

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ



Διπλωματική Εργασία

του φοιτητή του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας
Υπολογιστών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Πατρών

Κελεπούρη Δημοσθένη του Θεοφάνη

Αριθμός Μητρώου: 1046814

ΘΕΜΑ

**ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ
ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ ΣΤΙΣ ΑΓΟΡΕΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ**

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια

Δασκαλάκη Σοφία

Πάτρα, Οκτώβριος 2021

Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Κελεπούρης Δημοσθένης

© 2021 – Με την επιφύλαξη παντός δικαιώματος

Το σύνολο της εργασίας αποτελεί πρωτότυπο έργο, παραχθέν από τον Κελεπούρη Δημοσθένη, και δεν παραβιάζει δικαιώματα τρίτων καθ' οιονδήποτε τρόπο. Αν η εργασία περιέχει υλικό, το οποίο δεν έχει παραχθεί από τον ίδιο, αυτό είναι ευδιάκριτο και αναφέρεται ρητώς εντός του κειμένου της εργασίας ως προϊόν εργασίας τρίτου, σημειώνοντας με παρομοίως σαφή τρόπο τα στοιχεία ταυτοποίησής του, ενώ παράλληλα βεβαιώνει πως στην περίπτωση χρήσης αυτούσιων γραφικών αναπαραστάσεων, εικόνων, γραφημάτων κ.λπ., έχει λάβει τη χωρίς περιορισμούς άδεια του κατόχου των πνευματικών δικαιωμάτων για την συμπερίληψη και επακόλουθη δημοσίευση του υλικού αυτού.

ΠΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

Πιστοποιείται ότι η Διπλωματική Εργασία με τίτλο

«Στοχαστικές Μέθοδοι για την Αποτίμηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης στις Αγορές Ενέργειας»

του φοιτητή του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας
Υπολογιστών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Πατρών

Κελεπούρη Δημοσθένη του Θεοφάνη

Αριθμός Μητρώου: 1046814

Παρουσιάστηκε δημόσια στο Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας
Υπολογιστών στις 20/10/2021

και εξετάστηκε από την ακόλουθη επιτροπή :

Σοφία Δασκαλάκη, Επίκουρη Καθηγήτρια Πανεπιστημίου Πατρών (επιβλέπουσα)

Παναγής Βοβός, Επίκουρος Καθηγητής Πανεπιστημίου Πατρών (μέλος
επιτροπής)

Αθανάσιος Τσαγκανός, Αναπληρωτής Καθηγητής Πανεπιστημίου Πατρών (μέλος
επιτροπής)

Η επιβλέπουσα

Ο Διευθυντής του Τομέα

Δασκαλάκη Σοφία

Καλύβας Γρηγόριος

Επίκουρη Καθηγήτρια

Καθηγητής

Θέμα : Στοχαστικές Μέθοδοι για την Αποτίμηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης στις Αγορές Ενέργειας

Φοιτητής :

Κελεπούρης Δημοσθένης

Επιβλέπουσα :

Δασκαλάκη Σοφία

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη και παρουσίαση των βασικών μεθόδων αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης στις αγορές ενέργειας. Συγκεκριμένα, μελετώνται τα μοντέλα που στηρίζονται στην θεωρία των Black-Scholes και η μέθοδος προσομοίωσης Monte Carlo. Αρχικά περιγράφονται τα κύρια χαρακτηριστικά των δικαιωμάτων προαίρεσης αλλά και συγγενών χρηματιστηριακών προϊόντων και επισημαίνονται τα οφέλη που αυτά παρέχουν στους συμμετέχοντες της αγοράς. Αξιοποιώντας ιστορικά δεδομένα για τα πιο γνωστά ενεργειακά αγαθά, εξετάζονται στοχαστικές διαδικασίες που χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση της εξέλιξης της τιμής των αγαθών και αποτελούν την βάση των μεθόδων αποτίμησης που αναφέρονται στην εργασία. Γίνεται η παρουσίαση του υποδείγματος των Black-Scholes ενώ εξετάζονται και οι παραλλαγές του που βρίσκουν καλύτερη εφαρμογή στις ενεργειακές αγορές. Στην συνέχεια, περιγράφεται η τιμολόγηση με την προσομοίωση Monte Carlo και ορισμένες τεχνικές που χρησιμοποιούνται για την μείωση της διακύμανσης της εκτίμησης αυτής της μεθόδου. Τέλος, έχοντας αναφέρει το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο των δύο τεχνικών, επιλέγουμε την μέθοδο Monte Carlo για την αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης αργού πετρελαίου και παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της μεθόδου για κάθε μία από τις στοχαστικές διαδικασίες που μελετήθηκαν.

Title : Stochastic Methods for Options Pricing in Energy Markets

ABSTRACT

The aim of this thesis is to study methods for options pricing in energy market. Specifically, we study models that are based on Black-Scholes theory and Monte Carlo simulations. First, we describe the main characteristics of options and of other relative financial products and we point out their benefits for market participants. We analyze stochastic processes that are being used for modeling of the energy products' spot prices utilizing historical data. These processes are the basis for the pricing methods we examine in this paper. We introduce Black-Scholes formula while we examine its variations that are best suited for energy markets. Afterward, we consider options pricing with Monte Carlo simulation and we demonstrate some variance reduction techniques. Finally, having introduced the necessary theory of these pricing methods, we choose Monte Carlo simulation for the pricing of crude oil options and we present the results for each of the stochastic processes that were examined.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	8
1. ΠΑΡΑΓΩΓΑ ΠΡΟΪΟΝΤΑ ΣΤΙΣ ΑΓΟΡΕΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ	10
1.1 Εισαγωγή στις Αγορές Ενεργειακών Παραγώγων	10
1.2 Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (Futures)	11
1.2.1 Διακανονισμός Συμβολαίων Μελλοντικής Εκπλήρωσης	12
1.3 Δικαιώματα Προαίρεσης (Options)	13
1.3.1 Θέσεις σε δικαιώματα προαίρεσης	14
1.3.2 Εσωτερική και Χρονική αξία δικαιώματος	18
1.4 Η ιδιαίτερη περίπτωση της αγοράς ηλεκτρικής ενέργειας.....	20
1.5 Αντιστάθμιση κινδύνου με δικαιώματα προαίρεσης.....	21
1.6 Σύνθετοι τύποι δικαιωμάτων προαίρεσης	24
2. ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΤΙΜΗΣ SPOT ΤΩΝ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΩΝ ΑΓΑΘΩΝ	27
2.1 Εισαγωγή.....	27
2.2 Συλλογή και επεξεργασία των δεδομένων	27
2.3 Περιγραφή της κατανομής των δεδομένων	29
2.4 Εισαγωγή στις στοχαστικές διαδικασίες.....	34
2.4.1 Ιδιότητα Markov	34
2.4.2 Λήμμα του <i>Ito</i>	35
2.4.3 Γεωμετρική κίνηση Brown.....	35
2.4.4 Μοντέλο Ornstein-Uhlenbeck (Mean Reverting)	37
2.4.5 Μοντέλο Mean-Reverting Jump Diffusion	41
3. ΜΟΝΤΕΛΑ ΘΕΩΡΙΑΣ BLACK-SCHOLES	45
3.1 Το Μοντέλο Black-Scholes	45
3.1.1 Εξαγωγή της διαφορικής εξίσωσης B-S.....	46
3.1.2 Εξισώσεις Black-Scholes	47
3.1.3 Αποτίμηση ουδέτερου κινδύνου	48
3.1.4 Υπονοούμενη Μεταβλητότητα (Implied Volatility)	49

3.2 BLACK '76.....	51
3.2.1 Σχέση μεταξύ τιμής ΣΜΕ και τρέχουσας τιμής αγαθού	51
3.2.2 Μοντέλο Black '76.....	53
3.3 Μοντέλο Clewlow – Strickland	54
3.4 Παράδειγμα τιμολόγησης με Black '76 και Clewlow-Strickland	57
4. ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ MONTE CARLO	58
4.1 Μέθοδος Monte Carlo	58
4.2 Παραγωγή ψευδοτυχαίων αριθμών.....	59
4.3 Τεχνικές Μείωσης της Διακύμανσης	61
4.3.1 Μέθοδος Μεταβλητών Ελέγχου	61
4.3.2 Αντιθετική δειγματοληψία	63
4.4 Αποτίμηση δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού τύπου με προσομοίωση Monte Carlo	64
4.4.1 Αποτίμηση με την απλή μέθοδο Monte Carlo	64
4.4.2 Αποτίμηση με την μέθοδο της μεταβλητής ελέγχου	65
4.4.3 Αποτίμηση με αντιθετική δειγματοληψία	66
4.4.4 Παράδειγμα αποτίμησης δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού τύπου	67
5. ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΑΡΓΟΥ ΠΕΤΡΕΛΑΙΟΥ ΜΕ MONTE CARLO	68
5.1 Εισαγωγή.....	68
5.2 Στοχαστικά μοντέλα για το αργό πετρέλαιο σε κόσμο ουδέτερου κινδύνου	68
5.2.1 Ανταμοιβή κινδύνου	69
5.2.2 Γενική διαδικασία εύρεσης των στοχαστικών διαδικασιών ουδέτερου κινδύνου	70
5.2.3 Γεωμετρική Κίνηση Brown (GBM).....	70
5.2.4 Μοντέλο Ornstein-Uhlenbeck (O-U)	72
5.2.5 Μοντέλο Mean-Reverting Jump Diffusion (MRJD)	73
5.3 Αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης αργού πετρελαίου	74
5.3.1 Αποτίμηση δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού τύπου	75
5.3.3 Αποτίμηση Ασιατικών δικαιωμάτων.....	76
5.3.4 Σχολιασμός αποτελεσμάτων	77
ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ.....	79
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	81
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	94

Εισαγωγή

Αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας αποτελεί η αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης στις αγορές ενέργειας. Τα δικαιώματα προαίρεσης (options) ανήκουν στην κατηγορία των παραγώγων (derivatives). Το κύριο χαρακτηριστικό αυτών των προϊόντων είναι ότι η αξία τους βασίζεται στην αξία ενός άλλου πιο απλού προϊόντος (υποκείμενος τίτλος). Στην αγορά μετοχών ο πιο απλός υποκείμενος τίτλος που συναντάμε είναι οι μετοχές ενώ στην ενεργειακή αγορά είναι τα ενεργειακά προϊόντα που διαπραγματεύονται στις απλές αγορές όπως πετρέλαιο, άνθρακας και ηλεκτρική ενέργεια. Οι δύο μέθοδοι αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης που θα εξετάσουμε είναι τα μοντέλα που στηρίζονται στην θεωρία των Black-Scholes και η προσομοίωση Monte Carlo. Η θεωρία των Black-Scholes αποτελεί την αρχή των μεθόδων τιμολόγησης δικαιωμάτων και τα μοντέλα που προκύπτουν από αυτή είναι πολύ δημοφιλή καθώς παρέχουν λύσεις κλειστής μορφής που υπολογίζονται εύκολα και γρήγορα. Ωστόσο, αυτά τα μοντέλα έχουν δύο σημαντικά μειονεκτήματα. Πρώτον, στηρίζονται στην υπόθεση ότι οι ημερήσιες αποδόσεις του υποκείμενου τίτλου ακολουθούν κανονική κατανομή και επομένως για την περιγραφή της εξέλιξης του τίτλου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο στοχαστικές διαδικασίες που πληρούν την παραπάνω υπόθεση. Δεύτερον, μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο για την τιμολόγηση Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων, που αποτελούν την πιο απλή περίπτωση δικαιωμάτων προαίρεσης. Αντίθετα, η μέθοδος προσομοίωσης Monte Carlo προσφέρει μεγάλη ευελιξία καθώς μπορεί να εφαρμοστεί για οποιαδήποτε στοχαστική διαδικασία. Το συγκεκριμένο πλεονέκτημα είναι ιδιαίτερα σημαντικό στις αγορές ενέργειας αφού τα ενεργειακά προϊόντα, λόγω της φύσης τους, εμφανίζουν ξεχωριστά χαρακτηριστικά που απαιτούν την χρήση πιο περίπλοκων διαδικασιών. Επιπλέον, η προσομοίωση Monte Carlo δίνει αποτέλεσμα για την αξία σύνθετων δικαιωμάτων προαίρεσης.

Στο 1^ο Κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στα παράγωγα προϊόντα των αγορών ενέργειας, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στα δικαιώματα προαίρεσης και τους λόγους που χρησιμοποιούνται από τους επενδυτές. Δίνονται παραδείγματα ορισμένων στρατηγικών που στηρίζονται στα options. Στο 2^ο Κεφάλαιο, χρησιμοποιώντας ιστορικά δεδομένα, παρουσιάζονται αρχικά τα περιγραφικά μέτρα των προϊόντων που αποτελούν τον υποκείμενο τίτλο στα πιο συνηθισμένα παράγωγα (πετρέλαιο, άνθρακας, φυσικό αέριο και ηλεκτρική ενέργεια). Στην συνέχεια εξετάζονται οι κυριότερες στοχαστικές διαδικασίες που χρησιμοποιούνται για την μοντελοποίηση της τιμής των παραπάνω προϊόντων και κατ' επέκταση για την τιμολόγηση των δικαιωμάτων που είναι γραμμένα πάνω σε αυτά. Η κατανόηση των χαρακτηριστικών της κάθε στοχαστικής διαδικασίας είναι σημαντική καθώς βοηθάει στην κρίση της καταλληλότητας των τεχνικών τιμολόγησης που εξετάζονται στην συνέχεια. Στο 3^ο Κεφάλαιο γίνεται περιγραφή της εξίσωσης Black-Scholes, η οποία αποτελεί την πιο διαδεδομένη μέθοδο αποτίμησης δικαιωμάτων και γίνεται εκτενής αναφορά στο μοντέλο Black '76 και το μοντέλο των Clewlow-

Strickland, τα οποία ταιριάζουν περισσότερο στην περίπτωση των αγορών ενέργειας. Στο 4^ο Κεφάλαιο παρουσιάζεται η αποτίμηση με την προσομοίωση Monte Carlo και οι σημαντικότερες τεχνικές που χρησιμοποιούνται για την μείωση της διακύμανσης της εκτίμησης αυτής της μεθόδου. Για να επιβεβαιώσουμε την αξιοπιστία της προσομοίωσης Monte Carlo, συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που μας δίνει για την αποτίμηση Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων με αυτά του μοντέλου Black '76. Στο 5^ο Κεφάλαιο, αξιοποιώντας δεδομένα της αγοράς, προχωρούμε στην τιμολόγηση Ευρωπαϊκών και Ασιατικών δικαιωμάτων αργού πετρελαίου. Η αξία του κάθε δικαιώματος υπολογίζεται για κάθε μία από τις στοχαστικές διαδικασίες που αναφέρθηκαν στο 2^ο Κεφάλαιο. Στο τέλος γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων.

1. ΠΑΡΑΓΩΓΑ ΠΡΟΪΟΝΤΑ ΣΤΙΣ ΑΓΟΡΕΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

1.1 Εισαγωγή στις Αγορές Ενεργειακών Παραγώγων

Η ανάγκη για μια ανταγωνιστική αγορά ενεργειακών προϊόντων με την συμμετοχή όσο το δυνατόν περισσότερων παικτών έχει οδηγήσει στην δημιουργία οργανωμένων αγορών ενέργειας που συντονίζονται από ένα χρηματιστήριο. Με αυτή την δομή, αντί οι ενδιαφερόμενοι να συναλλάσσονται απευθείας μεταξύ τους, αναθέτουν τις αγοραπωλησίες σε έναν χρηματιστή. Με την είσοδο των αγορών ενέργειας στο Χρηματιστήριο, οι συμμετέχοντες μπορούν να χρησιμοποιούν διάφορα χρηματοοικονομικά εργαλεία για τις καθημερινές τους συναλλαγές και να επωφελούνται από τα σημαντικά πλεονεκτήματα που αυτά προσφέρουν, όπως είναι η αποτελεσματικότερη διαχείριση κινδύνου και η ευελιξία στον σχεδιασμό σύνθετων στρατηγικών.

Οι αγορές ενέργειας συνήθως διακρίνονται στις *επί τόπου (spot) αγορές*, στις οποίες οι συμφωνίες απαιτούν άμεση παράδοση του προϊόντος, και στις *προθεσμιακές αγορές/αγορές παραγώγων (derivatives market)* στις οποίες δίνεται η δυνατότητα σύναψης συμφωνίας μεταξύ των μελών στο παρόν για μελλοντική παράδοση των αγαθών. Τα προϊόντα που συναντάμε στις προθεσμιακές αγορές ονομάζονται παράγωγα και αποτελούν συμβόλαια των οποίων η αξία συνδέεται με μία υποκείμενη αξία. Στην περίπτωση των ενεργειακών παραγώγων ο υποκείμενος τίτλος είναι ένα ενεργειακό προϊόν, όπως το φυσικό αέριο, ο άνθρακας και η ηλεκτρική ενέργεια. Γενικά, οι κύριες πληροφορίες που γίνονται γνωστές κατά την συναλλαγή τους είναι οι εξής :

- Υποκείμενο αγαθό : περιγράφεται η ποιότητα και τα χαρακτηριστικά του υποκείμενου προϊόντος.
- Ποσότητα : η ποσότητα του αγαθού που πρέπει να παραδοθεί για κάθε συμβόλαιο. Συνήθως ορίζεται μια ελάχιστη παρτίδα παράδοσης.
- Τιμή παράδοσης : καθορίζεται η τιμή ανά μονάδα προϊόντος.
- Ημερομηνία και τοποθεσία παράδοσης : σε αντίθεση με τις χρηματαγορές στις ενεργειακές αγορές πολλές φορές απαιτείται η φυσική παράδοση του υποκείμενου αγαθού και επομένως πρέπει να καθοριστεί η ημερομηνία και ο τόπος παράδοσης.

Τα οφέλη λειτουργίας της αγοράς παραγώγων είναι πολύ σημαντικά για τους συμμετέχοντες (παραγωγοί, προμηθευτές, έμποροι) [1]. Συγκεκριμένα, μέσω των παραγώγων έχουν την δυνατότητα να καθορίζουν την τιμή στην οποία θα αγοράζουν ή πωλούν το προϊόν που επιθυμούν και επομένως μπορούν αντισταθμίζουν τον κίνδυνο που προκύπτει από την αβεβαιότητα και την μεταβλητότητα των τιμών. Έτσι, μπορούν να προχωρήσουν σε μακροπρόθεσμο σχεδιασμό των δραστηριοτήτων τους αφού θα έχουν «κλειδώσει» από την αρχή την τιμή στα προϊόντα που ενδιαφέρονται. Επιπλέον, τα παράγωγα επιτρέπουν την δυνατότητα διακανονισμού με μετρητά, δηλαδή δεν απαιτείται η φυσική παράδοση του αγαθού στην λήξη με αποτέλεσμα να μπορούν να συμμετέχουν περισσότεροι παίκτες και επενδυτές. Αυτό ενισχύει την ρευστότητα της αγοράς και οδηγεί στην μείωση του κόστους συναλλαγών. Τέλος, αυτά τα προϊόντα, δίνουν την δυνατότητα στους επενδυτές για κερδοσκοπία, αφού με ένα πολύ μικρό αρχικό ποσό επένδυσης μπορούν να ανοίξουν σημαντικές θέσεις.

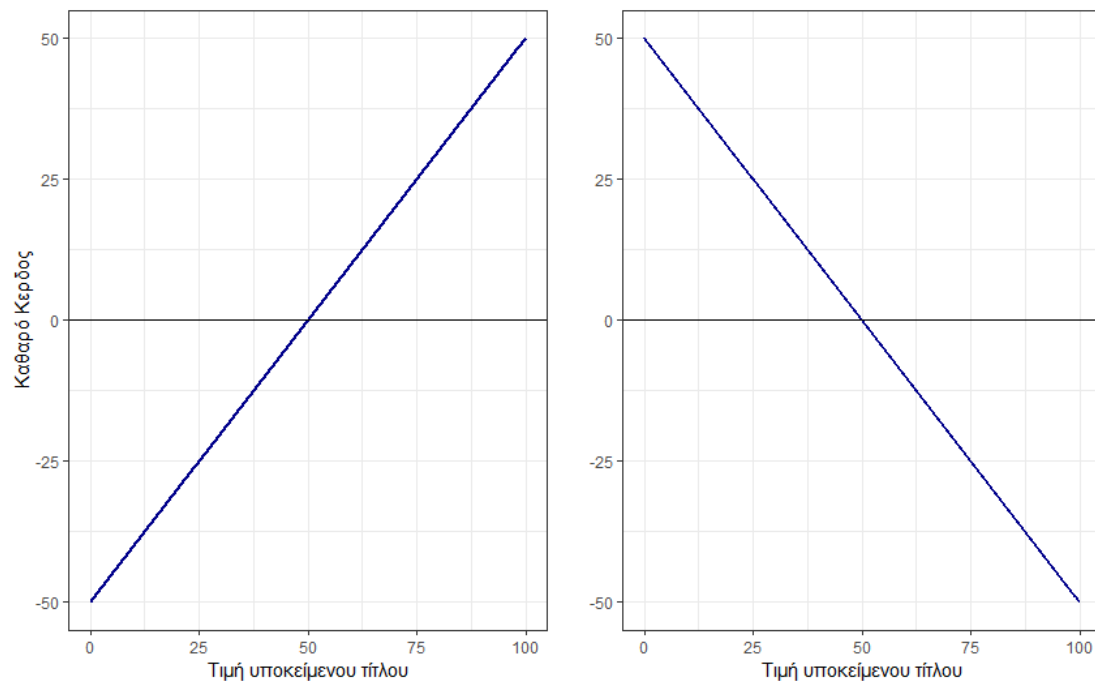
Παρά την συνεχή ανάπτυξη των χρηματιστηρίων ενέργειας, τις περισσότερες φορές τα παράγωγα διαπραγματεύονται εξωχρηματιστηριακά (Over-the-Counter). Σε αυτή την περίπτωση οι συναλλαγές γίνονται απευθείας μεταξύ των ενδιαφερομένων. Σε αντίθεση με τα χρηματιστήρια όπου τα παράγωγα είναι τυποποιημένα, στις OTC αγορές οι όροι των συμβολαίων ορίζονται από τους συναλλασσόμενους και επομένως μπορούν να προσαρμόζονται ακριβώς στις ανάγκες και τις προτιμήσεις τους. Το μειονέκτημα αυτών των αγορών εμφανίζεται όταν ένας εμπλεκόμενος θέλει να κλείσει την θέση του πριν την λήξη. Αυτό συμβαίνει επειδή λόγω των ιδιαίτερων όρων που έχουν ορισθεί για το παράγωγο είναι δύσκολο να βρεθεί κάποιος με την ακριβώς αντίθετη θέση.

Τα σημαντικότερα προϊόντα που συναντάμε στις αγορές παραγώγων είναι : τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (ΣΜΕ, futures) και τα δικαιώματα προαίρεσης (options). Σκοπός αυτής της διπλωματικής είναι η μελέτη των δικαιωμάτων προαίρεσης ωστόσο λόγω της ιδιαιτερότητας των ενεργειακών παραγώγων κρίνεται απαραίτητη και μια σύντομη περιγραφή των ΣΜΕ. Τα περισσότερα δικαιώματα προαίρεσης που είναι διαθέσιμα στις αγορές ενέργειας έχουν ως υποκείμενη αξία συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης και όχι την τρέχουσα τιμή (spot price) του προϊόντος. Ο λόγος είναι ότι, σε αντίθεση με τις μετοχές, δεν είναι εφικτή η άμεση εκτέλεση της φυσικής παράδοσης του προϊόντος αφού απαιτείται συγκεκριμένος χρόνος προετοιμασίας από τους εμπλεκόμενους.

1.2 Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (Futures)

Τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης αποτελούν συμφωνία μεταξύ δύο πλευρών για την συναλλαγή ενός υποκείμενου τίτλου με μια προκαθορισμένη τιμή (Κ) και σε μια συγκεκριμένη μελλοντική στιγμή [2][3]. Η τιμή της μελλοντικής συναλλαγής καθορίζεται κατά την ημερομηνία υπογραφής της συμφωνίας, δηλαδή στο παρόν. Οι εμπλεκόμενοι έχουν την υποχρέωση να εκπληρώσουν την συναλλαγή στη λήξη του συμβολαίου. Ένας επενδυτής μπορεί να πάρει θέση long ή θέση short στο συμβόλαιο. Συγκεκριμένα, στην πρώτη περίπτωση, ο αγοραστής του συμβολαίου επωφελείται από ενδεχόμενη αύξηση της αξίας του υποκείμενου τίτλου πάνω από την προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής

και ζημιώνεται από ενδεχόμενη πτώση του κάτω από αυτήν. Αντίθετα ο πωλητής, στη δεύτερη περίπτωση σημειώνει κέρδη για τελική τιμή κάτω από την συμφωνηθείσα τιμή K και έχει απώλειες για τελική τιμή μεγαλύτερη από την K . Στο Σχήμα (1.1) παρουσιάζονται οι απολαβές για θέση αγοράς (αριστερά) και θέση πώλησης (δεξιά) σε ένα συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης με $K = 50$. Ο κώδικας για το Σχήμα 1.1 φαίνεται στο Παράρτημα (Π.1).



Σχήμα 1.1 Απολαβές για θέση αγοράς (αριστερά) και θέση πώλησης (δεξιά) σε ΣΜΕ με $K=50$

Παράδειγμα: Έστω ότι ένας παραγωγός ηλεκτρικής ενέργειας που χρησιμοποιεί ως καύσιμο φυσικό αέριο αγοράζει συμβόλαιο future για παράδοση 30,000 MMbtu φυσικού αερίου σε 3 μήνες στην τιμή 3\$ /MMbtu. Τότε, ανεξάρτητα από την τιμή του φυσικού αερίου, μετά από 3 μήνες ο αντισυμβαλλόμενος θα πρέπει να πουλήσει στον παραγωγό την συμφωνημένη ποσότητα στην προκαθορισμένη τιμή, εισπράττοντας $30,000 \times 3 = 90,000$ \$.

1.2.1 Διακανονισμός Συμβολαίων Μελλοντικής Εκπλήρωσης

Επειδή τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης αποτελούν προϊόντα διαπραγμάτευσης σε Χρηματιστήρια Παραγώγων, για τον διακανονισμό τους υπάρχει ένας μηχανισμός που εξασφαλίζει την τήρηση της συμφωνίας από τις δύο πλευρές[4][5]. Συγκεκριμένα, όταν οι επενδυτές ανοίγουν θέση σε ΣΜΕ οφείλουν να καταθέτουν ένα αρχικό ποσό (περιθώριο ασφάλισης, initial margin) σε έναν

λογαριασμό (margin account), το οποίο υπόκειται σε ημερήσιο χρηματικό διακανονισμό (daily cash settlement) βάσει των τρεχουσών τιμών της αγοράς. Για παράδειγμα, έστω ότι ένας επενδυτής παίρνει θέση αγοράς σε ένα συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης πετρελαίου με τρέχουσα τιμή \$50/βαρέλι (το συμβόλαιο αφορά 1000 βαρέλια). Εάν θεωρήσουμε ότι ο χρηματιστής απαιτεί περιθώριο ασφάλισης ύψους 10%, τότε ο επενδυτής πρέπει να καταθέσει στον λογαριασμό $10\% \times 50000 = \$5000$. Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε πως γίνεται ο ημερήσιος διακανονισμός τις πρώτες ημέρες για υποθετικές κινήσεις της αγοράς.

Ημέρα	Τιμή ΣΜΕ	Ημερήσιο κέρδος/ζημία	Συνολικό κέρδος
1	\$50	Άνοιγμα θέσης	-
2	\$53	\$3000	\$3000
3	\$55	\$2000	\$5000
4	\$52	-\$3000	\$2000

Μια ανοιχτή θέση σε συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης μπορεί να κλείσει με τρεις διαφορετικούς τρόπους, ανάλογα με τους όρους κάθε χρηματιστηρίου. Ο πρώτος και συνηθέστερος είναι η ανάληψη της αντίθετης θέσης πριν την λήξη του συμβολαίου. Εάν για παράδειγμα ο ενδιαφερόμενος έχει θέση αγοράς σε ένα ΣΜΕ πετρελαίου Φεβρουαρίου πρέπει να προχωρήσει στην πώληση ενός αντίστοιχου ΣΜΕ. Ο δεύτερος τρόπος είναι η φυσική παράδοση του υποκείμενου αγαθού, δηλαδή ο πωλητής του συμβολαίου πρέπει να παραδώσει την συμφωνημένη ποσότητα στον αγοραστή. Στις αγορές της ενέργειας μόνο ένα πολύ μικρό ποσοστό των ΣΜΕ καταλήγει σε διακανονισμό με φυσική παράδοση. Ο τελευταίος τρόπος είναι ο χρηματικός διακανονισμός στην εκπνοή της συμφωνίας. Σε αυτή την περίπτωση, δεν απαιτείται η παράδοση του υποκείμενου τίτλου και το κέρδος/ζημία του επενδυτή προκύπτει από την διαφορά της τιμής του συμβολαίου και της τιμής του υποκείμενου τίτλου την ημέρα του τελικού διακανονισμού. Αυτή η δυνατότητα επιτρέπει την συμμετοχή κερδοσκόπων στις αγορές ενέργειας με αποτέλεσμα να αυξάνεται η ρευστότητα τους.

1.3 Δικαιώματα Προαίρεσης (Options)

Τα δικαιώματα προαίρεσης όπως και τα ΣΜΕ αποτελούν συμφωνίες για μελλοντική αγοροπωλησία προϊόντων [2][3]. Η διαφορά τους με τα ΣΜΕ είναι ότι ο αγοραστής έχει το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να ζητήσει την εκπλήρωση της συμφωνίας. Συγκεκριμένα, το δικαίωμα προαίρεσης είναι μια συμφωνία που δίνει το δικαίωμα στον αγοραστή-συμβαλλόμενο (κάτοχος, holder) να αγοράσει ή να πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο σε μια συγκεκριμένη μελλοντική στιγμή και για μια προκαθορισμένη τιμή (τιμή εξάσκησης, strike price). Ο αγοραστής για να αποκτήσει το δικαίωμα πρέπει να πληρώσει μια τιμή (option premium). Μετά την αγορά του δικαιώματος ο κάτοχος δεν έχει άλλη υποχρέωση. Σε

περίπτωση δηλαδή που αποφασίσει να μην εξασκήσει το δικαίωμα η απώλεια του ισούται με την αξία του premium. Αντίθετα, ο πωλητής-συμβαλλόμενος (εκδότης, writer) εισπράττει το αντίτιμο και στο μέλλον οφείλει να αγοράσει ή να πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο στην συμφωνημένη τιμή εφόσον το απαιτήσει ο αγοραστής. Για αυτό τον λόγο λέμε ότι στα options έχουμε παιχνίδι μηδενικού αθροίσματος (zero-sum game), δηλαδή το κέρδος ενός επενδυτή ισούται με την ζημία του άλλου. Επιπλέον, για την δυνατότητα εξάσκησης του δικαιώματος προαίρεσης διακρίνουμε δύο βασικές κατηγορίες : Ευρωπαϊκού τύπου και Αμερικάνικου τύπου. Στην πρώτη κατηγορία ο κάτοχος μπορεί να εξασκήσει το δικαίωμα μόνο στην λήξη του ενώ στην δεύτερη έχει τη δυνατότητα εξάσκησης σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέχρι το τέλος του συμβολαίου.

1.3.1 Θέσεις σε δικαιώματα προαίρεσης

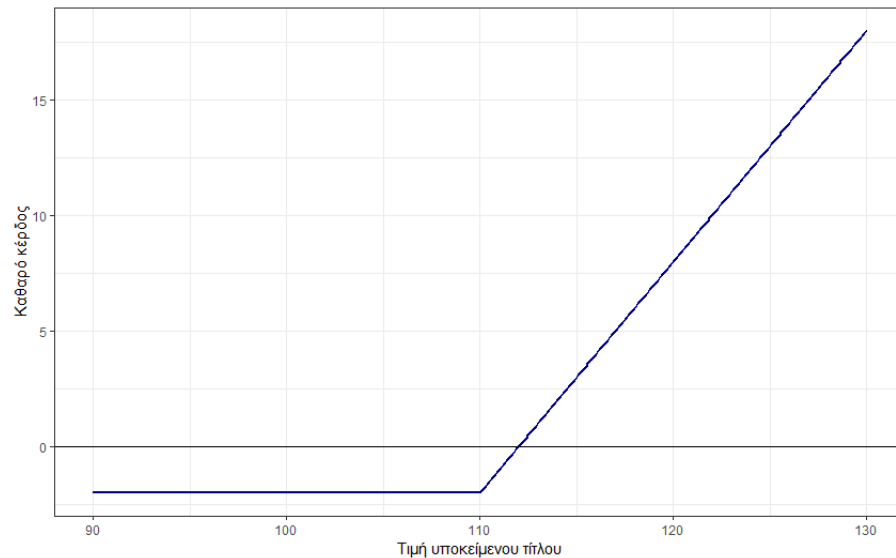
Διακρίνουμε δύο είδη δικαιωμάτων προαίρεσης, το δικαίωμα αγοράς (call option), που δίνει το δικαίωμα στον κάτοχο-αγοραστή να αγοράσει τον υποκείμενο τίτλο στην τιμή εξάσκησης και το δικαίωμα πώλησης (put option), με το οποίο ο κάτοχος μπορεί να πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο στην τιμή εξάσκησης. Όπως και στα ΣΜΕ, ένας επενδυτής μπορεί να πάρει είτε θέση αγοράς (long) είτε πώλησης (short). Έτσι, ξεχωρίζουμε τέσσερις θέσεις που παρουσιάζονται αναλυτικά παρακάτω με την βοήθεια παραδειγμάτων που ο υποκείμενος τίτλος είναι μετοχή [3].

