Appunti di analisi matematica

Luca Chiodini
luca@chiodini.org

Indice

Introduzione

Questi appunti sono relativi al corso di analisi matematica tenuto dal prof. Diego Conti agli studenti del corso di laurea di informatica dell'Università degli Studi di Milano - Bicocca, durante l'anno accademico 2015-2016.

Queste pagine sono state scritte nell'intento di essere utili, tuttavia potrebbero contenere errori tra i più disparati. Sarò grato a chiunque ne trovasse e volesse segnalarmeli (basta una mail a luca@chiodini.org).

Capitolo 1

Prima lezione (06/10/2015)

1.1 Insieme $\mathbb{N}$

Definizione 1.1. *L'insieme* $\mathbb{N}$ *è l'insieme dei numeri interi positivi, detti numeri naturali, e si indica con* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.

Su di esso sono definite due operazioni:

- Somma: $\mathbb{N} + \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, quindi $(a, b) \to a + b$
- Prodotto: $\mathbb{N} \cdot \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, quindi $(a, b) \to a \cdot b$

Queste due proprietà sono commutative e associative:

- $a + b = b + a$
- $a + (b + c) = (a + b) + c$
- $a \cdot b = b \cdot a$
- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Vale inoltre la proprietà distributiva:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Nel prodotto esiste un elemento neutro, in altri termini esiste un $e \in \mathbb{N}$ tale per cui, comunque scelto a, $a \cdot e = e \cdot a = a$. Tale e risulta ovvio essere 1.

Nell'insieme $\mathbb{N}$ esiste una relazione di ordinamento ($a \leq b$) tale per cui:

I. $a \leq b$ e $b \leq a \implies a = b$

II. $a \leq b \leq c \implies a \leq c$

III. $\forall a, b \;\; a < b$ oppure $b < a$

Definizione 1.2. *Un insieme S con una relazione d'ordine che soddisfa I, II, III si dice totalmente ordinato.*

Osservazione 1.3. *Ogni $S \subseteq \mathbb{N}$ è totalmente ordinato.*

Se $a \leq b$ e $c \in \mathbb{N} \implies a + c \leq b + c$
Se $a \leq b$ e $c \in \mathbb{N} \implies a \cdot c \leq b \cdot c$
L'equazione $n + x = m$ ha una soluzione (unica) se e solo se $m > n$.
Anche $\{ x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \}$, l'insieme dei numeri razionali, soddisfa le condizioni sopra indicate.

Definizione 1.4. *Dato un insieme totalmente ordinato (scriviamo $(S, \leq)$), X è il minimo di S se $x \in S$ e per ogni $y \in S$ vale $x \leq y$.*

Proposizione 1.5 (Principio del buon ordinamento)**.** *Ogni sottoinsieme di $\mathbb{N}$ non vuoto ha un minimo.*

Esempio 1.6. *L'inisieme $\{ x \in Q \mid x > 0 \}$ non soddisfa il principio del buon ordinamento perché, ad esempio, il suo sottoinsieme $\{ \frac{1}{n} \mid n > 0 \}$ non ha minimo.*

Corretto? **Osservazione 1.7.** *Grazie al principio del buon ordinamento vale che $\{ x \in \mathbb{N} \mid x \subseteq S \} = \{1, ..., S\}$.*

Proposizione 1.8 (Principio di induzione)**.** *Sia P_n un enunciato che dipende da $n \in \mathbb{N}$ (ad esempio "n è pari", "n è primo"), supponiamo che P_1 sia vero e che valga l'implicazione $P_n \implies P_{n+1}$, allora P_n è vero per ogni n.*

Nota che, ad esempio, l'enunciato "$\forall n,\ n > 0$" non è un enunciato che dipende da n!

