ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2012, том 48, № 2, с. 155–170

## ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.929

# РЕЛАКСАЦИОННЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ В НЕЙРОННЫХ СИСТЕМАХ. III

© 2012 г. С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов

Рассматривается математическая модель нейронной системы, представляющая собой цепочку из произвольного числа $m$, $m \geq 2$, диффузионно связанных сингулярно возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием и с условиями типа Неймана на концах. Изучаются вопросы существования, асимптотики и устойчивости релаксационных периодических решений у этой системы.

**1. Описание объекта исследования.** Математическая модель, которая будет исследоваться ниже, имеет вид [1]

$$\dot{u}_j = d(u_{j+1} - 2\,u_j + u_{j-1}) + \lambda[-1 + \alpha f(u_j(t-1)) - \beta g(u_j)]u_j, \quad j = \overline{1,m}, \tag{1}$$

где $m \geq 2$, $u_{m+1} = u_m$, $u_0 = u_1$. Здесь $u_j = u_j(t) > 0$ – мембранные потенциалы нейронов, $\lambda > 0$ – большой параметр, а параметры $\alpha, \beta > 0$, имеющие порядок единицы, удовлетворяют неравенству

$$\alpha > 1 + \beta. \tag{2}$$

Функции $f(u)$, $g(u)$, как и в [2], будем считать принадлежащими классу $C^2(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$, и обладающими свойствами

$$\begin{gathered} f(0) = g(0) = 1, \quad 0 < \beta g(u) + 1 < \alpha \quad \forall\, u \in \mathbb{R}_+; \\ f(u), g(u), uf'(u), ug'(u), u^2 f''(u), u^2 g''(u) = O(1/u) \quad \text{при} \quad u \to +\infty. \end{gathered} \tag{3}$$

При сформулированных условиях система (1) допускает так называемый однородный или синхронный цикл

$$u_1 \equiv u_2 \equiv \ldots \equiv u_m = u_*(t, \lambda), \tag{4}$$

где $u_*(t,\lambda)$ – устойчивое периодическое решение уравнения

$$\dot{u} = \lambda[-1 + \alpha f(u(t-1)) - \beta g(u)]u \tag{5}$$

периода

$$T_*(\lambda): \lim_{\lambda\to\infty} T_*(\lambda) = T_0, \quad T_0 = \alpha + 1 + (\beta+1)/(\alpha - \beta - 1). \tag{6}$$

Напомним, что существование и единственность у уравнения (5) требуемого цикла уже установлены нами в [3].

В дальнейшем мы покажем, что, во-первых, однородный цикл (4) системы (1) экспоненциально орбитально устойчив при любом фиксированном $d > 0$ и при всех $\lambda \gg 1$; во-вторых, при подходящем выборе параметров $\alpha$, $\beta$ и надлежащем уменьшении коэффициента диффузии $d$ наряду с устойчивым однородным циклом эта система имеет не менее $m$ экспоненциально орбитально устойчивых неоднородных периодических движений. Последние по аналогии с пространственно непрерывным случаем будем называть автоволновыми режимами.

**2. Базовая теорема.** Как и в случае $m = 2$, рассмотренном в [2], последующий анализ системы (1) будем проводить в новых переменных $x$, $y_1, \ldots, y_{m-1}$, где

$$u_1 = \exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad u_j = \exp\left(\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j-1} y_k\right), \quad j = \overline{2,m}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\lambda} \ll 1. \tag{7}$$

Подставляя выражения (7) в систему (1), приходим к релаксационной системе

$$\dot{x} = \varepsilon d(\exp y_1 - 1) + F(x, x(t-1), \varepsilon),$$

$$\dot{y}_j = d[\exp y_{j+1} + \exp(-y_j) - \exp y_j - \exp(-y_{j-1})] + \tag{8}$$

$$+ G_j(x, x(t-1), y_1, \ldots, y_j, y_1(t-1), \ldots, y_j(t-1), \varepsilon), \quad j = \overline{1, m-1},$$

где $y_0 = y_m = 0,$ а функции $F,$ $G_j$ имеют вид

$$F(x, u, \varepsilon) = -1 + \alpha f\biggl(\exp\Bigl(\frac{u}{\varepsilon}\Bigr)\biggr) - \beta g\biggl(\exp\Bigl(\frac{x}{\varepsilon}\Bigr)\biggr),$$

$$G_j(x, u, y_1, \ldots, y_j, v_1, \ldots, v_j, \varepsilon) =$$

$$= \frac{\alpha}{\varepsilon}\biggl[f\biggl(\exp\Bigl(\frac{u}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j} v_k\Bigr)\biggr) - f\biggl(\exp\Bigl(\frac{u}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j-1} v_k\Bigr)\biggr)\biggr] +$$

$$+ \frac{\beta}{\varepsilon}\biggl[g\biggl(\exp\Bigl(\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j-1} y_k\Bigr)\biggr) - g\biggl(\exp\Bigl(\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j} y_k\Bigr)\biggr)\biggr], \quad j = \overline{1, m-1}.$$

Зафиксируем постоянную $\sigma_0,$ подчиненную требованиям $0 < \sigma_0 < \min((\beta+1)/(\alpha-\beta-1), 1),$ и на отрезке $-\sigma_0 \le t \le T_0 - \sigma_0,$ где $T_0$ – величина из (6), обозначим через $y_1^0(t, z), \ldots, y_{m-1}^0(t, z),$ $z = (z_1, \ldots, z_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1},$ компоненты решения импульсной системы

$$\dot{y}_j = d[\exp y_{j+1} + \exp(-y_j) - \exp y_j - \exp(-y_{j-1})],$$

$$y_j(+0) = \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1}\, y_j(-0), \quad y_j(1+0) = y_j(1-0) - \frac{\alpha}{\alpha - 1}\, y_j(+0),$$

$$y_j(\alpha+0) = (1+\beta) y_j(\alpha-0), \quad y_j(\alpha+1+0) = y_j(\alpha+1-0) - \frac{\alpha}{1+\beta}\, y_j(\alpha+0), \tag{9}$$

$$j = \overline{1, m-1}, \quad y_0 = y_m = 0,$$

дополненной начальным условием

$$(y_1, \ldots, y_{m-1})|_{t=-\sigma_0} = (z_1, \ldots, z_{m-1}). \tag{10}$$

Далее, рассмотрим отображение

$$z \to \Phi(z) \overset{\text{def}}{=} (y_1^0(t, z), \ldots, y_{m-1}^0(t, z))|_{t=T_0-\sigma_0}, \tag{11}$$

действующее из $\mathbb{R}^{m-1}$ в $\mathbb{R}^{m-1}$. Справедлива

**Теорема 1.** *Любой неподвижной точке $z = z_*$ отображения (11), экспоненциально устойчивой или дихотомичной, в системе (8) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ соответствует релаксационный цикл $(x(t,\varepsilon), y_1(t,\varepsilon), \ldots, y_{m-1}(t,\varepsilon)),$ $x(-\sigma_0, \varepsilon) \equiv -\sigma_0(\alpha-\beta-1)$ периода $T(\varepsilon)$ с теми же свойствами устойчивости. Кроме того, справедливы предельные соотношения*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} T(\varepsilon) = T_0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \max_{-\sigma_0 \le t \le T(\varepsilon)-\sigma_0} |x(t,\varepsilon) - x_0(t)| = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \max_{t\in\Sigma(\varepsilon)} |y_j(t,\varepsilon) - y_j^0(t, z_*)| = 0, \quad j = \overline{1, m-1},$$

*где $T_0$ -периодическая функция $x_0(t)$ задана равенствами*

$$x_0(t)=\begin{cases}(\alpha-1)t & \textit{при}\quad 0\le t\le 1,\\ \alpha-t & \textit{при}\quad 1\le t\le\alpha,\\ -(1+\beta)(t-\alpha) & \textit{при}\quad \alpha\le t\le\alpha+1,\\ (\alpha-\beta-1)(t-\alpha-1)-1-\beta & \textit{при}\quad \alpha+1\le t\le T_0,\end{cases}\qquad x_0(t+T_0)\equiv x_0(t),$$

*а множество $\Sigma(\varepsilon)$ представляет собой отрезок $[-\sigma_0,T(\varepsilon)-\sigma_0]$ с выброшенными интервалами $(-\varepsilon^\delta,\varepsilon^\delta)$, $(1-\varepsilon^\delta,1+\varepsilon^\delta)$, $(\alpha-\varepsilon^\delta,\alpha+\varepsilon^\delta)$, $(\alpha+1-\varepsilon^\delta,\alpha+1+\varepsilon^\delta)$, $\delta=\mathrm{const}\in(0,1)$.*

Доказательство данной теоремы опустим, поскольку в случае $m=2$ оно подробно изложено в работе [2]. Единственный новый момент, появляющийся при $m>2$ и нуждающийся в дополнительном анализе, связан с корректностью определения отображения (11).

