RETTA

• CARTESIANA

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$$

SE RK A = 2.

INTERSEZIONE PIANI NON PARALLELI

• PARAMETRICA

$$r \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

$(l, m, n) \neq (0, 0, 0)$

BASE RETTA // r, x ORIGINE

RETTE //

SE VETTORI DIREZIONE ∈ STESSA RETTA

$l' = \lambda l$, $m' = \lambda m$, $n' = \lambda n$

RETTE ⊥

SE V. DIR ⊥

$ll' + mm' + nn' = 0$

RETTA // PIANO

$al + bm + cn = 0$

VETTORE ⊥ PIANO E' ⊥ A V. DIR RETTA

RETTA ⊥ PIANO

SE VETTORE ⊥ PIANO E' MULTIPLO V. DIR. RETTA

$a = \rho l \quad b = \rho m \quad c = \rho n$

PIANO

• CARTESIANO

$ax + by + cz = d$

(a, b, c) ⊥ A PIANO

• PARAMETRICO

$$\pi \begin{cases} x = x_0 + ls + l't \\ y = y_0 + ms + m't \\ z = z_0 + ns + n't \end{cases}$$

$$\text{SE RK} \begin{vmatrix} l & l' \\ m & m' \\ n & n' \end{vmatrix} = 2$$

$\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2$

v_1, v_2 LIN. INDIP

BASE PIANO // PASSANTE x ORIGINE

$(x_0, y_0, z_0) \in \pi$

PIANI //

SE (a, b, c) E (a', b', c') ∈ STESSA RETTA

$a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$, $c' = \lambda c$

PIANI ⊥

SE (a, b, c) E (a', b', c') ⊥

$aa' + bb' + cc' = 0$

VETTORI

- $v_1, v_2, \dots v_k$ LIN. IND IFF $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0$ ~~$\alpha_i \neq 0$~~ $\forall \alpha_i = 0$

AT MOST n LIN IND IN $\mathbb{R}^n \rightarrow$ BASE

$V = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$ IN $\mathbb{R}^3$

OGNI VETTORE E' COMBINAZIONE LINEARE DI BASI SPAZIO

BASE ORTONORMALE: $e_i \cdot e_j = 0 \,,\, i \neq j$

$|e_i|^2 = e_i \cdot e_i = 1, \forall i$

TRASF. LINEARI: $f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)$

$F(x) = A \cdot X$, x IS COLUMN

SCALAR/DOT PRODUCT = $v \cdot w = |v| \cdot |w| \cdot \cos\alpha$ $\quad v // w \longleftrightarrow v = \lambda \cdot w$

(INNER?) $\quad v \perp w \longleftrightarrow v \cdot w = 0$

$v \cdot w = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_n y_n$

VECTOR PRODUCT: $|v \wedge w| = |v| \cdot |w| \cdot \sin\alpha$

$v // w \longleftrightarrow v \wedge w = 0$

$v \wedge w = (x_2 y_3 - x_3 y_2)\,i + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\,j + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\,k$

ANGOLO VETTORI: $\arccos \dfrac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|}$

SPAZIO V. INSIEME CON 2 OPERAZIONI:

- SOMMA
- MOLT. X SCALARE

SOTTOSPAZIO: $W \subseteq V$, CHIUSO RISP. STESSE OPERAZIONI

SOTTOSPAZI $\mathbb{R}^2$: $(0,0)$, RETTA X ORIGINE, $\mathbb{R}^2$

SOTTOSPAZI $\mathbb{R}^3$: $(0,0,0)$, RETTA X ORIGINE, PIANO X ORIGINE, $\mathbb{R}^3$

SPAN: INSIEME COMBINAZIONI LINEARI DI N. VETTORI, SOTTOSPAZIO GENERATO

BASE: $v_1 \dots v_n$ LIN INDIP, $v_1 \dots v_n$ GENERANO V

$\dim(V)$: N° COMPONENTI BASE

FORMULA GRASSMANN:

V, U_1, U_2 SOTTOSPAZI

$\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$, $V = U \oplus U'$

SOMMA DIRETTA — SOTTOSPAZI SUPPLEMENTARI

SOMMA DIRETTA IFF $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$

MATRICI

$AB^T = B^T A^T$

PRODOTTO R X C

$A(m,n) \cdot B(n,p)$

COMPOSIZIONE: $\underset{A}{F(x)}, \underset{B}{G(x)}$

- $G \circ F = G(F(x)) = BAX$
- $G \circ F = I$, $F \circ G = I \rightarrow$ INVERSA

