1.1 计算下列各式.

(1) $(1+i)-(3-2i)$;

解 $(1+i)-(3-2i)=(1+i)-3+2i=-2+3i$.

(2) $(a-bi)^3$;

解 $$(a-bi)^3=a^3-3a^2bi+3a(bi)^2-(bi)^3=a^3-3ab^2+i(b^3-3a^2b).$$

(3) $\dfrac{i}{(i-1)(i-2)}$;

解 $$\frac{i}{(i-1)(i-2)}=\frac{i}{i^2-2i-i+2}=\frac{i}{1-3i}=\frac{i(1+3i)}{10}=\frac{-3}{10}+\frac{i}{10}.$$

(4) $\dfrac{z-1}{z+1}\ (z=x+iy\neq-1)$;

解 $$\frac{z-1}{z+1}=\frac{x+iy-1}{x+iy+1}=\frac{(x-1+iy)(x+1-iy)}{(x+1)^2+y^2}=\frac{x^2+y^2-1+2iy}{(x+1)^2+y^2}.$$

1.2 证明下列关于共轭复数的运算性质:

(1) $\overline{(z_1\pm z_2)}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$;

证 $$\overline{(z_1\pm z_2)}=\overline{(x_1+iy_1)\pm(x_2+iy_2)}=\overline{(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)}=(x_1\pm x_2)-i(y_1\pm y_2)=x_1-iy_1\pm x_2\mp iy_2=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2.$$

(2) $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$;

证 $$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)}=\overline{(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2)}=x_1x_2-y_1y_2-i(x_1y_2+y_1x_2).$$

$$\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2=\overline{(x_1+iy_1)}\,\overline{(x_2+iy_2)}=(x_1-iy_1)(x_2-iy_2)=x_1x_2-iy_1x_2-ix_1y_2-y_1y_2.$$

即左边 = 右边,得证.

(3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\quad(z_2\neq0)$.

证 $$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\overline{\left(\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\right)}=\left(\overline{\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{x_2^2+y_2^2}}\right)$$

$$= \frac{(x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1 - iy_1)(x_2^2 + y_2^2)}{(x_2^2 + y_2^2)(x_2 - iy_2)}$$

$$= \frac{x_1 - iy_1}{x_2 - iy_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

1.3 解方程组$\begin{cases} 2z_1 - z_2 = i, \\ (1+i)z_1 + iz_2 = 4 - 3i. \end{cases}$

解 所给方程组可写为

$$\begin{cases} 2x_1 + 2iy_1 - x_2 - iy_2 = i, \\ (1+i)(x_1 + iy_1) + i(x_2 + iy_2) = 4 - 3i. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + i(2y_1 - y_2) = i, \\ x_1 - y_1 - y_2 + i(x_1 + x_2 + y_1) = 4 - 3i. \end{cases}$$

利用复数相等的概念可知

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ 2y_1 - y_2 = 1, \\ x_1 - y_1 - y_2 = 4, \\ x_1 + x_2 + y_1 = -3. \end{cases}$$

解得

$$y_2 = -\frac{17}{5}, \quad y_1 = -\frac{6}{5}, \quad x_1 = -\frac{3}{5}, \quad x_2 = -\frac{6}{5}.$$

故

$$z_1 = -\frac{3}{5} - \frac{6}{5}i, \quad z_2 = -\frac{6}{5} - \frac{17}{5}i.$$

1.4 将直线方程 $ax + by + c = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$ 写成复数形式.
[提示:记 $x + iy = z$.]

解 由 $x = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$ 代入直线方程,得

$$\frac{a}{2}(z + \bar{z}) + \frac{b}{2i}(z - \bar{z}) + c = 0,$$

$$az + a\bar{z} - bi(z - \bar{z}) + 2c = 0,$$

$$(a - ib)z + (a + ib)\bar{z} + 2c = 0,$$

故 $\overline{A}z + A\overline{z} + B = 0$,其中 $A = a + ib, B = 2c$.

1.5　将圆周方程 $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0(a \neq 0)$ 写成复数形式(即用 z 与 $\overline{z}$ 表示,其中 $z = x + iy$).

解　把 $x = \frac{z + \overline{z}}{2}, y = \frac{z - \overline{z}}{2i}, x^2 + y^2 = z \cdot \overline{z}$ 代入圆周方程,得

$$az \cdot \overline{z} + \frac{b}{2}(z + \overline{z}) + \frac{c}{2i}(z - \overline{z}) + d = 0,$$

$$2az \cdot \overline{z} + (b - ic)z + (b + ic)\overline{z} + 2d = 0,$$

故

$$Az \cdot \overline{z} + \overline{B}z + B\overline{z} + C = 0.$$

其中 $A = 2a, B = b + ic, C = 2d$.

1.6　求下列复数的模与辐角主值.

(1) $\sqrt{3} + i$;

解　$|\sqrt{3} + i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$,

$\arg(\sqrt{3} + i) = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$.

(2) $-1 - i$;

解　$|-1 - i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$,

$\arg(-1 - i) = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi$.

(3) $2 - i$;

解　$|2 - i| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$,

$\arg(2 - i) = \arctan \frac{-1}{2} = -\arctan \frac{1}{2}$.

(4) $-1 + 3i$.

解　$|-1 + 3i| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$,

$\arg(-1 + 3i) = \arctan \frac{3}{-1} + \pi = \pi - \arctan 3$.

1.7　证明下列各式:

(1) $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z}_2)$;

证　
$$\begin{aligned}|z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \\ &= (z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2) \\ &= z_1 \cdot \overline{z}_1 + z_2 \cdot \overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1 - z_1\overline{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - (\overline{z_1\overline{z}_2} + z_1\overline{z}_2) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2).\end{aligned}$$

(2) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$,并说明此式的几何意义;

证 $$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2$$
$$=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})+(z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})$$
$$=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)+(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$$
$$=2|z_1|^2+2|z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2).$$

此式的几何意义是:平行四边形对角线平方和等于各边平方和.

(3) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|x|+|y|)\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|$(其中 $z=x+\mathrm{i}y$).

证 显然有 $|z|=|x+\mathrm{i}y|=\sqrt{x^2+y^2}\leqslant|x|+|y|$. 而 $(|x|-|y|)^2\geqslant0$,则 $2|xy|\leqslant x^2+y^2$. 又

$$(|x|+|y|)^2=|x|^2+|y|^2+2|xy|$$
$$\leqslant2(x^2+y^2)=2|z|^2,$$

故

$$|z|\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}(|x|+|y|).$$

即

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|x|+|y|)\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|.$$

1.8 将下列各复数写成三角表示式.

(1) $-3+2\mathrm{i}$;

解 $|-3+2\mathrm{i}|=\sqrt{13}$, $\arg(-3+2\mathrm{i})=\arctan\frac{2}{-3}+\pi$,

故

$$-3+2i=\sqrt{13}\left[\cos\left(\pi-\arctan\frac{2}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\arctan\frac{2}{3}\right)\right].$$

(2) $\sin\alpha+i\cos\alpha$;

解 $|\sin\alpha+i\cos\alpha|=1$,

$$\arg(\sin\alpha+i\cos\alpha)=\arctan\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\arctan(\cot\alpha)=\frac{\pi}{2}-\alpha,$$

故

$$\sin\alpha+i\cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

(3) $-\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{6}$.

解 $\arg\left(-\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{6}\right)=\arctan\left(\cot\frac{\pi}{6}\right)-\pi$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{2}{3}\pi,$$

故

$$-\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{6}=\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$=\cos\frac{2}{3}\pi-i\sin\frac{2}{3}\pi.$$

1.9 **利用复数的三角表示计算下列各式:**

(1) $(1+i)(1-i)$;

解 $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,

$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$,

故

$$(1+i)(1-i)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\right)=2.$$

(2) $(-2+3i)/(3+2i)$;

解 因

$$-2+3i=\sqrt{13}\left[\cos\left(\arctan\frac{-3}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\arctan\frac{-3}{2}+\pi\right)\right],$$

$$3+2\mathrm{i}=\sqrt{13}\left[\cos\left(\arctan\frac{2}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\arctan\frac{2}{3}\right)\right],$$

故$(-2+3\mathrm{i})\big/(3+2\mathrm{i})=\mathrm{i}$.

注:$\arg(-2+3\mathrm{i})\big/(3+2\mathrm{i})=\arctan\dfrac{-3}{2}+\pi-\arctan\dfrac{2}{3}$

$$=\arctan\frac{-3/2-2/3}{1+(-3/2)\cdot(2/3)}+\pi=-\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{\pi}{2}.$$

(3) $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^3$;

解 由乘幂公式知

$$\left(\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^3=\left[\cos 3\cdot\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin 3\cdot\frac{\pi}{6}\right]=\mathrm{i}.$$

(4) $\sqrt[4]{-2+2\mathrm{i}}$.

解 因$|-2+2\mathrm{i}|=8$,$\arg(-2+2\mathrm{i})=\dfrac{3}{4}\pi$,所以由开方公式知

$$\sqrt[4]{-2+2\mathrm{i}}=\sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{3+8k\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{3+8k\pi}{16}\right),$$

$$k=0,1,2,3.$$

1.10 解方程:$z^3+1=0$.

解 方程 $z^3+1=0$,即 $z^3=-1$,它的解是

$$z=(-1)^{\frac{1}{3}},$$

由开方公式计算得

$$\begin{aligned}z&=[1\cdot(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)]^{\frac{1}{3}}\\&=\cos\frac{(2k+1)\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{(2k+1)\pi}{3},\quad k=0,1,2.\end{aligned}$$

即

$$z_0=\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},$$

$$z_1=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi=-1,$$

$$z_2=\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

1.11 指出下列不等式所确定的区域与闭区域,并指明它是有界

的还是无界的?是单连通域还是多连通域?

(1) $2 < |z| < 3$;

解 圆环,有界多连通域.

(2) $\left|\dfrac{1}{z}\right| < 3$;

解 以原点为中心,$\dfrac{1}{3}$ 为半径的圆的外部,无界多连通域.

(3) $\dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{\pi}{3}$ 且 $1 < |z| < 3$;

解 圆环的一部分,有界、单连域.

(4) $\operatorname{Im} z > 1$ 且 $|z| < 2$;

解 圆环的一部分,有界、单连域.

(5) $\operatorname{Re} z^2 < 1$;

解 $x^2 - y^2 < 1$,无界、单连域.

(6) $|z-1| + |z+1| \leqslant 4$;

解 椭圆的内部及椭圆的边界,有界、闭区域.

(7) $|\arg z| < \dfrac{\pi}{3}$;

解 从原点出发的两条半射线所成的区域、无界、单连域.

(8) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| > a\ (a > 0)$.

解 分三种情况:$0 < a < 1$,区域为圆的外部;

$a = 1$ 为左半平面;$a > 1$ 为圆内.

1.12 指出满足下列各式的点 z 的轨迹是什么曲线?

(1) $|z + \mathrm{i}| = 1$;

解 以$(0, -\mathrm{i})$为圆心,1 为半径的圆周.

(2) $|z - a| + |z + a| = b$,其中 a, b 为正实常数;

解 以 $\pm a$ 为焦点,$\dfrac{b}{a}$ 为长半轴的椭圆.

(3) $|z - a| = \operatorname{Re}(z - b)$,其中 a, b 为实常数;

解 设 $z = x + \mathrm{i}y$,则$|(x-a) + \mathrm{i}y| = \operatorname{Re}(x - b + \mathrm{i}y)$.即

$$\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = (x-b)^2, \\ x - b \geqslant 0. \end{cases}$$

解 椭圆周的参数方程为 $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$，写成复数形式为 $z = a\cos t + \mathrm{i}\, b\sin t\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

1.14 试将函数 $x^2 - y^2 - \mathrm{i}(xy - x)$ 写成 z 的函数$(z = x + \mathrm{i}y)$.

解 将 $x = \dfrac{z + \bar{z}}{2}, y = \dfrac{z - \bar{z}}{2\mathrm{i}}$ 代入上式，得

$$\frac{(z+\bar{z})^2}{4} + \frac{(z-\bar{z})^2}{4} - \mathrm{i}\frac{(z+\bar{z})(z-\bar{z})}{4\mathrm{i}} + \mathrm{i}\frac{z+\bar{z}}{2}$$

$$= \frac{z^2 + 2z\cdot\bar{z} + \bar{z}^2}{4} + \frac{z^2 - 2z\cdot\bar{z} + \bar{z}^2}{4} - \frac{z^2 - \bar{z}^2}{4} + \mathrm{i}\frac{z+\bar{z}}{2}$$

$$= \frac{z^2}{4} + \frac{3\bar{z}^2}{4} + \frac{\mathrm{i}z}{2} - \frac{\mathrm{i}\bar{z}}{2}.$$

1.15 试证 $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\operatorname{Re} z}{z}$ 不存在.

证 $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\operatorname{Re} z}{z} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x}{x + \mathrm{i}y}$，令 $y = kx$，则上述极限为 $\dfrac{1}{1 + k\mathrm{i}}$，随 k 变化而变化，因而极限不存在.

1.16 设 $f(z) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0, \end{cases}$ 试证 $f(z)$ 在 $z = 0$ 处不连续.

证 因

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y = kx\to 0}} \frac{kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{k}{1 + k^2},$$

即 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ 不存在，故 $f(z)$ 在 $z = 0$ 处不连续.

(1) $f(z)=\frac{1}{z}$.

解 因

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\frac{1}{z+\Delta z}-\frac{1}{z}}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z-z-\Delta z}{\Delta z(z+\Delta z)z}=-\frac{1}{z^2}\quad(z\neq 0),$$

故

$$f'(z)=\left(\frac{1}{z}\right)'=-\frac{1}{z^2}\quad(z\neq 0).$$

(2) $f(z)=z\mathrm{Re}\,z$.

解 因

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)\mathrm{Re}(z+\Delta z)-z\mathrm{Re}\,z}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z\mathrm{Re}\,\Delta z+\Delta z\mathrm{Re}\,z+\Delta z\mathrm{Re}\,\Delta z}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\left(\mathrm{Re}\,z+\mathrm{Re}\,\Delta z+z\frac{\mathrm{Re}\,\Delta z}{\Delta z}\right)$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\left(\mathrm{Re}\,z+z\frac{\mathrm{Re}\,\Delta z}{\Delta z}\right)$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left(\mathrm{Re}\,z+z\frac{\Delta x}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}\right),$$

当 $z\neq 0$ 时，上述极限不存在，故导数不存在；当 $z=0$ 时，上述极限为 0，故导数为 0.

2. 下列函数在何处可导？何处不可导？何处解析？何处不解析？

(1) $f(z)=\bar{z}\cdot z^2$.

解 $f(z)=\bar{z}\cdot z^2=\bar{z}\cdot z\cdot z=|z|^2\cdot z$

$$=(x^2+y^2)(x+\mathrm{i}y)$$

$$=x(x^2+y^2)+\mathrm{i}y(x^2+y^2),$$

这里 $u(x,y)=x(x^2+y^2), v(x,y)=y(x^2+y^2)$.

$$u_x=x^2+y^2+2x^2,\quad v_y=x^2+y^2+2y^2,$$
$$u_y=2xy,\qquad v_x=2xy.$$

要 $u_x=v_y, u_y=-v_x$，当且仅当 $x=y=0$，而 u_x, u_y, v_x, v_y 均连续，故 $f(z)=\bar{z}\cdot z^2$ 仅在 $z=0$ 处可导，处处不解析.

(2) $f(z)=x^2+iy^2$.

解 这里 $u=x^2, v=y^2$. $u_x=2x, u_y=0, v_x=0, v_y=2y$，四个偏导数均连续，但 $u_x=v_y, u_y=-v_x$ 仅在 $x=y$ 处成立，故 $f(z)$ 仅在 $x=y$ 上可导，处处不解析.

(3) $f(z)=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$.

解 这里 $u(x,y)=x^3-3xy^2, v(x,y)=3x^2y-y^3$. $u_x=3x^2-3y^2, u_y=-6xy, v_x=6xy, v_y=3x^2-3y^2$，四个偏导数均连续且 $u_x=v_y, u_y=-v_x$ 处处成立，故 $f(z)$ 在整个复平面上处处可导，也处处解析.

(4) $f(z)=\sin x\operatorname{ch} y+i\cos x\operatorname{sh} y$.

解 这里 $u(x,y)=\sin x\operatorname{ch} y, v(x,y)=\cos x\operatorname{sh} y$.

$$u_x=\cos x\operatorname{ch} y,\quad u_y=\sin x\operatorname{sh} y,$$
$$v_x=-\sin x\operatorname{sh} y,\quad v_y=\cos x\operatorname{ch} y.$$

四个偏导均连续且 $u_x=v_y, u_y=-v_x$ 处处成立，

故 $f(z)$ 处处可导，也处处解析.

3. 确定下列函数的解析区域和奇点，并求出导数.

(1) $\dfrac{1}{z^2-1}$.

解 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}$ 是有理函数，除去分母为 0 的点外处处解析，故全平面除去点 $z=1$ 及 $z=-1$ 的区域为 $f(z)$ 的解析区域，奇点为 $z=\pm 1$，$f(z)$ 的导数为：

$$f'(z)=\left(\frac{1}{z^2-1}\right)'=\frac{-2z}{(z^2-1)^2}$$

则可推出$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$,即 $u=C$(常数).故 $f(z)$ 必为 D 中常数.

(3) 设 $f(z)=u+\mathrm{i}v$,由条件知 $\arg\frac{v}{u}=C$,从而

$$\frac{(v/u)'}{1+(v/u)^2}=0,$$

求导得

$$\frac{u^2\left(\frac{\partial v}{\partial x}u-\frac{\partial u}{\partial x}v\right)\Big/u^2}{u^2+v^2}=0 \quad 或 \quad \frac{u^2\left(\frac{\partial v}{\partial y}u-\frac{\partial u}{\partial y}v\right)\Big/u^2}{u^2+v^2}=0,$$

化简,利用 C-R 条件得

$$\begin{cases}-\frac{\partial u}{\partial y}u-\frac{\partial u}{\partial x}v=0,\\ \frac{\partial u}{\partial x}u-\frac{\partial u}{\partial y}v=0.\end{cases}$$

所以$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$,同理$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$,即在 D 中 u,v 为常数,故 $f(z)$ 在 D 中为常数.

(4) 设 $a\neq 0$,则 $u=(c-bv)/a$,求导得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{b}{a}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{b}{a}\frac{\partial v}{\partial y},$$

由 C-R 条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{b}{a}\frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{b}{a}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

故 u,v 必为常数,即 $f(z)$ 在 D 中为常数.

设 $a=0,b\neq 0,c\neq 0$,则 $bv=c$,知 v 为常数,又由 C-R 条件知 u 也必为常数,所以 $f(z)$ 在 D 中为常数.

5. 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析,试证

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2=4|f'(z)|^2.$$

证 设

$$f(z)=u+\mathrm{i}v,\qquad |f(z)|^2=u^2+v^2,$$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y},\quad |f'(z)|^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

而

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2+v^2)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2+v^2)$$

$$=2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right],$$

又 $f(z)$ 解析，则实部 u 及虚部 v 均为调和函数. 故

$$u=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0,\quad v=\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)=0.$$

则

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2=4\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)=4|f'(z)|^2.$$

6. 试证C-R方程的极坐标形式为 $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta},\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}$，并且有

$$f'(z)=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right).$$

证一 设 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$. C-R条件：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

因

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y},\qquad ①$$

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}=-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y},\qquad ②$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial v}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial v}{\partial y},\qquad ③$$

$$\frac{\partial v}{\partial\theta}=\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}=-r\sin\theta\frac{\partial v}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial v}{\partial y},\qquad ④$$

利用 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，比较 ①、④ 和 ②、③ 即得

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta},\quad\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}.$$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\sin\theta\right)+\mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\sin\theta\right)$$
$$=\cos\theta\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}\right)-\frac{\sin\theta}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)$$
$$=\cos\theta\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}\right)-\frac{\sin\theta}{r}\left(-r\frac{\partial v}{\partial r}+\mathrm{i}r\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$
$$=\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}\right)(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)$$
$$=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)$$

证二 令 $z=re^{\mathrm{i}\theta}$，$f(z)=f(re^{\mathrm{i}\theta})=u+\mathrm{i}v$，

$$f'(z)\cdot e^{\mathrm{i}\theta}=\frac{\partial u}{\partial r}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r},$$

得

$$f'(z)=\frac{1}{e^{\mathrm{i}\theta}}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}\right).$$

7. 试证 $u=x^2-y^2$，$v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ 都是调和函数，但 $u+\mathrm{i}v$ 不是解析函数.

证 因 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2y$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2$，则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2+(-2)=0,$$

故 $u=x^2-y^2$ 是调和函数. 又

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{-2y^3+6x^2y}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{2y^3-6x^2y}{(x^2+y^2)^2},$$

则 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$，故 $v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ 是调和函数.

