第五节　线性系统的稳定性分析

一、稳定的基本概念

如果一个稳定的系统在外作用的影响下，离开了初始的稳定状态，但是当外作用消失后，系统经过足够长的时间它还能回复到原来的稳定状态，则称这样的系统为稳定的系统 。否则为不稳定的系统。

或定义为：设初始条件为零时，输入为一个理想的单位脉冲函数$\delta(t)$，即R(S）=1。当作用时间t>0时，$\delta(t)$=0，这相当给系统一个扰动。如果系统的输出脉冲响应

$$\lim_{t\to\infty} c(t)=0$$

即输出增量收敛于原平衡工作点，则系统是稳定的。

二 稳定的必要条件

闭环系统的传递函数为：

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}=\frac{B(s)}{D(s)}$$

$$(m\le n)$$

设 $p_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为系统特征方程 $D(s)=0$ 的根，而且彼此不等。则系统的脉冲响应可写为：

$$C(s)=\frac{B(s)}{D(s)}R(s)=\frac{B(s)}{D(s)}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{s-p_i}+\sum_{j=1}^{r}\frac{\alpha_j s+\beta_j}{[s-(\sigma_j+j\omega_j)][s-(\sigma_j-j\omega_j)]}$$

$$C(s)=\frac{B(s)}{D(s)}R(s)=\frac{\mathrm{B(s)}}{\mathrm{D(s)}}=\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{s-p_i}+\sum_{j=1}^{r}\frac{\alpha_j s+\beta_j}{[s-(\sigma_j+j\omega_j)][s-(\sigma_j-j\omega_j)]}$$

对上式进行拉氏反变换，得到理想脉冲函数作用下的输出：

$$c(t)=\sum_{i=1}^{k}c_i e^{p_i t}+\sum_{j=1}^{r}e^{\sigma_j t}(A_j\cos\omega_j t+B_j\sin\omega_j t)\qquad (t\geq 0)$$

上式中第一项是指数函数，根为 p_i ；第二项是指数函数与正弦函数的乘积，根的实部为 σ_j 。要想系统稳定，两个指数函数必须是衰减的，也就是说，p_i 和 σ_j 必须是负数。因此有，线性系统稳定的充要条件是：闭环系统特征方程的所有根均具有负实部；或者说，闭环传递函数的极点均分布在复平面的左半部。

如果特征方程中有一个正实根，它所对应的指数项将随时间单调增长；

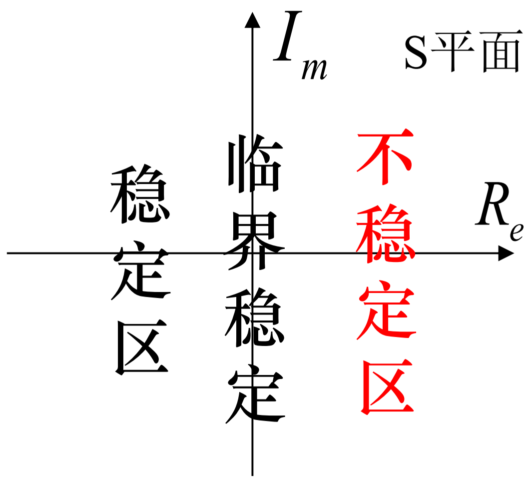
如果特征方程中有一对实部为正的共轭复根，它的对应项是发散的周期振荡。

上述两种情况下系统是不稳定的。

如果特征方程中有一个零根(1/s项)，拉氏反变换对应于一个常系数项，系统可在任何状态下平衡，称为随遇平衡状态；

如果特征方程中有一对共轭虚根，它的对应于等幅的周期振荡，称为临界平衡状态（或临界稳定状态）。

从控制工程的角度认为临界稳定状态和随遇平衡状态属于不稳定。



注意：稳定性是线性定常系统的一个属性，只与系统本身的结构参数有关，表现在传递函数中就只与特征根有关，即只与极点有关，与零点无关，也与输入输出信号无关；

对于一阶系统，$a_1 s + a_0 = 0, s = -\dfrac{a_0}{a_1}$，只要 a_0, a_1都大于零，系统是稳定的。

对于二阶系统，$a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0, s_{1,2} = \dfrac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}$

