第三节 二阶系统的时域分析

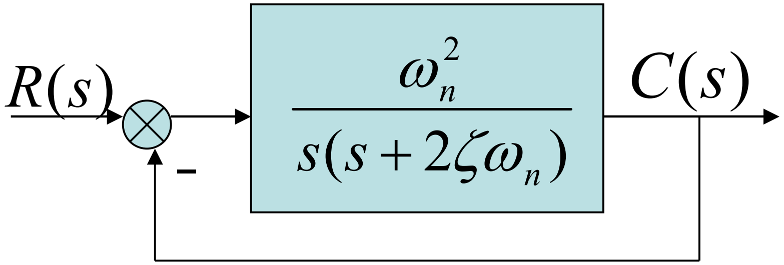
典型二阶系统的瞬态响应；
典型二阶系统的性能指标。

凡是二阶微分方程作为运动方程的控制系统，称为二阶系统。这是最常见的一种系统，很多高阶系统也可简化为二阶系统。

一、二阶系统的数学模型

$\frac{1}{s^2+2s+1}$　$\frac{1}{\omega_n^2}$

下图所示为稳定的二阶系统的典型结构图。



开环传递函数为:

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s}$$

$\omega_n=1$

$2\zeta\omega_n=2$

$\zeta=1$

闭环传递函数为:
$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$=0$

$\Phi(s)$称为典型二阶系统的传递函数,ζ称为阻尼系数,ω_n称为无阻尼振荡频率或自然频率。

$s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=0$　$s_{1,2}=\cdots$

$r(t)=1$

单位阶跃响应 特征根（系统极点）$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$ （特征方程为：$s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=0$）

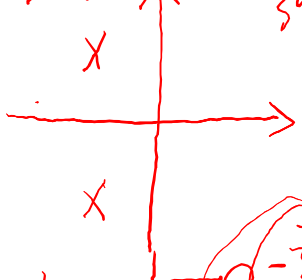
① $\zeta=0$ $s_{1,2}=\pm j\omega_n$

$c(t)=1-\cos\omega_n t$

等幅振荡

(×) 临界

② $0<\zeta<1$ $s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$



实部

$c(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\theta)$

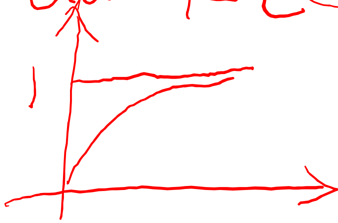
衰减振荡

(√)

③ $\zeta=1$ $s_{1,2}=-\omega_n$

实

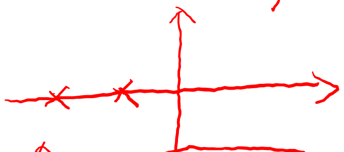
$c(t)=1-e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)$

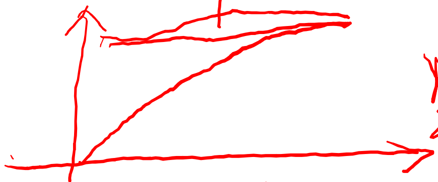


单调

(√)

④ $\zeta>1$ $s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$





单调

(√)

$c(t)$?

⑤ $\zeta<$

二、二阶系统的单位阶跃响应

特征方程为： $s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=0$

特征根为 : $s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$ ，注意：当 ζ 不同时，特征根（闭环极点）有不同的形式，其阶跃响应的形式也不同，有振荡和非振荡两大类情况。

1. 当时 $\zeta=0$ ，特征方程有一对共轭的虚根，两极点位于S平面的虚轴上，称为零(无)阻尼系统，系统的阶跃响应为持续的等幅振荡。

2. 当时 $0<\zeta<1$ ，特征方程有一对实部为负的共轭复根，两个极点位于S平面左半平面,称为欠阻尼系统，系统的阶跃响应为衰减的振荡过程。

以上 $0\le\xi<1$ 属于振荡情况

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

3. 当 $\zeta = 1$ 时，特征方程有一对相等的实根，两个极点位于S平面负实轴上,系统时间响应无振荡,称为临界阻尼系统，系统的阶跃响应为非振荡过程。

4. 当 $\zeta > 1$ 时，特征方程有一对不等的实根，两个极点位于S平面负实轴上,系统时间响应无振荡,称为过阻尼系统，系统的阶跃响应为非振荡过程。

5. 当 $\zeta < 0$时:

① $-1 < \zeta < 0$ 特征方程有一对实部为正的共轭复根，两个极点位于S平面右半平面,，系统的阶跃响应为发散振荡过程。

② $\zeta < -1$ 特征方程有一对正的不对等实根，两个极点位于S平面正实轴上,，系统的阶跃响应为发散非振荡过程。

以上 $\xi \geq 1$ 属于非振荡情况

当输入为单位阶跃函数时，$R(s)=\frac{1}{s}$ ，有：

$$C(s)=\Phi(s)\times\frac{1}{s}$$

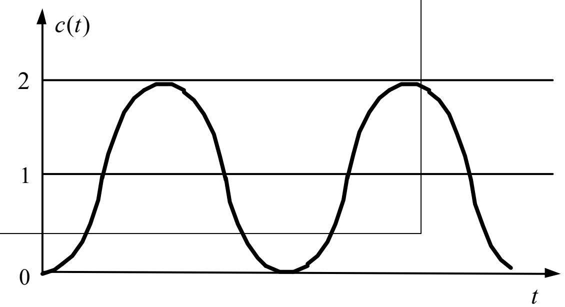
其中闭环传递函数为：$\Phi(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$

[分析]：➢当$\zeta=0$时， 极点为：$s=\pm j\omega_n$

$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{s(\omega_n^2+s^2)}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\omega_n^2}$$

$$\therefore c(t)=1-\cos\omega_n t,\ t\geq 0$$

此时输出将以频率 ω_n 在【0，2】区间做等幅振荡，所以，ω_n 称为无阻尼振荡频率。



➢当 $0<\zeta<1$的欠阻尼时， 极点为： $s_{1,2}=-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

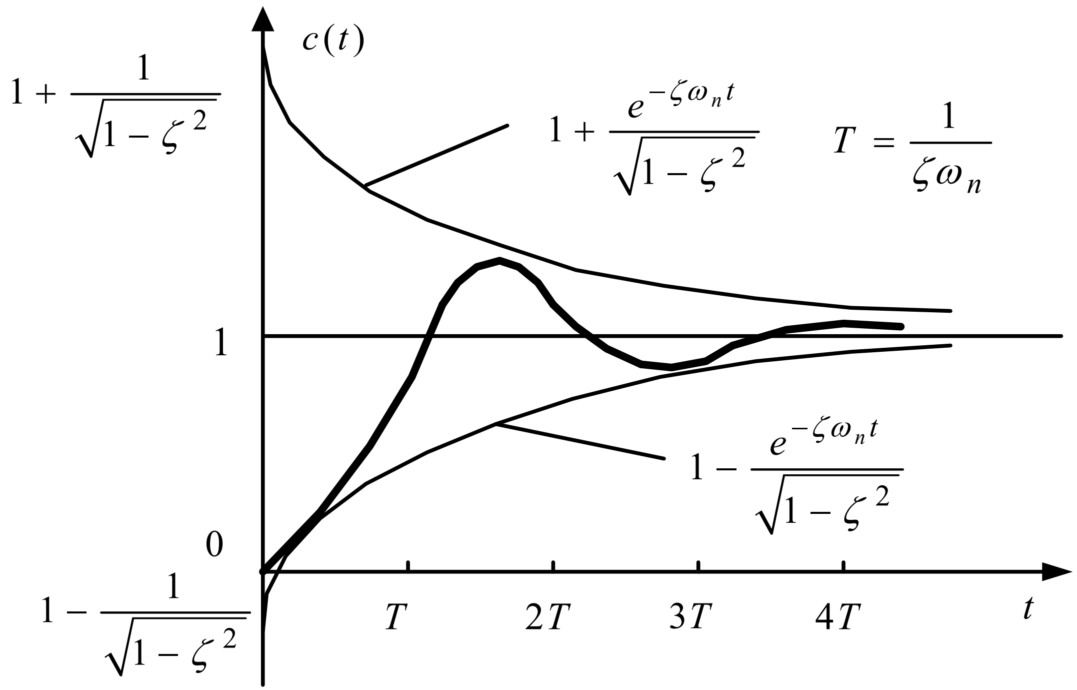
阶跃响应为：
$$C(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{1}{s}-\frac{s+2\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$
$$=\frac{1}{s}-\frac{s+\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}-\frac{\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$c(t)=1-e^{-\zeta\omega_n t}[\cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t)+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t)]$$
$$==1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t+\theta), \quad t\geq 0$$

