

5-4 频率稳定裕度

一、相对稳定性

在工程应用中，由于环境温度的变化、元件的老化以及元件的更换等，会引起系统参数的改变，从而有可能破坏系统的稳定性。因此在选择元件和确定系统参数时，不仅要考虑系统的稳定性，还要求系统有一定的稳定程度，这就是所谓自动控制系统的相对稳定性问题。

例如，图 5-52 (a) 和 (b) 所示的两个**最小相位系统**（右半平面无零极点的开环频率特性曲线（实线）没有包围 $(-1, j0)$ 点，由奈氏判据知它们都是稳定的系统，但图 5-52 (a) 所示系统的频率特性曲线与负实轴的交点 A 距离 $(-1, j0)$

点较远，图 5-52 (b) 所示系统的频率特性曲线与负实轴的交点 B 距离 $(-1, j0)$ 点较近。假定系统的开环放大系统由于系统参数的改变比原来增加了百分之五十，则图 5-52 (a) 中的 A 点移动到 A' 点，仍在

$(-1, j0)$ 点右侧，系统还是稳定的；而图 5-52 (b) 中的 B 点则移到 $(-1, j0)$ 点的左侧 (B' 点)，系统便不稳定了。可见，前者较能适应系统参数的变化，即它的相对稳定性比后者好。

