

2-2 控制系统的复数域数学模型

微分方程是在时域中描述系统动态性能的数学模型，在给定外作用和初始条件下，解微分方程可以得到系统的输出响应。

But 系统结构和参数变化时分析较麻烦。

用**拉氏变换法**求解微分方程时，可以得到控制系统在复数域的数学模型 - **传递函数**。

不仅可以表征系统的动态性能，而且可以用来研究系统的结构或参数的变化对系统性能的影响。经典控制理论中广泛应用的频率法和根轨迹法，就是以传递函数为基础建立起来的。它是经典控制理论中**最基本**和**最重要**的概念。

1. 传递函数的定义和性质

定义

线性定常系统的传递函数，定义为零初始条件下，系统输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比。

$$\text{传递函数} = \frac{\text{输出信号的拉氏变换}}{\text{输入信号的拉氏变换}} \bigg|_{\text{零初始条件}} = \frac{C(s)}{R(s)}$$

~~$\frac{C(s)}{R(s)}$~~
 $\frac{C(s)}{R(s)}$

设线性定常系统由下述n阶线性常微分方程描述：

$$a_0 \frac{d^n}{dt^n} c(t) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} c(t) + \cdots + a_n c(t) = b_0 \frac{d^m}{dt^m} r(t) + b_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} r(t) + \cdots + b_{m-1} \frac{d}{dt} r(t) + b_m r(t)$$

$c(t)$ —— 系统被控量；

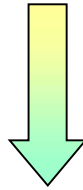
$r(t)$ —— 系统输入量。

设 $c(t)$ 和 $r(t)$ 及其各阶导数在 $t=0$ 时的值均为零，即零初始条件，则对上式中各项分别求拉氏变换：

$$\begin{aligned} [a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n] C(s) &= [b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m] R(s) \\ \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} \end{aligned}$$

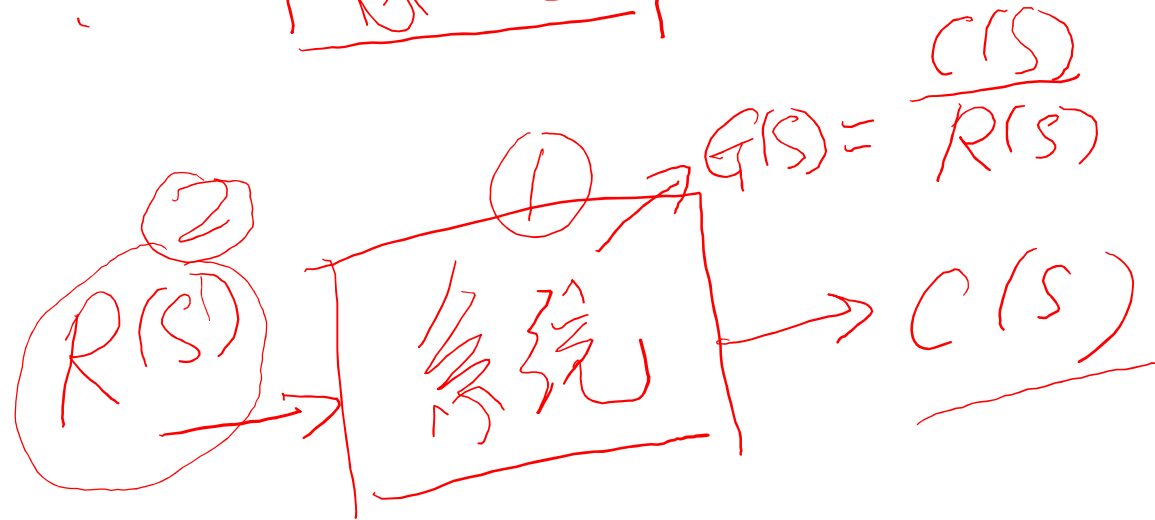
$$\begin{aligned}
 & [a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n] C(s) \\
 & = [b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m] R(s)
 \end{aligned}$$

