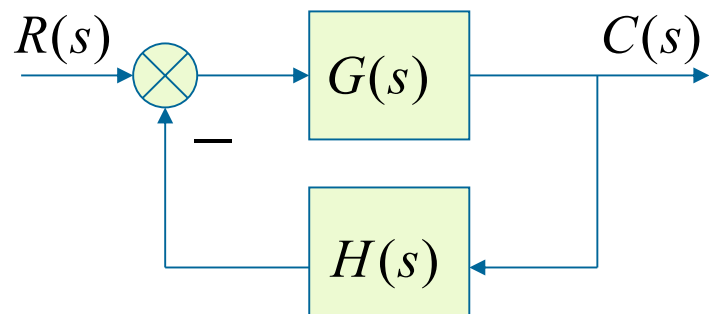


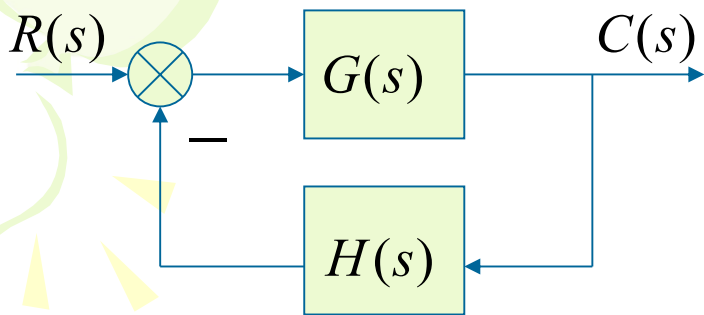
5-3 频域稳定判据

奈魁斯特稳定判据是用开环频率特性判别闭环系统的稳定性。不仅能判断系统的绝对稳定性，而且可根据相对稳定的概念，讨论闭环系统的瞬态性能，指出改善系统性能的途径。

一、奈氏判据的数学基础



一、奈氏判据的数学基础



如图，n阶系统的开环传递函数为：

$$G_k(s) = G(s)H(s)$$

闭环传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$\text{令：} G(s) = \frac{M_1(s)}{N_1(s)}, H(s) = \frac{M_2(s)}{N_2(s)}$$

$$\text{则开环传递函数为：} G_k(s) = \frac{M_1(s)M_2(s)}{N_1(s)N_2(s)} \dots\dots\dots (a)$$

$$\text{闭环传递函数为：} \Phi(s) = \frac{M_1N_2}{M_1M_2 + N_1N_2} \dots\dots\dots (b)$$

构造闭环特征方程为辅助方程：

$$F(s) = 1 + GH = 1 + G_k = 1 + \frac{M_1}{N_1} \cdot \frac{M_2}{N_2} = \frac{M_1 M_2 + N_1 N_2}{N_1 N_2} \dots\dots\dots(c)$$

显然，辅助方程的阶数为n阶，且分子分母同阶。还可以写成：

$$F(s) = \frac{\prod_{i=1}^n (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} \quad \text{。 式中，} -z_i, -p_j \text{ 为} F(s) \text{ 的零、极点。}$$

由上页(a)、(b)及(c)式可以看出：

F(s)的极点为开环传递函数的极点；

F(s)的零点为闭环传递函数的极点；

因此，如果F(s)的零点都位于S平面的左半部，系统就是稳定的，否则系统便不稳定。

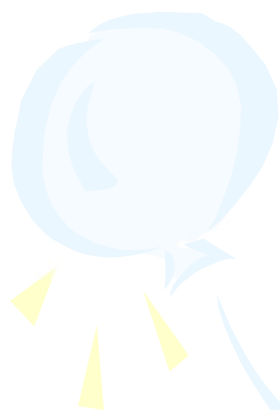
总结: (一)

$$Z = P - R$$

Z : $F(s)$ 零点 (闭极) 位于 s 轴右半面个数 $\begin{cases} Z=0 \text{ 稳} \\ Z \neq 0 \text{ 不稳} \end{cases}$

P : $F(s)$ 极点 (开极) 位于 s 轴右半面个数 (已知)

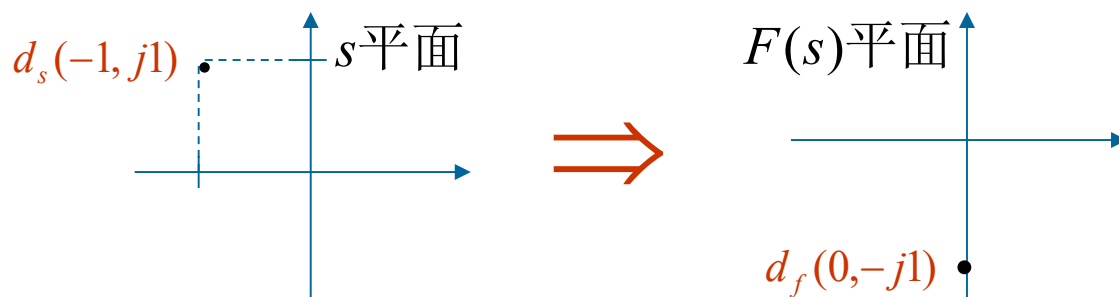
ΔR : { 奈氏曲线 + 开



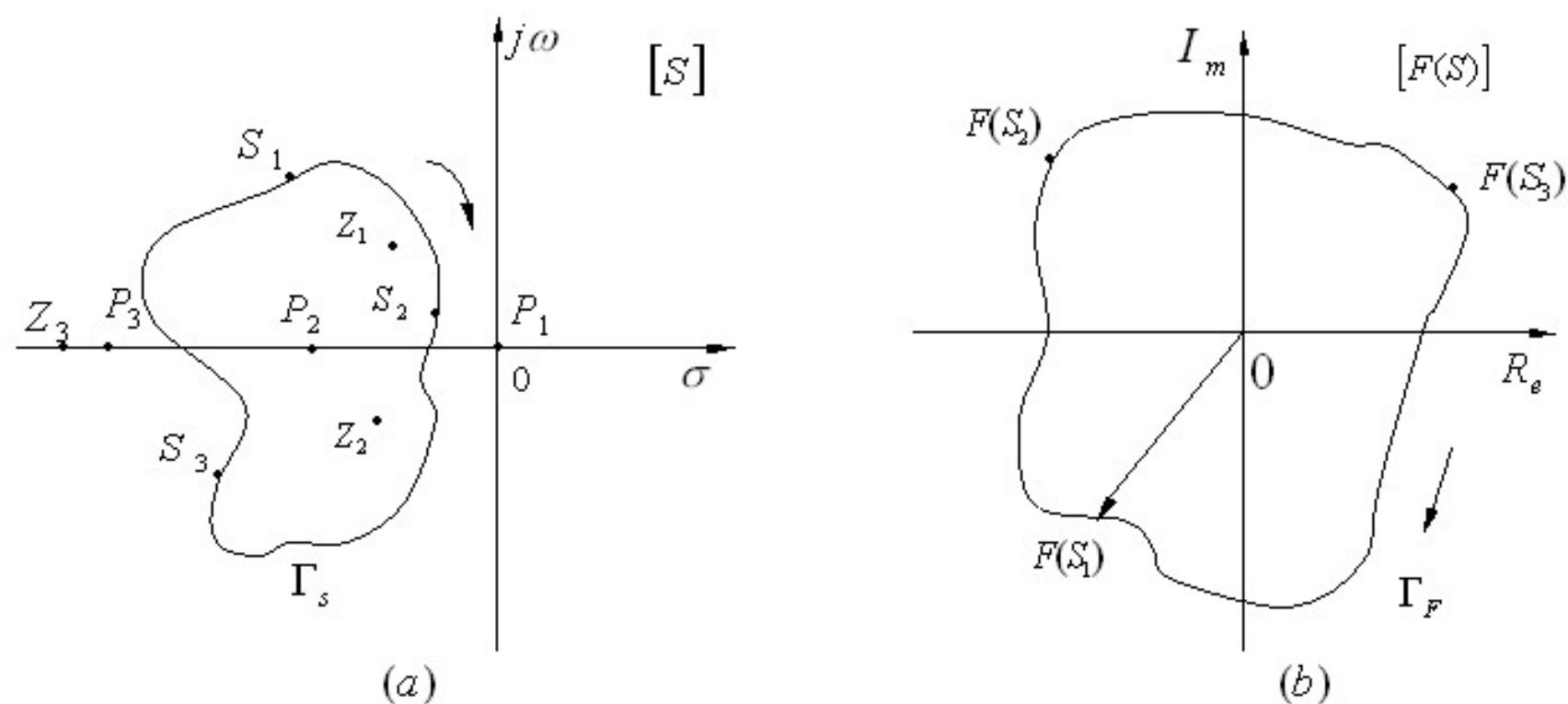
S平面与F(s)平面的映射关系

假设复变函数 $F(s)$ 为单值函数，且除了S平面上有限的奇点外，处处世哲学都为连续的正则函数，也就是说 $F(s)$ 在S平面上除奇点外处处解析，那么，对于平面上的每个解析点，在 $F(s)$ 平面上必有一点（称为映射点）与之对应。

