P55 习题 2

1. 将一颗骰子抛掷两次，以 X 表示两次出现点数的最小值，试求 X 的分布律

分析：抛掷两次骰子，实验结果有$6^2=36$种，这是样本空间中样本点数目

$\{X=1\}$包含有$(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)$共 11 个样本点，因此$P\{X=1\}=\frac{11}{36}$

$\{X=2\}$包含有$(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)$共 9 个样本点，因此$P\{X=2\}=\frac{9}{36}$

其他可依此类推

解答：由题意知，X 可取的值为$1,2,3,4,5,6$，由古典概率计算可得

$P\{X=1\}=\frac{11}{36}$，$P\{X=2\}=\frac{9}{36}$，$P\{X=3\}=\frac{7}{36}$，$P\{X=4\}=\frac{5}{36}$，$P\{X=5\}=\frac{3}{36}$，$P\{X=6\}=\frac{1}{36}$

因此 X 的分布律为

X	1	2	3	4	5	6
P	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36

评分标准：满分 100 分。

确定随机变量的 6 个取值共 30 分，计算出每个取值概率得 10 分，列表为分布律 10 分。

2. 设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{1}{2^k}\quad k=1,2,3,\cdots$$

求概率（1）$P\{X=2,4,6,\cdots\}$；（2）$P\{X\geq 3\}$

分析：$\{X=2,4,6,\cdots\}$意思是$\{X=2\}$或$\{X=4\}$或$\{X=6\}$，...

解答：（1）$P\{X=2,4,6,\cdots\}=P\{X=2\}+P\{X=4\}+P\{X=6\}+\cdots$

$$=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$

（2）方法一：$P\{X\ge 3\}=P\{X=3\}+P\{X=4\}+P\{X=5\}+\cdots$

$$=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\cdots=\frac{\frac{1}{2^3}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

方法二：$P\{X\ge 3\}=1-P\{X<3\}=1-P\{X=1\}-P\{X=2\}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$

3. 设在 15 只同类型的零件中有 2 只是次品，在其中取 3 次，每次任取 1 只，做不放回抽样，以 X 表示取出次品的只数，求 X 的分布律和分布函数

解答：X 可取得值为 0,1,2

$$P\{X=0\}=\frac{C_{13}^1}{C_{15}^1}\cdot\frac{C_{12}^1}{C_{14}^1}\cdot\frac{C_{11}^1}{C_{13}^1}=\frac{22}{35}$$

（说明：$X=0$ 意味着三次取到的都是正品）

$$P\{X=1\}=C_3^1\frac{C_2^1}{C_{15}^1}\cdot\frac{C_{13}^1}{C_{14}^1}\cdot\frac{C_{12}^1}{C_{13}^1}=\frac{12}{35}$$

（说明：$X=1$ 意味着三次中有一次取到次品，另外两次取到正品）

$$P\{X=2\}=C_3^1\frac{C_2^1}{C_{15}^1}\cdot\frac{C_1^1}{C_{14}^1}\cdot\frac{C_{13}^1}{C_{13}^1}=\frac{1}{35}$$

（说明：$X=2$ 意味着三次中有两次取到次品，另外一次取到正品）

因此 X 的分布律为

X	0	1	2
P	22/35	12/35	1/35

当 $x<0$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P\{\Phi\}=0$

当 $0\le x<1$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=0\}=\frac{22}{35}$

当 $1\le x<2$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}=\frac{34}{35}$

当 $2\le x$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\}=1$

综上所述，X 的分布函数为

$$F(X)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{22}{35} & 0\le x<1\\ \dfrac{34}{35} & 1\le x<2\\ 1 & 2\le x\end{cases}$$

4. 设离散型随机变量 X 的分布律为

$P\{X=k\}=ae^{-k} \quad k=1,2,\cdots$

试确定常数a

解答：由分布律的规范性

$$1=\sum_{k=1}^{\infty}ae^{-k}=a\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{k}=a\frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{a}{e-1}$$

