Appunti di analisi matematica

Luca Chiodini
luca@chiodini.org

Indice

Introduzione

Questi appunti sono relativi al corso di analisi matematica tenuto dal prof. Diego Conti agli studenti del corso di laurea di informatica dell'Università degli Studi di Milano - Bicocca, durante l'anno accademico 2015-2016.

Queste pagine sono state scritte nell'intento di essere utili, tuttavia potrebbero contenere errori tra i più disparati. Sarò grato a chiunque ne trovasse e volesse segnalarmeli (basta una mail a luca@chiodini.org).

In taluni casi, onde evitare di spezzare una singola unità logica (ad esempio: proposizione e relativa dimostrazione) in due parti, si è proceduto a spostare dette parti al termine della lezione precedente o all'inizio di quella successiva.

Prima lezione (06/10/2015)

1.1 Insieme $\mathbb{N}$

Definizione 1.1. L'insieme $\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri interi positivi, detti numeri naturali, e si indica con $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.

Su di esso sono definite due operazioni:

- Somma: $\mathbb{N} + \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, quindi $(a, b) \to a + b$
- Prodotto: $\mathbb{N} \cdot \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, quindi $(a, b) \to a \cdot b$

Queste due proprietà sono commutative e associative:

- $a + b = b + a$
- $a + (b + c) = (a + b) + c$
- $a \cdot b = b \cdot a$
- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Vale inoltre la proprietà distributiva:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Nel prodotto esiste un elemento neutro, in altri termini esiste un $e \in \mathbb{N}$ tale per cui, comunque scelto a, $a \cdot e = e \cdot a = a$. Tale e risulta ovvio essere 1.

Nell'insieme $\mathbb{N}$ esiste una relazione di ordinamento ($a \leq b$) tale per cui:

I. $a \leq b$ e $b \leq a \implies a = b$

II. $a \leq b \leq c \implies a \leq c$

III. $\forall a, b \;\; a \leq b$ oppure $b \leq a$

Definizione 1.2. Un insieme S con una relazione d'ordine che soddisfa I, II, III si dice *totalmente ordinato.*

Osservazione 1.3. Ogni $S \subseteq \mathbb{N}$ è totalmente ordinato.

Se $a \leq b$ e $c \in \mathbb{N} \implies a + c \leq b + c$
Se $a \leq b$ e $c \in \mathbb{N} \implies a \cdot c \leq b \cdot c$
L'equazione $n + x = m$ ha una soluzione (unica) se e solo se $m > n$.

Anche $\{ x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \}$, l'insieme dei numeri razionali, soddisfa le condizioni sopra indicate.

Definizione 1.4. Dato un insieme totalmente ordinato (scriviamo $(S, \leq)$), X è il minimo di S se $x \in S$ e per ogni $y \in S$ vale $x \leq y$.

Proposizione 1.5 (Principio del buon ordinamento). *Ogni sottoinsieme di* $\mathbb{N}$ *non vuoto ha un minimo.*

Esempio 1.6. L'inisieme $\{ x \in Q \mid x > 0 \}$ non soddisfa il principio del buon ordinamento perché, ad esempio, il suo sottoinsieme $\{ \frac{1}{n} \mid n > 0 \}$ non ha minimo.

Osservazione 1.7. Grazie al principio del buon ordinamento vale:

$$\{ x \in \mathbb{N} \mid x \leq s \} = \{1, \dots, s\}$$

Proposizione 1.8 (Principio di induzione). *Sia P_n un enunciato che dipende da $n \in \mathbb{N}$ (ad esempio "n è pari", "n è primo"). Supponiamo che P_1 sia vero e che valga l'implicazione $P_n \implies P_{n+1}$. Allora P_n è vero per ogni n.*

Dimostrazione. Sia $S = \{ n \in \mathbb{N} \mid P_n \text{ è falso} \}$. Se $S = \emptyset$ non c'è niente da dimostrare. Altrimenti, per il principio del buon ordinamento S ha un minimo $k = \min S$. Non può essere $k = 1$ $(1 \in S)$ perché P_1 è vero.

Essendo $k > 1$, $k - 1 \in \mathbb{N}$ (ricorda l'equazione $1 + k = x$) e $k - 1 \in S$.

Allora P_{k-1} non è falso, quindi P_{k-1} è vero. P_k è vero per ipotesi. Ma questo contraddice l'ipotesi che $k \in S$, quindi il caso S non vuoto non si verifica. □

Nota che, ad esempio, l'enunciato "$\forall n,\ n > 0$" non è un enunciato che dipende da n!

Esempio 1.9. Dimostriamo per induzione che

$$P_n : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot n$$

Verifichiamo P_1:

$$P_1 : \sum_{i=1}^{1} i = \frac{1}{2} \cdot (1+1) \cdot 1$$

che equivale a $1 = 1$ ed è quindi vero.

Ora dobbiamo verificare anche che $P_n \implies P_{n+1}$.

$$P_n : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot n$$

$$P_{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{1}{2} \cdot (n+2) \cdot (n+1)$$

Per definizione vale anche che :

$$P_{n+1}: \sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot n + (n+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

1.2 Insieme $\mathbb{Z}$

Consideriamo queste due equazioni:

- $a + x = b$, che ha soluzione in $\mathbb{N}$ se e solo se $b > a$.
- $a \cdot x = b$, che ha soluzione in $\mathbb{N}$ quando a è un divisore di b (si scrive $x = \frac{b}{a}$).

È evidente che serve quindi estendere l'insieme $\mathbb{N}$ arrivando all'insieme degli interi $\mathbb{Z}$ così definito:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$$

$\mathbb{Z}$ è la più piccola estensione di $\mathbb{N}$ dove l'equazione $a + x = b$ ha soluzione per ogni a, b.
In $\mathbb{Z}$ valgono le stesse proprietà di $\mathbb{N}$.
$\mathbb{Z}$ ha un elemento neutro per la somma (zero). Ovvero scriviamo:

$$a + 0 = 0 + a = a \quad \forall a$$

Dato $a \in \mathbb{Z}$ esiste $x \in \mathbb{Z}$ tale che $a + x = 0$ (si scrive $x = -a$).
Per passi:

$$\begin{aligned} b - a &= b + (-a) \\ a + (b - a) &= b \end{aligned}$$

che è la soluzione di $a + x = b$ cercata.
Nota inoltre che $a \cdot x = b$ non ha soluzioni per $a = 0,\ b \neq 0$ perché $0 \cdot x = 0$, che a sua volta discende da

$$\begin{aligned} 1 \cdot x &= (1 + 0) \cdot x \\ &= 1 \cdot x + 0 \cdot x \end{aligned}$$

Sottraendo $(1 \cdot x)$ a entrambi i membri risulta $0 = 0 \cdot x$.

1.3 Insieme $\mathbb{Q}$ e oltre

Definiamo l'insieme $\mathbb{Q}$, insieme dei numeri razionali, in questo modo:

$$\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \}$$

$\mathbb{Q}$ ha le stesse proprietà di $\mathbb{Z}$. Inoltre:

$$\forall a \neq 0 \ \ \exists x \in \mathbb{Q} : a \cdot x = 1$$

$x = \frac{1}{a}$, da cui $\frac{b}{a} = b \cdot \frac{1}{a}$ che è la soluzione di $a \cdot x = b$.
Infatti:

$$a \cdot \frac{b}{a} = a \cdot b \cdot \frac{1}{a} = b \left(a \left(\frac{1}{a} \right) \right) = b \cdot 1 = b$$

È evidente che i numeri razionali non vanno bene per l'analisi numerica. Supponiamo di voler misurare un segmento in gessetti: potrebbero volerci quattro gessi "e un pezzetto". Potremmo dividere il gessetto a metà e scoprire che la lunghezza del segmento è 4 gessi + 1 gessetto + "un pezzettino". Non è detto che questo processo termini! Infatti non tutti gli intervalli si possono rappresentare con un numero razionale.

Dimostrazione. Sia x la diagonale di un quadrato di lato 1. Per Pitagora vale che $x^2 = 1 + 1 = 2$. Se x fosse razionale, potremmo scrivere $x = \frac{p}{q}$ per un qualche $p, q \in \mathbb{Z}$.

Quindi varrebbe $\frac{p^2}{q^2} = 2$, ovvero $p^2 = 2 \cdot q^2$.

Possiamo scrivere $p = 2^k \cdot a$ per un qualche a dispari e $q = 2^h \cdot b$ per un qualche b dispari.

Sostituendo nella prima equazione resta: $2^{2k} \cdot a^2 = 2 \cdot 2^{2h} \cdot b^2$.

a^2 e b^2 sono quadrati di un numero dispari e quindi dispari anch'essi.

Se uguagliamo gli esponenti risulta $2k = 2h + 1$ dove il primo è un numero pari mentre il secondo è un numero dispari, il che è assurdo.

Quindi, $x^2 = 2$ non ha soluzione in $\mathbb{Q}$. $\square$

1.4 Estremo superiore e maggioranti

Definizione 1.10. Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{Q}$ è *limitato superiormente* se esiste un $k \in \mathbb{Q}$ tale che $a \leq k$ per ogni $a \in A$.

Un tale k è detto *maggiorante* di A.

Definizione 1.11. Dato $A \subseteq \mathbb{Q}$ non vuoto e limitato superiormente, si dice *estremo superiore* di A il minimo dei maggioranti, se esiste. (Si indica $\sup A$.)

Se A è non vuoto ma non è limitato superiormente, allora $\sup A = +\infty$.

Esempio 1.12. Sia $A = \{ x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1 \}$. Esso è limitato superiormente perché se prendo $k = 2$, $k > a \ \ \forall a \in A$.

y è maggiornate di $A \implies y > x \ \ \forall x \in A$.

Sia $y \in \mathbb{Q}$:

- Se $y \geq 1$ allora y è un maggiorante.
- Se $0 < y < 1$, supponiamo $x = \frac{1}{2}(y+1)$ (ovvero x punto medio tra y e 1). Vale che $0 < x < 1 \implies x \in A$. Poiché $x > y$, y non è un maggiornate.
- Se $y < 0$ supponiamo $x = \frac{1}{2} \in A$; $x > y$ quindi y non è un maggiorante.

In definitiva i maggioranti sono $\{ y \in \mathbb{Q} \mid y \geq 1 \}$ e $\sup A = 1$.

Esempio 1.13. Sia $A = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2 \}$. A è limitato superiormente.

Proposizione 1.14. *2 è maggiorante di A.*

Dimostrazione. Supponiamo che 2 non sia maggiorante. Allora non è vero che $x \leq 2 \ \forall x \in A$. Quindi esiste $x \in A$ tale che $x > 2$. Allora $x^2 > 2^2$, ovvero $x^2 > 4$ che è assurdo perché vale che $x^2 < 2$. □

Proposizione 1.15. *A non ha un estremo superiore in $\mathbb{Q}$.*

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbb{Q}$ un maggiorante. Allora $x^2 \neq 2$.

- Se $x^2 < 2$, consideriamo l'insieme $(x + \frac{1}{n})^2$ al variare di n (sviluppando: $x^2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$). Per n sufficientemente grande $y = x + \frac{1}{n}$. Essendo $y^2 < 2$, basta che $\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 2 - x^2$.

  Ovvero
  $$(2 - x^2) \cdot n^2 - 2n + 1 > 0$$

  Nota che l'equazione sopra è una parabola con concavità verso l'alto.

  Allora x non è un maggiorante perché $x < y$ e $y \in A$.

- Se $x^2 > 2$ allora $y = x - 1$ è maggiorante.
  $$\begin{aligned} \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 &> 2 \\ x^2 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} &> 2 \\ n^2 \cdot (x^2 - 2) - 2n + 1 &> 0 \end{aligned}$$

  che è vera per n sufficientemente grande.

Quanto sopra implica che deve esistere un maggiorante della forma $y = x - \frac{1}{n}$. Ciò implica che x non è il minimo dei maggioranti e a sua volta questo implica che A non ha sup.

□

Seconda lezione (09/10/2015)

2.1 Estremi e limiti di insiemi

Definizione 2.1. Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{Q}$ è limitato superiormente se esiste $k \in \mathbb{Q}$ tale che $k \geq x$ per ogni $x \in A$. Tale k è detto maggiorante di A.

In modo analogo, A è limitato inferiormente se esiste $k \in \mathbb{Q}$ tale che $k \leq x$ per ogni $x \in A$. Tale k è detto minorante di A.

Dati $a \neq 0$, l'estremo superiore ($\sup A$), il minimo dei maggiornati, l'estremo inferiore ($\inf A$) e il massimo dei minoranti (purché esistano):

- se A non è limitato superiormente $\implies \sup A = +\infty$
- se A non è limitato inferiormente $\implies \inf A = -\infty$

Osservazione 2.2. Se A ha un massimo x, allora $x = \sup A$.

Infatti, essendo il massimo, x è un maggiorante. Preso un altro maggiorante y, deve valere $x \leq y$ perché $x \in A$. Quindi x è il minimo dei maggioranti.

Ad esempio, dato $A = \{\, x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1 \,\}$, è evidente che $\sup A = 1$ ma $1 \notin A$. In questo caso l'insieme A non ha massimo.

Esempio 2.3. Dato $A = \mathbb{Q}$ osserviamo che non è limitato superiormente. Questo perché $x \in \mathbb{Q}$ è un maggiorante se $x \geq y$ per ogni $y \in \mathbb{Q}$; dovrebbe essere quindi $x \geq x + 1$ che è assurdo. Quindi $\sup \mathbb{Q} = +\infty$.

Esempio 2.4. Dato $A \subseteq \mathbb{Z}$ non vuoto, se A è limitato superiormente allora A ha un massimo.

Infatti $S = \{\, x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ è maggiorante di } A \,\}$. S non può essere vuoto perché A è limitato superiormente.

Allora S ha un minimo x per il principio del buon ordinamento. Essendo il minimo, $x - 1$ non è un maggiorante.

Quindi esiste un $y \in A$ tale che $y > x - 1$ e $y \leq x$. L'unico caso possibile è che x e y coincidano, ovvero $y = x \in A$

Quindi x è un maggiorante e appartiene ad A. Quindi x è il massimo.

Proposizione 2.5. *Dato $A \subseteq \mathbb{Q}$ non vuoto e $y \in \mathbb{Q}$, y è l'estremo superiore di A se e solo se y è maggiorante di A e per ogni $y' < y$ esiste $x \in A$ tale che $y' < x \leq y$.*

Osserviamo che la condizione $x \leq y$ è una diretta conseguenza del fatto che y è un maggiorante.

Dimostriamo la proposizione in entrambi i sensi, per mostrare che vale l'implicazione "se e solo se".

Dimostrazione. Se y è estremo superiore, allora devo dimostrare che:

I. y è un maggiorante

II. $\forall y' < y \quad \exists x \in A \quad y' < x \leq y$

Il punto I è ovvio; dimostriamo il punto II.

Dato $y' < y$, y' non può essere maggiorante perché y è il minimo dei maggioranti. Quindi esiste $x \in A$ tale che $y' < x$. Poiché y è un maggiorante, possiamo scrivere $y' < x \leq y$. □

Dimostriamo ora il viceversa.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostriare che i punti I e II implicano il fatto che y sia un estremo superiore.

Sia y' maggiorante di A. Se $y' < y$ allora esiste $x \in A$ tale che $y' < x \leq y$, quindi y' non è un maggiorante; il che è assurdo.

Allora ogni maggiorante y' deve essere $y' \geq y$. Poiché y è un maggiorante, y è il minimo dei maggioranti. Quindi $y = \sup A$. □

Esempio 2.6. Proviamo a calcolare $\sup A$ di:

$$A = \left\{ \frac{n-1}{n+1} \;\mid\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

che è l'insieme:

$$A = \left\{ 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \dots \right\}$$

Ha senso innanzitutto chiedersi se A è limitato superiormente. Possiamo dire che lo è con certezza perché il numeratore è sempre inferiore al denominatore, quindi

$$\frac{n-1}{n+1} < 1$$

Quindi 1 è un maggiorante. Dimostriamo che è anche il sup ($\sup A = 1$).

In altri termini dobbiamo dimostrare che preso $y' < 1$ esiste $x \in A$ tale che $y' < x \leq 1$, che equivale a risolvere:

$$y' < \frac{n-1}{n+1}$$

$$y'(n+1) < n-1$$

$$y'n + y' < n-1$$

$$n(1-y') > y'+1$$

$$n > \frac{y'+1}{1-y'}$$

Poiché $\mathbb{N}$ non è limitato superiormente, esiste sempre una soluzione $n \in N$. Ovvero:

$$\exists x = \frac{n-1}{n+1} \in A \qquad y' < x$$

Quindi $\sup A = 1$.

2.2 Insieme $\mathbb{R}$

I numeri reali sono un insieme, chiamato $\mathbb{R}$, su cui sono definite le operazioni di somma e prodotto, è definito un ordinamento ed esistono due elementi neutri per le due operazioni precedenti.

L'insieme dei numeri reali soddisfa tutte le seguenti proprietà, che erano già soddisfatte da $\mathbb{Q}$ ma che riportiamo:

- La somma è commutativa e associativa, ha un elemento neutro che è lo zero.
- Il prodotto è commutativo e associativo, ha un elemento neutro che è l'uno.
- Di ogni elemento esiste l'opposto e l'inverso, ovvero:

$$\forall a \in \mathbb{R} \text{ esiste } b \in \mathbb{R} \qquad a + b = 0 \quad (b = -a)$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \text{ esiste } b \in \mathbb{R} \qquad a \cdot b = 1 \quad \left(b = \frac{1}{a}\right)$$

- È definito un ordinamento:

$$a \leq b \text{ e } b \leq a \implies a = b$$

$$a \leq b \text{ e } b \leq c \implies a \leq c$$

$$\forall a, b \quad a \leq b \text{ o } b \geq a$$

$$a \leq b \implies \forall c \quad a + c \leq b + c$$

$$a \leq b \implies \forall c > 0 \quad a \cdot c \leq b \cdot c$$

In aggiunta alle proprietà comuni a $\mathbb{Q}$ abbiamo che se $A \subseteq \mathbb{R}$ è non vuoto, allora A ammette un estremo superiore (eventualmente $\sup A = +\infty$).

Dobbiamo mostrare ora che esistono i numeri reali e per fare ciò ricorriamo al modello degli *allineamenti decimali*.

Un *allineamento decimale* è una sequenza numerabile di interi del tipo $p_0, p_1, p_2, \ldots$ dove

$$0 \leq p_k \leq 9 \qquad k \in \mathbb{N}$$

Un allineamento decimale è *periodico* se si ripete da un certo punto in poi, cioè ha la forma:

$$p_0, p_1, \ldots, \underbrace{p_n, p_{n+1}, \ldots, p_{n+k}}_{\text{periodo}}, p_{n+1+k}, \ldots$$

Un allineamento periodico con periodo 0 si dice anche che è limitato (ad esempio $1,5000...$ è limitato).

Dato un allineamento decimale x definiamo il troncamento k-esimo

$$r_k(x) = p_0 + \frac{1}{10}p_1 + \ldots + \frac{1}{10^k}p_k$$

Il troncamento $r_0(x)$ è la *parte intera* di x e si indica $[x]$.

Ad ogni $x \in \mathbb{Q}$ possiamo associare un allineamento decimale $T(x) = p_0, p_1, p_2, \ldots$.

$$p_0 = \max\{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x \,\}$$

$$p_1 = \max\{\, n \in \mathbb{Z} \mid p_0 + \frac{1}{10}n \leq x \,\}$$

e così via, in modo che per ogni $k > 0$ sia

$$p_k = \max\{\, n \in Z \mid \underbrace{r_{k-1}(T(x))}_{p_0+\frac{1}{10}p_1+\ldots} + \frac{1}{10^k}n \leq x \,\}$$

Esempio 2.7. Consideriamo $T(x)$ per $x = \frac{3}{2}$, che è $1,5000....$ Infatti:

$$p_0 = \max\{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \leq \frac{3}{2} \,\} = 1$$

$$p_1 = \max\{\, n \in \mathbb{Z} \mid 1 + \frac{1}{10}n \leq \frac{3}{2} \,\} = 5$$

$$p_2 = \max\{\, n \in \mathbb{Z} \mid 1 + \frac{5}{10}n + \frac{1}{100}n \leq \frac{3}{2} \,\} = 0$$

Prestiamo attenzione al fatto che il comportamento di $T(x)$ per i numeri negativi, così per come è stato definito, è diverso da come ce lo potremmo aspettare. Ad esempio:

$$T\left(-\frac{3}{2}\right) = -2,500...$$

Proposizione 2.8. *Per ogni $x \in \mathbb{Q}$, $k > 0$ vale:*

$$0 \leq x - r_k(T(x)) < \frac{1}{10^k}$$

Come conseguenza si ha che l'insieme

$$\{\, n \in \mathbb{Z} \mid r_{k-1}(T(x)) + \frac{1}{10^k}n \leq x \,\}$$

contiene 0 e ha 9 come maggiorante.

Terza lezione (13/10/2015)

3.1 Allineamenti decimali e insieme $\mathbb{R}$

Abbiamo già visto come si scrive un allineamento decimale: $P_0, P_1, P_2, \ldots$ con $P_k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq P_k \leq 9$ per $k > 0$.

Dato un allineamento x consideriamo il suo k-esimo troncamento:

$$r_k(x) = P_0 + \frac{1}{10}P_1 + \ldots + \frac{1}{10^k}P_k$$

Dato $x \in \mathbb{Q}$, esiste l'allineamento decimale $T(x)$ tale che $0 \leq x - r_k(T(x)) \leq \frac{1}{10^k}$. Nota che $T(x)$ non può avere periodo 9.

Esempio 3.1. Supponiamo che esista $T(x) = 0,\overline{9}$. Allora

$$\begin{aligned} r_k(T(x)) &= 0 + \frac{9}{10} + \ldots + \frac{9}{10^k} \\ &= \frac{10^k - 1}{10^k} \end{aligned}$$

Ad esempio per $k = 2$ varrebbe $r_k(T(x)) = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} = \frac{99}{100}$; e così via.

$$0 \leq x - r_k(T(x)) < \frac{1}{10^k}$$

Che è equivalente a:

$$\underbrace{r_k(T(x))}_{\frac{10^k-1}{10^k}} \leq x < \underbrace{r_k(T(x)) + \frac{1}{10^k}}_{1}$$

Non esiste $x \in \mathbb{Q}$ tale che $1 - \frac{1}{10^k} \leq x < 1$ per ogni k. Ciò implica che $0,\overline{9}$ non è $T(x)$ per un $x \in \mathbb{Q}$.

Definizione 3.2. Un allineamento decimale è ammissibile se non è periodico con periodo 9.

Sia $\mathcal{A}$ l'insieme degli allineamenti decimali ammissibili. Definiamo T come la funzione che associa un numero razionale a un allineamento ammissibile (che è un elemento dell'insieme $\mathcal{A}$). Sinteticamente si scrive:

$$T : \mathbb{Q} \to \mathcal{A}$$

Poniamo $\mathbb{R} = \mathcal{A}$. L'ordinamento su $\mathcal{A}$ è definito nel seguente modo: $p_0, p_1, \ldots, p_k < q_0, q_1, \ldots, q_k$ se e solo se, detto $k = \min\{\, i \mid p_i \neq q_i \,\}$, si ha $p_k < q_k$.

Esempio 3.3. Consideriamo il banale ordinamento tra le seguenti coppie di allineamenti:

- $2, 3 < 3, 2$ (vera per $k = 0$)
- $1, 12 < 1, 13$ (vera per $k = 2$)

Definizione 3.4. Dati $x, y \in \mathcal{A}$ definiamo $x \leq y$ se $x < y$ o $x = y$.

L'insieme $\mathcal{A}$ è totalmente ordinato.

Proposizione 3.5. *Ogni $X \subset \mathcal{A}$ non vuoto ha un estremo superiore.*

Dimostrazione. Se X non è limitato superiormente, allora $\sup X = +\infty$.

Se X è limitato superiormente, allora esiste sicuramente un maggiorante M.
Per ogni $k \in \mathbb{Z}$ con $k \geq 0$ definiamo la funzione $a_k : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}$ (che estrae la k-esima cifra); ovvero: $a_k(p_0, p_1, \ldots, p_k) = p_k$.

Osserviamo che $\{\, a_0(z) \mid z \in X \,\}$ è limitato superiormente perché M è un suo maggiorante. Ad esempio se $X = \{1.2, 2.3, 3.4\}$ allora $\{\, a_0(z) \mid z \in X \,\} = \{1, 2, 3\}$ e quindi $M = 4$.

Sia $q_0 = max\{\, a_p(z) \mid z \in X \,\}$. Considerando ancora l'esempio sopra, in questo caso $q_0 = 3$.

Se $k > 0$: $\{\, a_k(z) \mid z \in X \,\} \subseteq \{0, \ldots, 9\}$.

$q_k = max\{\, a_k(z) \mid z \in X$ tale che $a_0(z) = q_0, a_1(z) = q_1, \ldots, a_{k-1}(z) = q_{k-1} \,\}$.

Sia $y = q_0, q_1, \ldots$ un maggiorante. Sia $z = p_0, \ldots, p_k$ di X; sia $j = min\{\, p_j \neq q_j \,\}$ con $z \neq y$.

$$q_j = max \underbrace{\{\, a_j(z) \mid z \in X a_0(z) = q_0, \ldots, a_{j-1}(z) = q_{j-1} \,\}}_{C}$$

Notiamo che C contiene z. Ciò implica che $\underbrace{a_j(z)}_{p_j} \leq q_j$, ma per la definizione precedente $p_j \neq q_j$.

Ciò implica $p_j < q_j$, che a sua volta implica $z < y$. Quindi y è effettivamente un maggiorante.

Preso $y' \leq y$ devo dimostrare che $\exists z \in X$ tale che $y' < z$.
$y' = p_0, p_1, \ldots$
$y = q_0, q_1, \ldots$.
Supponiamo che $p_i = q_i$ e $p_k < q_k$ per ogni $i < k$. Per definizione di q_k esiste $z \in X$ tale che $a_i(z) = q_i$ per $i \leq k$. Per costruzione questo implica $y' < z$. Abbiamo quindi dimostrato che $y = \sup X$. $\square$

Per ora abbiamo definito $(\mathcal{A}, \leq)$. Dobbiamo però ancora definire la somma in $\mathcal{A}$. Si pone: $x + y = \sup\{\, T(r_k(x) + r_k(y)) \mid k \in \mathbb{N} \,\}$ dove x, y sono allineamenti.

Possiamo inoltre definire in modo analogo il prodotto.

Per $x, y \geq 0$, $x \cdot y = \sup\{\, T(r_k(x) \cdot r_k(y)) \mid k \in \mathbb{N} \,\}$

Proposizione 3.6. *Esiste un $e \in \mathcal{A}$ tale che $x + e = x = e + x$ per ogni x (detto anche "zero").*

Dimostrazione. Poniamo $e = T(0) = \{0,0000\dots\}$.
Allora $x + e = \sup\{\,T(r_k(x) + r_k(e)) \mid k \in \mathbb{N}\,\}$.
Calcoliamo $r_k(e) = 0 + \frac{1}{10} \cdot 0 + \dots + \frac{1}{10^k} \cdot 0 = 0$.
Quindi $x + e = \sup\{\,T(r_k(x)) \mid k \in \mathbb{N}\,\} = x$.
Quindi $\mathcal{A}$ contiene lo zero.

□

In modo del tutto analogo si prova che $\mathcal{A}$ contiene anche $1,000\dots$.

Siamo quindi pronti per definire l'insieme dei reali $\mathbb{R}$; in modo sintetico scriviamo $\mathbb{R} = (\mathcal{A}, \le, +, \cdot, 0, 1)$.

Osserviamo che $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ e che ogni $x \in \mathbb{Q}$ determina un $T(x) \in \mathcal{A} = \mathbb{R}$.

Valgono le solite proprietà:

- $T(x + y) = T(x) + T(y)$
- $T(x \cdot y) = T(x) \cdot T(y)$
- $T(0) = 0$.
- $T(1) = 1$.

Proposizione 3.7 (Proprietà di Archimede). *Dati a, b reali positivi esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \cdot a > b$.*

Dimostrazione. Per assurdo supponiamo che valga il contrario, ovvero che $n \cdot a < b\ \ \forall n$. Allora $n < \frac{a}{b}$. Questo è impossibile perché $\mathbb{N}$ dovrebbe essere limitato superiormente, quindi avere un massimo. Ma ciò è palesemente assurdo, perché vale sempre $x + 1 \in N$ e $x + 1 > x$. □

3.2 Potenze e logaritmi

Dato $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ definiamo $a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ volte}$. L'elevamento a potenza gode delle seguenti proprietà:

- $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Per definizione se $a \neq 0 \implies a^0 = 1$. Sempre per definizione $a^{-n} = (\frac{1}{a})^n$.

Teorema 3.8. *Dato $x \in \mathbb{R}$ positivo e $n \in \mathbb{N}$ esiste un unico reale positivo, y, tale che $y^n = x$ (ovvero $y = \sqrt[n]{x}$).*

Definizione 3.9. Dato x reale positivo e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (assumendo senza perdita di generalità $q > 0$), si pone $x^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{x})^p$.

Se $x \geq 1$ reale e $y \in \mathbb{R}$ definiamo $x^y = \sup \{ x^{\frac{p}{q}} \mid \frac{p}{q} \leq y \}$.

Se $x < 1$ possiamo invertire: $x^y = (\frac{1}{x})^{-y}$.

Valgono le solite proprietà.

Teorema 3.10. *Dato $x \in \mathbb{R}$ (con $x > 0$, $y > 1$) esiste un unico $z \in \mathbb{R}$ tale che $x^z = y$. Si scrive: $z = \log_x y$.*

3.3 Intervalli e intorni

Dati $a, b \in \mathbb{R}$ sono definiti i seguenti intervalli (riportati solo nelle forme più esemplificative, le altre sono immediate dalle seguenti):

$$\begin{aligned} (a,b) &= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \} \\ [a,b] &= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \} \\ (-\infty, a) &= \{ x \in \mathbb{R} \mid x < a \} \\ (a, +\infty) &= \{ x \in \mathbb{R} \mid x > a \} \\ [a,b) &= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \} \\ (a,b] &= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \} \end{aligned}$$

Definizione 3.11. Dati $x \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{R}$ (con $r > 0$), si dice intorno circolare di x di raggio r l'intervallo $B_r(x) = (x - r, x + r) = \{ y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < r \}$.

Definiamo inoltre $B'_r(x) = B_r(x) \setminus \{x\} = (x - r, x) \cup (x, x + r)$.

Ricorda che $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Inoltre osserviamo che $|x + y| \leq |x| + |y|$.

3.4 Successioni

Una *successione* è una funzione $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $(n \to x_n)$.

Tale funzione viene rappresentata con la notazione $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ oppure $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Esempio 3.12. $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$ rappresenta la successione $\{1, 2, 3, \dots\}$, ovvero la funzione $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(n \to n)$.

Esempio 3.13. $\{[\sqrt{n}]\}_{n \in \mathbb{N}}$ rappresenta la successione $\{1, 1, 1, 2, \dots, [\sqrt{n}], \dots\}$, ovvero la funzione $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(n \to [\sqrt{n}])$.

Esempio 3.14. $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ rappresenta la successione $\{-1, 1, -1, 1, \dots\}$.

Definizione 3.15. Una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è *crescente* se $x_{n+1} > x_n$ per ogni n.

Definizione 3.16. Una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è *decrescente* se $x_{n+1} < x_n$ per ogni n.

Definizione 3.17. Una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è *non crescente* se $x_{n+1} \leq x_n$ per ogni n.

Definizione 3.18. Una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è *non decrescente* se $x_{n+1} \geq x_n$ per ogni n.

Se una successione soddisfa una qualsiasi delle precedenti condizioni, allora essa si dice *monotona*.

Esempio 3.19. Le tre successioni mostrate in precedenza (3.12, 3.13, 3.14) sono rispettivamente crescente, non decrescente e non monotona.

Definizione 3.20. Si dice che $L \in \mathbb{R}$ è il limite di $\{x_n\}$ se per ogni intorno $B_r(L)$ di L esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in B_r(L)$ per ogni $n > N$.

Analogamente per ogni $r > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $L - r < x_n < L + r$ per ogni $n > N$.

Si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = L$$

Esempio 3.21. La successione $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite 0.

Dobbiamo dimostrare che per ogni $r > 0$ esiste N tale che se $n > N$ allora $\frac{1}{n} \in B_r(0)$.

Ovvero $|\frac{1}{n}| < r$, cioè $1 < n \cdot r$, quindi $n > \frac{1}{r}$.

Poniamo $N = [\frac{1}{r} + 1]$, allora $n > N. \implies n > \frac{1}{r} \implies x_n \in B_r(0)$.

Quindi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Quarta lezione (16/10/2015)

4.1 Limite di una successione

Definizione 4.1. Si dice che $L \in \mathbb{R}$ è il limite di $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un N tale che, per ogni $n > N$, vale:

$$L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$$

Si scrive:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = L$$

Teorema 4.2 (Teorema di unicità del limite). *Sia $\{x_n\}$ una successione. Se $\{x_n\}$ ha limite L e $\{x_n\}$ ha limite L', allora $L = L'$.*

In altre parole stiamo dicendo che se il limite esiste allora è unico. Dimostriamo per assurdo il teorema.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo $L \neq L'$. Sia ε il punto medio tra L e L', ovvero:

$$\varepsilon = \frac{|L - L'|}{2} > 0$$

Per definizione di limite esiste un N tale che $|x_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n > N$; quindi $x_n < L + \varepsilon$ e $x_n > L - \varepsilon$.

Esiste un N' tale che se $n > N'$ allora $|x_n - L'| < \varepsilon$.

Scelto $n > N$ e $n > N'$, allora devono valere entrambe le precedenti. Riassumendo, deve valere sia $|x_n - L| < \varepsilon$ che $|x_n - L'| < \varepsilon$.

Per la disuguaglianza triangolare abbiamo che:

$$|L - L'| \leq |L - x_n| + |x_n - L'| \leq 2 \cdot \varepsilon$$

Quindi $|L - L'| < |L - L'|$, che è palesemente assurdo.

In altri termini, stiamo dicendo che:

$$(L - \varepsilon, L + \varepsilon) \cup (L' - \varepsilon, L' + \varepsilon) = \varnothing$$

$\square$

Esempio 4.3. Consideriamo la successione

$$x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Il suo limite è zero.

Per dimostrarlo dobbiamo far vedere che esiste per ogni $\varepsilon > 0$ un N tale che, se $n > N$, allora $|x_n| < \varepsilon$.

$$\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{2^n} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < 2^n \iff n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$$

Non ci resta che scegliere $N > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$, ad esempio

$$N = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$$

Quando $n > N$ varrà

$$n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \implies \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

Esempio 4.4. Consideriamo questa volta la successione $\{n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ che non ha limite.