SE ESISTE INVERSA → APPLICAZIONE E' ISOMORFISMO

SE BIJUNIVOCA → LINEARE, INVERTIBILE

ROW ECHELON FORM:

MATRICE A SCALA

SPAZIO RIGHE: BASE SPAZIO RIGHE ORIGINALE ECHELON

RANGO: DIM SPAZIO RIGHE, N° R/C LIN. INDIP | ORDINE MAX MINORI CON DET NON NULLO

KERNEL $\ker F = \{ v \in V \mid F(v) = 0 \}$, $\ker A = \{ X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0 \}$

SOTTOSPAZIO SOLUZIONI SISTEMA OMOGENEO | NULL SPACE

IMMAGINE

$\operatorname{Im} F \{ w \in W \mid \exists v \in V \; F(v) = w \}$, $\operatorname{Im} A = \{ b \in \mathbb{R}^m \mid \exists X \in \mathbb{R}^n \; AX = b \}$

Im LINEAR APPLICATION = COLUMN SPACE $\quad R(F) = \dim(\operatorname{Im} F)$

$n \times n$ SQUARE MATRIX INVERTIBLE IFF $\longleftrightarrow$ $\operatorname{Rk} A = n$

NULLITY: DIM KER F | RK-NULL TH: $\dim V = \dim \ker(F) + R(F)$

SISTEMI

ROUCHÉ-CAPELLI

$Ax = b$ RISOLUBILE $\longleftrightarrow \operatorname{Rk} A = \operatorname{Rk}[A, b]$

$\dim \operatorname{sol}(A, b) = n - \operatorname{Rk} A$

- $Ax = b$ UNICA SOL $\longleftrightarrow \det(A) \neq 0$
- $Ax = 0$ $\longleftrightarrow$ SOLUZIONI BANALI $\det(A) = 0$

RISOLUZIONE CON GAUSS: OK

REDUCED ROW ECHELON FORM:

- PIVOTS = 1
- ELEM. SOPRA PIVOTS = 0

CRAMER

n EQ, n INCOGNITE

MAT. COEFF QUADRATA $\det \neq 0$

1 E 1 SOLA SOLUZIONE

$x_1 = \dfrac{\det(A_1)}{\det(A)}, \dots \; x_n = \dfrac{\det(A_n)}{\det(A)}$

A_i SOSTITUISCO COLONNA I. NOTI IN A

DETERMINANTI

- n-VOLUME DI SPAZIO COLONNE, SIGNED
- $\det(I) = 1$
- SCAMBIO COLONNE $\longleftrightarrow$ CAMBIA SEGNO
- BINET: $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$
- $\det(A^n) = \det(A)^n$
- $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$
- $B^{-1}AB = C \longleftrightarrow \det(A) = \det(C)$
- $\det(A) \neq 0 \longleftrightarrow \operatorname{Rk}(A) = n$
- $\det(A) = \det(A^T)$
- COLONNE NULLE O UGUALI O PROPORZIONALI $\rightarrow \det(A) = 0$
- $B = \alpha A \rightarrow \det(B) = \alpha^n \det(A)$

- SE R/C LIN DIP $\rightarrow \det(A) = 0$
- SE A, B SIMILI $\rightarrow \det(A) = \det(B)$

DETERMINANTI / RANGO AGAIN

$R(A \cdot B) \leq \min(R(A), R(B))$

KRONEKER: SE MINORE NON NULLO ORDINE P E TUTTI MINORI P+1 NULLI $\rightarrow R(A) = P$

INVERSA

IFF $\det(A) \neq 0$

SE ESISTE E' UNICA

- A, B INVERTIBILI $\rightarrow$ AB INVERTIBILE

$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

- SE $\det A \neq 0 \rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

NORMA

- $\|v\| \geq 0$
- $\|v\| = 0 \longleftrightarrow v = 0$
- $\|\lambda v\| = \lambda \|v\|$
- $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$
- CAUCHY-SCHWARZ: $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$

USED AS DISTANCE FUNCTION

FORME BILINEARI

- $g(v_1 + v_2, w) = g(v_1, w) + g(v_2, w)$
- $g(v, w_1 + w_2) = g(v, w_1) + g(v, w_2)$
- $g(a v, w) = g(v, a w) = a g(v, w)$

F. BILINEARE SIMMETRICA

$g(v, w) = g(w, v)$

&&

$g(v, u) \geq 0$, $g(v, w) = 0 \longleftrightarrow v = 0$

E' PRODOTTO SCALARE.