因此$a=e-1$

5. 一个大楼内装有 5 个同类型的供水设备，调查表明，在任一时刻t每个设备被使用的概率为 0.1，试求

（1）恰有 2 个设备同时被使用的概率；

（2）至少有 3 个设备同时被使用的概率

（3）至多有 3 个设备同时被使用的概率；

（4）至少有 1 个设备同时被使用的概率

解答：以 X 表示同时被使用的设备个数，则$X\sim B(5,0.1)$

（1）$P\{X=2\}=C_5^2\cdot 0.1^2\cdot 0.9^3=0.0729$

（2）$P\{X\ge 3\}=P\{X=3\}+P\{X=4\}+P\{X=5\}$

$=C_5^3\cdot 0.1^3\cdot 0.9^2+C_5^4\cdot 0.1^4\cdot 0.9+C_5^5\cdot 0.1^5=0.00856$

（3）$P\{X\le 3\}=1-P\{X=4\}-P\{X=5\}$

$=1-C_5^4\cdot 0.1^4\cdot 0.9-C_5^5\cdot 0.1^5=0.99954$

（4）$P\{X\geq 1\}=1-P\{X=0\}=1-C_5^0\cdot 0.9^5=0.40951$

6. 甲、乙两人投篮，投中的概率分别为 0.6 和 0.7。今两人各投 3 次，求：

（1）两人投中次数相等的概率

（2）甲投中次数多的概率

解答：以 X、Y 分别表示甲、乙两人投中的次数，则

$X\sim B(3,0.6)\quad Y\sim B(3,0.7)$

（1）$P\{X=Y\}=P\{X=Y=0\}+P\{X=Y=1\}+P\{X=Y=2\}+P\{X=Y=3\}$

$=C_3^0 0.4^3\cdot C_3^0 0.3^3+C_3^1 0.6\cdot 0.4^2\cdot C_3^1 0.7\cdot 0.3^2+C_3^2 0.6^2\cdot 0.4\cdot C_3^2 0.7^2\cdot 0.3+C_3^3 0.6^3\cdot C_3^3 0.7^3$

$=0.001728+0.054432+0.190512+0.074088=0.32076$

（2）$P\{Y<3\}=1-P\{Y=3\}=1-C_3^3 0.7^3=0.657$
$P\{Y<2\}=P\{Y=0\}+P\{Y=1\}=C_3^0 0.3^3+C_3^1 0.7\cdot 0.3^2=0.216$

$P\{Y<1\}=P\{Y=0\}=C_3^0 0.3^3=0.027$

因此 $P\{X>Y\}=P\{X=3,Y<3\}+P\{X=2,Y<2\}+P\{X=1,Y<1\}$

$=C_3^3 0.6^3\cdot 0.657+C_3^2 0.6^2\cdot 0.4\cdot 0.216+C_3^1 0.6\cdot 0.4^2\cdot 0.027$

$=0.141912+0.093312+0.007776=0.243$

7. 有甲、乙两种味道和颜色都极为相似的名酒各 4 杯，如果从中挑 4 杯，能将甲种酒全部挑出来，算是试验成功一次，求

（1）某人随机地去挑，试验成功一次的概率

（2）某人声称他通过品尝能区分两种酒。他连续试验 10 次，成功 3 次，试推断他是猜对的，还是他确有区分的能力（设各次试验室相互独立的）

分析：题意是从混在一起的 8 杯酒中，挑 4 杯出来，挑出的 4 杯刚好都是甲种酒算成功。

解答：（1）根据古典概率的计算方法，随机挑时成功的几率为 $\dfrac{C_4^4}{C_8^4}=\dfrac{1}{70}$

（2）假设他是随机挑的，以 X 表示 10 次试验中成功次数，则 $X\sim B(10,\frac{1}{70})$，所以随机挑时 10 次中成功 3 次的概率就是 $P\{X=3\}=C_{10}^{3}\left(\frac{1}{70}\right)^{3}\left(\frac{69}{70}\right)^{7}\approx 3.16\times 10^{-4}$

