

华南农业大学期末考试试卷 (A 卷)

2015-2016 学年第 1 学期

考试科目: 概率论与数理统计

考试类型: (闭卷) 考试

考试时间: 120 分钟

学号 姓名 年级专业

题号	一	二	三	四	总分
得分					
评阅人					

得分	
----	--

一、选择题 (本大题共6小题, 每小题3分, 共18分)

1. 下列命题正确的是 ()

- A. 若事件 A 发生的概率为 1, 则 A 为必然事件;
- B. 若随机变量 X 与 Y 不独立, 则 $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ 不一定成立;
- C. 若 X 是连续型随机变量, 且 $f(x)$ 是连续函数, 则 $Y = f(X)$ 不一定是连续型随机变量;
- D. 设 A、B 是任意两个事件, 则 $\overline{AB} = A \cup B$

解答: 选 C

(1) 概率为 1 的事件并不一定是必然事件。例如 $X \sim U[0,1]$, 则 $P\{0 < X < 1\} = 1$, 但 $\{0 < X < 1\}$ 并不是必然事件, 因为 X 也可以取 0 或 1。因此 A 错

(2) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ 对任意 X 与 Y 都成立, 因此 B 错

(3) 对于选项 C, 可以举一个例子说明: 设 $X \sim U[0,1]$, $f(x)=1$, 所以 X 是连续型随机变量, $f(x)$ 也是连续函数, 但 $Y = f(X) = 1$, 是离散型随机变量, 因此 C 正确

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2+6x-9}$, 若 $P\{X > C\} = P\{X \leq C\}$, 则 C 的值为 ()

- A. 0
- B. 3
- C. $-\sqrt{3}$
- D. -3

解答: 选 B

$$\text{方法 1: } f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2+6x-9} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{(x-3)^2}{2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}, \text{ 因此 } X \sim N\left(3, \frac{1}{2}\right)$$

于是 $P\{X > C\} = 1 - F(C)$, $P\{X \leq C\} = F(C)$, 从而 $F(C) = \frac{1}{2}$

而由标准正态分布函数性质知 $\Phi(0) = \frac{1}{2}$ ，又 $F(C) = \Phi\left(\frac{C-3}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = \frac{1}{2}$

因此 $\frac{C-3}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 0$ ，即 $C = 3$

方法 2：由 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2+6x-9} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-3)^2}$ 可以看出密度函数关于 $x=3$ 对称，因此落在 3 两边的概率相等，由 $P\{X > C\} = P\{X \leq C\}$ 即知 $C = 3$
说明：该密度函数不可积，所以想通过积分计算出概率再求 C 值是行不通的。

3. 设总体 $X \sim N(0,1)$ ， X_1, X_2, \dots, X_n 是其简单随机样本， \bar{X} ， S^2 分别是其样本均值和样本方差，则下列各式正确的是 ()

A. $\bar{X} \sim N(0,1)$

B. $n\bar{X} \sim N(0,1)$

C. $\frac{\bar{X}}{S} \sim t(n-1)$

D. $(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$

解答：选 D

$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = 0$ ， $D(\bar{X}) = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) = \frac{1}{n}$ ，因此 $\bar{X} \sim N(0, \frac{1}{n})$ ，所以 A 错

$E(n\bar{X}) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = 0$ ， $D(n\bar{X}) = D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n D(X_i) = n$ ，因此 $n\bar{X} \sim N(0, 1)$ ，所以 B 错

当 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 时， $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 。对于本题， $\sigma=1$ ，因此 $(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$ ，所以 D 对

由于 $\bar{X} \sim N(0, \frac{1}{n})$ ， $(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$ ，且 \bar{X} 与 S^2 相互独立，因此根据 t 分布

的定义， $\frac{\frac{\bar{X}-0}{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{n-1}}} = \frac{\sqrt{n}\bar{X}}{S} \sim t(n-1)$ ，所以 C 错

4. 设随机变量 $X \sim N(0,1)$ ， $Y \sim N(0,1)$ ，则下列结论正确的是 ()

A. $X+Y$ 服从正态分布

B. X^2+Y^2 服从 χ^2 分布；

C. $\frac{X^2}{Y^2}$ 服从 F 分布

D. X^2 和 Y^2 均服从 χ^2 分布

解答：选 D

(1) 两个相互独立的正态分布的和仍然是正态分布；不独立时，它们的和不一定正态分布。本题没有独立条件，因此 A 错；

(2) $X \sim N(0,1)$ ，那么 $X^2 \sim \chi^2(1)$ ；同理 $Y^2 \sim \chi^2(1)$ 。因此 D 对

(3) $X^2 \sim \chi^2(1)$ ， $Y^2 \sim \chi^2(1)$ ，但题目中没有 X 与 Y 相互独立的条件，所以 X^2 和 Y^2 也不一定独立，因此 $X^2 + Y^2$ 不一定服从 χ^2 分布（ χ^2 分布的可加性需要独立条件），因此 B 错