Supponiamo che abbia un limite L, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che:

$$L - \varepsilon < n^2 < L + \varepsilon \qquad \forall n > N$$

Tale disuguaglianza deve valere anche per $\varepsilon = L$.

Quindi:

$$0 = L - \varepsilon < n^2 < L + \varepsilon = 2L$$

Ciò implica $n < \sqrt{2L}$, che non può essere soddisfatta. Quindi $L > 0$ non può essere il limite.

In modo ancora più semplice possiamo mostrare che il limite non può essere nemmeno negativo. Infatti se $L < 0$ dovrebbe valere per $n > N$:

$$|n^2 - L| < \frac{1}{2} \implies |n^2| < \frac{1}{2}$$

che è assurdo perché il più piccolo quadrato di un numero naturale è 1.

4.2 Successioni convergenti, divergenti, limitate

Definizione 4.5. Si dice che $\{x_n\}$ ha limite $+\infty$ (si dice anche "diverge a $+\infty$") se, per ogni $M \in \mathbb{R}$, esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n > N$, $x_n > M$.

In altre parole stiamo dicendo che, da un certo punto in poi ($n > N$), il valore della successione sarà sempre maggiore di M, con M scelto grande a piacere.

In modo analogo una successione ha limite $-\infty$ se per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n > N$, vale $x_n < -M$.

Esempio 4.6. Consideriamo il limite di questa successione:

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$$

Tale limite è corretto. Scegliamo M positivo e poniamo $N = [\sqrt{M}] + 1$. In tale situazione $n > N \implies n > \sqrt{M} \implies n^2 > M$; che è esattamente la definizione precedente.

Esempio 4.7. La successione $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non converge e non diverge (cioè non ha limite).

Il suo limite non può essere infinito perché $(-1)^n \in [-1; 1]$. Scelto banalmente $M > 1$ non vale mai $x_n > M$. In modo analogo non vale mai nemmeno $x_n < -M$.

Mostriamo ora che non ha nemmeno un limite finito (cioè $L \in \mathbb{R}$). Se fosse $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n = L$ allora, posto $\varepsilon = 1$ nella definizione di limite, avremmo che esiste N tale che:

$$|(-1)^n - L| < 1 \qquad \forall n > N$$

$$\implies |1 - L| < 1 \qquad \text{e} \qquad |-1 - L| < 1$$

$$\implies |1 - (-1)| \leq |1 - L| + |(-1) - L| < 2$$

$$\implies |2| < 2$$

che è palesemente assurdo.

Definizione 4.8. Una successione $\{x_n\}$ è *limitata* se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $|x_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esempio 4.9. Mostriamo due successioni limitate:

$$\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{è limitata: } M = 1 \quad |(-1)^n| = 1$$

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{è limitata: } M = 1 \quad \left|\frac{1}{n}\right| \leq 1$$

Enunciamo e dimostriamo ora un importante teorema sulla relazione che sussiste tra le definizioni precedenti.

Teorema 4.10. *Ogni successione convergente è limitata. Nessuna successione divergente è limitata.*

Dimostriamo la prima affermazione del teorema.

Dimostrazione. Sia:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = L \qquad L \in \mathbb{R}$$

Per definizione di limite esiste un N tale che $L - 1 < x_n < L + 1$ per ogni $n > N$ (ovvero $|x_n| < |L| + 1$). Scegliamo M:

$$M = \max\{|L| + 1, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$$

Allora:

- per $n = 1, \ldots, N$ vale $|x_n| \leq M$ perché appartiene all'insieme

- per $n > N$ vale $|x_n| \le M$ perché abbiamo detto che $|x_n| < |L| + 1$.

Abbiamo quindi dimostrato che la successione $\{x_n\}$ è limitata. $\square$

Dimostriamo ora la seconda affermazione del teorema.

Dimostrazione. Per assurdo, sia $\{x_n\}$ una successione divergente limitata. Allora deve valere:

$$|x_n| < M \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se il limite della successione è $+\infty$ allora esiste un N tale che per $n > N$ vale $x_n > M$. Questo è assurdo (avevamo detto che $x_n < M$).

Non è neppure possibile che il limite sia $-\infty$: in quel caso dovrebbe essere $x_n < -M$ che è assurdo per $n > N$. $\square$

Consideriamo con attenzione questi due esempi:

Esempio 4.11. $\{(-1)^n\}$ è limitata ma non è convergente.

Esempio 4.12.

$$x_n = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ n & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Quindi $\{x_n\} = \{1, 0, 3, 0, 5, \ldots\}$. Essa non è limitata ma non è divergente.

È necessario prestare quindi attenzione al fatto che il teorema precedente non indica "se e solo se".

Teorema 4.13. *Sia*

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \quad e \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = x$$

$$\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \quad e \quad \lim_{n\to+\infty} y_n = y$$

Allora valgono le seguenti:

1. $\{x_n + y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* $x + y$
2. $\{x_n \cdot y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* $x \cdot y$
3. *se* $x_n = k$ *allora* $x = k$
4. *se* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{\alpha \cdot x_n\}$ *converge a* $\alpha \cdot x$
5. $\frac{x_n}{y_n}$ *converge a* $\frac{x}{y}$ *se* $y_n \neq 0 \; \forall n$ *e* $y \neq 0$
6. *se* $x_n \le y_n$ *per ogni* n, *allora* $x \le y$
7. $\{|x_n|\}$ *converge a* $|x|$

Dimostriamo a scopo didattico i punti uno e sei.

Dimostrazione. Per dimostrare il punto uno, devo far vedere che $\forall\varepsilon$ esiste N tale che $\forall n > N$ vale:

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| < \varepsilon$$

Scelgo N tale che $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n > N$.
Scelgo N' tale che $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n > N'$.
Sia $N'' = \max\{N, N'\}$. Quindi se $n > N''$ allora varranno anche $n > N'$ e $n > N$.

$$\implies |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\implies |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\implies |(x_n + y_n) - (x + y)| < \varepsilon \qquad \forall n > N''$$

Abbiamo quindi dimostrato che $\lim(x_n + y_n) = (\lim x_n) + (\lim y_n)$. □

Dimostriamo ora il punto sei:

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$ per $n > N''$ vale $|x_n - x| < \varepsilon$ e $|y_n - y| < \varepsilon$. Quindi, preso $x < \varepsilon + x_n$:

$$x \leq \varepsilon + y_n < \varepsilon + (y + \varepsilon) = y + 2\varepsilon$$

$$\implies x < y + 2\varepsilon \qquad \forall\varepsilon > 0$$

$$\implies x - y < 2\varepsilon \qquad \forall\varepsilon > 0$$

$$\implies x - y \leq 0 \implies x \leq y$$

□

Prestiamo attenzione al fatto che non vale lo strettamente minore! Formalmente, non è vero che se $x_n < y_n$ per ogni n allora $\lim x_n < \lim y_n$. Ad esempio $x_n = \frac{1}{n+1}$ e $y_n = \frac{1}{n}$ hanno entrambi limite 0, quindi possiamo scrivere $\lim x_n \leq \lim y_n$ (con il minore uguale!).

Con quanto abbiamo appreso sopra possiamo già calcolare alcuni limiti interessanti, ad esempio:

$$\lim \frac{1}{n^2} = \lim \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\right) = \left(\lim \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\lim \frac{1}{n}\right) = 0 \cdot 0 = 0$$

Enunciamo ora un teorema sulle successioni che richiederebbe la nozione di funzione continua, non fornita per ora in questo corso. Facciamo solo alcuni esempi di funzioni continue: $f(x) = \sin x$, $f(x) = x^a$, $f(x) = a^x$, $f(x) = \log_a x$.

Teorema 4.14. *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua e* $\{x_n\}$ *una successione in* $[a, b]$ *il cui limite* $\lim x_n = x$*; allora*

$$\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = F(x)$$

Supponiamo di voler calcolare $\lim \sqrt{\frac{2n+1}{n}}$ tramite il teorema esposto. Calcoliamo il limite senza radice:

$$\lim \frac{2n + 1}{n} = \lim \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \lim 2 + \lim \frac{1}{n} = 2 + 0 = 2$$

Grazie al teorema possiamo affermare che $\lim \sqrt{\frac{2n+1}{n}} = \sqrt{2}$.

Teorema 4.15. *Sia $\{x_n\}$ una successione il cui limite vale $+\infty$ e $\{y_n\}$ una generica successione. Allora:*

1. *se* $\lim y_n = y$ *oppure* $\lim y_n = +\infty$ *allora* $\lim x_n + y_n = +\infty$
2. *se* $\lim y_n = y > 0$ *oppure* $\lim y_n = +\infty$ *allora* $\lim x_n \cdot y_n = +\infty$
3. *se* $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *allora* $\lim \alpha \cdot x_n = +\infty$
4. *se* $x_n \neq 0$ *per ogni* n *allora* $\lim \frac{1}{x_n} = 0$
5. *se* $x_n \leq y_n$ *per ogni* n *allora* $\lim y_n = +\infty$
6. $\lim |x_n| = +\infty$

Queste proprietà possono essere scritte anche in forma sintetica:

$$\begin{aligned}
+\infty + y &= +\infty \\
+\infty + (+\infty) &= +\infty \\
+\infty \cdot y &= +\infty \qquad (y > 0) \\
+\infty \cdot \alpha &= +\infty \qquad (\alpha > 0) \\
\frac{1}{+\infty} &= 0
\end{aligned}$$

Quinta lezione (20/10/2015)

5.1 Forme di indeterminazione

In alcuni casi non possiamo stabilire univocamente quanto vale un limite. Chiamiamo tali casi particolari *forme di indeterminazione.*

$\frac{\infty}{\infty}$ è una forma di indeterminazione, in quanto ho che

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} y_n + \infty$$

Quindi non posso dire nulla su

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n}$$

Mostriamo ora tre esempi di limiti che presentano questa forma di indeterminazione.

Esempio 5.1. Un limite con la forma di indeterminazione $\frac{\infty}{\infty}$ è $\lim \frac{n+1}{n}$, perché $\lim(n+1) = +\infty$ e $\lim n = +\infty$.

In questo caso il calcolo del limite è banale:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim 1 + \lim \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1$$

Esempio 5.2.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n^2} \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim \frac{1}{n} + \lim \frac{1}{n^2} = 0$$

Esempio 5.3.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n}} \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim \sqrt{n} + \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty + 0 = +\infty$$

Un'altra forma di indeterminazione è $\infty - \infty$. Anche per questa mostriamo tre esempi.

Esempio 5.4.

$$\lim(n+1) - n \quad [\infty - \infty] = \lim 1 = 1$$

Esempio 5.5.

$$\lim(n+1) - n^2 \quad [\infty - \infty] = \lim n^2 \left(-1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = -\infty$$

Esempio 5.6.

$$\lim(n + (-1)^n) - n \quad [\infty - \infty] = \lim(-1)^n \text{ che non esiste}$$

Anche $\infty \cdot 0$ è una forma di indeterminazione. Come per le precedenti, mostriamo tre esempi.

Esempio 5.7.

$$\lim n \cdot \frac{1}{n+1} \quad [\infty \cdot 0] = 1$$

Esempio 5.8.

$$\lim n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \quad [\infty \cdot 0] = +\infty$$

Esempio 5.9.

$$\lim n \cdot \frac{1}{n^2} \quad [\infty \cdot 0] = 0$$

5.2 Teoremi su limiti di successioni

Teorema 5.10 (Permanenza del segno). *Sia:*

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x > 0 \qquad \textit{oppure} \qquad \lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$$

Allora $x_n > 0$ definitivamente, *ovvero esiste* $N \in \mathbb{N}$ *tale che* $x_n > 0 \ \forall n > N$.

Il concetto che abbiamo espresso di *definitivamente* è importante e verrà usato anche in seguito. Dimostriamo ora il teorema.

Dimostrazione.

I. se $\lim x_n = x > 0$ allora per definizione di limite $\forall \varepsilon > 0$ esiste N tale che $x_n \in B_\varepsilon(x)$. Scegliamo $\varepsilon = x$; segue che $x_n \in (x - x, x + x)$. Quindi $x_n > 0$ per ogni $n > N$.

II. se invece $\lim x_n = +\infty$ allora possiamo dire che $\forall M$ esiste N tale che $x_n > M$ per ogni $n > M$. Scegliamo $M = 0$ e troviamo che $x_n > 0 \ \forall n > N$.

□

Teorema 5.11. *Ogni successione monotona e limitata converge. Ogni successione monotona non limitata diverge.*

Dimostriamo separatamente le due parti del teorema.

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}$ una successione limitata (ricordiamo che questo significa che $\exists M$ tale che $|x_n| \leq M \ \forall n$) non decrescente. Imporre la non decrescenza non fa perdere di generalità la dimostrazione, sarebbe sufficiente considerare l'opposto. Non decrescente significa che $x_{n+1} \geq x_n \ \forall n$.

Consideriamo ora $\sup\{\, x_n \mid n \in \mathbb{N}\,\}$. Questo sup esiste e lo chiamiamo λ. L'insieme $\{\, x_n \mid n \in \mathbb{N}\,\}$ è limitato (ovvero $\forall y \in \{\, x_n \mid n \in \mathbb{N}\,\}\ \ |y_n| \leq M$). Quindi il sup non è infinito e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Vogliamo far vedere, come è prevedibile, che $\lambda = \lim x_n$. Preso $\varepsilon > 0$ dev'essere $x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ definitivamente. Per definizione di sup, $\lambda - \varepsilon < x_n$ per qualche $N \in \mathbb{N}$. Se $n > N$ allora, visto che la successione è non decrescente, vale $x_n \geq x_N > \lambda - \varepsilon$.

Quindi $\forall \varepsilon > 0$ esiste N tale che $x_n \in (\lambda - \varepsilon, \lambda]$ per ogni $n > N$. □

Dimostrazione. Se $\{x_n\}$ è non limitata e non decrescente, allora dobbiamo dimostrare che $\lim x_n = +\infty$.

Per definizione di insieme limitato $\forall M\ \exists N$ tale che $|x_N| > M$. Possiamo supporre che $x_N > M$ (a patto che $M > x_0$). Poiché $\{x_n\}$ è non decrescente, $x_n > x_N\ \forall n > N$.

Quindi $x_n > M\ \forall n > N$ e $\lim x_n = +\infty$. □

Osservazione 5.12. Le successioni che non hanno limite non sono monotone.

Ad esempio, la successione $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non ha limite (oscilla tra -1 e 1) e non è monotona. La successione $\{1, -1, 2, 3, 4, \ldots\}$ invece ha limite $+\infty$ ma non è monotona.

Teorema 5.13 (Confronto tra successioni). *Siano $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ successioni tali che $x_n \leq y_n \leq z_n$ per ogni n. Supponiamo che $\lim x_n = L = \lim z_n$. Allora anche $\lim y_n = L$.*

Dimostrazione. Per $\varepsilon > 0$ deve esistere $N \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)\ \forall n > N$.

Sia N' tale che $x_n > L - \varepsilon\ \forall n > N'$. Sia N'' tale che $z_n < L + \varepsilon\ \forall n > N''$. Sia inoltre $N = \max\{N', N''\}$. Allora per ogni $n > N$ vale la seguente disuguaglianza:

$$L - \varepsilon < \underbrace{x_n \leq y_n \leq z_n}_{\text{per ipotesi}} < L + \varepsilon$$

Quindi $y_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)\ \forall n > N$. □

Osservazione 5.14. Osserviamo che tale teorema vale anche per limiti infiniti. Se $\lim x_n = +\infty$, $\lim z_n = +\infty$, $x_n \leq y_n \leq z_n$, allora $\lim y_n = +\infty$.

5.3 Coefficienti binomiali e disuguaglianza di Bernoulli

Per poter affrontare la *disuguaglianza di Bernoulli*, dobbiamo prima conoscere alcuni cenni sul coefficiente binomiale.

Vale la seguente equazione (detta binomio di Newton):

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

che esplicitata per i primi esponenti vale:

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a+b \\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3
\end{aligned}$$

Considerando solo i coefficienti, essi possono essere anche rappresentati in un triangolo di questo tipo, dove ogni numero è somma dei due numeri sopra di esso (a sinistra e a destra):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}$$

Definizione 5.15.

$$\binom{n}{k} \text{ tale che } (a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

Il coefficiente binomiale deve essere tale in modo che valga la seguente proprietà:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Per far ciò poniamo:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Valgono anche le seguenti proprietà, tutte immediatamente e facilmente verificabili a partire dalla definizione:

$$\begin{aligned}
\binom{1}{0} &= 1 \\
\binom{1}{1} &= 1 \\
\binom{n}{0} &= 1 \\
\binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k} \\
\binom{n}{1} &= n
\end{aligned}$$

Siamo ora pronti a enunciare e dimostrare la disuguaglianza.

Teorema 5.16 (Disuguaglianza di Bernoulli). *Sia $h \geq 0$, allora:*

$$(1+h)^n \geq 1+nh \quad \forall n$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}(1+h)^n &= \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}h + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^k \\ &= 1 + nh + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^k\end{aligned}$$

Osseriviamo che ogni termine $\binom{n}{k}h^k$ è non negativo. Quindi $(1+h)^n \geq 1 + nh$. □

5.4 $\lim a^n$ e criterio del rapporto

Teorema 5.17. *Sia $a \neq 0$, allora:*

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} 1 & \textit{se } a = 1 \\ +\infty & \textit{se } a > 1 \\ 0 & \textit{se} -1 < a < 1 \\ \nexists & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Dimostrazione. Discutiamo ciascun caso separatamente.

- se $a = 1$ il limite è ovvio
- se $a > 1$, sia $h = a - 1 > 0$. Quindi possiamo scrivere $\lim a^n = \lim(1+h)^n$. Dalla disuguaglianza di Bernoulli sappiamo che $(1+h)^n \geq 1+hn \ \ \forall n$. Quindi la successione diverge, poiché $\lim(1+nh) = +\infty$ (considerato ovviamente $h > 0$). In definitiva $\lim a^n = +\infty$.
- se $-1 < x < 1$ vale che:
  $$\frac{1}{|a|} = 1 + h$$
  $$\left(\frac{1}{|a|}\right)^n = (1+h)^n \geq 1 + nh$$
  Consideriamo il reciproco e abbiamo che:
  $$0 < |a|^n \leq 1 + nh$$
  Per il teorema del confronto $\lim |a^n| = 0$, cioè $\forall\varepsilon \ \ |a|^n \in B_\varepsilon(0)$ definitivamente. Quindi $-\varepsilon < |a^n| < \varepsilon \implies -\varepsilon < a^n < \varepsilon$. Quindi $a^n \in B_\varepsilon(0)$ definitivamente.
- se $a \leq -1$ procediamo a una dimostrazione per assurdo. Sia L il limite:
  - se $L > 0$ per il teorema della permanenza del segno a^n è definitivamente positivo; assurdo.
  - se $L = +\infty$ vale lo stesso ragionamento del caso precedente.

– se $L < 0$ per il teorema della permanenza del segno a^n è definitivamente negativo; assurdo.
– se $L = 0$ allora $\lim |a|^n = 0$. Essendo $|a| \geq 1$, assurdo.

Quindi la successione non ha limite.

□

Osservazione 5.18. Alcuni testi scrivono $\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$ (senza segno) se $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty$. Ad esempio potrebbe esserci scritto che $\lim(-2)^n = \infty$ visto che $\lim |(-2)^n| = +\infty$.

Teorema 5.19 (Criterio del rapporto). *Sia $\{x_n\}$ una successione a termini positivi e sia*

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Allora:

- *se $L > 1$ la successione è definitivamente crescente e $\lim x_n = +\infty$.*
- *se $0 \leq L < 1$ la successione è definitivamente decrescente e $\lim x_n = 0$.*

Dimostrazione.

- se $L > 1$ allora possiamo imporre $L = 1 + 2\varepsilon$. Per definizione di limite $\exists N$ tale che

  $$\frac{x_{n+1}}{x_n} > L - \varepsilon \qquad \forall n > N$$
  $$\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 + \varepsilon \qquad \forall n > N$$

  Quindi $x_{n+1} > x_n \cdot (1+\varepsilon) > x_n$ per $n > N$. Quindi la successione è definitivamente crescente.

  Proseguendo otteniamo:

  $$x_{N+2} > x_{N+1} \cdot (1+\varepsilon)$$
  $$x_{N+3} > x_{N+2} \cdot (1+\varepsilon) > x_{N+1} \cdot (1+\varepsilon)^2 \quad \text{e così via...}$$

  Generalizzando:

  $$x_n > (1+\varepsilon)^{n-(N+1)} \cdot x_{N+1}$$

  Poiché $(1+\varepsilon)^{n-(N+1)}$ diverge a $+\infty$, per il teorema del confronto anche $\lim x_n = +\infty$.

- se $0 < L < 1$ procediamo in modo analogo al caso precedente. Imponiamo $L = 1 - 2\varepsilon$. Per definizione di limite $\exists N$ tale che

  $$\frac{x_{n+1}}{x_n} < L + \varepsilon \qquad \forall n > N$$
  $$\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1 - \varepsilon \qquad \forall n > N$$

  Come prima vale:

  $$0 < x_n < (1+\varepsilon)^{n-(N+1)} \cdot x_{N+1} \qquad \forall n > N$$

  Per il criterio del confronto, essendo $\lim(1+\varepsilon)^{n-(N+1)} \cdot x_{N+1} = 0$, allora $\lim x_n = 0$. Inoltre, $x_{n+1} < x_n \cdot (1-\varepsilon) < x_n$; quindi la successione è definitivamente decrescente.

□

Sesta lezione (23/10/2015)

6.1 Criterio del rapporto (cont.)

Abbiamo già enunciato e dimostrato il criterio del rapporto; ora ne vogliamo mostrare un'applicazione calcolando un limite particolare.

Esempio 6.1. Dati $\alpha, h > 1$ vogliamo calcolare

$$\lim \frac{n^\alpha}{h^n}$$

Conoscendo la gerarchia degli infiniti potremmo subito dire che tale limite vale 0. Mostriamo formalmente che ciò è vero, usando il criterio del rapporto.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{(n+1)^\alpha}{h^{n+1}}}{\frac{n^\alpha}{h^n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{h} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha}_{1} \cdot \frac{1}{h} = \frac{1}{h}$$

Quindi

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{h} = \frac{1}{h}$$

Possiamo dire ciò perché

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

e quindi anche

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha = 1^\alpha = 1$$

Quindi ora poiché il limite è $L = \frac{1}{h}$, che è sicuramente minore di 1, per il criterio del rapporto possiamo dire che $\lim x_n = 0$.

Abbiamo quindi dimostrato che $n^\alpha \ll h^n$. In altre notazioni tale fatto viene espresso come $n^\alpha = o(h^n)$.

6.2 Successioni definite per ricorrenza

Definizione 6.2. Una successione è *definita per ricorrenza* se è data nella forma

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = F(n, x_n) \quad \text{con } n > 0 \end{cases}$$

La successione sarà quindi del tipo $\{a, F(1,a), F(2, F(1,a)), \ldots\}$.

Mostriamo ora tre esempi di semplici successioni definite per ricorrenza. Nelle prossime tre successioni osserviamo che è semplice calcolare il termine generale x_n.

Esempio 6.3.

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = (n+1) \cdot x_n \quad n > 0 \end{cases}$$

La successione è del tipo $\{1, 2 \cdot 1, 3 \cdot 2 \cdot 1, \ldots\}$ e si vede chiaramente che $x_n = n!$.

Esempio 6.4. Siano fissati a e c numeri reali.

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = x_n + c \quad n > 0 \end{cases}$$

La successione è del tipo $\{a, a+c, a+2c, \ldots\}$ e si vede chiaramente che $x_n = a + (n-1) \cdot c$.

Esempio 6.5.

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = b \cdot x_n \quad n > 0 \end{cases}$$

La successione è del tipo $\{a, a \cdot b, a \cdot b^2, \ldots\}$ e si vede chiaramente che $x_n = a \cdot b^{n-1}$.

Consideriamo ora invece un esempio dove calcolare il termine generale è difficile.

Esempio 6.6.

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{2n+1}{n+3} \cdot x_n \quad n > 0 \end{cases}$$

Anche senza trovare il termine generale vogliamo però riuscire a calcolare il limite della successione. Osserviamo che tutti gli $x_n > 0$ sono positivi, perché $x_1 > 0$ e ogni $\frac{2n+1}{n+3}$ è un termine positivo. La successione è quindi a termini positivi e possiamo quindi applicare il criterio del rapporto.

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \frac{\frac{2n+1}{n+3} \cdot x_n}{x_n} = \lim \frac{2n+1}{n+3} = \lim \frac{2n+6-5}{n+3} = \lim 2 - \frac{5}{n+3} = 2$$

Poiché 2 è maggiore di 1, per il criterio del rapporto la successione diverge a $+\infty$ (ovvero $\lim x_n = +\infty$).

Esempio 6.7. Prendiamo la stessa successione di prima invertendo numeratore e denominatore in x_{n+1}.

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{n+3}{2n+1} \cdot x_n \quad n > 0 \end{cases}$$

Valgono tutte le osservazioni fatte nell'esempio precedente. Inoltre, con gli stessi passaggi si può trovare che

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}$$

Poiché $\frac{1}{2} < 1$, per il criterio del rapporto $\lim x_n = 0$.

Esempio 6.8. Consideriamo quest'altro esempio in cui vogliamo calcolare il limite della successione.

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Si arriva a far vedere che

$$x_n = 2 - \frac{1}{2^n}$$

utilizzando la seguente uguaglianza:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

e

$$(1 + a + \ldots + a^n) \cdot (1-a) = 1 - a^{n+1}$$

Sostituendo ovviamente $a = \frac{1}{2}$ resta

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - \frac{1}{2}^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}^{n+1}\right) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

In definitiva scriviamo

$$\lim x_n = \lim 2 - \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{0} = 2$$

Osservazione 6.9. Per ogni $n \geq 1$ vale $n! \geq 2^{n-1}$. Possiamo mostrare che è vero per induzione.

Per $n = 1$ ho che $1! \geq 2^{1-1}$, ovvero $1 \geq 1$ che è vero. Devo ora far vedere che se vale per n allora vale anche per $n+1$. Quindi:

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \geq (n+1) \cdot 2^{n-1} \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

6.3 Numero di Nepero e

Teorema 6.10. *Il limite della successione $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ esiste ed è finito. In particolare la successione converge a un numero che chiamiamo e.*

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e < \sum_{h=0}^{k} \frac{1}{h!} + \frac{1}{2^{k-1}}$$

Dimostrazione. Avevamo già visto l'espressione del binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

Possiamo applicarla a questo caso. Quindi:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n! \cdot n^k}
\end{aligned}$$

Per l'ultimo passaggio abbiamo usato l'uguaglianza $n! = (n-k)! \cdot (n-k+1) \cdot \ldots \cdot n$. Possiamo procedere ulteriormente:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Il nostro scopo è mostrare che la successione è monotona. Sviluppiamo ora la successione per $n+1$ in modo analogo:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

Confrontando con quello di prima (che era la somma fino a n, quindi con un termine in meno), ho sicuramente che questo (lo "sviluppo" per $n+1$) è maggiore.

$$\begin{aligned}
&> \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) \\
&> \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Avendo tolto un termine positivo dalla successione, sicuramente ho ottenuto qualcosa di più piccolo. Quindi la successione è crescente.

Osserviamo anche che:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{2^{n-1}}$$

L'ultima disuguaglianza è giustificata dal fatto che $n! > 2^{n-1}$ (dimostrata in precedenza). $\square$

Considerando i casi particolari $n = 1$ e $n = 2$ possiamo scrivere:

$$(1+1)^1 < e < \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2}$$

ovvero $2 < e < 3$.

6.4 Limiti che si deducono da e

Osservazione 6.11. Data una successione $\{a_n\}$ (con $a_n \in \mathbb{N}$) divergente (ovvero $\lim a_n = +\infty$) allora:

$$\lim \left(1 + \frac{1}{a^n}\right)^{a_n} = e$$

Infatti, fissato un intorno di e sappiamo che $(1 + \frac{1}{n})^n \in B_r(e)$ definitivamente. Poiché per definizione di limite $a_n > N$ definitivamente, allora $(1 + \frac{1}{a^n})^{a_n} \in B_r(e)$ definitivamente.

Esempio 6.12. Mostriamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Applichiamo il criterio del rapporto. Osserviamo innanzitutto che la successione è a termini positivi ($\frac{n!}{n^n} > 0$). Calcoliamo il rapporto:

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = (n+1) \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\end{aligned}$$

Quindi

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

Essendo $e > 1$, $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Quindi, per il criterio del rapporto, $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$.

Esempio 6.13. Mostriamo che (fissato $x > 0$)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

Applichiamo il criterio del rapporto. Osserviamo ancora una volta che la successione è a termini positivi ($\frac{x^n}{n!} > 0$ per $x > 0$ fissato). Calcoliamo il rapporto:

$$\lim \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \lim \frac{x}{n+1} = 0$$

Quindi, per il criterio del rapporto, $\lim \frac{x^n}{n!} = 0$.

Esempio 6.14. Mostriamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}} = 0$$

Dobbiamo cioè far vedere che, per ε fissato, $\frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}} < \varepsilon$ definitivamente.

$$\frac{1}{n!} < \varepsilon^n \implies \frac{(\frac{1}{\varepsilon})^n}{n!} < 1$$

Per quest'ultimo passaggio abbiamo usato il limite mostrato nell'esempio precedente. Posto $x = \frac{1}{\varepsilon}$ troviamo che, definitivamente,

$$\frac{(\frac{1}{\varepsilon})^n}{n!} < 1$$

Esempio 6.15. Mostriamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

Consideriamo le due successioni

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{e} \qquad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Sappiamo che $\lim y_n = e$. Quindi ci è sufficiente, per dimostrare l'esempio, far vedere che $\lim x_n y_n = 1$. Procediamo:

$$x_n y_n = \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]^n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

Per Bernoulli sappiamo che $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Sia $x = -\frac{1}{n^2}$, allora:

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}$$

Questo implica

$$1 - \frac{1}{n} \leq x_n y_n \leq 1$$

Essendo $\lim 1 - \frac{1}{n} = 1$, per il teorema del confronto si ha $\lim x_n y_n = 1$. Quindi:

$$\lim x_n = \frac{1}{\lim y_n} = \frac{1}{e}$$

6.5 Asintotico

Definizione 6.16. Due successioni x_n, y_n sono *asintotiche* se $y_n \neq 0$ definitivamente e

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = 1$$

Si scrive $x_n \sim y_n$.

Osservazione 6.17. $x_n \sim y_n \iff y_n \sim x_n$

Proposizione 6.18. *Se* $x_n \sim \overline{x_n}$ *e* $y_n \sim \overline{y_n}$ *allora*

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{\overline{x_n}}{\overline{y_n}}$$

Cioè il limite di destra esiste se e solo se esiste il limite di sinistra; in tal caso i limiti coincidono.

Inoltre si ha anche che

$$\lim x_n \cdot y_n = \lim \overline{x_n} \cdot \overline{y_n}$$

Dimostriamo didatticamente la seconda parte della proposizione (quella relativa al prodotto).

Dimostrazione.

$$\overline{x_n} \cdot \overline{y_n} = \frac{\overline{x_n}}{x_n} \cdot \frac{\overline{y_n}}{y_n} \cdot x_n \cdot y_n$$

Poiché

$$\lim \frac{\overline{x_n}}{x_n} \cdot \frac{\overline{y_n}}{y_n} = 1$$

allora segue direttamente

$$\lim \overline{x_n} \cdot \overline{y_n} = \lim x_n \cdot y_n$$

□

Mostriamo ora la risoluzione di un limite grazie alla stima asintotica.

Esempio 6.19.

$$\lim \frac{n + \sqrt{n}}{n + \sqrt{n-1}}$$

Sia il numeratore che il denominatore sono asintotici a n. Infatti:

$$\frac{n + \sqrt{n}}{n} = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \sim 1$$

$$\frac{n + \sqrt{n-1}}{n} = 1 + \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} \sim 1$$

Quindi:

$$\lim \frac{n + \sqrt{n}}{n + \sqrt{n-1}} = \lim \frac{n}{n} = 1$$

Osservazione 6.20. Attenzione al fatto che tale proprietà *non* vale con la somma. Infatti, se $x_n \sim y_n$ *non* posso dire che

$$\lim x_n + z_n = \lim y_n + z_n$$

Facciamolo vedere su un esempio. Consideriamo $x_n = n + 1$, $z_n = -n$ e $y_n = n$. Calcoliamo il limite: $\lim x_n + z_n = \lim(n+1) - n = \lim 1 = 1$. Considerato che $x_n \sim y_n$, si potrebbe essere tentati dal dire che tale limite è uguale a $\lim y_n + z_n = \lim n - n = \lim 0 = 0$. Come è evidente $(0 \neq 1)$ staremmo commettendo un grave errore!

Settima lezione (27/10/2015)

7.1 Infinitesimi e limiti notevoli

Definizione 7.1. Una successione $\{x_n\}$ si dice *infinitesima* se $\lim x_n = 0$.

Proposizione 7.2. *Sia ε_n una successione infinitesima a termini positivi. Allora:*

1. $\sin \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$
2. $1 - \cos \varepsilon_n \sim \frac{1}{2}(\varepsilon_n)^2$
3. $\lim(1 + \varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} = e$
4. $\log(1 + \varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$
5. $e^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n$
6. $(1 + \varepsilon_n)^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot \varepsilon_n$

Dimostriamo singolarmente ciascuna implicazione.

Dimostrazione. Dimostrare il primo punto equivale a far vedere che

$$\lim \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1$$

Dalla circonferenza goniometrica, con qualche passaggio, possiamo ricavare che

$$\sin \varepsilon_n < \varepsilon_n < \tan \varepsilon_n$$

$$\frac{1}{\sin \varepsilon_n} > \frac{1}{\varepsilon_n} > \frac{1}{\tan \varepsilon_n}$$

Moltiplichiamo per $\sin \varepsilon_n$:

$$1 > \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} > \underbrace{\frac{\sin \varepsilon_n}{\tan \varepsilon_n}}_{\cos \varepsilon_n}$$

Sappiamo che $\lim \cos \varepsilon_n = \cos 0 = 1$. Quindi:

$$1 > \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} > 1$$

Per il teorema del confronto $\lim \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1$. □

Dimostrazione. Riscrivamo la seconda proprietà enunciata sfruttando l'uguaglianza $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ e ponendo $\varepsilon_n = 2x$:

$$\frac{1-\cos\varepsilon_n}{\frac{1}{2}(\varepsilon_n)^2} = \frac{1-(1-2\sin^2\frac{\varepsilon_n}{2})}{\frac{1}{2}(\varepsilon_n)^2} = \frac{2\sin^2\frac{\varepsilon_n}{2}}{\frac{1}{2}(\varepsilon_n)^2} \sim \frac{2(\frac{\varepsilon_n}{2})^2}{\frac{1}{2}(\varepsilon_n)^2} = 1$$

□

Dimostrazione. Il terzo punto ci chiede di mostrare che

$$\lim(1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} = e$$

Osserviamo che qualora $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, allora tale limite può essere riscritto come $(1+\frac{1}{n})^n$ e vale e per definizione di e stesso.

