P29 习题 1

1. 写出下列随机试验的样本空间Ω：

（1）记录一个班一次数学考试的平均分数（设以百分制记分）；

分析：只考虑每位同学的分数都是整数的情况。设该班有n名同学，那么全体同学的考试分数之和M就可以是 0 到$100n$之间的任意整数（包括 0 分和$100n$分），所以所有可能的平均分数就是$\frac{M}{n}$

解答：设该班有n名同学，则样本空间为$\Omega=\{\frac{i}{n}\mid i=0,1,2,\cdots,100n\}$

（2）生产某种产品直到有 10 件正品为止，记录此过程中生产该种产品的总件数；

分析：根据题意，生产出 10 件正品试验就停止，要生产 出 10 件正品，最少需要生产 10 件产品（这 10 件刚好都是正品），也有可能一直生产次品而凑不够 10 件正品必须一直生产下去，所以生产的产品总件数是没有上限的。因此样本空间应该是 10 到正无穷的整数

解答：样本空间$\Omega=\{10,11,12,13,\cdots\}$

说明：也可写成$\Omega=\{10,11,12,13,\cdots,n,\cdots\}$，但不能写成$\Omega=\{10,11,12,13,\cdots,n\}$

（3）对某工厂出厂的产品进行检查，合格的记为“正品”，不合格的记为“次品”，若连续查出了 2 件次品就停止检查，或者检查了 4 件产品就停止检查，记录检查的结果；

分析：由题意知，停止检查时已经检查的产品数可能是 2 件、3 件、4 件。如果检查了 2 件就停止，只可能是两件都是次品，所以检查结果是（次，次）；如果检查了 3 件停止，一定是连续检查出 2 件次品导致的，并且一定是连续查出 2 件次品马上停止，所以第一件一定不是次品，第二件第三件一定是次品，即检查结果是（正，次，次）；如果检查了 4 件停止，那么前 3 件不能出现连续次品情况，所以前 3 件只能是（正，正，正）、（正、正、次）、（正、次、正）、（次、正、正）、（次、正、次）这 5 种情况之一，而第 4 件可以是正品也可以次品，那么共有 10 种情况。

解答：以 0 表示次品，以 1 表示正品，那么检查结果组成的集合为

$$\Omega=\{00, 100, 1111, 1110, 1101, 1100, 1011, 1010, 0111, 0110, 0101, 0100\}$$

注：教材附录中答案是按照次品数目排列的。

（4）在单位圆内任意取一点，记录它的坐标.

解答：$\Omega=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$

2.设A,B,C为三个事件，用A,B,C及其运算关系表示下列事件

（1）A发生而B与C不发生；

解答：“A发生且B不发生且C不发生”，表示为$A\overline{B}\,\overline{C}$

注：书写时要注意B与C上面的短线不能连在一起.

（2）A,B,C中恰好有一个发生；

解答：$A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$

（3）A,B,C中至少有一个发生；

解答：“至少”就是“或”关系，“A发生或B发生或C发生”，表示为$A\cup B\cup C$

（4）A,B,C中恰好有两个发生；

解答：$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$

（5）A,B,C中至少有两个发生；

解答：“至少有两个”就是“这两个或那两个”，表示为$AB\cup AC\cup BC$

（6）A,B,C中有不多于一个发生.

分析：“不多于一个发生”就是发生的事件的个数要么刚好是 0 个，要么刚好是 1 个

解答：$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$

分析 2：“不多于一个发生”就是“不发生的事件数至少为 2”

解答 2：$\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}$

3.设样本空间$\Omega=\{x\mid 0\le x\le 2\}$，事件$A=\{x\mid 0.5\le x\le 1\}$，$B=\{x\mid 0.8<x\le 1.6\}$，具体写出下列事件：

（1）AB

解答：$AB=A\cap B=\{x\mid 0.8<x\le 1\}$

（2）$A-B$

解答：$A-B=\{x \mid 0.5 \le x \le 0.8\}$

（3）$\overline{A-B}$

解答：由于 $A-B=\{x \mid 0.5 \le x \le 0.8\}$，因此 $\overline{A-B}=\{x \mid 0 \le x < 0.5 或 0.8 < x \le 2\}$

（4）$\overline{A \cup B}$

解答：由于 $A \cup B=\{x \mid 0.5 \le x \le 1.6\}$，因此 $\overline{A \cup B}=\{x \mid 0 \le x < 0.5 或 1.6 < x \le 2\}$

4.一个样本空间有三个样本点，其对应的概率分别为 $2p, p^2, 4p-1$，求 p 的值。

分析：设三个样本点分别对应事件 A,B,C，则 $\Omega = A \cup B \cup C$，且 A,B,C 互不相容，于是 $1=P(\Omega)=P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)=2p+p^2+4p-1$

解：由题目条件 $2p+p^2+4p-1=1$，即 $p^2+6p-2=0$

解得 $p_1=\sqrt{11}-3, p_2=-\sqrt{11}-3$

由概率的非负性，$P(A)=2p \ge 0$，因此 $p=\sqrt{11}-3$

5.已知 $P(A)=0.3, P(B)=0.5, P(A \cup B)=0.8$，求：（1）$P(AB)$；（2）$P(A-B)$；（3）$P(\bar{A}\bar{B})$

解答：（1）由加法公式，$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

因此 $P(AB)=0$

（2）$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.3-0=0.3$

（3）$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A \cup B})=1-P(A \cup B)=1-0.8=0.2$

分值：本题满分 100 分，其中每问 30 分，卷面 10 分。

评分标准：对于每问的 30 分，写出正确的公式得 15 分，计算结果正确得 15 分。

6.设 $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$，且 $P(A)=p$，求 $P(B)$

解答：由于 $P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A \cup B})=1-P(A \cup B)=1+P(AB)-P(A)-P(B)$

因此 $P(A)+P(B)=1$，故 $P(B)=1-P(A)=1-p$

7.对于事件 A,B,C ，设 $P(A)=0.4, P(B)=0.5, P(C)=0.6, P(AC)=0.2, P(BC)=0.4$ 且 $AB=\Phi$ ，求 $P(A\bigcup B\bigcup C)$

解答：由于 $ABC\subset AB$ ，因此 $ABC=\Phi$ ，于是

$$P(A\bigcup B\bigcup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$
$$=0.4+0.5+0.6-0-0.2-0.4+0=0.9$$

8.将 3 个球随机地放入 4 个杯子中去，求杯子中球的最大个数分别为 $1,2,3$ 的概率

分析：题意是将 3 个不同的球放入 4 个不同的杯子

因此样本空间中的样本点数为 $4\times4\times4=4^3$（第一个球有 4 种选择，第二个球有 4 种选择，第三个球有 4 种选择）

杯子中球的最大个数为 1，表示 3 个球在不同的杯子中，因此含有的样本点数为 $4\times3\times2$（第一个球有 4 种选择，第二个球只能在余下的 3 个杯子中选，第三个球只剩下 2 个杯子可以选）

杯子中球的最大个数为 2，表示有 2 个球在一个杯子中，第三个球在另一个杯子中，因此含有的样本点数为 $3\times4\times3$（先选两个球并绑在一起，有 3 种情况，再为这两个球选杯子，有 4 种情况，最后为剩下的球在剩下的 3 个杯子中选一个放进去，有 3 种情况）

杯子中球的最大个数为 3，表示三个球放在同一个杯子中，因此含有 4 个样本点

解答：杯子中球的最大个数为 1 的概率为 $\dfrac{4\times3\times2}{4\times4\times4}=\dfrac{3}{8}$

杯子中球的最大个数为 2 的概率为 $\dfrac{3\times4\times3}{4\times4\times4}=\dfrac{9}{16}$

杯子中球的最大个数为 3 的概率为 $\dfrac{4}{4\times4\times4}=\dfrac{1}{16}$

9.在整数 0 至 9 中任取 4 个排成一个四位数，它们排成的四位数是偶数的概率是多少？

解答：先计算排成的四位数有多少

要排成四位数，千位上不能是 0，所以有 9 种选择；百位可以在剩下的 9 个数字中选，有 9 种选择；...。因此可以排成的四位数共有 $9\times9\times8\times7$ 个。

再计算排成的四位数是偶数有多少种情况

（先排个位为 0,2,4,6,8 中的一个，十百千任排时，会出现个位为 2，千位排了 0 的情况，这样就不是四位数了。因此要单独考虑 0 的情况）

当个位为 0 时，剩下的数字没有 0，十百千位可以随便排，所以此时有$9\times 8\times 7$种情况；

当个位为 2 或 4 或 6 或 8 时，0 在剩下的数字中，需要保证千位不是 0，所以先排千位。在剩下的 9 个数字（个位只选了一个数字）中，除 0 以外的其余 8 个都可以作为千位，然后剩下的 8 个数字可以在百位十位上任意排，所以此时有$4\times 8\times 8\times 7$中情况。

所以排成的四位数是偶数共有$9\times 8\times 7+4\times 8\times 8\times 7$种情况

因此概率为$\frac{9\times 8\times 7+4\times 8\times 8\times 7}{9\times 9\times 8\times 7}=\frac{9+32}{81}=\frac{41}{81}$

9. 在整数 0 至 9 中任取 4 个排成一排，它们排成四位偶数的概率是多少？

解答：10 个数字中任取 4 个排成一排，共有$A_{10}^{4}=10\times 9\times 8\times 7$种情况

排成四位偶数，共有$9\times 8\times 7+4\times 8\times 8\times 7$种情况

因此概率为$\frac{9\times 8\times 7+4\times 8\times 8\times 7}{10\times 9\times 8\times 7}=\frac{9+32}{90}=\frac{41}{90}$

10.一部五卷的文集，按任意次序放到书架上取，求下列事件的概率：（1）第一卷出现在旁边；（2）第一卷及第五卷出现在旁边；（3）第一卷或第五卷出现在旁边；（4）第一卷及第五卷都不出现在旁边；（5）第三卷正好在正中。

解答：5 卷文集，放到书架上排成一排，共有$A_5^5=5!=120$种情况

（1）考虑“第一卷出现在旁边”的情况数

先排第一卷，可以出现在左边，也可以出现在右边，有 2 种选择，之后剩下的 4 卷可以随意排，因此共有$2\times 4\times 3\times 2\times 1=48$种情况

对应概率为$\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$

（2）“第一卷及第五卷出现在旁边”的情况数

先排第一卷，要求出现在旁边，所以有 2 种选择，那么第五卷就只能排剩下的那个边，只有 1 种选择，之后排剩下的 3 卷，可以随意排，因此共有$2\times 1\times 3\times 2\times 1=12$种情况

对应概率为 $\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$

（3）“第一卷或第五卷出现在旁边”的情况数

为了计数时不重复、不遗漏，这种情况分成更细的三种情况：只有第一卷在旁边（第五卷不在旁边）、只有第五卷在旁边、第一卷和第五卷都在旁边

第一卷在旁边且第五卷不在旁边时，先把第一卷排在旁边，有 2 种排法，然后在二、三、四卷中选一卷排在另一边，最后剩下的 3 卷任意排，因此共有 $2\times3\times3\times2\times1=36$ 种情况；

同理，第五卷在旁边且第一卷不在旁边，也有 $2\times3\times3\times2\times1=36$ 种情况；

“第一卷和第五卷都在旁边”是（2）的情形，共有 12 中情况

因此“第一卷或第五卷出现在旁边”共有 $36+36+12=84$ 种情况

对应概率为 $\frac{84}{120}=\frac{7}{10}$

（4）“第一卷及第五卷都不出现在旁边”的情况数

先在二、三、四卷中选一卷排左边，再选一卷排右边（这样就保证第一和第五都不在旁边了），最后把剩下的 3 卷书任意排，因此共有 $3\times2\times3\times2\times1=36$ 种情况

因此对应概率为 $\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$

（5）“第三卷正好在正中”的情况数

先把第三卷排在正中，其余 4 卷随意排 4 个位置，共有 $1\times4\times3\times2\times1=24$ 种情况

因此对应概率为 $\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$

注：（3）和（4）是对立事件，所以也可以先计算其中的一个，另一个再用对立事件概率公式 $P(\overline{A})=1-P(A)$ 计算

11.把 2,3,4,5 四个数字各写在一张小纸片上，任取其中三个按自左向右的次序排成一个三位数，求所得数是偶数的概率。

解答：排成三位数共有 $4\times3\times2=24$ 种情况

要想得到的数是偶数，可以先在个位排 2 和 4 其中的一个，然后在剩下的三个数字中任选两个排在十位百位，所以情况数是$2\times3\times2=12$

因此，所得数是偶数的概率为$\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$

分值：本题满分 100 分。

评分标准：样本空间中的样本点数目正确得 40 分，事件中样本点数目正确得 40 分，计算结果正确得 20 分。

12.一幢 10 层楼中一架电梯在底层登上 7 位乘客，电梯在每一层都停，乘客从第二层起离开电梯，假设每位乘客在任一层离开电梯是等可能的，求没有两位及两位以上乘客在同一层离开的概率。

解答：“没有两位及两位以上乘客在同一层离开”意味着各位乘客在不同的楼层离开，其情况数为$9\times8\times7\times\cdots\times3=A_9^7$

