

# Appunti di analisi matematica

Luca Chiodini  
luca@chiodini.org



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>1 Prima lezione (06/10/2015)</b>	<b>7</b>
1.1 Insieme $\mathbb{N}$ . . . . .	7
1.2 Insieme $\mathbb{Z}$ . . . . .	9
1.3 Insieme $\mathbb{Q}$ e oltre . . . . .	10
1.4 Estremo superiore e maggioranti . . . . .	10
<b>2 Seconda lezione (09/10/2015)</b>	<b>13</b>
2.1 Estremi e limiti di insiemi . . . . .	13
2.2 Insieme $\mathbb{R}$ . . . . .	15
<b>3 Terza lezione (13/10/2015)</b>	<b>17</b>
3.1 Allineamenti decimali e insieme $\mathbb{R}$ . . . . .	17
3.2 Potenze e logaritmi . . . . .	19
3.3 Intervalli e intorno . . . . .	20
3.4 Successioni . . . . .	20
<b>4 Quarta lezione (16/10/2015)</b>	<b>23</b>
4.1 Limiti di una successione . . . . .	23
4.2 Successioni convergenti, divergenti, limitate . . . . .	24
<b>5 Quinta lezione (20/10/2015)</b>	<b>29</b>
5.1 Forme di indeterminazione . . . . .	29
5.2 Teoremi su limiti di successioni . . . . .	30
5.3 Coefficienti binomiali e disuguaglianza di Bernoulli . . . . .	31
5.4 $\lim a^n$ e criterio del rapporto . . . . .	33
<b>6 Sesta lezione (23/10/2015)</b>	<b>35</b>
6.1 Criterio del rapporto (cont.) . . . . .	35
6.2 Successioni definite per ricorrenza . . . . .	36
6.3 Numero di Nepero $e$ . . . . .	38
6.4 Limiti che si deducono da $e$ . . . . .	39
6.5 Asintotico . . . . .	41
6.6 Infinitesimi . . . . .	42



# Introduzione

Questi appunti sono relativi al corso di analisi matematica tenuto dal prof. Diego Conti agli studenti del corso di laurea di informatica dell'Università degli Studi di Milano - Bicocca, durante l'anno accademico 2015-2016.

Queste pagine sono state scritte nell'intento di essere utili, tuttavia potrebbero contenere errori tra i più disparati. Sarò grato a chiunque ne trovasse e volesse segnalarmeli (basta una mail a [luca@chiodini.org](mailto:luca@chiodini.org)).



# Capitolo 1

## Prima lezione (06/10/2015)

### 1.1 Insieme $\mathbb{N}$

**Definizione 1.1.** L'insieme  $\mathbb{N}$  è l'insieme dei numeri interi positivi, detti numeri naturali, e si indica con  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ .

Su di esso sono definite due operazioni:

- Somma:  $\mathbb{N} + \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , quindi  $(a, b) \rightarrow a + b$
- Prodotto:  $\mathbb{N} \cdot \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , quindi  $(a, b) \rightarrow a \cdot b$

Queste due proprietà sono commutative e associative:

- $a + b = b + a$
- $a + (b + c) = (a + b) + c$
- $a \cdot b = b \cdot a$
- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Vale inoltre la proprietà distributiva:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Nel prodotto esiste un elemento neutro, in altri termini esiste un  $e \in \mathbb{N}$  tale per cui, comunque scelto  $a$ ,  $a \cdot e = e \cdot a = a$ . Tale  $e$  risulta ovvio essere 1.

Nell'insieme  $\mathbb{N}$  esiste una relazione di ordinamento ( $a \leq b$ ) tale per cui:

- I.  $a \leq b$  e  $b \leq a \implies a = b$
- II.  $a \leq b \leq c \implies a \leq c$
- III.  $\forall a, b$   $a < b$  oppure  $b < a$

**Definizione 1.2.** Un insieme  $S$  con una relazione d'ordine che soddisfa I, II, III si dice totalmente ordinato.

**Osservazione 1.3.** Ogni  $S \subseteq \mathbb{N}$  è totalmente ordinato.

Se  $a \leq b$  e  $c \in \mathbb{N} \implies a + c \leq b + c$

Se  $a \leq b$  e  $c \in \mathbb{N} \implies a \cdot c \leq b \cdot c$

L'equazione  $n + x = m$  ha una soluzione (unica) se e solo se  $m > n$ .

Anche  $\{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ , l'insieme dei numeri razionali, soddisfa le condizioni sopra indicate.

**Definizione 1.4.** Dato un insieme totalmente ordinato (scriviamo  $(S, \leq)$ ),  $X$  è il minimo di  $S$  se  $x \in S$  e per ogni  $y \in S$  vale  $x \leq y$ .

**Proposizione 1.5** (Principio del buon ordinamento). *Ogni sottoinsieme di  $\mathbb{N}$  non vuoto ha un minimo.*

**Esempio 1.6.** L'insieme  $\{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$  non soddisfa il principio del buon ordinamento perché, ad esempio, il suo sottoinsieme  $\{\frac{1}{n} \mid n > 0\}$  non ha minimo.

**Osservazione 1.7.** Grazie al principio del buon ordinamento vale:

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq s\} = \{1, \dots, s\}$$

**Proposizione 1.8** (Principio di induzione). *Sia  $P_n$  un enunciato che dipende da  $n \in \mathbb{N}$  (ad esempio “ $n$  è pari”, “ $n$  è primo”). Supponiamo che  $P_1$  sia vero e che valga l'implicazione  $P_n \implies P_{n+1}$ . Allora  $P_n$  è vero per ogni  $n$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $S = \{n \in \mathbb{N} \mid P_n \text{ è falso}\}$ . Se  $S = \emptyset$  non c'è niente da dimostrare. Altrimenti, per il principio del buon ordinamento  $S$  ha un minimo  $k = \min S$ . Non può essere  $k = 1$  ( $1 \in S$ ) perché  $P_1$  è vero.

Essendo  $k > 1$ ,  $k - 1 \in \mathbb{N}$  (ricorda l'equazione  $1 + k = x$ ) e  $k - 1 \in S$ .

Allora  $P_{k-1}$  non è falso, quindi  $P_{k-1}$  è vero.  $P_k$  è vero per ipotesi. Ma questo contraddice l'ipotesi che  $k \in S$ , quindi il caso  $S$  non vuoto non si verifica.  $\square$

Nota che, ad esempio, l'enunciato “ $\forall n, n > 0$ ” non è un enunciato che dipende da  $n$ !

**Esempio 1.9.** Dimostriamo per induzione che

$$P_n : \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot n$$

Verifichiamo  $P_1$ :

$$P_1 : \sum_{i=1}^1 i = \frac{1}{2} \cdot (1+1) \cdot 1$$

che equivale a  $1 = 1$  ed è quindi vero.

Ora dobbiamo verificare anche che  $P_n \implies P_{n+1}$ .

$$P_n : \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot n$$

$$P_{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{1}{2} \cdot (n+2) \cdot (n+1)$$



Per definizione vale anche che :

$$P_{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^n i + (n+1) = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot n + (n+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

## 1.2 Insieme $\mathbb{Z}$

Consideriamo queste due equazioni:

- $a + x = b$ , che ha soluzione in  $\mathbb{N}$  se e solo se  $b > a$ .
- $a \cdot x = b$ , che ha soluzione in  $\mathbb{N}$  quando  $a$  è un divisore di  $b$  (si scrive  $x = \frac{b}{a}$ ).

È evidente che serve quindi estendere l'insieme  $\mathbb{N}$  arrivando all'insieme degli interi  $\mathbb{Z}$  così definito:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$$

$\mathbb{Z}$  è la più piccola estensione di  $\mathbb{N}$  dove l'equazione  $a + x = b$  ha soluzione per ogni  $a, b$ . In  $\mathbb{Z}$  valgono le stesse proprietà di  $\mathbb{N}$ .

$\mathbb{Z}$  ha un elemento neutro per la somma (zero). Ovvero scriviamo:

$$a + 0 = 0 + a = a \quad \forall a$$

Dato  $a \in \mathbb{Z}$  esiste  $x \in \mathbb{Z}$  tale che  $a + x = 0$  (si scrive  $x = -a$ ).

Per passi:

$$b - a = b + (-a)$$

$$a + (b - a) = b$$

che è la soluzione di  $a + x = b$  cercata.

Nota inoltre che  $a \cdot x = b$  non ha soluzioni per  $a = 0$ ,  $b \neq 0$  perché  $0 \cdot x = 0$ , che a sua volta discende da

$$\begin{aligned} 1 \cdot x &= (1 + 0) \cdot x \\ &= 1 \cdot x + 0 \cdot x \end{aligned}$$

Sottraendo  $-(1 \cdot x)$  a entrambi i membri risulta  $0 = 0 \cdot x$ .

### 1.3 Insieme $\mathbb{Q}$ e oltre

Definiamo l'insieme  $\mathbb{Q}$ , insieme dei numeri razionali, in questo modo:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

$\mathbb{Q}$  ha le stesse proprietà di  $\mathbb{Z}$ . Inoltre:

$$\forall a \neq 0 \exists x \in \mathbb{Q} : a \cdot x = 1$$

$x = \frac{1}{a}$ , da cui  $\frac{b}{a} = b \cdot \frac{1}{a}$  che è la soluzione di  $a \cdot x = b$ .