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}[\cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t)]$$

$$== 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t + \theta), \quad t \ge 0$$

根据上面响应可画出输出曲线为

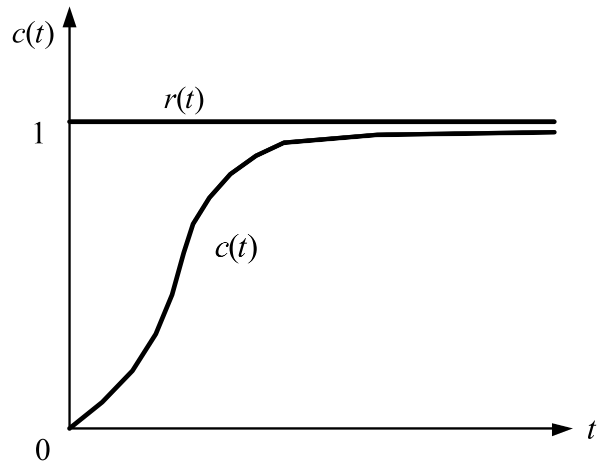


➢当 $\zeta=1$时，　**极点为：**　$s_{1,2}=-\omega_n$

阶跃响应函数为：　$C(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{\omega_n^2}{s^2+2\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\omega_n}-\frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}$

$$c(t)=1-e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)$$

二阶系统的单位阶跃响应为稳态值为1的无超调单调上升过程。



➢当 $\zeta > 1$时， 极点为： $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$

即特征方程为

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = [s + \omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})][s + \omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})]$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{[s + \omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})][s + \omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})]}$$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{[s + \omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})][s + \omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})]} \cdot \frac{1}{s}$$

$$c(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left[\frac{e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}}{(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} - \frac{e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}}{(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}\right]$$

特征方程还可为 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = (s + \frac{1}{T_1})(s + \frac{1}{T_2})$

式中 $T_1=\dfrac{1}{\omega_n(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}$ $T_2=\dfrac{1}{\omega_n(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})}$

这里 $T_1>T_2$ ，$\omega_n^2=\dfrac{1}{T_1T_2}$ 于是闭环传函为：

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\frac{1}{T_1T_2}}{(s+\frac{1}{T_1})(s+\frac{1}{T_2})}=\frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

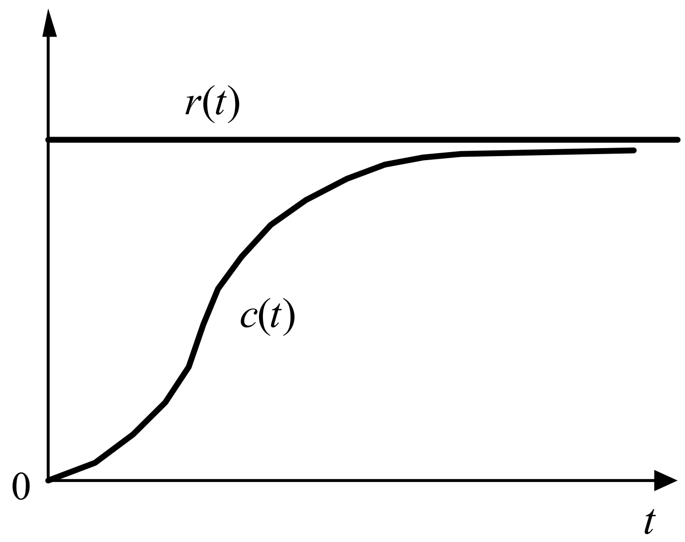
因此过阻尼二阶系统可以看作两个时间常数不同的惯性环节的串联，其单位阶跃响应为

$$C(s)=\frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{s}+\frac{T_1}{T_2-T_1}\frac{1}{(s+\frac{1}{T_1})}+\frac{T_2}{T_1-T_2}\frac{1}{(s+\frac{1}{T_2})}$$

$$c(t)=1+\frac{T_1}{T_2-T_1}e^{-\frac{t}{T_1}}+\frac{T_2}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}$$

$$c(t)=1+\frac{T_1}{T_2-T_1}e^{-\frac{t}{T_1}}+\frac{T_2}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}$$