稳定裕度的概念



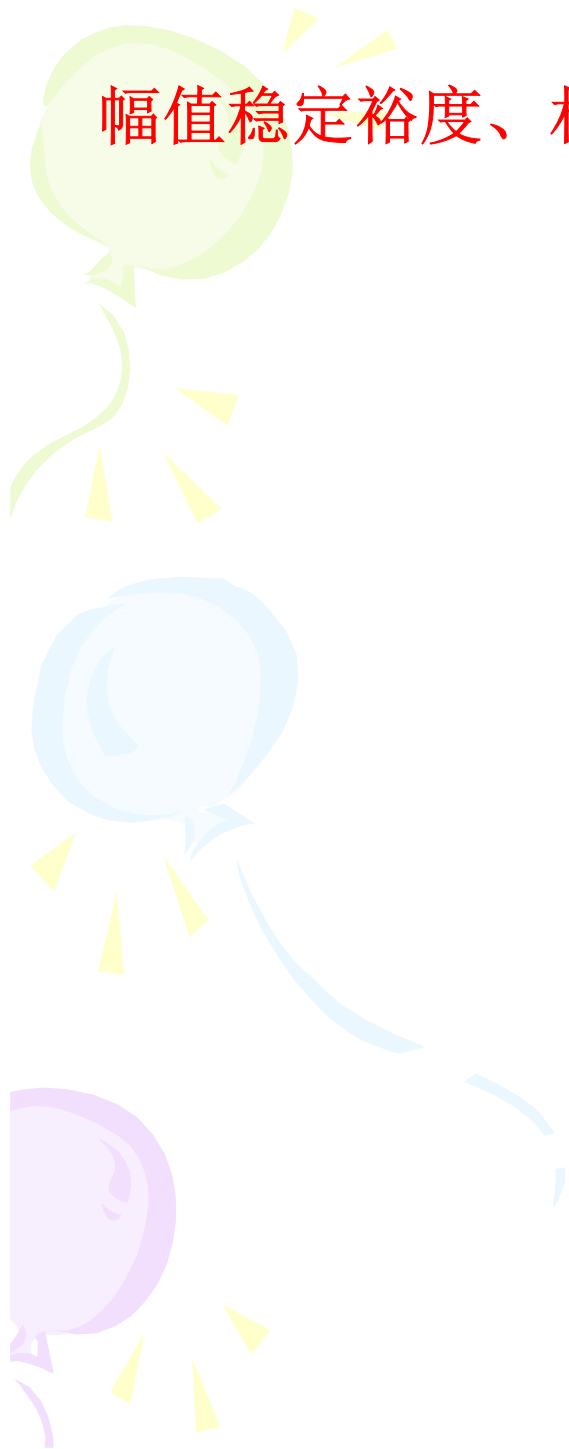
截止频率、穿越频率

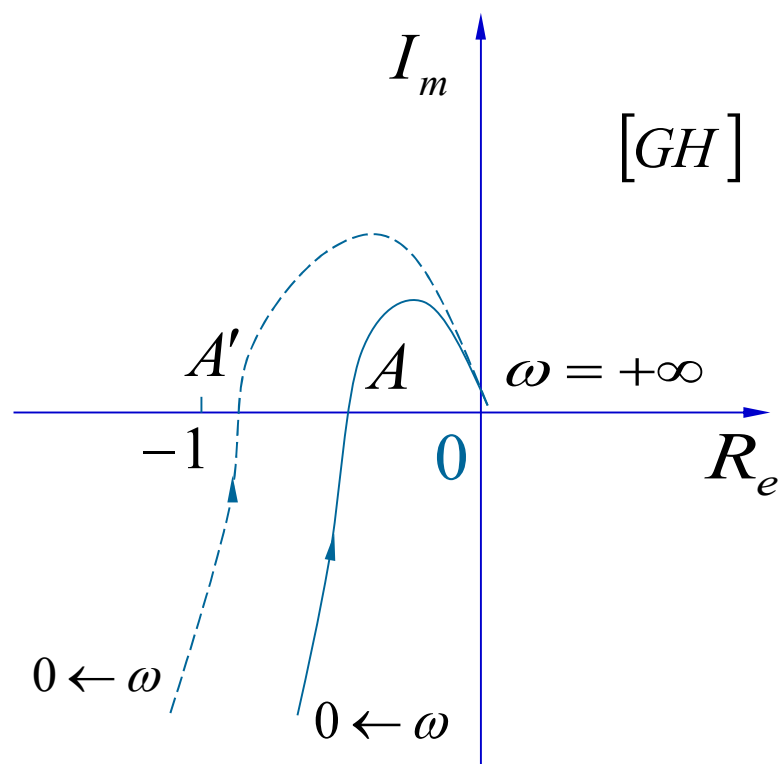


幅值稳定裕度、相角稳定裕度

