

ДИНАМИКА ОДНОГО ДВУМЕРНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ И УСТОЙЧИВЫЕ РЕЖИМЫ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ НЕЙРОННОГО ТИПА

Ивановский Л.И, Самсонов С.О.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

ЯрГУ им. П.Г. Демидова

Ивановский Леонид Игоревич – студент 5 курса факультета Информатики и вычислительной техники Ярославского государственного университета им.

П.Г. Демидова, лаборант-исследователь ОПСи НЦЧ РАН.

leon19unknown@gmail.com

Самсонов Сергей Олегович – студент 5 курса факультета Информатики и вычислительной техники Ярославского государственного университета им.

П.Г. Демидова.

therealfac@gmail.com

Рассматривается математическая модель нейронной системы, представляющая собой цепочку из трех диффузионно связанных сингулярно возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием. Изучаются вопросы существования, устойчивости и асимптотического представления релаксационных периодических решений этой системы на основании бифуркационного анализа специального двумерного отображения. Особое внимание уделяется числу сосуществующих устойчивых режимов.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00158).

Ключевые слова: релаксационные колебания, устойчивые режимы, бифуркации.

DYNAMICS OF TWO-DIMENSIONAL MAPPING AND STABLE REGIMES OF SINGULARLY PERTURBED NEURON SYSTEM

Ivanovsky Leonid, Samsonov Sergey

P.G. Demidov Yaroslavl State University

P.G. Demidov YSU

Ivanovsky Leonid – 5th year student of IT Faculty of P.G. Demidov Yaroslavl State University, laboratory researcher at Scientific Center in Chernogolovka RAS.

leon19unknown@gmail.com

Samsonov Sergey – 5th year student of IT Faculty of P.G. Demidov Yaroslavl State University,

therealfac@gmail.com

Let us consider a mathematical model of neuron system, which is presented as a chain of three diffused connected and singularly perturbed nonlinear differential equations. In the further text researched the questions of existence, stability and asymptotic forms of relaxational periodic solutions of this system due to a bifurcational analysis of two-dimensional mapping. Also the special attention is paid to the number of coexisting stable regimes.

This work was supported by the Russian Science Foundation (project nos. №14-21-00158).

Key words: relaxational oscillations, stable regimes, bifurcations.

Введение

Для цепочки сингулярно возмущенных осцилляторов с запаздыванием, моделирующей слабое электрическое взаимодействие нейронов, в статье (Глызин С. Д. и др., 2011) предложена основанная на модели из книги (Кащенко С.А., Майоров В.В., 2009) система дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\dot{u}_j = d(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \lambda \left[-1 + \alpha f(u_j(t-1)) - \beta g(u_j) \right] u_j, j = \overline{1, m}, (1)$$

где $m \geq 2, u_0 = u_1, u_3 = u_4, \lambda \gg 1, \beta > 0, \alpha > 1 + \beta$, а гладкие функции $f(u)$ и $g(u)$ удовлетворяют условиям $f(0) = g(0) = 1, f(u), g(u), uf'(u), ug'(u) = O(1/u)$ при $u \rightarrow +\infty$. При сформулированных ограничениях система (1) допускает синхронный цикл $u_1 = u_2 = u_*(t, \lambda)$, где функция $u_*(t, \lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{u} = \lambda[-1 + \alpha f(u(t-1)) - \beta g(u)]u.$$

В (Глызин С. Д. и др., 2011) показано, что периодическое решение $u_*(t, \lambda)$ с периодом $T_*(\lambda)$, асимптотически близко при $\lambda \gg 1$ к функции $\exp(\lambda x_0)$, где

$$x_0(t) = \begin{cases} (\alpha - 1)t, & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ \alpha - t, & \text{при } 1 \leq t \leq \alpha, \\ -(1 + \beta)(t - \alpha), & \text{при } \alpha \leq t \leq \alpha + 1, \\ (\alpha - \beta - 1)(t - \alpha - 1) - 1 - \beta, & \text{при } \alpha + 1 \leq t \leq T_0, \end{cases}$$

$T_0 = \alpha + 1 + (\beta + 1)/(\alpha - \beta - 1)$, причем справедливо предельное равенство $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_*(\lambda) = T_0$.

С помощью замен вида

$$u_1 = \exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad u_j = \exp\left(\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j-1} y_k\right), \quad j = \overline{2, m}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\lambda} \ll 1,$$

где x близко к x_0 , систему (1) можно свести к следующей системе:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon d(e^{y_1} - 1) + F(x, x(t-1), \varepsilon), \\ \dot{y}_j &= d(e^{y_{j+1}} + e^{-y_j} - e^{y_j} - e^{-y_{j-1}}) + \\ &+ G_j(x, x(t-1), y_1, \dots, y_j, y_1(t-1), \dots, y_j(t-1), \varepsilon), j = \overline{1, m-1}, \end{aligned}$$

где $y_0 = y_m = 0$, а функции F, G имеют вид

$$F(x, u, \varepsilon) = -1 + \alpha f\left(\exp\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\right) - \beta g\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right),$$

$$G_j = (x, u, y_1, \dots, y_j, v_1, \dots, v_j, \varepsilon) =$$

$$= \frac{\alpha}{\varepsilon} \left[f \left(\exp \left(\frac{u}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^j v_k \right) \right) - f \left(\exp \left(\frac{u}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j-1} v_k \right) \right) \right] +$$

$$+ \frac{\beta}{\varepsilon} \left[g \left(\exp \left(\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j-1} y_k \right) \right) - g \left(\exp \left(\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^j y_k \right) \right) \right], j = \overline{1, m-1}.$$

