

© Ивановский Л.И. 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2020-xx-xx-xx-xx

УДК xxx

Динамические свойства одной импульсной задачи Коши

Леонид Игоревич ИВАНОВСКИЙ^{1,2}

¹ ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»

150003, Российская Федерация, г. Ярославль, ул. Советская, 14

² Объединенный институт математики и компьютерных наук им А.Н. Колмогорова

150008, Российская Федерация, г. Ярославль, ул. Союзная, 144

Dynamics of one impulse Cauchy problem

Leonid I. IVANOVSKY^{1,2}

¹ P.G. Demidov Yaroslavl State University

14 Sovetskaya St., Yaroslavl 150003, Russian Federation

² A.N. Kolmogorov Institute of Mathematics and Computer Science

144 Soyuznaya St., Yaroslavl 150008, Russian Federation

Аннотация. Рассматривается полносвязная ассоциация сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с запаздыванием, представляющих собой математическую модель импульсной системы. Для нее изучаются вопросы существования, устойчивости и асимптотического представления периодических решений на основании бифуркационного анализа специального двумерного отображения в зависимости от различных значений параметров. Особое внимание уделяется числу сосуществующих устойчивых режимов.

Ключевые слова: фазовые портреты, устойчивые режимы, бифуркации

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00209)

Для цитирования: *Ивановский Л.И.* Динамические свойства одной импульсной задачи Коши // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. xx. № xx. С. xx–xx. DOI 10.20310/2686-9667-2020-xx-xx-xx-xx.

Abstract. Let us consider a fully connected association of singularly perturbed differential equations with delay presented as a mathematical model of an impulse system. For this system there were researched tasks of existence, stability and asymptotic representation of periodic solutions based on bifurcation analysis of special two-dimensional mapping which depends on various parameters. The main focus of this research was on the number of coexisting stable regimes.

Keywords: phase portraits, stable regimes, bifurcations

Acknowledgements: This research was supported by a grant of the Russian Science Foundation (project no. 22-11-00209)

For citation: Ivanovsky L.I. Dinamicheskie svoystva odnoy impulsnoy zadachi Koshi [Dynamics of one impulse Cauchy problem]. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. xx, no. xx, pp. xx–xx. DOI 10.20310/2686-9667-2020-xx-xx-xx-xx. (In Russian, Abstr. in Engl.)

1. Введение

Рассмотрим математическую модель функционирования отдельного нейрона, представляющей собой скалярное нелинейное дифференциально-разностное уравнение вида (см. [1])

$$\dot{u} = \lambda(-1 + \alpha f(u(t-1)) - \beta g(u))u, \quad (1.1)$$

для мембранного потенциала $u = u(t) > 0$. Здесь для параметра λ , характеризующего скорость протекания электрических процессов, а также величин α и β выполняются условия

$$\lambda \gg 1, \quad \beta > 0, \quad \alpha > 1 + \beta. \quad (1.2)$$

Гладкие функции $f(u), g(u)$ будем считать принадлежащими классу $C^2(\mathbb{R}_+)$, где $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$. Эти функции обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} 0 < \beta g(u) < \alpha, \quad f(0) = g(0) = 1, \quad \forall u \in \mathbb{R}_+; \\ f(u), g(u), u f'(u), u g'(u), u^2 f''(u), u^2 g''(u) = O(1/u) \quad \text{при } u \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В статьях [2–4] было показано, что модифицированное логистическое уравнение (1.1) при всех $\lambda \gg 1$, допускает экспоненциально орбитально устойчивый цикл

$$u_*(t, \lambda) > 0, \quad u_*(0, \lambda) \equiv 1 \quad (1.4)$$

периода $T_*(\lambda)$, удовлетворяющего предельным соотношениям

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_*(\lambda) = T_0, \quad T_0 = \alpha + 1 + (\beta + 1)/(\alpha - \beta - 1), \\ \max_{0 \leq t \leq T_*(\lambda)} |x_*(t, \lambda) - x_0(t)| = O(1/\lambda), \quad \lambda \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (1.5)$$

