三．信号流图的组成及性质

信号流图的本质，是用小圆点和带箭头的直线组成的图型，来表示一个或一组线性代数方程，然后利用梅逊公式求系统的传递函数.

信号流图中的术语

节点：表示变量或信号的小圆点.方程组中有几个变量，就可用相应数目的节点.

支路：连接两个节点的定向线段．线段上箭头的方向，表示信号流通的方向. 支路旁标明的数字、字母或表达式称为支路传输值或称为支路传输增益. 支路上的箭头指向节点，叫该节点的输入支路，支路上的箭头离开节点，叫该节点的输出支路.

用支路增益表示方程式中两个变量的因果关系，因此支路相当于乘法器

$$x_1 \xrightarrow{a_{12}} x_2$$

怎么画信号图？

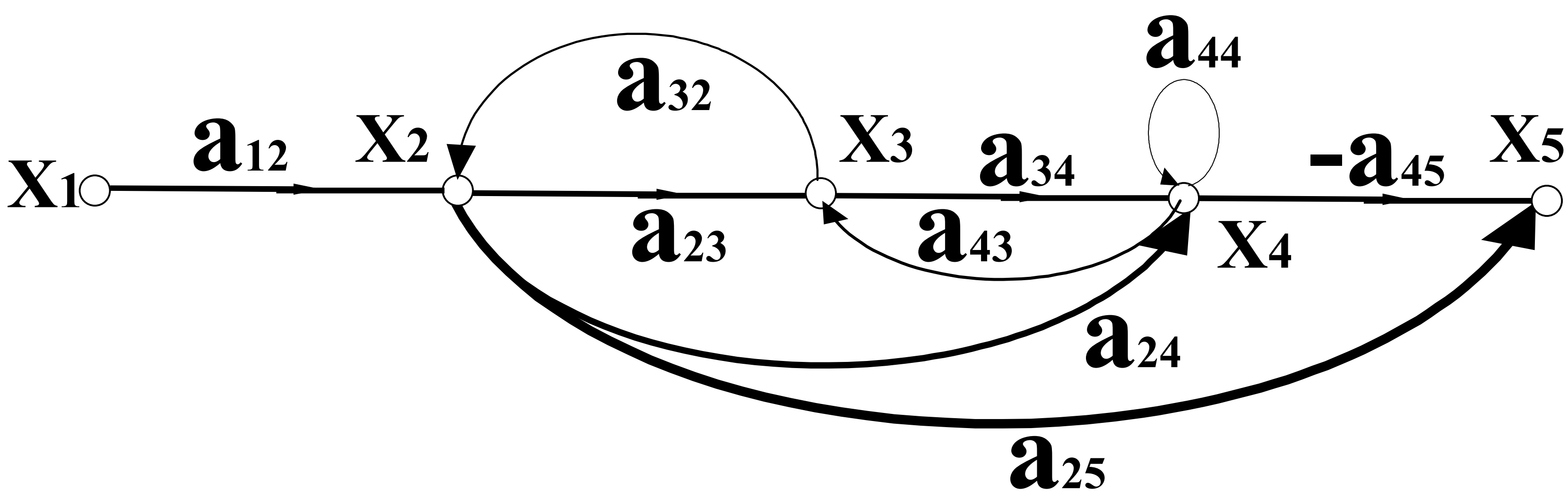
例1 设有一组线性代数方程为:

$$x_2=a_{12}x_1+a_{32}x_3$$

$$x_3=a_{23}x_2+a_{43}x_4$$

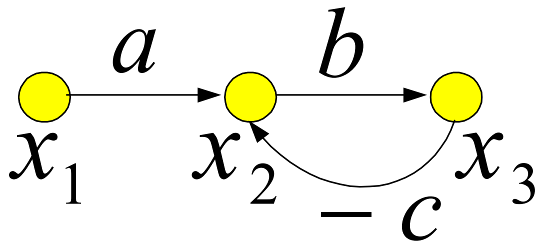
$$x_4=a_{24}x_2+a_{34}x_3+a_{44}x_4$$

$$x_5=a_{25}x_2-a_{45}x_4$$



怎么读信号图？

例 设有信号图为：



所描述的线性方程组为：

$$x_2 = ax_1 - cx_3$$

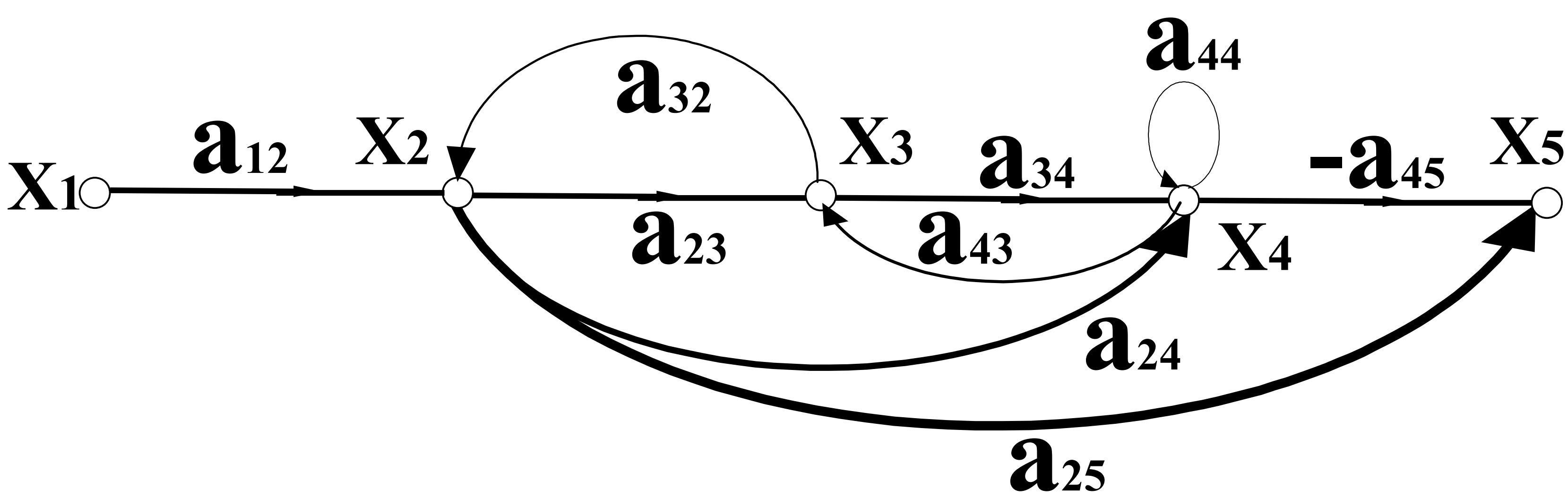
$$x_3 = bx_2$$

注意:

(1) 信号在节点上只能相加;

(2) 根据线性代数方程组，先确定变量数目, 依此排列, 然后画图;

(3) 流入节点的信号可以各不相同, 但流出节点的信号表示同一个信号.



输入节点:只有输出支路的节点，叫输入节点，也叫源节点, 如X_1.

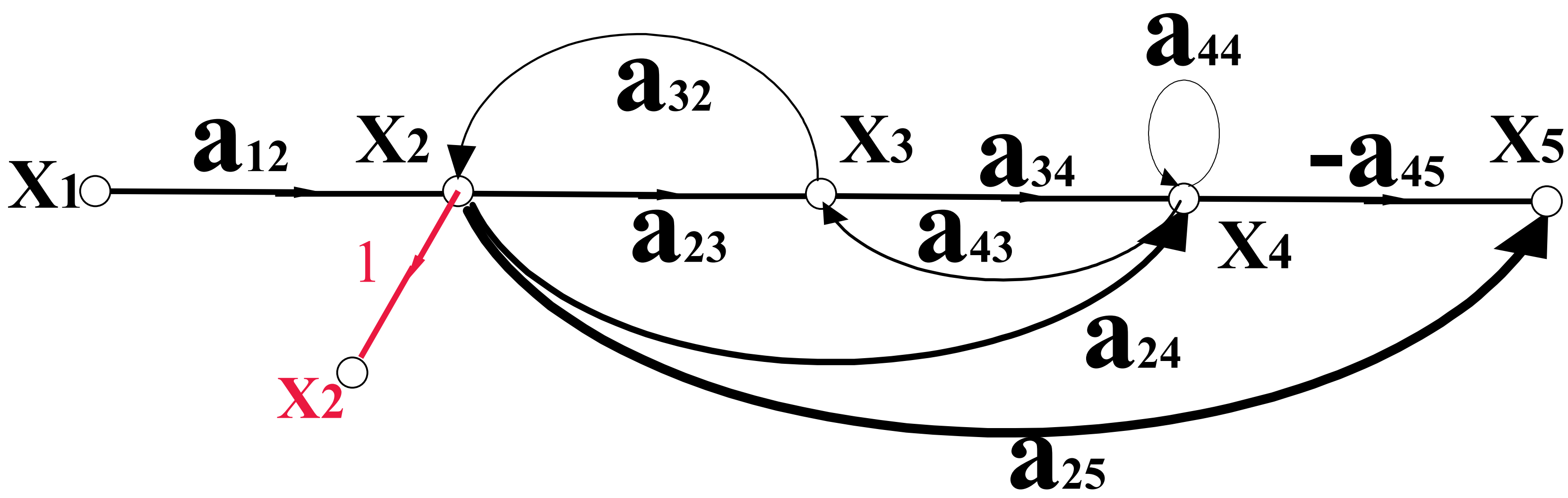
输出节点:只有输入支路的节点，叫输出节点，也叫阱节点, 如X_5.

