

重复组合：从  $n$  个不同元素中每次取一个，放回去再取下一个，如此连续取  $r$  次所得的组合称为重复组合。

下面计算重复组合的数目。

1. 将重复组合映射为一个“投球入盒”（投球入盒问题有很多，这里只是其中的一个）问题  
投球入盒问题：有  $r$  个一样的球， $n$  个不同的盒子，现将  $r$  个球放入  $n$  个盒子，共有多少种放法？

重复组合可以与投球入盒问题建立一一对应关系：

(1) 对于任意一个重复组合，例如  $\{1, 1, 2, 2, 2, 4\}$ ，对应着一种投球入盒方法，即 1 号盒子里放 2 个球，2 号盒子里放 3 个球，4 号盒子里放 1 个球；

(2) 对于任意一种投球入盒方法，例如 3 号盒子里放 4 个球，6 号盒子里放 2 个球，对应着一个重复组合  $\{3, 3, 3, 3, 6, 6\}$ ；

(3) 两个问题的一一对应关系，表明重复组合数目与投球入盒问题的方法总数是一样多的，从而只需要计算投球入盒的方法数即可。

2. 将投球入盒的方法数问题转化为隔板与球的放置问题

隔板与球的放置问题：有  $n-1$  个一样的隔板和  $r$  个一样的球，需要放入  $n+r-1$  个位置，共有多少种放置方法？

投球入盒问题（以 3 个球 5 个盒子为例）与隔板与球的放置方法（对应 3 个球 4 个隔板）问题可以建立一一对应关系：

(1) 对于任意一个投球入盒方法，例如 2 号盒子放 2 个球，4 号盒子放 1 个球，对应了隔板与球的一种放置方法（“|”表示隔板，“O”表示球）：

|OO||O|

第一个隔板前面对应第一个盒子，第一个隔板与第二个隔板之间对应第二个盒子，...，第三个隔板与第四个隔板之间对应第四个盒子，第四个隔板之后对应第五个盒子；

(2) 任意一种隔板与球的放置方法，例如

||O||OO

对应了一种投球入盒的方法：第一个盒子 0 个球，第二个盒子 0 个球，第三个盒子 1 个球，第四个盒子 0 个球，第五个盒子 2 个球；

(3) 两个问题的一一对应关系，表明它们的解的个数也是一样的

3. 隔板与球的放置方法数很容易计算：总共  $n-1$  个隔板、 $r$  个球，需要放入  $n+r-1$  个位置，只需要从中选出  $r$  个位置放球，余下的自然就是  $n-1$  个隔板的位置，因此方法数为  $C_{n+r-1}^r$ 。由

以上推导， $C_{n+r-1}^r$  就是重复组合数目。