P29 习题 1

1. 写出下列随机试验的样本空间Ω：

（1）记录一个班一次数学考试的平均分数（设以百分制记分）；

分析：只考虑每位同学的分数都是整数的情况。设该班有n名同学，那么全体同学的考试分数之和M就可以是 0 到$100n$之间的任意整数（包括 0 分和$100n$分），所以所有可能的平均分数就是$\frac{M}{n}$

解答：设该班有n名同学，则样本空间为$\Omega=\{\frac{i}{n}\mid i=0,1,2,\cdots,100n\}$

（2）生产某种产品直到有 10 件正品为止，记录此过程中生产该种产品的总件数；

分析：根据题意，生产出 10 件正品试验就停止，要生产 出 10 件正品，最少需要生产 10 件产品（这 10 件刚好都是正品），也有可能一直生产次品而凑不够 10 件正品必须一直生产下去，所以生产的产品总件数是没有上限的。因此样本空间应该是 10 到正无穷的整数

解答：样本空间$\Omega=\{10,11,12,13,\cdots\}$

说明：也可写成$\Omega=\{10,11,12,13,\cdots,n,\cdots\}$，但不能写成$\Omega=\{10,11,12,13,\cdots,n\}$

（3）对某工厂出厂的产品进行检查，合格的记为“正品”，不合格的记为“次品”，若连续查出了 2 件次品就停止检查，或者检查了 4 件产品就停止检查，记录检查的结果；

分析：由题意知，停止检查时已经检查的产品数可能是 2 件、3 件、4 件。如果检查了 2 件就停止，只可能是两件都是次品，所以检查结果是（次，次）；如果检查了 3 件停止，一定是连续检查出 2 件次品导致的，并且一定是连续查出 2 件次品马上停止，所以第一件一定不是次品，第二件第三件一定是次品，即检查结果是（正，次，次）；如果检查了 4 件停止，那么前 3 件不能出现连续次品情况，所以前 3 件只能是（正，正，正）、（正、正、次）、（正、次、正）、（次、正、正）、（次、正、次）这 5 种情况之一，而第 4 件可以是正品也可以次品，那么共有 10 种情况。

解答：以 0 表示次品，以 1 表示正品，那么检查结果组成的集合为

$$\Omega=\{00, 100, 1111, 1110, 1101, 1100, 1011, 1010, 0111, 0110, 0101, 0100\}$$

注：教材附录中答案是按照次品数目排列的。

（4）在单位圆内任意取一点，记录它的坐标.

解答：$\Omega=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$

2.设 A,B,C 为三个事件，用 A,B,C 及其运算关系表示下列事件

（1）A 发生而 B 与 C 不发生；

解答：“A 发生且 B 不发生且 C 不发生”，表示为 $A\overline{B}\overline{C}$

注：书写时要注意 B 与 C 上面的短线不能连在一起.

（2）A,B,C 中恰好有一个发生；

解答：$A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$

（3）A,B,C 中至少有一个发生；

解答：“至少”就是“或”关系，“A 发生或 B 发生或 C 发生”，表示为 $A\cup B\cup C$

（4）A,B,C 中恰好有两个发生；

解答：$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$

（5）A,B,C 中至少有两个发生；

解答：“至少有两个”就是“这两个或那两个”，表示为 $AB\cup AC\cup BC$

（6）A,B,C 中有不多于一个发生.

分析：“不多于一个发生”就是发生的事件的个数要么刚好是 0 个，要么刚好是 1 个

解答：$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\cup A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$

分析 2：“不多于一个发生”就是“不发生的事件数至少为 2”

解答 2：$\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}$

3.设样本空间 $\Omega=\{x\mid 0\le x\le 2\}$，事件 $A=\{x\mid 0.5\le x\le 1\}$，$B=\{x\mid 0.8<x\le 1.6\}$，具体写出下列事件：