混合节点:既有输入支路，又有输出支路的节点，叫混合节点.

如X_2, X_3, X_4. 增加一条单位传输支路,可使混合节点变为输出节点，但不能使其变为输入节点.

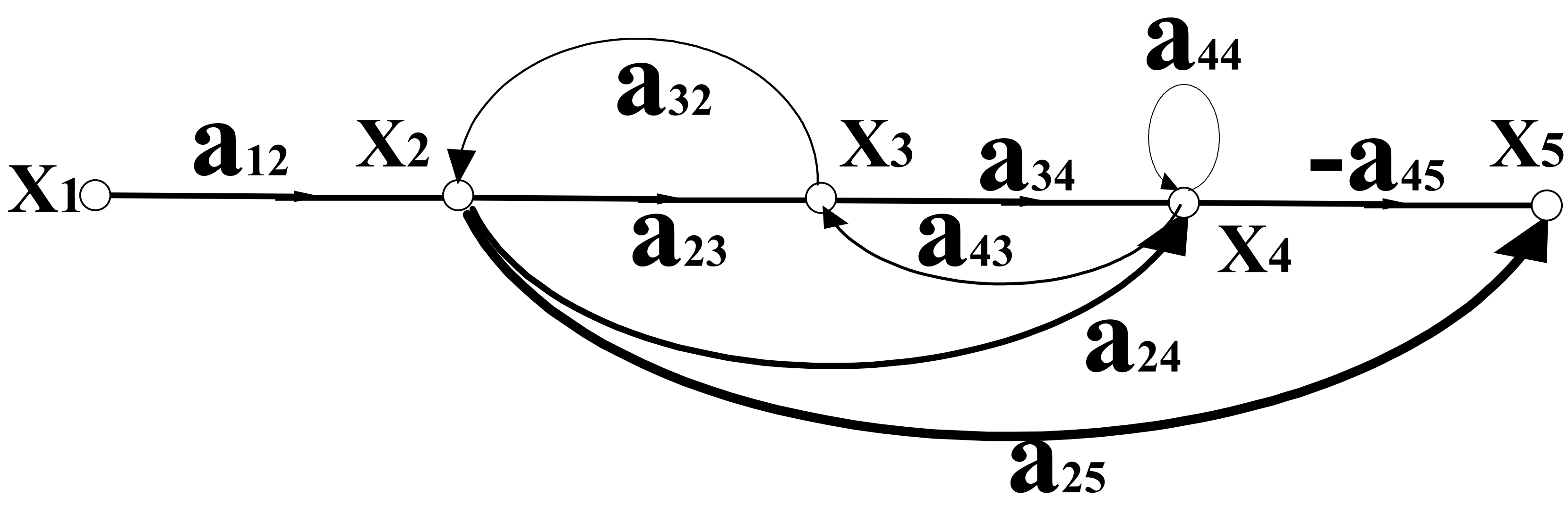
通道: 凡从某一节点开始，沿支路的箭头方向连续经过一些节点而终止在另一节点或同一节点的路经，统称为通道.

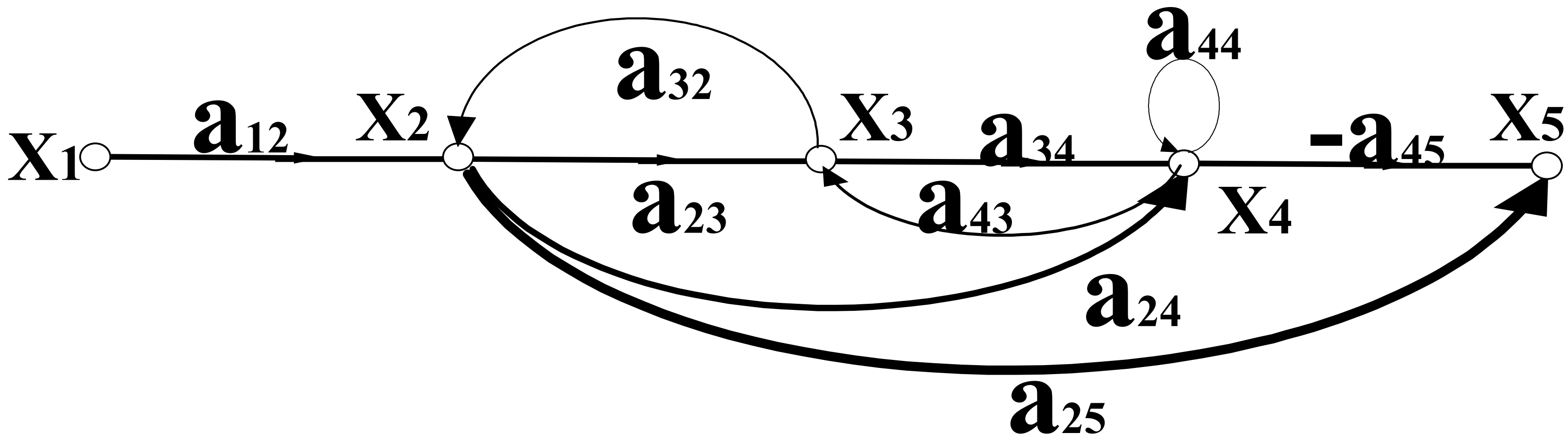
开通道:如果通道从某一节点开始终止在另一节点上，而且通道中每个节点只经过一次,该通道叫开通道.



闭通道: 如果通道的终点就是通道的始点,而且通道中每个节点只经过一次,该通道叫闭通道. 也叫回环, 回路. 如a_{44}, $a_{34}a_{43}$, $a_{23}a_{32}$. 但$a_{23}a_{34}a_{43}a_{32}$不是.

前向通道: 在开通道中,从源节点始到阱节点止, 并且每个节点只经过一次的通道. 在确定前向通道时, 首先要明确源节点与阱节点.





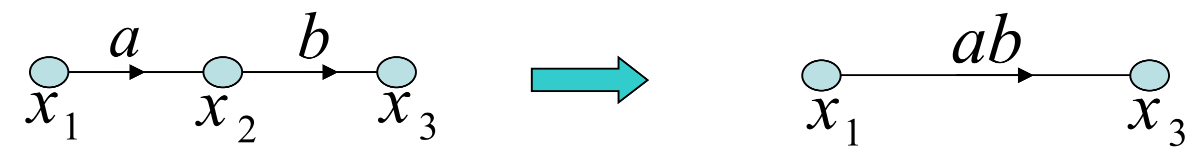
- 不接触回路: 如果一些回路没有任何公共节点, 就叫不接触
- 回路，**a44, a23 a32.**
- 通道传输(或增益): 通道中各支路传输(或增益)的乘积.
- 回路传输(或增益): 闭通道中各支路传输(或增益)的乘积.

