



Universidade de São Paulo
Escola Politécnica

Flávio Mendes Neto

**Tópicos sobre a Análise Não-Linear de Pórticos Planos de Concreto
Armado**

Tese apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para a
obtenção do título de **Doutor** em
Engenharia.

São Paulo

Janeiro 2000

(Reimpressão com pequenas correções em Nov/2004)

Flávio Mendes Neto

Engenheiro de Infra-Estrutura Aeronáutica, ITA, 1986.

Mestre em Engenharia de Estruturas, EPUSP, 1992.

<http://www.infra.ita.cta.br/~flavio/>

Tópicos sobre a Análise Não-Linear de Pórticos Planos de Concreto Armado

Tese apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para a
obtenção do título de **Doutor** em
Engenharia.

Área: Engenharia de Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Paulo de Mattos Pimenta

São Paulo

Janeiro 2000

(Reimpressão com pequenas correções em Nov/2004)

À minha querida esposa Lucy Mara,

Aos meus queridos filhos Rafael, Bruna e Júlia.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Paulo de Mattos Pimenta, pela orientação brilhante, segura e amistosa.

Ao Prof. Dr. Lauro Modesto dos Santos, por sua dedicação ao ensino de Concreto Armado.

Aos alunos de graduação da Divisão de Engenharia de Infra-Estrutura Aeronáutica do ITA, pelos questionamentos sempre produtivos.

À Divisão de Engenharia de Infra-Estrutura Aeronáutica do ITA, pela concessão de uma licença de afastamento média de um dia por semana para a consecução deste trabalho.

À CAPES, pela concessão de meia bolsa de doutoramento (PICD/T) durante estes quatro anos de trabalho.

Resumo

Aborda-se a análise estática de pórticos planos de concreto armado. O cálculo dos esforços seccionais resistentes (e suas derivadas) é feito de forma original, exata e eficiente. Discute-se o dimensionamento da armadura e a verificação de seções transversais utilizando o método de Newton-Raphson. Monta-se um elemento finito de pórtico plano com não-linearidade geométrica e física. São feitas várias observações sobre a análise pelo Método dos Elementos Finitos, incluindo comentários sobre o Estado Limite Último. São fornecidos vários exemplos numéricos.

Abstract

The static analysis of reinforced concrete plane frame is focused. Cross section resultant stresses (and its derivatives) determination is made in an original, exact and efficient way. Reinforcement design and cross section capacity determination are made with Newton-Raphson's method. A plane frame finite element with geometric and physical non-linearities is assembled. Many remarks regarding the Finite Element Method analysis are presented, including comments about the Ultimate Limit Design. Many numerical applications are presented.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Objetivos	1
1.2	Linha de Pesquisa	2
1.3	Descrição do Conteúdo	4
2	Estudo da Seção Transversal	6
2.1	Convenções	6
2.1.1	Equação cinemática	7
2.2	Esforços resistentes do concreto	8
2.2.1	Integrais dos esforços resistentes	9
2.2.2	Seção transversal poligonal	10
2.2.3	Teorema de Green	13
2.2.4	Esforço normal resistente	14
2.2.5	Momento resistente na direção x	17
2.2.6	Momento resistente na direção y	20
2.2.7	Compressão ou tração uniforme	21
2.2.8	Resumo	22
2.2.9	Aplicação ao diagrama parábola-retângulo	24
2.2.10	Exemplos de aplicação	26
2.2.11	Eficiência na obtenção dos esforços resistentes no concreto	30
2.3	Derivadas dos esforços resistentes do concreto	33
2.3.1	Compressão ou tração uniforme	40
2.3.2	Aplicação ao diagrama parábola-retângulo	41
2.4	Esforços resistentes da armadura	42
2.4.1	Derivadas dos esforços resistentes da armadura	44
2.4.2	Diagrama tensão-deformação do aço e suas derivadas	45

3	Verificação e Dimensionamento de Seções Transversais	48
3.1	Utilização do método de Newton-Raphson para a verificação da seção	48
3.1.1	Caso unidimensional — considerações geométricas	48
3.1.2	Caso bidimensional	50
3.1.3	Aplicação à verificação da seção	53
3.1.4	Validade do método	54
3.2	Existência da solução do problema de verificação	63
3.2.1	Exemplo de FNC	66
3.2.2	Exemplo 3-4 de FOC	68
3.3	Verificação do Estado Limite Último	68
3.3.1	Compatibilidade de notação	71
3.3.2	Exemplos de verificação	72
3.4	Dimensionamento da armadura da seção	74
3.4.1	Exemplos de dimensionamento	76
3.4.2	Observação sobre o arranjo de armadura	78
3.5	Aplicação à seção retangular sob FNC	79
4	Estudo de Pórticos Planos	91
4.1	Formulação Teórica	91
4.2	Teoria Estrutural (e funções de interpolação)	96
4.2.1	Teoria de segunda ordem	97
4.2.2	Teoria de segunda ordem aproximada (rotações moderadas)	97
4.2.3	Teoria linear (pequenas deformações)	98
4.2.4	Funções de interpolação	98
4.2.5	Carregamentos no elemento	102
4.3	Matriz de transformação	103
4.4	Espalhamento da matriz de rigidez local na matriz de rigidez global	107
4.5	Eliminação dos graus de liberdade restritos	108
4.6	Obtenção dos termos integrais	110
4.6.1	Integração numérica para um material elástico linear	111
4.6.2	Integração numérica para um material elástico não-linear	113
4.7	Resolução do Sistema Linear de Equações	115
4.8	Verificação do Estado Limite Último	117
4.9	Exemplos de Aplicação	119

4.9.1	Estruturas Isostáticas	120
4.9.2	Estruturas Hiperestáticas	127
5	Conclusões e Comentários	137
5.1	Sobre o Estudo da Seção Transversal	137
5.2	Sobre o Estudo de Pórticos Planos	139
A	Integração Numérica	142
A.1	Integração de um polinômio	142
A.1.1	Exemplo de determinação dos coeficientes de Gauss	143
A.2	Mudança do intervalo de integração	144
A.3	Exemplo de integração	145
A.4	Obtenção dos coeficientes de integração	146
A.5	Cuidados na programação do algoritmo	148
A.5.1	Relacionamento dos coeficientes	149
A.5.2	Testes com valores calculados ou tabelados	149
B	Resolução de Sistema Linear de Equações	151
B.1	Decomposição da matriz do sistema	151
B.1.1	Processo de decomposição	152
B.2	Cálculo da solução do sistema	153
B.2.1	Exemplo de decomposição	155

Lista de Figuras

2-1	Elemento de uma barra.	7
2-2	Elemento sob flexão de \mathbf{m}_y	7
2-3	Elemento sob flexão de \mathbf{m}_x	8
2-4	Seção transversal	9
2-5	Seções poligonais	11
2-6	Aresta do polígono	11
2-7	Diagrama parábola-retângulo	25
2-8	Diagrama tensão-deformação dos aços CA-50A e CA-50B.	47
3-1	Método de Newton-Raphson: caso unidimensional	49
3-2	Energia total para uma barra de concreto simples.	59
3-3	Exemplo de FNC no concreto simples	60
3-4	Exemplos de diagramas tensão deformação: (a) Concreto (b) Aço	63
3-5	“Plastificação” da seção	64
3-6	Seção transversal “plastificada”	65
3-7	Seção dos exemplos de FNC	67
3-8	$\beta \times N_p$ (Exemplo 3-1)	85
3-9	$\beta \times M_p$ (Exemplo 3-1)	85
3-10	$N_p \times M_p$ (Exemplo 3-1)	85
3-11	$N_p \times M_p$ (Exemplo 3-2)	86
3-12	Usando Newton: $N_p \times M_p$ (Exemplo 3-3)	86
3-13	Usando Newton: $N_p \times M_p$ (Exemplo 3-3)	86
3-14	Seção “L”: Exemplo para a FOC	87
3-15	Exemplo de esforços máximos na FOC (usando Newton)	87
3-16	Região Viável para pares (ε_c, θ) no ELU	88
3-17	Região viável (ELU) para curvaturas com sinal	88

3-18	Compatibilidade de notação	89
3-19	Exemplo de verificação - seção retangular	89
3-20	Exemplo de verificação: Seção “L”	89
3-21	Exemplos de distribuição de armadura.	90
4-1	Graus de liberdade do elemento no sistema local	92
4-2	Forças nodais no sistema local	94
4-3	Carregamentos distribuídos no elemento e forças nodais.	102
4-4	Transformação de coordenadas: sistema local x sistema global	104
4-5	Seção dos pilares isostáticos	121
4-6	Diagrama de momentos fletores do Exemplo 4-3.	124
4-7	Diagrama de encurtamento e curvatura do eixo do Exemplo 4-3.	125
4-8	Viga do Exemplo 4-5	128
4-9	Diagrama de momentos fletores do Exemplo 4-5	130
4-10	Diagrama Momento-Curvatura para a seção do Exemplo 4-5	131
4-11	Pórtico do Exemplo 4-6	132
4-12	Obtenção da carga crítica do Exemplo 4-6	133
4-13	Viga simplesmente apoiada do Exemplo 4-8	135
4-14	Deformada do Exemplo 4-8	136

Lista de símbolos

Letras romanas

a_i, g_i, h_i parâmetros auxiliares (são definidos quando de sua utilização).

A, A_c, A_s área genérica, área de concreto e área total de aço, respectivamente.

b base da seção retangular.

dA, dA_c elemento de área genérica e elemento de área de concreto, respectivamente.

dx, dy, dz comprimentos infinitesimais nas direções dos eixos cartesianos.

$D, D(\varepsilon), D_i$ derivada genérica do diagrama tensão-deformação do material (ou no ponto i).

E, E_s módulo de elasticidade genérico e do aço.

f_{ck} resistência característica do concreto à compressão aos 28 dias de idade.

f_{ji} funções auxiliares ($j = 1 \dots 11$, i corresponde à numeração da aresta da seção transversal) para o cálculo dos esforços resistentes (e suas derivadas) do concreto.

f_{yd} resistência de cálculo escoamento do aço ($= f_{yk}/\gamma_s$).

f_{yk} resistência característica de escoamento do aço.

$f(x)$ função genérica (de uma variável).

$f'(x), f''(x)$, derivadas da função genérica ($df/dx, d^2f/dx^2$ etc).

h altura da seção retangular.

$I_1, I_2, I_3, J_1, J_2, K_1$ funções integrais do diagrama tensão-deformação do material.

I_{xx}, I_{yy} momentos de inércia relação aos eixos y e x , respectivamente.

I_{xy} produto de inércia em relação aos eixos (x, y) .

m_x, m_y módulo do momento fletor atuando na direção x e y , respectivamente.

$M_{xc}, M_{xs}, M_{xR}, M_{xd}$ momento fletor na direção x do concreto, do aço, resistente e de cálculo respectivamente.

$M_{yc}, M_{ys}, M_{yR}, M_{yd}$ momento fletor na direção y do concreto, do aço, resistente e de cálculo, respectivamente.

n número barras de aço na seção transversal.
 N número de vértices da seção de concreto.
 $N_{\text{nós}}$ número de nós da estrutura.
 N_c, N_s, N_R esforço normal do concreto, do aço e resistente, respectivamente.
 P, Q, \bar{P}, \bar{Q} funções utilizadas no Teorema de Green.
 r_x, r_y raio de giração da seção na direção x e y , respectivamente.
 R_x, R_y módulo do raio de curvatura da seção na direção x e y , respectivamente.
 S uma curva plana qualquer.
 S_x, S_y momentos estáticos de área em relação aos eixos y e x , respectivamente.
 U energia interna de deformação.
 V potencial dos esforços externos.
 \hat{x} distância da linha neutra, medida perpendicularmente à esta, à borda mais encurtada da seção transversal.
 x, y, z eixos cartesianos. A seção transversal encontra-se no plano (x, y) .
 x_i, y_i coordenadas de um vértice da seção de concreto, $i = 1 \dots N$.
 x_{si}, y_{si} coordenadas de uma barra da armadura, $i = 1 \dots n$.
 x_{cg}, y_{cg} coordenadas do CG da seção.
 y_b, y_t distância da origem do sistema de coordenadas à borda inferior (“bottom”) e superior (“top”) da seção, respectivamente.

Letras romanas em negrito

0 vetor nulo (a dimensão fica clara no contexto).
dn, ds vetor normal e tangente a uma curva.
f(x) função genérica (de várias variáveis).
f função vetorial utilizada no Teorema de Green ($= Q\mathbf{i} + P\mathbf{j}$)
i, j versores dos eixos coordenados (x, y) .
J, J_c, J_s Jacobiano genérico, do concreto e da armadura (ou matriz Jacobiana).
m_x, m_y vetor momento fletor atuando na direção x e y , respectivamente.
x vetor genérico ou das variáveis independentes de uma função de várias variáveis.
x_i vetor avaliado numa iteração i .

Letras gregas minúsculas

$\alpha, \alpha(\varepsilon)$ tensão (adimensional) no aço ($= \sigma_{sd}/f_{yd}$).

β parâmetro arbitrário ($\beta \in [0 \dots 1]$) ou profundidade adimensional da linha neutra.

β_x profundidade adimensional da linha neutra ($= \hat{x}/h_\varphi$).

γ ângulo genérico.

γ_c coeficiente de minoração da resistência do concreto.

γ_s coeficiente de minoração da resistência do aço.

ε deformação genérica (encurtamentos são positivos e alongamentos são negativos).

ε_c encurtamento máximo na seção de concreto (em ‰).

ε_{s1} alongamento máximo na armadura.

ε_i deformação no ponto i (concreto ou armadura).

ε_m deformação média.

ε_o deformação na origem do sistema de coordenadas que define a seção transversal.

ε_{yd} deformação de cálculo de escoamento do aço classe “A” (em ‰). A deformação do aço classe “B” correspondente vale $\varepsilon_{yd} + 2$.

φ direção da linha neutra (medida no sentido trigonométrico, ou seja, anti-horário).

$\phi(\varepsilon)$ potencial do diagrama tensão-deformação do material.

$\boldsymbol{\kappa}, \kappa$ vetor curvatura genérico e seu módulo.

κ_x, κ_y módulo da curvatura da seção na direção x e y , respectivamente.

$\boldsymbol{\kappa}_x, \boldsymbol{\kappa}_y$ vetor curvatura da seção na direção x e y , respectivamente.

$\sigma, \sigma(\varepsilon), \sigma_i$ tensão genérica numa fibra com deformação ε (ou no ponto i).

σ_{cd} tensão de cálculo no concreto ($= 0,85 f_{ck}/\gamma_c$).

θ curvatura majorada adimensional ($= 1000 h/r$).

ζ parâmetro genérico (ou deformação arbitrária).

Letras gregas maiúsculas

Δ diferença.

∇ operador diferencial, gradiente de função.

$\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x})$ matriz Jacobiana (ou Jacobiano) da função genérica.

$\nabla^2 \Pi$ matriz Hessiana da energia potencial total do sistema.

Π energia potencial total do sistema.

Símbolos mistos/especiais

$d\varphi$ ângulo infinitesimal.

$d\varepsilon$ deformação infinitesimal.

Δx_i incremento de abscissas de um lado da seção transversal ($= x_{i+1} - x_i$).

Δy_i incremento de ordenadas de um lado da seção transversal ($= y_{i+1} - y_i$).

$\Delta\varepsilon_i$ incremento de deformações em um lado da seção transversal ($= \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$).

h_φ altura da seção medida perpendicularmente à direção φ .

Índices

c referente ao concreto.

d de cálculo ou de projeto (do Inglês “design”).

e referente a um elemento.

i índice genérico.

$nós$ referente ao número de nós da estrutura.

R resistente.

s referente ao aço (do Inglês “steel”).

x, y na direção do eixo x ou y respectivamente.

Abreviaturas

CG: centro geométrico da seção.

ELU: Estado Limite Último.

FNC: Flexão Normal Composta.

FNS: Flexão Normal Simples.

FOC: Flexão Oblíqua Composta.

L.G.: Linearidade Geométrica.

L.N.: Linha neutra.

N-R: Método de Newton-Raphson.

op. ad.: operações de adição e subtração.

op. mul.: operações de multiplicação e divisão.

R.M.: Rotações Moderadas.

sim.: simétrica(o)

Notações Matemáticas

$\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro menor ou igual a x . Por exemplo $\lfloor 2,5 \rfloor = 2$.

$\|\cdot\|$ norma de vetor (Euclidiana) ou determinante de matriz.

$\det(\cdot)$ determinante de matriz.

$p \bmod q$ resto da divisão inteira de p por q ($= p - q \lfloor p/q \rfloor$).

$s(x)$ função sinal (-1, 0 ou +1 dependendo do valor de x ser menor que zero, igual a zero e maior que zero, respectivamente).

\cdot^T matriz ou vetor transposto.

\cdot^{-1} matriz inversa.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Objetivos

A análise não-linear de pórticos planos de concreto armado vem sendo objeto de estudo há vários anos. Muitos trabalhos foram publicados (especialmente teses de mestrado e de doutorado) sem que, no entanto, este tipo de análise chegasse a virar uma ferramenta eficiente para o cálculo prático. Certamente existem dificuldades teóricas na abordagem de um assunto tão rico e fascinante. Existem, também, barreiras de recursos materiais e de tempo que, no futuro, imaginam-se menores com o acelerado avanço dos equipamentos de computação.

Para que este tipo de análise passe a ser, realmente, uma ferramenta para o calculista, é necessário que, o mais cedo possível, alunos de graduação de Engenharia Civil sejam expostos ao Método dos Elementos Finitos e ao Cálculo de Concreto Armado de uma forma consistente, coerente e profunda. Deve haver uma maior proliferação de livros didáticos nacionais sobre o assunto e, também, a existência de uma comunidade disposta a encarar e discutir as eventuais dificuldades e desafios teóricos existentes.

A época de ábacos, tabelas e fórmulas de bolso, em nossa opinião, acabou. Observe, no entanto, que há uma tendência de que os computadores passem a exercer o papel destas ferramentas arcaicas com um formato moderno, palatável e misterioso. Não é admissível, sob o ponto de vista de formação do engenheiro, que lhe seja ensinado como utilizar um programa de computador (pelo menos este não pode ser, em hipótese nenhuma, o objetivo principal — e talvez nem secundário). É fundamental que conceitos e teorias sejam desenvolvidos e aplicados de forma consistente.

O objetivo principal deste trabalho é, portanto, a abordagem sistemática e auto-contida dos procedimentos necessários para a análise não-linear (estática) de pórticos planos de concreto armado. Não se pode esperar, no entanto, o discurso necessário de um livro texto. Embora tenham sido envidados esforços para que todo o trabalho fosse bastante claro, imagina-se que, no futuro, uma versão mais

didática deverá ser publicada para a apreciação da comunidade envolvida com o cálculo de concreto armado.

Aborda-se desde a obtenção dos esforços seccionais resistentes até o cálculo (não-linear e iterativo) de carga crítica de pórticos planos de concreto armado. Todos os tópicos têm ênfase nos “porques” e abordam, também, os “comos”. Em várias oportunidades são feitas considerações originais e são discutidas suas conseqüências na análise dos pórticos planos de concreto armado. Optou-se, também, por fazer uma abordagem original do assunto sem haver uma preocupação explícita com a forma usual de apresentação do assunto na literatura consultada. Não existe, desta maneira, um capítulo formal para a revisão bibliográfica, como visto — e muitas vezes apreciado — em vários outros trabalhos acadêmicos. A lista das referências bibliográficas deve ser encarada, portanto, como uma possível fonte de aprofundamento do assunto sem, necessariamente, significar que seja uma indicação de livros texto para o completo desenvolvimento do assunto.

1.2 Linha de Pesquisa

Nosso interesse pelo cálculo de concreto armado começou em 1985 através dos cursos de graduação ministrados na Divisão de Engenharia de Infra-Estrutura Aeronáutica do ITA. Naquela época houve o oferecimento de uma bolsa de estudos visando o aprimoramento de um programa de computador que fizesse o cálculo de um edifício de concreto armado. A continuidade da bolsa de estudos ocorreu com a confecção de um trabalho de graduação [51] com o mesmo objetivo. Já nesta época ficamos muito bem impressionados com a didática dos livros do Prof. Lauro Modesto dos Santos [64, 65].

Quase simultaneamente à nossa contratação como professor das disciplinas de concreto armado no ITA houve o início de nossas atividades de pós-graduação objetivando o título de mestre sob a orientação do Prof. Lauro Modesto dos Santos. Neste período tivemos a oportunidade de tomar contato com vários trabalhos que também focalizavam, principalmente, as seções transversais de concreto armado [29, 30, 70, 71]. Apesar do interesse pelos pilares de concreto armado, nosso trabalho focalizou sutilmente o tema [47], abordando somente pilares isostáticos. Em paralelo havia nosso interesse na finalização plena da idéia original do trabalho de graduação com a orientação de dois trabalhos de graduação realizados por alunos do ITA [75, 25]. Este interesse vinha ao encontro da tentativa de simplificação de vários procedimentos necessários para o cálculo prático de um edifício de concreto armado [66].

O estudo da estabilidade de pilares de concreto armado continuou a despertar grande interesse e vários outros trabalhos foram sendo descobertos [32, 73, 11, 42] sem, no entanto, terem sido absorvidos em nosso mestrado. A excelente referência [67], até o momento não publicada ostensivamente, per-

mite perceber que são dois problemas distintos e complexos enfrentados pelos engenheiros de concreto armado: o estudo da seção transversal (cálculo dos esforços resistentes, verificação e o dimensionamento) e o estudo das estruturas (pilares, vigas, pórticos etc). Após o término do mestrado, durante 1992-1994, houve uma dedicação maior ao estudo da seção transversal [68, 48, 49] coincidindo com o lançamento de mais um livro do Prof. Lauro [69]. Durante esta época várias idéias aqui apresentadas foram germinadas (por exemplo: a região viável para o ELU, desenvolvida de forma completamente independente).

O início das atividades de doutoramento suscitaram a vontade de esclarecer, “definitivamente”, questões relacionadas à seção transversal. A metodologia desenvolvida em nosso mestrado [47] para o cálculo dos esforços resistentes, baseada em [30], deixava a desejar com relação à sua clareza e eficiência. Os procedimentos para verificação e dimensionamento eram “complexos”¹ e sujeitos a falhas, como mostrado em [69], nos casos de Flexão Normal e Oblíqua. Foram observadas outras tentativas para esclarecer o assunto dos esforços resistentes [26] sem, no entanto, considerarmos um “ponto final” na discussão. Nesta época tivemos a oportunidade de entrar em contato com excelentes trabalhos versando sobre pórticos planos ([59], sendo uma extensão de [58]) e pudemos observar de perto a confecção de outro [5] cujo enfoque principal foi a não-linearidade geométrica (as aplicações ao concreto armado se restringiram a seções compostas por retângulos), apesar de utilizar alguns conceitos, por nossa sugestão, da não-linearidade física tais quais os apresentados neste trabalho (por exemplo: a avaliação exata das derivadas dos esforços resistentes, sem a utilização do processo das diferenças finitas).

O assunto dos esforços resistentes é bastante extenso e, mesmo com uma publicação (detalhada) de vinte páginas [50], não foi esgotado plenamente. A verificação e dimensionamento, tal qual apresentados neste trabalho, são originais e parecem ser eficientes e à prova de falhas. Acreditamos que estes problemas, considerando seções transversais poligonais de materiais elásticos, tenham sido abordados de forma definitiva. Para uma aplicação mais elegante da metodologia entendemos que o cálculo seccional puro e simples deixaria a desejar. Daí justifica-se a abordagem dos pórticos planos de concreto armado. A intenção original seria a aplicação a pórticos planos e, posteriormente, a pórticos espaciais. Por limitações de tempo, no entanto, os pórticos espaciais não puderam ser focalizados.

Por fim resta dizer que este trabalho valerá muito pouco se não puder ser incorporado, de forma clara e detalhada, nos cursos de graduação em Engenharia Civil. A sua implementação em escritórios de cálculo também é interessante mas, a longo prazo, acreditamos que a sólida formação de nossos alunos de graduação é um passo mais concreto para um engrandecimento da Engenharia Estrutural

¹Em geral por imporem o obedecimento prévio ao ELU.

do País. A implementação da metodologia, obviamente, deve ser feita por programas de computador. Espera-se, entretanto, que esta implementação não seja feita na forma de “caixas pretas”, impedindo que o aluno tenha plena ciência de todos os passos e procedimentos. Sugere-se, portanto, que o engenheiro faça seus próprios programas (na linguagem que lhe for mais confortável) e que perceba, de forma inequívoca, a importância da programação de computadores na vida moderna e, em particular, na área de cálculo estrutural.

1.3 Descrição do Conteúdo

No Capítulo “Estudo da Seção Transversal” são abordados vários assuntos relacionados à obtenção dos esforços resistentes de uma seção transversal. Os conceitos e metodologias desenvolvidos podem ser aplicados a qualquer material, composto ou não, desde que a seção transversal seja poligonal e que os diagramas tensão-deformação dos materiais sejam elásticos e derivados de um potencial (ou seja, tais diagramas devem ser integráveis). O tipo de solicitação é qualquer restrita às chamadas solicitações normais (solicitações que apenas causem o surgimento de tensões normais à seção transversal). Assim, de uma forma única, podem ser tratados os problemas de Flexão Normal Simples (seção submetida apenas a um momento fletor), de Flexão Normal Composta (seção submetida a um momento fletor e a um esforço normal) e de Flexão Oblíqua Composta (esforço normal e dois momentos fletores segundo dois eixos ortogonais quaisquer). A grande eficiência obtida se deve a uma abordagem original do problema de cálculo dos esforços resistentes e à utilização, de forma rigorosa, do Teorema de Green. Embora a frase anterior não revele nenhuma originalidade (há muitos trabalhos que efetuam o cálculo de esforços resistentes com a utilização do Teorema de Green), mostra-se que, em nossa abordagem, muitos passos usuais (giro da seção, cálculo dos esforços dividindo-se a seção transversal etc) são economizados. O cálculo dos esforços seccionais é realizado exatamente, sem aproximações, restrito apenas por suas hipóteses (seção poligonal e diagrama tensão-deformação elástico e integrável).

A verificação da capacidade resistente da seção, discutida no Capítulo “Verificação e Dimensionamento de Seções Transversais”, é realizada com a utilização do método de Newton-Raphson e se mostra extremamente eficiente do ponto de vista computacional. O dimensionamento da área de armadura é feito com uma sucessão de verificações e, também, se mostra muito eficiente em termos computacionais (os exemplos apresentados foram realizados quase que “instantaneamente”).

A consideração do Estado Limite Último é feita de forma independente (posterior) do cálculo de esforços resistentes e da verificação de seções. Este procedimento permite que se proceda a uma “busca sem restrições” fazendo com que o método de Newton-Raphson possa ser empregado na verificação e dimensionamento de seções de forma consistente. Mostra-se a “Região Viável” para o ELU,

desenvolvida de forma original e independente.

No Capítulo “Estudo de Pórticos Planos” são apresentadas todas as hipóteses necessárias ao desenvolvimento de um elemento finito para a análise de pórticos planos de concreto armado. São apresentados, também, todos os conceitos necessários para o completo desenvolvimento da teoria e da análise, propriamente dita, de um pórtico plano de concreto armado sujeito à não-linearidade física e geométrica (esta última considerada de forma simplificada). São discutidas, portanto, as equações cinemáticas, as funções de interpolação, a discretização da estrutura em elementos, a aplicação de carregamentos, a integração (numérica) da matriz de rigidez tangente local, a montagem da matriz de rigidez tangente da estrutura e a resolução iterativa do sistema de equações.

São feitas, também, considerações detalhadas e de grande importância para a consideração do Estado Limite Último em pórticos planos de concreto armado. O ELU se mostra, várias vezes, como restrição à capacidade resistente das seções e, conseqüentemente, das estruturas de concreto armado. Sendo esta consideração extremamente sensível, é muito importante que o ELU seja considerado de forma consistente. Muitas vezes a estrutura teria capacidade de resistir aos esforços não fosse a incapacidade de uma ou mais seções transversais.

No Capítulo “Conclusões e Comentários” são tecidas várias considerações sobre as metodologias estudadas e possíveis extensões aos procedimentos desenvolvidos. É feita, por motivos didáticos, uma separação entre as conclusões sobre o estudo da seção transversal e sobre o estudo dos pórticos planos.

No Apêndice “Integração Numérica” são feitas considerações aprofundadas sobre o processo da Quadratura de Gauss. Este processo é largamente utilizado em problemas de Engenharia (notoriamente no Método dos Elementos Finitos) mas, no entanto, observa-se um desconhecimento generalizado de várias de suas propriedades. No Apêndice “Resolução de Sistema Linear de Equações” é descrito o processo de decomposição de Crout (relativamente similar ao conhecido processo de decomposição de Cholesky) que pode ser aplicado, em geral, a sistemas não singulares (o processo de Cholesky só pode ser aplicado a sistemas positivo-definidos).

Por fim é apresentada a lista das referências bibliográficas utilizadas, em seu todo ou em parte, para a confecção deste trabalho.

Capítulo 2

Estudo da Seção Transversal

2.1 Convenções

O tratamento usual oferecido na literatura com relação à convenção de momentos fletores não permite, via de regra, uma generalização dos procedimentos de cálculo. Trabalhar, por exemplo, com momentos fletores sempre positivos impede que métodos numéricos mais poderosos (e.g. Newton-Raphson) sejam utilizados em sua plenitude (momentos sempre positivos impõem curvaturas sempre positivas na ausência de esforços normais; os métodos numéricos, em geral, são mais eficientes quando se procede à pesquisa da solução num espaço sem restrições).

Com este enfoque, utiliza-se a convenção de momentos de acordo com a regra da mão direita. O vetor momento \mathbf{m}_x é, portanto, aquele que tem a direção e sentido do eixo das abscissas. O vetor momento \mathbf{m}_y tem a direção e sentido do eixo das ordenadas (a seção transversal é suposta pertencente ao plano xy). De forma análoga é definida a convenção para as curvaturas¹. O vetor curvatura $\boldsymbol{\kappa}_x$ tem a direção e sentido do eixo das abscissas e o vetor curvatura $\boldsymbol{\kappa}_y$ tem a direção e sentido do eixo das ordenadas.

A convenção de momentos e curvaturas feita desta maneira permite o tratamento vetorial das grandezas envolvidas. Por exemplo pode-se definir o momento fletor total com

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_x + \mathbf{m}_y = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j}, \quad (2.1)$$

e a curvatura com

$$\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}_x + \boldsymbol{\kappa}_y = \kappa_x \mathbf{i} + \kappa_y \mathbf{j}. \quad (2.2)$$

Os símbolos \mathbf{i} e \mathbf{j} denotam os versores dos eixos coordenados x e y , respectivamente.

¹O termo rigoroso é rotação específica.

A convenção de sinais é a usual em problemas de concreto armado: alongamentos e tensões de tração são negativos enquanto encurtamentos e tensões de compressão são positivos.

2.1.1 Equação cinemática

O nome cinemática, em geral, está associado a movimento (a origem da palavra denota *estudo do movimento*). Em análise estrutural (estática) este termo vem sendo empregado para descrever como as fibras da seção transversal passam do estado indeformado para o estado deformado². Estabelece-se, desta forma, como relacionar a deformação num ponto qualquer da seção com as coordenadas deste ponto.

Faz-se, de forma usual, a hipótese de Euler-Navier-Bernoulli, ou seja, a seção plana antes do carregamento permanece plana após a aplicação do mesmo. Com esta hipótese chega-se, facilmente, a conclusão de que a deformação ε num ponto qualquer da seção transversal é dada por

$$\varepsilon = c_1 + c_2 x + c_3 y. \quad (2.3)$$

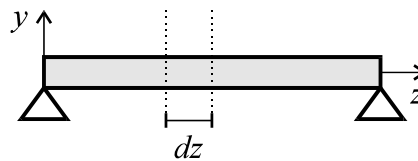


Figura 2-1: Elemento de uma barra.

Observando-se a barra esquematizada na Figura 2-1 pode-se calcular a deformação de um elemento.

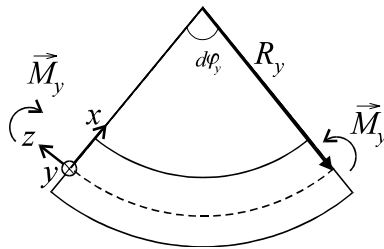


Figura 2-2: Elemento sob flexão de \mathbf{m}_y

Lembrando que se utiliza a convenção de encurtamentos como sendo positivos e ainda observando a Figura 2-3 que ressalta a flexão na direção x (\mathbf{m}_x), conclui-se que (observar que o eixo z aponta

²A seção transversal, por hipótese, é indeformável.

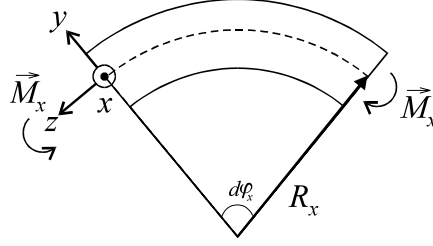


Figura 2-3: Elemento sob flexão de \mathbf{m}_x

para fora da seção)

$$\varepsilon = \frac{R_x d\varphi_x - (R_x + y) d\varphi_x}{R_x d\varphi_x} = -\frac{y}{R_x} = -\kappa_x y. \quad (2.4)$$

De forma análoga, observando-se a flexão segundo o eixo y (\mathbf{m}_y , Figura 2-2), conclui-se que

$$\varepsilon = \frac{R_y d\varphi_y - (R_y - x) d\varphi_y}{R_y d\varphi_y} = \frac{x}{R_y} = \kappa_y x. \quad (2.5)$$

Por superposição de efeitos (a seção transversal era e continua plana, isto implica em linearidade de distribuição de deformações) conclui-se que $c_2 = \kappa_y$ e que $c_3 = -\kappa_x$. Definindo-se ε_o como sendo a deformação na origem do sistema de coordenadas ($x = y = 0$, pertencendo, ou não, à seção transversal) tem-se, imediatamente, que $c_1 = \varepsilon_o$ (por construção). A equação cinemática toma, então, a sua forma final

$$\varepsilon = \varepsilon_o + \kappa_y x - \kappa_x y. \quad (2.6)$$

Observe que uma seção sujeita à $\kappa_y > 0$ tem seus pontos situados no plano xy para $x > 0$ sujeitos a encurtamentos (encurtados), enquanto seções sujeitas à $\kappa_x > 0$ tem seus pontos situados no plano xy para $y < 0$ encurtados (vale a regra da mão direita nos dois raciocínios).

Pode ser conveniente representar as deformações em por mil (‰). Neste caso, a equação cinemática permanece válida mas, no entanto, as curvaturas devem ser, “internamente”, ajustadas (pré-multiplicadas por 1000).

2.2 Esforços resistentes do concreto

Aborda-se como calcular os esforços resistentes do concreto utilizando o Teorema de Green, ou seja, transformando as integrais de superfície em integrais no contorno da seção transversal. Admite-se uma seção transversal poligonal e o diagrama tensão-deformação do concreto composto por um ou mais polinômios (função contínua). A formulação desenvolvida permite o cálculo dos esforços resistentes da

seção sob Flexão Oblíqua Composta (FOC) e, como casos particulares, a Flexão Normal Composta (FNC) e a Flexão Normal Simples (FNS). A origem do sistema de coordenadas que define a seção pode ser qualquer, ou seja, não se obriga que esta origem coincida com o centro de gravidade (CG) da seção transversal. Um pequeno resumo deste capítulo pode ser apreciado na referência [50].

2.2.1 Integrais dos esforços resistentes

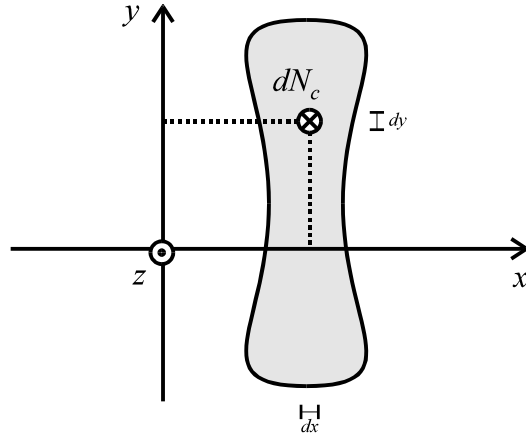


Figura 2-4: Seção transversal

A Figura (2-4) esquematiza a seção transversal com um elemento de área $dA_c = dx dy$ destacado. Lembrando a convenção de momentos, os esforços resistentes da seção são dados por

$$N_c = \iint_{A_c} \sigma(\varepsilon) dx dy \quad (2.7)$$

$$M_{cx} = - \iint_{A_c} \sigma(\varepsilon) y dx dy \quad (2.8)$$

$$M_{cy} = \iint_{A_c} \sigma(\varepsilon) x dx dy. \quad (2.9)$$

O índice c foi utilizado para representar as parcelas resistentes do concreto e a área de integração A_c é tomada como sendo a área bruta da seção transversal (sem o desconto das áreas das barras de aço eventualmente presentes). O símbolo $\sigma(\varepsilon)$ denota a tensão do elemento de área $dA_c = dx dy$ ($\sigma(\varepsilon)$ é uma função da deformação ε deste elemento).

2.2.2 Seção transversal poligonal

Como já dito, a seção transversal é suposta poligonal. O inconveniente deste tipo de representação se faz notar em seções com trechos curvos (notoriamente a seção circular). Para tais seções (com trechos curvos) recomenda-se uma maior discretização da poligonal. Este procedimento pode levar a resultados bastante satisfatórios mas, em contrapartida, aumenta a quantidade de cálculos necessários (por aumentar o número de arestas da seção)³. Acredita-se, porém, que a relativa simplicidade alcançada nas expressões dos esforços resistentes da seção justificam a ausência, neste trabalho, da pré-definição de seções com trechos curvos. Deve-se ainda observar que a grande maioria das seções usuais (com exceção da circular) é representada sem aproximação por uma poligonal.

A seção tem, por definição, N vértices. Por construção cria-se o vértice $N + 1$ coincidente com o primeiro vértice de forma a se “fechar” o circuito. A circunção pode ser feita no sentido horário ou anti-horário (maiores detalhes mais a frente). As coordenadas de cada vértice são representadas pelo par (x_i, y_i) com i variando de 1 a $N + 1$.

Seções vazadas podem ser definidas através de uma única poligonal “entrando” e “saindo” dos vazios. Deve-se, no entanto, fazer a circunção dos vazios em sentido contrário ao da parte cheia (Figura 2-5).

No caso de seções transversais compostas por mais de um tipo de material podem ser utilizados vários polígonos, um para cada tipo de material. Este procedimento também deve ser aplicado quando houver partes da seção submetidas a um estado prévio de tensões/deformações (por exemplo em casos de estruturas construídas por etapas).

Pode-se descrever uma aresta da seção transversal (vide Figura 2-6) através das equações paramétricas

$$x = x_i + \beta \Delta x_i \quad (2.10)$$

$$y = y_i + \beta \Delta y_i. \quad (2.11)$$

onde $\beta \in [0, 1]$. Definiu-se ainda $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ e $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$.

Definindo-se a deformação no vértice i por

$$\varepsilon_i = \varepsilon_o + \kappa_y x_i - \kappa_x y_i \quad (2.12)$$

³ Alguns testes numéricos mostram que para se alcançar uma boa precisão nos exemplos para uma seção coroa de círculo mostrados em [69] foi necessária uma discretização de cada círculo (interno e externo) em uma poligonal de 20 lados.

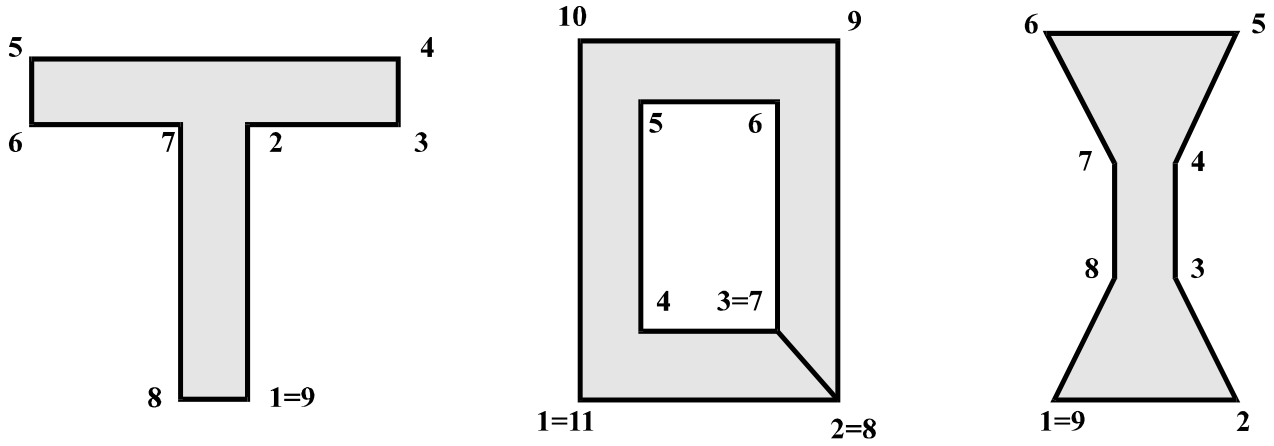


Figura 2-5: Seções poligonais

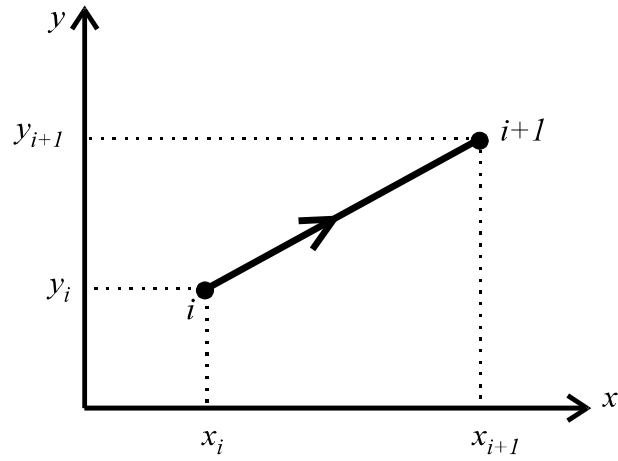


Figura 2-6: Aresta do polígono

e a do vértice seguinte por

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_o + \kappa_y x_{i+1} - \kappa_x y_{i+1} \quad (2.13)$$

pode-se, analogamente, definir o incremento de deformações

$$\Delta\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i = \kappa_y \Delta x_i - \kappa_x \Delta y_i. \quad (2.14)$$

A deformação genérica também pode ser descrita parametricamente como

$$\varepsilon = \varepsilon_o + \kappa_y x - \kappa_x y = \quad (2.15)$$

$$= \varepsilon_o + \kappa_y (x_i + \beta \Delta x_i) - \kappa_x (y_i + \beta \Delta y_i) = \quad (2.16)$$

$$= \varepsilon_i + \beta \Delta \varepsilon_i. \quad (2.17)$$

Quando $\Delta \varepsilon_i \neq 0$ o parâmetro β pode ser substituído por

$$\beta = \frac{\varepsilon - \varepsilon_i}{\Delta \varepsilon_i}. \quad (2.18)$$

A derivação da equação (2.18) conduz a

$$d\beta = \frac{d\varepsilon}{\Delta \varepsilon_i}. \quad (2.19)$$

A ordenada de um ponto da aresta ainda pode ser descrita como

$$y = y_i + \beta \Delta y_i = \quad (2.20)$$

$$= \frac{y_i \varepsilon_{i+1} - y_{i+1} \varepsilon_i}{\Delta \varepsilon_i} + \varepsilon \frac{\Delta y_i}{\Delta \varepsilon_i} = \quad (2.21)$$

$$= \frac{g_i}{\Delta \varepsilon_i} + \varepsilon \frac{\Delta y_i}{\Delta \varepsilon_i}, \quad (2.22)$$

e a sua abscissa como

$$x = x_i + \beta \Delta x_i = \quad (2.23)$$

$$= \frac{x_i \varepsilon_{i+1} - x_{i+1} \varepsilon_i}{\Delta \varepsilon_i} + \varepsilon \frac{\Delta x_i}{\Delta \varepsilon_i} = \quad (2.24)$$

$$= \frac{h_i}{\Delta \varepsilon_i} + \varepsilon \frac{\Delta x_i}{\Delta \varepsilon_i}. \quad (2.25)$$

Definiu-se, para brevidade de notação,

$$h_i = x_i \varepsilon_{i+1} - x_{i+1} \varepsilon_i \quad (2.26)$$

$$g_i = y_i \varepsilon_{i+1} - y_{i+1} \varepsilon_i. \quad (2.27)$$

Os infinitésimos dx e dy podem, portanto, ser dados por

$$dy = \Delta y_i d\beta = \frac{\Delta y_i}{\Delta \varepsilon_i} d\varepsilon \quad (2.28)$$

$$dx = \Delta x_i d\beta = \frac{\Delta x_i}{\Delta \varepsilon_i} d\varepsilon. \quad (2.29)$$

Observação: O parâmetro g_i também pode ser calculado, quando conveniente, com

$$g_i = -(\varepsilon_o \Delta y_i + \kappa_y a_i) \quad (2.30)$$

e o parâmetro h_i pode ser dado por

$$h_i = -(\varepsilon_o \Delta x_i + \kappa_x a_i), \quad (2.31)$$

onde, por definição,

$$a_i = x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i. \quad (2.32)$$

2.2.3 Teorema de Green

Longe de qualquer pretensão, o teorema de Green será apresentado de forma prática, visando a sua aplicação imediata ao cálculo dos esforços resistentes da seção transversal.

O teorema de Green estabelece que: Sejam $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ funções de classe C_1 (funções contínuas com derivadas de primeira ordem contínuas). Seja S uma curva fechada simples (suave por trechos) no plano xy e A a área delimitada por esta curva. Dentro destas condições pode-se mostrar que:

$$\iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_S (Q dy - P dx). \quad (2.33)$$

O símbolo \oint denota a integração de linha no contorno S (com esta notação no sentido anti-horário).

Desta forma pode-se transformar a integral de superfície (em A) na integral de linha ao longo do perímetro S da seção. A equação (2.33) pode também, quando conveniente, ser colocada na forma vetorial

$$\iint_A \nabla \cdot \mathbf{f} dA = \oint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{dn}, \quad (2.34)$$

onde

$$\mathbf{f}(x, y) = Q(x, y) \mathbf{i} + P(x, y) \mathbf{j}, \quad (2.35)$$

é uma função vetorial e, com a definição

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j}, \quad (2.36)$$

$\nabla \cdot \mathbf{f}$ é o seu divergente. O vetor normal

$$\mathbf{dn} = dy \mathbf{i} - dx \mathbf{j} \quad (2.37)$$

aponta “para fora da seção” (caminhando no sentido anti-horário pelo perímetro da área A , a parte externa à seção fica à direita). Utilizou-se, de forma convencional, a notação \mathbf{i} e \mathbf{j} para os versores dos eixos cartesianos x e y , respectivamente. Pode-se perceber que \mathbf{dn} é um vetor normal considerando que o seu produto escalar pelo vetor tangente $\mathbf{ds} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j}$ é nulo ($\mathbf{dn} \cdot \mathbf{ds} = 0$, portanto \mathbf{dn} e \mathbf{ds} são coplanares e perpendiculares) e que para dx e dy positivos (percurso anti-horário) o vetor normal aponta para $x > 0$ e $y < 0$ (4º quadrante), ou seja, “para fora da seção”.

