С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, Моделирование эффекта взрыва в нейронных системах, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 5, 684–701

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm9293

Математические заметки

Том 93 выпуск 5 май 2013

УДК 517.926

Моделирование эффекта взрыва в нейронных системах

С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов

Предложен новый способ моделирования известного феномена "bursting behavior" в нейронных системах, основанный на привлечении уравнений с запаздыванием. А именно, введено в рассмотрение некоторое сингулярно возмущенное нелинейное дифференциально-разностное уравнение с двумя запаздываниями, описывающее функционирование отдельного нейрона. Установлено существование у этого уравнения при подходящем выборе параметров устойчивого периодического движения с любым наперед заданным количеством всплесков на отрезке времени длины периода.

Библиография: 16 названий.

DOI: 10.4213/mzm9293

1. Введение. К настоящему времени проведена целая серия исследований (см. [1]–[6]), связанных с переносом на уравнения с запаздыванием известных асимптотических методов Дородницына, Понтрягина и Мищенко [7], [8]. К указанному циклу работ относится и данная статья. Объектом анализа в ней служит некоторое сингулярно возмущенное скалярное нелинейное дифференциально-разностное уравнение, моделирующее электрическую активность отдельного нейрона. Рассматриваются вопросы о существовании и устойчивости у этого уравнения релаксационного цикла со специальными свойствами, о которых скажем ниже.

Как известно, для автоколебательных процессов в нейронных системах характерно чередование пакетов импульсов (наборов из нескольких подряд идущих интенсивных всплесков) с относительно спокойными участками изменения мембранных потенциалов. Указанный феномен в англоязычной литературе получил название "bursting behavior", что дословно означает "взрывное поведение". Мы же за неимением подходящего русского эквивалента будем использовать термин "bursting-эффект".

Исследованию bursting-эффекта посвящена весьма обширная литература (см., например, работы [9]–[13] и имеющуюся в них библиографию). Как правило, для математического моделирования этого эффекта привлекаются сингулярно возмущенные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с одной медленной и двумя быстрыми переменными, в которых при определенных условиях могут

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 08-01-00342а, 09-01-00614) и целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (грант № 02.740.11.0197).

существовать устойчивые bursting-циклы (периодические движения с bursting-эффектом). Мы же предлагаем принципиально иной подход к решению данной проблемы, связанный с введением запаздываний по времени.

Следуя методике из [14], в качестве математической модели отдельного нейрона возьмем дифференциально-разностное уравнение

$$\dot{u} = \lambda[f(u(t-h)) - g(u(t-1))]u. \tag{1.1}$$

Здесь $u(t) > 0$ – мембранный потенциал нейрона, параметр $\lambda > 0$, характеризующий скорость протекания электрических процессов в системе, предполагается большим, а параметр h фиксирован и принадлежит интервалу $(0, 1)$. Относительно фигурирующих в (1.1) функций $f(u)$, $g(u) \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geqslant 0\}$, предполагаем, что они обладают свойствами

$$\begin{gathered} f(0) = 1, \qquad g(0) = 0, \\ \left.\begin{aligned} f(u) &= -a_0 + O\left(\frac{1}{u}\right), \quad uf'(u) = O\left(\frac{1}{u}\right) \\ g(u) &= b_0 + O\left(\frac{1}{u}\right), \qquad ug'(u) = O\left(\frac{1}{u}\right) \end{aligned}\right. \quad \text{при} \quad u \to +\infty, \end{gathered} \tag{1.2}$$

где a_0, b_0 – положительные константы. Типовыми примерами таких функций являются

$$f(u) = \frac{1-u}{1+c_1 u}, \qquad g(u) = \frac{c_2 u}{1+u}, \qquad c_1, c_2 = \mathrm{const} > 0. \tag{1.3}$$

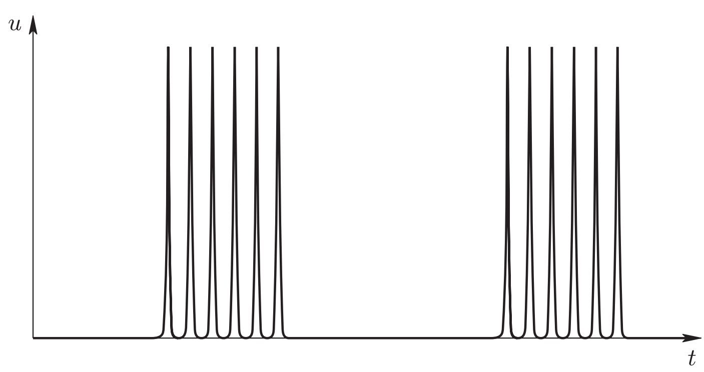

Рис. 1

Наш основной результат состоит в следующем. По любому фиксированному натуральному n можно так подобрать фигурирующие в (1.1), (1.2) параметры h, a_0, b_0, что при всех достаточно больших λ уравнение (1.1) будет иметь экспоненциально орбитально устойчивый цикл $u = u_*(t, \lambda)$ периода $T_*(\lambda)$, где $T_*(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$ стремится к некоторому конечному пределу $T_* > 0$. Сама же функция $u_*(t, \lambda)$ на отрезке времени длины периода допускает ровно n подряд идущих асимптотически высоких (порядка $\exp(\lambda h)$) всплесков продолжительности $\Delta t = (1 + 1/a_0)h$, а все остальное время она асимптотически мала. Иными словами, при указанном выборе параметров h, a_0, b_0 реализуется bursting-эффект.

Наглядное представление о релаксационных свойствах bursting-цикла $u_*(t,\lambda)$ дает его график на плоскости (t,u) (см. рис. 1), построенный в масштабе $25:1$ для случая $h=1/26$, $\lambda=130$ и для функций (1.3) при $c_1=0.5$, $c_2=4$.

2. Формулировка результата. При исследовании вопроса о существовании и устойчивости у уравнения (1.1) релаксационного bursting-цикла удобно сделать в (1.1) замену $u=\exp(\lambda x)$. Указанная замена преобразует интересующее нас уравнение к виду

$$\dot{x}=F(x(t-h),\varepsilon)-G(x(t-1),\varepsilon), \tag{2.1}$$

где

$$F(x,\varepsilon)=f\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right),\qquad G(x,\varepsilon)=g\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right),\qquad \varepsilon=\frac{1}{\lambda}\ll 1.$$

Далее, из свойств (1.2) функций $f(u)$, $g(u)$ вытекает, что

$$\begin{gathered}\lim_{\varepsilon\to 0}F(x,\varepsilon)=R(x),\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}G(x,\varepsilon)=H(x),\\ R(x)=\begin{cases}1 & \text{при } x<0,\\ -a_0 & \text{при } x>0,\end{cases}\qquad H(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ b_0 & \text{при } x>0.\end{cases}\end{gathered} \tag{2.2}$$

Равенства (2.2), в свою очередь, позволяют перейти от (2.1) к рассмотрению предельного релейного уравнения с запаздываниями

$$\dot{x}=R(x(t-h))-H(x(t-1)). \tag{2.3}$$

Как и в работах [2], [4], [6], понятие решения уравнения (2.3) определим конструктивно. С этой целью фиксируем произвольно натуральное n и предположим, что параметры h, a_0, b_0 из (1.1), (1.2) удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{(n+1)(2+a_0+1/a_0)}<h<\frac{1}{n(2+a_0+1/a_0)+2+1/a_0}, \tag{2.4}$$

$$b_0>1+a_0. \tag{2.5}$$

Далее, фиксируем некоторое достаточно малое $\sigma_0>0$ (оценка сверху на этот параметр будет уточнена в последующем), рассмотрим множество функций

$$\varphi(t)\in C[-1-\sigma_0,-\sigma_0],\qquad \varphi(t)<0,\quad t\in[-1-\sigma_0,-\sigma_0],\qquad \varphi(-\sigma_0)=-\sigma_0, \tag{2.6}$$

и обозначим через $x_\varphi(t)$, $t\geqslant-\sigma_0$, решение уравнения (2.3) с произвольной начальной функцией (2.6).