但 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\neq\dfrac{\partial v}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}\neq-\dfrac{\partial v}{\partial x}$，故 $u+\mathrm{i}v$ 不是解析函数.

8. 如果 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 为解析函数,试证 $-u$ 是 v 的共轭调和函数.

证　只需证 $v-\mathrm{i}u$ 为解析函数. 因 $\mathrm{i}, u+\mathrm{i}v$ 均为解析函数,故 $-\mathrm{i}(u+\mathrm{i}v)$ 也是解析函数,亦即 $-u$ 是 v 的共轭调和.

9. 由下列条件求解析函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$.

(1) $u=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$;

解　因 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=3x^2+6xy-3y^2$,所以

$$v=\int(3x^2+6xy-3y^2)\mathrm{d}y$$
$$=3x^2y+3xy^2-y^3+\varphi(x),$$

又 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=6xy+3y^2+\varphi'(x)$,而 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=3x^2-6xy-3y^2$,所以 $\varphi'(x)=-3x^2$, 则 $\varphi(x)=-x^3+C$. 故

$$\begin{aligned}f(z)&=u+\mathrm{i}v\\&=(x-y)(x^2+4xy+y^2)\\&\quad+\mathrm{i}(3x^2y+3xy^2-y^3-x^3+C)\\&=(1-\mathrm{i})x^2(x+\mathrm{i}y)-y^2(1-\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y)\\&\quad-2x^2y(1+\mathrm{i})-2xy^2(1-\mathrm{i})+C\mathrm{i}\\&=z(1-\mathrm{i})(x^2-y^2)-2xy\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}z(1-\mathrm{i})+C\mathrm{i}\\&=(1-\mathrm{i})z(x^2-y^2-2xy\mathrm{i})+C\mathrm{i}\\&=(1-\mathrm{i})z^3+C\mathrm{i}.\end{aligned}$$

(2) $v=2xy+3x$;

解　因 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=2y+3, \dfrac{\partial v}{\partial y}=2x$,由 $f(z)$ 解析,有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=2x,\quad u=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+\psi(y).$$

又 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=-2y-3$,而 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\psi'(y)$,所以 $\psi'(y)=-2y-3$,则 $\psi(y)=-y^2-3y+C$. 故

$$f(z)=x^2-y^2-3y+C+\mathrm{i}(2xy+3x).$$

(3) $u=2(x-1)y, f(2)=-\mathrm{i}$;

解 因 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2y, \dfrac{\partial u}{\partial y}=2(x-1)$，由 $f(z)$ 的解析性，有

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-2(x-1),$$

$$v=\int -2(x-1)\mathrm{d}x=-(x-1)^2+\psi(y),$$

又$\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=2y$，而$\dfrac{\partial v}{\partial y}=\psi'(y)$，所以

$$\psi'(y)=2y,\quad \psi(y)=y^2+C,$$

则

$$v=-(x-1)^2+y^2+C,$$

故

$$f(z)=2(x-1)y+\mathrm{i}(-(x-1)^2+y^2+C),$$

由 $f(2)=-\mathrm{i}$ 得 $f(2)=\mathrm{i}(-1+C)=-\mathrm{i}$，推出 $C=0$. 即

$$\begin{aligned} f(z)&=2(x-1)y+\mathrm{i}(y^2-x^2+2x-1)\\ &=\mathrm{i}(-z^2+2z-1)=-\mathrm{i}(z-1)^2. \end{aligned}$$

(4) $u=\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y), f(0)=0$.

解 因

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y)+\mathrm{e}^x\cos y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{e}^x(-x\sin y-\sin y-y\cos y),$$

由 $f(z)$ 的解析性，有

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-\mathrm{e}^x(-x\sin y-\sin y-y\cos y),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y)+\mathrm{e}^x\cos y.$$

则

$$\begin{aligned} v(x,y)&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y+C\\ &=\int_0^x 0\mathrm{d}x+\int_0^y[\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y)+\mathrm{e}^x\cos y]\mathrm{d}y+C \end{aligned}$$

$$=e^x\left(x\int_0^y \cos y\mathrm{d}y-\int_0^y y\sin y\mathrm{d}y+\int_0^y \cos y\mathrm{d}y\right)+C$$

$$=e^x\left(x\sin y-y\cos y-\int_0^y \cos y\mathrm{d}y+\int_0^y \cos y\mathrm{d}y\right)+C$$

$$=e^x x\sin y-e^x y\cos y+C,$$

故

$$f(z)=e^x(x\cos y-y\sin y)+ie^x(x\sin y-y\cos y)+iC.$$

由 $f(0)=0$ 知 $C=0$,即

$$f(z)=e^x(x\cos y-y\sin y)+ie^x(x\sin y-y\cos y)=ze^z.$$

10. 设 $v=e^{px}\sin y$,求 p 的值使 v 为调和函数,并求出解析函数 $f(z)=u+iv$.

解 要使 $v(x,y)$ 为调和函数,则有 $\Delta v=v_{xx}+v_{yy}=0$.即

$$p^2e^{px}\sin y-e^{px}\sin y=0,$$

所以 $p=\pm1$ 时,v 为调和函数,要使 $f(z)$ 解析,则有 $u_x=v_y,u_y=-v_x$.

$$u(x,y)=\int u_x\mathrm{d}x=\int e^{px}\cos y\mathrm{d}x=\frac{1}{p}e^{px}\cos y+\psi(y),$$

$$u_y=\frac{-1}{p}e^{px}\sin y+\psi'(y)=-pe^{px}\sin y.$$

所以

$$\psi'(y)=\left(\frac{1}{p}-p\right)e^{px}\sin y,\quad \psi(y)=\left(p-\frac{1}{p}\right)e^{px}\cos y+C.$$

即 $u(x,y)=pe^{px}\cos y+C$,故

$$f(z)=\begin{cases}e^x(\cos y+i\sin y)+C=e^z+C, & p=1,\\ -e^{-x}(\cos y+i\sin y)+C=-e^{-z}+C, & p=-1.\end{cases}$$

11. 证明:一对共轭调和函数的乘积仍为调和函数.

证明 设 v 是 u 的共轭调和函数,令 $f(z)=u+iv$,则 $f(z)$ 是解析函数,$f^2(z)=f(z)\cdot f(z)=(u+iv)^2=(u^2-v^2)+i2uv$ 也是解析函数,故其虚部 $2uv$ 是调和函数,从而 uv 是调和函数.

12. 如果 $f(z)=u+iv$ 是一解析函数,试证:$i\overline{f(z)}$ 也是解析函数.

证　因 $f(z)$ 解析,则 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$,且 u,v 均可微,从而 $-u$ 也可微,而

$$\overline{\mathrm{i}\,\overline{f(z)}}=v-\mathrm{i}u=v+\mathrm{i}(-u)$$

又

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial(-u)}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial(-u)}{\partial x}.$$

即 $-u$ 与 v 满足 C-R 条件,故 $\mathrm{i}\,\overline{f(z)}$ 也是解析函数.

13. 试解方程:

(1) $e^z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$;

解　$e^z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}=2(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3})=2e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{3}+2k\pi)}$

$$=e^{\ln 2+\mathrm{i}(2k\pi+\frac{\pi}{3})},\quad k=0,\pm1,\pm2,$$

故

$$z=\ln 2+\mathrm{i}(2k\pi+\frac{\pi}{3}),\quad k=0,\pm1,\pm2.$$

(2) $\ln z=\frac{\pi\mathrm{i}}{2}$;

解　$z=e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}=\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}=\mathrm{i}.$

(3) $\sin z=\mathrm{i}\,\mathrm{sh}\,1$;

解　$\sin z=\mathrm{i}\,\mathrm{sh}\,1=\mathrm{i}(-\mathrm{i})\sin\mathrm{i}=\sin\mathrm{i}$,所以 $z=2k\pi+\mathrm{i}$ 或 $z=(2k-1)\pi-\mathrm{i}$,k 为整数.

另解. 见本节例 24.

(4) $\sin z+\cos z=0$.

解　由题设知 $\tan z=-1$, $z=k\pi-\frac{\pi}{4}$, k 为整数.

14. 求下列各式的值.

(1) $\cos\mathrm{i}$;

解　$\cos\mathrm{i}=\frac{e^{\mathrm{i}(\mathrm{i})}+e^{-\mathrm{i}(\mathrm{i})}}{2}=\frac{e^{-1}+e^{1}}{2}.$

(2) $\mathrm{Ln}(-3+4\mathrm{i})$;

解 $\mathrm{Ln}(-3+4\mathrm{i}) = \ln 5 + \mathrm{i}\mathrm{Arg}(-3+4\mathrm{i})$

$$= \ln 5 + \mathrm{i}\left(2k\pi + \pi - \arctan\frac{4}{3}\right).$$

(3) $(1-\mathrm{i})^{1+\mathrm{i}}$;

解 $(1-\mathrm{i})^{1+\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})\mathrm{Ln}(1-\mathrm{i})}$

$$= \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})[\ln\sqrt{2}+\mathrm{i}(-\frac{\pi}{4}+2k\pi)]}$$

$$= \mathrm{e}^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2k\pi+\mathrm{i}[\ln\sqrt{2}+2k\pi-\frac{\pi}{4}]}$$

$$= \mathrm{e}^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2k\pi}\left[\cos\left(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

(4) $3^{3-\mathrm{i}}$.

解 $3^{3-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{(3-\mathrm{i})\mathrm{Ln}\,3} = \mathrm{e}^{(3-\mathrm{i})(\ln 3+2k\pi\mathrm{i})}$

$$= \mathrm{e}^{(3-\mathrm{i})\ln 3}\cdot \mathrm{e}^{2k\pi} = \mathrm{e}^{3\ln 3+2k\pi\mathrm{i}}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ln 3}$$

$$= 27\mathrm{e}^{2k\pi}(\cos\ln 3 - \mathrm{i}\sin\ln 3).$$

15. 证明

(1) $\sin z = \sin x\,\mathrm{ch}\,y + \mathrm{i}\cos x\,\mathrm{sh}\,y$;

证 $\sin z = \sin(x+\mathrm{i}y) = \sin x\cos\mathrm{i}y + \cos x\sin\mathrm{i}y$

$$= \sin x\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{i}y}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathrm{i}y}}{2} + \cos x\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{i}y}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathrm{i}y}}{2\mathrm{i}}$$

$$= \sin x\,\frac{\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^{y}}{2} - \mathrm{i}\cos x\,\frac{\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{y}}{2}$$

$$= \sin x\,\mathrm{ch}\,y + \mathrm{i}\cos x\,\mathrm{sh}\,y.$$

(2) $\cos(z_1+z_2) = \cos z_1\cos z_2 - \sin z_1\sin z_2$;

证

$$\cos z_1\cos z_2 - \sin z_1\sin z_2$$

$$= \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2})}{4} - \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2})}{4}$$

$$= \frac{1}{4}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-z_1+z_2)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1-z_2)}]$$

$$+ \frac{1}{4}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-z_1+z_2)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1-z_2)}]$$

$$= \frac{1}{2}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}] = \cos(z_1+z_2).$$

(3) $\sin^2 z+\cos^2 z=1$;

证 利用复数变量正弦函数和余弦函数的定义直接计算得

$$\sin^2 z+\cos^2 z=\left[\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})\right]^2+\left[\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})\right]^2$$
$$=-\frac{1}{4}(e^{2iz}+e^{-2iz}-2)+\frac{1}{4}(e^{2iz}+e^{-2iz}+2)$$
$$=1.$$

(4) $\sin 2z=2\sin z\cos z$;

证 $$2\sin z\cos z=2\cdot\frac{(e^{iz}-e^{-iz})(e^{iz}+e^{-iz})}{4i}$$
$$=\frac{1}{2i}(e^{2iz}+1-1-e^{-2iz})$$
$$=\frac{1}{2i}(e^{2iz}-e^{-2iz})=\sin 2z.$$

(5) $|\sin z|^2=\sin^2 x+\mathrm{sh}^2 y$;

证 $$|\sin z|^2=\sin z\cdot\overline{\sin z}=\sin z\cdot\sin\bar z$$
$$=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\frac{e^{i\bar z}-e^{-i\bar z}}{2i}$$
$$=\frac{[e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}][e^{i(x-iy)}-e^{-i(x-iy)}]}{-4}$$
$$=-\frac{1}{4}[e^{2ix}-e^{2y}-e^{-2y}+e^{-2ix}]$$
$$=-\frac{1}{4}[e^{2ix}+e^{-2ix}-2+2-e^{2y}-e^{-2y}]$$
$$=\sin^2 x+\mathrm{sh}^2 y.$$

(6) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\cos z$.

证 因

$$\sin(z_1-z_2)=\sin z_1\cos z_2-\cos z_1\sin z_2,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos z-\cos\frac{\pi}{2}\sin z=\cos z.$$

16. 证明：

(1) $\mathrm{ch}^2 z-\mathrm{sh}^2 z=1$;

证 因

$$\mathrm{sh}^2 z = \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2z} + e^{-2z} - 2}{4},$$

$$\mathrm{ch}^2 z = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2z} + e^{-2z} + 2}{4},$$

故

$$\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = \frac{e^{2z} + e^{-2z} + 2}{4} - \frac{e^{2z} + e^{-2z} - 2}{4} = 1.$$

(2) $\mathrm{ch}\, 2z = \mathrm{sh}^2 z + \mathrm{ch}^2 z$;

证 $\mathrm{sh}^2 z + \mathrm{ch}^2 z = \dfrac{e^{2z} + e^{-2z} - 2}{4} + \dfrac{e^{2z} + e^{-2z} + 2}{4}$

$$= \frac{e^{2z} + e^{-2z}}{2} = \mathrm{ch}\, 2z.$$

(3) $\mathrm{th}(z + \pi i) = \mathrm{th}\, z$;

证 $\mathrm{th}(z + \pi i) = \dfrac{e^{z+\pi i} - e^{-z-\pi i}}{e^{z+\pi i} + e^{-z-\pi i}}$

$$= \frac{e^{z+2\pi i} - e^{-z}}{e^{z+2\pi i} + e^{-z}} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \mathrm{th}\, z.$$

(4) $\mathrm{sh}(z_1 + z_2) = \mathrm{sh}\, z_1 \mathrm{ch}\, z_2 + \mathrm{ch}\, z_1 \mathrm{sh}\, z_2$.

证 $\mathrm{sh}\, z_1 \mathrm{ch}\, z_2 = \dfrac{e^{z_1} - e^{-z_1}}{2} \cdot \dfrac{e^{z_2} + e^{-z_2}}{2}$

$$= \frac{e^{z_1+z_2} - e^{-z_1+z_2} - e^{-z_1-z_2} + e^{z_1-z_2}}{4},$$

$$\mathrm{ch}\, z_1 \mathrm{sh}\, z_2 = \frac{e^{z_1} + e^{-z_1}}{2} \cdot \frac{e^{z_2} - e^{-z_2}}{2}$$

$$= \frac{e^{z_1+z_2} - e^{-z_2+z_1} - e^{-z_1-z_2} + e^{z_2-z_1}}{4}.$$

$$\mathrm{sh}\, z_1 \mathrm{ch}\, z_2 + \mathrm{ch}\, z_1 \mathrm{sh}\, z_2 = \frac{e^{z_1+z_2} - e^{-z_1-z_2}}{2} = \mathrm{ch}(z_1 + z_2)$$

17. 证明:ch z 的反函数 $\mathrm{Arcch}\, z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$.

证 设 $z = \mathrm{ch}\, w$,且 $w = \mathrm{Arcch} z$, 由

$$z = \mathrm{ch}\, w = \frac{1}{2}(e^w + e^{-w}) \quad 知 \quad 2z = e^w + e^{-w},$$

即 $e^{2w}-2ze^{w}+1=0$.解方程得 $e^{w}=z\pm\sqrt{z^2-1}$,故

$$w=\ln(z+\sqrt{z^2-1}).$$

注:$\sqrt{z^2-1}$ 含有"±"两根.

18. 由于 $\ln z$ 为多值函数,指出下列错误.

(1) $\mathrm{Ln}\, z^2=2\mathrm{Ln}\, z$.

解 因

$$\mathrm{Ln}\, z^2=\ln|z|^2+\mathrm{i}(2\theta+2k\pi),\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

而

$$\begin{aligned}2\mathrm{Ln}\, z&=2[\ln|z|+\mathrm{i}(\theta+2k\pi)]\\&=\ln|z|^2+\mathrm{i}(2\theta+4k\pi),\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots\end{aligned}$$

两者的实部相同,而虚部的可取值不完全相同.

(2) $\mathrm{Ln}\,1=\mathrm{Ln}\dfrac{z}{z}=\mathrm{Ln}\, z-\mathrm{Ln}\, z=0$.

解
$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}\,1&=\ln 1+\mathrm{i}(0+2k\pi)\\&=2k\pi\mathrm{i},\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots,\end{aligned}$$

即 $\mathrm{Ln}\,1=0$ 仅当 $k=0$ 时成立.

注:$\mathrm{Ln}(z_1\cdot z_2)=\mathrm{Ln}\, z_1+\mathrm{Ln}\, z_2$ 及 $\mathrm{Ln}\dfrac{z_1}{z_2}=\mathrm{Ln}\, z_1-\mathrm{Ln}\, z_2$ 两个等式的理解应是:对于它们左边的多值函数的任一值,一定有右边两多值函数的各一值与它对应,使得有关等式成立;反过来也一样.

19. 试问:在复数域中 $(a^b)^c$ 与 a^{bc} 一定相等吗?

解 不一定,如:

$$a=1+\mathrm{i},b=2,c=\frac{1}{2},\quad a^{bc}=1+\mathrm{i},(a^b)^c=\sqrt{2}\mathrm{i}.$$

20. 下列命题是否成立?

(1) $\overline{e^z}=e^{\bar z}$.

解 成立,因

$$\begin{aligned}\overline{e^z}&=\overline{e^{x+\mathrm{i}y}}=\overline{e^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)}=e^x(\cos y-\mathrm{i}\sin y)\\&=e^{x-\mathrm{i}y}=e^{\bar z}.\end{aligned}$$

(2) $\overline{p(z)}=p(\bar z)$ ($p(z)$ 为多项式).

解　不一定,如

$$p(z)=(a+\mathrm{i}b)z,\quad \overline{p(z)}=(a-\mathrm{i}b)\bar{z}$$

而

$$p(\bar{z})=(a+\mathrm{i}b)\bar{z}.$$

(3) $\overline{\sin z}=\sin\bar{z}$.

解　成立,因

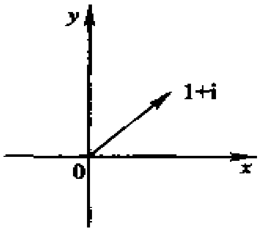
$$\overline{\sin z}=\overline{\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\right]}=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{z}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{z}}}{-2\mathrm{i}}=\sin\bar{z}.$$

(4) $\overline{\mathrm{Ln}\, z}=\mathrm{Ln}\,\bar{z}$.

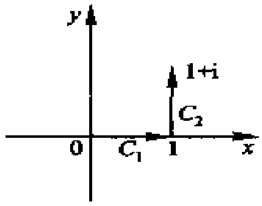
解　成立.因

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Ln}\, z}&=\overline{[\ln|z|+\mathrm{i}(\theta+2k\pi)]}\\&=\ln|z|-\mathrm{i}(\theta+2k\pi),\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.\\\mathrm{Ln}\,\bar{z}&=\ln|z|+\mathrm{i}(-\theta+2k\pi)\\&=\ln|z|-\mathrm{i}(\theta+2k\pi),\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.\end{aligned}$$

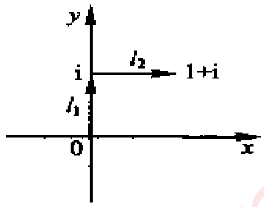
1. 计算积分$\int_0^{1+i}[(x-y)+ix^2]dz$，积分路径(1) 自原点至 $1+i$ 的直线段;(2) 自原点沿实轴至 1，再由 1 铅直向上至 $1+i$;(3) 自原点沿虚轴至 i，再由 i 沿水平方向向右至 $1+i$.



(1)



(2)



(3)

第 1 题

解 (1) $\int_0^{1+i}[(x-y)+ix^2]dz$

$$= \int_0^1 it^2(1+i)dt = i(1+i)\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}+\frac{i}{3}$$

注:直线段的参数方程为 $z=(1+i)t, 0\leqslant t\leqslant 1$.