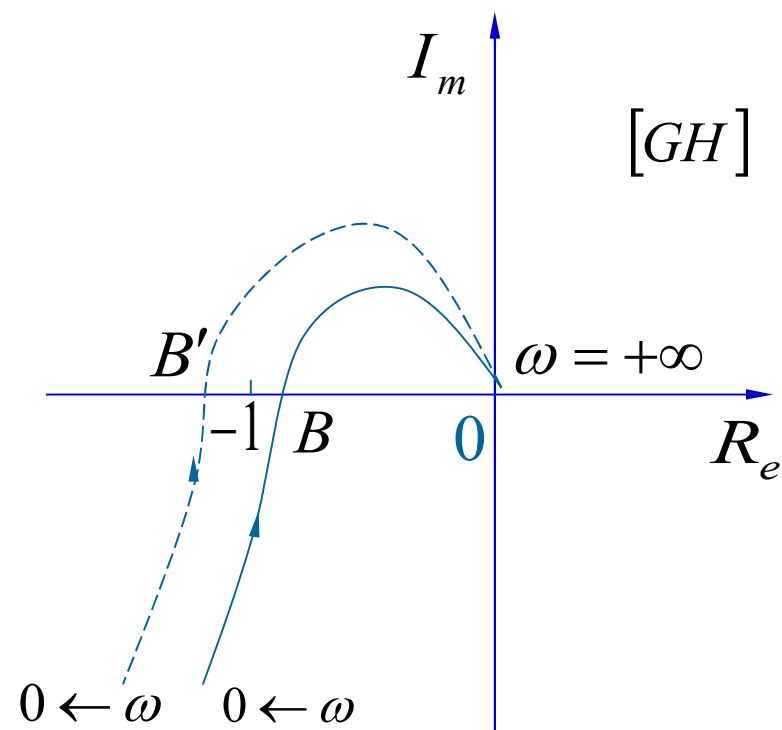


幅值稳定裕度、相角稳定裕度





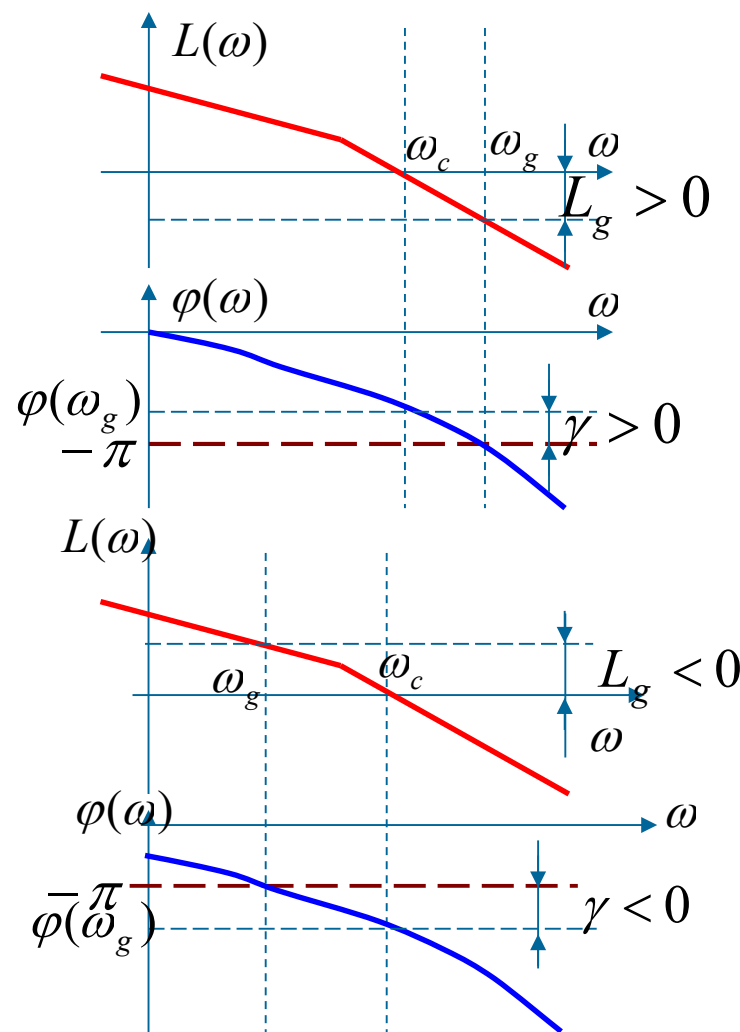
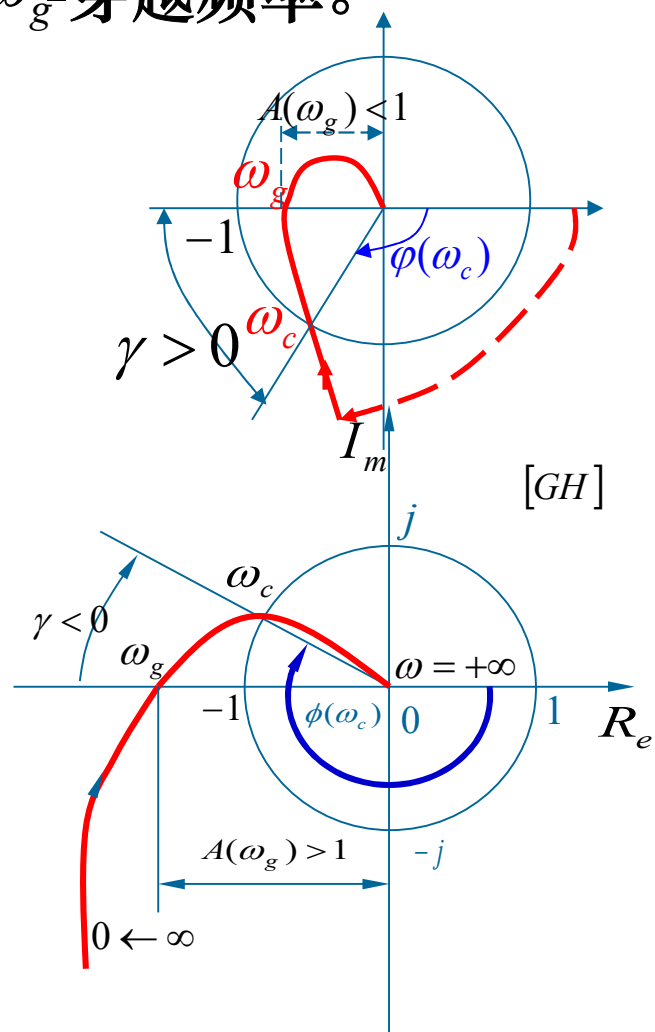
(a)



