P118 习题 4

1. 设随机变量 X 的分布律为

X	0	1	2
p_k	1/4	1/2	1/4

求 $E(X), E(X^2+2), D(X)$

分析：用公式 $E(g(X)) = \sum_i g(x_i)p_i$ 计算

解答： $E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = 0\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} = 1$

$$E(X^2+2) = \sum_{i=1}^{3}(x_i^2+2)p_i = (0^2+2)\cdot\frac{1}{4} + (1^2+2)\cdot\frac{1}{2} + (2^2+2)\cdot\frac{1}{4} = \frac{7}{2}$$

由于 $E(X^2) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p_i = 0^2\cdot\frac{1}{4} + 1^2\cdot\frac{1}{2} + 2^2\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{2}$

因此 $D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}$

注：也可以先计算 $E(X^2)$，再由 $E(X^2+2) = E(X^2)+2$ 和 $D(X) = E(X^2) - E^2(X)$ 计算后两者

2. 把 4 个球随机地投入 4 个盒子中，设 X 表示空盒子的个数，求 $E(X), D(X)$

解答：（先计算 X 的分布律：确定 X 可取得值及取每个值的概率）

X 可取的值为 0,1,2,3

$$P\{X=0\} = \frac{4\times3\times2\times1}{4^4} = \frac{6}{64}$$

$$P\{X=1\} = \frac{C_4^3\times C_3^1\times C_4^2\times2\times1}{4^4} = \frac{36}{64}$$

（先从 4 个盒子中选 3 个放球，剩下一个盒子空着；再从选中的 3 个盒子中选一个盒子放两个球；再决定 4 个球中哪两个放入这个盒子；最后将剩下两个球放入剩下两个盒子里）

$$P\{X=2\} = \frac{C_4^2\times(C_2^1\times C_4^3\times1+C_4^2)}{4^4} = \frac{21}{64}$$

（先从 4 个盒子中选 2 个放球，剩下两个盒子空着；在这两个盒子中放球时，分两种情况：一个盒子放 3 个另一个放 1 个，两个盒子各放 2 个。第一种情况时，先选一个盒子放三个球，再决定哪 3 个球放入这个盒子，剩下一个球放入另一个盒子；第二种情况时，选 2 个球放入第一个盒子，剩下两个只能放入第二个盒子）

$P\{X=3\}=\frac{C_4^1}{4^4}=\frac{1}{64}$

因此 X 的分布律为

X	0	1	2	3
P	6/64	36/64	21/64	1/64

从而 $E(X)=0\cdot\frac{6}{64}+1\cdot\frac{36}{64}+2\cdot\frac{21}{64}+3\cdot\frac{1}{64}=\frac{81}{64}$

由于 $E(X^2)=0^2\cdot\frac{6}{64}+1^2\cdot\frac{36}{64}+2^2\cdot\frac{21}{64}+3^2\cdot\frac{1}{64}=\frac{129}{64}$

因此 $D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{129}{64}-(\frac{81}{64})^2=\frac{1695}{4096}\approx 0.4138$

评分标准：分布律 40 分，期望 30 分，方差 30 分。

3. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}2(1-x) & 0<x<1\\ 0 & else\end{cases}$

求 $E(X),D(X)$

分析：用公式 $E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$ 计算

解答： $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 2x(1-x)dx=\frac{1}{3}$

由于 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^1 x^2f(x)dx=\int_0^1 2x^2(1-x)dx=\frac{1}{6}$

因此 $D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1}{6}-(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{18}$

4. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}1+x & -1\le x\le 0\\ 1-x & 0<x\le 1\\ 0 & else\end{cases}$

求 $E(X),D(X)$

解答： $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-1}^{0}x(1+x)dx+\int_{0}^{1}x(1-x)dx=-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=0$

由于 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)dx+\int_{0}^{1}x^2(1-x)dx=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$

因此 $D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1}{6}-0^2=\frac{1}{6}$

评分标准：期望 50 分，方差 50 分。

5. 设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数，每次命中目标的概率为 0.4，求 $E(X^2)$

