

УДК 314.15.926

# Устойчивые режимы динамических систем с импульсными воздействиями<sup>1</sup>

Л. И. Ивановский

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,  
Ярославль 150003. E-mail: *leon19unknown@gmail.com*

## Stable modes of dynamical systems with impulses

L. I. Ivanovsky

P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl 150003.

**Abstract** A mathematical model of a system of three coupled singularly perturbed oscillator with delay. For her study questions of existence and asymptotic stability of the periodic solutions based on the bifurcation analysis of a special two-dimensional map depending on different initial values ??of the parameters and boundary conditions. Particular attention is paid to the number of coexisting stable regimes. This work consists of two parts. The first part is devoted to the formulation of the problem. In it a lot of attention is paid to the mathematical model and the necessary theoretical calculations, the supplying to the asymptotic study of a special two-dimensional map. It also describes the features of the numerical studies. The second part presents the results of numerical studies. It describes the main adjustment occurring in the phase space of a special two-dimensional map based on bifurcation theory.

**Keywords:** stable mode, phase adjustment, oscillator.

**MSC 2010:** 47D99

**Аннотация.** Рассматривается математическая модель системы из трех связанных, сингулярно возмущенных осцилляторов с запаздыванием. Для нее изучаются вопросы существования, устойчивости и асимптотического представления периодических решений на основании бифуркационного анализа специального двумерного отображения в зависимости от различных значений начальных параметров, а также краевых условий. Особое внимание уделяется числу сосуществующих устойчивых режимов. Данная работа состоит двух частей. Первая часть посвящена постановке задачи. В ней большое внимание уделяется математической модели и необходимым теоретическим выкладкам, подводящим к асимптотическому исследованию специального двумерного отображения. Здесь также рассказывается об особенностях численного исследования. Во второй части представлены результаты численного исследования. Здесь рассмотрены основные перестройки, происходящие в фазовом пространстве специального двумерного отображения на основе теории бифуркаций.

**Ключевые слова:** устойчивый режим, фазовые перестройки, осциллятор.

---

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00158)

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим цепочку из трех связанных, сингулярно возмущенных осцилляторов с запаздыванием

$$\dot{u}_j = d(a_1 u_{j-1} - a_2 u_j + u_{j+1}) + \lambda(-1 + \alpha f(u_j(t-1)) - \beta g(u_j))u_j, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (1)$$

где  $u_j = u_j(t) > 0$  моделируют мембранные потенциалы нейронов, параметры  $a_1, a_2 \in \{0, 1, 2\}, \lambda \gg 1, \beta > 0, \alpha > 1 + \beta$ , а гладкие функции  $f(u), g(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$  удовлетворяют условиям  $0 < \beta g(u) < \alpha, f(0) = g(0) = 1$  и  $f(u), g(u), u f'(u), u g'(u) = O(1/u)$  при  $u \rightarrow +\infty$ . В данной работе изучаются три вида систем (1) для различных значений параметров  $a_1, a_2$  и краевых условий на  $u_0, u_4$ : а)  $a_1 = 1, a_2 = 2, u_0 = u_1, u_3 = u_4$ ; б)  $a_1 = 1, a_2 = 2, u_0 = u_3, u_1 = u_4$ ; с)  $a_1 = 0, a_2 = 1, u_1 = u_4$ .

Для сингулярно возмущенной системы (1) во всех перечисленных случаях, в статьях [1-3] с помощью замен следующего вида

$$u_1 = \exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon = \frac{1}{\lambda} \ll 1,$$

$$u_j = \exp\left(\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j-1} y_k\right), \quad j = 2, 3,$$

где  $x, y_1, \dots, y_{m-1}$  — новые переменные, было доказано, что они при достаточно большом  $\lambda$  могут быть сведены к двумерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений без малых параметров, но с импульсными воздействиями:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= d(e^{y_2} + a_1 e^{-y_1} - e^{y_1} - a_1 e^{-y_0}) \\ \dot{y}_2 &= d(e^{y_3} + a_1 e^{-y_2} - e^{y_2} - a_1 e^{-y_1}) \end{aligned} \quad (2)$$

$$y_j(+0) = \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} y_j(-0), \quad y_j(1+0) = y_j(1-0) - \frac{\alpha}{\alpha - 1} y_j(+0),$$

$$y_j(\alpha+0) = (1 + \beta) y_j(\alpha-0), \quad y_j(\alpha+1+0) = y_j(\alpha+1-0) - \frac{\alpha}{1 + \beta} y_j(\alpha+0).$$

Значения переменных  $y_0, y_3$  зависят от начальных условий на  $u_0$  и  $u_4$ : а)  $u_0 = u_1, u_3 = u_4$ :  $y_0 = y_3 = 0$ ; б)  $u_0 = u_3, u_1 = u_4$ :  $y_0 = y_3 = -(y_1 + y_2)$ ; с)  $u_1 = u_4$ :  $y_3 = -(y_1 + y_2)$

Рассмотрим решения системы (2)  $y_1(t, z_1, z_2), y_2(t, z_1, z_2)$  с начальными условиями  $y_1(-0, z_1, z_2) = z_1, y_2(-0, z_1, z_2) = z_2$ . Для отображения

$$\Phi(z) : \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_1(T_0, z_1, z_2) \\ y_2(T_0, z_1, z_2) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

в статьях [1-3] было доказано, что экспоненциально устойчивым неподвижным точкам отображения (3) соответствуют орбитально асимптотически устойчивые

циклы систем (1) и (2). Другими словами, для того, чтобы говорить об устойчивых циклах системы (1) и системы (2) соответственно, достаточно изучить неподвижные точки отображения (3). Они и являлись объектами исследования. В отображении (3) функции  $y_1(t, z_1, z_2)$  и  $y_2(t, z_1, z_2)$  имеют начальные условия  $y_1(-0) = z_1, y_2(-0) = z_2$ . Эти функции связаны с исходными переменными приближенными равенствами  $y_1 \approx \ln u_2 - \ln u_1, y_2 \approx \ln u_3 - \ln u_2$  соответственно и характеризуют фазовые сдвиги между компонентами системы (1). Величина  $T_0 = \alpha + 1 + (\beta + 1)/(\alpha - \beta - 1)$  определяет главную часть периода устойчивого цикла одиночного осциллятора системы (1).

Асимптотический анализ отображения (3) позволяет показать, что при достаточно малых значениях параметра  $d$  оно имеет как минимум четыре устойчивые неподвижные точки. При этом нулевое состояние равновесия устойчиво для любых значений  $d$ . Ему соответствует однородный (синхронный) цикл системы (1). Задача исследования состоит в определении таких значений параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых отображение (3) имеет наибольшее число устойчивых неподвижных точек. Также изучались вопросы фазовых перестроек, происходящих в фазовом пространстве отображения (3). Поскольку описать динамические свойства отображения (3) в полной мере с использованием одного лишь аналитического аппарата затруднительно, исследование осуществлялось с помощью специально разработанного приложения. Расчет координат неподвижных точек осуществлялся параллельно, с помощью одновременного вычисления облака траекторий на независимых потоках центрального процессора компьютера. Полученные численные результаты отображаются в виде фазового портрета отображения (3). В зависимости от различных значений начальных параметров изучаются вопросы существования и устойчивости релаксационных периодических решений. В процессе исследования, особое внимание уделялось числу сосуществующих устойчивых режимов отображения (3).

## 2. Результаты численного исследования

### 2.1. Случай $a_1 = 1, a_2 = 2, u_0 = u_1, u_3 = u_4$

На координатной плоскости параметров  $(\alpha, \beta)$  можно выделить области  $A_1, A_2, A_3$  и кривые  $l_0, \dots, l_4$ . Графическая визуализация данных множеств приведена на рис. 1.

Наиболее важным элементом построения введенных областей, является прямая  $l_0 = \{(\alpha, \beta) : \beta = \alpha - 2\}$ . Относительно нее симметрично проведены кривые  $l_2$  и  $l_3$ , касающиеся  $l_0$  в точке  $(2, 0)$ . Они являются границами области  $A_2 = \{(\alpha, \beta) : \beta > l_3, \beta < l_2\}$ . Также в точке  $(2, 0)$  проведена кривая  $l_4$ , касательная к прямой  $l_0$ , в совокупности с осью абсцисс образующая границы области  $A_1 = \{(\alpha, \beta) : \beta > 0, \beta < l_4\}$ . Двусвязная область  $A_3$  представляется в виде:  $A_3 = \{(\alpha, \beta) : \beta > l_2, \beta < l_1; \beta > l_4, \beta < l_3\}$ , где прямая  $l_1 = \{(\alpha, \beta) : \beta = \alpha - 1\}$ .

