

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Преображенская, Импульсно-рефрактерный режим в кольцевой цепи синхронизированных осцилляторов нейронного типа, *Модел. и анализ информ. систем*, 2017, том 24, номер 5, 550–566

DOI: <https://doi.org/10.18255/1818-1015-2017-5-550-566>

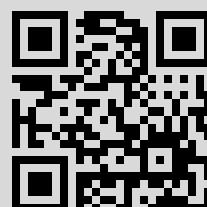
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 217.107.127.148

13 января 2018 г., 23:25:59



©Преображенская М. М., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-550-566

УДК 517.9

## Импульсно-рефрактерный режим в кольцевой цепи синаптически связанных осцилляторов нейронного типа

Преображенская М. М.

получена 16 августа 2017

**Аннотация.** В настоящей работе рассматривается математическая модель кольцевой нейронной сети из четного числа синаптически взаимодействующих элементов. Модель представляет собой систему скалярных нелинейных дифференциально-разностных уравнений, правые части которых зависят от большого параметра. Неизвестные функции, входящие в систему, характеризуют мембранные потенциалы нейронов. Представляет интерес поиск в рамках данной системы уравнений специальных, так называемых импульсно-рефрактерных режимов, а именно периодических решений, в которых функции с номерами одной четности обладают асимптотически большим всплеском на периоде, а другой четности — всюду асимптотически малы. С этой целью последовательно делается две замены, позволяющие перейти от исследования исходной системы к двумерной системе скалярных нелинейных дифференциально-разностных уравнений с двумя запаздываниями. Далее, при стремлении большого параметра к бесконечности определяется предельный объект, представляющий собой релейную систему уравнений с двумя запаздываниями. Конструктивно, с использованием метода шагов, доказываем, что решение релейной системы уравнений с начальной функцией из подходящего класса совпадает с одной и той же периодической функцией с требуемыми свойствами. Затем определяется оператор последований Пуанкаре и с использованием принципа Шаудера доказываем существование релаксационного периодического решения двумерной сингулярно возмущенной системы. Для этого строится асимптотика этого решения, а затем доказываем его близость к решению релейной системы уравнений. Из экспоненциальной оценки производной Фреше оператора Пуанкаре следует единственность в построенном классе функций решения двумерной дифференциально-разностной системы уравнений с двумя запаздываниями, а также обосновывается его экспоненциальная орбитальная устойчивость. Далее, с помощью обратной замены доказанный результат переносится на исходную систему.

**Ключевые слова:** релаксационные колебания, запаздывание, большой параметр, синаптическая связь

**Для цитирования:** Преображенская М. М., "Импульсно-рефрактерный режим в кольцевой цепи синаптически связанных осцилляторов нейронного типа", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:5 (2017), 550–566.

### Об авторах:

Преображенская Маргарита Михайловна, [orcid.org/0000-0002-7032-1155](https://orcid.org/0000-0002-7032-1155), старший преподаватель, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, младший научный сотрудник, НЦЧ РАН, ул. Лесная, д. 9, г. Черноголовка, Московская область, 142432 Россия, e-mail: [rita.preo@gmail.com](mailto:rita.preo@gmail.com)

### Благодарности:

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00158).

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим математическую модель кольцевой цепи из четного числа синаптически связанных осцилляторов нейронного типа (см. [1]):

$$\dot{u}_j = \left( \lambda f(u_j(t-1)) + b g(u_{j-1}(t-h)) \ln(u_*/u_j) \right) u_j, \quad j = 1, \dots, 2m, \quad u_0 \equiv u_{2m}, \quad (1)$$

в которой  $u_j(t) > 0$  — нормированные мембранные потенциалы нейронов,  $m \in \mathbb{N}$  — фиксированное число,  $h \in (0, 1)$  — параметр, определяющий запаздывание в цепи связи,  $b = \text{const} > 0$ ,  $u_* = \exp(c\lambda)$  — пороговое значение, управляющее взаимодействием,  $c = \text{const} \in \mathbb{R}$ , слагаемые  $bg(u_{j-1}) \ln(u_*/u_j)u_j$  моделируют синаптическую связь. Относительно функций  $f(u)$ ,  $g(u)$  предполагаем, что они из класса  $C^2(\mathbb{R}_+)$ , где  $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$ , и удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1; \quad f(u) + a, u f'(u), u^2 f''(u) = O(1/u) \text{ при } u \rightarrow +\infty, \quad a = \text{const} > 0; \\ g(0) &= 0; \quad g(u) > 0 \quad \forall u > 0; \quad g(u) - 1, u g'(u), u^2 g''(u) = O(1/u) \text{ при } u \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (2)$$

В работах [1–5] для систем, подобных (1) (с произвольным числом осцилляторов и без запаздывания  $h$  в цепи связи), показано существование дискретных бегущих волн.

Поставим вопрос о существовании у системы (1) такого периодического решения, что

$$u_{2k-1}(t) \equiv v_1(t), \quad u_{2k}(t) \equiv v_2(t), \quad k = 1, \dots, m, \quad (3)$$

где функция  $v_1(t)$  обладает периодическими асимптотически высокими всплесками, а функция  $v_2(t)$  принимает асимптотически малые значения при всех  $t > 0$ . Последнее означает, что соответствующий нейрон находится в состоянии покоя или, другими словами, состоянии рефрактерности.

После перехода к новым переменным система (1) записывается в виде следующей двумерной системы относительно неизвестных функций  $v_1$  и  $v_2$ :

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \left( \lambda f(v_1(t-1)) + b g(v_2(t-h)) \ln(u_*/v_1) \right) v_1, \\ \dot{v}_2 &= \left( \lambda f(v_2(t-1)) + b g(v_1(t-h)) \ln(u_*/v_2) \right) v_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Кроме того, как и в статьях [1, 4, 6–11] для удобства последующего анализа сделаем экспоненциальную замену

$$v_j = \exp(\lambda x_j), \quad j = 1, 2, \quad (5)$$

которая преобразует (4) к системе

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f\left(\exp \frac{x_1(t-1)}{\varepsilon}\right) + b(c - x_1)g\left(\exp \frac{x_2(t-h)}{\varepsilon}\right), \\ \dot{x}_2 &= f\left(\exp \frac{x_2(t-1)}{\varepsilon}\right) + b(c - x_2)g\left(\exp \frac{x_1(t-h)}{\varepsilon}\right), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\varepsilon = 1/\lambda \ll 1$ . Отметим, что в силу свойств (2) справедливы предельные равенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f\left(\exp(x/\varepsilon)\right) = R(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, \\ -a & \text{при } x \geq 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(\exp(x/\varepsilon)) = H(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x \geq 0. \end{cases} \quad (8)$$

В силу сделанной экспоненциальной замены (5) постановка задачи для системы (6) состоит в отыскании периодического релаксационного режима, такого, что  $x_1(t)$  меняет знак, а  $x_2(t)$  остается отрицательной (отделенной от нуля) при всех  $t > 0$ .

## 2. План исследования

Общая схема доказательства дается, например, в статьях [1, 5, 10–12]. Для ее изложения потребуется ввести некоторые обозначения.

