

Aufgabe 2

„Dreiecksbeziehungen“- Dokumentation

37. Bundeswettbewerb Informatik 2018/19 - 2. Runde

Lukas Rost

Teilnahme-ID: 48125

29. April 2019

Inhaltsverzeichnis

1	Lösungsidee	1
1.1	Mathematische Präzisierung der Aufgabenstellung	1
1.2	Wahl eines geeigneten Algorithmus	2
1.3	Intuitive Beschreibung der Lösungsidee	2
1.4	Mathematische Präzisierung des Algorithmus	2
1.5	Laufzeitbetrachtung und NP-Vollständigkeit	2
2	Umsetzung	2
2.1	Allgemeine Hinweise zur Benutzung	2
2.2	Struktur des Programms und Implementierung der Algorithmen	3
2.2.1	Die Datei <code>main.cpp</code>	3
2.2.2	Die Datei <code>triangles.cpp</code>	3
2.2.3	Die Datei <code>triangleAlgorithm.cpp</code>	3
3	Beispiele	3
3.1	Beispiel 1	3
3.2	Beispiel 2	4
3.3	Beispiel 3	5
3.4	Beispiel 4	5
3.5	Beispiel 5	6
3.6	Eigene Beispiele	7
4	Quellcode	7

1 Lösungsidee

1.1 Mathematische Präzisierung der Aufgabenstellung

Bei der Eingabe handelt es sich um eine Menge $D = \{d_1, \dots, d_n\}$ von Dreiecken d_i . Jedes Dreieck ist dabei durch seine drei Eckpunkte vollständig definiert ($d_i = \{p_1, p_2, p_3\}$). Ein Eckpunkt ist dabei wiederum ein Punkt $p_i = (x_i, y_i)$ des \mathbb{R}^2 .

Die Aufgabenstellung fordert nun, dass eine Abbildung $D' = f(D)$ gefunden werden soll. Diese ordnet der Menge D eine Bildmenge D' zu. Für diese müssen bestimmte Bedingungen gelten:

- Für jedes $d \in D'$ gilt:

$$\forall (x, y) \in d : y \geq 0 \wedge x \geq 0 \quad (1)$$

Alle Punkte müssen also über oder auf der x-Achse sowie rechts oder auf der y-Achse liegen.

- Für jedes $d \in D'$ gilt:

$$\exists (x, y) \in d : y = 0 \quad (2)$$

Es muss also in jedem Dreieck mindestens einen Punkt geben, der auf der x-Achse liegt. Die Menge aller solchen Punkte eines Dreiecks sei N_i (anschaulich die Menge der Straßenecken).

- Jedes $d'_i \in D'$ muss kongruent zum entsprechenden $d_i \in D$ sein. Genauer gesagt muss d'_i aus d_i durch eine Abfolge von Kongruenzabbildungen, d.h. Translationen und Rotationen¹ hervorgehen.
- Für jedes $d \in D'$ und jedes $e \in D'$ gilt:

$$d \cap e = \emptyset \quad (3)$$

$d \cap e$ stellt dabei die Schnittfläche der beiden Dreiecke dar. Es dürfen sich also keine zwei Dreiecke überlappen.

Eine Dreiecksanordnung wird als **erlaubt** bezeichnet, wenn sie diese Bedingungen erfüllt. Die Menge der erlaubten Dreiecksanordnungen sei dabei E .

Nun ist eine Dreiecksanordnung D' gesucht, die **optimal** ist. Eine optimale Dreiecksanordnung sei dabei folgendermaßen definiert:

- D' minimiert den folgenden Wert über alle erlaubten Dreiecksanordnungen E :

$$\max_{d_i \in D'} \min_{d_j \in D'} \min_{n \in N_i} \min_{m \in N_j} |n.x - m.x| \quad (4)$$

Der Minimums-Term bildet dabei den Abstand zwischen zwei Dreiecken als minimalen Abstand der Straßenecken, während der Maximums-Term den maximalen solchen Abstand berechnet.

Die optimale Dreiecksanordnung D' bildet die Ausgabe des Algorithmus, der $f(D)$ möglichst effizient berechnen soll.

¹und Spiegelungen an einem Punkt oder einer senkrechten Achse, wobei man diese jedoch auch durch Rotationen erreichen kann. Demzufolge müssen sie nicht betrachtet werden.