定义系统的传递函数



$$\underline{G(s)} = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{M(s)}{N(s)}$$

$G(s)$



$$\underline{C(s)} = \underline{R(s)} \underline{G(s)}$$

例 试求例2-8 RLC无源网络的传递函数 $U_0(s)/U_i(s)$

解: RLC 网络的微分方程:

$$LC \frac{d^2 u_0(t)}{dt^2} + RC \frac{du_0(t)}{dt} + u_0(t) = u_i(t)$$

在零初始条件下, 对上述方程中各项求拉氏变换:

$$(LCs^2 + RCs + 1)U_0(s) = U_i(s)$$

由传递函数定义, 网络传递函数为:

$$G(s) = \frac{U_0(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$\frac{U_0(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

传递函数的性质

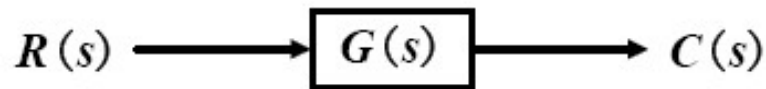
性质1

传递函数是复变量 s 的有理真分式函数, $m \leq n$, 且具有复变量函数的所有性质。

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

性质2

$G(s)$ 取决于系统或元件的结构和参数, 与输入量的形式(幅度与大小)无关。



性质3

$G(s)$ 虽然描述了输出与输入之间的关系, 但它不提供任何该系统的物理结构。因为许多不同的物理系统具有完全相同的传递函数。

性质4

如果 $G(s)$ 已知，那么可以研究系统在各种输入信号作用下的输出响应。

性质5

如果系统的 $G(s)$ 未知，可以给系统加上已知的输入，研究其输出，从而得出传递函数，一旦建立 $G(s)$ 可以给出该系统动态特性的完整描述，与其它物理描述不同。

传递函数数学模型是（表示）输出变量和输入变量微分方程的运算模（**operational mode**）

性质6

传递函数与微分方程之间有关系。

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

如果将 $s \Leftrightarrow \frac{d}{dt}$ 置换 传递函数 \Leftrightarrow 微分方程

性质7

传递函数 $G(s)$ 的拉氏反变换是脉冲响应 $g(t)$ 。脉冲响应（脉冲过渡函数） $g(t)$ 是系统在单位脉冲输入时的输出响应。



$$C(s) = G(s) \left(\frac{R(s)}{1} \right)$$
$$C(s) = G(s) \left(1 \right)$$

例 在例2-8 中，若已知RLC网络电容初始电压 $u_0(0)$ 和初始电流 $i(0)$ ，试求电容电压 $u_0(t)$ 的单位阶跃响应。

解: RLC 网络传递函数为:

$$① U_0(s) = U_i(s) G(s) = \frac{U_0(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$② U_0(t) = \mathcal{L}^{-1}[U_0(s)]$$

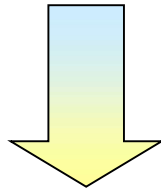
用微分算符 d/dt 置换 s ，得到相应的微分方程:

$$LC \frac{d^2 u_0(t)}{dt^2} + RC \frac{du_0(t)}{dt} + u_0(t) = u_i(t)$$

由传递函数定义，网络传递函数为:

$$LC[s^2 U_0(s) - s u_0(0) - u_0'(0)] + RC[s U_0(s) - u_0(0)] + U_0(s) = U_i(s)$$

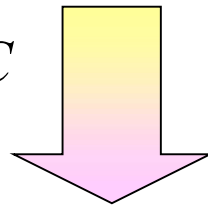
$$LC[s^2U_0(s) - su_0(0) - u'_0(0)] + RC[sU_0(s) - u_0(0)] + U_0(s) = U_i(s)$$



$$U_0(s) = \frac{U_i(s)}{LCs^2 + RCs + 1} + \frac{LCsu_0(0) + LCu'_0(0) + RCu_0(0)}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$u'_0(0) = [du_0(t)/dt]_{t=0} = i(0)/C$$

