

37. Bundeswettbewerb Informatik 2018/2019 **- Dokumentation -**

Aufgabe 5: Widerstand

Lösungsidee

Ausgangspunkt für die Lösungsidee zu dieser Aufgabe ist die vorgegebene Einschränkung bezüglich der Anzahl k (= bei der Kombination maximal zulässige Anzahl an Widerständen). Die Aufgabe soll lediglich für $k = 1, 2, 3$ bzw. 4 gelöst werden.

Für jede Anzahl h an Widerständen gibt es eine endliche Anzahl an Möglichkeiten, genau h Widerstände in Reihen-, Parallel- oder auch Schachtelschaltungen miteinander zu kombinieren. Für $h = 1$ gibt es logischerweise nur eine Möglichkeit, für $h = 2$ hingegen schon zwei: entweder sind die zwei Widerstände parallel oder seriell geschaltet. Für $h = 3$ ergeben sich acht verschiedene Kombinationsmöglichkeiten, die sich nach vier verschiedenen Schemata ergeben ($1 + 1 + 3 + 3 = 8$):

1. alle drei Widerstände sind seriell geschaltet
2. alle drei Widerstände sind parallel geschaltet
3. ein Widerstand ist parallel zu einer Serienschaltung der beiden anderen geschaltet
4. ein Widerstand ist seriell zu einer Parallelschaltung der beiden anderen geschaltet.

Bei Möglichkeit 3 und 4 ergeben sich jeweils drei verschiedene Möglichkeiten, da jeder der drei ausgewählten Widerstände der „Einzelne“ sein könnte.

Schwieriger gestaltet sich die Aufstellung sämtlicher Verschaltungsvarianten für $h = 4$. Schlussendlich erhält man hier 52 verschiedene Kombinationsmöglichkeiten, die sich nach 10 verschiedenen Schemata ergeben. Für eine adäquate Notation gelte: $[R R] =$ Parallelschaltung zweier Widerstände bzw. Widerstandskombinationen, $(R R) =$ Serienschaltung zweier Widerstände bzw. Widerstandskombinationen:

Sche ma	Beschreibung	Notation
1	alle vier Widerstände sind seriell geschaltet	$(R R R R)$
2	alle vier Widerstände sind parallel geschaltet	$[R R R R]$
3	ein Widerstand ist seriell zu einer Parallelschaltung der 3 anderen geschaltet	$(R [R R R])$
4	ein Widerstand ist parallel zu einer Serienschaltung der 3 anderen geschaltet	$[R (R R R)]$
5	jeweils zwei in Reihe geschaltete Widerstände werden parallel geschaltet	$[(R R) (R R)]$
6	jeweils zwei parallel geschaltete Widerstände werden seriell geschaltet	$([R R] [R R])$
7	eine Parallelschaltung aus zwei Widerständen ist in Serie zu den beiden anderen geschaltet	$([R R] R R)$
8	eine Reihenschaltung aus zwei Widerständen ist parallel zu den beiden anderen geschaltet	$[(R R) R R]$
9	eine Reihenschaltung aus einem Widerstand und einer Parallelschaltung ist parallel zum vierten Widerstand	$[(R [R R]) R]$

	geschaltet	
10	eine Parallelschaltung aus einem Widerstand und einer Serienschaltung ist seriell zum vierten Widerstand geschaltet	([R (R R)] R)

Sowohl innerhalb einer Reihenschaltung, als auch innerhalb einer Parallelschaltung sind die Widerstände/ Widerstandskombinationen ohne Auswirkungen untereinander vertauschbar.

Daher ergeben sich:

...für Schema 1 und 2 jeweils eine Möglichkeit,
...für Schema 3 und 4 jeweils vier Möglichkeiten,
...für Schema 5 und 6 jeweils drei Möglichkeiten,
...für Schema 7 und 8 jeweils sechs Möglichkeiten und
...für Schema 9 und 10 jeweils zwölf Möglichkeiten,

was in der Summe genau $2 \cdot (1 + 4 + 3 + 6 + 12) = 52$ Kombinationsvarianten ergibt.