Αγορά δικαιώματος αγοράς (long call)

Έστω ότι ένας επενδυτής εκτιμάει ότι η τιμή της μετοχής Α θα ανέβει και αγοράζει ένα 3-μηνο call option Ευρωπαϊκού τύπου πάνω στην συγκεκριμένη μετοχή. Η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι 100€ και η τιμή εξάσκησης είναι 110€. Συνήθως, όταν αυτά τα συμβόλαια διαπραγματεύονται στο χρηματιστήριο δίνουν δικαίωμα σε 100 μετοχές. Επομένως εάν θεωρήσουμε ότι το αντίτιμο (premium) του option είναι 2€ για κάθε μετοχή, ο αγοραστής θα πρέπει να καταβάλει το ποσό των 200€. Ανάλογα με την τιμή της μετοχής Α στο τέλος του 3-μήνου διακρίνουμε τρία βασικά σενάρια :

1. Εάν η τιμή της στη λήξη του συμβολαίου φτάσει τα 130€, τότε ο επενδυτής θα εξασκήσει το δικαίωμα και θα αγοράσει 100 μετοχές με 110€ την μετοχή. Έτσι, πουλώντας τώρα αυτές τις μετοχές στην τιμή αγοράς (130€) εισπράττει κέρδος 20€ ανά μετοχή. Λαμβάνοντας υπόψιν το premium, το καθαρό του κέρδος διαμορφώνεται στα $2000 - 200 = 1800\text{€}$.
2. Σε αυτό το σενάριο θεωρούμε ότι η τιμή στη λήξη έχει πέσει στα 95€. Επειδή δεν συμφέρει τον επενδυτή η αγορά των μετοχών σε τιμή υψηλότερη από αυτή της αγοράς δεν γίνεται εξάσκηση του δικαιώματος. Σε αυτή την περίπτωση, η ζημία του επενδυτή ισούται με το αντίτιμο (200€).

3. Έστω ότι η τιμή της μετοχής φτάνει τα 111€. Έτσι με την εξάσκηση του συμβολαίου ο επενδυτής κερδίζει 1€ ανά μετοχή, δηλαδή 100€ συνολικά. Ωστόσο λόγω του premium, παρατηρούμε ότι υπάρχει συνολική ζημιά 100€.



Σχήμα 1.2 Η πληρωμή για θέση αγοράς δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης 110 στην εκπνοή του

Με την βοήθεια του παραπάνω παραδείγματος μπορούμε να γενικεύσουμε την πληρωμή του δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου. Εάν θεωρήσουμε ότι ο χρονική στιγμή που λήγει το συμβόλαιο είναι $t = T$ και S_T είναι η τιμή της μετοχής την στιγμή t , τότε η απολαβή του δικαιώματος με εξάσκηση K :

$$F = \max(S_T - K, 0)$$

ενώ το καθαρό κέρδος/ζημιά δίνεται από την σχέση :

$$P = \max(S_T - K, 0) - \text{premium}$$

Η δυνατότητα μόχλευσης που προσφέρουν τα δικαιώματα προαίρεσης φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα. Θεωρώντας τα ίδια δεδομένα για το option, υποθέτουμε ότι ένας επενδυτής περιμένει αύξηση της αξίας της μετοχής A και είναι διατεθειμένος να επενδύσει αρχικά το ποσό των 1000€. Έτσι

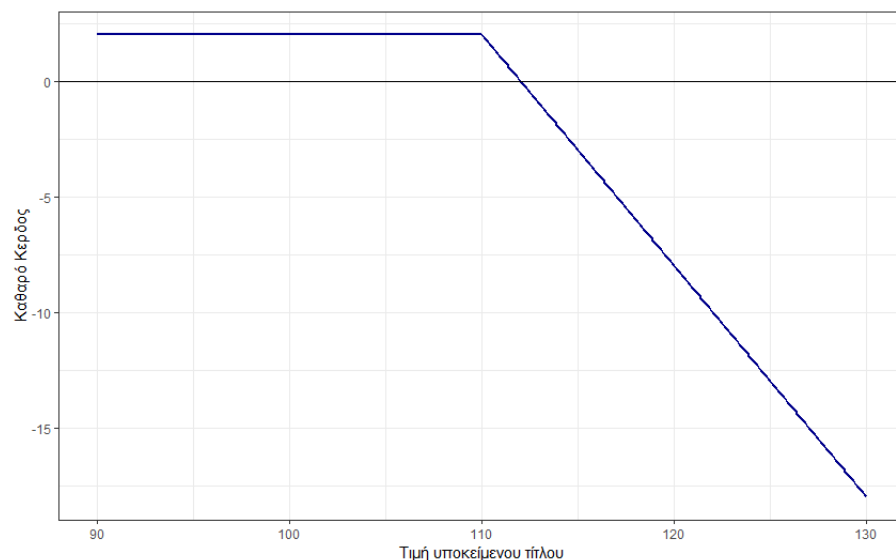
μπορεί είτε να αγοράσει 10 μετοχές είτε να καταβάλει 1000€ σε premium αποκτώντας δικαίωμα σε 500 μετοχές.

1. Με την αξία της μετοχής στα 130€ μετά από το 3-μηνο, στην πρώτη περίπτωση (αγορά μετοχών) ο επενδυτής έχει κέρδος 300€ ενώ στη δεύτερη το καθαρό κέρδος του είναι $500 \times 20 - 1000 = 9000€$
2. Στο δεύτερο σενάριο που η τιμή της μετοχής πέφτει στα 95€, στην πρώτη περίπτωση η ζημία είναι 50€ ενώ στη δεύτερη η συνολική ζημία ισούται με το σύνολο των premiums (1000€).

Παρατηρούμε λοιπόν ότι ενώ τα δικαιώματα προαίρεσης δίνουν την δυνατότητα ενίσχυσης των κερδών, σε περίπτωση λανθασμένης εκτίμησης της μελλοντικής πορείας της αξίας της μετοχής μπορούν να οδηγήσουν σε μεγαλύτερες απώλειες.

Πώληση δικαιώματος αγοράς (short call)

Από τα παραπάνω, μπορούμε να εύκολα να αναπαραστήσουμε γραφικά και το κέρδος του πωλητή του παραπάνω δικαιώματος (short call) αφού έχει πάρει την ακριβώς αντίθετη θέση.

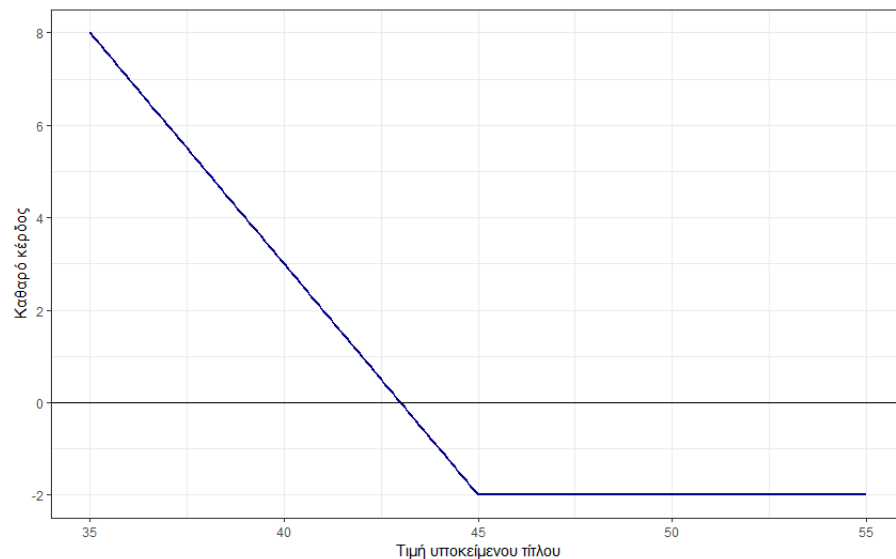


Σχήμα 1.3 Η πληρωμή για θέση πώλησης δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης 110 στην εκπνοή του

Αγορά δικαιώματος πώλησης (long put)

Έστω ότι ο επενδυτής αναμένει πτώση μιας μετοχής Β με τρέχουσα τιμή 50€ και επιλέγει να αγοράσει ένα δικαίωμα πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου με λήξη σε 3 μήνες και τιμή εξάσκησης 45€ πάνω στην συγκεκριμένη μετοχή. Θεωρούμε ότι το premium είναι 2€ και επομένως το συνολικό κόστος απόκτησης του δικαιώματος ισούται με 200€.

1. Έστω ότι η τιμή της μετοχής στην λήξη πέφτει στα 35€. Σε αυτή την περίπτωση ο επενδυτής αγοράζει 100 μετοχές στην τιμή αγοράς (35€) και τις πουλάει στην τιμή εξάσκησης (45€) αποκομίζοντας κέρδος 10€ ανά μετοχή και επομένως συνολικό καθαρό κέρδος $10 \times 100 - 200 = 800\text{€}$.
2. Στο σενάριο που η τιμή στο τέλος του συμβολαίου ανεβαίνει πάνω από την τιμή εξάσκησης, ο αγοραστής δεν προχωρά σε καμία κίνηση και η ζημία του ισούται με το αρχικό αντίτιμο της συμφωνίας.



Σχήμα 1.4 Η πληρωμή για θέση αγοράς δικαιώματος πώλησης με τιμή εξάσκησης 45 στην εκπνοή του

Γενικά, η πληρωμή ενός δικαιώματος πώλησης στην λήξη με τιμή εξάσκησης K δίνεται από την σχέση :

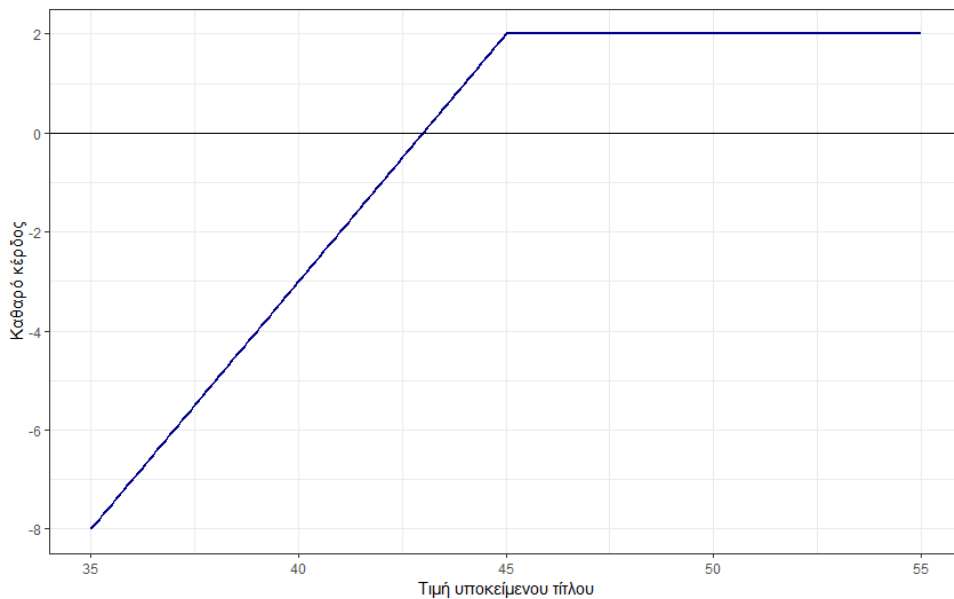
$$F = \max(K - S_T, 0)$$

ενώ το καθαρό κέρδος/ζημία δίνεται από την σχέση :

$$P = \max(K - S_T, 0) - \text{premium}$$

Πώληση δικαιώματος πώλησης (short put)

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε και την απολαβή που προκύπτει για τον εκδότη του παραπάνω δικαιώματος (short put).



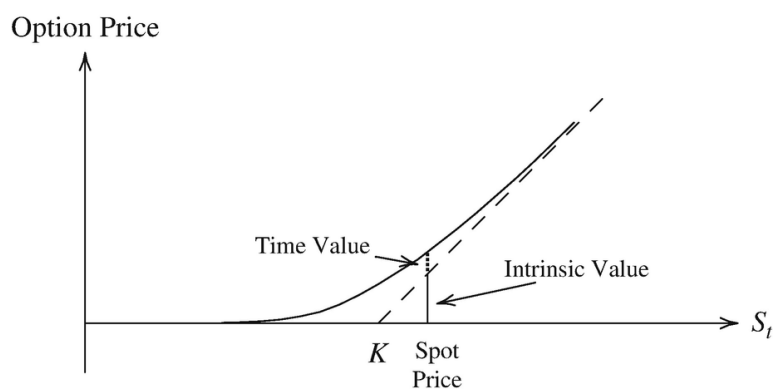
Σχήμα 1.5 Η πληρωμή για θέση πώλησης δικαιώματος πώλησης με τιμή εξάσκησης 45 στην εκπνοή του

Τα Σχήματα 1.2, 1.3, 1.4 και 1.5 δημιουργήθηκαν με τον κώδικα που φαίνεται στο Παράρτημα (Π.2)

1.3.2 Εσωτερική και Χρονική αξία δικαιώματος

Μέχρι στιγμής, δίνουμε σημασία στην τιμή του δικαιώματος την χρονική στιγμή που έκλεινε η συμφωνία μεταξύ των δύο πλευρών. Από την στιγμή που δημιουργείται όμως το δικαίωμα, η τιμή του αλλάζει συνεχώς μέχρι την λήξη αφού καθορίζεται από την προσφορά και την ζήτηση της αγοράς. Για να μελετήσουμε την αξία του δικαιώματος παρουσιάζουμε δύο σημαντικές έννοιες : *την εσωτερική αξία* (intrinsic value) και την *χρονική αξία* (time value) [3][5]. Η εσωτερική αξία ισούται με το κέρδος που

προκύπτει για τον κάτοχο του δικαιώματος από την άμεση εξάσκηση. Όταν η εξάσκηση ενός δικαιώματος οδηγεί σε κέρδος τότε λέμε ότι το δικαίωμα είναι «πάνω από το χρηματικό του ισοδύναμο» (In-the-Money, ITM) ενώ στην αντίθετη περίπτωση λέμε ότι είναι «κάτω από το χρηματικό του ισοδύναμο» (Out-of-the-Money, OTM). Στην περίπτωση που η τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι αρκετά κοντά στην τιμή εξάσκησης λέμε ότι το δικαίωμα είναι «στο χρηματικό του ισοδύναμο» (At-the-Money, ATM). Η χρονική αξία του είναι η ποσότητα κατά την οποία η τιμή του δικαιώματος υπερβαίνει την εσωτερική αξία. Για παράδειγμα έστω ότι έχουμε ένα δικαίωμα αγοράς που διαπραγματεύεται στα 5€ με τιμή εξάσκησης 10€. Εάν μια χρονική στιγμή η τιμή της υποκείμενης μετοχής είναι 12€, το δικαίωμα θα έχει εσωτερική αξία $12 - 10 = 2\text{€}$ και συνεπώς η χρονική αξία θα ισούται με $5 - 2 = 3\text{€}$. Η σχέση μεταξύ των δύο αξιών φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (1.6).



Σχήμα 1.6 Χρονική και εσωτερική αξία δικαιώματος αγοράς [7]

Από το παραπάνω διάγραμμα βλέπουμε ότι όσο πιο μακριά, είτε προς τα πάνω είτε προς τα κάτω, είναι το δικαίωμα από το χρηματικό του ισοδύναμο τόσο πιο πολύ μειώνεται η χρονική αξία του ενώ η εσωτερική αξία πλησιάζει την πραγματική. Αυτό συμβαίνει επειδή όταν η διαφορά ανάμεσα στην τιμή της υποκείμενης μετοχής και στην τιμή εξάσκησης είναι πολύ μεγάλη, θεωρείται σχεδόν σίγουρη η εξάσκηση του δικαιώματος από τον αγοραστή. Αντίθετα, παρατηρούμε ότι για τα At-the-Money δικαιώματα η χρονική αξία είναι μεγάλη. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ένα At-the-Money option που είναι ήδη κερδοφόρο μπορεί στο μέλλον να προσφέρει ακόμα περισσότερα κέρδη ενώ για ένα ζημιογόνο At-the-Money option έχει σημαντική πιθανότητα να γίνει κάποια στιγμή κερδοφόρο. Ειδικά στην τελευταία περίπτωση μια μεγάλη πτώση της μετοχής δεν ενδιαφέρει τον κάτοχο του δικαιώματος αφού η ζημία του περιορίζεται στην τιμή του premium.

1.4 Η ιδιαίτερη περίπτωση της αγοράς ηλεκτρικής ενέργειας

Οι αγορές ηλεκτρικής ενέργειας αποτελούν την πιο ιδιαίτερη περίπτωση αγορών. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο ηλεκτρισμός είναι το μόνο αγαθό για το οποίο η παραγωγή θα πρέπει να ισούται με την κατανάλωση συν τις απώλειες σε κάθε χρονική στιγμή. Επιπλέον, η δυσκολία αποθήκευσης της ηλεκτρικής ενέργειας και οι περιορισμοί στην μεταφορά της λόγω του ορίου λειτουργίας του δικτύου αποτελούν ορισμένα ακόμα ξεχωριστά χαρακτηριστικά αυτών των αγορών. Για αυτό τον λόγο ο σχεδιασμός και η οργάνωση τους αποτελεί μια πολύπλοκη διαδικασία.

Συνήθως, οι αγορές ηλεκτρικής ενέργειας αποτελούνται από τέσσερις επιμέρους αγορές.

1. Την *Αγορά επόμενης Ημέρας ή Προημερήσια Αγορά* (Day-Ahead Market) : Σε αυτή την αγορά γίνονται οι συναλλαγές που αφορούν την ηλεκτρική ενέργεια που θα παραχθεί και θα παραδοθεί την επόμενη μέρα. Συγκεκριμένα, αφού οι συμμετέχοντες στείλουν τις ωριαίες προσφορές για αγορά ή πώληση ενέργειας (συνήθως μέχρι το μεσημέρι), προγραμματίζεται η παραγωγή και η τιμή για κάθε ώρα της επόμενης ημέρας.
2. *Ενδοημερήσια Αγορά* (Intra-day Market) : Μέσω αυτής της αγοράς τα μέλη μπορούν να κάνουν συνεχώς συμπληρωματικές αγοροπωλησίες για την ημέρα παράδοσης ώστε να διορθώσουν τυχόν λάθη στις εκτιμήσεις που έκαναν στην προημερήσια αγορά. Στις περισσότερες χώρες οι συμμετέχοντες μπορούν να υποβάλουν προσφορές μέχρι και 15 λεπτά πριν την ώρα παράδοσης για 15-λεπτη, 30-λεπτη ή μίας ώρας παράδοση.
3. *Αγορά Εξισορρόπησης* (Balancing Market) : Σε αυτό το στάδιο διορθώνονται σε πραγματικό χρόνο οι αποκλίσεις που εμφανίζονται μεταξύ παραγωγής – ζήτησης ώστε να διατηρείται η ευστάθεια του συστήματος. Οι μονάδες παραγωγής που συνέβαλαν στην εύρυθμη λειτουργία αποζημιώνονται για τη διαθεσιμότητά τους ενώ οι μονάδες που δεν παρέδωσαν τις συμφωνημένες ποσότητες τιμωρούνται. Σε αντίθεση με τις δύο προηγούμενες αγορές που οργανώνονται από το χρηματιστήριο ενέργειας, την αγορά εξισορρόπησης την λειτουργεί ο διαχειριστής μεταφοράς (π.χ ΑΔΜΗΕ).
4. *Προθεσμιακή Αγορά* : Όπως είδαμε και στις προηγούμενες ενότητες, σε αυτή την αγορά γίνονται αγοροπωλησίες συμβολαίων για μελλοντική παράδοση σε προκαθορισμένη τιμή.

Από τη μελέτη της δομής αυτών των αγορών προκύπτει ότι τα προϊόντα που είναι υπό διαπραγμάτευση στην αγορά παραγώγων εμφανίζουν ορισμένες διαφορές με αυτά των χρηματαγορών ή άλλων εμπορευμάτων [6]. Αρχικά, θα μελετήσουμε την περίπτωση των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης ηλεκτρικής ενέργειας. Αυτά τα συμβόλαια στις περισσότερες περιπτώσεις λύνονται με

χρηματικό διακανονισμό καθώς δικαίωμα φυσικής παράδοσης έχουν μόνο οι συμμετέχοντες στην προημερήσια αγορά. Ανάλογα με την περίοδο παράδοσης διακρίνονται σε μηνιαία, τριμηνιαία και ετήσια ενώ σε ορισμένες μεγάλες και αναπτυγμένες αγορές υπάρχουν διαθέσιμα ημερήσια και εβδομαδιαία συμβόλαια. Επιπλέον, ανάλογα με το προφίλ του φορτίου, ξεχωρίζουμε τα συμβόλαια φορτίου βάσης (baseload), τα οποία αφορούν την παράδοση για όλο το 24ωρο, και τα συμβόλαια φορτίου αιχμής (peakload), που αφορούν παράδοση για χρονική περίοδο που ορίζεται στις περισσότερες χώρες από τις 8 π.μ μέχρι τις 8μ.μ. Για κάθε συμβόλαιο καθορίζεται και ο ρυθμός παράδοσης ηλεκτρικής ενέργειας που συνήθως εκφράζεται σε MWh ανά ώρα. Για παράδειγμα, ένα τριμηνιαίο συμβόλαιο βάσης με ρυθμό παράδοσης 1 MWh/h ορίζει συνολική παράδοση ηλεκτρικής ενέργειας ίση με $24 \times 90 \times 1 = 2160$ MWh.

Για να γίνει κατανοητή η διαδικασία από την οποία προκύπτει η πληρωμή των ΣΜΕ, θα μελετήσουμε μέσω παραδείγματος την περίπτωση διακανονισμού των ημερησίων συμβολαίων. Έστω ότι ένας παραγωγός παίρνει θέση αγοράς σε ημερήσιο συμβόλαιο φορτίου βάσης με τιμή 20€/MWh/h για παράδοση την ημέρα Τ. Η απολαβή του παραγωγού αποτελείται από το άθροισμα δύο ποσών. Το πρώτο ποσό υπολογίζεται από την διαφορά μεταξύ της τελικής τιμής του συμβολαίου (f_T) την τελευταία ημέρα διαπραγμάτευσης του συμβολαίου και της τιμής αγοράς του συμβολαίου (f_0). Εάν θεωρήσουμε ότι η τιμή του συμβολαίου (f_T) την τελευταία ημέρα φτάνει τα 25€/MWh/h, τότε ο παραγωγός έχει κέρδος ίσο με 5€/MWh/h. Είδαμε ότι μέσω της προημερησίας αγοράς προκύπτει η τιμή (S_i) της ηλεκτρικής ενέργειας για κάθε ώρα (i) της επόμενης ημέρας. Τότε, το δεύτερο ποσό ισούται με το παρακάτω άθροισμα :

$$\Pi = \sum_{i=1}^{24} (S_i - f_T)$$

1.5 Αντιστάθμιση κινδύνου με δικαιώματα προαίρεσης

Στην εισαγωγή του κεφαλαίου είδαμε ότι τα παράγωγα χρησιμοποιούνται σε μεγάλο βαθμό από τους επενδυτές με στόχο την διαχείριση του κινδύνου που προκύπτει από την μεταβλητότητα των τιμών των αγαθών. Η αντιστάθμιση του κινδύνου ουσιαστικά επιτυγχάνεται από τον επενδυτή λαμβάνοντας θέση σε ένα προϊόν που έχει αρνητική συσχέτιση με αυτό που ήδη κατέχει ή σκοπεύει να επενδύσει. Χρησιμοποιώντας τα δικαιώματα προαίρεσης που προαναφέρθηκαν δείχνουμε κάποιες βασικές τεχνικές αντιστάθμισης που παρατηρούνται στις αγορές ενέργειας [1].

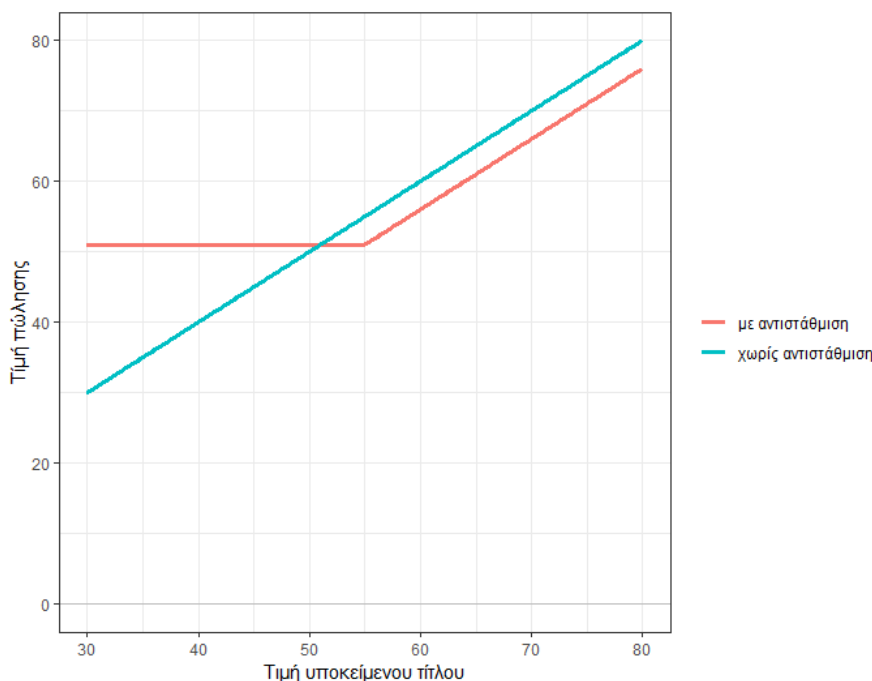
Περίπτωση 1

Έστω ότι ένας προμηθευτής αργού πετρελαίου έχει στην κατοχή του 10.000 βαρέλια πετρελαίου και θέλει να τα πουλήσει στην αγορά στα τέλη Απριλίου. Η τρέχουσα τιμή του future Απριλίου είναι \$50/βαρέλι. Σύμφωνα με την στρατηγική του επιθυμεί να κλειδώσει την ελάχιστη τιμή πώλησης κοντά

στα \$50/βαρέλι. Έτσι, για να είναι ασφαλισμένος σε περίπτωση πτώσης της αξίας του πετρελαίου, αποφασίζει να αγοράσει 10 δικαιώματα πώλησης (long put) με τιμή εξάσκησης \$55/βαρέλι που λήγουν τον Απρίλιο. Το ασφάλιστρο (premium) του κάθε δικαιώματος θεωρούμε ότι είναι \$4. Στα τέλη Απριλίου έχουμε δύο πιθανά σενάρια :

1. Η τρέχουσα τιμή να είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης. Έστω ότι φτάνει στα \$60/βαρέλι. Σε αυτή την περίπτωση ο προμηθευτής πουλάει τα βαρέλια στην τιμή της αγοράς (\$60/βαρέλι) και χάνει το premium των συμβολαίων, πουλώντας ουσιαστικά \$56/βαρέλι.
2. Η τρέχουσα τιμή να είναι κάτω από την τιμή εξάσκησης. Έστω ότι η τιμή πέφτει στα \$40/βαρέλι. Ο προμηθευτής πουλάει στην τιμή των \$40/βαρέλι αλλά έχει κέρδος \$11/βαρέλι από την εξάσκηση του δικαιώματος του (αν λάβουμε υπόψιν και το premium). Έτσι, το κέρδος του για κάθε βαρέλι είναι \$51.

Στο παρακάτω διάγραμμα (σχήμα 1.7) φαίνεται η πραγματική τιμή πώλησης κάθε βαρελιού στην περίπτωση που ο προμηθευτής κάνει αντιστάθμιση μέσω δικαιώματος (κόκκινο) και στην περίπτωση που δεν κάνει (μπλε). Παρατηρούμε ότι όταν η τιμή του πετρελαίου στην λήξη είναι μικρότερη από την τιμή εξάσκησης, ο προμηθευτής πουλάει κοντά στο ελάχιστο όριο που έχει θέσει (\$50/βαρέλι) ενώ στην αντίθετη περίπτωση έχει επιπλέον κερδοφορία, που περιορίζεται όμως από το premium των δικαιωμάτων.



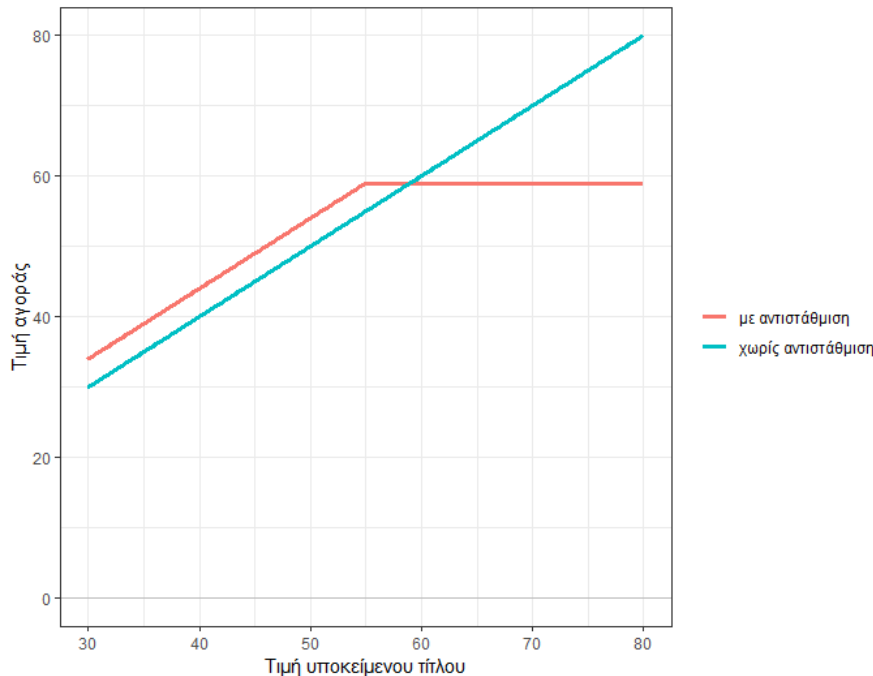
Σχήμα 1.7 Πραγματική τιμή πώλησης αγαθού με ή χωρίς αντιστάθμιση

Περίπτωση 2

Έστω ότι ένας παραγωγός ηλεκτρικής ενέργειας σκοπεύει να αγοράσει 10.000 τόνους άνθρακα στα τέλη Ιουνίου. Η τρέχουσα τιμή του future Ιουνίου είναι \$50/τόνο. Ο παραγωγός φοβάται ότι τον Ιούνιο η τιμή μπορεί να ανέβει. Εξετάζοντας τον προϋπολογισμό της μονάδας αποφασίζει ότι η τιμή αγοράς δεν πρέπει να ξεπεράσει τα \$60/τόνο. Εξετάζοντας τα διαθέσιμα συμβόλαια στην αγορά, προχωρά στην αγορά 10 δικαιωμάτων αγοράς (long call) με τιμή εξάσκησης \$55/τόνο που λήγουν τον Ιούνιο. Το αντίτιμο των δικαιωμάτων είναι \$4/τόνο. Τα δύο σενάρια είναι τα εξής :

1. Η τιμή στο τέλος του συμβολαίου να είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης, έστω στην περίπτωση μας \$70/τόνο. Ο παραγωγός θα αγοράσει τον άνθρακα στην τιμή της αγοράς, δηλαδή στα \$70/τόνο και θα έχει κέρδος από την εξάσκηση του δικαιώματος ίσο με \$11/τόνο (λαμβάνοντας υπόψιν το premium). Έτσι, η πραγματική τιμή αγοράς είναι \$59/τόνο.
2. Η τιμή στην λήξη να πέσει κάτω από την τιμή εξάσκησης (π.χ \$45/τόνο). Τότε ο παραγωγός θα αγοράσει \$45/τόνο και θα έχει ζημία \$4/τόνο (premium), με αποτέλεσμα η πραγματική τιμή αγοράς είναι \$48/τόνο.

Βλέπουμε ότι ο παραγωγός επιλέγει ένα μέγιστο επίπεδο στο οποίο είναι διατεθειμένος να αγοράσει το προϊόν αλλά περιορίζει τα κέρδη του σε περίπτωση πτώσης της τιμής. Στο παρακάτω σχήμα (1.8) φαίνεται η τιμή στην οποία ο παραγωγός αγοράζει ένα τόνο άνθρακα με ή χωρίς αντιστάθμιση. Οι κώδικες για τα παραδείγματα αντιστάθμισης βρίσκονται στο Παράρτημα (Π.3)



Σχήμα 1.8 Πραγματική τιμή αγοράς αγαθού με και χωρίς αντιστάθμιση

Το μεγάλο πλεονέκτημα των δύο προαναφερθέντων τεχνικών είναι ότι οι επενδυτές λόγω της δυνατότητας να βάλουν όριο στις ζημιές τους μπορούν να προχωρήσουν σε μακροπρόθεσμο σχεδιασμό της λειτουργίας των μονάδων τους. Από την άλλη το μειονέκτημα είναι ότι σε μια ευνοϊκή κίνηση της αγοράς, λόγω των περιορισμένων κερδών, ο επενδυτής μπορεί να χάσει σημαντικό έδαφος σε σχέση με τους ανταγωνιστές του που δεν έχουν προχωρήσει σε αντιστάθμιση.

1.6 Σύνθετοι τύποι δικαιωμάτων προαίρεσης

Οι ανάγκες των εμπλεκόμενων στις αγορές ενέργειας έχουν οδηγήσει στην δημιουργία ορισμένων σύνθετων παραγώγων. Χαρακτηριστικά παραδείγματα τέτοιων προϊόντων είναι τα Ασιατικά δικαιώματα (Asian options, Average price options) και τα Spread options.