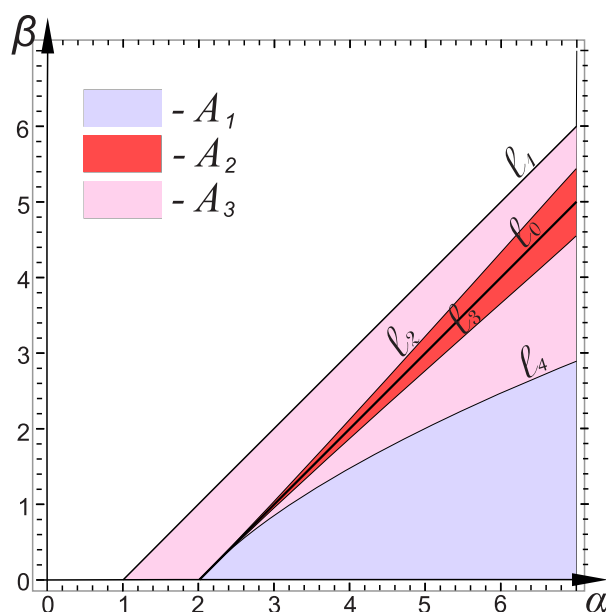


Рис. 1. Области параметров с одинаковыми бифуркационными сценариями

Далее, как и в статьях [5, 6], рассмотрим типичные бифуркации для каждой из введенных областей.

При изменении параметра  $d$  для любых фиксированных значений пары  $(\alpha, \beta) \in A_1$  в фазовом пространстве отображения наблюдается один и тот же сценарий бифуркационных перестроек. Для определенности возьмем  $\alpha = 5,0$  и  $\beta = 0,4$  и начнем менять значение параметра  $d$ . Подобный численный анализ отображения (3) позволяет получить следующую последовательность бифуркаций:

1. При  $d < d_1$ ;  $d_1 \approx 0,019$  отображение имеет пять устойчивых неподвижных точек и шесть неустойчивых. Схематическое изображение фазового портрета для данного случая можно увидеть на рис. 2а. Буквами  $S_j$  обозначены устойчивые, а  $U_j$  — неустойчивые неподвижные точки, черными линиями показаны сепаратрисы, а серыми — некоторые фазовые кривые.
2. При  $d = d_1$  два симметричных друг другу седла  $U_5$  и  $U_6$  сливаются с самосимметричной точкой  $S_4$  и отбирают у нее устойчивость, образуя седло  $U'$ .
3. При  $d_1 < d < d_2$ ;  $d_2 \approx 0,031$  отображение имеет четыре устойчивые неподвижные точки и пять неустойчивых. Фазовый портрет для данного случая изображен на рис. 2б.

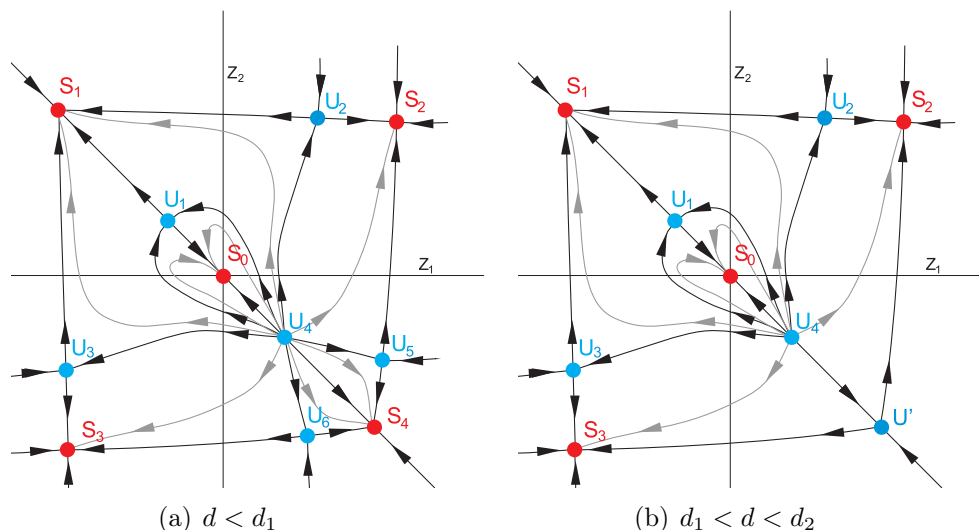


Рис. 2. Фазовые портреты отображения

4. При  $d = d_2$  неустойчивый узел  $U_4$  и седло  $U_7$ , сливаясь, пропадают.
5. При  $d_2 < d < d_3$ ;  $d_3 \approx 0,059$  отображение имеет четыре устойчивые неподвижные точки и три неустойчивые. Схема фазового пространства представлена на рис. 3а.
6. При  $d = d_3$  устойчивый узел  $S_1$  и седло  $U_1$ , сливаясь друг с другом, пропадают.
7. При  $d_3 < d < d_4$ ;  $d_4 \approx 0,127$  отображение имеет три устойчивые неподвижные точки и две неустойчивые. Фазовый портрет изображен на рис. 3б.

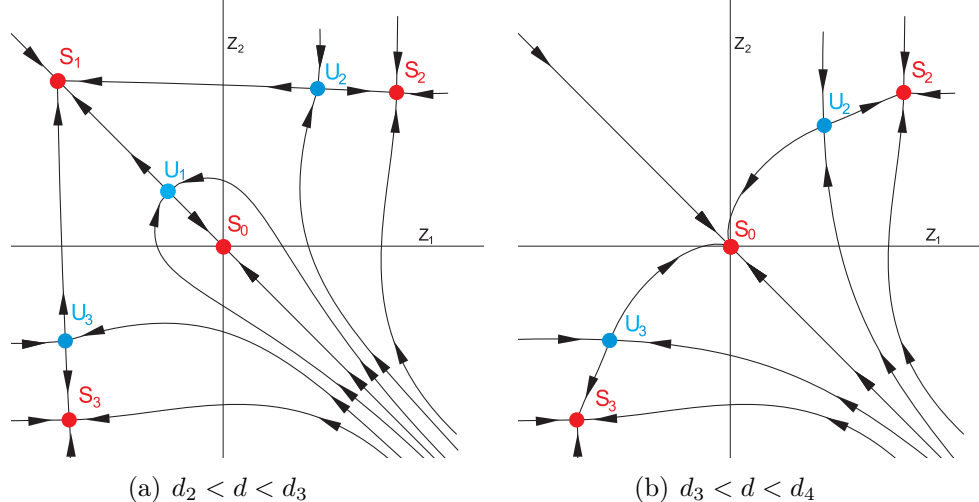


Рис. 3. Фазовые портреты отображения

8. Последняя бифуркация происходит при  $d = d_4$ . Симметричные друг другу устойчивые узлы  $S_2$  и  $S_3$  сливаются с симметричными седлами  $U_2$  и  $U_3$  и

исчезают. Тем самым, при  $d > d_4$  отображение имеет единственное нулевое устойчивое состояние.

Полученный сценарий фазовых перестроек верен для любых  $(\alpha, \beta) \in A_1$ . Отличия от рассмотренного случая состоят лишь в числовых выражениях бифуркационных значений параметра  $d$ .

При изменении параметра  $d$  для любых фиксированных значений пары  $(\alpha, \beta) \in A_2$  в фазовом пространстве отображения наблюдается один и тот же сценарий бифуркационных перестроек. Для удобства зафиксируем величины  $\alpha = 5.0$  и  $\beta = 3.0$ . При изменении параметра  $d$  для заданных величин  $\alpha$  и  $\beta$  получается следующая последовательность бифуркаций:

1. При  $d < d_1$ ;  $d_1 \approx 0,047$  отображение имеет пять устойчивых неподвижных точек и восемь неустойчивых. Схематическое изображение фазового портрета отображения для данного случая можно увидеть на рис. 4а.
2. При  $d = d_1$  от устойчивого самосимметричного узла  $S_{12}$  ответвляется пара симметричных друг другу устойчивых узлов  $S_1$  и  $S_2$  и самосимметричная седловая точка  $U_9$ . Одновременно с этой бифуркацией подобная происходит и с устойчивым узлом  $S_{56}$ . Он также распадается на два устойчивых узла  $S_5$  и  $S_6$  и седло  $U_{10}$ .
3. При  $d_1 < d < d_2$ ;  $d_2 \approx 0,056$  отображение имеет семь устойчивых неподвижных точек. Фазовый портрет для данного случая изображен на рис. 4б.