信号流图的性质

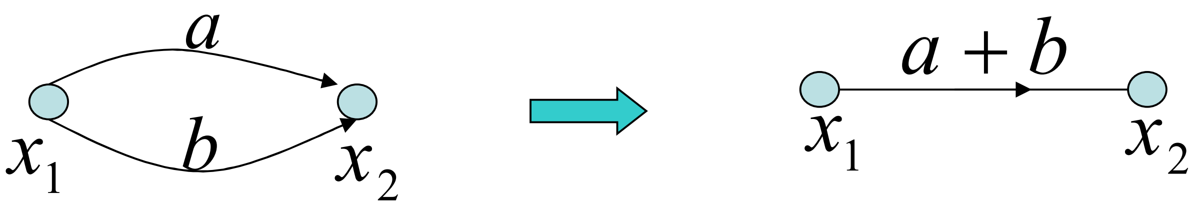
- 节点表示系统的变量。一般，节点自左向右顺序设置，每个节点标志的变量是所有流向该节点的信号之代数和，而从同一节点流向各支路的信号均用该节点的变量表示。
- 支路相当于乘法器，信号流经支路时，被乘以支路增益而变换为另一信号。
- 信号在支路上只能沿箭头单向传递，即只有前因后果的因果关系。
- 对于给定的系统,节点变量的设置是任意的，因此信号流图不是唯一的