因此其概率为$\frac{A_9^7}{9^7}$

13.某人午觉醒来发现表停了，他打开收音机想收听电台报时，设电台每正点报时一次，求他等待时间短于 10 分钟的概率。

解答：由题意知，这是几何概型

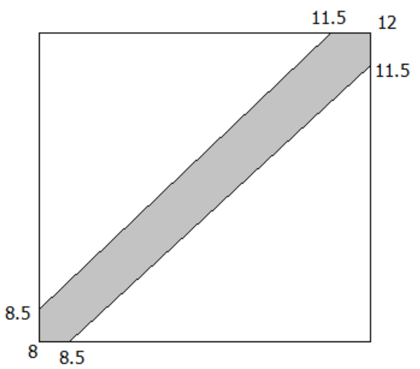
设他等待时间为X，则样本空间为$\Omega=\{X\mid 0\le X<60\}$

事件“等待时间短于 10 分钟”就是$A=\{X\mid 0\le X<10\}$

因此其概率为$P(A)=\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$

14.甲乙两人相约 8—12 点在预定地点会面。先到的人等候另一人 30 分钟后离去，求甲乙两人能会面的概率。

解答：由题意知，这是几何概型。



设甲到达时间为 X（以小时为单位计），乙到达时间为 Y，则 $\Omega=\{(X,Y)\mid 8\le X\le 12, 8\le Y\le 12\}$

则两人相遇就是 $A=\{(X,Y)\mid |X-Y|\le 0.5\}$

从而 $P(A)=\dfrac{3.75}{16}=\dfrac{15}{64}$

分值：本题满分 100 分。

评分标准：样本空间（集合）正确得 35 分，事件（集合）正确得 35 分，计算结果正确得 30 分。（结果不化简扣 10 分）

15.现有两种报警系统 A 和 B，每种系统单独使用时，系统 A 有效的概率为 0.92，系统 B 有效的概率为 0.93，而两种系统一起使用时，在 A 失灵的条件下 B 有效的概率为 0.85，求两种系统一起使用时：

（1）这两个系统至少有一个有效的概率；

（2）在 B 失灵条件下，A 有效的概率

解答：记 A 为事件“系统 A 有效”，B 为事件“系统 B 有效”，则

$P(A)=0.92, P(B)=0.93, P(B\mid\bar{A})=0.85$

因此 $P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B\mid\bar{A})=0.08\times 0.85=0.068$

从而 $P(AB)=P(B)-P(\bar{A}B)=0.93-0.068=0.862$

（1）$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.92+0.93-0.862=0.988$

（2）$P(A\mid\bar{B})=\dfrac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{P(\bar{B})}=\dfrac{0.92-0.862}{0.07}=\dfrac{29}{35}\approx 0.8286$

分值：本题满分 100 分，每问 50 分。

评分标准：对于每问的 50 分，写出正确的公式得 20 分，计算结果正确得 30 分。

16.已知事件 A 发生的概率 $P(A)=0.5$，B 发生的概率 $P(B)=0.6$，以及条件概率 $P(B\mid A)=0.8$，求 A、B 中至少有一个发生的概率

解答：$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=0.5\times 0.8=0.4$

因此$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.6-0.4=0.7$

17.一批零件共 100 个，其中有次品 10 个。每次从该批零件中任取 1 个，取出后不放回，连取 3 次，求第 3 次才取得合格品的概率

分析：“第 3 次才取得合格品”意味着前两次取到的都是次品，而第三次取到合格品

解答：以A_1,A_2,A_3分别表示第一次、第二次、第三次取得的是合格品，由乘法公式

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2)P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)$$
$$=\frac{10}{100}\times\frac{9}{99}\times\frac{90}{98}=\frac{9}{1078}\approx0.00835$$

18.有两个袋子，每个袋子都装有a只黑球，b只白球，从第一个袋中任取一球放入第二个袋中，然后从第二个袋中取出一球，求取得的是黑球的概率

分析：第二个袋中取出黑球的几率与第一个袋中取出球的颜色有关，因此用全概率公式

解答：以A表示从第一个袋中取出的是黑球，B表示从第二个袋中取出的是黑球，则

$$P(A)=\frac{a}{a+b},P(B\mid A)=\frac{a+1}{a+b+1},P(B\mid\overline{A})=\frac{a}{a+b+1}$$

从而$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})$

$$=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a+1}{a+b+1}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b+1}=\frac{a}{a+b}$$

19.一个机床有$\frac{1}{3}$的时间加工零件A，其余时间加工零件B。加工零件A时，停机的概率是 0.3，加工零件B时，停机的概率是 0.4，求这个机床停机的概率

解答：以A表示机床加工的零件是零件A，以C表示机床停机，则

$$P(A)=\frac{1}{3},P(C\mid A)=0.3,P(C\mid\overline{A})=0.4$$

从而$P(C)=P(A)P(C\mid A)+P(\overline{A})P(C\mid\overline{A})$

$$=\frac{1}{3}\times0.3+\frac{2}{3}\times0.4=\frac{11}{30}\approx0.367$$

20.10 个考签中有 4 个难签，3 个人参加抽签考试，不重复地抽取，每人抽一次，甲先，乙次，丙最后。证明 3 人抽到难签的概率相同

证明：以 A,B,C 分别表示甲、乙、丙抽到难签，则

$$P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid \bar{A})=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}+\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{2}{5}$$

$$P(C)=P(AB)P(C\mid AB)+P(\bar{A}B)P(C\mid \bar{A}B)+P(A\bar{B})P(C\mid A\bar{B})+P(\bar{A}\bar{B})P(C\mid \bar{A}\bar{B})$$

$$\begin{aligned}&=P(A)P(B\mid A)P(C\mid AB)+P(\bar{A})P(B\mid \bar{A})P(C\mid \bar{A}B)\\&\quad+P(A)P(\bar{B}\mid A)P(C\mid A\bar{B})+P(\bar{A})P(\bar{B}\mid \bar{A})P(C\mid \bar{A}\bar{B})\end{aligned}$$

$$=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}+\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}+\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}+\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{288}{720}=\frac{2}{5}$$

21.两部机器制造大量的同一种零件，根据长期资料统计，甲、乙机器制造出的零件废品率分别是 0.01 和 0.02。现有同一机器制造的一批零件，估计这批零件是乙机器制造的可能性比甲机器制造的可能性大一倍，先从这批零件中任意抽取一件，经检查是废品。试由此结果计算这批零件是由甲机器制造的概率。

分析：“现有同一机器制造的一批零件”意思是这批零件是全部由某一台机器制造的，只是不知道这台机器是甲机器还是乙机器。

解答：以 A 表示这批零件是甲机器制造的，以 B 表示抽出的零件是废品，则

$$P(B\mid A)=0.01, P(B\mid \bar{A})=0.02, P(\bar{A})=2P(A)$$

由 $P(\bar{A})=2P(A)$ 及 $P(\bar{A})+P(A)=1$ 得 $P(A)=\frac{1}{3}$

于是由贝叶斯公式得

$$P(A\mid B)=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid \bar{A})}=\frac{\frac{1}{3}\times 0.01}{\frac{1}{3}\times 0.01+\frac{2}{3}\times 0.02}=\frac{1}{5}$$

分值：本题满分 100 分。

评分标准：写出正确的贝叶斯公式得 40 分，计算结果正确得 60 分。

22.有朋自远方来，他乘火车、轮船、汽车、飞机来的概率分别是 0.3， 0.2，0.1，0.4。如果他乘火车、轮船、汽车来，迟到的概率分别是$\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{12}$，而乘飞机则不会迟到。结果他迟到了，试求他是乘火车来的概率

解答：以A_1,A_2,A_3,A_4分别表示他乘火车、轮船、汽车、飞机来，以B表示他迟到，根据题目条件，有

$$P(A_1)=0.3,P(A_2)=0.2,P(A_3)=0.1,P(A_4)=0.4$$

$$P(B\mid A_1)=\frac{1}{4},P(B\mid A_2)=\frac{1}{3},P(B\mid A_3)=\frac{1}{12},P(B\mid A_4)=0$$

根据贝叶斯公式，得

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)+P(A_4)P(B\mid A_4)}$$

$$=\frac{0.3\times\frac{1}{4}}{0.3\times\frac{1}{4}+0.2\times\frac{1}{3}+0.1\times\frac{1}{12}+0.4\times 0}=\frac{1}{2}$$

23.加工一个产品要经过三道工序，第一、二、三道工序不出现废品的概率分别是 0.9，0.95，0.8。假定各工序是否出现废品相互独立，求经过三道工序而不出现废品的概率

解答：以A,B,C分别表示第一、二、三道工序不出现废品，以D表示经过三道工序而不出现废品，则A,B,C相互独立，$D=ABC$。根据题目条件，有

$$P(A)=0.9,P(B)=0.95,P(C)=0.8$$

因此$P(D)=P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=0.9\times0.95\times0.8=0.684$

24.三个人独立地破译一个密码，他们能译出的概率分别是 0.2，$\frac{1}{3}$，0.25。求密码被破译的概率

解答：以A,B,C分别表示三人破译出密码，则A,B,C相互独立，由题目条件

$$P(A)=0.2,P(B)=\frac{1}{3},P(C)=0.25$$

从而密码被破译的概率为

$$P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=1-P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})$$

$$=1-0.8\times\frac{2}{3}\times 0.75=\frac{3}{5}$$

25.对同一目标，3 名射手独立射击的命中率分别是 0.4，0.5 和 0.7，求三人同时向目标各射一发子弹而没有一发中靶的概率

解答：以 A,B,C 分别表示三人命中靶子，则 A,B,C 相互独立，由题目条件

$$P(A)=0.4,P(B)=0.5,P(C)=0.7$$

则三人都没有命中靶子的概率为

$$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})=0.6\times 0.5\times 0.3=0.09$$

26.甲、乙、丙三人同时对飞机进行射击，三人击中的概率分别为 0.4，0.5，0.7。飞机被一人击中而击落的概率为 0.2，被两人击中而击落的概率为 0.6，若三人都击中，飞机必定被击落，求飞机被击落的概率

解答：以 A_1,A_2,A_3 分别表示甲、乙、丙击中飞机，以 B_1,B_2,B_3 分别表示一人、两人、三人击中飞机，以 C 表示飞机被击落，由题目条件

$$P(A_1)=0.4,P(A_2)=0.5,P(A_3)=0.7$$

$$P(C\mid B_1)=0.2,P(C\mid B_2)=0.6,P(C\mid B_3)=1$$ （将事件用字母表示、题目条件表示为概率，正确得 20 分）

而由题意知，A_1,A_2,A_3 相互独立，因此

$$P(B_1)=P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)$$

$$=P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)$$

$$=0.4\times 0.5\times 0.3+0.6\times 0.5\times 0.3+0.6\times 0.5\times 0.7=0.36$$ （B1 概率计算结果正确 20 分）

$$P(B_2)=P(A_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2A_3+A_1\bar{A}_2A_3)=P(A_1A_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1A_2A_3)+P(A_1\bar{A}_2A_3)$$

$$=P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3)+P(A_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)$$

$$=0.4\times 0.5\times 0.3+0.6\times 0.5\times 0.7+0.4\times 0.5\times 0.7=0.41$$ （B2 概率计算结果正确 20 分）

$P(B_3)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0.4\times0.5\times0.7=0.14$（B3 概率计算结果正确 20 分）

从而由全概率公式

$P(C)=P(B_1)P(C|B_1)+P(B_2)P(C|B_2)+P(B_3)P(C|B_3)$

$=0.36\times0.2+0.41\times0.6+0.14\times1=0.458$（全概率公式正确 10 分，计算结果正确 10 分）

分值：本题满分 100 分。

27.证明：若三个事件 A,B,C 相互独立，则 $A\cup B$，AB 及 $A-B$ 都与 C 独立

证明：$P((A\cup B)C)=P(AC\cup BC)=P(AC)+P(BC)-P(ABC)$

$=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(A)P(B)P(C)$

$=[P(A)+P(B)-P(A)P(B)]P(C)$

$=[P(A)+P(B)-P(AB)]P(C)=P(A\cup B)P(C)$，因此 $A\cup B$ 与 C 独立

$P((AB)C)=P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

$=[P(A)P(B)]P(C)=P(AB)P(C)$，因此 AB 与 C 独立

$P((A-B)C)=P((A\bar{B})C)=P(A\bar{B}C)=P(A)P(\bar{B})P(C)$

$=[P(A)P(\bar{B})]P(C)=P(A\bar{B})P(C)=P(A-B)P(C)$，因此 $A-B$ 与 C 独立

28.15 个乒乓球中有 9 个新球，6 个旧球，第一次比赛取出了 3 个，用完后放回去，第二次比赛又取出 3 个，求第二次取出的 3 个球全是新球的概率

解答：以 A_0,A_1,A_2,A_3 分别表示第一次取出 0 个、1 个、2 个、3 个新球，以 B 表示第二次取出 3 个新球，则

$$P(A_0)=\frac{C_6^3}{C_{15}^3},P(A_1)=\frac{C_9^1C_6^2}{C_{15}^3},P(A_2)=\frac{C_9^2C_6^1}{C_{15}^3},P(A_3)=\frac{C_9^3}{C_{15}^3}$$

$$P(B|A_0)=\frac{C_9^3}{C_{15}^3},P(B|A_1)=\frac{C_8^3}{C_{15}^3},P(B|A_2)=\frac{C_7^3}{C_{15}^3},P(B|A_3)=\frac{C_6^3}{C_{15}^3}$$