В статьях (Глызин С. Д. и др., 2011, 2012, 2013) выполнено сведение этой системы к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Рассмотрим данную задачу в случае трех осцилляторов ($m = 3$). При этом (см. (Ивановский Л.И., Самсонов С.О., 2014)) получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = d(e^{y_2} + e^{-y_1} - e^{y_1} - 1) \\ \dot{y}_2 = d(1 + e^{-y_2} - e^{y_2} - e^{-y_1}). \end{cases} \quad (2)$$

$$y_j(+0) = \frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-1} y_j(-0), \quad y_j(1+0) = y_j(1-0) - \frac{\alpha}{\alpha-1} y_j(+0),$$

$$y_j(\alpha+0) = (1+\beta)y_j(\alpha-0),$$

$$y_j(\alpha+1+0) = y_j(\alpha+1-0) - \frac{\alpha}{1+\beta} y_j(\alpha+0), \quad j = 1, 2.$$

Функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ характеризуют фазовые сдвиги между компонентами системы (1). Ниже будем изучать следующее отображение:

$$\Phi(z): \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_1(T^*) \\ y_2(T^*) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $(y_1(t), y_2(t))^T$ — решения системы (2) с импульсным воздействием и следующими начальными условиями: $y_1(-0) = z_1, y_2(-0) = z_2$.

В статьях (Глызин С. Д. и др., 2011, 2012) доказано, что экспоненциально устойчивым неподвижным точкам отображения (3) соответствуют орбитально асимптотически устойчивые циклы системы (2) и, в свою очередь, системы (1). Асимптотический анализ отображения (3) позволяет показать, что при достаточно малых значениях параметра d оно

имеет как минимум три устойчивые неподвижные точки. Заметим, что нулевое состояние равновесия устойчиво при любых значениях d , при этом ему соответствует однородный (синхронный) цикл системы (1). Наша задача состоит в определении таких α и β , при которых релаксационное отображение имеет наибольшее число устойчивых неподвижных точек. Поскольку сделать это в полной мере с использованием одного лишь аналитического аппарата довольно затруднительно, поиск устойчивых состояний осуществлялся с помощью специально разработанного приложения. Вычисление координат неподвижных точек в этой программе осуществлялось параллельно, на независимых потоках центрального процессора.

Поиск неподвижной точки релаксационного отображения

Расчёт координат конечной точки отображения (3) идёт следующим образом: вычисления начинаются из точки $(y_1(-0), \dots, y_{m-1}(-0))^T$ координаты которой представляют собой начальные условия системы (2). Начальным моментом времени считается величина $t = -0$. Далее, итерационно, с шагом h , при помощи метода Рунге-Кутты подсчитывались координаты следующей точки отображения (3). Этот метод имеет четвёртый порядок точности, т.е. ошибка на каждом интервале подсчёта будет иметь порядок $O(h^5)$. Координаты следующей точки отображения (3) подсчитываются по итерационной формуле:

$$y_j(t+h) = y_j(t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad j = \overline{1, m-1}$$

где $y_j(t+h), y_j(h)$ — координаты точек, полученных на текущей и предыдущей итерациях, h — величина шага сетки по t для метода Рунге-Кутты, а коэффициенты k_1, k_2, k_3, k_4 рассчитываются по следующим формулам:

$$k_1 = d(e^{y_{j+1}} + e^{-y_j} - e^{y_j} - e^{-y_{j-1}})$$

$$k_2 = d(e^{y_{j+1}+hk_1/2} + e^{-y_j+hk_1/2} - e^{y_j+hk_1/2} - e^{-y_{j-1}+hk_1/2})$$

$$k_3 = d(e^{y_{j+1}+hk_2/2} + e^{-y_j+hk_2/2} - e^{y_j+hk_2/2} - e^{-y_{j-1}+hk_2/2})$$

$$k_4 = d(e^{y_{j+1}+hk_3} + e^{-y_j+hk_3} - e^{y_j+hk_3} - e^{-y_{j-1}+hk_3})$$

Вычисления такого рода будут продолжаться до тех пор, пока не будет получена конечное состояние в значении времени T_0 . Однако в точках переключения 0, 1, α , $\alpha + 1$ релаксационной системе придавался импульс. Координаты точки в этом случае подсчитывались по формулам:

$$y_j(+0) = \frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-1} y_j(-0), y_j(1+0) = y_j(1-0) - \frac{\alpha}{\alpha-1} y_j(+0),$$

$$y_j(\alpha+0) = (1+\beta) y_j(\alpha-0),$$

$$y_j(\alpha+1+0) = y_j(\alpha+1-0) - \frac{\alpha}{1+\beta} y_j(\alpha+0),$$

$$j = 1, 2, \quad y_0 = y_3 = 0.$$

Далее происходила проверка начальной и конечной точек отображения (3) на эквивалентность. Если их координаты были достаточно близки друг к другу, что была найдена устойчивое состояние равновесия. В противном же случае, недавно посчитанную точку $(y_1(T_0), \dots, y_{m-1}(T_0))^T$ считали начальной и производили для неё ту же последовательность операций, которая была описана ранее.

Результаты численного исследования

На координатной плоскости параметров (α, β) можно выделить области A_1, A_2, A_3 и кривые l_0, \dots, l_4 . Графическая визуализация данных множеств приведена на рис. 1.