Действительно, на промежутках $-\sigma_0\le t<0$, $0<t<1$, $1<t<\alpha$, $\alpha<t<\alpha+1$ и $\alpha+1<t\le T_0-\sigma_0$ решение задачи Коши (9), (10) удовлетворяет нелинейной системе

$$\dot y_j=d[\exp y_{j+1}+\exp(-y_j)-\exp y_j-\exp(-y_{j-1})],\quad j=\overline{1,m-1},\quad y_0=y_m=0. \tag{12}$$

Таким образом, возникает вопрос о продолжимости решений последней на указанные промежутки времени, длины которых отнюдь не малы.

При $m=2$ поставленный вопрос тривиален, так как в этом случае система (12) переходит в скалярное уравнение $\dot y=-2d\,\mathrm{sh}\,y$. В случае же $m>2$ ответ на него дает

**Лемма 1.** *Решение $(y_1(t),\ldots,y_{m-1}(t))$ системы (12) с произвольным начальным условием $(y_1,\ldots,y_{m-1})|_{t=0}=(\overline{y}_1,\ldots,\overline{y}_{m-1})\in\mathbb{R}^{m-1}$ определено на полуоси $t\ge0$ и стремится к нулю при $t\to+\infty$.*

Для доказательства достаточно заметить, что любое решение системы (12) записывается в виде

$$y_j(t)=\ln(\xi_{j+1}(t)/\xi_j(t)),\quad j=\overline{1,m-1}, \tag{13}$$

где $(\xi_1(t),\ldots,\xi_m(t))$ – произвольное решение линейной системы

$$\dot\xi_j=d(\xi_{j+1}-2\xi_j+\xi_{j-1}),\quad j=\overline{1,m},\quad \xi_0=\xi_1,\quad \xi_{m+1}=\xi_m, \tag{14}$$

принадлежащее инвариантному конусу $K=\{(\xi_1,\ldots,\xi_m):\ \xi_j>0,\ j=\overline{1,m}\}$. Учитывая, далее, в равенствах (13) известные свойства системы (14), касающиеся поведения ее решений при $t\to+\infty$, получаем требуемый результат.

**3. Анализ предельного отображения.** В первую очередь запишем правую часть отображения (11) в инвариантной форме, не зависящей от выбора параметра $\sigma_0$. Для этого обозначим через $P^t(z)$, $t\in\mathbb{R}$, $z\in\mathbb{R}^{m-1}$, $P^0(z)=z$, оператор сдвига по траекториям системы (12) и положим $\overline{z}=\Phi(z)$. Тогда отображение (11) может быть представлено в виде

$$\overline{z}=(P^{T_0-\alpha-1-\sigma_0}\circ P_4\circ P^1\circ P_3\circ P^{\alpha-1}\circ P_2\circ P^1\circ P_1\circ P^{\sigma_0})(z), \tag{15}$$

где через $P_j$, $j=\overline{1,4}$, обозначены операторы пересчета начальных условий в точках $t=0$, $t=1$, $t=\alpha$ и $t=\alpha+1$ соответственно, действующие по правилам

$$P_1(z)=\frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-1}\,z,\quad P_2(z)=z-\frac{\alpha}{\alpha-1}\,P^{-1}(z),\quad P_3(z)=(\beta+1)z,$$
$$P_4(z)=z-\frac{\alpha}{\beta+1}\,P^{-1}(z). \tag{16}$$

Далее, применим к левой и правой частям получившегося равенства (15) оператор $P^{\sigma_0}$ и выполним замену $P^{\sigma_0}(z)\to z$. В итоге с учетом очевидного соотношения $P^{T_0-\alpha-1-\sigma_0}=$ $=P^{-\sigma_0}\circ P^{T_0-\alpha-1}$ интересующее нас отображение принимает требуемую инвариантную форму

$$z\to\Phi_0(z)\overset{\mathrm{def}}{=}(P^{T_0-\alpha-1}\circ P_4\circ P^1\circ P_3\circ P^{\alpha-1}\circ P_2\circ P^1\circ P_1)(z). \tag{17}$$

Поиск аттракторов отображения (17) начнем с анализа свойств устойчивости его неподвижной точки $z = 0$.

**Лемма 2.** *Нулевая неподвижная точка отображения (17) экспоненциально устойчива при любых значениях параметров* $\alpha, \beta > 0$, *удовлетворяющих условию (2), и при любом* $d > 0$.

**Доказательство.** Несложно показать, что отвечающая точке $z = 0$ матрица Якоби $\Phi_0'(0)$ есть оператор сдвига по решениям импульсной системы

$$\begin{gathered}\dot{h}_j = d(h_{j+1} - 2h_j + h_{j-1}),\\ h_j(+0) = \frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-1}\,h_j(-0), \quad h_j(1+0) = h_j(1-0) - \frac{\alpha}{\alpha-1}\,h_j(+0),\\ h_j(\alpha+0) = (1+\beta)h_j(\alpha-0), \quad h_j(\alpha+1+0) = h_j(\alpha+1-0) - \frac{\alpha}{1+\beta}\,h_j(\alpha+0),\\ j = \overline{1, m-1}, \quad h_0 = h_m = 0,\end{gathered} \tag{18}$$

за время от $t = -0$ до $t = T_0 - 0$. Далее, применим к системе (18) метод Фурье по собственным векторам разностного оператора Лапласа, точнее говоря, положим

$$h_j = \sum_{k=1}^{m-1} g_k(t) \sin\left(\frac{\pi k}{m}\,j\right), \quad j = \overline{1, m-1}. \tag{19}$$

В результате убеждаемся в том, что компоненты $g_k(t)$, $k = \overline{1, m-1}$, из равенства (19) являются решениями импульсной системы

$$\begin{gathered}\dot{g} = -sg, \quad g(+0) = \frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-1}\,g(-0), \quad g(1+0) = g(1-0) - \frac{\alpha}{\alpha-1}\,g(+0),\\ g(\alpha+0) = (1+\beta)g(\alpha-0), \quad g(\alpha+1+0) = g(\alpha+1-0) - \frac{\alpha}{1+\beta}\,g(\alpha+0)\end{gathered} \tag{20}$$

при $0 \le t \le T_0$, $s = s_k$, где

$$s_k = 4d\sin^2\left(\frac{\pi k}{2m}\right), \quad k = \overline{1, m-1}. \tag{21}$$

На завершающем этапе дополним систему (20) начальным условием $g|_{t=-0} = 1$, проинтегрируем получившуюся задачу Коши и положим $\mu_k = g|_{t=T_0-0,\ s=s_k}$, где $s_k$ – дискретные значения (21) параметра $s$. В итоге получаем набор чисел $\mu_k$, $k = \overline{1, m-1}$, который, как нетрудно увидеть, образует спектр интересующей нас матрицы $\Phi_0'(0)$. Более того, справедливы соотношения

$$\mu_k = \mu(s)|_{s=s_k}, \quad k = \overline{1, m-1}, \quad \mu(s) = \frac{1}{\alpha-\beta-1}(\alpha\exp s - \alpha + 1)(\alpha\exp s - \beta - 1)\exp(-sT_0).$$

Далее, несложная проверка показывает, что $\mu(0) = 1$, $\mu'(s) < 0 \ \forall s > 0$, $\mu(s) \to 0$ при $s \to +\infty$. Отсюда очевидным образом следуют включения $\mu_k \in (0, 1)$, $k = \overline{1, m-1}$. Лемма 2 доказана.

В системе (8) неподвижной точке $z = 0$ отвечает цикл, являющийся аналогом однородного цикла (4) и имеющий компоненты $x(t, \varepsilon) = (1/\lambda)\ln u_*(t, \lambda)|_{\lambda=1/\varepsilon}$, $y_j(t, \varepsilon) \equiv 0$, $j = \overline{1, m-1}$, где $u_*(t, \lambda)$ – функция из (4). Лемма 2 и теорема 1 приводят к выводу, что этот цикл экспоненциально орбитально устойчив при любом фиксированном значении $d > 0$ и при всех достаточно малых $\varepsilon$.

Отыскание других устойчивых неподвижных точек отображения (17) будем проводить в предположении малости параметра $d$, что позволяет асимптотически проинтегрировать систему (9) при $0 \le t \le T_0$ и при

$$(\alpha, \beta) \in \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2, \tag{22}$$

где

$$\begin{gathered} \mathcal{U}_1 = \{(\alpha, \beta): \ \alpha > (\beta + 1)(\beta + 2), \ \beta > 0\}, \\ \mathcal{U}_2 = \{(\alpha, \beta): \ 1 < \alpha < 2, \ 0 < \beta < (\alpha - 1)(2 - \alpha)\}. \end{gathered} \tag{23}$$

На этом пути приходим к следующему утверждению.