Dimostriamo ora il caso generale. Poniamo x_n uguale alla parte intera di $\frac{1}{\varepsilon_n}$ (si scrive $x_n = [\frac{1}{\varepsilon_n}]$). Quindi $x_n \in \mathbb{Z}$ e $x_n \leq \frac{1}{\varepsilon_n} < x_n + 1$. Quindi

$$\left(1+\frac{1}{x_n+1}\right)^{x_n} \leq (1+\varepsilon_n)^{x_n} \leq (1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} \leq \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} \leq \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n+1}$$

Proviamo ad applicare il criterio del confronto. Consideriamo

$$\lim\left(1+\frac{1}{x_n+1}\right)^{x_n+1} = e$$

poiché $\lim x_n + 1 = +\infty$. Quindi:

$$\lim\left(1+\frac{1}{x_n+1}\right)^{x_n} = \frac{\lim\left(1+\frac{1}{x_n+1}\right)^{x_n+1}}{\lim 1+\frac{1}{x_n+1}} = \frac{e}{1} = e$$

$$\lim\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n+1} = \lim\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \cdot \lim\left(1+\frac{1}{x_n}\right) = e\cdot 1 = e$$

Quindi per il criterio del confronto anche $\lim(1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} = e$. □

Dimostrazione. Dire che $\log(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$ significa dire che

$$\lim\frac{\log(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 1$$

Procediamo con semplici passaggi:

$$\lim\frac{\log(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = \lim\log(1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} = \log(\lim(1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}}) = \log e = 1$$

□

Dimostrazione. Il quinto punto ci chiede di far vedere che $e^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n$. Chiamiamo $\delta_n = e^{\varepsilon_n} - 1$; tale δ_n è una successione infinitesima a termini positivi. Quindi possiamo scrivere:

$$\lim\frac{e^{\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n} = \lim\frac{\delta_n}{\log(1+\delta_n)} = \frac{1}{\lim\frac{\log(1+\delta_n)}{\delta_n}} = \frac{1}{1} = 1$$

□

Dimostrazione. In ultimo dobbiamo dimostrare che $(1+\varepsilon_n)^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot \varepsilon_n$. Procediamo:

$$e^{\alpha \log(1+\varepsilon_n)} - 1 = \frac{e^{\alpha \log(1+\varepsilon_n)} - 1}{\alpha \log(1+\varepsilon_n)} \cdot \alpha \log(1+\varepsilon_n)$$

La frazione è del tipo $\frac{e^{\delta_n}-1}{\delta_n}$ ed è quindi asintotica a 1. Quindi il tutto è asintotico a $\alpha \log(1+\varepsilon_n)$ che è a sua volta asintotico a $\alpha \cdot \varepsilon_n$. □

Mostriamo ora un limite che si può calcolare con quanto abbiamo visto finora.

Esempio 7.3.

$$\lim \frac{\left(\cos \frac{1}{n} - 1\right) \cdot \sin \frac{1}{n}}{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

Studiamo separatamente i tre termini. Il primo è $1 - \cos \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$, il secondo $\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$, il terzo $\log(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$. Riscriviamo il limite iniziale:

$$\lim \frac{-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} = 0$$

Dai limiti studiati se ne possono dedurre facilmente altri:

- Sulla tangente:

  $$\lim \frac{\tan \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = \lim \frac{\sin \varepsilon_n}{\cos \varepsilon_n} \cdot \frac{1}{\varepsilon_n} = \lim \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \cdot \frac{1}{\cos \varepsilon_n} = 1 \cdot 1 = 1$$

  Quindi $\tan \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$.

- Sull'arcsin: $\arcsin \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$. Infatti, sia $\delta_n = \arcsin \varepsilon_n$; δ_n è infinitesima perché arcsin è continua. Quindi

  $$\lim \frac{\delta_n}{\sin \delta_n} = 1 = \lim \frac{\arcsin \varepsilon_n}{\varepsilon_n}$$

Osservazione 7.4.

$$\lim (1 + h\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} = e^h$$

Sappiamo infatti che, considerando $h\varepsilon_n$ come δ_n,

$$\lim (1 + h\varepsilon_n)^{\frac{1}{h \cdot \varepsilon_n}} = e$$

Elevando alla h entrambi i membri si verifica l'uguaglianza iniziale.

7.2 Scala degli infiniti

Scriviamo $a \ll b$ se $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$; vale la seguente *scala di infiniti*:

$$(\log n)^\beta \ll n^\alpha \ll A^n \ll n! \ll n^n$$

Si può scrivere anche $a_n = o(b_n)$. È necessario comunque prestare attenzione al fatto che se $a_n = o(b_n)$ e $c_n = o(b_n)$, non è comunque detto che $a_n = c_n$.

Ad esempio consideriamo le due successioni $\frac{1}{n^2}$ e $\frac{1}{n^3}$ che sono entrambe $= o(\frac{1}{n})$. Infatti il limite del rapporto di entrambe per $\frac{1}{n}$ vale 0, ma questo non implica in alcun modo che $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^3}$.

Proposizione 7.5. *Sia* $\{a_n\}$ *una successione a termini positivi divergente (quindi a* $+\infty$*), allora:*

1. *se* $a_n \in \mathbb{N}\ \forall n$ *e* $A > 1$, $A^{a_n} \ll a_n!$
2. *se* $A > 1$, ${a_n}^{\alpha} \ll A^{\alpha_n}$ *con* α *reale*
3. *se* $\alpha > 0$, $(\log a_n)^{\beta} \ll {a_n}^{\alpha}$

Dimostriamo la prima implicazione.

Dimostrazione. Sappiamo che

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{A^j}{j!} = 0$$

Per definizione di limite $\forall\varepsilon\ \exists N$ tale che $\frac{A^j}{j!} < \varepsilon$ per $j > N$. Essendo $\lim a_n = +\infty$, esiste M tale che $a_n > N$ per ogni $n > M$.

Quindi $n > M \implies a_n > N \implies \frac{A^{a_n}}{a_n!} < \varepsilon$. Quindi il limite $\lim \frac{A^{a_n}}{a_n!} = 0$. □

Esempio 7.6. Esistono dei limiti che non possiamo calcolare con la sostituzione asintotica. Ad esempio

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \cdot \left(\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)$$

pur essendo $\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$, il limite non è calcolabile con i metodi visti finora.

7.3 Serie

Proviamo a formalizzare l'idea di "somma infinita". Abbiamo già visto la notazione

$$\sum_{j=1}^{k} x_j = x_1 + \ldots + x_k$$

con cui intendiamo la somma dei primi k termini.

Definizione 7.7. Data una successione x_j si definisce *serie* l'espressione simbolica

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j$$

Data una serie $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$, si definisce la *successione delle somme parziali* $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\{s_n\} = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

Si dice che la serie *converge* se $\{s_n\}$ converge. In tal caso $\lim s_n$ è detto *somma della serie*. In modo analogo si dice che la serie *diverge* se $\{s_n\}$ diverge.

Il *carattere* di una serie è la sua proprietà di essere convergente, divergente o indeterminata.

Osservazione 7.8. Se due serie differiscono per un numero finito di termini; allora hanno lo stesso carattere.

Date
$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{\infty} b_j$$
supponiamo $a_n = b_n$ per ogni $n > N$. Chiamiamo:
$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \quad \text{e} \quad t_n = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Se $n > N$, la differenza $s_n - t_n$ non dipende da n. Considerando l'elemento successivo vedo che $s_{n+1} - t_{n+1} = s_n + a_{n+1} - (t_n + b_{n+1}) = s_n - t_n$.

Quindi $\{s_n\}$ converge se e solo se $\{t_n\}$ converge. Allo stesso modo $\{s_n\}$ diverge se e solo se $\{t_n\}$ diverge.

Osservazione 7.9. Se $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ converge a L e $\sum_{j=1}^{\infty} y_j$ converge a M, allora $\sum_{j=1}^{\infty}(x_j+y_j)$ converge a $L + M$.

Sia $\{s_n\}$ la successione delle somme parziali di $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ e $\{t_n\}$ la successione delle somme parziali di $\sum_{j=1}^{\infty} y_j$. La successione delle somme parziali di $\sum_{j=1}^{\infty}(x_j + y_j)$ sia $\{z_j\}$.

Per definizione
$$z_n = \sum_{j=1}^{n}(x_j + y_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j + \sum_{j=1}^{n} y_j = s_n + t_n$$

Poiché $\lim s_n = L$ e $\lim t_n = M$, allora $\lim(s_n + t_n) = L + M$.

Osservazione 7.10. Se $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ converge a L, allora $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha x_j$ converge a αL. Questo perché $\lim(\alpha s_n) = \alpha \lim s_n$.

Esempio 7.11 (Serie di Mengoli). Consideriamo la serie di Mengoli:
$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)}$$

Con qualche passaggio si mostra che $\frac{1}{j(j+1)}$ è uguale a $\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}$. Esplicitiamo s_n e traiamo vantagggio da quanto abbiamo appena scritto:
$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$
$$s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
Semplificando i termini opposti restano solo il primo e l'ultimo. Quindi $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Quindi $\lim s_n = \lim(1 - \frac{1}{n+1}) = 1$. Possiamo quindi dire che la serie converge e ha somma 1.

Esempio 7.12 (Serie geometrica). Fissato un x reale, consideriamo la serie geometrica di ragione x, che per convenzione facciamo partire da 0:

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^j$$

In questo caso

$$s_n = \sum_{j=0}^{n} x^j = \frac{1 - x^{n+1}}{1 + x}$$

L'ultima uguaglianza è giustificata dalla formula, già vista, $(1 + x + \ldots + x^n)(1 - x) = 1 + x + \ldots + x^n - x - \ldots - x^n - x^{n+1}$ in cui si semplificano a due a due tutti i termini tranne 1 e x^{n+1}.

Possiamo quindi scrivere

$$\lim s_n = \lim \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Osserviamo che (ricordando $\lim x^n$ già studiato in precedenza):

$$\lim_{n \to +\infty} x^{n+1} = \lim_{n \to +\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ +\infty & \text{se } x > 1 \\ \nexists & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

In definitiva:

- se $|x| < 1$ allora $\lim s_n = \frac{1}{1-x}$ e quindi la serie converge.
- se $x > 1$ allora $\lim s_n = \frac{x^{n-1}-1}{x-1} = +\infty$ e quindi la serie diverge
- se $x = 1$ allora $\sum_{j=0}^{n} 1^j = \sum_{j=0}^{n} 1 = 1 + 1 + \ldots = +\infty$. In altre parole $s_n = n + 1$ e quindi $\lim s_n = +\infty$ e la serie diverge.

Proposizione 7.13. *Una serie a termini non negativi*

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j \qquad x_j \geq 0$$

o converge o diverge a $+\infty$.

Dimostrazione. La dimostrazione è semplice. Consideriamo $s_n = x_1 + \ldots + x_n$ e $s_{n+1} = x_1 + \ldots + x_{n+1} = s_n + x_{n+1}$. Possiamo dire con certezza che $s_{n+1} \geq s_n$ (perché $x_{n+1} \geq 0$). Quindi $\{s_n\}$ è non decrescente. Quindi o converge o diverge a $+\infty$. □

Proposizione 7.14 (Criterio del confronto per le serie). *Siano $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ e $\sum_{j=1}^{\infty} y_j$ serie a termini non negativi e sia $x_j \leq y_j$ per ogni j. Allora:*

1. *se $\sum_{j=1}^{\infty} y_j$ converge $\implies$ $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ converge*

2. se $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ *diverge* $\implies$ $\sum_{j=1}^{\infty} y_j$ *diverge*

Dimostrazione. Sia $\{s_n\}$ la successione delle somme parziali di $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ e $\{t_n\}$ la successione delle somme parziali di $\sum_{j=1}^{\infty} y_j$. Allora vale $s_n \leq t_n$, inoltre $0 \leq s_n \leq t_n$.

Nel primo caso $\{t_n\}$ converge e quindi è limitata. Allora anche $\{s_n\}$ è limitata. Essendo monotona, converge.

Nel secondo caso $\{s_n\}$ diverge. Quindi anche $\{t_n\}$ diverge per il criterio del confronto. □

Esempio 7.15. Consideriamo la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$$

Possiamo confrontare questa serie a quella di Mengoli. Quindi possiamo dire, ad esempio, che:

$$\frac{1}{j^2} \leq \frac{2}{j(j+1)} \implies \frac{1}{j} \leq \frac{2}{j+1} \implies j+1 \leq 2j$$

Poiché sappiamo che $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{j(j+1)}$ converge, allora anche $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ converge.

Proposizione 7.16 (Condizione necessaria di Cauchy per la convergenza delle serie). *Se la serie* $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ *converge, allora* $\lim_{j \to +\infty} x_j = 0$.

Dimostrazione. Sia $\{s_n\}$ la successione delle somme parziali. Consideriamo $s_{n+1} = s_n + x_{n+1}$. A questo punto:

$$\lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = \lim(s_{n+1} - s_n) = \lim s_{n+1} - \lim s_n = L - L = 0$$

Nel penultimo passaggio possiamo fare ciò perché abbiamo supposto la convergenza. □

Esempio 7.17. Possiamo chiederci se la seguente serie converge.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{j}\right)$$

La risposta è no, perché $\lim 1 + \frac{1}{j} = 1$ che è diverso da 0. Inoltre, notando che la serie è a termini positivi, possiamo dire che diverge a $+\infty$.

Ricordiamo inoltre che la condizione necessaria di Cauchy non è sufficiente: ad esempio, la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ soddisfa tale condizione ma diverge.

Ottava lezione (30/10/2015)

8.1 Serie armonica generalizzata

Introduciamo una notazione comoda. Se $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ converge a s, cioè la successione delle somme parziali $\{s_n\}$ converge a s (ovvero $s_n = \sum_{j=0}^{n} x_j$), allora scriviamo:

$$\sum_{j=0}^{\infty} x_j = s$$

Al termine della lezione precedente avevamo visto la condizione di Cauchy. Ribadiamo ancora una volta che non vale il viceversa, mostrando un esempio.

Esempio 8.1 (Serie armonica). La serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$$

soddisfa $\lim \frac{1}{j} = 0$ ma non converge. Tale serie viene chiamata "serie armonica" e possiamo considerare anche quella generalizzata (con α reale):

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{\alpha}}$$

Teorema 8.2. *La serie armonica diverge; la serie armonica generalizzata converge per $\alpha > 1$ e diverge per $\alpha < 1$.*

Dimostrazione. La serie armonica è una serie a termini positivi, quindi o converge o diverge. Confrontiamo i primi termini una successione che chiamiamo $\{z_j\}$ costruita in modo che ogni termine sia minore di quello della serie armonica. Scriviamo nella prima riga i termini della serie armonica e nella seconda quelli di $\{z_j\}$:

$$x_1 = \frac{1}{1} \quad x_2 = \frac{1}{2} \quad x_3 = \frac{1}{3} \quad x_4 = \frac{1}{4} \quad x_5 = \frac{1}{5} \quad \dots$$

$$x_1 = \frac{1}{1} \quad x_2 = \frac{1}{2} \quad x_3 = \frac{1}{4} \quad x_4 = \frac{1}{4} \quad x_5 = \frac{1}{8} \quad \dots$$

Formalmente $z_j = \frac{1}{2^k}$ dove $2^{k-1} < j \leq 2^k$. Analizziamo ora $\{s_n\}$, che definiamo come la successione delle somme parziali di $\{z_j\}$.

$$
\begin{aligned}
s_1 &= z_1 = 1 \\
s_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\
s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \\
s_8 &= 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)
\end{aligned}
$$

Si vede abbastanza facilmente che

$$
\begin{aligned}
s_{2^k} &= s_{2^{k-1}} + 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} \\
s_{2^k} &= s_{2^{k-1}} + \frac{1}{2} \\
s_{2^k} &= 1 + \frac{k}{2}
\end{aligned}
$$

A questo punto possiamo calcolare

$$
\lim_{k \to +\infty} s_{2^k} = +\infty
$$

Quindi $\{s_n\}$ non è limitata e quindi non può convergere. Allora $\sum z_j$ non converge, quindi diverge (essendo a termini positivi).

Osservando che $z_j \leq \frac{1}{j}$ per ogni j e che $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ diverge; allora $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ diverge.

□

Per $\alpha < 1$ il teorema ci dice che $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^\alpha}$ diverge. Infatti se $\alpha < 1$ allora $j^\alpha < j$ e quindi $\frac{1}{j^\alpha} > \frac{1}{j}$. Quindi posso confrontare questa serie con $\frac{1}{j}$. Per il criterio del confronto diverge anch'essa.

Non dimostreremo il caso $\alpha > 1$, ma ci limitiamo ad osservare che se $\alpha = 2$ allora la serie è $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$; abbiamo già visto che converge per confronto con quella di Mengoli.

8.2 Criterio del rapporto per le serie

Teorema 8.3 (Criterio del rapporto per le serie). *Sia $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ una serie a termini positivi. Se esiste il limite*

$$
L = \lim_{j \to +\infty} \frac{x_{j+1}}{x_j}
$$

allora:

1. *se $L < 1$ la serie è convergente*

2. *se $L > 1$ la serie è divergente*

Mostriamo alcuni esempi di applicazione del teorema.

Esempio 8.4. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

converge per ogni x. Infatti, applicando il criterio del rapporto

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1}$$

e $\lim \frac{x}{n+1} = 0$. Poiché il limite è minore di 1, la serie è convergente.

È interessante inoltre notare che per $x = 1$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!}$ vale esattamente e.

Esempio 8.5. Studiamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n \qquad x \in (0,1)$$

applicando il criterio del rapporto. Quindi:

$$\frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n} = x \cdot \frac{n+1}{n}$$

Il limite di $x \cdot \frac{n+1}{n}$ vale x e quindi per $0 < x < 1$ la serie converge.

Rimarchiamo il concetto che se $L = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ non possiamo concludere né che la serie converge né che diverge. Infatti:

Esempio 8.6. $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ diverge e il suo limite è 1:

$$\lim_{j \to +\infty} \frac{\frac{1}{j+1}}{\frac{1}{j}} = \frac{j}{j+1} = 1$$

Esempio 8.7. $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ converge e il suo limite è 1:

$$\lim_{j \to +\infty} \frac{\frac{1}{(j+1)^2}}{\frac{1}{j^2}} = \frac{j^2}{(j+1)^2} = 1$$

Dimostriamo il teorema.

Dimostrazione.

1. Se $L < 1$ scelgo h in modo che $L < h < 1$. Allora so che $\frac{x_{j+1}}{x_j}$ è definitivamente minore di h.

   Quindi esiste N tale che $\frac{x_{j+1}}{x_j} < h$ per ogni $j > N$. Sviluppando i termini successivi:

$$\begin{aligned} x_{N+2} &< hx_{N+1} \\ x_{N+3} &< hx_{N+2} < h^2 x_{N+1} \\ x_{N+K+1} &< h^k x_{N+1} \end{aligned}$$

   Quindi $\sum_{j=N+1}^{\infty} x_j$ converge perché $\sum h^k x_{N+1}$ converge (quest'ultima converge perché è una serie geometrica di ragione $h < 1$). Se converge a partire da $N+1$ in poi, allora tutta la serie converge. Quindi $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ converge.

2. Se $L > 1$ procediamo in modo analogo al caso precedente. Prendiamo $1 < h < L$, quindi $\frac{x_{j+1}}{x_j} > h$ definitivamente. Come prima, osservando i passaggi, arriviamo a dire che $x_{N+k+1} > h^k x_{N+1}$.

   Osserviamo che $\sum_{k=0}^{\infty} h^k x_{N+1} = x_{N+1} \sum_{k=0}^{\infty} h^k$ che diverge perché è una serie geometrica di ragione maggiore di 1. Quindi per confronto anche $\sum_{j=N+1}^{\infty} x_j$ diverge e quindi diverge anche $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$.

$\square$

8.3 Criterio della radice

Teorema 8.8 (Criterio della radice). *Sia $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ una serie a termini positivi tale che il limite*

$$L = \lim_{j \to +\infty} \sqrt[j]{x}$$

esiste ed è finito. Allora:

1. *se $L < 1$ la serie converge*
2. *se $L > 1$ la serie diverge*

Al solito mostriamo alcuni esempi prima della dimostrazione.

Esempio 8.9.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{j!}\right)^j = \sum x_j$$

Applicando il criterio della radice:

$$\sqrt[j]{x_j} = \sqrt[j]{\left(\frac{1}{j!}\right)^j} = \frac{1}{j!}$$

Quindi:

$$\lim \sqrt[j]{x_j} = \lim \frac{1}{j!} = 0$$

Poiché 0 è minore di 1, la serie converge.

Esempio 8.10.

$$\sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\log j}\right)^j = \sum x_j$$

Applicando il criterio della radice:

$$\sqrt[j]{x_j} = \sqrt[j]{\left(\frac{1}{\log j}\right)^j} = \frac{1}{\log j}$$

Quindi:

$$\lim \sqrt[j]{x_j} = \lim \frac{1}{\log j} = 0$$

Poiché 0 è minore di 1, la serie converge.

Non ha a che fare con il criterio della radice, ma osserviamo che l'esempio appena fatto privo dell'elevamento a j (quindi $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\log j}$) diverge perché $\frac{1}{\log j}$ lo posso confrontare con $\frac{1}{j}$.

Poiché $\log j = o(j)$, allora $\frac{1}{\log j} > \frac{1}{j}$ definitivamente. Poiché $\sum \frac{1}{j}$ diverge, allora anche $\frac{1}{\log j}$ diverge.

Dimostrazione. Studiamo le due affermazioni:

1. Se $L < 1$, sia $L < h < 1$. Allora so che $\sqrt[j]{x_j} < h$ definitivamente. Elevando alla j entrambi i membri si trova che $x_j < h^j$ definitivamente.

   Essendo $h < 1$ allora $\sum_{j=0}^{\infty} h^j$ converge. Allora per confronto converge anche $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$.

2. Se $L > 1$ allora posso dire direttamente che $\sqrt[j]{x_j} > 1$ definitivamente. Elevando alla j entrambi i membri si trova che $x_j > 1$ definitivamente.

   Osserviamo che $\sum x_j > \sum 1$. Poiché $\sum 1$ diverge ($\lim 1 \neq 0$ e $1 + 1 + \ldots = +\infty$), allora anche $\sum x_j$ diverge.

   Alternativamente possiamo dire che $\lim x_j$ non può essere 0 perché x_j da un certo punto in poi è 1. Non è quindi soddisfatta la condizione di Cauchy e quindi la serie diverge.

□

8.4 Confronto asintotico tra serie

Definizione 8.11. Date due serie a termini positivi $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ e $\sum_{j=0}^{\infty} y_j$, diciamo che sono *asintoticamente equivalenti* se $x_j \sim y_j$, cioè $\lim \frac{x_j}{y_j} = 1$.

Teorema 8.12 (Criterio del confronto asintotico). *Due serie a termini positivi asintoticamente equivalenti possono essere o entrambe convergenti o entrambe divergenti.*

Esempio 8.13. Studiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3\sqrt{n} - 4}{2n^3\sqrt{n+1}}$$

Osserviamo che il numeratore è asintotico a n^2 e il denominatore a $2n^3\sqrt{n}$. Il termine generale della serie è quindi:

$$\frac{n^2 + 3\sqrt{n} - 4}{2n^3\sqrt{n+1}} \sim \frac{n^2}{2n^3\sqrt{n}} = \frac{1}{2n\sqrt{n}} = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

La serie di partenza è quindi asintoticamente equivalente a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$. Siccome questa è una serie armonica generalizzata con $\alpha = \frac{3}{2}$, che è maggiore di 1, essa converge. Quindi, per il teorema del confronto asintotico, anche la serie di partenza converge.

Esempio 8.14. Studiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^2 + \sqrt{n}}{n}$$

Osserviamo che $-1 \leq \cos n^2 \leq 1$, quindi $\cos n^2 + \sqrt{n} \sim \sqrt{n}$.

La serie di partenza è quindi asintoticamente equivalente a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$. Poiché $\frac{1}{2}$ è minore di 1, la serie diverge.

Dimostrazione. Siano $\sum x_j$ e $\sum y_j$ due serie a termini positivi asintoticamente equivalenti. Sappiamo quindi che $\lim \frac{x_j}{y_j} = 1$.

Possiamo considerare un intorno di 1, ad esempio $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Dev'essere $\frac{1}{2} < \frac{x_j}{y_j} < \frac{3}{2}$ definitivamente. Moltiplicando tutti i termini per y_j otteniamo:

$$\frac{1}{2} \cdot y_j < x_j < \frac{3}{2} \cdot y_j$$

Ora:

1. se $\sum y_j$ diverge, allora $\sum \frac{1}{2} y_j$ diverge. Quindi $\sum x_j$ diverge per confronto.
2. se $\sum y_j$ converge, allora $\sum \frac{3}{2} y_j$ converge. Quindi $\sum x_j$ converge per confronto.

□

Nona lezione (03/11/2015)

9.1 Serie assolutamente convergenti

Definizione 9.1. Una serie $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ si dice *assolutamente convergente* se converge $\sum_{j=0}^{\infty} |x_j|$.

Teorema 9.2. *Se una serie è assolutamente convergente allora è anche convergente.*

Esempio 9.3. Consideriamo la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin j}{j^2}$$

e notiamo che *non* è a termini positivi. Tuttavia possiamo studiare

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{\sin j}{j^2} \right| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\sin j|}{j^2}$$

che è una serie a termini positivi. Osserviamo che $|\sin j| \leq 1$, quindi

$$\frac{|\sin j|}{j^2} \leq \frac{1}{j^2}$$

Sappiamo che $\frac{1}{j^2}$ converge (è una serie armonica generalizzata con $\alpha = 2$). Quindi per confronto anche $\sum \frac{|\sin j|}{j^2}$ converge.

Quindi $\sum \frac{\sin j}{j^2}$ è assolutamente convergente. Applicando il teorema, possiamo dire che è anche convergente.

Prestiamo attenzione: non vale il viceversa.

Dimostrazione. Supponiamo che $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ sia assolutamente convergente. Scriviamo $x_j = a_j - b_j$ dove:

- se $x \geq 0$, $a_j = x_j$ e $b_j = 0$;
- se $x < 0$, $a_j = 0$ e $b_j = -x_j$.

In questo modo a_j e b_j sono sempre non negativi. A questo punto $\sum x_j = \sum a_j - \sum b_j$ è una serie differenza di serie a termini non negativi.

Osserviamo anche che:

- $0 \leq a_j \leq |x_j|$. Siccome $\sum |x_j|$ converge per ipotesi, per il criterio del confronto converge anche $\sum a_j$.
- $0 \leq b_j \leq |x_j|$. Siccome $\sum |x_j|$ converge per ipotesi, per il criterio del confronto converge anche $\sum b_j$.

Quindi $\sum(a_j - b_j) = \sum x_j$ converge. Infatti se $\sum a_j$ converge ad A e $\sum b_j$ converge a B, allora $\sum(a_j - b_j)$ converge ad $A - B$. $\square$

Esempio 9.4. Studiamo questa serie (che chiameremo $\sum y_j$):

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \cdot \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Vogliamo stabilire se è convergente. Verifichiamo prima se è assolutamente convergente, studiando $\sum y_j$ che è

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|x|^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\lim \frac{|y_{j+1}|}{|y_j|} = \lim \frac{\frac{|x|^{2(j+1)+1}}{(2(j+1)+1)!}}{\frac{|x|^{2j+1}}{(2j+1)!}} = \lim \frac{|x|^2}{(2j+3)!} \cdot (2j+1)! = \lim_{j\to+\infty} \frac{|x|^2}{(2j+3)(2j+2)} = 0$$

Per il criterio del rapporto abbiamo che $\sum_{j=0}^{\infty} |y_j|$ converge, quindi $\sum_{j=0}^{\infty} y_j$ è assolutamente convergente e quindi converge.

Esempio 9.5. Dato $0 < x < 1$, vogliamo studiare la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} y_j = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1} \cdot \frac{x^j}{j}$$

Essa converge assolutamente quando converge $\sum |y_j|$ che è $\sum \frac{x^j}{j}$. Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\lim \frac{|y_{j+1}|}{|y_j|} = \lim \frac{x^{j+1}}{j+1} \cdot \frac{j}{x^j} = \lim_{j\to+\infty} x \cdot \frac{j}{j+1} = x$$

Avendo posto $0 < x < 1$, per il criterio del rapporto la serie $\sum |y_j|$ converge. Quindi $\sum y_j$ è assolutamente convergente e quindi converge.

9.2 Criterio di Leibniz

Teorema 9.6 (Criterio di Leibniz). *Sia $\{x_j\}$ una successione a termini positivi, infinitesima e non crescente. Allora la serie*

$$\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1} x_j$$

converge.

Esempio 9.7. La serie

$$\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{1}{j}$$

soddisfa le ipotesi del criterio con $x_j = \frac{1}{j}$ e quindi converge. Infatti $\frac{1}{j}$ è sempre positivo; $\frac{1}{j+1} < \frac{1}{j}$ quindi la successione è non crescente; $\lim \frac{1}{j} = 0$ quindi la successione è infinitesima.

Dimostrazione. Sia $\{s_n\}$ la successione delle somme parziali di $\sum(-1)^{j-1}x_j$. Sia $y_j = x_{2j-1} - x_{2j}$, quindi $y_1 = x_1 - x_2$, $y_2 = x_3 - x_4$ e così via.

Essendo $\{x_j\}$ non crescente per ipotesi, per tutti i termini $y_j \geq 0$. Inoltre, le somme parziali di questa serie $\sum_{j=1}^{\infty} y_j$ sono $y_1 = s_2$, $y_2 = (x_1 - x_2) + (x_3 - x_4) = s_4$ e così via.

Scriviamo s_{2n} e raggruppiamo opportunamente:

$$\begin{aligned} s_{2n} &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - \ldots - x_{2n} \\ &= x_1 - (x_2 - x_3) - (x_4 - x_5) - \ldots - x_{2n} \end{aligned}$$

Osserviamo che tutte le parentesi sono positive ($x_2 > x_3$ e così via). Quindi $s_{2n} \leq x_1$ per ogni n. In conclusione la successione s_{2n} è monotona e limitata, quindi converge. Quindi $\sum_{j=1}^{\infty} y_j$ converge a S.

Per definizione di limite, dato $\varepsilon > 0$ esiste N tale che, per $n > N$,

$$S - \varepsilon < s_{2n} < S + \varepsilon$$

Sappiamo che s_{2n} è non decrescente, quindi può tendere al limite solo arrivando da sinistra. Possiamo allora scrivere

$$S - \varepsilon < s_{2n} \leq S$$

Definitivamente vale $x_j < \varepsilon$ che implica

$$s_{2n+1} = s_{2n} + x_{2n+1} \leq S + x_{2n+1} < S + \varepsilon$$

definitivamente. Quindi definitivamente

$$S - \varepsilon < s_{2n} \leq s_{2n+1} < S + \varepsilon$$

Quindi $\lim s_j = S$. Allora $\sum(-1)^{j-1}x_j$ converge, perché converge la successione delle somme parziali. □

9.3 Serie con termini riordinati

Teorema 9.8 (Teorema di Dirichlet). *Se $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ è una serie assolutamente convergente, ogni serie ottenuta riordinando i termini di $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ è convergente alla stessa somma.*

Diamo solo un'idea della dimostrazione. Chiariamo in termini rigorosi cosa si intende per riordinare: si definisce una funzione $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biunivoca (quindi suriettiva e iniettiva). Si considera $y_j = x_{\sigma(j)}$, allora deve essere $\sum y_j = \sum x_j$.

Nella dimostrazione si usa il fatto che

$$s_n = x_{\sigma(1)} + x_{\sigma(2)} + \ldots + x_{\sigma(n)} \leq \sum_{j=1}^{N} x_j \leq \sum_{j=1}^{\infty} x_j$$

dove $N = \max\{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}$. Si fa quindi vedere che $\sum x_j \leq \sum y_j$.
In ogni caso, lasciamo il teorema senza dimostrazione completa.

Osservazione 9.9. Data una serie convergente ma non assolutamente convergente e dato $S \in \mathbb{R}$, esiste una serie ottenuta riordinando i termini che converge a S.

Esempio 9.10. Consideriamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \qquad [= \log 2]$$

Sappiamo che non è assolutamente convergente perché $\sum \frac{1}{n}$ diverge (è la serie armonica). Consideriamo ora questa serie:

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{2} a_{\frac{n}{2}} & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Esplcitiamo le due serie:

$$\begin{aligned} \sum a_n &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots \\ \sum b_n &= 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \ldots \end{aligned}$$

Si vede che $\sum b_n = \frac{1}{2} \sum a_n$.
La serie somma è $\sum (a_n + b_n) = \frac{3}{2} \sum a_n = \frac{3}{2} \log 2$. Esplicitiamola:

$$a_n + b_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \text{ dispari} \\ -\frac{1}{n} - (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{n} & n \text{ pari} \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \sum (a_n + b_n) &= \underbrace{1}_{a_1+b_1} \underbrace{- \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{a_2+b_2} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{a_3+b_3} + \ldots \\ &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots \end{aligned}$$

Questa è una serie ottenuta riordinando $\sum a_n$ ma ha somma $\frac{3}{2} \log 2$.

9.4 $\lim \sqrt[n]{n}$

Esempio 9.11. Mostriamo in due modi diversi che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Procediamo con il primo modo. Possiamo scrivere $\sqrt[n]{n} = 1 + x_n$ con $x_n > 0$. Dallo sviluppo di Newton sappiamo che

$$(1 + x_n)^n = 1 + \binom{n}{1} x_n + \binom{n}{2} {x_n}^2 + \dots$$

I termini sono tutti positivi, quindi sicuramente:

$$\begin{aligned}(1 + x_n)^n &\geq 1 + \binom{n}{1} x_n + \binom{n}{2} {x_n}^2 \\ &\geq 1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2} {x_n}^2\end{aligned}$$

Elevando entrambi i membri della relazione iniziale alla n possiamo scrivere:

$$n = (1 + x_n)^n \geq 1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2} {x_n}^2 \geq \frac{n(n-1)}{2} {x_n}^2$$

Quindi:

$$\begin{aligned}1 &\geq \frac{n(n-1)}{2} {x_n}^2 \\ {x_n}^2 &\leq \frac{2}{n-1}\end{aligned}$$

Poiché $\lim \frac{2}{n-1} = 0$, per confronto allora anche $\lim x_n = 0$.
Nel secondo modo, procediamo semplicemente come segue:

$$\sqrt[n]{n} = e^{\log n^{\frac{1}{n}}} = e^{\frac{1}{n} \cdot \log n}$$

Sappiamo che $\lim \frac{\log n}{n} = 0$ per la gerarchia degli infiniti. Per continuità della funzione esponenziale, $\lim e^{\frac{\log n}{n}} = e^0 = 1$.