При интегрировании уравнения (2.3) следует иметь в виду, что его правая часть представляет собой кусочно-постоянную функцию и меняется лишь тогда, когда $x(t-h)$ или $x(t-1)$ меняет знак. В частности, при $-\sigma_0\leqslant t\leqslant-\sigma_0+h$ имеем одновременно $\varphi(t-h)<0$ и $\varphi(t-1)<0$. Поэтому на указанном промежутке времени согласно (2.3), (2.6) функция $x_\varphi(t)$ является решением задачи Коши $\dot{x}=1$, $x(-\sigma_0)=-\sigma_0$, а значит, задается равенством

$$x_\varphi(t)=t. \tag{2.7}$$

Ясно также, что формула (2.7) сохраняется до тех пор, пока выполняются неравенства $x_\varphi(t-h)<0$ и $x_\varphi(t-1)<0$. Тем самым, она заведомо справедлива на отрезке времени $-\sigma_0\leqslant t\leqslant 0$.

При $0\leqslant t<1$ в силу уже проделанных построений имеем $x_\varphi(t-1)<0$ и, следовательно, $H(x_\varphi(t-1))=0$. Таким образом, на данном промежутке времени интересующее нас решение $x_\varphi(t)$ удовлетворяет вспомогательному уравнению

$$\dot{x}=R(x(t-h)). \tag{2.8}$$

Что же касается уравнения (2.8), то его свойства были изучены в статье [4]. В упомянутой работе, в частности, установлено, что любое решение $x(t)$ этого уравнения такое, что $x(t)<0$ при $-h\leqslant t<0$, $x(0)=0$, при всех $t\geqslant 0$ совпадает с периодической функцией

$$x_0(t)=\begin{cases}t & \text{при } 0\leqslant t\leqslant h,\\ h-a_0(t-h) & \text{при } h\leqslant t\leqslant t_0+h,\\ -a_0h+t-t_0-h & \text{при } t_0+h\leqslant t\leqslant T_0,\end{cases}\qquad x_0(t+T_0)\equiv x_0(t), \tag{2.9}$$

где $t_0=h(1+1/a_0)$, $T_0=h(2+a_0+1/a_0)$. График функции $x_0(t)$ при $a_0=2$, $h=1/26$ представлен на рис. 2.

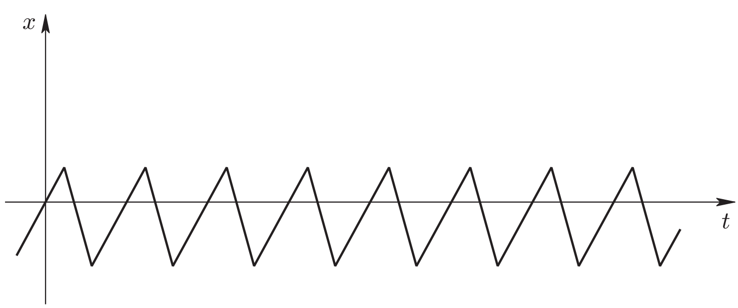

Рис. 2

Возвращаясь к исходному уравнению (2.3) и принимая во внимание все вышесказанное, приходим к равенству

$$x_\varphi(t)=x_0(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant 1. \tag{2.10}$$

Для последующего анализа нам потребуется специальная функция $y_0(t)$, являющаяся решением задачи Коши

$$\dot{x}=1-H(x_0(t)),\qquad x|_{t=0}=0. \tag{2.11}$$

Привлекая формулы (2.9), нетрудно увидеть, что при $t\geqslant 0$ она задается соотношениями

$$\begin{gathered} y_0(t)=\begin{cases}-(b_0-1)t & \text{при } 0\leqslant t\leqslant t_0,\\ t-b_0t_0 & \text{при } t_0\leqslant t\leqslant T_0,\end{cases}\\ y_0(t)=(k-1)(T_0-b_0t_0)+y_0(t-(k-1)T_0)\\ \text{при}\quad (k-1)T_0\leqslant t\leqslant kT_0,\quad k\in\mathbb{N},\quad k\geqslant 2. \end{gathered} \tag{2.12}$$

Перейдем к рассмотрению очередного отрезка времени $1 \leqslant t \leqslant 1+h$ и заметим, что неравенства (2.4) обеспечивают принадлежность момента времени $t = 1$ интервалу $(nT_0 + t_0 + h, (n+1)T_0)$. Тем самым, в силу (2.9), (2.10) имеем $x_\varphi(t-h) < 0$ при $t \in [1, 1+h]$ и, следовательно, на указанном отрезке функция $x_\varphi(t)$ является решением аналогичной (2.11) задачи Коши

$$\dot{x} = 1 - H(x_0(t-1)), \qquad x|_{t=1} = x_0(1).$$

А отсюда заключаем, что при $1 \leqslant t \leqslant 1+h$ справедлива формула

$$x_\varphi(t) = x_0(1) + y_0(t-1). \tag{2.13}$$

На следующем этапе обратим внимание, что при априорном условии

$$x_\varphi(t-h) < 0 \tag{2.14}$$

равенство (2.13) сохраняется на отрезке $1 \leqslant t \leqslant 2$. Но это условие действительно выполняется, поскольку согласно (2.4), (2.5), (2.9), (2.12)

$$x_0(1) = x_0(1 - nT_0) = 1 - (n+1)T_0 < 0, \qquad y_0(t-1) < 0, \quad t > 1. \tag{2.15}$$

Таким образом, при $1 \leqslant t \leqslant 2$ соотношение (2.13) обретает законную силу.

При рассмотрении значений $t \geqslant 2$ будем предполагать, что наряду с (2.14) имеет место априорная оценка

$$x_\varphi(t-1) < 0. \tag{2.16}$$

В этом случае интересующее нас решение $x_\varphi(t)$ определяется из задачи Коши $\dot{x} = 1$, $x|_{t=2} = x_0(1) + y_0(1)$, а значит, задается вытекающей из (2.12), (2.15) формулой

$$x_\varphi(t) = t - T_*, \qquad T_* = (n+1)(T_0 + b_0 t_0). \tag{2.17}$$

Остается добавить, что согласно (2.13), (2.17) априорные требования (2.14), (2.16) заведомо выполняются на промежутке $2 \leqslant t \leqslant T_*$, длина которого в силу неравенства $T_* - 2 > 0$ (являющегося следствием оценок (2.4), (2.5)) положительна.