SE SPAZIO HA PRODOTTO SCALARE $\rightarrow$ EUCLIDEO

MOAR ON BASI

$\vec{v} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3$

$\langle v, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i$ E' PROIEZIONE ORTOGONALE

$\lambda_i = \dfrac{\langle v, \vec{e}_i \rangle}{\langle \vec{e}_i, \vec{e}_i \rangle}$ SE ORTOGONALE

SE ORTONORMALE SOLO NUMERATORE

MATRICI SIMILI

- A SIMILE B $\longleftrightarrow P^{-1} A P = B$ SE ESISTE P
- HANNO STESSI AUTOVALORI

EIGENSTUFF

$A\vec{x} = \lambda \vec{x}$

- λ EIGENVALUES
- $\vec{x}$ EIGENVECTORS

$(\lambda I - A)\vec{x} = 0$

$\det(\lambda I - A)$ POLINOMIO CARATTERISTICO

RISOLVO $\rightarrow$ TROVO AUTOVALORI

- $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$ $\rightarrow$ MATRICE SINGOLARE $(\det(A) = 0) \longleftrightarrow \lambda_i = 0$
- $\mathrm{TR}(A) = \sum_{i} \lambda_i$
- $R(\lambda I - A) \geq n - k$
- n MOLTEPLICITA' ALGEBRICA $\rightarrow n - R(\lambda I - A)$ MOLTEPLICITA' GEOMETRICA

N° AUTOVETTORI INDIP. DI λ

- $m_g \leq m_a$
- SE M.A. = M.G. $\rightarrow$ AUTOVALORE REGOLARE

- IN $\mathbb{C}$ HO SEMPRE n AUTOVALORI CONTATI CON RISPETTIVE MOLTEPLICITA'
- AUTOVETTORI SEMPRE LIN. INDIP.
- $\vec{x}$ EV. (λ) DI $A \rightarrow \vec{x}$ EV. DI A^k (λ^k)

DIAGONALIZZAZIONE

- A DIAGONALIZZABILE $\longleftrightarrow$ SIMILE A MATRICE DIAGONALE
- A QUAD n DIAG.LE $\longleftrightarrow$ n AUTOVETTORI INDIPENDENTI
- A DIAG.LE $\longleftrightarrow$ TUTTI AUTOVALORI REGOLARI/DISTINTI

$P^{-1} A P = \Delta$

- P = MAT. COLONNE AUTOVETTORI, LE P SONO INFINITE X' POSSO COMBINAZIONI LINEARI
- $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1 \ldots \lambda_n)$
- SE A TRIANGOLARE AUTOVALORI SU DIAGONALE PRINCIPALE

- MATRICE ORTOGONALE: $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$

IFF R/C BASE ORTONORMALE $\det(A) = +/-1$

TRASF CONSERVA MODULO $\rightarrow$ E' ROTAZIONE

- SE A REALE SIMMETRICA $\longrightarrow$ A DIAG.LE CON MATRICE PASSAGGIO ORTOGONALE

$A = M \Delta M^T$

CAYLEY-HAMILTON: SOSTITUENDO A AD λ IN POLINOMIO CARATTERISTICO $\rightarrow$ OTTENGO 0

GRAHAM - SCHMIDT

$$S = \{v_1 \dots v_m\} \to S' = \{u_1 \dots u_m\}$$

ORTOGONALI

$$PROJ_u(v) = \frac{\langle u \cdot v \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$

ORTOGONALI

$$\cancel{u_1 = v_1}$$

$$\cancel{u_2 = v_2 - PROJ_{u_1}(v_2)}$$

$$\cancel{u_n = v_n - PROJ_{u_1}(v_n) - PROJ_{u_2}(v_n) - \dots PROJ_{u_n}(v_n)}$$

$$V_1 = U_1$$

$$V_2 = U_2 - \frac{\langle U_2, V_1 \rangle}{\| V_1 \|^2} \cdot V_1$$

$$V_3 = U_3 - \frac{\langle U_3, V_1 \rangle}{\| V_1 \|^2} \cdot V_1 - \frac{\langle U_3, V_2 \rangle}{\| V_2 \|^2} \cdot V_2$$

ORTONORMALI

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$$

$$e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$$

$$e_n = \frac{u_m}{\|u_m\|}$$