[例]辅助方程为： $F(s) = \frac{s+2}{s}$ ，则s平面上 d_s 点 $(-1, j1)$ ，映射到 $F(s)$ 平面上的点 d_f 为 $(0, -j1)$ ，见下图：



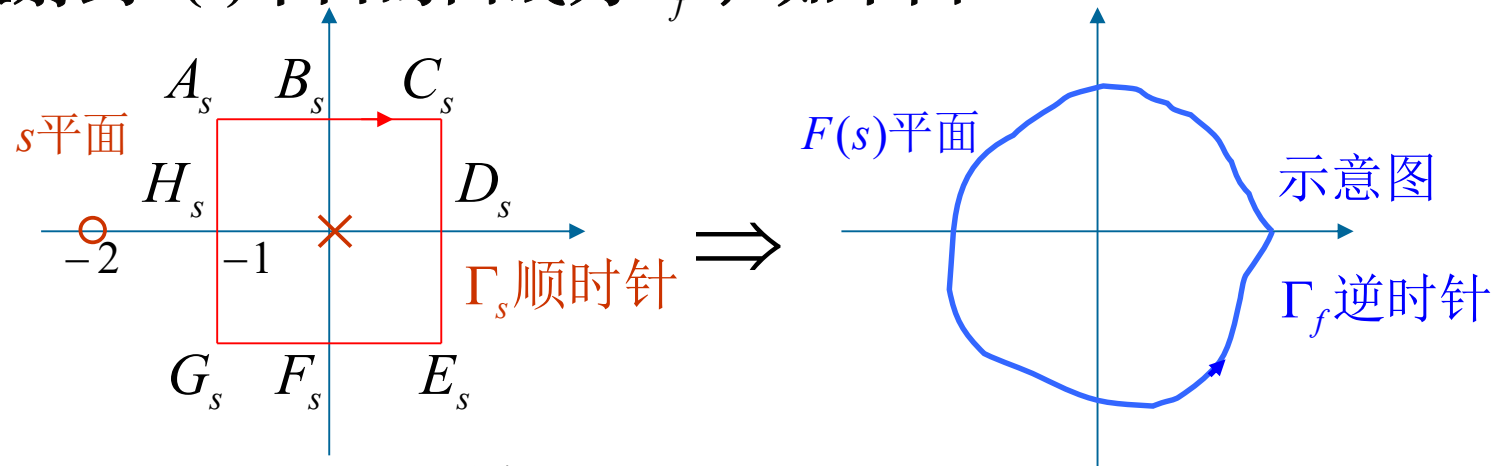
如图所示, 如果解析点 s_1 在 S 平面上沿封闭曲线 Γ_s , (Γ_s 不经过 $F(s)$ 的奇点) 按顺时针方向连续变化一周, 那么辅助函数 $F(s)$ 在 $F(s)$ 平面上的映射也是一条封闭曲线 Γ_F , 但其变化方向可以是顺时针的, 也可以是逆时针的, 这依据辅助函数 $F(s)$ 的性质而定。



S 平面到 $F(s)$ 平面的映射

对于s平面上任意一条不通过F(s)任何奇异点的封闭曲线 Γ_s , 可在F(s)平面上找到一条与之相对应的封闭曲线 Γ_f (称为 Γ_s 的映射)。

同样我们还可以发现以下事实： s 平面上 $A_s B_s C_s D_s E_s F_s G_s H_s$ 曲线 Γ_s 映射到 $F(s)$ 平面的曲线为 Γ_f ，如下图：



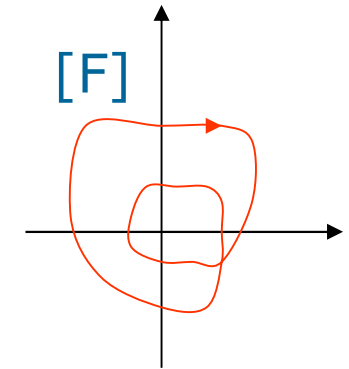
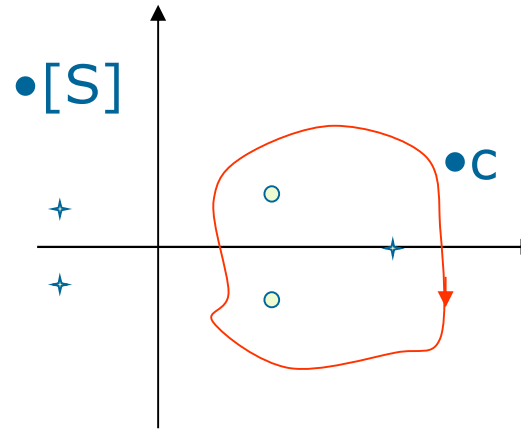
曲线 Γ_s 是顺时针运动的，且包围了 $F(s)$ 的一个极点 (0) ，不包围其零点 (-2) ；曲线 Γ_f 包围原点，且逆时针运动。

再进一步试探，发现：若 Γ_s 顺时针包围 $F(s)$ 的一个极点 (0) 和一个零点 (-2) ，则 Γ_f 不包围原点顺时针运动；若 Γ_s 顺时针只包围 $F(s)$ 的一个零点 (-2) ，则 Γ_f 包围原点且顺时针运动。

$$F(s) = \frac{\prod_{i=1}^n (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} \quad \text{。 式中, } -z_i, -p_j \text{ 为 } F(s) \text{ 的零、极点。}$$

柯西幅角原理:

设在 S 平面的右半侧: 有 **F(s)** 的 z 个零点(闭环极点)和 P 个极点(开环极点)被 C 闭曲线包围, 当某点 S 沿 C 一周时有:



$$\begin{aligned} \Delta F(S) &= \sum_{i=1}^z \angle(s + z_i) - \sum_{j=1}^p \angle(s + p_j) \\ &= z * 360^\circ - p * 360^\circ = (z - p) * 360^\circ \end{aligned}$$

令 $R = (p - z)$, R 为包围 $F(S)$ 原点的圈数

若 $R > 0$, 表示逆时针运动, 包围原点;
若 $R < 0$, 表示顺时针运动, 包围原点。
若 $R = 0$, 不包围原点;

前面我们已经指出 $F(s)$ 的极点数等于开环传递函数 $G(s)H(s)$ 的极点数，因此当我们从 $F(s)$ 平面上确定了封闭曲线 Γ_F 的旋转周数 N 以后，则在 S 平面上封闭曲线 Γ_s 包含的零点 Z （即系统的闭环极点数）便可简单地由下式计算出来

$$Z=P-N$$

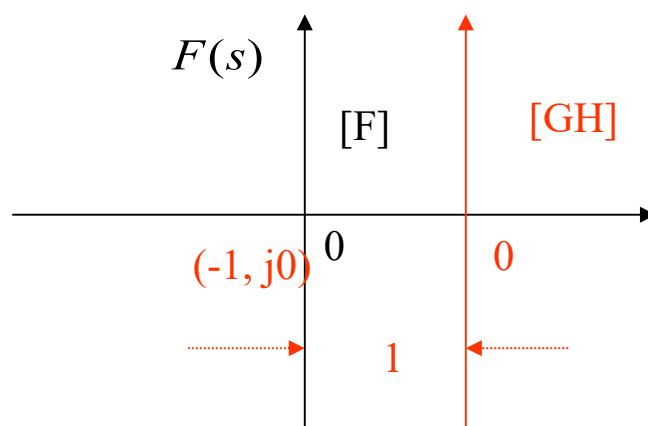
证明过程见教材

用辅助函数 $F(s)=1+G(s)H(s)$ 来分析系统的稳定性仍然不大方便，实际上，开环传递函数与辅助函数之间的关系非常简单，即

$$G(s)H(s) = F(s) - 1$$

上式意味着将F(s)平面的纵轴向右平移一个单位后构成的平面，即为GH平面（如下图）。

F(s)平面的坐标原点是GH平面的 $(-1, j0)$ 点。因此， Γ_f 绕F(s)平面原点的周数等效于 Γ_s 绕GH平面 $(-1, j0)$ 点的周数。