2.2.4 Esforço normal resistente

Para o cálculo do esforço normal resistente da seção necessita-se da integral

$$N_c = \iint_{A_c} \sigma(\varepsilon) dx dy. \quad (2.38)$$

O teorema de Green, no formato apresentado, estabelece que a integral de superfície das derivadas das funções podem ser transformadas em integrais de linha. Uma maneira de utilizar o teorema de Green é definindo-se o potencial do diagrama tensão-deformação como⁴

$$I_1(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \sigma(\zeta) d\zeta. \quad (2.39)$$

Desta forma pode-se aplicar o teorema de Green com as seguintes funções $P = 0$ e $Q = I_1(\varepsilon)$. Pela regra da cadeia, e já que o potencial é função da deformação ε , tem-se que, com o auxílio de (2.15),

$$\frac{\partial I_1}{\partial x} = \frac{dI_1}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \sigma(\varepsilon) \kappa_y. \quad (2.40)$$

⁴Utilizou-se a variável auxiliar ζ para não haver a repetição (matematicamente incorreta) da deformação ε na integral.

A aplicação do teorema leva, imediatamente, à integral desejada

$$\iint_{A_c} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_S Q dy \Rightarrow \iint_{A_c} \sigma(\varepsilon) \kappa_y dx dy = \oint_S I_1(\varepsilon) dy. \quad (2.41)$$

Como procura-se o esforço normal resistente para uma curvatura κ_y constante, pode-se retirá-la da integral e obtem-se

$$\kappa_y N_c = \oint_S I_1(\varepsilon) dy. \quad (2.42)$$

A integral de linha pode ser substituída, sem aproximações, por um somatório de integrais simples ao longo de cada aresta da seção transversal

$$\kappa_y N_c = \sum_{i=1}^N \int_{y_i}^{y_{i+1}} I_1(\varepsilon) dy. \quad (2.43)$$

Esta última integral ainda não está em um formato operacional uma vez que o potencial é função da deformação ε e está se integrando na ordenada y . Utilizando a equação (2.28) pode-se fazer uma mudança de variáveis, transformando a integral em y em uma integral em ε . Desta forma

$$\kappa_y N_c = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta y_i}{\Delta \varepsilon_i} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} I_1(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (2.44)$$

Aqui surge uma primeira vantagem na formulação escolhida: a integral que apareceu é função exclusiva do diagrama tensão-deformação. Pode-se efetuá-la analiticamente sem nenhuma dificuldade.

Como o diagrama tensão-deformação pode ser definido por trechos, em geral, é conveniente definir a nova integral

$$I_2(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} I_1(\zeta) d\zeta. \quad (2.45)$$

Para brevidade de notação ainda podem ser definidos os parâmetros

$$I_{2i} = I_2(\varepsilon_i) = \int_0^{\varepsilon_i} I_1(\zeta) d\zeta \quad (2.46)$$

$$\Delta I_{2i} = I_2(\varepsilon_{i+1}) - I_2(\varepsilon_i) = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} I_1(\zeta) d\zeta. \quad (2.47)$$

Assim, finalmente,

$$N_c = \frac{1}{\kappa_y} \sum_{i=1}^N \Delta y_i \frac{\Delta I_{2i}}{\Delta \varepsilon_i}. \quad (2.48)$$

Esta expressão apresenta o inconveniente de ser indeterminada quando $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$, ou seja, $\Delta \varepsilon_i = 0$.

Neste caso percebe-se que o limite

$$\lim_{\Delta\varepsilon_i \rightarrow 0} \frac{\Delta I_{2i}}{\Delta\varepsilon_i} \quad (2.49)$$

é, por definição, a derivada da função $I_2(\varepsilon)$ que, por construção, é facilmente calculada

$$\lim_{\Delta\varepsilon_i \rightarrow 0} \frac{\Delta I_{2i}}{\Delta\varepsilon_i} = \left. \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon_i} = I_1(\varepsilon_i) = I_{1i}. \quad (2.50)$$

Pode-se resumir, portanto, o cálculo de N_c com a equação

$$N_c = \frac{1}{\kappa_y} \sum_{i=1}^N \Delta y_i f_{1i}, \quad (2.51)$$

onde, por definição,

$$f_{1i} = \begin{cases} I_{1i} & \Delta\varepsilon_i = 0 \\ \frac{\Delta I_{2i}}{\Delta\varepsilon_i} & \Delta\varepsilon_i \neq 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

Observação: Lados horizontais da poligonal ($\Delta y_i = 0$) não contribuem para o esforço normal resistente, qualquer que seja a distribuição de deformações na seção transversal.

A equação (2.51), obviamente, só pode ser utilizada quando $\kappa_y \neq 0$. Quando $\kappa_y = 0$ pode-se repetir o processo de aplicação do teorema de Green com as funções

$$P = I_1 \text{ e } Q = 0. \quad (2.53)$$

Depois de desenvolvimento análogo

$$N_c = \frac{1}{\kappa_x} \sum_{i=1}^N \Delta x_i f_{1i}. \quad (2.54)$$

Para esta nova expressão os lados verticais ($\Delta x_i = 0$) não contribuem para o esforço normal resistente. A equação (2.54), obviamente, só pode ser utilizada quando $\kappa_x \neq 0$.

Quando ambas as curvaturas não forem nulas o esforço normal resistente pode ser calculado, indistintamente, pela equação (2.51) ou (2.54). Mais adiante é estudado o caso de ambas as curvaturas nulas.

2.2.5 Momento resistente na direção x

Para o cálculo de M_{cx} pode-se utilizar o teorema de Green com as funções $P = 0$ e $Q = I_1 y$. A derivada

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (I_1 y) = y \frac{\partial I_1}{\partial x} = y \frac{dI_1}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \sigma(\varepsilon) y \kappa_y \quad (2.55)$$

utilizada na equação (2.33) fornece

$$\iint_{A_c} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_S Q dy \Rightarrow \kappa_y \iint_A \sigma(\varepsilon) y dx dy = \oint_S I_1 y dy. \quad (2.56)$$

Pela definição de M_{cx} obtem-se

$$M_{cx} = -\frac{1}{\kappa_y} \oint_S I_1 y dy. \quad (2.57)$$

Fazendo a mudança de variáveis (passando a integrar na deformação ε) e transformando a integral de linha numa somatória de integrais ao longo das arestas da seção transversal obtem-se

$$M_{cx} = -\frac{1}{\kappa_y} \sum_{i=1}^N \frac{\Delta y_i}{\Delta \varepsilon_i^2} \left(g_i \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} I_1 d\varepsilon + \Delta y_i \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} I_1 \varepsilon d\varepsilon \right). \quad (2.58)$$

Definindo-se

$$K_1(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \zeta I_1(\zeta) d\zeta \quad (2.59)$$

e, para brevidade de notação,

$$K_{1i} = K_1(\varepsilon_i) = \int_0^{\varepsilon_i} \zeta I_1(\zeta) d\zeta \quad (2.60)$$

$$\Delta K_{1i} = K_1(\varepsilon_{i+1}) - K_1(\varepsilon_i) = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} \zeta I_1(\zeta) d\zeta, \quad (2.61)$$

o cálculo de M_{cx} fica

$$M_{cx} = -\frac{1}{\kappa_y} \sum_{i=1}^N \Delta y_i \frac{g_i \Delta I_{2i} + \Delta y_i \Delta K_{1i}}{\Delta \varepsilon_i^2}. \quad (2.62)$$

A equação (2.62) apresenta a indeterminação $0/0$ quando $\Delta \varepsilon_i = 0$. Neste caso tem-se o numerador ($\Delta I_{2i} = \Delta K_{1i} = 0$) e denominador ($\Delta \varepsilon_i = 0$) nulos. Para estes casos pode-se recorrer à regra de L'Hôpital que estabelece que quando

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0, \quad (2.63)$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\partial f / \partial x}{\partial g / \partial x}. \quad (2.64)$$

As derivadas procuradas são

$$\frac{\partial \Delta I_{2i}}{\partial \varepsilon_i} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_i} [I_2(\varepsilon_{i+1}) - I_2(\varepsilon_i)] = -\frac{\partial I_{2i}}{\partial \varepsilon_i} = -I_{1i} = -I_1(\varepsilon_i) \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial \varepsilon_i} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_i} (y_i \varepsilon_{i+1} - y_{i+1} \varepsilon_i) = -y_{i+1} \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial \Delta K_{1i}}{\partial \varepsilon_i} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_i} [K_1(\varepsilon_{i+1}) - K_1(\varepsilon_i)] = -\frac{\partial K_{1i}}{\partial \varepsilon_i} = -I_{1i} \varepsilon_i \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial \Delta \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_i} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_i} (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i) = -\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_i} = -1. \quad (2.68)$$

Aplicando a regra de L'Hôpital com as derivadas anteriores na equação 2.62 (após algumas simplificações)

$$\lim_{\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_{i+1}} \left(\Delta y_i \frac{g_i \Delta I_{2i} + \Delta y_i \Delta K_{1i}}{\Delta \varepsilon_i^2} \right) = \Delta y_i \lim_{\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_{i+1}} \left(\frac{y_{i+1} \Delta I_{2i} + y_i I_{1i} \Delta \varepsilon_i}{2 \Delta \varepsilon_i} \right). \quad (2.69)$$

A equação (2.69) continua fornecendo indeterminação do tipo 0/0 quando $\Delta \varepsilon_i = 0$. Aplicando novamente a regra de L'Hôpital

$$\Delta y_i \lim_{\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_{i+1}} \left(\frac{y_{i+1} \Delta I_{2i} + y_i I_{1i} \Delta \varepsilon_i}{2 \Delta \varepsilon_i} \right) = \Delta y_i I_{1i} \frac{(y_i + y_{i+1})}{2}. \quad (2.70)$$

Pode-se resumir o cálculo de M_{cx} com a equação

$$M_{cx} = -\frac{1}{\kappa_y} \sum_{i=1}^N \Delta y_i f_{2i} \quad (2.71)$$

onde, por definição,

$$f_{2i} = \begin{cases} I_{1i} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} & \Delta \varepsilon_i = 0 \\ \frac{g_i \Delta I_{2i} + \Delta y_i \Delta K_{1i}}{\Delta \varepsilon_i^2} & \Delta \varepsilon_i \neq 0 \end{cases} \quad (2.72)$$

Quando a curvatura κ_y for nula pode-se, como já realizado para o esforço normal resistente, inverter a definição das funções P e Q utilizadas para a aplicação do teorema de Green. Por exemplo, $P = I_1 y$ e $Q = 0$. A derivada principal é obtida com

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial I_1}{\partial y} y + I_1 = \frac{dI_1}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} y + I_1 = -\kappa_x \sigma(\varepsilon) y + I_1. \quad (2.73)$$

Aplicando esta derivada ao teorema de Green

$$\iint_{A_c} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \oint_S P dx \Rightarrow -\kappa_x \iint_{A_c} \sigma(\varepsilon) y dx dy + \iint_{A_c} I_1 dx dy = - \oint_S I_1 y dx. \quad (2.74)$$

Surge o problema da integral de I_1 na superfície A . Esta integral também pode ser transformada em integral de linha com uma nova aplicação do teorema de Green com as funções $\overline{P} = I_2$ e $\overline{Q} = 0$. A derivada principal é obtida com

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial y} = \frac{\partial I_2}{\partial y} = \frac{dI_2}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = -\kappa_x I_1(\varepsilon).$$

Utilizando Green desta forma obtem-se

$$\iint_{A_c} \frac{\partial \overline{P}}{\partial y} dx dy = - \oint_S \overline{P} dx \Rightarrow -\kappa_x \iint_{A_c} I_1(\varepsilon) dx dy = - \oint_S I_2 dx. \quad (2.75)$$

Substituindo a equação (2.75) em (2.74)

$$\kappa_x M_{cx} = - \oint_S I_1 y dx - \frac{1}{\kappa_x} \oint_S I_2 dx. \quad (2.76)$$

De forma usual, transformando a integral de linha numa somatória de integrais ao longo das arestas e mudando a variável de integração

$$M_{cx} = -\frac{1}{\kappa_x} \sum_{i=1}^N \Delta x_i \left(f_{2i} + \frac{1}{\kappa_x} \frac{\Delta I_{3i}}{\Delta \varepsilon_i} \right). \quad (2.77)$$

definiu-se

$$I_3(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon I_2(\zeta) d\zeta \quad (2.78)$$

e, para brevidade de notação,

$$I_{3i} = I_3(\varepsilon_i) = \int_0^{\varepsilon_i} I_2(\zeta) d\zeta \quad (2.79)$$

$$\Delta I_{3i} = I_3(\varepsilon_{i+1}) - I_3(\varepsilon_i) = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} I_2(\zeta) d\zeta. \quad (2.80)$$

Levando em conta o limite da expressão quando $\Delta \varepsilon_i \rightarrow 0$ chega-se à equação final para o cálculo de M_{cx} (quando $\kappa_x \neq 0$):

$$M_{cx} = -\frac{1}{\kappa_x} \sum_{i=1}^N \Delta x_i f_{3i} \quad (2.81)$$

onde, por definição,

$$f_{3i} = \begin{cases} f_{2i} + \frac{I_{2i}}{\kappa_x} & \Delta\varepsilon_i = 0 \\ f_{2i} + \frac{1}{\kappa_x} \frac{\Delta I_{3i}}{\Delta\varepsilon_i} & \Delta\varepsilon_i \neq 0 \end{cases} \quad (2.82)$$

2.2.6 Momento resistente na direção y

O procedimento para cálculo de M_{cy} é completamente análogo ao desenvolvido para o cálculo de M_{cx} . Serão mostrados apenas os passos principais. Definindo as funções $P = I_1 x$ e $Q = 0$ e aplicando o teorema de Green

$$M_{cy} = \frac{1}{\kappa_x} \sum_{i=1}^N \Delta x_i \frac{h_i \Delta I_{2i} + \Delta x_i \Delta K_{1i}}{\Delta\varepsilon_i^2}. \quad (2.83)$$

Aplicando L'Hôpital (duas vezes, para $\Delta\varepsilon_i = 0$)

$$M_{cy} = \frac{1}{\kappa_x} \sum_{i=1}^N \Delta x_i I_{1i} \frac{x_i + x_{i+1}}{2}. \quad (2.84)$$

Pode-se resumir o cálculo de M_{cy} com a equação

$$M_{cy} = \frac{1}{\kappa_x} \sum_{i=1}^N \Delta x_i f_{4i} \quad (2.85)$$

onde, por definição,

$$f_{4i} = \begin{cases} I_{1i} \frac{x_i + x_{i+1}}{2} & \Delta\varepsilon_i = 0 \\ \frac{h_i \Delta I_{2i} + \Delta x_i \Delta K_{1i}}{\Delta\varepsilon_i^2} & \Delta\varepsilon_i \neq 0 \end{cases} \quad (2.86)$$

Para a curvatura κ_x nula inverte-se a definição das funções da seguinte maneira: $P = 0$ e $Q = I_1 x$. Tem-se, novamente, que aplicar o teorema de Green com as funções $\bar{P} = 0$ e $\bar{Q} = I_2$. Depois de mudar a variável de integração, transformar a integral de linha em somatória de integrais nas arestas e aplicar L'Hôpital (duas vezes), chega-se em

$$M_{cy} = \frac{1}{\kappa_y} \sum_{i=1}^N \Delta y_i f_{5i} \quad (2.87)$$

onde, por definição,

$$f_{5i} = \begin{cases} f_{4i} - \frac{I_{2i}}{\kappa_y} & \Delta \varepsilon_i = 0 \\ f_{4i} - \frac{1}{\kappa_y} \frac{\Delta I_{3i}}{\Delta \varepsilon_i} & \Delta \varepsilon_i \neq 0 \end{cases} . \quad (2.88)$$

2.2.7 Compressão ou tração uniforme

Quando ambas as curvaturas forem nulas ($\kappa_x = \kappa_y = 0$) tem-se o caso de compressão uniforme ($\varepsilon > 0$) ou tração uniforme ($\varepsilon < 0$). Neste caso as expressões desenvolvidas até agora não podem ser utilizadas por sempre pressuporem pelo menos uma das curvaturas não nulas.

A seção está sujeita a uma deformação ε_o constante. Neste caso a tensão, em qualquer ponto da seção, é constante e igual a $\sigma(\varepsilon_o)$. As integrais dos esforços resistentes ficam reduzidas a

$$N_c = \sigma(\varepsilon_o) \iint_{A_c} dx dy = \sigma(\varepsilon_o) A_c \quad (2.89)$$

$$M_{cx} = -\sigma(\varepsilon_o) \iint_{A_c} y dx dy = \sigma(\varepsilon_o) S_x \quad (2.90)$$

$$M_{cy} = \sigma(\varepsilon_o) \iint_{A_c} x dx dy = \sigma(\varepsilon_o) S_y \quad (2.91)$$

onde A representa a área da seção de concreto e S_x e S_y representam, respectivamente, os momentos estáticos de área em relação aos eixos x e y .

Utilizando o teorema de Green com $P = 0$ e $Q = x$ chega-se facilmente em

$$A_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) . \quad (2.92)$$

Definindo

$$a_i = x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i, \quad (2.93)$$

a expressão da área fica

$$A_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i. \quad (2.94)$$

Usando $P = 0$ e $Q = x^2/2$ e o Teorema de Green

$$S_y = \iint_{A_c} x dx dy = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^N a_i (x_i + x_{i+1}) . \quad (2.95)$$

E com $P = y^2/2$ e $Q = 0$

$$S_x = - \iint_{A_c} y \, dx \, dy = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^N a_i (y_i + y_{i+1}). \quad (2.96)$$

Ainda podem ser calculados os momentos de inércia da seção poligonal (estas inércias são úteis, por exemplo, no cálculo no regime elástico de seções de concreto protendido ou, ainda, para o cálculo das derivadas dos esforços resistentes quando em compressão ou tração uniforme).

Com $P = 0$ e $Q = x^3/3$

$$I_{yy} = \iint_A x^2 \, dx \, dy = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^N a_i (x_i^2 + x_i x_{i+1} + x_{i+1}^2). \quad (2.97)$$

Com $P = 0$ e $Q = x^2 y/2$

$$I_{xy} = \iint_{A_c} xy \, dx \, dy = \frac{1}{24} \sum_{i=1}^N a_i [x_i y_{i+1} + 2(x_i y_i + x_{i+1} y_{i+1}) + x_{i+1} y_i]. \quad (2.98)$$

Com $P = y^3/3$ e $Q = 0$

$$I_{xx} = \iint_{A_c} y^2 \, dx \, dy = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^N a_i (y_i^2 + y_i y_{i+1} + y_{i+1}^2). \quad (2.99)$$

O cálculo da área da seção permite a determinação do sentido de circuição da poligonal. Quando a área é positiva tem-se uma circuição anti-horária. Áreas negativas indicam circuição horária. Desta forma pode-se permitir que o usuário defina a seção com qualquer sentido de circuição. Se a área for negativa ($A_c < 0$), todas as quantidades calculadas (A_c , S_x , S_y , I_{xx} , I_{xy} , I_{yy} , N_c , M_{cx} e M_{cy}) estarão com sinais trocados. Se a área for positiva ($A_c > 0$), todos os sinais estarão corretos.

2.2.8 Resumo

As expressões desenvolvidas são de aplicação imediata em um programa de computador. Sintetiza-se o cálculo dos esforços resistentes nas seguintes equações:

Pelo menos uma curvatura não nula

Esforço normal resistente

$$N_c = \frac{1}{\kappa_y} \sum_{i=1}^N \Delta y_i f_{1i} \text{ (quando } \kappa_y \neq 0) \quad (2.100)$$

$$N_c = \frac{1}{\kappa_x} \sum_{i=1}^N \Delta x_i f_{1i} \text{ (quando } \kappa_x \neq 0). \quad (2.101)$$

Momento fletor resistente na direção x

$$M_{cx} = -\frac{1}{\kappa_y} \sum_{i=1}^N \Delta y_i f_{2i} \text{ (quando } \kappa_y \neq 0) \quad (2.102)$$

$$M_{cx} = -\frac{1}{\kappa_x} \sum_{i=1}^N \Delta x_i f_{3i} \text{ (quando } \kappa_x \neq 0). \quad (2.103)$$

Momento fletor resistente na direção y

$$M_{cy} = \frac{1}{\kappa_y} \sum_{i=1}^N \Delta y_i f_{5i} \text{ (quando } \kappa_y \neq 0) \quad (2.104)$$

$$M_{cy} = \frac{1}{\kappa_x} \sum_{i=1}^N \Delta x_i f_{4i} \text{ (quando } \kappa_x \neq 0). \quad (2.105)$$

As duas curvaturas nulas

$$N_c = \sigma(\varepsilon_o) A = \sigma(\varepsilon_o) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i \quad (2.106)$$

$$M_{cx} = \sigma(\varepsilon_o) S_x = \sigma(\varepsilon_o) \frac{1}{6} \sum_{i=1}^N a_i (y_i + y_{i+1}) \quad (2.107)$$

$$M_{cy} = \sigma(\varepsilon_o) S_y = \sigma(\varepsilon_o) \frac{1}{6} \sum_{i=1}^N a_i (x_i + x_{i+1}) \quad (2.108)$$

Definições utilizadas

Sendo (x_i, y_i) as coordenadas do vértice i da seção

$$\varepsilon_i = \varepsilon_o + \kappa_y x_i - \kappa_x y_i \quad (2.109)$$

$$I_1(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \sigma(\zeta) d\zeta \text{ e } I_{1i} = I_1(\varepsilon_i) \quad (2.110)$$

$$I_2(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon I_1(\zeta) d\zeta \text{ e } I_{2i} = I_2(\varepsilon_i) \text{ e } \Delta I_{2i} = I_2(\varepsilon_{i+1}) - I_2(\varepsilon_i) \quad (2.111)$$

$$I_3(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon I_2(\zeta) d\zeta \text{ e } I_{3i} = I_3(\varepsilon_i) \text{ e } \Delta I_{3i} = I_3(\varepsilon_{i+1}) - I_3(\varepsilon_i) \quad (2.112)$$

$$K_1(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \zeta I_1(\zeta) d\zeta \text{ e } K_{1i} = K_1(\varepsilon_i) \text{ e } \Delta K_{1i} = K_1(\varepsilon_{i+1}) - K_1(\varepsilon_i) \quad (2.113)$$

$$h_i = x_i \varepsilon_{i+1} - x_{i+1} \varepsilon_i \quad (2.114)$$

$$g_i = y_i \varepsilon_{i+1} - y_{i+1} \varepsilon_i \quad (2.115)$$

$$a_i = x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i \quad (2.116)$$

$$f_{1i} = \begin{cases} I_{1i} & \Delta \varepsilon_i = 0 \\ \frac{\Delta I_{2i}}{\Delta \varepsilon_i} & \Delta \varepsilon_i \neq 0 \end{cases} \quad (2.117)$$

$$f_{2i} = \begin{cases} I_{1i} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} & \Delta \varepsilon_i = 0 \\ \frac{g_i \Delta I_{2i} + \Delta y_i \Delta K_{1i}}{\Delta \varepsilon_i^2} & \Delta \varepsilon_i \neq 0 \end{cases} \quad (2.118)$$

$$f_{3i} = \begin{cases} f_{2i} + \frac{I_{2i}}{\kappa_x} & \Delta \varepsilon_i = 0 \\ f_{2i} + \frac{1}{\kappa_x} \frac{\Delta I_{3i}}{\Delta \varepsilon_i} & \Delta \varepsilon_i \neq 0 \end{cases} \quad (2.119)$$

$$f_{4i} = \begin{cases} I_{1i} \frac{x_i + x_{i+1}}{2} & \Delta \varepsilon_i = 0 \\ \frac{h_i \Delta I_{2i} + \Delta x_i \Delta K_{1i}}{\Delta \varepsilon_i^2} & \Delta \varepsilon_i \neq 0 \end{cases} \quad (2.120)$$

$$f_{5i} = \begin{cases} f_{4i} - \frac{I_{2i}}{\kappa_y} & \Delta \varepsilon_i = 0 \\ f_{4i} - \frac{1}{\kappa_y} \frac{\Delta I_{3i}}{\Delta \varepsilon_i} & \Delta \varepsilon_i \neq 0 \end{cases} . \quad (2.121)$$

2.2.9 Aplicação ao diagrama parábola-retângulo

Será utilizado o diagrama tensão-deformação parábola-retângulo como exemplo de aplicação das integrais definidas anteriormente.

O diagrama pode ser definido (Figura 2-7) da seguinte maneira (compressão positiva e encurta-

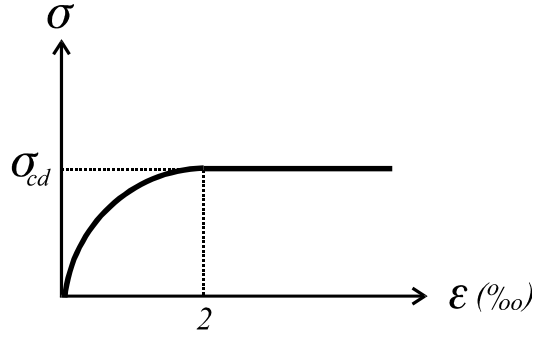


Figura 2-7: Diagrama parábola-retângulo

mentos em por mil)⁵:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \frac{\varepsilon(4-\varepsilon)}{4} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} & \varepsilon \geq 2 \end{cases} \quad (2.122)$$

A função $I_1(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \sigma(\zeta) d\zeta$ é obtida separando-se a integração em dois casos.

- $0 \leq \varepsilon \leq 2$

Neste caso integra-se diretamente a função $\sigma(\varepsilon)$

$$I_1(\varepsilon) = \sigma_{cd} \frac{\varepsilon^2(6-\varepsilon)}{12} \quad (2.123)$$

- $\varepsilon \geq 2$

Neste caso a integração deve ser dividida da seguinte maneira:

$$I_1(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \sigma(\zeta) d\zeta = \int_0^2 \sigma(\zeta) d\zeta + \int_2^\varepsilon \sigma(\zeta) d\zeta = I_1(2) + \sigma_{cd} \int_2^\varepsilon d\zeta \quad (2.124)$$

Efetuada a integração

$$I_1(\varepsilon) = \sigma_{cd} \frac{3\varepsilon - 2}{3} \quad (2.125)$$

⁵Não devem ser confundidos os “pólos de ruína” (por exemplo o 3,5 por mil no concreto) com o comportamento “mecânico” do material. A consideração do ELU será feita posteriormente.

Resumindo obtem-se

$$I_1(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \sigma(\zeta) d\zeta = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \frac{\varepsilon^2(6-\varepsilon)}{12} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} \frac{3\varepsilon-2}{3} & \varepsilon \geq 2 \end{cases} \quad (2.126)$$

Analogamente são obtidas as outras integrais.

$$I_2(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon I_1(\zeta) d\zeta = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \frac{\varepsilon^3(8-\varepsilon)}{48} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} \frac{3\varepsilon^2-4\varepsilon+2}{6} & \varepsilon \geq 2 \end{cases} \quad (2.127)$$

$$I_3(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon I_2(\zeta) d\zeta = \begin{cases} 0; & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \frac{\varepsilon^4(10-\varepsilon)}{240} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} \frac{5\varepsilon(\varepsilon^2-2\varepsilon+2)-4}{30} & \varepsilon \geq 2 \end{cases} \quad (2.128)$$

$$K_1(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \zeta I_1(\zeta) d\zeta = \begin{cases} 0; & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \frac{\varepsilon^4(15-2\varepsilon)}{120} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} \frac{5\varepsilon^2(\varepsilon-1)+2}{15} & \varepsilon \geq 2 \end{cases} \quad (2.129)$$

2.2.10 Exemplos de aplicação

A seguir são listados os resultados numéricos obtidos com a metodologia desenvolvida. Foi utilizada uma tensão

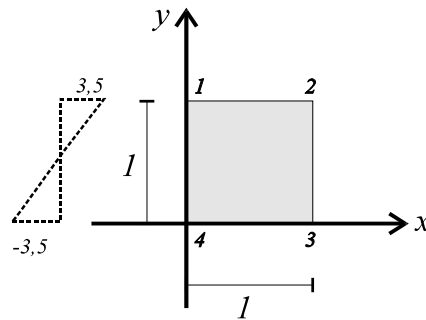
$$\sigma_{cd} = 0,85 \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (2.130)$$

unitária, o que corresponde a uma resistência característica do concreto

$$f_{ck} = \frac{\gamma_c}{0,85} = \frac{1,4}{0,85} \simeq 1,6471 \quad (2.131)$$

(unidades de tensão). As dimensões das seções especificadas nos exemplos têm unidades coerentes com as unidades da tensão (se f_{ck} for considerado em MPa as dimensões, por coerência, são dadas em metros). Foi feito, em outras palavras, um cálculo com adimensionais.

Exemplo 2-1 Flexão Normal Composta (FNC) no Estado Limite Último (ELU) para um quadrado.



Distribuição de deformações:

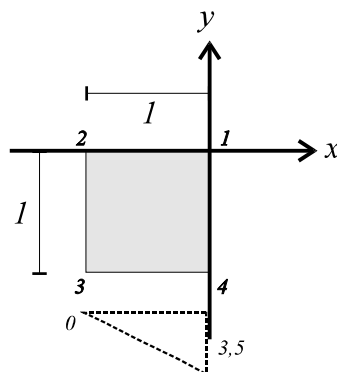
ε_o	κ_x	κ_y
-3,5000	-7,0000	0

Esforços resistentes:

N_c	M_{cx}	M_{cy}
0,40476	-0,32058	0,202380

Com a notação de FNC tem-se a distribuição de deformações definida por $\varepsilon_c = 3,5$ e $\theta = 7$ (flexão em y). ε_c é o maior encurtamento da seção transversal e $\theta = 1000 h/r$ é a curvatura majorada adimensional.

Exemplo 2-2 FNC no ELU para um quadrado.



Distribuição de deformações:

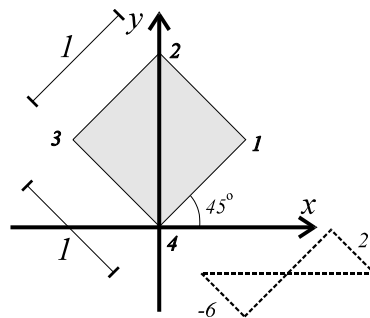
ε_o	κ_x	κ_y
3,5000	0	3,5000

Esforços resistentes:

N_c	M_{cx}	M_{cy}
0,80952	0,40476	-0,33674

Com a notação de FNC tem-se a distribuição de deformações definida por $\varepsilon_c = 3,5$ e $\theta = 3,5$ (flexão em x).

Exemplo 2-3 FNC fora do ELU para um losango.



Distribuição de deformações:

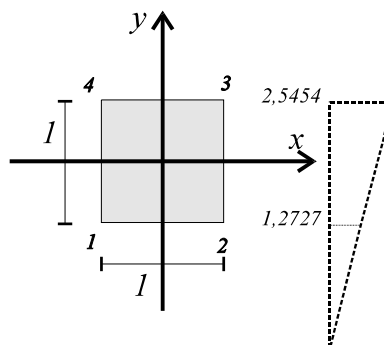
ε_o	κ_x	κ_y
-6,0000	-5,6569	5,6569

Esforços resistentes:

N_c	M_{cx}	M_{cy}
0,16667	-0,16573	0,047878

Com a notação de FNC tem-se a distribuição de deformações definida por $\varepsilon_c = 2,0$ e $\theta = 8$ (flexão à 45°).

Exemplo 2-4 FNC no ELU para um quadrado.



Distribuição de deformações:

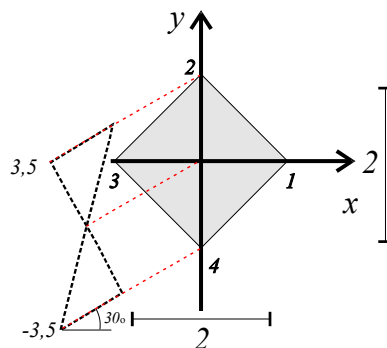
ε_o	κ_x	κ_y
1,9091	-1,2727	0

Esforços resistentes:

N_c	M_{cx}	M_{cy}
0,9748	-0,0089974	0

Com a notação de FNC tem-se a distribuição de deformações definida por $\varepsilon_c = 2,5454$ e $\theta = 1,2727$ (flexão em y).

Exemplo 2-5 Flexão Oblíqua Composta (FOC) no ELU para um quadrado.



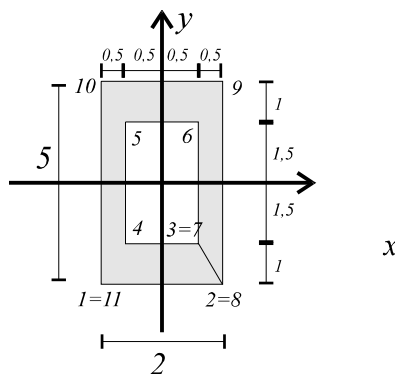
Distribuição de deformações:

ε_o	κ_x	κ_y
0	-3,5	-2,0207

Esforços resistentes:

N_c	M_{cx}	M_{cy}
0,7585	-0,2668	-0,1775

Exemplo 2-6 Flexão Oblíqua Composta (FOC) no ELU para um retângulo vazado.



Distribuição de deformações:

Item	ε_o	κ_x	κ_y
a)	-4,4444	1,9398	0,70603
b)	-3,7501	2,1823	0,79430
c)	-2,3333	2,0368	0,74130
d)	-0,8750	1,5276	0,55600

Esforços resistentes:

Item	N_c	M_{cx}	M_{cy}
a)	0,1438	0,3381	0,08537
b)	0,9691	2,1069	0,2304
c)	1,9345	3,8203	0,2249
d)	2,4775	4,5080	0,2150

2.2.11 Eficiência na obtenção dos esforços resistentes no concreto

A integração dos esforços resistentes do concreto é um assunto bastante explorado. São diversos os métodos disponíveis, entre eles:

- Processo da malha: divide-se a seção transversal em pequenos elementos e considera-se, nestes elementos, que a tensão e deformação sejam constantes. Discretiza-se, desta forma, a seção transversal e transformam-se as integrais dos esforços em somatórios simples.
- Integração no perímetro: utilização “parcial” do Teorema de Green. Em geral executa-se uma rotação da seção transversal para que a linha neutra fique paralela a um dos eixos coordenados (em geral o horizontal). Procede-se a integração das tensões no trapézio definido pelo lado da poligonal e, posteriormente, efetua-se nova rotação para a obtenção dos esforços no sistema de coordenadas original. A integração efetuada pode ser analítica ou numérica (em geral utilizando a integração de Gauss).

As vantagens, desvantagens e restrições destes métodos são sobejamente conhecidas. Nos limitaremos a uma comparação de eficiência em termos do número de operações efetuadas pelos métodos na obtenção dos esforços resistentes de uma seção quadrada unitária (sem armadura). Foram agrupadas, de forma usual, as operações de adição e subtração (op. ad.) e as de multiplicação e divisão (op. mul.)⁶.

⁶As operações aditivas (adição e subtração) gastam o mesmo tempo computacional. As operações de multiplicação são, na verdade, mais rápidas que as de divisão.

Mesmo com o avanço dos computadores, o tempo dispendido por um processo qualquer é significativo com relação ao tempo gasto pelo programa todo. Programas de elementos finitos, não raras vezes, executam milhares e, até, milhões de integrações de tensões na seção transversal. Se este sub-processo for eficiente poderá melhorar, sensivelmente, o desempenho do programa como um todo.

Exemplo	ε_o	κ_x	κ_y	φ	ε_c	θ	ELU
1 (FOC)	0,0000	-3,5000	-3,5000	315°	3,5000	7,000	Sim
2 (FOC)	1,0000	-1,7002	-0,2998	10°	2,0000	2,000	Não
3 (FOC)	1,9444	+0,5702	-0,2076	160°	2,3333	0,7778	Sim
4 (FNC)	-3,7500	-12,500	0,0000	0°	2,5000	12,500	Sim

Os resultados obtidos estão esquematizados nas tabelas seguintes:

Exemplo 1	Malha	Green parcial	Green
op. ad. (+-)	751	644	69
op. mul. (* /)	741	873	84
N_R	0,33297	0,33674	0,33674
$M_{xR} (\times 10^{-2})$	-7,2413	-7,2838	-7,2838
$M_{yR} (\times 10^{-2})$	-7,2413	-7,2838	-7,2838

Exemplo 2	Malha	Green parcial	Green
op. ad. (+-)	806	844	77
op. mul. (* /)	906	1176	120
N_R	0,68853	0,68791	0,68790
$M_{xR} (\times 10^{-2})$	-7,0134	-7,0842	-7,0842
$M_{yR} (\times 10^{-2})$	-1,2366	-1,2491	-1,2491

Exemplo 3	Malha	Green parcial	Green
op. ad. (+-)	766	930	85
op. mul. (* /)	786	1398	135
N_R	0,99373	0,99369	0,99369
$M_{xR} (\times 10^{-3})$	2,0988	2,1324	2,1325
$M_{yR} (\times 10^{-4})$	-8,8495	-8,9636	-8,9639

Exemplo 4	Malha	Green parcial	Green
op. ad. (+-)	726	604	54
op. mul. (* /)	666	748	63
N_R	0,15234	0,14667	0,14667
$M_{xR} (\times 10^{-2})$	-6,3281	-6,1867	-6,1867
M_{yR}	0	0	0

Observações:

- Malha: Seção quadrada subdividida em 100 elementos (10×10). Foram computadas as operações para a determinação das coordenadas de cada elemento, ou seja, considerou-se que as coordenadas de cada elemento, a cada cálculo, são re-calculadas (e não armazenadas). A malha 10×10 foi escolhida quase que por eliminação: a malha 5×5 fornece resultados muito pobres; a malha

100×100 exige um número de operações muito grande tornando a comparação dos processos quase “injusta”.

- Green Parcial: Integração analítica, utilizando o Teorema de Green, girando-se a seção transversal para que a linha neutra seja horizontal (a metodologia utilizada foi aquela do mestrado do autor [47]). A integração é analítica (para um diagrama tensão-deformação formado por um ou mais polinômios) e há a subdivisão do polígono comprimido de tal forma que, em cada sub-polígono, somente um polinômio do diagrama tensão-deformação tenha validade.
- Green: Metodologia desenvolvida neste trabalho.
- op. ad.: Operações aditivas (adição e subtração).
- op. mul.: Operações multiplicativas (multiplicação e divisão).
- Operações do tipo a^n (com $n > 0$ inteiro) foram computadas como n multiplicações.

As conclusões principais sobre a metodologia desenvolvida são:

1. O número de operações necessárias para a obtenção dos esforços resistentes é, em média (observando os exemplos apresentados), cerca de 10% das necessárias para os dois outros métodos comparados. Como o tempo de processamento é proporcional ao número de operações, pode-se afirmar que a metodologia apresentada obtém os esforços em um tempo significativamente menor do que os outros dois.
2. A metodologia apresentada é exata. Pode ser estendida a qualquer material elástico com um diagrama tensão-deformação linear ou não, bastando, para isso, que as funções integrais do diagrama tensão-deformação ($I_1(\varepsilon)$, $I_2(\varepsilon)$...) sejam calculadas adequadamente.

2.3 Derivadas dos esforços resistentes do concreto

Para a utilização do método de Newton-Raphson na verificação de seções de concreto armado necessita-se, como será visto, das derivadas dos esforços resistentes da seção. Estas derivadas, normalmente, são obtidas através do processo das diferenças finitas. Mostra-se, no entanto, que tais derivadas podem ser obtidas através de método “exato”.

Uma característica importante de métodos numéricos é a sua taxa de convergência. Pode-se mostrar que o método de Newton-Raphson tem taxa de convergência quadrática, ou seja, a medida

que as iterações prosseguem o erro cometido (diferença da estimativa atual com relação à solução do sistema) diminui com potência de 2, esquematicamente (admitindo $|x_i - x^*| < 1$):

$$|x_{i+1} - x^*| \approx |x_i - x^*|^2 \quad (2.132)$$

onde x_i é o valor da variável independente na iteração i e x^* é o valor exato da solução.

Pode-se mostrar também que, em alguns casos, a avaliação numérica das derivadas (por exemplo por diferenças finitas) pode fazer com que o método de Newton-Raphson perca esta característica e passe a ter uma taxa de convergência linear (“demorando” mais para encontrar a solução). Desta forma enfatiza-se o cálculo das derivadas através de método numérico “exato”.

Os esforços resistentes do concreto são dados por

$$N_c = \iint_{A_c} \sigma(\varepsilon) \, dx dy \quad (2.133)$$

$$M_{cx} = - \iint_{A_c} \sigma(\varepsilon) \, y \, dx dy \quad (2.134)$$

$$M_{cy} = \iint_{A_c} \sigma(\varepsilon) \, x \, dx dy. \quad (2.135)$$

A equação cinemática estabelece que

$$\varepsilon = \varepsilon_o + \kappa_y x - \kappa_x y. \quad (2.136)$$

Elegendo como variáveis independentes a deformação na origem do sistema de coordenadas xy que define a seção transversal (ε_o) e as curvaturas κ_x e κ_y , as derivadas dos esforços resistentes podem ser mais concisamente definidas através da matriz

$$\mathbf{J}_c = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_c}{\partial \varepsilon_o} & \frac{\partial N_c}{\partial \kappa_x} & \frac{\partial N_c}{\partial \kappa_y} \\ \frac{\partial M_{cx}}{\partial \varepsilon_o} & \frac{\partial M_{cx}}{\partial \kappa_x} & \frac{\partial M_{cx}}{\partial \kappa_y} \\ \frac{\partial M_{cy}}{\partial \varepsilon_o} & \frac{\partial M_{cy}}{\partial \kappa_x} & \frac{\partial M_{cy}}{\partial \kappa_y} \end{bmatrix}. \quad (2.137)$$

A matriz \mathbf{J}_c também é conhecida como matriz Jacobiana, ou, simplesmente, Jacobiano dos esforços resistentes do concreto.

Levando em conta as integrais que definem os esforços resistentes e a equação cinemática, podem

ser obtidas as derivadas procuradas sem maiores dificuldades. Por exemplo, para o esforço normal, tem-se

$$\frac{\partial N_c}{\partial \kappa_x} = \frac{\partial}{\partial \kappa_x} \iint_{A_c} \sigma(\varepsilon) \, dxdy = \iint_{A_c} \frac{\partial \sigma(\varepsilon)}{\partial \kappa_x} \, dxdy. \quad (2.138)$$

Como o diagrama tensão-deformação é função de ε e, pela equação cinemática, ε é uma função de ε_o , κ_x e κ_y tem-se que

$$\frac{\partial \sigma(\varepsilon)}{\partial \kappa_x} = \frac{d\sigma(\varepsilon)}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \kappa_x} = D(\varepsilon) (-y), \quad (2.139)$$

onde utilizou-se, por conveniência, a notação

$$D(\varepsilon) = \frac{d\sigma(\varepsilon)}{d\varepsilon}. \quad (2.140)$$

Desta forma a derivada procurada, como exemplo, pode ser dada por

$$\frac{\partial N_c}{\partial \kappa_x} = - \iint_{A_c} D(\varepsilon) \, y \, dxdy. \quad (2.141)$$

Procedendo analogamente para as outras derivadas

$$\mathbf{J}_c = \begin{bmatrix} \iint D(\varepsilon) \, dxdy & - \iint D(\varepsilon) \, y \, dxdy & \iint D(\varepsilon) \, x \, dxdy \\ - \iint D(\varepsilon) \, y \, dxdy & \iint D(\varepsilon) \, y^2 \, dxdy & - \iint D(\varepsilon) \, xy \, dxdy \\ \iint D(\varepsilon) \, x \, dxdy & - \iint D(\varepsilon) \, xy \, dxdy & \iint D(\varepsilon) \, x^2 \, dxdy \end{bmatrix}. \quad (2.142)$$

Algumas observações se fazem pertinentes neste ponto:

- O Jacobiano, como pode ser observado, é simétrico. Isto implica na igualdade das seguintes derivadas:

$$\frac{\partial M_{cx}}{\partial \varepsilon_o} = \frac{\partial N_c}{\partial \kappa_x} \quad (2.143)$$

$$\frac{\partial M_{cy}}{\partial \varepsilon_o} = \frac{\partial N_c}{\partial \kappa_y} \quad (2.144)$$

$$\frac{\partial M_{cy}}{\partial \kappa_x} = \frac{\partial M_{cx}}{\partial \kappa_y} \quad (2.145)$$

- Se o concreto fosse elástico linear, a derivada do diagrama tensão-deformação seria constante e igual ao módulo de elasticidade, ou seja, $D(\varepsilon) = E$. Por se tratar de um valor constante, E

poderia ser retirado da integral e o Jacobiano assumiria a forma

$$\mathbf{J}_c = E \begin{bmatrix} \iint dxdy & -\iint y dxdy & \iint x dxdy \\ -\iint y dxdy & \iint y^2 dxdy & -\iint xy dxdy \\ \iint x dxdy & -\iint xy dxdy & \iint x^2 dxdy \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (2.146)$$

$$\mathbf{J}_c = \begin{bmatrix} EA & ES_x & ES_y \\ ES_x & EI_{xx} & -EI_{xy} \\ ES_y & -EI_{xy} & EI_{yy} \end{bmatrix}. \quad (2.147)$$

Quando a origem do sistema de coordenadas da seção é o centro geométrico da área de concreto tem-se

$$\mathbf{J}_c = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EI_{xx} & -EI_{xy} \\ 0 & -EI_{xy} & EI_{yy} \end{bmatrix}. \quad (2.148)$$

Quando, além disso, um dos eixos cartesianos for um eixo principal de inércia da seção o Jacobiano terá a forma

$$\mathbf{J}_c = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EI_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & EI_{yy} \end{bmatrix}. \quad (2.149)$$

- Pode-se, portanto, considerar que os elementos do Jacobiano são as “rigidezes” generalizadas da seção de concreto (que é tratado, como se sabe, como material elástico não-linear). Para diagramas tensão-deformação monotonicamente crescentes (como é o caso, por exemplo, do diagrama parábola-retângulo) percebe-se, claramente, que EA , EI_{xx} e EI_{yy} nunca são negativos.

