第8章 假设检验

• 假设检验的基本概念与思想

• 单个正态总体的假设检验

1

引 言

实际应用中，经常需要对总体提出一些猜测，然后从概率的角度分析这些猜测的正确性。这就是统计假设和假设检验。

统计假设——通过实际观察或理论分析对总体分布形式或对总体分布形式中的某些参数的取值作出某种假设。

假设检验——根据问题的要求提出假设，构造适当的统计量，按照样本提供的信息，以及一定的规则，对假设的正确性进行判断。

2

第一节

假设检验的基本概念与思想

假设检验的基本原理

基本原理：

1、小概率事件；

例如：飞机失事、买一张体育奖券或福利奖券而中头奖

2、小概率原理；

小概率事件并非不可能事件，但在一次观测或试验中，几乎是不可能发生的，实践上看作是不可能事件。

例如：“首次坐飞机就失事”、“只买一张奖券就中了头奖”

3、概率性质的反证法

“反证”：先假定某一假设成立，经过严密推理，推出一个小概率事件A，把A看作实际上不可能发生，如果事实上A已经发生（相当于一个不可能事件竟然发生了！），这就反过来证明了原假设实际上不合理，从而否定原假设。

5

基本概念

引例：已知某班《概率统计》的期末考试成绩服从正态分布。根据平时的学习情况及试卷的难易程度，估计平均成绩为75分，考试后随机抽样5位同学的试卷，得平均成绩为72分，试问所估计的75分是否正确？

“全班平均成绩是75分”，这就是一个假设

根据样本均值为72分，和已有的定理结论，对“总体均值为75分”是否正确作出判断，这就是检验。

表达：原假设：H_0：$EX=75$；备择假设：H_1：$EX\neq 75$

判断结果：接受原假设，或拒绝原假设。

6

引例问题

原假设　H_0：EX=75；H_1：EX≠75

假定原假设正确，则X~N（75，σ^2），于是T统计量

拒绝域

$$T=\frac{\bar{X}-75}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

检验水平

可得　$$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-75}{S/\sqrt{n}}\right|>t_{\alpha/2}\right\}=\alpha$$

临界值

如果样本的观测值 $\left|\frac{\bar{x}-75}{S/\sqrt{n}}\right|>t_{\alpha/2}$　则拒绝H_0

7

基本步骤

1、提出原假设，确定备择假设；

2、构造分布已知的合适的统计量，根据备择假设确定拒绝域的形式；

3、由给定的检验水平α，查表求出在H_0成立的条件下的临界值（上侧α分位数，或双侧α分位数）；

4、计算统计量的样本观测值，如果落在拒绝域内，则拒绝原假设，否则，接受原假设。

8

两 种 错 误

第一类错误（弃真错误）——原假设H_0为真，而检验结果为拒绝H_0；记其概率为α，即

$$P\{拒绝H_0|H_0为真\}=\alpha \longrightarrow 检验水平$$

第二类错误（取伪错误）——原假设H_0不符合实际，而检验结果为接受H_0；记其概率为β，即

$$P\{接受H_0|H_0为假\}=\beta$$

希望：犯两类错误的概率越小越好，但样本容量一定的前提下，不可能同时降低α和β。

原则：保护原假设，即限制α的前提下，使β尽可能的小。

注意："接受H_0"，并不意味着H_0一定为真；"拒绝H_0"也不意味着H_0一定不真。

9

第二节

正态总体参数的假设检验（单个正态总体）

10

1. 单个正态总体方差已知的均值检验　　U检验

问题：总体X~N（μ，σ²），σ²已知

假设 H_0：$\mu=\mu_0$；H_1：$\mu\neq\mu_0$　　双边检验

构造U统计量 $U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$　H_0为真的前提下

由 $P\left\{\left|\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|>u_{\alpha/2}\right\}=\alpha$ 确定拒绝域 $|U|>u_{\alpha/2}$

如果统计量的观测值 $|u|=\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|>u_{\alpha/2}$

