tartományát, melyekre nem változik az optimális bázis! Mi lenne az új optimális megoldás $b_3 = 11$ esetén?

51. TÁBLÁZAT

z	x_1	x_2	e_2	s_3	a_1	a_2	**J.o.**
1	0	0	0	$\frac{7}{3}$	$M-\frac{2}{3}$	M	$\frac{58}{3}$
0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
0	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{14}{3}$
0	0	0	1	1	-1	-1	1

2. Az 1. feladatban szereplő LP feladatra grafikusan állapítsuk meg a c_1 együttható azon értékeinek tartományát, melyekre nem változik az optimális bázis! (*Útmutatás*: A lehetséges pontok halmaza egy egyenes szakasz.)

3. Tekintsük a következő LP feladatot, és az optimális táblát (52. táblázat):

$$\begin{aligned}\max\ z &= 5x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \text{f.h.}\quad x_1 + x_2 + x_3 &\leq 6 \\ 6x_1 + x_3 &\leq 8 \\ x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

52. TÁBLÁZAT

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	**J.o.**
1	0	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{6}$	9
0	0	$\frac{1}{6}$	0	1	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{6}$	3
0	1	$-\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	1
0	0	1	1	0	0	1	2

(a) Írjuk fel a duális feladatot és a duál optimális megoldást!

(b) Határozzuk meg a c_1 együttható azon értékeinek tartományát, melyekre az optimális bázis nem változik!

(c) Határozzuk meg a c_2 együttható azon értékeinek tartományát, melyekre az optimális bázis nem változik!

4. Carco, egy autóipari cég, személygépkocsikat és teherautókat gyárt. Egy személygépkocsiból 300$, egy teherautóból pedig 400$ nyereség származik. A gyártáshoz szükséges erőforrások az 53. táblázatban láthatók. A cég naponta legfeljebb 98 1. típusú gépet tud bérelni gépenként 50$-ért. Jelenleg 73 db 2. típusú gépe van a cégnek, és 260 tonna acél áll rendelkezésre. Marketing szempontok miatt legalább 88 személygépkocsit és legalább 26 teherautót mindenképpen gyártani kell. Legyen

X1 = naponta gyártott személygépkocsik száma
X2 = naponta gyártott teherautók száma
M1 = naponta bérelt 1. típusú gépek száma

53. TÁBLÁZAT

	Napok 1. típusú gépen	**Napok 2. típusú gépen**	**Tonna Acél**
Személygépkocsi	0.8	0.6	2
Teherautó	1	0.7	3

A cég célja a profit maximalizálása. Válaszoljuk meg a következő kérdéseket!

(a) Mi lenne a feladat új optimális megoldása, ha egy személygépkocsi gyártásából 310$ nyereség származna?

(b) Legfeljebb mekkora összeget lenne érdemes +1 db 1. típusú gép egy napra történő bérléséért fizetni?

(c) Legfeljebb mekkora összeget lenne érdemes +1 tonna acélért fizetni?

(d) Mekkora lenne a cég nyeresége, ha legalább 86 személygépkocsit kellene mindenképpen gyártani?

(e) A cég terepjárók gyártását fontolgatja. Egy terepjáró gyártásából 600$ nyereség származik, az előállításához 4 tonna acél szükséges, ezenkívül 1.2 munkanap az 1. gépen és 2 munkanap a 2. gépen. Érdemes-e belefogni a gyártásba?

5. A következő LP feladat optimális táblája az 54. táblázatban látható:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 4x_1 + x_2 \\ \text{f.h.}\quad 3x_1 + x_2 &\geq 6 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

54. TÁBLÁZAT

z	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	a_3	**J.o.**
1	0	3	0	0	M	M	$M+4$	12
0	1	1	0	0	0	0	1	3
0	0	2	1	0	-1	0	3	3
0	0	1	0	1	0	-1	2	2

(a) Írjuk fel a feladat duálisát és a duál optimális megoldást!

(b) Az x_2 változó célfüggvénybeli együtthatójának mely értékei esetén marad optimális az aktuális bázis?

(c) Az x_1 változó célfüggvénybeli együtthatójának mely értékei esetén marad optimális az aktuális bázis?

6. Tekintsük a következő LP feladatot, és a hozzátartozó optimális táblát (55. táblázat):

$$\begin{aligned} \max\ z &= 3x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{f.h.}\quad 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 8 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &\leq 10 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

55. TÁBLÁZAT

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	**J.o.**
1	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	9
0	0	1	3	2	-1	6
0	1	0	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

(a) Írjuk fel a feladat duálisát és a duál optimális megoldást!

(b) Határozzuk meg b_2 azon értéktartományát, melyre az aktuális bázis nem változik! Mi lesz az új optimális megoldás, ha $b_2 = 12$?

7. Tekintsük a következő LP feladatot:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 3x_1 + 4x_2 \\ \text{f.h.}\quad 2x_1 + \ x_2 &\leq 8 \\ 4x_1 + \ x_2 &\leq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

A feladat optimális megoldása $z = 32, x_1 = 0, x_2 = 8, s_1 = 0, s_2 = 2$. Grafikusan határozzuk meg a c_1 változó azon értékeit, melyekre optimális marad az aktuális bázis!

8. Egy nyersanyag-feldolgozással foglalkozó cég az 1-es és a 2-es termékeket állítja elő. Legfeljebb 90 kg nyersanyag szerezhető be 10$/kg áron. Egy kg nyersanyag feldolgozásával vagy 1 kilogrammnyi 1-es termék, vagy pedig 0.33 kilogrammnyi 2-es termék állítható elő. Az előbbi esetben 2 munkaórára, az utóbbi esetben 3 munkaórára van szükség. Összesen 200 munkaóra áll rendelkezésre, és a 2-es termékből legfeljebb 40 kg adható el. Az 1-es termék eladási ára 13$/kg, a 2-es terméké pedig 40$/kg. Legyen

RM = a feldolgozott nyersanyag kilóban
P1 = az 1-es termékhez használt nyersanyag kilóban
P2 = a 2-es termékhez használt nyersanyag kilóban

A nyereség maximalizálásához a következő LP feladatot kell megoldani:

$$\begin{aligned} \max\ z &= -10\text{RM} + 13\text{P1} + 40(0.33)\text{P2} \\ \text{f.h.}\quad \text{RM} &\geq \text{P1} + \text{P2} \\ 2\text{P1} + 3\text{P2} &\leq 200 \\ \text{RM} &\leq 90 \\ 0.33\text{P2} &\leq 40 \\ \text{P1}, \text{P2}, \text{RM} &\geq 0 \end{aligned}$$

Adjunk választ a következő kérdésekre:

(a) Mekkora lenne a cég nyeresége, ha csak 87 kg nyersanyagot lehetne beszerezni?

(b) Mi lenne az új optimális megoldás, ha a 2-es termék eladási ára 39.50$/kg lenne?

(c) Legfeljebb mennyit fizetne a cég +1 kg nyersanyagért?

(d) Legfeljebb mennyit fizetne a cég +1 munkaóráért?

(e) Tegyük fel, hogy 1 kg nyersanyag feldolgozásával 0.8 kg 3-as terméket lehet előállítani, ehhez 7 munkaóra szükséges, és a 3-as termék eladási ára 24$/kg. Érdemes-e 3-as terméket gyártani?

9. Tekintsük a következő LP feladatot, és a hozzátartozó optimális táblát (56. táblázat):

$$\begin{aligned} \max\ z &= 3x_1 + 4x_2 + x_3 \\ \text{f.h.}\quad x_1 + \ x_2 + x_3 &\leq 50 \\ 2x_1 - \ x_2 + x_3 &\geq 15 \\ x_1 + \ x_2 \qquad &= 10 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(a) Írjuk fel a feladat duálisát és a duál optimális megoldást!

(b) Az x_1 változó célfüggvénybeli együtthatójának mely értékeire marad optimális az aktuális bázis?

(c) Az x_1 változó célfüggvénybeli együtthatójának mely értékeire marad optimális az aktuális bázis?

56. TÁBLÁZAT

z	x_1	x_2	x_3	s_1	e_2	a_2	a_3	**J.o.**
1	1	0	0	1	0	M	$M+3$	80
0	-3	0	0	1	1	-1	-2	15
0	0	0	1	1	0	0	-1	40
0	1	1	0	0	0	0	1	10

10. Tekintsük a következő LP feladatot és a hozzátartozó optimális táblát (57. táblázat):

$$\begin{aligned} \max z = \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{feltével, hogy} \quad & 2x_1 + 5x_2 \leq 8 \\ & 3x_1 + 7x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(a) Írjuk fel a feladat duálisát és a duál optimális megoldást!

(b) Határozzuk meg b_2 azon értéktartományát, melyre nem változik az optimális bázis! Állítsuk elő az új optimális megoldást $b_2 = 5$ esetén.

57. TÁBLÁZAT

z	x_1	x_2	s_1	s_2	**J.o.**
1	0	6	0	1	10
0	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
0	1	$\frac{7}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$

11. Tekintsük a következő LP feladatot:

$$\begin{aligned} \max z = \; & 3x_1 + x_2 \\ \text{f.h.} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & 4x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

A feladat optimális megoldása $z = 9$, $x_1 = 1$, $x_2 = 6$. Grafikusan állapítsuk meg b_2 azon értékeit, melyekre optimális marad az aktuális bázis!

12. Egy farmer búzát és zabot termeszt a saját 45 holdas farmján. Legfeljebb 140 véka búzát és legfeljebb 120 véka zabot tud eladni. Egy beültetett holdon vagy 5 véka búza, vagy pedig 4 véka zab terem. A búza eladási ára 30\$/véka, a zabé pedig 50\$/véka. Egy hold búza aratásához 6 munkaóra, egy hold zab aratásához pedig 10 munkaóra szükséges. Legfeljebb 350 munkaóra vehető igénybe 10\$/óra költséggel. Legyen

A1 = búzával beültetett terület (hold)
A2 = zabbal beültetett terület (hold)
L = igénybe vett mukaórák száma

A nyereség maximalizálásához a következő LP feladatot kell megoldani:

$$\begin{aligned} \max z = \; & 150\text{A1} + 200\text{A2} - 10\text{L} \\ \text{f.h.} \quad & \text{A1} + \text{A2} \leq 45 \\ & 6\text{A1} + 10\text{A2} - \text{L} \leq 0 \\ & \text{L} \leq 350 \\ & 5\text{A1} \leq 140 \\ & 4\text{A2} \leq 120 \\ & \text{A1}, \text{A2}, \text{L} \geq 0 \end{aligned}$$

Adjunk választ a következő kérdésekre:

(a) Legfeljebb mennyit érdemes fizetni +1 munkaóráért?

(b) Legfeljebb mennyit érdemes fizetni +1 hold földért?

(c) Mennyi lenne a farmer nyeresége, ha csak 40 hold földje lenne?

(d) Mi lenne az új optimális megoldás, ha 26\$-ra esne a búza ára?

(e) A farmer azt tervezi, hogy árpát is fog termelni. Az árpa iránt korlátlan kereslet mutatkozik. Egy hold földön 4 véka árpa terem, és az aratásához 3 munkaórára van szükség. Érdemes-e árpát termeszteni, ha az árpa eladási ára 30\$/véka?

13. Tekintsük a következő LP feladatot, és a hozzátartozó optimális táblát (58. táblázat):

$$\begin{aligned} \max z = \; & 4x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \text{f.h.} \quad & 8x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 2 \\ & 6x_1 + x_2 + x_3 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

58. TÁBLÁZAT

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	**J.o.**
1	8	1	0	0	2	16
0	2	2	0	1	-1	4
0	6	1	1	0	1	8

(a) Írjuk fel a feladat duálisát és a duál optimális megoldást!

(b) Az x_3 változó célfüggvénybeli együtthatójának mely értékeire marad optimális az aktuális bázis?

(c) Az x_1 változó célfüggvénybeli együtthatójának mely értékeire marad optimális az aktuális bázis?

14. Tekintsük a következő LP feladatot és a hozzátartozó optimális táblát (59. táblázat):

$$\begin{aligned} \max\ z &= 3x_1 + x_2 \\ \text{f.h.}\quad 2x_1 + x_2 &\le 4 \\ 3x_1 + 2x_2 &\ge 6 \\ 4x_1 + 2x_2 &= 7 \\ x_1 \ge 0, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

(a) Írjuk fel a feladat duálisát és a duál optimális megoldást!

(b) Határozzuk meg a harmadik korlátozó feltétel jobb oldalán álló konstansnak azon értékeit, melyekre optimális marad az aktuális bázis! Írjuk fel az új optimális megoldást arra az esetre, amikor a harmadik korlát jobb oldalán $\frac{15}{2}$ áll!

59. TÁBLÁZAT

z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	**J.o.**
1	0	0	0	1	$M-1$	$M+\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$
0	0	0	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	1	0	-2	2	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
0	1	0	0	1	-1	1	1

15. Tekintsük a következő LP feladatot:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 3x_1 + x_2 \\ \text{f.h.}\quad 4x_1 + x_2 &\le 7 \\ 5x_1 + 2x_2 &\le 10 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

A feladat optimális megoldása $z = \frac{17}{3}, x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = \frac{5}{3}$. Grafikus módszerrel határozzuk meg a második korlátozó feltétel jobb oldalán álló konstans azon értékeit, melyekre optimális marad az aktuális bázis!

16. Egy ékszerész kétféle gyűrűt készít rubin és zafír felhasználásával. Egy 1-es típusú gyűrűhöz 2 rubin, 3 zafír és 1 óra ékszerészmunka szükséges. Egy 2-es típusú gyűrű elkészítéséhez 3 rubinra, 2 zafírra és 2 óra ékszerészmunkára van szükség. Az 1-es típusú gyűrű darabját 400$-ért, a 2-es típusú gyűrű darabját 500$-ért lehet eladni. Az ékszerész mindegyik általa készített gyűrűt el tudja adni. Jelenleg 100 rubin, 120 zafír és 70 ékszerész-munkaóra áll rendelkezésére. További rubinokat darabonként 100$-ért tud beszerezni. A piaci kereslet megköveteli, hogy az ékszerész legalább 20 db 1-es típusú és legalább 25 db 2-es típusú gyűrűt készítsen. A nyereség maximalizálásához a következő LP feladatot kell megoldani:

X1 = 1-es típusú gyűrűk száma
X2 = 2-es típusú gyűrűk száma
R = megvásárolt rubinok száma

$$\begin{aligned} \max\ z &= 400\text{X1} + 500\text{X2} - 100\text{R} \\ \text{f.h.}\quad 2\text{X1} + 3\text{X2} - \text{R} &\le 100 \\ 3\text{X1} + 2\text{X2} &\le 120 \\ \text{X1} + 2\text{X2} &\le 70 \\ \text{X1} &\ge 20 \\ \text{X2} &\ge 25 \\ \text{X1}, \text{X2} &\ge 0 \end{aligned}$$

Adjunk választ a következő kérdésekre:

(a) Tegyük fel, hogy a rubinok beszerzési ára 100$ helyett 190$. Vásárolna-e az ékszerész rubinokat? Mi lenne az új feladat optimális megoldása?

(b) Tegyük fel, hogy csak 23 darab 1-es típusú gyűrűt kellene mindenképpen elkészíteni. Mekkora lenne ebben az esetben az ékszerész nyeresége?

(c) Legfeljebb mennyit érdemes fizetni +1 ékszerész-munkaóráért?

(d) Legfeljebb mennyit érdemes fizetni +1 zafírért?

(e) Az ékszerész egy 3-as típusú gyűrűn gondolkodik. Egy 3-as típusú gyűrű elkészítéséhez 4 rubinra, 2 zafírra és 1 ékszerész-munkaórára van szükség, az eladási ára pedig 550$ lenne. Érdemes-e 3-as típusú gyűrűket készíteni?

17. Oldjuk meg a következő LP feladatot a duál szimplex módszerrel:

$$\begin{aligned} \max\ z &= -2x_1 - x_2 \\ \text{f.h.}\quad x_1 + x_2 &\ge 5 \\ x_1 - 2x_2 &\ge 8 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

18. Tekintsük a következő LP feladatot:

$$\begin{aligned} \max\ z &= -4x_1 - x_2 \\ \text{f.h.}\quad 4x_1 + 3x_2 &\ge 6 \\ x_1 + 2x_2 &\le 3 \\ 3x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Az első korlátozó feltételből kivonunk egy e_1 feleslegváltozót, a második korlátozó feltételbe beillesztjük az s_2 maradékváltozót, ezenkívül az első és a harmadik korláthoz bevezetjük az a_1, illetve a_3 mesterséges változókat. Az átalakítások után kapott optimális megoldást a 60. táblázat tartalmazza.

60. TÁBLÁZAT

z	x_1	x_2	e_1	s_2	a_1	a_3	**J.o.**
1	0	0	0	$\frac{1}{5}$	M	$M-\frac{7}{5}$	$-\frac{18}{5}$
0	0	1	0	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$
0	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
0	0	0	1	1	-1	1	0

(a) Írjuk fel a feladat duálisát és a duál optimális megoldást!

(b) Optimális marad-e az eredetileg optimális megoldás, ha a feladatot az alábbi módon változtatjuk meg?

$$\begin{aligned}
\max\ z = -4x_1 - x_2 - x_3 & \\
\text{f.h.} \quad 4x_1 + 3x_2 + x_3 &\geq 6 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 3 \\
3x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

19. Tekintsük a következő LP feladatot:

$$\begin{aligned}
\max\ z = -2x_1 + 6x_2 & \\
\text{f.h.} \quad x_1 + x_2 &\geq 2 \\
-x_1 + x_2 &\leq 1 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Ennek a feladatnak a célfüggvénye nem korlátos. Ennek a ténynek a figyelembevételével mutassuk meg, hogy a következő LP feladatnak nincs lehetséges megoldása:

$$\begin{aligned}
\min\ 2y_1 + y_2 & \\
\text{f.h.} \quad y_1 - y_2 &\geq -2 \\
y_1 + y_2 &\geq 6 \\
y_1 \leq 0, y_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

20. A komplementaritási tétel segítségével határozzuk meg a következő feladatnak, valamint duálisának optimális megoldását:

$$\begin{aligned}
\max\ z = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 & \\
\text{f.h.} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &\leq 5 \\
2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 &\leq 8 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

21. Az alábbi LP feladat optimális megoldása $z = 8$, $x_1 = 2, x_2 = 0$:

$$\begin{aligned}
\max\ z = 4x_1 + x_2 & \\
\text{f.h.} \quad 3x_1 + x_2 &\leq 6 \\
5x_1 + 3x_2 &\leq 15 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Grafikus módszerrel adjunk választ a következő kérdésekre:

(a) Határozzuk meg c_1 azon értékeinek tartományát, melyekre optimális marad az aktuális bázis!

(b) Határozzuk meg c_2 azon értékeinek tartományát, melyekre optimális marad az aktuális bázis!

(c) Határozzuk meg b_1 azon értékeinek tartományát, melyekre optimális marad az aktuális bázis!

(d) Határozzuk meg b_2 azon értékeinek tartományát, melyekre optimális marad az aktuális bázis!

22. Egy cég kétféle rádiót gyárt. A munka az egyetlen olyan erőforrás, mely a rádiógyártásnál szűk keresztmetszetet jelent. Jelenleg 2 munkás dolgozik a cégnél. Az első munkás legfeljebb heti 40 órát hajlandó dolgozni 5$ óradíjért. A 2. munkás legfeljebb 50 órát dolgozik hetenként, és óradíja 6$. Az egyes rádiók árait, valamint az előállításukhoz szükséges erőforrásokat a 61. táblázat mutatja.

61. TÁBLÁZAT

1. rádió		**2. rádió**	
Ár	**Szükséges erőforrás**	**Ár**	**Szükséges erőforrás**
25$	1. munkás: 1 óra 2. munkás: 2 óra nyersanyag-költség: 5$	22$	1. munkás: 2 óra 2. munkás: 1 óra nyersanyag-költség: 4$

(a) Jelöljük x_i-vel az i-edik típusú rádióból hetente gyártandó mennyiséget. Mutassuk meg, hogy a cégnek a következő LP feladatot kell megoldania (a feladat optimális tábláját a 62. táblázat tartalmazza).

62. TÁBLÁZAT

z	x_1	x_2	s_1	s_2	**J.o.**
1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	80
0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	20
0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	10

$$\begin{aligned}
\max\ z = 3x_1 + 2x_2 & \\
\text{f.h.} \quad x_1 + 2x_2 &\leq 40 \\
2x_1 + x_2 &\leq 50 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

(b) Az 1. típusú rádió árának mely értékeinél marad optimális az aktuális bázis?

(c) A 2. típusú rádió árának mely értékeinél marad optimális az aktuális bázis?

(d) Optimális lenne-e az aktuális bázis, ha az 1. munkás csak 30 órát dolgozna hetente?

(e) Optimális lenne-e az aktuális bázis, ha a 2. munkás hetente legfeljebb 60 órát dolgozna?

(f) Maximálisan mennyit lenne érdemes fizetni az 1. munkásnak $+1$ óra munkáért?

(g) Mekkora lenne a cég nyeresége, ha a 2. munkás csak 48 órát dolgozna egy héten? Ellenőrizzük a választ úgy, hogy meghatározzuk az egyes rádiókból gyártott mennyiségeket!

(h) Szóba kerül egy 3. típusú rádió gyártása is. Ennek a paraméterei a következők: az ára 30$; az 1. munkástól 2 munkaóra, a második munkástól 2 munkaóra szükséges, a nyersanyagköltség 3$. Érdemes-e 3. típusú rádiót gyártani?

23. Beerco, egy sörfőzde, világos sört és barna sört gyárt árpából, komlóból és malátából. Jelenleg 40 kg árpa, 30 kg komló és 40 kg maláta áll rendelkezésre. Egy hordó világos sört 40$-ért lehet eladni, előállításához 1 kg árpa, 1 kg komló és 2 kg maláta szükséges. Egy hordó barna sört 50$-ért lehet eladni, előállításához 2 kg árpára, 1 kg komlóra és 1 kg malátára van szükség. A sörfőzde el tudja adni az általa gyártott világos sört és barna sört. Az összárbevétel maximalizálása céljából a következő LP feladatot kell megoldani:

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= 40\ \text{világos sör} + 50\ \text{barna sör} \\
\text{f.h.}\quad & \text{világos sör} + 2\ \text{barna sör} \le 40 \quad \text{(árpa korlát)} \\
& \text{világos sör} + \text{barna sör} \le 30 \quad \text{(komló korlát)} \\
& 2\ \text{világos sör} + \text{barna sör} \le 40 \quad \text{(maláta korlát)} \\
& \text{világos sör, barna sör} \ge 0
\end{aligned}
$$

világos sör = világos sörből gyártott mennyiség hordóban, és barna sör = barna sörből gyártott mennyiség hordóban. A feladat optimális tábláját a 63. táblázat mutatja.

63. TÁBLÁZAT

z	**Világos sör**	**Barna sör**	s_1	s_2	s_3	**J.o.**
1	0	0	20	0	10	1200
0	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{40}{3}$
0	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$
0	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{40}{3}$

(a) Írjuk fel a feladat duálisát és a duál optimális megoldást!

(b) Határozzuk meg a világos sör árának azokat az értékeit, melyre optimális marad az aktuális bázis!

(c) Határozzuk meg a barna sör árának azokat az értékeit, melyre optimális marad az aktuális bázis!

(d) Határozzuk meg a rendelkezésre álló árpa mennyiségének azon értékeit, melyre optimális marad az aktuális bázis!

(e) Határozzuk meg a rendelkezésre álló komló mennyiségének azon értékeit, melyre optimális marad az aktuális bázis!

(f) Határozzuk meg a rendelkezésre álló maláta mennyiségének azon értékeit, melyre optimális marad az aktuális bázis!

(g) Tegyük fel, hogy a sörfőzde maláta-likőr gyártását fontolgatja. Egy hordó maláta-likőr eladási ára 50$, előállításához 0.5 kg árpára, 3 kg komlóra és 3 kg malátára van szükség. Érdemes-e maláta-likőrt gyártani?

(h) Tegyük fel, hogy a sörfőzde feladat korlátait dkg-ban adjuk meg. Írjuk fel az új feladatot, és annak duálisát!

(i) Mi lesz az új feladat duálisának optimális megoldása? (*Útmutatás*: Gondoljuk végig, mi történik a $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ vektorral! Az árnyékárak fogalmának segítségével magyarázzuk meg, hogy miért különbözik egymástól az eredeti [kg-ban megadott] LP feladat és az új [dkg-ban megadott] LP feladat duál optimális megoldása.)

B csoport

24. Tekintsük a következő LP feladatot:

$$
\begin{aligned}
\max\ z = -3x_1 + x_2 + 2x_3 & \\
\text{f.h.}\qquad x_2 + 2x_3 &\le 3 \\
-x_1 + 3x_3 &\le -1 \\
-2x_1 - 3x_2 &\le -2 \\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

(a) Írjuk fel a feladat duálisát, és mutassuk meg, hogy annak és az eredeti feladatnak a lehetséges tartománya azonos!

(b) A gyenge dualitás segítségével igazoljuk, hogy a primál (és a duál) feladat optimális célfüggvényértéke 0 kell hogy legyen!

25. Tekintsük a következő LP feladatot:

$$
\begin{aligned}
\max\ z = 2x_1 + x_2 + x_3 & \\
\text{f.h.}\qquad x_1 + x_3 &\le 1 \\
x_2 + x_3 &\le 2 \\
x_1 + x_2 &\le 3 \\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Tudjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(a) Mutassuk meg, hogy az x_1, x_2 és x_3 bázisváltozók által meghatározott bázismegoldás optimális. Írjuk fel az optimális megoldást!

(b) Írjuk fel a feladat duálisát és a duál optimális megoldást!

(c) Mutassuk meg, hogy ha mindegyik korlátozó feltétel jobb oldalát megszorozzuk egy nemnegatív k konstanssal, akkor az új optimális megoldást megkaphatjuk úgy, hogy az eredeti optimális megoldás mindegyik változóját megszorozzuk k-val!

26. Egy cég két terméket gyárt: az 1-est és a 2-est. A szükséges adatokat a 64. táblázat mutatja. Hetente legfeljebb 400 egység nyersanyagot lehet beszerezni egységenként 1.50$ áron. A cég négy dolgozót alkalmaz, akik heti 40 órát dolgoznak (a bérüket fix költségnek tekintjük). A dolgozókat túlórára is fel lehet kérni, ennek a díjazása 6$ óránként. Egy héten 320 óra gépidő áll rendelkezésre.

64. TÁBLÁZAT

	1-es termék	2-es termék
Eladási ár	15$	8$
Munkaórák száma	0.75 óra	0.50 óra
Szükséges gépidő	1.5 óra	0.80 óra
Szükséges nyersanyag	2 egység	1 egység

Ha a cég nem folytat reklámtevékenységet, akkor az 1-es termék után heti 50 egység, a 2-es termék után pedig heti 60 egység kereslet mutatkozik. Reklámozással növelni lehet a keresletet mindkét termék iránt. Az 1-es termék reklámozására fordított minden egyes dollár 10 egységgel növeli a keresletet, a 2-es termék esetén ez a növekedés 15 egység. Reklámozásra legfeljebb 100$ fordítható. Vezessük be a következő jelöléseket:

P1 = az 1-es termékből hetente gyártott egységek száma
P2 = a 2-es termékből hetente gyártott egységek száma
OT = az igénybe vett túlórák száma
RM = a nyersanyagból beszerzett egységek száma
A1 = az 1-es termék reklámozására hetente fordított összeg dollárban
A2 = a 2-es termék reklámozására hetente fordított összeg dollárban

A cégnek a következő LP feladatot kell megoldania:

$$\begin{aligned} &\max z = 15\text{P1} + 8\text{P2} - 6(\text{OT}) - 1.5\text{RM} - \text{A1} - \text{A2} \\ &\text{f.h.} \quad \text{P1} - 10\text{A1} \leq 50 && (1) \\ &\text{P2} - 15\text{A2} \leq 60 && (2) \\ &0.75\text{P1} + 0.5\text{P2} \leq 160 + (\text{OT}) && (3) \\ &2\text{P1} + \text{P2} \leq \text{RM} && (4) \\ &\text{RM} \leq 400 && (5) \\ &\text{A1} + \text{A2} \leq 100 && (6) \\ &1.5\text{P1} + 0.8\text{P2} \leq 320 && (7) \\ &\text{minden változó nemnegatív} \end{aligned}$$

Adjunk választ a következő kérdésekre:

(a) Igénybe venne-e a cég túlórát, ha annak díja mindösszе 4$ lenne óránként?

(b) Optimális marad-e az aktuális bázis, ha mindegyik terméket egységenként 15.50$-ért lehet eladni? Mi lesz ekkor az új optimális megoldás?

(c) Legfeljebb mennyit érdemes +1 egység nyersanyagért fizetni?

(d) Mennyit lenne hajlandó fizetni a cég +1 óra gépidőért?

(e) Mekkora lenne a cég nyeresége, ha mindegyik munkásnak (reguláris munkarendben) 45 órát kellene dolgoznia hetenként?

(f) Magyarázzuk meg, hogy miért 0.10 az első korláthoz tartozó árnyékár! (*Útmutatás*: Ha az (1) korlát jobb oldalát 50-ről 51-re növelnénk, akkor az 1-es termék reklámozása nélkül 51 egységet lehetne eladni hetente.)

(g) A cég egy új termék (3-as termék) bevezetését fontolgatja. Ebből egy egység eladási ára 17$, előállításához 2 órányi munkára, 1 egység nyersanyagra és 2 óra gépidőre van szükség. Érdemes-e belefogni a 3-as termék gyártásába?

(h) Optimális maradna-e az aktuális bázis, ha a 2-es termék eladási ára egységenként 10$ lenne?

27. A következő kérdések a 3.9. alfejezetben vizsgált Rylon-példára vonatkoznak. A következő definíciókat használjuk:

RB = évente gyártott Normál Brute mennyisége
LB = évente gyártott Luxus Brute mennyisége
RC = évente gyártott Normál Chanelle mennyisége
LC = évente gyártott Luxus Chanelle mennyisége
RM = évente beszerzett nyersanyag mennyisége

Adjunk választ a következő kérdésekre:

(a) Ismertessük valamennyi árnyékár jelentését.

(b) Mi lenne a feladat új optimális megoldása, ha 50 centtel növelnénk a Normál Brute árát?

(c) A cég a laboratórium kapacitásának növelését fontolgatja. Két változat vetődik fel:

1. változat 10 000$ költséggel (jelenértékben) a laboratórium éves kapacitását 1000 órával lehet növelni.

2. változat 200 000$ költséggel (jelenértékben) a laboratórium éves kapacitását 10 000 órával lehet növelni.

Tegyük fel, hogy minden egyéb feltétel változatlan marad, és a jövőbeli hozamokat évente $11\frac{1}{9}\%$ kamatlábbal diszkontáljuk. Melyik változatot válassza a cég (esetleg egyiket sem)?

(d) A cég egy új típusú nyersanyag beszerzését fontolgatja. Ez a nyersanyag korlátlan mennyiségben beszerezhető egységenkénti 8$ áron. Az új nyersanyag feldolgozásához egységenként 3 órára van szükség a laboratóriumban. Egy egység felhasználásával 2 egység Normál Brute és 1 egység Normal Chanelle készíthető el. Érdemes-e az új típusú nyersanyaggal foglalkozni?

28. Tekintsük a következő két LP feladatot:

$$\begin{aligned} \max\ z = {} & c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{f.h.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned} \qquad \text{(LP 1)}$$

$$\begin{aligned} \max\ z = {} & 100c_1x_1 + 100c_2x_2 \\ \text{f.h.} \quad & 100a_{11}x_1 + 100a_{12}x_2 \le b_1 \\ & 100a_{21}x_1 + 100a_{22}x_2 \le b_2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned} \qquad \text{(LP 2)}$$

Tegyük fel, hogy $BV = \{x_1, x_2\}$ mindkét feladat optimális bázisa, és az első feladat optimális megoldása $x_1 = 50$, $x_2 = 500$, $z = 550$. Tegyük fel továbbá, hogy az első feladatban az első és második korlátozófeltételhez tartozó árnyékár egyaránt $= \frac{100}{3}$. Keressük meg a második feladatnak és duálisának optimális megoldását! (*Útmutatás*: Mi történik B^{-1}-zel, ha a mátrix valamennyi elemét 100-zal megszorozzuk?)

29. A következő kérdések a 3.6. alfejezetben megismert Star Oil tőkebefektetési feladatra vonatkoznak.

(a) Határozzuk meg valamennyi korlátozó feltétel árnyékárát, és magyarázzuk meg a jelentésüket!

(b) Megváltozna-e a feladat optimális megoldása, ha az 1. befektetés nettó jelenértéke 5 millió dollár lenne?

(c) Tegyük fel, hogy van egy új (6.) befektetési lehetőség is. A 6. befektetés a 0. időpontban 5 millió dollár kiadást, az 1. időpontban 10 millió dollár kiadást igényel, ugyanakkor a befektetés nettó jelenértéke 10 millió dollár. Érdemes-e ebbe bármekkora összeget befektetni?

30. A következő kérdések a Finco cég 3.11. alfejezetben ismertetett befektetési problémájára vonatkoznak.

(a) Mennyivel nőne a 3. időpontban a hozam, ha a 0. időpontban 2000$-ral több tőke állna a cég rendelkezésére?

(b) Vegyük észre, hogy ha a cég az 1. időpontban kapna még egy dollárt, akkor az 1. időpontban befektethető összeg értéke $0.5A + 1.2C + 1.08S_0 + 1$ lenne. Ennek a ténynek és a 2. korláthoz tartozó árnyékárnak a figyelembevételével állapítsuk meg, hogy mennyivel javulna a cég pénzügyi pozíciója a 3. időpontban, ha $+1$ dollár állna az 1. időpontban a cég rendelkezésére?

(c) Mennyivel változna a 3. időpontban a cég rendelkezésére álló pénzösszeg, ha a 2. időpontban kapna a cég $+1$ dollárt?

(d) Optimális marad-e az aktuális bázis, ha a D befektetés 1.80$-t hoz a 3. időpontban?

(e) Tegyük fel, hogy egy kitűnő pénzügyi alap 25% hozamot tudna nyújtani a 0. időponttól az 1. időpontig terjedő periódusban. Érdemes-e a Finco cégnek a 0. időpontban ebbe az alapba befektetni?

(f) Egy új befektetési lehetőséget (az F befektetést) mérlegelünk. Az F lehetőségbe befektetett egy dollár a következő pénzáramlást biztosítja: 0. időpontban -1.00\$; az 1. időpontban $+1.10$\$; a 2. időpontban $+0.20$\$; a 3. időpontban $+0.10$\$. Érdemes-e a Finco cégnek az F lehetőségbe pénzt fektetni?

31. Ebben a feladatban azt vizsgáljuk, hogyan interpretálhatóak az árnyékárak a keverési probléma esetén (lásd 3.8. alfejezet). Tekintsük a 3.8. alfejezet 2. feladatát. Legyen

x_{6J} = a 6 pontos narancs mennyisége a narancslében
x_{9J} = a 9 pontos narancs mennyisége a narancslében
x_{6B} = 6 pontos narancs az előrecsomagolt termékben
x_{9B} = 9 pontos narancs mennyisége a zacskóban

Ekkor a feladatot felírhatjuk az alábbi módon:

$$\begin{aligned} \max\ z = {} & 0.45(x_{6J} + x_{9J}) + 0.30(x_{6B} + x_{9B}) \\ \text{f.h.} \quad & x_{6J} + x_{6B} \le 120000 && \text{(6 pontos korlát)} \\ & x_{9J} + x_{9B} \le 100000 && \text{(9 pontos korlát)} \\ & \frac{6x_{6J} + 9x_{9J}}{x_{6J} + x_{9J}} \ge 8 && \text{(narancslé korlát)} \qquad (1) \\ & \frac{6x_{6B} + 9x_{9B}}{x_{6B} + x_{9B}} \ge 7 && \text{(zacskós narancs korlát)} \qquad (2) \\ & x_{6J}, x_{9J}, x_{6B}, x_{9B} \ge 0 \end{aligned}$$

Az (1) és (2) egyenlőtlenségek keverési korlátok, hiszen ezek adják meg, hogy narancslé, illetve előrecsomagolt narancs készítésekor milyen arányban kell a 6 pontos és 9 pontos narancsot összekeverni. Célszerű lenne meghatározni, hogy a narancslé, illetve a zacskós narancs szabványának kismértékű módosítása milyen mértékben változtatja meg a nyereséget. A feladat végén megmutatjuk, hogy hogyan lehet az (1), illetve (2) feltételekhez tartozó árnyékárak segítségével megválaszolni a következő kérdéseket:

(a) Tegyük fel, hogy 8.1-re emeljük a narancslé előírt átlagos pontszámát. Hogyan változik a nyereség, ha az aktuális bázis optimális marad?

(b) Tegyük fel, hogy 6.9-re csökkentjük a zacskós narancs előírt átlagos pontszámát. Hogyan változik a nyereség, ha az aktuális bázis optimális marad?

Az (1) és (2) feltételekhez tartozó árnyékár egyaránt -0.15. Az optimális megoldás $x_{6J} = 26,666.67, x_{9J} = 53\,333.33$, $x_{6B} = 93\,333.33, x_{9B} = 46\,666.67$. Az (1) és (2) korlátokhoz tartozó árnyékárak interpretálásakor *feltételezzük, hogy egy termék minőségi előírásának kismértékű módosítása a termékből előállított mennyiséget csak elhanyagolható mértékben befolyásolja.*

Vegyük észre, hogy (1) felírható a

$$6x_{6J} + 9x_{9J} \geq 8(x_{6J} + x_{9J}), \text{ vagyis } -2x_{6J} + x_{9J} \geq 0$$

alakban. Ha a narancslé minőségi szabványát $(8 + \Delta)$-ra módosítjuk, akkor (1)-ből

$$6x_{6J} + 9x_{9J} \geq (8 + \Delta)(x_{6J} + x_{9J})$$

vagyis

$$-2x_{6J} + x_{9J} \geq \Delta(x_{6J} + x_{9J})$$

adódik. Mivel feltettük, hogy a minőségi előírás módosítása nem változtatja meg a termelt mennyiséget, ezért $x_{6J} + x_{9J}$ értéke továbbra is 80 000 lesz, (1) pedig a

$$-2x_{6J} + x_{9J} \geq 80000\Delta$$

alakot ölti. Ennyi előkészítés után az árnyékár definícióját használva válaszoljuk meg az (a) és (b) kérdéseket!

32. Egy cég nagyméretű puha labdákat, valamint közönséges méretű puha és kemény labdákat gyárt. Mindegyik labda három részlegben készül, a következő sorrendben: szabászat, varroda és csomagolórészleg. A 65. táblázat mutatja, hogy melyik labdának melyik részlegben hány percet kell töltenie. Marketing szempontok miatt legalább 1000 db közönséges puha labdát mindenképpen el kell készíteni. Egy közönséges puha labda ára 3\$, a kemény labdáé 4\$, a nagyméretű puha labda ára pedig 5\$. A szabászati részleg kapacitása 18 000 perc, a varrodáé 18 000 perc, a csomagolórészlegé pedig 9000 perc. A cég célja a bevétel maximalizálása. Legyen

$$\begin{aligned} \text{RS} &= \text{a közönséges puha labdák száma} \\ \text{LS} &= \text{a nagy puha labdák száma} \\ \text{HB} &= \text{a kemény labdák száma.} \end{aligned}$$

Ekkor felírhatjuk az alábbi LP feladatot:

$$\begin{array}{llll} \max z = & 3\text{RS} + 5\text{LS} + 4\text{HB} & & \\ \text{f.h.} & 15\text{RS} + 10\text{LS} + 8\text{HB} \leq 18000 & & \text{(szabás korlát)} \\ & 15\text{RS} + 15\text{LS} + 4\text{HB} \leq 18000 & & \text{(varrás korlát)} \\ & 3\text{RS} + 4\text{LS} + 2\text{HB} \leq 9000 & & \text{(csomagolás korlát)} \\ & \text{RS} \geq 1000 & & \text{(kereslet korlát)} \\ & \text{RS}, \text{LS}, \text{HB} \geq 0 & & \end{array}$$

A feladat optimális tábláját a 66. táblázat mutatja.

65. TÁBLÁZAT

Labda	Szabás	Varrás	Csomagolás
	időtartama		
Közönséges puha	15	15	3
Nagy puha	10	15	4
Kemény	8	4	2

(a) Írjuk fel a feladat duálisát és a duál optimális megoldást!

(b) Mutassuk meg, hogy a primál feladatnak egy másik optimális megoldása is létezik! Hány perc van kihasználva a teljes varrási kapacitásból a másik optimális megoldás esetén?

(c) $+1$ perc varrási kapacitás milyen mértékben növelné a cég bevételét? Összhangban van-e a válasz azzal a ténnyel, hogy a varró-kapacitás aktív korlát? (*Útmutatás*: Vegyük figyelembe a (b) kérdésre adott választ.)

66. TÁBLÁZAT

z	**RS**	**LS**	**HB**	s_1	s_2	s_3	e_4	a_4	**J.o.**
1	0	0	0	0.5	0	0	4.5	$M - 4.5$	4500
0	0	0	1	0.19	-0.125	0	0.94	-0.94	187.5
0	0	1	0	-0.05	0.10	0	0.75	-0.75	150
0	0	0	0	-0.17	-0.15	1	-1.88	1.88	5025
0	1	0	0	0	0	0	-1	1	1000

(d) A közönséges puha labdák számára vonatkozó korlátot 100-zal növelve, hogyan változik a cég bevétele f.h. optimális marad az aktuális bázis?

33. Tekintsük a következő LP feladatot:

$$\begin{aligned} \max\ z &= c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{f.h.}\quad & 3x_1 + 4x_2 \le 6 \\ & 2x_1 + 3x_2 \le 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

A feladat optimális táblája a következő:

$$\begin{aligned} z \quad + s_1 + 2s_2 &= 14 \\ x_1 \quad + 3s_1 - 4s_2 &= 2 \\ x_2 - 2s_1 + 3s_2 &= 0 \end{aligned}$$

Báziscsere nélkül határozzuk meg c_1 és c_2 értékét!

34. Tekintsük a következő LP feladatot, és az optimális táblának egy részletét (67. táblázat):

$$\begin{aligned} \max\ z &= 20x_1 + 10x_2 \\ \text{f.h.}\quad & x_1 + x_2 = 150 \\ & x_1 \le 40 \\ & x_2 \ge 20 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

67. TÁBLÁZAT

z	x_1	x_2	s_2	e_3	a_1	a_3	**J.o.**
1	0	0		0			1900
0	0	0	−1	1	1	−1	90
0	1	0	1	0	0	0	40
0	0	1	−1	0	1	0	110

(a) Adjuk meg a teljes optimális táblát!

(b) Írjuk fel a feladat duálisát és a duál optimális megoldást!

35. Tekintsük az alábbi LP feladatot és a feladat optimális tábláját (68. táblázat):

$$\begin{aligned} \max\ z &= c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{f.h.}\quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Határozzuk meg $c_1, c_2, b_1, b_2, a_{11}, a_{12}, a_{21}$ és a_{22} értékét!

68. TÁBLÁZAT

z	x_1	x_2	s_1	s_2	b
1	0	0	2	3	$\frac{5}{2}$
0	1	0	3	2	$\frac{5}{2}$
0	0	1	1	1	1

36. Egy LP feladatban három $\le$ típusú korlátozó feltétel található. A jobb oldali konstansok értéke rendre 10, 15 és 20. Az optimális táblában s_2 a második korláthoz tartozó bázisváltozó, és a 2. korlát jobb oldalán álló konstans értéke 12. Határozzuk meg b_2 értékének azt a tartományát, melyre optimális marad az aktuális bázis! (*Útmutatás*: Hogyan alakul az optimális tábla jobb oldala, ha a 2. korlát jobb oldalán álló konstans értéke $15 + \Delta$?)

37. Oldjuk meg a vitorlás céggel kapcsolatos 3.10. feladatot! Adjunk választ a következő kérdésekre:

(a) Mekkora lenne az elkövetkező négy hónap kereseleteinek kielégítésével kapcsolatos összköltség, ha az 1. havi vitorláshajó-kereslet 35-re csökkenne?

(b) Mi lenne az új optimális megoldás, ha az 1. hónapban egy vitorláshajó rendes munkaidőben történő elkészítésének költsége 420$ lenne?

(c) Tegyük fel, hogy egy új vevő hajlandó lenne 425$-t fizetni egy vitorláshajóért. Érdemes-e teljesíteni ezt a megrendelést, ha az 1. hónapban kell szállítani? Hogyan alakul a válasz, ha a 4. hónapban kell szállítani?

Irodalom

Az alábbi művek részletesen tárgyalják az érzékenységvizsgálatot és a dualitást:

Bazaraa, M., and J. Jarvis. *Linear Programming and Network Flows*. New York: Wiley, 1990.

Bradley, S., A. Hax, and T. Magnanti. *Applied Mathematical Programming*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1977.

A következő cikk a DEA analízis világos kifejtését tartalmazza:

Callen, J. „Data Envelopment Analysis: Practical Survey and Managerial Accounting Applications," *Journal of Management Accounting Research* 3(1991):35–57.

Dantzig, G. *Linear Programming and Extensions.* Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1963.

Gass, S. *Linear Programming: Methods and Applications*, 5th ed. New York: McGraw-Hill, 1985.

Luenberger, D. *Linear and Nonlinear Programming*, 2d ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1984.

Murty, K. *Linear Programming*. New York: Wiley, 1983.

Simmons, D. *Linear Programming for Operations Research*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1972.

Simonnard, M. *Linear Programming*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1966.

Wu, N., and R. Coppins. *Linear Programming and Extensions*. New York: McGraw-Hill, 1981.

6

Szállítási, hozzárendelési és összetett szállítási feladatok

Ebben a fejezetben a lineáris programozási feladatok három speciális típusát tárgyaljuk: a szállítási, a hozzárendelési és az összetett szállítási feladatot. Ezek mindegyike megoldható ugyan szimplex módszerrel, ám ennek ellenére kidolgoztak olyan speciális algoritmusokat, amelyek az ilyen típusú feladatok megoldását sokkal hatékonyabbá teszik.

6.1. A szállítási feladatok megfogalmazása

A tárgyalást a szállítási feladat megfogalmazásával kezdjük. Ez azt jelenti, hogy a következő példával illusztrált helyzet leírására alkalmas lineáris programozási modellt állítunk fel.

1. PÉLDA

A Powercónak három elektromos erőműtelepe van, ezek négy város szükségletét látják el.[1]

Az egyes erőművek a következő mennyiségű kilowattóra (kWh) elektromos energiát képesek szolgáltatni: 1. erőmű: 35 millió; 2. erőmű: 50 millió; 3. erőmű: 40 millió (lásd 1. táblázat). Az egyszerre (délután 2-kor) megjelenő csúcsfogyasztási igények ezekben a városokban: 1. város: 45 millió; 2. város: 20 millió; 3. város: 30 millió; 4. város: 30 millió. 1 millió kWh áram szállítása valamelyik erőműből valamelyik városba attól függ, hogy milyen távolságra kell szállítani. Fogalmazzunk meg egy LP-t, amely minimalizálja annak a költségét, hogy mindegyik város csúcsfogyasztási igénye ki legyen elégítve!

1. TÁBLÁZAT
Szállítási költség ($), szolgáltatás és kereslet a Powerco feladatban

	Hová				
Honnan	**1. város**	**2. város**	**3. város**	**4. város**	**Szolgáltatás (millió kWh)**
1. erőmű	8	6	10	9	35
2. erőmű	9	12	13	7	50
3. erőmű	14	9	16	5	40
Igény (millió kWh)	45	20	30	30	

Megoldás

A Powerco feladathoz tartozó LP megfogalmazását azzal kezdjük, hogy minden olyan döntéshez, amelyet a Powercónak meg kell hoznia, definiálunk egy változót. Mivel a Powercónak meg kell határoznia az egyes erőművekből az egyes városokba szállítandó elektromos

[1] Aarvik és Randolph (1975) alapján.

energia mennyiségét, definiáljuk ($i = 1,2,3$ és $j = 1,2,3,4$ esetére) a következő változókat:

x_{ij} = az i-edik erőműben termelt, és a j-edik városba szállított millió kWh-k száma

Ezeknek a változóknak a segítségével felírhatjuk a csúcsfogyasztási igények kielégítésének költségét az 1–4. városokban:

$$
\begin{aligned}
&8x_{11} + \ \ 6x_{12} + 10x_{13} + 9x_{14} && \text{(az 1. erőműből való szállítás költsége)}\\
+\ &\ 9x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23} + 7x_{24} && \text{(a 2. erőműből való szállítás költsége)}\\
+\ &14x_{31} + \ \ 9x_{32} + 16x_{33} + 5x_{34} && \text{(a 3. erőműből való szállítás költsége)}
\end{aligned}
$$

A Powercónak kétféle típusú feltétellel kell szembenéznie. Először is, az egyes erőművekből elszállított összes elektromos energia nem haladhatja meg az erőmű kapacitását. Például az 1. erőműből a négy városba elszállított elektromosság mennyisége nem lehet több mint 35 millió kWh. Minden 1-es indexű változó az 1. erőműből történő szállítást jelent, így tehát ezt az előírást a következő LP feltétellel fejezhetjük ki:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 35$$

Hasonló módon okoskodva megtalálhatjuk a 2. erőmű és a 3. erőmű kapacitásainak megfelelő feltételeket is. Mivel az áramellátás az erőművekből történik, ezeket a helyeket **kínálati pontoknak** (vagy feladóhelyeknek) nevezzük. Ennek megfelelően egy olyan feltételt, amelyik azt biztosítja, hogy az erőműből elszállított mennyiség nem lépi túl az erőmű kapacitását, **kínálati feltételnek** nevezünk. A Powerco probléma LP megfogalmazásában a következő három kínálati feltétel szerepel:

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &\le 35 && \text{(1. erőmű kínálati feltétele)}\\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &\le 50 && \text{(2. erőmű kínálati feltétele)}\\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &\le 40 && \text{(3. erőmű kínálati feltétele)}
\end{aligned}
$$

Másodszor, szükségünk van olyan feltételekre, amelyek azt biztosítják, hogy minden város megkapja a csúcsfogyasztási igényt kielégítő áramot. Mivel minden városnak szüksége van elektromosságra, mindegyik egy **rendeltetési hely** (vagy **keresleti hely**). Például az 1. városnak legalább 45 millió kWh áramot kell kapnia. Minden olyan változó, amelyiknél a második index 1-es, az 1. városba történő szállításra vonatkozik, így a következő feltételt kapjuk:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \ge 45$$

Hasonló okoskodással nyerhetjük a 2., 3. és 4. város igényére vonatkozó feltételeket. Egy olyan feltételt, amelyik azt biztosítja, hogy egy helyszínre megérkezzék az igényelt mennyiség, **keresleti feltételnek** nevezünk. A Powercónak a következő négy keresleti feltételt kell kielégítenie:

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{21} + x_{31} &\ge 45 && \text{(1. város keresleti feltétele)}\\
x_{12} + x_{22} + x_{32} &\ge 20 && \text{(2. város keresleti feltétele)}\\
x_{13} + x_{23} + x_{33} &\ge 30 && \text{(3. város keresleti feltétele)}\\
x_{14} + x_{24} + x_{34} &\ge 30 && \text{(4. város keresleti feltétele)}
\end{aligned}
$$

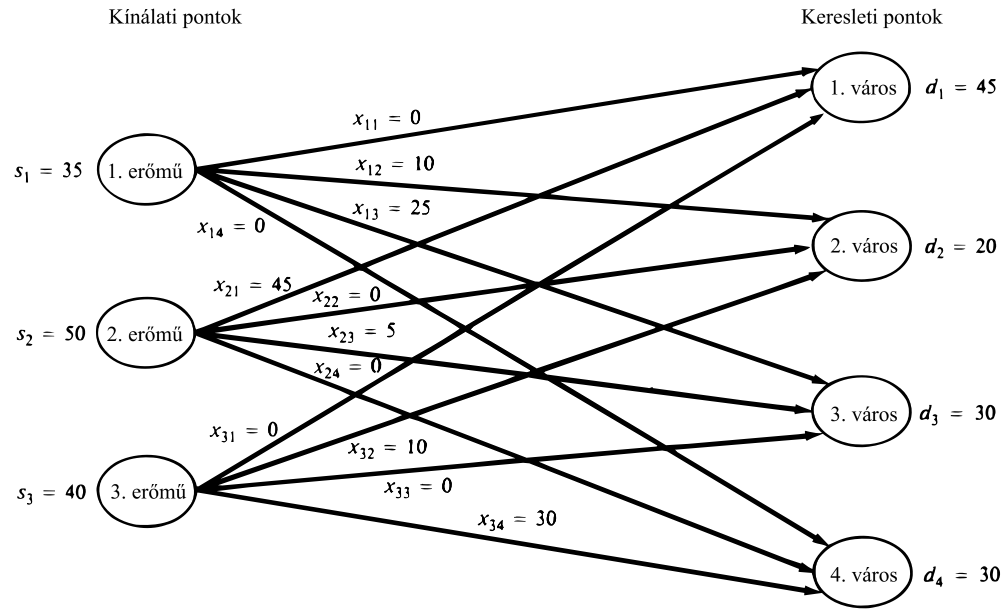
Mivel minden x_{ij}-nek nemnegatívnak kell lennie, az eddigiekhez hozzávesszük az $x_{ij} \ge 0$, ($i = 1,2,3$; $j = 1,2,3,4$) nemnegativitási feltételeket.

Most már összefoglalhatjuk a célfüggvényt, a keresleti feltételeket, a kínálati feltételeket és a nemnegativitási feltételeket, és így a Powerco feladat következő LP alakjához jutunk el:

$$
\begin{aligned}
\min z = {} & 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 9x_{14} + 9x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23} + 7x_{24} \\
& + 14x_{31} + 9x_{32} + 16x_{33} + 5x_{34} \\
\text{f.h.} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 35 \qquad \text{(kínálati feltételek)} \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 50 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 40 \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 45 \qquad \text{(keresleti feltételek)} \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 20 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 30 \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 30 \\
& x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1,2,3;\, j = 1,2,3,4)
\end{aligned}
$$

A 6.3. alfejezetben látni fogjuk, hogy ennek az LP-nek az optimális megoldása: $z = 1020, x_{12} = 10, x_{13} = 25, x_{21} = 45, x_{23} = 5, x_{32} = 10, x_{34} = 30$. Az 1. ábra a Powerco feladatot és annak optimális megoldását szemlélteti. Az x_{ij} változót egy egyenes vagy görbe vonal képviseli, amely az i-edik szolgáltató helyet (i-edik erőmű) és a j-edik keresleti helyet (j-edik város) köti össze.

1. ÁBRA A Powerco feladat grafikus bemutatása és optimális megoldása



A szállítási feladat általános megfogalmazása

Egy szállítási feladatban általában a következő információk szerepelnek:

1. Az *m kínálati pontból* álló halmaz, mely pontokból a szállítás történik. Az i-edik kínálati hely legfeljebb s_i egységet képes szállítani. A Powerco példában $m = 3, s_1 = 35, s_2 = 50$ és $s_3 = 40$.

2. Az *n keresleti (felvevő) pontból* álló halmaz, mely pontokba a szállítás történik. A j-edik felvevőhelynek legalább d_j egységnyire van szüksége a szállított áruból. A Powerco példában $n = 4, d_1 = 45, d_2 = 20, d_3 = 30$ és $d_4 = 30$.

3. Minden olyan egység, amelyet az i-edik kínálati helyen állítanak elő és a j-edik felvevőhelyre szállítanak, c_{ij} *változó költséggel* jár. A Powerco példában $c_{12} = 6$.

Legyen

x_{ij} = az i-edik kínálati helyről a j-edik felvevőhelyre szállított egységek száma.

Ekkor a szállítási feladat általános formában így írható fel:

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} c_{ij} x_{ij} \\
&\text{f.h.} \quad \sum_{j=1}^{j=n} x_{ij} \le s_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad \text{(kínálati feltételek)} \\
&\qquad\quad \sum_{i=1}^{i=m} x_{ij} \ge d_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad \text{(keresleti feltételek)} \\
&x_{ij} \ge 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Ha egy feladatban az (1) alatti feltételek mellett *maximalizálni* kell, a problémát ebben az esetben is szállítási feladatnak nevezzük (lásd az alfejezet végén a 7. feladatot). Ha

$$\sum_{i=1}^{i=m} s_i = \sum_{j=1}^{j=n} d_j$$

akkor a teljes kínálat egyenlő a teljes kereslettel. Ilyenkor a problémát **kiegyensúlyozott szállítási feladatnak** nevezzük. A magyar nyelvű szakkönyvekben találkozhatunk a **klasszikus szállítási feladat** elnevezéssel is.

A Powerco feladatban az összkereslet és az összkínálat is 125 egység, tehát ez egy kiegyensúlyozott szállítási feladat. Egy ilyen feladatban az összes feltételnek aktív feltételnek kell lennie. Ha például a Powerco feladatban valamelyik kínálati feltétel nem lenne aktív, akkor a rendelkezésre álló elektromos energia nem lenne elegendő a négy város igényeinek kielégítésére. Egy kiegyensúlyozott szállítási feladat (1) a következőképpen írható fel:

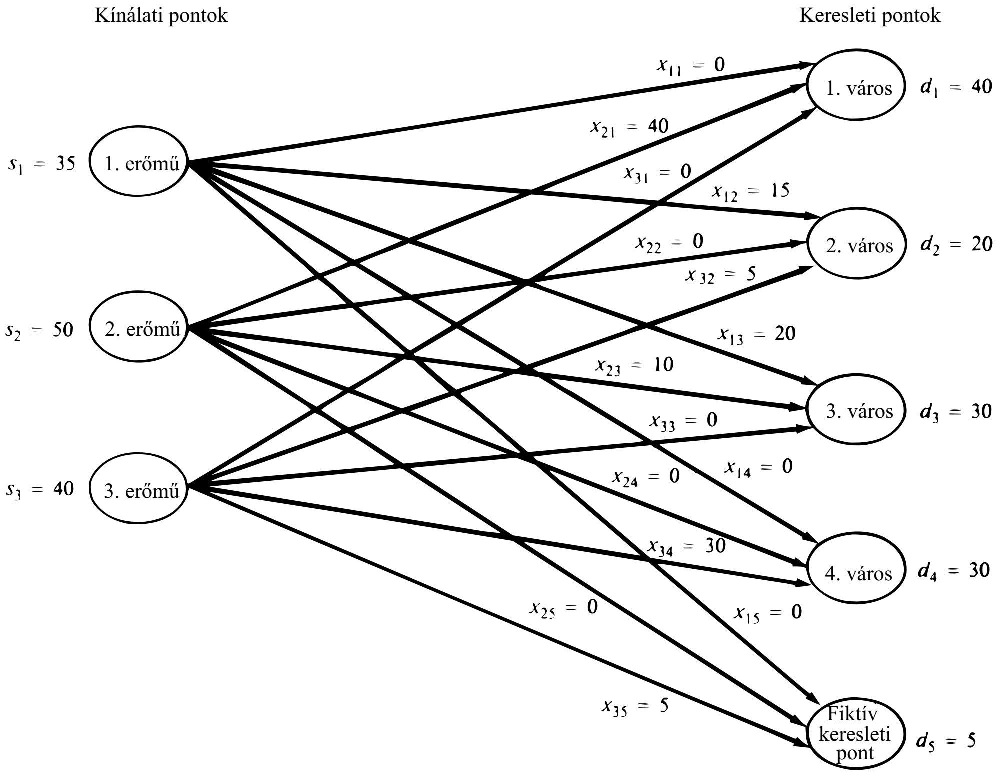
$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} c_{ij} x_{ij} \\
&\text{f.h.} \quad \sum_{j=1}^{j=n} x_{ij} = s_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad \text{(kínálati feltételek)} \\
&\qquad\quad \sum_{i=1}^{i=m} x_{ij} = d_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad \text{(keresleti feltételek)} \\
&x_{ij} \ge 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Ebben a fejezetben később látni fogjuk, hogy viszonylag egyszerűen juthatunk el egy kiegyensúlyozott szállítási feladat egy lehetséges megoldásához. Ugyancsak leegyszerűsíti a számításokat az is, hogy a szállítási szimplex módszerben nem kell szorozni és osztani, elég összeadni és kivonni. Ez jó ok arra, hogy egy szállítási feladatot lehetőség szerint kiegyensúlyozott szállítási feladat formájában fogalmazzunk meg.

A szállítási feladat kiegyensúlyozása akkor, ha az összkínálat meghaladja az összkeresletet

Ha az összkínálat meghaladja az összkeresletet, akkor a szállítási feladatot úgy tudjuk kiegyensúlyozni, hogy egy olyan **fiktív keresleti pontot** konstruálunk, amelynek az igénye éppen a felesleges kínálati mennyiséggel egyenlő. Mivel a fiktív keresleti pontra (felvevő helyre) való szállítások nem valódi szállítások, ezekhez nulla szállítási költséget rendelünk. A fiktív keresleti helyre való szállítások a fel nem használt kínálatot jelzik. Illusztráljuk egy fiktív felvevőhely értelmezését a következőképpen: tegyük föl, hogy a Powerco feladatban az 1. város kereslete csak 40 millió kWh lenne. A Powerco feladat kiegyensúlyozására bevezetünk egy fiktív keresleti pontot (5-ös pont), amelynek $125-120=5$ millió kWh kereslete van. Az egyes erőművekből 1 millió kWh áram szállítása a fiktív helyre 0 költséggel jár. Ennek a kiegyensúlyozott szállítási feladatnak az optimális megoldása: $z=975, x_{13}=20, x_{12}=15, x_{21}=40, x_{23}=10, x_{32}=5, x_{34}=30$ és $x_{35}=5$. Mivel $x_{35}=5$, a 3-as erőmű kínálatából 5 millió kWh felhasználatlan marad (lásd a 2. ábrát).

2. ÁBRA A kiegyensúlyozatlan Powerco feladat grafikus bemutatása az optimális megoldással és a fiktív keresleti ponttal



Egy szállítási feladatot a kínálat, a kereslet és a szállítási költségek határoznak meg. A megfelelő adatok jól összefoglalhatók egy úgynevezett **szállítási táblázatban** (lásd 2. táblázat). Mindegyik x_{ij} változóhoz a szállítási táblázat i-edik sorában és j-edik oszlopában egy kis négyszög vagy **cella** tartozik. Ha x_{ij} bázisváltozó, akkor annak értéke a táblázat ij-edik cellájának bal alsó sarkában látható. Például a kiegyensúlyozott Powerco feladat, és annak optimális megoldása bemutatható úgy, ahogyan az a 3. táblázatban látható. A táblázati forma kimondatlanul is kifejezi a kínálati és keresleti feltételeket úgy, hogy az i-edik sorban a változók összegének s_i-nek, a j-edik oszlopban pedig a változók összegének d_j-nek kell lennie.

2. TÁBLÁZAT
Egy szállítási táblázat

					Kínálat
	$\boxed{c_{11}}$	$\boxed{c_{12}}$	$\cdots$	$\boxed{c_{1n}}$	s_1
	$\boxed{c_{21}}$	$\boxed{c_{22}}$	$\cdots$	$\boxed{c_{2n}}$	s_2
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	$\boxed{c_{m1}}$	$\boxed{c_{m2}}$	$\cdots$	$\boxed{c_{mn}}$	s_m
Kereslet	d_1	d_2	$\cdots$	d_n	

3. TÁBLÁZAT
A Powerco szállítási táblázata

	1. város	2. város	3. város	4. város	Kínálat
1. erőmű	$\boxed{8}$	10 $\boxed{6}$	25 $\boxed{10}$	$\boxed{9}$	35
2. erőmű	45 $\boxed{9}$	$\boxed{12}$	5 $\boxed{13}$	$\boxed{7}$	50
3. erőmű	$\boxed{14}$	10 $\boxed{9}$	$\boxed{16}$	30 $\boxed{5}$	40
Kereslet	45	20	30	30	

A szállítási feladat kiegyensúlyozása akkor, ha az összkínálat kevesebb, mint az összkereslet

Ha egy szállítási feladatban a teljes kínálat szigorúan kisebb, mint a teljes kereslet, akkor a feladatnak nincs lehetséges megoldása. Például, ha az 1. erőmű kapacitása csak 30 millió kWh lenne, akkor az összes rendelkezésre álló kapacitás csak 120 millió kWh lenne. Az ilyen mennyiségű elektromos energia nem elegendő a 125 millió kWh összkereslet kielégítésére, és így a Powerco feladatnak nem lenne lehetséges megoldása.

Amikor az összkínálat kisebb, mint az összkereslet, néhány esetben kívánatos azt a lehetőséget megengedni, hogy a kereslet egy része kielégítetlen maradjon. Ilyen helyzetben a kielégítetlen kereslet gyakran büntetőköltséggel jár. A 2. példa bemutatja, hogy az ilyen helyzetből miként juthatunk egy kiegyensúlyozott szállítási feladathoz.

2. PÉLDA

Két víztároló áll rendelkezésre ahhoz, hogy három város vízszükségletét kielégítse. Mindkét víztároló naponta 50 millió köbméter vizet képes szolgáltatni. Mindegyik városnak naponta 40 millió köbméter vízre lenne szüksége. Minden millió köbméter kielégítetlen kereslet büntetőköltséggel jár. Az 1. városban a büntetőköltség 20$, a 2. városban 22$, a 3. városban pedig 23$. 1 millió köbméter víz szállítási költsége a víztárolókból az egyes városokba a 4. táblázatban látható. Fogalmazzunk meg egy kiegyensúlyozott szállítási feladatot úgy, hogy minimalizáljuk a hiányból adódó, valamint a szállítási költségeket!

4. TÁBLÁZAT Szállítási költségek ($) a víztárolókhoz

	Hová		
Honnan	**1. város**	**2. város**	**3. város**
1. víztároló	7	8	10
2. víztároló	9	7	8

Megoldás Ebben a feladatban

$$\text{napi kínálat} = 50 + 50 = 100 \text{ millió köbméter naponta}$$
$$\text{napi igény} = 40 + 40 + 40 = 120 \text{ millió köbméter naponta}$$

A feladat kiegyensúlyozására bevezetünk egy fiktív (vagy hiány) *kínálati pontot*, amelynek $120 - 100 = 20$ millió köbméter a napi kínálata. 1 millió köbméter víz szállításának költsége a fiktív kínálati helyről egy városba éppen az arra a városra vonatkozó, a hiányból fellépő büntetőköltség, millió köbméterenként. Az 5. táblázat mutatja a kiegyensúlyozott szállítási feladatot és annak optimális megoldását. Az 1. tároló szállítson naponta 20 millió köbmétert az 1. városba és 30 millió köbmétert naponta a 2. városba, míg a 2. tároló szállítson naponta 10 millió köbmétert a 2. városba és 40 millió köbmétert a 3. városba. Az 1. városban naponta 20 millió köbméter vízigény kielégítetlen marad.

5. TÁBLÁZAT Szállítási táblázat a víztárolókhoz

	1. város	2. város	3. város	Kínálat
1. víztároló	20 (7)	30 (8)	(10)	50
2. víztároló	(9)	10 (7)	40 (8)	50
Fiktív kínálati pont	20 (20)	(22)	(23)	20
Kereslet	40	40	40	

Készletezési problémák modellezése szállítási feladatként

Sok készletezési, raktározástervezési feladat modellezhető kiegyensúlyozott szállítási feladat formájában. Ennek bemutatására most a 3.10. alfejezet Sailco problémáját megfogalmazzuk kiegyensúlyozott szállítási feladatként.

3. PÉLDA A Sailco vállalatnak el kell döntenie, hogy a következő négy negyedév mindegyikében hány vitorlás hajót gyártson. Az igények a következők: 40 vitorlás az első negyedévben; 60 vitorlás a második negyedévben; 75 vitorlás a harmadik negyedévben; 25 vitorlás a negyedik negyedévben. A Sailcónak azonnal ki kell elégítenie az igényeket. Az első negyedév elején a Sailco készlete 10 vitorlás. Minden negyedév elején a Sailcónak el kell döntenie, hogy abban a negyedévben hány vitorlást gyártson. Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy egy bizonyos negyedévben legyártott vitorlás felhasználható a folyó negyedévi kereslet kielégítésére. Minden negyedévben a Sailco legfeljebb 40 vitorlást tud gyártani rendes munkaidőben (RM), ezek költsége egyenként 400$. Valamely negyedévben a Sailco még elő tud állítani vitorlásokat úgy, hogy alkalmazottait túlmunkaidőben dolgoztatja (TM). Ekkor a költség vitorlásonként 450$. Az egyes negyedévek végén (miután a gyártás lezajlott, és a folyó igényeket kielégítették) vitorlásonként 20$ tárolási költség lép fel. Fogalmazzunk meg egy kiegyensúlyozott szállítási feladatot úgy, hogy minimalizáljuk a termelési és raktározási költségeket a következő négy negyedévre!

Megoldás Definiáljuk a kínálatot és keresletet a következőképpen:

kínálati pontok

1. pont = kezdőkészlet $(s_1 = 10)$
2. pont = első negyedévi normál munkaidőbeli (RM) gyártás $(s_2 = 40)$
3. pont = első negyedévi túlmunkaidős (TM) gyártás $(s_3 = 150)$
4. pont = második negyedévi RM gyártás $(s_4 = 40)$
5. pont = második negyedévi TM gyártás $(s_5 = 150)$
6. pont = harmadik negyedévi RM gyártás $(s_6 = 40)$
7. pont = harmadik negyedévi TM gyártás $(s_7 = 150)$
8. pont = negyedik negyedévi RM gyártás $(s_8 = 40)$
9. pont = negyedik negyedévi TM gyártás $(s_9 = 150)$

Minden olyan forráshoz, amelyből a vitorlások iránti igény kielégíthető, tartozik egy kínálati pont:

keresleti pontok

1. pont = első negyedévi kereslet $(d_1 = 40)$
2. pont = második negyedévi kereslet $(d_2 = 60)$
3. pont = harmadik negyedévi kereslet $(d_3 = 75)$
4. pont = negyedik negyedévi kereslet $(d_4 = 25)$
5. pont = fiktív keresleti pont $(d_5 = 770 - 200 = 570)$

Az első negyedév normál munkaidős termeléséből a harmadik negyedévi igény kielégítésére vonatkozó egységnyi szállítás itt például azt jelenti, hogy 1 olyan egységet kell gyártani az első negyedévben, amelyik a 3. negyedév 1 egységének kielégítésére szolgál. Például a c_{13} meghatározásához azt kell észrevennünk, hogy egy egység előállítása az első negyedévben, rendes munkaidőben, és ennek az egységnek a 3. negyedévi eladása a következő költségekkel jár: az 1 egység termelése az 1. negyedévben normál munkaidőben, plusz az egység tárolási költsége $3 - 1 = 2$ negyedéven át. Így $c_{13} = 400 + 2(20) = 440$.

Mivel a túlórában történő termelés egyik negyedévben sincs korlátozva, nem világos, hogy milyen értéket kell választani az egyes túlmunkaidős kínálati pontokhoz. Mivel az összkereslet = 200, legfeljebb $200 - 10 = 190$ (a -10 a kezdeti készletből adódik) egységet kell előállítani bármelyik negyedévben. Mielőtt bármely egységet túlmunkaidőben állítanának elő, előbb 40 egységet le kell gyártani normál munkaidőben. Ezáltal a túlmunkaidős termelés egyik negyedévben sem haladhatja meg a $190 - 40 = 150$ egységet. A fel nem használt túlmunkaidős kapacitás a fiktív keresleti pontra lesz „elszállítva”. Biztosítanunk kell, hogy ne történjen meg az, hogy a keresletet még le nem gyártott vitorlással elégítik ki. Ebből a célból bevezetünk egy M költséget (M egy nagy pozitív szám), és ezt rendeljük hozzá minden olyan cellához, amelyik ilyen esethez tartozik.

Az összkínálat $= 770$ és az összkereslet $= 200$, így be kell vezetnünk egy fiktív keresleti pontot $770 - 200 = 570$ egység kereslettel, kiegyensúlyozva a feladatot. Bármely kínálati pontról a fiktív keresleti pontra történő egy egységnyi szállítás költsége 0.

Ezeket a megfontolásokat összegezve egy kiegyensúlyozott szállítási feladatot kapunk, amely az optimális megoldással együtt a 6. táblázatban látható. Így a Sailcónak a következőket kell tennie: az 1. negyedév igényeit a 10 egység kezdeti készletből és az 1. negyedév RM-ben gyártott 30 egységgel elégíti ki; a második negyedév igényeinek kielégítése 10 egység első negyedévi RM, 40 egység második negyedévi RM és 10 egység második ne-

6. TÁBLÁZAT
Szállítási táblázat a Sailco feladathoz

	1	2	3	4	Fiktív keresleti pont	Kínálat
Kezdőkészlet	0 10	20	40	60	0	10
1. negyedévi RM	400 30	420 10	440	460	0	40
1. negyedévi TM	450	470	490	510	0 150	150
2. negyedévi RM	M	400 40	420	440	0	40
2. negyedévi TM	M	450 10	470	490	0 140	150
3. negyedévi RM	M	M	400 40	420	0	40
3. negyedévi TM	M	M	450 35	470	0 115	150
4. negyedévi RM	M	M	M	400 25	0 15	40
4. negyedévi TM	M	M	M	450	0 150	150
Kereslet	40	60	75	25	570	

gyedévi TM termelésől történik; a harmadik negyedév igényeit 40 egység 3. negyedévi RM és 35 egység 3. negyedévi TM termeléséből kell kielégíteni; és végül a 4. negyedév igényeit 25 egység 4. negyedévi RM termelésből elégíti ki.

Az alfejezet végén a 12. feladatban megmutatjuk, hogy ez a megfogalmazás hogyan módosítható, ha a készletezési problémák más szempontjait (késleltetett kereslet, romlékony áru, stb.) is figyelembe kívánjuk venni.

Feladatok

A csoport

1. Egy vállalat három fogyasztónak szállít termékeket, mindegyiknek 30 egységet. A vállalatnak két raktára van. Az 1. raktárban 40 egység, a 2. raktárban pedig 30 egység áll rendelkezésre. A 7. táblázatban láthatók a raktárakból a fogyasztókhoz történő szállítások egységköltségei ($-ban). Minden egyes kielégítetlen fogyasztói keresletegységhez bírság tartozik: az 1. vevőnél 90$ bírságköltség van; a 2. vevőnél 80$; a 3. vevőnél 110$. Fogalmazzon meg egy kiegyensúlyozott szállítási feladatot a hiányköltségek és a szállítási költségek minimalizálására!

7. TÁBLÁZAT

	Hová		
Honnan	**3. vevő**	**1. vevő**	**2. vevő**
1. raktár	15	35	25
2. raktár	10	50	40

2. Hivatkozva az 1. feladatra, tegyük föl, hogy a vállalat egységenként 100 dollárért megvásárolhat és raktáraiba szállíthat termékegységeket, másrészt pedig, hogy ki kell elégíteni az összes igényt. Fogalmazzon meg egy kiegyensúlyozott szállítási feladatot az extra vásárlási és szállítási költségek minimalizálására!

3. Egy cipőgyár előrejelzése szerint a következő hat hónapban a kereslet így alakul: az 1. hónapban 200; a 2. hónapban 260; a 3. hónapban 240; a 4. hónapban 340; az 5. hónapban 140; a 6. hónapban 150. 7 dollárba kerül egy pár cipő előállítása normál munkaidőben (RM), és 11 dollárba kerül túlmunkaidőben (TM). Mindegyik hónapban normál munkaidőben legfeljebb 200 pár cipőt, túlmunkaidőben legfeljebb 100 pár cipőt lehet előállítani. Havonta 1 dollárba kerül egy pár cipő tárolása a raktárban. Fogalmazzon meg egy olyan kiegyensúlyozott szállítási feladatot az összköltség minimalizálására, ahol a költségek a következő hat hónap keresletének azonnali kielégítéséből adódnak!

4. A Steelco háromféle acélt gyárt különböző gyárakban. A 8. táblázatból kiolvasható, hogy 1 tonna acél (bármelyik fajta) gyártásához mennyi idő kell, és az is, hogy az egyes gyárakban mennyibe kerül a különbözőféle acélok 1 tonnájának gyártása. Minden héten mindegyik fajta acélból 100 tonnányit lehet előállítani. Minden gyártelep heti 40 órát dolgozik.

8. TÁBLÁZAT

	Költségek ($)			
	1. acél	**2. acél**	**3. acél**	**idő (percben)**
1. gyár	60	40	28	20
2. gyár	50	30	30	16
3. gyár	43	20	20	15

(a) Fogalmazzon meg egy kiegyensúlyozott szállítási feladatot a Steelco heti gyártási követelményeihez tartozó költségek minimalizálására!

(b) Tegyük föl, hogy az egy tonna acél előállításához szükséges idő függ az acél fajtájától is, nemcsak attól, hogy melyik gyártelepen gyártják (lásd 9. táblázat). Meg lehet-e ezt a problémát fogalmazni szállítási feladatként?

9. TÁBLÁZAT

	Idő (percben)		
	1. acél	**2. acél**	**3. acél**
1. gyár	15	12	15
2. gyár	15	15	20
3. gyár	10	10	15

5. Egy romlékony orvosságból 3 litert kell vásárolnia egy kórháznak a folyó havi felhasználásra, és 4 litert a következő hónapra. Mivel az orvosság romlékony, csak a vásárlás hónapjában használható fel. Két vállalat (Daisy és Laroach) árulja az orvosságot. Az orvosságból hiány van. Ezáltal a következő két hónapban a kórház korlátozottan vásárolhat, legfeljebb 5 litert mindegyik cégtől. A 10. táblázatban láthatók a havi literenkénti árak az egyes cégeknél. Fogalmazzon meg egy kiegyensúlyozott szállítási modellt a szükséges orvosság beszerzési költségének minimalizálására!

10. TÁBLÁZAT

	E havi ár ($) literenként	Jövő havi ár ($) literenként
Daisy	800	720
Laroach	710	750

6. Egy banknak két irodája foglalkozik csekkek feldolgozásával. Az 1. helyszínen naponta 10 000 csekket tudnak feldolgozni, a 2. helyszínen naponta 6000 csekket dolgoznak fel. A bank háromféle csekk feldolgozását intézi: eladói, fizetési és személyi csekkekét. A feldolgozási költség függ a helyszíntől (lásd 11. táblázat). Minden nap mindegyik típusból 5000 csekket kell feldolgozni. Fogalmazzon meg egy kiegyensúlyozott szállítási feladatot a csekkfeldolgozás napi költségének a minimalizálására!

11. TÁBLÁZAT

	1. helyszín	2. helyszín
Eladói csekk	5¢	3¢
Fizetési csekk	4¢	4¢
Személyi csekk	2¢	5¢

7.[2] Az Egyesült Államok kormánya elárverezi két földterület olajbérleti szerződését. Legyenek ezek: 1. földterület és 2. földterület. Mindkét földterületen 100 000 hektár földet lehet bérelni. Cliff Ewing, Blake Barnes és Alexis Pickens licitálnak az olajra. A kormány által bevezetett szabályok értelmében egy-egy licitáló az árverezett földnek legfeljebb 40%-át kaphatja meg. Cliff licitje 1000$/hektár az 1. földterületért és 2000$/hektár a 2. földterületért. Blake licitjei: 900$/hektár az 1. földterület földjéért és 2200$/hektár a 2-es földterület földjéért. Alexis pedig 1100$/hektár licitet adott az 1. földterület földjéért és 1900$/hektár licitet a 2. földterületért. Fogalmazzon meg egy kiegyensúlyozott szállítási modellt a kormány bevételének maximalizálására!

8. Az Ayatola Oil Company két olajmező fölött rendelkezik. Az 1. mező naponta legfeljebb 40 millió hordó olajat termel, a 2. mezőnél pedig a termelés fölmehet napi 50 millió hordó olajra is. Az 1. olajmezőn egy hordó olaj kitermelése és finomítása 3 dollárba kerül, a 2. olajmezőnél ez a költség 2$. Ayatola két országnak adja el az olajat: Angliának és Japánnak. A 12. táblázatban a szállítási költségek láthatók ($-ban). Anglia naponta legfeljebb 40 millió hordóval (hordónként 6$-ért) vásárolna, Japán pedig naponta 30 millió hordó olajat (hordónként 6.50$-ért) venne meg. Fogalmazzon meg egy kiegyensúlyozott szállítási feladatot Ayatola profitjának maximalizálására!

12. TÁBLÁZAT

	Hová	
Honnan	**Anglia**	**Japán**
1. mező	1	2
2. mező	2	1

9. Ennek az alfejezetnek a példáival és feladataival kapcsolatban vizsgálja meg, hogy ésszerű-e feltételezni azt, hogy a célfüggvényre teljesül az arányossági feltevés!

10. A Touche Youngnak három könyvvizsgálója van. Mindegyikük legfeljebb 160 órát tud dolgozni a következő hónapban, és ezalatt három projektet kell befejezni. Az 1. projekt időszükséglete 130 óra, a 2. projekté 140 óra, a 3. projekté 160 óra. A 13. táblázatban látható, hogy az egyes könyvvizsgálók mennyit számlázhatnak az egyes projektekért ($-ban). Fogalmazzon meg egy kiegyensúlyozott szállítási feladatot a következő hónapra a számlázási összegek maximalizálására!

13. TÁBLÁZAT

	Projekt		
Könyvvizsgáló	**1**	**2**	**3**
1	120	150	190
2	140	130	120
3	160	140	150

B csoport

11.[3] A Paperco újságpapír, rétegelt papír és nemrétegelt papír újrafeldolgozását végzi. Az eredmény újrafeldolgozott újságpapír, újrafeldolgozott rétegelt papír és újrafeldolgozott nemrétegelt papír. Az újrafeldolgozott újságpapírt újságpapír és nemrétegelt papír feldolgozásával állítják elő. Az újrafeldolgozott rétegelt papír bármelyik fajta papír feldolgozásával előállítható. Az újrafeldolgozott nemrétegelt papír előállítása rétegelt vagy nemrétegelt papír feldolgozásával nyerhető. Az újrafeldolgozott újságpapír előállításakor alkalmazott eljárás az import masszájának 20%-át elviszi, ezáltal az input masszájának 80%-a marad meg az újrafeldolgozott papír céljára. Az újrafeldolgozott rétegelt papír előállítására alkalmazott eljárásban elvész az input masszájának 10%-a. Az újrafeldolgozott nemrétegelt papír előállítására alkalmazott eljárásnál az input masszájának 15%-a a veszteség. A 14. táblázat mutatja a vásárlási költségeket, a feldolgozási költségeket, valamint a rendelkezésre álló

[2] Jackson (1980) alapján.
[3] Glassey és Gupta (1974) alapján.

14. TÁBLÁZAT

	A papírmassza tonnánkénti vételára ($)	**Az inputmassza tonnánkénti feldolgozási költsége ($)**	**Rendelkezésre álló mennyiség**
Újságpapírmassza	10		500
Rétegelt papírmassza	9		300
Nemrétegelt papírmassza	8		200
Újságpapírból újrafeldolgozott újság		3	
Újságpapírból újrafeldolgozott rétegelt		4	
Nemrétegeltből újrafeldolgozott újság		4	
Nemrétegeltből újrafeldolgozott nemrétegelt		1	
Nemrétegeltből újrafeldolgozott rétegelt		6	
Rétegeltből újrafeldolgozott nemrétegelt		5	
Rétegeltből újrafeldolgozott rétegelt		3	

mennyiségeket az egyes papírfélékből. Az igények kielégítéséhez a Papercónak legalább 250 tonna újrafeldolgozott újságmasszát, legalább 300 tonna újrafeldolgozott nemrétegelt masszát és legalább 150 tonna újrafeldolgozott rétegelt papírmasszát kell előállítania. Fogalmazzon meg egy kiegyensúlyozott szállítási feladatot, amellyel a Paperco az igények kielégítésének költségeit minimalizálhatja!

12. Magyarázza meg, hogy a következők hogyan módosítják a Sailco probléma kiegyensúlyozott szállítási feladatként történő megfogalmazását:

(a) Tegyük föl, hogy a kereslet kielégítése késleltethető, havonta és vitorlásonként 30$ költséggel. (*Útmutatás:* Ez azt jelenti, hogy így megengedhető például egy második havi gyártás átvitele első havi keresletbe.)

(b) Ha egy vitorlásra való igényt nem tudnak időben kielégíteni, akkor az üzlet nem jön létre és 450$ veszteség áll elő.

(c) A vitorlásokat legfeljebb két hónapig szabad tárolni.

(d) A Sailco havonta legfeljebb 10 vitorlást vásárolhat is egy alvállalkozótól, hajónként 440$-ért.

6.2. Lehetséges bázismegoldás előállítása a szállítási feladatban

Tekintsünk egy kiegyensúlyozott szállítási feladatot m kínálati és n keresleti ponttal. A (2)-ből látható, hogy egy ilyen feladat felírásában $m+n$ egyenlőségi feltétel van. A „nagy M” módszerrel és a kétfázisú szimplex módszerrel kapcsolatban szerzett tapasztalatainkból tudjuk, hogy elég bonyolult egy lehetséges bázismegoldást találni akkor, ha az LP összes feltétele egyenlőség. Szerencsére a kiegyensúlyozott szállítási feladat speciális szerkezete nagyon megkönnyíti a lehetséges bázismegoldás előállítását.

Mielőtt a lehetséges bázismegoldás megkeresésére általában használt három módszert leírnánk, egy lényeges megfigyelést teszünk. *Ha az x_{ij} értékek halmaza egy kivételével kielégíti a kiegyensúlyozott szállítási feladat feltételeit, akkor az x_{ij} értékek automatikusan kielégítik azt az egy feltételt is.* Például tegyük fel, hogy a Powerco feladatban tudjuk, hogy egy x_{ij} értékhalmaz kielégíti az összes feltételt, kivéve az első kínálati feltételt. Ekkor az x_{ij}-knek ez a halmaza $d_1+d_2+d_3+d_4 = 125$ millió kWh-t szállít az 1–4. városokba és $s_2+s_3 = 125-s_1 = 90$ millió kWh-t szállít el a 2. és 3. erőművekből. Így az 1. erőműnél $125-(125-s_1) = 35$ millió kWh megmarad, ezáltal tehát az x_{ij}-k kielégítik az első kínálati feltételt is.

A fenti okoskodás azt mutatja, hogy amikor egy kiegyensúlyozott szállítási feladatot oldunk meg, akkor figyelmen kívül hagyhatunk egy tetszőlegesen kiválasztott feltételt, és megoldhatjuk az LP-t $m+n-1$ feltétellel. Feltételezzük (önkényesen), hogy az első kínálati feltételt hagyjuk figyelmen kívül.

Amikor a megmaradt $m+n-1$ feltételhez egy lehetséges bázismegoldást keresünk, azt hihetnénk, hogy bármely $m+n-1$ darab változó együttese bázismegoldást ad. Sajnos ez nem így van. Például tekintsük a (3) szerint felírt kiegyensúlyozott szállítási feladatot. (Nem tüntetjük fel a költségeket, mert ezek nem szükségesek a lehetséges bázismegoldás megkereséséhez.)

			4
			5
3	2	4	

(3)

Ez a kiegyensúlyozott szállítási feladat mátrix formában így írható fel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad (3')$$

Az első kínálati feltétel elhagyása után a következő lineáris egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad (3'')$$

A $(3'')$ egy bázismegoldásában négy bázisváltozónak kell lennie. Tegyük fel, hogy a $BV = \{x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}\}$ halmazzal próbálkozunk. Ekkor

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahhoz, hogy $\{x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}\}$ bázismegoldást adjon, meg kellene lennie annak a lehetőségnek, hogy B-t esm-ek segítségével I_4-gyé alakítsuk. Mivel B rangja = 3, és az esm-ek nem változtatják meg a mátrix rangját, nincs mód arra, hogy B-t esm-ek segítségével I_4-gyé alakítsuk. Így a $BV = \{x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}\}$ a $(3'')$-nek nem bázismegoldása. Szerencsére egy „hurok" elnevezésű egyszerű fogalom alkalmazható annak eldöntésére, hogy egy tetszőleges $m+n-1$ változóból álló halmaz bázismegoldása-e a kiegyensúlyozott szállítási feladatnak, vagy sem.

DEFINÍCIÓ

Huroknak nevezünk egy legalább négy különböző cellából álló rendezett sorozatot, ha

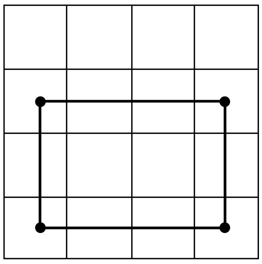
1. bármely két egymásután következő cella vagy ugyanabban a sorban, vagy ugyanabban az oszlopban fekszik;

2. három egymásután következő cella nem fekszik ugyanabban a sorban vagy oszlopban;

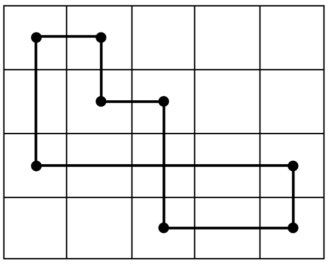
3. a sorozat utolsó cellája a sorozat első cellájával vagy közös sorban, vagy közös oszlopban fekszik.

A hurok definíciójában az első cella követi az utolsó cellát, így a hurok egy zárt útnak tekinthető. Álljon itt néhány példa a fenti definícióra: a 3. ábra a $(2,1)$–$(2,4)$–$(4,4)$–$(4,1)$ hurkot mutatja; a 4. ábra az $(1,1)$–$(1,2)$–$(2,2)$–$(2,3)$–$(4,3)$–$(4,5)$–$(3,5)$–$(3,1)$ hurkot mutatja. Az 5. ábrán látható $(1,1)$–$(1,2)$–$(2,3)$–$(2,1)$ útvonal nem hurok, mert $(1,2)$ és $(2,3)$ nem fekszik sem ugyanabban a sorban, sem ugyanabban az oszlopban. A 6. ábrán az $(1,2)$–$(1,3)$–$(1,4)$–$(2,4)$–$(2,2)$ útvonal szintén nem hurok, mert $(1,2)$, $(1,3)$, és $(1,4)$ ugyanabban a sorban vannak.

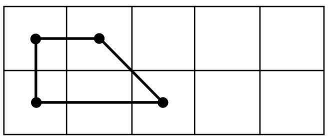
3. ÁBRA



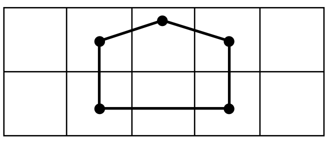
4. ÁBRA



5. ÁBRA



6. ÁBRA



Az 1. tétel (amelyet bizonyítás nélkül közlünk) megmutatja, hogy miért fontos a hurok fogalma.

1. TÉTEL

Egy kiegyensúlyozott szállítási feladatban, amelyben m kínálati pont és n keresleti pont van, egy $m+n-1$ változóból álló halmazhoz tartozó cellák akkor és csak akkor nem tartalmaznak hurkot, ha ez az $m+n-1$ változó egy bázismegoldást ad.

Az 1. tétel abból a tényből következik, hogy az $m+n-1$ cella akkor és csak akkor nem tartalmaz hurkot, ha az ezekhez a cellákhoz tartozó $m+n-1$ oszlop lineárisan független. Mivel $(1,1)$–$(1,2)$–$(2,2)$–$(2,1)$ egy hurok, az 1. tétel értelmében $\{x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{21}\}$ nem adhat bázismegoldást ($3''$) számára. Másrészt viszont az $(1,1)$–$(1,2)$–$(1,3)$–$(2,1)$ cellákból nem lehet hurkot kialakítani, így $\{x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}\}$ a ($3''$)-nek egy bázismegoldása.

Most már készen állunk három olyan módszer megtárgyalására, amelyek segítségével lehetséges bázismegoldást találhatunk egy kiegyensúlyozott szállítási feladathoz. Ezek:

1. Északnyugati sarok módszer.
2. Minimális költségek módszere.
3. Vogel módszer.

Északnyugati sarok módszer egy lehetséges bázismegoldás előállítására

Az északnyugati sarok módszer egy lehetséges bázismegoldás megkeresésére úgy kezdődik, hogy a szállítási táblázat bal felső (vagyis északnyugati) sarkában x_{11}-et olyan nagynak választjuk, amennyire csak lehetséges. Magától értetődő, hogy x_{11} nem lehet nagyobb, mint s_1 és d_1 közül a kisebbik. Ha $x_{11} = s_1$, töröljük a szállítási táblázat első sorát; ezzel jelezzük, hogy az első sorból már nem kaphatunk több bázisváltozót. Ezenkívül d_1-et $d_1 - s_1$-re változtatjuk. Ha $x_{11} = d_1$, töröljük a szállítási táblázat első oszlopát; ezzel azt jelezzük, hogy az első oszlopból nem kaphatunk több bázisváltozót. Ezenkívül még s_1 helyére $s_1 - d_1$-et írunk. Ha $x_{11} = s_1 = d_1$, akkor tetszőleges módon vagy az első sort vagy az első oszlopot töröljük (de nem mind a kettőt). Ha az első sort töröltük, akkor d_1 helyébe 0-t írunk; ha az első oszlopot töröltük, akkor s_1 helyébe 0-t írunk.

Az eljárást azzal a legészaknyugatibb cellával folytatjuk, amelyik egy nem törölt sorban vagy oszlopban fekszik. Végül eljutunk egy ponthoz, amikor már csak egyetlen olyan cella van, amelyikhez értéket rendelhetünk. Ehhez a cellához hozzárendeljük a sor, vagy oszlopkeresletet, és a cella sorát is és oszlopát is töröljük. Így egy lehetséges bázismegoldást kaptunk.

Az északnyugati sarok módszer alkalmazását a 15. táblázattal kezdődően mutatjuk be, ezeken a táblázatokon keresztül találunk a kiegyensúlyozott szállítási feladathoz egy lehetséges bázismegoldást. (Nem írjuk fel a költségeket, mert ezek nem szükségesek az algoritmus alkalmazásához.) Egy sor vagy oszlop törlését úgy jelöljük, hogy a sor kínálatának, vagy az oszlop keresletének helyére egy $\times$-et írunk.

Kezdőlépésként legyen $x_{11} = \min\{5,2\} = 2$. Ezután töröljük az első oszlopot és s_1 helyére $5-2=3$-at írunk. Ez látható a 16. táblázatban. A megmaradt változók közül a legészaknyugatibb az x_{12}. Így tehát x_{12} a következő értéket kapja: $x_{12} = \min\{3,4\} = 3$. Most töröljük az első sort, és d_2 helyére $4-3=1$-et írunk. Ez a 17. táblázatot adja. A rendelkezésre álló legészaknyugatibb változó most x_{22}. Ennek az $x_{22} = \min\{1,1\} = 1$ értéket adjuk. Mivel az ehhez a cellához tartozó kereslet és kínálat egyenlő, töröljük a második sort, vagy

15. TÁBLÁZAT

				5
				1
				3
2	4	2	1	

16. TÁBLÁZAT

2				3
				1
				3
×	4	2	1	

17. TÁBLÁZAT

2	3			×
				1
				3
×	1	2	1	

a második oszlopot (de nem mind a kettőt). Minden különösebb ok nélkül azt választjuk, hogy a második sort töröljük. Ekkor d_2-t meg kell változtatni: $1-1=0$-ra. Az eredmény a 18. táblázatban látható. A következő lépés egy *degenerált* lehetséges bázismegoldáshoz vezet.

18. TÁBLÁZAT

2	3			×
	1			×
				3
×	0	2	1	

A rendelkezésünkre álló legészaknyugatibb cella most az x_{32}, így ennek értékét kijelöljük: $x_{32} = \min\{3,0\} = 0$. Ezután töröljük a második oszlopot és s_3-at megváltoztatjuk $3-0=3$-ra. Az eredmény a 19. táblázat. Most már x_{33} következik: $x_{33} = \min\{3,2\} = 2$.

Ezután töröljük a harmadik oszlopot, és redukáljuk s_3-at $3-2=1$-re. Ennek eredménye a 20. táblázatban látható. Az egyetlen rendelkezésre álló cella az x_{34}. Beállítjuk x_{34} értékét is: $x_{34} = \min\{1,1\} = 1$. Ezután töröljük a harmadik sort és a negyedik oszlopot. Mivel már nincs több cella, az eljárást befejeztük. Megkaptuk a lehetséges bázismegoldást, amelyben $x_{11}=2, x_{12}=3, x_{22}=1, x_{32}=0, x_{33}=2, x_{34}=1$.

19. TÁBLÁZAT

2	3			×
	1			×
	0			3
×	×	2	1	

20. TÁBLÁZAT

2	3			×
	1			×
	0	2		1
×	×	×	1	

A kérdés az, hogy miért ad az északnyugati sarok módszer egy lehetséges bázismegoldást? A módszer biztosítja, hogy bázisváltozónak biztosan nem adunk negatív értéket (mivel a feltételek egyikének sem negatív a jobb oldala). Ezenkívül biztosítja azt is, hogy minden egyes kínálati és keresleti feltétel ki legyen elégítve (minthogy minden sor és oszlop végül is törölve lett). Így az északnyugati sarok módszer egy lehetséges megoldást ad. Az északnyugati sarok módszer befejezéséhez $m+n$ sort és oszlopot kellett törölnünk. Mivel a legutolsó érték, amit egy változónak adunk, azt eredményezi, hogy egy sort és egy oszlopot egyszerre törlünk, az északnyugati sarok módszer $m+n-1$ változóhoz rendel értéket. Az északnyugati sarok módszer által választott változók nem alkothatnak hurkot, így az 1. tétel értelmében az északnyugati sarok módszer egy lehetséges bázismegoldást ad.

A minimális költség módszere egy lehetséges bázismegoldás előállítására

Az északnyugati sarok módszer nem foglalkozik a szállítási költségekkel, így esetleg egy olyan kezdő lehetséges bázismegoldást ad, amelyikhez nagyon magas szállítási költség tartozik. Ezután az optimális megoldás eléréséhez esetleg sok javítási lépésre lehet szükség. A minimális költség módszere felhasználja a szállítási költségeket is, annak reményében, hogy egy olyan lehetséges bázismegoldást találjunk, amelyiknek alacsonyabb költsége van. Ilyen módon remélhetőleg kevesebb javítási lépésre lesz szükség az optimális megoldás eléréséhez.

A minimális költség módszerével úgy kezdjük a változók kiválasztását, hogy megkeressük azt a változót, amelyikhez a legkisebb szállítási költség tartozik (nevezzük x_{ij}-nek). Ezután x_{ij}-hez a lehető legnagyobb értéket rendeljük: $\min\{s_i, d_j\}$. Ugyanúgy, mint az északnyugati sarok módszernél, töröljük az i-edik sort vagy a j-edik oszlopot, valamint redukáljuk a nem törölt sor vagy oszlop kínálatát vagy keresletét x_{ij} értékkel. Ezután választunk az olyan cellák közül, amelyek nem törölt sorban vagy oszlopban fekszenek. Most is azt a cellát választjuk, amelyikhez a legkisebb szállítási költség tartozik. Ismételjük az eljárást. Folytatjuk addig, amikor már csak egyetlen választható cella van. Ekkor töröljük a cellához tartozó sort és oszlopot is. Ne felejtsük el azonban, hogy (az utolsó változó kivételével) amikor egy változó egyszerre elégít ki egy kínálati és egy keresleti feltételt, akkor csak vagy a hozzátartozó sort, vagy a hozzátartozó oszlopot töröljük, de nem mind a kettőt.

A minimális költség módszerének illusztrálására a 21. táblázatban látható kiegyensúlyozott szállítási feladathoz keresünk egy lehetséges bázismegoldást. A minimális szállítási költséggel rendelkező változó az x_{22}. Ekkor tehát legyen $x_{22} = \min\{10, 8\} = 8$. Ezután töröljük a második oszlopot, és redukáljuk s_2-t $10 - 8 = 2$-re (lásd 22. táblázat). Most akár x_{11}-et, akár x_{21}-et választhatjuk (mindkettőhöz a 2 szállítási költség tartozik). Válasszuk például x_{21}-et, és rendeljük hozzá az $x_{21} = \min\{2, 12\} = 2$ értéket. Ezután töröljük a második sort, és d_1 értékét $12 - 2 = 10$-re változtatjuk (23. táblázat). Most x_{11} következik, ahol $x_{11} = \min\{5, 10\} = 5$, töröljük az első sort, és d_1-et $10 - 5 = 5$-re változtatjuk (24. táblázat). Ezután x_{31}-hez tartozik a legkisebb olyan költség, amelyik egy nem törölt sorban vagy oszlopban fekszik. Kijelöljük a megfelelő értéket: $x_{31} = \min\{15, 5\} = 5$, töröljük az első oszlopot, és redukáljuk s_3-at $15 - 5 = 10$-re (25. táblázat). Ezután $x_{33} = \min\{10, 4\} = 4$ következik, töröljük a harmadik oszlopot, és redukáljuk s_3-at $10 - 4 = 6$-ra (26. táblázat). Az egyetlen cella, amit most választhatunk, az x_{34}. Ekkor $x_{34} = \min\{6, 6\} = 6$, és töröljük a harmadik sort és a negyedik oszlopot is. Így egy lehetséges bázismegoldást kaptunk: $x_{11} = 5, x_{21} = 2, x_{22} = 8, x_{31} = 5, x_{33} = 4$ és $x_{34} = 6$.

21. TÁBLÁZAT

$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	5
$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	10
$\boxed{3}$	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	15
12	8	4	6	

22. TÁBLÁZAT

$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	5
$\boxed{2}$	$\boxed{1}$ 8	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	2
$\boxed{3}$	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	15
12	×	4	6	

23. TÁBLÁZAT

$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	5
2 $\boxed{2}$	8 $\boxed{1}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	×
$\boxed{3}$	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	15
10	×	4	6	

24. TÁBLÁZAT

5 $\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	×
2 $\boxed{2}$	8 $\boxed{1}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	×
$\boxed{3}$	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	15
5	×	4	6	

25. TÁBLÁZAT

5 $\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	×
2 $\boxed{2}$	8 $\boxed{1}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	×
5 $\boxed{3}$	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	10
×	×	4	6	

26. TÁBLÁZAT

5 $\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	×
2 $\boxed{2}$	8 $\boxed{1}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	×
5 $\boxed{3}$	$\boxed{8}$	4 $\boxed{4}$	$\boxed{6}$	6
×	×	×	6	

Mivel a minimális költség módszere úgy választja ki a változókat, hogy a kis szállítási költségű változók legyenek bázisváltozók, az ember azt gondolhatná, hogy ez a módszer mindig olyan lehetséges bázismegoldást ad, amelyhez viszonylag alacsony szállítási költség tartozik. A következő feladat megmutatja, hogy a minimális költség módszere hogyan zavarható bele egy viszonylag magas költségű lehetséges bázismegoldásba.

Ha a minimális költség módszerét a 27. táblázatra alkalmazzuk, akkor $x_{11} = 10$-zel kezdünk, és töröljük az első sort. Ez arra kényszerít bennünket, hogy x_{22} és x_{23} bázisváltozók legyenek, ilyen módon magukkal hozva a magas szállítási költséget. Így tehát a minimális költség módszere egy költséges lehetséges bázismegoldáshoz vezet. Vogel módszere lesz az, amelyik a lehetséges bázismegoldás megtalálása során általában elkerüli a különlegesen magas szállítási költségeket.

27. TÁBLÁZAT

6	7	8	10
15	80	78	15
15	5	5	

Vogel módszere egy lehetséges bázismegoldás előállítására

Először is ki kell számítanunk minden sorhoz (és oszlophoz) egy „büntetést”, ami nem más, mint az illető sorban (vagy oszlopban) a két legkisebb költség különbsége. Ezután megkeressük a legnagyobb büntetéssel rendelkező sort vagy oszlopot. Azt a változót választjuk első bázisváltozónak ebben a sorban vagy oszlopban, amelyikhez a legkisebb szállítási költség tartozik. Mint ahogyan azt az északnyugati sarok módszernél és a minimális költség módszerénél már leírtuk, ennek a kiválasztott változónak a lehető legnagyobb értéket adjuk. Ezután töröljük a sort vagy oszlopot, és megváltoztatjuk a bázisváltozóhoz tartozó kínálati vagy keresleti értéket. Most új büntetéseket számolunk (de csak olyan cellákra vonatkozóan, amelyek nem törölt sorban vagy oszlopban fekszenek), és folytatjuk az eljárást addig, amikor már csak egyetlen cella marad. Ennek a változónak az értéke a hozzátartozó kereslet-kínálat érték lesz. Ezután töröljük a változó sorát és oszlopát. Így egy lehetséges bázismegoldást kapunk.

A lehetséges bázisváltozó előállítására szolgáló Vogel-módszert a 28. táblázatban látható feladaton mutatjuk be. A legnagyobb büntetés a második oszlophoz tartozik, így ott kezdünk, és $x_{12} = \min\{10,5\} = 5$. Ezután töröljük a második oszlopot, és redukáljuk s_1-et $10-5=5$-re. Most új büntetéseket számítunk ki (figyeljük meg, hogy ha egy oszlopot töröltünk, akkor az oszlopokhoz tartozó büntetések változatlanok maradnak), ezek a 29. táblázatban láthatók. A legnagyobb büntetés most a harmadik oszlopban van, így tehát $x_{13} = \min\{5,5\}$. Most törölhetjük vagy az első sort, vagy a harmadik oszlopot. Találomra kiválasztjuk a harmadik oszlopot, töröljük, és redukáljuk s_1-et $5-5=0$-ra. Mivel minden sorban csak egy olyan cella van, amelyik nincs törölve, nincsenek sorhoz tartozó büntetések. Ezt a 30. táblázatban láthatjuk. Az első oszlopban van az egyetlen (és természetesen a legnagyobb) büntetés. Így $x_{11} = \min\{0,15\} = 0$, töröljük az első sort, és megváltoztatjuk d_1-et $15-0=15$-re. Az eredmény a 31. táblázatban látható. Már nem tudunk több büntetést számolni, és az egyetlen olyan cella, amelyik egy nem törölt sorban vagy oszlopban fekszik, az x_{21}. Ezáltal $x_{21} = 15$, és töröljük az első oszlopot és a második sort. Vogel módszerének alkalmazásával készen vagyunk, és előállítottunk egy lehetséges bázismegoldást: $x_{11} = 0, x_{12} = 5, x_{13} = 5$ és $x_{21} = 15$ (lásd 32. táblázat).

Figyeljük meg, hogy a Vogel-módszer elkerüli az x_{22} és x_{23} változókhoz tartozó költséges szállításokat. Ez azért történik így, mert a magas szállítási költségek nagy büntetéseket adnak, emiatt pedig a Vogel-módszerrel más változókat kell választanunk a második és harmadik keresleti feltétel kielégítésére.

28. TÁBLÁZAT

				Kínálat	Sor szerinti büntetés
	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	10	$7-6=1$
	$\boxed{15}$	$\boxed{80}$	$\boxed{78}$	15	$78-15=63$
Kereslet	15	5	5		
Oszlop szerinti büntetés	$15-6=9$	$80-7=73$	$78-8=70$		

29. TÁBLÁZAT

				Kínálat	Sor szerinti büntetés
	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$ 5	$\boxed{8}$	5	$8-6=2$
	$\boxed{15}$	$\boxed{80}$	$\boxed{78}$	15	$78-15=63$
Kereslet	15	×	5		
Oszlop szerinti büntetés	9	–	70		

30. TÁBLÁZAT

				Kínálat	Sor szerinti büntetés
	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$ 5	$\boxed{8}$ 5	0	—
	$\boxed{15}$	$\boxed{80}$	$\boxed{78}$	15	—
Kereslet	15	×	×		
Oszlop szerinti büntetés	9	—	—		

31. TÁBLÁZAT

				Kínálat	Sor szerinti büntetés
	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$ 5	$\boxed{8}$ 5	×	—
	$\boxed{15}$	$\boxed{80}$	$\boxed{78}$	15	—
Kereslet	15	×	×		
Oszlop szerinti büntetés	—	—	—		

32. TÁBLÁZAT

6 0	7 5	8 5	10
15 15	80	78	15
15	5	5	

A most megtárgyalt három módszer közül a lehetséges bázismegoldás előállítására az északnyugati sarok módszer igényli a legkevesebb, és a Vogel-módszer a legtöbb erőfeszítést. Alapos kutatások (Glover és mások [1974]) megmutatták, hogy amikor a Vogel-módszerrel állítjuk elő a kezdő lehetséges bázismegoldást, akkor lényegesen kevesebb javítási lépésre van szükség, mint a másik két módszer alkalmazásakor. Ezért nagyméretű szállítási feladatok esetén az első lehetséges bázismegoldás előállítására az északnyugati módszert és a minimális költség módszerét csak ritkán használják.

Feladatok

A csoport

1. Alkalmazza az északnyugati sarok módszert a 6.1. alfejezet 1., 2. és 3. feladatában egy lehetséges bázismegoldás előállítására!

2. Alkalmazza a minimális költség módszerét egy lehetséges bázismegoldás előállítására a 6.1. alfejezet 4., 7. és 8. feladatánál! (*Útmutatás:* Egy maximalizálási feladatban a minimális költség módszerét átnevezzük a maximális profit módszerének vagy a maximális bevétel módszerének.)

3. Állítson elő egy lehetséges bázismegoldást Vogel módszerével a 6.1. alfejezet 5. és 6. feladatában!

4. Hogyan kellene a Vogel-módszert módosítani egy maximalizálási feladat megoldásához?

6.3. A szállítási szimplex módszer

Ebben az alfejezetben megmutatjuk, hogy a szimplex algoritmus milyen egyszerűvé válik, amikor egy szállítási feladatot kell megoldani. (Ezt a módszert a magyar nyelvű szakirodalom **disztribúciós módszernek** nevezi.) A tárgyalást a változók cseréjének technikai megoldásával kezdjük.

Emlékezzünk arra, hogy amikor a szimplex módszerben egy bázisváltozó cseréjét hajtottuk végre, általában sok szorzásra volt szükség. Egy szállítási feladat megoldásánál a *változók cseréje csak összeadásokat és kivonásokat igényel*.

Hogyan cseréljünk változókat a szállítási feladatban?

A következő eljárás segítségével a szállítási feladatban a változók cseréje úgy hajtható végre, hogy a szállítási táblázat keretein belül dolgozunk:

1. lépés (Egy rövidesen bemutatandó kritérium segítségével) határozzuk meg azt a változót, amelyet beviszünk a bázisba.

2. lépés Keressük meg azt a hurkot (bizonyítható, hogy csak egy ilyen hurok létezik), amelyik tartalmazza a bázisba belépő változót, és a többi bázisváltozók közül néhányat.

3. lépés *Csak a hurokban lévő cellákat számolva* jelöljük meg *páros* cellaként a 2. lépésben kapott olyan cellákat, amelyek a beléptetendő változótól páros (0, 2, 4, stb.) számú cellányira vannak. Hasonló módon jelöljük meg *páratlan* cellaként azokat, amelyek a beléptetendő változótól számítva páratlan cellányira vannak.

4. lépés Keressük meg azt a páratlan cellát, amelyikhez tartozó változó a legkisebb értéket képviseli. Ezt a legkisebb értéket θ-nak nevezzük. Az a változó fog kilépni a bázisból, amelyik ehhez a legkisebb értékű páratlan cellához tartozik. A bázisváltozók cseréjét úgy hajtjuk végre, hogy minden páratlan cella értékét csökkentjük θ-val, és minden páros cella értékét növeljük θ-val. A hurokban nem szereplő változók értékei változatlanok maradnak. A bázisváltozók cseréje ezzel megtörtént. Ha $\theta = 0$, akkor a bázisba belépő változó értéke 0 lesz, és egy olyan páratlan, régi bázisváltozó, amelyiknek az értéke 0 volt, ki fog lépni a bázisból. Ebben az esetben már a bázisváltozók cseréje előtt egy degenerált lehetséges bázismegoldásunk volt, és a csere után is ez a helyzet. Amennyiben a hurokban egynél több páratlan cella egyenlő θ-val, akkor tetszőlegesen választhatjuk ezek közül az egyik ilyen páratlan cellát arra, hogy a hozzátartozó változó kikerüljön a bázisból; így is egy degenerált lehetséges bázismegoldást kapunk eredményül.

A Powerco példán mutatjuk be a bázisváltozók cseréjének ezt a lépését. Ha az északnyugati sarok módszert alkalmazzuk a Powerco példára, akkor a 33. táblázatban látható lehetséges bázismegoldást kapjuk. Ebben a lehetséges bázismegoldásban a bázisváltozók: $x_{11} = 35, x_{21} = 10, x_{22} = 20, x_{23} = 20, x_{33} = 10$ és $x_{34} = 30$.

33. TÁBLÁZAT
Lehetséges bázismegoldás a Powerco feladatban az északnyugati sarok módszerrel

35				35
10	20	20		50
		10	30	40
45	20	30	30	

Tegyük föl, hogy olyan lehetséges bázismegoldást szeretnénk találni, amelyben x_{14} szerepel a bázisban. Az x_{14}-et, és még kizárólag bázisváltozókat tartalmazó hurok a következő

$$\begin{array}{cccccc} \text{páros} & \text{páratlan} & \text{páros} & \text{páratlan} & \text{páros} & \text{páratlan} \\ (1,4)- & (3,4) & -(3,3)- & (2,3) & -(2,1)- & (1,1) \end{array}$$

Ebben a hurokban $(1,4)$, $(3,3)$ és $(2,1)$ a páros cellák, és $(1,1)$, $(3,4)$ és $(2,3)$ a páratlan cellák. A legkisebb értékkel rendelkező páratlan cella az $x_{23} = 20$. Így a változók cseréje után x_{23} már nem lesz a bázisban. Most minden páros cellához hozzáadunk 20-at, és minden páratlan cellából kivonunk 20-at. A 34. táblázat ezt mutatja. Mivel minden sorban és oszlopban ugyanannyi $+20$ van, mint -20, az új megoldás is kielégíti a kínálati és keresleti feltételeket. Azzal, hogy a legkisebb értékű páratlan cellához tartozó változót léptettük ki a bázisból, biztosítottuk azt, hogy a változók értékei mind nemnegatívak maradnak. Így tehát az új megoldás egy lehetséges megoldás. Mivel nem létezik olyan hurok, amelyik az $(1,1)$, $(1,4)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$ és $(3,4)$ cellákat tartalmazná, az új megoldás egy lehetséges bázismegoldás. A bázisváltozók cseréje után az új lehetséges bázismegoldás $x_{11} = 15, x_{14} = 20, x_{21} = 30, x_{22} = 20, x_{33} = 30$ és $x_{34} = 10$, és az összes többi változó értéke 0.

34. TÁBLÁZAT
Új lehetséges bázismegoldás, miután x_{14} bekerült a bázisba

35 − 20			0 + 20	35
10 + 20	20	20 − 20 (nembázis)		50
		10 + 20	30 − 20	40
45	20	30	30	

A változók cseréjének a fentiekben bemutatott példája világosan megmutatja, hogy a szállítási feladatban egy bázisvektorcsere csak összeadással és kivonással jár. Ezt a tényt felhasználva, meg tudjuk mutatni, hogy *ha a szállítási feladatban minden kínálat és minden kereslet egész szám, akkor a szállítási feladatnak lesz olyan optimális megoldása, amelyben a változók értékei egész számok*. Kezdjük annak megfigyelésével, hogy az északnyugati sarok módszerrel mindig tudunk találni olyan lehetséges bázismegoldást, amelyben a változók értékei mind egész számok. Mivel minden egyes bázisvektorcsere csak összeadásokat és kivonásokat igényel, minden olyan lehetséges bázismegoldás, amelyet a szimplex algoritmussal kaptunk (beleértve az optimális megoldást is), egész értékeket jelöl ki minden változóra. Az a tény, hogy egy olyan szállítási feladatnak, amelyben a keresletek és kínálatok egész számok, van egész számokból álló optimális megoldása, egy nagyon hasznos tény. Ez biztosít ugyanis bennünket arról, hogy nem kell aggódnunk az oszthatósági feltevés teljesülése miatt.

A nembázis változók kiértékelése

A szállítási szimplex módszer tárgyalásának befejezéséhez most még megmutatjuk, hogyan számoljuk ki a célfüggvény sorát egy lehetséges bázismegoldáshoz. Az 5.2. alfejezetből tudjuk, hogy egy olyan lehetséges bázismegoldásnál, amelyben a bázisváltozók halmaza BV, az x_{ij} változó együtthatója (nevezzük $\bar{c}_{ij}$-nek) a táblázat célfügvénysorában

$$\bar{c}_{ij} = \mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{a}_{ij} - c_{ij}$$

ahol c_{ij} az x_{ij} együtthatója a célfüggvényben és $\mathbf{a}_{ij}$ az eredeti LP-ben az x_{ij}-hez tartozó oszlop (feltételezzük, hogy az első kínálati feltételt elhagytuk).

Mivel egy minimalizálási feladatot oldunk meg, az aktuális lehetséges bázismegoldás optimális lesz, ha az összes $\bar{c}_{ij}$-ok nempozitívak; ha nem így van, akkor beléptetjük a bázisba azt a változót, amelyiknél a $\bar{c}_{ij}$ érték a legpozitívabb.

Miután meghatároztuk $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$-et, könnyen megkaphatjuk $\bar{c}_{ij}$ értéket. Mivel az első feltételt elhagytuk, a $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ vektornak $m+n-1$ eleme lesz. Ezeket így írjuk fel:

$$\mathbf{c}_{BV}B^{-1} = \left[u_2\ u_3\ \ldots\ u_m\ v_1\ v_2\ \ldots\ v_n\right]$$

ahol $u_2, u_3, \ldots, u_m$ a $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ vektornak az $m-1$ kínálati feltételhez tartozó elemei, és $v_1, v_2, \ldots, v_n$ az n keresleti feltételhez tartozó elemek.

A $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ meghatározásához felhasználjuk azt a tényt, hogy bármelyik táblázatban minden x_{ij} bázisváltozóhoz $\bar{c}_{ij} = 0$ értéket kell felvennie. Így a BV halmazban mind az $m+n-1$ változóra

$$\mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{a}_{ij} - c_{ij} = 0 \tag{4}$$

Egy szállítási feladatnál a (4) egyenletek megoldása nagyon egyszerű. A (4) megoldását illusztráljuk az (5) alatti táblázattal kezdve, amely nem más, mint a Powerco feladatban az északnyugati sarok módszerrel nyert lehetséges bázismegoldás. Keressük meg az (5) táblázathoz tartozó $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$-et.

35 [8]	[6]	[10]	[9]	35
10 [9]	20 [12]	20 [13]	[7]	50
[14]	[9]	10 [16]	30 [5]	40
45	20	30	30	

(5)

Ebben a lehetséges bázismegoldásban $BV = \{x_{11}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{33}, x_{34}\}$. (4) alkalmazásával a következőket kapjuk:

$$\bar{c}_{11} = \begin{bmatrix} u_2 & u_3 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 8 = v_1 - 8 = 0$$

$$\bar{c}_{21} = \begin{bmatrix} u_2 & u_3 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 9 = u_2 + v_1 - 9 = 0$$

$$\bar{c}_{22} = \begin{bmatrix} u_2 & u_3 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 12 = u_2 + v_2 - 12 = 0$$

$$\bar{c}_{23} = \begin{bmatrix} u_2 & u_3 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 13 = u_2 + v_3 - 13 = 0$$

$$\bar{c}_{33} = \begin{bmatrix} u_2 & u_3 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 16 = u_3 + v_3 - 16 = 0$$

$$\bar{c}_{34} = \begin{bmatrix} u_2 & u_3 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 5 = u_3 + v_4 - 5 = 0$$

Minden x_{ij} bázisváltozóra nézve (kivéve az $i = 1$ indexűeket) láthatjuk, hogy (4) az $u_i + v_j = c_{ij}$ alakra redukálódik. Ha úgy definiáljuk, hogy $u_1 = 0$ legyen, akkor azt látjuk, hogy (4) minden bázisváltozóra az $u_i + v_j = c_{ij}$ alakra redukálódik. Így a következő $m+n$ egyenletből álló rendszert kell megoldanunk: $u_1 = 0, u_i + v_j = c_{ij}$ minden bázisváltozóra.

Az (5) táblázathoz $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ úgy adódik, hogy megoldjuk a következő egyenletrendszert:

$$u_1 = 0 \tag{6}$$
$$u_1 + v_1 = 8 \tag{7}$$
$$u_2 + v_1 = 9 \tag{8}$$
$$u_2 + v_2 = 12 \tag{9}$$
$$u_2 + v_3 = 13 \tag{10}$$
$$u_3 + v_3 = 16 \tag{11}$$
$$u_3 + v_4 = 5 \tag{12}$$

(7)-ből $v_1 = 8$. (8)-ból $u_2 = 1$. Ezután (9) adja a $v_2 = 11$-et és (10) adja a $v_3 = 12$-t. (11)-ből $u_3 = 4$. Végül (12)-ből $v_4 = 1$ adódik. Most minden nembázis változóra kiszámítjuk a $\bar{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ értékeket. Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \bar{c}_{12} &= 0 + 11 - 6 = 5 & \bar{c}_{13} &= 0 + 12 - 10 = 2 \\ \bar{c}_{14} &= 0 + 1 - 9 = -8 & \bar{c}_{24} &= 1 + 1 - 7 = -5 \\ \bar{c}_{31} &= 4 + 8 - 14 = -2 & \bar{c}_{32} &= 4 + 11 - 9 = 6 \end{aligned}$$

Mivel $\bar{c}_{32}$ a legnagyobb pozitív $\bar{c}_{ij}$, most x_{32} fog belépni a bázisba. Minden egység x_{32}, amely belép a bázisba, Powerco költségét 6 dollárral fogja csökkenteni.

Az optimumkritérium magyarázata

A változók és feltételek jelentése alapján nézzük meg most azt, hogyan lehet eldönteni, hogy egy lehetséges bázismegoldás optimális-e, illetve ha nem az, akkor hogyan kell eldönteni, hogy melyik nembázis változót léptessük be a bázisba? Legyen $-u_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ az i-edik kínálati feltétel árnyékára, és legyen $-v_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ a j-edik keresleti feltétel árnyékára. Feltételezzük, hogy az első kínálati feltételt elhagytuk, így megtehetjük, hogy $-u_1 = 0$ legyen. Az árnyékárak definíciójából tudjuk, hogy ha az i-edik kínálati feltétel és a j-edik keresleti feltétel jobb oldalát 1-gyel növelnénk, akkor az optimális z érték $-u_i - v_j$-vel csökkenne. Ugyanígy mondhatjuk azt is, hogy ha az i-edik kínálati feltétel és a j-edik keresleti feltétel jobb oldalát 1-gyel csökkentenénk, akkor az optimális z érték $-u_i - v_j$-vel növekedne. Most tegyük föl, hogy x_{ij} egy nembázis változó. Beléptessük-e x_{ij}-t a bázisba? Figyeljük meg, hogy ha x_{ij}-t 1-gyel növeljük, akkor a költségek c_{ij}-vel növekednek.

Ugyanakkor az x_{ij} értékének 1-gyel való növelése azt is jelenti, hogy az i-edik kínálati pontról egy egységgel kevesebbet szállítunk el, és a j-edik keresleti pontra is egy egységgel kevesebbet szállítunk. Ez a gondolatmenet azt jelenti, hogy az i-edik kínálati feltétel és a j-edik keresleti feltétel jobb oldalát 1-gyel csökkentjük. Ez z értékét $-u_i - v_j$-vel növeli.

Így mindent összevéve, az x_{ij} értékének 1-gyel való növelése z értékét $c_{ij} - u_i - v_j$-vel növeli. Így tehát ha minden nembázis változóra $c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$ (vagy $u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$)), akkor az aktuális lehetséges bázismegoldás már optimális. Mindazonáltal, ha egy x_{ij} nembázis változóra vonatkozóan $c_{ij} - u_i - v_j < 0$ (vagy $u_i + v_j - c_{ij} > 0$), akkor z még csökkenthető x_{ij} egységenként $u_i + v_j - c_{ij}$-vel úgy, hogy x_{ij} belép a bázisba. Így tehát a következtetéseink arra vezettek, hogy ha minden nembázis változóra $u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$, akkor az aktuális lehetséges bázismegoldás optimális.

Ha nem így van, akkor a legnagyobb pozitív $u_i + v_j - c_{ij}$ értékkel rendelkező nembázis változót kell beléptetnünk a bázisba. Hogyan találjuk meg az u_i-kat és v_j-ket? Mivel az x_{ij} nembázis változó együtthatója bármelyik táblázat célfüggvénysorában az a mennyiség, amennyivel x_{ij} egységnyi növelése csökkenti z-t, a következőkre jutottunk: bármelyik nembázis változó (és mint ahogy kiderül, a bázisváltozóké is) együtthatója a célfüggvény sorában $u_i + v_j - c_{ij}$. Így tehát megoldhatjuk u_i-kre és v_j-kre a következő egyenletrendszert: $u_1 = 0$ és $u_i + v_j - c_{ij} = 0$ minden bázisváltozóra.

A fenti okoskodás illusztrálására tekintsük újra a Powerco feladat (5) alatt bemutatott lehetséges bázismegoldását.

8 35	6	10	9	35
9 10	12 20	13 20	7	50
14	9	16 10	5 30	40
45	20	30	30	

(5)

Az u_i és v_j értékeket a következő egyenletrendszer megoldásából kapjuk:

$$u_1 = 0 \tag{6}$$
$$u_1 + v_1 = 8 \tag{7}$$
$$u_2 + v_1 = 9 \tag{8}$$
$$u_2 + v_2 = 12 \tag{9}$$
$$u_2 + v_3 = 13 \tag{10}$$
$$u_3 + v_3 = 16 \tag{11}$$
$$u_3 + v_4 = 5 \tag{12}$$

(7)-ből $v_1 = 8$. (8)-ból $u_2 = 1$. Ezután (9) adja a $v_2 = 11$-et és (10) adja a $v_3 = 12$-t. (11)-ből $u_3 = 4$. Végül (12)-ből $v_4 = 1$ adódik. Minden nembázis változóra most kiszámítjuk a $\bar{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ értékeket. Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \bar{c}_{12} &= 0 + 11 - 6 = 5 & \bar{c}_{13} &= 0 + 12 - 10 = 2 \\ \bar{c}_{14} &= 0 + 1 - 9 = -8 & \bar{c}_{24} &= 1 + 1 - 7 = -5 \\ \bar{c}_{31} &= 4 + 8 - 14 = -2 & \bar{c}_{32} &= 4 + 11 - 9 = 6 \end{aligned}$$

Mivel $\bar{c}_{32}$ a legnagyobb pozitív $\bar{c}_{ij}$, most x_{32} fog belépni a bázisba. Minden egység x_{32}, amely belép a bázisba, Powerco költségét 6 dollárral fogja csökkenteni.

Ezek után összefoglalhatjuk a szállítási szimplex módszer alkalmazási technikáját egy szállítási (min) feladat megoldására.

A szállítási szimplex módszer összefoglalása és illusztrációja

1. lépés Ha a feladat kiegyensúlyozatlan, egyensúlyozzuk ki.

2. lépés Alkalmazzuk a 6.2. alfejezetben tárgyalt módszerek valamelyikét egy lehetséges bázismegoldás megkeresésére.

3. lépés Alkalmazzuk az aktuális lehetséges bázismegoldásban a következő összefüggéseket: $u_1 = 0$ és $u_i + v_j = c_{ij}$ minden bázisváltozóra, így megtalálhatjuk

$$[u_1\ u_2\ \dots\ u_m\ v_1\ v_2\ \dots\ v_n]\text{-et.}$$

4. lépés Ha minden nembázis változóra $u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$, akkor az aktuális lehetséges bázismegoldás optimális. Ha nem ez a helyzet, akkor a legnagyobb pozitív $u_i + v_j - c_{ij}$ értékhez tartozó x_{ij} változót léptetjük be a bázisba. Így egy új lehetséges bázismegoldáshoz jutunk.

5. lépés Az új lehetséges bázismegoldásra alkalmazzuk a 3. és 4. lépést.

Egy maximalizálási feladat esetén ugyanígy kezdjük az eljárást, de a 4. lépést a 4′ lépéssel helyettesítjük.

4′. lépés Ha $u_i + v_j - c_{ij} \geq 0$ minden nembázis változóra, akkor az aktuális lehetséges bázismegoldás optimális. Ha nem ez a helyzet, akkor a legnagyobb abszolút értékű negatív $u_i + v_j - c_{ij}$ értékhez tartozó x_{ij} változót léptetjük be a bázisba az alfejezetben leírt bázisváltozó-csere eljárással.

Most illusztráció gyanánt megoldjuk a Powerco feladatot. Kezdjük az (5) alatti lehetséges bázismegoldással. Ugyancsak eldöntöttük már azt is, hogy x_{32}-nek kell bekerülnie a bázisba. Mint ahogy a 35. táblázatban látható, az idetartozó hurok, amelyikben x_{32} és kizárólag bázisváltozók vannak: $(3,2)$–$(3,3)$–$(2,3)$–$(2,2)$. Ebben a hurokban a páratlan cellák $(3,3)$ és $(2,2)$. Mivel $x_{33} = 10$ és $x_{22} = 20$, a bázisváltozók cseréje úgy jelenik meg, hogy x_{33} és x_{22} értékei 10-zel csökkennek, míg x_{32} és x_{23} értékei 10-zel növekednek. A 36. táblázatban látható az új lehetséges bázismegoldás. Az új lehetséges bázismegoldáshoz tartozó u_i és v_j értékeket a következő egyenletrendszer megoldásával kapjuk:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 & u_2 + v_3 &= 13 \\ u_2 + v_2 &= 12 & u_2 + v_1 &= 9 \\ u_3 + v_4 &= 5 & u_3 + v_2 &= 9 \\ u_1 + v_1 &= 8 & & \end{aligned}$$

35. TÁBLÁZAT
Az x_{32} változó beléptetéséhez szükséges hurok

[8] 35	[6]	[10]	[9]	35
[9] 10	[12] 20	[13] 20	[7]	50
[14]	[9]	[16] 10	[5] 30	40
45	20	30	30	

36. TÁBLÁZAT
x_{32} belépett a bázisba és x_{12} a következő belépő

	$v_j =$ 8	11	12	7	
$u_i = 0$	35 [8]	[6]	[10]	[9]	35
1	10 [9]	10 [12]	30 [13]	[7]	50
-2	[14]	10 [9]	[16]	30 [5]	40
	45	20	30	30	

Minden nembázis változóhoz kiszámítjuk a $\bar{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ értékeket. Azt kapjuk, hogy csak $\bar{c}_{12} = 5, \bar{c}_{24} = 1$ és $\bar{c}_{13} = 2$ a pozitív értékek. Így most x_{12}-t léptetjük be a bázisba. Az x_{12}-höz tartozó hurok, amely x_{12}-t és kizárólag bázisváltozókat tartalmaz: $(1,2)$–$(2,2)$–$(2,1)$–$(1,1)$. A páratlan cellák $(2,2)$ és $(1,1)$. Mivel $x_{22} = 10$ a páratlan cellákhoz tartozó értékek közül a legkisebb, x_{22} és x_{11} értékeit 10-zel csökkentjük és x_{12} és x_{21} értékeit 10-zel növeljük. A 37. táblázat mutatja az eredményül kapott lehetséges bázismegoldást. Ehhez a lehetséges bázismegoldáshoz a következő egyenletrendszer megoldásaként adódó u_i és v_j értékek tartoznak:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 0 & u_1 + v_2 &= 6\\
u_2 + v_1 &= 9 & u_3 + v_2 &= 9\\
u_1 + v_1 &= 8 & u_3 + v_4 &= 5\\
u_2 + v_3 &= 13
\end{aligned}
$$

Minden nembázis változóhoz kiszámítjuk a $\bar{c}_{ij}$ értékeket, és azt találjuk, hogy az egyetlen pozitív $\bar{c}_{ij}$ érték a $\bar{c}_{13} = 2$. Így x_{13} lesz a beléptetendő változó. Az x_{13} belépő változót és még kizárólag bázisváltozókat magában foglaló hurok az $(1,3)$–$(2,3)$–$(2,1)$–$(1,1)$. A páratlan cellák x_{23} és x_{11}. Mivel $x_{11} = 25$ a páratlan cellákhoz tartozó értékek közül a legkisebb, x_{23} és x_{11} értékeit 25-tel csökkentjük és x_{13}, valamint x_{21} értékeit 25-tel növeljük. Ezáltal a 38. táblázatban látható lehetséges bázismegoldáshoz jutunk. Ehhez a lehetséges bázismegoldáshoz az u_i és v_j értékeket az

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 0 & u_2 + v_3 &= 13\\
u_2 + v_1 &= 9 & u_1 + v_3 &= 10\\
u_3 + v_4 &= 5 & u_3 + v_2 &= 9\\
u_1 + v_2 &= 6
\end{aligned}
$$

37. TÁBLÁZAT
x_{12} belépett a bázisba és x_{13} a következő belépő

	$v_j =$ 8	6	12	2	
$u_i = 0$	25 [8]	10 [6]	[10]	[9]	35
1	20 [9]	[12]	30 [13]	[7]	50
3	[14]	10 [9]	[16]	30 [5]	40
	45	20	30	30	

38. TÁBLÁZAT
Optimális táblázat a Powerco feladatban

	$v_j =$ 6	6	10	2	
$u_i = 0$	[8]	[6] 10	[10] 25	[9]	35
3	[9] 45	[12]	[13] 5	[7]	50
3	[14]	[9] 10	[16]	[5] 30	40
	45	20	30	30	

egyenletrendszer megoldásával kapjuk. Az olvasó ellenőrizheti, hogy ennél a lehetséges bázismegoldásnál minden $\bar{c}_{ij} \leq 0$, így tehát optimális megoldást kaptunk. A Powerco feladat optimális megoldása tehát: $x_{12} = 10, x_{13} = 25, x_{21} = 45, x_{23} = 5, x_{32} = 10, x_{34} = 30$ és

$$z = 6(10) + 10(25) + 9(45) + 13(5) + 9(10) + 5(30) = 1020\$.$$

Feladatok

A csoport

Alkalmazza a szállítási szimplex módszert a 6.1. alfejezet 1–8. feladatainak megoldására! Kezdjen a 6.2. alfejezet végén, a feladatokban feladott (és megoldott) induló lehetséges bázismegoldásokkal (induló táblázatokkal)!

6.4. Szállítási feladatok érzékenységvizsgálata[4]

Azt már láttuk, hogy egy szállítási feladatban a megoldás technikája egyszerű: könnyű meghatározni egy lehetséges bázismegoldást és a célfüggvény sorát az adott bázisváltozókhoz, valamint nagyon egyszerű a bázisváltozók cseréje is. Így természetesen nem lesz meglepő, hogy az 5.3. alfejezetben tárgyalt érzékenységvizsgálat bizonyos részei is leegyszerűsödnek a szállítási feladatnál. Ebben az alfejezetben a szállítási feladatra vonatkozó érzékenységvizsgálatot a következő három szempont szerint végezzük el:

1. változtatás Egy nembázis változó célfüggvénybeli együtthatójának megváltoztatása.

2. változtatás Egy bázisváltozó célfüggvénybeli együtthatójának megváltoztatása.

3. változtatás Egyetlen kínálat és egyetlen kereslet növelése Δ-val.

Ezeknek az illusztrálására a Powerco feladatot fogjuk használni. Felelevenítjük a 6.3. alfejezetből azt, hogy a Powerco feladat optimális megoldása $z = 1020\$$ volt, az optimális táblázat pedig a 39. táblázat.

[4] Ezen alfejezet kihagyása nem szakítja meg a tárgyalás folytonosságát.

39. TÁBLÁZAT
Optimális táblázat
a Powerco számára

		1. város	2. város	3. város	4. város	Kínálat
	$v_j =$	6	6	10	2	
1. erőmű	$u_i = 0$	$\boxed{8}$	$\boxed{6}$ 10	$\boxed{10}$ 25	$\boxed{9}$	35
2. erőmű	3	$\boxed{9}$ 45	$\boxed{12}$	$\boxed{13}$ 5	$\boxed{7}$	50
3. erőmű	3	$\boxed{14}$	$\boxed{9}$ 10	$\boxed{16}$	$\boxed{5}$ 30	40
Kereslet		45	20	30	30	

Egy nembázis változó célfüggvény együtthatójának változtatása

Mint ahogy az 5.3. alfejezetben láttuk, egy x_{ij} nembázis változó célfüggvény együtthatójának megváltoztatása az optimális táblázat jobb oldalát változatlanul hagyja. Így az aktuális bázis is lehetséges bázis marad. Mivel nem változtatjuk $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$-et, az u_i-k és v_j-k változatlanok maradnak. A célfüggvény sorában csak az x_{ij} együtthatója változik. Ezáltal, egészen addig, amíg az optimális megoldásban a célfüggvény sorában x_{ij} együtthatója nem pozitív, az aktuális bázis optimális marad.

A módszer megvilágítására feltesszük és megválaszoljuk a következő kérdést: 1 millió kWh elektromos energia szállításának költsége az első telepről az 1. városba milyen értéktartományban változhat úgy, hogy az aktuális bázismegoldás optimális maradjon? Tegyük föl, hogy c_{11}-et 8-ról $8+\Delta$-ra változtatjuk. Δ mely értékeire marad az aktuális bázismegoldás optimális? Most $\bar{c}_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 6 - (8+\Delta) = -2 - \Delta$. Így az aktuális bázis optimális marad, ha $-2-\Delta \leq 0$, vagyis $\Delta \geq -2$ és $c_{11} \geq 8-2 = 6$.

Egy bázisváltozó célfüggvény-együtthatójának megváltoztatása

Mivel megváltoztatjuk $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$-t, a célfüggvény sorában a nembázis változók együtthatói változhatnak. Annak eldöntésére, hogy a jelenlegi bázis optimális marad-e, meg kell határoznunk az új u_i-ket és v_j-ket, és ezeket az értékeket kell felhasználnunk a nembázis változók kiértékelésére. Az aktuális bázis optimális marad egészen addig, míg az összes nembázis változók a kiértékeléskor nempozitívak maradnak. Ennek a meggondolásnak szemléltetésére a következőt tesszük: a Powerco feladatban meghatározzuk 1 millió kWh áramnak az első telepről a harmadik városba való szállítási költségértékének azt a tartományát, amelyben még az aktuális bázis optimális marad.

Tegyük föl, hogy c_{13} értékét 10-ről $10+\Delta$-ra változtatjuk. Ekkor a $\bar{c}_{13} = 0$ egyenlőség is megváltozik: $u_1 + v_3 = 10$ helyett $u_1 + v_3 = 10 + \Delta$ lesz. Így az u_i-k és v_j-k meghatározásához meg kell oldanunk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 & u_3 + v_2 &= 9 \\ u_2 + v_1 &= 9 & u_1 + v_3 &= 10 + \Delta \\ u_1 + v_2 &= 6 & u_3 + v_4 &= 5 \\ u_2 + v_3 &= 13 & & \end{aligned}$$

Azt kapjuk, hogy $u_1 = 0, v_2 = 6, v_3 = 10 + \Delta, v_1 = 6 + \Delta, u_2 = 3 - \Delta, u_3 = 3$ és $v_4 = 2$.

Most mindegyik nembázis változót kiértékeljük. Az aktuális bázis optimális marad egészen addig, ameddig a célfüggvény sorában mindegyik nembázis változónak nempozitív együtthatója van.

$$\begin{aligned}
\bar{c}_{11} &= u_1 + v_1 - 8 = \Delta - 2 \le 0, && \text{ha } \Delta \le 2 \\
\bar{c}_{14} &= u_1 + v_4 - 9 = -7, && \\
\bar{c}_{22} &= u_2 + v_2 - 12 = -3 - \Delta \le 0, && \text{ha } \Delta \ge -3 \\
\bar{c}_{24} &= u_2 + v_4 - 7 = -2 - \Delta \le 0, && \text{ha } \Delta \ge -2 \\
\bar{c}_{31} &= u_3 + v_1 - 14 = -5 + \Delta \le 0, && \text{ha } \Delta \le 5 \\
\bar{c}_{33} &= u_3 + v_3 - 16 = \Delta - 3 \le 0, && \text{ha } \Delta \le 3
\end{aligned}$$

Így az aktuális bázis optimális marad, ha $-2 \le \Delta \le 2$ vagy $8 = 10 - 2 \le c_{13} \le 10 + 2 = 12$.

Az s_i kínálat és d_j kereslet Δ-val való növelése

Először is, vegyük észre, hogy ez a változtatás megtartja a szállítási feladat kiegyensúlyozottságát. Mivel u_i-kre és v_j-kre is úgy tekinthetünk, mint az egyes feltételekhez tartozó duál változók ellentett értékére, az 5. fejezet (37′)-ből tudjuk, hogy ha az aktuális bázis optimális marad, akkor

$$\text{új } z \text{ érték} = \text{régi } z \text{ érték} + \Delta u_i + \Delta v_j$$

Például, ha az első erőmű kínálatát és a második város keresletét 1 egységgel növeljük, akkor (új költség) $= 1020 + 1(0) + 1(6) = 1026$\$.

A döntési változókra új értékeket kaphatunk a következő módon is:

1. Ha x_{ij} az optimális megoldásban bázisváltozó, akkor x_{ij}-t Δ-val növeljük.

2. Ha x_{ij} az optimális megoldásban nembázis változó, akkor keressük meg az x_{ij}-t és még kizárólag bázisváltozókat tartalmazó hurkot. Ezután keressünk egy páratlan cellát az i-edik sorban. Növeljük ennek a páratlan cellának az értékét Δ-val, és ezt vezessük végig a hurkon, az aktuális bázisváltozókat váltakozva növelve és csökkentve Δ-val.

Az első esetet illusztrálva tegyük föl, hogy s_1-et és d_2-t 2-vel növeljük. Mivel x_{12} az optimális megoldás egyik bázisváltozója, az új optimális megoldás a 40. táblázatban bemutatott megoldás lesz. Az új optimális z érték $1020 + 2u_1 + 2v_2 = 1032$\$. A második típusú helyzetet bemutatandó, tegyük föl, hogy s_1-et és d_1-et 1-gyel növeljük. Mivel x_{11} az aktuális optimális megoldásban nembázis változó, meg kell találnunk az x_{11}-et és még kizárólag bázisváltozókat tartalmazó hurkot. A hurok $(1,1)$–$(1,3)$–$(2,3)$–$(2,1)$. Az első sorban lévő páratlan cella x_{13}. Így az új optimális megoldást úgy kapjuk, hogy x_{13} és x_{21} értékeit 1-gyel növeljük, és x_{23} értékét 1-gyel csökkentjük. Ez azután a 41. táblázatban látható optimális megoldáshoz vezet. Az új optimális z érték: (új z érték) $= 1020 + u_1 + v_1 = 1026$\$. Vegyük észre, hogy ha s_1-et és d_1-et 6-tal növeltük volna, akkor az aktuális bázis egy nem lehetséges megoldás lenne. (Miért?)

40. TÁBLÁZAT
Optimális táblázat a Powerco feladatban, ha $s_1 = 35 + 2 = 37$ és $d_2 = 20 + 2 = 22$

		1. város	2. város	3. város	4. város	Kínálat
	$v_j =$	6	6	10	2	
1. erőmű	$u_i = 0$	$\boxed{8}$	12 $\boxed{6}$	25 $\boxed{10}$	$\boxed{9}$	37
2. erőmű	3	45 $\boxed{9}$	$\boxed{12}$	5 $\boxed{13}$	$\boxed{7}$	50
3. erőmű	3	$\boxed{14}$	10 $\boxed{9}$	$\boxed{16}$	30 $\boxed{5}$	40
Kereslet		45	22	30	30	

41. TÁBLÁZAT
Optimális táblázat a Powerco feladatban, ha $s_1 = 35 + 1 = 36$ és $d_1 = 45 + 1 = 46$

		1. város	2. város	3. város	4. város	Kínálat
	$v_j =$	6	6	10	2	
1. erőmű	$u_i = 0$	$\boxed{8}$	10 $\boxed{6}$	26 $\boxed{10}$	$\boxed{9}$	36
2. erőmű	3	46 $\boxed{9}$	$\boxed{12}$	4 $\boxed{13}$	$\boxed{7}$	50
3. erőmű	3	$\boxed{14}$	10 $\boxed{9}$	$\boxed{16}$	30 $\boxed{5}$	40
Kereslet		46	20	30	30	

Feladatok

A csoport

A következő feladatok a Powerco példára vonatkoznak.

1. Határozza meg c_{14} értékeinek azt a tartományát, amelyekre az aktuális bázis optimális marad!

2. Határozza meg c_{34} értékeinek azt a tartományát, amelyekre az aktuális bázis optimális marad!

3. Ha s_2 és d_3 értékeit 3-mal növeljük, akkor mi lesz az új optimális megoldás?

4. Ha s_3 és d_3 értékeit 2-vel csökkentjük, akkor mi lesz az új optimális megoldás?

5. Két telephely lát el három fogyasztót egészségügyi készítményekkel. Az egyes telepekről a fogyasztókhoz történő szállítási költségek ($-ban), valamint a kínálati és keresleti adatok a 42. táblázatban láthatók.

42. TÁBLÁZAT

Honnan	Hová 1.	fogyasztó 2.	3.	Kínálat
1. telep	55	65	80	20
2. telep	10	15	25	20
Kereslet	10	10	10	

(a) A vállalat célja a fogyasztói igények kielégítése minimális költséggel. Keressen két optimális lehetséges bázismegoldást erre a szállítási feladatra.

(b) Tegyük föl, hogy a 2. fogyasztó igénye egy egységgel növekszik. Mennyivel nő a szállítási költség?[5]

[5]Wagner és Rubin (1990) példája alapján.

6.5. Hozzárendelési feladatok

A szállítási szimplex módszer nagyon hatékonynak tűnik, mégis van a szállítási feladatoknak egy olyan csoportja, ahol a szállítási szimplex módszer gyakran nem bizonyul elég jónak. Ezek a hozzárendelési feladatok. Ebben az alfejezetben definiáljuk a hozzárendelési feladatokat, és leírunk egy nagyon hatékony megoldó algoritmust.

4. PÉLDA A Machinecónak négy gépe van, és négy olyan munka, amelyeket ezeken a gépeken kell elvégezni. Minden egyes gépre egy munkát kell kijelölni, amelyet a gép teljesen elvégez. A 43. táblázat mutatja, hogy az egyes gépeknek az egyes munkákra való beállítása mennyi időt igényel. A Machineco minimalizálni szeretné a négy munka elvégzéséhez szükséges összes beállítási időt. Alkalmazzunk lineáris programozást a feladat megoldására!

43. TÁBLÁZAT Beállítási idők a Machineco feladatban

	Idő (órában)			
	1. munka	**2. munka**	**3. munka**	**4. munka**
1. gép	14	5	8	7
2. gép	2	12	6	5
3. gép	7	8	3	9
4. gép	2	4	6	10

Megoldás A Machinecónak el kell döntenie, hogy melyik gép melyik munkát végezze el. Definiáljuk a következő változókat ($i, j = 1,2,3,4$-re):

$$x_{ij} = 1, \text{ ha az } i\text{-edik gépet jelöljük ki a } j\text{-edik munkára}$$
$$x_{ij} = 0, \text{ ha az } i\text{-edik gépet nem jelöljük ki a } j\text{-edik munkára}$$

Ekkor a Machineco problémája így írható fel:

$$\begin{aligned}
\min z = {} & 14x_{11} + 5x_{12} + 8x_{13} + 7x_{14} + 2x_{21} + 12x_{22} + 6x_{23} + 5x_{24} \\
& + 7x_{31} + 8x_{32} + 3x_{33} + 9x_{34} + 2x_{41} + 4x_{42} + 6x_{43} + 10x_{44} \\
\text{f.h.} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \qquad \text{(gép feltételek)} \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \\
& x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \qquad \text{(munka feltételek)} \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1 \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1 \\
& x_{ij} = 0 \quad \text{or} \quad x_{ij} = 1
\end{aligned} \tag{13}$$

(13)-ban az első négy feltétel azt biztosítja, hogy minden gépre kerüljön munka, az utolsó négy feltétel pedig azt biztosítja, hogy minden munka el legyen végezve. Ha $x_{ij} = 1$, akkor a célfüggvény kiválasztja az i-edik gép – j-edik munka időszükségletét; ha $x_{ij} = 0$, akkor a célfüggvény nem választja ki ezt az időt.

Egy pillanatra tekintsünk el az $x_{ij} = 0$ vagy $x_{ij} = 1$ megszorítástól. Így láthatjuk, hogy a Machineco problémája valójában egy kiegyensúlyozott szállítási feladat, amelyben minden kínálati pontnak 1 a kínálata, és minden keresleti pontnak 1 a kereslete. Általában a **hozzárendelési feladat** egy olyan kiegyensúlyozott szállítási feladat, amelyikben minden kínálat és kereslet 1. Így egy hozzárendelési feladatot azzal jellemezhetünk, ha ismerjük minden egyes kínálati pontnak minden egyes keresleti ponthoz való hozzárendelésének költségét. A hozzárendelési feladatban a költségek mátrixát **költségmátrixnak** nevezzük.