Para o cálculo das integrais pode-se, novamente, recorrer ao teorema de Green, transformando a integral na área da seção de concreto numa integral de linha no seu contorno. Lembrando que o

teorema de Green pode ser colocado sob a forma

$$\iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint (Q dy - P dx), \quad (2.150)$$

pode-se, por exemplo, obter a derivada

$$\frac{\partial N_c}{\partial \varepsilon_o} = \iint_{A_c} D(\varepsilon) dx dy \quad (2.151)$$

com o uso, por definição, das funções $P = 0$ e $Q = \sigma$. Obtendo a derivada de Q da seguinte maneira

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = D(\varepsilon) \kappa_y. \quad (2.152)$$

Utilizando esta derivada no teorema de Green obtem-se

$$\iint_{A_c} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint Q dy \Rightarrow \iint_{A_c} D(\varepsilon) \kappa_y dx dy = \oint \sigma dy. \quad (2.153)$$

A derivada procurada é, então,

$$\iint_{A_c} D(\varepsilon) \kappa_y dx dy = \oint \sigma dy \Rightarrow \kappa_y \frac{\partial N_c}{\partial \varepsilon_o} = \oint \sigma dy \Rightarrow \frac{\partial N_c}{\partial \varepsilon_o} = \frac{1}{\kappa_y} \oint \sigma dy. \quad (2.154)$$

Fazendo a transformação de variáveis para a integração na deformação e lembrando que se está supondo uma seção transversal poligonal (como no capítulo dos esforços resistentes do concreto), transforma-se a integral de linha em uma somatória de integrais ordinárias ao longo das arestas da seção transversal,

$$\oint \sigma dy = \sum_{i=1}^N \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} \sigma \frac{\Delta y_i}{\Delta \varepsilon_i} d\varepsilon = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta y_i}{\Delta \varepsilon_i} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}} \sigma d\varepsilon = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta y_i}{\Delta \varepsilon_i} \Delta I_{1i}, \quad (2.155)$$

onde utilizou-se a definição já feita de

$$I_1(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \sigma(\zeta) d\zeta \text{ e} \quad (2.156)$$

$$I_{1i} = I_1(\varepsilon_i), \quad (2.157)$$

e definiu-se, para compacidade de notação,

$$\Delta I_{1i} = I_1(\varepsilon_{i+1}) - I_1(\varepsilon_i). \quad (2.158)$$

Tem-se, desta forma,

$$\frac{\partial N_c}{\partial \varepsilon_o} = \frac{1}{\kappa_y} \sum_{i=1}^N \frac{\Delta y_i}{\Delta \varepsilon_i} \Delta I_{1i}. \quad (2.159)$$

Lembrando que quando $\Delta \varepsilon_i = 0$

$$\lim_{\Delta \varepsilon_i \rightarrow 0} \frac{\Delta I_{1i}}{\Delta \varepsilon_i} = \frac{dI_{1i}}{d\varepsilon} = \sigma(\varepsilon_i) = \sigma_i, \quad (2.160)$$

a derivada procurada fica completamente definida (para $\kappa_y \neq 0$) com a expressão

$$\frac{\partial N_c}{\partial \varepsilon_o} = \frac{1}{\kappa_y} \sum_{i=1}^N \Delta y_i f_{6i}, \quad (2.161)$$

onde, por definição,

$$f_{6i} = \begin{cases} \sigma_i & \Delta \varepsilon_i = 0 \\ \frac{\Delta I_{1i}}{\Delta \varepsilon_i} & \Delta \varepsilon_i \neq 0 \end{cases}. \quad (2.162)$$

Procedendo-se analogamente com $P = \sigma$ e $Q = 0$ a mesma derivada é obtida para $\kappa_x \neq 0$, ou seja,

$$\frac{\partial N_c}{\partial \varepsilon_o} = \frac{1}{\kappa_x} \sum_{i=1}^N \Delta x_i f_{6i}. \quad (2.163)$$

A obtenção de todas as outras derivadas não traz dificuldade teórica. Na tabela seguinte é resumido o cálculo de todas as derivadas.

Derivada	P	Q	Resultado	Validade
$\frac{\partial N_c}{\partial \varepsilon_o}$	0	σ	$\frac{1}{\kappa_y} \sum_{i=1}^N \Delta y_i f_{6i}$	$\kappa_y \neq 0$
$\frac{\partial N_c}{\partial \varepsilon_o}$	σ	0	$\frac{1}{\kappa_x} \sum_{i=1}^N \Delta x_i f_{6i}$	$\kappa_x \neq 0$
$\frac{\partial N_c}{\partial \kappa_x} = \frac{\partial M_{cx}}{\partial \varepsilon_o}$	0	σy	$-\frac{1}{\kappa_y} \sum_{i=1}^N \Delta y_i f_{7i}$	$\kappa_y \neq 0$
$\frac{\partial N_c}{\partial \kappa_x} = \frac{\partial M_{cx}}{\partial \varepsilon_o}$	σy	0	$-\frac{1}{\kappa_x} \left(N_c + \sum_{i=1}^N \Delta x_i f_{7i} \right)$	$\kappa_x \neq 0$
$\frac{\partial N_c}{\partial \kappa_y} = \frac{\partial M_{cy}}{\partial \varepsilon_o}$	0	σx	$\frac{1}{\kappa_y} \left(-N_c + \sum_{i=1}^N \Delta y_i f_{8i} \right)$	$\kappa_y \neq 0$
$\frac{\partial N_c}{\partial \kappa_y} = \frac{\partial M_{cy}}{\partial \varepsilon_o}$	σx	0	$\frac{1}{\kappa_x} \sum_{i=1}^N \Delta x_i f_{8i}$	$\kappa_x \neq 0$

Derivada	P	Q	Resultado	Validade
$\frac{\partial M_{cx}}{\partial \kappa_x}$	0	σy^2	$\frac{1}{\kappa_y} \sum_{i=1}^N \Delta y_i f_{9i}$	$\kappa_y \neq 0$
$\frac{\partial M_{cx}}{\partial \kappa_x}$	σy^2	0	$\frac{1}{\kappa_x} \left(-2 M_{cx} + \sum_{i=1}^N \Delta x_i f_{9i} \right)$	$\kappa_x \neq 0$
$\frac{\partial M_{cx}}{\partial \kappa_y} = \frac{\partial M_{cy}}{\partial \kappa_x}$	0	$\sigma x y$	$-\frac{1}{\kappa_y} \left(M_{cx} + \sum_{i=1}^N \Delta y_i f_{10i} \right)$	$\kappa_y \neq 0$
$\frac{\partial M_{cx}}{\partial \kappa_y} = \frac{\partial M_{cy}}{\partial \kappa_x}$	$\sigma x y$	0	$-\frac{1}{\kappa_x} \left(M_{cy} + \sum_{i=1}^N \Delta x_i f_{10i} \right)$	$\kappa_x \neq 0$
$\frac{\partial M_{cy}}{\partial \kappa_y}$	0	σx^2	$\frac{1}{\kappa_y} \left(-2 M_{cy} + \sum_{i=1}^N \Delta y_i f_{11i} \right)$	$\kappa_y \neq 0$
$\frac{\partial M_{cy}}{\partial \kappa_y}$	σx^2	0	$\frac{1}{\kappa_x} \sum_{i=1}^N \Delta x_i f_{11i}$	$\kappa_x \neq 0$

As novas funções definidas são (vários parâmetros definidos no capítulo dos esforços resistentes do concreto são utilizados):

$$f_{6i} = \begin{cases} \sigma_i & \Delta \varepsilon_i = 0 \\ \frac{\Delta I_{1i}}{\Delta \varepsilon_i} & \Delta \varepsilon_i \neq 0 \end{cases} . \quad (2.164)$$

$$f_{7i} = \begin{cases} \sigma_i \frac{y_i + y_{i+1}}{2} & \Delta \varepsilon_i = 0 \\ \frac{g_i \Delta I_{1i} + \Delta y_i \Delta J_{1i}}{\Delta \varepsilon_i^2} & \Delta \varepsilon_i \neq 0 \end{cases} . \quad (2.165)$$

$$f_{8i} = \begin{cases} \sigma_i \frac{x_i + x_{i+1}}{2} & \Delta \varepsilon_i = 0 \\ \frac{h_i \Delta I_{1i} + \Delta x_i \Delta J_{1i}}{\Delta \varepsilon_i^2} & \Delta \varepsilon_i \neq 0 \end{cases} . \quad (2.166)$$

$$f_{9i} = \begin{cases} \sigma_i \frac{y_i^2 + y_i y_{i+1} + y_{i+1}^2}{3} & \Delta \varepsilon_i = 0 \\ \frac{g_i^2 \Delta I_{1i} + 2g_i \Delta y_i \Delta J_{1i} + \Delta y_i^2 \Delta J_{2i}}{\Delta \varepsilon_i^3} & \Delta \varepsilon_i \neq 0 \end{cases} . \quad (2.167)$$

$$f_{10i} = \begin{cases} \sigma_i \frac{x_i y_{i+1} + 2(x_i y_i + x_{i+1} y_{i+1}) + x_{i+1} y_i}{6} & \Delta \varepsilon_i = 0 \\ \frac{h_i g_i \Delta I_{1i} + (g_i \Delta x_i + h_i \Delta y_i) \Delta J_{1i} + \Delta x_i \Delta y_i \Delta J_{2i}}{\Delta \varepsilon_i^3} & \Delta \varepsilon_i \neq 0 \end{cases} . \quad (2.168)$$

$$f_{11i} = \begin{cases} \sigma_i \frac{x_i^2 + x_i x_{i+1} + x_{i+1}^2}{3} & \Delta \varepsilon_i = 0 \\ \frac{h_i^2 \Delta I_{1i} + 2h_i \Delta x_i \Delta J_{1i} + \Delta x_i^2 \Delta J_{2i}}{\Delta \varepsilon_i^3} & \Delta \varepsilon_i \neq 0 \end{cases} . \quad (2.169)$$

Em muitas destas funções teve-se que recorrer à regra de L'Hôpital para a determinação de seus valores quando $\Delta \varepsilon_i = 0$.

Ainda foram utilizadas as definições

$$I_1(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \sigma(\zeta) d\zeta \text{ e } I_{1i} = I_1(\varepsilon_i) \text{ e } \Delta I_{1i} = I_1(\varepsilon_{i+1}) - I_1(\varepsilon_i) \quad (2.170)$$

$$J_1(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \zeta \sigma(\zeta) d\zeta \text{ e } J_{1i} = J_1(\varepsilon_i) \text{ e } \Delta J_{1i} = J_1(\varepsilon_{i+1}) - J_1(\varepsilon_i) \quad (2.171)$$

$$J_2(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \zeta^2 \sigma(\zeta) d\zeta \text{ e } J_{2i} = J_2(\varepsilon_i) \text{ e } \Delta J_{2i} = J_2(\varepsilon_{i+1}) - J_2(\varepsilon_i) \quad (2.172)$$

As expressões anteriores servem para a determinação dos esforços resistentes quando pelo menos uma curvatura não é nula (fornecendo, com qualquer expressão, resultados idênticos). Quando ambas as curvaturas são nulas trata-se de compressão ($\varepsilon > 0$) ou tração ($\varepsilon < 0$) uniforme. Este caso é estudado no item seguinte.

2.3.1 Compressão ou tração uniforme

Quando ambas as curvaturas são nulas, o Jacobiano, em sua expressão genérica (2.142), permanece válido. Há, no entanto, a simplificação da equação cinemática que resulta em

$$\varepsilon = \varepsilon_o + \kappa_y x - \kappa_x y = \varepsilon_o, \quad (2.173)$$

para qualquer ponto da seção.

Neste caso a derivada do diagrama tensão-deformação também fica constante $D(\varepsilon) = D(\varepsilon_o)$ e o Jacobiano assume o aspecto equivalente a um material elástico linear:

$$\mathbf{J}_c = D(\varepsilon_o) \begin{bmatrix} A & S_x & S_y \\ S_x & I_{xx} & -I_{xy} \\ S_y & -I_{xy} & I_{yy} \end{bmatrix} \quad (2.174)$$

2.3.2 Aplicação ao diagrama parábola-retângulo

O diagrama parábola-retângulo pode ser definido, como já visto, por

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \frac{\varepsilon(4-\varepsilon)}{4} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} & \varepsilon \geq 2 \end{cases} . \quad (2.175)$$

A derivada do diagrama tensão deformação é facilmente obtida:

$$D(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon < 0 \\ \sigma_{cd} \frac{(2-\varepsilon)}{2} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ 0 & \varepsilon > 2 \end{cases} \quad (2.176)$$

(note que as desigualdades foram cuidadosamente alteradas uma vez que a derivada do diagrama tensão-deformação apresenta uma descontinuidade para deformação nula; optou-se pelo valor não nulo da derivada para deformação nula por que, muitas vezes, os métodos numéricos “partem” do zero).

As integrais J_1 e J_2 podem ser generalizadas da seguinte maneira ($n \geq 0$):

$$J_n(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \zeta^n \sigma(\zeta) d\zeta. \quad (2.177)$$

Levando em conta a definição do diagrama parábola-retângulo percebe-se que deve haver uma divisão das integrais. Efetuando-se as integrais:

$$J_n(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \varepsilon^{n+2} \frac{4(n+3) - (n+2)\varepsilon}{4(n+3)(n+2)} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} \frac{(n+2)(n+3)\varepsilon^{n+1} - 2^{n+2}}{(n+3)(n+2)(n+1)} & \varepsilon \geq 2 \end{cases} . \quad (2.178)$$

Em particular, para as funções J_1 e J_2 , tem-se (observar que a função I_1 anteriormente obtida

poderia, também, ter sido calculada com J_0)

$$J_1(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \frac{\varepsilon^3 (16 - 3\varepsilon)}{48} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} \frac{3\varepsilon^2 - 2}{6} & \varepsilon \geq 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad (2.179)$$

$$J_2(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_{cd} \frac{\varepsilon^4 (5 - \varepsilon)}{20} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ \sigma_{cd} \frac{5\varepsilon^3 - 4}{15} & \varepsilon \geq 2 \end{cases} \quad . \quad (2.180)$$

2.4 Esforços resistentes da armadura

Os esforços resistentes da armadura são obtidos, genericamente, por

$$N_s = \iint_{A_s} \sigma(\varepsilon) \, dx \, dy \quad (2.181)$$

$$M_{sx} = - \iint_{A_s} \sigma(\varepsilon) \, y \, dx \, dy \quad (2.182)$$

$$M_{sy} = \iint_{A_s} \sigma(\varepsilon) \, x \, dx \, dy. \quad (2.183)$$

Como a quantidade de aço na seção transversal em geral é pequena (em geral não ultrapassando 4% da área da seção de concreto) e como sua distribuição, via de regra, se faz de forma discreta, pode-se, de forma prática, transformar as integrais anteriores em somatórios⁷. Considerando a armadura

⁷Se esta consideração não for satisfatória podem ser utilizados os mesmos procedimentos desenvolvidos para a obtenção dos esforços resistentes do concreto. Considera-se, assim, que cada barra seja caracterizada por uma poligonal. Esta consideração mais precisa ainda implicaria na consideração dos “vazios” da seção de concreto (localização das barras).

composta por n barras de área A_{si} os esforços resistentes da armadura podem ser dados por

$$N_s = \sum_{i=1}^n \sigma(\varepsilon_i) A_{si} \quad (2.184)$$

$$M_{sx} = - \sum_{i=1}^n \sigma(\varepsilon_i) y_{si} A_{si} \quad (2.185)$$

$$M_{sy} = \sum_{i=1}^n \sigma(\varepsilon_i) x_{si} A_{si} \quad (2.186)$$

Foram utilizados os símbolos:

- (x_{si}, y_{si}) : Coordenadas do CG da barra i , $i = 1 \dots n$.
- ε_i : deformação, em o/o , da barra i . Levando em consideração a equação cinemática esta deformação é dada por

$$\varepsilon_i = \varepsilon_o + \kappa_y x_{si} - \kappa_x y_{si} \quad (2.187)$$

- $\sigma(\varepsilon_i)$: tensão a qual a barra i está submetida.

Levando em consideração que os diagramas tensão-deformação dos aços brasileiros são mais precisamente definidos com a utilização do adimensional (como será visto mais adiante)

$$\alpha = \frac{\sigma(\varepsilon)}{f_{yd}}, \quad (2.188)$$

os esforços resistentes podem ser dados por

$$N_s = f_{yd} \sum_{i=1}^n \alpha(\varepsilon_i) A_{si} \quad (2.189)$$

$$M_{sx} = -f_{yd} \sum_{i=1}^n \alpha(\varepsilon_i) y_{si} A_{si} \quad (2.190)$$

$$M_{sy} = f_{yd} \sum_{i=1}^n \alpha(\varepsilon_i) x_{si} A_{si} \quad (2.191)$$

Quando a distribuição da armadura for mono-paramétrica, ou seja, quando a área de qualquer barra puder ser colocada como uma função previamente conhecida da área total de aço (A_s), como, por exemplo,

$$A_{si} = p_i A_s, \quad (2.192)$$

os esforços resistentes serão dados por

$$N_s = A_s f_{yd} \sum_{i=1}^n \alpha(\varepsilon_i) p_i \quad (2.193)$$

$$M_{sx} = -A_s f_{yd} \sum_{i=1}^n \alpha(\varepsilon_i) y_{si} p_i \quad (2.194)$$

$$M_{sy} = A_s f_{yd} \sum_{i=1}^n \alpha(\varepsilon_i) x_{si} p_i \quad (2.195)$$

2.4.1 Derivadas dos esforços resistentes da armadura

Considerações análogas às desenvolvidas no item “Derivadas dos esforços resistentes do concreto” levam à necessidade das derivadas dos esforços resistentes da armadura em relação às variáveis independentes que caracterizam a distribuição de deformações na seção transversal.

Definire-se a matriz Jacobiana (ou Jacobiano) dos esforços resistentes da armadura

$$\mathbf{J}_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_s}{\partial \varepsilon_o} & \frac{\partial N_s}{\partial \kappa_x} & \frac{\partial N_s}{\partial \kappa_y} \\ \frac{\partial M_{sx}}{\partial \varepsilon_o} & \frac{\partial M_{sx}}{\partial \kappa_x} & \frac{\partial M_{sx}}{\partial \kappa_y} \\ \frac{\partial M_{sy}}{\partial \varepsilon_o} & \frac{\partial M_{sy}}{\partial \kappa_x} & \frac{\partial M_{sy}}{\partial \kappa_y} \end{bmatrix}. \quad (2.196)$$

Levando em conta a definição dos esforços resistentes, os elementos da matriz podem ser calculados facilmente. Por exemplo

$$\frac{\partial N_s}{\partial \kappa_x} = \frac{\partial}{\partial \kappa_x} \sum_{i=1}^n \sigma(\varepsilon_i) A_{si} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \sigma(\varepsilon_i)}{\partial \kappa_x} A_{si}. \quad (2.197)$$

Mas, como no concreto, o diagrama tensão-deformação é função da deformação. Assim,

$$\frac{\partial \sigma(\varepsilon_i)}{\partial \kappa_x} = \frac{d\sigma(\varepsilon_i)}{d\varepsilon_i} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \kappa_x} = -D_i y_{si}, \quad (2.198)$$

onde, por definição,

$$D_i = \left. \frac{d\sigma(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_i} \quad (2.199)$$

Tem-se, portanto,

$$\frac{\partial N_s}{\partial \kappa_x} = - \sum_{i=1}^n D_i y_{si} A_{si}. \quad (2.200)$$

Considerações análogas levam à obtenção de todos os outros elementos da matriz:

$$\mathbf{J}_s = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n D_i A_{si} & -\sum_{i=1}^n D_i y_{si} A_{si} & \sum_{i=1}^n D_i x_{si} A_{si} \\ -\sum_{i=1}^n D_i y_{si} A_{si} & \sum_{i=1}^n D_i y_{si}^2 A_{si} & -\sum_{i=1}^n D_i x_{si} y_{si} A_{si} \\ \sum_{i=1}^n D_i x_{si} A_{si} & -\sum_{i=1}^n D_i x_{si} y_{si} A_{si} & \sum_{i=1}^n D_i x_{si}^2 A_{si} \end{bmatrix}. \quad (2.201)$$

Observações:

- Se for utilizado o diagrama tensão-deformação em formato adimensional, a derivada D_i é dada por

$$D_i = \left. \frac{d\sigma(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_i} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} (f_{yd} \alpha(\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=\varepsilon_i} = f_{yd} \left. \frac{d\alpha(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_i} \quad (2.202)$$

- Como no caso dos esforços do concreto, o Jacobiano é simétrico.
- A equação (2.201) vale sempre (inclusive quando ambas as curvaturas κ_x e κ_y forem nulas).

2.4.2 Diagrama tensão-deformação do aço e suas derivadas

Serão utilizados os diagramas tensão-deformação definidos em [2]. Os diagramas tensão-deformação são definidos de forma mais simples através dos adimensionais.

Utilizando-se ainda a função *senal* $s(x)$ definida por

$$s(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ +1 & x > 0 \end{cases} \quad (2.203)$$

para um aço classe A (CA-25, CA-32, CA-40A e CA-50A) tem-se

$$\text{Aço Classe A: } \alpha(\varepsilon) = \begin{cases} s(\varepsilon) & |\varepsilon| > \varepsilon_{yd} \\ \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{yd}} & |\varepsilon| \leq \varepsilon_{yd} \end{cases} \quad (2.204)$$

onde

$$\varepsilon_{yd} = 1000 \frac{f_{yd}}{E_s}. \quad (2.205)$$

As derivadas para o aço A podem ser colocadas na seguinte forma:

$$\text{Aço Classe A: } \frac{d\alpha}{d\varepsilon} = \begin{cases} 0 & |\varepsilon| > \varepsilon_{yd} \\ \frac{1}{\varepsilon_{yd}} & |\varepsilon| \leq \varepsilon_{yd} \end{cases} \quad (2.206)$$

Analogamente, para um aço classe B (CA-40B, CA-50B e CA-60):

$$\text{Aço Classe B: } \alpha(\varepsilon) = \begin{cases} s(\varepsilon) & |\varepsilon| > \varepsilon_{yd} + 2 \\ s(\varepsilon) \times (*) & 0,7\varepsilon_{yd} < |\varepsilon| \leq \varepsilon_{yd} + 2 \\ \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{yd}} & |\varepsilon| \leq 0,7\varepsilon_{yd} \end{cases} \quad (2.207)$$

onde (*) representa a equação:

$$(*) = \frac{280 - 9\varepsilon_{yd} + 3\sqrt{800|\varepsilon| + \varepsilon_{yd}(9\varepsilon_{yd} - 560)}}{400} \quad (2.208)$$

onde, por conveniência, manteve-se a nomenclatura ε_{yd} apesar de, para o aço classe B, a deformação convencional de escoamento ser calculada por

$$1000 \frac{f_{yd}}{E_s} + 2 \quad (2.209)$$

As derivadas para o aço classe B são dadas por:

$$\text{Aço Classe B: } \frac{d\alpha}{d\varepsilon} = \begin{cases} 0 & |\varepsilon| > \varepsilon_{yd} + 2 \\ \frac{3}{\sqrt{800|\varepsilon| + \varepsilon_{yd}(9\varepsilon_{yd} - 560)}} & 0,7\varepsilon_{yd} < |\varepsilon| \leq \varepsilon_{yd} + 2 \\ \frac{1}{\varepsilon_{yd}} & |\varepsilon| \leq 0,7\varepsilon_{yd} \end{cases} \quad (2.210)$$

A título de ilustração o gráfico da Figura 2-8 mostra os diagramas tensão-deformação (em formato adimensional) dos aços CA-50A e CA-50B (somente para deformações positivas).

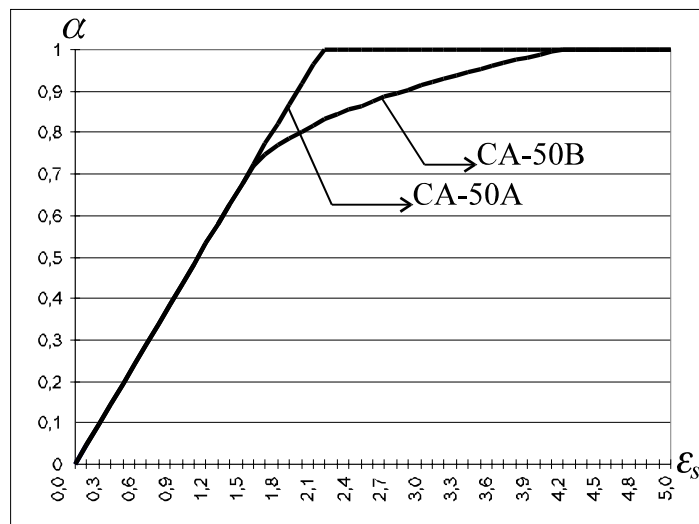


Figura 2-8: Diagrama tensão-deformação dos aços CA-50A e CA-50B.

Capítulo 3

Verificação e Dimensionamento de Seções Transversais

3.1 Utilização do método de Newton-Raphson para a verificação da seção

Aborda-se como fazer a verificação de uma seção de concreto armado (submetida a Flexão Oblíqua Composta — FOC) utilizando o método de Newton-Raphson¹ (as vezes chamado, simplesmente, de método de Newton [10] ou N-R). O método de Newton-Raphson é apresentado de forma intuitiva para o caso unidimensional e, em seguida, faz-se a generalização para os casos bi e tri-dimensionais. São mostradas, ainda, as condições para a convergência do método.

3.1.1 Caso unidimensional — considerações geométricas

O método de Newton-Raphson mostra-se como poderosa ferramenta para a procura numérica do zero de funções ($x = ? \mid f(x) = 0$). Com base na Figura (3-1) pode-se visualizar o processo iterativo com a consideração geométrica feita a seguir.

Imagine que se deseje encontrar para qual valor de x a função $f(x)$ se anula. Esta pesquisa será realizada iterativamente e admite-se começá-la pelo ponto de abscissa x_1 , com correspondente valor da função $f(x_1)$. Graficamente pode-se perceber que a tangente do ângulo γ ressaltado na Figura (3-1) é

$$\operatorname{tg}(\gamma) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}. \quad (3.1)$$

¹Há referências que apontam o método de Newton-Raphson como sendo, efetivamente, o método de Raphson, por exemplo, www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Mathematicians/Raphson.html

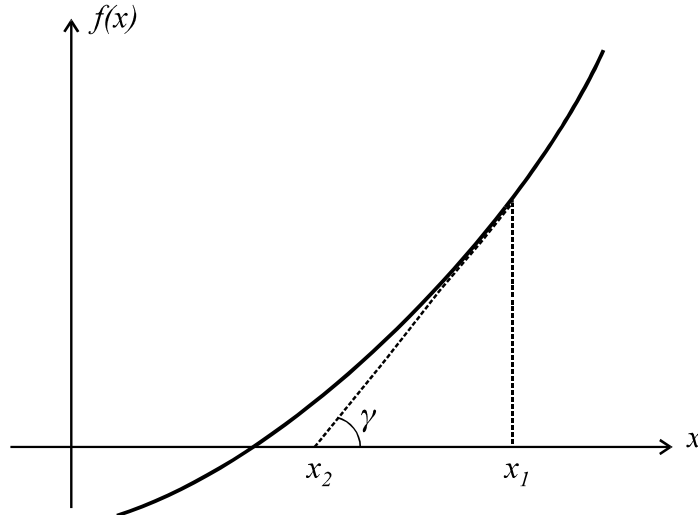


Figura 3-1: Método de Newton-Raphson: caso unidimensional

Sabe-se, no entanto, que a derivada da função $f(x)$ no ponto x_1 é, numericamente, igual a tangente calculada. Desta forma

$$tg(\gamma) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_1} = f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}. \quad (3.2)$$

Isolando-se o valor de x_2 da equação (3.2)

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \quad (3.3)$$

desde que, obviamente, $f'(x_1) \neq 0$. O valor de x_2 assim obtido é uma primeira estimativa do valor para o qual a função se anula. Utilizando-se novamente o método de Newton-Raphson, agora aplicado ao ponto de abscissa x_2 obtem-se outra estimativa para o zero da função:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}. \quad (3.4)$$

Percebe-se, portanto, que a medida que o número de iterações cresce, o zero da função vai sendo obtido com maior precisão. A expressão genérica de como se obtém uma próxima estimativa do zero da função é conhecida também como fórmula de recorrência do método. A fórmula de recorrência do método de Newton-Raphson pode ser colocada sob a forma

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}. \quad (3.5)$$

Série de Taylor

A mesma equação (3.5) pode ser obtida com a utilização da expansão em série de Taylor da função $f(x)$ no entorno do ponto de abscissa x_1 . Lembrando que, por série de Taylor, a função pode ser expressa como

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} f'''(x) + \dots \quad (3.6)$$

pode-se aplicá-la ao ponto x_1 usando $\Delta x = x_2 - x_1$ e truncando a série na primeira derivada da função

$$f(x_2) = f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{1!} f'(x_1). \quad (3.7)$$

Admitindo como estimativa do zero da função o ponto x_2 , força-se $f(x_2) = 0$ e, portanto,

$$0 = f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{1!} f'(x_1) \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \quad (3.8)$$

Este procedimento também é completamente análogo à consideração do processo das diferenças finitas para a avaliação da derivada da função no ponto x_1 , ou seja,

$$f'(x_1) \simeq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \quad (3.9)$$

3.1.2 Caso bidimensional

Para funções de duas variáveis podem também ser obtidas relações geométricas da utilização do método de Newton-Raphson. Como estas interpretações necessitam, em geral, de uma boa visão espacial, este texto ficará limitado a uma extensão da expansão em série de Taylor (ou em outras palavras, o processo das diferenças finitas) para a aplicação do método de Newton-Raphson.

Utilizando a série de Taylor para uma função $f(x, y)$ de duas variáveis

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y + \Delta y) &= f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (\Delta y)^2 \right] + \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde todas as derivadas parciais são avaliadas no ponto em torno do qual se faz a expansão: por simplicidade de notação omitiu-se o ponto de aplicação, por exemplo,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x,y)}. \quad (3.11)$$

Aplicando a equação (3.10) no entorno do ponto (x_1, y_1) , usando $\Delta x = x_2 - x_1$ e $\Delta y = y_2 - y_1$ e ainda truncando a série nas primeiras derivadas obtém-se

$$f(x_2, y_2) = f(x_1, y_1) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_1, y_1)} (x_2 - x_1) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_1, y_1)} (y_2 - y_1). \quad (3.12)$$

Como estimativa do ponto onde $f(x_2, y_2) = 0$ obtém-se a equação

$$0 = f(x_1, y_1) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_1, y_1)} (x_2 - x_1) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_1, y_1)} (y_2 - y_1). \quad (3.13)$$

Desta equação, obviamente, não se pode tirar o próximo ponto uma vez que são necessárias as duas coordenadas (x_2, y_2) . Percebe-se, então, que o método de Newton-Raphson pode ser utilizado, neste caso, quando houver um sistema de duas equações. Procura-se, portanto, qual o par (x, y) que satisfaz, simultaneamente, as equações

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}. \quad (3.14)$$

Usando o desenvolvimento em série de para a função $g(x, y)$ obtém-se

$$0 = g(x_1, y_1) + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x_1, y_1)} (x_2 - x_1) + \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{(x_1, y_1)} (y_2 - y_1). \quad (3.15)$$

O sistema de equações determinado por (3.13) e (3.15) pode, agora, fornecer os valores de (x_2, y_2) procurados. Este mesmo sistema de equações pode ser mais concisamente escrito utilizando-se notação vetorial da seguinte maneira:

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \quad (3.16)$$

onde

$$\mathbf{x}_i = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) = \begin{Bmatrix} f(x_i, y_i) \\ g(x_i, y_i) \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_i, y_i)} & \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_i, y_i)} \\ \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x_i, y_i)} & \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{(x_i, y_i)} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

A fórmula de recorrência do método de Newton-Raphson para um sistema de duas equações a duas incógnitas, em notação vetorial fica, então

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - [\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)]^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) \quad (3.21)$$

onde $[\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)]^{-1}$ denota a inversa da matriz $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$ que, para o caso de matriz 2×2 , pode ser obtida analiticamente com a notação (do determinante)

$$\|\nabla \mathbf{f}\| = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}, \quad (3.22)$$

da seguinte maneira

$$[\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)]^{-1} = \frac{1}{\|\nabla \mathbf{f}\|} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial y} & -\frac{\partial f}{\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

A extensão da fórmula de recorrência do método de Newton-Raphson para problemas de ordem superior não traz nenhuma dificuldade adicional e a equação (3.21) permanece válida.

3.1.3 Aplicação à verificação da seção

Admite-se conhecida a seção transversal, o arranjo de armadura, a área total de armadura, o aço utilizado e o concreto (o conhecimento dos materiais se faz pela completa determinação de seus diagramas tensão-deformação) e os esforços aplicados à seção (N_d , M_{xd} e M_{yd}). O problema de verificação consiste na determinação da distribuição de deformações na seção transversal (caracterizada pelas variáveis independentes ε_o , κ_x e κ_y) que equilibra tais esforços.

Note-se que esta verificação deve ser feita sem a hipótese do Estado Limite Último (ELU) estar sendo obedecida (para que se proceda a uma busca sem restrições). Posteriormente deve-se verificar se a distribuição de deformações na seção transversal ultrapassa, ou não, o ELU.

A função vetorial da qual procura-se o zero pode ser definida como

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) = \begin{Bmatrix} N - N_R \\ M_x - M_{xR} \\ M_y - M_{yR} \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

onde o vetor das variáveis independentes foi definido como

$$\mathbf{x}_i = \begin{Bmatrix} \varepsilon_o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

e utilizou-se o índice R para os esforços resistentes (que são, na verdade, função da distribuição de deformações, ou seja, ε_o , κ_x e κ_y).

Usando a equação (3.21) — fórmula de recorrência do método de Newton-Raphson — neste problema obtém-se

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + [\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)]^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_i), \quad (3.26)$$

com a matriz das derivadas sendo definida por (note que na matriz seguinte não entram os esforços externos uma vez que são constantes e, portanto, suas derivadas são nulas; note ainda a colocação

conveniente do sinal na definição da função \mathbf{f} que faz com que os sinais apresentados estejam corretos)

$$\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_R}{\partial \varepsilon_o} & \frac{\partial N_R}{\partial \kappa_x} & \frac{\partial N_R}{\partial \kappa_y} \\ \frac{\partial M_{xR}}{\partial \varepsilon_o} & \frac{\partial M_{xR}}{\partial \kappa_x} & \frac{\partial M_{xR}}{\partial \kappa_y} \\ \frac{\partial M_{yR}}{\partial \varepsilon_o} & \frac{\partial M_{yR}}{\partial \kappa_x} & \frac{\partial M_{yR}}{\partial \kappa_y} \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

As equações (3.26) e (3.27) permitem o cálculo iterativo da distribuição de deformações na seção transversal (\mathbf{x}) que equilibra os esforços externos aplicados ($\mathbf{f} = \mathbf{0}$). Note que a cada iteração necessita-se da matriz inversa $[\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)]^{-1}$, esta inversa pode ser obtida analiticamente ou numericamente.

Resolução de sistema 3×3

No caso simples de sistema 3×3 pode-se resolver o problema analiticamente. Seja o sistema $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ que apresenta a solução $\mathbf{x} = [\mathbf{A}]^{-1} \mathbf{b}$. O vetor solução \mathbf{x} pode ser dado por

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\|\mathbf{A}\|} \begin{bmatrix} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) b_1 + (a_{13} a_{32} - a_{12} a_{33}) b_2 + (a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}) b_3 \\ (a_{23} a_{31} - a_{21} a_{33}) b_1 + (a_{11} a_{33} - a_{13} a_{31}) b_2 + (a_{13} a_{21} - a_{11} a_{23}) b_3 \\ (a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}) b_1 + (a_{12} a_{31} - a_{11} a_{32}) b_2 + (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) b_3 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

onde

$$\|\mathbf{A}\| = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{21} a_{12} a_{33} + a_{21} a_{13} a_{32} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{13} a_{22} \quad (3.29)$$

é o determinante da matriz \mathbf{A} (obviamente o sistema só pode ser resolvido quando $\|\mathbf{A}\| \neq 0$, ou seja, quando a matriz \mathbf{A} não for singular).

3.1.4 Validade do método

Sempre que se utiliza um método numérico deve-se saber, a priori, em quais condições o método funciona adequadamente. Para isto, no caso do método de Newton-Raphson, é sabido que é um método de convergência, em geral, local. Isto quer dizer, em outras palavras, que para um problema genérico só se pode afirmar que o método encontrará a solução se a estimativa inicial (\mathbf{x}) for suficientemente

próxima da solução do sistema.

O estudo da existência e unicidade da solução é extremamente pertinente mas este texto trará estas discussões sob um aspecto intuitivo.

A existência da solução não pode ser garantida por um motivo simples: a capacidade resistente da seção, função dos diagramas tensão-deformação de seus materiais componentes, é finita. Este conceito é bastante intuitivo quando se faz uma “caricatura” do problema: Será que uma seção com uma certa quantidade fixa de concreto e aço pode resistir a esforços infinitos? Claramente a resposta a esta pergunta é não. Esta conclusão se baseia, nitidamente, nos diagramas tensão-deformação que apresentam patamares (caso dos aços e do concreto).

A unicidade da solução exige uma discussão mais detalhada. Se se puder afirmar que o problema é convexo (ou seja, se a energia potencial total do sistema for convexa) pode-se garantir que o método de Newton-Raphson sempre encontrará apenas uma solução (quando existir).

Imaginando um elemento de barra (de comprimento infinitesimal dz) pode-se calcular a energia de deformação da seção transversal através da equação

$$dU = \sigma(\varepsilon) dA d\varepsilon dz. \quad (3.30)$$

Esta energia de deformação pode ser entendida como o trabalho realizado para a seção passar do estado indeformado para a posição determinada pela distribuição de deformações. Integrando na área (A) da seção transversal e na deformação (e ainda considerando a energia por unidade de comprimento z uma vez que se está trabalhando apenas com a seção transversal) chega-se em

$$U = \iint_A \phi(\varepsilon) dx dy \quad (3.31)$$

onde $\phi(\varepsilon)$ é o potencial do diagrama tensão-deformação dos materiais

$$\phi(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \sigma(\zeta) d\zeta. \quad (3.32)$$

Observe-se ainda que a integral da energia de deformação é realizada sobre toda a seção transversal. Desta forma deve-se dividir o problema nas parcelas resistentes do concreto e da armadura (integral em A_c e em A_s).

O potencial das forças externas, por unidade de comprimento, pode ser dado por

$$V = -(N_d \varepsilon_o + M_{xd} \kappa_x + M_{yd} \kappa_y). \quad (3.33)$$

Assim, a energia potencial total da seção transversal (por unidade de comprimento) é dada por

$$\Pi = U + V = \iint_A \phi(\varepsilon) \, dx \, dy - (N_d \varepsilon_o + M_{xd} \kappa_x + M_{yd} \kappa_y). \quad (3.34)$$

As equações de equilíbrio podem ser obtidas através da equação (3.34) da energia potencial total fazendo-se a sua primeira variação nula, ou seja, $\nabla \Pi = \mathbf{0}$ (já que o equilíbrio é um ponto estacionário da energia potencial total). Esta derivada pode ser reescrita nas suas componentes:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon_o} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_o} \iint_A \phi(\varepsilon) \, dx \, dy - N_d = 0 \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_x} = \frac{\partial}{\partial \kappa_x} \iint_A \phi(\varepsilon) \, dx \, dy - M_{xd} = 0 \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_y} = \frac{\partial}{\partial \kappa_y} \iint_A \phi(\varepsilon) \, dx \, dy - M_{yd} = 0 \quad (3.37)$$

Lembrando a equação cinemática (2.6)

$$\varepsilon = \varepsilon_o - \kappa_x y + \kappa_y x \quad (3.38)$$

e as derivadas

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_o} = 1 \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \kappa_x} = -y \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \kappa_y} = x \quad (3.41)$$

a primeira variação de Π conduz, finalmente, às equações de equilíbrio

$$N_d = \iint_A \sigma(\varepsilon) \, dx \, dy \quad (3.42)$$

$$M_{xd} = - \iint_A y \sigma(\varepsilon) \, dx \, dy \quad (3.43)$$

$$M_{yd} = \iint_A x \sigma(\varepsilon) \, dx \, dy. \quad (3.44)$$

Para o estudo da convexidade do problema se faz necessário o conhecimento da segunda variação

da energia total que pode ser obtida por

$$\nabla^2 \Pi = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_o} (\nabla \Pi)^T \\ \frac{\partial}{\partial \kappa_x} (\nabla \Pi)^T \\ \frac{\partial}{\partial \kappa_y} (\nabla \Pi)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_o^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_o \partial \kappa_x} & \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_o \partial \kappa_y} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_o \partial \kappa_x} & \frac{\partial^2 U}{\partial^2 \kappa_x} & \frac{\partial^2 U}{\partial \kappa_x \partial \kappa_y} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_o \partial \kappa_y} & \frac{\partial^2 U}{\partial \kappa_x \partial \kappa_y} & \frac{\partial^2 U}{\partial^2 \kappa_y} \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

Colocando esta matriz em termos das integrais dos esforços resistentes obtém-se

$$\nabla^2 \Pi = \begin{bmatrix} \iint_A D(\varepsilon) dx dy & - \iint_A D(\varepsilon) y dx dy & \iint_A D(\varepsilon) x dx dy \\ . & \iint_A D(\varepsilon) y^2 dx dy & - \iint_A D(\varepsilon) xy dx dy \\ \text{simétrica} & . & \iint_A D(\varepsilon) x^2 dx dy \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

Observe que a matriz $\nabla^2 \Pi$ é conhecida como matriz Hessiana da energia potencial total do sistema e é idêntica ao Jacobiano do sistema sendo resolvido pelo método de Newton-Raphson.

Primeiro caso particular — compressão centrada no concreto simples

Seja, por hipótese, uma seção sujeita somente a um esforço normal, com diagrama tensão-deformação do concreto armado (parábola-retângulo) e sem armadura. As propriedades deste sistema serão estudadas para uma posterior generalização dos conceitos envolvidos.

A seção estará sujeita a uma compressão ($\varepsilon > 0$) ou tração ($\varepsilon < 0$) uniforme. A equação cinemática resume-se a $\varepsilon = \varepsilon_o$. A energia potencial total do sistema, dada pela equação (3.34), passa a ser

$$\Pi = U + V = \iint_A \phi(\varepsilon_o) dx dy - N_d \varepsilon_o. \quad (3.47)$$

Para uma distribuição de deformação fixa ($\varepsilon_o = \text{constante}$) tem-se, portanto,

$$\Pi = U + V = \phi(\varepsilon_o) A - N_d \varepsilon_o, \quad (3.48)$$

onde A é a área total da seção transversal.

A primeira derivada de Π fornece, de forma usual, a equação de equilíbrio

$$\frac{d\Pi}{d\varepsilon_o} = \sigma(\varepsilon_o) A - N_d = 0, \quad (3.49)$$

e a segunda derivada fornece

$$\frac{d^2\Pi}{d\varepsilon_o^2} = D(\varepsilon_o) A. \quad (3.50)$$

Utilizando as equações do diagrama parábola-retângulo obtém-se

$$\Pi(\varepsilon) = \begin{cases} -N_d \varepsilon & \varepsilon < 0 \\ A \sigma_{cd} \frac{\varepsilon^2 (6 - \varepsilon)}{12} - N_d \varepsilon & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ A \sigma_{cd} \frac{(3\varepsilon - 2)}{3} - N_d \varepsilon & \varepsilon > 2 \end{cases} \quad (3.51)$$

$$\frac{d\Pi}{d\varepsilon_o} = 0 \Rightarrow N_d = A \sigma(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon < 0 \\ A \sigma_{cd} \frac{\varepsilon (4 - \varepsilon)}{4} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \\ A \sigma_{cd} & \varepsilon > 2 \end{cases} \quad (3.52)$$

$$\frac{d^2\Pi(\varepsilon)}{d\varepsilon_o^2} = \begin{cases} 0 & \varepsilon < 0 \text{ ou } \varepsilon > 2 \\ A \sigma_{cd} \frac{(2 - \varepsilon)}{2} & 0 \leq \varepsilon \leq 2 \end{cases} \quad (3.53)$$

A Figura 3-2 ilustra a energia total Π do sistema.

Deste modelo unidimensional podem ser tiradas as seguintes conclusões:

1. A capacidade resistente da seção é limitada. A equação (3.52) mostra que a seção não suporta esforços $N_d < 0$ ou $N_d > A \sigma_{cd}$. Nos extremos deste intervalo tem-se o material “escoando” ($D(\varepsilon) = 0$, mais detalhes no item seguinte).
2. Quando o esforço normal está num intervalo possível ($0 \leq N_d \leq A \sigma_{cd}$) a segunda derivada da energia total ($d^2\Pi/d\varepsilon_o^2$) nunca é negativa e o equilíbrio é possível ($d\Pi/d\varepsilon_o = 0$). Neste caso Π é uma função convexa e tem mínimo no ponto de equilíbrio.
3. Quando o esforço normal está num intervalo impossível ($N_d < 0$ ou $N_d > A \sigma_{cd}$) a segunda

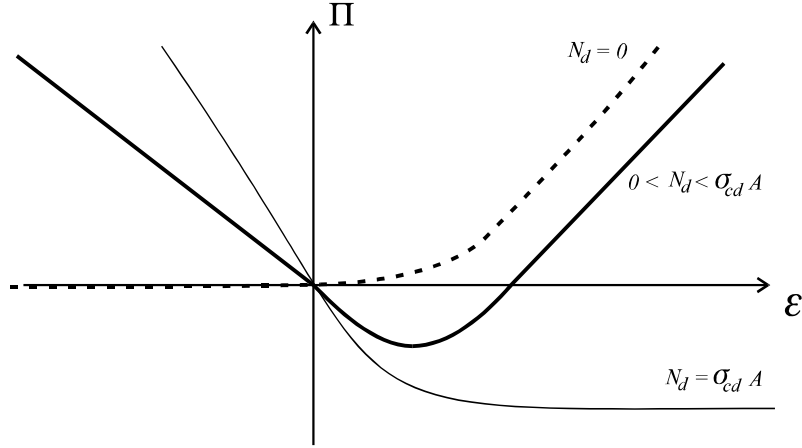


Figura 3-2: Energia total para uma barra de concreto simples.

derivada da energia total ($d^2\Pi/d\varepsilon_o^2$) é nula e o equilíbrio é impossível ($d\Pi/d\varepsilon_o \neq 0$). Neste caso Π ainda é uma função convexa porém ilimitada.

