第三章　线性系统的时域分析

本章主要内容

1. 系统的时域性能指标
2. 一阶系统的时域分析
3. 二阶系统的时域分析
4. 高阶系统的时域分析
5. 线性系统的稳定性分析
6. 线性系统的稳态误差计算

在确定系统的数学模型后，可以用几种不同的方法来分析控制系统的动态性能和稳定性能。

在经典控制理论中，对线性控制系统的性能，常用的分析方法有：

●时域分析法

●根轨迹法

●频域分析法

第一节 系统的时域性能指标

什么是时域分析?

控制系统在一定的输入情况下，根据输出量在时域的表达式，对系统的稳定性、瞬态和稳态性能进行的分析。

由于时域分析是直接在时间域中对系统进行分析的方法，所以时域分析具有直观和准确的优点。

系统输出量的时域表示可由微分方程得到，也可由传递函数得到。

在初值为零时，一般都利用传递函数进行研究。具体是根据闭环系统传递函数的极点和零点来分析系统的性能。此时也称为复频域分析。

一、典型输入信号

一般说来，我们是针对某一类输入信号来设计控制系统的。同时为了便于对各种控制系统的性能进行比较，我们需要假定一些基本的输入函数形式，称之为典型输入信号。

典型输入信号——根据系统常遇到的输入信号形式，在数学描述上加以理想化的一些基本输入函数。

常用的典型输入信号有：

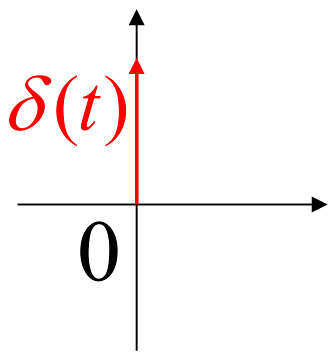
- 单位阶跃函数
- 单位斜坡（速度）函数
- 单位加速度（抛物线）函数
- 单位脉冲函数
- 正弦函数

1. 脉冲函数:

理想单位脉冲函数:

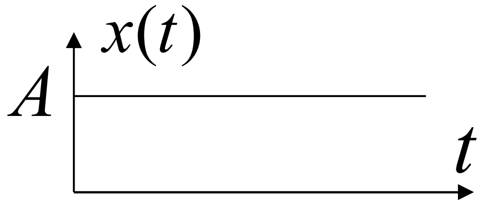
[定义]: $\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \infty & t=0\end{cases}$

拉氏变换后的像函数为: $L[\delta(t)]=1$



2. 阶跃函数：

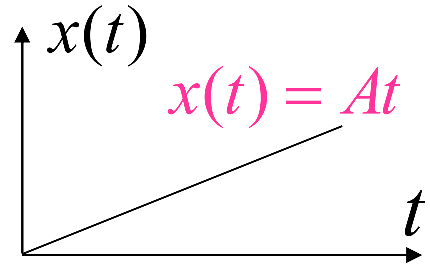
$$x(t)=\begin{cases}0, t<0\\ A, t>0\end{cases}$$



其拉氏变换后的像函数为： $L[x(t)]=\dfrac{A}{s}$

A为阶跃幅度，A=1称为单位阶跃函数，记为1(t)。

3. 斜坡函数（速度阶跃函数）：

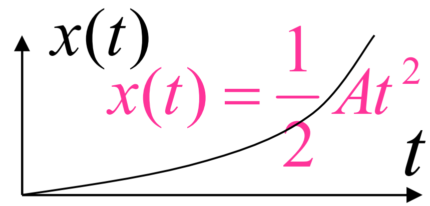


$$x(t)=\begin{cases}0, t<0\\ At, t\geq 0\end{cases}$$

A=1时称为单位斜坡函数。

其拉氏变换后的像函数为： $L[x(t)]=\dfrac{A}{s^2}$

4. 抛物线函数（加速度阶跃函数）：



$$x(t)=\begin{cases}0, t<0\\ \dfrac{1}{2}At^2, t\geq 0\end{cases}$$

A=1时称为单位抛物线函数。

其拉氏变换后的像函数为： $L[x(t)]=\dfrac{A}{s^3}$

[提示]：上述几种典型输入信号的关系如下：

$$A\delta(t)=\frac{d}{dt}[A\times 1(t)]=\frac{d^2}{dt^2}[At]=\frac{d^3}{dt^3}[\frac{1}{2}At^2]$$

