P148 习题 6

1. 在某总体中抽取一个容量为 5 的样本，测得样本值为：98.5, 98.3, 99, 100.6, 95.8，求其样本均值和样本方差.

解答：$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{1}{5}(98.5+98.3+99+100.6+95.8)=98.44$

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{4}(0.06^2+0.14^2+0.56^2+2.16^2+2.64^2)=2.993$$

注：易得样本方差的另一个计算方法 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)$

2. 查表计算：

（1）$\chi^2_{0.05}(15),\ \chi^2_{0.95}(9),\ \chi^2_{0.025}(3)$

（2）$t_{0.05}(12),\ t_{0.025}(2),\ t_{0.01}(54)$

（3）$F_{0.05}(12,15),\ F_{0.95}(12,15),\ F_{0.025}(12,15)$

解答：（1）$\chi^2_{0.05}(15)=24.996,\ \chi^2_{0.95}(9)=3.325,\ \chi^2_{0.025}(3)=9.348$

（2）$t_{0.05}(12)=1.782,\ t_{0.025}(2)=4.303,\ t_{0.01}(54)\approx u_{0.01}=2.33$

（3）$F_{0.05}(12,15)=2.475,\ F_{0.95}(12,15)=\frac{1}{F_{0.05}(15,12)}=\frac{1}{2.617}0.3821,\ F_{0.025}(12,15)=2.963$

3. 抽水机每天的停机时间服从正态分布 $N(4,0.64)$，求

（1）一个月（30 天）每天的平均停机时间在 1 个小时至 5 个小时之间的概率；

（2）一个月（30 天），总的停机时间小于 115 个小时的概率.

解答：记每天的停机时间为 X，由题意 $X\sim N(4,0.64)$，因此 30 天的平均停机时间 $\overline{X}\sim N(4,\frac{0.64}{30})$，于是 $\frac{\overline{X}-4}{0.8/\sqrt{30}}\sim N(0,1)$

（1）$P\{1\le\overline{X}\le5\}=P\{\frac{1-4}{0.8/\sqrt{30}}\le\frac{\overline{X}-4}{0.8/\sqrt{30}}\le\frac{5-4}{0.8/\sqrt{30}}\}$

$$=\Phi(\frac{5-4}{0.8/\sqrt{30}})-\Phi(\frac{1-4}{0.8/\sqrt{30}})=\Phi(6.8465)-\Phi(-20.5396)$$

$$=\Phi(6.8465)-[1-\Phi(20.5396)]=\Phi(6.8465)+\Phi(20.5396)-1$$

$$=1+1-1=1$$

（2）$P\{30\overline{X}<115\}=P\{\overline{X}<3.833\}=\Phi(\frac{3.833-4}{0.8/\sqrt{30}})=\Phi(-1.14)=1-\Phi(1.14)$

$$=1-0.8729=0.1271$$

注：$P\{30\overline{X}<114\}=P\{\overline{X}<3.8\}=\Phi(\frac{3.8-4}{0.8/\sqrt{30}})=\Phi(-1.37)$

$$=1-\Phi(1.37)=1-0.9147=0.0853$$

4. 若总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为其简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差. 试问

（1）统计量$U=n\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\right)^2$服从什么分布？

（2）统计量$V=n\left(\frac{\overline{X}-\mu}{S}\right)^2$服从什么分布？

解答：（1）由题目条件，$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，其平方$\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2=n\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1)$，

即$U=n\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1)$

（2）由题目条件，$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，其平方$\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2=n\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1)$

而$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，由 F 分布的定义

$$\frac{\dfrac{n\left(\frac{\overline{X}-\sigma}{\sigma}\right)^2}{1}}{\dfrac{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}{n-1}}=\frac{n\left(\frac{\overline{X}-\sigma}{\sigma}\right)^2}{\frac{S^2}{\sigma^2}}=n\left(\frac{\overline{X}-\sigma}{S}\right)^2\sim F(1,n-1)$$

5. 若$T\sim t(n)$，$n\geq 2$，证明：$E(T)=0$

证明：由题目条件，T 的密度函数为 $f(t)=\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$，因此

$$E(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}t\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dt=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{-\infty}^{+\infty}t\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dt$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{n}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}d\left(1+\frac{t^2}{n}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{n}{2}\left[\frac{2}{1-n}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{1-n}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{2}{1-n}\left[\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{1-n}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{2}{1-n}[0-0]=0$$

注：这里没有用积分的奇偶性，因为定积分的奇偶性对广义积分并不成立。

6. 设$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$为来自总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的一个样本

（1）若$\mu=0,\sigma=0.3$，求$P\{\sum_{i=1}^{10}X_i^2>1.44\}$；

（2）若$\sigma=4$而μ未知，S^2为样本方差且满足$P\{S^2>A\}=0.1$，求 A

解答：（1）由于$X_i\sim N(0,0.3^2)\,(i=1,2,\cdots,10)$，因此$\dfrac{X_i-0}{0.3}\sim N(0,1)$，即$\dfrac{X_i}{0.3}\sim N(0,1)$。而$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$相互独立，因此$\sum_{i=1}^{10}\left(\dfrac{X_i}{0.3}\right)^2\sim\chi^2(10)$，即$\dfrac{1}{0.09}\sum_{i=1}^{10}X_i^2\sim\chi^2(10)$，从而

$$P\{\sum_{i=1}^{10}X_i^2>1.44\}=P\{\frac{1}{0.09}\sum_{i=1}^{10}X_i^2>\frac{1.44}{0.09}\}=P\{\chi^2(10)>16\}$$

查表知$P\{\chi^2(10)>15.987\}=0.1$

所以$P\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\} \approx 0.1$ 50 分

（2）由于$\frac{(10-1)S^2}{4^2} \sim \chi^2(10-1)$，即$\frac{9S^2}{16} \sim \chi^2(9)$，因此

$P\{S^2 > A\} = P\{\frac{9S^2}{16} > \frac{9A}{16}\} = P\{\chi^2(9) > \frac{9A}{16}\} = 0.1$

所以$\frac{9A}{16} = \chi^2_{0.1}(9) = 14.684$，从而$A = \frac{16}{9} \times 14.684 = 26.105$ 50 分

7. 设某县农民人均收入（单位：万元）服从正态分布$N(1.5, 0.25)$，现随机调查了n个人，若这n个人的人均收入不超过 1.6 万元的概率为 0.9，求至少调查多少人？

解答：记农民收入为X，由题意$X \sim N(1.5, 0.25)$，于是这n个农民的人均收入$\overline{X} \sim N(1.5, \frac{0.25}{n})$，从而$\frac{\overline{X} - 1.5}{0.5/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，于是

$$0.9 = P\{\overline{X} \le 1.6\} = P\{\frac{\overline{X} - 1.5}{0.5/\sqrt{n}} \le \frac{1.6 - 1.5}{0.5/\sqrt{n}}\} = P\{U \le \frac{\sqrt{n}}{5}\}$$

查表得$\frac{\sqrt{n}}{5} \approx 1.28$，因此$n \approx 40.96$

所以应至少调查 41 人.