(b)

图5-52 系统的相对稳定性

当频率特性曲线穿过 $(-1, j0)$ 点时，系统处于临界稳定状态。这时： $A(\omega_g) = 1, \varphi(\omega_c) = -180^\circ, \omega_c = \omega_g$ 。对于最小相位系统，可以用 $A(\omega_g)$ 和 $\varphi(\omega_c)$ 来表示频率特性曲线接近 $(-1, j0)$ 点的程度，或称为稳定裕度。稳定裕度越大，稳定性越好。 ω_c -截止频率， ω_g -穿越频率。



[定义] $k_g = 1/A(\omega_g)$ 和 $\gamma = \varphi(\omega_c) - (-180^\circ) = 180^\circ + \varphi(\omega_c)$ 为幅值稳定裕度和相位稳定裕度。

在对数坐标图上，用 L_g 表示 k_g 的分贝值。即

$$L_g = 20 \log k_g = -20 \log A(\omega_g) > 0$$

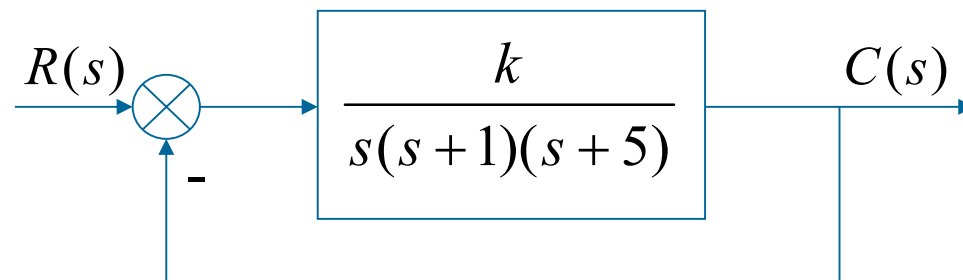
显然，当 $L_g > 0$ 时，即 $A(\omega_g) < 1$ 和 $\gamma > 0$ 时，闭环系统是稳定的；否则是不稳定的。对于最小相位系统， $L_g > 0$ 和 $\gamma > 0$ 是同时发生或同时不发生的，所以经常只用一种稳定裕度来表示系统的稳定裕度。常用相角裕度。

[幅值稳定裕度物理意义]：稳定系统在相角穿越频率处将幅值增加 k_g 倍（奈氏图）或增加 L_g 分贝（波德图），则系统处于临界状态。若增加的倍数大于 k_g 倍（或 L_g 分贝），则系统变为不稳定。