（1）AB

解答：$AB=A\cap B=\{x\mid 0.8<x\le 1\}$

（2）$A-B$

解答： $A-B=\{x\mid 0.5\le x\le 0.8\}$

（3）$\overline{A-B}$

解答：由于 $A-B=\{x\mid 0.5\le x\le 0.8\}$，因此 $\overline{A-B}=\{x\mid 0\le x<0.5\text{或}0.8<x\le 2\}$

（4）$\overline{A\cup B}$

解答：由于 $A\cup B=\{x\mid 0.5\le x\le 1.6\}$，因此 $\overline{A\cup B}=\{x\mid 0\le x<0.5\text{或}1.6<x\le 2\}$

4.一个样本空间有三个样本点，其对应的概率分别为 $2p,\ p^2,\ 4p-1$，求 p 的值。

分析：设三个样本点分别对应事件 A,B,C，则 $\Omega=A\cup B\cup C$，且 A,B,C 互不相容，于是 $1=P(\Omega)=P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)=2p+p^2+4p-1$

解：由题目条件 $2p+p^2+4p-1=1$，即 $p^2+6p-2=0$

解得 $p_1=\sqrt{11}-3,\ p_2=-\sqrt{11}-3$

由概率的非负性，$P(A)=2p\ge 0$，因此 $p=\sqrt{11}-3$

5.已知 $P(A)=0.3,\ P(B)=0.5,\ P(A\cup B)=0.8$，求：（1）$P(AB)$；（2）$P(A-B)$；（3）$P(\bar{A}\bar{B})$

解答：（1）由加法公式，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

因此 $P(AB)=0$

（2）$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.3-0=0.3$

（3）$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.8=0.2$

分值：本题满分 100 分，其中每问 30 分，卷面 10 分。

评分标准：对于每问的 30 分，写出正确的公式得 15 分，计算结果正确得 15 分。

6.设 $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$，且 $P(A)=p$，求 $P(B)$

解答：由于 $P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1+P(AB)-P(A)-P(B)$

因此 $P(A)+P(B)=1$，故 $P(B)=1-P(A)=1-p$

7.对于事件 A,B,C ，设 $P(A)=0.4, P(B)=0.5, P(C)=0.6, P(AC)=0.2, P(BC)=0.4$ 且 $AB=\Phi$ ，求 $P(A\cup B\cup C)$

解答：由于 $ABC\subset AB$ ，因此 $ABC=\Phi$ ，于是

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$
$$=0.4+0.5+0.6-0-0.2-0.4+0=0.9$$

8.将 3 个球随机地放入 4 个杯子中去，求杯子中球的最大个数分别为 $1,2,3$ 的概率

分析：题意是将 3 个不同的球放入 4 个不同的杯子

因此样本空间中的样本点数为 $4\times4\times4=4^3$（第一个球有 4 种选择，第二个球有 4 种选择，第三个球有 4 种选择）

杯子中球的最大个数为 1，表示 3 个球在不同的杯子中，因此含有的样本点数为 $4\times3\times2$（第一个球有 4 种选择，第二个球只能在余下的 3 个杯子中选，第三个球只剩下 2 个杯子可以选）

杯子中球的最大个数为 2，表示有 2 个球在一个杯子中，第三个球在另一个杯子中，因此含有的样本点数为 $3\times4\times3$（先选两个球并绑在一起，有 3 种情况，再为这两个球选杯子，有 4 种情况，最后为剩下的球在剩下的 3 个杯子中选一个放进去，有 3 种情况）

杯子中球的最大个数为 3，表示三个球放在同一个杯子中，因此含有 4 个样本点

解答：杯子中球的最大个数为 1 的概率为 $\frac{4\times3\times2}{4\times4\times4}=\frac{3}{8}$

杯子中球的最大个数为 2 的概率为 $\frac{3\times4\times3}{4\times4\times4}=\frac{9}{16}$

杯子中球的最大个数为 3 的概率为 $\frac{4}{4\times4\times4}=\frac{1}{16}$

9.在整数 0 至 9 中任取 4 个排成一个四位数，它们排成的四位数是偶数的概率是多少？

解答：先计算排成的四位数有多少

要排成四位数，千位上不能是 0，所以有 9 种选择；百位可以在剩下的 9 个数字中选，有 9 种选择；…。因此可以排成的四位数共有 $9\times9\times8\times7$ 个。