для которых величина T_0 определяет главную часть периода устойчивого цикла (1.4), выражение $x_*(t, \lambda) = (1/\lambda) \ln u_*(t, \lambda)$, а $x_0(t)$ — T_0 -периодическая функция, которая задается равенствами

$$x_0(t) = \begin{cases} (\alpha - 1)t, & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ \alpha - t, & \text{при } 1 \leq t \leq \alpha, \\ -(1 + \beta)(t - \alpha), & \text{при } \alpha \leq t \leq \alpha + 1, \\ (\alpha - \beta - 1)(t - \alpha - 1) - 1 - \beta, & \text{при } \alpha + 1 \leq t \leq T_0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Предположим, что имеется сеть из $m \geq 2$ нейронов с мембранными потенциалами $u_j = u_j(t) > 0$, $j = \overline{1, m}$, которые взаимодействуют друг с другом по принципу «каждый со всеми». Согласно общепринятым представлениям о природе электрических синапсов [6, 7], связь между нейронами с номерами j и s , $j \neq s$ осуществляется посредством тока проводимости $I_{j,s}^{syn}$, который в силу закона Ома задается равенством

$$I_{j,s}^{syn} = d(u_s - u_j), \quad d > 0. \quad (1.7)$$

Одна из возможных моделей полносвязной ассоциации электрических синапсов, основанная на модели из книги [5], может быть представлена системой вида

$$\dot{u}_j = d \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m (u_s - u_j) + \lambda(-1 + \alpha f(u_j(t-1)) - \beta g(u_j))u_j, \quad j = \overline{1, m}.$$

В статье [4] была приведена модификация данной системы. Ее суть состояла в переходе от равенства (1.7) к соотношению вида

$$I_{j,s}^{syn} = \sigma \left(\frac{u_s}{u_j} \right), \quad d > 0, \quad (1.8)$$

где функция связи $\sigma(u) \in C^3(\mathbb{R}_+)$, ограничивающая изменения значений осцилляторов u_j , удовлетворяет требованиям:

$$\begin{aligned} \sigma(u) < 0 \quad \text{при} \quad u \in [0, 1), \quad \sigma(0) &= -1, \\ \sigma(u) > 0 \quad \text{при} \quad u > 1, \quad \sigma(1) &= 0, \quad \sigma'(1) > 0, \\ \sigma(u) - \delta, u\sigma'(u), u^2\sigma''(u), u^3\sigma'''(u) &= O(1/u) \quad \text{при} \quad u \rightarrow +\infty, \quad \delta = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Что же касается соответствующей модели электрических синапсов, то в данном случае она приобретает вид

$$\dot{u}_j = d \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m \sigma \left(\frac{u_s}{u_j} \right) + \lambda(-1 + \alpha f(u_j(t-1)) - \beta g(u_j))u_j, \quad j = \overline{1, m}. \quad (1.10)$$

Согласно статье [4] отличий нового подхода к моделированию электрических синапсов от общепринятого всего два. Во-первых при переходе от отдельного нейрона к соответствующей сети сохраняется вольтерровская структура уравнений, а во-вторых, соблюден так называемый закон насыщающих проводимостей, суть которого заключается в выполнении условий (1.3), (1.9) для нелинейных функций. Тем самым, модели отдельного нейрона (1.1) и нейронной сети (1.10) базируются на одних и тех же принципах, сформулированных в работе [1]. Отметим, что под вольтерровской структурой уравнений (1.10) здесь подразумевается возможность записи их правых частей в виде произведения соответствующей зависимой переменной и некоторой неособой в нуле функции, что позволяет гарантировать положительность решений с положительными начальными условиями.

2. Постановка задачи

Рассмотрим ассоциацию сингулярно возмущенных осцилляторов с запаздыванием (1.10), моделирующую электрическое взаимодействие нейронов по принципу «каждый со всеми», предложенную в статье [4]. Здесь для параметров λ, α, β системы (1.10) определены начальные условия (1.2), а для гладких функций $f(u), g(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$ выполняются условия (1.3).

