Variationsprobleme

1 Welche Art von Problemen versuchen wir hier zu lösen?

Das sogenannte Variationsproblem (VP)

$$S[y] := \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x \to \text{minimal} \tag{1}$$

mit gegebener Funktion $L = L(x, y, p)$ (*Lagrangefunktion*), wobei $y = y(x)$ alle möglichen Funktionen $y \in C^1([a, b])$ mit $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$ durchläuft, ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gegeben).

Beispiel 1

Problem der kürzesten Entfernung zwischen zwei gegebenen Punkten (a, α) und (b, β)

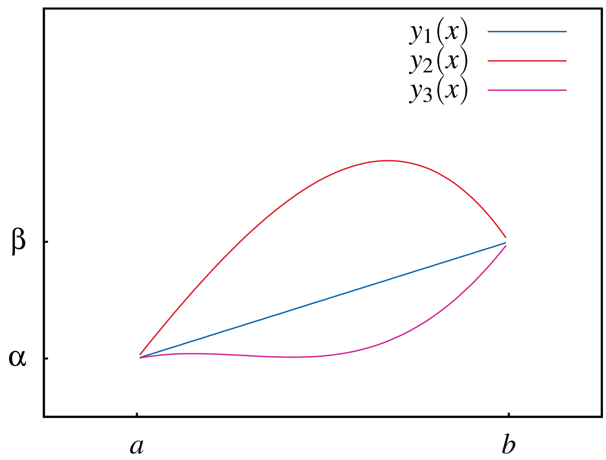

Figure 1: Wege zwischen zwei Punkten

Die Länge einer Kurve von (a, α) nach (b, β), gegeben durch $y = y(x), y \in C^1([a, b])$ ist:

$$\mathcal{L}[y] = \int_a^b \sqrt{(y(x))^2 + 1}\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

Wir suchen also die Lösung des Variationsproblems (VP) mit $L = \sqrt{1 + p^2}$.

Beispiel 2

Das Hamiltonsche Prinzip der klassischen, nichtrelativistischen Mechanik (HP)

Setze $L = T - U$ (kinetische Energie - potentielle Energie).

Z.B. bei eindimensionaler Bewegung eines Massenpunktes im ortsabhängigen Kraftfeld $f = f(y)$:

$$L = \frac{m}{2}v^2 - U(y) = \frac{m}{2}(\dot{y})^2 - U(y), U = -\int f(y)\,\mathrm{d}y$$

Unter allen möglichen Wegen des Teilchens von (t_0, α) nach (t_1, β) ist derjenige Weg $y = y(t)$ gesucht, so dass das *Wirkungsintegral*

$$S[y] = \int_{t_0}^{t_1} L\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{m}{2}(\dot{y}(t))^2 - U(y(t))\right)\mathrm{d}t \tag{3}$$

minimal wird.

Das heißt, die Natur *geizt* mit einer Größe der Dimension *Energie x Zeit*, genauer mit der physikalischen Größe *Wirkung*.

2 Lösen des Variationsproblems (VP)

In (1) vermittelt S eine Abbildung des affinen Unterraums

$$V := \left\{y \in C^2([a,b]) \mid y(a) = \alpha, y(b) = \beta\right\}$$

nach $\mathbb{R}$, d.h. S ist ein *Funktional* $S : V \to \mathbb{R}$.

Wir führen nun (1) auf die Minimierung einer reellen Funktion zurück. Dazu nehmen wir an: $y_0 \in V$ sei eine Lösung von (1), d.h.

$$S[y_0] \leq S[y], \forall y \in V \tag{4}$$

(y_0 heißt dann *Minimalfunktion* zum Variationsproblem (1)).

Für die Herleitung einer *notwendigen* Bedingung von y_0 sei $\varphi \in V_0 = \left\{y \in C^2([a,b]) \mid y(a) = 0, y(b) = 0\right\}$. Dann ist $y_\eta = y_0 + \eta\varphi, \eta \in (-\eta_0, \eta_0), y_\eta \in V \Rightarrow S[y_0] \leq S[y_\eta] =: h(\eta)$. Hier ist h eine reelle Funktion $h : (-\eta_0, \eta_0) \to \mathbb{R}$, mit

$$h(0) \leq h(\eta) \tag{5}$$

Daraus folgt, dass h in $\eta = 0$ ein Minimum hat, also $h'(0) = 0$ gilt.

Berechnen wir nun $h'(\eta)$:

$$\begin{aligned}
h'(\eta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}S[y_\eta] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\int_a^b L(x, y_0(x) + \eta\varphi(x), y_0'(x) + \eta\varphi'(x))\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(L(x, y_0(x) + \eta\varphi(x), y_0'(x) + \eta\varphi'(x))\right)\mathrm{d}x \text{ (falls} L \in C^1(\mathbb{R}^3)) \\
&= \int_a^b \left(L_y \frac{\mathrm{d}y_\eta}{\mathrm{d}\eta} + L_p \frac{\mathrm{d}y_\eta'}{\mathrm{d}\eta}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b (L_y(x, y_0(x) + \eta\varphi(x), y_0'(x) + \eta\varphi'(x))\varphi(x) \\
&\qquad + L_p(x, y_0(x) + \eta\varphi(x), y_0'(x) + \eta\varphi'(x))\varphi'(x))\,\mathrm{d}x \\
\Rightarrow 0 = h'(0) &= \int_a^b (L_y(x, y_0(x), y_0'(x))\varphi(x) + L_p(x, y_0(x), y_0'(x))\varphi'(x))\,\mathrm{d}x \qquad (6)
\end{aligned}$$

Das Integral (6) in der letzten Zeile nennt man die *erste Variation* von $S[y]$ in Richtung φ für y_0. (In der Literatur oft mit $\delta S[y_0](\varphi)$ abgekürzt)

Damit lautet das Hamilton Prinzip aus Beispiel 2: Die Natur wählt unter allen stetig differenzierbaren Wegen von (t_0,α) nach (t_1,β) denjenigen aus, für den die erste Variation (6) der Wirkung S für *beliebige* Funktionen φ verschwindet.