$$U_i(s) = 1/s$$



对 $U_0(s)$ 求拉氏反变换

$$u_0(t) = L^{-1}[U_0(s)]$$

$$= L^{-1}\left[\frac{1}{s(LCs^2 + RCs) + 1}\right] + L^{-1}\left[\frac{LCu'_0(0) + (LCs + RC)u_0(0)}{LCs^2 + RCs + 1}\right]$$

$$\textcircled{2} \rightarrow \boxed{\textcircled{1}} \rightarrow U_r(t)$$

$$u_0(t) = L^{-1}[U_0(s)]$$

$$= L^{-1} \left[\frac{\frac{1}{s} \cdot 1}{s(LCs^2 + RCs + 1)} \right] + L^{-1} \left[\frac{LCu'_0(0) + (LCs + RC)u_0(0)}{LCs^2 + RCs + 1} \right]$$

电源电压 $u_i(t)$ 激励的零初始条件响应。

由初始条件 $u_i(t)$ 和 $u'_0(0)$ 激励的零输入响应。

2. 传递函数的零点和极点

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

$$G(s) = \frac{b_0(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{a_0(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = K^* \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

$$G(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$z_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 是分子多项式的零点, 称为传递函数的**零点**

$p_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 是分母多项式的零点, 称为传递函数的**极点**

K^* 称为传递系数或根轨迹**增益**。

传递函数的零、极点可以是实数, 也可以是复数。

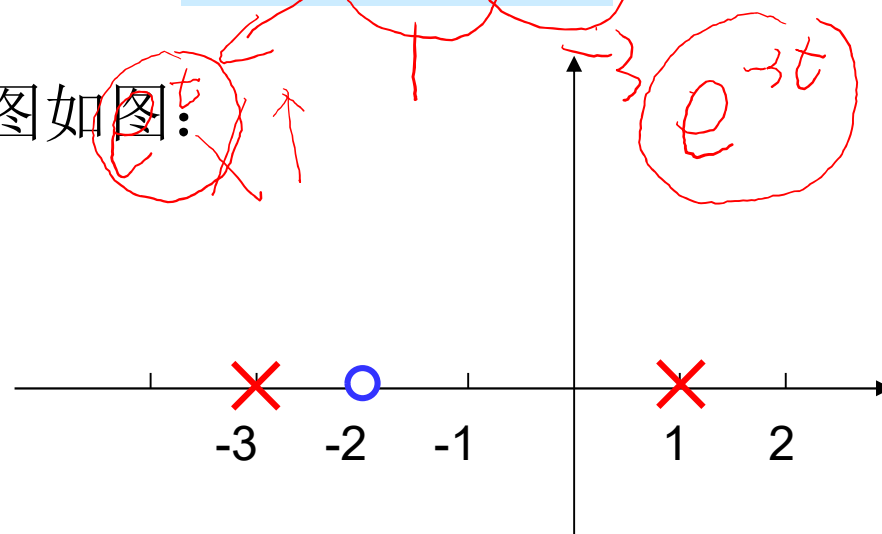
零极点分布图

在复数平面上表示传递函数的零点和极点的图形，称为传递函数的零极点分布图。

在图中一般用“○”表示零点，用“×”表示极点。例如传递函数：

$$G(s) = \frac{s+2}{(s-1)(s+3)}$$

其零极点分布图如图：



传递函数的零极点分布图可以更形象地反映系统的全面特性（第四章）。

3. 传递函数的极点和零点对输出的影响

极点对系统输出的影响

传递函数的极点就是微分方程的特征根，
因此它们决定了所描述系统自由运动的形态，
称之为模态。

设某系统传递函数为：

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{6(s+3)}{(s+1)(s+2)}$$

自由运动的模态是 e^{-t} 和 e^{-2t} 。当 $r(t) = r_1 + r_2 e^{-5t}$ ，即 $R(s) = (r_1 / s) + [r_2 / (s+5)]$ 时，可求得系统的零初始条件响应为：

$$c(t) = L^{-1}[C(s)] = L^{-1} \left[\frac{6(s+3)}{(s+1)(s+2)} \left(\frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s+5} \right) \right]$$

