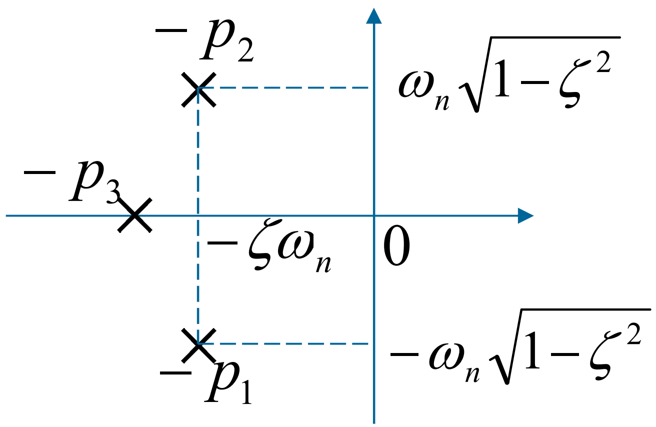
3-4 高阶系统分析

一、典型三阶系统的单位阶跃响应

传递函数：$\Phi(s)=\dfrac{\omega_n^{\ 2}}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2})(Ts+1)}$ ，当 $0<\zeta<1$ 时，极点分布如下：

$$-p_1=-\zeta\omega_n-j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2},-p_2=-\zeta\omega_n+j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2},-p_3=-\frac{1}{T}$$



单位阶跃响应的表达式和曲线:

$$C(s)=\Phi(s)\cdot\frac{1}{s}=\frac{\omega_n{}^2 p_3}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2)(s+p_3)}\cdot\frac{1}{s}$$

$$=\frac{1}{s}+\frac{A_1 s+A_2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2}+\frac{A_3}{s+p_3}$$

式中: A_1, A_2, A_3 与 $\zeta, \omega_n, \beta=\frac{p_3}{\zeta\omega_n}$(实极点与共轭极点的位置关系)有关。

$$\therefore c(t)=1-\frac{A_1 e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t-\theta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$+\frac{A_2 e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}+A_3 e^{-p_3 t}$$

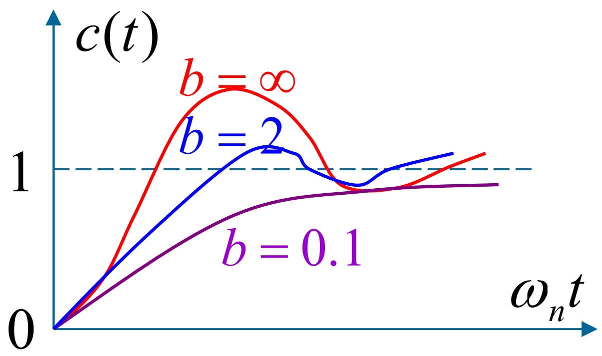
式中: $\theta=tg^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$

$$\therefore c(t)=1-\frac{A_1e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t-\theta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}+\frac{A_2e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}+A_3e^{-p_3t}$$