9.5 Ancora sulle successioni

Osservazione 9.12. Se $a_n \sim b_n$ sono successioni che tendono a $+\infty$, allora $\log a_n \sim \log b_n$.

Attenzione che questa proprietà non vale per tutte le funzioni! Ad esempio, non vale $e^{a_n} \sim e^{b_n}$ in generale. Infatti e^{n+1} non è asintotico a e^n poiché $\lim \frac{e^{n+1}}{e^n} = e$, che è diverso da 1.

Mostriamo che questo è vero per quanto riguarda la funzione logaritmo. Se $a_n \sim b_n$, allora il loro rapporto deve stare in un intorno di uno.

Quindi definitivamente vale:

$$\frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}$$
$$\frac{1}{2}a_n < b_n < \frac{3}{2}a_n$$
$$\log\frac{1}{2}a_n < \log b_n < \log\frac{3}{2}a_n$$
$$\log\frac{1}{2} + \log a_n < \log b_n < \log\frac{3}{2} + \log a_n$$
$$\frac{\log\frac{1}{2}}{\log a_n} + 1 < \frac{\log b_n}{\log a_n} < \frac{\log\frac{3}{2}}{\log a_n} + 1$$

Poiché il primo e il terzo termine valgono entrambi 1, per il teorema del confronto anche $\lim \frac{\log b_n}{\log a_n} = 1$.

Osservazione 9.13. Se $a_n \sim b_n$ e $\lim a_n$ è finito, non è vero in generale che $\lim \frac{\log a_n}{\log b_n} = 1$.

Esempio 9.14. Consideriamo ad esempio $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ e $b_n = 1 + \frac{1}{n^2}$, che sono due successioni tra loro asintotiche. Effettivamente il limite del loro rapporto vale 1:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = 1$$

Ma ad esempio:

$$\lim \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\log(1+\frac{1}{n^2})} = \lim \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim n = +\infty$$

Per risolvere il limite abbiamo sfruttato il fatto che $\log(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$.

Decima lezione (06/11/2015)

10.1 Esempi di successioni

Esempio 10.1. Consideriamo la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} x_1 = \alpha & \text{con } \alpha \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} = 1 - x_n + (x_n)^2 \end{cases}$$

Vogliamo studiare il suo limite, la monotonia e determinare il valore massimo e minimo, qualora esistano.

Iniziamo verificando la monotonia: vediamo se $x_{n+1} - x_n \geq 0$. Sostituendo abbiamo $1 - x_n + (x_n)^2 - x_n \geq 0$, che è un quadrato di binomio: $(1 - x_n)^2 \geq 0$. Questa disuguaglianza è sempre verificata. L'ipotesi iniziale, $x_{n+1} - x_n \geq 0$, è vera per ogni n. La successione è quindi non decrescente.

Partendo da α e crescendo (o al più restando costante), sappiamo che il valore minimo è sempre α.

Essendo $\{x_n\}$ una successione monotona, essa ha sicuramente un limite. Supponiamo che questo limite sia finito, quindi che $\lim x_n = L$. Il limite della successione x_{n+1} è uguale al limite della successione x_n, quindi possiamo dire che:

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} x_n$$
$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} (1 - x_n + {x_n}^2) = \lim_{n\to+\infty} x_n = L$$

Quindi se il limite è finito vale:

$$1 - L + L^2 = L$$
$$L^2 - 2L + 1 = 0$$
$$(L-1)^2 = 0$$

Quindi se il limite è finito, $L = 1$.

Se $\alpha > 1$, il limite della successione non può essere 1 (ricordiamo che la successione è non decrescente) e quindi non può essere finito (se lo fosse, dovrebbe essere per forza 1 come abbiamo appena visto). Quindi, poiché la successione essendo monotona deve avere un limite, esso sarà infinito. Ovvero $\lim x_n = +\infty$. Ovviamente in questo caso non esiste il valore massimo.

Consideriamo ora il caso in cui $x_{n+1} > 1$. Questo è verificato se e solo se

$$1 - x_n + (x_n)^2 > 1$$
$$x_n(x_n - 1) > 0$$

Quindi $x_n < 0 \vee x_n > 1$. Se per qualche n vale che $x_n < 0$ oppure $x_n > 1$ allora in quei casi il limite è $+\infty$.

Se $\alpha = 0$ la condizione è verificata ($x_1 < 0$) e quindi il limite è $+\infty$.

Ci resta da analizzare il caso in cui $0 \leq \alpha \leq 1$. Osserviamo che $0 \leq x_n \leq 1 \iff 1 - x_n + (x_n)^2 < 1$. Questo equivale al sistema

$$\begin{cases} {x_n}^2 - x_n + 1 \geq 0 \\ {x_n}^2 - x_n \leq 0 \end{cases}$$

La prima equazione ha $\Delta < 0$ e quindi è sempre verificata, mentre la seconda lo è per $0 \leq x_n \leq 1$.

Se $0 \leq x_n \leq 1$, allora anche $0 \leq x_{n+1} \leq 1$. Quindi se $0 \leq \alpha \leq 1$ allora per ogni x_n vale $0 \leq x_n \leq 1$ (per induzione).

Quindi la successione $\{x_n\}$ è limitata e il suo limite è L. Per quanto abbiamo già fatto vedere prima, dev'essere $L = 1$.

Non abbiamo ancora detto nulla a riguardo del massimo quando $0 \leq \alpha \leq 1$. Poiché la successione è non decrescente, sappiamo che $\sup\{\, x_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} = 1$. Quindi esiste il massimo se e solo se esiste un n tale che $x_n = 1$.

Se $\alpha = 1$ allora vediamo subito che $x_1 = 1$ e quindi 1 è il massimo. In caso contrario, per $\alpha \neq 1$, dev'essere $x_{n+1} = 1$. Quindi:

$$1 - x_n + {x_n}^2 = 1$$
$$x_n(x_n - 1) = 0$$

Quindi $x_n = 1 \vee x_n = 0$. Se $\alpha = 0$ allora $x_2 = 1$ e 1 è il massimo. Se invece $0 < \alpha < 1$ allora $x_n > 0$ per ogni n (essendo la successione non decrescente. Quindi $x_{n+1} \neq 1$ per ogni n e quindi non c'è il massimo.

Esempio 10.2. Consideriamo la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_{n+1} = \frac{2+\cos n}{\sqrt{n}} \cdot x_n \end{cases}$$

Vogliamo studiare il suo limite, la monotonia e determinare il valore massimo e minimo, qualora esistano.

Distinguiamo due casi:

- se $\alpha = 0$ allora $x_n = 0$ per ogni n
- se $\alpha > 0$ osserviamo innanzitutto che la successione è a termini positivi perchè $\frac{2+\cos n}{\sqrt{n}} > 0 \; \forall n$. Possiamo quindi applicare il criterio del rapporto:

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \frac{\frac{2+\cos n}{\sqrt{n}} \cdot x_n}{x_n} = \lim \frac{2 + \cos n}{\sqrt{n}}$$

Sappiamo che $1 \leq 2 + \cos n \leq 3$, quindi

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{2 + \cos n}{\sqrt{n}} < \frac{3}{\sqrt{n}}$$

Poiché il primo e il terzo termine tendono a 0, per confronto anche $\lim \frac{2+\cos n}{\sqrt{n}} = 0$. Essendo il limite minore di 1, la successione è definitivamente decrescente e tende a 0.

Per la monotonia, possiamo chiederci se è crescente ($x_{n+1} \geq x_n$).

$$\begin{gathered}\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 \\ \frac{2 + \cos n}{\sqrt{n}} \geq 1 \\ 2 + \cos n \geq \sqrt{n}\end{gathered}$$

Poiché $\cos n \in [-1, 1]$ sappiamo che $2 + \cos n \leq 3 = \sqrt{9}$. Quindi sicuramente $2 + \cos n < \sqrt{n}$ se $n > 9$. Quindi la successione è decrescente da x_{10} in poi.

Il massimo $\max\{x_n\}$ dev'essere quindi un elemento tra $\{x_1, \ldots, x_9\}$. Non è particolarmente interessante capire qual è, sarebbe comunque sufficiente calcolare tutti i termini della successione fino a nove e cercare il maggiore tra questi.

Esempio 10.3. Consideriamo la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} x_1 = \alpha & \text{con } 0 \leq \alpha \leq 1 \\ x_{n+1} = x_n - {x_n}^3 \end{cases}$$

Vogliamo studiare il suo limite, la monotonia e determinare il valore massimo e minimo, qualora esistano.

Possiamo riscrivere $x_n - {x_n}^3$ come $x_n(1 - {x_n}^2)$. Se $0 \leq x_n \leq 1$ allora $0 \leq x_n(1 - {x_n}^2) \leq 1$. Quindi per induzione $0 \leq x_n \leq 1$ per ogni n.

Ci chiediamo se la successione è crescente. Consideriamo la differenza dei due termini consecutivi della successione:

$$x_{n+1} - x_n = x_n - {x_n}^3 - x_n = -{x_n}^3$$

Tale differenza è quindi minore di zero. In altri termini, $x_{n+1} \leq x_n$ per ogni n e quindi la successione è non crescente.

Essendo la successione monotona e limitata, sappiamo che esiste $\lim x_n = L$. Procediamo in modo analogo all'esempio 10.1:

$$\begin{gathered}L = \lim x_n = \lim x_{n+1} = \lim(x_n - {x_n}^3) = L - L^3 \\ L = L - L^3 \\ L^3 = 0\end{gathered}$$

Abbiamo che $L = 0$, quindi $\lim x_n = 0$.

Esempio 10.4. Consideriamo la successione

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$$

Vogliamo studiarne il limite. Osserviamo innanzitutto che la successione è a termini positivi. Avendo la presenza del fattoriale, può essere una buona idea applicare il criterio del rapporto.

$$\begin{aligned}
\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim \frac{(n+1)^{n+1}}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n} \\
&= \lim \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \\
&= \lim \frac{(n+1)^n \cdot (n+1)}{n^n} \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \\
&= \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)}
\end{aligned}$$

Il primo termine tende a e, mentre il secondo tende a 0 (è asintotico a $\frac{n}{4n^2}$). Quindi $\lim e \cdot 0 = 0$ e quindi il limite della successione vale 0 per il criterio del rapporto.

10.2 Esempi di serie

Esempio 10.5. Determinare il carattere della serie

$$\sum a_n = \sum \frac{\left(1-\cos\frac{3}{n}\right) \cdot \left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n}{2^{n+\log n}}$$

Osserviamo che la serie è a termini positivi, possiamo quindi usare il criterio del confronto asintotico. Prima verifichiamo però che la serie soddisfi la condizione necessaria di Cauchy, ovvero che il suo limite sia zero. Se così non fosse, potremmo subito dire che la serie non converge.

$$\lim a_n = \lim \frac{\left(1-\cos\frac{3}{n}\right) \cdot \left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n}{2^{n+\log n}}$$

Consideriamo ciascun termine:

- Usando il fatto che $1-\cos\varepsilon_n \sim \frac{1}{2}{\varepsilon_n}^2$, possiamo dire che $(1-\cos\frac{3}{n}) \sim \frac{1}{2}(\frac{3}{n})^2$.
- Per il secondo termine ci riconduciamo a e:

$$\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n = \left[\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{\sqrt{n}}{2}}\right]^{2\sqrt{n}} \sim e^{2\sqrt{n}}$$

- Per il terzo termine invece procediamo con qualche passaggio:

$$2^{n+\log n} = e^{\log(2^{n+\log n})} = e^{(n+\log n)(\log 2)} = \left(e^{n+\log n}\right)^{\log 2} = \left(e^n \cdot e^{\log n}\right)^{\log 2} = (n \cdot e^n)^{\log 2}$$

Riprendiamo il limite iniziale e sostituiamo con le stime asintotiche:

$$a_n \sim \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{n}\right)^2 \cdot e^{2\sqrt{n}}}{(n \cdot e^n)^{\log 2}} = \frac{\frac{9}{2n^2} \cdot e^{2\sqrt{n}}}{n^{\log 2} \cdot e^{n \log 2}} = \frac{9}{2} n^{-2-\log 2} \cdot e^{2\sqrt{n}-n\log 2}$$

Poiché $\sqrt{n} \ll n \log 2$ sappiamo che $2\sqrt{n} - n\log 2 = -\infty$; quindi $\lim e^{2\sqrt{n}-n\log 2} = 0$. Il primo termine tende evidentemente a zero e qundi resta $0 \cdot 0 = 0$.

Quindi $\lim a_n = 0$ e quindi la serie soddisfa la condizione necessaria di Cauchy.

Usiamo il criterio del confronto asintotico. Sappiamo già che $\sum \frac{1}{n^{2+\log 2}}$ converge perché è la serie armonica generalizzata. Consideriamo

$$b_n = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{n^{2+\log 2}} \cdot e^{2\sqrt{n}-n\log 2}$$

Osserivamo che $e^{2\sqrt{n}-n\log 2}$ è definitivamente minore di 1 perché il suo limite è 0. Quindi segue che

$$b_n < \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{n^{2+\log 2}}$$

Quindi b_n converge per confronto con la serie armonica generalizzata. Poiché a_n è asintoticamente equivalente a b_n e quest'ultima converge, allora anche a_n converge.

Esempio 10.6. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{\sqrt[n]{n}} \qquad \text{con } x > 0$$

La serie è a termini positivi e quindi possiamo ridurci a studiarne una asintoticamente equivalente. Poiché $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, $a_n \sim 2^n \cdot x^n = (2x)^n$.

Quindi $\sum a_n$ è asintoticamente equivalente a $\sum (2x)^n$ che è la serie geometrica di ragione $2x$. Essa converge se e solo se $|2x| < 1$, quindi per $2x < 1$ (avevamo supposto x positivo) e quindi per $x < \frac{1}{2}$.

Quindi la serie proposta converge per $0 < x < \frac{1}{2}$ e diverge per $x \geq \frac{1}{2}$.

10.3 Esempi di serie a segni alterni

Esempio 10.7. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 1 + (-1)^n \cdot n^2}{n^3}$$

È evidente che la serie non è a termini positivi. Scomponiamo la serie in due parti: la prima è $\frac{n+1}{n^3}$, mentre la seconda è $(-1)^n \cdot \frac{1}{n}$.

La serie $\frac{n+1}{n^3}$ è asintoticamente equivalente a $\sum \frac{1}{n^2}$ che converge perché è la serie armonica con $\alpha > 1$.

La serie $\sum (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ è a segni alterni. Non converge assolutamente, ma possiamo applicare il criterio di Leibniz. Infatti verificare le ipotesi è banale: $\frac{1}{n} \geq 0$, $\lim \frac{1}{n} = 0$ e $\{\frac{1}{n}\}$ è non crescente. Quindi la serie $\sum (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ converge.

In conclusione sappiamo che $\sum a_n$ è somma di due serie convergenti e quindi converge anch'essa.

Esempio 10.8. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n}$$

Il termine $\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n}$ è infinitesimo, non negativo ma non è crescente e quindi non posso applicare il criterio di Leibniz.

Possiamo però scrivere la serie come somma di due serie, come nell'esempio precedente.

$$x_n = \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{n} + \frac{1}{n} = (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

Adesso il primo termine, $\sum(-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ soddisfa le ipotesi del criterio di Leibniz (è positivo, ha limite zero ed è decrescente) e quindi converge. Tuttavia, il secondo termine ($\sum \frac{1}{n}$) diverge perché è la serie armonica.

Quindi la serie di partenza è somma di una serie convergente e di una divergente. Quindi la serie somma diverge.

Undicesima lezione (10/11/2015)

11.1 Esempi di serie (cont.)

Esempio 11.1. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\sqrt{n}}{n \cdot \sqrt{n}}$$

Osserviamo che la serie non è a termini positivi e non è nemmeno a segni alterni. Ci chiediamo quindi se è assolutamente convergente, studiando la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin\sqrt{n}|}{n \cdot \sqrt{n}}$$

Sappiamo che $|\sin(\sqrt{n})| \leq 1$ e quindi possiamo scrivere

$$\frac{|\sin\sqrt{n}|}{n \cdot \sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Sappiamo già che la serie $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge perché è una serie armonica generalizzata con $\alpha > 1$. Per confronto quindi converge anche $\sum \frac{|\sin\sqrt{n}}{n \cdot \sqrt{n}}$ perché è maggiorata da una serie convergente.

Abbiamo quindi visto che $\sum \frac{\sin\sqrt{n}}{n \cdot \sqrt{n}}$ è assolutamente convergente, quindi converge.

Esempio 11.2. Determinare il carattere della serie (posto $x > 0$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^n}}{n^n}$$

Osserviamo che la serie è a termini positivi (ricordiamo che abbiamo posto $x > 0$), quindi possaimo applicare il criterio della radice.

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{(x^{n^n})^{\frac{1}{n}}}{n} = \lim \frac{x^{(n^n) \cdot \frac{1}{n}}}{n} = \lim \frac{x^{n^{n-1}}}{n}$$

- se $x < 1$ abbiamo $\frac{0}{\infty} = 0$.
- se $x = 1$ il limite può essere riscritto come $\lim \frac{1}{n} = 0$.

- se $x > 1$ abbiamo una forma di indeterminazione del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Consideriamo il logaritmo del rapporto:

$$\begin{aligned}\log \frac{x^{n^{n-1}}}{n} &= \log x^{n^{n-1}} - \log n \\ &= n^{n-1} \log x - \log n\end{aligned}$$

  Per la gerarchia degli infiniti sappiamo che $\log n \ll n$ e d'altro canto $n \leq n^{n-1}$; quindi $\log n \ll n^{n-1}$. Essendo $\log x > 0$ (siamo nel caso $x > 1$), ora possiamo dire che

$$\lim_{n\to+\infty} (n^{n-1} \log x - \log n) = +\infty$$

  A questo punto possiamo anche dire che il limite del rapporto vale anch'esso $+\infty$. Infatti se $\lim \log(x_n) = +\infty$, allora per ogni M abbiamo che $\log x_n \geq M$ definitivamente e quindi $x_n \geq e^M$ definitivamente. Quindi $\lim x_n = +\infty$.

In conclusione, se $x \leq 1$ il limite della radice vale 0 e quindi $\sum a_n$ converge per il criterio della radice. Analogamente, se invece $x > 1$ il limite della radice vale $+\infty$ e quindi $\sum a_n$ diverge.

11.2 Funzioni di una variabile reale

Definiamo una *funzione di una variabile reale* attraverso la scrittura

$$f : A \to \mathbb{R}$$

con il dominio $A \subseteq \mathbb{R}$. Tale dominio A si indica anche con $D(f)$.

Esempio 11.3. La funzione $\sin x$ ha come dominio $D(f) = \mathbb{R}$

Esempio 11.4. La funzione $\sin \frac{1}{x}$ ha come dominio $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Definiamo *immagine* l'insieme dei valori assunti dalla funzione:

$$F(A) = \{\, y \in \mathbb{R} \mid \exists x : f(x) = y \,\}$$

Se B contiene l'immagine di $f(A)$ si scrive $f : A \to B$ ovvero $f(x) \in B$.

Introduciamo la notazione per indicare la *restrizione* di una funzione. Se $C \subseteq A$ indichiamo la restrizione con

$$f_{|C} : C \to \mathbb{R}$$

che è la funzione che associa ogni elemento x all'elemento $f(x)$, quindi $f_{|C}(x) = f(x)$.

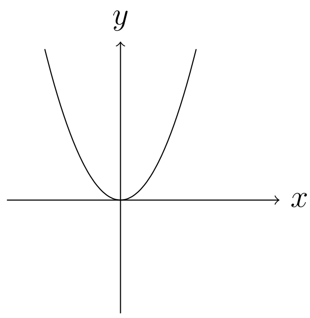
Definizione 11.5. Comunque presi x e y con $x < y$, diciamo di una funzione che:

- è *crescente* se vale $f(x) < f(y)$
- è *decrescente* se vale $f(x) > f(y)$

- è *non decrescente* se vale $f(x) \leq f(y)$
- è *non crescente* se vale $f(x) \geq f(y)$

Definizione 11.6. Una funzione si dice *monotona* se soddisfa una qualsiasi delle definizioni precedenti.

Esempio 11.7. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^2$ il cui grafico è



Osserviamo chiaramente che sull'intero dominio la funzione non è monotona. Tuttavia, possiamo restringere il dominio della funzione solo nel semipiano positivo. In tal caso $f_{|(0,+\infty)}$ è crescente.

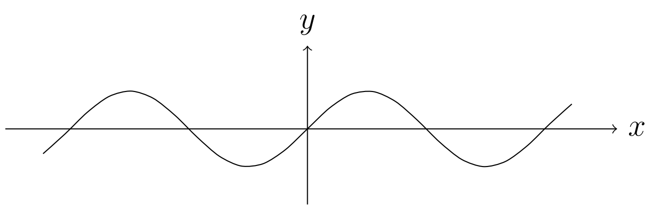
Definizione 11.8. Una funzione è *superiormente limitata* se l'immagine è un insieme superiormente limitato.

In altre parole stiamo dicendo che esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $\forall y \in F(A)$ vale $M \geq y$. Quindi $\forall x \in A$ vale $M \geq f(x)$.

Definizione 11.9. Una funzione è *inferiormente limitata* se l'immagine è un insieme inferiormente limitato.

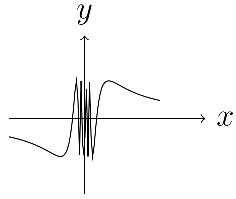
Definizione 11.10. Una funzione è *limitata* se lo è superiormente e inferiormente, cioè se $f(A)$ è un insieme limitato.

Esempio 11.11. Consideriamo la funzione $f(x) = \sin x$, il cui grafico è qui riportato.



Si vede chiaramente che la funzione $\sin x$ è limitata.

Esempio 11.12. Consideriamo la funzione $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, il cui grafico è qui riportato.



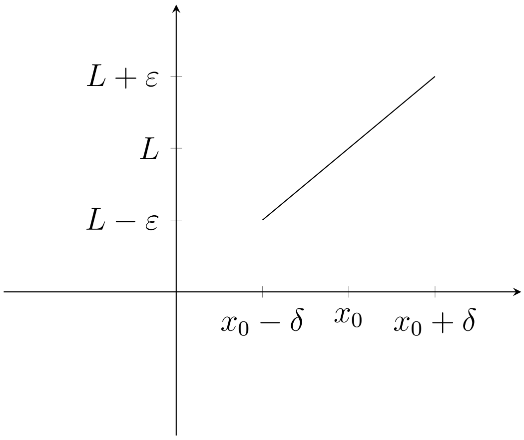
Si vede chiaramente che anche la funzione $\sin \frac{1}{x}$ è limitata.

11.3 Limite di funzione

Definizione 11.13. Sia data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ dove A è un intervallo aperto. Si dice che f ha limite L per x che tende a x_0 se, per ogni intorno U di L, esiste un δ tale che per ogni x per cui $x \neq x_0, |x - x_0| < \delta$ vale $f(x) \in U$.

Si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$



Ovviamente $f(x)$ ha senso solo se x appartiene al dominio, ovvero $x \in A$. Se δ è sufficientemente piccolo, allora $B_\delta(x_0) \subseteq A$.

Definiamo "intorno bucato" di x_0 lo stesso intorno di prima senza considerare però x_0. Formalmente:

$$B'_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$$

Possiamo ora procedere a una definizione leggermente più comoda di limite di una funzione.

Definizione 11.14. Sia data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ dove A è un intervallo aperto. Si dice che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

se per ogni intorno $B_\varepsilon(L)$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$x \in B'_\delta(x_0) \implies f(x) \in B_\varepsilon(L)$$

Osservazione 11.15. Il valore $f(x_0)$, essendo escluso dall'intorno, non ha alcun ruolo.

Esempio 11.16. Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$, il cui grafico è già stato mostrato nell'esempio 11.7. Intuitivamente possiamo dire che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = {x_0}^2$$

Proviamo a darne una dimostrazione rigorosa. Dobbiamo far vedere che, dato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$x \in B'_\delta(x_0) \implies f(x) \in B_\varepsilon(L)$$

Se scegliamo $\delta < 1$ la precedente equivale a

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |x^2 - {x_0}^2| < \varepsilon$$

Sviluppiamo il prodotto notevole e traiamo vantaggio del fatto che $\delta < 1$:

$$|x^2 - {x_0}^2| = |(x - x_0)(x + x_0)| < \delta \cdot |x + x_0|$$

Usando il fatto che $|x + x_0| \leq |x| + |x_0|$ (disuguaglianza triangolare), ho che

$$\delta \cdot |x + x_0| \leq \delta \cdot (|x| + |x_0|)$$

L'osservazione è che la distanza tra x e x_0 è piccola, in particolare $|x| \geq |x_0| - \delta$. Giustifichiamo quest'ultima con qualche passaggio:

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

Quindi dev'essere

$$\begin{aligned} x_0 > x - \delta &\implies -x_0 < -x + \delta \leq |x| + \delta \\ x_0 < x + \delta &\implies |x| + \delta \end{aligned}$$

Combinando il fatto che $x_0 < |x| + \delta$ e $-x_0 < |x| + \delta$ possiamo dire che $|x_0| < |x| + \delta$.

Siamo arrivati a far vedere che $|x| \leq |x_0| + \delta$, quindi ora

$$\begin{aligned} |x^2 - {x_0}^2| &\leq \delta \cdot (|x_0| + |x_0| + \delta) \\ &\leq \delta \cdot (2 \cdot |x_0| + \delta) < \delta \cdot (2 \cdot |x_0| + 1) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Per far valere la disuguaglianza scegliamo opportunamente

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2 \cdot |x_0| + 1}$$

Riassumento, abbiamo fatto vedere che per il $\lim_{x \to x_0} x^2 = {x_0}^2$, dato ε trovo $\delta = \frac{\varepsilon}{2 \cdot |x_0| + 1}$. Questo δ verifica la definizione di limite: $x \in B'_\delta(x_0) \implies x^2 \in B_\varepsilon(x_0)^2$.

Esempio 11.17. Verifichiamo a partire dalla definizione il limite

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0$$

Preso $\varepsilon > 0$ cerchiamo $\delta > 0$ tale che

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies \underbrace{|x - x_0|}_{|f(x) - L|} < \varepsilon$$

Questo è un caso banale, perché basta porre $\delta = \varepsilon$ per far valere l'implicazione.

Esempio 11.18. Verifichiamo a partire dalla definizione il limite

$$\lim_{x \to x_0} x \cdot \sin \frac{1}{x}$$

La funzione presentata non esiste in 0. Tuttavia, poiché abbiamo detto che il valore della funzione in x_0 non gioca alcun ruolo, possiamo ridefinire la funzione in questo modo

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Applichiamo la definzione. Preso $\varepsilon > 0$ cerchiamo $\delta > 0$ tale che

$$0 < |x| < \delta \implies \left| x \cdot \sin \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$$

Sappiamo che la funzione seno è limitata, in particolare vale $|\sin \frac{1}{x}| < 1$ e quindi $|x \cdot \sin \frac{1}{x}| \leq |x|$.

Ponendo $\delta = \varepsilon$ la condizione è verificata, perché $0 < |x| < \delta$, quindi $|x \cdot \sin \frac{1}{x}| \leq |x| < \delta = \varepsilon$.

Abbiamo usato una sorta di criterio del confronto, analogo a quello per le successioni. Ovvero se $x = \frac{1}{n}$ allora $\lim \frac{1}{n} \sin n = 0$ perché $0 \leq \frac{1}{n} \cdot \sin n \leq \frac{1}{n}$.

Esempio 11.19. Mostriamo ora un esempio con un limite che non esiste. Consideriamo

$$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$$

Il limite è L se $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$x \in B'_\delta(0) \implies f(x) \in B_\varepsilon(L)$$

Cioè

$$0 < |x| < \delta \implies \left| \sin \frac{1}{x} - L \right| < \varepsilon$$

Qualunque sia δ, $B'_\delta(0)$ contiene punti x con $\sin \frac{1}{x} = 1$ e punti con $\sin \frac{1}{x} = -1$ perché la funzione seno oscilla. Questi punti saranno rispettivamente

$$\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

Risolviamo la prima

$$x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

Ma sappiamo che $\lim_{n \to +\infty} \frac{\pi}{2} + 2n\pi = +\infty$. Quindi, definitivamente,

$$x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} < \delta$$

Quindi definitivamente $\sin \frac{1}{x} = 1$.

In conclusione, se L fosse il limite allora

$$x \in B'_\delta(x_0) \implies f(x) \in B_\varepsilon(L)$$

Dovrebbe essere che $1 \in B_\varepsilon(L)$ ma anche $-1 \in B_\varepsilon(L)$. Per ε sufficientemente piccolo non possono valere entrambi, quindi il limite non esiste.

11.4 Teorema di unicità del limite

Teorema 11.20 (Teorema di unicità del limite). *Se il limite di una funzione esiste, allora è unico.*

Dimostrazione. Sia

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = M$$

Supponiamo per assurdo che $L \neq M$. Scegliamo ε in modo che 2ε sia inferiore alla distanza tra L e M, quindi $\varepsilon < \frac{|L-M|}{2}$.

Per definizione di limite sappiamo che:

- $\exists\delta_1$ tale che $x \in B'_{\delta_1}(x_0) \implies f(x) \in B_\varepsilon(L)$
- $\exists\delta_2$ tale che $x \in B'_{\delta_2}(x_0) \implies f(x) \in B_\varepsilon(M)$

Facciamo l'intersezione tra i due intorni: $B'_{\delta_1}(x_0) \cap B'_{\delta_2}(x_0) = B'_\delta(x_0)$ dove $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Tale intorno è sicuramente non vuoto. Se ora scegliamo un valore appartenente a questo nuovo intorno, devono valere entrambe le condizioni precedenti. Ovvero:

$$x \in B'_\delta(x_0) \implies f(x) \in B_\varepsilon(M) \quad \text{e} \quad f(x) \in B_\varepsilon(L)$$

Quindi:

$$|L - M| < |f(x) - L| + |f(x) - M| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Per come avevamo scelto ε all'inizio, dovrebbe essere che

$$|L - M| < 2\varepsilon < |L - M|$$

Il che è assurdo, perché $|L - M|$ non può essere minore di se stesso. □

Dodicesima lezione (13/11/2015)

12.1 Limite di successioni e limite di funzione

Nella lezione precedente abbiamo introdotto il concetto di limite di funzione. Vediamo ora un teorema a riguardo del nesso che esiste tra il concetto di limite di successione e quello di limite di funzione.

Teorema 12.1 (Teorema di collegamento). *Sia A un intervallo reale aperto, $x_0 \in A$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Allora*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff (*)$$

$(*)$ *esprime la seguente condizione: per ogni successione $\{x_n\}$ in $A \backslash \{x_0\}$ (ovvero $x_n \in A$ e $x_n \neq x_0$ $\forall n$) convergente a x_0 vale che*

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = L$$

Poiché il teorema indica "se e solo se", per dimostrarlo dobbiamo far vedere che vale l'implicazione in entrambi i sensi.

Dimostrazione. Dimostriamo la prima parte, ovvero che il limite L implica $(*)$. Sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

Per definizione di limite, per ogni intorno $U = B_\varepsilon(L)$ di L, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in B'_\delta(x_0)$ vale $f(x) \in U$.

Sia $\{x_n\}$ una successione tale che $x_n \in A \backslash \{x_0\}$, allora $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$. Devo dimostrare allora che $\lim_{n \to +\infty} f(x) = L$.

Per $\varepsilon > 0$ dev'essere $f(x_n) \in B_\varepsilon(L)$ definitivamente, che discende da $x_n \in B'_\delta(x_0)$ definitivamente. $\square$

Dimostrazione. Dimostriamo ora il viceversa: supponiamo che valga $(*)$ e dimostriamo che allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

Per assurdo, supponiamo che L non sia il limite. Stiamo quindi dicendo che $\forall U$ intorno di L esiste $\delta > 0$ tale che se $x \in B'_\delta(x_0) \implies f(x) \in U$.

Quindi esiste U intorno di L tale che per ogni $\delta > 0$ esiste $x_\delta \in B'_\delta(x_0)$ e tuttavia $f(x_\delta) \notin U$ (osserviamo che x dipende da δ).

Scegliamo $\delta = \frac{1}{n}$ e troviamo la successione $\{x_n\}$ tale che $x_n \in B'_{\frac{1}{n}}(x_0) \implies f(x_n) \notin U$. Ovvero $0 < |x_0 - x_n| < \frac{1}{n}$.

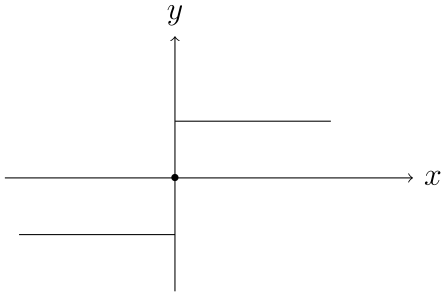
Per confronto di successioni, $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$ con $x_n \neq x_0$ vale $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = L$ (per $(*)$).

Quindi $f(x_n) \in U$ definitivamente, che è assurdo. $\square$

12.2 Limite destro e sinistro

Esempio 12.2. Consideriamo la funzione così definita e tracciamo il suo grafico:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



Osserviamo che $f(x)$ non ha limite per x che tende a 0. Infatti, in ogni intorno di 0, $f(x)$ assume sia il valore 1 che il valore -1.

Definizione 12.3. Sia $f : (x_0, b) \to \mathbb{R}$. Si dice che L è il *limite destro* di $f(x)$ in x_0 e si scrive

$$L = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$x_0 < x < x_0 + \delta \implies f(x) \in B_\varepsilon(L)$$

Definizione 12.4. Sia $f : (a, x_0) \to \mathbb{R}$. Si dice che L è il *limite sinistro* di $f(x)$ in x_0 e si scrive

$$L = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$x_0 - \delta < x < x_0 \implies f(x) \in B_\varepsilon(L)$$

Osservazione 12.5. Se esiste il limite L in x_0, L è anche il limite destro e il limite sinistro.

Osservazione 12.6. Se il limite destro e sinistro esistono entrambi e coincidono, allora esiste il limite.

Infatti:

- dato il limite destro $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$, fissato $\varepsilon > 0$ esiste δ_1 tale che $x_0 < x < x_0 + \delta_1 \implies f(x) \in B_\varepsilon(L)$.
- dato il limite sinistro $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$, fissato $\varepsilon > 0$ esiste δ_2 tale che $x_0 - \delta_2 < x < x_0 \implies f(x) \in B_\varepsilon(L)$.

Ciò che a noi serve è $\delta > 0$ tale che $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ e $x \neq x_0 \implies f(x) \in B_\varepsilon(L)$.

Se prendiamo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, allora entrambe le implicazioni sono soddisfatte e quindi vale la definizione di limite.

