Appunti di analisi matematica

Luca Chiodini
luca@chiodini.org

Indice

Introduzione

Questi appunti sono relativi al corso di analisi matematica tenuto dal prof. Diego Conti agli studenti del corso di laurea di informatica dell'Università degli Studi di Milano - Bicocca, durante l'anno accademico 2015-2016.

Queste pagine sono state scritte nell'intento di essere utili, tuttavia potrebbero contenere errori tra i più disparati. Sarò grato a chiunque ne trovasse e volesse segnalarmeli (basta una mail a luca@chiodini.org).

In taluni casi, onde evitare di spezzare una singola unità logica (ad esempio: proposizione e relativa dimostrazione) in due parti, si è proceduto a spostare dette parti al termine della lezione precedente o all'inizio di quella successiva.

Capitolo 1

Prima lezione (06/10/2015)

1.1 Insieme $\mathbb{N}$

Definizione 1.1. L'insieme $\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri interi positivi, detti numeri naturali, e si indica con $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.

Su di esso sono definite due operazioni:

- Somma: $\mathbb{N} + \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, quindi $(a, b) \to a + b$
- Prodotto: $\mathbb{N} \cdot \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, quindi $(a, b) \to a \cdot b$

Queste due proprietà sono commutative e associative:

- $a + b = b + a$
- $a + (b + c) = (a + b) + c$
- $a \cdot b = b \cdot a$
- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Vale inoltre la proprietà distributiva:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Nel prodotto esiste un elemento neutro, in altri termini esiste un $e \in \mathbb{N}$ tale per cui, comunque scelto a, $a \cdot e = e \cdot a = a$. Tale e risulta ovvio essere 1.

Nell'insieme $\mathbb{N}$ esiste una relazione di ordinamento ($a \leq b$) tale per cui:

I. $a \leq b$ e $b \leq a \implies a = b$

II. $a \leq b \leq c \implies a \leq c$

III. $\forall a, b \;\; a \leq b$ oppure $b \leq a$

Definizione 1.2. Un insieme S con una relazione d'ordine che soddisfa I, II, III si dice totalmente ordinato.

Osservazione 1.3. Ogni $S \subseteq \mathbb{N}$ è totalmente ordinato.

Se $a \leq b$ e $c \in \mathbb{N} \implies a + c \leq b + c$
Se $a \leq b$ e $c \in \mathbb{N} \implies a \cdot c \leq b \cdot c$
L'equazione $n + x = m$ ha una soluzione (unica) se e solo se $m > n$.
Anche $\{ x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \}$, l'insieme dei numeri razionali, soddisfa le condizioni sopra indicate.

Definizione 1.4. Dato un insieme totalmente ordinato (scriviamo $(S, \leq)$), X è il minimo di S se $x \in S$ e per ogni $y \in S$ vale $x \leq y$.

Proposizione 1.5 (Principio del buon ordinamento). *Ogni sottoinsieme di* $\mathbb{N}$ *non vuoto ha un minimo.*

Esempio 1.6. L'inisieme $\{ x \in Q \mid x > 0 \}$ non soddisfa il principio del buon ordinamento perché, ad esempio, il suo sottoinsieme $\{ \frac{1}{n} \mid n > 0 \}$ non ha minimo.

Osservazione 1.7. Grazie al principio del buon ordinamento vale:

$$\{ x \in \mathbb{N} \mid x \leq s \} = \{1, \ldots, s\}$$

Proposizione 1.8 (Principio di induzione). *Sia P_n un enunciato che dipende da $n \in \mathbb{N}$ (ad esempio "n è pari", "n è primo"). Supponiamo che P_1 sia vero e che valga l'implicazione $P_n \implies P_{n+1}$. Allora P_n è vero per ogni n.*

Dimostrazione. Sia $S = \{ n \in \mathbb{N} \mid P_n \text{ è falso} \}$. Se $S = \emptyset$ non c'è niente da dimostrare. Altrimenti, per il principio del buon ordinamento S ha un minimo $k = \min S$. Non può essere $k = 1$ $(1 \in S)$ perché P_1 è vero.

Essendo $k > 1$, $k - 1 \in \mathbb{N}$ (ricorda l'equazione $1 + k = x$) e $k - 1 \in S$.

Allora P_{k-1} non è falso, quindi P_{k-1} è vero. P_k è vero per ipotesi. Ma questo contraddice l'ipotesi che $k \in S$, quindi il caso S non vuoto non si verifica. $\square$

Nota che, ad esempio, l'enunciato "$\forall n,\ n > 0$" non è un enunciato che dipende da n!

Esempio 1.9. Dimostriamo per induzione che

$$P_n : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} \cdot (n + 1) \cdot n$$

Verifichiamo P_1:

$$P_1 : \sum_{i=1}^{1} i = \frac{1}{2} \cdot (1 + 1) \cdot 1$$

che equivale a $1 = 1$ ed è quindi vero.

