ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2011, том 47, № 7, с. 919–932

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.929

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ В НЕЙРОННЫХ СИСТЕМАХ. I

© 2011 г. С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов

Рассматривается скалярное сингулярно возмущенное нелинейное дифференциально-разностное уравнение с запаздыванием, являющееся моделью отдельного нейрона. Изучаются вопросы о существовании, асимптотике и устойчивости его релаксационного цикла.

1. Постановка задачи. Основой излагаемых ниже построений служит теория релаксационных колебаний в многомерных системах обыкновенных дифференциальных уравнений, берущая начало с работы Л.С. Понтрягина и Е.Ф. Мищенко [1]. Последующее развитие этой теории отражено в работах [2–5], а достаточно законченный характер она приняла в монографиях [6, 7]. Уместно также отметить монографию [8] и работу [9], в которых основные идеи и методы из [6, 7] перенесены на некоторые классы сингулярно возмущенных дифференциально-разностных уравнений с запаздыванием. Результаты настоящей работы представляют собой естественное продолжение начатых в [8, 9] исследований.

Приступим к описанию объекта дальнейшего анализа. Будем считать, что электрическая активность отдельного нейрона моделируется уравнением [10, с. 32]

$$\dot u = \lambda[-1 + \alpha f(u(t-1)) - \beta g(u)]u. \tag{1}$$

Здесь $u(t) > 0$ – мембранный потенциал нейрона, параметр $\lambda > 0$, характеризующий скорость протекания электрических процессов в системе, предполагается большим, а параметры $\alpha, \beta > 0$, имеющие порядок единицы, таковы, что

$$\alpha > 1 + \beta. \tag{2}$$

Предполагаем, что фигурирующие в (1) функции $f(u)$, $g(u)$ принадлежат классу $C^1(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} :\ u \ge 0\}$, и обладают свойствами

$$\begin{gathered} f(0) = g(0) = 1, \quad 0 < \beta g(u) + 1 < \alpha \quad \forall\, u \in \mathbb{R}_+; \\ f(u), g(u), uf'(u), ug'(u) = O(1/u) \quad \text{при} \quad u \to +\infty. \end{gathered} \tag{3}$$

Как будет показано ниже, при сформулированных ограничениях и при всех достаточно больших λ уравнение (1) имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл $u = u_*(t,\lambda)$ периода $T_*(\lambda)$, где

$$\lim_{\lambda\to\infty} T_*(\lambda) = T_0, \quad T_0 = \alpha + 1 + (\beta+1)/(\alpha - \beta - 1) \tag{4}$$

(положительность величины T_0 вытекает из неравенства (2)). Функция $u_*(t,\lambda)$ на отрезке времени длины периода имеет асимптотически высокий всплеск длины α, а в остальное время асимптотически мала. Наглядное представление о релаксационных свойствах этого цикла дает его график на плоскости (t,u) в случае $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $\lambda = 3.5$, $f = g = (u+1)/(u^2+1)$, изображенный на рис. 1.

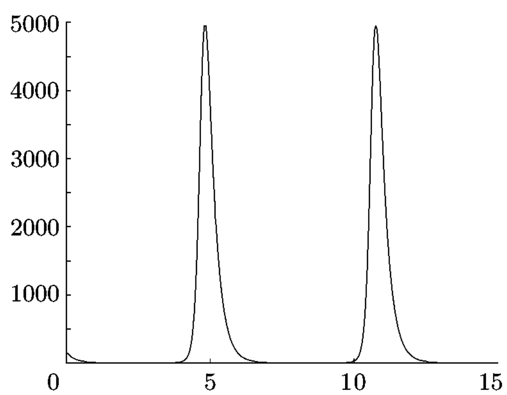

Рис. 1.

2. Основной результат. При исследовании вопроса о существовании и устойчивости у уравнения (1) релаксационного цикла $u_*(t,\lambda)$ с требуемыми свойствами удобно сделать в (1) замену $u=\exp(\lambda x)$. Указанная замена преобразует уравнение (1) к виду

$$\dot{x}=-1+\alpha F(x(t-1),\varepsilon)-\beta G(x,\varepsilon), \tag{5}$$

где $F(x,\varepsilon)=f(\exp(x/\varepsilon))$, $G(x,\varepsilon)=g(\exp(x/\varepsilon))$, $\varepsilon=1/\lambda\ll 1$. Далее, заметим, что в силу свойств (3) выполняются предельные соотношения

$$\lim_{\varepsilon\to 0}F(x,\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}G(x,\varepsilon)=R(x), \qquad R(x)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad x<0,\\ 0 & \text{при} \quad x>0,\end{cases} \tag{6}$$

позволяющие перейти от уравнения (5) к рассмотрению предельного релейного уравнения с запаздыванием

$$\dot{x}=-1+\alpha R(x(t-1))-\beta R(x). \tag{7}$$

Как и в работе [9], дадим пошаговое конструктивное определение понятия решения уравнения (7). Для этого зафиксируем некоторое

$$\sigma_0:\ 0<\sigma_0<(\beta+1)/(\alpha-\beta-1), \tag{8}$$

рассмотрим множество функций

$$\varphi(t)\in C[-1-\sigma_0,-\sigma_0], \quad \varphi(t)<0 \quad \forall\, t\in[-1-\sigma_0,-\sigma_0], \quad \varphi(-\sigma_0)=-\sigma_0(\alpha-\beta-1) \tag{9}$$

и обозначим через $x_\varphi(t)$, $t\ge-\sigma_0$, решение уравнения (7) с начальной функцией (9).

Заметим сразу, что поскольку $\varphi(t-1)<0$ при $t\in[-\sigma_0,1-\sigma_0]$, то по крайней мере при значениях t, достаточно близких к $-\sigma_0$, в силу (6), (7) функция x_φ определяется из задачи Коши $\dot{x}=\alpha-\beta-1$, $x(-\sigma_0)=-\sigma_0(\alpha-\beta-1)$ и, следовательно,

$$x_\varphi(t)=(\alpha-\beta-1)t. \tag{10}$$

Ясно также, что до тех пор, пока $x_\varphi(t)$ или $x_\varphi(t-1)$ не сменит знак, правая часть уравнения (7) меняться не будет. А отсюда в свою очередь заключаем, что формула (10) сохраняется на промежутке $t\in[-\sigma_0,0)$.

При $t=0$ первый раз происходит переключение, обусловленное сменой знака у $x_\varphi(t)$, и при $t\ge 0$ решение $x_\varphi(t)$ определяется уже из задачи Коши $\dot{x}=\alpha-1$, $x(0)=0$, т.е. посредством равенства

$$x_\varphi(t)=(\alpha-1)t. \tag{11}$$

Точнее говоря, формула (11) остается в силе пока $x_\varphi(t-1)<0$, $x_\varphi(t)>0$, т.е. до момента времени $t=1$.