再计算排成的四位数是偶数有多少种情况

（先排个位为 0,2,4,6,8 中的一个，十百千任排时，会出现个位为 2，千位排了 0 的情况，这样就不是四位数了。因此要单独考虑 0 的情况）

当个位为 0 时，剩下的数字没有 0，十百千位可以随便排，所以此时有$9\times8\times7$种情况；

当个位为 2 或 4 或 6 或 8 时，0 在剩下的数字中，需要保证千位不是 0，所以先排千位。在剩下的 9 个数字（个位只选了一个数字）中，除 0 以外的其余 8 个都可以作为千位，然后剩下的 8 个数字可以在百位十位上任意排，所以此时有$4\times8\times8\times7$中情况。

所以排成的四位数是偶数共有$9\times8\times7+4\times8\times8\times7$种情况

因此概率为$\dfrac{9\times8\times7+4\times8\times8\times7}{9\times9\times8\times7}=\dfrac{9+32}{81}=\dfrac{41}{81}$

9. 在整数 0 至 9 中任取 4 个排成一排，它们排成四位偶数的概率是多少？

解答：10 个数字中任取 4 个排成一排，共有$A_{10}^{4}=10\times9\times8\times7$种情况

排成四位偶数，共有$9\times8\times7+4\times8\times8\times7$种情况

因此概率为$\dfrac{9\times8\times7+4\times8\times8\times7}{10\times9\times8\times7}=\dfrac{9+32}{90}=\dfrac{41}{90}$

10.一部五卷的文集，按任意次序放到书架上取，求下列事件的概率：（1）第一卷出现在旁边；（2）第一卷及第五卷出现在旁边；（3）第一卷或第五卷出现在旁边；（4）第一卷及第五卷都不出现在旁边；（5）第三卷正好在正中。

解答：5 卷文集，放到书架上排成一排，共有$A_5^5=5!=120$种情况

（1）考虑“第一卷出现在旁边”的情况数

先排第一卷，可以出现在左边，也可以出现在右边，有 2 种选择，之后剩下的 4 卷可以随意排，因此共有$2\times4\times3\times2\times1=48$种情况

对应概率为$\dfrac{48}{120}=\dfrac{2}{5}$

（2）“第一卷及第五卷出现在旁边”的情况数

先排第一卷，要求出现在旁边，所以有 2 种选择，那么第五卷就只能排剩下的那个边，只有 1 种选择，之后排剩下的 3 卷，可以随意排，因此共有$2\times1\times3\times2\times1=12$种情况

对应概率为 $\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$

（3）“第一卷或第五卷出现在旁边”的情况数

为了计数时不重复、不遗漏，这种情况分成更细的三种情况：只有第一卷在旁边（第五卷不在旁边）、只有第五卷在旁边、第一卷和第五卷都在旁边

第一卷在旁边且第五卷不在旁边时，先把第一卷排在旁边，有 2 种排法，然后在二、三、四卷中选一卷排在另一边，最后剩下的 3 卷任意排，因此共有 $2\times3\times3\times2\times1=36$ 种情况；

同理，第五卷在旁边且第一卷不在旁边，也有 $2\times3\times3\times2\times1=36$ 种情况；

“第一卷和第五卷都在旁边”是（2）的情形，共有 12 中情况

因此“第一卷或第五卷出现在旁边”共有 $36+36+12=84$ 种情况

对应概率为 $\frac{84}{120}=\frac{7}{10}$

（4）“第一卷及第五卷都不出现在旁边”的情况数

先在二、三、四卷中选一卷排左边，再选一卷排右边（这样就保证第一和第五都不在旁边了），最后把剩下的 3 卷书任意排，因此共有 $3\times2\times3\times2\times1=36$ 种情况