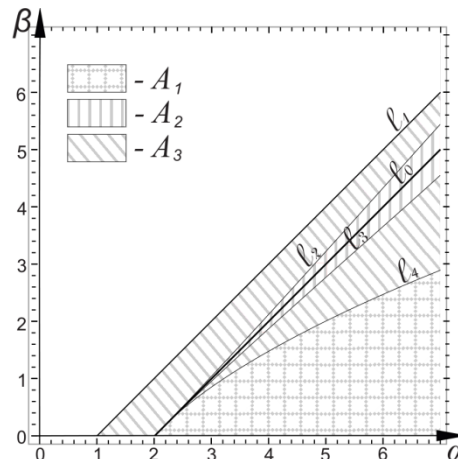


Рис. 1. Разбиение на области параметров с одинаковыми бифуркационными сценариями

Признак, по которому произведено разбиение на области, – это различие максимального количества обнаруживаемых устойчивых неподвижных точек у отображения.

Для значений параметров α и β из области A_1 возможно единовременное наличие у отображения пяти устойчивых неподвижных точек. В области A_2 обнаруживаются ситуации максимум с семью устойчивыми положениями. Области A_3 соответствуют наиболее сложные случаи, максимальное число устойчивых неподвижных точек в которых достигает шести.

Наиболее важным элементом, служащим для построения введенных областей, является прямая $l_0 = \{ (\alpha, \beta) : \beta = \alpha - 2 \}$.

Симметричным образом относительно нее проведены кривые l_2 и l_3 , касающиеся l_0 в точке $(2, 0)$. Эти кривые являются границами области A_2 :

$$A_2 = \{ (\alpha, \beta) : \beta > l_2, \quad \beta < l_3 \}.$$

Также в точке $(2, 0)$ проведена касательная кривая l_4 к прямой l_0 , в совокупности с осью абсцисс образующая границы области A_1 :

$$A_1 = \{ (\alpha, \beta) : \beta < l_4, \quad \beta > 0 \}.$$

Двусвязная область A_3 представляется в виде:

$$A_3 = \{ (\alpha, \beta) : \beta > l_2, \quad \beta < l_1, \quad \beta > l_4, \quad \beta < l_3 \},$$

где прямая $l_1 = \{ (\alpha, \beta) : \beta = \alpha - 1 \}$.

Далее, как и в (Ивановский Л.И., Самсонов С.О., 2014), рассмотрим типичные бифуркации для каждой из введенных областей.

Основные бифуркации в области A_1 . При изменении параметра d для любых фиксированных значений пары $(\alpha, \beta) \in A_1$ в фазовом пространстве отображения наблюдается один и тот же сценарий бифуркационных перестроек. Для определенности возьмем $\alpha = 5.0$ и $\beta = 0.4$. Далее начнем менять значение параметра d .

Подобный численный анализ отображения (3) позволяет получить следующую последовательность бифуркаций:

1) При $d < d_1$; $d_1 = 0.019$ отображение имеет пять устойчивых неподвижных точек и шесть неустойчивых. Схематическое изображение фазового портрета отображения Φ в данном случае можно увидеть на рис. 2а. Буквами S_j обозначены устойчивые, а U_j — неустойчивые неподвижные точки.

2) При $d = d_1$ два симметричных друг другу седла U_5 и U_6 сливаются с самосимметричной точкой S_4 и отбирают у нее устойчивость, образуя седло U' .

3) При $d_1 < d < d_2$; $d_2 = 0.031$ отображение имеет четыре устойчивые неподвижные точки и пять неустойчивых. Фазовый портрет в данном случае имеет изображенный на рис. 2б вид.

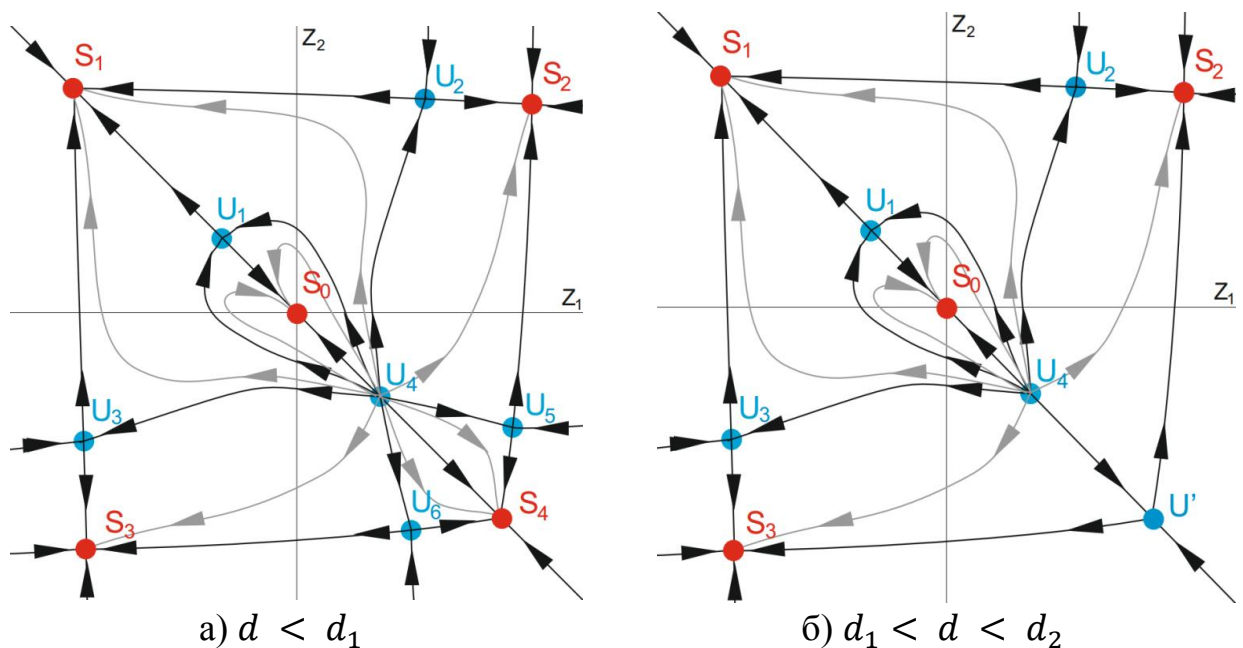


Рис. 2. Фазовые портреты отображения

4) При $d = d_2$ неустойчивый узел U_4 и седло U_7 , сливаясь, пропадают.