При $t=1$ происходит очередное переключение, связанное теперь со сменой знака $x_\varphi(t-1)$, и при $t\ge 1$ для нахождения x_φ имеем задачу Коши $\dot{x}=-1$, $x(1)=\alpha-1$. Тем самым на промежутке $t\in[1,\alpha)$ получаем равенство

$$x_\varphi(t)=\alpha-t. \tag{12}$$

В точке $t=\alpha$ решение $x_\varphi(t)$ снова меняет знак и поэтому при $t\ge\alpha$ рассмотрению подлежит уравнение $\dot{x}=-1-\beta$ с нулевым начальным условием при $t=\alpha$. А отсюда нетрудно вывести, что на промежутке $t\in[\alpha,\alpha+1)$ интересующее нас решение задается формулой

$$x_\varphi(t)=-(1+\beta)(t-\alpha). \tag{13}$$

При $t \geq \alpha + 1$ снова, как и на начальном этапе, функции $x_\varphi(t)$ и $x_\varphi(t-1)$ становятся отрицательными. Поэтому на промежутке $t \in [\alpha+1, T_0)$, где величина T_0 определена в (4), решение $x_\varphi(t)$ имеет аналогичный (10) вид

$$x_\varphi(t) = (\alpha - \beta - 1)(t - \alpha - 1) - 1 - \beta. \tag{14}$$

Завершая описание построения решения $x_\varphi(t)$, отметим, что в силу условия (8) на постоянную σ_0 функция $x_\varphi(t+T_0)$, $-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, принадлежит исходному начальному множеству (9). А это означает, что при $t \geq T_0 - \sigma_0$ весь процесс повторяется. Более того, из формул (10)–(14) вытекает, что каждое решение $x_\varphi(t)$ с начальным условием (9) при $t \geq -\sigma_0$ совпадает с одной и той же T_0-периодической функцией (рис. 2)

$$x_0(t) = \begin{cases} (\alpha-1)t & \text{при} \quad 0 \leq t \leq 1, \\ \alpha - t & \text{при} \quad 1 \leq t \leq \alpha, \\ -(1+\beta)(t-\alpha) & \text{при} \quad \alpha \leq t \leq \alpha+1, \\ (\alpha-\beta-1)(t-\alpha-1) - 1 - \beta & \text{при} \quad \alpha+1 \leq t \leq T_0, \end{cases} \qquad x_0(t+T_0) \equiv x_0(t). \tag{15}$$

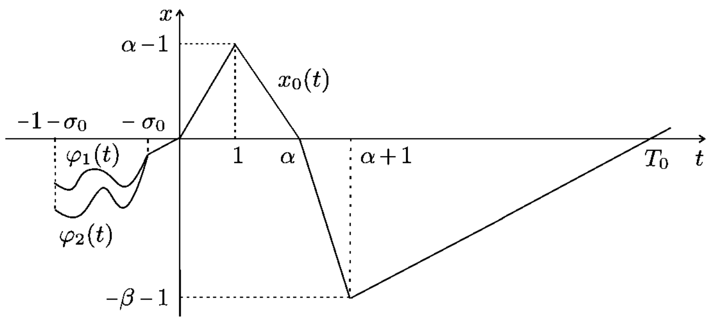

Рис. 2.

Перейдем к вопросу о связи между периодическими решениями уравнений (5) и (7). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *При всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *уравнение (5) имеет единственный орбитально экспоненциально устойчивый цикл* $x_*(t,\varepsilon)$, $x_*(-\sigma_0,\varepsilon) \equiv -\sigma_0(\alpha-\beta-1)$, *периода* $T_*(\varepsilon)$, *удовлетворяющий предельным равенствам*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \max_t |x_*(t,\varepsilon) - x_0(t)| = 0, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} T_*(\varepsilon) = T_0. \tag{16}$$

Доказательство, содержащееся в следующих двух пунктах, опирается на некоторые дополнительные конструкции. Для их описания наряду с константой σ_0 (см. (8)) зафиксируем произвольно постоянные $q_1 > \sigma_0(\alpha-\beta-1)$, $q_2 \in (0, \sigma_0(\alpha-\beta-1))$ и обозначим через $S(\sigma_0,q_1,q_2) \subset C[-1-\sigma_0,-\sigma_0]$ замкнутое, ограниченное и выпуклое множество функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих требованиям

$$-q_1 \leq \varphi(t) \leq -q_2, \quad \varphi(-\sigma_0) = -\sigma_0(\alpha-\beta-1). \tag{17}$$

Далее, для произвольной функции $\varphi \in S(\sigma_0,q_1,q_2)$ рассмотрим решение $x = x_\varphi(t,\varepsilon)$, $t \geq -\sigma_0$, уравнения (5) с начальным условием $\varphi(t)$, $-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, а через $t = T_\varphi$ обозначим второй положительный корень уравнения $x_\varphi(t-\sigma_0,\varepsilon) = -\sigma_0(\alpha-\beta-1)$ (если он существует). И наконец, на множестве $S(\sigma_0,q_1,q_2)$ зададим оператор Π_ε с помощью равенства

$$\Pi_\varepsilon(\varphi) = x_\varphi(t+T_\varphi,\varepsilon), \quad -1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \tag{18}$$

Последующий план действий таков. Сначала мы установим асимптотические формулы для $x_\varphi(t,\varepsilon)$ на различных промежутках изменения t, из которых будет следовать, что при подходящем выборе параметров σ_0, q_1, q_2 оператор (18) определен на множестве $S(\sigma_0,q_1,q_2)$ и преобразует его в себя. Затем проведем анализ уравнения в вариациях на решении $x_\varphi(t,\varepsilon)$ и покажем, что Π_ε является сжимающим.

3. Существование периодического решения. Построение асимптотики функции $x_\varphi(t,\varepsilon)$ начнем с отрезка $-\sigma_0 \le t \le \sigma_0$, считая, что

$$\sigma_0 < 1/2. \tag{19}$$

Так как в силу (19) его длина не превосходит единицы, то в этом случае $x_\varphi(t-1,\varepsilon) = \varphi(t-1)$ и, следовательно, на указанном отрезке $x_\varphi(t,\varepsilon)$ определяется из задачи Коши

$$\dot{x} = -1 - \beta G(x,\varepsilon) + \alpha F(\varphi(t-1),\varepsilon), \quad x|_{t=-\sigma_0} = -\sigma_0(\alpha-\beta-1). \tag{20}$$

При асимптотическом исследовании задачи (20) существенным является то обстоятельство, что в силу неравенств из (17) и свойств (3) равномерно по $t \in [-\sigma_0, \sigma_0]$, $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ имеем

$$F(\varphi(t-1),\varepsilon) = 1 + O(\exp(-q_2/\varepsilon)). \tag{21}$$

Подставим, далее, соотношение (21) в (20), отбросим экспоненциально малое по ε (т.е. имеющее порядок $\exp(-q/\varepsilon)$, $q = \mathrm{const} > 0$) слагаемое и в получившемся уравнении для x выполним замены $x = \varepsilon v(\tau)$, $\tau = t/\varepsilon$. В результате приходим к не зависящему от ε модельному скалярному уравнению

$$\frac{dv}{d\tau} = \alpha - 1 - \beta g(\exp v), \quad -\infty < \tau < \infty. \tag{22}$$

В дальнейшем нас будет интересовать специальное решение $v_0(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, уравнения (22), задающееся равенством

$$v_0(\tau) = V^{-1}(z)|_{z=(\alpha-\beta-1)\tau}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \tag{23}$$

где $V^{-1}(z)$ – функция, обратная к

$$V(z) = z - \int\limits_{-\infty}^{z} \frac{\beta(1-g(\exp s))}{\alpha - 1 - \beta g(\exp s)}\, ds, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{24}$$

Подчеркнем, что определение (23) корректно, поскольку условия (3) гарантируют как выполнение неравенства $\alpha-1-\beta g(\exp s) > 0$ $\forall\, s \in \mathbb{R}$ и сходимость несобственного интеграла из (24), так и справедливость свойств $V'(z) = (\alpha-1-\beta)/(\alpha-1-\beta g(\exp z)) > 0$ $\forall\, z \in \mathbb{R}$, $V(z) \to \pm\infty$ при $z \to \pm\infty$. А отсюда в свою очередь вытекает существование обратной функции $V^{-1}(z)$ при всех $z \in \mathbb{R}$.