(2) $C_1: y=0, dy=0, dz=dx$,

$C_2: x=1, dx=0, dz=idy$.

$$\int_0^{1+i}[(x-y)+ix^2]dz = \int_{C_1}+\int_{C_2}$$

$$= \int_0^1(x+ix^2)dx+\int_0^1(1-y+i)idy = -\frac{1}{2}+\frac{5}{6}i.$$

(3) l_1: $x=0$, $dz=idy$; l_2: $y=1$, $dz=dx$.

$$\int_0^{1+i}[(x-y)+ix^2]dz = \int_{l_1}+\int_{l_2}$$

$$= \int_0^1(-y)idy+\int_0^1(x-1+ix^2)dx$$

$$= -\frac{1}{2}-\frac{i}{6}.$$

2. 计算积分$\oint_C \frac{\bar{z}}{|z|}dz$ 的值，其中 C 为(1) $|z|=2$;(2) $|z|=4$.

解 令 $z=re^{i\theta}$，则

$$\oint_{|z|=r}\frac{\bar{z}}{|z|}dz = \int_0^{2\pi}\frac{re^{-i\theta}}{r}rie^{i\theta}d\theta = 2\pi ri.$$

当 $r=2$ 时，为 $4\pi i$;当 $r=4$ 时，为 $8\pi i$.

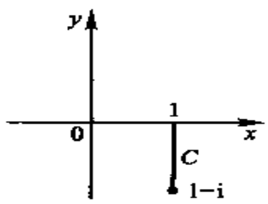
3. 求证:$\left|\int_C\frac{dz}{z^2}\right|\leqslant\frac{\pi}{4}$，其中 C 是从 $1-i$ 到 1 的直线段.

证 $C: z=1+iy=1+i\tan\theta$,

$$-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant 0.$$

$$|z|^2=1+y^2=1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta},$$

$$|dz|=\left|i\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\right|,$$



第 3 题

故

$$\left|\int_C \frac{1}{z^2}\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_C \frac{|\mathrm{d}z|}{|z|^2} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}.$$

4. 试用观察法确定下列积分的值,并说明理由,C 为 $|z|=1$.

(1) $\oint_C \frac{1}{z^2+4z+4}\mathrm{d}z$.

解 积分值为 0,因被积函数在 $|z|\leqslant 1$ 内解析.

(2) $\oint_C \frac{1}{\cos z}\mathrm{d}z$.

解 积分值为 0,理由同上.

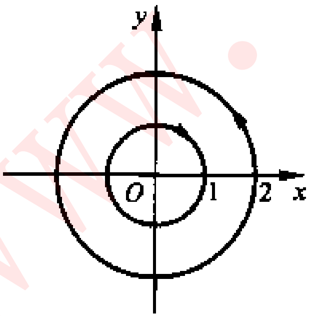
(3) $\oint_C \frac{1}{z-\frac{1}{2}}\mathrm{d}z$.

解 $\oint_C \frac{1}{z-\frac{1}{2}}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}$.

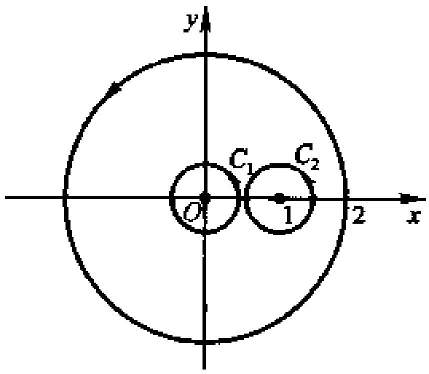
5. 求积分 $\int_C \frac{\mathrm{e}^z}{z}\mathrm{d}z$ 的值,其中 C 为由正向圆周 $|z|=2$ 与负向圆周 $|z|=1$ 所组成.

解 $\int_C \frac{\mathrm{e}^z}{z}\mathrm{d}z = \oint_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^z}{z}\mathrm{d}z - \oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{e}^z}{z}\mathrm{d}z$

$= 2\pi\mathrm{i} - 2\pi\mathrm{i} = 0.$



第 5 题



第 6 题

6. 计算$\oint_C \frac{1}{z^2-z}dz$,其中 C 为圆周$|z|=2$.

解 $f(z)=\frac{1}{z^2-z}=\frac{1}{z(z-1)}$在$|z|=2$内有两个奇点 $z=0$, 1,分别作以 0,1 为中心的圆周 C_1,C_2,C_1 与 C_2 不相交,则

$$\oint_C \frac{1}{z^2-z}dz=\oint_{C_2}\frac{1}{z-1}dz-\oint_{C_1}\frac{1}{z}dz$$

$$=2\pi i-2\pi i=0.$$

7. 计算$\oint_{|z|=3}\frac{1}{(z-i)(z+2)}dz$.

解 解法同上题,

$$\oint_{|z|=3}\frac{1}{(z-i)(z+2)}dz=0.$$

8. 计算下列积分值.

(1)$\int_0^{\pi i}\sin z dz$.

解 $\int_0^{\pi i}\sin z dz=-\cos z\Big|_0^{\pi i}=1-\cos \pi i$.

(2)$\int_1^{1+i}z\,e^z dz$.

解 $\int_1^{1+i}z\,e^z dz=(ze^z-e^z)\Big|_1^{1+i}=i\,e^{1+i}$.

(3)$\int_0^{i}(3e^z+2z)dz$.

解 $\int_0^{i}(3e^z+2z)dz=(3e^z+z^2)\Big|_0^{i}$

$$=3e^i-1-3=3e^i-4.$$

9. 计算$\int_C \frac{1}{z^2}dz$,其中 C 为圆周$|z+i|=2$ 的右半周,走向为从 $-3i$ 到 i.

解 函数$\frac{1}{z^2}$在全平面除去 $z=0$ 的区域内为解析,考虑一个单连通域,例如 D:Re $z>-\frac{1}{4}$,$|z|>\frac{1}{2}$,则$\frac{1}{z^2}$在 D 内解析,于是取$\frac{1}{z^2}$的

一个原函数 $-\frac{1}{z}$,则

$$\int_C \frac{1}{z^2}dz = -\frac{1}{z}\Big|_{-3i}^{i} = -\frac{1}{i} - \frac{1}{3i} = -\frac{4}{3i} = \frac{4}{3}i.$$

10. 计算下列积分.

(1) $\oint_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z-2}dz$.

解 $\oint_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z-2}dz = 2\pi i e^z\Big|_{z=2} = 2\pi i e^2$.

(2) $\oint_{|z|=2} \frac{2z^2-z+1}{z-1}dz$.

解 原式 $= 2\pi i(2z^2-z+1)\Big|_{z=1} = 4\pi i$.

(3) $\oint_{|z-i|=1} \frac{dz}{z^2-i}$.

解 将被积函数分解因式得到

$$\frac{1}{z^2-i} = \frac{1}{z-e^{\frac{\pi}{4}i}} \frac{1}{z+e^{\frac{\pi}{4}i}},$$

由于点 $e^{\frac{\pi}{4}i}$ 在圆周 $|z-i|=1$ 内部,而函数 $\frac{1}{z+e^{\frac{\pi}{4}i}}$ 在闭圆盘 $|z-i|\leqslant 1$ 上为解析,故

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{dz}{z^2-i} = \oint_{|z-i|=1} \frac{1}{z-e^{\frac{\pi}{4}i}}\left(\frac{1}{z+e^{\frac{\pi}{4}i}}\right)dz$$

$$= 2\pi i \frac{1}{z+e^{\frac{\pi}{4}i}}\Big|_{z=e^{\frac{\pi}{4}i}} = \frac{2\pi i}{2e^{\frac{\pi}{4}i}}$$

$$= \pi e^{\frac{\pi}{4}i} = \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

11. 计算 $I = \oint_C \frac{z\,dz}{(2z+1)(z-2)}$,其中 C 是

(1) $|z|=1$; (2) $|z-2|=1$;

(3) $|z-1|=\frac{1}{2}$; (4) $|z|=3$.

解 (1) 被积函数在 $|z|\leqslant 1$ 内仅有一个奇点 $z=-\frac{1}{2}$,故

$$I=\oint_C \frac{\frac{z}{z-2}}{2\left(z+\frac{1}{2}\right)}dz=2\pi i\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-2}\right)\Big|_{z=-\frac{1}{2}}=\frac{\pi i}{5}.$$

(2) 被积函数在 $|z-2|\leqslant 1$ 内仅有奇点 $z=2$,故

$$I=\oint_C \frac{\frac{z}{2z+1}}{z-2}dz=2\pi i\left(\frac{z}{2z+1}\right)\Big|_{z=2}=\frac{4\pi i}{5}.$$

(3) 被积函数在 $|z-1|\leqslant\frac{1}{2}$ 内处处解析,故 $I=0$,

(4) 被积函数在 $|z|\leqslant 3$ 内有两个奇点 $z=-\frac{1}{2}$, $z=2$,由复合闭路原理,知

$$I=\oint_{C_1}+\oint_{C_2}=\oint_{C_1}\frac{\frac{z}{z-2}}{2\left(z+\frac{1}{2}\right)}dz+\oint_{C_2}\frac{\frac{z}{2z+1}}{z-2}dz$$

$$=\frac{\pi i}{5}+\frac{4\pi i}{5}=\pi i,$$

其中 C_1 为 $|z|=1$, C_2 为 $|z-2|=1$.

12. 若 $f(z)$ 是区域 G 内的非常数解析函数,且 $f(z)$ 在 G 内无零点,则 $f(z)$ 不能在 G 内取到它的最小模.

证 设 $g(z)=\frac{1}{f(z)}$,因 $f(z)$ 为非常数解析函数,且 $\forall z\in G$, $f(z)\neq 0$,则 $g(z)$ 为非常数解析函数,所以 $g(z)$ 在 G 内不能取得最大模,即 $f(z)$ 不能在 G 内取得最小模.

13. 计算下列积分.

(1) $\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z^{100}}dz$.

解 原式 $=2\pi i\frac{1}{99!}e^z\Big|_{z=0}=\frac{2\pi i}{99!}$.

(2) $\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{(z-\pi/2)^2}dz$.

解 原式 $= 2\pi i(\sin z)'\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = 2\pi i \cdot \cos z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = 0.$

(3) $\oint_{C=C_1+C_2^-} \frac{\cos z}{z^3}dz$，其中 $C_1:|z|=2, C_2:|z|=3.$

解 $\oint_{C=C_1+C_2^-} \frac{\cos z}{z^3}dz$

$$= \oint_{C_1} \frac{\cos z}{z^3}dz + \oint_{C_2} \frac{\cos z}{z^3}dz$$

$$= 2\pi i \frac{1}{2!}(\cos z)''\Big|_{z=0} - 2\pi i \frac{1}{2!}(\cos z)''\Big|_{z=0}$$

$$= \pi i(-1) - \pi i(-1) = 0.$$

14. 设 $f(z)$ 在 $|z| \leqslant 1$ 上解析，且在 $|z|=1$ 上有 $|f(z)-z| \leqslant |z|$，试证：$\left|f'\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant 8.$

证 由柯西积分公式知

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}dz,$$

则

$$\left|f'\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=1} \frac{|f(z)-z+z|}{\left|z-\frac{1}{2}\right|^2}|dz|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=1} \frac{|f(z)-z|+|z|}{\left|z-\frac{1}{2}\right|^2}|dz|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=1} \frac{|z|+|z|}{\left|z-\frac{1}{2}\right|^2}|dz|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=1} \frac{2|z|}{\left|z-\frac{1}{2}\right|^2}ds$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\oint_{|z|=1} \frac{1}{\frac{1}{4}}ds = \frac{1}{\pi} \cdot 4 \cdot 2\pi = 8.$$

注：$\left|z-\frac{1}{2}\right|^2=x^2+y^2-x+\frac{1}{4}=1-x+\frac{1}{4}\geqslant\frac{1}{4}$，$(x,y)$ 在 $|z|=1$ 上.

15. 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在区域 D 内处处解析，C 为 D 内的任何一条简单闭曲线，它的内部全含于 D，如果 $f(z)=g(z)$ 在 C 上所有的点处成立，试证在 C 内所有的点处 $f(z)=g(z)$ 也成立.

证　设 $F(z)=f(z)-g(z)$，因 $f(z)$，$g(z)$ 均在 D 内解析，所以 $F(z)$ 在 D 内解析，在 C 上，$F(z)=0(z\in C)$，$\forall z_0$ 在 C 内有

$$F(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{F(z)}{z-z_0}dz=0$$

即 $f(z_0)=g(z_0)$，由 z_0 的任意性可知，在 C 内 $f(z)=g(z)$.

1. 下列序列是否有极限?如果有极限,求出其极限.

(1)$z_n = i^n + \frac{1}{n}$;　(2)$z_n = \frac{n!}{n^n} i^n$;　(3)$z_n = \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^n$.

解　(1) 当 $n \to \infty$ 时,i^n 不存在极限,故 z_n 的极限不存在.

(2)$|z_n| = \frac{n!}{n^n} \to 0\ (n \to \infty)$,故 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

(3)$z_n = \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^n = \frac{z^{2n}}{|z|^{2n}} \xlongequal{令 z = re^{i\theta}} \frac{r^{2n} \cdot e^{i2n\theta}}{r^{2n}}$

$= \cos 2n\theta + i \sin 2n\theta$,

$n \to \infty$ 时,$\cos 2n\theta$,$\sin 2n\theta$ 的极限都不存在,故 $z_n = \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^n$ 无极限.

2. 下列级数是否收敛?是否绝对收敛?

(1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{i}{n}\right)$;　(2)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}$;　(3)$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+i)^n$.

解　(1) 因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{i}{n}\right)$发散.

(2)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{i^n}{n!}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛;故(2) 绝对收敛.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+i)^n = \lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2})^n e^{\frac{n\pi}{4}i} \not\to 0$,故发散.

3. 试证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2z)^n$ 当 $|z| < \frac{1}{2}$ 时绝对收敛.

证　当 $|z| < \frac{1}{2}$ 时,令 $|z| = r < \frac{1}{2}$,

$$|(2z)^n| = 2^n \cdot |z|^n < 1,$$

且

$$|(2z)^n| = (2r)^n < 1.$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2r)^n$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2z)^n$ 绝对收敛.

4. 试确定下列幂级数的收敛半径.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$； (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^n$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$，故 $R = 1$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$，

故 $R = \frac{1}{e}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$，

故 $R = \infty$.

5. 将下列各函数展开为 z 的幂级数，并指出其收敛区域.

(1) $\frac{1}{1+z^3}$； (2) $\frac{1}{(z-a)(z-b)}$ $(a \neq 0, b \neq 0)$；

(3) $\frac{1}{(1+z^2)^2}$； (4) $\operatorname{ch} z$； (5) $\sin^2 z$； (6) $e^{\frac{z}{z-1}}$.

解 (1) $\frac{1}{1+z^3} = \frac{1}{1-(-z^3)}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-z^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{3n},$$

原点到所有奇点的距离最小值为 1，故 $|z| < 1$.

(2) $\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right)$ $(a \neq b)$

$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a-z} - \frac{1}{b-z}\right)$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{a\left(1-\frac{z}{a}\right)} - \frac{1}{b\left(1-\frac{z}{b}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{b-a}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{a^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^{n+1}}\right), \quad \left|\frac{z}{a}\right| < 1, 且 \left|\frac{z}{b}\right| < 1,$$

即

$$|z| < \min\{|a|, |b|\}.$$

若 $a = b$,则

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{(z-a)^2} = -\left(\frac{1}{z-a}\right)' = \left(\frac{1}{a-z}\right)'$$

$$= \left(\frac{1}{a(1-z/a)}\right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{a^{n+1}}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z^n}{a^{n+1}}\right)'$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{a^{n+1}}, \quad |z| < |a|.$$

(3) $$\frac{1}{(1+z^2)^2} = -\frac{1}{2z}\cdot\left(\frac{1}{1+z^2}\right)' = -\frac{1}{2z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n\right)'$$

$$= -\frac{1}{2z}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2nz^{2n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nz^{2n-2}, \quad |z| < 1.$$

(4) $$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n!}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad |z| < \infty.$$

(5) $$\sin^2 z = \frac{1-\cos 2z}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2z)^n\cdot(-1)^n}{(2n)!}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n\cdot z^n}{(2n)!}, \quad |z| < \infty.$$

(6) 令 $f(z) = e^{\frac{z}{z-1}}, f(0) = 1,$

$$f'(z) = e^{\frac{z}{z-1}}\cdot\left(\frac{z}{z-1}\right)' = e^{\frac{z}{z-1}}\left(-\frac{1}{(z-1)^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{(z-1)^2}f(z), \quad f'(0) = -1$$

$$f''(z)=\frac{2}{(z-1)^3}f(z)-\frac{f'(z)}{(z-1)^2},\quad f''(0)=-1$$

$$f'''(z)=\frac{-6}{(z-1)^4}f(z)+\frac{4f'(z)}{(z-1)^3}-\frac{f''(z)}{(z-1)^2},\quad f'''(0)=1$$

$$\vdots$$

$$f(z)=1-z-\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}-\cdots.$$

因为 1 为 $f(z)$ 的唯一奇点，原点到 1 的距离为 1，故收敛半径 $R<1$.

6. 证明对任意的 z，有 $|e^z-1|\leqslant e^{|z|}-1\leqslant |z|e^{|z|}$.

证 因为 $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$，$|z|<+\infty$ 所以

$$|e^z-1|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}-1\right|$$

$$=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}=e^{|z|}-1.$$

又因为：

$$e^{|z|}-1=|z|+\frac{1}{2!}|z|^2+\cdots+\frac{1}{n!}|z|^n+\cdots$$

$$=|z|\left(1+\frac{1}{2!}|z|+\cdots+\frac{1}{n!}|z|^{n-1}+\cdots\right)$$

$$\leqslant|z|(1+|z|+\frac{1}{2!}|z|^2+\cdots)=|z|e^{|z|}.$$

所以

$$|e^z-1|\leqslant e^{|z|}-1\leqslant|z|e^{|z|}.$$

7. 求下列函数在指定点 z_0 处的泰勒展式.

(1) $\frac{1}{z^2}$, $z_0=1$;　　(2) $\sin z$, $z_0=1$;

(3) $\frac{1}{4-3z}$, $z_0=1+i$;　　(4) $\tan z$, $z_0=\frac{\pi}{4}$.

解 (1) $\frac{1}{z^2}=-\left(\frac{1}{z}\right)'$

$$= -\left(\frac{1}{1+z-1}\right)' = -\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n\right]'$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot n(z-1)^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z-1)^n, \quad |z-1|<1.$$

(2) $\sin z = \sin(z-1+1)$

$$= \sin(z-1)\cos 1 + \sin 1\cos(z-1)$$

$$= \cos 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{2n+1}(-1)^n}{(2n+1)!}$$

$$+ \sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{2n}(-1)^n}{(2n)!}, \quad |z-1|<\infty.$$

(3) $\dfrac{1}{4-3z} = \dfrac{1}{4-3(z-z_0)-3z_0} = \dfrac{1}{1-3\mathrm{i}-3(z-z_0)}$

$$= \frac{1}{1-3\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{3}{1-3\mathrm{i}}(z-z_0)}$$

$$= \frac{1}{1-3\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{3}{1-3\mathrm{i}}(z-z_0)\right]^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(1-3\mathrm{i})^{n+1}}(z-z_0)^n,$$

$$|z-(1+\mathrm{i})| < \left|\frac{1-3\mathrm{i}}{3}\right| = \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

(4) 令 $f(z)=\tan z, f(z_0)=1$,

$$f'(z) = (\tan z)' = \left(\frac{\sin z}{\cos z}\right)' = \frac{\cos^2 z+\sin^2 z}{\cos^2 z}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 z}, \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.$$

$$f''(z) = \left(\frac{1}{\cos^2 z}\right)' = \frac{-2}{\cos^3 z}(-\sin z) = \frac{2\tan z}{\cos^2 z}, \quad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.$$

$$f'''(z) = \left(\frac{zf(z)}{\cos^2 z}\right)' = \frac{2f'(z)\cdot\cos^2 z - 2f(z)2\cos z(-\sin z)}{\cos^4 z}$$

$$=\frac{2f'(z)\cos z+4f(z)\sin z}{\cos^3 z},\quad f'''\left(\frac{\pi}{4}\right)=16.$$

$$\vdots$$

故

$$\tan z=1+2(z-\frac{\pi}{4})+2(z-\frac{\pi}{4})^2+\frac{8}{3}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3+\cdots,$$

$$\left|z-\frac{\pi}{4}\right|<\frac{\pi}{4}.$$

8. 将下列各函数在指定圆环内展开为洛朗级数.

(1) $\dfrac{z+1}{z^2(z-1)}$, $0<|z|<1$, $1<|z|<\infty$;

(2) $z^2e^{1/z}$, $0<|z|<\infty$;

(3) $\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $1<|z|<2$;

(4) $\cos\dfrac{i}{1-z}$, $0<|z-1|<\infty$.