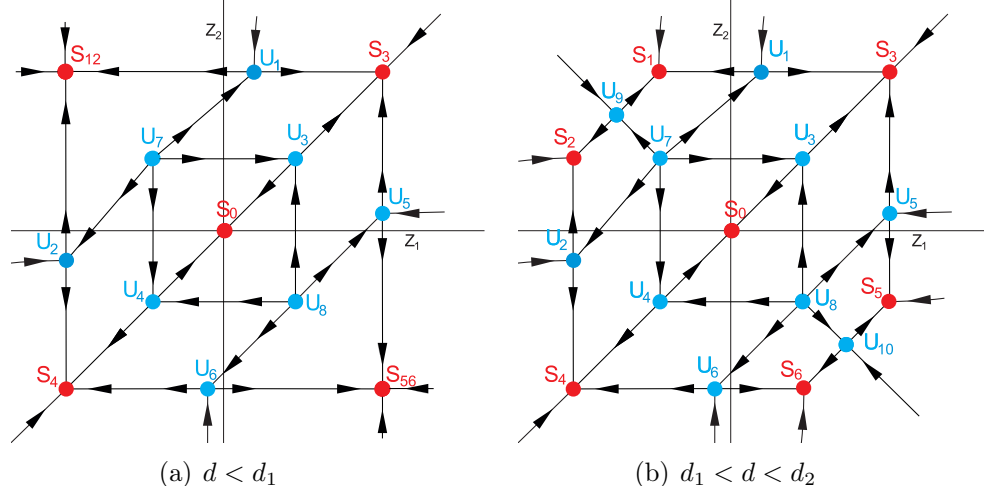


Рис. 4. Фазовые портреты отображения

4. При  $d = d_2$  неустойчивые узлы  $U_7$  и  $U_8$  сливаются соответственно с седловыми точками  $U_9$  и  $U_{10}$ .
5. При  $d_2 < d < d_3$ ;  $d_3 \approx 0,058$  отображение имеет семь устойчивых неподвижных точек. Фазовый портрет для данного случая изображен на рис. 5а.

6. При  $d = d_3$  симметричные друг другу устойчивые узлы  $S_1$  и  $S_2$  сливаются с симметричными седлами  $U_1$  и  $U_2$  и исчезают. Одновременно с этим проходит также аналогичная бифуркация, в результате которой исчезают устойчивые узлы  $S_5$  и  $S_6$  и седла  $U_5$  и  $U_6$ .
7. При  $d_3 < d < d_4$ ;  $d_4 \approx 0,172$  отображения имеет три устойчивые и две неустойчивые неподвижные точки. Фазовый портрет изображен на рис. 5b.

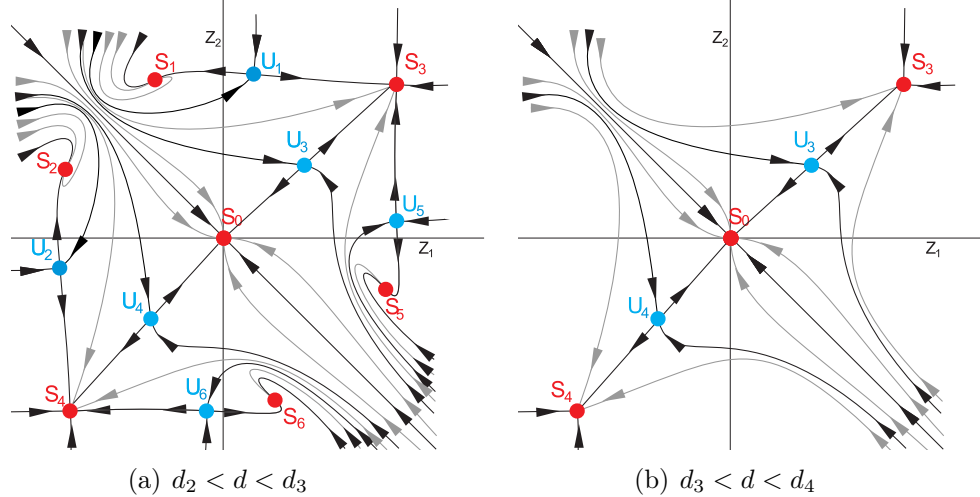


Рис. 5. Фазовые портреты отображения

8. Наконец, при  $d = d_4$  симметричные друг другу устойчивые узлы  $S_3$  и  $S_4$  сливаются с симметричными седлами  $U_3$  и  $U_4$  и исчезают. При  $d > d_4$  отображение имеет единственное нулевое устойчивое состояние.

Далее численно было исследовано поведение отображения в подобластях  $A'_2 = \{(\alpha, \beta) : \beta > l_0, \beta < l_2\}$  и  $A''_2 = \{(\alpha, \beta) : \beta > l_3, \beta < l_0\}$ . Эти области образованы разделением области  $A_2$  прямой  $l_0$  на две компоненты. Обнаружилось, что во введенных областях нарушена одновременность протекания бифуркаций распада устойчивых узлов  $S_{12}$  и  $S_{56}$ , а также последующих бифуркаций слияния их компонент. Для области  $A'_2$  характерен сдвиг бифуркации распада устойчивого узла  $S_{12}$  по  $d$  вперед. Она происходит при большем  $d$ . Также бифуркация распада устойчивого узла  $S_{56}$  сдвигается по  $d$  назад и происходит при меньшем  $d$  соответственно. Для области  $A''_2$  наоборот свойственен сдвиг бифуркации распада  $S_{12}$  по  $d$  назад, а узла  $S_{56}$  — вперед.

Поскольку область  $A_3$  - двусвязная, рассмотрим следующие ее подобласти:

$$A'_3 = \{(\alpha, \beta) : \beta > l_2, \beta < l_1\}, \quad A''_3 = \{(\alpha, \beta) : \beta > l_4, \beta < l_3\}.$$

Для значений  $(\alpha, \beta) \in A'_3$ , например, при  $\alpha = 4,0$  и  $\beta = 2,3$  наблюдаются следующие бифуркации:

1. При  $d < d_1$ ;  $d_1 \approx 0.04$  отображение имеет пять устойчивых неподвижных точек и восемь неустойчивых. Схематическое изображение фазового портрета отображения для данного случая можно увидеть на рис. 6а.
2. При  $d = d_1$  от устойчивого самосимметричного узла  $S_{12}$  ответвляется пара симметричных друг другу устойчивых узлов  $S_1$  и  $S_2$  и самосимметричная седловая точка  $U_9$ .

