华南农业大学期末考试试卷（A 卷）

2014 学年第 1 学期　　　　　**考试科目：** 概率论与数理统计

考试类型：（闭卷）考试　　　　　**考试时间：** **120** **分钟**

学号______________姓名___________年级专业_____________________

题号	一	二	三	四	总分
得分					
评阅人					

一、选择题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

1. 有100张从1到100号的卡片，从中任取一张，取到卡号是7的倍数的概率为

（　A　）

A. $\frac{7}{50}$　　　B. $\frac{7}{100}$　　　C. $\frac{7}{48}$　　　D. $\frac{15}{100}$

解答：从 100 张卡片中任取一张，共有 100 种取法；

卡号是 7 的倍数的卡片有 7、14、……、98 等共 14 张卡片，所以取到卡号是 7 的倍数的卡片有 14 种取法；

根据古典概型计算方法，概率为 $\frac{14}{100}=\frac{7}{50}$

2.设 A 和 B 互不相容，且 $P(A)>0$， $P(B)>0$，则下列结论正确的是（　C　）

A. $P(A|B)>0$　　　　B. $P(A)=P(A|B)$

C. $P(A|B)=0$　　　　D. $P(AB)=P(A)P(B)$

解答：由于 A 和 B 互不相容，因此 $AB=\Phi$，所以 $P(AB)=0$

从而 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=0$

3.设 A 和 B 相互独立，且 $P(A)>0$， $P(B)>0$，则一定有 $P(A\cup B)=$（　A　）

A. $1-P(\bar{A})P(\bar{B})$　　　　B. $1-P(A)P(B)$

C. $P(A)+P(B)$　　　　D. $1-P(\overline{AB})$

解答：由于 A 和 B 相互独立，因此 $P(AB)=P(A)P(B)$

所以 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

$=1-[1-P(A)][1-P(B)]=1-P(\bar{A})P(\bar{B})$

或者 $P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\bar{A}\bar{B})=1-P(\bar{A})P(\bar{B})$（$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立）

4.设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{8\pi}}e^{-\frac{1}{8}(x-2)^2}$，若 $P(X>C)=P(X\le C)$，则 C 的值为　　（　D　）

A. 0　　　　　　B. -2　　　　　　C. $-\sqrt{2}$　　　　　　D. 2

解答：根据 X 的密度知 $X \sim N(2,4)$，再由正态分布的对称性（关于 $x=\mu$ 对称），$P(X>C)=P(X\le C)$ 说明 $C=\mu=2$

5.下列函数可以作为某随机变量的密度函数的为：　　　　　　　　　　(D)

A. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\in[0,\pi]\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$　　　　B. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |x|<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

C. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$　　　　D. $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

解答：一个函数要成为某随机变量的密度函数，需要满足两个条件：非负性和规范性。

选项 A 中函数不满足非负性，所以不能作为密度函数；

选项 B 中函数不满足规范性 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-2}^{2}\frac{1}{2}dx=2$，不能作为密度函数；

选项 C 中函数不满足规范性 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{2}$，不能作为密度函数；

选项 D 中函数满足非负性，同时 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}e^{-x}dx=1$，满足规范性，所以可以作为某随机变量的密度函数。

6. 设 X_1、X_2 是随机变量，其数学期望、方差都存在，C 是常数，下列命题中

（1）$E(CX_1+b)=CE(X_1)+b$;　　　　（2）$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)$

（3）$D(C X_1+b)=C^2D(X_1)+b$　　　　（4）$D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)$

正确的有　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(C)

A. 4 个　　　B. 3 个　　　C. 2 个　　　D. 1 个

解答：根据数学期望和方差的性质

$E(CX_1+b)=E(CX_1)+E(b)=CE(X_1)+b$，所以（1）式正确；

$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)$ 对任何 X_1、X_2 都成立，所以（2）式正确；

$D(CX_1+b)=D(CX_1)+D(b)=C^2D(X_1)+0$，所以（3）式错误；（由于 b 是常数，所以 b 与 X_1 取值互相没有影响，因此相互独立）

$D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)$ 只有当 X_1、X_2 独立时才成立，所以（4）式错误。

7. 样本$(X_1, X_2, \cdots, X_9)$取自总体$X \sim N(0,1)$，则统计量$\frac{5}{4}\sum_{i=1}^{4} X_i^2 \Big/ \sum_{j=4}^{9} X_j^2$服从以下分布 (D)

A. $F(4,9)$ B. $F(4,5)$ C. $F(4,4)$ D. 以上都不是.

解答：F 分布要求分子分母的两个χ^2统计量相互独立。由于分子、分母中同时包含X_4，因此不相互独立，所以$\frac{5}{4}\sum_{i=1}^{4} X_i^2 \Big/ \sum_{j=4}^{9} X_j^2$不满足 F 分布的定义，不是 F 分布。