因此对应概率为 $\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$

（5）“第三卷正好在正中”的情况数

先把第三卷排在正中，其余 4 卷随意排 4 个位置，共有 $1\times4\times3\times2\times1=24$ 种情况

因此对应概率为 $\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$

注：（3）和（4）是对立事件，所以也可以先计算其中的一个，另一个再用对立事件概率公式 $P(\overline{A})=1-P(A)$ 计算

11.把 2,3,4,5 四个数字各写在一张小纸片上，任取其中三个按自左向右的次序排成一个三位数，求所得数是偶数的概率。

解答：排成三位数共有 $4\times3\times2=24$ 种情况

要想得到的数是偶数，可以先在个位排 2 和 4 其中的一个，然后在剩下的三个数字中任选两个排在十位百位，所以情况数是$2\times3\times2=12$

因此，所得数是偶数的概率为$\dfrac{12}{24}=\dfrac{1}{2}$

分值：本题满分 100 分。

评分标准：样本空间中的样本点数目正确得 40 分，事件中样本点数目正确得 40 分，计算结果正确得 20 分。

12.一幢 10 层楼中一架电梯在底层登上 7 位乘客，电梯在每一层都停，乘客从第二层起离开电梯，假设每位乘客在任一层离开电梯是等可能的，求没有两位及两位以上乘客在同一层离开的概率。

解答：“没有两位及两位以上乘客在同一层离开”意味着各位乘客在不同的楼层离开，其情况数为$9\times8\times7\times\cdots\times3=A_9^7$

因此其概率为$\dfrac{A_9^7}{9^7}$

13.某人午觉醒来发现表停了，他打开收音机想收听电台报时，设电台每正点报时一次，求他等待时间短于 10 分钟的概率。

解答：由题意知，这是几何概型

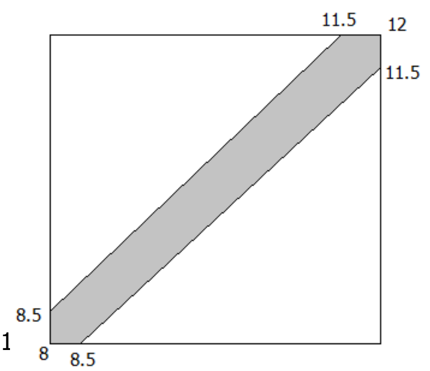
设他等待时间为X，则样本空间为$\Omega=\{X\mid 0\le X<60\}$

事件“等待时间短于 10 分钟”就是$A=\{X\mid 0\le X<10\}$

因此其概率为$P(A)=\dfrac{10}{60}=\dfrac{1}{6}$

14.甲乙两人相约 8—12 点在预定地点会面。先到的人等候另一人 30 分钟后离去，求甲乙两人能会面的概率。

解答：由题意知，这是几何概型。



设甲到达时间为 X （以小时为单位计），乙到达时间为 Y ，则 $\Omega=\{(X,Y)\mid 8\le X\le 12, 8\le Y\le 12\}$

则两人相遇就是 $A=\{(X,Y)\mid |X-Y|\le 0.5\}$

从而 $P(A)=\frac{3.75}{16}=\frac{15}{64}$

分值：本题满分 100 分。

评分标准：样本空间（集合）正确得 35 分，事件（集合）正确得 35 分，计算结果正确得 30 分。（结果不化简扣 10 分）

15.现有两种报警系统 A 和 B ，每种系统单独使用时，系统 A 有效的概率为 0.92，系统 B 有效的概率为 0.93，而两种系统一起使用时，在 A 失灵的条件下 B 有效的概率为 0.85，求两种系统一起使用时：

（1）这两个系统至少有一个有效的概率；

（2）在 B 失灵条件下， A 有效的概率

解答：记 A 为事件“系统 A 有效”， B 为事件“系统 B 有效”，则

$P(A)=0.92, P(B)=0.93, P(B\mid \bar{A})=0.85$

因此 $P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B\mid \bar{A})=0.08\times 0.85=0.068$

从而 $P(AB)=P(B)-P(\bar{A}B)=0.93-0.068=0.862$

（1） $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.92+0.93-0.862=0.988$

（2） $P(A\mid \bar{B})=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{P(\bar{B})}=\frac{0.92-0.862}{0.07}=\frac{29}{35}\approx 0.8286$