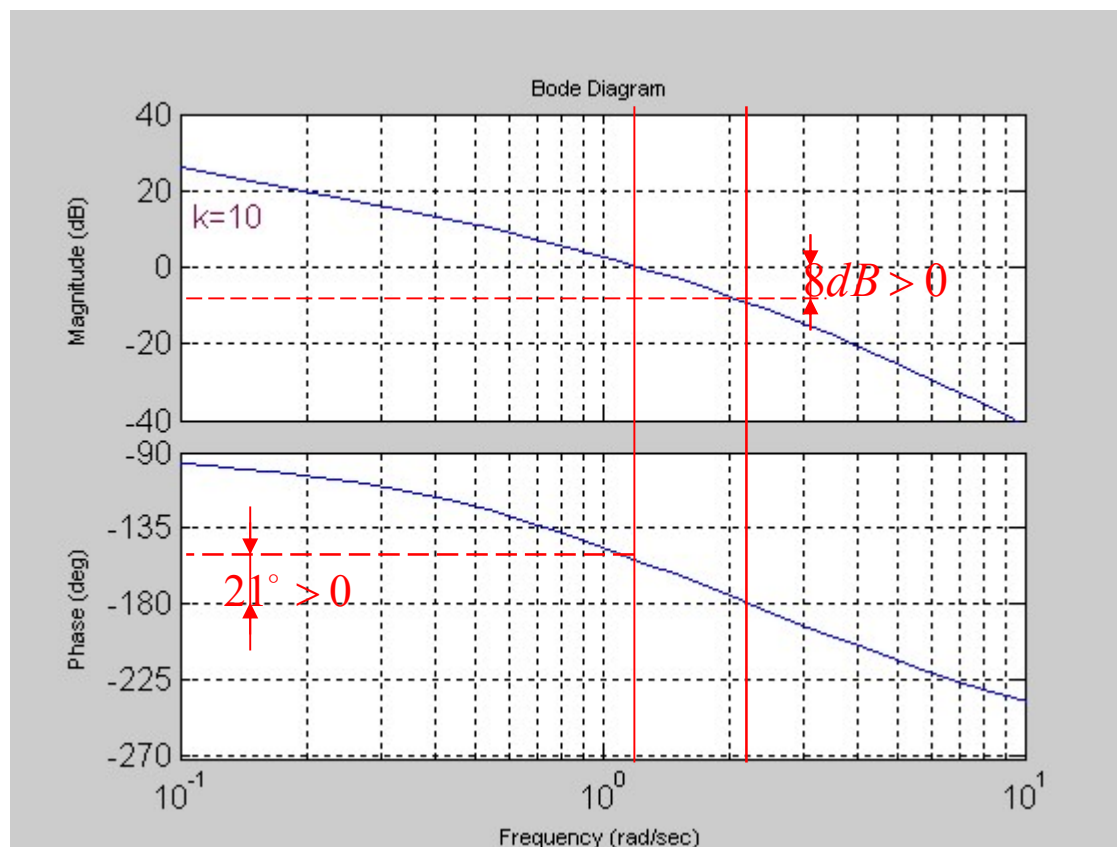
比如，若增加开环放大系数 K ，则对数幅频特性曲线将上升，而相角特性曲线不变。可见，开环放大系数太大，容易引起系统的不稳定。

[相位稳定裕度的物理意义]：稳定系统幅值在截止频率 ω_c 处将相角减小 γ 度，则系统变为临界稳定；再减小，就会变为不稳定。

[例]设控制系统如下图所示
 $k=10$ 和 $k=100$ 时，试求系统的
相位稳定裕度和幅值裕度。



[解]：相位稳定裕度和幅值裕度可以很容易地从波德图中求得。



当 $k=10$ 时，开环系统波德图如右所示。这时系统的相位稳定裕度和幅值裕度大约是8dB和21度，是稳定的，因此系统在不稳定之前，增益可以增加8dB，达到临界情况。

相位裕度和幅值裕度的计算：

● **相位裕度：**先求截止频率 ω_c

$$A(\omega) = \frac{0.2k}{|s| \times |s+1| \times |0.2s+1|} = \frac{2}{\omega\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+0.04\omega^2}} \quad (\text{当 } k=10 \text{ 时})$$

在截止频率处， $A(\omega)=1$ ，所以 $\omega^2(1+\omega^2)(1+0.04\omega^2)=4$ ，解此方程较困难，可采用近似解法。由于 ω_c 较小（小于2），所以：

$$A(\omega) \approx \frac{2}{\omega\sqrt{1+\omega^2}} = 1, \text{ 解得： } \omega_c \approx 1.25$$

