P91 习题 3

1. 设二维随机变量（X，Y）的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y} & x\ge 0, y\ge 0\\ 0 & else\end{cases}$$

求概率 $P\{1<X\le 2,3<Y\le 5\}$

解答：$P\{1<X\le 2,3<Y\le 5\}=F(2,5)-F(2,3)-F(1,5)+F(1,3)$

$=(1-2^{-2}-2^{-5}+2^{-2-5})-(1-2^{-2}-2^{-3}+2^{-2-3})-(1-2^{-1}-2^{-5}+2^{-1-5})+(1-2^{-1}-2^{-3}+2^{-1-3})$

$=1-2^{-2}-2^{-5}+2^{-7}-1+2^{-2}+2^{-3}-2^{-5}-1+2^{-1}+2^{-5}-2^{-6}+1-2^{-1}-2^{-3}+2^{-4}$

$=2^{-7}+2^{-4}-2^{-5}-2^{-6}=\dfrac{3}{128}$

2. 袋中有 5 只球（2 只白球，3 只红球），现进行有放回和无放回抽球两次，每次抽一只，定义随机变量

$$X=\begin{cases}0 & \text{第一次抽到红球}\\ 1 & \text{第一次抽到白球}\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}0 & \text{第二次抽到红球}\\ 1 & \text{第二次抽到白球}\end{cases}$$

试就有放回和无放回摸球两种情况分别求（X，Y）的联合分布律

解答：两种情况下（X，Y）的可能取值都是四个

$$(0,0)\quad (0,1)\quad (1,0)\quad (1,1)$$

（1）有放回抽球时

第二次抽球不受第一次抽球的影响，即 Y 的取值与 X 的取值相互独立，于是

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\}=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1\}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}P\{Y=0\}=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\}=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$$

从而（X，Y）的联合分布律为

X \ Y	0	1
0	9/25	6/25
1	6/25	4/25

（2）无放回抽球时

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\mid X=0\}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1\mid X=0\}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}P\{Y=0\mid X=1\}=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\mid X=1\}=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$$

从而（X，Y）的联合分布律为

X \ Y	0	1
0	3/10	3/10
1	3/10	1/10

3. 求第 2 题中的（X，Y）的边缘分布律，并就所得结果讨论联合分布律与边缘分布律的关系

解答：（1）有放回抽球时，（X，Y）的边缘分布律为

X \ Y	0	1	$p_{i\bullet}$
0	9/25	6/25	3/5
1	6/25	4/25	2/5
$p_{\bullet j}$	3/5	2/5	

（2）无放回抽球时，（X，Y）的边缘分布律为

X \ Y	0	1	$p_{i\bullet}$
0	3/10	3/10	3/5
1	3/10	1/10	2/5
$p_{\bullet j}$	3/5	2/5	

结果表明不同的联合分布律求出的边缘分布律可以是相同的，因此边缘分布不能惟一确定联合分布

4. 设二维随机变量（X，Y）只能取（-1,0），（0,0），（0,1）三对数，且取这些数的概率分别是$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}$

（1）写出（X，Y）的联合分布律；

（2）求联合分布函数$F(x,y)$

解答：（1）（X，Y）的联合分布律为

X \ Y	0	1
-1	1/2	0
0	1/3	1/6

（2）当$x<-1$时，三个点都不能满足$\{X\le x,Y\le y\}$，因此

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=P\{\Phi\}=0$$

当$y<0$时，三个点都不能满足$\{X\le x,Y\le y\}$，因此

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=P\{\Phi\}=0$$

当$-1\le x<0$且$0\le y$时，只有点（-1,0）满足$\{X\le x,Y\le y\}$，因此

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=P\{(-1,0)\}=\frac{1}{2}$$

当$0\le x$且$0\le y<1$时，点（-1,0）和（0,0）满足$\{X\le x,Y\le y\}$，因此

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=P\{(-1,0)\}+P\{(0,0)\}=\frac{5}{6}$$

当$0\le x$且$1\le y$时，所有三个点都满足$\{X\le x,Y\le y\}$，因此

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=P\{(-1,0)\}+P\{(0,0)\}+P\{(0,1)\}=1$$

综上所述，联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & x<-1\ or\ y<0\\ 1/2 & -1\le x<0,0\le y\\ 5/6 & 0\le x,0\le y<1\\ 1 & 0\le x,1\le y\end{cases}$$