只有 a_0, a_1, a_2 都大于零，系统才稳定。（负实根或实部为负）

对于高阶系统特征方程：

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

其系统稳定的必要条件是：上式中各项系数为正数。

对于三阶或以上系统，求根是很烦琐的。于是就有了以下描述的代数稳定性判据。

三、 劳斯稳定性判据

设线性系统的特征方程为

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

式中 $a_0 > 0$，构造如下劳斯行列表：

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

$$D(s)=a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

劳斯行列表:

$$\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
s^{n-2} & c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{43} & \cdots \\
s^{n-3} & c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & \cdots \\
s^{n-4} & c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s^0 & c_{1,n+1} & c_{2,n+1} & c_{3,n+1} & c_{4,n+1} & \cdots
\end{array}$$

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

劳斯行列表:

$$\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
s^{n-2} & c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{43} & \cdots \\
s^{n-3} & c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & \cdots \\
s^{n-4} & c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s^0 & c_{1,n+1} & c_{2,n+1} & c_{3,n+1} & c_{4,n+1} & \cdots
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l|lllll}
s^{n} & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
s^{n-2} & c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{43} & \cdots \\
s^{n-3} & c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & \cdots \\
s^{n-4} & c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s^{0} & c_{1,n+1} & c_{2,n+1} & c_{3,n+1} & c_{4,n+1} & \cdots
\end{array}
$$

表中，最左边一列和最上面两行构成劳思行列表的表头，表中其它各行各列的元素值按如下公式计算:

$$
c_{13} = -\frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}
$$

$$
c_{23} = -\frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}
$$

$$
c_{33} = -\frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} \cdots, \qquad c_{14} = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_{13} & c_{23} \end{vmatrix}}{c_{13}} = \frac{c_{13} a_3 - a_1 c_{23}}{c_{13}}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
s^{n} & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
s^{n-2} & c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{43} & \cdots \\
s^{n-3} & c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & \cdots \\
s^{n-4} & c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s^{0} & c_{1,n+1} & c_{2,n+1} & c_{3,n+1} & c_{4,n+1} & \cdots
\end{array}
$$

$$c_{24} = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ c_{13} & c_{33} \end{vmatrix}}{c_{13}} = \frac{c_{13}a_5 - a_1c_{33}}{c_{13}}$$

$$c_{34} = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ c_{13} & c_{43} \end{vmatrix}}{c_{13}} = \frac{c_{13}a_7 - a_1c_{43}}{c_{13}}\cdots,$$

以下各行各列的元素值可依上几式的规律依次算得.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
s^{n-2} & c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{43} & \cdots \\
s^{n-3} & c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & \cdots \\
s^{n-4} & c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s^0 & c_{1,n+1} & c_{2,n+1} & c_{3,n+1} & c_{4,n+1} & \cdots
\end{array}
$$

则线性系统稳定的充要条件是

劳斯表中第一列各值均大于零．如劳斯表第一列中出现小于零的数值，系统就不稳定，且第一列各数值符号的改变次数，就是系统特征方程的正实部根的数目，即系统在极点平面的右半平面上的极点个数.

[例1]：特征方程为：$a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0=0$ ，试判断稳定性。

[解]：劳斯阵为：

$$
\begin{array}{c|cc}
s^3 & a_3 & a_1 \\
s^2 & a_2 & a_0 \\
s^1 & \dfrac{a_2a_1-a_3a_0}{a_2} & 0 \\
s^0 & a_0 & 0
\end{array}
$$

稳定的充要条件为：

- a_3,a_2,a_1,a_0均大于零
- 且 $a_1a_2-a_3a_0>0$

此题说明四阶系统的判断也简单，只要各阶系数>0，以及它们的乘积之差>0就行了

例2: 设系统的特征方程为 $D(s)=s^3+4s^2+100s+500=0$

用劳思稳定判据判别系统是否稳定?

解:

s^3	1	100
s^2	4	500
s^1	-25	0
s^0	500	0

因为第一列有**-25,** 且正、负号改变两次**,** 所以系统不稳定**,** 且有两个根在**s**的右半平面上**.**

例3: 设系统的特征方程为 $D(s)=s^5+2s^4+s^3+3s^2+4s+5=0$

用劳思稳定判据判别系统是否稳定?

解:

s^5	1	1	4
s^4	2	3	5
s^3	-0.5	1.5	
s^2	9	5	
s^1	16/9		
s^0	5		

因为第一列有**-0.5**, 且正、负号改变两次, 所以系统不稳定, 且有两个根在**s**的右半平面上.

四、两种特殊情况的处理.

第一种特殊情况是在计算各行各列元素值的过程中出现某一行第一列的元素值为零，而这一行其它各列的元素值不全为零.