截止频率处的相角为：

$$\varphi(\omega_c) = -90 - \operatorname{tg}^{-1}\omega_c - \operatorname{tg}^{-1}0.2\omega_c = -155.38$$

相角裕度为： $\gamma = 180 + \varphi(\omega_c) = 180 - 155.38 = 24.6$

● **幅值裕度：**先求相角穿越频率 ω_g

相角穿越频率处 ω_g 的相角为：

$$\varphi(\omega_g) = -90^\circ - \operatorname{tg}^{-1} \omega_g - \operatorname{tg}^{-1} 0.2 \omega_g = -180^\circ$$

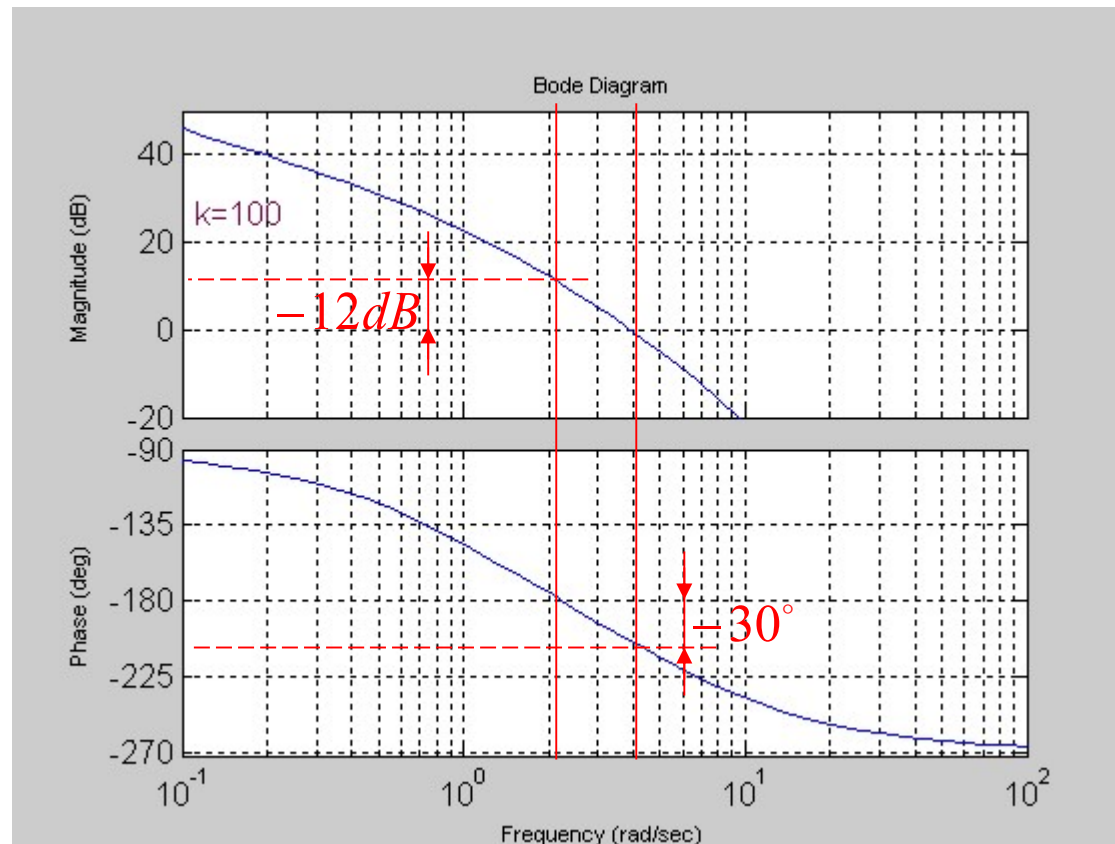
$$\text{即：} \operatorname{tg}^{-1} \omega_g + \operatorname{tg}^{-1} 0.2 \omega_g = 90^\circ$$

