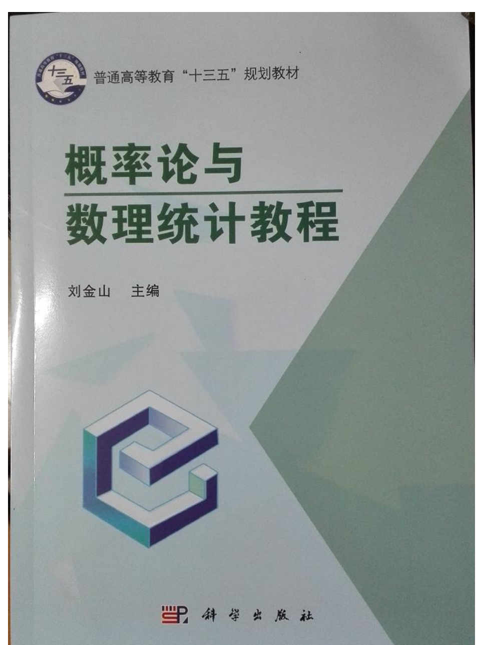
概率论与数理统计

赵峰13560020425
课程QQ群：860257924

华南农业大学 数学与信息学院

1

教材:
《概率论与数理统计》
刘金山 主编
科学出版社
2016年6月第1版



2

课程说明

1.上课时间

第1周到第12周(含第12周)共48学时

2.学习范围

课本1—8章

3

学习范围说明：

以下章节不讲，所以也不在考试范围内

3.4 常见多维随机变量
3.6 条件分布
3.8 随机变量函数的分布
4.3 协方差和相关系数
第5章 极限定理
8.2.2 两个正态总体的假设检验
8.3 χ^2拟合检验

4

课程成绩组成

1.总评成绩满分100分,其中平时成绩占40%,期末考试成绩占60%;

2.期末考试成绩满分100分,闭卷统考统改;

3.平时成绩满分100分,其中

考勤7次，每次1分，共7分;
测验2次，每次15分，共30分;
作业7次，每次9分，共63分;

根据这个成绩组成,每个分数都是客观的,成绩全由同学自己确定,老师只是客观地把成绩从积分册登录到教务系统,59分就是59分,没有手下留情一说.随着教学工作的展开,每个同学都可以随时知道自己的平时成绩已经拿了多少分.

5

关于成绩的补充说明

1.根据学校规定，期末考试不及格，只登记期末考试成绩（即总评成绩就是期末考试成绩），必须重修（高水平运动员除外）
2.如因课程冲突等原因无法跟班修读，学生需以课表为证明于前四周内向老师提出书面申请，同时确认个人平时成绩的计算方法
3.考勤不单独进行，包含在作业中
4.作业**每章交一次**，**每章讲完的下一次课**时由学委收齐交上来；作业请**用活页纸**，不要用作业本
5.鉴于个别同学会忘记带作业本错过交作业，允许每位同学本学期有一次补交机会，在下次上课时可补交
6.第一次测验安排在讲完1-4章后，第二次测验安排在讲完6-8章后

6

《概率论与数理统计》的价值

概率统计研究的是现实生活中的数据和客观世界中的随机现象,通过对数据收集,整理,描述和分析,以及对事件发生可能性的刻画,来帮助人们做出合理的推断和预测.以前接触的数学研究的都是确定性现象,唯独概率统计研究领域是随机现象,代表了数学研究领域的另一方面.

概率统计的建模思想还可以处理一些非随机问题.如“蒲丰投针”问题,通过对随机试验数据的观察处理来求圆周率的近似值.

概率统计是用偶然性方法解决确定性问题的代表,反映了偶然现象中隐含的必然规律.

7

某单位招聘155人，按考试成绩录用，共有526人报名.

已知90分以上的12人，60分以下的83人，若从高分到低分依次录取，某人成绩为78分，问此人能否被录取？

8

某零件采用自动化生产，重量服从正态分布，要求零件重量为15克，标准差为0.05.
某日开工以后，随机抽出6个零件，测得重量为

14.7 15.1 14.8 15.0 15.2 14.6

已知方差不变，试推断这天机器工作是否正常？

9

课程简介

1.课程名称《概率论与数理统计》,分为“概率论”和“数理统计”两部分;

2.《概率论》部分对应教材前五章,是定量地研究“随机现象统计规律”的现代数学分支,简单地说就是在**已知“统计规律”**的情况下讨论某种情况发生可能性的大小;这部分占考试比重的60%;
《数理统计》部分对应教材后三章,是以概率论为基础,在**未知“统计规律”**的情况下,根据较少的数据,对“统计规律”作出合理的推断.这部分占考试比重的40%.

10

预备知识:排列组合

排列与组合是两类计数公式,它们的推导都基于以下两条原理:

乘法原理:如果某件事需要经过3步才能完成,做第1步有2种方法,做第2步有4种方法,做第3步有5种方法,那么完成这件事共有2X4X5种方法.

加法原理:如果某件事由3类不同的办法去完成,第1类办法有2种,第2类办法有1种,第3类办法有4种,那么完成这件事共有2+1+4种方法.

11

基于乘法原理和加法原理可以如下几种排列组合公式:

排列:从n个不同元素中任取r个排成一列称为一个排列.这类排列的总数目记为 P_n^r 或 A_n^r

组合:从n个不同元素中任取r个并为一组(看作一个集合不考虑顺序)称为一个组合.这类组合的总数目记为 C_n^r

$$P_n^r = n\times(n-1)\times\cdots\times(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$C_n^r = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

12

重复排列:从n个不同元素中每次取一个,放回后再取下一个,如此连续取r次所得的排列称为重复排列.

重复排列的数目为 n^r

重复组合:从n个不同元素中每次取一个,放回后再取下一个,如此连续取r次所得的组合称为重复组合.

重复组合的数目为 C_{n+r-1}^{r}

13

概率论与数理统计的学习方法

知识的学习层次：**了解　理解　掌握**

了解（同义词：知道）：（对于某个概念）知道是在哪个地方来的，是哪个问题中的

理解（同义词：认识）：（对于某个概念）不但要知道（了解），还要知道来龙去脉，为什么提出来，能解决什么问题

掌握（同义词：能）：不但要知道（了解）概念、公式、定理，还要知道来龙去脉、能解决什么问题（理解），而且要会灵活运用，达到**熟练**解决问题的程度。

学习方法：**做题，反复做题！**

14

15

什么是概率统计

◆确定性现象 Certainty phenomena

- 在101,325 P a的大气压下，将纯净水加热到100℃时必然沸腾
- 垂直上抛一重物，该重物会垂直下落

◆随机现象 Random phenomena

- 掷一颗骰子，可能出现1，2，3，4，5，6点
- 抛掷一枚均匀的硬币，会出现正面向上、反面向上两种不同的结果

16

例如：

测量一件物体的长度，由于仪器或观测者受到环境的影响，每次测量的结果可能有差异，但多次测量结果的平均值随着测量次数的增加而逐渐稳定在常数，并且各测量值大多落在此常数附近，离常数越远的测量值出现的可能性越小。

17

例如：

一门火炮在一定条件下进行射击，个别炮弹的弹着点可能偏离目标(有随机误差)，但多枚炮弹的弹着点就呈现出一定的规律。如：命中率等。

概率统计就是研究随机现象的统计规律性的数学学科

想一想 ???