则拒绝原假设；否则接受原假设

11

例1 由经验知某零件的重量X~N（μ，σ²），μ=15，σ=0.05；技术革新后，抽出6个零件，测得重量为（单位：克）14.7 15.1 14.8 15.0 15.2 14.6，已知方差不变，试统计推断，平均重量是否仍为15克？（α=0.05）

解　由题意可知：零件重量X~N（μ，σ²），且技术革新前后的方差不变σ²=0.05²，要求对均值进行检验，采用U检验法。

假设 H_0：$\mu=15$；　H_1：$\mu\neq 15$

构造U统计量，拒绝域为 $|U|>u_{\alpha/2}$

U的0.05双侧分位数为 $u_{0.025}=1.96$

12

例1 由经验知某零件的重量X~N（μ，σ²），μ=15，σ=0.05；技术革新后，抽出6个零件，测得重量为（单位：克）14.7 15.1 14.8 15.0 15.2 14.6，已知方差不变，试统计推断，平均重量是否仍为15克？（α=0.05）

拒绝域的形式 $|U|>u_{\alpha/2}$

解 而样本均值为 $\bar{x}=14.9$

故U统计量的观测值为 $|u|=\left|\dfrac{\bar{x}-15}{0.05/\sqrt{6}}\right|=4.9$

因为4.9>1.96，即观测值落在拒绝域内

所以拒绝原假设，即认为平均重量不再是15克。

13

单个正态总体方差已知的均值U检验

H_0：$\mu=\mu_0$；H_1：$\mu\neq\mu_0$ 拒绝域 $|U|>u_{\alpha/2}$

双边检验拒绝域形式的理解（不要求掌握）

接受原假设H_0	拒绝H_0，接受H_1
H_0成立是正常的	H_1成立是正常的
μ很接近μ_0	μ离μ_0较远

$$\mu=\bar{X}$$

$\bar{X}$很接近μ_0	$\bar{X}$离μ_0较远
$\lvert\bar{X}-\mu_0\rvert$较小	$\lvert\bar{X}-\mu_0\rvert$较大
$\lvert U\rvert$较小	$\lvert U\rvert$较大

$$\boxed{U=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}$$

14

单个正态总体方差已知的均值U检验

H_0：$\mu=\mu_0$；H_1：$\mu>\mu_0$ 拒绝域 $U>C$

单边检验的拒绝域形式（不要求掌握）

接受原假设H_0	拒绝H_0，接受H_1
H_0成立是正常的	H_1成立是正常的
μ很接近μ_0	$\mu>\mu_0$且离μ_0较远

$$\mu=\bar{X}$$

$\bar{X}$很接近μ_0	$\bar{X}>\mu_0$且离μ_0较远
$\lvert\bar{X}-\mu_0\rvert$较小	$\bar{X}-\mu_0$较大
$\lvert U\rvert$较小	U较大

$$U=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

15

σ^2已知,对总体均值的单边检验

H_0：$\mu=\mu_0$；H_1：$\mu>\mu_0$

$$P\left\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}>u_\alpha\right\}=\alpha$$

H_0的拒绝域为 $U>u_\alpha$

H_0：$\mu=\mu_0$；H_1：$\mu<\mu_0$

$$P\left\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}<-u_\alpha\right\}=\alpha$$

H_0的拒绝域为 $U<-u_\alpha$

16

例2 由经验知某零件的重量X~N（μ，σ²），μ=15，σ=0.05；技术革新后，抽出6个零件，测得重量为（单位：克）14.7 15.1 14.8 15.0 15.2 14.6，已知方差不变，试统计推断，技术革新后，零件的平均重量是否降低？（α=0.05）