解答 1：由题意知， $X\sim B(10,0.4)$

因此 $E(X)=10\times0.4=4$ ， $D(X)=10\times0.4\times0.6=2.4$

从而 $E(X^2)=D(X)+E^2(X)=2.4+4^2=18.4$

解答 2：由题意知， $X\sim B(10,0.4)$ ，其分布律为

$P\{X=k\}=C_{10}^{k}0.4^{k}0.6^{10-k}\quad k=0,1,2,\cdots,10$

因此 $E(X^2)=\sum_{k=0}^{10}k^2\cdot C_{10}^{k}0.4^{k}0.6^{10-k}=\sum_{k=1}^{10}k^2\cdot C_{10}^{k}0.4^{k}0.6^{10-k}$

$$=\sum_{k=1}^{10}(k^2-k+k)\cdot C_{10}^{k}0.4^{k}0.6^{10-k}=\sum_{k=1}^{10}(k^2-k)\cdot C_{10}^{k}0.4^{k}0.6^{10-k}+\sum_{k=1}^{10}k\cdot C_{10}^{k}0.4^{k}0.6^{10-k}$$

$$=\sum_{k=2}^{10}(k^2-k)\cdot C_{10}^{k}0.4^{k}0.6^{10-k}+\sum_{k=1}^{10}k\cdot C_{10}^{k}0.4^{k}0.6^{10-k}$$

$$=\sum_{k=2}^{10}(k^2-k)\cdot\frac{10!}{k!(10-k)!}0.4^{k}0.6^{10-k}+\sum_{k=1}^{10}k\cdot\frac{10!}{k!(10-k)!}0.4^{k}0.6^{10-k}$$

$$=\sum_{k=2}^{10}\frac{10!}{(k-2)!(10-k)!}0.4^{k}0.6^{10-k}+\sum_{k=1}^{10}\frac{10!}{(k-1)!(10-k)!}0.4^{k}0.6^{10-k}$$

$$=10\times9\times0.4^2\sum_{k=2}^{10}\frac{8!}{(k-2)!(10-k)!}0.4^{k-2}0.6^{10-k}+10\times0.4\sum_{k=1}^{10}\frac{9!}{(k-1)!(10-k)!}0.4^{k-1}0.6^{10-k}$$

$$=10\times9\times0.4^2\sum_{k=2}^{10}C_{8}^{k-2}0.4^{k-2}0.6^{10-k}+10\times0.4\sum_{k=1}^{10}C_{9}^{k-1}0.4^{k-1}0.6^{10-k}$$

$=10\times 9\times 0.4^2+10\times 0.4=18.4$

说明：$\sum_{k=2}^{10}C_8^{k-2}0.4^{k-2}0.6^{10-k}=C_8^0 0.4^0 0.6^8+C_8^1 0.4^1 0.6^7+\cdots+C_8^8 0.4^8 0.6^0=1$

$\sum_{k=1}^{10}C_9^{k-1}0.4^{k-1}0.6^{10-k}=C_9^0 0.4^0 0.6^9+C_9^1 0.4^1 0.6^8+\cdots+C_9^9 0.4^9 0.6^0=1$

6. 已知随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布，求 $E(3X-2)$

解答：由于 $X\sim P(2)$，因此 $E(X)=2$

从而 $E(3X-2)=3E(X)-2=3\times 2-2=4$

7. 设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2，一周 5 个工作日。若无故障，可获利润 10 万元；发生一次故障仍可获利润 5 万元；若发生两次故障，获利润 0 元，若发生 3 次或 3 次以上故障就要亏损 2 万元。求一周利润的数学期望。

解答：记 X 为一周内的故障次数，则 $X\sim B(5,0.2)$

记 Y 为一周利润，则

$P\{Y=10\}=P\{X=0\}=C_5^0 0.2^0 0.8^5=0.32768$

$P\{Y=5\}=P\{X=1\}=C_5^1 0.2^1 0.8^4=0.4096$

$P\{Y=0\}=P\{X=2\}=C_5^2 0.2^2 0.8^3=0.2048$

$P\{Y=-2\}=P\{X\ge 3\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}-P\{X=2\}=0.05792$

从而 $E(Y)=10\times 0.32768+5\times 0.4096+0\times 0.2048+(-2)\times 0.05792=5.20896$（万元）

8. 某工厂生产的圆盘，其直径在区间 (a,b) 内服从均匀分布，求该圆盘面积的数学期望

解答：由题目条件，直径 $X\sim U(a,b)$，从而 $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$，$D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

由此得 $E(X^2)=D(X)+E^2(X)=\dfrac{a^2+b^2+ab}{3}$

于是 $E(S)=E(\dfrac{\pi}{4}X^2)=\dfrac{\pi}{4}E(X^2)=\dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{a^2+b^2+ab}{3}=\dfrac{\pi(a^2+b^2+ab)}{12}$

9. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & else \end{cases}$

求：（1）$Y=2X$ 的数学期望；（2）$Y=e^{-2X}$ 的数学期望

解答：（1）$E(Y)=E(2X)=\int_{-\infty}^{+\infty} 2xf(x)dx=\int_0^{+\infty} 2xe^{-x}dx=2$