由全概率公式得

$$P(B)=P(A_0)P(B|A_0)+P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$$

$$=\frac{C_6^3}{C_{15}^3}\cdot\frac{C_9^3}{C_{15}^3}+\frac{C_9^1C_6^2}{C_{15}^3}\cdot\frac{C_8^3}{C_{15}^3}+\frac{C_9^2C_6^1}{C_{15}^3}\cdot\frac{C_7^3}{C_{15}^3}+\frac{C_9^3}{C_{15}^3}\cdot\frac{C_6^3}{C_{15}^3}=\frac{528}{5915}\approx 0.089$$

29.要验收一批 100 件的物品，从中随机地取出 3 件来测试，设 3 件物品的测试是相互独立的，如果 3 件中有 1 件不合格，就拒绝接受该批物品。设 1 件不合格的物品经测试被查出的概率为 0.95，而 1 件合格品经测试被误认为不合格的概率为 0.01，如果这 100 件物品中有 4 件是不合格的，求这批物品被接受的概率

解答：以 A_0,A_1,A_2,A_3 分别表示取出的 3 件物品中有 0 个、1 个、2 个、3 个不合格品，以 B 表示取出的 3 件物品测试都合格，则

$$P(A_0)=\frac{C_{96}^3}{C_{100}^3},P(A_1)=\frac{C_4^1C_{96}^2}{C_{100}^3},P(A_2)=\frac{C_4^2C_{96}^1}{C_{100}^3},P(A_3)=\frac{C_4^3}{C_{100}^3}$$

$$P(B|A_0)=0.99^3,P(B|A_1)=0.99^2\times0.05,P(B|A_2)=0.99^1\times0.05^2,P(B|A_3)=0.05^3$$

由全概率公式得

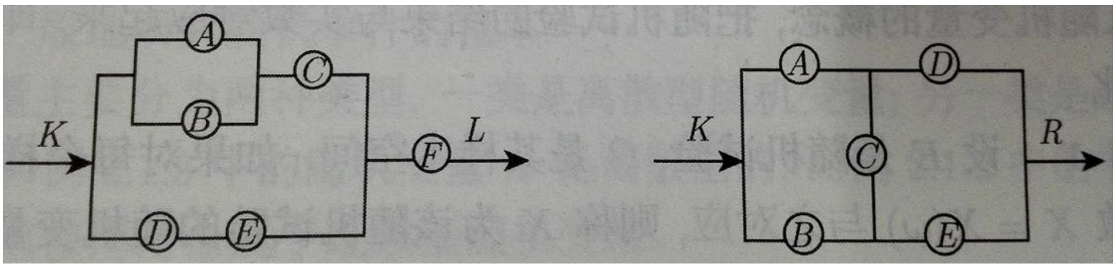
$$P(B)=P(A_0)P(B|A_0)+P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$$（写出全概率公式得 20 分）

$$=\frac{C_{96}^3}{C_{100}^3}\cdot0.99^3+\frac{C_4^1C_{96}^2}{C_{100}^3}\cdot0.99^2\times0.05+\frac{C_4^2C_{96}^1}{C_{100}^3}\cdot0.99\times0.05^2+\frac{C_4^3}{C_{100}^3}\cdot0.05^3$$（各概率正确得 60 分，四部分每错一个扣 15 分）

$$=\frac{139531.59842}{161700}\approx0.8629$$（计算结果正确得 20 分）

分值：本题满分 100 分。

30.设下图的两个系统 KL 和 KR 中各元件通达与否相互独立，且每个元件通达的概率均为 p ，分别求系统 KL 和 KR 通达的概率



解答：在系统 KL 中

根据各元件之间的并联、串联关系，系统通达可表示为 $(((A\cup B)C)\cup(DE))F$

可化为 $ACF\cup BCF\cup DEF$

又因为各元件通达相互独立，因此该系统通达的概率为

$P_{KL}=P(ACF\cup BCF\cup DEF)$

$=P(ACF)+P(BCF)+P(DEF)-P(ABCF)-P(ACDEF)-P(BCDEF)+P(ABCDEF)$

$=p^3+p^3+p^3-p^4-p^5-p^5+p^6=3p^3-p^4-2p^5+p^6$

系统 KR 通达可以表示为 $AD\cup ACE\cup BE\cup BCD$

因此该系统通达的概率为

$P_{KR}=P(AD\cup ACE\cup BE\cup BCD)$

$$
\begin{aligned}
&=P(AD)+P(ACE)+P(BE)+P(BCD)\\
&-P(ACDE)-P(ABDE)-P(ABCD)-P(ABCE)-P(ABCDE)-P(BCDE)\\
&+P(ABCDE)+P(ABCDE)+P(ABCDE)+P(ABCDE)-P(ABCDE)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=P(AD)+P(ACE)+P(BE)+P(BCD)\\
&-P(ACDE)-P(ABDE)-P(ABCD)-P(ABCE)-P(BCDE)+2P(ABCDE)
\end{aligned}
$$

$=p^2+p^3+p^2+p^3-p^4-p^4-p^4-p^4-p^4+2p^5=2p^2+2p^3-5p^4+2p^5$

P55 习题 2

1. 将一颗骰子抛掷两次，以 X 表示两次出现点数的最小值，试求 X 的分布律

分析：抛掷两次骰子，实验结果有$6^2=36$种，这是样本空间中样本点数目

$\{X=1\}$包含有$(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)$共 11 个样本点，因此$P\{X=1\}=\frac{11}{36}$

$\{X=2\}$包含有$(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)$共 9 个样本点，因此$P\{X=2\}=\frac{9}{36}$

其他可依此类推

解答：由题意知，X 可取的值为$1,2,3,4,5,6$，由古典概率计算可得

$P\{X=1\}=\frac{11}{36}$，$P\{X=2\}=\frac{9}{36}$，$P\{X=3\}=\frac{7}{36}$，$P\{X=4\}=\frac{5}{36}$，$P\{X=5\}=\frac{3}{36}$，$P\{X=6\}=\frac{1}{36}$

因此 X 的分布律为

X	1	2	3	4	5	6
P	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36

评分标准：满分 100 分。

确定随机变量的 6 个取值共 30 分，计算出每个取值概率得 10 分，列表为分布律 10 分。

2. 设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{1}{2^k}\quad k=1,2,3,\cdots$$

求概率（1）$P\{X=2,4,6,\cdots\}$；（2）$P\{X\ge 3\}$

分析：$\{X=2,4,6,\cdots\}$意思是$\{X=2\}$或$\{X=4\}$或$\{X=6\}$，...

解答：（1）$P\{X=2,4,6,\cdots\}=P\{X=2\}+P\{X=4\}+P\{X=6\}+\cdots$

$$=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$

（2）方法一：$P\{X\geq 3\}=P\{X=3\}+P\{X=4\}+P\{X=5\}+\cdots$

$$=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\cdots=\frac{\frac{1}{2^3}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

方法二：$P\{X\geq 3\}=1-P\{X<3\}=1-P\{X=1\}-P\{X=2\}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$

3. 设在 15 只同类型的零件中有 2 只是次品，在其中取 3 次，每次任取 1 只，做不放回抽样，以 X 表示取出次品的只数，求 X 的分布律和分布函数

解答：X 可取得值为 0,1,2

$$P\{X=0\}=\frac{C_{13}^1}{C_{15}^1}\cdot\frac{C_{12}^1}{C_{14}^1}\cdot\frac{C_{11}^1}{C_{13}^1}=\frac{22}{35}$$

（说明：$X=0$ 意味着三次取到的都是正品）

$$P\{X=1\}=C_3^1\frac{C_2^1}{C_{15}^1}\cdot\frac{C_{13}^1}{C_{14}^1}\cdot\frac{C_{12}^1}{C_{13}^1}=\frac{12}{35}$$

（说明：$X=1$ 意味着三次中有一次取到次品，另外两次取到正品）

$$P\{X=2\}=C_3^1\frac{C_2^1}{C_{15}^1}\cdot\frac{C_1^1}{C_{14}^1}\cdot\frac{C_{13}^1}{C_{13}^1}=\frac{1}{35}$$

（说明：$X=2$ 意味着三次中有两次取到次品，另外一次取到正品）

因此 X 的分布律为

X	0	1	2
P	22/35	12/35	1/35

当 $x<0$ 时，$F(x)=P\{X\leq x\}=P\{\Phi\}=0$

当 $0\leq x<1$ 时，$F(x)=P\{X\leq x\}=P\{X=0\}=\frac{22}{35}$

当 $1\leq x<2$ 时，$F(x)=P\{X\leq x\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}=\frac{34}{35}$

当 $2\leq x$ 时，$F(x)=P\{X\leq x\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\}=1$

综上所述，X 的分布函数为

$$F(X)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{22}{35} & 0\le x<1\\ \dfrac{34}{35} & 1\le x<2\\ 1 & 2\le x\end{cases}$$

4. 设离散型随机变量 X 的分布律为

$P\{X=k\}=ae^{-k}\quad k=1,2,\cdots$

试确定常数a

解答：由分布律的规范性

$$1=\sum_{k=1}^{\infty}ae^{-k}=a\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^k=a\frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{a}{e-1}$$

因此$a=e-1$

5. 一个大楼内装有 5 个同类型的供水设备，调查表明，在任一时刻t每个设备被使用的概率为 0.1，试求

（1）恰有 2 个设备同时被使用的概率；

（2）至少有 3 个设备同时被使用的概率

（3）至多有 3 个设备同时被使用的概率；

（4）至少有 1 个设备同时被使用的概率

解答：以 X 表示同时被使用的设备个数，则$X\sim B(5,0.1)$

（1）$P\{X=2\}=C_5^2\cdot0.1^2\cdot0.9^3=0.0729$

（2）$P\{X\ge3\}=P\{X=3\}+P\{X=4\}+P\{X=5\}$

$=C_5^3\cdot0.1^3\cdot0.9^2+C_5^4\cdot0.1^4\cdot0.9+C_5^5\cdot0.1^5=0.00856$

（3）$P\{X\le3\}=1-P\{X=4\}-P\{X=5\}$

$=1-C_5^4\cdot 0.1^4\cdot 0.9-C_5^5\cdot 0.1^5=0.99954$

（4）$P\{X\ge 1\}=1-P\{X=0\}=1-C_5^0\cdot 0.9^5=0.40951$

6. 甲、乙两人投篮，投中的概率分别为 0.6 和 0.7。今两人各投 3 次，求：

（1）两人投中次数相等的概率

（2）甲投中次数多的概率

解答：以 X、Y 分别表示甲、乙两人投中的次数，则

$X\sim B(3,0.6)\quad Y\sim B(3,0.7)$

（1）$P\{X=Y\}=P\{X=Y=0\}+P\{X=Y=1\}+P\{X=Y=2\}+P\{X=Y=3\}$

$=C_3^0 0.4^3\cdot C_3^0 0.3^3+C_3^1 0.6\cdot 0.4^2\cdot C_3^1 0.7\cdot 0.3^2+C_3^2 0.6^2\cdot 0.4\cdot C_3^2 0.7^2\cdot 0.3+C_3^3 0.6^3\cdot C_3^3 0.7^3$

$=0.001728+0.054432+0.190512+0.074088=0.32076$

（2）$P\{Y<3\}=1-P\{Y=3\}=1-C_3^3 0.7^3=0.657$
$P\{Y<2\}=P\{Y=0\}+P\{Y=1\}=C_3^0 0.3^3+C_3^1 0.7\cdot 0.3^2=0.216$

$P\{Y<1\}=P\{Y=0\}=C_3^0 0.3^3=0.027$

因此 $P\{X>Y\}=P\{X=3,Y<3\}+P\{X=2,Y<2\}+P\{X=1,Y<1\}$

$=C_3^3 0.6^3\cdot 0.657+C_3^2 0.6^2\cdot 0.4\cdot 0.216+C_3^1 0.6\cdot 0.4^2\cdot 0.027$

$=0.141912+0.093312+0.007776=0.243$

7. 有甲、乙两种味道和颜色都极为相似的名酒各 4 杯，如果从中挑 4 杯，能将甲种酒全部挑出来，算是试验成功一次，求

（1）某人随机地去挑，试验成功一次的概率

（2）某人声称他通过品尝能区分两种酒。他连续试验 10 次，成功 3 次，试推断他是猜对的，还是他确有区分的能力（设各次试验室相互独立的）

分析：题意是从混在一起的 8 杯酒中，挑 4 杯出来，挑出的 4 杯刚好都是甲种酒算成功。

解答：（1）根据古典概率的计算方法，随机挑时成功的几率为 $\frac{C_4^4}{C_8^4}=\frac{1}{70}$

（2）假设他是随机挑的，以 X 表示 10 次试验中成功次数，则 $X \sim B(10, \frac{1}{70})$，所以随机挑时 10 次中成功 3 次的概率就是 $P\{X=3\} = C_{10}^{3}\left(\frac{1}{70}\right)^{3}\left(\frac{69}{70}\right)^{7} \approx 3.16\times10^{-4}$