评分标准：满分 100 分。

联合分布律 20 分；联合分布函数共 4 段，每段 20 分。

5. 设 X 与 Y 独立，它们的分布律分别由下表给出，求（X，Y）的联合分布律

X	-2	-1	0	1/2
$p_{i\bullet}$	1/4	1/3	1/12	1/3

Y	-1/2	1	3
$p_{\bullet j}$	1/2	1/4	1/4

解答：由于 X 与 Y 独立，因此

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$$

从而（X，Y）的联合分布律为

X \ Y	-1/2	1	3	$p_{i\bullet}$
-2	1/8	1/16	1/16	1/4
-1	1/6	1/12	1/12	1/3
0	1/24	1/48	1/48	1/12
1/2	1/6	1/12	1/12	1/3
$p_{\bullet j}$	1/2	1/4	1/4	

说明：根据独立性等式，联合分布律中的每个概率恰好就是它所在行的边缘概率乘以它所在列的边缘概率。

评分标准：满分 100 分。

联合分布律每错一个扣 10 分。

6. （本题为条件分布问题，不在学习范围内）

7. 设二维随机变量（X，Y）的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} a(6-x-y) & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2 \\ 0 & else \end{cases}$

（1）确定常数 a；

（2）求概率 $P\{X\le 0.5, Y\le 1.5\}$

（3）求概率 $P\{(X,Y)\in D\}$，这里 D 是由 $x=0,y=0,x+y=1$ 这 3 条直线所围成的三角形区域

解答：（1）根据联合密度的规范性

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^1 dx\int_0^2 a(6-x-y)dy=\int_0^1 a(10-2x)dx=9a$$

因此 $a=\frac{1}{9}$，即联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{9}(6-x-y) & 0\le x\le 1,0\le y\le 2\\ 0 & else\end{cases}$

（2）$P\{X\le 0.5,Y\le 1.5\}=\int_{-\infty}^{0.5}dx\int_{-\infty}^{1.5}f(x,y)dy$

$$=\int_0^{0.5}dx\int_0^{1.5}\frac{1}{9}(6-x-y)dy=\int_0^{0.5}(\frac{7}{8}-\frac{1}{6}x)dx=\frac{5}{12}$$

（3）$P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{1}{9}(6-x-y)dy$

$$=\int_0^1(\frac{11}{18}-\frac{2}{3}x+\frac{1}{18}x^2)dx=\frac{8}{27}$$

评分标准：满分 100 分。

三问每问 30 分，作业整洁分 10 分。

8. 设二维随机变量（X，Y）的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)} & x>0,y>0\\ 0 & else\end{cases}$

（1）求分布函数 $F(x,y)$

（2）求概率 $P\{Y\le X\}$

解答：（1）当 $x\le 0$ 或 $y\le 0$ 时

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{y}0dy=0$$

当 $x>0$ 且 $y>0$ 时

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dy=\int_0^x dx\int_0^y f(x,y)dy=\int_0^x dx\int_0^y 2e^{-(2x+y)}dy$$

$$=\int_0^x 2e^{-2x}(1-e^{-y})dx=(1-e^{-2x})(1-e^{-y})$$

因此 $F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}) & x>0,y>0\\ 0 & else\end{cases}$

（2）$P\{Y\le X\}=\iint\limits_{y\le x} f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^x f(x,y)dy$

$=\int_0^{+\infty}dx\int_0^x 2e^{-(2x+y)}dy=\int_0^{+\infty}(2e^{-2x}-2e^{-3x})dx=\frac{1}{3}$

评分标准：满分 100 分。

第（1）问 60 分，其中联合分布函数每段 30 分；第（2）问 40 分。

9. 向一个无限平面靶射击，设命中点（X，Y）的密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi(1+x^2+y^2)^2}\quad -\infty<x,y<+\infty$$

求命中点与靶心（坐标原点）的距离不超过 a 的概率

解答：$P\{X^2+Y^2\le a^2\}=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} f(x,y)dxdy$

（在极坐标系中计算该二重积分）

积分区域在极坐标中就是 $0\le\theta\le 2\pi, 0\le\rho\le a$

密度函数在极坐标中为 $\frac{1}{\pi(1+\rho^2)^2}$ ，因此

$$P\{X^2+Y^2\le a^2\}=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} f(x,y)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\frac{1}{\pi(1+\rho^2)^2}\rho d\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{a^2}{2\pi(1+a^2)}d\theta=\frac{a^2}{1+a^2}$$

