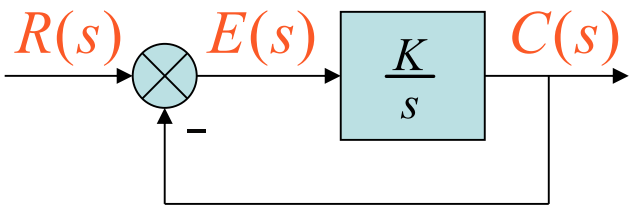
# 第二节 一阶系统的时域分析

## 1. 一阶系统的数学模型

由一阶微分方程描述的系统称为一阶系统。其传递函数的特征方程是 s的一次方程。

一阶系统的微分方程为:



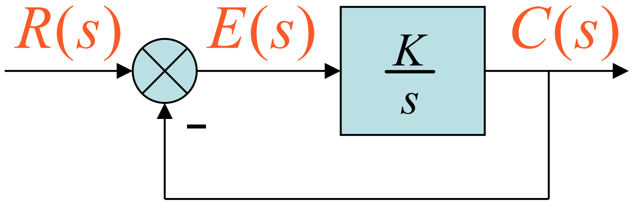

$$T\frac{dc(t)}{dt}+c(t)=r(t)$$

典型的一阶系统的结构图如图所示

其闭环传递函数为:

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\frac{K}{S}}{1+\frac{K}{S}}=\frac{1}{\frac{S}{K}+1}=\frac{1}{Ts+1}$$

式中，$T=\dfrac{1}{K}$，称为时间常数。

| | | |
|---|---|---|
| 一阶系统 | $T\dfrac{dc(t)}{dt}+c(t)=r(t)$ |  |
| 传递函数（标准形式） | | |
| 时间常数 | | |
| 极点 | | |
| 单位阶跃响应 | | |
| 单位阶跃响应曲线 | | |
| 调节时间 | | |

## 2. 单位阶跃响应

$$R(s)=1/s$$

$$C(s)=\frac{1}{Ts+1}\times\frac{1}{s},$$

$$c(t)=L^{-1}[\frac{1}{Ts+1}\times\frac{1}{s}]=L^{-1}[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{T}}]=1-e^{-\frac{t}{T}}$$

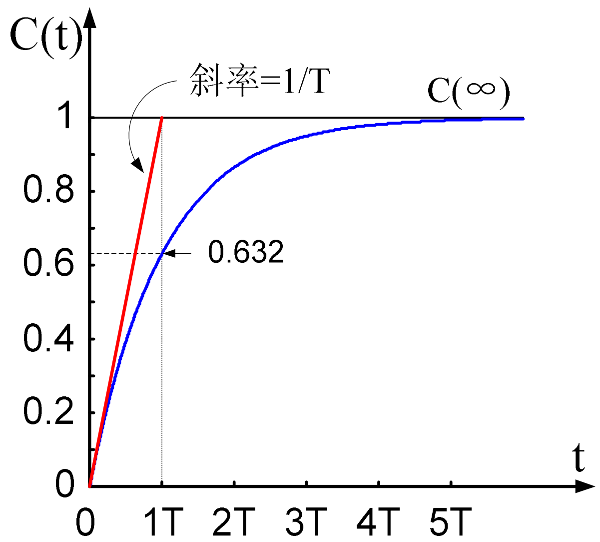
显然一阶系统的单位阶跃响应是一条由零开始按指数规律单调上升并最终趋于1的曲线。响应曲线具有非振荡特性，故也称为非周期响应。

该响应曲线的斜率是

$$\frac{dc(t)}{dt}=\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$$

$$\left.\frac{dc(t)}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}\right|_{t=0}=\frac{1}{T}$$

