Самсонов С.О., Ивановский Л.И. Название статьи. Для цепочки сингулярно возмущенных осцилляторов с запаздыванием:

$$\dot{u_j} = d(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \lambda[-1 + \alpha f(u_j(t-1)) - \beta g(u_j)]u_j, \quad j = \overline{1,3}, \tag{1}$$

где $u_4 = u_3, u_0 = u_1$, $\lambda > 0$ - большой параметр, а параметры $\alpha, \beta > 0$, имеющие порядок единицы, удовлетворяют неравенству $\alpha > 1 + \beta$, в статье [1] выполнено сведение к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием:

$$\begin{aligned} \dot{y_1} &= d[\exp y_2 + \exp(-y_1) - \exp y_1 - \exp(-y_0)], \\ \dot{y_2} &= d[\exp y_3 + \exp(-y_2) - \exp y_2 - \exp(-y_1)], \end{aligned} \tag{2}$$

$$y_0 = y_3 = 0, \quad y_j(+0) = \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} y_j(-0), \quad y_j(1+0) = y_j(1-0) - \frac{\alpha}{\alpha - 1} y_j(+0),$$

$$y_j(\alpha + 0) = (1+\beta) y_j(\alpha - 0), \quad y_j(\alpha + 1 + 0) = y_j(\alpha + 1 - 0) - \frac{\alpha}{1+\beta} y_j(\alpha + 0), \quad j = 1, 2.$$

Переменные $y_1(t)$ и $y_2(t)$ представляют собой разности фаз между сингулярно возмущенными осцилляторами системы (1). Будем изучать следующее отображение:

$$\Pi(z) : \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y_1(T^*) \\ y_2(T^*) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $(y_1(T^*), y_2(T^*))^T$ - решения задачи (2) с импульсным воздействием и начальными условиями $y_1(0) = z_1, y_2(0) = z_2$. Величина $T^* = \alpha + 1 + (\beta + 1)/(\alpha - \beta - 1)$ определяет главную часть периода одиночного релаксационного осциллятора системы (1).

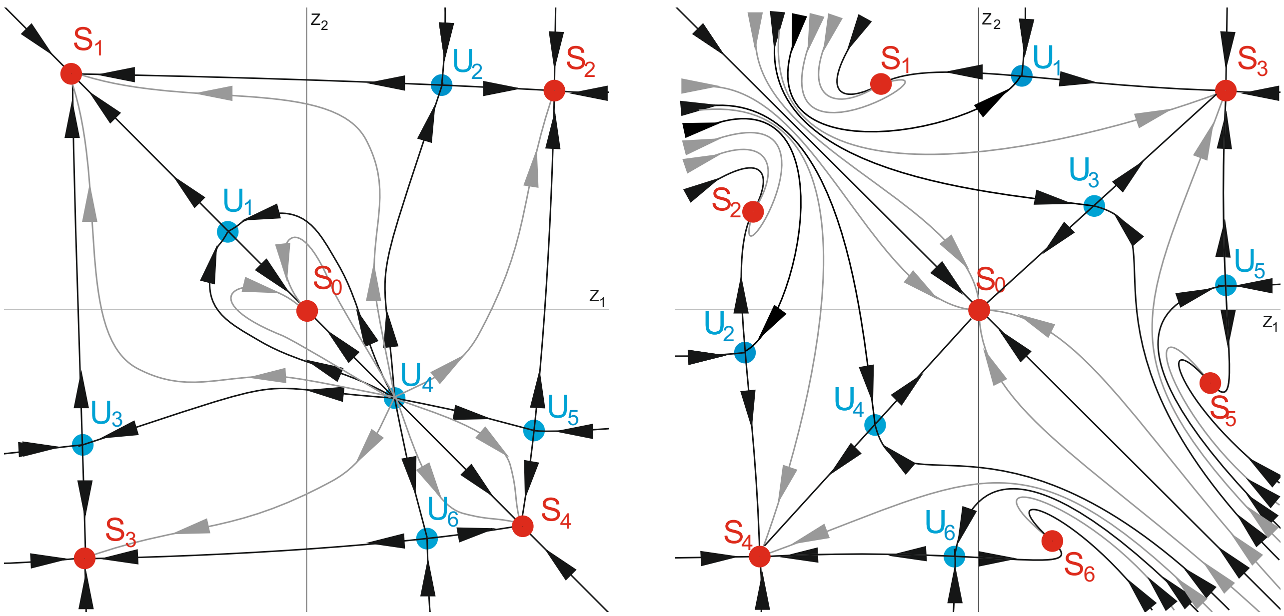
В [1] доказано, что экспоненциально устойчивым неподвижным точкам отображения (3) соответствуют орбитально асимптотически устойчивые циклы системы (2) и в свою очередь системы (1).