解 (1) $0<|z|<1$ 时,

$$\frac{z+1}{z^2(z-1)}=\frac{1}{z^2}\left(1-\frac{2}{1-z}\right)=\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}z^n,$$

当 $1<|z|<\infty$ 时, $0<\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$,

$$\frac{z+1}{z^2(z-1)}=\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{2}{z-1}\right)=\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{2}{z}\cdot\frac{1}{1-1/z}\right)$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=\frac{1}{z^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{z^{n+3}}.$$

(2) $z^2e^{\frac{1}{z}}=z^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n/n!=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2-n}}{n!}.$

(3) $$\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}=\frac{1}{z-2}-\frac{2}{z^2+1}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{2}{z^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n-\frac{2}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z^2}\right)^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{z^{2n+2}},\quad 1<|z|<2.$$

(4) $0<|z-1|<\infty$ 时,

$$\cos\frac{i}{1-z}=\frac{e^{\frac{-1}{1-z}}+e^{\frac{1}{1-z}}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{1-z}\right)^n}{n!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{1-z}\right)^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-z)^{-2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!(1-z)^{2n}}.$$

9. 将 $f(z)=\dfrac{1}{z^3-3z+2}$ 在 $z=1$ 处展开洛朗级数.

解 $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-1)}=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{z-1}$.

$f(z)$ 的奇点为 $z_1=1,z_2=2$. $f(z)$ 在 $0<|z-1|<1$ 与 $|z-1|>1$ 解析.

当 $0<|z-1|<1$ 时,

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{1-(z-1)}$$

$$=-\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^{n-1},$$

当 $|z-1|>1$ 时, $0<\left|\dfrac{1}{z-1}\right|<1$,

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}}$$

$$=-\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1}\right)^{n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+2}}.$$

10. 将 $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$ 在 $z=\mathrm{i}$ 的去心邻域内展开成洛朗级数.

解 $f(z)$ 的孤立奇点为 $\pm\mathrm{i}$. $f(z)$ 在最大的去心邻域 $0<|z-\mathrm{i}|<2$ 内解析.

当 $0<|z-\mathrm{i}|<2$ 时,

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z-\mathrm{i})^2}\cdot\frac{1}{(z+\mathrm{i})^2} \\
&= -\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2}\cdot\left(\frac{1}{z+\mathrm{i}}\right)' \\
&= -\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2}\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}}\right)' \\
&= -\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2}\cdot\frac{1}{2\mathrm{i}}\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\right)^n\cdot(-1)^n\right]' \\
&= -\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2}\cdot\frac{1}{2\mathrm{i}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot n\cdot\frac{(z-\mathrm{i})^{n-1}}{(2\mathrm{i})^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\,\frac{(z-\mathrm{i})^{n-3}}{(2\mathrm{i})^{n+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(n+1)\cdot\frac{(z-\mathrm{i})^{n-2}}{(2\mathrm{i})^{n+2}}.
\end{aligned}
$$

上式即为 $f(z)$ 在 $z=\mathrm{i}$ 的去心邻域内的洛朗级数.

1. 问 $z=0$ 是否为下列函数的孤立奇点?

(1)$e^{1/z}$; (2)$\cot\dfrac{1}{z}$; (3)$\dfrac{1}{\sin z}$.

解 (1)$e^{1/z}$ 在 $0<|z|<\infty$ 解析,在 $z=0$ 处不解析,$z=0$ 是

$e^{1/z}$ 的孤立奇点

(2) 因 $\cot\frac{1}{z}=\frac{\cos(1/z)}{\sin(1/z)}$,在 $\frac{1}{z}=k\pi$ 处,即 $z_k=\frac{1}{k\pi}(k=\pm1,\pm2,\cdots)$,$z=0$ 处 $\cot\frac{1}{z}$ 不解析,且 $\lim\limits_{k\to\infty}z_k=0$,故 0 不为 $\cos\frac{1}{z}$ 的孤立奇点.

(3) 因 $\frac{1}{\sin z}$ 除 $z=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 外处处解析,所以 0 为其孤立奇点

2. 找出下列各函数的所有零点,并指明其阶数.

(1) $\frac{z^2+9}{z^4}$;　　(2) $z\sin z$;　　(3) $z^2(e^{z^2}-1)$.

解 (1) $\frac{z^2+9}{z^4}=\frac{(z+3i)(z-3i)}{z^4}$,显然 $z=\pm3i$ 为其一阶零点.

(2) 因

$$z\sin z=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$=z\left(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)=z^2\left(1-\frac{z^2}{3!}+\cdots\right),$$

所以 $z=0$ 为 $z\sin z$ 的二阶零点. 又 $z=k\pi$ 时,$z\sin z=0$,所以

$z=k\pi$ 为 $z\sin z$ 的零点,$k=\pm1,\pm2,\cdots$.

令 $f(z)=z\sin z$,$f'(z)=\sin z+z\cos z$,

$$f'(k\pi)=\sin z+z\cos z\Big|_{z=k\pi}$$

$$=(-1)^k\cdot k\pi\neq0\quad(k=\pm1,\pm2,\cdots),$$

故 $z=k\pi$ 为 $z\sin z$ 的一阶零点.

(3) 令

$$f(z)=z^2(e^{z^2}-1),$$

由 $f(z)=0$ 可解得

$$z=0\quad\text{或}\quad z^2=2k\pi i,$$

即 $z=\sqrt{2k\pi i}\ (k=\pm1,\pm2,\cdots)$. 因

$$f(z)=z^2(e^{z^2}-1)=z^2\left(z^2+\frac{z^4}{2!}+\cdots\right)$$

$$= z^4\left(1 + \frac{z^2}{2!} + \cdots\right),$$

所以 $z = 0$ 为 $f(z)$ 的四阶零点. 又

$$f'(z) = 2z(e^{z^2} - 1) + z^2 \cdot 2z \cdot e^{z^2},$$

$$f'(\sqrt{2k\pi}\mathrm{i}) = 2 \cdot (\sqrt{2k\pi}\mathrm{i})^3 \neq 0 \quad (k = \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

所以 $z = \sqrt{2k\pi}\mathrm{i}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 为 $f(z)$ 的一阶零点.

3. 下列各函数有哪些奇点?各属何类型(如是极点,指出它的阶数).

(1) $\dfrac{z-1}{z(z^2+4)^2}$; (2) $\dfrac{\sin z}{z^3}$; (3) $\dfrac{1}{\sin z + \cos z}$;

(4) $\dfrac{1}{z^2(e^z - 1)}$; (5) $\dfrac{\ln(1+z)}{z}$; (6) $\dfrac{1}{e^z - 1} - \dfrac{1}{z}$;

(7) $\dfrac{\tan(z-1)}{z-1}$.

解 (1) 令 $f(z) = \dfrac{z-1}{z(z^2+4)^2}$, $z = 0, \pm 2\mathrm{i}$ 为 $f(z)$ 的奇点, 因 $\lim\limits_{z\to 0} z f(z) = -\dfrac{1}{16}$, 所以 $z = 0$ 为简单极点. 又

$$\lim_{z\to 2\mathrm{i}}(z - 2\mathrm{i})^2 \frac{z-1}{z(z^2+4)^2} = \lim_{z\to 2\mathrm{i}} \frac{z-1}{z(z+2\mathrm{i})^2} = -\frac{\mathrm{i}+2}{32},$$

所以 $z = 2\mathrm{i}$ 为二阶极点, 同理, $z = -2\mathrm{i}$ 亦为二阶极点.

(2) 因 $\lim\limits_{z\to 0} z^2 \dfrac{\sin z}{z^3} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1$, 所以 $z = 0$ 为二阶极点.

(3) 令

$$f(z) = \frac{1}{\sin z + \cos z} = \frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(z + \frac{\pi}{4}\right)},$$

则 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的零点为 $z = k\pi - \dfrac{\pi}{4}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. 因

$$\left(\frac{1}{f(z)}\right)'\bigg|_{z = k\pi - \frac{\pi}{4}} = \left(\sqrt{2}\sin\left(z + \frac{\pi}{4}\right)\right)'\bigg|_{z = k\pi - \frac{\pi}{4}}$$

$$= \sqrt{2}\cos\left(z + \frac{\pi}{4}\right)\bigg|_{z = k\pi - \frac{\pi}{4}}$$

$$=\sqrt{2}\cdot(-1)^k\neq 0,$$

所以 $z=k\pi-\frac{\pi}{4}$ $(k=0,\pm 1,\cdots)$ 都为简单极点.

(4) 令

$$f(z)=\frac{1}{z^2(\mathrm{e}^z-1)},\quad \frac{1}{f(z)}=z^2(\mathrm{e}^z-1),$$

则 $\frac{1}{f(z)}$ 的零点为

$$z=2k\pi\mathrm{i},k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots.$$

因

$$\frac{1}{f(z)}=z^2\left(z+\frac{z^2}{2!}+\cdots\right)=z^3\left(1+\frac{z}{2!}+\cdots\right),$$

$z=0$ 为 $\frac{1}{f(z)}$ 的三阶零点,故为 $f(z)$ 的三阶极点.又

$$\left(\frac{1}{f(z)}\right)'\bigg|_{z=2k\pi\mathrm{i}}=(2z(\mathrm{e}^z-1)+z^2\mathrm{e}^z)\big|_{z=2k\pi\mathrm{i}}\neq 0,$$

故 $z=2k\pi\mathrm{i}$ 为 $\frac{1}{f(z)}$ 的一阶零点,即为 $f(z)$ 的简单极点.

(5) 令 $f(z)=\frac{\ln(1+z)}{z}$,$z=0$ 为其孤立奇点.因

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{1+z}=1,$$

所以 $z=0$ 为可去奇点.

(6) 令

$$f(z)=\frac{1}{\mathrm{e}^z-1}-\frac{1}{z}=\frac{z-\mathrm{e}^z+1}{z(\mathrm{e}^z-1)},$$

$z=0$ 和 $2k\pi\mathrm{i}(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 为其孤立奇点.因

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^z}{\mathrm{e}^z-1+z\mathrm{e}^z}=\lim_{z\to 0}\frac{-\mathrm{e}^z}{2\mathrm{e}^z+z\mathrm{e}^z}=-\frac{1}{2},$$

所以 $z=0$ 为其可去奇点.又

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{z(\mathrm{e}^z-1)}{z-\mathrm{e}^z+1}=\frac{z}{z-\mathrm{e}^z+1}\cdot(\mathrm{e}^z-1),$$

所以 $z=2k\pi\mathrm{i}(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 为 $\frac{1}{f(z)}$ 的一阶零点,即为 $f(z)$ 的简

单极点.

(7) 令

$$f(z)=\frac{\tan(z-1)}{z-1}=\frac{\sin(z-1)}{(z-1)\cos(z-1)},$$

$f(z)$ 的孤立奇点为 $z=1$ 和 $z_k=k\pi+\frac{\pi}{2}+1(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

因

$$\lim_{z\to1}f(z)=\lim_{z\to1}\frac{\sin(z-1)}{z-1}\cdot\frac{1}{\cos(z-1)}=1,$$

故 $z=1$ 为其可去奇点.

又 $z_k=k\pi+\frac{\pi}{2}+1$, z_k 为 $\cos(z-1)$ 的一阶零点,故为 $f(z)$ 的简单极点.

另解:

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{(z-1)\cos(z-1)}{\sin(z-1)},$$

因

$$\left(\frac{1}{f(z)}\right)'=\frac{\cos(z-1)\sin(z-1)-\sin^2(z-1)(z-1)-\cos^2(z-1)(z-1)}{\sin^2(z-1)}$$
$$=\frac{-(z-1)+\sin(z-1)\cos(z-1)}{\sin^2(z-1)},$$

而 $\left(\frac{1}{f(z)}\right)'\Big|_{z=k\pi+\frac{\pi}{2}+1}\neq0$,故 $z_k=k\pi+\frac{\pi}{2}+1$ 为 $f(z)$ 的简单极点.

4. 证明:设函数 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta(0<\delta<+\infty)$ 内解析,那么 z_0 是 $f(z)$ 的极点的充分必要条件是 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$.

证明 先证条件是必要的.如果 z_0 是 $f(z)$ 的极点,则 $f(z)$ 在 z_0 的洛朗展开式必有有限个负整次幂项,即

$$f(z)=\frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{C_{-1}}{z-z_0}+C_0+C_1(z-z_0)+\cdots$$
$$=\frac{1}{(z-z_0)^m}[C_{-m}+C_{-m+1}(z-z_0)+$$
$$\cdots+C_0(z-z_0)^m+\cdots],\quad m\geqslant1,C_{-m}\neq0.$$

对上式取极限,右端的前一因式的极限为 ∞,后一因式的极限为非零常数 C_{-m}.所以

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(z-z_0)^m}[C_{-m} + C_{-m+1}(z-z_0) + \cdots] = \infty.$$

再证条件是充分的.如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$,令 $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$.于是

$$\lim_{z\to z_0} g(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0.$$

由定理 5.1,z_0 是 $g(z)$ 的可去奇点.根据可去奇点的定义及 $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = 0$,$g(z)$ 在 z_0 的洛朗展开式应为

$$\begin{aligned} g(z) &= b_m(z-z_0)^m + \cdots + b_{m+n}(z-z_0)^{m+n} + \cdots \\ &= (z-z_0)^m[b_m + b_{m+1}(z-z_0) + \\ &\quad \cdots + b_{m+n}(z-z_0)^n + \cdots] \\ &= (z-z_0)^m \varphi(z), \end{aligned}$$

其中 $m \geqslant 1$,$b_m \neq 0$,$\varphi(z)$ 是上式方括号内的幂级数的和函数.显然 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析且 $\varphi(z_0) = b_m \neq 0$.由于解析函数的商在分母不为零的点处仍为解析函数,因而 $\dfrac{1}{\varphi(z)}$ 在 z_0 处解析且不为零,则 $\dfrac{1}{\varphi(z)}$ 在 z_0 可展开成幂级数:

$$C_0 + C_1(z-z_0) + \cdots,$$

其中 $C_0 \neq 0$.所以

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m} \frac{1}{\varphi(z)} \\ &= \frac{1}{(z-z_0)^m}[C_0 + C_1(z-z_0) + \cdots] \\ &= \frac{C_0}{(z-z_0)^m} + \frac{C_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots. \end{aligned}$$

由极点的定义知,z_0 是 $f(z)$ 的(m 阶)极点.

5.如果 $f(z)$ 与 $g(z)$ 是以 z_0 为零点的两个不恒为0的解析函数,则

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}\quad(\text{或两端均为 }\infty).$$

证 设 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶零点，为 $g(z)$ 的 n 阶零点，则

$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$，$\varphi(z)$ 在 z_0 解析，$\varphi(z_0)\neq 0$，$m\geqslant 1$，

$g(z)=(z-z_0)^n\psi(z)$，$\psi(z)$ 在 z_0 解析，$\psi(z_0)\neq 0$，$n\geqslant 1$.

因而

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{m-n}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},\tag{1}$$

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}&=\lim_{z\to z_0}\frac{m(z-z_0)^{m-1}\varphi(z)+(z-z_0)^m\varphi'(z_0)}{n(z-z_0)^{n-1}\psi(z)+(z-z_0)^n\psi'(z_0)}\\&=\lim_{z\to z_0}\frac{m}{n}\cdot(z-z_0)^{m-n}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}.\end{aligned}\tag{2}$$

当 $m=n$ 时，(1) 式 $=\dfrac{\varphi(z_0)}{\psi(z_0)}=$ (2) 式，

当 $m>n$ 时，(1) 式 $=$ (2) 式 $=0$，

当 $m<n$ 时，(1) 式 $=$ (2) 式 $=\infty$.

6. 问 ∞ 是否为下列各函数的孤立奇点.

(1) $\dfrac{\sin z}{1+z^2+z^3}$； (2) $\dfrac{1}{e^z-1}$.

解 (1) 因 $\dfrac{\sin z}{1+z^2+z^3}$ 在 $|z|>1$ 时解析，故 ∞ 是其孤立奇点. 且 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{\sin z}{1+z+z^3}=0$，故 ∞ 为可去孤立奇点.

(2) $\dfrac{1}{e^z-1}$ 的孤立奇点为 $z_k=2k\pi i$，$k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$，由于

$$\lim_{k\to\infty}2k\pi i=\infty,$$

故 ∞ 不是其孤立奇点.

7. 求出下列函数的在孤立奇点处的留数.

(1) $\dfrac{e^z-1}{z}$； (2) $\dfrac{z^7}{(z-2)(z^2+1)}$； (3) $\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$；

(4) $z^2\sin\dfrac{1}{z}$； (5) $\dfrac{1}{z\sin z}$； (6) $\dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$.

解 (1) 令 $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z}$,孤立奇点仅有 0.

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0} zf(z)=\lim_{z\to 0}(e^z-1)=0.$$

(2) $z=2$ 为简单极点,$z=\pm i$ 为二阶极点.

$$\operatorname{Res}[f(z),2]=\lim_{z\to 2}(z-2)\frac{z^7}{(z-2)(z^2+1)}$$

$$=\lim_{z\to 2}\frac{z^7}{z^2+1}=\frac{128}{5},$$

$$\operatorname{Res}[f(z),i]=\lim_{z\to i}\left(\frac{z^7}{(z-2)(z+i)^2}\right)'$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{7z^6(z-2)(z+i)-z^7(z+2+2z-4)}{(z-2)^2(z+i)^3}$$

$$=\frac{2+i}{10}.$$

同理可计算 $\operatorname{Res}[f(z),-i]=\dfrac{2-i}{10}$.

(3) $z=-1$ 为其三阶极点.

$$\operatorname{Res}[f(z),-1]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}(\sin 2z)''=\frac{1}{2!}(-4\sin 2z)\Big|_{z=-1}$$

$$=2\sin 2.$$

(4) $$z^2\sin\frac{1}{z}=z^2\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\cdots\right)$$

$$=z-\frac{1}{3!z}+\frac{1}{5!z^3}-\cdots,$$

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=-\frac{1}{6}.$$

(5) $\dfrac{1}{z\sin z}$ 的孤立奇点为 $z=0$, $z_k=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$,其中,

$z=0$ 为二阶极点,这是由于

$$\frac{1}{z\sin z}=\frac{1}{z\left(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)}=\frac{1}{z^2\left(1-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)}$$

$$=\frac{1}{z^2}\frac{1}{g(z)},$$ $\dfrac{1}{g(z)}$ 在 $z=0$ 处解析. 且 $\dfrac{1}{g(0)}\neq 0$.

所以

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to0}\left[z^2\frac{1}{z\sin z}\right]'$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{\sin z-z\cos z}{\sin^2 z}$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{\cos z+z\sin z-\cos z}{2\sin z\cos z}=0,$$

易知 $z_k=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为简单极点,所以

$$\mathrm{Res}[f(z),k\pi]=\lim_{z\to k\pi}[(z-k\pi)/z\sin z]$$

$$=\lim_{z\to k\pi}\frac{1}{\sin z+z\cos z}=(-1)^k\frac{1}{k\pi}\quad(k=\pm1,\pm2,\cdots).$$

(6) $\dfrac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z}=\dfrac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}$ 在整个复平面上解析,无孤立奇点.

8. 利用留数计算下列积分.

(1) $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z\sin z}$;　　(2) $\displaystyle\oint_{|z|=3/2}\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}dz$;

(3) $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}dz$;　　(4) $\displaystyle\oint_{|z|=1/2}\frac{\sin z}{z(1-e^z)}dz$;

(5) $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}$($n$ 为正整数, $|a|\neq1$, $|b|\neq1$, $|a|<|b|$).

解 (1) $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z\sin z}=2\pi i\mathrm{Res}[f(z),0]$

$$=2\pi i\lim_{z\to0}\left(\frac{z}{\sin z}\right)'=2\pi i\lim_{z\to0}\frac{\sin z-z\cos z}{\sin^2 z}$$

$$=2\pi i\lim_{z\to0}\frac{\sin z-z\cos z}{2z}$$

$$=2\pi i\lim_{z\to0}\frac{\cos z-\cos z+z\sin z}{2z}$$

$$=2\pi i\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{2}=0.$$

(2) $\displaystyle\oint_{|z|=3/2}\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}dz=2\pi i\mathrm{Res}[f(z),1]$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 1} \frac{e^z}{(z+3)^2} = \frac{1}{8}\pi i e.$$

(3) $\oint_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z-1)^2} dz = 2\pi i \cdot \lim_{z\to 1}\left((z-1)^2 \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}\right)'$

$= 4\pi i e^2.$

(4) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\sin z}{z(1-e^z)} dz = 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{(1-e^z)}$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{-e^z} = -2\pi i.$$

(5)1° $1<|a|<|b|$，令 $f(z)=\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}$，$f(z)$ 在 $|z|=1$ 内无奇点，故 $\oint_{|z|=1} f(z)dz = 0.$

2° $|a|<1<|b|$ 时，

$$\oint_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f(z),a)$$

$$=2\pi i \cdot \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z\to a}\left[\frac{1}{(z-b)^n}\right]^{(n-1)}$$

$$=2\pi i \cdot (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2} \cdot (a-b)^{-2n+1}.$$

3° $|a|<|b|<1$ 时，

$$\oint_{|z|} f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f(z),a) + 2\pi i \mathrm{Res}(f(z),b)$$

$$=2\pi i(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2}(a-b)^{-2n+1}$$

$$+2\pi i(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2}\cdot(b-a)^{2n+1} = 0.$$

9. 判定 $z=\infty$ 是下列各函数的什么奇点，并求出在 ∞ 的留数.