Formen wir nun den Ausdruck der ersten Variation (6) mittels partieller Integration um:

$$\begin{aligned} h'(0) &= \int_a^b \left(L_y(x,y_0,y_0')\varphi - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(L_p(x,y_0,y_0'))\right) \mathrm{d}x + L_p(x,y_0,y_0')\varphi \,\Big|_a^b \\ \Rightarrow 0 &= \int_a^b \left(L_y(x,y_0,y_0') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(L_p(x,y_0,y_0'))\right) \varphi \,\mathrm{d}x \;, \forall \varphi \in V_0 \end{aligned} \tag{7}$$

Aus (7) folgt, dass $g(x) := L_y(x,y_0,y_0') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(L_p(x,y_0,y_0')) = 0$ für alle $x \in (a,b)$ und zwar nach folgendem

Lemma 2.1 (Fundamentallemma der Variationsrechnung)**.** *Sei g eine auf (a,b) stetige Funktion und gelte für jedes $\varphi \in V_0$ dir Relation $\int_a^b g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$, so folgt $g \equiv 0$ auf (a,b).*

Beweis. Der Beweis erfolgt indirekt: Wäre $g(x_0) \neq 0$ für $x_0 \in (a,b)$. O.B.d.A sei $g(x_0) > 0$. Dann existiert $\delta > 0$, so dass $g(x) > 0$ für $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$.
Wir wählen nun $\varphi_0 \in V_0$, so dass:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [a,b]\backslash(x_0-\delta,x_0+\delta) \\ (x-(x_0-\delta))^4\,(x-(x_0+\delta))^4 & \text{für } x \in (x_0-\delta,x_0+\delta) \end{cases}$$

Dann ist $\varphi_0(x) > 0$ auf $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ und

$$\int_a^b g\varphi_0\,\mathrm{d}x = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} g\varphi_0\,\mathrm{d}x > 0$$

Und das steht im Widerspruch zur Voraussetzung! □

3 Zusammenfassung

Satz 3.1. *Sei $L = L(x,y,p)$ zwei mal stetig differenzierbar bezüglich der drei Variablen x, y, p, so muss jede Lösung $y_0 \in V$ des Variationsproblems* (1) *notwendigerweise die Euler-Lagrange DGL:*

$$L_y(x,y_0,y_0') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(L_p(x,y_0,y_0')\right) = 0 \tag{8}$$

in (a,b) erfüllen, bzw. ausgeschrieben:

$$L_y(x,y_0,y_0') - L_{px}(x,y_0,y_0') - L_{py}(x,y_0,y_0')y_0' - L_{pp}(x,y_0,y_0')y_0'' = 0$$

Bemerkungen

(a) (8) ist gewöhnliche DGL 2. Ordnung für y_0. Ihre allgemeine Lösung enthält zwei Konstanten, welche sich aus den Randbedingungen $y_0(a) = \alpha$, $y_0(b) = \beta$ ermitteln lassen (Randwert-Problem)

(b) (8) ist nur eine notwendige Bedingung für die Minimalfunktion y_0. Hinreichende Bedingungen erfordern zusätzliche Betrachtung.

4 Zu den Beispielen

Beispiel 1

Die Lagrangefunktion zum Beispiel 1 ist (siehe oben) $L = \sqrt{1+p^2} \Rightarrow L_y = 0, L_p = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$. Die Euler-Lagrange DGL (8) lautet also

$$\begin{aligned} L_{pp} y_0'' = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{y_0'' \sqrt{1+y_0'^2} - y_0' \frac{y_0' y_0''}{\sqrt{1+y_0'^2}}}{1+y_0'^2} = 0 \\ &\Rightarrow \quad y_0''(1+(y_0')^2) - (y_0')^2 y_0'' = 0 \\ &\Rightarrow \quad y_0'' = 0 \end{aligned}$$

y_0 ist eine lineare Funktion in x: $y_0(x) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}(x-a)+\alpha$
Wie erwartet, ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte die Gerade durch eben diese Punkte.

Beispiel 2

Die Lagrangefunktion des Hamilton Prinzips (HP) lautet:

$$L = \frac{m}{2} p^2 - U(y), L_y = -U' = f, L_p = mp$$

Die Euler-Lagrange DGL (8) lautet also für dieses Beispiel

$$0 = L_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(L_p) = f(y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(m\dot{y}) \Rightarrow f(y) = m\ddot{y}$$

Das Hamilton Prinzip führt uns hier auf das bekannte 2. Newtonsche Gesetz.

Quellen

- Notizen zur Vorlesung *Gewöhnliche Differentialgleichungen* von Prof. Gittel (Uni Leipzig)
- H. Fischer, H. Kaul: *Mathematik für Physiker*, Band 3. 2. Auflage. Teubner Verlag, Wiesbaden 2006, ISBN 978-3-8351-0031-2