# 第4章 随机变量的数字特征

◆数学期望

◆方差

1

# 第1节

# 随机变量的数学期望

2

# 数学期望E(X)

Mathematical Expectation

◆ 离散型随机变量的数学期望

定义　设离散型随机变量的概率分布为

$$P\{X = x_k\} = p_k \qquad k = 1, 2, \cdots$$

若级数 $\sum_k p_k x_k$ 绝对收敛， 则称此级数为

随机变量X的数学期望，记作E(X)，即

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots p_kx_k + \cdots = \sum_k p_k x_k$$

3

## 离散型随机变量的数学期望的计算

例　　已知随机变量X的分布律：

| X | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|
| P | 1/4 | 1/2 | 1/4 |

求数学期望E（X）

解　$E(X) = 4 \times \frac{1}{4} + 5 \times \frac{1}{2} + 6 \times \frac{1}{4} = 5$

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3$$

4

## 连续型随机变量的数学期望E(X)

◆连续型随机变量

定义 设连续型随机变量X的密度函数为 **f (x)**, 则

若广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 绝对收敛，则称此积分为

$X$的数学期望

即 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)dx$$

5

## 连续型随机变量的数学期望的计算

例 已知随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} & |x|<1 \\ 0 & |x|\geq 1 \end{cases}$$ 求数学期望E(X)。

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

$$=\int_{-\infty}^{-1} x\cdot 0\cdot dx+\int_{-1}^{1} x\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx+\int_{1}^{+\infty} x\cdot 0\cdot dx$$

$$=0$$

6

## 数学期望的意义

E(X)反映了随机变量X的取值的“概率平均”，

是X的可能值与相应概率的加权平均。

试验次数较大时，**X**的观测值的算术平均值 $\overline{X}$ 在**E(X)**附近摆动

$$\overline{x} \approx E(X)$$

数学期望又可以称为期望(**Expectation**)，均值(**Mean**)



## 随机变量的函数的数学期望

定理 **1**：设 $Y = g(X)$ 是随机变量 X的函数,

- 离散型 $P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1, 2, \cdots$

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_k g(x_k) p_k$$

- 连续型 密度函数为 $f(x)$

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

例 设 X 的分布密度如下：求 $E(X)$， $E(X^2)$

| $X$ | $-2$ | $-1$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{10}$ |

解：$E(X)=-2\times\frac{1}{10}+(-1)\times\frac{2}{10}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{10}=0.8$

$$E(X^2)=(-2)^2\times\frac{1}{10}+(-1)^2\times\frac{2}{10}+1^2\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{1}{10}=3$$

另解：先求出$X^2$ 的分布律：

| $X^2$ | $1$ | $4$ | $9$ |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{5}{10}$ | $\frac{4}{10}$ | $\frac{1}{10}$ |

则 $E(X^2)=1\times\frac{5}{10}+4\times\frac{4}{10}+9\times\frac{1}{10}=3$

9

例 已知 $X$ 服从$[0,2\pi]$ 上的均匀分布，求 $Y=\sin X$ 的数学期望。

解 $E(Y)=E(\sin X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\, f(x)\,dx$

因为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & 0\le x\le 2\pi;\\ 0, & 其它。\end{cases}$

所以 $E(\sin X)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\sin x dx=0$

10

## 数学期望的性质

- . $E(C)=C$ C 为常数
- . $E(CX)=CE(X)$
- . $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
- 当随机变量 $X,Y$ 相互独立时

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

注意条件！

11

## 0-1分布（两点分布）的数学期望

**分布律**

X服从0-1分布，其概率分布为

P(X=1)=p

P(X=0)=1- p

| X | 0 | 1 |
|---|---|---|
| P | 1-p | p |

**数学期望**

$$E(X)=0\times(1-p)+1\times p=p$$

若X 服从参数为 p 的0-1分布， 则E(X) = p

12

## 二项分布（贝努利分布）的数学期望

分布律　X服从二项分布，其概率分布为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\quad k=0,1,\cdots,n$$

数学期望

二项分布可表示为 $n$ 个 0 － 1 分布的和 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$

其中 $X_i=\begin{cases}0, & A\text{在第}i\text{次试验中不发生}\\ 1, & A\text{在第}i\text{次试验中发生}\end{cases}$

则　$E(X)=E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=np$

若 **X~B( n, p ),** 则 **E(X)= np**

13

## 泊松分布的数学期望

分布律　$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,1,2,\cdots$

数学期望

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\qquad (k-1=t)$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{t=0}^{+\infty}\frac{\lambda^t}{t!}=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda$$

如果 $X\sim P(\lambda)$ ，那么 $E(X)=\lambda$

14

## 均匀分布的期望

概率密度 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

数学期望

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_a^b\frac{x}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}$$

15

## 正态分布的期望

概率密度

X~ N (μ，σ²)　　$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

数学期望

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\overset{t=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=\!=\!=}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t+\mu)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\sigma dt$$

$$=\mu$$

16

## 指数分布的期望

概率密度 $$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

数学期望

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}dx=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\lambda}$$