Infatti:

$$a \cdot \frac{b}{a} = a \cdot b \cdot \frac{1}{a} = b(a(\frac{1}{a})) = b \cdot 1 = b$$

È evidente che i numeri razionali non vanno bene per l'analisi numerica. Supponiamo di voler misurare un segmento in gessetti: potrebbero volerci quattro gessi "e un pezzetto". Potremmo dividere il gessetto a metà e scoprire che la lunghezza del segmento è 4 gessi + 1 gessetto + "un pezzettino". Non è detto che questo processo termini! Infatti non tutti gli intervalli si possono rappresentare con un numero razionale.

È dim? *Dimostrazione.* Sia  $x$  la diagonale di un quadrato di lato 1. Per Pitagora vale che  $x^2 = 1 + 1 = 2$ . Se  $x$  fosse razionale, potremmo scrivere  $x = \frac{p}{q}$  per un qualche  $p, q \in \mathbb{Z}$ .

Quindi varrebbe  $\frac{p^2}{q^2} = 2$ , ovvero  $p^2 = 2 \cdot q^2$ .

Possiamo scrivere  $p = 2^k \cdot a$  per un qualche  $a$  dispari e  $q = 2^h \cdot b$  per un qualche  $b$  dispari.

Sostituendo nella prima equazione resta:  $2^{2k} \cdot a^2 = 2 \cdot 2^{2h} \cdot b^2$ .

$a^2$  e  $b^2$  sono quadrati di un numero dispari e quindi dispari anch'essi.

Se uguagliamo gli esponenti risulta  $2k = 2h + 1$  dove il primo è un numero pari mentre il secondo è un numero dispari, il che è assurdo.

Quindi,  $x^2 = 2$  non ha soluzione in  $\mathbb{Q}$ . □

### 1.4 Estremo superiore e maggioranti

**Definizione 1.10.** Un sottoinsieme  $A \subseteq \mathbb{Q}$  è limitato superiormente se esiste un  $k \in \mathbb{Q}$  tale che  $a \leq k$  per ogni  $a \in A$ .

Un tale  $k$  è detto maggiorante di  $A$ .

**Definizione 1.11.** Dato  $A \subseteq \mathbb{Q}$  non vuoto e limitato superiormente, si dice estremo superiore di  $A$  il minimo dei maggioranti, se esiste. (Si indica  $\sup A$ .)

Se  $A$  è non vuoto ma non è limitato superiormente, allora  $\sup A = +\infty$ .

**Esempio 1.12.** Sia  $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}$ . Esso è limitato superiormente perché se prendo  $k = 2$ ,  $k > a \forall a \in A$ .

$y$  è maggiorante di  $A \implies y > x \forall x \in A$ .

Sia  $y \in \mathbb{Q}$ :

- Se  $y \geq 1$  allora  $y$  è un maggiorante.
- Se  $0 < y < 1$ , supponiamo  $x = \frac{1}{2}(y + 1)$  (ovvero  $x$  punto medio tra  $y$  e 1). Vale che  $0 < x < 1 \implies x \in A$ . Poiché  $x > y$ ,  $y$  non è un maggiorante.
- Se  $y < 0$  supponiamo  $x = \frac{1}{2} \in A$ ;  $x > y$  quindi  $y$  non è un maggiorante.

In definitiva i maggioranti sono  $\{y \in \mathbb{Q} \mid y \geq 1\}$  e  $\sup A = 1$ .

**Esempio 1.13.** Sia  $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ .  $A$  è limitato superiormente.

**Proposizione 1.14.** 2 è maggiorante di  $A$ .

Indental!

*Dimostrazione.* Supponiamo che 2 non sia maggiorante. Allora non è vero che  $x \leq 2 \quad \forall x \in A$ . Quindi esiste  $x \in A$  tale che  $x > 2$ . Allora  $x^2 > 2^2$ , ovvero  $x^2 > 4$  che è assurdo perché vale che  $x^2 < 2$ .  $\square$

**Proposizione 1.15.**  $A$  non ha un estremo superiore in  $\mathbb{Q}$ .

*Dimostrazione.* Sia  $x \in \mathbb{Q}$  un maggiorante. Allora  $x^2 \neq 2$ .

- Se  $x^2 < 2$  vale  $(x + \frac{1}{n})^2$ , ovvero  $x^2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$ . Per  $n$  sufficientemente grandi  $y = x + \frac{1}{n}$ . Da chiarire. Essendo  $y^2 < 2$ , basta che  $\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 2 - x^2$ .

Ovvero

$$(2 - x^2) \cdot n^2 - 2n + 1 > 0$$

Nota che l'equazione sopra è una parabola con concavità verso l'alto.

Allora  $x$  non è un maggiorante perché  $x < y$  e  $y \in A$ .

- Se  $x^2 > 2$  allora  $y = x - 1$  è maggiorante.

$$\begin{aligned} (x - \frac{1}{n})^2 &> 2 \\ x^2 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} &> 2 \\ n^2 \cdot (x^2 - 2) - 2n + 1 &> 0 \end{aligned}$$

che è vera per  $n$  sufficientemente grandi.

Quanto sopra implica che deve esistere un maggiorante della forma  $y = x - \frac{1}{n}$ . Ciò implica che  $x$  non è il minimo dei maggioranti e a sua volta questo implica che  $A$  non ha sup.  $\square$



# Capitolo 2

## Seconda lezione (09/10/2015)

### 2.1 Estremi e limiti di insiemi

**Definizione 2.1.** Un sottoinsieme  $A \subseteq \mathbb{Q}$  è limitato superiormente se esiste  $k \in \mathbb{Q}$  tale che  $k \geq x$  per ogni  $x \in A$ . Tale  $k$  è detto maggiorante di  $A$ .

In modo analogo,  $A$  è limitato inferiormente se esiste  $k \in \mathbb{Q}$  tale che  $k \leq x$  per ogni  $x \in A$ . Tale  $k$  è detto minorante di  $A$ .

Dati  $a \neq 0$ , l'estremo superiore ( $\sup A$ ), il minimo dei maggioranti, l'estremo inferiore ( $\inf A$ ) e il massimo dei maggioranti (purché esistano):

- se  $A$  non è limitato superiormente  $\implies \sup A = +\infty$
- se  $A$  non è limitato inferiormente  $\implies \inf A = -\infty$

**Osservazione 2.2.** Se  $A$  ha un massimo  $x$ , allora  $x \in \sup A$ .

Infatti, essendo un massimo,  $x$  è un maggiorante e vale  $x \leq y$  perché  $x \in A$  è il minimo dei maggioranti.

Ad esempio, dato  $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}$ , è evidente che  $\sup A = 1$  ma  $1 \notin A$ . In questo caso l'insieme  $A$  non ha massimo.

**Esempio 2.3.** Dato  $A = \mathbb{Q}$  osserviamo che non è limitato superiormente. Questo perché  $x \in \mathbb{Q}$  è un maggiorante se  $x \geq y$  per ogni  $y \in \mathbb{Q}$ ; dovrebbe essere quindi  $x \geq x + 1$  che è assurdo. Quindi  $\sup \mathbb{Q} = +\infty$ .

**Esempio 2.4.** Dato  $A = \mathbb{Q}$  non vuoto, se  $A$  è limitato superiormente allora  $A$  ha un massimo.

Infatti  $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ è maggiorante di } A\}$ .  $S$  non può essere vuoto perché  $A$  è limitato superiormente.

Allora  $S$  ha un minimo  $x$  per il principio del buon ordinamento. Essendo il minimo,  $x - 1$  non è un maggiorante.

Quindi esiste un  $y \in A$  tale che  $y > x - 1$  e  $y \leq x$ . L'unico caso possibile è che  $x$  e  $y$  coincidano, ovvero  $y = x \in A$ .

Quindi  $x$  è un maggiorante e appartiene ad  $A$ . Quindi  $x$  è il massimo.

**Proposizione 2.5.** Dato  $A \subseteq \mathbb{Q}$  non vuoto e  $y \in \mathbb{Q}$ ,  $y$  è l'estremo superiore di  $A$  se e solo se  $y$  è maggiorante di  $A$  e per ogni  $y' < y$  esiste  $x \in A$  tale che  $y' < x \leq y$ .

Osserviamo che la condizione  $x \leq y$  è una diretta conseguenza del fatto che  $y$  è un maggiorante.

Dimostriamo la proposizione in entrambi i sensi, per mostrare che vale l'implicazione "se e solo se".

*Dimostrazione.* Se  $y$  è estremo superiore, allora devo dimostrare che:

I.  $y$  è un maggiorante

II.  $\forall y' < y \quad \exists x \in A \quad y' < x \leq y$

Il punto I è ovvio; dimostriamo il punto II.

Dato  $y' < y$ ,  $y'$  non può essere maggiorante perché  $y$  è il minimo dei maggioranti. Quindi esiste  $x \in A$  tale che  $y' < x$ . Poiché  $y$  è un maggiorante, possiamo scrivere  $y' < x \leq y$ .  $\square$

Dimostriamo ora il viceversa.

*Dimostrazione.* Dobbiamo dimostrare che i punti I e II implicano il fatto che  $y$  sia un estremo superiore.

Sia  $y'$  maggiorante di  $A$ . Se  $y' < y$  allora esiste  $x \in A$  tale che  $y' < x \leq y$ , quindi  $y'$  non è un maggiorante; il che è assurdo.

Allora ogni maggiorante  $y'$  deve essere  $y' \geq y$ . Poiché  $y$  è un maggiorante,  $y$  è il minimo dei maggioranti. Quindi  $y = \sup A$ .  $\square$

**Esempio 2.6.** Proviamo a calcolare  $\sup A$  di:

$$A = \left\{ \frac{n-1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

che è l'insieme:

$$A = \left\{ 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \dots \right\}$$

Ha senso innanzitutto chiedersi se  $A$  è limitato superiormente. Possiamo dire che lo è con certezza perché il numeratore è sempre inferiore al denominatore, quindi

$$\frac{n-1}{n+1} < 1$$

Quindi 1 è un maggiorante. Dimostriamo che è anche il sup ( $\sup A = 1$ ).