- 信号流图的化简

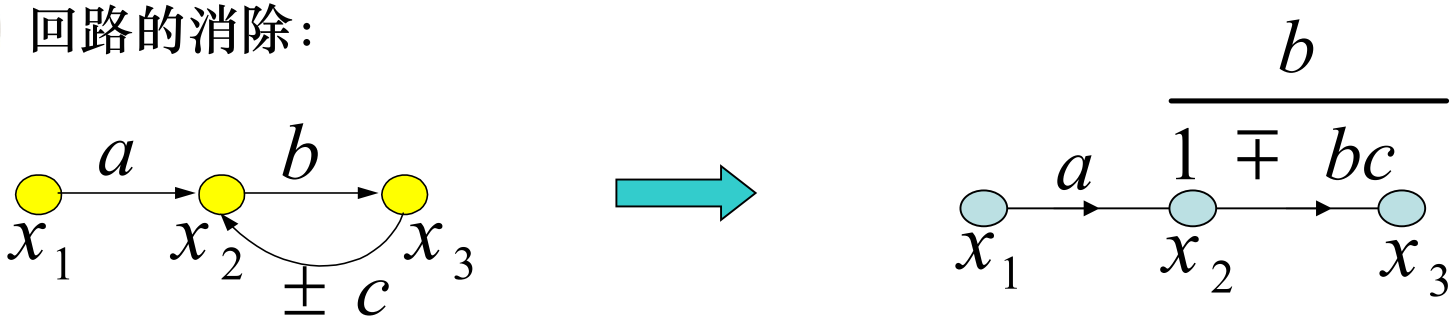
  - 串联支路合并：



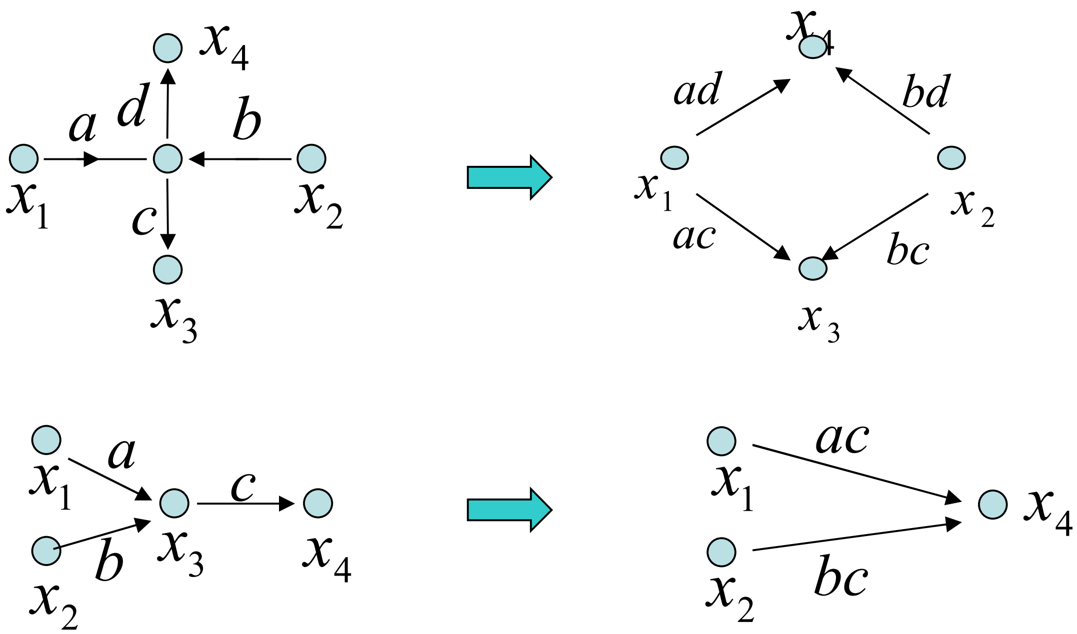
  - 并联支路的合并：



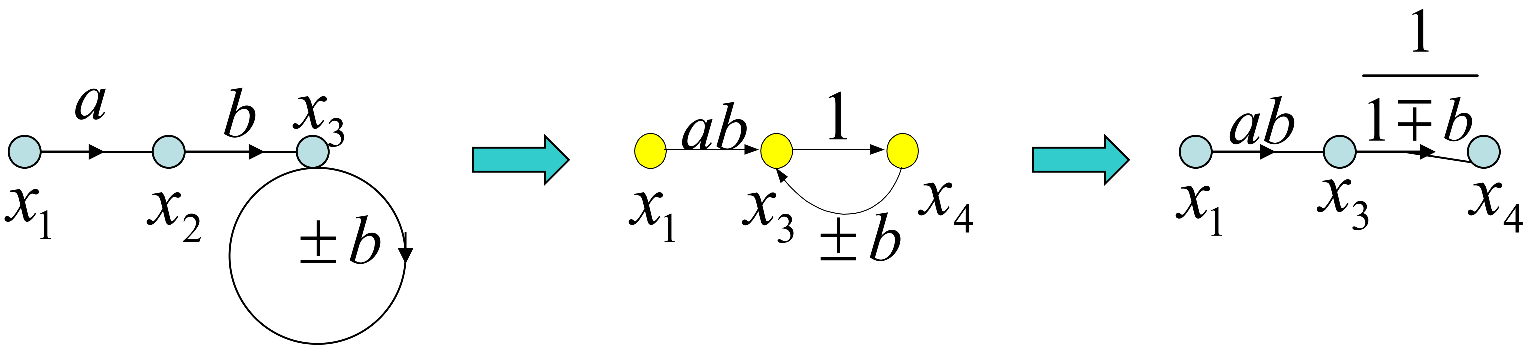
  - 回路的消除：



- **混合支路的清除：**

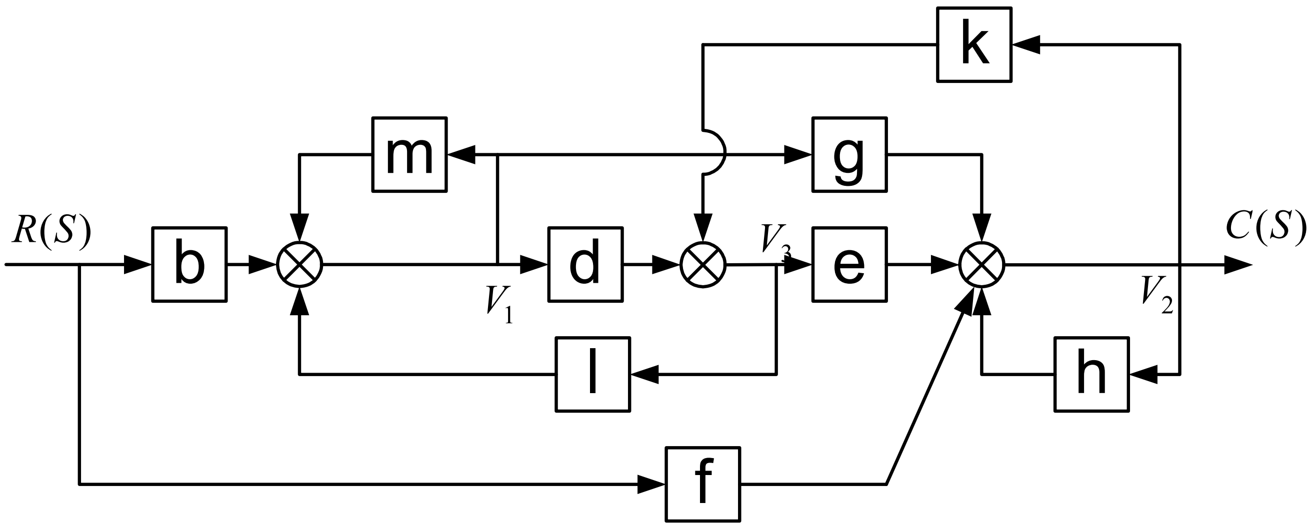


- **自回路的消除：**



4.信号流图的绘制

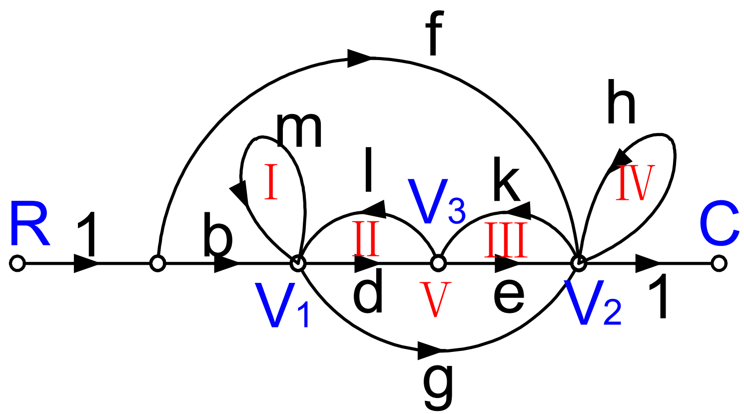
- 信号流图可以根据微分方程绘制，也可以从系统结构图按照对应关系得到。
- **1）按微分方程绘制（用得少）。**
- **2）根据结构图绘制**



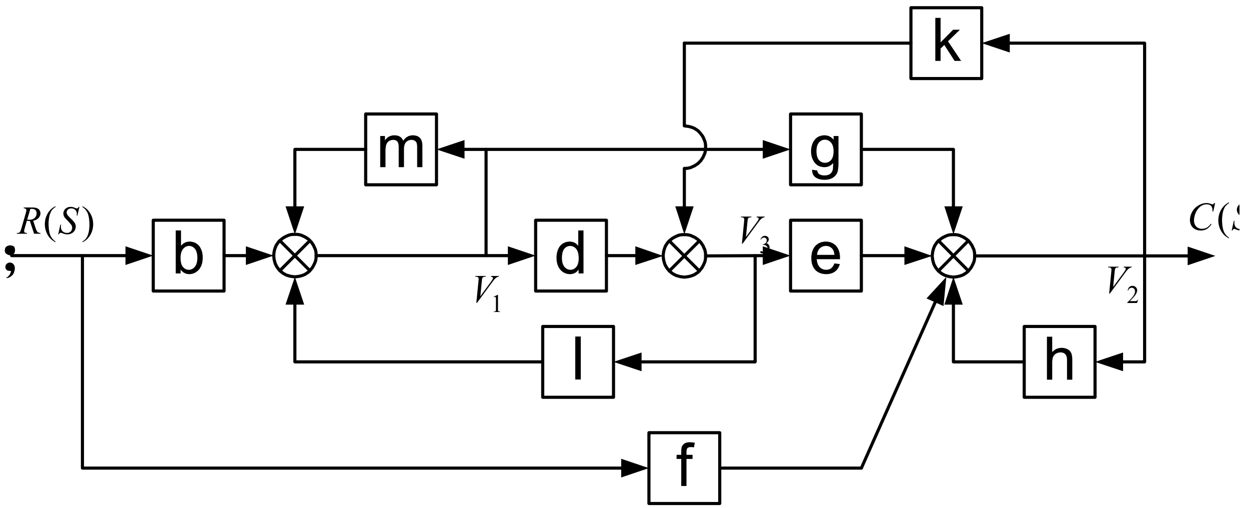
$$V_1 = mV_1 + lV_3 + bR$$

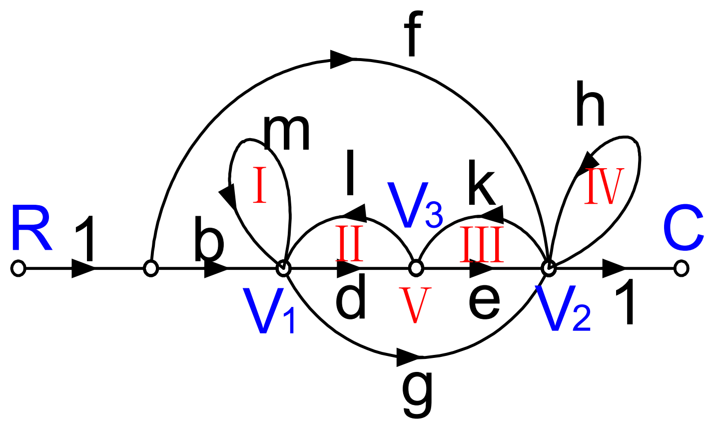
$$C = V_2 = gV_1 + hV_2 + eV_3 + fR$$

$$V_3 = dV_1 + kV_2$$



- 将输入量、输出量、比较点的输出、分叉点及中间变量改为节点；
- 用标有传递函数的定向线段代替各环节的方框，成为流图的支路；





$$V_1 = mV_1 + lV_3 + bR$$
$$C = V_2 = gV_1 + hV_2 + eV_3 + fR$$
$$V_3 = dV_1 + kV_2$$

5 梅逊公式

任一信号流图, 输入节点与输出节点间的总增益，可用如下梅逊公式求得:

$$P=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}P_k\Delta_k$$

式中:

n是从输入节点到输出节点的前向通道的总条数.

P_k 是从输入节点到输出节点的第**k**条前向通道的总增益.

Δ特征式: $\Delta=1-\sum L_a+\sum L_bL_c-\sum L_dL_eL_f+\bullet\bullet\bullet$

$$\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c - \sum L_d L_e L_f + \bullet\bullet\bullet$$

