ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2011, том 47, № 12, с. 1675–1692

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.929

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ В НЕЙРОННЫХ СИСТЕМАХ. II

© 2011 г. С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов

Рассматривается сингулярно возмущенная система нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием, моделирующая диффузионное взаимодействие двух нейронов. Исследуются вопросы существования и устойчивости релаксационных периодических движений этой системы.

1. Постановка задачи. Изучаемая ниже система, которая согласно [1], моделирует слабое электрическое взаимодействие двух нейронов, имеет вид

$$\begin{aligned}\dot u_1 &= \lambda[-1+\alpha f(u_1(t-1))-\beta g(u_1)]u_1+d(u_2-u_1),\\ \dot u_2 &= \lambda[-1+\alpha f(u_2(t-1))-\beta g(u_2)]u_2+d(u_1-u_2).\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $u_j(t)>0,\ j=1,2,$ – мембранные потенциалы нейронов, параметр $\lambda>0$ предполагается большим, $d=\mathrm{const}>0,$ а параметры $\alpha,\beta>0,$ имеющие порядок единицы, удовлетворяют условиям

$$\alpha>1+\beta,\quad \alpha<2(1+\beta). \tag{2}$$

Необходимо отметить, что существенным в неравенствах (2) является лишь первое ограничение, а второе носит технический характер. Причины его введения и возможный способ отказа от него прояснятся в ходе дальнейшего изложения.

Далее, будем считать, что функции $f(u)$ и $g(u)$ принадлежат классу $C^2(\mathbb{R}_+),\ \mathbb{R}_+=\{u\in\mathbb{R}: u\geq 0\}$ и обладают следующими свойствами:

$$\begin{gathered}f(0)=g(0)=1,\quad 0<\beta g(u)+1<\alpha\quad \forall\, u\in\mathbb{R}_+;\\ f(u),g(u),uf'(u),ug'(u),u^2f''(u),u^2g''(u)=O(1/u)\quad\text{при}\quad u\to+\infty.\end{gathered} \tag{3}$$

При сформулированных ограничениях система (1) допускает так называемый однородный цикл $(u_1,u_2):\ u_1=u_2=u_*(t,\lambda),$ где функция $u_*(t,\lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot u=\lambda[-1+\alpha f(u(t-1))-\beta g(u)]u \tag{4}$$

и имеет период $T_*(\lambda),$ для которого справедливо предельное равенство

$$\lim_{\lambda\to\infty}T_*(\lambda)=T_0,\quad T_0=\alpha+1+(\beta+1)/(\alpha-\beta-1). \tag{5}$$

Напомним, что существование и единственность у уравнения (4) требуемого цикла установлены нами в первой части данной статьи (см. [2]).

В дальнейшем будет показано, что, во-первых, однородный цикл системы (1) экспоненциально орбитально устойчив при любом фиксированном $d>0$ и при всех $\lambda\gg 1$; во-вторых, при подходящем выборе параметров $\alpha,\ \beta,\ d$ наряду с устойчивым однородным циклом рассматриваемая система имеет по крайней мере два устойчивых неоднородных периодических режима, переходящие друг в друга при перестановке координат $u_1\to u_2,\ u_2\to u_1.$

2. Основные теоремы. Для удобства последующего анализа положим в системе (1) $u_j=\exp(x_j/\varepsilon),\ \ j=1,2,\ \ \varepsilon=1/\lambda\ll 1,$ а затем перейдем к новым переменным $x=x_1,$ $y=(x_2-x_1)/\varepsilon.$ В результате интересующая нас система примет вид

$$\dot x=\varepsilon d\,(\exp y-1)+F(x,x(t-1),\varepsilon),\quad \dot y=-2d\,\mathrm{sh}\,y+G(x,x(t-1),y,y(t-1),\varepsilon), \tag{6}$$

где

$$F(x,u,\varepsilon)=-1+\alpha f\biggl(\exp\Bigl(\frac{u}{\varepsilon}\Bigr)\biggr)-\beta g\biggl(\exp\Bigl(\frac{x}{\varepsilon}\Bigr)\biggr),$$

$$G(x,u,y,v,\varepsilon)= \tag{7}$$

$$=\frac{\alpha}{\varepsilon}\biggl[f\biggl(\exp\Bigl(\frac{u}{\varepsilon}+v\Bigr)\biggr)-f\biggl(\exp\Bigl(\frac{u}{\varepsilon}\Bigr)\biggr)\biggr]+\frac{\beta}{\varepsilon}\biggl[g\biggl(\exp\Bigl(\frac{x}{\varepsilon}\Bigr)\biggr)-g\biggl(\exp\Bigl(\frac{x}{\varepsilon}+y\Bigr)\biggr)\biggr].$$

Зафиксируем постоянную σ_0, подчиненную неравенствам

$$0<\sigma_0<\min\biggl(\frac{2(\beta+1)-\alpha}{\alpha-\beta-1},1\biggr) \tag{8}$$

(такой выбор возможен в силу оценок (2)), и рассмотрим банахово пространство $\mathcal{F}$ непрерывных при $-1-\sigma_0\le t\le-\sigma_0$ начальных вектор-функций $\varphi(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t))^{\mathrm{т}}$ (здесь и далее операция $(\cdot,\cdot)^{\mathrm{т}}$ означает транспонирование) с нормой

$$\|\varphi\|_{\mathcal{F}}=\max_{j=1,2}\bigl(\max_{-1-\sigma_0\le t\le-\sigma_0}|\varphi_j(t)|\bigr). \tag{9}$$

Всюду ниже нас будут интересовать решения системы (6) с начальными условиями из множества

$$S=\{(\varphi_1(t),\varphi_2(t))^{\mathrm{т}}:\ \varphi_1(t)\in S_1,\ \varphi_2(t)\in S_2\}\subset\mathcal{F}. \tag{10}$$

Здесь $S_1=S_1(\sigma_0,q_1,q_2)$ – совокупность функций из $C[-1-\sigma_0,-\sigma_0]$, удовлетворяющих требованиям

$$-q_1\le\varphi_1(t)\le-q_2,\quad \varphi_1(-\sigma_0)=-\sigma_0(\alpha-\beta-1), \tag{11}$$

где $q_1>(1+\sigma_0)(\alpha-\beta-1)$, $q_2\in(0,\sigma_0(\alpha-\beta-1))$ – некоторые фиксированные универсальные (не зависящие от φ_1) постоянные. В качестве множества S_2 возьмем произвольное замкнутое и ограниченное подмножество пространства $C[-1-\sigma_0,-\sigma_0]$.

Формулировка строгих результатов о периодических решениях системы (6) требует некоторых подготовительных построений. В связи с этим обозначим через $(x_\varphi(t,\varepsilon),\,y_\varphi(t,\varepsilon))^{\mathrm{т}}$, $t\ge-\sigma_0$, решение упомянутой системы, отвечающее произвольному начальному условию $\varphi(t)$ из множества S. Далее, введем в рассмотрение второй положительный корень $t=T_\varphi$ уравнения $x_\varphi(t-\sigma_0,\varepsilon)=-\sigma_0(\alpha-\beta-1)$ (в случае, когда он существует) и на множестве (10) определим оператор $\Pi_\varepsilon:\ S\to\mathcal{F}$ равенством

$$\Pi_\varepsilon(\varphi)=(x_\varphi(t+T_\varphi,\varepsilon),y_\varphi(t+T_\varphi,\varepsilon))^{\mathrm{т}},\quad -1-\sigma_0\le t\le-\sigma_0. \tag{12}$$

Помимо равенства (12) нам потребуется еще оператор $\Pi_0:S\to\mathcal{F}$, который зададим формулой

$$\Pi_0(\varphi)=(x_0(t),y_0(t+T_0,z))^{\mathrm{т}}|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)},\quad -1-\sigma_0\le t\le-\sigma_0. \tag{13}$$

Здесь T_0 – величина из равенства (5), а T_0-периодическая функция $x_0(t)$ задается равенствами

$$x_0(t)=\begin{cases}(\alpha-1)t & \text{при}\quad 0\le t\le 1,\\ \alpha-t & \text{при}\quad 1\le t\le\alpha,\\ -(1+\beta)(t-\alpha) & \text{при}\quad \alpha\le t\le\alpha+1,\\ (\alpha-\beta-1)(t-\alpha-1)-1-\beta & \text{при}\quad \alpha+1\le t\le T_0,\end{cases}\qquad x_0(t+T_0)\equiv x_0(t). \tag{14}$$

Компонента $y_0(t,z)$, $z\in\mathbb{R}$, при $-\sigma_0\le t\le T_0-\sigma_0$ является решением задачи Коши

$$\dot y=-2d\,\mathrm{sh}\,y,\quad y|_{t=-\sigma_0}=z, \tag{15}$$

$$
\begin{gathered}
y(+0)=\frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-1}\,y(-0),\quad y(1+0)=y(1-0)-\frac{\alpha}{\alpha-1}\,y(+0),\\
y(\alpha+0)=(1+\beta)y(\alpha-0),\quad y(\alpha+1+0)=y(\alpha+1-0)-\frac{\alpha}{1+\beta}\,y(\alpha+0).
\end{gathered}
\tag{16}
$$

Подчеркнем, что задача (15), (16) представляет собой так называемую систему с импульсным воздействием. Это означает, что в моменты времени $t=0$, $t=1$, $t=\alpha$ и $t=\alpha+1$ ее решение $y_0(t,z)$ претерпевает конечные скачки, вычисляющиеся по правилам (16). Однако в силу второго неравенства (2) и условий (8) на параметр σ_0 функция $y_0(t+T_0,z)$ оказывается непрерывной на нужном отрезке $-1-\sigma_0\le t\le-\sigma_0$. Тем самым требуемое включение $\Pi_0(\varphi)\in\mathcal{F}$ заведомо выполняется при любых $\varphi\in S$.