In altri termini dobbiamo dimostrare che preso  $y' < 1$  esiste  $x \in A$  tale che  $y' < x \leq 1$ , che equivale a risolvere:

$$\begin{aligned} y' &< \frac{n-1}{n+1} \\ y'(n+1) &< n-1 \\ y'n + y' &< n-1 \\ n(1-y') &> y' + 1 \\ n &> \frac{y'+1}{1-y'} \end{aligned}$$

Poiché  $\mathbb{N}$  non è limitato superiormente, esiste sempre una soluzione  $n \in \mathbb{N}$ . Ovvero:

$$\exists x = \frac{n-1}{n+1} \in A \quad y' < x$$

Quindi  $\sup A = 1$ .

## 2.2 Insieme $\mathbb{R}$

I numeri reali sono un insieme, chiamato  $\mathbb{R}$ , su cui sono definite le operazioni di somma e prodotto, è definito un ordinamento ed esistono due elementi neutri per le due operazioni precedenti.

L'insieme dei numeri reali soddisfa tutte le seguenti proprietà, che erano già soddisfatte da  $\mathbb{Q}$  ma che riportiamo:

- La somma è commutativa e associativa, ha un elemento neutro che è lo zero.
- Il prodotto è commutativo e associativo, ha un elemento neutro che è l'uno.
- Di ogni elemento esiste l'opposto e l'inverso, ovvero:

$$\forall a \in \mathbb{R} \text{ esiste } b \in \mathbb{R} \quad a + b = 0 \quad (b = -a)$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ esiste } b \in \mathbb{R} \quad a \cdot b = 1 \quad \left(b = \frac{1}{a}\right)$$

- È definito un ordinamento:

$$a \leq b \text{ e } b \leq a \implies a = b$$

$$a \leq b \text{ e } b \leq c \implies a \leq c$$

$$\forall a, b \quad a \leq b \text{ o } b \geq a$$

$$a \leq b \implies \forall c \quad a + c \leq b + c$$

$$a \leq b \implies \forall c > 0 \quad a \cdot c \leq b \cdot c$$

In aggiunta alle proprietà comuni a  $\mathbb{Q}$  abbiamo che se  $A \subseteq \mathbb{R}$  è non vuoto, allora  $A$  ammette un estremo superiore (eventualmente  $\sup A = +\infty$ ).

Dobbiamo mostrare ora che esistono i numeri reali e per fare ciò ricorriamo al modello degli *allineamenti decimali*.

Un *allineamento decimale* è una sequenza numerabile di interi del tipo  $p_0, p_1, p_2, \dots$  dove

$$0 \leq p_k \leq 9 \quad k \in \mathbb{N}$$

Un allineamento decimale è *periodico* se si ripete da un certo punto in poi, cioè ha la forma:

$$p_0, p_1, \dots, \underbrace{p_n, p_{n+1}, \dots, p_{n+k}}_{\text{periodo}}, p_{n+1+k}, \dots$$

Un allineamento periodico con periodo 0 si dice anche che è limitato (ad esempio 1,5000... è limitato).

Dato un allineamento decimale  $x$  definiamo il troncamento  $k$ -esimo

$$r_k(x) = p_0 + \frac{1}{10}p_1 + \dots + \frac{1}{10^k}p_k$$

Il troncamento  $r_0(x)$  è la *parte intera* di  $x$  e si indica  $[x]$ .

Ad ogni  $x \in \mathbb{Q}$  possiamo associare un allineamento decimale  $T(x) = p_0, p_1, p_2, \dots$

$$p_0 = \max \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x \}$$

$$p_1 = \max \{ n \in \mathbb{Z} \mid p_0 + \frac{1}{10}n \leq x \}$$

e così via, in modo che per ogni  $k > 0$  sia

$$p_k = \max \{ n \in \mathbb{Z} \mid \underbrace{r_{k-1}(T(x))}_{p_0 + \frac{1}{10}p_1 + \dots} + \frac{1}{10^k}n \leq x \}$$

**Esempio 2.7.** Consideriamo  $T(x)$  per  $x = \frac{3}{2}$ , che è 1,5000.... Infatti:

$$p_0 = \max \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \leq \frac{3}{2} \} = 1$$

$$p_1 = \max \{ n \in \mathbb{Z} \mid 1 + \frac{1}{10}n \leq \frac{3}{2} \} = 5$$

$$p_2 = \max \{ n \in \mathbb{Z} \mid 1 + \frac{5}{10}n + \frac{1}{100}n \leq \frac{3}{2} \} = 0$$

Prestiamo attenzione al fatto che il comportamento di  $T(x)$  per i numeri negativi, così per come è stato definito, è diverso da come ce lo potremmo aspettare. Ad esempio:

$$T(-\frac{3}{2}) = -2,500...$$

**Proposizione 2.8.** Per ogni  $x \in \mathbb{Q}$ ,  $k > 0$  vale:

$$0 \leq x - r_k(T(x)) < \frac{1}{10^k}$$

Come conseguenza si ha che l'insieme

$$\{ n \in \mathbb{Z} \mid r_{k-1}(T(x)) + \frac{1}{10^k}n \leq x \}$$

contiene 0 e ha 9 come maggiorante.



# Capitolo 3

## Terza lezione (13/10/2015)

### 3.1 Allineamenti decimali e insieme $\mathbb{R}$

Abbiamo già visto come si scrive un allineamento decimale:  $P_0, P_1, P_2, \dots$  con  $P_k \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq P_k \leq 9$  per  $k > 0$ .

Dato un allineamento  $x$  consideriamo il suo  $k$ -esimo troncamento:

$$r_k(x) = P_0 + \frac{1}{10}P_1 + \dots + \frac{1}{10^k}P_k$$

Dato  $x \in \mathbb{Q}$ , esiste l'allineamento decimale  $T(x)$  tale che  $0 \leq x - r_k(T(x)) \leq \frac{1}{10^k}$ .

Nota che  $T(x)$  non può avere periodo 9.

**Esempio 3.1.** Supponiamo che esista  $T(x) = 0, \bar{9}$ . Allora

$$\begin{aligned} r_k(T(x)) &= 0 + \frac{9}{10} + \dots + \frac{9}{10^k} \\ &= \frac{10^k - 1}{10^k} \end{aligned}$$

Ad esempio per  $k = 2$  varrebbe  $r_k(T(x)) = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} = \frac{99}{100}$ ; e così via.

$$0 \leq x - r_k(T(x)) < \frac{1}{10^k}$$

Che è equivalente a:

$$\underbrace{r_k(T(x))}_{\frac{10^k - 1}{10^k}} \leq x < \underbrace{r_k(T(x)) + \frac{1}{10^k}}_1$$

Non esiste  $x \in \mathbb{Q}$  tale che  $1 - \frac{1}{10^k} \leq x < 1$  per ogni  $k$ . Ciò implica che  $0, \bar{9}$  non è  $T(x)$  per un  $x \in \mathbb{Q}$ .

**Definizione 3.2.** Un allineamento decimale è ammissibile se non è periodico con periodo 9.

Sia  $\mathcal{A}$  l'insieme degli allineamenti decimali ammissibili. Definiamo  $T$  come la funzione che associa un numero razionale a un allineamento ammissibile (che è un elemento dell'insieme  $\mathcal{A}$ ). Sinteticamente si scrive:

$$T : \mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{A}$$

Poniamo  $\mathbb{R} = \mathcal{A}$ . L'ordinamento su  $\mathcal{A}$  è definito nel seguente modo:  $p_0, p_1, \dots, p_k < q_0, q_1, \dots, q_k$  se e solo se, detto  $k = \min = \{i \mid p_i \neq q_i\}$ , si ha  $p_k < q_k$ .

**Esempio 3.3.** Consideriamo il banale ordinamento tra le seguenti coppie di allineamenti:

- $2, 3 < 3, 2$  (vera per  $k = 0$ )
- $1, 12 < 1, 13$  (vera per  $k = 2$ )

**Definizione 3.4.** Dati  $x, y \in \mathcal{A}$  definiamo  $x \leq y$  se  $x < y$  o  $x = y$ .

L'insieme  $\mathcal{A}$  è totalmente ordinato.

**Proposizione 3.5.** Ogni  $X \subset \mathcal{A}$  non vuoto ha un estremo superiore.

TODO *Dimostrazione.* Se  $X$  non è limitato superiormente, allora  $\sup X = +\infty$ .

esempio Se  $X$  è limitato superiormente, allora esiste sicuramente un maggiorante  $M$ .

Per ogni  $k \in \mathbb{Z}$  con  $k \geq 0$  definiamo la funzione  $a_k : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}$  (che estrae la  $k$ -esima cifra); ovvero:  $a_k(p_0, p_1, \dots, p_k) = p_k$ .

Osserviamo che  $\{a_0(z) \mid z \in X\}$  è limitato superiormente perché  $M$  è un suo maggiorante.

Sia  $q_0 = \max \{a_0(z) \mid z \in X\}$ .

Se  $k > 0$ :  $\{a_k(z) \mid z \in X\} \subseteq \{0, \dots, 9\}$ .

$q_k = \max \{a_k(z) \mid z \in X \text{ tale che } a_0(z) = q_0, a_1(z) = q_1, \dots, a_{k-1}(z) = q_{k-1}\}$ .