1.2 Wahl eines geeigneten Algorithmus

Die Aufgabe ähnelt einem Packproblem aus der algorithmischen Geometrie. Bei diesen muss man Objekte (z.B. Flächen wie Dreiecke) möglichst dicht in gegebene Container (z.B. ebenfalls Flächen) packen, ohne dass sich die Objekte überlappen.[3] In der hier gegebenen Aufgabe hat man jedoch zusätzliche Nebenbedingungen, die im vorherigen Abschnitt schon erläutert worden sind. Außerdem muss nicht die eingenommene Gesamtfläche minimiert werden, sondern ein Abstand auf der x-Achse.

Leider sind jedoch fast alle Packprobleme NP-vollständig, sodass auch hier die Annahme nahe liegt, dass dies der Fall ist. Demzufolge stellt sich die Frage, wie man ein solches Problem möglichst so lösen kann, dass man ein Gleichgewicht zwischen Effizienz (d.h. Laufzeit) des Algorithmus und Optimalität der Lösung einstellt.

Dafür gibt es verschiedene Herangehensweisen:

- **Brute Force und Backtracking:**
- **Metaheuristiken:** (Simulated Annealing)
- **Randomisierte Algorithmen:**
- **Dynamic Programming oder Greedy-Ansätze:**
- **Heuristiken und Approximationsalgorithmen:**

1.3 Intuitive Beschreibung der Lösungsidee

1.4 Mathematische Präzisierung des Algorithmus

1.5 Laufzeitbetrachtung und NP-Vollständigkeit

Literatur

- [1] GeeksforGeeks-Artikel zur DP-Lösung von Subset Sum, <https://www.geeksforgeeks.org/subset-sum-problem-dp-25/>
- [2] GeeksforGeeks-Artikel zum Backtracen bei der DP-Lösung, <https://www.geeksforgeeks.org/perfect-sum-problem-print-subsets-given-sum/>
- [3] Wikipedia-Artikel zur Packproblemen, https://en.wikipedia.org/wiki/Packing_problems

2 Umsetzung

2.1 Allgemeine Hinweise zur Benutzung

Das Programm wurde in C++ implementiert und benötigt bis auf die *Standard Library* (STL) und die beigelegte `argparse`-Library², die für die Verarbeitung der Konsolenargumente zuständig ist, keine weiteren Bibliotheken. Es wurde unter Linux kompiliert und getestet; auf anderen Betriebssystemen müsste mit G++ erneut kompiliert werden.

²<https://github.com/hbristow/argparse>

Die Eingabe und Ausgabe des Programms erfolgt in Dateien, die mithilfe der Konsoleparameter frei gewählt werden können. Dafür gibt es folgende Parameter:

Usage: ./main --input INPUT --svg SVG --output OUTPUT

2.2 Struktur des Programms und Implementierung der Algorithmen

2.2.1 Die Datei main.cpp

2.2.2 Die Datei triangles.cpp

2.2.3 Die Datei triangleAlgorithm.cpp

3 Beispiele

3.1 Beispiel 1

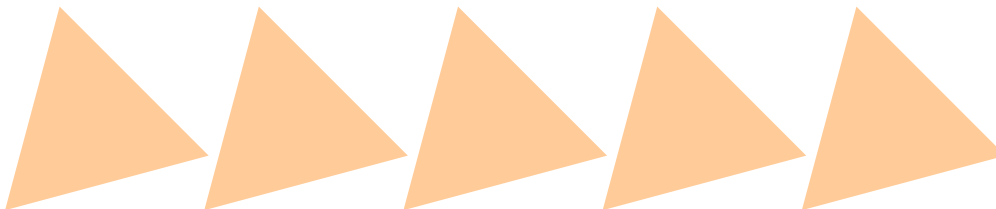


Abbildung 1: Die Dreiecksanordnung für das Beispiel 1

Ausgabe für Beispiel 1

```
1 Gesamtabstand: 0.000 Meter
2 Platzierung der Dreiecke:
3 D1 0.000 0.000 138.000 37.000 37.000 138.000
4 D2 135.000 0.000 273.000 37.000 172.000 138.000
5 D3 270.000 0.000 408.000 37.000 307.000 138.000
6 D4 405.000 0.000 543.000 37.000 442.000 138.000
7 D5 540.000 0.000 678.000 37.000 577.000 138.000
```