Распорядимся теперь имеющимся в запасе свободным параметром σ_0 (см. (2.6)). Из проделанных выше построений следует, что при условии

$$\sigma_0 < T_0 - t_0 + (n+1)b_0 t_0 - 1, \tag{2.18}$$

которое всюду ниже считаем выполненным, функция $x_\varphi(t + T_*)$, $-1 - \sigma_0 \leqslant t \leqslant -\sigma_0$ принадлежит введенному выше множеству (2.6). А это значит, что на промежутках $kT_* - \sigma_0 \leqslant t \leqslant (k+1)T_* - \sigma_0$, $k = 1, 2, \ldots$, весь описанный выше процесс построения $x_\varphi(t)$ повторяется снова и снова. Следовательно, при всех $t \geqslant -\sigma_0$ каждое решение $x_\varphi(t)$ с начальным условием (2.6) совпадает с одной и той же T_*-периодической функцией $x_*(t)$, задающейся равенствами

$$x_*(t) = \begin{cases} x_0(t) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ x_0(1) + y_0(t-1) & \text{при } 1 \leqslant t \leqslant 2, \\ t - T_* & \text{при } 2 \leqslant t \leqslant T_*, \end{cases} \qquad x_*(t + T_*) \equiv x_*(t). \tag{2.19}$$

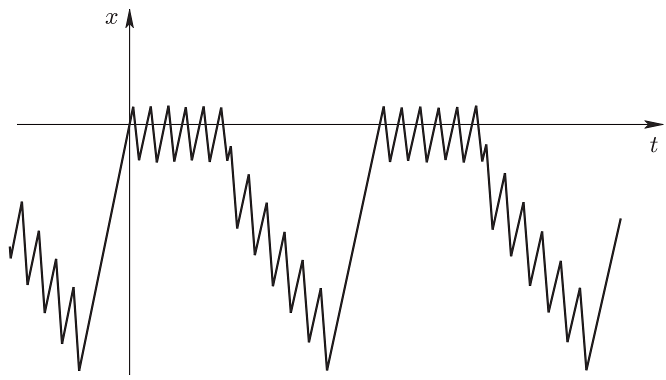

Рис. 3

График этой функции при $a_0 = 2$, $b_0 = 4$, $h = 1/26$ показан на рис. 3 (при выбранных значениях параметров неравенства (2.4) выполняются для $n = 5$).

Перейдем к вопросу о связи между периодическими решениями уравнений (2.1) и (2.3). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ уравнение (2.1) имеет единственный орбитально экспоненциально устойчивый цикл $x_*(t,\varepsilon)$, $x_*(-\sigma_0,\varepsilon) \equiv -\sigma_0$ периода $T_*(\varepsilon)$, удовлетворяющий предельным равенствам*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \max_{0\leqslant t\leqslant T_*(\varepsilon)} |x_*(t,\varepsilon) - x_*(t)| = 0, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} T_*(\varepsilon) = T_*. \tag{2.20}$$

Доказательство сформулированной теоремы опирается на некоторые дополнительные конструкции. Для их описания наряду с константой σ_0, подчиненной условию (2.18), фиксируем постоянные $q_1 > \sigma_0$, $q_2 \in (0,\sigma_0)$ и обозначим через

$$S(\sigma_0, q_1, q_2) \subset C[-1-\sigma_0, -\sigma_0]$$

замкнутое, ограниченное и выпуклое множество функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих требованиям

$$-q_1 \leqslant \varphi(t) \leqslant -q_2, \qquad \varphi(-\sigma_0) = -\sigma_0. \tag{2.21}$$

Затем для произвольной функции $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ рассмотрим решение $x = x_\varphi(t,\varepsilon)$, $t \geqslant -\sigma_0$ уравнения (2.1) с начальным условием $\varphi(t)$, $-1-\sigma_0 \leqslant t \leqslant -\sigma_0$, а через $t = T_\varphi$ обозначим положительный корень уравнения $x_\varphi(t-\sigma_0,\varepsilon) = -\sigma_0$ с номером $2n+2$ (в предположении, что данное уравнение имеет на полуоси $t > 0$ не менее $(2n+2)$-х корней, занумерованных в порядке возрастания). И наконец, зададим оператор последования Пуанкаре $\Pi_\varepsilon\colon S(\sigma_0,q_1,q_2) \to C[-1-\sigma_0,-\sigma_0]$ с помощью равенства

$$\Pi_\varepsilon(\varphi) = x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), \qquad -1-\sigma_0 \leqslant t \leqslant -\sigma_0. \tag{2.22}$$

Дальнейший план действий стандартен (см. аналогичные места в работах [4], [6]). Сначала мы установим асимптотические формулы для $x_\varphi(t,\varepsilon)$ на различных промежутках изменения t, из которых будет следовать, что при подходящем выборе параметров σ_0, q_1, q_2 оператор (2.22) определен на множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ и преобразует его в себя. Затем проведем анализ уравнения в вариациях на решении $x_\varphi(t,\varepsilon)$ и покажем, что Π_ε является сжимающим.

3. Доказательство существования bursting-цикла. Построение асимптотики функции $x_\varphi(t,\varepsilon)$ начнем с отрезка $-\sigma_0 \leqslant t \leqslant 1-\sigma_0$. Опираясь на неравенства из (2.21) и свойства функции $g(u)$ (см. (1.2)), замечаем, что равномерно по $t \in [-\sigma_0, 1-\sigma_0]$, $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$

$$G(\varphi(t-1),\varepsilon) = O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q_2}{\varepsilon}\biggr)\biggr). \tag{3.1}$$

Формула (3.1), в свою очередь, позволяет отбросить соответствующее слагаемое в правой части из (2.1) и перейти к исследованию аналогичного (2.8) вспомогательного уравнения

$$\dot{x} = F(x(t-h),\varepsilon), \tag{3.2}$$

которое к настоящему времени уже изучено (см. [4]).

Для того чтобы воспользоваться асимптотическими равенствами, полученными в работе [4] для решений уравнения (3.2), сначала уточним выбор параметра σ_0. Следуя [4], будем считать, что он удовлетворяет условию (более сильному, чем (2.18))

$$2\sigma_0 < \min(h, a_0 h). \tag{3.3}$$

Кроме того, предполагаем дополнительно, что

$$2\sigma_0 < \min(1 - nT_0 - t_0 - h, 2((n+1)T_0 - 1)). \tag{3.4}$$

Итак, обратимся непосредственно к асимптотическому анализу интересующего нас решения $x_\varphi(t,\varepsilon)$ уравнения (2.1). Объединяя равенство (3.1) с известными асимптотическими формулами из [4], приходим к следующим фактам.

1) На промежутках $-\sigma_0 + kT_0 \leqslant t \leqslant h - \sigma_0 + kT_0$, $k = 0, 1, \dots, n$, справедливы асимптотические представления

$$x_\varphi(t,\varepsilon) = t - kT_0 + \Delta_\varphi(t,\varepsilon), \tag{3.5}$$

где здесь и далее через Δ_φ обозначаются различные остатки, модули которых имеют экспоненциальный порядок малости (т.е. порядок $\exp(-q/\varepsilon)$, $q = \mathrm{const} > 0$) равномерно по φ, t.

2) На отрезках времени $h - \sigma_0 + kT_0 \leqslant t \leqslant h + \sigma_0 + kT_0$, $k = 0, 1, \dots, n$ решение $x_\varphi(t,\varepsilon)$ допускает представления

$$x_\varphi(t,\varepsilon) = h + \varepsilon v_0(\tau)|_{\tau=(t-h-kT_0)/\varepsilon} + \Delta_\varphi(t,\varepsilon), \tag{3.6}$$

где функция $v_0(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, задается равенством

$$v_0(\tau) = \tau + \int_{-\infty}^{\tau} [f(\exp s) - 1]\, ds \tag{3.7}$$

и обладает свойствами [4]:

$$
\begin{aligned}
&v_0(\tau) = \tau + O(\exp\tau), && \tau \to -\infty,\\
&v_0(\tau) = -a_0\tau + c_0 + O(\exp(-\tau)), && \tau \to +\infty,\\
&\qquad\text{где}\quad c_0 = \int_0^1 \frac{f(u)-1}{u}\,du + \int_1^{+\infty}\frac{f(u)+a_0}{u}\,du.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

3) При $h+\sigma_0+kT_0 \leqslant t \leqslant t_0+h-\sigma_0+kT_0$, $k=0,1,\ldots,n$, имеют место формулы

$$x_\varphi(t,\varepsilon) = h - a_0(t-h-kT_0) + \varepsilon c_0 + \Delta_\varphi(t,\varepsilon). \tag{3.9}$$