Aus einer Grabbelkiste mit n Widerständen gibt es genau $\binom{n}{h}$ Möglichkeiten h

Widerstände aus dieser Kiste auszuwählen. Die Überprüfungen müssen genau einmal für jedes $h \leq k$ ($= 1, 2, 3, 4$) ablaufen. Die Anzahl der Überprüfungsvorgänge beläuft

sich also z. B. für $k = 4$ auf $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} = \frac{n^4 - 2n^3 + 11n^2 + 14n}{24}$.

Diese Zahl steigt mit wachsendem Umfang der Grabbelkiste exponentiell an: sind für $n = 10$ noch 385 Überprüfungen nötig, so sind es bei $n = 20$ schon 6195, bei $n = 30$ bereits 31930 usw.

Gelöst wird immer beginnend bei $h = 1$. Hier wird aus allen Widerständen der Grabbelkiste derjenige ermittelt, welcher die kleinste Differenz zum benötigten Widerstandswert aufweist. Für $h = 2, 3$ bzw. 4 wird dann im Anschluss jeweils eine Kombination gesucht, welche eine kleinere Differenz (nicht kleiner gleich, da die bereits gefundene Variante stets die unkompliziertere ist) aufweist, als die bis dahin gefundene. Da im Laufe des Programmablaufs sämtliche Kombinationen überprüft werden, erhält man am Ende diejenige Kombination aus höchstens k Widerständen, die dem benötigten Widerstandswert am nächsten kommt.

Es ist hier auch keine andere Lösungsidee als das Überprüfen aller Kombinationen denkbar, d.h. nur ein Algorithmus nach dem Brute-Force-Prinzip kann hier sicher eine korrekte Lösung finden.

Umsetzung in Java

Die Lösungsidee wird in Java implementiert. Es gibt eine Klasse `Widerstand`, deren Objekte das Attribut `wert` besitzen (= Widerstandswert). In der Klasse `Test` befindet sich die `main`-Methode. Diese realisiert zunächst das Einlesen der Widerstände aus der Textdatei "`widerstaende.txt`". Für jeden eingelesenen Wert wird ein Objekt vom Typ `Widerstand` erstellt, dessen Attribut `wert` entsprechend des eingelesenen Wertes gesetzt (Datentyp = `Integer` → ggf. werden Kommazahlen abgerundet) und zu einer `ArrayList<Widerstand>` hinzugefügt, welche die Grabbelkiste darstellt. Negative Widerstände werden hierbei aussortiert und nicht in die Grabbelkiste übernommen.

Anschließend wird mithilfe der importierten Scanner-Klasse der Wert des benötigten Widerstands über die Konsole per direkter Eingabe angefordert. Schließlich wird für jedes gefragte k (1, 2, 3, 4) die Funktion berechnung aufgerufen, welcher als Parameter neben k noch die Grabbelkiste sowie der Wert des benötigten Widerstandes übergeben wird.

Die Funktion berechnung durchläuft nun jeweils die Überprüfungsschritte für alle $h \leq k$. Erzeugt werden zu Beginn die Variablen laufergebnis, ergebnis und diff. Das Laufergebnis ist die Variable, die bei der Betrachtung einer Schaltungsvariante mit deren Widerstandswert belegt wird. Ist die Differenz von diesem Laufergebnis zum benötigten Widerstandswert bei einer Überprüfung kleiner als die bis dahin ermittelte Kleinstdifferenz (diff), so wird diese überschrieben. diff ergibt sich dabei immer als Betrag der Differenz zwischen dem Widerstandswert der erfolgreich untersuchten Schaltung und dem als Parameter übergebenen gesuchten Widerstandswert eingabe. Zudem wird mit dem Widerstandswert der untersuchten Schaltung die Variable ergebnis belegt, sowie die Schaltung als String in der auf S. 1 bereits verwendeten Notation gespeichert (schaltung). In der Methode berechnung wird nur noch mit dem Datentyp float gearbeitet, um hier Fehler durch Rundungen zu vermeiden. Variablen inadäquaten Datentyps (z. B. die Werte der Widerstände in der Grabbelkiste) werden vor der Referenzierung entsprechend angepasst. Die Methode umfasst sämtliche Auswahlmöglichkeiten von h Widerständen aus der Grabbelkiste, realisiert durch entsprechend ineinander geschachtelte for-Anweisungen.

