第二章

控制系统的数学模型

第二章 控制系统的数学模型

- **2-2** 控制系统的时域数学模型
- **2-3** 控制系统的复数域数学模型
- **2-4** 控制系统的结构图与信号流图

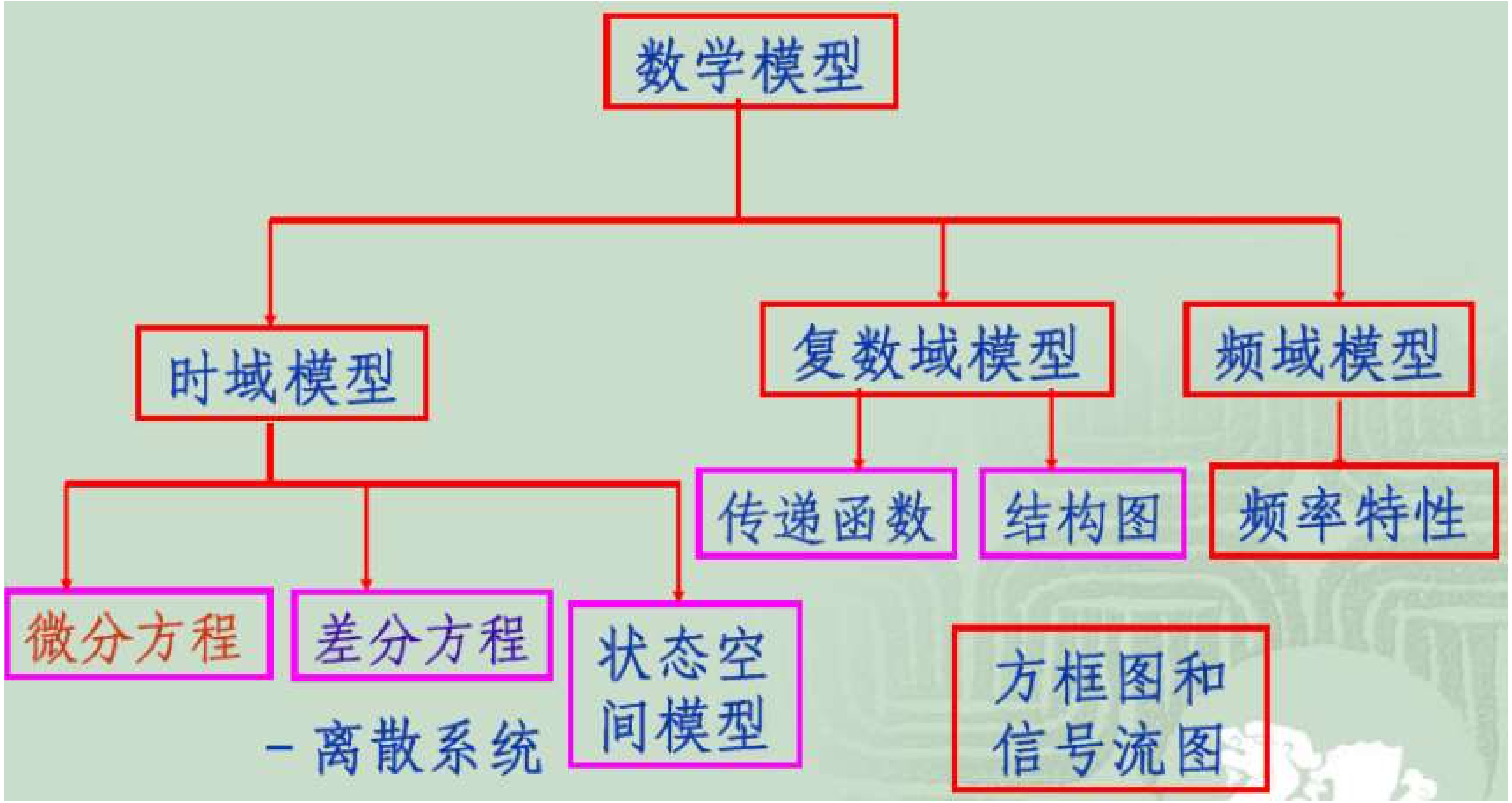
物理模型——任何元件或系统实际上都是很复杂的，难以对它作出精确、全面的描述，必须进行简化或理想化。简化后的元件或系统为该元件或系统的物理模型。简化是有条件的，要根据问题的性质和求解的精确要求，来确定出合理的物理模型。