输出响应为

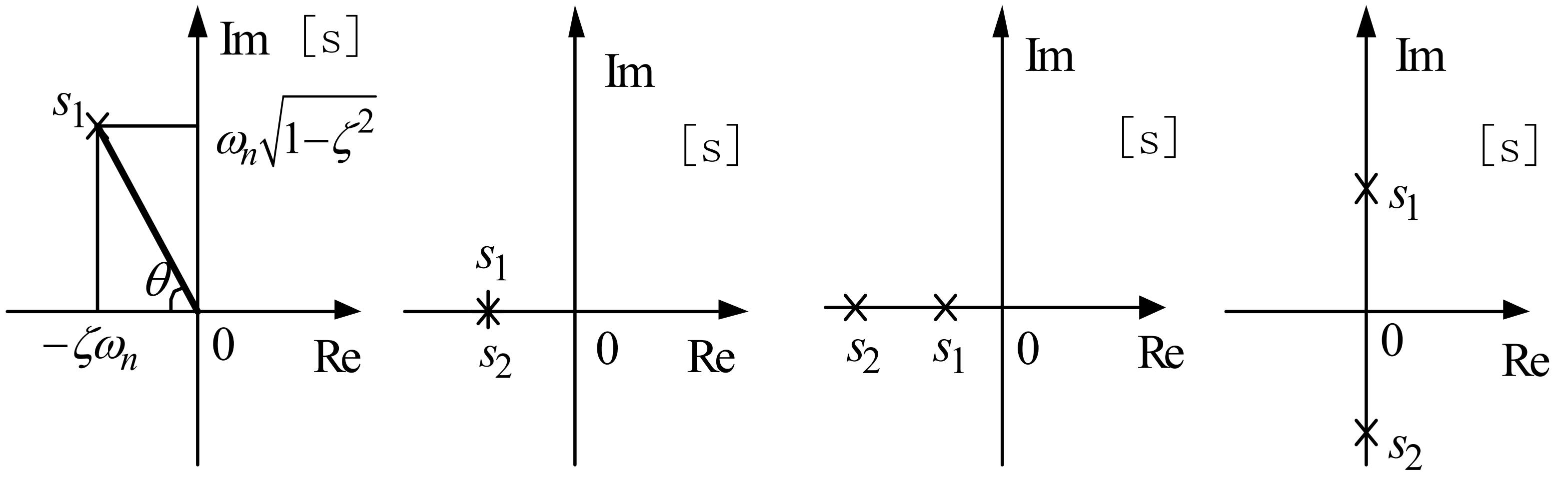


上述四种情况分别称为二阶无阻尼、欠阻尼、临界阻尼和过阻尼系统。其阻尼系数、特征根、极点分布和单位阶跃响应如下表所示：

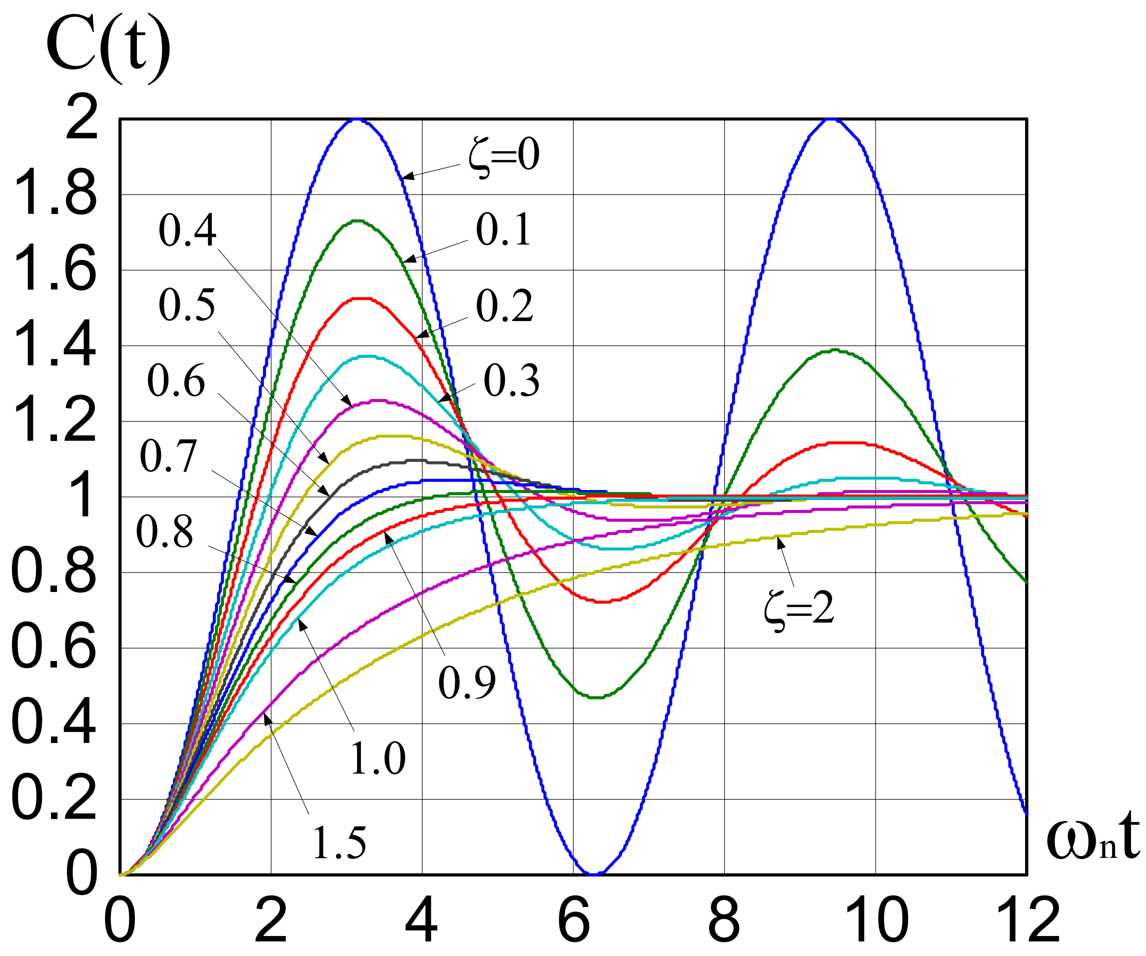
阻尼系数	特征根	极点位置	单位阶跃响应
$\zeta=0$,无阻尼	$s_{1,2}=\pm j\omega_n$	一对共轭虚根	等幅周期振荡
$o<\zeta<1$,欠阻尼	$s_{1,2}=-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$	一对共轭复根(左半平面)	衰减振荡
$\zeta=1$，临界阻尼	$s_{1,2}=-\omega_n$(重根)	一对负实重根	单调上升
$\zeta>1$，过阻尼	$s_{1,2}=-\zeta\omega_n \mp \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$	两个互异负实根	单调上升
$-1<\zeta<0$	$s_{1,2}=-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$	一对共轭复根（右半平面）	发散振荡
$\zeta<-1$	$s_{1,2}=-\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$	两个互异正实根	发散非振荡

- 二阶系统在各种不同 ζ 情况下的闭环极点分布见 图**3-9**

❖二阶系统在各种不同ξ 情况下的闭环极点分布见 图**3-9**



(a) $0<\zeta<1$　(b) $\zeta=1$　(c) $\zeta>1$　(d) $\zeta=0$



可以看出：随着ζ的增加，c(t)将从无衰减的周期运动变为有衰减的正弦运动，当$\zeta \geq 1$时c(t)呈现单调上升运动(无振荡)。可见ζ反映实际系统的阻尼情况，故称为阻尼系数。

根据二阶系统闭环传递函数特征方程 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

的特征根（极点）：$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$

可作出以下判断：

$\zeta > 0$ 则该系统是稳定；$\zeta \leq 0$ 则系统是不稳定；

特征根有虚部，系统的阶跃响应为振荡过程；

特征根无虚部，系统的阶跃响应为非振荡过程

三、典型二阶系统的动态过程分析

（一）衰减振荡瞬态过程$(0<\zeta<1)$：欠阻尼

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$c(t)=1-e^{-\zeta\omega_n t}(\cos\omega_d t+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t),\quad t\geq 0$$

1\. 上升时间 t_r：根据定义，当 $t=t_r$时，$c(t_r)=1$ 。

$$c(t_r)=1-e^{-\zeta\omega_n t_r}(\cos\omega_d t_r+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t_r)=1$$

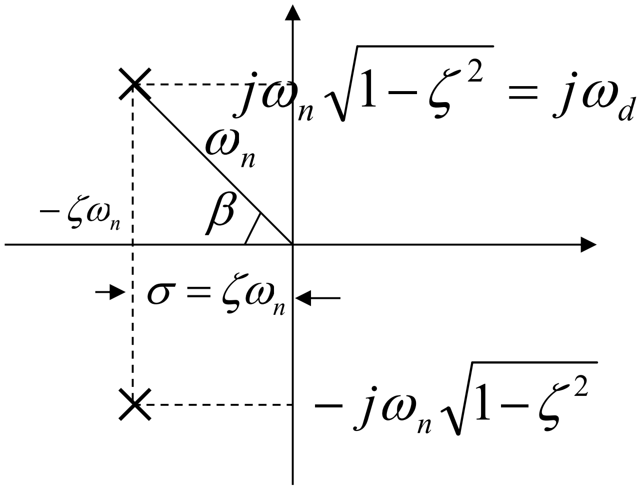
$$\cos\omega_d t_r+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t_r=0 \qquad \mathrm{tg}\,\omega_d t_r=-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

解得：

$$\boxed{t_r=\frac{1}{\omega_d}tg^{-1}(-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})}$$

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} tg^{-1}\left(-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) \qquad s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\because tg(\pi-\beta) = -\frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta\omega_n} = -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$



$$tg^{-1}\left(-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) = \pi - \beta$$

$$\boxed{\therefore t_r = \frac{\pi-\beta}{\omega_d}}$$

β 称为阻尼角，这是由于 $\cos\beta = \zeta$ 。

可见，当阻尼比一定时，系统的响应速度与自然频率成正比；而当阻尼频率一定时，阻尼比越小，上升时间越短。

延迟时间见书

2．峰值时间t_p：当$t=t_p$时，$\dot{c}(t_p)=0$

$$c(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t+\beta),\quad t\geq 0 \qquad \text{其中} \quad \beta=tg^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

$$c'(t)=-\frac{-\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t_p+\beta)-\frac{e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\omega_d\cdot\cos(\omega_d t_p+\beta)=0$$

$$\zeta\omega_n\sin(\omega_d t_p+\beta)-\omega_d\cdot\cos(\omega_d t_p+\beta)=0$$