Введем два множества функций. С этой целью зафиксируем положительную константу  $\hat{x}$ , которая будет найдена позже (в п. 4.1.), а также фиксируем константы  $\sigma > 0$ ,  $q_1 > \sigma$ ,  $p_1 \in (0, \sigma)$ ,  $q_2 > \hat{x} + h + \sigma$ ,  $p_2 \in (0, \hat{x} + h + \sigma)$ , оценки на которые так же будут уточнены ниже (в пп. 3., 6.1.). Кроме того, фиксируем параметр  $\beta \in (0, 1/2]$ . Положим

$$S_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi_1 \in C[-1 - \sigma, -\sigma] : \varphi_1(-\sigma) = -\sigma, -q_1 \leq \varphi_1(t) \leq -p_1 \forall t \in [-1 - \sigma, -\sigma]\}, \quad (9)$$

$$S_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi_2 \in C[-1 - \sigma, -\sigma] : |\varphi_2(-\sigma) + \hat{x} + h + \sigma| \leq \varepsilon^\beta, \\ -q_2 \leq \varphi_2(t) \leq -p_2 \forall t \in [-1 - \sigma, -\sigma]\}. \quad (10)$$

В качестве множества начальных функций системы (6) рассматривается множество  $S$ , определенное как

$$S \stackrel{\text{def}}{=} S_1 \times S_2. \quad (11)$$

Отметим, что данное множество является замкнутым, ограниченным и выпуклым.

Через

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi_1, \varphi_2), \text{ где } \varphi_1 \in S_1, \varphi_2 \in S_2,$$

обозначим элемент множества  $S$ , а через  $x^\varepsilon(t, \varphi)$  — решение системы (6) с начальной функцией  $\varphi \in S$ :

$$x^\varepsilon(t, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1^\varepsilon(t, \varphi), x_2^\varepsilon(t, \varphi)),$$

такое, что

$$x_1^\varepsilon(t, \varphi) \equiv \varphi_1(t), \quad x_2^\varepsilon(t, \varphi) \equiv \varphi_2(t) \text{ при } t \in [-1 - \sigma, -\sigma]. \quad (12)$$

Предположим, что уравнение

$$x_1^\varepsilon(t - \sigma, \varphi) = -\sigma \quad (13)$$

имеет хотя бы два положительных корня. Обозначим второй из них через  $T^\varepsilon(\varphi)$ .

Зададим оператор последования Пуанкаре

$$\Pi^\varepsilon : C[-1 - \sigma, -\sigma] \times C[-1 - \sigma, -\sigma] \rightarrow C[-1 - \sigma, -\sigma] \times C[-1 - \sigma, -\sigma],$$

определяя его равенством

$$\Pi^\varepsilon(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} x^\varepsilon(t + T^\varepsilon(\varphi), \varphi), \quad -1 - \sigma \leq t \leq -\sigma. \quad (14)$$

Итак, план доказательства состоит в следующем. Устанавливаются равномерные по  $\varphi$  и  $t$  асимптотические равенства для  $x_1^\varepsilon(t, \varphi)$  и  $x_2^\varepsilon(t, \varphi)$  на различных промежутках изменения  $t$ . Из них следует, что при подходящем выборе параметров  $\sigma, q_1, q_2, p_1, p_2$  оператор  $\Pi^\varepsilon$  определен на множестве  $S$  и преобразует его в себя, что позволяет использовать известный принцип Шаудера. Таким образом, оператор Пуанкаре имеет хотя бы одну неподвижную точку, а система (6) — периодическое решение с найденной асимптотикой. Затем выполняется оценка нормы производной Фреше оператора  $\Pi^\varepsilon$ , из которой следует, что он является сжимающим на множестве  $S$  и, тем самым, неподвижная точка в этом множестве единственна. Кроме того, из оценки нормы производной Фреше следует, что все мультипликаторы соответствующего цикла (кроме двух) экспоненциально малы, а значит, периодическое решение устойчиво.

### 3. Асимптотика функции $x_1^\varepsilon(t, \varphi)$

Рассмотрим первое уравнение системы (6). Учитывая априорное предположение  $x_2(t) < -q$  и свойство (8) функции  $g$ , получаем, что

$$g\left(\exp \frac{x_2(t-h)}{\varepsilon}\right) = O(\exp(-q/\varepsilon)),$$

где здесь и далее  $q$  обозначает подходящую положительную константу, точное значение которой не важно. Таким образом, функция  $x_1(t)$  отыскивается из уравнения

$$\dot{x}_1 = f\left(\exp \frac{x_1(t-1)}{\varepsilon}\right) + O(\exp(-q/\varepsilon)). \quad (15)$$

В статье [10] было изучено следующее уравнение с начальной функцией из множества  $S_1$  (9):

$$\dot{x}_1 = f\left(\exp \frac{x_1(t-1)}{\varepsilon}\right), \quad (16)$$

которое отличается от уравнения (15) отсутствием экспоненциально малой добавки  $O(\exp(-q/\varepsilon))$  в правой части.

В упомянутой работе [10] доказано следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Существует такое достаточно малое число  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  уравнение (16) допускает экспоненциально орбитально устойчивый релаксационный цикл  $x_{1*}^\varepsilon(t)$  периода  $T_{1*}^\varepsilon$ , удовлетворяющий предельным соотношениям*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_{1*}^\varepsilon = T_0, \quad \max_{t \in [0, T_{1*}^\varepsilon]} |x_{1*}^\varepsilon(t) - x_0(t)| = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (17)$$

Здесь

$$T_0 \stackrel{\text{def}}{=} 2 + a + 1/a, \quad t_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1/a, \quad (18)$$

$a$   $T_0$ -периодическая функция  $x_0(t)$  является решением предельного релейного уравнения

$$\dot{x}_1 = R(x_1(t-1)) \quad (19)$$

с начальной функцией  $\varphi_1(t) \in S_1$  при  $t \in [-1 - \sigma, -\sigma]$  и задается равенствами

$$x_0(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} t & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ -at + a + 1 & \text{при } 1 \leq t \leq t_0 + 1, \\ t - T_0 & \text{при } t_0 + 1 \leq t \leq T_0, \end{cases} \quad x_0(t + T_0) \equiv x_0(t). \quad (20)$$

Отметим, что при этом на параметр  $\sigma$  накладывается ограничение

$$\sigma < \min\{a, 1/2, 1/(2a)\}. \quad (21)$$

Действуя так же, как описано в статье [10], получаем, что на отрезке  $t \in [-\sigma, T^\varepsilon(\varphi) - \sigma/2]$  функция  $x_1^\varepsilon(t, \varphi)$  имеет ту же асимптотику, что и периодическое решение  $x_{1*}^\varepsilon(t)$  уравнения (16). Таким образом, про функцию  $x_1^\varepsilon(t, \varphi)$  известно следующее:

**Лемма 1.** Уравнение (15) с произвольной начальной функцией  $\varphi_1$  из класса (9) имеет решение  $x_1^\varepsilon(t, \varphi)$  с асимптотикой

- 1)  $x_1^\varepsilon(t, \varphi) = t + O(\exp(-q/\varepsilon))$  при  $t \in [-\sigma, 1 - \sigma]$ ;
- 2)  $x_1^\varepsilon(t, \varphi) = 1 + \varepsilon w_1(\tau)|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + O(\exp(-q/\varepsilon))$  при  $t \in [1 - \sigma, 1 + \sigma]$ ;
- 3)  $x_1^\varepsilon(t, \varphi) = -at + a + 1 + \varepsilon \widehat{c} + O(\exp(-q/\varepsilon))$  при  $t \in [1 + \sigma, 1 + t_0 - \sigma]$ ;
- 4)  $x_1^\varepsilon(t, \varphi) = -a + \varepsilon w_2(\tau)|_{\tau=(t-1-t_0)/\varepsilon} + O(\exp(-q/\varepsilon))$  при  $t \in [1 + t_0 - \sigma, 1 + t_0 + \sigma]$ ;
- 5)  $x_1^\varepsilon(t, \varphi) = t - T_0 + O(\exp(-q/\varepsilon))$  при  $t \in [1 + t_0 + \sigma, T^\varepsilon(\varphi) - \sigma/2]$ .