数学模型——描述系统或元件的动态特性的数学表达式叫做系统或元件的数学模型。

建模——深入了解元件及系统的动态特性，准确建立它们的数学模型－称建模。

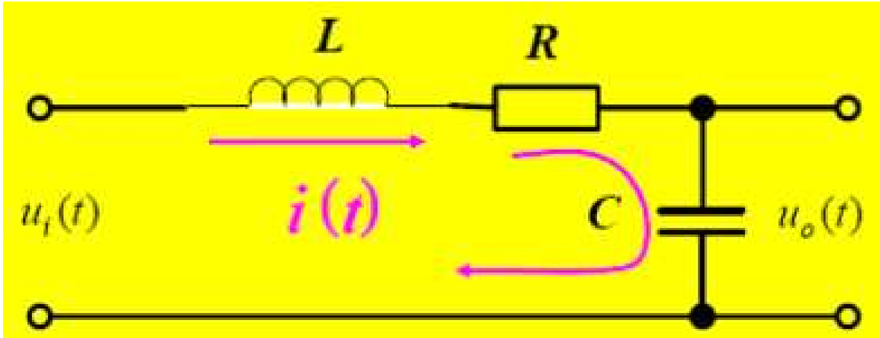
- 电子放大器看成理想的线性放大环节。
- 通讯卫星看成质点。
- 手电筒灯泡看成电阻。

数学模型是架于数学与实际问题之间的桥梁。在数学发展的进程中无时无刻不留下数学模型的印记。


数学模型
时域模型
复数域模型
频域模型
微分方程
差分方程
状态空间模型
－离散系统
传递函数
结构图
频率特性
方框图和信号流图

2-1 控制系统的时域数学模型

1.线性元件的微分方程



求此RLC无源网络的微分方程：

解：设回路电流为i(t)，可得：

$$L\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int i(t)dt+Ri(t)=u_i(t)$$

