MARKOV CHAINS

MARKOV PROPERTY: PROB. DISTR AT t_N CONDIZIONATA SOLO DA PROB STATISTICHE A t_{N-1}

$$f(x_1,t_1 \dots x_N t_N) = f_1(x_1,t_1)\cdot f(x_2,t_2|x_1,t_1)\cdots f(x_N t_N|x_{N-1} t_{N-1})$$

$$f(x_1 x_2 x_3) = \frac{f_2(x_1,x_2) f_2(x_2,x_3)}{f_1(x_1)}, \quad f_2(x_1 x_2) = f(x_1|x_2) f_1(x_2), \quad f(x_1 x_2 x_3) = f(x_1|x_2) f(x_3|x_2) f_1(x_2)$$

$$f_2(x_2,x_3) = f(x_3|x_2) f_1(x_2)$$

$$f(x_1, x_3|x_2) = \frac{f(x_1 x_2 x_3)}{f_1(x_1)}; \quad f(x_1, x_3|x_2) = f(x_1|x_2) f(x_3|x_2)$$

MARKOV CHAIN:

- $t \in T$
- X_N VALORI IN STESSO INSIEME, NUMERABILE, SPAZIO DEGLI STATI E
- MARKOV PROPERTY

- **TRANSITION MATRIX**

P QUADRATA; $|E| = m$, SOMMA RIGHE = 1

$P_N = P_{N-1} \cdot P$ OTTENGO TRANSIZIONE A + STEPS, $P_N = P^M$

VETTORE RIGA: DENSITA' DISCRETA SU E DI X_N, STATO INIZIALE V

$W = V \cdot P^N$ DOPO N STATI

STATE TYPES

- **COMUNICANTI:** $\exists$ PATH $i \to j$ AND $j \to i$
- **CLASSE CHIUSA:** $C \subset E$, SE C NON COMUNICA CON $\bar{C}$ SE STATO IN C, NON ESCO PIÙ DA C **IRRIDUCIBILE SE** COPPIE DI STATI DI C SONO COMUNICANTI SE UNICA IRRIDUCIBILE E' E → CATENA IRRIDUCIBILE | **ERGODICA**
- **STATO ASSORBENTE:** UNICO STATO IN CLASSE IRRIDUCIBILE
- **CATENA REGOLARE:** $P_{ij}^{(M)} > 0$, $\forall (i,j)$. SE CATENA IRRIDUCIBILE E $h \in E | P_{hh} > 0$ → CATENA REGOLARE | ANY STATE TO ANY STATE IN N STEPS
- **STATO TRANSITORIO:** SE $P_{ii} < 1$ $t \to +\infty$
- **STATO RICORRENTE:** SE $P_{ii} = 1$ $t \to +\infty$. IN CATENA IRRIDUCIBILE → TUTTI STATI RICORRENTI

PROBABILITA' INVARIANTE | STAZIONARIA

$V = (V_1 \dots V_N)$; $V = V \cdot P$; $W = V \cdot P^N = V$. MATRICE DI TRANSIZIONE REGOLARE HA SEMPRE ALMENO 1 PROBABILITA' INVARIANTE

TEOREMA MARKOV SE P E' MATRICE DI TRANSIZIONE REGOLARE → $\lim_{N\to\infty} P_{ij}^{(N)} = \pi_j$, $\pi_j = (\pi_1 \dots \pi_N)$ IS UNICA PROB. INVARIANTE ALL ROWS EQUAL

$P(X_N = j) = \sum V_i P_{ij}^{(N)} \xrightarrow{\infty} \sum V_i \pi_j = \pi_j$. QUALUNQUE LEGGE INIZIALE, X_N CONVERGE A π !