整理得：$tg(\omega_d t_p+\beta)=\dfrac{\omega_d}{\zeta\omega_n}=\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}=tg\beta$

$$\omega_d t_p+\beta=n\pi+\beta,(n=0,1,2,...)$$

$$\omega_d t_p + \beta = n\pi + \beta, (n = 0,1,2,...)$$

由于t_p出现在第一次峰值时间，取n=1，有:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

可见峰值时间与闭环极点的虚部数值成反比，阻尼比一定时，闭环极点离负实轴距离越远，系统的峰值时间越短。这也是因为当闭环极点离负实轴距离越远时，特征根S中虚部的成分就越多，越容易产生振荡，响应上升越快，系统的峰值时间越短。

3. 最大超调量 $\delta\%$（书上用 $\sigma\%$ 表示）

将峰值时间 $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$ 代入 $c(t)$ 得 $c(t_p) = c_{\max}$

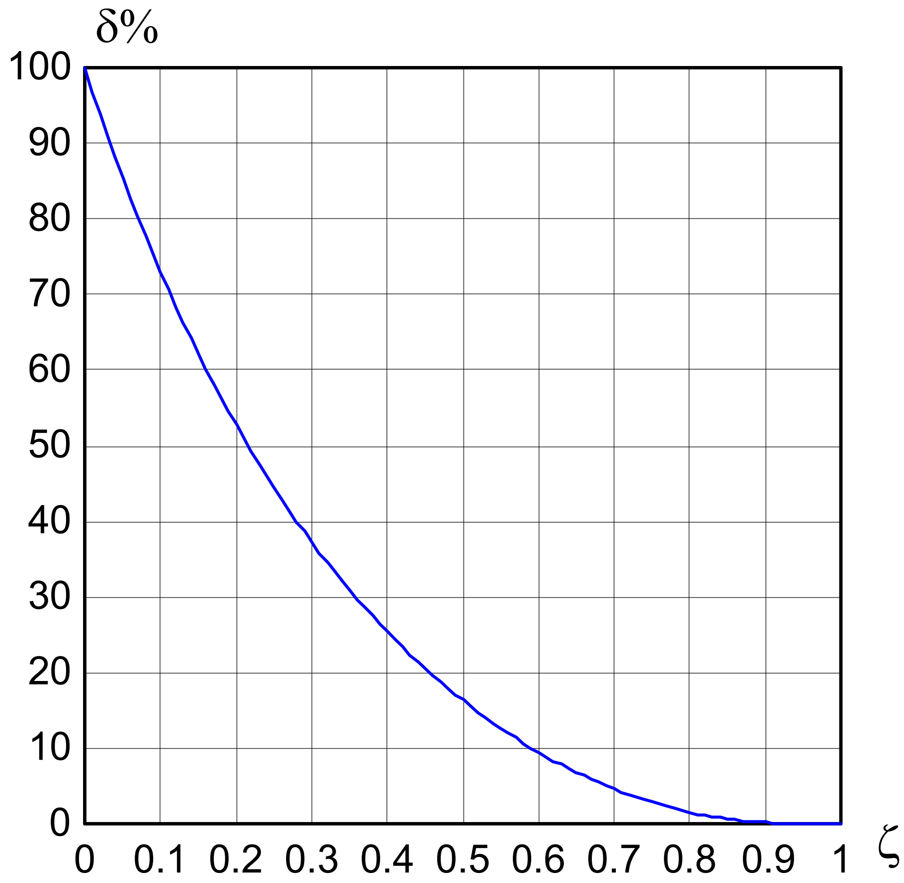
$$c_{\max} = c(t_p) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t_p}\left(\cos\omega_d t_p + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_n t_p\right)$$

$$= 1 - e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\left(\cos\pi + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\pi\right) = 1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$\delta\% = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% = (c(t_p) - 1) \times 100\% \qquad \because c(\infty) = 1$$

故： $\delta\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$ 超调量仅与阻尼比有关。

阻尼比越大，超调量越小。

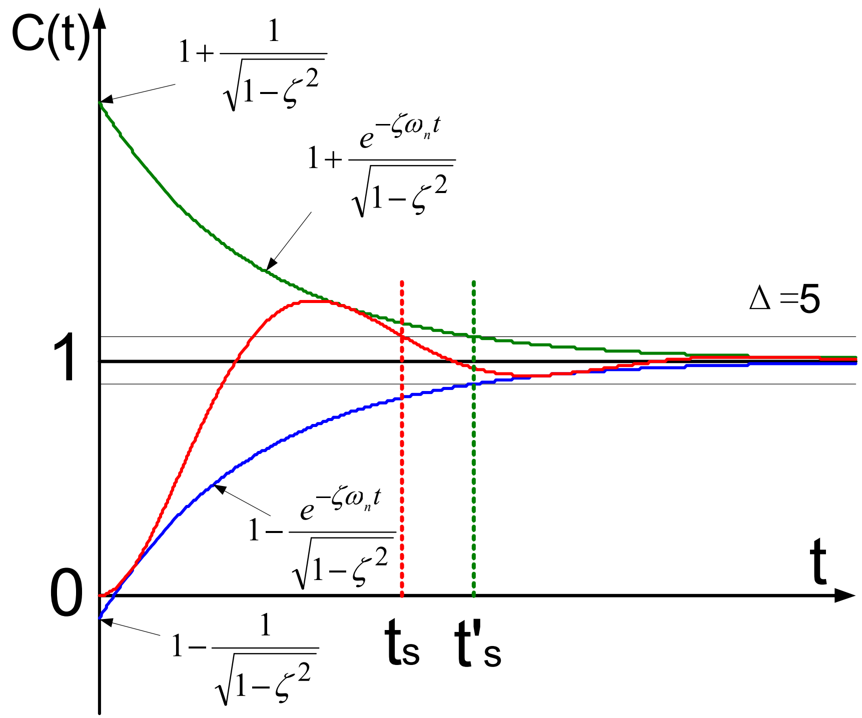


4. 调节时间 t_s:

根据调节时间的定义，当t≥ts时 |c(t)-c(∞)|≤ c(∞) ×Δ%。

$$\left|\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t+\mathrm{tg}^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})\right|\le \Delta\%$$

可见，写出调节时间的表达式是困难的。但响应是以负指数系数衰减的振荡，由右图可知响应曲线总在一对包络线之内。



包络线为:

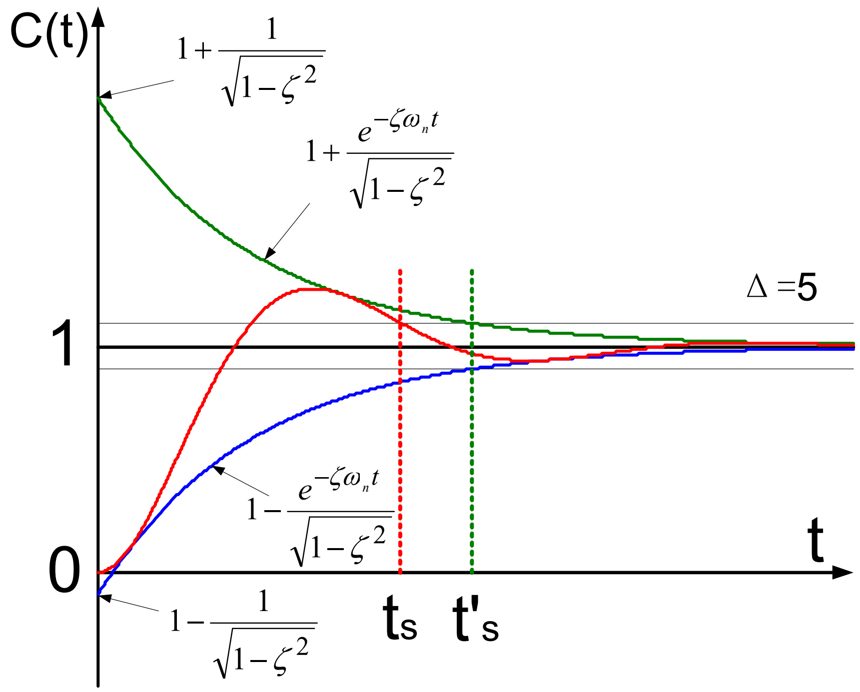
$$1\pm\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