Остановимся на асимптотическом поведении функции (23) при $\tau \to \pm\infty$. Для этого выясним сначала характер поведения функций $V(z)$ и $V^{-1}(z)$ при $z \to \pm\infty$. Обращаясь в очередной раз к свойствам (3), из равенства (24) последовательно выводим:

$$V(z) = z + O(\exp z), \quad V^{-1}(z) = z + O(\exp z), \quad z \to -\infty. \tag{25}$$

Для получения же аналогичных (25) формул при $z \to +\infty$ представим $V(z)$ в виде

$$V(z) = \frac{\alpha-\beta-1}{\alpha-1} z - \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\beta(1-g(\exp s))}{\alpha-1-\beta g(\exp s)}\, ds - \int\limits_{0}^{z} \left(\frac{\beta(1-g(\exp s))}{\alpha-1-\beta g(\exp s)} - \frac{\beta}{\alpha-1} \right) ds =$$

$$= \frac{\alpha-\beta-1}{\alpha-1}(z - c_0) - \frac{\alpha-\beta-1}{\alpha-1} \int\limits_{z}^{+\infty} \frac{\beta g(\exp s)}{\alpha-1-\beta g(\exp s)}\, ds, \tag{26}$$

где

$$c_0 = \frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-1} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\beta(1-g(\exp s))}{\alpha-1-\beta g(\exp s)}\, ds - \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\beta g(\exp s)}{\alpha-1-\beta g(\exp s)}\, ds =$$

$$= \frac{(\alpha-1)\beta}{\alpha-\beta-1}\int\limits_0^1 \frac{1-g(u)}{u(\alpha-1-\beta g(u))}\,du - \beta\int\limits_1^{+\infty}\frac{g(u)}{u(\alpha-1-\beta g(u))}\,du. \tag{27}$$

Остается заметить, что из соотношений (26), (27) требуемые асимптотические представления

$$V(z) = \frac{\alpha-\beta-1}{\alpha-1}\,(z-c_0) + O(\exp(-z)),$$
$$V^{-1}(z) = \frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-1}\,z + c_0 + O\biggl(\exp\biggl(-\frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-1}\,z\biggr)\biggr) \tag{28}$$

при $z\to+\infty$ вытекают уже очевидным образом.

Суммируя проделанные построения и объединяя формулы (23), (25), (28), приходим к выводу, что интересующие нас асимптотические равенства для $v_0(\tau)$ имеют вид

$$v_0(\tau) = (\alpha-\beta-1)\tau + O(\exp(\alpha-\beta-1)\tau), \quad \tau\to-\infty,$$
$$v_0(\tau) = (\alpha-1)\tau + c_0 + O(\exp(-(\alpha-1)\tau)), \quad \tau\to+\infty. \tag{29}$$

Как оказывается, функция (23) играет существенную роль при асимптотическом анализе задачи Коши (20). А именно убедимся в том, что решение $x_\varphi(t,\varepsilon)$ этой задачи допускает представление

$$x_\varphi(t,\varepsilon) = \varepsilon v_0(\tau)|_{\tau=t/\varepsilon} + \Delta_{1,\varphi}(t,\varepsilon), \quad -\sigma_0\le t\le\sigma_0, \tag{30}$$

где через $\Delta_{1,\varphi}$, $\Delta_{2,\varphi}$, $\ldots$ здесь и ниже обозначаются остатки, имеющие экспоненциальный по ε порядок малости равномерно по φ, t.

Подставляя соотношение (30) в (20), для отыскания $\Delta_{1,\varphi}$ получаем задачу Коши

$$\dot\Delta_{1,\varphi} = -\beta[g(\exp(v_0(t/\varepsilon)+\Delta_{1,\varphi}/\varepsilon)) - g(\exp v_0(t/\varepsilon))] + \alpha(F(\varphi(t-1),\varepsilon)-1),$$
$$\Delta_{1,\varphi}|_{t=-\sigma_0} = \delta(\varepsilon), \tag{31}$$

где $\delta(\varepsilon) = -\sigma_0(\alpha-\beta-1) - \varepsilon v_0(\tau)|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon}$. Помимо равенства (21) ее анализ основывается на следующих двух фактах. Во-первых, в силу первого асимптотического представления из (29) имеем

$$\delta(\varepsilon) = O(\exp(-(\alpha-\beta-1)\sigma_0/\varepsilon)); \tag{32}$$

во-вторых, из условий (3) вытекает, что

$$|g(u_1)-g(u_2)| \le \frac{M_1}{1+\min(u_1^2,u_2^2)}\,|u_1-u_2| \quad \forall\, u_1,u_2\in\mathbb{R}_+, \tag{33}$$

где $M_1 = \sup\limits_{u\in\mathbb{R}_+}(1+u^2)|g'(u)| < \infty$.

Предположим сначала, что на интересующем нас отрезке $-\sigma_0\le t\le\sigma_0$ выполняется априорная оценка

$$|\Delta_{1,\varphi}(t,\varepsilon)| \le M_2\varepsilon \tag{34}$$

с некоторой универсальной (не зависящей t, φ, ε) константой $M_2>0$. Отсюда и из неравенства (33) нетрудно увидеть, что

$$|g(\exp(v_0(t/\varepsilon)+\Delta_{1,\varphi}/\varepsilon)) - g(\exp v_0(t/\varepsilon))| \le \frac{M_3}{\varepsilon}\exp(-|v_0(t/\varepsilon)|)|\Delta_{1,\varphi}(t,\varepsilon)|, \tag{35}$$

при $-\sigma_0\le t\le\sigma_0$, где постоянная $M_3>0$ зависит от M_2 из (34), но не зависит от t, φ, ε.