Ora dobbiamo verificare anche che $P_n \implies P_{n+1}$.

$$P_n : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} \cdot (n + 1) \cdot n$$

$$P_{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{1}{2} \cdot (n + 2) \cdot (n + 1)$$

Per definizione vale anche che :

$$P_{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot n + (n+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

1.2 Insieme $\mathbb{Z}$

Consideriamo queste due equazioni:

- $a + x = b$, che ha soluzione in $\mathbb{N}$ se e solo se $b > a$.
- $a \cdot x = b$, che ha soluzione in $\mathbb{N}$ quando a è un divisore di b (si scrive $x = \frac{b}{a}$).

È evidente che serve quindi estendere l'insieme $\mathbb{N}$ arrivando all'insieme degli interi $\mathbb{Z}$ così definito:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$$

$\mathbb{Z}$ è la più piccola estensione di $\mathbb{N}$ dove l'equazione $a + x = b$ ha soluzione per ogni a, b.
In $\mathbb{Z}$ valgono le stesse proprietà di $\mathbb{N}$.
$\mathbb{Z}$ ha un elemento neutro per la somma (zero). Ovvero scriviamo:

$$a + 0 = 0 + a = a \quad \forall a$$

Dato $a \in \mathbb{Z}$ esiste $x \in \mathbb{Z}$ tale che $a + x = 0$ (si scrive $x = -a$).
Per passi:

$$\begin{aligned} b - a &= b + (-a) \\ a + (b - a) &= b \end{aligned}$$

che è la soluzione di $a + x = b$ cercata.
Nota inoltre che $a \cdot x = b$ non ha soluzioni per $a = 0,\ b \neq 0$ perché $0 \cdot x = 0$, che a sua volta discende da

$$\begin{aligned} 1 \cdot x &= (1 + 0) \cdot x \\ &= 1 \cdot x + 0 \cdot x \end{aligned}$$

Sottraendo $(1 \cdot x)$ a entrambi i membri risulta $0 = 0 \cdot x$.

1.3 Insieme $\mathbb{Q}$ e oltre

Definiamo l'insieme $\mathbb{Q}$, insieme dei numeri razionali, in questo modo:

$$\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \}$$

$\mathbb{Q}$ ha le stesse proprietà di $\mathbb{Z}$. Inoltre:

$$\forall a \neq 0 \ \ \exists x \in \mathbb{Q} : a \cdot x = 1$$

$x = \frac{1}{a}$, da cui $\frac{b}{a} = b \cdot \frac{1}{a}$ che è la soluzione di $a \cdot x = b$.
Infatti:

$$a \cdot \frac{b}{a} = a \cdot b \cdot \frac{1}{a} = b \left(a \left(\frac{1}{a} \right) \right) = b \cdot 1 = b$$

È evidente che i numeri razionali non vanno bene per l'analisi numerica. Supponiamo di voler misurare un segmento in gessetti: potrebbero volerci quattro gessi "e un pezzetto". Potremmo dividere il gessetto a metà e scoprire che la lunghezza del segmento è 4 gessi + 1 gessetto + "un pezzettino". Non è detto che questo processo termini! Infatti non tutti gli intervalli si possono rappresentare con un numero razionale.

Dimostrazione. Sia x la diagonale di un quadrato di lato 1. Per Pitagora vale che $x^2 = 1 + 1 = 2$. Se x fosse razionale, potremmo scrivere $x = \frac{p}{q}$ per un qualche $p, q \in \mathbb{Z}$.

Quindi varrebbe $\frac{p^2}{q^2} = 2$, ovvero $p^2 = 2 \cdot q^2$.

Possiamo scrivere $p = 2^k \cdot a$ per un qualche a dispari e $q = 2^h \cdot b$ per un qualche b dispari.

Sostituendo nella prima equazione resta: $2^{2k} \cdot a^2 = 2 \cdot 2^{2h} \cdot b^2$.

a^2 e b^2 sono quadrati di un numero dispari e quindi dispari anch'essi.

Se uguagliamo gli esponenti risulta $2k = 2h + 1$ dove il primo è un numero pari mentre il secondo è un numero dispari, il che è assurdo.

Quindi, $x^2 = 2$ non ha soluzione in $\mathbb{Q}$. $\square$

1.4 Estremo superiore e maggioranti

Definizione 1.10. Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{Q}$ è *limitato superiormente* se esiste un $k \in \mathbb{Q}$ tale che $a \leq k$ per ogni $a \in A$.

Un tale k è detto *maggiorante* di A.

Definizione 1.11. Dato $A \subseteq \mathbb{Q}$ non vuoto e limitato superiormente, si dice *estremo superiore* di A il minimo dei maggioranti, se esiste. (Si indica $\sup A$.)