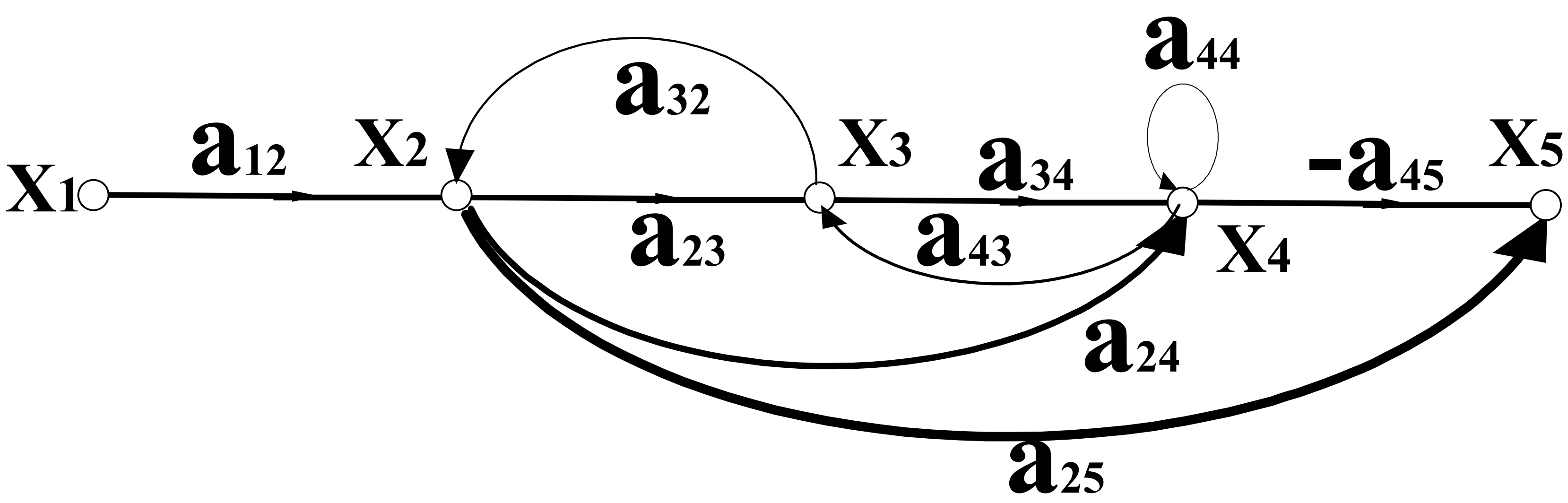
Δ 中**:** **L_a**是信号流图中每一个单独回路的增益**.**

$L_b L_c$是信号流图中任何两两互不接触回路增益的乘积**.**

$L_d L_e L_f$是信号流图中任何三三互不接触回路增益的乘积**.**

Δ_k第**k**个前向通道的余因子式；其值为**Δ**中去掉与第**k**个前向通道相接触回路后的剩余部分。

例1 利用梅逊公式求下图的信号流图中X_1与X_5之间的增益

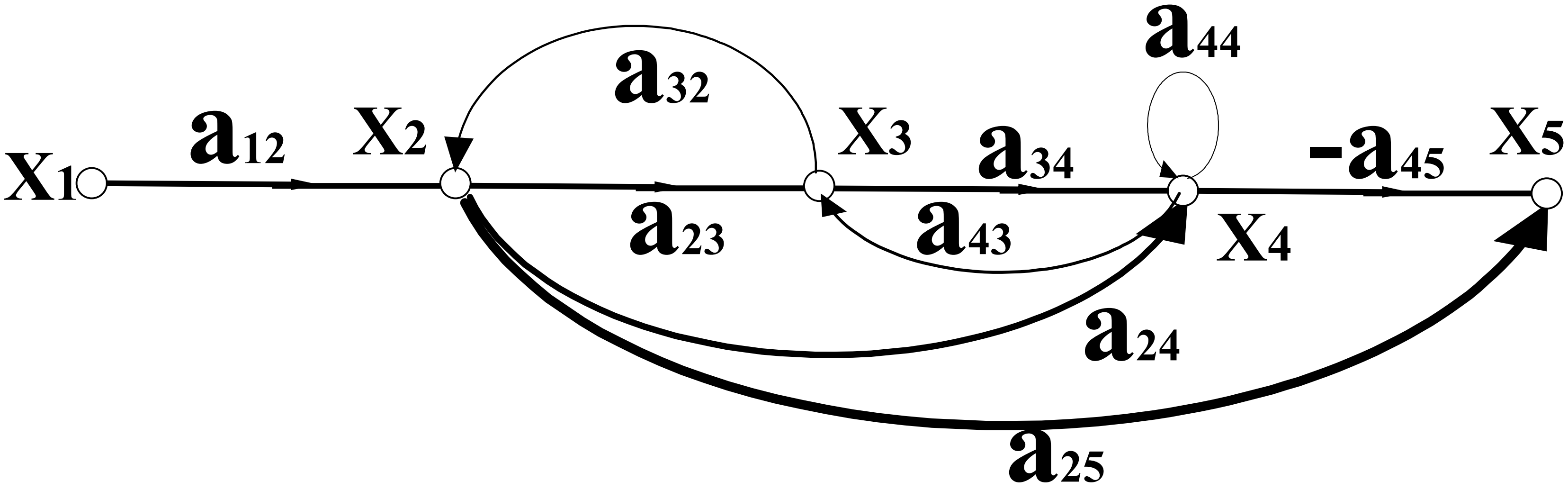


上图中有三条前向通道, 故**n=3,**

即 **G1= –a12 a23 a34 a45**

G2= –a12 a24 a45,

G3= a12 a25



$$\Sigma La = a_{23} a_{32} + a_{34} a_{43} + a_{44} + a_{24} a_{43} a_{32}$$

$$\Sigma LbLc = a_{23} a_{32} a_{44}$$

$$\Delta = 1 - \Sigma La + \Sigma LbLc$$

$$= 1 - (a_{23} a_{32} + a_{34} a_{43} + a_{44} + a_{24} a_{43} a_{32}) + a_{23} a_{32} a_{44}$$

$$\Delta_1 = 1, \ \Delta_2 = 1, \ \Delta_3 = 1 - a_{34} a_{43} - a_{44}$$

X_5与X_1之间的增益X_5/X_1为

$$P=\frac{X_5}{X_1}=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{3}P_k\Delta_k=\frac{1}{\Delta}(P_1\Delta_1+P_2\Delta_2+P_3\Delta_3)$$

$$=\frac{-a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}-a_{12}a_{24}a_{45}+a_{12}a_{25}(1-a_{44}-a_{34}a_{43})}{1-(a_{23}a_{32}+a_{34}a_{43}+a_{44}+a_{24}a_{43}a_{32})+a_{23}a_{32}a_{44}}$$

根据信号流图，用梅森公式求系统的传递函数，其步骤：

1.找前向通道，并求：$P_1, P_2, \cdots, P_n$

2 . ①找回路，求：$\sum L_a$

②找两两不接触的回路：$\sum L_b L_c$

③找三三不接触的回路，求：$\sum L_d L_e L_f$

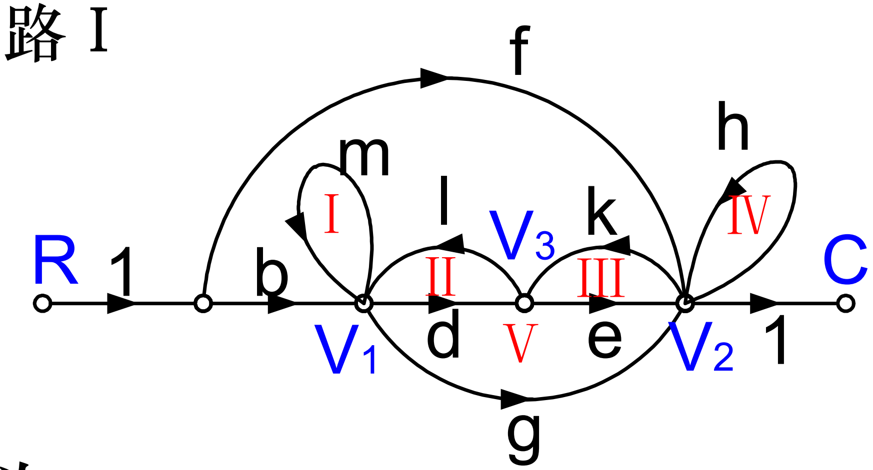
$\vdots$

3.求：$\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c - \sum L_d L_e L_f + \bullet\bullet\bullet$

4.求：Δ_k

5.代入公式：$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{n} P_k \Delta_k$

例2 图中所示信号流图共含有五个单独回路和三对互不接触回路（回路Ⅰ和Ⅲ、Ⅰ和Ⅳ、Ⅱ和Ⅳ）



所有单独回路增益之和为

$$\sum_i L_i = m + dl + ke + h + gkl$$

两两互不接触回路增益乘积之和为

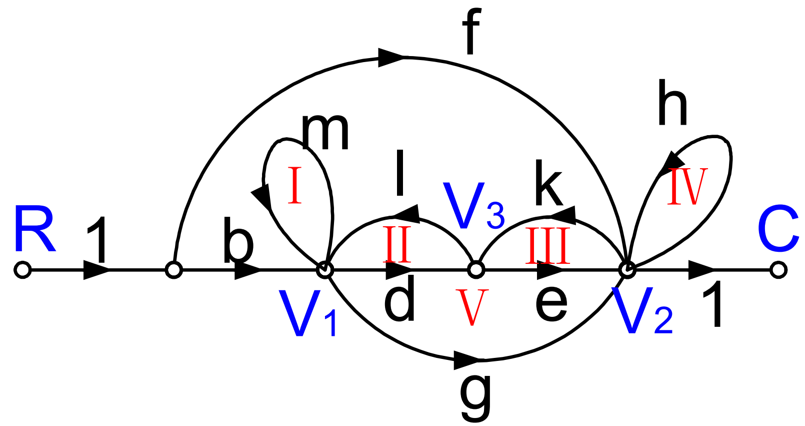
$$\sum_{j,k} L_j L_k = mke + mh + dlh$$

而△值为

$$\Delta = 1 - \sum_i L_i + \sum_{j,k} L_j L_k = 1 - (m + dl + ke + h + gkl) + mh + dlh + mke$$