这个概率非常小，说明他不太可能是随机挑的，因此判断他应该是有区分能力的。

评分标准：满分 100 分。

第（1）问 40 分；第（2）问 60 分，其中计算正确 40 分，结论（包括原因）20 分。

8. 某一公安局在长度为 t 的时间间隔内收到的紧急呼救次数 X 服从参数为 $\frac{1}{2}t$ 的泊松分布，而与时间间隔的起点无关（时间以小时计），求：

（1）某一天中午 12 时至下午 3 时没有收到紧急呼叫的概率；

（2）某一天中午 12 时至下午 5 时至少收到 1 次紧急呼救的概率

解答：（1）时间间隔为 3，因此收到的呼救次数 $X \sim P(1.5)$，于是

$$P\{X=0\} = \frac{1.5^0}{0!}e^{-1.5} = e^{-1.5}$$

（2）时间间隔为 5，因此收到的呼救次数 $X \sim P(2.5)$，于是

$$P\{X \ge 1\} = 1 - P\{X=0\} = 1 - \frac{2.5^0}{0!}e^{-2.5} = 1 - e^{-2.5}$$

9. 设有同类型设备 200 台，各台设备工作相互独立，发生故障的概率均为 0.005，通常一台设备的故障可由一个人来排除

（1）至少配备多少维修工人，才能保证设备发生故障而不能及时排除的概率不大于 0.01？

（2）若一人包干 40 台设备，求设备发生故障而不能及时排除的概率；

（3）若有 2 人共同负责维修 100 台设备，求设备发生故障而不能及时排除的概率

解答：（1）以 X 表示出现故障的设备数，由题目条件，$X \sim B(200, 0.005)$，由于二项分布可以用泊松分布来近似，因此可近似认为 $X \sim P(1)$

设配备的工人数为 n，则“设备发生故障而不能及时排除”可表示为 $\{X > n\}$，查表得

$$P\{X>4\}=P\{X\geq 5\}=0.0036<0.01$$

所以至少应配备 4 名维修工人

（2）以 X 表示出现故障的设备数，由题目条件，$X\sim B(40,0.005)$，由于二项分布可以用泊松分布来近似，因此可近似认为$X\sim P(0.2)$

设备发生故障而不能及时排除的概率为

$P\{X>1\}=P\{X\geq 2\}=0.0175231$（查表得之）

（3）以 X 表示出现故障的设备数，由题目条件，$X\sim B(100,0.005)$，由于二项分布可以用泊松分布来近似，因此可近似认为$X\sim P(0.5)$

设备发生故障而不能及时排除的概率为

$P\{X>2\}=P\{X\geq 3\}=0.014388$（查表得之）

注：结果说明 2 人负责 100 台设备比 1 人负责 40 台设备更有效率

10. 设随机变量 X 在[2,5]上服从均匀分布，现对 X 进行三次独立观测，试求至少有两次观测值大于 3 的概率

解答：由题意，$X\sim U[2,5]$，其密度函数为$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & x\in[2,5]\\ 0 & else\end{cases}$

从而$P\{X>3\}=\int_3^{+\infty}f(x)dx=\int_3^5\frac{1}{3}dx+\int_5^{+\infty}0dx=\frac{2}{3}$

以 Y 表示 3 次独立观测中，观测值大于 3 的次数，则$Y\sim B(3,\frac{2}{3})$，因此

$$P\{Y\geq 2\}=P\{Y=2\}+P\{Y=3\}=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)+C_3^3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{20}{27}$$

11. 对球的直径作测量，设其均匀地分布在 20 厘米到 22 厘米之间，求直径在 20.1 厘米到 20.5 厘米之间的概率

解答：由题意，$X\sim U[20,22]$，其密度函数为$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & x\in[20,22]\\ 0 & else\end{cases}$

从而$P\{20.1 \le X \le 20.5\} = \int_{20.1}^{20.5} f(x)dx = \int_{20.1}^{20.5} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{5}$

12. 设随机变量 X 的分布函数为$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \ln x & 1 \le x < e \\ 1 & e \le x \end{cases}$

（1）求概率$P\{X < 2\}, P\{0 < X \le 3\}, P\{2 < X < \frac{5}{2}\}$

（2）求 X 的密度函数$f(x)$

解答：（1）$P\{X < 2\} = F(2) = \ln 2 \approx 0.69315$

$P\{0 < X \le 3\} = F(3) - F(0) = 1 - 0 = 1$

$P\{2 < X < \frac{5}{2}\} = F(\frac{5}{2}) - F(2) = \ln\frac{5}{2} - \ln 2 = \ln\frac{5}{4} \approx 0.22314$

（2）$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{x} & 1 \le x < e \\ 0 & e \le x \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x} & 1 \le x < e \\ 0 & else \end{cases}$

13. 设连续型随机变量 X 的分布函数为$F(x) = \begin{cases} a + be^{-\frac{x^2}{2}} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

（1）求常数 a 和 b

（2）求 X 的密度函数$f(x)$

（3）求概率$P\{\sqrt{\ln 4} < X < \sqrt{\ln 16}\}$

解答：（1）由分布函数的性质

$$1 = F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} (a + be^{-\frac{x^2}{2}}) = a$$

又因为连续型随机变量的分布函数是连续函数，因此

$$0 = F(0) = F(0^+) = \lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^+} (a + be^{-\frac{x^2}{2}}) = a + b$$

从而得$a=1,b=-1$，即$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{2}} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

（2）$f(x)=F'(x)=\begin{cases}xe^{-\frac{x^2}{2}} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

（3）$P\{\sqrt{\ln 4}<X<\sqrt{\ln 16}\}=F(\sqrt{\ln 16})-F(\sqrt{\ln 4})=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

14. 设随机变量 X 的密度函数为

（1）$f(x)=\begin{cases}2\left(1-\frac{1}{x^2}\right) & 1\le x\le 2\\ 0 & else\end{cases}$

（2）$f(x)=\begin{cases}x & 0\le x<1\\ 2-x & 1\le x<2\\ 0 & else\end{cases}$

求 X 的分布函数$F(x)$

解答：（1）$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}0dx=0 & x<1\\ \int_{-\infty}^{1}0dx+\int_{1}^{x}2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx=2x+\frac{2}{x}-4 & 1\le x<2\\ \int_{-\infty}^{1}0dx+\int_{1}^{2}2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx+\int_{2}^{x}0dx=1 & 2\le x\end{cases}$

$=\begin{cases}0 & x<1\\ 2x+\frac{2}{x}-4 & 1\le x<2\\ 1 & 2\le x\end{cases}$

（2）$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}0dx=0 & x<0\\ \int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{x}xdx=\frac{x^2}{2} & 0\le x<1\\ \int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{1}xdx+\int_{1}^{x}(2-x)dx=2x-\frac{x^2}{2}-1 & 1\le x<2\\ \int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{1}xdx+\int_{1}^{2}(2-x)dx+\int_{2}^{x}0dx=1 & 2\le x\end{cases}$

$$
=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \dfrac{x^2}{2} & 0\le x<1 \\ 2x-\dfrac{x^2}{2}-1 & 1\le x<2 \\ 1 & 2\le x \end{cases}
$$

15. 某机构研究了英格兰在 1875-1951 年，在矿山发生导致 10 人以上死亡的事故的频繁程度，得知相继两次事故之间的时间 T 服从指数分布，其概率密度为

$$
f_T(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{241}e^{-\frac{t}{241}} & t>0 \\ 0 & else \end{cases}
$$

求 T 的分布函数 $F_T(t)$，并求概率 $P\{50<T<100\}$

解答：$F_T(t)=\int_{-\infty}^{t} f_T(t)dt=\begin{cases} \int_{-\infty}^{t} 0dt=0 & t<0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_{0}^{t}\dfrac{1}{241}e^{-\frac{t}{241}}dt=1-e^{-\frac{t}{241}} & 0\le t \end{cases}=\begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-e^{-\frac{t}{241}} & 0\le t \end{cases}$

因此 $P\{50<T<100\}=F_T(100)-F_T(50)=e^{-\frac{50}{241}}-e^{-\frac{100}{241}}$

评分标准：满分 100 分。

求出分布函数 80 分，其中写出定义式 20 分，分段函数每段 30 分；概率 20 分。

16. 某种型号器件的寿命 X（以小时计）具有以下密度函数

$$
f(x)=\begin{cases} \dfrac{1000}{x^2} & x>1000 \\ 0 & else \end{cases}
$$

现有一大批此种器件（设各器件损坏与否相互独立），任取 5 只，求其中至少有 2 只寿命大于 1500 小时的概率

解答：器件寿命大于 1500 小时的概率为

$$
P\{X>1500\}=\int_{1500}^{+\infty} f(x)dx=\int_{1500}^{+\infty}\frac{1000}{x^2}dx=\frac{2}{3}
$$

设 5 只器件中寿命大于 1500 小时的器件数目为Y，则$Y\sim B(5,\frac{2}{3})$，因此至少有 2 只寿命大于 1500 小时的概率为

$$P\{Y\geq 2\}=1-P\{Y=0\}-P\{Y=1\}=1-C_5^0\left(\frac{1}{3}\right)^5-C_5^1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{232}{243}\approx 0.9547$$

17. 设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X（以分钟计）服从指数分布，其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}} & x>0\\ 0 & else\end{cases}$$

某顾客在窗口等待服务，若超过 10 分钟，他就离开。他一个月要到银行 5 次，以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数，求 Y 的分布律及概率$P\{Y\geq 1\}$

解答：该顾客未等到服务而离开窗口的概率为

$$P\{X>10\}=\int_{10}^{+\infty}f(x)dx=\int_{10}^{+\infty}\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}dx=e^{-2}$$

则$Y\sim B(5,e^{-2})$，即$P\{Y=k\}=C_5^k(e^{-2})^k(1-e^{-2})^{5-k}\quad k=0,1,\cdots,5$

于是$P\{Y\geq 1\}=1-P\{Y=0\}=1-C_5^0(1-e^{-2})^5\approx 0.5167$

18. 设$X\sim N(3,2^2)$

（1）求概率$P\{2<X\leq 5\}$，$P\{-4<X\leq 10\}$，$P\{|X|>2\}$，$P\{X>3\}$；

（2）确定 c 使得$P\{X>c\}=P\{X\leq c\}$；

（3）设 d 满足$P\{X>d\}\geq 0.9$，问 d 至多为多少？

解答：（1）$P\{2<X\leq 5\}=F(5)-F(2)=\Phi(\frac{5-3}{2})-\Phi(\frac{2-3}{2})=\Phi(1)-\Phi(-\frac{1}{2})$

$$=\Phi(1)+\Phi(\frac{1}{2})-1=0.8413+0.6915-1=0.5328$$

$$P\{-4<X\leq 10\}=F(10)-F(-4)=\Phi(\frac{10-3}{2})-\Phi(\frac{-4-3}{2})=\Phi(\frac{7}{2})-\Phi(\frac{-7}{2})$$

$=\Phi(\frac{7}{2})+\Phi(\frac{7}{2})-1=2\times0.999767-1=0.999534$

$P\{|X|>2\}=1-P\{-2\le X\le 2\}=1-F(2)+F(-2)=1-\Phi(\frac{2-3}{2})+\Phi(\frac{-2-3}{2})$

$=1-\Phi(-\frac{1}{2})+\Phi(-\frac{5}{2})=1+\Phi(\frac{1}{2})-\Phi(\frac{5}{2})=0.6977$

$P\{X>3\}=1-F(3)=1-\Phi(\frac{3-3}{2})=1-\Phi(0)=0.5$

（2）$1-\Phi(\frac{c-3}{2})=1-F(c)=P\{X>c\}=P\{x\le c\}=F(c)=\Phi(\frac{c-3}{2})$

因此$\Phi(\frac{c-3}{2})=0.5$，查表得$\frac{c-3}{2}=0$，所以$c=3$

（3）$P\{X>d\}=1-F(d)=1-\Phi(\frac{d-3}{2})=\Phi(\frac{3-d}{2})\ge 0.9$

查表得$\frac{3-d}{2}\ge 1.29$，因此$d\le 0.42$

说明：由$P\{X>d\}=1-F(d)=1-\Phi(\frac{d-3}{2})\ge 0.9$得$\Phi(\frac{d-3}{2})\le 0.1$，这样在标准正态分布的分布函数值表中是查不到$\frac{d-3}{2}$的值（实际上$\frac{d-3}{2}$是负数，所以在表中查不到），所以不能这么做。

19. 设$X\sim N(160,\sigma^2)$，若要求 X 落在区间（120,200）内的概率不小于 0.80，则应允许σ最大为多少？

解答：$P\{120<X<200\}=F(200)-F(120)=\Phi(\frac{200-160}{\sigma})-\Phi(\frac{120-160}{\sigma})$

$=\Phi(\frac{40}{\sigma})-\Phi(-\frac{40}{\sigma})=2\Phi(\frac{40}{\sigma})-1\ge 0.8$，因此$\Phi(\frac{40}{\sigma})\ge 0.9$

查表得$\frac{40}{\sigma}\ge 1.29$，解得$\sigma\le\frac{40}{1.29}\approx 31.01$，即应允许$\sigma$最大为 31.01