В качестве конкретного примера функции связи, удовлетворяющей требованиям (1.9), выберем (см. [4])

$$\sigma(u) = \frac{\delta(u-1)}{u+\delta}, \quad \delta \in (0, 2 - \sqrt{3}) \cup (2 + \sqrt{3}, +\infty). \quad (2.1)$$

В силу свойства $\sigma(1) = 0$ из ограничений (1.9) система (1.10) допускает так называемый однородный цикл

$$u_1 \equiv u_2 \equiv \dots \equiv u_m = u_*(t, \lambda), \quad (2.2)$$

где $u_*(t, \lambda)$ — устойчивое периодическое решение уравнения (1.1) периода $T_*(\lambda)$, удовлетворяющего предельному соотношению (1.5). В статье [4] показано, что периодическое решение $u_*(t, \lambda)$ с периодом $T_*(\lambda)$ асимптотически близко при $\lambda \gg 1$ к величине $e^{\lambda x_0}$, где $x_0(t)$ — T_0 -периодическая функция, которая задается равенствами (1.6).

Не претендуя на полноту анализа периодических режимов системы (1.10), ограничимся рассмотрением лишь тех из них, что располагаются в некоторой окрестности однородного цикла (2.2). При нахождении таких режимов можно применить специальные асимптотические методы, разработанные и примененные в статьях [2–4, 9, 10] для аналогичных (1.10) систем из трех осцилляторов вида (см. [11–16])

$$\dot{u}_j = d(a_1 u_{j-1} - a_2 u_j + u_{j+1}) + \lambda(-1 + \alpha f(u_j(t-1)) - \beta g(u_j))u_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.3)$$

с различными значениями параметров a_1, a_2 и краевыми условиями на u_0, u_4 : а) $a_1 = 1, a_2 = 2, u_0 = u_1, u_3 = u_4$; б) $a_1 = 1, a_2 = 2, u_0 = u_3, u_1 = u_4$; в) $a_1 = 0, a_2 = 1, u_1 = u_4$.

Для системы (1.10) выполним аналогичные замены, как и для системы (2.3) (см. [3])

$$u_1 = \exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad u_j = \exp\left(\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j-1} y_k\right), \quad j = \overline{2, m}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\lambda} \ll 1,$$

где x, y_1, \dots, y_{m-1} — новые переменные и x близко к x_0 систему (1.10) можно свести (см. [4]) к системе

$$\dot{x} = \varepsilon d \sum_{s=2}^m \sigma\left(\exp\left(\sum_{r=1}^{s-1} y_r\right)\right) + F(x(t-1), \varepsilon),$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_j = & d \sum_{s=1}^j \sigma\left(\exp\left(-\sum_{r=s}^j y_r\right)\right) + d \sum_{s=j+2}^m \sigma\left(\exp\left(\sum_{r=j+1}^{s-1} y_r\right)\right) - d \sum_{s=1}^{j-1} \sigma\left(\exp\left(-\sum_{r=s}^{j-1} y_r\right)\right) - \\ & - d \sum_{s=j+1}^m \sigma\left(\exp\left(\sum_{r=j}^{s-1} y_r\right)\right) + G_j(x(t-1), y_1(t-1), \dots, y_j(t-1), \varepsilon), \quad j = \overline{1, m-1}, \end{aligned}$$

для которой нелинейные функции F, G задаются равенствами

$$\begin{aligned} F(x, u, \varepsilon) = & -1 + \alpha f\left(\exp\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\right) + \beta g\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right), \\ G_j(x, u, y_1, \dots, y_j, v_1, \dots, v_j, \varepsilon) = & \\ = & \frac{\alpha}{\varepsilon} \left[f\left(\exp\left(\frac{u}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^j v_k\right)\right) - f\left(\exp\left(\frac{u}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j-1} v_k\right)\right) \right] + \\ & + \frac{\beta}{\varepsilon} \left[g\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j-1} y_k\right)\right) - g\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^j y_k\right)\right) \right], \quad j = \overline{1, m-1}. \end{aligned}$$

В статье [4], для систем сингулярно возмущенных осцилляторов было выполнено сведение к системе обыкновенных дифференциальных уравнений без малого параметра, но

с импульсными воздействиями. Рассмотрим данную задачу в случае трех осцилляторов ($m = 3$):