Mivel a Machineco feladatban (és bármely hozzárendelési feladatban) az összes kínálat és kereslet egész szám, a 6.3. alfejezetben tárgyaltak alapján tudjuk, hogy a Machineco optimális megoldásában minden változónak egész számnak kell lennie. Mivel minden feltétel jobb oldala 1, és minden x_{ij} 1-nél nem nagyobb nemnegatív egész, ezért minden x_{ij} vagy 0, vagy 1 értéket fog felvenni. Ez azt jelenti, hogy figyelmen kívül hagyhatjuk az $x_{ij} = 0$ vagy 1 feltételeket, és (13)-at kiegyensúlyozott szállítási feladatként oldhatjuk meg. A minimális költségek módszerével a 44. táblázatban látható lehetséges bázismegoldást kapjuk. Ez a bázismegoldás erősen degenerált. (Bármely $m \times m$-es hozzárendelési feladatban egy lehetséges bázismegoldásában m olyan bázisváltozó lesz, amelynek az értéke 1, és $m-1$ olyan bázisváltozó, amelynek az értéke 0.)

44. TÁBLÁZAT Lehetséges bázismegoldás a Machineco számára

		1. munka	2. munka	3. munka	4. munka	
	$v_j =$	3	5	8	7	
1. gép	$u_i = 0$	$\boxed{14}$	$\boxed{5}$ 1	$\boxed{8}$ 0	$\boxed{7}$ 0	1
2. gép	-2	$\boxed{2}$	$\boxed{12}$	$\boxed{6}$	$\boxed{5}$ 1	1
3. gép	-5	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{3}$ 1	$\boxed{9}$	1
4. gép	-1	$\boxed{2}$ 1	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{6}$	$\boxed{10}$	1
		1	1	1	1	

Azt látjuk, hogy $\bar{c}_{43} = 1$ az egyetlen pozitív $\bar{c}_{ij}$. Ezáltal x_{43}-at beléptetjük a bázisba. Az ehhez tartozó, és rajta kívül kizárólag bázisváltozókat tartalmazó hurok $(4,3)$–$(1,3)$–$(1,2)$–$(4,2)$. A hurokban lévő páratlan változók x_{13} és x_{42}. Mivel $x_{13} = x_{42} = 0$, vagy x_{13}, vagy x_{42} lép ki a bázisból. Válasszuk x_{13}-at a bázis elhagyására! A báziscserét végrehajtva, a 45. táblázatban látható lehetséges bázismegoldást kapjuk. Most már minden $\bar{c}_{ij}$ nempozitív, így optimális hozzárendelést kaptunk: $x_{12} = 1, x_{24} = 1, x_{33} = 1$ és $x_{41} = 1$. Ez azt jelenti, hogy az 1. gépre kerül a 2. munka, a 2. gép ki van jelölve a 4. munkára, a 3. gép a 3. munkát kapja, és a 4. gép végzi majd az 1. munkát. Az ehhez szükséges teljes gépbeállítási idő: $5+5+3+2 = 15$ óra.

A magyar módszer

Ha visszatekintünk az induló lehetséges bázismegoldásra, akkor láthatjuk, hogy az optimális megoldás volt. Természetesen ezt nem tudtuk, amíg végre nem hajtottunk egy lépést a szállítási szimplex módszerrel. Ez azt mutatja, hogy a hozzárendelési feladatban fellépő

45. TÁBLÁZAT
x_{43} belépett a bázisba

		1. munka	2. munka	3. munka	4. munka	
	$v_j =$	3	5	7	7	
1. gép	$u_i = 0$	$\boxed{14}$	1 $\boxed{5}$	$\boxed{8}$	0 $\boxed{7}$	1
2. gép	-2	$\boxed{2}$	$\boxed{12}$	$\boxed{6}$	1 $\boxed{5}$	1
3. gép	-4	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	1 $\boxed{3}$	$\boxed{9}$	1
4. gép	-1	1 $\boxed{2}$	0 $\boxed{4}$	0 $\boxed{6}$	$\boxed{10}$	1
		1	1	1	1	

nagyfokú degeneráltság azt okozhatja, hogy a szállítási szimplex módszer nem elég hatékony a hozzárendelési feladatok megoldására. Ez az oka annak (továbbá az a tény, hogy a következő algoritmus még a szállítási feladaténál is egyszerűbb), hogy a hozzárendelési (min) feladatok megoldására általában a magyar módszert használják.

1. lépés Keressük meg az $m \times m$-es költségmátrix minden sorában a legkisebb elemet. Képezzünk egy új mátrixot úgy, hogy a sor minden költségeleméből kivonjuk a legkisebb költségelemet. Ebben az új mátrixban keressük meg minden oszlopban a legkisebb költségelemet. Képezzünk egy új mátrixot (ezt redukált költségmátrixnak nevezzük) úgy, hogy az oszlop minden költségeleméből kivonjuk a legkisebb költségelemet.

2. lépés Rajzoljuk be a lehető legkevesebb olyan vonalat (vízszintes és/vagy függőleges), amelyek segítségével a redukált költségmátrixban található összes nulla lefedhető. Ha ehhez m fedővonal szükséges, akkor a mátrixban lévő lefedett nullák között rendelkezésünkre áll az optimális megoldás. Ha m-nél kevesebb vonallal fedtük le az összes nullát, akkor a 3. lépés következik.

3. lépés Keressük meg a redukált költségmátrixban azt a legkisebb nemnulla elemet (nevezzük k-nak), amelyiket a 2. lépésben nem fedtünk le. Most vonjuk ki k-t a redukált költségmátrix minden nem lefedett eleméből, valamint adjunk hozzá k-t a kétszer lefedett elemekhez. Térjünk vissza a 2. lépéshez.

MEGJEGYZÉSEK

1. Ha olyan hozzárendelési feladatot akarunk megoldani, amelyikben a célfüggvényt maximalizálni kell, akkor a profitmátrix minden elemét megszorozzuk -1-gyel és megoldjuk a feladatot, mint egy minimum feladatot.

2. Ha a költségmátrixban a sorok és oszlopok száma nem egyenlő, akkor a hozzárendelési feladat **kiegyensúlyozatlan**. Ha a feladat kiegyensúlyozatlan, akkor a magyar módszer esetleg nem ad helyes megoldást. Így tehát minden hozzárendelési feladatot kiegyensúlyozottá kell tenni (egy vagy több fiktív pont bevezetésével), mielőtt a magyar módszerrel megoldanánk.

3. Egy nagyméretű feladatban előfordulhat, hogy nem könnyű megtalálni az összes nullát lefedő fedővonalak minimális számát. A minimális fedővonalszám megkeresésével foglalkozik Gillett (1976). Bizonyítható, hogy ha j vonal szükséges a lefedéshez, akkor csak j darab „munka” rendelhető hozzá a mátrix nulla költségelemeihez. Ez megmagyarázza, hogy az algoritmus miért ér véget, amikor m vonal szükséges a lefedéshez.

A Machineco példa megoldása magyar módszerrel

A magyar módszert a Machineco feladat megoldásával mutatjuk be (lásd 46. táblázat).

46. TÁBLÁZAT A Machineco feladat költségmátrixa

				Sorminimum
14	5	8	7	5
2	12	6	5	2
7	8	3	9	3
2	4	6	10	2

1. lépés Minden sorban kivonjuk a sorminimumot a sor minden eleméből, így kapjuk a 47. táblázatot. Ezután kivonunk 2-t a 4. oszlop minden eleméből, és megkapjuk a 48. táblázatot.

47. TÁBLÁZAT Költségmátrix a sorminimumok kivonása után

	9	0	3	2
	0	10	4	3
	4	5	0	6
	0	2	4	8
Oszlopminimum	0	0	0	2

2. lépés Ahogy a táblázatból látható, az első sor, a harmadik sor és az első oszlop lefedi a redukált költségmátrix összes nulláját. A 3. megjegyzésből következik, hogy az aktuális költségmátrixban csak három munka rendelhető hozzá nulla költségelemekhez. Mivel négynél kevesebb vonal volt szükséges az összes nulla lefedéséhez, továbbmegyünk a 3. lépésre.

3. lépés A legkisebb nem lefedett elem 1, így tehát kivonunk 1-et a redukált költségmátrix minden nem lefedett eleméből, és hozzáadunk 1-et a kétszer lefedett elemekhez. Eredményül a 49. táblázatot kapjuk. Most négy vonal szükséges az összes nulla lefedéséhez. Ez azt jelenti, hogy az optimális megoldás rendelkezésre áll. Keressük meg az optimális hozzárendelési rendszert. Vegyük észre, hogy a harmadik oszlopban az egyetlen lefedett 0 az x_{33},

48. TÁBLÁZAT
Költségmátrix az oszlopminimumok kivonása után

9	0	3	0
0	10	4	1
4	5	0	4
0	2	4	6

tehát $x_{33} = 1$. Ugyancsak egy lefedett nulla áll a második oszlopban, így $x_{12} = 1$. Egyúttal tudomásul vesszük, hogy az első sor és a második oszlop már nem használható fel még egyszer. A negyedik oszlopban tehát már csak egy lefedett nulla áll rendelkezésre, az x_{24} helyen, így $x_{41} = 1$-et választjuk (ezáltal kizárva a második sort és a negyedik oszlopot a további felhasználásból). Végül $x_{41} = 1$.

Így megtaláltuk az optimális hozzárendelést, és ez: $x_{12} = 1, x_{24} = 1, x_{33} = 1$ és $x_{41} = 1$. Természetesen ugyanazt az eredményt kaptuk, mint amikor a szállítási szimplex módszert alkalmaztuk.

A magyar módszer intuitív igazolása

Ahhoz, hogy intuitív magyarázatot adjunk arra a kérdésre, hogy miért működik a magyar módszer, fel kell használnunk a következő tényt: *ha egy kiegyensúlyozott hozzárendelési feladatban egy sorban (vagy oszlopban) minden költséghez hozzáadjuk ugyanazt a konstans számot, akkor a feladat optimális megoldása nem változik.* Megmutatjuk, hogy ez miért igaz. Tegyük föl, hogy a Machineco feladatban az első sor költségeihez hozzáadunk k-t. Ekkor az

$$\text{új célfüggvény} = \text{régi célfüggvény} + k(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14})$$

Mivel a Machineco feladat minden lehetséges megoldásában $x_{11} + x_{12} + x_{13} + +x_{14} = 1$,

$$\text{új célfüggvény} = \text{régi célfüggvény} + k$$

49. TÁBLÁZAT
Négy vonal szükséges; az optimális megoldás rendelkezésre áll

10	0	3	0
0	9	3	0
5	5	0	4
0	1	3	5

Így tehát a Machineco feladat optimális megoldása változatlan marad, ha az első sor minden költségeleméhez egy k konstanst hozzáadunk. Ehhez hasonló okoskodás alkalmazható minden más sorra vagy oszlopra.

A magyar módszer első lépése abból áll (minden sorra és oszlopra), hogy a sor, illetve oszlop minden eleméből kivonunk egy konstanst. Így az első lépés egy új költségmátrixot szolgáltat, amelyhez azonban ugyanaz az optimális megoldás tartozik, mint az eredeti költségmátrixhoz. A magyar módszer harmadik lépése (lásd a 7. feladatot ennek az alfejezetnek a végén) azt jelenti, hogy minden olyan költséghez hozzáadunk k-t, amely költség egy lefedett sorban van, és minden olyan költségből kivonunk k-t, amelyik egy nem lefedett oszlopban van (vagy fordítva). Ezáltal a 3. lépés egy új költségmátrixot ad, amelyhez ugyanaz az optimális megoldás tartozik, mint az eredeti hozzárendelési feladathoz. Minden alkalommal, amikor a 3. lépést végrehajtjuk, legalább egy új nullát állítunk elő a költségmátrixban.

Az első és harmadik lépés azt is biztosítja, hogy a költségek nemnegatívok maradnak. Így a magyar módszer első és harmadik lépésének összhatása az, hogy (nemnegatív költségelemekkel rendelkező) hozzárendelési feladatoknak egy olyan sorozatát állítja elő, amelyeknek ugyanaz az optimális megoldása, mint az eredeti hozzárendelési feladatnak. Tekintsük azt a hozzárendelési feladatot, amelyben a költségek mind nemnegatívok. Minden olyan lehetséges hozzárendelésnek, amelyben minden $x_{ij} = 1$-hez nulla költség tartozik, egy ilyen hozzárendelési feladatban optimálisnak kell lennie. Így amikor a második lépés azt mutatja, hogy a költségmátrixban található összes nulla lefedéséhez m vonal szükséges, akkor az eredeti feladat egy optimális megoldásához jutottunk.

Feladatok

A csoport

1. Öt alkalmazott áll rendelkezésünkre négy munka elvégzésére. Az 50. táblázatban látható, hogy melyik alkalmazott melyik munkát hány óra alatt tudja elvégezni. Határozza meg az alkalmazottak kijelölését az egyes munkákra úgy, hogy a négy munka elvégzéséhez szükséges idő minimális legyen!

50. TÁBLÁZAT

	Idő (órában)			
Személy	**1. munka**	**2. munka**	**3. munka**	**4. munka**
1.	22	18	30	18
2.	18	—	27	22
3.	26	20	28	28
4.	16	22	—	14
5.	21	—	25	28

Megjegyzés: A gondolatjelek azt jelzik, hogy az illető személy azt a munkát nem tudja elvégezni.

2.[6] Doc Councillman a 4×100 méteres vegyes váltóra válogatja össze úszócsapatát. Minden úszónak 100 métert kell úsznia vagy mellen, vagy háton, vagy pillangón, vagy gyorson. Doc úgy gondolja, hogy mindegyik úszó tudja hozni az 51. táblázatban leírt időket. Ha a csapat összidejének minimalizálása a cél, akkor melyik úszó melyik úszásnemben induljon?

51. TÁBLÁZAT

	Idő (másodperc)			
	gyors	**mell**	**pillangó**	**hát**
Gary Hall	54	54	51	53
Mark Spitz	51	57	52	52
Jim Montgomery	50	53	54	56
Chet Jastremski	56	54	55	53

3. Tom Selleck, Burt Reynolds, Tony Geary és John Travolta egy elhagyott szigeten rekedt a következő hölgyekkel: Olivia Newton-John, Loni Anderson, Dolly Parton és Genie Francis. Az 52. táblázatban látható „összeegyeztethetőségi mértékek” azt mutatják, hogy az egyes lehetséges párok mennyi boldogsághoz jutnának, ha az egész időt egymással töltenék. Egy pár által elért boldogság arányos az együtt töltött idővel. Például, ha Tony és Genie az idő felét tölti együtt, akkor az általuk elnyert boldogság mértéke $\frac{1}{2}(9) = 4.5$.

[6] Machol (1970) alapján.

52. TÁBLÁZAT

	ONJ	LA	DP	GF
TS	7	5	8	2
BR	7	8	9	4
TG	3	5	7	9
JT	5	5	6	7

(a) Legyen x_{ij} az időnek az a törtrésze, amelyet az i-edik férfi a j-edik nővel tölt. A cél az, hogy a nyolc embernek a szigeten eltöltött idején maximális legyen az összboldogsága. Fogalmazzon meg egy LP-t, amelynek optimális megoldása az x_{ij}-k optimális értékét adja!

(b) Magyarázza meg, hogy az (a) alatti feladat optimális megoldásában miért lesz négy $x_{ij} = 1$ és tizenkét $x_{ij} = 0$? Mivel az optimális megoldás értelmében minden személy az ellenkező neműek közül egy személlyel tölti a teljes időt, ezt az eredményt gyakran házassági tételnek is nevezik.

(c) Határozza meg minden személyhez a házastársat!

(d) Mit gondol, érvényesül-e itt a lineáris programozás arányossági feltevése?

4. Egy vállalat négy építkezésre fogad el ajánlatokat. Három ember tett ajánlatot a munkákra. Ajánlataik (ezer dollárban) az 53. táblázatban láthatók (a $*$ azt jelenti, hogy az a személy arra a munkára nem licitált).

53. TÁBLÁZAT

	Építkezés			
	1	**2**	**3**	**4**
1. személy	50	46	42	40
2. személy	51	48	44	$*$
3. személy	$*$	47	45	45

Az 1. személy csak egy konstrukciós munkát tud elvégezni, de a 2. és 3. személy kettőt is el tud vállalni. Határozza meg a minimális költséggel járó személy – munka hozzárendelést!

B csoport

5. Minden szállítási feladat megfogalmazható hozzárendelési feladatként is. Ennek a gondolatnak a bemutatására határozzon meg egy olyan hozzárendelési feladatot, amelyik felhasználható az 54. táblázatban látható szállítási feladat optimális megoldásának előállítására. (*Útmutatás:* Öt kínálati és öt keresleti pontra lesz szükség.)

54. TÁBLÁZAT

	3	1	2
	2	3	3
	1	4	

6. A Chicago Board of Education ajánlatokat fogad el a város négy iskolabuszvonalára. Négy vállalat ajánlkozik az 55. táblázatban látható árakkal ($-ban).

55. TÁBLÁZAT

	Árajánlatok az útvonalakra			
	1.	**2.**	**3.**	**4.**
1. vállalat	4000	5000	—	—
2. vállalat	—	4000	—	4000
3. vállalat	3000	—	2000	—
4. vállalat	—	—	4000	5000

(a) Tegyük föl, hogy egy ajánlkozó vállalat csak egy útvonalat kaphat meg. Használja a hozzárendelési módszert arra, hogy Chicago a négy buszútvonalat minimális költséggel láthassa el!

(b) Tegyük föl, hogy az egyes vállalatok két útvonalat is elvállalhatnak. Használja a hozzárendelési módszert Chicago négy buszköltségének minimalizálására! (*Útmutatás:* Minden vállalathoz két kínálati pontra lesz szükség.)

7. Mutassa meg, hogy a magyar módszer harmadik lépése a következő műveletek végrehajtását jelenti: (1) Adjunk hozzá k-t minden olyan költséghez, amelyik egy lefedett sorban fekszik. (2) Vonjunk ki k-t minden olyan költségből, amelyik egy nem lefedett oszlopban fekszik.

8. Tegyük föl, hogy c_{ij} egy hozzárendelési feladat i-edik sorának és j-edik oszlopának legkisebb eleme. Igaz-e, hogy szükségképpen bármely optimális hozzárendelésben $x_{ij} = 1$?

6.6. Összetett szállítási feladatok

Egy szállítási feladat csak olyan szállításokat enged meg, amelyek egy kínálati pontból egyenesen egy keresleti pontba irányulnak. Nagyon sok olyan helyzet van azonban, amelyekben kínálati pontok között, vagy keresleti pontok között is szállítások történnek. Néha előfordulhatnak a szállításban közbenső állomások is (ezeket átszállítási vagy közbülső szállítási pontoknak nevezzük). Összetett szállítási feladatok azok, amelyekben hasonló természetű események előfordulnak. Szerencsére egy összetett szállítási feladat optimális megoldása mindig megtalálható egy szállítási feladat megoldása révén.

A következőkben úgy definiáljuk a **kínálati pontot**, mint egy olyan pontot, amelyik egy másik pontra termékeket küldhet, de nem fogadhat termékeket egyetlen másik pontról sem. Ehhez hasonlóan a **keresleti pont** egy olyan pont, amelyik más pontokról termékeket fogadhat, de nem küldhet termékeket egyetlen más pontra sem. Az **átszállítási pont** egy olyan pont, amelyik fogadhat is termékeket más pontokról, és küldhet is termékeket más pontokra. A következő példa ezeket a definíciókat mutatja be (a „—” azt jelenti, hogy a szállítás abban a viszonylatban nem lehetséges).

5. PÉLDA A Widgetco herkentyűket készít két gyárban, az egyik Denverben van, a másik Memphisben. A memphisi gyár naponta legfeljebb 150 herkentyűt tud készíteni, a denveri gyár pedig naponta legfeljebb 200 herkentyűt tud előállítani. A herkentyűket Los Angelesbe és Bostonba szállítják a vevőkhöz, légi úton. A vevők igénye mindkét városban naponta 130 herkentyű. A légi szállítási díjak szabályozatlansága miatt a Widgetco úgy gondolja, hogy esetleg olcsóbb lehet néhány herkentyűt először New Yorkba vagy Chicagóba repültetni, és onnan a rendeltetési helyeikre. Egy herkentyű szállítási költségei az 56. táblázatban láthatók. A Widgetco minimalizálni szeretné a kívánt mennyiségű herkentyűknek a fogyasztókhoz történő szállítási összköltségét.

56. TÁBLÁZAT Szállítási költségek ($) az összetett szállításhoz

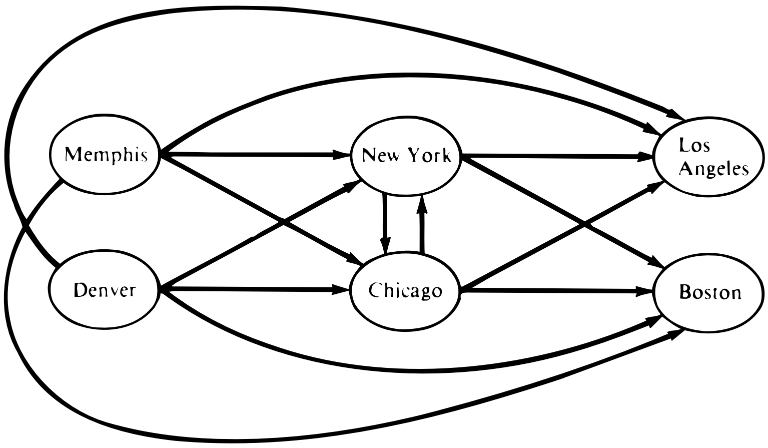
	Hová					
Honnan	Memphis	Denver	N.Y.	Chicago	L.A.	Boston
Memphis	0	—	8	13	25	28
Denver	—	0	15	12	26	25
N.Y.	—	—	0	6	16	17
Chicago	—	—	6	0	14	16
L.A.	—	—	—	—	0	—
Boston	—	—	—	—	—	0

Ebben a feladatban Memphis és Denver kínálati pontok, rendre 150 és 200 herkentyű napi kínálattal. New York és Chicago átszállítási pontok. Los Angeles és Boston keresleti pontok, mindkettő napi 130 herkentyű igénnyel. A lehetséges szállítások grafikus szemléltetése a 7. ábrán látható.

Most megmutatjuk, hogy egy ilyen összetett szállítási feladat optimális megoldása hogyan kapható meg egy szállítási feladat megoldásával. Egy adott összetett szállítási feladat esetén először is egy kiegyensúlyozott szállítási feladatot alkotunk a következő eljárással (feltételezzük, hogy az összkínálat meghaladja az összkeresletet):

1. lépés Ha szükséges, akkor vegyünk fel egy fiktív keresleti pontot (0 kínálattal és a feladat túlkínálatának megfelelő kereslettel) a feladat kiegyensúlyozására. A szállítások

7. ÁBRA
Egy összetett szállítási feladat



költsége a fiktív pontra, és egy pontról önmagához természetesen nulla. Legyen $s =$ az összes rendelkezésre álló kínálat.

2. lépés Írjunk fel egy szállítási táblázatot a következőképpen: a táblázatban minden kínálati ponthoz és minden átszállítási ponthoz kell egy-egy sor, és minden keresleti ponthoz és minden átszállítási ponthoz kell egy-egy oszlop. Minden kínálati pont kínálata egyenlő az eredeti kínálattal, és minden keresleti pont kereslete egyenlő az eredeti kereslettel. Legyen $s =$ az összes rendelkezésre álló kínálat. Ezután az egyes átszállítási pontoknál a kínálat = (a pont eredeti kínálata) $+ s$; a kereslet = (a pont eredeti kereslete) $+ s$. Ez azt biztosítja, hogy bármely átszállítási pontnak, amelyik tisztán kínálati, lesz egy nettó kiszállítása, ami egyenlő a pont eredeti kínálatával, és ehhez hasonlóan, egy tisztán keresletinek pedig lesz egy nettó beszállítása, ami egyenlő a pont eredeti keresletével. Bár nem tudjuk, hogy mennyit fogunk az egyes átszállítási pontokon keresztül szállítani, abban biztosak lehetünk, hogy a teljes mennyiség nem lépi túl s-t. Ez a magyarázata annak, hogy miért adtunk hozzá s-t a kínálathoz és keresléthez mindegyik átszállítási ponton. Ugyanazt a mennyiséget hozzáadva a kínálathoz és a kereslethez biztosítjuk azt, hogy az egyes átszállítási pontokon a tiszta kiszállítás mennyisége korrekt lesz, és közben megtartottuk a szállítási táblázat kiegyensúlyozottságát.

A Widgetco példában ez az eljárás az 57. táblázatban bemutatott szállítási táblázatot és az ugyancsak ott látható optimális megoldást adja. Mivel $s = (\text{összkínálat}) = 150 + 200 = 350$ és $(\text{összkereslet}) = 130 + 130 = 260$, a fiktív keresleti pont kereslete: $350 - 260 = 90$. A szállítási táblázat egyéb kínálatai és keresletei úgy adódnak, hogy $s = 350$-et hozzáadunk az átszállítási pontok kínálatához és keresletéhez.

Az összetett szállítási feladatból alkotott szállítási feladat megoldásának értelmezéséhez egyszerűen figyelmen kívül hagyjuk a fiktív pontra való szállításokat és egy pont önmagához történő szállításait. Az 57. táblázatból kiolvashatóan a Widgetco készítsen 130 herkentyűt Memphisben, ezeket szállítsa New Yorkba és New Yorkból szállítsa tovább Los Angelesbe. A Denverben előállított 130 herkentyűt egyenesen Bostonba kell szállítani. Az egyes városokból történő nettó kiszállítások:

Memphis:	$130 + 20 = 150$
Denver:	$130 + 70 = 200$
N.Y.:	$220 + 130 - 130 - 220 = 0$

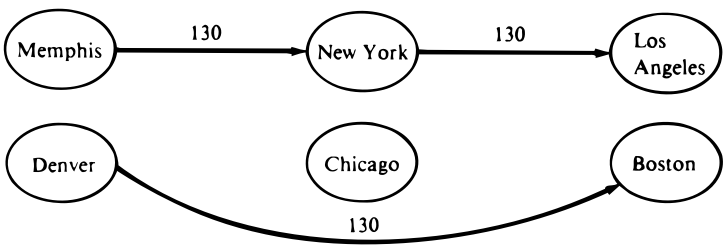
57. TÁBLÁZAT
Összetett szállítási feladat felírása kiegyensúlyozott szállítási feladatként

	N.Y.	Chicago	L.A.	Boston	Fiktív keresleti pont	Kínálat
Memphis	(8) 130	(13)	(25)	(28)	(0) 20	150
Denver	(15)	(12)	(26)	(25) 130	(0) 70	200
N.Y.	(0) 220	(6)	(16) 130	(17)	(0)	350
Chicago	(6)	(0) 350	(14)	(16)	(0)	350
Kereslet	350	350	130	130	90	

Chicago:	$350 - 350$	$= 0$
L.A.:	-130	
Boston:	-130	
Fiktív keresleti pont:	$-20 - \ 70$	$= -90$

Egy negatív kiszállítás beszállítást jelent. Figyeljük meg, hogy mindegyik átszállítási pontnak (New York és Chicago) a nettó kiszállítása 0; amit beszállítottunk egy átszállítási pontra, azt onnan ki is kell szállítani. A 8. ábrán grafikusan is bemutatjuk a Widgetco példa optimális megoldását.

8. ÁBRA
A Widgetco feladat optimális megoldása



Tegyük föl, hogy módosítjuk a Widgetco példát és megengedünk szállításokat Memphis és Denver között. Ezzel Memphis és Denver átszállítási pontokká változnának, és az 57. táblázathoz még Memphis és Denver oszlopokat kellene csatolni. Így a Memphis sornak a táblázatban $150 + 350 = 500$ lenne a kínálata, a Denver sornak pedig $200 + 350 = 550$ lenne a kínálata. Az új Memphis oszlop kereslete $0 + 350 = 350$ lenne, az új Denver oszlop kereslete pedig $0 + 350 = 350$ lenne. Végül tegyük föl, hogy az L.A. és Boston keresleti pontok között is lehetne szállítás. Ezzel L.A. és Boston is átszállítási pontokká válna, a táblázathoz pedig L.A. és Boston sorokat kellene csatolni. A kínálat mind L.A., mind Boston sorában $0 + 350 = 350$ lenne, a kereslet pedig mind az L.A., mind a Boston oszlopban $130 + 350 = 480$ lenne.

Feladatok

A csoport

1. A General Ford autókat gyárt L.A.-ben és Detroitban, van egy raktára Atlantában és Houstonban, valamint Tampában kínálja autóit a vevőknek. Az 58. táblázatban láthatók egy autó szállítási költségei ($-ban) az egyes pontok között (a „—” jel azt jelenti, hogy a szállítás nincs megengedve). L.A.-ben legfeljebb 1100 autó gyártható, Detroitban legfeljebb 2900 autó gyártható. Houston igénye 2400 autó, Tampa igénye 1500 autó.

58. TÁBLÁZAT

	Hová				
Honnan	L.A.	Detroit	Atlanta	Houston	Tampa
L.A.	0	140	100	90	225
Detroit	145	0	111	110	119
Atlanta	105	115	0	113	78
Houston	89	109	121	0	—
Tampa	210	117	82	—	0

(a) Fogalmazzon meg egy kiegyensúlyozott szállítási feladatot, amelyik minimalizálja a Houston és Tampa igényeit kielégítő szállítási költségeket!

(b) Módosítsa válaszát az (a) kérdésre, ha L.A. és Detroit között nincs megengedve a szállítás!

(c) Módosítsa a válaszát az (a) kérdésre, ha Houston és Tampa között 5 dollárért megengedett a szállítás!

2. A Sunco Oil két kútból nyeri az olajat. Az 1. kút naponta legfeljebb 150 000 hordót ad, a 2. kút naponta legfeljebb 200 000 hordó olajat szolgáltat. Lehetséges az is, hogy az olajat a kutaktól egyenesen a Sunco vevőihez szállítják Los Angelesbe és New Yorkba. Egy másik lehetőség az, hogy a Sunco elszállítja az olajat Mobile és Galveston kikötőibe, és azután tankhajóval szállítja tovább New Yorkba és Los Angelesbe. Az igények: naponta 160 000 hordó Los Angelesben és 140 000 hordó New Yorkban. Az 59. táblázatban az 1000 hordóra eső szállítási költségek láthatók ($-ban). Fogalmazzon meg egy összetett szállítási modellt (és a vele ekvivalens szállítási modellt), amelyik minimalizálja a Los Angeles és New York városában lévő igények kielégítésének szállítási költségeit!

3. A 2. feladatban tételezzük fel, hogy mielőtt Los Angelesbe vagy New Yorkba menne egy szállítmány, a kutakból kinyert olajat vagy Galvestonban, vagy Mobile-ban finomítani kell. 1000 hordó olaj finomítása Mobile-ban 12$ és Galvestonban 10$. Feltéve, hogy mind Mobile, mind Galveston olajfinomító kapacitása végtelen nagy, fogalmazzon meg egy összetett szállítási és kiegyensúlyozott szállítási modellt a napi szállítási és finomítási költségek minimalizálására, Los Angeles és New York olajszükségletének kielégítésére!

4. Dolgozza át a 3. feladatot azzal a feltételezéssel, hogy Galveston napi finomító kapacitása 150 000 hordó, és Mobile-é 180 000 hordó! (*Útmutatás:* Módosítsa azt a módszert, amelyet az egyes átszállítási pontok kínálatának és keresletének meghatározására alkalmaztunk. Használja azt úgy fel, hogy beépítse a modellbe a finomítók kapacitáskorlátait, de közben figyeljen arra, hogy a feladat kiegyensúlyozott maradjon!)

5. A General Fordnak két gyártelepe, két raktára és három vevője van. Ezek elhelyezkedése a következő:

gyártelepek: Detroit és Atlanta

raktárak: Denver és New York

vevők: Los Angeles, Chicago és Philadelphia

Az autókat a gyártelepeken gyártják, azután raktárba kerülnek, végül pedig a vevőkhöz szállítják. Detroit hetenként 150 autót, Atlanta hetente 100 autót tud gyártani. Los Angeles igénye 80 autó hetente, Chicago igénye 70, és Philadelphia igénye 60 autó hetente. Mindegyik telepen 10 000$-ba kerül egy autó gyártása, és a szállítási költségek ($-ban) a 60. táblázatban láthatók. Határozza meg, hogyan lehet a

59. TÁBLÁZAT

	Hová					
Honnan	1. kút	2. kút	Mobile	Galveston	N.Y.	L.A.
1. kút	0	—	10	13	25	28
2. kút	—	0	15	12	26	25
Mobile	—	—	0	6	16	17
Galveston	—	—	6	0	14	16
N.Y.	—	—	—	—	0	15
L.A.	—	—	—	—	15	0

Megjegyzés: A gondolatjelek azt jelentik, hogy nincs megengedett szállítás.

General Ford heti követelményeinek minimális költséggel megfelelni!

60. TÁBLÁZAT

	Hová	
Honnan	Denver	New York
Detroit	1253	637
Atlanta	1398	841

	Hová		
Honnan	Los Angeles	Chicago	Philadelphia
Denver	1059	996	1691
New York	2786	802	100

B csoport

6.[7] Egy vállalatnak a következő hat hónapban minden hónap elején a következő készpénzigénye van: 1. hónapban 200$; 2. hónapban 100$; 3. hónapban 50$; 4. hónapban 80$; 5. hónapban 160$; 6. hónapban 140$. Az első hónap elején a cégnek van 150$ készpénze és 200$ értékű kötvénye az egyik típusból, 100$ értékű kötvénye a másik típusból és 400$ értékű kötvénye a harmadik típusból. A vállalatnak majd el kell adnia néhány kötvényt, hogy igényei kielégíthetők legyenek, de a hatodik hónap vége előtt eladott kötvényekre büntetés van. A 61. táblázat mutatja ezeket a büntetéseket ($-ban) az egyes kötvényfajták 1 dollárjára.

61. TÁBLÁZAT

	Az eladás hónapja					
Kötvény	1	2	3	4	5	6
1	0.21	0.19	0.17	0.13	0.09	0.05
2	0.50	0.50	0.50	0.33	0	0
3	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0

(a) Feltéve, hogy minden számlát időben ki kell fizetni, fogalmazzon meg egy kiegyensúlyozott szállítási feladatot, amelyik minimalizálja a készpénzigények kielégítésének költségeit a következő hat hónapra!

(b) Feltételezzük, hogy a számlákat késve is ki lehet fizetni, de havonta 5 cent büntetést kell fizetni minden egyes egy hónapra elodázott kifizetés után. Feltéve, hogy a hatodik hónap végére minden számlát ki kell fizetni, dolgozzon ki egy összetett szállítási modellt, amelyik minimalizálja a következő hat hónap számláinak kifizetésével járó költséget! (*Útmutatás:* Átszállítási pontok kellenek a következő formában: C_t = rendelkezésre álló készpénz a t-edik hónap elején, miután a kötvényeket a t-edik hónapban eladták, de mielőtt a t-edik hónap szükségletét kielégítették volna. Szállítások C_t-be kötvényeladásból és C_{t-1}-ből történnek. Szállítások C_t-ből C_{t+1}-be és az $1, 2, \dots t$ hónapok igényeibe történnek.)

Összefoglalás

Jelölések

m = kínálati pontok száma
n = keresleti pontok száma
x_{ij} = az i-edik kínálati pontból a j-edik keresleti pontba szállított egységek száma
c_{ij} = 1 egység szállítási költsége az i-edik kínálati pontból a j-edik keresleti pontba
s_i = az i-edik kínálati pont kínálata
d_j = a j-edik keresleti pont kereslete
$\bar{c}_{ij}$ = x_{ij} együtthatója a célfüggvény sorában egy adott táblázatban
$\mathbf{a}_{ij}$ = x_{ij} oszlopa a szállítási feltételben

Egy szállítási feladat **kiegyensúlyozott**, ha az összkínálat egyenlő az összkereslettel. Ha az ebben a fejezetben tárgyalt módszerrel oldunk meg egy szállítási feladatot, a feladatot

[7] Srinivasan (1974) alapján.

először ki kell egyensúlyozni egy fiktív kínálati vagy egy fiktív keresleti pont beiktatásával. Egy kiegyensúlyozott szállítási feladat így írható fel:

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{i=1}^{i=m}\sum_{j=1}^{j=n} c_{ij}x_{ij} \\
&\text{f.h.} \quad \sum_{j=1}^{j=n} x_{ij} = s_i \quad (i=1,2,\dots,m) \qquad \text{(kínálati feltételek)} \\
&\qquad\quad \sum_{i=1}^{i=m} x_{ij} = d_j \quad (j=1,2,\dots,n) \qquad \text{(keresleti feltételek)} \\
&x_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n)
\end{aligned}$$

Lehetséges bázismegoldás megkeresése a kiegyensúlyozott szállítási feladatban

A kiegyensúlyozott szállítási feladat egy lehetséges bázismegoldását megkereshetjük az északnyugati sarok módszerrel, a minimális költség módszerrel és a Vogel módszerrel. Nézzük ezek közül az elsőt! Az északnyugati sarok módszer úgy adja meg az induló lehetséges bázismegoldást, hogy a változók megválasztását a táblázat bal felső (északnyugati) sarkában kezdjük, és x_{11}-nek olyan nagy értéket adunk, amekkorát lehet. Magától értetődő, hogy x_{11} nem lehet nagyobb, mint s_1 és d_1 közül a kisebbik. Ha $x_{11} = s_1$, akkor töröljük a szállítási táblázat első sorát; ezzel jelezzük, hogy a táblázat első sorából már nem kerülhet be több bázisváltozó. Egyúttal d_1-et $d_1 - s_1$-re változtatjuk. Ha $x_{11} = d_1$, akkor töröljük a szállítási táblázat első oszlopát és s_1-et $s_1 - d_1$-re változtatjuk. Ha $x_{11} = s_1 = d_1$, akkor töröljük vagy az első sort, vagy az első oszlopot (de nem mindkettőt). Ha az első sort töröljük, akkor d_1-et 0-ra változtatjuk, ha az első oszlopot töröljük, akkor s_1-et változtatjuk 0-ra. Folytatjuk ezt az eljárást a legészaknyugatibb cellával, amelyik egy nem törölt sorban vagy oszlopban fekszik. Végül eljutunk oda, hogy már csak egyetlen cella van, amelynek értéket adhatunk. Kijelöljük ehhez a cellához a sorhoz vagy oszlophoz tartozó értéket, és most egyszerre töröljük a cella sorát és oszlopát. Így egy lehetséges bázismegoldáshoz jutunk.

A szállítási feladat optimális megoldásának megkeresése

1. lépés Ha a feladat kiegyensúlyozatlan, akkor egyensúlyozzuk ki.

2. lépés Alkalmazzuk a 6.2. alfejezetben leírt módszerek egyikét egy lehetséges bázismegoldás felírására.

3. lépés Használjuk fel azt a tényt, hogy minden bázisváltozóra $u_1 = 0$ és $u_i + v_j = c_{ij}$, és így számítsuk ki $[u_1\ u_2 \dots u_m\ v_1\ v_2 \dots v_n]$-et az aktuális lehetséges bázismegoldásra.

4. lépés Ha minden nembázis változóra $u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$, akkor az aktuális lehetséges bázismegoldás optimális. Ha nem ez az eset áll fenn, akkor a bázisba azt a változót léptetjük be, amelyikhez a legnagyobb pozitív $u_i + v_j - c_{ij}$ tartozik. A beléptetés egy hurok segítségével történik. Megkeressük a hurkot, és *csak a hurokban lévő cellákat számolva* megjelöljük a páros cellákat, és megjelöljük a páratlan cellákat is. Ezután megkeressük azt a páratlan cellát, amelyikhez a legkisebb θ érték tartozik. Az ehhez a páratlan cellához tartozó változó kilép a bázisból. A bázisváltozók cseréjét úgy hajtjuk végre, hogy minden páratlan cella értékét θ-val csökkentjük, és minden páros cella értékét θ-val növeljük. A hurokban nem szereplő változók értékei változatlanok maradnak. Így végrehajtottuk a bázisváltozók cseréjét. Ha $\theta = 0$, akkor a belépő változó értéke 0 lesz, és az egyik olyan páratlan változó, amelyiknek 0 az értéke, kilép a bázisból. Ebben az esetben egy degenerált lehetséges bázismegoldásunk lesz. Ha a hurokban egynél több cella értéke θ, akkor tetszőlegesen választhatjuk ki ezek közül, hogy melyiket léptetjük ki a bázisból, és így is degenerált lehetséges bázismegoldáshoz jutunk. A változók cseréje egy új lehetséges bázismegoldást ad.

5. lépés Az új lehetséges bázismegoldással visszatérünk a 3. és 4. lépéshez.

Maximalizálási feladat esetében ugyanígy járunk el, de a 4. lépés helyett a $4'$ lépést hajtjuk végre.

$4'$. lépés Ha minden nembázis változóra $u_i + v_j - c_{ij} \geq 0$, akkor az aktuális lehetséges bázismegoldás optimális. Ellenkező esetben a szokásos báziscsere eljárással beléptetjük a bázisba azt a változót, amelyikhez a legnagyobb abszolút értékű negatív $u_i + v_j - c_{ij}$ tartozik.

Hozzárendelési feladatok

A **hozzárendelési feladat** egy olyan kiegyensúlyozott szállítási feladat, ahol minden kereslet és kínálat egységnyi. Az $m \times m$-es hozzárendelési feladatot hatékonyan meg tudjuk oldani a magyar módszer segítségével:

1. lépés Keressük meg a költségmátrix minden sorában a legkisebb elemet. Képezzünk egy új mátrixot úgy, hogy a sorok minden eleméből kivonjuk az illető sor legkisebb elemét. Ebben az új mátrixban keressük meg minden oszlopban a legkisebb elemet. Képezzünk egy új mátrixot (redukált költségmátrix) úgy, hogy minden oszlopban az oszlop minden egyes eleméből kivonjuk a legkisebb költségelemet.

2. lépés A redukált költségmátrixban a lehető legkevesebb vonallal fedjük le az összes nullát. Ha m vonal szükséges a lefedéshez, akkor az optimális megoldás rendelkezésünkre áll a mátrixban lévő lefedett nullák között. Ha m-nél kevesebb vonal kell a lefedéshez, akkor az eljárást a 3. lépéssel folytatjuk.

3. lépés A redukált költségmátrixban keressük meg azt a legkisebb nemnulla elemet (k), amelyiket a 2. lépésben nem fedtünk le egy vonallal sem. Ezután vonjunk ki k-t minden le nem fedett elemből, és adjunk hozzá k-t minden kétszer lefedett elemhez. Térjünk vissza a 2. lépéshez.

MEGJEGYZÉSEK

1. Ha olyan hozzárendelési feladatot oldunk meg, amelyikben a célfüggvényt maximalizálni akarjuk, akkor a profitmátrixot végigszorozzuk -1-gyel, és megoldjuk a feladatot, mint egy minimum feladatot.

2. Ha a sorok és oszlopok száma nem egyenlő, akkor a feladat kiegyensúlyozatlan. A magyar módszer esetleg nem ad jó megoldást, ha a feladat kiegyensúlyozatlan. Így mielőtt a magyar módszerrel hozzákezdenénk a hozzárendelési feladat megoldásához, előbb ki kell egyensúlyoznunk azt (egy vagy több fiktív pont hozzáadásával).

Összetett szállítási feladatok

Egy összetett szállítási feladatban szerepelhetnek kínálati és keresleti pontok között szállítások, valamint előfordulhatnak olyan közbenső átszállítási pontok is, amelyeken keresztül az árucikkeket egy kínálati pontról egy keresleti pontra átszállítják. A következő módszer alkalmazásával egy összetett szállítási feladatot átalakíthatunk egy kiegyensúlyozott szállítási feladattá.

1. lépés Szükség esetén csatoljunk egy fiktív keresleti pontot (amelyiknek 0 kínálata van, és a kereslete egyenlő a feladat túlkínálatával), hogy kiegyensúlyozzuk a feladatot. A fiktív pontra való szállítási költség és egy pontról önmagára való szállítási költség természetesen nulla. Legyen $s =$ a rendelkezésre álló összkínálat.

2. lépés Írjunk fel egy olyan szállítási táblázatot, amelyben minden kínálati ponthoz és minden átszállítási ponthoz tartozik egy sor, és minden keresleti ponthoz és minden átszállítási ponthoz tartozik egy oszlop. Az egyes kínálati pontokhoz az eredeti kínálat, az egyes keresleti pontokhoz az eredeti kereslet tartozik. Legyen $s =$ a rendelkezésre álló összkínálat. Ekkor minden átszállítási pont kínálata = (a pont eredeti kínálata) $+ s$, és a kereslet = (a pont eredeti kereslete) $+ s$.

Szállítási feladatok érzékenységvizsgálata

Az 5. fejezet érzékenységvizsgálatának tárgyalásmódját követve kielemezhetjük, hogy a szállítási feladatban eszközölt egy-egy változtatás hogyan befolyásolja a feladat optimális megoldását.

1. változtatás Egy nembázis változó célfüggvény együtthatójának megváltoztatása. Az aktuális bázis egészen addig optimális marad, amíg a célfüggvény sorában x_{ij} együtthatója nem pozitív.

2. változtatás Egy bázisváltozó célfüggvény együtthatójának megváltoztatása. Itt meg kell néznünk, hogy az aktuális bázis optimális marad-e. Ki kell számítanunk az új u_i-ket és v_j-ket, és ezek segítségével ki kell értékelnünk az összes nembázis változót. Az aktuális bázis egészen addig optimális marad, amíg a célfüggvény sorában minden nembázis változó együtthatója nempozitív.

3. változtatás Az s_i kínálat és a d_j kereslet növelése Δ-val:

$$\text{új } z \text{ érték} = \text{régi } z \text{ érték} + \Delta u_i + \Delta v_j$$

A döntési változók új értékeit a következő módon találhatjuk meg:

1. Ha x_{ij} az optimális megoldás egyik bázisváltozója, akkor x_{ij}-t Δ-val növeljük.

2. Ha x_{ij} az optimális megoldásban egy nembázis változó, akkor keressük meg az x_{ij}-t és még kizárólag bázisváltozókat tartalmazó hurkot. Kiválasztunk az i-edik sorban egy a hurokban lévő páratlan cellát. Ennek a páratlan cellának az értékét Δ-val növeljük, végighaladunk a hurkon, a hurokban szereplő aktuális bázisváltozók értékeit felváltva Δ-val növelve és csökkentve.

Áttekintő feladatok

A csoport

1. A Televco három üzemben tv-képcsöveket gyárt. Az 1. üzem hetenként legfeljebb 50 képcsövet, a 2. üzem hetenként legfeljebb 100 képcsövet, a 3. üzem pedig hetenként legfeljebb 50 képcsövet tud előállítani. Az egy képcsőre eső profit ($-ban megadva) attól függ, hogy melyik telephelyen gyártották, és attól, hogy melyik vevő veszi meg a képcsövet (lásd 62. táblázat). Az 1. vevő legfeljebb 80 képcsövet vesz meg hetenként, a 2. vevő legfeljebb 90-et és a 3. vevő legfeljebb 100-at. A Televco egy olyan gyártási és szállítási tervet keres, amelyik maximalizálja a profitját.

62. TÁBLÁZAT

	Hová		
Honnan	**1. vevő**	**2. vevő**	**3. vevő**
1. telep	75	60	69
2. telep	79	73	68
3. telep	85	76	70

(a) Írjon fel egy olyan kiegyensúlyozott szállítási feladatot, amelyik maximalizálja a Televco profitját!

(b) Alkalmazza az északnyugati sarok módszert egy lehetséges bázismegoldás megkeresésére!

(c) Használja a szállítási szimplex módszert a feladat optimális megoldásához!

2. Öt munkás áll rendelkezésre négy munkafeladat végrehajtásához. A 63. táblázatban látható, hogy az egyes munkások mennyi idő alatt tudják végrehajtani a feladatot. A cél az, hogy a munkások úgy legyenek kijelölve az egyes feladatokra, hogy az összidő minimális legyen. Használja a magyar módszert a feladat megoldására!

63. TÁBLÁZAT

	Idő (órában)			
	1. munka	**2. munka**	**3. munka**	**4. munka**
1. munkás	10	15	10	15
2. munkás	12	8	20	16
3. munkás	12	9	12	18
4. munkás	6	12	15	18
5. munkás	16	12	8	12

3. Egy vállalatnak a következő igényeket kell kielégítenie egy termékből: januárban 30 egység, februárban 30 egység és márciusban 20 egység. A kereslet kielégítése késleltethető, de ennek költsége 5$ egységenként, havonta. Március végéig minden keresletet ki kell elégíteni. Ha tehát például a januári 1 egység keresletet csak márciusban tudják kielégíteni, akkor a késleltetés költsége $5(2) = 10$$.
A 64. táblázat mutatja a havi gyártási kapacitásokat és az egységnyi termelési költségeket havonta. A raktározott termékekre minden hónap végén egységenként 20$ tárolási költség lép fel.

64. TÁBLÁZAT

	Gyártási kapacitás	**Egységnyi termelési költség ($)**
Január	35	400
Február	30	420
Március	35	410

(a) Fogalmazzon meg egy kiegyensúlyozott szállítási feladatot a kereslet kielégítésének összköltségére (ez tartalmazza a késleltetés, raktározás és gyártás költségeit)!

(b) Alkalmazza a Vogel módszert egy lehetséges bázismegoldás megkeresésére!

(c) Alkalmazza a szállítási szimplex módszert annak meghatározására, hogyan kell a havi keresleteket kielégíteni! Adja meg az optimális megoldás szöveges magyarázatát!

4. Az Appletree takarító vállalatnál öt takarítónő dolgozik. A lakásom teljes kitakarítása porszívózásból, a konyha kitakarításából, a fürdőszoba kitakarításából és általános rendrakásból áll. A 65. táblázat megadja, hogy az egyes takarítónőknek az egyes munkák mennyi ideig tartanak. Mindegyikük egy munkát végez el. Alkalmazza a magyar módszert annak eldöntésére, hogy melyik takarítónő melyik munkát lássa el úgy, hogy a lakás kitakarítása a lehető legkevesebb munkaórát használja fel!

5.[8] Az Állami Egyetem jelenleg 200 file-t tud tárolni merevlemezen, 100-at a számítógép-memóriában és 300-at szalagon. A felhasználók 300 szövegszerkesztő, 100 programcsomag és 100 adatfile-t szeretnének tárolni. Egy tipikus szövegszerkesztő file-t minden hónapban nyolcszor, egy tipikus programcsomagot négyszer, és egy tipikus adatfile-t kétszer hívnak le. Amikor egy file-t lehívnak, a megjelenítés ideje a file típusától és a tárolás módjától függ (lásd 66. táblázat).

(a) Fogalmazzon meg egy kiegyensúlyozott szállítási feladatot a file-ok tárolására, ha az a cél, hogy a felhasználónak havonta a lehető legkevesebb időt kelljen a hozzáférésre fordítani!

[8] Evans (1984) alapján.

65. TÁBLÁZAT

	Idő (órában)			
	porszívózás	**a konyha kitakarítása**	**a fürdőszoba kitakarítása**	**általános rendrakás**
1. takarítónő	6	5	2	1
2. takarítónő	9	8	7	3
3. takarítónő	8	5	9	4
4. takarítónő	7	7	8	3
5. takarítónő	5	5	6	4

(b) Használja a minimális költség módszert egy lehetséges bázismegoldás megtalálására!

(c) Alkalmazza a szállítási szimplex módszert egy optimális megoldás megkeresésére!

66. TÁBLÁZAT

	Idő (percben)		
	szövegszerkesztés	**programcsomag**	**adat**
Merevlemez	5	4	4
Memória	2	1	1
Szalag	10	8	6

6. A Gotham City rendőrség éppen most kapott három telefonhívást. Jelenleg öt autó van szolgálatban. A 67. táblázat mutatja, hogy az egyes autók milyen távolságra vannak az egyes hívásoktól (a távolságot háztömbökben adjuk meg). Gotham City szeretné minimalizálni az össztávolságot, vagyis azoknak az utaknak az összegét, amennyit az egyes autóknak meg kell tenniük a hívás helyszínére érkezéshez. Használja a magyar módszert annak eldöntésére, hogy melyik autó melyik hívás helyszínére menjen!

67. TÁBLÁZAT

	Távolság (háztömbben)		
	1. hívás	**2. hívás**	**3. hívás**
1. autó	10	11	18
2. autó	6	7	7
3. autó	7	8	5
4. autó	5	6	4
5. autó	9	4	7

7. Busville városában három iskolakörzet van. A 68. táblázat mutatja az egyes körzetekhez tartozó fekete és fehér tanulók számát. A Legfelsőbb Bíróság előírása szerint azonban a városban az iskolákban egyenletesen kell elosztani a különböző tanulókat. Így minden iskolába pontosan 300 tanuló fog járni, és minden iskolában ugyanannyi fekete tanulónak kell lennie. A 68. táblázatban az iskolakörzetek közötti távolságok is láthatók.

68. TÁBLÁZAT

	Tanulók száma		Távolság	
	fehérek	**feketék**	**2. körzethez**	**3. körzethez**
1. körzet	210	120	3	5
2. körzet	210	30	—	4
3. körzet	180	150	—	—

Fogalmazzon meg egy kiegyensúlyozott szállítási feladatot arra, hogy a tanulók által buszon megtett össztávolság minimális legyen, miközben eleget tesznek a Legfelsőbb Bíróság előírásának! Feltételezzük, hogy az olyan tanuló, aki a saját iskolakörzetében marad, nem buszozik.

8. Használjon északnyugati sarok módszert egy lehetséges bázismegoldás megtalálására, és keresse meg (a szállítási szimplex módszer segítségével) az optimális megoldást a 69. táblázatban bemutatott szállítási (minimum) feladatra!

69. TÁBLÁZAT

12	14	16	60
14	13	19	50
17	15	18	40
40	70	10	

9. Oldja meg a következő LP-t:

$$
\begin{aligned}
\min z &= 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 \\
\text{f.h.}\quad & x_1 + x_2 \leq 4 \\
& x_3 + x_4 \leq 5 \\
& x_1 + x_3 \geq 3 \\
& x_2 + x_4 \geq 6 \\
& x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4)
\end{aligned}
$$

10. Keresse meg a 70. táblázatban megadott (kiegyensúlyozott szállítási minimalizálási) feladat optimális megoldását!

70. TÁBLÁZAT

4	2	4	15
12	8	4	15
10	10	10	

11. Tegyük fel, hogy a 10. feladatban s_1-et 16-ra és d_3-at 11-re növeljük. A feladat most is kiegyensúlyozott, és mivel (30 egység helyett) 31 egységet kell szállítani, azt gondolhatnánk, hogy a szállítási összköltség növekszik. Mutassa meg, hogy a valóságban a szállítási összköltség 2 dollárral csökken! (Ezt úgy is nevezik, hogy a „többet kevesebbért” paradoxon.) Magyarázza meg, hogy a kínálat és a kereslet növelése miért csökkenti a költséget! Használja fel a dualitás tételét a magyarázathoz, megvilágítva azt is, honnan tudhattuk volna előre, hogy s_1 és d_3 1-gyel való növelése 2 dollárral csökkenti az összköltséget!

12. Alkalmazza az északnyugati sarok módszert, a minimális költség módszert és a Vogel-módszert a 71. táblázatban megadott szállítási feladat egy lehetséges bázismegoldásának megkeresésére!

71. TÁBLÁZAT

20	11	3	6	5
5	9	10	2	10
18	7	4	1	15
3	3	12	12	

13. Keresse meg az optimális megoldást a 12. feladathoz!

14. Az Oilcónak olajmezői vannak San Diego és Los Angeles környékén. A San Diegói mező naponta legfeljebb 500 000 hordó, a Los Angeles-i naponta legfeljebb 400 000 hordó olajat ad. Az olaj a mezőkről egy finomítóba kerül, vagy Dallasba, vagy Houstonba (feltételezzük, hogy az olajfinomítóknak korlátlan kapacitásuk van). 100 000 hordó olaj finomítása Dallasban 700$-ba, Houstonban 900$-ba kerül. A finomított olajat a chicagói és New York-i fogyasztókhoz szállítják. A Chicagói fogyasztóknak naponta 400 000, a New York-iaknak naponta 300 000 hordó finomított olajra van szükségük. A 72. táblázat 100 000 hordó (finomított vagy finomítatlan) olaj szállítási költségét mutatja ($-ban) az egyes városok között. Fogalmazzon meg egy kiegyensúlyozott szállítási modellt ennek a helyzetnek a leírására!

72. TÁBLÁZAT

	Hová			
Honnan	**Dallas**	**Houston**	**N.Y.**	**Chicago**
L.A.	300	110	—	—
San Diego	420	100	—	—
Dallas	—	—	450	550
Houston	—	—	470	530

15. A Powerco feladatban keresse meg c_{24} értékeinek azt a tartományát, amelyben az aktuális bázis optimális marad!

16. A Powerco feladatban keresse meg c_{23} értékeinek azt a tartományát, amelyben az aktuális bázis optimális marad!

17. Egy vállalat Atlantában, Bostonban, Chicagóban és Los Angelesben gyárt autókat. Az autókat a gyártás után a következő helyeken lévő raktárakba szállítják: Memphis, Milwaukee, New York City, Denver és San Francisco. A 73. táblázatban az egyes telepeken gyártott autók száma látható. Minden raktárban szükség van bizonyos számú autóra, ezeket a számokat a 74. táblázatban adjuk meg. Az egyes városok közötti távolságok (mérföldben) a 75. táblázatban láthatók.

73. TÁBLÁZAT

Telep	**Rendelkezésre álló autók száma**
Atlanta	5000
Boston	6000
Chicago	4000
L.A.	3000

74. TÁBLÁZAT

Raktár	**Szükséges autómennyiség**
Memphis	6000
Milwaukee	4000
N.Y.	4000
Denver	2000
San Francisco	2000

75. TÁBLÁZAT

	Memphis	**Milwaukee**	**N.Y.**	**Denver**	**S.F.**
Atlanta	371	761	841	1398	2496
Boston	1296	1050	206	1949	3095
Chicago	530	87	802	996	2142
L.A.	1817	2012	2786	1059	379

(a) Feltételezve, hogy egy autó szállítási költsége (dollárban) a két város távolságával egyenlő, határozzon meg egy optimális szállítási tervet!

(b) Feltételezve, hogy egy autó szállítási költsége (dollárban) a két város távolságának négyzetgyökével egyenlő, határozzon meg egy optimális szállítási tervet!

18. A következő három negyedévben az Aircónak ki kell elégítenie a légkondicionáló kompresszorok iránti keresletet. Ezek: 200 darab az első negyedévben, 300 a második negyedévben és 100 a harmadik negyedévben. Egy-egy negyedév alatt legfeljebb 240 kompresszort lehet előállítani. A 76. táblázatban láthatjuk a kompresszorok egységnyi előállítási költségeit negyedévenként.

76. TÁBLÁZAT

1. negyedév	2. negyedév	3. negyedév
200$	180$	240$

Egy légkompresszor raktározási költsége 100 dollár negyedévenként. A kereslet kielégítése késleltethető (de legkésőbb a harmadik negyedév végére teljesíteni kell), ennek költsége egy kompresszorra egy negyedévre 60 dollár. Írja föl annak a kiegyensúlyozott szállítási feladatnak az induló táblázatát, amelynek megoldása minimalizálja az 1–3. negyedévekre a kereslet kielégítésének összköltségét az Airco számára!

19. Egy vállalat négyféle munkára akar fölvenni embereket. A 77. táblázat azt mutatja, hogy az egyes munkákra hány embert kívánnak alkalmazni. Négyféle típusú emberből választhat a vállalat. Mindenkinek olyan a minősítése, hogy a 78. táblázat szerinti megoszlásban kétféle típusú munkára képes.

77. TÁBLÁZAT

	Munka			
	1	2	3	4
Emberek száma	30	30	40	20

78. TÁBLÁZAT

	Embertípusok			
	1	2	3	4
Mely munkára képes	1 és 2	2 és 3	3 és 4	4 és 1

A munkákra 20 fő 1-es típusú, 30 fő 2-es típusú, 40 fő 3-as típusú és 20 fő 4-es típusú személy jelentkezett. Fogalmazzon meg egy kiegyensúlyozott szállítási feladatot, amelynek megoldása megtervezi a vállalat számára azt, hogyan maximalizálja a megfelelő munkákhoz hozzárendelt alkalmazottak számát! (*Megjegyzés:* Egy-egy személy legfeljebb egy fajta munkára jelölhető ki.)

20. A következő két hónapban egy termékből havonta legfeljebb 50 egységet tudunk előállítani, az első hónapban egységenként 12 dollárért, a második hónapban egységenként 15 dollárért. A vevő legfeljebb 60 egységet hajlandó megvenni a termékből mindkét hónapban. Ez a vevő egységenként 20 dollárt fizet az első hónapban és 16 dollárt a második hónapban. Egy egység egyhavi raktározási költsége 1$. Fogalmazzon meg egy kiegyensúlyozott szállítási feladatot, amely segít bennünket a profit maximalizálásában!

B csoport

21.[9] A Carter Vendéglátó Vállalat a következő mennyiségű tiszta asztalkendőt igényli reggelenként: 15 az első napon, 12 a második napon, 18 a harmadik napon és 6 a negyedik napon. Használat után egy asztalkendő kétféleképpen tisztítható: gyorstisztítással vagy normál tisztítással. A gyorstisztítás költsége 10 cent asztalkendőnként, és a gyorstisztított asztalkendő már a használat utáni nap újra használható. A normál tisztítás 6 centbe kerül asztalkendőnként, és ezek az asztalkendők csak két nappal az utolsó használat után használhatók újra. Új asztalkendőket is lehet vásárolni 20 centért darabját. Fogalmazzon meg egy kiegyensúlyozott szállítási feladatot, amely minimalizálja a következő négynapi asztalkendő-szükséglet kielégítésének költségét!

22. A Braneast Airlines éppen most osztja be a személyzetet a New York és Chicago közötti napi járatokra. Ezek a 79. táblázatban láthatók.

79. TÁBLÁZAT

Járat	Indul Chicago	Érkezik N.Y.	Járat	Indul N.Y.	Érkezik Chicago
1	6.00	10.00	1	7.00	9.00
2	9.00	13.00	2	8.00	10.00
3	12.00	16.00	3	10.00	12.00
4	15.00	19.00	4	12.00	14.00
5	17.00	21.00	5	14.00	16.00
6	19.00	23.00	6	16.00	18.00
7	20.00	24.00	7	18.00	20.00

A Braneast minden alkalmazottja vagy New Yorkban, vagy Chicagóban lakik. A személyzet minden tagjának minden nap egyszer az egyik, egyszer a másik irányba kell repülnie

[9] Jacobs (1954) alapján.

úgy, hogy közben legalább egy óra állásidő legyen. A Braneast úgy szeretné beosztani a személyzetet, hogy az összállásidő minimális legyen. Írjon fel egy hozzárendelési feladatot ennek a célnak az elérését segítendő! (*Útmutatás:* Legyen $x_{ij} = 1$, ha a személyzet egy tagja, aki az i-edik járaton dolgozik, dolgozik a j-edik járaton is, és $x_{ij} = 0$ egyébként. Ha $x_{ij} = 1$, akkor ehhez c_{ij} költség tartozik, ami annak a személynek az állásidejéből adódik, aki mind az i-edik, mind a j-edik járaton repül.) Természetesen néhány hozzárendelés nem lehetséges. Keresse meg a személyzet beosztásának azt a rendszerét, amelyik minimalizálja az összes állásidőt! A személyzet hány tagját rendeljük az egyes városokba? Feltételezzük, hogy a nap végére a személyzet minden tagjának otthon kell lennie.

23. Egy cég csak egyféle terméket gyárt. Van három telepük és négy fogyasztójuk. A következő periódusban a három telepen rendre 3000, 5000 és 5000 egységet termelnek. A cég elkötelezte magát, hogy fogyasztóinak a következő mennyiségeket adja el: 4000 egységet az 1. vevőnek, 3000 egységet a 2. vevőnek és legalább 3000 egységet a 3. vevőnek. A 3. és 4. vevő annyi megmaradt egységet szeretne venni a termékből, amennyit csak lehetséges. A 80. táblázat azt mutatja ($-ban), hogy az i-edik telepről a j-edik vevőhöz szállított egységnyi termék mennyi profitot hoz. Fogalmazzon meg egy kiegyensúlyozott szállítási feladatot, amely maximalizálja a vállalat profitját!

80. TÁBLÁZAT

Honnan	Melyik vevőhöz 1	2	3	4
1. telep	65	63	62	64
2. telep	68	67	65	62
3. telep	63	60	59	60

24. Egy vállalat legfeljebb 35 egységet tud termelni havonta. A vállalat elsődleges fogyasztóinak igényeit minden hónapban azonnal ki kell elégíteni. Ha a vállalat úgy gondolja, akkor másodlagos fogyasztóinak is adhat el egységeket minden hónapban. A raktározási költség egységenként 1 dollár a hóvégi leltár szerint. A megfelelő adatok a 81. táblázatban láthatók. Fogalmazzon meg egy kiegyensúlyozott szállítási feladatot, amely maximalizálja a következő három hónapban megkereshető profitot!

25. Egy szép nagy házban négy értékes festmény eladó. Négy vevő licitál a képekre. Az első vevő hajlandó két képet is megvenni, a többi azonban legfeljebb csak egy-egy képet vásárolna. A 82. táblázat mutatja az árajánlatokat (ezer $-ban). Használja a magyar módszert a festmények eladásából származó összbevétel maximalizálására!

82. TÁBLÁZAT

	Licit a/az 1. képre	2. képre	3. képre	4. képre
1. vevő	8	11	—	—
2. vevő	9	13	12	7
3. vevő	9	—	11	—
4. vevő	—	—	12	9

26. A Powerhouse kondenzátorokat gyárt három helyen: Los Angelesben, Chicagóban és New Yorkban. A kondenzátorokat ezekről a helyekről öt régió közműveihez szállítják, ezek a területek a következők: északkelet (ÉK), északnyugat (ÉNy), középnyugat (KöNy), délkelet (DK) és délnyugat (DNy). A 83. táblázatban látható egy kondenzátor gyártási és szállítási költsége ($-ban) mindegyik telepről az ország minden régiójába. Mindegyik telepen évi 100 000 kondenzátort tudnak gyártani. Minden évben az egyes területeknek a következő számú kondenzátort meg kell kapniuk: ÉK 55 000, ÉNy 50 000, KöNy 60 000, DK 60 000 DNy 45 000. A Powerhouse úgy érzi, hogy a szállítási költségek túl magasak, és ezért a vállalat azon gondolkodik, hogy építene egy vagy két új gyártelepet. A lehetséges helyszínek Atlanta és Houston. A 84. táblázat mutatja a kondenzátorok gyártási és szállítási költségeit ($-ban) az új helyszínekről az ország minden területére. Mai áron számolva 3 millió dollárba kerül egy új telep építése, ezenkívül egy telep működtetése 50 000$ fix költséggel jár (a változó szállítási és gyártási költségek mellett) évente. Egy telep Atlantában vagy Houstonban 100 000 kondenzátort gyártana évente.

83. TÁBLÁZAT

Honnan	Hová ÉK	ÉNy	KöNy	DK	DNy
L.A.	27.86	4.00	20.54	21.52	13.87
Chicago	8.02	20.54	2.00	6.74	10.67
N.Y.	2.00	27.86	8.02	8.41	15.20

81. TÁBLÁZAT

	Termelési költség egységenként	Elsődleges kereslet	Eladható másodlagos fogyasztónak	Eladási ár egységenként
1. hónap	13$	20	15	15$
2. hónap	12$	15	20	14$
3. hónap	13$	25	15	16$

84. TÁBLÁZAT

	Hová				
Honnan	**ÉK**	**Ény**	**KöNy**	**DK**	**DNy**
Atlanta	8.41	21.52	6.74	3.00	7.89
Houston	15.20	13.87	10.67	7.89	3.00

Feltételezzük, hogy a kereslet és a gyártási költségek változatlanok maradnak. Ha a költségek éves diszkontrátája $11\frac{1}{9}\%$, hogyan tudja a Powerhouse minimalizálni az összes költség jelenértékét, mely költségek a jelenlegi és jövőbeli keresletek kielégítéséből adódnak?

27.[10] Július hónapban B.Fly pittsburghi lakosnak négy oda-vissza repülőutat kell megtennie Pittsburgh és Chicago között. A 85. táblázat mutatja az utazások dátumait. B.Fly-nak négy retúrjegyet kell vennie. Egy sima retúrjegy, kedvezmények nélkül Pittsburgh és Chicago között 500 dollárba kerül. Ha Fly a hétvégét egy városban tölti, akkor 20% kedvezményt kap a repülőjegyre. Ha legalább 21 napig egy városban marad, akkor 35%-os a kedvezmény, és ha 10 napnál tovább marad egy helyen, akkor 30% engedményt kap. Természetesen bármilyen jegy vásárlásakor csak egy kedvezmény vehető igénybe. Fogalmazza meg és oldja meg azt a hozzárendelési feladatot, amelyik minimalizálja a négy retúrjegy összköltségét! (*Útmutatás:* legyen $x_{ij} = 1$, ha egy retúrjegy a Pittsburghből való i-edik repülésre és a Chicagóból való j-edik repülésre jó. Ugyancsak gondolkozzék azon, hogy hol vásárolja Fly a jegyet, ha például $x_{21} = 1$.)

85. TÁBLÁZAT

Pittsburghből	**Chicagóból**
július 1, hétfő	július 5, péntek
július 9, kedd	július 11, csütörtök
július 15, hétfő	július 19, péntek
július 24, szerda	július 25, csütörtök

28. Három professzort kell beosztani hat pénzügy tanfolyam oktatására. Mindegyik professzornak két pénzügy tanfolyamot kell tanítania. A 86. táblázatban az látható, hogy a tanárok miként rangsorolták a tanítási időpontokat. A 10-es azt jelentené, hogy az illető tanár nagyon szeretne az adott időben órát tartani, az 1-es pedig azt jelenti, hogy nem akar akkor tanítani. Határozzon meg egy hozzárendelést a professzorok és a tanfolyamok között úgy, hogy a professzorok megelégedettsége maximális legyen!

86. TÁBLÁZAT

	9.00	10.00	11.00	13.00	14.00	15.00
1. professzor	8	7	6	5	7	6
2. professzor	9	9	8	8	4	4
3. professzor	7	6	9	6	9	9

29.[11] Három nagy tűz gyulladt ki New Yorkban. Az első és második tűzhöz két tűzoltóautó kell, a harmadikhoz három. A tüzekre való reagálás „költsége” attól az időponttól függ, amikor a tűzoltóautó megérkezik. Legyen t_{ij} (percben) az az idő, amikor a j-edik tűzoltóautó megérkezik az i-edik tűzhöz. Így az egyes tüzekre való reagálás költségei a következők:

$$\begin{aligned} &\text{1. tűz:} && 6t_{11} + 4t_{12} \\ &\text{2. tűz:} && 7t_{21} + 3t_{22} \\ &\text{3. tűz:} && 9t_{31} + 8t_{32} + 5t_{33} \end{aligned}$$

Három tűzoltótársaság van, amelyik a három tűzhöz kivonulhat. Az 1-es tűzoltóságnak három autója van, a 2-esnek és a 3-asnak két-két autó áll rendelkezésére. A 87. táblázat azt mutatja, hogy mennyi ideig tart a tűzoltóautóknak az állomáshelyükről a tűzhöz érkezni.

(a) Írjon föl egy szállítási feladatot, és oldja is meg! Minimalizálja a tűzoltóautók elosztásának költségét! (*Útmutatás:* Hét keresleti pontra lesz szükség.)

(b) Az (a) alatti szállítási feladat akkor is érvényes marad-e, ha az első tűz költsége $4t_{11} + 6t_{12}$?

87. TÁBLÁZAT

	1. tűz	**2. tűz**	**3. tűz**
1. tűzoltóság	6	7	9
2. tűzoltóság	5	8	11
3. tűzoltóság	6	9	10

[10] Hansen és Wendell (1982) alapján.
[11] Denardo, Rothblum és Swersey (1988) alapján.

Irodalom

A következő hat könyv foglalkozik többek között szállítási, hozzárendelési és összetett szállítási feladatokkal:

Bazaraa, M., and J. Jarvis. *Linear Programming and Network Flows*. New York: Wiley, 1990.

Bradley, S., A. Hax, and T. Magnanti. *Applied Mathematical Programming*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1977.

Dantzig, G. *Linear Programming and Extensions*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1963.

Gass, S. *Linear Programming: Methods and Applications*, 5th ed. New York: McGraw-Hill, 1985.

Murty, K. *Linear Programming*. New York: Wiley, 1983.

Wu, N., and R. Coppins. *Linear Programming and Extensions*. New York: McGraw-Hill, 1981.

Aarvik, O., and P. Randolph. „The Application of Linear Programming to the Determination of Transmission Line Fees in an Electrical Power Network," *Interfaces* 6(1975): 17–31.

Denardo, E., U. Rothblum, and A. Swersey. „Transportation Problem in Which Costs Depend on Order of Arrival," *Management Science* 34(1988):774–784.

Evans, J. „The Factored Transportation Problem," *Management Science* 30(1984):1021–1024.

Gillett, B. *Introduction to Operations Research: A Computer-Oriented Algorithmic Approach*. New York: McGraw-Hill, 1976.

Glassey, R., and V. Gupta. „A Linear Programming Analysis of Paper Recycling," *Management Science* 21(1974):392–408.

Glover, F., et al. „A Computational Study on Starting Procedures, Basis Change Criteria, and Solution Algorithms for Transportation Problems," *Management Science* 20(1974): 793–813.

Hansen, P., and R. Wendell. „A Note on Airline Commuting," *Interfaces* 11(no. 12, 1982): 85–87.

Jackson, B. „Using LP for Crude Oil Sales at Elk Hills: A Case Study," *Interfaces* 10(1980): 65–70.

Jacobs, W. „The Caterer Problem," *Naval Logistics Research Quarterly* 1(1954):154–165.

Machol, R. „An Application of the Assignment Problem," *Operations Research* 18(1970): 745–746.

Srinivasan, P. „A Transshipment Model for Cash Management Decisions," *Management Science* 20(1974):1364–1376.

Wagner, H., and D. Rubin. „Shadow Prices: Tips and Traps for Managers and Instructors," *Interfaces* 20(no. 4, 1990):150–157.

7

Hálózati modellek

Számos fontos optimalizálási feladat a probléma egy grafikus vagy hálózati reprezentációja segítségével elemezhető a legkönnyebben. Ebben a fejezetben négy olyan speciális hálózati modellel – a legrövidebb út problémával, a maximális folyam problémával, a CPM-PERT projekt-ütemezési modellel és a minimális feszítőfa problémával – foglalkozunk, amelyek megoldására hatékony eljárások léteznek. Ugyancsak tárgyaljuk a minimális költségű hálózati folyam problémát (MKHFP), aminek a szállítási, a hozzárendelési, az átrakodási, a legrövidebb út, a maximális folyam probléma és a CPM projekt-ütemezési modell egyaránt speciális esetei. Végezetül ismertetjük a szállítási szimplex módszer egy általánosítását, a hálózati szimplex módszert, amivel minimális költségű hálózati folyam feladatokat lehet megoldani. A fejezetet a gráfokra és hálózatokra vonatkozó alapfogalmak bevezetésével kezdjük.

7.1. Alapfogalmak

Egy **gráfot** vagy **hálózatot** szimbólumok két halmaza definiál, ezek elemeit csúcsoknak, illetve éleknek hívjuk. Először megadunk egy V-vel jelölt halmazt, aminek az elemei a gráf vagy hálózat **csúcspontjai**, vagy csak röviden **csúcsai**.

Egy másik, A-val jelölt halmazt is megadunk, ennek elemei az élek.

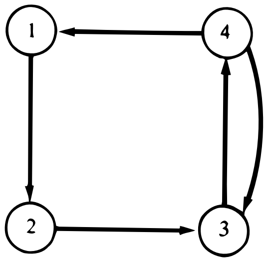
DEFINÍCIÓ

> Az **él** egy csúcspontokból álló rendezett pár, amely megadja a két csúcspont közötti mozgás vagy áramlás lehetséges irányát.

Egy hálózatban szereplő (j,k) él azt reprezentálja, hogy elmozdulás történhet a j csúcsból a k csúcsba. Tegyük fel, hogy az 1. ábrában az 1, 2, 3 és 4 csúcsok városokat jelképeznek, az élek pedig (egyirányú) utakat két város között. Ebben a hálózatban $V = \{1,2,3,4\}$ és $A = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,3),(4,1)\}$. A (j,k) él esetén a j csúcs a **kezdőpont**, a k csúcs pedig a **végpont**. A (j,k) élre azt mondjuk, hogy a j csúcsból a k csúcsba megy. Például, a 2-ből a 3-ba menő $(2,3)$ él kezdőpontja a 2 csúcs, végpontja a 3 csúcs. A $(2,3)$ élt tekinthetjük mint a 2-es városból a 3-as városba vezető (egyirányú) utat. Az 1. ábra élei azt mutatják, hogy a 4-es és 3-as városok között mindkét irányban megengedett a közlekedés, a többi viszonylatban viszont legfeljebb csak egy irányban.

A továbbiakban gyakran dolgozunk élek egy csoportjával. Az alábbi definíciók hasznosak lesznek élek bizonyos halmazainak leírásakor.

1. ÁBRA
Példa egy hálózatra



DEFINÍCIÓ

Lánc alatt élek egy olyan sorozatát értjük, amelyben az egymást követő bármely két élnek egyetlen közös csúcsa van.

DEFINÍCIÓ

Az **út** egy olyan lánc, amelyben (az utolsó él kivételével) mindegyik él végpontja azonos a sorozatban következő él kezdőpontjával.

Az 1. ábrán például, az $(1,2)$–$(2,3)$–$(4,3)$ egy lánc, de nem egy út; az $(1,2)$–$(2,3)$–$(3,4)$ viszont lánc *és* út is. Az $(1,2)$–$(2,3)$–$(3,4)$ út lehetővé tesz egy utazást az 1-es városból (csúcsból) a 4-es városba (csúcsba).

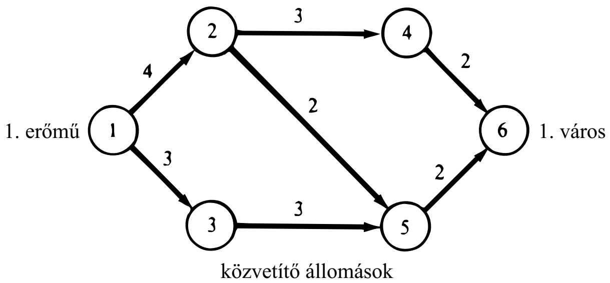
7.2. A legrövidebb út probléma

Ebben az alfejezetben feltesszük, hogy a hálózat mindegyik élének van adott hossza. Válasszunk ki egy csúcspontot (mondjuk az 1-es csúcsot). Az 1-es csúcsból a hálózat összes többi csúcsába vezető legrövidebb utak (minimális összhosszúságú utak) keresését nevezzük a **legrövidebb út problémának**. Az 1. és 2. példák legrövidebb út feladatok.

1. PÉLDA

Vegyük a Powerco példáját (2. ábra). Tegyük fel, hogy amikor az 1-es erőműből (1-es csúcs) elektromos energia áramlik az 1-es városba (6-os csúcs), közvetítőállomásokon kell áthaladnia (2–5 csúcsok). Ha két csúcs között lehetséges áramot küldeni, a köztük lévő távolságot (mérföldben) a 2. ábra mutatja. Például, a 2-estől a 4-es közvetítő állomásig 3 mérföld az út, viszont nem haladhat áram a 4-es és 5-ös állomások között. A Powerco az áramot úgy akarja az 1-es erőműből az 1-es városba küldeni, hogy az a lehető legkisebb távolságot tegye meg. A Powerco feladata tehát a 2. ábrán lévő hálózatban az 1-es csúcsból a 6-osba vezető legrövidebb út megkeresése.

2. ÁBRA
A Powerco hálózata



Amennyiben az áram továbbításának költsége arányos a távolsággal, a 2. ábrán lévő hálózatban az 1-es csúcsból a 6-osba vezető legrövidebb út ismerete lenne szükséges ahhoz, hogy a Powerco feladat 6. fejezetben tárgyalt szállítási verziójában a megfelelő szállítási költséget meg tudjuk adni.

2. PÉLDA Éppen most vettem egy új autót 12 000$-ért. Egy autó éves fenntartási költsége az autónak az évkezdettel számított korától függ, ahogyan az 1. táblázat mutatja. Azért, hogy elkerüljem az idővel növekvő fenntartási költségek túl magasra emelkedését, a korosodó autót újra cserélhetem. A régi autót a 2. táblázatban feltüntetett áron számítják be a cserénél. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy egy új autó ára a teljes időszakban 12 000$. Célom a nettó költségeimet (új autó(k) ára + fenntartási költségek − lecserélt autó(k) ára) minimalizálni a következő öt évre vonatkozóan. Fogalmazzuk meg ezt a problémát mint egy legrövidebb út feladatot!

1. TÁBLÁZAT
Autó fenntartási költségek

Az autó kora (év)	Éves fenntartási költség ($)
0	2000
1	4000
2	5000
3	9000
4	12000

2. TÁBLÁZAT
Beszámítási ár

Az autó kora (év)	Beszámítási ár ($)
1	7000
2	6000
3	2000
4	1000
5	0

Megoldás Hálózatunknak most hat csúcsa van (1, 2, 3, 4, 5 és 6). Az i csúcs jelzi az i-edik év kezdetét. Minden $i < j$-re van egy (i, j) él, amely azt reprezentálja, hogy az i-edik év elején veszünk egy új autót és azt használjuk a j-edik év elejéig. Az (i, j) él hossza (jelölje c_{ij}) az élhez tartozó autóhoz kapcsolódó teljes nettó költség, azaz

$$\begin{aligned} c_{ij} \;=\; & \text{az } i, i+1, \ldots, j-1 \text{ évekre a fenntartási költségek} \\ & + \text{új autó vételára az } i\text{-edik év elején} \\ & - \text{régi autó beszámítási ára a } j\text{-edik év elején} \end{aligned}$$

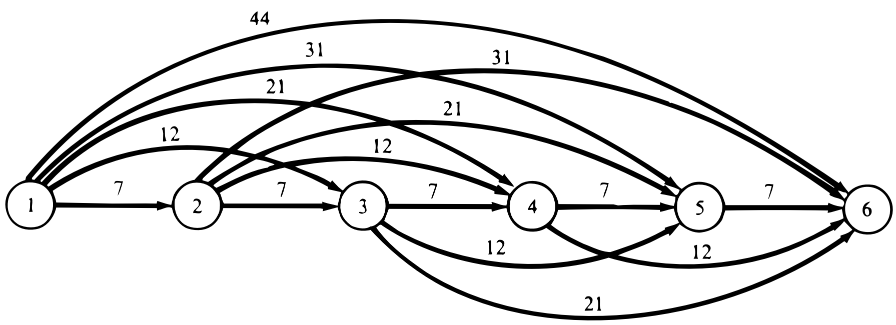
A képletet a feladatbeli adatokra alkalmazva azt kapjuk, hogy (ezer dollárban mérve)

$$c_{12} = 2 + 12 - 7 = 7 \qquad c_{15} = 2 + 4 + 5 + 9 + 12 - 1 = 31$$
$$c_{13} = 2 + 4 + 12 - 6 = 12 \qquad c_{16} = 2 + 4 + 5 + 9 + 12 + 12 - 0 = 44$$
$$c_{14} = 2 + 4 + 5 + 12 - 2 = 21$$

$$
\begin{array}{ll}
c_{23} = 2+12-7 = 7 & c_{35} = 2+4+12-6 = 12 \\
c_{24} = 2+4+12-6 = 12 & c_{36} = 2+4+5+12-2 = 21 \\
c_{25} = 2+4+5+12-2 = 21 & c_{45} = 2+12-7 = 7 \\
c_{26} = 2+4+5+9+12-1 = 31 & c_{46} = 2+4+12-6 = 12 \\
c_{34} = 2+12-7 = 7 & c_{56} = 2+12-7 = 7
\end{array}
$$

Látjuk, hogy az 1-es csúcsból a 6-os csúcsba vezető mindegyik út hossza az út élei által megadott, a következő öt évre szóló autócserélési stratégia nettó összköltsége. Például, tegyük fel, hogy a 3. év elején és az 5. év végén (a 6. év elején) cserélek autót. Ehhez a stratégiához a 3. ábrában az 1–3–6 út tartozik. Ennek az útnak a hossza $(c_{13} + c_{36})$ megadja a teljes nettó költségét annak, hogy a mostani autóvásárlástól számítva a harmadik és a hatodik év elején cseréljek autót. Tehát a 3. ábrában az 1-es csúcsból a 6-os csúcsba vezető legrövidebb út hossza a következő öt évre egy autó tartásának minimális teljes nettó költségét adja meg.

3. ÁBRA
Az autóköltségek minimalizálásának hálózata



Dijkstra algoritmusa

Amennyiben minden él hossza nemnegatív, **Dijkstra algoritmusa** használható egy kiinduló csúcsból (mondjuk az 1-es csúcsból) az összes többi csúcsba vezető legrövidebb utak meghatározására. Először is az 1-es csúcsot ellátjuk az állandó 0 címkével. Ezután minden olyan i csúcsot amelybe az 1-ből megy él, ideiglenesen megcímkézzük az $(1,i)$ él hosszával. Minden más csúcs (természetesen az 1-es kivételével) a ∞ ideiglenes címkét kapja. Kiválasztjuk a legkisebb ideiglenes címkével rendelkező csúcsot (vagy tetszőlegesen egyet, ha több van) és címkéjét állandónak minősítjük.

Tegyük fel, hogy az i volt az utolsó, a $(k+1)$-edik csúcs, amelyik állandó címkét kapott. Ekkor az i csúcs a k-adik legközelebbi csúcs az 1-eshez. Ebben a pillanatban, egy csúcs (mondjuk az i') ideiglenes címkéjének értéke éppen az 1-esből az i' csúcsba vezető legrövidebb olyan út hossza, amelyik csak az 1-eshez legközelebbi $k-1$ csúcsot érinti. Mindegyik ideiglenes címkével ellátott olyan j csúcs címkéjét, amelybe él vezet az i-ből, kicseréljük a következőképpen számolt ideiglenes címkével:

$$
\min \begin{cases} \text{a } j \text{ csúcs ideiglenes címkéje} \\ \text{az } i \text{ állandó címkéje } + \text{ az } (i,j) \text{ él hossza} \end{cases}
$$

(A $\min\{a,b\}$ az a és b számok közül a nem nagyobb.) A j csúcs új ideiglenes címkéje éppen az 1-esből a j-be vezető legrövidebb olyan út hossza, amelyik csak az 1-eshez legközelebbi k csúcsot érinti. Ezután a legkisebb ideiglenes címkét (vagy ha több ilyen van, akkor egyet közülük) állandóvá változtatjuk. Az a csúcs, amelynek címkéjét éppen most minősítettük állandónak, a $(k+1)$-edik legközelebbi csúcs az 1-eshez. Folytassuk ezt az eljárást egészen addig, amíg minden csúcs állandó címkét nem kap. Az 1-esből valamelyik j csúcsba vezető legrövidebb utat úgy kapjuk meg, hogy a j-ből visszafelé haladva azokat a csúcsokat választjuk, amelyek címkéi közötti különbség pontosan a köztük lévő él hossza. Természetesen, ha csak az 1-ből a j-be vezető legrövidebb utat akarjuk meghatározni, abbahagyhatjuk a címkézési eljárást, amikor a j csúcs címkéje állandóra változott.

Szemléltetésképpen meghatározzuk a 2. ábrában az 1-esből a 6-os csúcsba vezető legrövidebb utat. A következő címkékkel kezdünk (a * állandó címkét jelöl, továbbá, az i-edik szám az i csúcs címkéje): $[0^* \quad 4 \quad 3 \quad \infty \quad \infty \quad \infty]$. A 3-as csúcsé a legkisebb ideiglenes címke. Ezt állandóvá változtatva, a következő címkéket kapjuk:

$$\begin{bmatrix}0^* & 4 & 3^* & \infty & \infty & \infty\end{bmatrix}$$

Tudjuk, hogy a 3-as az 1-eshez legközelebbi csúcs. Új ideiglenes címkéket számolunk azokra a csúcsokra, amelyekbe a 3-asból vezet él. Most csak az 5-ös csúcs ilyen.

$$\text{az 5-ös csúcs új ideiglenes címkéje} = \min\{\infty, 3+3\} = 6$$

Az ideiglenes címkével rendelkező csúcsok között a 2-esé a legkisebb címke, az lesz most állandó. Ebből tudjuk, hogy a 2-es csúcs van az 1-estől a második legrövidebb távolságra. Címkéink most a következők:

$$\begin{bmatrix}0^* & 4^* & 3^* & \infty & 6 & \infty\end{bmatrix}.$$

Mivel a legutóbb állandósított 2-es csúcsból megy él a 4-es és az 5-ös csúcsokba, címkéjüket újra kell számolnunk. A 4-es csúcs új ideiglenes címkéje $\min\{\infty, 4+3\} = 7$, az 5-ös csúcsé pedig $\min\{6, 4+2\} = 6$. A legkisebb ideiglenes címke most az 5-ös csúcsé, így azt változtatjuk állandóvá. Tudjuk, hogy a harmadik legközelebbi csúcs az 1-eshez az 5-ös. Az új címkék pedig

$$\begin{bmatrix}0^* & 4^* & 3^* & 7 & 6^* & \infty\end{bmatrix}.$$

Mivel csak a 6-osba vezet él az 5-ösből, a 6-os csúcs ideiglenes címkéjét módosítjuk $\min\{\infty, 6+2\} = 8$-ra. A legkisebb ideiglenes címke a 4-es csúcsé, így az válik állandóvá. Ebből tudjuk, hogy a 4-es csúcs van az 1-estől a negyedik legrövidebb távolságra. A címkék most a következők:

$$\begin{bmatrix}0^* & 4^* & 3^* & 7^* & 6^* & 8\end{bmatrix}.$$

Mivel a legutoljára állandósított 4-es csúcsból csak a 6-osba megy él, csak ezt az ideiglenes címkét kell újraszámolni: $\min\{8, 7+2\} = 8$. Mivel csak a 6-osnak ideiglenes a címkéje, azt állandónak minősítve megkapjuk a végső címkéket:

$$\begin{bmatrix}0^* & 4^* & 3^* & 7^* & 6^* & 8^*\end{bmatrix}.$$

Az 1-esből a 6-osba vezető legrövidebb utat visszafelé haladva határozzuk meg. A 6-os és 5-ös csúcsok állandó címkéi közötti különbség 2 = az $(5,6)$ él hossza, tehát az 5-ös csúcsba lépünk vissza. Az 5-ös és 2-es csúcsok állandó címkéi közötti különbség 2 = a $(2,5)$ él hossza, tehát a 2-es csúcsba lépünk vissza, ahonnan persze az 1-esbe kell visszalépnünk. Tehát, az 1–2–5–6 a legrövidebb út (hossza 8) az 1-es csúcsból a 6-os csúcsba. Vegyük észre, hogy az 5-ös csúcsból a 3-asba is visszaléphettünk volna, ekkor az 1–3–5–6 legrövidebb utat kaptuk volna.

A legrövidebb út probléma összetett szállítási feladatként

Egy hálózatban az i és j csúcsok közötti legrövidebb út meghatározása megfogalmazható egy átszállítási feladatként is. Egyszerűen minimalizáljuk egy egységnyi áru i-ből j-be szállításának költségét (átszállítási pontnak tekintve a hálózat összes többi csúcsát), ha egységnyi áru k-ból k'-be szállításának költsége a (k, k') él hossza, ha van ilyen él, és M (egy nagy pozitív szám), ha nincs ilyen él. Miként a 6.6 alfejezetben láttuk, egy csúcsból önmagába szállítani nem jár költséggel. Követve a 6.6 alfejezetben ismertetett módszert, az így kapott átszállítási feladat is átírható egy kiegyensúlyozott szállítási feladattá.

Szemléltetésképpen megadjuk a 2. ábra 1-es és 6-os csúcsai közötti legrövidebb út feladathoz kapcsolódó kiegyensúlyozott szállítási feladatot. Egy egységet akarunk az 1-ből a 6-ba küldeni. Az 1-es csúcs egy kibocsátó, a 6-os egy végső fogadási pont, a 2, 3, 4 és 5 csúcsok pedig átszállítási pontok. Az $s = 1$ értékadással a 3. táblázatbeli kiegyensúlyozott szállítási feladatot kapjuk, amelynek két optimális megoldása van:

1. $z = 4 + 2 + 2 = 8$, $x_{12} = x_{25} = x_{56} = x_{33} = x_{44} = 1$ (minden más változó $= 0$). Ez a megoldás tartozik az 1–2–5–6 úthoz.

2. $z = 3 + 3 + 2 = 8$, $x_{13} = x_{35} = x_{56} = x_{22} = x_{44} = 1$ (minden más változó $= 0$). Ez a megoldás tartozik az 1–3–5–6 úthoz.

3. TÁBLÁZAT
A legrövidebb út feladat mint összetett szállítási feladat és az 1. optimális megoldás

	Csúcs					
Csúcs	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Kínálat**
1	$\boxed{4}$ 1	$\boxed{3}$	$\boxed{M}$	$\boxed{M}$	$\boxed{M}$	1
2	$\boxed{0}$	$\boxed{M}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$ 1	$\boxed{M}$	1
3	$\boxed{M}$	$\boxed{0}$ 1	$\boxed{M}$	$\boxed{3}$	$\boxed{M}$	1
4	$\boxed{M}$	$\boxed{M}$	$\boxed{0}$ 1	$\boxed{M}$	$\boxed{2}$	1
5	$\boxed{M}$	$\boxed{M}$	$\boxed{M}$	$\boxed{0}$	$\boxed{2}$ 1	1
Kereslet	1	1	1	1	1	

MEGJEGYZÉS Miután átfogalmaztuk a legrövidebb út feladatot egy összetett szállítási feladattá, könnyen megoldhatjuk például egy táblázatkezelő optimalizáló programmal.

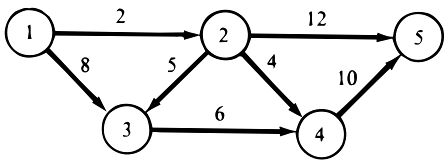
Feladatok

A csoport

1. Határozza meg a 3. ábrában az 1-es csúcsból a 6-os csúcsba vezető legrövidebb utat!

2. Határozza meg a 4. ábrában az 1-es csúcsból az 5-ös csúcsba vezető legrövidebb utat!

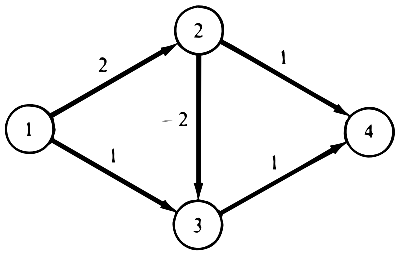
4. ÁBRA A 2. feladat hálózata



3. Írja át a 2. feladatot összetett szállítási feladattá!

4. Dijkstra algoritmusával keresse meg a legrövidebb utat az 1-es csúcsból a 4-es csúcsba az 5. ábrán látható hálózatban! Miért ad helytelen választ Dijkstra algoritmusa?

5. ÁBRA A 4. feladat hálózata



5. Tegyük fel, hogy egy új autó 10 000$-ba kerül. Az éves fenntartási költséget és egy használt autó eladási árát a 4. táblázat mutatja. Feltéve, hogy jelen pillanatban van egy új autója, határozzon meg egy olyan autócserélési politikát, amelyik a következő hat évre minimalizálja egy autó használatának nettó költségeit!

4. TÁBLÁZAT

Az autó kora (év)	Eladási ár ($)	Működtetési költség ($)
1	7000	300 (1. év)
2	6000	500 (2. év)
3	4000	800 (3. év)
4	3000	1200 (4. év)
5	2000	1600 (5. év)
6	1000	2200 (6. év)

6. Egy telefonkészülék 40$-ba kerül. Tegyük fel, hogy legfeljebb öt évig tudok egy készüléket használni, továbbá, hogy a becsült fenntartási költség az 1. évben 20$, a 2. évben 30$, a 3. évben 40$, a 4. évben 60$, az 5. évben 70$. Éppen most vettem egy telefonkészüléket. Feltéve, hogy egy használt készüléket már nem tudok értékesíteni, határozza meg, hogyan minimalizálhatom az elkövetkezendő hat évre a telefonkészülékkel kapcsolatos vételi és fenntartási költségeimet!

7. Egy új gépet kell venni az első év elején. Egy i éves gép fenntartási költsége az 5. táblázatban található.

5. TÁBLÁZAT

Kor az év kezdetén	Fenntartási költség ($) arra az évre
0	38 000
1	50 000
2	97 000
3	182 000
4	304 000

Egy új gép vételára az egyes évek kezdetén a 6. táblázatban található.

6. TÁBLÁZAT

Év	Vételár ($)
1	170 000
2	190 000
3	210 000
4	250 000
5	300 000

Egy használt gépet már nem lehet értékesíteni. Minimalizálni kell az egy gép használatával kapcsolatban öt év alatt felmerülő összes (vételi és fenntartási) költséget. Mely években kell új gépet venni?

B csoport

8.[1] Egy könyvtár polcrendszert akar készíttetni, hogy elhelyezhessen 200 db 4 hüvelyk magas, 100 db 8 hüvelyk magas, és 80 db 12 hüvelyk magas könyvet. Mindegyik könyv 0.5 hüvelyk vastag. Többféle megoldás is lehetséges. Készülhet például egy 8 hüvelyk magas polc az összes 8 hüvelyknél nem magasabb könyv, és egy 12 hüvelyk magas

[1] Ravindran (1971) alapján.

polc a 12 hüvelykes könyvek tárolására. De készülhet csak egy 12 hüvelyk magas polc is, azon mindenféle könyv elfér. Egy (akármilyen magasságú) polc elkészítésének költsége 2300$. Ugyanakkor, négyzet-hüvelykenként 5$-ra becsülik a tárolási költséget (egy könyv tárolási területe a könyv vastagsága szorozva az elfoglalt polcmagassággal).
Fogalmazza meg a könyvek minimális költségű elhelyezésének problémáját egy legrövidebb út feladatként! Oldja meg a feladatot! (*Útmutatás*: Vegyen fel négy csúcsot (0, 4, 8 és 12), és legyen c_{ij} annak a költsége, hogy minden $> i$ és $\leq j$ hüvelyk magas könyvet egyetlen polcon tárolunk.)

9. Egy vállalat dobozokat gyárt hét különböző méretben. Az egyes típusokra mutatkozó igényt adja meg a 7. táblázat. A gyártás változó költsége (dollárban) megegyezik a doboz térfogatával. A fixköltség bármelyik méretű doboz esetén 1000$. A gyár nagyobb méretű dobozzal is kielégíthet egy adott típusra vonatkozó igényt. A cél az igények maradéktalan kielégítése minimális költséggel. Fogalmazza meg a problémát egy legrövidebb út feladatként, majd oldja meg!

7. TÁBLÁZAT

Doboz	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Méret	33	30	26	24	19	18	17
Kereslet	400	300	500	700	200	400	200

10. Magyarázza meg, hogyan lehet egyetlen összetett szállítási feladat megoldásával megtalálni egy hálózat egy kitüntetett csúcsából a hálózat **mindegyik másik csúcsába** vezető legrövidebb utat!

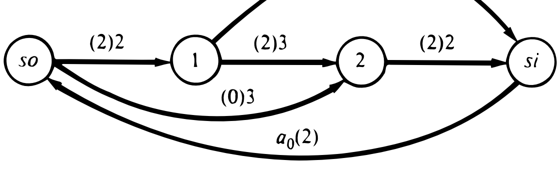
7.3. A maximális folyam probléma

Számos döntési helyzet leírható egy olyan hálózattal amelyben az éleknek korlátozott áteresztő képességük van, s ez korlátozza az adott élen továbbítható termékmennyiséget. Ilyen helyzetekben a cél gyakran a maximális mennyiség eljuttatása egy kiindulási pontból (**forrás**) egy végpontba (**nyelő**). Ezt a feladattípust hívjuk **maximális folyam problémának**. Számos specializált algoritmus létezik a maximális folyam feladatok megoldására. Ezt az alfejezetet azzal kezdjük, hogy megmutatjuk miként oldható meg egy maximális folyam feladat lineáris programozással, majd a Ford–Fulkerson (1962) módszert ismertetjük.

Maximális folyam feladatok megoldása LP-vel

3. PÉLDA A Sunco olajtársaság a lehető legnagyobb mennyiségű olajat akarja (óránként) eljuttatni a 6. ábrán látható csővezetéken keresztül a *so* csúcsból a *si* csúcsba. A *so*-ból a *si*-be vezető útján az olaj esetleg átmegy az 1, 2 és 3 szivattyú-állomásokon, ahol különböző átmérőjű csővezetékek kapcsolódnak egymáshoz. A 8. táblázat mutatja, hogy az egyes éleken maximálisan hány millió hordó olaj nyomható keresztül (óránként). Ezeket a számokat hívjuk **élkapacitásnak**. Írjunk fel egy olyan LP-t, amelyikkel meghatározható a *so*-ból a *si*-be küldhető olaj maximális mennyisége (óránként).

6. ÁBRA
A Sunco hálózata



8. TÁBLÁZAT Élkapacitások a Sunco hálózatban

Él	Kapacitás
$(so,1)$	2
$(so,2)$	3
$(1,2)$	3
$(1,3)$	4
$(3,si)$	1
$(2,si)$	2

Megoldás A *so* csúcs a forrás (source), mivel onnan jön, de oda nem megy olaj. Analóg módon, a *si* csúcs a nyelő (sink), mivel oda megy, de onnan nem jön olaj. Később világossá váló okokból bevezettünk egy mesterséges a_0 élet, ami a nyelőből vezet a forrásba. Az a_0-n keresztül nem igazi olaj folyik; elnevezése ezért **mesterséges él**.

A kívánt LP felírásához vegyük észre: a Suncónak azt kell eldöntenie, hogy mennyi olajat küldjön (óránként) az (i, j) élen keresztül. Legyen tehát

x_{ij} = a hálózat (i, j) élén keresztül haladó olaj mennyisége óránként (millió hordó)

Egy megvalósítható megoldást (egy *lehetséges folyamot*) adnak meg a 6. ábrán zárójelben feltüntetett számok:

$$x_{so,1} = 2, \quad x_{13} = 0, \quad x_{12} = 2, \quad x_{3,si} = 0, \quad x_{2,si} = 2, \quad x_{si,so} = 2, \quad x_{so,2} = 0.$$

Egy folyam akkor lehetséges, ha teljesíti a következő két megkötést:

$$0 \leq \text{élen átmenő folyam} \leq \text{élkapacitás} \qquad \text{(minden élre)} \qquad (1)$$

és

$$\text{csúcsba bejövő folyam} = \text{csúcsból kimenő folyam} \qquad \text{(minden csúcsra)} \qquad (2)$$

Feltételezzük, hogy szállítás közben olaj nem folyik el, ezért egy lehetséges folyamra fenn kell állnia a (2) feltételnek, a *folyam-megőrzési* megkötésnek. A mesterséges a_0 él bevezetése teszi lehetővé, hogy a folyam-megőrzési feltételt a forrásra és a nyelőre is felírjuk.

Ha x_0 jelöli a mesterséges élen átmenő folyamot, akkor a folyam-megőrzési korlát miatt x_0 = a nyelőbe érkező olajmennyiség. A Sunco célja tehát az x_0 maximalizálása az (1) és (2) feltételek mellett:

$$\begin{array}{lll}
\max z = x_0 & & \\
\text{f.h.} \quad x_{so,1} & \leq 2 & \text{(élkapacitás korlátok)} \\
x_{so,2} & \leq 3 & \\
x_{12} & \leq 3 & \\
x_{2,si} & \leq 2 & \\
x_{13} & \leq 4 & \\
x_{3,si} & \leq 1 & \\
x_0 & = x_{so,1} + x_{so,2} & (so \text{ csúcs folyam feltétel}) \\
x_{so,1} & = x_{12} + x_{13} & \text{(1-es csúcs folyam feltétel)} \\
x_{so,2} + x_{12} & = x_{2,si} & \text{(2-es csúcs folyam feltétel)} \\
x_{13} & = x_{3,si} & \text{(3-as csúcs folyam feltétel)} \\
x_{3,si} + x_{2,si} & = x_0 & (si \text{ csúcs folyam feltétel}) \\
x_{ij} & \geq 0 &
\end{array}$$

Ennek az LP-nek egy optimális megoldása: $z = 3, x_{so,1} = 2, x_{13} = 1, x_{12} = 1, x_{so,2} = 1, x_{3,si} = 1, x_{2,si} = 2, x_0 = 3$. A maximális megvalósítható olajfolyam a *so*-ból a *si*-be tehát 3 millió hordó, ami a *so*–1–2–*si*, *so*–1–3–*si*, illetve *so*–2–*si* útvonalak mindegyikén küldött 1 millió hordóból áll össze.

A maximális folyam probléma, így a lineáris programozási megfogalmazása is, speciális esete a minimális költségű hálózati folyam (MKHF) problémának, amit a 7.5. alfejezetben tárgyalunk. A szállítási szimplex algoritmus egy általánosítása (az ún. hálózati szimplex) használható majd fel az MKHF feladatok megoldására.

Mielőtt a maximális folyam feladatok megoldására kidolgozott Ford–Fulkerson módszert ismertetnénk, nézzünk két példát maximális folyam feladatra vezető döntési helyzetekre.

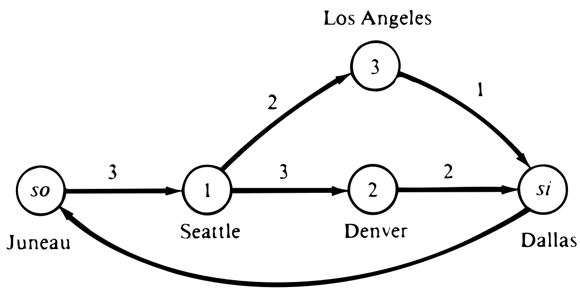
4. PÉLDA A Fly-by-Night légitársaság meg akarja tudni, hogy naponta hány csatlakozó járat szervezhető az alaszkai Juneau-ból a texasi Dallasba. A csatlakozások miatt a járatnak meg kell állnia Seattle-ben, majd utána Los Angelesben vagy Denverben. Repülőtéri korlátozások miatt a Fly-by-Night csak a 9. táblázatban megadott számú járatot indíthat az egyes viszonylatokban. Adjunk meg egy olyan maximális folyam feladatot amelynek megoldásából kiderül, hogy tud a légitársaság maximális számú csatlakozó járatot közlekedtetni naponta Juneau-ból Dallasba.

9. TÁBLÁZAT Élkapacitások a Fly-by-Night feladatban

Városok	A napi járatok maximális száma
Juneau–Seattle (J,S)	3
Seattle–L.A. (S,L)	2
Seattle–Denver (S,De)	3
L.A.–Dallas (L,D)	1
Denver–Dallas (De,D)	2

Megoldás A 7. ábra mutatja a megfelelő hálózatot. Az (i, j) él kapacitása az i városból a j városba indítható járatok maximális száma. Ennek a maximális folyam feladatnak az optimális megoldása: $z = x_0 = 3, x_{J,S} = 3, x_{S,L} = 1, x_{S,De} = 2, x_{L,D} = 1, x_{De,D} = 2$. A Fly-by-Night tehát három járatot tud működtetni: egyet a Juneau–Seattle–L.A.–Dallas, és kettőt a Juneau–Seattle–Denver–Dallas útvonalon.

7. ÁBRA A Fly-by-Night hálózata



5. PÉLDA Öt férfi és öt női híresség vesz részt egy bálon. A táncmester célja, hogy a lehető legtöbb, összeillő partnerekből álló párost alakítson ki. A 10. táblázat mutatja, hogy melyik férfi–nő párosok az összeillőek. Adjunk meg egy hálózatot amely, lehetővé teszi, hogy a maximális számú összeillő párosítást egy maximális folyam feladat megoldásából kapjuk meg.

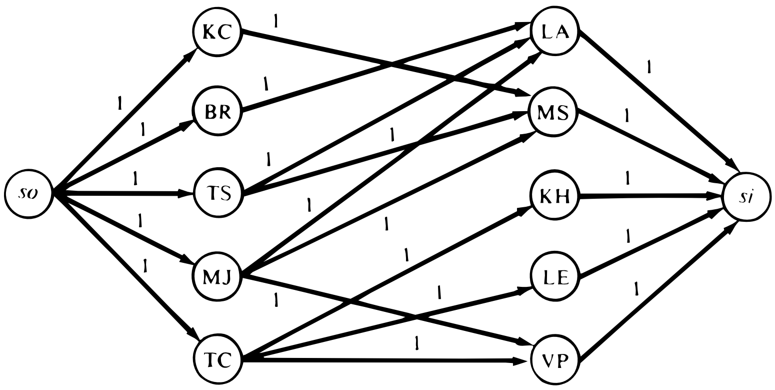
10. TÁBLÁZAT
Összeillő párok

	Loni Anderson	**Meryl Streep**	**Katharine Hepburn**	**Linda Evans**	**Victoria Principal**
Kevin Costner	—	Ö	—	—	—
Burt Reynolds	Ö	—	—	—	—
Tom Selleck	Ö	Ö	—	—	—
Michael Jackson	Ö	Ö	—	—	Ö
Tom Cruise	—	—	Ö	Ö	Ö

Megjegyzés: Ö jelzi az összeillőséget.

Megoldás A 8. ábrán egy erre a célra alkalmas hálózat látható. Ebben a hálózatban mindegyik él kapacitása 1. A forrásból minden férfihez megy egy él, minden összeillő páros férfi- és nőtagja között van él, és mindegyik hölgytől megy él a végső csúcsba. A maximális folyam ebben a hálózatban pontosan megadja a választ a táncmester problémájára. Például, a KC–MS, BR–LA, MJ–VP és TC–KH párosok megfelelnek egy 4 egységnyi folyamnak a forrásból a nyelőbe. (Ez egyébként egy maximális folyam ebben a hálózatban.)

8. ÁBRA
A táncmester hálózata



Gondoljuk meg, hogy miért alkalmas ez a hálózat a táncmester problémájának megoldására! Mivel mindegyik él kapacitása 1, a folyam megmaradásának szabálya miatt mindegyik hölgy legfeljebb egy férfival, és mindegyik férfi legfeljebb egy nővel lehet párosítva. Ugyanakkor a nem összeillő szereplők között nem megy él, tehát egy k egységnyi folyam a forrásból a nyelőbe biztosan k összeillő párost ad meg.

A Ford–Fulkerson módszer maximális folyam feladatok megoldására

Feltéve, hogy egy lehetséges folyamot már ismerünk (minden élen nulla mennyiséget szállítani mindig lehetséges folyam), felmerül a következő két fontos kérdés:

1. kérdés Hogyan döntjük el egy lehetséges folyamról, hogy optimális folyam-e (azaz, maximalizálja-e az x_0-t)?

2. kérdés Amennyiben egy lehetséges folyam nem optimális, hogyan lehet úgy módosítani, hogy egy magasabb értékű (a forrásból a nyelőbe nagyobb mennyiséget juttató) új lehetséges folyamot kapjunk?

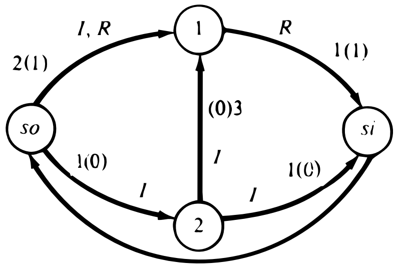
Először a 2. kérdésre adjuk meg a választ. A hálózat minden egyes élére meghatározzuk, hogy a következő tulajdonságok közül melyiket teljesítik:

1. tulajdonság Az (i, j) élen átmenő folyam kisebb az él kapacitásánál. Ebben az esetben az (i, j) élen átmenő folyam növelhető. Jelölje I az ezzel a tulajdonsággal rendelkező élek halmazát.

2. tulajdonság Az (i, j) élen átmenő folyam pozitív. Ebben az esetben az (i, j) élen átmenő folyam csökkenthető. Jelölje R az ezzel a tulajdonsággal rendelkező élek halmazát.

Az I és R halmazok definíciójának szemléltetésére tekintsük a 9. ábrát. Ennek a hálózatnak az élei a következőképpen osztályozhatók: (so, 1) eleme I-nek és R-nek is; (so, 2) az I-be tartozik; $(1, si)$ az R eleme; $(2, si)$ és $(2, 1)$ is I-beliek.

9. ÁBRA
I és R típusú élek



Most már ismertetni tudjuk a Ford–Fulkerson címkézési eljárást, aminek célja egy lehetséges folyam módosítása a folyam erősségének növelése érdekében.

1. lépés Címkézzük meg a forrást.

2. lépés Címkézzük meg a csúcsokat és az éleket (az a_0 él kivételével) a következő szabályok szerint: (1) Ha az x csúcs már kapott címkét, de az y csúcs még nem, és az (x, y) él az I eleme, akkor címkézzük meg az y csúcsot és az (x, y) élt. Ebben az esetben az (x, y) élt **előremenő élnek** hívjuk. (2) Ha az x csúcs már kapott címkét, de az y csúcs még nem, és az (y, x) él az R eleme, akkor címkézzük meg az y csúcsot és az (y, x) élt. Ebben az esetben az (y, x) élt **hátramenő élnek** hívjuk.

3. lépés Folytassuk ezt a címkézési eljárást, amíg a nyelő címkét nem kap, vagy további csúcsokat már nem lehet címkével ellátni.

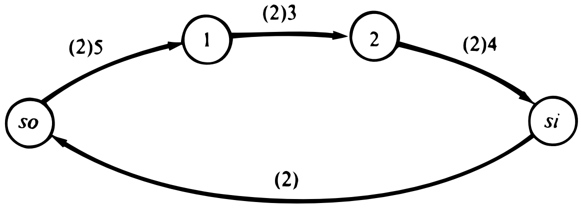
Amennyiben az eljárás során megcímkézzük a nyelőt is, lesz egy címkézett élekből álló lánc (jelölje C) a forrás és a nyelő között. A C-beli éleken átmenő folyam alkalmas módosításával egyrészt megőrizhetjük a folyam lehetségességét, másrészt növelhetjük a folyam erősségét. Ennek belátásához vegyük észre, hogy

1. eset C vagy kizárólag előremenő élekből áll,

2. eset vagy C tartalmaz előre- és hátramenő él(eke)t is.[2]

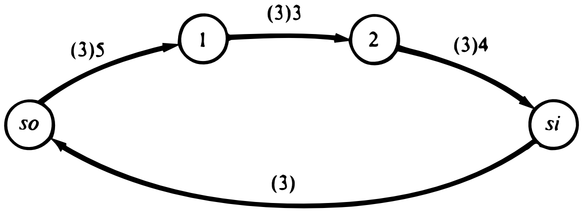
[2]Mivel az a_0 élt kizárjuk a címkézési eljárásból, csak hátramenő élekből álló lánc nem keletkezhet a forrás és a nyelő között.

10. ÁBRA
A címkézési módszer 1. esete



A folyam értéke = 2
A lánc: (*so*, 1)−(1, 2)−(2, *si*)

11. ÁBRA
A javított folyam az 1. esetben



A folyam értéke = 3

Bármelyik esetben kaphatunk egy, a jelenleginél magasabb értékű új lehetséges folyamot.

Az 1. esetben a C lánc kizárólag előremenő élekből áll. Mindegyik C-beli előremenő élre legyen $i(x,y)$ az a mennyiség, amennyivel az (x,y) élen átmenő folyam jelenleg kevesebb mint az (x,y) él kapacitása. Legyen

$$k = \min_{(x,y)\in C} i(x,y)$$

Biztosan $k > 0$. Növeljük a C mindegyik élén az átmenő folyam mennyiségét k egységgel. Ugyancsak növeljük az a_0 élen átmenő folyam mennyiségét k egységgel. Ezzel az éleken kapacitáskorlátot nem sértünk meg, és a csúcsoknál is megőrződik a folyam-megmaradás. Az új folyam tehát szintén lehetséges, ugyanakkor k egységgel többet juttat a forrásból a nyelőbe, mint a jelenlegi lehetséges folyam.

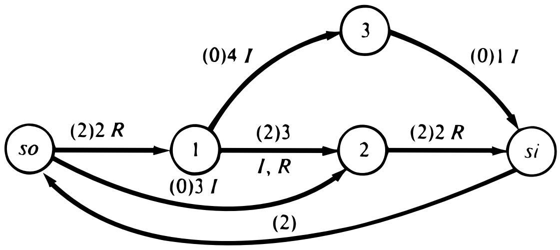
A 10. ábrán illusztráljuk az 1. esetet. Jelenleg 2 egység jut el a forrásból a nyelőbe. A címkézési eljárás a nyelő megcímkézésével ér véget, és a $C = (so,1)-(1,2)-(2,si)$ láncot eredményezi. Mindegyik él I-be tartozik, és $i(so,1) = 5-2 = 3; i(1,2) = 3-2 = 1$; és $i(2,si) = 4-2 = 2$. Most $k = \min\,(3,1,2) = 1$. Tehát egy javított lehetséges folyamot kapunk, ha a C élein átmenő folyamot végig 1 egységgel megnöveljük. Az új folyam 3 egységnyit juttat a forrásból a nyelőbe (lásd 11. ábrát).

A 2. esetben a forrást a nyelővel összekötő C láncban vannak előre- és hátramenő élek is. Mindegyik C-beli (x,y) hátramenő élre legyen $r(x,y)$ az a mennyiség, amennyivel az (x,y) élen átmenő folyam csökkenthető (azaz a jelenlegi pozitív mennyiség). Legyen továbbá

$$k_1 = \min_{(x,y)\in C\cap R} r(x,y) \quad \text{és} \quad k_2 = \min_{(x,y)\in C\cap I} i(x,y).$$

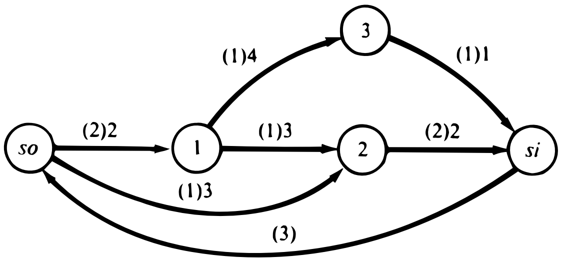
Természetesen k_1 és k_2, s így $\min\,(k_1,k_2)$ is > 0. A folyam erősségét mindegyik C-beli élen módosítjuk: a hátramenő éleken $\min\,(k_1,k_2)$-vel csökkentjük, az előremenő éleken $\min\,(k_1,k_2)$-vel növeljük. Növeljük az a_0 élen átmenő folyam mennyiségét $\min\,(k_1,k_2)$-vel. Ezzel a csúcsoknál megőrizzük a folyam-megmaradást, az éleken pedig továbbra is nemnegatív, az élkapacitásokat nem sértő folyam megy keresztül. Mivel a nyelőt érintő C-beli él biztosan előremenő él, találtunk egy új lehetséges folyamot, amelyik $\min\,(k_1,k_2)$-vel többet juttat a nyelőbe, mint a jelenlegi folyam.

12. ÁBRA
A címkézési módszer 2. esete



A folyam értéke = 2
A lánc: (*so*,2)−(1, 2)−(1, 3)−(3, *si*)

13. ÁBRA
A javított folyam a 2. esetben



A folyam értéke = 3

A 2. esetet a 12. ábrán látható lehetséges folyamon illusztráljuk. Erre a folyamra $(so,1)$ ε R; $(so,2)$ ε I; $(1,3)$ ε I; $(1,2)$ ε I és R; $(2,si)$ ε R; végül, $(3,si)$ ε I.

Először a $(so,2)$ élt és a 2-es csúcsot címkézzük meg (vagyis $(so,2)$ egy előremenő él). Majd az $(1,2)$ él és az 1-es csúcs kap címkét. Az $(1,2)$ egy hátramenő él, mert az 1-es csúcsnak még nem volt címkéje, és az $(1,2)$ él az R eleme. Mivel a *so*, 1 és 2 csúcsok már címkézettek, az $(1,3)$ él és a 3-as csúcs is címkét kaphat. (Az $(1,3)$ egy előremenő él, hiszen a végpontjának nem volt eddig címkéje.) Végül a $(3,si)$ él és a *si* csúcs kap címkét (a $(3,si)$ is egy előremenő él). Elértük tehát a nyelőt a $C=(so,2)-(1,2)-(1,3)-(3,si)$ láncon keresztül. Az $(1,2)$ él kivételével a lánc összes éle előremenő él. Mivel $i(so,2)=3$; $i(1,3)=4$; $i(3,si)=1$ és $r(1,2)=2$,

$$\min_{(x,y)\in C\cap R} r(x,y)=2 \quad \text{és} \quad \min_{(x,y)\in C\cap I} i(x,y)=1.$$

Tehát a C-beli előremenő éleken 1-gyel növelhetjük, a hátramenő éleken pedig 1-gyel csökkenthetjük a folyamot. Az ily módon 1 egységgel (2-ről 3-ra) növelt értékű lehetséges folyamot mutatja a 13. ábra. Látjuk, hogy az eredetileg $(1,2)$ élen keresztül haladó folyamból 1 egységnyit átirányítottunk az 1–3–*si* útra. Ezzel lehetővé vált egy további egység eljuttatása a forrásból a nyelőbe a *so*–2–*si* úton keresztül. Figyeljük meg, hogy ez a javítás a hátramenő él nélkül nem lett volna lehetséges.

Ha a nyelőt nem tudjuk megcímkézni, a jelenlegi folyam optimális. Ennek bizonyítása a vágás fogalmán alapszik.

DEFINÍCIÓ

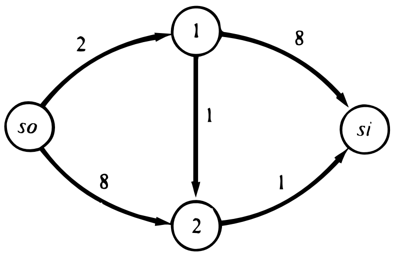
Legyen V' egy hálózat csúcsainak tetszőleges olyan halmaza, amelyik tartalmazza a nyelőt, de nem tartalmazza a forrást. Ekkor a hálózat olyan (i,j) éleinek halmaza, amelyek i kezdőpontja nem V'-beli, a j végpontja viszont V'-beli, egy **vágás** a hálózatban.

DEFINÍCIÓ

Egy **vágás kapacitása** alatt a vágást alkotó élek kapacitásainak összegét értjük.

Röviden, egy vágás az élek egy olyan halmaza, amit ha elhagyunk a hálózatból, a forrásból a nyelőbe már nem vezet út. Egy hálózatban számos vágás lehet. Például, a 14. ábrabeli hálózatban a csúcsok $V' = \{1, si\}$ halmaza a $(so, 1)$ és $(2, si)$ élekből álló, 2 + 1 = 3 kapacitású vágást definiálja. A $V' = \{1, 2, si\}$ halmaz viszont a $(so, 1)$ és $(so, 2)$ élekből álló, 2 + 8 =10 kapacitású vágást.

14. ÁBRA
Példa egy vágásra



A $V' = \{1, si\}$ csúcshalmaz
a $\{(so, 1), (2, si)\}$ vágást adja

Az alábbi két segédtétel adja meg a vágások és a maximális folyamok közötti kapcsolatot.

1. SEGÉDTÉTEL A forrásból a nyelőbe vezető *bármelyik* folyam erőssége kisebb vagy egyenlő, mint *akármelyik* vágás kapacitása.

Bizonyítás Vegyük a csúcsok egy tetszőleges olyan V' halmazát, amelyik tartalmazza a nyelőt, de nem tartalmazza a forrást, és tekintsük a V' által meghatározott vágást. A hálózat többi csúcsának halmazát jelölje V. Vegyünk továbbá egy tetszőleges lehetséges folyamot, ennek értékét jelölje f, az (i, j) élen áthaladó mennyiséget pedig x_{ij}. Ha a V-beli minden i csúcsra összegezzük a folyam-megőrzési egyenleteket (az i csúcsból kimenő folyam – az i csúcsba bemenő folyam $= 0$), kiesnek az olyan (i, j) élekhez tartozó tagok, amelyekben i és j is a V-hez tartozik. Azt kapjuk, hogy

$$\sum_{\substack{i \in V; \\ j \in V'}} x_{ij} - \sum_{\substack{i \in V'; \\ j \in V}} x_{ij} = f. \tag{3}$$

A (3)-ban az első összeg kisebb vagy egyenlő, mint a vágás kapacitása. Mivel mindegyik x_{ij} nemnegatív, látjuk, hogy $f \leq$ a vágás kapacitása, miként azt állítottuk. □

Az 1. segédtétel az 5. fejezetben tárgyalt gyenge dualitási összefüggés megfelelője. Következik belőle, hogy bármelyik vágás kapacitása a forrásból a nyelőbe áramló maximális folyam erősségének egy felső korlátja. Tehát, ha találunk egy lehetséges folyamot és egy vágást úgy, hogy a folyam értéke egyenlő a vágás kapacitásával, akkor találtunk egy maximális folyamot.

Tegyük fel, hogy egy lehetséges folyamra a nyelőt nem tudjuk megcímkézni. Legyen VÁGÁS a címkézetlen csúcsok halmaza által meghatározott vágás.

2. SEGÉDTÉTEL Ha a címkézési eljárás a nyelőt nem éri el, akkor

$$\text{a VÁGÁS kapacitása} = \text{az aktuális folyam erőssége.}$$

Bizonyítás Legyen V' a címkézetlen, V pedig a címkézett csúcsok halmaza. Vegyünk egy (i,j) élt a VÁGÁS-ból, azaz i a V-nek, j a V'-nek eleme. Ekkor x_{ij}-nek egyenlőnek kell lennie az (i,j) él kapacitásával, különben a j csúcsot meg tudtuk volna címkézni (egy előremenő éllel) és j nem a V'-hez tartozna. Tekintsünk most egy olyan (i,j) élt, amelyre az i van V'-ben és a j a V-ben. Ekkor $x_{ij} = 0$ kell teljesüljön, különben az i csúcsot meg tudtuk volna címkézni (egy hátramenő éllel), és i nem a V'-hez tartozna. Az aktuális lehetséges folyamra a (3) alapján teljesül, hogy

$$\text{a VÁGÁS kapacitása} = \sum_{\substack{i \in V; \\ j \in V'}} x_{ij} = f = \text{az aktuális folyam erőssége,}$$

amint azt állítottuk. □

Az 1. segédtétel utáni megállapítás szerint tehát, amikor a nyelőt nem lehet megcímkézni, az aktuális folyam egy maximális folyam.

A Ford–Fulkerson módszer összefoglalása és szemléltetése

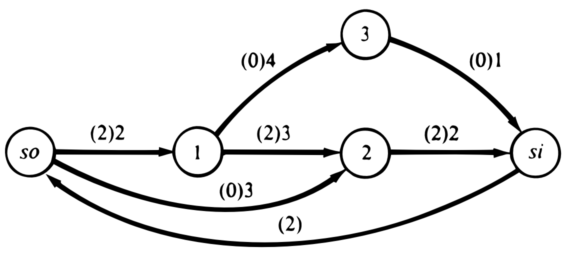
1. lépés Keressünk egy lehetséges folyamot (a minden élen 0 értékű folyam mindig lehetséges).

2. lépés A címkézési eljárással próbáljuk elérni a nyelőt. Ha nem lehet a nyelőt megcímkézni, az adott lehetséges folyam maximális. Ha elérjük a nyelőt, folytassuk a 3. lépéssel.

3. lépés A korábban ismertetett módszerrel határozzunk meg egy magasabb értékű lehetséges folyamot. Térjünk vissza a 2. lépésre.

Szemléltetésképpen, a Ford–Fulkerson módszerrel megoldjuk a Sunco problémáját (3. példa, 6. ábra). Kezdetben minden élen 0 mennyiséget szállítunk. A címkézési eljárásban először a forrás, majd a $(so,1)$ él és az 1-es csúcs, utána az $(1,2)$ él és a 2-es csúcs, végül a $(2,si)$ él és a si csúcs kap címkét. A $C = (so,1)$–$(1,2)$–$(2,si)$ mindegyik éle előremenő él, növelhetjük tehát rajtuk a mennyiséget min $(2,3,2) = 2$ egységgel. Ezt mutatja a 15. ábra.

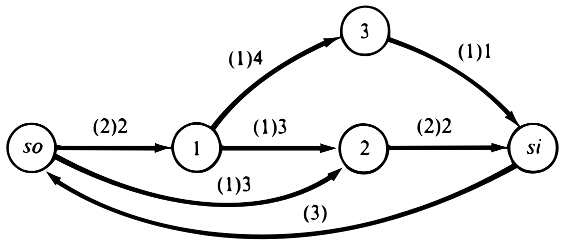
15. ÁBRA
A Sunco hálózata (első növelt folyam)



A folyam értéke = 2
A (*so*, 2)–(1, 2)–(1, 3)–(3, *si*) megcímkézi a nyelőt

Amint a 12. ábra kapcsán láttuk, ekkor a $C = (so,2)$–$(1,2)$–$(1,3)$–$(3,si)$ láncon keresztül a nyelő megcímkézhető. Növelhetjük a $(so,2)$, $(1,3)$ és $(3,si)$ előremenő éleken átmenő

16. ÁBRA
A Sunco hálózata (optimális folyam)



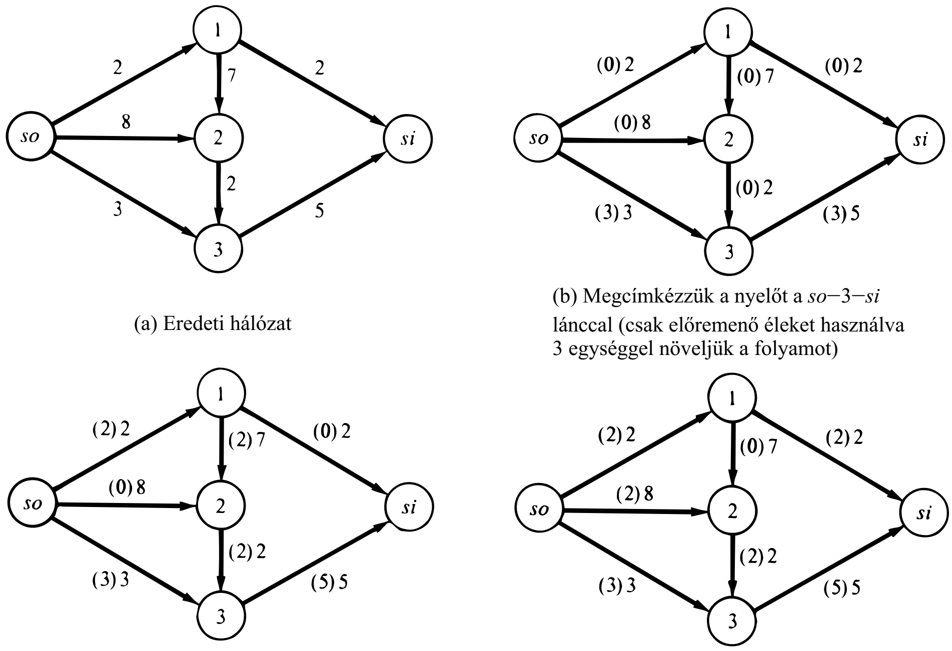
A folyam értéke = 3
A nyelő nem címkézhető, a folyam optimális

mennyiséget 1 egységgel, és csökkenthetjük az $(1,2)$ hátramenő élen átmenő mennyiséget 1 egységgel. Az eredményt mutatja a 16. ábra. Ekkor a nyelő már nem elérhető: elsőként csak a $(so,2)$ él és a 2-es csúcs címkézhető, ezt követően pedig csak az $(1,2)$ és $(1,3)$ élek és az 1, 3 csúcsok. De a nyelő sehogyan sem elérhető.

Ez a folyam maximális. A címkézetlen csúcsok (ez esetben csak a *si*) által definiált (most a $(2,si)$ és $(3,si)$ élekből álló) vágás kapacitása (2 + 1 = 3) ugyanis megegyezik az aktuális lehetséges folyam erősségével (a forrásból a nyelőbe juttatott mennyiséggel). A fenti segédtételek szerint tehát a folyam optimális.

A Ford–Fulkerson módszerre egy másik példa a 17. ábrán található. Vegyük észre, hogy a hátramenő élek nélkül a 7 egységnyi maximális folyam nem lenne elérhető. A (természetesen 7 kapacitású) minimális vágást az 1, 3 és *si* csúcsok határozzák meg, elemei a $(so,1)$, $(so,3)$ és $(2,3)$ élek.

17. ÁBRA
Példa a Ford–Fulkerson módszerre



(a) Eredeti hálózat

(b) Megcímkézzük a nyelőt a *so*–3–*si* lánccal (csak előremenő éleket használva 3 egységgel növeljük a folyamot)

(c) Megcímkézzük a nyelőt a *so*–1–2–3–si lánccal (csak előremenő éleket használva 2 egységgel növeljük a folyamot)

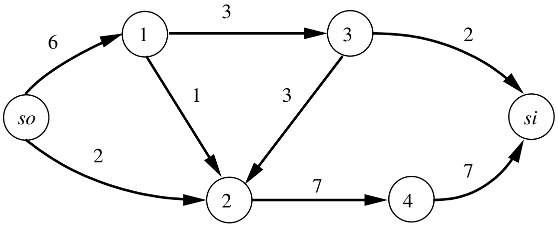
(d) Megcímkézzük a nyelőt a *so*–2–1–*si* lánccal (az (1, 2) hátramenő élt is használva 2-vel növeljük a folyamot; elérjük a 7 egység maximális folyamot)

Feladatok

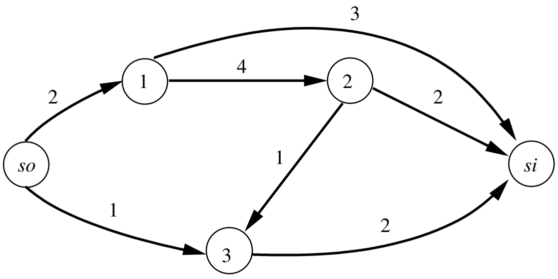
A csoport

1–3. A 18–20. ábrák tartoznak az 1–3. feladatokhoz. Keresse meg az egyes hálózatokban a maximális folyamokat! Melyik vágás kapacitása egyezik meg a maximális folyam erősségével az adott hálózatban? Írja fel a maximális folyam meghatározására alkalmas LP-t is az adott hálózatra!

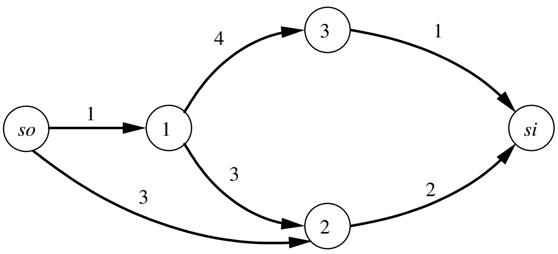
18. ÁBRA Az 1. feladat hálózata



19. ÁBRA A 2. feladat hálózata



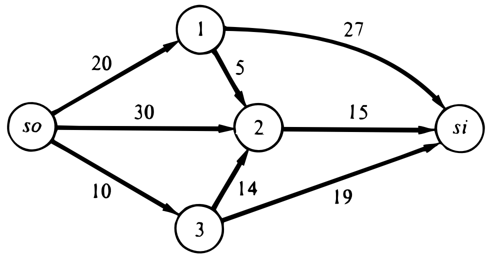
20. ÁBRA A 3. feladat hálózata



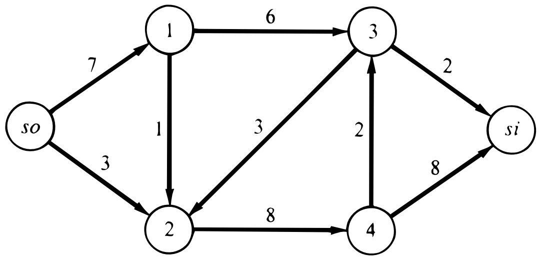
4–5. A 21., illetve 22. ábrán látható hálózatban keresse meg a maximális folyamot! Adja meg azt a vágást is, amelynek kapacitása megegyezik a maximális folyam erősségével!

6. Öt gépkocsinak kell hétféle csomagot kézbesítenie. Mindegyik típusú csomagból 3 darab van, a gépkocsik kapacitása 6, 4, 5, 4 és 3 darab csomag a típustól függetlenül. Adjon meg egy olyan maximális folyam feladatot, amivel eldönthető, hogy fel lehet-e pakolni a csomagokat úgy, hogy egy gépkocsi egyféle csomagból egynél többet ne szállítson!

21. ÁBRA A 4. feladat hálózata



22. ÁBRA Az 5. feladat hálózata

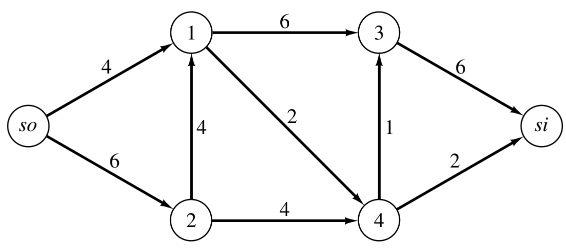


7. Négy munkásunk van az 1–4. feladatok elvégzésére. Sajnos, három munkás csak bizonyos feladatokat képes teljesíteni: az 1-es munkás csak az 1. feladatot; a 2-es munkás csak az 1. és 2. feladatokat; a 3-as munkás csak a 2. feladatot. A 4-es munkásra bármelyik feladatot rábízhatjuk. Adjon meg egy olyan maximális folyam feladatot, amelynek a megoldásával eldönthető, hogy akad-e az összes feladatra alkalmas munkás!

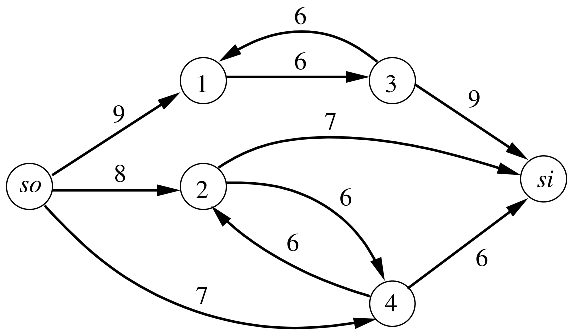
8. A Hatfield, Montague, McCoy és Capulet családok közös piknikre mennek. Négy autójuk van, ezek kapacitása a következő: 1-es autó négy személy; 2-es autó három személy; 3-as autó három személy; 4-es autó négy személy. Mindegyik család négytagú és kettőnél több személy egyik családból sem ülhet ugyanabba az autóba. A legtöbben hányan mehetnek a piknikre? Fogalmazzuk meg a problémát maximális folyam feladatként!

9–10. A 23., illetve 24. ábrán látható hálózatban keresse meg a maximális folyamot! Adja meg azt a vágást is, amelynek a kapacitása megegyezik a maximális folyam erősségével!

23. ÁBRA



24. ÁBRA



B csoport

11. Tegyük fel, hogy egy hálózatban véges sok él van és mindegyik élkapacitás egész szám. Indokolja meg, hogy a Ford–Fulkerson módszer miért talál meg biztosan egy maximális folyamot véges sok lépésben! Miért lesz a maximális folyam egészértékű?

12. Tekintsünk egy olyan hálózati folyam problémát, amelyben több forrás és több nyelő van, és a cél a forrásokból a nyelőkbe juttatott folyam értékének maximalizálása. Mutassa meg, hogyan lehet ezt a feladatot átalakítani egy egyetlen forrással és egyetlen nyelővel rendelkező hálózatra vonatkozó maximális folyam feladattá!

13. Tegyük fel, hogy egy hálózat egy csúcsába érkező folyam mennyisége a 10 egységet nem haladhatja meg. Hogyan lehet ezt a megkötést egy élkapacitási feltétellel helyettesíteni? (Tehát csúcskapacitások esetén is használhatjuk a Ford–Fulkerson módszert a maximális folyam meghatározására.)

14. Tegyük fel, hogy óránként legfeljebb 300 gépkocsi közlekedhet az 1, 2, 3 és 4 városok közül bármelyik kettő között. Adjon meg egy maximális folyam feladatot, amellyel meg lehet határozni, hogy a következő két órában hány gépkocsi küldhető az 1-es városból a 4-es városba! (*Útmutatás:* A hálózatnak legyenek a $t = 0, t = 1$ és $t = 2$-t reprezentáló részei.)

15. A Fly-by-Night légitársaság három járat indítását fontolgatja. Az egyes járatokból származó bevétel, és a járatok által érintett repülőterek a 11. táblázatban találhatók.

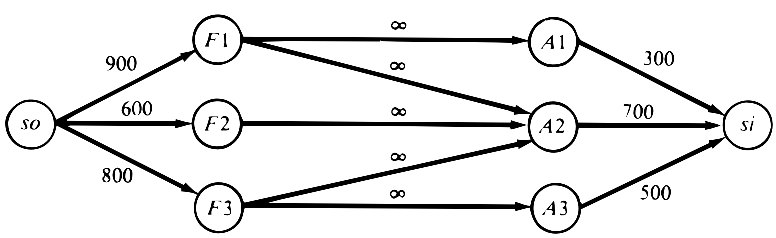
11. TÁBLÁZAT

Járat	Bevétel ($)	Érintett repülőtér
1	900	1-es és 2-es repülőtér
2	600	2-es repülőtér
3	800	2-es és 3-as repülőtér

Egy repülőtér használatáért a Fly-by-Nightnak a következő fix (a leszállások számától független) költséget kell fizetnie: 1-es reptér 300$; 2-es reptér 700$; 3-as reptér 500$. Például, az 1-es és 3-as járat indítása $900 + 800 - 300 - 700 - 500 =$ 200$ profitot hoz. Mutassa meg, hogy a 25. ábra hálózatára teljesül, hogy (maximális profit) $=$ (a járatok bevételeinek összege) $-$ (a minimális vágás kapacitása)! Magyarázza meg, hogyan használható ez az eredmény a Fly-by-Night profitjának maximalizálására (még járatok százainak esetén is)! (*Útmutatás:* Vegyük járatok egy F halmazát (mondjuk az 1 és 3 járatokét). Tekintsük azt a vágást, amit a nyelő, az F-be nem tartozó járatokat reprezentáló csúcsok és az F által nem használt repülőtereket megjelenítő csúcsok határoznak meg. Mutassa meg, hogy (ezen vágás kapacitása) $=$ (az F-be nem tartozó járatokból származó összbevétel) $+$ (az F által használt repülőterek költségei)!)

16. Az eljövendő négy hónap alatt egy építési vállalatnak három projektet kell befejeznie. Az 1-es projekt három hónap alatt befejezendő és még 8 havi munkát igényel. A 2-es projekt négy hónap alatt befejezendő és még 10 havi munkát igényel. A 3-as projektet a második hónap végéig be kell fejezni és még 12 havi munkát igényel. Mindegyik hónapban 8 munkás áll rendelkezésre, de egyetlen hónapban sem dolgozhat 6-nál több munkás ugyanazon a projekten. Adjon meg egy alkalmas maximális folyam feladatot annak eldöntésére, hogy vajon befejezhető-e időben mind a három projekt! (*Útmutatás:* Amennyiben a megfelelő hálózatban a maximális folyam erőssége 30, mindegyik projekt időben befejezhető.)

25. ÁBRA
A hálózat a 15. feladatban



7.4. CPM és PERT

A hálózati modellek hasznos segédeszközt jelentenek a sok tevékenységből álló összetett projektek ütemezésében is. Ha a tevékenységek időtartama biztosan tudható, a kritikus út módszer (Critical Path Method, CPM) használható a projekt befejezéséhez szükséges időtartam meghatározására. A CPM arra is választ ad, hogy mely tevékenységek halaszthatók (és mennyivel) anélkül, hogy a projekt befejezése csúszna. A CPM-et az 1950-es évek végén fejlesztették ki a du Pont és Sperry Rand kutatói.

Ha a tevékenységek időtartama túl bizonytalan, a program kiértékelési és felülvizsgálati technika (Program Evaluation and Review Technique, PERT) segítségével becsülhető annak a valószínűsége, hogy a projekt egy adott határidőre befejeződik. A PERT-et a Polaris rakéta kifejlesztését segítő tanácsadók dolgozták ki szintén az 1950-es évek végén. A CPM és PERT módszereknek nagy szerepük volt abban, hogy a Polaris rakéták a határidő előtt két évvel működőképesek voltak.

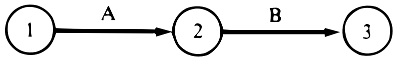
A CPM és PERT technikákat sokfelé sikeresen alkalmazták, többek között

1. építési projektek (irodaházak, utak, uszodák) ütemezésére,
2. egy 400 ágyas kórház átköltöztetésekor, az oregoni Portlandben,
3. a rakétakilövések visszaszámlálási eljárásának kidolgozására,
4. egy új számítógépes rendszer installálására,
5. egy új termék megtervezésére és piaci bevezetésére,
6. nagyvállalatok közötti összeolvadás modellezésére,
7. hajóépítési munkálatok ütemezésére.

A CPM és PERT alkalmazásához szükség van a projektet alkotó tevékenységek listájára. A projektet akkor tekintjük befejezettnek, ha mindegyik részfeladata befejeződik. Mindegyik tevékenységnek lehetnek **előzményei**, azaz olyan tevékenységek, amelyeknek be kell fejeződniük ahhoz, hogy az adott tevékenység elkezdődhessen. A tevékenységek közötti ilyen előírásokat egy projekt-hálózattal reprezentáljuk. Tárgyalásunkban a tevékenységeket az irányított élek jelenítik meg, a csúcsok pedig a tevékenységek bizonyos csoportjainak befejezését jelzik. (Ezért a projekt-hálózatunk csúcsaira gyakran mint **eseményekre** hivatkozunk.) Az ilyen típusú projekt-hálózatot hívják **AOA (activity on arc)** hálózatnak.[3]

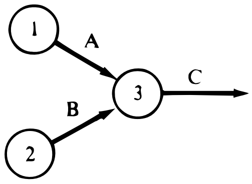
Lássuk, hogyan jeleníti meg egy AOA hálózat a megelőzési viszonyokat. Tegyük fel, hogy az A tevékenység előzménye a B tevékenységnek. Az AOA hálózat egy csúcsa egy vagy több tevékenység befejezését szimbolizálja. A 26. ábrán tehát a 2-es csúcs az A tevékenység befejezését és a B tevékenység kezdetét jelzi. Tegyük most fel, hogy az A és a B tevékenységnek is be kell fejeződnie a C tevékenység indulása előtt. A 27. ábrán a 3-as csúcs reprezentálja azt, hogy az A és B is befejeződött. A 28. ábra azt mutatja, hogy az A tevékenység előzménye a B-nek és a C-nek is.

26. ÁBRA
A-nak be kell fejeződnie a B kezdete előtt

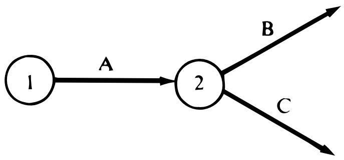


Tevékenységek és előzmények egy adott listájából a következő szabályok segítségével készíthetjük el a projekt egy AOA reprezentációját (amit **projekt-hálózatnak** vagy **projekt-diagramnak** hívunk):

[3]Egy AON (activity on node) típusú projekt-hálózatban a csúcsok reprezentálják a tevékenységeket, az élek pedig a közöttük fennálló megelőzési előírásokat. Lásd pl. Wiest és Levy (1977).



27. ÁBRA
A-nak és B-nek be kell fejeződnie a C kezdete előtt



28. ÁBRA
A-nak be kell fejeződnie a B és a C kezdete előtt

1. Az 1-es csúcs jelzi a projekt kezdetét. Az előzmény nélküli tevékenységeket az 1-es csúcsból kiinduló élekkel jelenítjük meg.

2. Egy a projekt befejezését szimbolizáló **befejezés csúcsot** is tartalmaznia kell a hálózatnak.

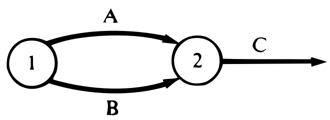
3. Számozzuk úgy a hálózat csúcsait, hogy egy tevékenység végét mutató csúcs sorszáma mindig nagyobb legyen, mint a tevékenység kezdetét mutató csúcsé (ennek a szabálynak persze több számozás is megfelelhet).

4. Egy tevékenységet csak egy él reprezentálhat.

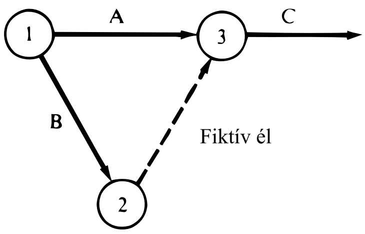
5. Két csúcs között legfeljebb egy él mehet.