Στα Ασιατικά δικαιώματα η πληρωμή εξαρτάται από την μέση τιμή του υποκείμενου τίτλου καθ' όλη την διάρκεια του συμβολαίου και όχι από την τιμή του στην λήξη (ευρωπαϊκού τύπου) [4]. Εάν θεωρήσουμε ότι για ένα χρονικό διάστημα T η μέση τιμή του αγαθού είναι A , τότε η απολαβή του ασιατικού δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης K στην λήξη δίνεται από την σχέση :

$$c = \max(A - K, 0)$$

ενώ η τιμή για το αντίστοιχο δικαίωμα πώλησης είναι :

$$p = \max(K - A, 0)$$

Συνήθως ορίζονται δύο τρόποι υπολογισμού της μέσης τιμής. Σύμφωνα με τον πρώτο, ο υπολογισμός γίνεται για συνεχές χρόνο χρησιμοποιώντας τον τύπο :

$$A = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt$$

ενώ στον δεύτερο τρόπο βρίσκουμε τον μέσο όρο των τιμών σε n συγκεκριμένες χρονικές στιγμές της συνολικής περιόδου :

$$A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(t_i)$$

Τα ασιατικά δικαιώματα χρησιμοποιούνται σε περιπτώσεις που ο επενδυτής ενδιαφέρεται για την τιμή ενός αγαθού καθ' όλη την διάρκεια του συμβολαίου και θέλει να αποφύγει την επιρροή των ακραίων μεταβολών στην λήξη. Το πλεονέκτημα τους σε σχέση με τα κανονικά options είναι ότι συνήθως έχουν αρκετά μικρότερο κόστος απόκτησης.

Το spread option αφορά την διαφορά μεταξύ της αξίας δύο ή περισσότερων προϊόντων [6] . Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα στον χώρο της ενέργειας αποτελεί το spark spread option. Το spark spread αποτελεί την διαφορά μεταξύ της τιμής στην οποία ένας παραγωγός πουλάει ηλεκτρική ενέργεια και της τιμής στην οποία αγοράζει τις απαραίτητες ποσότητες φυσικού αερίου για να παράξει αυτή την ηλεκτρική ενέργεια, δηλαδή ισχύει :

$$\text{Spark spread} = S_E - S_G \times H$$

όπου S_E , S_G οι τιμές της ηλεκτρικής ενέργειας (€/MWh) και του φυσικού αερίου (€/MMbtu) αντίστοιχα και H είναι ο δείκτης που μετρά τον βαθμό απόδοσης καύσης μιας μονάδας (MMbtu/MWh). Έτσι ο ιδιοκτήτης μιας τέτοιας μονάδας δεν επωφελείται από μια υψηλή τιμή ηλεκτρικής ενέργειας εάν ταυτόχρονα η τιμή του καυσίμου που χρησιμοποιεί είναι επίσης υψηλή. Τα spark spread options δίνουν στον κάτοχο το δικαίωμα αγοράς της διαφοράς μεταξύ της τιμής ηλεκτρικής ενέργειας και φυσικού αερίου. Συγκεκριμένα, ένα spark spread call option πάνω σε καύσιμο G με καθορισμένη τιμή K δίνει στον κάτοχο το δικαίωμα να πληρώσει K φορές την τιμή μονάδας του καυσίμου και να λάβει την τιμή μιας μονάδας ηλεκτρισμού στην λήξη του συμβολαίου. Αντίθετα, με ένα spark spread put option, ο αγοραστής αποκτά το δικαίωμα να πληρώσει την τιμή μονάδας ηλεκτρισμού και να λάβει K φορές την τιμή της μονάδας του καυσίμου. Η πληρωμή που προκύπτει από το spark spread call option στην λήξη ισούται με :

$$c = \max(S_E - K \cdot S_G, 0)$$

ενώ αντίστοιχα για το spark spread put option είναι :

$$p = \max(K \cdot S_G - S_E, 0)$$

Τα spark spread options αποτελούν πολύ χρήσιμα εργαλεία αντιστάθμισης για τους συμμετέχοντες στις αγορές ενέργειας, αφού τους δίνεται η δυνατότητα να διασφαλίσουν την κερδοφορία της μονάδας τους σε περιόδους που οι τιμές ηλεκτρικής ενέργειας και φυσικού αερίου δεν είναι συμφέρουσες για την λειτουργία της. Πρέπει να σημειωθεί ότι η μορφή του spark spreadπου παρουσιάστηκε αποτελεί μια απλούστευση της πραγματικού κέρδους της μονάδας αφού δεν περιλαμβάνονται αρκετές παράμετροι, όπως τα κόστη μεταφοράς καυσίμου και αδειών εκπομπής διοξειδίου του άνθρακα.

2. ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΤΙΜΗΣ SPOT ΤΩΝ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΩΝ ΑΓΑΘΩΝ

2.1 Εισαγωγή

Στο Κεφάλαιο 1 είδαμε ότι για να προχωρήσουμε στην αποτίμηση δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού τύπου πρέπει να γνωρίζουμε την τιμή του υποκείμενου τίτλου στην λήξη ενώ για στην περίπτωση των Ασιατικών δικαιωμάτων μας ενδιαφέρει η τιμή σε συγκεκριμένα χρονικά σημεία μιας καθορισμένης χρονικής περιόδου. Επομένως, σε πρώτο στάδιο απαιτείται η μελέτη και κατανόηση της συμπεριφοράς του υποκείμενου τίτλου. Σκοπός του κεφαλαίου είναι η παρουσίαση των πιο διαδεδομένων μοντέλων που χρησιμοποιούνται για την μοντελοποίηση της εξέλιξης των τιμών ενεργειακών προϊόντων.

2.2 Συλλογή και επεξεργασία των δεδομένων

Για την μελέτη της συμπεριφοράς των τιμών ενεργειακών προϊόντων συλλέγονται οι ημερήσιες τιμές κλεισίματος των futures του αμερικάνικου αργού πετρελαίου (WTI) , του φυσικού αερίου του κόμβου Henry Hub, του άνθρακα με σημείο παράδοσης το Ρότερνταμ και η spot τιμή ηλεκτρικής ενέργειας στη ζώνη SE1 της Σουηδίας. Τα δεδομένα των τριών πρώτων προϊόντων αφορούν την περίοδο 15 Δεκεμβρίου 2015 με 2 Ιανουαρίου 2020 ενώ για την ηλεκτρική ενέργεια εξετάζεται η περίοδος 1 Ιανουαρίου 2016 με 31 Δεκεμβρίου 2018. Για τον σκοπό της εργασίας είναι σημαντικό να εξετάσουμε τις ημερήσιες αποδόσεις των παραπάνω αγαθών. Ο υπολογισμός των αποδόσεων μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Στο πρώτο τρόπο χρησιμοποιείται η παρακάτω σχέση :

$$R_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}$$

όπου R_i είναι η ημερήσια απόδοση και S_i είναι η τιμή κλεισίματος του προϊόντος την i -οστή μέρα. Για τον δεύτερο τρόπο παίρνουμε πρώτα τις λογαριθμικές τιμές και οι ημερήσιες αποδόσεις δίνονται από την σχέση :

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

Επιλέγουμε τον δεύτερο τύπο διότι μπορεί να υπολογιστεί γρήγορα η απόδοση για ένα μεγαλύτερο χρονικό διάστημα προσθέτοντας απλά τις αποδόσεις των ενδιάμεσων ημερών, κάτι που δεν ισχύει με τον πρώτο τρόπο. Συγκεκριμένα ισχύει:

$$\ln\left(\frac{S_N}{S_0}\right) = u_1 + u_2 + \dots + u_N$$

Απόδειξη :

$$u_1 + u_2 + \dots + u_N = \ln\left(\frac{S_1}{S_0}\right) + \ln\left(\frac{S_2}{S_1}\right) + \ln\left(\frac{S_3}{S_2}\right) + \dots + \ln\left(\frac{S_N}{S_{N-1}}\right) =$$

$$\ln(S_1) - \ln(S_0) + \ln(S_2) - \ln(S_1) + \ln(S_3) - \ln(S_2) + \dots + \ln(S_N) - \ln(S_{N-1}) =$$

$$\ln(S_N) - \ln(S_0) = \ln\left(\frac{S_N}{S_0}\right)$$

Αποδεικνύεται ότι αυτός ο ορισμός είναι σχεδόν ισοδύναμος με τον κλασσικό αφού έχουμε :

$$r = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \Leftrightarrow r + 1 = \frac{S_t}{S_{t-1}}$$

Λογαριθμίζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης :

$$\ln(r + 1) = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

ή

$$\ln(r + 1) = u$$

Ισχύει ότι $\ln(r + 1) = r - \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} + \dots$ για $|r| < 1$. Παρατηρούμε ότι για πολύ μικρές τιμές, όπως είναι συνήθως οι ημερήσιες αποδόσεις, ο όρος που είναι υψωμένος σε δύναμη έχουν πάρα πολύ μικρή τιμή και επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ισχύει $\ln(r + 1) \approx r$

. Έτσι καταλήγουμε ότι ισχύει $r \approx u$.

2.3 Περιγραφή της κατανομής των δεδομένων

Πριν προχωρήσουμε στη μοντελοποίηση των τιμών των ενεργειακών προϊόντων είναι απαραίτητο να αναλύσουμε τα δεδομένα που συγκεντρώσαμε και να κατανοήσουμε την πληροφορία που εμπεριέχεται σε αυτά. Για αυτό το σκοπό χρησιμοποιούμε ορισμένα αριθμητικά περιγραφικά μέτρα και γραφικές απεικονίσεις[8][9].

Περιγραφικά μέτρα

Συγκεκριμένα για την μέτρηση της κεντρικής τάσης ενός συνόλου στοιχείων συνήθως χρησιμοποιούνται τρεις όροι :

Αριθμητικός μέσος : υπολογίζεται από την σχέση $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i$

Διάμεσος: είναι η μεσαία τιμή μιας ομάδας τιμών διατεταγμένων κατά αύξουσα τάξη μεγέθους.

Κορυφή ή επικρατούσα τιμή : είναι η τιμή στο δείγμα που εμφανίζεται με μεγαλύτερη συχνότητα.

Μία ακόμη σημαντική έννοια στην παρουσίαση δεδομένων είναι το *κ-ποσοστημόριο* (percentile) ενός συνόλου τιμών. Είναι η τιμή για την οποία το κ% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτή την τιμή. Η πιο γνωστή κατηγορία των ποσοστημορίων είναι τα τεταρτημόρια (quartiles), τα οποία είναι οι τιμές της μεταβλητής που χωρίζουν το σύνολο των τιμών σε τέσσερις ισοπληθείς ομάδες. Για την μέτρηση της διασποράς των τιμών χρησιμοποιούμε τα παρακάτω μέτρα :

Διακύμανση : η δειγματική διακύμανση υπολογίζεται από την σχέση $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

Τυπική απόκλιση : δίνεται από τον τύπο $s = \sqrt{s^2}$

Εκτός από τα παραπάνω μέτρα, για την ακριβέστερη περιγραφή μιας κατανομής χρησιμοποιούνται οι συντελεστές ασυμμετρίας (λοξότητας) και κύρτωσης. Οι ορισμοί δίνονται αναλυτικά παρακάτω :

Συντελεστής Ασυμμετρίας : Μας δείχνει πόσο συμμετρικά κατανέμονται οι τιμές γύρω από το μέσο.

Δίνεται από την σχέση $S = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{ns^3}$. Εάν ισχύει $S = 0$, η κατανομή των τιμών είναι συμμετρική.

Στην περίπτωση που έχουμε $S > 0$ λέμε ότι έχουμε θετική ασυμμετρία και οι περισσότερες παρατηρήσεις βρίσκονται στο αριστερό άκρο της κατανομής ενώ για $S < 0$ λέμε ότι έχουμε αρνητική ασυμμετρία και οι περισσότερες παρατηρήσεις συγκεντρώνονται στο δεξί άκρο.

Συντελεστής κύρτωσης : Η κύρτωση μετρά τον βαθμό συγκέντρωσης των δεδομένων γύρω από την μέση τιμή και δείχνει την αιχμηρότητα ή την πλάτυνση της κατανομής και υπολογίζεται από τον τύπο

$K = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{ns^4}$. Στην περίπτωση που ισχύει $K=3$ λέμε ότι η κατανομή των δεδομένων είναι κανονική.

Όταν έχουμε $K > 3$ η κατανομή ονομάζεται λεπτόκυρτη και εμφανίζει μακριές ουρές (έχει περισσότερα ακραία σημεία σε σχέση με την κανονική κατανομή). Για $K < 3$, λέμε ότι έχουμε πλατύκυρτη κατανομή, στην οποία παρατηρούνται πιο κοντές ουρές και χαμηλότερη κορυφή στο μέσο σε σύγκριση με την κανονική.

Έχοντας ορίσει τις έννοιες της ασυμμετρίας και της κύρτωσης, δίνουμε τον έλεγχο κανονικότητας μέσω του στατιστικού ελέγχου Jarque-Bera. Ο έλεγχος αυτός εξετάζει κατά πόσο τα δεδομένα του δείγματος έχουν την ασυμμετρία και την κύρτωση που εμφανίζει η κανονική κατανομή ($S=0$, $K=3$). Η μηδενική υπόθεση είναι ότι τα δεδομένα ακολουθούν κανονική κατανομή. Το κριτήριο ελέγχου (Jarque Bera statistic) δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$JB = T \left(\frac{S^2}{6} + \frac{(K-3)^2}{24} \right)$$

όπου T : ο αριθμός των παρατηρήσεων του δείγματος

S : η ασυμμετρία του δείγματος

K : η κύρτωση του δείγματος

Το στατιστικό JB ακολουθεί την κατανομή χ^2 (chi-square distribution). Έτσι αν ορίσουμε ως επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.05$, απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση όταν $p\text{-value} < 0.05$.

Για τα δεδομένα του δείγματος μας στους Πίνακες 2.1 και 2.2 δίνονται τα βασικά περιγραφικά μέτρα των λογαριθμικών τιμών και των ημερησίων αποδόσεων αντίστοιχα.

Πίνακας 2.1 Περιγραφικά μέτρα των λογαριθμικών τιμών

	Αργό πετρέλαιο	Φυσικό αέριο	Άνθρακας	Ηλεκτρική Ενέργεια
Μέση τιμή	3.866	1.005	4.276	3.501
Τυπική απόκλιση	0.193	0.172	0.252	0.301
Διάμεσος	3.947	1.029	4.361	3.462
Ελάχιστη τιμή	3.261	0.491	3.771	2.613
Μέγιστη τιμή	4.336	1.576	4.628	4.534
Ασυμμετρία	-0.722	-0.261	-0.451	-0.008
Κύρτωση	3.751	3.725	1.867	-0.194

Πίνακας 2.2 Περιγραφικά μέτρα των ημερήσιων αποδόσεων

	Αργό πετρέλαιο	Φυσικό αέριο	Άνθρακας	Ηλεκτρική Ενέργεια
Μέση τιμή	0.000	0.000	0.000	0.001
Τυπική απόκλιση	0.022	0.029	0.016	0.146
Ετησιοποιημένη τυπική απόκλιση	0.361	0.457	0.252	2.312
Διάμεσος	0.002	0.000	0.000	-0.007
Ελάχιστη τιμή	-0.082	-0.181	-0.240	-0.744
Μέγιστη τιμή	0.136	0.165	0.187	0.787
Ασυμμετρία	0.237	-0.076	-0.831	0.410
Κύρτωση	6.401	7.711	79.41	4.766
Στατιστικό JB (p-value)	502.71 (0.000)	949.47 (0.000)	261879.7 (0.000)	261879.8 (0.000)

Από τον Πίνακα 2.2 παρατηρούμε ότι σε όλες τις αγορές που εξετάστηκαν συναντάμε αποδόσεις με μεγάλη κύρτωση και επομένως συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν περισσότερες ακραίες τιμές από αυτές που προβλέπει η κανονική κατανομή. Αυτό επιβεβαιώνεται και από το στατιστικό Jarque-Bera, όπου η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται αφού και στις τέσσερις αγορές ισχύει $p < 0.0005$.

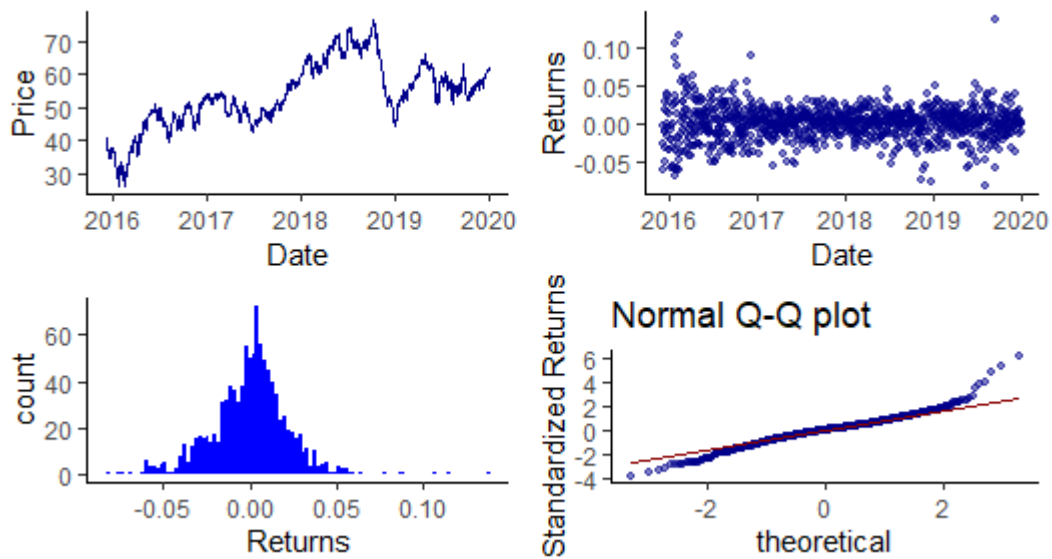
Γραφικές απεικονίσεις

Για τη γραφική απεικόνιση των δεδομένων συνήθως επιλέγεται το ιστόγραμμα. Το ιστόγραμμα είναι διάγραμμα με κάθετες στήλες (ιστούς) που έχουν ως βάση τα διαστήματα τάξης και ύψος ανάλογο με τον αριθμό (συχνότητα) των παρατηρήσεων που ανήκουν στα διαστήματα. Αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο καθώς μπορούμε να δούμε με γρήγορο και απλό τρόπο πώς κατανέμονται τα δεδομένα που συλλέξαμε.

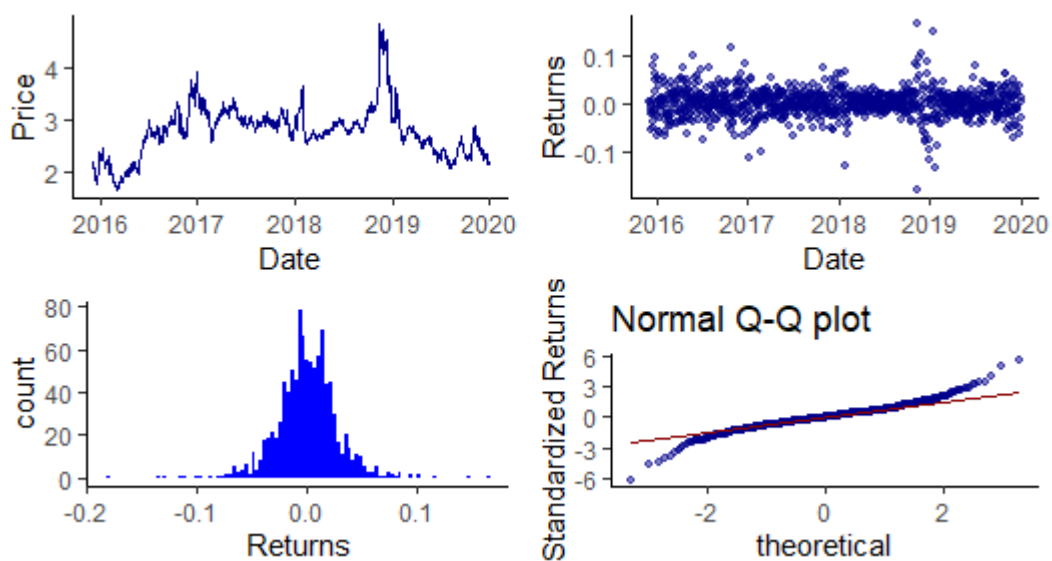
Τέλος, παρουσιάζεται το κανονικό διάγραμμα πιθανότητας (normal Q-Q plot). Η κανονική κατανομή είναι η πιο γνωστή κατανομή αφού περιγράφει σε ικανοποιητικό βαθμό πολλές τυχαίες μεταβλητές και για αυτό τον λόγο υπάρχει ανάγκη να μπορούμε να κρίνουμε εάν η κατανομή ενός συνόλου δεδομένων περιγράφεται από αυτή. Το normal qq-plot καλύπτει αυτή την ανάγκη αφού μας επιτρέπει να ελέγξουμε οπτικά εάν τα δεδομένα μας είναι κανονικά κατανεμημένα. Συγκεκριμένα, παριστάνει την γραφική παράσταση των ποσοστιαίων σημείων της παρατηρούμενης κατανομής (άξονας x) έναντι των ποσοστιαίων σημείων της τυπικής κανονικής κατανομής. Εάν τα δεδομένα προσεγγίζουν την κανονική κατανομή τότε τα σημεία του γραφήματος πρέπει να βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

Στα Σχήματα 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 παρουσιάζονται στις πάνω εικόνες η εξέλιξη των τιμών και οι ημερήσιες αποδόσεις των προϊόντων που μελετήθηκαν, ενώ στις κάτω εικόνες βρίσκονται το ιστόγραμμα και το normal qq-plot. Παρατηρώντας τα normal qq-plots, βλέπουμε ότι σε όλα τα προϊόντα οι ουρές της

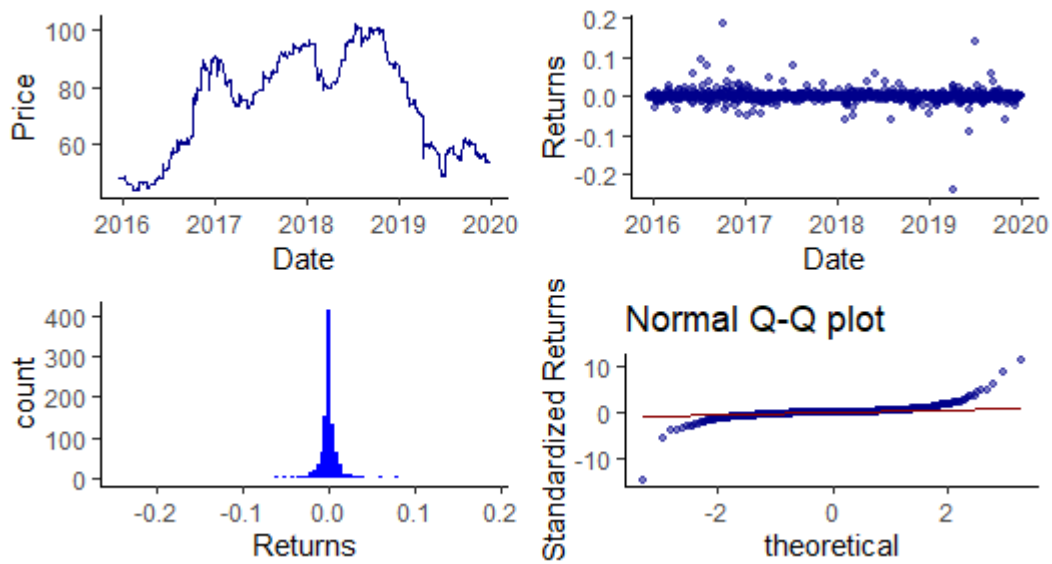
κατανομής των αποδόσεων είναι ‘παχιές’ (ύπαρξη ακραίων τιμών) που δεν συμφωνεί με την κανονική κατανομή



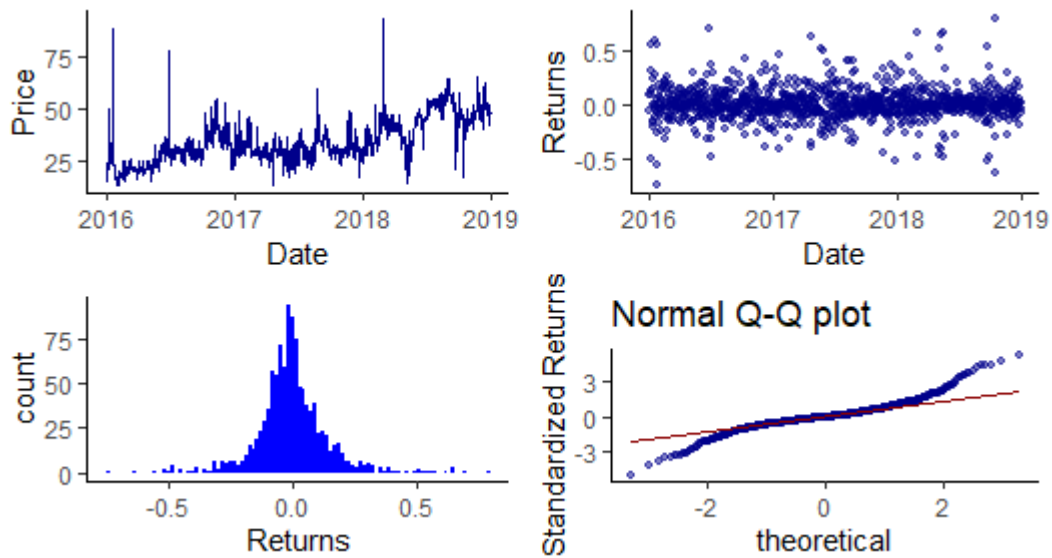
Σχήμα 2.1 Χρονολογικές σειρές τιμών και ημερήσιων αποδόσεων (πάνω), ιστόγραμμα και normal qq-plot των ημερησίων αποδόσεων(κάτω) για το αργό πετρέλαιο (WTI)



Σχήμα 2.2 Χρονολογικές σειρές τιμών και ημερήσιων αποδόσεων (πάνω), ιστόγραμμα και normal qq-plot των ημερησίων αποδόσεων(κάτω) για το φυσικό αέριο



Σχήμα 2.3 Χρονολογικές σειρές τιμών και ημερήσιων αποδόσεων (πάνω), ιστόγραμμα και normal qq-plot των ημερησίων αποδόσεων(κάτω) για τον άνθρακα



Σχήμα 2.4 Χρονολογικές σειρές τιμών και ημερήσιων αποδόσεων (πάνω), ιστόγραμμα και normal qq-plot των ημερησίων αποδόσεων(κάτω) για την ηλεκτρική ενέργεια (ζώνη SE1- Σουηδία)

2.4 Εισαγωγή στις στοχαστικές διαδικασίες

Λόγω της αβεβαιότητας που χαρακτηρίζει τις αγορές ενέργειας είναι αδύνατον να προχωρήσουμε στη μελέτη τους βασιζόμενοι μόνο σε ντετερμινιστικά μοντέλα. Έτσι, για την μοντελοποίηση της εξέλιξης των τιμών των εμπορευμάτων χρησιμοποιούμε στοχαστικές διαδικασίες. Σύμφωνα με τον ορισμό λέμε ότι μία τυχαία μεταβλητή ακολουθεί στοχαστική διαδικασία όταν η τιμή της μεταβάλλεται στον χρόνο με κάποια αβεβαιότητα. Ως προς το είδος του χρόνου διακρίνονται στις στοχαστικές διαδικασίες διακριτού χρόνου, στις οποίες η τιμή της μεταβλητής μπορεί να αλλάζει σε συγκεκριμένα (διακριτά) σημεία του χρόνου και στις διαδικασίες συνεχούς χρόνου στις οποίες η τιμή μεταβάλλεται σε οποιοδήποτε χρονικό σημείο. Επιπλέον, ως προς τις τιμές τους διακρίνονται στις συνεχείς και διακριτές διαδικασίες. Στην πρώτη κατηγορία η μεταβλητή μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος ενώ στην δεύτερη μόνο συγκεκριμένες διακριτές τιμές[2].

2.4.1 Ιδιότητα Markov

Οι στοχαστικές διαδικασίες που συναντάμε στην μοντελοποίηση χρηματοοικονομικών προϊόντων συχνά χαρακτηρίζονται από την μαρκοβιανή ιδιότητα[2][10]. Η μαρκοβιανή ιδιότητα δηλώνει ότι η μελλοντική πιθανοθεωρητική συμπεριφορά της διαδικασίας εξαρτάται μόνο από την παρούσα κατάσταση και όχι από τις παρελθούσες. Αυτή η ιδιότητα βρίσκει εφαρμογή στις χρηματοοικονομικές αγορές αφού συμφωνεί με τον ορισμό της αδύναμης μορφής αποτελεσματικότητας της αγοράς, σύμφωνα με τον οποίο οι ιστορικές πληροφορίες (τιμές μετοχών, όγκος συναλλαγών, κλπ) αντικατοπτρίζονται ήδη στις τιμές και δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίτευξη υπερβολικών αποδόσεων. Για μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών X_1, X_2, \dots με την μαρκοβιανή ιδιότητα ισχύει :

$$P(X_{n+1} = x | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x | X_n = x_n)$$

Μία από τις πιο γνωστές στοχαστικές ανελίξεις που χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα Markov και εμφανίζεται στα μοντέλα που αναπτύσσονται στην επόμενη ενότητα είναι η κίνηση Brown. Μία στοχαστική διαδικασία $\{X(t), t \geq 0\}$ αποτελεί κίνηση Brown εάν ισχύουν τα εξής :

(α) οι τυχαίες μεταβλητές $X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \dots, X(t_k) - X(t_{k-1})$ είναι ανεξάρτητες για $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$

(β) οι μεταβολές $X(t+c) - X(t)$ ακολουθούν κανονική κατανομή με μέσο ίσο με 0 και διασπορά ίση με c . Για ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt , ισχύει $\Delta X = \varepsilon \sqrt{\Delta t}$, όπου $\varepsilon \sim N(0,1)$.

2.4.2 Λήμμα του *Itô*

Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση των στοχαστικών μοντέλων κρίνεται απαραίτητη η σύντομη περιγραφή ενός θεμελιώδους λήμματος στο χώρο της στοχαστικής ανάλυσης, του λήμματος του *Itô* [2][10]. Έστω ότι η τιμή της μεταβλητής S ακολουθεί την παρακάτω στοχαστική διαδικασία :

$$dS = a(S, t)dt + b(S, t)dW$$

όπου dW είναι μια κίνηση Brown ενώ a και b είναι συναρτήσεις των S και t . Σύμφωνα με το λήμμα του *Itô*, η συνάρτηση $F = F(S, t)$ ακολουθεί την εξής διαδικασία :

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial S} a + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} b^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial^2 S} \right] dt + bS \frac{\partial F}{\partial S} dW$$

Όπως θα δούμε στην συνέχεια, το λήμμα του *Itô* χρησιμοποιείται εκτενώς για τον υπολογισμό στοχαστικών διαδικασιών ενώ έχει πολύ σημαντικό ρόλο στην απόδειξη των εξισώσεων Black-Scholes.

2.4.3 Γεωμετρική κίνηση Brown

Η γεωμετρική κίνηση Brown αποτελεί την πιο διαδεδομένη διαδικασία για προσομοίωση της εξέλιξης της τιμής μετοχών [2][6]. Εάν η τυχαία μεταβλητή S_t χαρακτηρίζεται από την γεωμετρική κίνηση Brown με παραμέτρους μ, σ τότε ισχύει ότι η ποσοστιαία μεταβολή της S_t για μικρό χρονικό διάστημα Δt ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu \Delta t$ και τυπική απόκλιση $\sigma \sqrt{\Delta t}$. Δηλαδή ισχύει :

$$\frac{\Delta S}{S} \sim N(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t)$$

όπου μ η μέση απόδοση του τίτλου ανά έτος, σ η ετήσια μεταβλητότητα των ημερήσιων αποδόσεων.

Η στοχαστική διαφορική εξίσωση για την διαδικασία $S_t, t > 0$, δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (2.1)$$

όπου W_t κίνηση Brown. Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Ιτό ,μπορούμε να ξαναγράψουμε την (2.1) στην ακόλουθη μορφή :

$$d\ln S_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \sigma \Delta W_t \quad (2.2)$$

Αποδεικνύεται ότι η παραπάνω διαφορική εξίσωση, για μια αυθαίρετη αρχική τιμή S_0 , έχει αναλυτική λύση :

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \sigma \Delta W_t} \quad (2.3)$$

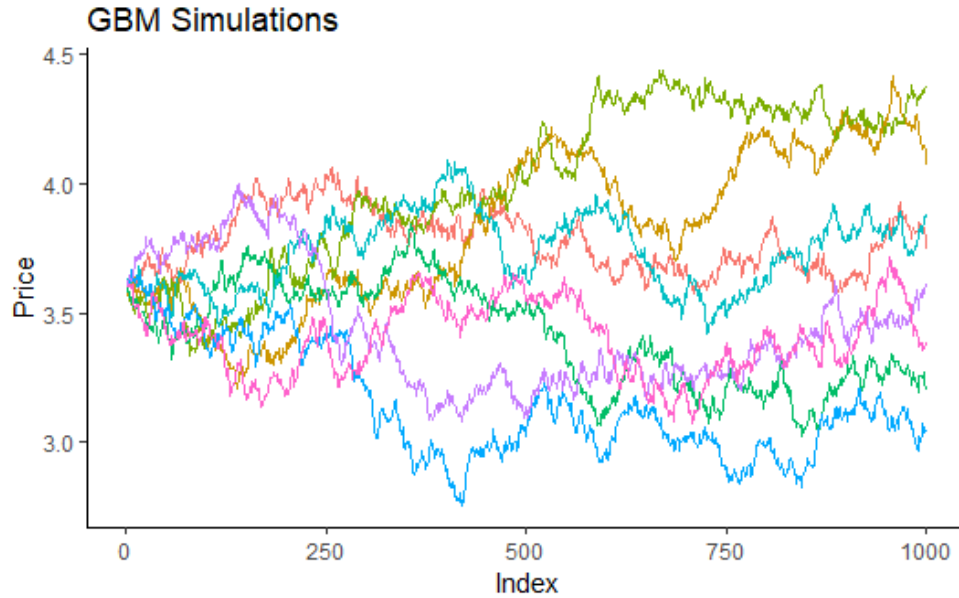
ή

$$X_t = X_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \sigma \Delta W_t \quad (2.4)$$

όπου $X_t = \ln S_t$. Από την σχέση (2.4) φαίνεται ότι η μεταβολή $X_t - X_{t-1}$ ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $(\mu - \sigma^2/2)\Delta t$ και τυπική απόκλιση $\sigma\sqrt{\Delta t}$. Δηλαδή ισχύει:

$$X_t - X_{t-1} \sim N\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t, \sigma^2 \Delta t\right] \quad (2.5)$$

Ο όρος $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)$ δηλώνει τον αναμενόμενο ρυθμό ανάπτυξης του υποκείμενου τίτλου και είναι πάντα μικρότερος ή ίσος από την αναμενόμενη απόδοση του, μ . Η σχέση (2.4) είναι αυτή που χρησιμοποιείται για την προσομοίωση του μοντέλου στον υπολογιστή (Παράρτημα Π.5) . Στο Σχήμα 2.5 φαίνεται η αναπαράσταση ορισμένων τυχαίων μονοπατιών κίνησης Brown.