这个概率非常小，说明他不太可能是随机挑的，因此判断他应该是有区分能力的。

评分标准：满分 100 分。

第（1）问 40 分；第（2）问 60 分，其中计算正确 40 分，结论（包括原因）20 分。

8. 某一公安局在长度为 t 的时间间隔内收到的紧急呼救次数 X 服从参数为 $\frac{1}{2}t$ 的泊松分布，而与时间间隔的起点无关（时间以小时计），求：

（1）某一天中午 12 时至下午 3 时没有收到紧急呼叫的概率；

（2）某一天中午 12 时至下午 5 时至少收到 1 次紧急呼救的概率

解答：（1）时间间隔为 3，因此收到的呼救次数 $X\sim P(1.5)$，于是

$$P\{X=0\}=\frac{1.5^{0}}{0!}e^{-1.5}=e^{-1.5}$$

（2）时间间隔为 5，因此收到的呼救次数 $X\sim P(2.5)$，于是

$$P\{X\geq 1\}=1-P\{X=0\}=1-\frac{2.5^{0}}{0!}e^{-2.5}=1-e^{-2.5}$$

9. 设有同类型设备 200 台，各台设备工作相互独立，发生故障的概率均为 0.005，通常一台设备的故障可由一个人来排除

（1）至少配备多少维修工人，才能保证设备发生故障而不能及时排除的概率不大于 0.01？

（2）若一人包干 40 台设备，求设备发生故障而不能及时排除的概率；

（3）若有 2 人共同负责维修 100 台设备，求设备发生故障而不能及时排除的概率

解答：（1）以 X 表示出现故障的设备数，由题目条件，$X\sim B(200,0.005)$，由于二项分布可以用泊松分布来近似，因此可近似认为 $X\sim P(1)$

设配备的工人数为 n，则“设备发生故障而不能及时排除”可表示为 $\{X>n\}$，查表得

$$P\{X>4\}=P\{X\geq 5\}=0.0036<0.01$$

所以至少应配备 4 名维修工人

（2）以 X 表示出现故障的设备数，由题目条件，$X\sim B(40,0.005)$，由于二项分布可以用泊松分布来近似，因此可近似认为 $X\sim P(0.2)$

设备发生故障而不能及时排除的概率为

$P\{X>1\}=P\{X\geq 2\}=0.0175231$（查表得之）

（3）以 X 表示出现故障的设备数，由题目条件，$X\sim B(100,0.005)$，由于二项分布可以用泊松分布来近似，因此可近似认为 $X\sim P(0.5)$

设备发生故障而不能及时排除的概率为

$P\{X>2\}=P\{X\geq 3\}=0.014388$（查表得之）

注：结果说明 2 人负责 100 台设备比 1 人负责 40 台设备更有效率

10. 设随机变量 X 在[2,5]上服从均匀分布，现对 X 进行三次独立观测，试求至少有两次观测值大于 3 的概率

解答：由题意，$X\sim U[2,5]$，其密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3} & x\in[2,5]\\ 0 & else\end{cases}$

从而 $P\{X>3\}=\int_3^{+\infty}f(x)dx=\int_3^5\frac{1}{3}dx+\int_5^{+\infty}0dx=\frac{2}{3}$

以 Y 表示 3 次独立观测中，观测值大于 3 的次数，则 $Y\sim B(3,\frac{2}{3})$，因此

$$P\{Y\geq 2\}=P\{Y=2\}+P\{Y=3\}=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)+C_3^3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{20}{27}$$

11. 对球的直径作测量，设其均匀地分布在 20 厘米到 22 厘米之间，求直径在 20.1 厘米到 20.5 厘米之间的概率

解答：由题意，$X\sim U[20,22]$，其密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & x\in[20,22]\\ 0 & else\end{cases}$

从而$P\{20.1 \le X \le 20.5\} = \int_{20.1}^{20.5} f(x)dx = \int_{20.1}^{20.5} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{5}$

12. 设随机变量 X 的分布函数为$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \ln x & 1 \le x < e \\ 1 & e \le x \end{cases}$