A 4. és 5. szabály betartásához szükség lehet nulla időtartamú **fiktív tevékenységek** bevezetésére. Tegyük fel például, hogy az A és B tevékenységek egyszerre kezdődhetnek, és mindketten előzményei a C tevékenységnek. Az 5. szabály hiányában a 29. ábra megfelelő lenne. Az 1-es és 2-es csúcs között azonban több mint egy él megy, ezért a 29. ábra nem felel meg az 5. szabálynak. Ekkor bevezethetünk egy fiktív tevékenységet (a szaggatott él), amint a 30. ábra mutatja. Ily módon az 5. szabálynak is megfelelve biztosítjuk, hogy C csak az A és B befejezése után kezdődhet. Az alfejezet utáni 10. feladat mutatja, hogy fiktív tevékenységre a 4. szabály betartása érdekében is szükség lehet.

A 6. példa egy projekt-hálózatot szemléltet.



29. ÁBRA
Sérül az 5. szabály



30. ÁBRA
Egy fiktív tevékenység használata

6. PÉLDA A Widgetco egy új termék (3-as termék) bevezetésére készül. Egy egység 3-as termék egy egység 1-es és egy egység 2-es termékből áll. Az 1-es és 2-es termékek termelése előtt az alapanyagot be kell szerezni és a munkásokat ki kell képezni. Az 1-es és 2-es termékek összeszerelése előtt a kész 2-es terméknek ellenőrzésen kell átesnie. A tevékenységek és előzményeik listája a 12. táblázatban található. Rajzoljunk fel egy alkalmas projekt-diagramot!

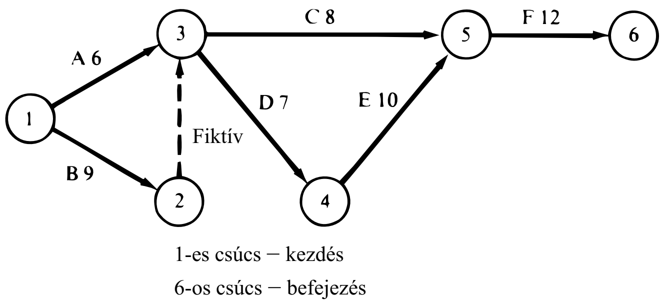
12. TÁBLÁZAT A Widgetco projekt adatai

Tevékenység	Előzmények	Időtartam (nap)
A = munkások kiképzése	—	6
B = alapanyag beszerzése	—	9
C = 1-es termék gyártása	A, B	8
D = 2-es termék gyártása	A, B	7
E = 2-es termék ellenőrzése	D	10
F = 1-es és 2-es termékek összeszerelése	C, E	12

Megoldás Vegyük észre, hogy ugyan csak a C-t és az E-t tüntettük fel mint az F előzményeit, valójában az A, B és D tevékenységeknek is be kell fejeződniük az F kezdete előtt. Mivel a C csak az A-t és a B-t követően kezdődhet, valamint az E csak a D után jöhet, fölösleges lenne az F előzményeiként az A, B és D tevékenységeket is felsorolni. A projekt-hálózat felrajzolásakor tehát elegendő a tevékenységeket közvetlenül megelőző tevékenységeket tekinteni.

A projekt AOA hálózata a 31. ábrán található (az élek feletti számok az adott tevékenység napokban mért időtartamát jelentik). Az 1-es csúcs a projekt kezdetét, a 6-os csúcs a projekt befejeztét jelképezi. A $(2,3)$ fiktív él beiktatására az 5. szabály miatt van szükség.

31. ÁBRA A Widgetco projekt diagramja



A CPM módszer két kulcsfogalma egy esemény korai időzítése (early event time, ET), illetve késői időzítése (late event time, LT).

DEFINÍCIÓ

> Az i csúcs **korai időzítése** (jelölése $ET(i)$) az a legkorábbi időpont, amikor a csúcshoz tartozó esemény bekövetkezhet.

DEFINÍCIÓ

> Az i csúcs **késői időzítése** (jelölése $LT(i)$) az a legkésőbbi időpont, amikor a csúcshoz tartozó esemény bekövetkezhet anélkül, hogy a projekt befejezését késleltetné.

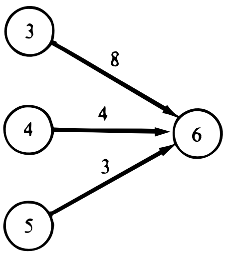
A korai időzítés kiszámolása

A csúcsok korai időzítésének kiszámolását a projekt kezdetét jelző 1-es csúccsal kezdjük, $ET(1) = 0$. Ezután következik az $ET(2), ET(3)$ stb. meghatározása az ET(befejezési csúcs) értékkel bezárólag. Egy $ET(i)$ számolását a 32. ábrán látható hálózatrészlettel szemléltetjük. Tegyük fel, hogy már tudjuk: $ET(3) = 6, ET(4) = 8$ és $ET(5) = 10$. A 6-os csúcshoz tartozó esemény csak akkor következhet be, ha a $(3,6)$, $(4,6)$ és $(5,6)$ élek által reprezentált események már *mind* befejeződtek, vagyis

$$ET(6) = \max \begin{cases} ET(3) + 8 = 14 \\ ET(4) + 4 = 12 \\ ET(5) + 3 = 13. \end{cases}$$

A 6-os csúcs bekövetkezésének legkorábbi ideje 14, vagyis $ET(6) = 14$.

32. ÁBRA
Az $ET(6)$ meghatározása



A példából világos, hogy egy $ET(i)$ kiszámolása igényli bizonyos $ET(j)$ értékek $(j < i)$ ismeretét. Ez a magyarázata, hogy a korai időzítéseket miért az előzmények ET értékeinek meghatározásával kezdjük. Általánosan, ha $ET(1), ET(2), \ldots, ET(i-1)$ már rendelkezésre áll, az $ET(i)$-t a következőképpen számítjuk ki:

1. lépés Keressük meg az i csúcsba mutató élek kezdő csúcspontjait. Ezek az események az i esemény **közvetlen előzményei**.

2. lépés Az i esemény mindegyik közvetlen előzményének ET értékéhez adjuk hozzá az előzményből az i-be vezető élhez tartozó tevékenység időtartamát.

3. lépés $ET(i)$ egyenlő a 2. lépésben számított értékek maximumával.

Számoljuk most ki az $ET(i)$ értékeket a 6. példában. Először is $ET(1) = 0$. Mivel az 1-es csúcs a 2-es csúcs egyetlen közvetlen előzménye, $ET(2) = ET(1) + 9 = 9$. A 3-as csúcs közvetlen előzményei az 1-es és 2-es csúcsok, ezért

$$ET(3) = \max \begin{cases} ET(1) + 6 = 6 \\ ET(2) + 0 = 9 \end{cases} = 9.$$

Mivel a 3-as csúcs a 4-es egyetlen közvetlen előzménye, $ET(4) = ET(3) + 7 = 16$. Az 5-ös csúcs közvetlen előzményei a 3-as és a 4-es, ezért

$$ET(5) = \max \begin{cases} ET(3) + 8 = 17 \\ ET(4) + 10 = 26 \end{cases} = 26.$$

Végül, az 5-ös csúcs a 6-os egyetlen közvetlen előzménye, tehát $ET(6) = ET(5) + 12 = 38$. Mivel a 6-os csúcs a projekt befejezését jelenti, látjuk, hogy a 3-as termék előállítása a kezdéstől számítva 38 napnál hamarabb nem lehetséges.

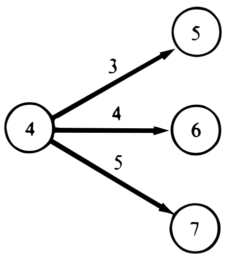
Meg lehet mutatni, hogy $ET(i)$ a projekt-hálózatban a kezdőponttól az i csúcsba vezető leghosszabb út hossza.

A késői időzítés számolása

Az $LT(i)$-ket a befejezési csúcsból visszafelé (a csúcsok sorszámának csökkenő sorrendjében) haladva számítjuk ki egészen az $LT(1)$ meghatározásáig. Mivel a 6. példabeli projekt 38 nap alatt befejezhető, $LT(6) = 38$. A befejezési csúcstól különböző csúcsra az LT kiszámítását a 33. ábrabeli hálózatrészleten szemléltetjük. Tegyük fel, hogy már tudjuk: $LT(5) = 24$, $LT(6) = 26$ és $LT(7) = 28$. De mennyi az $LT(4)$? Ha a 4-es csúcshoz tartozó esemény $LT(5) - 3$ után következik be, az 5-ös csúcshoz tartozó esemény csak $LT(5)$ után következhet be, de ekkor a projekt befejezése csúszik. Hasonlóképpen, ha a 4-es csúcs az $LT(6) - 4$ vagy $LT(7) - 5$ időpont után következik be, a projekt befejezése késedelmet szenved. Tehát,

$$LT(4) = \min \begin{cases} LT(5) - 3 = 21 \\ LT(6) - 4 = 22 = 21 \\ LT(7) - 5 = 23. \end{cases}$$

33. ÁBRA
Az $LT(4)$ kiszámítása



Általánosan, ha az $LT(j)$ értékek ismertek $j > i$-re, az $LT(i)$ a következőképpen számítandó:

1. lépés Keressük meg azokat a csúcsokat, amelyekbe megy él az i csúcsból. Ezek az események az i esemény **közvetlen követői** (utódjai).

2. lépés Az i esemény mindegyik közvetlen utódjának LT értékéből vonjuk le az i-ből az utódba vezető élhez tartozó tevékenység időtartamát.

3. lépés $LT(i)$ egyenlő a 2. lépésben számított értékek minimumával.

Számoljuk most ki az $LT(i)$ értékeket a 6. példában. Idézzük fel, hogy $LT(6) = 38$. Mivel a 6-os csúcs az 5-ös egyetlen közvetlen utódja, $LT(5) = LT(6) - 12 = 26$. A 4-es csúcs egyetlen közvetlen utódja az 5-ös, ezért $LT(4) = LT(5) - 10 = 16$. A 4-es és 5-ös csúcsok a 3-as közvetlen követői, tehát

$$LT(3) = \min \begin{cases} LT(4) - 7 = 9 \\ LT(5) - 8 = 18. \end{cases}$$

Mivel a 3-as csúcs a 2-es egyetlen közvetlen utódja, $LT(2) = LT(3) - 0 = 9$. Végül, az 1-es csúcsnak a 2-es és a 3-as a közvetlen követői, ezért

$$LT(1) = \min \begin{cases} LT(3) - 6 = 3 \\ LT(2) - 9 = 0. \end{cases}$$

A 6. példára vonatkozó számításainkat összegzi a 13. táblázat. Ha $LT(i) = ET(i)$, az i bekövetkezésének bármilyen késedelme a projekt befejezésének csúszását okozza. Például, mivel $LT(4) = ET(4)$, bármilyen késés a 4-es csúcs bekövetkezésében késedelmet okoz a projekt befejezésében.

13. TÁBLÁZAT ET és LT a Widgetco projektben

Csúcs	$ET(i)$	$LT(i)$
1	0	0
2	9	9
3	9	9
4	16	16
5	26	26
6	38	38

Tűréshatár

A projekt elindulása előtt a tevékenységek időtartamát teljes bizonyossággal nem ismerjük. A projekt-hálózat megszerkesztésénél használt értékek a tényleges időtartamoknak csak a becslései. Egy tevékenység tűréshatárának fogalma felhasználható annak mérésére, hogy mennyire kell ügyelnünk a tevékenység becsült időtartamának betartására.

DEFINÍCIÓ

Egy tevékenység, illetve az azt reprezentáló (i, j) él **tűréshatára** (jelölése $TH(i, j)$) az a szám, amennyivel a tevékenység elkezdése a legkorábbi kezdési időpontjától eltolódhat anélkül, hogy a projekt befejezése késedelmet szenvedne (feltéve, hogy a többi tevékenység nem csúszik).

Másképpen, egy tevékenység tűréshatára azt mutatja, hogy mennyivel növekedhet meg a tényleges időtartam a becsült értékhez képest anélkül, hogy a projekt befejezése késedelmet szenvedne.

Ha t_{ij} jelöli az (i, j) tevékenység hosszát, a $TH(i, j)$ könnyen kifejezhető az $LT(j)$ és $ET(i)$ értékekkel. Az (i, j) tevékenység az i csúcsnál kezdődik. Ha az i esemény bekövetkezése vagy az (i, j) tevékenység időtartama k időegységnyit csúszik, az (i, j) tevékenység az $ET(i) + k + t_{ij}$ időpontban ér véget. A projekt befejezése akkor nem csúszik, ha

$$ET(i) + k + t_{ij} \leq LT(j), \quad \text{vagy} \quad k \leq LT(j) - ET(i) - t_{ij}.$$

Következésképpen,

$$TH(i, j) = LT(j) - ET(i) - t_{ij}.$$

A 6. példában a $TH(i, j)$ értékek a következők:

$$\begin{aligned}
\text{B tevékenység:}\quad & TH(1,2) = LT(2) - ET(1) - 9 = 0 \\
\text{A tevékenység:}\quad & TH(1,3) = LT(3) - ET(1) - 6 = 3 \\
\text{D tevékenység:}\quad & TH(3,4) = LT(4) - ET(3) - 7 = 0 \\
\text{C tevékenység:}\quad & TH(3,5) = LT(5) - ET(3) - 8 = 9 \\
\text{E tevékenység:}\quad & TH(4,5) = LT(5) - ET(4) - 10 = 0 \\
\text{F tevékenység:}\quad & TH(5,6) = LT(6) - ET(5) - 12 = 0 \\
\text{fiktív tevékenység:}\quad & TH(2,3) = LT(3) - ET(2) - 0 = 0.
\end{aligned}$$

A kritikus út meghatározása

Ha egy tevékenység tűréshatára nulla, kezdésének (vagy időtartamának) bármilyen elhúzódása késlelteti a projekt befejezését. Egy ilyen tevékenység tehát döntő fontosságú a projekt befejezése szempontjából.

DEFINÍCIÓ

Egy nulla tűréshatárral rendelkező tevékenységet **kritikus tevékenységnek** hívunk.

DEFINÍCIÓ

Egy csupa kritikus tevékenységből álló, a kezdés csúcsból a befejezés csúcsba vezető utat **kritikus útnak** hívunk.

A 31. ábrán a B, D, E, F és a fiktív tevékenységek a kritikus tevékenységek, az 1–2–3–4–5–6 pedig a kritikus út (egy hálózatban több kritikus út is lehet). Egy projekt-hálózatban a kritikus út a kezdés csúcsból a befejezés csúcsba vezető leghosszabb út (lásd a 7.5. alfejezet 2. feladatát).

Mivel egy kritikus tevékenység bármilyen elhúzódása késlelteti a projekt befejezését, célszerű fokozott figyelemmel kísérni a kritikus tevékenységek befejezését.

Mozgáshatár

Amint láttuk, egy tevékenység tűréshatára egyfajta mérőszáma a tevékenység flexibilitásának. Például, az A tevékenység időtartama a tervezett 6 napot akár 3 nappal is meghaladhatja anélkül, hogy hátráltatná a projekt tervezett befejezését. A flexibilitás egy másik mérőszáma a mozgáshatár.

DEFINÍCIÓ

Egy tevékenység, illetve az azt reprezentáló (i, j) él **mozgáshatára** (jelölése $MH(i, j)$) az a szám, amennyivel a tevékenység elkezdése (vagy időtartama) elhúzódhat anélkül, hogy ezzel bármelyik későbbi tevékenység kezdési időpontja a legkorábbi kezdési időpontjánál későbbre tolódna.

Tegyük fel, hogy az i esemény bekövetkezése vagy az (i, j) tevékenység időtartama k időegységnyit csúszik. Ekkor a j eseményre legkorábban az $ET(i) + t_{ij} + k$ időpontban kerülhet sor. Vagyis, a j esemény akkor nem késik a korai kezdési időpontjához képest, ha $ET(i) + t_{ij} + k \leq ET(j)$, vagy $k \leq ET(j) - ET(i) - t_{ij}$. Ha a j esemény nem késik, a későbbi események sem csúsznak a korai kezdési időpontjukhoz képest. Következésképpen,

$$MH(i, j) = ET(j) - ET(i) - t_{ij}.$$

A 6. példában az $MH(i,j)$ értékek a következők:

$$\begin{aligned}
&\text{B tevékenység:} && MH(1,2) = 9-0-9 = 0\\
&\text{A tevékenység:} && MH(1,3) = 9-0-6 = 3\\
&\text{D tevékenység:} && MH(3,4) = 16-9-7 = 0\\
&\text{C tevékenység:} && MH(3,5) = 26-9-8 = 9\\
&\text{E tevékenység:} && MH(4,5) = 26-16-10 = 0\\
&\text{F tevékenység:} && MH(5,6) = 38-26-12 = 0.
\end{aligned}$$

Például, mivel a C tevékenység mozgáshatára 9 nap, a C kezdetének vagy időtartamának 9 napot meghaladó elhúzódása késedelmet okoz valamelyik későbbi tevékenység kezdetében (jelen esetben az F-ében).

A kritikus út meghatározása lineáris programozással

Habár egy projekt-hálózatban a kritikus út megkeresésére korábban ismertetett módszer könnyen gépesíthető, a kritikus út hosszát lineáris programozással is meghatározhatjuk. Jelölje

$$x_j = \text{ a } j \text{ csúcshoz tartozó esemény bekövetkezésének időpontját.}$$

Mindegyik (i,j) tevékenység esetén igaz, hogy a j esemény előtt az i eseménynek be kell következnie, és az (i,j) tevékenységnek be kell fejeződnie. Vagyis a projekt-hálózat mindegyik (i,j) éle esetén: $x_j \geq x_i + t_{ij}$. Jelölje az F csúcs a projekt befejezését. Mivel célunk az, hogy minimalizáljuk a projekt időtartamát, a $z = x_F - x_1$ célfüggvényt használjuk.

Illusztrációképpen, határozzuk meg lineáris programozással a kritikus út hosszát a 6. példában. A megfelelő LP:

$$\begin{aligned}
&\min z = x_6 - x_1 && \\
\text{f.h.}\quad & x_3 \geq x_1 + 6 && ((1,3) \text{ él feltétel})\\
& x_2 \geq x_1 + 9 && ((1,2) \text{ él feltétel})\\
& x_5 \geq x_3 + 8 && ((3,5) \text{ él feltétel})\\
& x_4 \geq x_3 + 7 && ((3,4) \text{ él feltétel})\\
& x_5 \geq x_4 + 10 && ((4,5) \text{ él feltétel})\\
& x_6 \geq x_5 + 12 && ((5,6) \text{ él feltétel})\\
& x_3 \geq x_2 && ((2,3) \text{ él feltétel})\\
&\text{minden változó előjelkötetlen} &&
\end{aligned}$$

Ennek az LP-nek egy optimális megoldása: $z = 38, x_1 = 0, x_2 = 9, x_3 = 9, x_4 = 16, x_5 = 26$ és $x_6 = 38$, vagyis a projekt 38 nap alatt befejezhető.

Az LP-nek sok alternatív optimális megoldása van. Általánosan igaz, hogy egy optimális megoldásban az x_i bármilyen értéket felvehet az $ET(i)$ és $LT(i)$ között. Viszont az összes optimális megoldás azt mutatja, hogy a kritikus utak hossza 38 (nap).

Ebben a projekt-hálózatban egy út a kezdés csúcstól a befejezés csúcsig akkor kritikus út, ha a benne szereplő mindegyik élhez tartozó feltétel árnyékára -1. A 34. ábrán látható számítógépes outputból tudjuk, hogy az 1–2–3–4–5–6 út egy kritikus út. Ha egy feltétel duál ára -1, a kapcsolódó tevékenység hosszának Δ-val való növelése pontosan Δ-val növeli a projekt futamidejét. Például, a B tevékenység időtartamának Δ nappal való növekedése a projekt időtartamának Δ nappal való növekedését idézi elő (feltéve persze, hogy az aktuális bázis optimális marad).

34. ÁBRA
A Widgetco feladat számítógépes megoldása

```
MIN      X6 - X1
FELTÉVE, HOGY
       2) - X1 + X3 >=  6
       3) - X1 + X2 >=  9
       4) - X3 + X5 >=  8
       5) - X3 + X4 >=  7
       6)   X5 - X4 >=  10
       7)   X6 - X5 >=  12
       8)   X3 - X2 >=  0


    AZ OPTIMUMOT A 7. LÉPÉSBEN ÉRTÜK EL

         CÉLFÜGGVÉNYÉRTÉK

1)          38.0000000

VÁLTOZÓ           ÉRTÉK        REDUKÁLT KÖLTSÉG
       X6       38.000000         0.000000
       X1        0.000000         0.000000
       X3        9.000000         0.000000
       X2        9.000000         0.000000
       X5       26.000000         0.000000
       X4       16.000000         0.000000

   SOR       HIÁNY VAGY TÖBBLET     ÁRNYÉKÁR
       2)        3.000000         0.000000
       3)        0.000000        -1.000000
       4)        9.000000         0.000000
       5)        0.000000        -1.000000
       6)        0.000000        -1.000000
       7)        0.000000        -1.000000
       8)        0.000000        -1.000000

ITERÁCIÓK SZÁMA =       7
```

A projekt lerövidítése

Gyakran előfordul, hogy a projektnek hamarabb véget kell érnie, mint amennyi a kritikus út hossza. Tegyük fel például, hogy a Widgetco vezetésének meggyőződése szerint csak akkor lehetnek sikeresek, ha a 3-as termék a versenytárs termékét megelőzve kerül a piacra. A Widgetco tudja, hogy a vetélytárs terméke 26 nap múlva megjelenik a piacon, az ő 3-as terméküknek tehát 25 napon belül készen kell lennie. Mivel a 6. példában a kritikus út hossza 38 nap, elengedhetetlen, hogy pótlólagos erőforrások bevetésével megpróbálják 25 napra leszorítani a határidőt. Mindezt persze a lehető legkisebb költséggel szeretnék elérni. Ilyen esetekben a lineáris programozás gyakran segíthet.

Tegyük fel, hogy pótlólagos erőforrások bevetésével a Widgetco bármelyik tevékenység időtartamát akár 5 nappal is le tudja rövidíteni. A 14. táblázat mutatja, hogy mennyibe kerül az egyes tevékenységek hosszát egy-egy nappal megkurtítani. Vezessük be az A, B, C, D, E és F változókat:

14. TÁBLÁZAT

A	B	C	D	E	F
10$	20$	3$	30$	40$	50$

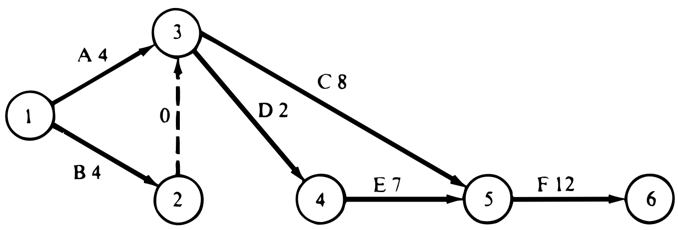
$$\begin{aligned}
A &= \text{azon napok száma, amennyivel az A tevékenységet lerövidítjük}\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
F &= \text{azon napok száma, amennyivel az F tevékenységet lerövidítjük}\\
x_j &= \text{a } j \text{ esemény bekövetkezésének időpontja}
\end{aligned}$$

Ekkor a Widgetcónak a következő LP-t kell megoldania:

$$\begin{aligned}
\min z &= 10A+20B+3C+30D+40E+50F &&\\
\text{f.h.}\quad A &\le 5 &&\\
B &\le 5 &&\\
C &\le 5 &&\\
D &\le 5 &&\\
E &\le 5 &&\\
F &\le 5 &&\\
x_2 &\ge x_1+9-B && ((1,2)\text{ él feltétel})\\
x_3 &\ge x_1+6-A && ((1,3)\text{ él feltétel})\\
x_5 &\ge x_3+8-C && ((3,5)\text{ él feltétel})\\
x_4 &\ge x_3+7-D && ((3,4)\text{ él feltétel})\\
x_5 &\ge x_4+10-E && ((4,5)\text{ él feltétel})\\
x_6 &\ge x_5+12-F && ((5,6)\text{ él feltétel})\\
x_3 &\ge x_2+0 && ((2,3)\text{ él feltétel})\\
x_6-x_1 &\le 25 &&\\
& A,B,C,D,E,F \ge 0, x_j \text{ előjelkötetlen}
\end{aligned}$$

Az első hat feltétel miatt egyik tevékenységet sem fogjuk 5 napnál többel lerövidíteni. Mint korábban is, a következő hét feltétel biztosítja, hogy a j esemény csak az i esemény bekövetkezése, és az (i,j) tevékenység befejeződése után következhet be. Például, a B tevékenység (az $(1,2)$ él) időtartama most 9 – B, a kapcsolódó feltétel tehát $x_2 \ge x_1 + (9-B)$. Az $x_6 - x_1 \le 25$ feltétel garantálja, hogy a projekt nem tart tovább mint a kívánt 25 nap. A célfüggvény a tevékenységek lerövidítésének összköltsége. Az LP egy optimális megoldása: $z = 390\$, x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 4, x_4 = 6, x_5 = 13, x_6 = 25, A = 2, B = 5, C = 0, D = 5, E = 3,$ $F = 0$. A 35. ábra mutatja a B, A, D és E tevékenységek adott értékű lerövidítése utáni projekt-hálózatot. Ellenőrizze az olvasó, hogy itt az A, B, D, E és F kritikus tevékenységek, továbbá, hogy az 1–2–3–4–5–6, illetve az 1–3–4–5–6 utak a kritikus utak (mindegyik hossza 25). Tehát a projekt időtartama 390$ költséggel szorítható le a kívánt 25 napra.

35. ÁBRA
A tevékenységek időtartama az összenyomás után



PERT: Program kiértékelési és felülvizsgálati technika

A CPM feltételezi, hogy az egyes tevékenységek időtartama nagy biztonsággal ismert. Ez a feltétel számos esetben nyilvánvalóan nem teljesül. A CPM-nek ezt a hiányosságát kísérli meghaladni a PERT azzal, hogy az egyes tevékenységek időtartamát valószínűségi változónak tekinti. A PERT az egyes tevékenységekkel kapcsolatban a következő három adatot igényli a projekt vezetőjétől:

a = a tevékenység időtartamának becslése a legkedvezőbb feltételek esetén

b = a tevékenység időtartamának becslése a legkedvezőtlenebb feltételek esetén

m = a tevékenység időtartamának legvalószínűbb értéke

Jelölje $\mathbf{T}_{ij}$ (a valószínűségi változók vastagon szedettek) az (i,j) tevékenység időtartamát. A PERT feltételezi, hogy a $\mathbf{T}_{ij}$-k béta eloszlásúak. A béta eloszlás pontos definíciójánál számunkra érdekesebb az, hogy vele sokféle valószínűségi változót lehet közelíteni, beleértve negatív ferdeségű, pozitív ferdeségű és szimmetrikus eloszlásúakat is. Ha a $\mathbf{T}_{ij}$ béta eloszlást követ, megmutatható, hogy a várható értéke, illetve a varianciája a következőképpen becsülhető:

$$E(\mathbf{T}_{ij}) = \frac{a+4m+b}{6} \tag{4}$$

$$\operatorname{var}\mathbf{T}_{ij} = \frac{(b-a)^2}{36}. \tag{5}$$

A PERT feltételezi továbbá, hogy a tevékenységek időtartamai egymástól független valószínűségi változók. Ekkor a projekt-hálózatban egy út időtartamának (ami persze szintén egy valószínűségi változó) a várható értéke és a varianciája a következő:

$$\sum_{(i,j)\in\text{út}} E(\mathbf{T}_{ij}) = \text{az utat alkotó tevékenységek várható összhossza} \tag{6}$$

$$\sum_{(i,j)\in\text{út}} \operatorname{var}\mathbf{T}_{ij} = \text{az utat alkotó tevékenységek hosszainak összvarianciája} \tag{7}$$

Jelölje a **CP** valószínűségi változó a CPM által talált kritikus út tevékenységeinek összidőtartamát. A PERT feltételezi, hogy a CPM által talált kritikus út kellően sok tevékenységből áll ahhoz, hogy alkalmazhassuk a centrális határeloszlás tételt, és megállapítsuk, hogy a

$$\mathbf{CP} = \sum_{(i,j)\,\in\,\text{kritikus út}} \mathbf{T}_{ij}$$

valószínűségi változó közelítőleg normális eloszlású. Ekkor a (4)–(7) összefüggések alapján válaszolni tudunk a projekt egy adott határidőig történő befejezésének valószínűségére vonatkozó kérdésekre. Tegyük fel például, hogy a 6. példa tevékenységeire a 15. táblázatban szereplő a,b és m becsléseket kapjuk. Ekkor a (4) és (5) alapján

$$E(\mathbf{T}_{12}) = \frac{\{5+13+36\}}{6} = 9 \qquad \operatorname{var}\mathbf{T}_{12} = \frac{(13-5)^2}{36} = 1.78$$

$$E(\mathbf{T}_{13}) = \frac{\{2+10+24\}}{6} = 6 \qquad \operatorname{var}\mathbf{T}_{13} = \frac{(10-2)^2}{36} = 1.78$$

$$E(\mathbf{T}_{35}) = \frac{\{3+13+32\}}{6} = 8 \qquad \operatorname{var}\mathbf{T}_{35} = \frac{(13-3)^2}{36} = 2.78$$

$$E(\mathbf{T}_{34}) = \frac{\{1+13+28\}}{6} = 7 \qquad \operatorname{var}\mathbf{T}_{34} = \frac{(13-1)^2}{36} = 4$$

15. TÁBLÁZAT a, b és m a Widgetco tevékenységeire

Tevékenység	a	b	m
$(1,2)$	5	13	9
$(1,3)$	2	10	6
$(3,5)$	3	13	8
$(3,4)$	1	13	7
$(4,5)$	8	12	10
$(5,6)$	9	15	12

$$E(\mathbf{T}_{45}) = \frac{\{8+12+40\}}{6} = 10 \qquad \operatorname{var}\mathbf{T}_{45} = \frac{(12-8)^2}{36} = 0.44$$
$$E(\mathbf{T}_{56}) = \frac{\{9+15+48\}}{6} = 12 \qquad \operatorname{var}\mathbf{T}_{56} = \frac{(15-9)^2}{36} = 1.$$

Természetesen, mivel a $(2,3)$ él egy fiktív él,

$$E(\mathbf{T}_{23}) = \operatorname{var}\mathbf{T}_{23} = 0.$$

Vegyük észre, hogy a tevékenységek várható értékei megegyeznek azokkal az időtartamokkal, amelyekre a CPM az 1–2–3–4–5–6 kritikus utat találta meg (31. ábra). A (6) és (7) alapján

$$E(\mathbf{CP}) = 9+0+7+10+12 = 38$$
$$\operatorname{var}\mathbf{CP} = 1.78+0+4+0.44+1 = 7.22.$$

A **CP** szórása tehát $(7.22)^{1/2} = 2.69$.

Feltételezve, hogy a **CP** normális eloszlású, válaszolni tudunk olyan kérdésekre, mint például: mi a valószínűsége annak, hogy a projekt 35 nap alatt befejeződik? Szükséges még egy feltevés: *A projekt tevékenységeinek időtartamára bármilyen értékek adódjanak is, az 1–2–3–4–5–6 kritikus út lesz.* Ekkor annak a valószínűsége, hogy a projekt 35 nap alatt befejeződik, egyszerűen $P(\mathbf{CP} \leq 35)$. Standardizálás után a **CP** feltételezett normális eloszlásából következően azt kapjuk, hogy

$$P(\mathbf{CP} \leq 35) = P\left(\frac{\mathbf{CP}-38}{2.69} \leq \frac{35-38}{2.69}\right) = P(\mathbf{Z} \leq -1.12) = .13,$$

ahol az $F(-1.12) = .13$ értéket a standard normális eloszlás táblázatából olvastuk ki. A PERT szerint tehát 13% az esélye annak, hogy a projekt 35 nap alatt befejeződik.

A PERT alkalmazásának akadályai

A PERT alkalmazását több akadály is nehezítheti:

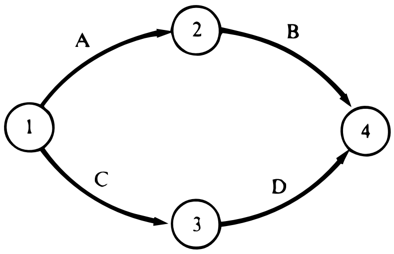
1. Nehéz meggyőződni arról, hogy a tevékenységek időtartamai egymástól tényleg függetlenek.

2. A tevékenységek időtartamai esetleg nem béta eloszlásúak.

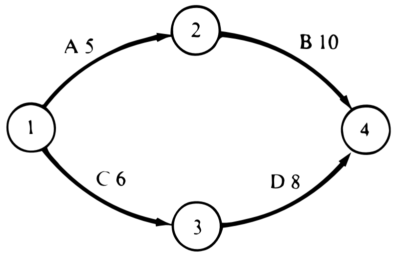
3. Esetleg nem megalapozott az a feltevés, hogy a várható időtartamokra alkalmazott CPM által talált kritikus út mindig kritikus út marad.

Az utolsó a legkomolyabb akadály. A 6. példa valószínűségi elemzése során például feltételeztük, hogy az 1–2–3–4–5–6 mindig kritikus út lesz. Ugyanakkor, ha az A tevékenység jelentős mértékben elnyúlik, a B tevékenység pedig lerövidül, az 1–3–4–5–6 válhat az egyetlen kritikus úttá.

36. ÁBRA Projekt-hálózat a PERT akadályainak szemléltetésére



37. ÁBRA A hálózat, amennyiben mindegyik tevékenység időtartama *m*



Nézzük a következő konkrétabb példát arra a tényre, hogy (a tevékenységek időtartamának bizonytalansága miatt) a projekt befejezésének tényleges időpontját nem a várható időtartamokra alkalmazott CPM által talált kritikus út adja meg. Tekintsük a 36. ábrán látható egyszerű projekt-hálózatot. Tegyük fel, hogy a 16. táblázatbeli a, b és m értékek mindegyik tevékenység esetén azonos $\frac{1}{3}$ valószínűséggel következhetnek be. Ha a tényleges időtartamoknak a várható időtartamok adódnak, a 37. ábrán látható hálózatot kapjuk. Ebben az 1–2–4 a kritikus út. Előfordulhat azonban, hogy az 1–3–4 a kritikus út. Amennyiben például a B időtartama a legkedvezőbb becslés (6 nap), a többi tevékenységé pedig az m szerint alakul, az 1–3–4 a kritikus út ebben a hálózatban. Feltéve, hogy a négy tevékenység időtartama egymástól független valószínűségi változók, elemi számolás után (lásd a 11. feladatot) kapjuk, hogy $\frac{10}{27}$ valószínűséggel az 1–3–4 az egyedüli kritikus út, $\frac{15}{27}$ valószínűséggel az 1–2–4 az egyedüli kritikus út, és $\frac{2}{27}$ valószínűséggel az 1–2–4 és az 1–3–4 is kritikus út. A 17. táblázat mutatja, hogy ebben a példában melyik tevékenység milyen valószínűséggel kritikus. Óvatosaknak kell tehát lennünk, amikor egy tevékenységet kritikusnak minősítünk.

16. TÁBLÁZAT
a, b és m értékek a 36. ábrához

Tevékenység	a	b	m
A	1	9	5
B	6	14	10
C	5	7	6
D	7	9	8

17. TÁBLÁZAT
Annak a valószínűsége, hogy az egyes élek egy kritikus úton vannak

Tevékenység	Valószínűség
A	$\frac{17}{27}$
B	$\frac{17}{27}$
C	$\frac{12}{27}$
D	$\frac{12}{27}$

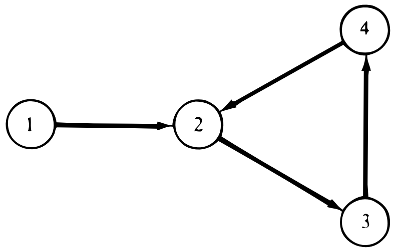
A PERT helyett a Monte Carlo szimuláció (lásd 21. fejezet) is használható annak meghatározására, hogy mennyi a kritikus út időtartamának várható értéke és varianciája, valamint, hogy az egyes tevékenységek milyen valószínűséggel kritikus tevékenységek.

Feladatok

A csoport

1. Milyen problémát okozna, ha a 38. ábra egy projekt-hálózat egy részét mutatná?

38. ÁBRA Az 1. feladat hálózata



2. Egy vállalat egy olyan termék gyártását készíti elő, amelyet három részből (A, B és C) szerelnek össze. Azzal számolnak, hogy 5 hetet vesz igénybe a három alkotóelem megtervezése és összeszerelésük mikéntjének kidolgozása. Az A gyártásának időigényét 4 hétre, a B-ét 5 hétre, a C-ét pedig 3 hétre becsülik. Elkészülte után az A részt tesztelni kell, ez 2 hétbe telik. Az összeszerelési folyamat ezután a következő: egybeépítik az A és B részeket (2 hét), majd hozzárögzítik a C részt (1 hét). Végül a terméket 1 hétig tesztelik. Rajzolja meg a projekt-hálózatot és határozza meg a kritikus utat, valamint az egyes tevékenységek tűrés- és mozgáshatárát! Írja fel a kritikus út hosszának meghatározására alkalmas LP-t is!

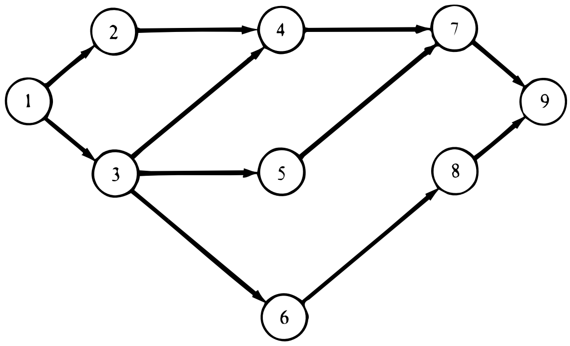
A 3. és 4. feladatokban a kritikus út meghatározásakor tegye fel, hogy $m =$ a tevékenység időtartama.

3. Tekintsük a 39. ábrabeli projekt-hálózatot. Az egyes tevékenységekre vonatkozó a, b és m becsléseket a 18. táblázat tartalmazza. Határozza meg a kritikus utat, valamint az egyes tevékenységek tűrés- és mozgáshatárát! Mennyi a valószínűsége, hogy a projekt 40 nap alatt befejeződik? Írja fel a kritikus út hosszának meghatározására alkalmas LP-t is!

18. TÁBLÁZAT

Tevékenység	a	b	m
(1,2)	4	8	6
(1,3)	2	8	4
(2,4)	1	7	3
(3,4)	6	12	9
(3,5)	5	15	10
(3,6)	7	18	12
(4,7)	5	12	9
(5,7)	1	3	2
(6,8)	2	6	3
(7,9)	10	20	15
(8,9)	6	11	9

39. ÁBRA A 3. feladat hálózata



4. Egy rockkoncert szervezőjének a 19. táblázatban felsorolt teendői vannak (minden időtartam napban értendő).

(a) Rajzolja meg a projekt-hálózatot!

(b) Határozza meg a kritikus utat!

(c) Ha a szervező 99% eséllyel június 30-ig kész akar lenni minden előkészülettel, mikor kell elkezdeni a koncert helyszínének keresését?

(d) Írja fel a kritikus út hosszának meghatározására alkalmas LP-t is!

19. TÁBLÁZAT

Tevékenység	Leírás	Közvetlen előzmények	a	b	m
A	Helyszín keresése	—	2	4	3
B	Mérnökök toborzása	A	1	3	2
C	Előzenekar biztosítása	A	2	10	6
D	Rádió- és tv-hirdetések előkészítése	C	1	3	2
E	Jegyárusítás megszervezése	A	1	5	3
F	Hangosítás előkészítése	B	2	4	3
G	Plakátok nyomtatása	C	3	7	5
H	Szállítás megszervezése	C	0.5	1.5	1
I	Próbák	F, H	1	2	1.5
J	Utolsó simítások	I	1	3	2

5. Tekintsük egy faház építésének (egyszerűsített) tevékenységlistáját (20. táblázat).

(a) Rajzolja meg a projekt-hálózatot, keresse meg a kritikus utat, határozza meg az egyes tevékenységek tűrés- és mozgáshatárát!

(b) Tegyük fel, hogy további munkások felfogadásával a tevékenységek lerövidíthetők. A 21. táblázat mutatja, hogy maximum hány nappal csökkenthető egy tevékenység időtartama, valamint hogy a rövidítés mennyibe kerül naponta. Írja fel azt az LP-t, amely alkalmas a minimális többletköltség meghatározására akkor, ha 20 nap alatt kell a háznak elkészülnie!

20. TÁBLÁZAT

Tevékenység	Leírás	Közvetlen előzmények	Időtartam (nap)
A	Alapozás	—	5
B	Falak, mennyezet	A	8
C	Tetőfedés	B	10
D	Villanyszerelés	B	5
E	Nyílászárók	B	4
F	Külső burkolat	E	6
G	Festés	C, F	3

21. TÁBLÁZAT

Tevékenység	Az időtartam csökkentésének költsége naponta ($)	Az időtartam csökkentésének maximuma (nap)
Alapozás	30	2
Falak, mennyezet	15	3
Tetőfedés	20	1
Villanyszerelés	40	2
Nyílászárók	20	2
Külső burkolat	30	3
Festés	40	1

6. A Horizon Cable társaság néhány izgalmas csatornával ki akarja bővíteni a kábel tv-szolgáltatását Kisvárosban. A teendőket a 22. táblázat tartalmazza.

22. TÁBLÁZAT

Tevékenység	Leírás	Közvetlen előzmények	Időtartam (hét)
A	Csatornák kiválasztása	—	2
B	Bővítés engedélyeztetése az önkormányzattal	A	4
C	Jelerősítők megrendelése	B	3
D	Új parabola üzembe helyezése	B	2
E	Jelerősítők üzembe helyezése	C, D	10
F	Számlázási rendszer átalakítása	B	4

(a) Rajzolja meg a projekt-hálózatot, keresse meg a kritikus utat, határozza meg az egyes tevékenységek tűrés- és mozgáshatárát!

(b) Írja fel azt az LP-t, amely alkalmas a kritikus út meghatározására!

7. Egy vállalat auditálásának első fázisában a könyvvizsgáló cégnek először „meg kell tanulnia” az ügyfelét. Ez a folyamat a 23. táblázatban felsorolt tevékenységeket jelenti.

(a) Rajzolja meg a projekt-hálózatot, keresse meg a kritikus utat, határozza meg az egyes tevékenységek tűrés- és mozgáshatárát! Írja fel azt az LP-t is, amely alkalmas a kritikus út meghatározására!

(b) Tegyük fel, hogy a projektnek 30 nap alatt be kell fejeződnie. Bármelyik tevékenység hossza rövidíthető, a költségeket a 24. táblázat tartalmazza. Írjon fel egy olyan LP-t, amely alkalmas a minimális többletköltség meghatározására!

24. TÁBLÁZAT

Tevékenység	A tevékenység lerövidítésének költsége $/nap	A tevékenység lerövidítésének maximuma (nap)
A	100	3
B	80	4
C	60	5
D	70	2
E	30	4
F	20	4
G	50	4

8. A 40. ábrán látható számítógépes outputból meghatározható az 5. feladatbeli kritikus út. Használja az outputot a következőkre:

(a) Rajzolja meg a projekt-diagramot!

(b) Határozza meg a kritikus út hosszát és a kritikus tevékenységeket!

9. Magyarázza meg, hogy egy tevékenység mozgáshatára miért nem haladhatja meg a tevékenység tűréshatárát!

10. Egy projekt akkor ér véget, ha az A–E tevékenységek mindegyike befejeződik. Az előzményeket a 25. táblázat mutatja. Rajzolja meg a megfelelő projekt-diagramot! (*Útmutatás:* Ne sértse meg a 4. szabályt!)

25. TÁBLÁZAT

Tevékenység	Előzmények
A	—
B	A
C	A
D	B
E	B, C

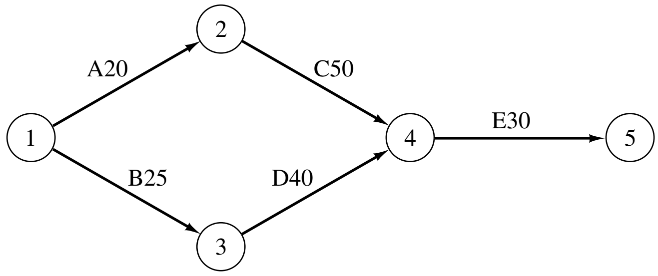
23. TÁBLÁZAT

Tevékenység	Leírás	Közvetlen előzmények	Időtartam (nap)
A	A vizsgálat feltételeinek meghatározása	—	3
B	Az auditálhatóság kockázatának felbecslése	A	6
C	A tranzakció-típusok és hibalehetőségek azonosítása	A	14
D	A rendszer leírása	C	8
E	A rendszerleírás verifikálása	D	4
F	A belső ellenőrzés értékelése	B, E	8
G	Az auditálás menetének megtervezése	F	9

40. ÁBRA
Számítógépes output a 8. feladathoz

```
MIN      X6 - X1
FELTÉVE, HOGY
       2) - X1 + X2 >=  5
       3) - X2 + X3 >=  8
       4) - X3 + X4 >=  4
       5) - X3 + X5 >=  10
       6) - X4 + X5 >=  6
       7)   X6 - X3 >=  5
       8)   X6 - X5 >=  3


   AZ OPTIMUMOT A 6. LÉPÉSBEN ÉRTÜK EL

        CÉLFÜGGVÉNYÉRTÉK

 1)         26.0000000

VÁLTOZÓ           ÉRTÉK       REDUKÁLT KÖLTSÉG
       X6        26.000000        0.000000
       X1         0.000000        0.000000
       X2         5.000000        0.000000
       X3        13.000000        0.000000
       X4        17.000000        0.000000
       X5        23.000000        0.000000

   SOR       HIÁNY VAGY TÖBBLET     ÁRNYÉKÁRAK
       2)         0.000000       -1.000000
       3)         0.000000       -1.000000
       4)         0.000000       -1.000000
       5)         0.000000        0.000000
       6)         0.000000       -1.000000
       7)         8.000000        0.000000
       8)         0.000000       -1.000000

AZ ITERÁCIÓK SZÁMA =       6
```

41. ÁBRA



11. Határozza meg, hogy a 36. ábrában az 1–2–4, illetve az 1–3–4 utak milyen valószínűséggel kritikus utak!

12. A 26. táblázatbeli adatok alapján **(a)** rajzolja meg a megfelelő projekt-hálózatot, és **(b)** határozza meg a kritikus utat!

26. TÁBLÁZAT

Tevékenység	Közvetlen előzmények	Időtartam (nap)
A	—	3
B	—	3
C	—	1
D	A, B	3
E	A, B	3
F	B, C	2
G	D, E	4
H	E	3

13. A kormányzat egy szuperszámítógép építését határozta el. Amint a számítógép tervezése (T) kész, kiválasztható a helyszín (H), a számítógép gyártója (GY) és az üzemeltető személyzet (Ü). A helyszín kiválasztása után kezdődhet az építkezés (É). A számítógép gyártása (SZ) és az üzemeltetési kézikönyv elkészítése (K) csak a gyártó kiválasztása után kezdődhet. Ha az üzemeltető személyzet kiválasztása megtörtént, és a kézikönyv is elkészült, kezdődhet az operátorok betanítása (O). A számítógép installálása (I) azonnal kezdődhet, ha az épület és a számítógép is elkészült. Ezután a számítógép működőképes, és ha a személyzet is felkészült, indulhat a próbaüzem. Rajzolja meg a megfelelő projekt-hálózatot!

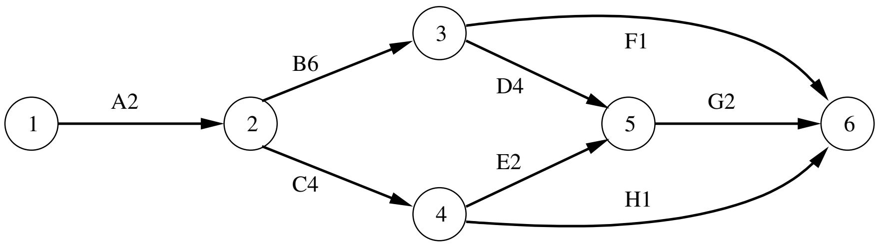
14. Tekintsük a 41. ábrán lévő projekt-diagramot. A projektnek 90 nap alatt el kell készülnie. Minden egyes tevékenység zsugorítható, de csak legfeljebb 5 nappal. A költségeket a 27. táblázat tartalmazza.
Írjon fel egy olyan LP-t, amelyiknek a megoldása alapján minimalizálható a projekt 90 napon belüli befejezésének költsége!

27. TÁBLÁZAT

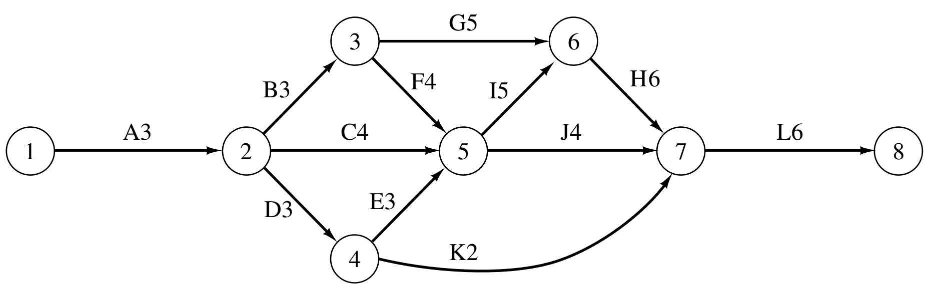
Tevékenység	A tevékenység lerövidítésének költsége $/nap
A	300
B	200
C	350
D	260
E	320

15–16. A 42., illetve a 43. ábrán látható projekt-hálózatban határozza meg a kritikus utat és az egyes tevékenységek tűrés- és mozgáshatárát!

42. ÁBRA



43. ÁBRA



7.5. Minimális költségű hálózati folyam problémák

A szállítási, hozzárendelési, összetett szállítási feladatok, a legrövidebb út, maximális folyam és CPM problémák mind speciális esetei a minimális költségű hálózati folyam problémának (MKHFP). Egy MKHFP megoldható a szállítási szimplex egy általánosításával, az úgynevezett **hálózati szimplex** módszerrel.

Az MKHFP definíciójában legyen

x_{ij} = az i csúcsból a j csúcsba az (i,j) élen keresztül haladó folyam mennyisége

b_i = az i csúcs nettó kibocsátása (kiáramlás−beáramlás)

c_{ij} = az i csúcsból a j csúcsba az (i,j) élen
keresztül küldött egységnyi folyam szállítási költsége

L_{ij} = az (i,j) élen átmenő folyam alsó korlátja
(ha nincs alsó korlát, legyen $L_{ij} = 0$)

U_{ij} = az (i,j) élen átmenő folyam felső korlátja
(ha nincs felső korlát, legyen $U_{ij} = \infty$)

Ezekkel a jelölésekkel az MKHFP így írható fel:

$$\min \sum_{\text{minden élre}} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{f.h.} \quad \sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} = b_i \qquad \text{(a hálózat minden } i \text{ csúcsára)} \tag{8}$$

$$L_{ij} \le x_{ij} \le U_{ij} \qquad \text{(a hálózat minden } (i,j) \text{ élére)} \tag{9}$$

A (8) feltétel biztosítja, hogy az i csúcsból kimenő nettó folyam egyenlő legyen b_i-vel. A (8) feltételeket **folyam-egyensúly egyenleteknek** hívjuk. A (9) feltételek garantálják, hogy a folyam eleget tesz mindegyik élkapacitás megkötésnek. Minden eddigi példánkban $L_{ij} = 0$ volt.

Először megmutatjuk, hogy a szállítási és a maximális folyam problémák speciális esetei a minimális költségű hálózati folyam problémának.

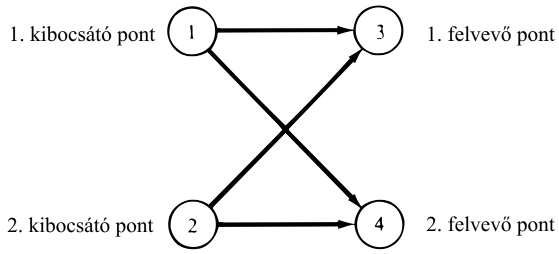
A szállítási probléma MKHFP feladatként

Vegyük a 28. táblázattal megadott szállítási feladatot. Az 1-es és 2-es csúcsok a küldő pontok, a 3-as és 4-es csúcsok pedig a fogadó pontok. Ekkor $b_1 = 4, b_2 = 5, b_3 = -6$ és $b_4 = -3$. Az ehhez a szállítási feladathoz tartozó hálózat élei az $(1,3)$, $(1,4)$, $(2,3)$ és $(2,4)$ élek (44. ábra). A kapcsolódó LP a 29. táblázatban található.

28. TÁBLÁZAT

1	2	4 (1-es csúcs)
3	4	5 (2-es csúcs)
6 (3-as csúcs)	3 (4-es csúcs)	

44. ÁBRA
A szállítási feladat MKHFP feladatként



29. TÁBLÁZAT
A szállítási feladat MKHFP alakban

min $z = x_{13} + 2x_{14} + 3x_{23} + 4x_{24}$						
x_{13}	x_{14}	x_{23}	x_{24}		**J.o.**	**Feltétel**
1	1	0	0	$=$	4	1-es csúcs
0	0	1	1	$=$	5	2-es csúcs
-1	0	-1	0	$=$	-6	3-as csúcs
1	-1	0	-1	$=$	-3	4-es csúcs
minden változó nemnegatív						

Az első két feltétel a küldő pontokhoz, a második két feltétel pedig (-1-gyel való szorzás után) a fogadó pontokhoz tartozó egyenlet. Mivel ebben a szállítási feladatban élkapacitási megszorítás nincsen, a folyam-egyensúly egyenletek az egyedüli feltételek. Megjegyezzük, hogy nem tudtuk volna átfogalmazni a feladatot, ha nem lett volna kiegyensúlyozott. Ha ugyanis az összkibocsátás meghaladja az összbefogadást, nem tudjuk megmondani az egyes csúcsok nettó kibocsátását. Szükséges lehet tehát egy fiktív csúcspont bevezetése ahhoz, hogy egy szállítási (vagy egy átszállítási) feladatot MKHFP alakban felírhassunk.

A maximális folyam probléma MKHFP feladatként

Nézzük hogyan lehet egy maximális folyam feladatot mint egy minimális költségű hálózati folyam feladatot megadni. Tekintsük a 6. ábra hálózatát, és keressük a forrásból a nyelőbe vezető maximális folyamot. A nyelőt a forrással összekötő a_0 él beiktatása után már $b_{so} = b_1 = b_2 = b_3 = b_{si} = 0$. Ekkor a maximális folyam feladat LP feltételei a 30. táblázatban látható módon írhatók fel.

Az első öt feltétel a hálózat csúcsaihoz tartozó folyam-egyensúly egyenletek, az utolsó hat feltétel pedig az élkapacitási megkötések. Mivel a mesterséges élen átmenő folyamra nincs felső korlát, az a_0 élhez nem tartozik élkapacitás feltétel.

Bármely MKHFP-ben a folyam-egyensúly egyenleteknek megvan a következő fontos tulajdonságuk: *Mindegyik x_{ij} változónak $+1$ az együtthatója az i csúcshoz tartozó folyam-egyensúly egyenletben, -1 az együtthatója a j csúcshoz tartozó folyam-egyensúly egyenletben, és* 0 *az együtthatója az összes többi folyam-egyensúly egyenletben.* Például, egy szállítási feladatban az x_{ij} együtthatója $+1$ az i küldő csúcshoz tartozó folyam-egyensúly egyenletben, -1 a j fogadó csúcshoz tartozó folyam-egyensúly egyenletben, és 0 az összes többi folyam-egyensúly egyenletben. Egy LP feltételei ránézésre esetleg nem mutatják, hogy valójában egy hálózat folyam-egyensúly egyenletei, okos transzformációval viszont mégis kiderülhet, hogy az LP ekvivalens egy MKHFP-vel (lásd az alfejezet végén a 6. feladatot).

Egy MKHFP megoldható a szállítási szimplex egy általánosításával, az úgynevezett hálózati szimplex algoritmussal (7.7. alfejezet). Miként a szállítási szimplex módszerben, a báziscserék a hálózati szimplexben is csak összeadásból és kivonásból állnak. Ezen tény

30. TÁBLÁZAT
A maximális folyam feladat MKHFP alakja

min $z = -x_0$									
$x_{so,1}$	$x_{so,2}$	x_{13}	x_{12}	$x_{3,si}$	$x_{2,si}$	x_0		**J.o.**	**Feltétel**
1	1	0	0	0	0	-1	$=$	0	*so* csúcs
-1	0	1	1	0	0	0	$=$	0	1-es csúcs
0	-1	0	-1	0	1	0	$=$	0	2-es csúcs
0	0	-1	0	1	0	0	$=$	0	3-as csúcs
0	0	0	0	-1	-1	1	$=$	0	*si* csúcs
1	0	0	0	0	0	0	$\leq$	2	$(so,1)$ él
0	1	0	0	0	0	0	$\leq$	3	$(so,2)$ él
0	0	1	0	0	0	0	$\leq$	4	$(1,3)$ él
0	0	0	1	0	0	0	$\leq$	3	$(1,2)$ él
0	0	0	0	1	0	0	$\leq$	1	$(3,si)$ él
0	0	0	0	0	1	0	$\leq$	2	$(2,si)$ él
minden változó nemnegatív									

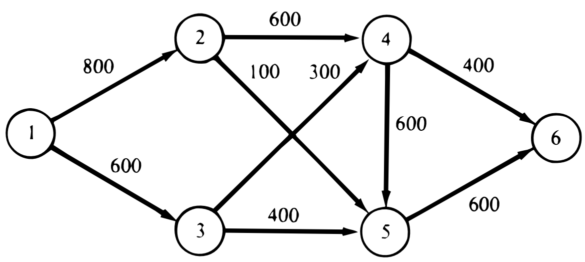
alapján bizonyítható, hogy amennyiben mindegyik b_i és mindegyik élkapacitás egész szám, az MKHFP optimális bázismegoldásában is minden változó egészértékű. A hálózati szimplex számítógépes implementációi gyorsan meg tudnak oldani akár hatalmas méretű hálózati feladatokat. Megoldottak például 5000 csúcsot és 600 000 élt tartalmazó MKHFP-ket 10 percnél rövidebb idő alatt. A hálózati szimplex számítógépes implementációi inputként csak a hálózat csúcsainak és éleinek listáját, az élekhez tartozó c_{ij}-ket és élkapacitásokat, és a csúcsokhoz tartozó b_i-ket igényli. Mivel a hálózati szimplex nagyon hatékony és könnyen használható, kimondottan fontos, hogy egy LP-t, amennyiben lehetséges, MKHFP-ként írjunk fel.

Az alfejezet végén egy egyszerű forgalomirányítási feladatot fogalmazunk meg MKHFP feladatként.

7. PÉLDA

A 45. ábrán látható hálózat 1-es csúcsába óránként kb. 900 gépkocsi érkezik és a 6-os csúcsba szeretne eljutni. A menetidőt az egyes éleken a 31. táblázat mutatja. A 45. ábrán

45. ÁBRA
A forgalomirányítási példa MKHFP feladatként



az egyes élek feletti számok az adott útszakasz óránkénti áteresztőképességét adják meg. Fogalmazzunk meg egy MKHFP-t, amely minimalizálja az egy óra alatt az 1-es csúcsból induló összes autó 6-os csúcsig vett menetidejének az összegét.

Megoldás Legyen

$$x_{ij} = \text{az } i\text{-ből a } j\text{-be tartó útszakaszon egy óra alatt áthaladó autók száma.}$$

Ekkor minimalizálni akarjuk a

31. TÁBLÁZAT Menetidők a forgalomirányítási példában

Él	Menetidő (perc)
$(1,2)$	10
$(1,3)$	50
$(2,5)$	70
$(2,4)$	30
$(5,6)$	30
$(4,5)$	30
$(4,6)$	60
$(3,5)$	60
$(3,4)$	10

$$z = 10x_{12} + 50x_{13} + 70x_{25} + 30x_{24} + 30x_{56} + 30x_{45} + 60x_{46} + 60x_{35} + 10x_{34}$$

célfüggvényt. Adott, hogy $b_1 = 900, b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0$ és $b_6 = -900$ (nem vezetjük most be a 6-osból az 1-esbe vezető mesterséges élt). A keresett MKHFP feltételei a 32. táblázatban találhatók.

Számítógépes programmal megoldva azt kapjuk, hogy a 7. példa optimális megoldása: $x_{12} = 700$, $x_{13} = 200$, $x_{24} = 600$, $x_{25} = 100$, $x_{34} = 200$, $x_{45} = 400$, $x_{46} = 400$, $x_{56} = 500$. A menetidők összege pedig $z = 95\,000$ perc.

32. TÁBLÁZAT A forgalomirányítási példa MKHFP alakja

x_{12}	x_{13}	x_{24}	x_{25}	x_{34}	x_{35}	x_{45}	x_{46}	x_{56}		**J.o.**	**Feltétel**
1	1	0	0	0	0	0	0	0	$=$	900	1-es csúcs
-1	0	1	1	0	0	0	0	0	$=$	0	2-es csúcs
0	-1	0	0	1	1	0	0	0	$=$	0	3-as csúcs
0	0	-1	0	-1	0	1	1	0	$=$	0	4-es csúcs
0	0	0	-1	0	-1	-1	0	1	$=$	0	5-ös csúcs
0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	$=$	-900	6-os csúcs
1	0	0	0	0	0	0	0	0	$\leq$	800	$(1,2)$ él
0	1	0	0	0	0	0	0	0	$\leq$	600	$(1,3)$ él
0	0	1	0	0	0	0	0	0	$\leq$	600	$(2,4)$ él
0	0	0	1	0	0	0	0	0	$\leq$	100	$(2,5)$ él
0	0	0	0	1	0	0	0	0	$\leq$	300	$(3,4)$ él
0	0	0	0	0	1	0	0	0	$\leq$	400	$(3,5)$ él
0	0	0	0	0	0	1	0	0	$\leq$	600	$(4,5)$ él
0	0	0	0	0	0	0	1	0	$\leq$	400	$(4,6)$ él
0	0	0	0	0	0	0	0	1	$\leq$	600	$(5,6)$ él

minden változó nemnegatív

Feladatok

Figyelem: Egy MKHFP felírásához fel kell rajzolni a megfelelő hálózatot, és meghatározni a c_{ij}, a b_i értékeket, valamint az élkapacitásokat.

A csoport

1. Fogalmazza meg a 2. ábra 1-es csúcsából a 6-os csúcsba vezető legrövidebb út meghatározásának feladatát MKHFP feladatként. (*Útmutatás:* A legrövidebb út egy olyan út, amelyen minimális költséggel lehet 1 egységnyi folyamot az 1-es csúcsból a 6-osba eljuttatni.)

2. **(a)** Adja meg a 7.4. alfejezet 6. feladatában a kritikus út hosszának meghatározására használt LP duálját!

(b) Igazolja, hogy az (a)-beli válasz egy MKHFP!

(c) Magyarázza meg, hogy az (a)-beli LP optimális célfüggvényértéke miért a leghosszabb út hossza a projekthálózatban az 1-es és a 6-os csúcsok között! Hogyan támasztja ez alá azt a korábbi állításunkat, hogy egy kritikus út egy projekt-hálózatban a kezdés csúcsból a befejezés csúcsba vezető leghosszabb út?

3. A Fordco az autókat Detroitban és Dallasban gyártja. A detroiti üzem legfeljebb 6500 autó, a dallasi legfeljebb 6000 autó előállítására képes. Detroitban egy autó elkészítésének költsége 2000$, Dallasban 1800$. Az autókat három városba kell szállítani: az 1-es városba 5000 darabot, a 2-es városba 4000 darabot, a 3-as városba pedig 3000 darabot. A 33. táblázat mutatja egy autó szállításának költségét ($-ban) az üzemek és a városok között. Bármelyik üzemből bármelyik városba legfeljebb 2200 autó küldhető. Adjon meg egy MKHFP-t, amellyel minimalizálható az igények kielégítésének összköltsége!

33. TÁBLÁZAT

	Hová		
Honnan	**1-es város**	**2-es város**	**3-as város**
Detroit	800	600	300
Dallas	500	200	200

4. A DataCorp számítógépeket készít, évente legfeljebb 400-at Bostonban és legfeljebb 300-at Raleigh-ban. Los Angelesbe 400 számítógépet, Austinba 300 számítógépet kell küldeni. Egy számítógép termelési költsége Bostonban 800$, Raleigh-ban 900$. A számítógépeket repülőgéppel küldik, esetleg Chicagón keresztül. A 34. táblázat tartalmazza egy számítógép szállításának költségét ($-ban) az egyes városok között.

(a) Adjon meg egy MKHFP-t, amellyel minimalizálható az igények kielégítésének összes (termelési + szállítási) költsége!

(b) Hogyan módosítaná a modellt, ha Chicagón keresztül 200-nál több számítógép nem küldhető? (*Útmutatás:* Bővítse az (a)-beli hálózatot egy csúccsal és egy éllel!)

34. TÁBLÁZAT

	Hová		
Honnan	**Chicago**	**Austin**	**Los Angeles**
Boston	80	220	280
Raleigh	100	140	170
Chicago	—	40	50

5. Az Oilco olajkútjai San Diego, illetve Los Angeles közelében vannak. A San Diego melletti mezőből napi legfeljebb 500 000 hordó, a Los Angeles melletti mezőből napi legfeljebb 400 000 hordó olaj termelhető ki. A nyersolajat a dallasi vagy a houstoni finomítóba küldik (tegyük fel, hogy mindkét finomítónak korlátlan kapacitása van). Dallasban 100 000 hordó finomítása 700$-ba, Houstonban 900$-ba kerül. A finomított olajat Chicagóba, illetve New Yorkba szállítják: Chicagóba 400 000 hordónyit, New Yorkba 300 000 hordónyit naponta. A 35. táblázat mutatja, hogy mennyi 100 000 hordó (nyers vagy finomított) olaj szállítási költsége ($-ban) az egyes helyszínek között.

(a) Adjon meg egy MKHFP-t, amellyel minimalizálható az igények kielégítésének összes költsége!

(b) Hogyan módosítaná a modellt, ha egyik finomító sem lenne képes napi 500 000 hordónál több olaj feldolgozására?

35. TÁBLÁZAT

	Hová			
Honnan	**Dallas**	**Houston**	**New York**	**Chicago**
Los Angeles	300	110	—	—
San Diego	420	100	—	—
Dallas	—	—	450	550
Houston	—	—	470	530

B csoport

6. A következő három hónapban a Workcónak munkásokra van szüksége: az első hónapban 20 munkásra; a második hónapban 16-ra; a harmadik hónapban pedig 25 munkásra. Jelenleg a Workcónak egyetlen munkása sincs. Egy munkás felvétele 100$-ba, elbocsátása 50$-ba kerül, a havi bére pedig 140$. A Workco olyan felvételi-elbocsátási stratégiát szeretne, amellyel minimalizálni tudja a következő három (vagy általánosabban, a következő n) hónap alatt felmerülő költségeit. Megmutatjuk, hogy a Workco problémája megfogalmazható egy MKHFP-ként.

(a) Legyen

x_{ij} = az i-edik hónap elején felvett és a $j-1$-edik hónap végéig dolgozó munkások száma

(ha $j = 4$, a munkást sosem bocsátják el). Magyarázza meg, hogy a következő LP optimális megoldása miért adja meg a minimális költségű személyzeti stratégiát:

$$
\begin{aligned}
\min z = {} & 50(x_{12}+x_{13}+x_{23}) \\
& +100(x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{23}+x_{24}+x_{34}) \\
& +140(x_{12}+x_{23}+x_{34}) \\
& +280(x_{13}+x_{24})+420x_{14}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{f.h.} & (1) & x_{12}+x_{13}+x_{14} \qquad\qquad -e_1 = 20 \\
& & \qquad\qquad\qquad \text{(1. hónap feltétel)} \\
& (2) & x_{13}+x_{14}+x_{23}+x_{24}-e_2 = 16 \\
& & \qquad\qquad\qquad \text{(2. hónap feltétel)} \\
& (3) & x_{14}+x_{24}+x_{34} \qquad\qquad -e_3 = 25 \\
& & \qquad\qquad\qquad \text{(3. hónap feltétel)} \\
& & \qquad x_{ij} \geq 0
\end{array}
$$

(b) Az (a)-beli LP feltételeit cseréljük ki az alábbiakra:

i. Feltétel (1);

ii. Feltétel (2) − Feltétel (1);

iii. Feltétel (3) − Feltétel (2);

iv. − (Feltétel (3)).

Magyarázza meg, hogy az (i)−(iv) feltételekkel rendelkező LP miért egy MKHFP!

(c) Rajzolja fel a (b)-beli MKHFP hálózatát!

7.[4] A Braneast Airlines meg akarja határozni, hogy hány repülőgépet használjon, és milyen járatokat működtessen a Boston–New York–Washington légifolyosón. A Braneast a 36. táblázatban felsorolt napi járatok bármelyikét működtetheti. Egy repülőgép üzemeltetésének fixköltsége 800$/nap. Adjon meg egy MKHFP-t, amellyel a Braneast maximalizálni tudja a napi profitját! (*Útmutatás:* A hálózat mindegyik csúcsa egy várost és egy időpontot reprezentál, az élek pedig a járatokat és annak a lehetőségét, hogy egy repülőgép egy vagy két óráig helyben marad. A repülőgépek üzemeltetésének fixköltségét a következőképpen jeleníthetjük meg: bevezetünk egy élt a Boston 19.00 csúcsból a Boston 9.00 csúcsba, egy másik élt a New York 19.00 csúcsból a New York 9.00 csúcsba, és egy harmadik élt pedig a Washington 19.00 csúcsból a Washington 9.00 csúcsba.)

8. A Daisymay embereket szállít New York, Philadelphia és Washington között. A kisbuszoknak egy napba telik az út bármelyik két város között. Egy kisbusz egy napi költsége: 1000$, ha teli van és megy; 800$, ha üres és megy; 700$, ha teli van, de egy városban marad; és 400$, ha üres és egy városban marad. A 37. táblázat tartalmazza, hogy a hét melyik

[4]Glover et al. (1982) alapján.

36. TÁBLÁZAT

Indul		Érkezik		A járat	A járat
város	**időpont**	**város**	**időpont**	**bevétele ($)**	**változó költsége ($)**
N.Y.	9.00	Wash.	10.00	900	400
N.Y.	14.00	Wash.	15.00	600	350
N.Y.	10.00	Bos.	11.00	800	400
N.Y.	16.00	Bos.	17.00	1200	450
Wash.	9.00	N.Y.	10.00	1100	400
Wash.	15.00	N.Y.	16.00	900	350
Wash.	10.00	Bos.	12.00	1500	700
Wash.	17.00	Bos.	19.00	1800	900
Bos.	10.00	N.Y.	11.00	900	500
Bos.	14.00	N.Y.	15.00	800	450
Bos.	11.00	Wash.	13.00	1100	600
Bos.	15.00	Wash.	17.00	1200	650

napján hány kisbusznyi utast kell elszállítani. Hétfőn például, 2 kisbuszt kell küldeni Philadelphiából New Yorkba (ahova kedden érkeznek meg). Szintén 2 kisbuszt kell küldeni Philadelphiából Washingtonba pénteken (tegyük fel, hogy hétfőn kell megérkezniük). Adjon meg egy MKHFP-t, amivel minimalizálható a heti szállítási követelmények kielégítésének költsége! Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a szállítási követelmények hetente ismétlődnek. Ekkor elfogadhatónak tűnik a feltevés, hogy bármelyik kisbusz ugyanabban a városban kezdi a hetet, ahol az előző hetet kezdte.

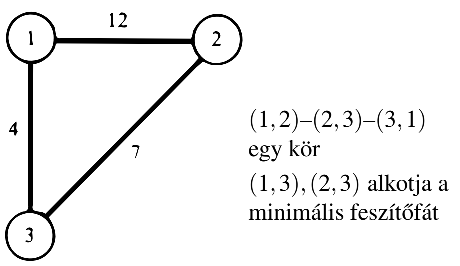
37. TÁBLÁZAT

Út	Hétfő	Kedd	Szerda	Csütörtök	Péntek
Phil.–N.Y.	2			1	
Phil.–Wash.		2			2
N.Y.–Phil.	3	2			
N.Y.–Wash.			2	2	
N.Y.–Phil.	1				
Wash.–N.Y.			1		1

7.6. A minimális feszítőfa probléma

Tegyük most fel, hogy a hálózat mindegyik (i, j) éle irányítatlan, tehát csak azt jelzi, hogy az i és j csúcsok között valamilyen összeköttetés van. Tegyük fel továbbá, hogy mindegyik (i, j) élnek adott a (nemnegatív) hossza. Például, ha egy hálózat csúcspontjai egy egyetem számítógépeit jelentik, az (i, j) él reprezentálhatja az i és j számítógépeket közvetlenül összekötő kábelt. Sok alkalmazásban arra vagyunk kíváncsiak, hogyan lehet az élek minimális összhosszúságú halmazával az összes csúcsot (közvetlenül vagy közvetetten) összekötni. Az világos, hogy az élek egy ilyen halmaza nem tartalmazhat kört (amit gyakran huroknak is neveznek). A 46. ábrán például az élek $(1,2)$–$(2,3)$–$(3,1)$ sorozata egy kör.

46. ÁBRA
Példa körre és minimális feszítőfára



DEFINÍCIÓ

> Egy n csúcsponttal rendelkező hálózatban a **feszítőfa** az éleknek egy olyan $n-1$ elemű halmaza, amely összeköttetést teremt bármely két csúcs között és nem tartalmaz kört.

A 46. ábrán három feszítőfa van:

1. az $(1,2)$ és $(2,3)$ élek halmaza,

2. az $(1,2)$ és $(1,3)$ élek halmaza,

3. az $(1,3)$ és $(2,3)$ élek halmaza.

A hálózat egy feszítőfája egy **minimális feszítőfa**, ha benne az élhosszak összege minimális. A 46. ábrán az $(1,3)$ és $(2,3)$ élek alkotják az egyetlen minimális feszítőfát.

A következő módszer (MFF algoritmus) segítségével meghatározható egy minimális feszítőfa.

1. lépés Válasszuk ki a hálózat egy tetszőleges i csúcsát. Keressük meg az i-hez legközelebbi csúcsot (nevezzük j-nek). Az i és j csúcsok egy összefüggő $C = \{i, j\}$ halmazt alkotnak, az (i, j) él pedig a minimális feszítőfa eleme lesz. A hálózat többi (a C-beli csúcsokkal a kiválasztott élek által nem összekötött) csúcsának halmazát jelöljük C'-vel.

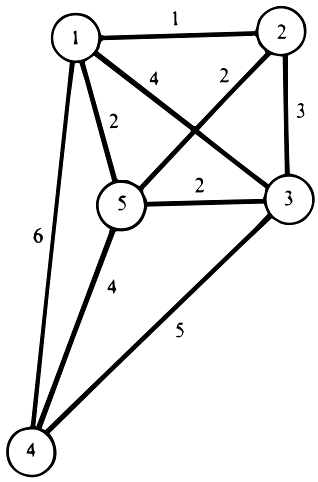
2. lépés Válasszuk ki a C' egy olyan n elemét, amelyik a legközelebb van a C valamelyik m eleméhez. Ekkor az (m,n) él a minimális feszítőfa eleme lesz. Aktualizáljuk a C és C' halmazokat. Mivel az n csúcs most már a kiválasztott éleken keresztül összeköttetésben van a C-beli csúcsokkal, az n-et áttesszük a C'-ből a C-be.

3. lépés Addig ismételjük az előző lépést, amíg minden csúcs át nem kerül C-be. A kiválasztott élek alkotják a minimális feszítőfát. Több legközelebbi csúcs (több legrövidebb C és C' közötti él) esetén tetszőlegesen választhatunk.

Mivel mindegyik lépésben a legrövidebb élt választjuk a C csúcshalmaz bővítésére, az algoritmust gyakran „mohó” algoritmusnak tituláljuk. Figyelemre méltó tény, hogy az egyes lépésekben követett „mohó” választás sosem fog később egy „rossz él” választására kényszeríteni bennünket. A 8. fejezet 1. példájában látni fogjuk, hogy bizonyos típusú problémákra egy lokálisan mohó algoritmus nem feltétlenül eredményez optimális megoldást. A fenti algoritmus igazolása az alfejezet végén lévő 3. feladat tárgya. A 8. példa szemlélteti az algoritmust.

8. PÉLDA Egy egyetemnek öt miniszámítógépe van, ezeket egy föld alatti kábelhálózattal kell összekötni. A 47. ábra mutatja a géptermek közötti távolságokat. Ha két csúcs között nem megy él, az azt jelenti, hogy a két helyszín között kábel nem fektethető. Minimálisan milyen hosszúságú kábelre van szükség?

47. ÁBRA Az egyetemi számítógépek közötti távolságok



Megoldás A 47. ábrán akarunk egy minimális feszítőfát találni az MFF algoritmus segítségével.

1. iteráció Kiválasztjuk (mondjuk) az 1-es csúcsot. Az 1-eshez legközelebbi csúcs a 2-es. Most $C = \{1,2\}, C' = \{3,4,5\}$, és az $(1,2)$ él lesz a minimális feszítőfa egyik éle (lásd a 48.a ábrát).

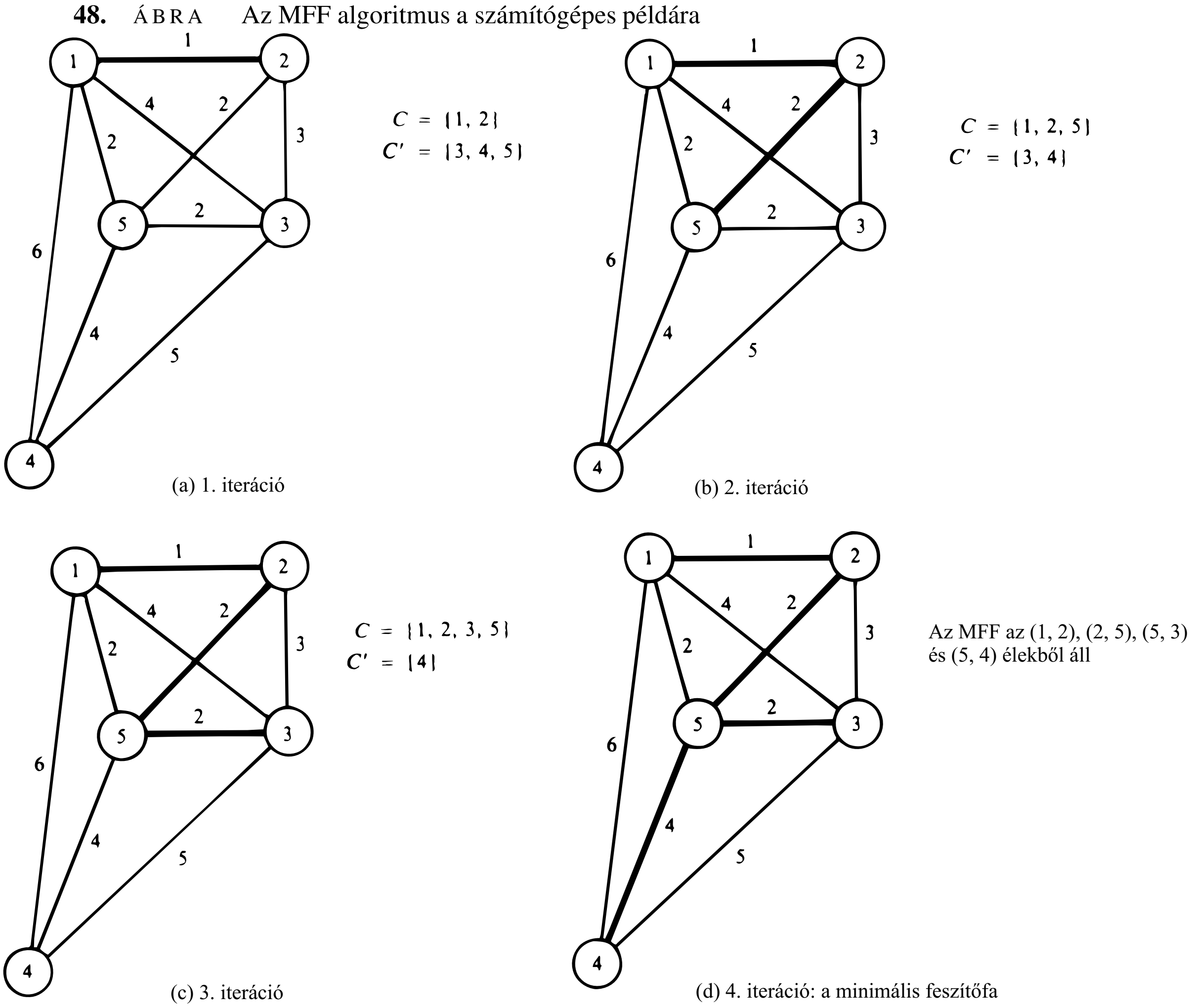
2. iteráció Az 5-ös csúcs van a C-hez legközelebb. Mivel az 5-ös két egység távolságra van az 1-es és a 2-es csúcstól is, a minimális feszítőfába válaszhatjuk akár a $(2,5)$, akár az $(1,5)$ élt. Mondjuk, a $(2,5)$ élt választjuk. Ekkor $C = \{1,2,5\}$ és $C' = \{3,4\}$ (48.b ábra).

3. iteráció Mivel a 3-as csúcs van a C-hez, mégpedig az 5-ös csúcshoz a legközelebb, az $(5,3)$ él lesz a minimális feszítőfa eleme. Most $C = \{1,2,3,5\}$ és $C' = 4$ (48.c ábra).

4. iteráció Mivel a 4-es csúcshoz a C-beliek közül az 5-ös van a legközelebb, az $(5,4)$ élt vesszük be a minimális feszítőfába (49.d ábra).

A minimális feszítőfa tehát az $(1,2),(2,5),(5,3)$ és $(5,4)$ élekből áll. Az élek összhossza a minimális feszítőfában $1+2+2+4 = 9$ egység.

48. ÁBRA Az MFF algoritmus a számítógépes példára



(a) 1. iteráció

(b) 2. iteráció

(c) 3. iteráció

(d) 4. iteráció: a minimális feszítőfa

Feladatok

A csoport

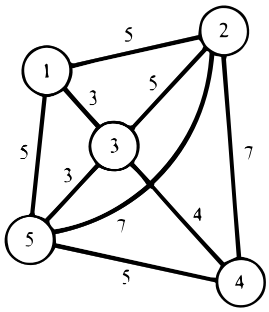
1. Az Indiana állambeli Gary, Fort Wayne, Evansville, Terre Haute és South Bend városok közötti távolságokat (mérföldben) adja meg a 38. táblázat. Olyan úthálózatot kell építeni, amelyik összeköttetést biztosít ezen városok között. Tegyük fel, hogy politikai okok miatt Gary és Fort Wayne, valamint South Bend és Evansville között nem épülhet út. Minimálisan milyen összhosszúságú úthálózatra van szükség?

2. Kisváros öt kerületből áll. A polgármester telefonvonalakat akar kiépíttetni úgy, hogy a hálózatban mind az öt kerület elérhető legyen. A 49. ábra mutatja a kerületek közötti távolságokat. Minimálisan milyen hosszúságú telefonvonal-hálózat szükséges? Tegyük fel, hogy az 1-es és 4-es kerületek között közvetlen kapcsolat nem létesíthető.

38. TÁBLÁZAT

	Gary	Fort Wayne	Evans-ville	Terre Haute	South Bend
Gary	—	132	217	164	58
Fort Wayne	132	—	290	201	79
Evansville	217	290	—	113	303
Terre Haute	164	201	113	—	196
South Bend	58	79	303	196	—

49. ÁBRA A 2. feladat hálózata



B csoport

3. Ebben a feladatban megmagyarázzuk, hogy miért működik az MFF algoritmus. Legyen

S = minimális feszítőfa

C_t = az összekötött csúcsok halmaza az MFF algoritmus t-edik iterációja után

C'_t = a C_t-be nem tartozó csúcsok halmaza

A_t = a kiválasztott élek halmaza az MFF algoritmus t-edik iterációja után

Tételezzük fel, hogy az MFF algoritmus nem egy minimális feszítőfát határoz meg. Ekkor biztosan van egy olyan t, hogy minden A_{t-1}-beli él az S-nek is eleme, de az MFF algoritmus t-edik iterációjában választott él (jelölje a_t) nem tartozik az S-hez. Az S-ben kell legyen egy olyan a'_t él, amelyik egy C_{t-1}-beli és egy C'_{t-1}-beli csúcsot köt össze. Mutassa meg, hogy az a'_t élt az a_t élre cserélve, az S-nél rövidebb feszítőfát kapunk! Ez az ellentmondás igazolja, hogy az MFF algoritmus által kiválasztott mindegyik él az S-hez tartozik. Tehát az MFF algoritmus valóban egy minimális feszítőfát eredményez.

4. (a) Egy egyenlő oldalú háromszög csúcspontjaiban egy-egy város helyezkedik el. A Flying Lion Airlines kapcsolódó járatokkal akarja összekötni a három várost. Mi a minimális repülési távolság, amivel ez megoldható?

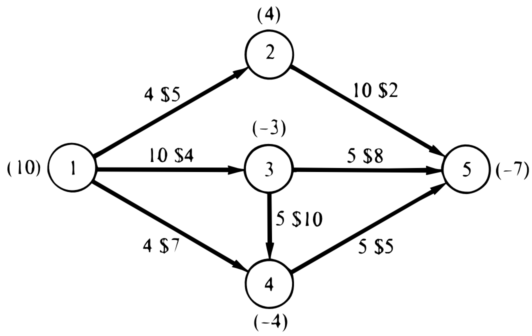
(b) Tegyük fel, hogy a Flying Lion Airlines egy átszállási pontot hoz létre az egyenlő oldalú háromszög középpontjában. Mutassa meg, hogy ekkor a három várost összekötő repülőutak hossza 13%-kal csökkenthető! *(Útmutatás:* Megmutatták, hogy ilyen átszállási pont(ok) beiktatásával az eredeti pontokat összekötő útrendszer összhossza legfeljebb 13%-kal csökkenthető, akárhány eredeti pontot kell is összekötni és akárhány átszállási pontot vezetünk is be.)[5]

[5] Peterson (1990) alapján.

7.7. A hálózati szimplex módszer[6]

Ebben az alfejezetben megmutatjuk, hogy a szimplex algoritmus miként egyszerűsödik le, ha egy MKHFP-re alkalmazzuk. A kényelmesebb tárgyalás kedvéért feltesszük, hogy mindegyik élre $L_{ij} = 0$. Ekkor egy (8)–(9) alakú MKHFP definiálásához szükséges adatok az 50. ábrához hasonlóan grafikusan is megadhatók. Az egy élhez tartozó c_{ij} értéket a \$ szimbólummal különböztetjük meg az él U_{ij} felső korlátjától. A nemnulla kibocsátású csúcsokhoz tartozó b_i értékeket zárójelben tüntetjük fel. Az 50. ábra tehát azt az MKHFP-t definiálja, amelyben $c_{12} = 5, c_{25} = 2, c_{13} = 4, c_{35} = 8, c_{14} = 7, c_{34} = 10, c_{45} = 5$; $b_1 = 10$, $b_2 = 4$, $b_3 = -3$, $b_4 = -4$, $b_5 = -7$; $U_{12} = 4$, $U_{25} = 10, U_{13} = 10, U_{35} = 5, U_{14} = 4, U_{34} = 5, U_{45} = 5$. A hálózati szimplex alkalmazásához $\sum b_i = 0$ kell legyen; ez egy fiktív csúcs beiktatásával általában elérhető.

50. ÁBRA
Egy MKHFP grafikus ábrázolása



Idézzük fel, hogy amikor a szimplex módszerrel egy szállítási feladatot oldottunk meg, a szimplex algoritmus következő alkotóelemei váltak egyszerűbbé: egy lehetséges bázismegoldás (lbm) megadása, egy nembázis változó célfüggvény-sorbeli együtthatójának kiszámítása, és a báziscsere. Nézzük most meg, hogy a szimplex algoritmus ezen alkotóelemei miként egyszerűsödnek le egy MKHFP esetén.

Egy MKHFP lehetséges bázismegoldásai

Hogyan dönthető el, hogy egy MKHFP egy lehetséges megoldása lehetséges bázismegoldás-e (lbm)? Először is vegyük észre, hogy egy MKHFP egy lbm-ében háromféle változó lehet:

1. Bázisváltozó: degeneráció hiányában mindegyik x_{ij} bázisváltozóra $L_{ij} < x_{ij} < U_{ij}$ teljesül; degeneráció esetén elképzelhető, hogy egy x_{ij} bázisváltozó az (i, j) él alsó vagy felső korlátjával egyenlő.

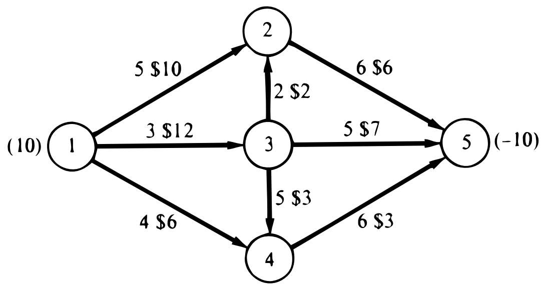
2. Nembázis változó $x_{ij} = U_{ij} =$ az (i, j) él felső korlátja.

3. Nembázis változó $x_{ij} = L_{ij} =$ az (i, j) él alsó korlátja.

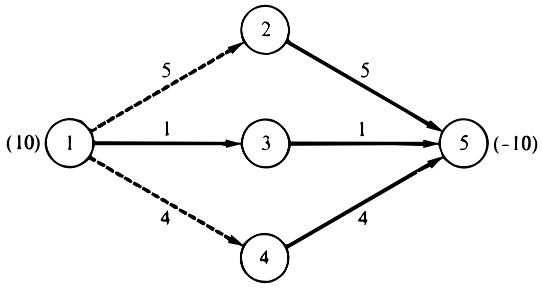
Egy n csúcsponttal rendelkező MKHFP megoldásakor tekintsük az n folyam-megőrzési feltételt, és (később világossá váló okok miatt) hagyjuk figyelmen kívül az élek alsó, ill. felső korlátjait. A szállítási feladathoz hasonlóan, valamely $n-1$ folyam-megőrzési feltétel megoldása egyben megoldása az utolsó folyam-megőrzési feltételnek is, egy ilyen feltételt tehát elhagyhatunk. Ez azt jelenti, hogy egy n-csúcsú MKHFP lbm-ében $n-1$ bázisváltozó van. De hogyan tudjuk eldönteni, hogy a változók (élek) egy $n-1$ elemű halmaza

[6] Ezen alfejezet kihagyása nem szakítja meg a tárgyalás folytonosságát.

51. ÁBRA
Példa egy MKHFP-re



52. ÁBRA
Példa egy lbm-re



lehetséges bázismegoldást határoz-e meg? A változók egy $n-1$ elemű halmaza akkor és csak akkor határoz meg egy lehetséges bázismegoldást, ha a változókhoz tartozó élek a hálózat egy feszítőfáját alkotják. Vegyük például az 51. ábrán látható MKHFP-t. Ennek egy lbm-ét mutatja az 52. ábra. A bázisváltozók: x_{13}, x_{35}, x_{25} és x_{45}. Az $x_{12} = 5$ és $x_{14} = 4$ változók a felső korlátjuknál lévő nembázis változók (az ilyeneket szaggatott élek jelölik). Mivel az $(1,3), (3,5), (2,5)$ és $(4,5)$ élek egy feszítőfát alkotnak (hiszen rajtuk keresztül a gráf minden csúcsa elérhető, ugyanakkor kört nem tartalmaznak), tudjuk, hogy ez egy lbm. Hamarosan látni fogjuk, hogy kisméretű feladatokra egy lbm gyakran próbálkozással is megkapható.

Egy lbm célfüggvénysorának kiszámítása

Hogyan számoljuk ki egy adott lbm esetén egy nembázis változó célfüggvény együtthatóját? Tegyük fel, hogy az 1-es csúcshoz tartozó folyam-megőrzési feltételt hagytuk el. Egy adott lbm esetén legyen $c_{BV}B^{-1} = [y_2 \quad y_3 \quad \cdots \quad y_n]$. Egy x_{ij} változó együtthatója $+1$ az i csúcshoz tartozó feltételben, és -1 a j csúcshoz tartozóban. Ha $y_1 = 0$-t veszünk, az x_{ij} célfüggvénysor együtthatója $\bar{c}_{ij} = y_i - y_j - c_{ij}$. Mivel mindegyik bázisváltozóra $\bar{c}_{ij} = 0$ kell legyen, az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ meghatározásához megoldjuk az

$$y_1 = 0, \quad y_i - y_j = c_{ij} \quad \text{minden bázisváltozóra}$$

lineáris egyenletrendszert. Egy adott lbm-hez tartozó $y_1, y_2, \ldots, y_n$ számokat gyakran az lbm **szimplex szorzóinak** hívják.

Hogyan döntjük el, hogy optimális-e egy lehetséges bázismegoldás? Nyilván akkor optimális egy lbm, ha a z értékét nem tudjuk javítani (csökkenteni) egy nembázis változó értékének megváltoztatásával. Vegyük észre, hogy $\bar{c}_{ij} \leq 0$ akkor és csak akkor, ha az x_{ij} növelése a z-t nem csökkenti. Továbbá, $\bar{c}_{ij} \geq 0$ akkor és csak akkor, ha az x_{ij} csökkentése a z-t nem csökkenti. Ezen észrevételek alapján megmutatható, hogy egy lehetséges bázismegoldás akkor és csak akkor optimális, ha teljesülnek a következők:

1. Ha $x_{ij} = L_{ij}$, az x_{ij} növelése a z-t nem csökkentheti. Tehát ha $x_{ij} = L_{ij}$ és az adott lbm optimális, akkor $\bar{c}_{ij} \leq 0$ kell legyen.

2. Ha $x_{ij} = U_{ij}$, az x_{ij} csökkentése a z-t nem csökkentheti. Tehát ha $x_{ij} = U_{ij}$ és az adott lbm optimális, akkor $\bar{c}_{ij} \geq 0$ kell legyen.

Ha az 1. és 2. feltételek nem teljesülnek, a z javítható (a degenerációtól eltekintve) egy olyan nembázis változó bázisba vonásával amelyik nem teljesíti valamelyik feltételt. Szemléltetésképpen számoljuk ki az 52. ábrán látható lbm esetén a nembázis változók célfüggvény együtthatóit. Az

$$y_1 = 0, \quad y_1 - y_3 = 12, \quad y_2 - y_5 = 6, \quad y_3 - y_5 = 7, \quad y_4 - y_5 = 3$$

egyenletek megoldásából kapjuk, hogy $y_1 = 0, y_2 = -13, y_3 = -12, y_4 = -16$ és $y_5 = -19$. Majd „beárazzuk” a nembázis változókat:

$\bar{c}_{12} = y_1 - y_2 - c_{12} = 0 - (-13) - 10 = 3$
(nembázis változó a felső korlátjánál, teljesíti az optimalitási feltételt)

$\bar{c}_{14} = y_1 - y_4 - c_{14} = 0 - (-16) - 6 = 10$
(nembázis változó a felső korlátjánál, teljesíti az optimalitási feltételt)

$\bar{c}_{32} = y_3 - y_2 - c_{32} = -12 - (-13) - 2 = -1$
(nembázis változó az alsó korlátjánál, teljesíti az optimalitási feltételt)

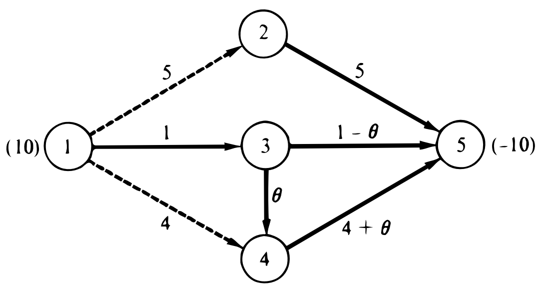
$\bar{c}_{34} = y_3 - y_4 - c_{34} = -12 - (-16) - 3 = 1$
(nembázis változó az alsó korlátjánál, megsérti az optimalitási feltételt)

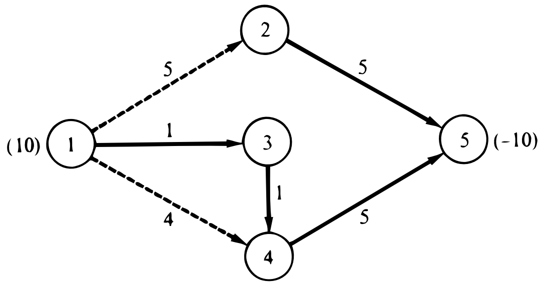
Mivel $\bar{c}_{34} = 1 > 0$, az x_{34} növelése (megengedett, mert az alsó korlátjánál áll) egy egységgel csökkenteni fogja a z-t egy egységgel. A z értéke tehát javítható, ha az x_{34}-et behozzuk a bázisba. Amennyiben egy, a felső korlátjánál álló x_{ij} nembázis változóra $\bar{c}_{ij} < 0$, a z csökkenthető, ha csökkentjük az x_{34}-et és behozzuk a bázisba. Most pedig bemutatjuk, hogy egy MKHFP esetén a báziscsere is majdnem ránézésre elvégezhető.

Báziscsere a hálózati szimplexben

Mint láttuk, az 52. ábrabeli lbm javítható az x_{34} bázisba vonásával. Ha a kapcsolódó $(3,4)$ élt hozzávesszük az aktuális bázisváltozókhoz tartozó élekhez, egy kör keletkezik. Mivel most $x_{34} = 0$, növeljük az alsó korlátjánál álló x_{34}-et θ egységgel. A folyam-megőrzési feltételek meghatározzák, hogy miként módosul a többi változó értéke. Az 53. ábrán látjuk, hogy a $(3,4)$, $(4,5)$ és $(3,5)$ élek alkotják a kört. A báziscsere után a körbe nem tartozó élek változóinak értéke a korábbi marad, de a kört alkotó élek változóinak értéke módosul.

53. ÁBRA
A $(3,4)$, $(4,5)$, $(3,5)$ kör segít behozni az x_{34}-t





54. ÁBRA
Az új lbm a báziscsere után (x_{34} be, x_{35} ki)

Ha $x_{34} = \theta$, a 4-es csúcsba bemenő folyam θ egységgel növekszik, ezért az onnan kimenő folyamnak is növekednie kell θ egységgel, azaz $x_{45} = 4 + \theta$. Ez θ egységgel megnöveli az 5-ös csúcsba az egyik élen bemenő folyamot, ezért a másik bemenő élen ugyanennyivel kell csökkenteni a bemenő folyamot, azaz $x_{35} = 1 - \theta$. A báziscsere változatlanul hagyja az összes többi változó értékét. Az $x_{34} = \theta$ értéket persze a lehető legmagasabbra akarjuk emelni. Addig emelhetjük az x_{34} értékét, amíg valamelyik bázisváltozó el nem éri az alsó vagy a felső korlátját. Esetünkben, a $(3,4)$ él miatt $\theta \leq 5$; a $(3,5)$ él miatt $1 - \theta \geq 0$ vagy $\theta \leq 1$; a $(4,5)$ él miatt pedig $4 + \theta \leq 6$ vagy $\theta \leq 2$. Vagyis, $\theta = 1$ a legjobb, amit elérhetünk. Az a bázisváltozó kerül ki a bázisból, amelyik először éri el az alsó vagy a felső korlátját (döntetlen esetén tetszőlegesen választhatunk). Most az x_{35} kerül ki a bázisból. Az új lehetséges bázismegoldás az 54. ábrán látható. Az aktualizált bázisváltozókhoz tartozó feszítőfa élei: $(1,3), (3,4), (4,5)$ és $(2,5)$. Kiszámoljuk a nembázis változók célfüggvénysor együtthatóit. Először is megoldjuk az

$$y_1 = 0, \quad y_1 - y_3 = 12, \quad y_3 - y_4 = 3, \quad y_2 - y_5 = 6, \quad y_4 - y_5 = 3$$

egyenletrendszert. Azt kapjuk, hogy $y_1 = 0, y_2 = -12, y_3 = -12, y_4 = -15$ és $y_5 = -18$.

Ekkor a felső korlátjuknál lévő nembázis változók célfüggvénysor együtthatói:

$$\bar{c}_{12} = 0 - (-12) - 10 = 2 \quad \text{és} \quad \bar{c}_{14} = 0 - (-15) - 6 = 9$$

Az alsó korlátjuknál lévő nembázis változók célfüggvénysor együtthatói pedig:

$$\bar{c}_{32} = -12 - (-12) - 2 = -2 \quad \text{és} \quad \bar{c}_{35} = -12 - (-18) - 7 = -1$$

Mivel mindegyik felső korlátján álló nembázis változóra $\bar{c}_{ij} \geq 0$ és mindegyik alsó korlátján álló nembázis változóra $\bar{c}_{ij} \leq 0$, a jelenlegi lehetséges bázismegoldás optimális. Az 51. ábrabeli MKHFP optimális megoldása tehát

felső korláton álló változók: $x_{12} = 5, \quad x_{14} = 4$
alsó korláton álló változók: $x_{32} = x_{35} = 0$
bázisváltozók: $x_{13} = 1, x_{34} = 1, x_{25} = 5, x_{45} = 5$

A hálózati szimplex módszer összefoglalása

1. lépés Meghatározunk egy kiinduló lbm-et. Az $n - 1$ bázisváltozó egy feszítőfát definiál. Jelezzük a felső korlátjukon álló nembázis változókat szaggatott éllel.

2. lépés Határozzuk meg az $y_1, y_2, \ldots y_n$ szimplex szorzókat az $y_1 = 0, y_i - y_j = c_{ij}$ (minden x_{ij} bázisváltozóra) egyenletrendszerből. A nembázis változókra számoljuk ki a $\bar{c}_{ij} =$

$y_i - y_j - c_{ij}$ célfüggvénysor együtthatókat. Az aktuális lbm optimális, ha $\bar{c}_{ij} \leq 0$ minden $x_{ij} = L_{ij}$ esetén, és $\bar{c}_{ij} \geq 0$ minden $x_{ij} = U_{ij}$ esetén. Ha az lbm nem optimális, válasszuk azt a nembázis változót belépő változónak, amelyik a leginkább sérti az optimalitási feltételeket.

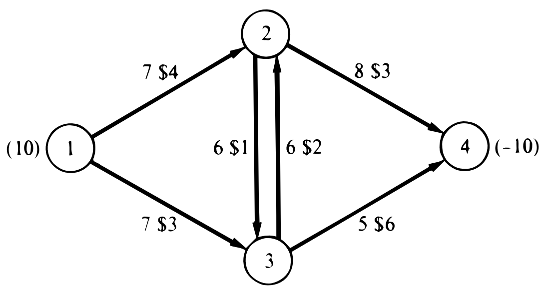
3. lépés Azonosítsuk azt az egyetlen kört, amit a belépő változóhoz tartozó él és az aktuális lbm feszítőfájának bizonyos élei alkotnak. A folyam-megőrzés szabálya alapján határozzuk meg a körbeli változók új értékeit. Az a változó lép ki a bázisból, amelyik először éri el az alsó vagy a felső korlátját a belépő változó értékének a megfelelő irányba történő módosítása során.

4. lépés Az előző lépésben meghatározott kör élein a folyamerősségeket aktualizálva kapjuk az új lbm-et. A 2. lépéssel folytatjuk.

A 9. példán illusztráljuk a hálózati szimplex módszert.

9. PÉLDA A hálózati szimplex módszerrel oldjuk meg az 55. ábrabeli MKHFP-t.

55. ÁBRA
Példa a hálózati szimplexre

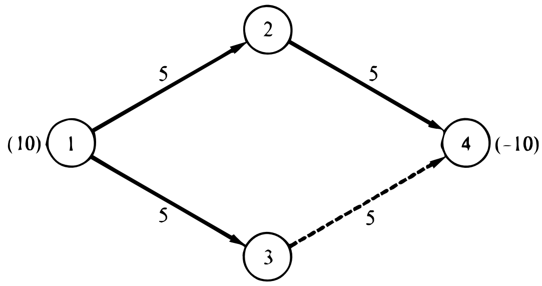


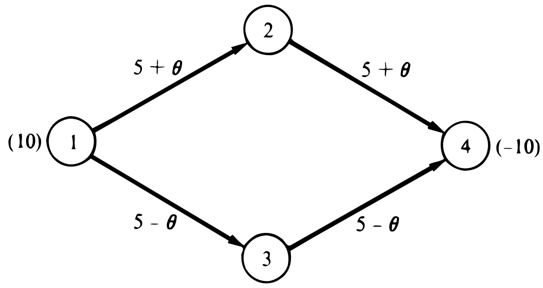
Megoldás Egy lbm egy feszítőfához tartozik (három él, amelyek körmentesen kötik össze az 1, 2, 3 és 4 csúcsokat). A feszítőfához nem tartozó éleken a folyam erősségének választhatjuk az alsó vagy a felső korlátot. Próbálkozással kaphatjuk az 56. ábrán látható lbm-et, aminek a feszítőfája az $(1,2), (1,3)$ és $(2,4)$ élekből áll.

Megoldva az

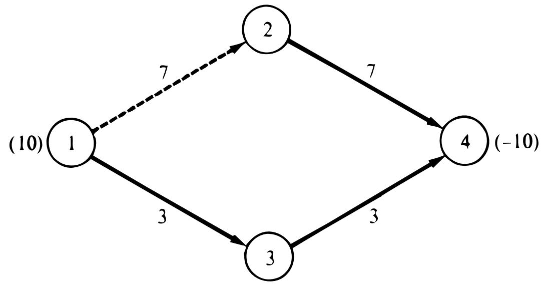
$$y_1 = 0, \quad y_1 - y_2 = 4, \quad y_2 - y_4 = 3, \quad y_1 - y_3 = 3$$

56. ÁBRA
Egy lbm a 9. példában





57. ÁBRA
A kör az x_{34} belépésekor



58. ÁBRA
Az lbm a báziscsere után (x_{12} ki, x_{34} be)

egyenletrendszert azt kapjuk, hogy $y_1 = 0, y_2 = -4, y_3 = -3$ és $y_4 = -7$. A nembázis változók célfüggvénysor együtthatói:

$$\bar{c}_{34} = -3-(-7)-6 = -2 \quad \text{(megsérti az optimalitási feltételt)}$$
$$\bar{c}_{23} = -4-(-3)-1 = -2 \quad \text{(teljesíti az optimalitási feltételt)}$$
$$\bar{c}_{32} = -3-(-4)-2 = -1 \quad \text{(teljesíti az optimalitási feltételt)}$$

Vagyis az x_{34} lép be a bázisba. Ha $x_{34} = 5-\theta$, az 57. ábrán látható kört kapjuk. Az $(1,2)$ él miatt $5+\theta \leq 7$ vagy $\theta \leq 2$; az $(1,3)$ él miatt $5-\theta \geq 0$ vagy $\theta \leq 5$; a $(2,4)$ él miatt $5+\theta \leq 8$ vagy $\theta \leq 3$; a $(3,4)$ él miatt pedig $5-\theta \geq 0$ vagy $\theta \leq 5$. Tehát $\theta = 2$, ekkor x_{12} lép ki a bázisból, mert ő érte el először az egyik (most a felső) korlátját. Az új lbm látható az 58. ábrán.

Az új lbm az $(1,3),(2,4)$ és $(3,4)$ élekből álló feszítőfához tartozik. A szimplex szorzók új értékeit az

$$y_1 = 0, \quad y_1 - y_3 = 3, \quad y_3 - y_4 = 6, \quad y_2 - y_4 = 3$$

egyenletekből kapjuk, mégpedig: $y_1 = 0, y_2 = -6, y_3 = -3, y_4 = -9$. A nembázis változók célfüggvénysor együtthatói:

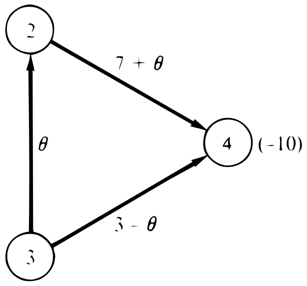
$$\bar{c}_{12} = 0-(-6)-4 = 2 \quad \text{(teljesíti az optimalitási feltételt)}$$
$$\bar{c}_{23} = -6-(-3)-1 = -4 \quad \text{(teljesíti az optimalitási feltételt)}$$
$$\bar{c}_{32} = -3-(-6)-2 = 1 \quad \text{(megsérti az optimalitási feltételt)}$$

Most az x_{32} lép a bázisba, az 59. ábrán látható kört hozva létre. A $(2,4)$ élen $7+\theta \leq 8$ vagy $\theta \leq 1$; a $(3,4)$ élen $3-\theta \geq 0$ vagy $\theta \leq 3$. A $(3,2)$ élen $\theta \leq 6$. Vagyis $\theta = 1$, és x_{24} lép ki a bázisból, mert elérte a felső korlátját. Az új lbm a 60. ábrán látható.

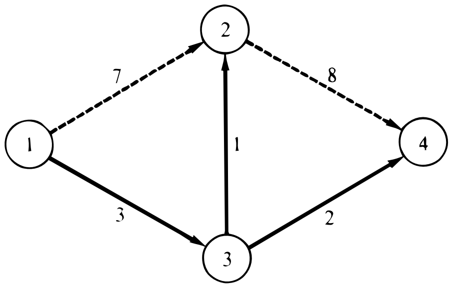
Az aktuális bázismegoldás feszítőfájának élei: $(1,3),(3,2)$ és $(3,4)$. Megoldva az

$$y_1 = 0, \quad y_1 - y_3 = 3, \quad y_3 - y_2 = 2, \quad y_3 - y_4 = 6$$

59. ÁBRA
A kör az x_{32} belépésekor



60. ÁBRA
Az új lbm a báziscsere után (x_{32} be, x_{24} ki)



egyenletrendszert megkapjuk a szimplex szorzók új értékeit: $y_1 = 0, y_2 = -5, y_3 = -3, y_4 = -9$. A nembázis változók célfüggvénysor együtthatói most

$$\bar{c}_{23} = -5 - (-3) - 1 = -3 \qquad \text{(teljesíti az optimalitási feltételt)}$$
$$\bar{c}_{12} = 0 - (-5) - 4 = 1 \qquad \text{(teljesíti az optimalitási feltételt)}$$
$$\bar{c}_{24} = -5 - (-9) - 3 = 1 \qquad \text{(teljesíti az optimalitási feltételt)}$$

Ez a lehetséges bázismegoldás tehát az MKHFP egy optimális megoldása:

bázis változók: $x_{13} = 3, \quad x_{32} = 1, \quad x_{34} = 2$
felső korlátjukon álló nembázis változók: $x_{12} = 7, \quad x_{24} = 8$
alsó korlátjukon álló nembázis változók: $x_{23} = 0.$

Az optimális z érték pedig

$$z = 7(4) + 3(3) + 1(2) + 8(3) + 2(6) = 75\$.$$

Feladatok

A csoport

1. Tekintsük a 2. ábrán az 1-es csúcsból a 6-os csúcsba vezető legrövidebb út feladatot.

(a) Fogalmazza meg a feladatot egy MKHFP-ként!

(b) Keressen egy lbm-et, amelyben x_{12}, x_{24} és x_{46} pozitívak. (*Útmutatás:* Az lbm degenerált lesz.)

(c) A hálózati szimplex módszerrel határozza meg az 1-es csúcsból a 6-os csúcsba vezető legrövidebb utat!

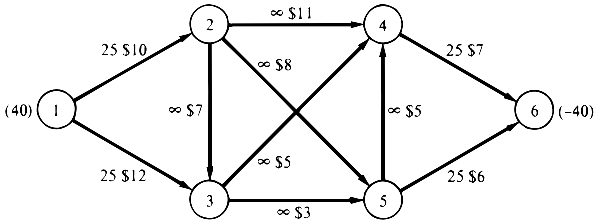
2. Adjon meg egy lbm-et a 61. ábrán látható MKHFP-re!

3. Határozza meg a 62. ábrán látható MKHFP optimális megoldását a 63. ábrán látható lbm-ből kiindulva!

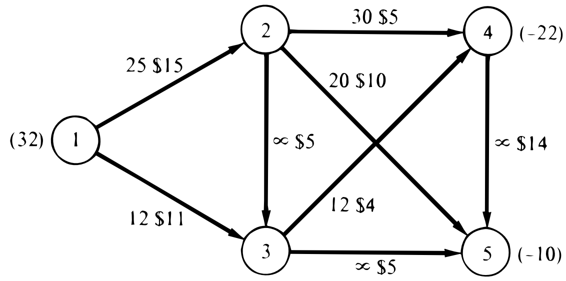
4. Adjon meg egy lbm-et a 64. ábrán látható hálózatra!

5. Határozza meg a 65. ábrán látható MKHFP optimális megoldását a 66. ábrán látható lbm-ből kiindulva!

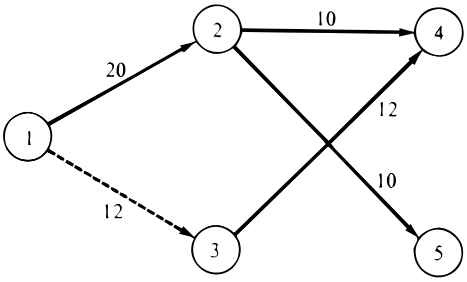
61. ÁBRA



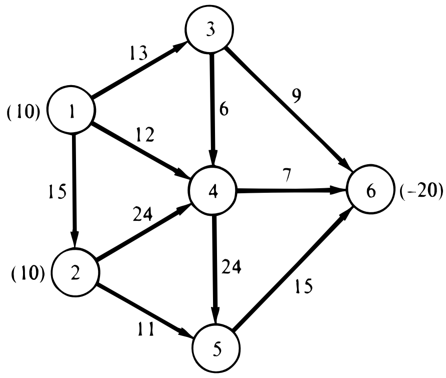
62. ÁBRA



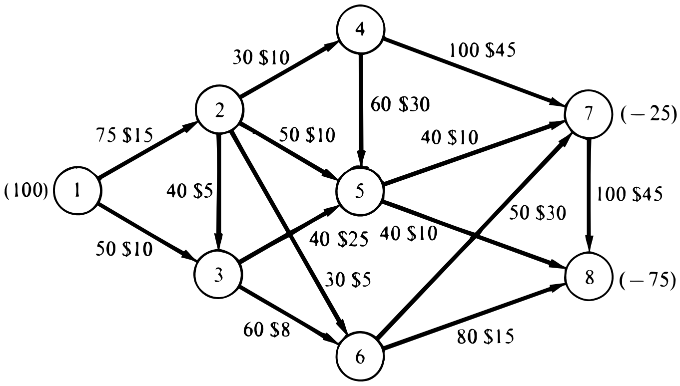
63. ÁBRA



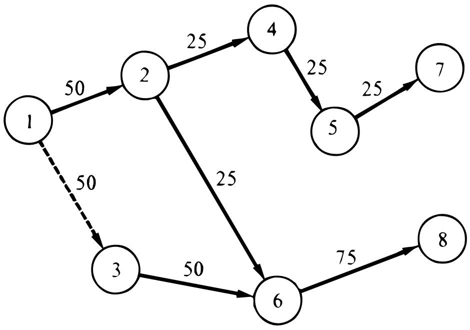
64. ÁBRA



65. ÁBRA



66. ÁBRA



Összefoglalás

Legrövidebb út feladatok

Tegyük fel, hogy meg akarjuk határozni egy nemnegatív hosszúságú éleket tartalmazó hálózatban az 1-es csúcsból az m jelű csúcsba vezető legrövidebb utat.

Dijkstra algoritmusa

1. Az 1-es csúcsot ellátjuk az állandó 0 címkével. Ezután minden olyan i csúcsot, amelybe az 1-ből megy él, ideiglenesen megcímkézünk az $(1,i)$ él hosszával. Minden más csúcs a ∞ ideiglenes címkét kapja. Kiválasztjuk a legkisebb ideiglenes címkével rendelkező csúcsot (vagy tetszőlegesen egyet, ha több van) és címkéjét állandónak minősítjük.

2. Tegyük fel, hogy az i volt a $(k+1)$-edik csúcs, amelyik állandó címkét kapott. Mindegyik ideiglenes címkével ellátott olyan j csúcs címkéjét, amelybe él vezet az i-ből, kicseréljük a j csúcs ideiglenes címkéjének és az (i állandó címkéje $+$ az (i,j) él hossza) összegnek a minimumával. Ezután a legkisebb ideiglenes címkét állandóvá változtatjuk. Folytassuk ezt az eljárást egészen addig, amíg minden csúcs állandó címkét nem kap. Az 1-esből az m jelű csúcsba vezető legrövidebb utat úgy kapjuk meg, hogy az m-ből visszafelé haladva azokat a csúcsokat választjuk, amelyek címkéi közötti különbség pontosan a köztük lévő él hossza. Ha csak az 1-ből az m-be vezető legrövidebb utat akarjuk, abbahagyhatjuk a címkézési eljárást, mihelyst az m jelű csúcs címkéje állandóra változott.

A legrövidebb út probléma összetett szállítási feladatként

Az 1-es csúcsból a j csúcsba vezető legrövidebb utat meghatározhatjuk úgy is, hogy minimalizáljuk egy egységnek az 1-es csúcsból a j csúcsba történő szállításának költségét (a hálózat többi pontja átszállítási pont), ha egy egység szállítási költsége a k csúcsból a k' csúcsba a (k,k') él hossza, ha van ilyen él, és M (egy nagy pozitív szám), ha nincs ilyen él. A 6.6. alfejezethez hasonlóan egy egység szállítási költsége egy csúcsból önmagába nulla.

Maximális folyam feladatok

Egy hálózatban a forrásból a nyelőbe menő maximális folyamot meghatározhatjuk egy lineáris programmal, vagy a Ford–Fulkerson módszerrel.

A maximális folyam meghatározása lineáris programozással

Legyen

$$x_0 = \text{a folyam nagysága a nyelőből a forrásba vezető mesterséges élen}$$

Ekkor a forrásból a nyelőbe menő maximális folyam meghatározásához maximalizáljuk az x_0 változót a következő feltételek mellett:

1. a folyam mindegyik élen nemnegatív, de nem haladhatja meg az él kapacitását,

2. mindegyik csúcsnál a bemenő folyam $=$ a kimenő folyam (folyam-megőrzés).

A maximális folyam meghatározása a Ford–Fulkerson módszerrel

Legyen

$$I = \text{azon élek halmaza, amelyeken a folyam növelhető}$$
$$R = \text{azon élek halmaza, amelyeken a folyam csökkenthető}$$

1. lépés Találjunk egy lehetséges folyamot (a mindegyik élen nulla folyam mindig lehetséges).

2. lépés A következő eljárással keressünk egy címkézett élekből és csúcsokból álló láncot a forrástól a nyelőig. Címkézzük meg a forrást, majd címkézzünk meg csúcsokat és (az a_0 kivételével) éleket a következő szabályok szerint: (1) Ha az x csúcs már kapott címkét, de az y csúcs még nem, és az (x,y) él az I eleme, akkor címkézzük meg az y csúcsot és az (x,y) élt. Ebben az esetben az (x,y) élt **előremenő élnek** hívjuk. (2) Ha az x csúcs már kapott címkét, de az y csúcs még nem, és az (y,x) él az R eleme, akkor címkézzük meg az y csúcsot és az (y,x) élt. Ebben az esetben az (y,x) élt **hátramenő élnek** hívjuk.
Amennyiben a nyelőt nem lehet megcímkézni, a jelenlegi folyam egy maximális folyam; ha a nyelő is kapott címkét, a 3. lépéssel folytatjuk.

3. lépés Ha a forrás és a nyelő közötti címkézett élekből álló lánc kizárólag előremenő élekből áll, akkor mindegyik előremenő élen növeljük a folyam erősségét (megőrizve a folyam lehetségességét), s így a forrásból a nyelőbe menő folyam erősségét. Ha a forrás és a nyelő közötti címkézett élekből álló lánc tartalmaz előre- és hátramenő él(eke)t is, az előremenő éleken növeljük, a hátramenő éleken pedig csökkentjük a folyam erősségét (megőrizve a folyam lehetségességét), s így a forrásból a nyelőbe menő folyam erősségét. Térjünk vissza a 2. lépésre.

A kritikus út módszer (CPM)

Amennyiben mindegyik tevékenység időtartama ismert, a kritikus út módszer (CPM) használható egy projekt időtartamának meghatározására.

Egy AOA projekt-diagram szerkesztésének szabályai

1. Az 1-es csúcs jelzi a projekt kezdetét. Az előzmény nélküli tevékenységeket az 1-es csúcsból kiinduló élekkel jelenítjük meg.

2. Egy a projekt befejezését szimbolizáló ún. befejezés csúcsot is tartalmaznia kell a hálózatnak.

3. Számozzuk úgy a hálózat csúcsait, hogy egy tevékenység végét mutató csúcs sorszáma mindig nagyobb legyen, mint a tevékenység kezdetét mutató csúcsé (ennek a szabálynak persze több számozás is megfelelhet).

4. Egy tevékenységet csak egy él reprezentálhat.

5. Két csúcs között legfeljebb egy él mehet.

A 4. és 5. szabály betartásához szükséges lehet nulla időtartamú **fiktív tevékenységek** bevezetésére.

A korai időzítés kiszámítása

Az i csúcs korai időzítése (jelölése $ET(i)$) az a legkorábbi időpont, amikor a csúcshoz tartozó esemény bekövetkezhet. Az $ET(i)$ kiszámítása:

1. lépés Keressük meg azokat a csúcsokat, amelyekből él megy az i csúcsba. Ezek a csúcsok (események) az i csúcs (esemény) **közvetlen előzményei**.

2. lépés Az i csúcs mindegyik közvetlen előzményének ET értékéhez adjuk hozzá az adott előzményből az i-be menő él hosszát (tevékenység időtartamát).

3. lépés Az $ET(i)$ egyenlő az előző lépésben kiszámított összegek maximumával.

A késői időzítés kiszámítása

Az i csúcs késői időzítése (jelölése $LT(i)$) az a legkésőbbi időpont, amikor a csúcshoz tartozó esemény még bekövetkezhet anélkül, hogy a projekt befejezése késedelmet szenvedne. Az $LT(i)$ kiszámítása:

1. lépés Keressük meg azokat a csúcsokat, amelyekbe él megy az i csúcsból. Ezek a csúcsok (események) az i csúcs (esemény) **közvetlen követői**.

2. lépés Az i csúcs mindegyik közvetlen követőjének LT értékéből vonjuk le az i-ből az adott követőbe menő él hosszát (tevékenység időtartamát).

3. lépés Az $LT(i)$ egyenlő az előző lépésben kiszámított különbségek minimumával.

Tűréshatár

Egy tevékenység, illetve az azt reprezentáló (i, j) él **tűréshatára** (jelölése $TH(i, j)$) az az idő, amennyivel a tevékenység elkezdése eltolódhat a legkorábbi kezdési időpontjától anélkül, hogy a projekt befejezése késedelmet szenvedne (feltéve, hogy a többi tevékenység nem csúszik):

$$TH(i, j) = LT(j) - ET(i) - t_{ij} \quad (t_{ij} \text{ az } (i, j) \text{ élhez tartozó tevékenység időtartama})$$

Egy nulla tűréshatárral rendelkező tevékenységet **kritikus tevékenységnek** hívunk. Egy csupa kritikus tevékenységből álló, a kezdés csúcsból a befejezés csúcsba vezető utat **kritikus útnak** nevezünk. Bármelyik kritikus út (egy projekt-hálózatban több is lehet) a leghosszabb, a kezdés csúcsból a befejezés csúcsba vezető út. Ha egy kritikus tevékenység kezdete csúszik, vagy az időtartama megnövekszik, akkor a projekt befejezése késedelmet szenved.

Mozgáshatár

Egy tevékenység, illetve az azt reprezentáló (i, j) él **mozgáshatára** (jelölése $MH(i, j)$) az az idő, amennyivel a tevékenység elkezdése (vagy végrehajtása) elhúzódhat anélkül, hogy ezzel bármelyik későbbi tevékenység kezdési időpontja a legkorábbi kezdési időpontjánál későbbre tolódna:

$$MH(i, j) = ET(j) - ET(i) - t_{ij}$$

A lineáris programozás módszere is használható a kritikus út, illetve a projekt időtartamának meghatározására. Legyen

$$x_j = \text{a } j \text{ esemény (csúcs) bekövetkezésének időpontja}$$
$$F = \text{a projekt befejezését jelképező csúcs}$$

A kritikus út meghatározásához minimalizáljuk az $z = x_F - x_1$ célfüggvényt, feltéve, hogy

$$x_j \geq x_i + t_{ij} \quad \text{vagy} \quad x_j - x_i \geq t_{ij} \quad \text{minden élre}$$
$$x_j \text{ előjelkötetlen}$$

Az optimális célfüggvényérték a kritikus út hossza (a projekt befejezéséhez szükséges idő). Egy kritikus utat pedig úgy kapunk meg, hogy keresünk egy olyan az 1-es csúcsból az F csúcsba vezető utat, amelynek mindegyik (i, j) élére a kapcsolódó $(x_j - x_i \geq t_{ij})$ feltételnek -1 az árnyékára.

A lineáris programozás segítségével meghatározhatjuk a tevékenységek lerövidítésének egy minimális költséggel járó módját is akkor, ha a projektet egy adott határidőig be kell fejezni.

PERT

Amennyiben a projektben a tevékenységek időtartamai bizonytalanok, a PERT segítségével adható becslés annak a valószínűségére, hogy a projekt egy adott idő alatt befejeződik. A PERT az egyes tevékenységekre vonatkozóan a következő három szám megadását igényli:

$$\begin{aligned} a &= \text{a tevékenység időtartamának becslése a legkedvezőbb esetben} \\ b &= \text{a tevékenység időtartamának becslése a legkedvezőtlenebb esetben} \\ m &= \text{a tevékenység időtartamának legvalószínűbb értéke} \end{aligned}$$

Ha az a, b és m becslések az (i, j) él által reprezentált tevékenységre vonatkoznak, amelynek időtartamát a $\mathbf{T}_{ij}$ valószínűségi változó jelöli, akkor közelítőleg igaz, hogy

$$E(\mathbf{T}_{ij}) = \frac{a + 4m + b}{6}$$
$$\operatorname{var}\mathbf{T}_{ij} = \frac{(b-a)^2}{36}$$

Ekkor

$$\sum_{(i,j)\in \text{út}} E(\mathbf{T}_{ij}) = \text{az út időtartamának várható értéke}$$
$$\sum_{(i,j)\in \text{út}} \operatorname{var}\mathbf{T}_{ij} = \text{az út időtartamának varianciája}$$

Feltéve (néha nem helytállóan), hogy a várható időtartamokkal számított kritikus út lesz a tényleges kritikus út, továbbá, hogy a kritikus út időtartama normális eloszlást követ, a fenti összefüggések alapján becslés adható annak a valószínűségére, hogy a projekt egy adott idő alatt befejeződik.

Minimális költségű hálózati folyam feladatok

A szállítási, hozzárendelési, összetett szállítási feladatok, a legrövidebb út, maximális folyam és kritikus út problémák mind speciális esetei a minimális költségű hálózati folyam problémának (MKHFP).

Legyen

$$
\begin{aligned}
x_{ij} &= \text{az } i \text{ csúcsból a } j \text{ csúcsba az } (i,j) \text{ élen átmenő folyam-egységek száma}\\
b_i &= \text{az } i \text{ csúcs nettó kibocsátása (kimenő} - \text{bejövő folyam)}\\
c_{ij} &= \text{egy folyam-egység küldésének költsége az } (i,j) \text{ élen keresztül}\\
L_{ij} &= \text{az } (i,j) \text{ élen átmenő folyam alsó korlátja (ha nincs}\\
&\qquad\quad \text{megszabott alsó korlát, } L_{ij} = 0)\\
U_{ij} &= \text{az } (i,j) \text{ élen átmenő folyam felső korlátja (ha nincs}\\
&\qquad\quad \text{megszabott felső korlát, } U_{ij} = \infty)
\end{aligned}
$$

Ezen jelölésekkel egy MKHFP így írható fel:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{\text{minden élre}} c_{ij}x_{ij} & \\
\text{f.h.} \quad & \sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} = b_i & \text{(a hálózat mindegyik } i \text{ csúcsára)}\\
& L_{ij} \le x_{ij} \le U_{ij} & \text{(a hálózat mindegyik } (i,j) \text{ élére)}
\end{aligned}
$$

Az első feltételcsoportot a **folyam-egyensúly egyenletek**, a másodikat az **élkapacitás korlátok** alkotják.

Egy MKHFP megoldható a **hálózati szimplex** valamilyen számítógépes implementációjával. A felhasználónak inputként meg kell adnia a hálózat csúcsait és éleit, mindegyik élre a c_{ij}, illetve az élkapacitás értékét, és mindegyik csúcsra a b_i értéket. Egy problémának egy MKHFP-ként való megfogalmazása szükségessé teheti egy fiktív csúcspont beiktatását.

A minimális feszítőfa probléma

A következő módszer (MFF algoritmus) használható egy hálózatban a minimális feszítőfa megtalálására:

1. lépés Válasszuk ki a hálózat egy tetszőleges i csúcsát. Keressük meg az i-hez legközelebbi csúcsot, tegyük fel, hogy ez a j csúcs. Az i és j csúcsok egy összefüggő $C = \{i, j\}$ halmazt alkotnak, az (i, j) él pedig a minimális feszítőfa eleme lesz. A hálózat többi (a C-beli csúcsokkal a kiválasztott élek által nem összekötött) csúcsának halmazát jelöljük C'-vel.

2. lépés Válasszuk ki a C' egy olyan n elemét, amelyik a legközelebb van a C valamelyik m eleméhez. Ekkor az (m,n) él a minimális feszítőfa eleme lesz. Aktualizáljuk a C és C' halmazokat. Mivel az n csúcs most már a kiválasztott éleken keresztül összeköttetésben van a C-beli csúcsokkal, az n-et áttesszük a C'-ből a C-be.

3. lépés Addig ismételjük az előző lépést, amíg minden csúcs át nem kerül C-be. A kiválasztott élek alkotják a minimális feszítőfát. Több legközelebbi csúcs (több legrövidebb C és C' közötti él) esetén tetszőlegesen választhatunk.

A hálózati szimplex módszer

1. lépés Meghatározunk egy kiinduló lehetséges bázismegoldást (lbm). Az $n-1$ bázisváltozó egy feszítőfát definiál. Jelezzük a felső korlátjukon álló nembázis változókat szaggatott éllel.

2. lépés Határozzuk meg az $y_1, y_2, \dots y_n$ szimplex szorzókat az $y_1 = 0, y_i - y_j = c_{ij}$ (minden x_{ij} bázisváltozóra) egyenletrendszerből. A nembázis változókra számoljuk ki a $\bar{c}_{ij} = y_i - y_j - c_{ij}$ célfüggvénysor együtthatókat. Az aktuális lbm optimális, ha $\bar{c}_{ij} \leq 0$ minden $x_{ij} = L_{ij}$ esetén, és $\bar{c}_{ij} \geq 0$ minden $x_{ij} = U_{ij}$ esetén. Ha az lbm nem optimális, válasszuk azt a nembázis változót belépő változónak, amelyik a leginkább sérti az optimalitási feltételeket.

3. lépés Azonosítsuk azt az egyetlen kört, amelyet a belépő változóhoz tartozó él és az aktuális lbm feszítőfájának bizonyos élei alkotnak. A folyam-megőrzés szabálya alapján határozzuk meg a körbeli változók új értékeit. Az a változó lép ki a bázisból, amelyik először éri el az alsó vagy a felső korlátját a belépő változó értékének a megfelelő irányba történő módosítása során.

4. lépés Az előző lépésben meghatározott kör élein a folyamerősségeket aktualizálva kapjuk az új lbm-et. A 2. lépéssel folytatjuk.

Áttekintő feladatok

A csoport

1. Egy kamion New Yorkból Los Angelesbe visz egy szállítmányt. A szóba jöhető útvonalak a 67. ábrán láthatók, az élekhez rendelt számok az adott útszakasz megtételéhez szükséges üzemanyag literben mért mennyiségét mutatják.

(a) Dijkstra algoritmusával keresse meg a legkevesebb üzemanyagot igénylő útvonalat New Yorkból Los Angelesbe!

(b) Adjon meg egy kiegyensúlyozott szállítási feladatot, amellyel meghatározható a legtakarékosabb New Yorkból Los Angelesbe vezető útvonal!

(c) Fogalmazza meg a legtakarékosabb New Yorkból Los Angelesbe vezető útvonal meghatározásának feladatát egy MKHFP-ként!

2. A New Yorkból Los Angelesbe menő telefonhívások először vagy Chicagóba, vagy Memphisbe mennek, majd vagy Denveren, vagy Dallason keresztül jutnak el Los Angelesbe. A 39. táblázat mutatja, hogy az egyes városok között hány telefonvonal fut.

39. TÁBLÁZAT

Városok	Telefonvonalak száma
N.Y.–Chicago	500
N.Y.–Memphis	400
Chicago–Denver	300
Chicago–Dallas	250
Memphis–Denver	200
Memphis–Dallas	150
Denver–L.A.	400
Dallas–L.A.	350

(a) Írjon fel egy LP-t, amellyel meghatározható, hogy egy adott időpontban maximálisan hány telefonhívás mehet New Yorkból Los Angelesbe!

(b) A Ford–Fulkerson módszerrel határozza meg, hogy egy adott időpontban maximálisan hány telefonhívás mehet New Yorkból Los Angelesbe!

3. Egy új termék bevezetése előtt a 40. táblázatban felsorolt lépéseket kell megtenni (az időigény hetekben adott).

(a) Rajzolja meg a projekt-diagramot!

(b) Határozza meg az összes kritikus utat és tevékenységet!

(c) Számolja ki az egyes tevékenységek tűrés- és mozgáshatárát!

(d) Írjon fel egy LP-t a kritikus út meghatározására!

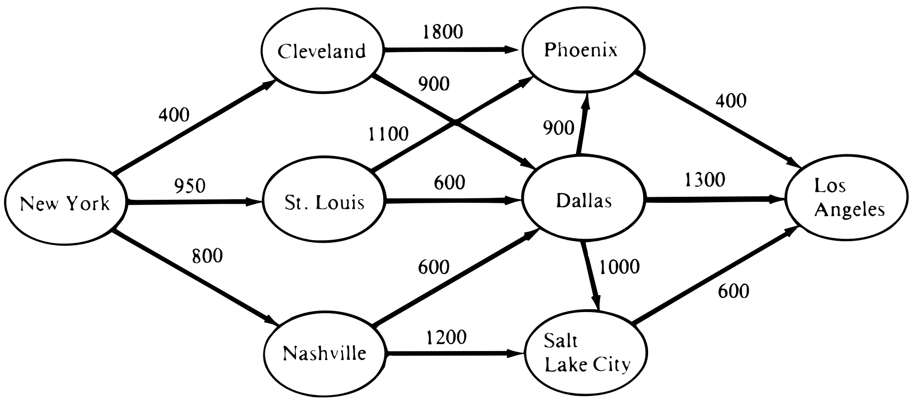
(e) Fogalmazza meg a kritikus út meghatározásának feladatát egy MKHFP-ként!

(f) Mostantól 12 hét múlva karácsony. Mekkora valószínűséggel kerül a termék karácsony előtt a boltokba?

(g) Bármelyik tevékenység hossza legfeljebb 2 héttel csökkenthető. Az egyes tevékenységek egy héttel történő lerövidítésének költsége a következő: A, 80$; B, 60$; C, 30$; D, 60$; E, 40$; F, 30$; G, 20$. A tevékenységek megadott időtartamait biztosnak véve írjon fel egy LP-t, amellyel minimalizálható annak a költsége, hogy a termék karácsony előtt a boltokba kerüljön!

4. Az eljövendő három hónap alatt egy cipőipari vállalatnak a következő megrendeléseket kell határidőre teljesítenie: az első hónapban 1000 pár; a második hónapban 1500 pár; a harmadik hónapban 1800 pár. Egy pár cipő elkészítése

67. ÁBRA
Az 1. feladat hálózata



1 óra élőmunkát igényel. A vállalatnak az első hónapban 1000 óra; a második hónapban 1200 óra; a harmadik hónapban 1200 óra alapmunkaidő áll a rendelkezésére. Ezen túl a dolgozók havonta legfeljebb 400 óra túlmunkaidőre is kötelezhetők. A dolgozóknak a tényleges munkaidejük után fizet a vállalat, órabérük az alapmunkaidőben 4$, a túlmunkaidőben pedig 6$. A raktározási költségeket a hóvégi készlet után számítják fel, páronként 1.50$-t. Fogalmazzon meg egy MKHFP-t, amellyel minimalizálható az említett költségek összege az eljövendő három hónapra a határidők betartása mellett! Ehhez rajzolja fel a megfelelő hálózatot, adja meg az élek kapacitását és c_{ij} értékeit, valamint a csúcsok b_i értékeit! Hogyan változtatná meg a válaszát, ha az igényeket megkezdett hónaponként 20$/pár kötbér terhe mellett határidőn túl is lehetne teljesíteni (de a harmadik hónap végéig továbbra is minden igényt ki kell elégíteni)?

5. Határozzon meg egy minimális feszítőfát a 67. ábrabeli hálózatban!

6. Egy vállalat egy bizonyos terméket két üzemében is gyártja. Két időszakra vonatkozóan a darabonkénti termelési költségeket, illetve a termelési kapacitásokat a 41. táblázat tartalmazza. A terméket azonnal a vállalat egyetlen vásárlójához szállítják a 42. táblázatban feltüntetett ($-ban megadott) darabonkénti költséggel. Az első időszakban készített termékek is felhasználhatók a második időszakban fellépő igények kielégítésére, de a raktározás darabonként 13$-ba kerül. Ráadásul, az első időszak végén legfeljebb 6 darab termék lehet raktáron. Az igények a következők: az első időszakban 9 darab; a második időszakban 11 darab. Adjon meg egy MKHFP-t, amellyel minimalizálható az említett költségek összege az eljövendő két időszakra! Rajzolja fel a hálózatot, határozza meg az élek kapacitását és költségegyütthatóját, valamint a csúcsok nettó kibocsátását!

41. TÁBLÁZAT

	Termelési költség ($)/db	Kapacitás
1-es üzem (1. időszak)	33	7
1-es üzem (2. időszak)	43	4
2-es üzem (1. időszak)	30	9
2-es üzem (2. időszak)	41	9

42. TÁBLÁZAT

	1. időszak	2. időszak
1-es üzemtől vásárlóig	51	60
2-es üzemtől vásárlóig	42	71

40. TÁBLÁZAT

Tevékenység	Leírás	Előzmények	Időtartam	a	b	m
A	Termék megtervezése	—	6	2	10	6
B	Piackutatás	—	5	4	6	5
C	Alapanyagok megrendelése	A	3	2	4	3
D	Alapanyagok bevételezése	C	2	1	3	2
E	Prototípus elkészítése	A, D	3	1	5	3
F	Reklám megszervezése	B	2	3	5	4
G	Tömegtermelés beindítása	E	4	2	6	4
H	Termék kiszállítása a boltokba	G, F	2	0	4	2

7. Egy projektben az elvégzendő tevékenységek adatait a 43. táblázat tartalmazza.

43. TÁBLÁZAT

Tevékenység	Időtartam	Közvetlen előzmények
A	2	—
B	3	—
C	1	A
D	5	A, B
E	7	B, C
F	5	D, E

(a) Rajzolja fel a projekt-hálózatot! Jelezze az egyes élek által reprezentált tevékenységet!

(b) Határozza meg a kritikus utat! A projekt leghamarabb mikor fejeződhet be?

8.[7] Egy egyetem három professzora évenként négy-négy kurzust tart. Minden évben marketingből, számvitelből és termelésszervezésből négy-négy kurzust kell meghirdetni. Mindkét félévben mindegyik tárgyból indítani kell legalább egy kurzust. Az egyes professzoroknak az időpontokra, illetve a tárgyakra vonatkozó preferencia-pontjait a 44. táblázat mutatja.
Egy professzor egy kurzus tartásával kapcsolatos elégedettségét a két preferencia-pont összege mutatja. Például, az 1. professzor elégedettségi indexe $3 + 6 = 9$, ha az őszi félévben marketinget tanít. Adjon meg egy MKHFP-t, amellyel meghatározható a professzoroknak a kurzusokhoz való olyan hozzárendelése, amelyik maximalizálja a három professzor elégedettségi indexének az összegét!

B csoport

9.[8] Egy vállalatnak a 45. táblázatban megadott, háromféle termékére és az eljövendő két hónapra szóló megrendeléseket kell határidőre kielégítenie. A termeléshez két gép használható, mindkettő legfeljebb 40 óra hosszat dolgozik havonta. Ráadásul, az 1-es gép csak az 1-es és 2-es termékeket, a 2-es gép pedig csak a 2-es és 3-as termékeket képes gyártani. A 46. táblázat mutatja az egyes termékekre a gyártási időt (ami független a használt gép típusától), a darabonkénti gyártási költséget (a gép típusától függően), és egy hónapra a darabonkénti raktározási költséget. Adjon meg egy MKHFP-t, amellyel minimalizálható az összes felmerülő költség az adott időszakban, a határidők betartása mellett!

44. TÁBLÁZAT

	Professzor		
	1.	**2.**	**3.**
Őszi félév	3	5	4
Tavaszi félév	4	3	4
Marketing	6	4	5
Számvitel	5	6	4
Termelésszervezés	4	5	6

45. TÁBLÁZAT

	1-es termék	2-es termék	3-as termék
1. hónap	50 db	70 db	80 db
2. hónap	60 db	90 db	120 db

46. TÁBLÁZAT

Termék	Termelési idő (perc)	Termelési költség ($)		Raktár-költség ($)
		1-es gép	2-es gép	
1.	30	40	—	15
2.	20	45	60	10
3.	15	—	55	5

Irodalom

Brown, G., A. Geoffrion és G. Bradley. „Production and Sales Planning with Limited Shared Tooling at the Key Operation," *Management Science* 27(1981):247–259.

Glover, F., et al. „The Passenger-Mix Problem in the Scheduled Airlines," *Interfaces* 12(1982):73–80.

[7]Mulvey (1979) alapján.
[8]Brown, Geoffrion és Bradley (1981) alapján.

Mulvey, M. „Strategies in Modeling: A Personnel Example," *Interfaces* 9(no. 3, 1979): 66–75.

Peterson, I. „Proven Path for Limiting Shortest Shortcut," *Science News* December 22, 1990: 389.

Ravidran, A. „On Compact Book Storage in Libraries," *Opsearch* 8(1971).

A következő három könyv a hálózatok bevezető szintű áttekintését adja:

Chachra, V., P. Ghare és J. Moore. *Applications of Graph Theory Algorithms.* New York: North-Holland, 1979.

Mandl, C. *Applied Network Optimization.* Orlando, Fla.: Academic Press, 1979.

Phillips, D. és A. Diaz. *Fundamentals of Network Analysis.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1981.

A legrövidebb út feladatok megoldási módszereinek részletes tárgyalása megtalálható a következő három műben:

Denardo, E. *Dynamic Programming: Theory and Applications.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1982.

Evans, T. és E. Minieka. *Optimization Algorithms for Networks and Graphs.* New York: Dekker, 1992.

Hu, T. *Combinatorial Algorithms.* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1982.

Evans és Minieka (1992), valamint Hu (1982) a maximális folyam problémát is tárgyalják, csakúgy mint az alábbi három könyv:

Ford, L. és D. Fulkerson. *Flows in Networks.* Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1962.

Jensen, P. és W. Barnes. *Network Flow Programming.* New York: Wiley, 1980.

Lawler, E. *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids.* Chicago: Holt, Rinehart & Winston, 1976.

A CPM és PERT kitűnő tárgyalását adja:

Hax, A. és D. Candea. *Production and Inventory Management.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1984.

Wiest, J. és F. Levy. *A Management Guide to PERT/CPM,* 2d ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1977.

Jensen és Barnes (1980), valamint a következő művek mindegyike részletesen ismerteti a hálózati szimplex módszert:

Chvàtal, V. *Linear Programming.* San Francisco: Freeman, 1983.

Shapiro, J. *Mathematical Programming: Structures and Algorithms.* New York: Wiley, 1979.

Wu, N. és R. Coppins. *Linear Programming and Extensions.* New York: McGraw-Hill, 1981.

Az MKHFP alkalmazásainak kiváló tárgyalását tartalmazza:

Glover, F., D. Klingman és N. Phillips. *Network Models and Their Applications in Practice.* New York: Wiley, 1992.

8

Egészértékű programozás

Emlékeztetjük az olvasót, hogy az egészértékű programozást a 3.1. alfejezetben az oszthatósági feltevés tárgyalásakor már definiáltuk. Röviden, egy *egészértékű programozási feladat* (IP) egy olyan LP, amelyben néhány, vagy az összes változó csak egész értéket vehet fel.[1]

Ebben a fejezetben látni fogjuk (miként a 3. fejezetben az LP-kre), hogy számos valós döntési helyzet IP-ként modellezhető. Ki fog derülni az is, hogy az IP-ket sajnos sokkal nehezebb megoldani mint az LP-ket.

A 8.1. alfejezetben a szükséges definíciókkal és néhány bevezető megjegyzéssel kezdjük. A 8.2. alfejezetben megmutatjuk, hogy miként lehet egészértékű programozási modelleket felírni. A 8.3–8.8. alfejezetekben tárgyaljuk az IP-k megoldására használt módszereket.

8.1. Bevezetés az egészértékű programozásba

Egy olyan IP-t, amelyben mindegyik változónak egészértékűnek kell lennie, **tiszta egészértékű programozási feladatnak** hívunk.

Például

$$\begin{aligned} \max\ z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{f.h.}\quad x_1 + x_2 &\le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0,&\quad x_1, x_2 \text{ egész} \end{aligned} \tag{1}$$

egy tiszta egészértékű programozási feladat.

Egy olyan IP-t, amelyben csak néhány változóra követeljük meg az egészértékűséget, **vegyes egészértékű programozási feladatnak** nevezünk.

Például

$$\begin{aligned} \max\ z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{f.h.}\quad x_1 + x_2 &\le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0,&\quad x_1 \text{ egész} \end{aligned}$$

egy vegyes egészértékű programozási feladat (az x_2 felvehet nem egész értékeket is).

Egy olyan egészértékű programozási feladatot, amelyben mindegyik változó értéke csak 0 vagy 1 lehet, 0–1 IP-nek hívunk. A 8.2. alfejezetben látni fogjuk, hogy 0–1 IP-k megle-

[1] Egy nemlineáris egészértékű programozási feladat egy olyan optimalizálási feladat, amelyben a célfüggvény és/vagy valamelyik feltétel bal oldala nemlineáris függvény és néhány, vagy az összes változó csak egész értéket vehet fel.

pően sok szituációban fordulnak elő.[2] Íme egy példa egy 0–1 IP-re:

$$\begin{aligned} \max\ z &= x_1 - \ x_2 \\ \text{f.h.}\quad x_1 + 2x_2 &\le 2 \\ 2x_1 - \ x_2 &\le 1 \\ x_1, x_2 &= 0 \text{ vagy } 1 \end{aligned} \tag{2}$$

A kimondottan a 0–1 IP-k megoldására szolgáló eljárásokat a 8.7. alfejezetben tárgyaljuk.

Az LP-lazítás fogalma kulcsszerepet játszik az egészértékű programozási feladatok megoldásában.

DEFINÍCIÓ

Egy egészértékű programozási feladat **LP-lazítása** az az LP, amelyet úgy kapunk az IP-ből, hogy a változókra tett minden egészértékűségi vagy 0–1 megkötést eltörlünk.

Például az (1) LP-lazítása:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{f.h.}\quad x_1 + \ x_2 &\le 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned} \tag{1'}$$

a (2) LP-lazítása pedig:

$$\begin{aligned} \max\ z &= x_1 - \ x_2 \\ \text{f.h.}\quad x_1 + 2x_2 &\le 2 \\ 2x_1 - \ x_2 &\le 1 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned} \tag{2'}$$

Egy IP nem más, mint az LP-lazítása és még néhány olyan megkötés, amelyek megmondják, hogy mely változóknak kell egész-, ill. 0–1 értékűeknek lenniük. Az LP-lazítás tehát egy kevésbé korlátozott (puhított) változata az IP-nek. Ebből következik, hogy *bármelyik IP lehetséges megoldáshalmaza része az LP-lazítása lehetséges megoldástartományának.* Ha az IP egy maximum feladat, akkor

$$\text{az LP-lazítás optimális } z \text{ értéke} \ge \text{az IP optimális } z \text{ értéke.} \tag{3}$$

Ez az eredmény fontos szerepet játszik az IP-k megoldásában.

