

## 4-2. 绘制根轨迹的基本法则

- 法则**1**. 根轨迹起源于开环极点，终于开环零点。

由  $\frac{K^* \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = -1$  可得：
$$\prod_{j=1}^n (s - p_j) + K^* \prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0$$

当  $K^* = 0$  时，根轨迹方程退化为：
$$\prod_{j=1}^n (s - p_j) = 0$$

此时闭环特征方程的根即为开环传递函数的极点。

同样由  $\frac{K^* \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = -1$  也可得：
$$\frac{1}{K^*} \prod_{j=1}^n (s - p_j) + \prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0$$

当  $K^* \rightarrow \infty$  时，根轨迹方程退化为：
$$\prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0$$

此时闭环特征方程的根即为开环传递函数的零点。

下面分三种情况讨论。

1.  $m=n$ , 即开环零点数与极点数相同时, 根轨迹的起点与终点均有确定的值。

2.  $m<n$ , 即开环零点数小于开环极点数时, 除有  $m$  条根轨迹终止于开环零点(称为有限零点)外, 还有  $n-m$  条根轨迹终止于无穷远点(称为无限零点)。

3.  $m>n$ , 即开环零点数大于开环极点数时, 除有  $n$  条根轨迹起始于开环极点(称为有限极点)外, 还有  $m-n$  条根轨迹起始于无穷远点(称为无限极点)。这种情况在实际的物理系统中虽不会出现, 但在参数根轨迹中, 有可能出现在等效开环传递函数中。

- 法则**2**. 根轨迹的分支数、对称性和连续性:

根轨迹的分支数与开环有限零点数 **m**、开环有限极点数 **n** 中的大者相等，连续并对称于实轴。

- 法则3. 当 $n > m$ 时, 有 $n-m$ 条根轨迹分支沿着与实轴交角为  $\varphi_a$ , 交点为  $\sigma_a$  的一组渐近线趋向无穷远处。根轨迹的渐进线可由下式而定:

交角: 
$$\varphi_\alpha = \frac{(2k + 1)\pi}{n - m}$$

$$k = 0, 1, \dots, (n - m - 1)$$

交点: 
$$\sigma_\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}$$

例： 已知：

$$G(s)H(s) = \frac{K_1}{s(s+1)(s+2)}$$

试画出根轨迹的大致图形。

解： 按根轨迹绘制的规则：

规则**1**， **3**个极点也是起点： 0， -1， -2；

无零点， 则终点为：  $\infty$ ，  $\infty$ ，  $\infty$ 。

规则**2**， 分支数：  **$n=3>m=0$** ， 有**3**条根轨迹对称于实轴。

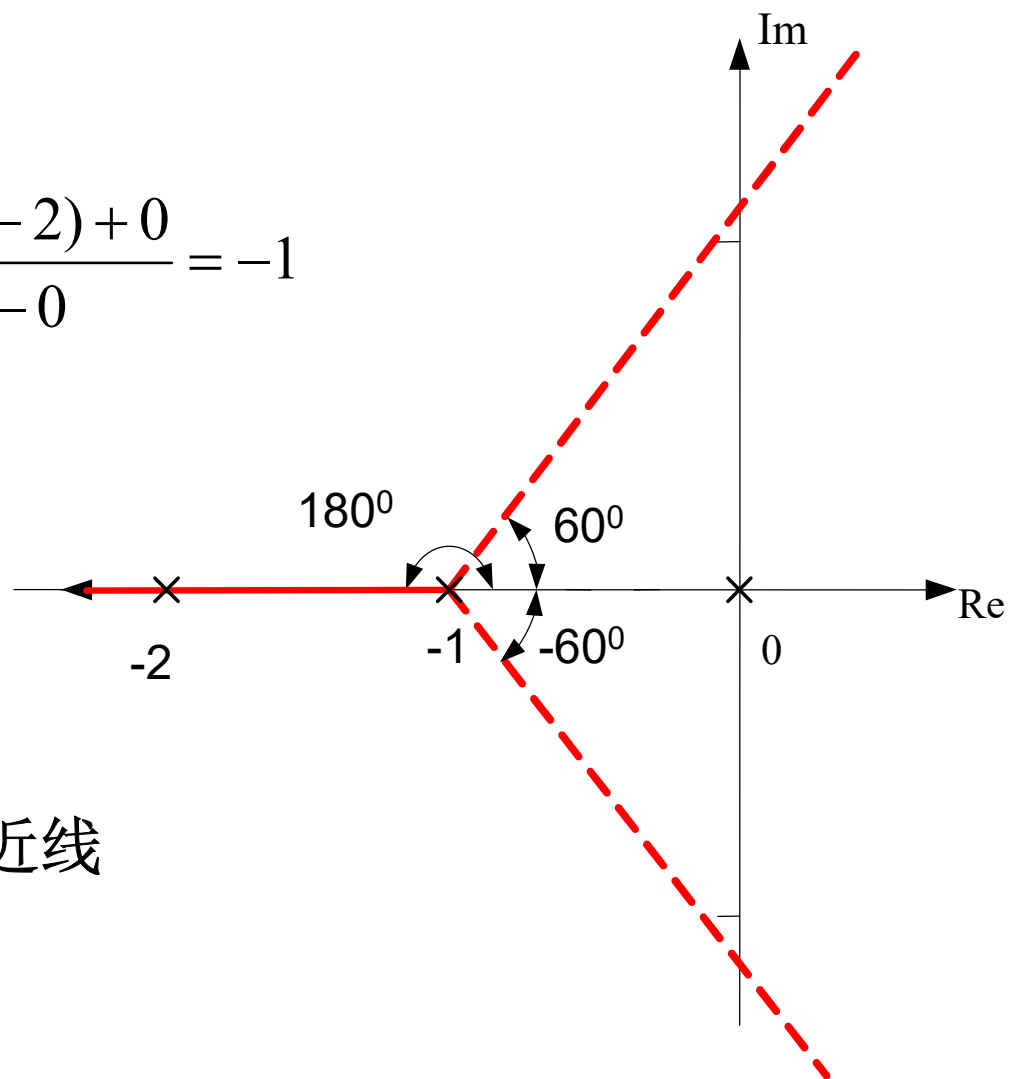
规则**3**， 渐近线： 因为本系统中，  $n = 3, m = 0$  所以共有  **$n-m=3$** 渐近线。渐近线的倾角：