8. 设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，X_1，X_2，$\cdots$，X_n（$n \ge 3$）是来自总体X的简单随机样本，则下列估计量中，不是总体参数μ的无偏估计的是 (B)

A. $\bar{X}$ B. $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

C. $0.1 \times (4X_1 + 6X_2)$ D. $X_1 + X_2 - X_3$

解答：无偏估计要求统计量的数学期望等于要估计的参数μ。

$E(\bar{X}) = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X) = E(X) = \mu$，即$\bar{X}$是无偏估计；

$E(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X) = nE(X) = n\mu$，说明 B 不是无偏估计；

$E(0.4X_1 + 0.6X_2) = 0.4E(X_1) + 0.6E(X_2) = 0.4\mu + 0.6\mu = \mu$，即 C 是无偏估计

$E(X_1 + X_2 - X_3) = E(X_1) + E(X_2) - E(X_3) = \mu$，即 D 是无偏估计

9. 简单随机样本(X_1, X_2)来自总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，下列μ的无偏估计量中， 最有效的估计量是 (D)

A. $\frac{3}{7}X_1 + \frac{4}{7}X_2$ B. $\frac{2}{5}X_1 + \frac{3}{5}X_2$

C. $\frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2$ D. $\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$

解答：在无偏估计量中，方差最小的最有效。要注意只有无偏估计量才可以比较有效性，所以比较方差之前要确定是无偏估计量。

本题中的四个选项都是无偏估计量。（判断方法参照上一题）

$$D(\frac{3}{7}X_1 + \frac{4}{7}X_2) = \frac{9}{49}D(X_1) + \frac{16}{49}D(X_2) = \frac{25}{49}\sigma^2$$

$$D(\frac{2}{5}X_1+\frac{3}{5}X_2)=\frac{4}{25}D(X_1)+\frac{9}{25}D(X_2)=\frac{13}{25}\sigma^2$$

$$D(\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2)=\frac{4}{9}D(X_1)+\frac{1}{9}D(X_2)=\frac{5}{9}\sigma^2$$

$$D(\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2)=\frac{1}{4}D(X_1)+\frac{1}{4}D(X_2)=\frac{1}{2}\sigma^2$$

四个方差中最小的是$D(\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2)=\frac{1}{2}\sigma^2$，所以 D 最有效。

10. 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 且μ和σ^2均未知。若样本容量和样本观测值不变，则下面关于总体均值μ的置信区间长度L与置信度$1-\alpha$的关系的说法中正确的是。（ B ）

A. 当$1-\alpha$减小时，L增大　　B. 当$1-\alpha$减小时，L减小

C. 当$1-\alpha$减小时，L不变　　D. 以上三个都不对

解答：方差未知的情况下，均值的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$[\bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}]$$

置信区间的长度$L=2t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$，在样本容量与样本观测值不变的情况下，$n$和$S$都不变，所以$L$的大小只和$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$有关（正比例关系）。当$1-\alpha$减小时，$\alpha$增大，所以在自由度不变的情况下，$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$减小，从而$L$减小。

二、填空题（本大题共7小题，每空2分，共20分）

1. 一个盒子中有 3 个白球，2 个黑球，从中不放回地每次任取一球，连取三次，则第一、第二次、第三次都取得白球的概率为___0.1___.

解答：根据古典概型概率的计算公式

$$P=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{10}=0.1$$

2. 已知$P(A)$=0.5，$P(B)$=0.6，$P(B|A)$=0.8，则$P(A\cup B)=$___0.7___.

解答：由乘法公式得$P(AB)=P(A)P(B|A)=0.5\times 0.8=0.4$

所以根据加法公式$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.6-0.4=0.7$

装

订

线

3. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$，则 $P(X\geq 2)=\underline{e^{-2}}$， X 的密度函数为 $\underline{f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}}$.

解答： $P\{X\geq 2\}=F(+\infty)-F(2)=1-(1-e^{-2})=e^{-2}$

根据密度函数与分布函数的关系， $f(x)=F'(x)=\begin{cases}e^{-x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

4. 若随机变量 $\xi\sim U(1,6)$，则方程 $X^2+\xi X+1=0$ 有实根的概率为__4/5 或 0.8__.