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = d(\sigma(e^{-y_1}) - \sigma(e^{y_1}) + \sigma(e^{y_2}) - \sigma(e^{y_1+y_2})), \\ \dot{y}_2 = d(\sigma(e^{-y_2}) - \sigma(e^{y_2}) + \sigma(e^{-y_1}) - \sigma(e^{-y_1-y_2})). \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} y_j(+0) &= \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} y_j(-0), \\ y_j(1+0) &= y_j(1-0) - \frac{\alpha}{\alpha - 1} y_j(+0), \\ y_j(\alpha+0) &= (1 + \beta) y_j(\alpha-0), \\ y_j(\alpha+1+0) &= y_j(\alpha+1-0) - \frac{\alpha}{1 + \beta} y_j(\alpha+0), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ характеризуют фазовые сдвиги между компонентами системы (2.4). Отметим, что согласно результатам, приведенным в статьях [11, 14], схожая с (2.4) импульсная система была получена также и для системы из трех связанных в кольцо сингулярно возмущенных осцилляторов.

Рассмотрим отображение

$$\Phi(z) : \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_1(T_0, z_1, z_2) \\ y_2(T_0, z_1, z_2) \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

В статье [4] было доказано, что экспоненциально устойчивым неподвижным точкам отображения (2.6) соответствуют орбитально асимптотически устойчивые циклы систем (1.10) и (2.4). Другими словами, для того, чтобы говорить об устойчивых циклах системы (1.10) и системы (2.4) соответственно, достаточно изучить неподвижные точки отображения (2.6). Они и являлись объектами исследования. В отображении (2.6) функции $y_1(t, z_1, z_2)$ и $y_2(t, z_1, z_2)$ имеют начальные условия $y_1(-0) = z_1, y_2(-0) = z_2$.

Асимптотический анализ отображения (2.6), выполненный в статье [4], позволяет показать, что при достаточно малых значениях параметра d оно имеет только одну устойчивую неподвижную точку $(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$, координаты которой являются решениями дифференциальных уравнений

$$\frac{d\tilde{z}_1}{dt} = 2 - \frac{C \exp \tilde{z}_1}{1 + \exp \tilde{z}_1}, \quad \frac{d\tilde{z}_2}{dt} = \frac{C \exp(-\tilde{z}_2)}{1 + \exp \tilde{z}_2} - 2,$$

где C – константа, зависящая от значений параметров α, β . При этом нулевое состояние равновесия устойчиво для любых значений d . Ему соответствует однородный цикл системы (1.10). Задача исследования состояла в определении таких значений параметров α и β , при которых отображение (2.6) имеет наибольшее число устойчивых неподвижных точек. Также изучались вопросы фазовых перестроек, происходящих в фазовом пространстве отображения (2.6). Поскольку описать динамические свойства отображения (2.6) в полной мере с использованием одного лишь аналитического аппарата затруднительно, исследование осуществлялось на основе сочетания аналитических методов и численных экспериментов. В зависимости от различных значений начальных параметров изучались вопросы существования и устойчивости релаксационных периодических решений. В процессе исследования, особое внимание уделялось числу сосуществующих устойчивых режимов отображения (2.6).

3. Поиск неподвижной точки релаксационного отображения

Расчет координат конечной точки отображения (2.6) выполняется следующим образом: вычисления начинаются из точки $(y_1(-0), y_2(-0))^T$ координаты которой представляют собой начальные условия системы (2.4). Начальным моментом времени считается величина $t = -0$. Далее, итерационно, с достаточно малым шагом h , при помощи метода Рунге-Кутты подсчитывались координаты следующей точки отображения (2.6). Этот метод имеет четвертый порядок точности, т.е. ошибка на каждом интервале подсчета будет иметь порядок $O(h^5)$.

Вычисления такого рода продолжаются до тех пор, пока не будет получено конечное состояние в значении времени T_0 . Однако в точках переключения $0, 1, \alpha, \alpha + 1$ в системе (1.10) выполняются условия соответствующего импульсного воздействия. Как следствие, координаты точки в этих случаях подсчитываются по формулам (2.5).

Далее происходит проверка начальной и конечной точек отображения (2.6) на эквивалентность. Если соответствующие координаты отличаются друг от друга не более чем на заранее заданное, достаточно малое число, считается, что последнее рассчитанное состояние отображения (2.6) является устойчивым. В противном же случае, конечная точка $(y_1(T_0), y_2(T_0))^T$ считается начальной и для нее осуществляется та же последовательность операций, которая была описана ранее.

