Relatório EP3 - MAC0210 2017

Lucas Santos
No. USP 9345064

Thiago Estrela
No. USP 9762873

11 de Junho de 2017

1 Dedução das equações das derivadas

Conforme estudado durante o curso, existem diversas formas de calcular uma aproximação das derivadas de uma função. Em particular, foi estudado formas de calcular a aproximação da primeira derivada de uma função através da expansão da série de Taylor, através dos métodos para frente, para trás e centrado, de forma que obtivéssemos um erro na ordem de $O(h^2)$.

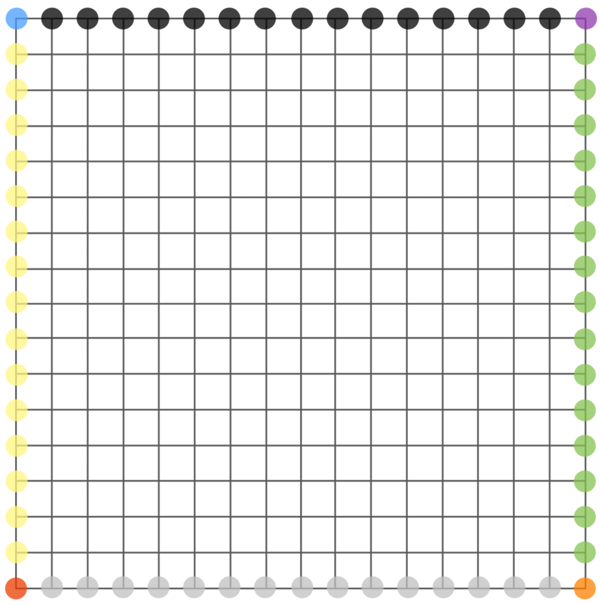


Figura 1: Exemplo de malha fina

É importante notar, contudo, que nem todas as formas de calcular a aproximação da primeira derivada da função funciona para todos os pontos.

Na imagem acima, temos um exemplo de malha fina *(ou grossa?)* e mais em breve nesse presente relatório, será detalhado como tratar cada caso e, em especial, os casos de bordo.

1.1 Equações diferenciais

Será detalhado nessa sessão como obter aproximações da primeira derivada de uma função. Em todas as abordagens faz-se o uso de três pontos.

1.1.1 No eixo X

Para frente. A primeira forma de aproximar a primeira derivada de uma função no eixo x é utilizando dois pontos para frente, isto é:

$$f(x+h,y) = f(x,y)+h*\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{h^2}{2}*\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x,y)+\frac{h^3}{6}*\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(\xi_1,y), \xi_1 \in [x,x+h] \tag{1}$$

$$f(x+2h,y) = f(x,y)+2h*\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{4h^2}{2}*\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x,y)+\frac{8h^3}{6}*\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(\xi_2,y), \xi_2 \in [x,x+2h] \tag{2}$$

Subtraindo (2) de $4 * (1)$, temos que:

$$f(x+2h,y)-4*f(x+h,y) = -3*f(x,y)-2h*\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{h^3}{3}*(4*\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(\xi_2,y)-2*\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(\xi_1,y)) \tag{3}$$

Isolando a derivada em x, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-3*f(x,y)+4*f(x+h,y)-f(x+2h,y)}{2h}+\frac{h^2}{3}*(2*\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(\xi_2,y)-\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(\xi_1,y)) \tag{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-3*f(x,y)+4*f(x+h,y)-f(x+2h,y)}{2h}+O(h^2) \tag{5}$$

Para trás. A segunda forma é utilizando dois pontos para trás.

$$f(x-h,y) = f(x,y)-h*\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{h^2}{2}*\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x,y)-\frac{h^3}{6}*\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(\xi_1,y), \xi_1 \in [x,x+h] \tag{6}$$

$$f(x-2h,y) = f(x,y) - 2h * \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{4h^2}{2} * \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x,y) - \frac{8h^3}{6} * \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(\xi_2,y), \xi_2 \in [x, x+2h] \tag{7}$$

Subtraindo (7) de $4 * (6)$ e isolando a derivada em x, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3 * f(x,y) - 4 * f(x-h,y) - f(x-2h,y)}{2h} + O(h^2) \tag{8}$$

Centrada. A terceira forma é utilizando dois pontos é a centrada.

$$f(x+h,y) = f(x,y) + h * \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{h^2}{2} * \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x,y) + \frac{h^3}{6} * \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(\xi_1,y), \xi_1 \in [x, x+h] \tag{9}$$

$$f(x-h,y) = f(x,y) - h * \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{h^2}{2} * \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x,y) - \frac{h^3}{6} * \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(\xi_2,y), \xi_2 \in [x, x+h] \tag{10}$$

Subtraindo a equação (10) da (9) e isolando a derivada parcial x temos:

$$f(x+h,y) - f(x-h,y) = 2 * h * \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{h^3}{6} * (\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(\xi_1,y) + \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(\xi_2,y)) \tag{11}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{f(x+h,y) - f(x-h,y)}{2h} - \frac{h^2}{12} * (\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(\xi_1,y) + \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(\xi_2,y)) \tag{12}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{f(x+h,y) - f(x-h,y)}{2h} - O(h^2) \tag{13}$$

1.1.2 No eixo Y

Análogo ao cálculo na variável x, podemos calcular na variável y e obtermos as três equações análogas.