Segundo caso particular — Flexão normal composta no concreto simples

Admitindo uma seção retangular sujeita a uma flexão normal composta ($\kappa_x \neq 0$ e $\kappa_y = 0$), ainda de concreto simples (diagrama parábola-retângulo), conforme a Figura 3-3, tem-se

$$\nabla^2\Pi = \begin{bmatrix} \iint_A D(\varepsilon) dx dy & -\iint_A D(\varepsilon) y dx dy \\ -\iint_A D(\varepsilon) y dx dy & \iint_A D(\varepsilon) y^2 dx dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_R}{\partial \varepsilon_o} & \frac{\partial N_R}{\partial \kappa_x} \\ \frac{\partial M_{xR}}{\partial \varepsilon_o} & \frac{\partial M_{xR}}{\partial \kappa_x} \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

Para que a matriz $\nabla^2\Pi$ seja positiva-definida é necessário que

$$\iint_A D(\varepsilon) dx dy > 0 \quad (3.55)$$

$$\left(\iint_A D(\varepsilon) dx dy \right) \left(\iint_A D(\varepsilon) y^2 dx dy \right) - \left(\iint_A D(\varepsilon) y dx dy \right)^2 > 0. \quad (3.56)$$

Note que estas condições, para um material elástico linear (com $D(\varepsilon) = E = \text{constante}$), seriam $EA > 0$ (o que é sempre verdade) e $AI_{xx} - S_x^2 > 0$. Esta última condição, dividida por A^2 , tirando a raiz quadrada e lembrando da definição de raio de giração ($r_y = \sqrt{I_{xx}/A}$) e de centro de gravidade

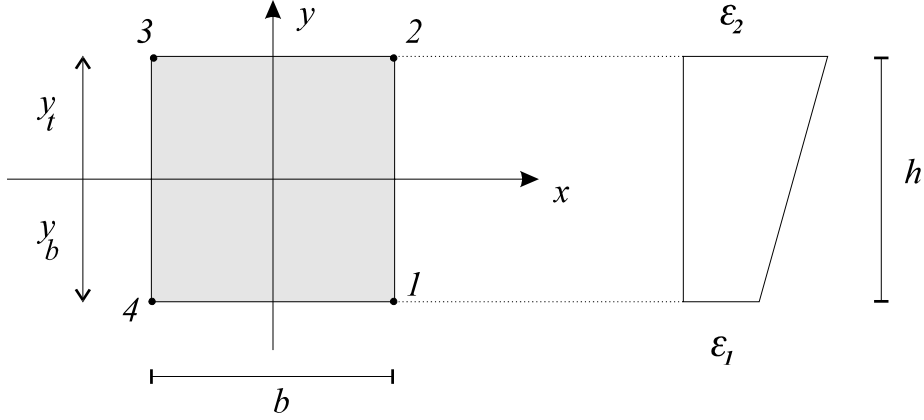


Figura 3-3: Exemplo de FNC no concreto simples

$(y_{cg} = S_x / A)$, leva a

$$r_y > y_{cg}. \quad (3.57)$$

A condição (3.55) é satisfeita desde que $D(\varepsilon) > 0$ (ou seja, o diagrama tensão-deformação deve ser monotonicamente crescente, nunca apresentando decréscimo de tensão para um acréscimo de deformação).

A segunda condição (3.56) não é de visualização imediata. Pode-se imaginar uma transformação de coordenadas de tal forma que a matriz $\nabla^2 \Pi$ passe a ser diagonal (facilitando, desta maneira, sua análise).

Para que $\nabla^2 \Pi$ seja uma matriz diagonal é necessário que o termo $-\iint_A D(\varepsilon) y dA$ seja nulo. Esta condição também pode ser colocada na forma $\frac{\partial N_R}{\partial \kappa_x} = \frac{\partial M_{xR}}{\partial \varepsilon_o} = 0$. Utilizando as expressões destas derivadas desenvolvidas neste trabalho tem-se que

$$\frac{\partial N_R}{\partial \kappa_x} = \frac{\partial M_{xR}}{\partial \varepsilon_o} = -\frac{1}{\kappa_x} \left(N_c + \sum_{i=1}^N \Delta x_i f_{7i} \right) = 0. \quad (3.58)$$

Mas, dos esforços resistentes do concreto,

$$N_c = \frac{1}{\kappa_x} \sum_{i=1}^N \Delta x_i f_{1i}. \quad (3.59)$$

Portanto a matriz $\nabla^2 \Pi$ será diagonal quando (lembrar que, por hipótese, $\kappa_x \neq 0$)

$$\sum_{i=1}^N \Delta x_i (f_{1i} + \kappa_x f_{7i}) = 0. \quad (3.60)$$

Por simplicidade, e sem perda de generalidade, pode-se adotar $b = h = 1$, o que implica na condição $y_t - y_b = h = 1$. Lembrando que os lados verticais da seção (1-2 e 3-4) não contribuem para o somatório (por possuírem $\Delta x_1 = \Delta x_3 = 0$) e que, para os outros lados tem-se $\Delta x_2 = -b = -1$ e $\Delta x_4 = b = 1$, a equação (3.60) fica

$$(f_{1i}|_{i=4} - f_{1i}|_{i=2}) + \kappa_x (f_{7i}|_{i=4} - f_{7i}|_{i=2}) = 0 \quad (3.61)$$

Lembrando ainda que, neste caso, a equação cinemática resume-se a $\varepsilon = \varepsilon_o - \kappa_x y$ e que para $y = y_t$ tem-se $\varepsilon = \varepsilon_2$ e para $y = y_b$ tem-se $\varepsilon = \varepsilon_1$, chega-se, facilmente, à conclusão de que $\kappa_x = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$.

Utilizando as definições das funções f_{1i} e f_{7i} tem-se, finalmente,

$$y_t = \frac{\sigma(\varepsilon_1) + \frac{I_1(\varepsilon_2) - I_1(\varepsilon_1)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}}{\sigma(\varepsilon_1) - \sigma(\varepsilon_2)}. \quad (3.62)$$

A equação (3.62) fornece a condição para o posicionamento do eixo das abscissas de tal forma que a matriz $\nabla^2 \Pi$ torne-se diagonal (o posicionamento do eixo das ordenadas é fixo uma vez que, por hipótese, trata-se de flexão normal composta e este eixo deve coincidir com o eixo de simetria vertical da seção). Esta equação, obviamente, só é válida quando $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ (no caso de $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ o problema vira de compressão/tração uniforme, já discutido anteriormente).

Para ilustração admita o exemplo com: $\varepsilon_1 = 0$; $\varepsilon_2 = 2$ e diagrama parábola-retângulo (o que define por completo as funções $\sigma(\varepsilon)$ e $I_1(\varepsilon)$). Efetuando os cálculos pela equação (3.62) obtém-se $y_t = 2/3$ e $y_b = -1/3$. Assim, para este novo sistema de coordenadas ($\varepsilon_o = 2/3$; $\kappa_x = -2$ e $\kappa_y = 0$), obtém-se a matriz $\nabla^2 \Pi$ diagonal.

Considerando a matriz $\nabla^2 \Pi$ diagonalizada tem-se

$$\nabla^2 \Pi = \begin{bmatrix} \iint_A D(\varepsilon) dA & 0 \\ 0 & \iint_A D(\varepsilon) y^2 dA \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

e as condições para que seja positiva-definida ficam

$$\iint_A D(\varepsilon) dA > 0 \quad (3.64)$$

$$\iint_A D(\varepsilon) y^2 dA > 0 \quad (3.65)$$

Estas duas últimas condições são satisfeitas sempre que $D(\varepsilon) > 0$.

Conclusões

1. Sempre é possível mudar o sistema de coordenadas (sem mudar fisicamente o problema, ou seja, sem alterar a distribuição de deformações) de tal forma que a matriz Hessiana ($\nabla^2\Pi$) da energia total seja diagonal.
2. A matriz $\nabla^2\Pi$ diagonalizada é semi-positiva definida uma vez que os materiais componentes (concreto e aço) sempre apresentam $D(\varepsilon) \geq 0$. Em particular, $\nabla^2\Pi$ será singular (determinante de $\nabla^2\Pi = 0$) somente no caso de todos os materiais possuírem $D(\varepsilon) = 0$ (ou seja, todos os materiais trabalhando em um patamar de “escoamento”) o que caracteriza a “plastificação” da seção.
3. Excluindo-se o caso da “plastificação” ($D(\varepsilon) = 0$) da seção, pode-se afirmar que a matriz $\nabla^2\Pi$ é positiva-definida e, portanto, a energia total Π é uma função convexa apresentando um mínimo para o equilíbrio da seção ($\nabla\Pi = \mathbf{0}$). Neste caso, partindo-se com o método de Newton-Raphson de qualquer ponto $(\varepsilon_o, \kappa_x, \kappa_y)$ que não cause a singularidade de $\nabla^2\Pi$, o equilíbrio (quando existir) será encontrado.
4. Quando o equilíbrio é impossível, o método de Newton-Raphson encontrará $\nabla^2\Pi$ singular (já que $\nabla^2\Pi = \nabla\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$ é a matriz de recorrência do método de Newton-Raphson, ou seja, o Jacobiano do sistema a ser resolvido), mesmo partindo-se de um ponto $(\varepsilon_o, \kappa_x, \kappa_y)$ viável.

Resumindo:

- Se o problema de verificação possuir solução física, o método de Newton-Raphson a encontrará desde que o ponto de partida seja viável (sugestão $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ou seja, sempre começar as iterações com $\varepsilon_o = \kappa_x = \kappa_y = 0$).
- Se, ao longo das iterações, o método de Newton-Raphson encontrar a matriz $\nabla\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$ singular, o problema não tem solução (fisicamente).
- Deve-se salientar que a solução encontrada pode, ou não, estar respeitando o Estado Limite Último de Ruptura (ELU). Esta verificação **deve** ser feita posteriormente e, caso a solução obtida ultrapasse o ELU, não pode ser aceita.

3.2 Existência da solução do problema de verificação

Estuda-se para quais condições o problema de verificação de seções de concreto armado submetidas a Flexão Oblíqua Composta (FOC) apresenta solução. Através de raciocínio físico simples mostra-se que este tipo de problema pode não apresentar solução em função dos patamares nos diagramas tensão-deformação dos materiais (concreto e aço).

Com a consideração de diagramas tensão-deformação com patamares de escoamento (tanto para o concreto quanto para o aço, Figura 3-4) é simples perceber que a capacidade resistente da seção fica limitada tanto em termos de esforço normal resistente quanto em termos de momento fletor resistente. Se os diagramas apresentam patamares, a máxima tensão “oferecida” pelo material é finita. Não se pode esperar, portanto, que a seção resista a quaisquer valores de esforços.

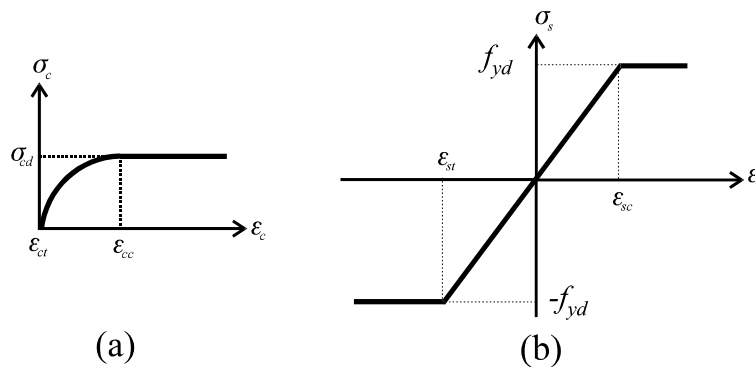


Figura 3-4: Exemplos de diagramas tensão deformação: (a) Concreto (b) Aço

Para o caso de compressão/tração uniforme, intuitivamente, espera-se que o maior/menor esforço normal resistente ocorra para curvaturas nulas e para deformações de encurtamento/alongamento que causem o escoamento simultâneo dos dois materiais; esta situação ocorrerá com momento nulo no caso de seções com duplo eixo de simetria (simetria do concreto e da armadura).

Para a pesquisa do maior momento fletor resistente pode-se imaginar uma situação (hipotética) onde as curvaturas tendam a infinito e que as deformações das partes comprimidas/tracionadas tendam àquelas de escoamento simultâneo dos materiais (em compressão/tração).

Admitindo uma seqüência de carregamento que leve a curvaturas crescentes (Figura 3-5) e, no limite, forneça uma distribuição de deformações com curvaturas infinitas tem-se, no limite, a capacidade resistente da seção em termos de seus esforços resistentes (note-se que a cada posição da “linha neutra” corresponde um conjunto de esforços resistentes: esforço normal e momento fletor).

Admitindo que os materiais tenham as deformações de “escoamento”:

- ϵ_{cc} : deformação de “escoamento” do concreto (c) à compressão (c).

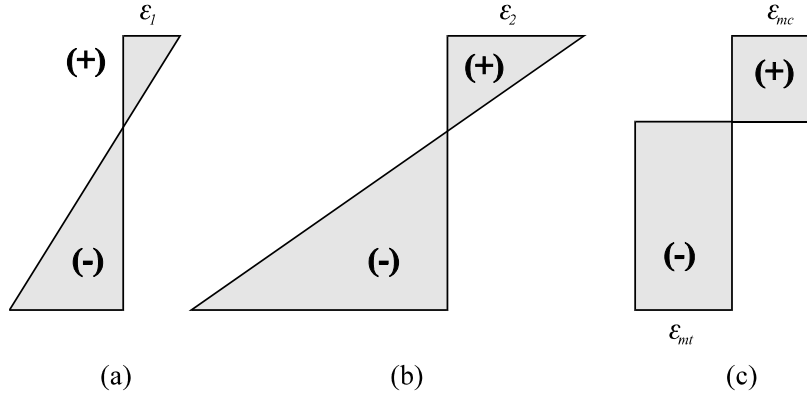


Figura 3-5: “Plastificação” da seção

- ε_{ct} : deformação de “escoamento” do concreto (c) à tração (t).
- ε_{sc} : deformação de escoamento do aço (s) à compressão (c).
- ε_{st} : deformação de escoamento do aço (s) à tração (t).

As deformações que causarão o escoamento simultâneo dos materiais serão:

- $\varepsilon_{mc} = \max(\varepsilon_{cc}, \varepsilon_{sc})$
- $\varepsilon_{mt} = \min(\varepsilon_{ct}, \varepsilon_{st})$

Com esta idéia volta-se a ter necessidade do conceito de “linha neutra” (L.N.). Para a FOC necessita-se do conhecimento de sua direção (determinada pelo ângulo φ) e de sua profundidade relativa (β). Observe-se ainda que, na verdade, a linha neutra é um ponto de descontinuidade em termos das deformações na seção transversal; para fins práticos, no entanto, é suficiente a sua consideração usual (pontos sobre a linha neutra têm deformação nula).

Percebe-se, com o auxílio da Figura 3-6, que o cálculo dos esforços resistentes da seção resume-se ao cálculo das áreas comprimidas (+) e tracionadas (-) da seção e do somatório das tensões nas barras da seção transversal (escoando em compressão ou em tração, dependendo de seu posicionamento na seção).

$$N_p = \sigma_{cd} A_{cc} + \sum_{i=1}^n A_{si} f_{yd} s(\varepsilon_i) \quad (3.66)$$

$$M_{px} = \sigma_{cd} S_{xc} - \sum_{i=1}^n A_{si} y_{si} f_{yd} s(\varepsilon_i) \quad (3.67)$$

$$M_{py} = \sigma_{cd} S_{yc} + \sum_{i=1}^n A_{si} x_{si} f_{yd} s(\varepsilon_i) \quad (3.68)$$

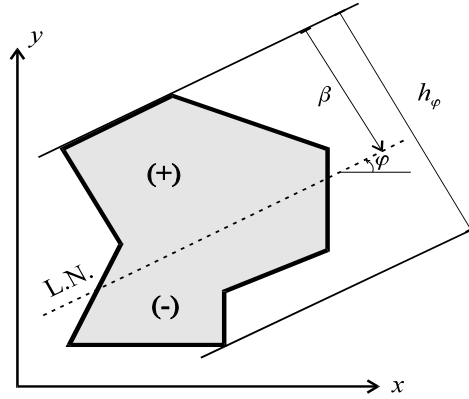


Figura 3-6: Seção transversal “plastificada”

onde

- (N_p, M_{px}, M_{py}) é o terno de esforços resistentes com a seção “plastificada”.
- A_{cc} , S_{xc} e S_{yc} são, respectivamente, a área e momentos estáticos da parte comprimida da seção.
- A_{si} é a área da barra i ($i = 1 \dots n$).
- (x_{si}, y_{si}) são as coordenadas da barra i .
- $s(\varepsilon_i)$ é o sinal da deformação ε_i da barra i ,

$$s(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ +1 & x > 0 \end{cases} . \quad (3.69)$$

O cálculo dos esforços resistentes pode ser feito, por exemplo, com metodologia desenvolvida em [47].

Observações:

1. Os esforços resistentes são função dos valores de tensões nos patamares de escoamento dos materiais, do formato da seção transversal, do arranjo e distribuição da armadura, da profundidade β e do ângulo φ da linha neutra.
2. Não se trata, na verdade, de plastificação uma vez que, por hipótese, os materiais são considerados elásticos não-lineares. O termo plastificação se justifica, no entanto, para uma melhor fixação de idéias.

3. Nota-se que os esforços resistentes deverão apresentar descontinuidades observando-se, por exemplo, a definição da função sinal $s(x)$. Quando a linha neutra estiver exatamente sobre uma barra, esta não contribui para os esforços resistentes da seção. Como a situação é hipotética (curvaturas infinitas) não há uma transição suave entre a barra tracionada, com deformação nula e comprimida.

A existência destas “descontinuidades” tira bastante (ou toda) utilidade prática da análise mas, nem por isso, deixa de retratar a limitação da capacidade resistente da seção de forma clara. Fisicamente, em uma destas descontinuidades, percebe-se que a seção não é capaz de equilibrar tais esforços nem com curvaturas infinitas.

4. A profundidade β da linha neutra só precisa ser modificada “dentro” da seção transversal. Para $\beta \leq 0$ tem-se o caso de tração uniforme (toda a seção com ε_{mt}); para $\beta \geq h_\varphi$ tem-se o caso de compressão uniforme (toda a seção com ε_{mc}). Desta forma, com esta única análise, podem ser calculados todos os esforços resistentes “mínimos” e “máximos” da seção (variando a profundidade β de 0 a h_φ).
5. Esta análise fornece valores máximos e mínimos que, numericamente, **nunca** serão alcançados pois, como se sabe, representações computacionais de números reais (aritmética de ponto flutuante) são feitas com número finito de algarismos significativos; assim, as curvaturas infinitas nunca poderão ser observadas. Tratam-se, portanto, de limites inatingíveis através do método de Newton-Raphson, caracterizando, de forma teórica, a capacidade resistente da seção.
6. Para o caso da FNC tem-se uma visualização imediata do fenômeno de resistência finita da seção. Para a FOC, no entanto, ter-se-ia que obter as envoltórias dos esforços limites que, de forma prática, inviabiliza a utilização desta análise.
7. Deve-se observar, finalmente, que esta análise não se utiliza do conceito de Estado Limite Último. É uma análise da capacidade resistente da seção, função de seus materiais componentes, ou seja, é uma análise “puramente mecânica”.

3.2.1 Exemplo de FNC

Considerando a seção (adimensional) da Figura 3-7 foram feitos os gráficos de esforços resistentes máximos considerando a flexão em torno do eixo horizontal. Os esforços resistentes são N_p e M_p (o índice x do momento M_{px} foi omitido).

Exemplo 3-1 Considerando $A_{s1} = A_{s2} = 0,2$ e variando β de 0 à 1 de 0,01 em 0,01 foram obtidos os esforços resistentes representados nas Figuras 3-8, 3-9 e 3-10.

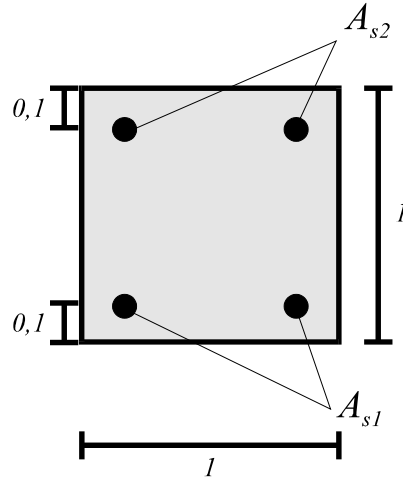


Figura 3-7: Seção dos exemplos de FNC

O “ponto” isolado observado em todos os gráficos representa a profundidade da “linha neutra” β exatamente sobre uma das duas camadas de barras. Como já comentado, para este tipo de análise, existirão tantas descontinuidades quantas forem as camadas de barras.

Exemplo 3-2 Considerando $A_{s1} = 0,32$ e $A_{s2} = 0,08$ e variando β de 0 à 1 de 0,01 em 0,01 foram obtidos os esforços resistentes representados na Figuras 3-11.

Observe que a assimetria da armadura faz com que a compressão uniforme só possa ser alcançada com a aplicação conjunta de esforço normal e momento fletor não nulos.

Exemplo 3-3 Utilizou-se o método de Newton-Raphson para a verificação dos gráficos anteriores. Variando o esforço normal desde $-0,4$ até $1,4$ (de 0,05 em 0,05) e variando o momento fletor de 0,001 em 0,001 procurou-se o par de esforços que ainda apresentavam solução pelo método de Newton-Raphson. Os gráficos obtidos estão representados nas Figuras 3-12 e 3-13.

Note-se que estes gráficos representam os pares de esforços limites que o método de Newton-Raphson consegue achar. São valores, portanto, inferiores aos dos gráficos teóricos dos Exemplos 3-2 e 3-3 anteriores. Note-se ainda que não mais existe a descontinuidade dos esforços resistentes uma vez que o método de Newton-Raphson trabalha com a distribuição de deformações na seção transversal “real” (ou seja, distribuição de deformações na seção transversal linear).

Os valores observados confirmam a tendência dos gráficos teóricos e comprovam a incapacidade da seção resistir, com curvatura infinita, aos esforços que se apresentam nas descontinuidades observadas nos Exemplos 3-2 e 3-3.

3.2.2 Exemplo 3-4 de FOC

Considerando a seção (adimensional) da Figura 3-14 (com área total de aço $A_s = 0,6143$ distribuída em 7 barras iguais) foi obtido o diagrama de esforços máximos resistentes para um esforço normal $N_p = 1,0$. Como já mencionado, a análise de “plastificação” não é viável para uma seção submetida a FOC (em função, basicamente, das descontinuidades apresentadas na análise pela condição discreta da distribuição da armadura).

O gráfico mostrado na Figura 3-15 retrata os máximos valores que o método de Newton-Raphson consegue obter (os momentos fletores foram variados de 0,001 em 0,001).

3.3 Verificação do Estado Limite Último

Em problemas de estabilidade a distribuição de deformações da seção transversal é qualquer. Precisa-se saber, portanto, se determinada distribuição de deformações causa, ou não, algum estado limite último [2].

Seja ε_c a maior deformação da seção transversal (lembrar que encurtamentos são positivos e alongamentos são negativos). Esta definição se faz necessária uma vez que os Domínios de Deformações são definidos para momentos fletores sempre positivos. Seja β_1 a distância do CG da camada de barras mais alongada à borda mais comprimida dividida pela altura total (h_φ) da seção e θ a curvatura majorada adimensional da seção dada por

$$\theta = 1000 \frac{h_\varphi}{r}. \quad (3.70)$$

Convém lembrar que as distâncias são relativas à direção da flexão, por exemplo, h_φ é a altura total da seção medida perpendicularmente à direção da linha neutra.

Trabalhando com as deformações em ‰ o vetor curvatura já definido $\boldsymbol{\kappa} = \kappa_x \mathbf{i} + \kappa_y \mathbf{j}$ tem como norma

$$\|\boldsymbol{\kappa}\| = \kappa = 1000 \frac{1}{r}, \quad (3.71)$$

desta forma,

$$\theta = \kappa h_\varphi \quad (3.72)$$

A profundidade adimensional da linha neutra ($\beta_x = \hat{x} / h_\varphi$) pode ser calculada por

$$\beta_x = \frac{\varepsilon_c}{\theta}.$$

Observação: \hat{x} é a medida usual de linha neutra na literatura: distância da linha neutra (medida perpendicularmente à própria linha neutra) até a borda mais comprimida da seção.

Domínios 1 e 2:

Nestes Domínios a linha neutra é tal que

$$\varepsilon_c \leq \frac{7\beta_1\theta}{27} \quad (3.73)$$

e, para que não seja ultrapassada a deformação plástica excessiva da armadura, deve-se ter

$$\varepsilon_{s1} = \varepsilon_c - \theta\beta_1 \geq -10 \quad (3.74)$$

onde ε_{s1} representa a deformação da camada de barras mais alongada (camada com a menor deformação).

Domínios 3, 4 e 4a:

A linha neutra deve estar no intervalo

$$\frac{7\beta_1\theta}{27} \leq \varepsilon_c \leq \theta \quad (3.75)$$

e, para não ultrapassar o encurtamento convencional de ruptura do concreto, deve-se obedecer

$$\varepsilon_c \leq \frac{7}{2} \quad (3.76)$$

Domínio 5:

A linha neutra deve estar fora da seção

$$\varepsilon_c \geq \theta \quad (3.77)$$

e o encurtamento na fibra a $3h/7$ deve ser inferior a 2 por mil:

$$\varepsilon_c - \frac{3\theta}{7} \leq 2 \quad (3.78)$$

A análise conjunta de todas as inequações anteriores leva à construção de uma *região viável* para os pares (ε_c, θ) tais que o ELU não seja ultrapassado. Analiticamente esta região pode ser definida

por:

$$\mathbf{A} : \begin{cases} -10 \leq \varepsilon_c \leq 2 & \Rightarrow & 0 \leq \theta \leq \frac{10 + \varepsilon_c}{\beta_1} \\ 2 \leq \varepsilon_c \leq \frac{7}{2} & \Rightarrow & \frac{7(\varepsilon_c - 2)}{3} \leq \theta \leq \frac{10 + \varepsilon_c}{\beta_1} \end{cases} \quad (3.79)$$

ou

$$\mathbf{B} : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{7}{2} & \Rightarrow & \theta\beta_1 - 10 \leq \varepsilon_c \leq 2 + \frac{3\theta}{7} \\ \frac{7}{2} \leq \theta \leq \frac{27}{2\beta_1} & \Rightarrow & \theta\beta_1 - 10 \leq \varepsilon_c \leq \frac{7}{2} \end{cases} \quad (3.80)$$

Qualquer par (ε_c, θ) fora das regiões definidas pelas equações **A** ou **B** caracteriza a ruptura da seção (o Estado Limite Último terá sido ultrapassado). A região viável pode ser visualizada na Figura (3-16).

Pares (ε_c, θ) no interior do polígono $abcd$ não causam nenhum estado limite. Pares (ε_c, θ) externos ao polígono $abcd$ ultrapassam, no mínimo, um estado limite. Há uma correspondência entre pontos nas arestas do polígono $abcd$ e os Domínios de Deformação conforme a tabela a seguir:

Aresta	Domínio(s)
$a-b$	5
$b-c$	4a, 4 e 3
$c-d$	2 e 1

Efetuada-se uma circuição pelas arestas da região viável no sentido horário $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d$ a linha neutra varia de $+\infty$ à $-\infty$ passando, respectivamente, pelos domínios 5, 4a, 4, 3, 2 e 1.

Pode-se mostrar que quando são permitidas curvaturas θ com sinal (positivas para momentos fletores positivos) a região viável fica com o aspecto esquematizado na Figura 3-17 (β_{nc} é a distância da camada de barras superior quando a altura da seção é tomada como a unidade). Continua a haver a correspondência entre as arestas e os Domínios de Deformações: Aresta (a)-(f): Domínio 5. Aresta (f)-(e): Domínios 4a, 4 e 3. Aresta (e)-(d): Domínios 2 e 1.

Observação: Seria mais simples, na opinião do autor, que o polo de ruína de deformação plástica excessiva fosse definido em termos do alongamento máximo na **seção de concreto**. Desta forma eliminaria-se o parâmetro β_1 definido anteriormente e, de fato, nunca se teria, em qualquer ponto da seção transversal, um alongamento, em módulo, superior a 10 ‰. Quando se fixa o máximo alongamento na armadura de 10 ‰ permite-se, em pontos “inferiores” à armadura (já que deve existir um cobrimento mínimo da mesma), que a seção fique sujeita a alongamentos superiores a este. De forma prática a consideração anterior implica na utilização de $\beta_1 = 1$ para qualquer distribuição

de armadura e, pela diminuição da região viável, este procedimento seria sempre a favor da segurança.

3.3.1 Compatibilidade de notação

Pode-se passar de um conjunto de notação (ε_c , θ e φ) para o outro (ε_o , κ_x e κ_y) através das seguintes considerações (baseadas na Figura 3-18).

Deve-se pesquisar, em todos os vértices da seção, quais têm, respectivamente, a maior e a menor deformação. Admitindo que tais vértices possuam as coordenadas $(x_{\varepsilon \max}, y_{\varepsilon \max})$ e $(x_{\varepsilon \min}, y_{\varepsilon \min})$ pode ser construído o vetor \mathbf{u}_c

$$\mathbf{u}_c = (x_{\varepsilon \max} - x_{\varepsilon \min}) \mathbf{i} + (y_{\varepsilon \max} - y_{\varepsilon \min}) \mathbf{j} \quad (3.81)$$

(correspondente, na Figura 3-18, ao vetor \overrightarrow{BA}). O ângulo deste vetor com o eixo horizontal pode ser dado por

$$\varphi_c = \arctan \left(\frac{y_{\varepsilon \max} - y_{\varepsilon \min}}{x_{\varepsilon \max} - x_{\varepsilon \min}} \right) \quad (3.82)$$

e a inclinação do vetor curvatura por

$$\varphi_k = \arctan \left(\frac{\kappa_y}{\kappa_x} \right). \quad (3.83)$$

Observação: Deve-se tomar cuidado na programação da função arco-tangente uma vez que os argumentos anteriores são frações e podem ter o denominador nulo.

A altura h_φ da seção, medida perpendicularmente à linha neutra (L.N.), pode ser obtida observando-se o ângulo \widehat{ABC} da Figura 3-18:

$$h_\varphi = \|\mathbf{u}_c\| |\sin(\varphi_k - \varphi_c)|. \quad (3.84)$$

Raciocínio análogo leva ao cálculo da posição da camada de barras mais alongada. Deve-se determinar, dentre todas as camadas de barras, qual a mais alongada. Admitindo que tal barra tenha coordenadas $(x_{s \min}, y_{s \min})$ podem ser calculados os vetores

$$\mathbf{u}_s = (x_{\varepsilon \max} - x_{s \min}) \mathbf{i} + (y_{\varepsilon \max} - y_{s \min}) \mathbf{j}, \quad (3.85)$$

$$\varphi_s = \arctan \left(\frac{y_{\varepsilon \max} - y_{s \min}}{x_{\varepsilon \max} - x_{s \min}} \right), \quad (3.86)$$

e

$$d_1 = \|\mathbf{u}_s\| |\sin(\varphi_k - \varphi_s)| \quad (3.87)$$

e, finalmente,

$$\beta_1 = \frac{d_1}{h_\varphi}. \quad (3.88)$$

As equações anteriores permitem, com o conhecimento do terno $(\varepsilon_o, \kappa_x, \kappa_y)$, o cálculo de ε_c (que é o maior encurtamento da seção, obtido na pesquisa dos vértices), e, com

$$k = \|\mathbf{k}\| = \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}, \quad (3.89)$$

pode-se calcular a curvatura majorada adimensional, na direção da flexão,

$$\theta = k h_\varphi. \quad (3.90)$$

Com o terno $(\varepsilon_c, \theta$ e $\varphi)$ pode-se obter o terno $(\varepsilon_o, \kappa_x, \kappa_y)$, lembrando que $\varphi = \varphi_k + \pi$ (uma vez que κ_x e κ_y positivos implicam, pela regra da mão direita, que a “parte inferior” da seção fique comprimida) e que

$$k = \frac{\theta}{h_\varphi}, \quad (3.91)$$

(a altura h_φ tem que ser calculada “de modo tradicional”, ou seja, executando uma rotação da seção e pesquisando os vértices com maior e menor ordenadas), assim:

$$\kappa_x = -k \cos \varphi \quad (3.92)$$

$$\kappa_y = -k \sin \varphi \quad (3.93)$$

O cálculo da deformação na origem (ε_o) demanda o conhecimento da distância d_o da origem do sistema de coordenadas $(x \times y)$, medida perpendicularmente à linha neutra, à borda mais comprimida da seção. Com esta distância e lembrando que a distribuição de deformações na seção transversal é linear tem-se

$$\varepsilon_o = \varepsilon_c - \theta \frac{d_o}{h_\varphi}. \quad (3.94)$$

Observação: Quando as duas curvaturas forem nulas ($\kappa_x = \kappa_y = 0$) fica sem sentido o termo linha neutra por se tratar de uma compressão/tração uniforme.

3.3.2 Exemplos de verificação

São apresentados alguns exemplos de verificação. Nos exemplos foram utilizados os seguintes dados:

- Resistência característica do concreto: $f_{ck} = 2 \text{ kN/cm}^2$.

- Coeficiente de minoração da resistência do concreto: $\gamma_c = 1,5$.
- Tensão de cálculo no concreto: $\sigma_{cd} = 0,85 f_{ck}/\gamma_c$.
- Tensão de escoamento do aço: $f_{yk} = 50 \text{ kN/cm}^2$.
- Classe do aço: “A”.
- Módulo de deformabilidade longitudinal do aço: $E_s = 20000 \text{ kN/cm}^2$.
- Coeficiente de minoração da resistência do aço: $\gamma_s = 1,15$.

As seções transversais utilizadas estão esquematizadas nas figuras (3-19) e (3-20). A origem do sistema de coordenadas que define a seção ($x \times y$) coincide com o centro geométrico (CG) da área bruta da seção de concreto.

Os resultados obtidos são mostrados a seguir. A coluna Iterações mostra o número de iterações realizadas pelo método de Newton-Raphson. A situação das seções pode ser uma das seguintes:

- OK: A verificação da seção ocorreu sem problemas e a distribuição de deformações não ultrapassa nenhum dos polos de ruína (ou seja, o ELU **não** foi ultrapassado).
- ELU: A verificação da seção ocorreu sem problemas e a distribuição de deformações ultrapassa pelo menos um dos polos de ruína (ou seja, o ELU foi ultrapassado). Este tipo de situação não é satisfatória!
- Ruína: Não foi possível equilibrar a seção transversal (a seção não tem capacidade “física” para suportar os esforços aplicados). Este tipo de situação também não é satisfatória.

Seção retangular: 4 ϕ 25 mm								
Exemplo	N_d (kN)	M_{xd} (kN.cm)	M_{yd} (kN.cm)	ε_o	κ_x	κ_y	Iterações	Situação
1	1000	-5000	-2000	0,78947	-0,01486	-0,04710	4	OK
2	1000	-14000	-2000	0,87607	-0,04736	-0,06005	5	OK
3	1000	-16442	-2000	1,00943	-0,06603	-0,08432	6	ELU
4	1000	-17000	-2000	1,04612	-0,07078	-0,09073	6	ELU
5	1000	-3000	-8000	-	-	-	6	Ruína

Seção “L”: 7 ϕ 16 mm								
Exemplo	N_d (kN)	M_{xd} (kN.cm)	M_{yd} (kN.cm)	ε_o	κ_x	κ_y	Iterações	Situação
1	1000	-4350	-10200	1,51929	0,00488	-0,12441	7	OK

Observações:

1. As verificações acompanham os exemplos observados em [69], com as alterações devidas nos momentos fletores uma vez que as convenções são distintas. Com exceção do exemplo 3 para a seção retangular, todas as conclusões sobre as verificações concordam com a referência citada. No exemplo 3 foi obtido um encurtamento máximo no concreto de 3,5033 ‰ (foi considerado, portanto, que a distribuição de deformações ultrapassa o ELU).
2. Todas as verificações foram realizadas muito rapidamente (a percepção do usuário, na máquina de teste, é de que as verificações foram “instantâneas”).
3. O critério de convergência adotado para o método de Newton foi $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq 1 \times 10^{-5}$.

3.4 Dimensionamento da armadura da seção

Discute-se como proceder ao dimensionamento da armadura de uma seção transversal de concreto armado quando submetida a FOC (flexão oblíqua composta). Obviamente os dimensionamentos da armadura da seção quando submetida a FNC (flexão normal composta) ou a FNS (flexão normal simples) são decorrências imediatas do primeiro caso.

Por se tratar de um problema numericamente complexo (seção qualquer, material não homogêneo e com diagrama tensão-deformação elástico não linear), o dimensionamento da armadura de seções submetidas a FOC é tratado, em toda a literatura, como uma sucessão de verificações. Tais verificações

são, via de regra, demoradas e, em alguns casos, imprecisas. A maioria dos procedimentos de verificação impõem, também, a obediência ao Diagrama de Domínios (ou seja, verifica-se a seção supondo que o ELU esteja sendo obedecido).

O procedimento de dimensionamento apresentado neste trabalho não foge da metodologia usual, ou seja, trata-se o problema de dimensionamento como uma sucessão de verificações (obviamente utilizando o método de Newton-Raphson) mas com a diferença básica (decorrente da própria formulação do método de Newton-Raphson) de que não se impõe a obediência prévia ao ELU. Procedendo-se desta maneira fica-se obrigado a verificar, posteriormente, se o ELU está sendo, ou não, ultrapassado mas, como vantagem, executa-se uma busca sem restrições (aplicação imediata do método de Newton-Raphson).

Outra consideração importante é o fato de que as barras para estruturas de concreto armado são encontradas em diâmetros (bitolas) discretas, ou seja, não se pode, usualmente, escolher arbitrariamente o diâmetro das barras da seção transversal. Levando este fato em consideração percebe-se que a maioria dos algoritmos de verificação (e, conseqüentemente, de dimensionamento) perdem muito tempo ao tentar encontrar a área de armadura necessária considerando que a mesma possa variar continuamente (ou seja, a bitola é tratada como uma variável contínua, podendo assumir qualquer valor positivo).

Desta forma, levando-se em consideração as bitolas recomendadas em Norma [1] pode-se proceder a verificações sucessivas admitindo-se que as barras tenham certas bitolas discretas (e não arbitrárias). Este procedimento ainda apresenta a vantagem de mostrar, fielmente, a situação da seção transversal com a bitola escolhida e não uma situação fictícia (ainda que próxima da real) para uma armadura não existente. Na prática, e didaticamente, este procedimento se justifica de forma contundente: Para que fazer um dimensionamento “preciso”, obtendo-se a área de armadura com várias casas decimais, quando, depois, será escolhida uma barra que forneça uma área de armadura igual ou superior àquela calculada? (Note ainda que a igualdade de área, de fato, nunca ocorre e, em todos os “arredondamentos”, acaba-se por colocar mais armadura que o necessário).

Considerando-se que problemas de FOC, em geral, são caracterizados por uma distribuição de armadura discreta (em oposição aos problemas de FNC e FNS que podem se utilizar dos conceitos de “camadas de barras”), as afirmações anteriores ganham ainda mais força. Ficam mais simples, também, considerações sobre o detalhamento da armadura longitudinal (uma vez que se trabalha com o diâmetro real das barras).

Cabe uma ressalva importante sobre o arranjo da armadura. Para que este método de verificação possa ser usado com sucesso no dimensionamento é necessário que a distribuição de armadura seja

mono-paramétrica, ou seja, a caracterização das áreas de todas as barras deve ser controlada por um único parâmetro. Um exemplo típico de arranjo mono-paramétrico é aquele onde são conhecidas as posições (coordenadas) de todas as barras que são, por hipótese, de mesma bitola; assim, o conhecimento da (única) bitola permite a completa determinação das áreas de todas as barras. Este tipo de arranjo, naturalmente, na prática é bastante comum. Arranjos de armadura que não sejam mono-paramétricos exigem a aplicação de outras técnicas numéricas (por exemplo, programação matemática) e não serão abordados neste trabalho.

Feitas as considerações anteriores, o “algoritmo” de dimensionamento se resume, simplesmente, em:

1. Escolher uma bitola comercial (se todas já foram verificadas e não houve solução, termine).
2. Fazer a verificação da seção. Se a seção suporta os esforços vá para o passo 3, caso contrário, volte ao passo 1.
3. Verificar se o ELU está sendo respeitado. Se estiver termine, caso contrário volte ao passo 1.

As bitolas especificadas em Norma [1] são:

Bitolas comerciais (mm)						
2,4	3,4	3,8	4,2	4,6	5,0	5,5
6,0	6,3	6,4	7,0	8,0	9,5	10,0
12,5	16,0	20,0	22,0	25,0	32,0	40,0

3.4.1 Exemplos de dimensionamento

As seções transversais utilizadas são as mesmas dos exemplos de verificação e estão esquematizadas nas figuras (3-19) e (3-20). A origem do sistema de coordenadas que define a seção (plano xy) coincide com o centro geométrico (CG) da área bruta da seção de concreto. Todas as barras têm, por hipótese, o mesmo diâmetro.

Seção retangular							
Exemplo	N_d (kN)	M_{xd} (kN.cm)	M_{yd} (kN.cm)	ε_o	κ_x	κ_y	Bitola (mm)
1	1000	-5000	-2000	1,18396	-0,03095	-0,09157	16
2	1000	-14000	-2000	0,89577	-0,04893	-0,06294	25
3	1000	-16442	-2000	0,66485	-0,03674	-0,03924	32
4	1000	-17000	-2000	0,66575	-0,03816	-0,03967	32
5	1000	-3000	-8000	0,67118	-0,00789	-0,17110	32

Seção “L”							
Exemplo	N_d (kN)	M_{xd} (kN.cm)	M_{yd} (kN.cm)	ε_o	κ_x	κ_y	Bitola (mm)
1	1000	-4350	-10200	1,48840	0,00386	-0,12176	16

Observações:

1. Os dimensionamentos acompanham os exemplos observados em [69], com as alterações devidas nos momentos fletores uma vez que as convenções são distintas. No exemplo 3, como já observado nos exemplos de verificação, há uma discrepância entre nossos resultados e os da referência e, daí, se justifica a adoção de uma bitola superior (na referência foi utilizada bitola de 25 mm de diâmetro).
2. Todos os dimensionamentos foram realizados muito rapidamente (a percepção do usuário, na máquina de teste, é de que os dimensionamentos foram “instantâneos”).
3. O critério de convergência adotado para a verificação com o método de Newton-Raphson foi $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq 1 \times 10^{-5}$.
4. Para os exemplos foi iniciada a pesquisa com bitola nula e esta foi sendo aumentada na sequência das bitolas comerciais (2,4; 3,4 etc). Por se tratar de exemplo didático, não houve preocupação com regras de detalhamento (espaçamento entre barras, área de armadura mínima ou máxima etc).
5. Pode-se executar o “dimensionamento” utilizando-se a área total de armadura como parâmetro (sem, portanto, fazer a especificação de bitolas). O procedimento é idêntico ao apresentado para a seção retangular sob FNC (página 83).

3.4.2 Observação sobre o arranjo de armadura

O conceito de “camadas de barras” é intuitivo (e preciso) quando estas camadas são paralelas à linha neutra. Nos casos de FNS e FNC as camadas ficam naturalmente definidas e podem ser utilizadas sem prejuízo nenhum da precisão dos processos de verificação e dimensionamento². Quando se trabalha com FOC, no entanto, o conceito de camadas para de ser natural pois a linha neutra pode assumir qualquer direção. A definição de camadas fica completamente sem sentido quando baseada na geometria da seção. Fica ainda mais sem sentido quando o dimensionamento foi realizado com uma direção de linha neutra arbitrária.

A título de exemplo foram estudadas as seções transversais mostradas na Figura (3-21). A seção transversal de concreto é a mesma, a área total de aço também é a mesma (apesar de variar a área de cada barra para cada uma das seções). Foram aplicadas duas distribuições de deformações e calculados os esforços resistentes das várias seções.

Os resultados numéricos obtidos mostram que não há variação sensível no esforço normal resistente (N_R) nem no momento fletor resistente na direção x (M_{xR}). Notam-se, entretanto, diferenças significativas no momento fletor resistente na direção y (variações de até 40% contra a segurança).

Os exemplos seguinte foram calculados com os seguintes dados:

- $f_{ck} = 2 \text{ kN/cm}^2$. $\gamma_c = 1,5$ e $\sigma_{cd} = 0,85 f_{ck}/\gamma_c$.
- $f_{yk} = 50 \text{ kN/cm}^2$. $\gamma_s = 1,15$, $E_s = 20000 \text{ kN/cm}^2$ e aço classe “A”.
- Área total de aço, $A_s = 20 \text{ cm}^2$ (para todas as seções).
- Armadura distribuída em duas “camadas” (com mesmo posicionamento relativo):
 - Seção **a**: 2 barras em cada “camada”.
 - Seção **b**: 3 barras em cada “camada”.
 - Seção **c**: 5 barras em cada “camada”.
 - Seção **d**: 9 barras em cada “camada”.
- Seção retangular ($20 \times 50 \text{ cm}$)

Exemplo 1: $\varepsilon_o = 0,76$ $\kappa_x = 0,003$ e $\kappa_y = 0,02$ (FOC fora do ELU).

Esforço normal resistente, $N_R = 997,37 \text{ kN}$.

Momento fletor resistente na direção x , $M_{xR} = 1019,97 \text{ kN.cm}$.

²Levando em consideração o diâmetro usual das barras e a porcentagem da área de aço na seção de concreto.

Seção	a	b	c	d
M_{yR} (kN.cm)	860,44	729,78	664,44	631,78

Exemplo 2: $\varepsilon_o = \kappa_x = 0$ e $\kappa_y = 0,35$ (FNC no ELU).

Esforço normal resistente, $N_R = 458,73$ kN.

Momento fletor resistente na direção x , $M_{xR} = 0$ kN.cm.

Seção	a	b	c	d
M_{yR} (kN.cm)	8766,09	6737,11	5799,92	5365,68

Observação: Aplicando os esforços resistidos pela seção (a) à seção (d) observa-se que embora no

Exemplo 1 ainda se alcance uma solução (com distribuição de deformações diferente: $\varepsilon_o = 0,76295$, $\kappa_x = 0,00300$ e $\kappa_y = 0,02729$), para o **Exemplo 2** não há equilíbrio da seção (d).

Conclui-se, como era esperado, que o conceito de camadas é útil e preciso somente em casos de “flexão reta” (FNS e FNC). Em problemas de FOC, portanto, a armadura deve ser caracterizada com barras e não com “camadas”.

3.5 Aplicação à seção retangular sob FNC

Por ser a seção retangular, na prática, muito comum, o autor acredita que a particularização das expressões obtidas para uma seção genérica se faz pertinente.

Tomando por base a seção mostrada na Figura (3-3) e, por definição, supondo que a flexão se dá segundo o eixo horizontal ($\kappa_y = 0$), as seguintes simplificações podem ser feitas (sem perder a exatidão do processo). Deve-se salientar que o eixo das ordenadas (y) deve ser posicionado exatamente sobre o eixo de simetria da seção (este eixo de simetria deve ser tanto da seção quanto da armadura). Para não perder (mais) generalidade deixou-se que o eixo das abscissas (x) fosse posicionado em qualquer ponto (não se obrigou, portanto, que o eixo das abscissas coincidisse com o eixo baricêntrico horizontal da seção de concreto).

Equação cinemática:

$$\varepsilon = \varepsilon_o - \kappa_x y. \quad (3.95)$$

Por hipótese a seção está sujeita à deformação ε_1 na fibra inferior (posicionada em $y = y_b$) e sujeita à deformação ε_2 (posicionada em $y = y_t$). Utilizando a equação cinemática obtém-se

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_o - \kappa_x y_b \quad (3.96)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_o - \kappa_x y_t \quad (3.97)$$

Obviamente pelo posicionamento do eixo das abscissas tem-se

$$y_t - y_b = h \quad (3.98)$$

onde h é a altura total da seção retangular.