**Теорема 2.** *При любых фиксированных значениях* $\alpha$, $\beta$, *удовлетворяющих включению (22), и при всех достаточно малых* $d > 0$ *отображение (17) имеет* $m$ *экспоненциально устойчивых неподвижных точек*

$$O_{k_0}(d) = (z_{1,k_0}(d), z_{2,k_0}(d), \ldots, z_{m-1,k_0}(d)), \quad k_0 = \overline{0, m-1}, \tag{24}$$

*компоненты которых при* $d \to 0$ *в случае* $(\alpha, \beta) \in \mathcal{U}_1$ *допускают асимптотику*

$$\begin{gathered} z_{j,k_0} = \ln \frac{1}{d} - \ln \frac{\beta + 1}{\alpha - \beta - 1} + \ln(k_0 + 1 - j) + o(1), \quad j = \overline{1, k_0}; \\ z_{j,k_0} = -\ln \frac{1}{d} + \ln \frac{\beta + 1}{\alpha - \beta - 1} - \ln(j - k_0) + o(1), \quad j = \overline{k_0 + 1, m - 1}, \end{gathered} \tag{25}$$

*а в случае* $(\alpha, \beta) \in \mathcal{U}_2$ *– асимптотику*

$$\begin{gathered} z_{j,k_0} = -(\alpha - 1) \ln \frac{1}{d} - (\alpha - 1) \ln(k_0 + 1 - j) + \alpha \ln(\alpha - 1) + o(1), \quad j = \overline{1, k_0}; \\ z_{j,k_0} = (\alpha - 1) \ln \frac{1}{d} + (\alpha - 1) \ln(j - k_0) - \alpha \ln(\alpha - 1) + o(1), \quad j = \overline{k_0 + 1, m - 1}. \end{gathered} \tag{26}$$

Доказательству этой теоремы посвятим следующий пункт. Здесь же отметим, что в совокупности с теоремой 1 она гарантирует наличие у исходной системы (1) (при условии (22) и при соответствующем уменьшении параметра $d$) не менее $m$ устойчивых автоволновых периодических режимов, сосуществующих с устойчивым однородным циклом (4).

**4. Обоснование теоремы 2.** Предположим сначала, что $(\alpha, \beta) \in \mathcal{U}_1$. Выберем затем некоторое целое $k_0$, $0 \le k_0 \le m - 1$, и в соответствии с ожидаемыми равенствами (25) дополним систему (9) начальными условиями

$$y_j|_{t=-0} = \ln \frac{1}{d} + v_j, \quad j = \overline{1, k_0}; \quad y_j|_{t=-0} = -\ln \frac{1}{d} + v_j, \quad j = \overline{k_0 + 1, m - 1}, \tag{27}$$

где $v_j = \text{const} \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, m-1}$. Далее, зафиксируем произвольно компактное множество $\Omega \subset \mathbb{R}^{m-1}$ и обозначим через

$$(y_1(t, v, d), \ldots, y_{m-1}(t, v, d))^{\text{т}}, \quad 0 \le t \le T_0, \quad v = (v_1, \ldots, v_{m-1})^{\text{т}} \in \Omega, \tag{28}$$

решение получившейся задачи Коши (9), (27) (здесь и ниже операция $(\cdot, \ldots, \cdot)^{\text{т}}$ означает транспонирование).

Согласно формулам (27) и правилам пересчета начальных условий в точке $t = 0$ (см. (9)), на отрезке $0 \le t \le 1$ после замен

$$\begin{gathered} y_j = \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} \ln \frac{1}{d} + h_j, \quad j = \overline{1, k_0}; \quad y_j = -\frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} \ln \frac{1}{d} + h_j, \\ j = \overline{k_0 + 1, m - 1}; \quad \tau = d^{-\delta_0} t, \quad \delta_0 = \beta / (\alpha - \beta - 1) \end{gathered} \tag{29}$$

приходим к задаче Коши

$$\frac{dh}{d\tau} = H_1(h) + d^{2+2\delta_0} H_2(h) + d^{1+\delta_0} H_3, \quad h|_{\tau=0} = \frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-1}\, v, \tag{30}$$

где $h = (h_1, \ldots, h_{m-1})^{\text{т}}$, $H_k = (H_{1,k}, \ldots, H_{m-1,k})^{\text{т}}$, $k = 1, 2, 3$, а компоненты $H_{j,k}$ задаются равенствами

$$\begin{gathered} H_{j,1} = \exp h_{j+1} - \exp h_j, \quad j = \overline{1, k_0 - 1}; \quad H_{k_0,1} = -\exp h_{k_0}, \quad H_{k_0+1,1} = \exp(-h_{k_0+1}); \\ H_{j,1} = \exp(-h_j) - \exp(-h_{j-1}), \quad j = \overline{k_0 + 2, m - 1}; \end{gathered} \tag{31}$$

$$\begin{gathered} H_{1,2} = \exp(-h_1), \quad H_{j,2} = \exp(-h_j) - \exp(-h_{j-1}), \quad j = \overline{2, k_0 - 1}; \\ H_{k_0,2} = \exp h_{k_0+1} + \exp(-h_{k_0}) - \exp(-h_{k_0-1}), \\ H_{k_0+1,2} = \exp h_{k_0+2} - \exp h_{k_0+1} - \exp(-h_{k_0}), \\ H_{j,2} = \exp h_{j+1} - \exp h_j, \quad j = \overline{k_0 + 2, m - 2}; \quad H_{m-1,2} = -\exp h_{m-1}; \end{gathered} \tag{32}$$

$$H_{1,3} = -1, \quad H_{j,3} = 0, \quad j = \overline{2, m-2}; \quad H_{m-1,3} = 1. \tag{33}$$

Добавим еще, что переменная $\tau$ в системе (30) изменяется на асимптотически большом отрезке $J = [0, d^{-\delta_0}]$.

Для выявления асимптотических свойств компонент $h_j(\tau, v, d)$, $j = \overline{1, m-1}$, решения задачи (30) положим в ней $d = 0$. В результате придем к задаче Коши

$$\begin{gathered} \frac{dh_j}{d\tau} = \exp h_{j+1} - \exp h_j, \quad j = \overline{1, k_0 - 1}; \quad \frac{dh_{k_0}}{d\tau} = -\exp h_{k_0}; \\ \frac{dh_{k_0+1}}{d\tau} = \exp(-h_{k_0+1}), \quad \frac{dh_j}{d\tau} = \exp(-h_j) - \exp(-h_{j-1}), \quad j = \overline{k_0 + 2, m - 1}; \end{gathered} \tag{34}$$

$$h_j|_{\tau=0} = \widetilde{v}_j, \quad j = \overline{1, m-1}, \tag{35}$$

где $\widetilde{v}_j = \dfrac{\alpha-1}{\alpha-\beta-1}\, v_j$, $j = \overline{1, m-1}$. Как показывает несложная проверка, для компонент $h_j^0(\tau, v)$, $j = \overline{1, m-1}$, решения получившейся задачи (34), (35) выполняются равенства

$$\begin{gathered} \sum_{r=1}^{s} h_{k_0+r}^0(\tau, v) = \ln\biggl\{\frac{\tau^s}{s!} + \sum_{\ell=0}^{s-1} \frac{\tau^\ell}{\ell!} \exp\biggl(\sum_{j=1}^{s-\ell} \widetilde{v}_{k_0+j}\biggr)\biggr\}, \quad s = \overline{1, m-1-k_0}; \\ \sum_{r=0}^{s-1} h_{k_0-r}^0(\tau, v) = -\ln\biggl\{\frac{\tau^s}{s!} + \sum_{\ell=0}^{s-1} \frac{\tau^\ell}{\ell!} \exp\biggl(-\sum_{j=1}^{s-\ell} \widetilde{v}_{k_0-j+1}\biggr)\biggr\}, \quad s = \overline{1, k_0}. \end{gathered} \tag{36}$$

Строгий смысл описанным выше действиям придает

**Лемма 3.** *Равномерно по $\tau \in J$, $v \in \Omega$ имеют место асимптотические представления*

$$h_j(\tau, v, d) = h_j^0(\tau, v) + O(d), \quad \frac{\partial h_j}{\partial v_s}(\tau, v, d) = \frac{\partial h_j^0}{\partial v_s}(\tau, v) + O(d), \quad j, s = \overline{1, m-1}. \tag{37}$$

**Доказательство.** Выполним в системе (30) замену $h = h^0(\tau, v) + \widetilde{h}$, где $h^0(\tau, v) = (h_1^0(\tau, v), \ldots, h_{m-1}^0(\tau, v))^{\text{т}}$. В результате приходим к задаче Коши для вектор-функции $\widetilde{h} = (\widetilde{h}_1, \ldots, \widetilde{h}_{m-1})^{\text{т}}$

$$\frac{d\widetilde{h}}{d\tau} = A(\tau)\widetilde{h} + \Psi_0(\tau, \widetilde{h}) + d^{2+2\delta_0} \Psi_1(\tau, \widetilde{h}) + d^{1+\delta_0} \Psi_2, \quad \widetilde{h}|_{\tau=0} = 0, \tag{38}$$

где

$$A(\tau)=H_1'(h)|_{h=h^0(\tau,v)},\quad \Psi_0(\tau,\widetilde{h})=H_1(h^0(\tau,v)+\widetilde{h})-H_1(h^0(\tau,v))-A(\tau)\widetilde{h},$$
$$\Psi_1(\tau,\widetilde{h})=H_2(h^0(\tau,v)+\widetilde{h}),\quad \Psi_2=H_3, \tag{39}$$

а вектор-функции $H_1$, $H_2$, $H_3$ заданы равенствами (31)–(33).