由于实际响应曲线的收敛速度比包络线的收敛速度要快因此可用包络线代替实际响应来估算调节时间。即认为响应曲线的包络线进入误差带时，调整过程结束。

当t=t'$_s$时，有:

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \Delta\%$$

$$\therefore t_s = -\frac{\ln(\sqrt{1-\zeta^2}\times\Delta\%)}{\zeta\omega_n}$$



当ζ较小时，近似取：$\sqrt{1-\zeta^2}\approx 1$，且

$$\ln(0.02)\approx -3.912\approx -4$$

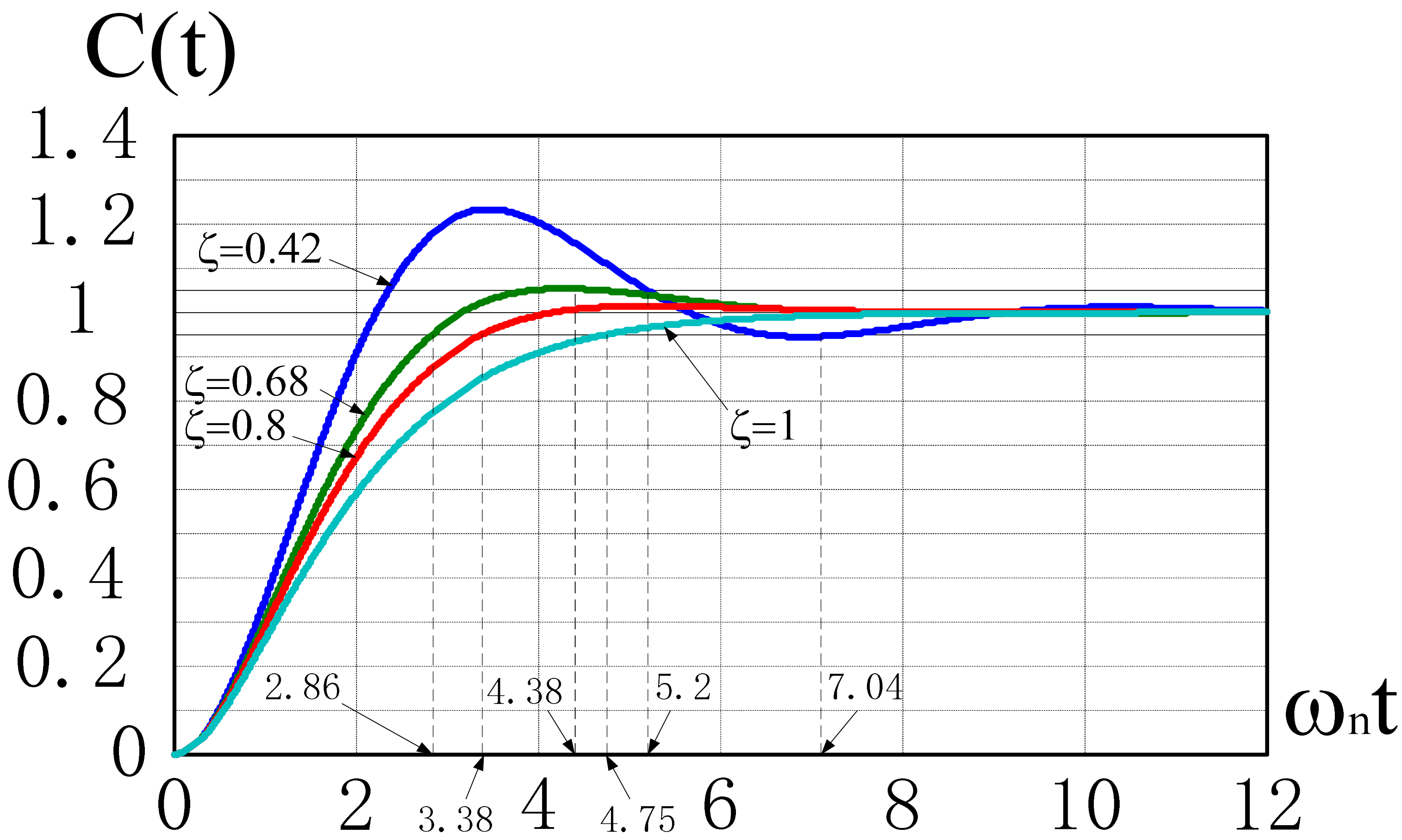
$$\ln(0.05)\approx -2.996\approx -3$$

所以

$$t_s \approx \begin{cases} \dfrac{4}{\zeta\omega_n}, 当\Delta = 2时 \\ \dfrac{3}{\zeta\omega_n}, 当\Delta = 5时 \end{cases}$$

调节时间与闭环节点的实部数值成反比。闭环节点离虚轴越远，系统的调节时间越短。

调节时间主要由自然频率决定。



由分析知，在$\zeta=0.4\sim0.8$之间，调节时间和超调量都较小。工程上常取$\zeta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0.707$作为设计依据，称为最佳阻尼常数。

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\ \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\ \omega_d t\right), \quad t \geq 0$$

上升时间			
峰值时间			
超调			
调节时间			

（二）非振荡瞬态过程：过阻尼

当$\zeta=1$时，系统也具有单调非振荡的瞬间过程，是单调非振荡的临界状态。在非振荡过程中，它的t_s最小。

当$\zeta>>1$时，极点$s_2=-\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$ 远离虚轴，且c(t)中包含极点s_2的衰减项的系数小，所以由极点s_2引起的指数项衰减得很快，因此，在瞬态过程中可以忽略s_2的影响，把二阶系统近似为一阶系统。

通常，都希望控制系统有较快的响应时间，即希望希统的阻尼系数在0~1之间。而不希望处于过阻尼情况$(\zeta>1)$ ，因为调节时间过长。但对于一些特殊的系统不希望出现超调系统（如液位控制）和大惯性系统（如加热装置），则可以处于$(\zeta>1)$情况。

$$c(t)=1-\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left[\frac{e^{-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}}{(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}-\frac{e^{-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}}{(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})}\right]$$

[总结]

- 阻尼系数ζ是二阶系统的一个重要参数，用它可以间接地判断一个二阶系统的瞬态品质。在$\zeta>1$的情况下瞬态特性为单调变化曲线，无超调和振荡，但t_s长。当$\zeta\le 0$时，输出量作等幅振荡或发散振荡，系统不能稳定工作。

- 在欠阻尼$(0<\zeta<1)$情况下工作时，若ζ过小，则超调量大，振荡次数多，调节时间长，瞬态控制品质差。

注意到$\delta\%=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times 100\%$只与$\zeta$有关,所以一般根据$\delta\%$来选择$\zeta$。

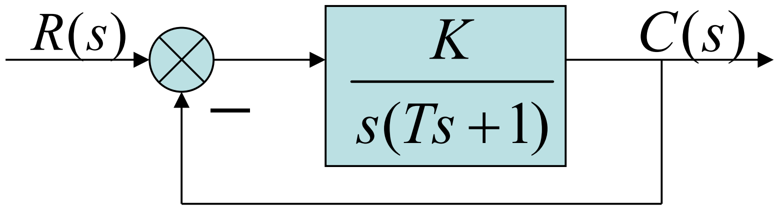
- $\because t_s=\dfrac{4}{\omega_n\zeta}$(或$\dfrac{3}{\omega_n\zeta}$)$,\therefore \omega_n$越大，$t_s\downarrow$ (当ζ一定时)