Sia  $y = q_0, q_1, \dots$  un maggiorante. Sia  $z = p_0, \dots, p_k$  di  $X$ ; sia  $j = \min \{p_j \neq q_j\}$  con  $z \neq y$ .

$$q_j = \max \underbrace{\{a_j(z) \mid z \in X, a_0(z) = q_0, \dots, a_{j-1}(z) = q_{j-1}\}}_C$$

Notiamo che  $C$  contiene  $z$ . Ciò implica che  $\underbrace{a_j(z)}_{p_j} \leq q_j$ , ma per la definizione precedente

$p_j \neq q_j$ .

$\implies p_j < q_j$

$\implies z < y$ , quindi  $y$  è effettivamente un maggiorante.

Preso  $y' \leq y$  devo dimostrare che  $\exists z \in X$  tale che  $y' < z$ .

$y' = p_0, p_1, \dots$

$y = q_0, q_1, \dots$

Supponiamo che  $p_i = q_i$  e  $p_k < q_k$  per ogni  $i < k$ . Per definizione di  $q_k$  esiste  $z \in X$  tale che  $a_i(z) = q_i$  per  $i \leq k$ . Per costruzione questo implica  $y' < z$ . Abbiamo quindi dimostrato che  $y = \sup X$ .  $\square$

Per ora abbiamo definito  $(\mathcal{A}, \leq)$ . Dobbiamo però ancora definire la somma in  $\mathcal{A}$ , si pone:  $x + y = \sup \{ T(r_k(x) + r_k(y)) \mid k \in \mathbb{N} \}$  dove  $x, y$  sono allineamenti.

Possiamo inoltre definire in modo analogo il prodotto.

Per  $x, y \geq 0$ ,  $x \cdot y = \sup \{ T(r_k(x) \cdot r_k(y)) \mid k \in \mathbb{N} \}$

**Proposizione 3.6.** *Esiste un  $e \in \mathcal{A}$  tale che  $x + e = x = e + x$  per ogni  $x$  (detto anche “zero”).*

*Dimostrazione.* Poniamo  $e = T(0) = \{0, 0000 \dots\}$ .

Allora  $x + e = \sup \{ T(r_k(x) + r_k(e)) \mid k \in \mathbb{N} \}$ .

Calcoliamo  $r_k(e) = 0 + \frac{1}{10} \cdot 0 + \dots + \frac{1}{10^k} \cdot 0 = 0$ .

Quindi  $x + e = \sup \{ T(r_k(x)) \mid k \in \mathbb{N} \} = x$ .

Quindi  $\mathcal{A}$  contiene lo zero. □

In modo del tutto analogo si prova che  $\mathcal{A}$  contiene anche  $1, 000 \dots$ .

Siamo quindi pronti per definire l'insieme dei reali  $\mathbb{R}$ ; in modo sintetico scriviamo  $\mathbb{R} = (\mathcal{A}, \leq, +, \cdot, 0, 1)$ .

Osserviamo che  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  e che ogni  $x \in \mathbb{Q}$  determina un  $T(x) \in \mathcal{A} = \mathbb{R}$ .

Valgono le solite proprietà:

- $T(x + y) = T(x) + T(y)$
- $T(x \cdot y) = T(x) \cdot T(y)$
- $T(0) = 0$ .
- $T(1) = 1$ .

**Proposizione 3.7** (Proprietà di Archimede). *Dati  $a, b$  reali positivi esiste un  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $n \cdot a > b$ .*

*Dimostrazione.* Per assurdo supponiamo che valga il contrario, ovvero che  $n \cdot a < b \quad \forall n$ . Allora  $n < \frac{b}{a}$ . Questo è impossibile perché  $\mathbb{N}$  dovrebbe essere limitato superiormente, quindi avere un massimo. Ma ciò è palesemente assurdo, perché vale sempre  $x + 1 \in \mathbb{N}$  e  $x + 1 > x$ . □

## 3.2 Potenze e logaritmi

Dato  $a \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$  definiamo  $a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ volte}}$ . L'elevamento a potenza gode delle seguenti proprietà:

- $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Per definizione se  $a \neq 0 \implies a^0 = 1$ . Sempre per definizione  $a^{-n} = (\frac{1}{a})^n$ .

**Teorema 3.8.** Dato  $x \in \mathbb{R}$  positivo e  $n \in \mathbb{N}$  esiste un unico reale positivo,  $y$ , tale che  $y^n = x$  (ovvero  $y = \sqrt[n]{x}$ ).

**Definizione 3.9.** Dato  $x$  reale positivo e  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  (assumendo senza perdita di generalità che  $q > 0$ ), si pone  $x^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{x})^p$ .

Se  $x \geq 1$  reale e  $y \in \mathbb{R}$  definiamo  $x^y = \sup \{ x^{\frac{p}{q}} \mid \frac{p}{q} \leq y \}$ .

Se  $x < 1$  possiamo invertire:  $x^y = (\frac{1}{x})^{-y}$ .

Valgono le solite proprietà.

**Teorema 3.10.** Dato  $x \in \mathbb{R}$  (con  $x > 0$ ,  $y > 1$ ) esiste un unico  $z \in \mathbb{R}$  tale che  $x^z = y$ . Si scrive:  $z = \log_x y$ .

### 3.3 Intervalli e intorno

Dati  $a, b \in \mathbb{R}$  sono definiti i seguenti intervalli (riportati solo nelle forme più esemplificative, le altre sono immediate dalle seguenti):

$$\begin{aligned}(a, b) &= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \} \\ [a, b] &= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \} \\ (-\infty, a) &= \{ x \in \mathbb{R} \mid x < a \} \\ (a, +\infty) &= \{ x \in \mathbb{R} \mid x > a \} \\ [a, b) &= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \} \\ (a, b] &= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}\end{aligned}$$

**Definizione 3.11.** Dati  $x \in \mathbb{R}$  e  $r \in \mathbb{R}$  (con  $r > 0$ ), si dice intorno circolare di  $x$  di raggio  $r$  l'intervallo  $B_r(x) = (x - r, x + r) = \{ y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < r \}$ .

Definiamo inoltre  $B'_r(x) = B_r(x) \setminus \{x\} = (x - r, x) \cup (x, x + r)$ .

Ricorda che  $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Inoltre osserviamo che  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

### 3.4 Successioni

Una successione è una funzione  $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $n \rightarrow x_n$ ).

Tale funzione viene rappresentata con la notazione  $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  oppure  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Esempio 3.12.**  $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$  rappresenta la successione  $\{1, 2, 3, \dots\}$ , ovvero la funzione  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ( $n \rightarrow n$ ).

**Esempio 3.13.**  $\{\lfloor \sqrt{n} \rfloor\}_{n \in \mathbb{N}}$  rappresenta la successione  $\{1, 1, 1, 2, \dots, \lfloor \sqrt{n} \rfloor, \dots\}$ , ovvero la funzione  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ( $n \rightarrow \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ ).

**Esempio 3.14.**  $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  rappresenta la successione  $\{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ .

**Definizione 3.15.** Una successione  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è crescente se  $x_{n+1} > x_n$  per ogni  $n$ .

**Definizione 3.16.** Una successione  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è decrescente se  $x_{n+1} < x_n$  per ogni  $n$ .

**Definizione 3.17.** Una successione  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è non crescente se  $x_{n+1} \leq x_n$  per ogni  $n$ .

**Definizione 3.18.** Una successione  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è non decrescente se  $x_{n+1} \geq x_n$  per ogni  $n$ .

Se una successione soddisfa una qualsiasi delle precedenti condizioni, allora essa si dice monotona.

**Esempio 3.19.** Le tre successioni mostrate in precedenza (3.12, 3.13, 3.14) sono rispettivamente crescente, non decrescente e non monotona.

**Definizione 3.20.** Si dice che  $L \in \mathbb{R}$  è il limite di  $\{x_n\}$  se per ogni intorno  $B_r(L)$  di  $L$  esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che  $x_n \in B_r(L)$  per ogni  $n > N$ .

Analogamente per ogni  $r > 0$  esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che  $L - r < x_n < L + r$  per ogni  $n > N$ .

Si scrive  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L$ .

**Esempio 3.21.** La successione  $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  ha limite 0.

Dobbiamo dimostrare che per ogni  $r > 0$  esiste  $N$  tale che se  $n > N$  allora  $\frac{1}{n} \in B_r(0)$ .

Ovvero  $|\frac{1}{n}| < r$ , cioè  $1 < n \cdot r$ , quindi  $n > \frac{1}{r}$ .

Poniamo  $N = [\frac{1}{r} + 1]$ , allora  $n > N \implies n > \frac{1}{r} \implies x_n \in B_r(0)$ .

Quindi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ .



# Capitolo 4

## Quarta lezione (16/10/2015)

### 4.1 Limiti di una successione

**Definizione 4.1.** Si dice che  $L \in \mathbb{R}$  è il limite di  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $N$  tale che, per ogni  $n > N$ , vale:

$$L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$$

Si scrive:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L$$

**Teorema 4.2** (Teorema di unicità del limite). *Sia  $\{x_n\}$  una successione. Se  $\{x_n\}$  ha limite  $L$  e  $\{x_n\}$  ha limite  $L'$ , allora  $L = L'$ .*

In altre parole stiamo dicendo che se il limite esiste allora è unico. Dimostriamo per assurdo il teorema.

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo  $L \neq L'$ . Sia  $\varepsilon$  il punto medio tra  $L$  e  $L'$ , ovvero:

$$\varepsilon = \frac{|L - L'|}{2} > 0$$

Per definizione di limite esiste un  $N$  tale che  $|x_n - L| < \varepsilon$  per ogni  $n > N$ ; quindi  $x_n < L + \varepsilon$  e  $x_n > L - \varepsilon$ .