$$u_0(t)=\frac{1}{C}\int i(t)dt$$

消去中间变量i(t)，可得到描述网络输入输出关系的微分方程为：

$$LC\frac{d^2u_0(t)}{dt^2}+RC\frac{du_0(t)}{dt}+u_0(t)=u_i(t)$$

列写元件微分方程的步骤可归纳如下：

1）根据元件的工作原理及其在控制系统中的作用，确定其输入量和输出量；

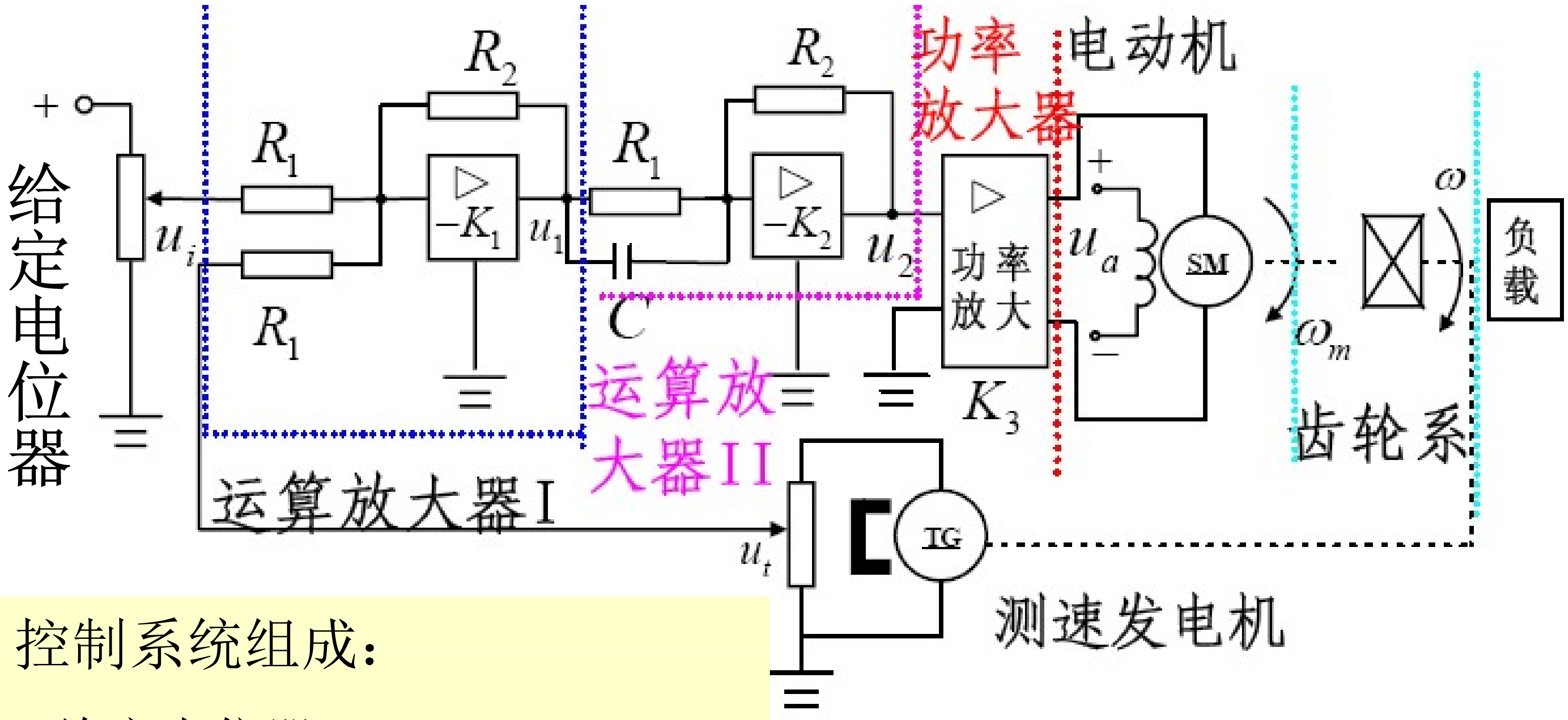
2）分析元件工作中所遵循的物理规律或化学规律，列写相应的微分方程；

3）消去中间变量，得到输出量与输入量之间关系的微分方程，便是元件时域的数学模型。

◆　一般情况下，应将微分方程写为标准形式，即与<u>输入量有关的项写在方程的右端</u>，与<u>输出量有关的项写在方程的左端</u>，方程两端的导数项均按降幂排列。

2.控制系统微分方程的建立

建立控制系统的微分方程时，一般先由系统原理线路图 画出系统方块图，并分别列写组成系统各元件的微分方程，然后，消去中间变量便得到描述系统输出量与输入量之间关系的微分方程。