Обратим внимание на то, что задача (38) сингулярна в том смысле, что ее приходится рассматривать на асимптотически большом промежутке времени $\tau\in J$, т.е. необходимо знать поведение при $\tau\to+\infty$ матрицы $A(\tau)$ и вектор-функций $\Psi_0$, $\Psi_1$. При решении этой задачи нам потребуются вытекающие из (36) асимптотические представления (равномерные по $v\in\Omega$)

$$h_j^0(\tau,v)=-\ln\tau+\ln(k_0+1-j)+O(1/\tau),\quad \tau\to+\infty,\quad j=\overline{1,k_0};$$
$$h_j^0(\tau,v)=\ln\tau-\ln(j-k_0)+O(1/\tau),\quad \tau\to+\infty,\quad j=\overline{k_0+1,m-1}. \tag{40}$$

Действительно, учитывая соотношения (40) в явных формулах (31)–(33) и (39), приходим к выводу о существовании таких непрерывных по $r\in\mathbb{R}_+$ функций $M_s=M_s(r)>0$, $s=1,2,3$, что для любых векторов $\widetilde{h}^{(1)},\widetilde{h}^{(2)},\widetilde{h}\in\mathbb{R}^{m-1}$, удовлетворяющих неравенствам $\|\widetilde{h}^{(1)}\|,\|\widetilde{h}^{(2)}\|,\|\widetilde{h}\|\le r$ (здесь и далее $\|\cdot\|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^{m-1}$ или индуцированная ей матричная норма), и для любого $\tau\in\mathbb{R}_+$ справедливы оценки

$$\|\Psi_0(\tau,\widetilde{h}^{(1)})-\Psi_0(\tau,\widetilde{h}^{(2)})\|\le\frac{rM_1}{\tau+1}\|\widetilde{h}^{(1)}-\widetilde{h}^{(2)}\|,$$
$$\|\Psi_1(\tau,\widetilde{h}^{(1)})-\Psi_1(\tau,\widetilde{h}^{(2)})\|\le(\tau+1)M_2\|\widetilde{h}^{(1)}-\widetilde{h}^{(2)}\|,\quad \|\Psi_1(\tau,\widetilde{h})\|\le(\tau+1)M_3. \tag{41}$$

Обратимся теперь к линейной системе $d\widetilde{h}/d\tau=A(\tau)\widetilde{h}$ и обозначим через $K(\tau,s)$, $K(s,s)=I$, $\tau\ge s\ge0$, ее матрицу Коши. Из асимптотических равенств (40) и из явных формул (31), (39) вытекает, что

$$A(\tau)=\frac{A_0}{\tau+1}+\Delta(\tau),\quad \|\Delta(\tau)\|\le\frac{M}{\tau^2+1},\quad \tau\in\mathbb{R}_+, \tag{42}$$

где $A_0=\mathrm{diag}\{A_0^{(1)},A_0^{(2)}\}$, $A_0^{(1)}=(a_{i,j}^{(1)})_{i,j=\overline{1,k_0}}$, $A_0^{(2)}=(a_{i,j}^{(2)})_{i,j=\overline{1,m-1-k_0}}$,

$$a_{i,j}^{(1)}=0\quad\text{при}\quad j<i\quad\text{и}\quad j>i+2,\quad a_{i,i}^{(1)}=-(k_0+1-i),\quad a_{i,i+1}^{(1)}=k_0-i;$$
$$a_{i,j}^{(2)}=0\quad\text{при}\quad j>i\quad\text{и}\quad j<i-2,\quad a_{i,i}^{(2)}=-i,\quad a_{i,i-1}^{(2)}=i-1, \tag{43}$$

а буквами $M$, $M_1$ и т.д. здесь и ниже обозначаем некоторые универсальные (не зависящие от $\tau$ и $v$) положительные постоянные, точные значения которых несущественны.

Используя представление (42), для $K(\tau,s)$ получаем интегральное уравнение

$$K(\tau,s)=\exp\biggl(A_0\ln\frac{\tau+1}{s+1}\biggr)+\int\limits_s^\tau\exp\biggl(A_0\ln\frac{\tau+1}{\sigma+1}\biggr)\Delta(\sigma)K(\sigma,s)\,d\sigma. \tag{44}$$

Учитывая, далее, в (44) неравенство для $\Delta(\tau)$ из (42) и вытекающую из (43) оценку

$$\biggl\|\exp\biggl(A_0\ln\frac{\tau+1}{s+1}\biggr)\biggr\|\le M\frac{s+1}{\tau+1},\quad \tau\ge s\ge0,$$

приходим к интегральному неравенству для функции $v(\tau,s)=\|K(\tau,s)\|(\tau+1)/(s+1)$ вида

$$v(\tau,s)\le M_1+M_2\int\limits_s^\tau\frac{v(\sigma,s)}{1+\sigma^2}\,d\sigma,$$

из которого в свою очередь в силу леммы Гронуолла–Беллмана имеем

$$v(\tau,s)\le M_1\exp\biggl\{\int\limits_s^\tau \frac{M_2}{1+\sigma^2}\,d\sigma\biggr\}\le M_3.$$

Отсюда для исходной матрицы $K(\tau,s)$ получаем оценку

$$\|K(\tau,s)\|\le M\,\frac{s+1}{\tau+1},\quad \tau\ge s\ge 0. \tag{45}$$

Следующий способ действий стандартен. Перейдем от (38) к эквивалентному интегральному уравнению

$$\widetilde h(\tau)=\int\limits_0^\tau K(\tau,s)\{\Psi_0(s,\widetilde h(s))+d^{2+2\delta_0}\Psi_1(s,\widetilde h(s))+d^{1+\sigma_0}\Psi_2\}\,ds \tag{46}$$

и обозначим через $\Pi$ оператор, порожденный его правой частью в пространстве $C(J;\mathbb{R}^{m-1})$ непрерывных вектор-функций $\widetilde h(\tau)$, $\tau\in J$, с нормой $\|\widetilde h\|_C=\max\limits_{\tau\in J}\|\widetilde h(\tau)\|$. Из оценок (41), (45) вытекает, что этот оператор преобразует в себя некоторый замкнутый шар пространства $C(J;\mathbb{R}^{m-1})$ с центром в нуле радиуса $r=M_1d$ и является в нем сжимающим с константой сжатия $q=M_2d$, где $M_1,M_2=\mathrm{const}>0$. Отсюда и из принципа сжимающих отображений заключаем, что уравнение (46) имеет в упомянутом шаре единственное решение. Таким образом, установлена первая группа асимптотических равенств из (37).

Для доказательства второй группы асимптотических формул (37) зафиксируем натуральное $s$, $1\le s\le m-1$, и продифференцируем задачу (30) по компоненте $v_s$. В результате для $g=(\partial h_1/\partial v_s,\ldots,\partial h_{m-1}/\partial v_s)^{\mathrm{т}}$ получим задачу Коши

$$\frac{dg}{d\tau}=A(\tau,d)g,\quad g|_{\tau=0}=\frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-1}\,e_s, \tag{47}$$

где $e_s$ – единичный орт с номером $s$, а матрица $A(\tau,d)$ в силу (31)–(33) и уже установленных асимптотических формул для $h_j(\tau,v,d)$, $j=\overline{1,m-1}$, допускает асимптотическое представление

$$A(\tau,d)=A(\tau)+dB(\tau,d),\quad \|B(\tau,d)\|\le\frac{M}{\tau+1},\quad \tau\in J. \tag{48}$$

Далее, положим в (47) $g=g_0+\widetilde g$, где $g_0=(\partial h_1^0/\partial v_s,\ldots,\partial h_{m-1}^0/\partial v_s)^{\mathrm{т}}$ – решение задачи Коши, получающейся из (47) при $d=0$, и перейдем к аналогичному (46) линейному неоднородному интегральному уравнению

$$\widetilde g(\tau)=d\int\limits_0^\tau K(\tau,s)B(s,d)(g_0(s,v)+\widetilde g(s))\,ds. \tag{49}$$

Анализ уравнения (49) основан на неравенстве (45), оценке из (48) и вытекающих из (36) асимптотических формул (равномерных по $v\in\Omega$)

$$\frac{\partial h_j^0}{\partial v_s}(\tau,v)=O\biggl(\frac{1}{\tau}\biggr),\quad \tau\to+\infty,\quad j,s=\overline{1,m-1}. \tag{50}$$

Объединяя перечисленные факты и проводя те же рассуждения, что и в нелинейном случае (46), убеждаемся в том, что уравнение (49) имеет единственное решение $\widetilde g(\tau,v,d)\in C(J;\mathbb{R}^{m-1})$, $\|\widetilde g\|_C\le Md$. Лемма 3 полностью доказана.