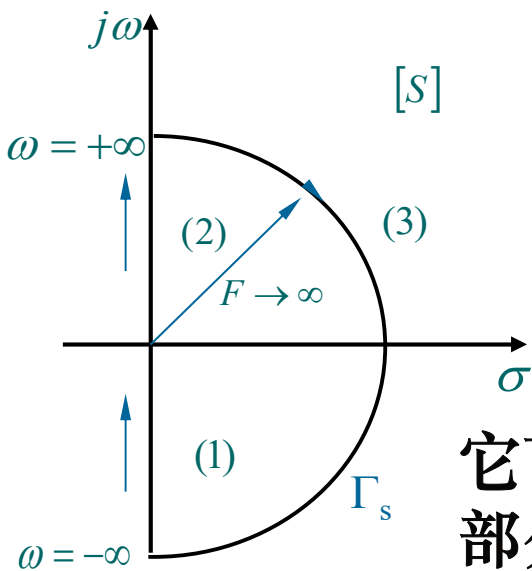
需要解决两个问题：

1、如何构造一个能够包围整个 **s** 右半平面的封闭曲线，并且它是满足柯西幅角条件的？

2、如何确定相应的映射 **$F(s)$** 对原点的包围次数 **R** ，并由 **R** 确定系统的稳定性

S平面闭合曲线的选择

1、先假设 $G(s)H(s)$ 在 s 平面虚轴上没有零、极点。按顺时针方向做 Γ_s 一条曲线 包围整个 s 右半平面，这条封闭曲线称为奈魁斯特路径。如下图：

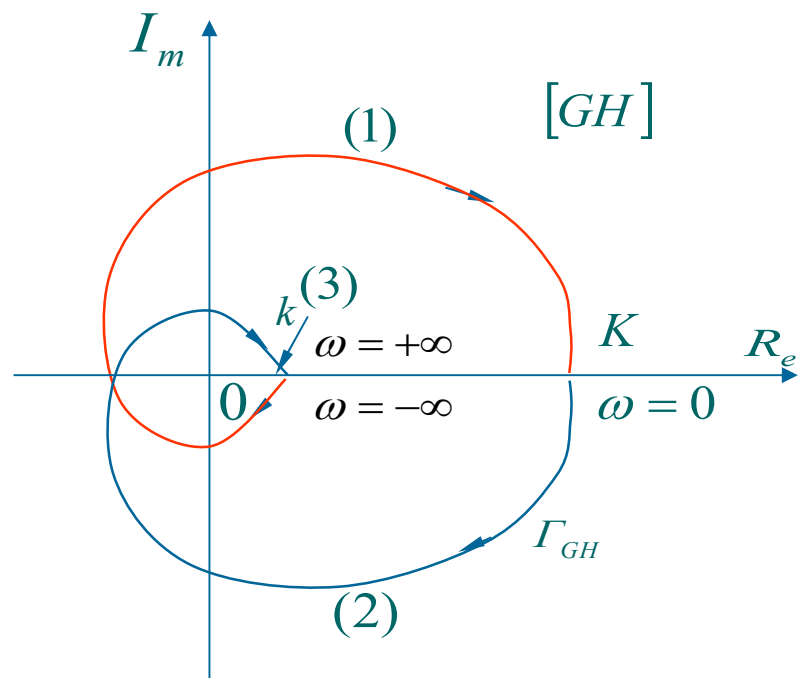


它可分为三部分：I部分是正虚轴， $\omega = 0 \rightarrow +\infty$ ；II部分是右半平面上半径为无穷大的半圆；

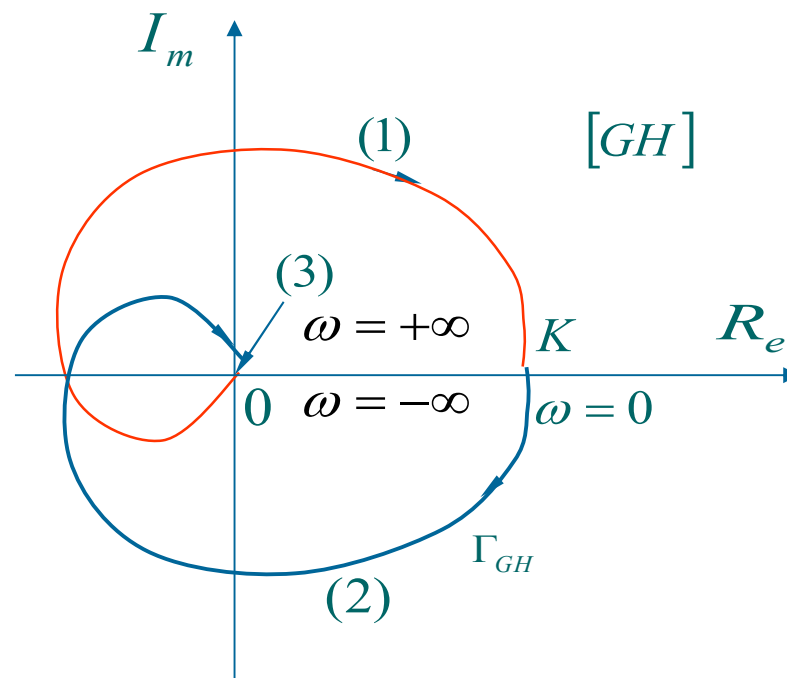
$s = R \cdot e^{j\omega}, R \rightarrow \infty, \theta$ 从 $\frac{\pi}{2} \rightarrow -\frac{\pi}{2}$; III部分是负虚轴, $\omega = -\infty \rightarrow 0$ 。

Nyquist 轨迹

映射到GH平面的图形如下版



(a) $n = m$



(b) $n > m$

Γ_s 在GH平面上的映射

- 由于正负虚轴在**S**平面上以实轴为对称，它们在**GH**平面上的映射也应对称于实轴.奈氏轨迹的无穷大半圆弧在**GH**平面上的映射为常数**K**，当**n>m**时，无穷大半圆弧在**GH**平面上的映射是它的坐标原点（**K**为系统开环放大系数）。

奈氏轨迹 Γ_s 在 \mathbf{GH} 平面上的映射称为奈奎斯特曲线或奈氏曲线。

2、当 $\mathbf{G(s)H(s)}$ 在 \mathbf{S} 平面的虚轴上（包括原点）有极点时，由于奈氏轨迹不能经过开环极点（奇异点），轨迹必须避开虚轴上的所有开环极点。下版图表示当有开环极点为零时的奈氏轨迹和对应的奈氏曲线映射，其中（**1**）（**2**）和（**3**）部分的定义与前面相同，第（**4**）部分为用一个半径为无穷小的弧绕开原点（包括虚轴）上的极点。

图1中第（4）部分无穷小半圆弧在 GH平面上的映射为顺时针旋转的无穷大圆弧，旋转的弧度为 v 弧度。图2（a）、（b）分别表示当 $v=1$ 和 $v=2$ 时系统的奈氏曲线，其中虚线部分是 Γ_s 的无穷小半圆弧在GH平面上的映射。