$$\varphi_a = \frac{(2K+1)\pi}{n-m} = \frac{180^\circ \times (2k+1)}{3-0}$$

取 $k=0, 1, 2$ ， 得到：  $\varphi_1 = 60^\circ$      $\varphi_2 = 180^\circ$      $\varphi_3 = -60^\circ$

渐近线与实轴的交点：

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^3 p_i - z_i}{n - m} = \frac{(0 - 1 - 2) + 0}{3 - 0} = -1$$



三条红色线为渐近线

## 6、实轴上的根轨迹：

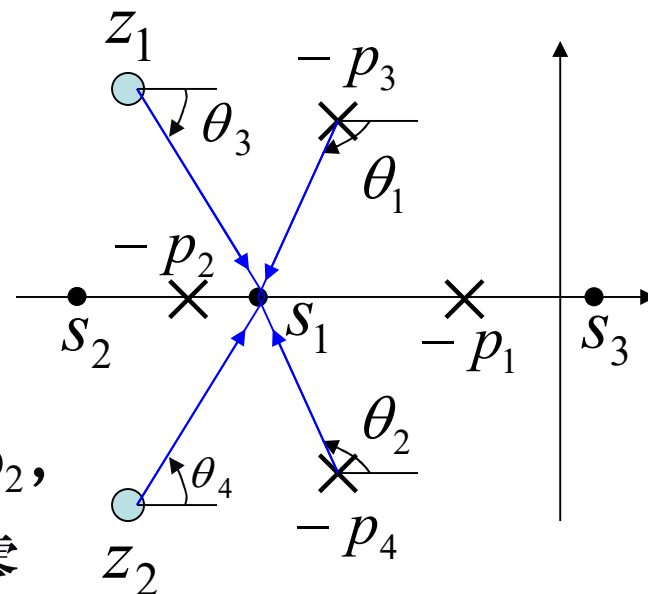
**法则4** 根轨迹在实轴上的分布:实轴上的某一区段,若其右边开环实数零点个数和实数极点个数之和为奇数,该区段必是条完整的根轨迹分支或是某条根轨迹分支的一部分.

**[证明]:** 例如在实轴上有两个开环极点 $p_1$ 、 $p_2$ ,复平面上有一对共轭极点 $p_3$ 、 $p_4$ 和一对共轭零点 $z_1$ 、 $z_2$ 。

有3个试验点 $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$ 先看试验点 $s_1$ 点,因为根轨迹应满足相角条件:

$$\sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s - p_j) = (2k + 1)\pi \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(1)成对出现的共轭极点 $p_3$ 、 $p_4$ 和共轭零点 $z_1$ 、 $z_2$ 对实轴上任意试探点构成的两个向量的相角之和为 $0^\circ$ ;