“天有不测风云”和“天气可以预报”有无矛盾?

☆ 天有不测风云指的是：对随机现象进行一次观测，其观测结果具有偶然性；

☆ 天气可以预报指的是：观测者通过研究大量的气象资料，得到天气的变化规律，依据这些规律对天气进行判断。

19

第1章 随机事件及其概率

- 基本概念
- 事件的概率
- 古典概率模型
- 条件概率
- 事件的独立性

20

第一节

基本概念

概念1. 随机试验 Random Experiments

◆ 试验在相同的条件下可重复进行

◆ 每次试验的结果具有多种可能性，而且在试验之前所有可能的结果是知道的

◆ 每次试验前不能准确预言试验后会出现哪一种结果.

实例

➢ 上抛一枚硬币，观察向上的面是正还是反

➢ 在一条生产线上，检测产品的等级情况

➢ 向一目标射击，击中目标时射击的次数

概念2. 样本点与样本空间

■样本点 Sample Point

随机试验中的每一个可能出现的基本试验结果称为这个试验的一个 样本点 ，记作 ω_i .

■ 样本空间 Sample Space

全体样本点组成的集合称为这个试验的样本空间，记作Ω. 即 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots\}$

23

■ 写出下列试验的样本空间

E1: 掷一颗匀质骰子，观察骰子出现的点数

Ω={1，2，3，4，5，6}

E2: 射手向目标射击，直到击中目标为止的射击次数

Ω={1,2,…}

E3: 从四张扑克牌J,Q,K,A任意抽取两张

Ω={(J,Q),…(K,A)}

E4: 在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命

Ω={ t | 0≤ t }

24

概念3. 随机事件（Random Events）

样本空间Ω的任一子集 A 称为随机事件

仅含一个样本点的随机事件称为基本事件.

随机事件一般是由若干个基本事件组成的.

例如，抛掷一颗骰子，观察出现的点数，那么“出现1点”、“出现2点”、...、“出现6 点”为该试验的基本事件.

A =｛出现奇数点｝是由三个基本事件 “出现1点”、“出现3点” 、 “出现5 点” 组合而成的随机事件.

属于事件A的样本点出现，则称事件A发生。

25

特例——必然事件Certainty Events

- 必然事件
  - 样本空间Ω也是其自身的一个子集
  - Ω也是一个“随机”事件
  - 每次试验中必定有Ω中的一个样本点出现
  - 必然发生
- 例
  - “抛掷一颗骰子，出现的点数不超过6”为必然事件。

26

特例—不可能事件Impossible Event

- 不可能事件
  - 空集Φ也是样本空间的一个子集
  - Φ也是一个特殊的“随机”事件
  - 不包含任何样本点
  - 不可能发生
- 例
  - “抛掷一颗骰子，出现的点数大于6”是不可能事件

27

随机试验举例：抛掷硬币Tossing a coin

- 随机试验

掷一枚均匀的硬币，观察它出现正面或反面的情况

- 试验的样本点和基本事件
  - **H**：“正面向上”
  - **T**：“反面向上”

- 样本空间

$\Omega=\{H，T\}$.

28

◆ 随机事件

试验：掷一枚硬币三次，观察它出现正面或反面的情况

Ω={HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT}

A=“正面出现两次” **={HHT,HTH,THH}**

B=“反面出现三次” **={TTT}**

C=“正反次数相等” **= Φ**

D=“正反次数不等” **=Ω**

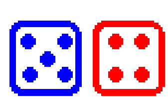
29

随机试验举例：抛掷两颗骰子Rolling two die

- 随机试验

  抛掷两颗骰子，观察出现的点数

- 试验的样本点和基本事件



样本空间

Ω＝｛（1，1），（1，2），（1，3），（1，4），（1，5），（1，6），…，（6，1），（6，2），（6，3）（6，4）（6，5），（6，6）｝.

30

◆ 随机事件

试验：抛掷两颗骰子，观察出现的点数

A="点数之和等于3" ={（1，2），（2，1）}

B="点数之和大于11" ={6，6}

C="点数之和不小于2" =Ω

D="点数之和大于12" = Φ

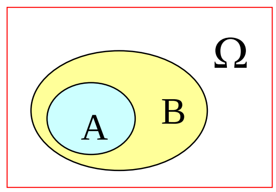
事件的关系与运算

给定一个随机试验，设Ω为其样本空间，事件A，B，A_k（ k=1，2，3，. . . ）都是Ω的子集.

子事件 (事件的包含Contain)

$A \subset B$时，称事件A包含于B，也称事件 A 是事件 B 的子事件

- 事件 A 的样本点都是事件 B 的样本点
- 事件 A 发生就能判断出事件 B 一定发生



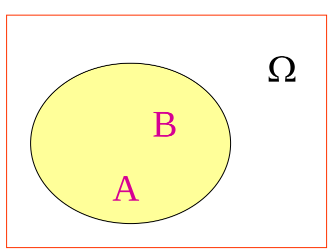
例如 抛掷两颗骰子，观察出现的点数

A={出现1点} B={出现奇数点}

33

相等事件（Equal）

$A = B$ 时，事件**A**与事件**B**为相等事件



事件**A**与事件**B**含有相同的样本点

例如：在投掷一颗骰子的试验中，事件“出现偶数点”与事件“出现**2**，**4**或**6**点”是相等事件。

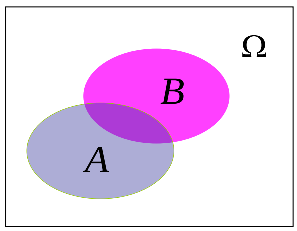
34

并（和）事件 Union

A∪B称为事件A与事件B的和

- 由事件A与事件B所有样本点组成
- 事件A与事件B至少有一个发生

（A发生或B发生）



- 多个事件的并

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

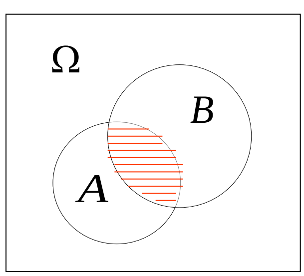
$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

35

交（积）事件Intersection

A∩B称为事件A与事件B的积，也可记为AB

- 事件 A 和事件 B 同时发生



- 多个事件的积

$$A_1 A_2 \cdots A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

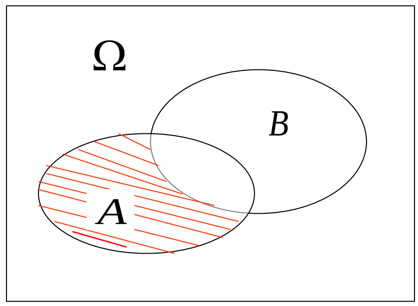
$$A_1 A_2 \cdots A_n \cdots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