Esforços resistentes no concreto:

A aplicação das coordenadas da seção transversal às fórmulas desenvolvidas não traz maiores dificuldades. As coordenadas da seção transversal são mostradas na tabela seguinte (b é a base da seção transversal):

i	Lado	x_i	y_i	Δx_i	Δy_i
1	1-2	$+b/2$	y_b	0	h
2	2-3	$+b/2$	y_t	$-b$	0
3	3-4	$-b/2$	y_t	0	$-h$
4	4-1	$-b/2$	y_b	b	0

Utilizando as equações (2.54) e (2.52) obtém-se o esforço normal resistente do concreto:

$$N_c = \frac{b}{\kappa_x} (I_1(\varepsilon_1) - I_1(\varepsilon_2)) \quad (3.99)$$

Para o momento fletor resistente obtém-se (como se trata de FNC, $M_{cy} = 0$):

$$M_{cx} = -\frac{b}{\kappa_x} \left(I_1(\varepsilon_1) y_b - I_1(\varepsilon_2) y_t + \frac{I_2(\varepsilon_1) - I_2(\varepsilon_2)}{\kappa_x} \right) \quad (3.100)$$

As duas equações anteriores, obviamente, só valem para $\kappa_x \neq 0$. No caso de compressão centrada ($\kappa_x = 0 \Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_o$) deve-se utilizar as expressões para curvatura nula.

$$\kappa_x = 0 \Rightarrow \begin{cases} N_c = A_c \sigma(\varepsilon_o) = \sigma(\varepsilon_o) bh \\ M_{cx} = S_x \sigma(\varepsilon_o) = \sigma(\varepsilon_o) \frac{bh}{2} (y_b + y_t) \end{cases} \quad (3.101)$$

Não parece ser interessante explicitar mais ainda as equações anteriores impondo o conhecimento do diagrama tensão-deformação do material. As expressões obtidas são simples o suficiente para a sua programação direta (permitindo até, se necessário, o cálculo manual).

Para a obtenção das derivadas dos esforços resistentes o trabalho é similar e se faz necessária a

avaliação da matriz:

$$\mathbf{J}_c = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_c}{\partial \varepsilon_o} & \frac{\partial N_c}{\partial \kappa_x} \\ \frac{\partial M_{cx}}{\partial \varepsilon_o} & \frac{\partial M_{cx}}{\partial \kappa_x} \end{bmatrix}. \quad (3.102)$$

Aplicando as expressões obtidas à seção retangular obtem-se ($\kappa_x \neq 0$):

$$\frac{\partial N_c}{\partial \varepsilon_o} = \frac{b}{\kappa_x} (\sigma(\varepsilon_1) - \sigma(\varepsilon_2)) \quad (3.103)$$

$$\frac{\partial N_c}{\partial \kappa_x} = \frac{\partial M_{cx}}{\partial \varepsilon_o} = -\frac{N_c + b (\sigma(\varepsilon_1) y_b - \sigma(\varepsilon_2) y_t)}{\kappa_x} \quad (3.104)$$

$$\frac{\partial M_{cx}}{\partial \kappa_x} = \frac{-2 M_{cx} + b (\sigma(\varepsilon_1) y_b^2 - \sigma(\varepsilon_2) y_t^2)}{\kappa_x} \quad (3.105)$$

Para a curvatura nula obtem-se ($\kappa_x = 0$):

$$\frac{\partial N_c}{\partial \varepsilon_o} = D(\varepsilon_o) A_c = D(\varepsilon_o) bh \quad (3.106)$$

$$\frac{\partial N_c}{\partial \kappa_x} = \frac{\partial M_{cx}}{\partial \varepsilon_o} = D(\varepsilon_o) S_x = D(\varepsilon_o) \frac{bh}{2} (y_b + y_t) \quad (3.107)$$

$$\frac{\partial M_{cx}}{\partial \kappa_x} = D(\varepsilon_o) I_{xx} = D(\varepsilon_o) \frac{bh}{3} (y_b^2 + y_b y_t + y_t^2) \quad (3.108)$$

Esforços resistentes da armadura:

Para a armadura, a única simplificação pertinente para a FNC é a possibilidade de se utilizar o conceito de camadas ao invés de determinar a posição de cada barra dentro da seção transversal (obviamente as camadas são paralelas ao eixo horizontal). Fora isso, não há mais nenhuma simplificação notável (as equações obtidas anteriormente continuam válidas).

Aplicação do método de Newton-Raphson:

O método de Newton-Raphson pode ser aplicado ao problema de FNC com as seguintes variáveis:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_o \\ \kappa_x \end{Bmatrix} \quad (3.109)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} N_d - N_R \\ M_{xd} - M_{xR} \end{Bmatrix} \quad (3.110)$$

O critério de convergência pode ser $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq \text{tolerância}$ (normalmente 1×10^{-5}). Em termos

práticos isto significa o cálculo de

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| = \sqrt{(N_d - N_R)^2 + (M_{xd} - M_{xR})^2}. \quad (3.111)$$

Por se tratar de um sistema 2×2 a fórmula de recorrência do método de Newton-Raphson pode ser colocada nas suas componentes fornecendo:

$$(\varepsilon_o)_{i+1} = (\varepsilon_o)_i + \frac{1}{\|\mathbf{J}\|} \left(\frac{\partial M_{xR}}{\partial \kappa_x} (N_d - N_R) - \frac{\partial N_R}{\partial \kappa_x} (M_{xd} - M_{xR}) \right) \quad (3.112)$$

$$(\kappa_x)_{i+1} = (\kappa_x)_i + \frac{1}{\|\mathbf{J}\|} \left(-\frac{\partial N_R}{\partial \kappa_x} (N_d - N_R) + \frac{\partial N_R}{\partial \varepsilon_o} (M_{xd} - M_{xR}) \right) \quad (3.113)$$

onde

$$\|\mathbf{J}\| = \frac{\partial N_R}{\partial \varepsilon_o} \frac{\partial M_{xR}}{\partial \kappa_x} - \left(\frac{\partial N_R}{\partial \kappa_x} \right)^2. \quad (3.114)$$

A verificação de seções retangulares sob FNC pode ser resumida nos seguintes passos:

1. Faça $\varepsilon_o = \kappa_x = 0$.
2. Calcular as funções: N_R , M_{xR} e suas derivadas $\frac{\partial N_R}{\partial \varepsilon_o}$, $\frac{\partial N_R}{\partial \kappa_x}$ e $\frac{\partial M_{xR}}{\partial \kappa_x}$. Lembrar que estas funções são resultantes da soma das parcelas do concreto e da armadura.
3. Calcular $\|\mathbf{J}\|$. Se $\|\mathbf{J}\| \simeq 0$ então a seção não suporta os esforços (N_d, M_{xd}) aplicados, termine. Caso $\|\mathbf{J}\| \neq 0$ continue.
4. Calcule o valor da função para a estimativa atual $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|$. Se a precisão está aceitável ($\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq$ tolerância) termine informando a distribuição de deformações obtida (informe se esta distribuição de deformações respeita o ELU). Caso contrário continue.
5. Atualize o valor da estimativa através das equações (3.112) e (3.113). Volte para o passo 2.

Verificação do ELU:

Por se tratar de FNC a verificação do ELU é feita de forma direta utilizando-se as equações (3.79) ou (3.80) esquematizadas na Figura (3-16).

O encurtamento máximo do concreto vale

$$\varepsilon_c = \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad (3.115)$$

e a curvatura majorada adimensional

$$\theta = |\kappa_x| h. \quad (3.116)$$

Necessita-se da pesquisa de qual camada de barra está mais alongada (com ordenada, por definição de $y_{s\min}$) e de qual borda da seção está mais encurtada (que tem deformação ε_c e com ordenada, por definição de $y_{\varepsilon\max}$). Desta forma o parâmetro β_1 pode ser calculado por

$$\beta_1 = \frac{|y_{\varepsilon\max} - y_{s\min}|}{h}. \quad (3.117)$$

Dimensionamento:

O dimensionamento de seções retangulares de concreto armado necessita de algumas observações uma vez que pode-se utilizar o conceito de camadas de barras (na FOC, como já visto, o dimensionamento foi feito como uma sucessão de verificações utilizando-se barras de diâmetros comerciais).

Como a área total de aço na seção é, por motivos construtivos, limitada, pode-se proceder a verificações sucessivas partindo-se de uma área total de aço nula ($A_s = 0$) e caminhando em direção à área máxima ($A_{s\max}$). Pode-se utilizar, por exemplo, o método da bissecção buscando a área de armadura total que faz com que a seção seja capaz de equilibrar os esforços externos sem ultrapassar o ELU.

Uma possível seqüência de tentativas seria:

1. Verifique com $(A_s)_1 = 0$. Se OK termina (avisar que deve ser utilizada a armadura mínima de norma). Caso contrário continue.
2. Verifique com $(A_s)_2 = A_{s\max}$. Se OK continue. Caso contrário termina (avisar que a seção não suporta os esforços).
3. Verifique com $A_s = \frac{(A_s)_1 + (A_s)_2}{2}$.
4. Se OK continue. Caso contrário vá para o passo 6.
5. Se $|(A_s)_1 - (A_s)_2| < \textit{tolerância}$ então aceite o valor de A_s e termine (informar a área obtida). Caso contrário faça $(A_s)_2 \leftarrow A_s$ e vá para o passo 3.
6. Faça $(A_s)_1 \leftarrow A_s$ e volte para o passo 3.

Ao final deste processo será obtida a área de armadura necessária. Pode-se afirmar, dentro da tolerância arbitrada no passo 5, que a armadura obtida foi a mínima necessária.

A área obtida poderá ser “desbitolada” conforme o arranjo de armadura previamente escolhido (a proporção de área de cada camada, com relação à área total da armadura, deve ser mantida). Note que este arranjo de armadura deve ser mono-paramétrico, ou seja, com o conhecimento do valor de A_s devem ser conhecidas todas as áreas de todas as camadas de armadura. Não é possível, portanto,

através desta metodologia, fazer um dimensionamento onde não se conheça, a priori, a distribuição das áreas de aço nas camadas (por exemplo como é o caso da “armadura assimétrica em duas bordas” [65]). Um exemplo corriqueiro de armadura mono-paramétrica é a armadura duplamente simétrica em duas bordas (exemplo, aliás, muito comum nas construções correntes), onde se fixa, a priori, que cada camada possui 50% de A_s ($A_s/2$).

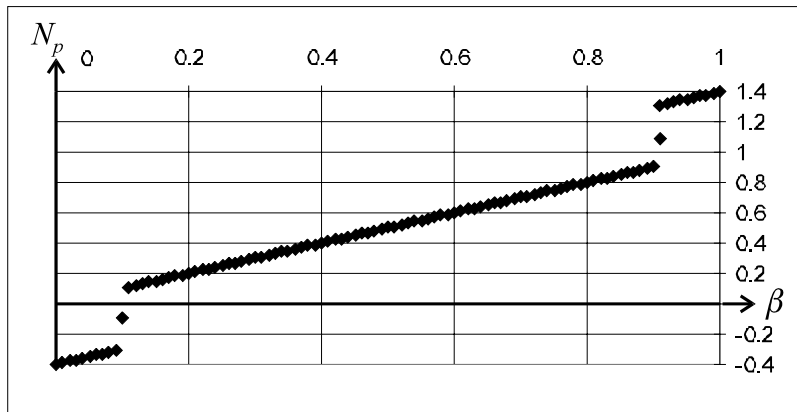


Figura 3-8: $\beta \times N_p$ (Exemplo 3-1)

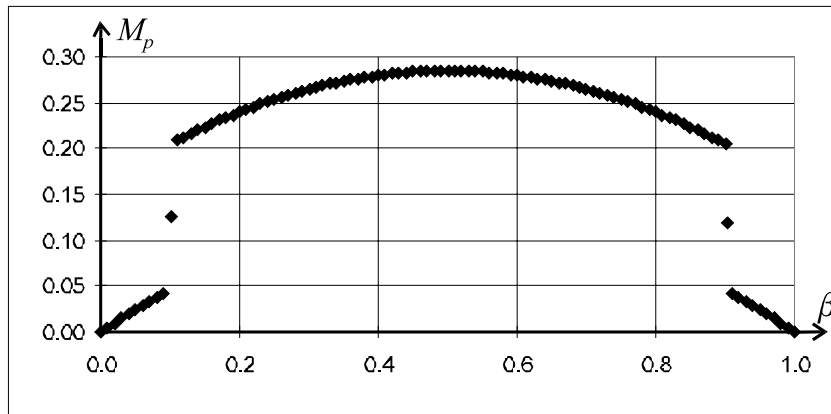


Figura 3-9: $\beta \times M_p$ (Exemplo 3-1)

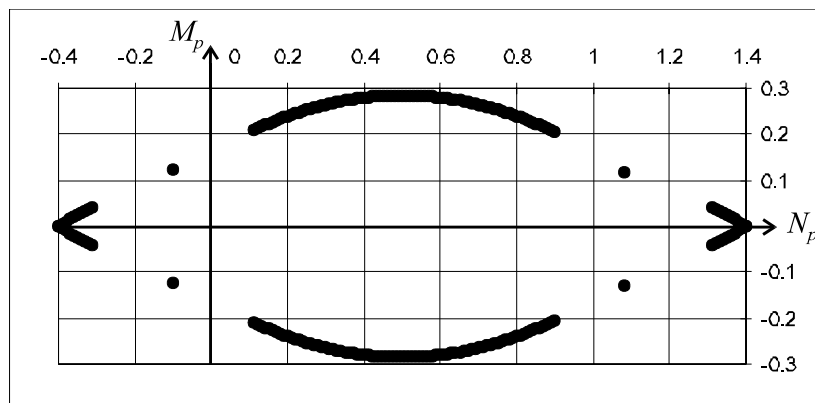


Figura 3-10: $N_p \times M_p$ (Exemplo 3-1)

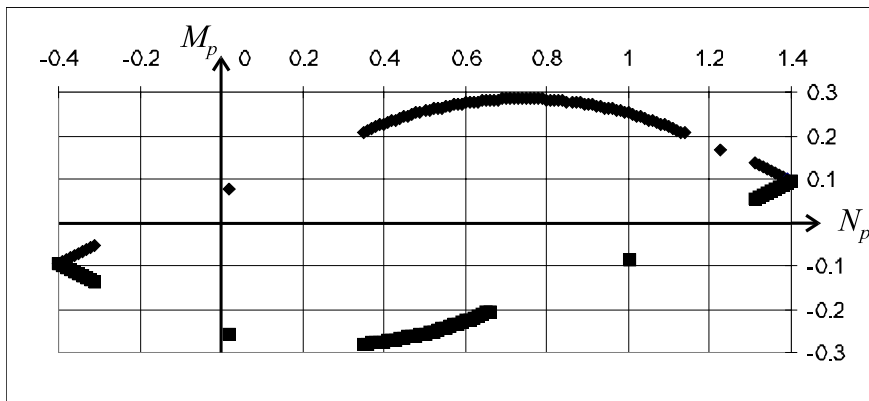


Figura 3-11: $N_p \times M_p$ (Exemplo 3-2)

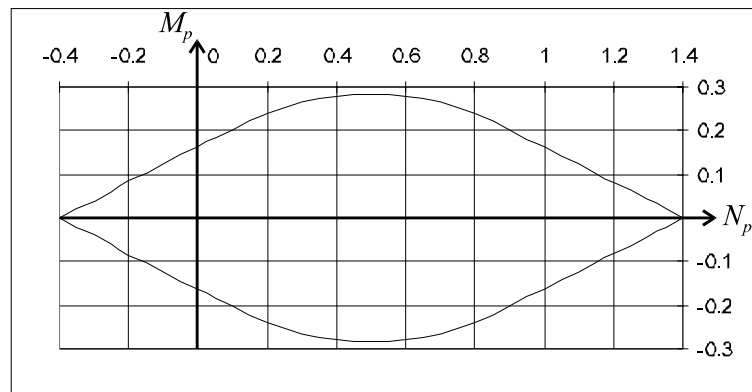


Figura 3-12: Usando Newton: $N_p \times M_p$ (Exemplo 3-3)

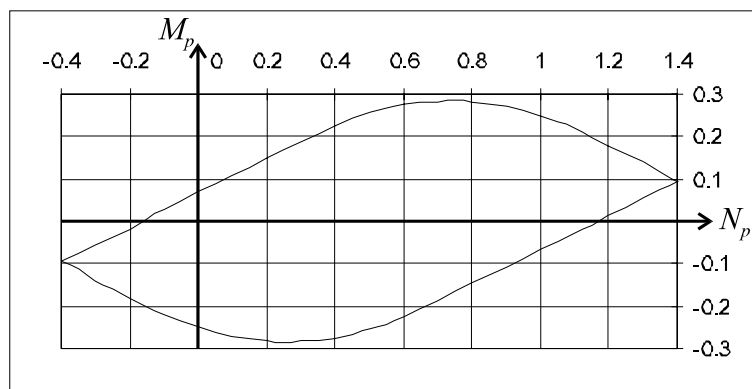


Figura 3-13: Usando Newton: $N_p \times M_p$ (Exemplo 3-3)

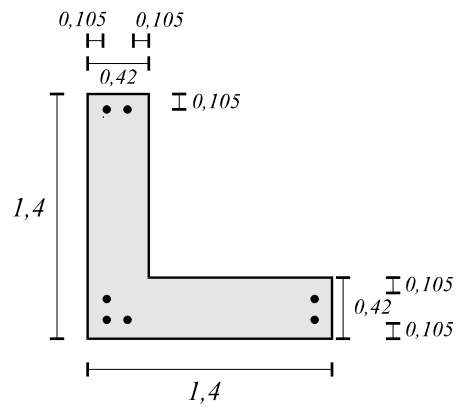


Figura 3-14: Seção “L”: Exemplo para a FOC

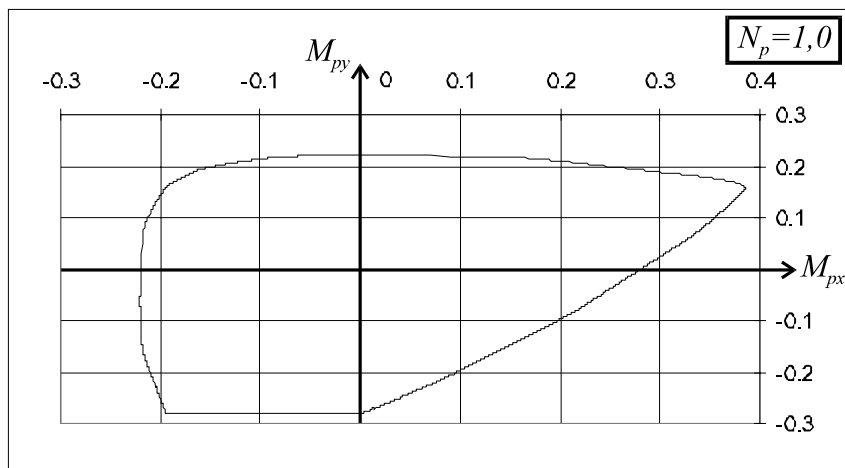


Figura 3-15: Exemplo de esforços máximos na FOC (usando Newton)

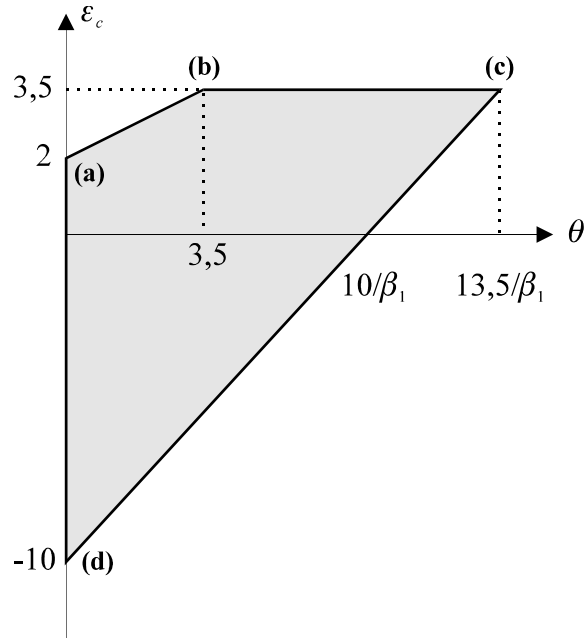


Figura 3-16: Região Viável para pares (ε_c, θ) no ELU

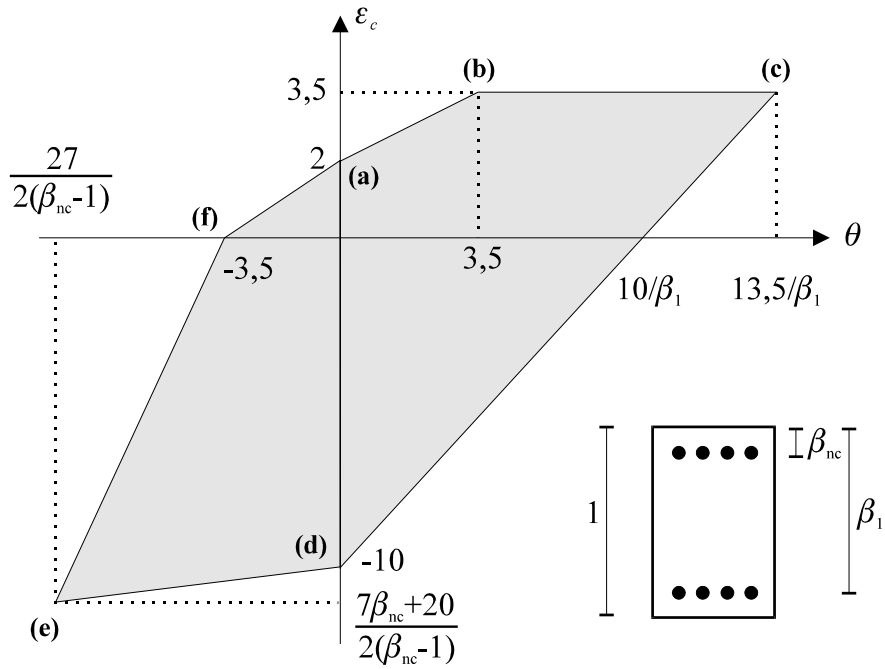


Figura 3-17: Região viável (ELU) para curvaturas com sinal

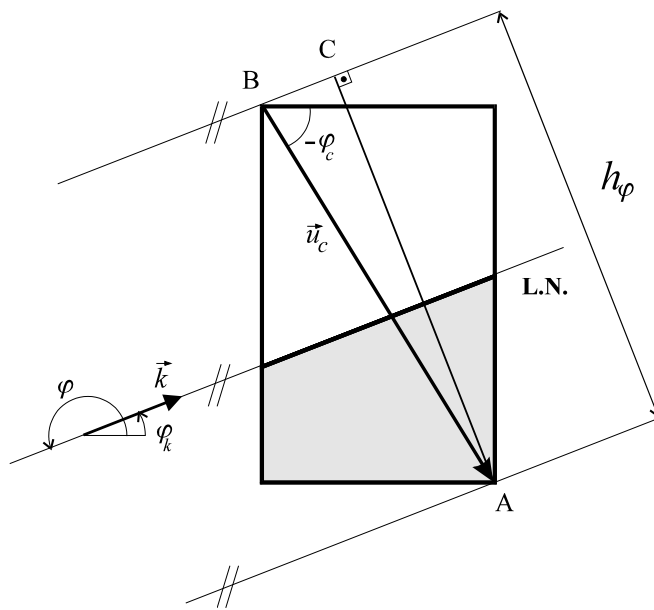


Figura 3-18: Compatibilidade de notação

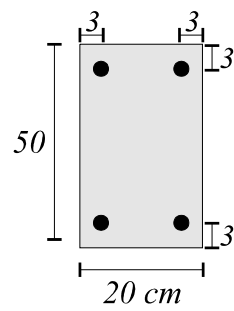


Figura 3-19: Exemplo de verificação - seção retangular

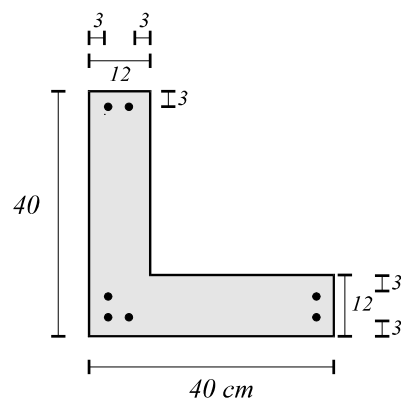


Figura 3-20: Exemplo de verificação: Seção “L”

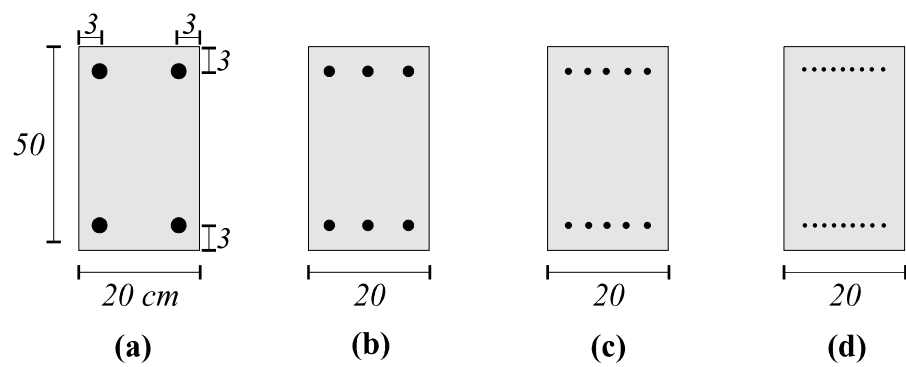


Figura 3-21: Exemplos de distribuição de armadura.

Capítulo 4

Estudo de Pórticos Planos

4.1 Formulação Teórica

Será abordada a análise não linear estática de pórticos planos (material elástico). Optou-se por uma apresentação auto-contida, focalizada na Energia Potencial Total, e que dispensa, em uma primeira abordagem, conhecimentos prévios do Método dos Elementos Finitos.

Considere uma barra colocada no plano zy . As seções transversais desta barra pertencem ao plano xy e devem possuir simetria em relação ao eixo y (se esta simetria não existir não se pode garantir que a estrutura, quando submetida aos carregamentos, permaneça no plano zy). Utilizando-se a hipótese de Euler-Navier-Bernoulli (seções planas permanecem planas e perpendiculares ao eixo da barra) pode-se escrever a equação cinemática

$$\varepsilon = \varepsilon_o - y \kappa_x, \quad (4.1)$$

onde

- ε é a deformação genérica em um ponto qualquer de uma seção transversal (para uma abscissa z fixa).
- ε_o é a deformação da seção transversal (para uma abscissa z fixa) na altura da origem do sistema de coordenadas xy .
- κ_x é a rotação específica (normalmente confundida com a curvatura) para uma ordenada fixa.

A energia potencial total do sistema pode ser dada, como já visto, por

$$\Pi = U + V, \quad (4.2)$$

onde U é a energia interna de deformação e V o potencial das forças externas. Como a energia é uma grandeza escalar (assim como o potencial das forças externas), pode ser obtida para cada um dos elementos da estrutura e, posteriormente, obtem-se o valor total somando as parcelas de cada elemento. Utilizando o índice e para representar as mesmas grandezas anteriores referidas somente a um elemento, pode-se obter a energia interna de deformação de um elemento com a expressão

$$U_e = \int_0^{L_e} \left(\iint_A \phi(\varepsilon) dA \right) dz, \quad (4.3)$$

onde L_e é o comprimento do elemento e , A é a área da seção transversal que contribui para os esforços resistentes (no caso de concreto armado deve-se efetuar a integração na área de concreto e na área de aço, como já discutido no capítulo anterior) e $\phi(\varepsilon)$ é o potencial do diagrama tensão-deformação dos materiais componentes, definido como

$$\phi(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \sigma(\zeta) d\zeta. \quad (4.4)$$

Esta definição permite a obtenção dos diagramas tensão-deformação dos materiais pela derivação de seu potencial

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{d\phi}{d\varepsilon}. \quad (4.5)$$

Ainda pode ser definida, como anteriormente, a derivada do diagrama tensão-deformação com a seguinte notação

$$D(\varepsilon) = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{d^2\phi}{d\varepsilon^2}. \quad (4.6)$$

Admitindo a hipótese de que a deformação em um ponto qualquer de um elemento possa ser definida pelos deslocamentos q_i ($i = 1 \dots 6$) nas extremidades deste elemento, o diferencial total da energia interna de deformação pode ser dado por

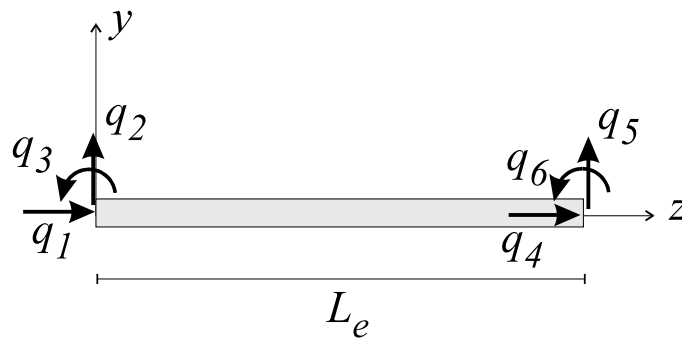


Figura 4-1: Graus de liberdade do elemento no sistema local

$$dU_e = \frac{\partial U_e}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial U_e}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial U_e}{\partial q_6} dq_6 = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial U_e}{\partial q_i} dq_i. \quad (4.7)$$

A derivada $\partial U_e / \partial q_i$ pode ser obtida através da regra da cadeia, ou seja,

$$\frac{\partial U_e}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \int_0^{L_e} \left(\iint_A \phi(\varepsilon) dA \right) dz = \int_0^{L_e} \left(\iint_A \frac{\partial \phi(\varepsilon)}{\partial q_i} dA \right) dz \quad (4.8)$$

O integrando (no comprimento do elemento) pode ser colocado da seguinte maneira com o auxílio da equação (4.1):

$$\iint_A \frac{\partial \phi(\varepsilon)}{\partial q_i} dA = \iint_A \left(\frac{d\phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial q_i} \right) dA = \iint_A \sigma(\varepsilon) \left(\frac{\partial \varepsilon_o}{\partial q_i} - y \frac{\partial \kappa_x}{\partial q_i} \right) dA. \quad (4.9)$$

Os termos ε_o e κ_x são, por hipótese, constantes para uma dada seção transversal (uma vez que se referem ao eixo da barra, no ponto considerado). Desta forma podem ser retirados da integral. Lembrando ainda a definição de esforço normal e momento fletor resistente chega-se, finalmente, à expressão

$$\frac{\partial U_e}{\partial q_i} = \int_0^{L_e} \left(N_R \frac{\partial \varepsilon_o}{\partial q_i} + M_{xR} \frac{\partial \kappa_x}{\partial q_i} \right) dz, \quad (4.10)$$

onde N_R é o esforço normal resistente e M_{xR} é o momento fletor resistente. Estes esforços são calculados por

$$N_R = \iint_A \sigma(\varepsilon) dA \quad (4.11)$$

$$M_{xR} = - \iint_A y \sigma(\varepsilon) dA \quad (4.12)$$

Imaginando que o elemento esteja submetido somente a forças nodais o potencial das forças externas pode ser dado por

$$V_e = - \sum_{i=1}^6 f_i q_i. \quad (4.13)$$

A derivada total do potencial é, simplesmente,

$$dV_e = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial V_e}{\partial q_i} dq_i = - \sum_{i=1}^6 f_i dq_i. \quad (4.14)$$

Para o elemento, portanto, pode-se obter a derivada da energia potencial total do elemento pela

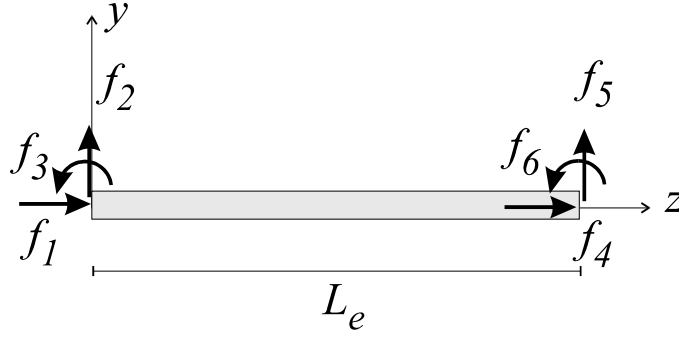


Figura 4-2: Forças nodais no sistema local

soma das parcelas interna e externa

$$d\Pi_e = dU_e + dV_e = \sum_{i=1}^6 \left(\int_0^{L_e} \left(N_R \frac{\partial \varepsilon_o}{\partial q_i} + M_{xR} \frac{\partial \kappa_x}{\partial q_i} \right) dz - f_i \right) dq_i. \quad (4.15)$$

Como é sabido, o equilíbrio da estrutura deve ocorrer quando o diferencial total da energia potencial total for nulo. Igualando $d\Pi_e$ a zero e considerando que os deslocamentos nodais sejam as variáveis independentes do problema, pode-se escrever

$$d\Pi = \sum_{\text{elementos}} d\Pi_e = \sum_{\text{elementos}} \sum_{i=1}^6 \left(\int_0^{L_e} \left(N_R \frac{\partial \varepsilon_o}{\partial q_i} + M_{xR} \frac{\partial \kappa_x}{\partial q_i} \right) dz - f_i \right) dq_i = 0. \quad (4.16)$$

O sistema de equações assim formado é, a princípio, não linear e pode ser resolvido, por exemplo, com o método de Newton-Raphson. Deve-se notar, entretanto, que o sistema anterior refere-se a toda estrutura e não a apenas um de seus elementos. Antes de detalhar a transição entre coordenadas locais e globais será explorado, com um pouco mais de detalhe, o sistema anterior. Como os deslocamentos nodais q_i ($i = 1 \dots 6$) são, por hipótese, independentes, devem ser analisadas simultaneamente as equações para dq_i ($i = 1 \dots 6$).

Para um elemento pode-se definir a função

$$g_i = \int_0^{L_e} \left(N_R \frac{\partial \varepsilon_o}{\partial q_i} + M_{xR} \frac{\partial \kappa_x}{\partial q_i} \right) dz - f_i, \quad i = 1 \dots 6. \quad (4.17)$$

Esta função pode ser colocada na forma vetorial com o auxílio da notação

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{Bmatrix} g_1(\mathbf{q}) \\ g_2(\mathbf{q}) \\ g_3(\mathbf{q}) \\ g_4(\mathbf{q}) \\ g_5(\mathbf{q}) \\ g_6(\mathbf{q}) \end{Bmatrix}. \quad (4.18)$$

Procura-se, desta forma, para quais valores de q_i , $i = 1 \dots 6$ (ou seja, para \mathbf{q}) esta função se anula, i.e., $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$. Com a utilização do método de Newton-Raphson pode-se, iterativamente, obter a solução através da fórmula de recorrência

$$(\mathbf{q})_{i+1} = (\mathbf{q})_i - [\nabla \mathbf{g}]^{-1} \mathbf{g}. \quad (4.19)$$

onde

$$\nabla \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial q_1} & \frac{\partial g_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial q_6} \\ \frac{\partial g_2}{\partial q_1} & & & \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial g_6}{\partial q_1} & \frac{\partial g_6}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial g_6}{\partial q_6} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

ou, genericamente,

$$[\nabla g]_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial q_j}. \quad (4.21)$$

Pode-se desenvolver a derivada anterior com a consideração das equações (4.17), (4.11) e (4.12)

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_i}{\partial q_j} &= \int_0^{L_e} \left(\frac{\partial \varepsilon_o}{\partial q_j} \overline{EA} + \frac{\partial \kappa_x}{\partial q_j} \overline{ES} \right) \frac{\partial \varepsilon_o}{\partial q_i} dz + \\ &+ \int_0^{L_e} \left(\frac{\partial \varepsilon_o}{\partial q_j} \overline{ES} + \frac{\partial \kappa_x}{\partial q_j} \overline{EI} \right) \frac{\partial \kappa_x}{\partial q_i} dz, \end{aligned} \quad (4.22)$$

ou, em outro formato,

$$\frac{\partial g_i}{\partial q_j} = \int_0^{L_e} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_o}{\partial q_i} \\ \frac{\partial \kappa_x}{\partial q_i} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \overline{EA} & \overline{ES} \\ \overline{ES} & \overline{EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_o}{\partial q_j} \\ \frac{\partial \kappa_x}{\partial q_j} \end{Bmatrix} dz. \quad (4.23)$$

As rigidezes definidas são

$$\overline{EA} = \iint_A D(\varepsilon) dA, \quad (4.24)$$

$$\overline{ES} = - \iint_A y D(\varepsilon) dA \quad (4.25)$$

$$\overline{EI} = \iint_A y^2 D(\varepsilon) dA. \quad (4.26)$$

A matriz $\nabla \mathbf{g}$ é, em outras palavras, a matriz de rigidez tangente do elemento (no sistema local). Para um material elástico linear ($D(\varepsilon) = E$) as rigidezes anteriores têm seu significado usual ($\overline{EA} = EA$, $\overline{ES} = ES$ e $\overline{EI} = EI$, onde E é o módulo de elasticidade, A a área, S o momento estático e I o momento de inércia da seção transversal). O sistema de equações é montado para a estrutura somando-se as contribuições de todos os elementos da mesma.

4.2 Teoria Estrutural (e funções de interpolação)

A principal hipótese anterior diz respeito à possibilidade de definir os deslocamentos em qualquer ponto do elemento através de seus deslocamentos nodais. Esta é a base do chamado Método dos Deslocamentos. Para que o cálculo da estrutura possa, então, ser implementado, deve-se explicitar esta dependência entre os deslocamentos em um ponto qualquer do elemento e seus deslocamentos nodais. Como desconhece-se a real dependência entre estes deslocamentos, utilizam-se as chamadas funções de interpolação que relacionam os deslocamentos no interior do elemento com os deslocamentos nodais. Convém observar que a adoção das funções de interpolação faz com que o problema passe a ter um número finito de graus de liberdade (ou seja, a estrutura fica discretizada pelos graus de liberdade dos nós dos elementos) e, conseqüentemente, sejam introduzidas aproximações na resolução do problema.

Aqui também se faz necessário o conhecimento do tipo de Teoria Estrutural utilizada. A não linearidade física, obviamente, deverá ser considerada (afinal a ênfase deste trabalho é em estruturas de concreto armado). A não linearidade geométrica, no entanto, pode ser alvo de maiores discussões. Espera-se, de um modo geral, que estruturas de concreto armado apresentem deslocamentos (e deformações) pequenos. Mesmo para estruturas esbeltas (caso de alguns pilares de concreto armado) a consideração rigorosa dos deslocamentos parece não ser muito importante (as hipóteses de Estado Limite Último enfocam deformações — pequenas — que não devem ser ultrapassadas para que se possa considerar a estrutura como utilizável).

Optou-se, desta forma, pelas teorias estruturais simplificadas no que concerne a não linearidade geométrica. Será considerada a teoria de “pequenas deformações” e a de “rotações moderadas”. Ambas teorias são simplificadas do ponto de vista da linearidade geométrica.

Com a hipótese de Euler-Navier-Bernoulli pode-se mostrar [57] que o campo de deformações é dado, exatamente, por

$$\varepsilon_o = \sqrt{(1 + u')^2 + (v')^2} - 1 \quad (4.27)$$

$$\kappa_x = \theta' = \frac{(1 + u') v'' - u'' v'}{(1 + u')^2 + (v')^2} \quad (4.28)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{v'}{1 + u'}\right) \quad (4.29)$$

onde u é o deslocamento axial (na direção de z) de um ponto qualquer, v é o deslocamento transversal (na direção de y) e θ a inclinação da reta tangente à barra no ponto considerado (no sentido trigonométrico). Os deslocamentos u e v são função da posição z do ponto considerado. As derivadas são em relação à esta coordenada, ou seja,

$$u' = \frac{du}{dz}, \quad u'' = \frac{du'}{dz} = \frac{d^2u}{dz^2} \text{ etc.} \quad (4.30)$$

4.2.1 Teoria de segunda ordem

Nesta teoria assume-se que pode-se trabalhar com as expansões em série de Taylor das funções ε_o e κ_x truncando-se as mesmas nos termos até segunda ordem, ou seja,

$$\varepsilon_o \simeq u' + \frac{1}{2} (v')^2 \quad (4.31)$$

$$v' \simeq (1 + u') \theta \quad (4.32)$$

$$\kappa_x = \theta' \simeq (1 - u') v'' - u'' v' \quad (4.33)$$

4.2.2 Teoria de segunda ordem aproximada (rotações moderadas)

Considerando as aproximações

$$u' \ll 1, \quad (4.34)$$

$$u' \ll v', \quad (4.35)$$

$$u' \ll L_e v'' \text{ e} \quad (4.36)$$

$$L_e u'' \ll v' \quad (4.37)$$

podem ser obtidas as relações

$$\varepsilon_o \simeq u' + \frac{1}{2}(v')^2 \quad (4.38)$$

$$v' \simeq \theta \quad (4.39)$$

$$\kappa_x = \theta' \simeq v''. \quad (4.40)$$

4.2.3 Teoria linear (pequenas deformações)

Nesta teoria admite-se que pode-se trabalhar com as expansões em série de Taylor das funções ε_o e κ_x truncando-se as mesmas nos termos de primeira ordem, ou seja,

$$\varepsilon_o \simeq u' \quad (4.41)$$

$$\theta \simeq v' \quad (4.42)$$

$$\kappa_x = \theta' \simeq v'' \quad (4.43)$$

Por causa desta Teoria Estrutural é que há a confusão usual entre rotação específica (θ') e curvatura (v'').

4.2.4 Funções de interpolação

Das várias Teorias Estruturais apresentadas as mais simples são, obviamente, a Teoria Linear e a de Rotações Moderadas. A Teoria Linear tem o inconveniente de não ser capaz de detectar problemas de estabilidade pela falta de acoplamento entre o encurtamento axial (ε_o) e os deslocamentos transversais (v). A Teoria de Rotações Moderadas, ainda que simplificada, apresenta o acoplamento citado e, desta forma, pode detectar problemas de estabilidade. Sabe-se, ainda, que o trabalho computacional exigido para a aplicação da Teoria de Segunda Ordem é equivalente ao trabalho necessário para a Teoria Exata, ou seja, não há vantagens, do ponto de vista computacional, na adoção da Teoria de Segunda Ordem (quando comparada com a Teoria Exata). Como é esperado que os efeitos da não linearidade geométrica sejam fracos em problemas de concreto armado, será utilizada, daqui para frente, a Teoria de Rotações Moderadas (Teoria de Segunda Ordem aproximada).

A interpolação é feita, como já dito, em termos de deslocamentos. Precisa-se, desta forma, de funções que tenham continuidade e não se anulem para as derivadas que aparecem (explícita ou implicitamente) na função da Energia Potencial Total da estrutura. No caso de rotações moderadas (e também no caso da Teoria Linear) necessita-se de uma função no mínimo linear para os deslocamentos

axiais (u) e de uma função no mínimo cúbica para os deslocamentos transversais (v). Desta forma

$$u(z) = a_1 z + a_2 \quad (4.44)$$

$$v(z) = b_1 z^3 + b_2 z^2 + b_3 z + b_4. \quad (4.45)$$

Utilizando as condições de contorno (Figura 4-1)

$$u(0) = q_1 \quad (4.46)$$

$$u(L_e) = q_4 \quad (4.47)$$

$$v(0) = q_2 \quad (4.48)$$

$$v(L_e) = q_5 \quad (4.49)$$

$$v'(0) = q_3 \quad (4.50)$$

$$v'(L_e) = q_6 \quad (4.51)$$

são obtidas as constantes para as funções

$$u(z) = q_1 \left(1 - \frac{z}{L_e}\right) + q_4 \frac{z}{L_e} \quad (4.52)$$

$$u'(z) = \frac{q_4 - q_1}{L_e} \quad (4.53)$$

$$v(z) = q_2 \left(2 \frac{z^3}{L_e^3} - 3 \frac{z^2}{L_e^2} + 1\right) + q_3 z \left(\frac{z^2}{L_e^2} - 2 \frac{z}{L_e} + 1\right) + q_5 \frac{z^2}{L_e^2} \left(-2 \frac{z}{L_e} + 3\right) + q_6 \frac{z^2}{L_e} \left(\frac{z}{L_e} - 1\right) \quad (4.54)$$

$$v'(z) = q_2 \frac{6}{L_e} \frac{z}{L_e} \left(\frac{z}{L_e} - 1\right) + q_3 \left(3 \frac{z^2}{L_e^2} - 4 \frac{z}{L_e} + 1\right) + q_5 \frac{6}{L_e} \frac{z}{L_e} \left(-\frac{z}{L_e} + 1\right) + q_6 \left(3 \frac{z^2}{L_e^2} - 2 \frac{z}{L_e}\right) \quad (4.55)$$

$$v''(z) = q_2 \frac{6}{L_e^2} \left(2 \frac{z}{L_e} - 1\right) + q_3 \frac{2}{L_e} \left(3 \frac{z}{L_e} - 2\right) + q_5 \frac{6}{L_e^2} \left(-2 \frac{z}{L_e} + 1\right) + q_6 \frac{2}{L_e} \left(3 \frac{z}{L_e} - 1\right) \quad (4.56)$$

É usual a substituição da fração z/L_e pela variável ξ (que varia de 0 a 1). Desta forma

$$u(\xi) = q_1(1 - \xi) + q_4\xi \quad (4.57)$$

$$u'(\xi) = \frac{q_4 - q_1}{L_e} \quad (4.58)$$

$$v(\xi) = q_2(2\xi + 1)(\xi - 1)^2 + q_3L_e\xi(\xi - 1)^2 + q_5\xi^2(-2\xi + 3) + q_6L_e\xi^2(\xi - 1) \quad (4.59)$$

$$v'(\xi) = q_2\frac{6}{L_e}\xi(\xi - 1) + q_3(3\xi - 1)(\xi - 1) + q_5\frac{6}{L_e}\xi(-\xi + 1) + q_6\xi(3\xi - 2) \quad (4.60)$$

$$v''(\xi) = q_2\frac{6}{L_e^2}(2\xi - 1) + q_3\frac{2}{L_e}(3\xi - 2) + q_5\frac{6}{L_e^2}(-2\xi + 1) + q_6\frac{2}{L_e}(3\xi - 1) \quad (4.61)$$

Aplicação a um material elástico linear (sob linearidade geométrica)

A título de ilustração a matriz de rigidez do elemento pode ser obtida explicitamente para um material elástico linear ($D(\varepsilon) = E$) sob linearidade geométrica ($\varepsilon_o = u'$ e $\kappa_x = v''$)¹. A título de exemplo considere a obtenção do termo (1, 1) da matriz de rigidez local. Pela equação (4.22) tem-se que

$$[\nabla g]_{11} = \frac{\partial g_1}{\partial q_1} = \int_0^{L_e} \left(\left(\frac{\partial \varepsilon_o}{\partial q_1} EA + \frac{\partial \kappa_x}{\partial q_1} ES \right) \frac{\partial \varepsilon_o}{\partial q_1} + \left(\frac{\partial \varepsilon_o}{\partial q_1} ES + \frac{\partial \kappa_x}{\partial q_1} EI \right) \frac{\partial \kappa_x}{\partial q_1} \right) dz. \quad (4.62)$$

Com a utilização da Teoria Linear (equações (4.41) e (4.43)) e, ainda, com as funções de interpolação definidas (equações (4.53) e (4.56)) pode-se escrever

$$\varepsilon_o = u' = \frac{q_4 - q_1}{L_e} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} \kappa_x = v'' = & q_2\frac{6}{L_e^2} \left(2\frac{z}{L_e} - 1 \right) + q_3\frac{2}{L_e} \left(3\frac{z}{L_e} - 2 \right) + \\ & + q_5\frac{6}{L_e^2} \left(-2\frac{z}{L_e} + 1 \right) + q_6\frac{2}{L_e} \left(3\frac{z}{L_e} - 1 \right). \end{aligned} \quad (4.64)$$

As derivadas de ε_o e κ_x em relação ao deslocamento q_1 são

$$\frac{\partial \varepsilon_o}{\partial q_1} = -\frac{1}{L_e} \quad (4.65)$$

$$\frac{\partial \kappa_x}{\partial q_1} = 0. \quad (4.66)$$

¹No caso geral a matriz de rigidez é obtida numericamente com a equação 4.22.