(2) 试探点左边的极点 $p_2$ 对试探点构成的向量的相角为 $0^\circ$ ；

(3) 试探点右边的极点 $p_1$ 对试探点构成向量的相角为 $180^\circ$ ；

所以 $s_1$ 点满足根轨迹相角条件，

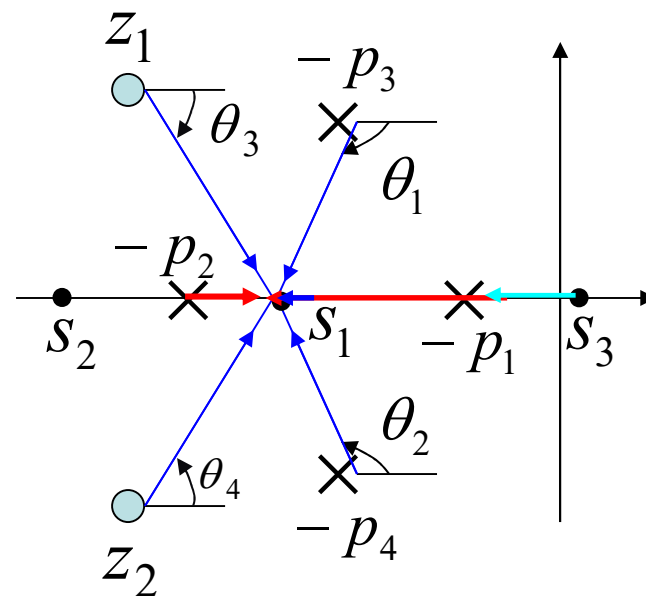
而且 $s_1$ 点一直可以左移到 $p_2$ 处，

于是 $[-p_2, -p_1]$ 为实轴上的根轨迹。

再看 $s_2$ 点：不满足根轨迹相角条件，

所以不是根轨迹上的点。

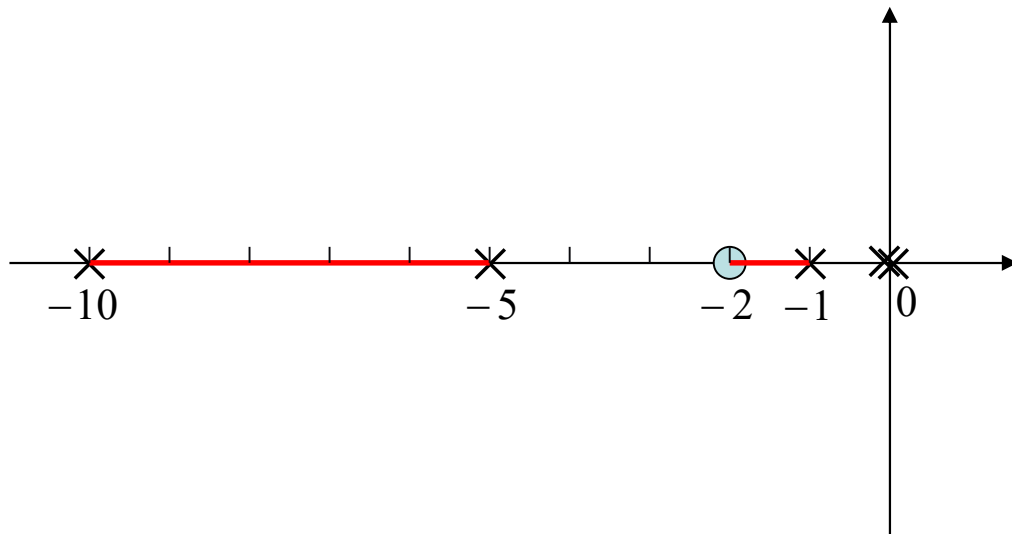
同样 $s_3$ 点也不是根轨迹上的点。





[例]设系统的开环传递函数为： $G_k(s) = \frac{K_g(s+2)}{s^2(s+1)(s+5)(s+10)}$  试求实轴上的根轨迹。

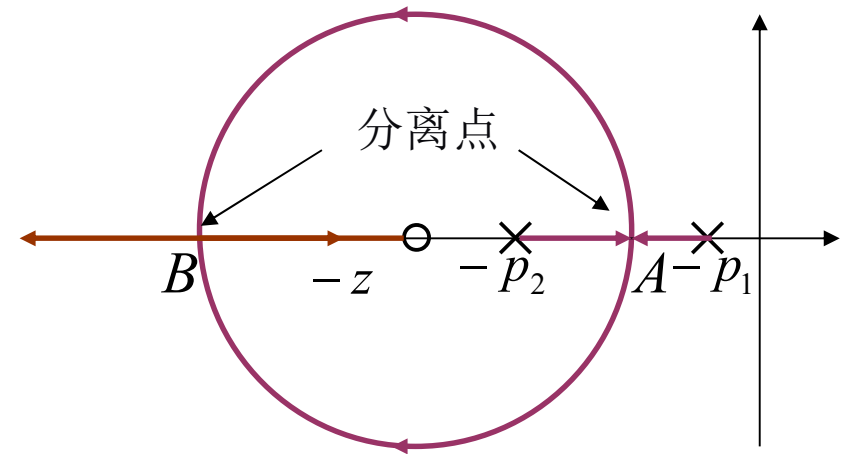
[解]：零极点分布如下：



红线所示为实轴上根轨迹，为： $[-10, -5]$ 和 $[-2, -1]$ 。注意在原点有两个极点，双重极点用“ $\times$ ”表示。

法则5. 两条或两条以上根轨迹分支在s平面上相遇又立即分开的点，称为根轨迹的分离点，分离点的坐标d 是下列方程的解：

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{d - z_i} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{d - p_j}$$



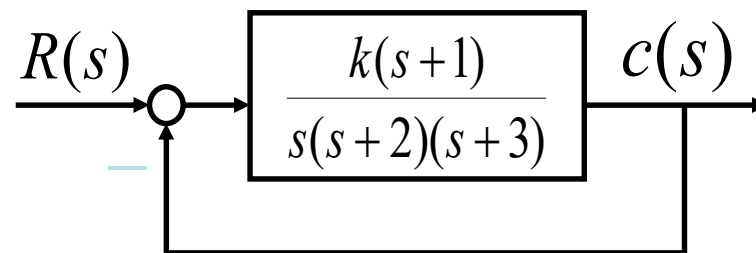
实轴上的分离点有以下两个特点：

(1) 若实轴上两个相邻的极点或两个相邻的零点之间的区段有根轨迹，则这两相邻点之间必有一个分离点。这两个相邻的极点或两个相邻的零点中有一个可以是无限极点或零点。

(2) 如果实轴上根轨迹在开环零点与开环极点之间，则此区段上要么没有分离点，如有，则不止一个。

[分离角]: 在分离点上, 根轨迹的切线和实轴的夹角称为分离角  $\theta_d$ 。  $\theta_d$  与相分离的根轨迹的支数  $k$  有关:  $\theta_d = \frac{\pi}{k}$ 。

例4-1. 设系统结构如图，  
试绘制其概略根轨迹。



解：画出  $s$  面上的开环零点（-1），极点（0， -2， -3）。

(1). 实轴上  $[-3, -2]$ ,  $[-1, 0]$  是根轨迹。

(2). 根轨迹有三条分支，分别始于0， -2， -3；  
终于-1和两个无限零点。

有两条渐近线：

$$\varphi_{\alpha} = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} = \frac{(0-2-3)-(-1)}{3-1} = -2$$

(3).实轴上  $[-3, -2]$  内有一分离点  $d$  :