Ein Beispiel für eine Überprüfungseinheit in der Methode berechnung ($h = 4$):

```
laufergebnis=(float) r1.wert+1/((1/(float) r2.wert+1/((float) r3.wert+(float) r4.wert));  
if (Math.abs(laufergebnis-eingabe)<diff) {  
    schaltung="(" + r1.wert + " [" + r2.wert + " (" + r3.wert + " " + r4.wert + ")]";  
    ergebnis=laufergebnis;  
    diff=Math.abs(laufergebnis-eingabe);  
}
```

Alle weiteren Einheiten wurden in dieser Dokumentation nicht abgedruckt, da dies den Rahmen sprengen würde, sie jedoch immer gleich aufgebaut sind. Der Aufbau der Überprüfungseinheiten bietet einen klaren Vorteil:

Die Befehle zur Überschreibung der Variablen befinden sich innerhalb der if-Klammer und werden daher nur dann ausgeführt, wenn das ermittelte Laufergebnis einen Fortschritt in Richtung des benötigten Widerstandes bringen würde. Da dies mit zunehmender Laufzeit immer seltener wird, wird die Laufzeit des Programms verbessert, da in dann immer nur das Laufergebnis berechnet und die Bedingung der if-Anweisung betrachtet wird. Dadurch beinhalten die Variablen schaltung, ergebnis und diff stets nur die Informationen bzgl. der besten bis dahin gefundenen Lösung.

Zum Ende des Durchlaufs der Funktion berechnung werden die Schaltung, das Ergebnis und die Differenz ausgegeben, die zu diesem Zeitpunkt in den entsprechenden Variablen niedergelegt sind. Diese entsprechen aus eben genannten Gründen den gesuchten Optimallösungen.

Das entwickelte Programm liefert auch für $0 < n < 4$ korrekte Ausgaben und auch, wenn bestimmte Widerstandswerte mehrfach in der Grabbelkiste vorkommen.

Beispiele (Grabbelkiste entspricht gegebenem Bsp. von der Website)

Eingabe benötigter Widerstand: 500

Ausgabe: k = 1

Schaltung: 470

Widerstandswert der Schaltung in Ohm: 470.0

Abweichung zum gewünschten Ergebnis in Ohm: 30.0

k = 2

Schaltung: [4700 560]

Widerstandswert der Schaltung in Ohm: 500.38025

Abweichung zum gewünschten Ergebnis in Ohm: 0.38024902

k = 3

Schaltung: (180 100 220)

Widerstandswert der Schaltung in Ohm: 500.0

Abweichung zum gewünschten Ergebnis in Ohm: 0.0

k = 4

Schaltung: (180 100 220)

Widerstandswert der Schaltung in Ohm: 500.0

Abweichung zum gewünschten Ergebnis in Ohm: 0.0

Eingabe benötigter Widerstand: 140

Ausgabe: k = 1

Schaltung: 150

Widerstandswert der Schaltung in Ohm: 150.0

Abweichung zum gewünschten Ergebnis in Ohm: 10.0

k = 2

Schaltung: [150 2200]

Widerstandswert der Schaltung in Ohm: 140.42552

Abweichung zum gewünschten Ergebnis in Ohm: 0.42552185

k = 3

Schaltung: [180 820 2700]

Widerstandswert der Schaltung in Ohm: 139.94943

Abweichung zum gewünschten Ergebnis in Ohm: 0.050567627

k = 4

Schaltung: [150 (180 1800 120)]

Widerstandswert der Schaltung in Ohm: 140.0

Abweichung zum gewünschten Ergebnis in Ohm: 0.0

Eingabe benötigter Widerstand: 314

optimale Differenz (= 0)
bereits bei h = 3 erreicht →
kein Unterschied mehr bei h
= 4