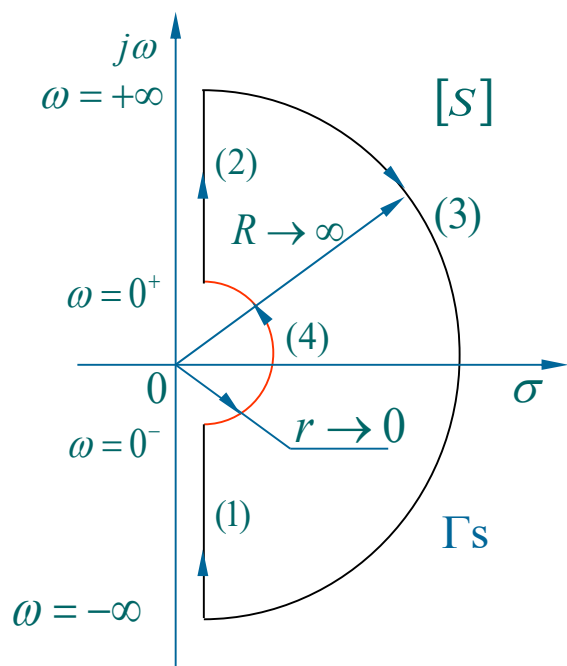


图1 虚轴上有开环极点时的奈氏轨迹

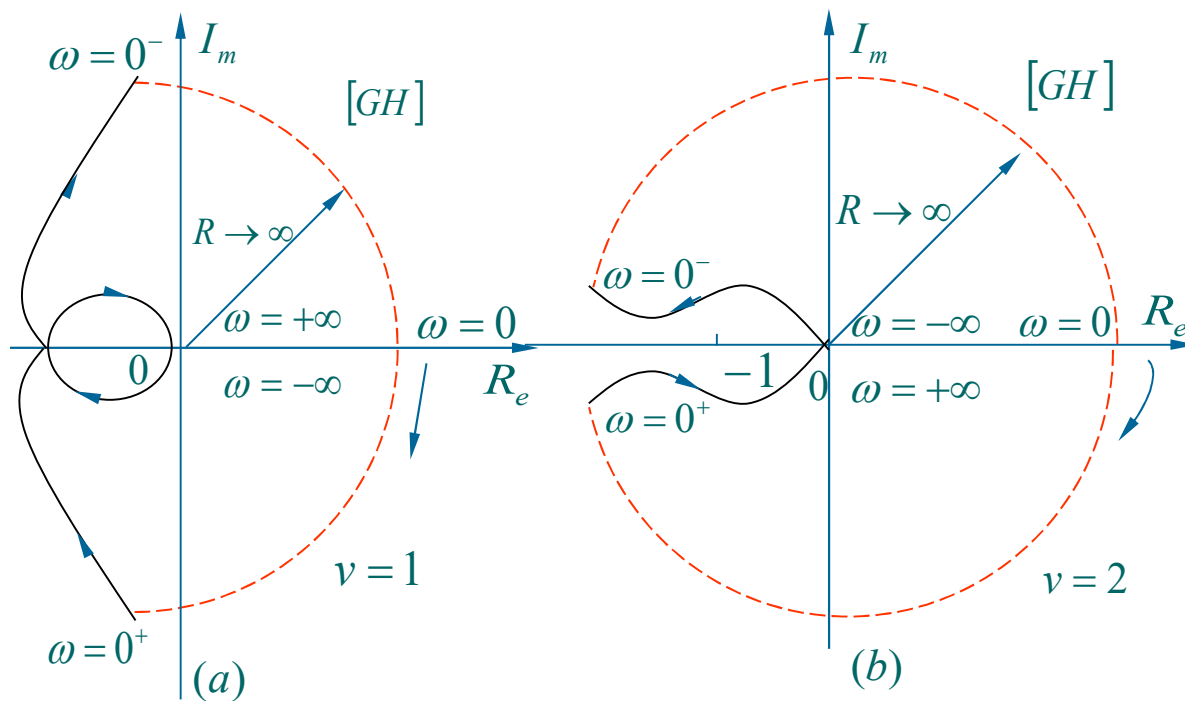


图2 $v \neq 0$ 时的奈氏曲线

从上面的分析可知，奈氏曲线实际上是系统开环频率特性 $G(j\omega)H(j\omega)$ 极坐标图的扩展。当已知系统的开环频率特性后，根据它的极坐标图和系统的性质（是否含有积分环节、开环传递函数中分子分母的最高阶次等）便可方便地在 GH 平面上绘制出奈氏曲线。由此我们得到基于开环频率特性的奈氏判据如下：

奈奎斯特稳定判据

闭环系统稳定的充分必要条件是， $G(j\omega)H(j\omega)$ 平面上的开环频率特性，按逆时针方向包围 $(-1, j0)$ 点 P 周。

当位于 S 平面右半部的开环极点数 $P=0$ 时，即当系统的开环传递函数的全部极点均位于 S 平面左半部（包括原点和虚轴）时，闭环系统稳定的充分必要条件是奈氏曲线不包围 GH 平面的 $(-1, j0)$ 点。

综上所述，应用奈氏判据分析系统稳定性时，可能会遇到下列三种情况：

- (i) 当系统开环传递函数 $G(s)H(s)$ 的全部极点都位于S平面左半部时 ($P=0$)，如果系统的奈氏曲线 Γ_{GH} 不包围GH平面的 $(-1, j0)$ 点 ($N=0$)，则闭环系统是稳定的 ($z=p-N=0$)，否则是不稳定的；
- (ii) 当系统开环传递函数 $G(s)H(s)$ 有 p 个位于S平面右半部的极点时，如果系统的奈氏曲线 Γ_{GH} 逆时针包围 $(-1, j0)$ 点的周数等于位于S平面右半部的开环极点数 ($N=P$)，则闭环系统是稳定的 ($Z=P-N=0$)，否则是不稳定的；
- (iii) 如果系统的奈氏曲线 Γ_{GH} 顺时针包围点 $(-1, j0)$ ($N<0$)，则闭环系统不稳定。 ($Z=P-N>0$)。

从上面的分析可知，奈氏曲线 Γ_{GH} 是否包围GH平面的 $(-1, j0)$ 点是判别系统是否稳定的重要依据（当然还须考虑是否存在S平面右半部的开环极点和 Γ_{GH} 曲线包围 $(-1, j0)$ 点的方向）。在有些情况下， Γ_{GH} 曲线恰好通过GH平面的 $(-1, j0)$ 点（注意不是包围），此时如果系统无位于S平面右半部的开环极点，则系统处于临界稳定状态。

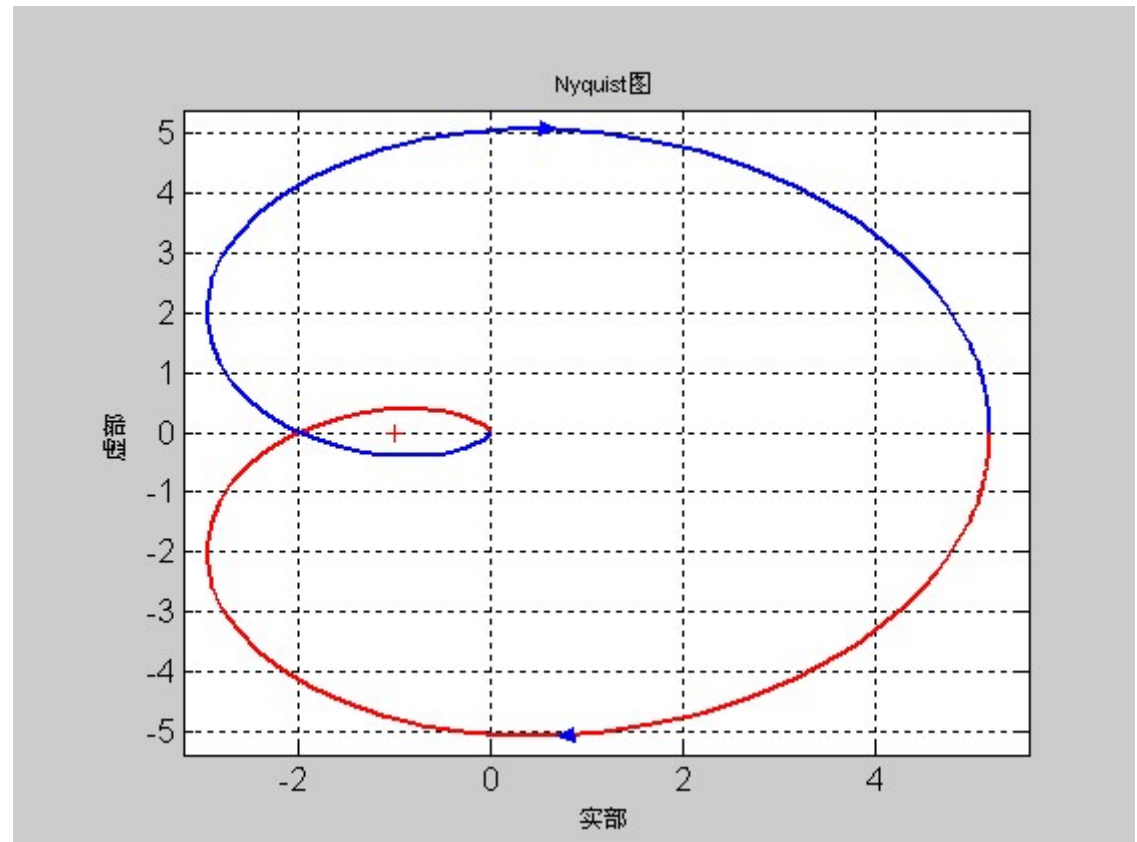
[例1]设开环系统传递函数为：
判据判断闭环系统的稳定性。

$$G_k(s) = \frac{52}{(s+1)(s^2+2s+5)} \quad \text{试用奈氏}$$

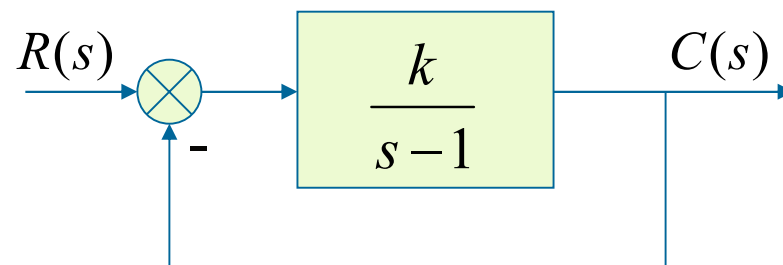
[解]：开环极点为-1，

$-1 \pm j2$ ，都在s左半平面，
所以 $P=0$ 。奈氏图如右。
从图中可以看出：奈氏图
顺时针围绕 $(-1, j0)$ 点2圈。
所以闭环系统在s右半极
点数为：