Se A è non vuoto ma non è limitato superiormente, allora $\sup A = +\infty$.

Esempio 1.12. Sia $A = \{ x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1 \}$. Esso è limitato superiormente perché se prendo $k = 2$, $k > a \ \ \forall a \in A$.

y è maggiornate di $A \implies y > x \ \ \forall x \in A$.

Sia $y \in \mathbb{Q}$:

- Se $y \geq 1$ allora y è un maggiorante.
- Se $0 < y < 1$, supponiamo $x = \frac{1}{2}(y+1)$ (ovvero x punto medio tra y e 1). Vale che $0 < x < 1 \implies x \in A$. Poiché $x > y$, y non è un maggiornate.
- Se $y < 0$ supponiamo $x = \frac{1}{2} \in A$; $x > y$ quindi y non è un maggiorante.

In definitiva i maggioranti sono $\{\, y \in \mathbb{Q} \mid y \geq 1 \,\}$ e $\sup A = 1$.

Esempio 1.13. Sia $A = \{\, x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2 \,\}$. A è limitato superiormente.

Proposizione 1.14. *2 è maggiorante di A.*

Dimostrazione. Supponiamo che 2 non sia maggiorante. Allora non è vero che $x \leq 2 \;\; \forall x \in A$. Quindi esiste $x \in A$ tale che $x > 2$. Allora $x^2 > 2^2$, ovvero $x^2 > 4$ che è assurdo perché vale che $x^2 < 2$. □

Proposizione 1.15. *A non ha un estremo superiore in $\mathbb{Q}$.*

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbb{Q}$ un maggiorante. Allora $x^2 \neq 2$.

- Se $x^2 < 2$, consideriamo l'insieme $(x + \frac{1}{n})^2$ al variare di n (sviluppando: $x^2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$). Per n sufficientemente grande $y = x + \frac{1}{n}$. Essendo $y^2 < 2$, basta che $\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 2 - x^2$.

  Ovvero
  $$(2 - x^2) \cdot n^2 - 2n + 1 > 0$$

  Nota che l'equazione sopra è una parabola con concavità verso l'alto.

  Allora x non è un maggiorante perché $x < y$ e $y \in A$.
- Se $x^2 > 2$ allora $y = x - 1$ è maggiorante.

  $$\begin{aligned} (x - \frac{1}{n})^2 &> 2 \\ x^2 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} &> 2 \\ n^2 \cdot (x^2 - 2) - 2n + 1 &> 0 \end{aligned}$$

  che è vera per n sufficientemente grande.

Quanto sopra implica che deve esistere un maggiorante della forma $y = x - \frac{1}{n}$. Ciò implica che x non è il minimo dei maggioranti e a sua volta questo implica che A non ha sup.

□

Capitolo 2

Seconda lezione (09/10/2015)

2.1 Estremi e limiti di insiemi

Definizione 2.1. Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{Q}$ è limitato superiormente se esiste $k \in \mathbb{Q}$ tale che $k \geq x$ per ogni $x \in A$. Tale k è detto maggiorante di A.

In modo analogo, A è limitato inferiormente se esiste $k \in \mathbb{Q}$ tale che $k \leq x$ per ogni $x \in A$. Tale k è detto minorante di A.

Dati $a \neq 0$, l'estremo superiore ($\sup A$), il minimo dei maggiornati, l'estremo inferiore ($\inf A$) e il massimo dei maggioranti (purché esistano):

- se A non è limitato superiormente $\implies \sup A = +\infty$
- se A non è limitato inferiormente $\implies \inf A = -\infty$

Osservazione 2.2. Se A ha un massimo x, allora $x = \sup A$.

Infatti, essendo il massimo, x è un maggiorante. Preso un altro maggiorante y, deve valere $x \leq y$ perché $x \in A$. Quindi x è il minimo dei maggioranti.

Ad esempio, dato $A = \{\, x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1 \,\}$, è evidente che $\sup A = 1$ ma $1 \notin A$. In questo caso l'insieme A non ha massimo.

Esempio 2.3. Dato $A = \mathbb{Q}$ osserviamo che non è limitato superiormente. Questo perché $x \in \mathbb{Q}$ è un maggiorante se $x \geq y$ per ogni $y \in \mathbb{Q}$; dovrebbe essere quindi $x \geq x + 1$ che è assurdo. Quindi $\sup \mathbb{Q} = +\infty$.

Esempio 2.4. Dato $A \subseteq \mathbb{Z}$ non vuoto, se A è limitato superiormente allora A ha un massimo.

Infatti $S = \{\, x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ è maggiorante di } A \,\}$. S non può essere vuoto perché A è limitato superiormente.