Substituindo as derivadas anteriores no termo da matriz de rigidez tangente (4.62) obtem-se

$$[\nabla g]_{11} = \int_0^{L_e} \left(-\frac{1}{L_e} \right) EA \left(-\frac{1}{L_e} \right) dz = \frac{EA}{L_e^2} \int_0^{L_e} dz = \frac{EA}{L_e}. \quad (4.67)$$

Analogamente podem ser obtidos os outros 20 termos da matriz de rigidez (lembrar que a matriz é simétrica). Usando o termo genérico da matriz desenvolvido anteriormente (4.22) e efetuando-se as integrações obtem-se

$$\mathbf{K} \text{ (linear)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L_e} & 0 & \frac{ES}{L_e} & -\frac{EA}{L_e} & 0 & -\frac{ES}{L_e} \\ . & 12\frac{EI}{L_e^3} & 6\frac{EI}{L_e^2} & 0 & -12\frac{EI}{L_e^3} & 6\frac{EI}{L_e^2} \\ . & . & 4\frac{EI}{L_e} & -\frac{ES}{L_e} & -6\frac{EI}{L_e^2} & 2\frac{EI}{L_e} \\ . & . & . & \frac{EA}{L_e} & 0 & \frac{ES}{L_e} \\ . & . & . & . & 12\frac{EI}{L_e^3} & -6\frac{EI}{L_e^2} \\ \text{sim.} & . & . & . & . & 4\frac{EI}{L_e} \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

Se o eixo horizontal também passar pelo CG da seção (hipótese usual) obtém-se a matriz clássica

$$\mathbf{K} \text{ (linear)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L_e} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L_e} & 0 & 0 \\ . & 12\frac{EI}{L_e^3} & 6\frac{EI}{L_e^2} & 0 & -12\frac{EI}{L_e^3} & 6\frac{EI}{L_e^2} \\ . & . & 4\frac{EI}{L_e} & 0 & -6\frac{EI}{L_e^2} & 2\frac{EI}{L_e} \\ . & . & . & \frac{EA}{L_e} & 0 & 0 \\ . & . & . & . & 12\frac{EI}{L_e^3} & -6\frac{EI}{L_e^2} \\ \text{sim.} & . & . & . & . & 4\frac{EI}{L_e} \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

4.2.5 Carregamentos no elemento

Anteriormente foi feita a hipótese de que os elementos só possuíam forças aplicadas em seus nós. Pode-se, com o conhecimento das funções de interpolação, obter carregamentos nodais equivalentes para carregamentos ao longo do elemento. Usando, somente para exemplificação, um carregamento uniformemente distribuído (perpendicular ao eixo do elemento) com valor q constante percebe-se que o trabalho das forças externas pode ser dado por

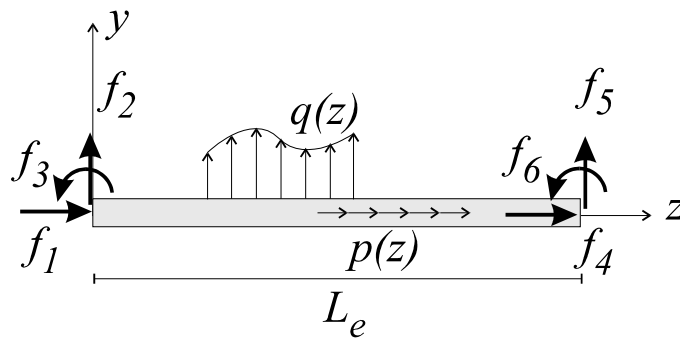


Figura 4-3: Carregamentos distribuídos no elemento e forças nodais.

$$V_{qe} = - \int_0^{L_e} q v(z) dz. \quad (4.70)$$

Como q é constante pode ser retirado da integral. Desenvolvendo a integral anterior, utilizando a

função de interpolação (4.54), obtém-se

$$V_{qe} = -q \left(q_2 \frac{L_e}{2} + q_3 \frac{L_e^2}{12} + q_5 \frac{L_e}{2} - q_6 \frac{L_e^2}{12} \right). \quad (4.71)$$

Percebe-se que as parcelas $qL_e/2$ correspondem às “reações” do carregamento e as parcelas $qL_e^2/12$ correspondem aos “momentos de engastamento perfeito”. O importante é que procedendo-se desta maneira são obtidos os carregamentos nodais equivalentes de forma consistente com as funções de interpolação utilizadas. Analogamente podem ser obtidos os carregamentos nodais equivalentes para outros tipos de carregamentos agindo diretamente no elemento. Por exemplo, para um carregamento p , uniformemente distribuído (constante) ao longo do comprimento do elemento, obtém-se

$$V_{pe} = - \int_0^{L_e} p u(z) dz. \quad (4.72)$$

Efetuada esta integral com o auxílio da equação (4.52):

$$V_{pe} = -p \left(q_1 \frac{L_e}{2} + q_4 \frac{L_e}{2} \right). \quad (4.73)$$

Lembrar que nas forças desequilibradas, equação (4.17), comparecem as derivadas do potencial das forças externas em relação aos deslocamentos nodais, ou seja, são necessários os valores das funções $\partial V_{qe}/\partial q_i$ e $\partial V_{pe}/\partial q_i$. Em outras palavras isto significa que a equação (4.17) pode ser reescrita para contemplar estes carregamentos constantes ao longo do elemento da seguinte maneira

$$g_i = \int_0^{L_e} \left(N_R \frac{\partial \varepsilon_o}{\partial q_i} + M_{xR} \frac{\partial \kappa_x}{\partial q_i} \right) dz - f_i + \frac{\partial V_{qe}}{\partial q_i} + \frac{\partial V_{pe}}{\partial q_i}, \quad i = 1 \dots 6. \quad (4.74)$$

4.3 Matriz de transformação

A matriz de rigidez do elemento é obtida no sistema local de referência. As forças internas também são obtidas neste sistema. As forças nodais equivalentes aos carregamentos distribuídos no elemento idem. O equilíbrio da estrutura, no entanto, é obtido no sistema global de referência (uma vez que os graus de liberdade de um elemento podem se somar com outros graus de liberdade de outro elemento bastando, para isso, que um elemento horizontal e outro inclinado estejam conectados — ligados por algum nó).

Chamando de q_i , q_j e q_k os três graus de liberdade de um nó do elemento no sistema local ($i < j = i + 1 < k = j + 1 = i + 2$) e de \bar{q}_i , \bar{q}_j e \bar{q}_k estes mesmos graus de liberdade do elemento no sistema global, podem ser obtidas as seguintes relações entre os dois sistemas (relações puramente geométricas,

Figura 4-4)

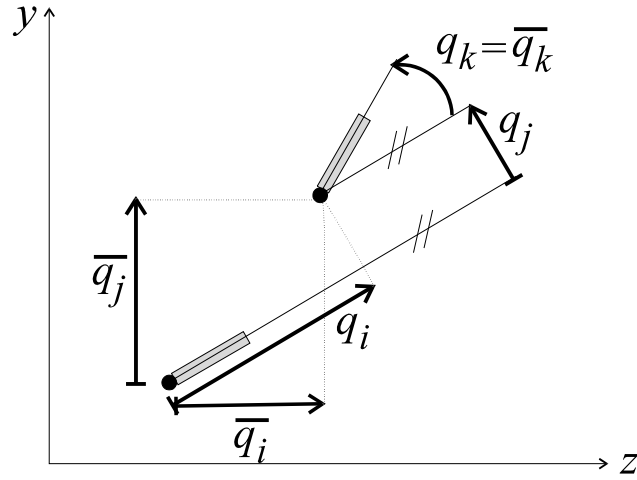


Figura 4-4: Transformação de coordenadas: sistema local x sistema global

$$\bar{q}_i = q_i \cos \varphi - q_j \sin \varphi \quad (4.75)$$

$$\bar{q}_j = q_i \sin \varphi + q_j \cos \varphi \quad (4.76)$$

$$\bar{q}_k = q_k \quad (4.77)$$

onde φ é o ângulo que o elemento forma com o eixo horizontal no sistema global de referência.

Estas relações podem ser aplicadas ao primeiro e segundo nós do elemento fornecendo

$$\bar{q}_1 = q_1 \cos \varphi - q_2 \sin \varphi \quad (4.78)$$

$$\bar{q}_2 = q_1 \sin \varphi + q_2 \cos \varphi \quad (4.79)$$

$$\bar{q}_3 = q_3 \quad (4.80)$$

e

$$\bar{q}_4 = q_4 \cos \varphi - q_5 \sin \varphi \quad (4.81)$$

$$\bar{q}_5 = q_4 \sin \varphi + q_5 \cos \varphi \quad (4.82)$$

$$\bar{q}_6 = q_6 \quad (4.83)$$

Organizando os deslocamentos nodais em vetores (locais e globais) da seguinte maneira

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} \text{ e } \bar{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \\ \bar{q}_4 \\ \bar{q}_5 \\ \bar{q}_6 \end{Bmatrix}, \quad (4.84)$$

tais vetores podem ser relacionados com a matriz

$$\bar{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q}. \quad (4.85)$$

Tradicionalmente chama-se matriz de rotação a matriz que, quando pré-multiplicada pelos deslocamentos globais, fornece os deslocamentos locais. Desta forma

$$\mathbf{q} = \mathbf{T} \bar{\mathbf{q}}. \quad (4.86)$$

A matriz \mathbf{T} , como pode ser facilmente observado, é ortogonal, ou seja, a sua transposta é idêntica à sua inversa ($\mathbf{T}^T = \mathbf{T}^{-1}$ uma vez que $\mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{T} \mathbf{T}^T = \mathbf{I}$). Desta maneira a matriz \mathbf{T} tem a forma

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.87)$$

A mesma matriz (de rotação) pode ser utilizada para a transformação das forças nodais no sistema

local (\mathbf{f}) e no sistema global ($\bar{\mathbf{f}}$), definidos por

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} \text{ e } \bar{\mathbf{f}} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \\ \bar{f}_4 \\ \bar{f}_5 \\ \bar{f}_6 \end{Bmatrix}, \quad (4.88)$$

ou seja,

$$\mathbf{f} = \mathbf{T} \bar{\mathbf{f}}. \quad (4.89)$$

Esta relação anterior pode ser obtida pelo equilíbrio direto de um nó genérico ou pela consideração de que o trabalho das forças nodais tem que ser o mesmo seja no sistema local ou global ($\bar{\mathbf{f}}^T \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{f}^T \mathbf{q} = \mathbf{f}^T \mathbf{T} \bar{\mathbf{q}} \Rightarrow \bar{\mathbf{f}}^T = \mathbf{f}^T \mathbf{T} \Rightarrow \bar{\mathbf{f}}^T \mathbf{T}^T = \mathbf{f}^T \mathbf{T} \mathbf{T}^T = \mathbf{f}^T \Rightarrow \mathbf{f} = \mathbf{T} \bar{\mathbf{f}}$).

A matriz de rigidez local quando multiplicada pelos deslocamentos nodais fornece o vetor das forças internas (no sistema local). Esta relação pode ser colocada no seguinte formato

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{f}, \quad (4.90)$$

onde \mathbf{K} é a matriz $\nabla \mathbf{g}$ anteriormente definida (matriz de rigidez tangente do elemento no sistema local de coordenadas).

Pré-multiplicando por \mathbf{T}^T e lembrando que $\mathbf{q} = \mathbf{T} \bar{\mathbf{q}}$ obtem-se

$$\mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{T}^T \mathbf{f} \Rightarrow \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{T}^T \mathbf{f} = \bar{\mathbf{f}}, \quad (4.91)$$

portanto,

$$\mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} \bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{f}}. \quad (4.92)$$

A matriz $\mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}$ é a matriz de rigidez tangente do elemento no sistema global de referência,

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}. \quad (4.93)$$

4.4 Espalhamento da matriz de rigidez local na matriz de rigidez global

Os graus de liberdade locais do elemento sempre são numerados de 1 a 6 (de 1 a 3 para os graus de liberdade do nó inicial e de 4 a 6 para os graus de liberdade do nó final). A estrutura é composta por vários nós numerados de acordo com o projetista². Deve-se, portanto, relacionar os graus de liberdade do elemento no sistema local com os graus de liberdade no sistema global numerados de uma forma arbitrária. A operação de identificação dos números dos graus de liberdade no sistema global de referência a partir dos graus de liberdade locais normalmente é realizada através da matriz de incidência. Tradicionalmente a matriz de incidência tem uma linha para cada elemento da estrutura e duas colunas armazenando o número do nó inicial e o número do nó final do elemento.

Pode-se montar, para um elemento e que possua o nó inicial de número n_i no sistema global e nó final de número n_f , um vetor \mathbf{v} com os números de seus graus de liberdade no sistema global da seguinte forma:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3(n_i - 1) + 1 \\ 3(n_i - 1) + 2 \\ 3(n_i - 1) + 3 \\ 3(n_f - 1) + 1 \\ 3(n_f - 1) + 2 \\ 3(n_f - 1) + 3 \end{pmatrix} \quad (4.94)$$

A montagem da matriz de rigidez global pode ser feita com o seguinte algoritmo:

1. Atribuir zero a todos os elementos da matriz de rigidez global ($\bar{\mathbf{K}}_{\text{global}} \leftarrow \mathbf{0}$) e aos elementos do vetor das forças desequilibradas ($\bar{\mathbf{g}}_{\text{global}} \leftarrow \mathbf{0}$).
2. Para os elementos e (variando de $1 \dots \text{elementos}$) da estrutura execute todos passos seguintes:
 - (a) Montar a matriz de rotação \mathbf{T} do elemento, montar o vetor com os números dos graus de liberdade do elemento \mathbf{v} , montar a matriz de rigidez tangente local \mathbf{K} e montar o vetor das forças desbalanceadas no sistema local \mathbf{g} .
 - (b) Obter a matriz de rigidez do elemento e no sistema global: $\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}$ e o vetor das forças desbalanceadas $\bar{\mathbf{g}} = \mathbf{T}^T \mathbf{g}$.

²Este assunto merece grande atenção do projetista uma vez que a numeração dos nós da estrutura influencia o tamanho final da matriz de rigidez da estrutura (altera, em outras palavras, a largura de banda da matriz). Existem técnicas para a numeração (e algumas outras para a re-numeração de nós) de forma a melhorar as condições de armazenamento computacional das informações.

(c) Varie i de 1 a 6 e execute todos os passos seguintes:

- i. $[\bar{g}_{\text{global}}]_{v_i} \leftarrow [\bar{g}_{\text{global}}]_{v_i} + [\bar{g}]_i$
- ii. Varie j de 1 a 6 e faça $[\bar{K}_{\text{global}}]_{v_i, v_j} \leftarrow [\bar{K}_{\text{global}}]_{v_i, v_j} + [\bar{K}]_{i, j}$.

Desta forma obtem-se a matriz de rigidez tangente da estrutura no sistema global de coordenadas $\bar{\mathbf{K}}_{\text{global}}$ e o vetor das forças desbalanceadas no sistema global $\bar{\mathbf{g}}_{\text{global}}$. A matriz de rigidez tem $3 N_{\text{nós}}$ linhas e $3 N_{\text{nós}}$ colunas e o vetor das forças desbalanceadas tem $3 N_{\text{nós}}$ linhas, onde $N_{\text{nós}}$ é o número total de nós da estrutura.

4.5 Eliminação dos graus de liberdade restritos

A matriz de rigidez tangente $\bar{\mathbf{K}}_{\text{global}}$ obtida anteriormente não contempla, ainda, o fato de alguns graus de liberdade da estrutura serem conhecidos. Não foi levada em consideração, portanto, a existência de apoios. Em outras palavras não se pode tentar resolver a estrutura com esta matriz de rigidez por se tratar de uma estrutura hipostática (não há nenhum vínculo da estrutura e, portanto, esta matriz é singular, ou seja, $\|\bar{\mathbf{K}}_{\text{global}}\| = 0$).

A introdução dos graus de liberdade restritos no sistema pode ser feita de várias maneiras. Para exemplificação considere o sistema 4×4 (hipotético) $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, ou, explicitamente,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix}. \quad (4.95)$$

O sistema anterior representa, na resolução da estrutura que se pretende fazer, a matriz de rigidez tangente da estrutura (\mathbf{A}), os acréscimos de deslocamentos globais (\mathbf{x}) e as forças desequilibradas (\mathbf{b}).

Supondo que a incógnita x_3 seja referente a um grau de liberdade restrito (apoio, ou seja $x_3 = 0$) pode-se, simplesmente, eliminar a linha e coluna correspondente da matriz (e as linhas dos vetores). Desta forma o sistema a ser resolvido passa a ser

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_4 \end{Bmatrix}. \quad (4.96)$$

Este procedimento é mais facilmente entendido quando se escreve o sistema de equações explicita-

mente, ou seja

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \quad (4.97)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \quad (4.98)$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \quad (4.99)$$

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \quad (4.100)$$

Com a consideração de x_3 nulo o sistema passa a ser

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{14}x_4 = b_1 \quad (4.101)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{24}x_4 = b_2 \quad (4.102)$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{34}x_4 = b_3 \quad (4.103)$$

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{44}x_4 = b_4 \quad (4.104)$$

A terceira equação anterior, além de ser desnecessária para a resolução do sistema (4 equações e 3 incógnitas), representa o equilíbrio de forças para aquele grau de liberdade restrito em função dos deslocamentos dos outros nós da estrutura (ou seja, representa uma parcela da reação daquele apoio, correspondente ao grau de liberdade restrito, para aquele incremento de deslocamentos). Para a resolução do sistema, portanto, a equação (4.103) pode ser eliminada e o sistema fica, finalmente, no formato

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{14}x_4 = b_1 \quad (4.105)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{24}x_4 = b_2 \quad (4.106)$$

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{44}x_4 = b_4, \quad (4.107)$$

ou seja, aquele representado pela equação (4.96). Perceba que este procedimento reduz a ordem do sistema a ser, efetivamente, resolvido (no exemplo passa a ser um sistema 3×3) e que não há a introdução de nenhuma imprecisão.

Observe que a reação de apoio total, devido ao grau de liberdade restrito, pode — caso seja desejado — ser obtida com a soma das parcelas calculadas em cada iteração de solução do sistema. Este procedimento exige, no entanto, o armazenamento de alguns valores ao longo das iterações. Todas as reações de apoio podem ser calculadas de uma única vez depois de obtida a solução final do sistema (multiplicando-se a matriz de rigidez “completa” e os deslocamentos da estrutura).

Outra maneira de abordar o problema (que não será utilizada neste trabalho) dos graus de liberdade restritos é com a modificação do valor do elemento a_{33} . Pode-se, por exemplo, arbitrar um valor “grande” para este elemento e, como consequência, a resolução do sistema completo (4×4) leva, naturalmente, à obtenção do valor de x_3 nulo. Este procedimento (conhecido, também, como elemento de contorno) levaria a resultados exatos somente com a utilização de “precisão infinita” (que não é o caso da solução numérica por computador) e com a utilização de $a_{33} \rightarrow \infty$ (que também não é o caso da solução numérica). Observe-se ainda que a escolha prática deste valor “grande” (relativamente aos outros elementos a_{3j}) não é trivial.

4.6 Obtenção dos termos integrais

Tanto a matriz de rigidez quanto o vetor das forças internas são obtidos através de termos que dependem da integração de funções ao longo do elemento (e estas funções são, normalmente, resultado de integrações nas seções transversais). As integrações na seção transversal podem ser efetuadas pela metodologia mostrada no capítulo anterior (ou seja, estas integrais podem ser efetuadas para uma seção transversal poligonal, com diagrama tensão-deformação definido por um ou mais polinômios com exatidão e sem grande esforço computacional). As integrações ao longo do elemento, no entanto, não possuem expressões analíticas e, via de regra, são avaliadas por processos aproximados.

Um processo bastante utilizado no Método dos Elementos Finitos é a chamada Quadratura de Gauss. Em apêndice são feitas considerações mais detalhadas a respeito dos fundamentos desta metodologia. Por ora basta dizer que o processo de integração consiste na soma de alguns valores (n) da função a ser integrada $f(x)$, avaliados em pontos específicos, pré-multiplicados por pesos convenientes, ou seja,

$$\int_0^{L_e} f(z) dz \simeq \frac{L_e}{2} \sum_{i=1}^n w_i f\left(\frac{L_e}{2}(1+r_i)\right). \quad (4.108)$$

Este processo é exato para uma função $f(z)$ polinomial de ordem até $2n-1$. Para a resolução da estrutura é necessário o cálculo da matriz de rigidez local (4.22) e das forças desequilibradas (4.17). Para um material qualquer pode-se afirmar que o processo de integração é aproximado. Para um material elástico-linear, no entanto, o processo de integração é exato com a escolha conveniente do número de pontos de Gauss. A seguir são feitas estas considerações para um material elástico linear.

4.6.1 Integração numérica para um material elástico linear

Para um material elástico-linear tem-se que EA , ES e EI são constantes em um elemento. A integração da matriz de rigidez local depende, então, dos termos (4.22)

$$\frac{\partial \varepsilon_o}{\partial q_i} \frac{\partial \varepsilon_o}{\partial q_j}, \frac{\partial \varepsilon_o}{\partial q_i} \frac{\partial \kappa_x}{\partial q_j} \text{ e } \frac{\partial \kappa_x}{\partial q_i} \frac{\partial \kappa_x}{\partial q_j}. \quad (4.109)$$

As funções de interpolação adotadas admitem o deslocamento axial $u(z)$ como sendo uma função linear (4.52) e o deslocamento transversal $v(z)$ como sendo uma função cúbica (4.54). Admitindo linearidade geométrica, a deformação axial pode ser dada por $\varepsilon_o = u'$ (portanto ε_o é uma constante) e a curvatura pode ser dada por $\kappa_x = v''$ (portanto κ_x é uma função linear). O termo de maior ordem para a integração da matriz de rigidez será o produto das derivadas da curvatura sendo, portanto, quadrático. A integração de um polinômio de 2º grau é feita, exatamente, com 2 pontos de Gauss (na verdade 2 pontos de Gauss integram, exatamente, até um polinômio cúbico). Considerando, ainda, a linearidade geométrica, podem ser feitas algumas considerações sobre a integração das forças desbalanceadas (4.17). Pela estática é necessário que o esforço normal seja constante no elemento uma vez que, por hipótese, só há cargas aplicadas em seus nós³. Raciocínio análogo para o momento fletor leva a consideração de uma função linear. Estas considerações podem ser equacionadas da seguinte maneira (V é o esforço cortante e z a abscissa da seção considerada, ou seja, $0 \leq z \leq L_e$)

$$N(z) = -f_1, \quad (4.110)$$

$$V(z) = -f_2, \quad (4.111)$$

$$M(z) = -f_3 + f_2 z = -f_3 + \frac{z}{L_e} (f_6 + f_3). \quad (4.112)$$

O termo de maior ordem nas forças internas é, portanto, quadrático. Desta forma, sob linearidade geométrica, tanto a matriz de rigidez como as forças internas são integradas, exatamente, com 2 pontos de Gauss (material elástico-linear).

Para a consideração de Rotações Moderadas os raciocínios são análogos. Vale salientar a análise da estática com relação à distribuição dos esforços no elemento:

$$N(z) = -f_1, \quad (4.113)$$

$$V(z) = -f_2, \quad (4.114)$$

$$M(z) = -f_1 \times (v(z) - v(0)) + f_2 \times (z + u(z) - u(0)) - f_3. \quad (4.115)$$

³ Mesmo a consideração de carregamentos distribuídos no elemento levam, após integração, a cargas equivalentes nos nós do elemento.

As considerações anteriores podem ser resumidas na seguinte tabela:

Termo/Teoria	Linearidade geométrica	rotações Moderadas
ε_o	u' (constante)	$u' + (v')^2/2$ (quarto grau)
κ_x	v'' (linear)	v'' (linear)
Maior ordem do integrando de $\partial g_i/\partial q_j$	quadrático	oitavo grau
Pontos de Gauss ($\partial g_i/\partial q_j$)	2	5
Esforço normal (estática)	constante	constante
Momento fletor (estática)	linear	cúbico
Integrando de g_i	quadrático	quarto grau
Pontos de Gauss (g_i)	2	3

Desta forma, para um material elástico-linear, se for utilizada a consideração de linearidade geométrica são suficientes 2 pontos de integração. Para a consideração de rotações moderadas são suficientes, tanto para a integração da matriz de rigidez quanto para a integração das forças internas, 5 pontos de integração. Convém observar que para manter as características de convergência quadrática do método de Newton-Raphson deve ser conservado o mesmo número de pontos de integração tanto para as forças internas quanto para a matriz de rigidez (não é interessante, do ponto de vista do processo numérico, usar um número de pontos de integração diferente para um e para outro).

Há autores que recomendam a utilização de uma deformação axial média no lugar da deformação ε_o , ou seja, a equação cinemática ficaria

$$\varepsilon = \varepsilon_m - y \kappa_x, \quad (4.116)$$

onde

$$\varepsilon_m = \frac{1}{L_e} \int_0^{L_e} \varepsilon_o(z) dz. \quad (4.117)$$

Com o auxílio das funções de interpolação e com a consideração da teoria estrutural utilizada pode-se calcular, analiticamente, o valor da deformação média. Para a linearidade geométrica obtém-se

$$\varepsilon_m = \varepsilon_o = \frac{q_4 - q_1}{L_e}. \quad (4.118)$$

Para rotações moderadas obtém-se

$$\varepsilon_m = \frac{q_4 - q_1}{L_e} + \frac{2q_3^2 - q_3 q_6 + 2q_6^2}{30} + \frac{(q_5 - q_2)(6(q_5 - q_2) - L_e(q_3 + q_6))}{10 L_e^2}. \quad (4.119)$$

Este tipo de consideração afeta a ordem do integrando da matriz de rigidez. Para as duas teorias

estruturais (L.G. e R.M.) passa-se a ter a ordem máxima do integrando quadrática. Assim, quando se utiliza deste artifício, passa-se a integrar a matriz de rigidez exatamente com 2 pontos de Gauss. Os esforços internos, no entanto, não são afetados por esta consideração. Continuam a ser necessários 2 pontos de Gauss para L.G. e 3 pontos de integração para R.M. Se, por exemplo, a integração for feita sempre com 2 pontos de integração espera-se que, no caso de rotações moderadas, os termos da matriz de rigidez apresentem uma precisão maior quando for utilizado o critério de deformação média. Esta consideração também afeta o cálculo dos esforços resistentes seccionais. No caso de R.M. volta-se a trabalhar com uma deformação constante (como já era o caso da L.G.) e, levando em consideração que a estática exige um esforço normal constante no elemento, fica-se mais próximo qualitativamente da distribuição de esforços esperada.

4.6.2 Integração numérica para um material elástico não-linear

No que se refere às forças internas, as considerações com base na estática são válidas para um material elástico não-linear. Para a integração da matriz de rigidez, no entanto, deve-se levar em consideração o material da estrutura. As rigidezes que comparecem nas integrais são do tipo ($k = 0, 1$ ou 2)

$$\text{Rigidez} \equiv \pm \iint_A y^k D(\varepsilon) dA. \quad (4.120)$$

No caso do concreto armado já surge o primeiro problema: para esta análise seria necessário levar em conta, separadamente, os efeitos do concreto e os da armadura. Imaginando que o concreto seja o comportamento dominante tem-se um diagrama tensão-deformação parabólico definido por trechos (o aço é linear definido por trechos). Se a função $\sigma(\varepsilon)$ é definida por trechos, a função $D(\varepsilon) = d\sigma/d\varepsilon$ também é definida por trechos. A exatidão do processo de integração só é garantida para uma função polinomial única em todo o intervalo de integração. Isto, por si só, já seria motivo suficiente para afirmar que, do ponto de vista prático, não é possível obter numericamente o valor exato dos termos integrais da matriz de rigidez. Seria possível, ainda, imaginar uma divisão do intervalo de integração de forma que em cada intervalo somente uma função (da derivada do diagrama tensão-deformação) valesse. Se ainda for levado em conta que a seção pode ter um número arbitrário de camadas de barras e que cada uma destas camadas tem, também, um material não-linear, esta análise fica inviável.

Além disso, como foi mostrado no capítulo do Estudo da Seção Transversal, as expressões das rigidezes são função do inverso da curvatura ($1/\kappa_x$). Desta forma, para um material qualquer (e em particular para o concreto), as rigidezes são dadas por uma divisão de polinômios⁴. Não existe

⁴No caso de material elástico linear acaba surgindo, no numerador, a curvatura e, desta forma, a divisão de polinômios

método numérico de integração exato para este tipo de função e, conseqüentemente, mesmo o processo da quadratura de Gauss se torna aproximado.

A escolha, portanto, do número de pontos de Gauss para a integração das forças desequilibradas e da matriz de rigidez não é assunto trivial e deve ser feita com muito cuidado. Se forem utilizados poucos pontos de Gauss existe a possibilidade da criação de modos “espúrios” da matriz de rigidez (pode-se obter um equilíbrio irreal). A utilização de muitos pontos de Gauss pode fazer com que o tempo de processamento fique inviável. Há, portanto, um compromisso entre “precisão” e viabilidade do método computacional. Para materiais elásticos lineares este assunto vem sendo bastante estudado e, em geral, opta-se por uma integração “reduzida” (ou, às vezes, “seletiva”). A idéia da integração reduzida é bastante clara na medida em que pode-se dizer, com precisão, quantos pontos de Gauss seriam necessários para a integração exata (2 para linearidade geométrica e 5 para rotações moderadas). No caso de materiais não lineares, no entanto, não existe um número finito de pontos de Gauss que garantam a exatidão da integração (ou seja, integração exata somente com aritmética com precisão infinita — que não é o caso comum da utilização de computadores — e com um número infinito de pontos de Gauss). Assim, de forma prática, qualquer número de pontos de Gauss adotado pode ser considerado como integração reduzida.

Se, por outro lado, for considerado que a análise de uma estrutura com material elástico não linear pode ser encarada como a análise sucessiva (com pequenos acréscimos de carregamento) de materiais lineares (por trechos) e, ainda, se for utilizada uma “boa” discretização (ou seja, elementos com comprimentos “pequenos”), a argumentação voltada para materiais elásticos lineares começa, novamente, a ter sentido. Alguns estudos mostram que a utilização de 2 pontos de Gauss equivalem a utilização de uma formulação mista de elementos finitos (onde, além dos deslocamentos, também são interpoladas as forças/tensões).

Outra abordagem pode ser o estudo de sensibilidade da análise da estrutura em função do número de pontos de integração utilizado, ou seja, escolhe-se um número de pontos de Gauss, obtém-se o equilíbrio da estrutura. Em seguida aumenta-se o número de pontos e repete-se o processo. Analisa-se a diferença nas soluções obtidas e termina-se o processo quando tais diferenças não forem significativas. Esta análise pode ser bastante onerosa e pode levar a resultados não muito satisfatórios uma vez que a precisão utilizada nos programas de computador é finita (com a inevitável introdução de erros de arredondamentos com as operações de ponto flutuante).

fica “exata” (as rigidezes ficam constantes).

4.7 Resolução do Sistema Linear de Equações

O sistema a ser resolvido iterativamente pelo método de Newton-Raphson consiste em

$$(\bar{\mathbf{q}}_{\text{global}})_{i+1} = (\bar{\mathbf{q}}_{\text{global}})_i - \bar{\mathbf{K}}_{\text{global}}^{-1} \bar{\mathbf{g}}_{\text{global}}. \quad (4.121)$$

onde $\bar{\mathbf{q}}_{\text{global}}$ é o vetor dos deslocamentos globais (com $3N_{\text{nós}}$ elementos). Os outros elementos da equação anterior já foram definidos no item 4.4. Observe, no entanto, que no sistema anterior os graus de liberdade restritos já devem ter sido levados em consideração. Arbitra-se, inicialmente, o valor dos deslocamentos nodais para início do processo iterativo. É comum a adoção de $(\bar{\mathbf{q}}_{\text{global}})_0 = \mathbf{0}$. São obtidos, em seguida, o vetor das forças desbalanceadas para os deslocamentos arbitrados ($\bar{\mathbf{g}}_{\text{global}}$) e a matriz de rigidez tangente da estrutura $\bar{\mathbf{K}}_{\text{global}}$.

Contrariamente ao que a equação (4.121) sugere, a inversão da matriz de rigidez não é a melhor maneira de se obter a solução do sistema de equações. A inversão de uma matriz é uma operação bastante trabalhosa (em termos computacionais) e existem métodos de resolução de sistemas de equações lineares muito eficientes que substituem o procedimento de inversão e posterior multiplicação.

Pode-se reescrever a equação anterior

$$\bar{\mathbf{K}}_{\text{global}} \Delta \bar{\mathbf{q}}_{\text{global}} = \bar{\mathbf{g}}_{\text{global}}, \quad (4.122)$$

onde

$$\Delta \bar{\mathbf{q}}_{\text{global}} = (\bar{\mathbf{q}}_{\text{global}})_i - (\bar{\mathbf{q}}_{\text{global}})_{i+1}. \quad (4.123)$$

Deve-se, portanto, resolver o sistema de equações lineares (4.122) em $\Delta \bar{\mathbf{q}}_{\text{global}}$ e, posteriormente, obter os deslocamentos atualizados com a expressão

$$(\bar{\mathbf{q}}_{\text{global}})_{i+1} = (\bar{\mathbf{q}}_{\text{global}})_i - \Delta \bar{\mathbf{q}}_{\text{global}}. \quad (4.124)$$

Em apêndice são feitas algumas considerações sobre um processo de resolução de sistemas lineares (decomposição de Crout, que é similar à famosa decomposição de Cholesky).

O processo prossegue (com o cálculo dos deslocamentos globais sucessivos que são solução dos sistemas lineares) até que se tenha atingido a convergência ou até que a matriz de rigidez da estrutura se torne singular ($\|\bar{\mathbf{K}}_{\text{global}}\| = \det(\bar{\mathbf{K}}_{\text{global}}) = 0$).

A singularidade da matriz de rigidez implica na incapacidade de a estrutura resistir aos esforços aplicados. Se o material fosse elástico linear esta situação somente ocorreria em problemas instáveis (a capacidade de a estrutura encontrar um equilíbrio estável não existe para aquele nível de carga-

mento). No caso de materiais não lineares (como, por exemplo, o concreto armado), que apresentam diagramas tensão-deformação com patamares de “escoamento”, a singularidade da matriz de rigidez pode significar falta de equilíbrio estável ou incapacidade (“mecânica”) da estrutura obter equilíbrio (função da limitação da resistência de seus materiais componentes). De qualquer forma, a singularidade da matriz de rigidez acusa uma condição de carregamento que não deve ocorrer na prática (não há equilíbrio).

A convergência, por sua vez, pode ser verificada através de vários parâmetros distintos. O problema original consiste na resolução do sistema não linear dado por $\bar{\mathbf{g}}_{\text{global}}(\bar{\mathbf{q}}_{\text{global}}) = \mathbf{0}$. É razoável, portanto, que se meça se um determinado conjunto de deslocamentos $\bar{\mathbf{q}}_{\text{global}}$ é, ou não, solução do sistema de equações através da medida

$$\|\bar{\mathbf{g}}_{\text{global}}\| \leq \textit{precisão}, \quad (4.125)$$

onde *precisão* é um número pequeno escolhido previamente (é comum a adoção de valores tais como 1×10^{-5} , 1×10^{-10} etc, dependendo do computador/compilador utilizado). A norma $\|\cdot\|$ de vetores é entendida, de forma usual, como a norma Euclidiana, ou seja,

$$\|\bar{\mathbf{g}}_{\text{global}}\| = \left(\sum_{i=1}^{3 N_{\text{nós}}} \bar{g}_{\text{global},i}^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\bar{g}_{\text{global},1}^2 + \bar{g}_{\text{global},2}^2 + \dots + \bar{g}_{\text{global},3 N_{\text{nós}}}^2}. \quad (4.126)$$

Este critério de convergência pode ser muito rigoroso na medida em que a norma do vetor das forças desbalanceadas é uma mistura de unidades (forças e momentos) e, conseqüentemente, agrega esforços possivelmente de ordem de grandeza bem diferentes. Chamando de $(\bar{\mathbf{g}}_{\text{global}})_i$ o vetor das forças desbalanceadas obtido na iteração i (calculado, portanto, com os deslocamentos $(\bar{\mathbf{q}}_{\text{global}})_i$), pode-se alterar o critério anterior para

$$\|(\bar{\mathbf{g}}_{\text{global}})_{i+1}\| \leq \textit{precisão} \times \|(\bar{\mathbf{g}}_{\text{global}})_i\|, \quad (4.127)$$

amenizando, desta forma, os problemas com esforços de ordem de grandeza (e unidades) diferentes. Esta última expressão é equivalente a

$$\frac{\|(\bar{\mathbf{g}}_{\text{global}})_{i+1}\|}{\|(\bar{\mathbf{g}}_{\text{global}})_i\|} \leq \textit{precisão}, \quad (4.128)$$

com a vantagem de não haver indeterminação quando $\|(\bar{\mathbf{g}}_{\text{global}})_i\| \simeq 0$.

Outro critério bastante utilizado para o teste de convergência é a verificação dos decréscimos de deslocamentos nodais ($\Delta \bar{\mathbf{q}}_{\text{global}}$) serem pequenos (“próximos” de zero). A adoção de um ou outro

critério (ou ambos) é assunto que merece atenção mas foge ao objetivo deste texto. Neste trabalho foi adotado o critério (4.127).

4.8 Verificação do Estado Limite Último

A verificação do ELU, de forma tradicional, é feita nas seções transversais (e não em trechos de uma peça, ou elementos). A primeira consequência deste fato é que é necessário escolher algumas seções transversais para que se proceda à verificação do ELU (já que não podem ser verificadas todas as infinitas seções transversais de um elemento).

Em um primeiro contato com este problema a solução poderia ser a escolha de, por exemplo, 10 seções transversais ao longo de cada elemento, uniformemente espaçadas (incluindo as extremidades). Existe, no entanto, um grave problema proveniente da análise de elementos finitos que não pode ser menosprezado. A análise do ELU tem uma importância muito grande na análise de pórticos de concreto armado. A utilização de um critério errado de “ruptura” pode levar a resultados contra a segurança ou, por outro lado, contra a economia. Nenhuma destas situações é desejada na prática. Perceba que não se está questionando a análise de ELU em uma seção. O problema é em qual(is) seção(ões) fazer a análise e, por fim, qual a exatidão desta análise.

O principal problema é que não se tem como calcular com precisão (pelo menos não de forma imediata) as deformações, as tensões ou os esforços em uma seção qualquer. Este problema pode causar estranheza mas é, de fato, uma consequência natural do procedimento de análise da estrutura por elementos finitos. Para esclarecer o problema imagine que se deseja calcular, por exemplo, os esforços solicitantes (força normal e momento fletor) em uma seção qualquer após a estrutura ter sido resolvida.

A análise da estrutura fornece, diretamente, os deslocamentos nodais no sistema de referência global (esta foi a hipótese principal, ou seja, que o comportamento da estrutura pudesse ser obtido com o conhecimento dos deslocamentos nas extremidades dos nós de seus elementos). Com a utilização da matriz de rotação (ou transformação) estes deslocamentos globais podem ser convertidos para deslocamentos locais, no sistema de referência do elemento. Com os deslocamentos locais e com o auxílio das funções de interpolação podem ser obtidas as deformações em qualquer ponto do elemento. Note, entretanto, que as deformações (ε_o e κ_x) são calculadas com as derivadas das funções de interpolação (estas funções dependem, como foi visto, da teoria estrutural adotada). Com as deformações e, após integração na seção transversal, podem ser obtidos os esforços em uma seção arbitrária do elemento.

O procedimento de análise da estrutura feito neste trabalho teve o enfoque energético, ou seja, foi

construída a energia potencial total da estrutura e, após derivação, obtido o equilíbrio iterativamente (já que se trata de problema não linear). A garantia que se espera é que haja precisão da resposta obtida em termos de energia e não de deslocamentos. Portanto, não se pode nem afirmar que os deslocamentos estejam completamente corretos. Se os deslocamentos possuírem imprecisões, as deformações, com mais razão ainda, estarão também imprecisas. Se as deformações estão imprecisas, os esforços em uma seção, provenientes de integração destas deformações, estarão ainda mais imprecisos. Se não se pode confiar nas deformações (nem nos esforços) a análise de ELU fica seriamente comprometida.

Os esforços (e deformações) podem ser obtidos de outra maneira (que será chamada de “estática”). Supondo, ainda, que a estrutura tenha sido resolvida, podem ser obtidas as forças nos nós dos elementos (através da multiplicação da matriz de rigidez tangente local do elemento pelos deslocamentos locais). Com estas forças e com os carregamentos nos elementos podem ser obtidas as distribuições de esforços ao longo do elemento através da estática. Neste caso seria obtida uma distribuição constante de forças normais e uma distribuição linear de momentos fletores no caso da Teoria Linear ou uma distribuição cúbica de momentos fletores para a Teoria de Rotações Moderadas. A verificação do ELU pode, então, ser feita com estes esforços (como descrito no capítulo “Estudo da Seção Transversal”). O problema é que esta análise usa os deslocamentos nodais (que não têm garantia de precisão), usa a matriz de rigidez local (que é obtida com a integração das deformações) e usa, explicitamente no caso de R.M., as funções de interpolação.

Uma observação interessante é que no primeiro modo, que será chamado de “interpolado”, só será obtida uma distribuição constante de forças normais quando a deformação axial (ε_o) e a rotação específica (ou curvatura, κ_x) forem constantes ao longo de todo o comprimento do elemento. No caso da Teoria Linear a deformação axial já é constante mas a curvatura só será constante em situações de carregamento específicas (esforço normal e momento fletor constantes no elemento). No caso de R.M. a deformação axial, em geral, não será constante (assim como a curvatura) e, portanto, não fornecerão uma distribuição de forças normais constante (mesmo no caso comentado da consideração de um “encurtamento médio”) — exceção feita ao caso de carregamento com esforço normal nulo e momento fletor constante no elemento.

A diferença de resultados existente entre os dois modos de calcular, por exemplo, os esforços, já ressalta, de forma clara, que ambos procedimentos contêm imprecisões (como os dois procedimentos são coerentes e existem diferenças entre eles, os dois devem ser imprecisos). Observe ainda que existem algoritmos de refinamento de malha que usam, justamente, estas diferenças existentes nos esforços calculados de um ou outro modo (veja, por exemplo [76])⁵.

⁵O refinamento que trata a referência citada é do tipo h , ou seja, após uma análise da estrutura, e com base nas

Alguns autores sugerem a verificação do ELU nos pontos de Gauss utilizados para a integração da matriz de rigidez e das forças desequilibradas. Outros autores também sugerem isto mas com a utilização de somente dois pontos de integração, independentemente do número de pontos de Gauss utilizado para as integrações numéricas no elemento. A verificação do ELU somente nos pontos de Gauss não parece interessante uma vez que estes pontos sempre são internos ao elemento, ou seja, os pontos de Gauss nunca estão na extremidade⁶. Como é sabido, os maiores esforços atuantes nos elementos, na ausência de carregamentos distribuídos, estarão na(s) extremidade(s) do elemento. Procedendo-se à verificação do ELU somente em pontos internos, portanto, corre-se o risco de análises contra a segurança (quando o ELU for detectado em um ponto interno, com certeza, já foi ultrapassado na(s) extremidade(s)).

Há, também, a sugestão da extrapolação das deformações, obtidas nos dois pontos de Gauss, para as extremidades do elemento. A justificativa deste procedimento (que é a mesma da utilização de dois pontos de Gauss, independente da Teoria Estrutural utilizada) baseia-se nas “boas” propriedades dos pontos de Gauss para a análise de materiais elásticos lineares (e com malhas bastante refinadas). Não é do conhecimento do autor nenhum procedimento “exato” para o cálculo das deformações e tensões e este assunto merece, ainda, estudos mais aprofundados.

Neste trabalho foi adotado o processo de obtenção dos esforços nodais para cada elemento (esforço normal e momento fletor nas duas extremidades) e, posteriormente, efetua-se uma verificação da seção transversal (como descrito no capítulo anterior) obtendo-se, portanto, o encurtamento e a curvatura de cada uma dessas extremidades (ε_o e κ_x). Observa-se, então, se estas deformações respeitam, ou não, o ELU (conforme já descrito). Não se optou pela verificação do ELU nos pontos de Gauss pelos motivos anteriormente citados.

4.9 Exemplos de Aplicação

São apresentadas as análises de algumas estruturas de concreto armado. Inicialmente são analisadas estruturas isostáticas, para a certificação e comentário dos resultados e, em seguida, são fornecidos alguns exemplos de estruturas hiperestáticas.

O critério de convergência adotado para a resolução da estrutura é o mostrado na equação (4.127) com uma precisão de 1×10^{-5} . A menos de indicação contrária, foram utilizados 2 pontos de integração

diferenças observadas, uma nova malha de elementos é construída (e, em geral, refinada) para uma nova resolução da estrutura.

⁶Existem trabalhos que utilizam o processo de integração de Gauss-Lobatto (que é similar à quadratura de Gauss, com a diferença de fixar pontos de integração nas extremidades do intervalo de integração). Este procedimento, no entanto, não tem suas propriedades tão bem estudadas quando aplicado ao Método dos Elementos Finitos.

de Gauss.

