P193 习题 8

1. 某公司用包装机包装肥料，包装机在正常工作时，包装量 $X \sim N(500, 2^2)$（单位：g），每天开工后，需先检验包装机工作是否正常。某天开工后，在装好的肥料中任取 9 袋，其重量如下

505,499,502,506,498,498,497,510,503

假设总体标准差 σ 不变，即 $\sigma = 2$，试问这天包装机工作是否正常（$\alpha = 0.05$）？

分析：这是在总体的方差已知的情况下，对总体的均值进行检验

解答：由于正态总体方差 $\sigma^2 = 2^2$ 已知，关于总体均值 μ 的双侧检验，故采用 U 检验。

假设 $H_0: \mu = 500 \qquad H_1: \mu \neq 500$

检验统计量 $U = \dfrac{\overline{X} - 500}{2/\sqrt{n}}$，拒绝域 $\{|U| \geq u_{\frac{\alpha}{2}}\}$

由题目数据，样本均值为 $\overline{x} = 502$，因此检验统计量观测值 $u = 3$

查表得临界值 $u_{0.025} = 1.96$

由于 $|u| = 3 > 1.96$，因此拒绝 H_0，认为平均重量不再是 500g，即认为这天包装机工作不正常.

2. 某批农药的 5 个样本中的含磷量，经测定分别为（%）

3.25, 3.27, 3.24, 3.26, 3.24

设测定值总体服从正态分布，问在 $\alpha = 0.01$ 下，能否认为这批农药的含磷量的均值为 3.25？

分析：这是在总体的方差未知的情况下，对总体的均值进行检验

解答：由于总体方差未知，所以采用 T 检验。

假设：$H_0: \mu = 3.25 \qquad H_1: \mu \neq 3.25$

检验统计量 $T = \dfrac{\overline{X} - 3.25}{S/\sqrt{n}}$，拒绝域 $\{|T| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$

由题中数据， 样本均值 $\overline{x} = 3.252$，样本标准差 $s = 0.013$，因此检验统计量观测值 $t = 1.491$

当$\alpha=0.01$时，临界值$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.005}(4)=4.604$

由于$|t|=1.451<4.604$，因此接受H_0，即可以认为这批农药的含磷量的均值为 3.25。

3. 从过去的资料知道某城市高中男生的身高服从正态分布，平均值为 1.67m，标准差为$\sigma=0.10$ m。现在抽查了 100 名高中男生，其平均身高为$\bar{x}=1.69$ m，如果标准差没有变化，能否认为现在男生身高上的变化显著（$\alpha=0.05$）？

分析：题意“能否认为变化显著”说明意识到身高上可能有了变化，结合样本均值比过去总体均值大，就是判断平均身高仍为 1.67，还是已经比 1.67 大了，所以采用单边检验

解答：由于总体方差已知，检验总体均值，所以采用 U 检验.

假设$H_0:\mu=1.67$ $H_1:\mu>1.67$

检验统计量$U=\dfrac{\overline{X}-1.67}{0.10/\sqrt{n}}$，拒绝域$\{U\geq u_\alpha\}$

根据题目条件，样本均值$\bar{x}=1.69$，总体标准差$\sigma=0.10$，因此检验统计量观测值$u=2$

查表得临界值$u_{0.05}=1.645$

由于$u=2>1.645$，因此拒绝H_0，即认为现在男生身高有显著变化.

4. 在原木中抽出 100 根，测其直径得到的样本的均值$\bar{x}=11.2$厘米，标准差$s=2.6$厘米。问能否认为该批原木的平均直径不低于 12 厘米（$\alpha=0.05$）？

解答： 总体方差未知，检验总体均值，所以采用 T 检验.

假设$H_0:\mu\geq\mu_0=12$ $H_1:\mu<12$

检验统计量$T=\dfrac{\overline{X}-12}{S/\sqrt{n}}$，拒绝域$\{T\leq -t_\alpha(n-1)\}$ 50 分

由题目数据， 样本均值$\bar{x}=11.2$，样本标准差$s=2.6$，因此检验统计量观测值$t=-3.077$

查表得临界值$t_{0.05}(99)=u_{0.05}=1.645$

由于 $t=-3.077<-1.645$，因此拒绝 H_0， 认为该批原木的平均直径低于 12 厘米.50 分

5. 现有种植的一批某品种葡萄，该品种一串成熟葡萄的重量服从正态分布 $N(450,70^2)$，现在随机采摘了 9 串葡萄进行称重，数据如下（单位：克）

424， 497， 582， 463， 503， 430， 481， 402， 389

问在检验水平 $\alpha=0.05$ 下，能否认为该批葡萄的方差未发生变化？

解答： 总体均值 $\mu=450$ 已知，检验总体方差，所以采用 χ^2 检验.