(1) $\sin z - \cos z$； (2) $\frac{1}{z(z+1)^2(z-1)}$； (3) $z+\frac{1}{z}$.

解 (1) $\lim_{z\to\infty}(\sin z - \cos z)$ 不存在，故 ∞ 为 $\sin z - \cos z$ 的本性奇点.

$$\sin z - \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},$$

故 $\text{Res}(\sin z - \cos z, \infty) = 0$.

(2) $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{1}{z(z+1)^2(z-1)} = 0$，故 ∞ 为其可去奇点.

$$\text{Res}(f(z), \infty) = -\text{Res}[f(\frac{1}{z}) \cdot \frac{1}{z^2}, 0]$$

$$= -\text{Res}\left(\frac{z^2}{1-z^2}, 0\right) = 0.$$

(3) 显然 ∞ 为 $z + \dfrac{1}{z}$ 的简单极点

$$\text{Res}(z + \frac{1}{z}, \infty) = -1.$$

10. 求下列积分

(1) $\oint_{|z|=2} \dfrac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}} dz$； (2) $\oint_{|z|=3} \dfrac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3} dz$.

解 (1) $\oint_{|z|=2} \dfrac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}} dz$

$= 2\pi i[\text{Res}(f(z), 0) + \text{Res}(f(z), -1)]$

$= -2\pi i \text{Res}(f(z), \infty)$

$= 2\pi i \text{Res}\left(f(\dfrac{1}{z}) \cdot \dfrac{1}{z^2}, 0\right)$

$= 2\pi i \text{Res}\left[e^z \cdot \dfrac{1}{z^3} \cdot \dfrac{1}{1+1/z} \cdot \dfrac{1}{z^2}, 0\right]$

$= 2\pi i \text{Res}\left[\dfrac{e^z}{z^4(z+1)}, 0\right]$

$= 2\pi i \cdot \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{e^z}{z+1}\right)''' = -\dfrac{2}{3}\pi i.$

(2) $\oint_{|z|=3} \dfrac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3} dz$

$= 2\pi i \sum\limits_{z_k} \text{Res}(f(z), z_k)$， z_k 为 $f(z)$ 所有奇点

$= -2\pi i \text{Res}[f(z), \infty]$

$$= 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{(1/z^2)^{15}}{(1/z^2+1)^2(1/z^4+2)^3 \cdot z^2}, 0\right)$$
$$= 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z(1+z^2)^2(2z^4+1)^3}, 0\right)$$
$$= 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{1}{(1+z^2)^2(2z^4+1)^3}$$
$$= 2\pi i.$$

11. 设函数 $f(z)$ 在 $R<|z-z_0|<+\infty$ 的洛朗级数展开为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n,$$

求证 $\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-C_{-1}$.

证 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ 由逐项积分定理及

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n}=\begin{cases}2\pi i, & n=1\\ 0, & n\neq 1 \text{ 的整数}\end{cases}$$

其中 C 是以 a 为心，以 ρ 为半径的圆周，故

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} f(z)dz=-C_{-1},$$

即 $\operatorname{Res}[f(z),\infty]$ 等于 $f(z)$ 在点 ∞ 的洛朗展式中 $\frac{1}{z}$ 这一项系数的反号.

12. 求下列各积分之值.

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}\ (a>1)$; (2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\cos\theta}$;

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx\ (a>0)$; (4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4x+5}dx$;

(5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$; (6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx\ (a>0,b>0)$.

解 (1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta} \xlongequal{令 z=e^{i\theta}} \oint_{|z|=1}\frac{1}{iz\left(a+\dfrac{z^2+1}{2z}\right)}dz$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{2}{i(z^2+2az+1)}dz$$

$$= \frac{1}{\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{2}{(z-\alpha)(z-\beta)}\mathrm{d}z.$$

令 $f(z)=\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{2}{(z-\alpha)(z-\beta)}$，其中 $\alpha=-a-\sqrt{a^2-1}$，$\beta=-a+\sqrt{a^2-1}$ 为实系数二次方程 $z^2+2az+1=0$ 的两相异实根，显然 $|\alpha|>1$，$|\beta|<1$，被积函数 $f(z)$ 在 $|z|=1$ 上无奇点，在单位圆内部仅有一个简单极点 $z=\beta$，故

$$\mathrm{Res}[f(z),\beta]=\frac{1}{\mathrm{i}}\cdot\frac{2}{z-\alpha}\bigg|_{z=\beta}=\frac{2}{\mathrm{i}\cdot 2\sqrt{a^2-1}}$$

$$=-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{a^2-1}},$$

即

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a+\cos\theta}=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[f(z),\beta]=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

(2) $$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{5+3\cos\theta}\xlongequal{\text{令}z=e^{\mathrm{i}\theta}}\oint_{|z|=1}\frac{2}{\mathrm{i}(3z^2+10z+3)}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{2}{\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{(3z+1)(z+3)}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{2}{\mathrm{i}}\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(3z+1)(z+3)},-\frac{1}{3}\right]$$

$$=4\pi\cdot\lim_{z\to-\frac{1}{3}}\left(z+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{(3z+1)(z+3)}$$

$$=4\pi\cdot\frac{1}{8}=\frac{\pi}{2}.$$

(3) $f(z)=\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$，它共有两个二阶极点，且 $(z^2+a^2)^2$ 在实轴上无奇点，在上半平面仅有二阶极点 $a\mathrm{i}$，所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[f(z),a\mathrm{i}]$$

$$=2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to a\mathrm{i}}\left[\left(\frac{z}{z+a\mathrm{i}}\right)^2\right]'$$

$$=2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to a\mathrm{i}}\frac{2za\mathrm{i}}{(z+a\mathrm{i})^3}=\frac{\pi}{2a}.$$

(4) 不难验证 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+4z+5}$ 满足若尔当引理条件，函数 $f(z)$ 有两个一阶极点 $-2+i$, $-2-i$.

$$\operatorname{Res}[f(z),-2+i]=\frac{e^{iz}}{(z^2+4z+5)'}\bigg|_{z=-2+i}$$

$$=\frac{e^{-2i-1}}{2i}=\frac{\cos 2-i\sin 2}{2ie},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+4x+5}dx=2\pi i\operatorname{Res}[f(z),-2+i]$$

$$=\frac{\pi}{e}(\cos 2-i\sin 2),$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4x+5}dx=\frac{\pi\cos 2}{e}.$$

(5) 令 $f(z)=\dfrac{z^2}{1+z^4}$，$f(z)$ 在实轴上无奇点，且 $1+z^4$ 比 z^2 高二次，$f(z)$ 在上半平面共有

$$z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\quad z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$$

两个一阶极点，故

$$\operatorname{Res}[f(z),z_1]=\frac{z^2}{(z^4+1)'}\bigg|_{z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}=\frac{\sqrt{2}}{8}(1-i),$$

$$\operatorname{Res}[f(z),z_2]=\frac{z^2}{(z^4+1)'}\bigg|_{z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)}=-\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i).$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=2\pi i\left[\frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)-\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

(6) 令 $f(z)=\dfrac{ze^{iaz}}{z^2+b^2}$，容易验证 $f(z)$ 满足若尔当引理条件. 故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{iax}}{x^2+b^2}dx = 2\pi i[f(z),bi]$$
$$= 2\pi i\left.\frac{ze^{iaz}}{(z^2+b^2)'}\right|_{z=bi}$$
$$= 2\pi i\cdot\frac{1}{2}e^{-ab} = \pi i e^{-ab},$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx = \pi e^{-ab}.$$

$e^{1/z}$ 的孤立奇点

(2) 因 $\cot\frac{1}{z}=\frac{\cos(1/z)}{\sin(1/z)}$,在 $\frac{1}{z}=k\pi$ 处,即 $z_k=\frac{1}{k\pi}(k=\pm1,\pm2,\cdots)$,$z=0$ 处 $\cot\frac{1}{z}$ 不解析,且 $\lim\limits_{k\to\infty}z_k=0$,故 0 不为 $\cos\frac{1}{z}$ 的孤立奇点.

(3) 因 $\frac{1}{\sin z}$ 除 $z=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 外处处解析,所以 0 为其孤立奇点

2. 找出下列各函数的所有零点,并指明其阶数.

(1) $\frac{z^2+9}{z^4}$; (2) $z\sin z$; (3) $z^2(e^{z^2}-1)$.

解 (1) $\frac{z^2+9}{z^4}=\frac{(z+3i)(z-3i)}{z^4}$,显然 $z=\pm3i$ 为其一阶零点.

(2) 因

$$z\sin z=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$=z\left(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)=z^2\left(1-\frac{z^2}{3!}+\cdots\right),$$

所以 $z=0$ 为 $z\sin z$ 的二阶零点. 又 $z=k\pi$ 时,$z\sin z=0$,所以

$$z=k\pi \text{ 为 } z\sin z \text{ 的零点},\ k=\pm1,\pm2,\cdots.$$

令 $f(z)=z\sin z$,$f'(z)=\sin z+z\cos z$,

$$f'(k\pi)=\sin z+z\cos z\Big|_{z=k\pi}$$

$$=(-1)^k\cdot k\pi\neq0\quad(k=\pm1,\pm2,\cdots),$$

故 $z=k\pi$ 为 $z\sin z$ 的一阶零点.

(3) 令

$$f(z)=z^2(e^{z^2}-1),$$

由 $f(z)=0$ 可解得

$$z=0\quad\text{或}\quad z^2=2k\pi i,$$

即 $z=\sqrt{2k\pi i}\ (k=\pm1,\pm2,\cdots)$. 因

$$f(z)=z^2(e^{z^2}-1)=z^2\left(z^2+\frac{z^4}{2!}+\cdots\right)$$

$$= z^4\left(1 + \frac{z^2}{2!} + \cdots\right),$$

所以 $z = 0$ 为 $f(z)$ 的四阶零点.又

$$f'(z) = 2z(e^{z^2} - 1) + z^2 \cdot 2z \cdot e^{z^2},$$

$$f'(\sqrt{2k\pi i}) = 2 \cdot (\sqrt{2k\pi i})^3 \neq 0 \quad (k = \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

所以 $z = \sqrt{2k\pi i}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 为 $f(z)$ 的一阶零点.

3. 下列各函数有哪些奇点?各属何类型(如是极点,指出它的阶数).

(1) $\dfrac{z-1}{z(z^2+4)^2}$; (2) $\dfrac{\sin z}{z^3}$; (3) $\dfrac{1}{\sin z + \cos z}$;

(4) $\dfrac{1}{z^2(e^z-1)}$; (5) $\dfrac{\ln(1+z)}{z}$; (6) $\dfrac{1}{e^z-1} - \dfrac{1}{z}$;

(7) $\dfrac{\tan(z-1)}{z-1}$.

解 (1) 令 $f(z) = \dfrac{z-1}{z(z^2+4)^2}$, $z = 0, \pm 2i$ 为 $f(z)$ 的奇点,因 $\lim\limits_{z\to 0} z f(z) = -\dfrac{1}{16}$,所以 $z = 0$ 为简单极点.又

$$\lim_{z\to 2i}(z-2i)^2 \frac{z-1}{z(z^2+4)^2} = \lim_{z\to 2i}\frac{z-1}{z(z+2i)^2} = -\frac{i+2}{32},$$

所以 $z = 2i$ 为二阶极点,同理, $z = -2i$ 亦为二阶极点.

(2) 因 $\lim\limits_{z\to 0} z^2 \dfrac{\sin z}{z^3} = \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z} = 1$,所以 $z = 0$ 为二阶极点.

(3) 令

$$f(z) = \frac{1}{\sin z + \cos z} = \frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(z + \frac{\pi}{4}\right)},$$

则 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的零点为 $z = k\pi - \dfrac{\pi}{4}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.因

$$\left(\frac{1}{f(z)}\right)'\Bigg|_{z=k\pi-\frac{\pi}{4}} = \left(\sqrt{2}\sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right)\right)'\Bigg|_{z=k\pi-\frac{\pi}{4}}$$

$$= \sqrt{2}\cos\left(z+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{z=k\pi-\frac{\pi}{4}}$$

$$=\sqrt{2}\cdot(-1)^k\neq 0,$$

所以 $z=k\pi-\frac{\pi}{4}$ $(k=0,\pm1,\cdots)$ 都为简单极点.

(4) 令

$$f(z)=\frac{1}{z^2(e^z-1)},\quad \frac{1}{f(z)}=z^2(e^z-1),$$

则$\frac{1}{f(z)}$的零点为

$$z=2k\pi i,k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

因

$$\frac{1}{f(z)}=z^2\left(z+\frac{z^2}{2!}+\cdots\right)=z^3\left(1+\frac{z}{2!}+\cdots\right),$$

$z=0$ 为$\frac{1}{f(z)}$的三阶零点,故为 $f(z)$ 的三阶极点.又

$$\left(\frac{1}{f(z)}\right)'\Big|_{z=2k\pi i}=(2z(e^z-1)+z^2e^z)\Big|_{z=2k\pi i}\neq 0,$$

故 $z=2k\pi i$ 为$\frac{1}{f(z)}$的一阶零点,即为 $f(z)$ 的简单极点.

(5) 令 $f(z)=\frac{\ln(1+z)}{z}$, $z=0$ 为其孤立奇点.因

$$\lim_{z\to0}f(z)=\lim_{z\to0}\frac{1}{1+z}=1,$$

所以 $z=0$ 为可去奇点.

(6) 令

$$f(z)=\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}=\frac{z-e^z+1}{z(e^z-1)},$$

$z=0$ 和 $2k\pi i(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为其孤立奇点.因

$$\lim_{z\to0}f(z)=\lim_{z\to0}\frac{1-e^z}{e^z-1+ze^z}=\lim_{z\to0}\frac{-e^z}{2e^z+ze^z}=-\frac{1}{2},$$

所以 $z=0$ 为其可去奇点.又

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{z(e^z-1)}{z-e^z+1}=\frac{z}{z-e^z+1}\cdot(e^z-1),$$

所以 $z=2k\pi i(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为$\frac{1}{f(z)}$的一阶零点,即为 $f(z)$ 的简

单极点.

(7) 令

$$f(z)=\frac{\tan(z-1)}{z-1}=\frac{\sin(z-1)}{(z-1)\cos(z-1)},$$

$f(z)$ 的孤立奇点为 $z=1$ 和 $z_k=k\pi+\frac{\pi}{2}+1(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

因

$$\lim_{z\to1}f(z)=\lim_{z\to1}\frac{\sin(z-1)}{z-1}\cdot\frac{1}{\cos(z-1)}=1,$$

故 $z=1$ 为其可去奇点.

又 $z_k=k\pi+\frac{\pi}{2}+1$, z_k 为 $\cos(z-1)$ 的一阶零点,故为 $f(z)$ 的简单极点.

另解:

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{(z-1)\cos(z-1)}{\sin(z-1)},$$

因

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{f(z)}\right)'&=\frac{\cos(z-1)\sin(z-1)-\sin^2(z-1)(z-1)-\cos^2(z-1)(z-1)}{\sin^2(z-1)}\\&=\frac{-(z-1)+\sin(z-1)\cos(z-1)}{\sin^2(z-1)},\end{aligned}$$

而 $\left(\frac{1}{f(z)}\right)'\Big|_{z=k\pi+\frac{\pi}{2}+1}\neq0$,故 $z_k=k\pi+\frac{\pi}{2}+1$ 为 $f(z)$ 的简单极点.

4. 证明:设函数 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta(0<\delta<+\infty)$ 内解析,那么 z_0 是 $f(z)$ 的极点的充分必要条件是 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$.

证明 先证条件是必要的.如果 z_0 是 $f(z)$ 的极点,则 $f(z)$ 在 z_0 的洛朗展开式必有有限个负整次幂项,即

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{C_{-1}}{z-z_0}+C_0+C_1(z-z_0)+\cdots\\&=\frac{1}{(z-z_0)^m}[C_{-m}+C_{-m+1}(z-z_0)+\\&\quad\cdots+C_0(z-z_0)^m+\cdots],\quad m\geqslant1,C_{-m}\neq0.\end{aligned}$$

对上式取极限,右端的前一因式的极限为 ∞,后一因式的极限为非零常数 C_{-m}.所以

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(z-z_0)^m}[C_{-m} + C_{-m+1}(z-z_0) + \cdots] = \infty.$$

再证条件是充分的.如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$,令 $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$.于是

$$\lim_{z\to z_0} g(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0.$$

由定理 5.1,z_0 是 $g(z)$ 的可去奇点.根据可去奇点的定义及 $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = 0$,$g(z)$ 在 z_0 的洛朗展开式应为

$$\begin{aligned} g(z) &= b_m(z-z_0)^m + \cdots + b_{m+n}(z-z_0)^{m+n} + \cdots \\ &= (z-z_0)^m[b_m + b_{m+1}(z-z_0) + \\ &\quad \cdots + b_{m+n}(z-z_0)^n + \cdots] \\ &= (z-z_0)^m \varphi(z), \end{aligned}$$

其中 $m \geqslant 1$,$b_m \neq 0$,$\varphi(z)$ 是上式方括号内的幂级数的和函数.显然 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析且 $\varphi(z_0) = b_m \neq 0$.由于解析函数的商在分母不为零的点处仍为解析函数,因而 $\dfrac{1}{\varphi(z)}$ 在 z_0 处解析且不为零,则 $\dfrac{1}{\varphi(z)}$ 在 z_0 可展开成幂级数:

$$C_0 + C_1(z-z_0) + \cdots,$$

其中 $C_0 \neq 0$.所以

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m} \frac{1}{\varphi(z)} \\ &= \frac{1}{(z-z_0)^m}[C_0 + C_1(z-z_0) + \cdots] \\ &= \frac{C_0}{(z-z_0)^m} + \frac{C_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots. \end{aligned}$$

由极点的定义知,z_0 是 $f(z)$ 的(m 阶)极点.

5. 如果 $f(z)$ 与 $g(z)$ 是以 z_0 为零点的两个不恒为0的解析函数,则

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}\quad(\text{或两端均为 }\infty).$$

证 设 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶零点，为 $g(z)$ 的 n 阶零点，则

$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$，$\varphi(z)$ 在 z_0 解析，$\varphi(z_0)\neq 0$，$m\geqslant 1$，

$g(z)=(z-z_0)^n\psi(z)$，$\psi(z)$ 在 z_0 解析，$\psi(z_0)\neq 0$，$n\geqslant 1$.

因而

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{m-n}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},\tag{1}$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{m(z-z_0)^{m-1}\varphi(z)+(z-z_0)^m\varphi'(z_0)}{n(z-z_0)^{n-1}\psi(z)+(z-z_0)^n\psi'(z_0)}$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{m}{n}\cdot(z-z_0)^{m-n}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}.\tag{2}$$

当 $m=n$ 时，(1) 式 $=\dfrac{\varphi(z_0)}{\psi(z_0)}=$ (2) 式，

当 $m>n$ 时，(1) 式 $=$ (2) 式 $=0$，

当 $m<n$ 时，(1) 式 $=$ (2) 式 $=\infty$.

6. 问 ∞ 是否为下列各函数的孤立奇点.

(1) $\dfrac{\sin z}{1+z^2+z^3}$；　(2) $\dfrac{1}{e^z-1}$.

解 (1) 因 $\dfrac{\sin z}{1+z^2+z^3}$ 在 $|z|>1$ 时解析，故 ∞ 是其孤立奇点. 且

$\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{\sin z}{1+z+z^3}=0$，故 ∞ 为可去孤立奇点.

(2) $\dfrac{1}{e^z-1}$ 的孤立奇点为 $z_k=2k\pi i$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，由于

$$\lim_{k\to\infty}2k\pi i=\infty,$$

故 ∞ 不是其孤立奇点.

7. 求出下列函数的在孤立奇点处的留数.

(1) $\dfrac{e^z-1}{z}$；　(2) $\dfrac{z^7}{(z-2)(z^2+1)}$；　(3) $\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$；

(4) $z^2\sin\dfrac{1}{z}$；　(5) $\dfrac{1}{z\sin z}$；　(6) $\dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$.

解 (1) 令 $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z}$,孤立奇点仅有 0.