20. 某地区 18 岁女青年的血压（收缩压，以 mmHg 计）服从正态分布$N(110,12^2)$，在该地任选一 18 岁女青年，测量她的血压 X，试确定最小x，使得$P\{X>x\}\le 0.05$

解答：由于$X \sim N(110,12^2)$，因此

$$P\{X > x\} = 1 - F(x) = 1 - \Phi(\frac{x-110}{12}) \le 0.05$$

从而$\Phi(\frac{x-110}{12}) \ge 0.95$，查表得$\frac{x-110}{12} \ge 1.645$，解得$x \ge 129.74$

即要使$P\{X > x\} \le 0.05$，x最小应为 129.74

21. 某地抽样调查表明，考生的外语成绩（百分制）近似地服从正态分布，平均成绩为 72 分，96 分以上考生占考生总数的 2.3%，试求考生的外语成绩在 60 分至 84 分之间的概率

解答：以 X 表示考生的外语成绩，由题目条件，$X \sim N(72,\sigma^2)$，于是

$$P\{X > 96\} = 1 - F(96) = 1 - \Phi(\frac{96-72}{\sigma}) = 2.3\%$$

从而$\Phi(\frac{96-72}{\sigma}) = 0.977$，查表得$\frac{96-72}{\sigma} = 2.0$，解得$\sigma = 12$

因此$P\{60 \le X \le 84\} = F(84) - F(60) = \Phi(\frac{84-72}{12}) - \Phi(\frac{60-72}{12})$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \times 0.8413 - 1 = 0.6826$$

评分标准：满分 100 分。

确定出σ值 50 分，计算出目标概率 50 分。

22. 公共汽车的车门高度是按成年男性与车门碰头的机会不超过 0.01 设计的，设成年男性的身高 X（单位：厘米）服从正态分布$N(170,6^2)$，问车门的最低高度应为多少？

解答：设车门的高度为x，则

$$P\{X > x\} = 1 - F(x) = 1 - \Phi(\frac{x-170}{6}) \le 0.01$$

从而$\Phi(\frac{x-170}{6}) \ge 0.99$，查表得$\frac{x-170}{6} \ge 2.33$，解得$x \ge 183.98$

23. 设随机变量 X 的分布律为

X	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
p	0.3	0.2	0.4	0.1

求下列随机变量 Y 的分布律：

（1）$Y=(2X-\pi)^2$；　　　　（2）$Y=\cos(2X-\pi)$

解答：

X	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$(2X-\pi)^2$	π^2	0	π^2	$4\pi^2$
$\cos(2X-\pi)$	-1	1	-1	1
p	0.3	0.2	0.4	0.1

（1）因此$Y=(2X-\pi)^2$的分布律为

$Y=(2X-\pi)^2$	0	π^2	$4\pi^2$
p	0.2	0.7	0.1

（2）因此$Y=\cos(2X-\pi)$得分布律为

$Y=\cos(2X-\pi)$	-1	1
p	0.7	0.3

24. 设随机变量 X 的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ 0.3 & -1\le x<1\\ 0.8 & 1\le x<2\\ 1 & 2\le x\end{cases}$

（1）求 X 的分布律；　　　　（2）求$Y=|X|$的分布律

解答：（1）显然，X 的分布律为

X	-1	1	2
P	0.3	0.5	0.2

（2）由于

X	-1	1	2
$Y=\lvert X\rvert$	1	1	2
P	0.3	0.5	0.2

因此，$Y=|X|$的分布律为

$Y=\lvert X\rvert$	1	2
P	0.8	0.2

25. 设 $X \sim N(0,1)$，求下列随机变量 Y 的密度函数：

（1）$Y = 2X - 1$；　　（2）$Y = e^{-X}$；　　（3）$Y = X^2$

解答：（1）$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{2X - 1 \le y\} = P\{X \le \frac{y+1}{2}\} = F_X(\frac{y+1}{2})$

两边对 y 求导得 $f_Y(y) = f_X(\frac{y+1}{2}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\frac{y+1}{2})^2}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y+1)^2}{8}}$，$x \in R$

（2）当 $y \le 0$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{e^{-X} \le y\} = P\{\Phi\} = 0$

当 $y > 0$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{e^{-X} \le y\} = P\{X \ge -\ln y\} = 1 - F_X(-\ln y)$

两边对 y 求导得 $f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ \frac{1}{y} f_X(-\ln y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, y} e^{-\frac{\ln^2 y}{2}} & y > 0 \end{cases}$

（3）当 $y < 0$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X^2 \le y\} = P\{\Phi\} = 0$

当 $y = 0$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \le 0\} = P\{X^2 \le 0\} = P\{X = 0\} = 0$

当 $y > 0$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X^2 \le y\} = P\{-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\} = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$

两边对 y 求导得 $f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}} & y > 0 \end{cases}$

26. 设随机变量 $X \sim U(0,\pi)$，求下列随机变量 Y 的密度函数：

（1）$Y = 2\ln X$；　　（2）$Y = \cos X$；　　（3）$Y = \sin X$

解答：由题目条件，$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & x \in (0,\pi) \\ 0 & else \end{cases}$

（1）$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{2\ln X \le y\} = P\{X \le e^{\frac{y}{2}}\} = F_X(e^{\frac{y}{2}})$

两边对 y 求导得 $f_Y(y) = f_X(e^{\frac{y}{2}}) \cdot e^{\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cdot e^{\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{2} & e^{\frac{y}{2}} \in (0,\pi) \\ 0 & else \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} e^{\frac{y}{2}} & y < 2\ln\pi \\ 0 & else \end{cases}$

（2）$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\cos X\le y\}=P\{X\ge \arccos y\}=1-F_X(\arccos y)$

两边对 y 求导得 $f_Y(y)=f_X(\arccos y)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} & \arccos y\in(0,\pi)\\ 0 & else\end{cases}$

$=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} & y\in(-1,1)\\ 0 & else\end{cases}$

（3）$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\sin X\le y\}=P\{X\ge \pi-\arcsin y\}+P\{X\le \arcsin y\}$
$=1-F_X(\pi-\arcsin y)+F_X(\arcsin y)$

两边对 y 求导得 $f_Y(y)=f_X(\pi-\arcsin y)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}+f_X(\arcsin y)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

$=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} & \pi-\arcsin y\in(0,\pi)\\ 0 & else\end{cases}+\begin{cases}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} & \arcsin y\in(0,\pi)\\ 0 & else\end{cases}$

$=\begin{cases}\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} & y\in(0,1)\\ 0 & else\end{cases}$

评分标准：满分 100 分。

第（1）（2）小题每题 30 分，第（3）小题 40 分。

P91 习题 3

1. 设二维随机变量（X，Y）的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y} & x\geq 0,y\geq 0\\ 0 & else\end{cases}$$

求概率 $P\{1<X\leq 2,3<Y\leq 5\}$

解答： $P\{1<X\leq 2,3<Y\leq 5\}=F(2,5)-F(2,3)-F(1,5)+F(1,3)$

$=(1-2^{-2}-2^{-5}+2^{-2-5})-(1-2^{-2}-2^{-3}+2^{-2-3})-(1-2^{-1}-2^{-5}+2^{-1-5})+(1-2^{-1}-2^{-3}+2^{-1-3})$

$=1-2^{-2}-2^{-5}+2^{-7}-1+2^{-2}+2^{-3}-2^{-5}-1+2^{-1}+2^{-5}-2^{-6}+1-2^{-1}-2^{-3}+2^{-4}$

$=2^{-7}+2^{-4}-2^{-5}-2^{-6}=\dfrac{3}{128}$

2. 袋中有 5 只球（2 只白球，3 只红球），现进行有放回和无放回抽球两次，每次抽一只，定义随机变量

$$X=\begin{cases}0 & \text{第一次抽到红球}\\ 1 & \text{第一次抽到白球}\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}0 & \text{第二次抽到红球}\\ 1 & \text{第二次抽到白球}\end{cases}$$

试就有放回和无放回摸球两种情况分别求（X，Y）的联合分布律

解答：两种情况下（X，Y）的可能取值都是四个

$$(0,0)\quad(0,1)\quad(1,0)\quad(1,1)$$

（1）有放回抽球时

第二次抽球不受第一次抽球的影响，即 Y 的取值与 X 的取值相互独立，于是

$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{9}{25}$

$P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1\}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{6}{25}$

$P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}P\{Y=0\}=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{6}{25}$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\}=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$$

从而（X，Y）的联合分布律为

X \ Y	0	1
0	9/25	6/25
1	6/25	4/25

（2）无放回抽球时

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\,|\,X=0\}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1\,|\,X=0\}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}P\{Y=0\,|\,X=1\}=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\,|\,X=1\}=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$$

从而（X，Y）的联合分布律为

X \ Y	0	1
0	3/10	3/10
1	3/10	1/10

3. 求第 2 题中的（X，Y）的边缘分布律，并就所得结果讨论联合分布律与边缘分布律的关系

解答：（1）有放回抽球时，（X，Y）的边缘分布律为

X \ Y	0	1	$p_{i\bullet}$
0	9/25	6/25	3/5
1	6/25	4/25	2/5
$p_{\bullet j}$	3/5	2/5	

（2）无放回抽球时，（X，Y）的边缘分布律为

X \ Y	0	1	$p_{i\bullet}$
0	3/10	3/10	3/5
1	3/10	1/10	2/5
$p_{\bullet j}$	3/5	2/5	

结果表明不同的联合分布律求出的边缘分布律可以是相同的，因此边缘分布不能惟一确定联合分布

4. 设二维随机变量（X，Y）只能取（-1,0），（0,0），（0,1）三对数，且取这些数的概率分别是$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}$

（1）写出（X，Y）的联合分布律；

（2）求联合分布函数$F(x,y)$

解答：（1）（X，Y）的联合分布律为

X \ Y	0	1
-1	1/2	0
0	1/3	1/6

（2）当$x<-1$时，三个点都不能满足$\{X\le x,Y\le y\}$，因此

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=P\{\Phi\}=0$$

当$y<0$时，三个点都不能满足$\{X\le x,Y\le y\}$，因此

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=P\{\Phi\}=0$$

当$-1\le x<0$且$0\le y$时，只有点（-1,0）满足$\{X\le x,Y\le y\}$，因此

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=P\{(-1,0)\}=\frac{1}{2}$$

当$0\le x$且$0\le y<1$时，点（-1,0）和（0,0）满足$\{X\le x,Y\le y\}$，因此

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=P\{(-1,0)\}+P\{(0,0)\}=\frac{5}{6}$$

当$0\le x$且$1\le y$时，所有三个点都满足$\{X\le x,Y\le y\}$，因此

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=P\{(-1,0)\}+P\{(0,0)\}+P\{(0,1)\}=1$$

综上所述，联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & x<-1\ or\ y<0\\ 1/2 & -1\le x<0,0\le y\\ 5/6 & 0\le x,0\le y<1\\ 1 & 0\le x,1\le y\end{cases}$$

评分标准：满分 100 分。

联合分布律 20 分；联合分布函数共 4 段，每段 20 分。

5. 设 X 与 Y 独立，它们的分布律分别由下表给出，求（X，Y）的联合分布律

X	-2	-1	0	1/2
$p_{i\bullet}$	1/4	1/3	1/12	1/3

Y	-1/2	1	3
$p_{\bullet j}$	1/2	1/4	1/4

解答：由于 X 与 Y 独立，因此

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$$

从而（X，Y）的联合分布律为

X \ Y	-1/2	1	3	$p_{i\bullet}$
-2	1/8	1/16	1/16	1/4
-1	1/6	1/12	1/12	1/3
0	1/24	1/48	1/48	1/12
1/2	1/6	1/12	1/12	1/3
$p_{\bullet j}$	1/2	1/4	1/4	

说明：根据独立性等式，联合分布律中的每个概率恰好就是它所在行的边缘概率乘以它所在列的边缘概率。

评分标准：满分 100 分。

联合分布律每错一个扣 10 分。

6.（本题为条件分布问题，不在学习范围内）

7. 设二维随机变量（X，Y）的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} a(6-x-y) & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2 \\ 0 & else \end{cases}$

（1）确定常数 a；

（2）求概率 $P\{X\le 0.5, Y\le 1.5\}$

（3）求概率 $P\{(X,Y)\in D\}$，这里 D 是由 $x=0,y=0,x+y=1$ 这 3 条直线所围成的三角形区域

解答：（1）根据联合密度的规范性

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^1 dx\int_0^2 a(6-x-y)dy=\int_0^1 a(10-2x)dx=9a$$

因此 $a=\frac{1}{9}$，即联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{9}(6-x-y) & 0\le x\le 1,0\le y\le 2\\ 0 & else\end{cases}$

（2）$P\{X\le 0.5,Y\le 1.5\}=\int_{-\infty}^{0.5}dx\int_{-\infty}^{1.5}f(x,y)dy$

$$=\int_0^{0.5}dx\int_0^{1.5}\frac{1}{9}(6-x-y)dy=\int_0^{0.5}(\frac{7}{8}-\frac{1}{6}x)dx=\frac{5}{12}$$

（3）$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{1}{9}(6-x-y)dy$

$$=\int_0^1(\frac{11}{18}-\frac{2}{3}x+\frac{1}{18}x^2)dx=\frac{8}{27}$$

评分标准：满分 100 分。

三问每问 30 分，作业整洁分 10 分。

8. 设二维随机变量（X，Y）的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)} & x>0,y>0\\ 0 & else\end{cases}$