3.2 Beispiel 2

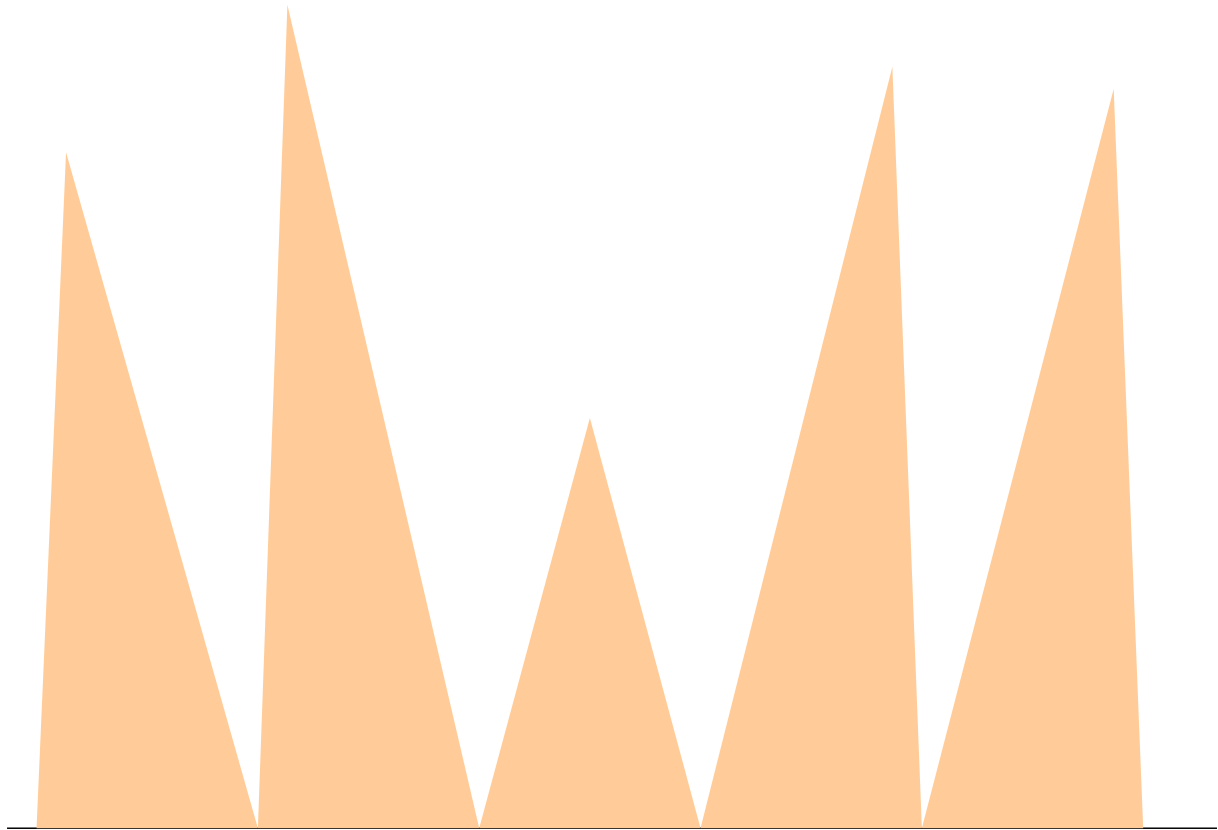


Abbildung 2: Die Dreiecksanordnung für das Beispiel 2

Ausgabe für Beispiel 2

```
1 Gesamtabstand: 0.000 Meter
2 Platzierung der Dreiecke:
3 D1 40.000 458.000 170.000 0.000 20.000 0.000
4 D2 190.000 558.000 320.000 0.000 170.000 0.000
5 D3 395.000 278.000 470.000 0.000 320.000 0.000
6 D4 600.000 516.000 620.000 0.000 470.000 0.000
7 D5 750.000 501.000 770.000 0.000 620.000 0.000
```

3.3 Beispiel 3



Abbildung 3: Die Dreiecksanordnung für das Beispiel 3

Ausgabe für Beispiel 3

```

1 Gesamtabstand: 0.000 Meter
2 Platzierung der Dreiecke:
3 D1 0.000 0.000 64.000 0.000 0.000 190.000
4 D2 34.000 110.000 189.000 0.000 51.000 220.000
5 D3 215.000 0.000 214.000 160.000 159.000 172.000
6 D4 277.000 266.000 232.000 0.000 329.000 211.000
7 D5 270.000 0.000 335.000 190.000 335.000 0.000
8 D6 341.000 118.000 538.000 159.000 499.000 225.000
9 D7 451.000 0.000 377.000 112.000 483.000 56.000
10 D8 479.000 14.000 541.000 0.000 554.000 68.000
11 D9 580.000 0.000 586.000 155.000 656.000 240.000
12 D10 673.000 102.000 591.000 11.000 655.000 0.000
13 D11 680.000 0.000 745.000 0.000 679.000 207.000
14 D12 776.000 294.000 791.000 0.000 727.000 190.000