Σχήμα 2.5 Τυχαία μονοπάτια της γεωμετρικής κίνησης Brown με $\mu = 0.1$ και $\sigma = 0.35$

2.4.4 Μοντέλο Ornstein-Uhlenbeck (Mean Reverting)

Ένα μεγάλο μειονέκτημα της γεωμετρικής κίνησης Brown είναι ότι δεν αντανακλά την τάση των τιμών των ενεργειακών προϊόντων να επιστρέφουν σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο τιμών που καθορίζεται από το κόστος παραγωγής και το επίπεδο ζήτησης. Το πιο συνηθισμένο μοντέλο που λαμβάνει υπόψη αυτή την τάση είναι η διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck [6][11].

Η στοχαστική διαφορική εξίσωση για την διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck δίνεται από την ακόλουθη σχέση :

$$dS_t = \alpha(\mu - \ln S_t)dt + \sigma dW_t \quad (2.6)$$

ενώ για $X_t = \ln S_t$, η παραπάνω σχέση γράφεται :

$$dX_t = \alpha(\mu_L - X_t)dt + \sigma dW_t \quad (2.7)$$

όπου $\mu_L = \mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}$. Η παράμετρος μ αποτελεί την μακροπρόθεσμη μέση τιμή, α είναι η ταχύτητα με την οποία τα μονοπάτια της διαδικασίας θα συγκεντρωθούν γύρω από την μέση τιμή, σ είναι η μεταβλητότητα των ημερήσιων αποδόσεων και W_t κίνηση Brown.

Ο πρώτος όρος (ντετερμινιστικός) ευθύνεται για την επιστροφή της τιμής σε μια ορισμένη μακροπρόθεσμη τιμή. Εάν, για παράδειγμα, η τιμή της X_t είναι αρκετά μικρότερη από την τιμή μίτότε η επόμενη μεταβολή dX_t τείνει να έχει μεγάλη θετική τιμή ώστε να 'σπρώξει' τιμή προς το επίπεδο της μί.

Για να προχωρήσουμε στην προσομοίωση του μοντέλου πρέπει πρώτα να αναπαραστήσουμε την σχέση (2.7) σε διακριτή μορφή. Έχει αποδειχθεί ότι για πολύ μικρές τιμές του Δt μπορεί να γραφτεί με την ακόλουθη μορφή [18]:

$$\Delta X_t = \alpha(\mu_L - X_t)\Delta t + \sigma \Delta W_t \quad (2.8)$$

Το ακριβές μοντέλο που ισχύει για οποιαδήποτε μέγεθος του Δt είναι :

$$X_t = e^{-\alpha \Delta t} X_{t-1} + (1 - e^{-\alpha \Delta t}) \mu_L + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\alpha \Delta t}}{2\alpha}} \varepsilon_t \quad (2.9)$$

όπου $\varepsilon_t \sim N(0,1)$.

Υπολογισμός των παραμέτρων

Για τον υπολογισμό των παραμέτρων της διαδικασίας Ornstein-Uhlenbeck, εφαρμόζουμε την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων στο παρακάτω υπόδειγμα [12]:

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + \varepsilon_t \quad (2.10)$$

όπου y_t οι ημερήσιες αποδόσεις του δείγματος, x_t οι τρέχουσες λογαριθμικές τιμές και $\varepsilon \sim iid(0, \sigma^2)$, δηλαδή οι μεταβλητές $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N$ είναι ανεξάρτητες (independent) και έχουν την ίδια κατανομή (identically distributed). Αφού εκτιμήσουμε τους συντελεστές \hat{a}_0, \hat{a}_1 γράφουμε την σχέση (2.9) στην μορφή :

$$X_t - X_{t-1} = (e^{-\alpha \Delta t} - 1) X_{t-1} + (1 - e^{-\alpha \Delta t}) \mu_L + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\alpha \Delta t}}{2\alpha}} \varepsilon_t \quad (2.11)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (2.10) και (2.11), παρατηρούμε ότι οι τιμές των παραμέτρων μπορούν να υπολογιστούν από τις εξής σχέσεις :

$$\alpha = \frac{-\ln(\hat{a}_1 + 1)}{\Delta t} \quad , \quad \mu = -\frac{\hat{a}_0}{\hat{a}_1} \quad \text{και} \quad \sigma = \sigma_\varepsilon \sqrt{\frac{2 \ln(\hat{a}_1 + 1)}{(\hat{a}_1 + 1)^2 - 1}}$$

όπου σ_ε η τυπική απόκλιση των σφαλμάτων της παλινδρόμησης. Οι τιμές των παραμέτρων για τα διαφορετικά προϊόντα φαίνονται στον Πίνακα 2.3. Με (*) συμβολίζονται οι τιμές που δεν είναι στατιστικά σημαντικές για επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.05$. Ο κώδικας για τον υπολογισμό των παραμέτρων φαίνεται στο Παράρτημα (Π.6)

Μία ακόμη σημαντική παράμετρος της διαδικασίας είναι ο χρόνος (d) που περνάει μέχρι η τιμή να επιστρέψει στο μισό της απόστασης μεταξύ τους τρέχοντος και του μακροπρόθεσμου μέσου επιπέδου,

αγνοώντας τις τυχαίες μεταβολές. Συγκεκριμένα, εάν ορίσουμε ως x την τρέχουσα τιμή, ως \bar{x} το μακροπρόθεσμο μέσο επίπεδο και αγνοήσουμε τους στοχαστικούς όρους, ισχύει :

$$dx = a(x - \bar{x})dt$$

ή

$$\frac{dx}{(x - \bar{x})} = a dt$$

Με ολοκλήρωση από το σημείο $x_0(t_0)$ μέχρι το $x_1(t_1)$ παίρνουμε :

$$\ln \frac{(x_2 - \bar{x})}{(x_1 - \bar{x})} = -a \Delta t$$

Εάν θεωρήσουμε $d = \Delta t$, ισχύει $\frac{(x_2 - \bar{x})}{(x_1 - \bar{x})} = 0.5$ και επομένως υπολογίζουμε :

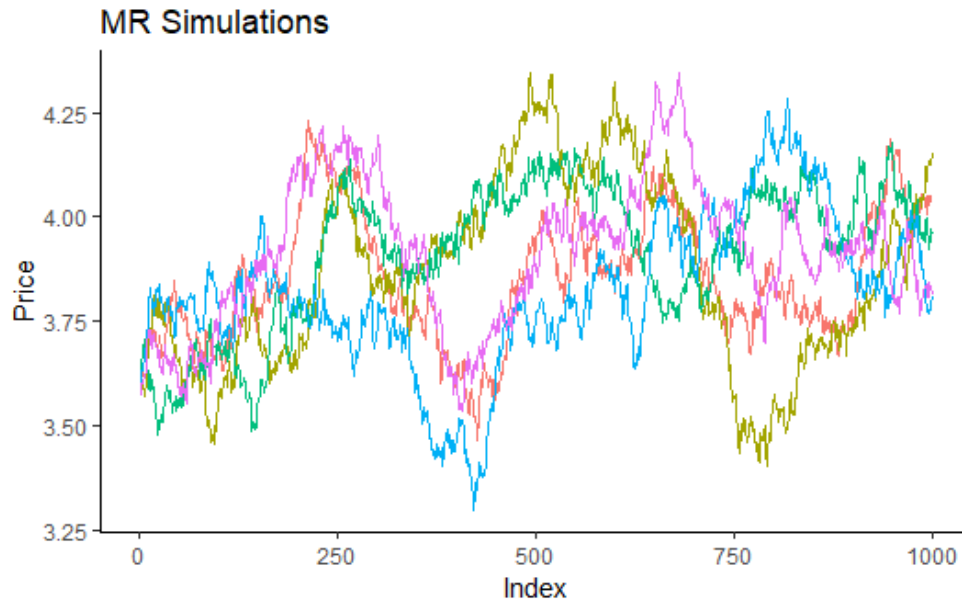
$$d = \frac{\ln 2}{a}$$

όπου a η ταχύτητα επιστροφής προς το μέσο. Η τιμή του d για τα διαφορετικά προϊόντα φαίνεται στον Πίνακα 2.3

Πίνακας 2.3 Παράμετροι της διαδικασίας O-U

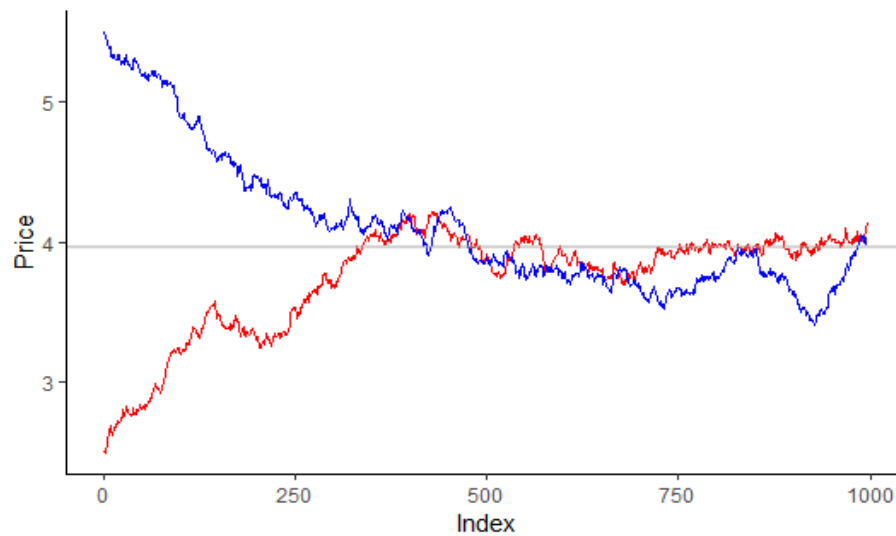
	Αργό πετρέλαιο	Φυσικό αέριο	Άνθρακας	Ηλεκτρική Ενέργεια
α	1.751	3.486	0.661*	32.1
σ	0.375	0.459	0.253	2.384
μ_L	3.975	1.004	4.323	3.514
d	98.6	49.6	-	7.6

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την σχέση (2.9) αναπαριστώνται ορισμένα τυχαία μονοπάτια για την τιμή του αργού πετρελαίου (Σχήμα 2.6) (Παράρτημα Π.7).



Σχήμα 2.6 Τυχαία μονοπάτια της διαδικασίας Ornstein – Uhlenbeck με $\alpha = 1.75$, $\mu_L = 4$ και $\sigma = 0.35$

Το κύριο χαρακτηριστικό του μοντέλου, δηλαδή η τάση επιστροφής της τιμής σε μια συγκεκριμένη τιμή μ_L , φαίνεται στο διάγραμμα που ακολουθεί (σχήμα 2.7). Σε αυτή την περίπτωση έχουμε θέσει και για τα δύο μονοπάτια αρχικές τιμές αρκετά μακριά από την μέση τιμή. Παρατηρούμε ότι μετά από μια χρονική περίοδο τα δύο μονοπάτια συγκλίνουν προς την τιμή μ_L .



Σχήμα 2.7 Ιδιότητα επιστροφής προς ένα μακροπρόθεσμο επίπεδο της διαδικασίας O-U της με $\alpha = 1.75$, $\mu_L = 4$ και $\sigma = 0.35$

2.4.5 Μοντέλο Mean-Reverting Jump Diffusion

Ένα ακόμα σημαντικό χαρακτηριστικό των ενεργειακών προϊόντων είναι οι απότομες ακραίες μεταβολές των τιμών τους (price jumps)[11]. Αυτό συνήθως οφείλεται στην περιορισμένη αποθηκευτική ικανότητα ή στην αδυναμία διαθεσιμότητας/παραγωγής του προϊόντος. Για παράδειγμα ένα ακραίο καιρικό φαινόμενο μπορεί να προκαλέσει την διακοπή λειτουργίας ενός σταθμού και συνεπώς να μειωθεί η προσφορά και να αυξηθεί απότομα η τιμή.

Για να λάβουμε υπόψη την παρουσία των αλμάτων των τιμών προσθέτουμε στο μοντέλο Ornstein-Uhlenbeck τον όρο $k dN_t$ και έτσι έχουμε την επόμενη σχέση:

$$dX_t = a(\mu_L - X_t)dt + \sigma dW_t + k dN_t \quad (2.12)$$

όπου $X_t = \ln S_t$. Ο όρος k αναφέρεται στο σχετικό άλμα της απόδοσης. Ο όρος dN_t αποτελεί μία διαδικασία Poisson και περιγράφει την συχνότητα με την οποία εμφανίζονται τα άλματα. Έστω $N(t)$ συμβολίζει τον αριθμό των συμβάντων στο χρονικό διάστημα $(0, t]$. Μία στοχαστική διαδικασία ονομάζεται διαδικασία Poisson με μέσο ρυθμό (ένταση) λ , εάν ισχύουν οι εξής συνθήκες :

(α) Ισχύει $N(0)=0$

(β) Οι αριθμοί των συμβάντων σε μη επικαλυπτόμενα χρονικά διαστήματα είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

(γ) Για οποιοδήποτε χρονικό διάστημα $(s, s+t]$ με $s \geq 0$ και $t > 0$, ο αριθμός (n) των συμβάντων σε αυτό έχει την κατανομή Poisson με παράμετρο ϕ , δηλαδή ισχύει :

$$P[n = x] = \frac{e^{-\phi t} (\phi t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Θεωρούμε ότι οι διαδικασίες W_t (κίνηση Brown) και N_t (διαδικασία Poisson) είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Υπολογισμός των παραμέτρων

Για να βρούμε τις τιμές των παραμέτρων μ , σ και ϕ πρέπει πρώτα να εντοπιστούν οι αποδόσεις που χαρακτηρίζονται ως άλματα στα δεδομένα που συλλέξαμε. Για αυτό τον σκοπό χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο που ακολουθεί (Παράρτημα Π.8). Αρχικά υπολογίζουμε την τυπική απόκλιση των ημερήσιων αποδόσεων και βρίσκουμε τις αποδόσεις με απόλυτη τιμή μεγαλύτερη από την τιμή $3 \cdot sd_1$, όπου sd_1 η τυπική απόκλιση που υπολογίστηκε αρχικά. Αυτές οι αποδόσεις αναγνωρίζονται ως jumps. Στην συνέχεια υπολογίζουμε ξανά την τυπική απόκλιση, sd_2 , των αποδόσεων χωρίς να συμπεριλάβουμε αυτές που προηγουμένως αναγνωρίστηκαν ως jumps. Εντοπίζουμε ξανά τις αποδόσεις που έχουν απόλυτη τιμή μεγαλύτερη από την τιμή $3 \cdot sd_2$ (ισχύει $sd_2 < sd_1$). Επαναλαμβάνουμε αυτή την διαδικασία μέχρι να μην βρίσκουμε άλλα jumps [11][13].

Έχοντας βρεί όλες τις αποδόσεις που θεωρούνται άλματα υπολογίζουμε την μέση τιμή τους (μ_j), την τυπική τους απόκλιση (σ_j) και τον ρυθμό (ϕ) με τον οποίο εμφανίζονται. Για την τιμή της ϕ ισχύει: $\phi = \text{αριθμός jumps} / \text{χρονική περίοδος παρατηρήσεων (σε ημέρες)}$. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.4.

Πίνακας 2.4 Παράμετροι των αλμάτων των αποδόσεων

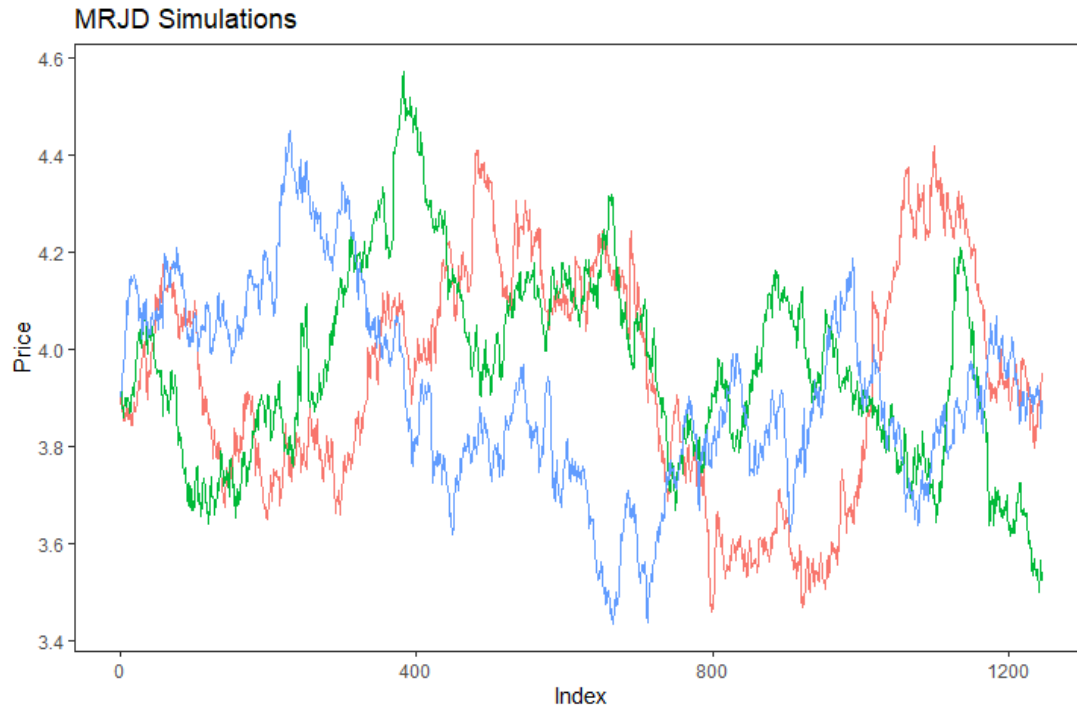
	Αργό πετρέλαιο	Φυσικό αέριο	Άνθρακας	Ηλεκτρική Ενέργεια
μ_j	0.014	0.098	0.039	0.486
σ_j	0.082	0.028	0.036	0.114
ϕ	0.023	0.029	0.074	0.041

Παρατηρούμε ότι οι απότομες αποδόσεις στην ηλεκτρική ενέργεια έχουν πολύ μεγάλο μέγεθος σε σύγκριση με τα υπόλοιπα ενεργειακά αγαθά. Τα άλματα στις αποδόσεις είναι αρκετά σπάνια αφού η συχνότητα εμφάνισης τους είναι πολύ μικρή. Συγκεκριμένα, πολλαπλασιάζοντας με 249 βρίσκουμε ότι για το αργό πετρέλαιο, το αέριο και τον άνθρακα έχουμε αντίστοιχα περίπου 6, 7 και 18 άλματα τον χρόνο ενώ για την ηλεκτρική ενέργεια πολλαπλασιάζοντας με 356 υπολογίζουμε 15 άλματα.

Για την μοντελοποίηση ανεξίτηλων της MRJD διαδικασίας απαιτείται η διακριτή μορφή της σχέσης (2.12), η οποία αποδεικνύεται ότι γράφεται ως εξής :

$$X_t = e^{-\alpha \Delta t} X_{t-1} + (1 - e^{-\alpha \Delta t}) \mu_L + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\alpha \Delta t}}{2\alpha}} \varepsilon_t + J \cdot Z \quad (2.13)$$

Θεωρούμε ότι τα άλματα ακολουθούν κανονική κατανομή και επομένως για τον όρο J ισχύει $J \sim N(\mu_j, \sigma_j)$. Η μεταβλητή Z παίρνει τις τιμές 1 ή 0 ανάλογα με την εμφάνιση άλματος. Για να καθορίσουμε την τιμή της θεωρούμε την μεταβλητή Y που ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0,1]$, δηλαδή ισχύει $Y \sim U[0,1]$. Έτσι θα παίρνουμε $Z=1$ όταν $Y_t \leq \phi$ και $Z=0$ όταν $Y_t > \phi$, όπου ϕ η ένταση με την οποία συμβαίνουν τα άλματα (υπολογίστηκε παραπάνω). Με αυτή την διαδικασία εξασφαλίζουμε ότι η συχνότητα εμφάνισης των αλμάτων ταιριάζει με αυτή που ορίζει η διαδικασία Poisson που αναφέραμε παραπάνω. Η δημιουργία των μονοπατιών MRJD που φαίνονται στο Σχήμα 2.8 έγινε με τον κώδικα που βρίσκεται στο Παράρτημα (Π.9)



Σχήμα 2.8 Τυχαία μονοπάτια της διαδικασίας MRJD με $\alpha=1.75$, $\mu_I=4$, $\sigma=0.375$, $\varphi=0.023$, $\mu_J=0.014$ και $\sigma_J=0.082$

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι για τα μοντέλα O-U και MRJD είναι δύσκολο να καθορίσουμε για μικρές περιόδους εάν πράγματι είναι στατιστικά σημαντική η ιδιότητα επιστροφής προς μια καθορισμένη μακροπρόθεσμη τιμή. Συνήθως απαιτείται η μελέτη δεδομένων μεγάλων χρονικών περιόδων για να μπορέσουμε να βγάλουμε ασφαλή συμπεράσματα [12]. Μία άλλη δυσκολία στην χρήση αυτών των μοντέλων είναι η συμπεριφορά του μακροπρόθεσμου επιπέδου (μ_I). Στην μελέτη μας θεωρήσαμε ότι έχει σταθερή τιμή. Στην πραγματικότητα όμως ενδέχεται να μεταβάλλεται μετά από ορισμένο χρονικό διάστημα. Για παράδειγμα, η χρήση μιας νέας τεχνολογίας μπορεί μελλοντικά να μειώσει σημαντικά το κόστος παραγωγής ενός ενεργειακού αγαθού και να οδηγήσει πιθανώς στην μείωση της τιμής του στην αγορά. Για αυτό τον λόγο πολλές φορές χρησιμοποιείται το μοντέλο του Merton, το οποίο ουσιαστικά αποτελεί μια γεωμετρική κίνηση Brown με προσθήκη αλμάτων και περιγράφεται από την παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t + k S_t dN_t \quad (2.14)$$

Αποδεικνύεται ότι με την προσέγγιση Euler, η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφτεί στην παρακάτω διακριτή μορφή :

$$\Delta X_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \Delta W_t + (\mu_J + u \sigma_J) Z \quad (2.15)$$

όπου $X_t = \ln S_t$ και $u \sim N(0, 1)$. Επειδή έχει χρησιμοποιηθεί η προσέγγιση Euler εισάγεται ένα σφάλμα διακριτοποίησης, το οποίο όμως είναι σχεδόν αμελητέο όταν ορίζουμε πολύ μικρές τιμές του διαστήματος Δt .

3. ΜΟΝΤΕΛΑ ΘΕΩΡΙΑΣ BLACK-SCHOLES

3.1 Το Μοντέλο Black-Scholes

Το μοντέλο που αναπτύχθηκε από τους Black, Scholes και Merton αποτελεί την πιο γνωστή μέθοδο αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης Ευρωπαϊκού τύπου. Λόγω της απλότητας του και της ταχύτητας με την οποία δίνει λύση στο πρόβλημα της τιμολόγησης έγινε πολύ δημοφιλές στις αγορές παραγώγων και συνέβαλε σε μεγάλο βαθμό στην ανάπτυξη τους. Η διαφορική εξίσωση Black-Scholes είναι μία μερική διαφορική εξίσωση που πρέπει να ικανοποιείται από την τιμή του χρηματοοικονομικού παραγώγου καθ' όλη την διάρκεια ζωής του. Η βασική ιδέα πίσω από την ανάπτυξη του μοντέλου είναι ότι μπορεί να κατασκευασθεί χαρτοφυλάκιο με μηδενικό κίνδυνο αγοράς που θα αποτελείται από μία θέση σε μετοχή και μία θέση σε παράγωγο της ίδιας μετοχής. Ένας επενδυτής, εκμεταλλευόμενος την τέλεια συσχέτιση που υπάρχει για μικρό χρονικό διάστημα μεταξύ της μετοχής και του παραγώγου, μπορεί να δημιουργήσει χαρτοφυλάκιο μηδενικού κινδύνου, αφού το κέρδος ή η ζημία της μίας θέσης εξαιρείται από την ζημία ή το κέρδος της άλλης [2].

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη της μερικής διαφορικής εξίσωσης πρέπει να αναφερθούν οι υποθέσεις στις οποίες βασίζεται :

- 1) Η τιμή της μετοχής ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown με τις μεταβλητές μ και σ σταθερές.
- 2) Δεν υπάρχουν περιορισμοί στις ανοιχτές πωλήσεις.
- 3) Το κόστος συναλλαγής είναι μηδενικό.
- 4) Δεν υπάρχει όφελος ή ζημία από το κράτημα του υποκείμενου αγαθού. Δηλαδή δεν λαμβάνονται υπόψη τα μερίσματα ή τα κόστη αποθήκευσης.
- 5) Δεν υπάρχει δυνατότητα κερδοσκοπίας χωρίς ανάληψη κινδύνου.
- 6) Το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι σταθερό καθ' όλη την διάρκεια ζωής του παραγώγου.
- 7) Η αγορά ή πώληση του υποκείμενου αγαθού μπορεί να εκτελεστεί οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Δηλαδή οι αγορές χαρακτηρίζονται από τέλεια ρευστότητα.

3.1.1 Εξαγωγή της διαφορικής εξίσωσης B-S

Θεωρούμε ένα χαρτοφυλάκιο αξίας V , που αποτελείται από μία θέση αγοράς σε δικαίωμα αγοράς (long call) και μία θέση πώλησης δ τεμαχίων της υποκείμενης μετοχής. Γνωρίζοντας ότι η τιμή του δικαιώματος αποτελεί συνάρτηση της τιμής S του υποκείμενου τίτλου (μετοχή) και του χρόνου, μπορούμε να την ορίσουμε ως $f_t = f(S, t)$. Τότε η αξία του χαρτοφυλακίου την χρονική στιγμή t δίνεται από την σχέση :

$$V_t = f_t - \delta \cdot S \quad (3.1)$$

και επομένως η μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα είναι :

$$dV_t = df_t - \delta \cdot dS \quad (3.2)$$

Με εφαρμογή του λήμματος Itô για την τιμή του δικαιώματος $f(S, t)$ παίρνουμε την σχέση:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} dt$$

όπου σ η ετήσια μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου. Με αντικατάσταση της παραπάνω εξίσωσης στην σχέση (3.2) προκύπτει :

$$dV = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} dt - \delta \cdot dS \quad (3.3)$$

Όπως αναφέρθηκε στις υποθέσεις του μοντέλου, η τιμή της μετοχής ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown και συνεπώς ισχύει $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$, όπου $dW_t \sim N(0, dt)$. Παρατηρούμε ότι για να έχουμε χαρτοφυλάκιο χωρίς κίνδυνο πρέπει να εξαλείψουμε τους όρους της σχέσης (3.3) που εισάγουν αβεβαιότητα. Ο μοναδικός τέτοιος όρος είναι ο dS αφού περιέχει την στοχαστική διαδικασία dW_t . Έτσι θέτουμε $\delta = \frac{\partial f}{\partial S}$ και η σχέση (3.3) γράφεται :

$$dV = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} dt \quad (3.4)$$

Σύμφωνα με το πλαίσιο στο οποίο λειτουργεί το μοντέλο B-S, το χαρτοφυλάκιο πρέπει να έχει την ίδια απόδοση με αυτήν μιας επένδυσης χωρίς κίνδυνο. Δηλαδή, εάν ορίσουμε ως r το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου και θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα αρχικό ποσό V_0 που ανατοκίζεται συνεχώς, έχουμε :

$$V_t = V_0 e^{rt} \Rightarrow \frac{dV_t}{dt} = r V_0 e^{rt} \Rightarrow dV_t = r V_t dt \quad (3.5)$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις (3.4), (3.5) παίρνουμε :

$$\frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} dt = r V_t dt \quad (3.6)$$

και με αντικατάσταση της (3.1) στην (3.6) καταλήγουμε :

$$\frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 S} dt = r \left(f - \frac{\partial f}{\partial S} S \right) dt$$

ή

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 S} = r \cdot f \quad (3.7)$$

Η τελευταία εξίσωση αποτελεί την μερική διαφορική εξίσωση των Black-Scholes [2][14][15]. Για την λύση της απαιτείται ο ορισμός των οριακών συνθηκών. Στην περίπτωση του δικαιώματος ευρωπαϊκού τύπου αυτές οι συνθήκες δίνονται από την αξία του στην λήξη του ($t=T$). Συγκεκριμένα για το δικαίωμα αγοράς έχουμε :

$$f(S, T) = \max(S_T - K, 0)$$

ενώ για το δικαίωμα πώλησης ισχύει :

$$f(S, T) = \max(K - S_T, 0)$$

όπου K η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος.

3.1.2 Εξισώσεις Black-Scholes

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης (3.7) για τις κατάλληλες οριακές συνθήκες μας δίνει τις εξισώσεις αποτίμησης των δικαιωμάτων αγοράς (call) και πώλησης (put) ευρωπαϊκού τύπου, οι οποίες είναι αντίστοιχα:

$$c(t, T) = S(t)N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \quad \text{και} \quad p = Ke^{-rT}N(-d_2) - S(t)N(-d_1)$$

όπου $S(t)$ η τιμή της μετοχής στην χρονική στιγμή t , K η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος, r το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, σ η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής, T ο χρόνος μέχρι την λήξη του δικαιώματος και $N(\cdot)$ η αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας για μια τυποποιημένη κανονική κατανομή. Για τα d_1 και d_2 ισχύει :

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S(t)}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma \sqrt{(T-t)}} \quad , \quad d_2 = \frac{\ln \frac{S(t)}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma \sqrt{(T-t)}}$$

Το $N(d_2)$ συμβολίζει την πιθανότητα η τιμή της μετοχής στη λήξη να ξεπεράσει την τιμή εξάσκησης (για τα Out-the-Money δικαιώματα) ή να παραμείνει πάνω από αυτή (για τα In-the-Money δικαιώματα). Δηλαδή, για τον κάτοχο δικαιώματος αγοράς το $N(d_2)$ είναι η πιθανότητα εξάσκησης του δικαιώματος, ενώ για τον κάτοχο δικαιώματος πώλησης, ο οποίος περιμένει στη λήξη η μετοχή να βρίσκεται κάτω από την K , η πιθανότητα εξάσκησης είναι $N(-d_2)$ ή $1 - N(d_2)$ [2][10].