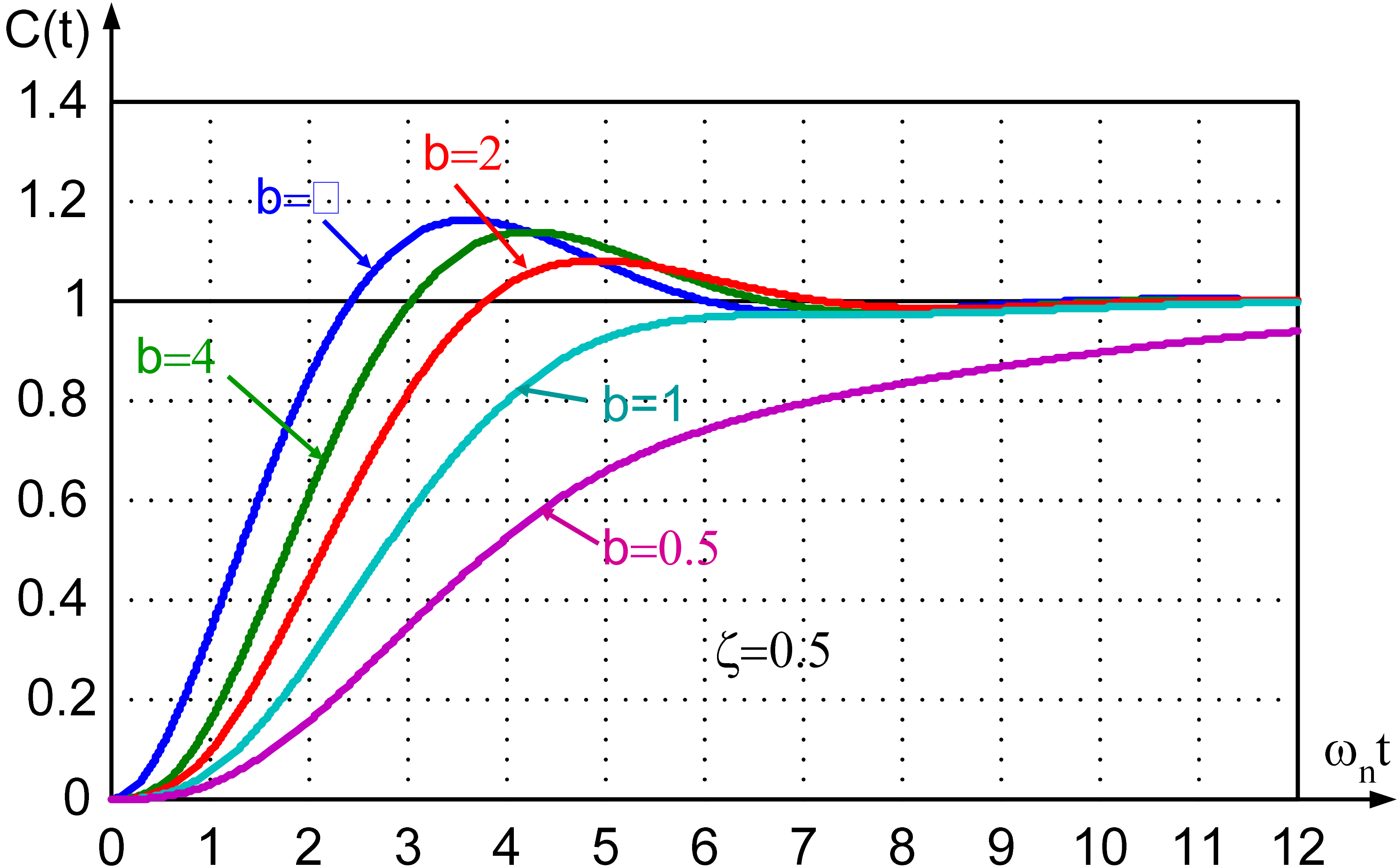
[分析]：三阶系统的单位阶跃响应由三部分组成：稳态项，共轭复极点形成的振荡分量，实极点构成的衰减指数项分量。

影响瞬态特性的有两个因素：第一是 $b=\frac{p_3}{\zeta\omega_n}$，它表示 $-p_3$和 $-p_1,-p_2$ 的相对位置。当 $b>>1$ 时，表示 $-p_3$ 离虚轴远，$-p_1,-p_2$ 虚轴近，系统的瞬态特性主要由 $-p_1,-p_2$ 决定，呈二阶系统的特性。反之，当 $b<<1$ 时，表示 $-p_3$ 离虚轴近，$-p_1,-p_2$ 离虚轴远，系统的瞬态特性主要由 $-p_3$ 决定，呈一阶系统的特性。

第二个因素是阻尼系数 ζ，如下图所示：



图中，$b=\infty$表示无 $-p_3$ 极点，由图可见，加入极点 $-p_3$ 后，当 ζ 不变时，超调量下降了，但调节时间增加了。



图中b=□，表示无实极点。由图可见，加入实极点后，当ζ不变时，超调量下降了，但调节时间增加了。

二、高阶系统分析

高阶系统的传递函数为：

$$\Phi(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\dots+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_0},m\le n$$

写成零极点形式：

$$\Phi(s)=\frac{k_g\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n_1}(s+p_j)\prod_{l=1}^{n_2}(s^2+2\zeta_l\omega_l s+\omega_l^2)},n_1+2n_2=n,m\le n$$

其单位阶跃响应函数为：

$$C(s)=\Phi(s)\cdot\frac{1}{s}=\frac{a_0}{s}+\sum_{j=1}^{n_1}\frac{a_j}{s+p_j}+\sum_{l=1}^{n_2}\frac{\beta_l(s+\zeta_l\omega_l)+\gamma_l\omega_l\sqrt{1-\zeta_l^2}}{s^2+2\zeta_l\omega_l s+\omega_l^2}$$

$$\therefore c(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{n_1} a_j e^{-p_j t}$$

$$+\sum_{l=1}^{n_2} \beta_l e^{-\zeta_l \omega_l t} \cos \omega_l \sqrt{1-\zeta_l^{\,2}}\, t + \sum_{l=1}^{n_2} \gamma_l e^{-\zeta_l \omega_l t} \sin \omega_l \sqrt{1-\zeta_l^{\,2}}\, t$$

高阶系统的阶跃响应总可以由简单函数项组成，即由一阶、二阶系统的响应组成。

可见，c(t)不仅与 p_j, ζ_l, ω_l （闭环极点）有关，而且与系数 a_j, β_l, γ_l 有关（这些系数都与闭环零、极点有关）。所以，高阶系统的单位阶跃响应取决于闭环系统的零、极点分布。