（1）求概率$P\{X < 2\}, P\{0 < X \le 3\}, P\{2 < X < \frac{5}{2}\}$

（2）求 X 的密度函数$f(x)$

解答：（1）$P\{X < 2\} = F(2) = \ln 2 \approx 0.69315$

$P\{0 < X \le 3\} = F(3) - F(0) = 1 - 0 = 1$

$P\{2 < X < \frac{5}{2}\} = F(\frac{5}{2}) - F(2) = \ln \frac{5}{2} - \ln 2 = \ln \frac{5}{4} \approx 0.22314$

（2）$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{x} & 1 \le x < e \\ 0 & e \le x \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x} & 1 \le x < e \\ 0 & else \end{cases}$

13. 设连续型随机变量 X 的分布函数为$F(x) = \begin{cases} a + be^{-\frac{x^2}{2}} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

（1）求常数 a 和 b

（2）求 X 的密度函数$f(x)$

（3）求概率$P\{\sqrt{\ln 4} < X < \sqrt{\ln 16}\}$

解答：（1）由分布函数的性质

$1 = F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} (a + be^{-\frac{x^2}{2}}) = a$

又因为连续型随机变量的分布函数是连续函数，因此

$0 = F(0) = F(0^+) = \lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^+} (a + be^{-\frac{x^2}{2}}) = a + b$

从而得 $a=1, b=-1$，即 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{2}} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

（2）$f(x)=F'(x)=\begin{cases}xe^{-\frac{x^2}{2}} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

（3）$P\{\sqrt{\ln 4}<X<\sqrt{\ln 16}\}=F(\sqrt{\ln 16})-F(\sqrt{\ln 4})=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

14. 设随机变量 X 的密度函数为

（1）$f(x)=\begin{cases}2\left(1-\frac{1}{x^2}\right) & 1\le x\le 2\\ 0 & else\end{cases}$

（2）$f(x)=\begin{cases}x & 0\le x<1\\ 2-x & 1\le x<2\\ 0 & else\end{cases}$

求 X 的分布函数 $F(x)$

解答：（1）$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}0dx=0 & x<1\\ \int_{-\infty}^{1}0dx+\int_{1}^{x}2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx=2x+\frac{2}{x}-4 & 1\le x<2\\ \int_{-\infty}^{1}0dx+\int_{1}^{2}2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx+\int_{2}^{x}0dx=1 & 2\le x\end{cases}$

$=\begin{cases}0 & x<1\\ 2x+\frac{2}{x}-4 & 1\le x<2\\ 1 & 2\le x\end{cases}$

（2）$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}0dx=0 & x<0\\ \int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{x}xdx=\frac{x^2}{2} & 0\le x<1\\ \int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{1}xdx+\int_{1}^{x}(2-x)dx=2x-\frac{x^2}{2}-1 & 1\le x<2\\ \int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{1}xdx+\int_{1}^{2}(2-x)dx+\int_{2}^{x}0dx=1 & 2\le x\end{cases}$

$$=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \dfrac{x^2}{2} & 0\le x<1 \\ 2x-\dfrac{x^2}{2}-1 & 1\le x<2 \\ 1 & 2\le x \end{cases}$$

15. 某机构研究了英格兰在 1875-1951 年，在矿山发生导致 10 人以上死亡的事故的频繁程度，得知相继两次事故之间的时间 T 服从指数分布，其概率密度为

$$f_T(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{241}e^{-\frac{t}{241}} & t>0 \\ 0 & else \end{cases}$$

求 T 的分布函数 $F_T(t)$，并求概率 $P\{50<T<100\}$

解答：$F_T(t)=\int_{-\infty}^{t} f_T(t)dt=\begin{cases} \int_{-\infty}^{t} 0dt=0 & t<0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_{0}^{t}\dfrac{1}{241}e^{-\frac{t}{241}}dt=1-e^{-\frac{t}{241}} & 0\le t \end{cases}=\begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-e^{-\frac{t}{241}} & 0\le t \end{cases}$