分值：本题满分 100 分，每问 50 分。

评分标准：对于每问的 50 分，写出正确的公式得 20 分，计算结果正确得 30 分。

16.已知事件 A 发生的概率 $P(A)=0.5$ ， B 发生的概率 $P(B)=0.6$ ，以及条件概率 $P(B\mid A)=0.8$ ，求 A 、 B 中至少有一个发生的概率

解答： $P(AB)=P(A)P(B\mid A)=0.5\times 0.8=0.4$

因此$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.6-0.4=0.7$

17.一批零件共 100 个，其中有次品 10 个。每次从该批零件中任取 1 个，取出后不放回，连取 3 次，求第 3 次才取得合格品的概率

分析："第 3 次才取得合格品"意味着前两次取到的都是次品，而第三次取到合格品

解答：以A_1,A_2,A_3分别表示第一次、第二次、第三次取得的是合格品，由乘法公式

$$P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2)P(A_3\,|\,\bar{A}_1\bar{A}_2)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2\,|\,\bar{A}_1)P(A_3\,|\,\bar{A}_1\bar{A}_2)$$
$$=\frac{10}{100}\times\frac{9}{99}\times\frac{90}{98}=\frac{9}{1078}\approx 0.00835$$

18.有两个袋子，每个袋子都装有a只黑球，b只白球，从第一个袋中任取一球放入第二个袋中，然后从第二个袋中取出一球，求取得的是黑球的概率

分析：第二个袋中取出黑球的几率与第一个袋中取出球的颜色有关，因此用全概率公式

解答：以A表示从第一个袋中取出的是黑球，B表示从第二个袋中取出的是黑球，则

$$P(A)=\frac{a}{a+b},P(B\,|\,A)=\frac{a+1}{a+b+1},P(B\,|\,\bar{A})=\frac{a}{a+b+1}$$

从而$P(B)=P(A)P(B\,|\,A)+P(\bar{A})P(B\,|\,\bar{A})$

$$=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a+1}{a+b+1}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b+1}=\frac{a}{a+b}$$

19.一个机床有$\frac{1}{3}$的时间加工零件A，其余时间加工零件B。加工零件A时，停机的概率是 0.3，加工零件B时，停机的概率是 0.4，求这个机床停机的概率

解答：以A表示机床加工的零件是零件A，以C表示机床停机，则

$$P(A)=\frac{1}{3},P(C\,|\,A)=0.3,P(C\,|\,\bar{A})=0.4$$

从而$P(C)=P(A)P(C\,|\,A)+P(\bar{A})P(C\,|\,\bar{A})$

$$=\frac{1}{3}\times 0.3+\frac{2}{3}\times 0.4=\frac{11}{30}\approx 0.367$$

20.10 个考签中有 4 个难签，3 个人参加抽签考试，不重复地抽取，每人抽一次，甲先，乙次，丙最后。证明 3 人抽到难签的概率相同

证明：以 A,B,C 分别表示甲、乙、丙抽到难签，则

$$P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}+\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{2}{5}$$

$$P(C)=P(AB)P(C|AB)+P(\bar{A}B)P(C|\bar{A}B)+P(A\bar{B})P(C|A\bar{B})+P(\bar{A}\bar{B})P(C|\bar{A}\bar{B})$$

$$\begin{aligned}&=P(A)P(B|A)P(C|AB)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})P(C|\bar{A}B)\\&\quad+P(A)P(\bar{B}|A)P(C|A\bar{B})+P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A})P(C|\bar{A}\bar{B})\end{aligned}$$

$$=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}+\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}+\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}+\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{288}{720}=\frac{2}{5}$$

21.两部机器制造大量的同一种零件，根据长期资料统计，甲、乙机器制造出的零件废品率分别是 0.01 和 0.02。现有同一机器制造的一批零件，估计这批零件是乙机器制造的可能性比甲机器制造的可能性大一倍，先从这批零件中任意抽取一件，经检查是废品。试由此结果计算这批零件是由甲机器制造的概率。