36

差事件 Difference

A-B称为A与B的差事件，也可记为A\B

- 由属于事件A但不属于事件B的样本点组成
- 事件A发生且事件B不发生



$A \cap \overline{B} = A\overline{B}$

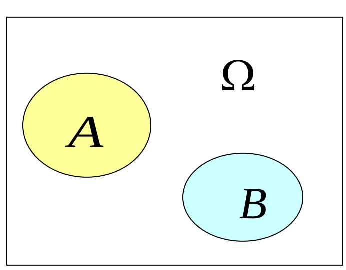
性质　$A - B = A\overline{B}$　　$A - B = A - AB$

37

互不相容事件(互斥事件) Exclusive

AB=Φ，称为事件**A**与事件**B**互斥，也称互不相容

- 事件A与事件B没有公共的样本点
- 事件A与事件B不能同时发生

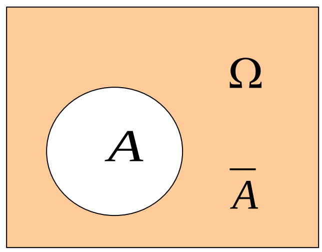


38

对立事件(互逆事件) Contrary

$\overline{A}$ 称为**A**的对立事件，也称这两个事件互逆

- 对立事件由所有不属于**A**的样本点组成
- 事件A不发生



- 性质 $A\overline{A}=\Phi$ $\quad A\cup\overline{A}=\Omega$ $\quad \overline{(\overline{A})}=A$

39

对立事件与互斥事件的关系

互斥事件与对立事件是两个不同的概念！

A、**B**对立：**AB=**Φ，且A∪B=**Ω**；
A、**B**互斥： **AB=**Φ；

因此，对立事件一定是互斥事件，但互斥不一定对立。

40

事件之间的运算律

- 交换律 $A\cup B=B\cup A$ $AB=BA$
- 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
- 分配律 $A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$

$$\mathrm{A}\cup(\mathrm{BC})=(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})(\mathrm{A}\cup\mathrm{C})$$

- 对偶律 $\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$ $\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$

41

概率论	集合论
样本空间（必然事件） **Ω**	全集
不可能事件 **Φ**	空集**Φ**
子事件 **A**⊂B	子集**A**⊂B
和事件 **A**∪B	并集**A**∪B
积事件 **A**∩B	交集**A**∩B
差事件 **A-**B	差集**A**−B
对立事件 $\overline{A}$	补集 $\overline{A}$

42

事件域

我们虽然把样本空间Ω的任一子集定义为事件，但有些事件会为后面概率的定义带来麻烦。

为了避免这种情况，我们把那些对运算（交、并、补）能保证封闭的事件的集合称为事件域F。

确定了事件域后，在事件域上定义概率就没有麻烦情况出现了，这样就为定义概率奠定了必要的基础。

43

例：事件的表示

某射手向目标射击三次，用 A_i 表示第 i 次击中目标 $i=1,2,3,$ 试用 A_i 及其运算符表示下列事件：

（1） 三次都击中目标： $A_1A_2A_3$

（2） 至少有一次击中目标： $A_1\cup A_2\cup A_3$

（3） 恰好有两次击中目标： $\bar{A}_1A_2A_3\cup A_1\bar{A}_2A_3\cup A_1A_2\bar{A}_3$

（4） 最多击中一次： $\bar{A}_1\bar{A}_2\cup\bar{A}_1\bar{A}_3\cup\bar{A}_2\bar{A}_3$

（5）至少有一次没有击中目标：$\bar{A}_1\cup\bar{A}_2\cup\bar{A}_3=\overline{A_1A_2A_3}$

（6）三次都没有击中目标： $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3=\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}$

44

练一练

A,B,C为同一样本空间的随机事件，试用A，B，C的运算表示下列事件

1） A，B，C 都不发生 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ $\overline{A\cup B\cup C}$

2） A与B发生，C不发生 $AB\bar{C}$

3） A，B，C 至少有一个发生 $A\cup B\cup C$

4） A，B，C 中恰有二个发生 $AB\bar{C}\cup\bar{A}BC\cup A\bar{B}C$

5） A，B，C 中至少有二个发生 $AB\cup BC\cup AC$

6） 事件3）的对立事件 $\overline{A\cup B\cup C}$

45

课后练习

P29 习题1
1--3

46

第二节

事件的概率

47

随机事件的频率Frequency

◆随机试验　　抛掷一枚均匀的硬币

◆试验总次数n　　将硬币抛掷n次

◆随机事件　　A="出现正面"

◆事件A出现次数m　　出现正面m次

◆随机事件的频率 $f_n(A)$　　$\dfrac{m}{n}$

$$f_n(A) = \frac{\text{事件A出现的次数}m}{\text{试验总次数n}}$$

48

抛掷硬币的试验
Experiment of tossing coin

◆历史纪录

试 验 者	抛 掷 次 数n	出现正面的次数m	出现正面的频率m/n
德.摩 根	2048	1061	0.518
蒲　丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维　尼	30000	14994	0.4998

频率和概率

◆ 频率的稳定性

随机事件A在相同条件下重复多次时，事件A 发生的频率在一个固定的数值p附近摆动，随试验次数的增加更加明显

◆ 事件的概率

事件A的频率稳定在数值p，说明了数值p可以用来刻划事件 A 发生可能性大小，可以规定为事件A的概率

概率的统计定义

对任意事件A，在相同的条件下重复进行n次试验，如果事件A发生的频率 m/n，随着试验次数n的增大而稳定地在某个常数 p 附近摆动，那么称 p 为事件A的概率

$$P(A) = p \quad (0 \le p \le 1)$$

当试验次数足够大时，可以用事件A发生的频率近似的代替事件A的概率

51

再分析一个例子，为检查某种小麦的发芽情况，从一大批种子中抽取10批种子做发芽试验，其结果如表：

种子粒数	2	5	10	70	130	310	700	1500	2000	3000
发芽粒数	2	4	9	60	116	282	639	1339	1806	2715
发芽率	1	0.8	0.9	0.857	0.892	0.910	0.913	0.893	0.903	0.905

从表1-2可看出，发芽率在0.9附近摆动，随着n的增大，将逐渐稳定在0.9这个数值上.

52

概率的统计定义

频率 $f_n(A)=\dfrac{m}{n}$ 稳定于概率 $p=P(A)$

性质

（1） $0\le p\le 1$

（2） $P(\Omega)=1, P(\Phi)=0$

（3） 若A，B互斥，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

53

概率的公理化定义

给定一个随机试验，Ω是它的样本空间，对于任意一个事件A，赋予一个实数

$P(A)$，如果 $P(\bullet)$满足下列三条公理，

那么，称 $P(A)$ 为事件A的概率.