- 为了限制超调量，并使t_s较小，ζ一般取0.4~0.8，则超调量在25%~1.5%之间。

阻尼系数、阻尼角与最大超调量的关系

ζ	$\beta=\cos^{-1}\zeta$	δ %	ζ	$\beta=\cos^{-1}\zeta$	δ %
0.1	84.26°	72.9	0.69		5
0.2	78.46°	52.7	0.7	45. 57°	4.6
0.3	72.54°	37.23	0.707	45°	4.3
0.4	66.42°	25.38	0.78		2
0.5	60°	16.3	0.8	36.87°	1.5
0.6	53.13°	9.84	0.9	25.84°	0.15

[例]：求系统的特征参数ζ,ω_n并分析与性能指标的关系：



[解]：闭环传递函数为：

$$\Phi(s)=\frac{K}{Ts^2+s+K}=\frac{\frac{K}{T}}{s^2+\frac{1}{T}s+\frac{K}{T}}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\therefore\begin{cases}\omega_n^2=\dfrac{K}{T}\\[2ex] 2\zeta\omega_n=\dfrac{1}{T}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\omega_n=\sqrt{\dfrac{K}{T}}\\[2ex] \zeta=\dfrac{1}{2\sqrt{KT}}\end{cases}$$

❑上面求得

$$\begin{cases} \omega_n^{\ 2} = \dfrac{K}{T} \\ 2\zeta\omega_n = \dfrac{1}{T} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\dfrac{K}{T}} \\ \zeta = \dfrac{1}{2\sqrt{KT}} \end{cases}$$

下面分析瞬态性能指标和系统参数之间的关系：（假设$0<\zeta<1$）

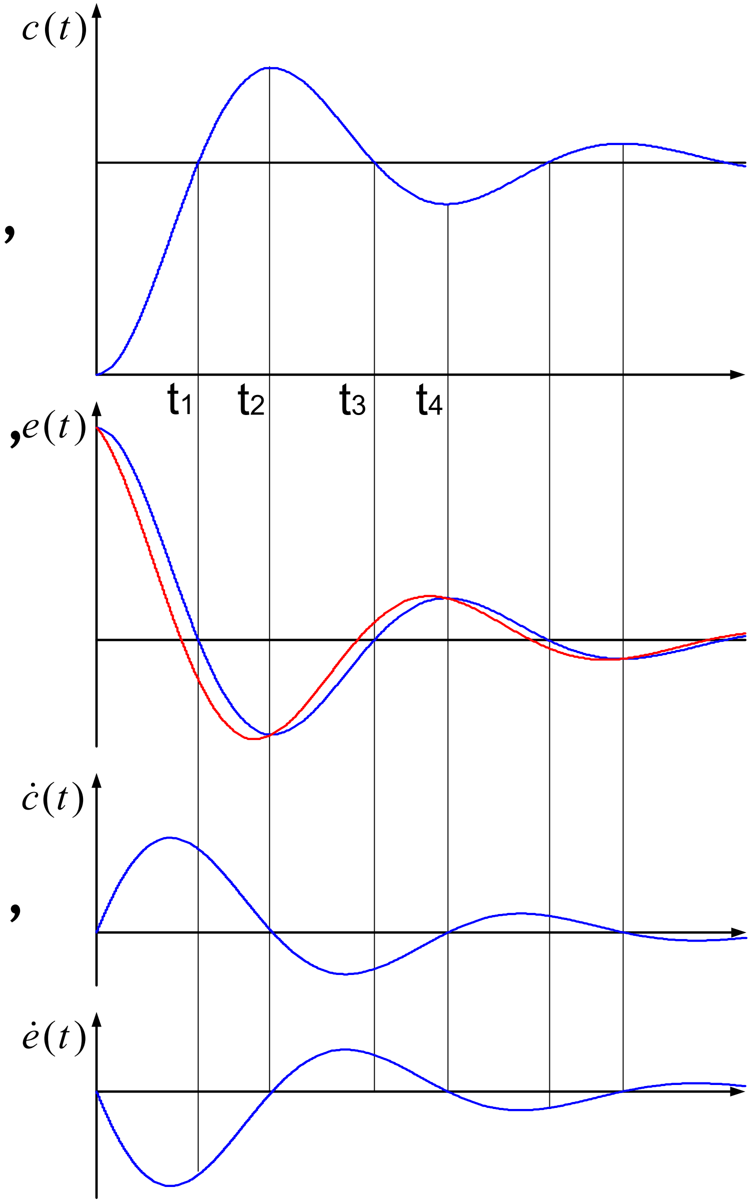
- ❑ $K\uparrow$**时**$,\ \zeta\downarrow,\ \delta\%\uparrow,\ N\uparrow$。**快速性好，振荡加剧；**
- ❑ $T\uparrow$**时，** $\zeta\downarrow,\delta\%\uparrow,N\uparrow,\omega_n\downarrow,t_s(\dfrac{4}{\omega_n\zeta}=2T)\uparrow$

- 5. 二阶系统的单位斜坡响应 （免）

三、改善二阶系统响应特性的措施

二阶系统超调产生过程

1. $[0,t_1]$误差信号为正，产生正向修正作用，以使误差减小，但因系统阻尼系数小，正向速度大，造成响应出现正向超调。
2. $[t_1,t_2]$误差信号为负，产生反向修正作用，但开始反向修正作用不够大，经过一段时间才使正向速度为零，此时输出达到最大值。
3. $[t_2,t_3]$误差信号为负，此时反向修正作用大，使输出返回过程中又穿过稳态值，出现反向超调。
4. $[t_3,t_4]$误差信号为正，产生正向修正作用，但开始正向修正作用不够大，经过一段时间才使反向速度为零，此时输出达到反向最大值。