A következő egyszerű IP rávilágít az egészértékű programozási feladatok néhány tulajdonságára:

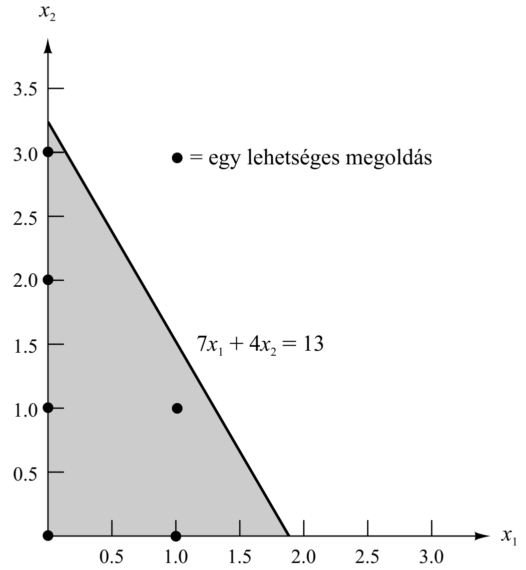
$$\begin{aligned} \max\ z &= 21x_1 + 11x_2 \\ \text{f.h.}\quad 7x_1 + \ 4x_2 &\le 13 \\ x_1, x_2 \ge 0;&\quad x_1, x_2 \text{ egész} \end{aligned} \tag{4}$$

Az 1. ábrából látjuk, hogy a lehetséges megoldások halmaza: $S = \{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1)\}$. Az LP-k lehetséges tartományától eltérően a (4) lehetséges megoldáshalmaza nem konvex halmaz. Egyszerűen kiszámolva és összehasonlítva a hat lehetséges pont z értékét azt kapjuk, hogy a (4) optimális megoldása $z = 33$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

Ha egy tiszta IP LP-lazításának lehetséges tartománya korlátos, mint a (4)-ben is, az IP lehetséges megoldáshalmaza véges sok pontból áll. Egy ilyen IP elméletileg megoldható úgy, mint azt az előbb is tettük: kiszámoljuk az összes lehetséges megoldás z értékét és

[2] Valójában bármelyik tiszta IP átfogalmazható egy ekvivalens 0–1 IP-vé (8.7. alfejezet).

1. ÁBRA
A (4) IP lehetséges megoldásai



kiválasztjuk a legnagyobb z értéket adó lehetséges pontot. Ezzel a megközelítéssel az a baj, hogy a valóságos IP-knek legtöbbször milliárd és milliárd lehetséges megoldásuk van. Ilyen esetekben az összes lehetséges pont teljes leszámlálása túl sok számítógépidőt igényelne. Mégis a 8.3. alfejezetben majd látni fogjuk, hogy IP-ket gyakran oldanak meg az összes lehetséges pont okosan szervezett leszámlálásával.

A (4) további vizsgálata rávilágít az IP-k néhány további érdekes tulajdonságára. Tegyük fel, hogy naivan a következőt tesszük: először megoldjuk az LP-lazítást, majd minden olyan egész változót, amelyik törtértéket vett fel az LP-lazítás optimális megoldásában, a legközelebbi egészre kerekítjük.

A (4) esetében az LP-lazítás optimális megoldása: $x_1 = \frac{13}{7}$, $x_2 = 0$. Ezt kerekítve az $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ pontot kapjuk, mint egy jelöltet a (4) optimális megoldására. Csakhogy az $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ nem lehetséges megoldása a (4)-nek, így optimális megoldása sem lehet. Még ha úgy kerekítjük is a változókat (esetünkben x_1-et lefelé), hogy lehetséges megoldást kapjunk (most $x_1 = 1$, $x_2 = 0$), akkor sem biztos, hogy optimális megoldást kapunk (példánkban az $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ az optimális megoldás).

Bizonyos IP-k esetén még az is előfordulhat, hogy az LP-lazítás optimális megoldásának koordinátáit bárhogyan kerekítjük is, nem kapunk lehetséges megoldást. Példaként tekintsük a következő IP-t:

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + x_2 \\ \text{f.h.} \quad 2x_1 &+ x_2 \le 5 \\ 2x_1 &+ 3x_2 = 5 \\ x_1, x_2 \ge 0; &\quad x_1, x_2 \text{ egész} \end{aligned}$$

Az LP-lazítás optimális megoldása: $z = 10$, $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = 0$. Kerekítve vagy az $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, vagy az $x_1 = 3$, $x_2 = 0$ pontot kapjuk. Egyik sem lehetséges megoldása az IP-nek.

Idézzük fel a 4. fejezetből, hogy az LP-k megoldása során a szimplex algoritmus egy lehetséges bázismegoldásról egy jobb lehetséges bázismegoldásra lép, továbbá, hogy a legtöbb esetben az összes lehetséges bázismegoldásnak csak egy töredékét érintve jut el az optimális megoldásig. Emiatt viszonylag nagy LP-ket is meglepően rövid idő alatt meg tudunk oldani. Hasonlóképpen remélhetnénk, hogy az IP-k megoldására is van egy olyan algoritmus, amelyik a lehetséges egészértékű megoldások egyre javuló sorozatán keresztül jut el az optimális megoldáshoz. Sajnos ilyen algoritmus nem ismert.

Összegezve, jóllehet egy IP lehetséges megoldáshalmaza része az LP-lazítása lehetséges tartományának, az IP-t általában sokkal nehezebb megoldani, mint az LP-lazítását.

8.2. Egészértékű programozási feladatok felírása

Ebben az alfejezetben megmutatjuk, hogyan lehet egészértékű programozási feladatként megfogalmazni számos gyakorlati problémát. Néhány egyszerű példával kezdjük, majd fokozatosan haladunk az összetettebb modellek felé. Első példánk egy, a 3.6. alfejezetbeli Star Oiléra emlékeztető tőkefelosztási probléma.

1. PÉLDA A Stockco négy befektetési lehetőséget vizsgál. Az 1-es befektetés hozamának nettó jelenértéke (net present value, NPV) 16 000\$; a 2-es befektetésé 22 000\$; a 3-asé 12 000\$; a 4-esé pedig 8000\$. Az egyes befektetések jelenbeni készpénzigénye a következő: az 1-esé 5000\$; a 2-esé 7000\$; a 3-asé 4000\$; a 4-esé pedig 3000\$. Fogalmazzunk meg egy IP-t, amellyel a Stockco maximalizálni tudja az 1–4 befektetések összhozamának NPV-jét, ha jelen pillanatban 14 000\$ készpénz vár befektetésre!

Megoldás Miként az LP modellek felírásánál, most is azzal kezdjük, hogy egy változót definiálunk a Stockco mindegyik döntési lehetőségére. Bevezetjük tehát a következő 0–1 változókat:

$$x_j(j=1,2,3,4)=\begin{cases}1 & \text{ha befektetnek a } j \text{ lehetőségbe}\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$$

Például, $x_2=1$, ha befektetnek a 2-es lehetőségbe, és $x_2=0$, ha nem.

A Stockco által elért NPV (ezer dollárban)

$$\text{a Stockco által realizált NPV } = 16x_1+22x_2+12x_3+8x_4. \tag{5}$$

Valóban, ha $x_j=1$ akkor (5) tartalmazza a j-edik befektetés NPV-jét; de ha $x_j=0$, akkor nem. Vagyis a befektetések bármilyen kombinációjára az (5) az összhozam NPV-jét adja. Például, ha a Stockco az 1-es és a 4-es lehetőségbe invesztál, az összhozam NVP-je $16\,000+8000=24\,000$ (dollár). Ezt a befektetéskombinációt az $x_1=x_4=1$, $x_2=x_3=0$ reprezentálja, és ekkor az (5) pontosan $16(1)+22(0)+12(0)+8(1)=24$ (ezer dollár) NVP-t jelez. A Stockco célfüggvénye tehát

$$\max z=16x_1+22x_2+12x_3+8x_4. \tag{6}$$

Figyelembe kell persze venni, hogy a Stockco legfeljebb 14 000\$-t fektethet be. Az (5)-öt eredményező gondolatmenethez hasonlóan adódik, hogy

$$\text{a teljes befektetett összeg (ezer dollárban)} = 5x_1+7x_2+4x_3+3x_4. \tag{7}$$

Például, ha a Stockco a 2-es, 3-as és 4-es lehetőségekbe fektet be, ez összesen $7+4+3=14$ (ezer \$) készpénzt igényel. A változók értéke ekkor $x_1=0$, $x_2=x_3=x_4=1$, és a (7) pont a szükséges $5(0)+7(1)+4(1)+3(1)=14$ (ezer \$) összeget mutatja. Mivel legfeljebb 14 000\$ áll rendelkezésre, az x_1, x_2, x_3 és x_4 változókra fenn kell álljon, hogy

$$5x_1+7x_2+4x_3+3x_4\le 14. \tag{8}$$

A (6), a (8) és az $x_j = 0$ vagy 1 ($j = 1,2,3,4$) feltételek adják a keresett 0–1 IP-t:

$$\begin{aligned} &\max\ z = 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 \\ &\text{f.h.} \qquad 5x_1 + \ 7x_2 + \ 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\ &\quad x_j = 0 \text{ vagy } 1 \quad (j = 1,2,3,4) \end{aligned} \tag{9}$$

MEGJEGYZÉSEK

1. A 8.5. alfejezetben majd megmutatjuk, hogy a (9) optimális megoldása: $x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_4 = 1$, amire $z = 42\ 000$\$. Vagyis a Stockcónak a 2-es, 3-as és 4-es befektetést kell választania, az 1-est nem. Mivel az egy dollárra jutó NVP az 1-es befektetésnél a legmagasabb (az 1-esnél 3.20\$, a 2-esnél 3.14\$, a 3-asnál 3\$, a 4-esnél pedig 2.67\$), meglepőnek tűnik, hogy az 1-es befektetés nem része a (9) optimális megoldásának. Ennek oka, hogy az 1-es lehetőséget tartalmazó bármelyik kombináció legfeljebb 12 000\$-t fektet be, s így 2000\$ parlagon marad. Ezzel szemben az optimális befektetés-kombináció felhasználja mind a 14 000\$-t, ezért lesz az NVP-je magasabb, mint az 1-es lehetőséget tartalmazó bármelyik kombinációé. Amennyiben, mint a 3. fejezetben, töredék befektetések is megengedettek lennének, a (9) lazításának optimális megoldása $x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0.50, x_4 = 0$ lenne, amire $z = 44\ 000$\$. Ekkor tehát a „legjobb” 1-es lehetőségbe is befektetnének. Ez az egyszerű példa is mutatja, hogy alapvetően más lehet egy tőkefelosztási problémára javasolt megoldás, ha egy lineáris programozási vagy egy egészértékű programozási modellt alkalmazunk.

2. Egy olyan IP-t, mint a (9) is, amelyben csak egy feltétel van, **hátizsák feladatnak** hívunk. Tegyük fel, hogy Josie Camper egy kétnapos túrára készül. Négy tárgy van, amire szüksége lehet. Ezen tárgyak súlya, illetve haszna (Josie szerint) az 1. táblázatban található.

1. TÁBLÁZAT A tárgyak súlya, illetve haszna

	Súly (font)	**Haszon**
1-es tárgy	5	16
2-es tárgy	7	22
3-es tárgy	4	12
4-es tárgy	3	8

Tegyük fel, hogy Josie a hátizsákjában legfeljebb 14 fontot bír el. Definiáljuk $j = 1,2,3,4$-re

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{ha Josie magával viszi a } j\text{-edik tárgyat} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Ekkor a (9) megoldásával Josie maximalizálhatja a hátizsákba pakolt tárgyak összhasznát.

A következő példában megmutatjuk, a Stockco hogyan módosítsa a modelljét, ha további megszorításokat is figyelembe kell vennie.

2. PÉLDA

Módosítsuk a Stockco modellt a következő követelményeknek megfelelően:

1. A Stockco legfeljebb két befektetésbe szállhat be.

2. Ha a Stockco a 2-es lehetőségbe befektet, akkor az 1-esbe is be kell fektetnie.

3. Ha a Stockco a 2-es lehetőségbe befektet, a 4-est már nem szabad választania.

Megoldás **1.** Bővítsük a (9)-et az

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2 \tag{10}$$

feltétellel. Mivel három- vagy négyféle befektetés esetén $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 3$, a (10) kizárja az ilyen kombinációkat a lehetséges megoldások közül. Ugyanakkor a (10)-et teljesíti az összes, legfeljebb két befektetést tartalmazó kombináció.

2. Az x_1 és x_2 változókkal megfogalmazva, ezen megszorítás szerint, ha $x_2 = 1$, akkor x_1-nek szintén 1-nek kell lennie. Bővítsük a (9)-et az

$$x_2 \leq x_1 \quad \text{vagy} \quad x_2 - x_1 \leq 0 \tag{11}$$

feltétellel. Nézzük meg, hogy helyesen reprezentálja-e a (11) a 2. követelményt? Két eset lehetséges, $x_2 = 1$ vagy $x_2 = 0$.

1. eset Ha $x_2 = 1$, a (11) miatt $x_1 \geq 1$. Mivel az x_1 csak 0 vagy 1 értékű lehet, azt kapjuk, hogy $x_1 = 1$, ahogy megköveteljük.

2. eset Ha $x_2 = 0$, a (11) az $x_1 \geq 0$-ra redukálódik, ami megengedi, hogy akár $x_1 = 0$, akár $x_1 = 1$ legyen. Vagyis az $x_2 = 0$ esetén a (11) nem jelent megkötést az x_1 értékére, s ez megfelel a 2. követelménynek.

Tehát az x_2 bármely értékére a (11) ekvivalens a 2. követelménnyel.

3. Bővítsük a (9)-et az

$$x_2 + x_4 \leq 1 \tag{12}$$

feltétellel. Megmutatjuk, hogy akár $x_2 = 1$, akár $x_2 = 0$, a (12) hűen tükrözi a 3. megszorítást.

1. eset Az $x_2 = 1$ azt jelzi, hogy a 2-es befektetésbe beszállunk, ekkor viszont a 4-esből ki kell maradjunk, vagyis $x_4 = 0$ kell legyen. Vegyük észre, hogy $x_2 = 1$ esetén a (12) az $1 + x_4 \leq 1$-et jelenti, vagyis $x_4 \leq 0$. Azaz, ha $x_2 = 1$, a (12) konzisztens a 3. követelménnyel.

2. eset Az $x_2 = 0$ esetben a 3. követelmény nem korlátozza az x_4 értékét. Vegyük észre, hogy ha $x_2 = 0$, a (12) jelentése $x_4 \leq 1$, azaz az x_4 szabadon lehet akár 0, akár 1.

A fixköltség probléma

A következő példa bemutat egy olyan fontos trükköt, amely jól használható számos telepítési, illetve termelési probléma IP-ként történő megfogalmazásában.

3. PÉLDA A Clothco háromféle ruhadarabot képes gyártani: ingeket, shortokat és nadrágokat. Mindegyik ruhaféle gyártásához speciális gépek kellenek, ezeket a Clothco bérli. A heti bérleti díjak a következők: 200$ az ingekhez használt gépeké, 150$ a shortokhoz használt gépeké, és 100$ a nadrágokhoz használt gépeké. Az egyes ruhadarabok gyártásához szükséges szövetmennyiséget, illetve élőmunkát mutatja a 2. táblázat.

Hetente 150 óra élőmunka és 160 négyzetméter szövet áll rendelkezésre. A darabonkénti változó költséget, illetve eladási árat a 3. táblázat tartalmazza. Adjunk meg egy IP-t, amelynek a megoldása maximalizálja a Clothco heti profitját!

2. TÁBLÁZAT
A ruhadarabok erőforrás-szükséglete

	Munka (óra)	Szövet (m^2)
Ing	3	4
Short	2	3
Nadrág	6	4

3. TÁBLÁZAT
Árbevétel, ill. változó költség-adatok

	Eladási ár ($)	Változó költség ($)
Ing	12	6
Short	8	4
Nadrág	15	8

Megoldás Miként az LP-k felírásakor, egy döntési változóval reprezentáljuk a Clothco mindegyik meghozandó döntését. A Clothco nyilván azt akarja meghatározni, hogy az egyes ruhafélékből hány darabot készítsenek hetente. Legyen tehát

$$x_1 = \text{a hetente gyártandó ingek száma}$$
$$x_2 = \text{a hetente gyártandó shortok száma}$$
$$x_3 = \text{a hetente gyártandó nadrágok száma.}$$

Mivel a gépbérlet díja csak a gyártott ruhadarabok típusától függ, a darabszámtól nem, a bérleti díjat kifejezhetjük a következő jelzőváltozók segítségével:

$$y_1 = \begin{cases} 1 & \text{ha készülnek ingek} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$
$$y_2 = \begin{cases} 1 & \text{ha készülnek shortok} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$
$$y_3 = \begin{cases} 1 & \text{ha készülnek nadrágok} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Röviden, ha $x_j > 0$, akkor $y_j = 1$; és ha $x_j = 0$, akkor $y_j = 0$. A Clothco heti profitja = (heti árbevétel) − (heti változó költségek) − (heti gépbérleti díj).

Nyilván

$$\text{a gépbérleti díj hetente} = 200y_1 + 150y_2 + 100y_3. \tag{13}$$

Vegyük észre, hogy a (13) csak a ténylegesen gyártott ruhafélékhez szükséges gépek díját tartalmazza. Például, ha csak ingek és nadrágok készülnek, akkor a modellben $y_1 = y_3 = 1$ és $y_2 = 0$ kell legyen. Ez esetben a heti bérleti díj $200 + 100 = 300$\$.

Mivel a bérleti díj nem függ attól, hogy az adott típusú ruhaféléből hány darab készül, az ilyen típusú költséget **fixköltségnek** hívjuk. Egy tevékenység fixköltsége az a rögzített összegű költség, ami felmerül, valahányszor a tevékenység egy nemnulla szinten beindul. A fixköltségek jelenléte miatt a Clothco modellje jóval bonyolultabb lesz.

A Clothco heti profitja tehát

$$\begin{aligned} \text{heti profit} &= (12x_1 + 8x_2 + 15x_3) - (6x_1 + 4x_2 + 8x_3) - (200y_1 + 150y_2 + 100y_3) \\ &= 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 200y_1 - 150y_2 - 100y_3. \end{aligned}$$

Azaz a Clothco maximalizálni akarja a

$$z = 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 200y_1 - 150y_2 - 100y_3$$

célfüggvényt, a rendelkezésre álló erőforrásokat megjelenítő feltételek mellett:

1. feltétel Legfeljebb 150 óra munka vehető igénybe hetente.

2. feltétel Legfeljebb 160 négyzetméter szövet használható fel hetente.

Az 1. feltétel reprezentánsa:

$$3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 150 \qquad \text{(munka feltétel)} \tag{14}$$

A 2. feltétel reprezentánsa:

$$4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 160 \qquad \text{(szövet feltétel)} \tag{15}$$

Ugyancsak fenn kell állnia az $x_j \geq 0$ és x_j egész $(j = 1,2,3)$, valamint az $y_j = 0$ vagy 1 $(j = 1,2,3)$ megkötéseknek. A (14) és (15) feltételekkel illetve a célfüggvénnyel egybevéve kapjuk a következő IP-t:

$$\begin{aligned} \max\ z = 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 200y_1 - 150y_2 - 100y_3 & \\ \text{f.h.}\quad 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 150 & \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 160 & \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0; \quad x_1, x_2, x_3 \text{ egész} & \\ y_1, y_2, y_3 = 0 \text{ vagy } 1 & \end{aligned} \tag{IP 1}$$

A feladat optimális megoldása: $x_1 = 30$, $x_3 = 10$, $x_2 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$. Ez nem lehet a válasz a Clothco problémájára, hiszen a változók értékei azt jelentik, hogy ingek és nadrágok készülhetnek anélkül, hogy a gyártásukhoz szükséges gépek bérleti díját levontuk volna. A modell azért nem helyénvaló, mert az y_1, y_2 és y_3 változók nem szerepelnek a feltételekben, s így semmi sem akadályozza meg, hogy $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ legyen. Mivel az $y_i = 0$ nyilván kedvezőbb célfüggvényértéket ad, mint az $y_i = 1$, az (IP 1) optimális megoldásában mindig $y_i = 0$ lesz. Módosítanunk kell az (IP 1)-et úgy, hogy $x_i > 0$ esetén mindig $y_i = 1$ legyen. A következő fogás mindig célravezető. Legyen M_1, M_2 és M_3 három kellően nagy szám, és bővítsük az (IP 1)-et az alábbi feltételekkel:

$$x_1 \leq M_1 y_1 \tag{16}$$

$$x_2 \leq M_2 y_2 \tag{17}$$

$$x_3 \leq M_3 y_3 \tag{18}$$

A (16)–(18) feltételek garantálni fogják, hogy ha $x_i > 0$, akkor $y_i = 1$. A (16) például biztosítja, hogy $x_1 > 0$ esetén $y_1 = 1$ legyen, hiszen ha $y_1 = 0$ lenne, a (16) miatt $x_1 \leq 0$, azaz $x_1 = 0$ kellene hogy legyen. Tehát valahányszor $x_1 > 0$, a (16) biztosítja, hogy $y_1 = 1$ lesz. Vagyis, ha ingek is készülnek ($x_1 > 0$), a (16) miatt $y_1 = 1$, a célfüggvényben tehát megjelenik az ingek gyártásához szükséges gépek bérleti díja. Ugyanakkor, ha $y_1 = 1$, a (16) az $x_1 \leq M_1$ feltétellé válik, amely fölöslegesen nem korlátozza az x_1 értékét, amennyiben az M_1 elég nagy. Fontos, hogy az M_1 kellően nagy legyen, mert ha csak $M_1 = 10$ lenne, a (16) szükségtelenül korlátozná az x_1 értékét. Általában igaz, hogy az M_i-t legalább akkorának kell választani, mint amekkora értéket az x_i maximálisan elérhet. Példánkban legfeljebb 40 ing készülhet, hiszen ennél több inghez nincs elegendő szövet. Nyugodtan választhatjuk tehát az $M_1 = 40$ értéket. Igazolja az olvasó, hogy az $M_2 = 53$, illetve $M_3 = 25$ választások szintén alkalmasak.

Az $x_1 = 0$ esetén a (16) a $0 \leq M_1 y_1$ feltétellé válik. Ez megengedi, hogy akár $y_1 = 0$, akár $y_1 = 1$ legyen. Mivel az $y_1 = 0$ kevésbé költséges, mint az $y_1 = 1$, az optimális megoldásban biztosan $y_1 = 0$ lesz, valahányszor $x_1 = 0$. Összefoglalva: megmutattuk, hogy ha a (16)–(18) feltételekkel bővítjük az (IP 1)-et, $x_i > 0$ esetén $y_i = 1$, míg $x_i = 0$ esetén $y_i = 0$ lesz az optimális megoldásban.

A Clothco problémájának optimális megoldása $z = 75$, $x_3 = 25$, $y_3 = 1$. Vagyis a Clothcónak 25 nadrágot kell gyártania hetente.

A Clothco feladat a **fixköltség probléma** egy példája. Egy fixköltség feladatban szerepel egy olyan költség, ami akkor merül fel, ha egy tevékenység egy nemnulla szinten beindul, de a nagysága nem függ a tevékenység szintjétől. A Clothco példában, ha egyáltalán gyártunk inget (mindegy mennyit), 200$ fixköltséggel (a gépbérleti díjjal) kell számolnunk. Azok a helyzetek is gyakran fixköltség feladatra vezetnek, amelyekben objektumok elhelyezéséről (telepítéséről) kell dönteni. Ilyenek lehetnek például üzemek, áruházak, irodák, berendezések telepítésének problémái, amelyekben a fixköltség gyakorta az építés, telepítés egyszeri költsége. A következő példa egy fixköltség feladatra vezető tipikus telepítési probléma.

4. PÉLDA **A lockbox probléma** A Nickles-lánchoz az ország négy régiójából érkeznek hitelkártyás fizetések. A vásárlók naponta átlagosan a következő összegű fizetési számlát postázzák: a nyugati régióból 70 000$; az északi régióból 50 000$; a keletiből 60 000$; a déliből pedig 40 000$. A Nickles meg akarja határozni, hogy hova küldjék a vásárlók a számláikat. Mivel bevételei befektetésével a Nickles évi 20% kamatot tud elérni, érdeke, hogy minél hamarabb megkapja az elismervényeket. Ezért azt mérlegeli, hogy hozzon-e létre regionális beváltófiókokat (lockbox). A négy lehetséges helyszín: Los Angeles, Chicago, New York és Atlanta. A fizetési elismervények postázásától a beváltásukig eltelt napok átlagos számát a 4. táblázat mutatja. Például, ha egy számlát a nyugati régióból Atlantába postáznak, átlagosan 8 napba kerül, amíg a pénz már a Nicklesnek kamatozik. Mindegyik lockbox éves működtetési költsége 50 000$. Írjon fel egy IP-t amellyel a Nickles minimalizálhatja a lockboxok működési költségeinek és az elmaradt kamatoknak az összegét! Tegyük fel, hogy egy egész régióból ugyanabba a városba mennek a számlák, valamint, hogy egy lockbox bármennyi számlát képes kezelni.

4. TÁBLÁZAT A számlák átfutásához szükséges napok átlagos száma

	Hova			
Honnan	**1-es város (Los Angeles)**	**2-es város (Chicago)**	**3-as város (New York)**	**4-es város (Atlanta)**
1-es régió Nyugat	2	6	8	8
2-es régió Észak	6	2	5	5
3-as régió Kelet	8	5	2	5
4-es régió Dél	8	5	5	2

Megoldás A Nicklesnek kétféle döntést kell hoznia. Először is, hogy hová telepítsen lockboxot. Legyen $j = 1, 2, 3, 4$-re,

$$y_j = \begin{cases} 1 \text{ ha egy lockbox működik a } j\text{-edik városban} \\ 0 \text{ különben} \end{cases}$$

Azaz $y_2 = 1$, ha Chicagóban működik lockbox, és $y_3 = 0$, ha New Yorkban nincs lockbox. Másodszor azt kell eldönteni, hogy az egyes régiókból hová menjenek a számlák. Legyen $i, j = 1, 2, 3, 4$-re,

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha az } i\text{-edik régióból a } j\text{-edik városba mennek a számlák} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Például $x_{12} = 1$, ha a nyugati régió Chicagóba postáz, és $x_{23} = 0$, ha az északi régióból nem New Yorkba küldik az elismervényeket.

5. TÁBLÁZAT
Az éves kieső kamat számítása

Hozzárendelés	Elmaradt kamat éves szinten ($)
Nyugat – L. A.	0.20(70 000)2 = 28 000
Nyugat – Chicago	0.20(70 000)6 = 84 000
Nyugat – N. Y.	0.20(70 000)8 = 112 000
Nyugat – Atlanta	0.20(70 000)8 = 112 000
Észak – L. A.	0.20(50 000)6 = 60 000
Észak – Chicago	0.20(50 000)2 = 20 000
Észak – N. Y.	0.20(50 000)5 = 50 000
Észak – Atlanta	0.20(50 000)5 = 50 000
Kelet – L. A.	0.20(60 000)8 = 96 000
Kelet – Chicago	0.20(60 000)5 = 60 000
Kelet – N. Y.	0.20(60 000)2 = 24 000
Kelet – Atlanta	0.20(60 000)5 = 60 000
Dél – L. A.	0.20(40 000)8 = 64 000
Dél – Chicago	0.20(40 000)5 = 40 000
Dél – N. Y.	0.20(40 000)5 = 40 000
Dél – Atlanta	0.20(40 000)2 = 16 000

A Nickles minimalizálni akarja a (teljes éves költség) = (a lockboxok éves működési költségei) + (elmaradt éves kamat) célfüggvényt. Az elmaradt éves kamat meghatározásához ki kell számítanunk, hogy mennyi az átfutási idő alatti kamat, ha a számlák az i-edik régióból a j-edik városba mennek. Például mennyi kamatot veszít el a Nickles, ha a nyugati régióból New Yorkba postázzák a számlákat? Minden egyes napon 8 napnak megfelelő $8(70\,000) = 560\,000\$$ értékű számla van úton ebből a régióból, az éves 20%-os kamatlábbal számolva tehát a Nickles $0.20(560\,000) = 112\,000\$$ kamatveszteséget szenved el éves szinten ebben az esetben. Az összes lehetséges régió–város hozzárendelésre a hasonlóan számított elmaradt kamatokat tartalmazza az 5. táblázat. Mivel az i-edik régióból a j-edik városba postázás ily módon számított költsége csak akkor merül fel, ha $x_{ij} = 1$, a kieső kamat éves szinten (ezer dollárban):

$$\begin{aligned}\text{éves elmaradt kamat} = {} & 28x_{11} + 84x_{12} + 112x_{13} + 112x_{14} \\ & + 60x_{21} + 20x_{22} + 50x_{23} + 50x_{24} \\ & + 96x_{31} + 60x_{32} + 24x_{33} + 60x_{34} \\ & + 64x_{41} + 40x_{42} + 40x_{43} + 16x_{44}\end{aligned}$$

A lockbox működtetése az i-edik városban akkor és csak akkor merül fel, ha $y_i = 1$, így a lockboxok éves működési összköltsége (ezer dollárban):

$$\text{a lockboxok éves működési összköltsége} = 50y_1 + 50y_2 + 50y_3 + 50y_4$$

A Nickles célfüggvénye tehát

$$\begin{aligned}\min z = {} & 28x_{11} + 84x_{12} + 112x_{13} + 112x_{14} \\ & + 60x_{21} + 20x_{22} + 50x_{23} + 50x_{24} \\ & + 96x_{31} + 60x_{32} + 24x_{33} + 60x_{34} \\ & + 64x_{41} + 40x_{42} + 40x_{43} + 16x_{44} \\ & + 50y_1 + 50y_2 + 50y_3 + 50y_4\end{aligned} \tag{19}$$

A Nickles kéttípusú megkötéssel szembesül:

1. típusú feltétel. Mindegyik régióból a számlákat egyetlen városba kell küldeni.

2. típusú feltétel. Egy régióból csak olyan városba postázhatnak, ahol működik lockbox.

Az 1-es típusú előírás fordítása, hogy az $i = 1,2,3,4$ értékek mindegyikére az i-edik régióhoz tartozó x_{i1}, x_{i2}, x_{i3} és x_{i4} változók közül pontosan egynek kell 1-nek lennie, a többinek 0-nak. Ez a következő négy feltétellel megoldható:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} = 1 \qquad \text{(nyugat feltétel)} \qquad (20)$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} = 1 \qquad \text{(észak feltétel)} \qquad (21)$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} = 1 \qquad \text{(kelet feltétel)} \qquad (22)$$
$$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44} = 1 \qquad \text{(dél feltétel)} \qquad (23)$$

A 2-es típusú megkötés szerint, ha

$$x_{ij} = 1 \qquad \text{(azaz az } i\text{-edik régió a } j\text{-edik városba postáz)} \qquad (24)$$

akkor y_j-nek 1-nek kell lennie. Legyen például $x_{12} = 1$. Ekkor a 2-es városban lockboxnak kell működnie, vagyis $y_2 = 1$ kell legyen. Ez a következő 16 feltétellel biztosítható:

$$x_{ij} \le y_j \qquad (i = 1,2,3,4;\, j = 1,2,3,4) \qquad (25)$$

Ha $x_{ij} = 1$, a (25) miatt biztosan $y_j = 1$, ahogy akartuk. Ugyanakkor, ha $x_{1j} = x_{2j} = x_{3j} = x_{4j} = 0$, a (25) megengedi, hogy akár $y_j = 0$, akár $y_j = 1$ legyen. A fixköltség példához hasonlóan a minimalizálás eredménye az $y_j = 0$ lesz. Összegezve, a (25) biztosítja, hogy a Nickles csak akkor fizet egy lockboxért, ha azt használja is.

A (19)–(23) és (25) feltételek, valamint a változók 0–1 értékűsége együtt adja a következő modellt:

$$\begin{aligned}
\min z = {} & 28x_{11}+84x_{12}+112x_{13}+112x_{14}+60x_{21}+20x_{22}+50x_{23}+50x_{24} \\
& +96x_{31}+60x_{32}+24x_{33}+60x_{34}+64x_{41}+40x_{42}+40x_{43}+16x_{44} \\
& +50y_1+50y_2+50y_3+50y_4 \\
\text{f.h.} \quad & x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} = 1 \qquad \text{(nyugat feltétel)} \\
& x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} = 1 \qquad \text{(észak feltétel)} \\
& x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} = 1 \qquad \text{(kelet feltétel)} \\
& x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44} = 1 \qquad \text{(dél feltétel)} \\
& x_{11} \le y_1, x_{21} \le y_1, x_{31} \le y_1, x_{41} \le y_1, x_{12} \le y_2, x_{22} \le y_2, x_{32} \le y_2, x_{42} \le y_2, \\
& x_{13} \le y_3, x_{23} \le y_3, x_{33} \le y_3, x_{43} \le y_3, x_{14} \le y_4, x_{24} \le y_4, x_{34} \le y_4, x_{44} \le y_4 \\
& \qquad \text{mindegyik } x_{ij} \text{ és } y_j = 0 \text{ vagy } 1
\end{aligned}$$

Az optimális megoldás: $z = 242$, $y_1 = 1$, $y_3 = 1$, $x_{11} = 1$, $x_{23} = 1$, $x_{33} = 1$, $x_{43} = 1$. Vagyis a Nicklesnek Los Angelesben és New Yorkban kell lockboxot működtetnie. A nyugati régióból Los Angelesbe, a többi régióból pedig New Yorkba kell küldeni a számlákat.

A 2-es típusú megkötések egy másik módon is modellezhetők. A 16 darab $x_{ij} \le y_j$ alakú feltétel helyett használhatjuk a következő négyet:

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41} \le 4y_1 \qquad \text{(Los Angeles feltétel)}$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42} \le 4y_2 \qquad \text{(Chicago feltétel)}$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43} \le 4y_3 \qquad \text{(New York feltétel)}$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44} \le 4y_4 \qquad \text{(Atlanta feltétel)}$$

Ezek a feltételek garantálják, hogy ha egy lockboxot használnak, a Nickles fog érte fizetni. Vegyük például az $x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44} \leq 4y_4$ feltételt. Atlantában a lockboxot akkor használják, ha az $x_{14}=1$, $x_{24}=1$, $x_{34}=1$ vagy $x_{44}=1$ közül legalább egy fennáll. Ekkor viszont az Atlanta feltétel biztosítja, hogy $y_4=1$ legyen, vagyis a Nickles fizet a lockboxért. Ha viszont mind a négy változó 0, a minimalizálás a kedvezőbb $y_4=0$ értéket állítja be, az atlantai lockbox költsége nem merül fel. De miért van egy 4-es ezen feltételek jobb oldalán? Ez biztosítja, hogy akár mind a négy régióból abba a városba postázzanak. A 8.3. alfejezetben majd látjuk, hogy a két modell közül melyiknek egyszerűbb a számítógépes megoldása. A válasz lehet, hogy meglepő lesz.

A halmazlefedési probléma

Az alábbi egy tipikus példa az IP-k egy fontos típusára, amelyet halmazlefedési problémaként ismerünk.

5. PÉLDA Egy megye vezetése el akarja dönteni, hogy a megye hat városa közül melyekben legyen tűzoltóállomás. A lehető legkevesebb állomást akarják építeni azon előírás mellett, hogy mindegyik város elérhető legyen valamelyik tűzoltóállomásról 15 percen belül. A 6. táblázat tartalmazza a városok közötti elérési időket. Adjunk meg egy IP-t, amellyel meghatározható, hogy hány tűzoltóállomásra van szükség, és azokat hová telepítsék!

6. TÁBLÁZAT A városok közötti elérési idő (perc)

	Hová					
Honnan	**1-es város**	**2-es város**	**3-as város**	**4-es város**	**5-ös város**	**6-os város**
1-es város	0	10	20	30	30	20
2-es város	10	0	25	35	20	10
3-as város	20	25	0	15	30	20
4-es város	30	35	15	0	15	25
5-ös város	30	20	30	15	0	14
6-os város	20	10	20	25	14	0

Megoldás A megyének döntenie kell minden egyes város esetében, hogy legyen-e ott tűzoltóállomás. Definiáljuk az x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 és x_6 0–1 változókat:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{ha az } i\text{-edik városban tűzoltóállomás épül} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Az építendő tűzoltóállomások száma ekkor $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$, a megye szándéka tehát minimalizálni a

$$z = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$$

célfüggvényt. De mik a feltételek? Biztosítani kell, hogy mindegyik város 15 perces körzetében legyen tűzoltóság. A 7. táblázat megadja, hogy mely városokból érhető el egy város 15 percen belül. Az 1-es városhoz 15 percen belül lesz legalább egy tűzoltóállomás, ha

$$x_1+x_2 \geq 1 \qquad \text{(1-es város feltétel).}$$

7. TÁBLÁZAT
Egy adott városból a 15 percen belül elérhető városok

1-es város	$1,2$
2-es város	$1,2,6$
3-as város	$3,4$
4-es város	$3,4,5$
5-ös város	$4,5,6$
6-os város	$2,5,6$

Ez a feltétel kizárja, hogy $x_1 = x_2 = 0$ legyen, tehát legalább egy tűzoltóállomás biztosan épül az 1-es város 15 perces körzetében. Hasonlóan, az

$$x_1 + x_2 + x_6 \geq 1 \qquad \text{(2-es város feltétel)}$$

garantálja, hogy lesz legalább egy tűzoltóállomás a 2-es város 15 perces körzetében.

Ugyanígy adhatók meg a feltételek a 3–6-os városokra. Ez a hat feltétel, a változók 0–1 értékűsége és a célfüggvény alkotja a keresett IP-t:

$$\begin{array}{llr}
\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 & & \\
\text{f.h.} \quad x_1 + x_2 & \geq 1 & \text{(1-es város feltétel)} \\
\quad x_1 + x_2 + x_6 & \geq 1 & \text{(2-es város feltétel)} \\
\quad x_3 + x_4 & \geq 1 & \text{(3-as város feltétel)} \\
\quad x_3 + x_4 + x_5 & \geq 1 & \text{(4-es város feltétel)} \\
\quad x_4 + x_5 + x_6 & \geq 1 & \text{(5-ös város feltétel)} \\
\quad x_2 + x_5 + x_6 & \geq 1 & \text{(6-os város feltétel)} \\
x_i = 0 \text{ vagy } 1 \quad (i = 1,2,3,4,5,6) & &
\end{array}$$

Ennek az IP-nek egy optimális megoldása: $z = 2$, $x_2 = x_4 = 1$, $x_1 = x_3 = x_5 = x_6 = 0$. A megyének tehát két tűzoltóállomást kell építenie, mégpedig a 2-es és 4-es városokban.

Az 5. példa egy tipikus **halmazlefedési feladat**. Egy halmazlefedési feladatban egy adott S_1 halmaz minden elemét le kell „fedni” egy másik S_2 halmaz valamely olyan elemével, amely az S_1-beli elem számára „elfogadható”. A halmazlefedési feladatban a cél a minimális számú olyan S_2-beli elem kiválasztása, amelyek együttesen lefedik az S_1 halmazt. Az 5. példában az S_1 a városok halmaza, az S_2 pedig a tűzoltóállomásoké. A 2-es városban lévő állomás lefedi az 1-es, 2-es és 6-os városokat; a 4-es városban lévő állomás lefedi a 3-as, 4-es és 5-ös városokat. Halmazlefedési feladatok számos helyen felmerülnek, például a repülőgépjáratok, illetve a személyzet ütemezésében, a politikai körzetek kialakításában, a kamionok útvonalainak meghatározásában.

Vagy-vagy feltételek

Az alábbi szituáció gyakran előfordul matematikai programozási feladatokban. Adott két feltétel:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0 \tag{26}$$

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0, \tag{27}$$

és azt akarjuk, hogy a (26) és (27) közül legalább az egyik teljesüljön. Az ilyen megkötéseket gyakran **vagy-vagy feltételeknek** hívják. Vegyük be a modellbe az alábbi (26′) és (27′) feltételeket:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le My \tag{26'}$$
$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le M(1-y), \tag{27'}$$

ahol y egy 0–1 változó, és M egy kellően nagy szám ahhoz, hogy a modell többi feltételét kielégítő bármely $x_1, x_2, \ldots, x_n$ értékekre teljesülnek az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le M$ és a $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le M$ feltételek.

Most megmutatjuk, hogy a $(26')$ és $(27')$ feltételek biztosítják, hogy a (26) és (27) közül legalább az egyik teljesül. Ha $y = 0$, akkor a $(26')$ és $(27')$ az $f \le 0$ és $g \le M$ feltételekké válnak, vagyis a (26) biztosan fennáll (esetleg a (27) is). Hasonlóképpen, ha $y = 1$, akkor a $(26')$ és $(27')$ az $f \le M$ és $g \le 0$ feltételekké válnak, tehát a (27) biztosan fennáll (esetleg a (26) is). Azt kaptuk, hogy akár $y = 0$, akár $y = 1$, a $(26')$ és $(27')$ garantálja, hogy a (26) és (27) közül legalább az egyik biztosan fennáll.

A következő példa szemlélteti a vagy-vagy feltételek használatát.

6. PÉLDA A Dorian Auto háromféle autót tervez gyártani. Az egyes típusokhoz szükséges erőforrásokat, valamint az elért hasznot mutatja a 8. táblázat. Jelenleg 6000 tonna acél, 60 000 óra élőmunka áll rendelkezésre. Egy típus gyártása csak akkor gazdaságos, ha abból a típusból legalább 1000 autó készül. Adjunk meg egy IP-t, amellyel maximalizálható a Dorian profitja!

8. TÁBLÁZAT Az erőforrások és a profit autónként

	Kompakt	**Közepes**	**Családi**
Acél	1.5 tonna	3 tonna	5 tonna
Munka	30 óra	25 óra	40 óra
Profit	2000$	3000$	4000$

Megoldás A Dorian azt akarja megtudni, hogy az egyes típusokból hány autót gyártson. Legyen tehát

$$x_1 = \text{a gyártandó kompakt autók száma}$$
$$x_2 = \text{a gyártandó közepes méretű autók száma}$$
$$x_3 = \text{a gyártandó családi autók száma.}$$

Ekkor a haszon (ezer dollárban) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3$, a Dorian célja tehát maximalizálni a

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

célfüggvényt. Mivel ha egy típust gyártanak, akkor legalább 1000 olyan típusú autót kell készíteni, mindegyik $i = 1, 2, 3$ esetén vagy $x_i \le 0$ vagy $x_i \ge 1000$ kell legyen. Az acél és az élőmunka korlátozottan áll csak rendelkezésre, így teljesíteni kell a következő öt megszorítást:

1. feltétel Vagy $x_1 \le 0$, vagy $x_1 \ge 1000$.

2. feltétel Vagy $x_2 \le 0$, vagy $x_2 \ge 1000$.

3. feltétel Vagy $x_3 \le 0$, vagy $x_3 \ge 1000$.

4. feltétel A felhasznált acél nem lehet több, mint 6000 tonna.

5. feltétel A felhasznált élőmunka nem lehet több, mint 60 000 óra.

Korábban láttuk, hogy ha $f(x_1, x_2, x_3) = x_1$ és $g(x_1, x_2, x_3) = 1000 - x_1$, az 1-es feltétel helyettesíthető a következő feltételekkel:

$$\begin{aligned} x_1 &\leq M_1 y_1 \\ 1000 - x_1 &\leq M_1(1 - y_1) \\ y_1 &= 0 \text{ vagy } 1 \end{aligned}$$

Azt akarjuk, hogy az x_1, illetve az $1000 - x_1$ egyszerre sose lépje túl az M_1-et. Ehhez elegendő az M_1-et akkorának választani, hogy egyrészt nagyobb legyen 1000-nél, másrészt az x_1 ne haladja meg M_1-et. Mivel $\frac{60\,000}{30} = 2000$ kompakt autó gyártása felemésztené a rendelkezésre álló összes élőmunkát (acélból még maradna valamennyi), legfeljebb 2000 kompakt autó készíthető. Ezért az $M_1 = 2000$ egy alkalmas választás. Hasonlóképpen a 2-es feltétel helyettesíthető az

$$\begin{aligned} x_2 &\leq M_2 y_2 \\ 1000 - x_2 &\leq M_2(1 - y_2) \\ y_2 &= 0 \text{ vagy } 1 \end{aligned}$$

feltételekkel. Ellenőrizze az olvasó, hogy az $M_2 = 2000$ megfelelő. Hasonlóképpen a 3-as feltétel helyettesíthető az

$$\begin{aligned} x_3 &\leq M_3 y_3 \\ 1000 - x_3 &\leq M_3(1 - y_3) \\ y_3 &= 0 \text{ vagy } 1 \end{aligned}$$

feltételekkel. Ellenőrizze az olvasó, hogy az $M_3 = 1200$ egy alkalmas választás. A 4-es megszorítás fordítása nyilván

$$1.5x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 6000 \qquad \text{(acél feltétel),}$$

az 5-ös megszorításé pedig

$$30x_1 + 25x_2 + 40x_3 \leq 60\,000 \qquad \text{(munka feltétel).}$$

Figyelembe véve, hogy $x_i \geq 0$ és x_i értékei egészek, az alábbi IP-t kapjuk:

$$\begin{aligned} \max\ z = 2x_1 &+ 3x_2 + 4x_3 \\ \text{f.h.} \qquad x_1 &\leq 2000y_1 \\ 1000 - x_1 &\leq 2000(1 - y_1) \\ x_2 &\leq 2000y_2 \\ 1000 - x_2 &\leq 2000(1 - y_2) \\ x_3 &\leq 1200y_3 \\ 1000 - x_3 &\leq 1200(1 - y_3) \\ 1.5x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\leq 6000 \qquad \text{(acél feltétel)} \\ 30x_1 + 25x_2 + 40x_3 &\leq 60\,000 \qquad \text{(munka feltétel)} \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0; \quad x_1, x_2, x_3 \text{ egész} \\ y_1, y_2, y_3 &= 0 \text{ vagy } 1 \end{aligned}$$

Az IP optimális megoldása: $z = 6000$, $x_2 = 2000$, $y_2 = 1$, $y_1 = y_3 = x_1 = x_3 = 0$. A Doriannak tehát 2000 közepes méretű autót kell készítenie. Amennyiben nem kellett volna gyártott típusonként legalább 1000 autót készíteni, az optimális megoldás 570 kompakt és 1715 közepes méretű autó készítését írta volna elő.

Ha-akkor feltételek

Számos alkalmazásban felmerül a következő igény: azt akarjuk, hogy az $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) > 0$ feltétel teljesülése esetén a $g(x_1,x_2,\ldots,x_n) \geq 0$ feltétel is teljesüljön, de ha $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) > 0$ nem teljesül, akkor mindegy, hogy a $g(x_1,x_2,\ldots,x_n) \geq 0$ teljesül-e vagy sem. Röviden, azt szeretnénk, hogy az $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) > 0$ maga után vonja a $g(x_1,x_2,\ldots,x_n) \geq 0$-t.

Ez megoldható a következő feltételekkel:

$$\begin{aligned} -g(x_1,x_2,\ldots,x_n) &\leq My && (28)\\ f(x_1,x_2,\ldots,x_n) &\leq M(1-y) && (29)\\ y = 0 \text{ vagy } 1 & \end{aligned}$$

Az M most is egy olyan nagyra választott pozitív szám, hogy az $f \leq M$ és $-g \leq M$ teljesüljön az $x_1,x_2,\ldots,x_n$ minden olyan értékére, amely a modell többi feltételét kielégíti. Vegyük észre, hogy $f > 0$ esetén a (29) csak $y = 0$-val állhat fenn. Ekkor a (28) miatt $-g \leq 0$, másképpen $g \geq 0$, amint azt szerettük volna. Tehát ha $f > 0$, akkor a (28) és (29) biztosítják, hogy $g \geq 0$ legyen. Viszont, ha az $f > 0$ nem teljesül, a (29) megengedi az $y = 0$ vagy $y = 1$-et is. Az $y = 1$ esetben a (28) automatikusan igaz. Vagyis, ha az $f > 0$ nem áll fenn, az $x_1,x_2,\ldots,x_n$ értékek szabadon mozoghatnak, és akár a $g < 0$, akár a $g \geq 0$ bekövetkezhet.

Szemléltetésképpen vegyük a Nickles lockbox problémát, és kössük ki, hogy ha az 1-es régióbeli vásárlók az 1-es városba küldik a számláikat, akkor oda már máshonnan nem postázhatnak. A döntési változókkal kifejezve,

$$\text{ha } x_{11} = 1, \qquad \text{akkor} \qquad x_{21} = x_{31} = x_{41} = 0. \tag{30}$$

Mivel az összes x_{ij} vagy 0, vagy 1, a (30) így is írható:

$$\text{ha } x_{11} > 0, \quad \text{akkor} \quad x_{21}+x_{31}+x_{41} \leq 0, \quad \text{vagy} \quad -x_{21}-x_{31}-x_{41} \geq 0 \tag{30$'$}$$

Legyen $f = x_{11}$ és $g = -x_{21} - x_{31} - x_{41}$. A (28) és (29) alapján átírhatjuk a $(30')$-t (tehát a (30)-at is) a következőképpen:

$$\begin{aligned} x_{21}+x_{31}+x_{41} &\leq My\\ x_{11} &\leq M(1-y)\\ y = 0 &\text{ vagy } 1 \end{aligned}$$

Mivel sem a $-g$, sem az f nem lehet több, mint 3, választhatjuk az $M = 3$-at, és az eredeti lockbox-modellt kiegészíthetjük az

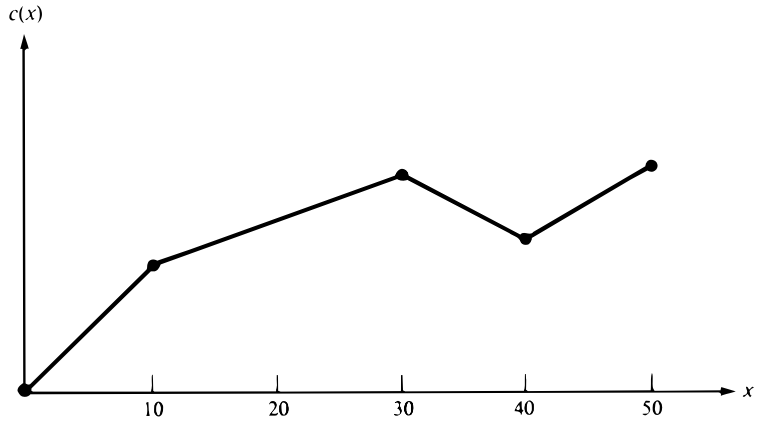
$$\begin{aligned} x_{21}+x_{31}+x_{41} &\leq 3y\\ x_{11} &\leq 3(1-y)\\ y = 0 &\text{ vagy } 1 \end{aligned}$$

feltételekkel.

Egészértékű programozás és a szakaszonként lineáris függvények[3]

A következő példán bemutatjuk, hogy 0–1 változók segítségével hogyan lehet kezelni olyan optimalizálási feladatokat, amelyek szakaszonként lineáris függvényeket tartalmaznak. Egy **szakaszonként lineáris függvény** grafikonja néhány egyenes vonaldarabból áll. A 2. ábrán látható szakaszonként lineáris függvényt négy egyenes szakasz alkotja. Egy szakaszonként lineáris függvény **töréspontjai** azok a pontok, ahol a függvény meredeksége változik (vagy az értelmezési tartomány véget ér). A 2. ábrán látható függvény töréspontjai a 0, 10, 30, 40 és 50 pontok.

2. ÁBRA
Egy szakaszonként lineáris függvény



Most nézzük, hogy miért fordulhatnak elő szakaszonként lineáris függvények az alkalmazásokban? Tegyük fel, hogy benzint finomítunk nyersolajból. Az olaj beszerzésekor a szállítónk mennyiségi árengedményt ad. Az első 500 liter olaj ára 25¢ literenként; a következő 500 liter ára 20¢ literenként; az ezen felüli 500 literé pedig 15¢ literenként. Legfeljebb 1500 liter olajat vásárolhatunk. Jelölje x a vásárolt olaj mennyiségét (literben), és $c(x)$ az x liter olaj árát (centben). Nyilván $x \leq 0$-ra $c(x) = 0$. Ha $0 \leq x \leq 500$ akkor $c(x) = 25x$. Ha $500 \leq x \leq 1000$, a $c(x) =$ (az első 500 liter ára 25¢/liter áron) + (a fennmaradó $x - 500$ liter ára 20¢/liter áron) $= 25(500) + 20(x - 500) = 20x + 2500$. Végül $1000 \leq x \leq 1500$ esetén $c(x) =$ (az első 1000 liter ára) + (a fennmaradó $x - 1000$ liter ára 15¢/liter áron) $= c(1000) + 15(x - 1000) = 7500 + 15x$. A $c(x)$ töréspontjai tehát a 0, 500, 1000 és 1500 pontok (3. ábra).

Mivel egy szakaszonként lineáris függvény nem egy lineáris függvény, azt gondolhatnánk, hogy az ilyen függvényeket tartalmazó optimalizálási feladatok megoldásában a lineáris programozás nem használható. Szerencsére 0–1 változók segítségével a szakaszonként lineáris függvények lineáris alakra hozhatók. Tegyük fel, hogy a szakaszonként lineáris $f(x)$ függvény töréspontjai a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ pontok. Ha valamilyen k-ra ($k = 1, 2, \ldots, n-1$), $b_k \leq x \leq b_{k+1}$, akkor valamilyen z_k ($0 \leq z_k \leq 1$) számra igaz, hogy

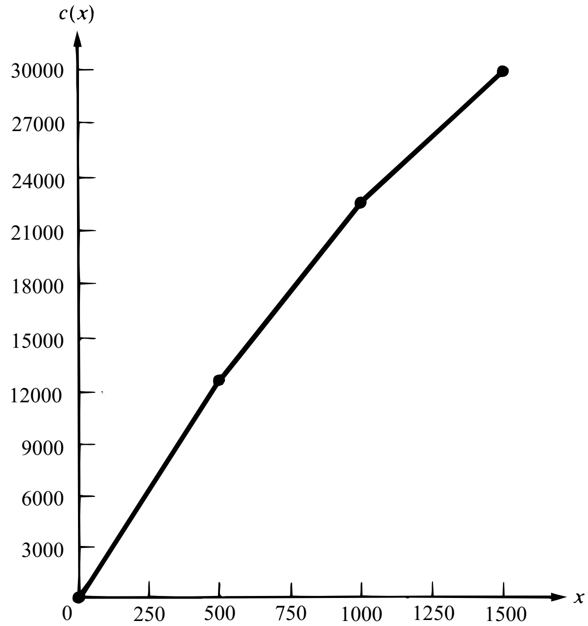
$$x = z_k b_k + (1 - z_k) b_{k+1}.$$

Mivel az $f(x)$ lineáris a $b_k \leq x \leq b_{k+1}$ intervallumon, írhatjuk, hogy

$$f(x) = z_k f(b_k) + (1 - z_k) f(b_{k+1}).$$

[3]Ezen alfejezet kihagyása nem szakítja meg a tárgyalás folytonosságát.

3. ÁBRA
A vásárolt olaj ára



Az ötlet szemléltetésére legyen $x = 800$ az olajvásárlás példánkban. Ekkor $b_2 = 500 \leq 800 \leq 1000 = b_3$, és fennáll, hogy

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{2}{5}(500) + \tfrac{3}{5}(1000) \\ f(x) &= f(800) = \tfrac{2}{5}f(500) + \tfrac{3}{5}f(1000) \\ &= \tfrac{2}{5}(12\,500) + \tfrac{3}{5}(22\,500) = 18\,500 \end{aligned}$$

Lássuk tehát, hogy miként fejezhetünk ki egy szakaszonként lineáris függvényt lineáris feltételek és 0–1 változók segítségével:

1. lépés Az optimalizálási feladatban mindenütt helyettesítsük az $f(x)$-et a $z_1 f(b_1) + z_2 f(b_2) + \cdots + z_n f(b_n)$ lineáris kifejezéssel.

2. lépés Követeljük meg a következő feltételeket:

$$\begin{gathered} z_1 \leq y_1, z_2 \leq y_1 + y_2, z_3 \leq y_2 + y_3, \ldots, z_{n-1} \leq y_{n-2} + y_{n-1}, z_n \leq y_{n-1} \\ y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} = 1 \\ z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 1 \\ x = z_1 b_1 + z_2 b_2 + \cdots + z_n b_n \\ y_i = 0 \text{ vagy } 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1); \quad z_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{gathered}$$

7. PÉLDA A Euing Gas kétféle benzint (B1 és B2) finomít kétféle olajból (O1 és O2). A B1 minden literének legalább 50% O1-et kell tartalmaznia, a B2 minden literének pedig legalább 60% O1-et. A B1 literenként 12¢-ért, a B2 literenként 14¢-ért adható el. Jelenleg 500 liter O1 és 1000 liter O2 áll rendelkezésre. Ezenfelül további legfeljebb 1500 liter O1 is beszerezhető a következő literenkénti árakon: az első 500 literre 25¢; a második 500 literre 20¢; a harmadik 500 literre pedig 15¢. Írjunk fel egy IP-t, amellyel maximalizálható a Euing Gas profitja (bevétel − beszerzési költség)!

Megoldás Attól eltekintve, hogy a többlet O1 beszerzési költsége egy szakaszonként lineáris függvény, ez egy sima keverési feladat. Legyen

$$x = \text{a vásárolt O1 mennyisége}$$
$$x_{ij} = \text{a B}j\text{-hez felhasznált O}i\text{ mennyisége} \qquad (i, j = 1, 2)$$

Ekkor (centben kifejezve)

$$\text{összbevétel} - \text{az O1 beszerzési költsége} = 12(x_{11}+x_{21})+14(x_{12}+x_{22})-c(x)$$

Amint korábban már láttuk,

$$c(x) = \begin{cases} 25x & (0 \le x \le 500) \\ 20x+2500 & (500 \le x \le 1000) \\ 15x+7500 & (1000 \le x \le 1500) \end{cases}$$

A Euing Gas maximalizálandó célfüggvénye tehát

$$z = 12x_{11}+12x_{21}+14x_{12}+14x_{22}-c(x)$$

A következő feltételeket kell figyelembe venni:

1. feltétel A Euing legfeljebb $x+500$ liter O1-et használhat fel.

2. feltétel A Euing legfeljebb 1000 liter O2-et használhat fel.

3. feltétel A B1-hez felhasznált olaj legalább 50%-a O1 legyen.

4. feltétel A B2-höz felhasznált olaj legalább 60%-a O1 legyen.

Az 1. feltétel fordítása

$$x_{11}+x_{12} \le x+500,$$

a 2. feltételé

$$x_{21}+x_{22} \le 1000,$$

a 3. feltételé

$$\frac{x_{11}}{x_{11}+x_{21}} \ge 0.5 \quad \text{vagy} \quad 0.5x_{11}-0.5x_{21} \ge 0,$$

a 4. feltételé pedig

$$\frac{x_{12}}{x_{12}+x_{22}} \ge 0.6 \quad \text{vagy} \quad 0.4x_{12}-0.6x_{22} \ge 0.$$

Továbbá minden változó nemnegatív. A Euing Gas megoldandó optimalizálási feladata tehát:

$$\begin{aligned} \max z = 12x_{11} + 12x_{21} + 14x_{12} + 14x_{22} - c(x) & \\ \text{f.h.} \quad x_{11} + x_{12} &\le x+500 \\ x_{21} + x_{22} &\le 1000 \\ 0.5x_{11}-0.5x_{21} &\ge 0 \\ 0.4x_{12}-0.6x_{22} &\ge 0 \\ x_{ij} \ge 0, \quad 0 \le x \le 1500 & \end{aligned}$$

Mivel a $c(x)$ egy szakaszonként lineáris függvény, a célfüggvény nemlineáris függvénye az x-nek, ezért a feladat nem egy LP. A korábban ismertetett módszerrel viszont IP-vé alakítható. Mivel a $c(x)$ töréspontjai a 0, 500, 1000 és 1500 pontok, a következőképpen járunk el:

1. lépés Behelyettesítjük, hogy $c(x) = z_1c(0) + z_2c(500) + z_3c(1000) + z_4c(1500)$.

2. lépés Felvesszük a következő feltételeket:

$$\begin{aligned}
&x = 0z_1 + 500z_2 + 1000z_3 + 1500z_4\\
&z_1 \le y_1, z_2 \le y_1 + y_2, z_3 \le y_2 + y_3, z_4 \le y_3\\
&z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 1, \quad y_1 + y_2 + y_3 = 1\\
&y_i = 0 \text{ vagy } 1 (i = 1,2,3); \quad z_i \ge 0 \ (i = 1,2,3,4)
\end{aligned}$$

Így a következő IP-t kapjuk:

$$\begin{array}{rl}
\max z = & 12x_{11} + 12x_{21} + 14x_{12} + 14x_{22} - z_1c(0) - z_2c(500) - z_3c(1000) - z_4c(1500)\\
\text{f.h.} & x_{11} + x_{12} \le x + 500\\
& x_{21} + x_{22} \le 1000\\
& 0.5x_{11} - 0.5x_{21} \ge 0\\
& 0.4x_{12} - 0.6x_{22} \ge 0
\end{array}$$

$$x = 0z_1 + 500z_2 + 1000z_3 + 1500z_4 \tag{31}$$
$$z_1 \le y_1 \tag{32}$$
$$z_2 \le y_1 + y_2 \tag{33}$$
$$z_3 \le y_2 + y_3 \tag{34}$$
$$z_4 \le y_3 \tag{35}$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 1 \tag{36}$$
$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 1 \tag{37}$$
$$y_i = 0 \text{ vagy } 1 \quad (i = 1,2,3); \quad z_i \ge 0 \quad (i = 1,2,3,4)$$
$$x_{ij} \ge 0$$

Nézzük, hogy miért alkalmas ez az átírás? Mivel $y_1 + y_2 + y_3 = 1$ és $y_i = 0$ vagy 1, pontosan egy y_i lesz 1, a többi 0 értéket vesz fel. Ekkor a (32)–(37) miatt, $y_i = 1$ esetén a z_i és z_{i+1} lehetnek pozitívok, de a többi z_i biztosan 0 lesz. Például, ha $y_2 = 1$, akkor $y_1 = y_3 = 0$. Ekkor a (32)–(35) feltételek a következők: $z_1 \le 0$, $z_2 \le 1$, $z_3 \le 1$ és $z_4 \le 0$. Ezek a feltételek kikényszerítik a $z_1 = z_4 = 0$-t, de megengedik, hogy z_2 és z_3 bármilyen 1-nél nem nagyobb nemnegatív értéket vegyen fel. Így látható, hogy a (31)–(37) alkalmas a szakaszonként lineáris $c(x)$ függvény megjelenítésére. Válasszunk egy értéket x-nek, legyen mondjuk $x = 800$, amelyre $b_2 = 500 \le 800 \le 1000 = b_3$. Az $x = 800$ esetén feltételeink milyen értéket adnak az y_1, y_2, ill. y_3 változóknak? Lehetetlen, hogy $y_1 = 1$ legyen. Ekkor ugyanis $y_2 = y_3 = 0$, s így a (34)–(35) miatt $z_3 = z_4 = 0$ lenne. Ebben az esetben a (31) jelentése $800 = x = 500z_2$, ami nem állhat fenn a $z_2 \le 1$ miatt. Ugyanígy kapjuk, hogy az $y_3 = 1$ sem fordulhat elő. Ha $y_2 = 1$-el próbálkozunk, a (32) és (35) miatt $z_1 = z_4 = 0$. Ekkor a (33) és (34)-ből következően $z_2 \le 1$ és $z_3 \le 1$. A (31) értelme ekkor $800 = x = 500z_2 + 1000z_3$. Lévén $z_2 + z_3 = 1$, azt kapjuk, hogy $z_2 = \frac{2}{5}$ és $z_3 = \frac{3}{5}$, a célfüggvény pedig

$$12x_{11} + 12x_{21} + 14x_{21} + 14x_{22} - \frac{2c(500)}{5} - \frac{3c(1000)}{5}.$$

Mivel
$$c(800) = \frac{2c(500)}{5} + \frac{3c(1000)}{5}$$

célfüggvényünk valóban a Euing profitjának tényleges értékét adja.

A Euing Gas problémájának optimális megoldása: $z = 12\,500$, $x = 1000$, $x_{12} = 1500$, $x_{22} = 1000$, $y_3 = z_3 = 1$. Vagyis 1000 liter O1-et kell még vásárolniuk, és 2500 liter B2-t készíteniük.

Általánosan is igaz, hogy a (31)–(37) alakú feltételek biztosítják, hogy ha $b_i \leq x \leq b_{i+1}$, akkor $y_i = 1$ és csak a z_i és z_{i+1} lehetnek pozitívak. Mivel a $c(x)$ lineáris a $b_i \leq x \leq b_{i+1}$ intervallumon, a célfüggvény a korrekt értéket adja a $c(x)$-nek.

Ha olyan szakaszonként lineáris $f(x)$ függvényt tartalmaz a modell, amelyben az egyes szakaszok meredekségei az x növekedésével egyre kedvezőtlenebbé válnak a döntéshozó számára, akkor az imént látott fáradságos IP-átírásra nincs szükség.

8. PÉLDA A Dorian Auto 20 000\$-t szán hirdetésre. A két magazin, ahol egész oldalas hirdetéseket vehetnek, az *Inside Jocks* (IJ) és a *Family Square* (FS). Egy expozíció alatt azt értjük, hogy egy olvasó először találkozik a Dorian Auto hirdetésével. Az IJ-beli hirdetések hatékonysága a következőképpen alakul: az 1–6. hirdetések egyenként 10 000 expozíciót; a 7–10. hirdetések mindegyike 3000 expozíciót; a 11–15. hirdetések egyenként 2500 expozíciót; a 16.-tól kezdve viszont már 0 expozíciót eredményeznek. Például 8 db IJ-hirdetés $6(10\,000) + 2(3000) = 66\,000$ expozíciót jelent. Az FS-beli hirdetések egyenként a következő számú expozíciót generálják: az 1–4. hirdetések 8000; az 5–12. hirdetések 6000; a 13–15. hirdetések 2000; a 16.-tól kezdve viszont itt is már 0 expozíciót. Például 13 hirdetés az FS-ben $4(8000) + 8(6000) + 1(2000) = 82\,000$ expozíciót eredményez. Az egész oldalas hirdetések ára mindkét magazin esetében 1000\$. Tegyük fel, hogy nincs átfedés a két magazin olvasótábora között. Adjunk meg egy IP-t, amellyel maximalizálható az elért expozíciók száma az adott hirdetési költségvetés mellett!

Megoldás Amennyiben

$$\begin{aligned}
x_1 &= \text{a 10 000 expozíciót eredményező IJ-hirdetések száma}\\
x_2 &= \text{a 3000 expozíciót eredményező IJ-hirdetések száma}\\
x_3 &= \text{a 2500 expozíciót eredményező IJ-hirdetések száma}\\
y_1 &= \text{a 8000 expozíciót eredményező FS-hirdetések száma}\\
y_2 &= \text{a 6000 expozíciót eredményező FS-hirdetések száma}\\
y_3 &= \text{a 2000 expozíciót eredményező FS-hirdetések száma}
\end{aligned}$$

az expozíciók száma összesen (ezer darabban kifejezve)

$$10x_1 + 3x_2 + 2.5x_3 + 8y_1 + 6y_2 + 2y_3$$

A Dorian tehát maximalizálni akarja a

$$z = 10x_1 + 3x_2 + 2.5x_3 + 8y_1 + 6y_2 + 2y_3$$

célfüggvényt. Mivel az elköltött összeg (ezer dollárban megadva) éppen megegyezik a feladott hirdetések számával, a költségvetési feltétel így írható:

$$x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3 \leq 20$$

A probléma leírásából következik, hogy $x_1 \leq 6$, $x_2 \leq 4$, $x_3 \leq 5$, $y_1 \leq 4$, $y_2 \leq 8$ és $y_3 \leq 3$ kell legyen. Hozzávéve a változókra tett előjel, illetve egészértékűségi megkötéseket kapjuk a következő IP-t:

$$
\begin{aligned}
\max\ z = 10x_1 + 3x_2 + 2.5x_3 + 8y_1 + 6y_2 + 2y_3 & \\
\text{f.h.} \quad x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3 &\le 20 \\
x_1 &\le 6 \\
x_2 &\le 4 \\
x_3 &\le 5 \\
y_1 &\le 4 \\
y_2 &\le 8 \\
y_3 &\le 3 \\
x_i, y_i \text{ egész} \quad (i = 1,2,3) & \\
x_i, y_i \ge 0 \quad (i = 1,2,3) &
\end{aligned}
$$

A döntési helyzet leírásából következik, hogy az x_2 addig nem lehet pozitív, amíg az x_1 a maximális értékét, a 6-ot el nem éri. Ugyanígy az x_3 addig nem válhat pozitívvá, amíg az x_2 el nem éri a számára legnagyobb 4 értéket. Mivel azonban az x_1-es hirdetések több expozíciót eredményeznek, mint az x_2-es hirdetések, a maximalizálás biztosítani fogja, hogy az x_2 csak akkor válik pozitívvá, ha az x_1 már elérte a lehető legnagyobb értékét. Ugyanígy, mivel az x_3-as hirdetések kevesebb expozíciót generálnak, mint az x_2-es hirdetések, az x_3 csak akkor válik pozitívvá, ha az x_2 már elérte a lehető legnagyobb értékét. Hasonlóképpen, y_2 csak akkor lesz pozitív, ha már $y_1 = 4$, és y_3 csak akkor lesz pozitív, ha már $y_2 = 8$.

A Dorian IP optimális megoldása: $z = 146\,000$, $x_1 = 6$, $x_2 = 2$, $y_1 = 4$, $y_2 = 8$, $x_3 = 0$, $y_3 = 0$. Azaz a Dorian az elérhető legtöbb expozíciót $x_1 + x_2 = 8$ IJ-beli és $y_1 + y_2 = 12$ FS-beli hirdetéssel éri el.

A 8. példában az egy magazinban való hirdetések számának emelkedésével a hozadék csökkenő mértékben növekedett. Emiatt az x_i (y_i) csak akkor vált pozitívvá, ha az x_{i-1} (y_{i-1}) már elérte a maximális értékét. Amennyiben a további hirdetések növekvő mértékben emelték volna az expozíciók számát, a mostani modell már nem lenne megfelelő. Tegyük fel például, hogy az egy IJ-hirdetés által elért expozíciók száma az 1–6. hirdetésekre 2500, a 7–10. hirdetésekre 3000, a 11–15. hirdetésekre pedig 10 000 expozíció lenne; míg az egy FS-hirdetés által elért expozíciók száma az 1–4. hirdetésekre 2000, az 5–12. hirdetésekre 6000, végül a 13–15. hirdetésekre 8000 expozíció lenne.

Ekkor, amennyiben

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \text{a 2500 expozíciót eredményező IJ-hirdetések száma} \\
x_2 &= \text{a 3000 expozíciót eredményező IJ-hirdetések száma} \\
x_3 &= \text{a 10 000 expozíciót eredményező IJ-hirdetések száma} \\
y_1 &= \text{a 2000 expozíciót eredményező FS-hirdetések száma} \\
y_2 &= \text{a 6000 expozíciót eredményező FS-hirdetések száma} \\
y_3 &= \text{a 8000 expozíciót eredményező FS-hirdetések száma}
\end{aligned}
$$

lenne, az előző esetben alkalmazott meggondolások a következő modellhez vezetnének:

$$
\begin{aligned}
\max\ & z = 2.5x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 2y_1 + 6y_2 + 8y_3 \\
\text{f.h.}\ & x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3 \le 20 \\
& x_1 \le 6 \\
& x_2 \le 4 \\
& x_3 \le 5 \\
& y_1 \le 4 \\
& y_2 \le 8 \\
& y_3 \le 3 \\
& x_i, y_i \text{ egész} \quad (i = 1,2,3) \\
& x_i, y_i \le 0 \quad (i = 1,2,3)
\end{aligned}
$$

Ennek az IP-nek az optimális megoldása: $x_3 = 5$, $y_3 = 3$, $y_2 = 8$, $x_2 = 4$, $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, ami nem lehet megfelelő. E megoldás szerint $x_1 + x_2 + x_3 = 9$ IJ-hirdetést kell feladni, vagyis $x_1 = 6$ és $x_2 = 3$ kellene hogy legyen. Látjuk tehát, hogy a Dorian Auto példában felírt modell csak akkor megfelelő, ha a szakaszonként lineáris célfüggvény meredekségei az x növekedésével egyre kedvezőtlenebbé válnak. A feltételezett második esetben egy hirdetés hatékonysága a magazinban feladott hirdetések számának emelkedésével együtt növekedett, ezért a maximalizálás már nem garantálja, hogy az x_i csak akkor válhat pozitívvá, ha az x_{i-1} már elérte a legnagyobb értékét. Ilyenkor a Euing Gas példában használt megközelítés vezetne egy korrekt modellhez (lásd a 8. feladatot).

Feladatok

A csoport

1. Egy kosárlabdaedző a kezdő ötös összeállításán töpreng. A rendelkezésére álló hét játékos szóba jöhető szerepkörét (védő – V, center – C, bedobó – B), valamint a labdakezelési, dobási, lepattanószerzési, ill. védekezési képességeinek minősítését (1 = gyenge, 3 = kiváló) tartalmazza a 9. táblázat.

9. TÁBLÁZAT

Játékos	Szerep-kör	Labda-kezelés	Dobás	Lepattanó-szerzés	Véde-kezés
1	V	3	3	1	3
2	C	2	1	3	2
3	V-B	2	3	2	2
4	B-C	1	3	3	1
5	V-B	1	3	1	2
6	B-C	3	1	2	3
7	V-B	3	2	2	1

Az edző a kezdő ötöst úgy akarja összeállítani, hogy teljesüljenek a következők:

(a) Legalább 4 játékos legyen képes védő, legalább 2 bedobó és legalább 1 center szerepben játszani.

(b) A kezdőcsapat átlagos labdakezelési, dobási, ill. lepattanószerzési szintje legalább 2 legyen.

(c) Ha a 3-as játékos kezd, a 6-os nem kezdhet.

(d) Ha az 1-es játékos kezd, a 4-esnek és az 5-ösnek is kezdenie kell.

(e) A 2-es vagy a 3-as játékosnak a kezdőcsapatban kell lennie.

Ezen megkötések mellett az edző maximalizálni akarja a kezdőcsapat összesített védekezési képességét. Írjon fel egy IP-t, amely segíthet a kezdőcsapat kiválasztásában!

2. A Momiss folyó túlzott szennyezettsége miatt az állam szennyvíztisztító állomásokat fog építeni. Három helyszín (1, 2 és 3) jöhet szóba. Különösen két szennyezőanyag (1 és 2) mennyisége érdekes. A törvényhozás előírása szerint legalább 80 000 tonna 1-es és legalább 50 000 tonna 2-es szennyezőanyagot kell a folyóból eltávolítani. A 10. táblázat tartalmazza a vonatkozó adatokat. Írjon fel egy IP-t, amellyel minimalizálható az említett célok elérésének költsége!

10. TÁBLÁZAT

Hely-szín	Az állomás építési költsége ($)	1 tonna víz tisztítási költsége ($)	Kiszűrt anyag 1 tonna vízből (t) 1-es	2-es
1.	100 000	20	0.40	0.30
2.	60 000	30	0.25	0.20
3.	40 000	40	0.20	0.25

3. Egy vállalatnak az 1-es terméke 2$, a 2-es terméke pedig 5$ profitot hoz darabonként. Egy darab 1-es termékhez három egység, egy darab 2-es termékhez hat egység alapanyag szükséges. Összesen 120 egység alapanyag áll rendelkezésre. Az 1-es termék gyártásának beindítási költsége 10$, a 2-es termék gyártásáé 20$. Írjon fel egy IP-t a profit maximalizálására!

4. Tegyük fel, hogy az 1. példát (Stockco) kiegészítjük a következő megszorítással: ha a 2-es és 3-as befektetést is választják, akkor a 4-es lehetőséget is választani kell. Milyen feltételekkel szükséges kiegészíteni a szövegbeli modellt?

5. Hogyan módosítanák a következő megszorítások a 6. példa (Dorian-autók mérete) modelljét? (Vegye az egyes részeket külön-külön.)

(a) Ha közepes méretű autókat gyártanak, akkor kompaktokat is kell készíteni.

(b) Kompakt autókat vagy családi autókat mindenképpen gyártani kell.

6. Egy egyetem operációkutatás szakán legalább két matematika, legalább két operációkutatás és legalább két számítógépes kurzust kell elvégezni. Bizonyos kurzusok több követelmény teljesítésébe is beszámíthatnak: Analízis – matematika; Operációkutatás – matematika és operációkutatás; Adatstruktúrák – számítástechnika és matematika; Üzleti statisztika – matematika és operációkutatás; Számítógépes szimuláció – operációkutatás és számítástechnika; Számítógépes programozás – számítástechnika; Előrejelzés – operációkutatás és matematika.
Bizonyos kurzusok előfeltételei más kurzusoknak: az Analízis az Üzleti statisztikának; a Számítógépes programozás a Számítógépes szimuláció, illetve az Adatstruktúrák című tárgyaknak; az Üzleti statisztika az Előrejelzés tárgynak. Írjon fel egy IP-t, amellyel minimalizálható a követelmények teljesítéséhez szükséges kurzusok száma!

7. A 7. példában (Euing Gas) tegyük fel, hogy $x = 300$. Mennyi ekkor az y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3 és z_4 értéke? És amennyiben $x = 1200$?

8. Írjon fel egy IP-t a Dorian Auto hirdetési problémájára abban az esetben, amikor a hirdetések számának emelkedésével növekszik egy hirdetés hatékonysága!

9. Hogyan biztosítható az egészértékű programozásban, hogy az x változó csak az 1, 2, 3 és 4 értékeket vehesse fel?

10. Ha x és y egészértékűek, hogyan biztosítható, hogy teljesítsék az $x+y \leq 3$ vagy a $2x+5y \leq 12$ (vagy mindkét) feltételt?

11. Ha x és y egészértékűek, hogyan biztosítható, hogy amennyiben $x \leq 2$, akkor $y \leq 3$ legyen?

12. Egy társaság raktárak létesítését fontolgatja. Négy város jöhet szóba: New York, Los Angeles, Chicago és Atlanta. Hetente bármelyik raktárból 100 egység szállítható. Egy raktár üzemeltetésének fix heti költsége New Yorkban 400$, Los Angelesben 500$, Chicagóban 300$ és Atlantában 150$. Az 1-es régió hetente 80 egységet igényel, a 2-es régió 70 egységet, a 3-as régió pedig 40 egységet. A 11. táblázat mutatja egy egység szállítási költségét (dollárban) az egyes raktárakból az egyes régiókba. A heti igényeket minimális költséggel akarjuk kielégíteni, de be kell tartanunk a következő megszorításokat is:

11. TÁBLÁZAT

	Hova		
Honnan	**1-es régió**	**2-es régió**	**3-as régió**
New York	20	40	50
Los Angeles	48	15	26
Chicago	26	35	18
Atlanta	24	50	35

(a) Ha New Yorkban lesz raktár, akkor Los Angelesben is legyen.

(b) Legfeljebb két raktár nyitható.

(c) Atlantában vagy Los Angelesben mindenképpen kell raktárt nyitni.

Írjon fel egy IP-t, amellyel minimalizálható az igények kielégítésének heti költsége!

13. A Glueco háromféle ragasztót állít elő két gyártósoron. Egyidejűleg mindegyik gyártósoron legfeljebb hét munkás dolgozhat. Az 1-es soron egy munkás heti bére 500$, a 2-es soron 900$. Az 1-es gyártósor működtetése hetente 1000$-ba, a 2-esé 2000$-ba kerül. A 12. táblázat mutatja, hogy az egyes gyártósorokon egy munkás hetente hány vödör ragasztót tud előállítani az egyes fajtákból. Minden héten legalább 120 vödör 1-es ragasztót, legalább 150 vödör 2-es és legalább 200 vödör 3-as ragasztót kell gyártani. Írjon fel egy IP-t a heti igényeket kielégítő termelés költségének minimalizálására!

12. TÁBLÁZAT

	1-es ragasztó	**2-es ragasztó**	**3-as ragasztó**
1-es gyártósor	20	30	40
2-es gyártósor	50	35	45

14.[4] Egy egyetem központi számítógépének kezelője 5 fájlhoz akar hozzáférni. Tíz lemez van, amelyeken a fájlok megtalálhatók, a 13. táblázat mutatja, hogy melyik lemezen melyik fájl. A lemezek tárigénye a következő: 1-es lemez 3K; 2-es lemez 5K; 3-as lemez 1K; 4-es lemez 2K; 5-ös lemez 1K; 6-os lemez 4K; 7-es lemez 3K; 8-as lemez 1K; 9-es lemez 2K; 10-es lemez 2K.

[4] Day (1965) alapján.

13. TÁBLÁZAT

	Lemez									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1-es fájl	x	x		x	x			x	x	
2-es fájl	x		x							
3-as fájl		x			x		x			x
4-es fájl			x			x		x		
5-ös fájl	x	x		x		x	x		x	x

(a) Írjon fel egy IP-t, amelyik megadja a lemezeknek egy minimális tárigényű olyan kombinációját, hogy mindegyik fájl legalább egy kiválasztott lemezről elérhető legyen! Egy lemez tartalmából vagy semmit, vagy mindent tárolni kell.

(b) Módosítsa a modellt úgy, hogy ha a 3-as vagy 5-ös lemezt használjuk, akkor a 2-es lemezt is használni kell!

15. A Fruit Computer Pear és Apricot típusú számítógépeket gyárt. A 14. táblázat tartalmazza a vonatkozó adatokat. Összesen 3000 chip és 1200 óra élőmunka áll rendelkezésre. Írjon fel egy IP-t a profit maximalizálására!

14. TÁBLÁZAT

	Munka-igény (óra)	**Chipek száma**	**Gyártósor költsége ($)**	**Eladási ár ($)**
Pear	1	2	5000	400
Apricot	2	5	7000	900

16. Egy lakóparkban házak és lakások is épülhetnek, összesen legfeljebb 10 000 lakóegység. Emellett vagy egy sportkomplexum vagy egy vitorláskikötő fog biztosan épülni, de mindkettő nem. Ha a kikötő épül meg, akkor legalább háromszor annyi háznak kell elkészülni, mint lakásnak. A kikötő 1.2 millió dollárba, a sportkomplexum 2.8 millió dollárba kerül. A beruházók úgy gondolják, hogy egy lakásból (jelenértéken számolva) 48 000$, egy házból 46 000$ bevétel származik. Egy ház és egy lakás építési költsége egyaránt 40 000$. Írjon fel egy IP-t a nyereség maximalizálására!

17. Egy termék négy különböző gépen is készíthető. A 15. táblázat tartalmazza az egyes gépek fix beindítási költségét, az egységnyi termelésre vonatkozó változó költséget, és a gép termelési kapacitását. Összesen 2000 egységnyi termék készítendő. Írjon fel egy IP-t az összköltség minimalizálására!

15. TÁBLÁZAT

Gép	**Fixköltség ($)**	**Változó költség ($)**	**Kapacitás (óra)**
1	1000	20	900
2	920	24	1000
3	800	16	1200
4	700	28	1600

18. A Bookco Kiadó öt tankönyv kiadását vizsgálja. A 16. táblázat mutatja az eladható legnagyobb példányszámot, a könyvenkénti változó előállítási költséget, az eladási árat és a szerzői honoráriumot az egyes könyvek esetén.

16. TÁBLÁZAT

	Könyv				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Legnagyobb kereslet	5000	4000	3000	4000	3000
Változó költség ($)	25	20	15	18	22
Eladási ár ($)	50	40	38	32	40
Honorárium (ezer $)	80	50	60	30	40

Például, ha 2000 példány készül az 1-es könyvből, akkor a bevétel $2000(50) = 100\ 000$\$, a költség viszont $80\ 000 + 25(2000) = 130\ 000$\$. A Bookco összesen legfeljebb 10 000 könyvet tud elkészíteni. Hogyan maximalizálhatják a profitjukat?

19. A Comquat vállalat négy üzemben gyártja a számítógépeit. Évente legfeljebb 20 000 számítógépet tudnak eladni 3500$-os egységáron. Az egyes üzemek termelési kapacitását, a gépenkénti termelési költséget és az üzem működtetésének éves fix költségét mutatja a 17. táblázat.

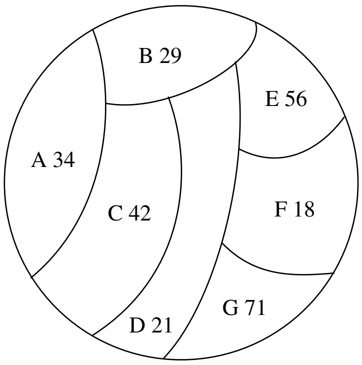
17. TÁBLÁZAT

Üzem	**Termelési kapacitás**	**Üzem fix költsége (m $)**	**Egy számítógép költsége ($)**
1	10 000	9	1000
2	8 000	5	1700
3	9 000	3	2300
4	6 000	1	2900

Hogyan maximalizálhatja a Comquat az éves nyereségét?

20. A WSP tankönyveket árusít. Két ügynökének akarja a 4. ábrán látható terület két-két szomszédos körzetét kijelölni. Az egyes körzetekben a diákok számát (ezerben) az ábra mutatja.
Például egy ügynök megkaphatja az A és B körzeteket, de az A és D-t nem. A WSP célja a kijelölt körzetekben tanuló diákok számának maximalizálása. Írjon fel egy IP-t, amelynek a megoldása megmondja, hogy az ügynököket mely körzetekkel kell megbízni, majd oldja meg az IP-t számítógéppel!

4. ÁBRA



21. Egy vállalat légkondicionálókat gyárt és árusít. Az éves kereslet az ország négy régiójában a következő: Kelet – 100 000; Dél – 150 000; Észak – 110 000; Nyugat – 90 000. A gyártás helyszíne lehet New York, Atlanta, Chicago és Los Angeles. Egy légkondicionáló dollárban megadott helyi gyártási költségét és az adott városból az egyes régiókba történő szállítási költségét együtt mutatja a 18. táblázat.

18. TÁBLÁZAT

	Régió			
	Kelet	**Dél**	**Észak**	**Nyugat**
New York	206	225	230	290
Atlanta	225	206	221	270
Chicago	230	221	208	262
Los Angeles	290	270	262	215

Bármelyik üzem legfeljebb 150 000 légkondicionálót képes előállítani évente. A 19. táblázat tartalmazza az egyes üzemek működtetésének éves fixköltségét.

19. TÁBLÁZAT

Város	**Éves fixköltség (m $)**
New York	6
Atlanta	5.5
Chicago	5.8
Los Angeles	6.2

Az északi régió keresletéből legalább 50 000 darabot vagy New Yorkból, vagy Atlantából kell kielégíteni. Írjon fel egy IP-t, amelynek a megoldása megadja, hogy a vállalat hogyan minimalizálhatja az igények kielégítésének éves összköltségét!

22. Tekintsük a következő rejtvényt. A következő hárombetűs „szavak” közül kell négyet kiválasztani:

DBA DEG ADI FFD GHI BCD FDF BAI

Minden szó annyi pontot ér, ahányadik az angol ábécében az utolsó betűje. Például a DBA 1 pontot, a DEG 7 pontot ér. A cél a kiválasztott szavak összpontjának a maximalizálása azon feltétel mellett, hogy az első betűk ábécébeli pozícióinak összege legalább akkora, mint a második betűk ábécébeli pozícióinak összege. Írjon fel egy IP-t a probléma megoldására!

23. Egy üzemben öt munkát kell elvégezni. Az egyes munkák elvégzéséhez szükséges idők attól függnek, hogy melyik gépet használják. A gépeket használatuk előtt be kell üzemelni. A vonatkozó adatokat (percben megadva) tartalmazza a 20. táblázat.

20. TÁBLÁZAT

	Munka					Beüzemelési idő
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	
1. gép	42	70	93	X	X	30
2. gép	X	85	45	X	X	40
3. gép	58	X	X	37	X	50
4. gép	58	X	55	X	38	60
5. gép	X	60	X	54	X	20

Az üzem célja az 5 munka elvégzéséhez szükséges (gyártási és beüzemelési) idő minimalizálása. Írjon fel egy alkalmas IP-t, majd határozza meg a megoldást!

B csoport

24.[5] A Breadco egy új sütőipari lánc Indiana államban. Új sütödék építésére három helyszín jöhet szóba: Evansville, Indianapolis és South Bend. Évente mindegyik sütöde legfeljebb 900 000 vekni kenyeret tud sütni. A sütöde építése Evansville-ben 5 millió dollárba, Indianapolisban 4 millió dollárba, míg South Bendben 4.5 millió dollárba kerül. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a Breadcónak csak három vásárlója van: az 1-es vásárló 700 000 vekni, a 2-es vásárló 400 000 vekni, míg a 3-as vásárló 300 000 vekni kenyeret rendel évente. A 21. táblázat mutatja, hogy mennyibe kerül egy vekni kenyér előállítása és egy adott vevőhöz szállítása.
Tegyük fel, hogy a jövőbeni gyártási és szállítási költségeket évi $11\frac{1}{9}$%-kal diszkontáljuk, valamint, hogy egy felépített sütöde örökké működik. Adjon meg egy IP-t, amellyel a Breadco minimalizálhatja a jelenlegi és jövőbeli rendelései kielégítésének összköltségét! (*Útmutatás:* Szüksége lehet arra a tényre, hogy $|x| < 1$ esetén $a + ax + ax^2 + ax^3 + \cdots = a/(1-x)$.) Hogyan módosítaná a modellt, ha Evansville-nek vagy South Bendnek legalább 800 000 vekni kenyeret kellene készítenie évente?

[5] Efroymson és Ray (1966) alapján.

21. TÁBLÁZAT

	Hova		
Honnan	**1-es vásárló**	**2-es vásárló**	**3-as vásárló**
Evansville	16¢	34¢	26¢
Indianapolis	40¢	30¢	35¢
South Bend	45¢	45¢	23¢

25.[6] Egy szerencsejáték társaság sorsjátékutalványokat fizet ki négy régióban élő nyerteseknek: Southeast (SE), Northeast (NE), Far West (FW) és Midwest (MW). Az egyes régiókba naponta postázott nyertes utalványok összértéke a következő: SE – 40 000$; NE – 60 000$; FW – 30 000$; MW – 50 000$. A napi nyerteseknek a társaság köteles még aznap postázni az utalványokat. Késleltetheti az utalványok beváltását, ha eldugott helyen lévő bankokban lehet csak őket beváltani. Ebből a célból négy helyszín jöhet szóba: Frosbite Falls, Montana (FF), Redville, South Carolina (R), Painted Forest, Arizona (PF) és Beanville, Maine (B). Az éves számlavezetési díj az egyes helyszíneken a következő: FF – 50 000$; R – 40 000$; PF – 30 000$; B – 20 000$. A kifizetésre kerülő utalványok összértéke egyik banknál sem haladhatja meg a 90 000$-t. Az utalványok postázásától a beváltásukig átlagosan eltelt napok számát mutatja a 22. táblázat. Tegyük fel, hogy a társaság évi 15%-os hozammal tudja a nála lévő pénzt befektetni. Mely város(ok)ban vezessen a társaság bankszámlát, és melyik bankban beváltható utalványokat postázzanak az egyes régióbeli nyerteseknek?

22. TÁBLÁZAT

	FF	**R**	**PF**	**B**
SE	7	2	6	5
NE	8	4	5	3
FW	4	8	2	11
MW	5	4	7	5

26.[7] Egy állam kormányzója meg akarja szavaztatni a törvényhozással a választási kerületek átalakítását. Az állam tíz városból áll. A 23. táblázat mutatja, hogy az egyes városokban hány ezren regisztrálták magukat a szavazói névjegyzékben republikánusként, illetve demokrataként. Az államnak öt kongresszusi képviselője van. A választási kerületek kialakításakor a városok a következő szabályok szerint csoportosíthatók:

(a) Egy város minden szavazója ugyanabba a körzetbe tartozzon.

(b) Mindegyik körzetbe 150 000–250 000 szavazó tartozzon. (Tegyük fel, hogy független szavazók nincsenek.)

A kormányzó demokrata. Tegyük fel, hogy mindegyik szavazó úgy szavaz, ahogyan regisztráltatta magát. Írjon fel egy IP-t, amelynek a megoldásából a kormányzó megtudná, hogy miként maximalizálható a demokraták által elnyert kongresszusi helyek száma!

23. TÁBLÁZAT

	Republikánus	**Demokrata**
1. város	80	34
2. város	60	44
3. város	40	44
4. város	20	24
5. város	40	114
6. város	40	64
7. város	70	14
8. város	50	44
9. város	70	54
10. város	70	64

27.[8] A Domino vállalat fénymásoló gépeket árusít a következő hat városban: Boston, New York, Philadelphia, Washington, Providence és Atlantic City. A gyors szervizelhetőség fontos szempont a másolók eladásakor. A várhatóan eladott másolók száma függ attól, hogy van-e szervizképviselő az adott város 150 mérföldes körzetében (24. táblázat).

[6] Shanker és Zoltners (1972) alapján.
[7] Garfinkel és Nemhauser (1970) alapján.
[8] Gelb és Khumawala (1984) alapján.

24. TÁBLÁZAT

Van-e szerviz 150 mérföldön belül?	Eladások száma					
	Boston	**New York**	**Philadelphia**	**Washington**	**Providence**	**Atlantic City**
Igen	700	1000	900	800	400	450
Nem	500	750	700	450	200	300

Egy másoló elkészítése 500$-ba kerül, eladási ára pedig 1000$. A szervizképviselő éves díja 80 000$. A Domino meg akarja határozni, hogy hol legyen képviselete. Csak Boston, New York, Philadelphia és Washington jöhet szóba. A 25. táblázat mutatja a városok közötti távolságot (mérföldben). Írjon fel egy IP-t, amellyel maximalizálható a Domino éves profitja!

25. TÁBLÁZAT

	Boston	N. Y.	Phila.	Wash.
Boston	0	222	310	441
New York	222	0	89	241
Philadelphia	310	89	0	146
Washington	441	241	146	0
Providence	47	186	255	376
Atlantic City	350	123	82	178

28.[9] Thaiföldön a haditengerészet három sorozóközpontjába hívják be az újoncokat, majd kiképzésre három bázisra küldik őket. A 26. táblázat mutatja egy újonc szállításának költségét (dollárban) az egyes sorozóközpontokból az egyes kiképzőbázisokra.

26. TÁBLÁZAT

	Hova		
Honnan	**1. bázis**	**2. bázis**	**3. bázis**
1. központ	200	200	300
2. központ	300	400	220
3. központ	300	400	250

Évente 1000 férfit hívnak be az 1. központba, 600-at a 2. központba és 700-at a 3. központba. Az 1. bázis 1000 újonc kiképzésére képes, a 2. bázis 800-éra, míg a 3. bázis 700 újoncéra. A kiképzés után az újoncokat Thaiföld fő haditengerészeti bázisára (B) szállítják vagy egy kis hajón, vagy egy nagy hajón. Egy kis hajó használata 5000$-ba és mérföldenként további 2$-ba kerül. Egy út során egy kis hajó legfeljebb két kiképzőbázist érinthet, és legfeljebb 200 embert szállíthat. Egy nagy hajó használata 10 000$-ba és mérföldenként további 3$-ba kerül. Egy út során egy nagy hajó akár mindhárom kiképzőbázisra elmehet, de 500 embernél többet nem szállíthat. Hét kis hajó és öt nagy hajó áll rendelkezésre. A lehetséges útvonalakat a 27. táblázat tartalmazza. Tegyük fel, hogy a behívottakat a szállítási feladat megoldása alapján küldik a kiképzőbázisokra. Írjon fel egy IP-t, amelyik minimalizálja az újoncok szállításának teljes költségét a kiképzőbázisokról a fő bázisra! (*Útmutatás:* Legyen y_{ij} = az i-edik útvonalon a j-edik kiképzőbázisról a fő bázisra (B) egy kis hajóval szállított újoncok száma; x_{ij} = az i-edik útvonalon a j-edik kiképzőbázisról a (B)-re egy nagy hajóval szállított újoncok száma; S_i = az i-edik útvonalat megtevő kis hajók száma; L_i = az i-edik útvonalat megtevő nagy hajók száma.)

27. TÁBLÁZAT

Útvonal sorszáma	Érintett helyszínek	Megtett mérföldek
1	B–1–B	370
2	B–1–2–B	515
3	B–2–3–B	665
4	B–2–B	460
5	B–3–B	600
6	B–1–3–B	640
7	B–1–2–3–B	720

29. Madonna legújabb albumának kazettaváltozatát kell összeállítani. A kazetta mindkét oldalára 14 és 16 perc közötti zenét kell felvenni. Az egyes dalok időtartama és típusa a 28. táblázatban látható. A dalok kiválasztásakor a következőket kell figyelembe venni:

(a) Mindkét oldalon pontosan két lassú szám legyen.

(b) Az 1-es oldalra legalább három sláger kerüljön.

(c) Az 5-ös vagy 6-os dalnak az 1-es oldalon kell lennie.

(d) Ha a 2-es és 4-es dalok az 1-es oldalon vannak, az 5-ösnek a 2-es oldalra kell kerülnie.

28. TÁBLÁZAT

Dal	Típus	Időtartam (perc)
1	Lassú szám	4
2	Sláger	5
3	Lassú szám	3
4	Sláger	2
5	Lassú szám	4
6	Sláger	3
7		5
8	Lassú szám és sláger	4

Mutassa meg, hogy miként használható az egészértékű programozás annak eldöntésére, hogy elrendezhetők-e a dalok a megfogalmazott elvárásoknak megfelelően!

30. Egy rádióállomás a hirdetéseket 60 másodperces blokkokban sugározza. Egy adott órában lejátszandó egy-egy 15, 16, 20, 25, 30, 35, 40 és 50 másodperces hirdetés. Állítson fel egy egészértékű programozási modellt, amellyel összeállítható a minimális számú 60 másodperces hirdetési

[9]Choypeng, Puakpong és Rosenthal (1986) alapján.

blokk a sugárzandó hirdetésekből! (*Útmutatás:* Nyolcnál több blokkra biztosan nincs szükség. Legyen $y_i = 1$, ha az i-edik blokkot használják, és $y_i = 0$ különben.)

31.[10] Egy olajszállító gépkocsi tartálya öt rekeszből áll, ezek rendre 2700, 2800, 1100, 1800 és 3400 liter űrtartalmúak. A gépkocsival háromféle benzint (szuper, normál, ólommentes) kell egy vásárlóhoz szállítani. A 29. táblázat tartalmazza az egyes fajtákból az igényelt mennyiséget (literben), a ki nem elégített igény utáni büntetést (literenként dollárban) és a megengedett legnagyobb elmaradást (literben). Egy tartályrekeszben csak egyfajta benzin szállítható. Írjon fel egy IP-t, amelynek a megoldása megadja, hogy miként kell a tartályt megtölteni ahhoz, hogy az elmaradt mennyiség utáni büntetés minimális legyen!

29. TÁBLÁZAT

Benzinfajta	Igény	Elmaradás büntetése	Maximális elmaradás
Szuper	2900	10	500
Normál	4000	8	500
Ólommentes	4900	6	500

32.[11] Egy bevásárlóközpont meg akarja határozni, hogy milyen típusú üzleteknek adja bérbe a 10 000 m^2 kereskedelmi területet. Az egyes üzletfajták minimális és maximális számát, valamint alapterületét adja meg a 30. táblázat. Az üzletek éves nyeresége persze függ attól, hogy a bevásárlóközpontban hány ugyanolyan típusú üzlet van. Ezt mutatja a 31. táblázat (a nyereségek 10 000$-ban értendők). Két cipőbolt esetén például mindkét üzlet nyeresége 9000$. A bérleti díj mindegyik üzlet esetén az éves nyereség 5%-a. Írjon fel egy IP-t a bevásárlóközpont bérleti díjakból származó bevételének maximalizálására!

30. TÁBLÁZAT

Üzlettípus	m^2	Minimum	Maximum
Ékszer	500	1	3
Cipő	600	1	3
Áruház	1500	1	3
Könyv	700	0	3
Ruha	900	1	3

33.[12] Egy pénzügyi társaság tulajdonában hat vagyontárgy van. A 32. táblázat tartalmazza (millió dollárban megadva) az egyes vagyontárgyak várható eladási árát. Például, ha az 1-es vagyontárgyat a második évben értékesítik, a társaság 20 millió dollár készpénzhez jut. A társaságnak az első évben legalább 20 millió dollár készpénzhez, a második évben legalább 30 millió dollárhoz, a harmadik évben pedig legalább 35 millió dollár készpénzhez kell jutnia. Állítson fel egy IP-t, amellyel a társaság meghatározhatja, hogy miként maximalizálhatja a vagyontárgyak értékesítéséből származó bevételét a három év alatt! E modell megvalósításakor hogyan lehetne a gördülő tervezési horizont ötletét használni?

31. TÁBLÁZAT

	Üzletek száma		
Üzlettípus	**1**	**2**	**3**
Ékszer	9	8	7
Cipő	10	9	5
Áruház	27	21	20
Könyv	16	9	7
Ruha	17	13	10

32. TÁBLÁZAT

	Értékesítés		
	1. év	**2. év**	**3. év**
1. vagyontárgy	15	20	24
2. vagyontárgy	16	18	21
3. vagyontárgy	22	30	36
4. vagyontárgy	10	20	30
5. vagyontárgy	17	19	22
6. vagyontárgy	19	25	29

34.[13] Egy kisvárosban hét tűzoltó riasztódoboz és hét hagyományos létrás brigád van. A 33. táblázat mutatja, hogy az egyes riasztódobozokhoz melyik két brigád van a legközelebb. A városatyák a lehető legtöbb hagyományos létrás brigádot szeretnék toronylétrás brigáddal felváltani. Politikai szempontok miatt azonban a csere nem lehet nagyon radikális, a riasztódobozokhoz legközelebbi két brigád közül legalább az egyiknek továbbra is hagyományos létrás brigádnak kell lennie.

(a) Írjon fel egy IP-t, amellyel maximalizálható a felváltható hagyományos brigádok száma!

(b) Legyen $y_k = 1$, ha a k-adik hagyományos brigádot lecserélik. Mutassa meg, hogy a $z_k = 1 - y_k$ változócsere után az (a)-beli modell ekvivalens egy halmazlefedési feladattal!

[10] Brown (1987) alapján.
[11] Bean et al. (1988) alapján.
[12] Bean, Noon és Salton (1987) alapján.
[13] Walker (1974) alapján.

33. TÁBLÁZAT

Riasztódoboz	A két legközelebbi tűzoltóbrigád
1	2, 3
2	3, 4
3	1, 5
4	2, 6
5	3, 6
6	4, 7
7	5, 7

35.[14] Egy hőerőműnek három kazánja van. Ha működik egy kazán, akkor a 34. táblázatban látható minimum és maximum értékek közötti mennyiségű gőzt tud termelni (tonnában mérve), az adott tonnánkénti áron. A kazánok által termelt gőzzel három turbina fejleszthet áramot. Egy turbina, ha működik, a 35. táblázatban látható minimum és maximum értékek közötti mennyiségű gőzt képes feldolgozni (tonnában mérve). A táblázat azt is megadja, hogy egy tonna gőz feldolgozásával az egyes turbinák mennyi áramot fejlesztenek, valamint, hogy ez mibe kerül. Írjon fel egy IP-t, amellyel minimalizálható 8000 kWh áram előállításának költsége!

34. TÁBLÁZAT

Kazán	Minimum gőz	Maximum gőz	Költség $/tonna
1	500	1000	10
2	300	900	8
3	400	800	6

35. TÁBLÁZAT

Turbina	Min.	Max.	kWh áram egy tonna gőzből	Költség $/tonna
1	300	600	4	2
2	500	800	5	3
3	600	900	6	4

36.[15] Az Ohio állambeli Clevcinn három leányvállalatból áll, amelyeknek az átlagos bértömegét, munkanélküli tartalékalapját és várható bértömegét a 36. táblázat tartalmazza (millió dollárban megadva). Egy Ohio állambeli munkaadó a várható bértömegének 20%-át vagy 10%-át fizeti ki munkanélküli biztosítási díjként attól függően, hogy a tartalékalapjának az átlagos bértömegéhez viszonyított aránya kisebb 1-nél, vagy legalább 1. A Clevcinn összevonhatja a leányvállalatait, és önálló munkaadónak minősítheti őket. Amennyiben például összevonja a 2-es és 3-as leányvállalatát, az összevont várható bértömeg 20%-át kell kifizetnie biztosítási díjként. Írjon fel egy IP-t, amellyel meghatározható, hogy mely leányvállalatok vonandók össze!

36. TÁBLÁZAT

Leányváll.	Átlagos bért.	Tartalékalap	Várható bért.
1	300	400	350
2	600	510	400
3	800	600	500

37. Egy üzleti iskola két 50 férőhelyes, egy 100 férőhelyes és egy 150 férőhelyes tanteremmel rendelkezik. Napi öt idősávban folyik az oktatás. A jelenlegi négyféle teremigényt tartalmazza a 37. táblázat.

37. TÁBLÁZAT

Típus	Igényelt teremméret	Igényelt idősávok	Igények száma
1	50 fő	2, 3, 4	3
2	150 fő	1, 2, 3	1
3	100 fő	5	1
4	50 fő	1, 2	2

El kell dönteni, hogy az egyes típusokból hány igényt milyen teremmel elégítsenek ki. A 38. táblázatban látható büntetőponttal jár az, ha egy kérést egy nagyobb méretű teremmel teljesítenek.

38. TÁBLÁZAT

Igényelt méret	Teljesített teremméret 50	100	150	Büntetőpont
50	0	2	4	100* (igényelt idősáv)
100	X	0	1	100* (igényelt idősáv)
150	X	X	0	100* (igényelt idősáv)

Az X azt jelzi, hogy egy igényt csak egy megfelelő méretű teremmel lehet kielégíteni. Fogalmazzon meg egy IP-t, amelynek a megoldása megadja, hogy miként kell a teremigényeket teljesíteni úgy, hogy a büntetőpontok száma minimális legyen!

[14] Cavalieri, Roversi és Ruggeri (1971) alapján.
[15] Salkin (1979) alapján.

38. Egy vállalat hétféle dobozt árusít. Az egyes dobozok mérete (köbdeciméterben mérve), illetve a dobozok iránti kereslet a 39. táblázatban látható.

39. TÁBLÁZAT

	Doboz						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Méret	33	30	26	24	19	18	17
Kereslet	400	300	500	700	200	400	200

A termelés változó költsége (dollárban) mindegyik doboz esetén megegyezik a doboz méretével. Ezenfelül bármelyik fajta doboz készítése esetén 1000$ fixköltség is fellép. Egy igény egy nagyobb dobozzal is kielégíthető. Írjon fel egy IP-t, amelynek segítségével minimalizálható a dobozok iránti összes kereslet kielégítésének költsége, majd határozza meg az optimális megoldást!

39. Egy vállalat öt üzemében készít paradicsomszószt. Az egyes üzemek (tonnában megadott) kapacitása a 40. táblázatban látható.

40. TÁBLÁZAT

	Üzem				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Kapacitás	300	200	300	200	400

A paradicsomszósz tárolása három raktárban történik. A 41. táblázat tartalmazza egy tonna paradicsomszósz előállításának és raktárba szállításának költségét (száz dollárban megadva) az egyes üzemek, ill. raktárak viszonylatában.

41. TÁBLÁZAT

	Hova		
Honnan	**1. raktár**	**2. raktár**	**3. raktár**
1. üzem	8	10	12
2. üzem	7	5	7
3. üzem	8	6	5
4. üzem	5	6	7
5. üzem	7	6	5

A paradicsomszósz iránt négy vásárló érdeklődik. A 42. táblázat mutatja (dollárban), hogy egy tonna paradicsomszószt milyen költséggel lehet az egyes raktárakból az egyes vásárlókhoz szállítani.

42. TÁBLÁZAT

	Hova Vásárló			
Honnan	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**
1. raktár	40	80	90	50
2. raktár	70	70	60	80
3. raktár	80	30	50	60

Az egyes vásárlók rendelését (tonnában) tartalmazza a 43. táblázat.

(a) Fogalmazzon meg egy kiegyensúlyozott szállítási feladatot, amelynek a megoldásából kiderül, hogy miként lehet minimális költséggel kielégíteni a vásárlók igényeit!

(b) Módosítsa a feladatot, ha a fentiek éves igények, és a 44. táblázatban található fixköltséggel jár az egyes üzemek, illetve raktárak működtetése!

43. TÁBLÁZAT

	Vásárló			
	1	**2**	**3**	**4**
Igény	200	300	150	250

44. TÁBLÁZAT

	Éves fixköltség (ezer $-ban)
1. üzem	35
2. üzem	45
3. üzem	40
4. üzem	42
5. üzem	40
1. raktár	30
2. raktár	40
3. raktár	30

Geoffrion és Graves (1974) alapján.

40. Az eljövendő 20 évben a Telstar távközlési vállalat becslései szerint a 45. táblázatban megadott számú vonalra lesz szükség az Egyesült Államok és Franciaország, Németország, Svájc, ill. az Egyesült Királyság között.

45. TÁBLÁZAT

Ország	Vonalak száma
Franciaország	20 000
Németország	60 000
Svájc	16 000
Egyesült Királyság	60 000

Egy távközlési vonal lehet vezetékes vagy műholdas. Kétféle vezetékes vonal létezik: a TA7, ill. a TA8. Az egyes vezetékek kiépítésének fix költségét, illetve vonalkapacitását mutatja a 46. táblázat.
A TA7 és TA8 típusú vezetékek a tenger alatt futnak az Egyesült Államoktól a La Manche csatornáig, a vonalak kiterjesztése a másik két európai országig ezért további költséggel jár. A vonalankénti éves változó költségeket mutatja a 47. táblázat.

46. TÁBLÁZAT

Vezetéktípus	A kiépítés fixköltsége	Kapacitás
TA7	1.6 milliárd $	8500
TA8	2.3 milliárd $	37800

47. TÁBLÁZAT

Ország	Vonalankénti éves költség ($)
Franciaország	0
Németország	310
Svájc	290
Egyesült Királyság	0

A műholdas vonalakhoz szükség van műholdra és országonként földi vevőállomás(ok)ra. Egy műhold felbocsátása 3 milliárd dollárba kerül, de utána 140 000 vonalat képes kezelni. Mindegyik földi vevőállomás 190 vonalat képes kezelni 6000$-os éves működtetési költség árán. Adjon meg egy egészértékű programozási modellt, amellyel minimalizálható a szükséges vonalak kiépítésének és működtetésének összköltsége az eljövendő 20 évben![16]

41. Egy nagy gyógyszergyár meg akarja határozni, hogy hány orvoslátogatót bízzon meg négy értékesítési körzetben. Annak éves költsége, hogy egy körzetben n megbízott van $(88\,000 + 80\,000n)$ dollár. A 48. táblázat mutatja, hogy hány órát vesz igénybe egy adott körzetben élő ügynöknek egy adott körzetben dolgozó orvos felkeresése.

48. TÁBLÁZAT

Orvoslátogató bázis körzete	Felkeresett körzet 1	2	3	4
1	1	4	5	7
2	4	1	3	5
3	5	3	1	2
4	7	5	2	1

Mindegyik orvoslátogató havonta legfeljebb 160 órát tud dolgozni. Az egyes körzetekben meglátogatandó orvosok számát a 49. táblázat adja meg.

49. TÁBLÁZAT

Körzet	Látogatások száma
1	50
2	80
3	100
4	60

Részmunkaidős ügynököket nem alkalmaznak, azaz nem egész számú ügynök egyik körzetben sem lehet. Határozza meg, hogy hány orvoslátogatót bízzanak meg az egyes körzetekben!

42.[17] Ebben a feladatban megmutatjuk, hogy Wall Street-i cégek hogyan választhatnak ki egy optimális kötvényportfóliót az egészértékű programozás és a kötvény időtartamának fogalma segítségével. Egy kötvény (vagy bármilyen kifizetésfolyam) *időtartama* alatt a következő értendő: Legyen $C(t)$ a kötvény kifizetése a t időpontban $(t = 1, 2, \dots, n)$, valamint $r =$ a piaci kamatláb. Amennyiben a kötvény kifizetéseinek idővel súlyozott átlaga

$$\sum_{t=1}^{t=n} tC(t)/(1+r)^t$$

és a kötvény piaci ára

$$P = \sum_{t=1}^{t=n} C(t)/(1+r)^t$$

akkor a kötvény időtartama (duration) D a következő:

$$D = (1/P) \sum_{t=1}^{n} \frac{tC(t)}{(1+r)^t}$$

Vagyis a kötvény időtartama az az „átlagos" idő (években mérve), amennyi alatt egy véletlenszerűen választott 1$ nettó jelenértéket (NPV) kapunk. Tegyük fel, hogy egy biztosító-társaságnak a következő 10 év során hathavonta 20 000$-t kell kifizetnie. Ha a piaci éves kamatláb 10%, ennek a kifizetésfolyamnak 251 780$ az NPV-je és 4.47 év az időtartama. Ha minimalizálni akarjuk a kötvényportfóliónknak a kamatláb változásából fakadó érzékenységét a kifizetési kötelezettségek betartása mellett, akkor, mint azt megmutatták, az első év elején 251 780$-t kell olyan kötvényportfólióba fektetni, amelyiknek az időtartama megegyezik a kifizetésfolyam időtartamával.
Tegyük fel, hogy egy kötvényportfólió tartásának egyetlen költsége a kötvények vásárlásának tranzakciós költsége. Az 50. táblázat hat feltételezett kötvény kifizetésfolyamát tartalmazza. Bármelyik kötvény esetén k egység vásárlásának

[16] Calloway, Cummins és Freeland (1990) alapján.
[17] Strong (1989) alapján.

tranzakciós költsége $500+5k$ dollár. Például 1-es kötvényből egy egység beszerzése 505$-ba, tíz egységé 550$-ba kerül. Tegyük fel, hogy a kötvényekből törtszámú egységet is lehet venni, de diverzifikációs okokból mindegyikből legfeljebb 100 egységet. Államkötvények is vásárolhatók (tranzakciós költség nélkül). Egy államkötvény 980$-ba kerül, időtartama pedig 0.25 év (90 nap).
Miután kiszámította (pl. valamilyen táblázatkezelő programmal) az egyes kötvények árát és időtartamát, az egészértékű programozás segítségével határozza meg azt a kötvényportfóliót, amely minimális tranzakciós költséggel beszerezhető. Feltételezheti, hogy a portfólió időtartama a kötvények időtartamainak súlyozott átlaga, ahol a súlyok az egyes kötvényekbe fektetett összegek.

50. TÁBLÁZAT

	Szóba jövő kötvények					
Év	**1-es**	**2-es**	**3-as**	**4-es**	**5-ös**	**6-os**
1	50	100	130	20	100	120
2	60	90	130	20	100	100
3	70	80	130	20	100	80
4	80	70	130	20	100	140
5	90	60	130	20	100	100
6	100	50	130	80	100	90
7	110	40	130	40	100	110
8	120	30	130	150	100	130
9	130	20	130	200	100	180
10	1010	1040	1130	1200	1100	950

43. A Fordnak négy üzeme van, bármelyikben gyártható Taurus, Lincoln vagy Escort is, de egyszerre csak egyetlen típus. Az üzemek működtetésének éves fixköltségét és az egyes típusokból egy autó gyártásának változó költségét az 51. táblázat tartalmazza.

51. TÁBLÁZAT

	Fixköltség (milliárd $)	**Változó költség ($)** Taurus	Lincoln	Escort
1. üzem	7	12 000	16 000	9 000
2. üzem	6	15 000	18 000	11 000
3. üzem	4	17 000	19 000	12 000
4. üzem	2	19 000	22 000	14 000

A Ford a következő megszorításokkal néz szembe:

(a) Mindegyik üzem csak egy típust gyárthat.

(b) Egy típust csak egy üzemben gyárthatnak. Például, ha gyártanak Taurust az 1-es üzemben, akkor az összes Taurust ott kell gyártani.

(c) Ha működtetik a 3-as és a 4-es üzemet is, akkor az 1-est is használni kell.

A Fordnak évente mindegyik típusból 500 000 autót kell előállítania. Írjon fel egy IP-t, amelynek a megoldása megmutatja, hogy a Ford miként minimalizálhatja az autók gyártásának éves összköltségét!

44. Magyarázza meg, hogy a lockbox probléma modelljében (4. példa) miért nem szükséges kikötni, hogy az x_{ij} változók csak 0 vagy 1 értéket vehetnek fel!

8.3. A korlátozás és szétválasztás módszere tiszta egészértékű programozási feladatok megoldására

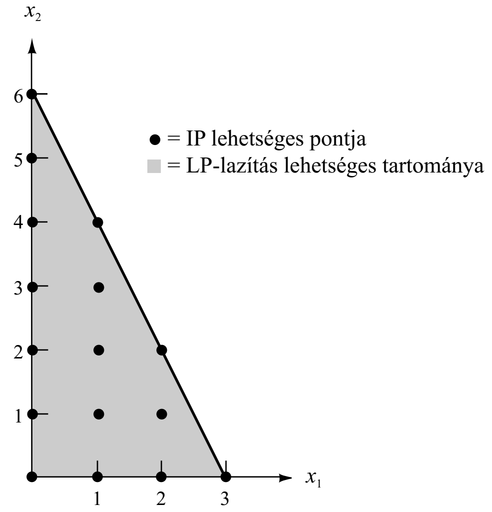
A gyakorlatban a legtöbb IP-t a korlátozás és szétválasztás módszerével oldják meg. A korlátozás és szétválasztási módszerek egy IP optimális megoldását úgy találják meg, hogy hatékonyan leszámlálják egy-egy részfeladat lehetséges megoldásait. Mielőtt ezt részletesen elmagyaráznánk, tegyük meg a következő elemi, de fontos észrevételt: *Egy tiszta egészértékű feladat LP-lazításának egy olyan optimális megoldása, amelyben mindegyik változó egészértékű, egyúttal optimális megoldása az IP-nek is.*

Szemléltetésképpen tekintsük a következő IP-t:

$$\begin{aligned} \max\ z = {} & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{f.h.} \quad & 2x_1 + \ \ x_2 \le 6 \\ & x_1, x_2 \ge 0; \quad x_1, x_2 \text{ egész} \end{aligned}$$

Az egészértékű feladat LP-lazításának optimális megoldása az $x_1 = 0, x_2 = 6, z = 12$. Mivel mindegyik változó egész értéket vett fel, tehát lehetséges megoldása az IP-nek is, az előző

5. ÁBRA
Egy IP, ill. az LP-lazításának lehetséges megoldásai



megállapítás szerint az $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, $z = 12$ egyúttal optimális megoldása az IP-nek is. Miért? Vegyük észre, hogy az IP lehetséges megoldásai az LP-lazítás lehetséges tartományának pontjai (lásd 5. ábra). Ezért az IP optimális z értéke nem lehet nagyobb, mint az LP-lazítás optimális z értéke. Az IP optimális z értéke tehát biztosan ≤ 12. Ugyanakkor az $x_1 = 0$, $x_2 = 6$ pont egy olyan lehetséges megoldása az IP-nek, amelyre $z = 12$. Vagyis az $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, $z = 12$ optimális az IP-ben.

9. PÉLDA A Telfa asztalokat és székeket készít. Egy asztalhoz 1 óra munka és 9 négyzetméter deszkalap szükséges, egy székhez pedig 1 óra munka és 5 négyzetméter deszkalap. Jelenleg 6 óra munka és 45 négyzetméter deszkalap áll rendelkezésre. Egy asztalon a nyereség 8$, egy széken 5$. Írjon fel egy IP-t a Telfa nyereségének maximalizálására, majd oldja meg a feladatot!

Megoldás Legyen

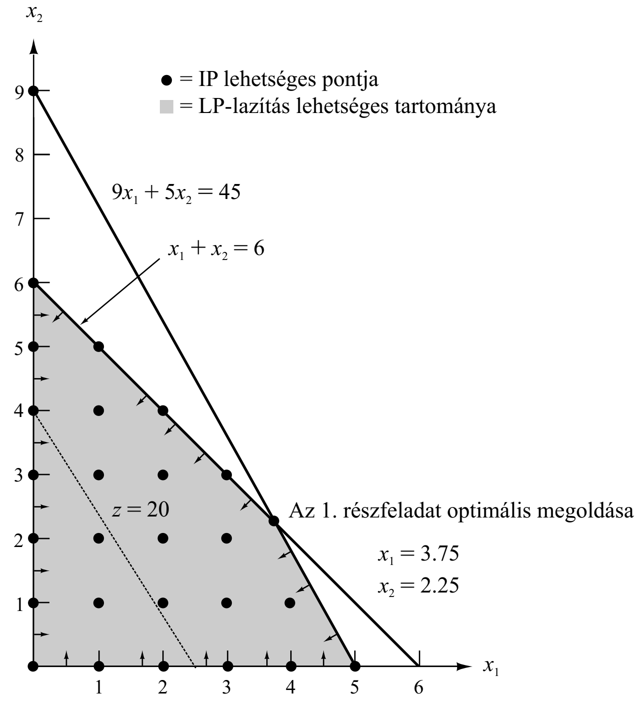
$$x_1 = \text{a készítendő asztalok száma}$$
$$x_2 = \text{a készítendő székek száma}$$

Mivel x_1-nek és x_2-nek is egész értékeket kell felvennie, a Telfának a következő IP-t kell megoldania:

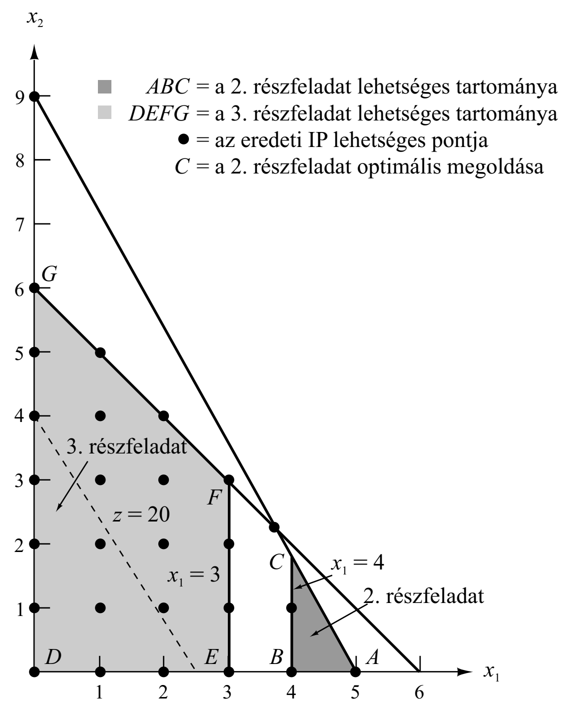
$$\begin{aligned} \max\ z &= 8x_1 + 5x_2 \\ \text{f.h.}\quad x_1 + x_2 &\leq 6 \qquad \text{(munkaidő feltétel)} \\ 9x_1 + 5x_2 &\leq 45 \qquad \text{(deszkalap feltétel)} \\ x_1, x_2 \geq 0;&\quad x_1, x_2 \text{ egész} \end{aligned}$$

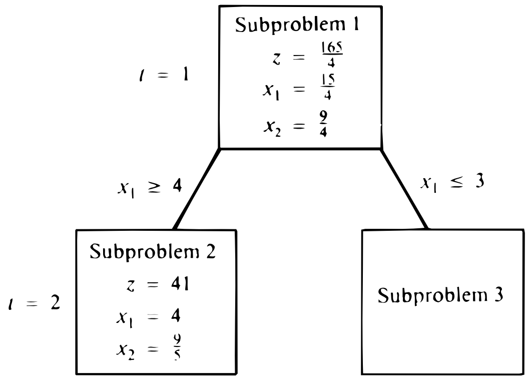
A korlátozás és szétválasztás módszere először az egészértékű feladat LP-lazítását oldja meg. Ha az LP-lazítás optimális megoldásában mindegyik döntési változó egészértékű, akkor az LP-lazítás optimális megoldása egyben az IP optimális megoldása is. Ezt az LP-lazítást az 1-es részfeladatnak hívjuk. Sajnos az LP-lazítás optimális megoldása: $z = \frac{165}{4}$, $x_1 = \frac{15}{4}$, $x_2 = \frac{9}{4}$ (lásd 6. ábra). A 8.1. alfejezetből tudjuk, hogy (az IP optimális z értéke) $\leq$ (az LP-lazítás optimális z értéke). Ebből kapjuk, hogy az IP optimális z értéke nem lehet több, mint $\frac{165}{4}$, vagyis az LP-lazítás optimális z értéke a Telfa profitjának egy **felső korlátja**.

6. ÁBRA
A Telfa feladatának lehetséges megoldáshalmaza



7. ÁBRA
A Telfa 2. és 3. részfeladatainak lehetséges tartományai





8. ÁBRA
A Telfa 1. és 2. részfeladatainak megoldása

A következő lépés az LP-lazítás lehetséges tartományának részekre bontása, s ezzel az IP optimális megoldásának pontosabb behatárolása. Tetszőlegesen kiválasztjuk az LP-lazítás optimális megoldásának valamelyik törtértékű változóját, mondjuk, az x_1-et. Vegyük észre, hogy az IP minden lehetséges megoldására vagy $x_1 \leq 3$, vagy $x_1 \geq 4$ teljesül, hiszen az egészértékűség miatt $3 < x_1 < 4$ nem állhat fenn. Ezért az x_1 változó szerint „ágaztatunk", és létrehozzuk a következő két részfeladatot:

2. részfeladat Az 1-es részfeladat + az $x_1 \geq 4$ feltétel.

3. részfeladat Az 1-es részfeladat + az $x_1 \leq 3$ feltétel.

Fontos észrevenni, hogy sem a 2. részfeladat, sem a 3. részfeladat nem tartalmaz olyan pontot, ahol $x_1 = \frac{15}{4}$, vagyis az LP-lazítás optimális megoldása nem bukkanhat elő sem a 2., sem a 3. részfeladat megoldása során.

A 7. ábrából is látjuk, hogy a Telfa IP minden lehetséges megoldása benne van vagy a 2., vagy a 3. részfeladat lehetséges tartományában, amelyek egyébként közös ponttal nem rendelkeznek. Mivel a 2. és 3. részfeladatok az x_1-re vonatkozó feltételek hozzáadásával születtek, azt mondjuk, hogy a 2. és 3. részfeladatok az x_1 szerinti **ágaztatás** termékei.

Ezután kiválasztjuk bármelyik olyan részfeladatot, amelyet LP-ként még nem oldottunk meg. Legyen ez a 2. részfeladat. A 7. ábra alapján kapjuk, hogy a 2. részfeladat optimális megoldása: $z = 41, x_1 = 4, x_2 = \frac{9}{5}$ (a C pont). A 8. ábra összegzi eddigi eredményeinket.

A létrehozott összes részfeladatot egy **fa** ábrázolja, a részfeladatok a fa **csúcsai** a csúcsokat összekötő vonalak az **élek.** A fa egy csúcsához tartozó feltételek az eredeti feladat LP-lazításának feltételei, kiegészítve az 1. részfeladattól az adott csúcsig vezető élekhez tartozó feltételekkel. A t címke a részfeladatok megoldási sorrendjét mutatja.

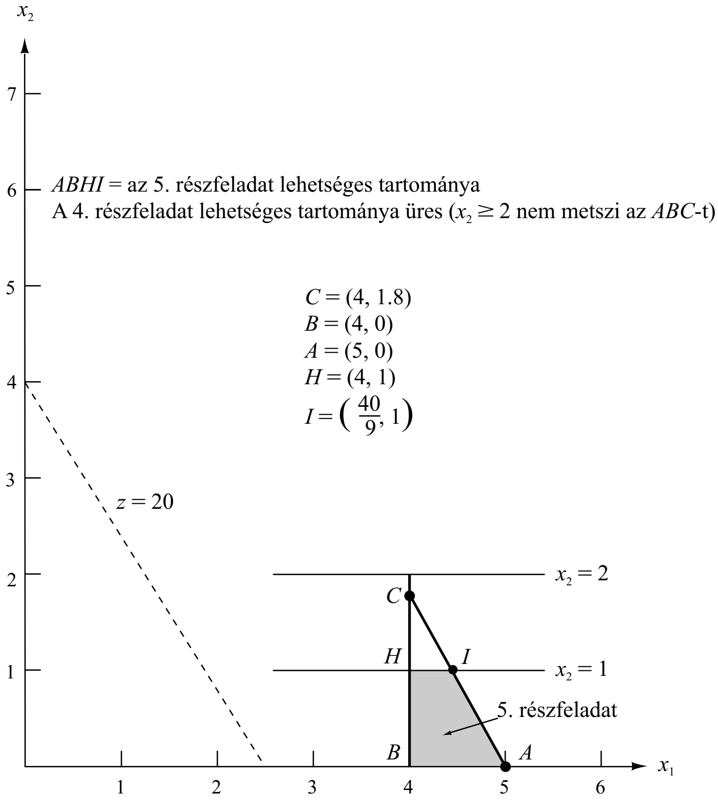
Mivel a 2. részfeladat optimális megoldása nem teljesen egészértékű, ebből a részfeladatból további két részfeladatot hozunk létre. Kiválasztunk a 2. részfeladat optimális megoldásában egy törtértékű változót, és aszerint ágaztatunk. Mivel x_2 az egyedüli törtértékű változó a 2. részfeladat optimális megoldásában, az x_2 szerint ágaztatunk. A 2. részfeladat lehetséges megoldáshalmazát aszerint bontjuk fel, hogy $x_2 \geq 2$ vagy $x_2 \leq 1$. Így a következő két részfeladathoz jutunk:

4. részfeladat 1. részfeladat + az $x_1 \geq 4$ és $x_2 \geq 2$ feltételek = 2. részfeladat + az $x_2 \geq 2$ feltétel.

5. részfeladat 1. részfeladat + az $x_1 \geq 4$ és $x_2 \leq 1$ feltételek = 2. részfeladat + az $x_2 \leq 1$ feltétel.

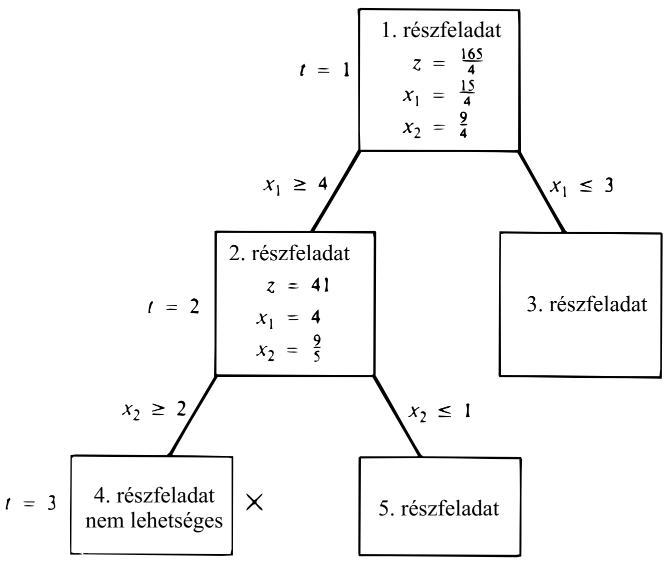
A 4. és 5. részfeladatok lehetséges tartománya a 9. ábrán látható. A megoldatlan részfeladatok halmaza a 3., 4. és 5. részfeladatokból áll. Kiválasztjuk az egyiket. Később tárgyalandó

9. ÁBRA
A Telfa 4. és 5. részfeladatainak lehetséges tartományai

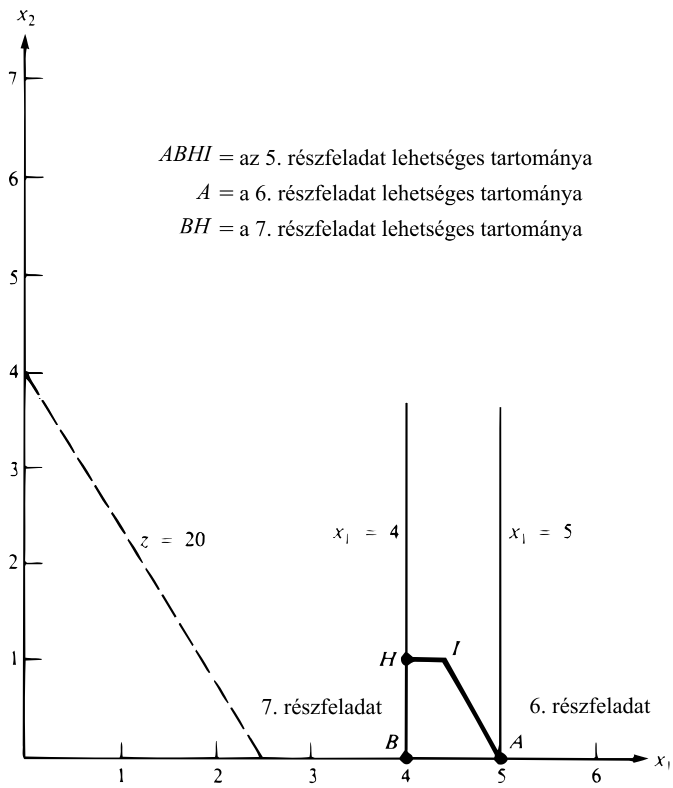


okokból a legutóbb létrehozott részfeladatot választjuk. (Ezt hívják LIFO szabálynak, last-in-first-out: utoljára-be-elsőnek-ki.) A LIFO szabály szerint most a 4. vagy 5. részfeladatot kell megoldanunk. Mi a 4. részfeladatot választjuk. A 9. ábrából kitűnik, hogy a 4. részfeladatnak nincs lehetséges megoldása, így nem adhat optimális megoldást sem. Ezt egy $\times$-el jelezzük (lásd 10. ábra). Mivel a 4. részfeladatból induló ágak semmilyen hasznos

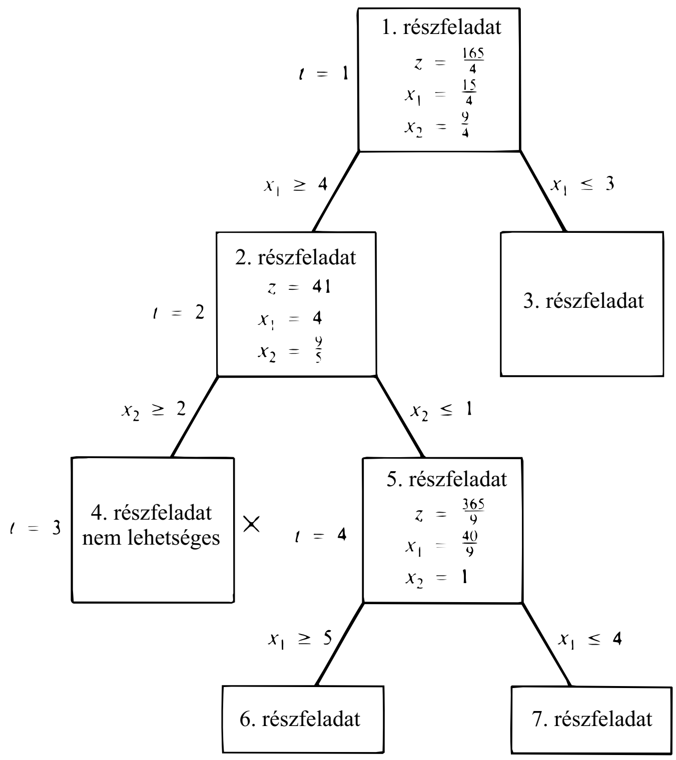
10. ÁBRA
A Telfa 1., 2. és 4. részfeladatainak megoldása



11. ÁBRA
A Telfa 6. és 7. részfeladatainak lehetséges tartományai



12. ÁBRA
A Telfa 1., 2., 4. és 5. részfeladatainak megoldása



információval sem szolgálhatnak, fölösleges őket létrehozni. Amikor egy részfeladat további ágaztatása további hasznos információt már nem eredményezhet, azt mondjuk, hogy a részfeladat (csúcs) **felderített.** Eddigi eredményeinket mutatja a 10. ábra.

Ekkor már csak a 3. és 5. részfeladatok a megoldatlanok. A LIFO szabály alapján most az 5. részfeladat következik. A 9. ábrából azt kapjuk, hogy az 5. részfeladat optimális megoldása az I pont: $z = \frac{365}{9}$, $x_1 = \frac{40}{9}$, $x_2 = 1$. Ebből a megoldásból semmilyen azonnal felhasználható információt sem nyertünk, ezért tovább bontjuk az 5. részfeladat lehetséges tartományát a törtértékű x_1 változó szerint ágaztatva. Két további részfeladatot kapunk (lásd 11. ábra).

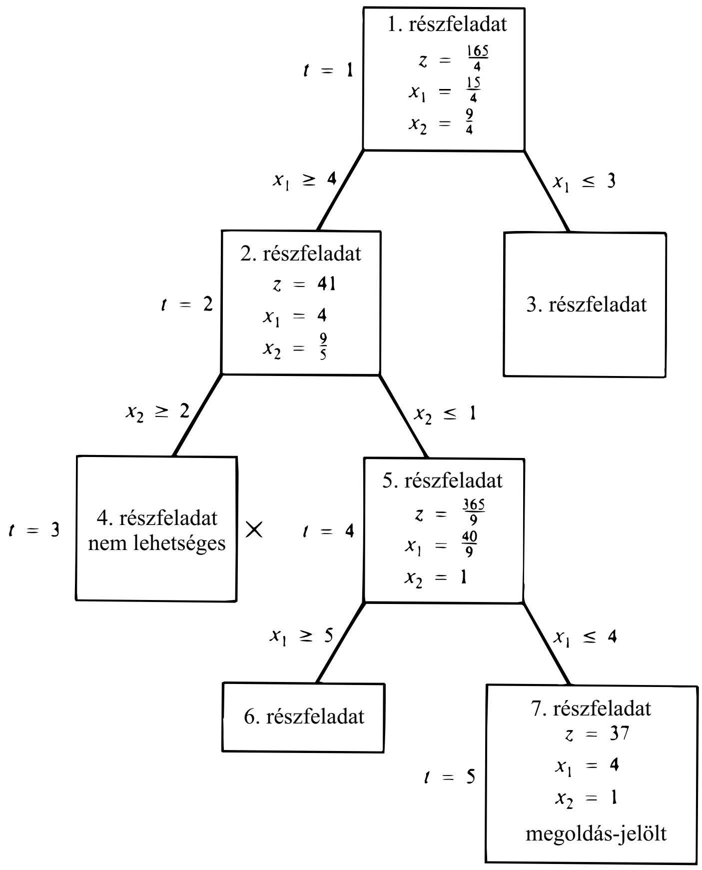
6. részfeladat 5. részfeladat + az $x_1 \geq 5$ feltétel.

7. részfeladat 5. részfeladat + az $x_1 \leq 4$ feltétel.

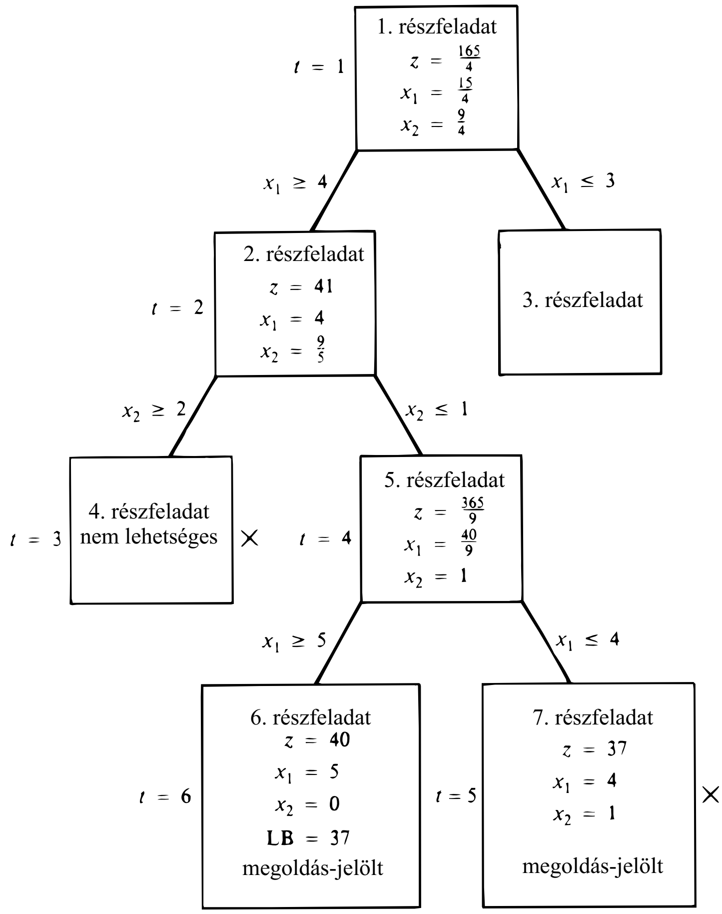
A 6. és 7. részfeladatok együtt tartalmazzák az 5. részfeladat lehetséges tartományában lévő összes egész pontot. Az 5. részfeladat optimális megoldása ugyanakkor kiesik, hiszen sem a 6., sem a 7. részfeladat lehetséges tartománya nem tartalmaz olyan pontokat, amelyekben $x_1 = \frac{40}{9}$. Az 5. részfeladat optimális megoldása tehát sem a 6. sem a 7. részfeladat megoldása során nem bukkanhat fel újra. A részfeladatok aktuális fája a 12. ábrán látható.

Megoldatlanok a 3., 6. és 7. részfeladatok. A LIFO szabály szerint a 6. vagy 7. részfeladatnak kell következnie. Mi a 7.-et választjuk. A 11. ábra alapján kapjuk, hogy a 7. részfeladat optimális megoldása a H pont: $z = 37$, $x_1 = 4$, $x_2 = 1$. Mivel x_1 és x_2 is egész értéket vesz fel, ez a megoldás lehetséges megoldása az eredeti IP-nek is. A 7. részfeladat

13. ÁBRA
A korlátozás és szétválasztási fa öt részfeladat megoldása után



14. ÁBRA
A korlátozás és szétválasztási fa hat részfeladat megoldása után

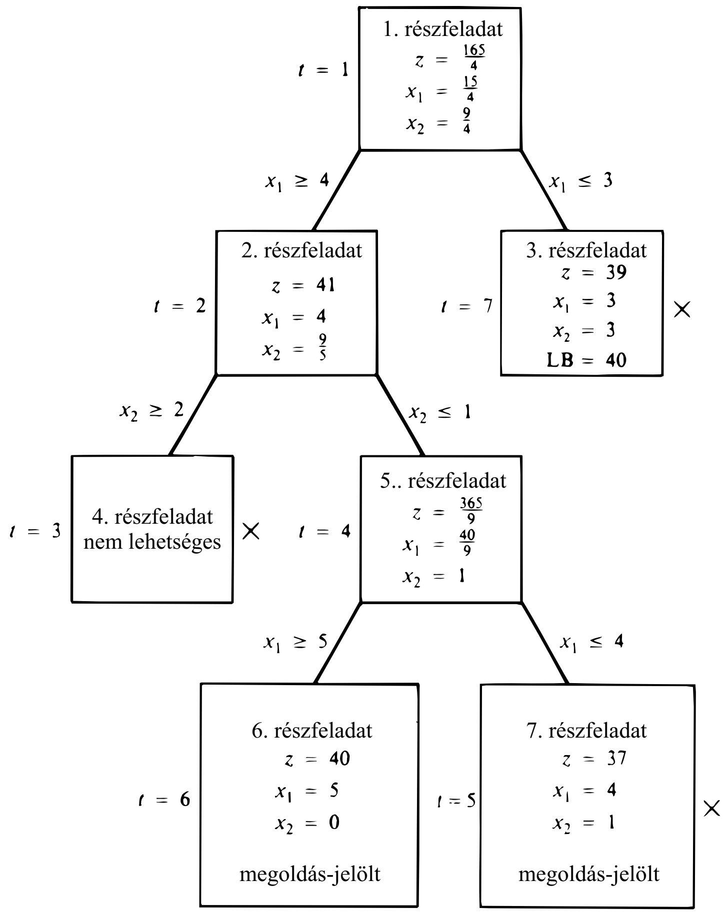


tehát egy olyan lehetséges egészértékű megoldást eredményezett, amelyre $z = 37$. Tudjuk, hogy a 7. részfeladat olyan lehetséges egészértékű megoldást nem eredményezhet, amelyre $z > 37$, vagyis a 7. részfeladat további ágaztatása az IP optimális megoldásának hollétéről további információt már nem képes adni. Így ez a részfeladat már felderített. A jelenlegi fát mutatja a 13. ábra.

Ha egy részfeladat optimális megoldásában mindegyik változó értéke egész, akkor találtunk egy **megoldás-jelöltet.** Mivel a megoldás-jelölt bizonyulhat optimálisnak is, egészen addig tartanunk kell, amíg az IP egy jobb lehetséges megoldását nem határozzuk meg (ha van ilyen egyáltalán). Van tehát egy olyan lehetséges IP-megoldásunk, amelyre $z = 37$, ezért az IP optimális z értéke ≥ 37. A megoldás-jelölt z értéke egy **alsó korlát** az eredeti IP optimális z értékére. Ezt úgy jelezzük, hogy a *következő* részfeladat dobozába beírjuk, hogy $\text{LB} = 37$ (lásd 14. ábra).

Csak a 3. és a 6. részfeladatok maradtak megoldatlanok. A LIFO szabályt követve a 6. részfeladattal folytatjuk. A 11. ábra szerint a 6. részfeladat optimális megoldása az A pont: $z = 40$, $x_1 = 5$, $x_2 = 0$. Ez egy megoldás-jelölt, hiszen mindegyik döntési változó értéke egész. A z értéke 40, ami több, mint az eddig talált legjobb megoldás-jelölt z értéke (a 7-es jelölt $z = 37$-je). A 7. részfeladat tehát nem adhatja az IP optimális megoldását (ezt a 7. részfeladat doboza mellé tett $\times$-el jelezzük). Az LB alsó korlát értékét pedig 40-re módosítjuk. A 15. ábra összegzi előrehaladásunkat.

15. ÁBRA
A Telfa feladatban a korlátozás és szétválasztás végső fája



Egyedül a 3. részfeladat a megoldatlan. A 7. ábra szerint a 3. részfeladat optimális megoldásása az F pont: $z = 39$, $x_1 = x_2 = 3$. Mivel a 3. részfeladat nem adhat a jelenlegi 40 alsó korlátnál magasabb z értéket, a 3. részfeladatból nem kaphatunk optimális megoldást az eredeti IP-re. Ezt egy $\times$-el jelezzük a 15. ábrán. Azt látjuk, hogy nem maradt megoldatlan részfeladat, valamint, hogy csak a 6. részfeladat adhat optimális megoldást az IP-re. Az IP optimális megoldása szerint tehát a Telfa maximálisan 40$ nyereséget érhet el, mégpedig 5 asztal és 0 szék készítésével.

A Telfa feladat korlátozás és szétválasztással történő megoldása során közvetetten számba vettük az IP összes lehetséges megoldását. Végső soron az összes ilyen pontot (az optimális megoldás kivételével) kizártuk, a korlátozás és szétválasztás eljárása tehát megfelelő. Annak szemléltetésére, hogy a korlátozás és szétválasztás módszere tényleg figyelembe veszi az IP összes lehetséges megoldását, vegyünk néhány lehetséges megoldást, és nézzük meg, hogy a korlátozás és szétválasztási eljárás miként találja őket nem optimálisnak. Honnan tudjuk például, hogy az $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ nem optimális? Ez a pont a 3. részfeladat lehetséges tartományához tartozik, és tudjuk, hogy az összes odatartozó pontra $z \leq 39$. A 3. részfeladat elemzése mutatja tehát, hogy az $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ megoldás nem adhat $z = 40$-nél többet, s így nem lehet optimális. Egy másik példának vegyük az $x_1 = 4$, $x_2 = 2$-t. Ez miért nem optimális? A fa ágait követve kiderül, hogy az $x_1 = 4$, $x_2 = 2$ a lehetséges megoldással nem rendelkező 4. részfeladathoz tartozik, ezért biztosan megsérti az eredeti IP valamelyik feltételét, s így kizárt, hogy optimális megoldás legyen. Hasonlóképpen zárja ki a korlátozás és szétválasztás módszere az összes x_1, x_2 pontot (az optimális megoldás kivételével persze).

Úgy tűnhet, hogy a Telfa egyszerű feladatát a korlátozás és szétválasztás módszerével megoldani olyan, mintha ágyúval lőnénk verébre. Olyan IP-k megoldásában azonban, amelyeknek nagyon sok lehetséges megoldásuk van, a korlátozás és szétválasztás igen hatékony módszer lehet a nem optimális pontok kiküszöbölésére. Tegyük fel például, hogy a korlátozás és szétválasztást alkalmazzuk, és az aktuális alsó korlát az LB $= 42$. Ha egy olyan részfeladatot oldunk meg, amelyiknek a lehetséges tartománya az IP 1 millió lehetséges pontját tartalmazza, és azt kapjuk, hogy a részfeladat optimális megoldásánál $z < 42$, akkor 1 millió nem optimális pontot tudtunk kiszűrni egyetlen LP megoldásával.