$$= 9r_1 - r_2 e^{-5t} + (3r_2 - 12r_1) e^{-t} + (3r_1 - 2r_2) e^{-2t}$$

$$c(t) = L^{-1}[C(s)] = L^{-1}\left[\frac{6(s+3)}{(s+1)(s+2)}\left(\frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s+5}\right)\right]$$

$$= 9r_1 - r_2 e^{-5t} + (3r_2 - 12r_1)e^{-t} + (3r_1 - 2r_2)e^{-2t}$$

具有与输入函数 $r(t)$ 相同的模态

$$r(t) = r_1 + r_2 e^{-5t}$$

包含了由极点-1和-2形成的自由运动模态。这是**系统“固有”的成分**，但其**系数却与输入函数有关**，因此，可以认为这两项是**受输入函数激发而形成的**。

传递函数的极点可以受输入函数的激发，在输出响应中形成自由运动的模态。

零点对系统输出的影响

传递函数的零点并不形成自由运动的模态，但它们却影响各模态响应中所占的比重，因而也影响响应曲线的形状。

设具有相同极点但零点不同的系统传递函数分别为：

$$G_1(s) = \frac{4s + 2}{(s + 1)(s + 2)}$$

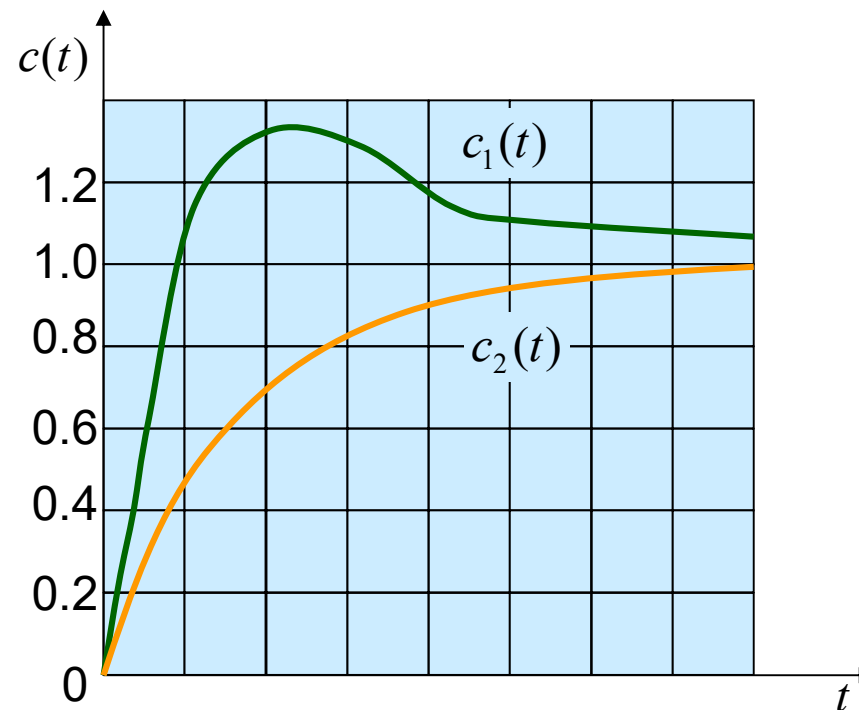
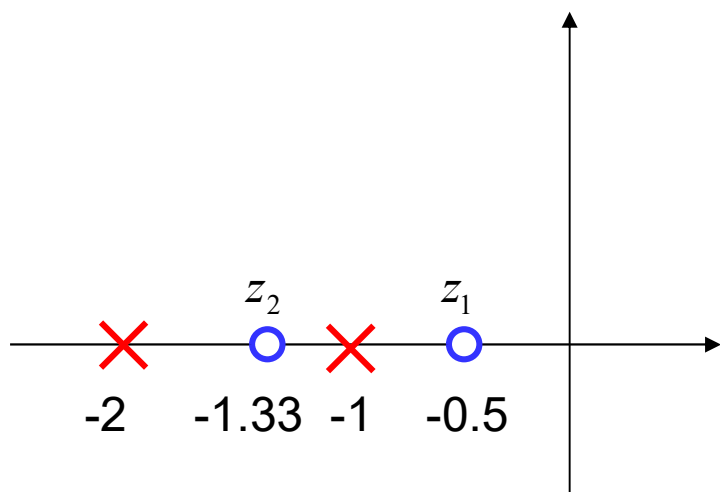
零初始状态下，
单位阶跃响应