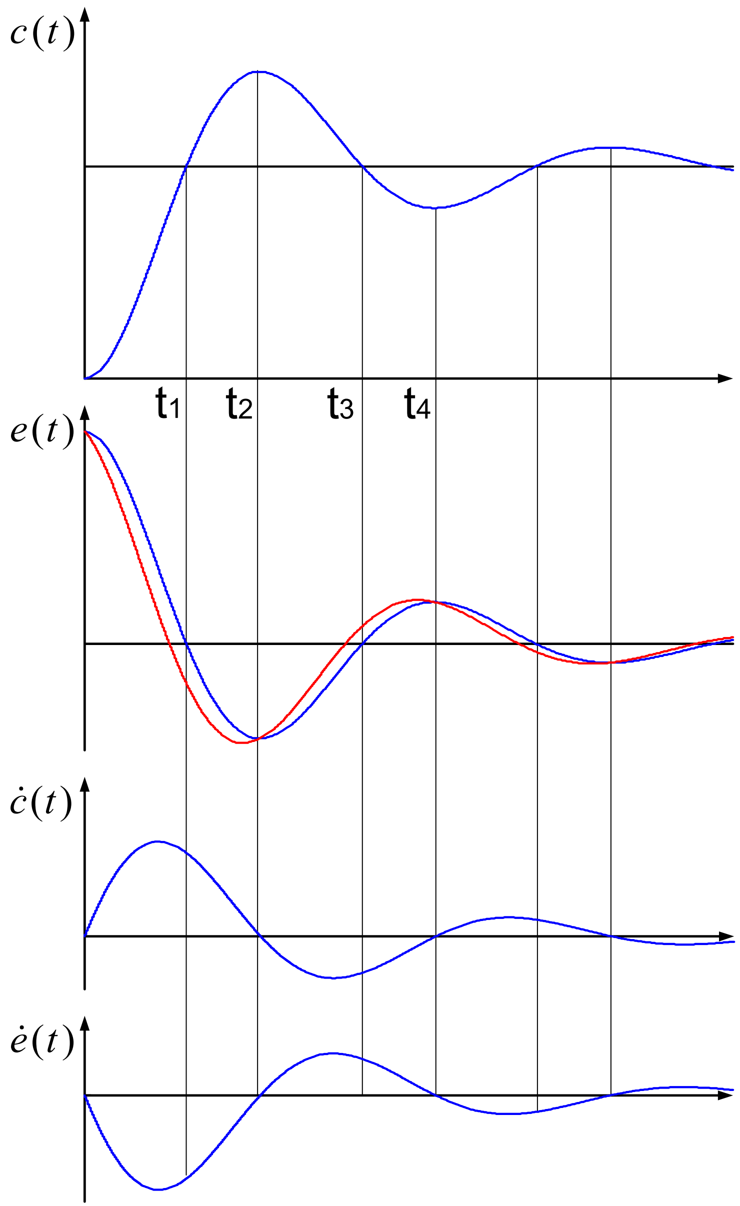
二阶系统超调产生原因

1. $[0,t_1]$ 正向修正作用太大，特别在靠近t_1点时。
2. $[t_1,t_2]$ 反向修正作用不足。

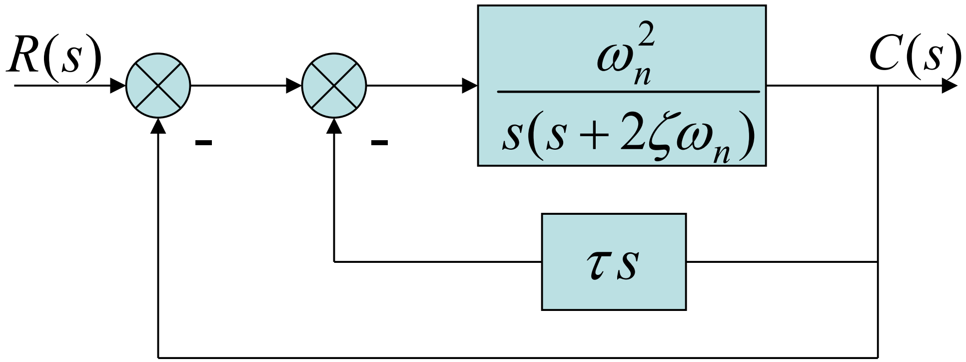
减小二阶系统超调的思路

1. $[0,t_1]$ 减小正向修正作用。附加与原误差信号相反的信号。
2. $[t_1,t_2]$ 加大反向修正作用。附加与原误差信号同向的信号。
3. $[t_2,t_3]$减小反向修正作用。附加与原误差信号相反的信号。
4. $[t_3,t_4]$ 加大正向修正作用。附加与原误差信号同向的信号。

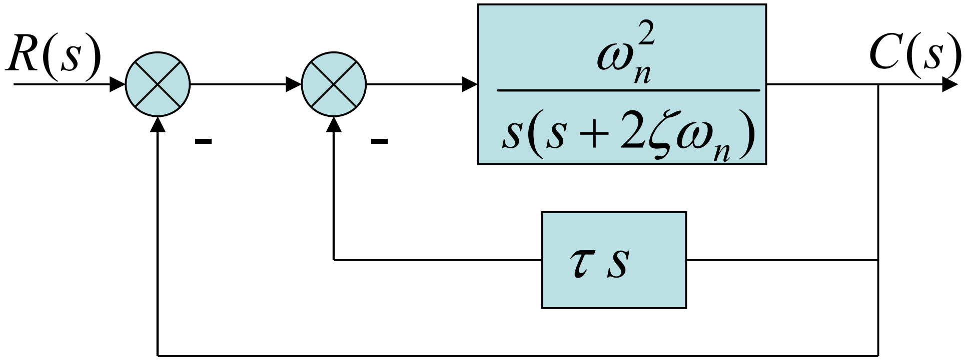
即在$[0,t_2]$ 内附加一个负信号，在$[t_2,t_4]$ 内附加一个正信号。减去输出的微分或加上误差的微分都具有这种效果。

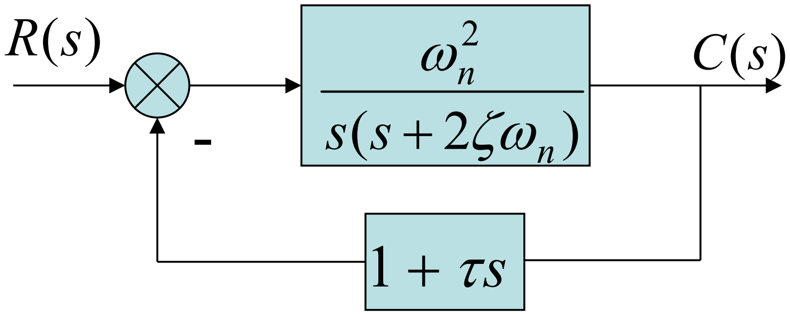


a. 输出量的速度反馈控制（减去输出的微分）



将输出量的速度信号c(t)微分后的 c'(t)采用负反馈形式反馈到输入端并与误差信号e(t)比较，构成一个内反馈回路。简称速度反馈。





$$\Phi(s)=\frac{\omega_n{}^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}\Bigg/\left(1+\frac{\omega_n{}^2(1+\tau s)}{s(s+2\zeta\omega_n)}\right)=\frac{\omega_n{}^2}{s^2+(2\zeta\omega_n+\tau\omega_n^2)s+\omega_n{}^2}$$

$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^{\ 2}}{s(s+2\zeta\omega_n)}\Bigg/\left(1+\frac{\omega_n^{\ 2}(1+\tau s)}{s(s+2\zeta\omega_n)}\right)=\frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2+(2\zeta\omega_n+\tau\omega_n^2)s+\omega_n^{\ 2}}$$

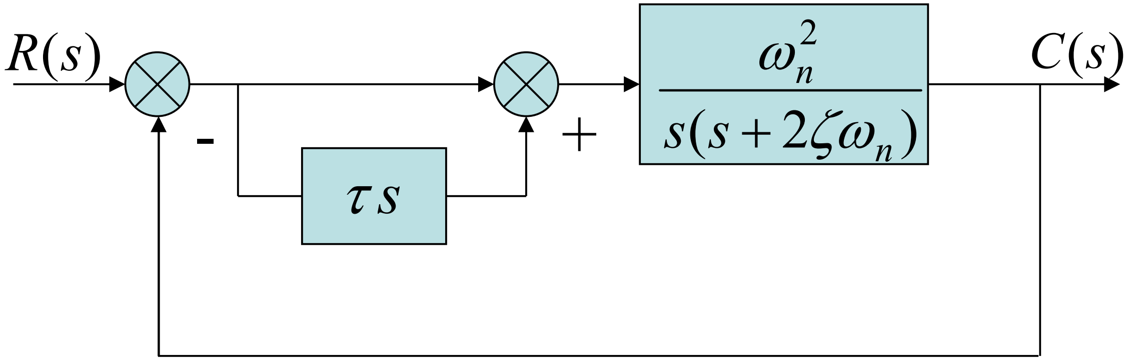
与典型二阶系统的标准形式 $\Phi(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ 比较