Muitos destes exemplos correspondem ao cálculo de “carga crítica” da estrutura. Este cálculo é efetuado aumentando-se, progressivamente, algumas (ou todas) cargas nodais. O critério de parada para este aumento de carregamentos corresponde à situação do incremento de cargas corresponder a um valor menor que 1×10^{-7} do carregamento original, ou seja, $\text{incremento}/(\text{carregamento original}) \leq 1 \times 10^{-7}$. São fixados, inicialmente, valores de referência da(s) carga(s) e são aplicadas porcentagens destes carregamentos (desde o zero até a carga crítica). Em geral começa-se por aplicar 10% das cargas de referência.

A incapacidade da estrutura suportar os carregamentos (carga crítica) tem dupla caracterização. Pode-se obter uma matriz de rigidez singular (determinante nulo) ou, ainda, pode-se verificar que o ELU foi ultrapassado em uma ou mais seções transversais. Qualquer que seja a situação, no entanto, considera-se que foi atingida uma carga crítica. Note-se que o fato de a matriz de rigidez ser singular pode representar a ausência de equilíbrio da estrutura (sendo, portanto, uma estrutura instável para aquele nível de carregamento) ou a incapacidade mecânica de uma ou mais seções transversais resistirem aos carregamentos aplicados. Ambos os casos não podem ser aceitos como soluções.

Uma observação muito importante para a confiabilidade dos resultados é com relação à escolha do sistema de unidades. Como os programas de computador trabalham com um número finito (e em geral pequeno) de dígitos significativos, parâmetros expressos com números muito grandes ou pequenos podem prejudicar, de forma sensível, a precisão dos resultados obtidos. Não se trata, somente, da escolha de um sistema específico de unidades (SI, técnico etc), trata-se, também, da escolha dos prefixos de cada unidade básica. O autor tem obtido sucesso com a utilização de dados adimensionais. Escolhe-se um comprimento qualquer (por exemplo a maior dimensão da seção transversal) e uma tensão (por exemplo a resistência de cálculo do concreto). Todas as grandezas do problema são, então, divididas por números convenientes. Maiores detalhes são mostrados nos exemplos seguintes.

4.9.1 Estruturas Isostáticas

Os exemplos de estruturas isostáticas referem-se a uma seção retangular (por exemplo com 60 cm de base e 100 cm de altura), com quatro camadas de barras, de um pilar engastado livre (por exemplo com 10 m de comprimento). A área total de armadura pode ser, por exemplo, correspondente a 10 barras de diâmetro 25 mm, ou seja, $49,08739 \text{ cm}^2$. Os dados dos materiais poderiam ser

Aço	$f_{yk} = 5000 \text{ kgf/cm}^2$	$\gamma_s = 1,15$	$E_s = 2,1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$	Classe B
Concreto	$f_{ck} = 180 \text{ kgf/cm}^2$	$\gamma_c = 1,40$	Rüsch = 0,85	

Os exemplos seguintes, no entanto, usam os dados em formato adimensional, ou seja, são alteradas as características do problema de forma que o programa possa trabalhar com números “pequenos”. Desta forma os dados, em unidades coerentes, efetivamente utilizados são (que correspondem, fielmente, aos dados com dimensões):

Aço	$f_{yk} = 1$	$\gamma_s = 1$	$E_s = 483$	Classe B
Concreto	$f_{ck} = 1$	$\gamma_c = 1$	Rüsch = 1	

A seção transversal é esquematizada na Figura (4-5). Esta seção é equivalente a qualquer seção retangular com quatro camadas de barras desde que o posicionamento das camadas seja equivalente (ou seja, a distância das camadas externas à borda mais próxima deve ser igual a $0,05h$ e as distâncias das camadas internas devem ser de $0,15h$ ao CG da seção, onde h é a altura total da seção) e, ainda, que a distribuição de áreas nas camadas seja equivalente (30% da área de armadura nas camadas externas e 20% da área de armadura nas camadas internas). A área de armadura total é $0,32548$. O pilar (engastado-livre) tem um comprimento (em unidade coerente) de 10 (corresponde a uma esbeltez de $20\sqrt{12} = 69,282$). Nestes exemplos iniciais, de certificação, o pilar foi discretizado em 5 elementos de mesmo tamanho.

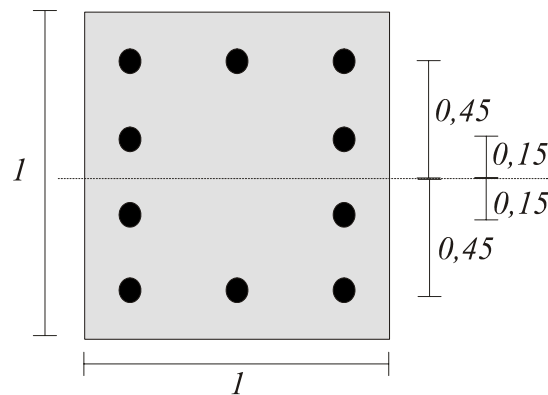


Figura 4-5: Seção dos pilares isostáticos

Exemplo 4-1 Compressão centrada.

Neste exemplo busca-se a carga crítica, em compressão centrada, para o pilar esquematizado. Como não há imperfeições na geometria do pilar, nem excentricidades do esforço normal nem a atuação de um momento fletor, o pilar não abandona a configuração linear inicial (ou seja, não há nenhum efeito de flexão). O esgotamento da capacidade resistente do pilar se dá, portanto, pelo ELU. Como a verificação de seções transversais é tarefa simples (principalmente em casos de compressão e tração

centradas) pode-se obter previamente o valor da carga crítica. Neste caso tem-se que o maior esforço normal (de cálculo) que pode ser aplicado à seção é

$$N_d = -\sigma_{cd} A_c - \sigma_{sd} (2^\circ/_{oo}) A_s = -1 \times 1 - 0,81759 \times 0,32548 = -1,26611. \quad (4.129)$$

O ELU é atingido com o encurtamento uniforme da seção a $-2^\circ/_{oo}$ (curvatura nula).

Os resultados obtidos através do programa PoPca⁷, desenvolvido pelo autor, foram

N_d	M_d	$1000 \varepsilon_o$	$1000 \kappa_x$
-1,2661	0	-1,99998	0

Observe que não é possível obter a **carga crítica** em compressão centrada com a formulação adotada. Só é possível a obtenção da capacidade resistente do pilar em função da capacidade de suas seções críticas (e não proveniente de uma análise de estabilidade). Para a análise da carga crítica em compressão centrada (problema de “ponto limite”) seria necessária a resolução de um problema de auto-valor da matriz de rigidez da estrutura.

Exemplo 4-2 Tração centrada.

Neste exemplo procura-se a carga crítica do pilar em tração centrada. Considerações análogas às anteriores levam ao cálculo desta carga de forma “exata” (através dos esforços seccionais)

$$N_d = A_s f_{yd} = 0,32548. \quad (4.130)$$

O ELU é atingido com o alongamento uniforme da seção a $10^\circ/_{oo}$.

Resultados obtidos com o programa PoPca:

N_d	M_d	$1000 \varepsilon_o$	$1000 \kappa_x$
0,32548	0	4,07007	0

Note que o valor do alongamento esperado e o obtido foram bem diferentes. Isto decorre do fato de, em tração centrada, a capacidade resistente da seção ser função exclusiva da armadura (o concreto, por hipótese, não resiste a tração). O diagrama tensão deformação do aço possui patamares convencionais de escoamento (por hipótese iguais tanto em tração quanto em compressão). Desta forma, realmente, não há por que ultrapassar a deformação de escoamento ($2 + 1000 f_{yd}/E_s = 4,07039$) pois, aí, já se atingiu a máxima tensão de trabalho do aço (a tensão de escoamento f_{yd}).

⁷Programa para a análise de Pórticos Planos de Concreto Armado.

Este tipo de problema na verdade ocorre para qualquer distribuição de deformação que faça com que a seção transversal fique completamente tracionada e que todas as camadas de barras tenham alongamentos superiores ou iguais à deformação convencional de escoamento.

Exemplo 4-3 Flexão simples.

O momento fletor atua de forma a comprimir a camada superior e a tracionar a camada inferior. Pelo fato de não haver esforço normal aplicado também não há o acoplamento dos efeitos de flexão e compressão (flexão pura). Não há, portanto, efeitos de segunda ordem neste exemplo.

Pelo cálculo convencional de verificação pode ser obtido o máximo momento fletor que a seção resiste. Este cálculo é iterativo e também pode ser realizado pela metodologia mostrada no capítulo anterior. Os resultados obtidos com a verificação da seção, foram

Resultados do ELU (seção)			
N_d	M_d	$1000 \varepsilon_o$	$1000 \kappa_x$
0	0,13979	4,07911	13,15754

Os resultados obtidos com o programa PoPca, para a seção do engaste, foram

N_d	M_d	$1000 \varepsilon_o$	$1000 \kappa_x$
0	0,13979	3,97651	12,87033

Houve um erro de 2,51 % na deformação do eixo e de 2,18 % na curvatura. Este exemplo merece maiores comentários. Pelo fato de não haver esforço normal, como já citado, só surgem efeitos de flexão (não há efeitos de segunda ordem). Neste caso, portanto, é praticamente indiferente o uso da teoria linear ou de rotações moderadas. Considerando, ainda, que as seções transversais são constantes, só há um valor de curvatura e de encurtamento para todo o pilar. A deformada do pilar é, neste caso, um arco de círculo e o pilar se comporta, macroscopicamente, como se fosse elástico linear (se o encurtamento e a curvatura são constantes as rigidezes também o são).

A título de curiosidade foram feitos os gráficos do momento fletor (obtido pela estática e com o auxílio das funções de interpolação, conforme discutido anteriormente). Este gráfico é mostrado na Figura (4-6) e apresenta resultados muito interessantes. O diagrama de momentos proveniente da estática (M-v) é, na prática, constante e igual ao valor mostrado anteriormente. O diagrama de momentos proveniente das funções de interpolação (M-i) é, como esperado, bastante diferente do primeiro. Note que realmente há a concordância dos diagramas anteriores para os pontos de integração de Gauss (são os pontos de intersecção dos dois diagramas de momento), como seria esperado para um material elástico linear. Note, também, que as maiores diferenças entre os dois diagramas são verificadas nas extremidades de cada elemento. Utilizar, portanto, os esforços calculados com o auxílio das funções de interpolação de deslocamentos é procedimento pouco aconselhável.

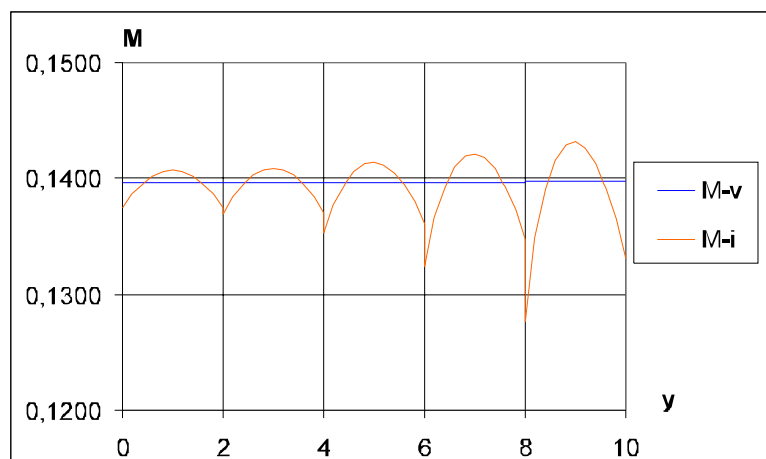


Figura 4-6: Diagrama de momentos fletores do Exemplo 4-3.

Também foram construídos os gráficos com a variação da deformação e da curvatura do eixo da peça. Estes gráficos são mostrados na Figura (4-7). Neste gráfico podem ser observadas as variações da curvatura — curvas superiores — ($kx-v$ é a curvatura obtida pela verificação dos esforços provenientes da estática e $kx-i$ é a curvatura proveniente das derivadas das funções de interpolação) e as variações da deformação do eixo da peça — curvas inferiores — ($e0-v$ e $e0-i$, com significados análogos aos das curvaturas). Não há mais a coincidência das menores diferenças entre as curvas para os pontos de Gauss. Este exemplo serve, portanto, como contra-exemplo para a utilização das deformações nas extremidades (obtidas após extrapolação das deformações nos 2 pontos de Gauss) para a verificação do ELU. Este exemplo serve, ainda, de contra-exemplo para a utilização das deformações nos próprios pontos de Gauss para a verificação do ELU (as menores diferenças entre os dois modos de calcular as deformações ocorreram, neste exemplo, para a seção situada no meio de cada elemento). Note, ainda, que as maiores diferenças observadas continuam situadas nas extremidades dos elementos.

Pode-se ainda observar que as diferenças vão aumentando na medida em que os próprios deslocamentos são maiores (há uma “amplificação” dos erros naturalmente introduzidos pelas funções de interpolação de deslocamentos). Neste exemplo de pilar engastado-livre, portanto, é de se esperar que a adoção de uma ou outra forma de verificação do ELU leve a diferenças pequenas se somente a seção crítica for verificada (seção da base, $y = 0$). Se todas as seções forem verificadas com relação ao ELU é possível que se conclua que o pilar não suporta o carregamento com base, por exemplo, no elemento da extremidade livre. Este tipo de procedimento pode levar, indistintamente, a resultados ora contra e ora a favor da segurança.

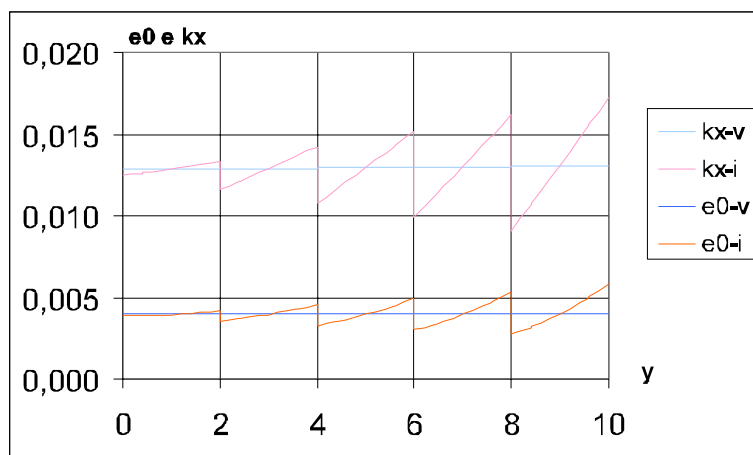


Figura 4-7: Diagrama de encurtamento e curvatura do eixo do Exemplo 4-3.

A principal conclusão obtida com este exemplo é a de que realmente parece ser o método utilizado neste trabalho para a verificação do ELU o mais indicado, ou seja, devem ser obtidos os esforços nas extremidades dos elementos e, então, estas seções de extremidade devem sofrer uma verificação com relação ao ELU. Este procedimento, sem dúvida, é mais trabalhoso do que qualquer outra solução que o autor tenha conhecimento mas, com base neste exemplo, parece ser o caminho mais seguro.

Exemplo 4-4 Carga crítica em FNC.

Neste exemplo aplica-se uma força normal de 0,3 (de compressão) na extremidade livre e procura-se qual o valor de momento fletor causa a perda de estabilidade (ou o aparecimento de ELU em alguma seção). Este momento fletor (de primeira ordem), aplicado na extremidade livre do pilar será chamado de momento fletor crítico. Deve-se salientar que este momento não é igual ao momento fletor na base do pilar uma vez que os efeitos de segunda ordem devem ser levados em consideração.

Por se tratar de uma estrutura isostática pode-se, também, resolver este tipo de problema através da metodologia de diferenças finitas (veja, por exemplo, [67]). Os resultados obtidos pelo processo das diferenças finitas são mostrados para uma discretização de 5, 10, 50, 75 e 100 elementos:

Diferenças Finitas		
Elementos	Momento Crítico	Variação %
5	0,12368	-0,186
10	0,12385	-0,048
50	0,12391	0
75	0,12391	0
100	0,12391	0

Para a seção transversal (que é constante ao longo do pilar) pode-se, ainda, proceder a um cálculo de verificação de forma a se obter o momento fletor que causa a ruína da seção (ELU) quando submetida, simultaneamente, ao esforço normal de 0,3. Procedendo a esta verificação são obtidos os valores

Resultados do ELU (seção)			
N_d	M_d	$1000 \varepsilon_o$	$1000 \kappa_x$
0,3	0,20609	0,65740	8,31480

Note que o valor de momento obtido na ruína (ELU) é o maior momento que pode ser aplicado à seção sem que nenhum polo de ruína seja ultrapassado. Não tem sentido, portanto, compará-lo ao valor do momento crítico obtido pelo processo das diferenças finitas (não está sendo mostrado o valor do momento na base, que é a seção crítica; no caso de 5 elementos, por diferenças finitas, obtem-se um momento total na base de 0,18302). Através destes resultados chega-se a conclusão que a carga crítica do pilar é alcançada com a perda de estabilidade do pilar (no conhecido fenômeno de “ponto limite”).

Com a utilização do programa PoPca (5 elementos, 2 pontos de Gauss) foram obtidos os seguintes resultados (LG = Linearidade geométrica, RM = Rotações moderadas; ELU significa a verificação do ELU nas extremidades de cada elemento):

	LG	RM
ELU	0,20609	0,12357
Sem ELU	0,21365	0,12357

Os dois resultados obtidos para rotações moderadas (com e sem a verificação do ELU) confirmam a carga crítica pela perda de estabilidade do pilar (se o ELU fosse fenômeno restritivo, o valor da carga crítica para a análise sem a verificação do ELU seria superior ao obtido pela análise com a verificação do mesmo). Os valores obtidos para linearidade geométrica (LG) são só didáticos uma vez que, nitidamente, os efeitos de flexão devem ser “acoplados” ao esforço normal aplicado (esta análise serviu para a confirmação da capacidade resistente da seção com ELU, como obtida anteriormente). Note, também, que a capacidade resistente da seção (pela análise com LG) obtida sem a verificação do ELU é um pouco superior à obtida com a verificação do ELU (passa de 0,20609 para 0,21365). Este pequeno acréscimo indica que a “capacidade resistente mecânica” da seção é, neste caso, muito próxima àquela obtida com a consideração do ELU (esta “capacidade mecânica” seria a capacidade resistente da seção limitada, exclusivamente, pelos diagramas tensão-deformação dos materiais, sem a imposição de limites de deformações).

O valor do momento crítico obtido para este exemplo não é sensível ao número de pontos de integração arbitrado. Foram, também, realizadas análises com 5, 10 e 16 pontos de integração e o

valor da carga crítica, mantidos todos os outros parâmetros de controle, não teve alteração (manteve-se em 0,12357). O mesmo já não pode ser dito com relação ao número de elementos adotados para análise (assim como já foi verificado para o processo das diferenças finitas). Foram, também, realizadas as seguintes análises (2 pontos de Gauss, RM):

Elementos	Momento Crítico	Variação %
5	0,12357	+0,602
10	0,12310	+0,220
50	0,12287	+0,033
75	0,12284	+0,008
100	0,12283	0

A sensibilidade da carga crítica com o aumento do número de elementos, neste exemplo, é sutil. É interessante observar que o refinamento da malha conduz a cargas críticas cada vez menores no caso do método dos elementos finitos enquanto que no processo de diferenças finitas são obtidas cargas críticas cada vez maiores. Neste exemplo, portanto, seria contra a segurança usar os resultados provenientes da análise com diferenças finitas. Seria, também, contra a segurança utilizar um refinamento pobre para o método dos elementos finitos (o resultado obtido para 5 elementos é superior ao resultado obtido para 50 elementos).

Deve-se ainda observar que a utilização de malhas uniformes (todos os elementos com mesmo comprimento) não é o procedimento mais eficiente para a obtenção de cargas críticas com valores mais precisos. Como será visto mais adiante, principalmente quando a não linearidade física da estrutura for mobilizada de forma acentuada, a utilização de malhas com espaçamentos não uniformes é o procedimento mais adequado para a análise de sensibilidade da carga crítica com relação à discretização.

4.9.2 Estruturas Hiperestáticas

São realizadas as análises de algumas estruturas hiperestáticas. Continua a ser dada ênfase a problemas com unidades “pequenas”, principalmente as dimensões da seção transversal.

Exemplo 3-5 Admita a viga hiperestática (engastada-apoiada) esquematizada na Figura (4-8) com 2 m de vão submetida a uma carga concentrada P no meio do vão. A seção transversal é quadrada com 0,3 m de lado. Há duas camadas de barras, cada uma com uma área total de $5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ e situadas, respectivamente, a 0,12 m e $-0,12 \text{ m}$ do CG da seção (a distância do CG da camada de barras à borda mais próxima é, portanto, de 0,03 m). Os materiais, constantes, são esquematizados a seguir:

Aço	$f_{yk} = 500 \text{ MPa}$	$\gamma_s = 1,15$	$E_s = 210.000 \text{ MPa}$	Classe A
Concreto	$f_{ck} = 18 \text{ MPa}$	$\gamma_c = 1,40$	Rüsch = 0,85	

A viga é submetida a uma análise de carga crítica com três discretizações (vide Figura 4-8):

- a) Malha regular (uniformemente distribuída) com 4 elementos.
- b) Malha irregular com 5 elementos .
- c) Malha irregular com 8 elementos.

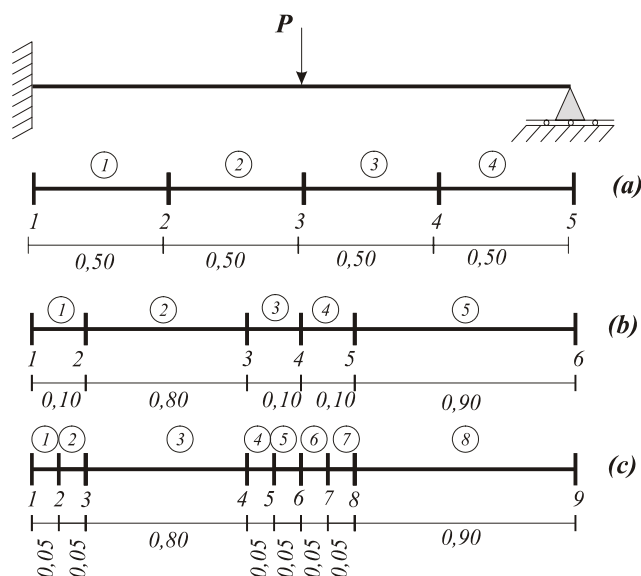


Figura 4-8: Viga do Exemplo 4-5

Foram feitas análises com a utilização de 2 e 5 pontos de integração em cada elemento. Foram, ainda, feitas análises com a verificação do ELU somente nos pontos de Gauss (ELU Gauss) e somente nas extremidades de cada elemento (ELU Extremidades). Todas as análises se utilizaram da teoria de Rotações Moderadas.

Os resultados obtidos pelo programa PoPca são esquematizados a seguir:

Valores da carga crítica P (MN)				
Pontos de Gauss	Verificação do ELU	Malha		
		Regular (a)	Irregular (b)	Irregular (c)
2	Gauss	0,23526	0,17156	0,16580
2	Extremidades	0,14264	0,14106	0,14107
5	Gauss	0,23413	0,17158	0,16579
5	Extremidades	0,14290	0,14212	0,14213

Ainda foi feita a discretização uniforme com 100 elementos (usando 2 pontos de integração) e a carga crítica obtida foi de 0,14431 MN para a verificação do ELU somente nas extremidades de cada elemento e de 0,15713 para a verificação do ELU somente nos dois pontos de integração de cada elemento. É interessante observar que, neste exemplo, uma discretização pobre da viga leva a resultados a favor da segurança (conclusão contrária à observação feita nos exemplos de estrutura isostáticas). Isto se deve, provavelmente, à forte presença da não-linearidade física neste exemplo (serão tecidos outros comentários sobre este fato mais adiante).

São observadas diferenças significativas nos valores da carga crítica utilizando-se a verificação do ELU somente nos pontos de Gauss ou somente nas extremidades de cada elemento. A verificação do ELU somente nos pontos de Gauss leva a valores de carga crítica contra a segurança, mesmo com a discretização da viga em 100 elementos.

Para uma melhor visualização dos fenômenos envolvidos no exemplo foram obtidos o diagrama de momentos fletores para a viga (Figura 4-9) e o diagrama momento-curvatura para a seção transversal (Figura 4-10), aproveitando a simetria da seção e mostrando, somente, os valores para o primeiro quadrante (o diagrama é simétrico em relação à origem). O diagrama de momentos fletores se refere à discretização irregular com 5 elementos (2 pontos de Gauss e verificação do ELU somente nas extremidades dos elementos) e carga crítica de 0,14106 MN. Se se tratasse de um material elástico linear o momento fletor no engaste ($z = 0$ m) seria de $-3PL/16 \simeq -0,05290$ MN.m enquanto que o momento fletor no meio da viga ($z = 1$ m) seria de $5PL/32 \simeq 0,04408$ MN.m. Os valores obtidos numericamente são, respectivamente, $-0,05341$ MN.m e $0,04377$ MN.m (houve, portanto, uma leve redistribuição de momentos fletores, com diminuição do momento no apoio e no meio do vão quando comparados com os valores de um material elástico linear).

Com a consideração do diagrama momento-curvatura e, ainda, admitindo um material elástico linear, pode-se obter uma estimativa para a carga crítica da viga. Para material elástico linear o maior momento fletor ocorre no engaste ($-3PL/16$). O diagrama momento curvatura indica que o maior momento fletor que a seção resiste é de 0,05288 MN.m (para uma curvatura $1000 \kappa_x = 22,94847 \text{ m}^{-1}$). Portanto, a carga crítica seria de 0,14101 MN (levemente a favor da segurança). Não se deve, no entanto, imaginar que a análise linear dê sempre resultados tão próximos quanto os obtidos neste exemplo.

Ainda é possível tecer comentários sobre a lenta convergência observada na obtenção da carga crítica. Comparando o diagrama de momentos fletores da viga com o diagrama momento-curvatura da seção transversal percebe-se que a não-linearidade física está fortemente presente no problema. O diagrama momento-curvatura apresenta uma forte descontinuidade de derivadas para, aproximada-

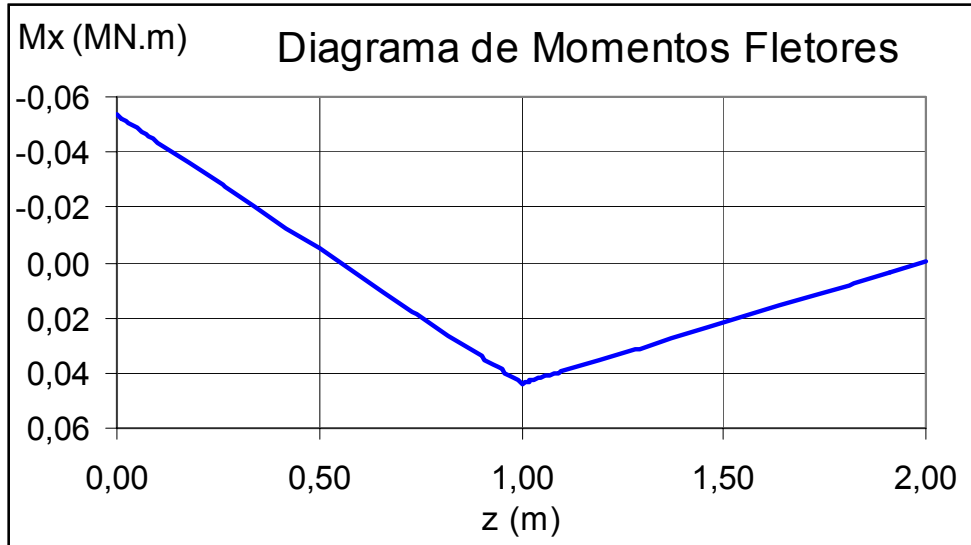


Figura 4-9: Diagrama de momentos fletores do Exemplo 4-5

mente, $1000 \kappa_x \simeq 11,6 \text{ m}^{-1}$ (com um momento fletor de aproximadamente $0,051 \text{ MN.m}$). O diagrama de momentos fletores indica, claramente, que esta descontinuidade está sendo alcançada e, portanto, a não-linearidade física se manifesta de forma marcante. Como a descontinuidade de derivadas do diagrama momento-curvatura implica em uma mudança brusca de rigidez dos elementos, é de se esperar que bons resultados sejam alcançados pela análise somente com a utilização de uma malha fina (o que explica por que as malhas irregulares apresentam bons resultados com poucos elementos: nas regiões de maiores momentos — engaste e meio do vão — houve uma maior discretização da malha).

A utilização de malhas finas regulares implica em uma análise cara (um maior número de elementos acaba aumentando, significativamente e de forma não linear, o tempo de processamento). Recomenda-se, portanto, que sempre seja feita uma discretização irregular, diminuindo o tamanho dos elementos nas regiões de apoio, nas regiões com descontinuidade de derivada da geometria da estrutura e nas regiões próximas aos pontos de aplicação de cargas. Análises com elementos uniformes, em geral, levam a resultados contra a segurança e sem nenhuma confiabilidade. Um procedimento que parece ser interessante [53] é a construção de um elemento que já possua, internamente, uma sub-divisão do próprio elemento (por exemplo 10%, 80% e 10% do comprimento original).

Exemplo 4-6 Admita o pórtico mostrado na Figura (4-11). Os dois pilares (barras verticais) possuem comprimento total de $3,03 \text{ m}$ e seção transversal quadrada ($0,40 \text{ m} \times 0,40 \text{ m}$), com duas camadas de barras (simétricas) totalizando uma área de $15,1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$. A viga (barra horizontal) possui comprimento total de $6,06 \text{ m}$ e seção transversal retangular ($0,40 \text{ m} \times 0,60 \text{ m}$), com duas camadas de barras (simétricas) totalizando uma área de $16,7 \times 10^{-4} \text{ m}^2$. Em ambas as seções a

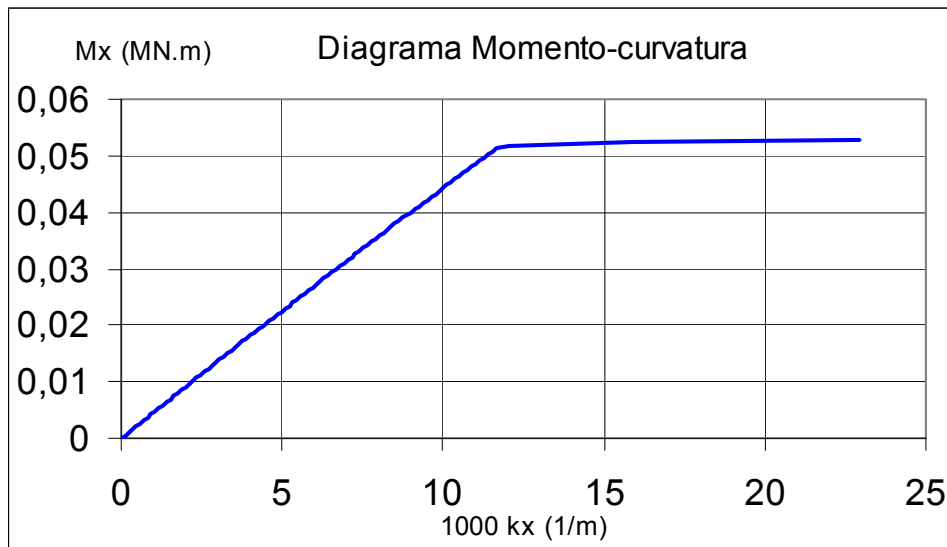


Figura 4-10: Diagrama Momento-Curvatura para a seção do Exemplo 4-5

distância da camada de barras à borda mais próxima (d') é de 0,04 m. Os dados dos materiais são

Aço	$f_{yk} = 500 \text{ MPa}$	$\gamma_s = 1,15$	$E_s = 210.000 \text{ MPa}$	Classe A
Concreto	$f_{ck} = 18 \text{ MPa}$	$\gamma_c = 1,40$	Rüsch = 0,85	

O pórtico é analisado supondo duas discretizações, sempre com 9 elementos (e 10 nós). Na discretização regular os pilares são divididos em três elementos de 1,01 m enquanto a viga é dividida em três elementos de 2,02 m. Na discretização irregular os pilares são divididos em três elementos seguindo a sugestão de 10%, 80% e 10% do comprimento original (o primeiro com 0,303 m, o segundo com 2,424 m e o último novamente com 0,303 m). A viga também é dividida, na malha irregular, em três elementos análogos aos dos pilares (o primeiro com 0,606 m, o segundo com 4,848 m e o último novamente com 0,606 m). Os nós 1, 4, 7 e 10 das duas discretizações permanecem posicionados nos mesmos lugares e estão esquematizados na Figura (4-11).

O carregamento do pórtico é composto por 4 cargas concentradas. Os nós 4 e 7 estão submetidos a uma carga de valor P com direção vertical e sentido de cima para baixo. O nó 4 ainda está submetido a uma carga concentrada de valor $H_1 = P/100$ (um centésimo de P) com direção horizontal e sentido da esquerda para a direita (o nó 7 não está submetido a nenhuma carga horizontal, ou seja, $H_2 = 0$).

As análises efetuadas buscaram o valor da carga crítica P para o pórtico mostrado. Foram feitas duas considerações sobre a verificação do ELU (como no exemplo anterior): verificação do ELU somente nos pontos de Gauss (Gauss) e verificação do ELU somente nas extremidades de cada elemento (Extremidades). As análises foram sempre efetuadas com 2 pontos de integração e utilizando a teoria

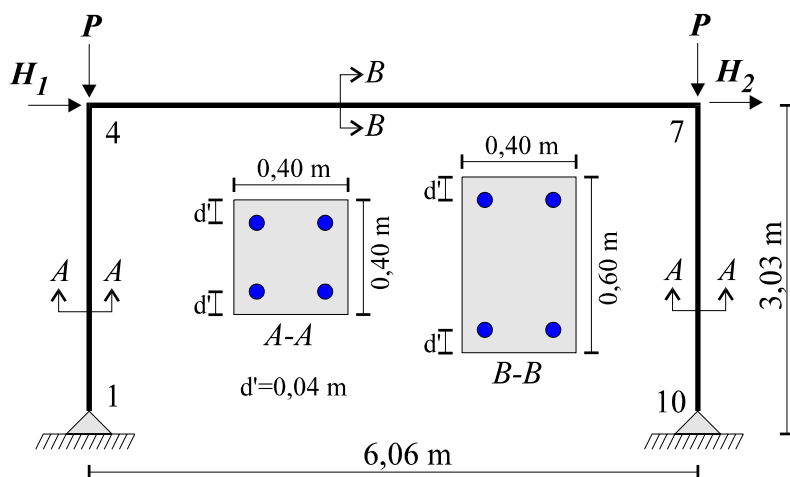


Figura 4-11: Pórtico do Exemplo 4-6

de Rotações Moderadas. Os resultados obtidos são mostrados a seguir.

Valores da carga crítica P (MN)		
Verificação do ELU	Malha de 9 elementos	
	Regular	Irregular
Gauss	1,93501	1,92361
Extremidades	1,93070	1,92361

Neste exemplo não foram observadas diferenças significativas dos valores das cargas críticas obtidas segundo as várias hipóteses adotadas. A título de ilustração a sequência de carregamentos utilizada para a obtenção da carga crítica (malha irregular, ELU nas extremidades) é mostrada na Figura (4-12). Trata-se de um gráfico do deslocamento horizontal do nó 4 (uz_4 em mm) versus a carga aplicada (P em MN). Este diagrama serve para ilustrar a forte não-linearidade presente no problema.

Exemplo 4-7 O mesmo pórtico esquematizado na Figura (4-11) é submetido a outra análise de carga crítica supondo que as cargas P (cargas verticais aplicadas aos nós 4 e 7) sejam constantes e iguais a 1,28 MN. Será procedida a variação das cargas horizontais (também aplicadas aos nós 4 e 7) $H_1 = H_2 = H$. A área de armadura das seções dos pilares foi dobrada (passou para $30,2 \times 10^{-4} \text{ m}^2$) e a área da seção da viga também (passou para $33,4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$). Os materiais também foram alterados para

Aço	$f_{yk} = 483 \text{ MPa}$	$\gamma_s = 1,15$	$E_s = 210.000 \text{ MPa}$	Classe A
Concreto	$f_{ck} = 32,94 \text{ MPa}$	$\gamma_c = 1,40$	Rüsch = 0,85	

Os resultados obtidos para a carga crítica H , com as mesmas hipóteses do Exemplo 4-6, foram:

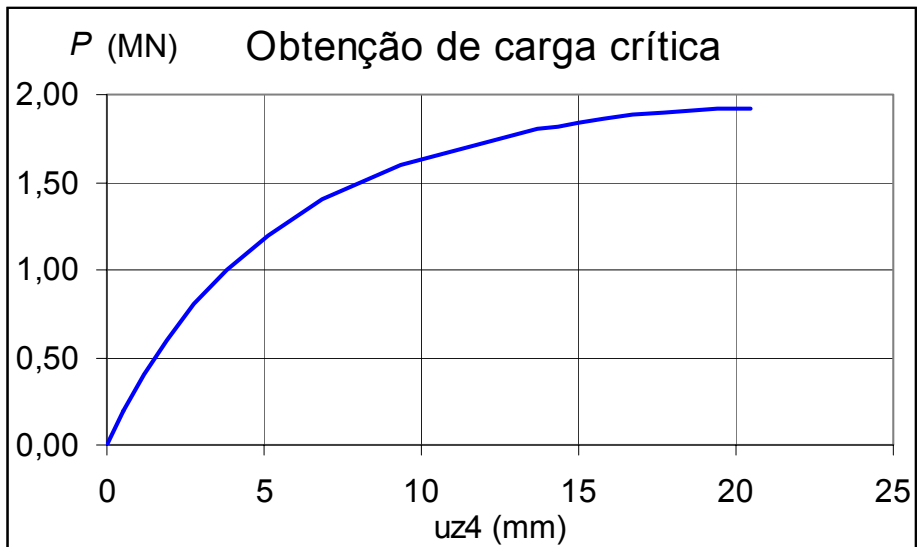


Figura 4-12: Obtenção da carga crítica do Exemplo 4-6

Valores da carga crítica H (MN)		
Verificação do ELU	Malha de 9 elementos	
	Regular	Irregular
Gauss	0,10116	0,09822
Extremidades	0,09565	0,09663

Para as cargas anteriores o deslocamento horizontal do nó 4 foi:

Valores do deslocamento horizontal do nó 4 (u em m)		
Verificação do ELU	Malha de 9 elementos	
	Regular	Irregular
Gauss	0,05434	0,04923
Extremidades	0,04820	0,04690

Adotando a carga crítica para a malha irregular (com a verificação do ELU nas extremidades), pode-se fazer a comparação dos resultados aqui obtidos com outros disponíveis na bibliografia consultada. Esta escolha de carga crítica (que não é a menor entre todas as obtidas) se justifica por ser a verificação do ELU nas extremidades a mais segura e, com base em exemplos anteriores, a malha irregular fornecer, em geral, melhores resultados.

Fonte	H (kN)	u (cm)
Este trabalho	96,63	4,69
E ₂ [5]	99,80	5,49
E ₃ [5]	100,50	5,36
CEB [13]	93,71	5,25
Garcia [32]	100,00	5,46
Telles [73]	94,78	5,00

A variação percentual dos valores obtidos, quando comparados aos resultados mostrados nas referências citadas é de:

Fonte	Variação % de H
Este trabalho	0
E ₂ [5]	+3,28
E ₃ [5]	+4,00
CEB [13]	-3,02
Garcia [32]	+3,48
Telles [73]	-1,91

As variações apresentadas são, normalmente aceitáveis. Há que se ter cuidado, entretanto, com resultados contra a segurança (variações positivas). O processo de verificação do ELU somente nas extremidades do elemento (através de um cálculo de verificação), para todos os exemplos analisados, sempre se mostrou a favor da segurança, levando a cargas críticas inferiores àquelas observadas na literatura consultada.

Exemplo 4-8 Admita a viga simplesmente apoiada esquematizada na Figura (4-13) com seção transversal “T” constante e submetida a um carregamento uniformemente distribuído $q = 25,7 \times 10^{-3}$ MN/m (característico, ou seja, sem majorar). Efetuou-se um cálculo de equilíbrio simples para a obtenção da deformada da viga⁸. Por se tratar de cálculo de flechas (sendo, portanto, realizado em serviço) os coeficientes de segurança dos materiais foram alterados para:

Aço	$f_{yk} = 500$ MPa	$\gamma_s = 1$	$E_s = 210.000$ MPa	Classe B
Concreto	$f_{ck} = 15$ MPa	$\gamma_c = 1$	Rüsch = 0,85	

A armadura é constituída por três camadas de barras. O CG da seção transversal está a uma altura de $141/380 \simeq 0,371053$ m a partir da fibra inferior. As áreas de armadura em cada camada de barras (e seu posicionamento medido a partir do CG da seção de concreto, positivo para cima) são:

⁸Este exemplo é levemente baseado na referência [66], página 5.33. Nesta referência foi obtida uma flecha máxima de 0,80 cm (observe que as vigas não são idênticas).

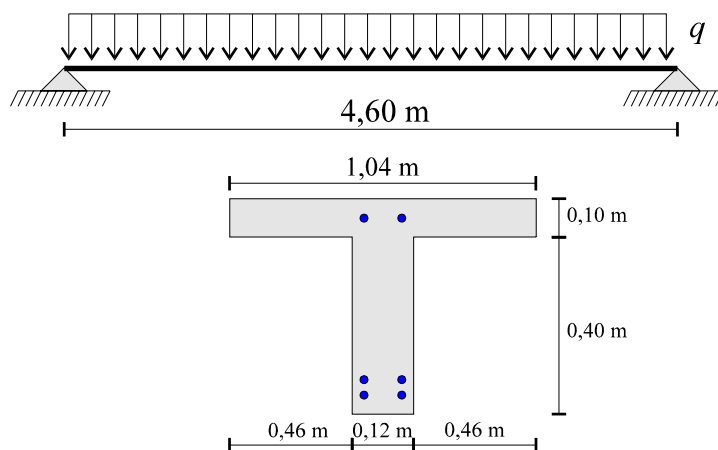


Figura 4-13: Viga simplesmente apoiada do Exemplo 4-8

Camada	Bitola	Área (cm ²)	Posicionamento (m)
1	2 ϕ 5	0,39270	+0,21000
2	2 ϕ 12,5	2,45437	-0,19125
3	2 ϕ 12,5	2,45437	-0,22875

A viga foi discretizada em 10 elementos uniformemente espaçados. Utilizou-se a teoria de Rotações Moderadas e a integração numérica foi realizada com 2 pontos de Gauss. A deformada obtida está representada na Figura (4-14). A flecha máxima obtida foi de 1,293 cm (se os coeficientes de segurança fossem considerados de forma usual, ou seja, $\gamma_s = 1,15$ e $\gamma_c = 1,40$, a flecha máxima seria de 1,592 cm).

Note que além das reações de apoio verticais (0,05911 MN) existem, ainda, reações de apoio horizontais (0,26471 MN no caso dos coeficientes de segurança apresentados e 0,19722 MN para os coeficientes usuais). As seções da viga estão, portanto, sujeitas a atuação conjunta de um esforço normal e momento fletor (e não simplesmente flexão simples). Isto se deve, naturalmente, ao fato de os dois apoios da viga não permitirem translações.

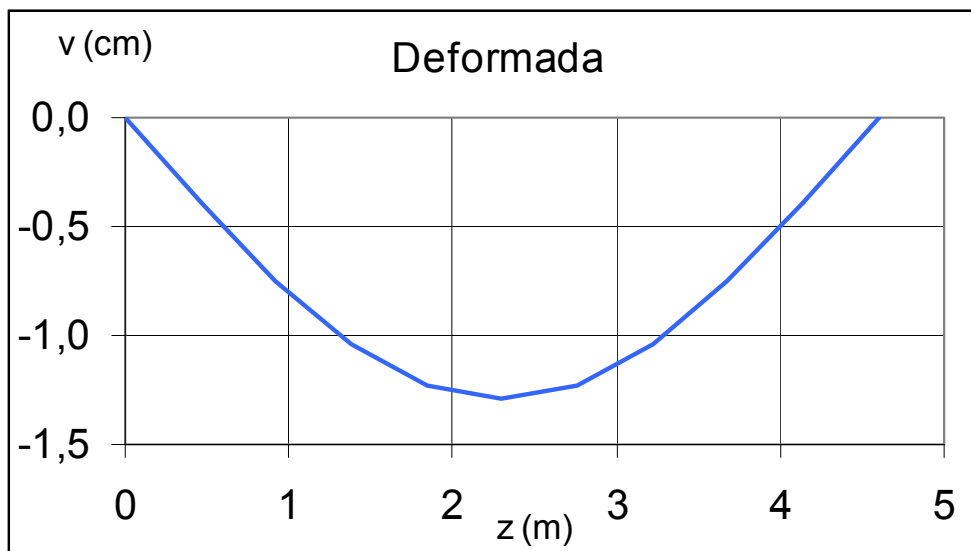


Figura 4-14: Deformada do Exemplo 4-8

Capítulo 5

Conclusões e Comentários

5.1 Sobre o Estudo da Seção Transversal

Com relação ao Capítulo “Estudo da Seção Transversal” podem ser tecidos os seguintes comentários:

Foi desenvolvida uma metodologia extremamente eficiente (utilizando, plenamente, o Teorema de Green) para a obtenção dos esforços resistentes do concreto. Esta metodologia (exata) é restrita pelas hipóteses:

1. Seção transversal poligonal.
2. Distribuição de deformações linear na seção transversal.
3. Material elástico (linear ou não).
4. Diagrama tensão deformação integrável.

Como fatores originais desta metodologia citam-se os fatos de não haver o “giro” da seção (de tal forma que a linha neutra fique paralela a um dos eixos coordenados) e de não haver a necessidade da sub-divisão do polígono comprimido para cada trecho de definição do diagrama tensão-deformação (quando este for, obviamente, definido por várias funções distintas). Ao final também não há a necessidade de se alterar os esforços resistentes (que foram obtidos no sistema “girado”) para o sistema de coordenadas original. Mostrou-se, também, que o método é bastante eficiente quando comparado a métodos usuais (nas comparações efetuadas observou-se uma economia média de 90% no número de operações computacionais necessárias).

Deve-se ressaltar que foram abordados três problemas distintos referentes à seção transversal: cálculo dos esforços seccionais resistentes (Teorema de Green); verificação de seções transversais (Newton-Raphson) e, por fim, o dimensionamento da área de armadura (com arranjo mono-paramétrico) de seções transversais (verificações sucessivas).

Embora todas as aplicações tenham sido feitas a seções transversais de concreto, esta metodologia não se restringe a este tipo de material. Pode-se, com grande facilidade, utilizá-la para qualquer outro material elástico (desde que sujeito às hipóteses anteriores).

Uma possível extensão à integração dos esforços na seção transversal é a sua aplicação à seções com lados de trechos curvos. O esforço computacional necessário para simular uma seção com lados curvos (por exemplo circular) parece justificar o investimento de tempo na dedução de expressões que sirvam para seções com lados não retos.