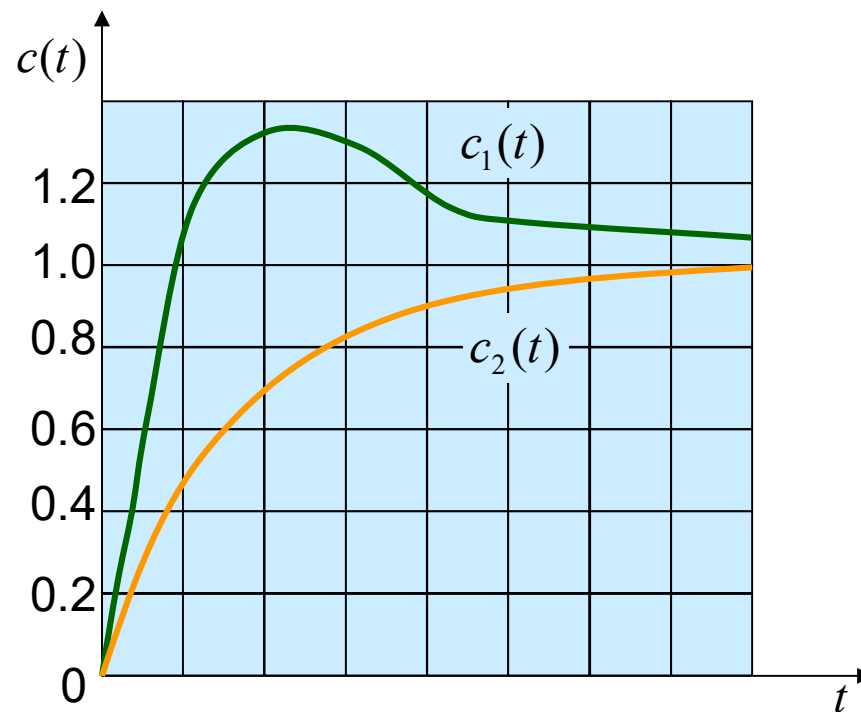
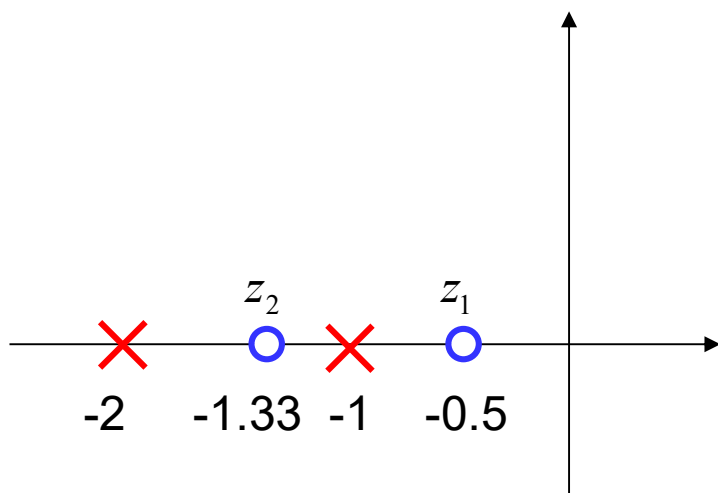
$$c_1(t) = 1 + 2e^{-t} - 3e^{-2t}$$

$$G_2(s) = \frac{1.5s + 2}{(s + 1)(s + 2)}$$

零初始状态下，
单位阶跃响应

$$c_2(t) = 1 - 0.5e^{-t} - 0.5e^{-2t}$$





- 零点距极点的距离**越远**，该极点所产生的模态所占比重**越大**。
- 零点距极点的距离**越近**，该极点产生的模态所占比重**越小**。
- 如果零极点**重合** - 该极点所产生的模态为**零**，因为分子分母相互抵消。