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}zf(z)=\lim_{z\to 0}(e^z-1)=0.$$

(2)$z=2$ 为简单极点,$z=\pm i$ 为二阶极点.

$$\operatorname{Res}[f(z),2]=\lim_{z\to 2}(z-2)\frac{z^7}{(z-2)(z^2+1)}$$

$$=\lim_{z\to 2}\frac{z^7}{z^2+1}=\frac{128}{5},$$

$$\operatorname{Res}[f(z),i]=\lim_{z\to i}\left(\frac{z^7}{(z-2)(z+i)^2}\right)'$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{7z^6(z-2)(z+i)-z^7(z+2+2z-4)}{(z-2)^2(z+i)^3}$$

$$=\frac{2+i}{10}.$$

同理可计算 $\operatorname{Res}[f(z),-i]=\dfrac{2-i}{10}$.

(3)$z=-1$ 为其三阶极点.

$$\operatorname{Res}[f(z),-1]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}(\sin 2z)''=\frac{1}{2!}(-4\sin 2z)\Big|_{z=-1}$$

$$=2\sin 2.$$

(4) $$z^2\sin\frac{1}{z}=z^2\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\cdots\right)$$

$$=z-\frac{1}{3!z}+\frac{1}{5!z^3}-\cdots,$$

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=-\frac{1}{6}.$$

(5) $\dfrac{1}{z\sin z}$ 的孤立奇点为 $z=0,z_k=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$,其中,$z=0$ 为二阶极点,这是由于

$$\frac{1}{z\sin z}=\frac{1}{z\left(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)}=\frac{1}{z^2\left(1-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)}$$

$$=\frac{1}{z^2}\frac{1}{g(z)},\quad \frac{1}{g(z)}\text{ 在 } z=0 \text{ 处解析. 且}\frac{1}{g(0)}\neq 0.$$

所以

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\left[z^2\frac{1}{z\sin z}\right]'$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z - z\cos z}{\sin^2 z}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\cos z + z\sin z - \cos z}{2\sin z\cos z}=0,$$

易知 $z_k = k\pi(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 为简单极点,所以

$$\operatorname{Res}[f(z),k\pi]=\lim_{z\to k\pi}[(z-k\pi)/z\sin z]$$

$$=\lim_{z\to k\pi}\frac{1}{\sin z + z\cos z}=(-1)^k\frac{1}{k\pi}\quad(k=\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

(6) $\dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}=\dfrac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}$ 在整个复平面上解析,无孤立奇点.

8. 利用留数计算下列积分.

(1) $\oint_{|z|=1}\dfrac{dz}{z\sin z}$;　　(2) $\oint_{|z|=3/2}\dfrac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}dz$;

(3) $\oint_{|z|=2}\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2}dz$;　　(4) $\oint_{|z|=1/2}\dfrac{\sin z}{z(1-e^z)}dz$;

(5) $\oint_{|z|=1}\dfrac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}$($n$ 为正整数,$|a|\neq 1$, $|b|\neq 1$, $|a|<|b|$).

解 (1) $\oint_{|z|=1}\dfrac{dz}{z\sin z}=2\pi i\operatorname{Res}[f(z),0]$

$$=2\pi i\lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\sin z}\right)'=2\pi i\lim_{z\to 0}\frac{\sin z - z\cos z}{\sin^2 z}$$

$$=2\pi i\lim_{z\to 0}\frac{\sin z - z\cos z}{2z}$$

$$=2\pi i\lim_{z\to 0}\frac{\cos z - \cos z + z\sin z}{2z}$$

$$=2\pi i\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{2}=0.$$

(2) $\oint_{|z|=3/2}\dfrac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}dz=2\pi i\operatorname{Res}[f(z),1]$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 1} \frac{e^z}{(z+3)^2} = \frac{1}{8}\pi i e.$$

(3) $\oint_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z-1)^2} dz = 2\pi i \cdot \lim_{z\to 1}\left((z-1)^2 \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}\right)'$

$$= 4\pi i e^2.$$

(4) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\sin z}{z(1-e^z)} dz = 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{(1-e^z)}$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{-e^z} = -2\pi i.$$

(5) 1° $1<|a|<|b|$，令 $f(z)=\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}$，$f(z)$ 在 $|z|=1$ 内无奇点，故 $\oint_{|z|=1} f(z)dz = 0$.

2° $|a|<1<|b|$ 时，

$$\oint_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f(z),a)$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z\to a}\left[\frac{1}{(z-b)^n}\right]^{(n-1)}$$

$$= 2\pi i \cdot (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2} \cdot (a-b)^{-2n+1}.$$

3° $|a|<|b|<1$ 时，

$$\oint_{|z|} f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f(z),a) + 2\pi i \mathrm{Res}(f(z),b)$$

$$= 2\pi i(-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2}(a-b)^{-2n+1}$$

$$+ 2\pi i(-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2} \cdot (b-a)^{2n+1} = 0.$$

9. 判定 $z=\infty$ 是下列各函数的什么奇点，并求出在 ∞ 的留数.

(1) $\sin z - \cos z$；　(2) $\frac{1}{z(z+1)^2(z-1)}$；　(3) $z+\frac{1}{z}$.

解　(1) $\lim_{z\to\infty}(\sin z - \cos z)$ 不存在，故 ∞ 为 $\sin z - \cos z$ 的本性奇点.

$$\sin z - \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},$$

故 $\operatorname{Res}(\sin z - \cos z, \infty) = 0$.

(2) $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{1}{z(z+1)^2(z-1)} = 0$,故 ∞ 为其可去奇点.

$$\operatorname{Res}(f(z), \infty) = -\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2}, 0\right]$$

$$= -\operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{1-z^2}, 0\right) = 0.$$

(3) 显然 ∞ 为 $z + \dfrac{1}{z}$ 的简单极点

$$\operatorname{Res}\left(z + \frac{1}{z}, \infty\right) = -1.$$

10. 求下列积分

(1) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}} dz$; (2) $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3} dz$.

解 (1) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}} dz$

$$= 2\pi i[\operatorname{Res}(f(z), 0) + \operatorname{Res}(f(z), -1)]$$

$$= -2\pi i \operatorname{Res}(f(z), \infty)$$

$$= 2\pi i \operatorname{Res}\left(f\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2}, 0\right)$$

$$= 2\pi i \operatorname{Res}\left[e^z \cdot \frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{1+1/z} \cdot \frac{1}{z^2}, 0\right]$$

$$= 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{e^z}{z^4(z+1)}, 0\right]$$

$$= 2\pi i \cdot \lim_{z\to 0} \frac{1}{3!}\left(\frac{e^z}{z+1}\right)''' = -\frac{2}{3}\pi i.$$

(2) $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3} dz$

$$= 2\pi i \sum_{z_k} \operatorname{Res}(f(z), z_k), \quad z_k \text{ 为 } f(z) \text{ 所有奇点}$$

$$= -2\pi i \operatorname{Res}[f(z), \infty]$$

$$= 2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{(1/z^2)^{15}}{(1/z^2+1)^2(1/z^4+2)^3\cdot z^2},0\right)$$
$$= 2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z(1+z^2)^2(2z^4+1)^3},0\right)$$
$$= 2\pi i \lim_{z\to 0}\frac{1}{(1+z^2)^2(2z^4+1)^3}.$$
$$= 2\pi i.$$

11. 设函数 $f(z)$ 在 $R<|z-z_0|<+\infty$ 的洛朗级数展开为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-z_0)^n,$$

求证 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-C_{-1}$.

证 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$ 由逐项积分定理及

$$\int_C\frac{dz}{(z-a)^n}=\begin{cases}2\pi i, & n=1\\ 0, & n\neq 1 \text{ 的整数}\end{cases}$$

其中 C 是以 a 为心,以 ρ 为半径的圆周,故

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-}f(z)dz=-C_{-1},$$

即 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]$ 等于 $f(z)$ 在点 ∞ 的洛朗展式中 $\frac{1}{z}$ 这一项系数的反号.

12. 求下列各积分之值.

(1) $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}\ (a>1)$; (2) $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\cos\theta}$;

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx\ (a>0)$; (4) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4x+5}dx$;

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$; (6) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx\ (a>0,b>0)$.

解 (1)
$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}\overset{令 z=e^{i\theta}}{=\!=}\oint_{|z|=1}\frac{1}{iz\left(a+\frac{z^2+1}{2z}\right)}dz$$
$$=\oint_{|z|=1}\frac{2}{i(z^2+2az+1)}dz$$

$$= \frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{2}{(z-\alpha)(z-\beta)}dz.$$

令 $f(z)=\frac{1}{i}\frac{2}{(z-\alpha)(z-\beta)}$,其中 $\alpha=-a-\sqrt{a^2-1}$,$\beta=-a+\sqrt{a^2-1}$ 为实系数二次方程 $z^2+2az+1=0$ 的两相异实根,显然 $|\alpha|>1$,$|\beta|<1$,被积函数 $f(z)$ 在 $|z|=1$ 上无奇点,在单位圆内部仅有一个简单极点 $z=\beta$,故

$$\operatorname{Res}[f(z),\beta]=\frac{1}{i}\cdot\frac{2}{z-\alpha}\Big|_{z=\beta}=\frac{2}{i\cdot 2\sqrt{a^2-1}}$$

$$=-\frac{i}{\sqrt{a^2-1}},$$

即

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}=2\pi i\operatorname{Res}[f(z),\beta]=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

(2) $$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\cos\theta}\xlongequal{令 z=e^{i\theta}}\oint_{|z|=1}\frac{2}{i(3z^2+10z+3)}dz$$

$$=\frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{(3z+1)(z+3)}dz$$

$$=2\pi i\cdot\frac{2}{i}\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(3z+1)(z+3)},-\frac{1}{3}\right]$$

$$=4\pi\cdot\lim_{z\to-\frac{1}{3}}\left(z+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{(3z+1)(z+3)}$$

$$=4\pi\cdot\frac{1}{8}=\frac{\pi}{2}.$$

(3) $f(z)=\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$,它共有两个二阶极点,且$(z^2+a^2)^2$在实轴上无奇点,在上半平面仅有二阶极点 ai,所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx=2\pi i\operatorname{Res}[f(z),ai]$$

$$=2\pi i\lim_{z\to ai}\left[\left(\frac{z}{z+ai}\right)^2\right]'$$

$$=2\pi i\lim_{z\to ai}\frac{2zai}{(z+ai)^3}=\frac{\pi}{2a}.$$

(4) 不难验证 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+4z+5}$ 满足若尔当引理条件，函数 $f(z)$ 有两个一阶极点 $-2+i$, $-2-i$.

$$\operatorname{Res}[f(z),-2+i]=\frac{e^{iz}}{(z^2+4z+5)'}\Big|_{z=-2+i}$$

$$=\frac{e^{-2i-1}}{2i}=\frac{\cos 2-i\sin 2}{2ie},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+4x+5}dx=2\pi i\operatorname{Res}[f(z),-2+i]$$

$$=\frac{\pi}{e}(\cos 2-i\sin 2),$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4x+5}dx=\frac{\pi\cos 2}{e}.$$

(5) 令 $f(z)=\dfrac{z^2}{1+z^4}$, $f(z)$ 在实轴上无奇点，且 $1+z^4$ 比 z^2 高二次，$f(z)$ 在上半平面共有

$$z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\quad z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$$

两个一阶极点，故

$$\operatorname{Res}[f(z),z_1]=\frac{z^2}{(z^4+1)'}\Big|_{z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}=\frac{\sqrt{2}}{8}(1-i),$$

$$\operatorname{Res}[f(z),z_2]=\frac{z^2}{(z^4+1)'}\Big|_{z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)}=-\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i).$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=2\pi i\left[\frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)-\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

(6) 令 $f(z)=\dfrac{ze^{iaz}}{z^2+b^2}$，容易验证 $f(z)$ 满足若尔当引理条件. 故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{iax}}{x^2+b^2} dx = 2\pi i[f(z), bi]$$
$$= 2\pi i \left.\frac{z e^{iaz}}{(z^2+b^2)'}\right|_{z=bi}$$
$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{2} e^{-ab} = \pi i e^{-ab},$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin ax}{x^2+b^2} dx = \pi e^{-ab}.$$

1. 问 $z = 0$ 是否为下列函数的孤立奇点?

(1)$e^{1/z}$； (2)$\cot \frac{1}{z}$； (3) $\frac{1}{\sin z}$.

解 (1)$e^{1/z}$ 在 $0 < |z| < \infty$ 解析，在 $z = 0$ 处不解析，$z = 0$ 是

1. 根据傅氏积分公式，推出函数 $f(t)$ 的傅氏积分公式的三角形式：

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega.$$

证

$$\begin{aligned}
f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right.\\
&\quad\left.+j\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega\\
&\quad+\frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega.
\end{aligned}$$

注：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ 是 ω 的偶函数.

2. 试证：若 $f(t)$ 满足傅氏积分定理的条件，则有

$$f(t)=\int_0^{+\infty} A(\omega)\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega+\int_0^{+\infty} B(\omega)\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega,$$

其中，

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\tau,$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin\omega\tau\,\mathrm{d}\tau.$$

证 由傅氏积分公式的三角形式展开即可证.

3. 试求 $f(t)=|\sin t|$ 的离散频谱和它的傅里叶级数的复指数形式.

解 $f(t)=|\sin t|$ 以 π 为周期，$\omega_0=\frac{2\pi}{\pi}=2$. 当 $n=0$ 时，

$$C_0=F(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi};$$

当 $n\neq 0$ 时，

$$C_n=F(n\omega_0)=F(2n)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin t|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2nt}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{e}^{-2n\mathrm{j}t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t(\cos 2nt+\mathrm{j}\sin(-2nt))\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{\pi}\cdot\mathrm{j}\int_0^{\pi}\sin t\,\sin 2nt\,\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\cos 2nt\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\mathrm{j}}{2\pi}\int_0^{\pi}[\cos(2n+1)t-\cos(2n-1)t]\mathrm{d}t$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[\sin(2n+1)t+\sin(1-2n)t]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\mathrm{j}}{2\pi}\cdot 0+\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos(2n+1)t}{2n+1}\Big|_0^{\pi}+\frac{\cos(2n-1)t}{2n-1}\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{2n+1}-\frac{2}{2n-1}\right)=\frac{-2}{(4n^2-1)\pi},$$

故

$$F(n\omega_0)=\frac{-2}{(4n^2-1)\pi},\quad n\in\mathbf{Z}$$

$$f(t)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}e^{jn\omega_0 t}.$$

4. 求下列函数的傅氏变换：

(1) $f(t)=\begin{cases}-1, & -1<t<0,\\ 1, & 0<t<1,\\ 0, & \text{其它};\end{cases}$ (2) $f(t)=\begin{cases}e^t, & t\leqslant 0,\\ 0, & t>0;\end{cases}$

(3) $f(t)=\begin{cases}1-t^2, & |t|\leqslant 1,\\ 0, & |t|>1;\end{cases}$ (4) $f(t)=\begin{cases}e^{-t}\sin 2t, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$

解 (1) $\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$

$$=-\int_{-1}^{0}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{1}e^{-j\omega t}dt$$

$$=-\int_{0}^{1}e^{j\omega t}dt+\int_{0}^{1}e^{-j\omega t}dt$$

$$=-2j\int_{0}^{1}\sin\omega t\,dt=\frac{2j}{\omega}\cos\omega t\Big|_0^1$$

$$=-\frac{2j}{\omega}(1-\cos\omega).$$

(2) $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$

$$=\int_{-\infty}^{0}e^t e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{(1-j\omega)t}dt$$

$$=\frac{1}{1-j\omega}e^{(1-j\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0}=\frac{1}{1-j\omega}.$$

(3) $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-1}^{1}(1-t^2)e^{-j\omega t}dt$

$$=\int_{-1}^{1}e^{-j\omega t}dt-\int_{-1}^{1}t^2(\cos\omega t-j\sin\omega t)dt$$

$$=\frac{1}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-1}^{1}-2\int_0^1 t^2\cos\omega t\,dt$$

$$= \frac{2\sin\omega}{\omega} - \frac{2}{\omega}\left[t^2\sin\omega t\Big|_0^1 - \int_0^1 2t\sin\omega t\,\mathrm{d}t\right]$$
$$= \frac{4}{\omega}\int_0^1 t\sin\omega t\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{4}{\omega}\left(-\frac{1}{\omega}\right)\left[t\cos\omega t\Big|_0^1 - \int_0^1 \cos\omega t\,\mathrm{d}t\right]$$
$$= -\frac{4}{\omega^2}\left(\cos\omega - \frac{1}{\omega}\sin\omega\right).$$

(4) $$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin 2t\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{+\infty} \sin 2t\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\cos 2t\ \mathrm{e}^{-(1+\mathrm{j}\omega)t}\Big|_0^{+\infty} + (1+\mathrm{j}\omega)\int_0^{+\infty}\cos 2t\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t\right]$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1+\mathrm{j}\omega}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}\sin 2t$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1+\mathrm{j}\omega}{4}\left[\sin 2t\ \mathrm{e}^{-(1+\mathrm{j}\omega)t}\Big|_0^{+\infty} + (1+\mathrm{j}\omega)\int_0^{+\infty}\sin 2t\ \mathrm{e}^{-(1+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t\right]$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{(1+\mathrm{j}\omega)^2}{4}F(\omega),$$

故

$$F(\omega) = \frac{1}{2\left(1 + \frac{(1+\mathrm{j}\omega)^2}{4}\right)} = \frac{2(5-\omega^2-2\mathrm{j}\omega)}{\omega^4 - 6\omega^2 + 25}.$$

5. 求下列函数的傅氏变换,并证明所列的积分等式.

(1) $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leqslant 1, \\ 0, & |t| > 1, \end{cases}$ 证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}d\omega=\begin{cases}\pi/4, & |t|<1,\\ \pi/2, & |t|=1,\\ 0, & |t|>1.\end{cases}$$

(2) $f(t)=\begin{cases}\sin t, & |t|\leqslant\pi,\\ 0, & |t|>\pi,\end{cases}$ 证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\pi\sin\omega t}{1-\omega^2}d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin t, & |t|\leqslant\pi,\\ 0, & |t|>\pi.\end{cases}$$

解 (1)
$$\begin{aligned}F(\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt\\&=\int_{-1}^{1}e^{-j\omega t}dt\\&=\frac{1}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{-j\omega}(e^{-j\omega}-e^{j\omega})\\&=\frac{-2j\sin\omega}{-j\omega}=\frac{2\sin\omega}{\omega}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j\omega t}d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin\omega}{\omega}(\cos\omega t+j\sin\omega t)d\omega\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}d\omega+\frac{j}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega\sin\omega t}{\omega}d\omega\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}d\omega=\begin{cases}1, & |t|<1,\\ \frac{1}{2}, & |t|=1,\\ 0, & |t|>1,\end{cases}\end{aligned}$$

故

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & |t|<1\\ \frac{\pi}{4}, & |t|=1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$$

(2) $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\ e^{-j\omega t}dt$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sin t(\cos \omega t - \mathrm{j}\sin \omega t)\mathrm{d}t$$

$$= -2\mathrm{j}\int_{0}^{\pi} \sin t \sin \omega t \mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{j}\int_{0}^{\pi}[\cos(\omega + 1)t - \cos(\omega - 1)t]\mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{j}\left(\frac{\sin(\omega + 1)t}{\omega + 1}\Big|_{0}^{\pi} - \frac{\sin(\omega - 1)t}{\omega - 1}\Big|_{0}^{\pi}\right)$$

$$= \mathrm{j}\left(\frac{-\sin \omega\pi}{\omega + 1} - \frac{-\sin \omega\pi}{\omega - 1}\right)$$

$$= \frac{2\mathrm{j}\sin \omega\pi}{\omega^2 - 1}.$$

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\mathrm{j}\sin \omega\pi}{\omega^2 - 1}(\cos \omega t + \mathrm{j}\sin \omega t)\mathrm{d}\omega$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega\pi \sin \omega t}{\omega^2 - 1}\mathrm{d}\omega + \frac{\mathrm{j}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega\pi \cos \omega t}{\omega^2 - 1}\mathrm{d}\omega$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin \omega\pi \sin \omega t}{\omega^2 - 1}\mathrm{d}\omega$$

$$= \begin{cases} \sin t, & |t| \leqslant \pi \\ 0, & |t| > \pi \end{cases}$$

故

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin \omega\pi \sin \omega t}{1 - \omega^2}\mathrm{d}\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\sin t, & |t| \leqslant \pi, \\ 0, & |t| > \pi. \end{cases}$$

6. 求下列函数的傅氏变换

(1) $\mathrm{sgn}t = \begin{cases} -1, & t < 0, \\ 1, & t > 0; \end{cases}$

(2) $f(t) = \cos t \sin t$;

(3) $f(t) = \sin^3 t$;

(4) $f(t) = \sin\left(5t + \frac{\pi}{3}\right)$.