Завершая описание подготовительной части, рассмотрим производные Фреше $\partial_\varphi\Pi_\varepsilon(\varphi)$, $\partial_\varphi\Pi_0(\varphi)$ операторов (12), (13) по переменной φ. Проводя соответствующие вычисления, убеждаемся в том, что в данном случае эти производные представляют собой линейные операторы, действующие в пространстве

$$
\mathcal{F}_0=\{g_0(t)=(g_{1,0}(t),g_{2,0}(t))^{\text{т}}\in\mathcal{F}:\ g_{1,0}(-\sigma_0)=0\}
\tag{17}
$$

с нормой (9), а результаты их применения к произвольному элементу $g_0(t)\in\mathcal{F}_0$ задаются соответственно равенствами

$$
\begin{gathered}
\partial_\varphi\Pi_\varepsilon(\varphi)g_0=\\
=(g_1(t+T_\varphi,\varepsilon),g_2(t+T_\varphi,\varepsilon))^{\text{т}}-\frac{g_1(T_\varphi-\sigma_0,\varepsilon)}{\dot x_\varphi(T_\varphi-\sigma_0,\varepsilon)}\,(\dot x_\varphi(t+T_\varphi,\varepsilon),\dot y_\varphi(t+T_\varphi,\varepsilon))^{\text{т}},\\
-1-\sigma_0\le t\le-\sigma_0,
\end{gathered}
\tag{18}
$$

$$
\partial_\varphi\Pi_0(\varphi)g_0=\left(0,\frac{\partial y_0}{\partial z}(t+T_0,z)|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)}\right)^{\text{т}}g_{2,0}(-\sigma_0),\quad -1-\sigma_0\le t\le-\sigma_0.
\tag{19}
$$

Здесь $g(t,\varepsilon)=(g_1(t,\varepsilon),g_2(t,\varepsilon))^{\text{т}}$, $-\sigma_0\le t\le T_\varphi-\sigma_0$, – решение линейной системы

$$
\dot g=A(t,\varepsilon)g+B(t,\varepsilon)g(t-1),\quad A(t,\varepsilon)=(a_{ij})_{i,j=1,2},\quad B(t,\varepsilon)=(b_{ij})_{i,j=1,2}
\tag{20}
$$

с начальной функцией $g_0(t)$ из пространства (17) и коэффициентами

$$
\begin{gathered}
a_{11}=\frac{\partial F}{\partial x},\quad a_{12}=\varepsilon d\exp(y_\varphi(t,\varepsilon)),\quad a_{21}=\frac{\partial G}{\partial x},\quad a_{22}=\frac{\partial G}{\partial y}-2d\,\mathrm{ch}(y_\varphi(t,\varepsilon)),\\
b_{11}=\frac{\partial F}{\partial u},\quad b_{12}=0,\quad b_{21}=\frac{\partial G}{\partial u},\quad b_{22}=\frac{\partial G}{\partial v},
\end{gathered}
\tag{21}
$$

где все производные вычислены при $x=x_\varphi(t,\varepsilon)$, $u=x_\varphi(t-1,\varepsilon)$, $y=y_\varphi(t,\varepsilon)$, $v=y_\varphi(t-1,\varepsilon)$.

Сформулируем утверждение о связи между операторами (12) и (13).

Теорема 1 (о C^1-сходимости). *Пусть множество S выбрано описанным выше образом. Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0=\varepsilon_0(S)>0$, что при всех $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ оператор Π_ε определен на S и удовлетворяет предельным равенствам*

$$
\lim_{\varepsilon\to0}\sup_{\varphi\in S}\|\Pi_\varepsilon(\varphi)-\Pi_0(\varphi)\|_{\mathcal{F}}=0,\quad \lim_{\varepsilon\to0}\sup_{\varphi\in S}\|\partial_\varphi\Pi_\varepsilon(\varphi)-\partial_\varphi\Pi_0(\varphi)\|_{\mathcal{F}_0\to\mathcal{F}_0}=0.
\tag{22}
$$

Доказательство данной теоремы приведем в пп. 3, 4. Здесь же остановимся на одном важном следствии из C^1-сходимости, касающемся существования и устойчивости периодических решений системы (6).

Заметим, что в силу (15), (16) оператор (13) является надстройкой над соответствующим одномерным отображением

$$
z\to\Phi(z)\overset{\text{def}}{=}y_0(t,z)|_{t=T_0-\sigma_0},
\tag{23}
$$

где $z = \varphi_2(-\sigma_0)$. Действительно, любой неподвижной точке $z = z_*$ этого отображения соответствует неподвижная точка $\varphi_*(t) = (\varphi_1^*(t), \varphi_2^*(t))^{\mathrm{т}}:\ \varphi_1^*(t) = x_0(t),\ \ \varphi_2^*(t) = y_0(t + T_0, z_*)$, $-1-\sigma_0 \le t \le -\sigma_0$, оператора Π_0 (при условии, конечно, что точка $\varphi_*(t)$ принадлежит введенному выше множеству (10)). Последнее же требование не является ограничением, поскольку в силу выбора постоянных q_1, q_2 из (11) включение $x_0(t) \in S_1$ выполняется автоматически, а справедливости включения $\varphi_2^*(t) \in S_2$ можно добиться за счет подходящего выбора множества S_2.

Верно и обратное утверждение: если $\varphi_*(t) = (\varphi_1^*(t), \varphi_2^*(t))^{\mathrm{т}} \in S$ – неподвижная точка оператора Π_0, то с необходимостью $\varphi_1^*(t) = x_0(t)$, а величина $z_* = \varphi_2^*(-\sigma_0)$ такова, что $\Phi(z_*) = z_*$. Кроме того, в силу (19) спектр линейного оператора $\partial_\varphi \Pi_0(\varphi_*)$ состоит из двух точек: собственного значения $\mu = 0$ бесконечной кратности и собственного значения $\mu = \Phi'(z_*)$ (в общем случае простого).

Суммируя изложенные факты, приходим к выводу, что справедлив следующий результат.

Теорема 2 (о соответствии). *Каждой неподвижной точке* $z = z_*$, $|\Phi'(z_*)| \ne 1$, *отображения (23) соответствует релаксационный цикл системы (6), существующий при всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *и являющийся экспоненциально орбитально устойчивым (неустойчивым) в случае* $|\Phi'(z_*)| < 1$ (> 1).

Доказательство. Пусть $\varphi_*(t) \in S$ – неподвижная точка оператора (13), отвечающая неподвижной точке $z = z_*$ отображения (23). Рассмотрим, далее, уравнение

$$\Pi_\varepsilon(\varphi) - \varphi = 0, \quad (\varphi, \varepsilon) \in \mathcal{F} \times \mathbb{R}, \tag{24}$$

и заметим, что в силу предельных равенств (22) и отмеченных выше спектральных свойств оператора $\partial_\varphi \Pi_0(\varphi_*)$ к данному уравнению в точке $(\varphi, \varepsilon) = (\varphi_*(t), 0)$ пространства $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$ применима теорема о неявном отображении по переменной φ. Таким образом, из уравнения (24) однозначно определяется неподвижная точка $\varphi = \varphi_*^\varepsilon(t) \in S$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \|\varphi_*^\varepsilon(t) - \varphi_*(t)\|_{\mathcal{F}} = 0$, оператора (12), а отвечающее ей решение $(x_\varphi(t,\varepsilon), y_\varphi(t,\varepsilon))^{\mathrm{т}}|_{\varphi=\varphi_*^\varepsilon}$ системы (6) будет, очевидно, периодическим с периодом $T_* = T_\varphi|_{\varphi=\varphi_*^\varepsilon}$.

Перейдем теперь к вопросу об устойчивости найденного периодического решения. Из проведенных выше построений следует, что все его мультипликаторы (за исключением простого единичного) являются собственными значениями оператора $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi_*^\varepsilon)$. Последний же в силу вытекающего из (22) равенства $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi_*^\varepsilon) - \partial_\varphi \Pi_0(\varphi_*)\|_{\mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_0} = 0$ имеет одно собственное значение, асимптотически близкое к $\Phi'(z_*)$, а остальной его спектр лежит в круге $\{\mu \in \mathbb{C}:\ |\mu| \le r_0\}$ асимптотически малого по ε радиуса $r_0 = r_0(\varepsilon)$. Таким образом, свойства устойчивости рассматриваемого цикла совпадают с аналогичными свойствами неподвижной точки $z = z_*$ отображения (23). Теорема 2 доказана.

Установленная теорема сводит интересующий нас вопрос о периодических движениях системы (6) к поиску неподвижных точек одномерного отображения (23). Вопрос же о количестве и устойчивости последних будет изучен в третьей части настоящей статьи.

3. Обоснование C-сходимости. Доказательство равенств (22) основывается на построении равномерной по $\varphi \in S$ асимптотики введенного выше решения $(x_\varphi(t,\varepsilon), y_\varphi(t,\varepsilon))^{\mathrm{т}}$ системы (6). Как будет показано ниже, при всех $-\sigma_0 \le t \le T_0 - \varepsilon^\delta$, где $\delta = \mathrm{const} \in (0,1)$, справедливо равномерное по φ, t асимптотическое представление

$$(x_\varphi(t,\varepsilon), y_\varphi(t,\varepsilon))^{\mathrm{т}} = (x(t,z,\varepsilon), y(t,z,\varepsilon))^{\mathrm{т}}|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)} + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})). \tag{25}$$

Здесь $q = \mathrm{const} > 0$, а через $(x(t,z,\varepsilon), y(t,z,\varepsilon))^{\mathrm{т}}$ обозначено решение системы (6) со специальным начальным условием $\varphi(t) \equiv (-\sigma_0(\alpha - \beta - 1), z)^{\mathrm{т}}$, $z = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$.

Для обоснования равенства (25) прежде всего необходимо исследовать асимптотику функций $x(t,z,\varepsilon)$, $y(t,z,\varepsilon)$ при условии, что параметр z изменяется на некотором компактном подмножестве числовой оси. Соответствующий анализ начнем с отрезка $-\sigma_0 \le t \le -\varepsilon^\delta$, считая выполненными на нем априорные оценки

$$x(t,z,\varepsilon) \le -M_1\varepsilon^\delta, \quad |y(t,z,\varepsilon)| \le M_2 \tag{26}$$

(здесь и далее в аналогичных (25) асимптотических представлениях и в неравенствах вида (26) через q, M_1, M_2 и т.д. обозначены различные универсальные, т.е. не зависящие от t, φ, z, ε, положительные постоянные, точные значения которых несущественны).

Объединяя свойства (26) с равенствами $x(t-1,z,\varepsilon)\equiv -\sigma_0(\alpha-\beta-1)$, $y(t-1,z,\varepsilon)\equiv z$ (справедливость которых вытекает из оценки $\sigma_0<1$) и используя явные формулы (7) для функций F и G, приходим к выводу, что на рассматриваемом отрезке в силу условий (3) равномерно по t, z справедливы асимптотические представления

$$F(x,x(t-1),\varepsilon)=\alpha-\beta-1+O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})),$$
$$G(x,x(t-1),y,y(t-1),\varepsilon)=O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})). \tag{27}$$

Отсюда и из (6) очевидным образом выводим, что равномерно по t, z имеют место соотношения

$$(x(t,z,\varepsilon),y(t,z,\varepsilon))^{\mathrm{т}}=(\widetilde{x}(t,z,\varepsilon),\widetilde{y}(t,z,\varepsilon))^{\mathrm{т}}+O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})), \tag{28}$$

в которых

$$\widetilde{x}=(\alpha-\beta-1)t+\varepsilon d\int\limits_{-\sigma_0}^{t}[\exp(y_0(s,z))-1]\,ds,\quad \widetilde{y}=y_0(t,z), \tag{29}$$

а $y_0(t,z)$ – решение задачи Коши (15), (16).