12.3 Teorema di permanenza del segno

Teorema 12.7 (Teorema di permanenza del segno). *Se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L > 0$$

allora $\exists \delta > 0$ *tale che* $f(x) > 0$ *per ogni* $x \in B'_\delta(x_0)$.

Dimostrazione. Scegliamo $\varepsilon = L$. Per definizione di limite $\exists \delta > 0$ tale che $x \in B'_\varepsilon(x_0) \implies f(x) \in B_\varepsilon(L)$. Possiamo quindi dire che:

$$\begin{gathered} |f(x) - L| < \varepsilon \\ |f(x) - L| < L \\ L - f(x) < L \\ f(x) > 0 \end{gathered}$$

$\square$

12.4 Algebra dei limiti

Teorema 12.8 (Algebra dei limiti). *Siano* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *dove*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad e \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = M$$

Allora:

1. $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = L + M$
2. $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
3. *se* $f(x) = k$ *costante allora* $\lim_{x \to x_0} f(x) = k$
4. *se* $\alpha \in \mathbb{R}$ *allora* $\lim_{x \to x_0} \alpha f(x) = \alpha L$
5. *se* $y(x) \neq 0$ *per* $x \in A$ *e* $M \neq 0$ *allora* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$
6. *se* $f(x) \leq g(x)$ $\forall x$ *allora* $L \leq M$
7. $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |L|$

Le dimostrazioni di queste implicazioni sono del tutto analoghe a quelle già enunciate per le successioni (teorema 4.13), grazie al teorema del collegamento (teorema 12.1). Dimostriamo comunque la prima implicazione a scopo didattico.

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}$ una successione in $A\backslash\{x_0\}$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} = x_0$$

Allora per il teorema del collegamento:

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} g(x_n) = M$$

Consideriamo

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) + g(x_n) = L + M$$

Quindi $\forall\{x_n\}$ in $A\backslash\{x_0\}$ che converge a x_0 si ha

$$\lim_{n\to+\infty}(f(x_n) + g(x_n)) = L + M$$

Per il teorema del collegamento allora anche

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = L + M$$

□

Esempio 12.9. Calcoliamo a titolo di esempio un limite grazie all'algebra dei limiti.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x}{1+x}$$

Possiamo applicare la quinta implicazione perché $1 + x \neq 0$ in un intorno di 2 (ad esempio $(-1,\infty) = A$). Inoltre:

$$\lim_{x\to 2}(1+x) = \lim_{x\to 2} 1 + \lim_{x\to 2} x = 1 + 2 = 3$$

$$\lim_{x\to 2}(x^2+2x) = \lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} 2x = \lim_{x\to 2} x \cdot \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 2 \cdot \lim_{x\to 2} x = 2\cdot 2 + 2 \cdot 2 = 8$$

In conclusione

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x}{1+x} = \frac{8}{3}$$

Tredicesima lezione (24/11/2015)

13.1 Limite di funzione (cont.)

Analogamente a quanto fatto per le successioni, vediamo ora il teorema del confronto applicato alle funzioni.

Teorema 13.1 (Teorema del confronto). *Siano f, g, h funzioni definite da $A \to \mathbb{R}$. Se:*

- $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *per ogni* $x \in A \setminus \{x_0\}$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$

Allora

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

Dimostrazione. Per definizione di limite, $\forall \varepsilon > 0$ esiste un intorno $B'_{\delta_1}(x_0)$ tale che $\forall x \in B'_{\delta_1}(x_0)$ vale $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. Stiamo quindi dicendo che se $0 < |x - x_0| < \delta_1$ allora $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Per lo stesso ragionamento esiste δ_2 tale che se $x \in B'_{\delta_2}(x_0)$ allora $L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$. Scegliamo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$: se ora x appartiene all'intorno $B'_\delta(x_0)$ allora vale

$$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$$
$$L - \varepsilon \leq g(x) \leq L + \varepsilon$$

Abbiamo quindi fatto vedere che $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$. □

Esempio 13.2. Vogliamo calcolare

$$\lim_{x \to 0} \left| x \cdot \sin \frac{1}{x} \right|$$

È semplice osservare che $0 \leq |x \cdot \sin \frac{1}{x}| \leq |x|$. Poiché il limite per $x \to 0$ della prima e della terza funzione è evidentemente zero, allora anche il limite cercato vale zero per il teorema del confronto.

Proposizione 13.3. *Sia A un intervallo aperto e la funzione $f : A \to \mathbb{R}$ non decrescente (e limitata inferiormente). Dato $x_0 \in A$:*

- $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \inf \{ f(x) \mid x \in A, x > x_0 \}$
- $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \inf \{ f(x) \mid x \in A, x < x_0 \}$

Dimostriamo il primo punto, poiché il secondo è analogo.

Dimostrazione. L'insieme $\{ f(x) \mid x \in A, x > x_0 \}$ è inferiormente limitato e quindi ha un $\inf \{ f(x) \mid x \in A, x > x_0 \} = L$.

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $y > x_0$ con $f(x) < L+\varepsilon$. Essendo f non decrescente, se $x \leq y$ allora $f(x) \leq f(y) < L + \varepsilon$.

Osserviamo anche che $L \leq f(x)$ perché L è un minorante. Quindi $\forall \varepsilon$ esiste y tale che

$$x_0 < x < y \implies L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

ovvero $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$. □

Questa proposizione vale comunque per $f(x_0, b) \to \mathbb{R}$ limitata inferiormente e non decrescente, vale infatti lo stesso ragionamento.

Definizione 13.4. Sia data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ definita sull'intervallo aperto A e $x_0 \in A$. Si dice che $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\forall x \in B'_\delta(x_0)$ vale $f(x) > M$.

Si dice che $(M, +\infty)$ è un intorno di $+\infty$. La definizione quindi dice che $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ se per ogni intorno U di $+\infty$ esiste $\delta > 0$ tale che $x_0 \in B'_\delta(x_0) \implies f(x) \in U$.

Analoga definizione vale per gli intorni di $-\infty$, che sono del tipo $(-\infty, M)$.

Esempio 13.5. Mostriamo, come è facilmente deducibile dal grafico della funzione logaritmo, che

$$\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$$

Per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $0 < x < \delta$ allora $\log x < -M$. Ciò significa che $x < e^{-M}$: possiamo porre $\delta = e^{-M}$ per far sì che la condizione sia verificata.

Definizione 13.6. Dato un intervallo $A = (a, +\infty)$ e una funzione $f : A \to R$ diciamo che

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$$

se per ogni intorno U di L esiste M tale che per $x > M \implies f(x) \in U$.

Teorema 13.7. *Sia data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ definita sull'intervallo $A = (a, +\infty)$.*

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ *se e solo se per ogni successione $\{x_n\}$ in A divergente a $+\infty$, vale* $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L$.
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *se e solo se per ogni successione $\{x_n\}$ in A divergente a $+\infty$, vale* $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$.
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *se e solo se per ogni successione $\{x_n\}$ in $A\backslash\{x_0\}$ convergente a x_0, vale* $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$.

Esempio 13.8. Riprendendo l'esempio precedente sul calcolo di $\lim \log x$: consideriamo una successione infinitesima positiva $\{\varepsilon_n\}$. Avevamo già visto che $\lim \log(\varepsilon_n) = -\infty$. Grazie al teorema sappiamo che questo vale anche per la funzione.

13.2 Funzioni continue

Definizione 13.9. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è *continua in* $x_0 \in A$ se per ogni intorno V di $f(x_0)$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in B_\delta(x_0)$ vale $f(x) \in V$.

Osserviamo che la definizione è simile a quella di limite, con la differenza che ora stiamo considerando l'intorno $B_\delta(x_0)$ che include il punto x_0.

Definizione 13.10. Una funzione è *continua* se è continua in ogni $x \in A$ (dove A è il dominio della funzione).

Proposizione 13.11. *Dato un intervallo aperto A, $f : A \to \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in A$ se e solo se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Dimostrazione. Sia f una funzione continua in x_0; allora per ogni intorno V di $f(x_0)$ $\exists\delta$ tale che $x \in B'_\delta(x_0) \implies f(x) \in V$. L'affermazione è vera perché abbiamo solo tolto il punto x_0 dall'intorno. Quindi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

□

Dimostriamo il viceversa.

Dimostrazione. Sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Per definizione di limite per ogni intorno V di $f(x_0)$ $\exists\delta$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) \in V$. Se $x = x_0$ allora $f(x_0) \in V$, quindi $|x - x_0| < \delta \implies f(x) \in V$. □

Esempio 13.12. La funzione $f(x) = x$ è continua, perché $\lim_{x \to x_0} x = x_0$.

Esempio 13.13. La funzione $f(x) = \sin x$ è continua. Per dimostrarlo, occorre ragionare con le formule di prostaferesi. Ricordiamo che:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\
&= 2\cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

Ci serve far vedere che

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$$

cioè che

$$\lim_{h \to 0} \sin(x_0 + h) = \sin(x_0)$$

Se poniamo $\alpha = x_0 + \frac{h}{2}$ e $\beta = \frac{h}{2}$ allora

$$\sin(x_0 + h) - \sin x_0 = 2\cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{h}{2}\right)$$

Quindi, usando il fatto che $0 \le |\cos x| \le 1$:

$$|\sin(x_0 + h) - \sin x_0| \le 2\left|\sin\frac{h}{2}\right| \le 2\left|\frac{h}{2}\right| = |h|$$

Quindi, essendo $\lim_{x\to 0} |h| = 0$, usando il teorema del confronto si ha che

$$\lim |\sin(x_0 + h) - \sin x_0| = 0$$

Se il limite è zero in valore assoluto, allora lo è anche senza. Quindi abbiamo fatto vedere che $\sin x$ è continua.

Esempio 13.14. La funzione $f(x) = e^x$ è continua. Infatti $e^x = e^{x_0} \cdot e^{x-x_0}$, quindi

$$\lim_{x\to x_0} e^x = e^{x_0} \iff \lim_{x\to x_0} e^{x_0} \cdot (e^{x-x_0}) = e^{x_0} \iff \lim_{x\to x_0} e^{x-x_0} = 1$$

Ci dobbiamo chiedere quindi se $\lim_{x\to 0} e^x = 1$. Studiamo separatamente il limite destro e il limite sinistro.

Affinché $\lim_{x\to 0^+} e^x = 1$ basta $\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$ perché dato ε esiste n tale che

$$e^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon \implies \forall x < \frac{1}{n} \quad e^x < 1 + \varepsilon$$

Quindi $e^{\frac{1}{n}} < 1+\varepsilon \iff e < (1+\varepsilon)^n$, che è vero definitivamente. Quindi $\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$ e quindi $\lim_{x\to 0^+} e^x = 1$.

Per il limite da sinistra dobbiamo verificare invece che

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{n}} = 1$$

Cioè $\forall\varepsilon > 0$ vale definitivamente che

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{n}} &> 1 - \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} &> (1-\varepsilon)^n \\ e &< \frac{1}{(1-\varepsilon)^n} \end{aligned}$$

Quindi il limite $\lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{n}} = 1$: $\forall\varepsilon\ \exists N$ tale che $e^{-\frac{1}{n}} > 1 - \varepsilon$. Se $-\frac{1}{n} < x < 0$ allora

$$1 - \varepsilon < e^{-\frac{1}{n}} < e^x < 1$$

Quindi anche $\lim_{x\to 0^-} e^x = 1$.

Proposizione 13.15. *Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ funzioni continue. Allora:*

- *$f + g$ e $f \cdot g$ sono funzioni continue*
- *se $g \neq 0$ in ogni punto di A, la funzione $\frac{f}{g}$ è continua*

Dimostrazione. La dimostrazione è banale e si fa usando l'algebra dei limiti. Dimostriamo a titolo di esempio la continuità della somma di funzioni continue. Dato $x_0 \in A$ deve valere affinché ci sia la continuità:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = f(x_0) + g(x_0)$$

Questo è ovvio, perché

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0)$$

□

Osservazione 13.16. Grazie a quanto abbiamo affermato e dimostrato, possiamo dire che tutti i polinomi sono funzioni continue. Infatti, essi sono ottenuti dal prodotto e dalla somma di funzioni continue (ad esempio $x^2 = x \cdot x$ e così via).

Inoltre ora siamo anche in grado di calcolare direttamente alcuni limiti.

Esempio 13.17.

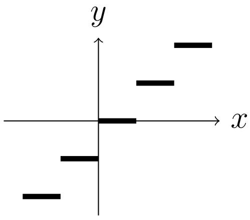
$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x}{x - 3} = \frac{2^2 + 3 \cdot 2}{2 - 3} = -10$$

13.3 Punti di discontinuità

Sia data una funzione $f : A \to R$ (dove A è sempre un intervallo aperto) e un punto $x_0 \in A$.

- Si dice che la funzione ha una *discontinuità di prima specie* in x_0 se i limiti destro e sinistro esistono (finiti) e sono diversi.
- Si dice che la funzione ha una *discontinuità di seconda specie* in x_0 se almeno uno tra il limite destro e sinistro è infinito oppure non esiste.
- Si dice che la funzione ha una *discontinuità eliminabile* in x_0 se il limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste (finito) ma è diverso dal valore $f(x_0)$.

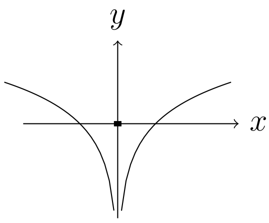
Esempio 13.18. Consideriamo la funzione "parte intera di x": $f(x) = [x]$, il cui grafico è il seguente.



La funzione è continua in ogni $x \notin \mathbb{Z}$; nei punti $x \in \mathbb{Z}$ la funzione ha una discontinuità di prima specie.

Esempio 13.19. Consideriamo una funzione così definita:

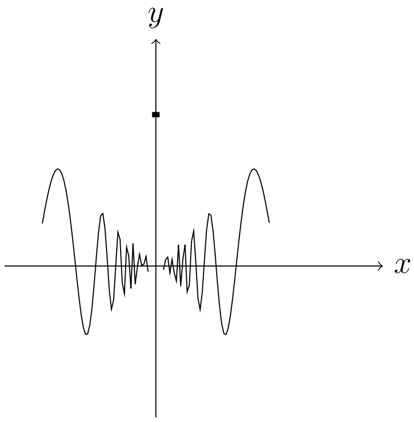
$$f(x) = \begin{cases} \log |x| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



In 0 la funzione presenta una punto di discontinuità di seconda specie.

Esempio 13.20. Consideriamo una funzione così definita:

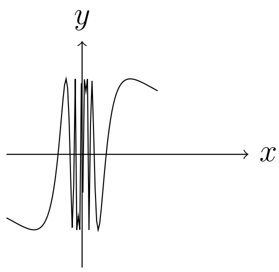
$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



In 0 $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, quindi la funzione presenta una punto di discontinuità eliminabile (in questo caso semplicemente definendo la funzione come $f(0) = 0$).

Esempio 13.21. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$



In 0 la funzione presenta una discontinuità di seconda specie perché lì $\nexists \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$.

In generale, una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice continua in x_0 se per ogni intorno U di $f(x_0)$ $\exists \delta > 0$ tale che

$$x \in B_\delta(x_0) \cap A \implies f(x) \in V$$

Se consideriamo $A = [a, b]$, la funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è continua in a se e solo se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

13.4 Funzioni continue e successioni

Enunciamo ora formalmente un teorema che abbiamo già usato diverse volte nella risoluzione delle successioni.

Teorema 13.22. *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua e* $\{x_n\}$ *una successione in* $[a, b]$ *che converge a* L. *Allora*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(L)$$

Esempio 13.23.

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{n}{n+1}} = e$$

perché $\lim \frac{n}{n+1} = 1$ e $f(x) = e^x$ è una funzione continua.

Dimostrazione. Osserviamo subito che $L \in [a, b]$. Infatti, se fosse $L > b$ per la permanenza del segno avremmo che $x_n - b > 0$ definitivamente; e questo è assurdo perché $x_n < b$. Quindi $f(L)$ è ben definito, perché L appartiene al dominio della funzione.

Preso U, intorno di $f(L)$, per definizione di continuità in L esiste δ tale che

$$x \in B_\delta(L) \implies f(x) \in U$$

Poiché x_n è definitivamente appartenente a $B_\delta(L)$, allora definitivamente $f(x_n) \in U$. Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(L)$$

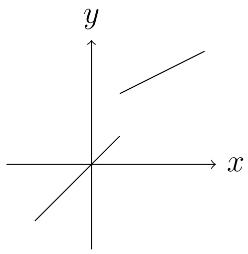
□

Quattordicesima lezione (27/11/2015)

Osservazione 14.1. Data una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ monotona, allora tutti i suoi punti di discontinuità sono di prima specie; cioè $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ esistono finiti ma non coincidono.

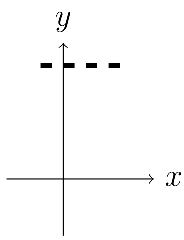
Infatti, se f è non decrescente:

- $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup \{ f(x) \mid x < x_0 \}$
- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf \{ f(x) \mid x > x_0 \}$



Esempio 14.2. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$



La funzione non è continua in nessun punto. Infatti $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ non esiste, perché in ogni $(x_0 - \delta, x_0)$ la funzione assume sia il valore 0 che il valore 1. Quindi ogni punto è di discontinuità di seconda specie.

14.1 Limiti notevoli

Teorema 14.3 (Limiti notevoli). *Valgono i seguenti limiti notevoli:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

Dimostriamo a scopo didattico i primi due limiti.

Dimostrazione. Abbiamo $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$. Per il teorema del collegamento sappiamo che $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ se e solo se per ogni successione $\{x_n\}$ infinitesima (quindi $\lim x_n = 0$), con $x_n \neq 0 \ \forall n$, vale $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$.

Poiché $\sin x_n \sim x_n$ se la successione è infinitesima, la dimostrazione vale. □

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. Prendiamo una successione $\{x_n\}$ infinitesima e con $x_n \neq 0$. Allora sappiamo che $\lim_{n\to+\infty}(1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} = e$. □

14.2 Composizione di funzioni

Proposizione 14.4. *Se $g : A \to B \subseteq \mathbb{R}$ è continua in un punto x_0 e $f : B \to \mathbb{R}$ è continua in $y_0 = f(x_0)$, allora $f \circ g : A \to \mathbb{R}$ è continua in x_0 e $f \circ g : x \to f(g(x))$.*

Dimostrazione. Devo dimostrare che per ogni intorno U di $f(g(x_0))$ esiste un intorno V di x_0 tale che se $x \in V$ allora $f(g(x)) \in U$.

Per la continuità di f esiste un intorno W di $y_0 = g(x_0)$ tale che $y \in W \implies f(y) \in U$. Se consideriamo V, intorno di x_0 tale che $x \in V \implies g(x) \in W$, per la continuità di g, per ogni $x \in V$, si ha $g(x) \in W \implies f(g(x)) \in U$. Quindi $f \circ g$ è continua in x_0. □

Esempio 14.5. Consideriamo questo limite

$$\lim_{x\to x_0} e^{x^2+1}$$

Possiamo considerare e^{x^2+1} come $f(g(x))$ dove $g(x) = x^2 + 1$ e $f(y) = e^y$. Sappiamo che g è continua perché è un polinomio e anche f è continua perché la funzione esponenziale è continua.

Per quanto abbiamo appena detto, anche $f \circ g$ è continua. Quindi:

$$\lim_{x\to x_0} e^{x^2+1} = \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0)) = e^{{x_0}^2+1}$$

Esempio 14.6. Consideriamo questo limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2-1} \cdot \sin(x^2-1)$$

È evidente che questo è un limite del tipo $\frac{\sin y}{y}$ con $y = x^2 - 1$.

Sia $g(x) = x^2 - 1$. Quindi:

$$\frac{1}{x^2-1} \cdot \sin(x^2-1) = \frac{\sin(g(x))}{g(x)} = f(g(x))$$

dove per f intendiamo una funzione così definita:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{\sin y}{y} = 1 & y \neq 0 \\ 1 & y = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che f è continua in 0, quindi $f \circ g$ è continua in 1. Quindi:

$$\lim_{x\to 1} f(g(x)) = f(g(1)) = f(0) = 1$$

Esempio 14.7. Consideriamo $f(x) = a^x$ con $a > 0$ che è continua. Consideriamo la funzione composta $\exp \circ y$, $e^x = e^{x \log a}$. In questo scenario $g(x) = x \log a$ e $\exp(y) = e^y$. Essendo sia exp che g funzioni continue, allora $\exp \circ g$ è continua.

Teorema 14.8. *Se $f : I \to R$ è una funzione continua e I è un intervallo, allora $f(I) = \{ f(x) \mid x \in I \}$ è l'intervallo.*

Esempio 14.9.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

In questo esempio $f([0,1]) = \{0, 1\}$.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che se $y_1, y_2 \in f(I)$ allora $[y_1, y_2] \subseteq f(I)$.

Prendiamo i valori $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$; possiamo suppore che x_1 sia minore di x_2. Sia $z \in [y_1, y_2]$ e sia $S = \{ x \in [x_1, x_2] \mid f(x) < z \}$ con $z \neq y_1, y_2$.

L'insieme S è non vuoto, infatti $f(x_1) = y_1 < z \implies x_1 \in S$. Inoltre, l'insieme S è limitato perché è contenuto in $[x_1, x_2]$ e quindi esiste il sup. Supponiamo $s = \sup S$, dove $s \in [x_1, x_2] \subseteq I$.

- Se $f(s) > z$ allora $s > x_1$. Per il teorema di permanenza del segno esiste un intorno $\varepsilon > 0$ tale che $f(s) > z$ per ogni $x \in (s - \varepsilon, s)$.

  Quindi $(s - \varepsilon, s)$ non interseca $S = \{ x \in [x_1, x_2] \mid f(x) < z \}$, quindi $s \neq \sup S$, che è assurdo.

- Se $f(s) < z$ allora $s < x_2$. Con ragionamento analogo al precedente, sappiamo che $f(x_2) = y_2 > z$. Esiste $\varepsilon > 0$ tale che se $x \in (s, s + \varepsilon)$ allora $f(x) < z$. Questo implicherebbe che $x \in S$, quindi s non sia maggiorante di S. Assurdo.

Essendo i due casi precedenti assurdi, dev'essere $f(s) = z$; cioè dato un qualunque $z \in (y_1, y_2)$ essite $s \in I$ tale che $f(s) = z$ implica $z \in f(I)$.

□

14.3 Teorema degli zeri

Teorema 14.10 (Teorema degli zeri). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$; allora esiste $x \in (a, b)$ tale che $f(x) = 0$.*

Dimostrazione. Consideriamo l'intervallo $I = [a, b]$. Poiché la funzione è continua, $f(I)$ è un intervallo che contiene sia $f(a)$ che $f(b)$, quindi contiene anche lo 0. □

Possiamo procedere anche a una dimostrazione alternativa.

Dimostrazione. Sappiamo per ipotesi che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Definiamo per ricorrenza due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che $a_1 = a$, $b_1 = b$ per ogni $n > 0$.

Sia $c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$. Se $f(c_n) \leq 0$ si pone $a_{n+1} = c_n$ e $b_{n+1} = b_n$. In caso contrario (se $f(c_n) > 0$) si pone $b_{n+1} = a_{n+1} = a_n$. Quindi $f(a_n) \leq 0$ per ogni n e $f(b_n) \geq 0$.

La successione $\{a_n\}$ è non decrescente mentre $\{b_n\}$ è non crescente; quindi $a_n < b_n$. Si possono quindi presentare tre casi:

1. $a_{n+1} \geq a_n$
2. $b_{n+1} \leq b_n$
3. $a_{n+1} < b_{n+1}$

Sappiamo che la successione $\{a_n\}$ è monotona e limitata, quindi esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n = x$. Anche la successione $\{b_n\}$ è monotona e limitata, quindi esiste $\lim_{n\to+\infty} b_n = y$.

Per la continuità di f, dev'essere $f(x) \leq 0$ e $f(y) \geq 0$.

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}} \implies \lim(b_n - a_n) = 0 = x - y$$

Quindi dev'essere $x = y$ e $f(x) = 0$. □

Come esempio possiamo prendere $f(x) = e^x + x$ negli estremi -1 e 0: $f(-1) = \frac{1}{e} - 1$, negativo, e $f(0) = 1$, positivo. Quindi $a_1 = -1$ e $b_1 = 0$.

Procediamo e calcoliamo il valore della funzione nel punto $-\frac{1}{2}$: $\frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{2}$, negativo. Quindi $a_2 = -\frac{1}{2}$ e $b_2 = 0$. E così via.

Esempio 14.11. Sia $f(x) = x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_0$ una funzione espressa come polinomio di grado dispari. Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} = -\infty$; allora per il teorema degli zeri esiste x tale che $f(x) = 0$.

14.4 Teorema di Weierstrass

Definizione 14.12. Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice che y è il *massimo* (assoluto) di f se $y = \max\{\, f(x) \mid x \in A \,\}$. Inoltre x è il *punto di massimo* se $f(x)$ è il massimo.

Osservazione 14.13. Il massimo, se esiste, è unico. Al contrario, i punti di massimo possono non essere unici.

Esempio 14.14. Consideriamo la funzione $\sin x$: il suo massimo è 1 e i suoi punti di massimo sono tutti i punti $\frac{\pi}{2} + 2\pi x$.

Teorema 14.15 (Teorema di Weierstrass). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua; allora f ha un minimo e un massimo. Ovvero, $f([a, b])$ è un intervallo chiuso.*

Sappiamo che $f([a, b])$ è un intervallo; se contiene $\min f$ e $\max f$ allora $f([a, b]) = [\min f, \max f]$.

14.5 Ancora sulle funzioni

Definizione 14.16. La funzione $f : A \to B$ si dice *iniettiva* se $f(x) = f(y)$ implica $x = y$.

Definizione 14.17. La funzione $f : A \to B$ si dice *suriettiva* se $f(A) = B$, cioè $\forall y \in B$ $\exists x \in A$ tale che $f(x) = y$.

Definizione 14.18. La funzione $f : A \to B$ si dice *biunivoca* se è iniettiva e suriettiva. In tal caso ammette *inversa*, ovvero $f^{-1} : B \to A$, $f^{-1}(y) = x$ (dove ovviamente $f(x) = y$).

Esempio 14.19. Consideriamo la funzione $f(x) = \sin x$ definita su $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$. La funzione è biunivoca, è continua ed è crescente. Infatti:

$$\sin(x + h) - \sin x = 2 \sin \frac{h}{2} \cos \frac{h}{2}$$

Inoltre $-\frac{\pi}{2} \leq x < x + h \leq \frac{\pi}{2}$. Quindi è crescente, quindi iniettiva, e continua, quindi suriettiva.

L'inversa f^{-1} si indica con $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Il grafico si ottiene mediante simmetria ($x \to y$ e $y \to x$, quindi $\sin x = y$ e $\arcsin y = x$).

Esempio 14.20. Consideriamo la funzione $f(x) = \cos x : [0; \pi] \to [-1, 1]$ che è decrescente e continua, quindi è biunivoca e quindi invertibile. La sua funzione inversa è $\arccos x : [-1, 1] \to [0, \pi]$.

Esempio 14.21. Consideriamo la funzione $f(x) = \tan x : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ che è biunivoca e quindi invertibile. La sua funzione inversa è $\arctan x : \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Teorema 14.22. *Se $f : [a, b] \to R$ è una funzione crescente e continua, allora anche f^{-1} è continua. Se f è una funzione crescente invertibile, allora anche f^{-1} è crescente.*

Infatti se $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$; allora scelti $y_1 < y_2$, ovviamente ponendo $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$, $\implies x_1 < x_2$.

Quindicesima lezione (01/12/2015)

15.1 Funzioni inverse (cont.)

Al termine della lezione precedente abbiamo visto rapidamente un teorema sulla continuità delle funzioni inverse. Diamone ora una dimostrazione rigorosa.

Teorema 15.1. *Data una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente e continua, allora f^{-1} è continua.*

Dimostrazione. L'immagine di f è $[f(a), f(b)]$. Osserviamo che la funzione $f : [a,b] \to [f(a), f(b)]$ è suriettiva. Inoltre, essendo crescente è anche iniettiva.

Quindi la funzione è biunivoca e quindi esiste l'inversa $f^{-1} : [c,d] \to [a,b]$ (per semplicità $f(a)$ e $f(b)$ sono stati rinominati rispettivamente c e d).

Anche f^{-1} è crescente. Supponiamo per assurdo che non lo sia: in tal caso dev'essere che scelti

$$c \le x < y \le d \implies f^{-1}(x) \ge f^{-1}(y)$$

Possiamo applicare f a f^{-1}, senza invertire il verso della disuguaglianza, visto che la funzione f è crescente. Quindi

$$\implies f(f^{-1}(x)) \ge f(f^{-1}(y)) \implies x \ge y$$

Siamo arrivati all'assurdo, perché $x < y$ per ipotesi. Quindi anche f^{-1} è crescente.

Dobbiamo ora dimostrare che è continua. Per semplicità, facciamolo prima considerando l'intervallo aperto (c,d).

Scegliamo $y_0 \in (c,d)$ e chiamiamo $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Preso $\varepsilon > 0$ deve esistere un intorno U di y_0 tale che

$$y \in U \implies f^{-1}(y) \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

Sappiamo che $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0 + \varepsilon)$ perché la funzione è crescente.

Dato y un punto nell'intorno ($f(x_0 - \varepsilon) < y < f(x_0 + \varepsilon)$), applichiamo f^{-1} (che è crescente):

$$x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon$$

Se scelgo U intorno di y_0 tale che $U \subset (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$ si ha che

$$f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) = y_0 < f(x_0 + \varepsilon)$$

Quindi abbiamo dimostrato la continuità in y_0. □

Dimostrazione. Resta da mostrare che non vale solo sull'intervallo aperto (c, d), ma anche negli estremi. Supponiamo $y_0 = c$ ed esprimiamo la condizione di continuità in y_0. Per ogni $\varepsilon > 0$ cerchiamo un intorno U di $y_0 = c$ tale che $\forall y \in U$ dev'essere $f^{-1}(y) \in B_\varepsilon(x_0)$.

Dev'essere per forza $f^{-1}(c) = a$ perché c è il minimo e a è un punto di minimo (infatti f è crescente).

Se $c \leq y < f(a+\varepsilon)$ allora:

$$f^{-1}(c) \leq f^{-1}(y) \leq a + \varepsilon$$
$$a \leq f^{-1}(y) \leq a + \varepsilon$$

Quindi possiamo prendere U intorno di c tale che $U \cap [c, d] \subseteq [c, f(a + \varepsilon)]$.

Analogo ragionamento può essere fatto sull'altro estremo. □

Esempio 15.2. La funzione $f(x) = \log x$ è continua. Infatti $\exp : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che $x \to e^x$ è continua e crescente. Essendo la funzione logaritmo inversa della funzione esponenziale, grazie al teorema possiamo affermare che $\log : [e^a, e^b] \to [a, b]$ è continua.

Esempio 15.3. Consideriamo la funzione $f(x) = x^a$ con $a \in \mathbb{R}, x > 0$. Tramite semplici passaggi:

$$x^a = e^{\log x^a} = e^{a \cdot \log x} = \exp \circ g$$

dove $g(x) = a \cdot \log x$. Abbiamo scritto x^a come composizione di funzioni continue, quindi è continua.

15.2 Asintoti di una funzione

Definizione 15.4. La retta $y = mx + q$ è un *asintoto* della funzione f per $x \to +\infty$ se

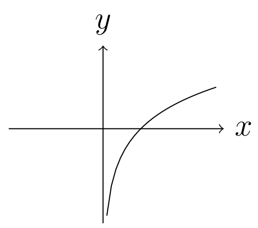
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (mx + q) = 0$$

- Se $m \neq 0$ l'asintoto si dice *obliquo*.
- Se $m = 0$ l'asintoto si dice *orizzontale*.

Definizione 15.5. La retta $x = x_0$ è un *asintoto verticale* della funzione f per $x \to x_{0+}$ se

$$\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = +\infty \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x \to x_{0+}} f(x) = -\infty$$

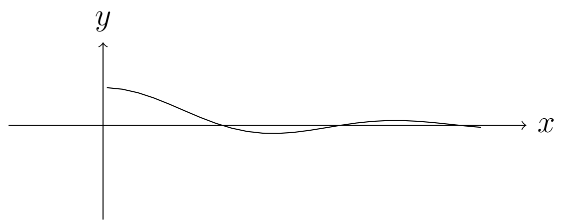
Esempio 15.6. Consideriamo la funzione $f(x) = \log x$.



Essa presenta un asintoto verticale per $x \to 0^+$, poiché $\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$.

La funzione invece non ha asintoto per $x \to +\infty$ perché $\lim \frac{\log x}{x} = 0$ e $\lim(\log x - 0) = +\infty$.

Esempio 15.7. La funzione $f(x) = \frac{1}{x}\sin x$ ha asintoto per $x \to +\infty$.



Calcoliamo m e q:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\sin x}{x^2} = 0$$
$$q = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} - 0 = 0$$

Esempio 15.8. Studiamo un eventuale asintoto obliquo per la funzione $f(x) = \log x - \sqrt{x^2-4}$ (definita per $x > 2$).

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x - \sqrt{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} - \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2}} = -1$$
$$q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - (-x) = \log x - \sqrt{x^2-4} + x$$

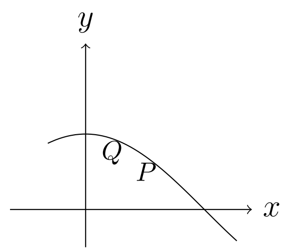
Studiamo il limite escludendo per il momento il logaritmo:

$$\lim_{x\to+\infty} x - \sqrt{x^2-4} = \lim_{x\to+\infty} x - \sqrt{x^2-4} \cdot \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{x+\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x^2-4}{x+\sqrt{x^2+4}} = 0$$

Quindi $\lim_{x\to+\infty} \log x + 0 = +\infty$, quindi la funzione non ha asintoto.

15.3 Derivate

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a,b)$. Sia $P = (x_0, f(x_0))$ un punto preso sulla funzione e $Q = (x_0+h, f(x_0+h))$ un altro punto della funzione.



Scriviamo l'equazione della retta passante per P e Q:

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} \cdot (x - x_0)$$

Il coefficiente angolare di questa retta è (semplificando)

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Esso è detto anche *rapporto incrementale* di f in x_0.

Definizione 15.9. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a,b)$. Chiamiamo *derivata* di f in x_0 il limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

purché tale limite esista finito. Si indica $f'(x_0)$.

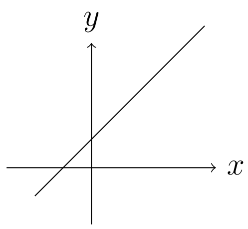
Il "limite" delle rette PQ, per $Q \to P$ è:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Questa è l'espressione analitica della retta tangente al grafico di f in x_0.

Definizione 15.10. Si dice che f è *derivabile* nell'intervallo se esiste la derivata in ogni punto.

Esempio 15.11. Consideriamo ad esempio la funzione $f(x) = ax + b$.