Здесь

$$w_1(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \tau + \int_{-\infty}^{\tau} (f(\exp s) - 1) ds, \quad w_2(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} -a\tau + \widehat{c} + \int_{-\infty}^{\tau} (f(\exp(-as + \widehat{c})) + a) ds, \quad (22)$$

$$\widehat{c} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 \frac{f(u) - 1}{u} du + \int_1^{+\infty} \frac{f(u) + a}{u} du. \quad (23)$$

Все остатки равномерны по  $\varphi$ .

Отметим, что из формул леммы 1 следует, что для решения  $x_1^\varepsilon(t, \varphi)$  и корня  $T^\varepsilon(\varphi)$  уравнения (13) верны равномерные по  $\varphi \in S$  оценки

$$\max_{t \in [h-\sigma, h+T_0-\sigma/2]} |x_1^\varepsilon(t, \varphi) - x_0(t)| = O(\varepsilon), \quad T^\varepsilon(\varphi) = T_0 + O(\varepsilon). \quad (24)$$

## 4. Асимптотика функции $x_2^\varepsilon(t, \varphi)$

Рассмотрим второе уравнение системы (6), которое с учетом (7) принимает вид

$$\dot{x}_2 = 1 + b(c - x_2)g\left(\exp \frac{x_1(t - h)}{\varepsilon}\right) + O(\exp(-q/\varepsilon)). \quad (25)$$

#### 4.1. Исследование предельного релейного уравнения

Сначала изучим предельное для (25) релейное уравнение

$$\dot{x}_2 = 1 + b(c - x_2)H(x_0(t - h)). \quad (26)$$

Будем искать  $T_0$ -периодическое решение (с тем же периодом, что решение (20) уравнения (19)), отрицательное при всех  $t > 0$ .

Для исследования уравнения (26) определим множество начальных функций

$$\psi \in C[0, h] : \psi(h) = -\hat{x}, \psi(t) < -\hat{x} \forall t \in [0, h], \quad (27)$$

где  $\hat{x}$  — фиксированная положительная константа из (10), которую предстоит найти.

Докажем следующее утверждение.

**Лемма 2.** Пусть выполнено неравенство

$$\frac{a + 1}{1 - \exp(-bt_0)} + 1/b + c < 0.$$

Тогда решение релейного уравнения (26) с начальной функцией (27) совпадает с одной и той же  $T_0$ -периодической функцией

$$y_0(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} e(t) & \text{при } h \leq t \leq t_0 + h, \\ t - t_0 - h + e(t_0 + h) & \text{при } t_0 + h \leq t \leq T_0 + h, \end{cases} \quad y_0(t + T_0) \equiv y_0(t), \quad (28)$$

где

$$e(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(a + 1) \exp(-b(t - h))}{1 - \exp(-bt_0)} + 1/b + c.$$

Причем это решение асимптотически орбитально устойчиво.

Построим решение уравнения (26) методом шагов, полагая, что  $x_2(t) \equiv \psi(t)$  на отрезке  $t \in [0, h]$ . Обозначим решение данной задачи через  $y_0(t)$ .

Сперва рассмотрим промежуток  $t \in [h, t_0 + h]$ , на котором  $x_0(t - h) \geq 0$ . Таким образом, с учетом (8) получаем, что здесь искомая функция  $y_0(t)$  является решением задачи Коши

$$\dot{x}_2 = 1 + b(c - x_2), \quad x_2|_{t=h} = -\hat{x}, \quad (29)$$

откуда находим

$$y_0(t) = -(\hat{x} + 1/b + c) \exp(-b(t - h)) + 1/b + c \text{ при } h \leq t \leq t_0 + h. \quad (30)$$

При этом наложим на параметры ограничение

$$\hat{x} + 1/b + c < 0, \quad (31)$$

обеспечивающее убывание экспоненты в правой части (30).

Далее, рассмотрим отрезок  $t \in [t_0 + h, T_0 + h]$ . Здесь  $x_0(t - h) \leq 0$ , значит, с учетом (8) и в силу непрерывности  $y_0(t)$  получаем на рассматриваемом отрезке задачу Коши

$$\dot{x}_2 = 1, \quad x_2|_{t=t_0+h} = -(\hat{x} + 1/b + c) \exp(-bt_0) + 1/b + c.$$

Отсюда

$$y_0(t) = t - t_0 - h - (\hat{x} + 1/b + c) \exp(-bt_0) + 1/b + c \text{ при } t_0 + h \leq t \leq T_0 + h.$$

Таким образом, функция  $y_0(t)$  построена на отрезке  $t \in [h, T_0 + h]$  длины периода  $T_0$  в предположении ее отрицательности.

Рассмотрим отображение  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , заданное равенством

$$\pi(x) = \left( t - t_0 - h - (x + 1/b + c) \exp(-bt_0) + 1/b + c \right) \Big|_{t=T_0+h}. \quad (32)$$

Найдем  $-\hat{x}$  как неподвижную точку данного отображения:

$$\hat{x} = -\frac{a+1}{1 - \exp(-bt_0)} - 1/b - c.$$

В силу предположения о том, что константа  $\hat{x}$  положительна, получаем дополнительное ограничение на параметры:

$$\frac{a+1}{1 - \exp(-bt_0)} + 1/b + c < 0. \quad (33)$$

Отметим, что выполнение (33) автоматически влечет за собой (31). Таким образом, экспонента в правой части (30) гарантированно убывает, если справедливо условие (33). Это означает, что для выполнения априорного предположения  $y_0(t) < 0$  достаточно отрицательности величины  $-\hat{x}$  — максимального значения на отрезке длины периода  $T_0$ . Поскольку  $y_0(t)$  сохраняет свою отрицательность, а величина  $-\hat{x}$  найдена как неподвижная точка отображения (32), то, продолжая построения методом шагов на отрезках  $t \in [h + kT_0, t_0 + h + kT_0]$ ,  $[t_0 + h + kT_0, h + (k+1)T_0]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , получим в качестве решения уравнения (26)  $T_0$ -периодическую функцию  $y_0(t)$ .

Для обоснования устойчивости решения  $y_0(t)$  отыщем производную  $\pi'(x)$  отображения (32):

$$\pi'(x) = -\exp(-bt_0). \quad (34)$$

Поскольку полученная в правой части (34) величина по модулю всегда меньше единицы (при  $a, b > 0$ ), то решение  $y_0(t)$  является асимптотически устойчивым.

Лемма 2 доказана.