因此 $P\{50<T<100\}=F_T(100)-F_T(50)=e^{-\frac{50}{241}}-e^{-\frac{100}{241}}$

评分标准：满分 100 分。

求出分布函数 80 分，其中写出定义式 20 分，分段函数每段 30 分；概率 20 分。

16. 某种型号器件的寿命 X（以小时计）具有以下密度函数

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1000}{x^2} & x>1000 \\ 0 & else \end{cases}$$

现有一大批此种器件（设各器件损坏与否相互独立），任取 5 只，求其中至少有 2 只寿命大于 1500 小时的概率

解答：器件寿命大于 1500 小时的概率为

$$P\{X>1500\}=\int_{1500}^{+\infty} f(x)dx=\int_{1500}^{+\infty}\frac{1000}{x^2}dx=\frac{2}{3}$$

设 5 只器件中寿命大于 1500 小时的器件数目为Y，则$Y \sim B(5,\frac{2}{3})$，因此至少有 2 只寿命大于 1500 小时的概率为

$$P\{Y \ge 2\} = 1 - P\{Y=0\} - P\{Y=1\} = 1 - C_5^0\left(\frac{1}{3}\right)^5 - C_5^1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{232}{243} \approx 0.9547$$

17. 设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X（以分钟计）服从指数分布，其密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}} & x > 0 \\ 0 & else \end{cases}$$

某顾客在窗口等待服务，若超过 10 分钟，他就离开。他一个月要到银行 5 次，以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数，求 Y 的分布律及概率$P\{Y \ge 1\}$

解答：该顾客未等到服务而离开窗口的概率为

$$P\{X > 10\} = \int_{10}^{+\infty} f(x)dx = \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}dx = e^{-2}$$

则$Y \sim B(5, e^{-2})$，即$P\{Y = k\} = C_5^k (e^{-2})^k (1-e^{-2})^{5-k} \quad k = 0,1,\cdots,5$

于是$P\{Y \ge 1\} = 1 - P\{Y=0\} = 1 - C_5^0 (1-e^{-2})^5 \approx 0.5167$

18. 设$X \sim N(3, 2^2)$

（1）求概率$P\{2 < X \le 5\}$，$P\{-4 < X \le 10\}$，$P\{|X| > 2\}$，$P\{X > 3\}$；

（2）确定 c 使得$P\{X > c\} = P\{X \le c\}$；

（3）设 d 满足$P\{X > d\} \ge 0.9$，问 d 至多为多少？

解答：（1）$P\{2 < X \le 5\} = F(5) - F(2) = \Phi(\frac{5-3}{2}) - \Phi(\frac{2-3}{2}) = \Phi(1) - \Phi(-\frac{1}{2})$

$$= \Phi(1) + \Phi(\frac{1}{2}) - 1 = 0.8413 + 0.6915 - 1 = 0.5328$$

$$P\{-4 < X \le 10\} = F(10) - F(-4) = \Phi(\frac{10-3}{2}) - \Phi(\frac{-4-3}{2}) = \Phi(\frac{7}{2}) - \Phi(\frac{-7}{2})$$

$=\Phi(\frac{7}{2})+\Phi(\frac{7}{2})-1=2\times 0.999767-1=0.999534$

$P\{|X|>2\}=1-P\{-2\le X\le 2\}=1-F(2)+F(-2)=1-\Phi(\frac{2-3}{2})+\Phi(\frac{-2-3}{2})$

$=1-\Phi(-\frac{1}{2})+\Phi(-\frac{5}{2})=1+\Phi(\frac{1}{2})-\Phi(\frac{5}{2})=0.6977$