A tiszta IP-k korlátozás és szétválasztás módszerével történő megoldásának a következők a kulcslépései (a vegyes IP-k megoldását a következő alfejezetben tárgyaljuk):

1. lépés Ha egy részfeladat felderített, szükségtelen szétválasztani. Egy részfeladat háromféleképpen lehet felderített: (1) A részfeladat nem lehetséges. (2) A részfeladatnak van olyan optimális megoldása, amelyben mindegyik változó egészértékű. (3) A részfeladat optimális z értéke (maximum feladatban) nem haladja meg az alsó korlát aktuális LB értékét.

2. lépés Egy részfeladat a következő esetekben zárható ki: (1) A részfeladat nem lehetséges. A Telfa példában a 4. részfeladatot emiatt zártuk ki. (2) Az LB (= az eddigi legjobb megoldás-jelölt z értéke) legalább akkora, mint a részfeladat z értéke. A Telfa példában a 3. és 7. részfeladatokat emiatt zártuk ki.

A Telfa probléma korlátozás és szétválasztással történő megoldása során többször tetszőlegesen döntöttünk. Az 1. részfeladat optimális megoldásában például mind az x_1, mind az x_2 törtértékű volt, az ágaztató változót önkényesen választottuk. Ugyancsak önkényesen döntöttünk, amikor a következő megoldandó részfeladatot jelöltük ki. Ezektől a döntésektől a keletkező fa mérete, s így az optimális megoldás megtalálásához szükséges számítógépidő is nagymértékben függ. Tapasztalatukra és leleményességükre alapozva a korlátozás és szétválasztás alkalmazói kidolgoztak néhány útmutatást ilyen kérdések eldöntésére.

Általában két megközelítést használnak a következő megoldandó részfeladat kijelölésére. Leginkább a LIFO szabályt követik, amely a legkésőbb létrehozott részfeladatot oldja meg.[18] A LIFO levisz bennünket a korlátozás és szétválasztási fa egyik oldalán (mint a Telfa példában), és hamar megtalál egy megoldás-jelöltet. Majd visszamászunk a fa másik ágának tetejéig. Emiatt a LIFO szabályt gyakran **visszaléptetésnek** (backtracking) is nevezik.

A másik gyakorta használt módszer a **keresztléptetés** (jumptracking). Egy csúcs ágaztatása után a keresztléptetés az összes keletkező részfeladatot megoldja, majd a legígéretesebb z értékkel rendelkező csúccsal folytatja. Emiatt a keresztléptetés gyakorta átugrik a fa egyik oldaláról a másikra. Általában több részfeladatot generál és több számítógépidőt igényel, mint a visszaléptetés. A keresztléptetés arra az ötletre épül, hogy a jó z értékű részfeladatokat vizsgálva hamarabb eljutunk a legjobb z értékhez.

Nézzük meg, hogy melyik változó szerint ágaztassunk, ha több törtértékű változó is van a részfeladat optimális megoldásában? Gyakran a legjobb stratégia a legfontosabb törtértékű változót választani. Tegyük fel például, hogy a Nickles problémában egy részfeladat optimális megoldásában y_1 és x_{12} is törtértékű. Az előbbi szabályt követve az y_1

[18] Ha két részfeladat is keletkezik egyidejűleg, számos kifinomult módszer létezik a közülük való választásra. A részletekre vonatkozóan lásd Taha (1975) munkáját.

szerint ágaztatnánk, mivel az y_1 azt a döntést reprezentálja, hogy legyen (vagy ne legyen) lockbox az 1-es városban, s ez fontosabb döntés annál, hogy az 1-es régióból a 2-es városba menjenek-e az utalványok. Számos számítógépes program a legkisebb indexű törtértékű változó szerint ágaztat. Ezért, ha egy egészértékű programozási számítógépes program indexelt változókat igényel, a fontosságuk szerint érdemes őket megszámozni ($1 =$ legfontosabb).

MEGJEGYZÉSEK

1. Bizonyos IP-k esetén az LP-lazítás optimális megoldása egyben az IP optimális megoldása is. Tegyük fel, hogy az IP feltételei az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ alakba írhatók. Amennyiben az A mindegyik négyzetes almátrixának $+1$, -1 vagy 0 a determinánsa[19], azt mondjuk, hogy az A mátrix **unimoduláris.** Ha az A unimoduláris és a $\mathbf{b}$ mindegyik eleme egész szám, az LP-lazítás optimális bázismegoldásában mindegyik változó egész értéket vesz fel (a bizonyítást lásd pl. Shapiro (1979) munkájában), következésképpen az IP-nek is optimális megoldása. Megmutatható, hogy bármelyik MKHF feladat feltételmátrixa unimoduláris. Emiatt, amint a 7. fejezetben láttuk, minden olyan MKHF feladatnak, amelyben az összes csúcs nettó kibocsátása, valamint az összes él kapacitása egész, van egészértékű optimális megoldása.

2. Általános szabályként elmondható, hogy minél inkább hasonlít egy IP egy MKHF feladatra, annál könnyebb az IP-t a korlátozás és szétválasztás módszerével megoldani. Célszerű ezért olyan modellt keresni, amelyben a lehető legtöbb változó együtthatója $+1$, -1 vagy 0. Szemléltetésképpen idézzük fel, hogy a 8.2. alfejezetbeli Nickles (lockbox) példában szerepelt a következő 16 feltétel:

1. felírás

$$x_{ij} \le y_j \ (i = 1,2,3,4;\ j = 1,2,3,4) \tag{25}$$

Már a 8.2. alfejezetben megállapítottuk, hogy a (25) alatti 16 feltétel kicserélése a következő 4 feltételre ekvivalens megfogalmazást ad:

2. felírás

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &\le 4y_1 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &\le 4y_2 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &\le 4y_3 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &\le 4y_4
\end{aligned}$$

Mivel a 2. felírásban $16 - 4 = 12$ feltétellel kevesebb van, azt gondolhatnánk, hogy a 2. felírás megoldása igényli a kevesebb számítógépidőt. De ez nem így van. Lássuk, hogy miért nem. Idézzük fel, hogy a korlátozás és szétválasztás módszere az egészértékű feladat LP-lazítását oldja meg először. A 2. felírás LP-lazításának lehetséges tartománya sokkal több nemegész pontot tartalmaz, mint az 1. felírásé. Az $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = \frac{1}{4}$, $x_{11} = x_{22} = x_{33} = x_{44} = 1$ (a többi x_{ij} egyenlő 0) például a 2. felírás LP-lazításának lehetséges tartományában van, de nincs az 1. felírásében. Mivel a korlátozás és szétválasztás módszerének az összes nemegész pontot ki kell szűrnie, érthetőnek tűnik, hogy a 2. felírás megoldása több időt igényel, mint az 1. felírásé. Valóban, a LINDO nevű számítógépes program az 1. felírás optimális megoldását rögtön megkapta az LP-lazítás optimális megoldásaként. Ugyanakkor, a 2. felírás megoldása során 17 részfeladatot oldott meg, mielőtt megtalálta volna az optimális megoldást. Vegyük észre, hogy a 2. felírásban szerepelnek a $4y_1$, $4y_2$, $4y_3$ és $4y_4$ tagok, amik „megzavarják” a lockbox feladat hálózatszerű szerkezetét, és kevéssé hatékonnyá teszik a korlátozás és szétválasztás módszerét.

3. Amikor egy IP-t oldunk meg egy valódi alkalmazásban, gyakran megelégszünk egy optimálishoz közeli megoldással. Tegyük fel például, hogy egy lockbox probléma megoldása során az LP-lazítás optimumértéke 200 000($), tehát a lockbox IP optimális megoldása is biztosan legalább 200 000$-os minimum költséget jelez. Ha a korlátozás és szétválasztás során találunk egy megoldás-jelöltet, amelynél a költség 205 000$, miért folytassuk az eljárást? Még ha meg is találjuk az IP optimális megoldását, 5000$-nál több költséget akkor sem spórolhatunk meg a 205 000$-os megoldás-jelölthöz képest. Az is előfordulhat, hogy az optimális megoldás pontos meghatározása többe kerül, mint 5000$.

[19]Egy mátrix determinánsát a 2.6 alfejezetben definiáltuk.

Emiatt a korlátozás és szétválasztást gyakran befejezzük, ha olyan megoldás-jelöltet találunk, amelynek a z értéke közel van az LP-lazítás z értékéhez.

4. A korlátozás és szétválasztási problémák részfeladatait gyakran a duál szimplex algoritmus egy variánsával oldják meg. Szemléltetésképpen térjünk vissza a Telfa példához. Az LP-lazítás optimális táblája:

$$\begin{aligned} z \quad\;\; + 1.25s_1 + 0.75s_2 &= 41.25 \\ x_2 + 2.25s_1 - 0.25s_2 &= 2.25 \\ x_1 \quad - 1.25s_1 + 0.25s_2 &= 3.75 \end{aligned}$$

Az LP-lazítás megoldása után a 2. részfeladatot oldottuk meg, ami nem más, mint az 1. részfeladat, kibővítve az $x_1 \geq 4$ feltétellel. Idézzük fel, hogy a duál szimplex egy hatékony módszer egy olyan LP új optimális megoldásának megtalálására, amikor ismerjük az optimális táblát, és egy új feltétellel bővítjük az LP-t. Most az $x_1 \geq 4$ feltétellel bővítünk (ami az $x_1 - e_3 = 4$ alakba is írható). A duál szimplex alkalmazásához el kell tüntetnünk az x_1 bázisváltozót ebből a feltételből, és az e_3-at kell az $x_1 - e_3 = 4$ feltétel bázisváltozójának tenni. Kivonva az az optimális tábla második sorából az $x_1 - e_3 = 4$ feltételt, kapjuk a $-1.25s_1 + 0.25s_2 + e_3 = -0.25$ feltételt. Ezt hozzávéve az 1. részfeladat optimális táblájához, megkapjuk az 52. táblázatban szereplő táblát. A duál szimplex módszer szabályai szerint a harmadik sor valamelyik változóját kell a bázisba vonni. Mivel ebben a sorban egyedül az s_1 változónak negatív az együtthatója, az s_1 lép be a bázisba. A báziscsere után nyerjük az 53. táblázatban szereplő optimális táblát.
A 2. részfeladat optimális megoldása tehát $z = 41$, $x_2 = 1.8$, $x_1 = 4$, $s_1 = 0.20$.

52. TÁBLÁZAT
A duál szimplex kiinduló táblája a 2. részfeladat megoldásakor

		Bázis-változó
z	$+1.25s_1 + 0.75s_2 = 41.25$	$z = 41.25$
x_2	$+2.25s_1 - 0.25s_2 = 2.25$	$x_2 = 2.25$
x_1	$-1.25s_1 + 0.25s_2 = 3.75$	$x_1 = 3.75$
	$-1.25s_1 + 0.25s_2 + e_3 = -0.25$	$e_3 = -0.25$

53. TÁBLÁZAT
A duál szimplex optimális táblája a 2. részfeladat megoldásakor

		Bázis-változó
z	$+ s_2 + e_3 = 41$	$z = 41$
x_2	$+0.20s_2 + 1.8e_3 = 1.8$	$x_2 = 1.8$
x_1	$- e_3 = 4$	$x_1 = 4$
	$s_1 - 0.20s_2 - 0.80e_3 = 0.20$	$s_1 = 0.20$

5. A 8. feladatban megmutatjuk, hogy ha az $x_k \leq i$ és $x_k \geq i+1$ feltételekkel ágaztatunk, akkor az első keletkező részfeladat optimális megoldásában $x_k = i$, míg a második keletkező részfeladat optimális megoldásában $x_k = i+1$ értéket vesz fel. Ez az észrevétel különösen a részfeladatok grafikus megoldása során hasznos. Például, ha tudjuk, hogy a 9. példa 5. részfeladatának optimális megoldásában $x_2 = 1$, akkor az x_1-nek az a legnagyobb értéke lesz az 5. részfeladat megoldása, amelyik az $x_2 = 1$ mellett az összes feltételt kielégíti.

Feladatok

A csoport

Oldjuk meg a korlátozás és szétválasztás módszerével a következő IP-ket:

1.

$$\begin{aligned}\max z &= 5x_1 + 2x_2\\ \text{f.h.}\quad 3x_1 + x_2 &\le 12\\ x_1 + x_2 &\le 5\\ x_1, x_2 \ge 0;&\quad x_1, x_2 \text{ egész}\end{aligned}$$

2. A Dorian Autó példát a 3.2. alfejezetből.

3.

$$\begin{aligned}\max z &= 2x_1 + 3x_2\\ \text{f.h.}\quad x_1 + 2x_2 &\le 10\\ 3x_1 + 4x_2 &\le 25\\ x_1, x_2 \ge 0;&\quad x_1, x_2 \text{ egész}\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\max z &= 4x_1 + 3x_2\\ \text{f.h.}\quad 4x_1 + 9x_2 &\le 26\\ 8x_1 + 5x_2 &\le 17\\ x_1, x_2 \ge 0;&\quad x_1, x_2 \text{ egész}\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}\min z &= 4x_1 + 5x_2\\ \text{f.h.}\quad x_1 + 4x_2 &\ge 5\\ 3x_1 + 2x_2 &\ge 7\\ x_1, x_2 \ge 0;&\quad x_1, x_2 \text{ egész}\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}\max z &= 4x_1 + 5x_2\\ \text{f.h.}\quad 3x_1 + 2x_2 &\le 10\\ x_1 + 4x_2 &\le 11\\ 3x_1 + 3x_2 &\le 13\\ x_1, x_2 \ge 0;&\quad x_1, x_2 \text{ egész}\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}\max z &= 7x_1 + 3x_2\\ \text{f.h.}\quad 2x_1 + x_2 &\le 9\\ 3x_1 + 2x_2 &\le 13\\ x_1, x_2 \ge 0;&\quad x_1, x_2 \text{ egész}\end{aligned}$$

B csoport

8. Tegyük fel, hogy elágaztattunk egy részfeladatot (hívjuk 0. részfeladatnak, az optimális megoldását pedig MOL0-nak), és a következő két részfeladat keletkezett:

1. részfeladat 0. részfeladat + az $x_1 \le i$ feltétel,

2. részfeladat 0. részfeladat + az $x_1 \ge i+1$ feltétel,

ahol i egy egész szám. Igazolja, hogy lesz legalább egy olyan optimális megoldása az 1. részfeladatnak, amelyben $x_1 = i$, és legalább egy olyan optimális megoldása a 2. részfeladatnak, amelyben $x_1 = i+1$. *Útmutatás:* Tegyük fel, hogy az 1. részfeladatnak van egy olyan optimális megoldása (hívjuk MOL1-nek), amelyben $x_1 = \bar{x}_1$, ahol $\bar{x}_1 < i$. Ekkor van olyan c $(0 < c < 1)$ szám, amelyre a $c(\text{MOL0}) + (1-c)\text{MOL1}$ kifejezés a következő három tulajdonsággal rendelkezik:

(a) Az x_1 értéke a $c(\text{MOL0}) + (1-c)\text{MOL1}$-ben egyenlő i-vel.

(b) A $c(\text{MOL0}) + (1-c)\text{MOL1}$ az 1. részfeladat lehetséges megoldása.

(c) A $c(\text{MOL0}) + (1-c)\text{MOL1}$ z értéke legalább olyan jó, mint a MOL1 z értéke.

Magyarázza meg, hogy miként segíthet ez az eredmény a korlátozás és szétválasztási feladatok grafikus megoldásakor!

9. Az elkövetkezendő öt hónapban az 54. táblázatban megadott igényeket kell időben teljesíteni. Az 1. hónap elején a raktárkészlet 0. Ha egy hónapban van termelés, az a 250\$-os beindítási költségen túl darabonként 2\$-os termelési költséggel jár. Mindegyik hónap végén az átvitt készlet után darabonként 1\$-os raktározási költség is felmerül.

(a) Határozza meg az összköltséget minimalizáló termelési menetrendet a következő döntési változókat használva: x_t = a t-edik hónap során előállított termékek száma; $y_t = 1$, ha van termelés a t-edik hónapban, $y_t = 0$ különben.

(b) Határozza meg az összköltséget minimalizáló termelési menetrendet a következő döntési változókat használva: y_t ugyanaz, mint az (a) részben; x_{it} = az i-edik hónap során előállított és a t-edik hónapban felhasznált termékek száma.

(c) Melyik modellfelírás igényel kevesebb számítógépidőt?

(d) Adjon intuitív magyarázatot arra, hogy miért a (b) részbeli felírást lehet gyorsabban megoldani, mint az (a) részbeli modellt!

54. TÁBLÁZAT

	Hónap				
	1	2	3	4	5
Igény	220	280	360	140	270

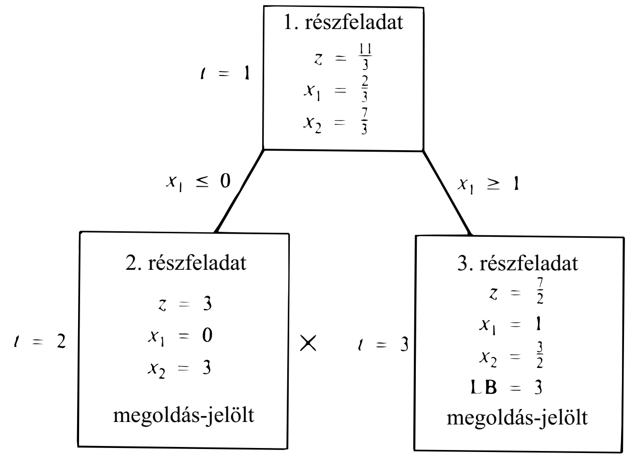
8.4. A korlátozás és szétválasztás módszere vegyes egészértékű programozási feladatok megoldására

Emlékezzünk vissza arra, hogy vegyes IP-kben bizonyos változók csak egész értékeket vehetnek fel, míg a többi változó egész és nem egész értékeket egyaránt felvehet. Vegyes IP-k megoldása esetén a korlátozás és szétválasztás 8.3. alfejezetben ismertetett módszerét úgy kell módosítani, hogy csak olyan változó szerint ágaztatunk, amelyiknek egészértékűnek kell lennie. Továbbá ahhoz, hogy egy részfeladat optimális megoldása megoldásjelöltnek minősüljön, elegendő csak az egészértékű változóknak egész értéket felvenniük. Szemléltetésképpen tekintsük a következő vegyes IP-t:

$$\begin{aligned}
&\max z = 2x_1 + x_2 \\
&\text{f.h.} \quad 5x_1 + 2x_2 \le 8 \\
&\qquad\quad\ x_1 + \ x_2 \le 3 \\
&x_1, x_2 \ge 0; \quad x_1 \text{ egész}
\end{aligned}$$

Most is az IP LP-lazítását oldjuk meg először. Az LP-lazítás optimális megoldása: $z = \frac{11}{3}$, $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{7}{3}$. Mivel x_2 tört is lehet, az x_2 szerint nem ágaztatunk; ha így tennénk, kizárnánk a 2 és 3 közötti x_2-vel rendelkező pontokat, s ezt nem akarjuk. Tehát csak az x_1 szerint ágaztathatunk. Így kapjuk a 16. ábrán látható 2. és 3. részfeladatokat.

16. ÁBRA
A korlátozás és szétválasztási fa a vegyes IP-re



A 2. részfeladattal folytatjuk. Ennek optimális megoldása: $z = 3, x_1 = 0, x_2 = 3$, ami egy megoldás-jelölt. A 3. részfeladat megoldása: $z = \frac{7}{2}$, $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{2}$, egy másik megoldásjelölt. Mivel a 3. részfeladat megoldásának z értéke magasabb, mint a 2. részfeladat megoldásának z értéke, a 2. részfeladat kizárható. Azt kapjuk, hogy a 3. részfeladatból származó jelölt ($z = \frac{7}{2}, x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{2}$) a vegyes IP optimális megoldása.

Feladatok

A csoport

A korlátozás és szétválasztás módszerével oldja meg a következő IP-ket:

1.

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + x_2 \\ \text{f.h.}\quad 5x_1 + 2x_2 &\le 10 \\ 4x_1 + x_2 &\le 7 \\ x_1, x_2 \ge 0;&\quad x_2 \text{ egész} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \min z &= 3x_1 + x_2 \\ \text{f.h.}\quad x_1 + 5x_2 &\ge 8 \\ x_1 + 2x_2 &\ge 4 \\ x_1, x_2 \ge 0;&\quad x_1 \text{ egész} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{f.h.}\quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 7 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 11 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0;&\quad x_2, x_3 \text{ egész} \end{aligned}$$

8.5. Hátizsák feladatok megoldása a korlátozás és szétválasztás módszerével

A 8.2. alfejezetből tudjuk, hogy hátizsák feladat egy olyan IP, amelyben egyetlen feltétel van. Ebben az alfejezetben olyan hátizsák feladatokat vizsgálunk, amelyekben mindegyik változó csak 0 vagy 1 értéket vehet fel (az alfejezet végén az 1. feladatban megmutatjuk, hogy bármilyen hátizsák feladat átfogalmazható 0–1 értékű hátizsák feladattá). Egy csupa 0–1 értékű változóval rendelkező hátizsák feladat a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned} &\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ &\text{f.h.}\quad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \le b \\ &x_i = 0 \text{ vagy } 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned} \tag{38}$$

ahol c_i az i-edik dolog haszna, b a rendelkezésre álló erőforrás mennyisége, amiből az i-edik dolog a_i-t használ el.

55. TÁBLÁZAT
A dolgok rangsora a legjobbtól a legrosszabbig egy hátizsák feladatban

	$\frac{c_i}{a_i}$	**Rangsor** (1 = **legjobb,** 7 = **legrosszabb**)
1. dolog	1	3.5 (döntetlen: harmadik-negyedik)
2. dolog	$\frac{8}{5}$	2
3. dolog	$\frac{1}{3}$	7
4. dolog	1	3.5
5. dolog	$\frac{4}{10}$	6
6. dolog	$\frac{1}{2}$	5
7. dolog	2	1

Amikor hátizsák feladatokat oldunk meg korlátozás és szétválasztással, a módszer két szempontból is nagyban leegyszerűsödik. Mivel mindegyik változó csak 0 vagy 1 lehet, az x_i szerinti ágaztatás egy $x_i = 0$ és egy $x_i = 1$ ágat fog eredményezni. Az LP-lazítás (és a további részfeladatok) ránézésre megoldhatók. Vegyük észre ugyanis, hogy a $\frac{c_i}{a_i}$ hányados azt jelzi, hogy az i-edik dolog hogyan hasznosít egy egységnyi erőforrást. A legjobb dolgok a legnagyobb $\frac{c_i}{a_i}$-vel rendelkezők, a legrosszabbak pedig azok, amelyekre a $\frac{c_i}{a_i}$ a legalacsonyabb. A hátizsák feladat egy részfeladatának megoldásához számítsuk ki a $\frac{c_i}{a_i}$ arányokat.

Tegyük a legjobb dolgot a hátizsákba, majd a második legjobb dolgot és így tovább, amíg csak a következő legjobb dolog egészben már nem fér be. Töltsük ki a hátizsákot ennek a dolognak akkora részével, ami még befér.

Szemléltetésképpen, oldjuk meg a következő hátizsák feladat LP-lazítását:

$$\begin{aligned} \max z &= 40x_1+80x_2+10x_3+10x_4+4x_5+20x_6+60x_7 \\ \text{f.h.} \quad & 40x_1+50x_2+30x_3+10x_4+10x_5+40x_6+30x_7 \leq 100 \\ & x_i = 0 \text{ vagy } 1 \quad (i=1,2,\ldots,7) \end{aligned} \tag{39}$$

Először kiszámítjuk a $\frac{c_i}{a_i}$ arányokat, és rangsoroljuk a változókat a legjobbtól a legrosszabbig (55. táblázat). A (39) LP-lazításának megoldásához először a 7. dolgot választjuk ($x_7 =$ 1). Marad $100-30=70$ egységnyi erőforrás. A második legjobb dolgot (a 2. dolog) is a hátizsákba tesszük, $x_2 = 1$. Marad $70-50=20$ egységnyi erőforrás. Mivel a 4. és az 1. dologra azonos a $\frac{c_i}{a_i}$ arány, bármelyik lehet a következő. Legyen $x_4 = 1$. Ekkor $20-10=10$ egységnyi erőforrás marad. Az 1. dolog a következő legjobb, ebből töltjük meg a hátizsákot. Mivel 10 egységnyi erőforrás van még, $x_1 = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$. A (39) LP-lazításának egy optimális megoldása tehát $z = 80+60+10+(\frac{1}{4})(40) = 160$, $x_2 = x_7 = x_4 = 1$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_3 = x_5 = x_6 = 0$.

Oldjuk most meg a korlátozás és szétválasztás módszerével a Stockco problémáját (1. példa). A modell a következő hátizsák feladat volt.

$$\begin{aligned} \max z &= 16x_1+22x_2+12x_3+8x_4 \\ \text{f.h.} \quad & 5x_1+7x_2+4x_3+3x_4 \leq 14 \\ & x_j = 0 \text{ vagy } 1 \end{aligned}$$

A korlátozás és szétválasztási fa a 17. ábrán látható. Látjuk, hogy az 1. példa optimális megoldása: $z=42$, $x_1=0$, $x_2=x_3=x_4=1$, vagyis a 2., 3. és 4. befektetési lehetőséget kell választani, amelynek az NPV-je 42 000\$. Amint a 8.2. alfejezetben említettük, a „legjobb" lehetőség kimarad.

MEGJEGYZÉS A 17. ábrán látható fa bejárása a következőképpen történt:

1. A LIFO szabály szerint határoztuk meg, hogy melyik részfeladatot oldjuk meg.

2. A 2. és 3. részfeladatok közül önkényesen választva a 3.-kal kezdtünk. A 3. részfeladat megoldását az $x_3 = 1$ értékadással kezdtük, majd megoldottuk az így keletkező hátizsák feladatot. Az $x_3 = 1$ után $14-4=10$ millió dollár várt még befektetésre. Az LP-lazítás megoldását a fent tárgyalt módon végezve azt kaptuk, hogy a 3. részfeladat optimális megoldása: $x_3 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{5}{7}$, $x_4 = 0$, $z = 16+(\frac{5}{7})(22)+12 = \frac{306}{7}$. A többi részfeladatot hasonlóan oldottuk meg, figyelve arra, hogy ha egy részfeladathoz az $x_i = 0$-n keresztül jutottunk, akkor az optimális megoldás nem fektethet be az i-edik lehetőségbe.

3. A 4. részfeladat az $x_1 = x_3 = x_4 = 1$, $z = 36$ megoldás-jelöltet eredményezte. Beállítottuk, hogy LB $= 36$.

4. A 6. részfeladatból egy olyan megoldás-jelöltet kaptunk, amelyre $z = 42$. Emiatt a 4. részfeladatot kizártuk a további vizsgálatból, és az alsó korlátot felemeltük LB $= 42$-re.

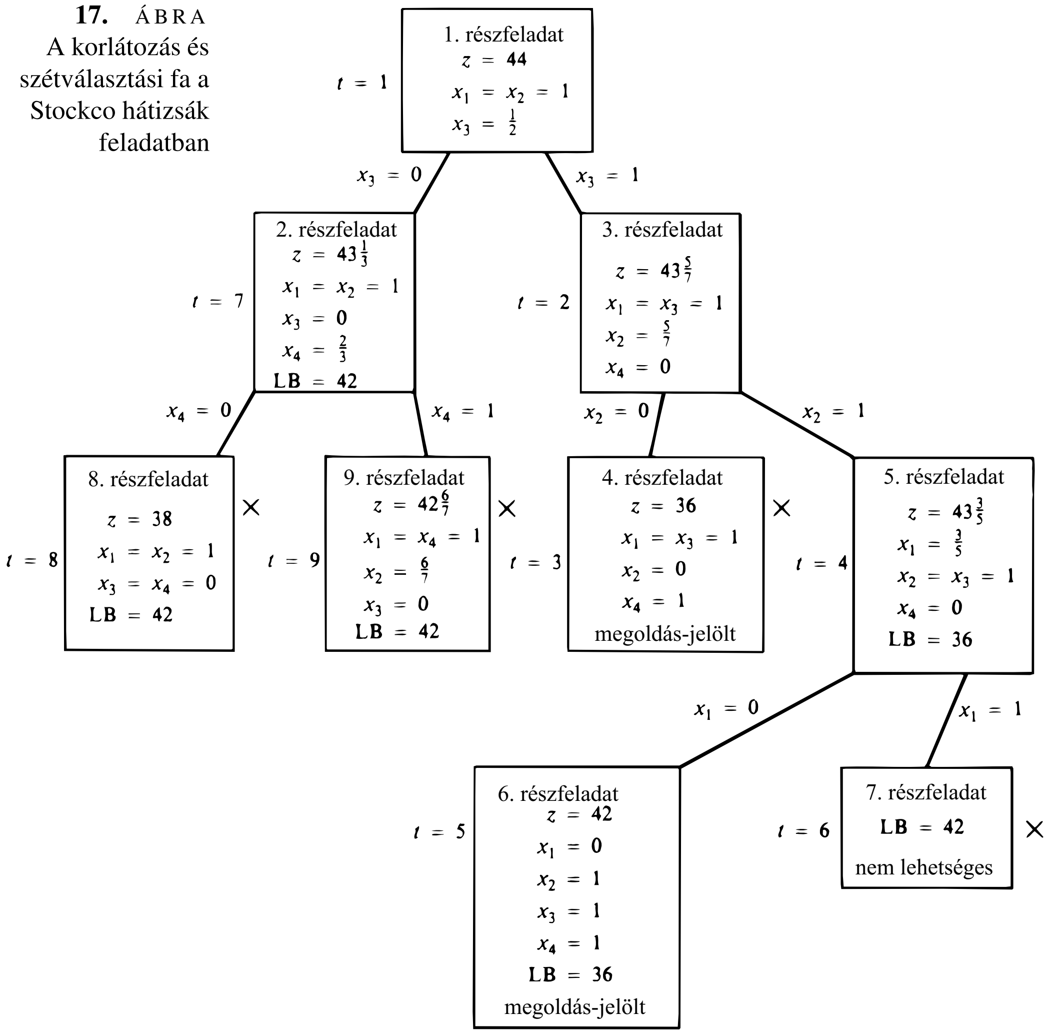
5. A 7. részfeladat nem volt lehetséges, hiszen az $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ megvalósítása önmagában is már 16 millió dolllárt igényelt volna.

6. A 8. részfeladatot kizártuk, mivel z értéke ($z = 38$) nem haladta meg az aktuális LB $= 42$ értéket.

7. A 9. részfeladat z értéke $42\frac{6}{7}$. Mivel minden tiszta egészértékű megoldás z értéke egész, a 9. részfeladat ágaztatásával 42-t meghaladó egész z értéket nem kaphatunk. Emiatt a 9. részfeladatot is kizártuk a további vizsgálatokból.

A 20. fejezetben megmutatjuk, hogy miként lehet a dinamikus programozás módszerével megoldani a hátizsák feladatokat.

17. ÁBRA
A korlátozás és szétválasztási fa a Stockco hátizsák feladatban



Feladatok

A csoport

1. Mutassa meg, hogy a következő probléma miként fogalmazható meg olyan hátizsák feladatként, amelyben mindegyik változó 0–1! A NASA arra kíváncsi, hogy az űrsikló fedélzetére háromféle tárgyból melyeket vigyék fel. Az egyes tárgyak súlya és haszna az 56. táblázatban található. Ha az űrsiklóra ezekből a tárgyakból legfeljebb 26 font kerülhet fel, melyek legyenek azok?

56. TÁBLÁZAT

	Haszon	**Tömeg (font)**
1. tárgy	10	3
2. tárgy	15	4
3. tárgy	17	5

2. New Jerseyből Indianába költözöm. Olyan teherautót béreltem, amelyikbe 1.1 köbméter bútor pakolható. Az 57. táblázat tartalmazza a költöztetendő darabok térfogatát és értékét. Mely darabokat vigyem magammal? Ha ezt a problémát hátizsák feladatként akarjuk megoldani, milyen nem valószerű feltevéseket kell tennünk?

57. TÁBLÁZAT

Bútor	**Érték ($)**	**Térfogat (köbméter)**
Hálógarnitúra	60	0.8
Étkezőgarnitúra	48	0.6
Sztereó	14	0.3
Pamlag	31	0.4
Tv	10	0.2

3. Négy befektetési lehetőségünk van. Az egyes projektek az 58. táblázatban megadott készpénzt igénylik, illetve nettó jelenértéket eredményeznek (mindkettő millió dollárban megadva). Ha a 0. időpontban 6 millió dollár befektetnivalónk van, melyik kombináció maximalizálja az NPV-t?

58. TÁBLÁZAT

	Készpénzigény a 0. időpontban (millió $)	**NPV**
1. projekt	3	5
2. projekt	5	8
3. projekt	2	3
4. projekt	4	7

8.6. Kombinatorikus optimalizálási feladatok megoldása a korlátozás és szétválasztás módszerével

Kissé pontatlanul fogalmazva, egy **kombinatorikus optimalizálási feladat** minden olyan optimalizálási feladat, amelynek véges sok lehetséges megoldása van. Az ilyen problémák megoldására a korlátozás és szétválasztás gyakran a leghatékonyabb módszer. Nézzünk három példát kombinatorikus optimalizálási feladatra:

1. Tíz munkát kell egy gépen elvégezni. Ismerjük az egyes munkák elvégzéséhez szükséges időt és a befejezés határidejét. A munkák milyen sorrendje minimalizálja a késések összegét?

2. Egy ügynöknek tíz város mindegyikét egyszer kell felkeresnie, mielőtt visszatérne otthonába. A városok milyen sorrendje minimalizálja a megtett össztávolságot? Nem meglepő, hogy ezt a problémát *utazó ügynök problémának* (TSP – travelling salesperson problem) hívják.

3. Hogyan helyezzünk el nyolc vezért egy sakktáblán úgy, hogy semelyik kettő ne üthesse egymást (lásd a 7. feladatot az alfejezet végén)?

Ezekben a problémákban sok lehetséges megoldás közül kell választanunk. Az 1. feladatban például a tíz munka bármelyikével kezdhetünk, majd a fennmaradó kilenc munka bármelyikével folytathatjuk és így tovább. Még ebben a viszonylag kis problémában is $10(9)(8)\cdots(1) = 10! = 3\,628\,000$ lehetséges sorrendje van a munkáknak. Mivel egy kombinatorikus optimalizálási feladatnak sok lehetséges megoldása lehet, explicit felsorolásuk jelentős számítógépidőt igényelhet. Emiatt a korlátozás és szétválasztás módszerét gyakran használják az összes lehetséges megoldás *implicit* számbavételére. Mint látni fogjuk, a korlátozás és szétválasztás módszerének ki kell használnia az adott kombinatorikus optimalizálási feladat szerkezetét.

Annak szemléltetésére, hogy a korlátozás és szétválasztás módszerével hogyan oldhatunk meg kombinatorikus optimalizálási feladatokat, megoldjuk a fenti 1. és 2. típusú problémát.

A korlátozás és szétválasztás módszere a gépütemezési problémára

A 10. példában megmutatjuk, hogy miként használható a korlátozás és szétválasztás módszere munkáknak egy gépre való ütemezésének meghatározására. A gépütemezési problémára vonatkozó egyéb korlátozás és szétválasztási megközelítések Baker (1974), illetve Hax és Candea (1984) munkáiban találhatók.

10. PÉLDA

Négy munkát kell egy gépen elvégezni. A szükséges munkaidőt és a munkák elvégzésének határidejét az 59. táblázat tartalmazza. Egy munka késése alatt a határidőtől a befejezésig eltelt napok számát értjük (ha a munka a határidőre vagy előtte elkészül, a késés 0). Milyen sorrendben végezzük a munkákat ahhoz, hogy a késések összege minimális legyen?

59. TÁBLÁZAT
A munkák időtartama és határideje

	A munka elvégzéséhez szükséges idő (nap)	**Határidő**
1. munka	6	8. nap vége
2. munka	4	4. nap vége
3. munka	5	12. nap vége
4. munka	8	16. nap vége

Megoldás

Tegyük fel, hogy a munkák a következő sorrendben kerülnek sorra: 1–2–3–4. Ekkor a 60. táblázatban látható késedelmek következnek be. Erre a sorrendre a késések összege $= 0+6+3+7 = 16$ nap. Most bemutatunk egy korlátozás és szétválasztási megközelítést az ilyen típusú gépütemezési feladat megoldására.

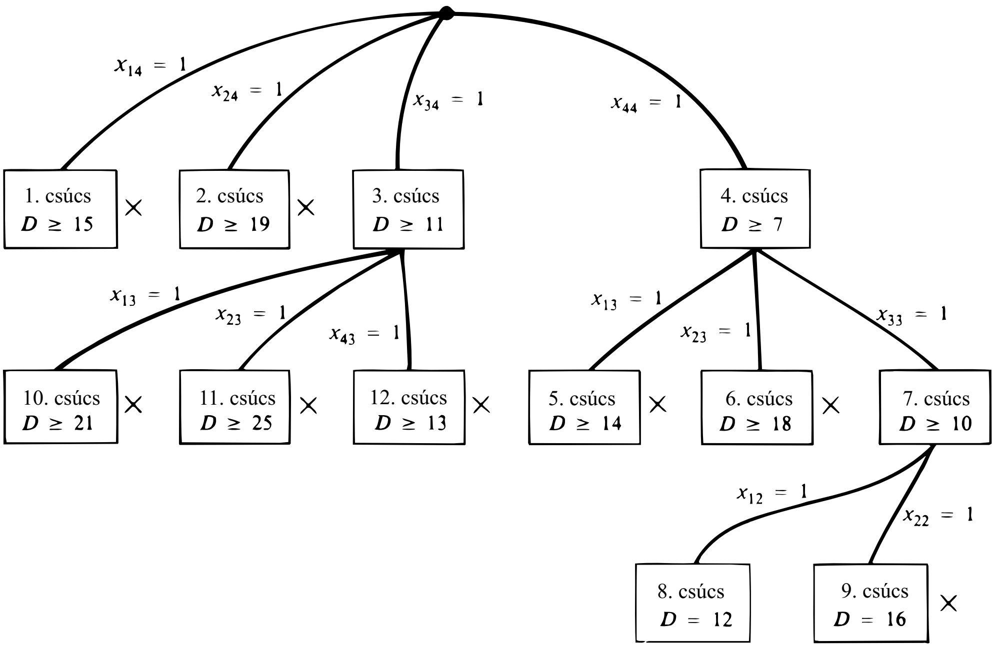
60. TÁBLÁZAT
A késedelmek a munkák 1–2–3–4 elvégzési sorrendje esetén

	A munka elkészültének időpontja	**A munka késedelme**
1. munka	6	0
2. munka	$6+4=10$	$10-4=6$
3. munka	$6+4+5=15$	$15-12=3$
4. munka	$6+4+5+8=23$	$23-16=7$

Mivel a feladat egy lehetséges megoldása megadja a munkák elvégzésének sorrendjét, legyen

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha az } i\text{-edik munka a } j\text{-edik a sorban} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

18. ÁBRA
A korlátozás és szétválasztási fa a gépütemezési feladatban



A korlátozás és szétválasztási megközelítésünk először az *utoljára* elvégzendő munka szerint osztályozza a megoldásokat. Bármelyik sorrendben van utoljára elvégzendő munka, tehát bármely megoldásban $x_{14} = 1$, $x_{24} = 1$, $x_{34} = 1$ vagy $x_{44} = 1$. Ez eredményezi a 18. ábrán az 1–4. ágakat. Egy ágaztatással létrejövő csúcs egy alsó korlátot ad a késések összegére (D). Például, ha $x_{44} = 1$, akkor a 4. munkát végezzük el utoljára. Ebben az esetben a 4. munka a $6+4+5+8 = 23$. nap végére készül el, $23-16 = 7$ nap késéssel. Vagyis $D \geq 7$ minden olyan megoldásban, amelyben $x_{44} = 1$. Ezt jelzi a 18. ábrán a 4. csúcsban a $D \geq 7$. Hasonló számolással kapjuk, hogy ha $x_{34} = 1$, akkor $D \geq 11$, ha $x_{24} = 1$, akkor $D \geq 19$, és ha $x_{14} = 1$, akkor $D \geq 15$. Mivel nincs okunk az 1–4. csúcsok egyikét sem kizárni, kiválasztjuk az egyiket és ágaztatjuk. A keresztléptetés elve szerint a D-re legkisebb korlátot adó csúcsot, a 4.-et választjuk. Az idetartozó megoldásokban $x_{13} = 1$, $x_{23} = 1$ vagy $x_{33} = 1$. A 4. csúcs ágaztatása a 18. ábra 5–7. csúcsait adja. Mindegyik új csúcsra kiszámítjuk a késedelemösszeg alsó korlátját. Például a 7. csúcsnál tudjuk, hogy a 4. munka lesz az utolsó és a 3. munka az utolsó előtti. A 4. csúcs elemzéséből tudjuk, hogy a 4. munka 7 nap késéssel készül el. A 3. munka $6+4+5 = 15$ nap múltán lesz készen, $15-12 = 3$ nap késéssel. A 7. csúcshoz tartozó sorrendek mindegyikére tehát $D \geq 7+3 = 10$ nap. Hasonló számítás adja, hogy az 5. csúcsnál $D \geq 14$, a 6. csúcsnál pedig $D \geq 18$. Továbbra sem zárhatjuk ki az 1–7. csúcsok egyikét sem. A keresztléptetés elvét követve a legígéretesebb 7. csúcs ágaztatásával folytatjuk. Az összes idetartozó megoldásban vagy az 1., vagy a 2. munka a második a sorban, vagyis $x_{12} = 1$ vagy $x_{22} = 1$. A 7. csúcs ágaztatása a 18. ábra 8. és 9. csúcsát adja.

A 9. csúcshoz a munkák 1–2–3–4 sorrendje tartozik. Ezen ütemezés mellett a késések összege: 7(a 4. munkára) + 3(a 3. munkára) + $(6+4-4)$ (a 2. munkára) + 0 (az 1. munkára) = 16 nap. A 9. csúcs egy lehetséges sorrendet reprezentál, egy olyan megoldásjelöltet, amelyikre $D = 16$. Kizárhatjuk tehát az ennél magasabb alsó korlátot adó csúcsokat.

A 8. csúcshoz a munkák 2–1–3–4 sorrendje tartozik. Ezen ütemezés mellett a késések összege: 7(a 4. munkára) + 3(a 3. munkára) + $(4+6-8)$ (az 1. munkára) + 0 (a 2. munkára) = 12 nap. A 8. csúcs egy lehetséges sorrendet reprezentál, egy olyan megoldásjelöltet, amelyikre $D = 12$. Mivel a 8. csúcs jobb, mint a 9. csúcs, az utóbbi kizárható.

Hasonló okból kizárható még az 5. csúcs ($D \geq 14$), a 6. csúcs ($D \geq 18$), az 1. csúcs ($D \geq 15$) és a 2. csúcs ($D \geq 19$). A 3. csúcshoz tartozó megoldások között viszont még lehet olyan, amelyre $D = 11$. Emiatt a 3. csúcsot ágaztatjuk, és megkapjuk a 10–12. csúcsokat aszerint, hogy $x_{13} = 1$, $x_{23} = 1$ vagy $x_{43} = 1$.

A 10. csúcsnál $D \geq$ (késés, ha a 3. munka az utolsó) + (késés, ha az 1. munka a harmadik) $= 11 + (6+4+8-8) = 21$. Mivel minden idetartozó megoldásra $D \geq 21$, ugyanakkor van egy $D = 12$-es jelöltünk, a 10. csúcsot kizárhatjuk.

A 11. csúcsnál $D \geq$ (késés, ha a 3. munka az utolsó) + (késés, ha a 2. munka a harmadik) $= 11 + (6+4+8-4) = 25$. Minden idetartozó megoldásra $D \geq 25$, tehát a 11. csúcsot is kizárhatjuk.

Végezetül, a 12. csúcsnál $D \geq$ (késés, ha a 3. munka az utolsó) + (késés, ha a 4. munka a harmadik) $= 11 + (6+4+8-16) = 13$. Minden idetartozó megoldásra $D \geq 13$, tehát a 12. csúcsot is kizárhatjuk.

A 8. csúcs kivételével a 18. ábra minden csúcsát kizártuk a vizsgálatból. A 8. csúcs adja a késés-minimalizáló sorrendet: $x_{44} = x_{33} = x_{12} = x_{21} = 1$. A munkákat tehát a 2–1–3–4 sorrendben kell elvégezni, ezzel a késések összege csak 12 nap.

A korlátozás és szétválasztás módszere az utazó ügynök problémára

11. PÉLDA

Joe az Indiana állambeli Gary-ben él. Biztosítási irodái vannak Gary-ben, Fort Wayne-ben, Evansville-ben, Terre Haute-ban és South Bendben. Minden decemberben végiglátogatja az irodáit. A 61. táblázat mutatja az egyes helyszínek közötti távolságot (mérföldben). Milyen sorrendben látogassa meg Joe az irodáit, hogy a lehető legkisebb távolságot kelljen utaznia?

61. TÁBLÁZAT
A városok közötti távolságok az utazó ügynök feladatban

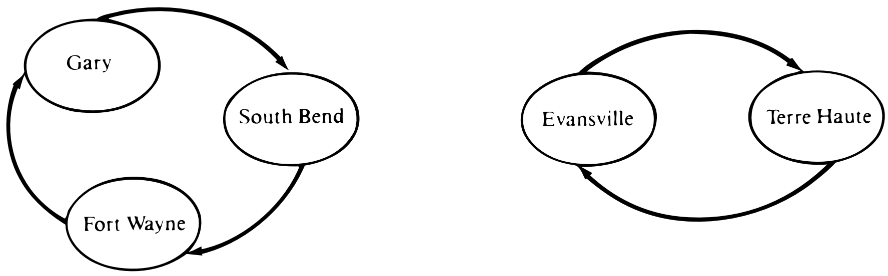
	Gary	**Fort Wayne**	**Evansville**	**Terre Haute**	**South Bend**
1. város Gary	0	132	217	164	58
2. város Fort Wayne	132	0	290	201	79
3. város Evansville	217	290	0	113	303
4. város Terre Haute	164	201	113	0	196
5. város South Bend	58	79	303	196	0

Megoldás

Joe-nak meg kell határoznia az öt városnak egy olyan felkeresési sorrendjét, amely a megtett távolságot minimalizálja. Ha például Joe az 1–3–4–5–2–1 útvonalon megy, összesen $217 + 113 + 196 + 79 + 132 = 737$ mérföldet tesz meg.

Az utazó ügynök probléma megfogalmazásához legyen

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha Joe az } i\text{-edik városból a } j\text{-edik városba megy} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$



19. ÁBRA
Részkörutak az utazó ügynök feladatban

Továbbá, $i \neq j$-re,

$$c_{ij} = \text{az } i\text{-edik és } j\text{-edik városok közötti távolság}$$
$$c_{ii} = M, \text{ ahol } M \text{ egy nagy pozitív szám}$$

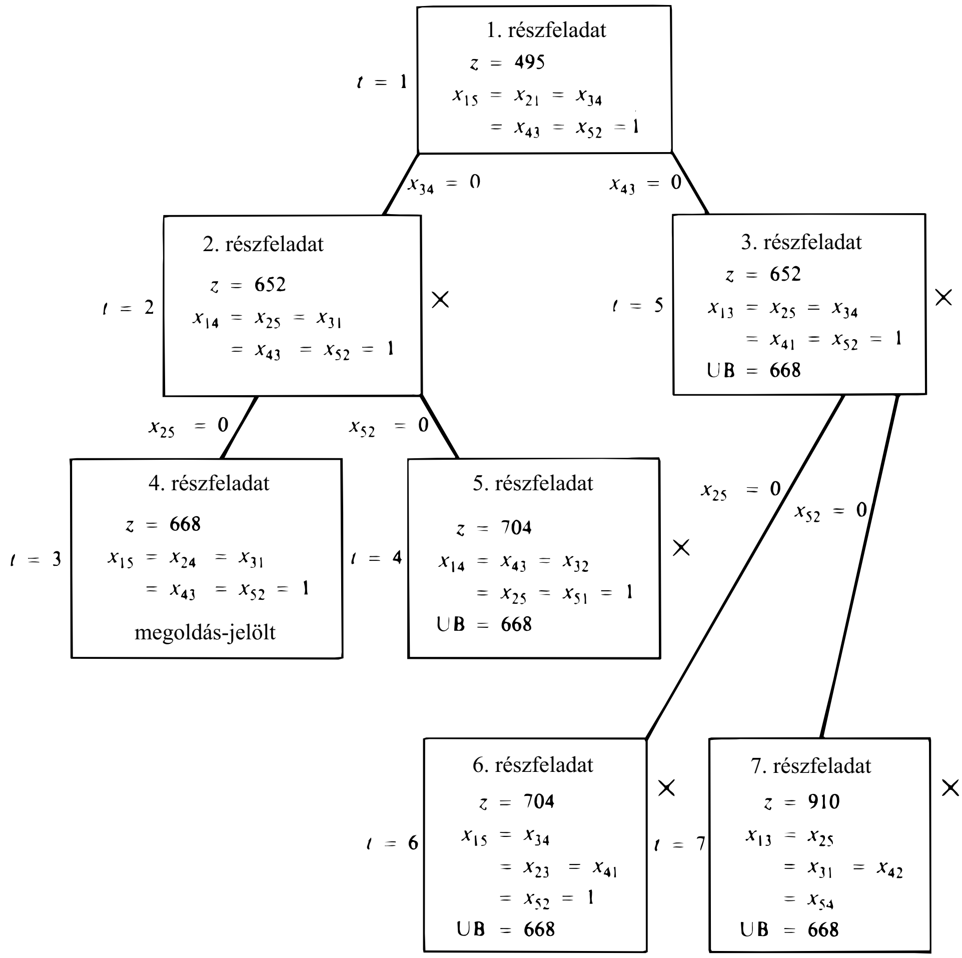
Elképzelhető, hogy Joe problémájára a választ megkaphatjuk annak a hozzárendelési feladatnak a megoldásával, amelyben a költségmátrix ij eleme c_{ij}. Tegyük fel például, hogy ennek a hozzárendelési feladatnak az optimális megoldása: $x_{12} = x_{24} = x_{45} = x_{53} = x_{31} = 1$. Vagyis Joe-nak a Gary–Fort Wayne–Terre Haute–South Bend–Evansville–Gary útvonalat kell követnie. Ez a megoldás 1–2–4–5–3–1 alakban is írható. Egy útitervre azt mondjuk, hogy egy **körút** ha ugyanabban a városban kezdődik és végződik, továbbá a többi várost pontosan egyszer érinti.

Ha az előbbi hozzárendelési feladat optimális megoldása egy körút, akkor az egyben optimális megoldása az utazó ügynök feladatnak is. (Miért?) A hozzárendelési feladat optimális megoldása sajnos nem feltétlenül egy körút, lehet például az $x_{15} = x_{21} = x_{34} = x_{43} = x_{52} = 1$ is. Eszerint Gary-ből South Bendbe, onnan Fort Wayne-be, majd onnan vissza Gary-be kell menni. Ez a megoldás azt is mondja, hogy ha Joe Evansville-ben van, akkor onnan Terre Haute-ba menjen, majd vissza Evansville-be (lásd 19. ábra). Joe persze Gary-ből indul, tehát ez a megoldás nem viszi őt sem Evansville-be sem Terre Haute-ba. Ennek oka, hogy a hozzárendelési feladat optimális megoldása két **részkörútból** áll. Egy részkörút olyan, mint egy körút, csak nem érint minden várost. A jelenlegi megoldás két részkörútból áll: 1–5–2–1 és 3–4–3. Ha ki tudnánk zárni az olyan lehetséges megoldásokat, amelyek több részkörútból állnak, és úgy megoldani a hozzárendelési feladatot, akkor megkapnánk az utazó ügynök feladat optimális megoldását. Ez azonban nem könnyű. A legtöbb esetben a korlátozás és szétválasztás módszere adja az utazó ügynök feladat leghatékonyabb megoldását.

Számos korlátozás és szétválasztási megközelítés ismert az utazó ügynök feladat megoldására (lásd Wagner (1975)). Mi egy olyat ismertetünk, amelyben a részfeladatok hozzárendelési feladatokká redukálódnak. Azzal a hozzárendelési feladattal kezdjük, amelyben $i \neq j$-re a c_{ij} költségelem az i és j városok közötti távolság, továbbá $c_{ii} = M$ (ami kizárja, hogy egy városból önmagába mutasson az útiterv). Mivel ebben a hozzárendelési feladatban semmi sem zárja ki a részkörutakat, ez a kevésbé korlátozott feladat egy lazítása az eredeti utazó ügynök feladatnak. Tehát, ha a hozzárendelési feladat optimális megoldása egy lehetséges megoldása az utazó ügynök feladatnak (azaz, ha az optimális hozzárendelés nem tartalmaz részkörutakat), akkor annak optimális megoldása is. A korlátozás és szétválasztási eljárást mutatja a 20. ábra.

Először a 62. táblázatbeli hozzárendelési feladatot oldjuk meg (1. részfeladat). Az optimális megoldás: $x_{15} = x_{21} = x_{34} = x_{43} = x_{52} = 1$, $z = 495$, ami két részkörútból áll (1–5–2–1 és 3–4–3), s így nem lehet Joe problémájának az optimális megoldása.

20. ÁBRA
A korlátozás és szétválasztási fa az utazó ügynök feladatban



62. TÁBLÁZAT
Az 1. részfeladat költségmátrixa

	1. város	**2. város**	**3. város**	**4. város**	**5. város**
1. város	M	132	217	164	58
2. város	132	M	290	201	79
3. város	217	290	M	113	303
4. város	164	201	113	M	196
5. város	58	79	303	196	M

Az 1. részfeladatot ágaztatjuk oly módon, hogy kizárjuk az 1. részfeladat egyik részkörútját a keletkező részfeladatok megoldásai közül. A 3–4–3 részkörút letiltását választjuk. Vegyük észre, hogy Joe problémájának optimális megoldásában biztosan $x_{34} = 0$, vagy $x_{43} = 0$ (ha $x_{34} = x_{43} = 1$ lenne az optimális megoldásban, akkor megjelenne a 3–4–3 részkörút). Az 1. részfeladat ágaztatásából keletkezik a következő kettő:

2. részfeladat 1. részfeladat + ($x_{34} = 0$ vagy $c_{34} = M$).

3. részfeladat 1. részfeladat + ($x_{43} = 0$ vagy $c_{43} = M$).

Most (önkényesen választva) a 2. részfeladattal folytatjuk. A magyar módszert alkalmazzuk a 63. táblázatbeli költségmátrixra. Az optimális megoldás: $z = 652$, $x_{14} = x_{25} = x_{31} =$

63. TÁBLÁZAT
A 2. részfeladat költségmátrixa

	1. város	**2. város**	**3. város**	**4. város**	**5. város**
1. város	M	132	217	164	58
2. város	132	M	290	201	79
3. város	217	290	M	M	303
4. város	164	201	113	M	196
5. város	58	79	303	196	M

$x_{43} = x_{52} = 1$. Ebben két részkörút van: az 1–4–3–1 és a 2–5–2, így ez sem lehet Joe problémájának optimális megoldása.

Kizárandó a 2–5–2 részkörutat, a 2. részfeladatot ágaztatjuk. Garantálnunk kell, hogy x_{25} vagy x_{52} egyenlő nullával. Így kapjuk a következő két részfeladatot:

4. részfeladat 2. részfeladat + ($x_{25} = 0$ vagy $c_{25} = M$).

5. részfeladat 2. részfeladat + ($x_{52} = 0$ vagy $c_{52} = M$).

A LIFO szabály szerint a 4. vagy az 5. részfeladat következik. Mi (önkényesen) a 4.-et választjuk. A magyar módszert a 64. táblázatbeli költségmátrixra alkalmazva azt kapjuk, hogy az optimális megoldás: $z = 668$, $x_{15} = x_{24} = x_{31} = x_{43} = x_{52} = 1$. Ez a megoldás nem tartalmaz részkörutat, az 1–5–2–4–3–1 körutat adja. A 4. részfeladatból tehát egy megoldás-jelölt származik, erre $z = 668$. Az olyan csúcsokat tehát kizárhatjuk, amelyek z értéke > 668.

64. TÁBLÁZAT
A 4. részfeladat költségmátrixa

	1. város	**2. város**	**3. város**	**4. város**	**5. város**
1. város	M	132	217	164	58
2. város	132	M	290	201	M
3. város	217	290	M	M	303
4. város	164	201	113	M	196
5. város	58	79	303	196	M

A LIFO szabályt követve, az 5. részfeladat van soron. A magyar módszert a 65. táblázatbeli költségmátrixra alkalmazva azt kapjuk, hogy az optimális megoldás: $z = 704$, $x_{14} = x_{43} = x_{32} = x_{25} = x_{51} = 1$. Ez is egy körút, de mivel $z = 704$ értéke rosszabb, mint a 4. részfeladatban talált jelölt $z = 668$ értéke, az 5. részfeladatot kizárhatjuk a további vizsgálatokból.

65. TÁBLÁZAT
Az 5. részfeladat költségmátrixa

	1. város	**2. város**	**3. város**	**4. város**	**5. város**
1. város	M	132	217	164	58
2. város	132	M	290	201	79
3. város	217	290	M	M	303
4. város	164	201	113	M	196
5. város	58	M	303	196	M

Egyedül a 3. részfeladat marad. A 66. táblázatbeli hozzárendelési feladat optimális megoldására $x_{13} = x_{25} = x_{34} = x_{41} = x_{52} = 1$, $z = 652$ adódik. Ez a megoldás két részkörútból áll: 1–3–4–1 és 2–5–2. Azonban $652 < 668$, a 3. részfeladat tehát még tartalmazhat olyan megoldást, amelyben nincsen részkörút és jobb, mint a $z = 668$. Ezért ágaztatjuk a 3. részfeladatot, kizárandó a fenti részkörutakat. Az utazó ügynök feladat bármelyik, a 3.

66. TÁBLÁZAT
A 3. részfeladat költségmátrixa

	1. város	2. város	3. város	4. város	5. város
1. város	M	132	217	164	58
2. város	132	M	290	201	79
3. város	217	290	M	113	303
4. város	164	201	M	M	196
5. város	58	79	303	196	M

részfeladathoz tartozó lehetséges megoldásában $x_{25} = 0$ vagy $x_{52} = 0$ kell legyen (miért?). Emiatt a következő részfeladatokat hozzuk létre:

6. részfeladat 3. részfeladat + ($x_{25} = 0$ vagy $c_{25} = M$).

7. részfeladat 3. részfeladat + ($x_{52} = 0$ vagy $c_{52} = M$).

A 6. részfeladattal folytatjuk. Az optimális megoldás: $x_{15} = x_{34} = x_{23} = x_{41} = x_{52} = 1$, $z = 704$. Ez ugyan nem tartalmaz részkörutat, de 704-es z értéke gyengébb, mint a 4. részfeladatból származó megoldás-jelölté, ezért a 6. részfeladatból optimális megoldást nem kaphatunk.

Már csak a 7. részfeladat maradt. Ennek optimális megoldása az $x_{13} = x_{25} = x_{31} = x_{42} = x_{54} = 1$, $z = 910$. Mivel a $z = 910$ is gyengébb a $z = 668$-nál, a 7. részfeladat sem adhat optimális megoldást.

A 4. részfeladat eredményezte tehát az optimális megoldást: Joe-nak a Gary–South Bend–Fort Wayne–Terre Haute–Evansville–Gary útvonalon kell haladnia, és összesen 668 mérföldet kell megtennie.

Heurisztikus eljárások a TSP megoldására

Amikor a korlátozás és szétválasztás módszerével olyan utazó ügynök feladatokat (TSP) oldunk meg, amelyekben sok várost kell felkeresni, jelentős számítógépes futási idővel kell számolnunk. Emiatt a TSP-kre gyakran **heurisztikus módszereket** használnak, amelyek gyorsan egy jó (de nem feltétlenül a legjobb) megoldáshoz vezetnek. Heurisztikus módszeren egy olyan intuitíven igazolt eljárást értünk, amelyik a feladatot próbálkozásos közelítéssel oldja meg, és olyankor használjuk, amikor a feladat pontos megoldása túl sokáig tartana. Két heurisztikát mutatunk be a TSP-k (közelítő) megoldására: a legközelebbi-szomszéd, illetve a legolcsóbb-beszúrás heurisztikákat.

A legközelebbi-szomszéd heurisztika (NNH – nearest-neighbor heuristic) egy tetszőlegesen választott városból indul, majd a legközelebbi városba „megy”. A legutoljára felkeresett városból a hozzá legközelebbi még meg nem látogatott városba vezet tovább az útvonal egészen addig, amíg egy körutat nem kapunk. Most a 11. példára alkalmazzuk az NNH-t. Az (önkényesen választott) 1. városból indulunk. Az 1. városhoz az 5. város van legközelebb, létrehozzuk az 1–5 élt. A 2., 3. és 4. városok közül a 2. van a legközelebb az 5. városhoz, így már két élünk van: 1–5–2. A 3. és 4. városok közül a 4. van a legközelebb a 2. városhoz, az élek tehát: 1–5–2–4. Ezután persze a 3. városnak kell következnie, majd visszatérünk az 1. városba. Így kapjuk az 1–5–2–4–3–1 körutat. Ebben az esetben az NNH egy optimális körutat eredményezett. Ugyanakkor, ha a 3. várossal kezdtünk volna, a 3–4–1–5–2–3 körutat kaptuk volna (ellenőrizzük!). Ennek a körútnak a hossza $113+164+58+79+290 = 704$ mérföld, nem a lehető legkevesebb. Az NNH tehát nem feltétlenül ad optimális körutat. Célszerű mindegyik városból kiindulva alkalmazni az NNH-t, és az eredményül kapott körutak közül a legjobbat választani.

A legolcsóbb-beszúrás heurisztika (CIH – cheapest-insertion heuristic) is egy tetszőlegesen választott városból indul. Először megkeressük a legközelebbi szomszédot, és létrehozzuk az e két városból álló részkörutat. Ezután a lehető legolcsóbb módon „beszúrunk” egy várost a részkörútba, azaz úgy helyettesítjük a részkörút egyik élét (mondjuk az (i,j) élt) egy csatlakozó élpárral – ez esetben az (i,k) és (k,j) élekkel, ahol k egy, az aktuális részkörútban nem szereplő város –, hogy a részkörút hossza a legkevésbé növekedjen. Legyen c_{ij} az (i,j) él hossza. Ha az (i,j) élt kicseréljük az (i,k) és (k,j) élekkel, a részkörút hosszához $c_{ik}+c_{kj}-c_{ij}$ adódik. Addig folytatjuk a városok beszúrását, amíg egy körutat nem kapunk. Kezdjük a CIH-t is az 1. várossal. Hozzá az 5. város a legközelebbi, az első részkörút tehát az $(1,5)$–$(5,1)$. Az $(1,5)$ élt helyettesíthetjük az $(1,2)$–$(2,5)$, $(1,3)$–$(3,5)$ és $(1,4)$–$(4,5)$ élpárokkal, az $(5,1)$ élt pedig az $(5,2)$–$(2,1)$, $(5,3)$–$(3,1)$ és $(5,4)$–$(4,1)$ kitérőkkel. A 67. táblázat mutatja azokat a számításokat, amelyekből meghatározható, hogy az $(1,5)$–$(5,1)$ részkörút melyik élét kell kicserélni, és mire (* jelöli a helyes döntést). Amint látható, akár az $(1,5)$, akár az $(5,1)$ kicserélhető. Mi az $(1,5)$ élt választjuk, és helyettesítjük az $(1,2)$–$(2,5)$ élpárral. Így kapjuk az $(1,2)$–$(2,5)$–$(5,1)$ részkörutat. Ennek egy (i,j) élét kell az (i,k)–(k,j) élpárra cserélni, ahol $k=3$ vagy 4. A számításokat a 68. táblázat mutatja.

67. TÁBLÁZAT Számítások az $(1,5)$–$(5,1)$ egyik élének helyettesítéséhez

Kilépő él	Belépő élpár	Hozzáadott távolság
$(1,5)$*	$(1,2)$–$(2,5)$	$c_{12}+c_{25}-c_{15}=153$
$(1,5)$	$(1,3)$–$(3,5)$	$c_{13}+c_{35}-c_{15}=462$
$(1,5)$	$(1,4)$–$(4,5)$	$c_{14}+c_{45}-c_{15}=302$
$(5,1)$*	$(5,2)$–$(2,1)$	$c_{52}+c_{21}-c_{51}=153$
$(5,1)$	$(5,3)$–$(3,1)$	$c_{53}+c_{31}-c_{51}=462$
$(5,1)$	$(5,4)$–$(4,1)$	$c_{54}+c_{41}-c_{51}=302$

68. TÁBLÁZAT Számítások az $(1,2)$–$(2,5)$–$(5,1)$ egyik élének helyettesítéséhez

Kilépő él	Belépő élpár	Hozzáadott távolság
$(1,2)$	$(1,3)$–$(3,2)$	$c_{13}+c_{32}-c_{12}=375$
$(1,2)$*	$(1,4)$–$(4,2)$	$c_{14}+c_{42}-c_{12}=233$
$(2,5)$	$(2,3)$–$(3,5)$	$c_{23}+c_{35}-c_{25}=514$
$(2,5)$	$(2,4)$–$(4,5)$	$c_{24}+c_{45}-c_{25}=318$
$(5,1)$	$(5,3)$–$(3,1)$	$c_{53}+c_{31}-c_{51}=462$
$(5,1)$	$(5,4)$–$(4,1)$	$c_{54}+c_{41}-c_{51}=302$

Most az $(1,2)$ élt cseréljük az $(1,4)$–$(4,2)$ élpárra, és kapjuk az $(1,4)$–$(4,2)$–$(2,5)$–$(5,1)$ részkörutat. Ennek a részkörútnak valamelyik (i,j) élét kell most az $(i,3)$–$(3,j)$ élpárral helyettesíteni. A számításokat a 69. táblázat tartalmazza. Az $(1,4)$ helyett az $(1,3)$ és $(3,4)$ éleket behozva megkapjuk az $(1,3)$–$(3,4)$–$(4,2)$–$(2,5)$–$(5,1)$ körutat. Ebben a példában a CIH optimális körúthoz vezetett – de ez általában nem feltétlenül van így.

69. TÁBLÁZAT Számítások az $(1,4)$–$(4,2)$–$(2,5)$–$(5,1)$ egyik élének helyettesítéséhez

Kilépő él	Belépő élpár	Hozzáadott távolság
$(1,4)$*	$(1,3)$–$(3,4)$	$c_{13}+c_{34}-c_{14}=166$
$(4,2)$	$(4,3)$–$(3,2)$	$c_{43}+c_{32}-c_{42}=202$
$(2,5)$	$(2,3)$–$(3,5)$	$c_{23}+c_{35}-c_{25}=514$
$(5,1)$	$(5,3)$–$(3,1)$	$c_{53}+c_{31}-c_{51}=462$

Heurisztikus eljárások értékelése

Heurisztikák értékelésére a következő három szempont vetődik fel:

1. Teljesítménygaranciák.

2. Valószínűségi elemzés.

3. Empirikus elemzés.

A teljesítménygarancia egy legrosszabb-eset korlát, amely megmondja, hogy a heurisztika által kapott körút legfeljebb mennyire maradhat el az optimálistól. Az NNH-ra vonatkozóan meg lehet mutatni, hogy tetszőleges r számot véve lehet olyan TSP-t konstruálni, hogy az NNH szerinti körút r-szer hosszabb, mint az optimális körút. A lehető legrosszabb esetet nézve tehát az NNH gyengén teljesít. A CIH-ra vonatkozóan megmutatták, hogy ha a TSP költségmátrixa szimmetrikus és teljesíti a háromszög-egyenlőtlenségeket (azaz $c_{ij} = c_{ji}$ és $c_{ik} \leq c_{ij} + c_{jk}$ minden i, j, k-ra), akkor a CIH szerinti körút legfeljebb kétszer olyan hosszú, mint az optimális körút.

A valószínűségi elemzés során feltételezik, hogy a városok elhelyezkedése valamilyen ismert valószínűségi eloszlást követ. Feltehetjük például, hogy a városok pozícióit egy egységnyi hosszúságú, szélességű és magasságú kockán egyenletes eloszlást követő, független valószínűségi változók írják le. Az egyes heurisztikákra ekkor kiszámítjuk a következő arányt:

$$\frac{\text{a heurisztika szerinti körút várható hossza}}{\text{az optimális körút várható hossza}}$$

Minél közelebb van ez az arány az 1-hez, annál jobb a heurisztika.

Az empirikus elemzés során összehasonlítják a heurisztika szerinti megoldást az optimálissal számos olyan példában, amelyekben ismert az optimális körút. Öt, egyenként 100 várost tartalmazó TSP-t véve Golden, Bodin, Doyle és Stewart (1980) azt találták, hogy az NNH – amikor mindegyik városból indítva lefuttatták, és a legjobb megoldást vették – átlagosan 15%-kal hosszabb körutakat talált, mint az optimális körutak. Ugyanezekre a példákra alkalmazva a CIH (szintén mindegyik városból indítva és a legjobb megoldást véve) az optimális körutakhoz képest ugyancsak átlagosan 15%-kal hosszabb körutakat talált.

MEGJEGYZÉSEK

1. Golden, Bodin, Doyle és Stewart (1980) leírnak egy olyan heurisztikát, amellyel rendszeresen az optimális körúthoz 2-3%-on belül lehet kerülni.

2. A heurisztikák összevetésekor a számítógépes futási idő, illetve az implementáció egyszerűsége is fontos szempont.

3. A heurisztikák kitűnő tárgyalását adják Lawler (1985) könyvének 5–7. fejezetei.

A TSP egy egészértékű programozási modellje

Ebben a részben megadunk egy IP-t a TSP megoldására. Megjegyezzük, hogy nagyméretű TSP-k esetén ez a megfogalmazás nehezen kezelhető és nem hatékony. Tegyük fel, hogy a TSP-ben az $1, 2, 3, \ldots, N$ városok szerepelnek, $i \neq j$-re $c_{ij} =$ az i-edik várostól a j-edik városig vett távolság, és $c_{ii} = M$, ahol M egy nagyon nagy szám (a feladatbeli távolságokhoz képest). A $c_{ii} = M$ értékadás biztosítja, hogy az i-edik városból nem megyünk rögtön az i-edik városba. Legyen továbbá

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ ha az utazó ügynök az } i\text{-edik városból a } j\text{-edik városba megy} \\ 0 \text{ különben} \end{cases}$$

Ekkor a TSP megoldható a következő IP-vel:

$$\min z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \tag{40}$$

$$\text{f.h.} \quad \sum_{i=1}^{i=N} x_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, N) \tag{41}$$

$$\sum_{j=1}^{j=N} x_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{42}$$

$$u_i - u_j + N x_{ij} \leq N - 1 \quad (i \neq j;\ i = 2, 3, \ldots, N;\ j = 2, 3, \ldots, N) \tag{43}$$

$$\text{minden } x_{ij} = 0 \text{ vagy } 1, \text{ minden } u_j \geq 0$$

A (40) célfüggvény a körút éleinek összhosszát adja meg. A (41) feltételek biztosítják, hogy mindegyik városba egyszer érkezünk meg, a (42) feltételek pedig azt, hogy mindegyik városból egyszer indulunk el. A modell kulcsfeltételei a (43) alattiak, ezek biztosítják a következőket:

1. Az x_{ij} értékeknek semelyik részkörutat tartalmazó halmaza nem lehetséges megoldás (mert megsérti a (43) feltételt).

2. Az x_{ij} értékeknek bármelyik körutat alkotó halmaza lehetséges megoldás (mert vannak olyan u_j értékek, amelyekkel fennáll a (43)).

Annak szemléltetésére, hogy az x_{ij} értékeknek bármelyik részkörutat tartalmazó halmaza megsérti a (43)-at, tekintsük a 19. ábrán látható 1–5–2–1 és 3–4–3 részkörutakat eredményező $x_{15} = x_{21} = x_{34} = x_{43} = x_{52} = 1$ hozzárendelést. Válasszuk az 1-es várost *nem* érintő 3–4–3 részkörutat, és írjuk fel az élekhez tartozó (43) alatti $u_3 - u_4 + 5x_{34} \leq 4$ és $u_4 - u_3 + 5x_{43} \leq 4$ feltételeket. Összeadva őket kapjuk az $5(x_{34} + x_{43}) \leq 8$ feltételt, ami nyilvánvalóan kizárja, hogy $x_{43} = x_{34} = 1$ legyen. A 3–4–3 részkörutat (és a többi részkörutat is!) kiszűrik a (43) feltételek.

Lássuk most, hogy az x_{ij} értékek tetszőleges, körutat alkotó halmaza esetén miért léteznek olyan u_j értékek, hogy teljesül az összes (43) alatti feltétel. Tegyük fel, hogy az 1-es városból indulunk (mivel mindegyiket érinteni fogjuk, ezt megtehetjük). Legyen $t_i =$ az i-edik város pozíciója a körúton. Ekkor az $u_i = t_i$ értékekkel az összes (43) alatti feltétel teljesül. Szemléltetésképpen vegyük az 1–3–4–5–2–1 körutat. Ekkor $u_1 = 1$, $u_2 = 5$, $u_3 = 2$, $u_4 = 3$ és $u_5 = 4$. Lássuk a (43) feltételeket, először egy $x_{ij} = 1$ élhez tartozót. Az x_{52}-höz például az $u_5 - u_2 + 5x_{52} \leq 4$ tartozik. Mivel a 2-es város rögtön az 5-ös után következik, $u_5 - u_2 = -1$, az x_{52}-höz tartozó (43)-beli feltétel $(-1 + 5 \leq 4)$ tehát teljesül. Egy $x_{ij} = 0$ élhez, mondjuk az x_{32}-höz az $u_3 - u_2 + 5x_{32} \leq 4$ feltétel tartozik, ami az $u_3 - u_2 \leq 4$-re egyszerűsödik. Mivel $u_3 \leq 5$ és $u_2 \geq 2$, az $u_3 - u_2$ nem lehet $5 - 2$-nél több.

Ez mutatja, hogy a (40)–(43) feltételek kiszűrik az N város 1-gyel kezdődő sorozatai közül az összes olyat, amelyik tartalmaz részkörutat, de egy olyat sem, amelyik nem tartalmaz részkörutat. A (40)–(43)-at megoldva tehát a TSP optimális megoldását kapjuk.

Feladatok

A csoport

1. Négy munkát kell elvégezni egy gépen. A 70. táblázat adja meg az egyes munkák időtartamát és befejezésének határidejét. A korlátozás és szétválasztás módszerével határozza meg a munkák elvégzésének azt a sorrendjét, amelyik minimalizálja a késések összegét!

70. TÁBLÁZAT

	A munka időtartama (perc)	**A munka határideje**
1. munka	7	a 14. perc vége
2. munka	5	a 13. perc vége
3. munka	9	a 18. perc vége
4. munka	11	a 15. perc vége

2. A Sunco naponta négyféle benzint állít elő: ólommentes szupert (OMS), ólommentes normált (OMN), ólmozott szupert (OTS) és ólmozott normált (OTN). A berendezések tisztítása és beállítása miatt egy adag benzin előállításának ideje függ attól, hogy előtte milyen típusú benzin készült. Tovább tart például az átállás az ólommentes és ólmozott benzinfajták között, mint két ólommentes között. A 71. táblázat mutatja (percben megadva) az egyes benzinfajtákból a napi adagok előállításához szükséges időt. A korlátozás és szétválasztás módszerével határozza meg, hogy naponta milyen sorrendben készüljenek az egyes benzinfajták!

71. TÁBLÁZAT

Utoljára előállított benzin	**Előállítandó benzin**			
	OMN	**OMS**	**OTN**	**OTS**
OMN	—	50	120	140
OMS	60	—	140	110
OTN	90	130	—	60
OTS	130	120	80	—

Megjegyzés: Tegyük fel, hogy a tegnapi utoljára készült benzin az elődje a mai elsőnek.

3. Egy hálózatban Hamilton-útnak egy olyan zárt útvonalat nevezünk, amelyik mindegyik csúcson pontosan egyszer halad át, mielőtt visszatérne a kiinduló csúcsba. Egy négy várost tartalmazó TSP példáján magyarázza meg, hogy a TSP miért ekvivalens a hálózat legrövidebb Hamilton-útjának megkeresésével!

4. Egy nyomtatott áramkörön négy tüske van, a közöttük lévő távolságokat mutatja (cm-ben megadva) a 72. táblázat.

72. TÁBLÁZAT

	1	**2**	**3**	**4**
1	0	1	2	2
2	1	0	3	2.9
3	2	3	0	3
4	2	2.9	3	0

(a) Tegyük fel, hogy három huzallal úgy akarjuk összekötni a tüskéket, hogy a felhasznált huzalok összhossza minimális legyen. Oldja meg ezt a problémát a 8. fejezetben tárgyalt technikák egyikével!

(b) Tegyük fel, hogy továbbra is minimális összhosszúságú három huzallal akarjuk összekötni a tüskéket, de most úgy, hogy semelyik tüskét ne érintse kettőnél több huzal (mert akkor rövidzárlat keletkezik). Adjon meg egy olyan utazó ügynök feladatot, amellyel a probléma megoldható! (*Útmutatás:* Legyen egy mindegyik tüskétől 0 távolságra lévő 0 jelű tüske is.)

5. **(a)** Adja meg a 2. feladatbeli TSP-nek az NNH szerinti megoldását! Kezdje az OMN-nel!

(b) Adja meg a 2. feladatbeli TSP-nek a CIH szerinti megoldását! Kezdje az OMN–OMS–OMN részkörúttal!

6. Egy csomagküldő öt különböző helyszínen tárolja a ruhákat. Naponta többször kiküldenek egy autót a raktárakhoz, hogy szedje össze a rendeléseket, majd térjen velük vissza a csomagolóba. Vázoljon fel egy TSP-t, amellyel minimalizálható a rendelések begyűjtéséhez és a csomagolóba való szállításához szükséges idő!

B csoport

7. A korlátozás és szétválasztás módszerével állítson fel (ha lehetséges) négy vezért egy 4×4-es sakktáblára úgy, hogy semelyik kettő ne üsse egymást! (*Útmutatás:* Legyen $x_{ij} = 1$, ha egy vezér kerül a sakktábla i-edik sorának j-edik oszlopbeli helyére, és $x_{ij} = 0$ különben. Ágaztassunk úgy, mint a gépütemezési feladatban. Számos csúcs kizárható, mert nem megengedett. Az $x_{11} = x_{22} = 1$ élekhez tartozó csúcs például nem megengedett, mert a két vezér egymás átlós ütésvonalában áll.)

8. Jóllehet a magyar módszer hatékonyan oldja meg a hozzárendelési feladatokat, e célra a korlátozás és szétválasztás is használható. Tegyük fel, hogy egy vállalatnak öt gyára és öt raktára van. Mindegyik gyár igényét egyetlen raktárból kell kielégíteni, és mindegyik raktárból csak egyetlen gyárba szállíthatnak. A 73. táblázat mutatja (ezer

\$-ban megadva) az egyes gyárak igényének az egyes raktárakból történő kielégítésének a költségét.

73. TÁBLÁZAT

	Gyár				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1. raktár	5	15	20	25	10
2. raktár	10	12	5	15	19
3. raktár	5	17	18	9	11
4. raktár	8	9	10	5	12
5. raktár	9	10	5	11	7

Legyen $x_{ij} = 1$, ha az i-edik raktárt rendeljük a j-edik gyárhoz, és $x_{ij} = 0$ különben. Ágaztassunk először az 1. gyárhoz rendelt raktár szerint. Így öt ág keletkezik: $x_{11} = 1$, $x_{21} = 1$, $x_{31} = 1$, $x_{41} = 1$ és $x_{51} = 1$. Hogyan kaphatunk egy alsó korlátot az egy ághoz tartozó hozzárendelések összköltségére? Vegyük az $x_{21} = 1$ ágat. Ha $x_{21} = 1$, a 2. sorból, illetve az 1. oszlopból több költségelem már nem jöhet, így annál olcsóbb megoldást már nem kaphatunk, mint ha a 2. sor és az 1. oszlop törlése utáni redukált mátrixban a sorok minimális elemeit vennénk. Tehát minden olyan hozzárendelés összköltsége legalább $10+10+9+5+5 = 39$, amiben $x_{21} = 1$. Ugyanígy nem kaphatunk olcsóbb megoldást, mint ha a 2. sor és az 1. oszlop törlése utáni redukált mátrixban az oszlopok minimális elemeit vennénk. Azt kapjuk, hogy minden olyan hozzárendelés összköltsége legalább $10+9+5+5+7 = 36$, amelyben $x_{21} = 1$. A két lehetőség közül a szigorúbbat véve adódik, hogy minden olyan hozzárendelés összköltsége legalább $\max(36, 39) = 39$, amiben $x_{21} = 1$. Amennyiben tehát egy ágon olyan megoldásjelöltet találunk, amelynek az összköltsége nem több, mint 39, az $x_{21} = 1$ ág kizárható. Ezen ötlet segítségével oldja meg a feladatot a korlátozás és szétválasztás módszerével!

9.[20] Tekintsünk egy hosszú tekercs tapétát, amelynek a mintája méterenként ismétlődik. Négy tapétadarabot kell levágnunk a tekercsről. A végétől (0 pont) számítva az egyes darabok kezdő- és végpontja a 74. táblázatban található. Vagyis az 1. darab mintája a tekercs végétől 0.3 méterre (aztán ismét 1.3 méterre) kezdődik, és a tekercs végétől 0.7 méterre (majd újra 1.7 méterre) végződik. A tekercs végétől számítva milyen sorrendben vágjuk le a darabokat, hogy minimális mennyiségű hulladék keletkezzék? Tegyük fel, hogy egy utolsó vágással a kiinduló mintapozíciót vissza kell állítanunk.

74. TÁBLÁZAT

	Kezdőpont (méter)	Végpont (méter)
1. darab	0.3	0.7
2. darab	0.4	0.8
3. darab	0.2	0.5
4. darab	0.7	0.9

10.[21] Nyomtatott áramkörök alaplapjait egy programozható fúrógép lyukasztja. Az öt elkészítendő furat x és y koordinátáit adja meg a 75. táblázat. A fúrófej mozgatása két furat között annyi másodpercet vesz igénybe, mint amennyi a távolságuk. Milyen fúrási sorrend minimalizálja a fúrófej mozgatásához szükséges időt?

75. TÁBLÁZAT

x	y	Furat
1	2	1
3	1	2
5	3	3
7	2	4
8	3	5

11. Négy munkát kell ugyanazon a gépen elvégezni. Az egyes munkák időtartamát, elvégzésének határidejét és a késedelmi büntetést (dollár/nap) a 76. táblázat adja meg.

76. TÁBLÁZAT

	Időtartam	Határidő	Büntetés
1. munka	4 nap	4. nap	4
2. munka	5 nap	2. nap	5
3. munka	2 nap	13. nap	7
4. munka	3 nap	8. nap	2

A korlátozás és szétválasztás módszerével határozza meg a munkáknak azt a sorrendjét, amelyik minimalizálja a késedelmi büntetést!

[20] Garfinkle (1977) alapján.
[21] Magirou (1986) alapján.

8.7. Implicit leszámlálás

Az implicit leszámlálás módszerével gyakran oldanak meg 0–1 IP-ket arra támaszkodva, hogy mindegyik változó csak 0 vagy 1 értéket vehet fel, s ez leegyszerűsíti a korlátozás és szétválasztási eljárásban az ágaztatást, az alsó korlát meghatározását, illetve egy csúcs kizárhatóságának eldöntését.

Az implicit leszámlálás tárgyalása előtt megmutatjuk, hogy miként lehet bármilyen tiszta IP-t átfogalmazni 0–1 IP-vé: fejezzük ki az eredeti IP mindegyik változóját a 2 hatványainak összegeként. Például, ha az x_i változó egészértékű, és n az a legkisebb egész szám, amelyikre biztosan igaz, hogy $x_i < 2^{n+1}$, akkor az x_i (egyértelműen) felírható a $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}, 2^n$ hatványok összegeként, mégpedig az

$$x_i = u_n 2^n + u_{n-1} 2^{n-1} + \cdots + u_2 2^2 + 2u_1 + u_0 \tag{44}$$

alakban, ahol $u_i = 0$ vagy 1 ($i = 0, 1, \ldots, n$).

Az eredeti IP-nek 0–1 IP-vé való átfogalmazása céljából mindenütt cseréljük ki az x_i-t a (44) jobb oldalára. Tegyük fel például, hogy tudjuk, $x_i \leq 100$. Mivel $x_i < 2^{6+1} = 128$, a (44) alapján

$$x_i = 64u_6 + 32u_5 + 16u_4 + 8u_3 + 4u_2 + 2u_1 + u_0 \tag{45}$$

ahol $u_i = 0$ vagy 1 ($i = 0, 1, \ldots, 6$). Cseréljük tehát ki x_i-t a (45) jobb oldalán álló kifejezésre. Hogyan találhatjuk meg az u-k értékét x_i egy adott értékére? Legyen például $x_i = 93$. Mivel a $2^6 = 64$ a legnagyobb hatvány, ami megvan a 93-ban, $u_6 = 1$ lesz. A (45) jobb oldalán a maradék ekkor $93 - 64 = 29$. Mivel a következő hatvány, a $2^5 = 32$, több, mint a 29, $u_5 = 0$ kell legyen. A $2^4 = 16$ viszont megvan a 29-ben, tehát $u_4 = 1$. Ekképpen folytatva kapjuk, hogy $u_3 = 1$, $u_2 = 1$, $u_1 = 0$ és $u_0 = 1$. Tehát $93 = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0$.

Hamarosan kiderül, hogy 0–1 IP-ket általában könnyebb megoldani, mint egyéb tiszta IP-ket. Hogy akkor miért nem írunk át minden tiszta IP-t 0–1 IP-vé? Egyszerűen azért, mert a 0–1 IP-vé való átfogalmazás általában nagyon megnöveli a változók számát. Ugyanakkor számos helyzet (mint a lockbox vagy a hátizsák problémák) természetes módon vezetnek 0–1 feladatokhoz. Szóval igenis megéri megismerkedni a 0–1 IP-k megoldásával.

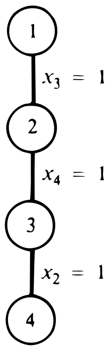
Az implicit leszámlálási módszerben használt fa hasonlít ahhoz, amelyiket a 0–1 hátizsák feladat megoldásában láttunk a 8.5. alfejezetben. A fa mindegyik ága valamely x_i változóra azt mondja meg, hogy $x_i = 0$, vagy $x_i = 1$. A csúcsoknál pedig bizonyos változók értéke meghatározott. Tegyük fel például, hogy egy 0–1 feladat változói az x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 és x_6, továbbá, hogy a 21. ábra a fa egy részletét mutatja. A 4-es csúcsnál az x_3, x_4 és x_2 változók értéke meghatározott, ezeket **kötött változóknak** hívjuk. A nem rögzített értékű változók pedig a **szabad változók** az adott csúcsnál. Vagyis a 4-es csúcsnál az x_1, x_5 és x_6 a szabad változók. Ha egy csúcsnál konkretizáljuk az összes szabad változó értékét, akkor a csúcs egy **befejezéséről** beszélünk. Az $x_1 = 1$, $x_5 = 1$ és $x_6 = 0$ értékadás a 4-es csúcs egy befejezése.

Lássuk ezek után az implicit leszámlálás három fő ötletét:

1. A kötött változók értékei mellett található-e könnyen olyan befejezése az adott csúcsnak, amely lehetséges megoldása az eredeti 0–1 IP-nek? A kérdés megválaszolása érdekében úgy adjunk (0 vagy 1) értéket a szabad változóknak, hogy a célfüggvény a lehető legnagyobb (maximum feladatban) vagy legkisebb (minimum feladatban) legyen. Ha ez a befejezés lehetséges, akkor bizonyosan ez a legjobb lehetséges befejezése a csúcsnak, s így a csúcs elágaztatása szükségtelen. Tegyük fel, hogy feladatunk:

$$\begin{aligned}
&\max z = 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \\
&\text{f.h.} \quad x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 \geq 1 \\
&x_i = 0 \,\text{vagy}\, 1 \quad (i = 1, 2, 3, 4)
\end{aligned}$$

21. ÁBRA
Szabad és kötött
változók



Egy olyan csúcsnál (hívjuk 4-es csúcsnak), amelyiknél $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$ már rögzítettek, a legjobb befejezés az $x_3 = 0$ és $x_4 = 1$. Mivel $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ és $x_4 = 1$ az eredeti feladat egy lehetséges megoldása, megtaláltuk a 4-es csúcs legjobb lehetséges befejezését. A 4-es csúcsot tehát felderítettük, és megkaptuk az $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1$ megoldás-jelöltet, amelyiknek a z értéke 4.

2. Ha a csúcs legjobb befejezése nem is ad lehetséges megoldást, akkor is ad egy korlátot a legjobb lehetséges befejezés célfüggvényértékére. Ezen korlát alapján a csúcsot gyakran kizárhatjuk a további vizsgálatokból. Tegyük fel például, hogy korábban már találtunk egy $z = 6$-ot adó megoldás-jelöltet, célunk pedig maximalizálni a

$$z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5$$

célfüggvényt. Annál a csúcsnál, amelynél az $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ és $x_3 = 1$ a kötött értékek, a legjobb befejezés az $x_4 = 0$ és $x_5 = 1$. A z érték ekkor $2 + 1 + 2 = 5$. Mivel a $z = 6$-os jelöltön semmiképpen sem javíthatunk, a csúcs rögtön kizárható (függetlenül attól, hogy a befejezés lehetséges-e vagy sem).

3. Eldönthető-e könnyen, hogy egy adott csúcs egyetlen befejezése sem lehetséges megoldás? Tegyük fel, hogy a 23. ábrabeli 4-es csúcsban vagyunk, egyik feltételünk pedig

$$-2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_5 + 2x_6 \leq -5 \tag{46}$$

Van-e olyan befejezése a 4-es csúcsnak, amelyik kielégíti ezt a feltételt? Adjunk olyan értékeket a szabad változóknak, hogy a (46) bal oldala a lehető legkisebb legyen. Ha a (46) ezzel a befejezéssel sem teljesül, akkor bizonyosan a 4-es csúcs egyetlen befejezésére sem áll fenn. Legyen ezért $x_1 = 1$, $x_5 = 1$ és $x_6 = 0$. Behelyettesítve ezeket, illetve a rögzített értékeket, azt kapjuk, hogy $-2 + 3 + 2 - 3 - 1 \leq -5$. Mivel az egyenlőtlenség nem teljesül, a 4-es csúcs semelyik befejezésére sem fog teljesülni. A 4-es csúcs egyetlen befejezése sem adhat lehetséges megoldást, a csúcs ezért kizárható.

Annak eldöntésére, hogy egy csúcshoz tartozik-e lehetséges megoldás, mindegyik feltételhez megkeressük a teljesüléséhez legkedvezőbb befejezést a 77. táblázatban összefoglalt módon.[22] Amennyiben akár egyetlen feltétel is akad, amelyet a számára legkedvezőbb befejezés nem teljesít, tudjuk, hogy a csúcshoz nem tartozik lehetséges megoldás. Ebben az esetben a csúcs nem eredményezhet optimális megoldást sem.

Előfordulhat, hogy egy csúcsnak nincsen lehetséges befejezése, de ezt a fenti durva ellenőrzés csak később mutatja ki, mikor már lejjebb haladtunk a fán, és több változó vált kötötté. Amennyiben semmilyen információ nem származott a csúcs ilyen vizsgálatából, egy szabad x_i változó szerint ágaztatunk, és létrehozunk két új csúcsot: az egyikben $x_i = 1$, a másikban $x_i = 0$ már rögzített értékek lesznek.

[22] Az egyenlőségi feltételek egy-egy $\leq$, illetve $\geq$ feltétellel helyettesítendők.

77. TÁBLÁZAT
Hogyan állapítjuk meg, hogy egy csúcsnak van-e egy feltételt kielégítő befejezése

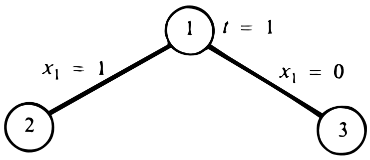
A feltétel típusa	A szabad változó együtthatójának előjele a feltételben	A szabad változó értéke legyen
$\leq$	$+$	0
$\leq$	$-$	1
$\geq$	$+$	1
$\geq$	$-$	0

12. PÉLDA Implicit leszámlálással oldjuk meg a következő 0–1 IP-t:

$$\begin{aligned}
\max z &= -7x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 \\
\text{f.h.} \quad & -4x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 \leq -3 && (47)\\
& -4x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_4 + 2x_5 \leq -7 && (48)\\
& x_i = 0 \text{ vagy } 1 \quad (i = 1,2,3,4,5)
\end{aligned}$$

Megoldás Kezdetben (1-es csúcs) minden változó szabad. Először azt ellenőrizzük, hogy az 1-es csúcs legjobb befejezése lehetséges-e. Az 1-es csúcs legjobb befejezése: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, ami nem lehetséges (mindkét feltételt megsérti). Most azt ellenőrizzük, hogy az 1-es csúcsnak van-e lehetséges befejezése. A (47) teljesíthetőségének ellenőrzését az $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$ értékekkel végezzük. Ez kielégíti a (47)-et (mert $-9 \leq -3$). A (48) teljesíthetőségének ellenőrzéséhez legyen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$. Az 1-es csúcs ezen befejezése kielégíti a (48)-at (mert $-10 \leq -7$). Mivel a (47), illetve (48) feltételhez is találtunk lehetséges befejezést, nem minősíthetjük az 1-es csúcsot nem lehetségesnek. A tetszőlegesen választott x_1 szabad változó szerint ágaztatva két új csúcsot kapunk: a 2-est az $x_1 = 1$ feltétellel, míg a 3-ast az $x_1 = 0$ feltétellel (lásd 22. ábra).

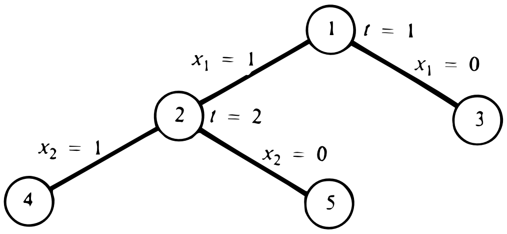
22. ÁBRA
Az 1-es csúcs ágaztatása



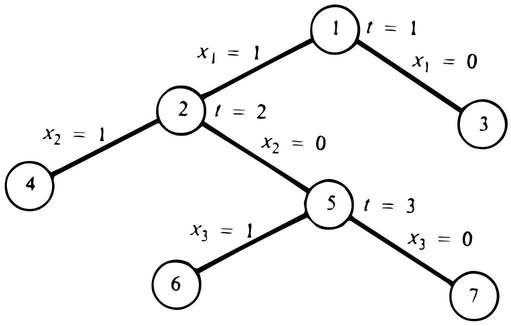
Folytatásnak a 2-es csúcsot választjuk. Ennek legjobb befejezése: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ és $x_5 = 0$. Ez sajnos nem lehetséges. Lássuk most, hogy van-e a 2-es csúcsnak lehetséges befejezése. Az $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$ befejezés kielégíti a (47)-et (mert $-9 \leq -3$). Az $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ befejezés pedig a (48)-at (mert $-10 \leq -7$). Ellenőrzésünkből tehát nem derült ki, hogy a 2-es csúcsnak van-e lehetséges befejezése.

A 2-es csúcsnál szabad x_2 változó szerinti ágaztatással kapjuk a 4-es és 5-ös csúcsokat (lásd 23. ábra). A LIFO szabályt követve az 5-ös csúcs következik. Az 5-ös legjobb befejezése: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$. Ez sem lehetséges. A csúcs lehetségességének tesztje következik. Az $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$ befejezés teljesíti a (47)-et (mert $-7 \leq -3$). Az $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ befejezéssel fennáll a (48) (mert $-8 \leq -7$). A tesztből tehát most sem derült ki semmi. Az 5-ös csúcsnál szabad x_3 változó szerint ágaztatva kapjuk a 6-os és 7-es csúcsokat (lásd 24. ábra).

23. ÁBRA
A 2-es csúcs ágaztatása



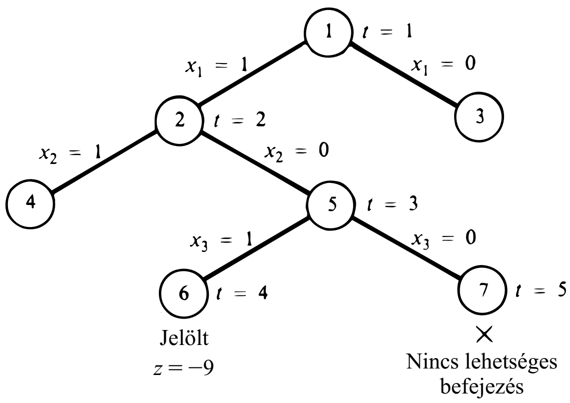
24. ÁBRA
Az 5-ös csúcs ágaztatása

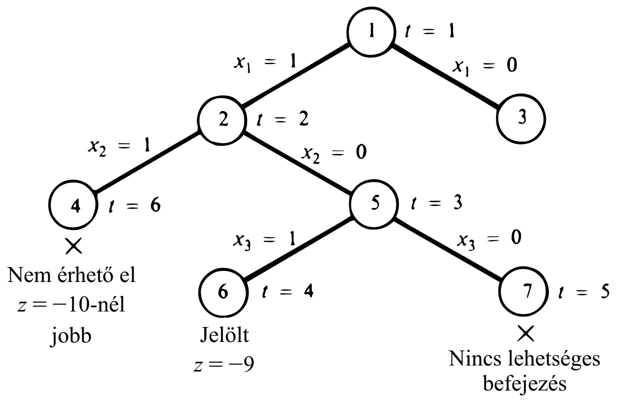


A LIFO szabály szerint a 6-os csúcs elemzése következik. Itt a legjobb befejezés: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $z = -9$. Ez egy lehetséges befejezés, találtunk tehát egy olyan megoldás-jelöltet, amelyre $z = -9$. A LIFO szabály szerint a 7-es a következő csúcs, amelynek a legjobb befejezése: $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, z = -7$. Ez ugyan nem lehetséges, de mivel a $z = -7$ jobb, mint a $z = -9$, a 7-es csúcsnak még lehet a jelenlegi jelöltnél jobb befejezése. Ellenőrizzük, hogy van-e a 7-es csúcsnak lehetséges befejezése. Az $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 1$ kielégíti a (47)-et (mert $-7 \leq -3$). A (48) számára legkedvezőbb $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ befejezés viszont sérti a feltételt (mert $-4 \leq -7$), vagyis a 7-es csúcs semelyik befejezése sem elégíti ki a (48)-at. A 7-es csúcsnak tehát nincsen lehetséges befejezése, ezért kizárható a további vizsgálatokból (a 25. ábrán ezt $\times$ jelzi).

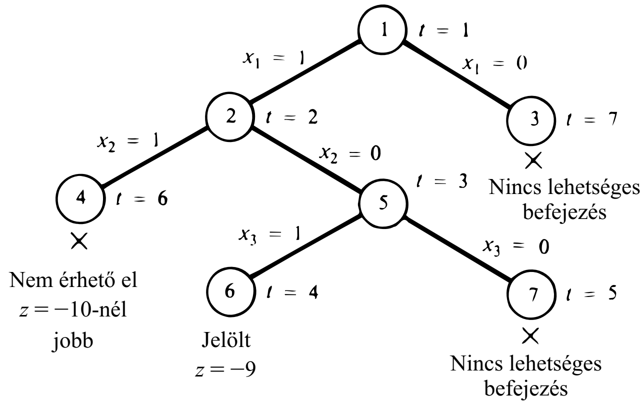
A LIFO szabály szerint most a 4-es csúcsot kell vizsgálnunk. Itt a legjobb befejezés: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$. Mivel célfüggvényértéke $z = -10$, a 4-es csúcs nem javíthat a jelenlegi $z = -9$-es megoldás-jelöltön. A 4-es csúcsot tehát kizárhatjuk.

25. ÁBRA
A 6-os csúcs megoldás-jelöltet ad, a 7-esnek nincs lehetséges befejezése





26. ÁBRA
A 4-es csúcs nem javíthat a 6-os jelöltjén



27. ÁBRA
A 3-as csúcsnak nincs lehetséges befejezése

Az aktuális helyzetet a 26. ábra mutatja, egyedül a 3-as csúcs vár elemzésre. Ennek legjobb befejezése: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$. Ez a befejezés ugyan nem lehetséges, de a $z = 0$ miatt még elképzelhető, hogy származik a 3-as csúcsból olyan lehetséges megoldás, amely jobb, mint a jelenlegi $z = -9$-es megoldás-jelölt. Lássuk, van-e a 3-as csúcsnak lehetséges befejezése? Az $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$ kielégíti a (47)-et (mert $-5 \leq -3$). Ugyanakkor, a (48) számára legkedvezőbb $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$ befejezés viszont sérti a feltételt (mert $-6 \leq -7$), vagyis a 3-as csúcs semelyik befejezése sem elégíti ki a (48)-at, ezért kizárható a további vizsgálatokból. Így kapjuk a 27. ábrán látható fát.

Mivel nem maradt több megvizsgálandó csúcs, a 6-osból származó $z = -9$-et adó $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ jelölt a 0–1 IP optimális megoldása. Vegyük észre, hogy impliciten megvizsgáltuk az összes olyan $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ pontot, amelyben $x_i = 0$ vagy 1, és az optimális megoldás kivételével mindegyiket kiszűrtük. Az $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$ pontot például a 4-es csúcs elemzésekor szűrtük ki, ugyanis ott láttuk, hogy a z értéke nem lehet jobb, mint a -9. Az $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 1$ pontot pedig akkor zártuk ki, amikor kiderült, hogy a 3-as csúcsnak egyetlen befejezése sem lehetséges.

Finomabb nem-lehetségességi tesztek **(pótfeltételek)** alkalmazásával gyakran csökkenthető a vizsgálandó csúcsok száma. Tekintsük például egy 0–1 IP következő két feltételét:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 2 \tag{49}$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 \geq 1 \tag{50}$$

Tegyük fel, hogy az $x_1 = x_2 = 1$ csúcsban vagyunk. Annak eldöntésére, hogy van-e a csúcsnak lehetséges befejezése, először azt vizsgálnánk, hogy az $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$ befejezés kielégíti-e a (49)-et (igen). Majd az $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$ befejezés és az (50) feltétel következne (kielégíti). Ez a nyers nem-lehetségességi teszt nem mutatja ki, hogy ez a csúcs nem lehetséges. Vegyük észre, hogy $x_1 = x_2 = 1$ miatt a (49) csak akkor állhat fenn, ha $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, de az $x_1 = x_2 = 1$ ezen befejezése sérti az (50)-et. Az $x_1 = x_2 = 1$ csúcsnak tehát nincsen lehetséges befejezése. Ezt a tényt végül is az általunk használt nyers nem-lehetségességi teszt is kimutatná, de addig további csúcsokat is meg kellene vizsgálnunk. Egy összetettebb feladatban egy, a feltételeket kombináló, finomabb nem-lehetségességi teszt esetleg kevesebb csúcs elemzését igényli. Egy körmönfontabb teszt persze több számolást igényel, s a többlet erőfeszítés esetleg nem éri meg. A pótfeltételek alkalmazását tárgyalja pl. Salkin (1975), Taha (1975), valamint Nemhauser és Wolsey (1988).

Mint bármilyen más korlátozás és szétválasztási algoritmusban, az implicit leszámlálási algoritmus során is számos alkalommal tetszőlegesen választunk, s ezek befolyásolják a hatékonyságot. Az implicit leszámlálási technikákkal bővebben foglalkozik Salkin (1975), Taha (1975), valamint Nemhauser és Wolsey (1988).

Feladatok

A csoport

Oldja meg implicit leszámlálással a következő 0–1 IP-ket:

1.

$$\begin{aligned} \max\ z = 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \\ \text{f.h.}\quad 2x_1 + x_2 - 3x_4 \le 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 \ge 2 \\ x_i = 0 \text{ vagy } 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \max\ z = 2x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{f.h.}\quad x_1 + 2x_2 - x_3 \le 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ x_i = 0 \text{ vagy } 1 \end{aligned}$$

3. A Finco öt projektbe fektethet be. A 78. táblázat mutatja (millió dollárban megadva), hogy az egyes projektek mennyi 0. időpontbeli készpénzt igényelnek, illetve mennyi NPV-t eredményeznek. A 0. időpontban 10 millió dollár készpénz vár befektetésre. Az 1-es és 2-es projektek kölcsönösen kizárják egymást (egyszerre nem választhatók). A 3-as és 4-es projektek is kölcsönösen kizárják egymást. Továbbá a 2-es projekt csak akkor választható, ha az 5-ösbe is fektetnek pénzt. Implicit leszámlálással határozza meg, hogy melyik projekteket választva maximalizálható az NPV!

78. TÁBLÁZAT

Projekt	Készpénzigény a 0. időpontban	NPV
1	4	5
2	6	9
3	5	6
4	4	3
5	3	2

4. Implicit leszámlálással határozza meg az 5. példa (a halmazlefedési feladat) optimális megoldását!

5. Implicit leszámlálással oldja meg a 8.2. alfejezet 1. feladatát!

B csoport

6. Miért egyértelműek az $u_0, u_1, \ldots, u_n$ értékek a (44)-ben?

8.8. A metszősík algoritmus[23]

E fejezetben eddig korlátozás és szétválasztási módszereket mutattunk be részletesebben. Ebben az alfejezetben az IP-k megoldásának egy alternatív módszerét, **a metszősík algoritmust** ismertetjük. Szemléltetésképpen a Telfa Corporation problémáját (9. példa) oldjuk meg a metszősík algoritmussal. Idézzük fel a modellt:

$$\begin{aligned} &\max\ z = 8x_1 + 5x_2 \\ &\text{f.h.} \qquad x_1 + \ x_2 \le 6 \\ &\qquad\quad 9x_1 + 5x_2 \le 45 \\ &x_1, x_2 \ge 0; \quad x_1, x_2 \text{ egész} \end{aligned} \tag{51}$$

Az s_1 és s_2 kiegészítő változók bevezetése után a Telfa feladat LP-lazítását megoldva kapjuk a 79. táblázatban látható optimális táblát:

79. TÁBLÁZAT
A Telfa LP-lazításának optimális táblája

z	x_1	x_2	s_1	s_2	**J.o.**
1	0	0	1.25	0.75	41.25
0	0	1	2.25	−0.25	2.25
0	1	0	−1.25	0.25	3.75

A metszősík módszerben egy olyan feltételt választunk az LP-lazítás optimális táblájában, amelyiknek törtértékű a bázisváltozója. Mi (önkényesen) az

$$x_1 - 1.25s_1 + 0.25s_2 = 3.75 \tag{52}$$

második feltételt választjuk. Jelölje $[x]$ az x egészrészét, azaz azt a legnagyobb egész számot, amelyik még nem nagyobb, mint x. Például $[3.75] = 3$ és $[-1.25] = -2$. Bármelyik x szám felírható mint $[x] + f$, ahol $0 \le f < 1$. Ezt az f-et az x törtrészének hívjuk. Például, $3.75 = 3 + 0.75$, és $-1.25 = -2 + 0.75$. Az (51) optimális táblájában mindegyik változó együtthatóját, illetve feltétel jobb oldalát az $[x] + f$ alakban írjuk fel, ahol $0 \le f < 1$. Ekkor az (52) így alakul:

$$x_1 - 2s_1 + 0.75s_1 + 0s_2 + 0.25s_2 = 3 + 0.75 \tag{53}$$

Az összes egész együtthatójú tagot a bal oldalra, és az összes tört együtthatójú tagot a jobb oldalra rendezve azt kapjuk, hogy

$$x_1 - 2s_1 + 0s_2 - 3 = 0.75 - 0.75s_1 - 0.25s_2 \tag{54}$$

A metszősík algoritmusban a következő feltétellel bővítjük az LP-lazítás optimális tábláját:

$$\text{az (54) jobb oldala} \le 0$$

vagyis

$$0.75 - 0.75s_1 - 0.25s_2 \le 0 \tag{55}$$

Ezt a feltételt egy **vágásnak** hívjuk (mindjárt látni fogjuk, hogy miért). Most megmutatjuk, hogy egy ily módon létrehozott vágásra teljesül a következő két tulajdonság:

1. Az IP mindegyik lehetséges pontja kielégíti a vágást.

2. Az LP-lazítás jelenlegi optimális megoldása nem elégíti ki a vágást.

[23]Ezen alfejezet kihagyása nem szakítja meg a tárgyalás folytonosságát.

Vagyis egy vágás „lemetszi” az LP-lazítás jelenlegi optimális megoldását, ugyanakkor meghagyja az IP összes lehetséges megoldását. Amikor az LP-lazítást egy vágással bővítjük, azt reméljük, hogy egy tiszta egészértékű megoldáshoz jutunk. Amennyiben igen, akkor megtaláltuk az eredeti IP optimális megoldását. Viszont ha az új optimális megoldás (mármint a vágással bővített LP-lazításé) tartalmaz törtértékű változót, akkor egy újabb vágást generálunk, és folytatjuk az eljárást. Gomory (1958) megmutatta, hogy ez a folyamat véges sok vágás után az IP optimális megoldását eredményezi. Mielőtt meghatározzuk az (51) IP optimális megoldását, belátjuk, hogy az (55) vágás teljesíti az 1. és 2. tulajdonságokat.

Az első tulajdonság belátásához vegyük az (51) IP egy tetszőleges (x_1, x_2) lehetséges megoldását. Ekkor x_1 és x_2 is egész számok, és az (51) LP-lazításának is lehetséges megoldását alkotják. Mivel az (54) pusztán egy átrendezése az optimális tábla második feltételének, az IP bármelyik lehetséges pontja kielégíti az (54)-et. Az IP bármelyik lehetséges megoldásában $s_1 \geq 0$ és $s_2 \geq 0$ kell legyen. Mivel $0.75 < 1$, az (54) jobb oldala az IP bármelyik lehetséges megoldásánál kisebb, mint 1. Ugyanakkor, az (54) bal oldala az IP bármelyik lehetséges megoldásánál egy egész szám. Az (54) jobb oldala tehát az IP bármelyik lehetséges megoldásánál egy 1-nél kisebb egész szám. Az (55) vágás tehát valóban nem metszi le az IP egyetlen lehetséges megoldását sem.

Most megmutatjuk, hogy az LP-lazítás aktuális optimális megoldása nem teljesíti az (55) vágást. Az LP-lazítás aktuális optimális megoldásában ugyanis $s_1 = s_2 = 0$, az (55) tehát nem állhat fenn. Ez az érvelés azért működik, mert a kiválasztott második feltétel jobb oldalának a törtrésze (0.75) nagyobb, mint 0. Tehát az optimális tábla bármelyik törtértékű jobb oldallal rendelkező feltételét választhatjuk az LP-lazítás optimális megoldásának levágására.

Az (55) vágás hatását a 28. ábra mutatja: az (51) IP összes lehetséges pontja kielégíti az (55) vágást, az LP-lazítás optimális megoldása ($x_1 = 3.75$ és $x_2 = 2.25$) viszont nem. A vágás grafikonját úgy kaptuk, hogy az s_1-et $6 - x_1 - x_2$-vel, az s_2-t pedig $45 - 9x_1 - 5x_2$-vel helyettesítettük, s így a vágást a $3x_1 + 2x_2 \leq 15$ alakba írhattuk.

Ezután az LP-lazítás optimális tábláját kibővítjük az (55)-tel, majd a duál szimplex módszerrel megoldjuk az így keletkező LP-t. Az (55) vágást a $-0.75s_1 - 0.25s_2 \leq -0.75$ alakba írjuk. Ezt a feltételt az s_3 változóval kiegészítve adódik a 80. táblázatban látható tábla.

80. TÁBLÁZAT
A metszősík tábla az (55) vágás után

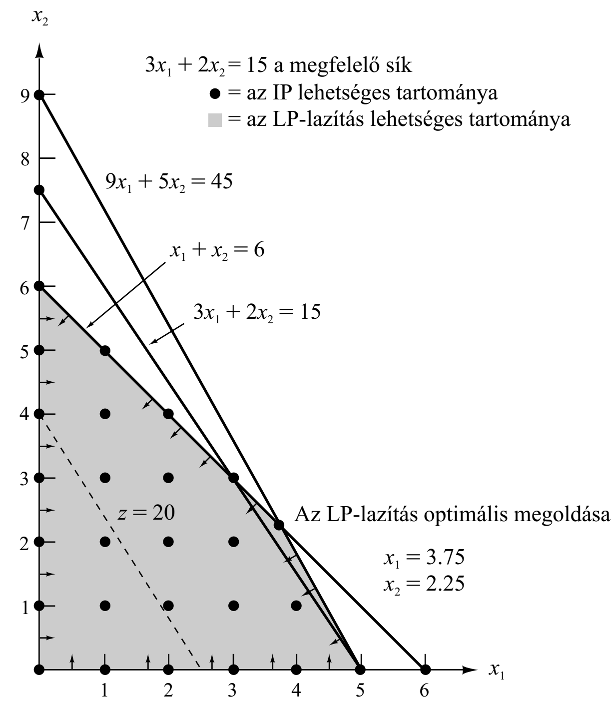
z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	**J.o.**
1	0	0	1.25	0.75	0	41.25
0	0	1	2.25	−0.25	0	2.25
0	1	0	−1.25	0.25	0	3.75
0	0	0	−0.75	−0.25	1	−0.75

A duál szimplex arányteszt szerint az s_1-nek kell a bázisba lépnie, mégpedig a harmadik feltételhez tartozóan. A báziscsere után kapjuk a 81. táblázatban szereplő táblát, amiből látjuk, hogy az optimális megoldás: $z = 40$, $x_1 = 5$, $x_2 = 0$.

81. TÁBLÁZAT
A metszősík módszer optimális táblája

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	**J.o.**
1	0	0	0	0.33	1.67	40
0	0	1	0	−1	3	0
0	1	0	0	0.67	−1.67	5
0	0	0	1	0.33	−1.33	1

28. ÁBRA
Példa metszősíkra



Mivel egy vágás az IP egyetlen lehetséges megoldását sem metszi le, az IP optimális megoldását megkapjuk, ha találunk egy tiszta egészértékű megoldást a néhány vágási feltétellel kibővített LP-lazításhoz. Jelenlegi feladatunk optimális megoldásában az x_1 és x_2 is egész, tehát ez a pont az (51) IP optimális megoldása. Természetesen, ha az első vágás rögtön nem eredményezte volna az IP optimális megoldását, további vágásokkal kellett volna bővíteni a feladatot egészen addig, amíg nem kapunk egy olyan optimális táblát, amelyben már minden változó egészértékű.

MEGJEGYZÉSEK

1. Az algoritmus megkívánja, hogy a változók együtthatói, illetve a feltételek jobb oldalai mind egész számok legyenek. Ez biztosítja ugyanis, hogy ha az eredeti döntési változók mind egészek, akkor az eltérés- és többletváltozók is mind egészek lesznek. Az $x_1 + 0.5x_2 \leq 3.6$ feltételt például a $10x_1 + 5x_2 \leq 36$ feltétellel kell helyettesíteni.

2. Ha az algoritmus során több feltétel jobb oldala is törtszám, a legcélravezetőbb abból a feltételből generálni a vágást, amelyik jobb oldalának a törtrésze a legközelebb van az $\frac{1}{2}$-hez.

A metszősík algoritmus összefoglalása

1. lépés Határozzuk meg az IP lineáris programozási lazításának optimális tábláját. Ha ebben az optimális megoldás tiszta egészértékű, akkor ez az IP optimális megoldása is; különben folytassuk a 2. lépéssel.

2. lépés Válasszunk egy olyan feltételt az LP-lazítás optimális táblájában, amelyik jobb oldalának törtrésze a legközelebb van az $\frac{1}{2}$-hez. Ebből a feltételből egy vágást készítünk.

2a. lépés A 2. lépésben kiválasztott feltétel jobb oldalát és mindegyik változójának együtthatóját írjuk az $[x]+f$ alakba, ahol $0 \le f < 1$.

2b. lépés Rendezzük át a feltételt a következőképpen:

$$\text{minden egészegyütthatós tag} = \text{minden törtegyütthatós tag}$$

Hozzuk létre a vágást:

$$\text{minden törtegyütthatós tag} \le 0$$

3. lépés A duál szimplex módszerrel oldjuk meg a 2b. lépésben generált vágási feltétellel kibővített LP-lazítást. Ha az optimális megoldásban mindegyik változó egészértékű, megtaláltuk az IP optimális megoldását. Különben, válasszunk egy leginkább törtértékű jobb oldallal rendelkező feltételt, abból hozzunk létre egy újabb vágást, s azzal bővítsük a táblát. Ezt az eljárást addig folytassuk amíg egy tiszta egészértékű optimális megoldást nem kapunk. Ez lesz az IP optimális megoldása.

Feladatok

A csoport

1. Az alábbi IP

$$\begin{aligned} \max\ z &= 14x_1 + 18x_2 \\ \text{f.h.}\quad -x_1 + 3x_2 &\le 6 \\ 7x_1 + x_2 &\le 35 \\ x_1, x_2 \ge 0;\quad & x_1, x_2 \text{ egész} \end{aligned}$$

lineáris programozási lazításának optimális táblája a 82. táblázatban található. A metszősík algoritmussal oldja meg ezt az IP-t!

82. TÁBLÁZAT

z	x_1	x_2	s_1	s_2	**J.o..**
1	0	0	$\frac{56}{11}$	$\frac{30}{11}$	126
0	0	1	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{7}{2}$
0	1	0	$-\frac{1}{22}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{9}{2}$

2. Az alábbi IP

$$\begin{aligned} \min\ z &= 6x_1 + 8x_2 \\ \text{f.h.}\quad 3x_1 + x_2 &\ge 4 \\ x_1 + 2x_2 &\ge 4 \\ x_1, x_2 \ge 0;\quad & x_1, x_2 \text{ egész} \end{aligned}$$

lineáris programozási lazításának optimális táblája a 83. táblázatban található. A metszősík algoritmussal oldja meg ezt az IP-t!

83. TÁBLÁZAT

z	x_1	x_2	e_1	e_2	**J.o.**
1	0	0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{18}{5}$	$\frac{88}{5}$
0	1	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
0	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{8}{5}$

3. Az alábbi IP

$$\begin{aligned} \max\ z &= 2x_1 - 4x_2 \\ \text{f.h.}\quad 2x_1 + x_2 &\le 5 \\ -4x_1 + 4x_2 &\le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0; & x_1, x_2 \text{ egész} \end{aligned}$$

lineáris programozási lazításának optimális táblája a 84. táblázatban található. A metszősík algoritmussal oldja meg ezt az IP-t!

84. TÁBLÁZAT

z	x_1	x_2	s_1	s_2	**J.o.**
1	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{15}{2}$
0	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{5}{4}$
0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{2}$

Összefoglalás

Az egészértékű programozási feladatokat (IP-ket) általában jóval nehezebb megoldani, mint a lineáris programozási feladatokat.

Egészértékű programozási modellek

A legtöbb egészértékű programozási modell tartalmaz **0–1 változókat**.

Fixköltség problémák

Tegyük fel, hogy az i tevékenység bármilyen pozitív szinten történő bekövetkezése egy fix költséget von maga után. Legyen

$$x_i = \text{az } i \text{ tevékenység szintje}$$
$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{ha az } i \text{ tevékenység pozitív szinten következik be } (x_i > 0) \\ 0 & \text{ha } x_i = 0 \end{cases}$$

Ekkor egy $x_i \le M_i y_i$ feltételt kell a modellbe felvennünk, ahol M_i egy kellően nagy szám ahhoz, hogy minden szóba jöhető x_i biztosan kisebb legyen, mint M_i.

Vagy-vagy feltételek

Tegyük fel, hogy garantálni azt akarjuk, hogy az

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \le 0 \tag{26}$$
$$g(x_1,x_2,\ldots,x_n) \le 0 \tag{27}$$

feltételek közül legalább az egyik (de akár mindkettő) teljesüljön. A modellbe vegyük fel a következő két feltételt:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \le My \tag{26$'$}$$
$$g(x_1,x_2,\ldots,x_n) \le M(1-y) \tag{27$'$}$$

ahol y egy 0–1 változó, M pedig egy kellően nagy szám ahhoz, hogy biztosan teljesüljenek az $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \le M$ és $g(x_1,x_2,\ldots,x_n) \le M$ egyenlőtlenségek az $x_1,x_2,\ldots,x_n$ minden, a többi feltételt kielégítő értékére. Ekkor a (26$'$) és (27$'$) feltételek garantálják, hogy a (26) és (27) közül legalább az egyik teljesül.

Ha-akkor feltételek

Tegyük fel, hogy biztosítani akarjuk azt, hogy $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) > 0$ esetén $g(x_1,x_2,\ldots,x_n) \ge 0$ legyen. Vegyük fel a modellbe a

$$-g(x_1,x_2,\ldots,x_n) \le My \tag{28$'$}$$
$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \le M(1-y) \tag{29}$$
$$y = 0 \text{ vagy } 1$$

feltételeket, ahol M egy kellően nagynak választott pozitív szám ahhoz, hogy teljesüljenek az $f \le M$ és $-g \le M$ egyenlőtlenségek az $x_1,x_2,\ldots,x_n$ minden, a többi feltételt kielégítő értékére.

Szakaszonként lineáris függvény modellezése 0–1 változókkal

Tegyük fel, hogy az $f(x)$ szakaszonként lineáris függvénynek $b_1, b_2, \ldots, b_n$ a töréspontjai.

1. lépés Az optimalizálási feladatban az $f(x)$-et mindenütt helyettesítsük a $z_1 f(b_1) + z_2 f(b_2) + \cdots + z_n f(b_n)$ kifejezéssel.

2. lépés Vegyük fel a modellbe a következő feltételeket:

$$\begin{gathered}
z_1 \le y_1, z_2 \le y_1 + y_2, z_3 \le y_2 + y_3, \ldots, z_{n-1} \le y_{n-2} + y_{n-1}, z_n \le y_{n-1} \\
y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} = 1 \\
z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 1 \\
x = z_1 b_1 + z_2 b_2 + \cdots + z_n b_n \\
y_i = 0 \text{ vagy } 1 \ (i = 1, 2, \ldots, n-1); \quad z_i \ge 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n)
\end{gathered}$$

A korlátozás és szétválasztás módszere

Az IP-ket általában a **korlátozás és szétválasztás** módszerének valamilyen változatával oldják meg. A korlátozás és szétválasztás módszere implicit módon megvizsgálja az IP minden lehetséges megoldását. Egyetlen **részfeladat** megoldásával esetleg számos lehetséges megoldást ki tudunk zárni a további vizsgálatból.

A korlátozás és szétválasztás tiszta IP-kre

A részfeladatok egy alkalmasan választott törtértékű x_i változó szerinti szétválasztás (ágaztatás) eredményeként születnek. Tegyük fel, hogy egy adott részfeladatban (hívjuk régi részfeladatnak) az x_i értéke az i és $i+1$ egészek közé eső törtszám. Ekkor két részfeladatot generálunk:

1. új részfeladat Régi részfeladat + az $x_i \le i$ feltétel.

2. új részfeladat Régi részfeladat + az $x_i \ge i+1$ feltétel.

Egy részfeladatra azt mondjuk, hogy **felderített,** ha nem szükséges elágaztatni. Egy maximalizálási feladatban a következő három esetben nyilvánítunk egy részfeladatot felderítettnek: (1) A részfeladat nem lehetséges, s így nem adhatja az IP optimális megoldását. (2) A részfeladat egy tiszta egészértékű optimális megoldást ad. Ha az optimális z érték jobb, mint az IP eddig ismert legjobb lehetséges megoldásának z értéke, akkor a részfeladat optimális megoldása egy **megoldás-jelölt** lesz, z értéke pedig az IP optimális z értékének aktuális alsó korlátjává (LB) válik. Ebben az esetben ez a részfeladat adhatja az IP optimális megoldását. (3) A részfeladat optimális z értéke nem haladja meg (max feladatban) a jelenlegi LB alsó korlátot, s így nem adhatja az IP optimális megoldását.

A korlátozás és szétválasztás vegyes IP-kre

Csak olyan törtértékű változó szerint ágaztatunk, amelyikre az IP-ben ki van kötve az egészértékűség.

A korlátozás és szétválasztás a hátizsák feladatokra

A részfeladatokat könnyen megoldhatjuk úgy, hogy addig rakjuk egészben a (súlyegységre eső haszonérték szempontjából) legjobb tárgyakat a hátizsákba, ameddig csak férnek, majd a következő leghasznosabb tárgy megfelelő részével kitöltjük a hátizsákot.

A korlátozás és szétválasztás egy gép ütemezésére

Az ágaztatást kezdjük annak meghatározásával, hogy melyik az utoljára elvégzendő munka. Tegyük fel, hogy n munka van. Egy olyan csúcsnál, amelynél a j-edik, $j+1$-edik, $\dots$, n-edik elvégzendő munka már rögzített, a teljes késés egy alsó korlátját adja a következő összeg: (a j-edik munka csúszása) $+$ (a $(j+1)$-edik munka csúszása) $+\cdots+$ (az n-edik munka csúszása).

A korlátozás és szétválasztás az utazó ügynök problémára

A részfeladatok hozzárendelési feladatok. Ha egy részfeladat optimális megoldása nem tartalmaz részkörutat, akkor az egyben lehetséges megoldása az utazó ügynök feladatnak is. A részkörutak kizárása céljából hozzuk létre az új részfeladatokat. Kizárunk egy részfeladatot, ha optimális z értéke rosszabb, mint az addig talált legjobb lehetséges megoldásé.

Heurisztikák a TSP-re

A legközelebbi-szomszéd heurisztika (NNH) szerint bármelyik városból indulva mindig a legutoljára felkeresett városhoz legközelebbi még nem felkeresett városba megyünk, amíg csak egy körút nem keletkezik. Ezt az eljárást mindegyik városból indulva végigcsináljuk, majd a körutak közül a legjobbat választjuk.

A legolcsóbb-beszúrás heurisztika (CIH) szerint kiindulunk valamelyik városból és megkeressük a legközelebbi szomszédját. E két város egy részkörutat alkot. Úgy helyettesítjük az aktuális részkörútnak valamelyik (i,j) élét egy kapcsolódó (i,k) és (k,j) élpárral (ahol k nem része az aktuális részkörútnak), hogy a részkörút hossza a lehető legkevésbé növekedjék. Az ilyen legolcsóbb beszúrást addig folytatjuk, amíg körutat nem kapunk. Az eljárást mindegyik városból indulva végigcsináljuk, majd a körutak közül a legjobbat választjuk.

Implicit leszámlálás

Egy 0–1 IP-t megoldhatunk implicit leszámlálással is. Egy csúcs ágaztatását egy, az adott csúcsban szabad x_i változó szerint végezve két új részfeladatot hozunk létre, az egyiket az $x_i = 0$, a másikat az $x_i = 1$ feltétel hozzávételével. Ha egy csúcs legjobb befejezése lehetséges, akkor a csúcsot már nem kell ágaztatnunk. Ha a legjobb befejezés lehetséges és jobb, mint az aktuális megoldás-jelölt, akkor az lesz az új megoldás-jelölt, célfüggvényértéke pedig az új LB alsó korlát (max feladatban). Ha a legjobb befejezés lehetséges, de nem jobb, mint az aktuális megoldás-jelölt, akkor a vizsgált csúcs esetleg kizárható. Például akkor, ha valamelyik feltételt a csúcs egyetlen befejezése sem elégíti ki, s így a csúcs még lehetséges megoldást sem adhat, nemhogy optimálisat.

A metszősík algoritmus

1. lépés Határozzuk meg az IP lineáris programozási lazításának optimális tábláját. Ha itt az optimális megoldás tiszta egészértékű, akkor ez az IP optimális megoldása is; különben folytassuk a 2. lépéssel.

2. lépés Válasszunk egy olyan feltételt az LP-lazítás optimális táblájában, amelyik jobb oldalának törtrésze a legközelebb van az $\frac{1}{2}$-hez. Ebből a feltételből egy vágást készítünk.

2a. lépés A 2. lépésben kiválasztott feltétel jobb oldalát és mindegyik változójának együtthatóját írjuk az $[x]+f$ alakba, ahol $0 \leq f < 1$.

2b. lépés Rendezzük át a feltételt a következőképpen:

$$\text{minden egészegyütthatós tag} = \text{minden törtegyütthatós tag}$$

Hozzuk létre a vágást:

$$\text{minden törtegyütthatós tag} \leq 0$$

3. lépés A duál szimplex módszerrel oldjuk meg a 2b. lépésben generált vágási feltétellel kibővített LP-lazítást. Ha az optimális megoldásban mindegyik változó egészértékű, megtaláltuk az IP optimális megoldását. Különben, válasszunk egy leginkább törtértékű jobb oldallal rendelkező feltételt, abból hozzunk létre egy újabb vágást, s azzal bővítsük a táblát. Ezt az eljárást addig folytassuk, amíg egy tiszta egészértékű optimális megoldást nem kapunk. Ez lesz az IP optimális megoldása.

Áttekintő feladatok

A csoport

1. A 3.10. alfejezetben szereplő Sailco problémában tegyük fel, hogy mindegyik negyedévben 200$ fixköltség keletkezik, amennyiben van termelés. Írjon fel egy IP-t, amellyel minimalizálható a négy negyedéves igény kielégítésének teljes költsége!

2. Az egészértékű programozás, illetve szakaszonként lineáris függvények segítségével hogyan oldaná meg a következő optimalizálási problémát? (*Útmutatás:* Közelítse x^2-et és y^2-et szakaszonként lineáris függvényekkel.)

$$\begin{aligned} &\max\ z = 3x^2 + y^2 \\ &\text{f.h.} \quad x + y \leq 1 \\ &\qquad\quad x, y \geq 0 \end{aligned}$$

3.[24] Egy hattagú női tornászcsapat edzőjének ki kell választania három sportolót, akik gerendán és talajon is indulnak, figyelembe véve, hogy mindkét számban a csapatból pontosan négy versenyzőt kell indítani. A 85. táblázat tartalmazza az egyes sportolók által elérhető pontszámokat az egyes versenyszámokban. Írjon fel egy IP-t, amellyel maximalizálható a csapat összpontszáma!

85. TÁBLÁZAT

	Gerenda	Talaj
1. tornász	8.8	7.9
2. tornász	9.4	8.3
3. tornász	9.2	8.5
4. tornász	7.5	8.7
5. tornász	8.7	8.1
6. tornász	9.1	8.6

4.[25] Egy bírói döntés értelmében Metropolis város mindkét középiskolájában a fekete bőrű diákok arányának legalább 20 százaléknak kell lennie. A 86. táblázat mutatja a fekete ill. fehérbőrű középiskolás diákok számát a város öt iskolakörzetében. A 87. táblázat adja meg (km-ben), hogy az egyes körzetekben lakó diákoknak mennyit kell utazniuk az egyes középiskolákig. Követelmény, hogy egy körzetből minden diák ugyanabba az iskolába járjon, továbbá, hogy mindkét iskolába legalább 150 diák járjon. Írjon fel egy IP-t, amellyel minimalizálható a Metropolis város középiskolásai által az iskolájukig megtett össztávolság!

86. TÁBLÁZAT

	Fehérek	Feketék
1. körzet	80	30
2. körzet	70	5
3. körzet	90	10
4. körzet	50	40
5. körzet	60	30

87. TÁBLÁZAT

	1-es számú középiskola	2-es számú középiskola
1. körzet	1	2
2. körzet	0.5	1.7
3. körzet	0.8	0.8
4. körzet	1.3	0.4
5. körzet	1.5	0.6

[24] Ellis és Corn (1984) alapján.
[25] Liggett (1973) alapján.

5. Egy baseballcsapat dobójátékosokat akar leigazolni. Jelenleg a következő (monogramjukkal megadott) játékosok szabadúszók: RS, BS, DE, ST, TS. Az egyes dobójátékosok ára, illetve a vele elért győzelmek száma a 88. táblázatban található. A következő szempontok figyelembevételével szeretné a csapat azokat a dobókat leigazolni, akikkel a lehető legtöbb győzelmet érik el.

88. TÁBLÁZAT

	A dobójátékos ára (millió $)	**Elért győzelmek száma**
RS	6	6 (jobbkezes)
BS	4	5 (jobbkezes)
DE	3	3 (jobbkezes)
ST	2	3 (balkezes)
TS	2	2 (jobbkezes)

(a) Legfeljebb 12 millió dollárt költhetnek.

(b) Ha DE-t és ST-t is leigazolják, akkor BS-t már nem igazolhatják le.

(c) Legfeljebb két jobbkezes dobót szerződtethetnek.

(d) Nem igazolhatják le egyszerre BS-t és RS-t.

Írjon fel egy IP-t, amelyik segíthet meghatározni, hogy a baseball csapat kiket szerződtessen!

6. Egy egyetem 1100 számítógépet akar vásárolni. A pályázatra három ajánlat érkezett. Az 1-es szállító számítógépenként 500$-t és az üzembe helyezésért 5000$-t kér. A 2-es szállító számítógépenként 350$-t és az üzembe helyezésért 4000$-t kér. A 3-as szállító számítógépenként 250$-t és az üzembe helyezésért 6000$-t kér. Az 1-es szállító legfeljebb 500 számítógépet, a 2-es legfeljebb 900-at, a 3-as pedig legfeljebb 400 gépet tud szállítani. Állítson fel egy IP-t, amellyel minimalizálható a számítógépek beszerzésének összköltsége!

7. A korlátozás és szétválasztás módszerével oldja meg az alábbi IP-t:

$$\begin{aligned} &maxz = 3x_1 + x_2 \\ &\text{f.h.} \quad 5x_1 + x_2 \le 12 \\ &\qquad\quad 2x_1 + x_2 \le 8 \\ &x_1, x_2 \ge 0; \quad x_1, x_2 \text{ egész} \end{aligned}$$

8. A korlátozás és szétválasztás módszerével oldja meg az alábbi IP-t:

$$\begin{aligned} &\min z = 3x_1 + x_2 \\ &\text{f.h.} \quad 2x_1 - x_2 \le 6 \\ &\qquad\quad x_1 + x_2 \le 4 \\ &x_1, x_2 \ge 0; x_1 \text{ egész} \end{aligned}$$

9. A korlátozás és szétválasztás módszerével oldja meg az alábbi IP-t:

$$\begin{aligned} &\max z = x_1 + 2x_2 \\ &\text{f.h.} \quad x_1 + \ x_2 \le 10 \\ &\qquad\quad 2x_1 + 5x_2 \le 30 \\ &x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \text{ egész} \end{aligned}$$

10. Vegyünk egy országot, ahol a következő pénzérmék vannak használatban: 1¢, 5¢, 10¢, 20¢, 25¢ és 50¢. Egy boltban egy vásárlónak 91¢ visszajár. Írjon fel egy IP-t, amellyel meghatározható, hogy miként lehet a legkevesebb számú érmével visszaadni a pontos összeget! Használja fel, amit a hátizsák feladatnak a korlátozás és szétválasztással történő megoldásáról tud. (*Útmutatás:* Elegendő a 90¢ problémáját megoldani.)

11. A korlátozás és szétválasztás módszerével keresse meg a 89. táblázattal megadott utazó ügynök feladat optimális megoldását!

89. TÁBLÁZAT

	1. város	**2. város**	**3. város**	**4. város**	**5. város**
1. város	—	3	1	7	2
2. város	3	—	4	4	2
3. város	1	4	—	4	2
4. város	7	4	4	—	7
5. város	2	2	2	7	—

12. Az implicit leszámlálás módszerével határozza meg az 5. feladat optimális megoldását!

13. Az implicit leszámlálás módszerével határozza meg a következő 0–1 IP optimális megoldását:

$$\begin{aligned} &\max z = 5x_1 - 7x_2 + 10x_3 + 3x_4 - x_5 \\ &\text{f.h.} \quad -x_1 - 3x_2 + 3x_3 - \ x_4 - 2x_5 \le 0 \\ &\qquad\quad 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 2x_5 \le 3 \\ &\qquad\qquad\quad - \ x_2 + \ x_3 + \ x_4 - \ x_5 \ge 2 \\ &\qquad \text{minden változó 0 vagy 1} \end{aligned}$$

14. A szódáskocsi az 1. helyszínről indul, és a 2., 3., 4. és 5. helyszínekre kell szódát vinnie, mielőtt visszatérne az 1. helyszínre. Az egyes helyszínek közötti távolságokat a 90. táblázat adja meg. A szódáskocsi minimalizálni akarja a megteendő össztávolságot. Milyen sorrendben keresse fel a helyszíneket?

90. TÁBLÁZAT

	1	2	3	4	5
1. helyszín	0	20	4	10	25
2. helyszín	20	0	5	30	10
3. helyszín	4	5	0	6	6
4. helyszín	10	25	6	0	20
5. helyszín	35	10	6	20	0

15. Egy kórházban hatféle műtétet tudnak elvégezni. A 91. táblázatban X jelzi, hogy melyik sebész milyen típusú műtétet végezhet. Tegyük fel, hogy az 1-es, illetve 2-es sebész rossz viszonyban van, ezért egyszerre nem lehetnek ügyeletben. Írjon fel egy IP-t, amelynek a megoldása megadja, hogy minimális számú sebésszel hogyan lehet biztosítani mind a hatféle műtét elvégezhetőségét!

91. TÁBLÁZAT

Műtét típusa	1	2	3	4	5	6
1-es sebész	x	x		x		
2-es sebész			x		x	x
3-as sebész			x		x	
4-es sebész	x					x
5-ös sebész		x				
6-os sebész				x	x	

16. Az Eastinghouse havonta 12 000 akkumulátort szállít a fogyasztóinak. Az akkumulátorok három üzemben készülhetnek. A 92. táblázat tartalmazza az egyes üzemek termelési kapacitását, a termelés havi fix költségét, és egy akkumulátor elkészítésének változó költségét.

92. TÁBLÁZAT

	Fixköltség (ezer $-ban)	Változó költség ($/db)	Termelési kapacitás (db)
1. üzem	80	20	6000
2. üzem	40	25	7000
3. üzem	30	30	6000

A fixköltség csak akkor merül fel, ha az adott üzemben készülnek akkumulátorok. Írjon fel egy egészértékű programozási modellt, amelyiknek a megoldása megadja, hogy az Eastinghouse miként elégítheti ki a fogyasztói igényeket minimális költséggel!

17.[26] Egy acélmű megrendelést kapott 25 tonna olyan acél szállítására, amely 5% szenet és 5% molibdént tartalmaz. Az acél három összetevő (acélbuga, ócskavas és ötvözetek) kombinációjaként készül. Négy acélbugát tudnak megvásárolni, ezek súlya (tonnában), tonnánkénti ára (dollárban), szén-, illetve molibdéntartalma (százalékban) a 93. táblázatban található. Háromféle ötvözetet tudnak beszerezni, ezek tonnánkénti ára (dollárban), szén-, illetve molibdéntartalma (%-ban) a 94. táblázatban található.

93. TÁBLÁZAT

Buga	Súly (t)	Ár ($/t)	Szén (%)	Molibdén (%)
1	5	350	5	3
2	3	330	4	3
3	4	310	5	4
4	6	280	3	4

94. TÁBLÁZAT

Ötvözet	Ár ($/t)	Szén (%)	Molibdén (%)
1	500	8	6
2	450	7	7
3	400	6	8

Ócskavasat tonnánként 100$-ért korlátlanul be tudnak szerezni. Az ócskavas 3% szenet és 9% molibdént tartalmaz. Állítson fel egy vegyes egészértékű programozási feladatot, amelyet megoldva kiderül, hogy az acélmű miként tudja megrendelését minimális költséggel előállítani!

18.[27] Egy vegyszergyár évente 359 millió kg anhidridet állít elő. Az anhidrid előállítására négy reaktor alkalmas, ezek mindegyike háromféle beállítással működhet. Az egyes reaktoroknak az egyes beállításokkal való működtetése egy év alatt a 95. táblázatban szereplő (ezer dollárban megadott) költséggel jár, és az ott található (millió kg-ban megadott) mennyiséget eredményezi.

95. TÁBLÁZAT

Reaktor	Beállítás	Költség	Termelés
1	1	50	80
1	2	80	140
1	3	100	170
2	1	65	100
2	2	90	140
2	3	120	215
3	1	70	112
3	2	90	153
3	3	110	195
4	1	40	65
4	2	60	105
4	3	70	130

[26]Westerberg, Bjorklund és Hultman (1977) alapján.
[27]Boykin (1985) alapján.

Egy reaktornak az év során végig ugyanazzal a beállítással kell működnie. Írjon fel egy IP-t, amelynek a megoldása megadja, hogy miként lehet az éves anhidrid igényt minimális költséggel kielégíteni!

19.[28] A Hallco vállalatnál nappali és éjjeli műszak is van. Függetlenül attól, hogy hány munkadarab készül el egy műszak alatt, a termelési költség csak a beindítási költség, ami 8000$ egy nappali és 4500$ egy éjjeli műszak esetén. Az eljövendő négy műszak alatt a következő igényeket kell kielégíteni: 1. nappal 2000; 1. éjjel 3000; 2. nappal 2000; 2. éjjel 3000. Egy munkadarab raktározási költsége egy műszakra 1$. Határozzon meg egy olyan termelésütemezést, amelyik minimalizálja a beindítási és raktározási költségek összegét! Az összes igényt időben ki kell elégíteni.

20.[28] A termelésszervezés japán elméletéről tudomást szerezve az előző feladatbeli Hallco 1000$-ra szorította le a nappali műszak beindítási költségét és 3500$-ra az éjszakaiét. Határozzon meg most egy olyan termelésütemezést, amelyik minimalizálja a beindítási és raktározási költségek összegét! Az összes igényt időben ki kell elégíteni. Mutassa meg, hogy a beindítási költségek csökkentése az átlagos készletszint *emelkedését* okozta!

B csoport

21.[29] Gotham városnak nyolc kerülete van. A 96. táblázat mutatja, hogy hány percig tart, amíg egy mentőautó az egyik kerületből a másikba ér.

96. TÁBLÁZAT

	Kerület							
Kerület	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	0	3	4	6	8	9	8	10
2	3	0	5	4	8	6	12	9
3	4	5	0	2	2	3	5	7
4	6	4	2	0	3	2	5	4
5	8	8	2	3	0	2	2	4
6	9	6	3	2	2	0	3	2
7	8	12	5	5	2	3	0	2
8	10	9	7	4	4	2	2	0

Az egyes kerületek lakossága (ezer főben megadva) a következő: 1. kerület 40; 2. kerület 30; 3. kerület 35; 4. kerület 20; 5. kerület 15; 6. kerület 50; 7. kerület 45; 8. kerület 60. A városnak csak két mentőautója van. Hol állomásoztassák őket, hogy maximalizálják azok számát, akikhez a mentőkocsik 2 percen belül kiérnek? Adjon meg egy olyan IP-t, amely segít a probléma megoldásában!

[28]Zangwill (1992) alapján.
[29]Eaton et al. (1985) alapján.

22. Egy üzemben három munkát kell elvégezni. A megmunkálási időket (percben megadva) a 97. táblázat tartalmazza. Egy munka addig nem kerülhet a j gépre, amíg az összes $i < j$ gépen nem végezték el rajta a teendőket. Ha egy gépen elkezdtek egy munkát, akkor azt be is kell fejezni, mielőtt más munka kerülne sorra. Egy munka futamidején a munka elkészültének időpontja és az első fázis megkezdésének időpontja közötti különbséget értjük. Állítson fel egy IP-t, amellyel minimalizálható a három munka futamidejének átlaga! (*Útmutatás:* Kétféle feltételre lesz szükség: az első típusú feltételek biztosítják, hogy egy munka nem kerülhet egy gépre addig, amíg az összes megelőző munkafázis be nem fejeződött. Öt ilyen feltétel lesz. A másik típusú feltételek azt biztosítják, hogy minden időpontban csak egy munkán dolgozhat egy gép. Az 1. gépen például vagy az 1-es munka előzi meg (teljes egészében) a 2-es munkát, vagy a 2-es az 1-est.)

97. TÁBLÁZAT

	Gép			
	1	**2**	**3**	**4**
1-es munka	20	—	25	30
2-es munka	15	20	—	18
3-as munka	—	35	28	—

23. Egy könyvelőiroda vállalati adóbevallásokat készít. Ebben az évben a február 15.–április 15. közötti nyolchetes időszakban a 98. táblázatban szereplő öt bevallást kell elkészíteni. Az irodában négy könyvelő dolgozik, heti 40 órás rendes munkaidőben. Szükség esetén akár 20 túlórát is vállalnak, de ezért óránként 100$ jár nekik. Egészértékű programozással határozza meg, hogy miként tudja a könyvelőiroda a túlóraköltséget minimalizálni! Az összes bevallásnak el kell készülnie április 15-ig.

98. TÁBLÁZAT

	Időtartam (hét)	**Szükséges könyvelési idő (óra/hét)**
1. bevallás	3	120
2. bevallás	4	160
3. bevallás	3	80
4. bevallás	2	80
5. bevallás	4	100

24. A PSI áramszolgáltató szerint az eljövendő öt év során a 99. táblázatban megadott nagyságú áramfejlesztő kapacitásra lesz szükségük. Ezt erőművek építésével (majd működtetésével) tudják biztosítani. Az erőművek adatait a 100. táblázat tartalmazza. Írjon fel egy IP-t, amellyel minimalizálható a megadott áramfejlesztő kapacitások biztosításának összes költsége![30]

99. TÁBLÁZAT

	Áramfejlesztő kapacitás (millió kWh)
1. év	80
2. év	100
3. év	120
4. év	140
5. év	160

100. TÁBLÁZAT

Erőmű	Áramfejlesztő kapacitás (millió kWh)	Építési költség (millió $)	Működtetés éves költsége (millió $)
1.	70	20	1.5
2.	50	16	0.8
3.	60	18	1.3
4.	40	14	0.6

25.[30] Tegyük most fel, hogy az előző feladatban az 1–4. erőművek az első év elején már készen vannak és működnek. Mindegyik év elején a PSI dönthet egy működő erőmű leállítása vagy egy pihenő erőmű újraindítása mellett. A 101. táblázat tartalmazza a leállítási, illetve újraindítási költségeket. Írjon fel egy IP-t a megadott igények minimális költséggel történő kielégítésének meghatározására! *Útmutatás:* Legyen

$X_{it} = 1$, ha az i. erőmű működik a t. évben

$Y_{it} = 1$, ha az i. erőművet leállítják a t. év végén

$Z_{it} = 1$, ha az i. erőművet újraindítják a t. év elején

Biztosítani kell, hogy ha $X_{it} = 1$ és $X_{i,t+1} = 0$, akkor $Y_{it} = 1$, valamint, ha $X_{i,t-1} = 0$ és $X_{it} = 1$, akkor $Z_{it} = 1$.)

101. TÁBLÁZAT

	Újraindítási költség (millió $)	Leállítási költség (millió $)
1. erőmű	1.9	1.7
2. erőmű	1.5	1.2
3. erőmű	1.6	1.3
4. erőmű	1.1	0.8

26.[31] Egy ingatlanfejlesztési cég három irodaház építését fontolgatja. A 102. táblázat mutatja az egyes irodaházak felépítésének időtartamát, illetve az állandóan az adott épületen dolgozó munkások számát. Az elkészült irodaházakból a következő éves bérleti díjbevételek származnak: 1-es irodaház 50 000$; 2-es irodaház 30 000$; 3-as irodaház 40 000$. A cégnek a következőket is figyelembe kell vennie:

(a) Minden évben 60 munkás áll rendelkezésre.

(b) Évente legfeljebb egy építkezést kezdhetnek el.

(c) A 2-es irodaháznak készen kell lennie a 4. év végéig.

Állítson fel egy IP-t, amelyik maximalizálja a 4. év végéig beszedett összes bérleti díjat!

102. TÁBLÁZAT

	Az építkezés időtartama (év)	Az állandó munkások száma
1. épület	2	30
2. épület	2	20
3. épület	3	20

27. Négy furgon áll rendelkezésre, hogy öt üzletbe kiszállítsa a tejet. A 103. táblázat mutatja az egyes furgonok kapacitását, illetve napi üzemeltetési költségét. Egy üzlet igényét egyetlen furgonnal kell kielégíteni, de egy furgon több üzletbe is szállíthat. Az üzletek igényei a következők: 1. üzlet 100 liter; 2. üzlet 200 liter; 3. üzlet 300 liter; 4. üzlet 500 liter; 5. üzlet 800 liter. Állítson fel egy IP-t, amellyel meghatározható az öt üzlet igényének minimális költséggel történő kielégítése!