## 4.2. Построение асимптотики решения уравнения (25)

Построение асимптотики решения будет выполняться шагами по промежуткам изменения  $t$ . Зафиксируем параметр  $\alpha \in (1/2, 1)$ . Рассмотрению подлежат пять отрезков (которые не пересекаются в силу наложенных на  $\sigma$  ограничений (21)):

- 1)  $[-\sigma, h - \sigma]$ ,
- 2)  $[h - \sigma, h + \varepsilon^\alpha]$ ,
- 3)  $[h + \varepsilon^\alpha, h + t_0 - \varepsilon^\alpha]$ ,
- 4)  $[h + t_0 - \varepsilon^\alpha, h + t_0 + \sigma]$ ,



5)  $[h + t_0 + \sigma, h + T_0 - \sigma]$ .

Введем обозначение для константы:

$$\widehat{d} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 \frac{g(u)}{u} du + \int_1^{+\infty} \frac{g(u) - 1}{u} du. \quad (35)$$

Отметим, что в силу свойств (2) функций  $f$  и  $g$  соответствующие несобственные интегралы сходятся.

Кроме того, чтобы конструктивно описать построение асимптотики решения уравнения (25), потребуются две функции:

$$w_3(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \tau + b(c + \widehat{x}) \int_{-\infty}^{\tau} g(\exp s) ds, \quad (36)$$

$$w_4(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{e}(t_0 + h)\tau + b\widehat{d}(c + \widehat{x}) + b(c + \widehat{x} + a + 1) \int_{-\infty}^{\tau} (g(\exp(-as)) - 1) ds, \quad (37)$$

аналогичные функциям (22), введенным в [10].

Сформулируем утверждение, описывающее асимптотическое поведение функций (36) и (37) при  $\tau \rightarrow -\infty$  и  $\tau \rightarrow +\infty$ .

**Лемма 3.** Для функций  $w_3, w_4$  справедливы следующие асимптотические равенства:

$$w_3(\tau) = \tau + O(\exp \tau) \text{ при } \tau \rightarrow -\infty, \quad (38)$$

$$w_3(\tau) = \dot{e}(h)\tau + b\widehat{d}(c + \widehat{x}) + O(\exp(-\tau)) \text{ при } \tau \rightarrow +\infty, \quad (39)$$

$$w_4(\tau) = \dot{e}(t_0 + h)\tau + b\widehat{d}(c + \widehat{x}) + O(\exp(a\tau)) \text{ при } \tau \rightarrow -\infty, \quad (40)$$

$$w_4(\tau) = \tau + b\widehat{d}t_0(c + \widehat{x} + 1) + O(\exp(-a\tau)) \text{ при } \tau \rightarrow +\infty. \quad (41)$$

Равенства (38), (40) вытекают непосредственно из свойств (2) функции  $g$ .

Для доказательства равенства (39) представим интеграл в правой части (36) в виде суммы:

$$\int_{-\infty}^{\tau} g(\exp s) ds = \int_{-\infty}^0 g(\exp s) ds + \int_0^{\tau} g(\exp s) ds.$$

Первый интеграл в правой части после замены  $u = \exp s$  преобразуется в  $\int_0^1 \frac{g(u)}{u} du$ , который в силу (2) равен конечному числу. Для второго, учитывая свойства (2), верно

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau} g(\exp s) ds &= \tau + \int_0^{+\infty} (g(\exp s) - 1) ds - \int_{\tau}^{+\infty} (g(\exp s) - 1) ds = \\ &= \tau + \int_1^{+\infty} \frac{g(u) - 1}{u} du + O(\exp(-\tau)). \end{aligned}$$

Таким образом, для интеграла в правой части (36) верно асимптотическое представление:

$$\int_{-\infty}^{\tau} g(\exp s) ds = \tau + \widehat{d} + O(\exp(-\tau)) \text{ при } \tau \rightarrow +\infty, \quad (42)$$

где  $\widehat{d}$  — константа, определенная равенством (35).

Подставляя (42) в формулу (36) для функции  $w_3(\tau)$ , получаем:

$$w_3(\tau) = (1 + b(c + \widehat{x}))\tau + b\widehat{d}(c - \Delta) + O(\exp(-\tau)) \text{ при } \tau \rightarrow +\infty.$$

В полученном равенстве коэффициент  $1 + b(c + \widehat{x})$  при  $\tau$  совпадает с функцией в правой части уравнения задачи Коши (29) при  $t = h$ , а значит, равен производной функции  $e(t)$  в точке  $t = h$ . Таким образом, справедливость формулы (39) установлена.

Раскладывая аналогичным образом интеграл из (41) в сумму и используя свойства (2) функции  $g$ , получаем асимптотическое представление при  $\tau \rightarrow +\infty$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\tau} (g(\exp(-as)) - 1) ds &= \int_{-\infty}^0 (g(\exp(-as)) - 1) ds + \int_0^{\tau} g(\exp(-as)) ds - \tau = \\ &= \frac{1}{a} \int_1^{+\infty} \frac{g(u) - 1}{u} du + \int_0^{+\infty} g(\exp(-as)) ds - \int_{\tau}^{+\infty} g(\exp(-as)) ds - \tau = \\ &= \frac{1}{a} \int_1^{+\infty} \frac{g(u) - 1}{u} du + \frac{1}{a} \int_0^1 \frac{g(u)}{u} du + O(\exp(-a\tau)) - \tau = -\tau + \widehat{d}/a + O(\exp(-a\tau)). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом того, что  $\dot{e}(t_0 + h) = 1 + b(c + \widehat{x} + a + 1)$ , получаем для функции (37) при  $\tau \rightarrow +\infty$  асимптотическую формулу (41).

Лемма 3 доказана.

Перейдем к построению асимптотики решения уравнения (25) с начальной функцией из (10), удовлетворяющей дополнительному условию

$$\varphi_2(-\sigma) = -\widehat{x} - h - \sigma. \quad (43)$$

**Лемма 4.** Уравнение (25) с произвольной начальной функцией  $\varphi_2$  из класса (10) при условии (43) имеет решение  $x_2^\varepsilon(t, \varphi)$  с асимптотикой

- 1)  $x_2^\varepsilon(t, \varphi) = t - h - \widehat{x} + O(\exp(-q\varepsilon^{\alpha-1}))$  нпу  $t \in [-\sigma, h - \sigma]$ ;
- 2)  $x_2^\varepsilon(t, \varphi) = -\widehat{x} + \varepsilon w_3(\tau)|_{\tau=(t-h)/\varepsilon} + O(\varepsilon \exp(-q/\varepsilon))$  нпу  $t \in [h - \sigma, h + \varepsilon^\alpha]$ ;
- 3)  $x_2^\varepsilon(t, \varphi) = e(t) + \varepsilon b\widehat{d}(c + \widehat{x}) + O(\varepsilon^{2\alpha})$  нпу  $t \in [h + \varepsilon^\alpha, h + t_0 - \varepsilon^\alpha]$ ;
- 4)  $x_2^\varepsilon(t, \varphi) = -\widehat{x} - a - 1 + \varepsilon w_4(\tau)|_{\tau=(t-h-t_0)/\varepsilon} + O(\varepsilon^{2\alpha})$  нпу  $t \in [h + t_0 - \varepsilon^\alpha, h + t_0 + \sigma]$ ;
- 5)  $x_2^\varepsilon(t, \varphi) = t - h - \widehat{x} - T_0 + \varepsilon b\widehat{d}t_0(c + \widehat{x} + 1) + O(\varepsilon^{2\alpha})$  нпу  $t \in [h + t_0 + \sigma, h + T_0 - \sigma]$ .