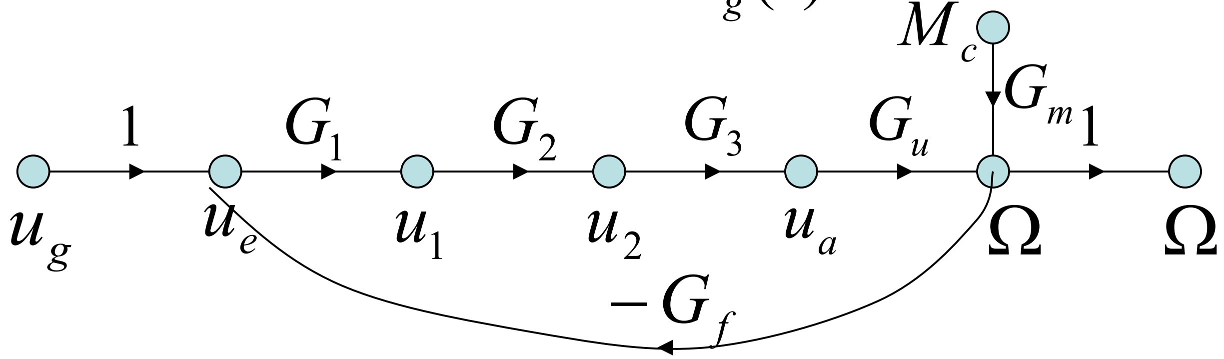
$$\Delta = 1 - \sum_i L_i + \sum_{j,k} L_j L_k = 1 - (m + dl + ke + h + gkl) + mh + dlh + mke$$

把△中与第k条前向通道有关的回路去掉后，从输入到输出的前向通道和其增益以及响应的余子式如下表所示



前向通道	前向通道增益	余子式
$R \to V_1 \to V_3 \to V_2 \to C$	$P_1=bde$	$\triangle_1=1$
$R \to V_2 \to C$	$P_2=f$	$\triangle_2=1-m-ld$
$R \to V_1 \to V_2 \to C$	$P_3=bg$	$\triangle_3=1$

[例3]求速度控制系统的总传输 $\frac{\Omega(s)}{u_g(s)}$（不计扰动）



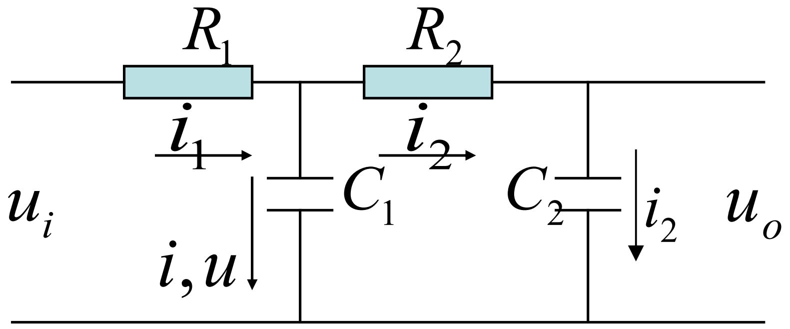
[解]：前向通道有一条；$u_g \to \Omega, P_1 = G_1G_2G_3G_u$

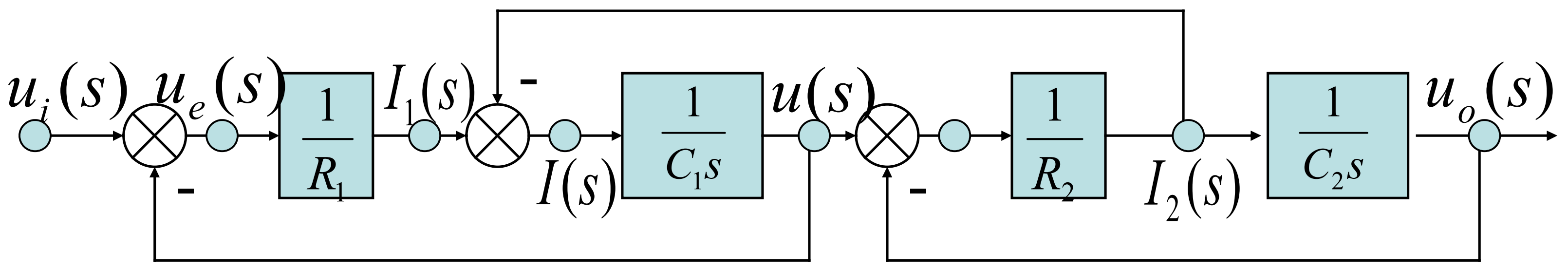
有一个回路；$\sum L_a = -G_1G_2G_3G_uG_f$

$$\therefore \Delta = 1 - \sum L_a = 1 + G_1G_2G_3G_uG_f, \Delta_1 = 1$$

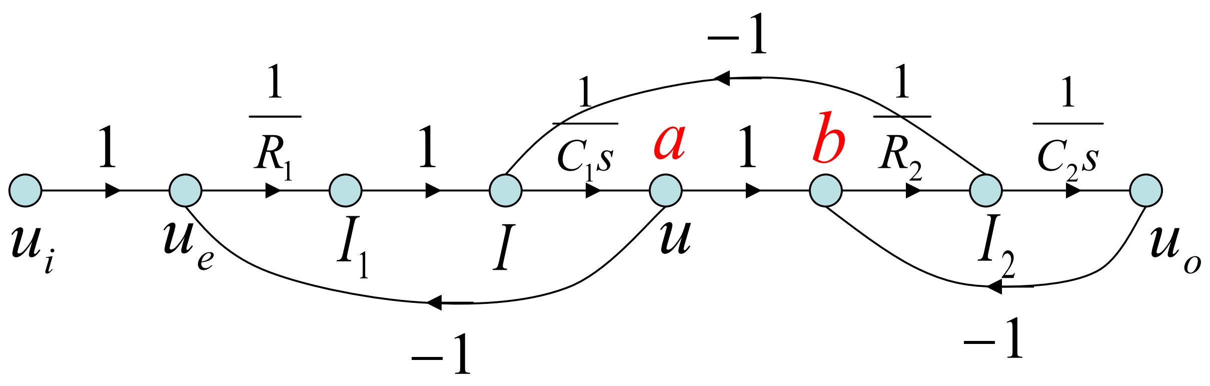
$$P = \frac{\Omega(s)}{u_g(s)} = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{1} P_k\Delta_k = \frac{G_1G_2G_3G_u}{1+G_1G_2G_3G_uG_f}$$

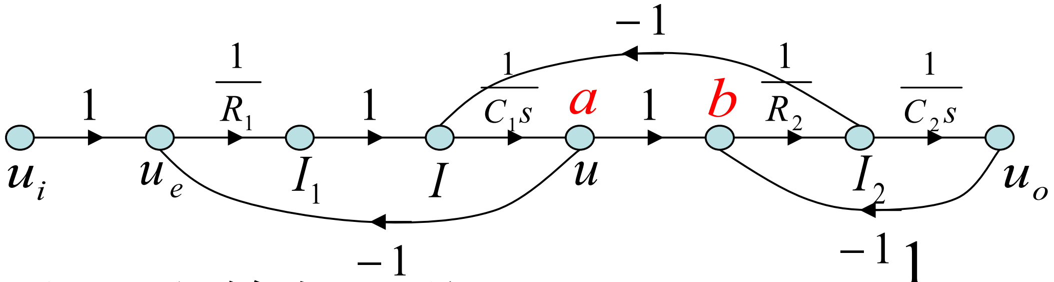
[例4]：绘出两级串联RC电路的信号流图并用Mason公式计算总传递函数。





[解]：先在结构图上标出节点，再根据逻辑关系画出信号流图如下：





图中，有一个前向通道； $P_1 = \dfrac{1}{R_1C_1R_2C_2s^2}$

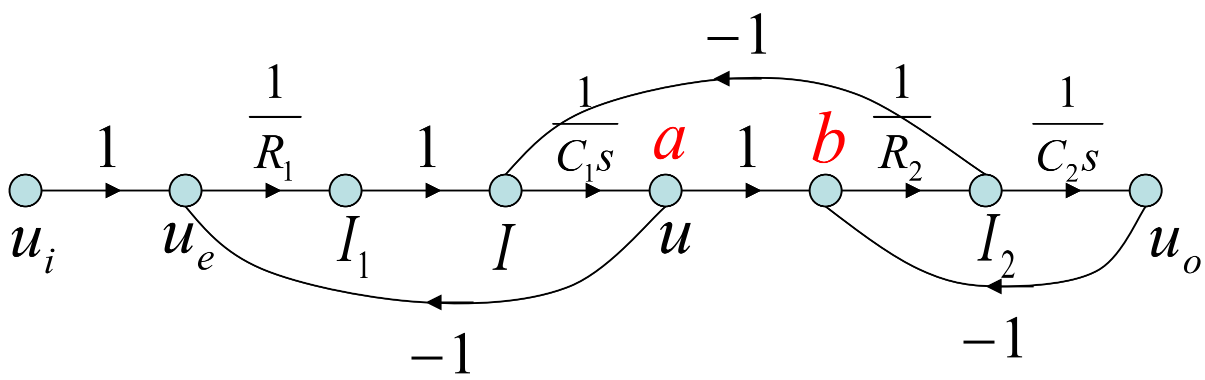
有三个回路； $\sum L_a = \dfrac{-1}{R_1C_1s} + \dfrac{-1}{R_2C_2s} + \dfrac{-1}{R_2C_1s}$