$P\{X>3\}=1-F(3)=1-\Phi(\frac{3-3}{2})=1-\Phi(0)=0.5$

（2）$1-\Phi(\frac{c-3}{2})=1-F(c)=P\{X>c\}=P\{x\le c\}=F(c)=\Phi(\frac{c-3}{2})$

因此$\Phi(\frac{c-3}{2})=0.5$，查表得$\frac{c-3}{2}=0$，所以$c=3$

（3）$P\{X>d\}=1-F(d)=1-\Phi(\frac{d-3}{2})=\Phi(\frac{3-d}{2})\ge 0.9$

查表得$\frac{3-d}{2}\ge 1.29$，因此$d\le 0.42$

说明：由$P\{X>d\}=1-F(d)=1-\Phi(\frac{d-3}{2})\ge 0.9$得$\Phi(\frac{d-3}{2})\le 0.1$，这样在标准正态分布的分布函数值表中是查不到$\frac{d-3}{2}$的值（实际上$\frac{d-3}{2}$是负数，所以在表中查不到），所以不能这么做。

19. 设$X\sim N(160,\sigma^2)$，若要求 X 落在区间（120,200）内的概率不小于 0.80，则应允许σ最大为多少？

解答：$P\{120<X<200\}=F(200)-F(120)=\Phi(\frac{200-160}{\sigma})-\Phi(\frac{120-160}{\sigma})$

$=\Phi(\frac{40}{\sigma})-\Phi(-\frac{40}{\sigma})=2\Phi(\frac{40}{\sigma})-1\ge 0.8$，因此$\Phi(\frac{40}{\sigma})\ge 0.9$

查表得$\frac{40}{\sigma}\ge 1.29$，解得$\sigma\le\frac{40}{1.29}\approx 31.01$，即应允许$\sigma$最大为 31.01

20. 某地区 18 岁女青年的血压（收缩压，以 mmHg 计）服从正态分布$N(110,12^2)$，在该地任选一 18 岁女青年，测量她的血压 X，试确定最小x，使得$P\{X>x\}\le 0.05$

解答：由于 $X\sim N(110,12^2)$，因此

$$P\{X>x\}=1-F(x)=1-\Phi(\frac{x-110}{12})\le 0.05$$

从而 $\Phi(\frac{x-110}{12})\ge 0.95$，查表得 $\frac{x-110}{12}\ge 1.645$，解得 $x\ge 129.74$

即要使 $P\{X>x\}\le 0.05$， x 最小应为 129.74

21. 某地抽样调查表明，考生的外语成绩（百分制）近似地服从正态分布，平均成绩为 72 分，96 分以上考生占考生总数的 2.3%，试求考生的外语成绩在 60 分至 84 分之间的概率

解答：以 X 表示考生的外语成绩，由题目条件， $X\sim N(72,\sigma^2)$，于是

$$P\{X>96\}=1-F(96)=1-\Phi(\frac{96-72}{\sigma})=2.3\%$$

从而 $\Phi(\frac{96-72}{\sigma})=0.977$，查表得 $\frac{96-72}{\sigma}=2.0$，解得 $\sigma=12$

因此 $P\{60\le X\le 84\}=F(84)-F(60)=\Phi(\frac{84-72}{12})-\Phi(\frac{60-72}{12})$

$=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=2\times 0.8413-1=0.6826$

评分标准：满分 100 分。

确定出σ值 50 分，计算出目标概率 50 分。

22. 公共汽车的车门高度是按成年男性与车门碰头的机会不超过 0.01 设计的，设成年男性的身高 X（单位：厘米）服从正态分布 $N(170,6^2)$，问车门的最低高度应为多少？

解答：设车门的高度为 x，则

$$P\{X>x\}=1-F(x)=1-\Phi(\frac{x-170}{6})\le 0.01$$

从而 $\Phi(\frac{x-170}{6})\ge 0.99$，查表得 $\frac{x-170}{6}\ge 2.33$，解得 $x\ge 183.98$

23. 设随机变量 X 的分布律为

X	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
p	0.3	0.2	0.4	0.1

求下列随机变量Y的分布律：

（1）$Y=(2X-\pi)^2$；　　（2）$Y=\cos(2X-\pi)$

解答：

X	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$(2X-\pi)^2$	π^2	0	π^2	$4\pi^2$
$\cos(2X-\pi)$	-1	1	-1	1
p	0.3	0.2	0.4	0.1