例3: 设系统的特征方程为 $D(s)=s^4+2s^3+s^2+2s+1=0$

解:

$$
\begin{array}{c|cccl}
s^4 & 1 & 1 & 1 & \\
s^3 & 2 & 2 & 0 & \\
s^2 & 0(\varepsilon) & 1 & 0 & \\
s^1 & \dfrac{2\varepsilon-2}{\varepsilon} & 0 & 0 & \Rightarrow 2-\dfrac{2}{\varepsilon} \\
s^0 & 1 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

用一大于零的无穷小量 ε 代替第三行第一列的零参与以下各行各列元素值的计算.

因为 ε 是大于零的无穷小量，所以 $(2-2/\varepsilon)<0$

系统不稳定，且有两个根在**s**的右半平面上. 教材介绍了处理第一种特殊情况的另一种方法,也可行，不再介绍.

❑第二种特殊情况是劳斯阵某行系数全为零。表明特征方程具有大小相等而位置径向相反的根。至少有下述几种情况之一出现，如：大小相等，符号相反的一对实根，或一对共轭虚根，或对称于虚轴的两对共轭复根，或是对称于实轴的两对共轭复根。

例如：$\Delta_1=(s^2-4)(s^2+25)(s+2)=s^5+2s^4+24s^3+48s^2-25s-50$

$$\Delta_2=(s^2+4)$$

❑其根为 $s=\pm 2$ $\quad s=\pm j5$ $\quad s=-2$

$$s=\pm j2$$

[处理办法**]：**可将不为零的最后一行的系数组成辅助方程，

对此辅助方程式对s求导所得方程的系数代替全零的行。

再通过辅助方程求解大小相等，位置径向相反的根，辅助方程应为偶次数的，从而判断系统的稳定情况。

[例]: $s^6+2s^5+8s^4+12s^3+20s^2+16s+16=0$

s^6	1	8	20	16				
s^5	2	12	16	0	$\Rightarrow$	1	6	8
s^4	2	12	16	0	$\Rightarrow$	1	6	8
s^3	0	0	0	0	$\Rightarrow$	1	3	0
s^2	3	8	0	0	$\Rightarrow$	3	8	0
s^1	1/3	0	0	0				
s^0	8	0	0	0				

辅助方程为：$s^4+6s^2+8=0$ ，
求导得：$4s^3+12s=0$ ，
或 $s^3+3s=0$，用1，3，0代替全零行即可,再继续做。

从第一列都大于零可见，好象系统是稳定的。注意此时还要计算大小相等位置径向相反的根再来判稳。由辅助方程求得：

$$(s^2+2)(s^2+4)=0\ ,\quad s_{1,2}=\pm j\sqrt{2},\quad s_{3,4}=\pm j2$$

纯虚根，此时系统是临界稳定的。控制工程上认为是不稳定的。

五、劳斯稳定性判据的应用

❑ **判定控制系统的稳定性**

例：系统的特征方程为：$s^4+2s^3+3s^2+4s+5=0$，试判断系统的稳定性

[解]：排列劳斯阵如下：

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 3 & 5 \\ s^3 & 2 & 4 & 0 \\ s^2 & 1 & 5 & 0 \\ s^1 & -6 & 0 & 0 \\ s^0 & 5 & 0 & 0 \end{array}$$