Esempio 1.9. *Dimostriamo per induzione che*

$$P_n : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot n$$

Verifichiamo P_1:

$$P_1 : \sum_{i=1}^{1} i = \frac{1}{2} \cdot (1+1) \cdot 1$$

che equivale a $1 = 1$ ed è quindi vero.
Ora dobbiamo verificare anche che $P_n \implies P_{n+1}$.

$$P_n : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot n$$

$$P_{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{1}{2} \cdot (n+2) \cdot (n+1)$$

Per definizione vale anche che :

$$P_{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot n + (n+1)$$

Usando P_n si avrebbe ugualmente che *Da chiarire!*

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (n+2)$$

Dimostrazione. Sia $S = \{\, n \in \mathbb{N} \mid P_n \; e' \; falso \,\}$. Se $S = \emptyset$ non c'è niente da dimostrare. Altrimenti, per il principio del buon ordinamento S ha un minimo $k = min\ S$. Non può essere $k = 1$ ($1 \in S$) perché P_1 è vero.

Essendo $k > 1$, $k - 1 \in \mathbb{N}$ (ricorda l'equazione $1 + k = x$) e $k - 1 \in S$.

Allora P_{k-1} non è falso, quindi P_{k-1} è vero. P_k è vero per ipotesi. Ma questo contraddice l'ipotesi che $k \in S$, quindi il caso S non vuoto non si verifica. □

1.2 Insieme $\mathbb{Z}$

Consideriamo queste due equazioni:

- $a + x = b$, che ha soluzione in $\mathbb{N}$ se e solo se $b > a$.
- $a \cdot x = b$, che ha soluzione in $\mathbb{N}$ quando a è un divisore di b (si scrive $x = \frac{b}{a}$).

È evidente che serve quindi estendere l'insieme $\mathbb{N}$ arrivando all'insieme degli interi $\mathbb{Z}$ così definito:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$$

$\mathbb{Z}$ è la più piccola estensione di $\mathbb{N}$ dove l'equazione $a + x = b$ ha soluzione per ogni a, b.

In $\mathbb{Z}$ valgono le stesse proprietà di $\mathbb{N}$.

$\mathbb{Z}$ ha un elemento neutro per la somma (zero). Ovvero scriviamo:

$$a + 0 = 0 + a = a \quad \forall a$$

Dato $a \in \mathbb{Z}$ esiste $x \in \mathbb{Z}$ tale che $a + x = 0$ (si scrive $x = -a$).

Per passi:

$$b - a = b + (-a)$$

$$a + (b - a) = b$$

che è la soluzione di $a + x = b$ cercata.

Nota inoltre che $a \cdot x = b$ non ha soluzioni per $a = 0,\ b \neq 0$ perché $0 \cdot x = 0$, che a sua volta discende da

$$\begin{aligned} 1 \cdot x &= (1 + 0) \cdot x \\ &= 1 \cdot x + 0 \cdot x \end{aligned}$$

Sottraendo $-(1 \cdot x)$ a entrambi i membri risulta $0 = 0 \cdot x$.

1.3 Insieme $\mathbb{Q}$ e oltre

Definiamo l'insieme $\mathbb{Q}$, insieme dei numeri razionali, in questo modo:

$$\mathbb{Q} = \{\, \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \,\}$$

$\mathbb{Q}$ ha le stesse proprietà di $\mathbb{Z}$. Inoltre:

$$\forall a \neq 0 \ \ \exists\, x \in \mathbb{Q} : a \cdot x = 1$$

$x = \frac{1}{a}$, da cui $\frac{b}{a} = b \cdot \frac{1}{a}$ che è la soluzione di $a \cdot x = b$.
Infatti:

$$a \cdot \frac{b}{a} = a \cdot b \cdot \frac{1}{a} = b(a(\frac{1}{a})) = b \cdot 1 = b$$

È evidente che i numeri razionali non vanno bene per l'analisi numerica. Supponiamo di voler misurare un segmento in gessetti: potrebbero volerci quattro gessi "e un pezzetto". Potremmo dividere il gessetto a metà e scoprire che la lunghezza del segmento è 4 gessi + 1 gessetto + "un pezzettino". Non è detto che questo processo termini! Infatti non tutti gli intervalli si possono rappresentare con un numero razionale.

È dim? *Dimostrazione.* Sia x la diagonale di un quadrato di lato 1. Per Pitagora vale che $x^2 = 1 + 1 = 2$. Se x fosse razionale, potremmo scrivere $x = \frac{p}{q}$ per un qualche $p, q \in \mathbb{Z}$.