Напомним, далее, что формула (28) носит пока условный характер, поскольку она получена при априорных предположениях (26). Но, как нетрудно увидеть, при подходящем выборе постоянных M_1, M_2 требуемые оценки (26) для правых частей равенств (28), (29) действительно выполняются. А это значит, что асимптотическое представление (28) обретает законную силу.

На следующем этапе убедимся в том, что равенство (28) сохраняется при дифференцировании по z. Обозначим $g_1(t,z,\varepsilon)=\partial x(t,z,\varepsilon)/\partial z$, $g_2(t,z,\varepsilon)=\partial y(t,z,\varepsilon)/\partial z$ и заметим, что компоненты g_1, g_2 удовлетворяют линейной системе (20), коэффициенты которой вычисляются по аналогичным (21) формулам при $x=x(t,z,\varepsilon)$, $u=x(t-1,z,\varepsilon)$, $y=y(t,z,\varepsilon)$, $v=y(t-1,z,\varepsilon)$, а начальные функции, заданные на отрезке $-1-\sigma_0\le t\le-\sigma_0$, имеют вид $g_1\equiv 0$, $g_2\equiv 1$. Далее, проводя те же рассуждения, что и при выводе равенств (27), убеждаемся в справедливости для коэффициентов этой системы равномерных по t, z асимптотических представлений

$$a_{11},a_{21},b_{11},b_{21},b_{22}=O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})),\quad a_{12}=\varepsilon d\exp(y(t,z,\varepsilon)),$$
$$a_{22}=-2d\,\mathrm{ch}(y(t,z,\varepsilon))+O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})). \tag{30}$$

Отсюда несложно вывести асимптотическое равенство

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z},\frac{\partial y}{\partial z}\right)^{\mathrm{т}}=\left(\frac{\partial\widetilde{x}}{\partial z}(t,z,\varepsilon),\frac{\partial\widetilde{y}}{\partial z}(t,z,\varepsilon)\right)^{\mathrm{т}}+O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\delta}}\right)\right), \tag{31}$$

которое, как и соотношения (30), выполняется равномерно по t, z.

Перейдем к рассмотрению отрезка $-\varepsilon^\delta\le t\le\varepsilon^\delta$. Поскольку при указанных t по-прежнему имеем $x(t-1,z,\varepsilon)\equiv-\sigma_0(\alpha-\beta-1)<0$, $y(t-1,z,\varepsilon)\equiv z$, то, согласно свойствам (3) функций $f(u)$, $g(u)$, в данном случае равномерно по t, z справедливы асимптотические формулы

$$f(\exp(x(t-1,z,\varepsilon)/\varepsilon))=1+O(\exp(-q/\varepsilon)),$$
$$f(\exp(x(t-1,z,\varepsilon)/\varepsilon+y(t-1,z,\varepsilon)))=1+O(\exp(-q/\varepsilon)). \tag{32}$$

Далее, учитывая соотношения (32), отбросим в правых частях системы (6) добавки порядка $\exp(-q/\varepsilon)$. В результате после замен $x=\varepsilon v_{1,1}(\tau)$, $x/\varepsilon+y=v_{1,2}(\tau)$, $\tau=t/\varepsilon$ она примет вид

$$\frac{dv_{1,1}}{d\tau}=\varepsilon d(\exp(v_{1,2}-v_{1,1})-1)+\alpha-1-\beta g(\exp v_{1,1}),$$
$$\frac{dv_{1,2}}{d\tau}=\varepsilon d(\exp(v_{1,1}-v_{1,2})-1)+\alpha-1-\beta g(\exp v_{1,2}). \tag{33}$$

Получившуюся систему (33) будем рассматривать на асимптотически большом отрезке $\tau \in J(\varepsilon) = [-\varepsilon^{\delta-1}, \varepsilon^{\delta-1}]$ с начальными условиями

$$v_{1,1}|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}} = \overline{v}_{1,1}(z,\varepsilon), \quad v_{1,2}|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}} = \overline{v}_{1,2}(z,\varepsilon), \tag{34}$$

где $\overline{v}_{1,1} = \widetilde{x}(-\varepsilon^\delta, z, \varepsilon)/\varepsilon$, $\overline{v}_{1,2} = \widetilde{x}(-\varepsilon^\delta, z, \varepsilon)/\varepsilon + \widetilde{y}(-\varepsilon^\delta, z, \varepsilon)$, а $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ – функции (29). Решение же задачи Коши (33), (34) обозначим через $(v_{1,1}(\tau,z,\varepsilon), v_{1,2}(\tau,z,\varepsilon))^{\text{т}}$.

Для отыскания главных членов асимптотики функций $v_{1,j}(\tau,z,\varepsilon)$, $j=1,2$, положим в (33) $\varepsilon = 0$. В итоге приходим к системе

$$\frac{dv_{1,1}}{d\tau} = \alpha - 1 - \beta g(\exp v_{1,1}), \quad \frac{dv_{1,2}}{d\tau} = \alpha - 1 - \beta g(\exp v_{1,2}).$$

Далее, нетрудно заметить, что эта система допускает решение $(v^0_{1,1}(\tau,z), v^0_{1,2}(\tau,z))^{\text{т}}$ с компонентами

$$v^0_{1,1} = V^{-1}(u)|_{u=(\alpha-\beta-1)\tau+\varkappa_{1,1}}, \quad v^0_{1,2} = V^{-1}(u)|_{u=(\alpha-\beta-1)\tau+\varkappa_{1,2}}, \tag{35}$$

где $V^{-1}(u)$ – функция, обратная к

$$V(u) = u - \int\limits_{-\infty}^{u} \frac{\beta(1-g(\exp s))}{\alpha - 1 - \beta g(\exp s)}\, ds, \quad u \in \mathbb{R}, \tag{36}$$

а функции $\varkappa_{1,j} = \varkappa_{1,j}(z)$, $j=1,2$, имеют вид

$$\varkappa_{1,1} = d\int\limits_{-\sigma_0}^{0} [\exp(y_0(s,z)) - 1]\, ds, \quad \varkappa_{1,2} = \varkappa_{1,1} + y_0(-0,z) \tag{37}$$

(сходимость несобственного интеграла в (36) и существование обратной функции $V^{-1}(u)$ при любых $u \in \mathbb{R}$ вытекают из свойств (3) и, в частности, условия $\alpha > 1 + \beta g(u)$ $\forall\, u \in \mathbb{R}_+$). Как оказывается, именно это решение и является искомым. Точнее говоря, справедлива

Лемма 1. *Равномерно по $\tau \in J(\varepsilon)$ и по параметру z имеют место асимптотические равенства*

$$v_{1,j}(\tau,z,\varepsilon) = v^0_{1,j}(\tau,z) + O(\varepsilon^\delta), \quad \frac{\partial v_{1,j}}{\partial z}(\tau,z,\varepsilon) = \frac{\partial v^0_{1,j}}{\partial z}(\tau,z) + O(\varepsilon^\delta), \quad j=1,2. \tag{38}$$

Доказательство. Остановимся сначала на некоторых свойствах функций $v^0_{1,j}(\tau,z)$, $\overline{v}_{1,j}(z,\varepsilon)$, $j=1,2$, необходимых для обоснования соотношений (38). Отметим в первую очередь, что при $\tau \to \pm\infty$ выполняются равномерные по z асимптотические представления

$$\begin{gathered} v^0_{1,j}(\tau,z) = (\alpha-\beta-1)\tau + \varkappa_{1,j} + O(\exp(\alpha-\beta-1)\tau), \quad \tau \to -\infty; \\ v^0_{1,j}(\tau,z) = (\alpha-1)\tau + \frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-1}\,\varkappa_{1,j} + c_0 + O(\exp(-(\alpha-1)\tau)), \quad \tau \to +\infty, \end{gathered} \tag{39}$$

где $j=1,2$, а постоянная c_0 имеет вид

$$c_0 = \frac{(\alpha-1)\beta}{\alpha-\beta-1}\int\limits_0^1 \frac{1-g(u)}{u(\alpha-1-\beta g(u))}\, du - \beta\int\limits_1^{+\infty} \frac{g(u)}{u(\alpha-1-\beta g(u))}\, du. \tag{40}$$

Доказательство равенств (39), (40) опустим, отсылая к соответствующему месту в [2]. Добавим только, что формулы (39) сохраняются при дифференцировании по z.

Указанные асимптотические свойства функций $v^0_{1,j}(\tau,z)$, $j=1,2$, при $\tau\to-\infty$ и формулы (29), (37) приводят к выводу, что

$$\overline{v}_{1,j}(z,\varepsilon)-v^0_{1,j}(\tau,z)|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}}=O(\varepsilon^\delta),\quad \frac{\partial\overline{v}_{1,j}}{\partial z}(z,\varepsilon)-\frac{\partial v^0_{1,j}}{\partial z}(\tau,z)\bigg|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}}=O(\varepsilon^\delta),\quad j=1,2. \tag{41}$$

Таким образом, нужные соотношения (38) заведомо выполняются при $\tau=-\varepsilon^{\delta-1}$.

Последующий анализ основан на методе дифференциальных неравенств. А именно при априорном предположении

$$|v_{1,1}-v_{1,2}|\le M,\quad \tau\in J(\varepsilon), \tag{42}$$

из (33) имеем

$$\alpha-M_1\varepsilon-1-\beta g(\exp v_{1,j})\le\frac{dv_{1,j}}{d\tau}\le\alpha+M_2\varepsilon-1-\beta g(\exp v_{1,j}),\quad j=1,2. \tag{43}$$

Далее, учитывая первую группу равенств (41) и увеличивая, если это необходимо, постоянные $M_1,M_2>0$ из (43), добиваемся выполнения оценок

$$v_{j,\min}(\tau,z,\varepsilon)|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}}\le\overline{v}_{1,j}(z,\varepsilon)\le v_{j,\max}(\tau,z,\varepsilon)|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}},\quad j=1,2, \tag{44}$$

где

$$\begin{gathered} v_{j,\min}=V^{-1}_{\min}(u)|_{u=(\alpha-M_1\varepsilon-\beta-1)\tau-2M_1\varepsilon^\delta+\varkappa_{1,j}(z)},\quad j=1,2;\\ v_{j,\max}=V^{-1}_{\max}(u)|_{u=(\alpha+M_2\varepsilon-\beta-1)\tau+2M_2\varepsilon^\delta+\varkappa_{1,j}(z)},\quad j=1,2, \end{gathered} \tag{45}$$

а функции $V_{\min}$, $V_{\max}$ получаются из (36) при замене α на $\alpha-M_1\varepsilon$ и $\alpha+M_2\varepsilon$ соответственно. И наконец, объединяя неравенства (43), (44), приходим к выводу, что

$$v_{j,\min}(\tau,z,\varepsilon)\le v_{1,j}(\tau,z,\varepsilon)\le v_{j,\max}(\tau,z,\varepsilon),\quad j=1,2, \tag{46}$$

при всех $\tau\in J(\varepsilon)$.