Παράδειγμα: Έστω μετοχή που διαπραγματεύεται στα \$100 με ετήσια τυπική απόκλιση 20%, επιτόκιο χωρίς κίνδυνο ίσο με 5% και δικαίωμα αγοράς διάρκειας ενός έτους με τιμή εξάσκησης \$120. Τότε

$$d_2 = \frac{\ln \frac{100}{120} + (5\% - \frac{20\%^2}{2})}{20\%} = \frac{-18.23\%}{20\%} + \frac{3\%}{20\%} = -0.9115 + 0.15 = -0.7615$$

Το -0.9115 δείχνει πόσες τυπικές αποκλίσεις μακριά είναι η τρέχουσα τιμή από την τιμή εξάσκησης, ενώ το 0.15 δείχνει κατά πόσες τυπικές αποκλίσεις το επιτόκιο άνευ κινδύνου βοηθάει στην εξάσκηση του δικαιώματος. Η πιθανότητα εξάσκησης του δικαιώματος αγοράς αυτού είναι ίση με $N(-0.7615) = 22.31\%$

3.1.3 Αποτίμηση ουδέτερου κινδύνου

Παρατηρούμε ότι στην μερική διαφορική εξίσωση (3.7) δεν εμφανίζεται ο όρος μ που αποτελεί την μέση απόδοση της τιμής της μετοχής. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι επενδυτές είναι ουδέτεροι ως προς τον κίνδυνο. Αυτό σημαίνει ότι δεν θα πρέπει αναμένουν μεγαλύτερη απόδοση ως ανταμοιβή για το μεγαλύτερο ρίσκο που αναλαμβάνουν και επομένως η αναμενόμενη απόδοση κάθε επένδυσης ισούται με την απόδοση μηδενικού κινδύνου. Πρακτικά όμως, καμία πραγματική απόδοση δεν υπάρχει χωρίς καθόλου κίνδυνο, αφού και οι ασφαλέστερες επενδύσεις μπορεί να οδηγήσουν σε αρνητικές ή τουλάχιστον μικρότερες της αναμενόμενης αποδόσεις. Οι περισσότεροι επενδυτές θεωρούν ότι το πιο κοντινό σε επιτόκια μηδενικού κινδύνου είναι οι αποδόσεις κρατικών ομολόγων, όπως για παράδειγμα των Ηνωμένων Πολιτειών της Αμερικής. Δηλαδή τα επιτόκια με τα οποία είναι πρόθυμοι οι επενδυτές να δανείσουν σε ένα κράτος. Ένα άλλο χαρακτηριστικό των επιτοκίων χωρίς κίνδυνο είναι ότι μεταβάλλονται ανάλογα με τον χρονικό ορίζοντα της επένδυσης (σε φυσιολογικές αγορές το επιτόκιο που απαιτείται είναι μεγαλύτερο για μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα). Έτσι είναι λογικό για τιμολόγηση δικαιωμάτων με διαφορετική διάρκεια να χρησιμοποιηθούν διαφορετικά επιτόκια άνευ κινδύνου. Για παράδειγμα, για διάστημα ενός τριμήνου θα χρησιμοποιούσαμε την απόδοση του Αμερικάνικου γραμματίου (Treasury Bill) αντίστοιχης διάρκειας. Τα γραμμάτια έχουν συνήθως ονομαστική αξία \$1.000, το οποίο είναι και το ποσό που το κράτος πρέπει να επιστρέψει στους

πιστωτές στην λήξη. Τα προϊόντα αυτά για να έχουν θετική απόδοση διαπραγματεύονται πάντα με έκπτωση. Εάν ένα γραμμάτιο τρίμηνης διάρκειας διαπραγματεύεται στα \$995 τότε ισχύει ότι :

$$995 \times (1 + r_{0.25}) = 1000 \Rightarrow r_{0.25} = 0.5025\%$$

Βέβαια, τα επιτόκια εμφανίζονται πάντα σε ετήσια κλίμακα και διαφέρουν ανάλογα με τη συχνότητα ανατοκισμού που επιλέγουμε. Με τριμηνιαίο ανατοκισμό, το παραπάνω επιτόκιο σε ετήσια κλίμακα θα ήταν ίσο με:

$$(1 + 0.5025\%)^4 = 1 + r \Rightarrow r = 2.025\%$$

Παρακάτω η τιμολόγηση των δικαιωμάτων θα γίνει με συνεχή ανατοκισμό, άρα το ισοδύναμο επιτόκιο που θα χρησιμοποιούσαμε στην εξίσωση ισούται με :

$$\left(1 + \frac{2.025\%}{4}\right)^4 = e^r \Rightarrow r = 2.0199\%$$

Έτσι, εάν υποθέσουμε ότι επενδύουμε \$100 (παρούσα αξία) για 3 χρόνια με το παραπάνω επιτόκιο θα εισπράξουμε :

$$100 \times e^{3 \times 2.019\%} = \$106.25 \text{ (μελλοντική αξία)}$$

Η αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή η διαδικασία με την οποία πηγαίνουμε από την μελλοντική αξία στην παρούσα, ονομάζεται *προεξόφληση*. Για να κάνουμε προεξόφληση χρησιμοποιούμε έναν προεξοφλητικό παράγοντα που εξαρτάται από το ύψος του επιτοκίου. Στο προηγούμενο παράδειγμα για να υπολογίσουμε την παρούσα αξία κάνουμε :

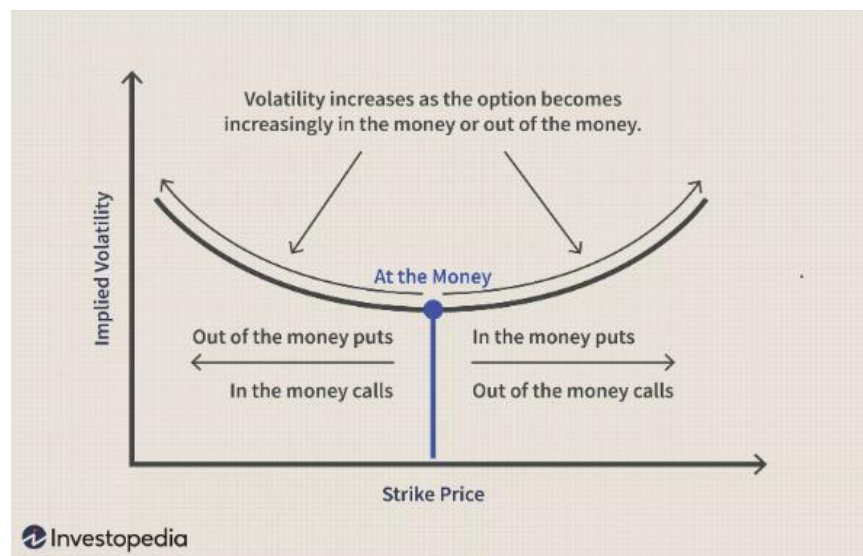
$$106.25 \times e^{-3 \times 2.019\%} = \$100$$

Μια σημαντική παραδοχή που κάνουμε σε έναν κόσμο ουδέτερου κινδύνου είναι ότι για την εύρεση της παρούσας αξίας των χρηματικών ροών χρησιμοποιούμε ως προεξοφλητικό παράγοντα το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο[2][16].

3.1.4 Υπονοούμενη Μεταβλητότητα (Implied Volatility)

Στις εξισώσεις Black & Scholes παρατηρούμε ότι μπορούμε να γνωρίζουμε τις τιμές όλων των παραμέτρων αφού το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, η τιμή του υποκείμενου τίτλου, η ημερομηνία λήξης του παραγώγου και η τιμή εξάσκησης του είναι διαθέσιμα στους επενδυτές. Επιπλέον γνωστή είναι και η τιμή στην οποία διαπραγματεύεται το δικαίωμα κάθε χρονική στιγμή. Μοναδική άγνωστη παράμετρος είναι η μεταβλητότητα (σ) του υποκείμενου αγαθού και η οποία υπολογίζεται εύκολα χρησιμοποιώντας κάποια επαναληπτική μέθοδο. Η μεταβλητότητα που υπολογίζουμε με αυτό τον

τρόπο ονομάζεται *υπονοούμενη μεταβλητότητα*. Να σημειωθεί ότι η υπονοούμενη μεταβλητότητα είναι ένας άλλος τρόπος έκφρασης του δικαιώματος, δηλαδή η τιμή του δικαιώματος δεν εξαρτάται από την υπονοούμενη μεταβλητότητα. Η τιμή που βλέπουμε στην αγορά δείχνει πως αναμένουν οι επενδυτές να κινηθεί μελλοντικά η τιμή της υποκείμενης μετοχής. Έτσι, στην περίπτωση του δικαιώματος αγοράς, εάν προσδοκούν ανοδική πορεία της μετοχής, αυξάνεται η ζήτηση του δικαιώματος πάνω στην συγκεκριμένη μετοχή και συνεπώς η τιμή του, με αποτέλεσμα να παρατηρείται μεγάλη υπονοούμενη μεταβλητότητα. Επιπλέον, είδαμε ότι οι εξισώσεις Black & Scholes βασίζονται στην υπόθεση ότι οι αποδόσεις ακολουθούν κανονική κατανομή. Όμως, σύμφωνα με την ανάλυση που έγινε Ενότητα 2.1.2, γνωρίζουμε ότι η πραγματική κατανομή τους έχει πιο παχιές ουρές. Οι επενδυτές λαμβάνουν υπόψη τους αυτή την πληροφορία, δηλαδή κατανοούν ότι οι μεγάλες κατά απόλυτη τιμή αποδόσεις είναι πιο πιθανές στην πραγματικότητα και έτσι έχουμε μεγαλύτερη ζήτηση των Out-the-Money και In-the-Money δικαιωμάτων[2][17]. Αυτό φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 3.1 Χαμόγελο μεταβλητότητας (Volatility Smile) [7]

3.2 BLACK '76

Όπως εξηγήσαμε στο 1^ο κεφάλαιο, στις αγορές ενέργειας τα δικαιώματα προαίρεσης τις περισσότερες φορές έχουν ως υποκείμενο τίτλο ένα συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης, όχι τον ίδιο το αγαθό. Το 1976, ο Black παρουσίασε μία παραλλαγή του μοντέλου B-S που δίνει λύση στην τιμολόγηση αυτών των δικαιωμάτων.

3.2.1 Σχέση μεταξύ τιμής ΣΜΕ και τρέχουσας τιμής αγαθού

Προτού αναλύσουμε το μοντέλο Black, είναι απαραίτητη η περιγραφή της σχέσης που συνδέει την τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου (spot price) με την τιμή του ΣΜΕ. Αρχικά, αναφερόμαστε στην περίπτωση που ο υποκείμενος τίτλος είναι μια μετοχή που δεν πληρώνει μέρισμα ώστε να προχωρήσουμε στην συνέχεια στην πιο περίπλοκη περίπτωση του εμπορεύματος. Υποθέτουμε ότι ένας επενδυτής, την χρονική στιγμή t μπορεί να δημιουργήσει δύο χαρτοφυλάκια. Το πρώτο αποτελείται από θέση αγοράς σε ΣΜΕ ενώ για το δεύτερο δανειζεται από την τράπεζα ένα χρηματικό ποσό και αγοράζει την μετοχή πάνω στην οποία είναι γραμμένο το ΣΜΕ. Στην πρώτη περίπτωση, στην λήξη T του συμβολαίου, αγοράζει την μετοχή στην τιμή $F_{t,T}$ και την πουλάει στην αγορά στην τιμή S_T και επομένως το κέρδος δίνεται από την σχέση : $S_T - F_{t,T}$. Στην δεύτερη περίπτωση, δανειζεται το ποσό S_t με επιτόκιο r και αγοράζει την μετοχή. Έτσι, την χρονική στιγμή T ο επενδυτής έχει κέρδος : $S_T - S_t e^{r(T-t)}$. Θεωρώντας ότι βρισκόμαστε σε αγορά που δεν υπάρχει η δυνατότητα εξισορροπητικής κερδοσκοπίας (no arbitrage), ο επενδυτής πρέπει να είναι αδιάφορος για το ποιο από τα δύο χαρτοφυλάκια πρέπει να επιλέξει [19]. Δηλαδή πρέπει να ισχύει :

$$S_T - F_{t,T} = S_T - S_t e^{r(T-t)}$$

ή

$$F_{t,T} = S_t e^{r(T-t)} \quad (3.8)$$

Ένα σημαντικό συμπέρασμα που προκύπτει από την εξίσωση (3.8) είναι ότι την χρονική στιγμή t , η τιμή ενός ΣΜΕ με λήξη T ισούται με την αναμενόμενη τιμή του υποκείμενου τίτλου, σε κόσμο ουδέτερου κινδύνου, μετά από χρονικό διάστημα $T - t$. Δηλαδή, ισχύει :

$$F_{t,T} = E(S_T) \quad (3.9)$$

Μια σημαντική διαφορά στις αγορές ενέργειας είναι ότι τα εμπορεύματα (π.χ. άνθρακας, πετρέλαιο) πρέπει να αποθηκεύονται με αποτέλεσμα ο επενδυτής να επιβαρύνεται με το κόστος αποθήκευσης [2].

Το κόστος αποθήκευσης συνδέεται με τις δαπάνες που αφορούν όλες τις διαδικασίες αποθήκευσης και διατήρησης του προϊόντος στην επιθυμητή κατάσταση. Εξαίρεση σε αυτή την κατηγορία αποτελεί η ηλεκτρική ενέργεια που δεν μπορεί να αποθηκευτεί, παρά μόνον με την μέθοδο της αντλησιοταμίευσης.

Ένας ακόμη όρος που εμφανίζεται στα ΣΜΕ που έχουν υποκείμενο τίτλο κάποιο εμπόρευμα είναι η απόδοση ευκολίας (convenience yield) και εκφράζει το όφελος που προκύπτει από την κατοχή του εμπορεύματος έναντι της κατοχής του ΣΜΕ [2]. Για παράδειγμα, ο ιδιοκτήτης ενός διυλιστηρίου μπορεί να χρησιμοποιήσει το αποθηκευμένο αργό πετρέλαιο για την παραγωγή κάποιου προϊόντος (π.χ κηροζίνη) που εκείνη την περίοδο έχει υψηλή τιμή. Επιπλέον, με την κατοχή του εμπορεύματος ένας παραγωγός εξασφαλίζει την ομαλή λειτουργία της μονάδας του και δεν κινδυνεύει από απότομες ελλείψεις του συγκεκριμένου αγαθού στην αγορά. Η τιμή της απόδοσης ευκολίας δεν είναι συγκεκριμένη αλλά επιλέγεται από τον κάθε επενδυτή. Ένας παράγοντας που την επηρεάζει είναι η πληρότητα ή έλλειψη αποθεμάτων. Σε περίπτωση που υπάρχει πληρότητα στις αποθήκες, οι επενδυτές θεωρούν ότι υπάρχει μικρή πιθανότητα να υπάρξει έλλειψη του αγαθού στο άμεσο μέλλον και επομένως η απόδοση ευκολίας παίρνει μικρή τιμή ενώ στην αντίθετη περίπτωση (δηλ. έλλειψη αποθεμάτων), θεωρούν ότι συμφέρει η κατοχή του αγαθού και επομένως η απόδοση ευκολίας τείνει να έχει μεγάλη τιμή.

Εάν θεωρήσουμε ότι η απόδοση ευκολίας συμβολίζεται με y και ότι το κόστος αποθήκευσης u εκφράζεται ως ποσοστό της τιμής του αγαθού, τότε για την τιμή του ΣΜΕ ισχύει :

$$F_{t,T} = S_t e^{(r+u-y)(T-t)} \quad (3.10)$$

Στην συνέχεια της εργασίας θα θεωρούμε ότι στην απόδοση ευκολίας (y) θα εμπεριέχεται και το κόστος αποθήκευσης (u) και επομένως θα ισχύει :

$$F_{t,T} = S_t e^{(r-y)(T-t)} \quad (3.11)$$

Αποδεικνύεται ότι όταν η τιμή του ΣΜΕ δίνεται από την σχέση (3.11), η μεταβλητότητα του είναι σταθερή και ίση με την μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου, δηλαδή ισχύει :

$$\sigma_F(t, T) = \sigma \quad (3.12)$$

Η απόδειξη της παραπάνω σχέσης επιτυγχάνεται με την εφαρμογή του λήμματος $\hat{I}to$. Συγκεκριμένα, εάν θεωρήσουμε ότι για τιμή του υποκείμενου τίτλου ισχύει

$$dS = (\mu - y)Sdt + \sigma SdW \quad (3.13)$$

όπου y η απόδοση ευκολίας, τότε σύμφωνα με το λήμμα του $\hat{I}to$ η τιμή F του ΣΜΕ ακολουθεί την εξής διαδικασία :

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial S} (\mu - y)S + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \right] dt + \sigma S \frac{\partial F}{\partial S} dW \quad (3.14)$$

Από την εξίσωση (3.11) υπολογίζουμε :

- $\frac{\partial F}{\partial S} = e^{(r-y)(T-t)}$
- $\frac{\partial^2 F}{\partial^2 S} = 0$
- $\frac{\partial F}{\partial t} = -(r-y)Se^{(r-y)(T-t)}$

Με αντικατάσταση των παραπάνω εξισώσεων στην σχέση (3.14) προκύπτει :

$$dF = [e^{(r-y)(T-t)}(\mu - y)S - (r - y)Se^{(r-y)(T-t)}]dt + \sigma Se^{(r-y)(T-t)}dW \quad (3.15)$$

η οποία με αντικατάσταση της σχέσης (3.11) τελικά γράφεται :

$$dF = (\mu - r)Fdt + \sigma FdW \quad (3.16)$$

Επειδή όμως η τιμολόγηση πραγματοποιείται σε κόσμο ουδέτερου κινδύνου ισχύει $\mu = r$ και επομένως καταλήγουμε στην σχέση :

$$\frac{dF}{F} = \sigma dW \quad (3.17)$$

η οποία αποδεικνύει την ορθότητα της σχέσης $\sigma_F(t, T) = \sigma$.

3.2.2 Μοντέλο Black '76

Όπως εξηγήσαμε και στο 1^ο Κεφάλαιο, στις ενεργειακές αγορές είναι πολύ διαδεδομένη η διαπραγμάτευση δικαιωμάτων προαίρεσης που είναι γραμμένα πάνω σε συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης και όχι στο ίδιο το προϊόν. Έτσι, η τιμολόγηση αυτών των δικαιωμάτων δεν είναι εφικτή με την χρήση των εξισώσεων Black- Scholes. Η λύση στο συγκεκριμένο πρόβλημα τιμολόγησης δίνεται από μοντέλο Black '76. Το μοντέλο Black '76 αποτελεί ουσιαστικά μια παραλλαγή του μοντέλου των Black- Scholes και επομένως για την εξαγωγή των εξισώσεων του χρησιμοποιούμε την ίδια λογική. Συγκεκριμένα, θεωρούμε ένα χαρτοφυλάκιο αξίας V που δημιουργείται με την θέση πώλησης σε δ συμβόλαια και την αγορά ενός call option. Η αξία του ΣΜΕ κάθε χρονική στιγμή t συμβολίζεται με F_t ενώ η αξία του δικαιώματος δίνεται από την σχέση $f_t = f(F, t)$. Στο 1^ο κεφάλαιο είδαμε ότι για να πάρει θέση ένας επενδυτής σε ΣΜΕ απαιτείται η καταβολή ενός μικρού ποσού (initial margin). Εάν θεωρήσουμε αμελητέο αυτό το ποσό, τότε για την τιμή του ΣΜΕ ισχύει $F_t = 0$ και επομένως η αξία κάθε χρονική στιγμή δίνεται από την παρακάτω σχέση :

$$V_t = f_t \quad (3.18)$$

ενώ για την μεταβολή της αξίας ισχύει :

$$dV_t = df_t - \delta \cdot dF \quad (3.19)$$

Η μεταβολή dF οφείλεται στον ημερήσιο διακανονισμό των futures (εδώ θεωρούμε ότι ο διακανονισμός γίνεται σε συνεχές χρόνο). Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με την περίπτωση του μοντέλου Black-Scholes καταλήγουμε στην εξής εξίσωση :

$$rf = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 F^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 F} = \quad (3.20)$$

Από την λύση της παραπάνω εξίσωσης με συνοριακές συνθήκες $f(F, T) = \max(F_T - K, 0)$ για δικαίωμα αγοράς και $f(F, T) = \max(K - F_T, 0)$ για δικαίωμα πώλησης, προκύπτουν οι εξισώσεις του μοντέλου Black '76 [11][19]. Έτσι ένα δικαίωμα αγοράς ή πώλησης που λήγει την στιγμή T και έχει ως υποκείμενο τίτλο συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης που λήγει την στιγμή s , έχει αξία αντίστοιχα :

$$c(t, s, T) = e^{-r(T-t)} [F(t, s)N(d_1) - KN(d_2)]$$

και

$$p(t, s, T) = e^{-r(T-t)} [KN(-d_2) - F(t, s)N(-d_1)]$$

όπου

$$d_1 = \frac{\ln \frac{F(t,s)}{K} + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma \sqrt{(T-t)}} \quad , \quad d_2 = \frac{\ln \frac{F(t,s)}{K} - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma \sqrt{(T-t)}}$$

3.3 Μοντέλο Clewlow – Strickland

Οι εξισώσεις των μεθόδων Black – Scholes και Black '76 στηρίζονται πάνω στην υπόθεση ότι ο υποκείμενος τίτλος ακολουθεί την γεωμετρική κίνηση Brown. Στις αγορές ενέργειας όμως, όπως είδαμε στο 2ο κεφάλαιο οι τιμές των προϊόντων εμφανίζουν το χαρακτηριστικό της επιστροφής προς μια μακροπρόθεσμη τιμή. Βασιζόμενοι στην θεωρία που ανέπτυξαν οι Black και Scholes για την εξαγωγή του κλασσικού μοντέλου, μπορούμε να καταλήξουμε σε μια λύση κλειστής μορφής για τιμολόγηση

δικαιωμάτων για την περίπτωση που η τιμή του υποκείμενου τίτλου ακολουθεί την παρακάτω διαδικασία :

$$dS_t = \alpha(\mu - \lambda - \ln S_t)dt + \sigma dW_t \quad (3.21)$$

όπου μ η μακροπρόθεσμη τιμή και σ η μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου [11]. Η παράμετρος λ σχετίζεται με την ανταμοιβή που περιμένουν οι επενδυτές για τον επιπλέον κίνδυνο που λαμβάνουν σε μία επένδυση (θα μελετηθεί αναλυτικά στο 5^ο Κεφάλαιο). Πριν προχωρήσουμε στην διαδικασία εξαγωγής των εξισώσεων για την τιμή του δικαιώματος πάνω σε συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης πρέπει να καθορίσουμε την σχέση που υπάρχει ανάμεσα σ' ένα προϊόν του οποίου η μεταβολή δίνεται από την σχέση (3.21) και ενός ΣΜΕ πάνω στο συγκεκριμένο προϊόν. Ο πιο απλός τρόπος εύρεσης αυτής της σχέσης είναι με την δημιουργία ενός χαρτοφυλακίου μηδενικού κινδύνου (όπως κάναμε και στην περίπτωση των εξισώσεων B-S). Η διαφορά είναι ότι τώρα θεωρούμε ότι το χαρτοφυλάκιο αποτελείται από μετοχές και ένα συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης (αντί για option). Ακολουθώντας τον ίδιο συλλογισμό καταλήγουμε στην αντίστοιχη σχέση της (3.7), που γράφεται :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \alpha(\mu - \lambda - \ln S)S \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = r \cdot F \quad (3.22)$$

Λύνοντας τις παραπάνω εξισώσεις με τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες [11], βρίσκουμε ότι η τιμή ενός ΣΜΕ με λήξη T δίνεται από την ακόλουθη σχέση :

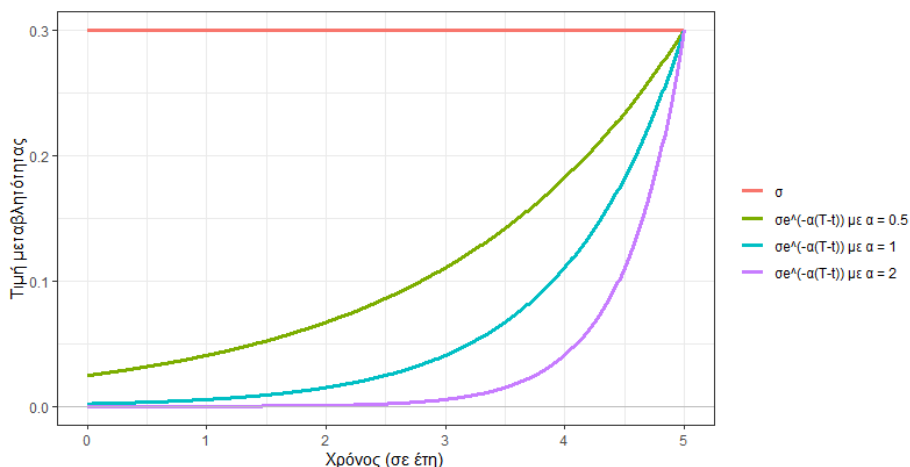
$$F_{t,T} = \exp[e^{-\alpha(T-t)} \ln S_t + (1 - e^{-\alpha(T-t)}) \left(\mu - \lambda - \frac{\sigma^2}{2\alpha} \right) + \frac{\sigma^2}{4\alpha} (1 - e^{-2\alpha(T-t)})] \quad (3.23)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με την οποία αποδείξαμε στην υποενότητα 3.2.1 ότι ισχύει $\sigma_F(t, T) = \sigma$, για την περίπτωση της σχέσης (3.9), βρίσκουμε ότι όταν η τιμή F δίνεται από την σχέση (3.21) για την μεταβλητότητα του ΣΜΕ ισχύει :

$$\sigma_F(t, T) = \sigma e^{-\alpha(T-t)} \quad (3.24)$$

Παρατηρούμε ότι τώρα η μεταβλητότητα των ΣΜΕ δεν είναι σταθερή αλλά αυξάνεται όσο πλησιάζει η ημερομηνία λήξης του συμβολαίου. Αυτό το χαρακτηριστικό ταιριάζει περισσότερο με την πραγματικότητα όπου μια νέα πληροφορία στην αγορά έχει μικρότερη επιρροή στην τιμή των ΣΜΕ που είναι μακριά από την λήξη τους. Επιπλέον, βλέπουμε ότι όσο μικρότερη είναι η τιμή της παραμέτρου α (ταχύτητα επιστροφής σ' ένα μακροπρόθεσμο επίπεδο), η μεταβλητότητα των ΣΜΕ πλησιάζει στην

μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου. Το παρακάτω σχήμα μας βοηθάει να δούμε πώς η τιμή της α επηρεάζει τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η σ_F . Ο κώδικας που αντιστοιχεί στο Σχήμα 3.2 φαίνεται στο Παράρτημα (Π.10)



Σχήμα 3.2 Μεταβλητότητα των ΣΜΕ με την πάροδο του χρόνου

Οι Clewlow και Strickland [11] απέδειξαν ότι η τιμή ενός δικαιώματος ευρωπαϊκού τύπου με λήξη T πάνω σε ΣΜΕ με λήξη s , για το οποίο ισχύει η σχέση (3.21), δίνεται από τις παρακάτω εξισώσεις

$$c(t, s, T) = e^{-r(T-t)} [F(t, s)N(h) - KN(h - \sqrt{w})]$$

και

$$p(t, s, T) = e^{-r(T-t)} [KN(-h + \sqrt{w}) - F(t, s)N(-h)]$$

όπου
$$h = \frac{\ln \frac{F(t, s)}{K} + \frac{w}{2}}{\sqrt{w}}$$

Η τιμή $F(t, s)$ μπορεί να αντικατασταθεί από την τιμή που παρατηρείται την χρονική στιγμή t στην αγορά για το συγκεκριμένο ΣΜΕ. Η τιμή της w προκύπτει από την ολοκλήρωση της διακύμανσης του ΣΜΕ για την διάρκεια ζωής του δικαιώματος, όπως φαίνεται παρακάτω :

$$w^2 = \int_t^T \sigma^2 e^{-2a(s-u)} du = \frac{\sigma^2}{2a} (e^{-2a(s-T)} - e^{-2a(s-t)})$$

3.4 Παράδειγμα τιμολόγησης με Black '76 και Clewlow-Strickland

Έχοντας παρουσιάσει τις μεθόδους των Black και Clewlow-Strickland, προχωρούμε σ' ένα παράδειγμα τιμολόγησης ευρωπαϊκών δικαιωμάτων με υποκείμενο τίτλο ΣΜΕ και εξετάζουμε τα αποτελέσματα που δίνουν. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα θεωρούμε τις εξής τιμές των παραμέτρων : $r=5\%$, $u=y$, $F_0 = 50$, $K = 55$, $T = 0.5$, $s = 1$, $\sigma = 30\%$. Η αποτίμηση με το μοντέλο των Clewlow-Strickland γίνεται για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου α ώστε να δούμε πως επηρεάζεται η εκτίμηση (Παράρτημα 6.11). Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

Πίνακας 3.1 Παράδειγμα τιμολόγησης ευρωπαϊκού δικαιώματος με τις μεθόδους Black '76 και Clewlow-Strickland ($\alpha=0.01, 0.1, 0.5$). Οι τιμές των παραμέτρων είναι: $r=5\%$, $u=y$, $F_0 = 50$, $K = 55$, $T = 0.5$, $s = 1$, $\sigma = 30\%$.

Black '76	C-S ($\alpha = 0.01$)	C-S ($\alpha = 0.1$)	C-S ($\alpha = 0.5$)
2.31	2.28	2.04	1.16

Παρατηρούμε ότι όταν αυξάνουμε την τιμή της παραμέτρου α , η μέθοδος των Clewlow-Strickland επιστρέφει μικρότερες τιμές για την τιμή του δικαιώματος. Αυτό συμβαίνει επειδή η αύξηση της τιμής α οδηγεί σε μικρότερη τιμή της μεταβλητότητας σ και επομένως μειώνεται η πιθανότητα απότομων κινήσεων της τιμής του υποκείμενου τίτλου που θα φέρουν το δικαίωμα «μέσα στα λεφτά». Όταν το α τείνει στο μηδέν βλέπουμε ότι τα δύο μοντέλα έχουν σχεδόν ίδια εκτίμηση.

4. ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ MONTE CARLO

4.1 Μέθοδος Monte Carlo

Ένας ακόμη τρόπος αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης είναι η προσομοίωση Monte Carlo. Ο όρος Monte Carlo σχετίζεται με την διαδικασία μοντελοποίησης και προσομοίωσης ενός φαινομένου που χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα. Η προσομοίωση βασίζεται στην ιδέα ότι με την επαναλαμβανόμενη παραγωγή τυχαίων σεναρίων χρησιμοποιώντας ψευδοτυχαίους αριθμούς μπορούμε να εξαγάγουμε συμπεράσματα για τις παραμέτρους του φαινομένου. Η μέθοδος αυτή είναι πολύ δημοφιλής αφού μπορεί να χρησιμοποιηθεί για πολύπλοκα προβλήματα στα οποία η εύρεση αναλυτικής λύσης είναι πολύ δύσκολη [20][21].

Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε μία τυχαία μεταβλητή X της οποίας η κατανομή είναι γνωστή και θέλουμε να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή της $f(X)$:

$$\mu = E[f(X)]$$

όπου f μια πραγματική συνάρτηση. Εάν πάρουμε ένα τυχαίο δείγμα (X_1, X_2, \dots, X_n) μεγέθους n από την κατανομή που ακολουθεί η X , τότε αυτή αποτελεί ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων μεταβλητών (i.i.d), και ο δειγματικός μέσος ορίζεται :

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i)$$

ενώ η δειγματική διασπορά δίνεται από την σχέση :

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(X_i) - \hat{\mu}_n)^2$$

Εάν ορίσουμε $Y_i = f(X_i)$, τότε και οι μεταβλητές Y_i είναι i.i.d. με μέσο μ και διασπορά :

$$\sigma^2 = \text{var}[f(X)]$$

Σύμφωνα με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, για μεγάλη τιμή του n , η κατανομή του δειγματικού μέσου $\hat{\mu}_n$ δίνεται από:

$$\hat{\mu}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

όπου θεωρούμε ότι η τιμή της σ^2 μπορεί να εκτιμηθεί από την $\hat{\sigma}_n^2$. Συμπεραίνουμε ότι το τυπικό σφάλμα (standard error), δηλαδή η τυπική απόκλιση της κατανομής του δειγματικού μέσου, εκτιμάται από την ακόλουθη σχέση :

$$s = \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}$$

Παρατηρούμε ότι το τυπικό σφάλμα μειώνεται ανάλογα με την αντίστροφη ρίζα του μεγέθους του δείγματος. Επομένως, εάν χρησιμοποιήσουμε δείγμα μεγέθους 100, το σφάλμα της προσομοίωσης ελαττώνεται κατά 10 φορές [22].

4.2 Παραγωγή ψευδοτυχαίων αριθμών

Όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα για να διεξαχθεί μια προσομοίωση Monte Carlo είναι απαραίτητη η χρήση μιας γεννήτριας ψευδοτυχαίων αριθμών. Πρέπει, δηλαδή να υπάρχει μία διαδικασία που θα παράγει ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών, ανεξάρτητων και ισόνομων, σύμφωνα με μία συγκεκριμένη κατανομή πιθανότητας. Η πιο γνωστή γεννήτρια είναι αυτή της ομοιόμορφης κατανομής. Πιο συγκεκριμένα, εάν $U_1, U_2, \dots, U_n \sim iid U(0,1)$, τότε μία τυχαία πραγματοποίηση της ακολουθίας $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ αποτελεί ακολουθία τυχαίων αριθμών στο διάστημα $[0,1]$. Αυτοί οι αριθμοί ονομάζονται ψευδοτυχαίοι διότι ενώ συμπεριφέρονται ως τυχαίοι η παραγωγή τους είναι ντετερμινιστική. Αυτό συμβαίνει επειδή η ακολουθία παράγεται μέσω αναδρομικών σχέσεων. Μια τέτοια σχέση είναι η ακόλουθη :

$$Y_{i+1} = (\alpha Y_i + \beta) \text{ modulo } m, \quad i = 0, 1, 2, \dots, T$$

όπου ο πολλαπλασιαστής α και η σταθερά β είναι θετικοί ακέραιοι για τους οποίους ισχύει $1 < \alpha < m$ και $0 \leq \beta < m$. Η τιμή της U_i δίνεται από την σχέση $U_i = \frac{Y_i}{m}$. Παρατηρούμε ότι για συγκεκριμένο Y_0 (seed) η παραπάνω σχέση θα μας δώσει την ίδια ακολουθία αριθμών [23]. Οι τιμές των α, β, m επιλέγονται ώστε να ικανοποιούνται τα κύρια κριτήρια μιας καλής γεννήτριας [24][25], τα οποία είναι :

- Οι τυχαίοι αριθμοί που παράγονται πρέπει να κατανέμονται όπως ορίζει η ομοιόμορφη κατανομή
- Οι U_1, U_2, \dots, U_n δεν πρέπει να μας δίνουν καμία πληροφορία για την U_{n+1} . Δηλαδή πρέπει να υπάρχει έλλειψη προβλεψιμότητας για την επόμενη τιμή.
- Η περίοδος της γεννήτριας πρέπει να είναι πολύ μεγάλη, ώστε να μην υπάρχει πρόβλημα επαναληψιμότητας. Ιδανικά, η περίοδος θέλουμε να είναι άπειρη ώστε να μην εμφανίζονται ποτέ οι ίδιοι αριθμοί.