注:本大题可利用傅氏变换的性质及一些基本函数的傅氏变换来求解.

解 (1) 已知

$$\mathscr{F}[u(t)]=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega),\quad \mathscr{F}[1]=2\pi\delta(\omega),$$

由 $\operatorname{sgn} t=2u(t)-1$ 有

$$\mathscr{F}[\operatorname{sgn}t]=2\left(\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)\right)-2\pi\delta(\omega)=\frac{2}{\mathrm{j}\omega}.$$

(2) 已知

$$\mathscr{F}[\sin\omega_0 t]=\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

由 $f(t)=\cos t\sin t=\frac{1}{2}\sin 2t$ 有

$$\mathscr{F}[f(t)]=\frac{\pi\mathrm{j}}{2}[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)].$$

(3) 已知 $\mathscr{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$,由

$$f(t)=\sin^3 t=\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}}{2\mathrm{j}}\right)^3$$

$$=\frac{\mathrm{j}}{8}(\mathrm{e}^{3\mathrm{j}t}-3\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}+3\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}-\mathrm{e}^{-3\mathrm{j}t})$$

即得

$$\mathscr{F}[f(t)]=\frac{\pi\mathrm{j}}{4}[\delta(\omega-3)-3\delta(\omega-1)+3\delta(\omega+1)-\delta(\omega+3)].$$

(4) 由于

$$f(t)=\sin\left(5t+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\sin 5t+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5t,$$

故

$$\mathscr{F}[f(t)]=\frac{\mathrm{j}\pi}{2}[\delta(\omega+5)-\delta(\omega-5)]+\frac{\sqrt{3}\pi}{2}[\delta(\omega+5)+\delta(\omega-5)].$$

7. 画出单位阶跃函数 $u(t)$ 的幅谱图.

解 $F(\omega)=\mathscr{F}[u(t)]=\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}$

$$=\pi\delta(\omega)-\frac{\mathrm{j}}{\omega},$$

$$|F(\omega)|=\sqrt{(\pi\delta(\omega))^2+\frac{1}{\omega^2}},\quad \arg F(\omega)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & \omega<0,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & \omega>0.\end{cases}$$

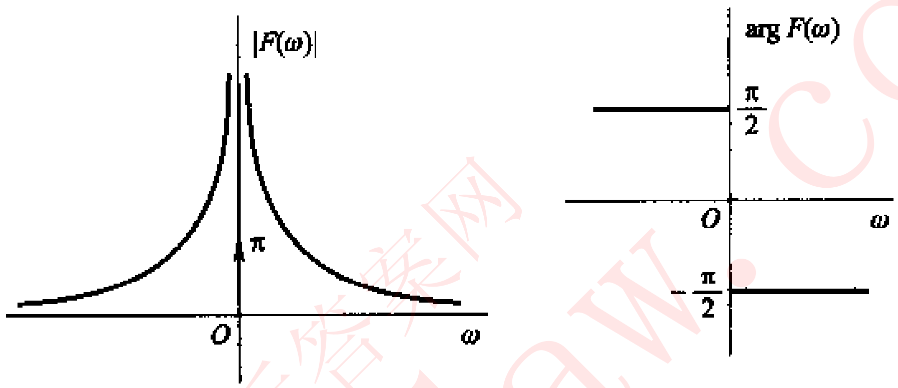


图 7.2

8. 证明:若 $\mathscr{F}[e^{j\varphi(t)}]=F(\omega)$,其中 $\varphi(t)$ 为一实函数,则

$$\mathscr{F}[\cos\varphi(t)]=\frac{1}{2}[F(\omega)+\overline{F(-\omega)}],$$

$$\mathscr{F}[\sin\varphi(t)]=\frac{1}{2\mathrm{j}}[F(\omega)-\overline{F(-\omega)}].$$

证

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\varphi(t)}\cdot e^{-j\omega t}dt$$

$$\overline{F(-\omega)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{e^{j\varphi(t)}e^{j\omega t}}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\varphi(t)}\cdot e^{-j\omega t}dt,$$

$$\frac{1}{2}[F(\omega)+\overline{F(-\omega)}]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{j\varphi(t)}+e^{-j\varphi(t)}}{2}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\varphi(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$
$$=\mathscr{F}[\cos\varphi(t)],$$

同理可证另一等式.

9. 设 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$,证明:

$$f(\pm\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\mp t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t.$$

证 略.

10. 试求如图 7.3 所示的周期函数的频谱.

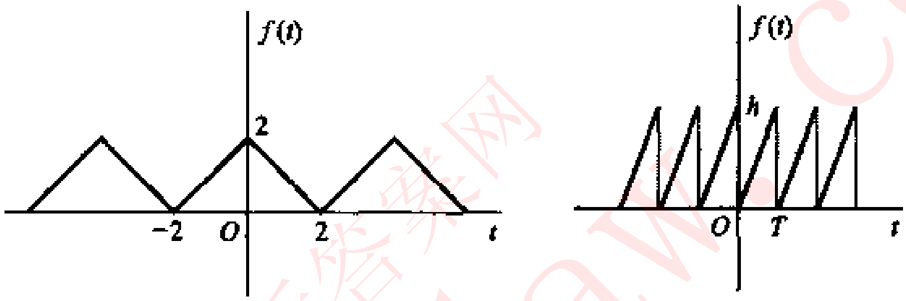


图 7.3

解 (1) $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$,

$$f(t)=\begin{cases}t+2, & -2\leqslant t<0,\\ -t+2, & 0\leqslant t<2,\end{cases}$$

$$C_0=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}f(t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{4}\int_{0}^{2}(2-t)\mathrm{d}t+\frac{1}{4}\int_{-2}^{0}(t+2)\mathrm{d}t=1;$$

$$C_n=F(n\omega_0)=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{4}\int_{-2}^{0}(2+t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t+\frac{1}{4}\int_{0}^{2}(2-t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t-\frac{1}{4}\int_{0}^{2}t\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t+\frac{1}{4}\int_{0}^{2}(-t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{0}^{2}\cos n\omega_0 t\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_{0}^{2}t\cos n\omega_0 t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{0}^{2}\cos n\omega_0 t\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2n\omega_0}\int_{0}^{2}t\,\mathrm{d}\sin n\omega_0 t$$

$$=\frac{\sin n\omega_0 t}{n\omega_0}\Big|_0^2-\frac{1}{2n\omega_0}\left[t\sin\omega_0 t\Big|_0^2-\int_0^2\sin n\omega_0 t\,\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{2n\omega_0}\cdot\frac{1}{-n\omega_0}\cos n\omega_0 t\Big|_0^2$$

$$=\frac{1-\cos 2n\omega_0}{2n^2\omega_0^{\,2}}=\frac{\sin^2 n\omega_0}{n^2\omega_0^{\,2}}=\frac{4\sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n^2\pi^2}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4\sin^2 n\omega_0}{n^2\pi^2}, & n=\pm1,\pm3,\cdots\\ 0, & n=\pm2,\pm4,\cdots\end{cases}$$

$$F(n\omega_0)=\begin{cases}\dfrac{4\sin^2 n\omega_0}{n^2\pi^2}, & n=\pm1,\pm3,\cdots\\ 1, & n=0,\\ 0, & n=\pm2,\pm4,\cdots\end{cases}$$

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}2\pi F(n\omega_0)\delta(\omega-n\omega_0)$$

$$=2\pi\delta(\omega)+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{8\sin^2 n\omega_0}{n^2\pi}\delta(\omega-n\omega_0).$$

(2) $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$,

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{T}ht, & 0\leqslant t\leqslant T\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$C_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{h}{T}t\mathrm{d}t=\frac{h}{2};$$

$$\begin{aligned}
F(n\omega_0)&=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{ht}{T}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t\\
&=\frac{h}{T^2}\int_0^T t\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t\\
&=\frac{h}{T^2}\left[\frac{1}{-\mathrm{j}n\omega_0}\cdot t\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\Big|_0^T+\frac{1}{\mathrm{j}n\omega_0}\int_0^T\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t\right]\\
&=\frac{h}{T^2}\left[\frac{T\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 T}}{-\mathrm{j}n\omega_0}-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}}{(\mathrm{j}n\omega_0)^2}\Big|_0^T\right]\\
&=\frac{h}{T^2}\left[\frac{\mathrm{j}T\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 T}}{n\omega_0}+\frac{(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 T}-1)}{n^2\omega_0{}^2}\right]\\
&=\frac{h}{T^2}\left[\frac{\mathrm{j}T\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n}}{n\omega_0}+\frac{(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n2\pi}-1)}{n^2\omega_0{}^2}\right]\\
&=\frac{\mathrm{j}h}{Tn\omega_0}=\frac{\mathrm{j}h}{2\pi n},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(\omega)&=\frac{h}{2}2\pi\delta(\omega)+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{\mathrm{j}h}{2\pi n}\cdot 2\pi\delta(\omega-n\omega_0)\\
&=\pi h\delta(\omega)+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{\mathrm{j}h}{n}\delta(\omega-n\omega_0).
\end{aligned}$$

11. 已知 $F(\omega)=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$ 为函数 $f(t)$ 的傅氏变换，求 $f(t)$.

解 $f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$

$$\begin{aligned}
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\pi(\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0))\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega+\omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\Big|_{\omega=-\omega_0}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\Big|_{\omega=\omega_0}
\end{aligned}$$

$$= \cos \omega_0 t.$$

12. 求函数

$$f(t) = \frac{1}{2}\left[\delta(t+a) + \delta(t-a) + \delta\left(t+\frac{a}{2}\right) + \delta\left(t-\frac{a}{2}\right)\right]$$

的傅氏积分变换.

解

$$F(\omega) = \mathscr{F}[f(t)]$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\delta(t+a) + \delta(t-a) + \delta\left(t+\frac{a}{2}\right) + \delta\left(t-\frac{a}{2}\right)\right]e^{-j\omega t}dt$$

$$= \left[e^{-j\omega t}\Big|_{t=-a} + e^{-j\omega t}\Big|_{t=a} + e^{-j\omega t}\Big|_{t=-\frac{a}{2}} + e^{-j\omega t}\Big|_{t=\frac{a}{2}}\right]\Big/2$$

$$= \cos a\omega + \cos\frac{a}{2}\omega.$$

13. 证明下列各等式.

(1) $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$;

(2) $a[f_1(t) * f_2(t)] = [af_1(t)] * f_2(t)$ (a 为常数);

(3) $\frac{d}{dt}[f_1(t) * f_2(t)] = \frac{d}{dt}f_1(t) * f_2(t)$

$$= f_1(t) * \frac{d}{dt}f_2(t).$$

证 (1)、(2) 略. 仅证(3):

$$\frac{d}{dt}[f_1(t) * f_2(t)] = \frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dt}[f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)]d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\cdot\frac{d}{dt}f_2(t-\tau)d\tau$$

$$= f_1(t) * \frac{d}{dt}f_2(t),$$

又

$$\frac{d}{dt}[f_1(t)*f_2(t)]=\frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t-\tau)\cdot f_2(\tau)d\tau\right]$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{d}{dt}f_1(t-\tau)\right]\cdot f_2(\tau)d\tau$$
$$=\frac{d}{dt}f_1(t)*f_2(t).$$

14. 设

$$f_1(t)=\begin{cases}0,t<0,\\1,t\geqslant 0,\end{cases}\quad f_2(t)=\begin{cases}0,&t<0,\\e^{-t},t\geqslant 0,\end{cases}$$

求 $f_1(t)*f_2(t)$.

解 $f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau$

当 $t\leqslant 0$ 时,

$$f_1(t)*f_2(t)=0;$$

当 $t>0$ 时,

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t e^{-(t-\tau)}d\tau$$
$$=e^{-t}e^{\tau}\Big|_0^t=1-e^{-t}.$$

故

$$f_1(t)*f_2(t)=\begin{cases}1-e^{-t},&t>0,\\0,&t\leqslant 0.\end{cases}$$

15. 设 $F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)],F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]$,证明

$$\mathscr{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega).$$

证 $\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(u)\cdot F_2(\omega-u)du$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[F_2(\omega-u)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)\cdot e^{-jut}dt\right]du$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\omega-u)f_1(t)e^{-jut}dt\right]du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} F_2(\omega - u)e^{-iut}f_1(t)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f_1(t)\int_{-\infty}^{+\infty} F_2(\omega - u)e^{-iut}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f_1(t)\int_{-\infty}^{+\infty} F_2(s)e^{jst}\cdot e^{-j\omega t}\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\cdot e^{-j\omega t}\cdot f_2(t)\mathrm{d}t = \mathscr{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)].$$

16. 求下列函数的傅氏变换.

(1) $f(t) = \sin\omega_0 t\cdot u(t)$; (2) $f(t) = e^{j\omega_0 t}tu(t)$

解 (1) 已知 $\mathscr{F}[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$，又

$$f(t) = \sin\omega_0 t\cdot u(t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t}u(t) - e^{-j\omega_0 t}u(t)).$$

由位移性质有

$$\mathscr{F}[f(t)] = \frac{1}{2j}\left(\pi\delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{j(\omega - \omega_0)} - \pi\delta(\omega + \omega_0) - \frac{1}{j(\omega + \omega_0)}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] - \frac{\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

(2) 由微分性质有

$$\mathscr{F}[tu(t)] = \frac{1}{-j}\left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right)' = j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2},$$

由位移性质有

$$\mathscr{F}[f(t)] = j\pi\delta'(\omega - \omega_0) - \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2}.$$

1. 求下列函数的拉氏变换

(1) $f(t)=\begin{cases}3, 0\leqslant t<2,\\ -1, 2\leqslant t<4,\\ 0, t>4;\end{cases}$

(2) $f(t)=\begin{cases}3, \quad 0\leqslant t<\dfrac{\pi}{2},\\ \cos t, t\geqslant\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$

(3) $f(t)=e^{2t}+5\delta(t)$;

(4) $f(t)=\delta(t)\cos t-u(t)\sin t$.

解 (1) $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$

$$=3\int_0^2 e^{-st}dt-\int_2^4 e^{-st}dt$$

$$= -\frac{3}{s}e^{-st}\Big|_0^2 + \frac{1}{s}e^{-st}\Big|_2^4$$

$$= \frac{1}{s}(3 - 4e^{-2s} + e^{-4s}).$$

(2) $F(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-st}dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \cos t\, e^{-st}dt$$

$$= -\frac{3}{s}e^{-st}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2}e^{-st}dt$$

$$= \frac{3}{s}(1 - e^{-\frac{\pi s}{2}}) + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} [e^{(j-s)t} + e^{-(j+s)t}]dt$$

$$= \frac{3}{s}(1 - e^{-\frac{\pi s}{2}}) + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{(j-s)t}}{j-s} + \frac{e^{-(j+s)t}}{-(j+s)}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}$$

$$= \frac{3}{s}(1 - e^{-\frac{\pi}{2}s}) + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-(j+s)\frac{\pi}{2}}}{j+s} - \frac{e^{(j-s)\frac{\pi}{2}}}{j-s}\right)$$

$$(\mathrm{Re}\, s > 0)$$

$$= \frac{3}{s}(1 - e^{-\frac{\pi}{2}s}) + \frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}s}\left(\frac{-j}{j+s} - \frac{j}{j-s}\right)$$

$$= \frac{3}{s}(1 - e^{-\frac{\pi}{2}s}) - \frac{1}{s^2+1}e^{-\frac{\pi}{2}s}.$$

(3) $\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} [e^{2t} + 5\delta(t)]e^{-st}dt$

$$= \int_0^{+\infty} e^{(2-s)t}dt + 5\int_0^{+\infty} \delta(t)e^{-st}dt$$

$$= \frac{1}{s-2} + 5e^{-st}\Big|_{t=0} \qquad (\mathrm{Re}\, s > 2)$$

$$= 5 + \frac{1}{s-2}.$$

(4) $\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} (\delta(t)\cos t - u(t)\sin t)e^{-st}dt$

$$= \int_0^{+\infty} \delta(t)\cos t e^{-st}dt - \int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-st}dt$$

$$= \cos t e^{-st}\Big|_{t=0} - \frac{1}{2j}\int_0^{+\infty} (e^{jt} - e^{-jt})e^{-st}dt$$

$$= 1 - \frac{1}{2\mathrm{j}}\int_0^{+\infty}[\mathrm{e}^{(\mathrm{j}-s)t} - \mathrm{e}^{-(\mathrm{j}+s)t}]\mathrm{d}t$$

$$= 1 - \frac{1}{2\mathrm{j}}\left[\frac{\mathrm{e}^{(\mathrm{j}-s)t}}{\mathrm{j}-s}\bigg|_0^{+\infty} + \frac{\mathrm{e}^{-(\mathrm{j}+s)t}}{\mathrm{j}+s}\bigg|_0^{+\infty}\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{2\mathrm{j}}\left(-\frac{1}{\mathrm{j}+s} - \frac{1}{\mathrm{j}-s}\right) \quad (\mathrm{Re}\, s > 0)$$

$$= 1 - \frac{1}{1+s^2} = \frac{s^2}{s^2+1}.$$

2. 求下列函数的拉氏变换.

(1) $\sin\frac{t}{2}$； (2) e^{-2t}； (3) t^2； (4) $|t|$；

(5) $\sin t\cos t$； (6) $\cos^2 t$.

解 (1) $\mathscr{L}\left[\sin\frac{t}{2}\right] = \int_0^{+\infty}\sin\frac{t}{2}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$

$$= \frac{1}{2\mathrm{j}}\int_0^{+\infty}\left(-\mathrm{e}^{-(\frac{\mathrm{j}}{2}+s)t} + \mathrm{e}^{(\frac{\mathrm{j}}{2}-s)t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{j}}\left[\frac{1}{s-\frac{\mathrm{j}}{2}} - \frac{1}{s+\frac{\mathrm{j}}{2}}\right] \quad (\mathrm{Re}\, s > 0)$$

$$= \frac{2}{4s^2+1}.$$

(2) $\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-2t}] = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(2+s)t}\mathrm{d}t$

$$= \frac{1}{s+2} \quad (\mathrm{Re}\, s > -2).$$

(3) $\mathscr{L}[t^2] = \int_0^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = -\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}t^2\mathrm{d}\mathrm{e}^{-st}$

$$= -\frac{1}{s}\left[t^2\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{+\infty} - 2\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\right] \quad (\mathrm{Re}\, s > 0)$$

$$= \frac{2}{s}\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = -\frac{2}{s^2}\int_0^{+\infty}t\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-st}$$

$$= -\frac{2}{s^2}\left[t\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\right]$$

$$= \frac{2}{s^3}.$$

(4) $\mathscr{L}[|t|]=\int_0^{+\infty}|t|e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}te^{-st}dt$

$$=-\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}t\,de^{-st}$$

$$=-\frac{1}{s}\left[te^{-st}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-st}dt\right]$$

$$=\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}e^{-st}dt\quad(\text{Re } s>0)$$

$$=\frac{1}{s^2}.$$

(5) $\mathscr{L}[\sin t\cos t]=\int_0^{+\infty}\sin t\cos te^{-st}dt$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\sin 2te^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s^2+4}=\frac{1}{s^2+4}.$$

(6) $\mathscr{L}[\cos^2 t]=\int_0^{+\infty}\cos^2 te^{-st}dt=\int_0^{+\infty}\frac{1+\cos 2t}{2}e^{-st}dt$

$$=\frac{1}{2s}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\cos 2te^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{2s}+\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}[e^{(2j-s)t}+e^{-(2j+s)t}]dt$$

$$=\frac{1}{2s}+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{s-2j}+\frac{1}{s+2j}\right]$$

$$=\frac{1}{2s}+\frac{s}{2(s^2+4)}$$

$$=\frac{s^2+2}{s(s^2+4)}.$$

3. 求下列函数的拉氏变换

(1) t^2+3t+2;　　(2) $1-te^{-t}$;　　(3) $(t-1)^2e^t$;

(4) $5\sin 2t-3\cos 2t$;　　(5) $t\cos at$;　　(6) $e^{-4t}\cos 4t$.

注:本大题利用一些基本函数的拉氏变换及性质来求解.