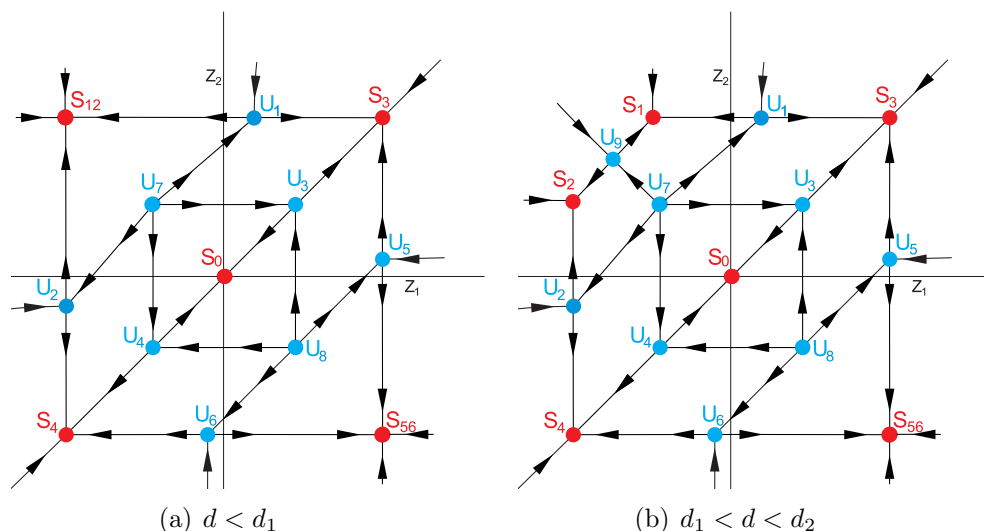


Рис. 6. Фазовые портреты отображения

3. При  $d_1 < d < d_2$ ;  $d_2 \approx 0,049$  отображение имеет шесть устойчивых неподвижных точек. Фазовый портрет для данного случая изображен на рис. 6b.
4. При  $d = d_2$  симметричные друг другу устойчивые узлы  $S_1$  и  $S_2$  сливаются с симметричными седлами  $U_1$  и  $U_2$  и исчезают.
5. При  $d_2 < d < d_3$ ;  $d_3 \approx 0,053$  отображение имеет четыре устойчивые неподвижные точки. Фазовый портрет изображен на рис. 7а.
6. При  $d = d_3$  неустойчивый узел  $U_7$  сливается с седловой точкой  $U_9$ .
7. При  $d_3 < d < d_4$ ;  $d_4 \approx 0,055$  отображение по-прежнему имеет четыре устойчивые неподвижные точки. Фазовый портрет для данного случая изображен на рис. 7b.



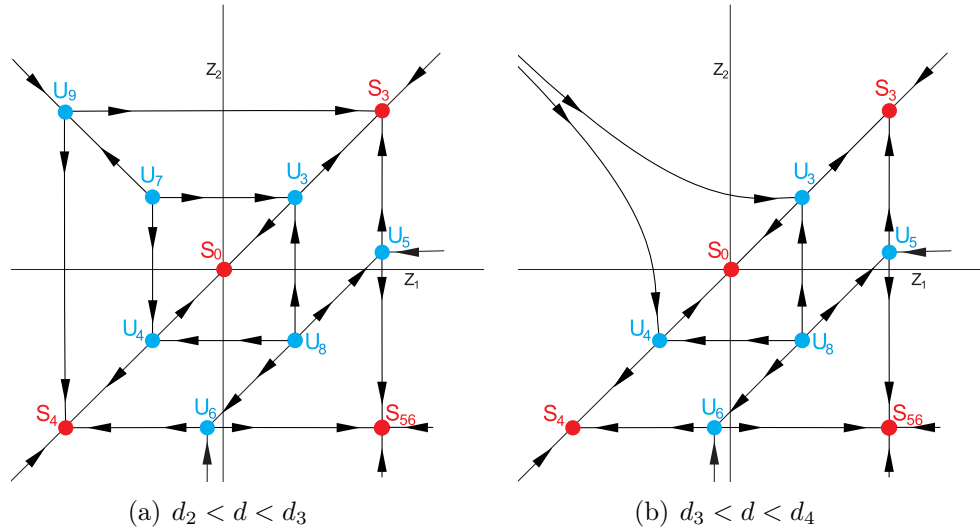


Рис. 7. Фазовые портреты отображения

8. При  $d = d_4$  от устойчивого самосимметричного узла  $S_{56}$  ответвляется пара симметричных друг другу устойчивых узлов  $S_5$  и  $S_6$  и самосимметричная седловая точка  $U_{10}$ .
9. При  $d_4 < d < d_5$ ;  $d_5 \approx 0,057$  отображение имеет пять устойчивых неподвижных точек. Фазовый портрет для данного случая изображен на рис. 8а.
10. При  $d = d_5$  неустойчивый узел  $U_8$  сливается с седловой точкой  $U_{10}$ . Одновременно с этим симметричные устойчивые неподвижные точки  $S_5$  и  $S_6$  меняют свой тип и становятся устойчивыми фокусами.
11. При  $d_5 < d < d_6$ ;  $d_6 \approx 0,069$  отображение имеет пять устойчивых неподвижных точек. Фазовый портрет для данного случая изображен на рис. 8б.

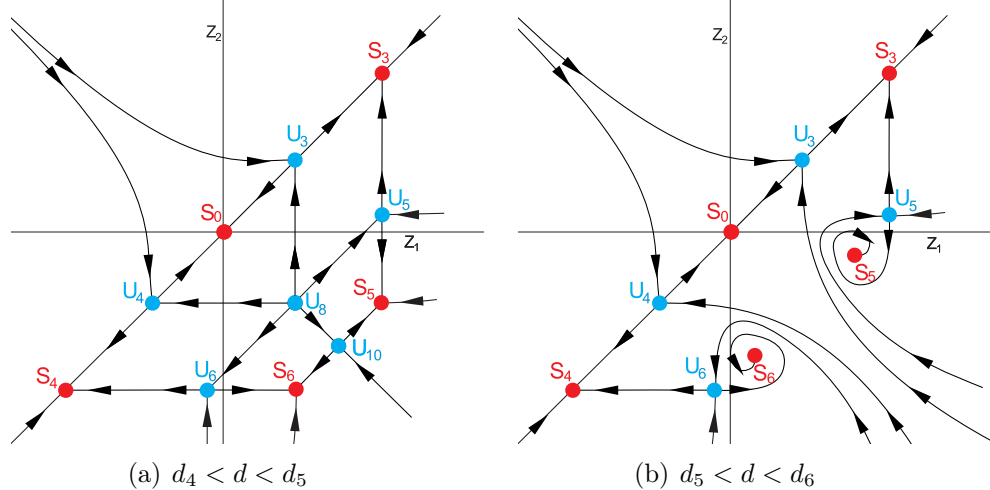


Рис. 8. Фазовые портреты отображения

12. При  $d = d_6$  симметричные друг другу устойчивые фокусы  $S_5$  и  $S_6$  сливаются с симметричными седлами  $U_5$  и  $U_6$  и исчезают.
13. При  $d_6 < d < d_7$ ;  $d_7 \approx 0,17$  отображение имеет три устойчивые неподвижные точки и две неустойчивые. Фазовый портрет для данного случая изображен на рис. 9.

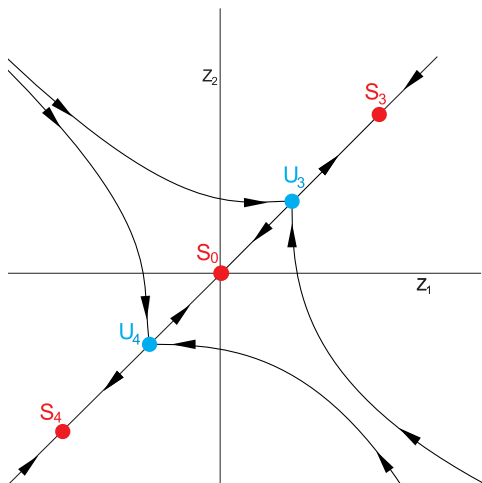


Рис. 9. Фазовый портреты отображения при  $d_6 < d < d_7$

14. Наконец, при  $d = d_6$  симметричные друг другу устойчивые узлы  $S_3$  и  $S_4$  сливаются с симметричными седлами  $U_3$  и  $U_4$  и исчезают. При  $d > d_6$  отображение имеет единственное нулевое устойчивое состояние.

Полученный сценарий фазовых перестроек характерен для любых  $(\alpha, \beta) \in A'_3$ . Отличия от рассмотренного случая могут состоять в очередности бифуркации исчезновения симметричных друг другу устойчивых узлов  $S_1$  и  $S_2$  и бифуркации слияния неустойчивого узла  $U_7$  с седлом  $U_9$ . Аналогичные изменения возможны с узлами  $S_5$  и  $S_6$  и неустойчивыми точками  $U_8$  и  $U_{10}$ .

## 2.2. Случай $a_1 = 1, a_2 = 2, u_0 = u_3, u_1 = u_4$

На координатной плоскости параметров  $(\alpha, \beta)$  можно выделить области  $A_1, A_2, A_3$  и кривые  $l_0, \dots, l_3$ . Графическая визуализация данных множеств приведена на рис. 10.