有两个互不接触回路； $\sum L_bL_c = \dfrac{-1}{R_1C_1s} \times \dfrac{-1}{R_2C_2s} = \dfrac{1}{R_1R_2C_1C_2s^2}$

$$\therefore \Delta = 1 + \frac{1}{R_1C_1s} + \frac{1}{R_2C_2s} + \frac{1}{R_2C_1s} + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2s^2}$$

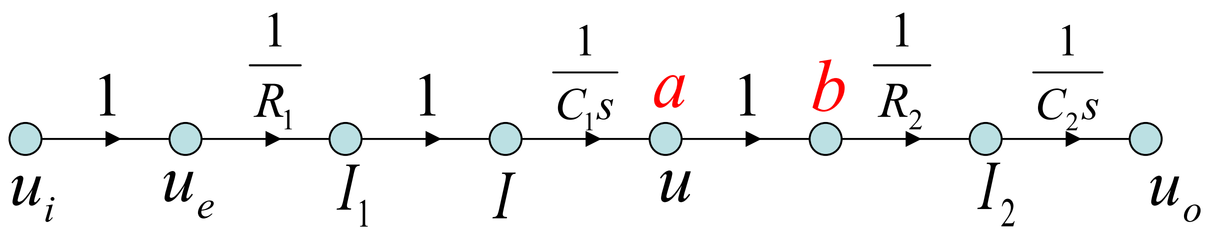
$\Delta_i = 1$ （因为三个回路都与前向通道接触。）

总传输为： $P = \dfrac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{1} P_k\Delta_k = \dfrac{1}{R_1R_2C_1C_2s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2)s + 1}$

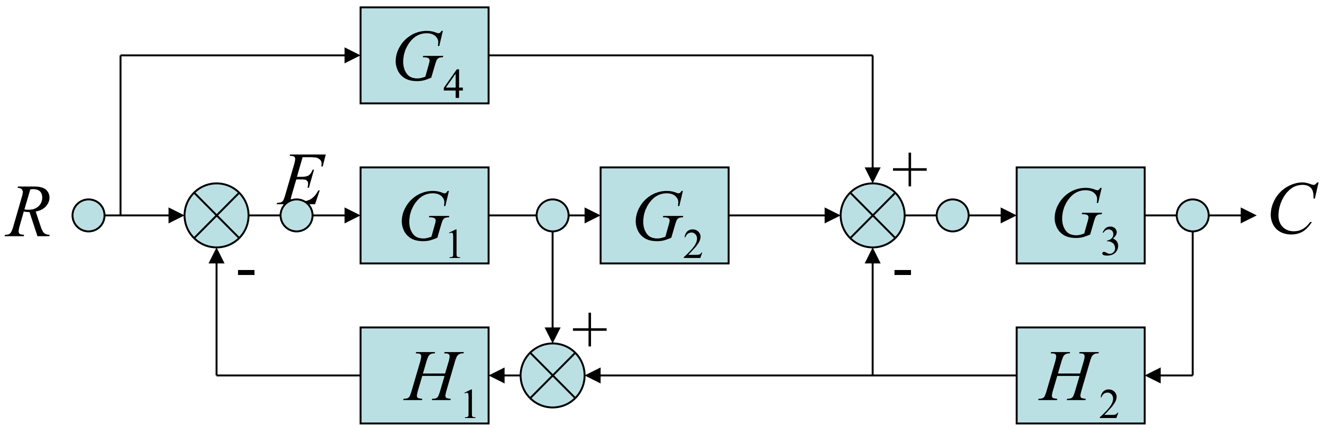


讨论：信号流图中，a点和b点之间的传输为1，是否可以将该两点合并。使得将两个不接触回路变为接触回路？如果可以的话，总传输将不一样。

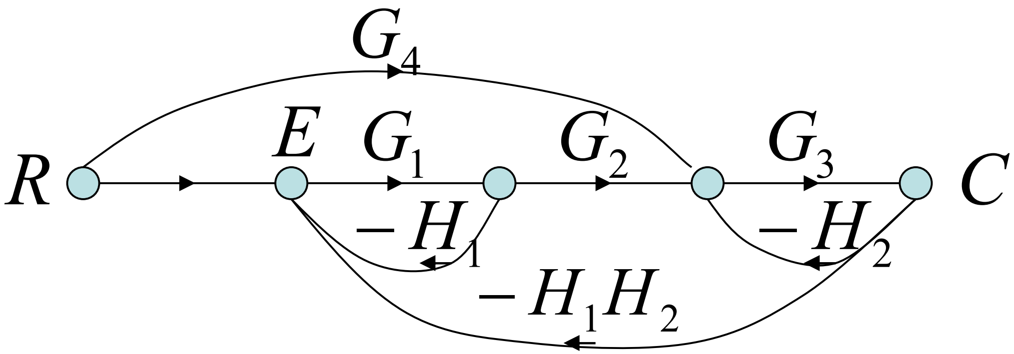
不能合并。因为a、b两点的信号值不一样。

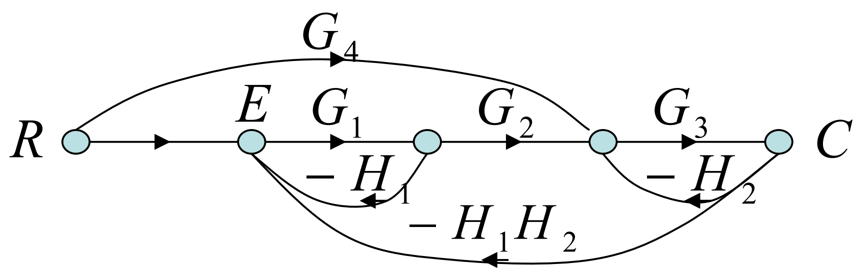


[例5]：使用Mason公式计算下述结构图的传递函数 $\dfrac{C(s)}{R(s)}, \dfrac{E(s)}{R(s)}$



[解]：在结构图上标出节点，如上。然后画出信号流图，如下：





◆求 $\dfrac{C(s)}{R(s)}$:

前向通道有二，分别为： $P_1 = G_1G_2G_3$，$P_2 = G_3G_4$

回路有三，分别为: $-G_1H_1, -G_3H_2, -G_1G_2G_3H_1H_2$

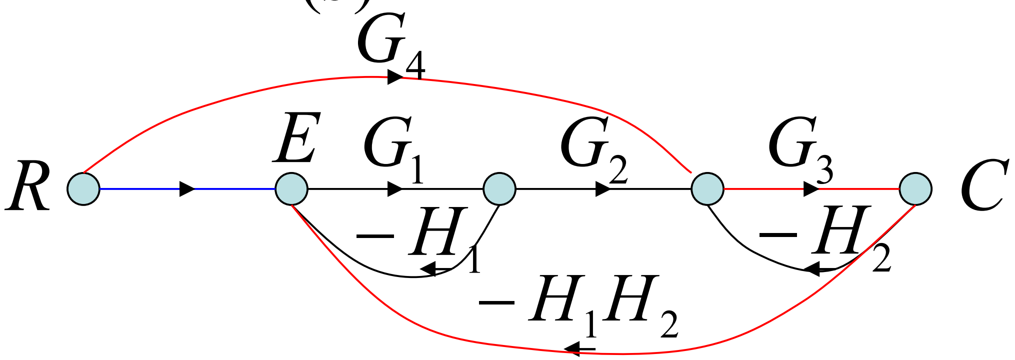
有两个不接触回路，所以:

$$\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_bL_c = 1 + G_1H_1 + G_3H_2 + G_1G_2G_3H_1H_2 + G_1G_3H_1H_2$$

$$\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 1 + G_1H_1$$

$$\therefore P = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{2} P_k\Delta_k = \frac{G_1G_2G_3 + G_3G_4 + G_1G_3G_4H_1}{1 + G_1H_1 + G_3H_2 + G_1G_2G_3H_1H_2 + G_1G_3H_1H_2}$$