(4) $X^2 \sim \chi^2(1)$ ， $Y^2 \sim \chi^2(1)$ ，但 $\frac{X^2}{Y^2}$ 也不一定服从 F 分布，同样是因为 X^2 和 Y^2 不一定独立（F 分布的定义中也有独立条件），因此 C 错

5. 在假设检验的 U 检验法中，对给定的检验水平 α ，下列判断正确的是

()

A. 若 $H_0: \mu = \mu_0$ ，对 $H_1: \mu \neq \mu_0$ ，则拒绝域为 $W = \{u \mid |u| > u_\alpha\}$ ；

B. 若 $H_0: \mu = \mu_0$ ，对 $H_1: \mu < \mu_0$ ，则拒绝域为 $W = \{u \mid |u| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$ ；

C. 若 $H_0: \mu = \mu_0$ ，对 $H_1: \mu > \mu_0$ ，则拒绝域为 $W = \{u \mid u > u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$ ；

D. 若 $H_0: \mu = \mu_0$ ，对 $H_1: \mu \neq \mu_0$ ，则拒绝域为 $W = \{u \mid |u| \geq u_{\frac{\alpha}{2}}\}$

解答：选 D

若 $H_0: \mu = \mu_0$ ，对 $H_1: \mu < \mu_0$ ，则拒绝域为 $W = \{u \mid u \leq u_{1-\alpha}\} = \{u \mid u \leq -u_\alpha\}$

若 $H_0: \mu = \mu_0$ ，对 $H_1: \mu > \mu_0$ ，则拒绝域为 $W = \{u \mid u \geq u_\alpha\}$

6. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， σ 未知，从中抽取容量为 16 的样本，其样本均值为 \bar{X} ，

样本方差为 S^2 ，则未知参数 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是 ()

A. $\bar{X} \mp \frac{S}{16} u_{0.025}$

B. $\bar{X} \mp \frac{S}{16} t_{0.05}(n-1)$

C. $\bar{X} \mp \frac{S}{4} t_{0.025}(n-1)$

D. $\bar{X} \mp \frac{S}{4} u_{0.025}$

解答：选 C

得分	
----	--

二、填空题（本大题共 7 小题，每空 3 分，共 21 分）

1. 随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 独立并且服从同一分布，数学期望为 μ ，方差为 σ^2 ，

这 n 个随机变量的简单算术平均数为 \bar{X} ，则 $D(X_1 - \bar{X}) =$ _____.

解答: $\frac{n-1}{n}\sigma^2$

由于 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ，因此

$$\begin{aligned} D(X_1 - \bar{X}) &= D(X_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i) = D(\frac{n-1}{n} X_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i) \\ &= D(\frac{n-1}{n} X_1) + D(\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i) = \frac{(n-1)^2}{n^2} D(X_1) + \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^n D(X_i) = \frac{(n-1)^2}{n^2} \sigma^2 + \frac{n-1}{n^2} \sigma^2 \\ &= \left[\frac{(n-1)^2}{n^2} + \frac{n-1}{n^2} \right] \sigma^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \end{aligned}$$

说明: 由于 X_1 与 \bar{X} 不独立 (因为 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 里面也有 X_1)，所以不能直接用公

式 $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$ ，必须把所有的 X_i 合并到一起，满足“相互独立”的条件才能用

2. 若事件 A 和 B 相互独立， $P(A) = \alpha$ ， $P(B) = 0.3$ ， $P(\bar{A} \cup B) = 0.7$ 则 $\alpha =$ _____.

解答: $\frac{3}{7}$

由于 A 和 B 相互独立，因此 \bar{A} 和 B 也相互独立，所以 $P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B)$

由加法公式， $P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A}B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A})P(B) = 0.7$

代入 $P(B) = 0.3$ 得 $P(\bar{A}) = \frac{4}{7}$ ，因此 $\alpha = P(A) = \frac{3}{7}$

3. 设 $X \sim N(10, \sigma^2)$ ，且 $P\{10 < X < 20\} = 0.3$ ，则 $P\{0 < X < 10\} =$ _____.