分析：“现有同一机器制造的一批零件”意思是这批零件是全部由某一台机器制造的，只是不知道这台机器是甲机器还是乙机器。

解答：以 A 表示这批零件是甲机器制造的，以 B 表示抽出的零件是废品，则

$$P(B|A)=0.01, P(B|\bar{A})=0.02, P(\bar{A})=2P(A)$$

由 $P(\bar{A})=2P(A)$ 及 $P(\bar{A})+P(A)=1$ 得 $P(A)=\frac{1}{3}$

于是由贝叶斯公式得

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})}=\frac{\frac{1}{3}\times0.01}{\frac{1}{3}\times0.01+\frac{2}{3}\times0.02}=\frac{1}{5}$$

分值：本题满分 100 分。

评分标准：写出正确的贝叶斯公式得 40 分，计算结果正确得 60 分。

22.有朋自远方来，他乘火车、轮船、汽车、飞机来的概率分别是 0.3， 0.2，0.1，0.4。如果他乘火车、轮船、汽车来，迟到的概率分别是$\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{12}$，而乘飞机则不会迟到。结果他迟到了，试求他是乘火车来的概率

解答：以A_1,A_2,A_3,A_4分别表示他乘火车、轮船、汽车、飞机来，以B表示他迟到，根据题目条件，有

$$P(A_1)=0.3,P(A_2)=0.2,P(A_3)=0.1,P(A_4)=0.4$$

$$P(B|A_1)=\frac{1}{4},P(B|A_2)=\frac{1}{3},P(B|A_3)=\frac{1}{12},P(B|A_4)=0$$

根据贝叶斯公式，得

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)+P(A_4)P(B|A_4)}$$

$$=\frac{0.3\times\frac{1}{4}}{0.3\times\frac{1}{4}+0.2\times\frac{1}{3}+0.1\times\frac{1}{12}+0.4\times 0}=\frac{1}{2}$$

23.加工一个产品要经过三道工序，第一、二、三道工序不出现废品的概率分别是 0.9，0.95，0.8。假定各工序是否出现废品相互独立，求经过三道工序而不出现废品的概率

解答：以A,B,C分别表示第一、二、三道工序不出现废品，以D表示经过三道工序而不出现废品，则A,B,C相互独立，$D=ABC$。根据题目条件，有

$$P(A)=0.9,P(B)=0.95,P(C)=0.8$$

因此$P(D)=P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=0.9\times0.95\times0.8=0.684$

24.三个人独立地破译一个密码，他们能译出的概率分别是 0.2，$\frac{1}{3}$，0.25。求密码被破译的概率

解答：以A,B,C分别表示三人破译出密码，则A,B,C相互独立，由题目条件

$$P(A)=0.2,P(B)=\frac{1}{3},P(C)=0.25$$

从而密码被破译的概率为

$$P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=1-P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})$$

$$=1-0.8\times\frac{2}{3}\times0.75=\frac{3}{5}$$

25.对同一目标，3 名射手独立射击的命中率分别是 0.4，0.5 和 0.7，求三人同时向目标各射一发子弹而没有一发中靶的概率

解答：以 A,B,C 分别表示三人命中靶子，则 A,B,C 相互独立，由题目条件

$$P(A)=0.4, P(B)=0.5, P(C)=0.7$$

则三人都没有命中靶子的概率为

$$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})=0.6\times0.5\times0.3=0.09$$

26.甲、乙、丙三人同时对飞机进行射击，三人击中的概率分别为 0.4，0.5，0.7。飞机被一人击中而击落的概率为 0.2，被两人击中而击落的概率为 0.6，若三人都击中，飞机必定被击落，求飞机被击落的概率