5) При $d_2 < d < d_3$; $d_3 = 0.059$ отображение имеет четыре устойчивые неподвижные точки и три неустойчивые. Схема фазового пространства представлена на рис. 3а.

6) При $d = d_3$ устойчивый узел S_1 и седло U_1 , сливаясь друг с другом, пропадают.

7) При $d_3 < d < d_4$; $d_4 = 0.127$ отображение имеет три устойчивые неподвижные точки и две неустойчивые. Фазовый портрет изображен на рис. 3б.

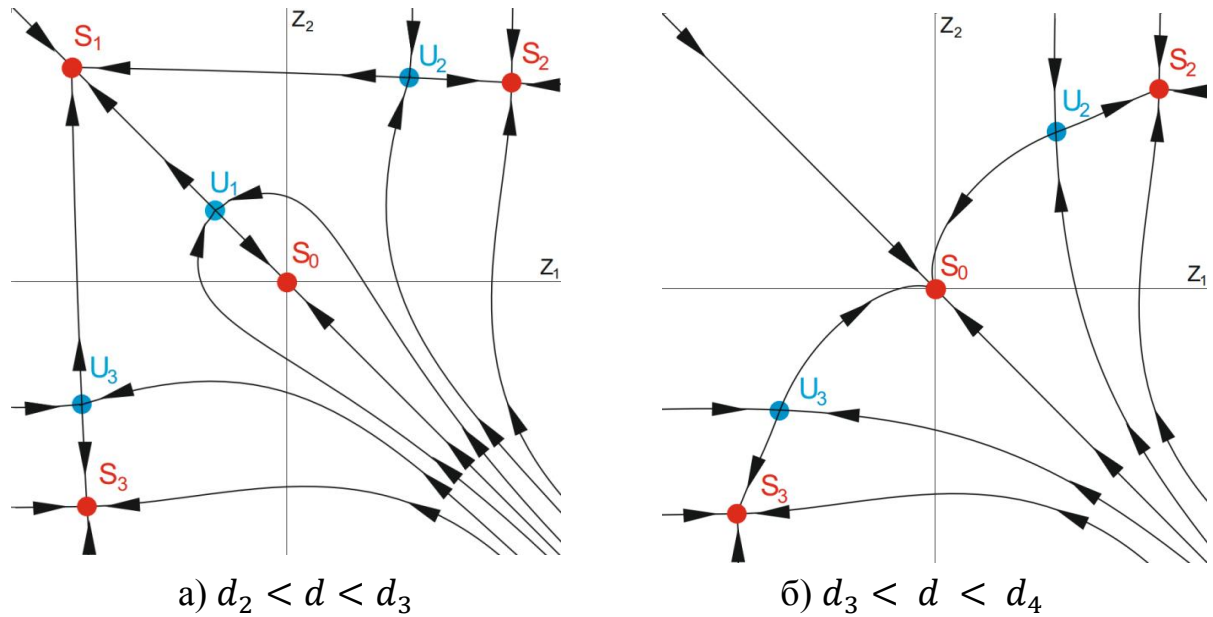


Рис. 3. Фазовые портреты отображения

8) Последняя бифуркация происходит при $d = d_4$. Симметричные друг другу устойчивые узлы S_2 и S_3 сливаются с симметричными седлами U_2 и U_3 и исчезают. Тем самым, при $d > d_4$ отображение имеет единственное нулевое устойчивое состояние.

Полученный сценарий фазовых перестроек остается верным для любых $(\alpha, \beta) \in A_1$. Отличия от рассмотренного случая состоят лишь в числовых выражениях бифуркационных значений параметра d .

Основные бифуркации в области A_2 . При изменении параметра d для любых фиксированных значений пары $(\alpha, \beta) \in l_0$ в фазовом пространстве отображения наблюдается один и тот же сценарий бифуркационных перестроек. Для удобства зафиксируем величины $\alpha = 5.0$ и $\beta = 3.0$ и будем менять значение параметра d . В результате получим следующую последовательность бифуркаций:

1) При $d < d_1$; $d_1 = 0.047$ отображение имеет пять устойчивых неподвижных точек и восемь неустойчивых. Схематическое изображение фазового портрета отображения Φ в данном случае можно увидеть на рис. 4а.

2) При $d = d_1$ от устойчивого самосимметричного узла S_{12} ответвляется пара симметричных друг другу устойчивых узлов S_1 и S_2 и самосимметричная седловая точка U_9 . Одновременно с этой бифуркацией происходит подобная с устойчивым узлом S_{56} . Он также распадается на два устойчивых узла S_5 и S_6 и седло U_{10} .

3) При $d_1 < d < d_2$; $d_2 = 0.056$ отображение имеет семь устойчивых неподвижных точек. Фазовый портрет в данном случае имеет изображенный на рис. 4б вид.