5. 正弦函数：$x(t)=ASin\omega t$ ，式中，A为振幅，ω为频率。

其拉氏变换后的像函数为： $L[A\sin\omega t]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

分析系统特性究竟采用何种典型输入信号，取决于实际系统在正常工作情况下最常见的输入信号形式。

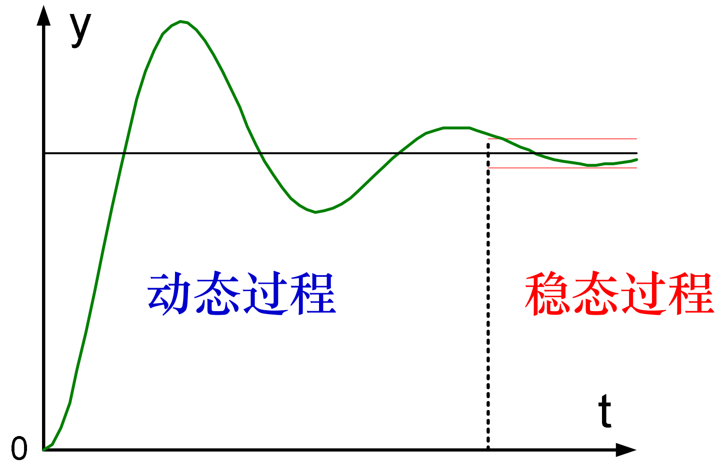
当系统的输入具有突变性质时，可选择阶跃函数为典型输入信号；当系统的输入是随时间增长变化时，可选择斜坡函数为典型输入信号。

典型输入信号	时域表达式	复数域表达式
单位脉冲函数	$\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \infty & t=0\end{cases}$	
阶跃函数	$x(t)=\begin{cases}0, t<0\\ A, t>0\end{cases}$	
斜坡函数	$x(t)=\begin{cases}0, t<0\\ At, t\geq 0\end{cases}$	
抛物线函数	$x(t)=\begin{cases}0, t<0\\ \frac{1}{2}At^2, t\geq 0\end{cases}$	
正弦函数	$x(t)=ASin\omega t$	