Все остатки здесь равномерны по  $\varphi$ .

Докажем лемму 4.

1) Рассмотрим сперва промежуток  $t \in [-\sigma, h - \sigma]$ . Здесь  $t - h$  принадлежит отрезку  $[-h - \sigma, -\sigma] \subset [-1 - \sigma, -\sigma]$ , где согласно (12) выполняется  $x_1^\varepsilon(t - h, \varphi) = \varphi_1(t - h)$ . Это означает, что  $x_1^\varepsilon(t - h, \varphi) < -p_1$ , следовательно, учитывая условия (2), получаем

$$g\left(\exp \frac{x_1^\varepsilon(t - h, \varphi)}{\varepsilon}\right) = O(\exp(-p_1/\varepsilon)).$$

Таким образом, принимая во внимание (43), на рассматриваемом отрезке имеем дело с задачей Коши

$$\dot{x}_2 = 1 + O(\exp(-p_1/\varepsilon)), \quad x_2|_{t=-\sigma} = -\hat{x} - h - \sigma,$$

откуда для решения приходим к формуле

$$x_2^\varepsilon(t, \varphi) = t - h - \hat{x} + O(\exp(-q/\varepsilon)) \text{ при } t \in [-\sigma, h - \sigma]. \quad (44)$$

2) Теперь рассмотрим отрезок  $[h - \sigma, h + \varepsilon^\alpha]$ , на котором решение релейного уравнения терпит излом. На этом участке согласно лемме 1  $x_1^\varepsilon(t - h, \varphi) = t - h + O(\exp(-p/\varepsilon))$  при некотором  $p > 0$ , таким образом, на текущем промежутке имеем дело с задачей Коши

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = 1 + b(c - x_2) \cdot g\left(\exp \frac{t - h + O(\exp(-p/\varepsilon))}{\varepsilon}\right) + O(\exp(-q/\varepsilon)), \\ x_2|_{t=h-\sigma} = -\hat{x} - \sigma + O(\exp(-q/\varepsilon)). \end{cases} \quad (45)$$

Решение задачи (45) будем искать в виде:

$$x_2^\varepsilon(t, \varphi) = -\hat{x} + \varepsilon w_3(\tau)|_{\tau=(t-h)/\varepsilon} + \delta^\varepsilon(t), \quad (46)$$

где функция  $w_3(\tau)$  задается равенством (36), а  $\delta^\varepsilon(t)$  — здесь и далее неизвестный подлежащий определению остаток.

Докажем, что остаток  $\delta^\varepsilon(t)$  является равномерно по  $\varphi$  и  $t$  экспоненциально малым. Подставляя (46), (36) в (45) и учитывая асимптотическое свойство (38) функции  $w_3$  из леммы 3, получаем задачу Коши для остатка  $\delta^\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \dot{\delta}^\varepsilon = b(c + \hat{x}) \cdot & \left( g\left(\exp \frac{t - h + O(\exp(-p/\varepsilon))}{\varepsilon}\right) - g\left(\exp \frac{t - h}{\varepsilon}\right) \right) - \\ & - b\left(t - h + \varepsilon b(c + \hat{x}) \int_{-\infty}^{(t-h)/\varepsilon} g(\exp s) ds + \delta^\varepsilon(t)\right) \cdot \\ & \cdot g\left(\exp \frac{t - h + O(\exp(-p/\varepsilon))}{\varepsilon}\right), \end{aligned} \quad (47)$$

$$\delta^\varepsilon|_{t=h-\sigma} = O(\varepsilon \exp(-\sigma/\varepsilon)) + O(\exp(-q/\varepsilon)). \quad (48)$$

Принимая во внимание неравенство

$$|g(y_1) - g(y_2)| \leq \frac{M_1}{1 + \min(y_1^2, y_2^2)} |y_1 - y_2| \text{ при всех } y_1, y_2 \in \mathbb{R}_+ \quad (49)$$

и то, что  $t$  изменяется на отрезке длины, пропорциональной  $\varepsilon^\alpha$ , получаем асимптотику правых частей равенств (47) и (48):

$$\begin{cases} \dot{\delta}^\varepsilon = -b\delta^\varepsilon \cdot g\left(\exp \frac{t-h+O(\exp(-p/\varepsilon))}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon^\alpha), \\ \delta^\varepsilon|_{t=h-\sigma} = O(\varepsilon \exp(-\sigma/\varepsilon)). \end{cases} \quad (50)$$

Из вида задачи Коши (50) следует, что  $\delta^\varepsilon(t) = O(\varepsilon \exp(-q/\varepsilon))$  равномерно по  $\varphi$ , следовательно,

$$x_2^\varepsilon(t, \varphi) = -\widehat{x} + \varepsilon w_3(\tau)|_{\tau=(t-h)/\varepsilon} + O(\varepsilon \exp(-q/\varepsilon)) \text{ при } t \in [h - \sigma, h + \varepsilon^\alpha]. \quad (51)$$

**3)** На очередном участке  $t \in [h + \varepsilon^\alpha, h + t_0 - \varepsilon^\alpha]$  имеем дело с задачей Коши

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = 1 + b(c - x_2) + O(\exp(-q\varepsilon^{\alpha-1})), \\ x_2|_{t=h+\varepsilon^\alpha} = -\widehat{x} + \varepsilon w_3(\tau)|_{\tau=\varepsilon^{\alpha-1}} + O(\varepsilon \exp(-q/\varepsilon)). \end{cases} \quad (52)$$

Будем искать решение в виде:

$$x_2^\varepsilon(t, \varphi) = e(t) + \varepsilon b\widehat{d}(c + \widehat{x}) + \delta^\varepsilon(t), \quad (53)$$

где, как и раньше,  $\delta^\varepsilon(t)$  — подлежащий определению остаток. Подставляя (53) в (52) получаем, что уравнение преобразуется к виду

$$\dot{e}(t) + \dot{\delta}^\varepsilon(t) = 1 + b(c - e(t) - \varepsilon b\widehat{d}(c + \widehat{x}) - \delta^\varepsilon(t)) + O(\exp(-q\varepsilon^{\alpha-1})), \quad (54)$$

а для начального условия, принимая во внимание асимптотическое равенство (39), получаем

$$e(h + \varepsilon^\alpha) + \varepsilon b\widehat{d}(c + \widehat{x}) + \delta^\varepsilon|_{t=h+\varepsilon^\alpha} = -\widehat{x} + \dot{e}(h)\varepsilon^\alpha + \varepsilon b\widehat{d}(c + \widehat{x}) + O(\varepsilon \exp(-q/\varepsilon)). \quad (55)$$

Отсюда, учитывая в (54), что  $\dot{e}(t) = 1 + b(c - e(t))$ , а в (55), раскладывая функцию  $e(h + \varepsilon^\alpha)$  в ряд по степеням  $\varepsilon^\alpha$ , получаем задачу Коши для остатка  $\delta^\varepsilon$ :

$$\begin{cases} \dot{\delta}^\varepsilon = b\delta^\varepsilon + O(\varepsilon), \\ \delta^\varepsilon|_{t=h+\varepsilon^\alpha} = O(\varepsilon^{2\alpha}), \end{cases} \quad (56)$$