103. TÁBLÁZAT

	Kapacitás (liter)	Napi Üzemeltetési költség ($)
1. furgon	400	45
2. furgon	500	50
3. furgon	600	55
4. furgon	1100	60

28. Texas állam gyakorta auditálja a területén működő olyan vállalatokat is, amelyeknek a központja egy másik államban van. Ilyenkor is az auditorok mennek a helyszínre. Évente az auditorok 500 utazást tesznek az északkeleti, 400-at a középnyugati, 300-at a nyugati és 400-at a déli régióban levő városokba. Felmerült, hogy alkalmazzanak Chi-

[30] Muckstadt és Wilson (1968) alapján.
[31] Peiser és Andrus (1983) alapján.

cago, New York, Atlanta, ill. Los Angeles székhellyel rendelkező auditorokat. Ennek éves költsége mindegyik város esetén 100 000$. A 104. táblázat tartalmazza az egyes auditoroknak az egyes régiókba történő kiküldésének költségét dollárban. Adjon meg egy IP-t, amelynek a megoldása minimalizálja az államon kívüli auditálások éves összköltségét![32]

104. TÁBLÁZAT

	Észak-kelet	**Közép-nyugat**	**Nyugat**	**Dél**
New York	1100	1400	1900	1400
Chicago	1200	1000	1500	1200
Los Angeles	1900	1700	1100	1400
Atlanta	1300	1400	1500	1050

Irodalom

A következő hat könyv az egészértékű programozás elmélyültebb tárgyalását adja:

Garfinkel, R. és G. Nemhauser. *Integer Programming.* New York: Wiley, 1972.

Nemhauser, G. és L. Wolsey. *Integer and Combinatorial Optimization.* New York: Wiley, 1988.

Parker, G. és R. Rardin. *Discrete Optimization.* San Diego: Academic Press, 1988.

Salkin, H. *Integer Programming.* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1975.

Shapiro, J. *Mathematical Programming: Structures and Algorithms.* New York: Wiley, 1979.

Taha, H. *Integer Programming: Theory, Applications, and Computations.* Orlando, Fla.: Academic Press, 1975.

Az alábbi három munka behatóan mutatja be az egészértékű programozási modellek alkotásának művészetét:

Plane, D. és C. McMillan. *Discrete Optimization: Integer Programming and Network Analysis for Management Decisions.* Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, 1971.

Wagner, H. *Principles of Operations Research,* 2d ed. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, 1975.

Williams, H. *Model Building in Mathematical Programming,* 2d ed. New York: Wiley, 1985.

Újabban Lagrange-relaxációval és Benders-dekompozícióval számos nagyméretű egészértékű programozási feladatot oldottak meg. Ezeknek a technikáknak az ismertetése meghaladja e könyv kereteit. A Lagrange-relaxációval kapcsolatban az érdeklődő olvasónak Shapiro (1979), illetve Nemhauser és Wolsey (1988) munkáin kívül a következőket is ajánljuk:

Fisher, M. „An Applications-Oriented Guide to Lagrangian Relaxation”, *Interfaces* 15(no. 2, 1985):10–21.

Geoffrion, A. „Lagrangian Relaxation for Integer Programming,” in *Mathematical Programming Study 2: Approaches to Integer Programming,* ed. M. Balinski. New York: North-Holland, 1974, pp. 82–114.

[32]Fitzsimmons és Allen (1983) alapján.

A Benders-dekompozícióval kapcsolatban az érdeklődő olvasónak Shapiro (1979), Taha (1975), illetve Nemhauser és Wolsey (1988) munkáin kívül az alábbiakat is ajánljuk:

Geoffrion, A. és G. Graves. „Multicommodity Distribution System Design by Benders' Decomposition," *Management Science* 20(1974):822–844.

Baker, K. *Introduction to Sequencing and Scheduling*. New York: Wiley, 1974.

Bean, J., C. Noon és J. Salton. „Asset Divestiture at Homart Development Company", *Interfaces* 17(no. 1, 1987):48–65.

Bean, J., et al. „Selecting Tenants in a Shopping Mall", *Interfaces* 18(no. 2, 1988):1–10.

Boykin, R. „Optimizing Chemical Production at Monsanto", *Interfaces* 15(no. 1, 1985):88–95.

Brown, G., et al. „Real-Time Wide Area Dispatch of Mobil Tank Trucks", *Interfaces* 17(no. 1, 1987):107–120.

Calloway, R., M. Cummins és J. Freeland, „Solving Spreadsheet-Based Integer Programming Models: An Example from International Telecommunications", *Decision Sciences* 21(1990):808–824.

Cavalieri, F., A. Roversi és R. Ruggeri. „Use of Mixed Integer Programming to Investigate Optimal Planning Policy for a Thermal Power Station and Extension to Capacity", *Operational Research Quarterly* 22(1971):221–236.

Choypeng, P., P. Puakpong és R. Rosenthal. „Optimal Ship Routing and Personnel Assignment for Naval Recruitment in Thailand", *Interfaces* 16(no. 4, 1986):47–52.

Day, R. „On Optimal Extracting from a Multiple File Data Storage System: An Application of Integer Programming", *Operations Research* 13(1965):482–494.

Eaton, D., et al. „Determining Emergency Medical Service Vehicle Deployment in Austin, Texas", *Interfaces* 15(1985):96–108.

Efroymson, M. és T. Ray. „A Branch-Bound Algorithm for Plant Location", *Operations Research* 14(1966):361–368.

Ellis, P. és R. Corn, „Using Bivalent Integer Programming to Select Teams for Intercollegiate Women's Gymnastics Competition", *Interfaces* 14(1984):41–46.

Fitzsimmons, J. és L. Allen. „A Warehouse Location Model Helps Texas Comptroller Select Out-of-State Audit Offices", *Interfaces* 13(no. 5, 1983):40–46.

Garfinkel, R. „Minimizing Wallpaper Waste I: A Class of Traveling Salesperson Problems", *Operations Research* 25(1977):741–751.

Garfinkel, R. és G. Nemhauser. „Optimal Political Districting by Implicit Enumeration Techniques", *Management Science* 16(1970):B495–B508.

Gelb, B. és B. Khumawala. „Reconfiguration of an Insurance Company's Sales Regions", *Interfaces* 14(1984):87–94.

Golden, B., L. Bodin, T. Doyle és W. Stewart. „Approximate Traveling Salesmen Algorithms", *Operations Research* 28(1980):694–712.

Gomory, R. „Outline of an Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs", *Bulletin of the American Mathematical Society* 64(1958):275–278.

Hax, A. és D. Candea. *Production and Inventory Management.* Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, 1984.

Lawler, L., et al. *The Traveling Salesman Problem.* New York: Wiley, 1985.

Liggett, R. „The Application of an Implicit Enumeration Algorithm to the School Desegregation Problem", *Management Science* 20(1973):159–168.

Magirou, V.F. „The Efficient Drilling of Printed Circuit Boards”, *Interfaces* 16 (no. 4, 1984):13–23.

Muckstadt, J. és R. Wilson. „An Application of Mixed Integer Programming Duality to Scheduling Thermal Generating Systems”, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems* (1968):1968–1978.

Peiser, R. és S. Andrus. „Phasing of Income-Producing Real Estate”, *Interfaces* 13(1983): 1–11.

Salkin, H. és C. Lin. „Aggregation of Subsidiary Firms for Minimal Unemployment Compensation Payments via Integer Programming”, *Management Science* 25(1979):405–408.

Shanker, R. és A. Zoltners. „The Corporate Payments Problem”, *Journal of Bank Research* (1972):47–53.

Strong, R. „LP Solves Problem: Eases Duration Matching Process”, *Pension and Investment Age* 17(no. 26, 1989):21.

Walker, W. „Using the Set Covering Problem to Assign Fire Companies to Firehouses”, *Operations Research* 22(1974):275–277.

Westerberg, C., B. Bjorklund és E. Hultman. „An Application of Mixed Integer Programming in a Swedish Steel Mill”, *Interfaces* 7(no. 2, 1977):39–43.

Zangwill, W. „The Limits of Japanese Production Theory”, *Interfaces* 22(no. 5, 1992): 14–25.

9

A lineáris programozás fejlettebb módszerei[1]

Ebben a fejezetben a lineáris programozás hat fejlettebb módszerét tárgyaljuk: a módosított szimplex módszert, az inverz szorzatalakját, az oszlopgenerálás technikáját, a Dantzig–Wolfe dekompozíciós algoritmust, a szimplex módszert felsőkorlátos változók esetén és Karmarkar módszerét LP feladatok megoldására. Az itt tárgyalt technikákat gyakran alkalmazzák nagyméretű lineáris programozási feladatok megoldása során. Az 5.2. alfejezetben bemutatott eredmények kulcsszerepet játszanak ebben az egész fejezetben.

9.1. A módosított szimplex módszer

Az 5.2. alfejezetben megmutattuk, hogy ha adott optimális bázisváltozók egy halmaza, hogyan lehet előállítani az optimális táblát egy kezdő táblából kiindulva. Valójában az 5.2. alfejezet eredményei *bázisváltozók bármely halmazához* tartozó tábla előállítására alkalmazhatók. Ahhoz, hogy megmutassuk, hogyan lehet bázisváltozók bármely BV halmazához előállítani a táblázatot, elsőként a következő jelöléseket vezetjük be (feltesszük, hogy az LP feladatnak m feltétele van):

BV = bázisváltozók egy halmaza (BV első eleme az első feltétel bázisváltozója, BV második eleme a második feltétel bázisváltozója stb.
Tehát BV_j az előállítandó tábla j-edik feltételéhez tartozó bázisváltozó.)

$\mathbf{b}$ = az eredeti tábla feltételeihez tartozó jobb oldali vektor

$\mathbf{a}_j$ = az eredeti feladat feltételi mátrixában az x_j változóhoz tartozó oszlop

B = $m \times m$-es mátrix, amelynek j-edik oszlopa a BV_j-hez tartozó oszlop az eredeti feltételi mátrixban

c_j = x_j együtthatója a célfüggvényben

$\mathbf{c}_{BV}$ = $1 \times m$-es sorvektor, amelynek j-edik eleme a célfüggvény BV_j-hez tartozó együtthatója

$\mathbf{u}_i$ = $m \times 1$-es oszlopvektor, amelynek i-edik eleme 1, az összes többi eleme pedig nulla

[1] Ezen fejezet kihagyása nem szakítja meg a tárgyalás folytonosságát.

Az 5.2. alfejezet képleteit a következőképpen foglalhatjuk össze:

$$B^{-1}\mathbf{a}_j = \text{az } x_j\text{-hez tartozó oszlop a } BV \text{ táblában} \quad (1)$$

$$\mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{a}_j - c_j = x_j \text{ együtthatója a 0. sorban} \quad (2)$$

$$B^{-1}\mathbf{b} = \text{a } BV \text{ tábla feltételeihez tartozó jobb oldali vektor} \quad (3)$$

$$\mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{u}_i = \text{az } s_i \text{ kiegészítő változóhoz tartozó együttható a } BV \text{ tábla 0. sorában} \quad (4)$$

$$\mathbf{c}_{BV}B^{-1}(-\mathbf{u}_i) = \text{az } e_i \text{ felesleg változóhoz tartozó együttható a } BV \text{ tábla 0. sorában} \quad (5)$$

$$M + \mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{u}_i = \text{az } a_i \text{ mesterséges változóhoz tartozó együttható a } BV \text{ tábla 0. sorában (maximalizálási feladat esetén)} \quad (6)$$

$$\mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{b} = \text{a jobb oldal értéke a } BV \text{ tábla 0. sorában} \quad (7)$$

Ha ismert BV, B^{-1} és az eredeti tábla, akkor az (1)–(7) képletek segítségével bázisváltozók tetszőleges BV halmaza esetén kiszámíthatjuk a szimplex tábla bármely részét. Ez azt jelenti, hogy a szimplex módszer számítógépes megvalósítása esetén egy adott lépésben a bázisváltozók aktuális halmazát, B^{-1}-et és a kiinduló táblát kell csak tárolni. Az (1)–(7) képleteket lehet felhasználni a szimplex tábla tetszőleges részének előállítására. Ez a módosított szimplex módszer alapötlete.

A módosított szimplex módszert azzal szemléltetjük, hogy megoldjuk vele az 5. fejezetből már ismert Dakota feladatot. Emlékeztetőül, az s_1, s_2 és s_3 kiegészítő változók bevezetése után a Dakota feladat kiinduló (0.) táblázata az alábbi:

$$\begin{array}{llr}
\max z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 & & \\
\text{f.h.} \quad 8x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 & & = 48 \\
\phantom{\text{f.h.} \quad} 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + s_2 & & = 20 \\
\phantom{\text{f.h.} \quad} 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + s_3 & & = 8
\end{array}$$

Bármely számú báziscsere végrehajtása után az aktuális táblához tartozó B^{-1} egyszerűen az a 3×3-as mátrix, amelynek j-edik oszlopa éppen az s_j-hez tartozó oszlop az aktuális táblában. Így az eredeti táblában a bázisváltozók $BV(0)$ halmaza

$$BV(0) = \{s_1, s_2, s_3\}$$
$$NBV(0) = \{x_1, x_2, x_3\}$$

Legyen B_i az eredeti LP feladat azon oszlopaiból álló mátrix, amelyek az i-edik tábla bázisváltozóihoz tartoznak. Ekkor

$$B_0^{-1} = B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Azt, hogy melyik nem bázisbeli változónak kellene belépni a bázisba, úgy határozhatjuk meg, hogy minden nembázis változóra kiszámítjuk az aktuális tábla 0. sorában lévő együtthatót. Ezt az eljárást gyakran a bázison kívüli változók **kiértékelésének** nevezik. A (2)–(5) képletekből látható, hogy a nembázis változók kiértékeléséhez először a $\mathbf{c}_{BV}B_0^{-1}$-et kell meghatározni. Mivel $\mathbf{c}_{BV} = [0 \quad 0 \quad 0]$, ezért

$$\mathbf{c}_{BV}B_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ezután (2) segítségével kiértékeljük az összes nembázis változót:

$$\bar{c}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} - 60 = -60$$

$$\bar{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} - 30 = -30$$

$$\bar{c}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} - 20 = -20$$

Mivel x_1-nek van a legnegatívabb együtthatója az aktuális 0. sorban, x_1-et választhatjuk a bázisba belépőnek. A szimplex módszer folytatásához az új táblázatból mindössze a bázisváltozók új $BV(1)$ halmazát és a hozzá tartozó B_1^{-1} inverzet kell ismernünk. A $BV(1)$ meghatározásához meg kell találni azt a sort, amelyben x_1 a bázisba lép. Kiszámítjuk az x_1-hez tartozó oszlopot és a jobb oldali vektort az aktuális táblában.
(1) szerint

$$x_1 \text{ oszlopa az aktuális táblában } = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(3) alapján:

$$\text{a jobb oldali vektor az aktuális táblában} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix}$$

A hányados tesztet használjuk most annak a sornak a meghatározására, ahol az x_1 a bázisba lép. A megfelelő hányadosok: 1. sor: $\frac{48}{8} = 6$; 2. sor: $\frac{20}{4} = 5$ és 3. sor: $\frac{8}{2} = 4$. Tehát x_1 a bázis 3. sorába lép be. Ez azt jelenti, hogy az új szimplex táblánkban (1. tábla) $BV(1) = \{s_1, s_2, x_1\}$ és $NBV(1) = \{s_3, x_2, x_3\}$.

Az új B^{-1} az új tábla s_1, s_2 és s_3 változókhoz tartozó oszlopaiból áll. Az új B^{-1} meghatározásához tekintsük a kiinduló 0. táblában a belépésre kijelölt x_1 változóhoz tartozó oszlopot. Ebből az oszlopból láthatjuk, hogy a következő elemi sorműveleteket kell végrehajtani a 0. tábláról az 1. táblára való áttéréshez:

1. Szorozzuk meg a 0. tábla 3. sorát $\frac{1}{2}$-del.

2. Írjuk a 0. tábla 1. sora helyébe a -4(a 0. tábla 3. sora) $+$ a 0. tábla 1. sora értékeit.

3. Írjuk a 0. tábla 2. sora helyébe a -2(a 0. tábla 3. sora) $+$ a 0. tábla 2. sora értékeit.

Ezeket az elemi sorműveleteket B_0^{-1}-re alkalmazva kapjuk:

$$B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Most már kiértékelhetjük az összes nembázis változót az új táblában.

Elsőként kiszámítjuk a

$$\mathbf{c}_{BV} B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}$$

vektort. Ezután használjuk a (2) és (4) képleteket az 1. tábla nembázis változóinak kiértékelésére:

$$\bar{c}_2 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 30\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\2\\1.5\end{bmatrix} - 30 = 15$$

$$\bar{c}_3 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 30\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1.5\\0.5\end{bmatrix} - 20 = -5$$

$$s_3 \text{ együtthatója a 0. sorban} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 30\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} - 0 = 30$$

Mivel x_3 az egyetlen negatív együtthatójú változó az 1. tábla 0. sorában, az x_3 változót léptetjük be a bázisba. A bázisváltozók új $BV(2)$ halmazának és a hozzá tartozó B_2^{-1} inverz meghatározásához megkeressük a sort, ahol x_3 belép a bázisba, és kiszámítjuk az alábbiakat:

$$x_3 \text{ oszlopa az 1. táblában} = B_1^{-1}\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix}1 & 0 & -4\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1.5\\0.5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\0.5\\0.25\end{bmatrix}$$

$$\text{a jobb oldali vektor az 1. táblában} = B_1^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -4\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}48\\20\\8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}16\\4\\4\end{bmatrix}$$

A megfelelő hányadosok annak meghatározására, hogy hol lépjen be x_3 a bázisba: 1. sor: nincs; 2. sor: $\frac{4}{0.5} = 8$; és 3. sor: $\frac{4}{0.25} = 16$. Így x_3 a bázis 2. sorába lép be. Tehát a 2. táblában $BV(2) = \{s_1, x_3, x_1\}$ és $NBV(2) = \{s_2, s_3, x_2\}$.

A B_2^{-1} kiszámításához be kell vinnünk az x_3 változót a bázis 2. sorába, azaz a következő elemi sorműveleteket kell végrehajtanunk az 1. táblában:

1. Írjuk az 1. tábla 2. sora helyébe a 2(az 1. tábla 2. sora) értékeit.

2. Írjuk az 1. tábla 1. sora helyébe a 2(az 1. tábla 2. sora) + az 1. tábla 1. sora értékeit.

3. Írjuk az 1. tábla 3. sora helyébe a $-\frac{1}{2}$(az 1. tábla 2. sora) + az 1. tábla 3. sora értékeit.

Ezeket az elemi sorműveleteket B_1^{-1}-re alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$B_2^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 2 & -8\\0 & 2 & -4\\0 & -0.5 & 1.5\end{bmatrix}$$

Most a 2. tábla nembázis változóit értékeljük ki. Elsőként kiszámítjuk a

$$\mathbf{c}_{BV}B_2^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 20 & 60\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & -8\\0 & 2 & -4\\0 & -0.5 & 1.5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 10 & 10\end{bmatrix}$$

vektort.

Ezután az x_2, s_2 és s_3 nembázis változókat értékeljük ki:

$$\bar{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} - 30 = 5$$

$$s_2 \text{ együtthatója a 0. sorban} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 10$$

$$s_3 \text{ együtthatója a 0. sorban} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 10$$

Mivel mindegyik nembázis változónak nemnegatív együtthatója van a 0. sorban, a 2. tábla optimális tábla. Az optimális megoldás meghatározásához ki kell számítani a 2. tábla jobb oldali vektorát. A (3) képlet alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\text{a 2. tábla jobb oldali vektora} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Mivel $BV(2) = \{s_1, x_3, x_1\}$, a Dakota feladat optimális megoldása

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

azaz $s_1 = 24, x_3 = 8, x_1 = 2, x_2 = s_2 = s_3 = 0$. Az optimális z érték (7)-ből kapható meg:

$$\mathbf{c}_{BV} B_2^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} = 280$$

Az alábbiakban összefoglaljuk a módosított szimplex módszert (maximalizálási feladat esetén):

0. lépés Gondoskodjunk az aktuális B^{-1} inverz oszlopainak beolvasásáról. Kiinduláskor $B^{-1} = I$.

1. lépés Az aktuális táblára vonatkozóan számítsuk ki a $\mathbf{c}_{BV} B^{-1}$ értékelővektort.

2. lépés Értékeljük ki az aktuális tábla összes nembázis változóját. Ha a kiértékelés minden nembázis változó esetén nemnegatív értéket ad, az aktuális bázis optimális. Ha az aktuális bázis nem optimális, léptessük be a bázisba azt a nembázis változót, amelynek a legnegatívabb az együtthatója a 0. sorban. Jelöljük ezt a változót x_k-val.

3. lépés Annak meghatározásához, hogy a bázis melyik sorába lépjen be x_k, számítsuk ki x_k oszlopát az aktuális táblában $(B^{-1}\mathbf{a}_k)$, továbbá az aktuális tábla jobb oldali vektorát $(B^{-1}\mathbf{b})$. Ezután a hányados tesztet alkalmazzuk annak meghatározására, melyik sorba lép be x_k. Most már akkor ismerjük az új tábla bázisváltozóinak (BV) halmazát.

4. lépés Az aktuális tábla x_k-hoz tartozó oszlopa segítségével határozzuk meg azokat az elemi sorműveleteket, amelyek x_k bázisba való beléptetéséhez szükségesek. Hajtsuk végre ezeket az elemi sorműveleteket az aktuális B^{-1}-en. Ezzel megkapjuk az új B^{-1} inverzet. Térjünk vissza az 1. lépésre.

A legtöbb lineáris programozási számítógépes program a módosított szimplex módszer valamilyen változatát használja LP feladatok megoldására. Mivel csak az aktuális tábla B^{-1} bázisinverzét és a kiinduló táblát kell ismerni egy következő tábla meghatározásához, egy LP feladat módosított szimplex módszerrel történő megoldásának számítási igénye elsősorban B^{-1} méretétől függ. Tegyük fel, hogy a megoldandó LP feladatnak m feltétele és n változója van. Ekkor minden B^{-1} egy $m \times m$-es mátrix. Így egy LP feladat megoldásához szükséges számítási ráfordítás elsősorban a feltételek számától függ, nem pedig változók számától. Ennek a ténynek fontos számítási következményei vannak. Például, ha egy olyan LP feladatot kell megoldanunk, amelynek 500 feltétele és 10 változója van, a feladat duáljának 10 feltétele és 500 változója lesz. Ekkor a duál feladatban minden B^{-1} inverz 10×10-es mátrix, míg a primál feladatban minden B^{-1} inverz 500×500-as mátrix. Tehát a duál feladatot sokkal könnyebb megoldani, mint a primált. Ebben az esetben a számítási idő nagymértékben csökkenthető, ha a duál feladatot oldjuk meg, a primál optimális megoldást pedig a számítógép által szolgáltatott eredménylistában árnyékárak vagy duál változók név alatt keressük meg.

Feladatok

A csoport

Használjuk a módosított szimplex módszert a következő LP feladatok megoldására:

1.

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= 3x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{f.h.}\quad x_1 + x_2 + x_3 &\le 6 \\
2x_1 \qquad - x_3 &\le 4 \\
x_2 + x_3 &\le 2 \\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= 4x_1 + x_2 \\
\text{f.h.}\quad x_1 + x_2 &\le 4 \\
2x_1 + x_2 &\ge 6 \\
3x_2 &\ge 6 \\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

(Emlékezzünk arra, hogy B^{-1} mindig a kiinduló bázishoz tartozó oszlopokban található meg.)

3.

$$
\begin{aligned}
\min\ z &= 3x_1 + x_2 - 3x_3 \\
\text{f.h.}\quad x_1 - x_2 + x_3 &\le 4 \\
x_1 \qquad + x_3 &\le 6 \\
2x_2 - x_3 &\le 5 \\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

9.2. Az inverz szorzatformája

A módosított szimplex módszerben a számítások legnagyobb részét a B^{-1} bázisinverz aktualizálására fordítjuk. Ebben az alfejezetben egy hatékony módszert mutatunk be B^{-1} kiszámítására.

Tegyük fel, hogy egy m feltétellel rendelkező LP feladatot kell megoldanunk. Tegyük fel továbbá, hogy már meghatároztuk, hogy az x_k változó lép be a bázisba, mégpedig az r-edik sorba. Az aktuális táblában az x_k-hoz tartozó oszlop legyen

$$
\begin{bmatrix} \bar{a}_{1k} \\ \bar{a}_{2k} \\ \vdots \\ \bar{a}_{mk} \end{bmatrix}
$$

Adjunk meg egy $m \times m$-es E mátrixot a következőképpen:

$$\begin{array}{cc} & (r\text{-edik oszlop}) \\ E = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & -\dfrac{\bar{a}_{1k}}{\bar{a}_{rk}} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & -\dfrac{\bar{a}_{2k}}{\bar{a}_{rk}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dfrac{1}{\bar{a}_{rk}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\dfrac{\bar{a}_{m-1,k}}{\bar{a}_{rk}} & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\dfrac{\bar{a}_{mk}}{\bar{a}_{rk}} & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} (r\text{-edik sor}) \end{array}$$

Röviden, E az I_m egységmárix r-edik oszlopának az

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{\bar{a}_{1k}}{\bar{a}_{rk}} \\ -\dfrac{\bar{a}_{2k}}{\bar{a}_{rk}} \\ \vdots \\ \dfrac{1}{\bar{a}_{rk}} \\ \vdots \\ -\dfrac{\bar{a}_{m-1,k}}{\bar{a}_{rk}} \\ -\dfrac{\bar{a}_{mk}}{\bar{a}_{rk}} \end{bmatrix}$$

oszlopvektorra történő felcserélésével kapott mátrix.

DEFINÍCIÓ

Egy olyan mátrixot, amely csak egyetlen oszlopban különbözik az egységmátrixtól, **elemi mátrixnak** nevezünk.

Tehát E is elemi mátrix. Megmutatjuk, hogy

$$B^{-1} \text{ az új táblában} = E(B^{-1} \text{ az aktuális táblában}) \tag{8}$$

Ennek belátásához vegyük észre, hogy az aktuális tábláról az új táblára való áttéréshez használt elemi sorműveletek tömören így is írhatók:

$$\text{az új } B^{-1} \text{ } r\text{-edik sora } = \left(\frac{1}{\bar{a}_{rk}}\right)(\text{az aktuális } B^{-1} \text{ } r\text{-edik sora}) \tag{9}$$

és $i \neq r$ esetén

$$\begin{aligned} &\text{az új } B^{-1} \text{ } i\text{-edik sora} \\ &= (\text{az aktuális } B^{-1} \text{ } i\text{-edik sora}) - \left(\frac{\bar{a}_{ik}}{\bar{a}_{rk}}\right)(\text{az aktuális } B^{-1} \text{ } r\text{-edik sora}) \end{aligned} \tag{10}$$

A 2.1. alfejezetben leírtak alapján

$$E(\text{aktuális } B^{-1})\ i\text{-edik sora} = (E\ i\text{-edik sora})(\text{aktuális } B^{-1}) \tag{11}$$

A (11) összefüggést és E definícióját összevetve azt kapjuk, hogy

$$E(\text{aktuális } B^{-1})\ r\text{-edik sora} = \left(\frac{1}{\bar{a}_{rk}}\right)(B^{-1}\ r\text{-edik sora})$$

és $i \neq r$ esetén

$$\begin{aligned} &E(\text{aktuális } B^{-1})\ i\text{-edik sora} \\ &= (\text{aktuális } B^{-1}\ i\text{-edik sora}) - \left(\frac{\bar{a}_{ik}}{\bar{a}_{rk}}\right)(\text{aktuális } B^{-1}\ i\text{-edik sora}) \end{aligned}$$

Látható, hogy (8) éppen a (9) és (10) összefüggésekkel azonos. Ezért (8) felhasználható az új B^{-1}-nek az aktuális B^{-1}-ből való előállítására.

Tekintsük a kiinduló táblát 0. táblaként, és legyen E_i az i-edik szimplex táblához tartozó E elemi mátrix. Azt tudjuk, hogy $B_0^{-1} = I_m$, és ebből

$$B_1^{-1} = E_0 B_0^{-1} = E_0$$

Hasonlóan

$$B_2^{-1} = E_1 B_1^{-1} = E_1 E_0$$

és általános alakban

$$B_k^{-1} = E_{k-1} E_{k-2} \dots E_1 E_0 \tag{12}$$

A (12) egyenlőséget az **inverz szorzatformájának** nevezik. A legtöbb lineáris programozási számítógépes kód a módosított szimplex módszert használja, és az egymásra következő B^{-1} inverzek kiszámítására a szorzatformát alkalmazza.

1. PÉLDA Alkalmazzuk az inverz szorzatformáját a 9.1. alfejezetben módosított szimplex módszerrel már megoldott Dakota feladat esetén a B_1^{-1} és a B_2^{-1} kiszámítására.

Megoldás Emlékezzünk arra, hogy a 0. táblában x_1 a 3. sorban lépett be a bázisba. Így a 0. tábla esetén $r = 3$, $k = 1$ és

$$\begin{bmatrix} \bar{a}_{11} \\ \bar{a}_{21} \\ \bar{a}_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{8}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Az 1. tábláról a 2. táblára való áttérésnél x_3 a 2. sorban lép be a bázisba. Tehát E_1 kiszámításánál $r = 2$ és $k = 3$. Először a bázisba belépő x_3-hoz tartozó oszlopot kell előállítani az 1. táblában:

$$\begin{bmatrix} \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{23} \\ \bar{a}_{33} \end{bmatrix} = B_1^{-1}\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

Az x_3 most is a 2. sorban lép a bázisba. Így

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & -(-\frac{1}{0.5}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{0.5} & 0 \\ 0 & -\frac{0.25}{0.50} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

és

$$B_2^{-1} = E_1 B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix}$$

A következő két alfejezetben az inverz szorzatformáját az oszlopgenerálási technika és a Dantzig–Wolfe dekompozíciós eljárás tanulmányozásánál is használjuk.

Feladat

A csoport

Alkalmazzuk a módosított szimplex módszert az inverz szorzatformájával a 9.1. alfejezet feladatainak megoldására!

9.3. Az oszlopgenerálás alkalmazása nagyméretű LP feladatok megoldására

Azt már láttuk, hogy a módosított szimplex módszer kevesebb számítási ráfordítást igényel, mint a 4. fejezetben ismertetett szimplex módszer. Ebben az alfejezetben a Gilmore és Gomory (1961) által kidolgozott oszlopgenerálási módszerrel foglalkozunk. Olyan LP feladatok esetén, amelyeknek sok változója van, az oszlopgenerálási technika a módosított szimplex módszer hatékonyságának növelésére használható. Az oszlopgenerálás a 9.4. alfejezetben ismertetendő Dantzig–Wolfe dekompozíciós eljárásnak is fontos alkotóeleme. Az oszlopgenerálás ötletének megértéséhez oldjuk meg a klasszikus *levágási feladat* (cutting stock problem) egy egyszerű változatát.

2. PÉLDA A Woodco cég 3, 5 és 9 méter hosszúságú gerendákat árul. A céghez 25 db 3 méter, 20 db 5 méter és 15 db 9 méter hosszú gerendára érkezik megrendelés. A Woodco a megrendeléseket 17 méter hosszú gerendákból történő levágásokkal elégíti ki. A cég minimalizálni akarja a keletkező levágási hulladékot. Írjunk fel egy LP feladatot, amely segíti a céget célja elérésében, és oldjuk meg a feladatot az oszlopgenerálási technikával.

Megoldás A Woodcónak el kell döntenie, hogy az egyes 17 méter hosszú gerendákat milyen hosszakra vágja fel. Ezért minden egyes döntés egy 17 méter hosszú gerenda felvágási módjához kapcsolható. Például egy döntési változót rendelhetünk ahhoz a felvágási módhoz, amikor a 17 méter hosszú gerendából 3 db 5 méter hosszút vágunk le, és ekkor a keletkező hulladék $17 - 15 = 2$ méter. Sok lehetséges levágási módot eleve nem kell figyelembe venni. Például butaság lenne egy gerendából csak egy 9 méter és egy 5 méter hosszú részt levágni, amikor ugyanezzel az erővel egy 9 méter, egy 5 méter *és* egy 3 méter hosszú részt is kaphatunk. Általában minden olyan levágási séma, amely 3 méter vagy annál hosszabb hulladékot eredményez, figyelmen kívül hagyható, mivel a hulladékból további egy vagy több 3 méter hosszú darabot nyerhetünk még. Az 1. táblázat egy 17 méter hosszú gerenda fentiek alapján ésszerű felvágási kombinációit sorolja fel.

1. TÁBLÁZAT A gerenda vágási módjai a levágási feladatban

	3 méter hosszú gerendák száma	**5 méter hosszú gerendák száma**	**9 méter hosszú gerendák száma**	**Hulladék (méter)**
1. kombináció	5	0	0	2
2. kombináció	4	1	0	0
3. kombináció	2	2	0	1
4. kombináció	2	0	1	2
5. kombináció	1	1	1	0
6. kombináció	0	3	0	2

Legyen

$$x_i = \text{Az } i\text{-edik kombináció szerint felvágott 17 méter hosszú gerendák száma,}$$

és fogalmazzuk meg a Woodco cég LP feladatát:

$$\text{a Woodco hulladéka} + \text{az összes fogyasztói igény} = \text{a felvágott gerendák összhossza}$$

Mivel

$$\text{az összes fogyasztói igény} = 25(3) + 20(5) + 15(9) = 310 \text{ méter}$$
$$\text{a felvágott gerendák összhossza} = 17(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$$

írhatjuk, hogy

$$\text{a Woodco hulladéka (méter)} = 17x_1 + 17x_2 + 17x_3 + 17x_4 + 17x_5 + 17x_6 - 310$$

Ekkor a Woodco minimalizálandó célfüggvénye

$$\min z = 17x_1 + 17x_2 + 17x_3 + 17x_4 + 17x_5 + 17x_6 - 310$$

Ez ekvivalens a

$$17(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$$

minimalizálásával, az pedig az

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

minimalizálásával. Tehát a Woodco célfüggvénye

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \tag{13}$$

Ez azt jelenti, hogy a Woodco úgy tudja minimalizálni az összes hulladékot, ha a felvágandó 17 méter hosszú gerendák számát minimalizálja.

A Woodco az alábbi három feltételnek kell hogy eleget tegyen:

1. feltétel Legalább 25 db 3 méter hosszú gerendát kell levágni.

2. feltétel Legalább 20 db 5 méter hosszú gerendát kell levágni.

3. feltétel Legalább 15 db 9 méter hosszú gerendát kell levágni.

Mivel a levágott 3 méter hosszú gerendák száma $5x_1+4x_2+2x_3+2x_4+x_5$, az első feltétel

$$5x_1+4x_2+2x_3+2x_4+x_5 \geq 25 \tag{14}$$

Hasonlóan a második feltétel

$$x_2+2x_3+x_5+3x_6 \geq 20 \tag{15}$$

a harmadik feltétel pedig

$$x_4+x_5 \geq 15 \tag{16}$$

Vegyük észre, hogy x_i együtthatója a k méter hosszú gerendákra vonatkozó feltételben éppen az i-edik vágási kombináció által egy teljes hosszúságú gerendából kapott k méter hosszú gerendák száma.

Nyilvánvaló, hogy az x_i változókra egészértékűséget kellene kikötni. Ennek ellenére, ha az igényelt mennyiségek nagyok, az optimálishoz közeli megoldást kaphatunk, ha a levágási feladatot LP feladatként oldjuk meg, majd a megoldás törtrészeit felfelé kerekítjük. Ez az eljárás nem feltétlenül a legjobb egészértékű megoldást adja, de általában az optimálishoz közeli megoldást nyerhetünk. Emiatt most a levágási feladat LP verziójával foglalkozunk. A (13)–(16) feltételeket az előjel kikötésekkel kombinálva a következő LP feladatot kapjuk:

$$\begin{array}{llr l}
\min & z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 & & \\
\text{f.h.} & 5x_1+4x_2+2x_3+2x_4+x_5 & \geq 25 & \text{(3 méter feltétel)} \\
& x_2+2x_3+x_5+3x_6 & \geq 20 & \text{(5 méter feltétel)} \\
& x_4+x_5 & \geq 15 & \text{(9 méter feltétel)} \\
& x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6 & \geq 0 &
\end{array} \tag{17}$$

Vegyük észre, hogy x_1 csak a 3 méter feltételben szerepel (mivel az 1. kombináció csak 3 méter hosszú gerendát ad), továbbá x_6 csak az 5 méter feltételben vesz részt (mivel a 6. kombináció csak 5 méter hosszú gerendát ad). Ez azt jelenti, hogy x_1 és x_6 felhasználható mint kiinduló bázisváltozó a 3 méter, illetve az 5 méter feltételekhez. Sajnos az 1–6. kombinációk egyike sem eredményez pusztán 9 méter hosszú darabokat, így a 9 méter feltételhez nincs magától adódó bázisváltozó. Hogy elkerüljük egy mesterséges változó bevonását a 9 méter feltételbe, vezessünk be egy olyan 7. kombinációt az eddigi vágási kombinációk mellé, amely csupán egy 9 méter hosszú gerendát vág le a teljes hosszból. Ennek megfelelően legyen x_7 a 7. kombináció szerint levágások száma. Könnyen látható, hogy x_7 nulla szinten lesz az optimális megoldásban, de x_7 kezdő bázisba való bevonása lehetővé teszi a nagy M technika vagy a kétfázisú szimplex módszer elkerülését. Az x_7-hez tartozó oszlop az LP feltételekben

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

és az x_7 tag adódik hozzá a célfüggvényhez. Most már $BV = \{x_1, x_6, x_7\}$ használható a (17) LP feladat kiinduló bázisaként. Ha ehhez a bázishoz tartozó táblát 0. táblának tekintjük, akkor

$$B_0 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_0^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Így

$$\mathbf{c}_{BV}B_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Ha most kiértékelnénk a nembázis változókat, megtudhatnánk, hogy melyik változót kellene beléptetni a bázisba. Azonban egy nagyméretű leszabási feladatnál több ezer változó is lehet, így minden egyes nem bázisváltozó egyenkénti kiértékelése meglehetősen időigényes lehet. Ez az a tipikus szituáció, ahol az oszlopgenerálás szerepet kaphat. Mivel egy minimalizálási feladatot oldunk meg, egy olyan oszlopot kell találnunk, amelynek pozitív a kiértékelése, azaz pozitív együtthatója van a 0. sorban. A leszabási feladatban minden oszlop vagy változó a teljes hosszúságú gerenda egy leszabási kombinációját képviseli. Egy változó lényegében három számmal írható le: a_3, a_5 és a_9, ahol a_i a 17 méter hosszú gerendából levágott i méter hosszú gerendák száma az adott kombináció levágási sémája alapján. Például az x_2 változó az $a_3 = 4, a_5 = 1$ és $a_9 = 0$ számokkal van meghatározva. Az oszlopgenerálás ötlete arra irányul, hogy hatékonyan keressünk egy olyan oszlopot, amelynek a kiértékelése megfelelő (minimalizálás esetén pozitív, maximalizálás esetén negatív). Az aktuális bázisunk esetén az a_3, a_5 és a_9 számokkal leírt kombináció kiértékelése

$$\mathbf{c}_{BV}B_0^{-1} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_5 \\ a_9 \end{bmatrix} - 1 = \frac{1}{5}a_3 + \frac{1}{3}a_5 + a_9 - 1$$

Vegyük azonban észre, hogy az a_3, a_5 és a_9 értékeket úgy kell megválasztani, hogy az általuk képviselt kombináció ne használjon 17 méter hossznál többet. Azt is tudjuk, hogy a_3, a_5 és a_9 nemnegatív egész számok kell hogy legyenek. Röviden, az a_3, a_5 és a_9 értékeknek eleget kell tennie az alábbi feltételeknek:

$$3a_3 + 5a_5 + 9a_9 \leq 17 \quad (a_3 \geq 0, a_5 \geq 0, a_9 \geq 0;\ a_3, a_5, a_9 \text{ egész}) \tag{18}$$

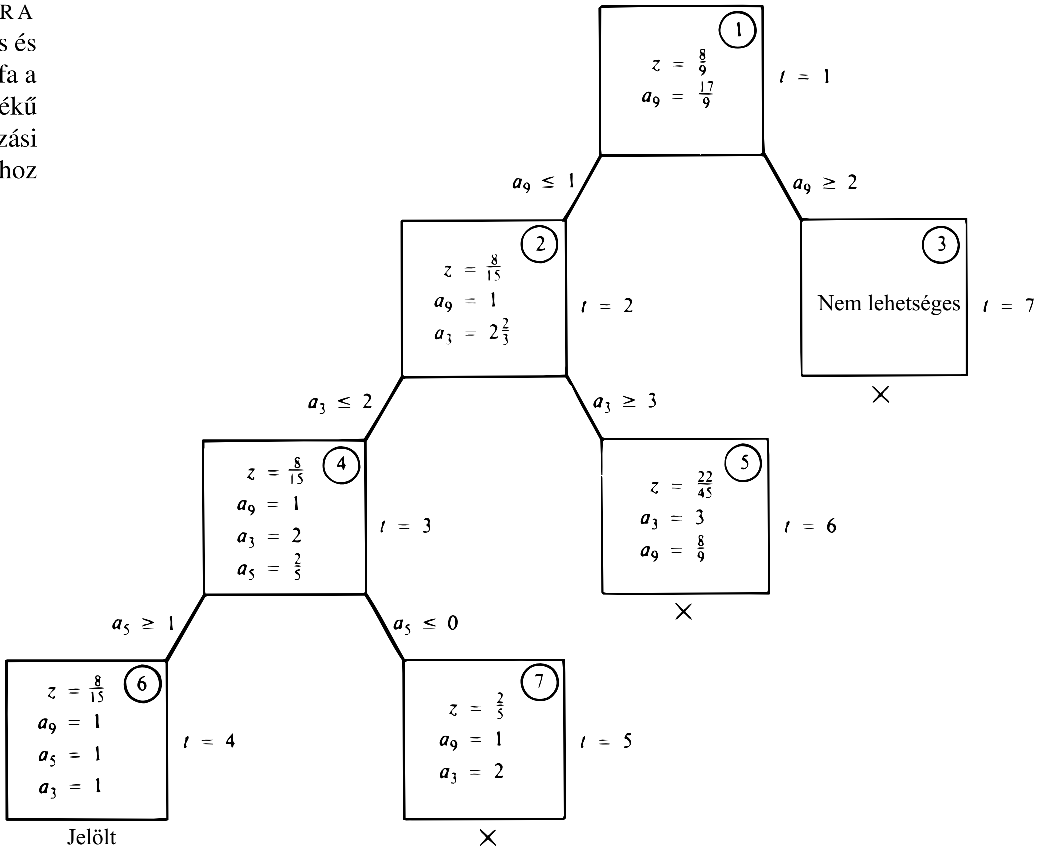
A legkedvezőbb kiértékelést és a hozzá tartozó kombinációt így az alábbi hátizsák feladat megoldásával kaphatjuk meg:

$$\begin{aligned} \max\ z = \tfrac{1}{5}a_3 + \tfrac{1}{3}a_5 + \ a_9 - 1 \\ \text{f.h.} \qquad 3a_3 + 5a_5 + 9a_9 \leq 17 \\ a_3, a_5, a_9 \geq 0; \quad a_3, a_5, a_9 \text{ egész} \end{aligned} \tag{19}$$

Mivel (19) egy hátizsák feladat (ahol a 0–1 kikötés helyett most egészértékűség van előírva a változókra), könnyen megoldható a 8.5. alfejezetben ismertetett korlátozás és szétválasztás eljárással.

A számítások során előálló korlátozás és szétválasztás fa az 1. ábrán látható. Például az 1. ábra 6. feladatának megoldásánál először az $a_5 = 1$ értéket állítjuk be (mivel mindenképpen $a_5 \geq 1$). Ekkor 12 méter hossz maradt a hátizsák feladatra, és megpróbáljuk a jobbik

1. ÁBRA
Korlátozás és szétválasztás fa a (19) egészértékű programozási feladathoz



a_9-et olyan nagynak választani, amennyire csak lehetséges. Mivel $a_9 \geq 1$, beállítjuk, hogy $a_9 = 1$. Ekkor 3 méter marad, amiből $a_3 = 1$ következik, így éppen betelt a hátizsák. Az 1. ábrából látható, hogy a (19) egészértékű programozási feladat optimális megoldásában $z = \frac{8}{15}, a_3 = a_5 = a_9 = 1$. Ez éppen az 5. kombinációhoz és az x_5 változóhoz tartozik. Tehát x_5 kiértékeléseként $\frac{8}{15}$ adódik, és az x_5 bázisba történő beléptetése csökkentheti a Woodco hulladékát. Ahhoz, hogy x_5 belépjen a bázisba, előállítjuk az aktuális tábla jobb oldalát és az x_5 oszlopát:

$$x_5 \text{ oszlopa az aktuális táblában } = B_0^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{5} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{5}\\ \frac{1}{3}\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\text{a jobb oldali vektor az aktuális táblában } = B_0^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix}\frac{1}{5} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}25\\20\\15\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\ \frac{20}{3}\\ 15\end{bmatrix}$$

A hányados teszt azt mutatja, hogy x_5-nek a 3. sorban kell a bázisba lépnie. Ebből $BV(1) = \{x_1, x_6, x_5\}$ adódik. Az inverz szorzatformáját használva azt kapjuk, hogy

$$B_1^{-1} = E_0 B_0^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{5}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Ekkor

$$\mathbf{c}_{BV}B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{7}{15} \end{bmatrix}$$

Az árnyékárak új ($\mathbf{c}_{BV}B_1^{-1}$) vektorával ismét alkalmazhatjuk az oszlopgenerálást annak megállapítására, hogy vajon van-e olyan kombináció, amelyet érdemes a bázisba bevonni. Az aktuális árnyékárakkal az a_3, a_5 és a_9 kombináció kiértékeléseként

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{7}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_5 \\ a_9 \end{bmatrix} - 1 = \frac{1}{5}a_3 + \frac{1}{3}a_5 + \frac{7}{15}a_9 - 1$$

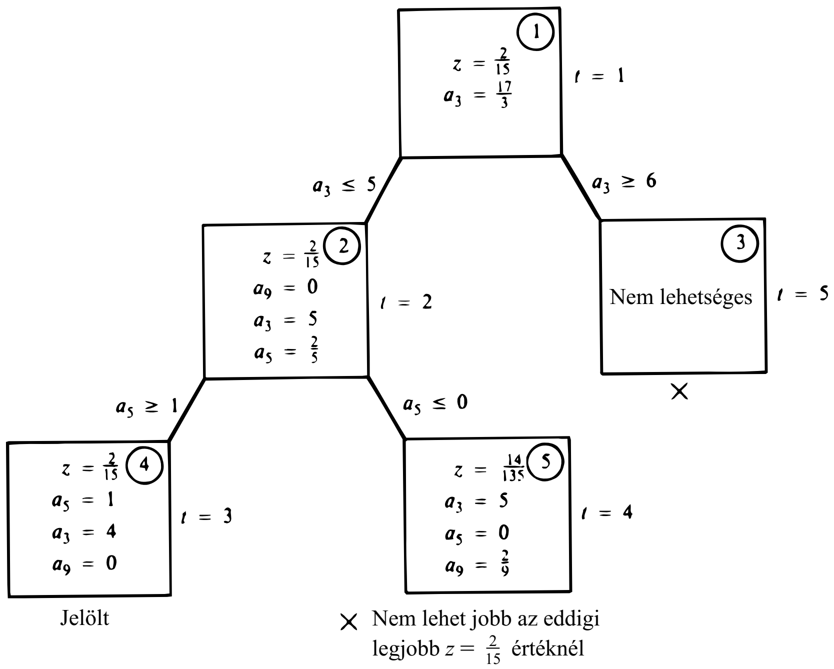
adódik. Az aktuális tábla esetén az oszlopgenerálás a következő feladatot eredményezi:

$$\begin{aligned} &\max z = \tfrac{1}{5}a_3 + \tfrac{1}{3}a_5 + \tfrac{7}{15}a_9 - 1 \\ &\text{f.h.} \qquad 3a_3 + 5a_5 + 9a_9 \leq 17 \\ &a_3, a_5, a_9 \geq 0; a_3, a_5, a_9 \text{ egész} \end{aligned} \tag{20}$$

A (20) feladathoz tartozó korlátozás és szétválasztási fát a 2. ábra mutatja. Látható, hogy az $a_3 = 4$, $a_5 = 1$ és $a_9 = 0$ értékekkel adott kombináció (2. kombináció) kiértékelése a legjobb (együtthatója a 0. sorban $\frac{2}{15}$). Ezért az x_2 változót léptetjük be a bázisba. Az aktuális táblában x_2 oszlopa

$$B_1^{-1}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. ÁBRA Korlátozás és szétválasztás fa a (20) egészértékű programozási feladathoz



Az aktuális tábla jobb oldala

$$B_1^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 20 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{5}{3} \\ 15 \end{bmatrix}$$

A hányados teszt azt jelzi, hogy x_2-nek az 1. sorban kell belépnie a bázisba. Ezért $BV(2) = \{x_2, x_6, x_5\}$. Az inverz szorzatformájának alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$E_1 = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{5}{12} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ebből

$$B_2^{-1} = E_1 B_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{5}{12} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az árnyékárak új vektora:

$$\mathbf{c}_{BV} B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ezekkel az árnyékárakkal az a_3, a_5 és a_9 kombináció kiértékelésének eredménye $\frac{1}{6}a_3 + \frac{1}{3}a_5 + \frac{1}{2}a_9 - 1$. Tehát az oszlopgenerálási eljárásban az alábbi feladatot kell megoldanunk:

$$\begin{aligned} \max\ z &= \tfrac{1}{6}a_3 + \tfrac{1}{3}a_5 + \tfrac{1}{2}a_9 - 1 \\ \text{f.h.}\quad & 3a_3 + 5a_5 + 9a_9 \leq 17 \\ a_3, a_5, a_9 &\geq 0; \quad a_3, a_5, a_9 \text{ egész} \end{aligned} \tag{21}$$

A (21) egészértékű programozási feladat korlátozás és szétválasztás fájának megalkotását gyakorlás céljából az olvasóra hagyjuk (lásd az 1. feladatot ennek az alfejezetnek a végén). A (21) feladat optimális z értékeként $z = 0$ adódik. Ez azt jelenti, hogy egyetlen kombináció kiértékelése sem kedvező. Következésképpen az aktuális bázismegoldásunk optimális megoldás. Ahhoz, hogy a bázisváltozók értékét megkapjuk az optimális megoldásban, meghatározzuk az aktuális táblában a jobb oldali vektort:

$$B_2^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 20 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{6} \\ 15 \end{bmatrix}$$

Tehát a Woodco leszabási feladatának optimális megoldása $x_2 = \frac{5}{2}$, $x_6 = \frac{5}{6}$, $x_5 = 15$. Szükség esetén egy ésszerű egészértékű megoldást is kaphatunk x_2 és x_6 felfelé kerekítésével. Ezzel az $x_2 = 3, x_6 = 1, x_5 = 15$ egészértékű megoldáshoz jutunk.

Amennyiben a leszabási feladathoz van egy kiinduló bázismegoldásunk, nincs is szükségünk az összes olyan lehetséges módnak a felsorolására, amely szerint a teljes gerenda felvágható. Minden iterációban korlátozás és szétválasztás módszerrel egy jó kombinációt állítunk elő (olyat, amely javítja a z értéket, amikor bekerül a bázisba). Az a tény, hogy nem kell felsorolnunk az összes módot, amely szerint a gerenda felvágható, nagy segítség. Egy Gilmore és Gomory (1961) által megoldott leszabási feladatban, ahol a vevők 40 különböző hosszúságú gerendából rendeltek, több mint 100 millió lehetséges leszabási mód adódott. Az oszlopgenerálási eljárásnak erre a feladatra történő alkalmazásánál az utolsó fázisban egyetlen korlátozás és szétválasztási feladat megoldása kimutatta, hogy a 100 millió (nem bázisbeli) mód egyike sem értékelhető kedvezőnek. Ez a módszer határozottan kellemesebb, mint a $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ használata mind a 100 millió változó egyenkénti kiértékelésére.

Feladatok

A csoport

1. Mutassuk meg, hogy a (21) egészértékű programozási feladat optimális megoldásában $z = 0$!

2. Alkalmazzuk az oszlopgenerálást egy olyan leszabási feladat megoldására, ahol 15 méter hosszú deszkákból történő vágással kell a következő igényeket kielégíteni: 10 db 3 méter hosszú, 20 db 5 méter hosszú és 15 db 8 méter hosszú deszka.

3. Alkalmazzuk az oszlopgenerálást egy olyan leszabási feladat megoldására, ahol 15 méter hosszú deszkákból történő vágással kell a következő igényeket kielégíteni: 80 db 4 méter hosszú, 50 db 6 méter hosszú és 100 db 7 méter hosszú deszka.

9.4. A Dantzig–Wolfe dekompozíciós algoritmus

Sok LP feladatban a feltételek és a változók az alábbi módon bonthatók szét (dekomponálhatók):

A feltételek 1. halmazában csak a változók 1. halmaza szerepel.
A feltételek 2. halmazában csak a változók 2. halmaza szerepel.
$\vdots$
A feltételek k. halmazában csak a változók k. halmaza szerepel.

A feltételek $k+1$-edik halmazában már az összes változó szerepelhet. A $k+1$-edik halmazt **központi feltételeknek** vagy **összekötő feltételeknek** szokták nevezni. Az ilyen módon felbontható LP feladatok általában hatékonyan oldhatók meg a Dantzig–Wolfe dekompozíciós módszerrel.

3. PÉLDA A Steelco cég kétféle acélt (1. acél és 2. acél) gyárt két telephelyén (1. üzem és 2. üzem). Három erőforrás szükséges egy tonna acél gyártásához: vasérc, szén és idő a nagyolvasztóban. A két üzemnek különböző típusú nagyolvasztói vannak, ezért az egy tonna acél előállításához szükséges erőforrásmennyiségek függnek az adott üzemtől (lásd a 2. táblázatot). Mindegyik üzemnek saját szénbányája van. Minden nap 12 tonna szén áll rendelkezésre az 1. üzemben és 15 tonna a 2. üzemben. A szén nem szállítható az üzemek között. A nagyolvasztó az 1. üzemben minden nap 10 óra, míg a 2. üzemben 4 óra időtartamban áll rendelkezésre. A vasércet a két üzem között elhelyezkedő bányából nyerik ki, 80 tonnát mindennap. Az 1. acélt 170$/tonna, a 2. acélt pedig 160$/tonna áron lehet eladni. Az összes értékesített acélt egyetlen fogyasztóhoz szállítják. Egy tonna acél szállítási költsége az 1.

üzemből 80$, a 2. üzemből pedig 100$. Változó költségnek csak a szállítási költségeket tekintve fogalmazzunk meg és oldjunk meg egy LP feladatot, amely maximalizálja a Steelco szállítási költségek levonása után maradt bevételét!

2. TÁBLÁZAT
Erőforrásigények a Steelco esetében

Termék (1 tonna)	Szükséges vasérc (tonna)	Szükséges szén (tonna)	Szükséges nagykohó idő (óra)
1. acél az 1. üzemből	8	3	2
2. acél az 1. üzemből	6	1	1
1. acél a 2. üzemből	7	3	1
2. acél a 2. üzemből	5	2	1

Megoldás Legyen

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{az 1. acélból az 1. üzemben naponta termelt mennyiség (tonna)} \\ x_2 &= \text{a 2. acélból az 1. üzemben naponta termelt mennyiség (tonna)} \\ x_3 &= \text{az 1. acélból a 2. üzemben naponta termelt mennyiség (tonna)} \\ x_4 &= \text{a 2. acélból a 2. üzemben naponta termelt mennyiség (tonna)} \end{aligned}$$

A Steelco bevétele $170(x_1+x_3)+160(x_2+x_4)$, szállítási költsége pedig $80(x_1+x_2)+100(x_3+x_4)$. Tehát a Steelco maximalizálandó célfüggvénye

$$\begin{aligned} z &= (170-80)x_1+(160-80)x_2+(170-100)x_3+(160-100)x_4 \\ &= 90x_1+80x_2+70x_3+60x_4 \end{aligned}$$

A cégnek a következő öt feltételt kell figyelembe vennie:

1. feltétel Az 1. üzemben naponta legfeljebb 12 tonna szén használható fel.

2. feltétel Az 1. üzemben naponta legfeljebb 10 óra hosszan használható a nagykohó.

3. feltétel A 2. üzemben naponta legfeljebb 15 tonna szén használható fel.

4. feltétel A 2. üzemben naponta legfeljebb 4 óra hosszan használható a nagykohó.

5. feltétel Legfeljebb 80 tonna vasérc használható fel naponta.

Az 1–5. feltételek az alábbi öt LP feltételhez vezetnek:

$$3x_1+\ x_2 \le 12 \qquad \text{(1. üzem szén feltétele)} \qquad (22)$$
$$2x_1+\ x_2 \le 10 \qquad \text{(1. üzem kohó feltétele)} \qquad (23)$$
$$3x_3+2x_4 \le 15 \qquad \text{(2. üzem szén feltétele)} \qquad (24)$$
$$x_3+\ x_4 \le 4 \qquad \text{(2. üzem kohó feltétele)} \qquad (25)$$
$$8x_1+6x_2+7x_3+5x_4 \le 80 \qquad \text{(vasérc feltétel)} \qquad (26)$$

Szükség van az $x_i \ge 0$ előjel feltételekre is. Ezután, mindent összerakva, a Steelco LP feladata így írható fel:

$$
\begin{array}{llr}
\max z = 90x_1 + 80x_2 + 70x_3 + 60x_4 & & \\
\text{f.h.} \quad 3x_1 + x_2 \le 12 & \text{(1. üzem szén feltétele)} & (22) \\
2x_1 + x_2 \le 10 & \text{(1. üzem kohó feltétele)} & (23) \\
3x_3 + 2x_4 \le 15 & \text{(2. üzem szén feltétele)} & (24) \\
x_3 + x_4 \le 4 & \text{(2. üzem kohó feltétele)} & (25) \\
8x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 5x_4 \le 80 & \text{(vasérc feltétel)} & (26) \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 & &
\end{array}
$$

A dekomponálhatóság definíciója szerint a Steelco LP feladatot az alábbi módon bonthatjuk fel:

Változók 1. halmaza: x_1 és x_2 (az 1. üzem változói).

Változók 2. halmaza: x_3 és x_4 (a 2. üzem változói).

Feltételek 1. halmaza: (22) és (23) (az 1. üzem feltételei).

Feltételek 2. halmaza: (24) és (25) (a 2. üzem feltételei).

Feltételek 3. halmaza: (26).

A feltételek 1. halmaza és a változók 1. halmaza csak az 1. üzemre vonatkozó tevékenységekre vonatkozik, és nem is érinti az x_3 és x_4 változókat (amelyek a 2. üzem tevékenységeit képviselik). A feltételek 2. halmaza és a változók 2. halmaza a 2. üzem tevékenységeire vonatkozik, és nem foglalkozik az x_1 és x_2 változókkal (1. üzem tevékenységei). A feltételek 3. halmaza egy központi feltételnek tekinthető, amely kapcsolatot teremt a változók két halmaza között. (A megoldást később folytatjuk.)

Olyan feladatok, ahol több üzem termel több terméket, a 3. példánál alkalmazott gondolatmenettel könnyen részekre bonthatók.

Az olyan LP feladatok hatékony megoldására, amelyek a 3. példához hasonló szerkezetre bonthatók, Dantzig és Wolfe fejlesztette ki a róluk elnevezett dekompozíciós eljárást. Az algoritmus tárgyalásának egyszerűsítése céljából feltesszük, hogy olyan LP feladatot oldunk meg, ahol minden részfeladat lehetséges tartománya korlátos.[2] A dekompozíciós algoritmus az 1. tétel eredményein alapszik.

1. TÉTEL

Tegyük fel, hogy egy LP feladat lehetséges tartománya korlátos, és legyenek $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_k$ az LP feladat lehetséges tartományának extremális pontjai (lehetséges bázismegoldásai). Ekkor az LP feladat lehetséges tartományának bármely $\mathbf{x}$ pontja felírható $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_k$ lineáris kombinációjaként. Más szóval, léteznek olyan $\mu_1, \mu_2, \ldots,$ μ_k súlyok, amelyekre

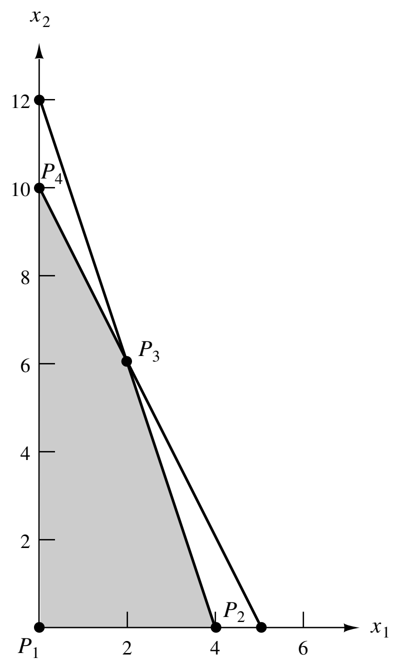
$$\mathbf{x} = \mu_1 \mathbf{P}_1 + \mu_2 \mathbf{P}_2 + \cdots + \mu_k \mathbf{P}_k \tag{27}$$

Sőt, a (27)-ben szereplő $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ súlyok úgy is választhatók, hogy

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k = 1 \quad \text{és} \quad \mu_i \ge 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, k \tag{28}$$

[2]Lásd a Bradley, Hax, és Magnanti (1977) dolgozatot a dekompozíció egy olyan tárgyalását illetően, ahol legalább az egyik részfeladat lehetséges tartománya nem korlátos.

3. ÁBRA
A feltételek 1. halmazának lehetséges tartománya



Vektorok bármely olyan lineáris kombinációját, ahol a súlyok eleget tesznek (28)-nak, **konvex kombinációnak** nevezzük. Tehát az 1. tétel azt állítja, hogy ha egy LP feladat lehetséges tartománya korlátos, akkor annak minden pontja felírható a lehetséges tartomány extremális pontjainak konvex kombinációjaként.

Az 1. tétel illusztrálásaként megmutatjuk, hogyan lehet alkalmazni azt a 3. példa esetén a feltételek 1., illetve 2. halmazára. Először nézzük meg az $x_1 \geq 0$ és $x_2 \geq 0$ előjel feltételek, valamint a feltételek 1. halmaza ((22) és (23)) által meghatározott lehetséges tartományt. Ez a lehetséges tartomány a 3. ábrán látható $P_1P_2P_3P_4$ árnyékolt négyszög belseje és határa. Az extremális pontok $\mathbf{P}_1 = [0 \quad 0], \mathbf{P}_2 = [4 \quad 0], \mathbf{P}_3 = [2 \quad 6]$ és $\mathbf{P}_4 = [0 \quad 10]$. Erre a lehetséges tartományra vonatkozóan azt állítja az 1. tétel, hogy a feltételek 1. halmazához tartozó lehetséges tartomány bármely

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

pontja felírható

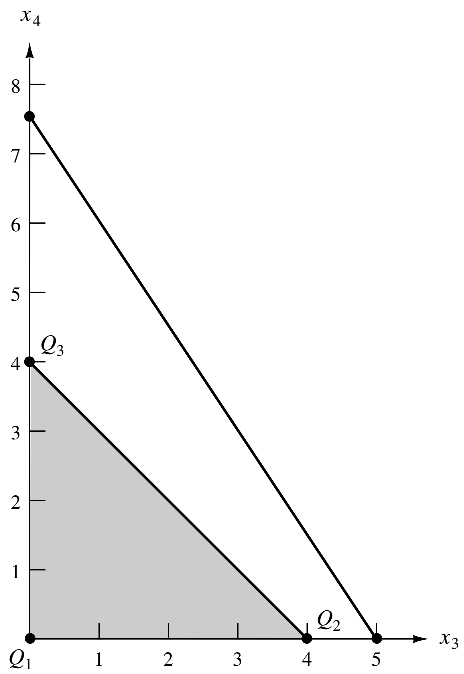
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mu_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + \mu_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\mu_2 + 2\mu_3 \\ 6\mu_3 + 10\mu_4 \end{bmatrix}$$

alakban, ahol $\mu_i \geq 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ és $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 1$. Például a

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

pont a $P_1P_2P_3P_4$ lehetséges tartományban van. A 3. ábrára pillantva azt látjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$



4. ÁBRA
A feltételek 2. halmazának lehetséges tartománya

a $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ és $\mathbf{P}_3$ pontok lineáris kombinációjaként írható fel. Egy kis algebrai számítgatással kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}$$

Az 1. tétel egy másik illusztrálásaként tekintsük az $x_3 \geq 0$ és $x_4 \geq 0$ előjel feltételek és a feltételek 2. halmaza ((24) és (25)) által meghatározott lehetséges tartományt. Ennek az LP feladatnak a lehetséges tartománya a 4. ábrán kiemelt $Q_1Q_2Q_3$ terület. Az extremális pontok $\mathbf{Q}_1 = (0,0), \mathbf{Q}_2 = (4,0)$ és $\mathbf{Q}_3 = (0,4)$. Az 1. tétel azt állítja, hogy bármely

$$\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}$$

pont a feltételek 2. halmazának fentiek szerinti lehetséges tartományából felírható mint

$$\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix} = \mu_1\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} + \mu_2\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix} + \mu_3\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}$$

ahol $\mu_i \geq 0$ és $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$. Például a

$$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

lehetséges pont felírható mint

$$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}$$

A mi céljainkhoz nem fontos, hogy pontosan tudjuk, miként lehet meghatározni egy adott lehetséges ponthoz tartozó súlyokat. A dekompozíciós algoritmus ugyanis nem követeli meg tőlünk, hogy képesek legyünk tetszőleges pont esetén a súlyok megtalálására.

A dekompozíciós algoritmus alapötletének megértéséhez tegyük fel, hogy a változók halmaza egy 1. halmazra és egy 2. halmazra lett felosztva. Az olvasónak nyilván nem okoz majd nehézséget az olyan esetre történő általánosítás, ahol a változók halmaza kettőnél több halmazra van felosztva.

A Dantzig–Wolfe dekompozíció a következőképpen működik:

1. lépés Legyen a változók 1. halmaza $x_1, x_2, \dots, x_{n_1}$. Fejezzük ki a változókat az 1. feltételi halmazhoz tartozó lehetséges tartomány extremális pontjainak konvex kombinációjaként (lásd 1. tétel). (Az 1. feltételi halmaz azokból a feltételekből áll, amelyekben csak a változók 1. halmaza vesz részt.) Ha $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_k$ jelöli a lehetséges tartomány extremális pontjait, akkor a feltételek 1. halmaza által meghatározott lehetséges tartomány bármely

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n_1} \end{bmatrix}$$

pontja felírható az alábbi formában:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n_1} \end{bmatrix} = \mu_1 \mathbf{P}_1 + \mu_2 \mathbf{P}_2 + \cdots + \mu_k \mathbf{P}_k \tag{29}$$

ahol $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k = 1$ és $\mu_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \dots, k)$.

2. lépés Fejezzük ki a változók $x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \dots, x_n$ elemekből álló 2. halmazát mint a feltételek 2. halmazához tartozó lehetséges tartomány extremális pontjainak konvex kombinációját. Amennyiben $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_m$ jelöli a lehetséges tartomány extremális pontjait, akkor a feltételek 2. halmaza által meghatározott lehetséges tartomány minden pontja felírható

$$\begin{bmatrix} x_{n_1+1} \\ x_{n_1+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda_1 \mathbf{Q}_1 + \lambda_2 \mathbf{Q}_2 + \cdots + \lambda_m \mathbf{Q}_m \tag{30}$$

alakban, ahol $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ és $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = 1$.

3. lépés Fejezzük ki (29) és (30) alapján az LP feladat célfüggvényét és központi feltételeit a μ_i és a λ_i változók segítségével. A konvexitási feltételeknek nevezett $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k = 1$ és $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = 1$ feltételek, valamint a $\mu_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \dots, k)$ és $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ előjelkorlátozások hozzáadása után a következő LP feladatot kapjuk, amelyet **mesterfeladatnak** is neveznek:

max (vagy min) [célfüggvény a μ_i és λ_i változókkal kifejezve]

f.h. [központi feltételek μ_i és λ_i változókkal kifejezve]

$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k = 1$ (konvexitási feltételek)

$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m = 1$

$\mu_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k)$ (előjelmegkötések)

$\lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$

Sok nagyméretű LP feladatban a mesterfeladatnak több millió változója lehet (ezek az egyes lehetséges tartományok extremális pontjaihoz tartoznak). Szerencsére azonban ritkán van szükség a teljes mesterfeladat felírására, mindössze egy adott μ_i vagy λ_i változóhoz tartozó oszlop előállítására van szükségünk a mesterfeladatból.

4. lépés Tegyük fel, hogy már rendelkezésünkre áll a mesterfeladat egy lehetséges bázismegoldása.[3] Ekkor használjuk a 9.3. alfejezetben ismertetett oszlopgenerálási módszert a mesterfeladat megoldására.

5. lépés A μ_i és λ_i változók 4. lépésben kapott optimális értékeit helyettesítsük be a (29) és (30) kifejezésekbe. Ezzel megkapjuk az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ optimális értékeit.

Megoldás
3. példa (folytatás)

Azt már láttuk a 3. példánál, hogy

$$\text{változók 1. halmaza} = \{x_1, x_2\} \tag{22}$$

$$\text{feltételek 1. halmaza} = \begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 12 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \end{cases} \tag{23}$$

Azt is láttuk, hogy a feltételek 1. halmazához tartozó lehetséges tartománynak négy extremális pontja van, és a feltételek 1. halmazának bármely

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

lehetséges pontja felírható

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mu_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + \mu_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\mu_2 + 2\mu_3 \\ 6\mu_3 + 10\mu_4 \end{bmatrix} \tag{29$'$}$$

alakban, ahol $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 1$ és $\mu_i \ge 0$.

$$\text{változók 2. halmaza} = x_3 \text{ és } x_4 \tag{24}$$

$$\text{feltételek 2. halmaza} = \begin{cases} 3x_3 + 2x_4 \le 15 \\ x_3 + x_4 \le 4 \end{cases} \tag{25}$$

A feltételek 2. halmazához tartozó lehetséges tartomány bármely

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

pontja felírható

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\lambda_2 \\ 4\lambda_3 \end{bmatrix} \tag{30$'$}$$

alakban, ahol $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ és $\lambda_i \ge 0$ $(i = 1, 2, 3)$.

A mesterfeladatot a (29′) és (30′) összefüggéseknek a célfüggvénybe és a központi feltételekbe való behelyettesítésével kaphatjuk meg. A célfüggvényre azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 90x_1 + 80x_2 + 70x_3 + 60x_4 &= 90(4\mu_2 + 2\mu_3) + 80(6\mu_3 + 10\mu_4) + 70(4\lambda_2) + 60(4\lambda_3) \\ &= 360\mu_2 + 660\mu_3 + 800\mu_4 + 280\lambda_2 + 240\lambda_3 \end{aligned}$$

[3] Ha nem ez lenne az eset, akkor a kétfázisú szimplex módszert kell használnunk. A részletekről lásd Bradley, Hax, és Magnanti (1977).

A központi feltétel

$$8(4\mu_2 + 2\mu_3) + 6(6\mu_3 + 10\mu_4) + 7(4\lambda_2) + 5(4\lambda_3) \leq 80$$

azaz

$$32\mu_2 + 52\mu_3 + 60\mu_4 + 28\lambda_2 + 20\lambda_3 \leq 80$$

Ha ehhez a feltételhez hozzáadunk egy s_1 kiegészítő változót, valamint felírjuk a konvexitási és az előjel feltételeket is, a következő mesterfeladatot kapjuk:

$$\begin{array}{lrrrrrrrl}
\max z = & & 360\mu_2 + & 660\mu_3 + & 800\mu_4 + & 280\lambda_2 + & 240\lambda_3 & & \\
\text{f.h.} & & 32\mu_2 + & 52\mu_3 + & 60\mu_4 + & 28\lambda_2 + & 20\lambda_3 + & s_1 & = 80 \\
& \mu_1 + & \mu_2 + & \mu_3 + & \mu_4 & & & & = 1 \\
& & & & \lambda_1 + & \lambda_2 + & \lambda_3 & & = 1 \\
& & & \mu_i, \lambda_i \geq 0 & & & & &
\end{array}$$

Van egy sokkal okosabb módja is annak, hogy a mesterfeladatban megkapjuk egy változó oszlopát. Emlékezzünk arra, hogy a mesterfeladat minden változója a feltételek 1. vagy 2. halmaza által meghatározott lehetséges tartomány valamelyik extremális pontjához rendelhető hozzá. Nézzük meg például, hogyan lehet megtalálni a mesterfeladatban egy μ_i változó oszlopát, amely az 1. feltételi halmaz megengedett tartományának egy

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

extremális pontjához rendelhető hozzá. Mivel x_1 és x_2 az 1. üzem tevékenységéhez kapcsolódik, bármely adott x_1 és x_2 tekinthető az 1. üzem egy javaslataként. Például a

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

pont megfelel az 1. üzem egy olyan javaslatának, amely szerint 2 tonnát termelnének az 1. acélból és 6 tonnát a 2. acélból. Ekkor a μ_i súlyt úgy is tekinthetjük, mint az aktuális termelési tervben a $\mathbf{P}_i$ extremális ponthoz tartozó javaslat arányát. Például mivel

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\mathbf{P}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{P}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{P}_3$$

azt is gondolhatjuk a

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

pontról, hogy az 1. üzem $\mathbf{P}_1$ javaslatának harmadából, az 1. üzem $\mathbf{P}_2$ javaslatának harmadából és az 1. üzem $\mathbf{P}_3$ javaslatának harmadából össze.

Most már leírhatunk egy egyszerű módszert a mesterfeladat bármely változójához tartozó oszlop meghatározására. Tegyük fel, hogy a μ_i súlyhoz tartozó

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

extremális pont oszlopát akarjuk meghatározni. Miként változik a célfüggvény értéke, ha az

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

extremális pont μ_i-szeresét helyettesítjük be? Ha μ_i = 1, akkor

$$\mu_i \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

célfüggvényhez való hozzájárulása $90x_1 + 80x_2$ lesz. Az arányossági feltevés alapján, ha az

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

extremális pont μ_i részét használjuk, akkor az $\mu_i(90x_1 + 80x_2)$ értékkel fog hozzájárulni a célfüggvényhez. Hasonlóan ha μ_i = 1, akkor

$$\mu_i \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

vasérc felhasználása $8x_1 + 6x_2$. Tehát tetszőleges μ_i érték esetén

$$\mu_i \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

a $\mu_i(8x_1 + 6x_2)$ mennyiséget eredményezi a vasérc felhasználási feltétel bal oldalán.

Hogy konkrétak legyünk, használjuk a fenti gondolatmenetet arra, hogy meghatározzuk a

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

extremális ponthoz tartozó μ_3 súly oszlopát a mesterfeladatban. A fenti logika alapján a célfüggvény μ_3-at érintő része $\mu_3[90(2) + 80(6)] = 660\mu_3$. Hasonlóan, μ_3 a vasérc feltétel bal oldalán a $\mu_3[8(2) + 6(6)] = 52\mu_3$ részben jelenik meg. Továbbá μ_3 együtthatója 1 az első konvexitási feltételben, és 0 a másikban. (Ha az olvasó megértette, hogyan kaptuk meg μ_3 oszlopát, nem lesz gondja a továbbiakkal. Ha még bizonytalan, javasoljuk, hogy olvassa el újból az utolsó két oldalt, mielőtt folytatná.)

Most pedig a módosított szimplex módszer és az oszlopgenerálás alkalmazásával megoldjuk a mesterfeladatot. A kiinduló táblára 0. táblaként hivatkozunk. Ekkor $BV(0) = \{s_1, \mu_1, \lambda_1\}$. Tehát

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{ezért} \quad B_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mivel s_1, μ_1 és λ_1 nem jelenik meg a mesterfeladat célfüggvényében, $\mathbf{c}_{BV} = [0 \quad 0 \quad 0]$ és a 0. tábla árnyékárai

$$\mathbf{c}_{BV}B_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Két menetben alkalmazzuk most az oszlopgenerálás ötletét. Először is meghatározzuk, hogy van-e olyan, a feltételek 1. halmazához kapcsolódó μ_i súly, amelynek a kiértékelése kedvező (mivel maximalizálási feladatot oldunk meg, negatív együtthatót keresünk a 0. sorban). A feltételek 1. halmazának egy

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

extremális pontjához rendelhető μ_i súly oszlopa a mesterfeladatban a következő:

$$\begin{aligned} \mu_i \text{ együtthatója a célfüggvényben } &= 90x_1 + 80x_2 \\ \mu_i \text{ oszlopa a feltételekben } &= \begin{bmatrix} 8x_1 + 6x_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ezek alapján az

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ponthoz tartozó μ_i súly oszlopának kiértékelése a 0. táblában:

$$\mathbf{c}_{BV} B_0^{-1} \begin{bmatrix} 8x_1 + 6x_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - (90x_1 + 80x_2) = -90x_1 - 80x_2$$

Mivel

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

eleget kell hogy tegyen a feltételek 1. halmazának (azaz az 1. üzem feltételeinek), a legnegatívabb értékkel kiértékelődő μ_i súly éppen ahhoz az extremális ponthoz tartozik, amelyik optimális megoldása a következő LP feladatnak:

0. tábla
1. üzem részfeladata

$$\begin{aligned} \min\ z &= -90x_1 - 80x_2 \\ \text{f.h.} \quad 3x_1 + x_2 &\le 12 \\ 2x_1 + x_2 &\le 10 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Az 1. üzem részfeladatát grafikusan megoldva kapjuk a $z = -800, x_1 = 0, x_2 = 10$ optimális megoldást. Ez azt jelenti, hogy a

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

extremális ponthoz tartozó μ_i kapta a legnegatívabb kiértékelést. Emlékezzünk, hogy

$$\mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Ez azt jelenti, hogy μ_4 kiértékelése -800 a mesterfeladatban.

Most megnézzük a feltételek 2. halmazához rendelt súlyokat, és megpróbáljuk megtalálni azt a λ_i súlyt, amelynek a legnegatívabb a kiértékelése. A feltételek 2. halmazának egy

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

extremális pontjához rendelhető λ_i oszlopa a mesterfeladatban:

$$\begin{aligned} \lambda_i \text{ együtthatója a célfüggvényben } &= 70x_3 + 60x_4 \\ \lambda_i \text{ oszlopa a feltételekben } &= \begin{bmatrix} 7x_3 + 5x_4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy az

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

extremális ponthoz tartozó λ_i kiértékelése:

$$\mathbf{c}_{BV} B_0^{-1} \begin{bmatrix} 7x_3 + 5x_4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - (70x_3 + 60x_4) = -70x_3 - 60x_4$$

Tudjuk, hogy az

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

eleget kell hogy tegyen a feltételek 2. halmazának. Ezért azt az extremális pontot, amelyikhez a legkedvezőbb kiértékelésű λ_i súly tartozik a következő LP feladat megoldásával kapjuk:

0. tábla
2. üzem részfeladata

$$\begin{array}{lrcrcl} \min z = & -70x_3 & - & 60x_4 & & \\ \text{f.h.} & 3x_3 & + & 2x_4 & \leq & 15 \\ & x_3 & + & x_4 & \leq & 4 \\ & & & x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Ennek az LP feladatnak az optimális megoldása $z = -280, x_3 = 4, x_4 = 0$. Mivel

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_2$$

λ_2 kiértékelése legnegatívabb az összes λ_i közül. Azonban μ_4 kiértékelése negatívabb, mint λ_2 esetén, ezért a μ_4 változó lép be a bázisba (a módosított szimplex módszer szerint). Ehhez elő kell állítanunk μ_4 oszlopát a 0. táblában, akárcsak a 0. tábla jobb oldali vektorát. A 0. táblában μ_4 oszlopa

$$B_0^{-1} \begin{bmatrix} 8(0) + 6(10) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a jobb oldali vektor pedig

$$B_0^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A hányados teszt alapján μ_4 a második feltételben lép be a bázisba. Ekkor $BV(1) = \{s_1, \mu_4, \lambda_1\}$. Mivel

$$E_0 = \begin{bmatrix} 1 & -60 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1^{-1} = E_0 B_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -60 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A célfüggvényben μ_4 együtthatója 90(0) + 80(10) = 800, így az árnyékárak új vektora

$$\mathbf{c}_{BV}B_1^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 800 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -60 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 800 & 0\end{bmatrix}$$

Az aktuális táblában újból megpróbáljuk megtalálni azt a változót, amelynek a kiértékelése a legnegatívabb. Ahogy előzőleg, megoldjuk az aktuális tábla árnyékáraival az 1., illetve 2. üzem részfeladatát. Szintén, ahogy előzőleg, a feltételek 1. halmazából az

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

extremális ponthoz tartozó μ_i súly kiértékelése:

$$\mathbf{c}_{BV}B_1^{-1}\begin{bmatrix}8x_1+6x_2\\1\\0\end{bmatrix} - (90x_1+80x_2)$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 800 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8x_1+6x_2\\1\\0\end{bmatrix} - (90x_1+80x_2) = 800-90x_1-80x_2$$

Mivel az

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

eleget kell hogy tegyen a feltételek 1. halmazának, a legkedvezőbb kiértékeléssel rendelkező μ_i ahhoz az

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

ponthoz tartozik, amely optimális megoldása a következő LP feladatnak:

1. tábla
1. üzem részfeladata

$$\begin{aligned}\min\ z &= 800-90x_1-80x_2\\ \text{f.h.}\quad 3x_1+x_2 &\le 12\\ 2x_1+x_2 &\le 10\\ x_1,x_2 &\ge 0\end{aligned}$$

Ennek az LP feladatnak az optimális megoldása $z=0, x_1=0, x_2=10$. Ez azt jelenti, hogy egyetlen μ_i kiértékelése sem kedvező a bázisba való belépés szempontjából. Most a 2. üzem részfeladatát oldjuk meg egy olyan λ_i megtalálása céljából, amelynek a kiértékelése esetleg kedvező. A feltételek 2. halmaza egy

$$\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}$$

extremális pontjához rendelt λ_i kiértékelése:

$$\mathbf{c}_{BV}B_1^{-1}\begin{bmatrix}7x_3+5x_4\\0\\1\end{bmatrix} - (70x_3+60x_4) = -70x_3-60x_4$$

Mivel

$$\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}$$

eleget kell hogy tegyen a 2. üzem feltételeinek, a legnegatívabb kiértékelést kapó λ_i ahhoz az

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

extremális ponthoz tartozik, amely az 1. tábla 2. üzemre vonatkozó alábbi részfeladatának optimális megoldása:

1. tábla
2. üzem részfeladata

$$\begin{aligned} \min z &= -70x_3 - 60x_4 \\ \text{f.h.} \quad 3x_3 + 2x_4 &\le 15 \\ x_3 + x_4 &\le 4 \\ x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

Ennek az LP feladatnak az optimális megoldása $x_3 = 4, x_4 = 0, z = -280$. Ez azt jelenti, hogy a

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ponthoz tartozó λ_i kapta a -280-as kiértékelést. Mivel

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_2$$

λ_2 kiértékelése -280. Egyetlen μ_i kiértékelése sem negatív, így a legjobb, amit tehetünk, hogy a λ_2 változót léptetjük be a bázisba. Ahhoz, hogy λ_2 belépjen a bázisba, szükségünk van az 1. táblából λ_2 oszlopára és a jobb oldali vektorra. Az 1. tábla λ_2-höz tartozó oszlopa

$$B_1^{-1} \begin{bmatrix} 7(4)+5(0) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -60 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 28 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

jobb oldali vektora pedig

$$B_1^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & -60 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A hányados teszt azt mutatja, hogy λ_2-nek az 1. sorban kell a bázisba lépnie. Így $BV(2) = \{\lambda_2, \mu_4, \lambda_1\}$. Mivel

$$E_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{28} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{28} & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_2^{-1} = E_1 B_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{28} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{28} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -60 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{28} & -\frac{60}{28} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{28} & \frac{60}{28} & 1 \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{c}_{BV} B_2^{-1}$ kiszámításához vegyük észre, hogy λ_2 együtthatója a mesterfeladat célfüggvényében $70x_3 + 60x_4 = 70(4) + 60(0) = 280$. Azt már tudjuk, hogy a mesterfeladat célfüggvényében μ_4 együtthatója 800, λ_1 együtthatója pedig 0. Tehát az árnyékárak új vektora

$$\mathbf{c}_{BV} B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 280 & 800 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{28} & -\frac{60}{28} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{28} & \frac{60}{28} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 200 & 0 \end{bmatrix}$$

A 2. tábla 1. üzemre vonatkozó részfeladatának megoldásával eldöntjük, van-e kedvező kiértékelésű μ_i. Az

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ponthoz tartozó μ_i kiértékelése:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{BV} B_2^{-1} &\begin{bmatrix} 8x_1 + 6x_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - (90x_1 + 80x_2) \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 200 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8x_1 + 6x_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - (90x_1 + 80x_2) = 200 - 10x_1 - 20x_2 \end{aligned}$$

Így az alábbi LP feladathoz jutunk:

2. tábla
1. üzem részfeladata

$$\begin{aligned} \min z &= 200 - 10x_1 - 20x_2 \\ \text{f.h.} \quad & 3x_1 + x_2 \le 12 \\ & 2x_1 + x_2 \le 10 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Ennek az LP feladatnak az optimális megoldása $z = 0, x_1 = 0, x_2 = 10$. Akárcsak az előbb, most sem találtunk a belépés szempontjából kedvező μ_i változót.

Annak megállapításához, hogy vajon az

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

extremális ponthoz tartozó λ_i érdemes-e a bázisba való beléptetésre, vegyük észre, hogy λ_i kiértékelése:

$$\begin{bmatrix} 10 & 200 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7x_3 + 5x_4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - (70x_3 + 60x_4) = -10x_4$$

Mivel az

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

eleget kell hogy tegyen a feltételek 2. halmazának, a legjobb kiértékelést kapó λ_i ahhoz az

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

ponthoz tartozik, amely az alábbi LP feladat optimális megoldása:

2. tábla
2. üzem részfeladata

$$\begin{aligned} \min z &= -10x_4 \\ \text{f.h.} \quad & 3x_3 + 2x_4 \le 15 \\ & x_3 + x_4 \le 4 \\ & x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

Ennek az LP feladatnak az optimális megoldása $z = -40, x_3 = 0, x_4 = 4$. Tehát a

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_3$$

ponthoz tartozó λ_i-nek, azaz λ_3-nak kellene belépnie a bázisba. A λ_3-hoz tartozó oszlop a 2. táblában így kapható:

$$B_2^{-1}\begin{bmatrix} 7(0)+5(4) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{28} & -\frac{60}{28} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{28} & \frac{60}{28} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{28} \\ 0 \\ \frac{8}{28} \end{bmatrix}$$

A 2. tábla jobb oldala:

$$B_2^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{28} & -\frac{60}{28} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{28} & \frac{60}{28} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{28} \\ 1 \\ \frac{8}{28} \end{bmatrix}$$

A hányados teszt szerint λ_3 az 1. feltételben vagy a 3. feltételben léphetne a bázisba. Szabadon választhatunk, legyen az 1. feltétel. Így $BV(3) = \{\lambda_3, \mu_4, \lambda_1\}$. Mivel

$$E_2 = \begin{bmatrix} \frac{28}{20} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_3^{-1} = E_2 B_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{28}{20} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{28} & -\frac{60}{28} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{28} & \frac{60}{28} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{20} & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

A λ_3 súly a

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

extremális ponthoz tartozik, ezért λ_3 együtthatója a mesterfeladat célfüggvényében $70x_3 + 60x_4 = 70(0) + 60(4) = 240$. Mivel μ_4 és λ_1 célfüggvénybeli együtthatóit már ismerjük (800 és 0), ezért $\mathbf{c}_{BV} = \begin{bmatrix} 240 & 800 & 0 \end{bmatrix}$, az árnyékárak új vektora pedig

$$\mathbf{c}_{BV} B_3^{-1} = \begin{bmatrix} 240 & 800 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{20} & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 80 & 0 \end{bmatrix}$$

Ezekkel az árnyékárakkal az

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

extremális ponthoz rendelt λ_i így kiértékelése:

$$\begin{bmatrix} 12 & 80 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8x_1 + 6x_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - (90x_1 + 80x_2) = 80 + 6x_1 - 8x_2$$

A már szokott módon kapjuk az alábbi LP feladatot:

3. tábla
1. üzem részfeladata

$$\begin{aligned} \min z &= 80 + 6x_1 - 8x_2 \\ \text{f.h.} \quad 3x_1 + x_2 &\le 12 \\ 2x_1 + x_2 &\le 10 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Ennek az LP feladatnak az optimális megoldása $z = 0, x_1 = 0, x_2 = 10$. Ez újból azt jelenti, hogy egyetlen μ_i-t sem érdemes beléptetni.

Az új árnyékárakkal most azt nézzük meg, hogy van-e a belépés szempontjából kedvező kiértékelésű λ_i. Ha ilyen λ_i nincs, megtaláltuk az optimális táblát. Az

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

ponthoz tartozó λ_i kiértékelése:

$$\begin{bmatrix} 12 & 80 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7x_3 + 5x_4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - (70x_3 + 60x_4) = 14x_3$$

A megfelelő LP feladat:

3. tábla
2. üzem részfeladata

$$\begin{aligned} \min\ & z = 14x_3 \\ \text{f.h.}\ & 3x_3 + 2x_4 \leq 15 \\ & x_3 + \ \ x_4 \leq 4 \\ & x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Ennek az LP feladatnak az optimális megoldása $z = 0, x_3 = x_4 = 0$. Ez azt jelenti, hogy egyetlen λ_i sem kapott kedvező értékelést. Mivel végül is egyetlen μ_i vagy λ_i kiértékelése sem kedvező, a 3. tábla a mesterfeladat optimális táblája. Tudjuk, hogy $BV(3) = \{\lambda_3, \mu_4, \lambda_1\}$. Így

$$\begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \mu_4 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = B_3^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{20} & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tehát a mesterfeladat optimális megoldása $\lambda_3 = 1, \mu_4 = 1, \lambda_1 = 0$, az összes többi súly pedig 0.

Most felhasználjuk, hogy a feltételek 1. halmaza által meghatározott tartomány előáll extremális pontjainak konvex kombinációjaként, így

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

optimális értékét

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0\mathbf{P}_1 + 0\mathbf{P}_2 + 0\mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

alakban kapjuk meg. Hasonló módon, az optimális

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

is előáll a feltételek 2. halmaza által meghatározott tartomány extremális pontjainak konvex kombinációjaként, mégpedig

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0\mathbf{Q}_1 + 0\mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Tehát a Steelco feladat optimális megoldása $x_2 = 10, x_4 = 4, x_1 = x_3 = 0, z = 1040$. Azaz a Steelco akkor tudja maximalizálni a profitját, ha az 1. üzemben 10 tonnát gyárt a 2. acélból, a 2. üzemben pedig 4 tonnát szintén a 2. acélból.

MEGJEGYZÉSEK

1. Ha a változók k halmazra oszthatók fel, akkor a mesterfeladat a központi feltételekből és k konvexitási feltételből fog állni (egy konvexitási feltétel a változók minden egyes halmazára). Minden tábla esetén k részfeladatot kell megoldani (a változók minden halmazához tartozik a feltételek egy halmaza, azok meghatároznak egy lehetséges tartományt, annak extremális pontjaihoz pedig súlyok vannak hozzárendelve, amelyek éppen a részfeladatban jelennek meg). Ezeknek a részfeladatoknak a megoldása után a módosított szimplex módszert használjuk a legkedvezőbb kiértékelésű súly bázisba való beléptetésére.

2. A dekompozíció egyik fő előnye, hogy gyakran sokkal könnyebb több, viszonylag kis LP feladatot megoldani, mint egy nagyot. Tekintsünk például egy olyan, a 3. példához hasonló esetet, amikor 5 gyár van, mindegyik gyár 50 feltétellel. Tegyük fel, hogy a központi feltételek száma 40. Ekkor a mesterfeladat B^{-1} bázisinverze 45×45-ös méretű lenne, minden részfeladat B^{-1} bázisinverze pedig 50×50-es méretű. Az eredeti LP esetén egy 290×290-es B^{-1} bázisinverzzel kell számolnunk. Nyilvánvaló, hogy egy 290×290-es méretű mátrix tárolása több számítógép-memóriát igényel, mint öt 50×50-es és egy 45×45-ös mátrixé. Ez azt mutatja, hogy a dekompozíció jelentősen csökkenti a tárigényt.

3. A dekompozíciónak van egy érdekes közgazdasági értelmezése is. A 3. példa esetében milyen jelentéssel bírnak a mesterfeladat árnyékárai? Minden egyes tábla esetén a központi feltétel a vasérc mint erőforrás korlátozottságát fejezi ki, a központi feltételhez rendelt árnyékár pedig az a mennyiség, amennyivel a profit növekedne, ha a vasércből egy egységgel több lenne. Megmutatható, hogy bármelyik tábla esetén az i-edik üzem $(i = 1, 2)$ konvexitási feltételéhez tartozó árnyékár előáll úgy is, hogy az i-edik üzemmel kapcsolatos extremális pontokból kikevert terv profitjából levonjuk a kikevert terv által a központi erőforrásból igénybe vett mennyiség árát, amit a központi árnyékárral számolunk ki. Például a 3. táblában az 1. üzem konvexitási feltételének árnyékára 80. Az 1. üzem éppen az $x_1 = 0$ és $x_2 = 10$ tervet alkalmazza. Ez a terv 80(10) = 800\$ profitot eredményez, és $6(10) = 60$ tonna, $60(12) = 720$\$ értékű vasércet használ fel. Tehát az 1. üzem konvexitási feltételének árnyékára $800 - 720 = 80$\$. Ez azt jelenti, hogy ha az 1. üzem súlyát Δ-val csökkentenénk, akkor a profit 80Δ-val csökkenne.

Közgazdasági értelmezést is fűzhetünk a részfeladatok előállításánál használt kiértékelő eljáráshoz. Tegyük fel, hogy a 3. táblánál vagyunk. Vajon mik az előnyök és a költségek, ha megpróbáljuk az

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

extremális ponthoz rendelt μ_i változót bevonni a bázisba? Emlékezhetünk, hogy a 3. tábla esetén a vasérc árnyékára 12, az 1. üzem konvexitási feltételének árnyékára pedig 80 volt. Annak eldöntése során, hogy μ_i belépjen-e a bázisba, mérleget kell vonnunk egyrészt

$$\begin{aligned} \text{a } \mu_i \text{ általi profitnövekedés } &= \text{a } \mu_i \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ profitja} \\ &= 90(\mu_i x_1) + 80(\mu_i x_2) \end{aligned}$$

illetve a μ_i bázisba való bevonásával járó költségek között.

Kétféle költség merül fel, amennyiben μ_i-t beléptetjük a bázisba. Egyrészt 12\$ minden tonna felhasznált vasérc után. Ez összesen $12[8(\mu_i x_1) + 6(\mu_i x_2)]$ költséggel jár. Másrészt

μ_i bázisba való belépésével egy μ_i rész is elvétetik az 1. üzem aktuális tervét kiadó konvex kombináció összsúlyából. A feltétel árnyékárával számolva ez $80\mu_i$ költséget jelent. Így

$$\text{a } \mu_i \text{ bázisba való beléptetésének költsége } = 96\mu_i x_1 + 72\mu_i x_2 + 80\mu_i$$

Ez azt jelenti, hogy μ_i bázisba való beléptetése pontosan akkor jár profitnövekedéssel, ha

$$90\mu_i x_1 + 80\mu_i x_2 > 96\mu_i x_1 + 72\mu_i x_2 + 80\mu_i$$

Mindkét oldalt μ_i-vel elosztva láthatjuk, hogy μ_i kiértékelése pontosan előnyös, ha

$$90x_1 + 80x_2 > 96x_1 + 72x_2 + 80, \qquad \text{azaz} \qquad 0 > 80 + 6x_1 - 8x_2$$

Tehát a legjobb μ_i pontosan az a μ_i lesz, amelyik a $80 + 6x_1 - 8x_2$ függvényt minimalizáló

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

extremális ponthoz tartozik. Valóban, éppen ez a 3. tábla 1. üzemhez tartozó részfeladatának a célfüggvénye.

Ez a tárgyalás is mutatja, hogy a Dantzig–Wolfe dekompozíciós algoritmus a központi feltételek árnyékáraiból kapott központi információkat kombinálja az egyes üzemek konvexitási feltételeinek árnyékárából származó lokális információkkal, és mindeközben arra törekszik, hogy megállapítsa, melyik súlyt érdemes bevonni a bázisba, azaz az egyes üzemekhez tartozó extremális pontokból melyeket érdemes használni.

Feladatok

A csoport

Használjuk a Dantzig–Wolfe dekompozíciós algoritmust a következő feladatok megoldására:

1.

$$\begin{aligned} \max z = 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 & \\ \text{f.h.} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 10 \\ x_2 + x_3 &\le 5 \\ x_1 &\le 3 \\ 2x_2 + x_3 &\le 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \max z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 & \\ \text{f.h.} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 8 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\le 8 \\ x_4 + x_5 &\le 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge 0 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \max z = 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 & \\ \text{f.h.} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\le 6 \\ x_1 + x_2 &\le 2 \\ 2x_1 + x_2 &\le 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

(*Útmutatás:* Olyan megkötés nem volt, hogy ne lehessen a változóknak csak egyetlen halmaza vagy csak egyetlen részfeladat.)

4. Adjunk egy közgazdasági értelmezést arra vonatkozóan, hogy λ_3 kiértékelése miért előnyös a 2. tábla 2. üzemhez tartozó részfeladatában!

5. Mutassunk egy példát arra, hogy az 1. tétel nem teljesül nem korlátos lehetséges tartományú LP feladat esetén!

9.5. A felsőkorlátos szimplex módszer

Az LP feladatok gyakran tartalmaznak $x_i \leq u_i$ alakú feltételeket, ahol u_i konstans. Például termelési-ütemezési feladatokban sok $x_i \leq u_i$ típusú feltétel szerepelhet, ahol

$$x_i = \text{az } i\text{-edik periódus termelése,}$$
$$u_i = \text{az } i\text{-edik periódus termelési kapacitása.}$$

Mivel egy $x_i \leq u_i$ alakú feltétel felső korlátot ír elő az x_i változóra, **felsőkorlát feltételnek** nevezik. Az $x_i \leq u_i$ egy megengedett LP feltétel, így nyilván használhatjuk a közönséges szimplex módszert felsőkorlát feltételeket tartalmazó LP feladatok megoldására. Azonban, ha egy LP feladat nagyszámú felsőkorlát feltételt tartalmaz, az ebben az alfejezetben ismertetendő felsőkorlátos szimplex módszer sokkal hatékonyabb, mint a közönséges szimplex algoritmus.

Ahhoz, hogy egy felsőkorlát feltételeket tartalmazó LP feladatot hatékonyan oldjunk meg, egy x_i nembázis változó esetén a nembázis változókra eddig megengedett $x_i = 0$ mellett az $x_i = u_i$ is megengedett lesz. Ezt a következő trükkel tudjuk véghezvinni: minden olyan x_i változóhoz, amelyik egy $x_i \leq u_i$ felsőkorlát feltételben érintett, bevezetünk egy új x_i' változót az $x_i + x_i' = u_i$, azaz $x_i = u_i - x_i'$ összefüggés alapján. Vegyük észre, hogy $x_i = 0$ esetén $x_i' = u_i$, míg $x_i = u_i$ esetén $x_i' = 0$. Bármikor, amikor azt akarjuk, hogy az x_i az u_i felsőkorlátra kerüljön, egyszerűen az $u_i - x_i'$-vel helyettesítjük x_i-t. Ezt **felsőkorlát helyettesítésnek** nevezzük.

Most már készenállunk a felsőkorlátos szimplex módszer leírására. Tegyük fel, hogy rendelkezésre áll egy bázismegoldás, és hogy egy maximalizálási feladatot oldunk meg. Szokás szerint minden iterációban azt az x_i változót akarjuk növelni, amelyiknek a legnegatívabb az együtthatója a 0. sorban. Háromféle olyan eset vagy szűk keresztmetszet lehetséges, amely korlátozhatja azt a mennyiséget, amivel az x_i-t növelhetjük:

1. szűk keresztmetszet: x_i nem haladhatja meg az u_i felső korlátját.

2. szűk keresztmetszet: x_i egy olyan pontig növekszik, ahonnan már az aktuális bázisváltozók valamelyikét negatívvá változtatná. Az x_i legkisebb olyan értékét, ahonnan valamelyik aktuális bázisváltozó már negatívvá válhatna, megkaphatjuk, ha minden bázisváltozót kifejezünk az x_i nembázis változóval (vegyük észre, hogy ugyanezt az ötletet alkalmaztuk a 4. fejezetben a szimplex algoritmus tárgyalásánál).

3. szűk keresztmetszet: Az x_i egy olyan pontig növekszik, ahonnan már az aktuális bázisváltozók valamelyikét a felső korlátja fölé vinné. Az előző szűk keresztmetszet esethez hasonlóan, x_i-nek az a legkisebb értéke, amelyre a mostani szűk keresztmetszet esete előfordulhat, megkapható a bázisváltozókat x_i-vel kifejezve.

Legyen BN_k $(k = 1,2,3)$ az x_i azon értéke, ahol a k-adik szűk keresztmetszet esete fellép. Ekkor x_i csak a min $\{BN_1, BN_2, BN_3\}$ értékig növelhető. A BN_1, BN_2 és BN_3 értékek közül a legkisebbet eldöntő szűk keresztmetszetnek nevezik. Ha az eldöntő szűk keresztmetszet BN_1, akkor végrehajtjuk a felsőkorlát helyettesítést x_i-re, azaz x_i helyébe $u_i - x_i'$ kerül. Ha az eldöntő szűk keresztmetszet BN_2, akkor beléptetjük x_i-t a bázisba, éppen abba a sorba, amelyik a BN_2 felléptét okozó bázisváltozóhoz tartozott. Ha az eldöntő szűk keresztmetszet BN_3, akkor arra az x_j változóra, amelyik $x_i = BN_3$ esetén éppen eléri a felső korlátját, végrehajtjuk a felsőkorlát helyettesítést, azaz x_j helyébe $u_j - x_j'$ kerül. Ezután beléptetjük x_i-t a bázisba, éppen abba a sorba, ahol x_j volt a bázisváltozó.

A fenti eljárás végrehajtása után megvizsgáljuk az új 0. sort. Ha minden változóhoz nemnegatív együttható tartozik a 0. sorban, akkor egy optimális táblához jutottunk. Egyébként megpróbáljuk növelni a 0. sorban a legnegatívabb együtthatóval rendelkező változót.

Az eljárásunk biztosítja (BN_1 és BN_3 által), hogy egyetlen felsőkorlát feltételt sem sértünk meg, továbbá (BN_2 által), hogy a nemnegativitási feltételek mindig teljesülni fognak.

4. PÉLDA Oldjuk meg a következő LP feladatot:

$$\begin{aligned}
\max z &= 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
\text{f.h.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 \le 10 \\
& x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 \le 6 \\
& 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 20 \\
& x_1 \le 4 \\
& x_2 \le 3 \\
& x_3 \le 1 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

Megoldás Ehhez a feladathoz a kiinduló tábla a 3. táblázatban van megadva. Mivel x_1-nek van a

3. TÁBLÁZAT Kiinduló tábla a 4. példához

	Bázis-változó
$z - 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0$	$z = 0$
$2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 10$	$s_1 = 10$
$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + s_2 = 6$	$s_2 = 6$
$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + s_3 = 20$	$s_3 = 20$

legnegatívabb együtthatója a 0. sorban, megpróbáljuk növelni x_1-et, amennyire csak lehet. Az x_1-re vonatkozó három szűk keresztmetszet a következőképpen számolható: x_1 nem lépheti túl felső korlátját, azaz 4-et, így $BN_1 = 4$. A BN_2 meghatározásához kifejezzük az aktuális bázisváltozókat x_1 függvényében:

$$\begin{aligned}
s_1 &= 10 - 2x_1 && (s_1 \ge 0 \text{ akkor és csak akkor, ha } x_1 \le 5) \\
s_2 &= 6 - x_1 && (s_2 \ge 0 \text{ akkor és csak akkor, ha } x_1 \le 6) \\
s_3 &= 20 - 2x_1 && (s_3 \ge 0 \text{ akkor és csak akkor, ha } x_1 \le 10)
\end{aligned}$$

Így $BN_2 = \min\{5, 6, 10\} = 5$. Mivel az aktuális bázisváltozóknak $(\{s_1, s_2, s_3\})$ nincs felső korlátja, BN_3-nak nincs értéke. Ekkor az eldöntő szűk keresztmetszet $\min\{4, 5\} = 4 = BN_1$. Tehát egy felsőkorlát helyettesítést kell végrehajtanunk x_1-re, x_1 helyébe $4 - x_1'$ kerül. Az így keletkezett tábla a 4. táblázatban látható.

4. TÁBLÁZAT x_1 helyébe $4 - x_1'$-et írva

	Bázis-változó
$z + 4x_1' - 2x_2 - 3x_3 = 16$	$z = 16$
$-2x_1' + x_2 + x_3 + s_1 = 2$	$s_1 = 2$
$-x_1' + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + s_2 = 2$	$s_2 = 2$
$-2x_1' + 2x_2 + 4x_3 + s_3 = 12$	$s_3 = 12$

Mivel x_3-nak van a legnegatívabb együtthatója a 0. sorban, megpróbáljuk növelni x_3-at amennyire csak lehet. Az x_3-ra vonatkozó szűk keresztmetszeteket a következőképpen számoljuk: x_3 nem haladhatja meg felsőkorlátja értékét, azaz 1-et, így $BN_1 = 1$. A BN_2-höz kifejezzük az aktuális bázisváltozókat x_3 függvényében:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 2 - x_3 && (s_1 \geq 0 \text{ akkor és csak akkor, ha } x_3 \leq 2)\\
s_2 &= 2 - \tfrac{1}{2}x_3 && (s_2 \geq 0 \text{ akkor és csak akkor, ha } x_3 \leq 4)\\
s_3 &= 12 - 4x_3 && (s_3 \geq 0 \text{ akkor és csak akkor, ha } x_3 \leq 3)
\end{aligned}
$$

Tehát $BN_2 = \min\{2,4,3\} = 2$. Mivel az s_1, s_2 és s_3 változóknak nincs felső korlátjuk, most sincs BN_3. Az eldöntő szűk keresztmetszet $\min\{1,2\} = BN_1 = 1$, azaz egy felsőkorlát helyettesítést hajtunk végre x_3-ra, x_3 helyébe $1 - x_3'$ kerül. Ennek eredményeként kapjuk az 5. táblázatot.

Mivel x_2-nek van most a legnegatívabb együtthatója a 0. sorban, x_2 növelésével próbálkozunk.

A szűk keresztmetszetek számítása a következő: x_2 nem haladhatja meg felső korlátjának értékét, azaz 3-at, így $BN_1 = 3$. Ami BN_2-t illeti:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 1 - x_2 && (s_1 \geq 0 \text{ akkor és csak akkor, ha } x_2 \leq 1)\\
s_2 &= \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x_2 && (s_2 \geq 0 \text{ akkor és csak akkor, ha } x_2 \leq 3)\\
s_3 &= 8 - 2x_2 && (s_3 \geq 0 \text{ akkor és csak akkor, ha } x_2 \leq 4)
\end{aligned}
$$

Tehát $BN_2 = \min\{1,3,4\} = 1$. Vegyük észre, hogy BN_2 úgy áll elő, hogy s_1 értéke van nullára lenyomva. Mivel most sincs az aktuális bázisváltozók egyikének sem felső korlátja, nincs BN_3 sem. Az eldöntő szűk keresztmetszet $\min\{3,1\} = 1 = BN_2$, így x_2 fog belépni a bázisba, mégpedig abba a sorba, ahol s_1 volt a bázisváltozó (1. sor). A báziscsere után kapott új szimplex táblát a 6. táblázat mutatja. Mivel minden változónak nemnegatív együtthatója van a 0. sorban, ez egy optimális tábla. Tehát az LP feladat optimális megoldása $z = 21, s_2 = 1, x_2 = 1, s_3 = 6, x_1' = 0, s_1 = 0, x_3' = 0$. Mivel $x_1' = 4 - x_1$ és $x_3' = 1 - x_3$, így $x_1 = 4$ és $x_3 = 1$.

5. TÁBLÁZAT
x_3 helyébe $1 - x_3'$-t írva

	Bázisváltozó
$z + 4x_1' - 2x_2 + 3x_3' = 19$	$z = 19$
$-2x_1' + x_2 - x_3' + s_1 = 1$	$s_1 = 1$
$-x_1' + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3' + s_2 = \frac{3}{2}$	$s_2 = \frac{3}{2}$
$-2x_1' + 2x_2 - 4x_3' + s_3 = 8$	$s_3 = 8$

6. TÁBLÁZAT
A 4. példa optimális táblája

	Bázisváltozó
$z + x_3' + 2s_1 = 21$	$z = 21$
$-2x_1' + x_2 - x_3' + s_1 = 1$	$x_2 = 1$
$-\frac{1}{2}s_1 + s_2 = 1$	$s_2 = 1$
$2x_1' - 2x_3' - 2s_1 + s_3 = 6$	$s_3 = 6$

5. PÉLDA Oldjuk meg a következő LP feladatot:

$$\begin{aligned} \max z = \quad & 6x_3 \\ \text{f.h.} \quad x_1 \quad - \quad & x_3 = 6 \\ x_2 + & 2x_3 = 8 \end{aligned}$$

$$x_1 \leq 8, x_2 \leq 10, x_3 \leq 5; \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Megoldás A célfüggvénynek a 0. sor standard formájába történő átírása után a 7. táblázatot kapjuk. Szerencsére a $z = 0, x_1 = 6, x_2 = 8, x_3 = 0$ lehetséges bázismegoldás rögtön rendelkezésre áll. Folytathatjuk tehát a felsőkorlátos szimplex módszerrel. Mivel x_3-nak van a legnegatívabb együtthatója a 0. sorban, megpróbáljuk növelni x_3-at. Az x_3 nem haladhatja meg felső korlátját, azaz 5-öt, így $BN_1 = 5$. A BN_2 meghatározása:

7. TÁBLÁZAT
Kiinduló tábla az 5. példához

	Bázis-változó
$z \quad - 6x_3 = 0$	$z = 0$
$x_1 \quad - \quad x_3 = 6$	$x_1 = 6$
$x_2 + 2x_3 = 8$	$x_2 = 8$

$$\begin{aligned} x_1 &= 6 + x_3 \qquad (x_1 \geq 0 \text{ akkor és csak akkor, ha } x_3 \geq -6) \\ x_2 &= 8 - 2x_3 \qquad (x_2 \geq 0 \text{ akkor és csak akkor, ha } x_3 \leq 4) \end{aligned}$$

Tehát az aktuális bázisváltozók addig maradnak nemnegatívak, amíg $x_3 \leq 4$. Ezért $BN_2 = 4$. Ami BN_3-at illeti, $x_1 \leq 8$ pontosan akkor, ha $6 + x_3 \leq 8$, azaz $x_3 \leq 2$. Hasonlóan $x_2 \leq 10$ pontosan akkor, ha $8 - 2x_3 \leq 10$, azaz $x_3 \geq -1$. Tehát $x_3 \leq 2$ esetén marad minden bázisváltozó kisebb vagy egyenlő, mint a felső korlátja, így $BN_3 = 2$. Vegyük észre, hogy BN_3 pont akkor következik be, amikor az x_1 bázisváltozó eléri a felső korlátját. A döntő szűk keresztmetszet $\min\{5, 4, 2\} = 2 = BN_3$, így 2 az a legnagyobb érték, ameddig x_3-at emelni tudjuk, és a szűk keresztmetszet úgy lép fel, hogy x_1 eléri felső korlátját, azaz 8-at. Ezért egy felsőkorlát helyettesítést hajtunk végre x_1-re, x_1 helyébe $8 - x_1'$ kerül. Az így előálló tábla a következő:

$$\begin{aligned} z - 6x_3 &= 0 \\ -x_1' - \quad x_3 &= -2 \\ x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

A $-x_1' - x_3 = -2$ kifejezést átírva $x_1' + x_3 = 2$ alakra, kapjuk a 8. táblázatot.

8. TÁBLÁZAT
x_1 helyébe $8 - x_1'$ kerül

	Bázis-változó
$z \quad - 6x_3 = 0$	$z = 0$
$x_1' \quad + x_3 = 2$	$x_1' = 2$
$x_2 + 2x_3 = 8$	$x_2 = 8$

Mivel a BN_3-at okozó x_1 változó az 1. sorban volt bázisváltozó, az x_3-at szintén az 1. sorba visszük be bázisváltozóként. A báziscsere után a 9. táblázatot kapjuk, amely optimális. Tehát az LP feladat optimális megoldása $z = 12, x_3 = 2, x_2 = 4, x_1' = 0$. Mivel $x_1' = 0$, ezért $x_1 = 8 - x_1' = 8$.

9. TÁBLÁZAT
Az 5. példa optimális táblája

	Bázis-változó
$z + 6x_1' = 12$	$z = 12$
$x_1' + x_3 = 2$	$x_3 = 2$
$-2x_1' + x_2 = 4$	$x_2 = 4$

A felsőkorlátos szimplex módszer hatékonyságának illusztrálásaként tegyük fel, hogy egy olyan LP feladatot (nevezzük LP1-nek) kell megoldanunk, amelynek 100 változója van, mindegyik felsőkorlát feltétellel, és 5 további feltétele. Ha a módosított szimplex módszerrel oldanánk meg az LP1 feladatot, akkor a B^{-1} bázisinverz minden tábla esetén egy 105×105-ös mátrix lenne. Azonban, ha a felsőkorlátos szimplex módszert használjuk, akkor B^{-1} minden tábla esetén egy 5×5-ös mátrix. Bár az eldöntő szűk keresztmetszet iterációnkénti kiszámolása bonyolultabb, mint a közönséges hányados teszt esetén, az LP1 feladat felsőkorlátos szimplex módszerrel való megoldása még így is sokkal hatékonyabb, mint a közönséges módosított szimplex módszer használatával.

Feladatok

A felsőkorlátos szimplex módszer alkalmazásával oldjuk meg a következő LP feladatotokat:

A csoport

1.
$$
\begin{aligned}
\max z = {} & 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\
\text{f.h.}\quad & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \le 9 \\
& 4x_1 - x_2 - x_3 + x_5 \le 6 \\
& 2x_2 + x_3 \le 5 \\
& x_1 \le 2 \\
& x_2 \le 3 \\
& x_3 \le 4 \\
& x_4 \le 5 \\
& x_5 \le 7 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0
\end{aligned}
$$

2.
$$
\begin{aligned}
\min z = {} & -4x_1 - 9x_2 \\
\text{f.h.}\quad & 3x_1 + 5x_2 \le 6 \\
& 5x_1 + 6x_2 \le 10 \\
& 2x_1 - 3x_2 \le 4 \\
& x_1 \le 2 \\
& x_2 \le 1 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

3.
$$
\begin{aligned}
\max z = {} & 4x_1 + 3x_2 \\
\text{f.h.}\quad & 2x_1 - x_2 \le 1 \\
& x_1 + 6x_2 \le 6 \\
& x_2 \le 5 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

4. Tegyük fel, hogy egy LP feladat $x_j \ge L_j$ alakú alsókorlát feltételeket tartalmaz. Javasoljunk egy algoritmust, amely segítségével hatékonyan oldható meg egy ilyen feladat!

9.6. Karmarkar módszere LP feladatok megoldására

Miként azt a 4.13. alfejezetben már tárgyaltuk, Karmarkar LP feladatok megoldására szolgáló módszere polinomiális idejű algoritmus. Ebben különbözik a szimplex módszertől, amely exponenciális idejű algoritmus. Az ellipszoid módszertől eltérően (amely egy másik polinomiális algoritmus), úgy tűnik, hogy a Karmarkar-módszer sok LP feladatot gyorsabban old meg, mint a szimplex algoritmus. Ebben az alfejezetben azokat az alapfogalmakat mutatjuk be, amelyeken a Karmarkar-módszer nyugszik. Megjegyezzük, hogy a Karmarkar-módszer számos változata számítástechnikailag sokkal hatékonyabb az itt bemutatandó változatnál. A célunk egyszerűen az, hogy megismertessük az olvasót a Karmarkar-módszer által használt izgalmas ötletekkel. A Karmarkar-módszert sokkal részletesebben tárgyalja Hooker (1986), Parker és Rardin (1988), és Murty (1989).

Karmarkar módszere a következő alakú LP feladatokra alkalmazható:

$$\begin{aligned} & \min z = \mathbf{cx} \\ \text{f.h.} \quad & A\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ & x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned} \tag{31}$$

A (31) feladatban $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n]^T$, A egy $m \times n$ méretű mátrix, $\mathbf{c} = [\,c_1\ c_2\ \ldots\ c_n\,]$, és $\mathbf{0}$ a csak 0 elemekből álló n-dimenziós oszlopvektor.

Az LP feladat az alábbi feltételeknek is eleget kell hogy tegyen:

$$[\tfrac{1}{n} \quad \tfrac{1}{n} \quad \ldots \quad \tfrac{1}{n}]^T \quad \text{lehetséges megoldás} \tag{32}$$

$$\text{Az optimális } z \text{ érték} = 0 \tag{33}$$

Bár eléggé valószínűtlen, hogy egy LP feladat (31) alakú legyen, és a (32)–(33) feltételeknek is eleget tegyen, könnyen megmutatható, hogy bármely feladat olyan formára hozható, hogy (31)–(33) teljesüljön. Ezt ennek az alfejezetnek a végén fogjuk megmutatni.

A következő három fogalom kulcsszerepet játszik a Karmarkar-módszerben:

1. Adott vektor vetítése az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ feltételnek eleget tevő $\mathbf{x}$ pontok halmazára.

2. Karmarkar centralizáló transzformációja.

3. Karmarkar potenciálfüggvénye.

Most az első két fogalmat tárgyaljuk, Karmarkar potenciálfüggvényének tárgyalását az alfejezet végére hagyjuk. Mindenekelőtt szükségünk van egy definícióra.

DEFINÍCIÓ

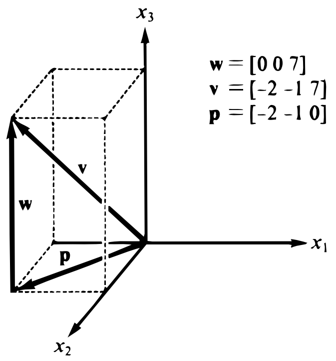
Az S **n-dimenziós egységszimplex** azoknak az $[x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n]^T$ pontoknak a halmaza, amelyek eleget tesznek az $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ és $x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n$ feltételeknek.

A vetítés

Tegyük fel, hogy adott egy $\mathbf{x}^0$ pont, amely eleget tesz (31)-nek, és el akarunk mozdulni $\mathbf{x}^0$-ból egy másik lehetséges pontba (legyen $\mathbf{x}^1$) úgy, hogy eközben egy rögzített $\mathbf{v}$ vektorra nézve $\mathbf{vx}$ értéke nagyobb legyen. Tegyük fel, hogy $\mathbf{x}^1$-be $\mathbf{x}^0$-ból $\mathbf{d} = [d_1 \quad d_2 \quad \ldots \quad d_n]$ irányba való elmozdulással jutunk. Ahhoz, hogy $\mathbf{x}^1$ lehetséges megoldás legyen, $\mathbf{d}$ eleget kell, hogy tegyen az $A\mathbf{d} = \mathbf{0}$ és $d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 0$ feltételeknek. Ha azt a $\mathbf{d}$ irányt választjuk, amely megoldja a

$$\begin{aligned} & \max \mathbf{vd} \\ & \text{f.h.} \quad A\mathbf{d} = \mathbf{0} \\ & d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 0 \\ & \|\mathbf{d}\| = 1 \end{aligned}$$

5. ÁBRA
A $[-2 \quad -1 \quad 7]$ vektor vetítése az $x_3 = 0$ síkra



optimalizálási feladatot, akkor éppen abban a lehetséges irányban mozdulunk el, amelynél **vx** egységnyi elmozdulásra eső növekedése maximális. Az a **d** irány, amely megoldja ezt az optimalizálási feladatot, a **v** vektornak az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ és $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ feltételeknek eleget tevő $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n]^T$ pontok halmazára történő **vetítésével** kapható meg. A **v** vektornak az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ és $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ feltételeknek eleget tevő **x** pontok halmazára való vetítése $[I - B^T(BB^T)^{-1}B]\mathbf{v}$ alakban nyerhető, ahol B az az $(m+1) \times n$-es mátrix, amelynek első m sora éppen A, utolsó sora pedig a csupa 1 elemből álló vektor.

Mit jelent az geometriailag, hogy egy **v** vektort az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ feltételnek eleget tevő **x** pontok halmazára vetítünk? Megmutatható, hogy bármely **v** vektort egyértelműen fel lehet írni $\mathbf{v} = \mathbf{p} + \mathbf{w}$ alakban, ahol **p** kielégíti az $A\mathbf{p} = \mathbf{0}$ feltételt, a **w** pedig merőleges az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ feltételnek eleget tevő összes **x** vektorra. Ekkor **p** a **v** vektor vetítése az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ feltételnek eleget tevő **x** pontok halmazára. Egy példát láthatunk erre az 5. ábrán, ahol a $\mathbf{v} = [-2 \quad -1 \quad 7]$ vektort vetítjük az $x_3 = 0$ feltételnek eleget tevő háromdimenziós vektorok halmazára (az x_1-x_2-síkra). Ebben az esetben a **v** vektort $\mathbf{v} = [-2 \quad -1 \quad 0] + [0 \quad 0 \quad 7]$ alakban bontjuk fel. Tehát $\mathbf{p} = [-2 \quad -1 \quad 0]$. Könnyen belátható, hogy **p** az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ feltételnek eleget tevő **x** pontok halmazának az a pontja, amely a legközelebb fekszik **v**-hez. Ez az 5. ábrán is látszik.

Karmarkar centralizáló transzformációja

Legyen adott az S egy olyan $\mathbf{x}^k = [x_1^k \quad x_2^k \quad \ldots \quad x_n^k]$ pontja, amely lehetséges megoldása (31)-nek, és $x_j^k > 0, j = 1, 2, \ldots, n$. Ekkor az $\mathbf{x}^k$ ponthoz rendelt **centralizáló transzformációt** $f([x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n] \,|\, \mathbf{x}^k)$ alakban írjuk fel. Ha $\mathbf{x}^k$ az S pontja, akkor egy $[x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n]^T$ S-beli pontot $f([x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n] \,|\, \mathbf{x}^k)$ egy $[y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_n]^T$ S-beli pontba transzformál, ahol

$$y_j = \frac{\dfrac{x_j}{x_j^k}}{\displaystyle\sum_{r=1}^{r=n} \frac{x_r}{x_r^k}} \tag{34}$$

Legyen $\mathrm{Diag}(\mathbf{x}^k)$ az az $n \times n$-es mátrix, amelynek minden diagonálison kívüli eleme 0, és $\mathrm{Diag}(\mathbf{x}^k)_{ii} = x_i^k$. Megmutatható, hogy a (34) által meghatározott centralizáló transzformáció az 1. lemmában felsorolt tulajdonságokkal rendelkezik.

1. SEGÉDTÉTEL Karmarkar centralizáló transzformációjának a következő tulajdonságai vannak:

$$f(\mathbf{x}^k\,|\,\mathbf{x}^k) = [\tfrac{1}{n} \quad \tfrac{1}{n} \quad \dots \quad \tfrac{1}{n}]^T. \tag{35}$$

$$\text{Ha } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}',\ \text{akkor } f(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{x}^k) \neq f(\mathbf{x}'\,|\,\mathbf{x}^k) \tag{36}$$

$$f(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{x}^k) \in S \tag{37}$$

$$\text{Bármely } [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n]^T \text{ ponthoz az } S\text{-ből egyértelműen létezik egy} \tag{38}$$

$$[x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T \text{pont az } S\text{-ből, amelyre}$$

$$f([x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T\,|\,\mathbf{x}^k) = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n]^T \tag{38$'$}$$

Az $[x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T$ pont

$$x_j = \frac{x_j^k y_j}{\sum\limits_{r=1}^{r=n} x_r^k y_r}$$

alakban kapható.

Ha $[x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T$ és $[y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n]^T$ eleget tesznek (38$'$)-nek, akkor úgy is írhatjuk, hogy $f^{-1}([y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n]^T\,|\,\mathbf{x}^k) = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T$.

$$\begin{gathered}\text{Az } S \text{ egy } \mathbf{x} \text{ pontjára pontosan akkor teljesül } A\mathbf{x} = \mathbf{0}, \text{ ha} \\ A[\mathrm{Diag}(\mathbf{x}^k)]f(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{x}^k) = 0\end{gathered} \tag{39}$$

(Az 1. segédtétel bizonyítását 5. feladatként adjuk fel.)

A centralizáló transzformáció illusztrálásaként, tekintsük a következő LP feladatot:

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 + 3x_2 - 3x_3 \\ \text{f.h.} \qquad & x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + {} & x_2 + x_3 = 1 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned} \tag{40}$$

Ez az LP feladat (31) alakú; az $[\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}]^T$ pont lehetséges megoldás, és a feladat optimális z értéke 0. Az $[\frac{1}{4} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{8}]$ lehetséges pont a következő transzformációt határozza meg:

$$f\left([x_1 \quad x_2 \quad x_3] \;\middle|\; \begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8}\end{bmatrix}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{4x_1}{4x_1 + \frac{8x_2}{3} + \frac{8x_3}{3}} & \dfrac{\frac{8x_2}{3}}{4x_1 + \frac{8x_2}{3} + \frac{8x_3}{3}} & \dfrac{\frac{8x_3}{3}}{4x_1 + \frac{8x_2}{3} + \frac{8x_3}{3}} \end{bmatrix}$$

Például

$$f\left(\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8}\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\frac{12}{28} & \frac{8}{28} & \frac{8}{28}\end{bmatrix}.$$

Az $x_1, x_2, \dots, x_n$ változókat *eredeti* térnek, az $y_1, y_2, \dots, y_n$ változókat pedig *transzformált* térnek tekinthetjük. Az $y_1, y_2, \dots, y_n$ változókkal képzett egységszimplexet transzformált egységszimplexnek nevezzük. Nézzük most (35)–(39) intuitív értelmét. A (35) egyenlőség azt jelenti, hogy $f(\cdot\,|\,\mathbf{x}^k)$ az $\mathbf{x}^k$ pontot a transzformált egységszimplex „középpontjába” képezi le. A (36)–(37) egyenlőségek azt mondják, hogy S minden pontja a transzformált egységszimplex egy pontjába kerül, viszont S két különböző pontjára nem kaphatjuk a transzformált egységszimplex ugyanazon pontját (azaz f kölcsönösen egyértelmű leképezés). A (38) azt jelenti, hogy a transzformált egységszimplex bármely $\mathbf{y}$ pontjához létezik olyan $\mathbf{x}$ pont S-ből, amely éppen az $\mathbf{y}$-ba transzformálódik. Sőt, annak az $\mathbf{x}$-nek, amely $\mathbf{y}$-ba transzformálódik, a képlete is adott. A (36)–(38) összefüggésekből tehát az következik, hogy f egy kölcsönösen egyértelmű leképezés S-ről S-re. Végül a (39) azt állítja, hogy az eredeti feladat lehetséges pontjai a transzformált egységszimplex azon $\mathbf{y}$ pontjaihoz rendelhetők hozzá, amelyekre $A[\mathrm{Diag}(\mathbf{x}^k)]\mathbf{y} = \mathbf{0}$ teljesül.

A Karmarkar-módszer leírása és egy példa

Tegyük fel, hogy egy optimálishoz közeli lehetséges ponttal is megelégszünk, amelyre a z érték $< \varepsilon$ (valamilyen kis ε esetén). A Karmarkar-módszer a következőképpen működik:

1. lépés Induljunk ki az $\mathbf{x}^0 = [\frac{1}{n} \quad \frac{1}{n} \quad \dots \quad \frac{1}{n}]^T$ lehetséges pontból, és legyen $k = 0$.

2. lépés Ha $\mathbf{cx}^k < \varepsilon$, álljunk le. Különben menjünk a 3. lépésre.

3. lépés Állítsuk elő a transzformált egységszimplex új

$$\mathbf{y}^{k+1} = [y_1^{k+1} \quad y_2^{k+1} \quad \dots \quad y_n^{k+1}]^T$$

pontját a következőképpen:

$$\mathbf{y}^{k+1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}^T - \frac{\theta(I - P^T(PP^T)^{-1}P)[\mathrm{Diag}(\mathbf{x}^k)]\mathbf{c}^T}{\|\mathbf{c}_p\| \sqrt{n(n-1)}}$$

Ahol $\|\mathbf{c}_p\|$ az $(I - P^T(PP^T)^{-1}P)[\mathrm{Diag}(\mathbf{x}^k)]\mathbf{c}^T$ vektor hossza, P olyan $(m+1) \times n$ méretű mátrix, amelynek első m sora $A[\mathrm{Diag}(\mathbf{x}^k)]$, az utolsó sorának minden eleme pedig 1. Továbbá a $0 < \theta < 1$ értékét úgy választjuk meg, hogy biztosítva legyen az algoritmus konvergenciája. $\theta = \frac{1}{4}$ esetén biztosan tudjuk a konvergenciát.

Ezzel az eredeti térben is kapunk egy új $\mathbf{x}^{k+1}$ pontot: azt, amelyiket a centralizáló transzformáció az $\mathbf{y}^{k+1}$ ponthoz rendel. Tehát $\mathbf{x}^{k+1} = f^{-1}(\mathbf{y}^{k+1} \,|\, \mathbf{x}^k)$. Növeljük eggyel k értékét, és menjünk vissza a 2. lépésre.

MEGJEGYZÉSEK

1. A 3. lépésben a transzformált egységszimplex középpontjából azzal az iránnyal ellentétesen mozdulunk el, amelyet úgy kapunk, hogy levetítjük a $\mathrm{Diag}(\mathbf{x}^k)\mathbf{c}^T$ vektort a lehetséges tartomány transzformáltjára, azaz azon $\mathbf{y}$ pontok halmazára, amelyekre $A[\mathrm{Diag}(\mathbf{x}^k)]\mathbf{y} = \mathbf{0}$ teljesül. A vetítés tárgyalásából következik, hogy így még a lehetséges tartományban vagyunk (a transzformált térben) és olyan irányba mozdulunk el, hogy $[\mathrm{Diag}(\mathbf{x}^k)]\mathbf{c}^T$ csökkenési rátája maximális.

2. Azzal, hogy a transzformált egységszimplex középpontjából

$$\frac{\theta}{\sqrt{n(n-1)}}$$

távolságra mozdulunk el, biztosítjuk, hogy $\mathbf{y}^{k+1}$ a transzformált egységszimplex belsejében marad.

3. Amikor Karmarkar centralizáló transzformációja inverzének alkalmazásával az $\mathbf{y}^{k+1}$ pontot visszatranszformáljuk az $\mathbf{x}^{k+1}$ pontba, akkor a vetítés definíciójából és (39)-ből következőleg $\mathbf{x}^{k+1}$ az eredeti LP feladat egy lehetséges megoldása lesz (lásd a 6. feladatot).

4. Miért a $[\mathrm{Diag}(\mathbf{x}^k)]\mathbf{c}^T$ vektort vetítjük a transzformált lehetséges tartományra, miért nem a $\mathbf{c}^T$ vektort? A válasszal erre a kérdésre várnunk kell Karmarkar potenciálfüggvényének tárgyalásáig. A 7. feladat egy másik magyarázatot ad arra, hogy miért a $[\mathrm{Diag}(\mathbf{x}^k)]$ vektort vetítjük a $\mathbf{c}^T$ helyett.

A (40) feladatra alkalmazva, $\varepsilon = 0.10$ választással, most végigszámoljuk a Karmarkar-módszer első iterációját.

A Karmarkar-módszer első iterációja

1. lépés $\mathbf{x}^0 = [\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}]^T$ és $k = 0$.

2. lépés $\mathbf{x}^0$ esetén $z = \frac{1}{3} > 0.10$, így a 3. lépésben kell folytatnunk.

3. lépés

$$A = [0 \quad 1 \quad -1], \qquad \text{Diag}(\mathbf{x}^k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$A[\text{Diag}(\mathbf{x}^k)] = [0 \quad \tfrac{1}{3} \quad -\tfrac{1}{3}], \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$PP^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad (PP^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$(I - P^T(PP^T)^{-1}P) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c} = [1 \quad 3 \quad -3]$$

$$[\text{Diag}\ \mathbf{x}^k]\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(I - P^T(PP^T)^{-1}P)[\text{Diag}\ \mathbf{x}^k]\mathbf{c}^T = \left[\tfrac{2}{9} \quad -\tfrac{1}{9} \quad -\tfrac{1}{9}\right]$$

Ekkor ($\theta = 0.25$ értéket alkalmazva), azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{y}^1 = [\tfrac{1}{3} \quad \tfrac{1}{3} \quad \tfrac{1}{3}]^T - \frac{0.25[\frac{2}{9} \quad -\frac{1}{9} \quad -\frac{1}{9}]^T}{\sqrt{3(2)}\|[\frac{2}{9} \quad -\frac{1}{9} \quad -\frac{1}{9}]\|}$$

Felhasználva, hogy

$$\begin{aligned} \|[\tfrac{2}{9} \quad -\tfrac{1}{9} \quad -\tfrac{1}{9}]\|^T &= \sqrt{(\tfrac{2}{9})^2 + (-\tfrac{1}{9})^2 + (-\tfrac{1}{9})^2} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{9} \end{aligned}$$

egyszerűsíthetünk:

$$\mathbf{y}^1 = [\tfrac{1}{3} \quad \tfrac{1}{3} \quad \tfrac{1}{3}]^T - [\tfrac{6}{72} \quad -\tfrac{3}{72} \quad -\tfrac{3}{72}]^T = [\tfrac{1}{4} \quad \tfrac{3}{8} \quad \tfrac{3}{8}]^T$$

A (38′) összefüggést alkalmazva az $\mathbf{x}^1 = [x_1^1 \quad x_2^1 \quad x_3^1]^T$ pont is előáll a következő alakban:

$$x_1^1 = \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{4})}{\frac{1}{3}(\frac{1}{4}) + \frac{1}{3}(\frac{3}{8}) + \frac{1}{3}(\frac{3}{8})} = \frac{1}{4}$$
$$x_2^1 = \frac{\frac{1}{3}(\frac{3}{8})}{\frac{1}{3}(\frac{1}{4}) + \frac{1}{3}(\frac{3}{8}) + \frac{1}{3}(\frac{3}{8})} = \frac{3}{8}$$
$$x_3^1 = \frac{\frac{1}{3}(\frac{3}{8})}{\frac{1}{3}(\frac{1}{4}) + \frac{1}{3}(\frac{3}{8}) + \frac{1}{3}(\frac{3}{8})} = \frac{3}{8}$$

Tehát $\mathbf{x}^1 = [\frac{1}{4} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{8}]^T$. A $\mathbf{x}^1 = \mathbf{y}^1$ azonosság mindig is teljesülni fog (lásd a 3. feladatot), de $k > 1$ esetén $\mathbf{x}^k$ már nem feltétlenül azonos az $\mathbf{y}^k$ ponttal. Vegyük észre, hogy $\mathbf{x}^1$ esetén $z = \frac{1}{4} + 3(\frac{3}{8}) - 3(\frac{3}{8}) = \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ (a célfüggvény z értéke $\mathbf{x}^0$ esetén).

A potenciálfüggvény

Mivel a $[\mathrm{Diag}(\mathbf{x}^k)]\mathbf{c}^T$ vektort vetítjük le $\mathbf{c}^T$ helyett, egyáltalán nem lehetünk biztosak abban, hogy a Karmarkar-módszer minden iterációjában csökken a célfüggvény z értéke. Valóban előfordulhat, hogy $\mathbf{cx}^{k+1} > \mathbf{cx}^k$. Annak magyarázatához, hogy a Karmarkar-módszer miért a $[\mathrm{Diag}(\mathbf{x}^k)]\mathbf{c}^T$ vektort vetíti le, meg kell ismerkednünk a Karmarkar potenciálfüggvénnyel. Egy $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T$ pontra az $f(\mathbf{x})$ potenciálfüggvényt

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{j=n} \ln\left(\frac{\mathbf{cx}^T}{x_j}\right)$$

alakban definiáljuk. Karmarkar megmutatta, hogy ha a $[\mathrm{Diag}(\mathbf{x}^k)]\mathbf{c}^T$ vektort vetítjük le (és nem a $\mathbf{c}^T$ vektort) a transzformált tér lehetséges tartományára, akkor valamilyen $\delta > 0$ értékre minden $k = 0, 1, 2, \dots$ esetén igaz, hogy

$$f(\mathbf{x}^k) - f(\mathbf{x}^{k+1}) \geq \delta \tag{41}$$

A (41) egyenlőtlenség azt állítja, hogy a Karmarkar-módszer minden lépése a potenciálfüggvényt bizonyos pozitív számnál nagyobb mértékben csökkenti. Karmarkar megmutatta, hogy ha a potenciálfüggvény értéke $\mathbf{x}^k$-ban elég kicsi, $z = \mathbf{cx}^k$ közel lesz 0-hoz. Mivel $f(\mathbf{x}^k)$ legalább δ-val csökken iterációnként, elég nagy k számot választva biztosíthatjuk, hogy a célfüggvény z értéke $\mathbf{x}^k$-ban kisebb legyen, mint ε.

Egy LP feladat átírása a Karmarkar-módszer standard alakjára

Megmutatjuk, hogyan lehet egy tetszőleges LP feladatot átírni a (31)–(33) alakra. A következő LP feladaton szemléltetjük az átalakítás lépéseit:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 3x_1 + x_2 \\ \text{f.h.}\quad 2x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{42}$$

Kezdjük azzal, hogy felírjuk (42) duál feladatát:

$$\begin{aligned} \min\ w &= 2y_1 + 5y_2 \\ \text{f.h.}\quad 2y_1 + \ \ y_2 &\geq 3 \\ -y_1 + 2y_2 &\geq 1 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{42'}$$

A dualitási tételből tudjuk (6. fejezet 1. tétel), hogy ha (x_1, x_2) a (42), (y_1, y_2) pedig a (42′) feladat lehetséges megoldása, és (x_1, x_2) (42)-beli z értéke egyenlő (y_1, y_2) (42′)-beli w értékével, akkor (x_1, x_2) a (42) feladat optimális megoldása. Ez azt jelenti, hogy a következő feltételrendszer tetszőleges lehetséges megoldása optimális megoldást szolgáltat (42)-höz:

$$\begin{aligned} 3x_1 + \ \ x_2 - \ 2y_1 - 5y_2 &= 0 \\ 2x_1 - \ \ x_2 \qquad\qquad\quad &\leq 2 \\ x_1 + 2x_2 \qquad\qquad\quad &\leq 5 \\ 2y_1 + \ \ y_2 &\geq 3 \\ -y_1 + 2y_2 &\geq 1 \\ \text{minden változó} &\geq 0 \end{aligned} \tag{43}$$

Kiegészítő és felesleg változók (43)-ba való beszúrásával kapjuk:

$$\begin{aligned} 3x_1 + \ \ x_2 - \ 2y_1 - 5y_2 &= \ 0 \\ 2x_1 - \ \ x_2 \qquad\qquad\quad + s_1 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 \qquad\qquad\quad + s_2 &= 5 \\ 2y_1 + \ \ y_2 - e_1 &= 3 \\ -y_1 + 2y_2 - e_2 &= 1 \\ \text{minden változó} &\geq 0 \end{aligned} \tag{44}$$

Most keresünk egy olyan M számot, hogy (44) tetszőleges lehetséges megoldása esetén teljesüljön a

$$\text{(44) összes változójának összege} \leq M \tag{45}$$

egyenlőtlenség, majd hozzáadjuk a (45) feltételt (44)-hez. Ha óvatosan is számolunk, az látható, hogy (42) tetszőleges primál optimális megoldása, illetve (42′) tetszőleges duál optimális megoldása esetén egyetlen változó értéke sem haladhatja meg a 10-et. Ebből kapjuk az $M = 10(8) = 80$ értéket. Hozzáadunk még egy d_1 kiegészítő változót is (45)-höz. Az új cél tehát lehetséges megoldást találni a következő feltételekhez:

$$\begin{aligned} 3x_1 + \ \ x_2 - \ 2y_1 - 5y_2 &= \ 0 \\ 2x_1 - \ \ x_2 \qquad\qquad\quad + s_1 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 \qquad\qquad\quad + s_2 &= 5 \\ 2y_1 + \ \ y_2 - e_1 &= 3 \\ -y_1 + 2y_2 - e_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + s_1 + s_2 + e_1 + e_2 + d_1 &= 80 \\ \text{minden változó} &\geq 0 \end{aligned} \tag{46}$$

Most definiálunk egy új d_2 mesterséges változót; $d_2 = 1$. Ezt az új változót arra használhatjuk, hogy „homogenizáljuk” (46) azon feltételeit, amelyek nem nulla értékkel rendelkeznek a jobb oldalon. Ez úgy csináljuk, hogy a $d_2 = 1$ feltétel megfelelő többszörösét hozzáadjuk (46) minden olyan feltételéhez (az utolsó feltétel kivételével), amelynek jobb oldalán nem nulla áll. Például a $-2(d_2 = 1)$ egyenlőséget adjuk hozzá a $2x_1 - x_2 + s_1 = 2$ egyenlőséghez. A (46) utolsó feltételét is helyettesítjük, mégpedig a következő két feltétellel:

(a) Adjuk hozzá a $d_2 = 1$ egyenlőséget (46) utolsó feltételéhez.

(b) Vonjuk ki $(d_2 = 1)$ M-szeresét (46) utolsó feltételéből.

Az (a) és (b) együtt ekvivalens a $d_2 = 1$ feltétel és (46) utolsó feltételének együttesével.

Ezek után a következő feltételrendszerhez keresünk lehetséges megoldást:

$$\begin{aligned}
3x_1 + x_2 - 2y_1 - 5y_2 &= 0 \\
2x_1 - x_2 + s_1 - 2d_2 &= 0 \\
x_1 + 2x_2 + s_2 - 5d_2 &= 0 \\
2y_1 + y_2 - e_1 - 3d_2 &= 0 \\
-y_1 + 2y_2 - e_2 - d_2 &= 0 \\
x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + s_1 + s_2 + e_1 + e_2 + d_1 - 80d_2 &= 0 \\
x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + s_1 + s_2 + e_1 + e_2 + d_1 + d_2 &= 81 \\
\text{minden változó} &\geq 0
\end{aligned} \tag{47}$$

Hajtsuk végre a következő változócserét (47)-ben:

$$x_j = (M+1)x'_j, y_j = (M+1)y'_j, s_j = (M+1)s'_j, e_j = (M+1)e'_j,$$
$$d_j = (M+1)d'_j \; (j = 1,2)$$

Így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
3x'_1 + x'_2 - 2y'_1 - 5y'_2 &= 0 \\
2x'_1 - x'_2 + s'_1 - 2d'_2 &= 0 \\
x'_1 + 2x'_2 + s'_2 - 5d'_2 &= 0 \\
2y'_1 + y'_2 - e'_1 - 3d'_2 &= 0 \\
-y'_1 + 2y'_2 - e'_2 - d'_2 &= 0 \\
x'_1 + x'_2 + y'_1 + y'_2 + s'_1 + s'_2 + e'_1 + e'_2 + d'_1 - 80d'_2 &= 0 \\
x'_1 + x'_2 + y'_1 + y'_2 + s'_1 + s'_2 + e'_1 + e'_2 + d'_1 + d'_2 &= 1 \\
\text{minden változó} &\geq 0
\end{aligned} \tag{48}$$

Azt is biztosítanunk kell még, hogy az a pont, amelynek minden komponense azonos, (48) lehetséges megoldása legyen. (Éppen ez volt a (33) kikötés a Karmarkar-módszernél.) Ezt úgy hajtjuk végre, hogy hozzáadunk egy d'_3 mesterséges változót (48) utolsó feltételéhez, majd pedig d'_3 valamilyen többszörösét az összes többi feltételhez. Ezt a többszöröst úgy választjuk meg, hogy az együtthatók összege minden feltételben (az utolsó kivételével) 0 legyen. Így kapjuk a (49) LP feladatot:

$$
\begin{aligned}
&\min z = d_3' \\
&\text{f.h.} \quad 3x_1' + x_2' - 2y_1' - 5y_2' + 3d_3' = 0 \\
&\qquad 2x_1' - x_2' + s_1' - 2d_2' = 0 \\
&\qquad x_1' + 2x_2' + s_2' - 5d_2' + d_3' = 0 \\
&\qquad 2y_1' + y_2' - e_1' - 3d_2' + d_3' = 0 \\
&\qquad -y_1' + 2y_2' - e_2' - d_2' + d_3' = 0 \\
&x_1' + x_2' + y_1' + y_2' + s_1' + s_2' + e_1' + e_2' + d_1' - 80d_2' + 71d_3' = 0 \\
&x_1' + x_2' + y_1' + y_2' + s_1' + s_2' + e_1' + e_2' + d_1' + d_2' + d_3' = 1 \\
&\qquad \text{minden változó } \geq 0
\end{aligned} \tag{49}
$$

A (49) feladatban az $x_1' = x_2' = y_1' = y_2' = s_1' = s_2' = e_1' = e_2' = d_1' = d_2' = d_3' = 1/11$ pont már lehetséges megoldás. Mivel d_3'-nek 0 szinten kell lennie (48) lehetséges megoldásában, ezért minimalizáljuk (49)-ben a d_3' változót. Ha ugyanis (48)-nak van lehetséges megoldása, akkor d_3' minimális értéke 0 a (49) feladatban, és (49) optimális megoldásának többi változója egy lehetséges megoldást szolgáltat (48) számára. Az x_1 és x_2 változók (49) optimális megoldásában felvett értékei egyben optimális megoldást is adnak az eredeti (42) LP feladatunkra. A (49) LP feladat eleget tesz a (31)–(33) kikötéseknek, és készen áll a Karmarkar-módszerrel történő megoldásra.

Feladatok

A csoport

1. Hajtsuk végre a Karmarkar-módszer egy iterációját a következő LP feladaton:

$$
\begin{aligned}
&\min z = x_1 + 2x_2 - x_3 \\
&\text{f.h.} \quad x_1 - x_3 = 0 \\
&\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
&\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

2. Hajtsuk végre a Karmarkar-módszer egy iterációját a következő LP feladaton:

$$
\begin{aligned}
&\min z = x_1 - x_2 + 6x_3 \\
&\text{f.h.} \quad x_1 - x_2 = 0 \\
&\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
&\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

3. Bizonyítsuk be, hogy a Karmarkar-módszerben $\mathbf{x}^1 = \mathbf{y}^1$ teljesül.

4. Hajtsuk végre a Karmarkar-módszer két iterációját a következő LP feladaton:

$$
\begin{aligned}
&\min z = 2x_2 \\
&\text{f.h.} \quad x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\
&\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
&\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

B csoport

5. Bizonyítsuk be az 1. lemmát.

6. Mutassuk meg, hogy a Karmarkar-módszer $\mathbf{x}^k$ pontja az eredeti LP feladat lehetséges megoldása.

7. Ha adott egy $\mathbf{y}^k$ pont a Karmarkar-módszerben, fejezzük ki az LP feladat eredeti célfüggvényét $\mathbf{y}^k$ függvényeként. Az erre a kérdésre adott választ használjuk fel arra is, hogy megindokoljuk, miért a $[\text{Diag}(\mathbf{x}^k)]\mathbf{c}^T$ vektort vetítjük le $\mathbf{c}^T$ helyett.

Összefoglalás

A módosított szimplex módszer és az inverz szorzatformája

0. lépés Gondoskodjunk az aktuális B^{-1} inverz oszlopainak beolvasásáról. Kiinduláskor $B^{-1} = I$.

1. lépés Az aktuális táblára vonatkozóan számítsuk ki a $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ értékelővektort.

2. lépés Értékeljük ki az aktuális tábla összes nembázis változóját. Ha (maximalizálási feladatot tekintve) a kiértékelés minden nembázis változó esetén nemnegatív értéket ad, az aktuális bázis optimális. Ha az aktuális bázis nem optimális, léptessük be a bázisba azt a nembázis változót, amelynek a legnegatívabb az együtthatója a 0. sorban. Jelöljük ezt a változót x_k-val.

3. lépés Annak meghatározásához, hogy a bázis melyik sorába lépjen be x_k, számítsuk ki x_k oszlopát az aktuális táblában $(B^{-1}\mathbf{a}_k)$, továbbá az aktuális tábla jobb oldalát $(B^{-1}\mathbf{b})$. Ezután a hányados tesztet alkalmazzuk annak meghatározására, melyik sorba lép be x_k. Most már akkor ismerjük az új tábla bázisváltozóinak (BV) halmazát.

4. lépés Az aktuális tábla x_k-hoz tartozó oszlopa segítségével határozzuk meg azokat az elemi sorműveleteket, amelyek x_k bázisba való beléptetéséhez szükségesek. Hajtsuk végre ezeket az elemi sorműveleteket az aktuális B^{-1}-en. Ezzel megkapjuk az új B^{-1} inverzet. Térjünk vissza az 1. lépésre.