4) На отрезках $t_0+h-\sigma_0+kT_0 \leqslant t \leqslant t_0+h+\sigma_0+kT_0$, $k=0,1,\ldots,n$, получаются аналогичные (3.6) асимптотические равенства

$$x_\varphi(t,\varepsilon) = -a_0h + \varepsilon w_0(\tau)|_{\tau=(t-t_0-h-kT_0)/\varepsilon} + \Delta_\varphi(t,\varepsilon), \tag{3.10}$$

где

$$
\begin{aligned}
&w_0(\tau) = -a_0\tau + c_0 + \int_{-\infty}^{\tau}[f(\exp(-a_0s+c_0))+a_0]\,ds,\\
&w_0(\tau) = -a_0\tau + c_0 + O(\exp(a_0\tau)), && \tau \to -\infty,\\
&w_0(\tau) = \tau + O(\exp(-a_0\tau)), && \tau \to +\infty.
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

5) При $t_0+h+\sigma_0+kT_0 \leqslant t \leqslant (k+1)T_0-\sigma_0$, $k=0,1,\ldots,n-1$, решение $x_\varphi(t,\varepsilon)$ задается соотношениями

$$x_\varphi(t,\varepsilon) = t-(k+1)T_0 + \Delta_\varphi(t,\varepsilon), \tag{3.12}$$

а на отрезке $t_0+h+\sigma_0+nT_0 \leqslant t \leqslant 1-\sigma_0$ (длина которого в силу (3.4) положительна) справедливо равенство

$$x_\varphi(t,\varepsilon) = t-(n+1)T_0 + \Delta_\varphi(t,\varepsilon). \tag{3.13}$$

Следующий этап связан с рассмотрением отрезка $1-\sigma_0 \leqslant t \leqslant 2-\sigma_0$. Будем считать, что при указанных t выполняется априорная оценка

$$x_\varphi(t-h,\varepsilon) \leqslant -q, \tag{3.14}$$

где $q>0$ – некоторая универсальная (не зависящая от t, ε, φ) постоянная. В этом случае в силу свойств (1.2) равномерно по t, φ

$$F(x_\varphi(t-h,\varepsilon),\varepsilon) - 1 = O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr), \qquad q=\mathrm{const}>0. \tag{3.15}$$

Что же касается функции $x_\varphi(t-1,\varepsilon)$, то для нее при $t\in[1-\sigma_0, 2-\sigma_0]$ справедлива серия асимптотических равенств (3.5)–(3.13), в которых необходимо заменить t на $t-1$.

Итак, на интересующем нас промежутке времени согласно (2.1), (3.15) исследованию подлежит дифференциальное уравнение

$$\dot x = 1 - G(x_\varphi(t-1,\varepsilon),\varepsilon) + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr), \qquad q=\mathrm{const}>0, \tag{3.16}$$

правая часть которого фактически уже известна. Точнее говоря, добавка (3.15), естественно, обновляется по прошествии каждого отрезка времени длины h. Но поскольку при интегрировании уравнения (3.16) методом шагов мы последовательно рассматриваем именно такие промежутки, то при каждом конкретном t из отрезка $[1-\sigma_0, 2-\sigma_0]$ левая часть формулы (3.15) уже известна из предыдущего шага. Впрочем, ее явный вид несуществен. Важно лишь, что она экспоненциально мала.

Асимптотическое исследование уравнения (3.16) проведем с помощью метода математической индукции. Для этого нам понадобятся отрезки

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= [t_0 + h + nT_0 + \sigma_0, 1 - \sigma_0], \\ \Lambda_k &= [1 + t_0 + (k-1)T_0 + \sigma_0, 1 + kT_0 - \sigma_0], \qquad k = 1, \dots, n, \\ \Lambda_{n+1} &= [1 + t_0 + nT_0 + \sigma_0, 2 - \sigma_0], \end{aligned}$$

а шаг индукции будет состоять в переходе с отрезка Λ_k на Λ_{k+1}.

Фиксируем некоторый номер k, $0 \leqslant k \leqslant n$, и предположим, что на отрезке Λ_k уже получено асимптотическое представление

$$x_\varphi(t,\varepsilon) = t - (n+1)T_0 - kb_0t_0 + \varepsilon\alpha_k + \Delta_\varphi(t,\varepsilon), \tag{3.17}$$

где α_k – некоторая константа. Подчеркнем, что при $k = 0$ равенство вида (3.17) имеет место (см. (3.13)) и в этом случае $\alpha_0 = 0$. Таким образом, остается убедиться в справедливости аналогичного (3.17) представления при $t \in \Lambda_{k+1}$.

Рассмотрим сначала отрезок $1 + kT_0 - \sigma_0 \leqslant t \leqslant 1 + kT_0 + \sigma_0$, длина которого в силу (3.3) меньше h. А поскольку длина отрезка Λ_k больше h (что также следует из условия (3.3)), то согласно (3.17) функция $x_\varphi(t-h,\varepsilon)$ при указанных t нам известна. Известной является и функция $x_\varphi(t-1,\varepsilon)$ (для нее выполняется равенство (3.5) при замене t на $t-1$). Таким образом, в данном случае решение $x_\varphi(t,\varepsilon)$ определяется из задачи Коши

$$\begin{gathered} \dot{x} = 1 - G(t - 1 - kT_0 + \omega_1(t,\varepsilon),\varepsilon) + \omega_2(t,\varepsilon), \\ x|_{t=1+kT_0-\sigma_0} = 1 - (n+1)T_0 + k(T_0 - b_0t_0) - \sigma_0 + \varepsilon\alpha_k + \omega_3(\varepsilon), \end{gathered} \tag{3.18}$$

где ω_j, $j = 1,2,3$, – известные экспоненциально малые по модулю добавки.

Решение задачи (3.18) будем искать в виде

$$\begin{gathered} x_\varphi(t,\varepsilon) = 1 - (n+1)T_0 + k(T_0 - b_0t_0) + \varepsilon\alpha_k + \varepsilon v_1(\tau)|_{\tau=(t-1-kT_0)/\varepsilon} + \Delta_\varphi(t,\varepsilon), \\ 1 + kT_0 - \sigma_0 \leqslant t \leqslant 1 + kT_0 + \sigma_0, \end{gathered} \tag{3.19}$$

где

$$v_1(\tau) = \tau - \int_{-\infty}^{\tau} g(\exp s)\, ds, \tag{3.20}$$

а Δ_φ – подлежащий определению остаток. Подставляя, далее, выражения (3.19), (3.20) в (3.18), для Δ_φ приходим к задаче Коши

$$\dot{\Delta}_\varphi = G_\varphi(t,\varepsilon), \qquad \Delta_\varphi|_{t=1+kT_0-\sigma_0} = g_\varphi(\varepsilon), \tag{3.21}$$

где

$$G_\varphi(t,\varepsilon) = g(x_1) - g(x_2) + \omega_2(t,\varepsilon)$$
$$\text{при} \quad x_1 = \exp\biggl[\frac{(t-1-kT_0)}{\varepsilon}\biggr], \quad x_2 = \exp\biggl[\frac{(t-1-kT_0)}{\varepsilon} + \frac{\omega_1(t,\varepsilon)}{\varepsilon}\biggr], \tag{3.22}$$

$$g_\varphi(\varepsilon) = -\sigma_0 - \varepsilon v_1(\tau)|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon} + \omega_3(\varepsilon). \tag{3.23}$$

Таким образом, доказательство равномерной по φ, t экспоненциальной малости Δ_φ сводится к проверке аналогичных свойств для функции (3.22) и начального условия (3.23).

