Extrema einer Funktion

1 Welche Art von Problemen versuchen wir hier zu lösen?

Bei gegebener Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, y = f(x)$ suchen wir Werte $x_{min} \in U$, so dass für jedes x aus einer Umgebung von x_{min} gilt: $f_{min} := f(x_{min}) \leq f(x)$, bzw. $x_{max} \in U$, so dass für jedes x aus einer Umgebung von x_{max} gilt: $f_{max} := f(x_{max}) \geq f(x)$.
f_{min} nennen wir *relatives Minimum*, f_{max} *relatives Maximum* von f.

Wenn sogar $f_{min} \leq f(x)$ für *alle* $x \in U$ gilt, handelt es sich um ein *absolutes* Minimum.
Wenn $f_{max} \geq f(x)$ für *alle* $x \in U$ gilt, handelt es sich um ein *absolutes* Maximum.

Beispiel

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ nimmt an der stelle $x_{min} = 0$ ein absolutes Minimum an.

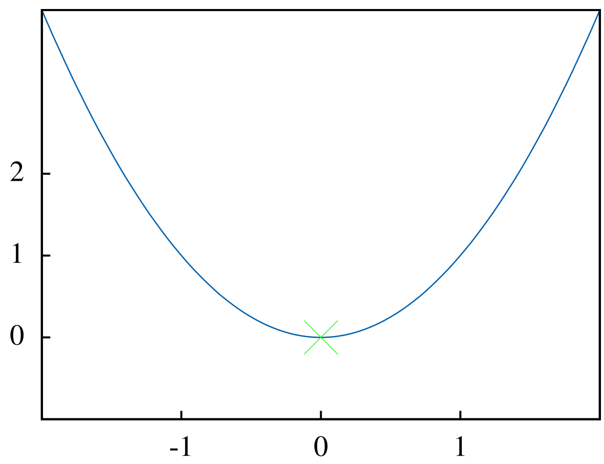

Figure 1: Minimum von $f(x) = x^2$ an der stelle $x = 0$

2 Finden der Extremalstellen und -werte einer Funktion einer Veränderlichen

Die erste Frage, die wir uns stellen sollten, ist die der Existenz von Extremalstellen. Unter welchen Bedingungen können wir Aussagen darüber treffen, ob die Funktion $f(x)$ ein Minimum, bzw. Maximum annimmt?

2.1 Existenzsatz von Extremalstellen

Satz 2.1. *Sei $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und sei I ein kompaktes Intervall (d.h. abgeschlossen und beschränkt). Dann ist f in I beschränkt und nimmt ihr Minimum und Maximum an. Dabei können diese auch in den Randstellen a,b angenommen werden.*

Beweis. *Sei $\eta = \sup f(I)$ und $\alpha_n = \eta - \frac{1}{n}$ bzw. $\alpha_n = n$, falls $\eta = \infty$ ist. Für jedes n gibt es ein $x_n \in I$ mit $f(x_n) > \alpha_n$. Es strebt dann $f(x_n) \to \eta$. Die Folge (x_n) besitzt eine konvergente Teilfolge; ihr Limes sei x^*. Die zugehörige Teilfolge von $(f(x_n))$ konvergiert aufgrund der Stetigkeit von f gegen $f(x^*)$, andererseits gegen η. Also ist $\eta = f(x^*) < \infty$. Beim Infimum wird analog verfahren.* $\square$

Wir wollen uns nun Kriterien für solche Extremalstellen überlegen.

2.2 Bedingung für eine Extremalstelle

Wenn f an der Stelle $a < x_0 < b$ ein Minimum annimmt, so folgt aus der Definition, dass sich an der Stelle x_0 die Richtung der Kurve von f ändern muss. Es ist nämlich $f(x_0) \leq f(x)$ für alle x aus einer Umgebung von x_0. Also muss an dieser Stelle die Ableitung von f gleich Null sein: $f'(x_0) = 0$. Die selbe Überlegung gilt auch für das Maximum.

