

华南农业大学期末考试试卷 (A 卷)

2013-2014 学年第 1 学期

考试科目: 概率论与数理统计

考试类型: (闭卷) 考试

考试时间: 120 分钟

学号 姓名 年级专业

题号	一	二	三	总分
得分				
评阅人				

得分	
----	--

一、选择题 (本大题共10小题, 每小题 2 分, 共 20 分)

1. 设 A, B, C 表示三个事件, 则事件 “ A, B, C 中至少有两个发生” 可表示为 ()

- (A) $ABC \cup \bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}B\bar{C}$; (B) $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$;
 (C) $AB \cup AC \cup BC$; (D) \overline{ABC} .

分析: C

2. 设 A, B 为两事件, 且 $P(AB)=0$, 则下列结论正确的是 ()

- (A) A 与 B 互斥; (B) AB 未必是不可能事件;
 (C) AB 是不可能事件; (D) $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$.

分析: B

3. 设 A, B 为任意两个事件, 且 $A \subset B$, $P(B) > 0$, 则下列选项必然成立的是 ()

- (A) $P(A) < P(A|B)$; (B) $P(A) > P(A|B)$;
 (C) $P(A) \leq P(A|B)$; (D) $P(A) \geq P(A|B)$

分析: C

$$\text{由于 } P(B) \leq 1, \text{ 因此 } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \geq \frac{P(A)}{1} = P(A)$$

4. 设 A, B 互为对立事件, 则下列选项不成立的是 ()

- (A) $P(A)=1-P(B)$; (B) $AB = \phi$;

- (C) $A \cup B = \Omega$; (D) A 与 B 独立

分析: D

5. 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $p = P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma)$, 则 ()

- (A) p 随 k 的增大而增大; (B) p 随 k 的增大而减小;
(C) p 随 k 的变化而不变; (D) 随 k 的变化, p 大小变化不定.

分析: A

根据正态分布的分布函数 $F(x)$ 与标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$ 之间的关系

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

因此 $p = P\{\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma\} = F(\mu + k\sigma) - F(\mu - k\sigma)$

$$= \Phi\left(\frac{\mu + k\sigma - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - k\sigma - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(k) - \Phi(-k) = 2\Phi(k) - 1$$

当 k 增大时, $\Phi(k) = P\{U \leq k\}$ 增大, 所以 p 增大。这里 $U \sim N(0, 1)$

6. 已知随机变量 X 服从参数为 0.1 的指数分布 $E(0.1)$, 则 X^2 的数学期望 $E(X^2)$ 等于 ()

- (A) 100; (B) 200; (C) 11; (D) 110.

分析: B

由于 $X \sim E(0.1)$, 因此 $E(X) = 10, \text{Var}(X) = 100$

根据方差的计算公式 $\text{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X)$, 有

$$E(X^2) = \text{Var}(X) + E^2(X) = 100 + 100 = 200$$

7. X 服从参数为 λ 的泊松分布 $P(\lambda)$, 若 $P(X=1) = P(X=2)$, 则 $P(X=3)$ 为 ()

- (A) $\frac{2^3}{3!}e^{-2}$ (B) $\frac{2^3}{3!}e^{-3}$; (C) $\frac{3^2}{3!}e^{-3}$; (D) $\frac{3^2}{3!}e^{-2}$

分析：A

由于 $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ ，因此 $\frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$ ，解得 $\lambda = 2$

从而 $P\{X=3\} = \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} = \frac{2^3}{3!} e^{-2}$

8. 设离散型随机变量 X 的可能取值为： $x_1=1, x_2=2, x_3=3$ ，且 $E(X)=2.3$ ，

$E(X^2)=5.9$ ，则 x_1, x_2, x_3 所对应的概率为 ()

- (A) $p_1=0.3, p_2=0.1, p_3=0.6$ ； (B) $p_1=0.2, p_2=0.3, p_3=0.5$ ；
(C) $p_1=0.1, p_2=0.5, p_3=0.4$ ； (D) $p_1=0.2, p_2=0.5, p_3=0.3$ 。

分析：B

将各选项代入计算即可。

9. 样本 (X_1, X_2, \dots, X_8) 取自总体 $X \sim N(0,1)$ ，则统计量 $\frac{5}{4} \sum_{i=1}^4 X_i^2 / \sum_{j=4}^8 X_j^2$ 服从以下分布 ()