Обратимся сначала к анализу $g_\varphi(\varepsilon)$. Опираясь на свойства (1.2) функции $g(u)$, из (3.20) выводим, что

$$v_1(\tau) = \tau + O(\exp\tau), \qquad \tau \to -\infty, \tag{3.24}$$

и, следовательно,

$$-\sigma_0 - \varepsilon v_1(\tau)|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon} = O\biggl(\exp\biggl(-\frac{\sigma_0}{\varepsilon}\biggr)\biggr).$$

А отсюда и из известных свойств $\omega_3(\varepsilon)$ вытекает требуемая экспоненциальная малость величины (3.23).

Для оценки функции (3.22) снова привлечем свойства (1.2), из которых заключаем, что

$$M_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} (1+x^2)|g'(x)| < \infty.$$

Далее, используя этот факт, нетрудно увидеть, что

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leqslant \frac{M_1}{1+\min(x_1^2, x_2^2)}|x_1 - x_2|, \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+. \tag{3.25}$$

Применяя затем свойство (3.25) к правой части из (3.22), получаем неравенство

$$|G_\varphi(t,\varepsilon)| \leqslant \frac{M_2}{\varepsilon}\exp\biggl(-\frac{|t-1-kT_0|}{\varepsilon}\biggr)|\omega_1(t,\varepsilon)| + |\omega_2(t,\varepsilon)|,$$
$$1 + kT_0 - \sigma_0 \leqslant t \leqslant 1 + kT_0 + \sigma_0, \tag{3.26}$$

где M_2 – некоторая универсальная положительная константа. Остается заметить, что из (3.26) равномерная по t, φ экспоненциальная малость $G_\varphi(t,\varepsilon)$ следует уже очевидным образом.

Перейдем теперь к отрезку $1 + kT_0 + \sigma_0 \leqslant t \leqslant 1 + kT_0 + t_0 - \sigma_0$. Здесь имеем дело с уравнением (3.16), в котором $x_\varphi(t-1,\varepsilon)$ задается соответственно формулами (3.5), (3.6) или (3.9) (при замене в них t на $t-1$). Во всех случаях, однако, справедлива оценка вида

$$x_\varphi(t-1,\varepsilon) \geqslant q, \tag{3.27}$$

где в качестве q можно взять любое число из интервала $(0, \min(\sigma_0, a_0\sigma_0))$.

Отмеченное выше неравенство (3.27) и свойства (1.2) приводят к асимптотическому представлению

$$G\bigl(x_\varphi(t-1,\varepsilon),\varepsilon\bigr) = b_0 + O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr)\biggr), \qquad q = \text{const} > 0, \tag{3.28}$$

которое, как и аналогичное ему соотношение (3.15), справедливо равномерно по φ, t. Последующий же способ действий стандартен: подставляем (3.28) в (3.16), дополняем получившееся уравнение начальным условием

$$x_\varphi(t,\varepsilon), \qquad 1+kT_0+\sigma_0-h\leqslant t\leqslant 1+kT_0+\sigma_0,$$

и применяем уже упоминавшийся выше метод шагов (т.е. рассматриваем последовательные отрезки времени длины h). В результате убеждаемся, что

$$\begin{aligned} x_\varphi(t,\varepsilon)=1-(n+1)T_0+k(T_0-b_0t_0)+\varepsilon\alpha_k+\varepsilon v_1(\tau)|_{\tau=\sigma_0/\varepsilon}\\ -(b_0-1)(t-1-kT_0-\sigma_0)+O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr)\biggr),\\ 1+kT_0+\sigma_0\leqslant t\leqslant 1+kT_0+t_0-\sigma_0. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Для дальнейшего упрощения формулы (3.29) необходимо знать поведение функции (3.20) при $\tau\to+\infty$. Несложный подсчет показывает, что

$$v_1(\tau)=-(b_0-1)\tau-d_0+O(\exp(-\tau)), \qquad \tau\to+\infty, \tag{3.30}$$

где

$$d_0=\int_0^1\frac{g(u)}{u}\,du+\int_1^{+\infty}\frac{g(u)-b_0}{u}\,du. \tag{3.31}$$

Учитывая затем соотношения (3.30), (3.31) в (3.29), окончательно получаем

$$\begin{aligned} x_\varphi(t,\varepsilon)=1-(n+1)T_0+k(T_0-b_0t_0)+\varepsilon(\alpha_k-d_0)-(b_0-1)(t-1-kT_0)+\Delta_\varphi(t,\varepsilon),\\ 1+kT_0+\sigma_0\leqslant t\leqslant 1+kT_0+t_0-\sigma_0. \end{aligned} \tag{3.32}$$

На очередном отрезке $1+kT_0+t_0-\sigma_0\leqslant t\leqslant 1+kT_0+t_0+\sigma_0$ функция $x_\varphi(t-1,\varepsilon)$ задается формулой, получающейся из (3.9) при замене, как обычно, t на $t-1$. А отсюда и из (3.16), (3.32) для нахождения $x_\varphi(t,\varepsilon)$ приходим к аналогичной (3.18) задаче Коши

$$\begin{gathered} \dot x=1-G(-a_0(t-1-kT_0-t_0)+\varepsilon c_0+\omega_1(t,\varepsilon),\varepsilon)+\omega_2(t,\varepsilon),\\ x|_{t=1+kT_0+t_0-\sigma_0}=1-(n+1)T_0+k(T_0-b_0t_0)+\varepsilon(\alpha_k-d_0)-(b_0-1)(t_0-\sigma_0)+\omega_3(\varepsilon), \end{gathered}$$

где, как и ранее, через ω_j, $j=1,2,3$, обозначены некоторые уже известные экспоненциально малые добавки.

Решение получившейся задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned} x_\varphi(t,\varepsilon)=1-(n+1)T_0+k(T_0-b_0t_0)\\ +\varepsilon(\alpha_k-d_0)-(b_0-1)t_0+\varepsilon w_1(\tau)|_{\tau=(t-1-kT_0-t_0)/\varepsilon}+\Delta_\varphi(t,\varepsilon),\\ 1+kT_0+t_0-\sigma_0\leqslant t\leqslant 1+kT_0+t_0+\sigma_0, \end{aligned} \tag{3.33}$$

где

$$w_1(\tau)=-(b_0-1)\tau-\int_{-\infty}^{\tau}[g(\exp(-a_0s+c_0))-b_0]\,ds. \tag{3.34}$$

В результате для фигурирующего в (3.33) остатка Δ_φ выходит аналогичная (3.21) задача Коши

$$\dot{\Delta}_\varphi = G_\varphi(t,\varepsilon), \qquad \Delta_\varphi|_{t=1+kT_0+t_0-\sigma_0} = g_\varphi(\varepsilon), \tag{3.35}$$

где теперь $G_\varphi(t,\varepsilon) = g(x_1) - g(x_2) + \omega_2(t,\varepsilon)$ при

$$\begin{gathered} x_1 = \exp\biggl[-\frac{a_0(t-1-kT_0-t_0)}{\varepsilon} + c_0\biggr], \\ x_2 = \exp\biggl[-\frac{a_0(t-1-kT_0-t_0)}{\varepsilon} + c_0 + \frac{\omega_1(t,\varepsilon)}{\varepsilon}\biggr], \\ g_\varphi(\varepsilon) = (b_0-1)\sigma_0 - \varepsilon w_1(\tau)|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon} + \omega_3(\varepsilon). \end{gathered}$$

Оценка правых частей из (3.35) проводится по той же схеме, что и в случае (3.22), (3.23). Действительно, привлекая вытекающее из (3.34) асимптотическое равенство

$$w_1(\tau) = -(b_0-1)\tau + O(\exp(a_0\tau)), \qquad \tau \to -\infty, \tag{3.36}$$

приходим к выводу, что

$$(b_0-1)\sigma_0 - \varepsilon w_1(\tau)|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon} = O\biggl(\exp\biggl(-\frac{a_0\sigma_0}{\varepsilon}\biggr)\biggr).$$

А отсюда следует экспоненциальная малость начального условия $g_\varphi(\varepsilon)$. Что же касается неоднородности $G_\varphi(t,\varepsilon)$, то проверка ее равномерной по t, φ экспоненциальной малости базируется на неравенстве (3.25) (см. аналогичное место выше).