Damit haben wir eine notwendige Bedingung für eine Extremalstelle gefunden. Suchen wir also alle Werte $x_i \in I$, für die gilt $f'(x_i) = 0$. Nun müssen wir nur noch prüfen, ob f an diesen Stellen ein Minimum, bzw. Maximum annimmt.

2.3 Hinreichende Bedingungen

Ist f $n+1$-mal differenzierbar, und ist $f^{(2)}(x_0) = f^{(3)}(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0$ und $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, dann folgt:

falls n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0) < 0$,	f nimmt in x_0 ein lokales Maximum an,
falls n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0) > 0$,	f nimmt in x_0 ein lokales Minimum an,
falls n gerade ist,	f nimmt in x_0 kein Extremum an.

Für $n = 1$ ergibt sich folgendes: Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ (bzw. $f''(x_0) < 0$), so nimmt f an der Stelle x_0 ein Minimum (bzw. Maximum) an.

Ein weiteres hinreichendes Kriterium folgt aus dem Mittelwertsatz: Seien $\alpha, \beta \in I$ und $\alpha < x_0 < \beta$ und gilt $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$ für alle $x \in [\alpha, \beta]$ (also ist die einzige Nullstelle der Ableitung in $[a,b]$ x_0), und gilt $f(\alpha) > f(x_0)$ (bzw. $f(\alpha) < f(x_0)$) sowie $f(\beta) > f(x_0)$ (bzw. $f(\beta) < f(x_0)$), so nimmt f in x_0 ein Minimum (bzw. Maximum) an.

2.4 Beispiele

(a) $f(x) = x^2 + 3$. $f'(x) = 2x = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$. $f''(x) = 2 > 0$. Also ist $f(x_0) = 3$ ein lokales Minimum.

(b) $f(x) = x^4 + 1$. $f'(x) = 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$. $f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = 0$. $f^{(4)}(x_0) = 24 > 0$. Also nimmt f an der Stelle $x_0 = 0$ ein lokales Minimum an. Und zwar $f(x_0) = 1$.

3 Finden der Extremalstellen und -werte einer Funktion mehrerer Veränderlichen

Analog zum eindimensionalen Fall, suchen wir ein Existenzkriterium und Bedingungen für eine Extremalstelle einer Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

3.1 Existenzsatz

Der Existenzsatz aus dem eindimensionalen Fall lässt sich auf den mehrdimensionalen Fall übertragen: Ist U eine kompakte (d.h. abgeschlossene und beschränkte) Menge und ist f auf U stetig, so nimmt f in U ihr Minimum und Maximum an. Dabei können die Extremalstellen in den Randpunkten von U liegen.

3.2 Notwendige Bedingung für ein Extremum

Existiert f in einer Umgebung von ξ, existiert $\text{grad}f(\xi)$ und hat f an der Stelle ξ ein lokales Extremum, so ist $\text{grad}f(\xi) = 0$. Man nennt die Punkte ξ mit $\text{grad}f(\xi) = 0$ *stationäre* oder *kritische* Punkte von f.

Beweis. *Da die Funktion $g(t) = f(t, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ an der Stelle $t = \xi_1$ ein lokales Extremum hat, ist $g'(\xi_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi) = 0$ nach dem Kriterium im eindimensionalen Fall. Entsprechend für die anderen Ableitungen.* □

Analog zum eindimensionalen Fall, suchen wir nun noch hinreichende Kriterien, um die Suche nach den Extremalstellen zu vereinfachen.

3.3 Hinreichende Kriterien für ein Extremum

Sei $G \subset U$ offen, f zweimal differenzierbar auf G ($f \in C^2(G)$), $\xi \in G$ und $\text{grad}f(\xi) = 0$. Dann lässt sich die Frage, ob f an der Stelle ξ ein Extremum besitzt, anhand der Hesse-Matrix

$$H_f(\xi) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1,\cdots,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

folgendermaßen beantworten:

$H_f(\xi)$	positiv definit	$\Rightarrow$	lokales Minimum im strengen Sinn,
	negativ definit	$\Rightarrow$	lokales Maximum im strengen Sinn,
	indefinit	$\Rightarrow$	kein Extremum.