Esiste un  $N'$  tale che se  $n > N'$  allora  $|x_n - L'| < \varepsilon$ .

Scelto  $n > N$  e  $n > N'$ , allora devono valere entrambe le precedenti. Riassumendo, deve valere sia  $|x_n - L| < \varepsilon$  che  $|x_n - L'| < \varepsilon$ .

Per la disuguaglianza triangolare abbiamo che:

$$|L - L'| \leq |L - x_n| + |x_n - L'| \leq 2 \cdot \varepsilon$$

Quindi  $|L - L'| < |L - L'|$ , che è palesemente assurdo.

In altri termini, stiamo dicendo che:

$$(L - \varepsilon, L + \varepsilon) \cup (L' - \varepsilon, L' + \varepsilon) = \emptyset$$

□

**Esempio 4.3.** Consideriamo la successione

$$x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Il suo limite è zero.

Per dimostrarlo dobbiamo far vedere che esiste per ogni  $\varepsilon > 0$  un  $N$  tale che, se  $n > N$ , allora  $|x_n| < \varepsilon$ .

$$\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{2^n} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < 2^n \iff n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$$

Non ci resta che scegliere  $N > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$ , ad esempio

$$N = \left\lceil \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$$

Quando  $n > N$  varrà

$$n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \implies \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

**Esempio 4.4.** Consideriamo questa volta la successione  $\{n^2\}_{n \in \mathbb{N}}$  che non ha limite.

Supponiamo che abbia un limite  $L$ , allora per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $N$  tale che:

$$L - \varepsilon < n^2 < L + \varepsilon \quad \forall n > N$$

Tale disuguaglianza deve valere anche per  $\varepsilon = L$ .

Quindi:

$$0 = L - \varepsilon < n^2 < L + \varepsilon = 2L$$

Ciò implica  $n < \sqrt{2L}$ , che non può essere soddisfatta. Quindi  $L > 0$  non può essere il limite.

In modo ancora più semplice possiamo mostrare che il limite non può essere nemmeno negativo. Infatti se  $L < 0$  dovrebbe valere per  $n > N$ :

$$|n^2 - L| < \frac{1}{2} \implies |n^2| < \frac{1}{2}$$

che è assurdo perché il più piccolo quadrato di un numero naturale è 1.

## 4.2 Successioni convergenti, divergenti, limitate

**Definizione 4.5.** Si dice che  $\{x_n\}$  ha limite  $+\infty$  (si dice anche “diverge a  $+\infty$ ”) se, per ogni  $M \in \mathbb{R}$ , esiste un  $N \in \mathbb{N}$  tale che, per ogni  $n > N$ ,  $x_n > M$ .

In altre parole stiamo dicendo che, da un certo punto in poi ( $n > N$ ), il valore della successione sarà sempre maggiore di  $M$ , con  $M$  scelto grande a piacere.

In modo analogo una successione ha limite  $-\infty$  se per ogni  $M \in \mathbb{R}$  esiste un  $N \in \mathbb{N}$  tale che, per ogni  $n > N$ , vale  $x_n < -M$ .



**Esempio 4.6.** Consideriamo il limite di questa successione:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$$

Tale limite è corretto. Scegliamo  $M$  positivo e poniamo  $N = [\sqrt{M}] + 1$ . In tale situazione  $n > N \implies n > \sqrt{M} \implies n^2 > M$ ; che è esattamente la definizione precedente.

**Esempio 4.7.** La successione  $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  non converge e non diverge (cioè non ha limite).

Il suo limite non può essere infinito perché  $(-1)^n \in [-1; 1]$ . Scelto banalmente  $M > 1$  non vale mai  $x_n > M$ . In modo analogo non vale mai nemmeno  $x_n < -M$ .

Mostriamo ora che non ha nemmeno un limite finito (cioè  $L \in \mathbb{R}$ ). Se fosse  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = L$  allora, posto  $\varepsilon = 1$  nella definizione di limite, avremmo che esiste  $N$  tale che:

$$\begin{aligned} |(-1)^n - L| &< 1 \quad \forall n > N \\ \implies |1 - L| &< 1 \quad \text{e} \quad |-1 - L| < 1 \\ \implies |1 - (-1)| &\leq |1 - L| + |(-1) - L| < 2 \\ \implies |2| &< 2 \end{aligned}$$

che è palesemente assurdo.

**Definizione 4.8.** Una successione  $\{x_n\}$  è limitata se esiste  $M \in \mathbb{R}$  tale che  $|x_n| \leq M$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

**Esempio 4.9.** Mostriamo due successioni limitate:

$$\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ è limitata: } M = 1 \quad |(-1)^n| = 1$$

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ è limitata: } M = 1 \quad \left|\frac{1}{n}\right| \leq 1$$

Enunciamo e dimostriamo ora un importante teorema sulla relazione che sussiste tra le definizioni precedenti.

**Teorema 4.10.** *Ogni successione convergente è limitata. Nessuna successione divergente è limitata.*

Dimostriamo la prima affermazione del teorema.

*Dimostrazione.* Sia:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L \quad L \in \mathbb{R}$$

Per definizione di limite esiste un  $N$  tale che  $L - 1 < x_n < L + 1$  per ogni  $n > N$  (ovvero  $|x_n| < |L| + 1$ ). Scegliamo  $M$ :

$$M = \max\{|L| + 1, |x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|\}$$

Allora:

- per  $n = 1, \dots, N$  vale  $|x_n| \leq M$  perché appartiene all'insieme

- per  $n > N$  vale  $|x_n| \leq M$  perché abbiamo detto che  $|x_n| < |L| + 1$ .

Abbiamo quindi dimostrato che la successione  $\{x_n\}$  è limitata.  $\square$

Dimostriamo ora la seconda affermazione del teorema.

*Dimostrazione.* Per assurdo, sia  $\{x_n\}$  una successione divergente limitata. Allora deve valere:

$$|x_n| < M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se il limite della successione è  $+\infty$  allora esiste un  $N$  tale che per  $n > N$  vale  $x_n > M$ . Questo è assurdo (avevamo detto che  $x_n < M$ ).

Non è neppure possibile che il limite sia  $-\infty$ : in quel caso dovrebbe essere  $x_n < -M$  che è assurdo per  $n > N$ .  $\square$

Consideriamo con attenzione questi due esempi:

**Esempio 4.11.**  $\{(-1)^n\}$  è limitata ma non è convergente.

**Esempio 4.12.**

$$x_n = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ n & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Quindi  $\{x_n\} = \{1, 0, 3, 0, 5, \dots\}$ . Essa non è limitata ma non è divergente.

È necessario prestare quindi attenzione al fatto che il teorema precedente non indica “se e solo se”.

**Teorema 4.13.** Sia

$$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \quad e \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$$

$$\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \quad e \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y$$

Allora valgono le seguenti:

1.  $\{x_n + y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $x + y$
2.  $\{x_n \cdot y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $x \cdot y$
3. se  $x_n = k$  allora  $x = k$
4. se  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\{\alpha \cdot x_n\}$  converge a  $\alpha \cdot x$
5.  $\frac{x_n}{y_n}$  converge a  $\frac{x}{y}$  se  $y_n \neq 0 \forall n$  e  $y \neq 0$
6. se  $x_n \leq y_n$  per ogni  $n$ , allora  $x \leq y$
7.  $\{|x_n|\}$  converge a  $|x|$

Dimostriamo a scopo didattico i punti uno e sei.

*Dimostrazione.* Per dimostrare il punto uno, devo far vedere che  $\forall \varepsilon$  esiste  $N$  tale che  $\forall n > N$  vale:

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| < \varepsilon$$

Scelgo  $N$  tale che  $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > N$ .

Scelgo  $N'$  tale che  $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > N'$ .

Sia  $N'' = \max\{N, N'\}$ . Quindi se  $n > N''$  allora varranno anche  $n > N'$  e  $n > N$ .

$$\implies |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\implies |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\implies |(x_n + y_n) - (x + y)| < \varepsilon \quad \forall n > N''$$

Abbiamo quindi dimostrato che  $\lim(x_n + y_n) = (\lim x_n) + (\lim y_n)$ . □

Dimostriamo ora il punto sei:

*Dimostrazione.* Fissato  $\varepsilon > 0$  per  $n > N''$  vale  $|x_n - x| < \varepsilon$  e  $|y_n - y| < \varepsilon$ . Quindi, preso  $x < \varepsilon + x_n$ :

$$\implies x \leq \varepsilon + y_n < \varepsilon + (y + \varepsilon) = y + 2\varepsilon$$

$$\implies x < y + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\implies x - y < 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\implies x - y \leq 0 \implies x \leq y$$

□

Prestiamo attenzione al fatto che non vale lo strettamente minore! Formalmente, non è vero che se  $x_n < y_n$  per ogni  $n$  allora  $\lim x_n < \lim y_n$ . Ad esempio  $x_n = \frac{1}{n+1}$  e  $y_n = \frac{1}{n}$  hanno entrambi limite 0, quindi possiamo scrivere  $\lim x_n \leq \lim y_n$  (con il minore uguale!).

Con quanto abbiamo appreso sopra possiamo già calcolare alcuni limiti interessanti, ad esempio:

$$\lim \frac{1}{n^2} = \lim \left( \frac{1}{n} \right) \cdot \left( \frac{1}{n} \right) = \left( \lim \frac{1}{n} \right) \cdot \left( \lim \frac{1}{n} \right) = 0 \cdot 0 = 0$$

Enunciamo ora un teorema sulle successioni che richiederebbe la nozione di funzione continua, non fornita per ora in questo corso. Facciamo solo alcuni esempi di funzioni continue:  $f(x) = \sin x$ ,  $f(x) = x^a$ ,  $f(x) = a^x$ ,  $f(x) = \log_a x$ .