由三角函数关系得： $\omega_g \times 0.2 \omega_g = 1$, 解得： $\omega_g = 2.24$

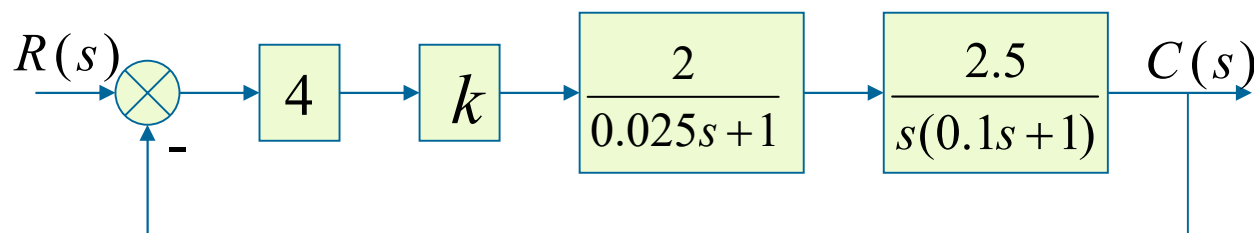
$$A(\omega_g) = \frac{2}{\omega_g \sqrt{1 + \omega_g^2} \sqrt{1 + 0.04 \omega_g^2}} \approx 0.33216$$

所以，幅值裕度为： $L_g = -20 \log A(\omega_g) = 9.6(dB)$

当增益从 $k=10$ 增大到 $k=100$ 时，幅值特性曲线上移20dB，相位特性曲线不变。这时系统的相位稳定裕度和幅值裕度分别是-12dB和-30度。因此系统在 $k=10$ 时是稳定的，在 $k=100$ 时是不稳定的。



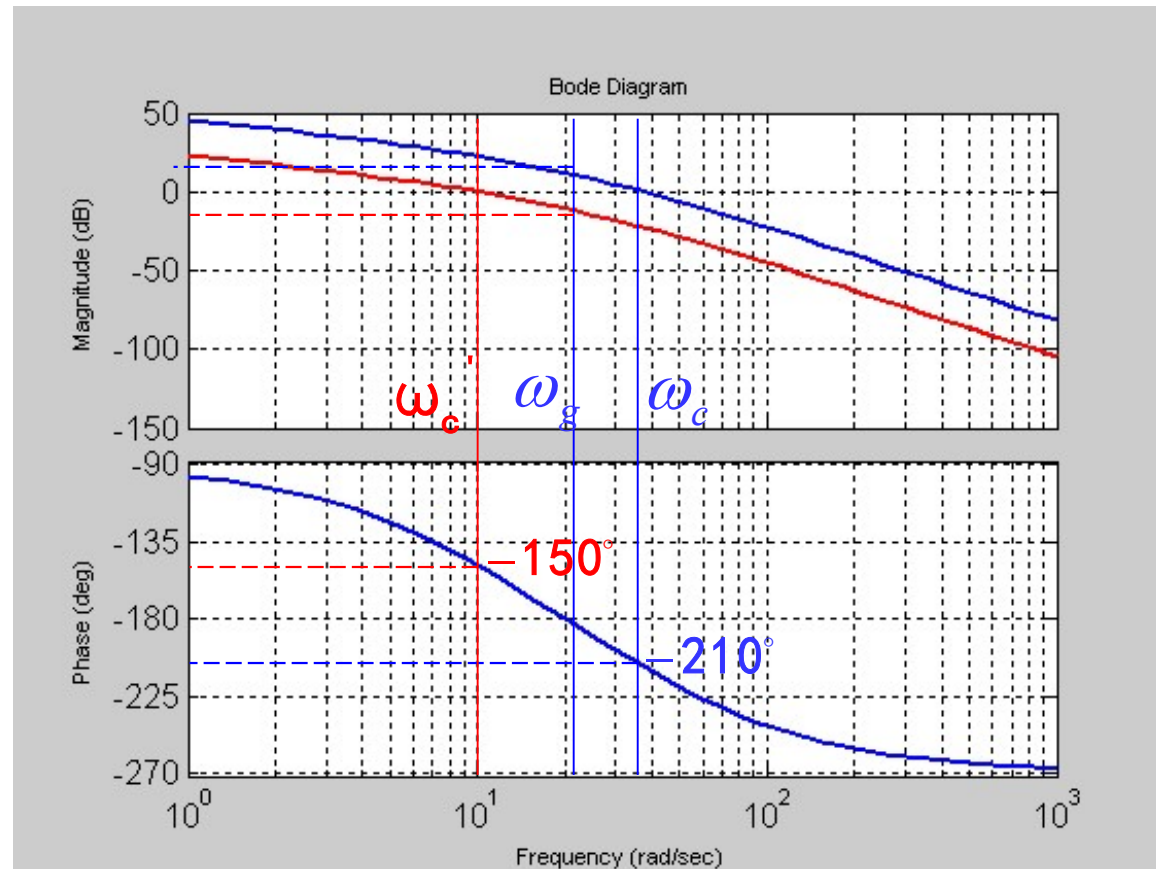
[例5-11]某系统结构图如下所示。试确定当 $k=10$ 时闭环系统的稳定性及其使相位稳定裕度为30度时的开环放大系数 k 。