（2）$E(Y)=E(e^{-2X})=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x}f(x)dx=\int_0^{+\infty} e^{-2x}e^{-x}dx=\frac{1}{3}$

注：显然 $X\sim E(1)$ 是指数分布，因此 $E(X)=1$。所以（1）还可以这样做：

$E(Y)=E(2X)=2E(X)=2$

10.（本题为二维随机变量的函数的数学期望问题，不在学习范围内）

11.（本题为二维随机变量的函数的数学期望问题，不在学习范围内）

12. 设随机变量 X，Y 分别服从参数为 2 和 4 的指数分布

（1）求 $E(X+Y), E(2X-3Y^2)$

（2）设 X，Y 相互独立，求 $E(XY), D(X+Y)$

解答：由题目条件知，$X\sim E(2), Y\sim E(4)$，因此

$E(X)=\frac{1}{2}, D(X)=\frac{1}{4}, E(Y)=\frac{1}{4}, D(Y)=\frac{1}{16}$

（1）$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ 25 分

由于 $E(Y^2)=D(Y)+E^2(Y)=\frac{1}{8}$

因此 $E(2X-3Y^2)=2E(X)-3E(Y^2)=\frac{5}{8}$ 25 分

（2）当 X，Y 相互独立时

$E(XY)=E(X)E(Y)=\frac{1}{8}$ 25分

$D(X+Y)=D(X)+D(Y)=\frac{5}{16}$ 25分

说明：（2）中的两个公式只能在“X，Y相互独立”的条件下才成立，不能乱用。

13. 设 $X\sim N(1,2), Y\sim N(0,1)$，且X和Y相互独立，求随机变量 $Z=2X-Y+3$ 的密度函数

分析：X和Y是相互独立的正态分布，它们的线性组合 $Z=2X-Y+3$ 也是正态分布；对于正态分布，第一个参数就是数学期望，第二个参数就是方差。因此可以先求 $Z=2X-Y+3$ 的数学期望和方差，确定出该正态分布的参数，再写出密度函数

解答： $E(Z)=E(2X-Y+3)=2E(X)-E(Y)+3=5$

$D(Z)=D(2X-Y+3)=4D(X)+D(Y)=9$

由题目条件知， $Z\sim N(5,9)$，从而其密度函数为

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 3}e^{-\frac{(z-5)^2}{2\cdot 9}}=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-5)^2}{18}}$$

14. 设有10个猎人正等着野鸭飞过来，当一群野鸭飞过头顶时，他们同时开了枪，但他们每个人都是随机地、彼此独立地选择自己的目标。如果每个猎人独立地射中其目标的概率均为 p，试求当10只野鸭飞来时，没有被击中而飞走的野鸭数的数学期望

解答：记 $X_i=\begin{cases}1 & \text{第i只野鸭飞走（没有被击中）}\\ 0 & \text{第i只野鸭被击中}\end{cases}$，$i=1,2,\cdots,10$

对于野鸭i，每个猎人选择的目标是它的概率是 $\frac{1}{10}$，而在目标是它的情况下，它被射中的概率为 p；选择的目标不是它的概率是 $\frac{9}{10}$，而在目标不是它的情况下，它被射中的概率为0，因此根据全概率公式，每个猎人射中它的的概率是 $\frac{p}{10}$，从而

$P\{X_i=1\}=(1-\frac{p}{10})^{10}$，$P\{X_i=0\}=1-(1-\frac{p}{10})^{10}$

由此知 $E(X_i)=(1-\frac{p}{10})^{10}$

记 X 为飞走的野鸭数，则 $X=X_1+X_2+\cdots+X_{10}$ ，所以

$$E(X)=\sum_{i=1}^{10}E(X_i)=10(1-\frac{p}{10})^{10}$$

15. 一个匀质的骰子掷 10 次，求得到的总点数的数学期望

解答：记 $X_i(i=1,2,\cdots,10)$ 为第 i 次掷出的点数，由题目条件知 X_i 的分布律为

$$P\{X_i=k\}=\frac{1}{6}\quad k=1,2,3,4,5,6$$

从而 $E(X_i)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}\quad i=1,2,\cdots,10$

记 X 为 10 次的总点数，则 $X=X_1+\cdots+X_{10}$ ，从而

$$E(X)=E(X_1+\cdots+X_{10})=E(X_1)+\cdots+E(X_{10})=10E(X_1)=35$$

16. （本题为两个随机变量的协方差问题，不在学习范围内）

17. （本题为两个随机变量的协方差问题，不在学习范围内）

18. （本题为两个随机变量的协方差问题，不在学习范围内）

19. 已知随机变量 X 服从二项分布 $B(n,p)$ ，且 $E(X)=2.4, D(X)=1.44$ ，求此二项分布的参数 n,p 的值

解答：由题目条件知 $np=2.4, np(1-p)=1.44$ ，从而解得 $n=6, p=0.4$

20. 某流水生产线上每个产品不合格的概率为 $p(0<p<1)$ ，各产品合格与否相互独立，当出现一个不合格品时即停机检修。设开机后第一次停机时已生产的产品个数为 X，求 $E(X),D(X)$