```

3.4 Beispiel 4



Abbildung 4: Die Dreiecksanordnung für das Beispiel 4

Ausgabe für Beispiel 4

```

1 Gesamtabstand: 0.000 Meter
2 Platzierung der Dreiecke:

```

```

3 D1 11.000 206.000 46.000 171.000 111.000 171.000
4 D2 111.000 171.000 81.000 206.000 11.000 206.000
5 D3 10.000 38.000 46.000 171.000 11.000 206.000
6 D4 10.000 38.000 46.000 0.000 46.000 171.000
7 D5 46.000 171.000 111.000 171.000 111.000 106.000
8 D6 146.000 36.000 146.000 71.000 46.000 171.000
9 D7 111.000 0.000 146.000 36.000 46.000 171.000
10 D8 46.000 0.000 111.000 0.000 46.000 171.000
11 D9 177.000 196.000 211.000 0.000 217.000 59.000
12 D10 211.000 0.000 231.000 190.000 260.000 0.000
13 D11 260.000 0.000 292.000 196.000 252.000 59.000
14 D12 352.000 195.000 352.000 0.000 397.000 195.000
15 D13 397.000 195.000 397.000 0.000 352.000 0.000
16 D14 466.000 196.000 496.000 0.000 466.000 31.000
17 D15 496.000 166.000 496.000 0.000 466.000 196.000
18 D16 596.000 66.000 496.000 66.000 496.000 166.000
19 D17 650.000 196.000 685.000 0.000 650.000 36.000
20 D18 650.000 196.000 685.000 166.000 685.000 0.000
21 D19 780.000 166.000 650.000 196.000 685.000 166.000
22 D20 685.000 114.000 780.000 84.000 685.000 84.000
23 D21 561.000 196.000 561.000 101.000 596.000 66.000
24 D22 561.000 196.000 596.000 161.000 596.000 66.000
25 D23 596.000 66.000 596.000 0.000 526.000 66.000