Последующий способ действий стандартен. Сначала переходим обычным образом от (31) к соответствующему интегральному уравнению, из которого в свою очередь с учетом неравенства (35) получаем оценку

$$|\Delta_{1,\varphi}(t,\varepsilon)| \le |\delta(\varepsilon)| + \alpha \int\limits_{-\sigma_0}^{\sigma_0} |F(\varphi(s-1),\varepsilon) - 1|\, ds + \frac{M_3}{\varepsilon} \int\limits_{-\sigma_0}^{t} \exp(-|v_0(s/\varepsilon)|)|\Delta_{1,\varphi}(s,\varepsilon)|\, ds. \quad (36)$$

Далее, применяя к (36) лемму Гроуолла–Беллмана и используя известные свойства (21), (32), убеждаемся в том, что

$$|\Delta_{1,\varphi}(t,\varepsilon)| \le \left(|\delta(\varepsilon)| + \alpha \int\limits_{-\sigma_0}^{\sigma_0} |F(\varphi(s-1),\varepsilon) - 1|\, ds\right) \exp\left\{\frac{M_3}{\varepsilon} \int\limits_{-\sigma_0}^{t} \exp(-|v_0(s/\varepsilon)|)\, ds\right\} \le$$

$$\le \left(|\delta(\varepsilon)| + \alpha \int\limits_{-\sigma_0}^{\sigma_0} |F(\varphi(s-1),\varepsilon) - 1|\, ds\right) \exp\left\{M_3 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-|v_0(\tau)|)\, d\tau\right\} = O(\exp(-q_2/\varepsilon))$$

(сходимость фигурирующего здесь несобственного интеграла вытекает из установленных ранее свойств (29) функции $v_0(\tau)$ при $\tau \to \pm\infty$). А это означает, что сделанное выше априорное предположение (34) действительно выполняется и, следовательно, остаток $\Delta_{1,\varphi}(t,\varepsilon)$ из (30) обладает требуемой экспоненциальной малостью.

Рассмотрим теперь промежуток времени $\sigma_0 \le t \le 1-\sigma_0$. На нем по-прежнему $x_\varphi(t-1,\varepsilon) = \varphi(t-1)$, а значит, сохраняется асимптотическое равенство (21). Будем считать, что для функции $x_\varphi(t,\varepsilon)$, определяющейся из задачи Коши

$$\dot{x} = -1 - \beta G(x,\varepsilon) + \alpha F(\varphi(t-1),\varepsilon), \quad x|_{t=\sigma_0} = \varepsilon v_0(\tau)|_{\tau=\sigma_0/\varepsilon} + \Delta_{1,\varphi}(\sigma_0,\varepsilon), \quad (37)$$

при указанных t выполняется априорная оценка

$$x_\varphi(t,\varepsilon) \ge q, \quad (38)$$

где одной и той же буквой q здесь и в последующем обозначаются различные универсальные (не зависящие от $t,\ \varphi,\ \varepsilon$) положительные постоянные, точные значения которых несущественны.

Принимая во внимание неравенство (38) и используя в очередной раз свойства (3), убеждаемся в том, что в данном случае

$$|G(x,\varepsilon)| = O(\exp(-q/\varepsilon)). \quad (39)$$

Далее, для начального условия из (37) в силу второго равенства (29) и установленной выше экспоненциальной малости $\Delta_{1,\varphi}$ имеем

$$\varepsilon v_0(\tau)|_{\tau=\sigma_0/\varepsilon} + \Delta_{1,\varphi}(\sigma_0,\varepsilon) = (\alpha-1)\sigma_0 + \varepsilon c_0 + O(\exp(-q_2/\varepsilon)). \quad (40)$$

И наконец, учитывая соотношения (21), (39), (40) в (37), приходим к асимптотическому представлению

$$x_\varphi(t,\varepsilon) = (\alpha-1)t + \varepsilon c_0 + \Delta_{2,\varphi}(t,\varepsilon), \quad \sigma_0 \le t \le 1-\sigma_0. \quad (41)$$

Напомним, однако, что формула (41) получена нами при априорном предположении (38). Но из (41) в свою очередь следует, что условие (38) будет выполняться при любом фиксированном $q \in (0,(\alpha-1)\sigma_0)$ и при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Таким образом, асимптотическое равенство (41) доказано.

Перейдем к рассмотрению отрезка $1-\sigma_0 \le t \le 1+\sigma_0$. Особенность этого случая состоит в том, что указанный промежуток времени содержит точку переключения $t=1$ релейного уравнения (7). Поэтому, согласно представлению (30), здесь

$$x_\varphi(t-1,\varepsilon) = \varepsilon v_0(\tau)|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + \Delta_{1,\varphi}(t-1,\varepsilon). \tag{42}$$

Для функции же $x_\varphi(t,\varepsilon)$, определяющейся из задачи Коши

$$\dot{x} = -1 + \alpha F(x_\varphi(t-1,\varepsilon),\varepsilon) - \beta G(x,\varepsilon), \quad x|_{t=1-\sigma_0} = (\alpha-1)(1-\sigma_0) + \varepsilon c_0 + \Delta_{2,\varphi}(1-\sigma_0,\varepsilon), \tag{43}$$

по-прежнему считаем выполненным априорное условие (38).

При асимптотическом анализе задачи (43) нам потребуется аналогичная (35) оценка

$$|f(\exp s_1) - f(\exp s_2)| \le \frac{M}{\varepsilon}\exp(-|v_0((t-1)/\varepsilon)|)|\Delta_{1,\varphi}(t-1,\varepsilon)|,$$

где $s_1 = v_0(\tau)|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + \Delta_{1,\varphi}(t-1,\varepsilon)/\varepsilon$, $s_2 = v_0(\tau)|_{\tau=(t-1)/\varepsilon}$, $M>0$ – универсальная константа, а t изменяется на отрезке $1-\sigma_0 \le t \le 1+\sigma_0$. Объединяя это неравенство с формулами (39), (42), после несложных преобразований из (43) выводим, что

$$x_\varphi(t,\varepsilon) = \alpha - 1 + \varepsilon[(\alpha-1)\tau + c_0 + \alpha a(\tau)]|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + \Delta_{3,\varphi}(t,\varepsilon), \quad 1-\sigma_0 \le t \le 1+\sigma_0, \tag{44}$$

где функция $a(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, имеет вид

$$a(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\tau} (f(\exp v) - 1)|_{v=v_0(s)}\, ds. \tag{45}$$

Как и в предыдущем случае, формула (44) носит пока условный характер, так как она получена в предположении (38). Поэтому для ее обоснования достаточно убедиться в том, что правая часть равенства (44) действительно удовлетворяет оценке (38) при надлежащем выборе постоянной $q>0$.

При решении поставленной задачи необходима информация о поведении при $\tau \to \pm\infty$ функции (45). В связи с этим представим ее в виде

$$a(\tau) = -\tau + \int\limits_{-\infty}^{0} (f(\exp v_0(s)) - 1)\, ds + \int\limits_{0}^{+\infty} f(\exp v_0(s))\, ds - \int\limits_{\tau}^{+\infty} f(\exp v_0(s))\, ds.$$

Отсюда и из (45) с учетом свойств функций $f(u)$, $v_0(\tau)$ (см. (3), (29)) очевидным образом следует, что

$$a(\tau) = O(\exp(\alpha-\beta-1)\tau), \quad \tau \to -\infty; \quad a(\tau) = -\tau + a_0 + O(\exp(-(\alpha-1)\tau)), \quad \tau \to +\infty, \tag{46}$$

где

$$a_0 = \int\limits_{-\infty}^{0} (f(\exp v_0(s)) - 1)\, ds + \int\limits_{0}^{+\infty} f(\exp v_0(s))\, ds =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{v_0(0)} \frac{f(\exp v) - 1}{\alpha - 1 - \beta g(\exp v)}\, dv + \int\limits_{v_0(0)}^{+\infty} \frac{f(\exp v)}{\alpha - 1 - \beta\, g(\exp v)}\, dv. \tag{47}$$

Возвращаясь к равенству (44) и подставляя в его правую часть формулы (46), приходим к выводу, что при дополнительном ограничении

$$\sigma_0 < \alpha - 1 \tag{48}$$

на параметр σ_0 (которое всюду ниже считаем выполненным) требуемая оценка (38) оказывается справедливой на отрезке $t \in [1-\sigma_0, 1+\sigma_0]$ при любом фиксированном q из интервала $0 < q < \min(\alpha - 1 - \sigma_0, (\alpha-1)(1-\sigma_0))$.