Egy másik választási lehetőség az, hogy az inverz szorzatformáját alkalmazzuk B^{-1} újraszámolására. Tegyük fel, hogy már meghatároztuk, hogy az x_k változó lép be a bázisba, mégpedig az r-edik sorba. Az aktuális táblában az x_k-hoz tartozó oszlop legyen

$$\begin{bmatrix} \bar{a}_{1k} \\ \bar{a}_{2k} \\ \vdots \\ \bar{a}_{mk} \end{bmatrix}$$

Legyen egy $m \times m$-es E mátrix a következőképpen megadva:

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad (r\text{-edik oszlop}) \\ E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & -\dfrac{\bar{a}_{1k}}{\bar{a}_{rk}} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & -\dfrac{\bar{a}_{2k}}{\bar{a}_{rk}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dfrac{1}{\bar{a}_{rk}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\dfrac{\bar{a}_{m-1,k}}{\bar{a}_{rk}} & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\dfrac{\bar{a}_{mk}}{\bar{a}_{rk}} & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ (r\text{-edik sor}) \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Ekkor

$$B^{-1} \text{ az új táblában } = E(B^{-1} \text{ az aktuális táblában}). \tag{50}$$

Térjünk vissza az 1. lépésre.

Az oszlopgenerálás

Ha egy LP feladatnak sok változója van, az összes bázisváltozó egyenkénti kiértékelése nagyon időigényes lehet. Az oszlopgenerálási megközelítés lehetővé teszi számunkra, hogy a legkedvezőbbnek kiértékelésű nembázis változót egy részfeladat megoldásával kapjuk meg (a leszabási feladat korlátozás és szétválasztás feladataihoz hasonlóan).

A Dantzig–Wolfe dekompozíciós módszer

Sok LP feladatban a feltételek és a változók az alábbi módon bonthatók szét:

A feltételek 1. halmazában csak a változók 1. halmaza szerepel.
A feltételek 2. halmazában csak a változók 2. halmaza szerepel.

$\vdots$

A feltételek k. halmazában csak a változók k. halmaza szerepel.

A feltételek $k+1$-edik halmazában már az összes változó szerepelhet. A $k+1$-edik halmazt **központi feltételeknek** vagy **összekötő feltételeknek** szokták nevezni.

Az ilyen módon felbontható LP feladatok általában hatékonyan oldhatók meg a Dantzig–Wolfe dekompozíciós módszerrel. A következő leírásban feltesszük, hogy $k = 2$.

1. lépés Legyen a változók 1. halmaza $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$. Fejezzük ki a változókat az 1. feltételi halmazhoz tartozó lehetséges tartomány extremális pontjainak konvex kombinációjaként. (Az 1. feltételi halmaz azokból a feltételekből áll, amelyekben csak a változók 1. halmaza vesz részt.) Ha $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_k$ jelöli a lehetséges tartomány extremális pontjait, akkor a feltételek 1. halmaza által meghatározott lehetséges tartomány bármely

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n_1} \end{bmatrix}$$

pontja felírható az alábbi formában:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n_1} \end{bmatrix} = \mu_1 \mathbf{P}_1 + \mu_2 \mathbf{P}_2 + \cdots + \mu_k \mathbf{P}_k, \tag{29}$$

ahol $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k = 1$ és $\mu_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

2. lépés Fejezzük ki a változók $x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \ldots, x_n$ elemekből álló 2. halmazát mint a feltételek 2. halmazához tartozó lehetséges tartomány extremális pontjainak konvex kombinációját. Amennyiben $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \ldots, \mathbf{Q}_m$ jelöli a lehetséges tartomány extremális pontjait, akkor a feltételek 2. halmaza által meghatározott lehetséges tartomány minden pontja felírható

$$\begin{bmatrix} x_{n_1+1} \\ x_{n_1+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda_1 \mathbf{Q}_1 + \lambda_2 \mathbf{Q}_2 + \cdots + \lambda_m \mathbf{Q}_m \tag{30}$$

alakban, ahol $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ és $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = 1$.

3. lépés Fejezzük ki (29) és (30) alapján az LP feladat célfüggvényét és központi feltételeit a μ_i és a λ_i változók segítségével. A konvexitási feltételeknek nevezett $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k = 1$ és $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = 1$ feltételek, valamint a $\mu_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ és $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ előjelkorlátozások hozzáadása után a következő LP feladatot kapjuk, amelyet **mesterfeladatnak** is neveznek:

max (vagy min) [célfüggvény a μ_i és λ_i változókkal kifejezve]

f.h. [központi feltételek μ_i és λ_i változókkal kifejezve]

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k = 1 \qquad \text{(konvexitási feltételek)}$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m = 1$$
$$\mu_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \qquad \text{(előjelmegkötések)}$$
$$\lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

4. lépés Tegyük fel, hogy már rendelkezésünkre áll a mesterfeladat egy lehetséges bázismegoldása. Ekkor használjuk a 8.3. alfejezetben ismertetett oszlopgenerálási módszert annak megállapítására, hogy van-e olyan μ_i vagy λ_i, amely javítani tudja a mesterfeladat z célfüggvényértékét. Ha van, használjuk a módosított szimplex módszert a változó bázisba való beléptetésére. Különben az aktuális tábla optimális a mesterfeladat számára. Ha nem optimális táblánál voltunk, folytassuk az oszlopgenerálási technikát az optimális megoldás eléréséig.

5. lépés A μ_i és λ_i változók 4. lépésben kapott optimális értékeit helyettesítsük be a (29) és (30) kifejezésekbe. Ezzel megkapjuk az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ optimális értékeit.

A felsőkorlátos szimplex módszer

Minden olyan x_i változóhoz, amelyiknek $x_i \leq u_i$ alakú felsőkorlát feltétele van, bevezetünk egy új x'_i változót az $x_i + x'_i = u_i$, azaz $x_i = u_i - x'_i$ összefüggés alapján.

Minden iterációban (maximalizálási feladat esetén) azt az x_i változót akarjuk növelni, amelyiknek a legnegatívabb az együtthatója a 0. sorban. Háromféle olyan eset, vagy szűk keresztmetszet lehetséges, amely korlátozhatja azt a mennyiséget, amivel az x_i-t növelhetjük:

1. szűk keresztmetszet: x_i nem haladhatja meg az u_i felső korlátját.

2. szűk keresztmetszet: x_i egy olyan pontig növekszik, ahonnan már az aktuális bázisváltozók valamelyikét negatívvá változtatná.

3. szűk keresztmetszet: Az x_i egy olyan pontig növekszik, ahonnan már az aktuális bázisváltozók valamelyikét a felső korlátja fölé vinné.

Legyen BN_k $(k = 1, 2, 3)$ az x_i azon értéke, ahol a k-adik szűk keresztmetszet esete fellép. Ekkor x_i csak a min $\{BN_1, BN_2, BN_3\}$ értékig, azaz az eldöntő szűk keresztmetszet értékéig növelhető. Ha az eldöntő szűk keresztmetszet BN_1, akkor végrehajtjuk a felsőkorlát helyettesítést x_i-re, azaz x_i helyébe $u_i - x'_i$ kerül. Ha az eldöntő szűk keresztmetszet BN_2, akkor beléptetjük x_i-t a bázisba, éppen abba a sorba, amelyik a BN_2 felléptét okozó bázisváltozóhoz tartozott. Ha az eldöntő szűk keresztmetszet BN_3, arra az x_j változóra, amelyik $x_i = BN_3$ esetén éppen eléri a felső korlátját, végrehajtjuk a felsőkorlát helyettesítést, azaz x_j helyébe $u_j - x'_j$ kerül. Ezután beléptetjük x_i-t a bázisba, éppen abba a sorba, ahol x_j volt a bázisváltozó.

A fenti eljárás végrehajtása után megvizsgáljuk az új 0. sort. Ha minden változóhoz nemnegatív együttható tartozik a 0. sorban, akkor egy optimális táblához jutottunk. Egyébként megpróbáljuk növelni a 0. sorban a legnegatívabb együtthatóval rendelkező változót.

A Karmarkar-módszer

1. lépés Induljunk ki az $\mathbf{x}^0 = [\frac{1}{n} \quad \frac{1}{n} \quad \dots \quad \frac{1}{n}]^T$ lehetséges pontból, és legyen $k = 0$.

2. lépés Ha $\mathbf{cx}^k < \varepsilon$, álljunk le. Különben menjünk a 3. lépésre.

3. lépés Állítsuk elő a transzformált egységszimplex új

$$\mathbf{y}^{k+1} = [y_1^{k+1} \quad y_2^{k+1} \quad \dots \quad y_n^{k+1}]^T$$

pontját a következőképpen:

$$\mathbf{y}^{k+1} = [\tfrac{1}{n} \quad \tfrac{1}{n} \quad \dots \quad \tfrac{1}{n}]^T - \frac{\theta(I - P^T(PP^T)^{-1}P)[\mathrm{Diag}(\mathbf{x}^k)]\mathbf{c}^T}{\|\mathbf{c}_p\|\sqrt{n(n-1)}}$$

Ahol $\|\mathbf{c}_p\|$ az $(I - P^T(PP^T)^{-1}P)[\mathrm{Diag}(\mathbf{x}^k)]\mathbf{c}^T$ vektor hossza, P olyan $(m+1) \times n$ méretű mátrix, amelynek első m sora $A[\mathrm{Diag}(\mathbf{x}^k)]$, az utolsó sorának minden eleme pedig 1. Továbbá a $0 < \theta < 1$ értékét úgy választjuk meg, hogy biztosítva legyen az algoritmus konvergenciája. $\theta = \frac{1}{4}$ esetén biztosan tudjuk a konvergenciát.

Ezzel az eredeti térben is kapunk egy új $\mathbf{x}^{k+1}$ pontot: azt, amelyiket a centralizáló transzformáció az $\mathbf{y}^{k+1}$ ponthoz rendel. Tehát $\mathbf{x}^{k+1} = f^{-1}(\mathbf{y}^{k+1} \,|\, \mathbf{x}^k)$. Növeljük eggyel k értékét, és menjünk vissza a 2. lépésre.

Áttekintő feladatok

A csoport

1. Alkalmazzuk a módosított szimplex módszert a szorzatformás inverzzel a következő LP feladat megoldására:

$$\begin{array}{rl} \max\ z = & 4x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{f.h.} & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 6 \\ & x_2 + x_3 \le 3 \\ & x_1 \qquad + x_3 \le 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{array}$$

2. Használjuk az oszlopgenerálási technikát egy olyan leszabási feladat megoldására, ahol a vevőnek 20 db 3 méter hosszú, 25 db 4 méter hosszú és 30 db 5 méter hosszú deszkára van szüksége, az igény pedig 14 méter hosszú deszkákból történő leszabással elégíthető ki.

3. A Dantzig–Wolfe dekompozíciós módszer alkalmazásával oldjuk meg a következő LP feladatot:

$$\begin{array}{rl} \min\ z = & 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ \text{f.h.} & x_1 + 2x_2 \le 4 \\ & x_1 - x_2 \le 1 \\ & x_3 - 3x_4 \le 7 \\ & 2x_3 + x_4 \le 10 \\ & x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 \le 10 \\ & x_i \ge 0\,(i = 1,2,3,4) \end{array}$$

4. Tekintsük a következő esetet:

(a) Két autótípust gyártanak három termelőüzemben, és ezekre három fogyasztói helyen van igény.

(b) Adott az előállítási költség minden autótípus és üzem esetén, továbbá a szállítási költség minden autótípus esetén az összes üzemtől az összes fogyasztóig.

(c) Adott a gyártókapacitás minden üzem esetén (minden autótípusra).

(d) Ki van továbbá kötve, hogy az első fogyasztó által igényelt autók számának legfeljebb a fele teljesíthető az első üzem termeléséből.

Magyarázzuk el, hogyan alkalmazható a dekompozíció a vevők igénye kielégítéséhez szükséges összköltség minimalizálásánál!

5. Egy cég kétféle terméket állít elő (1. termék és 2. termék) két üzemében (1. üzem és 2. üzem). Összesen 100 óra termelési idő áll rendelkezésre mindegyik üzemben. A 10. táblázat minden termék és minden üzem esetén az egyegységnyi termék előállításához szükséges időmennyiséget, a 11. táblázat pedig az egy egység utáni profitot mutatja szintén üzemek és termékek szerint. Mindegyik termékből legfeljebb 35 egységet lehet eladni. A dekompozíciós módszer alkalmazásával mutassuk meg, hogyan tudja a cég maximalizálni profitját!

10. TÁBLÁZAT

	1. termék	**2. termék**
1. üzem	2 óra	3 óra
2. üzem	3 óra	4 óra

11. TÁBLÁZAT

	1. termék	**2. termék**
1. üzem	8$	6$
2. üzem	10$	8$

Irodalom

Az alábbi három, klasszikus munkának számító könyv részletesen tárgyalja nagy méretű LP feladatok megoldására szolgáló módszereket:

Beale, E. *Mathematical Programming in Practice.* Pittman, 1968.

Lasdon, L. *Optimization Theory for Large Systems.* New York: Macmillan, 1970.

Orchard-Hays, W. *Advanced LP Computing Techniques.* New York: McGraw-Hill, 1968.

A következő három könyv kiváló tárgyalást tartalmaz a Dantzig–Wolfe dekompozíciós módszerről:

Bradley, S., A. Hax, and T. Magnanti. *Applied Mathematical Programming.* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1977.

Chvàtal, V. *Linear Programming.* San Francisco: Freeman, 1983.

Shapiro, J. *Mathematical Programming: Structures and Algorithms.* New York: Wiley, 1979.

Az alábbi két cikk az oszlopgenerálási technikát és a leszabási feladatot tárgyalja:

Gilmore, P., and R. Gomory. „A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem”, *Operations Research* 9(1961):849–859.

———. „A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem: Part II”, *Operations Research* 11(1963):863–888.

Ezek a publikációk könnyen érthető stílusban tárgyalják a Karmarkar-módszert:

Hooker, J. N. „Karmarkar’s Linear Programming Algorithm”, *Interfaces* 16(no. 4, 1986): 75–90.

Murty, K. G. *Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming.* Berlin, Germany: Heldermann Verlag, 1989.

Parker, G., and R. Rardin. *Discrete Optimization.* San Diego: Academic Press, 1988.

10

Nemlineáris programozás

Az előző fejezetekben lineáris programozási feladatokkal foglalkoztunk. Egy LP feladat esetén a cél egy lineáris függvény maximalizálása vagy minimalizálása volt lineáris feltételek mellett. Azonban sok érdekes minimalizálási vagy maximalizálási feladatban előfordulhat, hogy a célfüggvény nemlineáris függvény, vagy pedig a feltételek valamelyike nemlineáris. Az ilyen optimalizálási feladatokat nemlineáris programozási (NLP) feladatoknak nevezzük. Ebben a fejezetben NLP feladatok megoldására szolgáló technikákkal foglalkozunk.

10.1. Bevezető jellegű fogalmak

DEFINÍCIÓ

Egy általános **nemlineáris programozási feladat** (NLP feladat) a következőképpen adható meg: Keressük azokat az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ döntési változókat, amelyekre

$$
\begin{array}{ll}
\max & (\text{vagy } \min)\ z = f(x_1, x_2 \ldots, x_n) \\
\text{f.h.} & g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (\leq, = \text{ vagy } \geq)\ b_1 \\
 & g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (\leq, = \text{ vagy } \geq)\ b_2 \\
 & \vdots \\
 & g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (\leq, = \text{ vagy } \geq)\ b_m
\end{array}
\tag{1}
$$

A lineáris programozáshoz hasonlóan $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ az NLP feladat **célfüggvénye,** és $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(\leq, = \text{ vagy } \geq)$ $b_1, \ldots, g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(\leq, = \text{ vagy } \geq)$ b_m az NLP feladat **feltételei.** A feltételeket nem tartalmazó NLP feladatokat **feltétel nélküli NLP** feladatoknak nevezzük.

Legyen R^n az összes olyan $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pontok halmaza, ahol x_i valós szám. Tehát R^1 a valós számok halmaza. Az R^1 következő részhalmazai, amelyeket intervallumoknak neveznek, megkülönböztetett fontosságúak:

$$
\begin{aligned}
[a, b] &= \text{ az összes } x, \text{ amelyre } a \leq x \leq b \\
[a, b) &= \text{ az összes } x, \text{ amelyre } a \leq x < b \\
(a, b] &= \text{ az összes } x, \text{ amelyre } a < x \leq b \\
(a, b) &= \text{ az összes } x, \text{ amelyre } a < x < b \\
[a, \infty) &= \text{ az összes } x, \text{ amelyre } x \geq a \\
(-\infty, b] &= \text{ az összes } x, \text{ amelyre } x \leq b
\end{aligned}
$$

A következő definíciók a 3.1. alfejezet LP feladatokra adott definícióinak felelnek meg.

DEFINÍCIÓ

Az (1) NLP feladat **lehetséges tartománya** azoknak az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pontoknak a halmaza, amelyek eleget tesznek az (1) feladat m feltételének. A lehetséges tartomány pontjai a lehetséges pontok (lehetséges megoldások). A lehetséges tartományon kívüli pontok a nem lehetséges pontok.

Tegyük fel, hogy (1) egy maximalizálási feladat.

DEFINÍCIÓ

A lehetséges tartomány egy olyan $\bar{x}$ pontja, amelyre $f(\bar{x}) \geq f(x)$ teljesül a lehetséges tartomány bármely x pontja esetén, az NLP feladat egy **optimális megoldása.** (Minimalizálási feladat esetén $\bar{x}$ optimális megoldás, ha $f(\bar{x}) \leq f(x)$ minden lehetséges x-re.)

Természetesen, ha $f, g_1, g_2, \ldots, g_m$ mindegyike lineáris függvény, akkor (1) egy lineáris programozási feladat, és szimplex módszerrel is megoldható.

Példák nemlineáris programozási feladatokra

1. PÉLDA Egy cégnek c dollárba kerül egyegységnyi termék előállítása. Ha a cég egységenként p dollárért kínálná értékesítésre a terméket, akkor $D(p)$ egységre lenne fogyasztói igény. Milyen árat kell a cégnek megállapítania profitja maximalizálásához?

Megoldás A cég döntési változója p. Mivel a cég profitja $(p-c)D(p)$, a cég a következő feltétel nélküli maximalizálási feladatot akarja megoldani: max $(p-c)D(p)$.

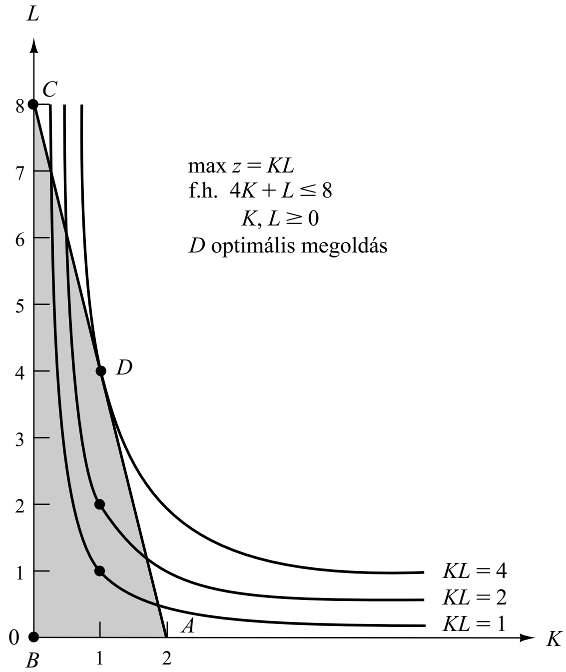
2. PÉLDA Ha egy cég K egységnyi tőkét és L egységnyi munkaerőt használ fel, akkor KL egységnyi terméket tud előállítani. A tőke egy egysége 4\$, a munkaerő egy egysége pedig 1\$ áron szerezhető be. Összesen 8\$ áll rendelkezésre tőkére és munkaerőre. Hogyan tudja a cég maximalizálni az előállítandó termék mennyiségét?

Megoldás Jelölje K és L, hogy hány egységnyi tőkét, illetve hány egységnyi munkaerőt használ fel a cég. Ekkor K és L nyilván eleget tesz a $4K + L \leq 8, K \geq 0$ és $L \geq 0$ feltételeknek. Tehát a cég a következő feltételes maximalizálási feladatot akarja megoldani:

$$\begin{aligned} &\max\ z = KL \\ &\text{f.h.} \quad 4K + L \leq 8 \\ &\qquad\quad K, L \geq 0 \end{aligned}$$

Az NLP és LP feladatok közötti különbségek

A 3. fejezetből tudjuk, hogy tetszőleges LP feladat lehetséges tartománya konvex halmaz (azaz, ha A és B az LP feladat lehetséges pontjai, akkor az A és B pontokat összekötő



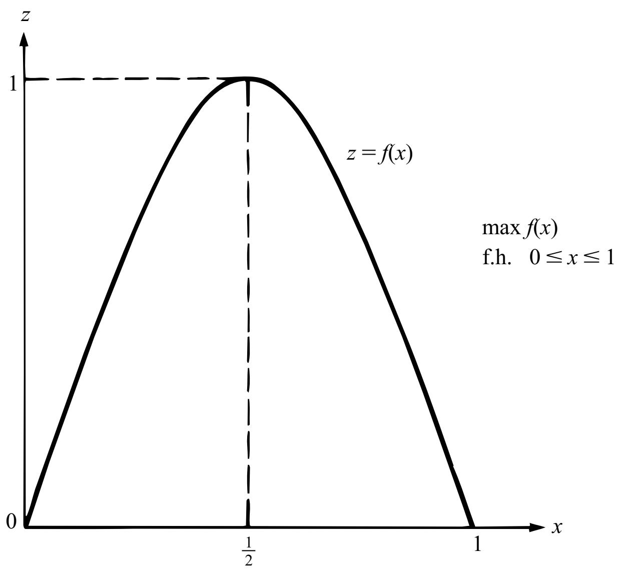
1. ÁBRA
Egy NLP feladat, amelynek az optimális megoldása nem extremális pont

teljes szakasz minden pontja is lehetséges megoldás). Azt is tudjuk, hogy ha egy LP feladatnak van optimális megoldása, akkor a lehetséges tartománynak van olyan extremális pontja, amelyik optimális megoldás. Hamarosan látni fogjuk azonban, hogy ha egy NLP feladat lehetséges tartománya konvex halmaz, akkor (az LP feladatoktól eltérően) az optimális megoldás nem feltétlenül az NLP feladat lehetséges tartományának extremális pontja. Mindez jól szemléltethető az előző példán. Az 1. ábra grafikusan mutatja a példa ABC háromszöggel határolt lehetséges tartományát, valamint a $KL = 1, KL = 2$ és $KL = 4$ célfüggvényértékeket adó pontok görbéit. Láthatjuk, hogy a példa optimális megoldása ott található, ahol az azonos célfüggvényértéket adó görbe éppen érinti a lehetséges tartomány határát. Tehát a példa optimális megoldása $z = 4, K = 1, L = 4$ (a D pont). A D természetesen nem extremális pontja az NLP feladat lehetséges tartományának. Ennél a példánál (és sok más lineáris feltételű NLP feladatnál is) az optimális megoldás azért nem a lehetséges tartomány egy extremális pontja, mert az azonos célfüggvényértékhez tartozó pontok görbéje nem egy egyenes. Valójában egy NLP feladat optimális megoldása nem is feltétlenül a lehetséges tartomány határán helyezkedik el. Tekintsük például a következő NLP feladatot:

$$\begin{aligned} &\max\ z = f(x) \\ &\text{f.h.}\quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

ahol $f(x)$ a 2. ábrán látható. Ennek az NLP feladatnak az optimális megoldása $z = 1, x = \frac{1}{2}$. Természetesen $x = \frac{1}{2}$ nem a lehetséges tartomány határán található.

2. ÁBRA
Egy NLP feladat, amelynek az optimális megoldása nem a lehetséges tartomány határán található



Lokális szélsőértékhely

DEFINÍCIÓ

> Egy maximalizálási NLP feladat esetén egy $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ lehetséges pontot **lokális maximumnak** nevezünk, ha van olyan elég kicsi pozitív ε, hogy $f(x) \geq f(x')$ bármely olyan $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ lehetséges pontra, amelyre $| x_i - x'_i | < \varepsilon$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ teljesül.

Röviden, az x pont lokális maximum, ha $f(x) \geq f(x')$ minden olyan x' lehetséges pontra, amely közel van x-hez. Hasonlóan egy minimalizálási feladat esetén az x pont lokális minimum, ha $f(x) \leq f(x')$ teljesül minden olyan x' lehetséges pontra, amely közel van x-hez. Az olyan pontot, amely lokális maximum vagy lokális minimum, **lokális** vagy **relatív szélsőértékhelynek** nevezik.

Egy maximalizálási LP feladat esetén bármely lokális maximum egyben a feladat optimális megoldása is. (Miért?) Általános NLP feladatokra ez azonban már nem igaz. Tekintsük például a következő NLP feladatot:

$$\begin{aligned} &\max\ z = f(x) \\ &\text{f.h.} \quad 0 \leq x \leq 10 \end{aligned}$$

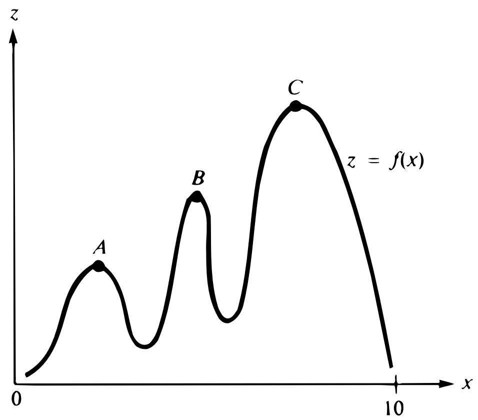
ahol $f(x)$ a 3. ábrán látható. Az A, B és C pontok mind lokális maximumok, de a C pont az NLP feladat egyetlen optimális megoldása.

A lineáris programozástól eltérően, a nemlineáris programozásban nem mindig teljesül az arányossági és az additivitási feltevés. Például, ha a 2. példában eggyel növeljük L értékét, z értéke K-val nő. Tehát L növelésének hatása z-re függ K-tól. Ez jelenti, hogy nem teljesül az additivitási feltevés. A

$$\begin{aligned} &\max\ z = x^{1/3} + y^{1/3} \\ &\text{f.h.} \quad x + y = 1 \\ &\qquad\quad x, y \geq 0 \end{aligned}$$

feladat nem tesz eleget az arányossági feltevésnek, mivel x értékének megkétszerezése nem kétszerezi meg x célfüggvényhez való hozzájárulását.

3. ÁBRA
Egy lokális maximum nem feltétlenül az NLP feladat optimális megoldása



További példák NLP feladatokra

Három további példát mutatunk be feladatok nemlineáris programozási alakban való megfogalmazására.

3. PÉLDA

Az Oilco cég háromfajta motorbenzint állít elő: normál, ólommentes és szuper típusút. Mindhárom terméket Alaszkából és Texasból vásárolt nyersolajból, illetve ólomból állítják elő. A kéntartalomra és az oktánszámra vonatkozó előírások, a napi minimális igény (literben) és egy liter eladási ára az 1. táblázatban van megadva a motorbenzin minden típusára. Az Alaszkából hozott nyersolaj kétféle, Alaszka1 és Alaszka2 típusú nyersolaj keverékéből áll elő. Az Alaszka nyersolajat Alaszkában keverik össze, és csővezetéken szállítják az Oilco Texasban lévő finomítójába. Naponta legfeljebb 10 000 liter nyersolaj szállítható Alaszkából. Az Alaszkából és Texasból származó nyersolaj minden típusára, valamint az ólomra vonatkozóan a 2. táblázatban van megadva a kéntartalom, az oktánszám, a rendelkezésre álló napi mennyiség (literben) és a beszerzési ár (literenként). Természetesen az ólommentes benzin nem tartalmazhat ólmot. Írjunk fel egy NLP feladatot, amely segítségével az Oilco maximalizálni tudja a motorbenzin eladásából származó napi nyereségét![1]

1. TÁBLÁZAT

A benzin típusa	Kén-tartalom (%)	Oktán-szám	Minimális napi igény	Eladási ár ($)
Normál	≤ 3	≥ 90	5000	.86
Ólommentes	≤ 3	≥ 88	5000	.93
Szuper	≤ 2.8	≥ 94	5000	1.06

2. TÁBLÁZAT

Az összetevő típusa	Kén-tartalom (%)	Oktán-szám	Rendelkezésre álló mennyiség	Ár ($) (literenként)
Alaszka1	4	91	Nincs korlát	.78
Alaszka2	1	97	Nincs korlát	.88
Texas	2	83	11 000	.75
Ólom	0	800	6 000	1.30

[1] Haverly (1978) cikkére támaszkodva.

Megoldás Vezessük be a következő változókat:

R = a normálbenzinből naponta előállított mennyiség (liter)
U = az ólommentes benzinből naponta előállított mennyiség (liter)
P = a szuperbenzinből naponta előállított mennyiség (liter)
$A1$ = az Alaszka1 nyersolajból naponta vásárolt mennyiség (liter)
$A2$ = az Alaszka2 nyersolajból naponta vásárolt mennyiség (liter)
T = a Texas nyersolajból naponta vásárolt mennyiség (liter)
L = az ólomból naponta vásárolt mennyiség (liter)
SA = az Alaszkából vásárolt nyersolaj kéntartalma
OA = az Alaszkából vásárolt nyersolaj oktánszáma
A = az Alaszkából vásárolt nyersolaj mennyisége összesen (liter)
LP = a szuperbenzin gyártásához naponta felhasznált ólom mennyisége (liter)
TP = a szuperbenzin gyártásához naponta felhasznált Texas nyersolaj mennyisége (liter)
AP = a szuperbenzin gyártásához naponta felhasznált Alaszka nyersolaj mennyisége (liter)
TU = az ólommentes benzin gyártásához naponta felhasznált Texas nyersolaj mennyisége (liter)
AU = az ólommentes benzin gyártásához naponta felhasznált Alaszka nyersolaj mennyisége (liter)
AR = a normálbenzin gyártásához naponta felhasznált Alaszka nyersolaj mennyisége (liter)
TR = a normálbenzin gyártásához naponta felhasznált Texas nyersolaj mennyisége (liter)
LR = a normálbenzin gyártásához naponta felhasznált ólom mennyisége (liter)

Az optimalizálási feladat a következőképpen írható fel:

$$
\begin{array}{rll}
1: & \max & 86\cdot R+93\cdot U+106\cdot P-78\cdot A1-88\cdot A2-75\cdot T-130\cdot L \\
2: & \text{f.h.} & A\le 10\,000 \\
3: & & T\le 11\,000 \\
4: & & L\le 6000 \\
5: & & R\ge 5000 \\
6: & & U\ge 5000 \\
7: & & P\ge 5000 \\
8: & & SA=(.04\cdot A1+.01\cdot A2)/A \\
9: & & OA=(91\cdot A1+97\cdot A2)/A \\
10: & & A=A1+A2 \\
11: & & P=LP+TP+AP \\
12: & & R=LR+TR+AR \\
13: & & U=TU+AU \\
14: & & L=LP+LR \\
15: & & A=AP+AU+AR \\
16: & & T=TP+TU+TR \\
17: & & (AR\cdot OA+83\cdot TR+800\cdot LR)/R\ge 90 \\
18: & & (AP\cdot OA+83\cdot TP+800\cdot LP)/P\ge 94 \\
19: & & (AU\cdot OA+TU\cdot 83)/U\ge 88 \\
20: & & (SA\cdot AR+.02\cdot TR)/R\le .03 \\
21: & & (SA\cdot AP+.02\cdot TP)/P\le .028 \\
22: & & (SA\cdot AU+.02\cdot TU)/U\le .03
\end{array}
$$

$$\begin{array}{ll}
23: & LP \geq 0 \\
24: & TP \geq 0 \\
25: & AP \geq 0 \\
26: & TU \geq 0 \\
27: & AU \geq 0 \\
28: & LR \geq 0 \\
29: & TR \geq 0 \\
30: & AR \geq 0
\end{array}$$

A célfüggvény a napi bevételek $(86 \cdot R + 93 \cdot U + 106 \cdot P)$ összegének és az alapanyagok vásárlására fordított $(78 \cdot A1 + 88 \cdot A2 + 75 \cdot T + 130 \cdot L)$ napi összeg különbségét maximalizálja. A 2–4. sorok azt írják le, hogy egyetlen input mennyisége sem haladhatja meg a naponta rendelkezésre álló mennyiséget. Az 5–7. sorok biztosítják, hogy minden benzintípusból ki lesz elégítve a minimális fogyasztói igény.

Az Alaszka nyersolaj százalékos kéntartalma (tizedes alakban) az egyes Alaszka típusokból vásárolt mennyiségek függvényében van kifejezve a 8. sorban. Hasonlóan az Alaszka nyersolaj oktánszáma az egyes Alaszka típusokból vásárolt mennyiségek függvényében van megadva a 9. sorban. A 10. sor az Alaszka nyersolajból beszerzett mennyiséget az Alaszka1 és Alaszka2 típusokból beszerzett mennyiségek összegeként határozza meg. A 11. sor a szuperbenzinből előállított mennyiséget az ólom, a Texas és az Alaszka nyersolajösszetevők mennyiségeinek összegeként adja meg. A 12. sor az előző megfelelője a normálbenzin esetére. A 13. sorban az ólommentes benzinnél csak a nyersolajmennyiségek adódnak össze. A 14–16. sorok azt az összefüggést írják le, hogy a beszerzett összetevőket teljes mennyiségben felhasználják a termelés folyamán – az összes ólmot felhasználják a szuper- vagy a normálbenzin gyártásánál; az összes Alaszka nyersolaj és az összes Texas nyersolajat is felhasználják a szuper-, az ólommentes vagy a normálbenzin gyártásánál.

A 17. sorban azt követeljük meg, hogy a normálbenzin előállításához használt összetevők oktánszámának súlyozott átlaga legalább 90 legyen. Vegyük észre, hogy az $AR \cdot OA$ kifejezés miatt ez nem egy lineáris feltétel. Hasonlóan a 18. sor (amely szintén nemlineáris feltétel) azt biztosítja, hogy a szuperbenzin előállításához használt összetevők oktánszámának súlyozott átlaga legalább 94, a 19. sor pedig azt (újból nemlineáris feltétel), hogy az ólommentes benziné legalább 88.

A 20. sor (amely az $SA \cdot AR$ kifejezés miatt nemlineáris feltétel) azt írja elő, hogy a normálbenzin kéntartalma legfeljebb 3% lehet. A 21. sor szerint a szuperbenzin kéntartalma legfeljebb 2.8% lehet, a 22. sor szerint pedig az ólommentes benziné legfeljebb 3%.

Bármely termékhez felhasznált bármely összetevő mennyisége nyilván nemnegatív, ez van a 23–30. sorokban kikötve.

Ha megoldjuk a feladatot (például megfelelő programcsomag segítségével), a következő optimális megoldást kapjuk. A profit 4432.37$ (a célfüggvény centekben volt megadva), amely úgy áll elő, hogy a normálbenzinből 5000 litert termelnek (13.76 liter ólom, 2932.71 liter Alaszka és 2053.53 liter Texas nyersolaj felhasználásával), az ólommentes benzinből 5000 litert termelnek (2916.67 liter Alaszka és 2083.33 liter Texas nyersolaj felhasználásával), és a szuperbenzinből 11 134.97 litert termelnek (121.21 liter ólom, 6863.14 liter Texas és 4150.62 liter Alaszka nyersolaj felhasználásával). A felhasznált 10 000 liter Alaszka nyersolaj 90.48% Alaszka1 és 9.52% Alaszka2 nyersolaj keveréke.

MEGJEGYZÉS A Texaco cég a benzintermékek termelésének optimalizálására szolgáló nemlineáris keverési modellel évente legalább 30 millió dollárt takarít meg. Lásd a Dewitt et al. (1989) publikációt a részletekről.

4. PÉLDA A Truckco cég azt próbálja meghatározni, hova telepítsen egy áruraktárt. A cég négy vásárlójának a pozíciója az x–y síkon (kilométerben), valamint az egyes vásárlókhoz történő szállítások évenkénti száma a 3. táblázatban van megadva. A Truckco úgy akarja meghatározni az áruraktár helyét, hogy az az össztávolság, amit a kamionok az áruraktártól a négy vásárlóhoz évente megtesznek, minimális legyen.

3. TÁBLÁZAT

Vásárló	X-koordináta	Y-koordináta	Szállítások száma
1	5	10	200
2	10	5	150
3	0	12	200
4	12	0	300

Megoldás Legyen

$$X = \text{az áruraktár } x\text{-koordinátája}$$
$$Y = \text{az áruraktár } y\text{-koordinátája}$$
$$Di = \text{távolság az } i\text{-edik vásárlótól az áruraktárig.}$$

A megfelelő NLP feladat a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned}
1: &\quad \min\ 200 \cdot D1 + 150 \cdot D2 + 200 \cdot D3 + 300 \cdot D4 \\
2: &\quad \text{f.h. } D1 = ((X-5)^2 + (Y-10)^2)^{0.5} \\
3: &\quad D2 = ((X-10)^2 + (Y-5)^2)^{0.5} \\
4: &\quad D3 = (X^2 + (Y-12)^2)^{0.5} \\
5: &\quad D4 = ((X-12)^2 + Y^2)^{0.5}
\end{aligned}$$

A célfüggvény azt az össztávolságot minimalizálja, amit a kamionok az áruraktártól a négy vásárlóig évente megtesznek. A 2–5. sorok az egyes vásárlóknak az áruraktártól való távolságát fejezik ki az áruraktár koordinátáinak segítségével. A feladatot programcsomaggal megoldva azt kapjuk, hogy az áruraktárt az $X = 9.31$ és $Y = 5.03$ koordinátájú pontba kell elhelyezni. A kamionok évente összesen 5456.54 kilométert tesznek meg az áruraktártól a vásárlókig.

5. PÉLDA Firerock cég autógumit gyárt nyersgumi, olaj és korom felhasználásával. Az egyes alkotóelemek ára a 4. táblázatban van megadva, centben kilónként.

4. TÁBLÁZAT

	Ár (cent/kg)
Nyersgumi	4
Olaj	1
Korom	7

Az autógumi keménységi értéke 25 és 35 között kell hogy legyen. A rugalmassági érték legalább 16, a húzóerősségi érték pedig legalább 12 kell hogy legyen. Egy négy gumiabroncsból álló készlet előállításához 100 kg súlyú gumitermékre van szükség. A négy abroncshoz szükséges guminak 25 és 60 kg közötti nyersgumit és legalább 50 kg súlyú kormot kell tartalmaznia. Legyen

$R =$ a nyersgumi mennyisége a négy abroncs előállításához szükséges keverékben (kg)
$O =$ az olaj mennyisége a négy abroncs előállításához szükséges keverékben (kg)
$C =$ a korom mennyisége a négy abroncs előállításához szükséges keverékben (kg)

Statisztikai vizsgálatokkal kimutatták, hogy a nyersgumi, az olaj és a korom 100 kg súlyú keverékének keménységi, rugalmassági és húzóerőértékei a következőképpen alakulnak:

$$\begin{aligned}
\text{húzóerő} &= 12.5 - .10(O) - .001(O)^2\\
\text{rugalmasság} &= 17 + .35R - .04(O) - .002(R)^2\\
\text{keménység} &= 34 + .10R + .06(O) - .3(C) + .001(R)(O) + .005(O)^2 + .001C^2
\end{aligned}$$

Írjunk fel egy NLP feladatot, amelynek megoldása megmondja a Firerock cégnek, hogyan minimalizálhatja az egy autóabroncs-készlethez szükséges gumi előállításának költségét![2]

Megoldás Legyen

$TS =$ a keverék húzóereje
$E =$ a keverék rugalmassága
$H =$ a keverék keménysége

A feladat a következőképpen írható fel:

$$\begin{array}{rll}
1: & \min & 4\cdot R + O + 7\cdot C\\
2: & \text{f.h.} & TS = 12.5 - .10\cdot O - .001\cdot O^2\\
3: & & E = 17 + .35\cdot R - .04\cdot O - .002\cdot R^2\\
4: & & H = 34 + .10\cdot R + .06\cdot O - .3\cdot C + .001\cdot R\cdot O + .005\cdot O^2 + .001\cdot C^2\\
5: & & R + O + C = 100\\
6: & & R \geq 25\\
7: & & R \leq 60\\
8: & & O \geq 0\\
9: & & C \geq 50\\
10: & & TS \geq 12\\
11: & & E \geq 16\\
12: & & H \geq 25\\
13: & & H \leq 35
\end{array}$$

Az 1. sor a gumitermék előállításához szükséges költséget minimalizálja. A 2–4. sorok a húzóerőt, a rugalmasságot és a keménységet fejezik ki a keverék összetevőinek függvényében. Megfigyelhetjük, hogy a húzóerő, a rugalmasság és a keménység mindegyike R, O és C nemlineáris függvénye. Az 5. sor azt követeli meg, hogy 100 kg súlyú összetevőt keverjünk össze a végső gumitermék előállításához. A 6–13. sorok alsó- és felsőkorlát feltételek, amelyek azt biztosítják, hogy a keverék megfelelő mennyiséget tartalmaz minden összetevőből, továbbá a húzóerő, a rugalmasság és a keménység értéke is megfelelő lesz. A feladatot programcsomaggal megoldva azt kapjuk, hogy 45.23 kg nyersgumit, 4.77 kg olajat és 50 kg kormot kell összekeverni. A 100 kg súlyú keverék összköltsége 5.36$.

A 10.8. alfejezetben majd visszatérünk annak a megtárgyalására, hogy ez a megoldás optimális-e.

[2] A példa a Nicholson (1971) könyvre támaszkodik.

Feladatok

A csoport

1. A Q & H cég szappanoperák és futballmérkőzések közben reklámoztat. Egy reklám egyszeri leadásának költsége szappanopera közben 50 000\$, futballmérkőzés közben 100 000\$. Ha a nézőszámot milliókban adjuk meg, akkor S számú szappanopera közbeni hirdetés megvásárlása esetén a reklámot $5\sqrt{S}$ férfi és $20\sqrt{S}$ nő fogja látni. Ha F számú futballmérkőzés közbeni hirdetést vásárolnak, akkor a reklámot $17\sqrt{F}$ férfi és $7\sqrt{F}$ nő fogja látni. A Q & H azt akarja, hogy a reklámokat legalább 40 millió férfi és legalább 60 millió nő lássa.

(a) Fogalmazzunk meg egy NLP feladatot, amely minimalizálja a Q & H költségeit a kívánt nézőszám elérése mellett!

(b) Megsérti-e ez az NLP feladat az arányossági és az additvitási feltevést?

(c) Most azt tegyük fel, hogy az F számú futballmérkőzés és S számú szappanopera közbeni hirdetés által elért nők száma $7\sqrt{F}+20\sqrt{S}-0.2\sqrt{FS}$. Miért tekinthető ez sokkal valószerűbb becslésnek a Q & H hirdetések női nézőinek számára vonatkozóan?

2. Egy a, b és c hosszúságú oldalakkal adott háromszög területe $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, ahol s a háromszög kerületének fele. Van egy 60 méter hosszúságú kerítésünk, és be akarunk vele keríteni egy háromszög alakú területet. Fogalmazzunk meg egy NLP feladatot a maximális területű bekerítés meghatározására!

3. Ha egy gázt a I kezdő nyomástól az F végső nyomásig három közbülső fázisban nyomunk össze, akkor a szükséges energia az alábbi képlettel van megadva:

$$K\left\{\sqrt{\frac{p_1}{I}}+\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}+\sqrt{\frac{F}{p_2}}-3\right\}.$$

Fogalmazzunk meg egy NLP feladatot, ami azt írja le, hogyan lehet minimalizálni a gáz összenyomásához szükséges energiát!

4. Tekintsük a 7. fejezet 6. példáját. Legyen A = a napok száma, amivel A időtartama csökken, B = a napok száma, amivel B időtartama csökken. Tegyük fel, hogy az egyes tevékenységek időtartamának csökkentése a következő költségekkel jár:

A:	$5A^2$;	B:	$20B^2$;	C:	$2C^2$;
D:	$20D^2$;	E:	$10E^2$;	F:	$15F^2$

és hogy bármelyik tevékenység időtartama akár 0 napra is csökkenthető, ha úgy akarják. Fogalmazzunk meg egy NLP feladatot, amely olyan kikötés mellett, hogy a projektet 25 napon belül be kell fejezni, minimalizálja a költséget!

5. A Beerco cég összesen 100 000 dollárt költhet reklámra négy különböző piacon. Az i-edik piacon x_i ezer dollár elköltésével az 5. táblázatban adott árbevételek érhetők el (ezer dollárban).

5. TÁBLÁZAT

	Árbevételek
1. piac	$10x_1^{.4}$
2. piac	$8x_2^{.5}$
3. piac	$12x_3^{.3}$
4. piac	$6x_4^{.6}$

Mennyit kell költeni az egyes piacokon a teljes árbevétel maximalizálásához?

6. A Widgetco cég egyetlen termékét két üzemében állítja elő. A termelési költség $20x^{1/2}$, ha x egységet állítanak elő az 1. üzemben, és $40x^{1/3}$, ha ugyanezt a 2. üzemben állítják elő. Mindkét üzem legfeljebb 70 egységnyi terméket tud gyártani. A termék egy egységét 10 dollárért tudják eladni, viszont legfeljebb 120 egységet lehet értékesíteni. Fogalmazzunk meg egy NLP feladatot, amely segítségével a Widgetco maximalizálni tudja a profitját!

7. Egy egyenlő oldalú háromszög csúcsaiban három város helyezkedik el. Egy repülőteret kell építeni egy olyan helyen, ahonnan a három városhoz való távolságok összege minimális. Fogalmazzunk meg egy NLP feladatot, amelynek megoldása megadja, hova építsék a repülőteret1

8. Egy kémiai folyamat hozama függ egyrészt a folyamat lezajlásának T időtartamától (percekben megadva), másrészt a folyamat TEMP műveleti hőmérsékletétől (Celsius-fokban megadva). Az összefüggést a következő egyenlet írja le:

$$\begin{aligned}\text{YIELD} = 87 - 1.4T' + .4\text{TEMP}' - 2.2T'^2 \\ - 3.2\text{TEMP}'^2 - 4.9(T')(\text{TEMP}'),\end{aligned}$$

ahol $T' = (T-90)/10$ és $\text{TEMP}' = (\text{TEMP}-150)/5$. A T értéke 60 és 120 perc, míg a TEMP értéke 100 és 200 fok között kell hogy legyen. Írjunk fel egy NLP feladatot, amely a folyamat hozamának maximalizálására használható!

B csoport

9. Tekintsük a 3.8. alfejezet 5. feladatát a következő módosítással: Tegyük fel, hogy egy Superquality (SQ) nevű kémiai anyagot adhatunk a gázolajhoz és a fűtőolajhoz a minőség szintjének növelése céljából. Ha x mennyiséget adunk az SQ-ból minden hordó gázolajhoz, akkor annak minőségi szintje az eredetihez képest $x^{.5}$ egységgel nő. Ha x

mennyiségű SQ-t adunk minden hordó fűtőolajhoz, akkor a minőségi szint növekedése $.6x^{.6}$ lesz. A fűtőolajhoz adott SQ mennyisége nem haladhatja meg a fűtőolaj előállítására használt olaj súlyának 5%-át. Hasonlóan a gázolajhoz adott SQ mennyisége nem haladhatja meg a gázolaj előállítására használt olaj súlyának 5%-át. Az SQ kilónként 20 dollárért szerezhető be. Fogalmazzunk meg egy NLP feladatot, amely segíti Adam Chandler ügyvezető igazgatót a profit maximalizálásában.

10. A Fuller Brush cég ügynöke előtt három választási lehetőség áll: otthagyja a céget, kevés igyekezettel folytatja a munkát, vagy pedig nagy igyekezettel folytatja a munkát. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy minden ügynök 0, 5000 vagy 50 000 dollár értékű kefét tud eladni. Az eladott mennyiség függ az erőfeszítés szintjétől, de a véletlentől is. A megfelelő valószínűségi értékek a 6. táblázatban vannak megadva.
Ha egy ügynök w dollár jövedelemhez jut, az számára $w^{1/2}$ egységnyi hasznot jelent. Az ügynök alacsony szintű erőfeszítés esetén 0, míg magas szintű erőfeszítés esetén 50 egységnyi hasznot áldoz fel. Ha az ügynök elhagyná a Fuller céget, és máshol dolgozna, az számára 20 egységnyi hasznot eredményezne. A Fuller arra akarja ösztönözni ügynökeit, hogy teljes igyekezettel dolgozzanak. A kérdés az, miként tudja ezt minimális költséggel megtenni. A cég közvetlenül nem tudja észlelni egy adott ügynök igyekezetének a szintjét (és a teljesítménye a véletlenen is múlik), de közvetlenül észleli az eladott mennyiségeket. Ezért a fizetés teljesen az eladott mennyiségtől függ. A Fullernak a következő fizetési kategóriákat kell meghatároznia: w_0 = fizetés 0 dollár értékű eladás esetén, w_{5000} = fizetés 5000 dollár értékű eladás esetén, és $w_{50\,000}$ = fizetés 50 000 dollár értékű eladás esetén. Ezeket a fizetéseket úgy kell kialakítani, hogy az ügynökök a magas szintű erőfeszítéssel járó haszon várható értékét többre értékeljék, mint a felmondás vagy az alacsony szintű igyekezet esetén várható hasznot. Fogalmazzunk meg egy NLP feladatot, amely segítségével minden ügynököt magas szintű erőfeszítésre lehet ösztönözni. Ez a feladat egyébként az *ügynökelmélet* egy példája.[3]

6. TÁBLÁZAT

	Az erőfeszítés szintje	
Eladott mennyiség	**Alacsony**	**Magas**
0$	.6	.3
5000$	.3	.2
50 000$	.1	.5

10.2. Konvex és konkáv függvények

A konvex és a konkáv függvények különösen fontos szerepet játszanak a nemlineáris programozási feladatok tanulmányozásában.

Legyen $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ egy S konvex halmaz összes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pontján értelmezett függvény.[4]

DEFINÍCIÓ

Az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **konvex függvény** az S konvex halmazon, ha bármely $x' \in S$, $x'' \in S$ és $0 \le c \le 1$ esetén

$$f(cx + (1-c)x'') \le cf(x') + (1-c)f(x'') \tag{2}$$

teljesül.

DEFINÍCIÓ

Az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **konkáv függvény** az S konvex halmazon, ha bármely $x' \in S$, $x'' \in S$ és $0 \le c \le 1$ esetén

$$f(cx' + (1-c)x'') \ge cf(x') + (1-c)f(x'') \tag{3}$$

teljesül.

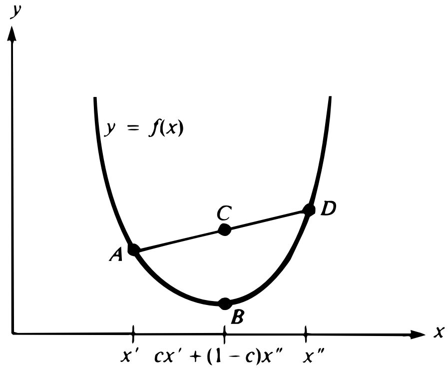
[3] A Grossman és Hart (1983) cikkre támaszkodva.

[4] A 3. fejezetből tudjuk, hogy az S halmaz konvex, ha bármely $x' \in S$ és $x'' \in S$ esetén az x' és x'' pontokat összekötő szakasz minden pontja S-ben van. Ez biztosítja, hogy $cx' + (1-c)x''$ is az S eleme.

A (2) és (3) egyenlőtlenségekből látható, hogy $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pontosan akkor konvex függvény, ha $-f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ konkáv függvény, és fordítva.

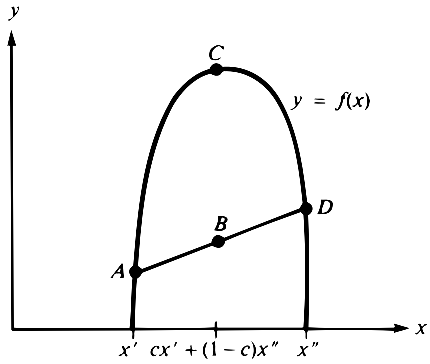
Hogy jobban megértsük ezeket a definíciókat, vegyünk egy $f(x)$ egyváltozós függvényt. A 4. ábráról és a (2) egyenlőtlenségből is látható, hogy $f(x)$ pontosan akkor konvex, ha az $y = f(x)$ görbe bármely két pontját összekötő szakasz sehol nem halad az $y = f(x)$ görbe alatt. Hasonlóan az 5. ábráról és a (3) egyenlőtlenségből az látszik, hogy $f(x)$ pontosan akkor konkáv, ha az $y = f(x)$ görbe bármely két pontját összekötő szakasz sehol nem halad az $y = f(x)$ görbe felett.

4. ÁBRA
Egy konvex függvény



$A = (x', f(x'))$
$D = (x'', f(x''))$
$C = (cx' + (1 - c)x'', cf(x') + (1 - c)f(x''))$
$B = (cx' + (1 - c)x'', f(cx' + (1 - c)x''))$
Az ábrán: $f(cx' + (1 - c)x'') \leq cf(x') + (1 - c)f(x'')$

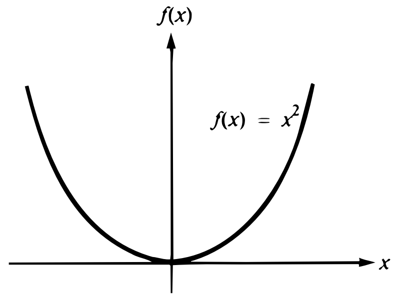
5. ÁBRA
Egy konkáv függvény



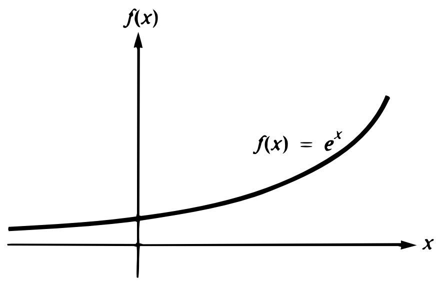
$A = (x', f(x'))$
$D = (x'', f(x''))$
$C = (cx' + (1 - c)x'', f(cx' + (1 - c)x''))$
$B = (cx' + (1 - c)x'', cf(x') + (1 - c)f(x''))$
Az ábrán: $f(cx' + (1 - c)x'') \geq cf(x') + (1 - c)f(x'')$

6. PÉLDA Az $f(x) = x^2$ és $f(x) = e^x$ konvex függvények, az $x \geq 0$ pontok halmazán pedig $f(x) = x^{1/2}$ konkáv függvény. Ez a 6. ábrán is könnyen látható.

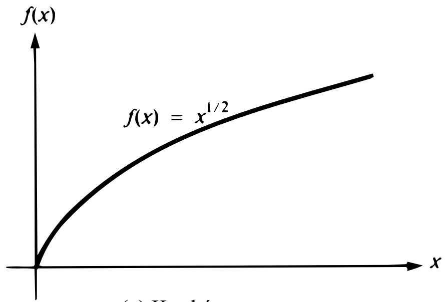
6. ÁBRA
Példák konvex és konkáv függvényekre



(a) Konvex



(b) Konvex

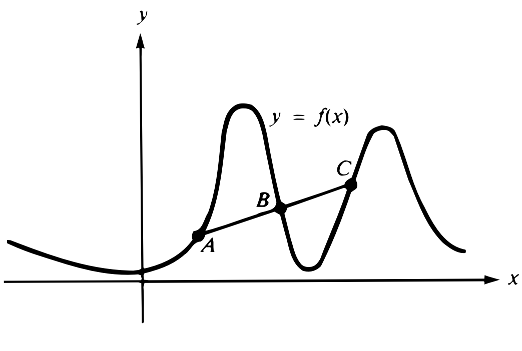


(c) Konkáv

7. PÉLDA Megmutatható (lásd a 12. feladatot a fejezet végén), hogy két konvex függvény összege is konvex, illetve két konkáv függvény összege is konkáv. Tehát az $f(x) = x^2 + e^x$ függvény konvex.

8. PÉLDA A 7. ábrán az AB szakasz az $y = f(x)$ görbe alatt, a BC szakasz pedig az $y = f(x)$ görbe felett fekszik, így az $f(x)$ függvény se nem konvex, se nem konkáv.

7. ÁBRA
Egy függvény, amely se nem konvex, se nem konkáv



9. PÉLDA Az $f(x) = ax + b$ alakú lineáris függvény konvex is és konkáv is. Ez abból következik, hogy

$$\begin{aligned} f(cx' + (1-c)x'') &= a[cx' + (1-c)x''] + b \\ &= c(ax' + b) + (1-c)(ax'' + b) \\ &= cf(x') + (1-c)f(x'') \end{aligned}$$

Mivel (2) és (3) is egyenlőséggel teljesül, az $f(x) = ax + b$ egyszerre konvex és konkáv függvény.

Mielőtt megvizsgálnánk, miként lehet meghatározni, hogy vajon egy adott függvény konvex vagy konkáv, bebizonyítunk egy olyan állítást, amely jól jellemzi a konvex és konkáv függvények fontosságát.

1. TÉTEL

Tekintsük az (1) NLP feladatot, és legyen az egy maximalizálási feladat. Tegyük fel, hogy az (1) NLP feladat S lehetséges tartománya konvex halmaz. Ha $f(x)$ egy konkáv függvény az S halmazon, akkor az (1) tetszőleges lokális maximuma egyben az (1) NLP feladat optimális megoldása is.

Bizonyítás Ha az 1. tétel nem lenne igaz, akkor létezne olyan $\bar{x}$ lokális maximum, ami nem optimális megoldása az (1) NLP feladatnak. Legyen S az (1) lehetséges tartománya (feltettük, hogy S konvex halmaz). Ekkor van olyan $x \in S$, hogy $f(x) > f(\bar{x})$. A (3) egyenlőtlenségből adódik, hogy bármely olyan c esetén, amelyre $0 < c < 1$, fennáll

$$\begin{aligned} f(c\bar{x} + (1-c)x) &\geq cf(\bar{x}) + (1-c)f(x) \\ &> cf(\bar{x}) + (1-c)f(\bar{x}) \qquad \text{(mivel } f(x) > f(\bar{x})\text{)} \\ &= f(\bar{x}) \end{aligned}$$

Észrevehetjük, hogy ha c tart 1-hez, akkor $c\bar{x} + (1-c)x$ megengedett (mivel S konvex), és tart az $\bar{x}$-hoz. Tehát $\bar{x}$ nem lehet lokális maximum. Az ellentmondás egyben az 1. tételt is bizonyítja. □

Hasonló megfontolással lehet bizonyítani az $1'$. tételt is (lásd a 11. feladatot a fejezet végén).

$1'$. TÉTEL

Tekintsük az (1) NLP feladatot, és legyen az egy minimalizálási feladat. Tegyük fel, hogy az (1) NLP feladat S lehetséges tartománya konvex halmaz. Ha $f(x)$ egy konvex függvény az S halmazon, akkor az (1) tetszőleges lokális minimuma egyben az (1) NLP feladat optimális megoldása is.

Az 1. és $1'$. tétel azt bizonyítja, hogy amennyiben konkáv függvényt maximalizálunk (vagy konvex függvényt minimalizálunk) egy S konvex tartomány felett, akkor tetszőleges lokális maximum (vagy lokális minimum) megoldja az (1) feladatot. NLP feladatok megoldásakor többször is alkalmazni fogjuk majd az 1. és $1'$. tételt.

Most megvizsgáljuk, miként lehet egy $f(x)$ egyváltozós függvényről eldönteni, hogy esetleg konvex vagy konkáv. Tudjuk, ha $f(x)$ egy egyváltozós konvex függvény, akkor az $y = f(x)$ görbe bármely két pontját összekötő szakasz nem megy be az $y = f(x)$ görbe alá.

A 4. ábrán az is látszik, hogy konvex $f(x)$ függvény esetén $f(x)$ meredeksége monoton nemcsökkenő az x pontok halmazán.

2. TÉTEL

Tegyük fel, hogy létezik $f''(x)$ az S konvex halmaz minden x pontjában. Ekkor $f(x)$ pontosan akkor konvex az S-en, ha $f''(x) \geq 0$ az S minden x pontja esetén.

Mivel $f(x)$ akkor és csak akkor konvex, ha $-f(x)$ konkáv, a $2'$. tétel szintén igaz.

$2'$. TÉTEL

Tegyük fel, hogy létezik $f''(x)$ az S konvex halmaz minden x pontjában. Ekkor $f(x)$ pontosan akkor konkáv az S-en, ha $f''(x) \leq 0$ az S minden x pontja esetén.

10. PÉLDA

1. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = x^2$ függvény konvex az $S = R^1$ halmazon!

2. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = e^x$ függvény konvex az $S = R^1$ halmazon!

3. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = x^{1/2}$ függvény konkáv az $S = (0, \infty)$ halmazon!

4. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = ax + b$ függvény konvex és konkáv is az $S = R^1$ halmazon!

Megoldás

1. $f''(x) = 2 \geq 0$, ezért $f(x)$ konvex az $S = R^1$ halmazon.

2. $f''(x) = e^x \geq 0$, ezért $f(x)$ konvex az $S = R^1$ halmazon.

3. $f''(x) = -x^{-3/2}/4 \leq 0$, ezért $f(x)$ konkáv az $S(0, \infty)$ halmazon.

4. $f''(x) = 0$, ezért $f(x)$ konvex és konkáv is az $S = R^1$ halmazon.

Miként lehet meghatározni, hogy egy n-változós $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvény konvex vagy konkáv egy $S \subset R^n$ halmazon? Feltesszük, hogy az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ másodrendű parciális deriváltjai folytonosak. Mielőtt felírnánk azokat a kritériumokat, amelyeket annak meghatározására használnak, hogy $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ konvex-e vagy esetleg konkáv, szükségünk van három definícióra.

DEFINÍCIÓ

Az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvény **Hesse-mátrixa** az az $n \times n$-es mátrix, amelynek ij indexű eleme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Jelölje $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a Hesse-mátrix értékét az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pontban. Például $f(x_1, x_2) = x_1^3 + 2x_1x_2 + x_2^2$ esetén

$$H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 6x_1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

DEFINÍCIÓ

Egy $n \times n$-es mátrix ***i*-edrendű főminora** egy olyan $i \times i$ méretű részmátrix determinánsa, amelyet $n-i$ sor és a hozzá tartozó $n-i$ oszlop törlésével nyerünk a mátrixból.

Tehát a

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

mátrix esetén az elsőrendű főminorok -2 és -4, a másodrendű főminor pedig $-2(-4)-(-1)(-1)=7$. Bármely mátrix esetén az elsőrendű főminorok éppen a mátrix diagonálisának az elemei.

DEFINÍCIÓ

Egy $n \times n$-es mátrix ***k*-adik sarokfőminora** annak a $k \times k$ méretű mátrixnak a determinánsa, amelyet a mátrix utolsó $n-k$ sorának és oszlopának elhagyásával kapunk.

Jelölje $H_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ az $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ pontban kiértékelt Hesse-mátrix k-adik sarokfőminorát. Tehát $f(x_1,x_2)=x_1^3+2x_1x_2+x_2^2$ esetén $H_1(x_1,x_2)=6x_1$ és $H_2(x_1,x_2)=6x_1(2)-2(2)=12x_1-4$.

A lejjebb, bizonyítás nélkül kimondott 3. és 3′. tétel alapján a Hesse-mátrixot használhatjuk annak eldöntésére, hogy $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ konvex vagy konkáv (vagy egyik sem) egy $S \subset R^n$ konvex halmazon. (A 3. és 3′. tétel bizonyítása megtalálható a Bazaraa és Shetty (1993) könyv 91–93. oldalán).

3. TÉTEL

Tegyük fel, hogy $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ másodrendű parciális deriváltjai folytonosak minden $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in S$ pontban. Ekkor $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ pontosan akkor konvex az S halmazon, ha bármely $x\in S$ esetén H összes főminora nemnegatív.

11. PÉLDA Mutassuk meg, hogy $f(x_1,x_2)=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$ konvex az $S=R^2$ halmazon!

Megoldás Azt kapjuk, hogy

$$H(x_1,x_2)=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

A Hesse-mátrix elsőrendű főminorai a diagonális elemei (mindkettő értéke $2\geq 0$). A másodrendű főminor $2(2)-2(2)=0\geq 0$. Mivel bármely pont esetén H összes főminora nemnegatív, ezért a 3. tétel alapján az $f(x_1,x_2)$ konvex az R^2-en.

3′. TÉTEL

Tegyük fel, hogy $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ másodrendű parciális deriváltjai folytonosak minden $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in S$ pontban. Ekkor $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ pontosan akkor konkáv az S halmazon, ha bármely $x\in S$ és $k=1,2,\ldots,n$ esetén H összes k-adrendű nemnulla főminorának előjele azonos $(-1)^k$ előjelével.

12. PÉLDA Mutassuk meg, hogy az $f(x_1,x_2) = -x_1^2 - x_1x_2 - 2x_2^2$ függvény konkáv R^2-en!

Megoldás Azt kapjuk, hogy

$$H(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Az elsőrendű főminorok a Hesse-mátrix diagonálisának elemei, azaz -2 és -4. Mindkettő nempozitív. A másodrendű főminor a $H(x_1,x_2)$ determinánsa, azaz $-2(-4)-(-1)(-1) = 7 > 0$. Tehát $f(x_1,x_2)$ konkáv függvény az R^2-en.

13. PÉLDA Mutassuk meg, hogy $S = R^2$ esetén az $f(x_1,x_2) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_2^2$ nem konvex és nem konkáv függvény!

Megoldás Azt kapjuk, hogy

$$H(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

A Hesse-mátrix elsőrendű főminorai 2 és 4. Mivel mindkét elsőrendű főminor pozitív, $f(x_1,x_2)$ nem lehet konkáv. A másodrendű főminor $2(4)-(-3)(-3) = -1 < 0$. Tehát $f(x_1,x_2)$ nem lehet konvex. Ezek együtt azt mutatják, hogy az $f(x_1,x_2)$ függvény se nem konvex, se nem konkáv.

14. PÉLDA Mutassuk meg, hogy $S = R^3$ esetén $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3$ egy konvex függvény!

Megoldás Az alábbi Hesse-mátrixot kapjuk:

$$H(x_1,x_2,x_3) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

A Hesse-mátrix 1. és 2. sorát (és oszlopát) törölve a $4 > 0$ elsőrendű főminort kapjuk. A Hesse-mátrix 1. és 3. sorát (és oszlopát) törölve a $2 > 0$ elsőrendű főminorhoz jutunk. A Hesse-mátrix 2. és 3. sorát (és oszlopát) törölve pedig a $2 > 0$ elsőrendű főminort kapjuk.

A Hesse mátrix 1. sorának és 1. oszlopának törlésével a

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = 7 > 0$$

másodrendű főminor adódik.

A Hesse-mátrix 2. sorának és 2. oszlopát törölve a

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = 7 > 0$$

másodrendű főminorhoz jutunk.

A Hesse mátrix 3. sorának és 3. oszlopának törlésével a

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 3 > 0$$

másodrendű főminort kapjuk.

A harmadrendű főminor egyszerűen magának a Hesse-mátrixnak a determinánsa. A determinánst az első sor szerint kifejtve a

$$2[(2)(4)-(-1)(-1)]-(-1)[(-1)(4)-(-1)(-1)]$$
$$+(-1)[(-1)(-1)-(-1)(2)] = 14-5-3 = 6 > 0$$

harmadrendű főminor adódik.

Mivel bármely (x_1, x_2, x_3) esetén a Hesse-mátrix minden főminora nemnegatív, megmutattuk, hogy $f(x_1, x_2, x_3)$ konvex függvény az R^3 halmazon.

Feladatok

A csoport

A következő függvények mindegyikéről döntsük el, hogy az adott S halmazon konvex, konkáv, vagy egyik sem.

1. $f(x) = x^3$; $S = [0, \infty)$

2. $f(x) = x^3$; $S = R^1$

3. $f(x) = \frac{1}{x}$; $S = (0, \infty)$

4. $f(x) = x^a$ $(0 \le a \le 1)$; $S = (0, \infty)$

5. $f(x) = \ln x$; $S = (0, \infty)$

6. $f(x_1, x_2) = x_1^3 + 3x_1x_2 + x_2^2; S = R^2$

7. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$; $S = R^2$

8. $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_1x_2 - 2x_2^2$; $S = R^2$

9. $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + .5x_1x_2$; $S = R^3$

10. Az a, b és c milyen értékei esetén lesz az $ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$ konvex függvény az R^2-en? Mikor lesz konkáv az R^2-en?

B csoport

11. Bizonyítsuk be az $1'$. tételt!

12. Mutassuk meg, hogy ha $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ konvex függvény az S konvex halmazon, akkor $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ is konvex függvény az S halmazon!

13. Ha $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ konvex függvény az S halmazon, akkor mutassuk meg, hogy $c \ge 0$ esetén a $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = cf(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvény konvex az S-en, $c \le 0$ esetén pedig $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = cf(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ konkáv az S-en!

14. Mutassuk meg, hogy ha az $y = f(x)$ konkáv függvény R^1-en, akkor a $z = \frac{1}{f(x)}$ konvex függvény (feltesszük, hogy $f(x) > 0$)!

15. Az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvény *kvázikonkáv* az $S \subset R^n$ konvex halmazon, ha bármely $x' \in S$, $x'' \in S$ és $0 \le c \le 1$ esetén

$$f(cx' + (1-c)x'') \ge \min\{f(x'), f(x'')\}.$$

Mutassuk meg, hogy ha f konkáv R^1-en, akkor f kvázikonkáv is! A 8. ábra függvényei közül melyik kvázikonkáv? Egy kvázikonkáv függvény szükségszerűen konkáv is?

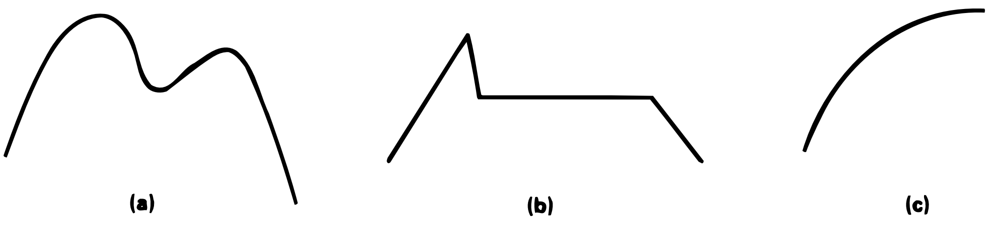
16. A 12. feladatból következik, hogy konkáv függvények összege is konkáv. Kvázikonkáv függvények összege is feltétlenül kvázikonkáv?

17. Tegyük fel, hogy egy függvény Hesse-mátrixának diagonálisában pozitív és negatív elem is van. Mutassuk meg, hogy a függvény nem lehet sem konvex, sem konkáv!

18. Mutassuk meg, hogy ha $f(x)$ egy nemnegatív, növekvő konkáv függvény, akkor $\ln(f(x))$ konkáv függvény!

19. Mutassuk meg, hogy ha az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvény kvázikonkáv az S konvex halmazon, akkor bármely a szám esetén az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge a$ egyenlőtlenségnek eleget tevő pontok S_a halmaza konvex!

8. ÁBRA



20. Mutassuk meg, hogy az 1. tétel nem igaz, ha f kvázi-konkáv függvény!

21. Tegyük fel, hogy egy NLP feladat feltételei

$$g_i(x_1,x_2,\dots,x_n) \le b_i(i=1,2,\dots m)$$

alakúak. Mutassuk meg, hogy ha a g_i függvények mindegyike konvex, akkor az NLP feladat lehetséges tartománya konvex!

C csoport

22. Legyen $f(x_1,x_2)$ konkáv függvény R^2-en. Mutassuk meg, hogy bármely a szám esetén az $f(x_1,x_2) \ge a$ egyenlőtlenségnek eleget tevő (x_1,x_2) pontok halmaza konvex!

23. Legyen $\mathbf{Z}$ egy $N(0,1)$ standard normális eloszlás, és legyen $F(x)$ a $\mathbf{Z}$ eloszlásfüggvénye. Mutassuk meg, hogy az $S=(-\infty,0]$ halmazon $F(x)$ egy növekvő konvex függvény, az $S=[0,\infty)$ halmazon pedig növekvő konkáv függvény!

24. Tekintsük az 5. fejezetben tárgyalt Dakota LP feladatot! Legyen $v(L,FH,CH)$ a maximális bevétel akkor, ha L négyzetméternyi faanyag, FH órányi végső simításokra fordítható kapacitás, és CH órányi ácsmunkára fordítható kapacitásidő áll rendelkezésre.

(a) Mutassuk meg, hogy $v(L,FH,CH)$ konkáv függvény!

(b) Magyarázzuk el azt is, hogy ez az eredmény miért azt mutatja, hogy minden egyes hozzáadott erőforrás egység értéke a rendelkezésre álló erőforrás mennyiségének nemnövekvő függvénye!

10.3. Egyváltozós NLP feladatok megoldása

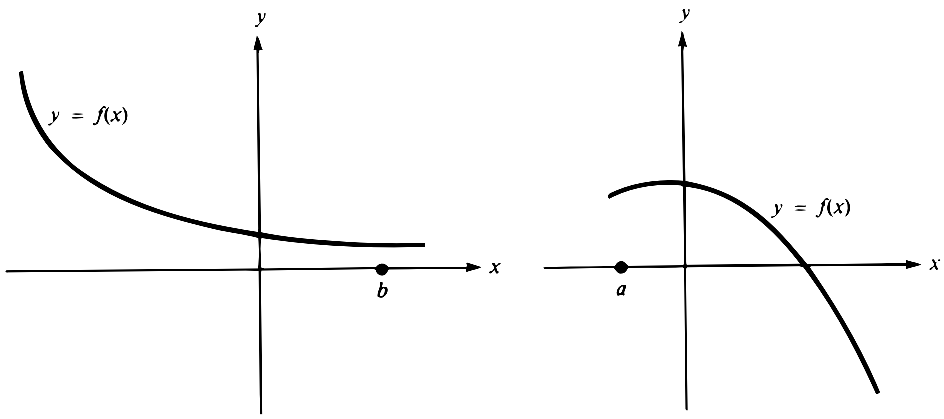
Ebben a fejezetben azt tárgyaljuk, hogyan lehet

$$\begin{aligned} &\max \ (\text{vagy } \min)\ f(x) \\ &\text{f.h.} \quad x \in [a,b] \end{aligned} \tag{4}$$

alakú NLP feladatokat megoldani. (Ha $b=\infty$, akkor a (4) NLP feladat megengedett tartománya $x \ge a$, az $a=-\infty$ esetben pedig $x \le b$.)

A (4) optimális megoldásának megkereséséhez megkeressük az összes lokális maximumot (vagy minimumot). Egy olyan pontot, amely lokális maximuma vagy lokális minimuma a (4) feladatnak, lokális szélsőértékhelynek nevezünk. A (4) optimális megoldása az a lokális maximum (vagy minimum), amelyik a legnagyobb (vagy legkisebb) $f(x)$ értékkel rendelkezik. Természetesen, ha $a=-\infty$ vagy $b=\infty$, lehetséges, hogy (4)-nek nincs optimális megoldása (lásd a 9. ábrát).

9. ÁBRA
NLP feladatok optimális megoldás nélkül



(a) max $f(x)$
f.h. $x \in (-\infty, b]$

(b) min $f(x)$
f.h. $x \in [a, \infty)$

A pontoknak három olyan típusa van, amelyeknél a (4) feladatnak esetleg lokális maximuma vagy minimuma lehet (ezeket a pontokat szélsőértékhely jelöltnek vagy kritikus pontnak is hívják):

1. eset Azok a pontok, ahol $a < x < b$ és $f'(x) = 0$ (ezeket $f(x)$ stacionárius pontjainak hívják).

2. eset Azok a pontok, ahol nem létezik $f'(x)$.

3. eset Az $[a,b]$ intervallum a és b végpontja.

1. eset: Azok a pontok, ahol $a < x < b$ és $f'(x) = 0$

Tegyük fel, hogy $a < x < b$, és létezik $f'(x_0)$. Ha x_0 egy lokális maximum vagy lokális minimum, akkor $f'(x_0) = 0$. Ez a 10a. és 10b. ábrán is látszik. A 10a. ábrán látható, hogy $f'(x_0) > 0$ esetén van olyan x_1 és x_2 pont az x_0 közelében, amelyekre $f(x_1) < f(x_0)$ és $f(x_2) > f(x_0)$. Tehát ha $f'(x_0) > 0$, akkor x_0 nem lehet lokális maximum vagy lokális minimum. Teljesen hasonlóan, a 10b. ábra azt mutatja, hogy $f'(x_0) < 0$ esetén x_0 nem lehet lokális maximum vagy lokális minimum. A 10c. és 10d. ábrákról azonban már azt láthatjuk, hogy $f'(x_0) = 0$ esetén x_0 lokális maximum és lokális minimum is lehet. Sajnos a 10e. ábra azt is mutatja, hogy $f'(x_0)$ akkor is lehet nulla, ha x_0 nem lokális maximum és nem lokális minimum. A 10c. ábrán látható, hogy ha $f'(x)$ pozitívból negatívba vált, amikor áthalad az x_0 ponton, akkor x_0 egy lokális maximum. Tehát $f''(x_0) < 0$ esetén x_0 lokális maximum. Hasonlóan a 10d. ábrán azt láthatjuk, hogy ha $f'(x)$ negatívból pozitívba vált, amikor áthalad az x_0 ponton, akkor x_0 egy lokális minimum. Tehát $f''(x_0) > 0$ esetén x_0 lokális minimum.

4. TÉTEL

Ha $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) < 0$, akkor x_0 lokális maximum. Ha $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) > 0$, akkor x_0 lokális minimum.

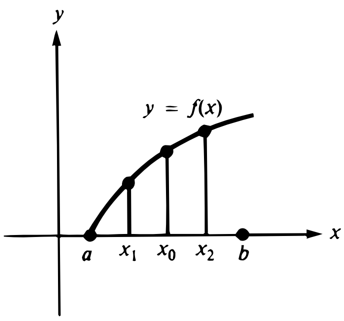
Mi történik akkor, ha $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) = 0$ (ez a 10e. ábra esete)? Ebben az esetben az 5. tételt fogjuk felhasználni annak meghatározására, hogy vajon x_0 egy lokálos maximum vagy egy lokális minimum.

5. TÉTEL

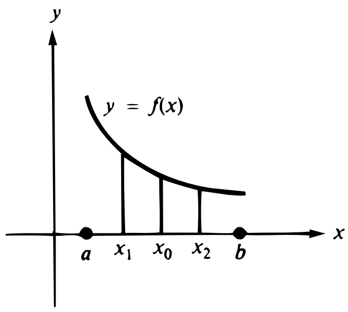
Tegyük fel, hogy $f'(x_0) = 0$.
1. Ha az első x_0-ban nem eltűnő (nem nulla) derivált páratlan rendű ($f^{(3)}(x_0)$, $f^{(5)}(x_0)$ és így tovább), akkor x_0 nem lokális maximum és nem lokális minimum.
2. Ha az első x_0-ban nem eltűnő derivált értéke pozitív és a derivált páros rendű, akkor x_0 egy lokális minimum.
3. Ha az első x_0-ban nem eltűnő derivált értéke negatív és a derivált páros rendű, akkor x_0 egy lokális maximum.

A 4. és 5. tétel bizonyítását elhagyjuk. (A bizonyítások közvetlenül megkaphatók, ha lokális maximum és a lokális minimum definícióját alkalmazzuk az $f(x)$ függvény x_0 körüli Taylor sorfejtésére.) A 4. tétel az 5. tétel egy speciális esete. Megkérjük az olvasót, hogy a 4. és 5. tételt 13. és 14. feladatként bizonyítsa be.

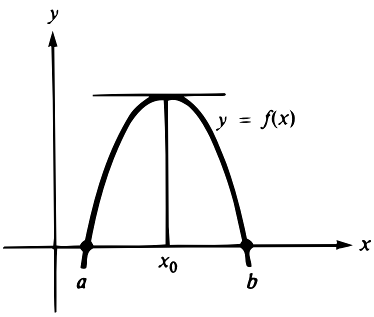
10. ÁBRA Hogyan határozzuk meg, hogy vajon x_0 lokális maximum vagy lokális minimum, ha $f'(x_0)$ létezik?



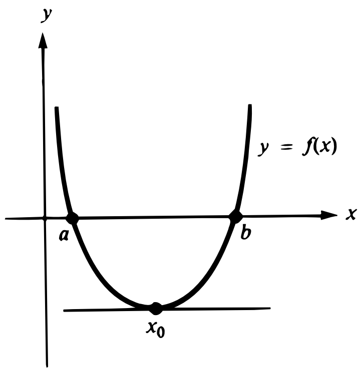
(a) $f'(x_0) > 0$
$f(x_1) < f(x_0)$
$f(x_2) > f(x_0)$
x_0 nem lokális szélsőértékhely



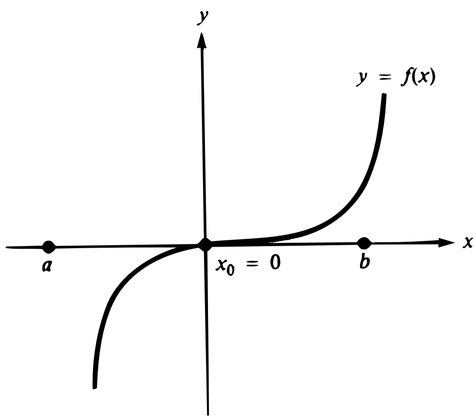
(b) $f'(x_0) < 0$
$f(x_1) > f(x_0)$
$f(x_2) < f(x_0)$
x_0 nem lokális szélsőértékhely



(c) $f'(x_0) = 0$
Ha $x < x_0$, akkor $f'(x) > 0$
Ha $x > x_0$, akkor $f'(x) < 0$
x_0 lokális maximum



(d) $f'(x_0) = 0$
Ha $x < x_0$, akkor $f'(x) < 0$
Ha $x > x_0$, akkor $f'(x) > 0$
x_0 lokális minimum

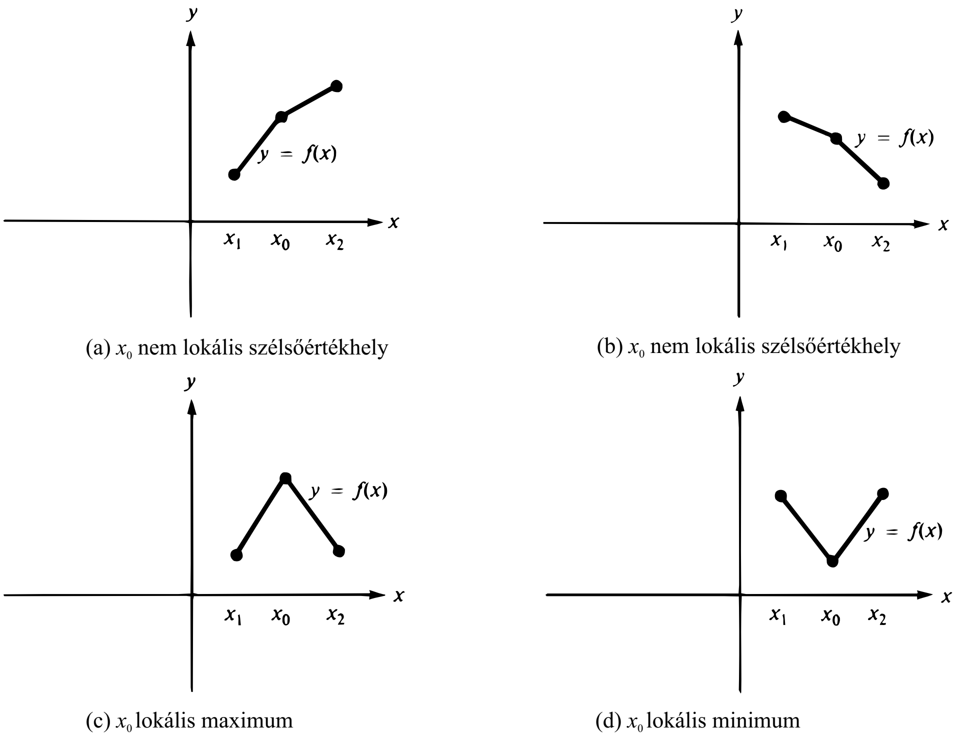


(e) $x_0 = 0$ nem lokális maximum vagy lokális minimum, de $f'(x_0) = 0$

2. eset: Azok a pontok, ahol nem létezik $f'(x)$

Ha az $f(x)$-nek nem létezik deriváltja az x_0-ban, az x_0 még lehet lokális maximum, lokális minimum vagy egyik sem (lásd a 11. ábrát). Ebben az esetben ahhoz, hogy eldöntsük, vajon x_0 lokális minimum, lokális maximum, vagy egyik sem, meg kell vizsgálnunk az $f(x)$ értékeket az $x_1 < x_0$ és $x_2 > x_0$ pontokban x_0 körül. Négy lehetséges esetet foglaltunk össze a 7. táblázatban. Az első két eset úgy értendő, hogy x_0 bármely környezetében van olyan tulajdonságú $x_1 < x_0$ és $x_2 > x_0$. Az utolsó két eset pedig úgy értendő, hogy létezik x_0-nak olyan környezete, hogy bármely $x_1 < x_0$ és $x_2 > x_0$ pontra a megfelelő eset teljesül.

11. ÁBRA Hogyan lehet meghatározni, hogy vajon x_0 lokális maximum, lokális minimum (vagy egyik sem), ha $f'(x_0)$ nem létezik?



(a) x_0 nem lokális szélsőértékhely

(b) x_0 nem lokális szélsőértékhely

(c) x_0 lokális maximum

(d) x_0 lokális minimum

7. TÁBLÁZAT Hogyan lehet meghatározni, hogy egy pont, ahol $f'(x)$ nem létezik, lokális maximum, lokális minimum (vagy egyik sem)?

$f(x_0), f(x_1)$ **és** $f(x_2)$ **közötti összefüggések**	x_0	**Ábra**
$f(x_0) > f(x_1); f(x_0) < f(x_2)$	Nem lokális szélsőértékhely	11a
$f(x_0) < f(x_1); f(x_0) > f(x_2)$	Nem lokális szélsőértékhely	11b
$f(x_0) \geq f(x_1); f(x_0) \geq f(x_2)$	Lokális maximum	11c
$f(x_0) \leq f(x_1); f(x_0) \leq f(x_2)$	Lokális minimum	11d

3. eset: Az $[a,b]$ intervallum a és b végpontja

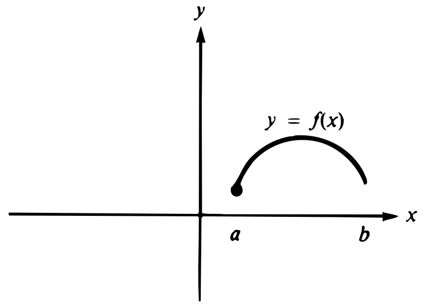
A 12. ábráról is láthatók az alábbi esetek:

$$\text{Ha } f'(a) > 0, \text{akkor } a \text{ lokális minimum.}$$
$$\text{Ha } f'(a) < 0, \text{akkor } a \text{ lokális maximum.}$$
$$\text{Ha } f'(b) > 0, \text{akkor } b \text{ lokális maximum.}$$
$$\text{Ha } f'(b) < 0, \text{akkor } b \text{ lokális minimum.}$$

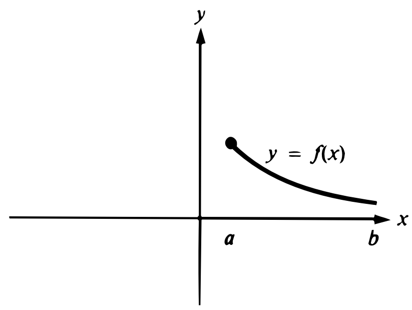
Ha $f'(a) = 0$ vagy $f'(b) = 0$, akkor a 2. esetben és a 11. ábránál alkalmazott meggondolás alkalmazható annak eldöntésére, hogy vajon a vagy b lokális szélsőértékhely.

A következő példák azt szemléltetik, miként lehet ezeket az ötleteket felhasználni (4) alakú NLP feladatok megoldásánál.

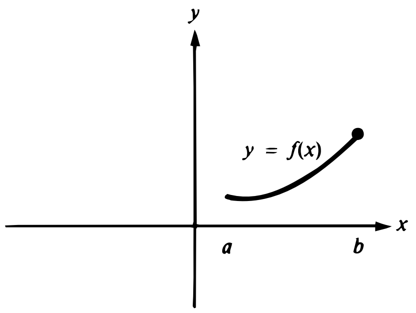
12. ÁBRA Hogyan lehet meghatározni, hogy vajon x_0 lokális maximum vagy lokális minimum, ha x_0 egy végpont?



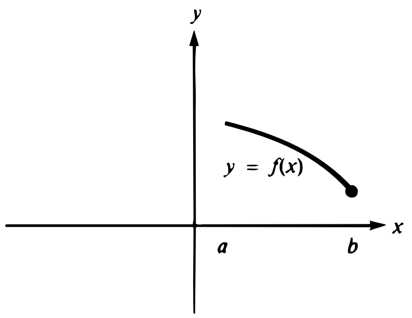
(a) $f'(a) > 0$
a lokális minimum



(b) $f'(a) < 0$
a lokális maximum



(c) $f'(b) > 0$
b lokális maximum



(d) $f'(b) < 0$
b lokális minimum

15. PÉLDA Egy monopóliummal rendelkező gyártónak 5 dollárba kerül egyegységnyi termék előállítása. Ha a termékből x egységet termel, egy egységet $10 - x$ dollárért tud értékesíteni ($0 \leq x \leq 10$). Mennyit kell a gyártónak termelnie, hogy maximalizálja a profitját?

Megoldás Jelölje $P(x)$ a gyártó profitját x egység termelése esetén. Ekkor

$$P(x) = x(10 - x) - 5x = 5x - x^2 \qquad (0 \leq x \leq 10)$$

Tehát a gyártónak a következő NLP feladatot kell megoldania:

$$\begin{aligned} &\max\ P(x) \\ &\text{f.h.} \quad 0 \leq x \leq 10 \end{aligned}$$

Sorba vesszük az összes szélsőértékhely-jelöltet:

1. eset $P'(x) = 5 - 2x$, így $P'(2.5) = 0$. Mivel $P''(x) = -2$, ezért $x = 2.5$ egy lokális maximum $P(2.5) = 6.25$ profitértékkel.

2. eset $P'(x)$ létezik az $[0,10]$ intervallum minden pontjában, így nincs 2. eset szerinti jelölt.

3. eset Az $a = 0$-ban $P'(0) = 5 > 0$, tehát $a = 0$ egy lokális minimum. A $b = 10$-ben $P'(10) = -15 < 0$, tehát $b = 10$ egy lokális minimum.

Az $x = 2.5$ pont tehát az egyetlen lokális maximum. Ez azt jelenti, hogy a gyártó $x = 2.5$ választása esetén tudja maximalizálni a profitját.

Vegyük észre, hogy $P''(x) = -2$ minden x esetén. Ez azt mutatja, hogy $P(x)$ egy konkáv függvény. Ekkor viszont $P(x)$ bármely lokális maximuma egyben az NLP feladat optimális megoldása is. Tehát az 1. tétel szerint, mihelyt meghatároztuk, hogy az $x = 2.5$ pont egy lokális maximum, az NLP feladat optimális megoldását is tudjuk.

16. PÉLDA Legyen

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 - (x-1)^2, && \text{ha} \quad 0 \le x < 3 \\ f(x) &= -3 + (x-4)^2, && \text{ha} \quad 3 \le x \le 6 \end{aligned}$$

Oldjuk meg a

$$\begin{aligned} &\max\ f(x) \\ &\text{f.h.} \quad 0 \le x \le 6 \end{aligned}$$

feladatot.

Megoldás **1. eset** Ha $0 \le x < 3$, akkor $f'(x) = -2(x-1)$ és $f''(x) = -2$. Ha $3 < x \le 6$, akkor $f'(x) = 2(x-4)$ és $f''(x) = 2$. Ezért $f'(1) = f'(4) = 0$. Mivel $f''(1) < 0$, az $x = 1$ lokális maximum. Mivel $f''(4) > 0$, az $x = 4$ lokális minimum.

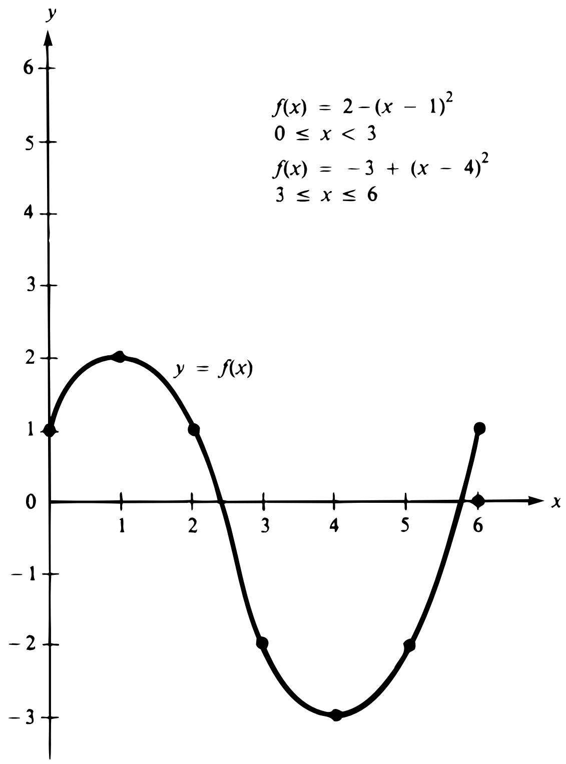
2. eset A 13. ábráról látható, hogy $f(x)$ nem deriválható az $x = 3$ pontban (ha x kicsit kisebb, mint 3, akkor $f'(x)$ -4-hez közelít, és ha x kicsit nagyobb, mint 3, akkor $f'(x)$ -2-höz közelít). Mivel $f(2.9) = -1.61, f(3) = -2$ és $f(3.1) = -2.19$, az $x = 3$ nem lokális szélsőértékhely.

3. eset Mivel $f'(0) = 2 > 0$, az $x = 0$ lokális minimum. Mivel $f'(6) = 4 > 0$, az $x = 6$ lokális maximum.

Tehát a $[0,6]$ intervallumon $f(x)$-nek az $x = 1$ és az $x = 6$ pontban van lokális maximuma. Mivel $f(1) = 2$ és $f(6) = 1$, azt kapjuk, hogy az NLP feladat optimális megoldása az $x = 1$ pontban van.

Ha egy olyan $f(x)$ függvényt kell maximalizálnunk, amely több függvény szorzata, akkor gyakran könnyebb az $\ln(f(x))$ függvényt maximalizálni. Mivel az ln egy növekvő függvény, tudjuk, hogy a $z' = \ln(f(x))$ függvény S feletti maximalizálásának tetszőleges x optimális megoldása egyben optimális megoldása a $z = f(x)$ függvény S feletti maximalizálásának is. Lásd a 4. feladatot az ötlet alkalmazására.

13. ÁBRA
A 16. példa gráfja



Feladatok

A csoport

1. Egy légkondicionálókat gyártó cégnek 100 dollárnyi változó költségébe kerül egy légkondicionáló gyártása, plusz fellép egy 5000 dollárnyi fixköltség is, ha egyetlen darab légkondicionálót is gyártanak. Ha a cég x dollárt költ reklámra, $x^{1/2}$ légkondicionálót tud eladni, darabját 300 dollárért. Hogyan a tudja a cég maximalizálni a profitját? Mit kellene a cégnek tennie, ha 20 000 dollár lenne a fixköltség?

2. Ha egy monopolista helyzetben levő cég q egységnyi terméket gyárt, egységenként $100-4q$ dollárért tudja értékesíteni. A termelés fixköltsége 50$, a változó költség pedig egységenként 2$. Hogyan tudja a cég maximalizálni a profitját? Ha az értékesítés után egységenként 2$ adót is kell fizetnie a cégnek, növelné vagy csökkentené a termelést?

3. Mutassuk meg, hogy bármely x esetén $e^x \ge x+1$. (*Útmutatás:* Legyen $f(x) = e^x - x - 1$. Mutassuk meg, hogy a

$$\begin{aligned}&\min\ f(x)\\ &\text{f.h.}\quad x \in R\end{aligned}$$

feladat optimális megoldása $x = 0$-ban van!)

4. Tegyük fel, hogy egy baseballjátékos n ütési kísérletből x ütést ért el. Tegyük fel, hogy meg akarjuk becsülni azt a p valószínűséget, hogy a játékos egy ütési kísérletből ütést ér el. A maximum likelihood módszer p-re azt a $\hat{p}$ becslést adja, ahol $\hat{p}$ annak a valószínűségét maximalizálja, hogy x ütést figyelünk meg n ütési kísérletből. Mutassuk meg, hogy a maximum likelihood módszer éppen a $\hat{p} = \frac{x}{n}$ értéket választja!

5. Keressük meg a

$$\begin{aligned}&\max\ x^3\\ &\text{f.h.}\quad -1 \le x \le 1\end{aligned}$$

feladat optimális megoldását!

6. Keressük meg a

$$\begin{aligned}&\min\ x^3 - 3x^2 + 2x - 1\\ &\text{f.h.}\quad -2 \le x \le 4\end{aligned}$$

feladat optimális megoldását!

7. A Reagan-kormányzat idején Arthur Laffer közgazdász híressé vált a róla elnevezett Laffer-görbéről, amellyel azt állította, hogy az adókulcsok növelése csökkentheti az adóbevételeket, míg az adókulcsok csökkentése növelheti az adóbevételeket. Ez a feladat a Laffer-görbe mögötti ötletet szemlélteti. Tegyük fel, hogy egy egyén e szintű erőfeszítés esetén $10e^{1/2}$ jövedelemhez juthat. Azt is tegyük fel, hogy az egyén egy e-vel arányos költséget is társít az e szintű igyekezethez. Legyen T az adókulcs. Ez azt jelenti, hogy az egyén az adózás előtti jövedelmének $1-T$ részét tarthatja meg. Mutassuk meg, hogy $T=.5$ esetén maximális a kormányzat adóbevétele! Tehát, ha az adókulcs 60% lenne, egy adókulcscsökkentés növelhetné az adóbevételeket.

8. Egy kórház működési költsége $200\,000+.002x^2$ dollár, ahol x a naponta ápolt betegek száma. Milyen méretű kórház esetén minimális a kórház egy betegre eső működési költsége?

9. Minden reggel a csúcsforgalom ideje alatt 10 000 ember akar New Jerseyből New York Citybe utazni. Ha valaki a metrót veszi igénybe, 40 percig tart az utazás. Ha x ezer ember autózik be reggelenként New York-ba, $20+5x$ percig tart az utazás. Ez a probléma jól illusztrálja az alapvető élettapasztalatot: Ha a választást az emberekre bízzuk, a szükségesnél is nagyobb torlódást okoznak.

(a) Mutassuk meg, hogy ha a választást az emberekre bízzuk, átlagosan 4000 ember fog New Jerseyből New Yorkba metróval utazni! Itt feltehetjük, hogy az emberek aszerint fognak metrót, illetve gépkocsit használókra szétválni, hogy a metróval való utazás átlagos ideje éppen meg fog egyezni az autóval való utazás átlagos idejével. Amikor ez az „egyensúly” előáll, senki sem lesz arra késztetve, hogy az autóról a metróra, vagy a metróról az autóra váltson.

(b) Mutassuk meg, hogy a személyenkénti átlagos utazási idő akkor lesz minimális, ha 2000 ember utazik autóval!

B csoport

10. Egy cégnek $c(x)$ dollárba kerül x egységnyi termék gyártása. Az $y=c'(x)$ görbét a cég határköltség görbéjének nevezik. (Miért?) A cég átlagos költség görbéje $z=\frac{c(x)}{x}$ alakú. Legyen x^* az a termelési szint, ahol a cég átlagos költsége minimális. Adjunk olyan feltételeket, amelyek mellett a határköltség görbe éppen az x^* pontban metszi az átlagos költség görbét.

11. Ha egy gép t éves, évente e^{-t} dollár hasznot hoz. A gép t évi használat után $\frac{1}{t+1}$ dollárért értékesíthető.

(a) Mikor kell a gépet eladni az összes bevétel maximalizálásához?

(b) Ha a bevételt folytonosan diszkontáljuk (úgy, hogy 1$ bevétel mostantól számított t év múlva ekvivalens e^{-rt} dollár mostani bevétellel), hogyan változna meg az (a) kérdésre adandó válasz?

12.[5] Tegyük fel, hogy egy cégnek n áruraktárából A négyzetkilométernyi területen elhelyezkedő fogyasztókat kell kiszolgálnia. Kolesar és Blum kimutatta, hogy egy áruraktár és egy fogyasztó közötti átlagos távolság kilométerben

$$\sqrt{\frac{A}{n}}$$

Tegyük fel, hogy a cégnek 60 000 dollárjába kerül egy évig fenntartani egy áruraktárt, és 400 000 dollárba építeni egyet. (Tegyük fel, hogy ez a 400 000 dollárnyi egyszeri költség ekvivalens évi 40 000 dollárnyi költség végtelen ideig történő vállalásával.) A cég évente 160 000 megrendelést teljesít, a szállítási költség minden megrendelés esetén kilométerenként 1 dollár. Ha a cég 100 négyzetkilométernyi területet szolgál ki, hány áruraktárral kellene rendelkeznie?

13. Bizonyítsuk be a 4. tételt!

14. Bizonyítsuk be az 5. tételt!

10.4. Az aranymetszés keresés

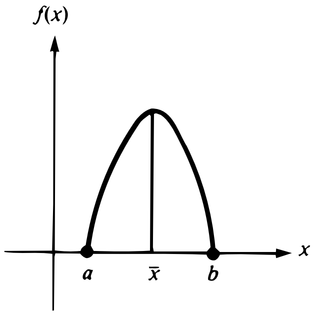
Tekintsünk egy $f(x)$ függvényt. (Bizonyos x értékekre $f'(x)$ esetleg nem létezik.) Tegyük fel, hogy a következő NLP feladatot akarjuk megoldani:

$$\begin{aligned} &\max\ f(x) \\ &\text{f.h.}\quad a\le x\le b \end{aligned} \tag{5}$$

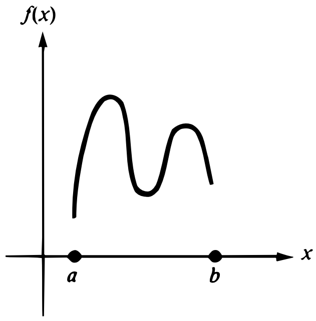
Előfordulhat, hogy $f'(x)$ nem létezik, vagy esetleg az $f'(x)=0$ egyenletet nehéz megoldani. Az ilyen NLP feladatok megoldására nehéz lenne használni az előző alfejezetben bemutatott módszereket. Ebben az alfejezetben azt tárgyaljuk, hogyan lehet az (5) feladatot megoldani, ha $f(x)$ egy speciális típusú függvény (unimodális függvény).

[5] Kolesar és Blum (1973) alapján.

14. ÁBRA
Egy unimodális függvény definíciója



(a) Egy unimodális függvény $[a, b]$-n. $\overline{x}$ lokális maximum és a
max $f(x)$
f.h. $a \le x \le b$
megoldása.



(b) Egy függvény, amely nem unimodális $[a, b]$-n.

DEFINÍCIÓ

> Az $f(x)$ függvény **unimodális** az $[a,b]$ intervallumon, ha az $[a,b]$-nek van olyan $\bar{x}$ pontja, hogy $f(x)$ szigorúan növekvő az $[a,\bar{x}]$ intervallumon és szigorúan csökkenő az $[\bar{x},b]$ intervallumon.

Ha $f(x)$ unimodális az $[a,b]$-n, akkor $f(x)$-nek csak $\bar{x}$ lehet lokális maximuma az $[a,b]$-n, és ez a lokális maximum egyben (5) megoldása is (lásd a 14. ábrát). Jelölje $\bar{x}$ az (5) feladat optimális megoldását.

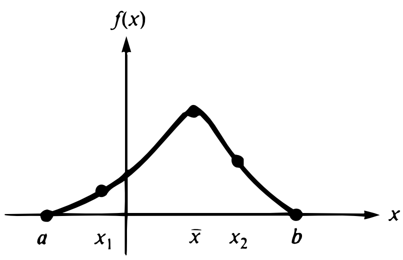
Minden további információ hiányában csak annyit tudunk mondani az (5) optimális megoldásáról, hogy az $[a,b]$ intervallum valamelyik pontja. Ha kiértékeljük az $f(x)$ függvényt az $[a,b]$ két, x_1 és x_2 pontjában (feltesszük, hogy $x_1 < x_2$), akkor csökkenteni tudjuk annak az intervallumnak a méretét, ahol (5) megoldásának lennie kell. Az $f(x_1)$ és $f(x_2)$ kiértékelése után három eset lehetséges. Mindegyik esetben megmutatjuk, hogy (5) optimális megoldása az $[a,b]$ egy részintervallumában fekszik.

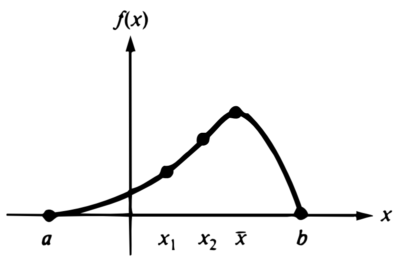
1. eset $f(x_1) < f(x_2)$. Mivel $f(x)$ növekvő legalább az $[x_1,x_2]$ intervallum egy részén, abból a tényből, hogy $f(x)$ unimodális, következik, hogy (5) optimális megoldása nem lehet az $[a,x_1]$ intervallumon. Tehát az 1. esetben $\bar{x} \in (x_1,b]$ (lásd a 15. ábrát).

2. eset $f(x_1) = f(x_2)$. Az $[x_1,x_2]$ intervallum valamelyik részén az $f(x)$-nek csökkenőnek kell lennie, és az (5) optimális megoldása valamilyen $\bar{x} < x_2$ pontban fekszik. Tehát a 2. esetben $\bar{x} \in [a,x_2)$ (lásd a 16. ábrát).

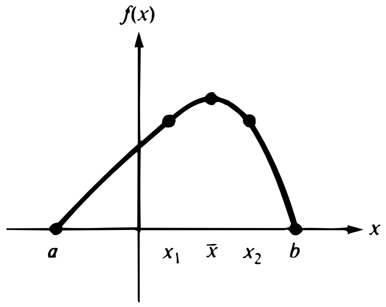
3. eset $f(x_1) > f(x_2)$. Ebben az esetben $f(x)$ csökkenni kezd, még mielőtt x eléri x_2-t. Tehát $\bar{x} \in [a,x_2)$ (lásd a 17. ábrát).

15. ÁBRA
Ha $f(x_1) < f(x_2)$, $\bar{x} \in (x_1,b]$

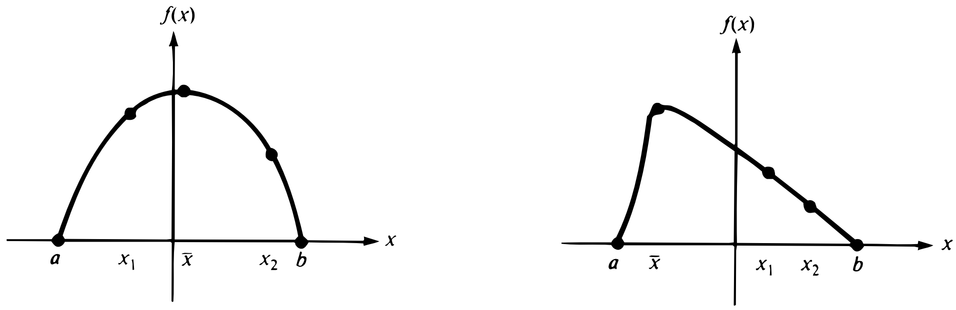




16. ÁBRA
Ha $f(x_1) = f(x_2)$, $\bar{x} \in [a, x_2)$



17. ÁBRA
Ha $f(x_1) > f(x_2)$, $\bar{x} \in [a, x_2)$



Azt az intervallumot, amelyben az $\bar{x}$-nak feküdnie kell – $[a, x_2)$ vagy $(x_1, b]$ – **bizonytalansági intervallumnak** hívjuk.

Sok keresési algoritmus használja ezeket az ötleteket a bizonytalansági intervallum csökkentésére (lásd Bazaraa és Shetty (1993, 8.1. alfejezet)). A legtöbb ezekből az algoritmusokból a következő módon működik.

1. lépés Induljunk ki az $[a, b]$ bizonytalansági intervallumból. Értékeljük ki az $f(x)$ függvényt megfelelően kiválasztott x_1 és x_2 pontokban.

2. lépés Döntsük el, hogy az 1–3. esetek közül melyik áll fenn, és határozzuk meg a csökkentett bizonytalansági intervallumot.

3. lépés Értékeljük ki az $f(x)$ függvényt két új pontban (az adott algoritmus pontosítja, hogyan válasszuk meg a két új pontot). Térjünk vissza a 2. lépésre, kivéve, ha a bizonytalansági intervallum hossza már elég kicsi.

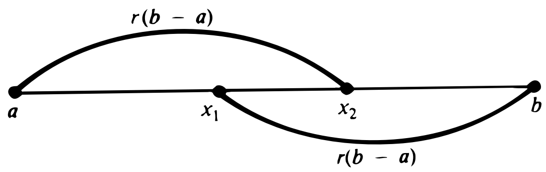
Egy ilyen kereső algoritmust tárgyalunk részletesen, az aranymetszés keresést. Látni fogjuk, hogy ha ezt az algoritmust használjuk unimodális $f(x)$ függvény esetén az (5) feladat megoldására, akkor amikor a 3. lépésben két új pontot választunk, az egyik mindig egybeesik egy olyan ponttal, ahol előzőleg már kiértékeltük az $f(x)$ függvényt.

Legyen r az $r^2 + r = 1$ kvadratikus egyenlet egyetlen pozitív gyöke. Ekkor a kvadratikus egyenlet megoldó képlete alapján

$$r = \frac{5^{1/2} - 1}{2} = 0.618$$

(Lásd az ennek az alfejezetnek a végén található 3. feladatot annak magyarázatául, miért nevezik az r értéket aranymetszésnek.) Az aranymetszés keresés azzal kezdődik, hogy kiértékeljük az $f(x)$ értékét az x_1 és az x_2 pontokban, ahol $x_1 = b - r(b - a)$ és $x_2 = a + r(b - a)$ (lásd a 18. ábrát). Az ábráról is látszik, hogy az x_1 pont megtalálásához r résznyit mozdu-

18. ÁBRA
Az x_1 és az x_2 elhelyezkedése az aranymetszés keresés esetén



lunk el az intervallum jobb oldali végpontjából, az x_2 megtalálásához pedig r résznyit mozdulunk el az intervallum bal oldali végpontjából. Ezután az aranymetszés keresés két új pontot generál, amelyekben az $f(x)$ értékét újból ki kellene értékelni a következő lépések végrehajtásával:

Új bal oldali pont Az aktuális bizonytalansági intervallum jobb oldali végpontjából mozduljunk el a bizonytalansági intervallum hosszának r-ed részével azonos távolságra.

Új jobb oldali pont Az aktuális bizonytalansági intervallum bal oldali végpontjából mozduljunk el a bizonytalansági intervallum hosszának r-ed részével azonos távolságra.

Az 1–3. esetek tárgyalásából tudjuk, hogy ha $f(x_1) < f(x_2)$, akkor $\bar{x} \in (x_1, b]$, míg ha $f(x_1) \geq f(x_2)$, akkor $\bar{x} \in [a, x_2)$. Ha $f(x_1) < f(x_2)$, akkor a csökkentett bizonytalansági intervallum hossza $b - x_1 = r(b-a)$, míg ha $f(x_1) \geq f(x_2)$, a csökkentett bizonytalansági intervallum hossza $x_2 - a = r(b-a)$. Tehát az $f(x_1)$ és az $f(x_2)$ kiértékelése után a csökkentett bizonytalansági intervallum hossza $r(b-a)$.

Minden esetben, amikor az $f(x)$ függvényt kiértékeltük két pontban, és csökkentettük a bizonytalansági intervallumot, azt mondjuk, hogy befejeztük az aranymetszés keresés egy iterációját. Legyen

$$
\begin{aligned}
L_k &= \text{a bizonytalansági intervallum hossza} \\
&\ \text{az algoritmus } k \text{ számú iterációjának végrehajtása után} \\
I_k &= \text{a bizonytalansági intervallum} \\
&\ \text{az algoritmus } k \text{ számú iterációjának végrehajtása után}
\end{aligned}
$$

Tudjuk, hogy $L_1 = r(b-a)$, és $I_1 = [a, x_2)$ vagy $I_1 = (x_1, b]$.

Ezt az eljárást folytatva két új pontot állítunk elő, az x_3 és az x_4 pontot, amelyekben ki kell értékelni az $f(x)$ függvényt.

1. eset $f(x_1) < f(x_2)$. Az új $(x_1, b]$ bizonytalansági intervallum hossza $b - x_1 = r(b-a)$. Ekkor (lásd a 19a. ábrát)

$$
\begin{aligned}
x_3 &= \text{új bal oldali pont} = b - r(b - x_1) = b - r^2(b-a) \\
x_4 &= \text{új jobb oldali pont} = x_1 + r(b - x_1)
\end{aligned}
$$

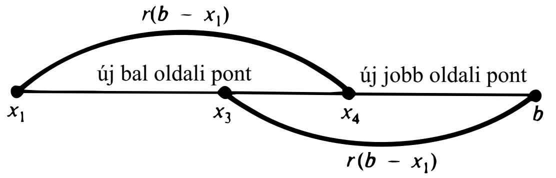
Az x_3 új bal oldali pont egybeesik az x_2 régi jobb oldali ponttal. Ez látható, ha felhasználjuk az $r^2 = 1 - r$ összefüggést, amiből $x_3 = b - r^2(b-a) = b - (1-r)(b-a) = a + r(b-a) = x_2$ adódik.

2. eset $f(x_1) \geq f(x_2)$. Az új $[a, x_2)$ bizonytalansági intervallum hossza $x_2 - a = r(b-a)$. Ekkor (lásd a 19b. ábrát)

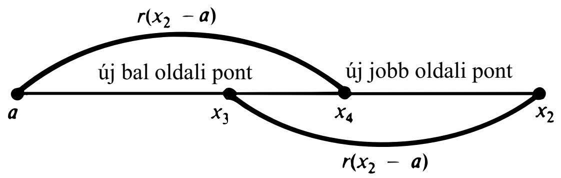
$$
\begin{aligned}
x_3 &= \text{új bal oldali pont} = x_2 - r(x_2 - a) \\
x_4 &= \text{új jobb oldali pont} = a + r(x_2 - a) = a + r^2(b-a)
\end{aligned}
$$

Az x_4 új jobb oldali pont egybeesik a régi x_1 bal oldali ponttal. Ez látható, ha felhasználjuk az $r^2 = 1 - r$ összefüggést, amiből $x_4 = a + r^2(b-a) = a + (1-r)(b-a) = b - r(b-a) = x_1$ adódik.

19. ÁBRA
Hogyan állítsunk elő új pontokat az aranymetszés keresésben



(a) Ha $f(x_1) < f(x_2)$, az új bizonytalansági intervallum $(x_1, b]$.



(b) Ha $f(x_1) \geq f(x_2)$, az új bizonytalansági intervallum $[a, x_2)$.

Most az $f(x_3)$ és az $f(x_4)$ értékeket használhatjuk a bizonytalansági intervallum hosszának további csökkentéséhez. Ezen a ponton az aranymetszés keresés két iterációját fejeztük már be.

Megmutattuk, hogy az aranymetszés keresés minden iterációjában az $f(x)$ függvényt csak egy új pontban kell kiértékelni. Könnyen látható, hogy $L_2 = rL_1 = r^2(b-a)$, és általában, az $L_k = rL_{k-1}$ összefüggés alapján $L_k = r^k(b-a)$. Tehát, ha azt akarjuk, hogy az utolsó bizonytalansági intervallumunk hossza kisebb legyen egy ε értéknél, az aranymetszés keresés k számú iterációját kell végrehajtanunk úgy, hogy $r^k(b-a) < \varepsilon$.

17. PÉLDA Használjuk az aranymetszés keresést a

$$\begin{aligned} &\max\ -x^2 - 1 \\ &\text{f.h.} \quad -1 \leq x \leq 0.75 \end{aligned}$$

feladatra úgy, hogy az utolsó bizonytalansági intervallum hossza kisebb legyen, mint $\frac{1}{4}$.

Megoldás Most $a = -1, b = 0.75$ és $b - a = 1.75$. Az aranymetszés keresés során végrehajtandó iterációk k számának meghatározásához megoldjuk k-ra az $1.75(0.618^k) < 0.25$, azaz $0.618^k < \frac{1}{7}$ egyenlőtlenséget. Mindkét oldal természetes logaritmusát véve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} k \ln 0.618 &< \ln \tfrac{1}{7} \\ k(-0.48) &< -1.95 \\ k &> \tfrac{1.95}{0.48} = 4.06 \end{aligned}$$

Tehát öt iterációt kell végrehajtani az aranymetszés keresésben. Először az x_1 és x_2 pontokat határozzuk meg:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.75 - (0.618)(1.75) = -0.3315 \\ x_2 &= -1 + (0.618)(1.75) = 0.0815 \end{aligned}$$

Ekkor $f(x_1) = -1.1099$ és $f(x_2) = -1.0066$. Mivel $f(x_1) < f(x_2)$, az új bizonytalansági intervallum $I_1 = (x_1, b] = (-0.3315, 0.75]$, és $x_3 = x_2$. Természetesen $L_1 = 0.75 + 0.3315 = 1.0815$. Most meghatározzuk az új x_3 és x_4 pontot:

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 = 0.0815 \\ x_4 &= -0.3315 + 0.618(1.0815) = 0.3369 \end{aligned}$$

Most $f(x_3) = f(x_2) = -1.0066$ és $f(x_4) = -1.1135$. Mivel $f(x_3) > f(x_4)$, az új bizonytalansági intervallum $I_2 = [-0.3315, x_4) = [-0.3315, 0.3369)$, és x_6 azonos az x_3 ponttal. Szintén $L_2 = 0.3369 + 0.3315 = 0.6684$. Ekkor

$$\begin{aligned} x_5 &= 0.3369 - 0.618(0.6684) = -0.0762 \\ x_6 &= x_3 = 0.0815 \end{aligned}$$

A függvényértékekre $f(x_5) = -1.0058$ és $f(x_6) = f(x_3) = -1.0066$ adódik. Mivel $f(x_5) > f(x_6)$, az új bizonytalansági intervallum $I_3 = [-0.3315, x_6) = [-0.3315, 0.0815)$, és $L_3 = 0.0815 + 0.3315 = 0.4130$. Mivel $f(x_6) < f(x_5)$, azt kapjuk, hogy $x_5 = x_8$ és $f(x_8) = -1.0058$. Ekkor

$$\begin{aligned} x_7 &= 0.0815 - 0.618(0.413) = -0.1737 \\ x_8 &= x_5 = -0.0762 \end{aligned}$$

és $f(x_7) = -1.0302$. Mivel $f(x_8) > f(x_7)$, az új bizonytalansági intervallum $I_4 = (x_7, 0.0815] = (-0.1737, 0.0815]$ és $L_4 = 0.0815 + 0.1737 = 0.2552$. Az $x_9 = x_8$ is teljesül. Végül

$$\begin{aligned} x_9 &= x_8 = -0.0762 \\ x_{10} &= -0.1737 + 0.618(0.2552) = -0.016 \end{aligned}$$

Ekkor $f(x_9) = f(x_8) = -1.0058$ és $f(x_{10}) = -1.0003$. Mivel $f(x_{10}) > f(x_9)$, az új bizonytalansági intervallum $I_5 = (x_9, 0.0815] = (-0.0762, 0.0815]$ és $L_5 = 0.0815 + 0.0762 = 0.1577 < 0.25$ (ahogy előírtuk).

Tehát ezzel meghatároztuk, hogy a

$$\begin{aligned} &\max\ -x^2 - 1 \\ &\text{f.h.} \quad -1 \le x \le 0.75 \end{aligned}$$

feladat optimális megoldása a $(-0.0762, 0.0815]$ intervallumban fekszik. (Természetesen a maximum az $\bar{x} = 0$ pontban található.)

Az aranymetszés keresés minimalizálási feladatok megoldására is alkalmazható a célfüggvény -1-gyel történő beszorzásával. Ez azt feltételezi, hogy a módosított célfüggvény unimodális.

Feladatok

A csoport

1. Használjuk az aranymetszés keresést a

$$\begin{aligned} &\max\ x^2 + 2x \\ &\text{f.h.} \quad -3 \le x \le 5 \end{aligned}$$

optimális megoldásának meghatározására (0.8 hosszúságú bizonytalansági intervallumban)!

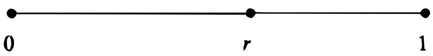
2. Használjuk az aranymetszés keresést a

$$\begin{aligned} &\max\ x - e^x \\ &\text{f.h.} \quad -1 \le x \le 3 \end{aligned}$$

optimális megoldásának meghatározására (0.6 hosszúságú bizonytalansági intervallumban)!

3. Tekintsük a $[0, 1]$ szakaszt, amit két részre osztunk (20. ábra).

20. ÁBRA



Azt mondjuk, hogy a szakaszt **aranymetszés** szerint osztjuk fel két részre, ha

$$\frac{\text{teljes szakasz hossza}}{\text{nagyobb rész hossza}} = \frac{\text{nagyobb rész hossza}}{\text{kisebb rész hossza}}$$

Mutassuk meg, hogy a szakasz aranymetszés szerinti osztása esetén

$$r = \frac{5^{1/2} - 1}{2}$$

4. A Hughesco cég abban érdekelt, hogy a 8. táblázat adatainak segítségével meghatározza, milyen hatása van a nagynyomású vágókészülékben használt folyadék p nyomásának az egyik szerszám t hasznos élettartamára.

8. TÁBLÁZAT

p **(kg/cm^2)**	t **(perc)**
229	39
371	81
458	82
513	79
425	84
404	85
392	84

A p nyomásnak 0 és 600 kg/cm^2 között kell lennie. Alkalmazzuk az aranymetszés keresést annak megbecslésére (50 egységen belül), hogy milyen p érték maximalizálja a szerszám hasznos élettartamát! Tegyük fel, hogy t unimodális függvénye p-nek.

10.5. Többváltozós feltétel nélküli maximalizálás és minimalizálás

Most azt tárgyaljuk, hogyan lehet megtalálni az alábbi feltétel nélküli NLP feladat egy optimális megoldását (ha létezik) vagy egy lokális szélsőértékhelyét:

$$\begin{aligned}&\max \text{ (vagy min })f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\\&\text{f.h.} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n\end{aligned} \tag{6}$$

Feltesszük, hogy az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvénynek léteznek első és második parciális deriváltjai, és azok folytonosak minden pontban. Jelölje

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}$$

az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ x_i szerinti parciális deriváltjának az értékét az $\bar{x}$ pontban. A 6. tétel egy szükséges feltétel ad arra, hogy az $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ a (6) NLP feladat egy lokális szélsőértékhelye legyen.

6. TÉTEL

Ha $\bar{x}$ a (6) egy lokális szélsőértékhelye, akkor $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} = 0$.

A bizonyításhoz tegyük fel, hogy $\bar{x}$ a (6) feladat egy lokális szélsőértékhelye, mondjuk lokális maximuma. Ha $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} > 0$ teljesülne valamelyik i esetén, akkor az x_i-t kicsit megnövelve (és a többi változó értékét állandónak tekintve), tudnánk olyan x' pontot találni $\bar{x}$ közelében, amelyre $f(x') > f(\bar{x})$. Ez ellentmondana annak a ténynek, hogy $\bar{x}$ lokális maximum. Hasonlóan, ha $\bar{x}$ a (6) feladat egy lokális maximuma és $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} < 0$, akkor x_i értékét kicsit csökkentve (és a többi változó értékét állandónak tekintve), tudnánk olyan x'' pontot találni $\bar{x}$ közelében, amelyre $f(x'') > f(\bar{x})$. Tehát ha $\bar{x}$ a (6) egy lokális maximuma, akkor

$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} = 0$ kell hogy teljesüljön $i = 1,2,\ldots,n$ esetén. Hasonló indoklással mutatható meg, hogy ha $\bar{x}$ egy lokális minimum, akkor $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} = 0$ teljesül $i = 1,2,\ldots,n$ esetén.

DEFINÍCIÓ

Az olyan $\bar{x}$ pontot, amelyre $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} = 0$ teljesül $i = 1,2,\ldots,n$ esetén, az f **stacionárius pontjának** nevezzük.

A következő három tétel az f Hesse-mátrixának segítségével feltételeket ad arra, hogy egy stacionárius pont lokális minimum, lokális maximum vagy nem lokális szélsőértékhely legyen.

7. TÉTEL

Ha $H_k(\bar{x}) > 0$, $k = 1,2,\ldots,n$, akkor az $\bar{x}$ stacionárius pont a (6) NLP feladat lokális minimuma.

7′. TÉTEL

Ha $k = 1,2,\ldots,n$ esetén $H_k(\bar{x})$ nemnulla és előjele megegyezik $(-1)^k$ előjelével, akkor az $\bar{x}$ stacionárius pont a (6) NLP feladat lokális maximuma.

7″. TÉTEL

Ha $H_n(\bar{x}) \neq 0$, valamint a 7. és 7′. tételek feltételei nem teljesülnek, akkor az $\bar{x}$ stacionárius pont nem lokális szélsőértékhely.

Ha egy $\bar{x}$ stacionárius pont nem lokális szélsőértékhely, akkor **nyeregpontnak** nevezzük. Ha $H_n(\bar{x}) = 0$ teljesül egy $\bar{x}$ stacionárius pontra, akkor $\bar{x}$ lehet lokális minimum, lokális maximum vagy nyeregpont is, de az előző tesztek alapján ezt nem lehet eldönteni.

Az 1. és a 7′. tételből tudjuk, hogy ha az $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ függvény konkáv (és (6) egy maximalizálási NLP feladat), akkor (6) minden stacionárius pontja (6) optimális megoldása is. Az 1′. és a 7. tételből tudjuk, hogy ha az $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ függvény konvex (és (6) egy minimalizálási NLP feladat), akkor (6) minden stacionárius pontja (6) optimális megoldása is.

18. PÉLDA

Egy monopolhelyzetben levő termelő egyetlen terméket állít elő kétféle fogyasztó számára. Ha q_1 egységet gyárt az első fogyasztó számára, az $70-4q_1$ dollárnyi árat hajlandó fizetni egységenként. Ha q_2 egységet gyárt a második fogyasztó számára, az $150-15q_2$ dollárnyi árat hajlandó fizetni egységenként. A gyártási költség q egység ($q > 0$) gyártása esetén $100+15q$ dollár. Mennyit kell a termelőnek az egyes fogyasztók számára eladnia, hogy maximalizálja a profitját?

Megoldás

Jelölje $f(q_1,q_2)$ a termelő profitját, amennyiben q_i egységet gyárt az i-edik fogyasztó számára. Ekkor (feltéve, hogy valamennyi termelés azért történik)

$$f(q_1,q_2) = q_1(70-4q_1) + q_2(150-15q_2) - 100 - 15q_1 - 15q_2$$

Az $f(q_1,q_2)$ stacionárius pontjaira az alábbi egyenletek teljesülnek:

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} = 70 - 8q_1 - 15 = 0 \qquad (q_1 = \tfrac{55}{8} \text{ esetén})$$

$$\frac{\partial f}{0 q_2} = 150 - 30q_2 - 15 = 0 \qquad (q_2 = \tfrac{9}{2} \text{ esetén})$$

Tehát $f(q_1, q_2)$ egyetlen stacionárius pontja $(\frac{55}{8}, \frac{9}{2})$. Az $f(q_1, q_2)$ Hesse-mátrixa

$$H(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -30 \end{bmatrix}$$

Mivel H első sarokfőminora $-8 < 0$, és H második sarokfőminora $(-8)(-30) = 240 > 0$, a $7'$. tétel alapján $(\frac{55}{8}, \frac{9}{2})$ egy lokális maximum. A $3'$. tétel szerint az is igaz, hogy $f(q_1, q_2)$ konkáv függvény (azon (q_1, q_2) pontok S halmazán, amelyekre $q_1 \geq 0, q_2 \geq 0$ és $q_1 + q_2 > 0$ áll fenn). Tehát az 1. tétel alapján $(\frac{55}{8}, \frac{9}{2})$ maximalizálja a profitot az összes lehetséges termelés közül (kivéve azt az esetet, amikor nem folyik termelés). Az $(\frac{55}{8}, \frac{9}{2})$ termelés utáni profit

$$f(q_1, q_2) = \frac{55}{8}(70 - \frac{220}{8}) + \frac{9}{2}[150 - 15(\frac{9}{2})] - 100 - 15(\frac{55}{8} + \frac{9}{2}) = 392.81\$$$

Mivel az $(\frac{55}{8}, \frac{9}{2})$ termelés profitja meghaladja a semmit sem termelés 0$ profitját, $(\frac{55}{8}, \frac{9}{2})$ az NLP feladat optimális megoldása; a termelő $\frac{55}{8}$ egységet kell, hogy eladjon az első fogyasztónak és $\frac{9}{2}$ egységet a második fogyasztónak.

19. PÉLDA Tegyük fel, hogy egy egyetemi hallgató tanulmányi átlaga megbecsülhető a felvételi pontszámából. Jelölje az i-edik megfigyelt hallgató felvételi pontszámát x_i, tanulmányi átlagát pedig y_i. Hogyan tudjuk alkalmazni a **legkisebb négyzetek módszerét** egy $y_i = a + bx_i$ alakú feltételezett összefüggés becslésére?

Megoldás Jelölje $\hat{a}$ az a-ra és $\hat{b}$ a b-re vonatkozó becslésünket. Feltéve, hogy n számú hallgató esetén az $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ megfigyelések állnak rendelkezésünkre, az i-edik hallgató tanulmányi átlagának becslésénél elkövetett hiba $\hat{e}_i = y_i - (\hat{a} + \hat{b}x_i)$. A legkisebb négyzetek módszere olyan $\hat{a}$ és $\hat{b}$ értékeket választ, amelyek esetén az

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^{i=n} \hat{e}_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (y_i - a - bx_i)^2$$

függvény értéke minimális. Mivel

$$\frac{\partial f}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{i=n}(y_i - a - bx_i) \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial f}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{i=n}(y_i - a - bx_i)x_i$$

$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial b} = 0$ olyan $(\hat{a}, \hat{b})$ pontra fog teljesülni, amelyre

$$\sum_{i=1}^{i=n}(y_i - a - bx_i) = 0 \qquad \text{azaz} \qquad \sum_{i=1}^{i=n} y_i = na + b\sum_{i=1}^{i=n} x_i$$

és

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i(y_i - a - bx_i) = 0 \qquad \text{azaz} \qquad \sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{i=n} x_i + b\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2$$

Ezek a jól ismert **normálegyenletek.** A normálegyenletek $(\hat{a}, \hat{b})$ megoldása minimalizálja az $f(a, b)$ függvényt? Ennek megválaszolásához ki kell számolnunk az $f(a, b)$ Hesse-mátrixát:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = 2n, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = 2\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} = \frac{\partial^2 f}{\partial b \partial a} = 2\sum_{i=1}^{i=n} x_i$$

Tehát

$$H = \begin{bmatrix} 2n & 2\sum_{i=1}^{i=n} x_i \\ 2\sum_{i=1}^{i=n} x_i & 2\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 \end{bmatrix}$$

Mivel $H_1(\hat{a},\hat{b}) = 2n > 0$, az $(\hat{a},\hat{b})$ lokális minimum lesz, ha

$$H_2(\hat{a},\hat{b}) = 4n\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i\right)^2 > 0$$

A 6. fejezet 23. példájában megmutatjuk, hogy

$$n\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i\right)^2$$

és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Tehát ha legalább két x_i különböző, akkor a $7'$. tétel alapján $(\hat{a},\hat{b})$ lokális minimum lesz. Mivel $H(a,b)$ nem függ az a és b értékektől, ez az érvelés (és a 3. tétel) azt mutatja, hogy ha legalább két x_i különböző, akkor $f(a,b)$ konvex függvény. Ha legalább két x_i különböző, akkor az $1'$. tétel alapján $(\hat{a},\hat{b})$ minimalizálja az $f(a,b)$ függvényt.

20. PÉLDA Keressük meg az $f(x_1,x_2) = x_1^2x_2 + x_2^3x_1 - x_1x_2$ függvény összes lokális maximumát, lokális minimumát és nyeregpontját!

Megoldás Mivel

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1x_2 + x_2^3 - x_2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1^2 + 3x_2^2x_1 - x_1$$

az $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0$ teljesüléséhez

$$2x_1x_2 + x_2^3 - x_2 = 0 \qquad \text{azaz} \qquad x_2(2x_1 + x_2^2 - 1) = 0 \tag{7}$$

$$x_1^2 + 3x_2^2x_1 - x_1 = 0 \qquad \text{azaz} \qquad x_1(x_1 + 3x_2^2 - 1) = 0 \tag{8}$$

szükséges. A (7) akkor teljesül, ha (i) $x_2 = 0$ vagy (ii) $2x_1 + x_2^2 - 1 = 0$. A (8) akkor teljesül, ha (iii) $x_1 = 0$ vagy (iv) $x_1 + 3x_2^2 - 1 = 0$.

Tehát ahhoz, hogy (x_1,x_2) stacionárius pont legyen, az alábbi esetek valamelyike kell hogy fennálljon:

(i) és (iii) teljesül. Ez csak $(0,0)$ esetén igaz.

(i) és (iv) teljesül. Ez csak $(1,0)$ esetén igaz.

(ii) és (iii) teljesül. Ez csak $(0,1)$ és $(0,-1)$ esetén igaz.

(ii) és (iv) teljesül. Ehhez az kell, hogy $x_2^2 = 1 - 2x_1$ és $x_1 + 3(1 - 2x_1) - 1 = 0$.

Utóbbi akkor áll fenn, ha

$$x_1 = \frac{2}{5} \qquad \text{és} \qquad x_2 = \frac{5^{1/2}}{5} \qquad \text{vagy} \qquad -\frac{5^{1/2}}{5}$$

Tehát $f(x_1,x_2)$ stacionárius pontjai a következők:

$$(0,0),(1,0),(0,1),(0,-1),\left(\frac{2}{5},\frac{5^{1/2}}{5}\right) \qquad \text{és} \qquad \left(\frac{2}{5},-\frac{5^{1/2}}{5}\right)$$

Hasonlóan

$$H(x_1,x_2)=\begin{bmatrix} 2x_2 & 2x_1+3(x_2)^2-1 \\ 2x_1+3(x_2)^2-1 & 6x_1x_2 \end{bmatrix}$$

$$H(0,0)=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mivel $H_1(0,0)=0$, a 7. és 7′. tételek feltételei nem teljesülnek. Mivel $H_2(0,0)=-1\neq 0$, a 7″. tétel alapján a $(0,0)$ nyeregpont.

$$H(1,0)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ekkor $H_1(1,0)=0$ és $H_2(1,0)=-1$, így a 7″. tétel alapján az $(1,0)$ is nyeregpont. Mivel

$$H(0,1)=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ezért $H_1(0,1)=2>0$ (így a 7′. tétel feltételei nem teljesülnek) és $H_2(0,1)=-4$ (így a 7. tétel feltételei nem teljesülnek). Mivel $H_2(0,1)\neq 0$, $(0,1)$ nyeregpont.

A $\left(\frac{2}{5},-\frac{5^{1/2}}{5}\right)$ pont esetén

$$H\left(\frac{2}{5},-\frac{5^{1/2}}{5}\right)=\begin{bmatrix} -\dfrac{2}{5^{1/2}} & \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{2}{5} & -\dfrac{12}{5(5)^{1/2}} \end{bmatrix}$$

Ezért

$$H_1\left(\frac{2}{5},-\frac{5^{1/2}}{5}\right)=-\frac{2}{5^{1/2}}<0 \qquad \text{és} \qquad H_2\left(\frac{2}{5},-\frac{5^{1/2}}{5}\right)=\frac{20}{25}>0$$

Tehát a 7′. tétel azt mutatja, hogy $\left(\frac{2}{5},-\frac{5^{1/2}}{5}\right)$ lokális maximum. Végül

$$H\left(\frac{2}{5},\frac{5^{1/2}}{5}\right)=\begin{bmatrix} \dfrac{2}{5^{1/2}} & \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{2}{5} & \dfrac{12}{5(5)^{1/2}} \end{bmatrix}$$

Mivel $H_1\left(\frac{2}{5},\frac{5^{1/2}}{5}\right)=\frac{2}{5^{1/2}}>0$ és $H_2\left(\frac{2}{5},\frac{5^{1/2}}{5}\right)=\frac{20}{25}>0$, a 7. tétel alapján $\left(\frac{2}{5},\frac{5^{1/2}}{5}\right)$ lokális minimum.

Feladatok

A csoport

1. Egy cégnek n gyára van. Az i-edik gyár az (x_i, y_i) pontban helyezkedik el az x–y síkon. A cég egy áruraktárt akar elhelyezni egy olyan (x, y) pontban, amelyre a

$$\sum_{i=1}^{i=n} (\text{az } i\text{-edik gyár távolsága az áruraktártól})^2$$

értéke minimális. Hova kell elhelyezni az áruraktárt?

2. Egy cég egy termékének minden egységét 2 dollárért tudja értékesíteni. A termék kétféle alapanyag felhasználásával áll elő. Ha q_1 egységnyit használnak az első alapanyagból és q_2 egységnyit a második alapanyagból, akkor a cég $q_1^{1/3} + q_2^{2/3}$ egységnyi terméket tud előállítani. Ha az első alapanyag egy egységét 1 dollárért, a második alapanyag egy egységét pedig 1.50 dollárért tudják beszerezni, hogyan tudja a cég maximalizálni a profitját?

3. (Összejátszáson alapuló duopólium modell) Adott két cég, amely ugyanazt a terméket állítja elő. Az első cégnél q_1 dollárba kerül q_1 egységnyi termék előállítása, a második cégnél pedig $0.5q_2^2$ dollárba kerül q_2 egységnyi termék előállítása. Ha együttesen q egységnyi terméket állítanak elő, a fogyasztók $200 - q$ dollárt hajlandók fizetni egységenként. Ha a két cég össze akar játszani profitjaik összegének maximalizálása céljából, mennyit kell az egyes cégeknek előállítani a termékből?

4. Egy cégnek 6 dollárjába kerül egy termék egy egységének az előállítása. Ha a terméket egységenként p dollárért értékesíti, és a dollárt költ hirdetésre, akkor $10\,000p^{-2}a^{1/6}$ egységet tud értékesíteni a termékből. Határozzuk meg az árnak és a hirdetésnek azt a szintjét, amelynél a cég profitja maximális!

5. Egy cég kétféle terméket gyárt. Ha az i-edik terméket p_i áron akarja értékesíti, akkor az i-edik termékből q_i egységet tud eladni, ahol $q_1 = 60 - 3p_1 + p_2$ és $q_2 = 80 - 2p_2 + p_1$. Az első termék egy egységének előállítása 25 dollárba, míg a második termék egy egységének előállítása 72 dollárba kerül. Mennyit termeljen a cég az egyes termékekből, hogy maximalizálja a profitját?

6. Keressük meg az összes lokális maximumot, lokális minimumot és nyeregpontot az $f(x_1, x_2) = x_1^3 - 3x_1x_2^2 + x_2^4$ függvény esetén!

7. Keressük meg az összes lokális maximumot, lokális minimumot és nyeregpontot az $f(x_1, x_2) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$ függvény esetén!

B csoport

8.[6] (Cournot duopólium modellje) Tekintsük újból a 3. feladatot. Az erre a helyzetre vonatkozó Cournot-megoldás a következőképpen áll elő: Az i-edik cég $\bar{q}_i$ mennyiséget fog gyártani, mégpedig úgy, hogy ha az első cég $\bar{q}_1$-től eltérő termelési szintre váltana (és a második cég továbbra is $\bar{q}_2$ mennyiséget termelne), akkor az első cég profitja csökkenne. Hasonlóan, ha a második cég $\bar{q}_2$-től eltérő termelési szintre váltana (és az első cég továbbra is $\bar{q}_1$ mennyiséget termelne), akkor a második cég profitja csökkenne. Ha az i-dik cég $\bar{q}_i$ mennyiséget termel, ez a megoldás stabil, mivel ha a cégek bármelyike megváltoztatja a termelési szintjét, rosszabbul jár. Határozzuk meg a $\bar{q}_1$ és $\bar{q}_2$ értékeket!

9. A Bloomington női kosárlabda-bajnokságban a következő mérkőzéseket játszották le: az A csapat 7 ponttal legyőzte a B csapatot, a C csapat 8 ponttal legyőzte az A csapatot, a B csapat 6 ponttal legyőzte a C csapatot, és a B csapat 9 ponttal legyőzte a C csapatot. Legyen A, B és C az egyes csapatok „osztályzata” abban az értelemben, hogy ha mondjuk az A csapat a B csapattal játszik, akkor azt jósolhatjuk, hogy $A - B$ ponttal fogja legyőzni az A csapat a B csapatot. Határozzuk meg az A, B és C értékeket úgy, hogy azok a legkisebb négyzetek értelemében legjobban illeszkedjenek az eddigi eredményekhez! Hogy egyértelmű osztályzatokat kapjunk, hasznos lehet az $A + B + C = 0$ feltétel hozzáadása. Ez egyben azt is biztosítja, hogy egy „átlagos” csapat osztályzata 0 lesz.

[6] Cournot (1897) alapján.

10.6. A legmeredekebb növekedés módszere

Tegyük fel, hogy a következő feltétel nélküli NLP feladatot akarjuk megoldani:

$$\begin{aligned} &\max z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\text{f.h.} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n \end{aligned} \tag{9}$$

A 10.5. alfejezetből már tudjuk, hogy ha $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ konkáv függvény, akkor (9) optimális megoldása (ha egyáltalán létezik) egy olyan $\bar{x}$ stacionárius pontban lesz, amelyre

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n} = 0$$

teljesül. A 18. és a 19. példánál könnyű volt meghatározni a stacionárius pontokat, ez azonban sok feladatnál nehéz lehet. Ebben az alfejezetben a legmeredekebb növekedés módszerével foglalkozunk, amely a függvény egy stacionárius pontjának közelítésére használható.

DEFINÍCIÓ

Adott $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ vektor esetén az $\mathbf{x}$ **hossza** (amit $\| \mathbf{x} \|$) jelöl)

$$\| \mathbf{x} \| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$$

A 2.1. alfejezetből emlékezhetünk arra, hogy minden n-dimenziós vektor egyben egy irányt is jelent R^n-ben. Ugyanakkor bármely irány esetén végtelen sok vektor képviseli azt az irányt. Például az $(1,1)$, $(2,2)$ és $(3,3)$ vektorok mind ugyanazt az irányt képviselik (egy elmozdulást pozitív $45°$ szögben) az R^2 térben. Bármely nemnulla $\mathbf{x}$ vektor esetén az $\mathbf{x}/\| \mathbf{x} \|$ vektornak a hossza 1 lesz, és ugyanazt az irányt jelöli, mint $\mathbf{x}$ (lásd az 1. feladatot ennek az alfejezetnek a végén). Tehát bármely nemnulla irányhoz R^n-ben hozzárendelhetünk egy 1 hosszúságú vektort (amit egységvektornak neveznek). Például, mivel $\mathbf{x} = (1,1)$ esetén $\| \mathbf{x} \| = 2^{1/2}$, az $\mathbf{x} = (1,1)$ által meghatározott irány az $(1/2^{1/2}, 1/2^{1/2})$ egységvektorhoz van hozzárendelve. Bármely nemnulla $\mathbf{x}$ esetén az $\mathbf{x}/\| \mathbf{x} \|$ egységvektort az $\mathbf{x}$ **normalizált** verziójának nevezzük. Ezért bármely nemnulla irány R^n-ben az azt az irányt meghatározó egységvektorral adunk meg. Tehát az R^2 $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, ... irányait az

$$\left(\frac{1}{2^{1/2}}, \frac{1}{2^{1/2}} \right)$$

normalizált vektorral adjuk meg.

Tekintsünk egy $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvényt, amelynek minden pontban létezik az összes parciális deriváltja.

DEFINÍCIÓ

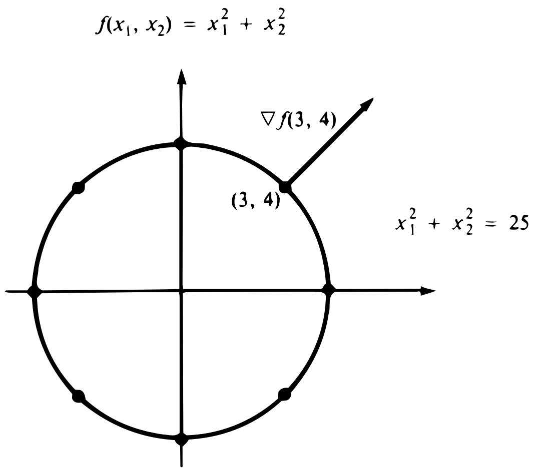
Az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvény **gradiens vektora,** jelölése $\nabla f(\mathbf{x})$, az alábbi sorvektor:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right]$$

A $\nabla f(\mathbf{x})$ vektor a

$$\frac{\nabla f(\mathbf{x})}{\| \nabla f(\mathbf{x}) \|}$$

21. ÁBRA $\nabla f(3,4)$ merőleges az $f(x_1,x_2)$ görbére a $(3,4)$ pontban



irányt határozza meg. Például ha $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$, akkor $\nabla f(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = (2x_1, 2x_2)$. Ezért $\nabla f(3,4) = (6,8)$. Mivel $\| \nabla f(3,4) \| = 10$, ezért $\nabla f(3,4)$ a $(\frac{6}{10}, \frac{8}{10}) = (0.6, 0.8)$ irányt határozza meg.

Bármely $\bar{\mathbf{x}}$ pont esetén, amely az $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = f(\bar{\mathbf{x}})$ görbén fekszik, a

$$\frac{\nabla f(\bar{\mathbf{x}})}{\| \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) \|}$$

vektor merőleges az $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = f(\bar{\mathbf{x}})$ görbére (lásd az 5. feladatot ennek az alfejezetnek a végén). Legyen például $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Ekkor a $(3,4)$ pontban a

$$\frac{\nabla f(3,4)}{\| \nabla f(3,4) \|} = (0.6, 0.8)$$

irány merőleges az $x_1^2 + x_2^2 = 25$ görbére (lásd a 21. ábrát).

A $\dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ definíciójából következik, hogy ha x_i értékét növeljük egy kis δ mennyiséggel, akkor $f(\mathbf{x})$ értéke közelítőleg $\delta \dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ értékkel fog növekedni. Tegyük fel, hogy egy $\mathbf{x}$ pontból elmozdulunk egy kis δ hosszal a $\mathbf{d}$ normalizált oszlopvektor irányában. Mennyivel fog $f(\mathbf{x})$ növekedni? A válasz az, hogy $f(\mathbf{x})$ növekedésének közelítő értéke δ-szor a $\dfrac{\nabla f(\mathbf{x})}{\| \nabla f(\mathbf{x}) \|}$ és $\mathbf{d}$ vektorok skalárszorzata $\left(\text{azaz } \dfrac{\delta \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d}}{\| \nabla f(\mathbf{x}) \|} \right)$. Tehát ha $\dfrac{\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d}}{\| \nabla f(\mathbf{x}) \|} > 0$, akkor $\mathbf{x}$-ből $\mathbf{d}$ irányba elmozdulva $f(\mathbf{x})$ értéke növekedni fog, ha pedig $\dfrac{\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d}}{\| \nabla f(\mathbf{x}) \|} < 0$, akkor $\mathbf{x}$-ből $\mathbf{d}$ irányba elmozdulva $f(\mathbf{x})$ értéke csökkenni fog. Legyen például $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$, és mozduljunk el δ távolságot 45° irányban a $(3,4)$ pontból. Mennyivel fog változni $f(x_1,x_2)$ értéke? Mivel a 45° irányt a $\left(\dfrac{1}{2^{1/2}}, \dfrac{1}{2^{1/2}} \right)$ vektor képviseli, és $\dfrac{\nabla f(3,4)}{\| \nabla f(3,4) \|} = (0.6, 0.8)$, az $f(x_1,x_2)$ értékének növekedése közelítőleg

$$\delta [0.6 \quad 0.8] \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2^{1/2}} \\ \dfrac{1}{2^{1/2}} \end{bmatrix} = 0.99\delta$$

A 10.5. alfejezetből tudjuk, hogy a (9) feladat $\bar{\mathbf{v}}$ optimális megoldása eleget tesz a $\nabla f(\bar{\mathbf{v}}) = 0$ feltételnek. Tegyük fel, hogy egy $\mathbf{v}_0$ pontban vagyunk, és a (9) egy $\bar{\mathbf{v}}$ optimális megoldását akarjuk meghatározni. A $\bar{\mathbf{v}}$ meghatározásának céljából ésszerűnek tűnik $\mathbf{v}_0$-ból egy olyan irányba elmozdulni, amely maximalizálja (legalább lokálisan) az $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ növekedésének ütemét. Az 1. segédtétel hasznos ebből a célból (lásd a 22. összefoglaló feladatot).