4. Результаты численного исследования

Расчет неподвижных точек релаксационного отображения (2.6) зависит не только от выбора начальной точки и значений α, β , но также и от величины δ , являющейся параметром функции $\sigma(u)$. Для определенности, всюду ниже будем считать $\delta = 4.0$.

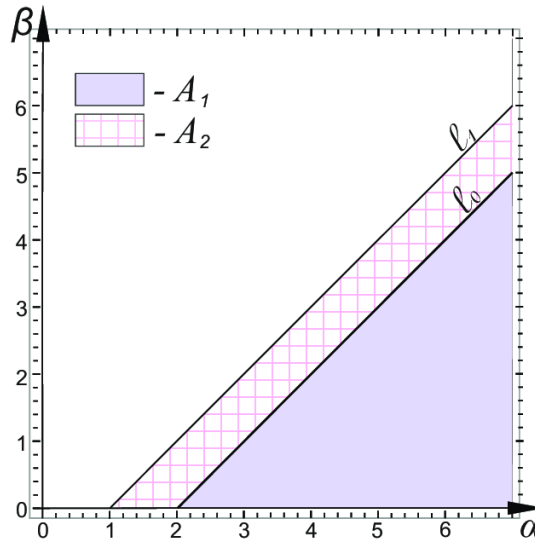


Рис. 1. Разбиение на области параметров с одинаковыми бифуркационными сценариями

На координатной плоскости параметров (α, β) можно выделить области A_1, A_2 и прямые l_0, l_1 . Графическая визуализация данных множеств приведена на рис. 1. Полученное разбиение области параметров (α, β) будет верным для любых значений

$\delta \in (2 + \sqrt{3}, +\infty)$. Наиболее важным элементом построения введенных областей является прямая $l_0 = \{(\alpha, \beta) : \beta = \alpha - 2\}$. Прямые l_0, l_1 являются границами области $A_2 = \{(\alpha, \beta) : \beta > l_0, \beta < l_1\}$, где $l_1 = \{(\alpha, \beta) : \beta = \alpha - 1\}$, а область A_1 имеет вид $A_1 = \{(\alpha, \beta) : \beta > 0, \beta < l_0\}$.

Далее рассмотрим типичные бифуркации для каждой из введенных областей (в статьях [13–16] были проделаны аналогичные расчеты для систем вида (2.3) с различными значениями параметров a_1, a_2 и краевыми условиями на u_0, u_4).

При изменении параметра d для любых фиксированных значений пары $(\alpha, \beta) \in A_1$ в фазовом пространстве отображения наблюдается один и тот же сценарий фазовых перестроек. Для определенности возьмем $\alpha = 3.6$ и $\beta = 0.4$. При изменении параметра d для заданных величин α и β получается следующая последовательность бифуркаций:

1. При $d < d_1$; $d_1 \approx 0.025$ отображение (2.6) имеет четыре устойчивые неподвижные точки (S_0, S_1, S_2, S_3) и три неустойчивые (U_0, U_1, U_2). Схематическое изображение фазового портрета для данного случая можно увидеть на рис. 2.

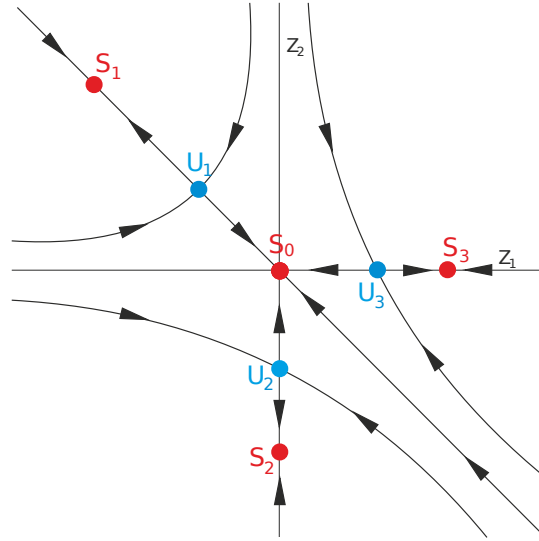


Рис. 2. Фазовый портрет отображений при $d < d_1$

2. При $d = d_1$ устойчивые узлы S_1, S_2 и S_3 , сливаясь с седлами U_1, U_2 и U_3 , пропадают. Тем самым, при $d > d_1$ отображение имеет лишь одно единственное нулевое устойчивое состояние S_0 .