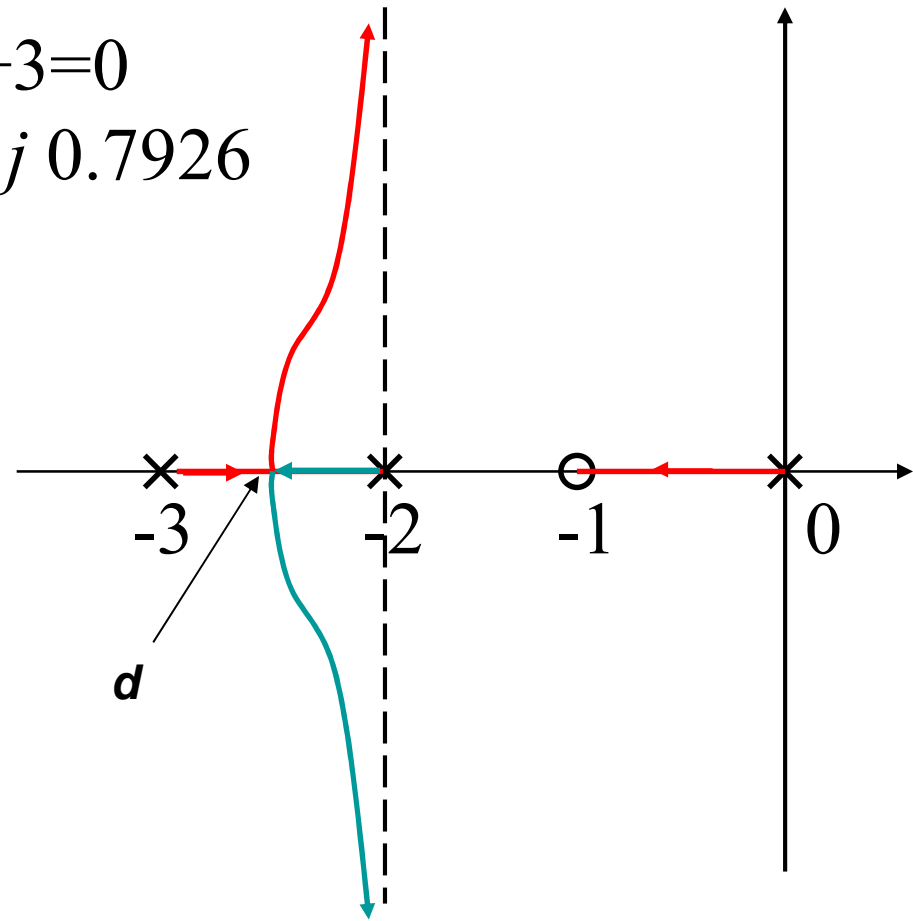
$$\frac{1}{d+1} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+3}$$

该方程可化为  $d^3 + 4d^2 + 5d + 3 = 0$

其根为:  $-2.4656, -0.7672 \pm j 0.7926$

所以分离点为:  $d \approx -2.47$

按上述法则画出  
如右根轨迹图:



例4-2. 设单位反馈系统开环传递函数为： $G(s) = \frac{K(0.5s+1)}{0.5s^2 + s + 1}$

试绘制闭环系统根轨迹。

解：
$$G(s) = \frac{K^*(s+2)}{(s+1+j)(s+1-j)}$$

在  $s$  平面上开环极点有两个： $-1 \pm j$ ，开环零点-2。

(1). 实轴( $\infty, -2]$ )为根轨迹。

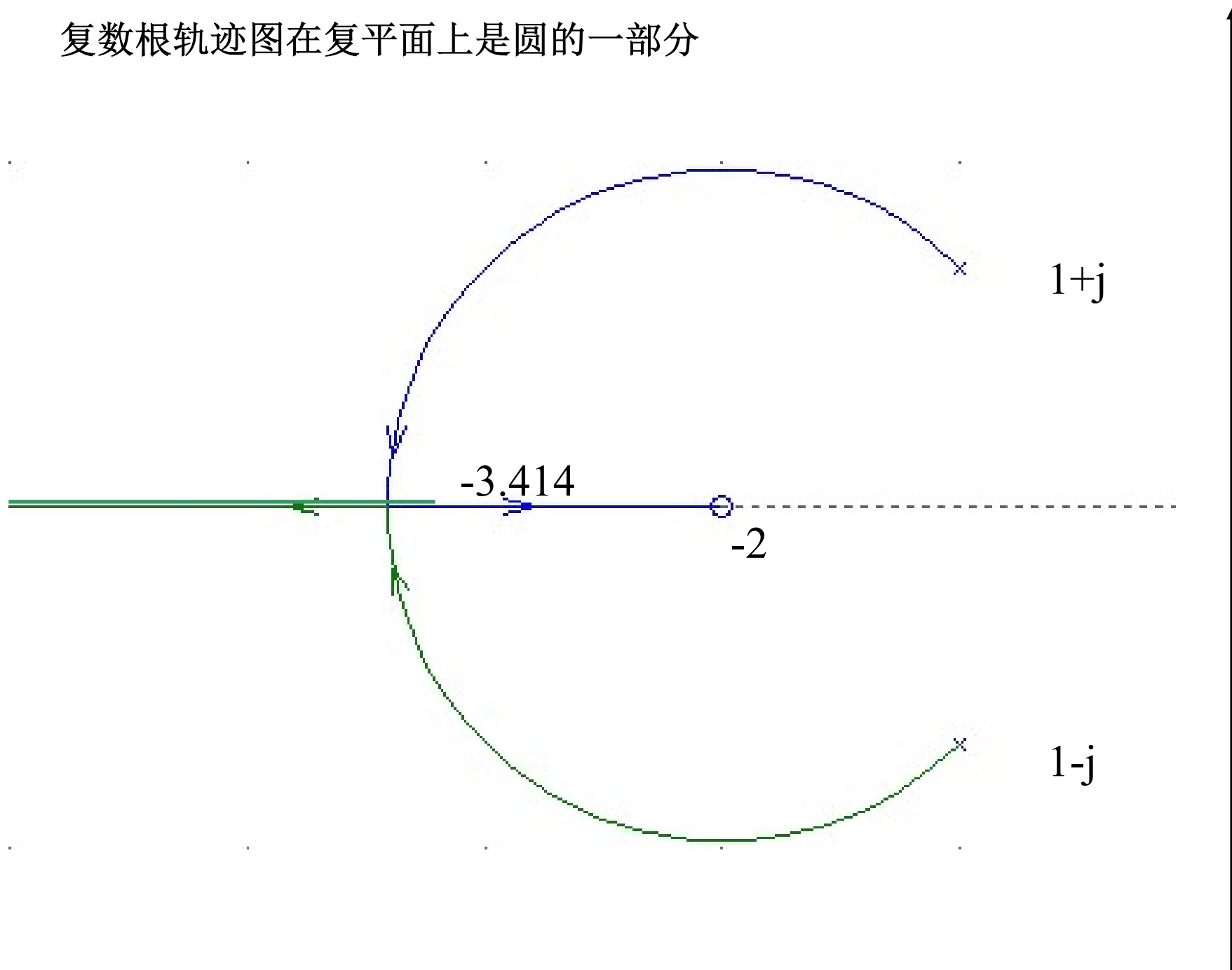
(2). 根轨迹有两条分支，始于-1+j和-1-j终于-2和 $\infty$ 。