二、动态过程与稳态过程

在输入信号作用下，任何一个控制系统的时间响应都由**动态过程**和**稳态过程**两部分组成。如某系统的单位阶跃响应曲线如图所示：

如某系统的单位阶跃响应曲线如图所示：



动态过程是指系统输出量从初始状态到稳定状态的响应过程

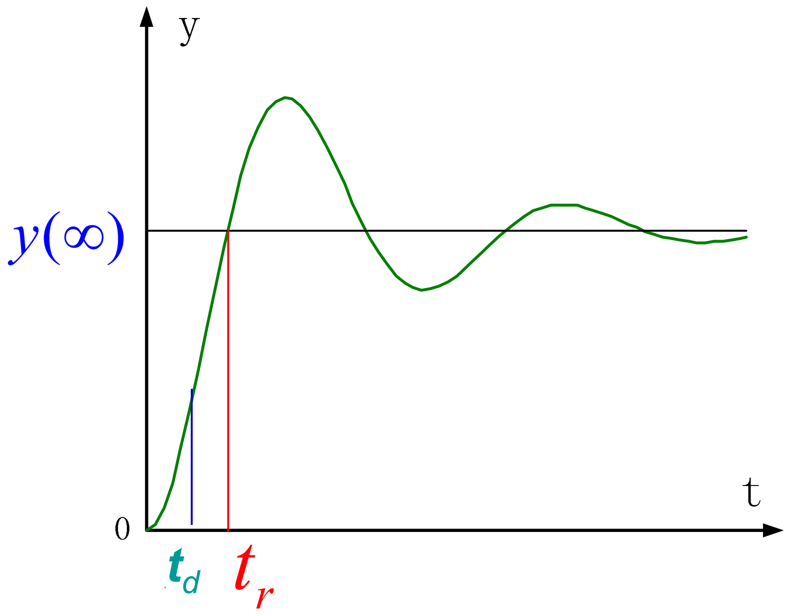
稳态过程是指系统输出量在 t 趋向无穷大时的响应过程

三、动态和静态过程的性能指标

通常以阶跃响应来衡量系统控制性能的优劣。单位阶跃响应函数有衰减振荡和单调变化两种。

（一）衰减振荡：

具有衰减振荡的瞬态过程如图所示：



1. 延迟时间 t_d：

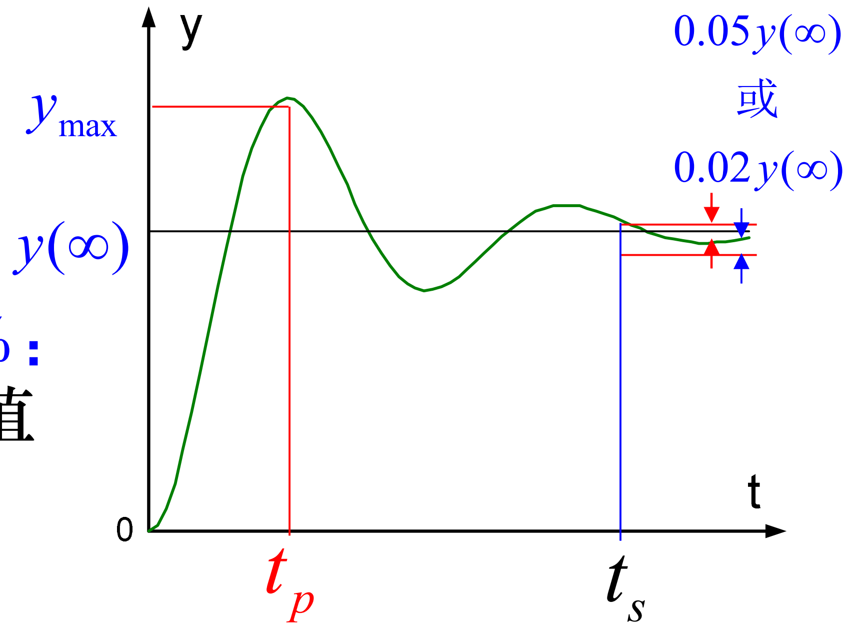
输出响应第一次达到稳态值的50%所需的时间。

2. 上升时间：t_r

输出响应第一次达到稳态值y(∞)所需的时间。或指由稳态值的10%上升到稳态值的90%所需的时间。

3. 峰值时间 t_p：

输出响应超过稳态值达到第一个峰值y_{max}所需要的时间。



4. 最大超调量(简称超调量) $\delta\%$：

瞬态过程中输出响应的最大值超过稳态值的百分数。

$$\delta\% = \frac{y_{\max} - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\%$$