Наиболее важным элементом построения введенных областей является прямая  $l_0 = \{(\alpha, \beta) : \beta = \alpha - 2\}$ . Относительно нее симметрично проведены кривые  $l_2$  и  $l_3$ , касающиеся  $l_0$  в точке  $(2, 0)$ . Эти кривые являются границами области  $A_2 = \{(\alpha, \beta) : \beta > l_2, \beta < l_1\}$ , где прямая  $l_1 = \{(\alpha, \beta) : \beta = \alpha - 1\}$ . Области  $A_1$  и  $A_3$  представляются в виде  $A_1 = \{(\alpha, \beta) : \beta > 0, \beta < l_3\}$  и  $A_3 = \{(\alpha, \beta) : \beta > l_2, \beta < l_3\}$  соответственно.

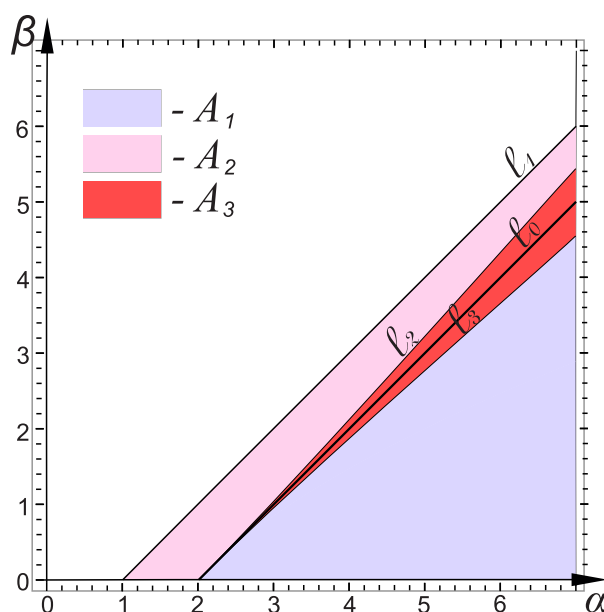


Рис. 10. Области параметров с одинаковыми бифуркационными сценариями

Далее, как и в статье [4], рассмотрим типичные бифуркации для каждой из введенных областей.

При изменении параметра  $d$  для любых фиксированных значений пары  $(\alpha, \beta) \in A_1$  в фазовом пространстве отображения наблюдается один и тот же сценарий фазовых перестроек. Для определенности возьмем  $\alpha = 5,0$  и  $\beta = 0,4$ . При изменении параметра  $d$  для заданных величин  $\alpha$  и  $\beta$  получается следующая последовательность бифуркаций:

1. При  $d < d_1$ ;  $d_1 \approx 0,021$  отображение (3) имеет семь устойчивых неподвижных точек и двенадцать неустойчивых. Схематическое изображение фазового портрета для данного случая можно увидеть на рис. 11a.
2. При  $d = d_1$  три пары симметричных друг относительно друга седел  $U_7$  и  $U_8$ ,  $U_9$  и  $U_{10}$ ,  $U_{11}$  и  $U_{12}$  одновременно сливаются с устойчивыми узлами  $S_2$ ,  $S_4$  и  $S_6$ , отбирая у них устойчивость, образуя седла  $U'_2$ ,  $U'_4$  и  $U'_6$  соответственно.
3. При  $d_1 < d < d_2$ ;  $d_2 \approx 0,031$  отображение имеет четыре устойчивые неподвижные точки и девять неустойчивых. Фазовый портрет для данного случая изображен на рис. 11b.

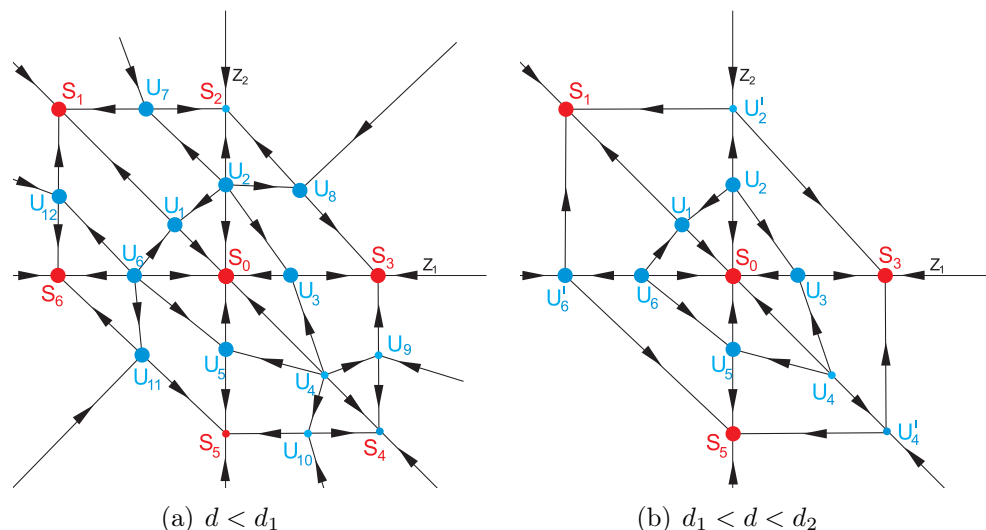
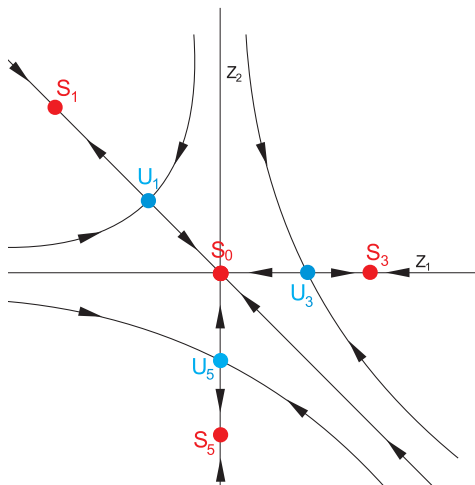


Рис. 11. Фазовые портреты отображения

4. При  $d = d_2$  неустойчивые узлы  $U'_2$ ,  $U'_4$  и  $U'_6$  одновременно сливаются с неустойчивыми седлами  $U_2$ ,  $U_4$  и  $U_6$ , и пропадают.
5. При  $d_2 < d < d_3$ ;  $d_3 \approx 0,058$  отображение имеет четыре устойчивые неподвижные точки и три неустойчивые, как это представлено представлено на рис. 12.

Рис. 12. Фазовый портрет отображения при  $d_2 < d < d_3$ 

6. Последняя бифуркация происходит при  $d = d_3$ . Устойчивые узлы  $S_1$ ,  $S_3$  и  $S_5$ , сливаясь с седлами  $U_1$ ,  $U_3$  и  $U_5$ , пропадают. Тем самым, при  $d > d_4$  отображение имеет лишь одно единственное нулевое устойчивое состояние.

Полученный сценарий фазовых перестроек верен для любых  $(\alpha, \beta) \in A_1$ . Отличия от рассмотренного случая состоят лишь в числовых выражениях бифуркационных значений параметра  $d$ .

При изменении параметра  $d$  для любых фиксированных значений пары  $(\alpha, \beta) \in A_2$  в фазовом пространстве отображения наблюдается один и тот же сценарий фазовых перестроек. Для удобства зафиксируем величины  $\alpha = 1,9$  и  $\beta = 0,1$  и будем менять значение параметра  $d$ . В результате для отображения (3) получим следующую последовательность бифуркаций:

1. При  $d < d_1$ ;  $d_1 \approx 0,003$  модельное отображение имеет семь устойчивых неподвижных точек и двенадцать неустойчивых. Схематическое изображение фазового портрета отображения (3) для этого случая можно увидеть на рис. 13а.
2. При  $d = d_1$  три пары симметричных друг относительно друга седла  $U_7$  и  $U_{12}$ ,  $U_8$  и  $U_9$ ,  $U_{10}$  и  $U_{11}$  одновременно сливаются с устойчивыми узлами  $S_1$ ,  $S_3$  и  $S_5$ , отбирая у них устойчивость, и тем самым, образуя седла  $U'_1$ ,  $U'_3$  и  $U'_5$  соответственно.
3. При  $d_1 < d < d_2$ ;  $d_2 \approx 0,006$  отображение имеет четыре устойчивые неподвижные точки и девять неустойчивых. Фазовый портрет для данного случая изображен на рис. 13б.