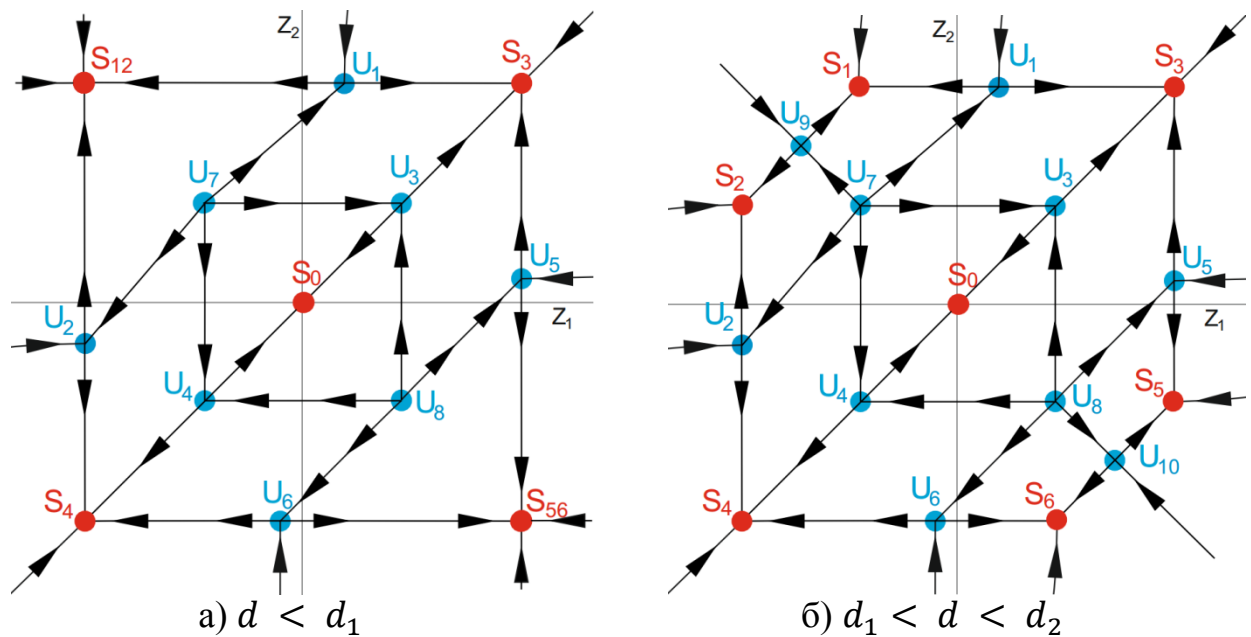


Рис. 4. Фазовые портреты отображения

4) При $d = d_2$ неустойчивые узлы U_7 и U_8 сливаются соответственно с седловыми точками U_9 и U_{10} .

5) При $d_2 < d < d_3$; $d_3 = 0.058$ отображение имеет семь устойчивых неподвижных точек. Фазовый портрет, изображенный на рис. 5а при $d = 0.057$, позволяет проиллюстрировать эту ситуацию.

6) При $d = d_3$ симметричные друг другу устойчивые узлы S_1 и S_2 сливаются с симметричными седлами U_1 и U_2 и исчезают. Одновременно с этим проходит аналогичная бифуркация, в результате которой исчезают устойчивые узлы S_5 и S_6 и седла U_5 и U_6 .

7) При $d_3 < d < d_4$; $d_4 = 0.172$ отображения имеет три устойчивые и две неустойчивые неподвижные точки. Фазовый портрет изображен на рис. 5б

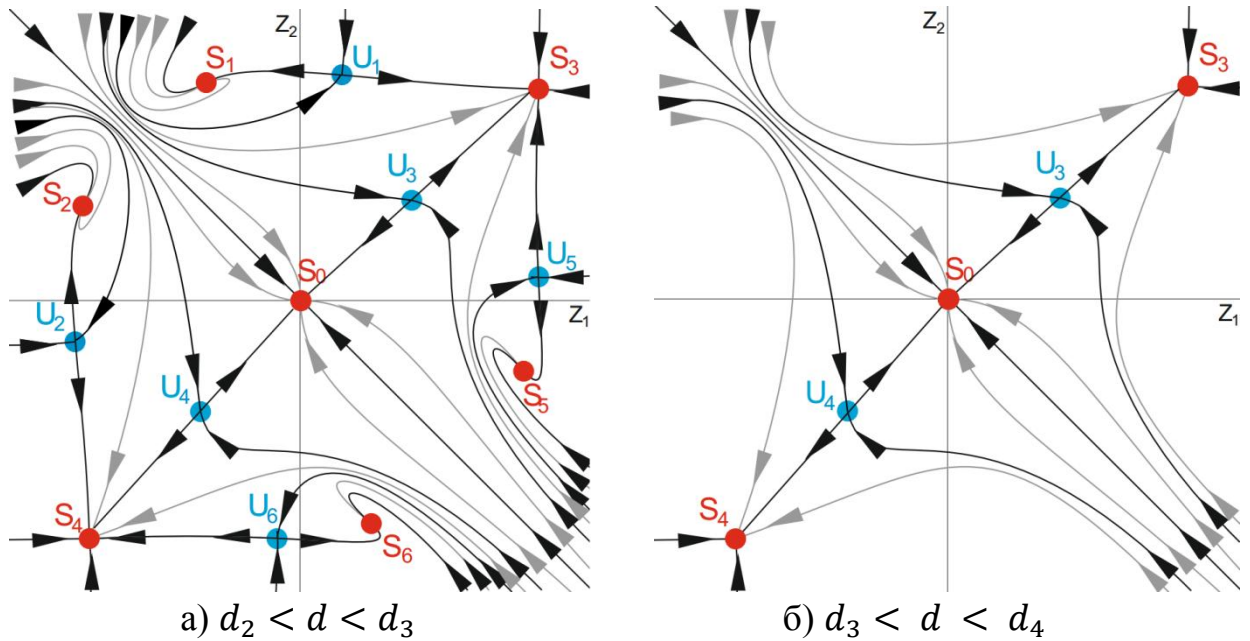


Рис. 5. Фазовые портреты отображения

8) Наконец, при $d = d_4$ симметричные друг другу устойчивые узлы S_3 и S_4 сливаются с симметричными седлами U_3 и U_4 и исчезают. При $d > d_4$ отображение имеет единственное нулевое устойчивое состояние.