1. 不改变无阻尼振荡频率 ω_n

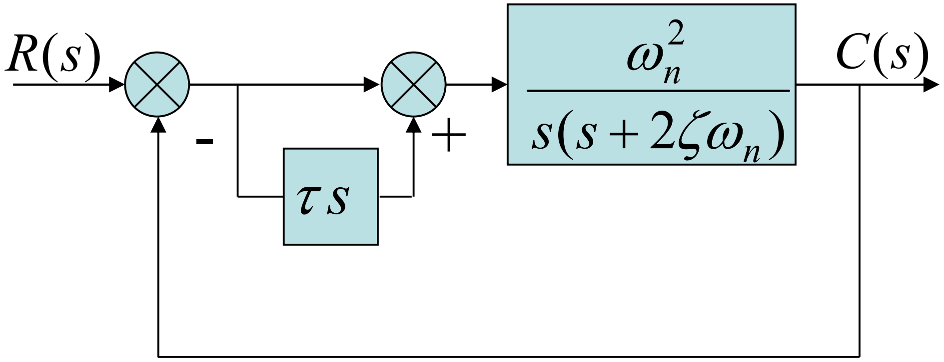
2. 等效阻尼系数为 $\zeta_t=\zeta+\dfrac{\tau}{2}\omega_n$

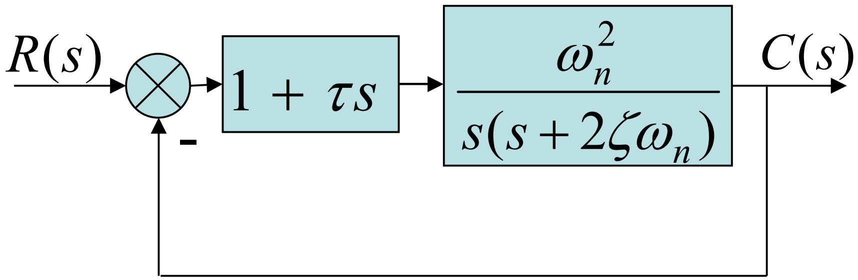
由于$\zeta_t>\zeta$，即等效阻尼系数加大，将使超调量δ%变小，可以带入公式证明，调节时间t_s变小，改善了动态性能。

b. 误差的比例+微分控制（加上误差的微分）



以误差信号e(t)与误差信号的微分信号e’(t)的和产生控制作用。简称PD控制。又称微分顺馈





$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^2(1+\tau s)}{s^2+(2\zeta\omega_n+\tau\omega_n^2)s+\omega_n^2}$$

$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^{\ 2}(1+\tau s)}{s^2+(2\zeta\omega_n+\tau\omega_n^2)s+\omega_n^{\ 2}}$$

与典型二阶系统的标准形式比较

$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

1. 不改变无阻尼振荡频率 ω_n

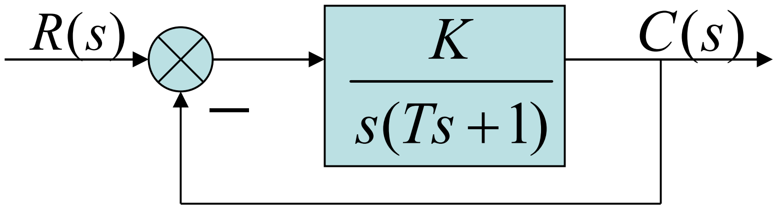
2. 等效阻尼系数为 $\zeta_d=\zeta+\frac{\tau}{2}\omega_n$

由于 $\zeta_d>\zeta$，即等效阻尼系数加大，将使超调量δ%变小,可以代入公式证明，调节时间t_s变小，改善了动态性能。

3. 闭环传递函数有零点 $z=-\frac{1}{\tau}$将会给系统带来影响。

为了改善系统性能而改变系统的结构、参数或附加具有一定功能的环节的方法称为对系统进行校正。附加环节称为校正环节。速度反馈和速度顺馈是较常用的校正方法。

[例]：如图所示系统， $K=16s^{-1}, T=0.25s$



试求：① ζ 和 ω_n ；② $\delta\%$ 和 t_s

③若要求 $\delta\%=16\%$时，当T不变时K=?

[解]：① $\omega_n=\sqrt{\dfrac{K}{T}}=\sqrt{\dfrac{16}{0.25}}=8s^{-1}, \zeta=\dfrac{1}{2\sqrt{KT}}=\dfrac{1}{2\sqrt{16\times0.25}}=0.25$

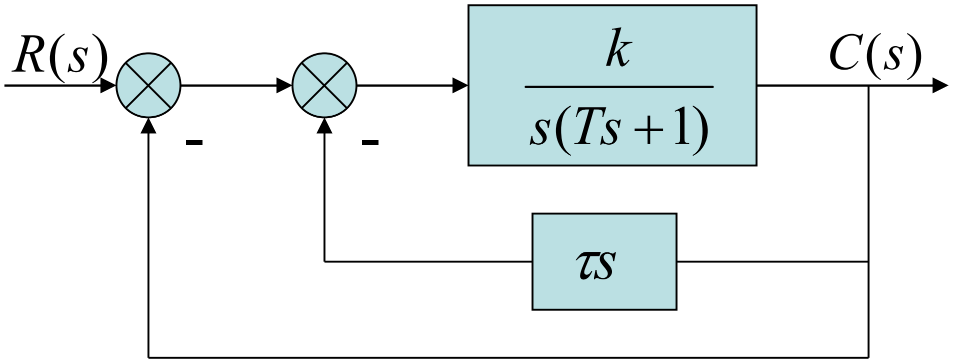
② $$\delta\%\times100\%=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times100\%=44\%$$

$$t_s=\begin{cases}\dfrac{4}{\omega_n\zeta}=\dfrac{4}{8\times0.25}=2s,(当\Delta=0.02)\\ \dfrac{3}{\omega_n\zeta}=\dfrac{3}{8\times0.25}=1.5s,(当\Delta=0.05)\end{cases}$$

③ $\because\ \delta\%=16\%, \therefore\ 0.16=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$,解得， $\zeta=0.5038$

当T不变时，T=0.25， $K=\dfrac{1}{4T\zeta^2}=\dfrac{1}{4\times0.25\times0.5038^2}\approx3.9388$

上例中，用速度反馈改善系统的性能。如下图所示。为使 $\zeta_1 = 0.5$ ，求 τ的值。并计算加入速度反馈后的瞬态指标。



[解]：系统的闭环传递函数为：$\Phi(s) = \dfrac{\dfrac{k}{T}}{s^2 + \dfrac{1+k\tau}{T}s + \dfrac{k}{T}}$

$$
则:\begin{cases} \omega_{n1}{}^2 = \dfrac{k}{T} \\ 2\zeta_1\omega_{n1} = \dfrac{1+k\tau}{T} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{n1} = \sqrt{\dfrac{k}{T}} \\ \zeta_1 = \dfrac{1+k\tau}{2\sqrt{kT}} \end{cases}
$$

显然，加入了速度反馈后，ω_n不变，而 ζ_1增加了$1+k\tau$倍。上例中$\zeta=0.25$，若要求$\zeta_1=0.5$，则:

$1+k\tau=2$,求得: $\tau=\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{16}=0.0625$

这时的瞬态性能指标为:

$$\delta_1\%=e^{-\frac{\pi\zeta_1}{\sqrt{1-\zeta_1^2}}}\times100\%=16\% \qquad t_s=\frac{4}{\omega_{n1}\zeta_1}=\frac{4}{0.5\times8}=1(s)$$

而前面的结果为: $\delta\%=44\%$

$$t_s=\begin{cases}2s,(当\Delta=0.02)\\1.5s,(当\Delta=0.05)\end{cases}$$

显然加入了负反馈后的效果要好些

小　结

- 二阶系统的动态性能指标基于以下两个条件：第一，性能指标是根据系统对单位阶跃输入的响应给出的；第二，初始条件为零。
- 典型二阶系统的瞬态响应——二阶无阻尼、欠阻尼、临界阻尼和过阻尼系统的阻尼系数、特征根、极点分布和单位阶跃响应。
- 典型二阶系统的性能指标——主要是超调量和调整时间以及他们与系统参数之间的关系；速度反馈校正。
- 具有零点的二阶系统—单位阶跃响应性能指标；速度顺馈校正；

作业

- 3-4
- 3-6