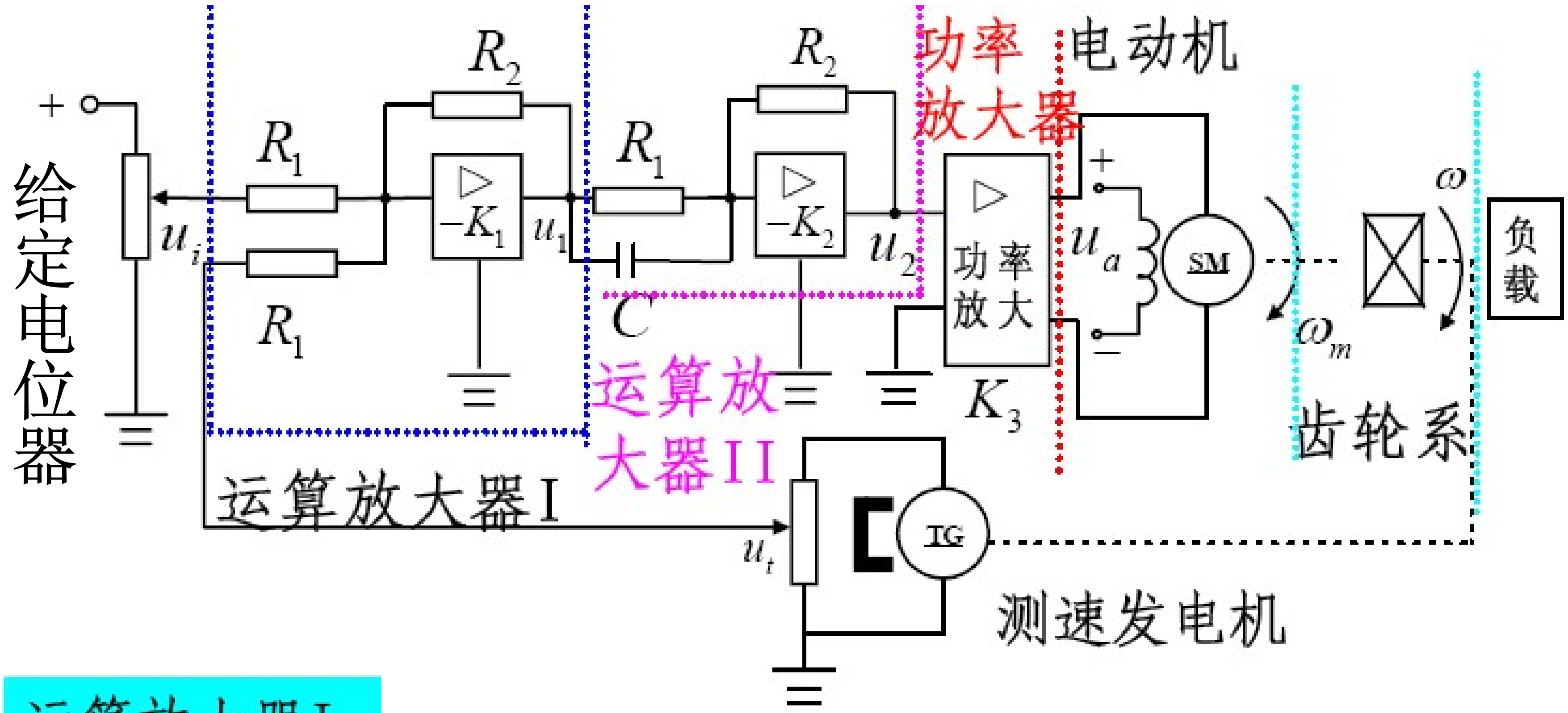
控制系统组成：

- 给定电位器
- 运算放大器I（含比较作用）
- 运算放大器II（含RC校正网络）
- 功率放大器
- 测速发电机
- 减速器

被控对象：电动机（带负载）

输出量：转速 ω

参据量：u_i

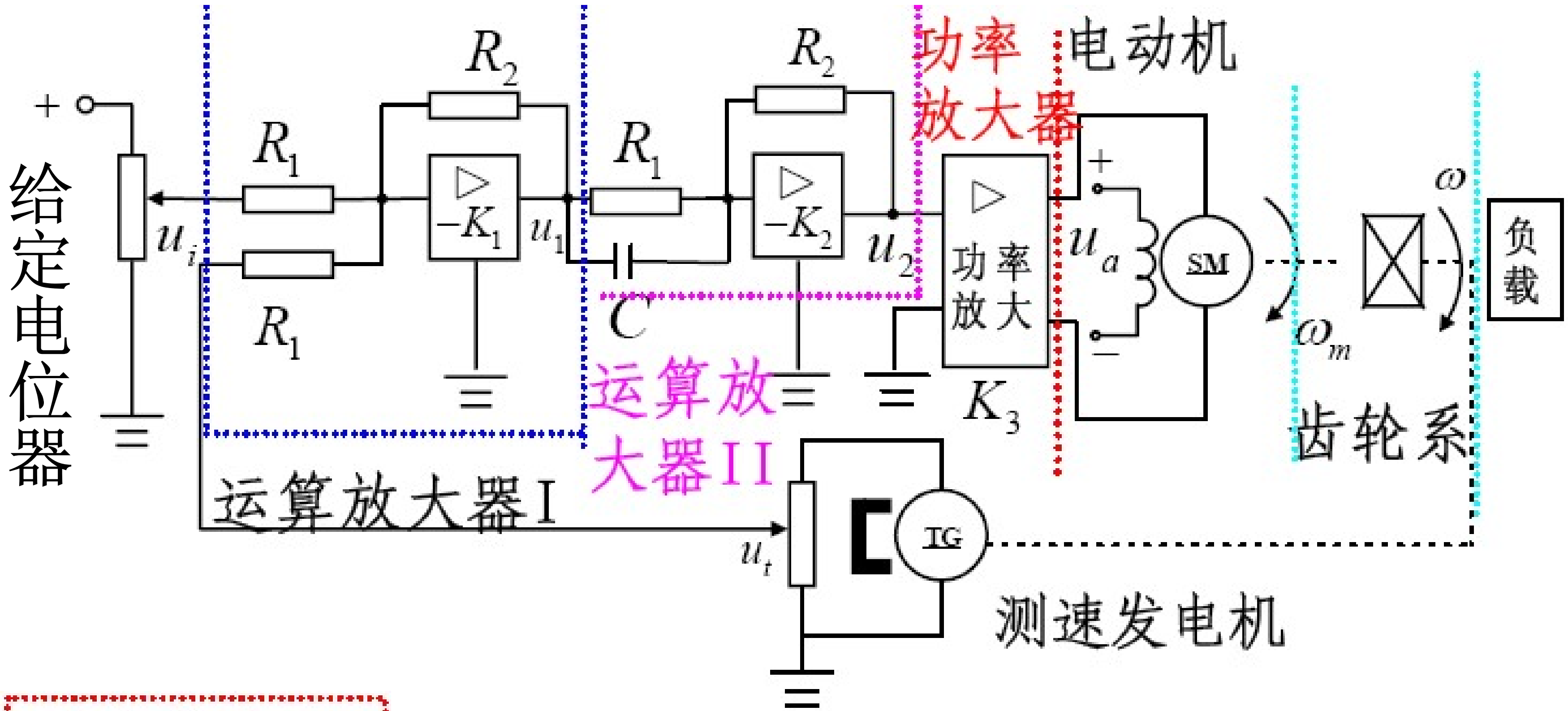


运算放大器I

$$u_1 = K_1(u_i - u_t) = K_1 u_e \qquad K_1 = R_2 / R_1$$

运算放大器II

$$u_2 = K_2(\tau \frac{du_1}{dt} + u_1) \qquad K_2 = R_2 / R_1 \qquad \tau = RC$$