Далее программно было исследовано поведение отображения в подобластях:

$$A'_2 = \{ (\alpha, \beta) : \beta > l_0, \beta < l_2 \} \text{ и } A''_2 = \{ (\alpha, \beta) : \beta > l_3, \beta < l_0 \}.$$

Эти области образованы разделением области A_2 пополам прямой l_0 на две компоненты.

Обнаружилось, что в введенных областях A'_2 и A''_2 нарушена одновременность протекания бифуркаций распада устойчивых узлов S_{12} и S_{56} а также последующих бифуркаций слияния их компонент. При этом другие качественные отличия со сценарием при $(\alpha, \beta) \in l_0$ отсутствуют.

Для области A'_2 характерен сдвиг бифуркации распада устойчивого узла S_{12} по d вперед. Она происходит теперь при большем d , чем раньше. Также бифуркация распада устойчивого узла S_{56} сдвигается по d назад и происходит теперь при меньшем d , чем раньше.

Области A_2'' наоборот свойственен сдвиг бифуркации распада S_{12} по d назад, а узла S_{56} – вперед.

Основные бифуркации в области A_3 . Поскольку область A_3 - двусвязная, введем в рассмотрение следующие ее подобласти:

$$A_3' = \{ (\alpha, \beta) : \beta > l_2, \beta < l_1 \} \text{ и } A_3'' = \{ (\alpha, \beta) : \beta > l_4, \beta < l_3 \}.$$

С помощью уже хорошо знакомого метода, можно получить последовательность фазовых перестроек для значений $(\alpha, \beta) \in A_3'$. Например, в случае $\alpha = 4.0$ и $\beta = 2.3$ наблюдаются следующие бифуркации:

- 1) При $d < d_1$; $d_1 = 0.040$ отображение имеет пять устойчивых неподвижных точек и восемь неустойчивых. Схематическое изображение фазового портрета отображения Φ в данном случае можно увидеть на рис. 6а.
- 2) При $d = d_1$ от устойчивого самосимметричного узла S_{12} ответвляется пара симметричных друг другу устойчивых узлов S_1 и S_2 и самосимметричная седловая точка U_9 .
- 3) При $d_1 < d < d_2$; $d_2 = 0.049$ отображение имеет шесть устойчивых неподвижных точек. Фазовый портрет в данном случае имеет изображенный на рис. 6б вид.

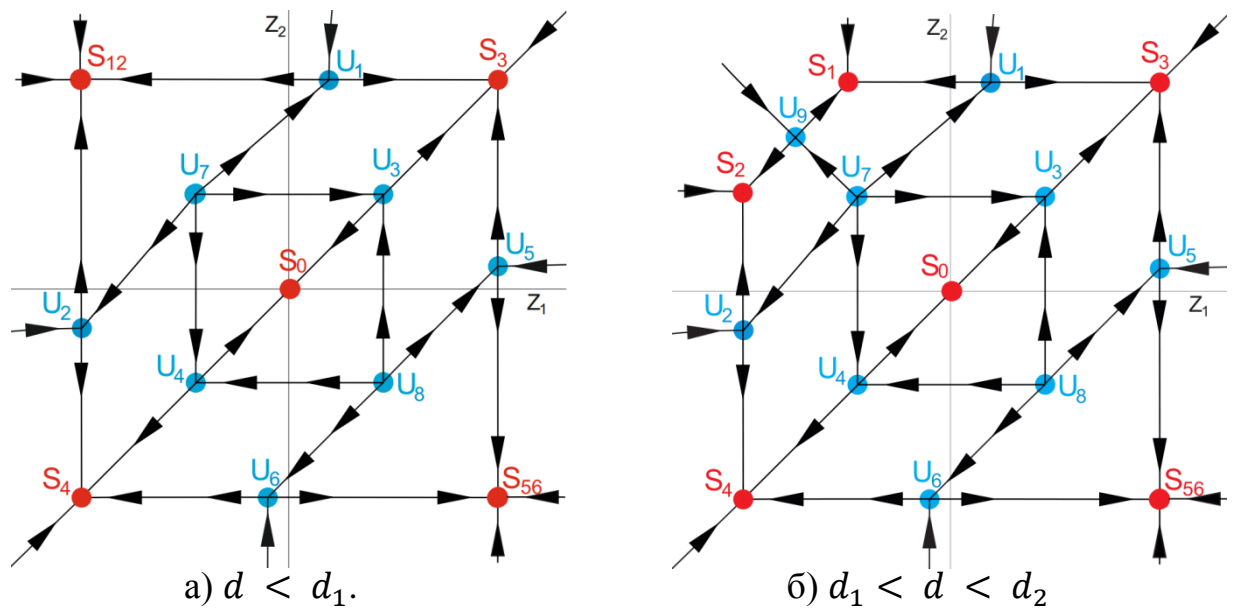


Рис. 6. Фазовые портреты отображения

- 4) При $d = d_2$ симметричные друг другу устойчивые узлы S_1 и S_2 сливаются с симметричными седлами U_1 и U_2 и исчезают.