（1）因此$Y=(2X-\pi)^2$的分布律为

$Y=(2X-\pi)^2$	0	π^2	$4\pi^2$
p	0.2	0.7	0.1

（2）因此$Y=\cos(2X-\pi)$得分布律为

$Y=\cos(2X-\pi)$	-1	1
p	0.7	0.3

24. 设随机变量X的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ 0.3 & -1\le x<1\\ 0.8 & 1\le x<2\\ 1 & 2\le x\end{cases}$

（1）求X的分布律；　　（2）求$Y=|X|$的分布律

解答：（1）显然，X的分布律为

X	-1	1	2
P	0.3	0.5	0.2

（2）由于

X	-1	1	2
$Y=\|X\|$	1	1	2
P	0.3	0.5	0.2

因此，$Y=|X|$的分布律为

$Y=\|X\|$	1	2
P	0.8	0.2

25. 设 $X \sim N(0,1)$，求下列随机变量 Y 的密度函数：

（1）$Y = 2X - 1$；　（2）$Y = e^{-X}$；　（3）$Y = X^2$

解答：（1）$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{2X - 1 \le y\} = P\{X \le \frac{y+1}{2}\} = F_X(\frac{y+1}{2})$

两边对 y 求导得 $f_Y(y) = f_X(\frac{y+1}{2}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\frac{y+1}{2})^2}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y+1)^2}{8}}$，$x \in R$

（2）当 $y \le 0$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{e^{-X} \le y\} = P\{\Phi\} = 0$

当 $y > 0$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{e^{-X} \le y\} = P\{X \ge -\ln y\} = 1 - F_X(-\ln y)$

两边对 y 求导得 $f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ \frac{1}{y} f_X(-\ln y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} y} e^{-\frac{\ln^2 y}{2}} & y > 0 \end{cases}$

（3）当 $y < 0$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X^2 \le y\} = P\{\Phi\} = 0$

当 $y = 0$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \le 0\} = P\{X^2 \le 0\} = P\{X = 0\} = 0$

当 $y > 0$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X^2 \le y\} = P\{-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\} = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$

两边对 y 求导得 $f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}} & y > 0 \end{cases}$

26. 设随机变量 $X \sim U(0, \pi)$，求下列随机变量 Y 的密度函数：

（1）$Y = 2\ln X$；　（2）$Y = \cos X$；　（3）$Y = \sin X$

解答：由题目条件，$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & x \in (0, \pi) \\ 0 & else \end{cases}$

（1）$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{2\ln X \le y\} = P\{X \le e^{\frac{y}{2}}\} = F_X(e^{\frac{y}{2}})$

两边对 y 求导得 $f_Y(y) = f_X(e^{\frac{y}{2}}) \cdot e^{\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cdot e^{\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{2} & e^{\frac{y}{2}} \in (0, \pi) \\ 0 & else \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} e^{\frac{y}{2}} & y < 2\ln \pi \\ 0 & else \end{cases}$

（2）$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\cos X\le y\}=P\{X\ge \arccos y\}=1-F_X(\arccos y)$

两边对 y 求导得 $f_Y(y)=f_X(\arccos y)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} & \arccos y\in(0,\pi)\\ 0 & else\end{cases}$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} & y\in(-1,1)\\ 0 & else\end{cases}$$

（3）$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\sin X\le y\}=P\{X\ge \pi-\arcsin y\}+P\{X\le \arcsin y\}$

$=1-F_X(\pi-\arcsin y)+F_X(\arcsin y)$

两边对 y 求导得 $f_Y(y)=f_X(\pi-\arcsin y)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}+f_X(\arcsin y)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} & \pi-\arcsin y\in(0,\pi)\\ 0 & else\end{cases}+\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} & \arcsin y\in(0,\pi)\\ 0 & else\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} & y\in(0,1)\\ 0 & else\end{cases}$$

评分标准：满分 100 分。

第（1）（2）小题每题 30 分，第（3）小题 40 分。