第四章 根轨迹分析法

本章主要内容

- 根轨迹的基本概念
- 根轨迹的绘制基本准则
- 利用根轨迹分析闭环系统性能

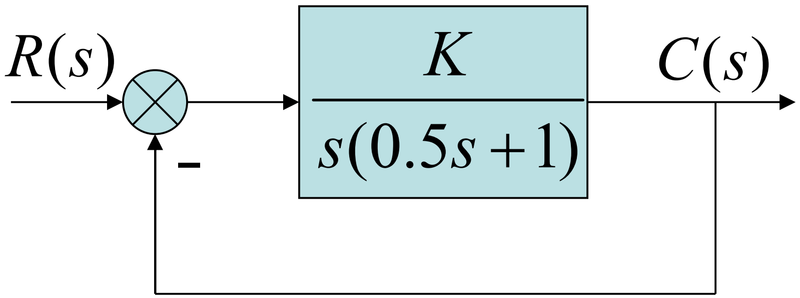
第一节 根轨迹的基本概念

1、根轨迹概念：开环系统传递函数的某一个参数从零变到无穷时，闭环系统特征方程的根在复平面上变化的轨迹。

例1：如图所示二阶系统

系统开环传递函数为：

$$G_k(s)=\frac{K}{s(0.5s+1)}$$



闭环传递函数：$$\Phi(s)=\frac{2K}{s^2+2s+2K}$$

特征方程为：$$s^2+2s+2K=0$$

特征根为：$$s_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-2K}$$

特征根为：$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2K}$

[讨论]：

① 当K=0时，$s_1=0, s_2=-2$，是开环传递函数的极点

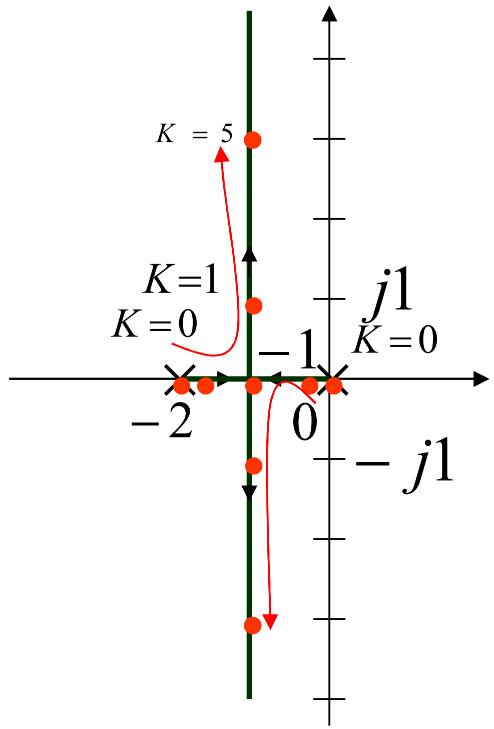
② 当K=0.32时，$s_1=-0.4, s_2=-1.6$

③ 当K=0.5时，$s_1=-1, s_2=-1$

④ 当K=1时，$s_1=-1+j, s_2=-1-j$

⑤ 当K=5时，$s_1=-1+3j, s_2=-1-3j$

⑥ 当K=∞时，$s_1=-1+\infty j, s_2=-1-\infty j$



把这些点连接成一条光滑的曲线，就是系统的根轨迹

2、根轨迹与系统的性能

通过根轨迹图，可以对系统如下性能做研究：

(1)稳定性

若系统轨迹进入**s**右半面，则系统不稳定，根轨迹与虚轴交点处为临界稳定。此例中系统对所有的**K**值其根都在**S**左半平面，**(s=0**的根不影响稳定性，因反变换是常数**)**故是稳定的。

(2)稳态性能

可通过坐标原点极点的个数来判断系统的型次，并推算出开环增益。此例中系统属Ⅰ型系统。

(3)动态性能

当$0<K<0.5$时，所有闭环极点位于实轴上，系统为过阻尼，单位阶跃相应为单调上升的非周期过程；

$K=0.5$时，两个闭环极点均为-1，系统为临界阻尼，单位阶跃相应仍为单调上升的非周期过程，但比上述情况稍快；

$K>0.5$，闭环极点为共轭复数，系统为欠阻尼振荡，且超调量正比于K值。

4、根轨迹方程

闭环传递函数的极点就是其特征方程 $1+G(s)H(s)=0$

因 $G(s)H(s)$ 是开环传递函数，当系统有m个开环零点和n个开环极点时，上式可等价为：称此

$$K^*\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}=-1$$

称此为根轨迹方程

根轨迹方程

$$K^* \frac{\prod_{j=1}^{m}(s-Z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-P_i)} = -1$$

式中，Z_j为已知的开环零点，P_i为已知的开环极点，K^*为可从零变到无穷大的开环根轨迹增益。由根轨迹方程，可以画出当K^*由零变到无穷大时系统的根轨迹。

在绘制根轨迹时，变参数不限定是根轨迹增益K^*，可为系统的其它参数（如时间常数、反馈系数等）这时只要把系统的特征方程化为上式，将感兴趣的系统参数取代根轨迹增益K^*的位置都可以绘制根轨迹。

小结

- 根轨迹定义
- 根轨迹与系统性能的关系
- 根轨迹方程