◆求 $\dfrac{E(s)}{R(s)}$：



Δ不变。

$P_1=1, \Delta_1=1+G_3H_2$（蓝线表示）

$P_2=-G_3G_4H_1H_2, \Delta_2=1$

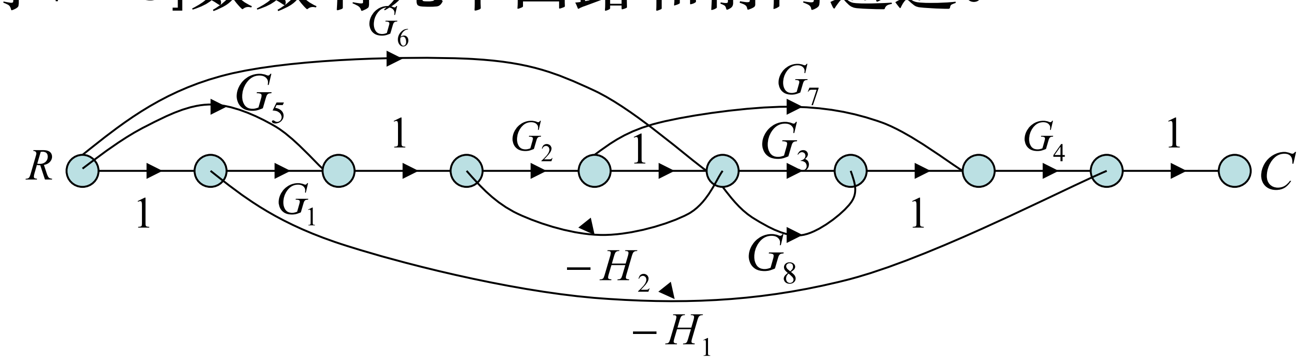
（红线表示）

$$\therefore P=\frac{1+G_3H_2-G_3G_4H_1H_2}{\Delta}$$

注意：上面讲Δ不变，为什么？Δ是流图特征式，也就是传递函数的特征表达式。对于一个给定的系统，特征表达式总是不变的，可以试着求一下。

- 注意：梅森公式只能求系统的总增益，即输出对输入的增益。而输出对混合节点（中间变量）的增益就不能直接应用梅森公式。也就是说对混合节点，不能简单地通过引出一条增益为一的支路，而把非输入节点变成输入节点。对此问题有两种方法求其传递函数：
- 一、把该混合节点的所有输入支路去掉，将其作为输入节点处理，然后再用梅森公式
- 二、分别用梅森公式求取输出节点及该节点对输入节点的传递函数，然后把它们的结果相比，即可得到输出对该混合节点的传递函数，如上题中E节点。

[例2-15]数数有几个回路和前向通道。



- 有四个回路，分别是：

$$-G_2H_2, -G_1G_2G_3G_4H_1, -G_1G_2G_7G_4H_1, -G_1G_2G_8G_4H_1$$

它们都是互相接触的。

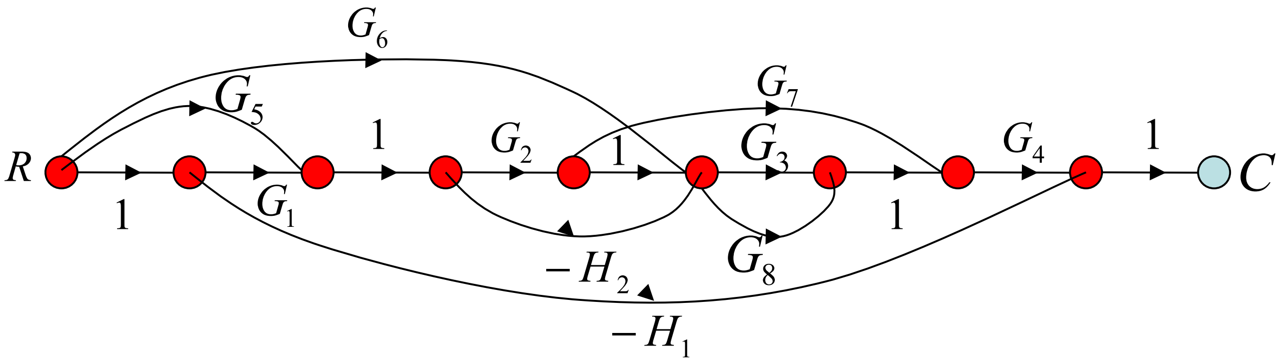
$$\therefore \Delta = 1 + G_2H_2 + G_1G_2G_3G_4H_1 + G_1G_2G_7G_4H_1 + G_1G_2G_8G_4H_1$$

- 有九条前向通道，分别是：

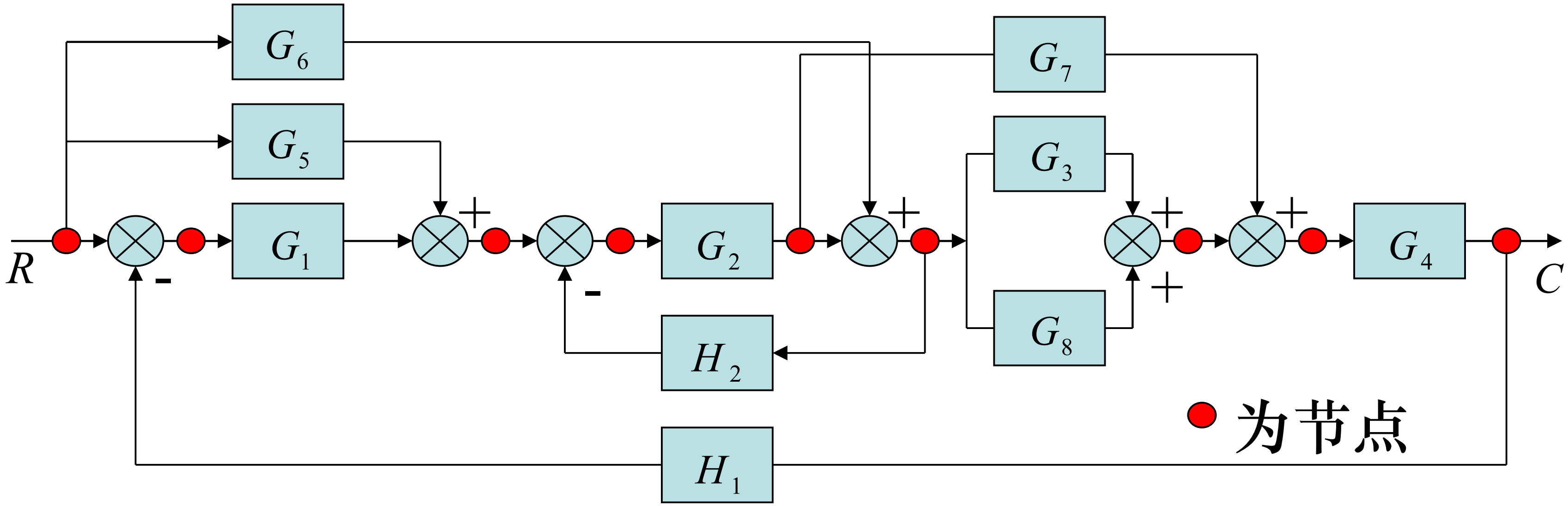
$$P_1 = G_1G_2G_3G_4 \qquad P_4 = G_5G_2G_3G_4 \qquad P_7 = G_6G_3G_4$$

$$P_2 = G_1G_2G_7G_4 \qquad P_5 = G_5G_2G_7G_4 \qquad P_8 = G_6G_8G_4$$

$$P_3 = G_1G_2G_8G_4 \qquad P_6 = G_5G_2G_8G_4 \qquad P_9 = -G_6H_2G_2G_7G_4$$



对应的结构图为：



注意：①先将信号流图中的节点照搬；②仔细确定前向通道和回路的个数，箭头从节点指向相交点。