Напомним, однако, что неравенства (46) получены нами при априорном условии (42). Но поскольку в силу (45) при $\forall\,\tau\in J(\varepsilon)$ имеем

$$\begin{gathered} |v_{1,\min}(\tau,z,\varepsilon)-v_{2,\max}(\tau,z,\varepsilon)|+|v_{2,\min}(\tau,z,\varepsilon)-v_{1,\max}(\tau,z,\varepsilon)|\le M,\\ |v_{j,\min}(\tau,z,\varepsilon)-v^0_{1,j}(\tau,z)|+|v_{j,\max}(\tau,z,\varepsilon)-v^0_{1,j}(\tau,z)|\le M\varepsilon^\delta,\quad j=1,2, \end{gathered} \tag{47}$$

то эти неравенства обретают законную силу. Остается добавить, что из неравенств (46), (47) первая группа асимптотических формул (38) вытекает очевидным образом.

Перейдем теперь к обоснованию асимптотических представлений (38) для $h_j=\partial v_{1,j}/\partial z$, $j=1,2$. Дифференцируя правые части системы (33) и начальные условия (34) по z, для h_1, h_2 получаем некоторую линейную неоднородную систему, из которой в свою очередь при априорных предположениях

$$|h_j|\le M,\quad j=1,2,\quad \tau\in J(\varepsilon) \tag{48}$$

выводим аналогичные (43) дифференциальные неравенства

$$-M_1\varepsilon+a_j(\tau,z,\varepsilon)h_j\le\frac{dh_j}{d\tau}\le M_2\varepsilon+a_j(\tau,z,\varepsilon)h_j,\quad j=1,2. \tag{49}$$

Здесь, как обычно, $M_1,M_2>0$ – некоторые универсальные постоянные, а функции $a_j(\tau,z,\varepsilon)$ имеют вид

$$a_j(\tau,z,\varepsilon)=-\beta g'(\exp v)\exp v|_{v=v_{1,j}(\tau,z,\varepsilon)},\quad j=1,2, \tag{50}$$

и в силу свойств (3) и уже установленных равенств (38) для $v_{1,j}(\tau,z,\varepsilon)$ допускают оценки

$$|a_j(\tau,z,\varepsilon)| \le M\exp(-|v^0_{1,j}(\tau,z)|), \quad j=1,2, \quad \tau\in J(\varepsilon). \tag{51}$$

Из неравенств (49) очевидным образом имеем

$$h_{j,\min}(\tau,z,\varepsilon) \le h_j(\tau,z,\varepsilon) \le h_{j,\max}(\tau,z,\varepsilon), \quad j=1,2, \tag{52}$$

где

$$\begin{aligned} h_{j,\min} &= \frac{\partial\overline{v}_{1,j}}{\partial z}(z,\varepsilon)\exp\biggl\{\int\limits_{-\varepsilon^{\delta-1}}^{\tau} a_j(s,z,\varepsilon)\,ds\biggr\} - M_1\varepsilon\int\limits_{-\varepsilon^{\delta-1}}^{\tau}\exp\biggl\{\int\limits_{s}^{\tau} a_j(\sigma,z,\varepsilon)\,d\sigma\biggr\}\,ds,\\ h_{j,\max} &= \frac{\partial\overline{v}_{1,j}}{\partial z}(z,\varepsilon)\exp\biggl\{\int\limits_{-\varepsilon^{\delta-1}}^{\tau} a_j(s,z,\varepsilon)\,ds\biggr\} + M_2\varepsilon\int\limits_{-\varepsilon^{\delta-1}}^{\tau}\exp\biggl\{\int\limits_{s}^{\tau} a_j(\sigma,z,\varepsilon)\,d\sigma\biggr\}\,ds. \end{aligned} \tag{53}$$

Отсюда и из оценок $|h_{j,\min}|,|h_{j,\max}| \le M$, $j=1,2$ (справедливых в силу (50), (51), (53)), вытекает законность априорных предположений (48).

На заключительном этапе доказательства леммы убедимся в том, что функции (53) равномерно по τ, z отличаются от

$$\frac{\partial v^0_{1,j}}{\partial z}(\tau,z) = \varkappa'_{1,j}(z)\exp\biggl\{\int\limits_{-\infty}^{\tau} a_j(s,z,0)\,ds\biggr\}, \quad j=1,2,$$

на величины порядка ε^δ. Снова обращаясь к свойствам (3) функции $g(u)$, последовательно выводим неравенства

$$\begin{gathered} |g'(u)+ug''(u)| \le M/(1+u^2) \quad \forall\, u\in\mathbb{R}_+,\\ |u_1g'(u_1)-u_2g'(u_2)| \le \frac{M}{1+\min(u_1^2,u_2^2)}\,|u_1-u_2| \quad \forall\, u_1,u_2\in\mathbb{R}_+. \end{gathered} \tag{54}$$

Применяя затем второе неравенство (54) к формулам (50), приходим к выводу, что

$$|a_j(\tau,z,\varepsilon)-a_j(\tau,z,0)| \le M\varepsilon^\delta\exp(-|v^0_{1,j}(\tau,z)|), \quad \tau\in J(\varepsilon), \quad j=1,2. \tag{55}$$

И наконец, объединяя соотношения (41), (51), (53), (55), получаем требуемые асимптотические равенства

$$h_{j,\min}, h_{j,\max} = \frac{\partial\, v^0_{1,j}}{\partial z}(\tau,z) + O(\varepsilon^\delta), \quad \tau\in J(\varepsilon), \quad j=1,2,$$

которые в совокупности с оценками (52) приводят к нужным асимптотическим представлениям для $h_j(\tau,z,\varepsilon)$, $j=1,2$. Лемма 1 доказана.

Заканчивая рассмотрение отрезка времени $-\varepsilon^\delta \le t \le \varepsilon^\delta$, учтем в правых частях системы (33) и в начальных условиях (34) отброшенные ранее остатки порядка $\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})$. В результате после применения к получившейся задаче Коши описанного выше метода дифференциальных неравенств приходим к равномерным по $t\in[-\varepsilon^\delta,\varepsilon^\delta]$ и z асимптотическим представлениям

$$\begin{gathered} (x(t,z,\varepsilon),y(t,z,\varepsilon))^{\mathrm{т}} = (\varepsilon v_{1,1}(\tau,z,\varepsilon), v_{1,2}(\tau,z,\varepsilon)-v_{1,1}(\tau,z,\varepsilon))^{\mathrm{т}}|_{\tau=t/\varepsilon} + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})),\\ \biggl(\frac{\partial x}{\partial z},\frac{\partial y}{\partial z}\biggr)^{\mathrm{т}} = \biggl(\varepsilon\frac{\partial v_{1,1}}{\partial z},\frac{\partial v_{1,2}}{\partial z}-\frac{\partial v_{1,1}}{\partial z}\biggr)^{\mathrm{т}}\biggr|_{\tau=t/\varepsilon} + O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\delta}}\biggr)\biggr). \end{gathered} \tag{56}$$

Из формул (56), в частности, следует, что на изученном выше асимптотически малом промежутке изменения t компонента $y(t,z,\varepsilon)$ меняется существенно. А именно из (16), (35)–(40) и (56) вытекает, что при $\varepsilon\to 0$ имеют место асимптотические равенства

$$
\begin{gathered}
y(t,z,\varepsilon)|_{t=-\varepsilon^\delta}=y_0(-0,z)+O(\varepsilon^\delta),\\
y(t,z,\varepsilon)|_{t=\varepsilon^\delta}=\frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-1}\,y_0(-0,z)+O(\varepsilon^\delta)=y_0(+0,z)+O(\varepsilon^\delta).
\end{gathered}\tag{57}
$$

Тем самым, придерживаясь принятой в теории релаксационных колебаний терминологии, данный отрезок будем называть участком быстрых движений.

При рассмотрении следующего промежутка времени $\varepsilon^\delta\le t\le 1-\varepsilon^\delta$ считаем выполненными условия

$$
x(t-1,z,\varepsilon)\le -M_1\varepsilon^\delta,\quad |y(t-1,z,\varepsilon)|\le M_2,\quad x(t,z,\varepsilon)\ge M_3\varepsilon^\delta,\quad |y(t,z,\varepsilon)|\le M_4,\tag{58}
$$

первые два из которых – следствия уже установленных формул (28), (56), а два другие пока априорны. Учитывая далее оценки (58) в формулах (7), получаем аналогичные (27) соотношения

$$
\begin{gathered}
F(x,x(t-1),\varepsilon)=\alpha-1+O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})),\\
G(x,x(t-1),y,y(t-1),\varepsilon)=O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})).
\end{gathered}\tag{59}
$$

Отсюда, повторяя практически дословно рассуждения, предшествующие появлению формул (28), (31), выводим аналогичные асимптотические представления (справедливые равномерно по $\varepsilon^\delta\le t\le 1-\varepsilon^\delta$ и z)

$$
\begin{gathered}
(x(t,z,\varepsilon),y(t,z,\varepsilon))^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}=(\widetilde{x}(t,z,\varepsilon),\widetilde{y}(t,z,\varepsilon))^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}+O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})),\\
\left(\frac{\partial x}{\partial z},\frac{\partial y}{\partial z}\right)^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}=\left(\frac{\partial\widetilde{x}}{\partial z},\frac{\partial\widetilde{y}}{\partial z}\right)^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}+O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\delta}}\right)\right),
\end{gathered}\tag{60}
$$

где $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ – компоненты решения задачи Коши

$$
\begin{gathered}
\dot{x}=\varepsilon d(\exp y-1)+\alpha-1,\quad \dot{y}=-2d\operatorname{sh}y,\\
x|_{t=\varepsilon^\delta}=\varepsilon v_{1,1}(\tau,z,\varepsilon)|_{\tau=\varepsilon^{\delta-1}},\quad y|_{t=\varepsilon^\delta}=(v_{1,2}(\tau,z,\varepsilon)-v_{1,1}(\tau,z,\varepsilon))|_{\tau=\varepsilon^{\delta-1}}.
\end{gathered}\tag{61}
$$

Отдельно остановимся на асимптотических свойствах фигурирующих в (60) функций $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$. Учитывая в (61) асимптотические формулы (38), (57) и характер поведения функций (35) при $\tau\to+\infty$ (см. (39), (40)), после несложных преобразований приходим к выводу, что равномерно по $t\in[\varepsilon^\delta,1-\varepsilon^\delta]$ и z имеют место асимптотические соотношения

$$
\begin{gathered}
\widetilde{x}=(\alpha-1)t+\varepsilon d\int\limits_0^t[\exp(y_0(s,z))-1]\,ds+\varepsilon c_0(z)+O(\varepsilon^{1+\delta}),\quad \widetilde{y}=y_0(t,z)+O(\varepsilon^\delta),\\
\frac{\partial\widetilde{x}}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon d\int\limits_0^t[\exp(y_0(s,z))-1]\,ds+\varepsilon c_0(z)\right)+O(\varepsilon^{1+\delta}),\quad \frac{\partial\widetilde{y}}{\partial z}=\frac{\partial y_0}{\partial z}(t,z)+O(\varepsilon^\delta),
\end{gathered}\tag{62}
$$

где

$$
c_0(z)=\frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-1}d\int\limits_{-\sigma_0}^0[\exp(y_0(s,z))-1]\,ds+c_0,\tag{63}
$$

c_0 – постоянная (40), а $y_0(t,z)$ – решение задачи (15), (16).