Quindi varrebbe $\frac{p^2}{q^2} = 2$, ovvero $p^2 = 2 \cdot q^2$.

Possiamo scrivere $p = 2^k \cdot a$ per un qualche a dispari e $q = 2^h \cdot b$ per un qualche b dispari.

Sostituendo nella prima equazione resta: $2^{2k} \cdot a^2 = 2 \cdot 2^{2h} \cdot b^2$.

a^2 e b^2 sono quadrati di un numero dispari e quindi dispari anch'essi.

Se uguagliamo gli esponenti risulta $2k = 2h + 1$ dove il primo è un numero pari mentre il secondo è un numero dispari, il che è assurdo.

Quindi, $x^2 = 2$ non ha soluzione in $\mathbb{Q}$. $\square$

1.4 Estremo superiore e maggioranti

Definizione 1.10. *Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{Q}$ è limitato superiormente se esiste un $k \in \mathbb{Q}$ tale che $a \leq k$ per ogni $a \in A$.*

Un tale k è detto maggiorante di A.

Definizione 1.11. *Dato $A \subseteq \mathbb{Q}$ non vuoto e limitato superiormente, si dice estremo superiore di A il minimo dei maggioranti, se esiste. (Si indica* $\sup A$*.)*

Se A è non vuoto ma non è limitato superiormente, allora $\sup A = +\infty$.

Esempio 1.12. *Sia $A = \{\, x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1 \,\}$. Esso è limitato superiormente perché se prendo $k = 2$, $k > a \ \ \forall a \in A$.*

y è maggiornate di $A \implies y > x \ \ \forall x \in A$.

Sia $y \in \mathbb{Q}$:

- *Se $y \geq 1$ allora y è un maggiorante.*
- *Se $0 < y < 1$, supponiamo $x = \frac{1}{2}(y+1)$ (ovvero x punto medio tra y e 1). Vale che $0 < x < 1 \implies x \in A$. Poiché $x > y$, y non è un maggiornate.*
- *Se $y < 0$ supponiamo $x = \frac{1}{2} \in A$; $x > y$ quindi y non è un maggiorante.*

In definitiva i maggioranti sono $\{ y \in \mathbb{Q} \mid y \geq 1 \}$ e $\sup A = 1$.

Esempio 1.13. *Sia $A = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2 \}$. A è limitato superiormente.*

Proposizione 1.14. *2 è maggiorante di A.* Indenta!

Dimostrazione. Supponiamo che 2 non sia maggiorante. Allora non è vero che $x \leq 2 \ \forall x \in A$. Quindi esiste $x \in A$ tale che $x > 2$. Allora $x^2 > 2^2$, ovvero $x^2 > 4$ che è assurdo perché vale che $x^2 < 2$. □

Proposizione 1.15. *A non ha un estremo superiore in $\mathbb{Q}$.*

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbb{Q}$ un maggiorante. Allora $x^2 \neq 2$.

- Se $x^2 < 2$ vale $(x + \frac{1}{n})^2$, ovvero $x^2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$. Per n sufficientemente grandi $y = x + \frac{1}{n}$. Da chiarire
  Essendo $y^2 < 2$, basta che $\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 2 - x^2$.

  Ovvero
  $$(2 - x^2) \cdot n^2 - 2n + 1 > 0$$

  Nota che l'equazione sopra è una parabola con concavità verso l'alto.

  Allora x non è un maggiorante perché $x < y$ e $y \in A$.
- Se $x^2 > 2$ allora $y = x - 1$ è maggiorante.

  $$\begin{aligned} (x - \frac{1}{n})^2 &> 2 \\ x^2 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} &> 2 \\ n^2 \cdot (x^2 - 2) - 2n + 1 &> 0 \end{aligned}$$

  che è vera per n sufficientemente grandi.

Quanto sopra implica che deve esistere un maggiorante della forma $y = x - \frac{1}{n}$. Ciò implica che x non è il minimo dei maggioranti e a sua volta questo implica che A non ha sup.

□