第五章线性系统的频域分析法

本章主要内容

- 频率特性的基本概念
- 频率特性曲线绘制
- 奈魁斯特稳定判据
- 稳定裕度
- 闭环系统的性能分析

什么是频域分析法

考察一个系统的好坏,通常用阶跃输入下系统的阶跃响 应来分析系统的动态性能和稳态性能。

有时也用<u>正弦波</u>输入时系统的响应来分析,但这种响应并不是单看某一个频率正弦波输入时的瞬态响应,而是考察<u>频</u>率由低到高无数个正弦波输入下所对应的每个输出的稳态响应。因此,这种响应也叫频率响应。

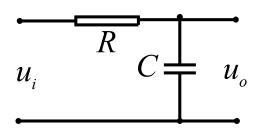
频率响应尽管不如阶跃响应那样直观,但同样间接地表示 了系统的特性。频率响应法是分析和设计系统的一个既方便 又有效的工具。

- > 频域分析法(也称频域响应法)的特点
 - 1) 频率响应法可以通过<u>实验测量</u>来获得,而不必推导系统的传递函数,对于难以建立动态模型的系统来说,很有用处。
 - 2) 它可以<u>用图来表示</u>,这在控制系统的分析和设计中有非常重要的作用。
 - **3**)频域设计可以同时考虑系统的<u>动态响应和抗噪要求</u>, 并且频域分析法适应性较广(线性和部分非线性)
 - **4**)能间接地揭示系统的<u>动态特性和稳态特性</u>,可简单迅速地判断某些环节或参数对系统性能的影响,指出系统改进方向。

5-1 频率特性

1.基本概念

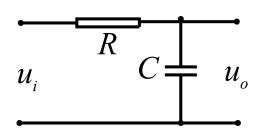
以如下R-C线性电路为例建立频率特性的基本概念



5-1 频率特性

1.基本概念

以如下R-C线性电路为例建立频率特性的基本概念



设输入电压 $u_i = A_i \sin \omega t$, 由电路可知,

输出 и。仍为同频率的正弦电压, 只是

幅值和初相位与 и, 不同,

$$u_o$$
 可表示为 $u_o = A_o \sin(\omega t + \varphi)$

利用正弦电路的频率分析法可得:

$$U_{0}(s) = \frac{1/sC}{R+1/sC}U_{i}(s), \quad G(s) = \frac{U_{0}}{U_{i}} = \frac{1}{1+sRC} = \frac{1}{1+sT}$$

$$G(j\omega) = \frac{u_{0}(j\omega)}{u_{i}(j\omega)} = \frac{1}{1+jT\omega}$$

$$G(j\omega) = \frac{u_0(j\omega)}{u_i(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{(1 + (\omega T)^2)^2}} \angle - \tan^{-1}\frac{\omega T}{1} = A(\omega)\angle\varphi(\omega)$$

其中 $A(\omega) = |G(j\omega)|$

称为电路的幅频特性,表示稳态输出的正弦信号的幅值与输入 正弦信号的幅值之比随 ω 而变化的特性.

$$\varphi(\omega) = /G(j\omega)$$

称为电路的相频特性,表示稳态输出的正弦信号的初相位与输入正弦信号的初相位之差随频率而变化的特性.

这二者都是频率的是函数,且与数学模型相关,并称其指数形式

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

为系统的频率特性。

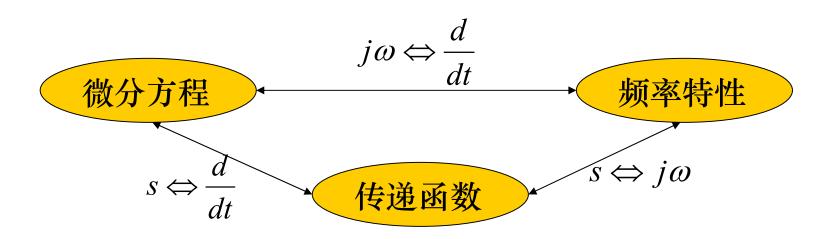
对于稳定的系统,可以用实验方法测定,即对系统 输入不同频率的正弦信号,根据测量输出、输入的幅值比 和相位差来找出系统的频率特性曲线。

但不稳定系统中有发散或振荡分量,故不能用实验的方法确定

[结论]: 当传递函数中的复变量s用 $j\omega$ 代替时,传递函数就转变为频率特性。反之亦然。

到目前为止,我们已学习过的线性系统的数学模型有以下 几种:微分方程、传递函数和频率特性。

它们之间的关系如下:



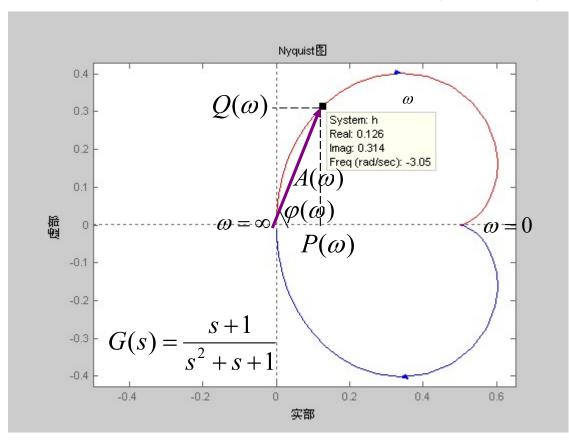
2、频率(frequency)特性的表示法:

工程上常用图形来表示频率特性,常用的有:

- 1). 极坐标图,幅相曲线,也称奈奎斯特(Nyquist)图。是以开环频率特性的实部为直角坐标横坐标,以其虚部为纵坐标,以为参变量的幅值与相位的图解表示法。
- 2). 对数坐标图,也称伯德(Bode)图。它是由两张图组成,以 $\lg \omega$ 为横坐标,对数分度,分别以 $20\lg |G(j\omega)H(j\omega)|$ 和 $\Phi(j\omega)$ 作纵坐标的一种图示法。
- 3). 对数幅相频率特性图,也称尼柯尔斯(Nichols)图。它是以相位 $\Phi(j\omega)$ 为横坐标,以 $20\lg|G(j\omega)H(j\omega)|$ 为纵坐标,以 ω 为参变量的一种图示法。

1) 极坐标频率特性曲线(又称奈魁斯特曲线)

它是在复平面上用一条曲线表示 ω 由 $0 \to \infty$ 时的频率特性。即用矢量 $G(j\omega)$ 的端点轨迹形成的图形。 ω 是参变量。在曲线的上的任意一点可以确定幅频和相频特性。



根据上面的说明,可知: 频率特性曲线是S平面 上变量s沿正虚轴变化 时在G(s)平面上的映射。

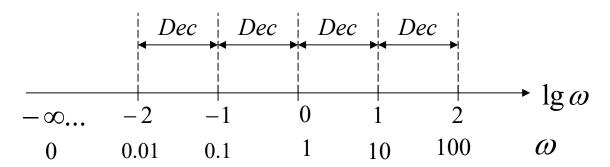
由于 $|G(j\omega)|$ 是偶函数, 所以当 ω 从 $-\infty \to 0$ 和 $0 \to \infty$ 变化时,奈魁 斯特曲线对称于实轴, 但一般只绘制一半即可。

2) 对数(logarithm)频率特性曲线(又称波德图)

它由两条曲线组成:幅频特性曲线和相频特性曲线。

波德图坐标(横坐标是频率,纵坐标是幅值和相角)的分度:

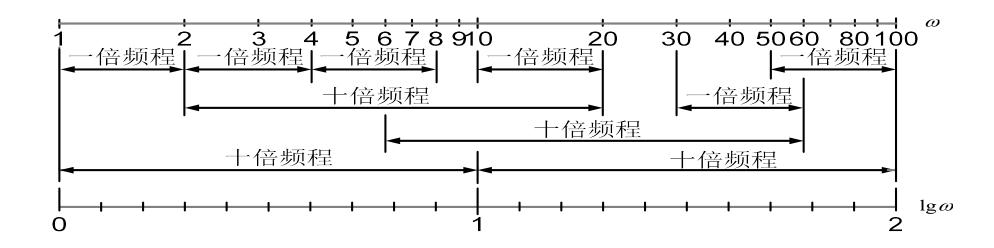
□ 横坐标分度: 它是以频率 ω 的对数值 lg ω 进行分度的。所以横坐标(称为频率轴)上每一线性单位表示频率的十倍变化,称为十倍频程(或十倍频),用Dec表示。如下图所示:



由于 ω 以对数分度,所以零频率线在 $-\infty$ 处。

详细的刻度图示

ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
lgω	0.000	0.301	0.477	0.602	0.699	0.778	0.845	0.903	0.954	1.000



纵坐标分度:对数幅频特性曲线的纵坐标以 $L(\omega) = 20 \log A(\omega)$ 表示。其单位为分贝(dB)。直接将 $20 \log A(\omega)$ 值标注在纵坐标上。

相频特性曲线的纵坐标以度或弧度为单位进行线性分度。

一般将幅频特性和相频特性画在一张图上,使用同一个横 坐标(频率轴)。

使用对数坐标图的优点:

- 可以展宽频带;频率是以10倍频表示的,因此可以清楚的表示出低频、中频和高频段的幅频和相频特性。
- 可以将乘法运算转化为加法运算。
- 所有的典型环节的频率特性都可以用分段直线(渐进线) 近似表示。
- 对实验所得的频率特性用对数坐标表示,并用分段直线近似的方法,可以很容易的写出它的频率特性表达式。

3) 对数幅相特性曲线(又称尼柯尔斯图)

尼柯尔斯图是将对数幅频特性和相频特性两条曲线合并成一条曲线。横坐标为相角特性,单位为度或弧度。纵坐标为对数幅频特性,单位为分贝。横、纵坐标都是线性分度。

小结

- □ 频率特性的定义
- □ 频率特性与传递函数之间的关系
- □ 频率特性的图示法