- 非负性： P(A)≥0
- 规范性： P(Ω)=1
- 可列可加性： $A_1, A_2, \cdots$ 两两互不相容时

P（A1∪A2∪…）=P（A1）+P（A2）+…

54

概率的性质1

$$P(\varnothing)=0$$

证明 $\Omega=\Omega\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$

由公理 3 知

$$P(\Omega)=P(\Omega)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots$$

所以

$$P(\varnothing)=0$$

不可能事件的概率为零

55

注意事项

$$P(\varnothing)=0$$

但反过来，如果P（A）=0，未必有A=Φ

56

性质2（有限可加性）

设A_1，A_2，…，A_n两两互不相容，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

证明　在公理3中，取 $A_i = \varnothing$ （i=n+1,n+2,…）.

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(\Phi)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad AB = \Phi$$

57

性质3　差事件的概率

对任意事件A、B，P(A－B) = P(A)－P(AB)

推论1　若 $B \subset A$，则 $P(A-B) = P(A) - P(B)$

推论2　若 $B \subset A$，则 $P(A) \ge P(B)$

推论3　对任何随机事件A，$P(A) \le 1$

推论4　若$AB = \Phi$，则 $P(A-B) = P(A)$

58

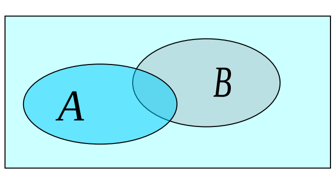
性质4 逆事件的概率

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

性质5 加法公式

对任意两个随机事件A、B ，有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$



$$A \cup B = A \cup (B - AB)$$

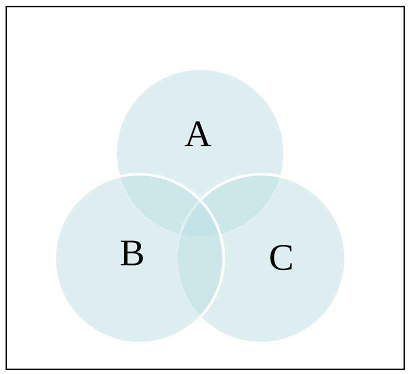
$$P(A \cup B) = P(A \cup (B - AB))$$

$$= P(A) + P(B - AB)$$

$$P(B - AB) = P(B) - P(AB)$$

推广的加法定理

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$$



课后练习

P29 习题1
4--7

作业

5

第三节

古典概率模型

古典概型

◆ 有限性（基本事件有限个）

每次试验中，所有可能发生的结果只有有限个，即样本空间Ω是个有限集

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$$

◆ 等可能性

每次试验中，每一种可能结果发生的可能性相同，即

$$P(A_1)=P(A_2)=\cdots=P(A_n)=\frac{1}{n}$$

其中 $A_i=\{\omega_i\}$， $i=1,2,\cdots,n$.

古典概型的概率计算

◆ 确定试验的基本事件总数

设试验结果共有n个基本事件ω_1，ω_2，…，ω_n，而且这些事件的发生具有相同的可能性

◆ 确定事件A包含的基本事件数

事件 A 由其中的m个基本事件组成

$$P(A) = \frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件数}}{\text{试验的基本事件总数}} = \frac{m}{n}$$

65

古典概率的计算①：抛掷骰子

抛掷一颗匀质骰子,观察出现的点数，求“出现的点数是不小于3的偶数”的概率.

■试验

抛掷一颗匀质骰子,观察出现的点数

■样本空间

Ω ={1，2，3，4，5，6}　　n=6

■事件A

A =“出现的点数是不小于3的偶数”={4，6}　m=2

■事件A的概率

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

66

古典概率的计算②：正品率和次品率

设在100 件产品中，有 4 件次品，其余均为正品.

◆这批产品的次品率

$n=100$　　$m_A=4$　　$P(A)=\dfrac{4}{100}=0.04$

◆任取3件，全是正品的概率

$n=C_{100}^3$　　$m_B=C_{96}^3$　　$P(B)=\dfrac{C_{96}^3}{C_{100}^3}$

◆任取3件，刚好两件正品的概率

$n=C_{100}^3$　　$m_C=C_{96}^2C_4^1$　　$P(C)=\dfrac{C_{96}^2C_4^1}{C_{100}^3}$

67

古典概率的计算：有放回抽样和无放回抽样

设在10 件产品中，有2件次品，8件正品.

A=“第一次抽取正品，第二次抽取次品”

■ 第一次抽取后，产品放回去

$n=10\times10$　　$m_A=8\times2$　　$P(A)=\dfrac{8\times2}{10\times10}=0.16$

■ 第一次抽取后，产品不放回去

$n=10\times9$　　$m_A=8\times2$　　$P(A)=\dfrac{8\times2}{10\times9}=0.1778$

68

古典概率的计算③：投球入盒

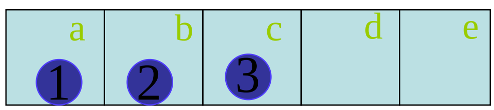
把3个小球随机地投入5个盒内。设球与盒都是可识别的。

- A=“指定的三个盒内各有一球

$$n=5^3 \qquad m_A=3! \qquad P(A)=\frac{3!}{5^3}$$

- B =“存在三个盒，其中各有一球

$$n=5^3 \qquad m_B=C_5^3\cdot 3! \qquad P(B)=\frac{C_5^3\cdot 3!}{5^3}$$



69

古典概率的计算④：生日问题

某班有50个学生，求他们的生日各不相同的概率（设一年365天）

◆分析 此问题可以用投球入盒模型来模拟

50个学生 ⟶ 50个小球

365天 ⟶ 365个盒子

$$P(A)=\frac{C_{365}^{50}\cdot 50!}{365^{50}}\approx 0.03$$

相似地有分房问题

人 ⟶ 小球

房子 ⟶ 盒子

70

生日问题模型

某班有n个学生，设一年N天,则他们的生日各不相同的概率为 $$P(A)=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}$$

至少有两人生日相同的概率为

$$P(\bar{A})=1-\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}$$

n	10	20	23	30	40	50
$P(\bar{A})$	0.12	0.41	0.51	0.71	0.89	0.97

71

古典概率的计算⑤：数字排列

用1，2，3，4，5这五个数字构成三位数

- 没有相同数字的三位数的概率

$$n=5^3 \qquad m_A=P_5^3 \qquad P(A)=\frac{P_5^3}{5^3}=0.48$$

- 没有相同数字的三位偶数的概率

$$n=5^3 \qquad m_B=\underbrace{P_4^2}_{\text{百位十位}}\underbrace{P_2^1}_{\text{个位}} \qquad P(B)=\frac{P_4^2P_2^1}{5^3}=0.192$$

72

概率的古典定义的总结

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件数}}{\text{试验的基本事件总数}}=\frac{m}{n}$$