Возвратимся к решению (28) задачи Коши (9), (27). Подставляя в равенства (29) представления (37), приходим к выводу, что равномерно по $0 \le t \le 1$, $v \in \Omega$ имеют место асимптотические равенства

$$\begin{gathered} y_j(t,v,d) = \frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-1}\ln\frac{1}{d} + h_j^0(\tau,v)|_{\tau=d^{-\delta_0}t} + O(d), \quad j=\overline{1,k_0}; \\ y_j(t,v,d) = -\frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-1}\ln\frac{1}{d} + h_j^0(\tau,v)|_{\tau=d^{-\delta_0}t} + O(d), \quad j=\overline{k_0+1,m-1}; \\ \frac{\partial y_j}{\partial v_s}(t,v,d) = \frac{\partial h_j^0}{\partial v_s}(\tau,v)\Big|_{\tau=d^{-\delta_0}t} + O(d), \quad j,s=\overline{1,m-1}. \end{gathered} \tag{51}$$

Полагая затем в (51) $t=1$ и учитывая асимптотические представления (40), (50), убеждаемся в том, что

$$\begin{gathered} y_j(1-0,v,d) = \ln\frac{1}{d} + \ln(k_0+1-j) + O(d^{\min(1,\delta_0)}), \quad j=\overline{1,k_0}; \\ y_j(1-0,v,d) = -\ln\frac{1}{d} - \ln(j-k_0) + O(d^{\min(1,\delta_0)}), \quad j=\overline{k_0+1,m-1}; \\ \frac{\partial y_j}{\partial v_s}(1-0,v,d) = O(d^{\min(1,\delta_0)}), \quad j,s=\overline{1,m-1}. \end{gathered} \tag{52}$$

Рассмотрим теперь отрезок $1 \le t \le \alpha$. В силу равенств (52) и правил пересчета начальных условий в точке $t=1$ на этом промежутке времени решение (28) определяется из системы (12) с начальными условиями

$$\begin{gathered} y_j|_{t=1} = -\frac{\beta+1}{\alpha-\beta-1}\ln\frac{1}{d} + \ln(k_0+1-j) - \frac{\alpha}{\alpha-\beta-1}v_j + O(d^{\min(1,\delta_0)}), \quad j=\overline{1,k_0}; \\ y_j|_{t=1} = \frac{\beta+1}{\alpha-\beta-1}\ln\frac{1}{d} - \ln(j-k_0) - \frac{\alpha}{\alpha-\beta-1}v_j + O(d^{\min(1,\delta_0)}), \quad j=\overline{k_0+1,m-1}. \end{gathered} \tag{53}$$

Равенства (53) указывают на целесообразность выполнения в (12) замены переменных

$$y_j = -\frac{\beta+1}{\alpha-\beta-1}\ln\frac{1}{d} + h_j, \quad j=\overline{1,k_0}; \quad y_j = \frac{\beta+1}{\alpha-\beta-1}\ln\frac{1}{d} + h_j, \quad j=\overline{k_0+1,m-1}. \tag{54}$$

Действительно, после указанной замены для нахождения $h=(h_1,\ldots,h_{m-1})^{\mathrm{т}}$ получаем задачу Коши

$$\dot h = d^{1+\delta_1}H_1(h) + d^{1-\delta_1}H_2(h) + dH_3, \tag{55}$$

$$\begin{gathered} h_j|_{t=1} = \ln(k_0+1-j) - \frac{\alpha}{\alpha-\beta-1}v_j + O(d^{\min(1,\delta_0)}), \quad j=\overline{1,k_0}; \\ h_j|_{t=1} = -\ln(j-k_0) - \frac{\alpha}{\alpha-\beta-1}v_j + O(d^{\min(1,\delta_0)}), \quad j=\overline{k_0+1,m-1}. \end{gathered} \tag{56}$$

Здесь $\delta_1 = (\beta+1)/(\alpha-\beta-1) < 1$ (в силу принадлежности точки $(\alpha,\beta)$ множеству $\mathcal{U}_1$ из (22), (23)), вектор-функции $H_k$, $k=1,2,3$, те же, что и в (30), а остатки в (56) сохраняют свой порядок при дифференцировании по $v_s$, $s=\overline{1,m-1}$.

В отличие от предыдущего случая исследование задачи (55), (56) тривиально, поскольку ее правые части регулярно зависят от параметра $d$, а сама она рассматривается на конечном отрезке $1 \le t \le \alpha$. Поэтому для компонент $h_j(t,v,d)$, $j=\overline{1,m-1}$, ее решения запишем сразу окончательный результат:

$$\begin{gathered} h_j(t,v,d) = \ln(k_0+1-j) - \frac{\alpha}{\alpha-\beta-1}v_j + O(d^{\min(\delta_0,1-\delta_1)}), \quad j=\overline{1,k_0}; \\ h_j(t,v,d) = -\ln(j-k_0) - \frac{\alpha}{\alpha-\beta-1}v_j + O(d^{\min(\delta_0,1-\delta_1)}), \quad j=\overline{k_0+1,m-1}, \end{gathered} \tag{57}$$

равномерно по $t \in [1, \alpha]$, $v \in \Omega$. Добавим еще, что равенства (57) сохраняются при дифференцировании по $v_s$, $s = \overline{1, m-1}$.

Соотношения (54), (57) и правила пересчета начальных условий в точке $t = \alpha$ приводят к выводу, что на очередном отрезке $\alpha \le t \le \alpha + 1$ компоненты решения (28) удовлетворяют системе (12), дополненной начальными условиями

$$y_j|_{t=\alpha} = -\frac{(\beta+1)^2}{\alpha-\beta-1}\ln\frac{1}{d} + (\beta+1)\ln(k_0+1-j) - \frac{\alpha(\beta+1)}{\alpha-\beta-1}v_j + O(d^{\min(\delta_0, 1-\delta_1)}),$$
$$j = \overline{1, k_0}; \tag{58}$$

$$y_j|_{t=\alpha} = \frac{(\beta+1)^2}{\alpha-\beta-1}\ln\frac{1}{d} - (\beta+1)\ln(j-k_0) - \frac{\alpha(\beta+1)}{\alpha-\beta-1}v_j + O(d^{\min(\delta_0, 1-\delta_1)}),$$
$$j = \overline{k_0+1, m-1}. \tag{59}$$

Анализ получившейся задачи Коши (12), (58), (59) идентичен изложенному выше исследованию задачи (12), (53): как и в предыдущем случае, после перехода к координатам $h_j$, $j = \overline{1, m-1}$, посредством аналогичных (54) равенств (в которых множитель $(\beta+1)/(\alpha-\beta-1)$ перед $\ln(1/d)$ заменяется на $(\beta+1)^2/(\alpha-\beta-1)$ ) для $h = (h_1, \ldots, h_{m-1})^{\text{т}}$ имеем уравнение вида (55), где $\delta_1$ следует заменить на $\delta_2 = (\beta+1)^2/(\alpha-\beta-1)$. Подчеркнем, что в силу неравенства $\delta_2 < 1$, вытекающего из условия $(\alpha, \beta) \in \mathcal{U}_1$, упомянутое уравнение регулярно зависит от $d$. Отсюда очевидным образом следует, что равномерно по $t \in [\alpha, \alpha+1]$, $v \in \Omega$ имеют место аналогичные (54), (57) асимптотические представления

$$y_j(t, v, d) = -\frac{(\beta+1)^2}{\alpha-\beta-1}\ln\frac{1}{d} + (\beta+1)\ln(k_0+1-j) - \frac{\alpha(\beta+1)}{\alpha-\beta-1}v_j + O(d^{\min(\delta_0, 1-\delta_1, 1-\delta_2)}),$$
$$j = \overline{1, k_0}; \tag{60}$$

$$y_j(t, v, d) = \frac{(\beta+1)^2}{\alpha-\beta-1}\ln\frac{1}{d} - (\beta+1)\ln(j-k_0) - \frac{\alpha(\beta+1)}{\alpha-\beta-1}v_j + O(d^{\min(\delta_0, 1-\delta_1, 1-\delta_2)}),$$
$$j = \overline{k_0+1, m-1}, \tag{61}$$

сохраняющиеся при дифференцировании по переменным $v_s$, $s = \overline{1, m-1}$.