```

3.5 Beispiel 5

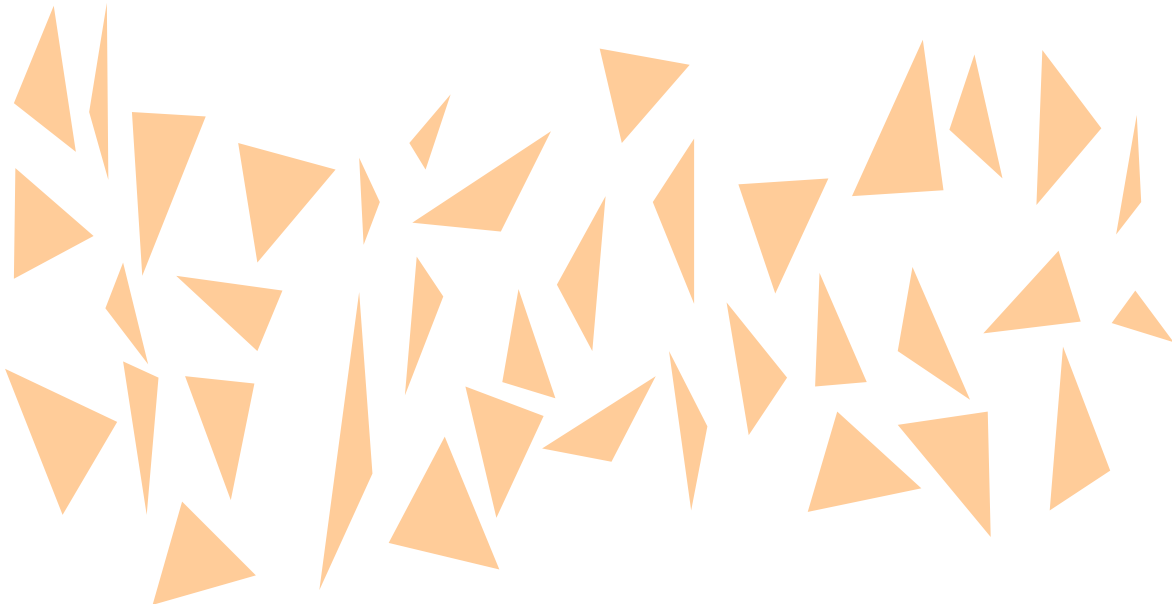


Abbildung 5: Die Dreiecksanordnung für das Beispiel 5

Ausgabe für Beispiel 5

```

1 Gesamtabstand: 0.000 Meter
2 Platzierung der Dreiecke:
3 D1 450.000 172.000 465.000 64.000 476.000 121.000
4 D2 0.000 160.000 39.000 61.000 76.000 124.000
5 D3 122.000 155.000 153.000 71.000 169.000 150.000
6 D4 574.000 277.000 636.000 281.000 622.000 383.000

```

```
7 D5 364.000 106.000 411.000 97.000 441.000 155.000
8 D6 605.000 172.000 654.000 139.000 615.000 229.000
9 D7 708.000 64.000 749.000 91.000 717.000 175.000
10 D8 274.000 313.000 285.000 295.000 302.000 346.000
11 D9 6.000 221.000 60.000 250.000 7.000 296.000
12 D10 374.000 217.000 398.000 172.000 407.000 277.000
13 D11 676.000 289.000 657.000 373.000 640.000 322.000
14 D12 333.000 59.000 365.000 128.000 312.000 148.000
15 D13 497.000 285.000 522.000 211.000 558.000 289.000
16 D14 100.000 0.000 170.000 20.000 120.000 70.000
17 D15 337.000 151.000 373.000 140.000 348.000 214.000
18 D16 96.000 61.000 104.000 154.000 80.000 165.000
19 D17 271.000 142.000 297.000 209.000 279.000 236.000
20 D18 48.000 307.000 33.000 406.000 6.000 340.000
21 D19 504.000 115.000 530.000 154.000 489.000 205.000
22 D20 668.000 46.000 666.000 131.000 605.000 122.000
23 D21 276.000 259.000 336.000 253.000 370.000 321.000
24 D22 224.000 295.000 158.000 313.000 171.000 232.000
25 D23 699.000 271.000 743.000 323.000 703.000 376.000
26 D24 93.000 223.000 136.000 331.000 86.000 334.000
27 D25 753.000 251.000 770.000 273.000 767.000 332.000
28 D26 298.000 114.000 335.000 24.000 260.000 42.000
29 D27 792.000 178.000 766.000 213.000 750.000 191.000
30 D28 243.000 244.000 254.000 273.000 240.000 303.000
31 D29 439.000 273.000 467.000 204.000 467.000 316.000
32 D30 68.000 201.000 97.000 163.000 80.000 232.000
33 D31 549.000 148.000 584.000 151.000 552.000 225.000
34 D32 564.000 131.000 544.000 63.000 621.000 79.000
35 D33 464.000 366.000 403.000 377.000 418.000 313.000
36 D34 240.000 212.000 213.000 10.000 249.000 89.000
37 D35 729.000 192.000 714.000 240.000 663.000 184.000
38 D36 171.000 172.000 188.000 213.000 116.000 223.000
39 D37 57.000 334.000 70.000 288.000 69.000 408.000
```

3.6 Eigene Beispiele

4 Quellcode

```
1  #include<bits/stdc++.h>
2  #define pdd pair<double,double>
3
4  using namespace std;
5
6  class Triangle{
7      public:
8
9      pdd point1;
10     pdd point2;
11     pdd point3;
12     int id;
13
14     Triangle(pdd p1, pdd p2, pdd p3, int idd){
15         point1 = p1;
16         point2 = p2;
```



```
17     point3 = p3;
18     id = idd;
19 }
20 };
```

Quellcode 1: Die ein Dreieck repräsentierende Klasse `Triangle`

```
1  #include<bits/stdc++.h>
2  #include"triangles.cpp"
3
4  using namespace std;
5
6  pair<vector<Triangle>,double> doAlgorithm(vector<Triangle> originalTriangles,
7  ↪   bool debug){
8      return {originalTriangles,0};
9  }
```

Quellcode 2: Die Datei `triangleAlgorithm`, die alle wesentlichen Bestandteile des Algorithmus enthält