假设 $H_0:\sigma^2=70^2$ $\qquad H_1:\sigma^2\neq 70^2$

检验统计量 $\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-450)^2}{70^2}$，拒绝域 $\{\chi^2\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\text{或}\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\le\chi^2\}$

由题目数据， $\sum_{i=1}^{9}(x_i-\mu)^2=30673$，因此检验统计量观测值 $\chi^2=6.260$

查表得临界值 $\chi^2_{0.975}(9)=2.700,\ \chi^2_{0.025}(9)=19.023$

由于 $2.700<6.260<19.023$，因此接受 H_0，即认为该批葡萄的方差未发生变化.

6. 某品种水稻的亩产量服从正态分布 $N(320,40^2)$，现在随机抽取 8 亩该水稻，测得其亩产量分别为

309， 321， 278， 289， 367， 342， 314， 338

能否在检验水平 $\alpha=0.05$ 下，认为该水稻亩产量的方差变小了？

解答： 总体均值 $\mu=320$ 已知，检验总体方差，所以采用 χ^2 检验.

假设 $H_0:\sigma^2=40^2$ $\qquad H_1:\sigma^2<40^2$

检验统计量 $\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-320)^2}{40^2}$，拒绝域 $\{\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha}(n)\}$ 50 分

由题目数据， $\sum_{i=1}^{8}(x_i-\mu)^2=5900$，因此检验统计量观测值 $\chi^2=3.6875$

查表得临界值 $\chi^2_{0.950}(8)=2.733$

由于 $2.733<3.6875$，因此接受 H_0，即认为该水稻亩产量的方差没有变小.50 分

7. 某炼铁厂的铁水含碳量 X 在正常情况下服从正态分布，现对工艺进行了某些改进，从中抽取五炉铁水测得含碳量如下：

4.421　4.052　4.357　4.287　4.683

据此是否可认为新工艺炼出的铁水含碳量的方差仍为 0.108^2 ($\alpha=0.05$)?

解答：由于总体均值未知，检验方差，所以采用 χ^2 检验.

假设：$H_0:\sigma^2=0.108^2$　　$H_1:\sigma^2\neq 0.108^2$

检验统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{0.108^2}$，拒绝域 $\{\chi^2\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$或$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\le\chi^2\}$

由题中数据，样本方差：$s^2=0.052$，于是检验统计量观测值 $\chi^2=17.833$

当 $\alpha=0.05$时，临界值 $\chi^2_{1-0.025}(4)=0.484$，$\chi^2_{0.025}(4)=11.143$

由于 $\chi^2=17.833>11.143$, 所以拒绝 H_0，即新工艺炼出的铁水含碳量的方差不再是 0.108^2 .

8. 某工厂生产一批产品，质量要求：当次品率 $p\le 0.05$时，产品才能出厂。今从生产出的产品中随机抽查 100 件，发现 8 个次品，试问这批产品是否可以出厂（$\alpha=0.05$）？

分析：记 X 为 100 件产品中次品的数目，则 $X\sim B(100,p)$，由于$n=100$比较大（大于 30），因此可以近似认为$U=\dfrac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\sim N(0,1)$，那么对于假设 $H_0:p\le 0.05$、$H_1:p>0.05$，其拒绝域为 $\{U\ge u_{0.05}\}$

解答：记 X 为 100 件产品中次品的数目，则 $X\sim B(100,p)$，采用 U 检验

假设 $H_0:p\le 0.05$　　$H_1:p>0.05$

检验统计量 $U=\dfrac{X-0.05n}{\sqrt{0.05\times 0.95n}}\sim N(0,1)$，其拒绝域为 $\{U\ge u_{0.05}\}$

由题目数据，$x=8$，计算得统计量观测值 $u=1.376$

当$\alpha = 0.05$时，临界值$u_{0.05} = 1.645$

由于$u = 1.376 < 1.645$, 所以接受H_0，即这批产品可以出厂

说明：当$p = 0.05$时，$X \sim B(100, 0.05)$，可近似为$X \sim P(5)$，经计算（用 Excel）得$P\{X \le 8\} = 0.9319$，并未达到检验水平 0.95，因此没有足够证据说明次品率高，那么就应该允许出厂

9.（本题为两个正态总体方差相等时的均值检验问题，不在学习范围内）

10.（本题为两个正态总体的方差检验问题，不在学习范围内）

11.（本题为χ^2拟合检验问题，不在学习范围内）