$$
\begin{array}{r}
123 \\
\times\ 234 \\
\hline
432 \\
369 \\
246 \\
\hline
28782
\end{array}
$$

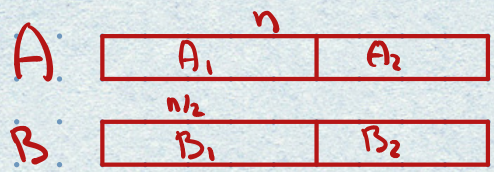
обычное умножение работает за n^2

Будем умножать полиномы:

$(1\cdot x^2 + 2x + 3)(2x^2 + 3x + 4)$ при $x=10$ получаем то, что было

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1})(b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-1} x^{n-1})$$

Алгоритм Карацубы:



$A = A_1 \times x^{n/2} + A^2$

$B = B_1 \times x^{n/2} + B_2$

$$AB = \underbrace{A_1B_1}x^n + (\underbrace{A_1B_2} + \underbrace{A_2B_1})x^{n/2} + \underbrace{A_2B_2} \quad O(n^2)$$

$T(n) = 4T(\frac{n}{2}) \Rightarrow T(n) = O(n^2)$

основная теорема о рекуррентных соотношениях

Заметим: $(A_1 + A_2)(B_1 + B_2) = A_1B_1 + A_2B_2 + \boxed{A_1B_2 + A_2B_1}$

можно посчитать за 1 умножение.

$$55554444 \cdot 88887777 = (5555 \cdot 10000 + 4444)(8888 \cdot 10000 + 7777) =$$

$$= 5555 \cdot 8888 \cdot 10000^2 + 10000(5555 \cdot 7777 + 4444 \cdot 8888) + 4444 \cdot 7777 =$$

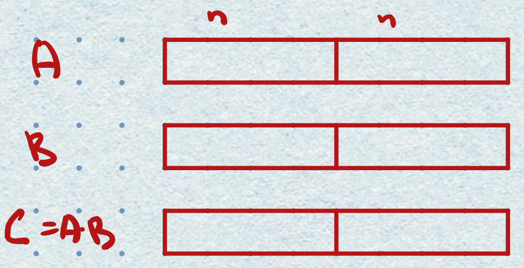
A B_2 A_2 B_1

$$= \underline{5555 \cdot 8888} \cdot 10000^2 + 10000\left((5555 + 4444) \cdot (7777 + 8888) - \underline{5555 \cdot 8888} - \underline{4444 \cdot 7777}\right) + \underline{4444 \cdot 7777}$$

$5555 \cdot 8888$ | $(5555 + 4444)(7777 + 8888)$ | $4444 \cdot 7777$

сложность: $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) \Rightarrow T_n = O(n^{\log_2 3})$

Быстрое преобразование Фурье



при разных длинах дополняем нулями.

результат умножения имеет размер 2n =>

будем сразу считать, что числа длина 2n с нулями вначале. (для удобства)

n - степень 2

подберем $x_1 \dots x_{n-1}$ и посчитаем $C(x_0) \dots C(x_{n-1})$

мы хотим знать n значений и подбираем полином n степени.
(интерполяционный полином)
он единственный.

A $O(n^2)$ → $u_i = A(x_i)$

B $v_i = B(x_i)$ $\xrightarrow{O(n)}$ $w_i = C(x_i) = u_i v_i \xrightarrow{O(?)} C$

считаем в каждой из n точек значение полинома

строим интерп. полином.

Пусть $x_i = w^i$

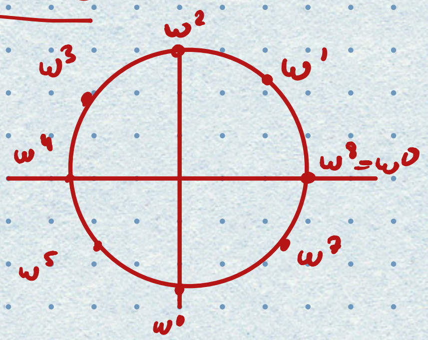
$w^0, w^1 \dots w^{n-1}$ должны быть различны
$w^n = 1$

} или комплексные числа
или поле вычетов по модулю.

1. $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ → пусть n=8

числа замкнуты отн. умнож.:

$$w^i \cdot w^j = w^{(i+j)\% n}$$



$$e^{\frac{2\pi k}{n} i} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$$

2. p - простое

p-1 делится на n (чтобы $w^n=1$)

$a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} =$

$= (a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \dots) + x(a_1 + a_3x^2 + a_5x^4 + \dots)$

$$A(x) = A_0(x^2) + x(A_1(x^2))$$

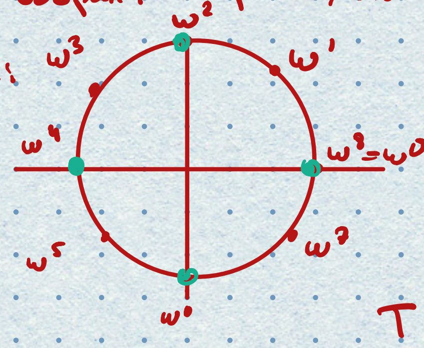
степень $n/2$ степень $n/2$ т.к. в скобках только четные степени.