（1）求分布函数 $F(x,y)$

（2）求概率 $P\{Y\le X\}$

解答：（1）当 $x\le 0$ 或 $y\le 0$ 时

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{y}0dy=0$$

当 $x>0$ 且 $y>0$ 时

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dy=\int_0^x dx\int_0^y f(x,y)dy=\int_0^x dx\int_0^y 2e^{-(2x+y)}dy$$

$$=\int_0^x 2e^{-2x}(1-e^{-y})dx=(1-e^{-2x})(1-e^{-y})$$

因此$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}) & x>0,y>0\\ 0 & else\end{cases}$

（2）$P\{Y\le X\}=\iint\limits_{y\le x} f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^x f(x,y)dy$

$=\int_0^{+\infty}dx\int_0^x 2e^{-(2x+y)}dy=\int_0^{+\infty}(2e^{-2x}-2e^{-3x})dx=\frac{1}{3}$

评分标准：满分 100 分。

第（1）问 60 分，其中联合分布函数每段 30 分；第（2）问 40 分。

9. 向一个无限平面靶射击，设命中点（X，Y）的密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi(1+x^2+y^2)^2}\quad -\infty<x,y<+\infty$$

求命中点与靶心（坐标原点）的距离不超过 a 的概率

解答：$P\{X^2+Y^2\le a^2\}=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} f(x,y)dxdy$

（在极坐标系中计算该二重积分）

积分区域在极坐标中就是$0\le\theta\le 2\pi,0\le\rho\le a$

密度函数在极坐标中为$\frac{1}{\pi(1+\rho^2)^2}$，因此

$$P\{X^2+Y^2\le a^2\}=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} f(x,y)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\frac{1}{\pi(1+\rho^2)^2}\rho d\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{a^2}{2\pi(1+a^2)}d\theta=\frac{a^2}{1+a^2}$$

10. 设二维随机变量（X，Y）在区域 B 上服从均匀分布，B 是由 x 轴、y 轴及直线 y=2x+1 所围成的三角形区域，试求：

（1）（X，Y）的密度函数$f(x,y)$

（2）（X，Y）的分布函数$F(x,y)$

解答：（1）由于 B 的面积为$\frac{1}{4}$，因此根据均匀分布的定义，（X，Y）的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}4 & (x,y)\in B\\ 0 & else\end{cases}$$

（2）当$x<-\frac{1}{2}$或$y<0$时

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{y}0dy=0$$

当$-\frac{1}{2}\le x\le 0,0\le y\le 2x+1$时

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dy=\int_{0}^{y}dy\int_{\frac{y-1}{2}}^{x}f(x,y)dx=\int_{0}^{y}dy\int_{\frac{y-1}{2}}^{x}4dx=4xy-y^2+2y$$

当$-\frac{1}{2}\le x\le 0,2x+1<y$时

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dy=\int_{-\frac{1}{2}}^{x}dx\int_{0}^{2x+1}f(x,y)dy=\int_{-\frac{1}{2}}^{x}dx\int_{0}^{2x+1}4dx=4x^2+4x+1$$

当$0<x,0\le y\le 1$时

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dy=\int_{0}^{y}dy\int_{\frac{y-1}{2}}^{0}f(x,y)dx=\int_{0}^{y}dy\int_{\frac{y-1}{2}}^{0}4dx=2y-y^2$$

当$0<x,1<y$时

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dy=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}dx\int_{0}^{2x+1}f(x,y)dy=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}dx\int_{0}^{2x+1}4dx=1$$

综上所述，$F(x,y)=\begin{cases}0 & x<-\frac{1}{2}\text{或 }y<0\\ 4xy+2y-y^2 & -\frac{1}{2}\le x\le 0,\ 0\le y\le 2x+1\\ 4x^2+4x+1 & -\frac{1}{2}\le x\le 0,\ 2x+1<y\\ 2y-y^2 & 0<x,\ 0\le y\le 1\\ 1 & 0<x,1<y\end{cases}$

（讨论时等号带在哪边？从计算的角度，题目条件中有“在区域 B **上**”，说明 B 为闭区域，其边界上密度不为 0，因此在讨论x,y的范围时应该在区域内的部分加等号；从分布函数的性质角度，由于分布函数关于x,y均右连续，因此把等号带在区间左端点

一定不会错；从分布函数与密度函数的关系角度，分布函数是密度函数的二重积分，一定连续，所以等号带在哪边都可以。）

11. 分别求第 10 题中随机变量 X 和 Y 的边缘密度函数，并求条件概率

$$P\{-\frac{1}{4} < X \le 0 \left| \frac{1}{2} < Y \le 1\right.\}$$

解答：（1）X 的边缘密度

当 $x < -\frac{1}{2}$ 或 $0 < x$ 时

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} 0dy = 0$$

当 $-\frac{1}{2} \le x \le 0$ 时

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{0}^{2x+1} f(x,y)dy = \int_{0}^{2x+1} 4dy = 8x+4$$

因此 X 的边缘密度为 $f_X(x) = \begin{cases} 8x+4 & -\frac{1}{2} \le x \le 0 \\ 0 & else \end{cases}$

（2）Y 的边缘密度

当 $y < 0$ 或 $1 < y$ 时，

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0dx = 0$$

当 $0 \le y \le 1$ 时

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{\frac{y-1}{2}}^{0} f(x,y)dx = \int_{\frac{y-1}{2}}^{0} 4dx = 2-2y$$

因此 Y 的边缘密度为 $f_Y(y) = \begin{cases} 2-2y & 0 \le y \le 1 \\ 0 & else \end{cases}$

（3）$P\{-\frac{1}{4} < X \le 0 \left| \frac{1}{2} < Y \le 1\right.\}$ 的概率

$$P\{-\frac{1}{4} < X \le 0, \frac{1}{2} < Y \le 1\} = \int_{-\frac{1}{4}}^{0} dx \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x,y)dy = \int_{-\frac{1}{4}}^{0} dx \int_{\frac{1}{2}}^{2x+1} f(x,y)dy$$

$$=\int_{-\frac{1}{4}}^{0}dx\int_{\frac{1}{2}}^{2x+1}4dy=\int_{-\frac{1}{4}}^{0}(8x+2)dx=\frac{1}{4}$$

$$P\{\frac{1}{2}<Y\le 1\}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}f_Y(y)dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2-2y)dy=\frac{1}{4}$$

因此 $P\{-\frac{1}{4}<X\le 0\left|\frac{1}{2}<Y\le 1\}\right.=\dfrac{P\{-\frac{1}{4}<X\le 0,\frac{1}{2}<Y\le 1\}}{P\{\frac{1}{2}<Y\le 1\}}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}=1$

说明：求 X 的边缘密度时，如上题所述，边界 $x=0(0\le y\le 1)$ 上密度不为 0，因此应将 $x=0$ 的情况归并到 $-\frac{1}{2}\le x\le 0$ 中，而不应该归并为 $x\ge 0$

12. 设二维随机变量（X，Y）的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{2}xy^2 & 0\le x\le 2,0\le y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$

求边缘密度函数 $f_X(x),f_Y(y)$

解答：（1）X 的边缘密度

当 $x<0$ 或 $2<x$ 时

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}0dy=0$$

当 $0\le x\le 2$ 时

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{0}^{1}f(x,y)dy=\int_{0}^{1}\frac{3}{2}xy^2dy=\frac{1}{2}x$$

因此 X 的边缘密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & 0\le x\le 2\\ 0 & else\end{cases}$

（2）Y 的边缘密度

当 $y<0$ 或 $1<y$ 时，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}0dx=0$$

当 $0\le y\le 1$ 时

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_0^2 f(x,y)dx=\int_0^2 \frac{3}{2}xy^2dx=3y^2$$

因此 Y 的边缘密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}3y^2 & 0\le y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$

评分标准：满分 100 分。

每个边缘密度 50 分。在每个边缘密度函数中，每段 25 分，若不分情况讨论扣 30 分。

13. 设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}4.8y(2-x) & 0\le x\le 1, 0\le y\le x\\ 0 & else\end{cases}$

求边缘密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$

解答：（1）X 的边缘密度

当 $x<0$ 或 $1<x$ 时

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty} 0dy=0$$

当 $0\le x\le 1$ 时

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_0^x f(x,y)dy=\int_0^x 4.8y(2-x)dy=2.4(2x^2-x^3)$$

因此 X 的边缘密度为 $f_X(x)=\begin{cases}2.4(2x^2-x^3) & 0\le x\le 1\\ 0 & else\end{cases}$

（2）Y 的边缘密度

当 $y<0$ 或 $1<y$ 时，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} 0dx=0$$

当 $0\le y\le 1$ 时

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_y^1 f(x,y)dx=\int_y^1 4.8y(2-x)dx=2.4(3y-4y^2+y^3)$$

因此 Y 的边缘密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}2.4(3y-4y^2+y^3) & 0\le y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$

14.（本题为条件分布问题，不在学习范围内）

15.（本题为条件分布问题，不在学习范围内）

16. 判断第 3 题中随机变量 X 与 Y 的独立性

解答：（1）有放回抽球时，（X，Y）的联合分布律与边缘分布律为

X \ Y	0	1	$p_{i\bullet}$
0	9/25	6/25	3/5
1	6/25	4/25	2/5
$p_{\bullet j}$	3/5	2/5	

经检验，$p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}$ 对任何 i, j 都成立，故此时 X 与 Y 相互独立；

（2）无放回抽球时，（X，Y）的联合分布律与边缘分布律为

X \ Y	0	1	$p_{i\bullet}$
0	3/10	3/10	3/5
1	3/10	1/10	2/5
$p_{\bullet j}$	3/5	2/5	

由于 $P\{X=0, Y=0\} = \frac{3}{10} \neq \frac{9}{25} = P\{X=0\}P\{Y=0\}$，故此时 X 与 Y 不相互独立

17. 二维随机变量（X，Y）的分布律由下表给出：

X \ Y	1	2	3
1	1/6	1/9	1/18
2	1/3	a	b

问当 a，b 取何值时，X 与 Y 独立？

解答：由（X，Y）的联合分布律计算边缘分布律

X \ Y	1	2	3	$p_{i\bullet}$
1	1/6	1/9	1/18	1/3
2	1/3	a	b	a+b+1/3
$p_{\bullet j}$	1/2	a+1/9	b+1/18	

由于 X 与 Y 独立，因此 $\frac{1}{9} = \frac{1}{3} \cdot (a + \frac{1}{9})$，解得 $a = \frac{2}{9}$

由 $\frac{1}{18}=\frac{1}{3}\cdot(b+\frac{1}{18})$ 解得 $b=\frac{1}{9}$

18. 判断第 12 题和第 13 题中随机变量 X 与 Y 的独立性

解答：（1）第 12 题中

联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{2}xy^2 & 0\le x\le 2, 0\le y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$

X 的边缘密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & 0\le x\le 2\\ 0 & else\end{cases}$

Y 的边缘密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}3y^2 & 0\le y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$

由于 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$，因此 X 与 Y 相互独立

（2）第 13 题中

联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}4.8y(2-x) & 0\le x\le 1, 0\le y\le x\\ 0 & else\end{cases}$

X 的边缘密度为 $f_X(x)=\begin{cases}2.4(2x^2-x^3) & 0\le x\le 1\\ 0 & else\end{cases}$

Y 的边缘密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}2.4(3y-4y^2+y^3) & 0\le y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$

显然 $f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$，因此 X 与 Y 不相互独立

19. 设随机变量 X 与 Y 独立，它们均服从[-1,1]上的均匀分布，求二次方程 $t^2+Xt+Y=0$ 有实根的概率

解答：X 服从均匀分布，因此其密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & x\in[-1,1]\\ 0 & else\end{cases}$

Y 服从均匀分布，因此其密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & y\in[-1,1]\\ 0 & else\end{cases}$

由于 X 与 Y 独立，因此（X，Y）的联合密度为

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4} & x\in[-1,1],\ y\in[-1,1]\\ 0 & else\end{cases}$$

二次方程 $t^2+Xt+Y=0$ 有实根的充要条件为 $X^2-4Y\geq 0$，其概率为

$$P\{X^2-4Y\geq 0\}=\iint\limits_{x^2-4y\geq 0} f(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{\frac{x^2}{4}}f(x,y)dy=\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{\frac{x^2}{4}}\frac{1}{4}dy=\frac{13}{24}$$

评分标准：满分 100 分。

计算联合密度 40 分，将要计算的事件表示出来 20 分，计算概率 40 分。

20. 设二维随机变量（X，Y）的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xe^{-x}}{(1+y)^2} & x>0,\ y>0\\ 0 & else\end{cases}$

讨论 X 与 Y 的独立性

解答：计算得 X 与 Y 的边缘密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}xe^{-x} & x>0\\ 0 & else\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{(1+y)^2} & y>0\\ 0 & else\end{cases}$$

由于 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$，因此 X 与 Y 相互独立

评分标准：满分 100 分。

计算边缘密度每个 40 分（边缘密度为分段函数，每段 20 分，不分段扣 30 分），判断独立原因正确 20 分。

21. 设二维随机变量（X，Y）的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-(x+y)} & x\geq 0,\ y\geq 0\\ 0 & else\end{cases}$$