- (A) $F(4,8)$ ； (B) $F(4,5)$ ； (C) $F(4,4)$ ； (D) 以上都不是。

分析：D

数理统计的四大分布中 F 分布通常记为“ χ^2 除以 χ^2 为 F 分布”。这是为记忆简单而做了简化的记法，实际上的定义是：

若 $X \sim \chi^2(n), Y \sim \chi^2(m)$ 且“相互独立”，则 $\frac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}}$ 服从 F 分布 $F(n,m)$

本题目中分子中的 $\sum_{i=1}^4 X_i^2$ 确实服从 χ^2 分布 $\chi^2(4)$ ，分母中的 $\sum_{j=4}^8 X_j^2$ 也确实服从

χ^2 分布 $\chi^2(5)$ ，但它们“不相互独立”，因为都含有 X_4^2

所以两者的商不是 F 分布，正确答案为 D

10. 简单随机样本 (X_1, X_2, X_3, X_4) 来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 下列 μ 的无偏估计量中, 最有效的估计量是 ()

- (A) $\frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3$; (B) $\frac{1}{5}X_1 + \frac{1}{5}X_2 + \frac{3}{5}X_3$;
(C) $\frac{1}{4}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{2}X_3$; (D) $\frac{2}{7}X_1 + \frac{2}{7}X_2 + \frac{3}{7}X_3$

分析: A

有效性的定义是: 对于两个无偏估计量, 哪个方差更小, 哪个就更有效。所以判断最有效的估计量, 需要把每个的方差都计算出来, 再看哪个最小 (前提是都要是无偏估计量)。

$$\begin{aligned} D\left(\frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3\right) &= D\left(\frac{1}{3}X_1\right) + D\left(\frac{1}{3}X_2\right) + D\left(\frac{1}{3}X_3\right) \\ &= \frac{1}{9}D(X_1) + \frac{1}{9}D(X_2) + \frac{1}{9}D(X_3) = \frac{1}{9}\sigma^2 + \frac{1}{9}\sigma^2 + \frac{1}{9}\sigma^2 = \frac{1}{3}\sigma^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D\left(\frac{1}{5}X_1 + \frac{1}{5}X_2 + \frac{3}{5}X_3\right) &= D\left(\frac{1}{5}X_1\right) + D\left(\frac{1}{5}X_2\right) + D\left(\frac{3}{5}X_3\right) \\ &= \frac{1}{25}D(X_1) + \frac{1}{25}D(X_2) + \frac{9}{25}D(X_3) = \frac{1}{25}\sigma^2 + \frac{1}{25}\sigma^2 + \frac{9}{25}\sigma^2 = \frac{11}{25}\sigma^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D\left(\frac{1}{4}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{2}X_3\right) &= D\left(\frac{1}{4}X_1\right) + D\left(\frac{1}{4}X_2\right) + D\left(\frac{1}{2}X_3\right) \\ &= \frac{1}{16}D(X_1) + \frac{1}{16}D(X_2) + \frac{1}{4}D(X_3) = \frac{1}{16}\sigma^2 + \frac{1}{16}\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^2 = \frac{3}{8}\sigma^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D\left(\frac{2}{7}X_1 + \frac{2}{7}X_2 + \frac{3}{7}X_3\right) &= D\left(\frac{2}{7}X_1\right) + D\left(\frac{2}{7}X_2\right) + D\left(\frac{3}{7}X_3\right) \\ &= \frac{4}{49}D(X_1) + \frac{4}{49}D(X_2) + \frac{9}{49}D(X_3) = \frac{4}{49}\sigma^2 + \frac{4}{49}\sigma^2 + \frac{9}{49}\sigma^2 = \frac{17}{49}\sigma^2 \end{aligned}$$

由于 $\frac{1}{3}, \frac{11}{25}, \frac{3}{8}, \frac{17}{49}$ 中最小的是 $\frac{1}{3}$, 所以 $D\left(\frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3\right)$ 最小, 从而在这四个无偏估计量中 $\frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3$ 最有效, 正确答案为 A

得分	
----	--

二、填空题 (本大题共8小题, 每空 2 分, 共20 分)

1. 已知 $P(A) = 0.4, P(\bar{B}) = 0.6, P(A - B) = 0.2$, 则 $P(A \cup B) =$ _____.