Se quanto abbiamo espresso sopra ha un senso, la tangente in questo caso dev'essere evidentemente la retta stessa. Applichiamo la definizione.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} = a$$

Quindi $f'(x) = a$ per ogni x. L'equazione della retta tangente è

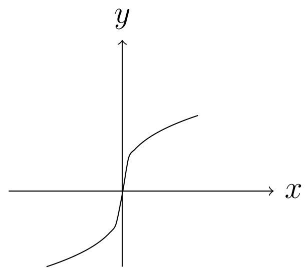
$$\begin{aligned} y &= f(x_0) + f'(x)(x - x_0) \\ &= a(x_0) + b + a(x - x_0) \\ &= ax + b \end{aligned}$$

Che è esattamente coincidente all'equazione della retta iniziale.

Esempio 15.12. Consideriamo il polinomio $f(x) = x^n$ con $n > 0$ e calcoliamo la sua derivata applicando la definizione.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot (f(x+h) - f(x)) \\
&\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot ((x+h)^n - x^n) \\
&\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\binom{n}{0} x^n h^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \ldots - x^n \right) \\
&\lim_{h\to 0} n \cdot x^{n-1} + o(h) = n \cdot x^{n-1}
\end{aligned}
$$

Esempio 15.13. Consideriamo la funzione $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$. Essa non è derivabile in 0.



Infatti:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot (f(h) - f(0)) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot h^{\frac{1}{3}} = \lim_{h\to 0} h^{-\frac{2}{3}} = +\infty$$

Esempio 15.14. Consideriamo una funzione così definita:

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Controlliamo se è derivabile in 0:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(h) - f(0)) = \lim_{h\to 0} \left(h \cdot \sin \frac{1}{h} \right) = \lim_{h\to 0} \sin \frac{1}{h}$$

Il limite non esiste perché il seno oscilla. Quindi la funzione è continua in 0 ma non è derivabile.

Esempio 15.15. Consideriamo una funzione così definita:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Controlliamo se è derivabile in 0:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(h) - f(0)) = \lim_{h\to 0} \left(h^2 \cdot \sin \frac{1}{h} \right) = \lim_{h\to 0} h \cdot \sin \frac{1}{h} = 0$$

La funzione quindi è derivabile in zero.

Definizione 15.16. Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è derivabile, la derivata definisce una funzione $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$.

Se f' è a sua volta derivabile, la sua derivata si indica f'' ed è detta derivata seconda di f.
Induttivamente, la derivata n-esima $f^{(n)}$ è la derivata di $f^{(n-1)}$ (posto $f^{(0)} = 0$).

Esempio 15.17.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n \\ f'(x) &= n \cdot x^{n-1} \\ f''(x) &= n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \end{aligned}$$

E così via...

15.4 Derivabilità e continuità

Proposizione 15.18. *Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0, allora f è continua in x_0.*

Dimostrazione. Essendo la funzione derivabile possiamo scrivere

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot ((f(x_0 + h) - f(x_0))$$

Consideriamo solo il limite della seconda parte e moltiplichiamo e dividiamo per h:

$$\lim_{h \to 0} h \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0 \cdot f'(x_0) = 0$$

Essendo la differenza tra $f(x_0 + h) - f(x_0) = 0$ allora

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

che è esattamente la proprietà che caratterizza la continuità. □

15.5 Massimi e e crescenza (decrescenza)

Definizione 15.19. La funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ha un *massimo relativo* in x_0 (e x_0 è un *punto di massimo relativo*) se esiste un intorno $V \subset (a, b)$ tale che $f(x) \leq f(x_0)\ \forall x \in V$.

La definizione speculare vale ovviamente per il concetto di *minimo relativo*.

Definizione 15.20. La funzione f è *crescente* in x_0 se esiste un intorno $\sigma > 0, B_\sigma(x_0) \subseteq (a, b)$ tale che:

- $f(x) < f(x_0)$ per $x_0 - \sigma < x < x_0$
- $f(x) > f(x_0)$ per $x_0 < x < x_0 + \sigma$

La definizione speculare vale ovviamente per il concetto di funzione *decrescente.*

Osservazione 15.21. Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è crescente in ogni punto, allora f è crescente.

Dimostrazione. Infatti, supponiamo f continua e crescente in ogni suo punto. Siano x, y punti tali che $a < x < y < b$; dobbiamo dimostrare che $f(x) < f(y)$.

Consideriamo una funzione $g : [x, y] \to \mathbb{R}$. La funzione g è una restrizione di f tale che $g(z) = f(z)$. Quindi la funzione g è ancora continua. Per il teorema di Weierstrass, g ha un massimo e un minimo assoluti.

Sia c il punto di minimo assoluto. Sappiamo che f è crescente nel punto c, quindi $\exists \sigma$ tale che per $c - \sigma < z < c + \sigma$ vale $f(z) < f(c)$.

Questo è possibile solo se $c = x$ perché c è un punto di minimo assoluto. Quindi x è un punto di minimo assoluto.

Con ragionamento analogo si arriva a far vedere che y è un punto di massimo assoluto per g. Quindi $f(y) > f(x)$ perché il massimo è naturalmente maggiore del minimo. □

Teorema 15.22. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile in x_0. Allora:*

- *se $f'(x_0) > 0$ allora f è crescente in x_0;*
- *se $f'(x_0) < 0$ allora f è decrescente in x_0;*
- ***(Fermat)** se x_0 è un punto di massimo o minimo relativo allora $f'(x_0) = 0$.*

Dimostriamo il primo caso (il secondo è speculare al primo).

Dimostrazione. La derivata in x_0 è positiva; ricordiamo che questo significa che

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0$$

Per il teorema della permanenza del segno:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0 \qquad \text{per } h \in B_\sigma(0)$$

Ora:

- se $x_0 - \sigma < x < x_0$ allora $f(x) - f(x_0) < 0$
- se $x_0 < x < x_0 + \sigma$ allora $f(x) - f(x_0) > 0$

Queste due condizioni rappresentano esattamente la definizione di funzione crescente nel punto x_0. □

Dimostrazione. Dimostriamo il terzo caso. Se x_0 è un punto di massimo (minimo) relativo, f non può essere né crescente né decrescente in x_0.

Per quanto abbiamo appena dimostrato:

- se fosse $f'(x_0) > 0$ la funzione sarebbe crescente, assurdo;
- se fosse $f'(x_0) < 0$ la funzione sarebbe decrescente, assurdo.

Quindi dev'essere per forza $f'(x_0) = 0$. □

Sedicesima lezione (04/12/2015)

Nella lezione precedente abbiamo enunciato e dimostrato un teorema, che prende anche il nome di "Teorema di Fermat". Esso asserisce che ogni estremo locale della funzione ha derivata nulla. Chiariamo meglio il concetto con due esempi.

Esempio 16.1. Sia $f(x) = x^2$. La sua funzione derivata è $f'(x) = 2x$, quindi la funzione f è crescente per $x > 0$ e decrescente per $x < 0$. Si deduce che f ha un minimo in zero $(f'(0) = 0)$.

Esempio 16.2. Sia $f(x) = x^3$. La sua funzione derivata è $f'(x) = 3x^2$. È vero che $f'(0) = 0$ ma la funzione è positiva in tutti gli altri punti ($f'(x) > 0\ \forall x \neq 0$), quindi è crescente.

In definitiva 0 non è né un punto di massimo né di minimo relativo.

16.1 Regole di derivazione

Teorema 16.3. *Se $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ sono funzioni derivabili in (a, b), allora:*

1. *$f + g$ è derivabile in (a, b) e*
$$(f + g)' = f' + g'$$
2. *dato $\alpha \in \mathbb{R}$, (αf) è derivabile in (a, b) e*
$$(\alpha f)' = \alpha \cdot f'$$
3. *$f \cdot g$ è derivabile in (a, b) e*
$$(fg)' = f'g + fg'$$
4. *se $g(x) \neq 0\ \forall x \in (a, b)$, allora $\frac{f}{g}$ è derivabile e*
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Dimostrazione. Dimostriamo la regola della somma. Dato $x \in (a, b)$, la derivata di $f + g$ in x è

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
=&f'(x)+g'(x)
\end{aligned}
$$

□

Dimostrazione. In modo analogo dimostriamo la regola del prodotto.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}\\
=&\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x)+\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x+h)\cdot g(x)}{h}\right)\\
=&f'(x)\cdot g(x)+\lim_{h\to 0}f(x+h)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
=&f'(x)\cdot g(x)+\lim_{h\to 0}f(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
=&f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)
\end{aligned}
$$

Nel terzo passaggio abbiamo tenuto l'equivalente di $f'(x)\cdot g(x)$ a sinistra e abbiamo scritto "il resto" a destra. L'ultimo passaggio invece si giustifica osservando che f, essendo derivabile, è continua in x. □

Dimostrazione. In ultimo dimostriamo la regola del rapporto.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right)\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\left(\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x)\cdot g(x+h)}\right)\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{h}\cdot(f(x+h)-f(x))\cdot g(x)+\frac{1}{h}\cdot(f(x)g(x)-f(x)g(x+h))}{g(x)\cdot g(x+h)}\\
=&\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}
$$

□

Esempio 16.4. Con quanto abbiamo dimostrato finora possiamo calcolare la derivata di una funzione come questa:

$$f(x)=\frac{2x+1}{3x+2}$$

$$f'(x) = \frac{2(3x+2) - 3(2x+1)}{(3x+2)^2} = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

Osserviamo in particolare che la funzione è crescente.

16.2 Derivate delle funzioni elementari

Abbiamo già dimostrato in precedenza la derivata dei polinomi nella forma $f(x) = x^\alpha$.

Osservazione 16.5. Se $f(x) = \sin x$, allora $f'(x) = \cos x$. Infatti:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right)
\end{aligned}$$

Sappiamo che $1 - \cos h \sim \frac{1}{2}h^2$, quindi $\lim \frac{1-\cos h}{h} = 0$.

$$= \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = \cos x$$

Osservazione 16.6. Se $f(x) = \cos x$, allora $f'(x) = -\sin x$. Procediamo in modo analogo a quanto fatto per il coseno.

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\
&= \cos x \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{0} - \sin x \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}}_{1} \\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

Osservazione 16.7. Sia $f(x) = \tan x$. Allora

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Osserviamo che le due notazioni sono equivalenti, infatti:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Conoscendo le derivate di $\sin x$ e $\cos x$, scriviamo $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Applichiamo la regola di derivazione del rapporto:

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Osservazione 16.8. Se $f(x) = e^x$, allora $f'(x) = e^x$. Infatti:

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ =&\lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot (e^h - 1)}{h} \\ =&e^x \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{1} = e^x \end{aligned}$$

Osservazione 16.9. Se $f(x) = \log x$, allora $f'(x) = \frac{1}{x}$. Infatti:

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} \\ =&\lim_{h\to 0} \frac{\log \frac{x+h}{x}}{h} \\ =&\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) \end{aligned}$$

Osservando che $\frac{h}{x}$ tende comunque a zero, possiamo applicare il limite notevole $\log(1+\frac{h}{x}) \sim \frac{h}{x}$.

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{x} = \frac{1}{x}$$

16.3 Derivata della composizione di funzioni

Osservazione 16.10. Se g è derivabile in x, allora

$$g(x+h) - g(x) = h \cdot g'(x) + h \cdot \theta(h)$$

dove $\theta(0) = 0$ e θ è continua in 0. Infatti possiamo porre:

$$\theta(h) = \begin{cases} g(x) - \frac{1}{h} \cdot (g(x+h) - g(x)) & h \neq 0 \\ 0 & h = 0 \end{cases}$$

La funzione è effettivamente continua in 0:

$$\lim_{h\to 0} \theta(h) = g'(x) - g'(x) = 0$$

Teorema 16.11. *Siano $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ e $f : (a, b) \to (c, d)$ due funzioni derivabili, allora $g \circ f : (a, b) \to \mathbb{R}$ (con $x \to g(f(x))$) è derivabile e*

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$$

Ovvero, posto $m(x) = g(f(x))$:

$$m'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Dimostrazione. Sia $x \in (a, b)$ fissato e $y = f(x)$. Usando la formula scritta in precedenza, essendo g derivabile in y:

$$g(y + k) - g(y) = k \cdot g'(y) + k \cdot \theta(k)$$

Vale sempre $\theta(0) = 0$ e θ continua in 0. Sia $k = f(x + h) - f(x)$ l'incremento in y. Quindi

$$\lim_{h \to 0} \frac{k}{h} = f'(x)$$

perché è il limite del rapporto incrementale. Scriviamo quindi il limite del rapporto incrementale della funzione composta.

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \to 0} \frac{m(x + h) - m(x)}{h} \\
=&\lim_{h \to 0} \frac{g(f(x + h)) - g(f(x))}{h} \\
=&\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot (g(y + k) - g(y)) \\
=&\lim_{h \to 0} \frac{k}{h} \cdot \frac{g(y + k) - g(y)}{k} \\
=&\lim_{h \to 0} \frac{k}{h} \cdot (g'(y) + \theta(k)) \\
=&f'(x) \cdot \lim_{h \to 0} (g'(y) + \theta(k))
\end{aligned}$$

Sappiamo che $k(h)$ è una funzione continua in 0 perché f è continua e $k(0) = 0$. Quindi $\theta(k)$ è continua in 0, quindi $\theta(k(h))$ è continua in 0. In definitiva $\lim_{h \to 0} \theta(h(k)) = 0$.

Quindi, riprendendo l'ultimo passaggio svolto sopra rimane

$$= f'(x) \cdot g'(y) = f'(x) \cdot g'(f(x))$$

□

Esempio 16.12. Cerchiamo la derivata della funzione $m(x) = x^\alpha$ (con $x > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$).

La funzione $m(x) = x^\alpha$ si può scrivere come $m(x) = e^{\alpha \log x}$ e può quindi essere vista come composizione di due funzioni. Quindi $m(x) = g(f(x))$, dove $g(y) = e^y$ e $f(x) = \alpha \log x$.

Sia f che g sono funzioni derivabili; $g'(y) = e^y$ e $f'(x) = \frac{\alpha}{x}$. Applichiamo ora la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$\begin{aligned}
m'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \\
&= e^{\alpha \log x} \cdot \frac{\alpha}{x} \\
&= x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}
\end{aligned}$$

Osserviamo che abbiamo dimostrato la formula già nota anche per $\alpha \in \mathbb{R}$.

16.4 Derivata della funzione inversa

Teorema 16.13. *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a,b)$; allora f è crescente e invertibile. L'inversa g è derivabile*

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato che la funzione inversa g esiste ed è continua.

Fissato $x \in (a,b)$, sia $y = f(x)$. Chiamiamo $y + k = f(x+h)$, quindi $x + h = g(y+k)$. Ovvero $h = g(y+k) - g(y)$.

Il rapporto incrementale è:

$$\frac{g(y+k) - g(y)}{k} = \frac{h}{k}$$

ma $k = f(x+h) - f(x)$; quindi

$$\frac{k}{f(x+h) - f(x)} = \theta(h)$$

Estendiamo $\theta(h)$ ponendo $\theta(0) = \frac{1}{f'(x)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{k}$.

La funzione θ è continua in 0. $h(k)$ è continua perché g è continua, quindi $\theta(h(k))$ è continua in $k = 0$.

$$\lim_{k\to 0} \frac{g(y+k) - g(y)}{k} = \lim_{k\to 0} \theta(h(k)) = \theta(0) = \frac{1}{f'(x)}$$

Quindi:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}$$

□

Esempio 16.14. Consideriamo la funzione $g(x) = \log x$, che è l'inversa della funzione $f(x) = e^x$. Deriviamo attraverso la formula della funzione inversa:

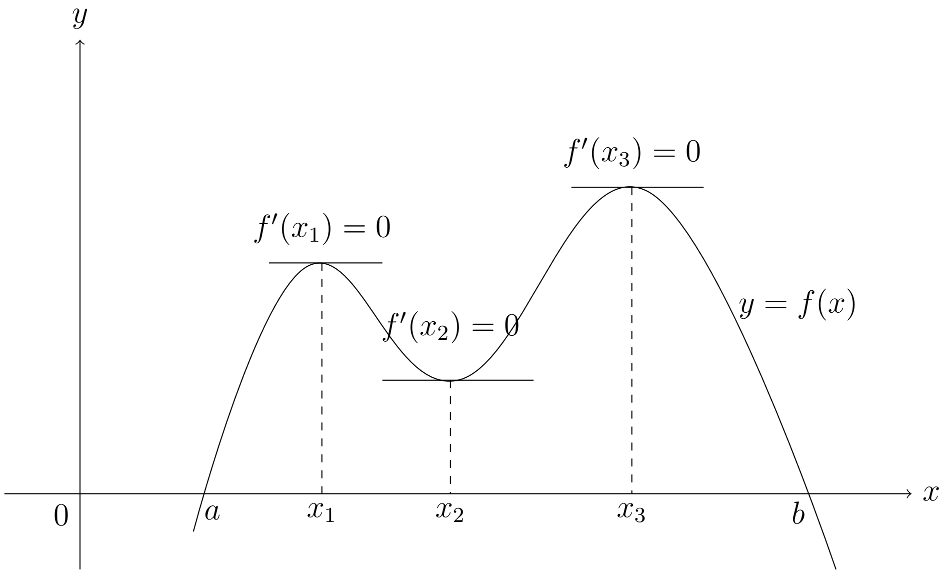
$$g'(x) = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

Esempio 16.15. Consideriamo la funzione $g(x) = \arctan x$, che è l'inversa della funzione $f(x) = \tan x$. La derivata di f è già nota ed è $f'(x) = 1 + \tan^2 x$. Quindi:

$$g'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

16.5 Teoremi di Rolle e di Lagrange

Teorema 16.16 (Teorema di Rolle). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile in (a, b). Sia $f(a) = f(b)$. Allora $\exists x \in (a, b)$ tale che $f'(x) = 0$.*



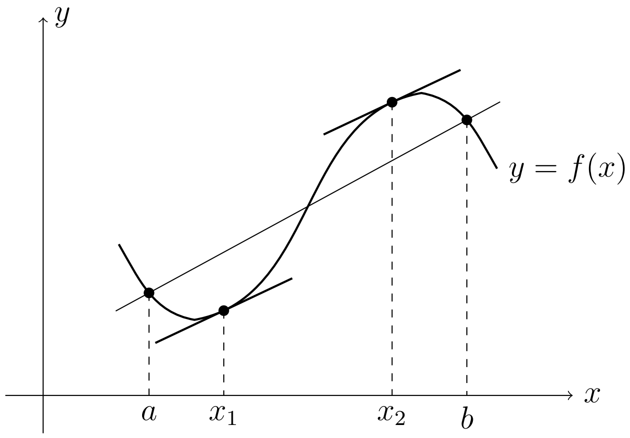
Dimostrazione. Per il teorema di Weierstrass la funzione ha almeno un punto di massimo e un punto di minimo.

- Se a è un punto di massimo e un punto di minimo, allora la funzione è costante. Quindi $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$.
- Altrimenti:
  - Se a non è un punto di massimo, allora anche b non lo è (essendo $f(a) = f(b)$). Quindi deve esistere un punto di massimo x in (a, b) e lì $f'(x) = 0$ per il teorema di Fermat.
  - Se a non è un punto di minimo, allora anche b non lo è. Quindi deve esistere un punto di minimo x in (a, b) e lì $f'(x) = 0$.

□

Teorema 16.17 (Teorema di Lagrange o del valor medio). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile in (a, b). Allora esiste $x \in (a, b)$ tale che*

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$g(x) = f(x) - (x - a) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Questa funzione soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle, infatti:

$$g(b) = f(b) - \cancel{(b - a)} \cdot \frac{f(b) - f(a)}{\cancel{b - a}} = f(a)$$

e $g(a) = f(a)$ per gli stessi calcoli. Inoltre g è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) perché f lo è.

Il teorema di Rolle ci garantisce l'esistenza di almeno un $x \in (a, b)$ tale che $g'(x) = 0$. Calcoliamo la derivata della funzione:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Quindi

$$f'(x) = \underbrace{g'(x)}_{0} + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

Diciassettesima lezione (11/12/2015)

17.1 Corollari del teorema di Lagrange

Nella lezione precedente è stato enunciato e dimostrato il teorema di Lagrange. Affrontiamo ora alcuni teoremi che seguono immediatamente da esso.

Corollario 17.1. *Sia I un intervallo aperto e $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile con $f'(x) = 0$ $\forall x$. Allora f è costante.*

Dimostrazione. Siano $x_1, x_2 \in I$. La restrizione di $f|_{[x_1,x_2]}$ soddisfa le ipotesi di Lagrange, essendo continua in $[x_1, x_2]$ e derivabile in (x_1, x_2).

Per il teorema di Lagrange esiste quindi x compreso tra x_1 e x_2 dove

$$f'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Per ipotesi $f'(x) = 0$, quindi dev'essere $f(x_2) - f(x_1) = 0$ e quindi $f(x_2) = f(x_1)$. Abbiamo mostrato di fatto che, comunque presi due punti, la funzione in essi assume lo stesso valore ed è quindi costante. □

Corollario 17.2. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su un intervallo aperto. Allora f è non decrescente se e solo se $f'(x) \geq 0$ in ogni $x \in I$.*

Osservazione 17.3. Se $f'(x) > 0$ allora la funzione è crescente. Viceversa, non è detto che se la funzione è crescente in x allora $f'(x) > 0$.

Esempio 17.4. La funzione $f(x) = x^3$ è crescente in $x = 0$ ma $f'(0) = 0$.

Dimostrazione. Supponiamo $f'(x) \geq 0$ in ogni punto x. Siano $u, v \in I$ con $u < v$, dobbiamo dimostrare che $f(u) \leq f(v)$.

Applicando il teorema di Lagrange a $f|_{[u,v]}$, esiste w compreso tra $u < w < v$ tale che

$$f'(w) = \frac{f(v) - f(u)}{v - u}$$

Essendo $f'(w) \geq 0$ per ipotesi e $v - u > 0$, dev'essere $f(v) - f(u) \geq 0$. Quindi $f(v) \geq f(u)$. □

17.2 Primitive di una funzione

Definizione 17.5. Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo aperto, si dice che $g : I \to \mathbb{R}$ è una *primitiva* di f se $g' = f$; posto ovviamente che g sia derivabile.

Osservazione 17.6. Se g è una primitiva di f e c è una costante, allora anche $g + c$ è primitiva di f. Infatti $(g + c)' = g'$.

Corollario 17.7. *Data $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo aperto e date g_1, g_2 primitive di f; allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $g_1 = g_2 + c$.*

Dimostrazione. Sia $h = g_1 - g_2$. La sua derivata è $h' = g_1{}' - g_2{}' = f - f = 0$. Per il corollario 17.1 h, la funzione differenza, è costante. Quindi $g_1 = h + g_2 = c + g_2$. □

Esempio 17.8. Una primitiva di e^x è e^x, perché $(e^x)' = e^x$. Per il corollario appena enunciato, tutte le primitive sono della forma $e^x + k$ con $k \in \mathbb{R}$.

Esempio 17.9. Le primitive di $\cos x$ sono $\sin x + k$ con $k \in \mathbb{R}$.

Osservazione 17.10. Sia $f(x) = \frac{1}{x}$ definita su $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Una sua primitiva è $\log |x|$, infatti:

- per $x > 0$, $g'(x) = D \log x = \frac{1}{x}$
- per $x < 0$, $g'(x) = D \log(-x) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$

Date h, k due costanti reali, la funzione

$$y(x) = \begin{cases} g(x) + h & x > 0 \\ g(x) + k & x < 0 \end{cases}$$

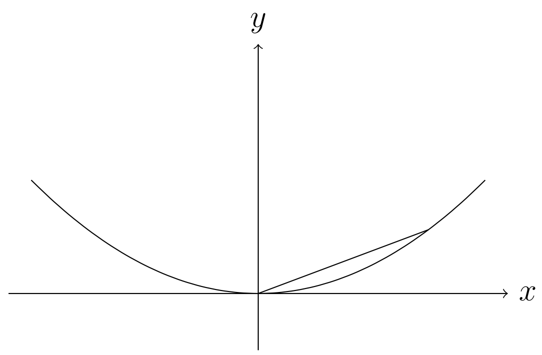
ha derivata $g'(x) = f(x)$. Quindi in questo esempio non vale il corollario perché il dominio non è un intervallo.

17.3 Funzioni convesse e concave

Definizione 17.11. Dato un intervallo I, $f : I \to \mathbb{R}$ si dice *convessa* se $\forall x_1, x_2 \in I$ vale

$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) \leq f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1))$$

per ogni $t \in [0, 1]$.



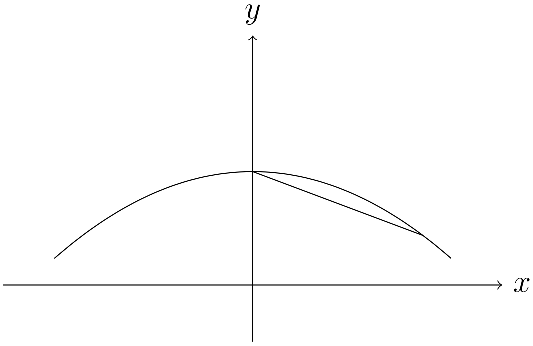
Di fatto questo significa che il grafico della funzione sta sotto la corda.

Con definizione analoga, si dice che f è *strettamente convessa* se vale

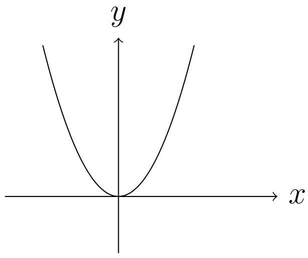
$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) < f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1))$$

Invertendo le due disuguaglianze precedenti si ottengono intuitivamente le definizioni di funzione *concava* e *strettamente concava*:

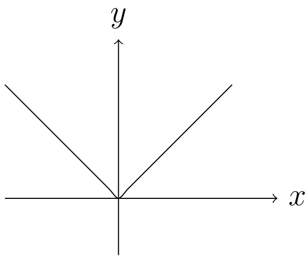
$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) \geq f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1))$$



Esempio 17.12. La funzione $f(x) = x^2$ è strettamente convessa.



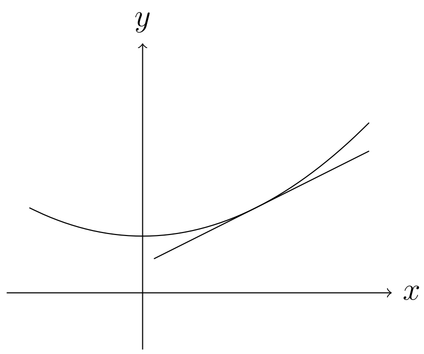
Esempio 17.13. La funzione $f(x) = |x|$ è convessa (infatti la proprietà vale anche considerando x_1, x_2 entrambi negativi), ma non strettamente convessa.



Diamo ora per vero che una funzione derivabile è convessa se e solo se la sua derivata è non decrescente (dimostreremo questo poco più avanti).

Se f' è non decrescente, allora $g(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ha un minimo in x_0.

Infatti $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$; quindi $g'(x) \geq 0$ per $x > x_0$ e $g'(x) \leq 0$ per $x < x_0$. Quindi effettivamente esiste un minimo in x_0.



La retta tangente ha equazione $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Consideriamo $g(x)$ come differenza tra la funzione e la retta tangente. A questo punto $g(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$, quindi $g(x) \geq 0 \ \forall x$.

Teorema 17.14. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile, allora f è convessa se e solo se f' è non decrescente.*

Lemma 17.15. *Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è convessa se e solo se, comunque scelti $u < v < w$ in I, vale*

$$\varphi(v, u) \leq \varphi(w, u) \leq \varphi(w, v)$$

Definiamo la funzione φ:

$$\varphi(v, u) = \frac{f(v) - f(u)}{v - u}$$

Dimostrazione. Diamo un'idea della dimostrazione, visto che non c'è niente di profondo in essa.

Sia $v = u + t(w - u)$ con $0 < t < 1$. La convessità equivale a

$$\begin{aligned} f(v) &\leq f(u) + \frac{v-u}{w-u}(f(w) - f(u)) \\ &\leq f(u) \cdot \frac{w - u - (v - u)}{w - u} + \frac{v-u}{w-u} f(w) \end{aligned}$$

Quindi

$$f(v) - f(u) \leq \frac{v-u}{w-u}(f(w) - f(u))$$

Dividendo per $v - u$ otteniamo esattamente $\varphi(u, v) \leq \varphi(w, u)$.

Per ottenere l'altra disuguaglianza procediamo nello stesso modo:

$$f(v) - f(w) \leq \frac{w-v}{w-u} f(u) + \frac{v-w}{w-u} f(w)$$

Dividendo per $v - w$, con qualche passaggio si arriva a far vedere che $\varphi(w, v) \geq \varphi(w, u)$. $\square$

Possiamo ora procedere a dimostrare il teorema.

Dimostrazione. Sia f una funzione convessa e siano $u < v < w$. Allora $\varphi(v,u) \leq \varphi(w,u)$ per il lemma. Ovvero

$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u} \leq \frac{f(w)-f(u)}{w-u}$$

Osservando che $f'(u) = \lim_{v\to 0^+} \frac{f(v)-f(u)}{v-u}$, possiamo riscrivere la precedente come

$$f'(u) \leq \frac{f(w)-f(u)}{w-u}$$

Consideriamo ora invece $\varphi(w,u) \leq \varphi(w,v)$ e procediamo in modo analogo:

$$\frac{f(w)-f(u)}{w-u} \leq \frac{f(w)-f(v)}{w-v}$$

$$\lim_{v\to w} \frac{f(u)-f(w)}{v-w} = f'(w)$$

$$\frac{f(w)-f(u)}{w-u} \leq f'(w)$$

Combinando i due risultati ottenuti si vede che $f'(u) \leq f'(w)$. Quindi abbiamo mostrato che f' è non decrescente. □

Mostriamo l'altra implicazione del teorema.

Dimostrazione. Supponiamo f' non decrescente e prendiamo $u < v < w$. Per il teorema di Lagrange:

- $\exists\ u < a < v$ tale che $f'(a) = \varphi(u,v)$
- $\exists\ v < b < w$ tale che $f'(b) = \varphi(w,v)$

Osserviamo che $a < b$ e f' è non decrescente, quindi $f'(a) \leq f'(b)$ cioè $\varphi(u,v) \leq \varphi(w,v)$. Sia $v = (1-t)u + tw = u + t(w-u)$. Allora

$$\frac{f(v)-f(u)}{t(w-u)} \leq \frac{f(w)-f(v)}{(1-t)(w-u)}$$

Quindi

$$(1-t)(f(v)-f(u)) \leq t((f(w)-f(v))$$

Raccogliendo $f(v)$:

$$\begin{aligned} f(v) &\leq t\cdot f(w) + (1-t)\cdot f(u) \\ &\leq f(u) + t(f(w)-f(u)) \end{aligned}$$

Che è la definizione di convessità. □

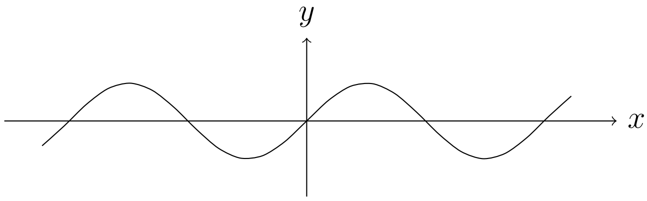
Corollario 17.16. *Se $f : I \to \mathbb{R}$ è derivabile due volte, allora è convessa se e solo se $f''(x) \geq 0$ in ogni punto.*

Dimostrazione. Sia $g = f'$. Allora f è convessa se e solo se g è non decrescente. $g' = f'' \geq 0$ se e solo se g è non decrescente. □

Esempio 17.17. Consideriamo $f(x) = \sin x$.

La sua derivata prima è $f'(x) = \cos x$ ed è positiva per $(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2})$.

La sua derivata seconda è $f''(x) - \sin x$ ed è positiva per $(2k\pi - \pi, 2k\pi)$.



In 0 e π la funzione passa da convessa a concava (o viceversa).

17.4 Punti di flesso e punti a tangente verticale

Definizione 17.18. Si dice che x è un *punto di flesso* per f se f è concava in $(x, x+\delta)$ e f è convessa in $(x-\delta, x)$ o viceversa.

Nei punti di flesso la tangente attraversa il grafico della funzione. Tuttavia non è vero il viceversa: nella funzione $f(x) = x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}$, 0 non è un punto di flesso.

Definizione 17.19. Si dice che x_0 è un *punto a tangente verticale* per f se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

è infinito.

Esempio 17.20. Consideriamo $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ e calcoliamo il limite per $x \to 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x^{-\frac{2}{3}} = +\infty$$

Calcoliamo anche la derivata seconda: $f' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ e $f'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$. Essa è positiva per $x < 0$ e negativa per $x > 0$.

Quindi in questa funzione 0 è un punto di flesso a tangente verticale.

Non si pensi però che sia sempre così. Consideriamo per esempio questa funzione.

Esempio 17.21. Sia $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + x^2 \sin \frac{1}{x}$. Calcoliamo la derivata prima in 0:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(x^{-\frac{2}{3}} + x \sin \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

Quindi zero è un punto a tangente verticale. Per scoprire se è anche un punto di flesso, calcoliamo la derivata seconda.

$$\begin{aligned} f' &= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(\cos \frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f'' &= -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} + 2\sin\frac{1}{x} + 2x\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \left(\sin\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
&= \frac{1}{x^2}\left(-\frac{2}{9}x^{\frac{1}{3}} + \left(2\sin\frac{1}{x}\right)x^2 - 2x\cos\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}
$$

Per x sufficientemente piccolo, il segno dipende dal segno di $\sin\frac{1}{x}$ che però oscilla. Quindi 0 non è un punto di flesso.

Diciottesima lezione (15/12/2015)

18.1 Teorema di Cauchy

Teorema 18.1 (Cauchy). *Siano due funzioni $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue e derivabili in (a, b). Sia $g'(x) \neq 0$ in ogni $x \in (a, b)$. Allora esiste $x \in (a, b)$ tale che*

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Esempio 18.2. Se $g(x) = x$ allora il teorema può essere più semplicemente riformulato come segue: esiste $x \in (a, b)$ tale che

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Il teorema di Cauchy è quindi una generalizzazione del teorema di Lagrange.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che il denominatore $g(b) - g(a)$ è ben definito, essendo sempre diverso da 0. Per renderlo nullo dev'essere $g(b) = g(a)$, ma in quel caso esisterebbe per il teorema di Rolle un $x \in (a, b)$ tale che $g'(x) = 0$. Questo è assurdo, perché la derivata di $g(x)$ è non nulla per ipotesi.