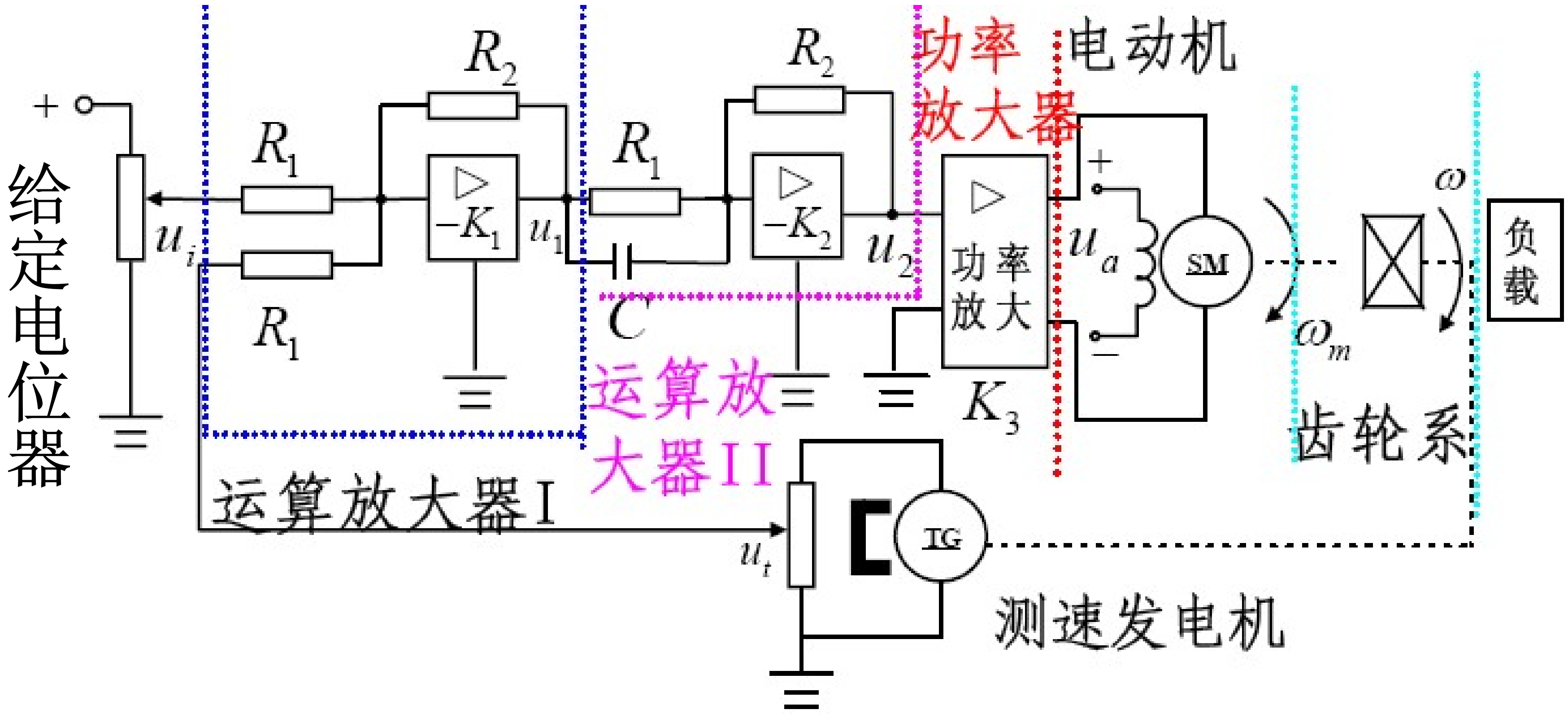


功率放大器

$$u_a = K_3 u_2$$

直流电动机

$$T_m \frac{d\omega_m}{dt} + \omega_m = K_m u_a - K_c M_c'$$



齿轮系

$$\omega = \frac{1}{i}\omega_m$$

测速发电机

$$u_t = K_t\omega$$

运算放大器I $u_1 = K_1(u_i - u_t) = K_1 u_e$

运算放大器II $u_2 = K_2(\tau \frac{du_1}{dt} + u_1)$

功率放大器 $u_a = K_3 u_2$

直流电动机 $T_m \frac{d\omega_m}{dt} + \omega_m = K_m u_a - K_c M_c'$

齿轮系 $\omega = \frac{1}{i}\omega_m$

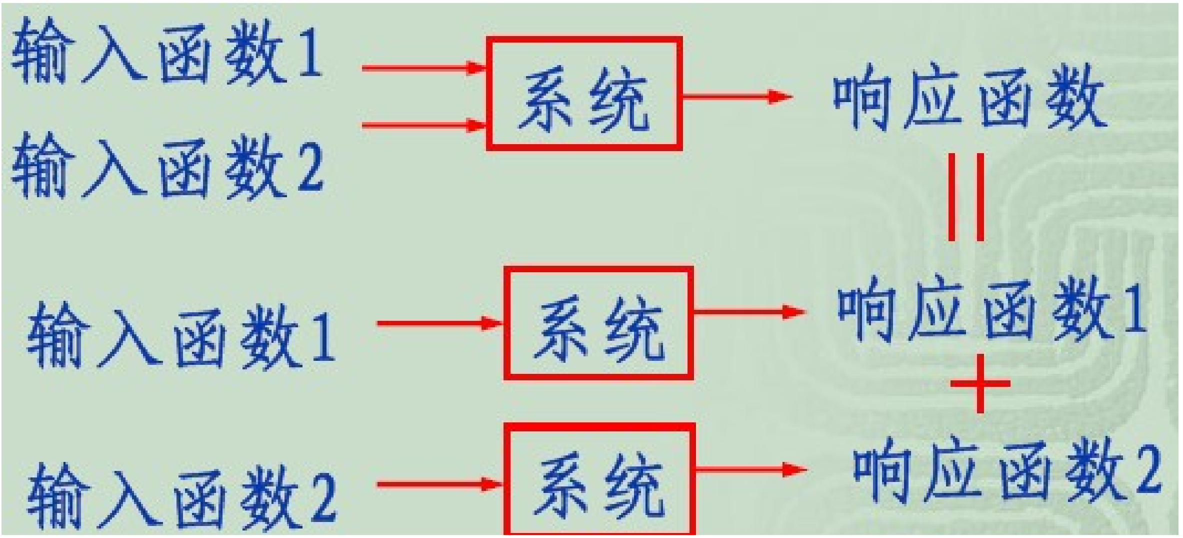
测速发电机 $u_t = K_t \omega$

$$T_m' \frac{d\omega}{dt} + \omega = K_g' \frac{du_i}{dt} + K_g u_i - K_c' M_c'$$

3.线性系统的基本特性

用线性微分方程描述的元件或系统，称为线性元件或线性系统。线性系统的重要性质是可以应用叠加原理。

叠加原理有两重含义，即具有可叠加性和均匀性（或齐次性）。



线性系统的叠加原理表明，两个外作用同时加于系统所产生的总输出，等于各个外作用单独作用时分别产生的输出之和，且外作用的数值增大若干倍时，其输出亦相应增大同样的倍数。