17

## 本章作业

2，4，12，14

18

# 第2节

# 随机变量的方差



## 方 差 的 引 入

例1 设甲、乙两射手在相同的条件下射击，其命中环数显然为随机变量，记为$X_1$和$X_2$，假定由历史数据可知其分布列如下（各射击1000次）

| 命中环数$X_i$ | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P\{X_1=x_i\}$ | 0.525 | 0.2 | 0.05 | 0.1 | 0.075 | 0.05 |
| $P\{X_2=x_i\}$ | 0.4 | 0.2 | 0.245 | 0.155 | 0 | 0 |

两射手命中目标的“平均环数”分别为：

M1＝10×0.525＋9×0.2＋ ……＋5×0.05
＝8.85（环）

M2＝10×0.4+9×0.2＋8×0.245＋7×0.155
＝8.845（环）

他们命中环数偏离平均环数的平方的平均值为：

$D_1$＝（10－8.85）$^2$×0.525＋（9－8.85）$^2$×0.2
＋ ……＋（5－8.85）$^2$×0.05＝2.4275

$D_2$＝（10－8.845）$^2$×0.4＋（9－8.845）$^2$×0.245
＋（7－8.845）$^2$×0.155＝1.2409

乙射手技术发挥稳定！

21

## 方差（Variance）的定义

◆ 定义

设 $X$是一随机变量，如果 $E[X-E(X)]^2$ 存在，则称为 $X$ 的方差，记作$D(X)$或 $Var(X)$

即 $$\boldsymbol{D(X)=E[X-E(X)]^2}$$

◆均方差（标准差）

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

22

## 方差的计算公式

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

证明:

$$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$$
$$=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\}$$
$$=E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2$$
$$=E(X^2)-[E(X)]^2$$

23

## 随机变量的方差

◆离散型

设离散型随机变量X的概率分布为

$$P\{X=x_k\}=p_k \qquad k=1,\ 2,\ \cdots,$$

$$D(X)=\sum_k [x_k-E(X)]^2 p_k=\sum_k x_k^2\cdot p_k-[E(X)]^2$$

◆连续型

设连续型随机变量X的分布密度为 $f(x)$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-[E(X)]^2$$

24

## 方差的计算步骤

Step 1: 计算期望 E(X)

$$E(X)=p_1x_1+p_2x_2+\cdots p_kx_k+\cdots=\sum_k p_k\,x_k$$ 离散型

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$ 连续型

Step 2: 计算 $E(X^2)$

$$E(X^2)=p_1x_1^{\ 2}+p_2x_2^{\ 2}+\cdots p_kx_k^{\ 2}+\cdots=\sum_k p_k\,x_k^{\ 2}$$ 离散型

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx$$ 连续型

Step 3: 计算 D(X)

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

25

例 某经销商要订购下一年的挂历。根据经验，需求量为150本、160本、170本、180本的概率分别为0.1、0.4、0.3、0.2，四种订购方案的获利$X_i$是随机变量，经计算获利情况如下表

| 需求量及概率<br>订购方案 | 需求150本<br>概率0.1 | 需求160本<br>概率0.4 | 需求170本<br>概率0.3 | 需求180本<br>概率0.2 |
|---|---|---|---|---|
| 订购150本获利$X_1$ | 45 | 45 | 45 | 45 |
| 订购160本获利$X_2$ | 42 | 48 | 48 | 48 |
| 订购170本获利$X_3$ | 39 | 45 | 51 | 51 |
| 订购180本获利$X_4$ | 36 | 42 | 48 | 54 |

问：（1）应订购多少本挂历，可使期望利润最大？（2）为使期望利润最大且风险最小，经销商应订购多少本挂历？

$E(X_1)=45$ $E(X_2)=47.4$ $E(X_3)=47.4$ $E(X_4)=45.6$

$E(X_2^2)=2250$ $D(X_2)=3.24$

$E(X_3^2)=2262.6$ $D(X_3)=15.84$

26

# 0-1分布的方差

◆分布律

| X | 0 | 1 |
|---|---|---|
| P | 1-p | p |

$$E(X) = p$$

◆方差

$$E(X^2) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) = p$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = pq$$

其中 $q = 1 - p$

27

# 二项分布的方差

◆分布律

X ~ B ( n, p )

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

◆方差

$$E(X) = np \qquad E(X^2) = n(n-1)p^2 + np$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = np(1-p) = npq$$

If X ~ B ( n, p ) , then D ( X ) = n p ( 1- p )

其中 $q = 1 - p$

28

## 泊松分布的方差

◆分布律

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\quad k=0,1,2,\cdots$$

◆方差

$$E(X)=\lambda \qquad E(X^2)=\lambda^2+\lambda$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda$$

If $X\sim P(\lambda)$ , then $D(X)=\lambda$

29

## 均匀分布的方差

◆分布密度 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

◆方差

$$E(X)=\frac{1}{2}(a+b)$$

$$E(X^2)=\int_a^b\frac{x^2}{b-a}dx=\frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{12}(b-a)^2$$

30

## 正态分布的方差

◆分布密度　$X \sim N(\mu, \sigma^2)$　$E(X) = \mu$

◆方差

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\overset{t=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=\!=\!=\!=} \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left( -t\, e^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) = \sigma^2$$