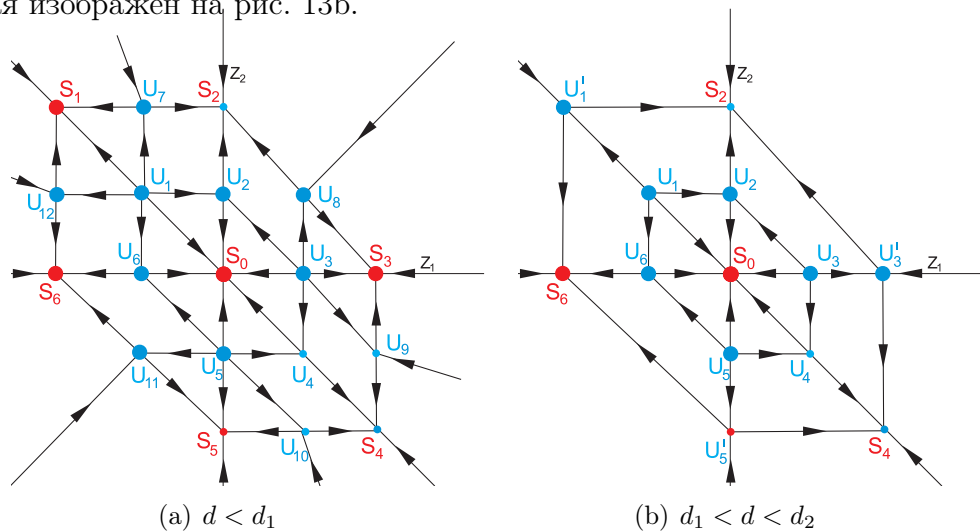
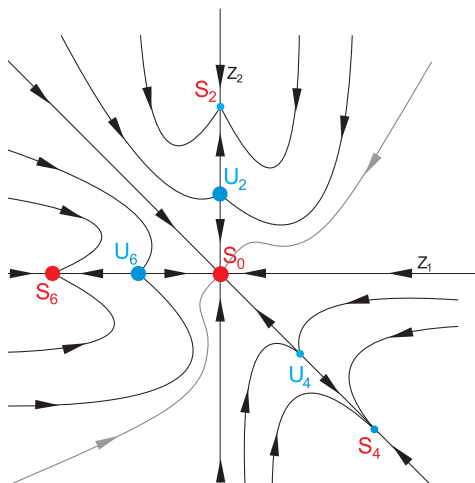


Рис. 13. Фазовые портреты отображения

4. При  $d = d_2$  неустойчивые узлы  $U'_1$ ,  $U'_3$  и  $U'_5$  одновременно сливаются с неустойчивыми седлами  $U_1$ ,  $U_3$  и  $U_5$  и пропадают.
5. При  $d_2 < d < d_3$ ;  $d_3 \approx 0,021$  отображение имеет четыре устойчивые неподвижные точки и три неустойчивые, как это представлено на рис. 14.
6. Последняя бифуркация происходит при  $d = d_3$ . Устойчивые узлы  $S_2$ ,  $S_4$  и  $S_6$ , сливаясь с седлами  $U_2$ ,  $U_4$  и  $U_6$ , пропадают. Тем самым, при  $d > d_4$  отображение имеет лишь одно единственное нулевое устойчивое состояние.

Рис. 14. Фазовый портрет отображения при  $d_2 < d < d_3$ 

Полученный сценарий фазовых перестроек верен для любых  $(\alpha, \beta) \in A_2$ . Отличия от рассмотренного случая состоят лишь в числовых выражениях бифуркационных значений параметра  $d$ .

Рассмотрим фазовые портреты с наибольшим числом устойчивых состояний равновесия (рис. 11а и 13а). Различия в них заключаются лишь в том, что в первом случае точки  $U_1, U_3, U_5$  являлись неустойчивыми седлами, точки  $U_2, U_4, U_6$  являлись неустойчивыми узлами, а во втором случае — все в точности наоборот. В связи с этим возник вопрос, как изменяется поведение состояний равновесия  $U_1, \dots, U_6$  при переходе из одной области параметров в другую. В результате численного исследования, при зафиксированных  $\alpha$  и  $d$  и изменении значения  $\beta$  была обнаружена область параметров  $A_3$ , для которой обнаруживалось существование шести устойчивых и шести неустойчивых режимов, а также неустойчивого многообразия  $M_U$ , каждая точка которого является неустойчивым состоянием равновесия (см. рис. 15):

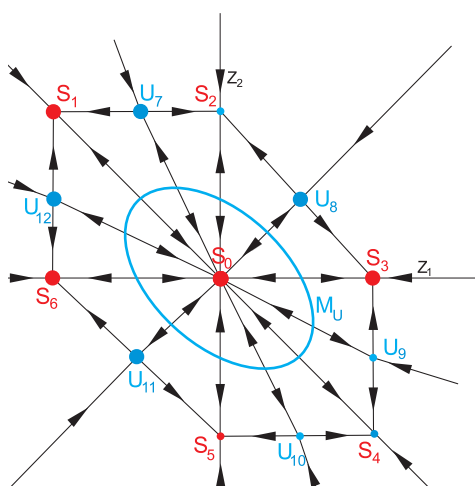


Рис. 15. Фазовый портрет отображения

Для области  $A_3$  рассмотрим следующие подобласти:

$$A'_3 = \{(\alpha, \beta) : \beta > l_3, \beta < l_0\}, \quad A''_3 = \{(\alpha, \beta) : \beta > l_0, \beta < l_2\}.$$

При увеличении параметра  $d$  для любых значений пары  $(\alpha, \beta)$  из областей  $A'_3$  и  $A''_3$  в фазовом пространстве отображения наблюдается тот же сценарий фазовых перестроек, что и для областей  $A_1$  и  $A_2$  соответственно.

### 2.3. Случай $a_1 = 0, a_2 = 1, u_1 = u_4$

На координатной плоскости параметров  $(\alpha, \beta)$  можно выделить области  $A_1, A_2, A_3$  и кривые  $l_0, \dots, l_5$ . Графическая визуализация данных множеств приведена на рис. 16.

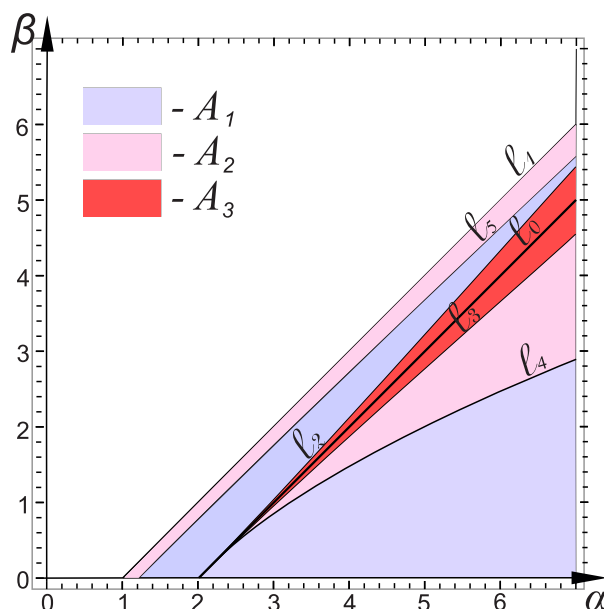


Рис. 16. Области параметров с одинаковыми бифуркационными сценариями

Наиболее важным элементом построения введенных областей, является прямая  $l_0 = \{(\alpha, \beta) : \beta = \alpha - 2\}$ . Относительно нее симметрично проведены кривые  $l_2$  и  $l_3$ , касающиеся  $l_0$  в точке  $(2, 0)$ . Эти кривые являются границами области  $A_2 = \{(\alpha, \beta) : \beta > l_3, \beta < l_2\}$ . В точке  $(2, 0)$  проведена еще и кривая  $l_4$ , касательная к прямой  $l_0$ . Также на рис. 16 имеется прямая  $l_5$ , которая по мере увеличения значения параметра  $\alpha$  приближается к прямой  $l_0$ . В совокупности прямые  $l_1, \dots, l_5$  образуют границы двусвязных областей  $A_1 = \{(\alpha, \beta) : \beta > 0, \beta < l_4; \beta > l_2, \beta < l_5\}$  и  $A_2 = \{(\alpha, \beta) : \beta > l_4, \beta < l_3; \beta > l_5, \beta < l_1\}$ .