**Teorema 4.14.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e  $\{x_n\}$  una successione in  $[a, b]$  il cui limite  $\lim x_n = x$ ; allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x)$$

Supponiamo di voler calcolare  $\lim \sqrt{\frac{2n+1}{n}}$  tramite il teorema esposto. Calcoliamo il limite senza radice:

$$\lim \frac{2n+1}{n} = \lim \left( 2 + \frac{1}{n} \right) = \lim 2 + \lim \frac{1}{n} = 2 + 0 = 2$$

Grazie al teorema possiamo affermare che  $\lim \sqrt{\frac{2n+1}{n}} = \sqrt{2}$ .

**Teorema 4.15.** *Sia  $\{x_n\}$  una successione il cui limite vale  $+\infty$  e  $\{y_n\}$  una generica successione. Allora:*

1. *se  $\lim y_n = y$  oppure  $\lim y_n = +\infty$  allora  $\lim x_n + y_n = +\infty$*
2. *se  $\lim y_n = y > 0$  oppure  $\lim y_n = +\infty$  allora  $\lim x_n \cdot y_n = +\infty$*
3. *se  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  allora  $\lim \alpha \cdot x_n = +\infty$*
4. *se  $x_n \neq 0$  per ogni  $n$  allora  $\lim \frac{1}{x_n} = 0$*
5. *se  $x_n \leq y_n$  per ogni  $n$  allora  $\lim y_n = +\infty$*
6.  *$\lim |x_n| = +\infty$*

Queste proprietà possono essere scritte anche in forma sintetica:

$$\begin{aligned}
 +\infty + y &= +\infty \\
 +\infty + (+\infty) &= +\infty \\
 +\infty \cdot y &= +\infty & (y > 0) \\
 +\infty \cdot \alpha &= +\infty & (\alpha > 0) \\
 \frac{1}{+\infty} &= 0
 \end{aligned}$$

# Capitolo 5

## Quinta lezione (20/10/2015)

### 5.1 Forme di indeterminazione

In alcuni casi non possiamo stabilire univocamente quanto vale un limite. Chiamiamo tali casi particolari *forme di indeterminazione*.

$\frac{\infty}{\infty}$  è una forma di indeterminazione, in quanto ho che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$$

Quindi non posso dire nulla su

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n}$$

Mostriamo ora tre esempi di limiti che presentano questa forma di indeterminazione.

**Esempio 5.1.** Un limite con la forma di indeterminazione  $\frac{\infty}{\infty}$  è  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n}$ , perché  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ .

In questo caso il calcolo del limite è banale:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} \quad \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1$$

**Esempio 5.2.**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n^2} \quad \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

**Esempio 5.3.**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n}} \quad \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty + 0 = +\infty$$

Un'altra forma di indeterminazione è  $\infty - \infty$ . Anche per questa mostriamo tre esempi.

**Esempio 5.4.**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) - n \quad [\infty - \infty] = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

**Esempio 5.5.**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) - n^2 \quad [\infty - \infty] = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left( -1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = -\infty$$

**Esempio 5.6.**

$$\lim(n + (-1)^n) - n \quad [\infty - \infty] = \lim(-1)^n \text{ che non esiste}$$

Anche  $\infty \cdot 0$  è una forma di indeterminazione. Come per le precedenti, mostriamo tre esempi.

**Esempio 5.7.**

$$\lim n \cdot \frac{1}{n+1} \quad [\infty \cdot 0] = 1$$

**Esempio 5.8.**

$$\lim n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \quad [\infty \cdot 0] = +\infty$$

**Esempio 5.9.**

$$\lim n \cdot \frac{1}{n^2} \quad [\infty \cdot 0] = 0$$

## 5.2 Teoremi su limiti di successioni

**Teorema 5.10** (Permanenza del segno). *Sia:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x > 0 \quad \text{oppure} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$$

Allora  $x_n > 0$  definitivamente, ovvero esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che  $x_n > 0 \quad \forall n > N$ .

Il concetto che abbiamo espresso di *definitivamente* è importante e verrà usato anche in seguito. Dimostriamo ora il teorema.

*Dimostrazione.*

- I. se  $\lim x_n = x > 0$  allora per definizione di limite  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $N$  tale che  $x_n \in B_\varepsilon(x)$ . Scegliamo  $\varepsilon = x$ ; segue che  $x_n \in (x - x, x + x)$ . Quindi  $x_n > 0$  per ogni  $n > N$ .
- II. se invece  $\lim x_n = +\infty$  allora possiamo dire che  $\forall M$  esiste  $N$  tale che  $x_n > M$  per ogni  $n > N$ . Scegliamo  $M = 0$  e troviamo che  $x_n > 0 \quad \forall n > N$ .

□

**Teorema 5.11.** *Ogni successione monotona e limitata converge. Ogni successione monotona non limitata diverge.*

Dimostriamo separatamente le due parti del teorema.

*Dimostrazione.* Sia  $\{x_n\}$  una successione limitata (ricordiamo che questo significa che  $\exists M$  tale che  $|x_n| \leq M \quad \forall n$ ) non decrescente. Imporre la non decrescenza non fa perdere di generalità la dimostrazione, sarebbe sufficiente considerare l'opposto. Non decrescente significa che  $x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n$ .

Consideriamo ora  $\sup \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Questo sup esiste e lo chiamiamo  $\lambda$ . L'insieme  $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  è limitato (ovvero  $\forall y \in \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad |y_n| \leq M$ ). Quindi il sup non è infinito e  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Vogliamo far vedere, come è prevedibile, che  $\lambda = \lim x_n$ . Preso  $\varepsilon > 0$  dev'essere  $x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  definitivamente. Per definizione di sup,  $\lambda - \varepsilon < x_n$  per qualche  $N \in \mathbb{N}$ . Se  $n > N$  allora, visto che la successione è non decrescente, vale  $x_n \geq x_N > \lambda - \varepsilon$ .

Quindi  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $N$  tale che  $x_n \in (\lambda - \varepsilon, \lambda]$  per ogni  $n > N$ .  $\square$

*Dimostrazione.* Se  $\{x_n\}$  è non limitata e non decrescente, allora dobbiamo dimostrare che  $\lim x_n = +\infty$ .

Per definizione di insieme limitato  $\forall M \exists N$  tale che  $|x_N| > M$ . Possiamo supporre che  $x_N > M$  (a patto che  $M > x_0$ ). Poiché  $\{x_n\}$  è non decrescente,  $x_n > x_N \forall n > N$ .

Quindi  $x_n > M \forall n > N$  e  $\lim x_n = +\infty$ .  $\square$

**Osservazione 5.12.** Le successioni che non hanno limite non sono monotone.

Ad esempio, la successione  $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  non ha limite (oscilla tra -1 e 1) e non è monotona. La successione  $\{1, -1, 2, 3, 4, \dots\}$  invece ha limite  $+\infty$  ma non è monotona.

**Teorema 5.13** (Confronto tra successioni). *Siano  $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$  successioni tali che  $x_n \leq y_n \leq z_n$  per ogni  $n$ . Supponiamo che  $\lim x_n = L = \lim z_n$ . Allora anche  $\lim y_n = L$ .*

*Dimostrazione.* Per  $\varepsilon > 0$  deve esistere  $N \in \mathbb{N}$  tale che  $x_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \forall n > N$ .

Sia  $N'$  tale che  $x_n > L - \varepsilon \forall n > N'$ . Sia  $N''$  tale che  $z_n < L + \varepsilon \forall n > N''$ . Sia inoltre  $N = \max\{N', N''\}$ . Allora per ogni  $n > N$  vale la seguente disuguaglianza:

$$L - \varepsilon < \underbrace{x_n \leq y_n \leq z_n}_{\text{per ipotesi}} < L + \varepsilon$$

Quindi  $y_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \forall n > N$ .  $\square$

**Osservazione 5.14.** Osserviamo che tale teorema vale anche per limiti infiniti. Se  $\lim x_n = +\infty$ ,  $\lim z_n = +\infty$ ,  $x_n \leq y_n \leq z_n$ , allora  $\lim y_n = +\infty$ .

## 5.3 Coefficienti binomiali e disuguaglianza di Bernoulli

Per poter affrontare la *disuguaglianza di Bernoulli*, dobbiamo prima conoscere alcuni cenni sul coefficiente binomiale.

Vale la seguente equazione (detta binomio di Newton):

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

che esplicitata per i primi esponenti vale:

$$\begin{aligned} (a + b)^0 &= 1 \\ (a + b)^1 &= a + b \\ (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

Considerando solo i coefficienti, essi possono essere anche rappresentati in un triangolo di questo tipo, dove ogni numero è somma dei due numeri sopra di esso (a sinistra e a destra):

$$\begin{array}{cccc}
& & 1 & \\
& & 1 & 1 \\
& 1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1
\end{array}$$

**Definizione 5.15.**

$$\binom{n}{k} \text{ tale che } (a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

Il coefficiente binomiale deve essere tale in modo che valga la seguente proprietà:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Per far ciò poniamo:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Valgono anche le seguenti proprietà, tutte immediatamente e facilmente verificabili a partire dalla definizione:

$$\begin{aligned}
\binom{1}{0} &= 1 \\
\binom{1}{1} &= 1 \\
\binom{n}{0} &= 1 \\
\binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k} \\
\binom{n}{1} &= n
\end{aligned}$$

Siamo ora pronti a enunciare e dimostrare la disuguaglianza.