即在t=0时，曲线的切线斜率为1/T。

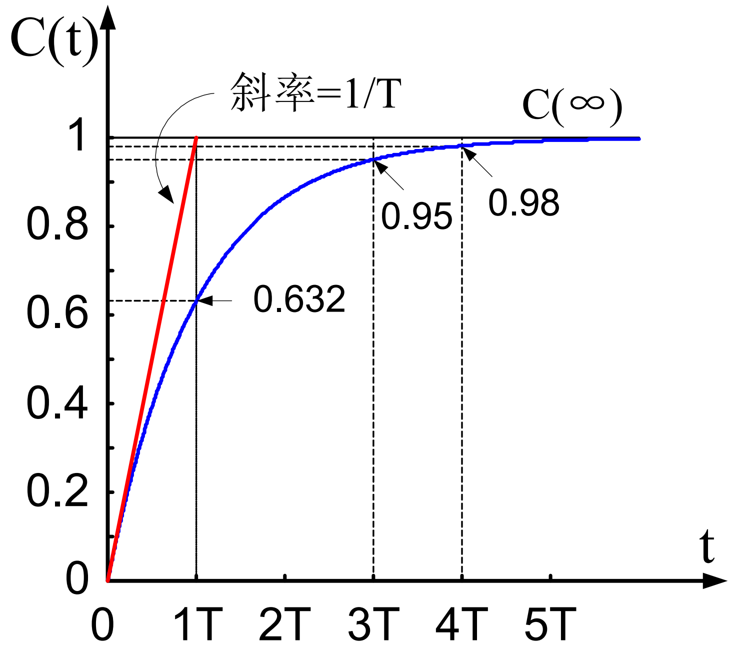


根据响应表达式 $c(t)=1-e^{-\frac{t}{T}}$，可求得下表

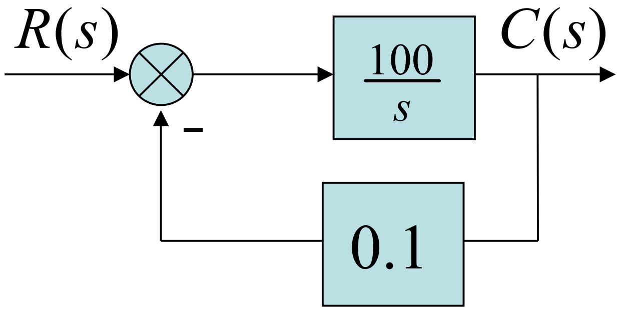
| t | T | 2T | 3T | 4T | 5T |
|---|---|---|---|---|---|
| c(t) | 0.632 | 0.865 | 0.950 | 0.982 | 0.993 |

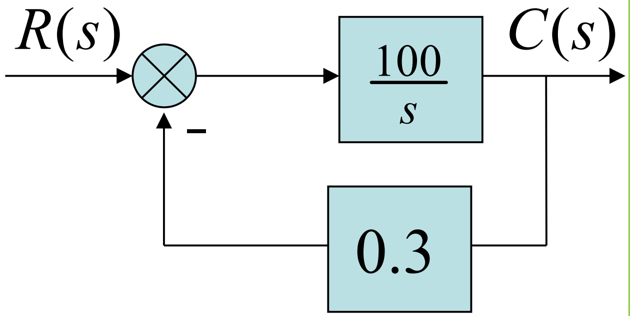
由表可知，当t≥3T或t≥4T时，响应曲线将保持在稳态值的5%或2%允许误差Δ范围内，即一阶系统的调节时间为：

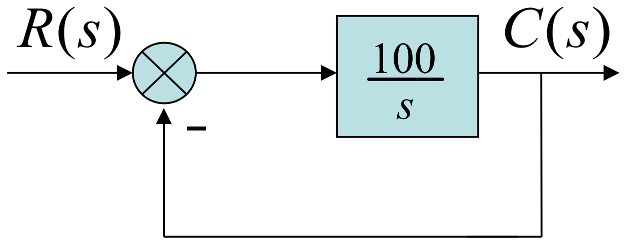
$$t_s \approx \begin{cases} 4T, & 当\Delta = 2时 \\ 3T, & 当\Delta = 5时 \end{cases}$$