Allora S ha un minimo x per il principio del buon ordinamento. Essendo il minimo, $x - 1$ non è un maggiorante.

Quindi esiste un $y \in A$ tale che $y > x - 1$ e $y \leq x$. L'unico caso possibile è che x e y coincidano, ovvero $y = x \in A$

Quindi x è un maggiorante e appartiene ad A. Quindi x è il massimo.

Proposizione 2.5. *Dato $A \subseteq \mathbb{Q}$ non vuoto e $y \in \mathbb{Q}$, y è l'estremo superiore di A se e solo se y è maggiorante di A e per ogni $y' < y$ esiste $x \in A$ tale che $y' < x \leq y$.*

Osserviamo che la condizione $x \leq y$ è una diretta conseguenza del fatto che y è un maggiorante.

Dimostriamo la proposizione in entrambi i sensi, per mostrare che vale l'implicazione "se e solo se".

Dimostrazione. Se y è estremo superiore, allora devo dimostrare che:

I. y è un maggiorante

II. $\forall y' < y \quad \exists x \in A \quad y' < x \leq y$

Il punto I è ovvio; dimostriamo il punto II.

Dato $y' < y$, y' non può essere maggiorante perché y è il minimo dei maggioranti. Quindi esiste $x \in A$ tale che $y' < x$. Poiché y è un maggiorante, possiamo scrivere $y' < x \leq y$. □

Dimostriamo ora il viceversa.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostriare che i punti I e II implicano il fatto che y sia un estremo superiore.

Sia y' maggiorante di A. Se $y' < y$ allora esiste $x \in A$ tale che $y' < x \leq y$, quindi y' non è un maggiorante; il che è assurdo.

Allora ogni maggiorante y' deve essere $y' \geq y$. Poiché y è un maggiorante, y è il minimo dei maggioranti. Quindi $y = \sup A$. □

Esempio 2.6. Proviamo a calcolare $\sup A$ di:

$$A = \left\{ \frac{n-1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

che è l'insieme:

$$A = \left\{ 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \dots \right\}$$

Ha senso innanzitutto chiedersi se A è limitato superiormente. Possiamo dire che lo è con certezza perché il numeratore è sempre inferiore al denominatore, quindi

$$\frac{n-1}{n+1} < 1$$

Quindi 1 è un maggiorante. Dimostriamo che è anche il sup ($\sup A = 1$).

In altri termini dobbiamo dimostrare che preso $y' < 1$ esiste $x \in A$ tale che $y' < x \leq 1$, che equivale a risolvere:

$$y' < \frac{n-1}{n+1}$$

$$y'(n+1) < n-1$$

$$y'n + y' < n-1$$

$$n(1-y') > y'+1$$

$$n > \frac{y'+1}{1-y'}$$

Poiché $\mathbb{N}$ non è limitato superiormente, esiste sempre una soluzione $n \in N$. Ovvero:

$$\exists x = \frac{n-1}{n+1} \in A \qquad y' < x$$

Quindi $\sup A = 1$.

2.2 Insieme $\mathbb{R}$

I numeri reali sono un insieme, chiamato $\mathbb{R}$, su cui sono definite le operazioni di somma e prodotto, è definito un ordinamento ed esistono due elementi neutri per le due operazioni precedenti.

L'insieme dei numeri reali soddisfa tutte le seguenti proprietà, che erano già soddisfatte da $\mathbb{Q}$ ma che riportiamo:

- La somma è commutativa e associativa, ha un elemento neutro che è lo zero.
- Il prodotto è commutativo e associativo, ha un elemento neutro che è l'uno.
- Di ogni elemento esiste l'opposto e l'inverso, ovvero:

$$\forall a \in \mathbb{R} \text{ esiste } b \in \mathbb{R} \qquad a + b = 0 \quad (b = -a)$$

$$\forall a \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ esiste } b \in \mathbb{R} \qquad a \cdot b = 1 \quad \left(b = \frac{1}{a}\right)$$

- È definito un ordinamento:

$$a \leq b \text{ e } b \leq a \implies a = b$$

$$a \leq b \text{ e } b \leq c \implies a \leq c$$

$$\forall a, b \quad a \leq b \text{ o } b \geq a$$

$$a \leq b \implies \forall c \quad a + c \leq b + c$$

$$a \leq b \implies \forall c > 0 \quad a \cdot c \leq b \cdot c$$

In aggiunta alle proprietà comuni a $\mathbb{Q}$ abbiamo che se $A \subseteq \mathbb{R}$ è non vuoto, allora A ammette un estremo superiore (eventualmente $\sup A = +\infty$).

Dobbiamo mostrare ora che esistono i numeri reali e per fare ciò ricorriamo al modello degli *allineamenti decimali*.