[解]：当 $k=10$ 时，开环传递函数为：
$$G_k(s) = \frac{200}{s(0.025s + 1)(0.1s + 1)}$$

手工绘制波德图步骤：

- 1、确定转折频率：10、40，在 $(1, 20\log 200)$ 点画斜率为-20的斜线至 $\omega = 10$ ；
- 2、在 $\omega = 10 \sim 40$ 之间画斜率为-40的斜线；
- 3、 $\omega = 40$ 后画斜率为-60的斜线。



上图蓝线为原始波德图。 $\varphi(\omega_c) \approx -210^\circ < -180^\circ$, $\omega_c \approx 38$, 显然 闭环系统是不稳定的。为了使相位稳定裕度达到30度, 可将幅频曲线向下平移。即将开环放大系数减小, 这时相频特性不变。截止频率左移至 ω_c' , 移到哪里?

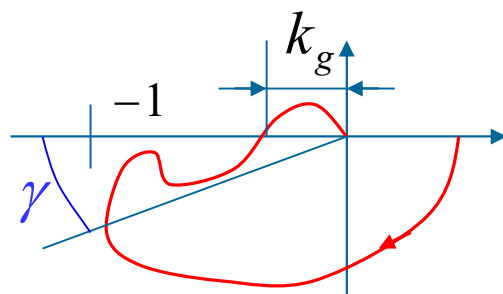
$\because \varphi(\omega_c') = -180^\circ + 30^\circ = -150^\circ$ ，从图中看出： $\omega_c' \approx 10$ 。所以原始幅频曲线向下移动的分贝数为： $L_g = 20 \log A(\omega_c') = 20 \log A(10) \approx 22 \text{dB}$

设新的开环放大系数为 k_1 ，原始的开环放大系数为 $k=200$ ，则有
 $22 = 20 \log k - 20 \log k_1$ 解得： $k_1 \approx 15$

所以当开环放大系数下降到15时，闭环系统的相位稳定裕度是30度，这时的幅频稳定裕度为：由图中看出 $\omega_g \approx 20$ ，所以
 $L_g = 20 \log A(\omega_g) |_{k=15} = 20 \log A(20) |_{k=15} = 10(\text{dB})$

[稳定裕度概念使用时的局限性]:

- 1、在高阶系统中，奈氏图中幅值为1的点或相角为-180度的点可能不止一个，这时使用幅值和相位稳定裕度可能会出现歧义；
- 2、非最小相位系统不能使用该定义；
- 3、有时幅值和相位稳定裕度都满足，但仍有部分曲线很靠近(-1,j0)点，这时闭环系统的稳定性依然不好。见下图：



作业:

5-16

5-17