可见，调整时间只与时间常数T有关。因此T越小，$t_s$ 越小，响应过程越快。

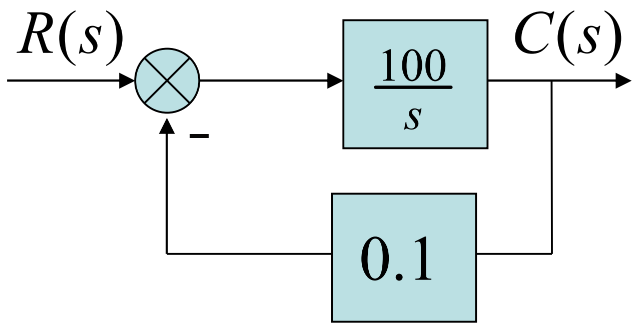

R(s)
C(s)
100/s
–
0.1


R(s)
C(s)
100/s
–
0.3


R(s)
C(s)
100/s
–

例：已知一阶系统的结构图如图所示。①试求该系统单位阶跃响应的调节时间$t_s$；②若要求$t_s \le 0.1$秒求此时的反馈系数。

解：①由系统结构图求出闭环传递函数




$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\frac{100}{s}}{1+\frac{100}{s}\times 0.1}=\frac{100}{s+10}=\frac{10}{0.1s+1}$$

由闭环传递函数知时间常数T=0.1秒

由公式知：$t_s=3T=0.3$秒（$\Delta=0.05$）

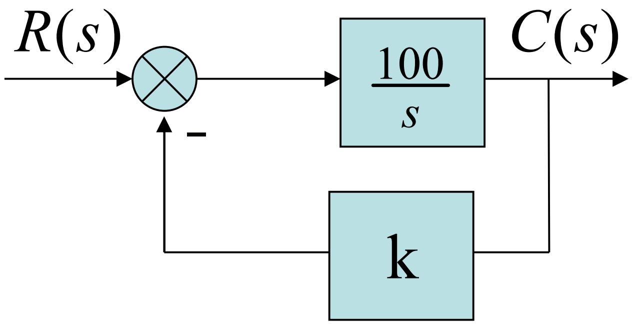
为什么非单位反馈系统也可用上述公式求调节时间?

$$c(s)=\frac{10}{0.1s+1}\frac{1}{s}=\frac{10}{s}-\frac{10}{s+10}$$

$$c(t)=10(1-e^{-10t})=10(1-e^{-\frac{t}{0.1}})$$

由解可知当闭环传递函数写成时间常数形式，则分子上的系数仅与稳态值有关，决定调节时间的只是时间常数，而与反馈形式无关。

②若要求$t_s \le 0.1$秒求此时的反馈系数。




可设反馈系数为k，

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\frac{100}{s}}{1+\frac{100}{s}\times k}=\frac{\frac{1}{k}}{\frac{0.01}{k}s+1}$$

当 $T=\frac{0.01}{k}$，则 $t_s=3T=\frac{0.03}{k}\le 0.1$，即 $k\ge 0.3$ 时$t_s \le 0.1$秒

由此可知：对一阶系统而言反馈加深可使调节时间减小

反馈加深对系统的响应还有什么反应?

$$C(s)=\frac{\frac{100}{s}}{1+\frac{100}{s}\times 0.3}\times\frac{1}{s}=\frac{100}{s+30}\times\frac{1}{s}=\frac{10}{3}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+30}\right)\qquad c(t)=\frac{10}{3}(1-e^{-30t})$$

由此可知：反馈加深还将使输出幅值减小。

其他各种响应分析相同。下表中 列出了一阶系统在各种典型输入下的响应。

| r(t) | c(t) |
| --- | --- |
| δ(t) | $\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$ |
| 1(t) | $1-e^{-\frac{t}{T}}$ |
| t | $t-T+Te^{-\frac{t}{T}}$ |
| $\frac{1}{2}t^2$ | $\frac{1}{2}t^2-Tt+T^2(1-e^{-\frac{t}{T}})$ |

系统对输入信号导数的响应等于对输入信号响应的导数。

这个结论对任何阶的线性定常系统都是适用的。

# 小结

- 一阶系统的传递函数和典型结构图
- 一阶系统的单位阶跃响应（单调上升曲线，调整时间）
- 系统对输入信号导数的响应等于对输入信号响应的导数
- 减小一阶系统时间常数的方法（为什么要减小时间常数？）