Consideriamo la funzione $\varphi(x)$ che combina con opportuni coefficienti $f(x)$ e $g(x)$:

$$\varphi(x) = (g(b) - g(a)) \cdot f(x) - (f(b) - f(a)) \cdot g(x)$$

Calcoliamo il valore di $\varphi(x)$ negli estremi a, b:

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= (g(b) - \cancel{g(a)}) \cdot f(a) - (f(b) - \cancel{f(a)}) \cdot g(a) \\ \varphi(b) &= (\cancel{g(b)} - g(a)) \cdot f(b) - (\cancel{f(b)} - f(a)) \cdot g(b) \end{aligned}$$

Osserviamo che $\varphi(a) = \varphi(b)$. Inoltre φ è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Quindi per il teorema di Rolle esiste x dove

$$0 = \varphi'(x) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(x) - (f(b) - f(a)) \cdot g'(x)$$

$$f'(x) = \frac{(f(b) - f(a)) \cdot g'(x)}{g(b) - g(a)}$$

□

18.2 Teoremi di de l'Hôpital

Teorema 18.3 (de l'Hôpital). *Siano $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ (è ammesso $a = -\infty$) tali che:*

1. $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} g(x) = 0$
2. *f, g derivabili in (a, b) e $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$*
3. *esiste* $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Allora esiste

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esempio 18.4. Supponiamo di voler calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$$

che è una forma di indeterminazione del tipo $\frac{0}{0}$. Osserviamo che entrambe le funzioni sono continue e valgono 0 in 0.

Calcoliamo le derivate:

$$D(e^{x^2} - 1) = e^{x^2} \cdot 2x$$
$$D(\cos x - 1) = -\sin x$$

Per il teorema di de l'Hôpital il limite di partenza è uguale a

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} \cdot 2x}{-\sin x} \sim \lim_{x\to 0} \frac{2x}{-\sin x} = -2$$

Esempio 18.5. Supponiamo di voler calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + 2}{x + 1}$$

Esso non è del tipo $\frac{0}{0}$ e quindi il teorema di de l'Hôpital non è applicabile.

Dimostrazione. Supponiamo $a \in \mathbb{R}$. Sia $x \in (a, b)$: possiamo definire $f(a) = 0$ e $g(a) = 0$; in questo modo f e g sono definite su $[a, x) \to \mathbb{R}$ e sono continue.

Per la seconda ipotesi le funzioni sono derivabili in (a, b) e $g'(y) \neq 0$ $\forall y$.

Per il teorema di Cauchy esiste z, compreso tra $a < z < x$, per cui

$$\frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Per x che tende ad a anche z tende ad a. Quindi:

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{z\to a} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

□

Dimostrazione. Dimostriamo ora il caso in cui l'estremo sia infinito. Se $a = -\infty$ possiamo supporre senza perdita di generalità che $b < 0$.

Definiamo $F(t) = f(\frac{1}{t})$ e $G(t) = g(\frac{1}{t})$. Le due funzioni F e G sono derivabili in $(\frac{1}{b}, 0)$.

$$\lim_{t\to 0} F(t) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{t\to 0} G(t) = \lim_{x\to -\infty} g(x) = 0$$

Calcoliamo le derivate delle funzioni F e G:

$$F'(t) = -\frac{1}{t^2} \cdot f'(\frac{1}{t})$$

$$G'(t) = -\frac{1}{t^2} \cdot g'(\frac{1}{t})$$

Essendo anche $G'(t) \neq 0\ \forall t$, possiamo applicare de l'Hôpital a F e G:

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t\to 0^-} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t\to 0^-} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x\to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

D'altra parte il limite da cui siamo partiti nell'ultimo calcolo è

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$\square$

Teorema 18.6 (de l'Hôpital II). *Siano $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ (è ammesso $a = -\infty$) tali che:*

1. $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} g(x) = +\infty$
2. *f, g derivabili in (a, b) e $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a, b)$*
3. *esiste* $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Allora esiste

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Osservazione 18.7. Il teorema vale indifferentemente anche per $x \to b^-$.

Esempio 18.8. Supponiamo di voler calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x + \sin x}{x} \qquad \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$$

Se de l'Hôpital fosse applicabile il limite sarebbe uguale a

$$\lim_{x\to +\infty} 1 + \cos x$$

Tuttavia questo limite non esiste perché per $x \to +\infty$ il coseno oscilla. Quindi il teorema non è applicabile.

Esempio 18.9. Anche qualora de l'Hôpital fosse applicabile, non è sempre conveniente farlo. Consideriamo questo limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}} \qquad \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$$

Applicando il teorema il limite è uguale a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}}$$

Non si va quindi molto lontano. Tuttavia, bastava procedere in modo diretto:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \frac{1}{x} + 2}{x - \frac{1}{x}} \sim \frac{x}{x} = 1$$

18.3 Polinomio di Taylor

Sappiamo che $e^x - 1 \sim x$, ovvero che $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

Osserviamo che $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x} = 0$ perché $e^x = 1 + x + o(x)$. Quindi $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Diciamo che $f(x) = o(x^2)$ se $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.

Siamo ora pronti ad enunciare la formula di Taylor. Sia f derivabile in x_0, allora

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P(x)} + o(x - x_0)$$

Nell'equazione $P(x)$ rappresenta un polinomio in x di grado 1. Osserviamo che $P(x_0) = f(x_0)$ e che quindi la sua derivata $P'(x_0)$ è $f'(x_0)$.

In generale scriviamo

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)$$

La derivata k-esima è

$$D^k(x - x_0)^j = D^{k-1} \cdot D(x - x_0{}^j)$$

$$D^{k-1}(j(x - x_0)^{j-1}) = j \cdot (j-1) \cdot \ldots \cdot (j - k + 1) \cdot (x - x_0)^{j-k}$$

Per $j \geq k$ essa vale 0, altrimenti calcolando in x_0 $D^k((x - x_0)^j)(x_0)$:

$$\begin{cases} j \cdot (j-1) \ldots \cdot (j - k + 1) = j! & \text{se } j = k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi in definitiva scriviamo che $(D^k P_n(x))(x_0) = a_k \cdot k!$.

Se f è derivabile n volte, esiste un unico polinomio $P_n(x)$ di grado n tale che

$$(D^k P_n(x))(x_0) = D^k f(x_0) \qquad 0 \leq k \leq n$$

Poniamo $D^0 f = F$. Il polinomio è $P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n$, ma d'altra parte

$$a_k \cdot k! = \frac{D^k \cdot f(x_0)}{k!}$$

Quindi

$$P_n(x) = \underbrace{\frac{f(x_0)}{0!}}_{1} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$P_n(x)$ è detto *polinomio di Taylor* di f di grado n con centro in x_0. Per $x_0 = 0$ tale polinomio particolare è detto *polinomio di McLaurin*.

Osservazione 18.10. Se f è un polinomio di grado n, allora coincide con il suo polinomio di Taylor di grado n.

Esempio 18.11. Consideriamo la funzione $f(x) = e^x$ e calcoliamo il suo polinomio con centro in $x_0 = 0$.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k e^x(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^0}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Nel primo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che $De^x = e^x$, quindi $D^k e^x = e^x$.
Ad esempio in questo caso $P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

Esempio 18.12. Consideriamo la funzione $f(x) = \sin x$ e calcoliamo il suo polinomio con centro in $x_0 = 0$.

Calcoliamo le prime derivate della funzione: $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$. Generalizziamo il comportamento:

$$D^k \sin x(0) = \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} & k \text{ dispari} \end{cases}$$

Quindi il suo polinomio è

$$\begin{aligned} P_n(x) &= 0 + \frac{x}{1!} + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + \ldots \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \end{aligned}$$

Esempio 18.13. Consideriamo la funzione $f(x) = \cos x$ e calcoliamo il suo polinomio con centro in $x_0 = 0$.

Calcoliamo le prime derivate della funzione: $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$. I valori delle derivate sono del tipo:

$$\{D^k \cos x(0)\}_{k \in \mathbb{N}} = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, \ldots\}$$

Quindi il suo polinomio è

$$P_n(x) = 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + 0 - \ldots$$

In generale possiamo scrivere la seguente formula:

$$\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{(2k)!}$$

Osserviamo in particolare che considerando il polinomio di secondo grado $P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ si ricava un limite notevole già affrontato: $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$.

Esempio 18.14. Consideriamo la funzione $f(x) = \arctan x$ e calcoliamo il suo polinomio con centro in $x_0 = 0$.

Calcoliamo le prime derivate della funzione:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$
$$f'''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 4x(1+x^2)2x}{(1+x^2)^3}$$

Si calcola facilmente che $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$ e $f'''(0) = -2$. Il polinomio di terzo grado è quindi

$$P_3(x) = x - \frac{2}{3!}x^3 = x - \frac{1}{3}x^3$$

Generalizzando

$$P_n(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Esempio 18.15. Consideriamo la funzione $f(x) = \log(1+x)$ e calcoliamo il suo polinomio con centro in $x_0 = 0$.

Calcoliamo le prime derivate della funzione:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x^2)^2}$$

In generale

$$f(x)(0) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(1+x)^n}$$

Il polinomio è quindi

$$P_n(x) = \sum_{n=1}^{n} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

$$P_n(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Diciannovesima lezione (18/12/2015)

19.1 Formula di Taylor con resto in forma di Peano

Nella precedente lezione abbiamo enunciato cos'è un polinomio di Taylor. Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, derivabile $n-1$ volte con $f^{(n-1)}$ derivabile in x_0, si definisce *polinomio di Taylor*

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

Inoltre avevamo già mostrato che il polinomio di Taylor è l'unico polinomio di grado n tale che

$$(D^k P_n(x))(x_0) = f^k(x_0) \qquad 0 \leq k \leq n$$

Teorema 19.1 (Formula di Taylor con resto in forma di Peano). *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile $n-1$ volte con $f^{(n-1)}$ derivabile in x_0. Allora*

$$f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$$

La funzione si può quindi esprimere tramite un polinomio di Taylor e un resto $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Tale resto soddisfa

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Dimostrazione. Definiamo una funzione σ in questo modo:

$$\sigma(x) = \begin{cases} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} & x \neq x_0 \\ 0 & x = x_0 \end{cases}$$

Per come è stata definita $\sigma(x)$ è continua in x_0, il che equivale a dire che il limite mostrato nel teorema vale 0. Nel resto della dimostrazione lo scopo sarà quindi mostrare la continuità di σ, attraverso una dimostrazione per induzione su n.

Dimostriamo il caso base, ovvero per $n = 1$

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= \frac{f(x) - P_1(x)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{x \to x_0} \sigma(x) = \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

per la definizione di derivata. Abbiamo quindi mostrato che per $n = 1$ σ è continua in 0.

Per $n \geq 1$ supponiamo vera la tesi e dimostriamo che vale anche per $n + 1$. Poniamo

$$\sigma(x) = \begin{cases} \frac{R_{n+1}(x)}{(x - x_0)^{n+1}} & x \neq x_0 \\ 0 & x = x_0 \end{cases}$$

La funzione R_{n+1} è continua e derivabile in $[x_0, x_0 + \varepsilon]$. Infatti

$$\lim_{x \to x_0^+} R_{n+1}(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) - P_{n+1}(x) = f(x_0) - P_{n+1}(x_0) = 0$$

Anche il denominatore $(x - x_0)^{n+1}$ è continuo e derivabile in $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ e $\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^{n+1} = 0$.

Quindi σ presenta una forma di indeterminazione del tipo $\frac{0}{0}$ e rispetta le ipotesi di de l'Hôpital, ovvero se esiste

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R'_{n+1}(x)}{D(x - x_0)^{n+1}} = \lim_{x \to x_0} \sigma(x)$$

La derivata del numeratore, sapendo che $R_{n+1}(x) = f(x) - P_{n+1}(x)$, è $R'_{n+1}(x) = f'(x) - P'_{n+1}(x)$.

Sappiamo anche che l'n-esimo polinomio di Taylor di $g = f'$ è l'unico polinomio $Q_n(x)$ di grado n tale che

$$D^k Q_n(x) = g^{(k)}(x_0) \qquad\qquad \forall\, 0 \leq k \leq n$$

Per definizione $g^{(k)}(x_0) = f^{(k+1)}(x_0)$; quindi se deriviamo $P'_{n+1}(x) = Q_n(x)$ perché

$$D^k P'_{n+1}(x_0) = D^{k+1} P_{n+1}(x_0) = f^{(k+1)}(x_0)$$

Per ipotesi induttiva $g - Q_n(x) = o((x - x_n)^n)$, quindi $(R_{n+1})' = o((x - x_0)^n)$.

La derivata del denominatore della funzione σ è banalmente $(n + 1) \cdot (x - x_0)^n$. Quindi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{o((x - x_0)^n)}{(n + 1) \cdot (x - x_0)^n} = 0$$

□

Esempio 19.2. Grazie agli sviluppi di Taylor è possibile risolvere anche limiti di funzioni estremamente complicate, come ad esempio

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\sin x - x)(\cos 2\sqrt{x} - e^{-2x})}{(1-\cos x)(x \cdot \log(1-x) + e^{x^2} - 1)} \qquad \left[\frac{0}{0}\right]$$

Scriviamo separatamente gli sviluppi di Taylor delle funzioni coinvolte.
Sappiamo che $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$, quindi $\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^4)$. Segue che

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6} + o(x) \implies \sin x - x \sim -\frac{1}{6}x^3$$

Il coseno si può esprimere come $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^6)$, quindi

$$\cos 2\sqrt{x} = 1 - \frac{4x}{2!} + \frac{2^4 x^2}{4!} + o(x^3)$$

L'esponenziale è $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, quindi $e^{-2x} = 1 - 2x + 2x^2 + o(x^2)$. Possiamo quindi sommare il secondo temine:

$$\begin{aligned}\cos 2\sqrt{x} - e^{-2x} &= \cancel{1-2x} + \frac{2}{3}x^2 + o(x^3) - (\cancel{1-2x} + 2x^2 + o(x^2)) \\ &= -\frac{4}{3}x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

Quindi $\cos 2\sqrt{x} - e^{-2x} \sim -\frac{4}{3}x^2$. Possiamo procedere con il denominatore.

$\log(1+x) = x + o(x)$, quindi $\log(1-x) = -x + o(x)$ e quindi $x\log(1-x) = -x^2 + o(x^2)$.

L'esponenziale, per quanto già visto in precedenza, si può esprimere come $e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^3)$.

Sorge un problema: sommando $x\log(1-x) + e^{x^2} - 1 = -x^2 + o(x^2) + x^2 + o(x^2)$ resta solo il termine $o(x^2)$ e questo non va bene. Dobbiamo per forza procedere a calcolare il termine successivo negli sviluppi di Taylor fino a trovare il primo termine che non si annulli.

In questo caso basta scrivere $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, quindi $xlog(1-x) = -x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Poiché nello sviluppo dell'esponenziale è assente il termine x^3, abbiamo risolto il problema:

$$x\log(1-x) + e^{x^2} - 1 = -\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$$

Il limite di partenza si può quindi scrivere come

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x^3}{6}\cdot\left(-\frac{4}{3}x^2\right)}{\frac{1}{2}x^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^3} = -\frac{4}{18}\cdot 4 = -\frac{8}{9}$$

19.2 Formula di Taylor con resto in forma di Lagrange

Teorema 19.3 (Formula di Taylor con resto in forma di Lagrange). *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile $n+1$ volte, definita su I intervallo aperto. Per ogni $x, x_0 \in I$ esiste c compreso tra x e x_0 tale che*

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

Lasciamo il teorema senza dimostrazione ma ne facciamo utilizzo in due esempi.

Esempio 19.4. Supponiamo di voler calcolare $\frac{1}{e}$ con due cifre decimali, ovviamente senza ausilio della calcolatrice.

Possiamo scrivere

$$\frac{1}{e} = \exp(-1) = P_n(-1) + \frac{1}{(n+1)!} \cdot e^c \cdot (-1)^{n+1}$$

dove $x_0 = 0$. Esplicitiamo il polinomio di Taylor della funzione esponenziale:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$$

$$P_n(-1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Consideriamo la serie $\sum_{k=0}^{n} a_k$. Essa converge per il criterio di Leibniz: è a segni alterni, $\lim \frac{1}{k!} = 0$ e $\{\frac{1}{k!}\}$ è decrescente.

Il limite è compreso quindi tra ogni coppia di somme parziali consecutive. Calcoliamo quindi i primi termini della serie: $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = -\frac{1}{6}$, $a_4 = \frac{1}{24}$ e così via... Possiamo quindi ora calcolare le prime somme parziali: $s_0 = 1$, $s_1 = 0$, $s_2 = \frac{1}{2}$, $s_3 = \frac{1}{3}$, $s_4 = 0,375$, $s_5 = 0,3\overline{6}$, $s_6 = 0,368...$.

Essendo $s_5 < \frac{1}{e} < s_6$, allora $\frac{1}{e} = 0,36...$.

Esempio 19.5. Supponiamo di voler calcolare $\log(\frac{4}{3})$. Il polinomio di Taylor di $\log(1+x)$ con centro in 0 è

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot D^k \log(1+x) \cdot x^k$$

La derivata n-esima della funzione $\log(1+x)$ è

$$D^n \log(1+x) = (n-1)! \cdot (-1)^n \cdot x^{-n}$$

Quindi

$$\log(1+x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \qquad 0 < c < x$$

Nel nostro caso $x = \frac{1}{3}$, quindi

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} = \frac{n!(-1)^{n+1}c^{-n+1}}{(n+1)!} = \frac{(-1)^{n+1}c^{-n+1}}{n+1}$$

Il nostro calcolo $\log(\frac{4}{3})$ è quindi equivalente a $\lim_{n\to+\infty} P_n(\frac{1}{3})$. Consideriamo la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{3^k}}{k}$$

Essa soddisfa Leibniz. Quindi $\log(\frac{4}{3})$ è contenuto tra somme parziali consecutive della serie.

I primi termini sono $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = -\frac{1}{18}$, $a_3 = \frac{1}{108}$ e così via. Le prime somme parziali sono $s_1 = \frac{1}{3}$, $s_2 = 0,2\overline{7}$, $s_3 = 0,290...$, $s_4 = 0,287....$

Quindi $\log(\frac{4}{3}) = 0,28...$.

Corollario 19.6. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile n volte con $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ e $f^{(n)} \neq 0$. Allora:*

- *se n è pari e $f^{(n)} > 0$ allora x_0 è un punto di minimo relativo*
- *se n è pari e $f^{(n)} < 0$ allora x_0 è un punto di massimo relativo*
- *se n è dispari allora x_0 non è né un punto di massimo né di minimo relativo*

Dimostrazione. Sia $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$. Essendo nulle le prime $n-1$ derivate si può scrivere

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

Definiamo $\sigma(x) = \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}$. Osserviamo che $\sigma(x) = o(1)$, ovvero che $\lim_{x\to 0} \sigma(x) = 0$. Possiamo ora riscrivere $f(x)$:

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)^n \cdot \left(\frac{f^n(x_0)}{n!} + \sigma(x)\right)$$

Per ipotesi il termine $\frac{f^n(x_0)}{n!} \neq 0$. Poiché $\lim_{x\to x_0} \frac{f^n(x_0)}{n!} + \sigma \neq 0$, per il teorema di permanenza del segno in un intorno di x_0 vale che $\frac{f^n(x_0)}{n!} + \sigma(x)$ ha lo stesso segno di $f^{(n)}(x_0)$.

- Se n è pari allora $(x-x_0)^n$ è sempre positivo per $x \neq x_0$; quindi $f(x) - f(x_0)$ è positiva in un intorno $B'_\varepsilon(x_0)$ se $f^{(n)}(x_0) > 0$ e negativa altrimenti.

  Quindi nei due casi x_0 è rispettivamente un punto di minimo e massimo relativo.

- Se n è dispari allora $(x-x_0)^n$ è positivo per $x > x_0$ e negativo in caso contrario. Quindi se $f^{(n)}(x_0) > 0$ allora $f(x) - f(x_0)$ è positivo per $x > x_0$ e negativo in caso contrario. Analogamente accade se la derivata n-esima è negativa.

  Quindi x_0 non può essere un punto di massimo o minimo relativo.

$\square$

Esempio 19.7. Consideriamo la funzione $f(x) = \sin x$, la cui derivata $f'(x) = \cos x$ si annulla in $\pm\frac{\pi}{2}$.

La sua derivata seconda è $-\sin x$. Essa vale vale -1 in $x = \frac{\pi}{2}$, che è quindi un punto di minimo relativo, e 1 in $x = -\frac{\pi}{2}$, che è quindi un punto di massimo relativo.

Ciò rispetta quanto ci potevamo aspettare osservando il grafico.

Ventesima lezione (22/12/2015)

20.1 Punti di non derivabilità

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in I$. Diciamo che f ha un *punto a tangente verticale* in $x \in I$ se è continua in x e

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \pm\infty$$

Si scrive $f'(x) = \pm\infty$.

Esempio 20.1. Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e calcoliamone il rapporto incrementale in $x = 0$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = +\infty$$

Quindi per la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ il punto 0 è un punto a tangente verticale.

Definizione 20.2. Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $x \in [a, b)$ si dice *derivata destra* di $f(x)$ il limite, se esiste,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si scrive $f'_+(x)$.

Definizione 20.3. Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $x \in (a, b]$ si dice *derivata sinistra* di $f(x)$ il limite, se esiste,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si scrive $f'_-(x)$.

Proposizione 20.4. *Se f è continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) ed esiste $\lim_{x\to a^+} f'(x) = L$ finito o infinito, allora $f'_+(a) = L$.*

Analogamente, se esiste $\lim_{x\to b^-} f'(x) = L$ finito o infinito, allora $f'_-(b) = L$.

Dimostrazione. Fissato $h > 0$ si può applicare il teorema di Lagrange alla funzione $f : [a, a + h] \to \mathbb{R}$. Troviamo quindi che esiste ξ compreso tra $a < \xi < a + h$ tale che

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(\xi)$$

Per $h \to 0$, $\xi \to a$. Quindi $f'(\xi)$ tende ad L e per definizione di derivata

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L$$

$\square$

Supponiamo f continua in x e $f'_+(x) = f'_-(x)$, allora f è derivabile.

Se invece f è continua in x ma $f'_+(x)$ e $f'_-(x)$ esistono diverse, allora f ha un *punto angoloso* in x.

Se f è continua in x ma $f'_+(x) = +\infty$ e $f'_-(x) = -\infty$ (o viceversa), allora x è un *punto di cuspide.*

Esempio 20.5. Sia $f(x) = |x|$. La derivata sinistra in 0 vale -1, mentre la derivata destra vale 1. Pertanto, come ci si poteva aspettare osservando il grafico della funzione, 0 è un punto angoloso.

Esempio 20.6. Sia $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Essa è continua perché è la composizione di funzioni continue. La sua derivata è $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$.

La derivata sinistra in 0 vale $-\infty$, mentre quella destra vale $+\infty$. Quindi in 0 la funzione presenta una cuspide.

Proposizione 20.7. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile in (a, b), allora $f'(x)$ assume ogni valore tra $f'(a)$ e $f'(b)$.*

Da questa proposizione segue che se f è derivabile in (a, b), allora f' non ha discontinuità di prima specie. Altrimenti sarebbe

$$\lim_{x \to c^-} f'(x) \neq \lim_{x \to c^+} f'(x)$$

Inoltre f' non può avere nemmeno discontinuità eliminabili.

Esempio 20.8. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

La sua derivata, in accordo a quanto abbiamo detto sopra, ha solo una discontinuità di seconda specie in $x = 0$.

20.2 Integrale indefinito

Parlando di derivate avevamo già espresso la definizione di *primitiva.* Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, dove I è un intervallo, si dice che F è una primitiva di f se $F' = f$.

Definizione 20.9. Si dice *integrale indefinito* di $f(x)$ l'insieme di tutte le primitive di $f(x)$. Si scrive:

$$\int f(x)\, dx$$

Quindi $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ se e solo se $F(x) \in \int f(x)\,dx$. Per notazione useremo d'ora in avanti la scrittura imprecisa $F(x) = \int f(x)\,dx$.

Ricordiamo inoltre che avevamo già osservato che data una primitiva $F(x)$ tutte le primitive hanno la forma $F(x) + k$ con $k \in \mathbb{R}$.

Scriviamo ora le derivate delle funzioni elementari, da cui seguono le rispettive primitive.

$$
\begin{aligned}
Dx^{\alpha+1} = (\alpha+1)\cdot x^{\alpha} &\implies \int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \\
D\log|x| = \frac{1}{x} &\implies \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| \\
D\cos x = -\sin x &\implies \int \sin x\,dx = -\cos x \\
D\sin x = -\cos x &\implies \int \cos x\,dx = \sin x \\
D\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x &\implies \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x \\
De^x = e^x &\implies \int e^x\,dx = e^x \\
D\arctan x = \frac{1}{1+x^2} &\implies \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x \\
D\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &\implies \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x
\end{aligned}
$$

Ricordiamo che $\arcsin x$ e $\arccos x$ si derivano grazie alla regola di derivazione della funzione inversa. Mostriamo ad esempio la derivata di $\arcsin x$.

Si pone $\arcsin x = y$, quindi $x = \sin y$. Ora:

$$D(\arcsin x) = \frac{1}{D\sin y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Inoltre sappiamo che la funzione coseno si può esprimere attraverso la funzione seno ($\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$). Quindi tra le rispettive derivate ciò che cambia è solo il segno.

Osservazione 20.10. Se f e g ammettono una primitiva, allora anche la somma ammette una primitiva:

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Quanto scritto significa che, posto $F' = f$ e $G' = g$, allora $(F+G)' = F' + G'$.

Osservazione 20.11. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f(x)$ ha una primitiva $F(x)$, allora

$$\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx$$

Ovvero, posto $F' = f$, allora $(\lambda F)' = \lambda f$.

Esempio 20.12. Calcoliamo l'integrale

$$\begin{aligned}
&\int (2e^x + \frac{1}{\sqrt{x}})\, dx \\
=&\int 2e^x\, dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \\
=&2\int e^x\, dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \\
=&2e^x + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2(e^x + \sqrt{x})
\end{aligned}$$

Si può procedere anche a una semplice verifica, derivando il risultato. Infatti $D[2(e^x + \sqrt{x})] = 2e^x + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.

20.3 Integrazione per parti

Proposizione 20.13 (Integrazione per parti). *Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni. Sia f derivabile; supponiamo che g abbia una primitiva G e $f \cdot g$ abbia una primitiva. Allora*

$$\int f(x)g(x)\, dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\, dx$$

Osserviamo che se $f(x)$ è una costante, allora l'integrazione per parti si riduce a quanto avevamo già scritto: $\int \lambda g(x)\, dx = \lambda G(x)$.

Dimostrazione. La dimostrazione fa uso della regola di derivazione del prodotto.

$$\begin{aligned}
(fG)' &= f'G + fG' \\
(fG)' &= f'G + fg
\end{aligned}$$

Da cui segue immediatamente la regola di integrazione per parti. □

Esempio 20.14. Calcoliamo l'integrale

$$\int xe^x\, dx$$

Poniamo $f : x$ e $g : e^x$. Per la regola di integrazione per parti

$$\begin{aligned}
\int xe^x\, dx &= xe^x - \int 1 \cdot e^x\, dx \\
&= xe^x - e^x
\end{aligned}$$

La verifica è banale: $D[xe^x - e^x] = e^x + xe^x - e^x = xe^x$.

Ovviamente nessuno ci vieta di scambiare il ruolo alle funzioni e considerare $f : e^x$ e $g : x$, ma in questo modo otterremmo un integrale più difficile di quello di partenza.

$$\int xe^x\, dx = e^x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot e^x\, dx$$

Esempio 20.15. Calcoliamo l'integrale

$$\int \log x \, dx$$

A prima vista non sembra applicabile l'integrazione per parti, ma possiamo considerare l'integrale come

$$\int 1 \cdot \log x \, dx$$

Poniamo $f(x) = \log x$, che ha derivata $\frac{1}{x}$, e $g(x) = 1$, che ha primitiva x. Quindi

$$\begin{aligned} \int \log x \, dx &= x \log x - \int \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} \, dx \\ &= x \log x - x \end{aligned}$$

Esempio 20.16. Calcoliamo l'integrale

$$\int \cos^2 x \, dx$$

Ovviamente in questo caso f e g sono entrambe $\cos x$.

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \cos x \cdot \sin x - \int (-\sin x) \sin x \, dx \\ &= \sin x \cdot \cos x + \int \sin^2 x \, dx \\ &= \sin x \cdot \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx \\ &= \sin x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x \, dx \end{aligned}$$

Siamo ritornati all'integrale di partenza. Quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned} 2 \int \cos^2 x &= \sin x \cos x + x \\ \int \cos^2 x &= \frac{\sin x \cos x + x}{2} \end{aligned}$$

Verifichiamo il risultato derivandolo:

$$D \left[\frac{\sin x \cos x + x}{2} \right] = \frac{1}{2} \cos^2 x - \frac{1}{2} \sin^2 x + \frac{1}{2} = \cos^2 x$$

20.4 Sostituzione di variabile

Teorema 20.17. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ derivabile; con I e J intervalli tali che abbia senso la scrittura $f(g(x))$. Se $f(x)$ ha una primitiva $F(x)$ allora*

$$F(g(t)) = \int f(g(t)) \cdot g'(t) \, dt$$

In altri termini, posto $x = g(t)$:

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt \\ &= \int f(x) \cdot g'(t)\,dt\end{aligned}$$

Dimostrazione. La dimostrazione è semplice, grazie alla derivata della funzione composta:

$$\frac{d}{dt}F(g(t)) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$$

□

Esempio 20.18. Calcoliamo tramite sostituzione l'integrale

$$\int \tan t\,dt = \int \frac{\sin t}{\cos t}\,dt$$

Poniamo $x = g(t) = \cos t$, la cui derivata è $-\sin t$. Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin t}{\cos t}\,dt &= \int -D(\cos t) \cdot \frac{1}{\cos t}\,dt \\ &= \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt \\ &= \int f(x)\,dx \\ &= \int -\frac{1}{x}\,dx = -\log x\end{aligned}$$

Quindi

$$\int \tan x\,dx = -\log|\cos t|$$

Esempio 20.19. Calcoliamo tramite sostituzione l'integrale

$$\int \frac{1}{t\log t}\,dt$$

Poniamo $x = g(t) = \log t$, la cui derivata è $\frac{1}{t}$. Sappiamo che

$$\frac{1}{t\log t} = \frac{1}{x} \cdot g'(x)$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{t\log t}\,dt &= \int \frac{1}{g(t)} \cdot g'(t)\,dt \\ &= \int \frac{1}{x}\,dx \\ &= \log|x| = \log|\log t|\end{aligned}$$

Impropriamente, potremmo visualizzare ciò che abbiamo fatto con

$$\int \frac{1}{t\log t}\,dt = \int \frac{1}{x}\,\frac{dx}{\cancel{dt}} \cdot \cancel{dt} = \int \frac{1}{x}\,dx$$

Esempio 20.20. Calcoliamo tramite sostituzione l'integrale

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx$$

Sostituendo $u = e^x$ resta

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx &= \int \frac{1}{u + \frac{1}{u}} \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dx}} \cdot dx \\
&= \int \frac{1}{u + \frac{1}{u}} \frac{1}{\frac{du}{dx}} \cdot \frac{du}{\cancel{dx}} \cdot \cancel{dx} \\
&= \int \frac{1}{u + \frac{1}{u}} \cdot \frac{1}{u}\, du \\
&= \int \frac{1}{u^2 + 1}\, du \\
&= \arctan u = \arctan e^x
\end{aligned}$$

Ventunesima lezione (08/01/2016)

21.1 Divisione tra polinomi e polinomi irriducibili

Definizione 21.1. Dati due polinomi $P(x)$, $Q(x)$ diciamo che $Q(x)$ è un *divisore* di $P(x)$ se

$$P(x) = Q(x) \cdot M(x)$$

dove $M(x)$ è un polinomio.

Definizione 21.2. Si dice che $P(x)$ e $Q(x)$ sono *primi tra loro* se tutti i divisori comuni hanno grado zero.

Definizione 21.3. Si dice che $P(x)$ è *riducibile* se è il prodotto di due polinomi di grado positivo. È *irriducibile* altrimenti.

Osservazione 21.4. I polinomi irriducibili sono tutti di grado 1 o 2.

Esempio 21.5. Il polinomio $(x-1)$ è irriducibile. Anche il polinomio (x^2+x+1), avendo $\Delta < 0$, non ha radici reali e quindi è irriducibile.

Ogni polinomio si può scrivere nel seguente modo:

$$P(x) = {q_1}^{d_1} \cdot \ldots \cdot {q_k}^{d_k}$$

dove $q_1, \ldots, q_k$ sono polinomi irriducibili e $d_1, \ldots, d_k$ sono numeri naturali.

21.2 Integrale di una funzione razionale fratta

Traendo vantaggio da quanto detto finora, vogliamo calcolare

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

dati due polinomi $P(x)$ e $Q(x)$, supponendo di poter calcolare la scomposizione di $Q(x)$ in fattori irriducibili.

Possiamo supporre che $P(x)$ e $Q(x)$ siano primi tra loro, eliminando i fattori comuni. Banalmente:

$$\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{(x+1)^{\cancel{2}}} = \frac{x-1}{x+1}$$

Se $P(x)$ ha grado maggiore o uguale a quello di $Q(x)$, allora la divisione euclidea permette di scrivere il polinomio come prodotto tra due polinomi e un resto $r(x)$ di grado sicuramente minore di $Q(x)$.

$$P(x) = Q(x) \cdot q(x) + r(x)$$

Quindi

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = \int q(x)\, dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)}\, dx$$

Esempio 21.6. Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

Osserviamo che il numeratore è direttamente scomponibile come differenza di cubi, ma ai fini didattici scegliamo di eseguire comunque la divisione polinomiale. Dividiamo il numeratore per $x - 1$:

$$\begin{array}{rrrl}
x^3 & & -1 & = \big(x-1\big)\,\big(x^2+x+1\big) \\
\underline{-x^3+x^2} & & & \\
x^2 & & & \\
\underline{-x^2+x} & & & \\
 & x & -1 & \\
 & \underline{-x} & \underline{+1} & \\
 & & 0 &
\end{array}$$

Quindi $(x^3 - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$. Ora

$$\int \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}\, dx = \int \frac{x^2+x+1}{x+1}\, dx$$

Eseguiamo nuovamente la divisione polinomiale:

$$\begin{array}{rl}
x^2 + x + 1 & = \big(x+1\big)\, x + 1 \\
\underline{-x^2 - x} &
\end{array}$$

L'integrale si può ora riscrivere come

$$\int \frac{x^2+x+1}{x+1}\, dx = \int \frac{x(x+1)+1}{x+1}\, dx = \int \left(x + \frac{1}{x+1}\right) dx = \frac{x^2}{2} + \log|x+1|$$

Per proseguire con ulteriori tipologie di funzioni razionali fratte abbiamo bisogno della seguente proposizione.