4.线性定常微分方程的求解

当系统微分方程列写出来后，只要给定输入量和初始条件，便可对微分方程求解，并由此了解系统输出量随时间变化的特性。

线性定常微分方程的求解方法有经典法和拉氏变换法，也可借助电子计算机求解

本节研究用拉氏变换法求解微分方程，同时分析微分方程解的组成，为今后引出传递函数概念奠定基础。


拉氏变换法求解微分方程的步骤:
拉氏变换
微分方程
变量s的代数方程
求出
输出量拉氏变换函数的表达式
反变换
输出量的时域表达式

例：在例2-8中，若已知 $L=1H, C=1F, R=1\Omega$，且电容上初始电压$u_0(0)=0.1V$，初始电流 $i_0(0)=0.1A$，电源电压 $u_i(t)=1V$ 。试求电路突然接通电源时，电容电压$u_0(t)$的变化规律。

解：在前例中已求得网络微分方程：

$$LC\frac{d^2u_0(t)}{dt^2}+RC\frac{du_0(t)}{dt}+u_0(t)=u_i(t)$$

$$L\left[\frac{d^n u_0(t)}{dt^n}\right] = S^n U_0(s) - S^{n-1} u_0(0) - S^{n-2} u_0'(0) - \cdots - S u_0^{n-2}(0) - S^0 u_0^{n-1}(0)$$

例：在例2-8中，若已知 $L=1H, C=1F, R=1\Omega$，且电容上初始电压$u_0(0)=0.1V$，初始电流 $i_0(0)=0.1A$，电源电压 $u_i(t)=1V$ 。试求电路突然接通电源时，电容电压$u_0(t)$的变化规律。