解 由题意可知：零件重量X~N（μ，σ²），且技术革新前后的方差不变$\sigma^2=0.05^2$，要求对均值进行检验，采用U检验法。

假设 H_0：μ=15； H_1： μ<15

构造U统计量，拒绝域为 $U<-u_\alpha$

U的0.05上侧分位数为 $u_{0.05}=1.645$

17

例2 由经验知某零件的重量X~N（μ，σ²），μ=15，σ=0.05；技术革新后，抽出6个零件，测得重量为（单位：克）14.7 15.1 14.8 15.0 15.2 14.6，已知方差不变，试统计推断，技术革新后，零件的平均重量是否降低？（α=0.05）

拒绝域形式

$U<-u_\alpha$

解 而样本均值为 $\bar{x}=14.9$

故U统计量的观测值为 $u=\dfrac{\bar{x}-15}{0.05/\sqrt{6}}=-4.9$

因为 $-4.9<-1.645$，即观测值落在拒绝域内

所以拒绝原假设，即可认为平均重量是降低了。

18

例3 一名研究者声称他所在的地区至少有80%的观众对电视剧中播广告表示厌烦。随机询问120位观众，有70人表示厌烦。在α=0.05的水平下，这位研究者的观点能否接受?

解 用随机变量X表示观众是否厌烦广告，X=1表示厌烦 X=0表示不厌烦，则X~B(1，p)，其中p表示厌烦观众的比例。

假设 H_0：p≥0.8； H_1： p<0.8

根据大样本总体的样本均值的分布定理，有

$$\overline{X} \sim N\left(0.8, \frac{0.8\times 0.2}{120}\right)$$

构造统计量 $U = \dfrac{\overline{X} - 0.8}{\sqrt{0.8\times 0.2/120}} \sim N(0,1)$

19

例3 一名研究者声称他所在的地区至少有80%的观众对电视剧中播广告表示厌烦。随机询问120位观众，有70人表示厌烦。在α=0.05的水平下，这位研究者的观点能否接受?

解 统计量 $U = \dfrac{\overline{X} - 0.8}{\sqrt{0.8\times 0.2/120}} \sim N(0,1)$

拒绝域为 $U < -u_\alpha$

U的0.05上侧分位数为 $u_{0.05} = 1.645$

由于样本均值为 $\overline{x} = \dfrac{70}{120}$

故U的观测值为 $u = \dfrac{\frac{70}{120} - 0.8}{\sqrt{0.8\times 0.2/120}} = \dfrac{70-96}{\sqrt{19.2}} \approx -5.934$

20

例3 一名研究者声称他所在的地区至少有80%的观众对电视剧中播广告表示厌烦。随机询问120位观众，有70人表示厌烦。在α=0.05的水平下，这位研究者的观点能否接受?

解 拒绝域为 $U<-u_\alpha$

$u_{0.05}=1.645$ $\qquad u\approx-5.934$

因为 $-5.934<-1.645$

所以拒绝原假设，即不接受这位研究者的观点。

2. 单个正态总体方差未知的均值检验 T检验

问题：总体X~N（μ，σ²），σ²未知

假设 H_0：$\mu=\mu_0$；H_1：$\mu\neq\mu_0$ 双边检验

构造T统计量 $T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

由 $P\left\{\left|\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|>t_{\alpha/2}(n-1)\right\}=\alpha$

确定拒绝域 $|T|>t_{\alpha/2}(n-1)$

如果统计量的观测值 $|t|=\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|>t_{\alpha/2}(n-1)$

则拒绝原假设；否则接受原假设

例4 化工厂用自动包装机包装化肥，每包重量服从正态分布，额定重量为100公斤。某日开工后，为了确定包装机这天的工作是否正常，随机抽取9袋化肥，称得平均重量为99.978，均方差为1.212，能否认为这天的包装机工作正常？（α=0.1）

解　由题意可知：化肥重量X~N（μ，σ^2），μ_0=100
方差未知，要求对均值进行检验，采用T检验法。

假设 H_0：μ=100；　H_1：　$\mu \neq 100$

构造T统计量，得T的0.1双侧分位数为

$$t_{0.05}(8) = 1.86$$

23

例4 化工厂用自动包装机包装化肥，每包重量服从正态分布，额定重量为100公斤。某日开工后，为了确定包装机这天的工作是否正常，随机抽取9袋化肥，称得平均重量为99.978，均方差为1.212，能否认为这天的包装机工作正常？（α=0.1）