分析: 0.6

$P(A - B) = P(A\bar{B}) = 0.2$, 而 $P(A) = P(AB \cup A\bar{B}) = P(AB) + P(A\bar{B})$, 因此

$$P(AB) = P(A) - P(A\bar{B}) = 0.4 - 0.2 = 0.2$$

又因为 $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 0.4$ ，因此

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.4 + 0.4 - 0.2 = 0.6$$

2. 设 A, B, C 表示三个事件, 则事件 “A 发生, B 与 C 都不发生” 的对立事件可表示为_____.

分析: $\bar{A} \cup B \cup C$

“A 发生, B 与 C 都不发生” 表示为 $A\bar{B}\bar{C}$ ，根据摩根律，其对立事件为

$$\overline{A\bar{B}\bar{C}} = \bar{A} \cup \bar{\bar{B}} \cup \bar{\bar{C}} = \bar{A} \cup B \cup C$$

3. 袋中有 3 个黑球, 2 个白球, 大小、形状都相同, 进行有放回的独立重复抽样, 每次抽一个球, 共抽三次, 则恰有两次抽到白球的事件的概率为_____.

分析: $36/125$ 或 0.288

记 X 为三次中抽到白球的个数, 由题意知 $X \sim B(3, \frac{2}{5})$, 因此

$$P\{X = 2\} = C_3^2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right) = \frac{36}{125} = 0.288$$

4. 设工厂 A 和工厂 B 的产品的次品率分别为 1% 和 2%，现从由 A 和 B 的产品分别占 60% 和 40% 的一批产品中随机抽取一件，则该产品是次品的概率为_____.

分析: 0.014

记事件 “抽到次品” 为 C , 则 $P(C|A) = 0.01$, $P(C|B) = 0.02$, $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.4$ =

根据全概率公式得

$$P(C) = P(A)P(C|A) + P(B)P(C|B) = 0.6 \times 0.01 + 0.4 \times 0.02 = 0.014$$

5. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{3}, & 0 < x \leq 2 \\ \frac{7}{12}, & 2 < x \leq 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}$, 则 $P(0 < X < 4) =$ _____.

分析: $1/4$

首先从分布函数的形式上看, 分布函数是分段函数, 并且每段都是常数, 说明该随机变量为“离散型”随机变量。

再根据分段函数的分段与函数值情况可以看出 X 的分布律为

X	0	2	5
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$

从而 $P(0 < X < 4) = P(X = 2) = \frac{1}{4}$

注1: 当分布函数是分段函数并且每个分段都是常数时就可以确定随机变量是离散型随机变量, 并且随机变量可以取得值就是分布函数的分段点 (本题中分布函数的定义域 R 被分为四段, 三个分段点是0,2,5, 所以随机变量只取这三个值), 取各值的概率就是后一个分段的函数值减去前一个分段的函数值 (比如取2的概率就是后一个分段的函数值 $\frac{7}{12}$ 减去前一个分段的函数值 $\frac{1}{3}$, 也就是 $\frac{1}{4}$)

注2: 对于事件 $\{0 < X < 4\}$, 根据 X 的分布律, X 可取的值只有0,2,5这三个数,

满足 $\{0 < X < 4\}$ 的只有2, 所以事件 $\{0 < X < 4\}$ 其实就是事件 $\{X = 2\}$

6. 设随机变量 X 的期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 都存在, 且 $D(X) \neq 0$, 设 $Y = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$,

则 $E(Y) =$ _____, $D(Y) =$ _____.

分析: 0, 1

本题考查数学期望和方差的计算性质。

需要注意的是, $E(X)$ 和 $D(X)$ 是常数, 因为只要 X 的分布确定, 它们就有了确定值。计算中要把它们当作常数。

$$E(Y) = E\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right) = \frac{1}{\sqrt{D(X)}} E[X - E(X)] = \frac{1}{\sqrt{D(X)}} [E(X) - E(X)] = 0$$

$$D(Y) = D\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right) = \frac{1}{D(X)} D[X - E(X)] = \frac{1}{D(X)} [D(X) + D(E(X))] = 1$$

注1: $E(\frac{X-a}{b}) = E[\frac{1}{b}(X-a)] = \frac{1}{b}E(X-a)$

注2: $E(X-a) = E(X) - a$

注3: $D(\frac{X-a}{b}) = D[\frac{1}{b}(X-a)] = \frac{1}{b^2}D(X-a)$

注4: $D(X-a) = D(X) + D(a)$

注5: 对于常数 a , 方差 $D(a) = 0$ 。所以计算过程中 $D[E(X)] = 0$

7. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的一个简单随机样本, \bar{X} 为样本均值, S^2 是样本方差, 则 $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 则服从_____分布, $\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ 服从_____分布

分析: $N(0,1)$ $t(n-1)$

8. 已知一批零件的长度 X (单位: cm) 服从正态分布 $N(\mu, 1)$, 从中随机地抽取 16 个零件, 得到长度的平均值为 40 (cm), 则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是_____。(注: 标准正态分布函数值 $\Phi(1.96) = 0.975, \Phi(1.645) = 0.95$) .