Для придания изложенным построениям законной силы следует вспомнить о том, что третье и четвертое неравенства из (58) пока условны. Но, как показывает непосредственная проверка, правые части из (62) удовлетворяют этим неравенствам при соответствующем выборе постоянных M_3, M_4.

Обратимся, далее, к очередному отрезку времени $1-\varepsilon^\delta \le t \le 1+\varepsilon^\delta$ и будем считать, что при указанных t выполняются априорные оценки

$$x(t,z,\varepsilon) \ge M_1, \quad |y(t,z,\varepsilon)| \le M_2. \tag{64}$$

Из этих неравенств в силу свойств (3) очевидным образом имеем

$$g(\exp(x/\varepsilon)) = O(\exp(-q/\varepsilon)), \quad g(\exp(x/\varepsilon + y)) = O(\exp(-q/\varepsilon)). \tag{65}$$

Функции $x(t-1)$ и $y(t-1)$ теперь, согласно (56), задаются равенствами

$$\begin{gathered} x(t-1) = \varepsilon v_{1,1}(\tau,z,\varepsilon)|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})), \\ y(t-1) = (v_{1,2}(\tau,z,\varepsilon) - v_{1,1}(\tau,z,\varepsilon))|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})). \end{gathered} \tag{66}$$

На следующем этапе подставим соотношения (65), (66) в систему (6), отбросим в ее правых частях слагаемые порядка $\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})$ и выполним замены $x = \alpha - 1 + \varepsilon v_{2,1}$, $y = v_{2,2} - v_{2,1}$, $\tau = (t-1)/\varepsilon$. В результате придем к системе

$$\begin{aligned} \frac{dv_{2,1}}{d\tau} &= \varepsilon d(\exp(v_{2,2} - v_{2,1}) - 1) - 1 + \alpha f(\exp v_{1,1}(\tau,z,\varepsilon)), \\ \frac{dv_{2,2}}{d\tau} &= \varepsilon d(\exp(v_{2,1} - v_{2,2}) - 1) - 1 + \alpha f(\exp v_{1,2}(\tau,z,\varepsilon)), \end{aligned} \tag{67}$$

которую, как и аналогичную систему (33), будем рассматривать на отрезке $\tau \in J(\varepsilon)$, где $J(\varepsilon) = [-\varepsilon^{\delta-1}, \varepsilon^{\delta-1}]$, с начальными условиями

$$v_{2,1}|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}} = \overline{v}_{2,1}(z,\varepsilon), \quad v_{2,2}|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}} = \overline{v}_{2,2}(z,\varepsilon). \tag{68}$$

Здесь $\overline{v}_{2,1} = (\widetilde{x}(1-\varepsilon^\delta,z,\varepsilon) - \alpha + 1)/\varepsilon$, $\overline{v}_{2,2} = \overline{v}_{2,1} + \widetilde{y}(1-\varepsilon^\delta,z,\varepsilon)$, а $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ – функции из (62).

При исследовании задачи (67), (68) существенную роль играют аналогичные (35) специальные функции

$$v^0_{2,j}(\tau,z) = (\alpha-1)\tau + \varkappa_{2,j}(z) + \alpha \int\limits_{-\infty}^{\tau} [f(\exp v^0_{1,j}(s,z)) - 1]\, ds, \quad j = 1,2, \tag{69}$$

где

$$\varkappa_{2,1}(z) = d\int\limits_0^1 [\exp(y_0(s,z)) - 1]\, ds + c_0(z), \quad \varkappa_{2,2}(z) = \varkappa_{2,1}(z) + y_0(1-0,z), \tag{70}$$

$c_0(z)$ – функция (63), а через $y_0(t,z)$ по-прежнему обозначено решение задачи (15), (16).

Используя аналогичные построения, изложенные в [2], нетрудно показать, что для функций (69) при $\tau \to \pm\infty$ имеют место равномерные по z (и допускающие дифференцирование по z) асимптотические равенства

$$\begin{gathered} v^0_{2,j}(\tau,z) = (\alpha-1)\tau + \varkappa_{2,j} + O(\exp(\alpha-\beta-1)\tau), \quad \tau \to -\infty; \\ v^0_{2,j}(\tau,z) = -\tau + \varkappa_{2,j} - \frac{\alpha}{\alpha-\beta-1}\,\varkappa_{1,j} + c_1 + O(\exp(-(\alpha-1)\tau)), \quad \tau \to +\infty, \quad j = 1,2, \end{gathered} \tag{71}$$

где

$$c_1 = \int\limits_0^1 \frac{\alpha(f(u)-1)}{u(\alpha-1-\beta g(u))}\,du - \frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta-1}\int\limits_0^1 \frac{1-g(u)}{u\,(\alpha-1-\beta g(u))}\,du + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\alpha f(u)}{u(\alpha-1-\beta g(u))}\,du. \quad (72)$$

Перечисленные свойства функций (69) позволяют установить следующее утверждение.

Лемма 2. *Для решения* $(v_{2,1}(\tau,z,\varepsilon), v_{2,2}(\tau,z,\varepsilon))^{\mathrm{т}}$ *задачи Коши (67), (68) равномерно по* $\tau \in J(\varepsilon)$ *и по параметру* z *справедливы асимптотические формулы*

$$v_{2,j}(\tau,z,\varepsilon) = v_{2,j}^0(\tau,z) + O(\varepsilon^\delta), \quad \frac{\partial v_{2,j}}{\partial z}(\tau,z,\varepsilon) = \frac{\partial v_{2,j}^0}{\partial z}(\tau,z) + O(\varepsilon^\delta), \quad j=1,2. \quad (73)$$

На доказательстве сформулированного утверждения не останавливаемся, поскольку оно основано на методе дифференциальных неравенств и с несущественными изменениями повторяет все этапы обоснования леммы 1.

Возвращаясь к системе (67) и учитывая в ее правых частях и в начальных условиях (68) отброшенные слагаемые порядка $\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})$, приходим к выводу, что для интересующих нас функций $x(t,z,\varepsilon)$, $y(t,z,\varepsilon)$ равномерно по $t \in [1-\varepsilon^\delta, 1+\varepsilon^\delta]$ и z выполняются аналогичные (56) асимптотические равенства

$$(x(t,z,\varepsilon), y(t,z,\varepsilon))^{\mathrm{т}} =$$

$$= (\alpha - 1 + \varepsilon v_{2,1}(\tau,z,\varepsilon), v_{2,2}(\tau,z,\varepsilon) - v_{2,1}(\tau,z,\varepsilon))^{\mathrm{т}}|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})), \quad (74)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}\right)^{\mathrm{т}} = \left(\varepsilon\frac{\partial v_{2,1}}{\partial z}, \frac{\partial\, v_{2,2}}{\partial z} - \frac{\partial\, v_{2,1}}{\partial z}\right)^{\mathrm{т}}\Bigg|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\delta}}\right)\right).$$

Завершая рассмотрение промежутка $1-\varepsilon^\delta \le t \le 1+\varepsilon^\delta$, отметим два момента. Во-первых, используя свойства (71), (72) функций (69) и равенства (73), убеждаемся в том, что правые части из (74) действительно удовлетворяют оценкам (64) при подходящем выборе постоянных $M_1, M_2 > 0$ и, следовательно, формулы (74) обретают законную силу. Во-вторых, из (16), (70)–(74) заключаем, что

$$y(t,z,\varepsilon)|_{t=1-\varepsilon^\delta} = y_0(1-0,z) + O(\varepsilon^\delta),$$

$$y(t,z,\varepsilon)|_{t=1+\varepsilon^\delta} = y_0(1-0,z) - \frac{\alpha}{\alpha-\beta-1}\,y_0(-0,z) + O(\varepsilon^\delta) = \quad (75)$$

$$= y_0(1-0,z) - \frac{\alpha}{\alpha-1}\,y_0(+0,z) + O(\varepsilon^\delta),$$

а значит, отрезок $1-\varepsilon^\delta \le t \le 1+\varepsilon^\delta$ представляет собой очередной участок быстрых движений.

Последующие пять шагов асимптотического анализа функций $x(t,z,\varepsilon)$, $y(t,z,\varepsilon)$, связанные с рассмотрением отрезков времени $1+\varepsilon^\delta \le t \le \alpha-\varepsilon^\delta$, $\alpha-\varepsilon^\delta \le t \le \alpha+\varepsilon^\delta$, $\alpha+\varepsilon^\delta \le t \le \alpha+1-\varepsilon^\delta$, $\alpha+1-\varepsilon^\delta \le t \le \alpha+1+\varepsilon^\delta$ и $\alpha+1+\varepsilon^\delta \le t \le T_0-\varepsilon^\delta$, вполне аналогичны четырем предыдущим. Поэтому здесь приведем лишь сводку итоговых результатов.