- 5) При $d_2 < d < d_3$; $d_3 = 0.053$ отображение имеет четыре устойчивые неподвижные точки. Фазовый портрет изображен на рис. 7а.
- 6) При $d = d_3$ неустойчивый узел U_7 сливается с седловой точкой U_9 .
- 7) При $d_3 < d < d_4$; $d_4 = 0.055$ отображение по-прежнему имеет четыре устойчивые неподвижные точки. Фазовый портрет в данном случае имеет изображенный на рис. 7б вид.

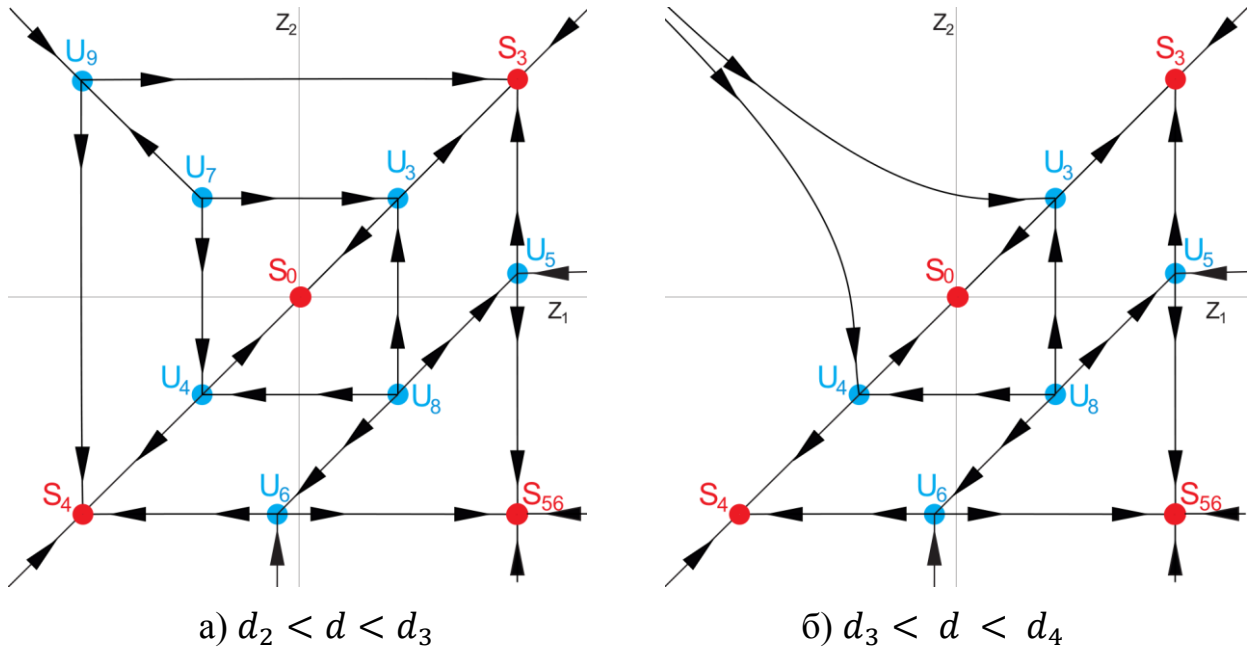


Рис. 7. Фазовые портреты отображения

- 8) При $d = d_4$ от устойчивого самосимметричного узла S_{56} ответвляется пара симметричных друг другу устойчивых узлов S_5 и S_6 и самосимметричная седловая точка U_{10} .
- 9) При $d_4 < d < d_5$; $d_5 = 0.057$ отображение имеет пять устойчивых неподвижных точек. Фазовый портрет в данном случае изображен на рис. 8а.
- 10) При $d = d_5$ неустойчивый узел U_8 сливается с седловой точкой U_{10} . Одновременно с этим симметричные устойчивые неподвижные точки S_5 и S_6 меняют свой тип и становятся устойчивыми фокусами.
- 11) При $d_5 < d < d_6$; $d_6 = 0.069$ отображение имеет пять устойчивых неподвижных точек. Фазовый портрет в данном случае имеет изображенный на рис. 8б вид.