解答：随机变量 ξ 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5} & x\in(1,6)\\ 0 & 其他\end{cases}$

方程有实根的充要条件是 $\Delta=\xi^2-4\geq 0$，因此方程有实根的概率为

$$P\{\xi^2-4\geq 0\}=P\{|\xi|\geq 2\}=P\{\xi\geq 2\}=\int_2^{+\infty}f(x)dx=\int_2^6\frac{1}{5}dx=\frac{4}{5}=0.8$$

5. 设 $X\sim N(0,1),Y\sim N(8,4)$， X 的分布函数为 $\Phi(x)=P\{X<x\}$，则用 $\Phi(x)$ 表示概率 $P\{4<Y\leq 12\}=\underline{2\Phi(2)-1}$（或者填 $\Phi(2)-\Phi(-2)$ ）.

解答：根据正态分布、标准正态分布的分布函数之间的关系

$$P\{4<Y\leq 12\}=F(12)-F(4)=\Phi(\frac{12-8}{2})-\Phi(\frac{4-8}{2})=\Phi(2)-\Phi(-2)$$

而 $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$， 所以也有 $P\{4<Y\leq 12\}=\Phi(2)-\Phi(-2)=2\Phi(2)-1$

（注意：新教材中分布函数的定义是 $F(x)=P\{X\leq x\}$ ）

6. 设随机变量 X,Y 相互独立，其中 X 服从参数为 2 泊松分布，Y 服从参数为 $\frac{1}{2}$ 的指数分布，则 $E(X+Y)=$__4__， $D(2X-Y)=$__12__.

解答：根据常见分布的数学期望与方差的结论

$X\sim P(2)$，所以 $E(X)=2, D(X)=2$

$Y \sim E(\frac{1}{2})$，所以 $E(Y)=2, D(Y)=4$

再由数学期望与方差的性质得

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=2+2=4$

$D(2X-Y)=4D(X)+D(Y)=8+4=12$

7.设总体 $X \sim N(\mu,100)$，若要保证 μ 的置信区间长度小于等于5，当置信度为0.9时，样本容量 n 最小应为____44____，而当置信度为0.95时，样本容量 n 最小应为____62____.（提示：$u_{0.05}=1.645$，$u_{0.025}=1.96$）

解答：在方差已知的情况下，均值的置信区间为 $[\bar{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$

该置信区间的长度为 $L=2u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{20}{\sqrt{n}}$

当置信度为0.9时，$\alpha=0.1$，$u_{0.05}=1.645$，要保证 $L\le 5$，需要

$n \ge 16(u_{0.05})^2 \approx 43.296$，即 n 最小应为44

当置信度为0.95时，$\alpha=0.05$，$u_{0.025}=1.96$，要保证 $L\le 5$，需要

$n \ge 16(u_{0.025})^2 \approx 61.466$，即 n 最小应为62

三、概率论解答题（本大题共3小题，共36分）

1.（10分）某保险公司把被保险人分为三类："谨慎型"、"一般型"和"冒失型"。统计资料表明，上述三种人在一年内发生事故的概率依次为0.05，0.1和0.3。如果被保险人中"谨慎型"占20%，"一般型"占50%，"冒失型"占30%，现在知某人一年内出了事故，则他是"谨慎型"客户的概率是多少？

解：设 A_1, A_2, A_3 分别表示被保险人为"谨慎型"、"一般型"和"冒失型"，B 表示被保险人在一年内出了事故。（1分）

依题意，有 $P(A_1)=0.2, P(A_2)=0.5, P(A_3)=0.3$，

$P(B|A_1)=0.05, P(B|A_2)=0.1, P(B|A_3)=0.3$，（2分）

所以，由贝叶斯公式可得（1分）

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)}$$（4分）

$$=\frac{0.2\times0.05}{0.2\times0.05+0.5\times0.5+0.1\times0.3}=\frac{1}{0.3}=0.06[illegible]$$ （2分）

2. **（10分）**一袋中装有4个球，球上分别标有号码1，2，3，4. 现从中任取2球，X 为取出球中最小号码，求 X 的概率分布律和 $E(2X+1)$

解：根据题意，X 可能的取值有1，2，3， （1分）

取值的概率分别为 $P(X=1)=\frac{C_3^1}{C_4^2}=\frac{1}{2}$，$P(X=2)=\frac{C_2^1}{C_4^2}=\frac{1}{3}$，$P(X=3)=\frac{1}{C_4^2}=\frac{1}{6}$

故 X 的概率分布律为 (6 分）

X	**1**	**2**	**3**
$\boldsymbol{p}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$$E(2X+1)=(2\times1+1)\times\frac{1}{2}+(2\times2+1)\times\frac{1}{3}+(2\times3+1)\times\frac{1}{6}=\frac{13}{3}$$ （3 分）

3.（16分）设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}cx^2, & x\in(0,1),\\ 0, & x\notin(0,1).\end{cases}$

求：(1)常数 c；(2)求 X 的分布函数 $F(x)$； (3)求 X 的期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$；（4）求 $Y=1-X$ 的密度函数。