Проделанные построения являются связующим звеном между отрезками Λ_k и Λ_{k+1}. Обратимся теперь непосредственно к Λ_{k+1} и заметим, что при $t \in \Lambda_{k+1}$ функция $x_\varphi(t-1,\varepsilon)$ определяется равенствами (3.9), (3.10), (3.12) или (3.13), в которых, как и во всех остальных подобных случаях, следует заменить t на $t-1$. Из упомянутых равенств, в свою очередь, заключаем, что при указанных t имеет место оценка

$$x_\varphi(t-1,\varepsilon) \leqslant -q, \tag{3.37}$$

где $q = \mathrm{const} \in (0, \min(a_0\sigma_0,\ (n+1)T_0 - 1))$. А отсюда и из свойств (1.2) вытекает справедливость равномерного по t, φ асимптотического представления

$$G(x_\varphi(t-1,\varepsilon),\varepsilon) = O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr)\biggr), \qquad q = \mathrm{const} > 0. \tag{3.38}$$

Итак, подставим соотношение (3.38) в (3.16) и дополним получившееся дифференциально-разностное уравнение начальной функцией $x_\varphi(t,\varepsilon)$ на промежутке времени $1 + t_0 + kT_0 + \sigma_0 - h \leqslant t \leqslant 1 + t_0 + kT_0 + \sigma_0$, асимптотика которой уже построена (см. (3.32), (3.33), (3.34)). Далее, разобьем, как обычно, отрезок Λ_{k+1} на части длины, не большей h, и будем последовательно интегрировать упомянутое уравнение, имеющее вид

$$\dot{x} = 1 + O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr)\biggr), \qquad q = \mathrm{const} > 0, \tag{3.39}$$

на соответствующих промежутках. В результате приходим к выводу, что

$$x_\varphi(t,\varepsilon) = t - (n+1)T_0 - (k+1)b_0t_0 - \sigma_0 \\ + \varepsilon(\alpha_k - d_0) + \varepsilon w_1(\tau)|_{\tau=\sigma_0/\varepsilon} + O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr)\biggr), \qquad t \in \Lambda_{k+1}. \tag{3.40}$$

Как и в случае (3.29), формула (3.40) допускает дальнейшее упрощение. Для этого, однако, необходимо выяснить поведение при $\tau \to +\infty$ функции (3.34). Соответствующую асимптотическую формулу легко вывести, исходя из представления

$$w_1(\tau) = \tau - \frac{c_0b_0}{a_0} - \int_{c_0/a_0}^{+\infty} g(\exp(-a_0s + c_0))\,ds \\ - \int_{-\infty}^{c_0/a_0} [g(\exp(-a_0s + c_0)) - b_0]\,ds + \int_{\tau}^{+\infty} g(\exp(-a_0s + c_0))\,ds. \tag{3.41}$$

Для этого достаточно заметить, что последнее слагаемое в (3.41) при $\tau \to +\infty$ имеет порядок $\exp(-a_0\tau)$, а сумма двух других интегралов преобразуется к виду

$$\int_{-\infty}^{c_0/a_0} [g(\exp(-a_0s + c_0)) - b_0]\,ds + \int_{c_0/a_0}^{+\infty} g(\exp(-a_0s + c_0))\,ds = \frac{d_0}{a_0},$$

где, напомним, d_0 – постоянная (3.31). Таким образом, окончательно получаем

$$w_1(\tau) = \tau - \frac{(c_0b_0 + d_0)}{a_0} + O(\exp(-a_0\tau)), \qquad \tau \to +\infty. \tag{3.42}$$

Возвратимся к равенству (3.40) и учтем в нем соотношение (3.42). В результате приходим к аналогичному (3.17) асимптотическому представлению

$$x_\varphi(t,\varepsilon) = t - (n+1)T - (k+1)b_0t_0 + \varepsilon\alpha_{k+1} + \Delta_\varphi(t,\varepsilon), \qquad t \in \Lambda_{k+1}, \tag{3.43}$$

где

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \frac{c_0b_0}{a_0} - \biggl(1 + \frac{1}{a_0}\biggr)d_0. \tag{3.44}$$

А это означает, что сделан шаг индукции, который состоял в переходе от отрезка Λ_k к Λ_{k+1}. Что же касается постоянных α_k, $k = 0, 1, \dots, n+1$, то для них из (3.44) и из того факта, что $\alpha_0 = 0$, вытекают явные формулы

$$\alpha_k = -k\biggl(\frac{c_0b_0}{a_0} + \biggl(1 + \frac{1}{a_0}\biggr)d_0\biggr), \qquad k = 0, 1, \dots, n+1. \tag{3.45}$$

Обоснованный выше индуктивный процесс позволяет за конечное число шагов добраться до последнего отрезка Λ_{n+1} и попутно установить требуемые асимптотические формулы для решения $x_\varphi(t,\varepsilon)$ на всем промежутке $1 - \sigma_0 \leqslant t \leqslant 2 - \sigma_0$. Следует, однако, напомнить, что пока наши построения, связанные с данным отрезком времени, носят условный характер, поскольку они были выполнены при априорном предположении (3.14). Но полученные на этом пути асимптотические формулы свидетельствуют о том, что при любом фиксированном $q \in (0, \min(a_0\sigma_0, (n+1)T_0 - 1))$

требуемое неравенство (3.14) действительно выполняется. Таким образом, все наши условные конструкции обретают законную силу.

На заключительном этапе построения асимптотики решения $x_\varphi(t,\varepsilon)$ рассмотрим отрезок времени $2-\sigma_0 \leqslant t \leqslant T_* - \sigma_0/2$ и предположим, что на нем имеют место априорные оценки (3.14), (3.37). В этом случае в силу условий (1.2) уравнение (2.1) примет вид (3.39). Дополним его начальным условием $x_\varphi(t,\varepsilon)$, $1-\sigma_0 \leqslant t \leqslant 2-\sigma_0$, известным из предыдущих построений. Интегрируя затем получившуюся задачу Коши методом шагов, приходим к асимптотическому представлению

$$x_\varphi(t,\varepsilon) = t - T_* + \varepsilon\alpha_{n+1} + \Delta_\varphi(t,\varepsilon), \qquad 2-\sigma_0 \leqslant t \leqslant T_* - \frac{\sigma_0}{2}, \tag{3.46}$$

где постоянная α_{n+1} задается формулой (3.45) при $k = n+1$.

Для придания изложенным построениям необходимой строгости заметим, что из самого равенства (3.46) и из установленных ранее асимптотических формул для $x_\varphi(t,\varepsilon)$ при $1-\sigma_0 \leqslant t \leqslant 2-\sigma_0$ вытекает справедливость априорных предположений (3.14), (3.37). А именно, несложная проверка показывает, что эти неравенства действительно выполняются на отрезке $2-\sigma_0 \leqslant t \leqslant T_* - \sigma_0/2$, если в качестве константы q в них взять любое число из интервала $(0, \sigma_0/2)$.