解答: 0.3

方法 1: $X \sim N(10, \sigma^2)$ 说明密度函数关于 $x = 10$ 对称，而 $\{0 < X < 10\}$ 与 $\{10 < X < 20\}$ 也关于 $x = 10$ 对称，因此 $P\{0 < X < 10\} = P\{10 < X < 20\} = 0.3$

$$\text{方法 2: } P\{10 < X < 20\} = F(20) - F(10) = \Phi\left(\frac{20-10}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{10-10}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - \Phi(0)$$

$$\text{因此 } P\{0 < X < 10\} = F(10) - F(0) = \Phi\left(\frac{10-10}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{0-10}{\sigma}\right) = \Phi(0) - \Phi\left(-\frac{10}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi(0) - [1 - \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)] = \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) + \Phi(0) - 1 = \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) + 0.5 - 1$$

$$= \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - 0.5 = \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - \Phi(0) = P\{10 < X < 20\} = 0.3$$

4. 设某物体的质量 $X \sim N(\mu, 0.01)$, 为使未知参数 μ 的置信度为 0.95 的置信区间的长度不超过 0.1, 则至少应测量_____次.

解答: 16

方差 $\sigma^2 = 0.01$ 已知的情况下, 均值 μ 的置信度为 $1 - \alpha = 0.95$ 的置信区间为

$$\left[\bar{X} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right], \text{ 即 } \left[\bar{X} - u_{0.025} \frac{0.1}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{0.025} \frac{0.1}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\text{区间长度为 } 2 \cdot u_{0.025} \frac{0.1}{\sqrt{n}}$$

$$\text{为保证 } 2 \cdot u_{0.025} \frac{0.1}{\sqrt{n}} \leq 0.1, \text{ 应有 } n \geq (2u_{0.025})^2 = (2 \cdot 1.96)^2 = 3.92^2 = 15.3664$$

即至少应测量 16 次

说明: 常用的标准正态分布的上侧分位数 $u_{0.05} = 1.645, u_{0.025} = 1.96$ 要求记住。

$$5. \text{ 设随机变量 } X \text{ 的分布函数 } F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.1 & 0 \leq x < 1 \\ 0.3 & 1 \leq x < 2 \\ 0.6 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x \end{cases}, \text{ 则 } P\{0.5 < X \leq 2.5\} = \underline{\quad\quad\quad}.$$

解答: 0.5

方法 1: 根据 $P\{X = a\} = F(a) - F(a^-)$ 可得

$$P\{X=0\}=F(0)-F(0^-)=0.1-0=0.1$$

类似可得 $P\{X=1\}=0.2$, $P\{X=2\}=0.3$, $P\{X=3\}=0.4$

对于其他取值 C ($C \neq 0, 1, 2, 3$), $P\{X=C\}=0$

因此 $P\{0.5 < X < 2.5\} = P\{X=1\} + P\{X=2\} = 0.5$

方法 2: 由于 X 的分布函数是阶梯型函数, 因此 X 为离散型随机变量

由分布函数可得其分布律为

X	0	1	2	3
P	0.1	0.2	0.3	0.4

因此 $P\{0.5 < X < 2.5\} = P\{X=1\} + P\{X=2\} = 0.5$

方法 3: $P\{0.5 < X < 2.5\} = F(2.5) - F(0.5) = 0.6 - 0.1 = 0.5$

说明: 第 3 种方法最简单, 但对于离散型随机变量, 必须认真分析端点情况, 不能一概套用这个计算式 (随机事件包不包含端点对于连续型随机变量的概率问题没有区别, 但对于离散型随机变量需要根据端点情况套用不同的公式), 因此建议: 连续型随机变量的概率计算直接套用公式, 离散型随机变量的概率问题用前两种方法

6. 某机器生产的零件长度 (cm) 服从参数为 $\mu=10.05$, $\sigma=0.06$ 的正态分布, 规定长度在范围 10.05 ± 0.12 cm 内为合格品, 则从中抽取一产品为不合格的概率为_____. (已知 $\Phi(2)=0.9772$)

解答: 0.0456

记零件长度为 X , 则 $X \sim N(10.05, 0.06^2)$, 于是合格的概率为

$$P\{10.05-0.12 < X < 10.05+0.12\} = F(10.17) - F(9.93)$$

$$= \Phi\left(\frac{10.17-10.05}{0.06}\right) - \Phi\left(\frac{9.93-10.05}{0.06}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2)$$

$$= \Phi(2) - [1 - \Phi(2)] = 2\Phi(2) - 1 = 0.9544$$

从而不合格的概率为 $1 - 0.9544 = 0.0456$

7. 设 X_1, X_2, X_3 是来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本,

$$\mu_1 = \frac{1}{5}X_1 + \frac{3}{10}X_2 + \frac{1}{2}X_3, \quad \mu_2 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{5}{12}X_3, \quad \mu_3 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3$$

都是 μ 的无偏估计, 则_____是 μ 的这几个估计中最有效的.