分析: (39.51, 40.49)

方差已知的情况下, 均值的置信区间为 $[\bar{X} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$

本例中 $\bar{x} = 40, u_{0.025} = 1.96, \sigma = 1, n = 16$, 因此置信区间为 [39.51, 40.49]

(注: 以前的教材中置信区间是开区间, 新教材中置信区间是闭区间)

注: $\Phi(1.96) = P\{U < 1.96\} = 0.975$, 因此 $P\{U \geq 1.96\} = 0.025$

根据上侧分位数的定义 $P\{U \geq u_{0.025}\} = 0.025$, 因此 $u_{0.025} = 1.96$

得分	
----	--

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 60 分)

1. (10 分) 设甲袋中装有 6 只白球、4 只红球; 乙袋中装有 2 只白球、3 只红球,

从乙袋中任取两只球放入甲袋，再从甲袋中任意取一只球。问：

(1) 从甲袋中取到白球的概率是多少？

(2) 若从甲袋中取到白球，则从乙袋中取到两个白球的概率是多少？

解：令 $A_i, i=0,1,2$ ，表示事件“从乙袋中拿到 i 个白球”， B 表示事件“从

甲袋中取到白球” 则 $P(A_0)=0.3$ ， $P(A_1)=0.6$ ， $P(A_2)=0.1$ ，

$$P(B|A_0)=\frac{6}{12}, P(B|A_1)=\frac{7}{12}, P(B|A_2)=\frac{8}{12} \quad (2\text{分})$$

$$(1) \text{ 由全概率公式知 } P(B)=\sum_{i=0}^2 P(A_i)P(B|A_i) \quad (2\text{分})$$

$$=0.3 \times \frac{6}{12} + 0.6 \times \frac{7}{12} + 0.1 \times \frac{8}{12} = \frac{17}{30} \quad (1\text{分})$$

$$\text{则从甲袋中取到白球的概率为 } \frac{17}{30}. \quad (1\text{分})$$

$$(2) \text{ 由bayes公式知 } P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} \quad (2\text{分})$$

$$= \frac{0.1 \times \frac{8}{12}}{\frac{17}{30}} = \frac{2}{17} \quad (1\text{分})$$

$$\text{则从乙袋中取到两个白球的概率是 } \frac{2}{17} \quad (1\text{分})$$

2. (16 分) 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} ax+b, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \text{ 且 } P(X > \frac{1}{2}) = \frac{5}{8}$$

求(1)常数 a, b

$$(2) P(\frac{1}{3} < X < 2)$$

(3) 求 X 的分布函数 $F(x)$

(4) 求 X 的期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$

解：(1) 由密度函数的性质知

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 (ax+b)dx = \frac{1}{2}a + b \quad (1) \quad (2\text{分})$$

$$\text{又由 } P(X > \frac{1}{2}) = \frac{5}{8} \text{ 知}$$

$$P(X > \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^1 (ax+b)dx = \frac{3}{8}a + \frac{1}{2}b = \frac{5}{8} \quad (2) \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{联立 (1) (2) 解得 } a=1, b=\frac{1}{2} \quad (1 \text{ 分})$$

$$(2) \quad P(\frac{1}{3} < X < 2) = \int_{\frac{1}{3}}^2 f(x)dx \quad (1 \text{ 分})$$

$$= \int_{\frac{1}{3}}^1 (x + \frac{1}{2})dx + \int_1^3 0dx = \frac{7}{9} \quad (3 \text{ 分})$$

$$(3) \quad X \text{ 的分布函数 } F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{当 } x \leq 0 \text{ 时, } F(x) = \int_{-\infty}^x 0dt = 0 \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{当 } 0 < x < 1 \text{ 时, } F(x) = \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^x (t + \frac{1}{2})dt = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{当 } x \geq 1 \text{ 时, } F(x) = \int_0^1 (x + \frac{1}{2})dt = 1 \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{则 } X \text{ 的分布函数 } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$(4) \quad E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \quad (1 \text{ 分})$$

$$= \int_0^1 x(x + \frac{1}{2})dx = \frac{7}{12} \quad (1 \text{ 分})$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 (x + \frac{1}{2})dx = \frac{5}{12} \quad (1 \text{ 分})$$

$$D(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{11}{144} \quad (1 \text{ 分})$$

$$3. (10 \text{ 分}) \text{ 已知随机变量 } X \text{ 的密度函数为 } f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad Y = 2X^2,$$

求 Y 的概率密度函数.