Прежде чем перейти к рассмотрению очередного промежутка времени, попытаемся упростить формулу для a_0 из (46). Недостаток последнего равенства (47) заключается в том, что в нем фигурирует величина $v_0(0)$, для которой нет явного выражения. Однако от этой трудности удается избавиться.

Справедлива

Лемма 1. *Для постоянной a_0 из (46) имеет место явная формула*

$$a_0 = \int\limits_0^1 \frac{f(u)-1}{u(\alpha-1-\beta g(u))}\,du - \frac{\beta}{\alpha-\beta-1}\int\limits_0^1 \frac{1-g(u)}{u(\alpha-1-\beta g(u))}\,du + \int\limits_1^{+\infty} \frac{f(u)}{u(\alpha-1-\beta g(u))}\,du. \quad (49)$$

Доказательство. Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$a_0(z) = \int\limits_{-\infty}^{z} \frac{f(\exp v)-1}{\alpha-1-\beta g(\exp v)}\,dv + \int\limits_{z}^{+\infty} \frac{f(\exp v)}{\alpha-1-\beta g(\exp v)}\,dv \quad (50)$$

и заметим, что $a_0'(z) = -1/(\alpha-1-\beta g(\exp z))$. Следовательно, мы можем перейти от (50) к эквивалентной форме записи

$$a_0(z) = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{f(\exp v)-1}{\alpha-1-\beta g(\exp v)}\,dv + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{f(\exp v)}{\alpha-1-\beta g(\exp v)}\,dv - \int\limits_{0}^{z} \frac{dv}{\alpha-1-\beta g(\exp v)}. \quad (51)$$

Заметим, далее, что интересующая нас константа a_0 задается равенством $a_0 = a_0(z)|_{z=v_0(0)}$. Таким образом, задача сводится к вычислению третьего интеграла из (51) при $z = v_0(0)$.

Перейдем в упомянутом интеграле к новой переменной τ по формуле $v = v_0(\tau)$, где $v_0(\tau)$ – функция (23). В результате имеем

$$-\int\limits_{0}^{v_0(0)} \frac{dv}{\alpha-1-\beta g(\exp v)} = -\int\limits_{\tau_0}^{0} d\tau = \tau_0, \quad (52)$$

где τ_0 – корень уравнения $v_0(\tau) = 0$, для которого в свою очередь из представлений (23), (24) вытекает явное выражение

$$\tau_0 = -\frac{1}{\alpha-\beta-1}\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\beta(1-g(\exp v))}{\alpha-1-\beta g(\exp v)}\,dv. \quad (53)$$

И наконец, объединяя соотношения (51)–(53) и выполняя во всех интегралах замену переменной $u = \exp v$, получаем требуемое равенство (49). Лемма 1 доказана.

Вернемся к асимптотическому анализу решения $x_\varphi(t,\varepsilon)$. Рассмотрим очередной промежуток времени $1+\sigma_0 \le t \le \alpha - \sigma_0$ при условии

$$\sigma_0 < (\alpha-1)/2, \quad (54)$$

гарантирующем, что $1+\sigma_0 < \alpha - \sigma_0$. В этом случае при выполнении априорных оценок

$$x_\varphi(t-1,\varepsilon) \ge q, \quad x_\varphi(t,\varepsilon) \ge q \quad (55)$$

вопрос нахождения $x_\varphi(t,\varepsilon)$ сводится к интегрированию уравнения вида

$$\dot{x} = -1 + O(\exp(-q/\varepsilon)) \tag{56}$$

с начальным условием

$$x|_{t=1+\sigma_0} = \alpha - 1 + \varepsilon[(\alpha-1)\tau + c_0 + \alpha a(\tau)]|_{\tau=\sigma_0/\varepsilon} + \Delta_{3,\varphi}(1+\sigma_0,\varepsilon) =$$
$$= \alpha - 1 - \sigma_0 + \varepsilon(c_0 + \alpha a_0) + O(\exp(-q/\varepsilon)) \tag{57}$$

(при выводе второго равенства из (57) использована асимптотика функции $a(\tau)$ при $\tau \to +\infty$).

Из соотношений (56), (57) очевидным образом вытекает асимптотическое представление

$$x_\varphi(t,\varepsilon) = \alpha - t + \varepsilon c_1 + \Delta_{4,\varphi}(t,\varepsilon), \quad c_1 = c_0 + \alpha a_0, \quad 1+\sigma_0 \le t \le \alpha - \sigma_0, \tag{58}$$

имеющее пока условный характер. Для проверки же справедливости формулы (58) следует убедиться в справедливости оценок (55). Объединяя (58) с уже установленными ранее асимптотическими представлениями для $x_\varphi(t,\varepsilon)$ при $\sigma_0 \le t \le 1+\sigma_0$ (см. (41), (44)), приходим к выводу, что условия (55) будут выполняться при любом фиксированном q из интервала $(0, \min[\sigma_0, (\alpha-1)\sigma_0])$.

Следующий временной промежуток $\alpha - \sigma_0 \le t \le \alpha + \sigma_0$ характерен тем, что, во-первых, он содержит точку переключения $t = \alpha$ релейного уравнения (7); во-вторых, при рассматриваемых t в силу уже известных асимптотических формул для $x_\varphi(t,\varepsilon)$ при $\sigma_0 \le t \le \alpha - \sigma_0$ (см. (41), (44), (58)) имеем $x_\varphi(t-1,\varepsilon) \ge q$. Таким образом, используя свойства (3) функции $f(u)$, убеждаемся в справедливости аналогичного (21) асимптотического равенства

$$F(x_\varphi(t-1,\varepsilon),\varepsilon) = O(\exp(-q/\varepsilon)). \tag{59}$$

Последующие действия подобны тем, что были предприняты при выводе формулы (30). А именно на основании свойства (59) отбросим в правой части уравнения (5) экспоненциально малое слагаемое, содержащее запаздывание, и выполним после этого в нем замены $x = \varepsilon w(\tau)$, $\tau = (t-\alpha)/\varepsilon$. В результате приходим к аналогичному (22) модельному уравнению

$$\frac{dw}{d\tau} = -1 - \beta g(\exp w), \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{60}$$

Как и в случае (22), нас будет интересовать некоторое специальное решение $w = w_0(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, этого уравнения, обладающее при $\tau \to -\infty$ нужными асимптотическими свойствами. А именно необходимо добиться, чтобы с экспоненциальной по ε точностью формула (58) при $t = \alpha - \sigma_0$ совпадала с соответствующим выражением $x = \varepsilon w(\tau)$ при $\tau = -\sigma_0/\varepsilon$. Согласно (58), требуемое решение уравнения (60) при $\tau \to -\infty$ должно расти как $-\tau + c_1$. Остается заметить, что такое решение действительно существует и задается соотношением

$$w_0(\tau) = W^{-1}(z)|_{z=-\tau+c_1}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \tag{61}$$