解答: μ_3

比较无偏估计的有效性就是比较这些估计的方差, 方差越小越有效

$$D(\mu_1) = \frac{1}{25}D(X_1) + \frac{9}{100}D(X_2) + \frac{1}{4}D(X_3) = \frac{38}{100}\sigma^2$$

$$D(\mu_2) = \frac{1}{9}D(X_1) + \frac{1}{16}D(X_2) + \frac{25}{144}D(X_3) = \frac{50}{144}\sigma^2$$

$$D(\mu_3) = \frac{1}{9}D(X_1) + \frac{1}{9}D(X_2) + \frac{1}{9}D(X_3) = \frac{1}{3}\sigma^2$$

显然 $\frac{1}{3} < \frac{50}{144} < \frac{38}{100}$, 因此 μ_3 最有效

得分	
----	--

三、解答题 (本大题共6小题, 共61分)

1. 甲、乙两人轮流投篮, 甲先投。一般来说, 甲、乙两人独立投篮的命中率分别为0.7和0.6, 但由于心理因素的影响, 如果对方在前一次投篮中投中, 紧跟着后面投篮的这一方的命中率就会有所下降, 甲、乙的命中率分别为0.4和0.5
求: (1) 乙在第一次投篮中投中的的概率; (5分)

(2) 甲在第二次投篮中投中的概率. (5分)

解答: 令 A_i 表示事件“乙在第一次投篮中投中”, 令 B_i 表示事件“甲在第 i 次投篮中投中”, $i=1, 2$

$$\begin{aligned} (1) \quad P(A_1) &= P(B_1)P(A_1|B_1) + P(\overline{B_1})P(A_1|\overline{B_1}) \\ &= 0.7 \times 0.5 + 0.3 \times 0.6 = 0.53. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \quad P(A_1) = 0.53 \Rightarrow P(\overline{A_1}) = 0.47$$

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(A_1)P(B_2|A_1) + P(\overline{A_1})P(B_2|\overline{A_1}) \\ &= 0.53 \times 0.4 + 0.47 \times 0.7 = 0.541. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

2. 已知随机变量 X 服从在区间 $(0, 1)$ 上的均匀分布, 令 $Y = 2X + 1$, 求 Y 的概

率密度函数. (10分)

解答: 已知 X 的概率密度函数为 $f_x(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$

Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 为

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{2X + 1 \leq y\} = P\{X \leq \frac{y-1}{2}\} = F_x\left(\frac{y-1}{2}\right) \quad \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

因此 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{1}{2} f_x\left(\frac{y-1}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 < \frac{y-1}{2} < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} & 1 < y < 3 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

3. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} a - \frac{a}{2}x & 0 < x < 2 \\ 0 & o.w. \end{cases}$, 求

(1) 常数 a ; (3 分)

(2) X 的分布函数 $F(x)$; (4 分)

(3) 条件概率 $P\{X > \frac{1}{2} | X \leq 1\}$. (4 分)

解答: (1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^2 \left(a - \frac{a}{2}x\right) dx = \left(ax - \frac{a}{4}x^2\right) \Big|_0^2 = a = 1. \quad (3 \text{ 分})$

$$\text{即 } f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}x, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其余.} \end{cases}$$

$$(2) \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x - \frac{x^2}{4}, & 0 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases} \quad (4 \text{ 分})$$

$$(3) \quad P\left\{X > \frac{1}{2} | X \leq 1\right\} = \frac{P\left\{\frac{1}{2} < X \leq 1\right\}}{P\{X \leq 1\}} = \frac{F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right)}{F(1)} = \frac{5}{12}. \quad (4 \text{ 分})$$

4. 已知健康人的血红球直径服从均值为 $7.2 \mu m$ 的正态分布, 今在某患者血

液中随机测得9个红血球的直径如下：

7.8 9.0 7.1 7.6 8.5 7.7 7.3 8.1 8.0

问该患者红血球平均直径与健康人的差异是否显著不同？（ $\alpha=0.05$ ）（10分）

（已知 $t_{0.025}(8)=2.3060, t_{0.05}(8)=1.860, t_{0.025}(9)=2.262, t_{0.05}(9)=1.833$ ）

解答：由题意知，需检验假设：

$$H_0: \mu = 7.2; \quad H_1: \mu \neq 7.2 \quad \cdots \cdots 2 \text{ 分}$$

总体方差未知，所以选择统计量 $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$ ， $\cdots \cdots 2$ 分