解：在前例中已求得网络微分方程：

$$LC\frac{d^2u_0(t)}{dt^2}+RC\frac{du_0(t)}{dt}+u_0(t)=u_i(t)$$

令：$U_i(s)=L[u_i(t)], U_0(s)=L[u_0(t)]$

$$L\left[\frac{d^2u_0(t)}{dt^2}\right]=s^2U_0(s)-su_0(0)-u_0'(0)$$

$$L\left[\frac{du_0(t)}{dt}\right]=sU_0(s)-u_0(0)$$

其中：$$u_0'(0)=\left.\frac{du_0(t)}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{1}{C}\right|_{t=0}=\frac{1}{C}i(0)$$

$$LC\frac{d^2u_0(t)}{dt^2}+RC\frac{du_0(t)}{dt}+u_0(t)=u_i(t)$$

$$L\left[\frac{du_0(t)}{dt}\right]=sU_0(s)-u_0(0)$$

$$L\left[\frac{d^2u_0(t)}{dt^2}\right]=s^2U_0(s)-su_0(0)-u_0'(0)$$

$$L=1H, C=1F, R=1\Omega$$

$$u_0(0)=0.1V \quad i_0(0)=0.1A \quad u_i(t)=1V$$

$$U_0(s)=\frac{U_i(s)}{s^2+s+1}+\frac{0.1s+0.2}{s^2+s+1}$$

$u_i(t)=1(t)$或$U_i(s)=1/s$

$$u_0(t)=L^{-1}[U_0(s)]=L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+s+1)}+\frac{0.1s+0.2}{s^2+s+1}\right]$$

$$=1+1.15e^{-0.5t}\sin(0.86t-120^o)+0.2e^{-0.5t}\sin(0.866t+30^o)$$

$$U_0(s)=\underbrace{\frac{U_i(s)}{s^2+s+1}}_{\text{零初始条件响应}}+\underbrace{\frac{0.1s+0.2}{s^2+s+1}}_{\text{零输入响应}}$$