性质

（1） $0 \le P(A) \le 1$

（2） $P(\Omega)=1, P(\Phi)=0$

（3） 若A，B互斥，则 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$

73

几何概型 Geometric Probability

- 将古典概型中的有限性推广到无限性，而保留等可能性，就得到几何概型。
- 特点
  - ■ 有一个可度量的几何图形S
  - ■试验E看成在S中随机地投掷一点
  - ■事件A就是所投掷的点落在S中的可度量图形A中

$$\boxed{P(A)=\frac{A\text{的几何度量}}{S\text{的几何度量}}=\frac{L(A)}{L(S)}}$$

- 几何度量--------指长度、面积或体积

74

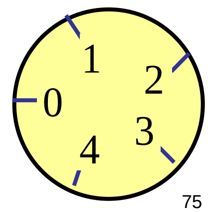
几何概型的计算

一个质地均匀的陀螺的圆周上均匀地刻有[0 , 5)上诸数字，在桌面上旋转它，求当它停下来时，圆周与桌面接触处的刻度位于区间 [2 , 3] 上的概率。

$S = [0, 5)$ $A = [2 , 3]$

$L(S) = 5- 0 = 5$ $L(A) = 3-2 = 1$

$$P(A) = \frac{L(A)}{L(S)} = \frac{1}{5}$$



75

几何概型的计算：会面问题

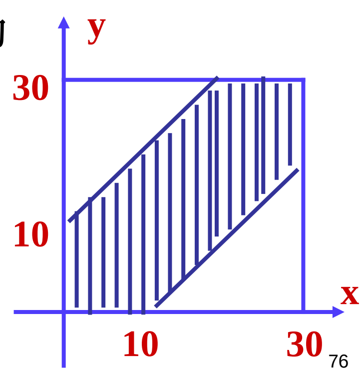
甲乙二人相约定6：00-6：30在预定地点会面，先到的人要等候另一人10分钟后，方可离开。求甲乙二人能会面的概率，假定他们在6：00-6：30内的任意时刻到达预定地点的机会是等可能的。

解 设甲乙二人到达预定地点的时刻分别为 *x* 及 *y*（分钟），则

$0 \le x \le 30 \quad 0 \le y \le 30$

二人会面 $\Leftrightarrow |x - y| < 10$

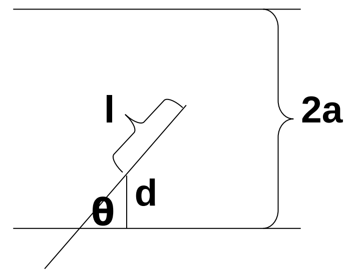
$$p = \frac{30^2 - (30-10)^2}{30^2} = \frac{5}{9}$$



76

几何概型的计算：蒲丰投针问题

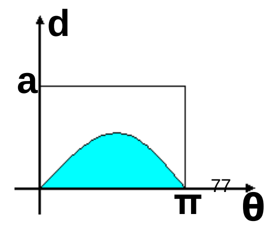
设平面上布满等距离为2a（a>0）的一族平行线，向此平面上投一枚质地匀称的长为2l（l<a）的针，求针与直线相交的概率。



解 设针的中点离较近直线的距离为d，针与较近直线的交角为θ。则d与θ的可取值为

0≤d ≤ a , 0 ≤ θ ≤ π

针与直线相交 ⟺ **0 ≤ d ≤ lsinθ**



所求概率为

$$P(A)=\frac{\int_0^{\pi} l\sin\theta d\theta}{\pi a}=\frac{2l}{\pi a}$$

几 何 概 型

$$\boxed{P(A)=\frac{A\text{的几何度量}}{S\text{的几何度量}}=\frac{L(A)}{L(S)}}$$

性质

（1） $0\le P(A)\le 1$

（2） $P(\Omega)=1, P(\Phi)=0$

（3）若A，B互斥，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

练一练 一楼房共14层，假设电梯在负一楼启动时有10名乘客，且乘客在各层下电梯是等可能的。试求下列事件的概率：A1={10个人在同一层下}；A2={10人在不同的楼层下}；A3={10人都在第14层下}；A4={10人恰有4人在第8层下}。

解　总的基本事件数：14^{10}

各事件含有的基本事件数分别为：

A1 C_{14}^{1}　A2 P_{14}^{10}　A3 1　A4 $C_{10}^{4}\cdot 13^{6}$

所以，各事件的概率为：

…………

79

思考题

1、 从五双大小型号不同的鞋子中任意抽取四只，问能凑成两双的概率是多少？

解　设“能凑成两双鞋”为事件A

总的基本事件数：C_{10}^{4}　目标事件数：C_{5}^{2}

所以，所求概率为

$$P(A)=\frac{C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{1}{21}$$

80

2、 某线路公共汽车每隔5分钟开出一辆，一游客随意地到站候车，试求其“候车时间不超过3分钟”的概率。

解 这里 $\Omega=(0,5], L(\Omega)=5-0=5$

设“候车时间不超过3分钟”为事件A

则， $L(A)=3-0=3$

所以，所求概率为

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}=\frac{3}{5}=0.6$$

81

3、掷两颗骰子，求事件“至少有一颗出现6点”，“点数之和为8”的概率。

解 总的基本事件数为 $6^2=36$

事件A“至少出现一个6点”所包含的基本事件数为

$$C_2^1C_5^1+1=11$$

事件B“点数之和为8”所包含的样本点为

$$\{(2,6),(3,5),(4,4),(6,2),(5,3)\}$$

所以 $P(A)=\frac{11}{36}$，$P(B)=\frac{5}{36}$

82

4、 包括甲，乙在内的10个人随机地排成一行，求甲与乙相邻的概率。若这10个人随机地排成一圈，又如何呢？

解 总的基本事件数为 $10!$

排成行时，事件“甲乙相邻”的基本事件数为

$$P_8^8 C_9^1 C_2^1$$

排成圈时，事件“甲乙相邻”的基本事件数为

$$P_8^8 C_9^1 C_2^1 + P_8^8 C_2^1$$

所求概率为 $P(1) = \dfrac{1}{5}, P(2) = \dfrac{2}{9}$

83

课后练习

P29 习题1
8--14

作业

11, 14

84

例 袋中有20个球，其中15个白球，5 个黑球，从中任取3个，求至少取到一个白球的概率.

解 设 A 表示至少取到一个白球，A_i 表示刚好取到i个白球，i=0，1，2，3，则

◆ 方法 1 （用互不相容事件和的概率等于概率之和）

$P(A)=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$

$$=\frac{C_{15}^1C_5^2}{C_{20}^3}+\frac{C_{15}^2C_5^1}{C_{20}^3}+\frac{C_{15}^3}{C_{20}^3}$$

◆ 方法 2 （利用对立事件的概率关系）

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-P(A_0)=1-\frac{C_5^3}{C_{20}^3}$$

85

例 甲、乙两人同时向目标射击一次，设甲击中的概率为 0.85，乙击中的概率为 0.8．两人都击中的概率为 0.68．求目标被击中的概率.