解: Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 为

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{2X^2 < y\} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{当 } y \leq 0 \text{ 时, } F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{2X^2 < y\} = 0$$

$$Y \text{ 的概率密度函数为 } f_Y(y) = F_Y'(y) = 0 \quad (2 \text{ 分})$$

当 $y > 0$ 时, $F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{2X^2 < y\}$

$$= P\left\{-\sqrt{\frac{y}{2}} < X < \sqrt{\frac{y}{2}}\right\} = F_X\left(\sqrt{\frac{y}{2}}\right) - F_X\left(-\sqrt{\frac{y}{2}}\right) \quad (2 \text{ 分})$$

Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{2y}} f_X\left(\sqrt{\frac{y}{2}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2y}} f_X\left(-\sqrt{\frac{y}{2}}\right) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{2y}}{64}, & 0 < y < 8, \\ 0, & y > 8. \end{cases} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{综上所述 } f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{2y}}{64}, & 0 < y < 8, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (1 \text{ 分})$$

4. 设总体 X 的概率密度 $f(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 其中 $\theta > -1$ 是未知参

数, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的一个容量为 n 的简单随机样本, 分别用矩估

计法和极大似然估计法求 θ 的估计量. (12 分)

$$\text{解: (1) } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 (\theta+1)x^{\theta+1}dx = \frac{\theta+1}{\theta+2}, \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{由 } \frac{\theta+1}{\theta+2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}, \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{得 } \theta \text{ 的矩估计量 } \hat{\theta} = \frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}, \quad (1 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 似然函数 } L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = (\theta+1)^n \prod_{i=1}^n (x_i)^\theta \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{取 } \ln L(\theta) = n \ln(\theta+1) + \theta \sum_{i=1}^n \ln x_i \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta+1} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0 \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{得极大似然估计值为 } \hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i} - 1, \text{ 估计量为 } \hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i} - 1 \quad (1 \text{ 分})$$

5. (12 分) 为改建华农大本部中央绿地, 工程学院有 5 位学生彼此独立地测量了

中央绿地的面积，得如下数据（单位 km^2 ）：1.43，1.42，1.40，1.46，1.46，设测量误差服从正态分布。试检验（ $\alpha=0.05$ ）（提示：

$$t_{0.025}(4) = 2.776, \quad t_{0.05}(4) = 2.015, \quad \chi_{0.05}^2(4) = 9.49, \quad \chi_{0.025}^2(4) = 11.14$$

（1）以前认为这块绿地的面积是 $\mu=1.43km^2$ ，是否有必要修改以前的结果？

（2）若要求这次测量的标准差不超过 $\sigma=0.015$ ，能否认为这次测量的标准差显著偏大？

解：（1）此题是正态总体方差未知检验均值，故采用 t 检验。假设

$$H_0: \mu=1.43, \quad H_1: \mu \neq 1.43 \quad (\alpha=0.05) \quad (2 \text{ 分})$$

有样本观测值算得样本均值 $\bar{x}=1.434$ ，样本方差 $S^2=0.00068$ ， $s=0.026$

$$|t| = \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{s/\sqrt{n}} = \frac{|1.434 - 1.43|}{0.026/\sqrt{5}} = 0.344, \quad (2 \text{ 分})$$

由于 $t_{0.025}(4)=2.776$ ，而 $0.344 < 2.776$ ，故我们不能拒绝原假设，没有必要修改以前的结果。 (2 分)

（2）此题是正态总体均值未知检验方差，故采用 χ^2 检验。假设

$$H_0: \sigma^2=0.015^2, \quad H_1: \sigma^2 > 0.015^2 \quad (2 \text{ 分})$$

$$\chi^2 \text{ 检验统计量的值为 } \chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{4 \times 0.00068}{0.015^2} = 12.09 \quad (2 \text{ 分})$$

由于 $\chi_{0.05}^2(4)=9.49$ ，而 $12.09 > 9.49$ ，故我们应该拒绝原假设，认为这次测量的标准差显著偏大。 (2 分)