- $\pi[P - I] = 0 \to \det[P - I] = 0$, $\lambda = 1$ E' AUTOVETTORE DI P → π E' AUTOVETTORE (RIGA) ASSOCIATO A $\lambda = 1$ DI P (ALTRI $\lambda \leq 1$)

RISOLVO CON $\pi_j = \sum_i P_{ij}\pi_i$, $\pi_j \geq 0$ $\sum_{j=1}^{N} \pi_j = 1$

$$\begin{cases} \pi_1 = \dots \\ \pi_2 = \dots \\ \pi_N = \dots \end{cases}$$

OPPURE CON BILANCIO DI FLUSSO

$\sum_k \pi_k \cdot P_{ki} = \sum_j \pi_i \cdot P_{ij}$ | PROB ENTRANTI = USCENTI $\forall$ NODO

GEOMETRIC INTERPRETATION

SUCCESSION OF POINTS ON SIMPLEX OF DIMENSIONS $N-1$

CATENE RIDUCIBILI

TROVO π COSTRUENDO MATRICI P DI CLASSI DI TRANSITO | TERMINALI. SE 1 CT. APPLICO UGUALE

SE NO $P = \begin{vmatrix} P_{TRANSITO} & R \\ 0 & P_{TERMINAL} \end{vmatrix}$ TRIANGOLARE (RIORDINO STATI TRANSIENTI PRIMA)

$P_{TRANSITO}$ $M \times M$

P_{TERM} $(N-M)\times(N-M)$

$\lim_{\infty} P_{TR}^{i} = 0$, P_{TR} INVERSIBILE

- $F = (I - P_{TR})^{-1}$ M. FONDAMENTALE
- $F = 1 + P_{TR} + P_{TR}^2 + \dots$

f_{ij} = AVG NUMERO STATO j IF STARTING FROM i, $R_i = \sum f_{ij}$ NUMERO MEDIO x ENTRARE IN CLASSE TERMINALE PARTENDO DA STATO TR. i.

$t = N F \cdot c$

PROCESSI DI NASCITA E MORTE (CODE) - TASSI COSTANTI - 1 SERVENTE

DA STATO i SOLO TRANSIZIONI VERSO i, $i+1$, $i-1$, STATO 0 SOLO IN 1 CON P. λ_0

$\forall i > 0$ $\lambda_i = P_{i,i+1}$, $\mu_i = P_{i,i-1}$

$\rightarrow P_{ii} = 1 - \lambda_i - \mu_i$

$$P = \begin{bmatrix} 1-\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & 1-\lambda_1-\mu_1 & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & 1-\lambda_2-\mu_2 & \lambda_2 & \dots \\ 0 & 0 & \mu_3 & 1-\lambda_3-\mu_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \end{bmatrix}$$

MATRICE DI TRANSIZIONE INFINITA

BILANCIO DI FLUSSO

- $\pi_i(\lambda_i + \mu_i) = \pi_{i-1}\lambda_{i-1} + \pi_{i+1}\mu_{i+1}$
- $\pi_0 \lambda_0 = \pi_1 \mu_1$

DISTRIBUZIONE INVARIANTE

$a_i = \dfrac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}$, $\pi_i = \dfrac{a_i}{\sum a_i}$

- $\pi_0 = \dfrac{1}{\sum a_i}$ CASO FINITO

- CASO INFINITO $\pi_i = \dfrac{a_i}{\sum_0^{\infty} a_i}$ CONVERGE SSE $\lambda < \mu$

TASSO DI SERVIZIO > TASSO DI ARRIVO

$\pi_i = (1-\rho)\rho^N$, $\rho = \dfrac{\lambda}{N}$

$E[N] = \dfrac{\rho}{(1-\rho)}$

TASSI COSTANTI, INFINITI SERVENTI

$\lambda_{N,N-1} = N \cdot \mu$ $\lambda_{N,N+1} = \lambda$, $\pi_N = e^{-\rho} \dfrac{\rho^N}{N!}$,

$E[N] = \rho$

POISSON DI PARAMETRO ρ

CODA INFINITI SERVENTI

C SERVENTI

$\mu < \lambda$ SINGOLO SERVENTE + LENTO DI ARRIVO

$\rho = \dfrac{\lambda}{c\mu}$ $\pi_N = \pi_{C+N} = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{\lambda^c}{c!\,\mu^c} \rho^N$ $|\lambda < c \cdot \mu|$ CONVERGENCE $N \geq C$

$\pi_N = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{\lambda^N}{N!\,\mu^N}$, $N = 0 \dots C-1$