На оставшемся отрезке $\alpha + 1 \le t \le T_0$ сталкиваемся с той же ситуацией, что и в случае $0 \le t \le 1$. Согласно равенствам (60), (61) и импульсным соотношениям в точке $t = \alpha + 1$, здесь рассмотрению подлежит система (12) с начальными условиями

$$y_j|_{t=\alpha+1} = (\beta+1)\ln\frac{1}{d} - (\alpha-\beta-1)\ln(k_0+1-j) + \alpha v_j + O(d^{\min(\delta_0, 1-\delta_1, 1-\delta_2)}),$$
$$j = \overline{1, k_0}; \tag{62}$$

$$y_j|_{t=\alpha+1} = -(\beta+1)\ln\frac{1}{d} + (\alpha-\beta-1)\ln(j-k_0) + \alpha v_j + O(d^{\min(\delta_0, 1-\delta_1, 1-\delta_2)}),$$
$$j = \overline{k_0+1, m-1}. \tag{63}$$

Выполняя, далее, в задаче Коши (12), (62), (63) замены

$$y_j = (\beta+1)\ln\frac{1}{d} + h_j, \quad j = \overline{1, k_0}; \quad y_j = -(\beta+1)\ln\frac{1}{d} + h_j, \quad j = \overline{k_0+1, m-1};$$
$$\tau = d^{-\delta_3}(t-\alpha-1), \tag{64}$$

где $\delta_3 = \beta$, преобразуем ее к аналогичному (30) виду

$$\frac{dh}{d\tau} = H_1(h) + d^{2+2\delta_3} H_2(h) + d^{1+\delta_3} H_3, \quad h|_{\tau=0} = \widetilde{v}. \tag{65}$$

Здесь $h = (h_1, \ldots, h_{m-1})^{\text{т}}$, вектор-функции $H_k$, $k = 1, 2, 3$, те же, что и в (30), а компоненты вектора $\widetilde{v} = (\widetilde{v}_1, \ldots, \widetilde{v}_{m-1})^{\text{т}}$ задаются равенствами

$$\widetilde{v}_j = -(\alpha - \beta - 1)\ln(k_0 + 1 - j) + \alpha v_j + O(d^{\min(\delta_0, 1-\delta_1, 1-\delta_2)}), \quad j = \overline{1, k_0};$$
$$\widetilde{v}_j = (\alpha - \beta - 1)\ln(j - k_0) + \alpha v_j + O(d^{\min(\delta_0, 1-\delta_1, 1-\delta_2)}), \quad j = \overline{k_0 + 1, m - 1}. \tag{66}$$

Добавим еще, что задача (65) рассматривается на асимптотически большом отрезке $\tau \in J = [0, (T_0 - \alpha - 1)d^{-\delta_3}]$.

Из всего сказанного выше следует, что в данном случае мы находимся в условиях применимости леммы 3. Поэтому для компонент $h_j(\tau, v, d)$, $j = \overline{1, m-1}$, решения задачи (65) равномерно по $\tau \in J$, $v \in \Omega$ оказываются справедливыми асимптотические представления (37), в которых функции $h_j^0(\tau, v)$ по-прежнему определяются из задачи Коши (34), (35), но с учетом новых равенств (66). Отсюда и из (64), (40), (50) заключаем, что равномерно по $v \in \Omega$ выполняются равенства

$$y_j(T_0, v, d) = \ln\frac{1}{d} - \ln\frac{\beta + 1}{\alpha - \beta - 1} + \ln(k_0 + 1 - j) + O(d^{\varkappa}), \quad j = \overline{1, k_0};$$
$$y_j(T_0, v, d) = -\ln\frac{1}{d} + \ln\frac{\beta + 1}{\alpha - \beta - 1} - \ln(j - k_0) + O(d^{\varkappa}), \quad j = \overline{k_0 + 1, m - 1}; \tag{67}$$
$$\frac{\partial y_j}{\partial v_s}(T_0, v, d) = O(d^{\varkappa}), \quad j, s = \overline{1, m - 1}, \quad \varkappa = \min(\delta_0, 1 - \delta_1, 1 - \delta_2, \delta_3).$$

Подведем промежуточный итог. Из асимптотических равенств (67) следует, что после выполнения в отображении (17) замен

$$z_j = \ln\frac{1}{d} + v_j, \quad j = \overline{1, k_0}; \quad z_j = -\ln\frac{1}{d} + v_j, \quad j = \overline{k_0 + 1, m - 1}, \tag{68}$$

оно преобразуется к виду

$$v \to v_* + O(d^{\varkappa}), \quad v_* = (v_1^*, \ldots, v_{m-1}^*)^{\text{т}}, \tag{69}$$

где $v_j^* = -\ln\dfrac{\beta + 1}{\alpha - \beta - 1} + \ln(k_0 + 1 - j)$, $j = \overline{1, k_0}$; $v_j^* = \ln\dfrac{\beta + 1}{\alpha - \beta - 1} - \ln(j - k_0)$, $j = \overline{k_0 + 1, m - 1}$, а остаток имеет указанный порядок малости в метрике $C^1(\Omega)$. Теперь предположим, что вектор $v_*$ является внутренней точкой множества $\Omega$. Тогда, очевидно, отображение (69) при всех достаточно малых $d > 0$ допускает экспоненциально устойчивую неподвижную точку

$$v(d) = v_* + O(d^{\varkappa}), \quad d \to 0. \tag{70}$$

И наконец, объединяя равенства (68), (70), приходим к требуемым соотношениям (24), (25).

В случае $(\alpha, \beta) \in \mathcal{U}_2$ рассуждения во многом аналогичны приведенным выше. Здесь в соответствии с (26) дополним систему (9) начальными условиями

$$y_j|_{t=-0} = -(\alpha - 1)\ln\frac{1}{d} + v_j, \quad j = \overline{1, k_0}; \quad y_j|_{t=-0} = (\alpha - 1)\ln\frac{1}{d} + v_j, \quad j = \overline{k_0 + 1, m - 1}, \tag{71}$$

где $v_j = \text{const} \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, m - 1}$. Далее, из равенств (71) и из импульсных соотношений в точке $t = 0$ заключаем, что на отрезке $0 \le t \le 1$ рассмотрению подлежит задача Коши для системы (12) с начальными условиями

$$y_j|_{t=0} = -\frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha - \beta - 1}\ln\frac{1}{d} + \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1}v_j, \quad j = \overline{1, k_0};$$
$$y_j|_{t=0} = \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha - \beta - 1}\ln\frac{1}{d} + \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1}v_j, \quad j = \overline{k_0 + 1, m - 1}. \tag{72}$$

Как обычно, выполним в задаче (12), (72) замены

$$y_j = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha-\beta-1}\ln\frac{1}{d} + h_j, \quad j=\overline{1,k_0}; \quad y_j = \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha-\beta-1}\ln\frac{1}{d} + h_j, \quad j=\overline{k_0+1,m-1}. \tag{73}$$

В результате для $h=(h_1,\ldots,h_{m-1})^{\text{т}}$ приходим к задаче Коши

$$\dot h = d^{1+\gamma_0}H_1(h) + d^{1-\gamma_0}H_2(h) + d\,H_3, \quad h|_{t=0} = \frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-1}\,v, \tag{74}$$

где $\gamma_0=(\alpha-1)^2/(\alpha-\beta-1)<1$ (в силу условия $(\alpha,\beta)\in\mathcal{U}_2$), а вектор-функции $H_k$, $k=1,2,3$, те же, что и в (30). Остается заметить, что поскольку задача (74) регулярно зависит от параметра $d$, то для компонент $h_j(t,v,d)$, $j=\overline{1,m-1}$, ее решения справедливы равномерные по $t\in[0,1]$, $v\in\Omega$ асимптотические равенства

$$h_j(t,v,d) = \frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-1}\,v_j + O(d^{1-\gamma_0}), \quad j=\overline{1,m-1}, \tag{75}$$

сохраняющиеся при дифференцировании по $v_s$, $s=\overline{1,m-1}$.