Un *allineamento decimale* è una sequenza numerabile di interi del tipo $p_0, p_1, p_2, \ldots$ dove

$$0 \leq p_k \leq 9 \qquad k \in \mathbb{N}$$

Un allineamento decimale è *periodico* se si ripete da un certo punto in poi, cioè ha la forma:

$$p_0, p_1, \ldots, \underbrace{p_n, p_{n+1}, \ldots, p_{n+k}}_{\text{periodo}}, p_{n+1+k}, \ldots$$

Un allineamento periodico con periodo 0 si dice anche che è limitato (ad esempio $1,5000...$ è limitato).

Dato un allineamento decimale x definiamo il troncamento k-esimo

$$r_k(x) = p_0 + \frac{1}{10}p_1 + \ldots + \frac{1}{10^k}p_k$$

Il troncamento $r_0(x)$ è la *parte intera* di x e si indica $[x]$.

Ad ogni $x \in \mathbb{Q}$ possiamo associare un allineamento decimale $T(x) = p_0, p_1, p_2, \ldots$.

$$p_0 = \max\{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x \,\}$$

$$p_1 = \max\{\, n \in \mathbb{Z} \mid p_0 + \frac{1}{10}n \leq x \,\}$$

e così via, in modo che per ogni $k > 0$ sia

$$p_k = \max\{\, n \in Z \mid \underbrace{r_{k-1}(T(x))}_{p_0+\frac{1}{10}p_1+\ldots} + \frac{1}{10^k}n \leq x \,\}$$

Esempio 2.7. Consideriamo $T(x)$ per $x = \frac{3}{2}$, che è $1,5000....$ Infatti:

$$p_0 = \max\{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \leq \frac{3}{2} \,\} = 1$$

$$p_1 = \max\{\, n \in \mathbb{Z} \mid 1 + \frac{1}{10}n \leq \frac{3}{2} \,\} = 5$$

$$p_2 = \max\{\, n \in \mathbb{Z} \mid 1 + \frac{5}{10}n + \frac{1}{100}n \leq \frac{3}{2} \,\} = 0$$

Prestiamo attenzione al fatto che il comportamento di $T(x)$ per i numeri negativi, così per come è stato definito, è diverso da come ce lo potremmo aspettare. Ad esempio:

$$T\left(-\frac{3}{2}\right) = -2,500...$$

Proposizione 2.8. *Per ogni $x \in \mathbb{Q}$, $k > 0$ vale:*

$$0 \leq x - r_k(T(x)) < \frac{1}{10^k}$$

Come conseguenza si ha che l'insieme

$$\{\, n \in \mathbb{Z} \mid r_{k-1}((T(x)) + \frac{1}{10^k}n \leq x \,\}$$

contiene 0 e ha 9 come maggiorante.

Capitolo 3

Terza lezione (13/10/2015)

3.1 Allineamenti decimali e insieme $\mathbb{R}$

Abbiamo già visto come si scrive un allineamento decimale: $P_0, P_1, P_2, \ldots$ con $P_k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq P_k \leq 9$ per $k > 0$.

Dato un allineamento x consideriamo il suo k-esimo troncamento:

$$r_k(x) = P_0 + \frac{1}{10}P_1 + \ldots + \frac{1}{10^k}P_k$$

Dato $x \in \mathbb{Q}$, esiste l'allineamento decimale $T(x)$ tale che $0 \leq x - r_k(T(x)) \leq \frac{1}{10^k}$.

Nota che $T(x)$ non può avere periodo 9.

Esempio 3.1. Supponiamo che esista $T(x) = 0,\overline{9}$. Allora

$$\begin{aligned} r_k(T(x)) &= 0 + \frac{9}{10} + \ldots + \frac{9}{10^k} \\ &= \frac{10^k - 1}{10^k} \end{aligned}$$

Ad esempio per $k = 2$ varrebbe $r_k(T(x)) = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} = \frac{99}{100}$; e così via.

$$0 \leq x - r_k(T(x)) < \frac{1}{10^k}$$

Che è equivalente a:

$$\underbrace{r_k(T(x))}_{\frac{10^k-1}{10^k}} \leq x < \underbrace{r_k(T(x)) + \frac{1}{10^k}}_{1}$$

Non esiste $x \in \mathbb{Q}$ tale che $1 - \frac{1}{10^k} \leq x < 1$ per ogni k. Ciò implica che $0,\overline{9}$ non è $T(x)$ per un $x \in \mathbb{Q}$.

Definizione 3.2. Un allineamento decimale è ammissibile se non è periodico con periodo 9.