式中：$y_{\max}$ —输出响应的最大值； $y(\infty) = \lim\limits_{t \to \infty} y(t)$ —稳态值；

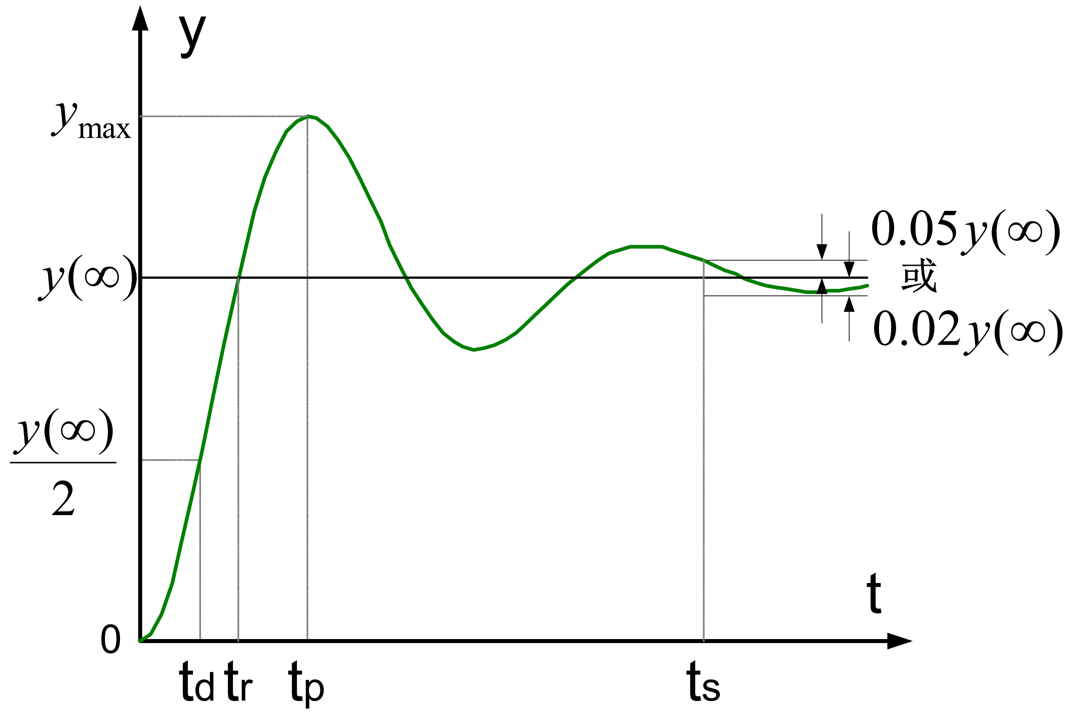
5. 调节时间或过渡过程时间 t_s：

当 $y(t)$ 和 $y(\infty)$ 之间的误差达到规定的范围之内［一般取 $y(\infty)$ 的±5%或±2%，称允许误差范围，用Δ表示］且以后不再超出此范围的最小时间。即当 $t \geq t_s$，有：

$$| y(t) - y(\infty) | \leq y(\infty) \times \Delta\% \qquad (\Delta = 2或5)$$

6. 振荡次数N：

在调节时间内，y(t)偏离 $y(\infty)$ 的振荡次数。

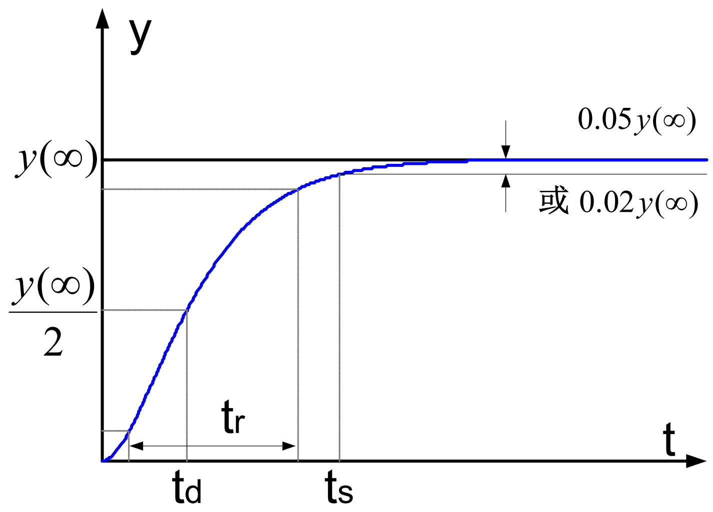


在上述几种性能指标中，t_p, t_r, t_s表示瞬态过程进行的快慢，是快速性指标；而$\delta\%, N$ 反映瞬态过程的振荡程度，是振荡性指标。其中$\delta\%$和 t_s 是两种最常用的性能指标。

（二）单调变化

单调变化响应曲线如图所示：

这种系统就无需采用峰值时间和最大超调量这两个指标。此时最常用的是调节时间这一指标来表示瞬态过程的快速性。有时也采用上升时间这一指标。



（三）稳态过程性能指标

稳态误差：系统稳定后实际输出与期望输出之间的差值。

小结

- 典型初始状态
- 典型输入作用及其之间的关系
- 瞬态过程和稳态过程
- 系统响应的性能指标