где $W^{-1}(z)$ – функция, обратная к

$$W(z) = z + \int\limits_z^{+\infty} \frac{\beta g(\exp s)}{1+\beta g(\exp s)}\,ds.$$

Проверку корректности определения (61), а также вывод асимптотических равенств для $w_0(\tau)$ при $\tau \to \pm\infty$ и для $x_\varphi(t,\varepsilon)$ при $\alpha - \sigma_0 \le t \le \alpha + \sigma_0$ опустим, отсылая к аналогичным построениям в случае $-\sigma_0 \le t \le \sigma_0$. Приведем лишь итоговые формулы

$$x_\varphi(t,\varepsilon) = \varepsilon w_0(\tau)|_{\tau=(t-\alpha)/\varepsilon} + \Delta_{5,\varphi}(t,\varepsilon), \quad \alpha - \sigma_0 \le t \le \alpha + \sigma_0, \tag{62}$$

$$w_0(\tau) = -\tau + c_1 + O(\exp\tau), \quad \tau \to -\infty;$$
$$w_0(\tau) = -(\beta+1)\tau + c_2 + O(\exp(-(\beta+1)\tau)), \quad \tau \to +\infty, \tag{63}$$

где

$$c_2 = (\beta+1)\Bigg[c_1 + \frac{\beta}{1+\beta}\int\limits_0^1 \frac{1-g(u)}{u(1+\beta g(u))}\,du - \beta\int\limits_1^{+\infty}\frac{g(u)}{u(1+\beta g(u))}\,du\Bigg]. \tag{64}$$

Рассмотрение следующего отрезка времени $\alpha + \sigma_0 \le t \le \alpha + 1 - \sigma_0$ основано на оценках $x_\varphi(t-1,\varepsilon) \ge q$, $x_\varphi(t,\varepsilon) \le -q$, первая из которых – следствие установленных ранее асимптотических формул, а вторая пока априорна. Далее, объединяя упомянутые оценки со свойствами функций f, g (см. (3)), приходим к выводу, что здесь интегрированию подлежит уравнение вида

$$\dot{x} = -1 - \beta + O(\exp(-q/\varepsilon)),$$

которое, согласно (62)–(64), следует дополнить начальным условием

$$x|_{t=\alpha+\sigma_0} = -(\beta+1)\sigma_0 + \varepsilon c_2 + O(\exp(-q/\varepsilon)).$$

Отсюда очевидным образом имеем

$$x_\varphi(t,\varepsilon) = -(\beta+1)(t-\alpha) + \varepsilon c_2 + \Delta_{6,\varphi}(t,\varepsilon), \quad \alpha+\sigma_0 \le t \le \alpha+1-\sigma_0. \tag{65}$$

В силу (65) сделанное ранее априорное предположение выполняется с константой $q \in \in (0, (\beta+1)\sigma_0)$.

Следующий промежуток интегрирования $\alpha + 1 - \sigma_0 \le t \le \alpha + 1 + \sigma_0$ содержит точку переключения $t = \alpha + 1$ уравнения (7). Поэтому рассуждения здесь подобны тем, что были проведены в случае $1 - \sigma_0 \le t \le 1 + \sigma_0$. Опуская соответствующие выкладки, ограничимся лишь сводкой итоговых результатов:

$$x_\varphi(t,\varepsilon) = -\beta - 1 + \varepsilon[-(\beta+1)\tau + c_2 + \alpha b(\tau)]|_{\tau=(t-\alpha-1)/\varepsilon} + \Delta_{7,\varphi}(t,\varepsilon), \tag{66}$$

где $\alpha+1-\sigma_0 \le t \le \alpha+1+\sigma_0$, а функция $b(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, задается аналогичным (45) равенством

$$b(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\tau} f(\exp w)|_{w=w_0(s)}\,ds \tag{67}$$

и обладает асимптотическими свойствами

$$b(\tau) = O(\exp\tau), \quad \tau \to -\infty; \quad b(\tau) = \tau + b_0 + O(\exp(-(\beta+1)\tau)), \quad \tau \to +\infty;$$
$$b_0 = \int\limits_{w_0(0)}^{+\infty} \frac{f(\exp w)}{1+\beta g(\exp w)}\,dw + \int\limits_{-\infty}^{w_0(0)} \frac{f(\exp w)-1}{1+\beta g(\exp w)}\,dw. \tag{68}$$

Обратим внимание, что, как и в случае (47), формула для постоянной b_0 из (68) содержит величину $w_0(0)$, для которой мы не имеем явного выражения. Однако, как и выше, эту трудность можно преодолеть.

Лемма 2. *Для постоянной* b_0 *из (68) справедлива явная формула*

$$b_0 = \int\limits_0^1 \frac{f(u)-1}{u(1+\beta g(u))}\,du + \int\limits_1^{+\infty}\frac{f(u)+\beta g(u)}{u(1+\beta g(u))}\,du - c_1, \tag{69}$$

где c_1 *– постоянная из (58).*

Доказательство. Сначала рассмотрим функцию

$$b_0(z) = \int\limits_{-\infty}^{z} \frac{f(\exp w) - 1}{1 + \beta g(\exp w)}\, dw + \int\limits_{z}^{+\infty} \frac{f(\exp w)}{1 + \beta g(\exp w)}\, dw$$

и заметим, что, во-первых, $b_0 = b_0(z)|_{z=w_0(0)}$; во-вторых, в силу очевидного равенства $b_0'(z) = -1/(1 + \beta g(\exp z))$ ее можно записать в форме

$$b_0(z) = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{f(\exp w) - 1}{1 + \beta g(\exp w)}\, dw + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{f(\exp w)}{1 + \beta g(\exp w)}\, dw - \int\limits_{0}^{z} \frac{dw}{1 + \beta g(\exp w)}. \tag{70}$$

Тем самым задача свелась к вычислению третьего интеграла из (70) при $z = w_0(0)$.

Сделаем в упомянутом интеграле замену переменной $w = w_0(\tau)$, где $w_0(\tau)$ – функция (61). В итоге получаем

$$-\int\limits_{0}^{w_0(0)} \frac{dw}{1 + \beta g(\exp w)} = \int\limits_{\tau_0}^{0} d\tau = -\tau_0, \tag{71}$$

где τ_0 – корень уравнения $w_0(\tau) = 0$, для которого из (61) вытекает равенство

$$\tau_0 = c_1 - \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\beta g(\exp w)}{1 + \beta g(\exp w)}\, dw. \tag{72}$$

Таким образом, для получения искомой формулы (69) остается объединить соотношения (70)–(72) и сделать во всех интегралах замену переменной $u = \exp w$. Лемма доказана.