10. 设二维随机变量（X，Y）在区域 B 上服从均匀分布，B 是由 x 轴、y 轴及直线 y=2x+1 所围成的三角形区域，试求：

（1）（X，Y）的密度函数 $f(x,y)$

（2）（X，Y）的分布函数 $F(x,y)$

解答：（1）由于 B 的面积为$\frac{1}{4}$，因此根据均匀分布的定义，（X，Y）的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}4 & (x,y)\in B\\ 0 & else\end{cases}$$

（2）当$x<-\frac{1}{2}$或$y<0$时

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{y}0dy=0$$

当$-\frac{1}{2}\le x\le 0,0\le y\le 2x+1$时

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dy=\int_{0}^{y}dy\int_{\frac{y-1}{2}}^{x}f(x,y)dx=\int_{0}^{y}dy\int_{\frac{y-1}{2}}^{x}4dx=4xy-y^2+2y$$

当$-\frac{1}{2}\le x\le 0,2x+1<y$时

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dy=\int_{-\frac{1}{2}}^{x}dx\int_{0}^{2x+1}f(x,y)dy=\int_{-\frac{1}{2}}^{x}dx\int_{0}^{2x+1}4dx=4x^2+4x+1$$

当$0<x,0\le y\le 1$时

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dy=\int_{0}^{y}dy\int_{\frac{y-1}{2}}^{0}f(x,y)dx=\int_{0}^{y}dy\int_{\frac{y-1}{2}}^{0}4dx=2y-y^2$$

当$0<x,1<y$时

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dy=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}dx\int_{0}^{2x+1}f(x,y)dy=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}dx\int_{0}^{2x+1}4dx=1$$

综上所述，$F(x,y)=\begin{cases}0 & x<-\frac{1}{2}\text{或 }y<0\\ 4xy+2y-y^2 & -\frac{1}{2}\le x\le 0,0\le y\le 2x+1\\ 4x^2+4x+1 & -\frac{1}{2}\le x\le 0,2x+1<y\\ 2y-y^2 & 0<x,0\le y\le 1\\ 1 & 0<x,1<y\end{cases}$

（讨论时等号带在哪边？从计算的角度，题目条件中有“在区域 B **上**”，说明 B 为闭区域，其边界上密度不为 0，因此在讨论x,y的范围时应该在区域内的部分加等号；从分布函数的性质角度，由于分布函数关于x,y均右连续，因此把等号带在区间左端点

一定不会错；从分布函数与密度函数的关系角度，分布函数是密度函数的二重积分，一定连续，所以等号带在哪边都可以。）

11. 分别求第 10 题中随机变量 X 和 Y 的边缘密度函数，并求条件概率

$$P\{-\frac{1}{4} < X \le 0 \Big| \frac{1}{2} < Y \le 1\}$$

解答：（1）X 的边缘密度

当 $x < -\frac{1}{2}$ 或 $0 < x$ 时

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} 0dy = 0$$

当 $-\frac{1}{2} \le x \le 0$ 时

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{0}^{2x+1} f(x,y)dy = \int_{0}^{2x+1} 4dy = 8x+4$$

因此 X 的边缘密度为 $f_X(x) = \begin{cases} 8x+4 & -\frac{1}{2} \le x \le 0 \\ 0 & else \end{cases}$

（2）Y 的边缘密度

当 $y < 0$ 或 $1 < y$ 时，

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0dx = 0$$

当 $0 \le y \le 1$ 时

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{\frac{y-1}{2}}^{0} f(x,y)dx = \int_{\frac{y-1}{2}}^{0} 4dx = 2-2y$$

因此 Y 的边缘密度为 $f_Y(y) = \begin{cases} 2-2y & 0 \le y \le 1 \\ 0 & else \end{cases}$