При $1+\varepsilon^\delta \le t \le \alpha-\varepsilon^\delta$ имеют место асимптотические равенства (60), в которых теперь $(\widetilde{x}, \widetilde{y})^{\mathrm{т}}$ – решение задачи Коши

$$\dot{x} = \varepsilon d(\exp y - 1) - 1, \quad \dot{y} = -2d\,\mathrm{sh}\,y,$$

$$x|_{t=1+\varepsilon^\delta} = \alpha - 1 + \varepsilon v_{2,1}(\tau,z,\varepsilon)|_{\tau=\varepsilon^{\delta-1}}, \quad y|_{t=1+\varepsilon^\delta} = (v_{2,2}(\tau,z,\varepsilon) - v_{2,1}(\tau,z,\varepsilon))|_{\tau=\varepsilon^{\delta-1}}.$$

Для самих же функций $\widetilde{x}(t,z,\varepsilon)$, $\widetilde{y}(t,z,\varepsilon)$ справедливы аналогичные (62), (63) формулы

$$\widetilde{x}=\alpha-t+\varepsilon d\int\limits_0^t[\exp(y_0(s,z))-1]\,ds+\varepsilon c_1(z)+O(\varepsilon^{1+\delta}),\quad \widetilde{y}=y_0(t,z)+O(\varepsilon^{\delta}),$$
$$\frac{\partial\widetilde{x}}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon d\int\limits_0^t[\exp(y_0(s,z))-1]\,ds+\varepsilon c_1(z)\right)+O(\varepsilon^{1+\delta}),\quad \frac{\partial\widetilde{y}}{\partial z}=\frac{\partial y_0}{\partial z}(t,z)+O(\varepsilon^{\delta}),\tag{76}$$

где

$$c_1(z)=c_0(z)-\frac{\alpha}{\alpha-\beta-1}\,d\int\limits_{-\sigma_0}^0[\exp(y_0(s,z))-1]\,ds+c_1,\tag{77}$$

а c_1 – постоянная (72).

При $\alpha-\varepsilon^{\delta}\le t\le\alpha+\varepsilon^{\delta}$ интересующее нас решение задается аналогичными (56) равенствами

$$(x(t,z,\varepsilon),y(t,z,\varepsilon))^{\mathrm{т}}=$$
$$=(\varepsilon w_{1,1}(\tau,z,\varepsilon),w_{1,2}(\tau,z,\varepsilon)-w_{1,1}(\tau,z,\varepsilon))^{\mathrm{т}}|_{\tau=(t-\alpha)/\varepsilon}+O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})),\tag{78}$$
$$\left(\frac{\partial x}{\partial z},\frac{\partial y}{\partial z}\right)^{\mathrm{т}}=\left(\varepsilon\frac{\partial w_{1,1}}{\partial z},\frac{\partial w_{1,2}}{\partial z}-\frac{\partial w_{1,1}}{\partial z}\right)^{\mathrm{т}}\Bigg|_{\tau=(t-\alpha)/\varepsilon}+O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\delta}}\right)\right).$$

Здесь $(w_{1,1}(\tau,z,\varepsilon),\ w_{1,2}(\tau,z,\varepsilon))^{\mathrm{т}}$ – решение задачи Коши

$$\frac{dw_{1,1}}{d\tau}=\varepsilon d(\exp(w_{1,2}-w_{1,1})-1)-1-\beta g(\exp w_{1,1}),\quad w_{1,1}|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}}=\overline{w}_{1,1}(z,\varepsilon),$$
$$\frac{dw_{1,2}}{d\tau}=\varepsilon d(\exp(w_{1,1}-w_{1,2})-1)-1-\beta g(\exp w_{1,2}),\quad w_{1,2}|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}}=\overline{w}_{1,2}(z,\varepsilon),$$

где $\overline{w}_{1,1}=\widetilde{x}(\alpha-\varepsilon^{\delta},z,\varepsilon)/\varepsilon$, $\overline{w}_{1,2}=\overline{w}_{1,1}+\widetilde{y}(\alpha-\varepsilon^{\delta},z,\varepsilon)$, а $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ – функции (76). Далее, для компонент $w_{1,1}(\tau,z,\varepsilon)$, $w_{1,2}(\tau,z,\varepsilon)$ в свою очередь имеют место равномерные по $\tau\in J(\varepsilon)=[-\varepsilon^{\delta-1},\varepsilon^{\delta-1}]$ и z асимптотические представления

$$w_{1,j}(\tau,z,\varepsilon)=w_{1,j}^0(\tau,z)+O(\varepsilon^{\delta}),\quad \frac{\partial w_{1,j}}{\partial z}(\tau,z,\varepsilon)=\frac{\partial w_{1,j}^0}{\partial z}(\tau,z)+O(\varepsilon^{\delta}),\quad j=1,2,\tag{79}$$

где

$$w_{1,1}^0(\tau,z)=W^{-1}(u)|_{u=-\tau+\theta_{1,1}},\quad w_{1,2}^0(\tau,z)=W^{-1}(u)|_{u=-\tau+\theta_{1,2}},\tag{80}$$

$$\theta_{1,1}(z)=d\int\limits_0^{\alpha}[\exp(y_0(s,z))-1]\,ds+c_1(z),\quad \theta_{1,2}(z)=\theta_{1,1}(z)+y_0(\alpha-0,z),\tag{81}$$

а $W^{-1}(u)$ – функция, обратная к

$$W(u)=u+\int\limits_u^{+\infty}\frac{\beta g(\exp s)}{1+\beta g(\exp s)}\,ds.\tag{82}$$

Отметим еще вытекающие из соотношений (80)–(82) равномерные по z асимптотические равенства

$$w_{1,j}(\tau,z)=-\tau+\theta_{1,j}(z)+O(\exp\tau),\quad \frac{\partial w_{1,j}}{\partial z}=\theta'_{1,j}(z)+O(\exp\tau),\quad \tau\to-\infty;$$
$$w_{1,j}(\tau,z)=-(\beta+1)\tau+(\beta+1)\theta_{1,j}(z)+c_2+O(\exp(-(\beta+1)\tau)),\tag{83}$$
$$\frac{\partial w_{1,j}}{\partial z}=(\beta+1)\theta'_{1,j}(z)+O(\exp(-(\beta+1)\tau)),\quad \tau\to+\infty,\quad j=1,2,$$

где

$$c_2=\beta\int\limits_0^1\frac{1-g(u)}{u(1+\beta g(u))}\,du-\beta(1+\beta)\int\limits_1^{+\infty}\frac{g(u)}{u(1+\beta g(u))}\,du,\tag{84}$$

а также аналогичные (57), (75) соотношения

$$y(t,z,\varepsilon)|_{t=\alpha-\varepsilon^\delta}=y_0(\alpha-0,z)+O(\varepsilon^\delta),$$
$$y(t,z,\varepsilon)|_{t=\alpha+\varepsilon^\delta}=(\beta+1)y_0(\alpha-0,z)+O(\varepsilon^\delta)=y_0(\alpha+0,z)+O(\varepsilon^\delta).\tag{85}$$

При $\alpha+\varepsilon^\delta\le t\le\alpha+1-\varepsilon^\delta$ снова справедливы асимптотические равенства (60), в которых $(\widetilde{x},\widetilde{y})^{\mathrm{т}}$ – решение задачи Коши

$$\dot x=\varepsilon d(\exp y-1)-\beta-1,\quad \dot y=-2d\operatorname{sh}y,$$
$$x|_{t=\alpha+\varepsilon^\delta}=\varepsilon w_{1,1}(\tau,z,\varepsilon)|_{\tau=\varepsilon^{\delta-1}},\quad y|_{t=\alpha+\varepsilon^\delta}=(w_{1,2}(\tau,z,\varepsilon)-w_{1,1}(\tau,z,\varepsilon))|_{\tau=\varepsilon^{\delta-1}}.\tag{86}$$

Используя предшествующую информацию о функциях $w_{1,j}(\tau,z,\varepsilon)$, $j=1,2$ (см. (79)–(84)), нетрудно убедиться в том, что для решения $(\widetilde{x},\widetilde{y})^{\mathrm{т}}$ задачи (86) имеют место равномерные по t, z асимптотические формулы

$$\widetilde{x}=-(\beta+1)(t-\alpha)+\varepsilon d\int\limits_\alpha^t[\exp(y_0(s,z))-1]\,ds+\varepsilon c_2(z)+O(\varepsilon^{1+\delta}),\quad \widetilde{y}=y_0(t,z)+O(\varepsilon^\delta),$$
$$\frac{\partial\widetilde{x}}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon d\int\limits_\alpha^t[\exp(y_0(s,z))-1]\,ds+\varepsilon c_2(z)\right)+O(\varepsilon^{1+\delta}),\quad \frac{\partial\widetilde{y}}{\partial z}=\frac{\partial y_0}{\partial z}(t,z)+O(\varepsilon^\delta),\tag{87}$$

где $c_2(z)=(\beta+1)\theta_{1,1}(z)+c_2$.

На очередном участке быстрых движений $\alpha+1-\varepsilon^\delta\le t\le\alpha+1+\varepsilon^\delta$ интересующее нас решение допускает аналогичные (74) асимптотические представления

$$(x(t,z,\varepsilon),y(t,z,\varepsilon))^{\mathrm{т}}=$$
$$=(-\beta-1+\varepsilon w_{2,1}(\tau,z,\varepsilon),w_{2,2}(\tau,z,\varepsilon)-w_{2,1}(\tau,z,\varepsilon))^{\mathrm{т}}|_{\tau=(t-\alpha-1)/\varepsilon}+O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})),\tag{88}$$
$$\left(\frac{\partial x}{\partial z},\frac{\partial y}{\partial z}\right)^{\mathrm{т}}=\left(\varepsilon\frac{\partial w_{2,1}}{\partial z},\frac{\partial w_{2,2}}{\partial z}-\frac{\partial w_{2,1}}{\partial z}\right)^{\mathrm{т}}\Bigg|_{\tau=(t-\alpha-1)/\varepsilon}+O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\delta}}\right)\right).$$

Здесь $(w_{2,1}(\tau,z,\varepsilon),w_{2,2}(\tau,z,\varepsilon))^{\mathrm{т}}$, $\tau\in J(\varepsilon)=[-\varepsilon^{\delta-1},\varepsilon^{\delta-1}]$ – решение задачи Коши

$$\frac{dw_{2,1}}{d\tau}=\varepsilon d(\exp(w_{2,2}-w_{2,1})-1)-\beta-1+\alpha f(\exp w_{1,1}(\tau,z,\varepsilon)),\quad w_{2,1}|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}}=\overline{w}_{2,1}(z,\varepsilon),$$

$$\frac{dw_{2,2}}{d\tau}=\varepsilon d(\exp(w_{2,1}-w_{2,2})-1)-\beta-1+\alpha f(\exp w_{1,2}(\tau,z,\varepsilon)),\quad w_{2,2}|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}}=\overline{w}_{2,2}(z,\varepsilon),$$