На заключительном этапе построения асимптотики решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$, считая выполненными неравенства

$$\sigma_0 < \frac{1}{2}\,\frac{\beta + 1}{\alpha - \beta - 1}, \quad x_\varphi(t-1, \varepsilon) \le -q, \quad x_\varphi(t, \varepsilon) \le -q, \tag{73}$$

рассмотрим отрезок времени $\alpha + 1 + \sigma_0 \le t \le T_0 - \sigma_0/2$. Вторая и третья оценки из (73) вместе со свойствами (3) приводят к выводу, что здесь имеем уравнение вида

$$\dot{x} = \alpha - \beta - 1 + O(\exp(-q/\varepsilon)), \tag{74}$$

которое в силу (66)–(68) необходимо дополнить начальным условием

$$x|_{t=\alpha+1+\sigma_0} = -\beta - 1 + (\alpha - \beta - 1)\sigma_0 + \varepsilon(c_2 + \alpha b_0) + O(\exp(-q/\varepsilon)). \tag{75}$$

Решая получившуюся задачу Коши (74), (75), приходим к равенству

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = -\beta - 1 + (\alpha - \beta - 1)(t - \alpha - 1) + \varepsilon c_3 + \Delta_{8,\varphi}(t, \varepsilon), \quad \alpha + 1 + \sigma_0 \le t \le T_0 - \sigma_0/2, \tag{76}$$

в котором $c_3 = c_2 + \alpha b_0$.

Напомним, что, как и во всех предыдущих случаях, изначально асимптотическое представление (76) носит условный характер. Однако уже установленные ранее асимптотические формулы для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ при $\alpha + \sigma_0 \le t \le \alpha + 1 + \sigma_0$ (см. (65), (66)) и само равенство (76) свидетельствуют о том, что требуемые оценки величин $x_\varphi(t - 1, \varepsilon)$ и $x_\varphi(t, \varepsilon)$ из (73) выполняются при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и при любом фиксированном q из интервала $0 < q < \min\{(\beta + 1)\sigma_0, (\alpha - \beta - 1)\sigma_0/2\}$.

Подведем некоторый итог. Первое неравенство из (73) гарантирует принадлежность точки $t = T_0 - \sigma_0$ отрезку $\alpha + 1 + \sigma_0 \le t \le T_0 - \sigma_0/2$. Этот факт позволяет для нахождения интересующего нас корня $t = T_\varphi$ уравнения $x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0(\alpha - \beta - 1)$ воспользоваться соотношениями (74), (76). Из указанных формул очевидным образом следует, что T_φ определяется однозначно, причем равномерно по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$:

$$T_\varphi = T_0 - \varepsilon \frac{c_3}{\alpha - \beta - 1} + O(\exp(-q/\varepsilon)). \tag{77}$$

Далее, объединяя все полученные выше асимптотические представления для решения $x_\varphi(t,\varepsilon)$ (см. (30), (41), (44), (58), (62)–(66), (76)), приходим к выводу, что

$$\max_{-\sigma_0 \le t \le T_0 - \sigma_0/2} |x_\varphi(t,\varepsilon) - x_0(t)| = O(\varepsilon), \tag{78}$$

где $x_0(t)$ – функция (15), а остаток равномерен по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$.

Формулы (77), (78) свидетельствуют о том, что оператор (18) действительно определен на множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ и равномерно по φ

$$\max_{-1-\sigma_0 \le t \le -\sigma_0} |x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon) - x_0(t)| = O(\varepsilon). \tag{79}$$

В силу равенства (79) включение $\Pi_\varepsilon(S) \subset S$ будет выполняться при условии

$$x_0(t) \in \widehat{S}(\sigma_0, q_1, q_2), \tag{80}$$

где $\widehat{S}(\sigma_0, q_1, q_2)$ – множество, получающееся из $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ при замене в (17) нестрогих неравенств строгими. Напомним, далее, что на параметр σ_0 нами уже наложено ограничение (8), обеспечивающее выполнение для функции $x_0(t)$ свойств (9). Поэтому справедливости включения (80) добиваемся за счет имеющихся в запасе параметров q_1, q_2, предполагая, что

$$q_1 > -\min_{-1-\sigma_0 \le t \le -\sigma_0} x_0(t), \quad 0 < q_2 < -\max_{-1-\sigma_0 \le t \le -\sigma_0} x_0(t). \tag{81}$$

Итак, оператор Π_ε, являющийся очевидным образом компактным, при выполнении условий (8), (19), (48), (54), (73), (81) на параметры σ_0, q_1, q_2 преобразует в себя замкнутое, ограниченное и выпуклое множество $S(\sigma_0, q_1, q_2)$. Отсюда в соответствии с известным принципом Шаудера заключаем, что этот оператор имеет в $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ по крайней мере одну неподвижную точку $\varphi = \varphi_*(t,\varepsilon)$. Ясно также, что решение $x_*(t,\varepsilon)$ уравнения (5) с начальной функцией $\varphi_*(t,\varepsilon)$, $-1-\sigma_0 \le t \le -\sigma_0$, оказывается периодическим с периодом $T_*(\varepsilon) = T_\varphi|_{\varphi=\varphi_*}$ и в силу (77)–(79) удовлетворяет требуемым условиям (16).

4. Анализ свойств устойчивости. Перейдем теперь ко второй части обоснования теоремы 1, т.е. к доказательству единственности и устойчивости релаксационного цикла $x_*(t,\varepsilon)$ с нулевым приближением (15). Из явной формулы (18) для оператора Π_ε вытекает, что он непрерывно дифференцируем по φ, а его производная Фреше $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$ задается равенством

$$\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi) g_0 = g(t + T_\varphi, \varepsilon) - l(g_0)\dot{x}_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), \quad -1-\sigma_0 \le t \le -\sigma_0. \tag{82}$$

Здесь функция $g_0(t)$ представляет собой произвольный элемент линейного пространства $C_0 = \{g_0(t) \in C[-1-\sigma_0, -\sigma_0] : \ g_0(-\sigma_0) = 0\}$, через $g(t,\varepsilon)$, $-\sigma_0 \le t \le T_\varphi - \sigma_0$, обозначено решение линейного уравнения

$$\begin{gathered} \dot{g} = A(t,\varepsilon) g + B(t,\varepsilon) g(t-1), \quad A(t,\varepsilon) = -(\beta/\varepsilon) g'(\exp x) \exp x|_{x = x_\varphi(t,\varepsilon)/\varepsilon}, \\ B(t,\varepsilon) = (\alpha/\varepsilon) f'(\exp x) \exp x|_{x = x_\varphi(t-1,\varepsilon)/\varepsilon} \end{gathered} \tag{83}$$

с начальной функцией $g_0(t)$, $-1-\sigma_0 \le t \le -\sigma_0$, а линейный функционал $l: \ C_0 \to \mathbb{R}$ определен формулой

$$l(g_0) = g(T_\varphi - \sigma_0, \varepsilon)/\dot{x}_\varphi(T_\varphi - \sigma_0, \varepsilon). \tag{84}$$

Из соотношений (82), (84) следует, что вопрос оценки нормы линейного оператора $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$ в пространстве C_0 с нормой $\|g_0\| = \max\limits_{-1-\sigma_0 \le t \le -\sigma_0} |g_0(t)|$ сводится к анализу введенного выше решения $g(t,\varepsilon)$ уравнения (83). Покажем, что для этого решения выполняется неравенство вида

$$\max_{-\sigma_0 \le t \le T_\varphi - \sigma_0} |g(t,\varepsilon)| \le M \exp(-q/\varepsilon) \|g_0\| \tag{85}$$

с некоторыми универсальными (не зависящими от ε, φ, g_0) постоянными M, $q > 0$.