解答：由题目条件，X 的分布律为

$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p\quad k=1,2,3,\cdots$$

因此$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot(1-p)^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}=p\cdot\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p}$

由于$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot(1-p)^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty}k^2(1-p)^{k-1}=p\cdot\frac{2-p}{p^3}=\frac{2-p}{p^2}$

因此$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1-p}{p^2}$

说明：数项级数$\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}$可以由函数项级数$\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$求出，也可以令$A=\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}$，由$A-A(1-p)=\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}-\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k}=\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}=\frac{1}{p}$求出；数项级数$\sum_{k=1}^{\infty}k^2(1-p)^{k-1}$可以由函数项级数$\sum_{k=1}^{\infty}k^2x^{k-1}=\frac{1+x}{(1-x)^3}$求出

21. 设随机变量 X 在区间（-1,1）内服从均匀分布，随机变量$Y=\begin{cases}-1 & X<0\\ 0 & X=0\\ 1 & X>0\end{cases}$

求$E(Y),D(Y)$

解答：由题目条件知

$P\{Y=-1\}=P\{X<0\}=\frac{1}{2}$

$P\{Y=0\}=P\{X=0\}=0$

$P\{Y=1\}=P\{X>0\}=\frac{1}{2}$

从而$E(Y)=(-1)\times\frac{1}{2}+0\times0+1\times\frac{1}{2}=0$

$E(Y^2)=(-1)^2\times\frac{1}{2}+0^2\times0+1^2\times\frac{1}{2}=1$

于是$D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=1$

22. 设随机变量 X 的密度函数为$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} & 0<x<\pi\\ 0 & else\end{cases}$

对 X 独立地观察 4 次，用 Y 表示观察值大于$\dfrac{\pi}{3}$的次数，求Y^2的数学期望

解答：由于$P\{X>\dfrac{\pi}{3}\}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{+\infty}f(x)dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}f(x)dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}dx=\dfrac{1}{2}$

因此根据题目条件，$Y\sim B(4,\dfrac{1}{2})$，从而$E(Y)=2,D(Y)=1$

于是$E(Y^2)=D(Y)+E^2(Y)=5$

23. 设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布，随机变量$X_k=\begin{cases}1 & Y>k\\ 0 & Y\le k\end{cases}\ (k=1,2)$

求（1）(X_1,X_2)的分布律；（2）$E(X_1+X_2)$

解答：由题目条件，Y 的密度函数为$f(y)=\begin{cases}e^{-y} & y>0\\ 0 & else\end{cases}$

（1）(X_1,X_2)可取的值为（0,0），（0,1），（1,0），（1,1）

$P\{X_1=0,X_2=0\}=P\{Y\le 1,Y\le 2\}=P\{Y\le 1\}=\int_{-\infty}^{1}f(y)dy=\int_{0}^{1}e^{-y}dy=1-e^{-1}$

$P\{X_1=0,X_2=1\}=P\{Y\le 1,Y>2\}=P\{\Phi\}=0$

$P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{Y>1,Y\le 2\}=P\{1<Y\le 2\}=\int_{1}^{2}e^{-y}dy=e^{-1}-e^{-2}$

$P\{X_1=1,X_2=1\}=P\{Y>1,Y>2\}=P\{Y>2\}=\int_{2}^{+\infty}e^{-y}dy=e^{-2}$

因此(X_1,X_2)的联合分布律为

X_1 \ X_2	0	1
0	$1-e^{-1}$	0
1	$e^{-1}-e^{-2}$	e^{-2}

（2）由联合分布律可以求得X_1的边缘分布律为

X_1	0	1
P	$1-e^{-1}$	e^{-1}

X_2的边缘分布律为

X_2	0	1

P	$1-e^{-2}$	e^{-2}

从而可得$E(X_1)=e^{-1},E(X_2)=e^{-2}$

因此$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=e^{-1}+e^{-2}$

24.（本题为两个随机变量的函数的数学期望问题，不在学习范围内）

25.（本题为两个随机变量的相关系数问题，不在学习范围内）

26.（本题为两个随机变量的相关系数问题，不在学习范围内）

27.（本题为两个随机变量的相关系数问题，不在学习范围内）