因为劳斯阵第一列不全为正，所以，系统不稳定。

由于劳斯阵第一列有两次符号变化，所以系统在s右半平面有两个极点。

[例]系统的特征方程为： $s^5+2s^4+24s^3+48s^2+23s+46=0$ 该系统稳定吗？求出每一个极点并画出极点分布图。

[解]：劳斯阵如下

s^5	1	24	23
s^4	2	48	46
s^3	0	0	0

s^3行全为零。由前一行系数构成辅助方程得：

$Q(s)=2s^4+48s^2+46$ 或 $Q(s)=s^4+24s^2+23$

其导数为：$\dot{Q}(s)=4s^3+48s$ 将 4,48 或 1,12 代替行 s^3 可继续排列劳斯阵如下：

s^5	1	24	23
s^4	1	24	23
s^3	1	12	0
s^2	12	23	0
s^1	10	0	0
s^0	23	0	0

- $a_i>0,(i=0\sim5)$
- 因为s^3行全为零，所以特征方程必有特殊的根。

求解如下：

$$令Q(s)=0,有(s^2+23)(s^2+1)=0,$$

$$\therefore s_{1,2}=\pm j\sqrt{23}, s_{3,4}=\pm j1$$

由于有特征根为共轭虚数，所以系统是临界稳定，称为不稳定

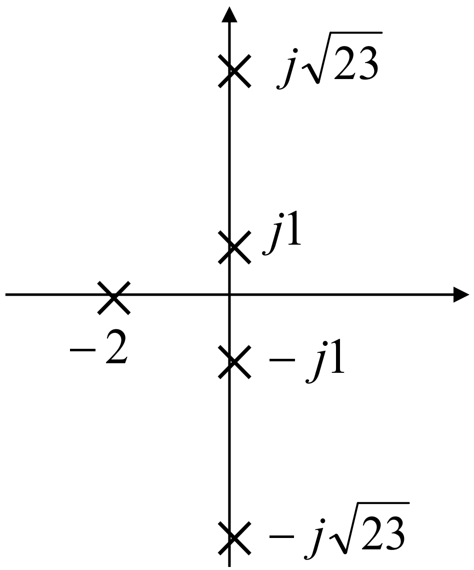
5次方程有5个根

设剩余的一个根为-p。则: $(s+p)(s^4+24s^2+23)=0$ **，整理得:**

$$s^5+ps^4+24s^3+24ps^2+23s+23p=0$$

与原方程 $s^5+2s^4+24s^3+48s^2+23s+46=0$ **比较系数得：-p= -2**

极点分布如下:



注意:

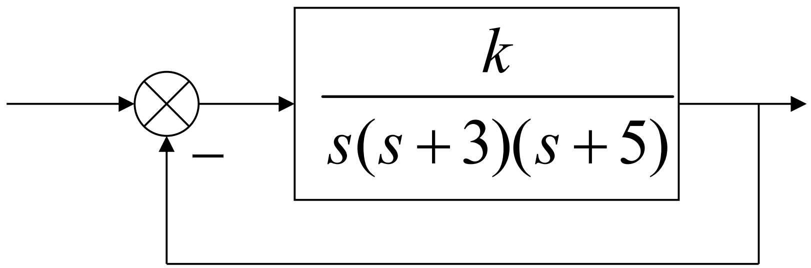
劳斯判据实际上只能判断代数方程的根是在s平面左半平面还是在右半平面。对于虚轴上的根或对称于虚轴的根，要用辅助方程求出。

若代数方程有右半平面的根，则一定在劳斯表的第一列有变号。

❑ 分析系统参数变化对稳定性的影响

利用劳斯稳定性判据还可以讨论个别参数对稳定性的影响，从而求得这些参数的取值范围。若讨论的参数为开环放大系数K，则使系统稳定的最大K称为临界放大系数K_p。

[例3-7]已知系统的结构图，试确定系统的临界放大系数。



[解]：闭环传递函数为：$\Phi(s)=\dfrac{\dfrac{k}{s(s+3)(s+5)}}{1+\dfrac{k}{s(s+3)(s+5)}}=\dfrac{k}{s^3+8s^2+15s+k}$

特征方程为：$s^3+8s^2+15s+k=0$

$$s^3 + 8s^2 + 15s + k = 0$$

劳斯阵：

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 15 \\ s^2 & 8 & k \\ s^1 & \dfrac{120-k}{8} & 0 \\ s^0 & k & \end{array}$$

要使系统稳定，必须

①系数皆大于0，所以k>o

②劳斯阵第一列皆大于0

有 $\begin{cases} \dfrac{120-k}{8} > 0 \Rightarrow k < 120 \\ k > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < k < 120$

所以，临界放大系数 $k_p = 120$

确定系统的相对稳定性（稳定裕度）

利用劳斯稳定性判据确定的是系统稳定或不稳定，即绝对稳定性。在实际系统中，往往需要知道系统离临界稳定有多少裕量，这就是相对稳定性或稳定裕量问题。

利用实部最大的特征方程的根 p（若稳定的话，它离虚轴最近）和虚轴的距离σ表示系统稳定裕量。

若p处于虚轴上，则 $\sigma=0$ ，表示稳定裕度为0。

其他的判断方法为：

作 $s=-\sigma$ 的垂线，σ 是系统特征根位置与虚轴之间的最小给定距离，可设为1，称 σ给为定稳定裕度。若系统的极点都在该线的左边，则称该系统至少具有 σ 的稳定裕度。一般说，σ越大，稳定程度越高。可用 $s=z-\sigma$代入特征方程，建立以z为变量的新特征方程，再用劳斯判据进行判稳。若稳定，则称系统至少具有 σ 的稳定裕度。