откуда следует, что равномерно по  $\varphi$  и  $t$  выполняется  $\delta^\varepsilon(t) = O(\varepsilon^{2\alpha})$ , а значит, для решения  $x_2^\varepsilon(t, \varphi)$  приходим к формуле

$$x_2^\varepsilon(t, \varphi) = e(t) + \varepsilon b\widehat{d}(c + \widehat{x}) + O(\varepsilon^{2\alpha}) \text{ при } t \in [h + \varepsilon^\alpha, h + t_0 - \varepsilon^\alpha]. \quad (57)$$

4) Далее, рассмотрим отрезок  $t \in [h+t_0-\varepsilon^\alpha, h+t_0+\sigma]$ . Здесь, учитывая лемму 1, для поиска решения  $x_2^\varepsilon(t, \varphi)$  имеем дело с задачей Коши

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = 1 + b(c - x_2) \cdot g\left(\exp\frac{-at + a + 1 + O(\exp(-p/\varepsilon))}{\varepsilon}\right) + O(\exp(-q/\varepsilon)), \\ x_2|_{t=h+t_0-\varepsilon^\alpha} = e(h+t_0-\varepsilon^\alpha) + \varepsilon b \hat{d}(c + \hat{x}) + O(\varepsilon^{2\alpha}). \end{cases} \quad (58)$$

Отыскиваем решение в виде:

$$x_2^\varepsilon(t, \varphi) = -\hat{x} - a - 1 + \varepsilon w_4(\tau)|_{\tau=(t-h-t_0)/\varepsilon} + \delta^\varepsilon(t), \quad (59)$$

где функция  $w_4$  описывается формулой (37), а  $\delta^\varepsilon$  — очередной остаток, подлежащий определению. Раскладывая  $e(h+t_0-\varepsilon^\alpha)$  в ряд по  $\varepsilon^\alpha$  и действуя тем же образом, что в пункте 2), получаем для остатка  $\delta^\varepsilon$  асимптотическую оценку  $\delta^\varepsilon(t) = O(\varepsilon^{2\alpha})$ , откуда

$$x_2^\varepsilon(t, \varphi) = -\hat{x} - a - 1 + \varepsilon w_4(\tau)|_{\tau=(t-h-t_0)/\varepsilon} + O(\varepsilon^{2\alpha}) \text{ при } t \in [h+t_0-\varepsilon^\alpha, h+t_0+\varepsilon^\alpha]. \quad (60)$$

5) Рассмотрим очередной промежуток  $t \in [h+t_0+\sigma, h+T_0-\sigma]$ . На данном промежутке задача Коши для поиска решения  $x_2^\varepsilon(t, \varphi)$  уравнения (25) принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = 1 + O(\exp(-q/\varepsilon)), \\ x_2|_{t=h+t_0+\sigma} = -\hat{x} - a - 1 + \varepsilon w_4(\tau)|_{\tau=\sigma/\varepsilon} + O(\varepsilon^{2\alpha}). \end{cases} \quad (61)$$

Вид отыскиваемого решения следующий:

$$x_2^\varepsilon(t, \varphi) = t - h - \hat{x} - T_0 + \varepsilon b \hat{d} t_0 (c + \hat{x} + 1) + \delta^\varepsilon(t). \quad (62)$$

Так же, как в пункте 3), подставим (62) в (61), воспользуемся асимптотическими свойствами (41) и получим задачу Коши для остатка  $\delta^\varepsilon$ , из вида которой следует его требуемая малость. Таким образом,

$$x_2^\varepsilon(t, \varphi) = t - h - \hat{x} - T_0 + \varepsilon b \hat{d} t_0 (c + \hat{x} + 1) + O(\varepsilon^{2\alpha}) \text{ при } t \in [h+t_0+\sigma, h+T_0-\sigma]. \quad (63)$$

Тем самым, построена асимптотика решения  $x_2^\varepsilon(t, \varphi)$  с начальной функцией (10), (43) и лемма 4 доказана.

Отметим, что из формул леммы 4 следует, что для решения  $x_2^\varepsilon(t, \varphi)$  верны равномерные по  $\varphi \in S$  оценки

$$\max_{t \in [-\sigma, h+T_0-\sigma]} |x_2^\varepsilon(t, \varphi) - y_0(t)| = O(\varepsilon). \quad (64)$$

## 5. Формулировка основного результата

Перейдем к формулировке главного результата настоящей работы.

**Теорема 2.** Для каждого  $q > 0$ , для которого выполнено неравенство

$$\frac{a+1}{1-\exp(-bt_0)} + 1/b + c < -q,$$

существует такое достаточно малое число  $\varepsilon_0 > 0$ , что при каждом  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  система (6) допускает экспоненциально орбитально устойчивое решение  $x_*(t) = (x_{1*}^\varepsilon(t), x_{2*}^\varepsilon(t))$  периода  $T_*^\varepsilon$ , удовлетворяющее предельным равенствам

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \max_{0 \leq t \leq T_*^\varepsilon} |x_{1*}^\varepsilon(t) - x_0(t)| + \max_{0 \leq t \leq T_*^\varepsilon} |x_{2*}^\varepsilon(t) - y_0(t)| \right) = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_*^\varepsilon = T_0. \quad (65)$$

Для доказательства данной теоремы необходимо показать существование, устойчивость и единственность периодического решения  $(x_1(t), x_2(t))$  системы (6) с найденной в пунктах 3. и 4. асимптотикой, что будет сделано в следующем пункте.

## 6. Доказательство теоремы 2

Дальнейшая схема действий стандартна для подобных задач и опирается на идею, описанную в ряде статей (см., например, [1, 10, 11]).

### 6.1. Существование периодического решения системы (6)

Покажем, что выполняется включение

$$\Pi^\varepsilon(S) \subset S. \quad (66)$$

Требуемое равенство

$$x_1^\varepsilon(t - T^\varepsilon(\varphi), \varphi)|_{t=-\sigma} = -\sigma$$

(для функций из  $S_1$ ) выполняется в силу определения  $T^\varepsilon(\varphi)$ . Что касается неравенства

$$\left| x_2^\varepsilon(t - T^\varepsilon(\varphi), \varphi)|_{t=-\sigma} + \hat{x} + h + \sigma \right| < \varepsilon^\beta$$

(требуемое для функций из  $S_2$ ), оно следует из неравенства

$$\left| x_2^\varepsilon(t - T^\varepsilon(\varphi), \varphi)|_{t=-\sigma} + \hat{x} + h + \sigma \right| < \exp(-bt_0)\varepsilon^\beta + O(\varepsilon^{2\beta}),$$

которое верно в силу свойств релейного уравнения (26), доказанных п. 4.1.

Так же, как в статьях [1, 10, 11], наложим на имеющиеся в распоряжении параметры  $q_2, p_2$  ограничения

$$q_1 > - \min_{t \in [-1-\sigma, -\sigma]} x_0(t), \quad 0 < p_1 < - \max_{t \in [-1-\sigma, -\sigma]} x_0(t), \quad (67)$$

$$q_2 > - \min_{t \in [-1-\sigma, -\sigma]} y_0(t), \quad 0 < p_2 < - \max_{t \in [-1-\sigma, -\sigma]} y_0(t) \quad (68)$$

и рассмотрим множество функций  $\hat{S} = (\hat{S}_1, \hat{S}_2)$ , получающееся из  $S$  при замене в (9) и (10) нестрогих неравенств строгими. В силу (24), (64) требуемое включение (66) будет выполняться при всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$  при условии

$$x_0(t) \in \hat{S}_1, \quad y_0(t) \in \hat{S}_2, \quad (69)$$

что верно в силу ограничений (21), (67), (68).