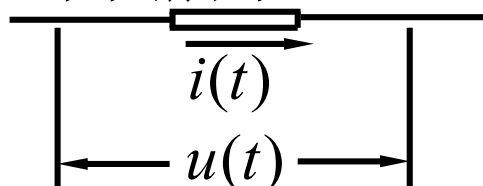
3. 典型环节的传递函数

一个自动控制系统，不管其多么复杂，总是由若干个元件按不同的方式根据一定的目的组合而成。从结构和作用原理角度来看元件，可以有各种各样不同的元件，如机械式，电气式，液压式，气动式等等。但从描述各种元件的行为特征的数学模型来看元件，不管元件的结构和作用原理如何千差万别，其数学模型却有可能完全一样。因此从元件的数学模型来划分元件的种类，只有几种最基本的元件或称为典型环节。复杂一些的元件，其数学模型可以是几个典型环节的数学模型组合。而一个复杂的系统的数学模型也无非是一些典型环节的数学模型组合而成。因此从分析和综合系统的角度来看，按数学模型来划分环节，更能抓住事物的本质。

在介绍典型环节的传递函数前，先补充算子阻抗法。

补充算子阻抗法的目的是为了便于推导所举典型环节的物理原型的传递函数.

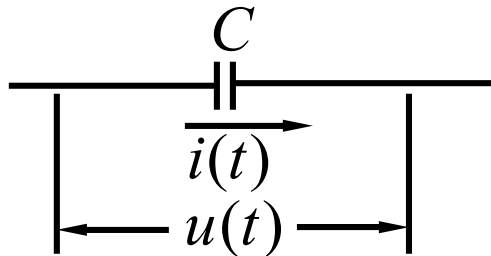
设电阻**R**的输入信号是流过电阻的电流， 输出信号是电阻两端的电压， 如下图所示：



则 $u(t) = Ri(t)$ 对其两边进行拉氏变换，得： $U(s) = RI(s)$

从而 $\frac{U(s)}{I(s)} = R$ (21)，称**R**为电阻的算子阻抗.

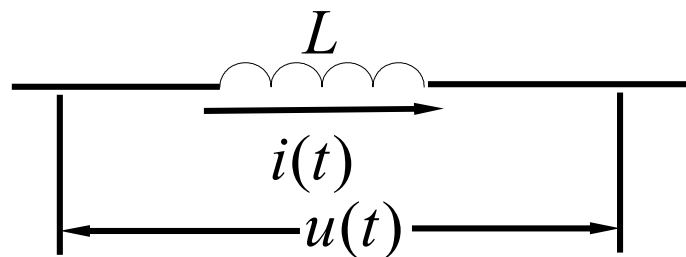
设电容**C**的输入信号是流过电容的电流， 输出信号是电容两端的电压， 如下图所示， 则 $u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$



设初始条件为零,对上式两边进行拉氏变换,得: $\frac{U(s)}{I(s)} = \frac{1}{Cs}$ (22)

称 $\frac{1}{C_s}$ 为电容的算子阻抗.

设电感 L 的输入信号是流过电感的电流, 输出信号是电感两端的电压, 如下图所示, 则 $u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$



设初始条件为零, 对上式两边进行拉氏变换, 得: $\frac{U(s)}{I(s)} = Ls$ (23)

称 Ls 为电感的算子阻抗. 由式(21),(22),(23)可见 $R, \frac{1}{C_s}, Ls$

都具有电阻的性质, 从而电路中电容和电感串联或并联连接时, 就与电阻的串联或并联的运算方法一样.