(3). 在( $\infty, -2]$ )上有一分离点： $\frac{1}{d+2} = \frac{1}{d+1-j} + \frac{1}{d+1+j}$

即  $d^2 + 4d + 2 = 0$  解得： $d = -3.414$ ， $d = -0.586$  (舍去)

作出该系统的根轨迹如下图所示：

复数根轨迹图在复平面上是圆的一部分



- 实际上，在有二个极点（实数极点和复数极点）和一个有限零点组成的开环系统中，只要有限零点没有位于两个实数极点之间，当系数 $K^*$ 从零变到无穷时，**闭环根轨迹的复数部分**，就是以**有限零点为圆心**，以**有限零点到分离点的距离为半径**的一个圆，或圆的一部分。



## 法则6：根轨迹的起始角与终止角：

根轨迹离开开环复数极点处的切线与正实轴的夹角，称为起始角；根轨迹进入复数零点处的切线与正实轴的夹角，称为终止角。

### 1. 起始角：

$$\theta_{p_j} = (2k + 1)\pi + \left( \sum_{j=1}^m \varphi_{z_j p_i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \theta_{p_j p_i} \right) \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

其中：  $\varphi_{z_j p_i}$  为零点到此极点连线与正实轴的夹角，  
 $\theta_{p_j p_i}$  为极点到此极点连线与正实轴的夹角

## 2. 终止角:

$$\varphi_{z_i} = (2k+1)\pi - \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \varphi_{z_j z_i} - \sum_{j=1}^n \theta_{p_j z_i} \right) \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

其中:  $\varphi_{z_j z_i}$  为零点到此零点连线与正实轴的夹角,  
 $\theta_{p_j z_i}$  为极点到此零点连线与正实轴的夹角

[例]如图，试确定根轨迹离开复数共轭极点的起始角。

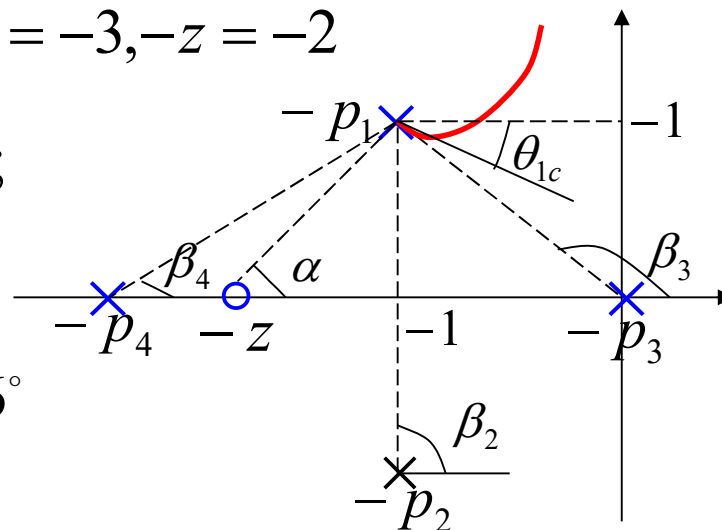
$$-p_1 = -1 + j1, -p_2 = -1 - j1, -p_3 = 0, -p_4 = -3, -z = -2$$

[解]:  $\operatorname{tg} \alpha = 1, \alpha = 45^\circ; \beta_2 = 90^\circ; \beta_3 = 135^\circ;$

$$\operatorname{tg} \beta_4 = 0.5, \beta_4 = 26.6^\circ$$

$$\therefore \theta_{1c} = (2k+1)\pi + 45^\circ - 90^\circ - 135^\circ - 26.6^\circ$$

$$= \pi - 206.6^\circ = -26.6^\circ \text{ (考虑到周期性)}$$



根据对称性，可知  $-p$  点的出射角为：  $\theta_{2c} = 26.6^\circ$

请根据相角条件自行计算。

[注意]:

❑ 相角要注意符号；逆时针为正，顺时针为负；

❑ 注意矢量的方向。 $-p_2 \rightarrow -p_1, \alpha \rightarrow -p_1$

例4-3. 设系统开环传递函数为:

$$G(s) = \frac{K^*(s+1.5)(s+2+j)(s+2-j)}{s(s+2.5)(s+0.5+j1.5)(s+0.5-j1.5)}$$

解: 开环零点为-1.5, -2+j, -2-j

开环极点为 0, -2.5, -0.5+j1.5, -0.5-j1.5

1). 实轴上 $(-\infty, -2.5]$ ,  $[-1.5, 0]$ 为根轨迹

• 2). 根轨迹有4条分支:

• 始于0, -2.5, -0.5+j1.5, -0.5-j1.5;

• 终于-1.5,  $-\infty$ , -2+j, -2-j;

3). 无分离点。

4). 起始角:  $\theta_{p_2} = 180^\circ + (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = 79^\circ$

终止角:  $\varphi_{z_2} = 180^\circ + (\varphi_1 + \varphi_3) - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = 149^\circ$

## 法则7.根轨迹与虚轴的交点

若根轨迹与虚轴相交，则交点上的 $K^*$ 值和 $\omega$ 可用劳斯判据确定，也可令闭环特征方程中的 $s=j\omega$ ，然后分别令其实部和虚部为零而求得。

例 系统的开环传递函数为  $G(s)H(s) = \frac{K_1}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$   
试绘制概略根轨迹图

解：开环极点：0、-3、-1+j、-1-j

开环零点：4个无限零点

(1) 实轴上的根轨迹：[0, -3]区间。

(2) 渐近线：应有  $n-m=4-0=4$  条渐近线。

渐近线的倾角：

$$\varphi = \frac{\pm 180^\circ (2k+1)}{n-m} = \frac{\pm 180^\circ (2k+1)}{4} = \pm 45^\circ, \pm 135^\circ$$

渐近线与实轴的交点：

$$\sigma = -\frac{(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) - 0}{n-m} = \frac{0 + 3 + (-1+j) + (-1-j)}{4} = -1.25$$

(3)分离点:  $\because \sum_{i=1}^n \frac{1}{d-p_i} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d+3} + \frac{1}{d+1+j} + \frac{1}{d+1-j} = 0$

可求得  $d = -2.3$

(4)极点 $-p_3$ 的起始角: 不难求得极点 $-p_1$ 、 $-p_2$ 、 $-p_4$ 到 $-p_3$ 的幅角分别  $135^\circ$ 、 $18.4^\circ$ 、 $90^\circ$  .

所以  $\theta_3 = \pm 180^\circ(2k+1) - (135^\circ + 18.4^\circ + 90^\circ) = -71.6^\circ$

同理不难求得极点 $-p_4$ 处的起始角:  $\theta_4 = 71.6^\circ$

终止角在无穷远处。

(5)根轨迹与虚轴的交点:

方法一: 由特征方程求:

特征方程:  $s^4 + 5s^3 + 8s^2 + 6s + K_1 = 0$

$$s = j\omega \quad (\omega^4 - 8\omega^2 + K_1) + j(-5\omega^3 + 6\omega) = 0$$

实部方程:  $\omega^4 - 8\omega^2 + K_1 = 0$

虚部方程:  $-5\omega^3 + 6\omega = 0$

解得:  $\omega_1 = 0$  (舍去),  $\omega_2 = 1.1$        $\omega_3 = -1.1$        $K_1 = 8.16$



方法二：由劳斯阵列求：

由特征方程

$$s^4 + 5s^3 + 8s^2 + 6s + K_1 = 0$$

列出劳斯阵列

|       |                    |       |       |
|-------|--------------------|-------|-------|
| $s^4$ | 1                  | 8     | $K_1$ |
| $s^3$ | 5                  | 6     |       |
| $s^2$ | $34/5$             | $K_1$ |       |
| $s^1$ | $(204 - 25K_1)/34$ |       |       |
| $s^0$ | $K_1$              |       |       |

令 $s^1$ 行首项为零，即

$$\frac{204 - 25K_1}{34} = 0$$

求 $K_1 = 8.16$ 得，再根据行 $s^2$ 系数得到辅助方程

$$\frac{34}{5}s^2 + K_1 = 0 \quad \text{令} \quad s = j\omega$$

$$\text{得:} \quad \omega = \pm 1.1$$

[例]开环传递函数为： $G_k(s) = \frac{K_g}{s(s+1)(s+5)}$ ，试求根轨迹与虚轴的交点和  $K_{gp}$ 。

□方法一：闭环系统的特征方程为：

$$F(s) = s(s+1)(s+5) + K_g = s^3 + 6s^2 + 5s + K_g = 0$$

将  $s = j\omega$  代入得： $F(j\omega) = -j\omega^3 - 6\omega^2 + j5\omega + K_{gp} = 0$

$$\therefore \begin{cases} -6\omega^2 + K_{gp} = 0 \\ -\omega^3 + 5\omega = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = 0, \pm\sqrt{5} \\ K_{gp} = 0, 30 \end{cases}$$

当  $K_{gp} = 0$  时， $\omega = 0$  为根轨迹的起点（开环极点）

当  $K_{gp} = 30$  时， $\omega = \pm\sqrt{5}$ ，即根轨迹与虚轴的交点为  $j\sqrt{5}$ 。

□方法二：用劳斯稳定判据确定  $\omega, K_{gp}$  的值。

劳斯阵列为：

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 5 \\ s^2 & 6 & K_g \\ s^1 & \frac{30-K_g}{6} & 0 \\ s^0 & K_g & 0 \end{array}$$