Из установленных выше асимптотических представлений для решения $x_\varphi(t,\varepsilon)$ вытекают оценки

$$\int\limits_{-\sigma_0}^{T_\varphi-\sigma_0} |A(t,\varepsilon)|\,dt \le M_1, \qquad \int\limits_{-\sigma_0}^{T_\varphi-\sigma_0} |B(t,\varepsilon)|\,dt \le M_2, \qquad \max_{-\sigma_0\le t\le 1-\sigma_0} |B(t,\varepsilon)| \le M_3 \exp\left(\frac{-q}{\varepsilon}\right), \tag{86}$$

где M_1, M_2, M_3, $q>0$ – некоторые универсальные константы. Далее, используя свойства (86) в формуле

$$g(t,\varepsilon) = \int\limits_{-\sigma_0}^{t} B(s,\varepsilon) g_0(s-1) \exp\left\{\int\limits_{s}^{t} A(\tau,\varepsilon)\,d\tau\right\} ds, \quad -\sigma_0 \le t \le 1-\sigma_0,$$

приходим к выводу, что при $-\sigma_0 \le t \le 1-\sigma_0$

$$\max_t |g(t,\varepsilon)| \le M \exp(-q/\varepsilon) \|g_0\|. \tag{87}$$

Для распространения оценки (87) на оставшийся промежуток $[1-\sigma_0, T_\varphi-\sigma_0]$ изменения t воспользуемся методом шагов. А именно разобьем указанный промежуток на отрезки $[1-\sigma_0+k, 2-\sigma_0+k]$, $k=0,1,\ldots,k_0$, и $[2-\sigma_0+k_0, T_\varphi-\sigma_0]$, где $k_0 = \lfloor T_\varphi - 2\rfloor$, $\lfloor\cdot\rfloor$ – целая часть. Используя первые два свойства (86), замечаем, что из равенства

$$g(t,\varepsilon) = g(1-\sigma_0+k,\varepsilon) \exp\left\{\int\limits_{1-\sigma_0+k}^{t} A(s,\varepsilon)\,ds\right\} + \int\limits_{1-\sigma_0+k}^{t} B(s,\varepsilon) g(s-1,\varepsilon) \exp\left\{\int\limits_{s}^{t} A(\tau,\varepsilon)\,d\tau\right\} ds,$$

$$t \ge 1-\sigma_0+k,$$

и из уже полученной оценки (87) на $(k-1)$-м отрезке вытекает требуемая оценка на k-м отрезке изменения t.

Возвращаясь к оператору Π_ε и учитывая неравенство (85) в (82), (84), приходим к выводу, что

$$\sup_{\varphi\in S(\sigma_0,q_1,q_2)} \|\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)\|_{C_0\to C_0} \le M \exp(-q/\varepsilon). \tag{88}$$

Остается добавить, что оценка (88) обеспечивает как сжимаемость оператора Π_ε (а значит, единственность его неподвижной точки $\varphi = \varphi_*(t,\varepsilon)$ во множестве $S(\sigma_0,q_1,q_2)$), так и экспоненциальную орбитальную устойчивость соответствующего цикла $x_*(t,\varepsilon)$. Последнее обстоятельство обусловлено тем, что, согласно (88), спектральный радиус оператора $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi_*)$ экспоненциально мал. А это значит, что все мультипликаторы μ цикла $x_*(t,\varepsilon)$, являющиеся (за исключением простого единичного) собственными значениями упомянутого оператора, лежат в круге $\{\mu\in\mathbb{C}:\ |\mu|\le M\exp(-q/\varepsilon)\}$. Теорема 1 полностью доказана.

5. Заключительные замечания. Обратимся к асимптотической формуле для периода $T_*(\varepsilon)$ цикла $x_*(t,\varepsilon)$. Согласно равенству (77), она имеет вид

$$T_*(\varepsilon) = T_0 + \varepsilon T_1 + O(\exp(-q/\varepsilon)), \quad q = \text{const} > 0, \tag{89}$$

где, напомним, постоянная T_0 определена в (4), а $T_1 = -c_3/(\alpha-\beta-1)$. Напомним далее, что для всех постоянных c_j, $0\le j\le 3$, нами получены явные выражения (см. (27), (49), (58), (64), (69), (76)). Используя соответствующие формулы, после некоторых преобразований приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Для коэффициента T_1 из (89) справедливо интегральное представление*

$$T_1 = \frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta-1} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{(\alpha-\beta)f(u)g(u) - f(u) - (\alpha-\beta-1)g(u)}{u(\alpha-1-\beta g(u))(1+\beta g(u))}\,du. \tag{90}$$

Необходимо заметить, что аналогичная (90) формула при более сильных, чем (3), ограничениях на функции $f(u)$ и $g(u)$ приведена в монографии [10, с. 181]. Из наших же построений следует, что и условия (3) в свою очередь можно несколько ослабить. А именно теоремы 1, 2 остаются в силе в случае, когда

$$f(u), g(u), uf'(u), ug'(u) = O(1/u^{\delta}), \quad u \to +\infty, \quad \delta = \mathrm{const} \in (0,1].$$

В заключение отметим, что цикл

$$u_*(t,\lambda) = \exp(x_*(t,\varepsilon)/\varepsilon)|_{\varepsilon=1/\lambda} \tag{91}$$

исходного уравнения (1) обладает следующими релаксационными свойствами при $\lambda \to +\infty$:

$$\begin{gathered} \max_t u_*(t,\lambda) = O(\exp(\alpha-1)\lambda), \quad \min_t u_*(t,\lambda) = O(\exp(-(\beta+1)\lambda)), \\ T_*(\lambda) = T_0 + \frac{1}{\lambda} T_1 + O(\exp(-q\lambda)), \quad q = \mathrm{const} > 0. \end{gathered} \tag{92}$$

Равенства (92) объясняют, в частности, причину наличия у графика функции (91) достаточно высокого всплеска даже при не слишком больших значениях λ (см. рис. 1, отвечающий случаю $\lambda = 3.5$).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08-01-00342а и 09-01-00614) и целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (государственный контракт 02.740.11.0197).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мищенко Е.Ф., Понтрягин Л.С.* Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным // Докл. АН СССР. 1955. Т. 102. № 5. С. 889–891.
2. *Мищенко Е.Ф.* Асимптотическое вычисление периодических решений систем дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1957. Т. 21. № 5. С. 627–654.
3. *Мищенко Е.Ф., Понтрягин Л.С.* Доказательство некоторых асимптотических формул для решений дифференциальных уравнений с малым параметром // Докл. АН СССР. 1958. Т. 120. № 5. С. 967–969.
4. *Мищенко Е.Ф., Понтрягин Л.С.* Вывод некоторых асимптотических оценок для решений дифференциальных уравнений с малым параметром при производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1959. Т. 23. № 5. С. 643–660.
5. *Понтрягин Л.С.* Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1957. Т. 21. № 5. С. 605–626.
6. *Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М., 1975.
7. *Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М., 1995.
8. *Колесов А.Ю., Колесов Ю.С.* Релаксационные колебания в математических моделях экологии. М., 1993 (Тр. МИАН. Т. 199).
9. *Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Реле с запаздыванием и его C^1 -аппроксимация // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. 1997. Т. 216. С. 126–153.
10. *Кащенко С.А., Майоров В.В.* Модели волновой памяти. М., 2009.

Ярославский государственный университет
им. П.Г. Демидова,
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
09.11.2010 г.