Анализ отображения (3) позволяет показать, что при достаточно малых значениях параметра d, оно имеет как минимум три устойчивые неподвижные точки. Заметим, что нулевое состояние равновесия устойчиво при любых значениях d. Этому состоянию равновесия соответствует однородный (синхронный) цикл системы (1).

Наша задача состоит в определении таких α и β, при которых, отображение (3) имеет большее число устойчивых неподвижных точек.

При достаточно малом значении d численнно легко обнаружить состояния равновесия, предсказанные аналитически. Для обнаружения других состояний равновесия зафиксируем величины α и β и будем менять значения параметра d. Разберем два примера, в первом из которых при подходящем значении d наблюдается пять, а во втором семь устойчивых неподвижных точек.

На рис.1 представлены схематические изображения фазовых портретов отображения в зависимости от различных параметров. Буквами S_j будем обозначать устойчивые, а U_j - неустойчивые неподвижные точки.



а) $d = 0{,}01, \alpha = 5, \beta = 0{,}4$. б) $d = 0{,}057, \alpha = 5, \beta = 3$.

Рис. 1: Фазовые портреты отображения

Численный анализ отображения (3) позволил получить в каждом из случаев следующую последовательность бифуркаций:

1) Случай $\alpha = 5, \beta = 0{,}4$:

1. При $d < d_1$, $d_1 \approx 0{,}019$ отображение имеет 5 устойчивых неподвижных точек, 6 - неустойчивых.
2. При $d = d_1$, к самосимметричной точке S_4 подходят две неустойчивые точки U_6 и U_5, и отбирают у нее устойчивость, образуя седло U_7.
3. При $d_1 < d < d_2$, $d_2 \approx 0{,}031$, отображение имеет 4 устойчивые неподвижные точки, 5 - неустойчивых.
4. При $d = d_2$, точки U_4 и U_7, сливаясь, пропадают.
5. При $d_2 < d < d_3$, $d_3 \approx 0{,}059$, отображение имеет 4 устойчивые неподвижные точки, 3 - неустойчивые.
6. При $d = d_3$, точки S_1 и U_1, сливаясь, пропадают.
7. При $d_3 < d < d_4$, $d_4 \approx 0{,}127$, отображение имеет 3 устойчивые неподвижные точки, 2 - неустойчивые.
8. При $d = d_4$, точки U_2 и U_3 подходят к S_2 и S_3 соответственно и с ними исчезают.
9. При $d > d_4$, отображение имеет одно нулевое устойчивое состояние.

2) Случай $\alpha = 5, \beta = 3$:

1. $d < d_5$, $d_1 \approx 0{,}045$ отображение имеет 5 устойчивых неподвижных точек.

2. При $d = d_5, d_5 \approx 0{,}045$ пары точек S_1 и S_2, S_5 и S_6 образуются в результате раздвоения соответствующих самосимметричных устойчивых точек на побочной диагонали во II и IV координатных четвертях.
3. При $d_5 < d < d_6, d_6 \approx 0{,}058$ отображение имеет 7 устойчивых неподвижных точек, 6 - неустойчивых.
4. При $d = d_6$, точки S_1 и U_1, S_2 и U_2, S_5 и U_5, S_6 и U_6, попарно сливаясь, пропадают.
5. При $d > d_6$, отображение имеет одно нулевое устойчивое состояние.

Список литературы.

[1] *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Релаксационные автоколебания в нейронных системах. III // Дифференциальные уравнения, 2012, т. 48, № 2, с. 155 – 170.