Ist $H_f(\xi)$ semi-definit, so müssen weitere Untersuchungen betrieben werden um eine Aussage treffen zu können.

Die Definitheit der Hesse-Matrix ist folgendermaßen definiert:

H_f ist	positiv definit,	wenn $x^\top H_f x > 0$ für alle $x \neq 0$,
	positiv semidefinit,	wenn $x^\top H_f x \geq 0$ für alle x,
	negativ definit,	wenn $x^\top H_f x < 0$ für alle $x \neq 0$,
	negativ semidefinit,	wenn $x^\top H_f x \leq 0$ für alle x,
	indefinit,	wenn keins der oberen zutrifft.

Im zweidimensionalen Fall $f : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, z = f(x,y)$ lässt sich die Definitheit der Hesse-Matrix einfacher anhand der Diskriminante $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ feststellen:

$D > 0 \Rightarrow H_f$	positiv definit,	falls $f_{xx} > 0$,
	negativ definit,	falls $f_{xx} < 0$,
$D = 0 \Rightarrow H_f$	positiv semidefinit,	falls $f_{xx} > 0$ oder $f_{xx} = 0$ und $f_{yy} \geq 0$,
	negativ semidefinit,	falls $f_{xx} < 0$ oder $f_{xx} = 0$ und $f_{yy} \leq 0$,
$D < 0 \Rightarrow H_f$	indefinit.	

3.4 Beispiel

$f(x,y) = e^{xy} + x^2 + 2y^2$. $f_x = ye^{xy} + 2x$, $f_y = xe^{xy} + 4y$,
$f_{xx} = y^2e^{xy} + 2$, $x_{yy} = x^2e^{xy} + 4$, $f_{xy} = e^{xy}(1+y^2)$
Die Diskriminante der Hesse-Matrix $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (y^2e^{xy}+2)(x^2e^{xy}+4) - e^{xy}(1+y^2)$
Offenbar ist der Punkt $(0,0)$ ein stationärer Punkt und $D(0,0) = 7 > 0$. Also nimmt f in $(0,0)$ ein lokales Minimum an.

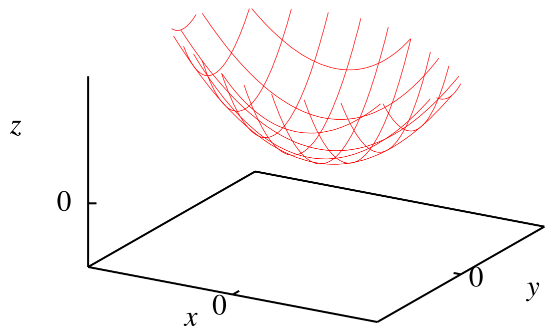

Figure 2: $f(x,y) = e^{xy} + x^2 + 2y^2$

4 Extremum mit Nebenbedingungen

Wir werden uns nun mit dem Extremalproblem im mehrdimensionalen Fall beschäftigen, in dem weitere Bedingungen an die Variablen $x = (x_1, \cdots, x_n)$ gestellt sind, sogenannte *Nebenbedingungen*.

Gegeben seien eine Funktion f und ein m-Tupel von Funktionen $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_m)$ auf $G \subset \mathbb{R}^n, m < n$. $\mathcal{F}_\varphi = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_j(x) = 0, j = 1, \cdots, m\}$.

Wir suchen ein relatives Extremum bezüglich der Nebenbedingung $\varphi = 0$.