劳斯阵列中某一行全为零时，特征方程可出现共轭虚根。  
劳斯阵列中可能全为零的行有二。

1、令  $30 - K_g = 0$ ，得临界增益为：  $K_{gp} = K_g = 30$

共轭虚根为辅助方程  $6s^2 + K_{gp} = 0$  的根。  $6s^2 + 30 = 0, s_{1,2} = \pm j\sqrt{5}$

2、令  $K_g = 0$ ，得  $s = 0$ （开环极点）。

## 规则8 极点之和

□ 当 $n-m \geq 2$ 时,  $a_{n-1} = \sum_{i=1}^n s_i = \sum_{i=1}^n p_i$  即:

对于任意的 $K^*$ , 闭环极点之和等于开环极点之和, 为常数。  
表明: 当 $K^*$ 变化时, 部分闭环极点在复平面上向右移动 (变大), 则另一些极点必然向左移动 (变小)。

此法则对判断根轨迹的走向是很有用的。

根据上述8个规则, 可以大致画出根轨迹的形状。

# 根轨迹作图步骤

- 一、标注开环极点和零点，纵横坐标用相同的比例尺；
- 二、实轴上的根轨迹；
- 三、 $n-m$ 条渐近线；
- 四、根轨迹的出射角、入射角；
- 五、根轨迹与虚轴的交点；
- 六、根轨迹的分离点、会合点；

结合根轨迹的连续性、对称性、根轨迹的支数、起始点和终点，闭环极点与闭环极点之和及之积等性质画出根轨迹。

[例]开环传递函数为： $G_k(s) = \frac{K_g}{s[(s+4)^2 + 16]}$  画根轨迹。

[例]开环传递函数为:  $G_k(s) = \frac{K_g}{s[(s+4)^2 + 16]}$  画根轨迹。

解: 1. 求出开环零极点, 即:  $p_1 = 0, p_{2,3} = -4 \pm 4j$

3. 实轴上的根轨迹:  $(-\infty, 0]$

2. 渐近线 
$$-\sigma = \frac{0 - 4 + 4j - 4 - 4j}{3} = -\frac{8}{3} \approx -2.67$$

$$\theta = \frac{(2k+1)180^\circ}{3} = \begin{cases} \pm 60^\circ \\ 180^\circ \end{cases}$$

4. 出射角  $\theta_{1c} = 180^\circ - 90^\circ - 135^\circ = -45^\circ$ ,  $\theta_{2c} = 45^\circ$

5. 求与虚轴的交点, 此时特征方程为  $s^3 + 8s^2 + 32s + K_g = 0$

将  $s = j\omega$  代入得:  $-j\omega^3 - 8\omega^2 + j32\omega + K_{gp} = 0$

$$-8\omega^2 + K_{gp} = 0 \quad \omega = 0, \quad \omega = \pm 4\sqrt{2} \approx \pm 5.657$$

$$-\omega^3 + 32\omega = 0 \quad K_{gp} = 0, \quad 256$$

6.求分离会合点：由特征方程

$$s^3 + 8s^2 + 32s + K_g = 0$$

$$K_g = -(s^3 + 8s^2 + 32s)$$

$$\frac{dK_g}{ds} = -(3s^2 + 16s + 32) = 0$$

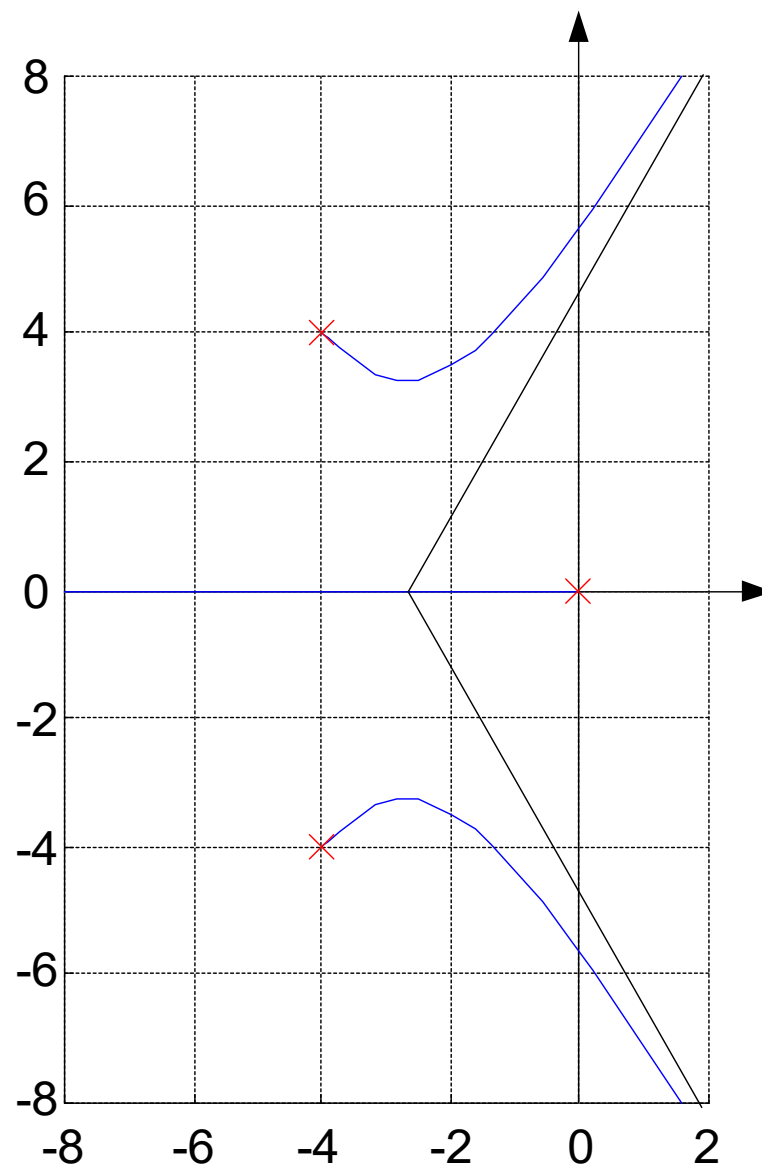
$$s = \frac{-8 \pm 4\sqrt{2}j}{3} \approx -2.67 \pm 1.89j$$