Подведем некоторый итог. Из полученных выше асимптотических представлений для решения $x_\varphi(t,\varepsilon)$ (см. (3.5)–(3.13), (3.17), (3.19), (3.20), (3.24), (3.30)–(3.34), (3.36), (3.42)–(3.46)) заключаем, что

$$\max_{-\sigma_0 \leqslant t \leqslant T_* - \sigma_0/2} |x_\varphi(t,\varepsilon) - x_*(t)| = O(\varepsilon), \tag{3.47}$$

где $x_*(t)$ – функция (2.19), а остаток равномерен по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$. Далее, опираясь на (3.47) и учитывая оценки (3.3), (3.4), наложенные на параметр σ_0, приходим к выводу, что интересующий нас $(2n+2)$-й по счету положительный корень $t = T_\varphi$ уравнения $x_\varphi(t-\sigma_0,\varepsilon) = -\sigma_0$ принадлежит отрезку $2-\sigma_0 \leqslant t \leqslant T_* - \sigma_0/2$. А отсюда из формул (3.39), (3.46) очевидным образом следует, что T_φ определяется однозначно, причем равномерно по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$

$$T_\varphi = T_* - \varepsilon\alpha_{n+1} + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr), \qquad q = \mathrm{const} > 0. \tag{3.48}$$

Формулы (3.47), (3.48) свидетельствуют о том, что оператор (2.22) действительно определен на множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ и равномерно по φ

$$\max_{-1-\sigma_0 \leqslant t \leqslant -\sigma_0} |x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon) - x_*(t)| = O(\varepsilon). \tag{3.49}$$

Что же касается требуемого включения $\Pi_\varepsilon(S(\sigma_0, q_1, q_2)) \subset S(\sigma_0, q_1, q_2)$, то в силу (3.49) оно будет заведомо выполняться при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ при условии

$$x_*(t) \in \widehat{S}(\sigma_0, q_1, q_2), \tag{3.50}$$

где $\widehat{S}(\sigma_0, q_1, q_2)$ – множество функций, получающееся из $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ при замене в (2.21) нестрогих неравенств строгими. Напомним, далее, что на параметр σ_0 нами уже наложено ограничение (2.18), которое обеспечивает выполнение свойств

$x_*(-\sigma_0) = -\sigma_0$, $x_*(t) < 0$ при $-1-\sigma_0 \leqslant t \leqslant -\sigma_0$. Поэтому справедливости включения (3.50) добиваемся за счет имеющихся в запасе параметров q_1, q_2, предполагая, что

$$q_1 > -\min_{-1-\sigma_0 \leqslant t \leqslant -\sigma_0} x_*(t), \qquad 0 < q_2 < -\max_{-1-\sigma_0 \leqslant t \leqslant -\sigma_0} x_*(t). \tag{3.51}$$

Итак, оператор Π_ε, являющийся очевидным образом компактным, при выполнении условий (2.18), (3.3), (3.4), (3.51) на параметры σ_0, q_1, q_2 преобразует в себя замкнутое, ограниченное и выпуклое множество $S(\sigma_0, q_1, q_2)$. А отсюда в соответствии с известным принципом Шаудера заключаем, что этот оператор имеет в $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ по крайней мере одну неподвижную точку $\varphi = \varphi_*(t,\varepsilon)$. Ясно также, что решение $x_*(t,\varepsilon)$ уравнения (2.1) с начальной функцией $\varphi_*(t,\varepsilon)$, $-1-\sigma_0 \leqslant t \leqslant -\sigma_0$, оказывается периодическим с периодом $T_*(\varepsilon) = T_\varphi|_{\varphi=\varphi_*}$ и в силу (3.47)–(3.49) удовлетворяет требуемым свойствам (2.20).

4. Анализ свойств устойчивости. Перейдем теперь ко второй части обоснования теоремы 1, т.е. к доказательству единственности и устойчивости релаксационного цикла $x_*(t,\varepsilon)$ с нулевым приближением (2.19). Из явной формулы (2.22) для оператора Π_ε вытекает, что он непрерывно дифференцируем по φ, а его производная Фреше $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$ задается равенством

$$\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)\mathrm{g}_0 = \mathrm{g}(t+T_\varphi,\varepsilon) - \frac{\mathrm{g}(T_\varphi-\sigma_0,\varepsilon)}{\dot{x}_\varphi(T_\varphi-\sigma_0,\varepsilon)}\,\dot{x}_\varphi(t+T_\varphi,\varepsilon), \qquad -1-\sigma_0 \leqslant t \leqslant -\sigma_0. \tag{4.1}$$

Здесь функция $\mathrm{g}_0(t)$ представляет собой произвольный элемент пространства

$$C_0 = \{\mathrm{g}_0(t) \in C[-1-\sigma_0, -\sigma_0],\, \mathrm{g}_0(-\sigma_0) = 0\},$$

а через $\mathrm{g}(t,\varepsilon)$, $-\sigma_0 \leqslant t \leqslant T_\varphi - \sigma_0$, обозначено решение линейного уравнения

$$\begin{gathered}\dot{\mathrm{g}} = A(t,\varepsilon)\mathrm{g}(t-h) + B(t,\varepsilon)\mathrm{g}(t-1),\\ A(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}(f'(\exp x)\exp x)|_{x=x_\varphi(t-h,\varepsilon)/\varepsilon},\\ B(t,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}(g'(\exp x)\exp x)|_{x=x_\varphi(t-1,\varepsilon)/\varepsilon}\end{gathered} \tag{4.2}$$

с начальной функцией $\mathrm{g}_0(t)$, $-1-\sigma_0 \leqslant t \leqslant -\sigma_0$.

Из явной формулы (4.1) следует, что проблема оценки нормы линейного оператора $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$ в пространстве C_0 с нормой

$$\|\mathrm{g}_0\| = \max_{-1-\sigma_0 \leqslant t \leqslant -\sigma_0} |\mathrm{g}_0(t)|$$

сводится к анализу введенного выше решения $\mathrm{g}(t,\varepsilon)$ уравнения (4.2). Покажем, что для этого решения выполняется неравенство вида

$$\max_{-\sigma_0 \leqslant t \leqslant T_\varphi - \sigma_0} |\mathrm{g}(t,\varepsilon)| \leqslant M\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\|\mathrm{g}_0\| \tag{4.3}$$

с некоторыми универсальными (не зависящими от ε, φ, g_0) постоянными M, $q > 0$.

Обратимся сначала к отрезку $-\sigma_0 \leqslant t \leqslant h-\sigma_0$, на котором из (4.2) для $\mathrm{g}(t,\varepsilon)$ имеем явную формулу

$$\mathrm{g}(t,\varepsilon)=\int_{-\sigma_0}^{t} A(s,\varepsilon)\mathrm{g}_0(s-h)\,ds+\int_{-\sigma_0}^{t} B(s,\varepsilon)\mathrm{g}_0(s-1)\,ds, \qquad -\sigma_0 \leqslant t \leqslant h-\sigma_0. \quad (4.4)$$

Напомним, далее, что при рассматриваемых t функция $x_\varphi(t-h,\varepsilon)$ совпадает с функцией $\varphi(t-h)$, а для $x_\varphi(t-1,\varepsilon)$ равенство $x_\varphi(t-1,\varepsilon)=\varphi(t-1)$ имеет место даже на более широком отрезке $-\sigma_0 \leqslant t \leqslant 1-\sigma_0$. Объединяя эти соотношения с фигурирующими в (2.21) оценками и свойствами функций $f(u)$, $g(u)$ (см. (1.2)), приходим к выводу, что

$$\max_{-\sigma_0\leqslant t\leqslant h-\sigma_0} |A(t,\varepsilon)| \leqslant M\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr), \qquad \max_{-\sigma_0\leqslant t\leqslant 1-\sigma_0} |B(t,\varepsilon)| \leqslant M\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr). \quad (4.5)$$

И наконец, учитывая (4.5) в (4.4), убеждаемся, что при $-\sigma_0 \leqslant t \leqslant h-\sigma_0$

$$\max_t |\mathrm{g}(t,\varepsilon)| \leqslant M\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr)\|\mathrm{g}_0\|. \quad (4.6)$$