解：（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 cx^2\,\mathrm{d}x=\frac{c}{3}=1$ 知 $c=3$； （2分）

（2）当 $x\le0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{x}0\mathrm{d}x=0$；

当 $0<x\le1$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^x 3x^2\mathrm{d}x=x^3$；

当 $x>1$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 3x^2\mathrm{d}x=1$；

所以 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le0,\\ x^3, & 0<x\le1.\\ 1, & x>1.\end{cases}$ （4分）

（3）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot3x^2dx=\frac{3}{4}=0.75$ （2分）

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_0^1 x^2 \cdot 3x^2 dx=\frac{3}{5}$$ （2分）

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{3}{80}=0.375$$ （2分）

（4）解法一：因为$Y=1-X$是严格单调的函数，所以

当$0<y<1$时，即，$0<x<1$时，$f_Y(y)=f_X(1-y)|(1-y)'|=3(1-y)^2$

当Y为其他值时， $f_Y(y)=f_X(1-y)|(1-y)'|=0$

所以,$Y=1-X$的密度函数为：

$$f_Y(y)=\begin{cases}3(1-y)^2, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$ （4分）

解法二：

$Y=1-X$的分布函数$F_Y(y)$ 为

$$F_Y(y)=P(Y<y)=P(1-X<y)=P(X>1-y)$$

$$=1-P(X\le 1-y)=1-F_X(1-y),$$

而

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\frac{d}{dy}[1-F_X(1-y)]=f_X(1-y)=\begin{cases}3(1-y)^2 & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$ （4分）

四、数理统计解答题（本大题共2小题，共24分）

1. **（12 分）**设总体X的概率密度$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，其中$\lambda>0$是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体$X$的一个容量为$n$的简单随机样本，分别用矩估计法和极大似然估计法求$\theta$的估计量。

解：矩法估计

因为 $\mu=E(X)=\int_0^{+\infty} x\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=-\int_0^{+\infty} xde^{-\frac{x}{\theta}}=-xe^{-\frac{x}{\theta}}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{\theta}}dx$

$$=-\theta e^{-\frac{x}{\theta}}\Big|_0^{+\infty}=\theta$$

或因为$X\sim E\left(\frac{1}{\theta}\right)$，所以$\mu=E(X)=\theta$ （4分）

由矩法估计 $\hat{\mu}=\bar{X}$ ，所以 $\hat{\theta}=\bar{X}$ 。 （2分）

极大似然估计

似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_i}{\theta}}=\left(\frac{1}{\theta}\right)^n e^{-\frac{(x_1+x_2+\cdots x_n)}{\theta}}=\left(\frac{1}{\theta}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}}$$

（2分）

对其求对数得：

$$\ln L(\theta)=n\ln\left(\frac{1}{\theta}\right)-\frac{(x_1+x_2+\cdots x_n)}{\theta}=-n\ln\theta-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}$$

求导，并令其为0

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-n\frac{1}{\theta}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta^2}=0$$

（2分）

解得 $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$ ，θ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta}=\bar{X}$. （2分）

2.（12分）设一批钢管内径服从正态分布，从这批钢管中随机抽取9根作为样本，测得内径的样本均值 $\bar{x}=102$，样本标准差为 $s=2$，请在以下两种情况下对这批钢管的平均内径是否等于100进行检验（$\alpha=0.05$）：

（1）已知 $\sigma=1.5$；

（2）σ 未知。

（提示： $u_{0.05}=1.645$， $u_{0.025}=1.96$， $t_{0.05}(8)=1.860$， $t_{0.05}(8)=2.306$， $t_{0.05}(9)=1.833$， $t_{0.05}(9)=2.262$ ）

解：（1）这是总体方差已知，检验均值的问题，采用 U 检验。 （1分）

假设 $H_0:\mu=100,\quad H_1:\mu\neq 100$ （1分）

因为 $\bar{x}=102$， $\sigma=1.5$， $n=9$ ，故 $u=\frac{102-100}{1.5/\sqrt{9}}=4$ （2分）

对于 $\alpha=0.05$，得临界值 $u_{0.025}=1.96$ （1分）

因为$4>1.96$，所以拒绝原假设，即这批钢管的平均内经不等于100。（1分）

（2）这是总体方差未知，检验均值的问题，采用t检验。（1分）

假设$H_0: \mu = 100, \quad H_1: \mu \neq 100$（1分）

因为$\bar{x}=102$，$s=2$，$n=9$，故$t=\dfrac{102-100}{2/\sqrt{9}}=3$（2分）

对于$\alpha=0.05$，得临界值$t_{0.05}(8)=2.306$（1分）

因为$3>2.306$，所以拒绝原假设，即这批钢管的平均内径不等于100。（1分）