Полученный сценарий фазовых перестроек верен для любых $(\alpha, \beta) \in A_1$. Отличия от рассмотренного случая состоят лишь в числовых выражениях бифуркационных значений параметра d .

При изменении параметра d для любых фиксированных значений пары $(\alpha, \beta) \in A_2$ в фазовом пространстве отображения наблюдается один и тот же сценарий фазовых перестроек. Для удобства зафиксируем величины $\alpha = 1.9$ и $\beta = 0.1$ и будем менять значение параметра d . В результате для отображения (2.6) получим следующую последовательность бифуркаций:

1. При $d < d_1$; $d_1 \approx 0.002$ отображение (2.6) имеет четыре устойчивые неподвижные точки (S_0, S_1, S_2, S_3) и три неустойчивые (U_0, U_1, U_2). Схематическое изображение фазового портрета для данного случая можно увидеть на рис. 3.

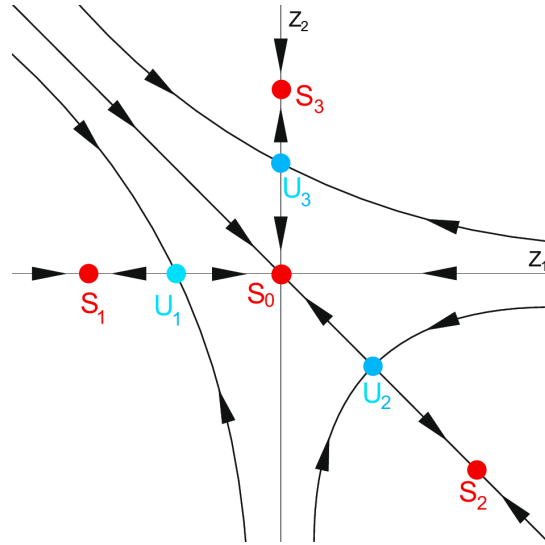


Рис. 3. Фазовый портрет отображений при $d < d_1$

2. При $d = d_1$ устойчивые узлы S_1, S_2 и S_3 , сливаясь с седлами U_1, U_2 и U_3 , пропадают. Тем самым, при $d > d_1$ отображение имеет лишь одно единственное нулевое устойчивое состояние S_0 .

Различия фазовых портретов, представленных на рис. 2 и 3, заключаются лишь в местоположении неустойчивых седел U_1, U_2, U_3 , а также устойчивых узлов S_1, S_2, S_3 . В связи с этим возник вопрос, как изменяется поведение состояний равновесия при переходе из одной области параметров в другую. В результате численного исследования, при зафиксированных α и d и изменении значения β , на прямой l_1 обнаруживалось существование двух многообразий: неустойчивого M_U и устойчивого M_S (см. рис. 4).

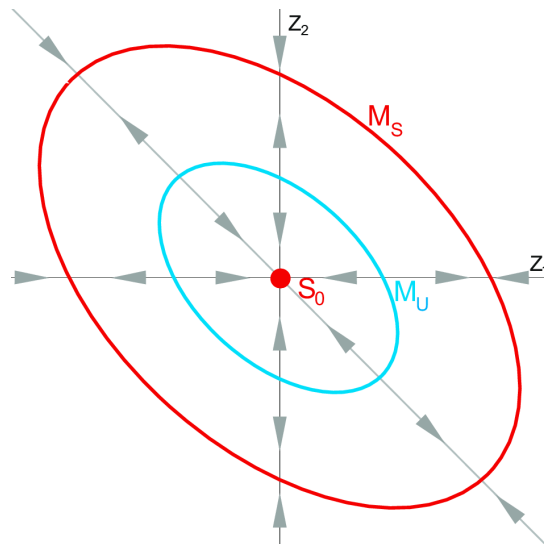


Рис. 3. Фазовый портрет отображения для параметров $(\alpha, \beta) \in l_1$

В том случае, если параметр $\delta \in (0, 2 - \sqrt{3})$, на координатной плоскости параметров (α, β) также можно выделить области $A_1 = \{(\alpha, \beta) : \beta > 0, \beta < l_0\}$, $A_2 = \{(\alpha, \beta) : \beta > l_0, \beta < l_1\}$ и прямые $l_0 = \{(\alpha, \beta) : \beta = \alpha - 2\}$, $l_1 = \{(\alpha, \beta) : \beta = \alpha - 1\}$. Графическая визуализация данных множеств приведена на рис. 4. Отметим, что выделенные области A_1, A_2 значений параметров (α, β) в точности определяли сценарии аналогичных фазовых перестроек, описанных выше.