При $1\le t\le\alpha$ в соответствии с равенствами (73), (75) и очередными импульсными соотношениями рассматриваем систему (12), дополненную начальными условиями

$$\begin{gathered} y_j|_{t=1} = \frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-1}\ln\frac{1}{d} - \frac{1}{\alpha-\beta-1}\,v_j + O(d^{1-\gamma_0}), \quad j=\overline{1,k_0}; \\ y_j|_{t=1} = -\frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-1}\ln\frac{1}{d} - \frac{1}{\alpha-\beta-1}\,v_j + O(d^{1-\gamma_0}), \quad j=\overline{k_0+1,m-1}. \end{gathered} \tag{76}$$

Сделаем в задаче (12), (76) аналогичные (29) замены

$$\begin{gathered} y_j = \frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-1}\ln\frac{1}{d} + h_j, \quad j=\overline{1,k_0}; \quad y_j = -\frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-1}\ln\frac{1}{d} + h_j, \quad j=\overline{k_0+1,m-1}; \\ \tau = d^{-\gamma_1}(t-1), \quad \gamma_1=\beta/(\alpha-\beta-1), \end{gathered} \tag{77}$$

приводящие ее к аналогичному (30) виду

$$\frac{dh}{d\tau} = H_1(h) + d^{2+2\gamma_1}H_2(h) + d^{1+\gamma_1}H_3, \quad h|_{\tau=0} = -\frac{1}{\alpha-\beta-1}\,v + O(d^{1-\gamma_0}), \tag{78}$$

где $h=(h_1,\ldots,h_{m-1})^{\text{т}}$. Остается воспользоваться леммой 3, из которой следует, что для компонент $h_j(\tau,v,d)$, $j=\overline{1,m-1}$, решения задачи (78) равномерно по $\tau\in[0,(\alpha-1)d^{-\gamma_1}]$, $v\in\Omega$ выполняются равенства

$$h_j(\tau,v,d) = h_j^0(\tau,v) + O(d^{1-\gamma_0}), \quad \frac{\partial h_j}{\partial v_s}(\tau,v,d) = \frac{\partial h_j^0}{\partial v_s}(\tau,v) + O(d^{1-\gamma_0}), \quad j,s=\overline{1,m-1}, \tag{79}$$

где функции $h_j^0(\tau,v)$ определяются из задачи Коши (34), (35) при $\widetilde v_j = -v_j/(\alpha-\beta-1)$, $j=\overline{1,m-1}$.

Объединяя соотношения (77), (79), приходим к выводу, что

$$\begin{gathered} y_j(\alpha-0,v,d) = \ln\frac{1}{d} - \ln(\alpha-1) + \ln(k_0+1-j) + O(d^{\,\min(1-\gamma_0,\gamma_1)}), \quad j=\overline{1,k_0}; \\ y_j(\alpha-0,v,d) = -\ln\frac{1}{d} + \ln(\alpha-1) - \ln(j-k_0) + O(d^{\,\min(1-\gamma_0,\gamma_1)}), \quad j=\overline{k_0+1,m-1}; \\ \frac{\partial y_j}{\partial v_s}(\alpha-0,v,d) = O(d^{\,\min(1-\gamma_0,\gamma_1)}), \quad j,s=\overline{1,m-1}. \end{gathered} \tag{80}$$

Отсюда и из импульсных соотношений в точке $t = \alpha$ вытекает, что на очередном отрезке $\alpha \le t \le \alpha + 1$ надо рассматривать систему (12) с начальными условиями

$$y_j|_{t=\alpha} = (\beta+1)\ln\frac{1}{d} + (\beta+1)\ln\frac{k_0+1-j}{\alpha-1} + O(d^{\min(1-\gamma_0,\gamma_1)}), \quad j = \overline{1,k_0};$$
$$y_j|_{t=\alpha} = -(\beta+1)\ln\frac{1}{d} - (\beta+1)\ln\frac{j-k_0}{\alpha-1} + O(d^{\min(1-\gamma_0,\gamma_1)}), \quad j = \overline{k_0+1,m-1}. \tag{81}$$

Задача Коши (12), (81) после замен

$$y_j = (\beta+1)\ln\frac{1}{d} + h_j, \quad j = \overline{1,k_0}; \quad y_j = -(\beta+1)\ln\frac{1}{d} + h_j, \quad j = \overline{k_0+1,m-1};$$
$$\tau = d^{-\gamma_2}(t-\alpha), \quad \gamma_2 = \beta, \tag{82}$$

в свою очередь преобразуется к аналогичной (78) задаче

$$\frac{dh}{d\tau} = H_1(h) + d^{2+2\gamma_2}H_2(h) + d^{1+\gamma_2}H_3, \quad h|_{\tau=0} = \widetilde{v} + O(d^{\min(1-\gamma_0,\gamma_1)}), \tag{83}$$

где $h = (h_1,\ldots,h_{m-1})^{\text{т}}$, $\widetilde{v} = (\widetilde{v}_1,\ldots,\widetilde{v}_{m-1})^{\text{т}}$,

$$\widetilde{v}_j = (\beta+1)\ln\frac{k_0+1-j}{\alpha-1}, \quad j = \overline{1,k_0}; \quad \widetilde{v}_j = -(\beta+1)\ln\frac{j-k_0}{\alpha-1}, \quad j = \overline{k_0+1,m-1},$$

а $\tau$ изменяется на асимптотически большом отрезке $0 \le \tau \le d^{-\gamma_2}$.

Нетрудно увидеть, что к задаче (83) применима лемма 3, а значит, для компонент $h_j(\tau,v,d)$, $j = \overline{1,m-1}$, ее решения выполняются аналоги равенств (37). Объединяя их с (82), убеждаемся в справедливости аналогичных (80) асимптотических представлений

$$y_j(\alpha+1-0,v,d) = \ln\frac{1}{d} + \ln(k_0+1-j) + O(d^{\min(1-\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2)}), \quad j = \overline{1,k_0};$$
$$y_j(\alpha+1-0,v,d) = -\ln\frac{1}{d} - \ln(j-k_0) + O(d^{\min(1-\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2)}), \quad j = \overline{k_0+1,m-1}; \tag{84}$$
$$\frac{\partial y_j}{\partial v_s}(\alpha+1-0,v,d) = O(d^{\min(1-\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2)}), \quad j,s = \overline{1,m-1}.$$

На заключительном отрезке $\alpha+1 \le t \le T_0$, согласно (84) и импульсным соотношениям при $t = \alpha+1$, получаем систему (12) с начальными условиями

$$y_j|_{t=\alpha+1} = -(\alpha-1)\ln\frac{1}{d} - (\alpha-1)\ln(k_0+1-j) + \alpha\ln(\alpha-1) + O(d^{\min(1-\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2)}), \quad j = \overline{1,k_0};$$

$$y_j|_{t=\alpha+1} = (\alpha-1)\ln\frac{1}{d} + (\alpha-1)\ln(j-k_0) - \alpha\ln(\alpha-1) + O(d^{\min(1-\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2)}), \quad j = \overline{k_0+1,m-1},$$

которая в силу неравенства $\alpha - 1 < 1$ (см. определение множества $\mathcal{U}_2$) после замен

$$y_j = -(\alpha-1)\ln\frac{1}{d} + h_j, \quad j = \overline{1,k_0}; \quad y_j = (\alpha-1)\ln\frac{1}{d} + h_j, \quad j = \overline{k_0+1,m-1},$$

преобразуется к регулярно зависящей от $d$ задаче Коши

$$\dot{h} = d^{1+\gamma_3}H_1(h) + d^{1-\gamma_3}H_2(h) + dH_3, \quad h = (h_1,\ldots,h_{m-1})^{\text{т}},$$
$$h_j|_{t=\alpha+1} = -(\alpha-1)\ln(k_0+1-j) + \alpha\ln(\alpha-1) + O(d^{\min(1-\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2)}), \quad j = \overline{1,k_0};$$
$$h_j|_{t=\alpha+1} = (\alpha-1)\ln(j-k_0) - \alpha\ln(\alpha-1) + O(d^{\min(1-\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2)}), \quad j = \overline{k_0+1,m-1},$$

где $\gamma_3 = \alpha - 1$. Отсюда очевидным образом следует, что

$$y_j(T_0, v, d) = -(\alpha-1)\ln\frac{1}{d} - (\alpha-1)\ln(k_0+1-j) + \alpha\ln(\alpha-1) + O(d^{\varkappa}), \quad j = \overline{1, k_0};$$

$$y_j(T_0, v, d) = (\alpha-1)\ln\frac{1}{d} + (\alpha-1)\ln(j-k_0) - \alpha\ln(\alpha-1) + O(d^{\varkappa}), \quad j = \overline{k_0+1, m-1}; \quad (85)$$

$$\frac{\partial y_j}{\partial v_s}(T_0, v, d) = O(d^{\varkappa}), \quad j, s = \overline{1, m-1}, \quad \varkappa = \min(1-\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, 1-\gamma_3).$$

Для окончания доказательства теоремы 2 обратимся к формулам (85) и повторим все рассуждения, идущие после равенств (67) и завершающие рассмотрение случая $(\alpha, \beta) \in \mathcal{U}_1$. В итоге убеждаемся в существовании при $(\alpha, \beta) \in \mathcal{U}_2$ у отображения (11) устойчивых неподвижных точек (24) с асимптотикой (26).