Proposizione 21.7. *Dati $P(x)$, $Q(x)$ polinomi primi tra loro, con $P(x)$ di grado minore di $Q(x)$. Sia $Q(x) = {q_1}^{d_1} \cdot \ldots \cdot {q_k}^{d_k}$ la scomposizione di $Q(x)$ in fattori irriducibili.*

Allora esistono polinomi $p_1, \ldots, p_k$ tali che

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1}{{q_1}^{d_1}} + \ldots + \frac{P_k}{{q_k}^{d_k}}$$

Il fatto interessante è che per ogni termine P_j ha grado minore di ${q_j}^{d_j}$.

Esempio 21.8. Consideriamo la frazione

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

il cui denominatore si scompone facilmente come $(x-2)(x+1)$. Per la proposizione appena enunciata sappiamo che

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{P_1}{x-2} + \frac{P_2}{x-1}$$

Essendo i denominatori di grado 1, abbiamo che P_1 e $P_2 \in \mathbb{R}$. Per calcolarli applichiamo il principio di identità dei polinomi.

$$\begin{aligned} 1 &= P_1(x-1) + P_2(x-2) \\ &= x(P_1 + P_2) - P_1 - 2P_2 \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{cases} P_1 + P_2 = 0 \\ -P_1 - 2P_2 = 1 \end{cases}$$

Da cui segue immediatamente $P_1 = 1$ e $P_2 = -1$. Quindi ora sappiamo che

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

L'integrale di questa funzione è quindi

$$\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2}\, dx = \log|x-2| - \log|x-1|$$

21.3 Frazioni con denominatore $(x-a)^n$

Se il numeratore $P(x)$ ha grado $k < n$, allora

$$P(x) = A_0 + A_1(x-a) + \ldots + A_k(x-a)^k$$

Quindi

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n} = \frac{A_0}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^{n-k}}$$

L'integrale è quindi risolvibile (nei casi $n - j \neq 1$) come

$$\int \frac{A_j}{(x-a)^{n-j}}\, dx = \frac{A_j(x-a)^{-(n-j)+1}}{-(n \cdot j) + 1}$$

Esempio 21.9. Consideriamo l'integrale

$$\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$$

Per quanto abbiamo detto sappiamo che

$$\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{A_0}{(x+1)^2} + \frac{A_1}{(x+1)}$$

Quindi $x = A_0 + (x+1)A_1$, da cui segue $A_1 = 1$ e $A_0 = -1$. Passando all'integrale:

$$\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx = \int \left[-\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}\right] dx = \frac{1}{x+1} + \log|x+1|$$

Esempio 21.10. Consideriamo l'integrale

$$\int \frac{x}{x^3+x^2-x-1}\,dx$$

Poiché il denominatore ha coefficienti interi e il coefficiente di grado massimo è 1, possiamo cercare le radici del polinomio tra i divisori di -1. In questo caso sia $x = 1$ che $x = -1$ sono radici del polinomio. Eseguiamo la divisione polinomiale.

$$\begin{array}{rrrr}
x^3 & +x^2 & -x & -1 = \big(x-1\big)\big(x^2+2x+1\big) \\
-x^3 & +x^2 & & \\
\hline
 & 2x^2 & -x & \\
 & -2x^2 & +2x & \\
\hline
 & & x & -1 \\
 & & -x & +1 \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

Quindi $x^3 + x^2 - x - 1 = (x-1)(x^2+2x+1) = (x-1)(x+1)^2$. Possiamo quindi scrivere

$$\frac{x}{x^3+x^2-x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

Con qualche passaggio si trova $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$ e $C = \frac{1}{2}$. Passando all'integrale:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^3+x^2-x-1}\,dx &= \int \left[\frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2}\right] dx \\
&= \frac{1}{4}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log|x+1| - \frac{1}{2(x+1)}
\end{aligned}$$

Osservazione 21.11. Per calcolare $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, con k = grado di $Q(x) > 1$, ci si può ridurre al caso in cui il grado di $P(x)$ è minore di $k-1$.

Si divide per $Q'(x)$ (derivata di $Q(x)$):

$$P(x) = \alpha Q'(x) + r(x)$$

Per costruzione sappiamo sicuramente che il grado del resto $r(x)$ è minore di $k-1$. L'integrale diventa quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx &= \int \left[\frac{\alpha Q'(x)}{Q(x)} + \frac{r(x)}{Q(x)}\right] dx \\ &= \alpha \log|Q(x)| + \int \frac{r(x)}{Q(x)}\,dx\end{aligned}$$

Esempio 21.12. Consideriamo l'integrale

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

In questo caso $Q'(x) = 2x$. Facciamo in modo di ottenere la derivata al numeratore:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\log|x^2+1|$$

Esempio 21.13. Consideriamo l'integrale

$$\int \frac{x+1}{x^2+2}\,dx$$

Il denominatore x^2+2 è irriducibile e $Q'(x) = 2x$. Possiamo quindi scriverlo come

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx + \int \frac{1}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\log|x^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}$$

Nell'ultimo esempio abbiamo risolto un integrale della forma $\frac{1}{x^2+a^2}$. Mostriamo da dove deriva la formula di integrazione.

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx$$

Si effettua la sostituzione $u = \frac{x}{a}$. Quindi:

$$\begin{aligned}&= \int \frac{1}{a^2(1+u^2)}\,\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dx}}\cdot dx \\ &= \int \frac{1}{a(1+u^2)}\,du \\ &= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\end{aligned}$$

Osservazione 21.14. In generale se il denominatore è irriducibile di secondo grado possiamo procedere così, grazie al complemento al quadrato:

$$x^2+bx+c = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \left(c-\frac{b^2}{4}\right)$$

Essendo il polinomio di partenza irriducibile, il suo $\Delta < 0$; quindi $b^2-4c<0$.

Poniamo $y = x + \frac{b}{2}$ e calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{1}{x^2 + bx + c}\, dx = \int \frac{1}{y^2 + (c - \frac{b^2}{4})}\, dy$$

Posto $a = \sqrt{c - \frac{b^2}{4}}$ si ottiene un integrale nella forma che abbiamo visto in precedenza:

$$\int \frac{1}{y^2 + a^2}\, dy = \frac{1}{a} \arctan \frac{y}{a}$$

Esempio 21.15. Consideriamo l'integrale

$$\int \frac{1}{x^2 + x + 1}\, dx$$

il cui denominatore è un polinomio irriducibile. Scriviamolo come

$$\int \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\, dx$$

Sia $x + \frac{1}{2} = y$, allora l'integrale torna nella forma nota:

$$\int \frac{1}{y^2 + \frac{3}{4}}\, dy = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \arctan \frac{y}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right)$$

21.4 Funzioni razionali fratte per sostituzione

Dati due polinomi $P(t)$, $Q(t)$, consideriamo ad esempio l'integrale

$$\int \frac{P(e^x)}{Q(e^x)}\, dx$$

Si può procedere per sostituzione $e^x = t$, osservando che $\frac{dt}{dx} = e^x = t$. Quindi:

$$\int \frac{P(t)}{Q(t)} \frac{\frac{dt}{dx}}{\frac{dt}{dx}} \cdot dx = \int \frac{P(t)}{tQ(t)} \frac{dt}{dx} \cdot dx = \int \frac{P(t)}{tQ(t)}\, dt$$

Esempio 21.16. Consideriamo l'integrale

$$\int \frac{1}{1 + e^x}\, dx$$

Applichiamo la sostituzione $t = e^x$:

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{1}{e^x(1 + e^x)} \cdot e^x\, dx = \int \frac{1}{t(1 + t)} \frac{dt}{dx} \cdot dx \\
&= \int \frac{1}{t(1 + t)}\, dt = \frac{1}{t}\, dt - \frac{1}{1 + t}\, dt \\
&= \log|t| - \log|1 + t| = x - \log(e^x + 1)
\end{aligned}$$

Dati due polinomi $P(u, v)$ e $Q(u, v)$, con una sostituzione notevole riusciamo a calcolare integrali del tipo

$$\int \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}\, dx$$

dove P, Q sono polinomi.

La sostituzione interessante è che, posto $t = \tan\frac{x}{2}$, si ha che

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad\qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Queste formule si ricavano da quelle di bisezione. Ad esempio per il seno:

$$\begin{aligned}\sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\\ &= \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\frac{1}{cos^2\frac{x}{2}}}\\ &= \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}\end{aligned}$$

Esempio 21.17. Proviamo a calcolare l'integrale $\int \frac{1}{\sin x}\, dx$:

$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{1+t^2}{2t}\, \frac{\frac{dt}{dx}}{\frac{dt}{dx}} \cdot dx$$

Calcoliamo $\frac{dt}{dx}$:

$$\frac{dt}{dx} = D\left[\tan\frac{x}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(1+t^2)$$

Quindi, riprendendo l'integrale

$$\begin{aligned}&= \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}(1+t^2)}\, dt\\ &= \int \frac{1}{t}\, dt = \log|t| = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|\end{aligned}$$

Se i polinomi P e Q dipendono solo da u^2 e v^2 conviene porre $t = \tan x$. In questo caso le sostituzioni sono:

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \qquad\qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

Il termine differenziale è invece

$$\frac{dt}{dx} = 1 + \tan^2 x = 1 + t^2$$

Esempio 21.18. Consideriamo l'integrale

$$\int \frac{1}{\cos^4 x}\, dx$$

Applichiamo la sostituzione $t = \tan x$:

$$\int \frac{1}{\frac{1}{(1+t^2)^2}} \frac{\frac{dt}{dx}}{\frac{dt}{dx}} \cdot dx = \int (1+t^2)^2 \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int (1+t^2)\, dt$$
$$= t + \frac{t^3}{3} = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3}$$

Ventiduesima lezione (12/01/2016)

22.1 Area e integrale definito

In questa lezione introdurremo il concetto di integrale definito, che serve a calcolare aree. Prima di tutto però andiamo a definire le proprietà che soddisfa l'area di una regione piana:

1. L'area è un numero reale maggiore o uguale a zero;

2. L'area di un rettangolo è base per altezza;

3. Figure congruenti (ovvero ottenute per traslazione e rotazione) hanno la stessa area;

4. Se una regione viene suddivisa in due parti, l'area complessiva è la somma dell'area delle due parti.

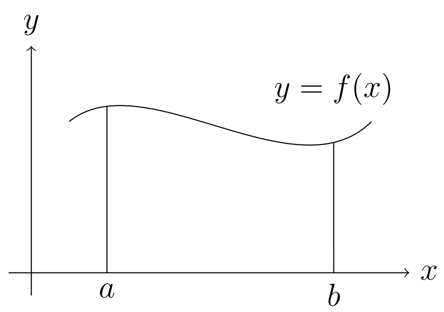
Da queste proprietà segue che se $A \subseteq B$ allora $area(A) \leq area(B)$, visto che $B = A \cup (B \backslash A)$.

Grazie alle proprietà possiamo calcolare direttamente l'area per ogni regione che si scompone in rettangoli. Data una regione A e due regioni scomponibili in rettangoli R, R' (con $R \subset A \subset R'$), allora $area(R) \leq area(A) \leq area(R')$.

Se per ogni n troviamo $R_n, {R_n}'$ scomponibili in rettangoli $R_n \subset A \subset {R_n}'$ e $\lim area(R_n) = \lim area({R_n}')$, allora dev'essere anche $area(A) = \lim area(R_n)$. Questa è, in effetti, la caratterizzazione dell'area.

Le aree che a noi interessano sono del tipo

$$\{\, (x, y) \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x) \,\}$$



Tale area, se esiste, si indica con

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ed è detto *integrale definito* di f da a a b.

Definizione 22.1. Una *partizione* dell'intervallo $[a,b]$ è un insieme finito di punti $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ con $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

Se f è una funzione $[a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e P è una partizione di $[a,b]$, la somma inferiore di f relativa a $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ è

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{base} \cdot \underbrace{m_i}_{altezza}$$

dove

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$$

Tale inf esiste sempre perché la funzione f è limitata. Analogamente definiamo la somma superiore

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot M_i$$

dove

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$$

Data una partizione P di $[a,b]$ si dice che P' è un *raffinamento* di P se è una partizione di $[a,b]$ e $P \subseteq P'$.

Proposizione 22.2. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. Se P è una partizione di $[a,b]$ e P' un suo raffinamento, allora*

$$s(f,P) \le s(f,P') \qquad e \qquad S(f,P) \ge S(f,P')$$

Al variare di P tra le partizioni di $[a,b]$ vale

$$(b-a)\inf f \le \sup_P s(f,P) \le \inf_P S(f,P) \le (b-a)\sup f$$

Dimostrazione. Consideriamo la più semplice partizione $P = \{a,b\}$ e il suo più semplice raffinamento $P' = \{x_0, x_1, x_2\}$.

Per definizione di somma inferiore:

$$\begin{aligned} s(f,P) &= (b-a) \cdot \inf f \\ s(f,P') &= (x_1 - x_0) \cdot \inf_{x_0 \le x \le x_1} f + (x_2 - x_1) \cdot \inf_{x_1 \le x \le x_2} f \end{aligned}$$

Ciascuna delle due somme è maggiore di inf $f(x)$. Quindi:

$$\begin{aligned} s(f,P) &\geq (x_1 - x_0) \cdot \inf_{x_0 \leq x \leq x_1} f + (x_2 - x_1) \cdot \inf_{x_1 \leq x \leq x_2} f \\ &\geq (x_2 - x_0) \cdot \inf f \\ &\geq (b-a) \cdot \inf f \end{aligned}$$

Quindi $s(f,P') \geq s(f,P)$.

Allo stesso modo si dimostra che se P' è ottenuto da P aggiungendo un punto allora $s(f,P') \geq s(f,P)$. Per induzione sul numero di elementi in $P' \setminus P$ si ha $s(f,P) \leq s(f,P')$ per P' raffinamento di P.

In particolare, ogni partizione P è un raffinamento di $\{a,b\}$. Quindi:

$$\begin{aligned} s(f,\{a,b\}) &\leq s(f,P) \\ (b-a) \cdot \inf f &\leq s(f,P) \end{aligned}$$

□

Dimostrazione. Per dimostrare la seconda parte della disuguaglianza

$$\sup_P s(f,P) \leq \inf_P S(f,P)$$

dimostriamo la disuguaglianza (che marchiamo come $(*)$): prese partizioni qualunque P, P', vale

$$s(f,P) \leq S(f,P')$$

Infatti, prendiamo $P'' = P \cup P'$ che è sicuramente un raffinamento di P e P'. Per quanto abbiamo già dimostrato vale $s(f,P) \leq s(f,P'')$. Per definizione

$$\begin{aligned} s(f,P'') &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot m_i \\ S(f,P'') &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot M_i \end{aligned}$$

Certamente $m_i \leq M_i$, quindi $s(f,P'') \leq S(f,P'')$. Essendo $S(f,P'') \leq S(f,P')$ allora

$$s(f,P) \leq s(f,P'') \leq S(f,P'') \leq S(f,P')$$

da cui segue $(*)$. Passando al sup da $(*)$ si ha che, per ogni P', $\sup_P s(f,P) \leq S(f,P')$. Passando all'inf resta la disuguaglianza cercata:

$$\sup_P s(f,P) \leq \inf_{P'} S(f,P')$$

□

22.2 Funzioni integrabili

Definizione 22.3. Una funzione $f(x)$ limitata definita su $[a, b]$ si dice *integrabile* se

$$\sup_P s(f, P) = \inf_P S(f, P)$$

In questo caso si dice che

$$\sup_P s(f, P) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Esempio 22.4. Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Essa è limitata. Presa P una partizione qualunque $\{x_0, \ldots, x_n\}$, scriviamo esplicitamente la somma inferiore e superiore.

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot m_i$$

ma

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) = 0$$

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot M_i = b - a = 1 - 0 = 1$$

Essendo le due somme diverse, in questo caso la funzione non è integrabile.

Proposizione 22.5. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata. Allora f è integrabile se e solo se per ogni ε esiste P_ε tale che*

$$S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$$

Dimostrazione. Fissato ε, sia P_ε tale che $S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$. Allora

$$\inf_P S(f, P) \le S(f, P_\varepsilon) < s(f, P_\varepsilon) + \varepsilon \le \sup_P s(f, P) + \varepsilon$$

Per la catena di disuguaglianze, per ogni ε

$$\sup s(f, P) \le \inf S(f, P) \le \sup s(f, P) + \varepsilon$$

Quindi dev'essere $\sup s(f, P) = \inf s(f, P)$, quindi la funzione è integrabile. □

Dimostrazione. Dimostriamo il viceversa. Se la funzione è integrabile

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sup_P s(f, P)$$

Quindi sicuramente esiste una partizione P tale che

$$s(f,P) \geq \int_a^b f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2}$$

Analogamente esiste una partizione P' tale che

$$S(f,P') \leq \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

Sia $P'' = P \cup P'$. Ora $S(f,P'') \leq S(f,P')$ e $s(f,P'') > s(f,P)$. Facendo la differenza

$$S(f,P'') - s(f,P'') \leq S(f,P') - s(f,P) \leq \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} + \left(-\int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$$

Abbiamo quindi fatto vedere che $\forall\varepsilon$ esiste $P_\varepsilon = P''$ tale che $S(f,P_\varepsilon) - s(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$. □

Teorema 22.6. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotona, allora f è integrabile.*

Dimostrazione. Supponiamo senza perdita di generalità f non decrescente, allora $\forall x$ vale $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$; quindi la funzione è limitata.

Sia P_n la partizione $\{x_0, \ldots, x_n\}$ e chiamiamo

$$x_i - x_{i-1} = \delta = \frac{b-a}{n}$$

Esprimiamo la somma inferiore:

$$s(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot m_i$$

Ricordiamo che

$$m_i = \inf_{x_{x-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

ma essendo f non decrescente, $m_i = f(x_{i-1})$. Quindi

$$\begin{aligned} s(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \delta \cdot f(x_{i-1}) \end{aligned}$$

Analogamente si ragiona per la somma superiore e si osserva che il sup in questo caso coincide con $f(x_i)$, sempre perché f è non decrescente. Quindi

$$S(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} \delta \cdot f(x_i)$$

Calcoliamo quindi la differenza tra le due somme in questo caso particolare:

$$\begin{aligned}
S(f, P_n) - s(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} \delta \cdot f(x_i) - \sum_{i=1}^{n} \delta \cdot f(x_{i-1}) \\
&= \delta[f(x_1) + \ldots + f(x_n)] - \delta[f(x_0) + \ldots + f(x_{n-1})] \\
&= \delta[f(x_n) - f(x_0)] \\
&= \frac{b-a}{n} \cdot [f(b) - f(a)]
\end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{n \to +\infty} S(f, P_n) - s(f, P_n) = 0$$

Per definizione di limite, $\forall \varepsilon > 0$ esiste P_n tale che $S(f, P_n) - s(f, P_n) < \varepsilon$. Quindi la funzione è integrabile. $\square$

Esempio 22.7. Consideriamo $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{[\frac{1}{x}]} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Essendo $\frac{1}{x} \geq 1$, anche la parte intera è maggiore o uguale a 1 e quindi $f(x) \leq 1$ è limitata.

Essendo $\frac{1}{x}$ una funzione monotona decrescente, anche la sua parte intera è monotona non crescente, così come $f(x)$.

Questa funzione ha infiniti punti di discontinuità ed è quindi integrabile per il teorema.

Teorema 22.8. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, allora è integrabile.*

Lasciamo il teorema senza dimostrazione.

Ventitreesima lezione (15/01/2016)

23.1 Funzioni integrabili (cont.)

Proposizione 23.1. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $c \in [a, b]$. La funzione f è integrabile su $[a, b]$ se e solo se è integrabile su $[a, c]$ e $[c, b]$; vale*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Definizione 23.2. Se $b \leq a$ allora

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

In particolare se $a = b$ allora

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Dimostriamo separatamente le due implicazioni della proposizione.

Dimostrazione. Supponiamo f integrabile e fissiamo $\varepsilon > 0$. Per la caratterizzazione delle funzioni integrabili esiste una partizione P tale che

$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$$

Aggiungendo un punto, la differenza diventa più piccola. Quindi possiamo supporre $c \in P$.

Consideriamo una nuova partizione $P' = P \cap [a, c]$, che comprende solo i punti nell'intervallo $[a, c]$. Ora:

$$S(f, P') - s(f, P') \leq S(f, P) - s(f, P)$$
$$\sum_{i=1}^{k}(x_i - x_{i-1})[\sup f(x) - \inf f(x)] \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})[\sup f(x) - \inf f(x)]$$

Quindi esiste P' partizione di $[a, c]$ tale che $S(f, P') - s(f, P') < \varepsilon$. Abbiamo dimostrato quindi che la restrizione di $f|_{[a,c]} : [a, c] \to \mathbb{R}$ è integrabile. In modo analogo si dimostra che f è anche integrabile su $[c, b]$. $\square$

Dimostrazione. Viceversa, supponiamo f integrabile su $[a, c]$ e $[c, b]$. Fissato $\varepsilon > 0$, prendiamo P partizione di $[a, c]$ tale che $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$ e prendiamo P' partizione di $[c, b]$ con analoga proprietà.

Consideriamo la partizione $P'' = P \cup P'$ e scriviamone esplicitamente somma superiore e inferiore:

$$S(f, P'') = S(f, P) + S(f, P')$$
$$s(f, P'') = s(f, P) + s(f, P')$$

La differenza tra $S(f, P'')$ e $S(f, P')$ è quindi minore di 2ε; quindi la funzione è integrabile su tutto l'intervallo $[a, b]$.

Osserviamo che

$$s(f, P'') \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq S(f, P'')$$

$$s(f, P'') = s(f, P) + s(f, P') \leq \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \leq S(f, P) + S(f, P') = S(f, P'')$$

Quindi sia $\int_a^b f(x)\, dx$ che $\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$ appartengono all'intervallo $[s(f, P''), S(f, P'')]$.

Quindi

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| - \left| \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \right| < 2\varepsilon$$

Poiché questo vale per ogni $\varepsilon > 0$ allora

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

□

Proposizione 23.3. *Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sono funzioni integrabili, allora $f + g$ è una funzione integrabile e*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

Se $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\lambda f(x)$ è una funzione integrabile e

$$\int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx$$

Lasciamo la proposizione senza dimostrazione, mentre dimostriamo la successiva che risulta essere più interessante.

Proposizione 23.4. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile, allora $|f(x)|$ è integrabile e*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Dimostrazione. Sia $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ una partizione. Su ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ poniamo $m_i = \inf f(x)$, $M_i = \sup f(x)$, $m'_i = \inf |f(x)|$ e $M'_i = \sup |f(x)|$.

Dimostriamo che vale sempre $M'_i - m'_i \leq M_i - m_i$. Infatti:

- se $0 \leq m_i \leq M_i$ allora $f(x) = |f(x)|$ nell'intervallo. In questo caso $m_i = m_i'$ e $M_i' = Mi$, quindi la disuguaglianza sopra è ovvia.

- se $m_i \leq M_i \leq 0$ allora $-f(x) = |f(x)|$ nell'intervallo. Quindi $m_i = -M_i$ e $M_i = -m_i'$. Quindi $M_i' - m_i' = -m_i + M_i$.

- se $m_i \leq 0 \leq M_i$ allora $m_i' \geq 0$ e $M_i' = \max\{M_i, -m_i\}$. Quindi $M_i' - m_i' \leq M_i' \leq M_i - m_i$.

In conclusione, se P è una partizione per cui $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$, ricordando la definizione di somma superiore e inferiore possiamo scrivere

$$S(|f|, P) - s(|f|, P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(M_i' - m_i') < \varepsilon$$

Quindi $|f(x)|$ è integrabile. □

Dimostrazione. Per dimostrare che

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

osserviamo che se $g(x) \geq 0$ allora $\int_a^b g(x)\, dx \geq 0$ perché $\int_a^b g(x)\, dx \geq (b-a) \inf g(x)$.

- Se $f(x) \leq |f(x)|$ allora $\int_a^b [|f(x)| - f(x)]\, dx \geq 0$. Quindi

$$\int_a^b |f(x)|\, dx - \int_a^b f(x) \geq 0 \implies \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

- Se $-f(x) \leq |f(x)|$ allora $\int_a^b -f(x)\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$

Poiché valgono le due precedenti allora possiamo concludere

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

□

23.2 Teorema della media integrale

Teorema 23.5 (Della media integrale). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, allora esiste $c \in [a, b]$ tale che*

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c) \cdot (b - a)$$

Dimostrazione. La funzione è continua per ipotesi e quindi è integrabile. Per Weierstrass essa ammette un massimo M e un minimo m. Per la caratterizzazione dell'integrale definito possiamo scrivere

$$(b-a) \cdot \inf f(x) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a) \cdot \sup f(x)$$

Consideriamo inf e sup in questo caso particolare e dividiamo per $b-a$:

$$(b-a) \cdot m \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a) \cdot M$$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq M$$

Per il teorema dei valori intermedi la funzione continua f assume tutti i valori tra il massimo e il minimo. Quindi deve esistere un $c \in [a,b]$ per cui

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

□

23.3 Teorema fondamentale del calcolo I

Definizione 23.6. Data una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile, definiamo *funzione integrale* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Osservazione 23.7. La funzione integrale si può considerare anche per $x_0 \in [a,b]$ e risulterebbe

$$\int_{x_0}^x f(t)\,dt = \int_{x_0}^a f(t)\,dt + \int_a^x f(t)\,dt$$

Tuttavia l'integrale da x_0 ad a non dipende da x, quindi per semplicità consideriamo sempre la funzione integrale che parte da a.

Teorema 23.8 (Teorema fondamentale del calcolo I). *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile, la funzione integrale $F(x)$ è continua.*

Dimostrazione. Essendo integrabile, la funzione f è limitata. Quindi esiste $H \geq 0$ tale che, per ogni x,

$$|f(x)| \leq H$$

Consideriamo $F(y) - F(x)$:

$$\begin{aligned} F(y) - F(x) &= \int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \\ &= \int_a^y f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt = \int_x^y f(t)\,dt \end{aligned}$$

Ora:

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \leq \int_x^y |f(t)|\,dt \leq \int_x^y H\,dt = (y-x) \cdot H$$

Quanto abbiamo scritto vale ovviamente se $x \leq y$. In questo caso

$$\lim_{y \to x^+} (y-x) \cdot H = 0$$

Sappiamo quindi che

$$0 \leq |F(y) - F(x)| \leq (y-x) \cdot H$$

Quindi, per il teorema del confronto abbiamo che

$$\lim_{y \to x^+} |F(y) - F(x)| = 0$$

Se fosse invece $x \geq y$, possiamo scambiarli nella penultima equazione e resta

$$0 \leq |F(x) - F(y)| \leq (x-y) \cdot H$$

da cui segue che

$$\lim_{y \to x^-} (x-y) \cdot H = 0$$

e quindi che

$$\lim_{y \to x^-} |F(y) - F(x)| = 0$$

In conclusione, unendo i due limiti, trovo che

$$\lim_{y \to x} |F(y) - F(x)| = 0$$

che è esattamente la definizione di continuità. □

Esempio 23.9. Consideriamo la funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ così definita

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ 3 & x \geq 0 \end{cases}$$

Tale funzione è integrabile perché è monotona e limitata. Scriviamo la funzione integrale $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$:

- se $x < 0$
$$\int_{-1}^{x} f(t)\,dt = (x - (-1)) \cdot 2 = 2(x+1)$$
- se $x = 0$ sappiamo che F è continua per il teorema fondamentale del calcolo I; quindi
$$F(0) = \lim_{x \to 0^-} F(x) = 2$$

- se $x > 0$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{x} f(t)\,dt &= \int_{-1}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt \\ &= F(0) + \int_{0}^{x} 3\,dt = 2 + 3x\end{aligned}$$

Riassumendo

$$F(x) = \begin{cases} 2(x+1) & x \leq 0 \\ 2 + 3x & x > 0 \end{cases}$$

La funzione integrale è ora continua ma non derivabile.

Ventiquattresima lezione (19/01/2016)

24.1 Teorema fondamentale del calcolo II

Teorema 24.1 (Teorema fondamentale del calcolo II). *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, allora la funzione integrale $F(x)$ è derivabile e la sua derivata è $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$.*

Osserviamo che abbiamo considerato derivabile la funzione anche negli estremi di definizione del dominio. Questo è lecito considerando la seguente definizione.

Definizione 24.2. Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, diciamo che f è derivabile in a se esiste

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

detta "derivata destra di f in a". Simmetrica definizione vale per la derivata sinistra.

Osserviamo inoltre che affermare che tutte le funzioni continue sono integrabili è ben diverso dal saperlo fare nella pratica: spesso tale compito è arduo, se non addirittura impossibile nei reali.

Dimostrazione. La funzione integrale esiste, perché $f(x)$ è continua e quindi integrabile.

Sia $x \in [a,b]$ e sia h tale che $x + h \in [a,b]$. Scriviamo il rapporto incrementale in x:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$
$$= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Per il teorema della media integrale esiste y compreso tra x e $x+h$ tale che

$$f(y) \cdot (x + h - x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Quindi il rapporto incrementale è $f(y) \cdot \frac{h}{h} = f(y)$. Inoltre

$$\lim_{h \to 0} y = x$$

Quindi

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

Ciò significa che $F(x)$ è derivabile e la sua derivata è $f(x)$. □

24.2 Teorema fondamentale del calcolo III

Teorema 24.3 (Teorema fondamentale del calcolo III). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Sia G una primitiva di f. Allora presi due valori $x, y \in [a, b]$*

$$\int_x^y f(t)\,dt = G(y) - G(x)$$

Dimostrazione. Consideriamo una funzione ausiliaria

$$H(y) = G(y) - \int_x^y f(t)\,dt$$

Sappiamo che $G(y)$, essendo una primitiva, è derivabile e $G'(y) = F(y)$. Inoltre sappiamo che $\int_x^y f(t)\,dt$ è una funzione derivabile di y e la sua derivata è $f(y)$ (per il teorema fondamentale del calcolo II).

Consideriamo la derivata di $H(y)$:

$$H'(y) = f(y) - f(y) = 0$$

Poiché H ha derivata zero in $[a, b]$, allora è costante in $[a, b]$. In particolare si ha che $H(y) = H(x)$. Si ha che

$$H(x) = G(x) - \int_x^x f(t)\,dt = G(x)$$

e anche che

$$G(x) = H(y) = G(y) - \int_x^y f(t)\,dt$$

Quindi

$$\int_x^y f(t)\,dt = G(y) - G(x)$$

□

Per notazione comoda spesso si scrive $[G(t)]_x^y$ per indicare $G(y) - G(x)$.

Esempio 24.4. Consideriamo l'integrale

$$\int_0^1 xe^x\,dx$$

La funzione xe^x è continua e quindi è applicabile il teorema fondamentale del calcolo III. Calcoliamo l'integrale indefinito (per parti):

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x$$

Quindi

$$\int_0^1 xe^x\,dx = [xe^x - e^x]_0^1 = (e - e) - (0 - 1) = 1$$

Osservazione 24.5. Se la funzione non è continua, allora il teorema fondamentale del calcolo III non è applicabile e non possiamo usare il metodo dell'esercizio precedente.

Esempio 24.6. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 \le x < 0 \\ 2 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Essa è monotona limitata e quindi è integrabile. Calcoliamo la sua funzione integrale $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$:

- per $x < 0$, $F(x) = x + 1$
- per $x = 0$, $F(x) = 1$
- per $x > 0$, $F(x) = F(0) + \int_0^x 2\,dt = 1 + 2x$

Quindi

$$F(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \le x \le 0 \\ 1+2x & x > 0 \end{cases}$$

La funzione $F(x)$ non è derivabile, in quanto la derivata destra e sinistra in 0 sono diverse; quindi non ha primitiva.

Inoltre f non ha primitive. Se infatti $G(x)$ fosse una primitiva di f allora dovrebbe essere

$$G'(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 2 & x > 0 \end{cases}$$

Consideriamo $H(x) = G(x) - \frac{3}{2}x$. La sua derivata è

$$H'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x > 0 \end{cases}$$

Quindi $H(x)$ decresce in $(-1, 0)$ e cresce in $[0, 1)$; quindi ha un minimo in $x = 0$. Allora per il teorema di Fermat dev'essere $H'(0) = 0$. Quindi:

$$G'(0) - \frac{3}{2} = 0$$

il che è assurdo, perché $G'(0) = f(0) = 2$.

24.3 Integrazione di funzioni non continue

Teorema 24.7. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione limitata con un numero finito di punti di discontinuità, allora f è integrabile.*

Dimostrazione. La dimostrazione è per induzione su n, ovvero il numero di punti di discontinuità.

Se $n = 0$ allora la funzione è continua e quindi è integrabile.

Se $n > 0$, supponiamo vera la tesi per una funzione con al più $n-1$ punti di discontinuità.

Prendiamo una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ con n punti di discontinuità. Sia c un punto di discontinuità. Dobbiamo mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste P_ε partizione di $[a,b]$ tale che $S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$.

Sia $M = \sup f$ e $m = \inf f$. Prendo $\delta > 0$ tale che $\delta \cdot (M - m) < \varepsilon$.

Sia P_ε una partizione tale che l'intervallo $[x_k, x_{k+1}]$ che contiene c abbia diametro minore δ. Ovvero $x_k \leq c \leq x_{k+1}$ e $x_{k+1} - x_k < \delta$. Inoltre, se $c \neq a, b$ possiamo supporre $x_k < c < x_{k+1}$.

La funzione $f : [a, x_k] \to \mathbb{R}$ ha al più $n-1$ punti di discontinuità, quindi è applicabile l'ipotesi induttiva e quindi è integrabile. Lo stesso vale per $f : [x_{k+1}, b] \to \mathbb{R}$.

Essendo $f : [a, x_k]$ integrabile, posso supporre

$$\sum_{i=1}^{k}(x_i - x_{i-1})M_i - \sum_{i=1}^{k}(x_i - x_{i-1})m_i < \varepsilon$$

dove M_i e m_i sono rispettivamente il sup e l'inf degli intervalli. Analogamente posso supporre

$$\sum_{i=k+2}^{n}(x_i - x_{i-1})M_i - \sum_{i=k+2}^{n}(x_i - x_{i-1})m_i < \varepsilon$$

Unendo le due disuguaglianze si ha che

$$S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{k}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) + (M_{k+1} - m_{k+1})(x_{k+1} - x_k) + \sum_{i=k+2}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

L'ultima uguaglianza è minore di $\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon$.

Giustifichiamo perché il termine intermedio è minore di ε. Osserviamo che

$$(M_{k+1} - m_{k+1})(x_{k+1} - x_k) \leq (M - m)(x_{k+1} - x_k)$$

perché $M_{k+1} \leq M$ e $m_{k+1} \geq m$. Essendo $x_{k+1} - x_k < \delta = \frac{\varepsilon}{M-m}$, allora

$$(M - m)(x_{k+1} - x_k) \leq (M - m) \cdot \delta = \varepsilon$$

In conclusione, avendo mostrato che la differenza tra somma superiore e inferiore è minore di 3ε, f è integrabile. $\square$