$Z=P-R=0+2=2$ ，闭环系统
是不稳定的。

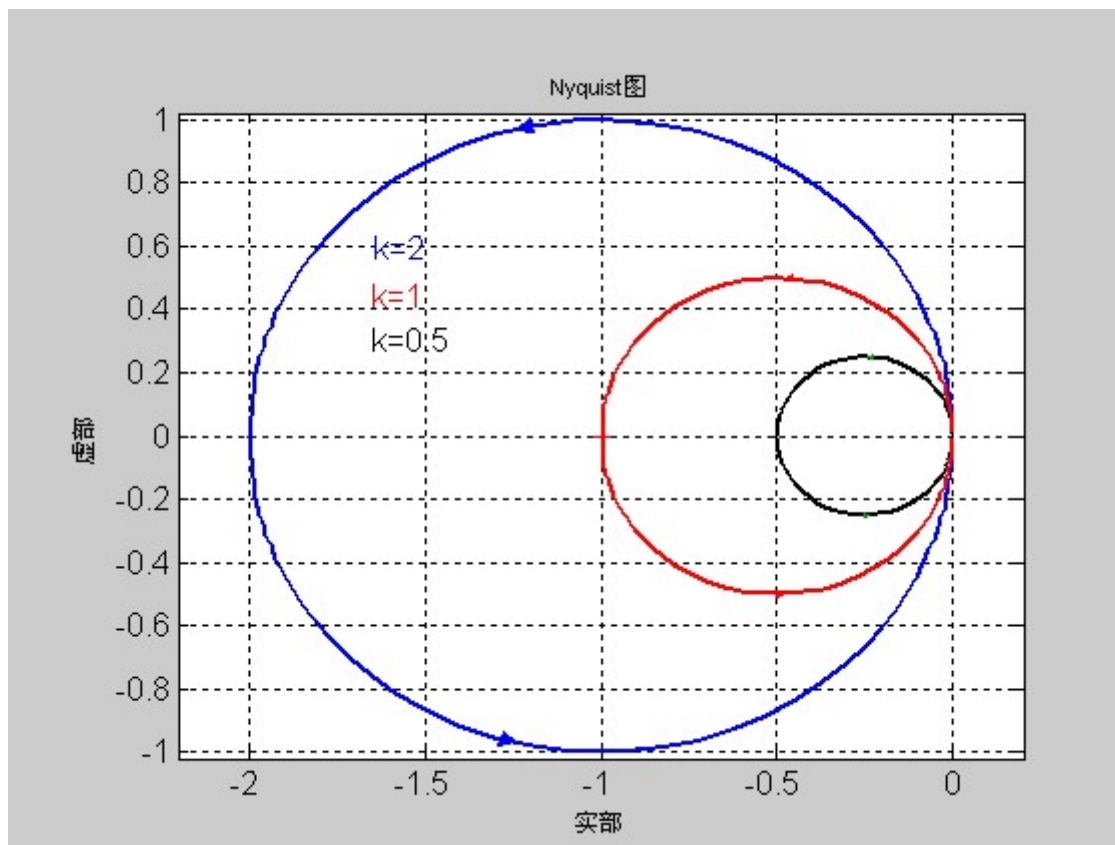


[例2]系统结构图如右：试判断闭环系统的稳定性并讨论稳定性和k的关系。



[解]：开环系统奈氏图是一个半径为 $\frac{k}{2}$ ，圆心在 $(\frac{k}{2}, 0)$ 的圆。显然， $k \geq 1$ 时，包围 $(-1, j0)$ 点， $k < 1$ 时不包围 $(-1, j0)$ 点。

由图中看出：当 $k > 1$ 时，奈氏曲线逆时针包围 $(-1, j0)$ 点一圈， $R=1$ ，而 $P=1$ ，则 $Z=P-R=0$ ，闭环系统是稳定的。



当 $k=1$ 时，奈氏曲线通过 $(-1, j0)$ 点，属临界稳定状态。

当 $k<1$ 时，奈氏曲线不包围 $(-1, j0)$ 点， $N=0, P_k=1$ ，所以 $Z_k=1$ ，闭环系统不稳定。

一种简易的奈氏判据

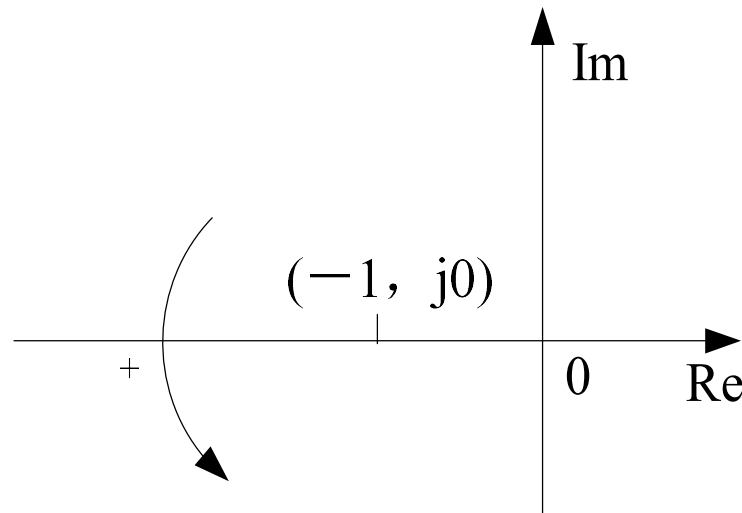
正、负穿越的概念

$G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线对称实轴。应用中只画 $\omega = 0 \rightarrow \infty$ 部分。