**5. Заключительные замечания.** В первую очередь поставим вопрос, можно ли расширить область (22) изменения параметров $\alpha$, $\beta$, в которой существуют устойчивые неподвижные точки (24). В связи с этим представим множество $\mathcal{U} = \{(\alpha, \beta): \ \alpha > \beta + 1, \ \beta > 0\}$ всех допустимых параметров в виде

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \mathcal{U}_3 \cup \mathcal{U}_4 \cup \mathcal{U}_5 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4, \quad (86)$$

где $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ – области (23),

$$\mathcal{U}_3 = \{(\alpha, \beta): \ 2\beta + 2 < \alpha < (\beta+1)(\beta+2), \ \beta > 0\},$$

$$\mathcal{U}_4 = \{(\alpha, \beta): \ \max(2, 1+\beta) < \alpha < 2\beta + 2, \ \beta > 0\},$$

$$\mathcal{U}_5 = \{(\alpha, \beta): \ 1 < \alpha < 2, \ (\alpha-1)(2-\alpha) < \beta < \alpha - 1\},$$

$$\Gamma_1 = \{(\alpha, \beta): \ \alpha = (\beta+1)(\beta+2), \ \beta > 0\}, \quad \Gamma_2 = \{(\alpha, \beta): \ \alpha = 2\beta + 2, \ \beta > 0\},$$

$$\Gamma_3 = \{(\alpha, \beta): \ \beta = (\alpha-1)(2-\alpha), \ 1 < \alpha < 2\}, \quad \Gamma_4 = \{(\alpha, \beta): \ \alpha = 2, \ 0 < \beta < 1\}.$$

Принцип, по которому осуществлено разбиение (86) множества $\mathcal{U}$, состоит в следующем. Рассмотрим систему (9) при $m = 2$, имеющую вид

$$\dot{y} = -2d\operatorname{sh} y,$$

$$y(+0) = \frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-1}\,y(-0), \quad y(1+0) = y(1-0) - \frac{\alpha}{\alpha-1}\,y(+0), \quad (87)$$

$$y(\alpha+0) = (1+\beta)y(\alpha-0), \quad y(\alpha+1+0) = y(\alpha+1-0) - \frac{\alpha}{1+\beta}\,y(\alpha+0),$$

и дополним ее начальным условием

$$y|_{t=-0} = \min(\alpha-1, 1)\ln\frac{1}{d} + v, \quad v = \mathrm{const} \in \mathbb{R}. \quad (88)$$

Далее, через $y(t, v, d)$ обозначим решение получившейся задачи Коши (87), (88), а также положим $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = \alpha$, $t_4 = \alpha + 1$. Последующее асимптотическое интегрирование задачи (87), (88) приводит к формулам вида

$$y(t_k + 0, v, d) = c_k \ln\frac{1}{d} + O(1), \quad d \to 0, \quad k = \overline{1, 4},$$

где $c_k$ – некоторые константы. Как оказывается, неравенства $|c_k| \neq 1$ выделяют в $\mathcal{U}$ пять связных подобластей $\mathcal{U}_s$, $s = \overline{1, 5}$, разделенных граничными множествами $\Gamma_s$, $s = \overline{1, 4}$.

Разбиение (86), выполненное для случая $m = 2$, остается актуальным при любом $m \geq 2$. Используя развитую в п. 4 методику, можно показать, что при $(\alpha, \beta) \in \mathcal{U}_3 \cup \mathcal{U}_4 \cup \mathcal{U}_5$ утверждение теоремы 2 сохраняется, причем при $(\alpha,\beta)\in\mathcal{U}_3\cup\mathcal{U}_4$ для устойчивых неподвижных точек (24) справедливы равенства (25), а при $(\alpha,\beta)\in\mathcal{U}_5$ – равенства (26).

Вопрос о промежуточной динамике системы (1) при постепенном уменьшении параметра $d$ в общем случае остается открытым. Ответ на него удается получить только при $m=2,$ т.е. для так называемой билокальной модели

$$\begin{aligned}\dot u_1 &= d(u_2-u_1)+\lambda[-1+\alpha f(u_1(t-1))-\beta g(u_1)]u_1,\\ \dot u_2 &= d(u_1-u_2)+\lambda[-1+\alpha f(u_2(t-1))-\beta g(u_2)]u_2.\end{aligned}\tag{89}$$

Связано это с тем, что при $m=2$ все фигурирующие в (17) операторы могут быть записаны явно, поскольку здесь

$$P^t(z)=\ln\frac{1+\operatorname{th}(z/2)\exp(-2dt)}{1-\operatorname{th}(z/2)\exp(-2dt)},\quad t\in\mathbb{R}.\tag{90}$$

Используя формулы (16), (17), (90), нетрудно убедиться в том, что скалярная функция $\Phi_0(z)$ обладает свойствами

$$\Phi_0(-z)=-\Phi_0(z),\quad \Phi_0(z)>0\quad\forall\, z\in(0,+\infty),\quad \lim_{z\to+\infty}\Phi_0(z)=\Phi_\infty>0.$$

Обратим внимание на то, что нечетность функции $\Phi_0(z)$ обусловлена инвариантностью исходной системы (89) по отношению к преобразованию координат

$$u\to u_2,\quad u_2\to u_1.\tag{91}$$

Характерная особенность отображения (17) в одномерном случае заключается в том, что при уменьшении параметра $d$ на его инвариантном множестве $\mathbb{R}_+$ происходит бифуркация рождения пары неподвижных точек – устойчивой и неустойчивой. Наглядное представление об этом процессе дают графики функции $\Phi_0(z)$ при $\alpha=1.1,$ $\beta=0.05$ и при $d=0.05,$ $0.0435,$ $0.03,$ построенные с помощью формул (16), (17), (90) на отрезке $0\le z\le 0.6$ (см. рис. 1–3). Заметим, далее, что в силу свойства нечетности $\Phi_0(z)$ устойчивой и неустойчивой неподвижным точкам из $\mathbb{R}_+$ отвечают аналогичные симметрично расположенные неподвижные точки из $\mathbb{R}_-$, а всем им в исходной релаксационной системе (89) соответствуют две пары циклов той же устойчивости, переходящие друг в друга в результате замены (91).

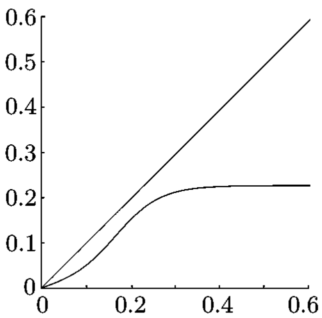


**Рис. 1.** $d=0.05.$

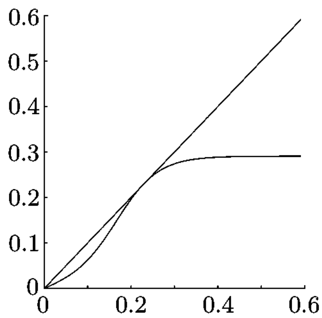


**Рис. 2.** $d=0.0435.$

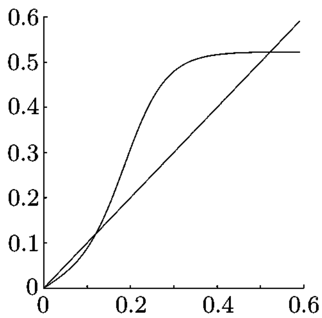


**Рис. 3.** $d=0.03.$

Итак, при фиксированных $(\alpha,\beta)\in\bigcup_{k=1}^{5}\mathcal{U}_k$ и при достаточно малых $d>0$ система (89) имеет три устойчивых цикла – однородный и два неоднородных. Некоторое представление о релаксационных свойствах последних дает рис. 4, на котором изображены графики на плоскости $(t,u)$ компонент $u_1(t),$ $u_2(t)$ одного из них при $f=g=(u+1)/(u^2+1),$ $\lambda=3,$ $\alpha=3,$ $\beta=1,$ $d=0.03$ (сплошной линией изображена функция $u_1(t)$, а штриховой – $u_2(t)$ ).

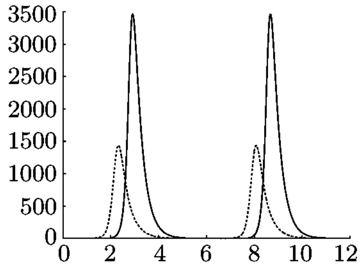


**Рис. 4.**

В заключение отметим, что в системе (1) наблюдается известный феномен буферности [4, 5], представляющий собой один из фундаментальных законов функционирования нелинейного мира. Об этом феномене принято говорить, когда в некоторой системе при подходящем выборе параметров реализуется любое наперед заданное конечное число однотипных аттракторов (циклов, инвариантных торов и т.д.). В нашем случае в силу теорем 1, 2 при согласованном увеличении количества осцилляторов в цепочке (1) и уменьшении параметра связи $d$ происходит неограниченное накапливание устойчивых автоволновых периодических движений. С биофизической точки зрения наличие в системе (1) большого числа различных аттракторов вполне закономерно, поскольку буферность отражает реальную ситуацию, когда в неокортексе человеческого мозга множество концепций и идей конкурируют друг с другом за доминирование.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Кащенко С.А., Майоров В.В.* Модели волновой памяти. М., 2009.
2. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Релаксационные автоколебания в нейронных системах. II // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 12. С. 1675–1692.
3. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Релаксационные автоколебания в нейронных системах. I // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 7. С. 919–932.
4. *Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. М., 2004.
5. *Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М., 2004.


Ярославский государственный университет
им. П.Г. Демидова,
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
09.11.2010 г.