1. SEGÉDTÉTEL Tegyük fel, hogy egy $\mathbf{v}$ pontban vagyunk, és $\mathbf{v}$-ből egy kis δ távolságot mozdulunk el $\mathbf{d}$ irányba. Ekkor adott δ esetén $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ értéke növekedése akkor maximális, ha a

$$\mathbf{d} = \frac{\nabla f(\mathbf{v})}{\| \nabla f(\mathbf{v}) \|}$$

irányt választjuk.

Röviden, ha egy kis távolságot akarunk elmozdulni $\mathbf{v}$-ből, és azt akarjuk, hogy $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ növekedjék, amennyire csak lehet, akkor a $\nabla f(\mathbf{v})$ irányba kell elmozdulnunk.

Most már készen állunk a legmeredekebb növekedés módszerének leírására. Induljunk ki egy $\mathbf{v}_0$ pontból. Mivel a $\nabla f(\mathbf{v}_0)$ irányba történő elmozdulás fogja eredményezni f növekedésének maximális ütemét, ezért a $\mathbf{v}_0$-ból $\nabla f(\mathbf{v}_0)$ irányba történő elmozdulással kezdünk. Valamilyen nemnegatív t értékkel elmozdulunk a $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + t\nabla f(\mathbf{v}_0)$ pontba. Az f értékének maximális lehetséges javítása (maximalizálási feladat esetén) akkor áll elő, ha a $\mathbf{v}_0$ pontból $\nabla f(\mathbf{v}_0)$ irányba történő elmozdulással abba a $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + t_0\nabla f(\mathbf{v}_0)$ pontba érkezünk, ahol t_0 a következő egydimenziós optimalizálási feladat megoldása:

$$\begin{aligned} &\max \ f(\mathbf{v}_0 + t_0\nabla f(\mathbf{v}_0)) \\ &\text{f.h.} \quad t_0 \geq 0 \end{aligned} \tag{10}$$

A (10) NLP feladat megoldható a 10.3. alfejezetben tárgyalt módszerekkel, vagy ha szükséges, az aranymetszés kereséshez hasonló eljárással.

Ha $\| \nabla f(\mathbf{v}_1) \|$ kicsi (mondjuk kevesebb, mint 0.01), leállíthatjuk az algoritmust annak ismeretében, hogy $\mathbf{v}_1$ közel van egy olyan $\bar{\mathbf{v}}$ stacionárius ponthoz, amelyre $\nabla f(\bar{\mathbf{v}}) = 0$. Ha $\| \nabla f(\mathbf{v}_1) \|$ nem elég kicsi, akkor elmozdulhatunk a $\mathbf{v}_1$ pontból t_1 távolságra a $\| \nabla f(\mathbf{v}_1) \|$ irányban. Miként az előbb, t_1 értékét választhatjuk a

$$\begin{aligned} &\max \ f(\mathbf{v}_1 + t_1\nabla f(\mathbf{v}_1)) \\ &\text{f.h.} \quad t_1 \geq 0 \end{aligned}$$

feladat megoldásaként. Most akkor a $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + t_1\nabla f(\mathbf{v}_1)$ pontban vagyunk. Ha $\| \nabla f(\mathbf{v}_2) \|$ elég kicsi, leállhatunk az algoritmussal, és választhatjuk a $\mathbf{v}_2$ pontot az $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ egy stacionárius pontjának közelítéséül. Különben folytathatjuk az eddigi módon, amíg egy olyan $\mathbf{v}_n$ ponthoz nem érünk, amelynél $\| \nabla f(\mathbf{v}_n) \|$ elég kicsi. Ekkor a $\mathbf{v}_n$ pontot az $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ egy stacionárius pontja közelítésének tekintjük.

Ezt az algoritmust a legmeredekebb növekedés módszerének nevezik, mivel a pontok előállításához mindig olyan irányban mozdulunk el, amelynél az f növekedési arányszáma maximális (legalább is lokálisan).

21. PÉLDA Használjuk a legmeredekebb növekedés módszerét a

$$\begin{aligned} &\max\ z = -(x_1-3)^2-(x_2-2)^2 = f(x_1,x_2) \\ &\text{f.h.} \quad (x_1,x_2) \in R^2 \end{aligned}$$

feladat megoldásának közelítésére!

Megoldás Tetszőlegesen választhatunk kezdőpontot, legyen $\mathbf{v}_0 = (1,1)$. Mivel

$$\nabla f(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = (-2(x_1-3), -2(x_2-2)), \quad \text{ezért} \quad \nabla f(1,1) = (4,2).$$

Ekkor úgy kell választanunk a t_0 értéket, hogy az maximalizálja az

$$f(t_0) = f((1,1)+t_0(4,2)) = f(1+4t_0, 1+2t_0) = -(-2+4t_0)^2-(-1+2t_0)^2$$

függvényt. Az $f'(t_0) = 0$ felírásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} -8(-2+4t_0)-4(-1+2t_0) &= 0 \\ 20-40t_0 &= 0 \\ t_0 &= 0.5 \end{aligned}$$

Az új pontunk $\mathbf{v}_1 = (1,1)+0.5(4,2) = (3,2)$. Most $\nabla f(3,2) = (0,0)$, tehát befejezhetjük az algoritmust. Mivel $f(x_1,x_2)$ konkáv függvény, az NLP feladat egy optimális megoldását találtuk meg.

Feladatok

A csoport

1. Mutassuk meg, hogy bármely nemnulla $\mathbf{x}$ vektor esetén $\mathbf{x}/\parallel \mathbf{x} \parallel$ egységvektor!

2. Használjuk a legmeredekebb növekedés módszerét a következő feladat optimális megoldásának a közelítésére: $\max z = -(x_1-2)^2-x_1-x_2^2$. Kezdjünk a $(2.5, 1.5)$ pontban.

3. Használjuk a legmeredekebb növekedés módszerét a következő feladat optimális megoldásának a közelítésére: $\max z = 2x_1x_2+2x_2-x_1^2-2x_2^2$. Kezdjünk a $(0.5, 0.5)$ pontban. Vegyük észre, hogy a későbbi iterációkban a pontok nagyon közel lesznek egymáshoz. A legmeredekebb növekedés módszerének különböző variációit fejlesztették ki ennek a problémának a kezelésére (lásd Bazaraa és Shetty (1993, 7.6. alfejezet)).

B csoport

4. Hogyan módosítaná a legmeredekebb növekedés módszerét, ha minden x_i változónak egy $[a_i, b_i]$ intervallumba kell esnie?

C csoport

5. Mutassuk meg, hogy bármely $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ pontban $\nabla f(\bar{\mathbf{x}})$ merőleges az $f(x_1,x_2) = f(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ görbére! (*Útmutatás:* Két vektor egymásra merőleges, ha skalárszorzatuk nulla.)

10.7. Lagrange-szorzók

A Lagrange-szorzókat olyan NLP feladatok megoldásánál lehet használni, ahol minden feltétel egyenlőség feltétel. Következő típusú NLP feladatokat tekintünk:

$$\begin{aligned}
\max \ \ & (\text{vagy } \min)\ z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
\text{f.h.} \ \ & g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_1 \\
& g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_2 \\
& \quad \vdots \\
& g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_m
\end{aligned} \tag{11}$$

A (11) megoldása céljából egy λ_i **szorzót** rendelünk hozzá a (11) i-edik feltételéhez, és képezzük az

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i [b_i - g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \tag{12}$$

alakú **Lagrange-függvényt**. Ezután megpróbálunk egy olyan $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)$ pontot találni, ami maximalizálja (vagy minimalizálja) az $L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_m)$ függvényt. Az $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ sok esetben meg fogja oldani a (11) feladatot. Tegyük fel, hogy (11) egy maximalizálási feladat. Ha $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)$ maximalizálja az L függvényt, akkor az $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_n)$ pontban

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

Itt $\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}$ az L függvény λ_i szerinti parciális deriváltja. Ez azt mutatja, hogy $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ eleget tesz (11) feltételeinek. Annak megmutatására, hogy $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ megoldja a (11) feladatot, legyen $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ tetszőleges pont (11) lehetséges tartományában. Mivel $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)$ maximalizálja az L függvényt, ezért bármilyen $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_m$ számok esetén

$$L(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m) \geq L(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \lambda'_1, \lambda'_2, \ldots \lambda'_m) \tag{13}$$

Mivel $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ és $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ is a (11) lehetséges megoldása, (12)-ben a λ-kat tartalmazó kifejezések mind nullák, és (13) az $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) \geq f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ egyenlőtlenséget jelenti. Tehát $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ a (11) optimális megoldása. Összefoglalva, ha $(\bar{x}_1, \bar{x}_2 \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)$ megoldja a

$$\max\ L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \tag{14}$$

feltétel nélküli maximalizálási feladatot, akkor $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ megoldja a (11) feladatot is.

Azt tudjuk a 10.5. alfejezetből, hogy ahhoz, hogy $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)$ megoldja a (14) feladatot, szükséges, hogy az $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)$ pontban

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial L}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \cdots = \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = 0 \tag{15}$$

teljesüljön. A 8. tétel ad feltételeket arra vonatkozóan, hogy ha egy $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)$ pont eleget tesz (15)-nek, akkor az $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ pont a (11) feladat optimális megoldása legyen.

8. TÉTEL

Tegyük fel, hogy (11) egy maximalizálási feladat. Ha $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ egy konkáv függvény és $g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ mindegyike lineáris függvény, akkor bármely olyan $(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n,\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2,\ldots,\bar{\lambda}_m)$ pont, amely eleget tesz (15)-nek, egyben a (11) feladat egy $(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)$ optimális megoldását is megadja.

8′. TÉTEL

Tegyük fel, hogy (11) egy minimalizálási feladat. Ha $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ egy konvex függvény és $g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ mindegyike lineáris függvény, akkor bármely olyan $(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n,\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2,\ldots,\bar{\lambda}_m)$ pont, amely eleget tesz (15)-nek, egyben a (11) feladat egy $(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)$ optimális megoldását is előállítja.

Ha ezen tételek feltételei nem teljesülnek, akkor is lehetséges, hogy a (15) bármely megoldása a (11) feladatot is megoldja. A részleteket illetően lásd a Henderson és Quandt (1980) függelékét.

A Lagrange-szorzók geometriai értelmezése

A (15)-ből tudjuk, hogy ha egy $\bar{x}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)$ pont megoldja a (11) feladatot, akkor az $\bar{x}$ pontban szükségképpen

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}=0, \quad j=1,2,\ldots,n$$

Ez azzal ekvivalens, mint ha azt mondanánk, hogy léteznek olyan $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_m$ számok, hogy az $\bar{x}$ pontban

$$\nabla f=\sum_{i=1}^{i=m}\lambda_i\nabla g_i \tag{16}$$

Hogy lássuk, miként is áll ez elő, vegyük észre, hogy (16) bal oldalának j-edik komponense

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

jobb oldalának j-edik komponense pedig

$$\sum_{i=1}^{i=m}\lambda_i\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$$

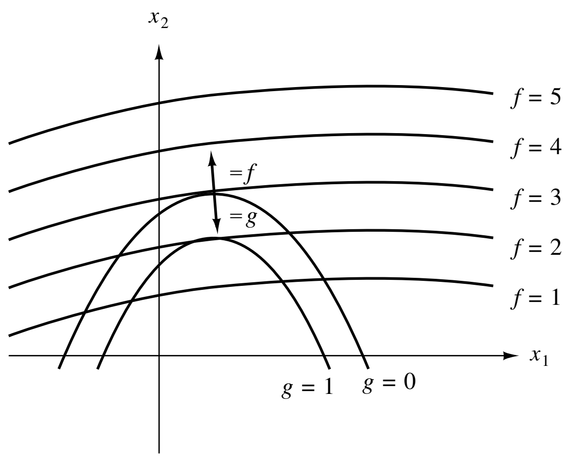
Tehát (16) éppen azt jelenti, hogy $j=1,2,\ldots,n$ esetén

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}-\sum_{i=1}^{i=m}\lambda_i\frac{\partial g_i}{\partial x_j}=0, \quad \text{azaz} \quad \frac{\partial L}{\partial x_j}=0$$

A (16) összefüggés a következő módon is szemléltethető: minden olyan $\bar{x}$ pont esetén, amely megoldja a (11) feladatot, szükséges, hogy $\bar{x}$-ban ∇f a feltételek gradienseinek lineáris kombinációja legyen.

Egy olyan feladat esetén, amelynek egy feltétele van, könnyen látható, hogy miért kell (16)-nak teljesülnie (11) optimális megoldása esetén. Ha (11)-nek egy feltétele van, akkor (16) azzal ekvivalens, hogy a célfüggvény gradiense és a feltétel gradiense párhuzamosak. Ennek a feltételnek a szükségességét a 22. ábrán szemléltetjük. Itt $z=3$ az optimális z érték, amikor az $f(x_1,x_2)$ függvényt maximalizáljuk a $g(x_1,x_2)=0$ feltétel mellett. A 22. ábrán az optimális pontban $\nabla f=\lambda\nabla g$, ahol $\lambda<0$.

22. ÁBRA
Egy feltételes példa (16)-ra



Ahhoz, hogy lássuk, miért kell (16)-nak teljesülnie (11) optimális megoldására, tekintsük a következő NLP feladatot:

$$\begin{aligned}&\max\ z = f(x_1,x_2,x_3)\\ &\text{f.h.}\quad g_1(x_1,x_2,x_3) = 0\\ &\qquad\ \ g_2(x_1,x_2,x_3) = 0\end{aligned} \tag{17}$$

Tegyük fel, hogy $\bar{x} = (\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)$ a (17) egy optimális megoldása. Azt állítjuk, hogy bármely $c \neq 0$ esetén a következő egyenletrendszernek nincs megoldása (az összes gradiens az $\bar{x}$-ban van kiértékelve):

$$\begin{bmatrix}\nabla g_1\\ \nabla g_2\\ \nabla f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1\\ d_2\\ d_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ c\end{bmatrix} \tag{18}$$

Hogy lássuk, miért is nem lehet (18)-nak megoldása, tegyük fel, hogy valamilyen $c > 0$ esetén van megoldása. (Ha (18)-nak valamilyen $c < 0$ esetén lenne megoldása, hasonló érvelést kell alkalmazni.) Ez a megoldás meghatároz egy **d** irányt a háromdimenziós térben. Ha az $\bar{x}$ pontból elmozdulunk egy kis ε távolságot a **d** irányban, akkor tudunk találni egy olyan $\bar{x}+\varepsilon\mathbf{d}$ lehetséges pontot (17)-hez, amelynek a z értéke nagyobb, mint az $\bar{x}$ pontban. Ez ellentmond $\bar{x}$ optimalitásának. Azt, hogy $\bar{x}+\varepsilon\mathbf{d}$ lehetséges megoldása (17)-nek, onnan láthatjuk, hogy $i = 1,2$ esetén $g_i(\bar{x}+\varepsilon\mathbf{d})$ az alábbi módon közelíthető:

$$g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{j=3}\frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j}\left(\frac{\varepsilon d_j}{\|\mathbf{d}\|}\right) = g_i(\bar{x}) = 0$$

Az $f(\bar{x}+\varepsilon\mathbf{d})$ is hasonlóan közelíthető:

$$f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{j=3}\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\frac{\varepsilon d_j}{\|\mathbf{d}\|}\right) = f(\bar{x}) + c\varepsilon/\|\mathbf{d}\| > f(\bar{x})$$

Ez azt jelenti, hogy ha $\bar{x}$ a (17) megoldása, akkor (18)-nak $c \neq 0$ esetén nincs megoldása. A 2.4. alfejezetből tudjuk, (18)-nak pontosan akkor nincs megoldása, ha (18) bal oldali mátrixának rangja kisebb vagy egyenlő kettőnél. Ez azt jelenti, hogy a $\nabla f, \nabla g_1, \nabla g_2$ vektorok

$\bar{x}$-ban lineárisan összefüggőek. Tehát a $\nabla f, \nabla g_1$ és ∇g_2 egy nem triviális lineáris kombinációja előállítja a nulla vektort. Ha feltesszük, hogy ∇g_1 és ∇g_2 lineárisan függetlenek (ez az általános eset), akkor (16)-nak kell fennállnia.

Lagrange-szorzók és az érzékenységi vizsgálat

A λ_i Lagrange-szorzók érzékenységi vizsgálatnál is használhatók. Ha az i-edik feltétel jobb oldalát megnöveljük egy kis Δb_i mennyiséggel (akár maximalizálási, akár minimalizálási feladatról van szó), akkor (11) optimális z értéke közelítőleg $\sum_{i=1}^{i=m}(\Delta b_i)\lambda_i$ mennyiséggel növekszik. Ez az eredmény a 9. feladatban van bizonyítva. Speciális esetként, ha csak az i-edik feltétel jobb oldalát növeljük meg Δb_i-vel, (11) optimális z értéke $(\Delta b_i)\lambda_i$ értékkel fog növekedni.

A következő két példa a Lagrange-szorzók használatát szemlélteti. A legtöbb esetben legkönnyebben úgy találunk olyan $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)$ pontot, amely eleget tesz (15)-nek, hogy először kifejezzük az $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ komponenseket $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m$ segítségével. Ezután a $\bar{\lambda}_i$ értékeket úgy határozzuk meg, hogy behelyettesítjük ezeket az összefüggéseket (11) feltételeibe. Végül a $\bar{\lambda}_i$ értékeket az $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ értékek meghatározására használjuk.

22. PÉLDA Egy cég 10 000 dollárt akar reklámra költeni. Percenként 3000 dollárba kerül a hirdetés a televízióban, míg percenként 1000 dollárba a rádióban. Ha a cég x perc televíziós és y perc rádiós reklámidőt vesz, akkor $f(x,y) = -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y$ bevétele lesz (ezer dollárban). Hogyan tudja a cég maximalizálni a bevételét?

Megoldás A következő NLP feladatot akarjuk megoldani:

$$\begin{aligned} &\max\ z = -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y \\ &\text{f.h.} \quad 3x + y = 10 \end{aligned}$$

Ekkor $L(x,y,\lambda) = -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y + \lambda(10 - 3x - y)$. Felírjuk a

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

egyenleteket. Azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -4x + y + 8 - 3\lambda = 0 \tag{19}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -2y + x + 3 - \lambda = 0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 10 - 3x - y = 0 \tag{21}$$

Vegyük észre, hogy $10 - 3x - y = 0$ átírható $3x + y = 10$ alakra. A (19) egyenletből $y = 3\lambda - 8 + 4x$, (20)-ból pedig $x = \lambda - 3 + 2y$ adódik. Tehát $y = 3\lambda - 8 + 4(\lambda - 3 + 2y) = 7\lambda - 20 + 8y$, azaz

$$y = \tfrac{20}{7} - \lambda \tag{22}$$

$$x = \lambda - 3 + 2(\tfrac{20}{7} - \lambda) = \tfrac{19}{7} - \lambda \tag{23}$$

A (22) és (23) összefüggést (21)-be behelyettesítve kapjuk, hogy $10-3(\frac{19}{7}-\lambda)-(\frac{20}{7}-\lambda)=0$, azaz $4\lambda-1=0$, azaz $\lambda=\frac{1}{4}$. Innen (22) és (23) alapján

$$\bar{y}=\frac{20}{7}-\frac{1}{4}=\frac{73}{28}$$
$$\bar{x}=\frac{19}{7}-\frac{1}{4}=\frac{69}{28}$$

Az $f(x,y)$ Hesse-mátrixa

$$H(x,y)=\begin{bmatrix}-4 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

Mivel mindegyik elsőrendű főminor negatív és $H_2(x,y)=7>0$, az $f(x,y)$ függvény konkáv. A feltétel lineáris, ezért a 8. tétel alapján a Lagrange-szorzók módszere az NLP feladat optimális megoldásához vezet.

Tehát a cégnek $\frac{69}{28}$ perc televíziós és $\frac{73}{28}$ perc rádiós reklámidőt kell vásárolnia. Mivel $\lambda=\frac{1}{4}$, további Δ ezer dollár reklámra költése (kis Δ esetén) a cég bevételét közelítőleg 0.25Δ ezer dollárral növelné.

Általában, ha a cég a dollárt költene reklámra, megmutatható, hogy $\lambda=\frac{11-a}{4}$ (lásd az 1. feladatot ennek az alfejezetnek a végén). Látható, hogy minél többet költenek reklámra, az újabb dollárnyi reklámköltség hatása a bevétel növekedésére egyre kisebb.

23. PÉLDA Mutassuk meg, hogy adott $x_1,x_2,\ldots,x_n$ számok esetén

$$n\sum_{i=1}^{i=n}x_i^2\geq\left(\sum_{i=1}^{i=n}x_i\right)^2$$

és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x_1=x_2=\cdots=x_n$!

Megoldás Tegyük fel, hogy $x_1+x_2+\cdots+x_n=c$. Tekintsük a

$$\min\ z=\sum_{i=1}^{i=n}x_i^2$$
$$\text{f.h.}\quad\sum_{i=1}^{i=n}x_i=c\tag{24}$$

NLP feladatot. A (24) feladat megoldásához képezzük az

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+\lambda(c-x_1-x_2-\cdots-x_n)$$

Lagrange-függvényt. Ekkor (24) megoldásához olyan $(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda)$ vektort kell találni, amelyre

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=2x_i-\lambda=0\quad(i=1,2,\ldots,n)\quad\text{és}$$
$$\frac{\partial L}{\partial\lambda}=c-x_1-x_2-\cdots-x_n=0$$

A $\frac{\partial L}{\partial x_i}=0$ összefüggésből kapjuk, hogy $2\bar{x}_1=2\bar{x}_2=\cdots=2\bar{x}_n=\bar{\lambda}$, azaz $x_i=\frac{\bar{\lambda}}{2}$. A $\frac{\partial L}{\partial\lambda}=0$ összefüggésből $c-\frac{n\bar{\lambda}}{2}=0$, azaz $\bar{\lambda}=\frac{2c}{n}$ adódik. A célfüggvény konvex (n konvex függvény összege), a feltétel pedig lineáris. Tehát a 8′. tétel alapján a Lagrange-szorzók módszerével előáll (24) optimális megoldása:

$$\bar{x}_i = \frac{\left(\frac{2c}{n}\right)}{2} = \frac{c}{n} \quad \text{és} \quad z = n\left(\frac{c^2}{n^2}\right) = \frac{c^2}{n}$$

Ezért, ha

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i = c,$$

akkor

$$n\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 \geq n\left(\frac{c^2}{n}\right) = \left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i\right)^2,$$

és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Ha egy olyan $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvényt próbálunk meg maximalizálni, amely több függvény szorzataként áll elő, akkor gyakran könnyebb az $\ln(f(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ függvényt maximalizálni helyette. Mivel az ln egy növekvő függvény, ezért bármely olyan x^*, amely maximalizálja az $\ln(f(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ függvényt az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ értékek valamilyen lehetséges tartományán, maximalizálni fogja az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvényt is az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ értékek ugyanezen lehetséges tartományán. Lásd a 2. feladatot ennek az ötletnek az alkalmazására.

Feladatok

A csoport

1. Mutassuk meg a 22. példánál, hogy ha a dollár áll rendelkezésre hirdetésre, akkor újabb egy dollár reklámra költése közelítőleg $\frac{11-a}{4}$ értékkel növeli a bevételt!

2. Tegyük fel, hogy 2 dollárba kerül egyórányi munkaerő és 1 dollárba egyegységnyi tőke beszerzése. Ha L órányi munkaerő és K egységnyi tőke áll rendelkezésre, akkor $L^{2/3}K^{1/3}$ gépet lehet előállítani. Ha 10 dollárunk van munkaerő és tőke beszerzésére, mennyi a gyártható gépek maximális száma?

3. A 2. feladatban mi a minimális költsége 6 gép előállításának?

4. Egy söripari cég két körzetre osztotta fel Bloomington területét. Ha x_1 dollárt költenek reklámra az első körzetben, akkor ott $6x_1^{1/2}$ láda sört tudnak eladni, ha pedig x_2 dollárt költenek reklámra a második körzetben, akkor ott $4x_2^{1/2}$ láda sört tudnak eladni. Az első körzetben 10 dollárért lehet értékesíteni egy láda sört, a szállítási és termelési költségek pedig 5 dollárt tesznek ki. A második körzetben 9 dollárért lehet eladni egy láda sört, a szállítási és termelési költség pedig 4 dollár. Összesen 100 dollárt lehet reklámra költeni. Hogyan tudja a cég maximalizálni a profitját? Ha további egy dollárt lehetne reklámra költeni, közelítőleg mennyivel növekedne a profit? Mennyivel növekedne a bevétel?

B csoport

5. Minden pénzünket két részvénybe kell fektetnünk, x-be és y-ba. Az x részvény éves hozamának szórásnégyzete var (x), az y részvényé pedig var (y). Jelölje $\text{cov}(x,y)$ az x és y részvény éves hozama közötti kovarianciát. Ha pénzünk a százalékát fektetjük az x részvénybe, b százalékát pedig az y részvénybe, a hozam szórásnégyzete $a^2\text{var}\,(x) + b^2\text{var}\,(y) + 2ab\,\text{cov}\,(x,y)$ lesz. Minimalizálni akarjuk a befektetett pénzünk hozamának szórásnégyzetét. Pénzünk hány százalékát fektessük az egyes részvényekbe?

6. Az 5. feladathoz hasonlóan döntenünk kell, hogy pénzünk mekkora részét fektessük az x és y részvényekbe. Egy a és b választást *portfóliónak* nevezünk. Egy portfólió hatékony, ha nem létezik egy másik olyan portfólió, amelynek magasabb várható hozama és alacsonyabb szórásnégyzete, vagy magasabb várható hozama és ugyanolyan szórásnégyzete, vagy alacsonyabb szórásnégyzete és ugyanolyan várható hozama van. Jelölje $\bar{x}$ az x részvény várható hozamát, $\bar{y}$ pedig az y részvény várható hozamát.

Tekintsük a következő NLP feladatot:

$$\begin{aligned}\max\ z &= c[a\bar{x}+b\bar{y}]\\ &\quad -(1-c)[a^2\text{var}\,(x)+b^2\text{var}\,(y)\\ &\quad +2ab\text{cov}\,(x,y)]\\ \text{f.h.}\quad & a+b=1\\ & a,b\geq 0\end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy $1>c>0$. Mutassuk meg, hogy ennek az NLP feladatnak minden optimális megoldása hatékony portfólió!

7. Tegyük fel, hogy az i-edik termék ($i=1,2$) egy egysége c_i dollárba kerül. Ha $x_i (i=1,2)$ egységet vásárolunk az első és a második termékből, akkor ez $x_1^a x_2^{1-a}$ $(0<a<1)$ hasznot hoz számunkra.

(a) Ha d dollárt költhetünk a két termék vásárlására, mennyit vásároljunk az egyes termékekből?

(b) Mutassuk meg, hogy az i-edik termék árának növelése az i-edik termékből vásárolandó mennyiség csökkenését eredményezi!

(c) Mutassuk meg, hogy az i-edik termék árának növelése nem változtatja meg a másik termékből vásárolandó mennyiséget!

8. Tegyük fel, hogy egy henger alakú üdítőital fémdoboza térfogatának 26 köbcentiméternek kell lennie. Ha az üdítőital gyártója minimalizálni szeretné a fémdoboz felületét, mi legyen a fémdoboz magassága és sugara közötti arány? (*Útmutatás:* A henger alakú fémdoboz térfogata $\pi r^2 h$, felülete pedig $2\pi r^2+2\pi rh$, ahol r a henger sugara, h pedig a magassága.)

9. Mutassuk meg, hogy ha az i-edik feltétel jobb oldala egy kis Δb_i mennyiséggel növekszik (akár maximalizálás, akár minimalizálás esetén), akkor a (11) feladat optimális z értéke közelítőleg $\sum_{i=1}^{i=m}(\Delta b_i)\lambda_i$ mennyiséggel növekszik!

10.8. A Kuhn–Tucker feltételek

Ebben az alfejezetben szükséges és elégséges feltételeket vizsgálunk meg arra vonatkozóan, hogy egy $\bar{x}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)$ vektor optimális megoldása legyen a következő NLP feladatnak:

$$\begin{aligned}\max\ &(\text{vagy min})\ f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\\ \text{f.h.}\ & g_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)\leq b_1\\ & g_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)\leq b_2\\ &\quad\vdots\\ & g_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)\leq b_m\end{aligned}\tag{25}$$

Az egyszerűség kedvéért ebben az alfejezetben feltesszük, hogy az NLP feladatok minden feltétele $\leq$ feltétel. A $h(x_1,x_2,\ldots,x_n)\geq b$ alakú feltételeket $-h(x_1,x_2,\ldots,x_n)\leq -b$ alakra kell átírni. Például $2x_1+x_2\geq 2$ helyett $-2x_1-x_2\leq -2$ írható. Egy $h(x_1,x_2,\ldots,x_n)=b$ alakú feltétel helyettesíthető a $h(x_1,x_2,\ldots,x_n)\leq b$ és $-h(x_1,x_2,\ldots,x_n)\leq -b$ feltételekkel. Például $2x_1+x_2=2$ helyettesíthető a $2x_1+x_2\leq 2$ és $-2x_1-x_2\leq -2$ feltételekkel.

A 9. és 9′. tételek feltételeket adnak **(Kuhn–Tucker** vagy K–T **feltételek),** amelyek szükségesek ahhoz, hogy egy $\bar{x}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)$ pont megoldja a (25) feladatot. Az f függvény x_j változó szerinti parciális deriváltjának $\bar{x}$ pontban vett értékét jelölje

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j}$$

Az itt bemutatandó tételekhez szükséges, hogy a $g_1,g_2,\ldots,g_m$ függvények eleget tegyenek bizonyos **regularitási feltételeknek.** Az egyik regularitási feltételt ennek az alfejezetnek a végén fogjuk majd röviden tárgyalni. (A regularitási feltételek részletes tárgyalása megtalálható a Bazaraa és Shetty (1993) könyv 5. fejezetében.)

Ha a feltételek lineárisak, ezek a regularitási feltételek mindig teljesülnek. Más esetekben (különösen, ha néhány feltétel egyenlőségként adott), a regularitási feltételek esetleg nem állnak fenn. Feltesszük, hogy az összes itt tekintett feladatnál teljesülnek a regularitási feltételek.

9. TÉTEL

Tegyük fel, hogy (25) egy maximalizálási feladat. Ha $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ a (25) optimális megoldása, akkor $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ eleget tesz a (25) feladat m feltételének, továbbá léteznek olyan $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m$ szorzók, amelyek teljesítik a következő feltételeket:

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{i=m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{26}$$

$$\bar{\lambda}_i [b_i - g_i(\bar{x})] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{27}$$

$$\bar{\lambda}_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{28}$$

9′. TÉTEL

Tegyük fel, hogy (25) egy minimalizálási feladat. Ha $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ a (25) optimális megoldása, akkor $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ eleget tesz a (25) feladat m feltételének, továbbá léteznek olyan $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m$ szorzók, amelyek teljesítik a következő feltételeket:

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{i=m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\bar{\lambda}_i [b_i - g_i(\bar{x})] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\bar{\lambda}_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Az előző alfejezet Lagrange-szorzóihoz hasonlóan a K–T feltételekben szereplő $\bar{\lambda}_i$ szorzókat is tekinthetjük a (25) feladat i-edik feltétele árnyékáraként. Tegyük fel, hogy (25) egy maximalizálási feladat. Ha az i-edik feltétel jobb oldalát b_i-ről $b_i + \Delta$-ra növeljük (ahol Δ kicsi), a célfüggvény optimális értéke közelítőleg $\Delta\bar{\lambda}_i$ mennyiséggel nő. Tegyük fel, hogy (25) egy minimalizálási feladat. Ha az i-edik feltétel jobb oldalát b_i-ről $b_i + \Delta$-ra növeljük (ahol Δ kicsi), a célfüggvény optimális értéke közelítőleg $\Delta\bar{\lambda}_i$ mennyiséggel csökken.

A szorzók árnyékárként való értelmezésének segítségével értelmezni tudjuk a (26)–(28) feltételeket is maximalizálási feladat esetén. Tegyük fel, hogy (25) minden feltétele egy erőforrás-felhasználási feltétel. Tehát az $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ pontban $g_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ egységnyit használunk az i-edik erőforrásból, és b_i egység áll rendelkezésre az i-edik erőforrásból. Ha az x_j értékét növeljük egy kis Δ mennyiséggel, a célfüggvény értéke

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} \Delta$$

mennyiséggel növekszik. Az x_j értékének $\bar{x}_j + \Delta$ szintre történő változtatása az i-edik feltételt is megváltoztatja:

$$g_i(\bar{x}) + \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} \Delta \leq b_i, \quad \text{azaz} \quad g_i(\bar{x}) \leq b_i - \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} \Delta$$

Tehát ha x_j-t Δ-val növeljük, annak az a hatása, hogy az i-edik feltétel jobb oldalát

$$-\frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} \Delta$$

mennyiséggel növeljük. A feltételek jobb oldalainak ezek a változtatásai z értékét közelítőleg

$$-\Delta \sum_{i=1}^{i=m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j}$$

mennyiséggel fogják növelni. Összességében x_j-nek Δ-val való növelése z értékét közelítőleg

$$\Delta \left[\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{i=m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} \right]$$

mértékben változtatja meg. Ha a zárójelben levő kifejezés nagyobb nullánál, növelni tudjuk f értékét $\Delta > 0$ választásával. Másrészt, ha ez a kifejezés kisebb nullánál, növelni tudjuk f értékét $\Delta < 0$ választásával. Tehát optimális $\bar{x}$ esetén a (26) feltételnek teljesülnie kell.

A (27) feltétel az LP feladatokra a 6.10. alfejezetben már tárgyalt kiegészítő eltérések feltételeinek (komplementaritási feltételek) általánosítása. A (27) feltétel szerint ugyanis

$$\text{ha } \bar{\lambda}_i > 0, \quad \text{akkor} \quad g_i(\bar{x}) = b_i \quad (\text{az } i\text{-edik feltétel aktív}) \tag{27$'$}$$

$$\text{ha } g_i(\bar{x}) < b_i, \quad \text{akkor} \quad \bar{\lambda}_i = 0 \tag{27$''$}$$

Tegyük fel, hogy a $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_i$ feltétel erőforrás-felhasználási feltétel, és azt jelenti, hogy legfeljebb b_i egységnyit lehet felhasználni az i-edik erőforrásból. Ekkor (27$'$) azt állítja, hogy ahhoz, hogy az i-edik feltételhez rendelt erőforrás egy újabb egységének legyen valamilyen nemnulla értéke, az aktuális optimális megoldásnak az i-edik erőforrásból rendelkezésre álló összes b_i egységet fel kell használnia. Másrészt (27$''$) azt állítja, hogy ha az i-edik erőforrásból aktuálisan rendelkezésre álló mennyiség nincs teljesen felhasználva, akkor az i-edik erőforrás újabb egységeinek nincs értéke.

Ha $\Delta > 0$ esetén b_i-ről $b_i + \Delta$ szintre növeljük az i-edik feltétel jobb oldalát, az optimális célfüggvényértéknek növekednie kell vagy ugyanazon a szinten kell maradnia, mivel a jobb oldal növelése növelte vagy meghagyta a feladat lehetséges tartományát. Mivel az i-edik feltétel jobb oldalának Δ-val való növelése az optimális célfüggvényértéket is növeli $\Delta\bar{\lambda}_i$ mennyiséggel, nyilván $\bar{\lambda}_i \geq 0$. Ezért szerepel (28) a K–T feltételek között.

A K–T feltételeket sokszor olyan NLP feladatoknál is alkalmazzák, ahol a változók nemnegatívok kell hogy legyenek. Például használni szeretnénk a K–T feltételeket a következő feladat optimális megoldásának megkeresésére:

$$\begin{array}{ll}
\text{max} & (\text{vagy min})\ z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
\text{f.h.} & \begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\leq b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\leq b_2 \\ &\vdots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\leq b_m \\ -x_1 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0 \\ &\vdots \\ -x_n &\leq 0 \end{aligned}
\end{array} \tag{29}$$

Ha a $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ szorzókat rendeljük hozzá (29) nemnegativitási feltételeihez, akkor a 9. és 9$'$. tétel az itt következő 10. és 10$'$. tétel alakjában írható fel.

10. TÉTEL

Tegyük fel, hogy (29) egy maximalizálási feladat. Ha $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ a (29) optimális megoldása, akkor $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ eleget tesz a (29) feladat feltételeinek, továbbá léteznek olyan $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \ldots, \bar{\mu}_m$ szorzók, amelyek teljesítik a következő feltételeket:

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{i=m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} + \mu_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (30)$$

$$\bar{\lambda}_i [b_i - g_i(\bar{x})] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad (31)$$

$$\left[\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{i=m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} \right] \bar{x}_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (32)$$

$$\bar{\lambda}_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad (33)$$

$$\bar{\mu}_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (34)$$

Mivel $\bar{\mu}_j \geq 0$, (30) azzal ekvivalens, hogy

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{i=m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} \leq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (30')$$

Ekkor a maximalizálási feladatra, nemnegativitási feltételek esetén érvényes (30)–(33) K–T feltételek az alábbi alakban is felírhatók:

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{i=m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} \leq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (30')$$

$$\bar{\lambda}_i [b_i - g_i(\bar{x})] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad (31')$$

$$\left[\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{i=m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} \right] \bar{x}_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (32')$$

$$\bar{\lambda}_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad (33')$$

10′. TÉTEL

Tegyük fel, hogy (29) egy minimalizálási feladat. Ha $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ a (29) optimális megoldása, akkor $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ eleget tesz a (29) feladat feltételeinek, továbbá léteznek olyan $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \ldots, \bar{\mu}_m$ szorzók, amelyek teljesítik a következő feltételeket:

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{i=m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} - \mu_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (35)$$

$$\bar{\lambda}_i [b_i - g_i(\bar{x})] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad (36)$$

$$\left[\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{i=m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} \right] \bar{x}_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (37)$$

$$\bar{\lambda}_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad (38)$$

$$\bar{\mu}_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (39)$$

Mivel $\bar{\mu}_j \geq 0$, (35) azzal ekvivalens, hogy

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{i=m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} \geq 0 \qquad (35')$$

Ekkor a minimalizálási feladatra, nemnegativitási feltételek esetén érvényes (35)–(38) K–T feltételek az alábbi alakban is felírhatók:

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{i=m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} \geq 0 \qquad (j = 1,2,\ldots,n) \qquad (35')$$

$$\bar{\lambda}_i[b_i - g_i(\bar{x})] = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,m) \qquad (36')$$

$$\left[\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{i=m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j}\right] \bar{x}_j = 0 \qquad (j = 1,2,\ldots,n) \qquad (37')$$

$$\bar{\lambda}_i \geq 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,m) \qquad (38')$$

A 9., 9′., 10. és 10′. tételek *szükséges* feltételeket adnak arra vonatkozóan, hogy egy $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ pont a (25) vagy a (29) feladat optimális megoldása legyen. A következő két tétel *elégséges* feltételt ad arra, hogy $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ a (25) vagy a (29) feladat optimális megoldása legyen (lásd Bazaraa és Shetty (1993)).

11. TÉTEL

Tegyük fel, hogy (25) egy maximalizálási feladat. Ha $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ konkáv függvény, $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvények pedig konvexek, akkor minden olyan $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ pont, amely eleget tesz a 9. tétel feltételeinek, a (25) feladat optimális megoldása. Hasonlóan, ha (29) egy maximalizálási feladat, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ konkáv függvény, $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pedig konvex függvények, akkor minden olyan $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ pont, amely eleget tesz a 10. tétel feltételeinek, a (29) feladat optimális megoldása.

11′. TÉTEL

Tegyük fel, hogy (25) egy minimalizálási feladat. Ha $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ konvex függvény, és a $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvények is konvexek, akkor minden olyan $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ pont, amely eleget tesz a 9′. tétel feltételeinek, a (25) feladat optimális megoldása. Hasonlóan, ha (29) egy minimalizálási feladat, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ konvex függvény, és a $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvények is konvexek, akkor minden olyan $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ pont, amely eleget tesz a 10′. tétel feltételeinek, a (29) feladat optimális megoldása.

MEGJEGYZÉS A 11. és 11′. tétel azért követeli meg, hogy a $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvények konvexek legyenek, mert ez biztosítja, hogy a (25) és a (29) feladat lehetséges tartománya konvex halmaz (lásd a 10.2. alfejezet 21. feladatát).

A Kuhn–Tucker feltételek geometriai értelmezése

Könnyen látható, hogy a 9. tétel (26)–(28) feltételei pontosan akkor teljesülnek egy $\bar{x}$ pontban, ha ∇f a $\nabla g_1, \nabla g_2, \dots, \nabla g_m$ nemnegatív lineáris kombinációja, és 0 az a súly, amellyel ∇g_i szorzódik ebben a lineáris kombinációban, ha (25) i-edik feltétele nem aktív. Röviden, (26)–(28) azzal ekvivalens, hogy léteznek olyan $\lambda_i \geq 0$ súlyok, hogy

$$\nabla f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) \tag{40}$$

és az $\bar{x}$-ban nem aktív feltételek esetén $\lambda_i = 0$.

A (40) összefüggést jól illusztrálja a 23. és a 24. ábra. A 23. ábrán a

$$\begin{aligned} &\max\ z = f(x_1, x_2) \\ &\text{f.h.}\quad g_1(x_1, x_2) \leq 0 \\ &\qquad\ \ g_2(x_1, x_2) \leq 0 \end{aligned}$$

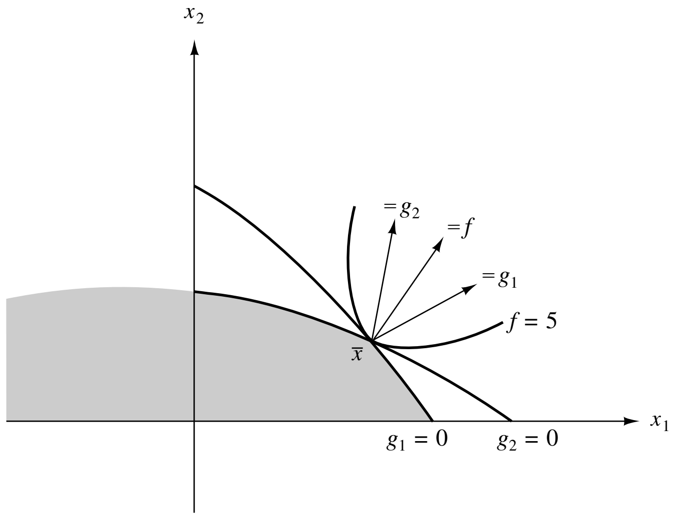
feladatot akarjuk megoldani (a megengedett tartomány sötétítve van). Az $\bar{x}$ pontban mindkét feltétel aktív, és (40) teljesül $\lambda_1 > 0$ és $\lambda_2 > 0$ szorzókkal. A 24. ábrán újból egy

$$\begin{aligned} &\max\ z = f(x_1, x_2) \\ &\text{f.h.}\quad g_1(x_1, x_2) \leq 0 \\ &\qquad\ \ g_2(x_1, x_2) \leq 0 \end{aligned}$$

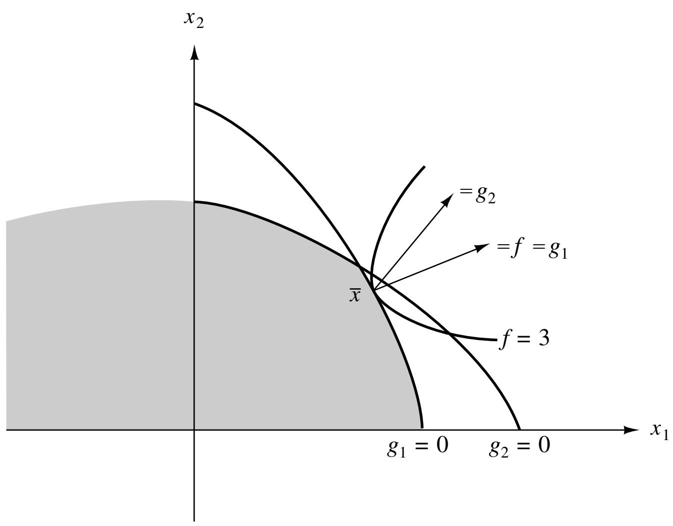
alakú feladatot akarunk megoldani (a megengedett tartomány újból sötétítve van). A második feltétel most nem aktív, így (40) $\lambda_2 = 0$ mellett teljesül.

A következő két példa a K–T feltételek használatát illusztrálja.

23. ÁBRA
Példa a Kuhn–Tucker feltételekre: Mind a két feltétel aktív



24. ÁBRA
Példa a Kuhn–Tucker feltételekre: Az egyik feltétel aktív, a másik nem aktív



24. PÉLDA Határozzuk meg a

$$\begin{aligned} &\max\; f(x) \\ &\text{f.h.} \quad a \le x \le b \end{aligned} \tag{41}$$

feladat optimális megoldását!

Megoldás Azt már tudjuk a 10.3. alfejezetből, hogy ha létezik $f'(x)$ az $[a,b]$ intervallum minden pontjában, akkor ennek a feladatnak az optimális megoldása vagy az a pontban van ($f'(a) \le 0$ esetén), vagy a b pontban ($f'(b) \ge 0$ esetén), vagy pedig egy olyan pontban, amelyre $f'(x) = 0$ teljesül. Mit jelentenek a K–T feltételek erre a három esetre?

Írjuk fel a (41) feladatot

$$\begin{aligned} &\max\; f(x) \\ &\text{f.h.} \quad -x \le -a \\ &\qquad\quad\; x \le b \end{aligned}$$

alakban. Ekkor (26)–(28) alapján

$$f'(x) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \tag{42}$$
$$\lambda_1(-a+x) = 0 \tag{43}$$
$$\lambda_2(b-x) = 0 \tag{44}$$
$$\lambda_1 \ge 0 \tag{45}$$
$$\lambda_2 \ge 0 \tag{46}$$

A K–T feltételek ilyen NLP feladatokra történő alkalmazásánál érdemes kihasználni, hogy az összes λ_i szorzó esetében $\lambda_i = 0$ vagy $\lambda_i > 0$. Tehát a (42)–(46) feltételeknek eleget tevő x, λ_1 és λ_2 értékek keresésénél érdemes a következő négy esetet megkülönböztetni:

1. eset $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Ekkor (42)-ből az $f'(\bar{x}) = 0$ eset adódik.

2. eset $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$. Mivel $\lambda_2 > 0$, (44) alapján $\bar{x} = b$. Ekkor (42)-ből $f'(b) = \lambda_2$, és mivel $\lambda_2 > 0$, azt kapjuk, hogy $f'(b) > 0$.

3. eset $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$. Mivel $\lambda_1 > 0$, (43) alapján $\bar{x} = a$. Ekkor (42)-ből $f'(a) = -\lambda_1 < 0$.

4. eset $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$. A (43) és (44) összefüggésekből azt kapjuk, hogy $\bar{x} = a$ és $\bar{x} = b$. Ez az ellentmondás azt jelzi, hogy a 4. eset nem fordulhat elő.

Mivel a feltételek lineárisak, a 11. tétel szerint, ha $f(x)$ konkáv, akkor (42)–(46) optimális megoldást szolgáltat (41) számára.

25. PÉLDA Egy monopolhelyzetben levő cég 17.25 deka mennyiségig vásárolhat egy kémiai anyagból, dekánként 10$ áron. Dekánként 3$ költséggel a kémiai anyag egy dekája egy deka 1. termékké, 5$ költséggel pedig egy deka 2. termékké dolgozható fel. Ha x_1 dekát állítanak elő az 1. termékből, azt $30 - x_1$ dollár áron lehet értékesíteni dekánként. Ha pedig x_2 dekát állítanak elő a 2. termékből, azt $50 - 2x_2$ dollár áron lehet értékesíteni dekánként. Határozzuk meg, miként tudja a cég maximalizálni a profitját!

Megoldás Legyen

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \text{az 1. termékből előállított mennyiség (deka)}\\
x_2 &= \text{a 2. termékből előállított mennyiség (deka)}\\
x_3 &= \text{a feldolgozott kémiai anyag mennyisége (deka)}
\end{aligned}
$$

Ekkor a következő NLP feladatot kell megoldanunk:

$$
\begin{aligned}
&\max\ z = x_1(30 - x_1) + x_2(50 - 2x_2) - 3x_1 - 5x_2 - 10x_3\\
&\text{f.h.}\quad x_1 + x_2 \le x_3, \quad \text{azaz} \quad x_1 + x_2 - x_3 \le 0\\
&\qquad\qquad\qquad x_3 \le 17.25
\end{aligned} \tag{47}
$$

Természetesen az $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ feltételeket is hozzá kellene adnunk. Mivel azonban (47) optimális megoldása eleget fog tenni a nemnegativitási feltételeknek, azért annak az NLP feladatnak is optimális megoldása lesz, amit (47) nemnegativitási feltételekkel való kiegészítésével kapunk.

Vegyük észre, hogy (47) célfüggvénye konkáv függvények összege (azért önmaga is konkáv), továbbá a feltételek konvexek (mivel lineárisak). Tehát a 11. tétel alapján a K–T feltételek szükségesek és elégségesek ahhoz, hogy (x_1, x_2, x_3) a (47) optimális megoldása legyen. A 9. tétel alapján a K–T feltételek a következők:

$$30 - 2x_1 - 3 - \lambda_1 = 0 \tag{48}$$
$$50 - 4x_2 - 5 - \lambda_1 = 0 \tag{49}$$
$$-10 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \tag{50}$$
$$\lambda_1(-x_1 - x_2 + x_3) = 0 \tag{51}$$
$$\lambda_2(17.25 - x_3) = 0 \tag{52}$$
$$\lambda_1 \ge 0 \tag{53}$$
$$\lambda_2 \ge 0 \tag{54}$$

Az előző példához hasonlóan most is négy esetet különböztetünk meg:

1. eset $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Ez az eset (50) miatt nem fordulhat elő.

2. eset $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$. Ha $\lambda_1 = 0$, akkor (50) miatt $\lambda_2 = -10$. Ez pedig ellentmond (54)-nek.

3. eset $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$. Ekkor (50) miatt $\lambda_1 = 10$. Innen (48) alapján $x_1 = 8.5$, (49) alapján pedig $x_2 = 8.75$ adódik. Végül (51)-ből azt kapjuk, hogy $x_1 + x_2 = x_3$, azaz $x_3 = 17.25$. Tehát $\bar{x}_1 = 8.5, \bar{x}_2 = 8.75, \bar{x}_3 = 17.25, \bar{\lambda}_1 = 10, \bar{\lambda}_2 = 0$ eleget tesz a K–T feltételeknek.

4. eset $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$. Mivel a 3. eset már előállított egy optimális megoldást, a 4. esetet már nem is kell tekintenünk.

Tehát a (47) optimális megoldása az, hogy venni kell 17.25 dekát a kémiai anyagból, majd pedig 8.5 dekát kell gyártani az 1. termékből és 8.75 dekát a 2. termékből. A $\bar{\lambda}_1 = 10$ azt jelzi, hogy ha egy kis Δ mennyiséggel költségmentesen növelni lehetne a rendelkezésre álló kémiai anyag mennyiségét, akkor a profit 10Δ mennyiséggel növekedne. (Tudja-e, hogy miért?) Az (50) összefüggésből azt kapjuk, hogy $\bar{\lambda}_2 = 0$. Ebből viszont az következik, hogy az a lehetőség, hogy újabb Δ dekával növelhetnénk a kémiai anyag mennyiségét, nem növelné a profitot. (Tudja-e, hogy miért?)

Regularitási feltételek

Ha egy optimális $\bar{x}$ pontban nem érvényes egy regularitási feltétel, lehet, hogy a Kuhn–Tucker feltételek sem teljesülnek $\bar{x}$-ban. Sokféle regularitási feltétel van, mi a lineáris függetlenségen alapuló regularitási feltétel tárgyalását választjuk. A lineáris függetlenségen alapuló regularitási feltétel a következő: Legyen $\bar{x}$ a (25) vagy a (29) NLP feladat egy optimális megoldása. Ha az összes g_i folytonos, és az $\bar{x}$-ban aktív feltételek (az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változókra vonatkozó aktív nemnegativitási feltételeket is beleértve) gradiensei lineárisan független vektorrendszert alkotnak, akkor a Kuhn–Tucker feltételeknek teljesülnie kell $\bar{x}$-ban.

A következő példa azt mutatja meg, hogy ha nem teljesül a lineáris függetlenségen alapuló regularitási feltétel, akkor előfordulhat, hogy egy NLP feladat optimális megoldásában nem állnak fenn a Kuhn–Tucker feltételek.

26. PÉLDA Mutassuk meg, hogy a következő NLP feladat optimális megoldásában nem teljesülnek a Kuhn–Tucker feltételek:

$$\begin{aligned} &\max\ z = x_1 \\ &\text{f.h.}\quad x_2 - (1 - x_1)^3 \le 0 \\ &\qquad\quad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned} \tag{55}$$

Megoldás Ha $x_1 > 1$ lenne, akkor (55) feltételéből $x_2 < 0$ adódna. Tehát (55) optimális z értéke nem lehet nagyobb 1-nél. Mivel $x_1 = 1$ és $x_2 = 0$ egy lehetséges megoldás és esetükben $z = 1$, az $(1,0)$ pont az (55) NLP feladat egy optimális megoldása.

A 10. tétel alapján az (55)-re vonatkozó Kuhn–Tucker feltételek az alábbiak:

$$1 + 3\lambda_1(1 - x_1)^2 = -\mu_1 \tag{56}$$

$$\mu_1 \ge 0 \tag{57}$$

Az $(1,0)$ optimális megoldásnál (56)-ból $\mu_1 = -1$ következik, ez viszont ellentmond (57)-nek. Tehát a Kuhn–Tucker feltételek nem teljesülnek az $(1,0)$ pontban. Most viszont azt is megmutatjuk, hogy a $(1,0)$ pontban a lineáris függetlenségen alapuló regularitási feltétel sem teljesül. Az aktív feltételek $(1,0)$-ban $x_2 - (1 - x_1)^3 \le 0$ és $x_2 \ge 0$. Ekkor

$$\nabla(x_2 - (1 - x_1)^3) = [0, 1]$$
$$\nabla(-x_2) = [0, -1]$$

Mivel $[0,1]+[0,-1]=[0,0]$, ezek a gradiensek lineárisan összefüggőek. Tehát az $(1,0)$ pontban az aktív feltételek gradiensei lineárisan összefüggőek, és nem teljesül a regularitási feltétel.

Feladatok

A csoport

1.[7] Egy áramszolgáltató ki kell hogy elégítse a fogyasztói igényeket csúcsidőben és csúcsidőn kívül is. Ha csúcsidőben p_1 dollárt számol fel egy kWh energiáért, a fogyasztói igény $60-0.5p_1$ kWh lesz. Ha csúcsidőn kívül p_2 dollár lenne egy kWh energia ára, akkor $40-p_2$ kWh lenne a fogyasztói igény. Az áramszolgáltatónak elegendő kapacitással kell rendelkeznie az igények kielégítésére csúcsidőben és azon kívül is. Naponta 10 dollárba kerül minden kWh kapacitás fenntartása. Határozzuk meg, hogyan tudja az áramszolgáltató maximalizálni napi bevételének és napi működési költségének a különbségét!

2. Használjuk a K–T feltételeket a következő NLP feladat optimális megoldásának megkeresésére:

$$\begin{aligned}\max\ & z=x_1-x_2\\ \text{f.h.}\ & x_1^2+x_2^2\le 1\end{aligned}$$

3. Tekintsük a Giapetto feladatot 3.1. alfejezetből:

$$\begin{aligned}\max\ & z=3x_1+2x_2\\ \text{f.h.}\ & 2x_1+x_2\le 100\\ & x_1+x_2\le 80\\ & x_1\le 40\\ & x_1\ge 0\\ & x_2\ge 0\end{aligned}$$

Írjuk fel a K–T feltételeket erre a feladatra, és vizsgáljuk meg kapcsolatukat a Giapetto LP feladat duáljával, illetve az LP feladatra vonatkozó kiegészítő eltérések (komplementaritási) feltételekkel!

4. Ha a (25) feladat lehetséges tartománya korlátos és zárt, a célfüggvény pedig folytonos, akkor megmutatható, hogy (25)-nek van optimális megoldása. Tegyük fel, hogy teljesülnek a regularitási feltételek, a 11. és 11′. tétel feltételei azonban nem érvényesek. Ha be tudjuk bizonyítani, hogy csak egyetlen pont tesz eleget a K–T feltételeknek, akkor miért kell ennek a pontnak egyben az NLP feladat optimális megoldásának is lennie?

5. Egy cégnél összesen heti 160 óra munkaerő áll rendelkezésre, óránként 15$ költségért. További munkaerőt óránként 25$ költségért lehet bérelni. Tőkéhez korlátlan mennyiségben lehet hozzájutni tőkeegységenként 5 dollárért. Heti K egység tőke és L egység munkaerő felhasználásával $L^{1/2}K^{1/3}$ gépet lehet előállítani. Minden gépet 270 dollárért lehet értékesíteni. Hogyan tudja a cég maximalizálni a heti profitját?

6. Használjuk a K–T feltételeket a következő NLP feladat optimális megoldásának megkeresésére:

$$\begin{aligned}\min\ & z=(x_1-1)^2+(x_2-2)^2\\ \text{f.h.}\ & -x_1+x_2=1\\ & x_1+x_2\le 2\\ & x_1,x_2\ge 0\end{aligned}$$

7. Magyarázza el, hogy a 25. példánál miért kaptuk a $\bar\lambda_1=10$ és a $\bar\lambda_2=0$ értékeket. (*Útmutatás:* Gondoljon arra a közgazdasági elvre, hogy minden termék gyártásánál a határhaszonnak és a határköltségnek meg kell egyeznie!)

8. Használjuk a K–T feltételeket a következő NLP feladat optimális megoldásának megkeresésére:

$$\begin{aligned}\max\ & z=-x_1^2-x_2^2+4x_1+6x_2\\ \text{f.h.}\ & x_1+x_2\le 6\\ & x_1\le 3\\ & x_2\le 4\\ & x_1,x_2\ge 0\end{aligned}$$

9. Használjuk a K–T feltételeket a következő NLP feladat optimális megoldásának megkeresésére:

$$\begin{aligned}\min\ & z=e^{-x_1}+e^{-2x_2}\\ \text{f.h.}\ & x_1+x_2\le 1\\ & x_1,x_2\ge 0\end{aligned}$$

10. Használjuk a K–T feltételeket a következő NLP feladat optimális megoldásának megkeresésére:

$$\begin{aligned}\min\ & z=(x_1-3)^2+(x_2-5)^2\\ \text{f.h.}\ & x_1+x_2\le 7\\ & x_1,x_2\ge 0\end{aligned}$$

[7] Littlechild, „Peak Loads” (1970) cikke alapján.

Oldja meg a következő feladatokat valamilyen optimalizálási programcsomag felhasználásával! Az ilyen programcsomagok általában lokális optimumot vagy stacionárius pontot szolgáltatnak. Vizsgálja meg, hogy vajon a programcsomag ezeknél a feladatoknál az optimális megoldást is megtalálja-e.

11. Oldja meg a 10.1. alfejezet 7. feladatát!

12. Oldja meg a 10.1. alfejezet 8. feladatát!

13. Oldja meg a 10.1. alfejezet 11. feladatát!

14. Oldja meg a 10.1. alfejezet 12. feladatát!

15. Oldja meg a 10.1. alfejezet 13. feladatát!

B csoport

16. Meg kell határoznunk, hogy pénzünk hány százalékát fektessük az x és az y részvénybe. Fektessük pénzünk a részét az x részvénybe, $b = 1 - a$ részét pedig az y részvénybe. Egy a és b választást *portfóliónak* nevezünk. Egy portfólió hatékony, ha nincs másik olyan portfólió, amelynek magasabb várható hozama és alacsonyabb szórásnégyzete, vagy magasabb várható hozama és azonos szórásnégyzete, vagy pedig alacsonyabb szórásnégyzete és azonos várható hozama lenne. Legyen $\bar{x}$ az x részvény várható hozama, $\bar{y}$ pedig az y részvény várható hozama. Az x hozamának szórásnégyzetét jelölje var (x), az y hozamának szórásnégyzetét pedig var (y). Jelölje cov (x,y) az x hozama és az y hozama közötti kovarianciát. Ha pénzünk $a\%$-át fektetjük az x részvénybe, $b\%$-át pedig az y részvénybe, akkor a hozam szórásnégyzete a következőképpen adható meg:

$$a^2\text{var }(x) + b^2\text{var }(y) + 2ab\text{cov }(x,y).$$

Tekintsük a következő NLP feladatot:

$$\begin{aligned} \max\ & z = a\bar{x} + b\bar{y} \\ \text{f.h.}\ & a^2\text{var }(x) + b^2\text{var }(y) + 2ab\text{cov }(x,y) \le v^*, \\ & a + b = 1, \end{aligned}$$

ahol v^* egy adott nemnegatív szám.

(a) Mutassuk meg, hogy ennek az NLP feladatnak minden megoldása egy hatékony portfólió!

(b) Mutassuk meg, hogy ha v^* a nemnegatív számok teljes tartományában vesz fel értéket, akkor az összes hatékony portfóliót megkapjuk!

10.9. Kvadratikus programozás

Tekintsünk egy olyan NLP feladatot, amelynek a célfüggvénye $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$ alakú kifejezések összegeként áll elő. Az $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$ kifejezés foka $k_1 + k_2 + \cdots k_n$. Tehát az $x_1^2x_2$ kifejezés foka 3, az x_1x_2 kifejezésé pedig 2. Egy olyan NLP feladatot, amelynek lineárisak a feltételei, a célfüggvénye pedig 0, 1 vagy 2 fokú, $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$ alakú kifejezések összege, **kvadratikus programozási feladatnak** nevezünk.

Számos módszer alkalmazható kvadratikus programozási feladatok megoldására (lásd Bazaraa és Shetty (1993, 11. fejezet)). Mi itt a kvadratikus programozás portfóliókiválasztásra történő alkalmazását mutatjuk be, majd a kvadratikus programozási feladatok megoldására szolgáló Wolfe-módszert ismertetjük.

A kvadratikus programozás és a portfóliókiválasztás

Tekintsünk egy befektetőt, aki adott mennyiségű pénzét különböző befektetésekben helyezheti el. Általában azt tesszük fel, hogy egy befektető maximalizálni akarja a befektetései (portfóliója) utáni várható hozamot, miközben azt is biztosítani akarja, hogy a portfólió kockázata kicsi legyen, ahol a kockázatot a portfólió hozamának szórásnégyzetével mérjük. Sajnos a magas várható hozamú részvények esetében általában a hozam szórásnégyzete (kockázata) is magas. Ezért a portfóliókiválasztási feladat egyik gyakori megközelítése az, hogy választunk egy elfogadható minimális várható hozam értéket, majd az ezt a várható hozamszintet teljesíteni tudó portfóliók közül megkeressük a minimális szórásnégyzetűt. Például egy befektető keresheti azt a minimális szórásnégyzetű portfóliót, amelynek a várható hozama 12%. Az elfogadható minimális várható hozam szintjének változtatásával a befektető különböző portfóliókat kaphat, és azokat összehasonlíthatja.

Ezekkel a meggondolásokkal a portfóliókiválasztási feladatot egy kvadratikus programozási feladatra vezethetjük vissza. Ehhez szükségünk van azokra a 11.6. alfejezetben tárgyalt szabályokra, amelyek a valószínűségi változók összege várható értékének és szórásnégyzetének meghatározására vonatkoznak.

Tudjuk, hogy adott $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ valószínűségi változók, valamint a, b és k konstansok esetén

$$E(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \cdots + \mathbf{X}_n) = E(\mathbf{X}_1) + E(\mathbf{X}_2) + \cdots + E(\mathbf{X}_n) \tag{58}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \cdots + \mathbf{X}_n) &= \operatorname{var}\mathbf{X}_1 + \operatorname{var}\mathbf{X}_2 + \cdots + \operatorname{var}\mathbf{X}_n \\ &\quad + \sum_{i \neq j} \operatorname{cov}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)\end{aligned} \tag{59}$$

$$E(k\mathbf{X}_i) = kE(\mathbf{X}_i) \tag{60}$$

$$\operatorname{var}(k\mathbf{X}_i) = k^2 \operatorname{var}\mathbf{X}_i \tag{61}$$

$$\operatorname{cov}(a\mathbf{X}_i, b\mathbf{X}_j) = ab\operatorname{cov}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) \tag{62}$$

A következő példán megmutatjuk, hogyan lehet a portfóliókiválasztási feladatot kvadratikus programozási feladatként felírni.

27. PÉLDA Tegyük fel, hogy 1000 dollárunk van, és azt három részvénybe fektethetjük. Legyen $\mathbf{S}_i$ az a valószínűségi változó, amely az i-edik részvénybe fektetett egy dollár utáni éves hozamot képviseli. Tehát ha $\mathbf{S}_i$ értéke 0.12, akkor az év elején az i-edik részvénybe fektetett 1 dollár az év végén 1.12 dollárt ér. A következő információkkal rendelkezünk: $E(\mathbf{S}_1) = 0.14, E(\mathbf{S}_2) = 0.11, E(\mathbf{S}_3) = 0.10, \operatorname{var}\mathbf{S}_1 = 0.20, \operatorname{var}\mathbf{S}_2 = 0.08, \operatorname{var}\mathbf{S}_3 = 0.18$, $\operatorname{cov}(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) = 0.05, \operatorname{cov}(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_3) = 0.02, \operatorname{cov}(\mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3) = 0.03$. Állítsunk fel egy kvadratikus programozási feladatot, amely segítségével meghatározhatjuk azt a portfóliót, amelynek az éves várható hozama legalább 12%, és az ilyen portfóliók közül minimális az éves hozam szórásnégyzete.

Megoldás Jelölje x_j, hogy hány dollárt fektetünk a j-edik részvénybe $(j = 1, 2, 3)$. Ekkor a portfólió éves hozama $(x_1\mathbf{S}_1 + x_2\mathbf{S}_2 + x_3\mathbf{S}_3)/1000$, a portfólió éves hozamának várható értéke pedig ((58) és (60) alapján)

$$\frac{x_1E(\mathbf{S}_1) + x_2E(\mathbf{S}_2) + x_3E(\mathbf{S}_3)}{1000}$$

Annak biztosítására, hogy a portfólió várható hozama legalább 12% legyen, a következő feltételt kell megfogalmazni:

$$\frac{0.14x_1 + 0.11x_2 + 0.10x_3}{1000} \geq 0.12, \text{ azaz } 0.14x_1 + 0.11x_2 + 0.10x_3 \geq 0.12(1000) = 120.$$

Természetesen az $x_1 + x_2 + x_3 = 1000$ feltételt is fel kell írni. Feltesszük, hogy csak nemnegatív összeget lehet egy részvénybe fektetni (azaz a rövidre eladás nem megengedett), ezért az $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ feltételeket is csatolni kell. Célunk egyszerűen a portfólió éves hozama szórásnégyzetének a minimalizálása.

Tudjuk (59)-ből, hogy a portfólió hozamának szórásnégyzete a következő:

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}(x_1\mathbf{S}_1 + x_2\mathbf{S}_2 + x_3\mathbf{S}_3) &= \operatorname{var}(x_1\mathbf{S}_1) + \operatorname{var}(x_2\mathbf{S}_2) + \operatorname{var}(x_3\mathbf{S}_3)\\
&\quad + 2\operatorname{cov}(x_1\mathbf{S}_1, x_2\mathbf{S}_2) + 2\operatorname{cov}(x_1\mathbf{S}_1, x_3\mathbf{S}_3)\\
&\quad + 2\operatorname{cov}(x_2\mathbf{S}_2, x_3\mathbf{S}_3)\\
&= x_1^2 \operatorname{var}\mathbf{S}_1 + x_2^2 \operatorname{var}\mathbf{S}_2 + x_3^2 \operatorname{var}\mathbf{S}_3 + 2x_1x_2\operatorname{cov}(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2)\\
&\quad + 2x_1x_3\operatorname{cov}(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_3) + 2x_2x_3\operatorname{cov}(\mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3)\\
&\quad \text{(a (61) és (62) egyenletek alapján)}\\
&= 0.20x_1^2 + 0.08x_2^2 + 0.18x_3^2 + 0.10x_1x_2\\
&\quad + 0.04x_1x_3 + 0.06x_2x_3
\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a portfólió szórásnégyzetére vonatkozó utolsó kifejezés másodfokú kifejezések összege. Tehát egy olyan NLP feladatunk van, ahol a feltételek lineárisak, a célfüggvény pedig másodfokú kifejezések összegéből áll. A legalább 12% várható hozamú portfóliók közül a legkisebb szórásnégyzetű portfóliót a következő kvadratikus programozási feladat megoldásával kaphatjuk meg:

$$\begin{aligned}
\min\ & z = 0.20x_1^2 + 0.08x_2^2 + 0.18x_3^2 + 0.10x_1x_2 + 0.04x_1x_3 + 0.06x_2x_3\\
\text{f.h.}\ & 0.14x_1 + 0.11x_2 + 0.10x_3 \geq 120\\
& x_1 + x_2 + x_3 = 1000\\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned} \tag{63}$$

Mivel a célfüggvény konvex (lásd 2. feladat), a feltételek pedig lineárisak, teljesülnek a $11'$. tétel feltételei. Optimalizálási programcsomag segítségével megkaphatjuk a (63) feladat optimális megoldását, amely $z = 75\ 238$ (dollár)^2, $x_1 = 380.95\$$, $x_2 = 476.19\$$, $x_3 = 142.86\$$. Mivel az első feltétel egyenlőségként teljesül, az optimális portfólió várható hozama pontosan 12%. A portfólió éves hozamának szórása dollárban $(75\ 238)^{1/2} = 274.30\$$.

Egy befektetési portfólió hozamát gyakran közelítik normális eloszlással. Tudjuk, hogy a normális eloszlás nagyjából 95%-os valószínűséggel vesz fel a várható értéktől legfeljebb kétszórásnyi eltérésű értékeket. Tehát 95%-ig biztosak lehetünk abban, hogy az optimális portfólió éves dollárhozama $-428.60\$ = 120\$ - 2(274.30\$)$ és $668.60\$ = 120\$ + 2(274.30\$)$ között lesz.

MEGJEGYZÉSEK

1. A kvadratikus programozás optimális portfóliók meghatározására történő alkalmazásának ötlete Markowitz (1959) dolgozatából származik, és részét képezi azoknak az eredményeknek, amelyek alapján Markowitz Közgazdasági Nobel-díjat kapott.

2. A 9. feladatban majd megvizsgáljuk, miként lehet aktuális adatok felhasználásával megbecsülni egy befektetés várható hozamát és szórásnégyzetét, továbbá két különböző befektetés esetén a hozamok közötti kovarianciát.

3. A 10. feladatban bemutatjuk majd Sharpe (1963) egyfaktoros modelljét, amely nagymértékben egyszerűsíti a portfólióoptimalizálást.

4. A valóságban tranzakciós költségek is fellépnek, amikor befektetéseket veszünk vagy adunk el. A 11. feladatban megvizsgáljuk, hogyan módosítják a tranzakciós költségek a portfólióoptimalizálási modelleket.

A Wolfe-módszer kvadratikus programozási feladatok megoldására

A Wolfe-módszer olyan kvadratikus programozási feladatok megoldására szolgál, ahol minden változó nemnegatív. A módszert a következő kvadratikus programozási feladat megoldásán mutatjuk be:

$$\begin{aligned} &\min z = -x_1 - x_2 + (\tfrac{1}{2})x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 \\ &\text{f.h.} \quad x_1 + \ \ x_2 \le 3 \\ &\quad -2x_1 - 3x_2 \le -6 \\ &\qquad\quad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

A célfüggvényről könnyen megmutatható, hogy konvex, így bármely pont, amely eleget tesz a $(35')$–$(38')$ Kuhn–Tucker feltételeknek, a kvadratikus programozási feladatot is megoldja. Ha bevezetjük az e_1 felesleg változót $(35')$ x_1-hez tartozó feltételébe, az e_2 felesleg változót $(35')$ x_2-höz tartozó feltételébe, az e'_2 változót a $-2x_1 - 3x_2 \le -6$ feltételbe, az s'_1 kiegészítő változót pedig az $x_1 + x_2 \le 3$ feltételbe, akkor a K–T feltételek a következőképpen írhatók:

$$\begin{aligned} &x_1 - 1 - x_2 + \lambda_1 - 2\lambda_2 - e_1 = 0 && (x_1 \text{ feltétele } (35')\text{-ben}) \\ &2x_2 - 1 - x_1 + \lambda_1 - 3\lambda_2 - e_2 = 0 && (x_2 \text{ feltétele } (35')\text{-ben}) \\ &x_1 + x_2 + s'_1 = 3 \\ &2x_1 + 3x_2 - e'_2 = 6 \\ &\text{minden változó nemnegatív} \\ &\lambda_2 e'_2 = 0, \qquad \lambda_1 s'_1 = 0, \qquad e_1 x_1 = 0, \qquad e_2 x_2 = 0 \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy az utolsó négy egyenlet kivételével a K–T feltételek lineárisak, a nemnegativitási feltételeket is beleértve. Az utolsó négy feltétel az erre a kvadratikus programozási feladatra vonatkozó kiegészítő eltérés (komplementaritási) feltételek. Egy általános kvadratikus programozási feladat esetén a kiegészítő eltérések feltételei szóban a következőképpen írhatók le:

$$\left.\begin{aligned} &\text{az } x_i\text{-hez tartozó } (35') \text{ feltétel } e_i \text{ felesleg változója és } x_i \\ &\qquad \text{nem lehet egyszerre pozitív} \\ &\text{az } i\text{-edik feltétel kiegészítő vagy felesleg változója és } \lambda_i \\ &\qquad \text{nem lehet egyszerre pozitív} \end{aligned}\right. \tag{64}$$

A Wolfe-módszer egyszerűen a kétfázisú szimplex módszer I. fázisát alkalmazza olyan pont keresésére, amely a kiegészítő eltérések feltételeinek kivételével eleget tesz a K–T feltételeknek. Elsőként egy mesterséges változót csatolunk a K–T feltételek minden olyan egyenletéhez, amely nem tartalmaz egy nyilvánvaló bázisváltozót, majd megpróbáljuk minimalizálni a mesterséges változók összegét. Annak biztosítására, hogy a végső megoldás (ahol az összes mesterséges változó már nulla szinten van) eleget tegyen (64) kiegészítő eltérésekre vonatkozó feltételeinek, a Wolfe-módszer módosítja a szimplex módszernek a bázisba belépő változó kiválasztására szolgáló szabályát:

1. Soha ne hajtsunk végre olyan báziscserét, amely után $(35')$ i-edik feltételének e_i változója és x_i is bázisváltozó lenne.

2. Soha ne hajtsunk végre olyan báziscserét, amely után az i-edik feltétel kiegészítő (vagy felesleg) változója és λ_i is bázisváltozó lenne.

A Wolfe-módszernek a fenti példánkon való alkalmazásához az alábbi LP feladatot kell megoldanunk:

$$
\begin{aligned}
&\min\ w = a_1 + a_2 + a_2' \\
&\text{f.h.}\quad x_1 - x_2 + \lambda_1 - 2\lambda_2 - e_1 + a_1 = 1 \\
&\qquad -x_1 + 2x_2 + \lambda_1 - 3\lambda_2 - e_2 + a_2 = 1 \\
&\qquad\ \ x_1 + x_2 + s_1' = 3 \\
&\qquad 2x_1 + 3x_2 - e_2' + a_2' = 6 \\
&\qquad\quad \text{minden változó nemnegatív}
\end{aligned}
$$

A mesterséges változók 0. sorból való eliminálása után a 9. táblázat szimplex táblájához jutunk. Az aktuális lehetséges bázismegoldás $w = 8$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $s_1' = 3$, $a_2' = 6$. Mivel x_2 együtthatója a legpozitívabb a 0. sorban, az x_2 változót választjuk bázisba való belépésre. Az előálló szimplex tábla a 10. táblázatban látható. Az új lehetséges bázismegoldás $w = 6$, $a_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $s_1' = \frac{5}{2}$, $a_2' = \frac{9}{2}$. Mivel most x_1 együtthatója a legpozitívabb a 0. sorban, az x_1 változót választjuk bázisba való belépésre. Az előálló szimplex tábla a 11. táblázatban látható.

9. TÁBLÁZAT
A Wolfe-módszer kiinduló szimplex táblája

w	x_1	x_2	λ_1	λ_2	e_1	e_2	s_1'	e_2'	a_1	a_2	a_2'	**J.o.**
1	2	4	2	-5	-1	-1	0	-1	0	0	0	8
0	1	-1	1	-2	-1	0	0	0	1	0	0	1
0	-1	2	1	-3	0	-1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3
0	2	3	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	6

10. TÁBLÁZAT
A Wolfe-módszer első szimplex táblája

w	x_1	x_2	λ_1	λ_2	e_1	e_2	s_1'	e_2'	a_1	a_2	a_2'	**J.o.**
1	4	0	0	1	-1	1	0	-1	0	-2	0	6
0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
0	$\frac{7}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	-1	0	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{9}{2}$

11. TÁBLÁZAT
A Wolfe-módszer második szimplex táblája

w	x_1	x_2	λ_1	λ_2	e_1	e_2	s_1'	e_2'	a_1	a_2	a_2'	**J.o.**
1	0	0	$\frac{12}{7}$	$-\frac{29}{7}$	-1	$-\frac{5}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	0	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{8}{7}$	$\frac{6}{7}$
0	0	0	$\frac{12}{7}$	$-\frac{29}{7}$	-1	$-\frac{5}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$
0	0	1	$\frac{2}{7}$	$-\frac{6}{7}$	0	$-\frac{2}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{8}{7}$
0	0	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	1	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$
0	1	0	$-\frac{3}{7}$	$\frac{9}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	0	$-\frac{2}{7}$	0	$-\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{9}{7}$

Az aktuális lehetséges bázismegoldás $w = \frac{6}{7}, a_1 = \frac{6}{7}, x_2 = \frac{8}{7}, s_1' = \frac{4}{7}, x_1 = \frac{9}{7}$. A szimplex módszer azt javasolja, hogy a λ_1 változót léptessük be a bázisba. Azonban a Wolfe-módszer belépési szabálya nem engedi meg, hogy a λ_1 és az s_1' egyszerre legyenek bázisváltozók. Ezért a λ_1 nem léphet be a bázisba. Mivel e_2' az egyetlen további olyan változó, amelynek pozitív együtthatója van a 0. sorban, ezért most az e_2' változót léptetjük a bázisba. Az előálló szimplex tábla a 12. táblázatban látható. Az aktuális lehetséges bázismegoldás

$w=\frac{2}{3}, a_1=\frac{2}{3}, x_2=\frac{4}{3}, e_2'=\frac{4}{3}$ és $x_1=\frac{5}{3}$. Mivel s_1' most nem bázisváltozó, beléptethetjük λ_1-et a bázisba. Az előálló szimplex tábla a 13. táblázatban látható. Végül is ez az optimális szimplex tábla. Mivel $w=0$, egy olyan megoldást találtunk, amely eleget tesz a Kuhn–Tucker feltételeknek, és a kvadratikus programozási feladat optimális megoldása. Tehát a kvadratikus programozási feladat optimális megoldása $x_1=\frac{9}{5}, x_2=\frac{6}{5}$. Azt optimális táblából azt is kiolvashatjuk, hogy $\lambda_1=\frac{2}{5}$ és $\lambda_2=0$ (mivel $e_2'=\frac{6}{5}>0$, tudjuk, hogy $\lambda_2=0$ kell, hogy legyen).

A Wolfe-módszer garantáltan megtalálja a kvadratikus programozási feladat optimális megoldását, ha a célfüggvény Hesse-mátrixának mindegyik sarokfőminora pozitív. Különben előfordulhat, hogy a Wolfe-módszer nem áll le véges számú báziscsere után. A gyakorlatban a **komplementaritási báziscserén,** azaz a kiegészítő eltérések feltételeit megtartó báziscserén alapuló módszereket alkalmazzák leggyakrabban kvadratikus programozási feladatok megoldására. Sajnos itt most nincs elég hely ezeknek a módszereknek a tárgyalására. Az érdeklődő olvasóknak Shapiro (1979) könyvét javasoljuk.

12. TÁBLÁZAT
A Wolfe-módszer harmadik szimplex táblája

w	x_1	x_2	λ_1	λ_2	e_1	e_2	s_1'	e_2'	a_1	a_2	a_2'	**J.o.**
1	0	0	$\frac{5}{3}$	-4	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	-1	$\frac{2}{3}$
0	0	0	$\frac{5}{3}$	-4	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
0	0	1	$\frac{1}{3}$	-1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
0	0	0	$\frac{1}{3}$	-1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	-1	$\frac{4}{3}$
0	1	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$

13. TÁBLÁZAT
A Wolfe-módszer optimális szimplex táblája

w	x_1	x_2	λ_1	λ_2	e_1	e_2	s_1'	e_2'	a_1	a_2	a_2'	**J.o.**
1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0
0	0	0	1	$-\frac{12}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{5}$
0	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
0	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{12}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	-1	$\frac{6}{5}$
0	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{9}{5}$

Feladatok

A csoport

1. Három részvénybe való befektetés lehetőségét vizsgáljuk. Az $\mathbf{S}_i$ valószínűségi változó azt jelöli, hogy mennyit fog érni egy év múlva a most az i-edik részvénybe befektetett egy dollár. Adott $E(\mathbf{S}_1)=1.15$, $E(\mathbf{S}_2)=1.21$, $E(\mathbf{S}_3)=1.09$; $\operatorname{var}\mathbf{S}_1=0.09$, $\operatorname{var}\mathbf{S}_2=0.04$, $\operatorname{var}\mathbf{S}_3=0.01$; $\operatorname{cov}(\mathbf{S}_1,\mathbf{S}_2)=0.006$, $\operatorname{cov}(\mathbf{S}_1,\mathbf{S}_3)=-0.004$ és $\operatorname{cov}(\mathbf{S}_2,\mathbf{S}_3)=0.005$. Összesen 100 dollárt fektethetünk be, és legalább 15% várható hozamot akarunk elérni a következő évben. Fogalmazzunk meg egy kvadratikus programozási feladatot, amely a legalább 15% várható hozamot biztosító portfóliók közül kiválasztja a legkisebb szórásnégyzetűt!

2. Mutassuk meg, hogy a 27. példa célfüggvénye konvex (megmutatható, hogy bármely portfólió hozamának a szórásnégyzete az $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ változók konvex függvénye)!

3. Amennyiben rendelkezésünkre áll megfelelő optimalizálási programcsomag, oldjuk meg vele a 27. példát!

4. A Fruit Computer Company nevű számítógépgyártó cég Körte és Kajszi márkanevű számítógépeket gyárt. Ha p_1 jelöli a Körte, p_2 pedig a Kajszi számítógép árát, akkor q_1 számú Körte és q_2 számú Kajszi számítógépet tudnak eladni, ahol $q_1=4000-10p_1+p_2$ és $q_2=2000-9p_2+0.8p_1$. Egy Körte számítógép előállításához 2 órányi munkaerő és 3 áramköri lap szükséges. Egy Kajszi számítógéphez 3 órányi munkaerő és 1 áramköri lap kell. Jelenleg

5000 órányi munkaerő és 4500 áramköri lap áll rendelkezésre. Fogalmazzunk meg egy olyan kvadratikus programozási feladatot, amely a cég árbevételét maximalizálja. Használjuk a K–T feltételeket a cég optimális árazási politikájának meghatározására! Mi az a legtöbb, amit a cégnek érdemes fizetnie egy újabb órányi munkaerőért? Mi az a legtöbb, amit a cégnek érdemes fizetnie egy újabb áramköri lapért?

5. Használjuk a Wolfe-módszert a következő kvadratikus programozási feladat megoldására:

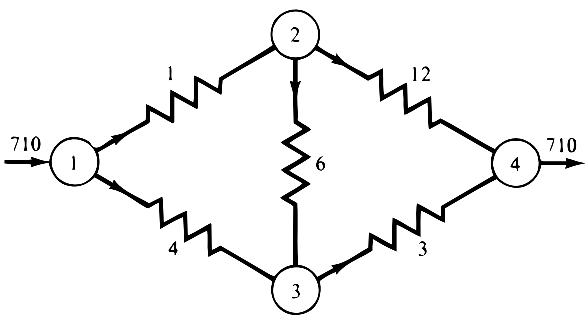
$$\begin{aligned} \min\ & z = 2x_1^2 - x_2 \\ \text{f.h.}\ & 2x_1 - x_2 \le 1 \\ & x_1 + x_2 \le 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

6. Használjuk a Wolfe-módszert a következő kvadratikus programozási feladat megoldására:

$$\begin{aligned} \min\ & x_1 + 2x_2^2 \\ \text{f.h.}\ & x_1 + x_2 \le 2 \\ & 2x_1 + x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

7. Egy elektromos hálózatban, ha I amper erősségű áram folyik keresztül egy R ohm értékű ellenálláson, akkor a fellépő hálózati veszteség I^2R watt. A 25. ábrán 710 amper áramot kell az 1-es csomópontból a 4-es csomópontba juttatni. Minden csomópontban teljesülnie kell az árammegmaradás elvének. Például az 1-es csomópontban

25. ÁBRA



710 = áram az 1 ohmos ellenállás felé + áram a 4 ohmos ellenállás felé. Érdekes módon a természet úgy határozza meg az egyes ellenállásokon keresztül folyó áramot, hogy minimalizálja az összes hálózati veszteséget.

(a) Írjunk fel egy kvadratikus programozási feladatot, amelynek megoldása megadja az egyes ellenállásokon keresztül folyó áramot!

(b) Ha rendelkezésünkre áll megfelelő optimalizálási programcsomag, oldjuk meg a feladat!

8. Használjuk a Wolfe-módszert a következő kvadratikus programozási feladat optimális megoldásának meghatározására:

$$\begin{aligned} \min\ & z = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 3x_2 + x_1x_2 \\ \text{f.h.}\ & x_1 + 2x_2 \le 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

B csoport

9. (Ehhez a feladathoz szükség van valamennyi ismeretre a regressziószámításból, lásd a 22.6. alfejezetet.) A 14. táblázatban három különböző típusú befektetés (kincstárjegyek, részvények, arany) éves hozamai vannak megadva az 1968–1988 évekre vonatkozóan. Például az 1978 elején kincstárjegybe fektetett 1 dollár 1.07 dollárra nőtt 1978 végére. Tegyük fel, hogy 1000 dollárt kell befektetnünk ebbe a három befektetési lehetőségbe. Célunk a portfólió éves hozama szórásnégyzetének a minimalizálása olyan feltétel mellett, hogy a portfólió éves várható hozama legalább 10% legyen. Határozzuk meg, hogy mennyi pénzt fektessünk az egyes befektetési lehetőségekbe. Használjunk táblázatkezelő programot az egyes befektetések várható hozamának, szórásának és szórásnégyzetének meghatározására.

14. TÁBLÁZAT Befektetések éves hozamai

Év	Részvények	Arany	Kincstárjegy
1968	11	11	5
1969	−9	8	7
1970	4	−14	7
1971	14	14	4
1972	19	44	4
1973	−15	66	7
1974	−27	64	8
1975	37	0	6
1976	24	−22	5
1977	−7	18	5
1978	7	31	7
1979	19	59	10
1980	33	99	11
1981	−5	−25	15
1982	22	4	11
1983	23	−11	9
1984	6	−15	10
1985	32	−12	8
1986	19	16	6
1987	5	22	5
1988	17	−2	6

Emlékeztetünk arra, hogyan lehet két befektetési lehetőség hozama között a kovarianciát kiszámítani. Például a kincstárjegy és az arany hozama közötti kovariancia $\mathrm{cov}(T,G) = s_T s_G r_{TG}$, ahol s_T = a kincstárjegy hozamának szórása;

$s_G =$ az arany hozamának szórása, továbbá $r_{TG} = \pm(R^2)^{\frac{1}{2}}$, ahol r előjele megegyezik a legkisebb négyzetes regressziós egyenes meredekségének előjelével.
Amellett, hogy meghatározzuk az egyes befektetésekbe elhelyezendő pénz mennyiségét, válaszoljunk az alábbi két kérdésre is:

(a) 95%-ig biztosak lehetünk abban, hogy befektetéseink értéknövekedése a következő év alatt ________ és ___________ között lesz.

(b) 95%-ig biztosak lehetünk abban, hogy portfóliónk éves százalékos hozama ____________ és __________________ között lesz.

10. (A 9. feladat adatait és a regressziószámítási ismereteket alkalmazzuk itt is.) Tegyük fel, hogy az i-edik befektetés hozama $\mu_i + \beta_i M + \varepsilon_i$ alakban becsülhető, ahol M az átlagos piaci portfólió hozama. Tegyük fel, hogy az ε_i valószínűségi változók függetlenek, és hogy ε_i annak a regressziós becslésnek a standard hibájaként áll elő, ahol a regresszió független változója a piaci portfólió hozama, a függő változó pedig az i-edik befektetés hozama. Most a portfólió szórásnégyzetét ki tudjuk fejezni az egyes befektetési párok közötti kovariancia kiszámítása nélkül is. (*Útmutatás:* A piac szórásnégyzete fog megjelenni az egyenletünkben.) Használjuk a regressziós becslést az i-edik befektetés hozamának a piaci portfólió hozama függvényeként való megadására!
A 9. feladat adataival írjunk fel egy NLP feladatot, amely segítségével megkaphatjuk a minimális szórásnégyzetű portfóliót a legalább 10% várható hozamot nyújtó portfóliók közül. Miért hasznos ez a módszer, amikor sok lehetséges befektetési lehetőség áll rendelkezésre?

11. (Újból a 9. feladat adataira támaszkodunk.) Tegyük fel, hogy jelenleg befektetéseink 30%-a részvényben, 50%-a kincstárjegyben és 20%-a aranyban van. Tegyük fel, hogy tranzakciós költségek is fellépnek. Minden 100 dollár értékű részvény tranzakció után 1 dollár tranzakciós díjat kell fizetni, minden 100 dollár értékű arany kereskedése után 2 dollár a díj, míg minden 1 dollár értékű kincstárjegy-tranzakció után 5 cent a tranzakciós díj. Keressük meg azt a minimális szórásnégyzetű portfóliót, amelynek várható hozama a tranzakciós díjak után legalább 10%! (*Útmutatás:* Vezessünk be változókat az eladandó vagy vásárolandó befektetések értékére.)

10.10. Szeparábilis programozás[8]

Sok NLP feladat írható fel a következő alakban:

$$\max \quad (\text{vagy } \min)\ z = \sum_{j=1}^{j=n} f_j(x_j)$$

$$\text{f.h.} \quad \sum_{j=1}^{j=n} g_{ij}(x_j) \le b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Mivel a döntési változók a célfüggvény és a feltételek egymástól elszeparált kifejezéseiben jelennek meg, az ilyen alakú NLP feladatokat **szeparábilis programozási feladatoknak** nevezzük. A szeparábilis programozási feladatokat gyakran úgy oldják meg, hogy minden $f_j(x_j)$ és $g_{ij}(x_j)$ függvényt egy szakaszonként lineáris függvénnyel közelítenek (lásd a 9.2. alfejezetet). A szeparábilis programozás technikájának részletezése előtt egy példát mutatunk szeparábilis programozási feladatra.

28. PÉLDA Az Oilco cégnek meg kell határoznia, hogy hány hordó olajat termeljen ki a következő két év alatt. Ha az Oilco x_1 millió hordó olajat termel ki az első évben, akkor azt hordónként $30 - x_1$ dollárért tudja értékesíteni. Ha x_2 millió hordó olajat termel ki a második évben, akkor azt hordónként $35 - x_2$ dollárért tudja értékesíteni. Az x_1 millió hordó kitermelési költsége az első évben x_1^2 millió dollár, míg az x_2 millió hordó kitermelési költsége

[8]Ezen alfejezet kihagyása nem szakítja meg a tárgyalás folytonosságát.

a második évben $2x_2^2$ millió dollár. A két év alatt összesen 20 millió hordónyi olaj áll rendelkezésre, és legfeljebb 250 millió dollár költhető a kitermelésre. Fogalmazzunk meg egy NLP feladatot, amely segítségével az Oilco maximalizálhatja a profitját (a bevételek és a költségek különbségét) a következő két évben!

Megoldás Legyen

$$x_1 = \text{az első évben kitermelt olaj mennyisége (millió hordó)}$$
$$x_2 = \text{a második évben kitermelt olaj mennyisége (millió hordó)}$$

Ekkor a megfelelő NLP feladat így írható fel:

$$\begin{aligned} \max\ z &= x_1(30-x_1)+x_2(35-x_2)-x_1^2-2x_2^2 \\ &= 30x_1+35x_2-2x_1^2-3x_2^2 \\ \text{f.h.}\quad & x_1^2+2x_2^2 \le 250 \\ & x_1 + \ x_2 \le 20 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned} \tag{65}$$

Ez egy szeparábilis programozási feladat, ahol $f_1(x_1) = 30x_1 - 2x_1^2$, $f_2(x_2) = 35x_2 - 3x_2^2$, $g_{11}(x_1) = x_1^2$, $g_{12}(x_2) = 2x_2^2$, $g_{21}(x_1) = x_1$ és $g_{22}(x_2) = x_2$.

Mielőtt az f_j és g_{ij} függvényeket szakaszonként lineáris függvényekkel közelítenénk, meg kell határoznunk olyan a_j és b_j számokat ($j = 1,2,\dots,n$), amelyekre biztosan igaz, hogy az optimális megoldás x_j értékére $a_j \le x_j \le b_j$ teljesül. Az előző példában $a_1 = a_2 = 0$ és $b_1 = b_2 = 20$ megfelelő lesz. Ezután minden x_j változóhoz $p_{j1}, p_{j2}, \dots, p_{jk}$ töréspontokat vezetünk be, ahol $a_j = p_{j1} \le p_{j2} \le \cdots \le p_{jk} = b_j$ (a jelölések egyszerűsítése kedvéért feltesszük, hogy minden változó esetén azonos a töréspontok száma). Az előző példában öt töréspontot használunk minden változó esetén: $p_{11} = p_{21} = 0, p_{12} = p_{22} = 5, p_{13} = p_{23} = 10, p_{14} = p_{24} = 15, p_{15} = p_{25} = 20$. A szeparábilis programozási módszer lényege az, hogy úgy közelítjük az f_j és g_{ij} függvények mindegyikét, mintha azok a $[p_{j,r-1}, p_{j,r}]$ intervallumok mindegyikén lineáris függvények lennének.

Tegyük fel, hogy $p_{j,r} \le x_j \le p_{j,r+1}$. Ekkor van olyan δ ($0 \le \delta \le 1$), hogy $x_j = \delta p_{j,r} + (1-\delta)p_{j,r+1}$. Ekkor $f_j(x_j)$ és $g_{ij}(x_j)$ közelítése (lásd a 26. ábrát):

$$\begin{aligned} \hat{f}_j(x_j) &= \delta f_j(p_{j,r}) + (1-\delta) f_j(p_{j,r+1}) \\ \hat{g}_{ij}(x_j) &= \delta g_{ij}(p_{j,r}) + (1-\delta) g_{ij}(p_{j,r+1}) \end{aligned}$$

Például hogyan közelítjük az $f_1(12)$ értéket? Mivel $f_1(10) = 30(10) - 2(10)^2 = 100$, $f_1(15) = 30(15) - 2(15)^2 = 0$ és $12 = 0.6(10) + 0.4(15)$, az $f_1(12)$ közelítése $\hat{f}_1(12) = 0.6(100) + 0.4(0) = 60$ (lásd a 27. ábrát).

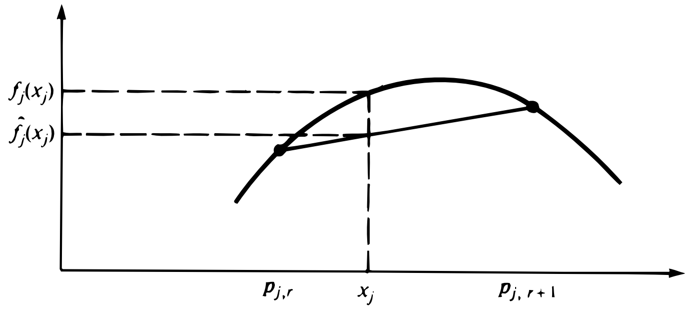
Általában, amikor szeparábilis programozási feladatot közelítünk, a következő alakú feltételeket csatoljuk:

$$\delta_{j1} + \delta_{j2} + \cdots + \delta_{j,k} = 1 \qquad (j = 1,2,\dots,n) \tag{66}$$
$$x_j = \delta_{j1}p_{j1} + \delta_{j2}p_{j2} + \cdots + \delta_{j,k}p_{j,k} \qquad (j = 1,2,\dots,n) \tag{67}$$
$$\delta_{j,r} \ge 0 \qquad (j = 1,2,\dots,n; r = 1,2,\dots,k) \tag{68}$$

Ekkor $f_j(x_j)$ helyett az

$$\hat{f}_j(x_j) = \delta_{j1} f_j(p_{j1}) + \delta_{j2} f_j(p_{j2}) + \cdots + \delta_{j,k} f_j(p_{j,k}) \tag{69}$$

26. ÁBRA
Az $f_j(x_j)$ közelítése szeparábilis programozással



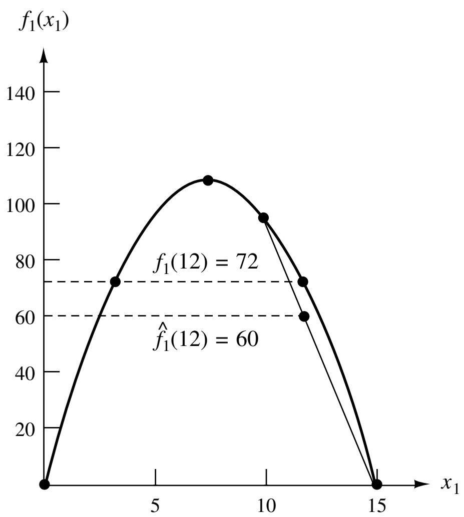
kifejezést, $g_{ij}(x_j)$ helyett pedig a

$$\hat{g}_{ij}(x_j) = \delta_{j1}g_{ij}(p_{j1}) + \delta_{j2}g_{ij}(p_{j2}) + \cdots + \delta_{j,k}g_{ij}(p_{j,k}) \tag{70}$$

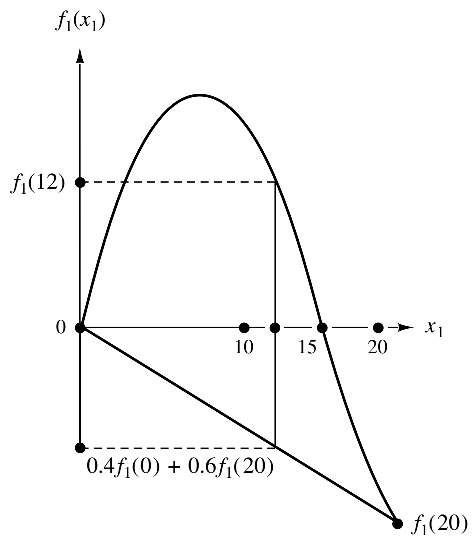
kifejezést írjuk. A (69) és (70) képletekkel való közelítés pontosságának biztosításához gondoskodni kell arról, hogy bármely $j (j = 1, 2, \ldots, n)$ esetén legfeljebb két $\delta_{j,k}$ legyen pozitív. Sőt ez még nem is elég. Tegyük fel, hogy egy adott j esetén két $\delta_{j,k}$ pozitív. Ha $\delta_{j,k'}$ pozitív, akkor a másik pozitív $\delta_{j,k}$ vagy $\delta_{j,k'-1}$, vagy $\delta_{j,k'+1}$ kell hogy legyen (azt mondjuk, hogy $\delta_{j,k'}$ szomszédos $\delta_{j,k'-1}$-vel és $\delta_{j,k'+1}$-vel). Nézzük, miért is kellenek ezek a szomszédsági kikötések. Legyen például $x_1 = 12$. Ekkor a közelítéseink akkor lesznek pontosak, ha $\delta_{13} = 0.6$ és $\delta_{14} = 0.4$. Ebben az esetben $f_1(12)$ közelítése $0.6f_1(10) + 0.4f_1(15)$. Viszont bizonyosan nem akarunk $\delta_{11} = 0.4$ és $\delta_{15} = 0.6$ segítségével közelíteni. Ekkor ugyanis $x_1 = 0.4(0) + 0.6(20) = 12$, és $f_1(12)$ közelítése $f_1(12) = 0.4f_1(0) + 0.6f_1(20)$ lenne, ami a legtöbb esetben $f_1(12)$ nagyon gyenge közelítését nyújtaná (lásd a 28. ábrát). Ahhoz, hogy a közelítő feladat az f_i és $g_{j,k}$ függvények jó közelítését nyújtsa, ki kell kötnünk a következő **szomszédsági feltételt** is: Minden $j = 1, 2, \ldots, n$ esetén legfeljebb két $\delta_{j,k}$ lehet pozitív. Ha egy adott j esetén két $\delta_{j,k}$ pozitív, akkor azoknak szomszédosnak kell lenniük.

Tehát a közelítő feladat a célfüggvény (69) alakú közelítéséből, a feltételek (66), (67), (68) és (70) szerinti közelítéséből, továbbá a szomszédsági feltételből áll. A (67) feltételek valójában csak arra szolgálnak, hogy a $\delta_{j,k}$ értékekből előálljanak az eredeti döntési

27. ÁBRA
Az $f_1(12)$ közelítése



28. ÁBRA
A szomszédsági feltétel megsértése $f_1(12)$ gyenge közelítését eredményezi



változók (az x_j változók) értékei, és nincs rájuk szükség a $\delta_{j,k}$ változók optimális értékeinek meghatározásánál. A (67) feltételeket nem kell bevenni a közelítő feladatba, tehát egy szeparábilis programozási feladat **közelítő feladata** a következőképpen írható fel:

$$\max \text{ (vagy min) } \hat{z} = \sum_{j=1}^{j=n} [\delta_{j1} f_j(p_{j1}) + \delta_{j2} f_j(p_{j2}) + \cdots + \delta_{j,k} f_j(p_{j,k})]$$

$$\text{f.h.} \quad \sum_{j=1}^{j=n} [\delta_{j1} g_{ij}(p_{j1}) + \delta_{j2} g_{ij}(p_{j2}) + \cdots + \delta_{j,k} g_{ij}(p_{jk})] \le b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\delta_{j1} + \delta_{j2} + \cdots + \delta_{j,k} = 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\delta_{j,r} \ge 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n; r = 1, 2, \ldots, k)$$

szomszédsági feltétel.

Az előző feladat esetén

$$\begin{array}{lllll}
f_1(0) = 0, & f_1(5) = 100, & f_1(10) = 100, & f_1(15) = 0, & f_1(20) = -200 \\
f_2(0) = 0, & f_2(5) = 100, & f_2(10) = 50, & f_2(15) = -150, & f_2(20) = -500 \\
g_{11}(0) = 0, & g_{11}(5) = 25, & g_{11}(10) = 100, & g_{11}(15) = 225, & g_{11}(20) = 400 \\
g_{12}(0) = 0, & g_{12}(5) = 50, & g_{12}(10) = 200, & g_{12}(15) = 450, & g_{12}(20) = 800 \\
g_{21}(0) = 0, & g_{21}(5) = 5, & g_{21}(10) = 10, & g_{21}(15) = 15, & g_{21}(20) = 20 \\
g_{22}(0) = 0, & g_{22}(5) = 5, & g_{22}(10) = 10, & g_{22}(15) = 15, & g_{22}(20) = 20
\end{array}$$

A (69) képletet (65) célfüggvényére alkalmazva a

$$\max \hat{z} = 100\delta_{12} + 100\delta_{13} - 200\delta_{15} + 100\delta_{22} + 50\delta_{23} - 150\delta_{24} - 500\delta_{25}$$

közelítő célfüggvényt kapjuk. A (66) feltétel most a következő két feltételt jelenti:

$$\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{14} + \delta_{15} = 1$$
$$\delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} + \delta_{24} + \delta_{25} = 1$$

A (67) feltételből pedig az alábbi két feltétel áll elő:

$$x_1 = 5\delta_{12} + 10\delta_{13} + 15\delta_{14} + 20\delta_{15}$$
$$x_2 = 5\delta_{22} + 10\delta_{23} + 15\delta_{24} + 20\delta_{25}$$

A (70) összefüggést (65) két feltételére alkalmazva kapjuk a következő feltételeket:

$$25\delta_{12} + 100\delta_{13} + 225\delta_{14} + 400\delta_{15} + 50\delta_{22} + 200\delta_{23} + 450\delta_{24} + 800\delta_{25} \leq 250$$
$$5\delta_{12} + 10\delta_{13} + 15\delta_{14} + 20\delta_{15} + 5\delta_{22} + 10\delta_{23} + 15\delta_{24} + 20\delta_{25} \leq 20$$

Hozzáadva még az előjel feltételeket és a szomszédsági feltételt, a következő feladatot kapjuk:

$$\begin{aligned}
\max\ \hat{z} &= 100\delta_{12} + 100\delta_{13} - 200\delta_{15} + 100\delta_{22} + 50\delta_{23} - 150\delta_{24} - 500\delta_{25} \\
\text{f.h.}\quad & \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{14} + \delta_{15} = 1 \\
& \delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} + \delta_{24} + \delta_{25} = 1 \\
& 25\delta_{12} + 100\delta_{13} + 225\delta_{14} + 400\delta_{15} + 50\delta_{22} + 200\delta_{23} + 450\delta_{24} + 800\delta_{25} \leq 250 \\
& 5\delta_{12} + 10\delta_{13} + 15\delta_{14} + 20\delta_{15} + 5\delta_{22} + 10\delta_{23} + 15\delta_{24} + 20\delta_{25} \leq 20 \\
& \delta_{j,k} \geq 0 \quad (j = 1,2;\ k = 1,2,3,4,5) \\
& \text{szomszédsági feltétel.}
\end{aligned}$$

A közelítő feladat az első ránézésre egy lineáris programozási feladatnak tűnik. Ha azonban a szimplex módszerrel kíséreljük meg megoldani a közelítő feladatot, megsérülhet a szomszédsági feltétel. Ezt elkerülendő, a közelítő feladatot a szimplex módszer következő módosított belépési szabályának alkalmazásával oldjuk meg: Ha adott j esetén az összes $\delta_{j,k} = 0$, akkor bármelyik $\delta_{j,k}$ beléphet a bázisba. Ha adott j esetén pontosan egy $\delta_{j,k}$ (mondjuk $\delta_{j,k'}$) pozitív, akkor $\delta_{j,k'-1}$ vagy $\delta_{j,k'+1}$ beléphet a bázisba, más $\delta_{j,k}$ azonban nem. Ha adott j esetén két $\delta_{j,k}$ pozitív, akkor további $\delta_{j,k}$ nem léphet a bázisba.

Van két olyan eset, amikor a közelítő feladatot a közönséges szimplex módszerrel megoldva olyan megoldáshoz jutunk, amely automatikusan eleget tesz a szomszédsági feltételnek. Ha a szeparábilis programozási feladat maximalizálási feladat, minden $f_j(x_j)$ konkáv, és minden $g_{ij}(x_j)$ konvex, akkor a közelítő feladatot a közönséges szimplex módszerrel megoldva is tudunk olyan megoldást kapni, amely eleget tesz a szomszédsági feltételnek. Hasonlóan, ha a szeparábilis programozási feladat minimalizálási feladat, és az összes $f_j(x_j)$ és $g_{ij}(x_j)$ függvény konvex, akkor is tudunk a közönséges szimplex módszerrel olyan megoldást kapni, amely eleget tesz a szomszédsági feltételnek. Az alfejezet végén a 3. feladat foglalkozik azzal, miért is van ez így.

Az is megmutatható ebben a két speciális esetben, hogy ha a szomszédos töréspontok közötti maximális távolság nullához tart, akkor a közelítő feladat optimális megoldása a szeparábilis programozási feladat optimális megoldásához tart (lásd Bazaraa és Shetty (1993, 450. o.)).

Az előző példa esetében minden $f_j(x_j)$ konkáv és minden $g_{ij}(x_j)$ konvex, ezért a közelítő feladat optimális megoldásának meghatározásához használhatjuk a közönséges szimplex módszert, és eltekinthetünk a módosított belépési szabálytól. Az előző példa közelítő feladatának optimális megoldása $\delta_{12} = \delta_{22} = 1$. Ebből $x_1 = 1(5) = 5$, $x_2 = 1(5) = 5$ és $\hat{z} = 200$ adódik. Ezt összehasonlíthatjuk az előző példa valódi optimális megoldásával, ami $x_1 = 7.5$, $x_2 = 5.83$ és $z = 214.58$.

Feladatok

A csoport

Állítsunk fel közelítő feladatot a következő szeparábilis programozási feladatokra:

1.

$$\begin{aligned} \min\ z &= x_1^2 + x_2^2 \\ \text{f.h.}\quad x_1^2 + 2x_2^2 &\le 4 \\ x_1^2 + x_2^2 &\le 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \max\ z &= x_1^2 - 5x_1 + x_2^2 - 5x_2 - x_3 \\ \text{f.h.}\quad x_1 + x_2 + x_3 &\le 4 \\ x_1^2 - x_2 &\le 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

B csoport

3. Ez a feladat azt az ötletet támasztja alá, hogy nem szükséges a módosított belépési szabályt használni, amikor maximalizálási feladat esetén minden $f_j(x_j)$ konkáv és minden $g_{ij}(x_j)$ konvex. Tekintsük az Oilco példát. Mutassuk meg, hogy amikor a közelítő feladatot a szimplex módszerrel oldjuk meg, nem kaphatunk olyan megoldást, amely megsértené a szomszédsági feltételt. Például miért nem szolgáltathat a szimplex módszer egy olyan x^* megoldást, amit $\delta_{11} = 0.4$ és $\delta_{15} = 0.6$ állít elő? Hogy megmutassuk, hogy ez nem fordulhat elő, keressük meg a közelítő feladat egy olyan lehetséges megoldását, aminek a $\hat{z}$ értéke nagyobb, mint az x^*-é. (*Útmutatás:* Mutassuk meg, hogy az a megoldás, amely x^*-tól csak annyiban tér el, hogy $\delta_{11} = 0, \delta_{15} = 0, \delta_{13} = 0.6$ és $\delta_{14} = 0.4$, a közelítő feladat egy lehetséges megoldása (használjuk fel $g_{ij}(x_j)$ konvexitását ennél a résznél), továbbá $\hat{z}$ értéke nagyobb, mint x^*-é (használjuk fel $f_j(x_j)$ konkávitását ennél a résznél).)

4. Tegyük fel, hogy egy NLP feladat szeparábilis programozási feladatként van megadva azzal a kivétellel, hogy egy $x_i x_j$ alakú kifejezés is megjelenik a célfüggvényben vagy a feltételekben. Mutassuk meg, hogy egy ilyen típusú NLP feladat átalakítható szeparábilis programozási feladattá az y_i és y_j új változók bevezetésével, ahol $x_i = \frac{1}{2}(y_i + y_j)$ és $x_j = \frac{1}{2}(y_i - y_j)$. Alkalmazzuk ezt a technikát a következő NLP feladat szeparábilis programozási feladatra való átalakítására:

$$\begin{aligned} \max\ z &= x_1^2 + 3x_1x_2 - x_2^2 \\ \text{f.h.}\quad x_1x_2 &\le 4 \\ x_1^2 + x_2 &\le 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

10.11. A megengedett irányok módszere[9]

A 10.6. alfejezetben a legmeredekebb növekedés módszerét alkalmaztuk feltétel nélküli feladatok megoldására.

Ennek a módszernek most egy módosítását mutatjuk be, a megengedett irányok módszerét, amelyet lineáris feltételekkel korlátozott NLP feladatok megoldására lehet használni. Tegyük fel, hogy egy

$$\begin{aligned} \max\ z &= f(\mathbf{x}) \\ \text{f.h.}\quad A\mathbf{x} &\le \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\ge \mathbf{0} \end{aligned} \tag{71}$$

alakú feladatot akarunk megoldani, ahol $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$, A egy $m \times n$-es mátrix, $\mathbf{0}$ a csupa nulla elemből álló n-dimenziós oszlopvektor, $\mathbf{b}$ egy $m \times 1$-es vektor, $f(\mathbf{x})$ pedig egy konkáv függvény.

Kiindulásként, a nagy M módszer vagy a kétfázisú szimplex módszer alkalmazásával, meg kell találnunk (71) egy $\mathbf{x}^0$ lehetséges megoldását. Ezután egy olyan irányt keresünk, amely mentén elmozdulhatunk $\mathbf{x}^0$-ból. Ennek az iránynak a következő két tulajdonsággal kell rendelkeznie:

1. Ha elmozdulunk $\mathbf{x}^0$-ból, lehetséges megoldást kapunk.

[9] Ezen alfejezet kihagyása nem szakítja meg a tárgyalás folytonosságát.

2. Ha elmozdulunk $\mathbf{x}^0$-ból, növekszik z értéke.

Azt tudjuk a 10.6. alfejezetből, hogy ha $\nabla f(\mathbf{x}^0)\cdot\mathbf{d} > 0$, és egy kis távolságra mozdulunk el $\mathbf{x}^0$-ból a $\mathbf{d}$ irányba, akkor $f(\mathbf{x})$ növekedni fog. Az $\mathbf{x}^0$ pontból egy olyan $\mathbf{d}^0 - \mathbf{x}^0$ irányba mozdulunk el, ahol $\mathbf{d}^0$ a következő LP feladat optimális megoldása:

$$\begin{aligned} \max\ & z = \nabla f(\mathbf{x}^0)\cdot\mathbf{d} \\ \text{f.h.}\quad & A\mathbf{d} \le \mathbf{b} \\ & \mathbf{d} \ge \mathbf{0} \end{aligned} \tag{72}$$

Itt most $\mathbf{d} = [d_1\ d_2\ \dots\ d_n]^T$ a változók vektora. Vegyük észre, hogy ha $\mathbf{d}^0$ a (72) optimális megoldása és $\mathbf{x}^0$ pedig nem az, akkor $\nabla f(\mathbf{x}^0)\cdot\mathbf{d}^0 > \nabla f(\mathbf{x}^0)\cdot\mathbf{x}^0$, azaz $\nabla f(\mathbf{x}^0)\cdot(\mathbf{d}^0 - \mathbf{x}^0) > 0$. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{x}^0$-ból egy kis távolságra elmozdulva a $\mathbf{d}^0 - \mathbf{x}^0$ irányba, z növekedni fog.

Ezután egy új $\mathbf{x}^1$ pontot választunk, mégpedig $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + t_0(\mathbf{d}^0 - \mathbf{x}^0)$ alakban, ahol t_0 a

$$\begin{aligned} &\max\ f(\mathbf{x}^0 + t_0(\mathbf{d}^0 - \mathbf{x}^0)) \\ &0 \le t_0 \le 1 \end{aligned}$$

feladat optimális megoldása. Megmutatható, hogy $f(\mathbf{x}^1) \ge f(\mathbf{x}^0)$, és amennyiben $f(\mathbf{x}^1) = f(\mathbf{x}^0)$, akkor $\mathbf{x}^0$ a (71) optimális megoldása. Tehát, amennyiben $\mathbf{x}^0$ nem optimális megoldás, $\mathbf{x}^1$ z értéke nagyobb lesz, mint $\mathbf{x}^0$-é. Könnyen megmutatható, hogy $\mathbf{x}^1$ egy lehetséges pont. Ugyanis

$$A\mathbf{x}^1 = A[\mathbf{x}^0 + t_0(\mathbf{d}^0 - \mathbf{x}^0)] = (1-t_0)A\mathbf{x}^0 + t_0 A\mathbf{d}^0 \le (1-t_0)\mathbf{b} + t_0\mathbf{b} = \mathbf{b}$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség abból következik, hogy $\mathbf{x}^0$ és $\mathbf{d}^0$ eleget tesznek (71) feltételeinek, és $0 \le t_0 \le 1$. Az $\mathbf{x}^1 \ge \mathbf{0}$ ugyanígy áll elő, mivel $\mathbf{x}^0 \ge \mathbf{0}$, $\mathbf{d}^0 \ge \mathbf{0}$ és $0 \le t_0 \le 1$.

Az $\mathbf{x}^1$ pontból egy olyan $\mathbf{d}^1 - \mathbf{x}^1$ irányba mozdulunk el, ahol $\mathbf{d}^1$ a következő LP feladat optimális megoldása:

$$\begin{aligned} \max\ & z = \nabla f(\mathbf{x}^1)\cdot\mathbf{d} \\ \text{f.h.}\quad & A\mathbf{d} \le \mathbf{b} \\ & \mathbf{d} \ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

Ezután egy új $\mathbf{x}^2$ pontot választunk, $\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 + t_1(\mathbf{d}^1 - \mathbf{x}^1)$ alakban, ahol t_1 a

$$\begin{aligned} &\max\ f(\mathbf{x}^1 + t_1(\mathbf{d}^1 - \mathbf{x}^1)) \\ &0 \le t_1 \le 1 \end{aligned}$$

feladat optimális megoldása. Az $\mathbf{x}^2$ lehetséges megoldás lesz, és $f(\mathbf{x}^2) \ge f(\mathbf{x}^1)$ fog teljesülni. Megint, ha $f(\mathbf{x}^2) = f(\mathbf{x}^1)$, akkor $\mathbf{x}^1$ a (71) NLP feladat optimális megoldása.

Ilyen módon folytatva $\mathbf{d}^2, \mathbf{d}^3, \dots, \mathbf{d}^{n-1}$ elmozdulási irányokat és új $\mathbf{x}^3, \mathbf{x}^4, \dots, \mathbf{x}^n$ pontokat állítunk elő. Akkor állunk le az algoritmussal, ha $\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^{k-1}$ teljesül. Ez utóbbi azt jelenti, hogy $\mathbf{x}^{k-1}$ a (71) NLP feladat optimális megoldása. Az f értékek szigorúan nőnek a módszer minden iterációjában, így a legmeredekebb növekedés módszeréhez hasonlóan akkor is leállhatunk a módszerrel, ha két egymást követő pont már nagyon közel van egymáshoz.

Miután meghatároztuk az $\mathbf{x}^k$ pontot, egy felső korlát is előáll (71) optimális z értékére vonatkozóan. Megmutatható, hogy ha $f(x_1, x_x, \dots, x_n)$ konkáv, akkor

$$((71)\text{ optimális } z \text{ értéke}) \le f(\mathbf{x}^k) + \nabla f(\mathbf{x}^k)\cdot[\mathbf{d}^k - \mathbf{x}^k]^T \tag{73}$$

Tehát ha $f(\mathbf{x}^k)$ közel van az optimális z érték (73) szerinti felső korlátjához, akkor befejezhetjük az algoritmust.

A megengedett irányok módszerének itt tárgyalt változatát Frank és Wolfe dolgozta ki. A megengedett irányok módszerének további változatai találhatók a Bazaraa és Shetty (1993) könyv 11. fejezetében.

A következő példán illusztráljuk a megengedett irányok módszerét.

29. PÉLDA Hajtsuk végre a megengedett irányok módszerének két iterációját a következő NLP feladaton:

$$\begin{aligned} &\max\ z = f(x,y) = 2xy + 4x + 6y - 2x^2 - 2y^2 \\ &\text{f.h.}\quad x + y \le 2 \\ &\qquad\quad x, y \ge 0 \end{aligned}$$

Kezdjünk a (0,0) pontban!

Megoldás Mivel $\nabla f(x,y) = [2y - 4x + 4 \quad 6 + 2x - 4y]$, így $\nabla f(0,0) = [4 \quad 6]$. A $[0 \quad 0]$ pontból való elmozdulás irányát a következő LP feladat megoldásával kapjuk:

$$\begin{aligned} &\max\ z = 4d_1 + 6d_2 \\ &\text{f.h.}\quad d_1 + d_2 \le 2 \\ &\qquad\quad d_1, d_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Ennek az LP feladatnak az optimális megoldása $d_1 = 0$ és $d_2 = 2$. Tehát $\mathbf{d}^0 = [0 \quad 2]^T$. Mivel $\mathbf{d}^0 - \mathbf{x}^0 = [0 \quad 2]^T$, azt az $\mathbf{x}^1 = [0 \quad 0]^T + t_0[0 \quad 2]^T = [0 \quad 2t_0]^T$ pontot választjuk most, ahol t_0 a

$$\begin{aligned} &\max\ f(0,2t) = 12t - 8t^2 \\ &0 \le t \le 1 \end{aligned}$$

feladat optimális megoldása. Legyen $g(t) = 12t - 8t^2$, ekkor a $g'(t) = 12 - 16t = 0$ megoldása $t = 0.75$. Mivel $g''(t) < 0$, tudjuk, hogy $t_0 = 0.75$. Tehát $\mathbf{x}^1 = [0, 1.5]^T$. Ebben a pontban $z = f(0,1.5) = 4.5$. A (73) egyenlőtlenségből $k = 0$ esetén a következő felső korlátot kapjuk az NLP feladat optimális z értékére vonatkozóan:

$$(\text{optimális } z \text{ érték}) \le f(0,0) + [4 \quad 6]\cdot[0 \quad 2]^T = 12$$

Most $\nabla f(\mathbf{x}^1) = \nabla f(0,1.5) = [7 \quad 0]$. Az $\mathbf{x}^1$-ből való elmozdulás $\mathbf{d}^2$ irányát a

$$\begin{aligned} &\max\ z = 7d_1 \\ &\text{f.h.}\quad d_1 + d_2 \le 2 \\ &\qquad\quad d_1, d_2 \ge 0 \end{aligned}$$

feladat megoldásából kapjuk. Ennek az LP feladatnak az optimális megoldása $\mathbf{d}^1 = [2 \quad 0]^T$. Ekkor $\mathbf{x}^2 = [0 \quad 1.5]^T + t_1\{[2 \quad 0]^T - [0 \quad 1.5]^T\} = [2t_1 \quad 1.5 - 1.5t_1]^T$, ahol t_1 a

$$\begin{aligned} &\max\ f(2t, 1.5 - 1.5t) \\ &0 \le t \le 1 \end{aligned}$$

feladat optimális megoldása. Most $f(2t, 1.5 - 1.5t) = 4.5 - 18.5t^2 + 14t$. Legyen $g(t) = 4.5 - 18.5t^2 + 14t$, ekkor $g'(t) = 14 - 37t = 0$ megoldása $t = \frac{14}{37}$. Mivel $g''(t) = -37 < 0$, azt kapjuk, hogy $t_1 = \frac{14}{37}$. Tehát $\mathbf{x}^2 = [\frac{28}{37} \quad \frac{69}{74}]^T = [0.76 \quad 0.93]^T$. Most $z = f(0.76, 0.93) = 7.15$. A (73) egyenlőtlenségből, $k = 1$ esetén, azt kapjuk, hogy

$$(\text{optimális } z \text{ érték}) \leq 4.5 + [7 \quad 0] \cdot \{[2 \quad 0]^T - [0 \quad 1.5]^T\} = 18.5$$

Mivel az optimális z értékre elsőként kapott felső korlát (12) jobb korlát, mint a mostani 18.5, figyelmen kívül hagyjuk az utóbbit.

Az NLP feladat optimális megoldása valójában $z = 8.17$, $x = .83$ és $y = 1.17$.

Feladatok

A csoport

Hajtsuk végre a megengedett irányok módszerének két iterációját a következő NLP feladatokon:

1.

$$\begin{aligned} \max\ & z = 4x + 6y - 2x^2 - 2xy - 2y^2 \\ \text{f.h.}\ & x + 2y \leq 2 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Kezdjünk az $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pontban!

2.

$$\begin{aligned} \max\ & z = 3xy - x^2 - y^2 \\ \text{f.h.}\ & 3x + y \leq 4 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Kezdjünk az (1,0) pontban!

Összefoglalás

Konvex és konkáv függvények

Az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **konvex függvény** az S konvex halmazon, ha bármely $x' \in S$, $x'' \in S$ és $0 \leq c \leq 1$ esetén

$$f(cx' + (1-c)x'') \leq cf(x') + (1-c)f(x'') \tag{2}$$

teljesül.

Az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **konkáv függvény** az S konvex halmazon, ha bármely $x' \in S$, $x'' \in S$ és $0 \leq c \leq 1$ esetén

$$f(cx' + (1-c)x'') \geq cf(x') + (1-c)f(x'') \tag{3}$$

teljesül.

Tekintsünk egy általános NLP feladatot. Tegyük fel, hogy az NLP feladat S lehetséges tartománya konvex halmaz. Ha $f(x)$ konkáv (konvex) függvény az S halmazon, akkor az NLP feladat tetszőleges lokális maximuma (minimuma) egyben az NLP feladat optimális megoldása is.

Tegyük fel, hogy $f''(x)$ létezik az S konvex halmaz minden x pontjában. Ekkor $f(x)$ pontosan akkor konvex (konkáv) függvény az S-en, ha $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) az S minden x pontja esetén.

Tegyük fel, hogy $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ másodrendű parciális deriváltjai folytonosak minden $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S$ pontban. Ekkor $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pontosan akkor konvex az S halmazon, ha bármely $x \in S$ esetén a Hesse-mátrix összes főminora nemnegatív.

Tegyük fel, hogy $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ másodrendű parciális deriváltjai folytonosak minden $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S$ pontban. Ekkor $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pontosan akkor konkáv az S halmazon, ha bármely $x \in S$ és $k = 1, 2, \ldots, n$ esetén a Hesse-mátrix összes k-adrendű nemnulla főminorának előjele azonos $(-1)^k$ előjelével.

Egyváltozós NLP feladatok megoldása

Egy

$$\begin{aligned} &\max \ (\text{vagy} \min\ ) \ f(x) \\ &\text{f.h.} \quad x \in [a,b] \end{aligned}$$

alakú feladat optimális megoldásának megtalálásához a következő három típushoz tartozó pontokat kell figyelembe vennünk:

1. eset Olyan pontok, ahol $f'(x) = 0$ (az $f(x)$ stacionárius pontja).

2. eset Olyan pontok, ahol $f'(x)$ nem létezik.

3. eset Az $[a,b]$ intervallum a és b végpontja.

Ha $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$ és $a < x_0 < b$, akkor x_0 lokális maximum. Ha $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$ és $a < x_0 < b$, akkor x_0 lokális minimum.

Az aranymetszés keresés

Ha az aranymetszés keresést használjuk a

$$\begin{aligned} &\max \ f(x) \\ &\text{f.h.} \quad a \le x \le b \end{aligned}$$

feladat optimális megoldásának ε pontossággal történő meghatározására, akkor k iterációt kell végrehajtani, ahol $r^k(b-a) < \varepsilon$. A következőképpen állítunk elő új pontokat:

Új bal oldali pont Az aktuális bizonytalansági intervallum jobb oldali végpontjából mozduljunk el a bizonytalansági intervallum hosszának r-ed részével azonos távolságra.

Új jobb oldali pont Az aktuális bizonytalansági intervallum bal oldali végpontjából mozduljunk el a bizonytalansági intervallum hosszának r-ed részével azonos távolságra.

Minden iterációban az új pontok egyike egybeesik az egyik régi ponttal.

Többváltozós feltétel nélküli maximalizálási és minimalizálási feladatok

Bármely olyan $\bar{x}$ pont, amely lokális szélsőértékhelye a

$$\begin{aligned} &\max \ (\text{vagy} \min\ ) \ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\text{f.h.} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n \end{aligned} \tag{6}$$

feladatnak, eleget kell hogy tegyen a $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} = 0$ feltételnek $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén.

Ha $H_k(\bar{x}) > 0 \, (k = 1, 2, \ldots, n)$, akkor az $\bar{x}$ stacionárius pont lokális minimuma a (6) feladatnak.

Ha $k = 1, 2, \ldots, n$ esetén $H_k(\bar{x})$ előjele megegyezik $(-1)^k$ előjelével, akkor az $\bar{x}$ stacionárius pont lokális maximuma a (6) feladatnak.

Ha $H_n(\bar{x}) \neq 0$, továbbá nem teljesülnek a 7 és $7'$. tétel feltételei, akkor az $\bar{x}$ stacionárius pont nem lokális szélsőértékhely.

A legmeredekebb növekedés módszere

A legmeredekebb növekedés módszere a következő típusú feladatok megoldására használható:

$$\begin{aligned} &\max\ z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\text{f.h.}\quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n \end{aligned}$$

Ahhoz, hogy egy nagyobb z értékű új pontot találjunk, az aktuális $\mathbf{v}$ pontból $\nabla f(\mathbf{v})$ irányba mozdulunk el. A távolságot, amennyit elmozdulunk $\mathbf{v}$-ből, úgy választjuk meg, hogy az új pontban maximális legyen a függvényérték. Akkor állunk le, ha $\|\nabla f(\mathbf{v})\|$ elég közel van a nullához.

A Lagrange-szorzók

A Lagrange-szorzókat a következő típusú NLP feladatok megoldására használják:

$$\begin{aligned} \max\ &(\text{vagy min})\ z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \text{f.h.}\quad &g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_1 \\ &g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_2 \\ &\quad\vdots \\ &g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_m \end{aligned} \tag{11}$$

A (11) feladat megoldásához képezzük az

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = {} & f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ & + \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i [b_i - g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \end{aligned}$$

Lagrange-függvényt, és olyan $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)$ pontokat keresünk, amelyekre fennáll

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial L}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \cdots = \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = 0$$

A Kuhn–Tucker feltételek

A Kuhn–Tucker feltételeket a következő típusú NLP feladatok megoldására használják:

$$\begin{aligned} \max\ &(\text{vagy min})\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \text{f.h.}\quad &g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_1 \\ &g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_2 \\ &\quad\vdots \\ &g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_m \end{aligned} \tag{25}$$

Tegyük fel, hogy (25) egy maximalizálási feladat. Ha $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ a (25) egy optimális megoldása, akkor $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ eleget kell hogy tegyen (25) m feltételének, továbbá léteznie kell olyan $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m$ szorzóknak, amelyekre fennáll

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{i=m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} &= 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \\ \bar{\lambda}_i [b_i - g_i(\bar{x})] &= 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \\ \bar{\lambda}_i &\ge 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy (25) egy minimalizálási feladat. Ha $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ a (25) egy optimális megoldása, akkor $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ eleget kell hogy tegyen (25) m feltételének, továbbá léteznie kell olyan $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m$ szorzóknak, amelyekre fennáll

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{i=m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} &= 0 && (j = 1, 2, \ldots, n) \\ \bar{\lambda}_i [b_i - g_i(\bar{x})] &= 0 && (i = 1, 2, \ldots, m) \\ \bar{\lambda}_i &\geq 0 && (i = 1, 2, \ldots, m) \end{aligned}$$

A Kuhn–Tucker feltételek **szükséges** feltételei annak, hogy egy pont (25) megoldása legyen. Ha a $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvények konvexek, az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ célfüggvény pedig konkáv (konvex), akkor maximalizálási (minimalizálási) feladat esetén bármely pont, amely eleget tesz a Kuhn–Tucker feltételeknek, egyben (25) optimális megoldása is.

Kvadratikus programozás

Egy kvadratikus programozási feladat olyan NLP feladat, amelynek célfüggvényében minden kifejezés foka 2, 1 vagy 0, a feltételek pedig lineárisak. Wolfe-módszere, ami a kétfázisú szimplex módszer egy módosított változata, szintén alkalmazható kvadratikus programozási feladatok megoldására.

Szeparábilis programozás

Ha egy NLP feladat

$$\begin{aligned} &\max \ (\text{vagy min}) \ z = \sum_{j=1}^{j=n} f_j(x_j) \\ &\text{f.h.} \quad \sum_{j=1}^{j=n} g_{ij}(x_j) \leq b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \end{aligned}$$

alakban írható fel, **szeparábilis programozási feladatnak** nevezzük. Egy szeparábilis programozási feladat optimális megoldásának közelítése céljából a következő **közelítő feladatot** oldjuk meg:

$$\begin{aligned} &\max \ (\text{vagy min}) \ \hat{z} = \textstyle\sum_{j=1}^{j=n} [\delta_{j1} f_j(p_{j1}) + \delta_{j2} f_j(p_{j2}) + \cdots + \delta_{jk} f_j(p_{jk})] \\ &\text{f.h.} \quad \sum_{j=1}^{j=n} [\delta_{j1} g_{ij}(p_{j1}) + \delta_{j2} g_{ij}(p_{j2}) + \cdots + \delta_{j,k} g_{ij}(p_{j,k})] \leq b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \\ &\qquad \delta_{j1} + \delta_{j2} + \cdots + \delta_{j,k} = 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \\ &\qquad \delta_{j,r} \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n; \ r = 1, 2, \ldots, k) \end{aligned}$$

(Minden $j = 1, 2, \ldots, n$ esetén legfeljebb két $\delta_{j,k}$ lehet pozitív. Ha egy adott j esetén két $\delta_{j,k}$ pozitív, akkor azoknak szomszédosnak kell lenniük.)

A megengedett irányok módszere

A következő alakú NLP feladatot akarjuk megoldani:

$$\begin{aligned} &\max \ z = f(\mathbf{x}) \\ &\text{f.h.} \quad A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ &\qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Kiindulunk egy $\mathbf{x}^0$ lehetséges megoldásból. Legyen $\mathbf{d}^0$ a

$$\begin{aligned}&\max\ z = \nabla f(\mathbf{x}^0)\cdot\mathbf{d}\\ &\text{f.h.}\quad A\mathbf{d} \le \mathbf{b}\\ &\qquad\quad \mathbf{d} \ge \mathbf{0}\end{aligned}$$

feladat optimális megoldása. Választunk egy új $\mathbf{x}^1$ pontot $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + t_0(\mathbf{d}^0 - \mathbf{x}^0)$ alakban, ahol t_0 a

$$\begin{aligned}&\max\ f(\mathbf{x}^0 + t_0(\mathbf{d}^0 - \mathbf{x}^0))\\ &0 \le t_0 \le 1\end{aligned}$$

feladat megoldása. Legyen $\mathbf{d}^1$ a

$$\begin{aligned}&\max\ z = \nabla f(\mathbf{x}^1)\cdot\mathbf{d}\\ &\text{f.h.}\quad A\mathbf{d} \le \mathbf{b}\\ &\qquad\quad \mathbf{d} \ge \mathbf{0}\end{aligned}$$

feladat optimális megoldása. Választunk egy új $\mathbf{x}^2$ pontot $\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 + t_1(\mathbf{d}^1 - \mathbf{x}^1)$ alakban, ahol t_1 a

$$\begin{aligned}&\max\ f(\mathbf{x}^1 + t_1(\mathbf{d}^1 - \mathbf{x}^1))\\ &0 \le t_1 \le 1\end{aligned}$$

feladat megoldása. Ugyanilyen módon folytatjuk az $\mathbf{x}^3, \ldots, \mathbf{x}^k$ pontok előállítását, és akkor állunk le, ha $\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^{k-1}$, vagy pedig az egymásra következő pontok már elég közel vannak egymáshoz.

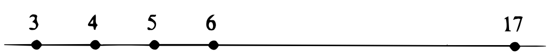
Áttekintő feladatok

A csoport

1. Mutassuk meg, hogy $f(x) = e^{-x}$ konvex az R^1 halmazon!

2. Egy áruraktár öt fontos ügyfele a 29. ábra szerinti módon helyezkedik el. Határozzuk meg, hova érdemes úgy elhelyezni az áruraktárt, hogy az egyes ügyfelektől az áruraktárig megteendő távolságok négyzetösszege minimális legyen. Hogyan lehet általánosítani ezt az eredményt arra az esetre, amikor n ügyfél helyezkedik el az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontokban?

29. ÁBRA



3. Egy cég egy nyersanyagot használ kétféle termék előállítására. Egységnyi nyersanyag feldolgozásával kétegységnyi állítható elő az első termékből, illetve ugyancsak egységnyi nyersanyag feldolgozásával egységnyi állítható elő a második termékből. Ha x_1 egységet állítanak elő az első termékből, egységenként $49 - x_1$ dollárért lehet értékesíteni. Ha x_2 egységet állítanak elő a második termékből, egységenként $30 - 2x_2$ dollárért lehet értékesíteni. A nyersanyag beszerzése és feldolgozása egységenként 5 dollárba kerül.

(a) Alkalmazzuk a Kuhn–Tucker feltételeket annak meghatározására, hogyan tudja a cég maximalizálni a profitját!

(b) Alkalmazzuk a Wolfe-módszert annak meghatározására, hogyan tudja a cég maximalizálni a profitját!

(c) Mi az a legtöbb, amit a cégnek érdemes lenne kifizetnie egy újabb egységnyi nyersanyagért?

4. Mutassuk meg, hogy $f(x) = |x|$ konvex függvény az R^1 halmazon!

5. Használjuk az aranymetszés keresést a

$$\begin{aligned}&\max\ 3x - x^2\\ &\text{f.h.}\quad 0 \le x \le 5\end{aligned}$$

feladat optimális megoldásának 0.5 pontosságú meghatározására!

6. Hajtsuk végre a legmeredekebb növekedés módszerének két iterációját az

$$f(x_1,x_2) = (x_1+x_2)e^{-(x_1+x_2)} - x_1$$

maximalizálása céljából. Kezdjünk a (0,1) pontban!

7. Ha egy hónap alatt x egységnyi terméket állítunk elő, annak termelési költsége x^2 dollár. Határozzuk meg, hogyan lehet minimális költséggel előállítani 60 egységnyi terméket a következő három hónapban! Hogyan lehet általánosítani ezt az eredményt arra az esetre, ha x egység egy hónap alatti előállításának termelési költsége egy konvex növekvő függvény?

8. Oldjuk meg a következő NLP feladatot:

$$\begin{aligned} &\max\ z = xyw \\ &\text{f.h.}\quad 2x+3y+4w = 36 \end{aligned}$$

9. Oldjuk meg a következő NLP feladatot:

$$\begin{aligned} &\min\ z = \tfrac{50}{x} + \tfrac{20}{y} + xy \\ &\text{f.h.}\quad x \geq 1, y \geq 1 \end{aligned}$$

10. Ha egy cég p dollárért értékesíti termékének egy egységét, továbbá a dollárnyi összeget költ hirdetésre, akkor $10\,000 + 5\sqrt{a} - 100p$ egységnyi terméket tud eladni. Ha a termék egy egységének 10 dollár a gyártási költsége, hogyan tudja a cég maximalizálni a profitját?

11. Egy cég L órányi munkaerő és M órányi gépidő felhasználásával $L^{1/3}M^{2/3}$ számítógépes lemezegységet tud előállítani. Minden lemezegységet 150 dollárért értékesítenek. Ha a cégnek egyórányi munkaerő 50 dollárba, egyórányi gépidő pedig 100 dollárba kerül, határozzuk meg, hogyan tudja a cég maximalizálni a profitját!

B csoport

12. Egy fa t idő alatt $F(t)$ méretűre tud nőni, ahol $F'(t) \geq 0$ és $F''(t) < 0$. Tegyük fel, hogy nagy t esetén $F'(t)$ közel van 0-hoz. Ha a fát t időpontban vágják ki, $F(t)$ bevételt kapnak utána. Tegyük fel, hogy a bevételeket r rátával folytonosan diszkontálják, azaz a t időpontban kapott egy dollár ekvivalens a 0. időpontban kapott e^{-rt} dollárral. A cél az, hogy a fát olyan t^* időpontban vágják ki, amikor a diszkontált bevétel maximális. Mutassuk meg, hogy a fát egy olyan t^* időpontban kell kivágni, amelyre teljesül az

$$r = \frac{F'(t^*)}{F(t^*)}$$

egyenlet! A válaszban azt is magyarázzuk meg, hogy $\frac{F'(0)}{F(0)} > r$ esetén az egyenletnek miért van egyetlen megoldása! Mutassuk meg azt is, hogy az eredmény valóban maximumot, nem pedig minimumot ad! (*Útmutatás:* Vajon miért elegendő t^* meghatározásához az $\ln(e^{-rt}F(t))$ függvényt maximalizálni?)

13. Tegyük fel, hogy egy meteorológust akarunk szerződtetni arra, hogy megjósolja, a következő nyár milyen valószínűséggel lesz esős vagy napsütéses. A következőkben javasolt módszer annak biztosítására szolgálhat, hogy az előrejelző a tőle telhető pontossággal járjon el. Tegyük fel, hogy éppen q annak az aktuális valószínűsége, hogy a következő nyár esős lesz. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a nyár csak esős vagy napsütéses lehet. Ha az előrejelző azt jelenti be, hogy p annak a valószínűsége, hogy a nyár esős lesz, akkor $1-(1-p)^2$ összeget fog majd kapni, ha esős lesz a nyár, és $1-p^2$ összeget fog kapni, ha napsütéses lesz a nyár. Mutassuk meg, hogy azzal, hogy az előrejelző q valószínűséget jelent be az esős nyár valószínűségének, valójában saját bevételének várható értékét maximalizálja!

14. Mutassuk meg, hogy ha $b > a \geq e$, akkor $a^b > b^a$. Használjuk ezt annak megmutatására, hogy $e^\pi > \pi^e$. (*Útmutatás:* Mutassuk meg, hogy $\frac{\ln x}{x}$ maximuma $x \geq a$ feltétel mellett az $x = a$ pontban van.)

15. Tekintsük a $(0,0)$, $(1,1)$ és $(2,3)$ pontokat. Írjunk fel egy olyan NLP feladatot, amelynek optimális megoldása megadja az ezt a három pontot tartalmazó legkisebb sugarú kört! Oldjuk meg ezt az NLP feladatot!

16. Egy termékből x egység egy hónap alatti előállítása $x^{1/2}$ dollárba kerül. Mutassuk meg, hogy ha az a feladat, hogy a következő két hónap alatt összesen 40 egységnyi terméket minimális költséggel állítsunk elő, akkor az optimális megoldás az, hogy mind a 40 egységet egy hónap alatt állítjuk elő! Hogyan lehet ezt az eredményt általánosítani arra az esetre, ha x egységnyi termék egy hónap alatti előállítási költsége egy növekvő konkáv függvény?

17. Tekintsük a következő feladatot:

$$\begin{aligned} &\max\ z = f(x) \\ &\text{f.h.}\quad a \leq x \leq b \end{aligned}$$

(a) Tegyük fel, hogy $f(x)$ konvex függvény, és létezik deriváltja minden x pontban. Mutassuk meg, hogy $x = a$ vagy $x = b$ az NLP feladat optimális megoldása! (Rajzoljunk egy ábrát!)

(b) Tegyük fel, hogy $f(x)$ konvex függvény, azonban $f'(x)$ nem létezik minden x pontban. Mutassuk meg, hogy $x = a$ vagy $x = b$ az NLP feladat optimális megoldása! (Használjuk a konvex függvény definícióját!)

18. Tekintsük újból a 2. feladatot. Tegyük fel, hogy most úgy kell elhelyezni az áruraktárt, hogy az ügyfelek által megtett távolságok összege legyen minimális. Hova telepítsük az áruraktárt?
(*Útmutatás:* Használjuk a 4. feladatot, illetve az a tényt, hogy konvex célfüggvény esetén bármely lokális minimum

egyben az NLP feladat optimális megoldása. Mutassuk meg azt is, hogy egy olyan pont lokális minimum, ahol éppen az egyik ügyfél lakik!) Hogyan lehet ezt az eredményt általánosítani?

19.[10] Egy cég egy alapanyagot használ két terméke gyártásához. Az alapanyag egy egységét c dollárért lehet beszerezni, és azt k_1 egységnyi 1. termékké és k_2 egységnyi 2. termékké lehet feldolgozni. Ha x_1 egységnyit állítanak elő az 1. termékből, akkor azt egységenként $p_1(x_1)$ áron lehet értékesíteni. Ha pedig x_2 egységnyit állítanak elő a 2. termékből, akkor azt egységenként $p_2(x_2)$ áron lehet értékesíteni. Jelölje z, hogy hány egységnyi alapanyagot szereztek be és dolgoztak fel. A profit maximalizálásához, a nemnegativitási feltételektől eltekintve, a következő NLP feladatot kell megoldani:

$$\begin{aligned} \max\ & w = x_1 p_1(x_1) + x_2 p_2(x_2) - cz \\ \text{f.h.}\ & x_1 \le k_1 z \\ & x_2 \le k_2 z \end{aligned}$$

(a) Írjuk fel a Kuhn–Tucker feltételeket erre a feladatra. Jelölje $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$ ennek a feladatnak az optimális megoldását!

(b) Tekintsük a feladat egy módosított verzióját. Tegyük fel, hogy a cég most egységenként $\bar{\lambda}_1$ dollárért tudna beszerezni az 1. termékből, és egységenként $\bar{\lambda}_2$ dollárért a 2. termékből. Mutassuk meg, hogy ha a cég ebben az esetben maximalizálni akarja a profitját, akkor az (a) részhez hasonlóan $\bar{x}_1$ egységnyit állít elő az 1. termékből és $\bar{x}_2$ egységnyit a 2. termékből! Mutassuk meg, hogy a profit és az előállítási költségek nem változnak!

(c) Adjunk egy olyan értelmezést a $\bar{\lambda}_1$ és $\bar{\lambda}_2$ értékekre, ami a cég könyvelője számára is hasznos lehet!

20. Egy a, b, és c hosszúságú oldalakkal adott háromszög területe $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, ahol s a háromszög kerületének fele. Van egy 60 méter hosszúságú kerítésünk, és be akarunk vele keríteni egy háromszög alakú területet. Fogalmazzunk meg egy NLP feladatot a maximális területű bekerítés meghatározására!

21. Ha egy gázt az I kezdő nyomástól az F végső nyomásig három közbülső fázisban nyomunk össze, akkor a szükséges energiát az alábbi képlettel számoljuk:

$$K\left\{\sqrt{\frac{p_1}{I}} + \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} + \sqrt{\frac{F}{p_2}} - 3\right\}$$

Fogalmazzunk meg egy NLP feladatot, ami azt írja le, hogyan lehet minimalizálni a gáz összenyomásához szükséges energiát!

22. Bizonyítsuk be az 1. segédtételt! (Használjuk a Lagrange-szorzókat!)

Irodalom

A következő könyvek a nemlineáris programozás elméleti kérdéseire helyezik a hangsúlyt:

Luenberger, D. *Linear and Nonlinear Programming*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1984.

Mangasarian, O. *Nonlinear Programming*. New York: McGraw-Hill, 1969.

McCormick, G. *Nonlinear Programming: Theory, Algorithms, and Applications*. New York: Wiley, 1983.

Shapiro, J. *Mathematical Programming: Structures and Algorithms*. New York: Wiley, 1979.

Zangwill, W. *Nonlinear Programming*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1969.

Az alábbi könyvek főként különböző nemlineáris programozási algoritmusokkal foglalkoznak:

Rao, S. *Optimization Theory and Applications*. New Delhi: Wiley Eastern Ltd., 1979.

Wismer, D., and R. Chattergy. *Introduction to Nonlinear Optimizaton: A Problem-Solving Approach*. New York: Elsevier North-Holland, 1978.

[10] Littlechild, „Marginal Pricing” (1970) cikke alapján.

A nemlineáris programozás néhány érdekes alkalmazását mutatják be a következő könyvek és cikkek:

Henderson, R., and R. Quandt. *Microeconomic Theory: A Mathematical Approach*. New York: McGraw-Hill, 1980.

Liebman, J., et al. *Applications of Modeling and Optimization With GINO*. Palo Alto, Calif.: Scientific Press, 1986.

Bazaraa, M., and C. Shetty. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. New York: Wiley, 1993.

Cournot, A. *Mathematical Principles of the Theory of Wealth*. New York: Macmillan, 1897.

Dewitt, C., et al. „OMEGA: An Improved Gasoline Blending System for Texaco", *Interfaces* 19(no. 1, 1989):85–101.

Grossman, S., and O. Hart. „An Analysis of the Principal Agent Problem", *Econometrica* 51(1983):7–45.

Haverly, C. „Studies of the Behavior of Recursion for the Pooling Problem", *SIGMAP Bulletin* (1978).

Kolesar, P., and E. Blum. „Square Roots Laws for Fire Engine Response Distances", *Management Science* 19(1973):1368–1378.

Littlechild, S. „Marginal Pricing with Joint Costs", *Economic Journal* 80(1970):323–334.

———. „Peak Loads and Efficient Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science* (Autumn 1970):191–210.

Markowitz, H. *Portfolio Selection, Efficient Diversification of Investments*. New York: Wiley, 1959.

Nicholson, T. *Optimization in Industry: Volume 2, Applications*. Chicago: Aldine-Atherton, 1971.

Sharpe, W. „A Simplified Model for Portfolio Analysis", *Management Science* 9(1963): 277–293.