Para frente.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-3 * f(x,y) + 4 * f(x,y+h) - f(x,y+2h)}{2h} + O(h^2) \tag{14}$$

Para trás.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3 * f(x,y) - 4 * f(x,y-h) - f(x,y-2h)}{2h} + O(h^2) \tag{15}$$

Centrada.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{f(x,y+h) - f(x,y-h)}{2h} - O(h^2) \tag{16}$$

1.1.3 Em ambos eixos

Assumindo que a segunda derivada é continua, pelo Teorema de Schwarz é garantido a simetria das segunda derivadas e portanto vale que

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) \tag{17}$$

Esse resultado nos garante que podemos combinar qualquer uma das três equações em x com qualquer uma das três equações em y. Nossa implementação em Octave fez o uso de funções anônimas de tal forma que não precisamos calcular todas as 9 possibilidades uma vez que podemos calcular as derivadas parciais em y usando o resultado da derivada parcial em x.

1.2 Deduzindo as equações

Deduzida as possíveis derivadas, agora o problema se resume a escolher qual equação usar em cada ponto. Devido a posição do ponto, é possível que não tenhamos o valor de f calculado nos pontos adjacentes e portanto é impossível obter a derivada por um método ou outro.

Nas sessões abaixo, iremos analisar caso a caso.

1.2.1 Quina superior esquerda

Representado pelo ponto azul na Figura 1, nesse ponto só temos a informação dos pontos para frente no eixo x e para trás no eixo y, portanto temos que usar as equações (5) e (15) para as derivadas parciais e uma combinação delas para a derivada mista.

1.2.2 Quina superior direita

Representado pelo ponto roxo na Figura 1, nesse ponto só temos a informação dos pontos para trás no eixo x e para trás no eixo y, portanto temos que usar as equações (8) e (15) para as derivadas parciais e uma combinação delas para a derivada mista.

1.2.3 Quina inferior esquerda

Representado pelo ponto vermelho na Figura 1, nesse ponto só temos a informação dos pontos para frente no eixo x e para frente no eixo y, portanto temos que usar as equações (5) e (14) para as derivadas parciais e uma combinação delas para a derivada mista.

1.2.4 Quina inferior direita

Representado pelo ponto laranja na Figura 1, nesse ponto só temos a informação dos pontos para trás no eixo x e para frente no eixo y, portanto temos que usar as equações (5) e (14) para as derivadas parciais e uma combinação delas para a derivada mista.

1.2.5 Limite superior

Representado pelos pontos pretos na Figura 1, nesses ponto só temos a informação dos pontos para trás no eixo y e podemos usar a equação (15). No eixo x nós podemos computar a derivada parcial utilizando a equação centrada (13). A derivada mista é uma combinação delas.

1.2.6 Limite inferior

Representado pelos pontos cinzas na Figura 1, nesses ponto só temos a informação dos pontos para frente no eixo y e podemos usar a equação (14). No eixo x nós podemos computar a derivada parcial utilizando a equação centrada (13). A derivada mista é uma combinação delas.

1.2.7 Limite lateral esquerda

Representado pelos pontos amarelos na Figura 1, nesses ponto só temos a informação dos pontos para frente no eixo x e podemos usar a equação (5). No eixo y nós podemos computar a derivada parcial utilizando a equação centrada (16). A derivada mista é uma combinação delas.

1.2.8 Limite lateral direita

Representado pelos pontos verdes na Figura 1, nesses ponto só temos a informação dos pontos para trás no eixo x e podemos usar a equação (8). No eixo y nós podemos computar a derivada parcial utilizando a equação centrada (16). A derivada mista é uma combinação delas.

1.2.9 Parte interna da malha

Para a parte interna, podemos usar a equação centrada tanto para o eixo x quanto para o eixo y.

2 Detalhes de implementação

Nossa implementação, de maneira ampla, segue bem parecida com o exercício-programa 2. Para calcular as derivadas, nós levamos em conta as observações escritas anteriormente.

Foi feito o uso de funções anônimas do Octave para facilitar o uso e tratamento de funções. Além disso, essa abordagem torna muito mais simples computar a derivada mista, uma vez que calculamos a derivada parcial e o retorno passa a ser uma nova função. A partir dessa nova função, nós podemos calcular a derivada parcial no segundo eixo e compondo, dessa forma, a derivada mista.

Nós ainda automatizamos os testes e adicionamos alguns novos arquivos. Os arquivos são:

- **compress.m**. Comprimir uma imagem.
- **uncompress.m**. Descomprimir uma imagem.
- **dxf.m**. Computa a derivada parcial em x de uma função.
- **dyf.m**. Computa a derivada parcial em y de uma função.
- **dxyf.m**. Computa a derivada mista de uma função.
- **ep3.m**. Arquivo base que chama os testes.
- **test.m**. Dado as configurações de um teste, ele faz os testes.
- **constroiv.m**. Construir a função v, sem conhecer as derivadas.
- **constroiv-complete.m**. Construir a função v, conhecendo as derivadas.
- **avaliav.m**. Avalia a função v em um ponto.
- **matrify.m**. Dado uma função anônima, a função discretiza em uma matriz.
- **calculate.m**. Dado uma matriz com os valores da f na malha, calcula os pontos de um intervalo e armazena em uma matrix. Além disso, computa os valores mínimos/máximos.
- **rgb.m**. Dado uma matriz com os valores na imagem, calcula as cores (RGB) para cada ponto.