（3）$P\{-\frac{1}{4} < X \le 0 \Big| \frac{1}{2} < Y \le 1\}$ 的概率

$$P\{-\frac{1}{4} < X \le 0, \frac{1}{2} < Y \le 1\} = \int_{-\frac{1}{4}}^{0} dx \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x,y)dy = \int_{-\frac{1}{4}}^{0} dx \int_{\frac{1}{2}}^{2x+1} f(x,y)dy$$

$$=\int_{-\frac{1}{4}}^{0}dx\int_{\frac{1}{2}}^{2x+1}4dy=\int_{-\frac{1}{4}}^{0}(8x+2)dx=\frac{1}{4}$$

$$P\{\frac{1}{2}<Y\le 1\}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}f_Y(y)dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2-2y)dy=\frac{1}{4}$$

因此 $P\{-\frac{1}{4}<X\le 0\Big|\frac{1}{2}<Y\le 1\}=\dfrac{P\{-\frac{1}{4}<X\le 0,\frac{1}{2}<Y\le 1\}}{P\{\frac{1}{2}<Y\le 1\}}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}=1$

说明：求 X 的边缘密度时，如上题所述，边界 $x=0(0\le y\le 1)$ 上密度不为 0，因此应将 $x=0$ 的情况归并到 $-\frac{1}{2}\le x\le 0$ 中，而不应该归并为 $x\ge 0$

12. 设二维随机变量（X，Y）的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{2}xy^2 & 0\le x\le 2,0\le y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$

求边缘密度函数 $f_X(x),f_Y(y)$

解答：（1）X 的边缘密度

当 $x<0$ 或 $2<x$ 时

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}0dy=0$$

当 $0\le x\le 2$ 时

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{0}^{1}f(x,y)dy=\int_{0}^{1}\frac{3}{2}xy^2dy=\frac{1}{2}x$$

因此 X 的边缘密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & 0\le x\le 2\\ 0 & else\end{cases}$

（2）Y 的边缘密度

当 $y<0$ 或 $1<y$ 时，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}0dx=0$$

当 $0\le y\le 1$ 时

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_0^2 f(x,y)dx=\int_0^2 \frac{3}{2}xy^2dx=3y^2$

因此 Y 的边缘密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}3y^2 & 0\le y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$

评分标准：满分 100 分。

每个边缘密度 50 分。在每个边缘密度函数中，每段 25 分，若不分情况讨论扣 30 分。

13. 设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}4.8y(2-x) & 0\le x\le 1, 0\le y\le x\\ 0 & else\end{cases}$

求边缘密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$

解答：（1）X 的边缘密度

当 $x<0$或$1<x$时

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty} 0dy=0$

当$0\le x\le 1$时

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_0^x f(x,y)dy=\int_0^x 4.8y(2-x)dy=2.4(2x^2-x^3)$

因此 X 的边缘密度为 $f_X(x)=\begin{cases}2.4(2x^2-x^3) & 0\le x\le 1\\ 0 & else\end{cases}$

（2）Y 的边缘密度

当 $y<0$或$1<y$时，

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} 0dx=0$

当$0\le y\le 1$时

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_y^1 f(x,y)dx=\int_y^1 4.8y(2-x)dx=2.4(3y-4y^2+y^3)$

因此 Y 的边缘密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}2.4(3y-4y^2+y^3) & 0\le y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$

14.（本题为条件分布问题，不在学习范围内）

15.（本题为条件分布问题，不在学习范围内）

16. 判断第 3 题中随机变量 X 与 Y 的独立性

解答：（1）有放回抽球时，（X，Y）的联合分布律与边缘分布律为

X \ Y	0	1	$p_{i\bullet}$
0	9/25	6/25	3/5
1	6/25	4/25	2/5
$p_{\bullet j}$	3/5	2/5	

经检验，$p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}$ 对任何 i, j 都成立，故此时 X 与 Y 相互独立；

（2）无放回抽球时，（X，Y）的联合分布律与边缘分布律为

X \ Y	0	1	$p_{i\bullet}$
0	3/10	3/10	3/5
1	3/10	1/10	2/5
$p_{\bullet j}$	3/5	2/5	

由于 $P\{X=0, Y=0\} = \frac{3}{10} \neq \frac{9}{25} = P\{X=0\}P\{Y=0\}$，故此时 X 与 Y 不相互独立

17. 二维随机变量（X，Y）的分布律由下表给出：

X \ Y	1	2	3
1	1/6	1/9	1/18
2	1/3	a	b

问当 a，b 取何值时，X 与 Y 独立？

解答：由（X，Y）的联合分布律计算边缘分布律

X \ Y	1	2	3	$p_{i\bullet}$
1	1/6	1/9	1/18	1/3
2	1/3	a	b	a+b+1/3
$p_{\bullet j}$	1/2	a+1/9	b+1/18	