где $\overline{w}_{2,1} = (\widetilde{x}(\alpha+1-\varepsilon^\delta, z, \varepsilon) + \beta + 1)/\varepsilon$, $\overline{w}_{2,2} = \overline{w}_{2,1} + \widetilde{y}(\alpha+1-\varepsilon^\delta, z, \varepsilon)$, а $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ – функции (87). Для компонент же $w_{2,j}(\tau, z, \varepsilon)$, $j = 1, 2$, в свою очередь справедливы равномерные по $\tau \in J(\varepsilon)$ и z асимптотические представления

$$w_{2,j}(\tau, z, \varepsilon) = w^0_{2,j}(\tau, z) + O(\varepsilon^\delta), \quad \frac{\partial w_{2,j}}{\partial z}(\tau, z, \varepsilon) = \frac{\partial w^0_{2,j}}{\partial z}(\tau, z) + O(\varepsilon^\delta), \quad j = 1, 2. \tag{89}$$

Остановимся на некоторых свойствах фигурирующих в (89) функций $w^0_{2,j}$, $j = 1, 2$. Отметим, во-первых, что они задаются аналогичными (69), (70) соотношениями

$$w^0_{2,j}(\tau, z) = -(\beta+1)\tau + \theta_{2,j}(z) + \alpha \int\limits_{-\infty}^{\tau} f(\exp w^0_{1,j}(s, z))\, ds, \quad j = 1, 2, \tag{90}$$

где

$$\theta_{2,1}(z) = d \int\limits_{\alpha}^{\alpha+1} [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds + c_2(z), \quad \theta_{2,2}(z) = \theta_{2,1}(z) + y_0(\alpha+1-0, z); \tag{91}$$

во-вторых, при $\tau \to \pm\infty$ для них справедливы асимптотические представления (равномерные по z и допускающие дифференцирование по z)

$$\begin{gathered} w^0_{2,j}(\tau, z) = -(\beta+1)\tau + \theta_{2,j}(z) + O(\exp\tau), \quad \tau \to -\infty; \\ w^0_{2,j}(\tau, z) = (\alpha - \beta - 1)\tau + \theta_{2,j}(z) - \alpha\theta_{1,j}(z) + c_3 + O(\exp(-(\beta+1)\tau)), \\ \tau \to +\infty, \quad j = 1, 2, \end{gathered} \tag{92}$$

где

$$c_3 = \int\limits_0^1 \frac{\alpha(f(u) - 1)}{u(1 + \beta g(u))}\, du + \alpha \int\limits_1^{+\infty} \frac{f(u) + \beta g(u)}{u(1 + \beta g(u))}\, du. \tag{93}$$

И наконец, объединяя соотношения (88)–(93), приходим к аналогичным (57), (75), (85) формулам

$$\begin{gathered} y(t, z, \varepsilon)|_{t=\alpha+1-\varepsilon^\delta} = y_0(\alpha+1-0, z) + O(\varepsilon^\delta), \\ y(t, z, \varepsilon)|_{t=\alpha+1+\varepsilon^\delta} = y_0(\alpha+1-0, z) - \alpha y_0(\alpha-0, z) + O(\varepsilon^\delta) = \\ = y_0(\alpha+1-0, z) - \frac{\alpha}{\beta+1}\, y_0(\alpha+0, z) + O(\varepsilon^\delta). \end{gathered} \tag{94}$$

На последнем из участков, а именно при $\alpha + 1 + \varepsilon^\delta \le t \le T_0 - \varepsilon^\delta$ для функций $x(t, z, \varepsilon)$, $y(t, z, \varepsilon)$ в очередной раз справедливы равенства (60), в которых $(\widetilde{x}, \widetilde{y})^{\mathrm{т}}$ – решение задачи Коши

$$\dot{x} = \varepsilon d(\exp y - 1) + \alpha - \beta - 1, \quad \dot{y} = -2d \operatorname{sh} y,$$

$$x|_{t=\alpha+1+\varepsilon^\delta} = -\beta - 1 + \varepsilon w_{2,1}(\tau, z, \varepsilon)|_{\tau=\varepsilon^{\delta-1}}, \quad y|_{t=\alpha+1+\varepsilon^\delta} = (w_{2,2}(\tau, z, \varepsilon) - w_{2,1}(\tau, z, \varepsilon))|_{\tau=\varepsilon^{\delta-1}}.$$

Функции $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ в данном случае допускают равномерные по t, z асимптотические представления

$$\begin{gathered} \widetilde{x} = (\alpha - \beta - 1)(t - \alpha - 1) - \beta - 1 + \varepsilon d \int\limits_{\alpha+1}^{t} [\exp(y_0(s, z)) - 1]\, ds + \varepsilon c_3(z) + O(\varepsilon^{1+\delta}), \\ \widetilde{y} = y_0(t, z) + O(\varepsilon^\delta), \quad \frac{\partial \widetilde{x}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon d \int\limits_{\alpha+1}^{t} [\exp(y_0(s, z)) - 1]\, ds + \varepsilon c_3(z)\right) + O(\varepsilon^{1+\delta}), \\ \frac{\partial \widetilde{y}}{\partial z} = \frac{\partial y_0}{\partial z}(t, z) + O(\varepsilon^\delta), \end{gathered} \tag{95}$$

где $c_3(z) = \theta_{2,1}(z) - \alpha\theta_{1,1}(z) + c_3$.

Подведем некоторый итог. В первую очередь обратим внимание, что все изложенные выше построения остаются в силе при замене специального начального условия $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, $\varphi_1(t) \equiv -\sigma_0(\alpha - \beta - 1)$, $\varphi_2(t) \equiv z$, $z = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$, на произвольную начальную функцию $\varphi(t) \in S$. Действительно, нетрудно заметить, что при этом сохраняются все соотношения вида (27), (32), (59) и т.д. Тем самым для $(x_\varphi(t,\varepsilon), y_\varphi(t,\varepsilon))^{\mathrm{т}}$ остаются в силе базовые формулы

$$(x_\varphi(t,\varepsilon), y_\varphi(t,\varepsilon))^{\mathrm{т}} = (\widetilde{x}(t,z,\varepsilon), \widetilde{y}(t,z,\varepsilon))^{\mathrm{т}} + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta}))$$

в случае, когда $(\widetilde{x}, \widetilde{y})^{\mathrm{т}}$ задается равенствами из (29), (62), (76), (87), (95), и аналогичные формулы на участках быстрых движений (см. (56), (74), (78), (88)). А отсюда требуемое асимптотическое представление (25) вытекает очевидным образом.

Суммируя полученную информацию (см. (25), (28), (29), (56), (57), (59)–(63), (74)–(95)), приходим к выводу, что равномерно по $\varphi \in S$ выполняются асимптотические равенства

$$\max_{-\sigma_0 \le t \le T_0 - \varepsilon^\delta} |x_\varphi(t,\varepsilon) - x_0(t)| = O(\varepsilon), \tag{96}$$

$$\max_{t \in \Sigma(\varepsilon)} |y_\varphi(t,\varepsilon) - y_0(t,z)|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)}| = O(\varepsilon^\delta), \tag{97}$$

где $x_0(t)$ – функция (14), $y_0(t,z)$ – решение задачи Коши (15), (16), а множество $\Sigma(\varepsilon)$ представляет собой отрезок времени $[-\sigma_0, T_0 - \varepsilon^\delta]$ с выброшенными интервалами быстрых движений $(-\varepsilon^\delta, \varepsilon^\delta)$, $(1 - \varepsilon^\delta, 1 + \varepsilon^\delta)$, $(\alpha - \varepsilon^\delta, \alpha + \varepsilon^\delta)$, $(\alpha + 1 - \varepsilon^\delta, \alpha + 1 + \varepsilon^\delta)$. Далее, из равенства (96) заключаем, что для отыскания второго положительного корня $t = T_\varphi$ уравнения $x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0(\alpha - \beta - 1)$ следует воспользоваться асимптотическими представлениями (60), (95). Из этих формул и из очевидного свойства $\dot{x}_\varphi(t,\varepsilon) = \alpha - \beta - 1 + O(\varepsilon)$, $t \in [\alpha + 1 + \varepsilon^\delta, T_0 - \varepsilon^\delta]$, вытекает, что требуемый корень находится однозначно и допускает равномерную по $\varphi \in S$ асимптотику

$$T_\varphi = T_0 + O(\varepsilon). \tag{98}$$

И наконец, объединяя формулы (96)–(98), убеждаемся в справедливости первого предельного равенства из (22).

4. Доказательство C^1-сходимости. Обоснование второго предельного соотношения (22) помимо уже установленных асимптотических свойств решения $(x_\varphi(t,\varepsilon), y_\varphi(t,\varepsilon))^{\mathrm{т}}$ требует знания асимптотики при $-\sigma_0 \le t \le T_0 - \varepsilon^\delta$ решения $g(t,\varepsilon) = (g_1(t,\varepsilon), g_2(t,\varepsilon))^{\mathrm{т}}$ линейной системы (20) с произвольной начальной функцией $g_0(t) = (g_{1,0}(t), g_{2,0}(t))^{\mathrm{т}}$ из пространства $\mathcal{F}_0$. Как будет показано ниже, на отрезке $-\sigma_0 \le t \le T_0 - \varepsilon^\delta$ имеет место оценка

$$\max_t \|g(t,\varepsilon) - \widetilde{g}(t,\varepsilon)\| \le M \exp(-q/\varepsilon^{1-\delta}) \|g_0\|_{\mathcal{F}}, \tag{99}$$

где

$$\widetilde{g}(t,\varepsilon) = \left(\frac{\partial x}{\partial z}(t,z,\varepsilon), \frac{\partial y}{\partial z}(t,z,\varepsilon)\right)^{\mathrm{т}}\Bigg|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)} g_{2,0}(-\sigma_0), \tag{100}$$

$M, q > 0$ – некоторые универсальные (не зависящие от ε, φ, g_0) постоянные, а символом $\|\cdot\|$ здесь и далее в зависимости от контекста обозначается кубическая векторная норма в $\mathbb{R}^2$ или индуцированная ей матричная норма.