讨论 X 与 Y 的独立性

解答：计算 X 的边缘分布函数

当 $x<0$ 时，$F(x,y)=0$，因此

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=0$$

当 $x\geq 0$ 时

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=\lim_{y\to+\infty}(1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-(x+y)})=1-e^{-x}$$

所以 X 的边缘分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-x} & x\geq 0\\ 0 & else\end{cases}$

类似可得 Y 的边缘分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-y} & y\geq 0\\ 0 & else\end{cases}$

由于 $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$，因此 X 与 Y 相互独立

说明：也可以先求 $F(x,y)$ 的二阶混合偏导，得到联合密度函数 $f(x,y)$，再求边缘密度 $f_X(x),f_Y(y)$，之后再根据 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$ 判断独立。当然这样做会更麻烦一些。

22.（本题为二维随机变量的函数的分布问题，不在学习范围内）

23.（本题为二维随机变量的函数的分布问题，不在学习范围内）

24.（本题为二维随机变量的函数的分布问题，不在学习范围内）

25.（本题为二维随机变量的函数的分布问题，不在学习范围内）

26.（本题为二维随机变量的函数的分布问题，不在学习范围内）

P118 习题 4

1. 设随机变量 X 的分布律为

X	0	1	2
p_k	1/4	1/2	1/4

求 $E(X),E(X^2+2),D(X)$

分析：用公式 $E(g(X))=\sum_i g(x_i)p_i$ 计算

解答：$E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_ip_i=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}=1$

$$E(X^2+2)=\sum_{i=1}^{3}(x_i^2+2)p_i=(0^2+2)\cdot\frac{1}{4}+(1^2+2)\cdot\frac{1}{2}+(2^2+2)\cdot\frac{1}{4}=\frac{7}{2}$$

由于 $E(X^2)=\sum_{i=1}^{3}x_i^2p_i=0^2\cdot\frac{1}{4}+1^2\cdot\frac{1}{2}+2^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$

因此 $D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{3}{2}-1^2=\frac{1}{2}$

注：也可以先计算 $E(X^2)$，再由 $E(X^2+2)=E(X^2)+2$ 和 $D(X)=E(X^2)-E^2(X)$ 计算后两者

2. 把 4 个球随机地投入 4 个盒子中，设 X 表示空盒子的个数，求 $E(X),D(X)$

解答：（先计算 X 的分布律：确定 X 可取得值及取每个值的概率）

X 可取的值为 0,1,2,3

$$P\{X=0\}=\frac{4\times3\times2\times1}{4^4}=\frac{6}{64}$$

$$P\{X=1\}=\frac{C_4^3\times C_3^1\times C_4^2\times2\times1}{4^4}=\frac{36}{64}$$

（先从 4 个盒子中选 3 个放球，剩下一个盒子空着；再从选中的 3 个盒子中选一个盒子放两个球；再决定 4 个球中哪两个放入这个盒子；最后将剩下两个球放入剩下两个盒子里）

$$P\{X=2\}=\frac{C_4^2\times(C_2^1\times C_4^3\times1+C_4^2)}{4^4}=\frac{21}{64}$$

（先从 4 个盒子中选 2 个放球，剩下两个盒子空着；在这两个盒子中放球时，分两种情况：一个盒子放 3 个另一个放 1 个，两个盒子各放 2 个。第一种情况时，先选一个盒子放三个球，再决定哪 3 个球放入这个盒子，剩下一个球放入另一个盒子；第二种情况时，选 2 个球放入第一个盒子，剩下两个只能放入第二个盒子）

$P\{X=3\}=\frac{C_4^1}{4^4}=\frac{1}{64}$

因此 X 的分布律为

X	0	1	2	3
P	6/64	36/64	21/64	1/64

从而 $E(X)=0\cdot\frac{6}{64}+1\cdot\frac{36}{64}+2\cdot\frac{21}{64}+3\cdot\frac{1}{64}=\frac{81}{64}$

由于 $E(X^2)=0^2\cdot\frac{6}{64}+1^2\cdot\frac{36}{64}+2^2\cdot\frac{21}{64}+3^2\cdot\frac{1}{64}=\frac{129}{64}$

因此 $D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{129}{64}-(\frac{81}{64})^2=\frac{1695}{4096}\approx 0.4138$

评分标准：分布律 40 分，期望 30 分，方差 30 分。

3. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}2(1-x) & 0<x<1\\ 0 & else\end{cases}$

求 $E(X),D(X)$

分析：用公式 $E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$ 计算

解答： $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 2x(1-x)dx=\frac{1}{3}$

由于 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^1 x^2f(x)dx=\int_0^1 2x^2(1-x)dx=\frac{1}{6}$

因此 $D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1}{6}-(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{18}$

4. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}1+x & -1\le x\le 0\\ 1-x & 0<x\le 1\\ 0 & else\end{cases}$

求 $E(X), D(X)$

解答： $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{-1}^{0} x(1+x)dx+\int_{0}^{1} x(1-x)dx=-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=0$

由于 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_{-1}^{0} x^2(1+x)dx+\int_{0}^{1} x^2(1-x)dx=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$

因此 $D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1}{6}-0^2=\frac{1}{6}$

评分标准：期望 50 分，方差 50 分。

5. 设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数，每次命中目标的概率为 0.4，求 $E(X^2)$

解答 1：由题意知， $X \sim B(10, 0.4)$

因此 $E(X)=10\times 0.4=4$ ， $D(X)=10\times 0.4\times 0.6=2.4$

从而 $E(X^2)=D(X)+E^2(X)=2.4+4^2=18.4$

解答 2：由题意知， $X \sim B(10, 0.4)$ ，其分布律为

$$P\{X=k\}=C_{10}^{k}0.4^{k}0.6^{10-k} \quad k=0,1,2,\cdots,10$$

因此 $E(X^2)=\sum_{k=0}^{10} k^2\cdot C_{10}^{k}0.4^{k}0.6^{10-k}=\sum_{k=1}^{10} k^2\cdot C_{10}^{k}0.4^{k}0.6^{10-k}$

$$=\sum_{k=1}^{10}(k^2-k+k)\cdot C_{10}^{k}0.4^{k}0.6^{10-k}=\sum_{k=1}^{10}(k^2-k)\cdot C_{10}^{k}0.4^{k}0.6^{10-k}+\sum_{k=1}^{10}k\cdot C_{10}^{k}0.4^{k}0.6^{10-k}$$

$$=\sum_{k=2}^{10}(k^2-k)\cdot C_{10}^{k}0.4^{k}0.6^{10-k}+\sum_{k=1}^{10}k\cdot C_{10}^{k}0.4^{k}0.6^{10-k}$$

$$=\sum_{k=2}^{10}(k^2-k)\cdot\frac{10!}{k!(10-k)!}0.4^{k}0.6^{10-k}+\sum_{k=1}^{10}k\cdot\frac{10!}{k!(10-k)!}0.4^{k}0.6^{10-k}$$

$$=\sum_{k=2}^{10}\frac{10!}{(k-2)!(10-k)!}0.4^{k}0.6^{10-k}+\sum_{k=1}^{10}\frac{10!}{(k-1)!(10-k)!}0.4^{k}0.6^{10-k}$$

$$=10\times 9\times 0.4^2\sum_{k=2}^{10}\frac{8!}{(k-2)!(10-k)!}0.4^{k-2}0.6^{10-k}+10\times 0.4\sum_{k=1}^{10}\frac{9!}{(k-1)!(10-k)!}0.4^{k-1}0.6^{10-k}$$

$$=10\times 9\times 0.4^2\sum_{k=2}^{10}C_{8}^{k-2}0.4^{k-2}0.6^{10-k}+10\times 0.4\sum_{k=1}^{10}C_{9}^{k-1}0.4^{k-1}0.6^{10-k}$$

$=10\times 9\times 0.4^2+10\times 0.4=18.4$

说明：$\sum_{k=2}^{10} C_8^{k-2}0.4^{k-2}0.6^{10-k}=C_8^0 0.4^0 0.6^8+C_8^1 0.4^1 0.6^7+\cdots+C_8^8 0.4^8 0.6^0=1$

$\sum_{k=1}^{10} C_9^{k-1}0.4^{k-1}0.6^{10-k}=C_9^0 0.4^0 0.6^9+C_9^1 0.4^1 0.6^8+\cdots+C_9^9 0.4^9 0.6^0=1$

6. 已知随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布，求$E(3X-2)$

解答：由于$X\sim P(2)$，因此$E(X)=2$

从而$E(3X-2)=3E(X)-2=3\times 2-2=4$

7. 设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2，一周 5 个工作日。若无故障，可获利润 10 万元；发生一次故障仍可获利润 5 万元；若发生两次故障，获利润 0 元，若发生 3 次或 3 次以上故障就要亏损 2 万元。求一周利润的数学期望。

解答：记 X 为一周内的故障次数，则$X\sim B(5,0.2)$

记 Y 为一周利润，则

$P\{Y=10\}=P\{X=0\}=C_5^0 0.2^0 0.8^5=0.32768$

$P\{Y=5\}=P\{X=1\}=C_5^1 0.2^1 0.8^4=0.4096$

$P\{Y=0\}=P\{X=2\}=C_5^2 0.2^2 0.8^3=0.2048$

$P\{Y=-2\}=P\{X\geq 3\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}-P\{X=2\}=0.05792$

从而$E(Y)=10\times 0.32768+5\times 0.4096+0\times 0.2048+(-2)\times 0.05792=5.20896$（万元）

8. 某工厂生产的圆盘，其直径在区间(a,b)内服从均匀分布，求该圆盘面积的数学期望

解答：由题目条件，直径$X\sim U(a,b)$，从而$E(X)=\dfrac{a+b}{2}$，$D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

由此得$E(X^2)=D(X)+E^2(X)=\dfrac{a^2+b^2+ab}{3}$

于是$E(S)=E(\dfrac{\pi}{4}X^2)=\dfrac{\pi}{4}E(X^2)=\dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{a^2+b^2+ab}{3}=\dfrac{\pi(a^2+b^2+ab)}{12}$

9. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & else \end{cases}$

求：（1）$Y=2X$ 的数学期望；（2）$Y=e^{-2X}$ 的数学期望

解答：（1）$E(Y)=E(2X)=\int_{-\infty}^{+\infty}2xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty}2xe^{-x}dx=2$

（2）$E(Y)=E(e^{-2X})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x}f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}e^{-2x}e^{-x}dx=\frac{1}{3}$

注：显然 $X\sim E(1)$ 是指数分布，因此 $E(X)=1$。所以（1）还可以这样做：

$E(Y)=E(2X)=2E(X)=2$

10.（本题为二维随机变量的函数的数学期望问题，不在学习范围内）

11.（本题为二维随机变量的函数的数学期望问题，不在学习范围内）

12. 设随机变量 X，Y 分别服从参数为 2 和 4 的指数分布

（1）求 $E(X+Y),E(2X-3Y^2)$

（2）设 X，Y 相互独立，求 $E(XY),D(X+Y)$

解答：由题目条件知，$X\sim E(2),Y\sim E(4)$，因此

$E(X)=\frac{1}{2},D(X)=\frac{1}{4},E(Y)=\frac{1}{4},D(Y)=\frac{1}{16}$

（1）$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ 25 分

由于 $E(Y^2)=D(Y)+E^2(Y)=\frac{1}{8}$

因此 $E(2X-3Y^2)=2E(X)-3E(Y^2)=\frac{5}{8}$ 25 分

（2）当 X，Y 相互独立时

$E(XY)=E(X)E(Y)=\frac{1}{8}$ 25 分

$D(X+Y)=D(X)+D(Y)=\frac{5}{16}$ 25 分

说明：（2）中的两个公式只能在“X，Y 相互独立”的条件下才成立，不能乱用。

13. 设 $X\sim N(1,2), Y\sim N(0,1)$，且 X 和 Y 相互独立，求随机变量 $Z=2X-Y+3$ 的密度函数

分析：X 和 Y 是相互独立的正态分布，它们的线性组合 $Z=2X-Y+3$ 也是正态分布；对于正态分布，第一个参数就是数学期望，第二个参数就是方差。因此可以先求 $Z=2X-Y+3$ 的数学期望和方差，确定出该正态分布的参数，再写出密度函数

解答：$E(Z)=E(2X-Y+3)=2E(X)-E(Y)+3=5$

$D(Z)=D(2X-Y+3)=4D(X)+D(Y)=9$

由题目条件知，$Z\sim N(5,9)$，从而其密度函数为

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 3}e^{-\frac{(z-5)^2}{2\cdot 9}}=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-5)^2}{18}}$$

14. 设有 10 个猎人正等着野鸭飞过来，当一群野鸭飞过头顶时，他们同时开了枪，但他们每个人都是随机地、彼此独立地选择自己的目标。如果每个猎人独立地射中其目标的概率均为 p，试求当 10 只野鸭飞来时，没有被击中而飞走的野鸭数的数学期望

解答：记 $X_i=\begin{cases}1 & \text{第i只野鸭飞走（没有被击中）}\\ 0 & \text{第i只野鸭被击中}\end{cases}$，$i=1,2,\cdots,10$