Η γεννήτρια τυχαίων αριθμών ομοιόμορφης κατανομής θεωρείται πολύ σημαντική αφού με την βοήθεια της μπορούμε να κάνουμε δειγματοληψία από οποιαδήποτε συνεχή κατανομή ακολουθώντας

την μέθοδο της αντιστροφής. Συγκεκριμένα, εάν είναι γνωστή η αθροιστική συνάρτηση κατανομής F , η οποία είναι αντιστρέψιμη και ισχύει $U \sim U(0,1)$, τότε η τυχαία μεταβλητή $Y = F^{-1}(U)$ έχει συνάρτηση κατανομής F . Ακολουθεί παράδειγμα για την περίπτωση της κανονικής κατανομής, όπως έχει υλοποιηθεί με χρήση της γλώσσας R.

Παράδειγμα : Για την δημιουργία ψευδοτυχαίας ακολουθίας αριθμών στο διάστημα $(0,1)$, η γλώσσα R χρησιμοποιεί την συνάρτηση `runif(n)`, όπου n το μέγεθος του δείγματος. Με την συνάρτηση `set.seed()` θέτουμε την αρχική τιμή (seed) της γεννήτριας. Για την αντιστροφή της αθροιστικής συνάρτησης της κανονικής κατανομής χρησιμοποιούμε την συνάρτηση `qnorm(x)`, η οποία δέχεται ως όρισμα τιμές στο διάστημα $(0,1)$ και επιστρέφει το αντίστοιχο ποσοστημόριο της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της κανονικής κατανομής.

```
>set.seed(1)

>x =runif(n = 10)

>x #εμφανίζει το διάνυσμα που έχουν αποθηκευτεί οι τιμές του δείγματος

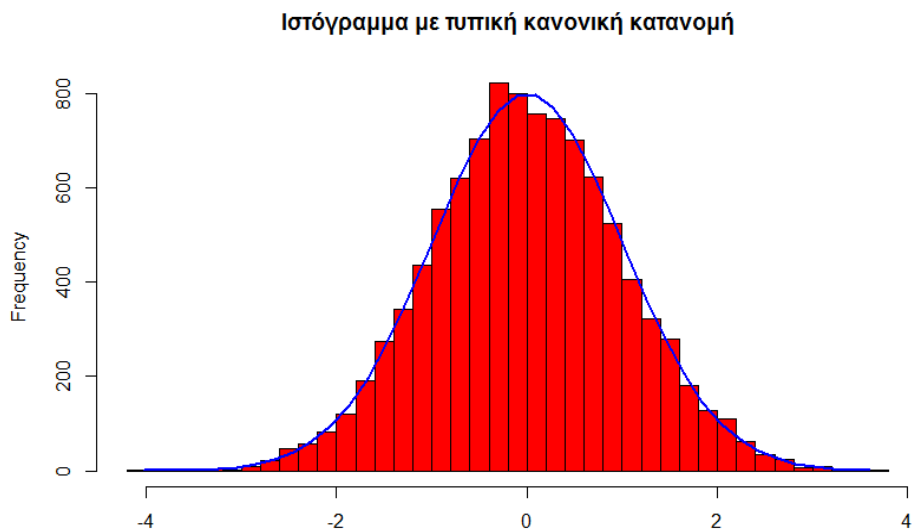
[1] 0.2059746 0.1765568 0.6870228 0.3841037 0.7698414 0.4976992 0.7176185 0.9919061 0.3800352
0.7774452

>y= qnorm(x)

>y

[1] -0.6264538 -0.3262334 0.1836433 1.3297993 -0.8356286 1.2724293 1.5952808 0.4146414
0.3295078 -1.5399500
```

Για να ελέγξουμε την ποιότητα της γεννήτριας επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία για δείγμα μεγέθους $n = 10000$ και φτιάχνουμε το αντίστοιχο ιστόγραμμα (Σχήμα 5.1)(Παράρτημα Π.12). Με μπλε γραμμή διαγράφεται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυπικής κανονικής κατανομής ώστε να γίνει γρήγορος οπτικός έλεγχος της ποιότητας της γεννήτριας. Παρατηρούμε ότι το δείγμα που δημιουργήθηκε μέσω της Monte Carlo προσομοίωσης προσεγγίζει πολύ καλά την θεωρητική κατανομή.



Σχήμα 4.1 Ιστόγραμμα 10000 ψευδοτυχαίων αριθμών

4.3 Τεχνικές Μείωσης της Διακύμανσης

Όπως είδαμε στην μέθοδο Monte Carlo (ordinary Monte Carlo), το σφάλμα της εκτίμησης εξαρτάται από τον αριθμό των επαναλήψεων. Ωστόσο, ένας πολύ μεγάλος αριθμός επαναλήψεων οδηγεί σε μια χρονονοβόρα διαδικασία με ενδεχομένως υψηλό κόστος. Για τον λόγο αυτό συχνά προτείνεται η χρήση ορισμένων τεχνικών μείωσης της διασποράς της εκτίμησης.

4.3.1 Μέθοδος Μεταβλητών Ελέγχου

Η λογική πίσω από την μέθοδο των μεταβλητών ελέγχου είναι ότι επιχειρούμε να λύσουμε ένα πρόβλημα χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες που έχουμε από την ακριβή λύση ενός άλλου παρόμοιου προβλήματος. Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε τον μέσο $\mu = E[Y]$ ενώ παράλληλα γνωρίζουμε τον μέσο $\theta = E[X]$ της τυχαίας μεταβλητής X , που είναι με κάποιο τρόπο εξαρτημένη με την μεταβλητή Y . Η μεταβλητή X ονομάζεται *μεταβλητή ελέγχου* [23] [26] [27]. Μπορούμε να εκτιμήσουμε τον μέσο μ με τον παρακάτω εκτιμητή ελέγχου :

$$\hat{\mu}_c = \hat{\mu} - \beta(\theta - \hat{\theta}) \quad (4.1)$$

όπου $\beta \in \mathbb{R}$ και τα $\hat{\mu}, \hat{\theta}$ προκύπτουν από τις σχέσεις :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \quad \text{και} \quad \hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Εφόσον γνωρίζουμε ότι ισχύει $E[\hat{\theta}] = \theta$ και $Var(\theta) = 0$, για τον εκτιμητή ελέγχου προκύπτει :

$$E[\hat{\mu}] = \mu$$

και

$$Var(\hat{\mu}_c) = Var(\hat{\mu}) + \beta^2 Var(\hat{\theta}) + 2\beta Cov(\hat{\mu}, \hat{\theta}) \quad (4.2)$$

Στην συνέχεια επιλέγουμε την τιμή της παραμέτρου β ώστε να ελαχιστοποιείται η ποσότητα $Var(\hat{\mu}_c)$. Με παραγωγή της σχέσης (4.2) ως προς β παίρνουμε :

$$\begin{aligned} \frac{dVar(\hat{\mu}_c)}{d\beta} = 0 &\Leftrightarrow 2\beta Var(\hat{\theta}) + 2Cov(\hat{\mu}, \hat{\theta}) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \beta^* = - \frac{Cov(\hat{\mu}, \hat{\theta})}{Var(\hat{\theta})} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Με αντικατάσταση της σχέσης (4.2) στην (4.1) προκύπτει :

$$Var(\hat{\mu}_c) = Var(\hat{\mu})(1 - \rho_{\hat{\mu}, \hat{\theta}}^2) \quad (4.4)$$

όπου $\rho_{\hat{\mu}, \hat{\theta}}$ ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των $\hat{\mu}, \hat{\theta}$ όπως γνωρίζουμε δίνεται από τον τύπο :

$$\rho_{\hat{\mu}, \hat{\theta}} = \frac{Cov(\hat{\mu}, \hat{\theta})}{\sqrt{Var(\hat{\mu})Var(\hat{\theta})}}$$

Από την σχέση (4.4) συμπεραίνουμε ότι με την χρήση μεταβλητής ελέγχου η διακύμανση του εκτιμητή $\hat{\mu}_c$ μειώνεται. Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι στην πράξη δεν μπορούμε να γνωρίζουμε την πραγματική τιμή του β^* και γι'αυτό χρησιμοποιούμε την εκτίμηση :

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\mu})(X_i - \hat{\theta})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\theta})^2}$$

4.3.2 Αντιθετική δειγματοληψία

Στην απλή μέθοδο Monte Carlo οι εκτελέσεις της προσομοίωσης είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Με την μέθοδο της αντιθετικής δειγματοληψίας που παρουσιάζουμε εδώ εισάγουμε αρνητική συσχέτιση μεταξύ των επαναλήψεων ώστε να καλύψουμε πιο γρήγορα όλο το φάσμα των πιθανών αποτελεσμάτων. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι θέλουμε να βρούμε τον μέσο $\mu = E[X_1]$. Αρχικά, θεωρούμε το ζεύγος ακολουθιών $(X_1^{(i)}, X_2^{(i)})$, το οποίο για n βήματα θα δίνει $(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}), (X_1^{(2)}, X_2^{(2)}), \dots, (X_1^{(n)}, X_2^{(n)})$, και είναι σχεδιασμένο έτσι ώστε ότι αν η ακολουθία $\{X_1\}$ δίνει τυχαίους αριθμούς, τότε η ακολουθία $\{X_2\}$ να δίνει τους αντίστοιχους αντιθετικούς (συμπληρωματικούς). Για παράδειγμα, εάν θεωρήσουμε ότι για την ακολουθία $\{X_1\}$ ισχύει $X_1^{(1)}, \dots, X_1^{(n)} \sim U(0,1)$ (δηλαδή ότι ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή), τότε το πρώτο δείγμα θα είναι $x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(n)}$ ενώ το δεύτερο δείγμα, που προκύπτει από την ακολουθία $\{X_2\}$, θα είναι $1 - x_1^{(1)}, \dots, 1 - x_1^{(n)}$. Στην συνέχεια δημιουργούμε μία τρίτη ακολουθία $\{X\}$, για την οποία ισχύει :

$$X^{(i)} = \frac{(X_1^{(i)} + X_2^{(i)})}{2}$$

Εν τέλει η εκτίμηση της ποσότητας μ υπολογίζεται από την σχέση : $\hat{\mu}_c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X^{(i)}$

Σε αυτή την περίπτωση για την διακύμανση της εκτίμησης ισχύει :

$$\begin{aligned} Var[\hat{\mu}_c] &= \frac{Var(X^{(i)})}{n} \\ &= \frac{Var(X_1^{(i)}) + Var(X_2^{(i)}) + 2Cov(X_1^{(i)}, X_2^{(i)})}{4n} \\ &= \frac{Var(X_1)}{2n} (1 + \rho_{X_1, X_2}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Από την σχέση (4.5) βλέπουμε ότι επιλέγοντας αρνητική συσχέτιση μεταξύ των X_1, X_2 μπορούμε να μειώσουμε την διακύμανση της εκτίμησής του μέσου της X [23].

4.4 Αποτίμηση δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού τύπου με προσομοίωση Monte Carlo

Σε αυτήν την υποενότητα παρουσιάζεται μια εφαρμογή της προσομοίωσης Monte Carlo στο πρόβλημα της τιμολόγησης δικαιωμάτων αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου. Θα χρησιμοποιούμε την απλή μέθοδο, την μέθοδο μεταβλητής ελέγχου και την αντιθετική δειγματοληψία.

4.4.1 Αποτίμηση με την απλή μέθοδο Monte Carlo

Το πρώτο βήμα διεξαγωγής της προσομοίωσης για την αποτίμηση δικαιωμάτων είναι να επιλεγεί το μοντέλο που θα παράγει τα μονοπάτια της τιμής του υποκείμενου τίτλου. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα διαλέγουμε την γεωμετρική κίνηση Brown που μελετήθηκε στην υποενότητα 2.2.2. Έτσι, θεωρώντας ότι βρισκόμαστε σε έναν κόσμο ουδέτερου κινδύνου χρησιμοποιούμε την παρακάτω σχέση :

$$S_t = S_{t-1} e^{\left(r - \gamma - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \sigma \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}} \quad (4.6)$$

όπου r το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, γ η απόδοση ευκολίας, σ η μεταβλητότητα του υποκείμενου προϊόντος και $\varepsilon_t \sim N(0,1)$. Οι τυχαίες τιμές της ε_t παράγονται από γεννήτρια ψευδοτυχαίων αριθμών της γλώσσας R. Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι η εξής :

1. Χρησιμοποιώντας την σχέση (4.6) δημιουργούμε N τυχαία μονοπάτια T βημάτων (χρονικών διαστημάτων)
2. Για κάθε μονοπάτι υπολογίζουμε με χρήση της σχέσης (3.9) την αξία του ΣΜΕ στο βήμα T . Συγκεκριμένα :

$$F_{T,s}^{(i)} = S_t e^{(r-\gamma)(s-T)} \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, N$$

3. Υπολογίζουμε την πληρωμή του δικαιώματος στην λήξη T : $g(F_{T,s}^{(1)})$, $g(F_{T,s}^{(2)})$, ..., $g(F_{T,s}^{(N)})$, όπου $g(F_{T,s}) = \max(F_{T,s} - K, 0)$ για δικαίωμα με τιμή εξάσκησης K .
4. Κάνοντας προεξόφληση με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου υπολογίζουμε την εκτίμηση \hat{c}_0 Monte Carlo για την αξία του δικαιώματος :

$$\hat{c}_0 = e^{-rT} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(F_{T,s}^{(i)}) \right)$$

Η τιμή \hat{c}_0 αποτελεί την εκτίμηση της τιμής του ενός δικαιώματος αγοράς. Στην περίπτωση του δικαιώματος πώλησης, για να υπολογίσουμε την απολαβή του δικαιώματος, χρησιμοποιούμε στο βήμα 3 την συνάρτηση $g(F_{T,s}) = \max(K - F_{T,s}, 0)$ [2] [24].

Ο κώδικας για την αποτίμηση με Monte Carlo φαίνεται στο Παράρτημα (Π.14)

4.4.2 Αποτίμηση με την μέθοδο της μεταβλητής ελέγχου

Για την υλοποίηση αυτής της μεθόδου χρησιμοποιούμε ως μεταβλητή ελέγχου την τιμή S_t του υποκείμενου τίτλου [23] [26]. Εφόσον κάνουμε τιμολόγηση σε περιβάλλον ελεύθερου κινδύνου θεωρούμε ότι η αναμενόμενη τιμή του τίτλου μετά από χρόνο T θα ισούται με :

$$E(S_T) = S_0 e^{(r-y)T}$$

Ακολουθώντας την ίδια λογική με την απλή μέθοδο Monte Carlo παράγουμε τις τιμές $S_T^{(i)}$ για $i = 1, 2, \dots, N$ χρησιμοποιώντας την γεωμετρική κίνηση Brown και καταλήγουμε στις εκτιμήσεις $\hat{\mu}$, $\hat{\theta}$ για τις οποίες ισχύει :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(F_{T,s}^{(i)}) \quad \text{όπου } g(F_{T,s}) = \max(F_{T,s} - K, 0)$$

και

$$\hat{\theta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_T^{(i)}$$

Με χρήση του τύπου (5.1) καταλήγουμε στην παρακάτω εκτίμηση :

$$\hat{\mu}_c = \hat{\mu} - \hat{\beta}(E(S_T) - \hat{\theta})$$

όπου το $\hat{\beta}$ δίνεται από την σχέση :

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^N (g(F_{T,s}^{(i)}) - \hat{\mu})(S_T^{(i)} - \hat{\theta})}{\sum_{i=1}^N (S_T^{(i)} - \hat{\theta})^2}$$

Η αξία του δικαιώματος υπολογίζεται κάνοντας προεξόφληση με το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, δηλαδή :

$$\hat{c}_1 = e^{-rT} \hat{\mu}_c$$

Ο κώδικας για την αποτίμηση με μεταβλητή ελέγχου φαίνεται στο Παράρτημα (Π.15)

4.4.3 Αποτίμηση με αντιθετική δειγματοληψία

Είδαμε ότι με την αντιθετική δειγματοληψία εισάγουμε αρνητική συσχέτιση μεταξύ των τυχαίων παρατηρήσεων. Για να το πετύχουμε αυτό στο πρόβλημα της τιμολόγησης δικαιωμάτων δημιουργούμε ζεύγη μονοπατιών που εμφανίζουν αντίθετη συμπεριφορά [26]. Συγκεκριμένα, σε κάθε επανάληψη το πρώτο μονοπάτι δίνεται από την σχέση :

$$S_t = S_{t-1} e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \sigma \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}} \quad (4.7)$$

ενώ το δεύτερο μονοπάτι παράγεται από την σχέση :

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_{t-1} e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t - \sigma \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}} \quad (4.8)$$

Η διαδικασία που ακολουθούμε για την τιμολόγηση του δικαιώματος είναι η εξής :

1. Θεωρώντας ότι κάθε μονοπάτι αποτελείται από T βήματα, παράγουμε στην αρχή κάθε μιας από τις N επαναλήψεις T τυχαίους αριθμούς χρησιμοποιώντας την γεννήτρια τυχαίων αριθμών τυπικής κανονικής κατανομής της γλώσσας R . Δηλαδή παράγουμε τους τυχαίους αριθμούς $\varepsilon_1^{(i)}, \varepsilon_2^{(i)}, \dots, \varepsilon_T^{(i)}$ για $i = 1, \dots, N$. Σε κάθε επανάληψη δημιουργούμε ένα ζεύγος μονοπατιών με χρήση των σχέσεων (4.7), (4.8) και τελικά παίρνουμε τις τιμές $S_T^{(i)}, \tilde{S}_T^{(i)}$. Με χρήση της σχέσης (3.9) προκύπτουν οι τιμές $F_{T,S}^{(i)}, \tilde{F}_{T,S}^{(i)}$.

1. Υπολογίζουμε την τιμή :

$$V^{(i)} = \frac{V_1^{(i)} + V_2^{(i)}}{2} \quad \text{για } i = 1, \dots, N$$

$$\text{όπου } V_1^{(i)} = \max \left(F_{T,S}^{(i)} - K, 0 \right) \text{ και } V_2^{(i)} = \max \left(\tilde{F}_{T,S}^{(i)} - K, 0 \right)$$

2. Βρίσκουμε την εκτίμηση Monte Carlo για την τιμή του δικαιώματος αγοράς με την παρακάτω σχέση :

$$\hat{c}_2 = e^{-rT} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V^{(i)} \right)$$

Ο κώδικας για την αποτίμηση με αντιθετική δειγματοληψία φαίνεται στο Παράρτημα (Π.16)

4.4.4 Παράδειγμα αποτίμησης δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού τύπου

Εφαρμόζουμε τις παραπάνω μεθόδους Monte Carlo για την τιμολόγηση ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου που είναι γραμμένο πάνω σε συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης. Το δικαίωμα λήγει σε 6 μήνες ($T = 0.5$) ενώ το ΣΜΕ σε 1 χρόνο ($s = 1$) Η τρέχουσα τιμή θεωρούμε ότι είναι $S_0 = 50$, η τιμή εξάσκησης είναι $K = 55$, η μεταβλητότητα $\sigma = 35\%$ και το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο ισούται με $r = 5\%$. Στον πίνακα 4.1 παρουσιάζονται οι εκτιμήσεις της αξίας του δικαιώματος για διαφορετικό αριθμό επαναλήψεων. Σε παρένθεση σημειώνεται το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης. Παρατηρούμε ότι η τεχνική της μεταβλητής ελέγχου και της αντιθετικής δειγματοληψίας μειώνουν πράγματι την διασπορά της εκτίμησης, ενώ βλέπουμε ότι η εκτίμηση της απλής προσομοίωσης Monte Carlo αρχίζει να συγκλίνει στην πραγματική τιμή (εκτίμηση Black '76) μετά από 10^6 επαναλήψεις. Συμπεραίνουμε ότι η μέθοδος Monte Carlo αποτελεί μια αξιόπιστη εναλλακτική μέθοδο για την τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης, η οποία, όπως θα δούμε και στο τελευταίο κεφάλαιο, διευκολύνει το πρόβλημα αποτίμησης πιο σύνθετων δικαιωμάτων για τα οποία η εύρεση μιας αναλυτικής λύσης είναι αρκετά δύσκολη ή και απίθανη. Επιπλέον, μας δίνει την δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε στοχαστικές διαδικασίες με διαφορετικά χαρακτηριστικά για την μοντελοποίηση του υποκείμενου τίτλου.

Πίνακας 4.1 Εκτιμήσεις των μεθόδων Black, OMC, μεταβλητής ελέγχου και αντιθετικής δειγματοληψίας για δικαίωμα αγοράς με $S_0 = 50$, $K=55$, $\sigma = 35\%$, $r=5\%$ και $y=2\%$ για $n=10^3, 10^4, 10^5, 10^6$

Αριθμός επαναλήψεων	Black '76	Απλό Monte Carlo	Μεταβλητή ελέγχου	Αντιθετική δειγματοληψία
10^3	3.553	3.688 (0.248)	3.683 (0.123)	3.654 (0.219)
10^4	3.553	3.651 (0.075)	3.606 (0.040)	3.639 (0.065)
10^5	3.553	3.591 (0.024)	3.608 (0.016)	3.579 (0.020)
10^6	3.553	3.568 (0.007)	3.581 (0.004)	3.587 (0.006)

5. ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΑΡΓΟΥ ΠΕΤΡΕΛΑΙΟΥ ΜΕ MONTE CARLO

5.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο Monte Carlo για την τιμολόγηση δικαιωμάτων διαφορετικού τύπου με υποκείμενο τίτλο το αργό πετρέλαιο (WTI crude oil). Η αγορά του αργού πετρελαίου αποτελεί την μεγαλύτερη αγορά ενεργειακών προϊόντων στον κόσμο, ενώ λόγω της σταδιακής αύξησης των συμμετεχόντων, η ρευστότητα της πλησιάζει αυτή της αγοράς μετοχών. Το πιο γνωστό χρηματιστήριο παραγώγων αργού πετρελαίου είναι το NYMEX (New York Mercantile Exchange) και λειτουργεί από τον Όμιλο CME του Σικάγο. Στο NYMEX, ο αριθμός των συναλλαγών σε τίτλους που σχετίζονται με το αργό πετρέλαιο ξεπερνά το ένα εκατομμύριο σε καθημερινή βάση.

5.2 Στοχαστικά μοντέλα για το αργό πετρέλαιο σε κόσμο ουδέτερου κινδύνου

Στο 4^ο Κεφάλαιο είδαμε ότι για να πραγματοποιήσουμε την αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης με την μέθοδο Monte Carlo απαιτείται ο καθορισμός της στοχαστικής διαδικασίας που θα περιγράφει την εξέλιξη της τιμής του υποκείμενου τίτλου με την πάροδο του χρόνου. Επιπλέον, από την θεωρία των Black και Scholes που μελετήθηκε στο 3^ο Κεφάλαιο προκύπτει ότι η τιμολόγηση πρέπει να γίνεται σε κόσμο ουδέτερου κινδύνου ώστε να καταλήγουμε σε μία δίκαιη τιμή για το δικαίωμα που μελετάμε. Από τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι για κάθε στοχαστική διαδικασία που θα χρησιμοποιήσουμε στις προσομοιώσεις, είναι απαραίτητο να βρούμε τις κατάλληλες παραμέτρους ώστε να εξασφαλίζεται η ουδετερότητα κινδύνου. Πριν προχωρήσουμε στον υπολογισμό των παραμέτρων για κάθε ένα από τα μοντέλα που εξετάσαμε στο 2^ο Κεφάλαιο, κρίνεται αναγκαίο να αποσαφηνίσουμε την έννοια της *ανταμοιβής κινδύνου*.

5.2.1 Ανταμοιβή κινδύνου

Στηριζόμενοι στην βασική αρχή της χρηματοοικονομικής θεωρίας σύμφωνα με την οποία οι επενδυτές συμπεριφέρονται ορθολογικά, θεωρούμε ότι όταν αναλαμβάνουν μεγαλύτερο κίνδυνο σε μια επένδυση προσδοκούν ότι θα πετύχουν μεγαλύτερη απόδοση [3][28]. Δηλαδή ισχύει :

$$\text{Απαιτούμενη απόδοση} = \text{Απόδοση ελεύθερου κινδύνου} + \text{Ανταμοιβή για ανάληψη κινδύνου}$$

Για να μελετήσουμε καλύτερα την έννοια της ανταμοιβής κινδύνου (ή ασφάλιστρο κινδύνου), θα εξετάσουμε τον κίνδυνο που αναλαμβάνει ένας επενδυτής ανοίγοντας μία θέση σε συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης [2]. Έστω ότι την χρονική στιγμή t ένας επενδυτής επιλέγει να πάρει θέση long σ' ένα ΣΜΕ που λήγει την χρονική στιγμή T . Παράλληλα, τοποθετεί ένα ποσό X σε μια επένδυση μηδενικού κινδύνου τέτοιο ώστε την χρονική στιγμή T να αγοράσει με τα κέρδη τον υποκείμενο τίτλο στην συμφωνημένη τιμή $F_{t,T}$. Θεωρώντας ότι με την λήξη ο επενδυτής πουλάει στην αγορά το υποκείμενο τίτλο, που μόλις απέκτησε, στην τιμή S_T , τότε για τις χρηματικές ροές της συνολικής επένδυσης ισχύει :

$$\text{Την χρονική στιγμή } t : -F_{t,T}e^{-r(T-t)}$$

$$\text{Την χρονική στιγμή } T : S_T$$

Με βάση τα παραπάνω, καταλήγουμε ότι η παρούσα αξία της επένδυσης είναι :

$$Π.Α._t = -F_{t,T}e^{-r(T-t)} + E(S_T)e^{-k(T-t)} \quad (5.1)$$

όπου $E(S_T)$ είναι η αναμενόμενη τιμή του υποκείμενου προϊόντος την χρονική στιγμή T και k είναι η απόδοση που απαιτεί ο επενδυτής. Με δεδομένο ότι όλες οι επενδυτικές ευκαιρίες έχουν μηδενική παρούσα αξία, η σχέση (5.1) γράφεται :

$$F_{t,T} = E(S_T)e^{(r-k)(T-t)} \quad (5.2)$$

Παρατηρώντας την σχέση (5.2), συμπεραίνουμε ότι σ' ένα κόσμο ουδέτερου κινδύνου, στον οποίο οι επενδυτές αναμένουν ότι η απόδοση της κάθε επένδυσης θα ισούται με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, θα ισχύει $k = r$, και επομένως η τελευταία σχέση γράφεται :

$$F_{t,T} = E(S_T) \quad (5.3)$$

Βλέπουμε ότι πρόκειται για το ίδιο αποτέλεσμα στο οποίο καταλήξαμε στην Ενότητα 3.2.1 (βλέπε σχέση (3.9)).

5.2.2 Γενική διαδικασία εύρεσης των στοχαστικών διαδικασιών ουδέτερου κινδύνου

Εάν υποθέσουμε ότι η τιμή του υποκείμενου αγαθού δίνεται από την στοχαστική διαδικασία $\{S_t, t > 0\}$ και ότι $F_{t,T}$ είναι η τιμή του ΣΜΕ που παρατηρείται στην αγορά την χρονική στιγμή t , τότε ισχύει :

$$\alpha = F_{t,T} - E(S_T) \quad \text{όπου } \alpha \in \mathbb{R}$$

Παρατηρούμε ότι εάν ισχύει $\alpha \neq 0$ δεν πληρείται η βασική προϋπόθεση της ουδετερότητας κινδύνου (βλέπε σχέση 5.3). Σε αυτή την περίπτωση πρέπει να αλλάξουμε τις τιμές των παραμέτρων της διαδικασίας $\{S_t, t > 0\}$, ώστε να προκύψει η διαδικασία $\{S_t^*, t > 0\}$, για την οποία θα ισχύει :

$$F_{t,T} = E(S_T^*)$$

Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{S_t, t > 0\}$ εξαρτάται από ένα διάνυσμα παραμέτρων $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ και ότι την χρονική στιγμή t παρατηρούμε στην αγορά N συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης διαφορετικής ληκτότητας, τα οποία συμβολίζουμε με F_i , όπου $i = 1, 2, \dots, N$. Εάν θεωρήσουμε ότι για ένα διάνυσμα παραμέτρων P , η στοχαστική διαδικασία δημιουργεί στην λήξη του κάθε συμβολαίου τις τιμές $S_{T,i}(P)$, όπου $i = 1, 2, \dots, N$, τότε οι παράμετροι ουδέτερου κινδύνου δίνονται από την επίλυση του παρακάτω προβλήματος ελαχιστοποίησης [29] :

$$P^* \rightarrow \min \sum_i^N [E(S_{T,i}(P)) - F_i]^2$$

5.2.3 Γεωμετρική Κίνηση Brown (GBM)

Το πρώτο μοντέλο που θα χρησιμοποιήσουμε για την εξέλιξη της τιμής του αργού πετρελαίου είναι η γεωμετρική κίνηση Brown. Η στοχαστική διαφορική εξίσωση για την διαδικασία S_t δείξαμε ότι είναι :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (5.6)$$

όπου μ είναι η αναμενόμενη ετήσια απόδοση, σ η ετησιοποιημένη μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου και W_t μια κίνηση Brown. Στην υποενότητα 3.1.3 τονίσαμε ότι σε κόσμο ουδέτερου κινδύνου η αναμενόμενη απόδοση κάθε επένδυσης ισούται με το επιτόκιο ουδέτερου κινδύνου, r . Επειδή όμως θεωρούμε ότι ο αγοραστής του ενεργειακού αγαθού ενδέχεται να έχει κάποιο όφελος ή ζημία από την κατοχή του, εισάγουμε τον όρο γ , που ονομάσαμε απόδοση ευκολίας [6]. Έτσι, η παραπάνω σχέση γράφεται :

$$dS_t = (r - y)S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (5.7)$$

Από την σχέση (5.7) προκύπτει η διακριτή μορφή της διαδικασίας :

$$S_t = S_{t-1} e^{\left(r - y - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \sigma \Delta W_t} \quad (5.8)$$

Όταν ισχύουν τα παραπάνω, αποδείξαμε ότι η σχέση που συνδέει την τιμή S_t του υποκείμενου τίτλου και την αξία $F_{t,T}$ του ΣΜΕ με λήξη T πάνω στον συγκεκριμένο τίτλο δίνεται από τον τύπο :

$$F_{t,T} = S_t e^{(r-y)(T-t)} \quad (5.9)$$

Παρατηρούμε ότι η μοναδική άγνωστη παράμετρος στην τελευταία σχέση είναι η τιμή της παραμέτρου y , εφόσον η τιμή του ΣΜΕ είναι παρατηρήσιμη στην αγορά. Πρέπει να τονίσουμε ότι επειδή σε πολλές αγορές η τιμή S_t δεν είναι εύκολα παρατηρήσιμη συνήθως θεωρούμε ότι ισούται με την αξία του ΣΜΕ που βρίσκεται πιο κοντά στην λήξη του.

Επειδή οι επενδυτές θεωρούν ότι η απόδοση ευκολίας μεταβάλλεται ανάλογα με την χρονική περίοδο, θα υπολογίσουμε την τιμή της για κάθε διάστημα που καθορίζεται από τα ΣΜΕ [4] (Παράρτημα Π.17). Συγκεκριμένα, υπολογίζουμε :

$$y_i = r - \frac{1}{T_i - T_{i-1}} \ln \left(\frac{F_{t,T_i}}{F_{t,T_{i-1}}} \right) \quad \text{όπου } i = 2, 3, \dots, N \quad (5.10)$$

Με N συμβολίζουμε τον συνολικό αριθμό των ΣΜΕ που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό των παραμέτρων ενώ με T_i τις διαφορετικές ληκτότες των ΣΜΕ. Για παράδειγμα, με F_{t,T_7} συμβολίζουμε την παρατηρηθείσα τιμή του ΣΜΕ που λήγει σε $T_7 = 7/12$ έτη. Για το y_1 ισχύει :

$$y_1 = r - \frac{1}{T_1} \ln \left(\frac{F_{t,T_1}}{S_t} \right)$$

Τελικά, η σχέση που χρησιμοποιούμε στις προσομοιώσεις Monte Carlo δίνεται από την σχέση :

$$X_t = X_{t-1} + \left(r - y^* - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \Delta W_t \quad (5.11)$$

όπου $y^* = \sum_{i=1}^N y_i \cdot 1_{[T_{i-1}, T_i)}(t)$ και $X_t = \ln S_t$. Η τιμή της παραμέτρου σ μπορεί να καθοριστεί με δύο τρόπους. Ο πρώτος είναι να υπολογιστεί από ιστορικά δεδομένα για την τιμή του αργού πετρελαίου. Ο δεύτερος είναι να θεωρήσουμε ότι ισούται με την υπονοούμενη μεταβλητότητα των At-the-Money δικαιωμάτων ευρωπαϊκού τύπου που παρατηρούμε την χρονική στιγμή t στην αγορά. Για τον τελευταίο τρόπο επιλέγουμε ATM δικαιώματα που η διάρκεια ζωής τους ταιριάζει με την περίοδο που εξετάζουμε. Λόγω της απουσίας τιμών για δικαιώματα ευρωπαϊκού τύπου θα χρησιμοποιήσουμε την ιστορική μεταβλητότητα από το δείγμα που έχουμε συλλέξει.

5.2.4 Μοντέλο Ornstein-Uhlenbeck (O-U)

Στο 2^ο Κεφάλαιο είδαμε ότι η στοχαστική διαφορική εξίσωση για την διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck δίνεται από την σχέση :

$$dS_t = \alpha(\mu - \ln S_t)dt + \sigma dW_t \quad (5.12)$$

όπου α είναι η ταχύτητα επιστροφής προς το μακροπρόθεσμο επίπεδο, μ . Όταν θέλουμε όμως να προχωρήσουμε σε τιμολόγηση παραγώγων πρέπει να υπολογίσουμε τις παραμέτρους ώστε να έχουμε ουδετερότητα απέναντι στο ρίσκο. Για αυτό τον λόγο χρησιμοποιείται η παρακάτω σχέση :

$$dS_t = \alpha(\mu - \lambda - \ln S_t)dt + \sigma dW_t \quad (5.13)$$

Η παράμετρος λ σχετίζεται με την ανταμοιβή κινδύνου που προσδοκούν οι επενδυτές [11]. Βρίσκοντας την κατάλληλη τιμή της, εξασφαλίζουμε ότι ισχύει η ισότητα $F_{t,T} = E(S_T)$.