解　(1) 由 $\mathscr{L}(t^m)=\frac{m!}{s^{m+1}}$ 及 $\mathscr{L}[1]=\frac{1}{s}$ 有

$$\mathscr{L}[t^2+3t+2]=\frac{2}{s^3}+\frac{3}{s^2}+\frac{2}{s}.$$

(2) 已知 $\mathscr{L}[t]=\dfrac{1}{s^2}$,由位移性质有

$$\mathscr{L}[te^{-t}]=\frac{1}{(s+1)^2},$$

$$\mathscr{L}[1-te^{-t}]=\frac{1}{s}-\frac{1}{(s+1)^2}.$$

(3) $\mathscr{L}[(t-1)^2e^t]=\mathscr{L}[t^2e^t-2te^t+e^t]$

$$=\frac{2}{(s-1)^3}-\frac{2}{(s-1)^2}+\frac{1}{s-1}$$

$$=\frac{s^2-4s+5}{(s-1)^3}.$$

(4) 已知 $\mathscr{L}[\sin\omega t]=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$,$\mathscr{L}[\cos\omega t]=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$,

$$\mathscr{L}[5\sin 2t-3\cos 2t]=5\frac{2}{s^2+4}-3\frac{s}{s^2+4}$$

$$=\frac{10-3s}{s^2+4}.$$

(5) 由微分性质有:

$$\mathscr{L}[t\cos at]=-(\mathscr{L}[\cos at])'_s$$

$$=-\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)'=\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}.$$

(6) 由 $\mathscr{L}[\cos 4t]=\dfrac{s}{s^2+16}$ 及位移性质有

$$\mathscr{L}[e^{-4t}\cos 4t]=\frac{s+4}{(s+4)^2+16}.$$

4. 利用拉氏变换的性质,计算 $\mathscr{L}[f(t)]$.

(1) $f(t)=te^{-3t}\sin 2t$;　(2) $f(t)=t\displaystyle\int_0^t e^{-3t}\sin 2t\,dt$.

解　(1)　$\mathscr{L}(e^{-3t}\sin 2t)=\left.\dfrac{\omega}{(s+3)^2+\omega^2}\right|_{\omega=2}$

$$= \frac{2}{(s+3)^2+4}.$$

$$\mathscr{L}[te^{-3t}\sin 2t] = -\frac{d}{ds}\left[\frac{2}{(s+3)^2+4}\right]$$

$$= -\frac{-2[2(s+3)]}{[(s+3)^2+4]^2}$$

$$= \frac{4(s+3)}{[(s+3)^2+4]^2}.$$

(2) $$\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{-3t}\sin 2t\,dt\right] = \frac{1}{s}\mathscr{L}[e^{-3t}\sin 2t]$$

$$= \frac{1}{s}\cdot\frac{2}{(s+3)^2+4},$$

$$\mathscr{L}\left[t\int_0^t e^{-3t}\sin 2t\,dt\right] = -\left(\frac{2}{s[(s+3)^2+4]}\right)'$$

$$= \frac{2(3s^2+12s+13)}{s^2[(s+3)^2+4]^2}.$$

5. 利用拉氏变换性质,计算 $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

(1) $F(s) = \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s-1}$;　　(2) $F(s) = \ln\dfrac{s+1}{s-1}$;

(3) $F(s) = \dfrac{2s}{(s^2-1)^2}$;　　(4) $F(s) = \dfrac{1}{(s^2-1)^2}$.

解 (1) $$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1}\right]$$

$$= e^{-t} - e^{t} = -2\operatorname{sh} t.$$

(2) $F(s) = \ln\dfrac{s+1}{s-1}$, 令 $\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$,

$$F'(s) = -\frac{2}{s^2-1} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1}$$

$$= \mathscr{L}(e^{-t} - e^{t}) = -\mathscr{L}(tf(t))$$

$$= \mathscr{L}(-tf(t)),$$

故

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{2\operatorname{sh} t}{t}.$$

(3) 由像函数的积分性质

$$\int_s^{\infty} F(s)\mathrm{d}s = \int_s^{\infty} \frac{2s}{(s^2-1)^2}\mathrm{d}s = \frac{1}{s^2-1}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\mathscr{L}(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{t}) = \mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right],$$

故

$$f(t) = -\frac{t}{2}(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{t}) = t\,\mathrm{sh}\,t.$$

(4) 由于

$$\frac{1}{s}\cdot\frac{s}{(s^2-1)^2} = \frac{1}{(s^2-1)^2},$$

由积分的像函数性质

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2-1)^2}\right] = \int_0^t \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2-1)^2}\right]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t t\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2}\mathrm{ch}\,t - \frac{1}{2}\mathrm{sh}\,t.$$

6. 利用像函数的积分性质,计算 $\mathscr{L}[f(t)]$.

(1) $f(t) = \dfrac{\sin kt}{t}$; (2) $\displaystyle\int_0^t \frac{\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t}{t}\mathrm{d}t$.

解 (1) $\mathscr{L}(\sin kt) = \left.\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}\right|_{\omega=k} = \dfrac{k}{s^2+k^2}$,

$$\mathscr{L}\left[\frac{\sin kt}{t}\right] = \int_s^{\infty}\frac{k}{s^2+k^2}\mathrm{d}s$$

$$= \int_s^{+\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{s}{k}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{s}{k}\right)$$

$$= \arctan\frac{s}{k}\Big|_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{s}{k}.$$

(2) $\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t] = \dfrac{2}{(s+3)^2+4}$,

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t \frac{e^{-3t}\sin 2t}{t}dt\right] = \frac{1}{s}\mathscr{L}\left[\frac{e^{-3t}\sin 2t}{t}\right]$$
$$= \frac{1}{s}\int_s^{\infty} \frac{2}{(s+3)^2+4}ds$$
$$= \frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{s+3}{2}\right).$$

7. 求下列积分的值.

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}dt$； (2) $\int_0^{+\infty} te^{-2t}dt$.

解 (1) 令 $f(t) = e^{-t} - e^{-2t}$，则

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2},$$

故

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}dt = \int_0^{\infty} F(s)ds$$
$$= (\ln(s+1) - \ln(s+2))\Big|_0^{+\infty}$$
$$= \ln\left(\frac{s+1}{s+2}\right)\Big|_0^{+\infty} = \ln 2.$$

(2) $\int_0^{+\infty} te^{-2t}dt = \mathscr{L}[t]\Big|_{s=2} = \frac{1}{s^2}\Big|_{s=2} = \frac{1}{4}$.

8. 求下列像函数 $F(s)$ 的拉氏逆变换.

(1) $\frac{1}{s^2+a^2}$； (2) $\frac{s}{(s-a)(s-b)}$；

(3) $\frac{s+c}{(s+a)(s+b)^2}$； (4) $\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}$；

(5) $\frac{1}{s^4+5s^2+4}$； (6) $\frac{s+1}{9s^2+6s+5}$；

(7) $\frac{1+e^{-2s}}{s^2}$； (8) $\ln\frac{s^2-1}{s^2}$.

解 (1) $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+a^2}\right] = \frac{1}{a}\sin at$.

(2) $\frac{s}{(s-a)(s-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{a}{s-a} - \frac{b}{s-b}\right)$,

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s-a)(s-b)}\right]=\frac{1}{a-b}(e^{at}a-e^{bt}b).$$

(3) $F(s)=\dfrac{s+c}{(s+a)(s+b)^2}$

$$=\frac{c-a}{(b-a)^2}\left[\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}\right]+\frac{b-c}{b-a}\cdot\frac{1}{(s+b)^2},$$

故

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+c}{(s+a)(s+b)^2}\right]$$

$$=\frac{c-a}{(b-a)^2}e^{-at}+\left[\frac{b-c}{b-a}t+\frac{a-c}{(a-b)^2}\right]e^{-bt}.$$

(4) $f(t)=\mathrm{Res}[F(s)e^{st},-j]+\mathrm{Res}[F(s)e^{st},j]$

$$+\mathrm{Res}[F(s)e^{st},-2j]+\mathrm{Res}[F(s)e^{st},2j]$$

$$=\frac{1}{6}(e^{jt}+e^{-jt})-\frac{1}{6}(e^{2jt}+e^{-2jt})$$

$$=\frac{1}{3}(\cos t-\cos 2t).$$

(5)、(6) 略.

(7) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{e^{-2s}}{s^2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2}\right]+\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{e^{-2s}}{s^2}\right]$

$$=t+(t-2)u(t-2)$$

$$=\begin{cases}2(t-1), & t>2,\\ t, & 0\leqslant t<2.\end{cases}$$

(8) 令 $F(s)=\ln\dfrac{s^2-1}{s^2}$, $F'(s)=\dfrac{2}{s(s^2-1)}$,

$$F'(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s-1}-\frac{2}{s}$$

$$=\mathscr{L}(e^t+e^{-t}-2)=-\mathscr{L}(tf(t)),$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\ln\frac{s^2-1}{s^2}\right)=f(t)=\frac{2}{t}(1-\mathrm{ch}\,t).$$

9. 设 $f(t)$ 是以 2π 为周期的函数,且在区间 $[0,2\pi]$ 上取值为

$$f(t)=\begin{cases}\sin t, & 0\leqslant t<\pi\\ 0, & \pi\leqslant t\leqslant 2\pi\end{cases}$$

求 $\mathscr{L}[f(t)]$.

解 $$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-s\cdot 2\pi}}\int_0^{2\pi}f(t)e^{-st}dt$$
$$=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{\pi}\sin t e^{-st}dt$$
$$=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\cdot\frac{1}{2j}\int_0^{\pi}(e^{jt}-e^{-jt})e^{-st}dt$$
$$=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\cdot\frac{1}{2j}\left[\frac{e^{(j-s)t}}{j-s}\bigg|_0^{\pi}+\frac{e^{-(j+s)t}}{j+s}\bigg|_0^{\pi}\right]$$
$$=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\cdot\frac{1}{2j}\left(\frac{-1-e^{-s\pi}}{j-s}+\frac{-1-e^{-s\pi}}{j+s}\right)$$
$$=\frac{1+e^{-s\pi}}{(s^2+1)(1-e^{-2\pi s})}=\frac{1}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}.$$

10. 求下列函数在区间$[0,+\infty)$上的卷积.

(1)$1*u(t)$;

(2)t^m*t^n(m,n 为正整数);

(3)$\sin kt*\sin kt\quad(k\neq 0)$;

(4)$t*\operatorname{sh} t$;

(5)$u(t-a)*f(t)\ (a\geqslant 0)$;

(6)$\delta(t-a)*f(t)\ (a\geqslant 0)$.

解 (1) $$1*u(t)=\int_0^t u(t-\tau)d\tau=\int_0^t d\tau=t.$$

(2) $$t^m*t^n=\int_0^t\tau^m\cdot(t-\tau)^n d\tau$$
$$=\int_0^t\tau^m\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kt^{n-k}\tau^kd\tau$$
$$=\int_0^t\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kt^{n-k}\tau^{m+k}d\tau$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^t\tau^{m+k}d\tau\cdot C_n^kt^{n-k}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{t^{m+k+1}\cdot t^{n-k}}{m+k+1}C_n^k$$
$$=t^{m+n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k/(m+k+1)$$
$$=m!n!t^{m+n+1}/(m+n+1)!.$$

注:本小题可先用卷积定理求出 t^m*t^n 的拉氏变换,再由拉氏逆

变换求出卷积结果.

(3) $\sin kt * \sin kt = \int_0^t \sin k\tau \sin k(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^t [\cos kt - \cos(2k\tau - kt)\mathrm{d}\tau]$$

$$= -\frac{1}{2}t\cos kt + \frac{1}{4k}\int_0^t \cos k(2\tau - t)d(2\tau - t)k$$

$$= -\frac{1}{2}t\cos kt + \frac{\sin(2\tau - t)k}{4k}\Big|_0^t$$

$$= -\frac{1}{2}t\cos kt + \frac{\sin kt}{2k}.$$

(4) $t * \mathrm{sh}\, t = \mathrm{sh}\, t * t = \int_0^t \mathrm{sh}\,\tau \cdot (t-\tau)\mathrm{d}\tau$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{e}^{\tau}(t-\tau)\mathrm{d}\tau - \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{e}^{-\tau}(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t (t-\tau)\mathrm{d}\mathrm{e}^{\tau} + \frac{1}{2}\int_0^t (t-\tau)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\tau}$$

$$= \frac{1}{2}\left[(t-\tau)\mathrm{e}^{\tau}\Big|_0^t + \int_0^t \mathrm{e}^{\tau}\mathrm{d}\tau + (t-\tau)\mathrm{e}^{-\tau}\Big|_0^t + \int_0^t \mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{d}\tau\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-2t + \mathrm{e}^{\tau}\Big|_0^t + (-\mathrm{e}^{-\tau})\Big|_0^t\right]$$

$$= \mathrm{sh}\, t - t.$$

(5) $u(t-a) * f(t) = \int_0^t u(\tau - a)\cdot f(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

$$= \begin{cases} 0, & t < a, \\ \int_a^t f(t-\tau)\mathrm{d}\tau, & t \geqslant a. \end{cases}$$

(6) 当 $t < a$,

$$\delta(t-a) * f(t) = 0;$$

当 $t \geqslant a$,

$$\delta(t-a) * f(t) = \int_0^t \delta(\tau - a)\cdot f(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - a)\cdot f(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= f(t-\tau)\Big|_{\tau=a} = f(t-a).$$

11. 利用卷积定理证明下列等式.

(1) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right] = \mathscr{L}[f(t) * u(t)] = \dfrac{F(s)}{s}$;

(2) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}\right] = \dfrac{t}{2a}\sin at \ (a \neq 0)$.

证 (1) $\mathscr{L}[f(t) * u(t)] = \mathscr{L}[f(t)] \cdot \mathscr{L}[u(t)]$

$$= F(s) \cdot \frac{1}{s},$$

$$\mathscr{L}[f(t) * u(t)] = \mathscr{L}\left[\int_0^t u(\tau) \cdot f(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]$$

$$= \mathscr{L}\left[\int_0^t f(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]$$

$$= \mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right].$$

(2) $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+a^2)^2} = \dfrac{s}{s^2+a^2} \cdot \dfrac{1}{s^2+a^2}$, 由

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right] = \cos at, \quad \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+a^2}\right] = \frac{1}{a}\sin at,$$

有

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{a}\cos at * \sin at$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^t \sin a\tau \cdot \cos a(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{1}{2a}\int_0^t [\sin at + \sin(2a\tau - at)]\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{t\sin at}{2a} + \frac{1}{4a^2}\int_0^t \sin a(2\tau - t)\mathrm{d}a(2\tau - t)$$

$$= \frac{t\sin at}{2a} + \left[-\frac{1}{4a^2}\cos a(2\tau - t)\right]\Big|_0^t$$

$$= \frac{t\sin at}{2a}.$$

12. 解下列微分方程.

(1) $y'' - 2y' + y = e^t, y(0) = y'(0) = 0$;

(2) $y''' - 3y'' + 3y' - y = -1, y''(0) = y'(0) = 1, y(0) = 2$;

(3) $y'' + 3y' + y = 3\cos t, y(0) = 0, y'(0) = 1$;

(4) $y'' + 3y' + 2y = u(t-1), y(0) = 0, y'(0) = 1$;

(5) $y^{(4)} + y''' = \cos t, y(0) = y'(0) = y'''(0) = 0, y''(0) = c$(常数).

解 (1) 令 $Y(s) = \mathscr{L}[y(t)]$，在方程两边取拉氏变换，并用初始条件得

$$s^2Y(s) - 2sY(s) + Y(s) = \frac{1}{s-1},$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)^3},$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y(s)] = \mathrm{Res}\left[\frac{e^{st}}{(s-1)^3}, 1\right]$$

$$= \frac{1}{2!}(e^{st})''\Big|_{s=1} = \frac{1}{2!}t^2e^t.$$

(2) 在方程两边取拉氏变换，并用初始条件得

$$s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) - 3(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0))$$
$$+ 3(sY(s) - y(0)) - Y(s) = -\frac{1}{s},$$

$$(s^3 - 3s^2 + 3s - 1)Y(s) = 1 - \frac{1}{s} + 2(s^2 - 3s + 3) + (s - 3)$$

$$= \frac{1}{s}(2s^3 - 5s^2 + 4s - 1)$$

$$= \frac{1}{s}(2s-1)(s-1)^2,$$

即

$$Y(s) = \frac{2s-1}{s(s-1)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1},$$

故

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y(s)] = e^t + 1.$$

(3) 在两边取拉氏变换，并利用初始条件

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3sY(s) - 3y(0) + Y(s) = \frac{3s}{s^2+1},$$

即

$$(s^2+3s+1)Y(s)=\frac{3s}{s^2+1}+1,$$

$$Y(s)=\frac{1}{s^2+1},$$

故

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=\sin t.$$

(4) 如上述方法

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+3sY(s)-3y(0)+2Y(s)$$
$$=\mathscr{L}[u(t-1)],$$
$$(s+1)(s+2)Y(s)$$
$$=\mathscr{L}[u(t-1)]+1=1+\frac{e^{-s}}{s},$$

$$Y(s)=\frac{e^{-s}}{s(s+1)(s+2)}+\frac{1}{(s+1)(s+2)},$$

$$\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s(s+1)(s+2)}\right]+e^{-t}-e^{-2t}$$
$$=u(t-1)g(t-1)+e^{-t}-e^{-2t}$$
$$=u(t-1)\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2(t-1)}-e^{-(t-1)}\right]+e^{-t}-e^{-2t},$$

其中

$$g(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\right],$$

$$g(t)=\frac{e^{st}}{(s+1)(s+2)}\bigg|_{s=0}+\frac{e^{st}}{s(s+1)}\bigg|_{s=-2}+\frac{e^{st}}{s(s+2)}\bigg|_{s=-1}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t}-e^{-t}.$$

(5) 两边取拉氏变换,并利用初始条件可得:

$$s^4Y(s)-s^3y(0)-s^2y'(0)-sy''(0)-y'''(0)$$
$$+s^3Y(s)-s^2y(0)-sy'(0)-y''(0)=\frac{s}{s^2+1},$$

即

$$(s^4+s^3)Y(s)=\frac{s}{s^2+1}+(s+1)c,$$

$$Y(s)=\frac{1}{s^2(s+1)(s^2+1)}+\frac{c}{s^3},$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+1)(s^2+1)}\right]$$

$$=\lim_{s\to 0}\left[\frac{e^{st}}{(s+1)(s^2+1)}\right]'+\left.\frac{e^{st}}{s^2(s^2+1)}\right|_{s=-1}$$

$$+\left.\frac{e^{st}}{s^2(s+1)(s+j)}\right|_{s=j}+\left.\frac{e^{st}}{s^2(s+1)(s-j)}\right|_{s=-j}$$

$$=t-1+\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}(\cos t-\sin t),$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{c}{s^3}\right)=\frac{c}{2}t^3,$$

故

$$y(t)=t-1+\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}(\cos t-\sin t)+\frac{c}{2}t^3.$$

13. 解下列微分方程组

(1) $\begin{cases} y''-x''+x'-y=e^t-2, x(0)=x'(0)=0, \\ 2y''-x''-2y'+x=-t, y(0)=y'(0)=0. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x'+y''=\delta(t-1), x(0)=y(0)=0, \\ 2x+y'''=2u(t-1), y'(0)=y''(0)=0. \end{cases}$

解 (1) 令 $X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$, $Y(s)=\mathscr{L}[y(t)]$,对方程两边取拉氏变换,得

$$\begin{cases} s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-s^2X(s)+sx(0) \\ +x'(0)+sX(s)-x(0)-Y(s)=\mathscr{L}(e^t-2) \\ 2s^2Y(s)-2sy(0)-2y'(0)-s^2X(s)+sx(0) \\ +x'(0)-2sY(s)+2y(0)+X(s)=\mathscr{L}(-t) \end{cases}$$

即

$$\begin{cases}(s^2-1)Y(s)-(s^2-s)X(s)=\dfrac{1}{s-1}-\dfrac{2}{s}\\[2ex] 2s(s-1)Y(s)-(s^2-1)X(s)=-\dfrac{1}{s^2}\end{cases}$$

求解得 $X(s)=\dfrac{2s-1}{s^2(s-1)^2},Y(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}$,

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s-1}{s^2(s-1)^2}\right]=\lim_{s\to0}\left[\frac{2s-1}{(s-1)^2}e^{st}\right]'+\lim_{s\to1}\left(\frac{2s-1}{s^2}e^{st}\right)'$$

$$=-t+te^t,$$

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s-1)^2}\right]=\lim_{s\to0}\left[\frac{e^{st}}{(s-1)^2}\right]+\lim_{s\to1}\left(\frac{e^{st}}{s}\right)'$$

$$=1+\left.\frac{te^{st}s-e^{st}}{s^2}\right|_{s=1}$$

$$=1+te^t-e^t.$$

(2) 对方程组两边取拉氏变换可得

$$\begin{cases}sX(s)-x(0)+s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)=\mathscr{L}[\delta(t-1)]\\ 2X(s)+s^3Y(s)-s^2y(0)-sy'(0)-y''(0)=2\mathscr{L}[u(t-1)]\end{cases}$$

即

$$sX(s)+s^2Y(s)=\mathscr{L}[\delta(t-1)]=e^{-s},$$

$$2X(s)+s^3Y(s)=2\mathscr{L}[u(t-1)]=\frac{2e^{-s}}{s},$$

$$X(s)=\frac{e^{-s}}{s},\quad Y(s)=0,$$

故

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s}\right)=u(t-1),\quad y(t)=0.$$