解 设 A 表示甲击中目标，B 表示乙击中目标，C 表示目标被击中，则

$$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$=0.85+0.8-0.68=0.97$$

86

例 已知P（A）=0.3,P(B)=0.6,试在下列两种情形下分别求出P(A\B)与P(B\A)

（1） 事件A,B互不相容

（2） 事件A,B有包含关系

解 (1) 由于 $AB=\varnothing$, 因此 $A\setminus B=A,\ B\setminus A=B$

$$P(A\setminus B)=P(A)=0.3$$

$$P(B\setminus A)=P(B)=0.6$$

（2） 由已知条件和性质3,推得必定有 $A\subset B$

$$P(A\setminus B)=P(\varnothing)=0$$

$$P(B\setminus A)=P(B)-P(A)=0.3$$

87

例 考察甲，乙两个城市6月逐日降雨情况。已知甲城出现雨天的概率是0.3， 乙城出现雨天的概率是0.4， 甲乙两城至少有一个出现雨天的概率为0.52， 试计算甲乙两城同一天出现雨天的概率.

解 设A表示“甲城下雨”， B表示“乙城下雨”

则 $P(A)=0.3, P(B)=0.4, P(A\cup B)=0.52$

所以 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.18$

88

第四节

条件概率

条件概率 Conditional Probability

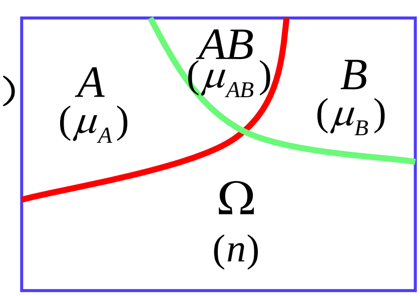
- 抛掷一颗骰子, 观察出现的点数

A={出现的点数是奇数}＝｛１，３，５｝

B={出现的点数不超过3}＝｛１，２，３｝

若已知出现的点数不超过3，求出现的点数是奇数的概率

即事件 B 已发生，求事件 A 发生的概率Ｐ（Ａ｜Ｂ）



$$P(A|B) = \frac{\mu_{AB}}{\mu_B} = \frac{2}{3}$$

A ，B 都发生，但样本空间缩小到只包含Ｂ的样本点

条件概率 Conditional Probability

设A， B为同一个随机试验中的两个随机事件，且P（B）＞0， 则称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件B发生的条件下，事件A发生的条件概率.

91

例 设 100 件产品中有 70 件一等品，25 件二等品，规定一、二等品为合格品．从中任取1 件，求 (1) 取得一等品的概率；(2) 已知取得的是合格品，求它是一等品的概率.

解 设A表示取得一等品， B表示取得合格品，则

（1）因为100 件产品中有 70 件一等品，所以

$$P(A)=\frac{70}{100}=0.7$$

（2）方法1：因为95 件合格品中有 70 件一等品，所以

$$P(A|B)=\frac{70}{95}\approx 0.7368$$

方法2： $$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{70/100}{95/100}\approx 0.7368$$

92

例　考虑一个恰有两个小孩的家庭.若已知该家庭有男孩，求这家有两个男孩的概率；若已知该家庭第一个是男孩，求这家有两个男孩（相当于第二个也是男孩）的概率.（假定生男生女为等可能）

解　Ω={(男,男),(男,女),(女,男),(女,女)}

设 B=“有男孩”，则 B={(男,男),(男,女),(女,男)}

A=“有两个男孩”，　A={(男,男)},

B_1 =“第一个是男孩”　B_1 ={(男,男),(男,女)}

于是得

$$P(B)=\frac{3}{4} \qquad P(BA)=P(A)=\frac{1}{4}$$

$$P(B_1)=\frac{1}{2} \qquad P(B_1A)=P(A)=\frac{1}{4}$$

93

$$P(B)=\frac{3}{4} \qquad P(BA)=P(A)=\frac{1}{4}$$

$$P(B_1)=\frac{1}{2} \qquad P(B_1A)=P(A)=\frac{1}{4}$$

因此，所求的两个条件概率

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1/4}{3/4}=\frac{1}{3}$$

$$P(A|B_1)=\frac{P(AB_1)}{P(B_1)}=\frac{1/4}{1/2}=\frac{1}{2}$$

94

乘法公式

$$P(AB) = P(A)P(B|A) \quad \Leftarrow \quad P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$= P(B)P(A|B) \quad \Leftarrow \quad P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

- 推广

$$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1A_2)) \cdots P(A_n|(A_1A_2\cdots A_{n-1}))$$

95

例

一个盒子中有 6 只白球、 4 只黑球，从中不放回地每次任取 1 只，连取 2 次，求 **(1)** 第一次取得白球的概率； **(2)** 第一、第二次都取得白球的概率； **(3)** 第一次取得黑球而第二次取得白球的概率.

解 设 A 表示第一次取得白球, B 表示第二次取得白球, 则

（1） $P(A) = \frac{6}{10} = 0.6$

（2） $P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \approx 0.33$

（3） $P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} \approx 0.27$

96

例　一批产品中有 4% 的次品，而合格品中一等品占 45% .从这批产品中任取一件，求该产品是一等品的概率.

解　设 A 表示取到的产品是一等品， B 表示取出的产品是合格品， 则

$$P(A|B)=45\% \qquad P(\overline{B})=4\%$$

于是 $$P(B)=1-P(\overline{B})=96\%$$

所以 $$P(A)=P(AB)=P(B)P(A|B)$$

$$=96\%\times 45\%=43.2\%$$

97

练一练　全年级100名学生中，有男生（以事件A表示）80人，女生20人； 来自北京的（以事件B表示）有20人，其中男生12人，女生8人；免修英语的（以事件C表示）40人中，有32名男生，8名女生。求

$$P(A),\quad P(B),\quad P(A|B),\quad P(AB),\quad P(B|A)$$

$$\frac{80}{100}\qquad \frac{20}{100}\qquad \frac{12}{20}\qquad \frac{12}{100}\qquad \frac{12}{80}$$

$$P(C),\quad P(AC),\quad P(C|A),\quad P(\overline{A}|\overline{B})$$

$$\frac{40}{100}\qquad \frac{32}{100}\qquad \frac{32}{80}\qquad \frac{12}{80}$$

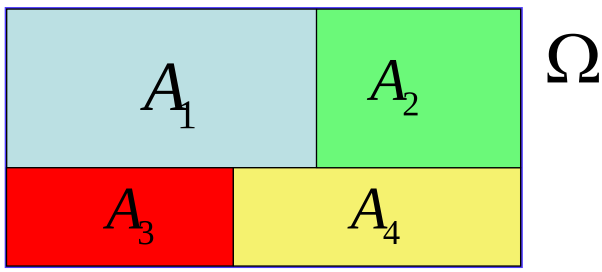
98

完备事件组

完备事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$

（1）$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容

（2）$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$



全概率公式

例 一个盒子中有 6 只白球、4 只黑球，从中不放回地每次任取 1 只，连取 2 次，求第二次取到白球的概率

解 A={第一次取到白球}, B={第二次取到白球}

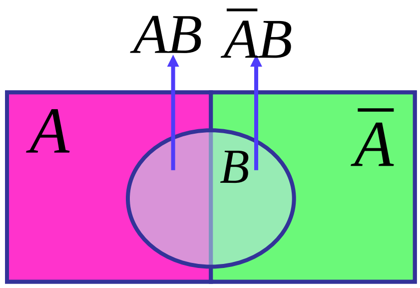
因为 $B = AB \cup \overline{A}B$，且 AB 与 $\overline{A}B$ 互不相容，所以