解答：以 A_1,A_2,A_3 分别表示甲、乙、丙击中飞机，以 B_1,B_2,B_3 分别表示一人、两人、三人击中飞机，以 C 表示飞机被击落，由题目条件

$$P(A_1)=0.4, P(A_2)=0.5, P(A_3)=0.7$$

$P(C|B_1)=0.2, P(C|B_2)=0.6, P(C|B_3)=1$ （将事件用字母表示、题目条件表示为概率，正确得 20 分）

而由题意知， A_1,A_2,A_3 相互独立，因此

$$P(B_1)=P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)$$

$$=P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)$$

$=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7=0.36$ （B1 概率计算结果正确 20 分）

$$P(B_2)=P(A_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2A_3+A_1\bar{A}_2A_3)=P(A_1A_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1A_2A_3)+P(A_1\bar{A}_2A_3)$$

$$=P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3)+P(A_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)$$

$=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7+0.4\times0.5\times0.7=0.41$ （B2 概率计算结果正确 20 分）

$P(B_3)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0.4\times0.5\times0.7=0.14$（B3 概率计算结果正确 20 分）

从而由全概率公式

$P(C)=P(B_1)P(C|B_1)+P(B_2)P(C|B_2)+P(B_3)P(C|B_3)$

$=0.36\times0.2+0.41\times0.6+0.14\times1=0.458$（全概率公式正确 10 分，计算结果正确 10 分）

分值：本题满分 100 分。

27.证明：若三个事件 A,B,C 相互独立，则 $A\cup B$ ， AB 及 $A-B$ 都与 C 独立

证明： $P((A\cup B)C)=P(AC\cup BC)=P(AC)+P(BC)-P(ABC)$

$=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(A)P(B)P(C)$

$=[P(A)+P(B)-P(A)P(B)]P(C)$

$=[P(A)+P(B)-P(AB)]P(C)=P(A\cup B)P(C)$ ，因此 $A\cup B$ 与 C 独立

$P((AB)C)=P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

$=[P(A)P(B)]P(C)=P(AB)P(C)$ ，因此 AB 与 C 独立

$P((A-B)C)=P((A\bar{B})C)=P(A\bar{B}C)=P(A)P(\bar{B})P(C)$

$=[P(A)P(\bar{B})]P(C)=P(A\bar{B})P(C)=P(A-B)P(C)$ ，因此 $A-B$ 与 C 独立

28.15 个乒乓球中有 9 个新球，6 个旧球，第一次比赛取出了 3 个，用完后放回去，第二次比赛又取出 3 个，求第二次取出的 3 个球全是新球的概率

解答：以 A_0,A_1,A_2,A_3 分别表示第一次取出 0 个、1 个、2 个、3 个新球，以 B 表示第二次取出 3 个新球，则

$$P(A_0)=\frac{C_6^3}{C_{15}^3},P(A_1)=\frac{C_9^1C_6^2}{C_{15}^3},P(A_2)=\frac{C_9^2C_6^1}{C_{15}^3},P(A_3)=\frac{C_9^3}{C_{15}^3}$$

$$P(B|A_0)=\frac{C_9^3}{C_{15}^3},P(B|A_1)=\frac{C_8^3}{C_{15}^3},P(B|A_2)=\frac{C_7^3}{C_{15}^3},P(B|A_3)=\frac{C_6^3}{C_{15}^3}$$

由全概率公式得

$$P(B)=P(A_0)P(B|A_0)+P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$$

$$=\frac{C_6^3}{C_{15}^3}\cdot\frac{C_9^3}{C_{15}^3}+\frac{C_9^1C_6^2}{C_{15}^3}\cdot\frac{C_8^3}{C_{15}^3}+\frac{C_9^2C_6^1}{C_{15}^3}\cdot\frac{C_7^3}{C_{15}^3}+\frac{C_9^3}{C_{15}^3}\cdot\frac{C_6^3}{C_{15}^3}=\frac{528}{5915}\approx 0.089$$

29.要验收一批 100 件的物品，从中随机地取出 3 件来测试，设 3 件物品的测试是相互独立的，如果 3 件中有 1 件不合格，就拒绝接受该批物品。设 1 件不合格的物品经测试被查出的概率为 0.95，而 1 件合格品经测试被误认为不合格的概率为 0.01，如果这 100 件物品中有 4 件是不合格的，求这批物品被接受的概率