- **aproxdf.m**. Dado uma matriz com os valores na imagem, calcula as cores (RGB) para cada ponto.

Nós optamos por manter a **constroiv-complete.m** (nossa antiga **constroiv.m** do exercício-programa anterior) para podermos avaliar nossas derivadas.

Optamos ainda por deixar nosso teste automático bem verboso, indicando quais testes está sendo processado.

Por fim, mas não menos importante, a escala de cores adotada foi essa:

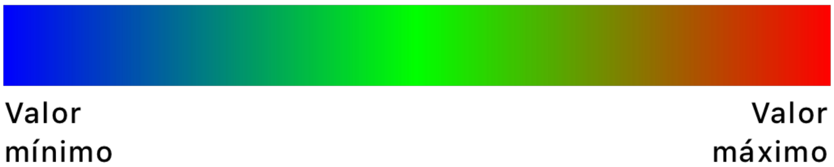


Figura 2: Do valor mínimo para o valor máximo

3 Verificando as derivadas

Para verificar se as aproximações das derivadas estão corretas, foi computado a aproximação das derivadas parciais e mistas e comparada com os valores reais.

3.1 Testes

3.1.1 Teste 1

O primeiro teste foi com as derivadas da função

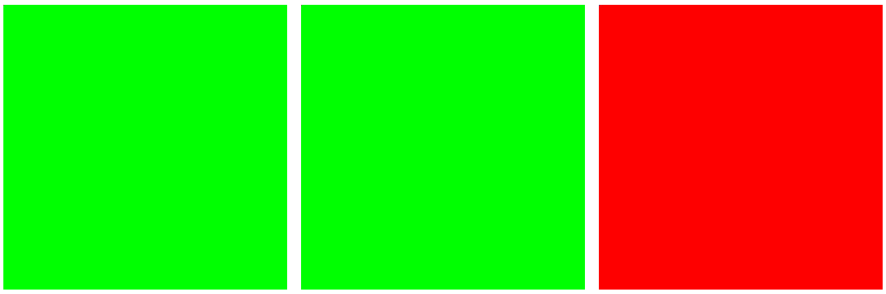
$$f(x,y) = x^3 + 1000 * sin(x * y) \tag{18}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3 * x^2 + 1000 * y * cos(x * y) \tag{19}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1000 * x * cos(x * y) \tag{20}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1000 * (cos(x * y) - x * y * sin(x * y)) \tag{21}$$

E o resultado foi:



Derivada parcial em x | Derivada parcial em y | Derivada mista

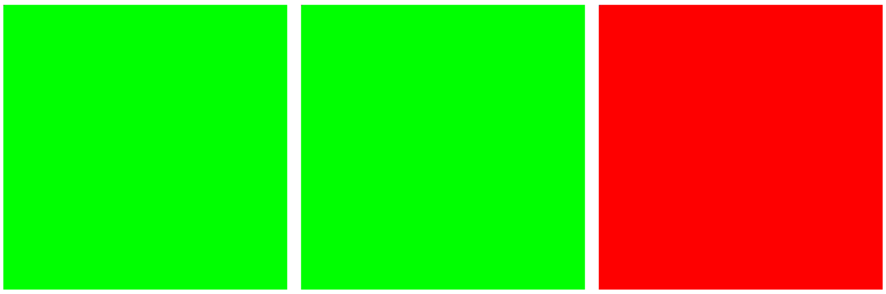
Figura 3: Equações (19), (20) e (21)

3.1.2 Teste 2

O segundo teste foi com as derivadas da função

$$f(x, y) = x^3 + y^3 \tag{22}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3 * x^2 \tag{23}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3 * y^2 \tag{24}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \tag{25}$$

E o resultado foi:



Derivada parcial em x | Derivada parcial em y | Derivada mista

Figura 4: Equações (23), (24) e (25)

4 Verificando as funções interpoladoras

Enunciar que vamos fazer alguns testes (testar f, v e |f - v|)

4.1 Testes

Mostra os testes. Sugestões de funções: 1. Teste com a função $f(x, y) = x^3 + y^3$ 2. Teste com a função $f(x, y) = x^3 + 1000 * sin(x * y)$

5 Verificando v variando o número de pontos na malha

Enunciar o teste. Fazer uma tabela com o erro com h diferentes.

6 Trabalhando com imagens

Responder a pergunta "qual é a menor malha grossa que podemos guardar para que a qualidade da imagem recuperada ainda seja "razoável"?"

6.1 Testes

1. Imagem 1 cinco valores de nx/ny 2. Imagem 2 três valores de nx/ny 3. Imagem 3 três valores de nx/ny