$$P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B)$$

$$= P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})$$

$$= \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \mathbf{0.6}$$

全概率公式



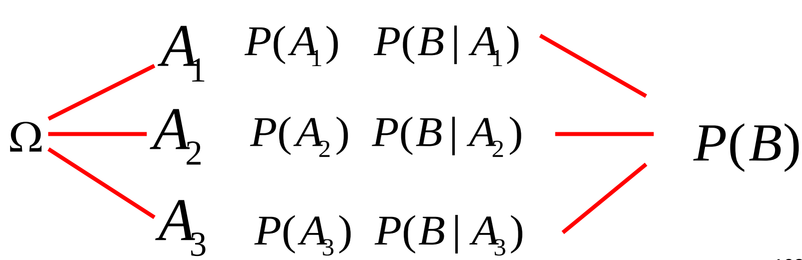
$$P(B)=P(AB+\bar{A}B)$$
$$=P(AB)+P(\bar{A}B)$$
$$=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$$

101

全概率公式

设A_1，A_2，…，A_n构成一个完备事件组，且$P(A_i)>0$，$i=1$，2，…，n，则对任一随机事件B，有

$$\boxed{P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}$$



102

例 设播种用麦种中混有一等，二等，三等，四等四个等级的种子，分别各占95.5%，2%，1.5%，1%，用一等，二等，三等，四等种子长出的穗含50颗以上麦粒的概率分别为0.5，0.15，0.1，0.05，求这批种子所结的穗含有50颗以上麦粒的概率.

解 设从这批种子中任选一颗是一等，二等，三等，四等种子的事件分别是A_1，A_2，A_3，A_4，则它们构成完备事件组，又设B表示任选一颗种子所结的穗含有50粒以上麦粒这一事件，则由全概率公式：

$$P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)$$

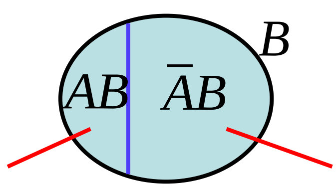
$$=0.955\times0.5+0.02\times0.15+0.015\times0.1+0.01\times0.05$$

$$=0.4825$$

103

贝叶斯公式 Bayes' Theorem

- 后验概率



$$P(AB)=P(A)\times P(B|A) \qquad P(\bar{A}B)=P(\bar{A})\times P(B|\bar{A})$$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$$

104

贝叶斯公式 Bayes' Theorem

设A_1，A_2，…, A_n构成完备事件组，且诸P（A_i）>0)
B为样本空间的任意事件，P（B）>0，则有

$$\boxed{P(A_k \mid B)=\frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}}$$

(k =1 , 2 , … , n)

证明

$$P(A_k|B)=\frac{P(A_kB)}{P(B)}=\frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

105

例 设某工厂有甲、乙、丙三个车间生产同一种产品，已知各车间的产量分别占全厂产量的25 %， 35%，40%，而且各车间的次品率依次为 5% ， 4%，2%．现从待出厂的产品中检查出一个次品，试判断它是由甲车间生产的概率．

解 设A_1，A_2，A_3分别表示产品由甲、乙、丙车间生产，B表示产品为次品．显然，A_1，A_2，A_3构成完备事件组．依题意，有

$$P(A_1)=25\%,\ P(A_2)=35\%,\ P(A_3)=40\%,$$

$$P(B|A_1)=5\%,\ P(B|A_2)=4\%,\ P(B|A_3)=2\%$$

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)}$$

$$=\frac{0.25\times0.05}{0.25\times0.05+0.35\times0.04+0.4\times0.02}\approx 0.362$$

106

练一练

甲箱中有3个白球，2个黑球，乙箱中有1个白球，3个黑球。现从甲箱中任取一球放入乙箱中，再从乙箱任意取出一球。问从乙箱中取出白球的概率是多少？

107

练一练

已知在所有男子中有5%，在所有女子中有0.25%患有色盲症。随机抽一人发现患色盲症，问其为男子的概率是多少？（设男子和女子的人数相等）。

108

课后练习

P29 习题1
15--22

作业

15, 21

第五节

事件的独立性

一、事件的独立性引例

例 一个盒子中有 6 只黑球、 4 只白球，从中有放回地摸球。求（1） 第一次摸到黑球的条件下，第二次摸到黑球的概率；（2） 第二次摸到黑球的概率。

解 A={第一次摸到黑球}，B={第二次摸到黑球}

则 $P(B|A)=\dfrac{6}{10}=0.6$

A的发生对B没有影响

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$$

$$=\frac{6}{10}\times\frac{6}{10}+\frac{4}{10}\times\frac{6}{10}=0.6$$

$$\boxed{P(B|A)=P(B)}$$

111

事件的独立性 Independence

■ 定义

设 A、 B 为任意两个随机事件，如果

P（B｜A）＝P（B）

即事件 B 发生的可能性不受事件 A 的影响，则称事件 B 对于事件 A 独立.

显然， B 对于 A 独立，则 A 对于 B 也独立，故称 A 与 B 相互独立.

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(AB)}{P(B|A)}=\frac{P(AB)}{P(AB)/P(A)}=P(A)$$

112

事件的独立性判别

- 事件A与事件B独立的充分必要条件是

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

证明　由乘法公式 $P(AB)=P(A)P(B|A)$ 和独立性定义 $P(B|A)=P(B)$ 可得

- 实际问题中，事件的独立性可根据问题的实际意义来判断

如甲乙两人同时射击，“甲击中”与“乙击中”可以认为相互之间没有影响，即可以认为相互独立

113

例如　一个家庭中有若干个小孩，假设生男生女是等可能的，令A={一个家庭中有男孩、又有女孩}，B={一个家庭中最多有一个女孩}，对下列两种情形，讨论A与B的独立性：（1）家庭中有两个小孩；（2）家庭中有三个小孩。

解　情形（1）的样本空间为

Ω={（男男），（男女），（女男），（女女）}

$$P(A)=\frac{1}{2},P(B)=\frac{3}{4},P(AB)=\frac{1}{2}$$

此种情形下，事件A、B是不独立的。

114

例如　一个家庭中有若干个小孩，假设生男生女是等可能的，令A={一个家庭中有男孩、又有女孩}，B={一个家庭中最多有一个女孩}，对下列两种情形，讨论A与B的独立性：（1）家庭中有两个小孩；（2）家庭中有三个小孩。