Для доказательства неравенства (99) выполним в (20) замену $g = \widetilde{g} + h$. Далее, обратим внимание, что вектор-функция $\widetilde{g}(t,\varepsilon)$ удовлетворяет аналогичной (20) системе с матрицами $\widetilde{A}(t,\varepsilon)$, $\widetilde{B}(t,\varepsilon)$, вычисленными на решении $(x(t,z,\varepsilon), y(t,z,\varepsilon))^{\mathrm{т}}|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)}$. Кроме того, из асимптотического представления (25) вытекает, что

$$\begin{gathered} A(t,\varepsilon) = \widetilde{A}(t,\varepsilon) + \Delta_1(t,\varepsilon), \quad B(t,\varepsilon) = \widetilde{B}(t,\varepsilon) + \Delta_2(t,\varepsilon), \\ \max_{-\sigma_0 \le t \le T_0 - \varepsilon^\delta} \|\Delta_j(t,\varepsilon)\| \le M \exp(-q/\varepsilon^{1-\delta}), \quad j = 1, 2. \end{gathered} \tag{101}$$

Поэтому для нахождения h получаем линейную систему

$$\dot{h} = A(t,\varepsilon)h + B(t,\varepsilon)h(t-1) + F(t,\varepsilon) \tag{102}$$

с неоднородностью $F(t,\varepsilon) = \Delta_1(t,\varepsilon)\widetilde{g}(t,\varepsilon) + \Delta_2(t,\varepsilon)\widetilde{g}(t-1,\varepsilon)$ и начальной функцией

$$h_0(t) = g_0(t) - (0,1)^{\mathrm{т}} g_{2,0}(-\sigma_0). \tag{103}$$

Исследование системы (102) начнем с отрезка $-\sigma_0 \le t \le 1-\sigma_0$. Как обычно, перейдем от нее к соответствующему интегральному уравнению, которое с учетом вытекающего из (103) равенства $h_0(-\sigma_0) = 0$ примет вид

$$h(t,\varepsilon) = \int\limits_{-\sigma_0}^{t} K(t,s,\varepsilon)B(s,\varepsilon)h_0(s-1)\,ds + \int\limits_{-\sigma_0}^{t} K(t,s,\varepsilon)F(s,\varepsilon)\,ds,$$

где $K(t,\tau,\varepsilon)$ – матрица Коши системы $\dot{h} = A(t,\varepsilon)h$. Отсюда для функции $\gamma(t,\varepsilon) = \|h(t,\varepsilon)\|$ получаем оценку

$$\gamma(t,\varepsilon) \le \gamma_0(\varepsilon) \max_{-\sigma_0 \le \tau \le t \le 1-\sigma_0} \|K(t,\tau,\varepsilon)\|, \tag{104}$$

где

$$\gamma_0(\varepsilon) = \int\limits_{-\sigma_0}^{1-\sigma_0} \|B(s,\varepsilon)\|\,\|h_0(s-1)\|\,ds + \int\limits_{-\sigma_0}^{1-\sigma_0} \|F(s,\varepsilon)\|\,ds. \tag{105}$$

Дальнейший анализ основан на следующих фактах, вытекающих из проведенных в предыдущем пункте асимптотических построений. Во-первых, в силу оценок из (101) и известных асимптотических свойств функции $\widetilde{g}(t,\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\max_{-\sigma_0 \le t \le T_0-\varepsilon^\delta} \|F(t,\varepsilon)\| \le M\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})\|g_0\|_{\mathcal{F}}; \tag{106}$$

во-вторых, для матриц $K(t,\tau,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$ справедливы оценки

$$\begin{gathered} \max_{-\sigma_0 \le \tau \le t \le T_0-\varepsilon^\delta} \|K(t,\tau,\varepsilon)\| \le \frac{M_1}{\varepsilon}, \quad \int\limits_{-\sigma_0}^{T_0-\varepsilon^\delta} \|B(t,\varepsilon)\|\,dt \le \frac{M_2}{\varepsilon}, \\ \max_{-\sigma_0 \le t \le 1-\sigma_0} \|B(t,\varepsilon)\| \le M_3\exp(-q/\varepsilon). \end{gathered} \tag{107}$$

Обратим внимание, что из (107) в некоторых пояснениях нуждается только первое неравенство (второе и третье – очевидные следствия проведенного нами асимптотического анализа). Для обоснования же первой из упомянутых оценок введем в рассмотрение матрицу Коши $\widetilde{K}(t,\tau,\varepsilon)$ системы

$$\dot{h} = \widetilde{A}(t,\varepsilon)h, \quad \widetilde{A}(t,\varepsilon) = C^{-1}A(t,\varepsilon)C, \quad C = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{108}$$

Заметим, далее, что в силу равенств (21) и полученных нами асимптотических формул для решений системы (6) матрица $\widetilde{A}(t,\varepsilon)$ из (108) удовлетворяет оценке вида

$$\int\limits_{-\sigma_0}^{T_0-\varepsilon^\delta} \|\widetilde{A}(t,\varepsilon)\|\,dt \le M. \tag{109}$$

Далее, учитывая неравенство (109), заключаем, что для $\widetilde{K}(t,\tau,\varepsilon)$ имеет место оценка

$$\|\widetilde{K}(t,\tau,\varepsilon)\| \leq M.$$

Отсюда и из очевидного соотношения $K(t,\tau,\varepsilon) = C\widetilde{K}(t,\tau,\varepsilon)C^{-1}$ получаем нужное неравенство для $K(t,\tau,\varepsilon)$.

Объединяя соотношения (104)–(107), приходим к выводу, что требуемое неравенство (99) выполняется на отрезке $-\sigma_0 \leq t \leq 1-\sigma_0$. Для распространения же его на оставшийся промежуток $1-\sigma_0 \leq t \leq T_0 - \varepsilon^\delta$ воспользуемся методом шагов. А именно разобьем указанный промежуток на отрезки $[1-\sigma_0+k, 2-\sigma_0+k]$, $k = 0,1,\ldots,k_0$, и $[2-\sigma_0+k_0, T_0-\varepsilon^\delta]$, где $k_0 = \lfloor T_0 - 2 + \sigma_0 - \varepsilon^\delta \rfloor$, $\lfloor\cdot\rfloor$ – целая часть. Заметим, далее, что из аналогичного (104) неравенства

$$\gamma(t,\varepsilon) \leq \gamma_{k+1}(\varepsilon) \max_{1-\sigma_0+k\leq\tau\leq t\leq 2-\sigma_0+k} \|K(t,\tau,\varepsilon)\|, \quad 1-\sigma_0+k \leq t \leq 2-\sigma_0+k,$$

где

$$\gamma_{k+1}(\varepsilon) = \gamma(1-\sigma_0+k,\varepsilon) + \int\limits_{1-\sigma_0+k}^{2-\sigma_0+k} \|B(s,\varepsilon)\|\gamma(s-1,\varepsilon)\,ds + \int\limits_{1-\sigma_0+k}^{2-\sigma_0+k} \|F(s,\varepsilon)\|\,ds,$$

и уже установленной оценки (99) на $(k-1)$-м отрезке вытекает нужная оценка на k-м отрезке изменения t.

Полученная информация позволяет уже достаточно просто завершить доказательство теоремы 1. Действительно, при $T_\varphi - 1 - \sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0$ в силу неравенства $T_\varphi - 1 - \sigma_0 > \alpha + 1 + \varepsilon^\delta$ (вытекающего из условий (2) и (8)) для $x(t,z,\varepsilon)$, $y(t,z,\varepsilon)$ справедливы асимптотические представления (60), в которых функции $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ задаются формулами (95). Отсюда и из оценки (99) очевидным образом имеем

$$\max_{-1-\sigma_0\leq t\leq-\sigma_0} |g_1(t+T_\varphi,\varepsilon)| \leq M_1\varepsilon\|g_0\|_{\mathcal{F}},$$

$$\max_{-1-\sigma_0\leq t\leq-\sigma_0} \left| g_2(t+T_\varphi,\varepsilon) - g_{2,0}(-\sigma_0)\frac{\partial y_0}{\partial z}(t+T_0,z)\Big|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)} \right| \leq M_2\varepsilon^\delta\|g_0\|_{\mathcal{F}}, \tag{110}$$

где постоянные $M_1, M_2 > 0$ не зависят от ε, φ, g_0. И наконец, применяя оценки (110) непосредственно к оператору $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$ (см. (18)), убеждаемся в справедливости второго предельного равенства из (22). Теорема 1 полностью доказана.

В заключение обсудим вопрос о справедливости аналогов теорем 1, 2 при отказе от второго условия из (2). Для формулировки соответствующего результата, считая выполненными требования

$$\sigma_0 < (\beta+1)/(\alpha-\beta-1), \quad q_1 > -\min_{-1-\sigma_0\leq t\leq-\sigma_0} x_0(t), \quad 0 < q_2 < -\max_{-1-\sigma_0\leq t\leq-\sigma_0} x_0(t),$$

на множестве S зададим оператор

$$\widetilde{\Pi}_\varepsilon(\varphi) = (x(t+T_z,z,\varepsilon), y(t+T_z,z,\varepsilon))|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)}, \quad -1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0, \tag{111}$$

где T_z – второй положительный корень уравнения $x(t-\sigma_0,z,\varepsilon) = -\sigma_0(\alpha-\beta-1)$.

Оператор (111), несмотря на его зависимость от ε, является некоторым аналогом предельного оператора (13). Проведенный выше асимптотический анализ и, в частности, соотношения (25), (99) позволяют заключить, что

$$\lim_{\varepsilon\to0}\sup_{\varphi\in S}\|\Pi_\varepsilon(\varphi) - \widetilde{\Pi}_\varepsilon(\varphi)\|_{\mathcal{F}} = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to0}\sup_{\varphi\in S}\|\partial_\varphi\Pi_\varepsilon(\varphi) - \partial_\varphi\widetilde{\Pi}_\varepsilon(\varphi)\|_{\mathcal{F}_0\to\mathcal{F}_0} = 0. \tag{112}$$

Подчеркнем, что равенства (112) выполняются вне зависимости от знака величины $2(1+\beta)-\alpha$. Однако при $2(1+\beta)-\alpha > 0$ оператор $\widetilde{\Pi}_\varepsilon(\varphi)$ в свою очередь сходится при $\varepsilon \to 0$ к $\Pi_0(\varphi)$ (в C^1-метрике), и мы можем перейти к более простым соотношениям (22).

В случае $2(1+\beta)-\alpha \leq 0$ такой переход уже невозможен, поскольку становится разрывной на отрезке $-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$ компонента $y_0(t+T_0, z)|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)}$ оператора $\Pi_0(\varphi)$. Но тем не менее аналог теоремы 2 здесь остается в силе. Причина этого в том, что "предельный" оператор $\widetilde{\Pi}_\varepsilon(\varphi)$ является надстройкой над соответствующим одномерным отображением

$$z \to y(t, z, \varepsilon)|_{t=T_z-\sigma_0}, \quad z = \varphi_2(-\sigma_0).$$

Последнее же при $\varepsilon \to 0$ стремится (в C^1-метрике на любом конечном отрезке изменения z) к введенному выше отображению (23).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кащенко С.А., Майоров В.В.* Модели волновой памяти. М., 2009.
2. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Релаксационные автоколебания в нейронных системах. I // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 7. С. 919–932.

Ярославский государственный университет
им. П.Г. Демидова,
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
07.12.2010 г.