Die notwendige Bedingung für ein Extremum lautet hier:
Ist x_0 relatives Extremum für f bezüglich der Nebenbedingung $\varphi = 0$, dann existiert $\lambda \in \mathbb{R}^m$ mit

$$(\mathrm{grad} f)(x_0) = (\mathrm{grad}(\lambda \cdot \varphi))(x_0)$$

Setzen wir nun $F = f - \lambda_1\varphi_1 - \lambda_2\varphi_2 - \cdots - \lambda_m\varphi_m, \lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} - \cdots - \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{\partial(\lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_m\varphi_m)}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{\partial(\lambda\varphi)}{\partial x_j}$$

D.h. die Bedingung $\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0, j = 1, \cdots, m$ sind äquivalent zu $\mathrm{grad} f = \mathrm{grad}(\lambda\varphi)$.

Also haben wir n Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0\,,\, j = 1, \cdots, n \tag{1}$$

und m Gleichungen

$$\varphi_1 = 0, \cdots, \varphi_m = 0 \tag{2}$$

für die $n+m$ Variablen $x_1, \cdots, x_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_m$.
$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ heißen *Lagrange Multiplikatoren*.

4.1 Beispiel

$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = ||x||^2$
$\varphi_1(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 1$, $\varphi_2(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 1$

$\mathrm{grad} f = (2x_1, 2x_2, 2x_3), \mathrm{grad}\varphi_1 = (2x_1, 2x_2, 0), \mathrm{grad}\varphi_2 = (1,1,1)$
Lösen wir das System:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 &= \lambda_1 2x_1 + \lambda_2 \\ 2x_1 &= \lambda_1 2x_1 + \lambda_2 \\ 2x_1 &= \lambda_1 2x_1 + \lambda_2 \end{aligned}\right) \rightsquigarrow (1)$$

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}\right) \rightsquigarrow (2)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= 2x_3 \\ \rightsquigarrow (1-\lambda_1)x_1 &= x_3, (1-\lambda_1)x_2 = x_3 \end{aligned} \tag{3}$$

Fall 1: $\lambda_1 = 1 \rightsquigarrow x_3 = 0$

$x_1 + x_2 = 1, x_2 = 1 - x_1$

$x_1^2 + (1-x_1)^2 = 1 \rightsquigarrow 2x_1(x_1 - 1) = 0$

Zwei Lösungen: $x_1 = (1,0,0), x_2 = (0,1,0)$

Fall 2: $\lambda_1 \neq 1$

(3) $\rightsquigarrow (1-\lambda_1)(x_1 - x_2) = 0$, Weil $\lambda_1 \neq 1$ folgt $x_1 = x_2$

$x_1^2 + x_2^2 = 2x_1^2 = 1, x_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, x_3 = 1 - x_1 - x_2 = 1 \mp \frac{2}{\sqrt{2}} = 1 \mp \sqrt{2}$

Zwei Lösungen: $x_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1-\sqrt{2}), x_4 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\sqrt{2})$

Wir haben also vier Punkte, die die notwendige Bedingung für relative Extrema unter Nebenbedingungen erfüllt.

$$f(x_1) = f(x_2) = 1$$
$$f(x_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + (1-\sqrt{2})^2 = 4 - 2\sqrt{2}$$
$$f(x_4) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + (1+\sqrt{2})^2 = 4 + 2\sqrt{2}$$

f ist eine stetige Funktion auf $\mathcal{F}_\varphi$. $\mathcal{F}_\varphi$ ist eine abgeschlossene, beschränkte Menge im $\mathbb{R}^3$, also ist $\mathcal{F}_\varphi$ kompakt. Daher besitzt f auf der Menge $\mathcal{F}_\varphi$ ein Maximum und ein Minimum. Diese sind dann auch relative Maxima und Minima.

$$\mathrm{Min} f = \mathrm{Min}\{f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)\} = 1$$
$$\mathrm{Max} f = \mathrm{Max}\{f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)\} = 4 + 2\sqrt{2}$$

5 Quellen

- W. Walter, *Analysis 1*, 7. Auflage, Springer Berlin, ISBN 3-540-20388-5
- W. Walter, *Analysis 2*, 5. erw. Auflage, Springer Berlin, ISBN 3-540-42953-1