解　而样本均值、均方差为 $\bar{x} = 99.978, s = 1.212$

故T统计量的观测值为

$$|t| = \left|\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{99.978-100}{1.212/\sqrt{9}}\right| = 0.0545$$

因为0.0545<1.86，即观测值落在接受域内

所以接受原假设，即可认为这天的包装机工作正常。

24

σ^2未知,对总体均值的单边检验

H_0：$\mu=\mu_0$；H_1：$\mu>\mu_0$

$$P\left\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}>t_\alpha(n-1)\right\}=\alpha$$

H_0的拒绝域为

$$T>t_\alpha(n-1)$$

或 H_0：$\mu=\mu_0$；H_1：$\mu<\mu_0$

$$P\left\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}<-t_\alpha(n-1)\right\}=\alpha$$

H_0的拒绝域为

$$T<-t_\alpha(n-1)$$

25

3. 单个正态总体均值已知的方差检验 χ^2检验

问题：总体X~N（μ，σ^2），μ已知

假设 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2;H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2;$

构造χ^2统计量 $\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n)$

由 $P\left\{\chi^2<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\right\}=\dfrac{\alpha}{2},P\left\{\chi^2>\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\right\}=\dfrac{\alpha}{2}$

确定临界值 $\chi^2_{1-\alpha/2}(n),\chi^2_{\alpha/2}(n)$ 拒绝域

如果统计量的观测值 $\chi^2>\chi^2_{\alpha/2}(n)$或 $\chi^2<\chi^2_{1-\alpha/2}(n)$

则拒绝原假设；否则接受原假设

26

4. 一个正态总体均值未知的方差检验 χ^2检验

问题：设总体 X~N（μ，σ²），μ未知

假设 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2; H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2;$ 双边检验

构造χ²统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$

由$P\left\{\chi^2<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=\dfrac{\alpha}{2}, P\left\{\chi^2>\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=\dfrac{\alpha}{2}$

确定临界值 $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1),\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ 拒绝域

如果统计量的观测值

$\chi^2>\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ 或 $\chi^2<\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$

则拒绝原假设；否则接受原假设

例5 某炼铁厂的铁水含碳量X在正常情况下服从正态分布，现对工艺进行了某些改进，从中抽取5炉铁水测得含碳量如下：**4.421，4.052，4.357，4.287，4.683**，据此是否可判断新工艺炼出的铁水含碳量的方差仍为**0.108²**（α=0.05）？ 样本均值为4.36样本方差为0.052

解 这是一个均值未知，正态总体的方差检验，用χ²检验法

假设 $H_0:\sigma^2=0.108^2; H_1:\sigma^2\neq 0.108^2;$

由α=0.05，得临界值

$$\chi^2_{0.975}(4)=0.484 \quad \chi^2_{0.025}(4)=11.143$$

例5 某炼铁厂的铁水含碳量X在正常情况下服从正态分布，现对工艺进行了某些改进，从中抽取5炉铁水测得含碳量如下：4.421，4.052，4.357，4.287，4.683，据此是否可判断新工艺炼出的铁水含碳量的方差仍为0.108^2（α=0.05）？ 样本均值为4.36样本方差为0.052

解 χ^2统计量的观测值为（5-1）$S^2/0.108^2=17.833$

因为 $17.833 > 11.143$

所以拒绝原假设

即判断新工艺炼出的铁水含碳量的方差不是0.108^2

29

作业

P193习题8

4，6

30

考试通知

考试时间：12月3日9:00-11:00

考试地点：5C803

有问题可以通过QQ、手机、邮箱等各种形式提问，解答将发往课程邮箱

31

下次课测验

范围：6、7、8章

时间：45分钟

题数：4题

请准备好活页纸，将解答写在活页纸上

32