$A(x)$ для $x = x_0 \dots x_{n-1}$

$A_0(x^2)$ для $x = x_0 \dots x_{n-1}$ $A_1(x^2)$ $x = x_0 \dots x_{n-1}$

Но все еще n значений

т.к. мы подобрали хитро x, что он при возведении в степень начинает повторяться:



то у нас будет всего $n/2$ разных значений

разбили на 2 задачи для $n/2$ точек

$$T(n) = 2T(n/2) + \frac{3}{2}n \to T(n) = O(n \log n)$$

Теперь умеем считать значение полинома в n точках за $O(n \log n)$

```
fft(a, n, w) => a(w_i)
    if n=1:
        return [a[0]]
O(n) ⎧ a0 = [a[2i]  i=0; n/2]
     ⎩ a1 = [a[2i+1]  i=0; n/2]
    vals0 = fft(a0, n/2, w^2)      T(n/2)
    vals1 = fft(a1, n/2, w^2)      T(n/2)
O(n) ⎧ for i=0, n-1:
     ⎪     vals[i] = vals0[i % n/2] + w^i vals1[i % n/2]
     ⎩ return vals
```

Быстрое преобр. Фурье

обратное быстрое преобр. Фурье

A $\cancel{O(n^2)}$ $O(n\log n)$ $\rightarrow$ $u_i = A(x_i)$

B $\uparrow$ $v_i = B(x_i)$ $\xrightarrow{O(n)}$ $g_i = C(x_i) = u_i v_i \xrightarrow{O(n)} C$

считаем в каждой из n точек значение полинома

строим интерп. полином.

g = vals $\qquad \boxed{c_i = \frac{1}{n}\sum_{j}^{n-1} g_j \cdot w^{-ij}}$

Док-во корректности:

$$C(x_i) = \sum_k c_k \cdot x_i^k = \sum_k c_k w^{ik} = \sum_k \left(\frac{1}{n}\sum_j g_j\, w^{-kj}\right)\cdot w^{ik} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_j g_j \boxed{\sum_k w^{k(i-j)}} =$$

сумма геом. прогрессии:

$$\frac{(w^{n(i-j)}-1)}{w^{(i-j)}-1} = 0 \text{ т.к. } w^n = 1$$

все коэфф. 0 только когда $i \neq j$ из-за знаменателя

$$= \frac{1}{n} g_i \underbrace{\sum (w^0)^k}_{1} = g_i$$

ЧТД Взяли значение полинома в точке x_i и получили g_i.

$c_i = \frac{1}{n}\sum_{j}^{n-1} g_j \cdot w^{-ij}$ ← полином => можем быстро посчитать с помощью БПФ. В качестве значения подставляем w^{-i}

Воспользуемся той же функцией:

fft(vals, n, w^{-1})

Быстрое преобр. Фурье

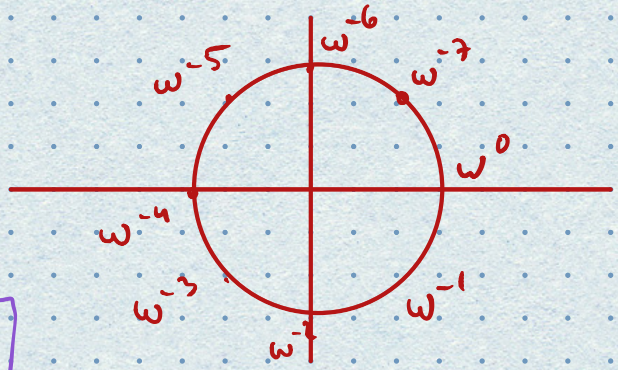
обратное быстрое преобр. Фурье

A $\cancel{O(n^2)}$ $O(n\log n)$ $\rightarrow$ $u_i = A(x_i)$

B $\uparrow$ $v_i = B(x_i)$ $\xrightarrow{O(n)}$ $w_i = C(x_i) = u_i v_i \xrightarrow{\cancel{O(n)}\ O(n\log n)} C$

считаем в каждой из n точек значение полинома

строим интерп. полином.



$$\boxed{c_i = \frac{1}{n}\sum_{j}^{n-1} g_j \cdot \omega^{-ij}}$$

вычисление полинома в точке: полином g в точке ω^{-i}