Sia $\mathcal{A}$ l'insieme degli allineamenti decimali ammissibili. Definiamo T come la funzione che associa un numero razionale a un allineamento ammissibile (che è un elemento dell'insieme $\mathcal{A}$). Sinteticamente si scrive:

$$T : \mathbb{Q} \to \mathcal{A}$$

Poniamo $\mathbb{R} = \mathcal{A}$. L'ordinamento su $\mathcal{A}$ è definito nel seguente modo: $p_0, p_1, \dots, p_k < q_0, q_1, \dots, q_k$ se e solo se, detto $k = \min\{\, i \mid p_i \neq q_i \,\}$, si ha $p_k < q_k$.

Esempio 3.3. Consideriamo il banale ordinamento tra le seguenti coppie di allineamenti:

- $2,3 < 3,2$ (vera per $k = 0$)
- $1,12 < 1,13$ (vera per $k = 2$)

Definizione 3.4. Dati $x, y \in \mathcal{A}$ definiamo $x \leq y$ se $x < y$ o $x = y$.

L'insieme $\mathcal{A}$ è totalmente ordinato.

Proposizione 3.5. *Ogni $X \subset \mathcal{A}$ non vuoto ha un estremo superiore.*

Dimostrazione. Se X non è limitato superiormente, allora $\sup X = +\infty$.

Se X è limitato superiormente, allora esiste sicuramente un maggiorante M.
Per ogni $k \in \mathbb{Z}$ con $k \geq 0$ definiamo la funzione $a_k : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}$ (che estrae la k-esima cifra); ovvero: $a_k(p_0, p_1, \dots, p_k) = p_k$.

Osserviamo che $\{\, a_0(z) \mid z \in X \,\}$ è limitato superiormente perché M è un suo maggiorante. Ad esempio se $X = \{1.2, 2.3, 3.4\}$ allora $\{\, a_0(z) \mid z \in X \,\} = \{1, 2, 3\}$ e quindi $M = 4$.

Sia $q_0 = max\{\, a_p(z) \mid z \in X \,\}$. Considerando ancora l'esempio sopra, in questo caso $q_0 = 3$.

Se $k > 0$: $\{\, a_k(z) \mid z \in X \,\} \subseteq \{0, \dots, 9\}$.

$q_k = max\{\, a_k(z) \mid z \in X$ tale che $a_0(z) = q_0, a_1(z) = q_1, \dots, a_{k-1}(z) = q_{k-1} \,\}$.

Sia $y = q_0, q_1, \dots$ un maggiorante. Sia $z = p_0, \dots, p_k$ di X; sia $j = min\{\, p_j \neq q_j \,\}$ con $z \neq y$.

$$q_j = max \underbrace{\{\, a_j(z) \mid z \in X a_0(z) = q_0, \dots, a_{j-1}(z) = q_{j-1} \,\}}_{C}$$

Notiamo che C contiene z. Ciò implica che $\underbrace{a_j(z)}_{p_j} \leq q_j$, ma per la definizione precedente $p_j \neq q_j$.

Ciò implica $p_j < q_j$, che a sua volta implica $z < y$. Quindi y è effettivamente un maggiorante.

Preso $y' \leq y$ devo dimostrare che $\exists z \in X$ tale che $y' < z$.
$y' = p_0, p_1, \dots$
$y = q_0, q_1, \dots$.
Supponiamo che $p_i = q_i$ e $p_k < q_k$ per ogni $i < k$. Per definizione di q_k esiste $z \in X$ tale che $a_i(z) = q_i$ per $i \leq k$. Per costruzione questo implica $y' < z$. Abbiamo quindi dimostrato che $y = \sup X$. $\square$

Per ora abbiamo definito $(\mathcal{A}, \leq)$. Dobbiamo però ancora definire la somma in $\mathcal{A}$. Si pone: $x + y = \sup\{\, T(r_k(x) + r_k(y)) \mid k \in \mathbb{N} \,\}$ dove x, y sono allineamenti.

Possiamo inoltre definire in modo analogo il prodotto.

Per $x, y \geq 0$, $x \cdot y = \sup\{\, T(r_k(x) \cdot r_k(y)) \mid k \in \mathbb{N} \,\}$

Proposizione 3.6. *Esiste un $e \in \mathcal{A}$ tale che $x + e = x = e + x$ per ogni x (detto anche "zero").*

Dimostrazione. Poniamo $e = T(0) = \{0,0000\ldots\}$.

Allora $x + e = \sup\{\, T(r_k(x) + r_k(e)) \mid k \in \mathbb{N} \,\}$.

Calcoliamo $r_k(e) = 0 + \frac{1}{10} \cdot 0 + \cdots + \frac{1}{10^k} \cdot 0 = 0$.

Quindi $x + e = \sup\{\, T(r_k(x)) \mid k \in \mathbb{N} \,\} = x$.

Quindi $\mathcal{A}$ contiene lo zero.

□

In modo del tutto analogo si prova che $\mathcal{A}$ contiene anche $1,000\ldots$.