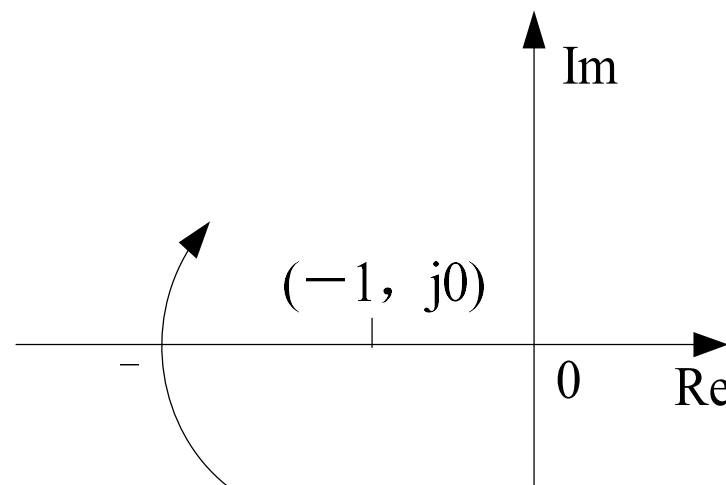
所谓“穿越”是指 轨迹穿过 $1, -\infty$) 段。

正穿越： 从上而下穿过该段一次（相角增加），用 N_+ 表示。

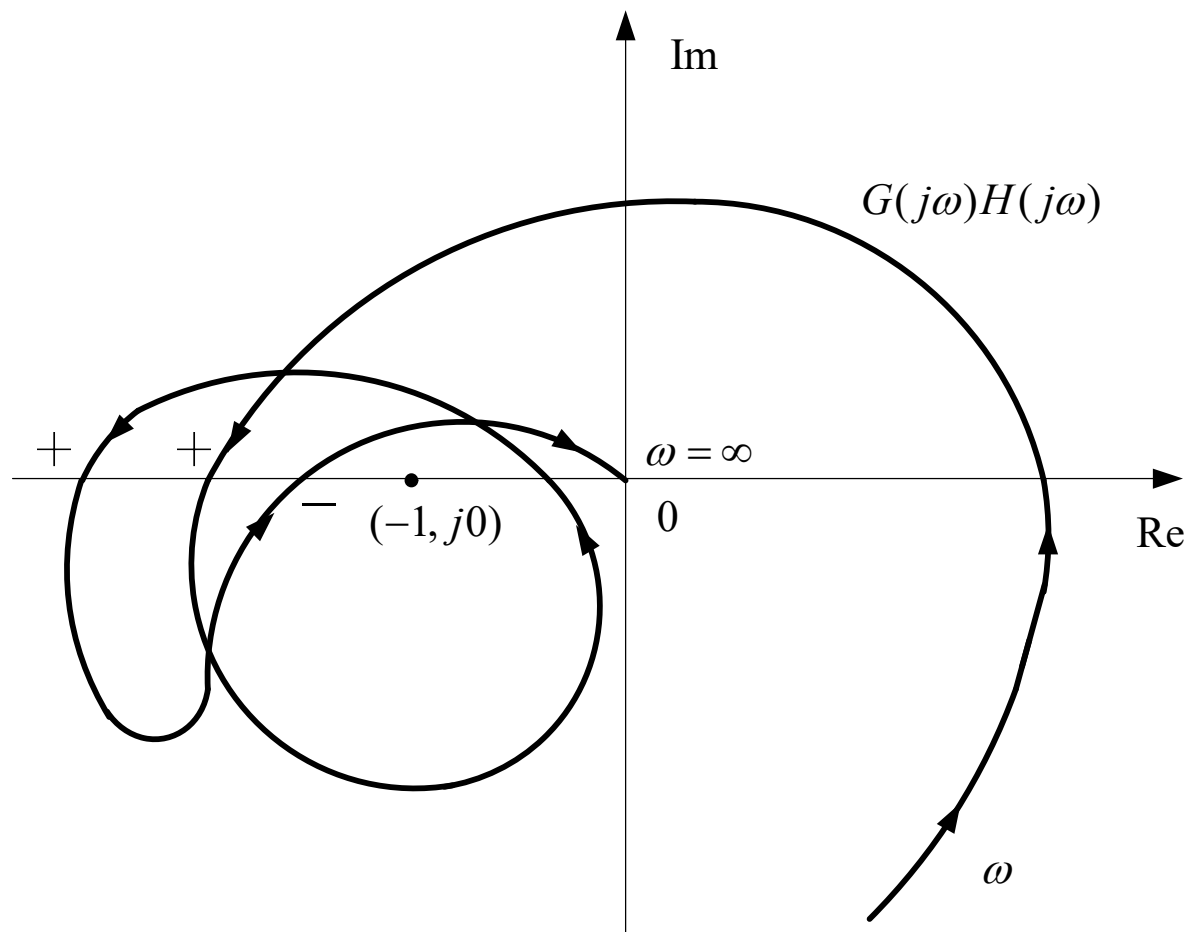
负穿越： 由下而上穿过该段一次（相角减少），用 N_- 表示。



正穿越



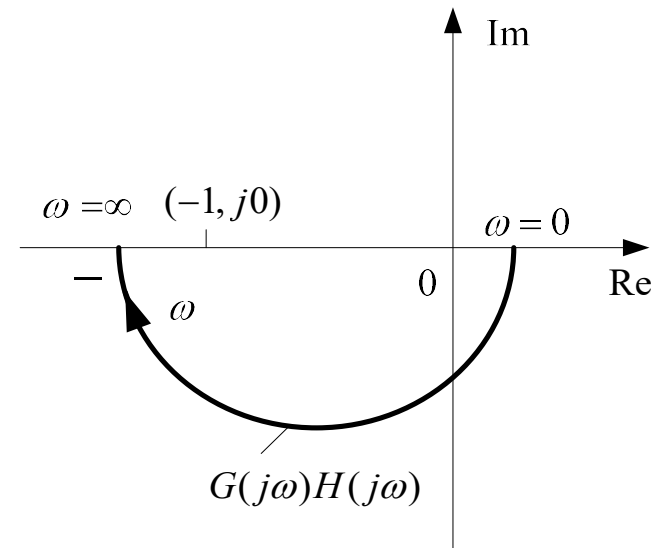
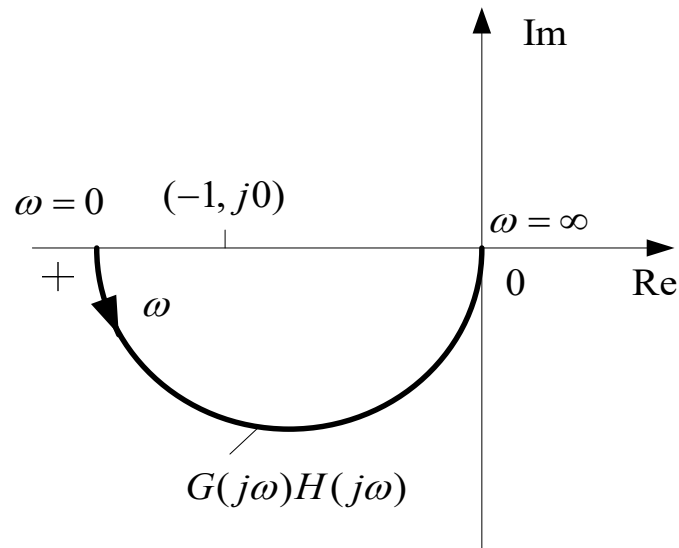
负穿越



$$N_+=2$$

$$N_-=1$$

若 $G(j\omega)H(j\omega)$ 轨迹起始或终止于 $(-1, j0)$ 以左的负轴上，则穿越次数为半次，且同样有 $+1/2$ 次穿越和 $-1/2$ 次穿越。



奈氏判据又可表述为：

闭环系统稳定的充要条件是：当 ω 由0变化到 ∞ 时， $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线在 $(-1, j0)$ 点以左的负实轴上的正负穿越之和为 $P/2$ 次。

P 为开环传递函数在 s 右半平面的极点数。此时

$$Z=P-R=P-2N, \quad N=N_+-N_-$$

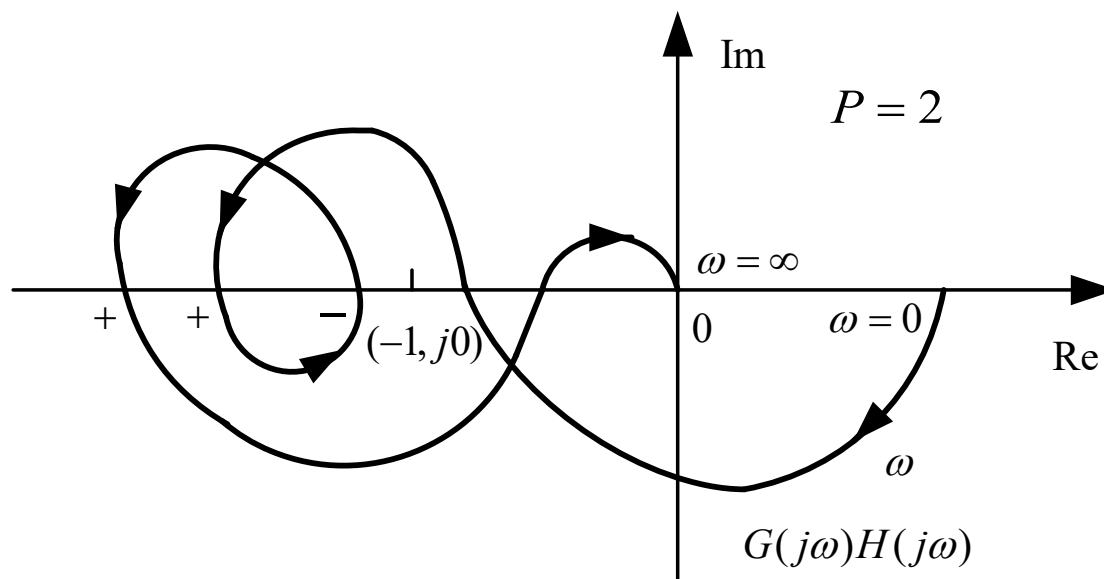
若开环传递函数无极点分布在 S 右半平面，即 $P=0$ ，则闭环系统稳定的充要条件应该是正、副穿越次数之和 $N=0$ ：

注意：这里对应的 ω 变化范围是 $0 \rightarrow +\infty$ 。

例3：某系统 **$G(j\omega)H(j\omega)$** 轨迹如下，已知有**2**个开环极点分布在 **s** 的右半平面，试判别系统的稳定性。

解：系统有**2**个开环极点分布在 **s** 的右半平面(**$P=2$**)， **$G(j\omega)H(j\omega)$** 轨迹在点 **$(-1, j0)$** 以左的负实轴有**2**次正穿越，**1**次负穿越，因为： **$N = N_+ - N_- = 2 - 1 = 1$**

求得： **$Z = P - 2N = 2 - 2 = 0$** 所以系统是稳定系统。



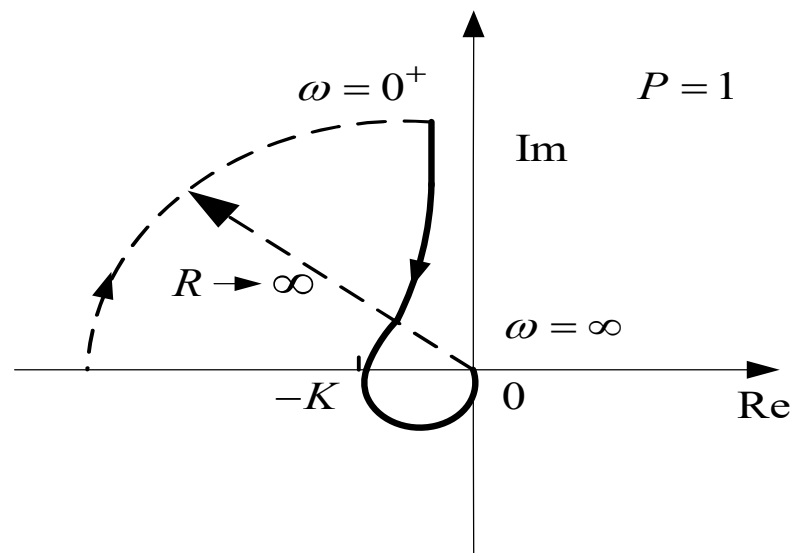
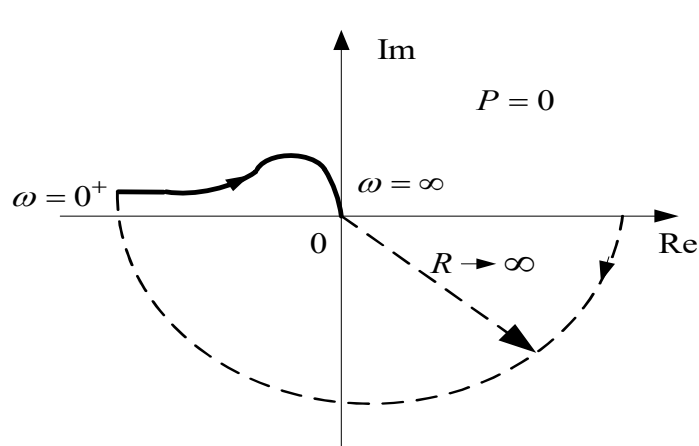
例4: 两系统取一半奈氏曲线, 试分析系统稳定性。