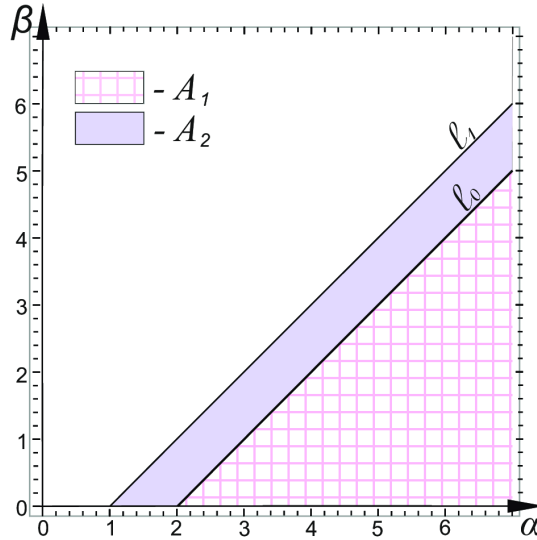


Рис. 4. Разбиение на области параметров с одинаковыми бифуркационными сценариями

5. Заключение

Для полносвязной ассоциации сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с запаздыванием, представляющих собой математическую модель импульсной системы, были изучены вопросы существования, устойчивости и асимптотического представления периодических решений. с помощью бифуркационного анализа специального двумерного отображения, построенного в зависимости от различных значений параметров. Для динамической системы с импульсными воздействиями, полученной в результате преобразований полносвязной ассоциации осцилляторов, на координатной плоскости параметров были выделены области, соответствующие различным бифуркационным сценариям. Благодаря численному исследованию, в каждой из областей были подробно рассмотрены основные перестройки, происходящие в фазовом пространстве соответствующего двумерного отображения. Также были установлены множества значений начальных параметров, при которых возможно единовременное сосуществование большего числа устойчивых неподвижных точек.