典型环节有比例、积分、惯性、振荡、微分和延迟环节等多种。以下分别讨论典型环节的时域特征和复域（s域）特征。时域特征包括微分方程和单位阶跃输入下的输出响应。s域特性研究系统的零极点分布。

(1) 比例环节

时域方程： $y(t) = kx(t), t \geq 0$

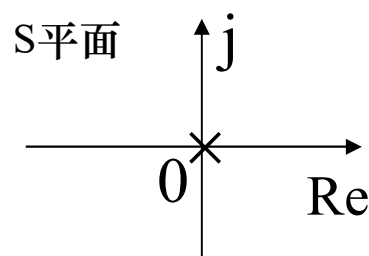
传递函数： $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = k$

比例环节又称为放大环节。k为放大系数。

(二) 积分环节:

时域方程: $y(t) = k \int_0^t x(t) dt, t \geq 0$

传递函数: $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{s} = \frac{1}{Ts}$



有一个0值极点。在图中极点用“x”表示，零点用“o”表示。K表示比例系数，T称为时间常数。

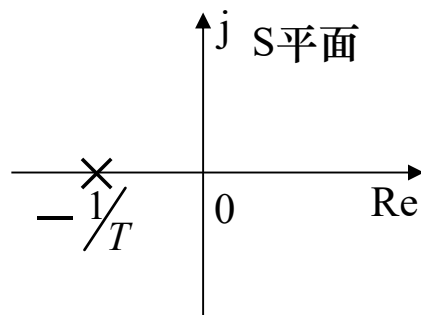
(三) 惯性环节

时域方程: $Ty'(t) + y(t) = kx(t), t \geq 0$

传递函数: $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{Ts + 1}$

■当输入为单位阶跃函数时,有 $Ty'(t) + y(t) = k$ 可解得:

$y(t) = k(1 - e^{-t/T})$, 式中: k 为放大系数, T 为时间常数。



只有一个极点 $(-1/T)$

(四) 振荡环节:

时域方程: $a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 x(t)$

传递函数: $G(s) = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = k \frac{a_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = k \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}$

(五) 微分环节:

微分环节的时域形式有三种形式: 相应的传递函数为:

① $y(t) = kx'(t)$

① $G(s) = ks$

② $y(t) = k(\tau x'(t) + x(t))$

② $G(s) = k(\tau s + 1)$

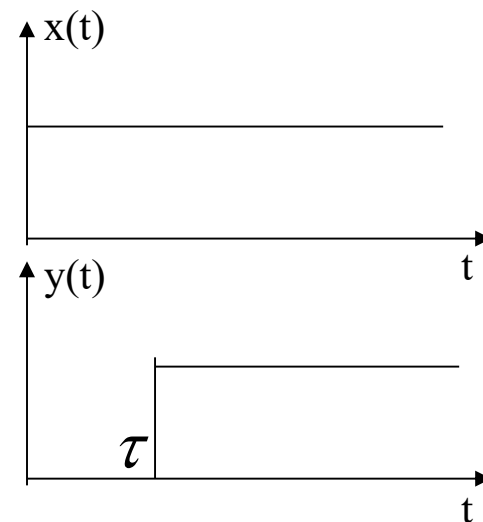
③ $y(t) = k[\tau^2 x''(t) + 2\zeta\tau x'(t) + x(t)]$

③ $G(s) = k(\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1)$

分别称为: 纯微分, 一阶微分和二阶微分环节。微分环节没有极点, 只有零点。分别是零、实数和一对共轭零点 (若 $0 < \zeta < 1$)。在实际系统中, 由于存在惯性, 单纯的微分环节是不存在的, 一般都是微分环节加惯性环节。

(六) 延迟环节：又称时滞，时延环节。它的输出是经过一个延迟时间后，完全复现输入信号。 $y(t) = x(t - \tau)$ 如右图所示。

其传递函数为： $G(s) = e^{-\tau s}$



小结

- 传递函数的基本概念；
- 传递函数的列写（由微分方程和系统原理图出发）；
- 典型环节及其传递函数（单位阶跃响应及其零极点分布）。

作业

2-9