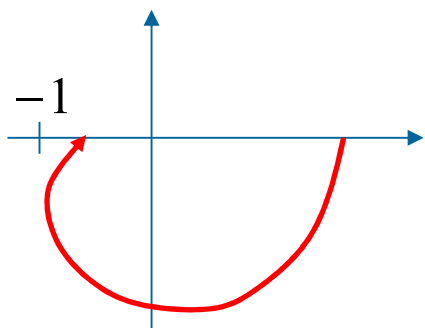
解: (a) : $N = N_+ - N_- = (0-1) = -1$, 如已知 $P = 0$, 所以
 $Z = P - 2N = 2$ 系统不稳定。

(b) : $K > 1$ 时, $N = N_+ - N_- = 1 - 1/2 = -1/2$, 如已知 $P = 1$, 所以
 $Z = P - 2N = 0$, 闭环系统稳定;

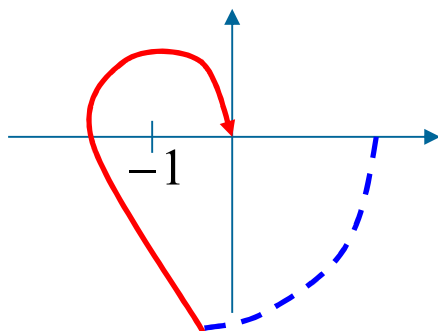
$K < 1$ 时, $N = N_+ - N_- = 0 - 1/2 = -1/2$, 如已知 $P = 1$,
所以 $Z = P - 2N = 2$, 闭环系统不稳定;

$K = 1$ 时, 奈氏曲线穿过 $(-1, j0)$ 点两次(对称), 说明有两个根在虚轴上, 所以系统不稳定。

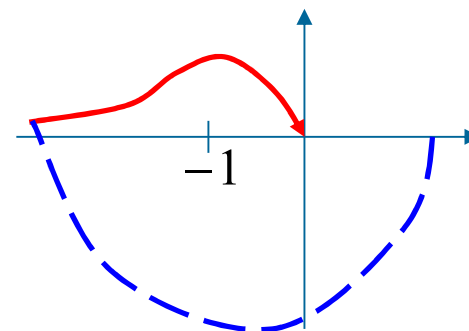




不穿过 $(-1, j0)$ 点, $N = 0$
0型系统

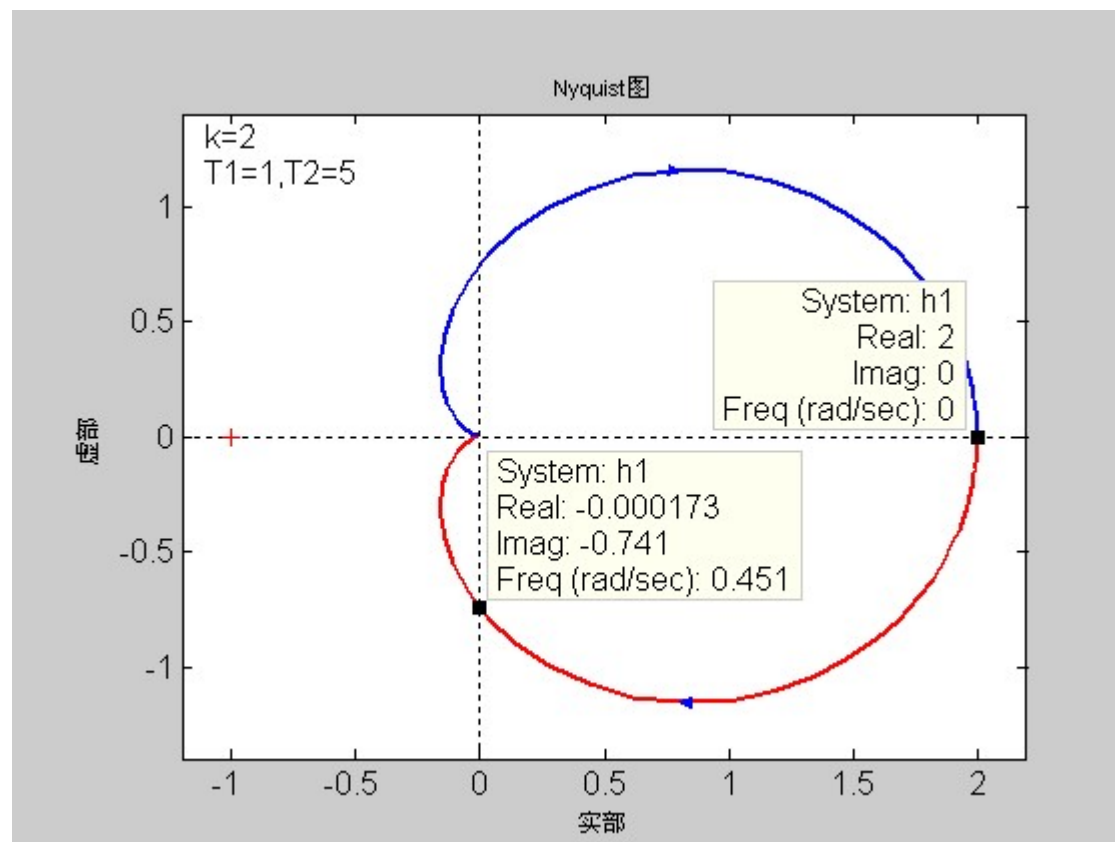


负穿过 $(-1, j0)$ 点, $N_- = 1$
I型和II型系统



[例5]开环传递函数为： $G_k(s) = \frac{k}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$ 试用奈氏判据判断闭环系统的稳定性。

[解]：开环系统的奈氏图如右。在s右半平面的极点数为0，只看其中的一半图形，穿过(-1,j0)点的次数 $N^- = N^+ = 0$ ，则闭环系统在s右半平面的极点数： $Z = P - 2N = 0$ ，故闭环系统是稳定的。

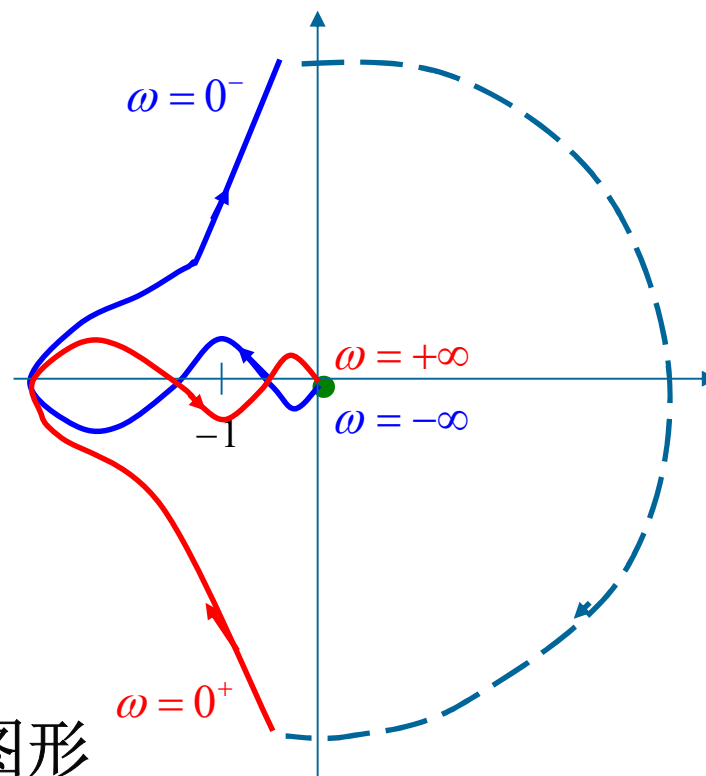


[例6]设I型系统的开环频率特性如下图所示。开环系统在s右半平面没有极点，试用奈氏判据判断闭环系统稳定性。

[解]：显然这是1型系统。先根据奈氏路径画出完整的映射曲线。

解法一，从图上看：映射曲线顺时针包围 $(-1, j0)$ 一圈，逆时针包围 $(-1, j0)$ 一圈，所以 $N=1-1=0$ ，而 $P=0$ ，故 $Z=P-R=0$ ，闭环系统是稳定的。