- 确定系统的相对稳定性（稳定裕度）

[例]系统特征方程为： $s^3+5s^2+8s+6=0$ **，**

可知它是稳定的。令 $s=z-1$ **则：**

$$(z-1)^3+5(z-1)^2+8(z-1)+6=0,\text{即}z^3+2z^2+z+2=0$$

z^3	1	1
z^2	2	2
z^1	0	0

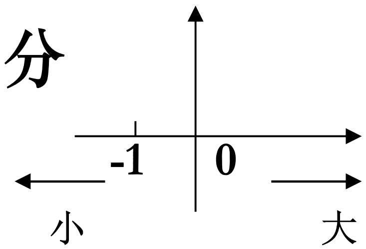
z^1**行全为零，以它上面的行组成辅助方程，其解为特殊根。对辅助方程求导，用其系数代替**z^1**行。辅助方程为：** $2z^2+2=0$ **，导数方程的系数为1，0，继续填劳斯表。**

z^3	1	1
z^2	2	2
z^1	1	0
z^0	2	0

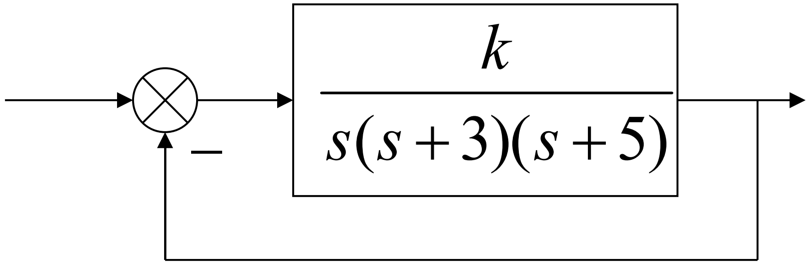
第一列全为正，辅助方程的解为： $z_{1,2}=\pm j1$

有一对共轭虚根，对于变换后的Z系统是临界稳定的，但回到S系统中，有-1的坐标偏移，故稳定裕度恰为1。

[例3-7]已知系统的结构图，为使系统特征根的实数部分不大于-1，试确定k值的取值范围。



[解]：闭环特征方程为：



$$s^3+8s^2+15s+k=0$$

现以 s=x-1代入上式，得

$$x^3+5x^2+2x+k-8=0$$

劳斯阵：

$$\begin{array}{c|cc} x^3 & 1 & 2 \\ x^2 & 5 & k-8 \\ x^1 & \dfrac{18-k}{5} & 0 \\ x^0 & k-8 & \end{array}$$

要使系统稳定，必须

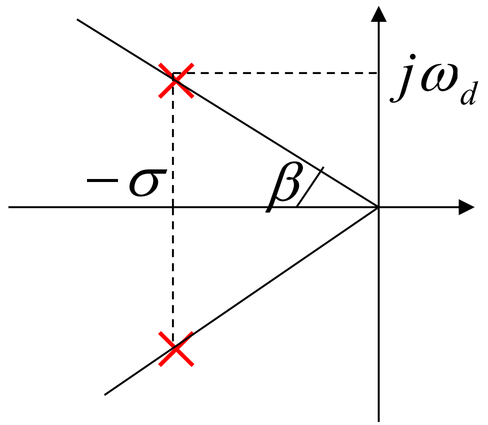
①系数皆大于0， $\therefore k>8$

②劳斯阵第一列皆大于0

有 $\begin{cases} \dfrac{18-k}{5}>0 \Rightarrow k<18 \\ k>8 \end{cases} \Rightarrow 8<k<18$

所以，此时k的取值范围为 $8 \le k \le 18$

讨论相对稳定性除了考虑极点离虚轴远近外，还要考虑共轭极点的振荡情况。对于共轭极点，其实部反映响应的衰减快慢，虚部反映响应的振荡情况。对于极点$-\sigma \pm j\omega_d$，对应的时域响应为$e^{-\sigma t}\sin(\omega_d t+\varphi)$。所以，$\sigma$越小，衰减越慢，$\omega_d$越大，振荡越激烈。如下图示意：



可用共轭极点对负实轴的张角β来表示系统的相对稳定性。当$\beta=90^\circ$时，表示极点在虚轴上，系统为临界稳定。β越小，稳定性越高。相对稳定性越好。

小结

- 线性系统稳定的充要条件
- 劳斯代数稳定性判据（劳斯阵，各种特殊情况下劳斯阵的排列和判稳方法）
- 劳斯稳定性判据的应用

  —判稳

  —系统参数变化对稳定性的影响

  —系统的相对稳定性

作业

- 3-11
- 3-12