解答：以 A_0,A_1,A_2,A_3 分别表示取出的 3 件物品中有 0 个、1 个、2 个、3 个不合格品，以 B 表示取出的 3 件物品测试都合格，则

$$P(A_0)=\frac{C_{96}^3}{C_{100}^3},P(A_1)=\frac{C_4^1C_{96}^2}{C_{100}^3},P(A_2)=\frac{C_4^2C_{96}^1}{C_{100}^3},P(A_3)=\frac{C_4^3}{C_{100}^3}$$

$$P(B|A_0)=0.99^3,P(B|A_1)=0.99^2\times0.05,P(B|A_2)=0.99^1\times0.05^2,P(B|A_3)=0.05^3$$

由全概率公式得

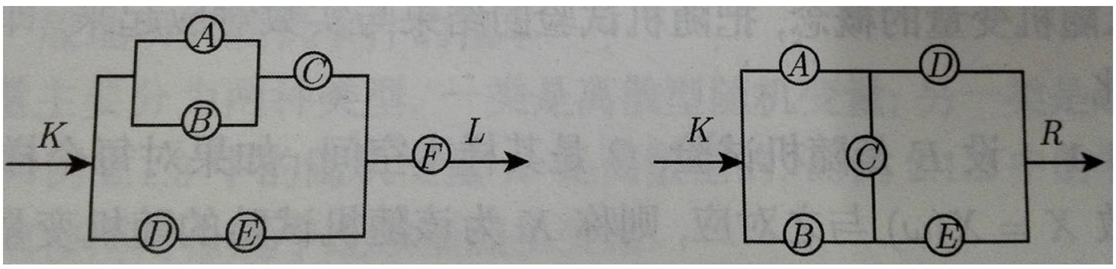
$P(B)=P(A_0)P(B|A_0)+P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$（写出全概率公式得 20 分）

$=\frac{C_{96}^3}{C_{100}^3}\cdot0.99^3+\frac{C_4^1C_{96}^2}{C_{100}^3}\cdot0.99^2\times0.05+\frac{C_4^2C_{96}^1}{C_{100}^3}\cdot0.99\times0.05^2+\frac{C_4^3}{C_{100}^3}\cdot0.05^3$（各概率正确得 60 分，四部分每错一个扣 15 分）

$=\frac{139531.59842}{161700}\approx0.8629$（计算结果正确得 20 分）

分值：本题满分 100 分。

30.设下图的两个系统 KL 和 KR 中各元件通达与否相互独立，且每个元件通达的概率均为 p ，分别求系统 KL 和 KR 通达的概率



解答：在系统 KL 中

根据各元件之间的并联、串联关系，系统通达可表示为 $(((A\cup B)C)\cup(DE))F$

可化为 $ACF\cup BCF\cup DEF$

又因为各元件通达相互独立，因此该系统通达的概率为

$$P_{KL}=P(ACF\cup BCF\cup DEF)$$

$$=P(ACF)+P(BCF)+P(DEF)-P(ABCF)-P(ACDEF)-P(BCDEF)+P(ABCDEF)$$

$$=p^3+p^3+p^3-p^4-p^5-p^5+p^6=3p^3-p^4-2p^5+p^6$$

系统 KR 通达可以表示为 $AD\cup ACE\cup BE\cup BCD$

因此该系统通达的概率为

$$P_{KR}=P(AD\cup ACE\cup BE\cup BCD)$$

$$\begin{aligned}&=P(AD)+P(ACE)+P(BE)+P(BCD)\\&-P(ACDE)-P(ABDE)-P(ABCD)-P(ABCE)-P(ABCDE)-P(BCDE)\\&+P(ABCDE)+P(ABCDE)+P(ABCDE)+P(ABCDE)-P(ABCDE)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=P(AD)+P(ACE)+P(BE)+P(BCD)\\&-P(ACDE)-P(ABDE)-P(ABCD)-P(ABCE)-P(BCDE)+2P(ABCDE)\end{aligned}$$

$$=p^2+p^3+p^2+p^3-p^4-p^4-p^4-p^4-p^4+2p^5=2p^2+2p^3-5p^4+2p^5$$