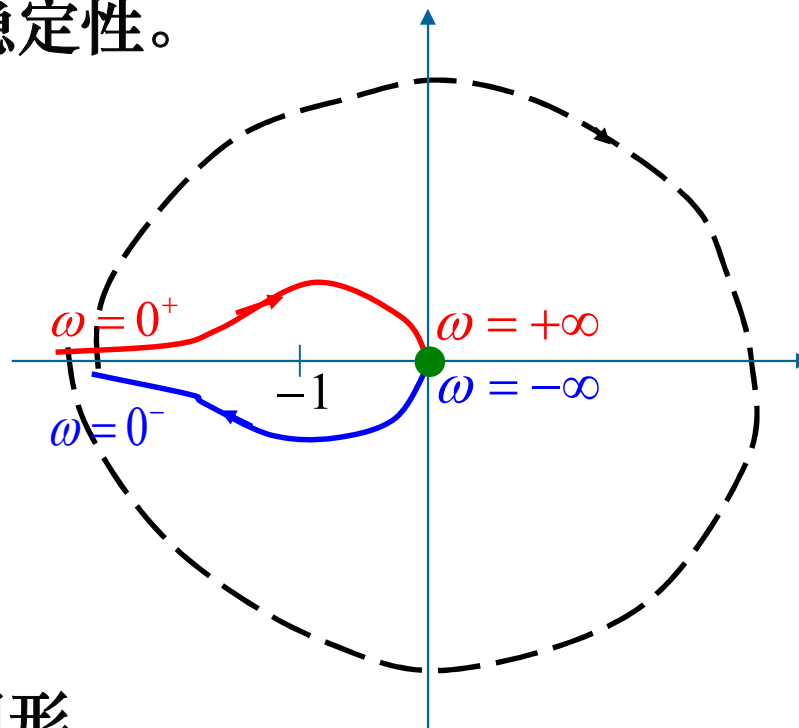
解法二，只看其中的 $0 \rightarrow +\infty$ 的一半图形（红线），正、副穿越各一次， $N_+-N_-=0$ ，故 $Z=P-2N=P-2(N_+-N_-)=0$ ，闭环系统是稳定的。



[例7]某II型系统的开环频率特性如下图所示，且s右半平面无极点，试用奈氏判据判断闭环系统稳定性。

[解]：首先画出完整的奈氏曲线的映射曲线。如右图：

解法一，从图上可以看出：映射曲线顺时针包围 $(-1, j0)$ 两圈， $R=-2$ 。因 $P=0$ ，所以 $Z=P-R=2$ ，闭环系统是不稳定的。



解法二，只看其中的 $0 \rightarrow +\infty$ 的一半图形

(红线)，副穿越一次， $N-=1$ ，

故 $Z=P-2N=P-2(-N-)=2$ ，闭环系统是不稳定的。

3、对数频率稳定判据

开环系统的极坐标图（奈氏图）和对数坐标图（波德图）有如下的对应关系：

1、奈氏图上单位圆对应于对数坐标图上的零分贝线；

$$A(\omega) = 1, 20 \log A(\omega) = 0 \quad \circ$$

2、奈氏图上的负实轴对应于对数坐标图上的-180度相位线。

极坐标图

单位圆

单位圆以内区域

单位圆以外区域

负实轴

伯德图

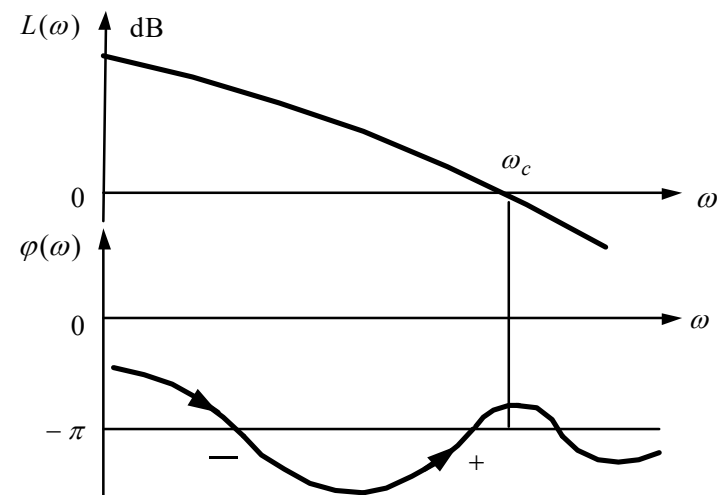
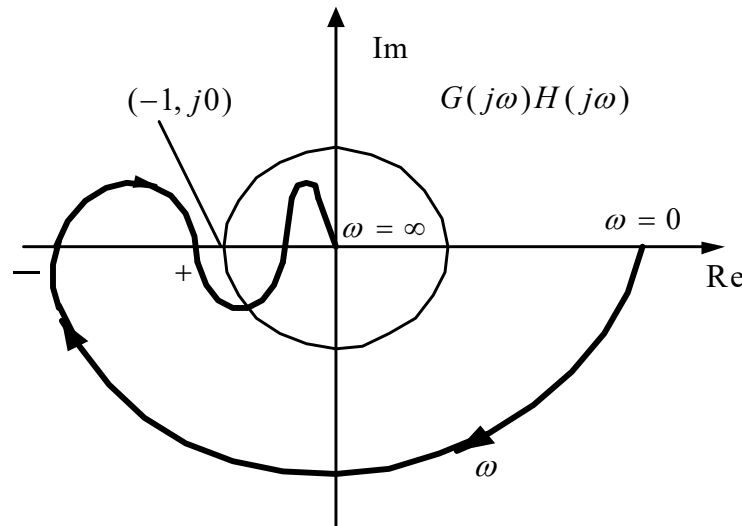
0db线（幅频特性图）

0db线以下区域

0db线以上区域

-180°线（相频特性图）

因此，奈氏曲线自上而下-角度减小（或自下而上-角度增大）地穿越 $(-1, j0)$ 点左边的负实轴，相当于在伯德图中当 $L(\omega) > 0\text{db}$ 时相频特性曲线自下而上（或自上而下）地穿越 -180° 线。



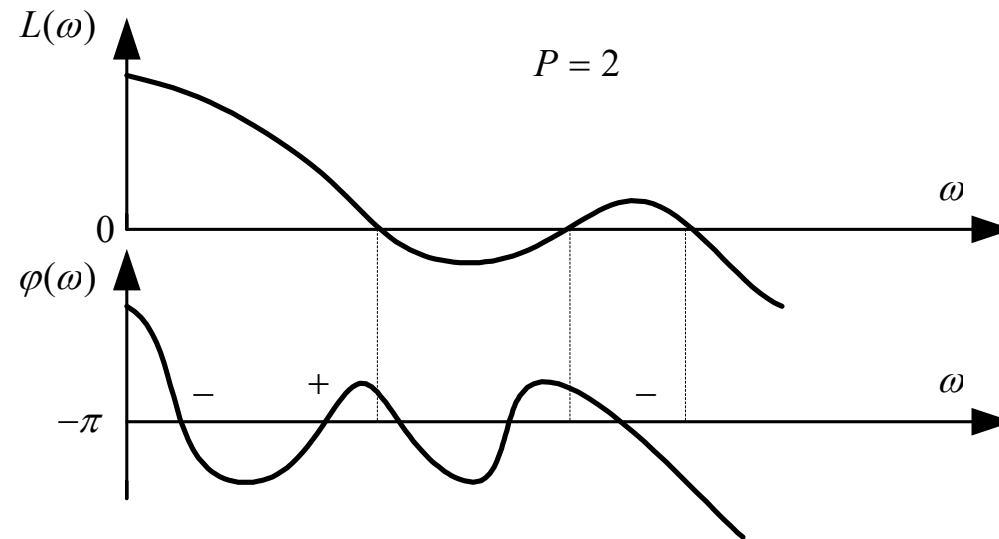
参照极坐标中奈氏判据的定义，对数坐标下的奈判据可表述如下：

闭环系统稳定的充要条件是：当 ω 由0变到 ∞ 时，在开环对数幅频特性 $L(\omega) \geq 0$ 的频段内，相频特性 $\varphi(\omega)$ 穿越的次数（正穿越 N_+ 与负穿越 N_- 次数之差）为 $P/2$ 。

P 为开环传递函数在 s 右半平面的极点数。

若开环传递函数无极点分布在**S**右半平面，即 $P = 0$ ，则闭环系统稳定的充要条件是：在 $L(\omega) \geq 0$ 的频段内，相频特性 $\varphi(\omega)$ 在 $-\pi$ 线上正负穿越次数代数和为零。或者不穿越 $-\pi$ 线。

例：某系统有两个开环极点在S右半平面（ $P=2$ ）



$$N_+ - N_- = 1 - 2 = -1 \text{ 不等于 } P/2 (=1)$$

所以，系统不稳定。

小结

- 柯西幅角定理。满足该定理的条件。 $R=P-Z$
- 辅助方程。其极点为开环极点，其零点为闭环极点。
- 奈奎斯特稳定判据。开环系统的奈氏路径及其映射；对数坐标图上奈氏判据的描述。

作业

- 5-10
- 5-11(1)(3)