Έχουμε αναφέρει ότι σε περίπτωση που η μεταβολή της αξίας του υποκείμενου τίτλου εκφράζεται από την σχέση (5.13), η τιμή $F_{t,T}$ του ΣΜΕ δίνεται από την παρακάτω σχέση :

$$F_{t,T_i} = \exp[e^{-a(T_i-t)} \ln S_t + (1 - e^{-a(T_i-t)}) \left(\mu - \lambda_i - \frac{\sigma^2}{2a} \right) + \frac{\sigma^2}{4a} (1 - e^{-2a(T_i-t)})]$$

(5.14)

Επομένως, χρησιμοποιώντας την ίδια λογική με την περίπτωση της γεωμετρικής κίνησης Brown και θεωρώντας ότι η παράμετρος λ δεν είναι σταθερή, οι τιμές λ_i για κάθε διάστημα $[T_{i-1}, T_i]$ προκύπτουν από την επίλυση του παρακάτω προβλήματος ελαχιστοποίησης :

$$\lambda^* \rightarrow \min(F_{t,T_i} - F_{t,T_i}^{obs})^2$$

όπου F_{t,T_i}^{obs} είναι οι τιμές των ΣΜΕ που παρατηρούνται στην αγορά με ληκτότητα T_i και $\lambda^* = \sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot 1_{[T_{i-1}, T_i)}(t)$. Για την επίλυση του προβλήματος και την εύρεση του κατάλληλου λ^* χρησιμοποιούμε τον επαναληπτικό αλγόριθμο που φαίνεται στο Παράρτημα (Π.18). Ο υπολογισμός των παραμέτρων α , μ και σ γίνεται με γραμμική παλινδρόμηση με αξιοποίηση ιστορικών δεδομένων όπως δείξαμε στην Ενότητα 2.4.4. Έχοντας υπολογίσει τ όλες τις παραπάνω τιμές καταλήγουμε στην σχέση διακριτής μορφής, που γράφεται :

$$X_t = e^{-\alpha \Delta t} X_{t-1} + (1 - e^{-\alpha \Delta t}) \left(\mu - \lambda^* - \frac{\sigma^2}{2\alpha} \right) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\alpha \Delta t}}{2\alpha}} \varepsilon_t \quad (5.15)$$

όπου $\varepsilon_t \sim N(0,1)$.

5.2.5 Μοντέλο Mean-Reverting Jump Diffusion (MRJD)

Το μοντέλο MRJD αποτελεί ουσιαστικά μια διαδικασία Ο-Υ με την προσθήκη αλμάτων. Σε αυτή την περίπτωση η στοχαστική διαφορική διαδικασία δίνεται από την σχέση :

$$dS_t = a(\mu - \ln S_t)S_t dt + \sigma S_t dW_t + k S_t dN_t \quad (5.16)$$

όπου μ η μακροπρόθεσμη μέση τιμή, k η μεταβλητή που περιγράφει το μέγεθος των αλμάτων, a η ταχύτητα επιστροφής της τιμής προς την μακροπρόθεσμη τιμή [11]. Ο όρος dN_t αποτελεί μια διαδικασία Poisson που καθορίζει την συχνότητα με την οποία εμφανίζονται οι αποδόσεις-άλματα. Η ισοδύναμη διαδικασία ουδέτερου κινδύνου γράφεται :

$$dS_t = a(\mu - \varphi \bar{k} - v - \ln S_t)S_t dt + \sigma S_t dW_t + k S_t dN_t \quad (5.17)$$

όπου ο όρος v έχει τον ίδιο ρόλο με τον όρο λ που εξετάσαμε στην διαδικασία Ο-Υ, \bar{k} είναι το αναμενόμενο μέγεθος του άλματος και φ το μέσο πλήθος των αλμάτων στην μονάδα του χρόνου [30]. Σε αυτή την περίπτωση η εύρεση της αναμενόμενης τιμής S_T ώστε να φτάσουμε σε μια σχέση που συνδέει την τιμή των ΣΜΕ με την τιμή S_t (όπως είναι οι σχέσεις (5.9) και (5.14) για τις διαδικασίες GBM και Ο-Υ αντίστοιχα). Για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιούμε προσομοίωση Monte Carlo. Πιο συγκεκριμένα, αφού υπολογίσουμε τις παραμέτρους ($\alpha, \sigma, \mu, \bar{k}, \sigma_J, \varphi$), βρίσκουμε την εξής σχέση διακριτής μορφής:

$$X_t = e^{-\alpha \Delta t} X_{t-1} + (1 - e^{-\alpha \Delta t})(\mu - v - \varphi \bar{k} - \frac{\sigma^2}{2\alpha}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\alpha \Delta t}}{2\alpha}} \varepsilon_t + (\bar{k} + u \sigma_J) Z \quad (5.18)$$

όπου $X_t = \ln S_t$. Ο ρόλος της μεταβλητής Z περιγράφηκε αναλυτικά στην Ενότητα 2.4.5. Χρησιμοποιώντας την σχέση (5.18) μπορούμε με την μέθοδο Monte Carlo να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή S_{T_i} για διαφορετικές τιμές του v για κάθε χρονική στιγμή T_i . Επομένως, οι τιμές v_i για κάθε διάστημα $[T_{i-1}, T_i)$ υπολογίζονται με την επίλυση του προβλήματος :

$$v^* \rightarrow \min(F_{t,T_i} - F_{t,T_i}^{obs})^2$$

όπου $F_{t,T_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{T_i}^{(i)}$ για $j=1,2,\dots,N$. Στην περίπτωση μας επιλέγουμε $n = 50000$. Ο αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος φαίνεται στο Παράρτημα (Π.19).

5.3 Αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης αργού πετρελαίου

Σε αυτή την τελευταία ενότητα θα προχωρήσουμε στην αποτίμηση ευρωπαϊκών και ασιατικών δικαιωμάτων πάνω στο αργό πετρέλαιο με την απλή μέθοδο Monte Carlo. Για την μοντελοποίηση της τιμής του υποκείμενου τίτλου θα χρησιμοποιηθούν οι διαδικασίες που περιγράψαμε παραπάνω. Συγκεκριμένα, επιλέγουμε :

- Γεωμετρική κίνηση Brown

$$X_t = X_{t-1} + \left(r - y^* - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \sigma \varepsilon_t \sqrt{\Delta t} \quad (5.20)$$

όπου $r = 0.005$ και $\sigma = 0.36$

- Διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck

$$X_t = e^{-\alpha \Delta t} X_{t-1} + (1 - e^{-\alpha \Delta t}) \left(\mu - \lambda^* - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\alpha \Delta t}}{2\alpha}} \varepsilon_t \quad (5.21)$$

όπου $\alpha = 1.75$, $\mu = 3.98$ και $\sigma = 0.36$

- Διαδικασία MRJD

$$X_t = e^{-\alpha \Delta t} X_{t-1} + (1 - e^{-\alpha \Delta t}) \left(\mu - v - \varphi \bar{k} - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\alpha \Delta t}}{2\alpha}} \varepsilon_t + (\bar{k} + u \sigma_J) Z$$

(5.22)

όπου $\mu = 3.98$, $\alpha = 1.75$, $\sigma = 0.36$, $\bar{k} = 0.014$, $\varphi = 0.023$ και $\sigma_J = 0.082$

Οι παραπάνω τιμές των παραμέτρων $(\alpha, \mu, \sigma, \bar{k}, \varphi, \sigma_J)$ υπολογίστηκαν από την εφαρμογή των τεχνικών που περιγράφηκαν στο 2^ο Κεφάλαιο για το αργό πετρέλαιο και αφορούν την περίοδο 15 Δεκεμβρίου 2015 με 2 Ιανουαρίου 2020. Για τον υπολογισμό των διανυσμάτων y^* και λ^* χρησιμοποιούμε τις τιμές των μηνιαίων συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης που παρατηρούνται στις 17 Ιανουαρίου 2020, με πρώτο το ΣΜΕ Μαρτίου 2020 και τελευταίο το ΣΜΕ Νοεμβρίου 2021 (δηλαδή, συνολικά παρατηρούνται εννέα συμβόλαια, $N = 9$). Με εφαρμογή των μεθόδων που εξηγήσαμε στις Ενότητες 5.2.3, 5.2.4 και 5.2.5 βρίσκουμε :

$$y^* = (0.013, 0.025, 0.056, 0.075, 0.094, 0.105, 0.121, 0.113, 0.067)$$

$$\lambda^* = (-0.095, -0.087, -0.069, -0.055, -0.039, -0.025, -0.008, -0.003, -0.019)$$

$$v^* = (-0.0325, -0.0225, -0.0025, -0.010, -0.0275, 0.0475, 0.0650, 0.0675, 0.0450)$$

5.3.1 Αποτίμηση δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού τύπου

Η τιμολόγηση θα γίνει για δικαιώματα με διαφορετικές τιμές εξάσκησης (In-the-Money, At-the-Money και Out-the-Money) και τρεις διαφορετικές ληκτότητες $T = 3/12, 5/12, 7/12$ (3 μήνες , 5 μήνες και 7 μήνες αντίστοιχα). Θεωρούμε ότι σε κάθε περίπτωση ο υποκείμενος τίτλος είναι συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης που λήγει την ίδια χρονική στιγμή με το δικαίωμα προαίρεσης. Η τρέχουσα τιμή θεωρούμε ότι ισούται με την τιμή του ΣΜΕ που είναι πιο κοντά στην λήξη. Στην περίπτωση μας, εφόσον χρησιμοποιούμε τις τιμές των ΣΜΕ που παρατηρούνται στις 17 Ιανουαρίου, θεωρούμε ότι η τρέχουσα τιμή ισούται με την τιμή του ΣΜΕ Φεβρουαρίου 2020 και ισούται με $S_0 = \$58.8$. Για την αποτίμηση των δικαιωμάτων επιλέγουμε την απλή μέθοδο Monte Carlo με $n = 50000$ επαναλήψεις. Παρακάτω παρουσιάζεται αναλυτικά ως η διαδικασία αποτίμησης :

1. Υπολογίζουμε τον αριθμό των βημάτων (k) της προσομοίωσης με την σχέση $k = \frac{T}{\Delta t}$, όπου T η διάρκεια ζωής του δικαιώματος σε χρόνια και Δt η χρονική διάρκεια ανάμεσα σε δύο βήματα. Στην περίπτωση μας επιλέγουμε ημερήσιο βήμα και θεωρώντας ότι σε ένα χρόνο υπάρχουν 249 ημέρες συναλλαγών παίρνουμε $\Delta t = \frac{1}{249}$.
2. Ανάλογα με την στοχαστική διαδικασία που επιλέγουμε για την μοντελοποίηση της εξέλιξης της τιμής του αργού πετρελαίου, χρησιμοποιούμε μία από τις σχέσεις (5.20) , (5.21) ή (5.22) και δημιουργούμε n μονοπάτια k βημάτων. Εφόσον ισχύει $X_t = \ln S_t$, η τελική τιμή του κάθε μονοπατιού δίνεται από την σχέση $S_k = \exp(X_k)$. Επομένως η πληρωμή του δικαιώματος στην λήξη για κάθε μονοπάτι είναι : $f(S_k^{(1)}), f(S_k^{(2)}), \dots, f(S_k^{(n)})$, όπου $f(S_k) = \max(S_k - K, 0)$ για δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης K .
3. Η τελική εκτίμηση της αξίας του δικαιώματος προκύπτει από την σχέση :

$$\hat{c} = e^{-rT} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f \left(S_k^{(i)} \right) \right)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για κάθε στοχαστικό μοντέλο καταλήγουμε στις εκτιμήσεις που φαίνονται στον Πίνακα 5.1. Οι κώδικες που χρησιμοποιήθηκαν για την τιμολόγηση φαίνονται στο Παράρτημα (Π.20, Π.21, Π.22)

Πίνακας 5.1 Αποτίμηση Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων με λήξη $T = 3, 5, 7$ μήνες για διαφορετικές τιμές εξάσκησης

	T = 3/12			T = 5/12			T = 7/12		
Τιμή εξάσκησης	GBM	O-U	MRJD	GBM	O-U	MRJD	GBM	O-U	MRJD
K = 50	9.33	9.15	9.19	9.59	8.54	9.22	9.57	7.89	8.42
K = 52	7.90	7.43	7.76	8.18	7.26	7.57	8.21	6.58	6.99
K = 55	5.91	5.43	5.74	6.39	5.38	6.03	6.72	4.88	5.45
K = 60	3.35	2.87	3.32	4.20	3.01	3.61	4.45	2.75	3.37
K = 65	1.75	1.38	1.79	2.51	1.57	2.15	2.93	1.42	1.95
K = 70	0.85	0.62	0.88	1.52	0.77	1.23	2.03	0.75	1.10
K = 75	0.37	0.25	0.41	0.87	0.37	0.66	1.25	0.38	0.60
K = 78	0.22	0.15	0.27	0.59	0.22	0.43	0.99	0.24	0.41

5.3.3 Αποτίμηση Ασιατικών δικαιωμάτων

Στο 1^ο Κεφάλαιο είδαμε ότι τα Ασιατικά δικαιώματα αποτελούν ένα σύνθετο τύπο δικαιωμάτων, καθώς η απολαβή τους εξαρτάται από την μέση τιμή του υποκείμενου τίτλου σε ένα καθορισμένο χρονικό διάστημα. Σε αυτό το μέρος της εργασίας επιλέγουμε να πραγματοποιήσουμε την αποτίμηση μηνιαίων, 3-μηνιαίων και 6-μηνιαίων Ασιατικών δικαιωμάτων με διαφορετικές τιμές εξάσκησης και ληκτότητα $T = 7/12$. Η διαδικασία τιμολόγησης Ασιατικών δικαιωμάτων με την απλή μέθοδο Monte Carlo είναι παρόμοια με αυτή των Ευρωπαϊκών. Η διαφορά είναι ότι στο 2^ο βήμα της διαδικασίας η τελική πληρωμή του Ασιατικού δικαιώματος σε κάθε μονοπάτι είναι :

$$f(A(S_{k,d}^{(1)})), f(A(S_{k,d}^{(2)})), \dots, f(A(S_{k,d}^{(n)}))$$

όπου $f(A(S_{k,d})) = \max(A(S_{k,d}) - K, 0)$ και $A(S_{k,d}) = \frac{1}{d} \sum_{i=k-d}^k S_i$. Η παράμετρος d ισούται με τον αριθμό των ημερών που διαρκεί η περίοδος από την οποία προκύπτει η μέση τιμή του υποκείμενου τίτλου. Για παράδειγμα για το 3-μηνιαίο Ασιατικό δικαίωμα ισχύει $d = 62$ (εφόσον σε ένα χρόνο το χρηματιστήριο είναι ανοιχτό περίπου τις 249 ημέρες). Στον Πίνακα 5.3 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της τιμολόγησης.

Πίνακας 5.2 Αποτίμηση μηνιαίων, 3-μηνιαίων και 6-μηνιαίων Ασιατικών δικαιωμάτων με λήξη $T = 7$ μήνες για διαφορετικές τιμές εξάσκησης

	Μηνιαία			3-μηνιαία			6-μηνιαία		
Τιμή εξάσκησης	GBM	O-U	MRJD	GBM	O-U	MRJD	GBM	O-U	MRJD
K = 55	6.65	5.03	5.31	6.38	4.96	5.23	5.52	4.65	4.87
K = 60	4.45	2.77	3.13	4.05	2.63	2.99	3.11	2.13	2.45
K = 65	2.97	1.45	1.82	2.44	1.31	1.63	1.57	0.86	1.12
K = 70	1.83	0.71	1.01	1.47	0.58	0.85	0.76	0.29	0.47
K = 75	1.11	0.33	0.53	0.83	0.24	0.42	0.34	0.09	0.18

5.3.4 Σχολιασμός αποτελεσμάτων

Αρχικά παρατηρούμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις των δικαιωμάτων, η γεωμετρική κίνηση Brown επιστρέφει την μεγαλύτερη τιμή ενώ η διαδικασία O-U επιστρέφει την χαμηλότερη, με εξαίρεση τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα με λήξη $T = 3/12$ για τα οποία οι εκτιμήσεις των τριών μοντέλων, και ιδίως των GBM και MRJD, είναι πολύ κοντά. Πιο συγκεκριμένα, βλέπουμε ότι όσο μεγαλώνει η διάρκεια ζωής του ευρωπαϊκού δικαιώματος η διαφορά ανάμεσα στις εκτιμήσεις των μοντέλων GBM και O-U, MRJD αυξάνεται. Αυτό συμβαίνει επειδή στην περίπτωση των μοντέλων O-U και MRJD όλα τα μονοπάτια που δημιουργούνται τείνουν να κατευθύνονται προς το μακροπρόθεσμο μέσο επίπεδο. Αντίθετα στην περίπτωση της γεωμετρικής κίνησης Brown μπορούν να υπάρξουν περισσότερα μονοπάτια που έχουν συνεχώς ανοδική τάση και καταλήγουν σε υψηλή τελική τιμή αυξάνοντας και την αξία του δικαιώματος. Για να μελετήσουμε πιο λεπτομερώς το παραπάνω χαρακτηριστικό υπολογίζουμε την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της τιμής του υποκείμενου τίτλου στην λήξη του κάθε δικαιώματος. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον Πίνακα 5.3. Βλέπουμε ότι με το πέρασμα του χρόνου η διαφορά της τυπικής απόκλιση της τιμής του υποκείμενου τίτλου ανάμεσα στα μοντέλα GBM και O-U, MRJD αυξάνεται και επομένως επιβεβαιώνεται το γεγονός ότι η ύπαρξη mean-reversion (επιστροφή προς το

μέσο) έχει ως αποτέλεσμα οι τελικές τιμές των μονοπατιών να συγκεντρώνονται πιο κοντά στην αναμενόμενη τιμή (τιμή ΣΜΕ). Για αυτό το λόγο, η διαδικασία GBM τιμολογεί πιο ακριβά και όλες τις περιπτώσεις Ασιατικών δικαιωμάτων με την διαφορά μεταξύ των εκτιμήσεων των τριών μοντέλων να μεγαλώνει καθώς αυξάνεται η τιμή εξάσκησης K . Τέλος, αξίζει να μελετήσουμε την διαφορά της αποτίμησης των μοντέλων O-U και MRJD στην κατηγορία των δικαιωμάτων που είναι σε μεγάλο βαθμό «έξω από τα χρήματα» ($K = 75, 78$). Παρατηρούμε ότι ενώ και οι δύο διαδικασίες χαρακτηρίζονται από mean-reversion, η προσθήκη αλμάτων στην δεύτερη οδηγεί σε σχεδόν διπλάσια τιμή για αυτά τα δικαιώματα.

Πίνακας 5.3 Μέση τιμή και τυπική απόκλιση της τιμής του υποκείμενου τίτλου στην λήξη του κάθε δικαιώματος

Χρονική στιγμή (σε έτη)	GBM		O-U		MRJD	
	Μέση τιμή	Τυπική Απόκλιση	Μέση τιμή	Τυπική Απόκλιση	Μέση τιμή	Τυπική Απόκλιση
$t = 3/12$	58.51	10.11	58.47	9.01	58.39	10.28
$t = 5/12$	57.78	13.25	57.71	10.15	57.77	11.85
$t = 7/12$	56.75	15.78	56.55	10.72	56.61	12.32

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία ασχοληθήκαμε με την μελέτη βασικών μεθόδων αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης και συγκεκριμένα τα μοντέλα που βασίζονται στην θεωρία των Black-Scholes και την προσομοίωση Monte Carlo. Πριν αναφερθούμε στα συμπεράσματα της εργασίας θα γίνει μια σύντομη σύνοψη της όλων όσων αναλύθηκαν στα παραπάνω κεφάλαια. Αρχικά, παρουσιάστηκαν τα κύρια χαρακτηριστικά των δικαιωμάτων προαίρεσης και οι λόγοι χρησιμοποίησής τους από τους συμμετέχοντες στις αγορές ενέργειας. Επιπλέον, κρίθηκε απαραίτητη και η σύντομη περιγραφή των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης (ΣΜΕ) καθώς, λόγω της φύσης των ενεργειακών αγορών, αυτά τα προϊόντα συνήθως αποτελούν τον υποκείμενο τίτλο των δικαιωμάτων προαίρεσης. Αξιοποιώντας ιστορικά δεδομένα, μελετήσαμε τα χαρακτηριστικά της τιμής spot τεσσάρων βασικών ενεργειακών αγαθών και παρουσιάσαμε αναλυτικά τρεις στοχαστικές διαδικασίες που χρησιμοποιούνται ευρέως για την μαθηματική μοντελοποίηση τους. Στην συνέχεια, μελετήθηκαν αναλυτικά δύο βασικές μέθοδοι αποτίμησης δικαιωμάτων : τα μοντέλα της θεωρίας Black-Scholes και η προσομοίωση Monte Carlo. Τέλος, πραγματοποιήθηκε η αποτίμηση Ευρωπαϊκών και Ασιατικών δικαιωμάτων αργού πετρελαίου με Monte Carlo.

Η πρώτη μέθοδος που εξετάσαμε είναι οι εξισώσεις Black-Scholes και αποτελούν την πιο διαδεδομένη μέθοδο τιμολόγησης δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού τύπου λόγω της απλότητάς τους. Ωστόσο, η εφαρμογή τους περιορίζεται στην περίπτωση που ο υποκείμενος τίτλος είναι το ίδιο το ενεργειακό αγαθό. Επιπλέον, στις περιπτώσεις που το αγαθό δεν είναι αποθηκεύσιμο (π.χ. ηλεκτρική ενέργεια) η τιμολόγηση δεν είναι εφικτή, καθώς δεν τηρείται η βασική υπόθεση της συνεχούς αγοραπωλησίας του τίτλου. Για αυτούς τους λόγους, προχωρήσαμε στην παρουσίαση του μοντέλου Black '76, το οποίο αποτελεί παραλλαγή των εξισώσεων Black-Scholes και χρησιμοποιείται για την αποτίμηση δικαιωμάτων που είναι γραμμένα πάνω σε συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης. Σε αντίθεση με τα αγαθά, τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης μπορούν να συναλλάσσονται συνεχώς, επιτρέποντας έτσι στον επενδυτή να δημιουργήσει ένα χαρτοφυλάκιο μηδενικού κινδύνου που θα αποτελείται από ένα δικαίωμα και μια ποσότητα ΣΜΕ. Ένα ακόμα ξεχωριστό χαρακτηριστικό των ενεργειακών αγαθών, του οποίου η σημαντικότητα επιβεβαιώθηκε στις περισσότερες περιπτώσεις με στατιστικούς ελέγχους, είναι η τάση επιστροφής της τιμής τους σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο (mean-reversion). Γι' αυτό εξετάστηκε μια ακόμη παραλλαγή των εξισώσεων Black-Scholes, το μοντέλο Clewlow-Strickland. Όπως και το Black '76, το μοντέλο Clewlow-Strickland απευθύνεται στην τιμολόγηση δικαιωμάτων πάνω σε ΣΜΕ. Η διαφορά τους είναι ότι στο τελευταίο ο υποκείμενος τίτλος του ΣΜΕ ακολουθεί την διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck (mean-reversion model), και όχι την γεωμετρική κίνηση Brown. Με μια σύντομη εφαρμογή, καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι το μοντέλο των Clewlow-Strickland επιστρέφει μικρότερες

τιμές από το Black '76. Μάλιστα, η διαφορά των τιμών που επιστρέφουν τα δύο μοντέλα αυξάνεται όσο γίνεται πιο έντονο το χαρακτηριστικό της επιστροφής προς το μέσο.

Τα παραπάνω μοντέλα στηρίζονται στην βασική υπόθεση ότι οι ημερήσιες αποδόσεις των τιμών του υποκείμενου τίτλου ακολουθούν κανονική κατανομή. Όμως, στην ανάλυση των περιγραφικών μέτρων) που κάναμε στο 2^ο Κεφάλαιο (έλεγχος Jarque-Bera και normal qq-plot) είδαμε ότι στην πραγματικότητα αυτό δεν ισχύει. Αυτό οφείλεται εν μέρει στην εμφάνιση ακραίων αποδόσεων που χαρακτηρίζουν τις ενεργειακές αγορές, αφού, για παράδειγμα, η αδυναμία αποθήκευσης του προϊόντος ή η αδυναμία μεταφοράς του μπορούν να προκαλέσουν μεγάλες μεταβολές στην τιμή τους. Γι' αυτό τον λόγο, προχωρήσαμε στην παρουσίαση της δεύτερης μεθόδου αποτίμησης, την προσομοίωση Monte Carlo. Η προσομοίωση Monte Carlo αποτελεί ένα ευέλικτο εργαλείο, καθώς η μοντελοποίηση του υποκείμενου τίτλου μπορεί να γίνει με οποιαδήποτε στοχαστική διαδικασία ενώ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την τιμολόγηση δικαιωμάτων διαφορετικού τύπου. Για να ελέγξουμε την αξιοπιστία της μεθόδου συγκρίναμε τα αποτελέσματα της με αυτά του μοντέλου Black '76. Διαπιστώσαμε ότι για μεγάλο αριθμό επαναλήψεων τα αποτελέσματα των δύο μεθόδων συγκλίνουν.

Λόγω της ευελιξίας που προσφέρει η προσομοίωση Monte Carlo, την χρησιμοποιήσαμε για την τιμολόγηση δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού και Ασιατικού τύπου. Για την προσομοίωση του υποκείμενου τίτλου χρησιμοποιήθηκαν όλες οι στοχαστικές διαδικασίες που εξετάστηκαν στην διπλωματική, αφού όμως μετατραπούν στην κατάλληλη μορφή ώστε να τηρείται η ουδετερότητα κινδύνου, πάνω στην οποία στηρίζεται η αποτίμηση δικαιωμάτων. Από τα αποτελέσματα συμπεραίνουμε ότι η γεωμετρική κίνηση Brown επιστρέφει την μεγαλύτερη τιμή σε κάθε περίπτωση, με εξαίρεση τα δικαιώματα μικρής διάρκειας. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι τιμές που παράγονται από διαδικασίες οι οποίες χαρακτηρίζονται από την επιστροφή προς το μέσο (διαδικασίες O-U και MRJD) εμφανίζουν αρκετά μικρότερη διακύμανση. Επίσης, συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των διαδικασιών O-U και MRJD είδαμε ότι η προσθήκη αλμάτων (ακραίων αποδόσεων) προκαλεί την αύξηση της τιμής του δικαιώματος.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Π.1 Απολαβές θέσης αγοράς και θέσης πώλησης σε ΣΜΕ (Σχήμα 1.1)

```
S = 50 ; K = 50
x2 = seq(0 , 100 , 0.1)
y = x2 - K
pp1 = qplot(x2 , y , geom = 'line') + geom_line(color = 'darkblue' , size = 1) +
  theme_bw() + geom_hline(yintercept = 0) +
  labs(y = 'Καθαρό Κέρδος' , x = 'Τιμή υποκείμενου τίτλου')
```

```
S = 50 ; K = 50
x1 = seq(0 , 100 , 0.1)
y2 = K - x1
pp2 = qplot(x1 , y2 , geom = 'line') + geom_line(color = 'darkblue' , size = 1) +
  theme_bw() + geom_hline(yintercept = 0) +
  labs(y = '' , x = 'Τιμή υποκείμενου τίτλου')

grid.arrange(pp1 , pp2 , ncol = 2)
```

Π.2 Πληρωμή long call, short call, long put και short put (Σχήματα 1.2, 1.3, 1.4, 1.5)

```
S = 100 ; K = 110
x = seq(90 , 130 , 0.1)

# Long Call
y = ifelse(x - K > 0 , x - K , 0) - 2
qplot(x , y , geom = 'line') + geom_line(color = 'darkblue' , size = 1) +
  theme_bw() + geom_hline(yintercept = 0) +
  labs(y = 'Net Profit' , x = 'Spot Price')

# Short Call
y = -(ifelse(x - K > 0 , x - K , 0) - 2)
qplot(x , y , geom = 'line') + geom_line(color = 'darkblue' , size = 1) +
  theme_bw() + geom_hline(yintercept = 0) +
  labs(y = 'Net Profit' , x = 'Spot Price')

## PUTS
S = 50 ; K = 45
x = seq(35 , 55 , 0.1)

# Long Put
y = ifelse(K - x > 0 , K - x , 0) - 2
qplot(x , y , geom = 'line') + geom_line(color = 'darkblue' , size = 1) +
  theme_bw() + geom_hline(yintercept = 0) +
  labs(y = 'Net Profit' , x = 'Spot Price') +
  scale_y_continuous(breaks = seq(-2 , 8 , 2))

# Short Put
y = -(ifelse(K - x > 0 , K - x , 0) - 2)
qplot(x , y , geom = 'line') + geom_line(color = 'darkblue' , size = 1) +
  theme_bw() + geom_hline(yintercept = 0) +
  labs(y = 'Net Profit' , x = 'Spot Price') +
  scale_y_continuous(breaks = seq(2 , -8 , -2))
```

Π.3 Παραδείγματα τεχνικών αντιστάθμισης κινδύνου μέσω option (Σχήματα 1.7 και 1.8)

```
## hedging example 1

K = 55; c=4
x = seq(30 , 80 , 0.1)

y1 = ifelse( x < 55 , x +(K- x)- c, x - c)
y2 = x
data.frame(x, y1, y2) %>%
  gather(key = 'key', value = 'value', 2:3) %>%
  ggplot(aes(x = x, y = value , color = key)) + geom_line(size = 1.25) +
  theme_bw() + geom_hline(yintercept = 0 , color = 'grey') +
  labs(x = 'Τιμή υποκείμενου τίτλου' , y1= 'Τιμή πώλησης' , color = '') +
  scale_color_discrete(labels = c('με αντιστάθμιση' , 'χωρίς αντιστάθμιση'))

## hedging example 2

K = 55; c=4
x = seq(30 , 80 , 0.1)

y1 = ifelse( x > 55 , x -(x - K)+ c, x + c)
y2 = x
data.frame(x, y1, y2) %>%
  gather(key = 'key', value = 'value', 2:3) %>%
  ggplot(aes(x = x, y = value , color = key)) + geom_line(size = 1.25) +
  theme_bw() + geom_hline(yintercept = 0 , color = 'grey') +
  labs(x = 'Τιμή υποκείμενου τίτλου' , y = 'Τιμή αγοράς' , color = '') +
  scale_color_discrete(labels = c('με αντιστάθμιση' , 'χωρίς αντιστάθμιση'))
```

Π.4 Αναπαράσταση των χρονολογικών σειρών των τιμών και ημερήσιων αποδόσεων, των ιστογραμμάτων και των normal qq-plot των ημερησίων αποδόσεων για τα εξεταζόμενα ενεργειακά αγαθά (Σχήματα 2.1 – 2.4)

```
data = data[complete.cases(data) , ]
data$Date = as.Date(data$Date)
str(data)

p1 = qplot(y = data$Adj.Close , x = data$Date , geom = 'line') +
  theme_classic() + geom_line(color = 'darkblue') +
  labs(y = 'Price' , x = 'Date')

p2 = data.frame(rets = diff(log(data$Adj.Close)) ,
  date = data$Date[-1]) %>%
  ggplot(aes(x = date , y = rets)) + theme_classic() +
  geom_point(size = 1 , color = 'darkblue' , alpha = 0.5) +
  labs(y = 'Returns' , x = 'Date')

p3 = data.frame(rets = diff(log(data$Adj.Close))) %>%
  ggplot(aes(rets)) + theme_classic() +
  geom_histogram(bins = 100 , fill = 'blue') +
  labs(x = 'Returns')
p3

# standardization function
stand = function(x){ (x - mean(x)) / sd(x) }

p4 = data.frame(rets = stand(diff(log(data$Adj.Close)))) %>%
  ggplot(aes(sample = rets)) + theme_classic() +
  stat_qq(color = 'darkblue' , alpha = 0.5 , size = 1) +
  stat_qq_line(color = 'darkred') +
  labs(y = 'Standardized Returns' , title = 'Normal Q-Q plot')
p4

grid.arrange(p1 , p2 , p3 , p4 , ncol = 2)
```

Π.5 Δημιουργία ενός μονοπατιού γεωμετρικής κίνησης Brown με $\mu = 0.1$ και $\sigma = 0.35$ (Σχήμα 2.5)

```
## GBM

s_GBM = c() ; s_GBM[1] = 3.9 ; n=4 ; dt=1/249
for (t in 2:(dt^(-1) * n)){
  s_GBM[t] = s_GBM[t-1] + (mean_GBM - (vol_annual^2)/2)*dt + vol_annual*rnorm(1)*sqrt(dt)
}
plot(x=1:t , y=s_GBM, type = 'l')
```

Π.6 Υπολογισμός παραμέτρων της διαδικασίας O-U (Ενότητα 2.4.4)

```
## Estimation of O-U parameters

dt = 1/249

data1 = data.frame(dlog1 = rets.ho1l_reg , spot1 = hoil[1:(length(rets.ho1l_reg))])
modell = lm(dlog1 ~ spot1 , data1)
rev_speed_MR = (-log(modell$coefficients[2] + 1))*249
std_regr_MR = sd(modell$residuals)
sigma_annual_MR = std_regr_MR*sqrt(2*log(1 + modell$coefficients[2])/((1+modell$coefficients[2])^2 - 1))/sqrt(dt)
long_run_mean = - modell$coefficients[1]/modell$coefficients[2]
```