得拒绝域为

$$|t| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \right| \geq t_{\alpha/2}(n-1) \quad \cdots \cdots 2 \text{ 分}$$

将 $n=9, t_{0.025}(8)=2.3060, s=0.5874, \bar{x}=7.9$ ，代入上式得

$$|t| = 3.5751 > 2.3060 \quad \cdots \cdots 2 \text{ 分}$$

所以拒绝原假设，即可认为患者红血球平均直径与健康人的差异是显著不同的。 $\cdots \cdots 2$ 分

5. 设总体X的概率密度为 $f(x, \theta) = \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}-1} (0 < x < 1, \theta > 0)$ ，其中 θ 为未知参数，设 x_1, x_2, \cdots, x_n 是来自总体的简单随机样本观测值，试求未知参数 θ 的矩估计和极大似然估计。（10分）

解答：（1） $E(X) = \int_0^1 x \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}-1} dx = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1} \cdots \cdots 2 \text{ 分}$

$$\text{令 } E(X) = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1} = \bar{x}, \quad \cdots \cdots 2 \text{ 分}$$

可得参数 θ 的矩估计为 $\hat{\theta} = \left(\frac{\bar{x}}{1-\bar{x}} \right)^2 \cdots \cdots 1 \text{ 分}$

（2）似然函数为 $L(\theta) = (\sqrt{\theta})^n (x_1 \cdots x_n)^{\sqrt{\theta}-1} \cdots \cdots 2 \text{ 分}$

对数似然函数为 $\ln L(\theta) = \frac{n}{2} \ln(\theta) + (\sqrt{\theta}-1)(\ln x_1 + \cdots + \ln x_n) \cdots \cdots 1 \text{ 分}$

将 $\ln L(\theta)$ 关于 θ 求导并令其为 0 得

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{2\theta} + (\ln x_1 + \cdots + \ln x_n) \frac{1}{2\sqrt{\theta}} = 0 \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

解之得参数 θ 的极大似然估计为 $\hat{\theta} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i \right)^{-2} \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

6. 设某经销商与出版社订购下一年的挂历，根据该经销商以往多年的经销经验，他得出需求量为150本、160本、170本、180本的概率分别为0.1、0.4、0.3、0.2.各种订购方案的获利 $X_i (i=1,2,3,4)$ （百元）是随机变量，经计算，各种订购方案在不同需求情况下获利的分布如下：

订购方案 需求数量及概率	需求150本 概率0.1	需求160本 概率0.4	需求170本 概率0.3	需求180本 概率0.2
订购150本获利 X_1	45	45	45	45
订购160本获利 X_2	42	48	48	48
订购170本获利 X_3	39	45	51	51
订购180本获利 X_4	36	42	48	54

问：（1）该经销商应订购多少本挂历，可使期望利润最大？（5分）

（2）为使期望利润最大且风险最小，经销商应订购多少本挂历？（5分）

解答：（1）在这四种方案下期望利润分别为：

$$E(X_1) = 45 \times 0.1 + 45 \times 0.4 + 45 \times 0.3 + 45 \times 0.2 = 45, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$E(X_2) = 42 \times 0.1 + 48 \times 0.4 + 48 \times 0.3 + 48 \times 0.2 = 47.4, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$E(X_3) = 39 \times 0.1 + 45 \times 0.4 + 51 \times 0.3 + 51 \times 0.2 = 47.4, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$E(X_4) = 36 \times 0.1 + 42 \times 0.4 + 48 \times 0.3 + 54 \times 0.2 = 45.6 \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

由于 $E(X_2) = E(X_3) > E(X_4) > E(X_1)$ ，所以该经销商应订购 160 本或 170 本
可获最大期望利润.....1 分

(2)现从这些可获最大期望利润的方案选择方差最小（风险最小）的订购方案，因为

$$E(X_2^2) = 42^2 \times 0.1 + 48^2 \times 0.4 + 48^2 \times 0.3 + 48^2 \times 0.2 = 2250 \dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$D(X_2) = E(X_2^2) - [E(X_2)]^2 = 2250 - 47.4^2 = 3.24 \dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$E(X_3^2) = 39^2 \times 0.1 + 45^2 \times 0.4 + 51^2 \times 0.3 + 51^2 \times 0.2 = 2262.6 \dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$D(X_3) = E(X_3^2) - [E(X_3)]^2 = 2262.6 - 47.4^2 = 15.84 \dots\dots 1 \text{ 分}$$

显然, $Var(X_2) < Var(X_3)$ 所以该经销商应订购 160 本风险最小, 且期望利润高……1 分