由图知这两点并不在根轨迹上，  
所以并非分离会合点，这也可  
将

$$s = \frac{-8 \pm 4\sqrt{2}j}{3}$$

代入得

$$K_g = \frac{256}{27}(-5 \pm \sqrt{2}j) \text{ 为复数。}$$





[例]开环传递函数为:  $G_k(s) = \frac{K_g}{s[(s+4)^2 + 16/3]}$ , 画根轨迹。

解: 1. 求出开环零极点, 即:  $p_1 = 0, p_{2,3} = -4 \pm \frac{4\sqrt{3}}{3}j$

2. 实轴上的根轨迹:  $(-\infty, 0]$

3. 渐近线  $-\sigma = \frac{0 - 4 + 4j - 4 - 4j}{3} = -\frac{8}{3} \approx -2.67$

$$\theta = \frac{(2k+1)180^\circ}{3} = \begin{cases} \pm 60^\circ \\ 180^\circ \end{cases}$$

4. 出射角  $\theta_{1c} = 180^\circ - 90^\circ - (180^\circ - \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3}) = -60^\circ, \theta_{2c} = 60^\circ$

5. 求与虚轴的交点, 此时特征方程为  $s^3 + 8s^2 + \frac{64}{3}s + K_g = 0$

将  $s = j\omega$  代入得:  $-8\omega^2 + K_{gp} = 0$ ,  $-\omega^3 + \frac{64}{3}\omega = 0$

$$\omega = 0, \quad \omega = \pm \sqrt{\frac{64}{3}} \approx \pm 4.62 \quad K_{gp} = 0, \quad \frac{512}{3}$$

6.求分离会合点：由特征方程

$$s^3 + 8s^2 + \frac{64}{3}s + K_g = 0$$

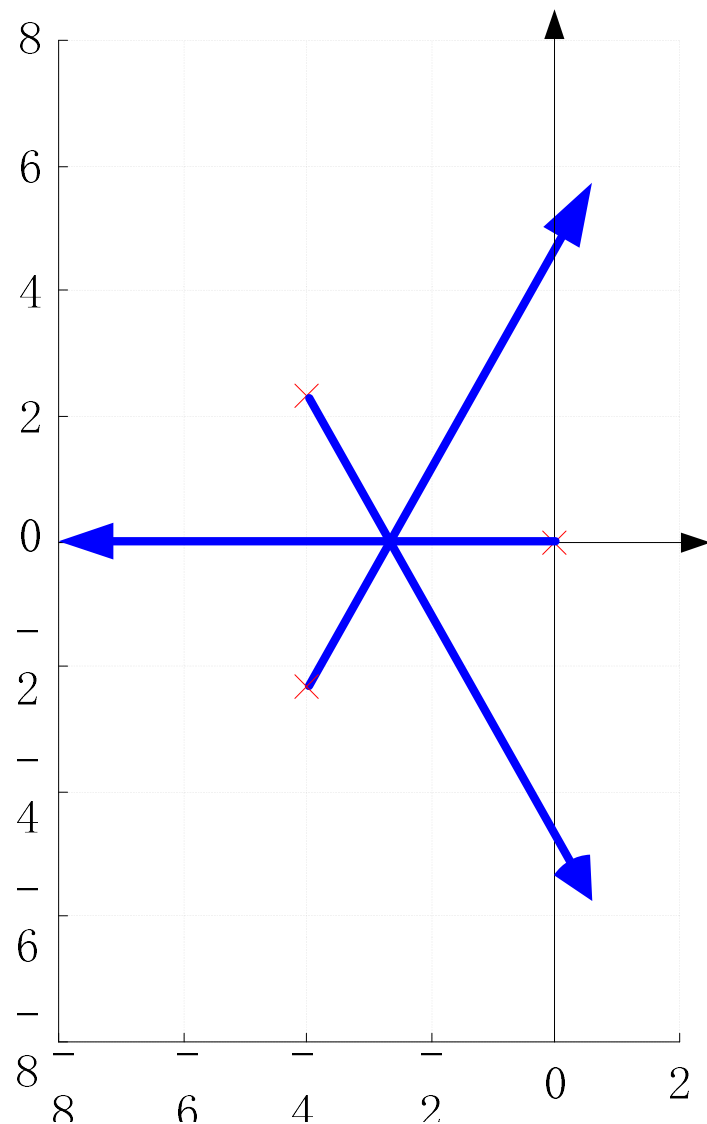
$$K_g = -(s^3 + 8s^2 + \frac{64}{3}s)$$

$$\frac{dK_g}{ds} = -(3s^2 + 16s + \frac{64}{3}) = 0$$

$$s = \frac{-8}{3} \quad K_g \approx 18.96$$

由图知这点在根轨迹上，所以是分离会合点。而且是三重根点。此时分离角为

$$\theta_d = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$



# 小结

## 需掌握绘制根轨迹的十个准则

- ☐ 根轨迹的连续性和对称性；
- ☐ 根轨迹的支数、起始点和渐进线；
- ☐ 根轨迹实轴上的点和根轨迹的分离点，会合点；
- ☐ 根轨迹的出射角、入射角和虚轴的交点；
- ☐ 闭环极点之积和之和。

# 作业

- 4-5 (2)