零初始条件响应

由网络输入电压产生的输出分量，与初始条件无关

零输入响应

由初始条件产生的输出分量，与输入电压无关。

用拉氏变换法求解线性定常微分方程的过程可归结如下：

1）考虑初始条件，对微分方程中的每一项分别进行拉氏变换，将微分方程转换为变量s的代数方程；

2）由代数方程求出输出量拉氏变换函数的表达式；

3）对输出量拉氏变换函数求反变换，得到输出量的时域表达式，即为所求微方程的解。

5.非线性微分方程的线性化 （自学）

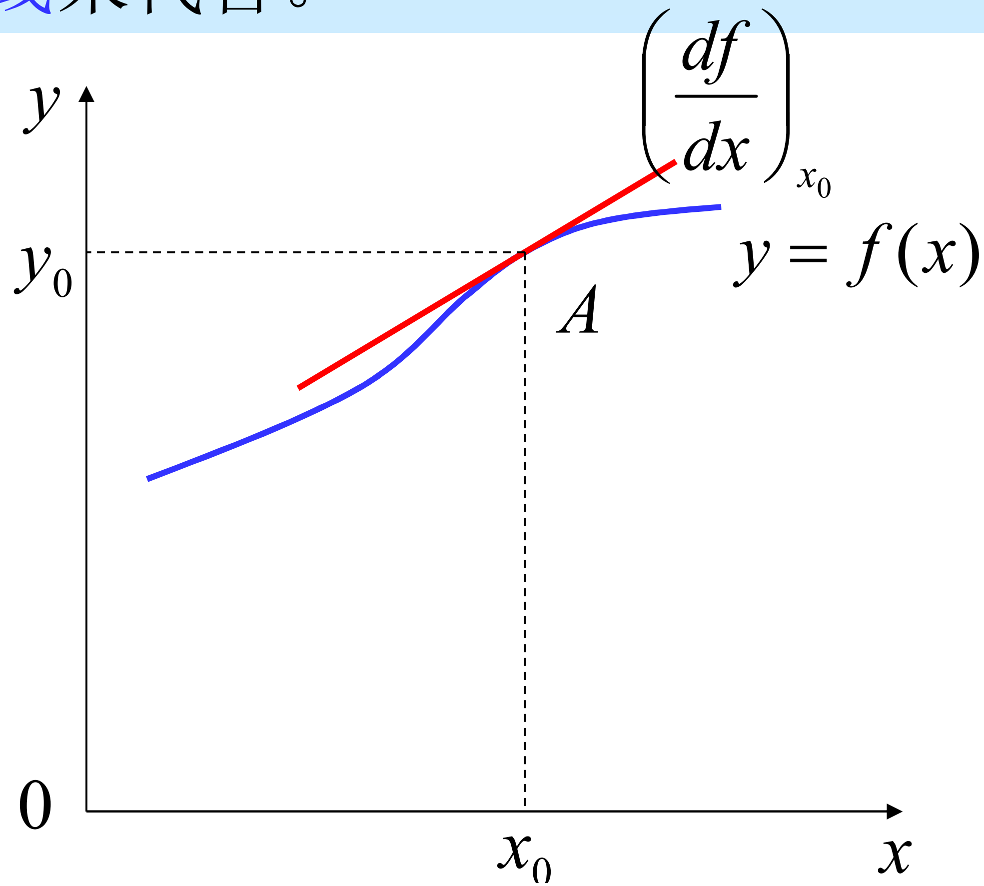
严格来说，实际物理元件或系统都是非线性的。

非线性特性线性化

在一定条件下，为简化数学模型，将这些非线性元件视为线性元件，这就是通常使用的一种线性化方法。

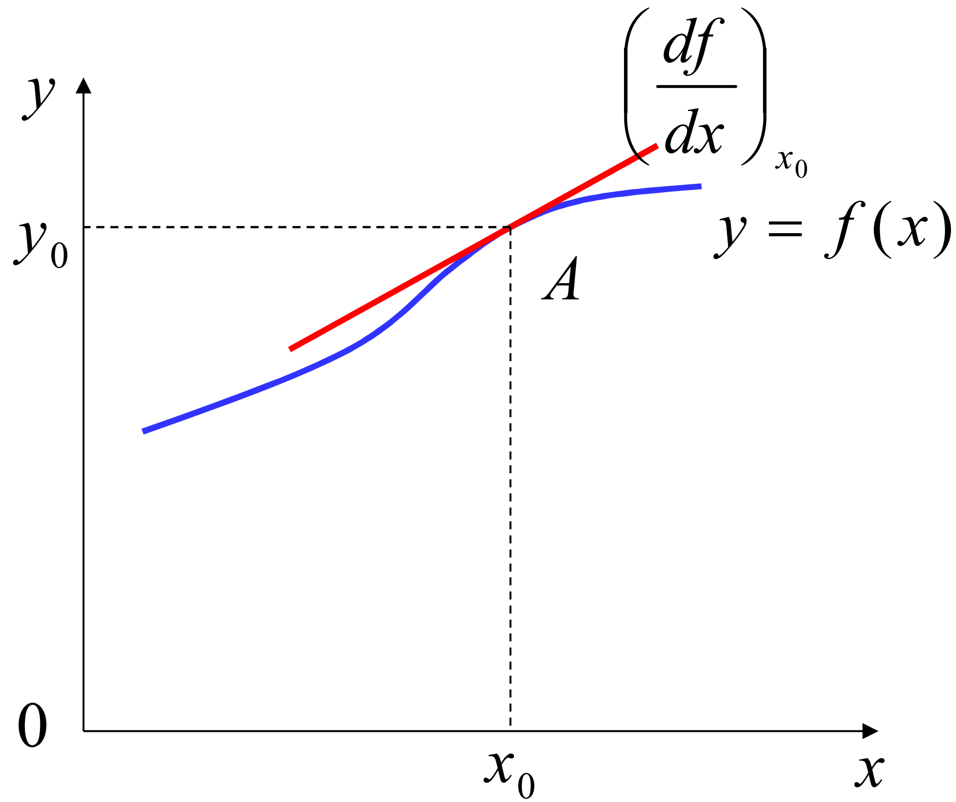
切线法（小偏差法）

特别适合于具有连续变化的非线性特性函数，其实质是在一个很小的范围内，将非线性特性用一段直线来代替。



一个变量的非线性函数：

$$y = f(x)$$



取某平衡状态A为工作点，对应有$y_0 = f(x_0)$ 。当$x = x_0 + \Delta x$时，有 $y = y_0 + \Delta y$ ，设函数$y = f(x)$ 在 (x_0, y_0) 点连续可微，则将它在该点附近用泰勒级数展开为：

$$y = f(x) = f(x_0) + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right)_{x_0}(x - x_0)^2 + \cdots$$

当增量 $x - x_0$ 很小时，略去高次幂项：

$$y = f(x) = f(x_0) + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x_0}(x - x_0)$$

$$y = f(x) = f(x_0) + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x_0}(x - x_0)$$

令$\Delta y = y - y_0$

$= f(x) - f(x_0)$

令$\Delta x = x - x_0$

$K = (df(x)/dx)_{x_0}$

$$\Delta y = K\Delta x$$

略去增量符号Δ

$y = f(x)$ $\Rightarrow$ $$y = Kx$$

$K = (df(x)/dx)_{x_0}$是比例系数，是函数$f(x)$在A点的切线斜率。

这种小偏差线性化方法对于控制系统大多数工作状态是可行的。原因：

自动控制系统在正常情况下都处于稳定的工作状态，即平衡状态，这时被控量与期望值保持一致，控制系统也不进行控制动作。一旦被控量偏离期望值产生偏差时，控制系统便开始控制动作，以便减小或消除这个偏差，因此，控制系统中被控量的偏差一般不会很大，只是“小偏差”。

在建立控制系统数学模型时，通常是将系统的稳定工作状态作为起始状态，仅仅研究小偏差的运动情况，也就是只研究相对于平衡状态下，系统输入量和输出量的运动特性，这正是增量线性化方程所描述的系统特性。