**Teorema 5.16** (Disuguaglianza di Bernoulli). *Sia  $h \geq 0$ , allora:*

$$(1+h)^n \geq 1+nh \quad \forall n$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned}
(1+h)^n &= \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}h + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k}h^k \\
&= 1 + nh + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k}h^k
\end{aligned}$$

Osserviamo che ogni termine  $\binom{n}{k}h^k$  è non negativo. Quindi  $(1+h)^n \geq 1+nh$ . □



## 5.4 $\lim a^n$ e criterio del rapporto

**Teorema 5.17.** *Sia  $a \neq 0$ , allora:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \begin{cases} 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } -1 < a < 1 \\ \# & \text{altrimenti} \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Discutiamo ciascun caso separatamente.

- se  $a = 1$  il limite è ovvio
- se  $a > 1$ , sia  $h = a - 1 > 0$ . Quindi possiamo scrivere  $\lim a^n = \lim(1 + h)^n$ . Dalla disuguaglianza di Bernoulli sappiamo che  $(1 + h)^n \geq 1 + hn \quad \forall n$ . Quindi la successione diverge, poiché  $\lim(1 + hn) = +\infty$  (considerato ovviamente  $h > 0$ ). In definitiva  $\lim a^n = +\infty$ .
- se  $-1 < x < 1$  valgono le seguenti:

$$\frac{1}{|a|} = 1 + h$$

$$\left(\frac{1}{|a|}\right)^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh$$

Consideriamo il reciproco e abbiamo che:

$$0 < |a|^n \leq 1 + nh$$

Per il teorema del confronto  $\lim |a^n| = 0$ , cioè  $\forall \varepsilon \quad |a|^n \in B_\varepsilon(0)$  definitivamente. Quindi  $-\varepsilon < |a^n| < \varepsilon \implies -\varepsilon < a^n < \varepsilon$ . Quindi  $a^n \in B_\varepsilon(0)$  definitivamente.

- se  $a \leq -1$  procediamo a una dimostrazione per assurdo. Sia  $L$  il limite:
  - se  $L > 0$  per il teorema della permanenza del segno  $a^n$  è definitivamente positivo; assurdo.
  - se  $L = +\infty$  vale lo stesso ragionamento del caso precedente.
  - se  $L < 0$  per il teorema della permanenza del segno  $a^n$  è definitivamente negativo; assurdo.
  - se  $L = 0$  allora  $\lim |a|^n = 0$ . Essendo  $|a| \geq 1$ , assurdo.

Quindi la successione non ha limite.

□

**Osservazione 5.18.** Alcuni testi scrivono  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty$  (senza segno) se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = +\infty$ . Ad esempio potrebbe esserci scritto che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2)^n = \infty$  visto che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |(-2)^n| = +\infty$ .

**Teorema 5.19** (Criterio del rapporto). Sia  $\{x_n\}$  una successione a termini positivi e sia

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Allora:

- se  $L > 1$  la successione è definitivamente crescente e  $\lim x_n = +\infty$ .
- se  $0 \leq L < 1$  la successione è definitivamente decrescente e  $\lim x_n = 0$ .

*Dimostrazione.*

- se  $L > 1$  allora possiamo imporre  $L = 1 + 2\varepsilon$ . Per definizione di limite  $\exists N$  tale che

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > L - \varepsilon \quad \forall n > N$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 + \varepsilon \quad \forall n > N$$

Quindi  $x_{n+1} > x_n \cdot (1 + \varepsilon) > x_n$  per  $n > N$ . Quindi la successione è definitivamente crescente.

Proseguendo otteniamo:

$$\begin{aligned} x_{N+2} &> x_{N+1} \cdot (1 + \varepsilon) \\ x_{N+3} &> x_{N+2} \cdot (1 + \varepsilon) > x_{N+1} \cdot (1 + \varepsilon)^2 \quad \text{e così via...} \end{aligned}$$

Generalizzando:

$$x_n > (1 + \varepsilon)^{n-(N+1)} \cdot x_{N+1}$$

Poiché  $(1 + \varepsilon)^{n-(N+1)}$  diverge a  $+\infty$ , per il teorema del confronto anche  $\lim x_n = +\infty$ .

- se  $0 < L < 1$  procediamo in modo analogo al caso precedente. Imponiamo  $L = 1 + 2\varepsilon$ . Per definizione di limite  $\exists N$  tale che

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < L + \varepsilon \quad \forall n > N$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1 - \varepsilon \quad \forall n > N$$

Come prima vale:

$$0 < x_n < (1 - \varepsilon)^{n-(N+1)} \cdot x_{N+1} \quad \forall n > N$$

Per il criterio del confronto, essendo  $\lim (1 - \varepsilon)^{n-(N+1)} \cdot x_{N+1} = 0$ , allora  $\lim x_n = 0$ . Inoltre,  $x_{n+1} < x_n \cdot (1 - \varepsilon) < x_n$ ; quindi la successione è definitivamente decrescente.

□

# Capitolo 6

## Sesta lezione (23/10/2015)

### 6.1 Criterio del rapporto (cont.)

Abbiamo già enunciato e dimostrato il criterio del rapporto; ora ne vogliamo mostrare un'applicazione calcolando un limite particolare.

**Esempio 6.1.** Dati  $\alpha, h > 1$  vogliamo calcolare

$$\lim \frac{n^\alpha}{h^n}$$

Conoscendo la gerarchia degli infiniti potremmo subito dire che tale limite vale 0. Mostriamo formalmente che ciò è vero, usando il criterio del rapporto.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{(n+1)^\alpha}{h^{n+1}}}{\frac{n^\alpha}{h^n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{h} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha}_1 \cdot \frac{1}{h} = \frac{1}{h}$$

Quindi

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{h} = \frac{1}{h}$$

Possiamo dire ciò perché

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

e quindi anche

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha = 1^\alpha = 1$$

Quindi ora poiché il limite è  $L = \frac{1}{h}$ , che è sicuramente minore di 1, per il criterio del rapporto possiamo dire che  $\lim x_n = 0$ .

Abbiamo quindi dimostrato che  $n^\alpha \ll h^n$ . In altre notazioni tale fatto viene espresso come  $n^\alpha = o(h^n)$ .

## 6.2 Successioni definite per ricorrenza

**Definizione 6.2.** Una successione è *definita per ricorrenza* se è data nella forma

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = F(n, x_n) \quad \text{con } n > 0 \end{cases}$$

La successione sarà quindi del tipo  $\{a, F(1, a), F(2, F(1, a)), \dots\}$ .

Mostriamo ora tre esempi di semplici successioni definite per ricorrenza. Nelle prossime tre successioni osserviamo che è semplice calcolare il termine generale  $x_n$ .

**Esempio 6.3.**

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = (n+1) \cdot x_n \quad n > 0 \end{cases}$$

La successione è del tipo  $\{1, 2 \cdot 1, 3 \cdot 2 \cdot 1, \dots\}$  e si vede chiaramente che  $x_n = n!$ .

**Esempio 6.4.** Siano fissati  $a$  e  $c$  numeri reali.

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = x_n + c \quad n > 0 \end{cases}$$

La successione è del tipo  $\{a, a+c, a+2c, \dots\}$  e si vede chiaramente che  $x_n = a + (n-1) \cdot c$ .

**Esempio 6.5.**

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = b \cdot x_n \quad n > 0 \end{cases}$$

La successione è del tipo  $\{a, a \cdot b, a \cdot b^2, \dots\}$  e si vede chiaramente che  $x_n = a \cdot b^{n-1}$ .

Consideriamo ora invece un esempio dove calcolare il termine generale è difficile.

**Esempio 6.6.**

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{2n+1}{n+3} \cdot x_n \quad n > 0 \end{cases}$$

Anche senza trovare il termine generale vogliamo però riuscire a calcolare il limite della successione. Osserviamo che tutti gli  $x_n > 0$  sono positivi, perché  $x_1 > 0$  e ogni  $\frac{2n+1}{n+3}$  è un termine positivo. La successione è quindi a termini positivi e possiamo quindi applicare il criterio del rapporto.

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \frac{\frac{2n+1}{n+3} \cdot x_n}{x_n} = \lim \frac{2n+1}{n+3} = \lim \frac{2n+6-5}{n+3} = \lim 2 - \frac{5}{n+3} = 2$$

Poiché 2 è maggiore di 1, per il criterio del rapporto la successione diverge a  $+\infty$  (ovvero  $\lim x_n = +\infty$ ).

**Esempio 6.7.** Prendiamo la stessa successione di prima invertendo numeratore e denominatore in  $x_{n+1}$ .

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{n+3}{2n+1} \cdot x_n \quad n > 0 \end{cases}$$

Valgono tutte le osservazioni fatte nell'esempio precedente. Inoltre, con gli stessi passaggi si può trovare che

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}$$

Poiché  $\frac{1}{2} < 1$ , per il criterio del rapporto  $\lim x_n = 0$ .