由于 X 与 Y 独立，因此 $\frac{1}{9} = \frac{1}{3} \cdot (a + \frac{1}{9})$，解得 $a = \frac{2}{9}$

由 $\frac{1}{18}=\frac{1}{3}\cdot(b+\frac{1}{18})$ 解得 $b=\frac{1}{9}$

18. 判断第 12 题和第 13 题中随机变量 X 与 Y 的独立性

解答：（1）第 12 题中

联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{2}xy^2 & 0\le x\le 2, 0\le y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$

X 的边缘密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & 0\le x\le 2\\ 0 & else\end{cases}$

Y 的边缘密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}3y^2 & 0\le y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$

由于 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$，因此 X 与 Y 相互独立

（2）第 13 题中

联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}4.8y(2-x) & 0\le x\le 1, 0\le y\le x\\ 0 & else\end{cases}$

X 的边缘密度为 $f_X(x)=\begin{cases}2.4(2x^2-x^3) & 0\le x\le 1\\ 0 & else\end{cases}$

Y 的边缘密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}2.4(3y-4y^2+y^3) & 0\le y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$

显然 $f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$，因此 X 与 Y 不相互独立

19. 设随机变量 X 与 Y 独立，它们均服从[-1,1]上的均匀分布，求二次方程 $t^2+Xt+Y=0$ 有实根的概率

解答：X 服从均匀分布，因此其密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & x\in[-1,1]\\ 0 & else\end{cases}$

Y 服从均匀分布，因此其密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & y\in[-1,1]\\ 0 & else\end{cases}$

由于 X 与 Y 独立，因此（X，Y）的联合密度为

$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4} & x\in[-1,1],\ y\in[-1,1]\\ 0 & else\end{cases}$

二次方程 $t^2+Xt+Y=0$ 有实根的充要条件为 $X^2-4Y\geq 0$，其概率为

$P\{X^2-4Y\geq 0\}=\iint\limits_{x^2-4y\geq 0} f(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{\frac{x^2}{4}}f(x,y)dy=\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{\frac{x^2}{4}}\frac{1}{4}dy=\frac{13}{24}$

评分标准：满分 100 分。

计算联合密度 40 分，将要计算的事件表示出来 20 分，计算概率 40 分。

20. 设二维随机变量（X，Y）的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xe^{-x}}{(1+y)^2} & x>0,\ y>0\\ 0 & else\end{cases}$

讨论 X 与 Y 的独立性

解答：计算得 X 与 Y 的边缘密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}xe^{-x} & x>0\\ 0 & else\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{(1+y)^2} & y>0\\ 0 & else\end{cases}$$

由于 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$，因此 X 与 Y 相互独立

评分标准：满分 100 分。

计算边缘密度每个 40 分（边缘密度为分段函数，每段 20 分，不分段扣 30 分），判断独立原因正确 20 分。

21. 设二维随机变量（X，Y）的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-(x+y)} & x\geq 0,\ y\geq 0\\ 0 & else\end{cases}$$

讨论 X 与 Y 的独立性

解答：计算 X 的边缘分布函数

当 $x<0$ 时，$F(x,y)=0$，因此

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=0$$

当 $x\geq 0$ 时

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=\lim_{y\to+\infty}(1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-(x+y)})=1-e^{-x}$$

所以 X 的边缘分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-x} & x\geq 0\\ 0 & else\end{cases}$

类似可得 Y 的边缘分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-y} & y\geq 0\\ 0 & else\end{cases}$

由于 $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$，因此 X 与 Y 相互独立

说明：也可以先求 $F(x,y)$ 的二阶混合偏导，得到联合密度函数 $f(x,y)$，再求边缘密度 $f_X(x),\ f_Y(y)$，之后再根据 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$ 判断独立。当然这样做会更麻烦一些。

22.（本题为二维随机变量的函数的分布问题，不在学习范围内）

23.（本题为二维随机变量的函数的分布问题，不在学习范围内）

24.（本题为二维随机变量的函数的分布问题，不在学习范围内）

25.（本题为二维随机变量的函数的分布问题，不在学习范围内）

26.（本题为二维随机变量的函数的分布问题，不在学习范围内）