References

- [1] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Релаксационные автоколебания в сетях импульсных нейронов”, *Успехи мат. наук*, **70**:3 (2015), 3–76; S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “Self-excited relaxation oscillations in networks of impulse neurons”, *Russian Mathematical Surveys*, **70**:3 (2015), 383–452.
- [2] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. I”, *Дифференциальные уравнения*, **47**:7 (2011), 919–932; S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “Relaxation self-oscillations in neuron systems: I”, *Differential Equations*, **47**:7 (2011), 927–941.
- [3] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. II”, *Дифференциальные уравнения*, **47**:12 (2011), 1675–1692; S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “Relaxation self-oscillations in neuron systems: II”, *Differential Equations*, **47**:12 (2011), 1697–1713.
- [4] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. III”, *Дифференциальные уравнения*, **48**:2 (2012), 155–170; S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “Relaxation self-oscillations in neuron systems: III”, *Differential Equations*, **48**:2 (2012), 159–175.
- [5] А. Ю. Колесов, М. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, “Об одной модификации уравнения Хатчинсона”, *Журн. вычислит. математики и мат. физики*, **50**:12 (2010), 2099–2112; A. Yu. Kolesov, E. F. Mishchenko, N. Kh. Rozov, “A modification of Hutchinson’s equation”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **50**:12 (2010), 1990–2002.
- [6] A. C. Scott, *Neuroscience: a Mathematical Primer*, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [7] С. А. Кащенко, В. В. Майоров, *Модели волновой памяти*, Либроком, М., 2009. [S. A. Kashchenko, V. V. Mayorov, *Modeli volnovoy pamyati*, Librokom, M., 2009 (In Russian)].
- [8] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, “Об одном способе математического моделирования электрических синапсов”, *Дифференциальные уравнения*, **58**:7 (2022), 867–881; S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, “On a Method of Mathematical Modeling of Electrical Synapses”, *Differential Equations*, **58**:7 (2022), 853–868.
- [9] А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Автоволновые процессы в цепочках диффузионно связанных уравнений с запаздыванием”, *Успехи мат. наук*, **67**:2 (2012), 109–156; A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “Self-excited wave processes in chains of diffusion-linked delay equations”, *Russian Mathematical Surveys*, **67**:2 (2012), 297–343.
- [10] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Релаксационные автоколебания в сетях импульсных нейронов”, *Успехи мат. наук*, **70**:3 (2015), 3–76; S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “Self-excited relaxation oscillations in networks of impulse neurons”, *Russian Mathematical Surveys*, **70**:3 (2015), 383–452.
- [11] Л. И. Ивановский, “Устойчивые режимы динамических систем с импульсными воздействиями”, *Динамические системы*, **6**:2 (2016), 113–132. [L. I. Ivanovsky, “Stable modes of dynamical systems with impulses”, *Dynamic Systems*, **6**:2 (2016), 113–132 (In Russian)].
- [12] Л. И. Ивановский, С. О. Самсонов, “Фазовые перестройки одной двумерной динамической системы с импульсным воздействием”, *Вычисл. Техн. в Естеств. Наук. Методы Суперкомп. Модел. Ч. 2*, 2015, 121–132. [L. I. Ivanovsky, S. O. Samsonov, “Dynamics of two-dimensional mapping and stable regimes of singularly perturbed neuron system”, *Computer Technologies in Sciences. Methods of Simulations on Supercomputers. Part 2. Proceedings*, 2015, 121–132 (In Russian)].
- [13] Л. И. Ивановский, “Динамические свойства одного класса импульсных систем”, *Вычисл. Техн. в Естеств. Наук. Методы Суперкомп. Модел. Ч. 3*, 2015, 126–131. [L. I. Ivanovsky, “Dynamic properties of one class of impulse systems”, *Computer Technologies in Sciences. Methods of Simulations on Supercomputers. Part 3. Proceedings*, 2015, 126–131 (In Russian)].
- [14] Л. И. Ивановский, “Устойчивые режимы одного класса динамических систем с импульсными воздействиями”, *Вычисл. Техн. в Естеств. Наук. Методы Суперкомп. Модел. Ч. 4*, 2017, 35–42. [L. I. Ivanovsky, “Stable regimes of one class of dynamic systems with impulse influences”, *Computer Technologies in Sciences. Methods of Simulations on Supercomputers. Part 4. Proceedings*, 2015, 35–42 (In Russian)].

- [15] Л. И. Ивановский, С. О. Самсонов, “Фазовые перестройки одной двумерной динамической системы с импульсным воздействием”, *Модел. и Анализ. Информ. Систем*, **21**:6 (2014), 179–181. [L. I. Ivanovsky, S. O. Samsonov, “Phase reconstructions of one two-dimensional dynamical system with impulses”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **21**:6 (2014), 179–181 (In Russian)].
- [16] L. I. Ivanovsky, “Stable regimes of dynamic systems with impulsive influences”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **38**:5 (2017), 921–925.

Информация об авторах

Ивановский Леонид Игоревич, аспирант, младший научный сотрудник. Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Объединенный институт математики и компьютерных наук им А.Н. Колмогорова, г. Ярославль, Российская Федерация. E-mail: leon19unknown@gmail.com

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4717-5129>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Ивановский Леонид Игоревич
E-mail: leon19unknown@gmail.com

Поступила в редакцию 00.00.2022 г.

Поступила после рецензирования 00.00.2022 г.

Принята к публикации 00.00.2022 г.

Information about the authors

Leonid I. Ivanovsky, Postgraduate Student, Junior Research Assistant. P.G. Demidov Yaroslavl State University, A.N. Kolmogorov Institute of Mathematics and Computer Science, Yaroslavl, Russian Federation. E-mail: leon19unknown@gmail.com

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4717-5129>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Leonid I. Ivanovsky
E-mail: leon19unknown@gmail.com

Received 00 Month 2022

Reviewed 00 Month 2022

Accepted for press 00 Month 2022