**Esempio 6.8.** Consideriamo quest'altro esempio in cui vogliamo calcolare il limite della successione.

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Si arriva a far vedere che

$$x_n = 2 - \frac{1}{2^n}$$

utilizzando la seguente uguaglianza:

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

e

$$(1 + a + \dots + a^n) \cdot (1 - a) = 1 - a^{n+1}$$

Sostituendo ovviamente  $a = \frac{1}{2}$  resta

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - \frac{1}{2}^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}^{n+1}\right) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

In definitiva scriviamo

$$\lim x_n = \lim \underbrace{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}_0 = 2$$

**Osservazione 6.9.** Per ogni  $n \geq 1$  vale  $n! \geq 2^{n-1}$ . Possiamo mostrare che è vero per induzione.

Per  $n = 1$  ho che  $1! \geq 2^{1-1}$ , ovvero  $1 \geq 1$  che è vero. Devo ora far vedere che se vale per  $n$  allora vale anche per  $n + 1$ . Quindi:

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \geq (n+1) \cdot 2^{n-1} \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

## 6.3 Numero di Nepero $e$

**Teorema 6.10.** *Il limite della successione  $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$  esiste ed è finito. In particolare la successione converge a un numero che chiamiamo  $e$ .*

Per ogni  $k \in \mathbb{N}$  vale

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e < \sum_{h=0}^k \frac{1}{h!} + \frac{1}{2^{k-1}}$$

*Dimostrazione.* Avevamo già visto l'espressione del binomio di Newton:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

Possiamo applicarla a questo caso. Quindi:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n! \cdot n^k} \end{aligned}$$

Per l'ultimo passaggio abbiamo usato l'uguaglianza  $n! = (n-k)! \cdot (n-k+1) \cdot \dots \cdot n$ . Possiamo procedere ulteriormente:

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{n} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \end{aligned}$$

Il nostro scopo è mostrare che la successione è monotona. Sviluppiamo ora la successione per  $n+1$  in modo analogo:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)$$

Confrontando con quello di prima (che era la somma fino a  $n$ , quindi con un termine in meno), ho sicuramente che questo (lo "sviluppo" per  $n+1$ ) è maggiore.

$$\begin{aligned} &> \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \\ &> \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \end{aligned}$$

Avendo tolto un termine positivo dalla successione, sicuramente ho ottenuto qualcosa di più piccolo. Quindi la successione è crescente.

Osserviamo anche che:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{2^{n-1}}$$

L'ultima disuguaglianza è giustificata dal fatto che  $n! > 2^{n-1}$  (dimostrata in precedenza).  $\square$

Considerando i casi particolari  $n = 1$  e  $n = 2$  possiamo scrivere:

$$(1 + 1)^1 < e < \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2}$$

ovvero  $2 < e < 3$ .

## 6.4 Limiti che si deducono da $e$

**Osservazione 6.11.** Data una successione  $\{a_n\}$  (con  $a_n \in \mathbb{N}$ ) divergente (ovvero  $\lim a_n = +\infty$ ) allora:

$$\lim \left(1 + \frac{1}{a^n}\right)^{a_n} = e$$

Infatti, fissato un intorno di  $e$  sappiamo che  $(1 + \frac{1}{n})^n \in B_r(e)$  definitivamente. Poiché per definizione di limite  $a_n > N$  definitivamente, allora  $(1 + \frac{1}{a^n})^{a_n} \in B_r(e)$  definitivamente.

**Esempio 6.12.** Mostriamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Applichiamo il criterio del rapporto. Osserviamo innanzitutto che la successione è a termini positivi ( $\frac{n!}{n^n} > 0$ ). Calcoliamo il rapporto:

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = (n+1) \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \end{aligned}$$

Quindi

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

Essendo  $e > 1$ ,  $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ . Quindi, per il criterio del rapporto,  $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$ .

**Esempio 6.13.** Mostriamo che (fissato  $x > 0$ )

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

Applichiamo il criterio del rapporto. Osserviamo ancora una volta che la successione è a termini positivi ( $\frac{x^n}{n!} > 0$  per  $x > 0$  fissato). Calcoliamo il rapporto:

$$\lim \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \lim \frac{x}{n+1} = 0$$

Quindi, per il criterio del rapporto,  $\lim \frac{x^n}{n!} = 0$ .

**Esempio 6.14.** Mostriamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}} = 0$$

Dobbiamo cioè far vedere che, per  $\varepsilon$  fissato,  $\frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}} < \varepsilon$  definitivamente.

$$\frac{1}{n!} < \varepsilon^n \implies \frac{(\frac{1}{\varepsilon})^n}{n!} < 1$$

Per quest'ultimo passaggio abbiamo usato il limite mostrato nell'esempio precedente. Posto  $x = \frac{1}{\varepsilon}$  troviamo che, definitivamente,

$$\frac{(\frac{1}{\varepsilon})^n}{n!} < 1$$

**Esempio 6.15.** Mostriamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

Consideriamo le due successioni

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{e} \quad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Sappiamo che  $\lim y_n = e$ . Quindi ci è sufficiente, per dimostrare l'esempio, far vedere che  $\lim x_n y_n = 1$ . Procediamo:

$$x_n y_n = \left[ \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]^n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

Per Bernoulli sappiamo che  $(1+x)^n \geq 1+nx$ . Sia  $x = -\frac{1}{n^2}$ , allora:

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}$$

Questo implica

$$1 - \frac{1}{n} \leq x_n y_n \leq 1$$

Essendo  $\lim 1 - \frac{1}{n} = 1$ , per il teorema del confronto si ha  $\lim x_n y_n = 1$ . Quindi:

$$\lim x_n = \frac{1}{\lim y_n} = \frac{1}{e}$$



## 6.5 Asintotico

**Definizione 6.16.** Due successioni  $x_n, y_n$  sono asintotiche se  $y_n \neq 0$  definitivamente e

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = 1$$

Si scrive  $x_n \sim y_n$ .

**Osservazione 6.17.**  $x_n \sim y_n \iff y_n \sim x_n$

**Proposizione 6.18.** Se  $x_n \sim \overline{x_n}$  e  $y_n \sim \overline{y_n}$  allora

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{\overline{x_n}}{\overline{y_n}}$$

Cioè il limite di destra esiste se e solo se esiste il limite di sinistra; in tal caso i limiti coincidono.

Inoltre si ha anche che

$$\lim x_n \cdot y_n = \lim \overline{x_n} \cdot \overline{y_n}$$

Dimostriamo didatticamente la seconda parte della proposizione (quella relativa al prodotto).

*Dimostrazione.*

$$\overline{x_n} \cdot \overline{y_n} = \frac{\overline{x_n}}{x_n} \cdot \frac{\overline{y_n}}{y_n} \cdot x_n \cdot y_n$$

Poiché

$$\lim \frac{\overline{x_n}}{x_n} \cdot \frac{\overline{y_n}}{y_n} = 1$$

allora segue direttamente

$$\lim \overline{x_n} \cdot \overline{y_n} = \lim x_n \cdot y_n$$

□

Mostriamo ora la risoluzione di un limite grazie alla stima asintotica.

**Esempio 6.19.**

$$\lim \frac{n + \sqrt{n}}{n + \sqrt{n-1}}$$

Sia il numeratore che il denominatore sono asintotici a  $n$ . Infatti:

$$\frac{n + \sqrt{n}}{n} = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \sim 1$$

$$\frac{n + \sqrt{n-1}}{n} = 1 + \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} \sim 1$$

Quindi:

$$\lim \frac{n + \sqrt{n}}{n + \sqrt{n-1}} = \lim \frac{n}{n} = 1$$

**Osservazione 6.20.** Attenzione al fatto che tale proprietà *non* vale con la somma. Infatti, se  $x_n \sim y_n$  non posso dire che

$$\lim x_n + z_n = \lim y_n + z_n$$

Facciamolo vedere su un esempio. Consideriamo  $x_n = n + 1$ ,  $z_n = -n$  e  $y_n = n$ . Calcoliamo il limite:  $\lim x_n + z_n = \lim(n + 1) - n = \lim 1 = 1$ . Considerato che  $x_n \sim y_n$ , si potrebbe essere tentati dal dire che tale limite è uguale a  $\lim y_n + z_n = \lim n - n = \lim 0 = 0$ . Come è evidente ( $0 \neq 1$ ) staremmo commettendo un grave errore!

## 6.6 Infinitesimi

**Definizione 6.21.** Una successione  $\{x_n\}$  si dice *infinitesima* se  $\lim x_n = 0$ .

**Proposizione 6.22.** Sia  $\varepsilon_n$  una successione infinitesima a termini positivi. Allora:

1.  $\sin \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$
2.  $1 - \cos \varepsilon_n \sim \frac{1}{2}(\varepsilon_n)^2$
3.  $\lim(1 + \varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} = e$
4.  $\log(1 + \varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$
5.  $e^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n$
6.  $(1 + \varepsilon_n)^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot \varepsilon_n$

Dimostriamo le prime due implicazioni, le restanti sono lasciate come esercizio al lettore.

*Dimostrazione.* Dimostrare il primo punto equivale a far vedere che

$$\lim \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1$$

Dalla circonferenza goniometrica, con qualche passaggio, possiamo ricavare che

$$\sin \varepsilon_n < \varepsilon_n < \tan \varepsilon_n$$

$$\frac{1}{\sin \varepsilon_n} > \frac{1}{\varepsilon_n} > \frac{1}{\tan \varepsilon_n}$$

Moltiplichiamo per  $\sin \varepsilon_n$ :

$$1 > \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} > \underbrace{\frac{\sin \varepsilon_n}{\tan \varepsilon_n}}_{\cos \varepsilon_n}$$

Sappiamo che  $\lim \cos \varepsilon_n = \cos 0 = 1$ . Quindi:

$$1 > \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} > 1$$

Per il teorema del confronto  $\lim \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1$ . □

*Dimostrazione.* Riscriviamo la seconda proprietà enunciata sfruttando l'uguaglianza  $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$  e ponendo  $\varepsilon_n = 2x$ :

$$\frac{1 - \cos \varepsilon_n}{\frac{1}{2}(\varepsilon_n)^2} = \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 \frac{\varepsilon_n}{2})}{\frac{1}{2}(\varepsilon_n)^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{\varepsilon_n}{2}}{\frac{1}{2}(\varepsilon_n)^2} \sim \frac{2(\frac{\varepsilon_n}{2})^2}{\frac{1}{2}(\varepsilon_n)^2} = 1$$

□