Siamo quindi pronti per definire l'insieme dei reali $\mathbb{R}$; in modo sintetico scriviamo $\mathbb{R} = (\mathcal{A}, \leq, +, \cdot, 0, 1)$.

Osserviamo che $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ e che ogni $x \in \mathbb{Q}$ determina un $T(x) \in \mathcal{A} = \mathbb{R}$.

Valgono le solite proprietà:

- $T(x + y) = T(x) + T(y)$
- $T(x \cdot y) = T(x) \cdot T(y)$
- $T(0) = 0$.
- $T(1) = 1$.

Proposizione 3.7 (Proprietà di Archimede). *Dati a, b reali positivi esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \cdot a > b$.*

Dimostrazione. Per assurdo supponiamo che valga il contrario, ovvero che $n \cdot a < b \;\; \forall n$. Allora $n < \frac{a}{b}$. Questo è impossibile perché $\mathbb{N}$ dovrebbe essere limitato superiormente, quindi avere un massimo. Ma ciò è palesemente assurdo, perché vale sempre $x + 1 \in N$ e $x + 1 > x$. □

3.2 Potenze e logaritmi

Dato $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ definiamo $a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ volte}$. L'elevamento a potenza gode delle seguenti proprietà:

- $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Per definizione se $a \neq 0 \implies a^0 = 1$. Sempre per definizione $a^{-n} = (\frac{1}{a})^n$.

Teorema 3.8. *Dato $x \in \mathbb{R}$ positivo e $n \in \mathbb{N}$ esiste un unico reale positivo, y, tale che $y^n = x$ (ovvero $y = \sqrt[n]{x}$).*

Definizione 3.9. Dato x reale positivo e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (assumendo senza perdita di generalità $q > 0$), si pone $x^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{x})^p$.

Se $x \geq 1$ reale e $y \in \mathbb{R}$ definiamo $x^y = \sup \{ x^{\frac{p}{q}} \mid \frac{p}{q} \leq y \}$.

Se $x < 1$ possiamo invertire: $x^y = (\frac{1}{x})^{-y}$.

Valgono le solite proprietà.

Teorema 3.10. *Dato $x \in \mathbb{R}$ (con $x > 0$, $y > 1$) esiste un unico $z \in \mathbb{R}$ tale che $x^z = y$. Si scrive: $z = \log_x y$.*

3.3 Intervalli e intorni

Dati $a, b \in \mathbb{R}$ sono definiti i seguenti intervalli (riportati solo nelle forme più esemplificative, le altre sono immediate dalle seguenti):

$$\begin{aligned}
(a, b) &= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \} \\
[a, b] &= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \} \\
(-\infty, a) &= \{ x \in \mathbb{R} \mid x < a \} \\
(a, +\infty) &= \{ x \in \mathbb{R} \mid x > a \} \\
[a, b) &= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \} \\
(a, b] &= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}
\end{aligned}$$

Definizione 3.11. Dati $x \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{R}$ (con $r > 0$), si dice intorno circolare di x di raggio r l'intervallo $B_r(x) = (x - r, x + r) = \{ y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < r \}$.

Definiamo inoltre $B'_r(x) = B_r(x) \backslash \{x\} = (x - r, x) \cup (x, x + r)$.

Ricorda che $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Inoltre osserviamo che $|x + y| \leq |x| + |y|$.

3.4 Successioni

Una *successione* è una funzione $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ($n \to x_n$).

Tale funzione viene rappresentata con la notazione $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ oppure $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Esempio 3.12. $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$ rappresenta la successione $\{1, 2, 3, \dots\}$, ovvero la funzione $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ($n \to n$).

Esempio 3.13. $\{[\sqrt{n}]\}_{n \in \mathbb{N}}$ rappresenta la successione $\{1, 1, 1, 2, \dots, [\sqrt{n}], \dots\}$, ovvero la funzione $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ($n \to [\sqrt{n}]$).

Esempio 3.14. $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ rappresenta la successione $\{-1, 1, -1, 1, \dots\}$.

Definizione 3.15. Una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente se $x_{n+1} > x_n$ per ogni n.

Definizione 3.16. Una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente se $x_{n+1} < x_n$ per ogni n.

Definizione 3.17. Una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è non crescente se $x_{n+1} \leq x_n$ per ogni n.

Definizione 3.18. Una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è non decrescente se $x_{n+1} \geq x_n$ per ogni n.

Se una successione soddisfa una qualsiasi delle precedenti condizioni, allora essa si dice *monotona*.

Esempio 3.19. Le tre successioni mostrate in precedenza (3.12, 3.13, 3.14) sono rispettivamente crescente, non decrescente e non monotona.

Definizione 3.20. Si dice che $L \in \mathbb{R}$ è il limite di $\{x_n\}$ se per ogni intorno $B_r(L)$ di L esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in B_r(L)$ per ogni $n > N$.