Для распространения оценки (4.6) на оставшийся отрезок $[h-\sigma_0, T_\varphi-\sigma_0]$ изменения t воспользуемся методом шагов. А именно, разобьем указанный промежуток времени на отрезки

$$[(k+1)h-\sigma_0,(k+2)h-\sigma_0], \quad k=0,1,\dots,k_0, \qquad \text{и} \qquad [(k_0+2)h-\sigma_0,\, T_\varphi-\sigma_0],$$

где $k_0=\lfloor (T_\varphi-2h)/h\rfloor$, $\lfloor\cdot\rfloor$ – целая часть. Опираясь, далее, на равномерные по $\varphi\in S(\sigma_0,q_1,q_2)$ асимптотические формулы

$$\max_{h-\sigma_0\leqslant t\leqslant T_\varphi-\sigma_0} |A(t,\varepsilon)| = O\biggl(\frac{1}{\varepsilon}\biggr), \qquad \max_{1-\sigma_0\leqslant t\leqslant T_\varphi-\sigma_0} |B(t,\varepsilon)| = O\biggl(\frac{1}{\varepsilon}\biggr)$$

и свойства (4.5), замечаем, что из неравенства

$$\begin{aligned}|\mathrm{g}(t,\varepsilon)| \leqslant |\mathrm{g}((k+1)h-\sigma_0,\varepsilon)| &+ \int_{(k+1)h-\sigma_0}^{t} |A(s,\varepsilon)|\cdot|\mathrm{g}(s-h,\varepsilon)|\,ds \\ &+ \int_{(k+1)h-\sigma_0}^{t} |B(s,\varepsilon)|\cdot|\mathrm{g}(s-1,\varepsilon)|\,ds, \qquad t \geqslant (k+1)h-\sigma_0,\end{aligned}$$

и из уже полученных оценок вида (4.6) на отрезках с номерами $j=0,1,\dots,k-1$ вытекает требуемая оценка на k-м отрезке изменения t.

Возвращаясь к оператору Π_ε и учитывая установленное выше неравенство (4.3) в (4.1), приходим к оценке

$$\sup_{\varphi\in S(\sigma_0,q_1,q_2)} \|\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)\|_{C_0\to C_0} \leqslant M\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr).$$

Остается добавить, что эта оценка обеспечивает как сжимаемость оператора последования Π_ε (а значит, единственность его неподвижной точки $\varphi=\varphi_*(t,\varepsilon)$ в множестве $S(\sigma_0,q_1,q_2)$), так и экспоненциальную орбитальную устойчивость соответствующего цикла $x_*(t,\varepsilon)$. Теорема 1 полностью доказана.

В дополнение к установленной теореме отметим, что релаксационный цикл

$$u_*(t,\lambda) = \exp\left(\frac{x_*(t,\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\bigg|_{\varepsilon=1/\lambda} \tag{4.7}$$

исходного уравнения (1.1) обладает требуемыми асимптотическими характеристиками, т.е. является bursting-циклом. Действительно, для его периода $T_*(\lambda)$ справедлива вытекающая из (3.48) формула

$$T_*(\lambda) = T_0 - \frac{\alpha_{n+1}}{\lambda} + O(\exp(-q\lambda)), \qquad q = \mathrm{const} > 0, \quad \lambda \to +\infty.$$

Кроме того, на отрезке времени $0 \leqslant t \leqslant T_*(\lambda)$ цикл (4.7) допускает $n+1$ подряд идущих асимптотически высоких (порядка $\exp(\lambda h)$) всплесков. Этим всплескам соответствуют интервалы $kT_0 < t < t_0 + kT_0$, $k = 0, 1, \dots, n$, положительности функции (2.19). Если же t фиксировано и принадлежит множеству $[0, T_*) \setminus \bigcup_{k=0}^{n}[kT_0, t_0 + kT_0]$, то в указанный момент времени функция $u_*(t,\lambda)$ имеет порядок малости $\exp(-\lambda q)$, где $q = \mathrm{const} > 0$.

В заключение добавим, что при уменьшении запаздывания h для справедливости теоремы 1 необходимо надлежащим образом увеличивать параметр λ (связано это с тем, что в рамках нашей асимптотической теории должно выполняться условие $\lambda h \gg 1$). Если же, напротив, $h = h_0/\lambda$, $h_0 = \mathrm{const} > 0$, то ситуация принципиально меняется. Например, в этом случае может оказаться устойчивым состояние равновесия $u = u_0 > 0$ уравнения (1.1) (существование такого состояния равновесия обеспечивают условия (1.2), а при вполне естественных требованиях $f'(u) < 0$, $g'(u) > 0$, $u \in \mathbb{R}_+$, оно единственно). Кроме того, используя так называемый метод квазинормальных форм (см. [15], [16]), можно показать, что при некоторых дополнительных предположениях из состояния равновесия $u = u_0$ бифурцирует любое наперед заданное число сосуществующих устойчивых циклов, т.е. реализуется хорошо известный феномен буферности. Соответствующий анализ будет изложен в отдельной статье.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А. Ю. Колесов, Ю. С. Колесов, *Релаксационные колебания в математических моделях экологии*, Тр. МИАН, **199**, Наука, М., 1993.

[2] А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, “Реле с запаздыванием и его C^1-аппроксимация”, *Динамические системы и смежные вопросы*, Сб. статей. К 60-летию со дня рождения академика Дмитрия Викторовича Аносова, Тр. МИАН, **216**, Наука, М., 1997, 126–153.

[3] А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Дискретные автоволны в системах с запаздыванием из экологии”, *ДАН*, **434**:6 (2010), 735–738.

[4] А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, “Об одной модификации уравнения Хатчинсона”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50**:12 (2010), 2099–2112.

[5] А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Теория релаксационных колебаний для уравнения Хатчинсона”, *Матем. сб.*, **202**:6 (2011), 51–82.

[6] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. I”, *Дифференц. уравнения*, **47**:7 (2011), 919–932.

[7] Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, *Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания*, Наука, М., 1975.

[8] Е. Ф. Мищенко, Ю. С. Колесов, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах*, Физматлит, М., 1995.

[9] T. R. Chay, J. Rinzel, "Bursting, beating, and chaos in an excitable membrane model", *Biophys. J.*, **47**:3 (1985), 357–366.

[10] G. B. Ermentrout, N. Kopell, "Parabolic bursting in an excitable system coupled with a slow oscillation", *SIAM J. Appl. Math.*, **46**:2 (1986), 233–253.

[11] E. M. Izhikevich, "Neural excitability, spiking and bursting", *Int. J. Bifurcation Chaos*, **10**:6 (2000), 1171–1266.

[12] M. I. Rabinovich, P. Varona, A. I. Selverston, H. D. I. Abarbanel, "Dynamical principles in neuroscience", *Rev. Mod. Phys.*, **78**:4 (2006), 1213–1265.

[13] *Bursting. The Genesis of Rhythm in the Nervous System*, eds. S. Coombes, P. C. Bressloff, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005.

[14] С. А. Кащенко, В. В. Майоров, *Модели волновой памяти*, Книжный дом "ЛИБРОКОМ", М., 2009.

[15] А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, "Новые методы доказательства существования и устойчивости периодических решений в сингулярно возмущенных системах с запаздыванием", *Анализ и особенности. Часть* 2, Сб. статей. К 70-летию со дня рождения академика Владимира Игоревича Арнольда, Тр. МИАН, **259**, Наука, М., 2007, 106–133.

[16] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, "Экстремальная динамика обобщенного уравнения Хатчинсона", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **49**:1 (2009), 76–89.

С. Д. Глызин
Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова
E-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

Поступило
01.12.2011

А. Ю. Колесов
Ярославский государственный университет им.
П. Г. Демидова
E-mail: kolesov@uniyar.ac.ru

Н. Х. Розов
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: fpo.mgu@mail.ru