31

## 指数分布的方差

◆分布密度　$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$　$E(X) = \frac{1}{\lambda}$

◆方差

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = -x^2 e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x e^{-\lambda x} dx$$

$$= -\frac{2}{\lambda} \left[ x e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \right] = \frac{2}{\lambda^2} \left[ e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} \right] = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

32

## 常见分布及其期望和方差列表P114

| 分布名称 | 数学期望E（X） | 方差D（X） |
|---|---|---|
| 0-1分布 | $p$ | $pq$ |
| 二项分布 | $np$ | $npq$ |
| 泊松分布 | $\lambda$ | $\lambda$ |
| 均匀分布 | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ |
| 正态分布 | $\mu$ | $\sigma^2$ |
| 指数分布 | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ |

33

例　已知一批玉米种子的发芽率是75%，播种时每穴种三粒，求每穴发芽种子粒数的数学期望、方差及均方差.

解　　设发芽种子数为 X，则 X 服从二项分布，且

$$n=3,\qquad p=0.75$$

所以 $E(X)=np=3\times 0.75=2.25$

$$D(X)=np(1-p)=3\times 0.75\times 0.25=0.5625$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0.5625}=0.75$$

34

例 某动物的寿命 X （年） 服从指数分布，其中参数 $\lambda$ =0.1，求这种动物的平均寿命及标准差.

解 因为 $X$ 服从指数分布，且 $\lambda = 0.1$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.1} = 10, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{0.1^2} = 100$$

$$\sqrt{D(X)} = \sqrt{100} = 10$$

所以这种动物的平均寿命为10年，标准差为10年.

35

## 方差的性质

- $D(C) = 0$ C 为常数
- $D(CX) = C^2 D(X)$ C为常数
- 当随机变量 $X, Y$ 相互独立时

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$$

证明 $D(X \pm Y) = E[(X \pm Y)^2] - [E(X \pm Y)]^2$

$$= E(X^2 \pm 2XY + Y^2) - [E(X) \pm E(Y)]^2$$

$$= E(X^2) - [E(X)]^2 + E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

$$= D(X) + D(Y)$$

36

例 $X_1, X_2$ 是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$f_1(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1,\\ 0, & 其它.\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}e^{-(x-5)}, & x\ge 5,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

求 $D(X_1+X_2)$

解 因为 $X_1, X_2$ 相互独立，所以

$$D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)$$

而 $E(X_1)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_1(x)dx \ =\int_0^1 x\cdot 2xdx=\frac{2}{3}$

$$E(X_2)=\int_{-\infty}^{+\infty} yf_2(y)dy \ =\int_5^{+\infty} y\cdot e^{-(y-5)}dy=6$$

37

$$E(X_1^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x)dx \ =\int_0^1 x^2\cdot 2xdx=\frac{1}{2}$$

$$E(X_2^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_2(y)dy \ =\int_5^{+\infty} y^2\cdot e^{-(y-5)}dy$$

$$=-y^2\cdot e^{-(y-5)}\Big|_5^{+\infty}+\int_5^{+\infty} 2y\cdot e^{-(y-5)}dy$$

$$=25-2y\cdot e^{-(y-5)}\Big|_5^{+\infty}+\int_5^{+\infty} 2e^{-(y-5)}dy$$

$$=35-2e^{-(y-5)}\Big|_5^{+\infty}=37$$

所以 $D(X_1)=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$ $\qquad D(X_2)=37-6^2=1$

$$D(X_1+X_2)=\frac{1}{18}+1=\frac{19}{18}$$

38

## 练习

设随机变量X服从参数为1的指数分布，求 $E\{X+e^{-2X}\}$

解1 X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & (x>0) \\ 0, & (x\le 0) \end{cases} \qquad EX=1$$

所以 $E(X+e^{-2X})=EX+E(e^{-2X})$

而 $E(e^{-2X})=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x} f(x)dx$

$$=\int_{0}^{+\infty} e^{-3x}dx=\frac{1}{3}$$

所以 $E(X+e^{-2X})=\frac{4}{3}$

39

设随机变量X服从参数为1的指数分布，求 $E\{X+e^{-2X}\}$

解2 X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & (x>0) \\ 0, & (x\le 0) \end{cases}$$

所以 $E(X+e^{-2X})=\int_{-\infty}^{+\infty}(x+e^{-2x})f(x)dx$

$$=\int_{0}^{+\infty}(x+e^{-2x})e^{-x}dx$$

$$=\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx+\int_{0}^{+\infty} e^{-3x}dx=\frac{4}{3}$$

40

例　设随机变量$X_1,\dots,X_n$相互独立，并且它们的期望都为$\mu$，方差都为$\sigma^2$，求随机变量$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$的数学期望与方差。

$$E(\overline{X})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\mu\text{，}\quad D(\overline{X})=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{\sigma^2}{n}$$

41

# 本章作业

2，4，12，14

下节课交作业，请同学们做好作业，下次课不要忘了带过来

44

# 下次课测验

范围：1、2、4章
时间：45分钟
题数：4题

**请准备稿纸，将解答写在稿纸上**

45