[定性分析]：

1.极点的影响

- 对于稳定的高阶系统(闭环极点全部位于s左半平面)。
- 极点为实数或共轭复数，分别对应时域表达式的指数衰减项或衰减正弦项。
- 衰减的快慢取决于极点离虚轴的距离：距虚轴近的极点对应的项衰减得慢；距虚轴远的极点对应的项衰减得快。
- 距虚轴近的极点对应的系数大，而距虚轴远的极点对应的系数小。

距虚轴近的极点对瞬态响应影响大。

$$C(s)=\Phi(s)\cdot\frac{1}{s}=\frac{10}{s(s+1)(s+10)}=\frac{1}{s}-\frac{10}{9}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{9}\frac{1}{s+10}$$

$$c(t)=1-\frac{10}{9}e^{-t}+\frac{1}{9}e^{-10t}$$

2.零点的影响

零点不影响响应的形式。零点只影响各项的系数。零点若靠近某个极点，则该极点对应项的系数就小。

$$C(s)=\Phi(s)\cdot\frac{1}{s}=\frac{10}{9}\frac{s+9}{s(s+1)(s+10)}=\frac{1}{s}-\frac{80}{81}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{81}\frac{1}{s+10}$$

近似：$$C(s)=\frac{\frac{1}{9}s+1}{s(s+1)(\frac{1}{10}s+1)}\approx\frac{1}{s(s+1)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}$$

$$C(s)=\Phi(s)\cdot\frac{1}{s}=\frac{10}{1.1}\frac{s+1.1}{s(s+1)(s+10)}=\frac{1}{s}-\frac{10}{99}\frac{1}{s+1}+\frac{89}{99}\frac{1}{s+10}$$

近似：$$C(s)=\frac{\frac{1}{1.1}s+1}{s(s+1)(\frac{1}{10}s+1)}\approx\frac{1}{s(\frac{1}{10}s+1)}=\frac{10}{s(s+10)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+10}$$

总之

- 若极点远离原点，则系数小；
- 极点靠近一个零点，远离其他极点和零点，系数小；
- 极点远离零点，又接近原点或其他极点，系数大。

衰减慢且系数大的项在瞬态过程中起主导作用。

三、主导极点

[主导极点]：满足下列条件的极点称为主导极点。

- 离虚轴最近的极点；
- 附近无零点；
- 其他极点距虚轴的距离是它的5倍以上。

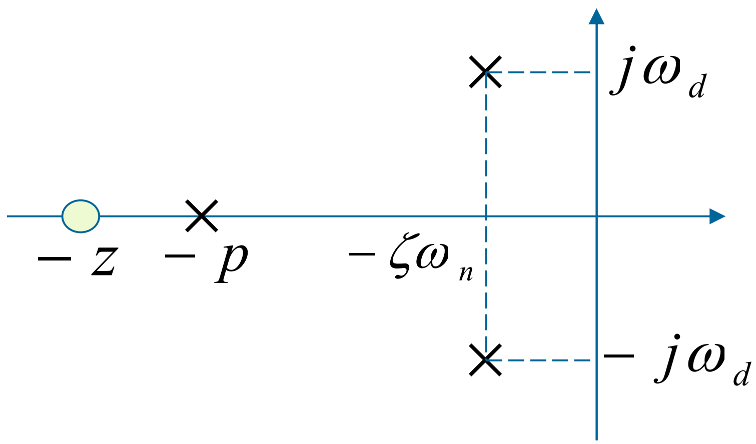
主导极点在c(t)中的对应项衰减最慢，系数最大，系统的瞬态性能指标主要由它决定。具有主导极点的高阶系统可近似为该主导极点所对应的一阶或二阶系统。

利用主导极点的概念可以对高阶系统的特性做近似的估计分析。

高阶系统近似简化原则：

- 在近似前后，确保输出稳态值不变；
- 在近似前后，瞬态过程基本相差不大。

例如 $$\Phi(s)=\frac{\omega_n^2(s+z)}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)(s+p)}$$



如果： $\frac{z}{\zeta\omega_n}>5$以及 $\frac{p}{\zeta\omega_n}>5$

则： $$\Phi(s)\approx\frac{z\omega_n^2}{p(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$$

说明：假设输入为单位阶跃函数，则化简前后的稳态值如下

$$\because \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{\omega_n^2(s+z)}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)(s+p)}=\frac{z}{p}$$

$$\text{而}\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{\omega_n^2 z}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)p}=\frac{z}{p}$$

小结

- 零、极点位置对高阶系统单位阶跃响应曲线的影响情况。极点位置决定衰减快慢，零点和极点同时决定各项系数的大小
- 主导极点
- 高阶系统简化为二阶系统的原则