Com vistas à utilização do método de Newton-Raphson, foram obtidas as derivadas dos esforços resistentes utilizando a mesma metodologia (Teorema de Green). O cálculo analítico destas derivadas se justifica pelo fato de que avaliações numéricas (por exemplo por diferenças finitas) podem fazer com que o método de Newton-Raphson tenha uma taxa de convergência mais lenta do que a quadrática (que existe quando as derivadas são avaliadas “exatamente”).

Foram calculados os esforços resistentes da armadura (e suas derivadas) de forma tradicional, ou seja, considerando que cada barra possa ser considerada como um ponto. Os resultados obtidos também podem ser estendidos a qualquer material elástico (mudando-se convenientemente o diagrama tensão-deformação).

O método de Newton-Raphson foi aplicado ao problema de verificação de capacidade resistente de seções com sucesso. Este método mostrou-se bastante vantajoso na determinação da distribuição de deformações na seção transversal que equilibra esforços externos mas, no entanto, foi aplicado sem a imposição de obediência prévio aos diagramas de domínios (ELU). A verificação do ELU deve ser feita posteriormente (esta verificação é, na verdade, bastante simples). Este procedimento se justifica na medida em que o método de Newton-Raphson se mostra mais eficiente numa busca sem restrições.

Não é interessante, no entanto, a aplicação do método de Newton-Raphson para a obtenção dos diagramas de interação (diagramas de “roseta” para FOC ou outras solicitações). Este método se mostra eficiente para a verificação caso a caso.

Não se pode garantir a convergência do método de Newton-Raphson na verificação de seções transversais cujos materiais apresentem diagramas tensão-deformação que não sejam monotonicamente crescentes (ou seja, a verificação pode não convergir para materiais com diagramas que apresentem trechos com $d\sigma/d\varepsilon$ negativo). Nestes casos, de diagramas com ramos descendentes ($d\sigma/d\varepsilon < 0$), o cálculo dos esforços resistentes continua sendo exato mas a verificação (Newton-Raphson) e o dimensionamento (verificações sucessivas) podem não convergir.

Mostrou-se que nem sempre existe solução para o problema de verificação (uma vez que a capacidade resistente da seção é finita) através do conceito de “plastificação” da seção transversal. Nestes

casos, da incapacidade da seção em resistir aos esforços aplicados, mostrou-se que o método de Newton-Raphson falha por encontrar, em alguma iteração, a matriz de recorrência singular. Este fato permite, com rapidez, detectar a incapacidade mecânica da seção em resistir aos esforços aplicados (não se trata de ELU).

Quando a solução existe o método de Newton-Raphson sempre a encontra (desde que o ponto de partida seja viável, ou seja, não cause a “plastificação” da seção transversal) em poucas iterações (nos exemplos realizados o número máximo de iterações foi 7 para um critério de convergência $\|\mathbf{f}\| \leq 1 \times 10^{-5}$).

Mostrou-se um método de dimensionamento da área de armadura baseado numa série de verificações. A restrição ao método é que a distribuição da armadura seja mono-paramétrica (por exemplo: todas as barras devem ter o mesmo diâmetro). As verificações sucessivas utilizam, por exemplo, as bitolas comerciais existentes (já que, em geral, não se pode obter um diâmetro de barra qualquer) e este processo, também, se mostrou bastante eficiente no dimensionamento de seções quaisquer submetidas a FOC.

Do ponto de vista do usuário, todos os procedimentos apresentados (cálculo dos esforços resistentes, verificações de seções e dimensionamentos de armadura) são efetuados “instantaneamente” (o equipamento de teste foi um microcomputador Pentium, 166 MHz, com 48 Mb de memória RAM). Espera-se, portanto, que a aplicação desta metodologia a, por exemplo, programas de elementos finitos, leve a uma economia significativa do tempo total de execução destes programas.

As expressões obtidas para as seções poligonais sob FOC foram particularizadas para uma seção retangular sob FNC (devendo haver, portanto, simetria vertical da distribuição da armadura). As expressões obtidas ficaram extremamente simples e o autor desconhece, até o momento, outra forma mais rápida de verificar e dimensionar seções retangulares com arranjo de armadura previamente fixado.

Recomenda-se, novamente, que o pólo de ruína de alongamento de 10 por mil seja transferido para a camada mais tracionada da seção (e não na camada de barras mais alongada). Esta recomendação garante que, de fato, nenhuma fibra da seção esteja com um alongamento superior a 1%, simplifica a consideração do ELU (“Região Viável”) e fica sempre a favor da segurança.

5.2 Sobre o Estudo de Pórticos Planos

No Capítulo “Estudo de Pórticos Planos” foi desenvolvido um elemento para a análise de pórticos planos de concreto armado. O elemento apresenta a análise não-linear física (materiais) e foram feitas considerações sobre a não-linearidade geométrica. Neste trabalho optou-se pela utilização da teoria de

“Rotações Moderadas” (teoria de segunda ordem simplificada) em função de a não-linearidade física não propiciar alterações significativas na geometria das peças.

Os esforços resistentes das seções são calculados como mostrado no Capítulo “Estudo da Seção Transversal”, usando, portanto, somente uma “parte” da metodologia apresentada uma vez que a aplicação aqui feita restringe-se a pórticos planos. O cálculo dos esforços seccionais, como já dito, é feito de forma muito eficiente. Espera-se, assim, que programas de elementos finitos de pórticos espaciais sejam particularmente beneficiados com a metodologia apresentada.

Foram apresentados, de forma consistente com as hipóteses adotadas, todos os procedimentos necessários para a análise estática, por elementos finitos, de pórticos planos de concreto armado (desde a montagem da matriz de rigidez do elemento — que inclui considerações sobre integração numérica utilizando a Quadratura de Gauss — até a resolução iterativa do sistema de equações da estrutura). Espera-se, com isso, que haja uma contribuição significativa para que a análise não-linear de estruturas de concreto armado se torne uma ferramenta mais corriqueira aos calculistas de concreto armado.

A análise do Estado Limite Último foi feita, também, de forma consistente. Concluiu-se pela verificação das extremidades dos elementos para a obtenção das deformações nestes pontos (ao invés de procedimentos de interpolação/extrapolação de deformações). Os exemplos numéricos levam a crer que este procedimento esteja a favor da segurança e, utilizando a metodologia apresentada no Capítulo “Verificação e Dimensionamento de Seções Transversais”, não se mostra muito oneroso em termos computacionais.

Sobre os exemplos mostrados pode-se ainda comentar que foram escolhidos de forma a apresentar, em termos qualitativos, uma grande variedade de problemas que podem ser enfrentados em análises práticas. A experiência adquirida na confecção e execução dos exemplos mostra que, infelizmente, a análise não linear ainda está longe de ser um cálculo automático, desprovido de intervenção humana. Sempre se faz necessária a intervenção do calculista na correta interpretação e análise dos resultados. Acredita-se que, com o grande desenvolvimento de hardware que vem ocorrendo, em breve existirão máquinas possantes o suficiente para que o tempo de processamento realmente passe a ser desprezível e, com isso, passe a ser economicamente viável a análise de estruturas com grande precisão e refinamento de malha.

Deve-se ainda ressaltar que embora a ênfase deste trabalho tenha sido o material concreto armado, a grande maioria dos conceitos e discussões apresentados podem, sem dificuldade, ser transpostos a qualquer outra seção com materiais elásticos, homogênea ou não. Tanto a obtenção dos esforços resistentes das seções transversais quanto a análise do pórtico plano propriamente dito são, de certa

forma, genéricas, ou seja, não estão relacionadas a um material em particular. A exceção a esta extensão fica restrita às considerações sobre o Estado Limite Último que é bastante particular ao concreto armado.

Possíveis extensões deste trabalho necessariamente recaem sobre a análise de pórticos espaciais de concreto armado e, eventualmente, no desenvolvimento de um elemento que leve em conta, com rigor, a análise da não-linearidade geométrica. Muito cuidado deve ser tomado com a consideração do Estado Limite Último por ser uma hipótese extremamente restritiva no cálculo de estruturas de concreto armado.

Um assunto que ainda merece estudo mais aprofundado é a caracterização da segurança nas análises não lineares de estruturas. Os exemplos realizados neste trabalho sempre se utilizaram dos mesmos materiais (e coeficientes de segurança) tanto para a análise quanto para a verificação (de seções) no Estado Limite Último. É muito razoável a idéia de que a análise da estrutura seja feita com diagramas tensão-deformação que se aproximem, na medida do possível, do comportamento em serviço dos materiais. Desta forma pode-se pensar, inclusive, na adoção de diagramas tensão-deformação distintos para a análise e para a verificação de seções, ou em uma primeira abordagem, na adoção de coeficientes de segurança distintos para cada um dos procedimentos.

Apêndice A

Integração Numérica

Mostra-se como pode ser obtido, numericamente, o valor de uma integral através do método da Quadratura de Gauss. Chama-se a atenção para as condições de exatidão do processo e mostra-se, de forma sucinta, como os coeficientes de Gauss podem ser calculados (em oposição ao tabelamento destes valores em programas de integração numérica). Mostra-se, também, como podem ser feitos testes para a certificação dos valores dos coeficientes de Gauss utilizados.

A.1 Integração de um polinômio

Iniciemos nosso estudo imaginando que se deseje integrar, numericamente, uma função polinomial. Este início pode parecer estranho uma vez que, como se sabe, polinômios podem ser integrados analiticamente e dispensam, desta forma, uma integração numérica. Será visto mais adiante que as mesmas expressões utilizadas para a integração de um polinômio podem ser aplicadas para uma função arbitrária com sucesso.

A idéia básica do processo é a transformação de uma integral definida¹ em um somatório do tipo

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n w_i f(r_i). \quad (\text{A.1})$$

Se formos capazes de fazer a determinação dos coeficientes w_i ($i = 1 \dots n$) — conhecidos como pesos — e r_i ($i = 1 \dots n$) — conhecidos como raízes — seremos, então, capazes de avaliar a integral da função através do somatório indicado. A escolha do número de pontos n será discutida mais adiante.

¹Inicialmente vamos supor que os limites de integração sejam, respectivamente, -1 e 1.

Como, por hipótese, a função a ser integrada é polinomial, pode ser expressa como

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^m a_k \xi^k = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots + a_m \xi^m. \quad (\text{A.2})$$

Como esta função pode ser integrada analiticamente pode-se escrever

$$\int f(\xi) d\xi = \sum_{k=0}^m \frac{a_k \xi^{k+1}}{k+1} = a_0 \xi + a_1 \frac{\xi^2}{2} + a_2 \frac{\xi^3}{3} + \dots + a_m \frac{\xi^{m+1}}{m+1} + \text{constante}. \quad (\text{A.3})$$

Aplicando os limites de integração obtém-se

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{k=0}^m \frac{a_k}{k+1} \left[1 + (-1)^{k+2} \right] = 2a_0 + a_2 \frac{2}{3} + a_4 \frac{2}{5} + \dots \quad (\text{A.4})$$

Mas, por hipótese, a integral anterior deve ser transformada em um somatório

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n w_i f(r_i) = \sum_{i=1}^n w_i \left(\sum_{k=0}^m a_k r_i^k \right). \quad (\text{A.5})$$

Igualando as duas últimas equações

$$\sum_{k=0}^m \frac{a_k}{k+1} \left[1 + (-1)^{k+2} \right] = \sum_{i=1}^n w_i \left(\sum_{k=0}^m a_k r_i^k \right). \quad (\text{A.6})$$

Para um valor de k fixo ($k = 0 \dots m$) pode-se escrever

$$\sum_{i=1}^n w_i r_i^k = \frac{1 + (-1)^{k+2}}{k+1}, \quad k = 0 \dots m. \quad (\text{A.7})$$

A equação anterior, quando aplicada para todos os $m+1$ ($k = 0 \dots m$) valores de k , forma um sistema não-linear de equações que serve para a determinação dos coeficientes r_i e w_i ($i = 1 \dots n$). Como existem $2n$ incógnitas temos que escrever $m+1 = 2n$ equações. Desta forma conclui-se que com n pontos de Gauss integra-se, exatamente, um polinômio de ordem $m = 2n - 1$.

A.1.1 Exemplo de determinação dos coeficientes de Gauss

Determinemos, por exemplo, os coeficientes de Gauss para um ponto ($n = 1$) e dois pontos ($n = 2$) de integração. Os coeficientes para 1 ponto integram, exatamente, uma função linear enquanto os coeficientes para 2 pontos integram, exatamente, uma função cúbica (ou quadrática ou linear).

Para $n = 1$ existem duas incógnitas: w_1 e r_1 . São necessárias, portanto, duas equações para a

determinação destes coeficientes. Aplicando a equação (A.7) para $k = 0$ e para $k = 1$ escreve-se

$$k = 0 \Rightarrow w_1 = 2 \text{ e} \quad (\text{A.8})$$

$$k = 1 \Rightarrow w_1 r_1 = 0 \Rightarrow r_1 = 0. \quad (\text{A.9})$$

Para $n = 2$ existem quatro incógnitas: w_1 , w_2 , r_1 e r_2 . São necessárias, portanto, quatro equações para a determinação destes coeficientes. Aplicando a equação (A.7) para $k = 0 \dots 3$ escreve-se

$$k = 0 \Rightarrow w_1 + w_2 = 2 \quad (\text{A.10})$$

$$k = 1 \Rightarrow w_1 r_1 + w_2 r_2 = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$k = 2 \Rightarrow w_1 r_1^2 + w_2 r_2^2 = \frac{2}{3} \quad (\text{A.12})$$

$$k = 3 \Rightarrow w_1 r_1^3 + w_2 r_2^3 = 0. \quad (\text{A.13})$$

A solução deste sistema conduz aos valores

$$w_1 = w_2 = 1 \quad (\text{A.14})$$

$$-r_1 = r_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (\text{A.15})$$

A determinação analítica dos coeficientes de Gauss para um número de pontos arbitrário normalmente é bastante complexa. Existem diversos livros que trazem tais coeficientes tabelados para que possam ser incluídos em programas de computador. Ao final deste texto mostramos, de forma expedita, como tais coeficientes podem ser obtidos numericamente.

A.2 Mudança do intervalo de integração

A maioria dos problemas práticos de integração numérica exigem um intervalo de integração diferente daquele utilizado inicialmente (-1 a 1). Nestes casos deve-se proceder a uma mudança de variáveis de forma a transformar o intervalo de integração.

Imagine que se deseja obter numericamente o valor da integral

$$\int_a^b f(x) dx. \quad (\text{A.16})$$

Com a mudança de variável

$$x = \frac{a+b}{2} + \xi \frac{b-a}{2} \quad (\text{A.17})$$

faz-se com que quando $\xi = -1$ tenha-se $x = a$ e quando $\xi = 1$ tenha-se $x = b$. Desta forma, ao invés de efetuar-se a integral em x , pode-se fazê-la em ξ lembrando que

$$dx = d\xi \frac{b-a}{2}. \quad (\text{A.18})$$

Assim

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{a+b}{2} + \xi \frac{b-a}{2}\right) d\xi. \quad (\text{A.19})$$

Aplicando a Quadratura de Gauss obtém-se, finalmente,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{a+b}{2} + \xi \frac{b-a}{2}\right) d\xi = \\ &= \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i f\left(\frac{a+b}{2} + r_i \frac{b-a}{2}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

A.3 Exemplo de integração

Imagine que se deseje obter numericamente a integral da função

$$g(x) = \begin{cases} 1+x & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & 0 \leq x \leq +1 \end{cases}. \quad (\text{A.21})$$

O gráfico desta função corresponde a um triângulo de base 2 e altura unitária. Obviamente o resultado da integração deve fornecer 1. Como se trata de uma função definida por trechos, no entanto, é necessário, para a integração exata, que se proceda a duas integrações nos intervalos $[-1, 0]$ e $[0, 1]$. Nestes intervalos a função é linear e pode ser utilizado 1 ponto de Gauss. Para um ponto de Gauss tem-se $r_1 = 0$ e $w_1 = 2$. Assim

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} g(x) dx &= \int_{-1}^0 g(x) dx + \int_0^1 g(x) dx = \\ &= \frac{0 - (-1)}{2} 2g\left(\frac{-1+0}{2}\right) + \frac{1-0}{2} 2g\left(\frac{0+1}{2}\right) = \\ &= g\left(-\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Como já foi dito, a Quadratura de Gauss não serve unicamente para a integração de funções polinomiais. Pode-se tentar obter a mesma integral considerando-se, de forma aproximada, todo o

intervalo de integração de uma única vez. Por exemplo, utilizando novamente 1 ponto de integração:

$$n = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{+1} g(x) dx \simeq w_1 g(r_1) = 2 g(0) = 2. \quad (\text{A.23})$$

Este resultado, obviamente, está ruim e deve-se ao fato de apesar de a função ser composta por duas funções lineares, a função completa, no intervalo $[-1, 1]$, não ser polinomial. Com a utilização de um número maior de pontos de integração espera-se que o resultado melhore. De fato, adotando 2 pontos de integração

$$\begin{aligned} n = 2 \Rightarrow \int_{-1}^{+1} g(x) dx &\simeq w_1 g(r_1) + w_2 g(r_2) = g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \simeq 0,8453. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

A principal conclusão é que deve-se ter cuidado ao escolher o número de pontos de Gauss para realizar uma integral. A garantia de exatidão do processo só existe para funções polinomiais e a integração com n pontos, como já foi dito, só é exata para polinômios de ordem igual ou inferior a $2n - 1$. Pode-se mostrar que a medida que o número de pontos de integração vai crescendo obtém-se, progressivamente, erros menores. No limite, para um número infinito de pontos de Gauss, obter-se-ia a integração exata. Como, normalmente, aplica-se a integração de Gauss em problemas sem solução analítica e com programas de computador, um número muito grande de pontos de integração pode onerar, significativamente, o processo todo.

A.4 Obtenção dos coeficientes de integração

Descreve-se como os coeficientes de Gauss podem ser obtidos numericamente. Em um programa que utiliza a integração de Gauss opta-se, normalmente, pela introdução destes coeficientes através de tabelas (encontradas em várias publicações²). No entanto, não deixa de ser uma opção para o programa o cálculo dos próprios coeficientes. A grande vantagem é que pode ser utilizado um número arbitrário de pontos de integração. A desvantagem é que o tempo de execução é aumentado uma vez que não existe um método simples para o cálculo destes coeficientes.

Pode-se mostrar que os coeficientes r_i ($i = 1 \dots n$) são, também, raízes dos polinômios de Legendre

²Por exemplo Stroud, A.H. & Secrest, D. *Gaussian Quadrature Formulas*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1966.

$P_n(x)$ (daí o nome raízes). Estes polinômios $P_n(x)$ podem ser expressos pela lei de recorrência

$$P_0(x) = 1 \quad (\text{A.25})$$

$$P_1(x) = x \quad (\text{A.26})$$

$$P_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)}{n+1}, \quad n \geq 1. \quad (\text{A.27})$$

Estes polinômios podem, também, ser expressos diretamente através da relação

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^i \frac{(2n-2i)!}{i!(n-2i)!(n-i)!} x^{n-2i}, \quad (\text{A.28})$$

mas, em termos computacionais, a relação anterior não apresenta nenhuma vantagem em relação à definição recorrente. O operador $\lfloor x \rfloor$ representa o maior número inteiro menor ou igual a x . A operação $p!$ é o fatorial do número inteiro p , ou seja, $p! = \prod_{i=1}^p i$.

A título de curiosidade podem ser obtidas as expressões explícitas para alguns polinômios de Legendre, por exemplo

$$P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}, \quad (\text{A.29})$$

$$P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2}, \quad (\text{A.30})$$

$$P_4(x) = \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8} \text{ etc.} \quad (\text{A.31})$$

Pode-se mostrar que os coeficientes w_i (pesos) podem ser calculados com

$$w_i = \frac{2(1 - r_i^2)}{(nP_{n-1}(r_i))^2}. \quad (\text{A.32})$$

Um método para o cálculo dos coeficientes de Gauss consiste na obtenção dos zeros (raízes) do polinômio de Legendre correspondente. Com estas raízes calcula-se, então, o valor do peso correspondente. O problema é que o cálculo destas raízes não é imediato. Uma possível solução é o emprego do método iterativo de Newton-Raphson com a fórmula de recorrência

$$(r_i)_{k+1} = (r_i)_k - \frac{P_n((r_i)_k)}{P'_n((r_i)_k)}, \quad k \geq 0. \quad (\text{A.33})$$

O símbolo $(r_i)_k$ denota o valor da raiz i obtido na iteração k . A notação P'_n significa a derivada

do polinômio de Legendre segundo a variável x , ou seja,

$$P'_n(x) = \frac{dP_n(x)}{dx}. \quad (\text{A.34})$$

Pode-se mostrar que esta última derivada pode ser obtida através dos próprios polinômios de Legendre com a relação

$$P'_n(x) = n \frac{P_{n-1}(x) - x P_n(x)}{1 - x^2}. \quad (\text{A.35})$$

Desta maneira a fórmula de recorrência de Newton-Raphson pode ser expressa sem a necessidade da avaliação da derivada, ou seja,

$$(r_i)_{k+1} = (r_i)_k - \frac{1 - (r_i)_k^2}{n} \frac{P_n((r_i)_k)}{P_{n-1}((r_i)_k) - (r_i)_k P_n((r_i)_k)}, \quad k \geq 0. \quad (\text{A.36})$$

Resta, ainda, o problema do valor $(r_i)_0$ a ser atribuído para iniciar a procura pela raiz. Infelizmente este assunto não é trivial e soluções simplistas fazem com que o método de Newton-Raphson falhe por não encontrar a raiz ou, por outro lado, por encontrar várias vezes a mesma raiz. Uma boa estimativa inicial³ (possui erros da ordem de n^{-4}) é dada por

$$(r_i)_0 = \left(1 - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{8n^3}\right) \cos\left(\pi \frac{4i-1}{4n+2}\right). \quad (\text{A.37})$$

Resumindo: Para calcular as raízes r_i ($i = 1 \dots n$) pode ser utilizada a fórmula de recorrência de Newton-Raphson (A.36) partindo da estimativa inicial (A.37). Quando for atingida a precisão desejada, ou seja, quando $|(r_i)_{k+1} - (r_i)_k| \leq \text{precisão}$, calcula-se o valor do peso daquela raiz (A.32). A precisão arbitrada deve ser escolhida com cuidado. O autor obteve sucesso na adoção de valores maiores ou iguais a 1×10^{-19} utilizando micro-computadores com um número de iterações entre 1 e 4 (utilizando variáveis com 10 bytes e 20 algarismos significativos).

A.5 Cuidados na programação do algoritmo

Alguns cuidados devem ser tomados quando da implementação efetiva da Quadratura de Gauss em um programa de computador.

O primeiro cuidado é que não é necessário, na programação, usar todos os coeficientes de Gauss já que existe um relacionamento entre os coeficientes. O segundo cuidado é a certificação dos coeficientes de Gauss utilizados na integração numérica (esta certificação deve ser feita com coeficientes calculados

³Davis, P.J & Rabinowitz, P. *Methods of Numerical Integration*, 2nd ed., Academic Press, San Diego, 1984.

ou tabelados).

A.5.1 Relacionamento dos coeficientes

Pode-se mostrar que os coeficientes de Gauss-Legendre obedecem às relações

$$w_i = w_{n-i+1}. \quad (\text{A.38})$$

$$r_i = -r_{n-i+1}. \quad (\text{A.39})$$

Desta forma vê-se claramente que não é necessário trabalhar com todos os coeficientes ($i = 1 \dots n$). De fato pode-se usar somente os coeficientes $1 \dots \lfloor n/2 \rfloor + 1$.

Assim não é necessário calcular todos os coeficientes nem, muito menos, tabelá-los todos. Uma curiosidade é que pelas relações anteriores, sempre que n for ímpar ter-se-á a raiz $r_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ nula.

De forma genérica, e imaginando uma integração numérica de uma função $f(x)$ de a a b pode-se escrever o seguinte algoritmo:

1. $meio \leftarrow \lfloor n/2 \rfloor$; $soma \leftarrow 0$; $intervalo \leftarrow (b - a) / 2$; $media \leftarrow (a + b) / 2$;
2. Para i variando de 1 até $meio$ faça
 $soma \leftarrow soma + w_i \times [f(media - intervalo \times r_i) + f(media + intervalo \times r_i)]$;
3. Se n for ímpar calcule $soma \leftarrow soma + w_{meio+1} \times f(media)$;
4. Por fim calcule $soma \leftarrow soma \times intervalo$.

Este algoritmo pressupõe que sejam conhecidos os valores dos pesos w_i e das raízes r_i ($i = 1 \dots meio + 1$).

A.5.2 Testes com valores calculados ou tabelados

Independente de os coeficientes serem calculados ou tabelados podem ser feitos alguns testes para a certificação de seus valores. Um teste simples consiste na verificação do próprio sistema de equações que pode servir, teoricamente, para a determinação dos coeficientes de Gauss (A.7). Repetindo, por comodidade, o sistema anterior:

$$\sum_{i=1}^n w_i r_i^k = \frac{1 + (-1)^{k+2}}{k + 1}, \quad k = 0 \dots 2n - 1. \quad (\text{A.40})$$

Assim, independente da origem dos coeficientes, pode-se verificar, para $k = 0 \dots 2n - 1$, se todas as equações são satisfeitas para os valores utilizados. É claro, também, que este teste deve ser feito na fase inicial de programação e, uma vez confirmado, não é mais necessária sua utilização. Se a simetria dos coeficientes é levada em conta na hora da programação os testes acima para valores de k ímpar param de ter importância e pode-se, simplesmente, proceder aos testes quando k for par.

A expressão $1 + (-1)^{k+2}$ que aparece na última equação pode ser substituída por $2 \times (1 - (k \bmod 2))$ onde $(p \bmod q)$ representa o resto da divisão (inteira) de p por q . Esta substituição elimina a operação de exponenciação inteira do número -1 e é, portanto, mais adequada para a implementação em um programa de computador.

Outro teste importante é a verificação das raízes utilizadas serem, de fato, zeros dos polinômios de Legendre correspondente. Para uma raiz r_i ($i = 1 \dots n$) deve-se calcular o valor da função $P_n(r_i)$ e verificar se realmente este valor está próximo de zero, ou seja, $|P_n(r_i)| \leq \textit{precisão}$, para $i = 1 \dots n$.

Apêndice B

Resolução de Sistema Linear de Equações

Deseja-se obter a solução do sistema linear de equações do tipo $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ onde \mathbf{A} é uma matriz quadrada $n \times n$, não singular, ou seja, $\|\mathbf{A}\| = \det(\mathbf{A}) \neq 0$, \mathbf{x} e \mathbf{b} são vetores $(n \times 1)$ quaisquer. Mostra-se como esta solução pode ser obtida utilizando-se a decomposição de Crout.

B.1 Decomposição da matriz do sistema

Pode-se provar que é sempre possível a decomposição (chamada de decomposição de Crout)

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{U} \tag{B.1}$$

onde \mathbf{L} , \mathbf{D} e \mathbf{U} são matrizes quadradas $n \times n$, desde que $A_{11} \neq 0$. As matrizes anteriores não são singulares e ainda têm as seguintes características:

- \mathbf{L} : matriz triangular inferior ($L_{ij} = 0$ quando $i < j$) e com diagonal unitária ($L_{ii} = 1$) [“Lower” — inferior].
- \mathbf{D} : matriz diagonal ($D_{ij} = 0$ quando $i \neq j$).
- \mathbf{U} : matriz triangular superior ($U_{ij} = 0$ quando $i > j$) e com diagonal unitária ($U_{ii} = 1$) [“Upper” — superior].

Podem ser enumeradas várias propriedades para esta transformação. Por exemplo (sem demonstração):

- Em termos computacionais, as matrizes \mathbf{L} , \mathbf{D} e \mathbf{U} podem ser armazenadas na mesma “memória” ocupada pela matriz \mathbf{A} original (ou seja, não é necessário que sejam, de fato, criadas as matrizes \mathbf{L} , \mathbf{D} e \mathbf{U}).
- O determinante da matriz \mathbf{A} é igual ao determinante da matriz \mathbf{D} , ou seja,

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{D}) = \prod_{i=1}^n D_{ii}. \quad (\text{B.2})$$

- Pode-se verificar se a matriz \mathbf{A} é positiva-definida pela condição $D_{ii} > 0$ ($i = 1 \dots n$).
- A decomposição de Crout mantém o “perfil” da matriz \mathbf{A} .

B.1.1 Processo de decomposição

Definindo-se os termos das matrizes \mathbf{L} , \mathbf{D} e \mathbf{U} em função dos termos da matriz \mathbf{A} original (já que a decomposição não requer espaço adicional de memória) da seguinte forma:

$$L_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & i > j \\ 1 & i = j \\ 0 & i < j \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

$$D_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

$$U_{ij} = \begin{cases} 0 & i > j \\ 1 & i = j \\ A_{ij} & i < j \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

A decomposição de Crout pode ser obtida da seguinte maneira:

1. Varie i de 1 a n , varie j de 1 a n e execute todos os passos seguintes:

- (a) Seja m o menor entre i e j , ou seja, $m = \min\{i, j\}$

(b) Calcule $A_{ij} \leftarrow A_{ij} - \sum_{k=1}^{m-1} L_{ik} D_{kk} U_{kj}$

(c) Se $i \neq j$ então faça $A_{ij} \leftarrow A_{ij}/D_{mm}$. Observação: a matriz \mathbf{A} será singular se qualquer termo D_{mm} ($m > 1$) for nulo. Portanto, se em algum passo, for obtido um termo $D_{mm} \simeq 0$ (esta verificação deve ser feita **antes** da divisão) a matriz é singular e não se pode decompô-la utilizando Crout.

Observações:

- Quando a matriz \mathbf{A} for simétrica ($A_{ij} = A_{ji}$) pode-se percorrer somente a parte superior da matriz (no passo 1 pode-se usar $j = i \dots n$) e “rebater”, ao final do processo, a parte superior para a inferior ($A_{ij} \leftarrow A_{ji}$ para $i > j$). Isto é equivalente, em outras palavras, a levar em conta que $\mathbf{L}^T = \mathbf{U}$ (ou seja, a matriz \mathbf{L} transposta é idêntica à matriz \mathbf{U}).

Neste caso ainda observa-se que ao invés de n^2 incógnitas (termos independentes das matrizes \mathbf{L} , \mathbf{D} e \mathbf{U}) passa-se a ter $n(n+1)/2$.

- A decomposição de Cholesky é muito similar à decomposição de Crout. As diferenças básicas são:

$$\mathbf{A} = \overline{\mathbf{U}}^T \overline{\mathbf{U}} \quad (\text{B.6})$$

onde

$\overline{\mathbf{U}} = \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{U}$ é triangular superior,

$\mathbf{D}^{1/2}$ é uma matriz diagonal com seus termos calculados por $\sqrt{D_{ii}}$ (observar que a decomposição de Cholesky, no entanto, só pode ser utilizada com uma matriz simétrica positiva-definida, ou seja, que possua todos os auto-valores positivos).

$\overline{\mathbf{U}}^T$ é a matriz transposta da matriz $\overline{\mathbf{U}}$ ($\overline{U}_{ij}^T = \overline{U}_{ji}$).

- A decomposição de Crout pode ser utilizada para matrizes não singulares ($\|\mathbf{A}\| \neq 0$) e, em particular, quando o primeiro termo de sua diagonal não for nulo ($A_{11} \neq 0$), caso comum para problemas estáticos de elementos finitos.

B.2 Cálculo da solução do sistema

Deseja-se obter a solução (numérica) do sistema de equações lineares do tipo

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (\text{B.7})$$

onde \mathbf{A} é uma matriz $n \times n$ não singular e \mathbf{b} e \mathbf{x} são vetores $n \times 1$.

Com a decomposição de Crout o sistema pode ser visto como

$$\mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{U} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (\text{B.8})$$

Didaticamente pode-se definir o vetor $(n \times 1)$ $\mathbf{y} = \mathbf{D} \mathbf{U} \mathbf{x}$ de tal forma que o sistema (B.8) passe a ser

$$\mathbf{L} \mathbf{y} = \mathbf{b}. \quad (\text{B.9})$$

A solução do sistema (B.9) é facilmente obtida uma vez que \mathbf{L} é triangular inferior (obtida pela decomposição de Crout) e \mathbf{b} , por hipótese, é conhecido. Com a determinação de \mathbf{y} pode-se resolver o sistema

$$\mathbf{D} \mathbf{U} \mathbf{x} = \mathbf{y}. \quad (\text{B.10})$$

Definindo-se (didaticamente) o vetor $(n \times 1)$ $\mathbf{z} = \mathbf{U} \mathbf{x}$, passa-se a ter um novo sistema

$$\mathbf{D} \mathbf{z} = \mathbf{y} \quad (\text{B.11})$$

que também é resolvido muito facilmente. De posse do valor do vetor \mathbf{z} determina-se, finalmente, o valor de \mathbf{x} através da solução do sistema

$$\mathbf{U} \mathbf{x} = \mathbf{z} \quad (\text{B.12})$$

que, mais uma vez, tem solução simples pelo fato de \mathbf{U} ser triangular superior.

Esquemáticamente a solução pode ser obtida da seguinte maneira (sem demonstração):

1. Faça $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{b}$ (na verdade \mathbf{x} e \mathbf{b} podem ocupar a mesma área da memória, ou seja, não há a necessidade da existência simultânea dos dois vetores).
2. Faça $i = 1 \dots n$; Calcule $x_i \leftarrow x_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} x_j$
3. Faça $i = 1 \dots n$; Calcule $x_i \leftarrow x_i / D_{ii}$
4. Faça $i = n \dots 1$; Calcule $x_i \leftarrow x_i - \sum_{j=i+1}^n U_{ij} x_j$

Observe a inversão dos extremos do intervalo de variação da variável de iteração (i) no passo (4). Os laços (“loops”) mostrados nos passos (2), (3) e (4) **não podem ser unificados**, têm que ser feitos seqüencialmente, tal qual mostrado no algoritmo anterior.

B.2.1 Exemplo de decomposição

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 7 & 6 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

A decomposição de Crout fornece:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,80 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,60 & -0,86 & 1 & 0 & 0 \\ 0,40 & 0,86 & 2,18 & 1 & 0 \\ 0,20 & 0,79 & 2,00 & 0,92 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 5,00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,80 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3,14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9,82 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,75 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0,80 & 0,60 & 0,40 & 0,20 \\ 0 & 1 & -0,86 & 0,86 & 0,79 \\ 0 & 0 & 1 & 2,18 & 2,00 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0,92 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A multiplicação das matrizes \mathbf{L} , \mathbf{D} e \mathbf{U} fornece (utilizando a precisão exibida):

$$\mathbf{LDU} = \begin{bmatrix} 5,00 & 4,00 & 3,00 & 2,00 & 1,00 \\ 4,00 & 6,00 & -0,01 & 4,01 & 3,01 \\ 3,00 & -0,01 & 7,01 & 5,97 & 4,98 \\ 2,00 & 4,01 & 5,97 & 7,97 & 6,96 \\ 1,00 & 3,01 & 4,98 & 6,96 & 8,95 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sendo } \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 7 \\ 9 \end{Bmatrix} \text{ a solução do sistema } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ fornece } \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} -0,367 \\ +1,39 \\ +1,11 \\ -1,65 \\ +1,24 \end{Bmatrix}.$$

Referências Bibliográficas

- [1] ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas. *NBR-7480, Barras e Fios de Aço destinados a Armaduras para Concreto Armado*. São Paulo, 1996.
- [2] ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas. *NBR-6118, Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado*. São Paulo, 1978.
- [3] Abramowitz, K.E. & Stegun, I.A. (eds). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, New York, 1970.
- [4] Apostol, T.M. *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley, Massa., 1957.
- [5] Araripe, M.A.F. *A Não-Linearidade Física e Geométrica em Pórticos Planos de Concreto Armado (dissertação de mestrado)*. ITA, São José dos Campos, 1998.
- [6] Atkinson, K.E. *An Introduction to Numerical Analysis, 2nd Ed.* Wiley, New York, 1989.
- [7] Barlow, J. *Optimal Stress Locations in Finite Element Models*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol 10, No 2, 1976.
- [8] Barlow, J. *More on Optimal Stress Points — Reduced Integration, Element Distortions and Error Estimation*. Intl. J. Numer. Methods Eng., 28, 1989.
- [9] Bazaraa, M.S. & Shetty, C.M. *Nonlinear Programming - Theory and Algorithms*. Wiley, New York, 1979.
- [10] Bicanic, N. & Johnson, K.H. *Who was ‘-Raphson’?* International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol 14, No 1, 148-152, 1979.
- [11] Buchaim, R. *Efeitos de Segunda Ordem e Estado Limite Último de Instabilidade em Pilares de Concreto Armado (dissertação de mestrado)*. EPUSP, São Paulo, 1979.
- [12] Butkov, E. *Física Matemática*. Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1978.

- [13] Comité Européen Du Béton. *Flambement — Instabilité*. Bolletín d'Information nº 93, 1973.
- [14] Claudio, D.M. & Marins, J.M. *Cálculo Numérico Computacional*. Atlas, São Paulo, 1989.
- [15] Conte, S.D. & Boor, C. *Elementary Numerical Analysis — an Algorithmic Approach*, 3rd ed. McGraw-Hill, New Yorkm 1981.
- [16] Cook, R.D. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 2nd ed. Wiley, New York, 1981.
- [17] Cook, R.D. *Finite Element Modeling for Stress Analysis*. Wiley, New York, 1995.
- [18] Courant, R. *Cálculo Diferencial e Integral*. Globo, Porto Alegre, 1936.
- [19] Crisfield, M.A. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Vol 1: Essentials*. Wiley, Chichester, 1991.
- [20] Dennis, J.E. & Schnabel, R.B. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1983.
- [21] Edwards, C.H. & Penney, D.E. *Calculus and Analytic Geometry*, 2nd Ed. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1986.
- [22] Emkin, L.Z. *Computers in Structural Practice: The Issue of Quality*. Computer & Structures. Vol 30, No 3, 1988.
- [23] Esche, S.K., Kinzel, G.L. & Altan, T. *Issues in Convergence Improvement for Non-Linear Finite Element Programs*. Intl. J. Numer. Methods Eng., 40, 1997.
- [24] Davis, P.J & Rabinowitz, P. *Methods of Numerical Integration*, 2nd ed.. Academic Press, San Diego, 1984.
- [25] Dias, C.A.C. *Cálculo Automático de Edifícios de Concreto Armado com Recursos de “CAD”* (trabalho de graduação), ITA, São José dos Campos, 1990.
- [26] El Debs, A.L.H.C & Cadamuro Jr., I.W. *Cálculo da Contribuição Resistente do Concreto em Seções Transversais de Concreto Armado: Aspectos Teóricos e Computacionais* in XXVIII Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, Vol 2. EESC, USP, São Paulo, 1997.
- [27] Fenves, S.J. *Computer Methods in Civil Engineering*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1967.
- [28] Ferguson, P.M.; Breen, J.E.; Jirsa, J.O. *Reinforced Concrete Fundamentals*, 5e. Wiley, New York, 1988.

- [29] Forni, F.E.B. *Flexão Oblíqua Composta no Concreto Armado* (dissertação de mestrado). EPUSP, São Paulo, 1980.
- [30] França, R.L.S. *Relações Momento-Curvatura em Peças de Concreto Armado Submetidas a Flexão Oblíqua Composta* (dissertação de mestrado). EPUSP, São Paulo, 1984.
- [31] Fusco, P.B. *Estruturas de Concreto Armado — Solicitações Normais*. Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1981.
- [32] Garcia, L.F.T. *Análise Não-Linear de Pórticos Planos de Concreto Armado* (tese de mestrado). UFRJ, Rio de Janeiro, 1974.
- [33] Hoffman, J.D. *Numerical Methods for Engineers and Scientists*. McGraw-Hill, New York, 1993.
- [34] Hughes, T.J.R. *Generalization of Selective Integration Procedures to Anisotropic and Nonlinear Media*. Intl. J. Numer. Methods Eng. 15, 1980.
- [35] Inprise Corporation. *Developer's Guide — Borland Delphi 4*. Inprise, Scotts Valley, 1998.
- [36] Kaplan, W. *Advanced Calculus*. Addison-Wesley, Massa., 1975.
- [37] Kincaid, D.R. & Cheney, E.W. *Numerical Analysis*. Brook/Cole Publ. Co., Pacific Grove, 1991.
- [38] Knuth, D.E. *The Art of Computer Programming, Vol 1 — Fundamental Algorithms, 3rd ed.* Addison-Wesley, Reading, 1997.
- [39] Knuth, D.E. *The Art of Computer Programming, Vol 2 — Seminumerical Algorithms, 2nd ed.* Addison-Wesley, Reading, 1981.
- [40] Kreyszig, E. *Matemática Superior, Vol 2*. Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1979.
- [41] Kreyszig, E. *Advanced Engineering Mathematics, 6th ed.* Wiley, New York, 1988.
- [42] Krüger, S.D. *Uma Metodologia para a Análise de Pórticos Planos de Concreto Armado Sujeitos a Grandes Deslocamentos* (dissertação de mestrado). PUC-RJ, Rio de Janeiro, 1989.
- [43] Lima, V.M.S; Pimenta P.M.P. & Brasil, R.M.L.R.F. *On the Analysis of Planar Framed Structures of Geometrically Nonlinear Behavior*. Wolf Altman: Recent Developments in Solid Mechanics. Rio de Janeiro, 1996.
- [44] MacNeal, R.H. & Harder, R.L. *A Proposed Standard Set of Problems to Test Finite Element Accuracy*. Finite Element Analysis & Design. Vol 1. 1985.

- [45] MacNeal, R.H. *Finite Elements: Their Design and Performance*. Marcel Dekker, New York, 1994.
- [46] Malkus, D.S. & Hughes, T.J.R. *Mixed Finite Element Methods — Reduced and Selective Integration Techniques*. Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg., 15, 1978.
- [47] Mendes Neto, F. *Estudo de Pilares de Concreto Armado Submetidos a Flexão Oblíqua Composta* (dissertação de mestrado). EPUSP, São Paulo, 1991.
- [48] Mendes Neto, F. *Sobre a Flexão Normal Composta*. III Simpósio EPUSP sobre estruturas de concreto, pp 419-432, EPUSP, São Paulo, 1993.
- [49] Mendes Neto, F. *Sobre a Flexão Normal Simples*. III Simpósio EPUSP sobre estruturas de concreto, pp 433-443, EPUSP, São Paulo, 1993.
- [50] Mendes Neto, F. & Pimenta, P.M. *Sobre o Cálculo dos Esforços Seccionais Resistentes*. XX Cilamce (20th Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering), São Paulo, 1999.
- [51] Mendes Neto, F. & Teixeira Jr., H.S. *Cálculo Automático de Estruturas de Edifícios de Concreto Armado* (trabalho de graduação), ITA, São José dos Campos, 1986.
- [52] Montoya, P.J. *et alli. Hormigón Armado (2 Vol, 7^a ed.)*. Gustavo Gili, Barcelona, 1973.
- [53] Murray, D.W., El-Zanaty, M.H., Bjorhovde, R. *Inelastic Behavior of Multistory Steel Frames*. Structural Engineering Report N. 83, Universidade de Alberta, Alberta/Canadá, 1980.
- [54] Nonweiler, T.R.F. *Computational Mathematics — An Introduction to Numerical Approximation*. Wiley, NewYork, 1984.
- [55] O’Neil, P.V. *Advanced Calculus — Pure and Applied*. MacMillan Publishing Co., New York, 1975.
- [56] Ortega, J. & Rheinboldt, W.C. *Iterative Solutions of Nonlinear Equations in Several Variables*. Academic Press, New York, 1970.
- [57] Pimenta, P.M. & Mazzilli, C.E.N. *Minima Correctio Methodi Inveniendi Lineas Elasticii*. Boletim Técnico do Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da Escola Politécnica da USP (BT/PEF/8613), São Paulo, 1986.
- [58] Pimenta, P.M. *Análise Não-Linear de Pórticos Planos*. Boletim Técnico do Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da Escola Politécnica da USP (BT/PEF/8611), São Paulo, 1986.

- [59] Pimenta, P.M. *Análise Não-Linear de Pórticos Planos: Teoria Exata vs. Teoria de Segunda Ordem*. Boletim Técnico do Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da Escola Politécnica da USP (BT/PEF/9618), São Paulo, 1996.
- [60] Piskounov, N. *Cálculo Diferencial e Integral, Vol II*. Lopes da Silva, Porto, 1977.
- [61] Rheinboldt, W.C. *Methods for Solving Systems of Nonlinear Equations, CBMS Series in Applied Mathematics*. 14 SIAM: Philadelphia, 1974.
- [62] Rotter, J.M. *Rapid Exact Inelastic Biaxial Bending Analysis*. Journal of Structural Engineering, Vol 111, Nº 12, ASCE, New York, 1985.
- [63] Stroud, A.H. & Secrest, D. *Gaussian Quadrature Formulas*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1966.
- [64] Santos, L.M. *Cálculo de Concreto Armado Segundo a Nova NB-1 e o CEB, Vol 1*, 2ª ed. LMS, São Paulo, 1983.
- [65] Santos, L.M. *Cálculo de Concreto Armado Segundo a Nova NB-1 e o CEB, Vol 2*. LMS, São Paulo, 1981.
- [66] Santos, L.M. *et alii*. Projeto Estrutural de Edifícios de Concreto Armado. *FDTE, São Paulo, 1985*.
- [67] Santos, L.M. *Estado Limite Último de Instabilidade (Capítulo M)*. EPUSP, São Paulo, 1987.
- [68] Santos, L.M. & Mendes Neto, F. *Esforços Resistentes do Concreto - Seção Retangular Cheia ou Vazada e Seção T*. Revista IBRACON Nº 3:34-42, São Paulo, 1992.
- [69] Santos, L.M. *Sub-rotinas Básicas do Dimensionamento de Concreto Armado, Vol 1*. THOT, São Paulo, 1994.
- [70] Santos, L.M. *Esforços Resistentes do Concreto — Seção Retangular*. Boletim Técnico PEF Nº 8814, EPUSP, São Paulo, 1988.
- [71] Santos, L.M. *Esforços Resistentes do Concreto — Seção Circular*. Boletim Técnico PEF Nº 8827, EPUSP, São Paulo, 1988.
- [72] Süsskind, J.C. *Curso de Concreto, Vol 2*. Globo, Rio de Janeiro, 1984.
- [73] Telles, J.C.F. *Análise do Comportamento Não Linear Geométrico e Físico de Pórticos Planos de Concreto Armado* (dissertação de mestrado). COPPE, Rio de Janeiro, 1976.

- [74] Wen, R.K. & Rahimzadeh, J. *Nonlinear Elastic Frame Analysis by Finite Element*. Journal of Structural Engineering, Vol 109, No. 8, 1983.
- [75] Zevallos, G.A.G. *Implementação de Rotinas para Aprimoramento do Programa EDI* (trabalho de graduação), ITA, São José dos Campos, 1987.
- [76] Zienkiewicz, O.L. & Zhu, J.Z. *A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis*. Intl. J. Numer. Methods Eng. Vol 24, 1987.