Таким образом, оператор  $\Pi_\varepsilon$  является компактным и преобразует в себя замкнутое ограниченное и выпуклое множество  $S$ . Отсюда, используя принцип Шаудера, получаем, что этот оператор имеет в  $S$  по крайней мере одну неподвижную точку  $\varphi_* = (\varphi_{1*}(t), \varphi_{2*}(t))$ . А значит, решение  $x_*^\varepsilon(t) \stackrel{\text{def}}{=} x^\varepsilon(t, \varphi_*)$  системы (6) является периодическим с периодом  $T_*^\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} T^\varepsilon(\varphi_*)$  и в силу (24), (64) удовлетворяет свойствам (65).

## 6.2. Единственность и устойчивость периодического решения системы (6)

Перейдем к обоснованию единственности и устойчивости периодического решения системы (6).

Из явного вида оператора (14) следует, что существует его производная Фреше по  $\varphi \in S$ . Обозначим соответствующий линейный функционал через  $\partial_\varphi \Pi^\varepsilon(\varphi)$ .

Определим множество возмущений для функций из (11) следующим образом:

$$S_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{\gamma_0 = (\gamma_{01}, \gamma_{02}) \in C[-1 - \sigma, -\sigma] \times C[-1 - \sigma, -\sigma] : \gamma_0(-\sigma) = (0, 0)\}. \quad (70)$$

При этом предполагаем, что для функции  $\varphi(t) \in S$  возмущенная функция  $\varphi(t) + \gamma_0(t)$  остается в том же множестве  $S$  начальных функций.

Справедливо следующее утверждение.

**Лемма 5.** Явная формула применения оператора  $\partial_\varphi \Pi^\varepsilon(\varphi)$  к элементу  $\gamma_0$  множества (70) имеет следующий вид:

$$\partial_\varphi \Pi^\varepsilon(\varphi)\gamma_0 = -\dot{x}^\varepsilon(t + T^\varepsilon(\varphi), \varphi) \cdot \frac{\gamma_1^\varepsilon(T^\varepsilon(\varphi) - \sigma, \varphi)}{\dot{x}_1^\varepsilon(T^\varepsilon(\varphi) - \sigma, \varphi)} + \gamma^\varepsilon(t + T^\varepsilon(\varphi), \varphi),$$

где функция  $\gamma^\varepsilon(t, \varphi) = (\gamma_1^\varepsilon(t, \varphi), \gamma_2^\varepsilon(t, \varphi))$  является решением задачи

$$\dot{\gamma}_1^\varepsilon = f' \left( \exp \frac{x_1^\varepsilon(t-1, \varphi)}{\varepsilon} \right) \cdot \exp \frac{x_1^\varepsilon(t-1, \varphi)}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \gamma_1^\varepsilon(t-1, \varphi) + O(\exp(-q/\varepsilon)), \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_2^\varepsilon = & b(c - x_2^\varepsilon(t, \varphi)) \cdot g' \left( \exp \frac{x_1^\varepsilon(t-h, \varphi)}{\varepsilon} \right) \cdot \exp \frac{x_1^\varepsilon(t-h, \varphi)}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \gamma_1^\varepsilon(t-h, \varphi) - \\ & - bg \left( \exp \frac{x_1^\varepsilon(t-h, \varphi)}{\varepsilon} \right) \cdot \gamma_2^\varepsilon(t, \varphi) + O(\exp(-q/\varepsilon)), \end{aligned} \quad (72)$$

$$\gamma^\varepsilon|_{t \in [-1-\sigma, -\sigma]} = \gamma_0(t). \quad (73)$$

Отсюда следует

**Лемма 6.** Для решения  $\gamma^\varepsilon(t, \varphi)$  задачи (71)–(73) справедлива оценка

$$\max_{t \in [-\sigma, T^\varepsilon(\varphi) - \sigma]} |\gamma^\varepsilon(t, \varphi)| \leq M \exp(-q/\varepsilon) \quad (74)$$

с некоторыми универсальными (не зависящими от  $\varepsilon$ ,  $\varphi$ ,  $\gamma_0$ ) положительными постоянными  $M$  и  $q$ .

Из лемм 5 и 6 следует, что для производной Фреше справедлива оценка

$$\sup_{\varphi \in S} \|\partial_{\varphi} \Pi^{\varepsilon}(\varphi)\|_{S_0 \rightarrow S_0} \leq M \exp(-q/\varepsilon) \quad (75)$$

при некоторых положительных константах  $M$  и  $q$ . В свою очередь оценка (75) влечет за собой:

- 1) сжимаемость оператора  $\Pi^{\varepsilon}$ , а значит, единственность его неподвижной точки  $\varphi_*$  и соответствующего периодического решения  $x^{\varepsilon}(t, \varphi_*)$ ;
- 2) экспоненциальную малость спектрального радиуса оператора  $\partial_{\varphi} \Pi^{\varepsilon}(\varphi)$ .

Второе означает, что все мультипликаторы  $\mu$  цикла  $x^{\varepsilon}(t, \varphi_*)$ , кроме двух (единичного и близкого к (34)), лежат в круге  $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \leq M \exp(-q/\varepsilon)\}$ , откуда следует устойчивость решения  $x_*^{\varepsilon}(t)$ .

Теорема 2 доказана.

## 7. Заключение

В заключение в качестве примера приведем изображение (рис. 1) построенного режима системы (6) для функций

$$f(u) = \frac{a(1-u)}{a+u}, \quad g(u) = \frac{u}{1+u}$$

и следующих значений параметров:  $h = 8$ ,  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $c = -5$ ,  $\lambda = 100$ .

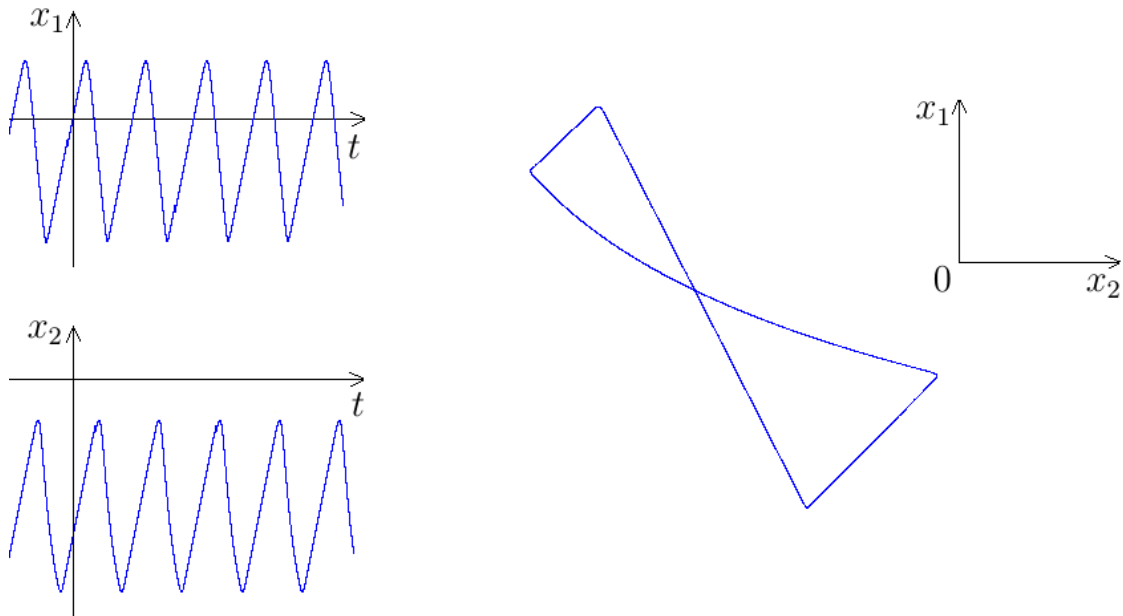


Рис. 1. Решение системы (6)  
Fig. 1. The solution of the system (6)