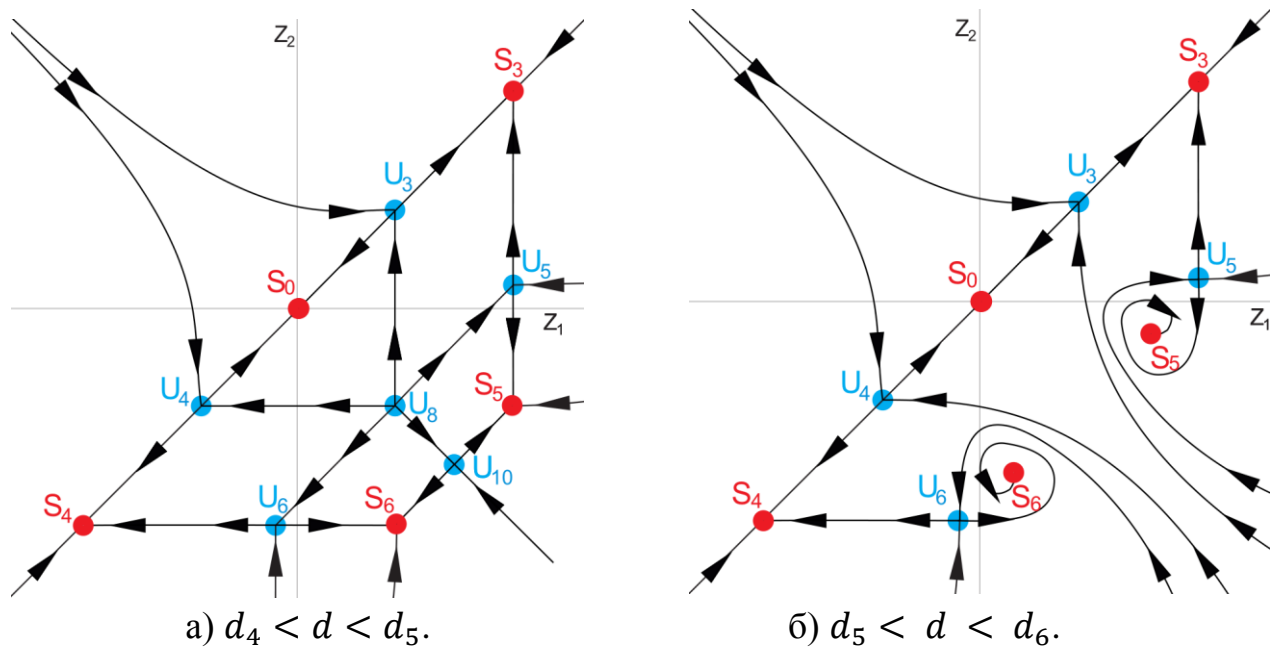


Рис. 8. Фазовые портреты отображения

12) При $d = d_6$ симметричные друг другу устойчивые фокусы S_5 и S_6 сливаются с симметричными седлами U_5 и U_6 и исчезают.

13) При $d_6 < d < d_7$; $d_7 = 0.170$ отображение имеет три устойчивые неподвижные точки и две неустойчивые. Фазовый портрет в данном случае изображен на рис. 9.

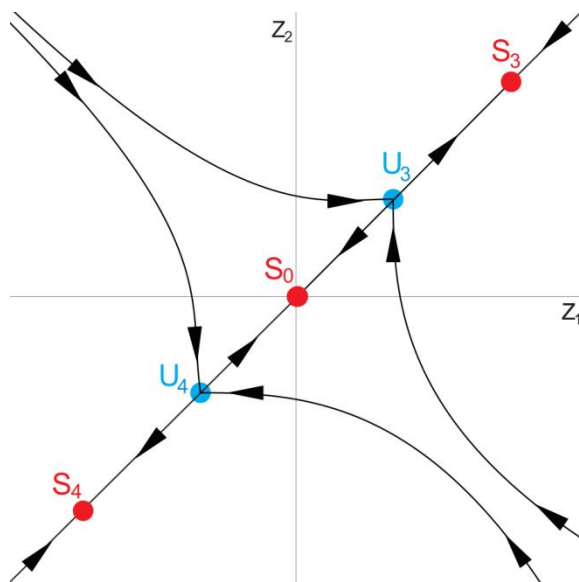


Рис. 9. Фазовый портрет отображения при $d_6 < d < d_7$

14) Наконец, при $d = d_6$ симметричные друг другу устойчивые узлы S_3 и S_4 сливаются с симметричными седлами U_3 и U_4 и исчезают. При $d > d_6$ отображение имеет единственное нулевое устойчивое состояние.

Полученный сценарий фазовых перестроек характерен для любых $(\alpha, \beta) \in A'_3$.

Отличия от рассмотренного случая могут состоять в очередности бифуркации исчезновения симметричных друг другу устойчивых узлов S_1 и S_2 и бифуркации слияния неустойчивого узла U_7 с седлом U_9 . Аналогичные изменения порядка возможны с узлами S_5 и S_6 и неустойчивыми точками U_8 и U_{10} .

Для области A''_3 присуще образование пары устойчивых фокусов из точки S_{12} , а из S_{56} наоборот – пары устойчивых узлов. Также для данной области характерны различные сценарии исчезновения точек типа фокус. Наряду с обычным слиянием с ближайшими седловыми точками, обнаруживаются бифуркации потери устойчивости фокусов, связанные с образованием неустойчивого многообразия из петли сепаратрисы. Также выявляются более сложные случаи одновременного сосуществования устойчивого и неустойчивого многообразия вокруг точек типа фокус. Тем не менее, описанные отличия не влияют на количество устойчивых неподвижных точек – их число с увеличением параметра d по-прежнему следует согласно описанному сценарию: $5 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 1$.

Заключение

На координатной плоскости параметров были выделены области, соответствующие различным бифуркационным сценариям. Благодаря исследованию релаксационного отображения с помощью приложения, осуществляющего поиск устойчивых режимов с помощью параллельных вычислений на центральном процессоре, в каждой из областей были подробно рассмотрены основные перестройки, происходящие в фазовом пространстве отображения. Также были установлены множества значений параметров отображения (3), при которых возможно одновременное сосуществование семи, шести или пяти устойчивых неподвижных точек.

Список литературы

- Кащенко С.А., Майоров В.В.* Модели волновой памяти. М.: Либроком, 2009.
- Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Релаксационные автоколебания в нейронных системах I// Дифференциальные уравнения, 2011. Т. 47. № 7. С. 919 – 932.
- Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Релаксационные автоколебания в нейронных системах II// Дифференциальные уравнения, 2011. Т. 47. № 12. С. 1675 – 1692.
- Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Релаксационные автоколебания в нейронных системах III// Дифференциальные уравнения, 2012. Т. 48. № 2. С. 155 – 170.
- Глызин С. Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Дискретные автоволны в нейронных системах // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52, № 5. С. 840–858.
- Глызин С. Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Моделирование эффекта взрыва в нейронных системах // Математические заметки. 2013. Т. 93, № 5. С. 682–699.
- Ивановский Л.И., Самсонов С.О.* Фазовые перестройки одной двумерной динамической системы с импульсным воздействием // Модел. И анализ информ. систем, 2014. Т. 21, №6. С. 179 – 181.