Π.7 Δημιουργία ενός μονοπατιού Ornstein- Ullénbeck με $\alpha = 1.75$, $\mu_L = 4$ και $\sigma = 0.35$ (Σχήμα 2.6)

```
## MR

s_MR = c() ; s_MR[1] = 3.9 ; n = 4 ; dt = 1/249
for (t in (2:(dt^(-1) * n))){
  e = rnorm(1)
  s_MR[t] = s_MR[t-1]* exp(-rev_speed_MR * dt)
    + (long_run_mean - (sigma_annual_MR^2)/2/rev_speed_MR)*(1- exp(-rev_speed_MR * dt))
    + sigma_annual_MR * sqrt((1- exp(-rev_speed_MR*2 * dt))/2/rev_speed_MR)*e
}

plot(x = 1:t , y = s_MR , type = 'l')
```

Π.8 Υπολογισμός παραμέτρων της διαδικασίας MRJD (Ενότητα 2.4.5)

```
## Identification of jump-returns

rets_jump = rep(NA , length(hoil))
while ( sum(abs(rets.hoil) > 3*sd(rets.hoil , na.rm = T)) != 0 ) {
  for ( i in (1:length(rets.hoil))){
    if ( abs(rets.hoil[i]) > 3*sd(rets.hoil , na.rm = T)){
      rets_jump[i] = rets.hoil[i]
      rets.hoil[i] = NA
    }
  }
  rets.hoil = rets.hoil %>% na.omit()
  std = sd(rets.hoil)
}
rets_jump = rets_jump %>% na.omit()

## Estimation of jumps parameters

mean_jumps = mean(rets_jump)
std_jumps = sd(rets_jump)
freq_jumps = length(rets_jump)/length(rets.ho1l_reg)
```

Π.9 Δημιουργία ενός μονοπατιού MRJD με $\alpha = 1.75$, $\mu_L = 4$, $\sigma = 0.35$, $\mu_J = 0.014$, $\sigma_J = 0.082$ και $\phi = 0.023$ (Σχήμα 2.6)

```
## MRJD

s_MRJD = c(); s_MRJD[1] = 3.9; n = 5; dt = 1/249
for (t in (2:(dt*(-1)^n))) {
  s_MRJD[t] = s_MRJD[t-1] * exp(-rev_speed_MR * dt)
  + (long_run_mean - (sigma_annual_MR^2)/2/rev_speed_MR) * (1 - exp(-rev_speed_MR * dt))
  + sigma_annual_MR * sqrt((1 - exp(-rev_speed_MR^2 * dt))/2/rev_speed_MR) * rnorm(1) + (mean_jumps + rnorm(1)*std_jumps) * ifelse(runif(1) < freq_jumps, 1, 0)
}
```

Π.10 Μεταβλητότητα των ΣΜΕ με την πάροδο του χρόνου για τις διαδικασίες GBM και O-U με $\alpha = 0.5$, 1 και 2 (Σχήμα 3.2)

```
vol = 0.3
T = 5
i = 1
vol_gbm = c()
vol_mr1 = c()
vol_mr2 = c()
vol_mr3 = c()

for (t in seq(5, 0, -0.01)) {

  vol_gbm[i] = vol
  vol_mr1[i] = vol * exp(-0.5 * (T - t))
  vol_mr2[i] = vol * exp(-1 * (T - t))
  vol_mr3[i] = vol * exp(-2 * (T - t))
  i = i + 1
}

data.frame(t, vol_gbm, vol_mr1, vol_mr2, vol_mr3) %>%
  gather(key = 'key', value = 'value', 2:5) %>%
  ggplot(aes(x = t, y = value, color = key)) + geom_line(size = 1.25) +
  theme_bw() + geom_hline(yintercept = 0, color = 'grey') +
  labs(x = 'Χρόνος (σε έτη)', y = 'Τιμή μεταβλητότητας', color = '')
```

Π.11 Τιμολόγηση ευρωπαϊκού δικαιώματος με τις μεθόδους Black '76 και Clewlow-Strickland ($a=0.01$, $0.1, 0.5$). Οι τιμές των παραμέτρων είναι: $r=5\%$, $u=y$, $F_0 = 50$, $K = 55$, $T = 0.5$, $s = 1$, $\sigma = 30\%$ (Πίνακας 3.1).

```
f0 = 50
K = 55
risk_free = 0.05 ## risk-free rate
vol_annual = 0.3
T = 0.5
s = 1

dt=1/249 ; days = round(dt^(-1) * T)
d1 = (log(f0/K) + (vol_annual^2)/2)*T/vol_annual/sqrt(T)
d2 = (log(f0/K) - (vol_annual^2)/2)*T/vol_annual/sqrt(T)
bsm_option_76 = exp(-risk_free*T)*(f0*pnorm(d1) - K*pnorm(d2))

a = 0.01

dt=1/249 ; days = round(dt^(-1) * T)
w = (vol_annual^2) / 2 / a * (exp(-2*a*(s - T)) - exp(-2*a*s))
h = (log(f0/K) + w/2) / sqrt(w)
bsm_option_clew = exp(-risk_free*T)*(f0*pnorm(h) - K*pnorm(h-sqrt(w)))
```

Π.12 Ιστογράμμα 10000 ψευδοτυχαίων αριθμών (Σχήμα 4.1)

```
## Έλεγχος γεννήτριας ψευδοτυχαίων αριθμών

x= runif(n=10000)
y = qnorm(x)
qplot(y, geom = 'histogram', fill= 'lightblue',) + lines(ggdistribution(dnorm, seq(-3, 3, 0.1), mean = 0, sd = 1))
h = hist(y, breaks=40, col="red", xlab=" ", main="Ιστογράμμα με τυπική κανονική κατανομή")
xfit=seq(min(y),max(y),length=40)
yfit=dnorm(xfit,mean=mean(y),sd=sd(y))
yfit = yfit*diff(h$mids[1:2])*length(y)
lines(xfit, yfit, col="blue", lwd=2)
```

Π.13 Αποτίμηση Ευρωπαϊκού δικαιώματος με το μοντέλο Black '76

```
## EUROPEAN OPTION PRICING USING BLACK '76

S0 = 45
K = 55
risk_free = 0.05 ## risk-free rate
vol_annual = 0.35
y = 0.02
n = 1
T = n ## T = n
f0 = S0 * exp((risk_free - y)*s)
dt = 1/249 ; days = round(dt^(-1) * n)
d1 = (log(f0/K) + (vol_annual^2)/2)*T/vol_annual/sqrt(T)
d2 = (log(f0/K) - (vol_annual^2)/2)*T/vol_annual/sqrt(T)
bsm_option_76 = exp(-risk_free*(s-T))*(f0*pnorm(d1) - K*pnorm(d2))
bsm_option_76
```

Π.14 Αποτίμηση Ευρωπαϊκού δικαιώματος με την απλή μέθοδο Monte Carlo (Ενότητα 4.4.1)

```
## EUROPEAN OPTION PRICING USING NAIVE MONTE CARLO

n_sim = 50000 ; dt = 1/249 ; days = round(dt^(-1) * n)
value_option1 = c()
value_option2 = c()
ft2 = c()
s_GBM = matrix(data = rep(NA, days*n_sim), nrow = n_sim)
for (i in 1:n_sim) {
  s_GBM[i,1] = S0
  for (j in 2:(days)){
    s_GBM[i,j] = s_GBM[i,j-1]*exp((risk_free - y - (vol_annual^2)/2)*dt + vol_annual*rnorm(1)*sqrt(dt))
  }
  ft2[i] = s_GBM[i,days]*exp((risk_free - y)*(s-T))
  value_option2[i] = max(ft2[i] - K, 0)
}

std_error_c0 = sd(value_option2)/sqrt(n_sim)
estimate_c0 = exp(-risk_free*n)*mean(value_option2)
```

Π.15 Αποτίμηση Ευρωπαϊκού δικαιώματος με την μέθοδο της μεταβλητής ελέγχου (Ενότητα 4.4.2)

```
## EUROPEAN OPTION PRICING USING CONTROL VARIATE MONTE CARLO

n_sim = 50000 ; dt=1/249 ; days = round(dt^(-1) * n)
ft3 = c()
s3_GBM = matrix(data = rep(NA, days*n_sim), nrow = n_sim)
for (i in 1:n_sim) {
  s3_GBM[i,1] = S0
  for (j in 2:(days)){
    s3_GBM[i,j] = s3_GBM[i,j-1]*exp((risk_free - y - (vol_annual^2)/2)*dt + vol_annual*rnorm(1)*sqrt(dt))
  }
}
spot = s3_GBM[,days]
value_option2 = c()
for (i in 1:n_sim) {
  ft3[i] = s3_GBM[i,days]*exp((risk_free - y)*(s-T))
  value_option2[i] = max(ft3[i] - K, 0)
}
varian = var(value_option2)*(1 - cor(value_option2,spot)^2)
b_optimal = -(cov(value_option2 , spot)/var(spot))
estimate1 = mean(value_option2) - b_optimal*(s3_GBM[1,1]*exp((risk_free - y)*n) - mean(spot) )
estimate_c1 = estimate1*exp(-risk_free*n)
std_error_c1 = sqrt(varian)/sqrt(n_sim)
```

Π.16 Αποτίμηση Ευρωπαϊκού δικαιώματος με αντιθετική δειγματοληψία (Ενότητα 4.4.3)

```
## EUROPEAN OPTION PRICING USING ANTITHETIC MONTE CARLO

n_sim = 50000

ft4 = c()
ft5 = c()
s1_GBM = matrix(data = rep(NA, days*n_sim), nrow = n_sim)
s2_GBM = matrix(data = rep(NA, days*n_sim), nrow = n_sim)
v = rep(NA , length(n_sim))
v1 = rep(NA , length(n_sim))
v2 = rep(NA , length(n_sim))
for (i in 1:n_sim) {
  s1_GBM[i,1] = S0
  s2_GBM[i,1] = S0
  deviates = rnorm(days)
  for (j in 2:(days)){
    s1_GBM[i,j] = s1_GBM[i,j-1]*exp((risk_free - y - (vol_annual^2)/2)*dt + vol_annual*deviates[j]*sqrt(dt))
    s2_GBM[i,j] = s2_GBM[i,j-1]*exp((risk_free - y - (vol_annual^2)/2)*dt - vol_annual*deviates[j]*sqrt(dt))
  }
  ft4[i] = s1_GBM[i,days]*exp((risk_free - y)*(s-T))
  ft5[i] = s2_GBM[i,days]*exp((risk_free - y)*(s-T))
  v1[i] = max(ft4[i] - K, 0)
  v2[i] = max(ft5[i] - K, 0)
  v[i] = (v1[i]+v2[i])/2
}

estimate_c2 = exp(-risk_free*n)*mean(v)
std_error_c2 = sd(v)/sqrt(n_sim)
```


Π.17 Υπολογισμός της απόδοσης ευκολίας για την γεωμετρική κίνηση Brown (Ενότητα 5.2.3)

```
## Futures prices

obs_fut = c()
for ( i in (1:10)) {
  obs_fut[i] = scan()
}

#### GBM|

y = c()

for(i in (1:9)) {
  y[i] = mean_GBM - log(obs_fut[i+1]/obs_fut[i])*12
}
```

Π.18 Υπολογισμός του συντελεστή λ (κόστος κινδύνου) για την διαδικασία O-U (Ενότητα 5.2.4)

```
#### MR

start = -0.9
end = 1
len = length(seq(start,end,0.001))
S0 = 58.87
fut_MR = matrix(data = rep(NA, len^9), nrow = 9)

risk_MR = start
for ( i in (1:9)) {
  risk_MR = start
  for ( j in (1:len)) {
    S0 = obs_fut[i]
    fut_MR[i, j] = exp(exp(-rev_speed_MR*(1/12))*log(S0)
      + (1 - exp(-rev_speed_MR*(1/12)))*(long_run_mean - risk_MR - (sigma_annual_MR^2)/2/rev_speed_MR )
      + (sigma_annual_MR^2) /4/rev_speed_MR*(1-exp(-2*rev_speed_MR*(1/12))))
    risk_MR = risk_MR + 0.001
  }
}

|
position = c()
min_error = c()
for ( i in (1:9)) {
  min_error[i] = (fut_MR[i,1] - obs_fut[i+1])^2
  position[i] = 1
  for ( j in (2:len)) {
    if ( (fut_MR[i,j] - obs_fut[i+1])^2 < min_error[i]){
      min_error[i] = (fut_MR[i,j] - obs_fut[i+1])^2
      position[i] = j
    }
  }
}

market_risk_MR = c()
for ( i in (1:9)) {
  market_risk_MR[i] = start + position[i]*0.001
}
```

Π.19 Υπολογισμός του συντελεστή ν (κόστος κινδύνου) για την διαδικασία MRJD (Ενότητα 5.2.5)

```
#### MRJD

n_sim = 25000

start = -0.15
end = 0.1
len = length(seq(start,end,0.005))
S0 = 58.87
fut_MRJD = matrix(data = rep(NA, len*9), nrow = 9)

risk_MRJD = start
for (i in (1:9)) {
  risk_MRJD = start
  for (j in (1:len)) {
    S0 = obs_fut[i]
    for (k in (1:n_sim))
      fut_MRJD[i, j, k] = exp(exp(-rev_speed_MR*(1/12))*log(S0)
        + (1 - exp(-rev_speed_MR*(1/12)))*(long_run_mean - risk_MRJD - (sigma_annual_MR^2)/2/rev_speed_MR )
        + (sigma_annual_MR^2 + (std_jumps^2)*freq_jumps*sqrt(249)) / 4/rev_speed_MR*(1-exp(-2*rev_speed_MR*(1/12))))
    risk_MRJD = risk_MRJD + 0.005
  }
}

position = c()
min_error = c()
for (i in (1:9)) {
  min_error[i] = (fut_MRJD[i,1] - obs_fut[i+1])^2
  position[i] = 1
  for (j in (2:len)) {
    if ((fut_MRJD[i,j] - obs_fut[i+1])^2 < min_error[i]){
      min_error[i] = (fut_MRJD[i,j] - obs_fut[i+1])^2
      position[i] = j
    }
  }
}

market_risk_MRJD = c()
for (i in (1:9)) {
  market_risk_MRJD[i] = start + position[i]*0.001
}
```

Π.20 Αποτίμηση δικαιωμάτων αργού πετρελαίου με Monte Carlo για την περίπτωση της διαδικασίας GBM (Ενότητα 5.3)

```
S0 = 58.87 ; K = 65 ; risk_free = 0.005 ; risk-free = 0.005 ; vol_annual = 0.35 ; n= 7/12 ; s= 7/12 ; T =n ; days = round(dt^(-1) * n) ; n_sim = 50000

##GBM

value_option_a_gbm = c()
value_option_b_gbm = c()
value_option_c_gbm = c()
value_option_GBM = c()
s_GBM = matrix(data = rep(NA, days*n_sim), nrow = n_sim)
for (i in 1:n_sim) {
  s_GBM[i,1] = S0
  for (j in 2:(days)){
    if (j < 21){
      s_GBM[i,j] = s_GBM[i,j-1]*exp((risk_free - y[1] - (vol_annual^2)/2)*dt + vol_annual*rnorm(1)*sqrt(dt))
    }else if (j < 42){
      s_GBM[i,j] = s_GBM[i,j-1]*exp((risk_free - y[2] - (vol_annual^2)/2)*dt + vol_annual*rnorm(1)*sqrt(dt))
    }else if (j < 62){
      s_GBM[i,j] = s_GBM[i,j-1]*exp((risk_free - y[3] - (vol_annual^2)/2)*dt + vol_annual*rnorm(1)*sqrt(dt))
    }else if (j < 83){
      s_GBM[i,j] = s_GBM[i,j-1]*exp((risk_free - y[4] - (vol_annual^2)/2)*dt + vol_annual*rnorm(1)*sqrt(dt))
    }else if (j < 104){
      s_GBM[i,j] = s_GBM[i,j-1]*exp((risk_free - y[5] - (vol_annual^2)/2)*dt + vol_annual*rnorm(1)*sqrt(dt))
    }else if (j < 125){
      s_GBM[i,j] = s_GBM[i,j-1]*exp((risk_free - y[6] - (vol_annual^2)/2)*dt + vol_annual*rnorm(1)*sqrt(dt))
    }else if (j < 145){
      s_GBM[i,j] = s_GBM[i,j-1]*exp((risk_free - y[7] - (vol_annual^2)/2)*dt + vol_annual*rnorm(1)*sqrt(dt))
    }else if (j < 166){
      s_GBM[i,j] = s_GBM[i,j-1]*exp((risk_free - y[8] - (vol_annual^2)/2)*dt + vol_annual*rnorm(1)*sqrt(dt))
    }else {
      s_GBM[i,j] = s_GBM[i,j-1]*exp((risk_free - y[9] - (vol_annual^2)/2)*dt + vol_annual*rnorm(1)*sqrt(dt))
    }
  }
  value_option_GBM[i] = max(s_GBM[i,days] - K, 0)
  value_option_a_gbm[i] = max(mean(s_GBM[i,(days-21):days]) - K, 0)
  value_option_b_gbm[i] = max(mean(s_GBM[i,(days-61):days]) - K, 0)
  value_option_c_gbm[i] = max(mean(s_GBM[i,(days-125):days]) - K, 0)
}

estimate_GBM = exp(-risk_free*n)*mean(value_option_GBM)      ## EUROPEAN
estimate_GBM_a = exp(-risk_free*n)*mean(value_option_a_gbm) ## 1-month ASIAN
estimate_GBM_b = exp(-risk_free*n)*mean(value_option_b_gbm) ## 3-month ASIAN
estimate_GBM_c = exp(-risk_free*n)*mean(value_option_c_gbm) ## 6-month ASIAN
```

Π.21 Αποτίμηση δικαιωμάτων αργού πετρελαίου με Monte Carlo για την περίπτωση της διαδικασίας O-U (Ενότητα 5.3)

```
## O-U

S0 = 58.87
value_option_a_mr = c()
value_option_b_mr = c()
value_option_c_mr = c()
value_option_MR = c()
s_MR = matrix(data = rep(NA, days*n_sim), nrow = n_sim)
for (i in 1:n_sim) {
  s_MR[i,1] = log(S0)
  for (j in 2:(days)){
    if (j < 21){
      s_MR[i,j] = s_MR[i,j-1] * exp(-rev_speed_MR * dt)
      + (long_run_mean - market_risk_MR[1] - (sigma_annual_MR^2)/2/rev_speed_MR)*(1- exp(-rev_speed_MR * dt))
      + sigma_annual_MR * sqrt((1- exp(-rev_speed_MR^2 * dt))/2/rev_speed_MR)*rnorm(1)
    }else if (j < 42){
      s_MR[i,j] = s_MR[i,j-1] * exp(-rev_speed_MR * dt)
      + (long_run_mean - market_risk_MR[2] - (sigma_annual_MR^2)/2/rev_speed_MR)*(1- exp(-rev_speed_MR * dt))
      + sigma_annual_MR * sqrt((1- exp(-rev_speed_MR^2 * dt))/2/rev_speed_MR)*rnorm(1)
    }else if (j < 62){
      s_MR[i,j] = s_MR[i,j-1] * exp(-rev_speed_MR * dt)
      + (long_run_mean - market_risk_MR[3] - (sigma_annual_MR^2)/2/rev_speed_MR)*(1- exp(-rev_speed_MR * dt))
      + sigma_annual_MR * sqrt((1- exp(-rev_speed_MR^2 * dt))/2/rev_speed_MR)*rnorm(1)
    }else if (j < 83){
      s_MR[i,j] = s_MR[i,j-1] * exp(-rev_speed_MR * dt)
      + (long_run_mean - market_risk_MR[4] - (sigma_annual_MR^2)/2/rev_speed_MR)*(1- exp(-rev_speed_MR * dt))
      + sigma_annual_MR * sqrt((1- exp(-rev_speed_MR^2 * dt))/2/rev_speed_MR)*rnorm(1)
    }else if (j < 104){
      s_MR[i,j] = s_MR[i,j-1] * exp(-rev_speed_MR * dt)
      + (long_run_mean - market_risk_MR[5] - (sigma_annual_MR^2)/2/rev_speed_MR)*(1- exp(-rev_speed_MR * dt))
      + sigma_annual_MR * sqrt((1- exp(-rev_speed_MR^2 * dt))/2/rev_speed_MR)*rnorm(1)
    }else if (j < 125){
      s_MR[i,j] = s_MR[i,j-1] * exp(-rev_speed_MR * dt)
      + (long_run_mean - market_risk_MR[6] - (sigma_annual_MR^2)/2/rev_speed_MR)*(1- exp(-rev_speed_MR * dt))
      + sigma_annual_MR * sqrt((1- exp(-rev_speed_MR^2 * dt))/2/rev_speed_MR)*rnorm(1)
    }else if (j < 145){
      s_MR[i,j] = s_MR[i,j-1] * exp(-rev_speed_MR * dt)
      + (long_run_mean - market_risk_MR[7] - (sigma_annual_MR^2)/2/rev_speed_MR)*(1- exp(-rev_speed_MR * dt))
      + sigma_annual_MR * sqrt((1- exp(-rev_speed_MR^2 * dt))/2/rev_speed_MR)*rnorm(1)
    }else if (j < 166){
      s_MR[i,j] = s_MR[i,j-1] * exp(-rev_speed_MR * dt)
      + (long_run_mean - market_risk_MR[8] - (sigma_annual_MR^2)/2/rev_speed_MR)*(1- exp(-rev_speed_MR * dt))
      + sigma_annual_MR * sqrt((1- exp(-rev_speed_MR^2 * dt))/2/rev_speed_MR)*rnorm(1)
    }else {
      s_MR[i,j] = s_MR[i,j-1] * exp(-rev_speed_MR * dt)
      + (long_run_mean - market_risk_MR[9] - (sigma_annual_MR^2)/2/rev_speed_MR)*(1- exp(-rev_speed_MR * dt))
      + sigma_annual_MR * sqrt((1- exp(-rev_speed_MR^2 * dt))/2/rev_speed_MR)*rnorm(1)
    }
  }
  value_option_MR[i] = max(exp(s_MR[i,days]) - K, 0)
  value_option_a_mr[i] = max(mean(exp(s_MR[i,(days-21):days])) - K, 0)
  value_option_b_mr[i] = max(mean(exp(s_MR[i,(days-61):days])) - K, 0)
  value_option_c_mr[i] = max(mean(exp(s_MR[i,(days-125):days])) - K, 0)
}

estimate_MR = exp(-risk_free*n)*mean(value_option_MR)
estimate_MR_a = exp(-risk_free*n)*mean(value_option_a_mr)
estimate_MR_b = exp(-risk_free*n)*mean(value_option_b_mr)
estimate_MR_c = exp(-risk_free*n)*mean(value_option_c_mr)
```

Π.22 Αποτίμηση δικαιωμάτων αργού πετρελαίου με Monte Carlo για την περίπτωση της διαδικασίας MRJD (Ενότητα 5.3)

```
## MRJD

value_option_a_mrjd = c()
value_option_b_mrjd = c()
value_option_c_mrjd = c()
value_option_MRJD = c()
s_MRJD = matrix(data = rep(NA, days*n_sim), nrow = n_sim)
for (i in 1:n_sim) {
  s_MRJD[i,1] = log(S0)
  for (j in 2:(days)) {
    e = rnorm(1)
    if (j < 21) {
      s_MRJD[i,j] = s_MRJD[i,j-1] * exp(-rev_speed_MR * dt)
      + (long_run_mean - freq_jumps - market_risk_MRJD[1] - (sigma_annual_MR^2)/2/rev_speed_MR*(1- exp(-rev_speed_MR * dt))
      + sigma_annual_MR * sqrt((1- exp(-rev_speed_MR^2 * dt))/2/rev_speed_MR)*e + (mean_jumps + rnorm(1)*std_jumps)*ifelse(runif(1) < freq_jumps, 1, 0)
    } else if (j < 42) {
      s_MRJD[i,j] = s_MRJD[i,j-1] * exp(-rev_speed_MR * dt)
      + (long_run_mean - freq_jumps - market_risk_MRJD[1] - (sigma_annual_MR^2)/2/rev_speed_MR*(1- exp(-rev_speed_MR * dt))
      + sigma_annual_MR * sqrt((1- exp(-rev_speed_MR^2 * dt))/2/rev_speed_MR)*e + (mean_jumps + rnorm(1)*std_jumps)*ifelse(runif(1) < freq_jumps, 1, 0)
    } else if (j < 62) {
      s_MRJD[i,j] = s_MRJD[i,j-1] * exp(-rev_speed_MR * dt)
      + (long_run_mean - freq_jumps - market_risk_MRJD[3] - (sigma_annual_MR^2)/2/rev_speed_MR*(1- exp(-rev_speed_MR * dt))
      + sigma_annual_MR * sqrt((1- exp(-rev_speed_MR^2 * dt))/2/rev_speed_MR)*e + (mean_jumps + rnorm(1)*std_jumps)*ifelse(runif(1) < freq_jumps, 1, 0)
    } else if (j < 83) {
      s_MRJD[i,j] = s_MRJD[i,j-1] * exp(-rev_speed_MR * dt)
      + (long_run_mean - freq_jumps - market_risk_MRJD[4] - (sigma_annual_MR^2)/2/rev_speed_MR*(1- exp(-rev_speed_MR * dt))
      + sigma_annual_MR * sqrt((1- exp(-rev_speed_MR^2 * dt))/2/rev_speed_MR)*e + (mean_jumps + rnorm(1)*std_jumps)*ifelse(runif(1) < freq_jumps, 1, 0)
    } else if (j < 104) {
      s_MRJD[i,j] = s_MRJD[i,j-1] * exp(-rev_speed_MR * dt)
      + (long_run_mean - freq_jumps - market_risk_MRJD[5] - (sigma_annual_MR^2)/2/rev_speed_MR*(1- exp(-rev_speed_MR * dt))
      + sigma_annual_MR * sqrt((1- exp(-rev_speed_MR^2 * dt))/2/rev_speed_MR)*e + (mean_jumps + rnorm(1)*std_jumps)*ifelse(runif(1) < freq_jumps, 1, 0)
    } else if (j < 125) {
      s_MRJD[i,j] = s_MRJD[i,j-1] * exp(-rev_speed_MR * dt)
      + (long_run_mean - freq_jumps - market_risk_MRJD[6] - (sigma_annual_MR^2)/2/rev_speed_MR*(1- exp(-rev_speed_MR * dt))
      + sigma_annual_MR * sqrt((1- exp(-rev_speed_MR^2 * dt))/2/rev_speed_MR)*e + (mean_jumps + rnorm(1)*std_jumps)*ifelse(runif(1) < freq_jumps, 1, 0)
    } else if (j < 145) {
      s_MRJD[i,j] = s_MRJD[i,j-1] * exp(-rev_speed_MR * dt)
      + (long_run_mean - freq_jumps - market_risk_MRJD[7] - (sigma_annual_MR^2)/2/rev_speed_MR*(1- exp(-rev_speed_MR * dt))
      + sigma_annual_MR * sqrt((1- exp(-rev_speed_MR^2 * dt))/2/rev_speed_MR)*e + (mean_jumps + rnorm(1)*std_jumps)*ifelse(runif(1) < freq_jumps, 1, 0)
    } else if (j < 166) {
      s_MRJD[i,j] = s_MRJD[i,j-1] * exp(-rev_speed_MR * dt)
      + (long_run_mean - freq_jumps - market_risk_MRJD[8] - (sigma_annual_MR^2)/2/rev_speed_MR*(1- exp(-rev_speed_MR * dt))
      + sigma_annual_MR * sqrt((1- exp(-rev_speed_MR^2 * dt))/2/rev_speed_MR)*e + (mean_jumps + rnorm(1)*std_jumps)*ifelse(runif(1) < freq_jumps, 1, 0)
    } else {
      s_MRJD[i,j] = s_MRJD[i,j-1] * exp(-rev_speed_MR * dt)
      + (long_run_mean - freq_jumps - market_risk_MRJD[9] - (sigma_annual_MR^2)/2/rev_speed_MR*(1- exp(-rev_speed_MR * dt))
      + sigma_annual_MR * sqrt((1- exp(-rev_speed_MR^2 * dt))/2/rev_speed_MR)*e + (mean_jumps + rnorm(1)*std_jumps)*ifelse(runif(1) < freq_jumps, 1, 0)
    }
  }
  value_option_MRJD[i] = max(exp(s_MRJD[i,days]) - K, 0)
  value_option_a_mrjd[i] = max(mean(exp(s_MR[i,(days-21):days])) - K, 0)
  value_option_b_mrjd[i] = max(mean(exp(s_MR[i,(days-61):days])) - K, 0)
  value_option_c_mrjd[i] = max(mean(exp(s_MR[i,(days-125):days])) - K, 0)
}

estimate_MRJD = exp(-risk_free*n)*mean(value_option_MRJD)
estimate_MRJD_a = exp(-risk_free*n)*mean(value_option_a_mrjd)
estimate_MRJD_b = exp(-risk_free*n)*mean(value_option_b_mrjd)
estimate_MRJD_c = exp(-risk_free*n)*mean(value_option_c_mrjd)
```

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Mack Ir., " Energy Trading and Risk Management,A Practical Approach to Hedging,Trading and Portofolio Diversification", John Wiley & Sons, 2014
- [2] Hull J.C. " Options, Futures, and Other Derivatives ", 9th Edition, 2015
- [3] Σπύρου Σ., " Αγορές Χρήματος και Κεφαλαίου ", Εκδόσεις Γ. Μπένου ,Αθήνα 2013
- [4] Burger M., Graeber B., Schindlmayr G., " Managing Energy Risk ", John Wiley & Sons, 2014
- [5] Επίσκοπος Αθ., ., " Χρηματοοικονομική Επιχειρήσεων ", Εκδόσεις ΑUEB, 2014
- [6] Gemen H., "Commodities and Commodity Derivatives : Modeling and Pricing for Agriculturals, Metals and Energy", John Wiley & Sons , 2005
- [7] Chan R. , Guo Yv., Lee S., Li X., " Financial Mathematics, Derivatives and Structured Products", Springer, 2019
- [8] Χαλικιάς Ι.Γ., " Στατιστική , Μέθοδοι Ανάλυσης για Επιχειρηματικές Αποφάσεις ", Rosili, 2010
- [9] Κουτρούβελης Ιωαν. , " Εφαρμοσμένες Πιθανότητες και Στατιστική ",Gotsis Εκδόσεις , 2015
- [10] Wilmott P., " Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance ", John Wiley & Sons , 2007
- [11] Clewlow L., Strickland C. , " Energy Derivatives Pricing and Risk Management ", Lacima Publications, 2000
- [12] Dixit Av., Pindyck R., "Investment under Uncertainty", Princeton University Press, 1994
- [13] Nomikos N., Andriosopoulos K. , " Modelling energy spot prices: Empirical evidence from NYMEX", City: University of London Institutional Repository, 2012
- [14] Evan Turner, " The Black-Scholes and Extensions" , math.uchicago.edu, online : <http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2010/REUPapers/Turner.pdf>
- [15] Χρυσικοπούλου Σ. , " Αριθμητική επίλυση και αξιολόγηση της εξίσωσης Black-Scholes προσαρμοσμένης σε στοχαστικό μοντέλο άλματος-διάχυσης", Διπλωματική Εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2014
- [16] Φλώρου Γ. , " Ποσοτικές μέθοδοι στα χρηματοοικονομικά" , Κάλλιπος, 2015

- [17] Νικάκης ΑΘ. , “ Επεκτάσεις της προσέγγισης Black-Scholes για την αντιμετώπιση της επίδρασης του χαμόγελου μεταβλητότητας στην αντιστάθμιση δέλτα”, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας, 2003
- [18] Smith W., “ On the Simulation and Estimation of the Mean-Reverting Ornstein-Uhlenbeck Process Especially as Applied to Commodities Markets and Modelling ”, 2010
- [19] Pilipovic B., “ Energy Risk : Valuing and Managing Energy Derivatives”, McGraw-Hill, 2007
- [20] Χατζησπύρος Σ. , Σημειώσεις μαθήματος “ Υπολογιστική Στατιστική ”, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, online : <http://www.samos.aegean.gr/actuar/schatz/notes/Simulation%20%CE%99%20ver2.2.pdf>
- [21] Τάτσης Β. , “ Εφαρμογές της μεθόδου Monte Carlo και των τεχνολογιών της Πληροφορίας και Επικοινωνίας στην Εκπαίδευση : Προσομοιώσεις στην Μοριακή Φυσική” , Μεταπτυχιακή Εργασία, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 2008
- [22] Brooks S. , Gelman An. , Galin J.L. & Meng X. , “ Handbook of Markov Chain Monte Carlo ”, Chapman & Hall
- [23] Brandimarte P. , “ Handbook in Monte Carlo Simulation, Application in Financial Engineering, Risk Management and Economics ”, John Wiley & Sons, 2014
- [24] Kroese D.P, Taimre T. & Botev Z. , “ Handbook of Monte Carlo Methods ”, John Wiley & Sons , 2011
- [25] Ζήμερας Σ. , Σημειώσεις μαθήματος “ Τεχνικές Προσομοίωσης ”, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
- [26] Geon Ho Choe , “ Stochastic Analysis for Finance with Simulations ”, Springer , 2016
- [27] Art B. Owen , “ Monte Carlo theory, methods and examples”, statweb.stanford.edu , online : <https://statweb.stanford.edu/~owen/mc/Ch-var-basic.pdf>
- [28] Συριόπουλος Κ., Λουκόπουλος Π., Σημειώσεις μαθήματος “ Χρηματοοικονομική Διοίκηση ”, Πανεπιστήμιο Πατρών
- [29] Eydeland AI. , Wolyniec K. , “ Energy and Power Risk Management: New Developments in Modelling, Pricing and Hedging”, John Wiley & Sons, 2003
- [30] Sorin R. Straja, “ Mean-Reversion Jump Diffusion ”, Montgomery Investment Technology