Далее рассмотрим типичные бифуркации для каждой из введенных областей.

При изменении параметра  $d$  для любых фиксированных значений пары  $(\alpha, \beta) \in A_1$  в фазовом пространстве отображения наблюдается один и тот же сценарий бифуркационных перестроек. Для определенности возьмем  $\alpha = 3,6$  и  $\beta = 0,4$ .

При изменении параметра  $d$  для заданных величин  $\alpha$  и  $\beta$  получаются следующие бифуркации:

1. При  $d < d_1$ ;  $d_1 \approx 0,008$  отображение имеет четыре устойчивых неподвижных точек и девять неустойчивых. Схематическое изображение фазового портрета для этого случая можно увидеть на рис. 17а.
2. При  $d = d_1$  три узла  $U_1$ ,  $U_3$  и  $U_5$  одновременно сливаются с седлами  $U_7$ ,  $U_8$  и  $U_9$  и исчезают.
3. При  $d_1 < d < d_2$ ;  $d_2 \approx 0,19$  отображение имеет четыре устойчивые неподвижные точки и три неустойчивые. Фазовый портрет для данного случая изображен на рис. 17б.

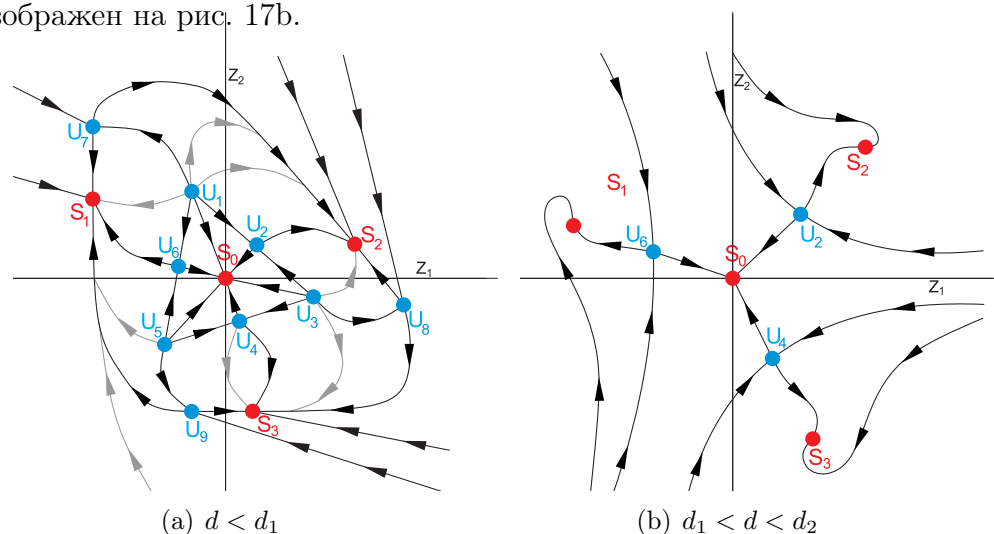


Рис. 17. Фазовые портреты отображения

4. Последняя бифуркация происходит при  $d = d_2$ . Устойчивые узлы  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ , сливаясь с седлами  $U_6$ ,  $U_2$  и  $U_4$  пропадают. Тем самым, при  $d > d_2$  отображение имеет лишь одно единственное нулевое устойчивое состояние.

Полученный сценарий фазовых перестроек верен для любых  $(\alpha, \beta) \in A_1$ . Отличия от рассмотренного случая состоят лишь в числовых выражениях бифуркационных значений параметра  $d$ .

При изменении параметра  $d$  для любых фиксированных значений пары  $(\alpha, \beta) \in A_2$  в фазовом пространстве отображения наблюдается один и тот же сценарий фазовых перестроек. Для удобства зафиксируем величины  $\alpha = 1,9$  и  $\beta = 0,1$  и будем менять значение параметра  $d$ . В результате для отображения (3) получим следующую последовательность бифуркаций:

1. При  $d < d_1$ ;  $d_1 \approx 0,316$  отображение имеет четыре устойчивых неподвижных точек и девять неустойчивых. Схематическое изображение фазового портрета для этого случая можно увидеть на рис. 18а.



2. При  $d = d_1$  седла  $U_7$ ,  $U_8$  и  $U_9$  одновременно подходят к седлам  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ , сливаются с ними и образуют устойчивое многообразие  $M_S$ , по которому осуществляется движение по часовой стрелке. При этом неустойчивые состояния равновесия  $U_1$ ,  $U_3$  и  $U_5$  становятся фокусами.
3. При  $d_1 < d < d_2$ ;  $d_2 \approx 0,317$  отображение имеет три неустойчивые и одну устойчивую неподвижные точки, а также устойчивое многообразие. Сепаратрисы, идущие из точек  $U_1, \dots, U_6$  бесконечно приближаются к устойчивому многообразию  $M_S$ . Фазовый портрет в данном случае имеет вид, изображенный на рис. 18b.

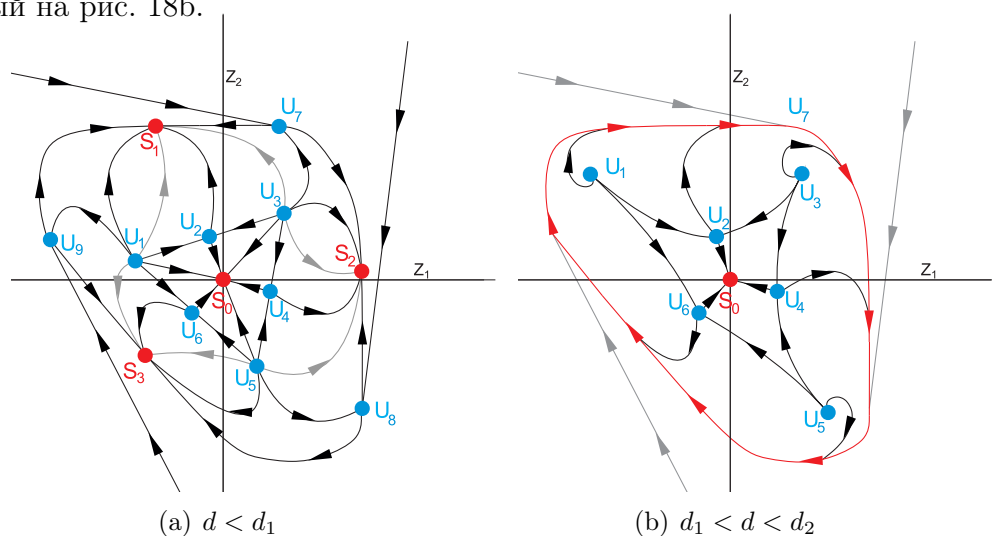


Рис. 18. Фазовые портреты отображения

4. При  $d = d_2$  от неустойчивых узлов  $U_1$ ,  $U_3$  и  $U_5$  отделяются неустойчивые многообразия. Тем самым неустойчивые фокусы  $U_1$ ,  $U_3$  и  $U_5$  становятся устойчивыми фокусами  $S'_1$ ,  $S'_2$  и  $S'_3$ .
5. При  $d_2 < d < d_3$ ;  $d_3 \approx 0,3174$  отображение имеет три неустойчивые и четыре устойчивые неподвижные точки, а также одно устойчивое и три неустойчивых многообразия. Сепаратрисы, идущие из точек  $U_2$ ,  $U_4$  и  $U_6$  бесконечно приближаются к устойчивому многообразию  $M_S$ . Фазовый портрет для данного случая изображен на рис. 19a.
6. При  $d = d_3$  три неустойчивых многообразия, расположенные вокруг фокусов  $S'_1$ ,  $S'_2$  и  $S'_3$  одновременно сливаются с устойчивым многообразием  $M_S$  и пропадают.
7. При  $d_3 < d < d_4$ ;  $d_4 \approx 0,3178$  отображение имеет четыре устойчивые неподвижные точки и три неустойчивых. Фазовый портрет в данном случае имеет вид, изображенный на рис. 19b.