解　情形（2）的样本空间为

Ω={（男男男），（男男女），（男女男），（女男男）（男女女），（女男女），（女女男），（女女女）}

$$P(A)=\frac{6}{8}, P(B)=\frac{1}{2}, P(AB)=\frac{3}{8}$$

此种情形下，事件A、B是独立的。

115

■ **定理**　下列四组事件，有相同的独立性：

（1）A与B;　（2）A与$\overline{B}$;

(3) $\overline{A}$与B；　（4）$\overline{A}$与$\overline{B}$

证明　若A、B独立，即　$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$

$$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$$

$$=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)$$

$$=[1-P(A)][1-P(B)]=P(\overline{A})P(\overline{B})$$

所以，$\overline{A}$与$\overline{B}$独立。

116

■ 概念辨析

事件A与事件B独立（B发生的概率与A发生与否没有联系）

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$$

事件A与事件B互不相容（A发生，B必不发生，A发生的概率与B是否发生紧密联系）

$$AB=\Phi \qquad P(AB)=0$$

事件A与事件B为对立事件

$$AB=\Phi \qquad A\cup B=\Omega$$

$$P(A)+P(B)=1$$

117

例 甲乙二人同时向同一目标射击，甲击中目标的概率为**0.6**，乙击中目标的概率为**0.5**。试计算 **1**）两人都击中目标的概率；**2**）恰有一人击中目标的概率；**3**）目标被击中的概率。

解 设**A**表示“甲击中目标”，**B**表示“乙击中目标”

则 $P(A)=0.6, P(B)=0.5$

$$P(AB)=P(A)P(B)=0.6\times 0.5=0.3$$

$$P(\bar{A}B+A\bar{B})=P(\bar{A})P(B)+P(A)P(\bar{B})=0.5$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.8$$

118

有限多个事件的独立性

如果事件A，B，C满足

$P(AB)=P(A)P(B)$　　$P(AC)=P(A)P(C)$

$P(BC)=P(B)P(C)$　　$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

则称事件A，B，C相互独立。

注意

事件A，B，C相互独立与事件A，B，C两两独立不同，两两独立是指上述式子中前三个式子成立。因此，相互独立一定两两独立，但反之不一定。

119

例

设同时抛掷两个均匀的正四面体一次，每个四面体的四个面上分别标有号码1，2，3，4。令

A={第一个四面体的触地面为偶数}

B={第二个四面体的触地面为奇数}

C={两个四面体的触地面同时为奇数，或者同时为偶数}

试讨论A、B、C的相互独立性。

120

A={第一个…为偶数}；B={第二个…为奇数}

C={两个…同时为奇数，或者同时为偶数}

试验的样本空间为

$$\Omega=\begin{bmatrix}(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4)\\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4)\\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4)\\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4)\end{bmatrix}$$

$$P(ABC)=0$$

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$$

$$P(AB)=P(AC)=P(BC)=\frac{1}{4}$$

所以，**A、B、C** 两两独立，但不相互独立。

121

定义

设$A_1,A_2,\cdots,A_n$为n个事件。如果对于所有可能的组合$1\le i<j<k<\cdots\le n$下列各式同时成立

$$\begin{cases} P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j) & C_n^2\\ P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k) & C_n^3\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) & C_n^n \end{cases}$$

那么称$A_1,A_2,\cdots,A_n$是相互独立的。

共有（2^n-n-1）个等式

122

对满足相互独立的多个事件，有

(1) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则

$$\left.\begin{array}{l}\overline{A}_1, A_2, \cdots, A_n \\ \cdots \\ \overline{A}_1, \overline{A}_2, \cdots, \overline{A}_n\end{array}\right\} \text{均相互独立}$$

(2) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A_i})$$

例　加工某一种零件需要经过三道工序，设三道工序的次品率分别为2%，1%，5%，假设各道工序是互不影响的．求加工出来的零件的次品率．

解　设 A_1，A_2，A_3 分别表示第一、第二、第三道工序出现次品，则依题意：A_1，A_2，A_3 相互独立，且　$P(A_1)=2\%$，$P(A_2)=1\%$，$P(A_3)=5\%$

又设A表示加工出来的零件是次品，则

$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

（用对立事件的概率关系）

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})$$

$$= 1-(1-0.02)(1-0.01)(1-0.05) = 0.07831$$

课后练习

P29 习题1
23--30

作业

26， 29

第一章 小结

本章由六个概念（随机试验、事件、概率、条件概率、独立性）；

四个公式（加法公式、乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式）；

两个概型（古典概型, n重伯努利试验）

练一练

$$P(A)=x, P(B)=y, P(A\cap B)=z$$

用x，y，z 表示下列事件的概率：

$$1)\ P(\bar{A}\cup\bar{B}) \qquad 2)\ P(\bar{A}\cap B)$$

$$3)\ P(\bar{A}\cup B) \qquad 4)\ P(\bar{A}\cap\bar{B})$$

解 $1)\ P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-z$

$$2)\ P(\bar{A}\cap B)=P(B-A)=P(B-AB)=y-z$$

$$3)\ P(\bar{A}\cup B)=P(\bar{A})+P(B)-P(\bar{A}B)=1-x+z$$

$$4)\ P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-x-y+z$$

127

在一盒子中装有15个乒乓球，其中有9个新球。在第一次比赛时任意取出三个球，比赛后仍放回原盒中；在第二次比赛时同样任意取出三个球，求第二次取出的三个球均为新球的概率。

解 设第一次取出的球为“3新”、“2新1旧”、“1新2旧”“3旧”分别为事件A1、A2、A3、A4；“第二次取出三个新球”为事件B，则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)$$

$$=\frac{C_9^3}{C_{15}^3}\cdot\frac{C_6^3}{C_{15}^3}+\frac{C_9^2C_6^1}{C_{15}^3}\cdot\frac{C_7^3}{C_{15}^3}+\frac{C_9^1C_6^2}{C_{15}^3}\cdot\frac{C_8^3}{C_{15}^3}+\frac{C_6^3}{C_{15}^3}\cdot\frac{C_9^3}{C_{15}^3}=\ldots$$

128

某工人照看三台机床，一个小时内1号，2号，3号机床需要照看的概率分别为0.3, 0.2, 0.1。设各机床之间是否需要照看是相互独立的，求在一小时内：1）没有一台机床需要照看的概率；2）至少有一台不需要照看的概率；3）至多有一台需要照看的概率。

解 设A_i表示“第i台机床需要照看”，（i=1，2，3）

则 P（A_1）=0.3； P（A_2）=0.2； P（A_3）=0.1；

$$p_1 = P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}) = 0.7\times0.8\times0.9 = 0.504$$

$$p_2 = 1 - P(A_1A_2A_3) = 1 - 0.3\times0.2\times0.1 = 0.994$$

$$p_3 = P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3) + P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}) = 0.902$$

本章作业

P29习题1

5, 11, 14, 15, 21, 26, 29

下次课交第一章的作业，请各位同学记得带作业本过来