Подводя итог, отметим, что с учетом сделанной экспоненциальной замены (5) доказанная теорема 2 обеспечивает существование у системы (4) периодического экспоненциально орбитально устойчивого импульсно-рефрактерного режима, то есть режима, при котором одна из функций —  $v_1(t)$  — содержит на периоде экспоненциально высокий всплеск, а вторая —  $v_2(t)$  — асимптотически мала при всех  $t > 0$ . А это в силу замены (3) означает наличие соответствующего импульсно-рефрактерного режима у системы (1), при котором импульсные функции  $u_j$  имеют нечетные индексы ( $j = 1, 3, \dots, 2m - 1$ ), а рефрактерные — четные ( $j = 2, 4, \dots, 2m$ ).

Отметим также, что в силу симметричного вхождения функций  $x_1$  и  $x_2$  в систему (6) теорема, аналогичная теореме 2, может быть сформулирована для  $x_1$ , близкой к отрицательной функции  $y_0$ , и  $x_2$ , близкой к  $x_0$ , меняющей знак. Отсюда следует, что аналогичный результат может быть получен для импульсных функций  $u_{2k}$ , и рефрактерных функций  $u_{2k-1}$ ,  $k = 1, \dots, m$ .

## Список литературы / References

- [1] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Об одном способе математического моделирования химических синапсов”, *Дифференциальные уравнения*, **49**:10 (2013), 1227–1244; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “On a Method for Mathematical Modeling of Chemical Synapses”, *Differential Equations*, **49**:10 (2013), 1193–1210].
- [2] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Релаксационные автоколебания в сетях импульсных нейронов”, *УМН*, **70**:3(423) (2015), 3–76; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Self-excited relaxation oscillations in networks of impulse neurons”, *Russian Math. Surveys*, **70**:3 (2015), 383–452].
- [3] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Релаксационные автоколебания в сетях Хопфилда с запаздыванием”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **77**:2 (2013), 53–96; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Relaxation self-oscillations in Hopfield networks with delay”, *Izvestiya: Mathematics*, **77**:2 (2013), 271–312].
- [4] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Дискретные автоволны в нейронных системах”, *ЖВМ и МФ*, **52**:5 (2012), 840–858; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Discrete autowaves in neural systems”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **52**:5 (2012), 702–719].
- [5] Преображенская М. М., “Релаксационные циклы в модели синаптически взаимодействующих осцилляторов”, *МАИС*, **24**:2 (2017), 186–204; [Preobrazhenskaia M. M., “Relaxation Cycles in a Model of Synaptically Interacting Oscillators”, *MAIS*, **24**:2 (2017), 186–204, (in Russian)].
- [6] Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., “Реле с запаздыванием и его  $C^1$ -аппроксимация”, *Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН*, **216** (1997), 126–153; [Kolesov A. Yu., Mishchenko E. F., Rozov N. Kh., “Relay with delay and its  $C^1$ -approximation”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **216** (1997), 119–146].
- [7] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. I”, *Дифференциальные уравнения*, **47**:7 (2011), 919–932; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Relaxation self-oscillations in neuron systems: I”, *Differential Equations*, **47**:7 (2011), 927–941].
- [8] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. II”, *Дифференциальные уравнения*, **47**:12 (2011), 1675–1692; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Relaxation self-oscillations in neuron systems: II”, *Differential Equations*, **47**:12 (2011), 1697–1713].

- [9] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. III”, *Дифференц. уравнения*, **48:2** (2012), 155–170; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Relaxation self-oscillations in neuron systems: III”, *Differential Equations*, **48:2** (2012), 159–175].
- [10] Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., “Об одной модификации уравнения Хатчинсона”, *ЖВМ и МФ*, **50:12** (2010), 2099–2112; [Kolesov A. Yu., Mishchenko E. F., Rozov N. Kh., “A modification of Hutchinson’s equation”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **50:12** (2010), 1990–2002].
- [11] Преображенская М. М., “Существование и устойчивость релаксационных циклов в нейродинамической модели с двумя запаздываниями”, *Вестник НИЯУ МИФИ*, **5:4** (2016), 351–366; [Preobrazhenskaja M. M., “Existence and stability of relaxation cycles in a neurodynamic model with two delays”, *Vestnik NIYaU MIFI*, **5:4** (2016), 351–366, (in Russian)].
- [12] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Моделирование эффекта взрыва в нейронных системах”, *Матем. заметки*, **93:5** (2013), 684–701; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Modeling the bursting effect in neuron systems”, *Math. Notes*, **93:5** (2013), 676–690].

---

**Preobrazhenskaja M. M.**, "The Impulse-Refractive Mode in the Neural Network with Ring Synaptic Interaction", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24:5** (2017), 550–566.

**DOI:** 10.18255/1818-1015-2017-5-550-566

**Abstract.** In the paper, a mathematical model of a neural network with an even number of ring synaptic interaction elements is considered. The model is a system of scalar nonlinear differential-difference equations, the right parts of which depend on large parameters. The unknown functions included in the system characterize the membrane potentials of the neurons. The search of special impulse-refraction cycles within the system of equations is of interest. The functions with odd numbers of the impulse-refraction cycle have an asymptotically high pulses and the functions with even numbers are asymptotically small. Two changes allow to study a two-dimension nonlinear differential-difference system with two delays instead of the system. Further, a limit object that represents a relay system with two delays is defined by a large parameter tending to infinity. There exists the only periodic solution of the relay system with the initial function from a suitable function class. This is structurally proved, by using the step method. Next, the existence of relaxation periodic solutions of the two-dimension singularly perturbed system is proved by using the Poincare operator and the Schauder principle. The asymptotics of this solution is constructed, and it is proved that the solution is close to the decision of the relay system. Because of the exponential estimate of the Frechet derivative of the Poincare operator it implies the uniqueness and stability of solutions of the two-dimension differential-difference equation with two delays. Furthermore, with the help of reverse replacement the proved result is transferred to the original system.

**Keywords:** relaxation oscillations, delay, large parameter, synaptic connection

**On the authors:**

Margarita M. Preobrazhenskaja, [orcid.org/0000-0002-7032-1155](https://orcid.org/0000-0002-7032-1155),  
P.G. Demidov Yaroslavl State University, 14 Sovetskaya str., Yaroslavl, 150003, Russia,  
Scientific Center in Chernogolovka RAS, 9 Lesnaya str., Chernogolovka, Moscow region, 142432, Russia,  
e-mail: rita.preo@gmail.com

**Acknowledgments:**

This work was supported by the Russian Science Foundation (project №14-21-00158).