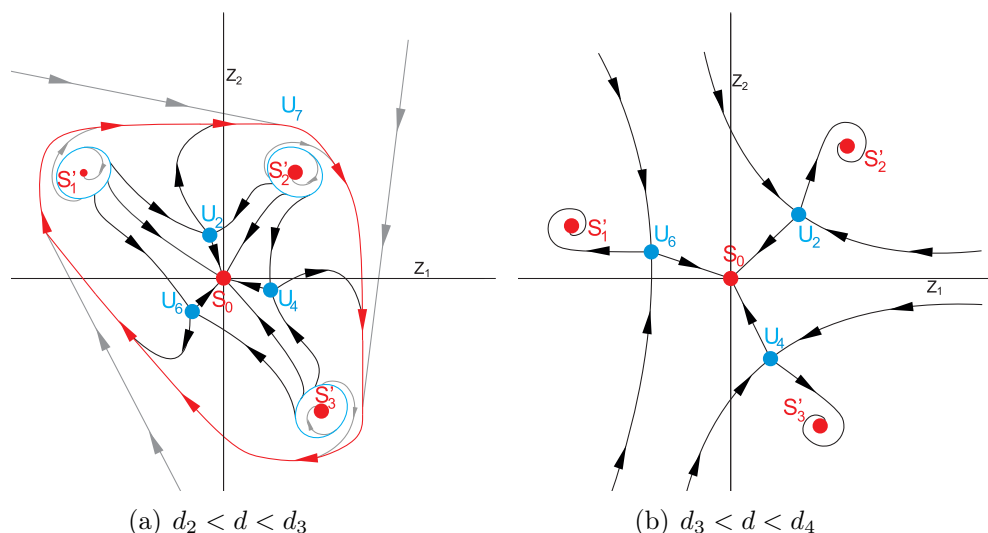


Рис. 19. Фазовые портреты отображения

8. Последняя бифуркация происходит при  $d = d_4$ . Неустойчивые седла  $U_2$ ,  $U_4$  и  $U_6$ , сливаясь с устойчивыми фокусами  $S'_2$ ,  $S'_3$  и  $S'_1$  соответственно, пропадают. Тем самым, при  $d > d_4$  отображение имеет лишь одно единственное нулевое устойчивое состояние.

Полученный сценарий фазовых перестроек верен для любых  $(\alpha, \beta) \in A_2$ . Отличия от рассмотренного случая состоят лишь в числовых выражениях бифуркационных значений параметра  $d$ .

При изменении параметра  $d$  для любых фиксированных значений пары  $(\alpha, \beta) \in A_3$  в фазовом пространстве отображения наблюдается один и тот же сценарий бифуркационных перестроек. Для удобства зафиксируем величины  $\alpha = 2,1$  и  $\beta = 0,1$  и будем менять значение параметра  $d$ . В результате для отображения (3) получим следующую последовательность бифуркаций:

1. При  $d < d_1$ ;  $d_1 \approx 0,013$  отображение имеет семь устойчивых и шесть неустойчивых неподвижных точек, а также неустойчивое многообразие  $M_U$ , по которому осуществляется движение по часовой стрелке. Схематическое изображение фазового портрета для данного случая можно увидеть на рис. 20а.
2. При  $d = d_1$  неустойчивые узлы  $U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6$  одновременно сливаются с устойчивыми седлами  $S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_1$  и исчезают, образуя тем самым устойчивое многообразие  $M_S$ .
3. При  $d_1 < d < d_2$ ;  $d_2 \approx 0,017$  отображение имеет одно устойчивое и одну неустойчивое многообразие, движение по которым осуществляется по часовой стрелке. Фазовый портрет в данном случае имеет вид, изображенный на рис. 20b.

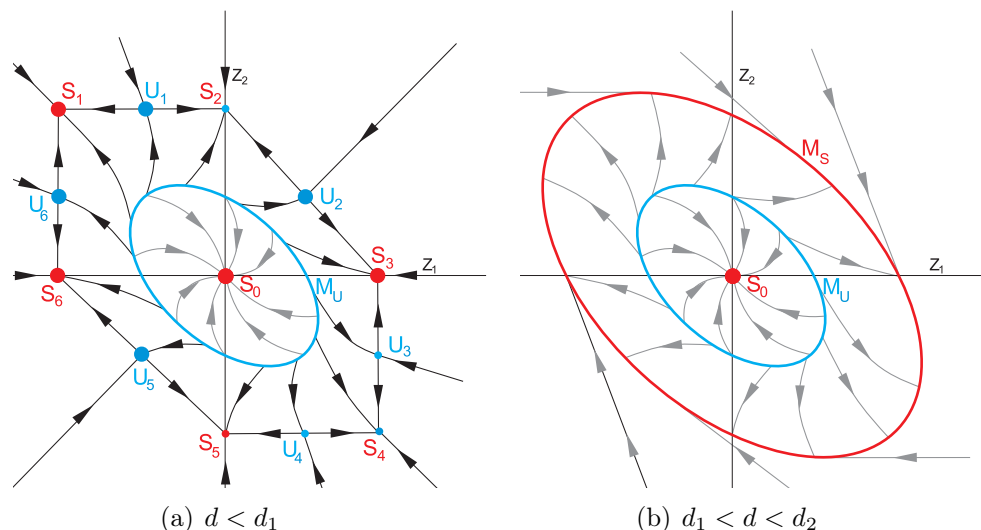


Рис. 20. Фазовые портреты отображения

4. Последняя бифуркация происходит при  $d = d_2$ . Устойчивое многообразие  $M_S$  приближается к неустойчивому  $M_U$ , сливается с ним и пропадает. Тем самым, при  $d > d_2$  отображение имеет лишь одно единственное нулевое устойчивое состояние.

### 3. Заключение

Для трех видов динамических систем с импульсными воздействиями, на координатной плоскости параметров были выделены области, соответствующие различным бифуркационным сценариям. Благодаря численному исследованию, в каждой из областей были подробно рассмотрены основные перестройки, происходящие в фазовом пространстве соответствующего двумерного отображения. Также были установлены множества значений начальных параметров, при которых возможно единовременное сосуществование большего числа устойчивых неподвижных точек.

#### Список цитируемых источников

1. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Релаксационные автоколебания в нейронных системах. I // Дифференциальные уравнения — 2011. — Т. 47, №7. — С. 919–932. [English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh. Relaxation self-oscillations in neuron systems. I // Differential Equations — 2011. V. 47, №7. — P. 927–941.]
2. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Релаксационные автоколебания в нейронных системах. II // Дифференциальные уравнения — 2011. — Т. 47, №12. — С. 1675–1692. [English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh. Relaxation self-oscillations in neuron systems. II // Differential Equations — 2011. V. 47, №12. — P. 1697–1713.]

3. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Релаксационные автоколебания в нейронных системах. III // Дифференциальные уравнения — 2012. — Т. 48, №2. — С. 155–170. [English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh. Relaxation self-oscillations in neuron systems. III // Differential Equations — 2012. V. 48, №2. — P. 159–175.]
4. Ивановский Л. И. Динамические свойства одного класса импульсных систем // Вычисл. техн. в естеств. науках. Методы суперкомп. модел. Ч. 3 — 2015. — С. 126–131. [English transl.: Ivanovsky L. I. Dynamic properties of one class of impulse systems // Computer Technologies in Sciences. Methods of Simulations on Supercomputers. Part 3. Proceedings. — 2015. — P. 126–131 (in Russian).]
5. Ивановский Л. И., Самсонов С. О. Фазовые перестройки одной двумерной динамической системы с импульсным воздействием // Модел. и анализ информ. систем — 2014. — Т. 21, №6. — С. 179–181. [English transl.: Ivanovsky L. I., Samsonov S. O. Phase rebuildings of one two-dimensional dynamic system with impulsive influences // Modeling and Analysis of Information Systems — 2014. — Т. 21, №6. — С. 179–181 (in Russian).]
6. Ивановский Л. И., Самсонов С. О. Динамика одного двумерного отображения и устойчивые режимы сингулярно возмущенной системы нейронного типа // Вычисл. техн. в естеств. науках. Методы суперкомп. модел. Ч. 2 — 2015. — С. 121–132. [English transl.: Ivanovsky L. I., Samsonov S. O. Dynamics of two-dimensional mapping and stable regimes of singularly perturbed neuron system // Computer Technologies in Sciences. Methods of Simulations on Supercomputers. Part 2. Proceedings. — 2015. — P. 121–132 (in Russian).]

Получена 25.05.2016