Ausgabe: k = 1

Schaltung: 330
Widerstandswert der Schaltung in Ohm: 330.0
Abweichung zum gewünschten Ergebnis in Ohm: 16.0

k = 2

Schaltung: [6800 330]
Widerstandswert der Schaltung in Ohm: 500.38025
Abweichung zum gewünschten Ergebnis in Ohm: 0.38024902

k = 3

Schaltung: [330 (1800 4700)]
Widerstandswert der Schaltung in Ohm: 314.05566
Abweichung zum gewünschten Ergebnis in Ohm: 0.055664062

k = 4

Schaltung: [1000 (120 [470 1200])]
Widerstandswert der Schaltung in Ohm: 313.99936
Abweichung zum gewünschten Ergebnis in Ohm: 6.4086914E-4

Eingabe benötigter Widerstand: 315

optimale Differenz (= 0)
bereits bei h = 3 erreicht →
kein Unterschied mehr bei h
= 4

Ausgabe: k = 1

Schaltung: 330
Widerstandswert der Schaltung in Ohm: 330.0
Abweichung zum gewünschten Ergebnis in Ohm: 15.0

k = 2

Schaltung: [6800 330]
Widerstandswert der Schaltung in Ohm: 314.7265
Abweichung zum gewünschten Ergebnis in Ohm: 0.27349854

k = 3

Schaltung: [560 (330 390)]
Widerstandswert der Schaltung in Ohm: 315.0
Abweichung zum gewünschten Ergebnis in Ohm: 0.0

k = 4

Schaltung: [560 (330 390)]
Widerstandswert der Schaltung in Ohm: 315.0
Abweichung zum gewünschten Ergebnis in Ohm: 0.0

Eingabe benötigter Widerstand: 1620

optimale Differenz (= 0)
bereits bei $h = 2$ erreicht →
kein Unterschied mehr bei h
= 3 und $h = 4$

Ausgabe: $k = 1$

Schaltung: 1500

Widerstandswert der Schaltung in Ohm: 1500.0

Abweichung zum gewünschten Ergebnis in Ohm: 120.0

$k = 2$

Schaltung: (1500 120)

Widerstandswert der Schaltung in Ohm: 1620.0

Abweichung zum gewünschten Ergebnis in Ohm: 0.0

$k = 3$

Schaltung: (1500 120)

Widerstandswert der Schaltung in Ohm: 1620.0

Abweichung zum gewünschten Ergebnis in Ohm: 0.0

$k = 4$

Schaltung: (1500 120)

Widerstandswert der Schaltung in Ohm: 1620.0

Abweichung zum gewünschten Ergebnis in Ohm: 0.0

Eingabe benötigter Widerstand: 2719

für $k = 2$ wurde kein
besseres Ergebnis
gefunden als für $k = 1$ →
erst für $k = 3$ wieder

Ausgabe: $k = 1$

Schaltung: 2700

Widerstandswert der Schaltung in Ohm: 2700.0

Abweichung zum gewünschten Ergebnis in Ohm: 19.0

$k = 2$

Schaltung: 2700

Widerstandswert der Schaltung in Ohm: 2700.0

Abweichung zum gewünschten Ergebnis in Ohm: 19.0

$k = 3$

Schaltung: (1000 220 1500)

Widerstandswert der Schaltung in Ohm: 2720.0

Abweichung zum gewünschten Ergebnis in Ohm: 1.0

$k = 4$

-
Schaltung: ([180 220] 820 1800)
Widerstandswert der Schaltung in Ohm: 2719.0
Abweichung zum gewünschten Ergebnis in Ohm: 0.0

Eingabe benötigter Widerstand: 4242

Ausgabe: $k = 1$

Schaltung: 3900
Widerstandswert der Schaltung in Ohm: 3900.0
Abweichung zum gewünschten Ergebnis in Ohm: 342.0

$k = 2$

Schaltung: (330 3900)
Widerstandswert der Schaltung in Ohm: 4230.0
Abweichung zum gewünschten Ergebnis in Ohm: 12.0

$k = 3$

Schaltung: ([2700 390] 3900)
Widerstandswert der Schaltung in Ohm: 4240.777
Abweichung zum gewünschten Ergebnis in Ohm: 1.2231445

$k = 4$

Schaltung: ([180 120] 3900 270)
Widerstandswert der Schaltung in Ohm: 4242.0
Abweichung zum gewünschten Ergebnis in Ohm: 0.0