对于野鸭 i，每个猎人选择的目标是它的概率是 $\frac{1}{10}$，而在目标是它的情况下，它被射中的概率为 p；选择的目标不是它的概率是 $\frac{9}{10}$，而在目标不是它的情况下，它被射中的概率为 0，因此根据全概率公式，每个猎人射中它的的概率是 $\frac{p}{10}$，从而

$P\{X_i=1\}=(1-\frac{p}{10})^{10}$，$P\{X_i=0\}=1-(1-\frac{p}{10})^{10}$

由此知 $E(X_i)=(1-\frac{p}{10})^{10}$

记 X 为飞走的野鸭数，则 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$ ，所以

$$E(X) = \sum_{i=1}^{10} E(X_i) = 10(1 - \frac{p}{10})^{10}$$

15. 一个匀质的骰子掷 10 次，求得到的总点数的数学期望

解答：记 $X_i (i = 1, 2, \cdots, 10)$ 为第 i 次掷出的点数，由题目条件知 X_i 的分布律为

$$P\{X_i = k\} = \frac{1}{6} \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

从而 $E(X_i) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{2} \quad i = 1, 2, \cdots, 10$

记 X 为 10 次的总点数，则 $X = X_1 + \cdots + X_{10}$ ，从而

$$E(X) = E(X_1 + \cdots + X_{10}) = E(X_1) + \cdots + E(X_{10}) = 10E(X_1) = 35$$

16. （本题为两个随机变量的协方差问题，不在学习范围内）

17. （本题为两个随机变量的协方差问题，不在学习范围内）

18. （本题为两个随机变量的协方差问题，不在学习范围内）

19. 已知随机变量 X 服从二项分布 $B(n, p)$ ，且 $E(X) = 2.4, D(X) = 1.44$ ，求此二项分布的参数 n, p 的值

解答：由题目条件知 $np = 2.4, np(1-p) = 1.44$ ，从而解得 $n = 6, p = 0.4$

20. 某流水生产线上每个产品不合格的概率为 $p(0 < p < 1)$，各产品合格与否相互独立，当出现一个不合格品时即停机检修。设开机后第一次停机时已生产的产品个数为 X，求 $E(X), D(X)$

解答：由题目条件，X 的分布律为

$$P\{X = k\} = (1-p)^{k-1} p \quad k = 1, 2, 3, \cdots$$

因此$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot(1-p)^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}=p\cdot\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p}$

由于$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot(1-p)^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty}k^2(1-p)^{k-1}=p\cdot\frac{2-p}{p^3}=\frac{2-p}{p^2}$

因此$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1-p}{p^2}$

说明：数项级数$\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}$可以由函数项级数$\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$求出，也可以令$A=\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}$，由$A-A(1-p)=\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}-\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k}=\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}=\frac{1}{p}$求出；数项级数$\sum_{k=1}^{\infty}k^2(1-p)^{k-1}$可以由函数项级数$\sum_{k=1}^{\infty}k^2x^{k-1}=\frac{1+x}{(1-x)^3}$求出

21. 设随机变量 X 在区间（-1,1）内服从均匀分布，随机变量$Y=\begin{cases}-1 & X<0\\ 0 & X=0\\ 1 & X>0\end{cases}$

求$E(Y),D(Y)$

解答：由题目条件知

$P\{Y=-1\}=P\{X<0\}=\frac{1}{2}$

$P\{Y=0\}=P\{X=0\}=0$

$P\{Y=1\}=P\{X>0\}=\frac{1}{2}$

从而$E(Y)=(-1)\times\frac{1}{2}+0\times0+1\times\frac{1}{2}=0$

$E(Y^2)=(-1)^2\times\frac{1}{2}+0^2\times0+1^2\times\frac{1}{2}=1$

于是$D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=1$

22. 设随机变量 X 的密度函数为$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} & 0<x<\pi\\ 0 & else\end{cases}$

对 X 独立地观察 4 次，用 Y 表示观察值大于$\dfrac{\pi}{3}$的次数，求Y^2的数学期望

解答：由于$P\{X>\dfrac{\pi}{3}\}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{+\infty}f(x)dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}f(x)dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}dx=\dfrac{1}{2}$

因此根据题目条件，$Y\sim B(4,\dfrac{1}{2})$，从而$E(Y)=2,D(Y)=1$

于是$E(Y^2)=D(Y)+E^2(Y)=5$

23. 设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布，随机变量$X_k=\begin{cases}1 & Y>k\\0 & Y\le k\end{cases}$ $(k=1,2)$

求（1）(X_1,X_2)的分布律；（2）$E(X_1+X_2)$

解答：由题目条件，Y 的密度函数为$f(y)=\begin{cases}e^{-y} & y>0\\0 & else\end{cases}$

（1）(X_1,X_2)可取的值为（0,0），（0,1），（1,0），（1,1）

$P\{X_1=0,X_2=0\}=P\{Y\le 1,Y\le 2\}=P\{Y\le 1\}=\int_{-\infty}^{1}f(y)dy=\int_0^1 e^{-y}dy=1-e^{-1}$

$P\{X_1=0,X_2=1\}=P\{Y\le 1,Y>2\}=P\{\Phi\}=0$

$P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{Y>1,Y\le 2\}=P\{1<Y\le 2\}=\int_1^2 e^{-y}dy=e^{-1}-e^{-2}$

$P\{X_1=1,X_2=1\}=P\{Y>1,Y>2\}=P\{Y>2\}=\int_2^{+\infty}e^{-y}dy=e^{-2}$

因此(X_1,X_2)的联合分布律为

X_1 \ X_2	0	1
0	$1-e^{-1}$	0
1	$e^{-1}-e^{-2}$	e^{-2}

（2）由联合分布律可以求得X_1的边缘分布律为

X_1	0	1
P	$1-e^{-1}$	e^{-1}

X_2的边缘分布律为

X_2	0	1

P	$1-e^{-2}$	e^{-2}

从而可得$E(X_1)=e^{-1}, E(X_2)=e^{-2}$

因此$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=e^{-1}+e^{-2}$

24.（本题为两个随机变量的函数的数学期望问题，不在学习范围内）

25.（本题为两个随机变量的相关系数问题，不在学习范围内）

26.（本题为两个随机变量的相关系数问题，不在学习范围内）

27.（本题为两个随机变量的相关系数问题，不在学习范围内）

P148 习题 6

1. 在某总体中抽取一个容量为 5 的样本，测得样本值为：98.5, 98.3, 99, 100.6, 95.8，求其样本均值和样本方差.

解答：$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{1}{5}(98.5+98.3+99+100.6+95.8)=98.44$

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{4}(0.06^2+0.14^2+0.56^2+2.16^2+2.64^2)=2.993$$

注：易得样本方差的另一个计算方法 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)$

2. 查表计算：

（1）$\chi^2_{0.05}(15), \chi^2_{0.95}(9), \chi^2_{0.025}(3)$

（2）$t_{0.05}(12),\ t_{0.025}(2),\ t_{0.01}(54)$

（3）$F_{0.05}(12,15),\ F_{0.95}(12,15),\ F_{0.025}(12,15)$

解答：（1）$\chi^2_{0.05}(15)=24.996, \chi^2_{0.95}(9)=3.325, \chi^2_{0.025}(3)=9.348$

（2）$t_{0.05}(12)=1.782,\ t_{0.025}(2)=4.303,\ t_{0.01}(54)\approx u_{0.01}=2.33$

（3）$F_{0.05}(12,15)=2.475,\ F_{0.95}(12,15)=\frac{1}{F_{0.05}(15,12)}=\frac{1}{2.617}0.3821,\ F_{0.025}(12,15)=2.963$

3. 抽水机每天的停机时间服从正态分布 $N(4, 0.64)$，求

（1）一个月（30 天）每天的平均停机时间在 1 个小时至 5 个小时之间的概率；

（2）一个月（30 天），总的停机时间小于 115 个小时的概率.

解答：记每天的停机时间为 X，由题意 $X\sim N(4, 0.64)$，因此 30 天的平均停机时间 $\overline{X}\sim N(4,\frac{0.64}{30})$，于是 $\frac{\overline{X}-4}{0.8/\sqrt{30}}\sim N(0,1)$

（1）$P\{1\le\overline{X}\le 5\}=P\{\frac{1-4}{0.8/\sqrt{30}}\le\frac{\overline{X}-4}{0.8/\sqrt{30}}\le\frac{5-4}{0.8/\sqrt{30}}\}$

$=\Phi(\frac{5-4}{0.8/\sqrt{30}})-\Phi(\frac{1-4}{0.8/\sqrt{30}})=\Phi(6.8465)-\Phi(-20.5396)$

$=\Phi(6.8465)-[1-\Phi(20.5396)]=\Phi(6.8465)+\Phi(20.5396)-1$

$=1+1-1=1$

（2）$P\{30\overline{X}<115\}=P\{\overline{X}<3.833\}=\Phi(\frac{3.833-4}{0.8/\sqrt{30}})=\Phi(-1.14)=1-\Phi(1.14)$

$=1-0.8729=0.1271$

注：$P\{30\overline{X}<114\}=P\{\overline{X}<3.8\}=\Phi(\frac{3.8-4}{0.8/\sqrt{30}})=\Phi(-1.37)$

$=1-\Phi(1.37)=1-0.9147=0.0853$

4. 若总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为其简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差. 试问

（1）统计量 $U=n\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\right)^2$ 服从什么分布？

（2）统计量 $V=n\left(\frac{\overline{X}-\mu}{S}\right)^2$ 服从什么分布？

解答：（1）由题目条件，$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，其平方 $\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2=n\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1)$，

即 $U=n\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1)$

（2）由题目条件，$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，其平方 $\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2=n\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1)$

而 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，由 F 分布的定义

$$\frac{\dfrac{n\left(\frac{\overline{X}-\sigma}{\sigma}\right)^2}{1}}{\dfrac{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}{n-1}}=\frac{n\left(\frac{\overline{X}-\sigma}{\sigma}\right)^2}{\frac{S^2}{\sigma^2}}=n\left(\frac{\overline{X}-\sigma}{S}\right)^2\sim F(1,n-1)$$

5. 若$T\sim t(n)$，$n\geq 2$，证明：$E(T)=0$

证明：由题目条件，T 的密度函数为 $f(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$，因此

$$E(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}t\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dt=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{-\infty}^{+\infty}t\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dt$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{n}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}d\left(1+\frac{t^2}{n}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{n}{2}\left[\frac{2}{1-n}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{1-n}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{2}{1-n}\left[\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{1-n}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{2}{1-n}[0-0]=0$$

注：这里没有用积分的奇偶性，因为定积分的奇偶性对广义积分并不成立。

6. 设$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$为来自总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的一个样本

（1）若$\mu=0,\sigma=0.3$，求$P\{\sum_{i=1}^{10}X_i^2>1.44\}$；

（2）若$\sigma=4$而μ未知，S^2为样本方差且满足$P\{S^2>A\}=0.1$，求 A

解答：（1）由于$X_i\sim N(0,0.3^2)\,(i=1,2,\cdots,10)$，因此$\frac{X_i-0}{0.3}\sim N(0,1)$，即
$\frac{X_i}{0.3}\sim N(0,1)$。而$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$相互独立，因此$\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{X_i}{0.3}\right)^2\sim\chi^2(10)$，即
$\frac{1}{0.09}\sum_{i=1}^{10}X_i^2\sim\chi^2(10)$，从而

$$P\{\sum_{i=1}^{10}X_i^2>1.44\}=P\{\frac{1}{0.09}\sum_{i=1}^{10}X_i^2>\frac{1.44}{0.09}\}=P\{\chi^2(10)>16\}$$

查表知$P\{\chi^2(10)>15.987\}=0.1$

所以 $P\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\} \approx 0.1$ 50 分

（2）由于 $\frac{(10-1)S^2}{4^2} \sim \chi^2(10-1)$，即 $\frac{9S^2}{16} \sim \chi^2(9)$，因此

$P\{S^2 > A\} = P\{\frac{9S^2}{16} > \frac{9A}{16}\} = P\{\chi^2(9) > \frac{9A}{16}\} = 0.1$

所以 $\frac{9A}{16} = \chi^2_{0.1}(9) = 14.684$，从而 $A = \frac{16}{9} \times 14.684 = 26.105$ 50 分

7. 设某县农民人均收入（单位：万元）服从正态分布 $N(1.5, 0.25)$，现随机调查了 n 个人，若这 n 个人的人均收入不超过 1.6 万元的概率为 0.9，求至少调查多少人？

解答：记农民收入为 X，由题意 $X \sim N(1.5, 0.25)$，于是这 n 个农民的人均收入 $\overline{X} \sim N(1.5, \frac{0.25}{n})$，从而 $\frac{\overline{X}-1.5}{0.5/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，于是

$$0.9 = P\{\overline{X} \le 1.6\} = P\{\frac{\overline{X}-1.5}{0.5/\sqrt{n}} \le \frac{1.6-1.5}{0.5/\sqrt{n}}\} = P\{U \le \frac{\sqrt{n}}{5}\}$$

查表得 $\frac{\sqrt{n}}{5} \approx 1.28$，因此 $n \approx 40.96$

所以应至少调查 41 人.