Analogamente per ogni $r > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $L - r < x_n < L + r$ per ogni $n > N$.

Si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = L$$

Esempio 3.21. La successione $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite 0.

Dobbiamo dimostrare che per ogni $r > 0$ esiste N tale che se $n > N$ allora $\frac{1}{n} \in B_r(0)$.

Ovvero $|\frac{1}{n}| < r$, cioè $1 < n \cdot r$, quindi $n > \frac{1}{r}$.

Poniamo $N = [\frac{1}{r} + 1]$, allora $n > N. \implies n > \frac{1}{r} \implies x_n \in B_r(0)$.

Quindi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Capitolo 4

Quarta lezione (16/10/2015)

4.1 Limite di una successione

Definizione 4.1. Si dice che $L \in \mathbb{R}$ è il limite di $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un N tale che, per ogni $n > N$, vale:

$$L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$$

Si scrive:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = L$$

Teorema 4.2 (Teorema di unicità del limite). *Sia $\{x_n\}$ una successione. Se $\{x_n\}$ ha limite L e $\{x_n\}$ ha limite L', allora $L = L'$.*

In altre parole stiamo dicendo che se il limite esiste allora è unico. Dimostriamo per assurdo il teorema.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo $L \neq L'$. Sia ε il punto medio tra L e L', ovvero:

$$\varepsilon = \frac{|L - L'|}{2} > 0$$

Per definizione di limite esiste un N tale che $|x_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n > N$; quindi $x_n < L + \varepsilon$ e $x_n > L - \varepsilon$.

Esiste un N' tale che se $n > N'$ allora $|x_n - L'| < \varepsilon$.

Scelto $n > N$ e $n > N'$, allora devono valere entrambe le precedenti. Riassumendo, deve valere sia $|x_n - L| < \varepsilon$ che $|x_n - L'| < \varepsilon$.

Per la disuguaglianza triangolare abbiamo che:

$$|L - L'| \leq |L - x_n| + |x_n - L'| \leq 2 \cdot \varepsilon$$

Quindi $|L - L'| < |L - L'|$, che è palesemente assurdo.

In altri termini, stiamo dicendo che:

$$(L - \varepsilon, L + \varepsilon) \cup (L' - \varepsilon, L' + \varepsilon) = \varnothing$$

□

Esempio 4.3. Consideriamo la successione

$$x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Il suo limite è zero.

Per dimostrarlo dobbiamo far vedere che esiste per ogni $\varepsilon > 0$ un N tale che, se $n > N$, allora $|x_n| < \varepsilon$.

$$\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{2^n} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < 2^n \iff n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$$

Non ci resta che scegliere $N > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$, ad esempio

$$N = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$$

Quando $n > N$ varrà

$$n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \implies \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

Esempio 4.4. Consideriamo questa volta la successione $\{n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ che non ha limite.

Supponiamo che abbia un limite L, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che:

$$L - \varepsilon < n^2 < L + \varepsilon \qquad \forall n > N$$

Tale disuguaglianza deve valere anche per $\varepsilon = L$.

Quindi:

$$0 = L - \varepsilon < n^2 < L + \varepsilon = 2L$$

Ciò implica $n < \sqrt{2L}$, che non può essere soddisfatta. Quindi $L > 0$ non può essere il limite.

In modo ancora più semplice possiamo mostrare che il limite non può essere nemmeno negativo. Infatti se $L < 0$ dovrebbe valere per $n > N$:

$$|n^2 - L| < \frac{1}{2} \implies |n^2| < \frac{1}{2}$$

che è assurdo perché il più piccolo quadrato di un numero naturale è 1.

4.2 Successioni convergenti, divergenti, limitate

Definizione 4.5. Si dice che $\{x_n\}$ ha limite $+\infty$ (si dice anche "diverge a $+\infty$") se, per ogni $M \in \mathbb{R}$, esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n > N$, $x_n > M$.

In altre parole stiamo dicendo che, da un certo punto in poi ($n > N$), il valore della successione sarà sempre maggiore di M, con M scelto grande a piacere.

In modo analogo una successione ha limite $-\infty$ se per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n > N$, vale $x_n < -M$.

Esempio 4.6. Consideriamo il limite di questa successione:

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$$

Tale limite è corretto. Scegliamo M positivo e poniamo $N = [\sqrt{M}] + 1$. In tale situazione $n > N \implies n > \sqrt{M} \implies n^2 > M$; che è esattamente la definizione precedente.

Esempio 4.7. La successione $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non converge e non diverge (cioè non ha limite).

Il suo limite non può essere infinito perché $(-1)^n \in [-1; 1]$. Scelto banalmente $M > 1$ non vale mai $x_n > M$. In modo analogo non vale mai nemmeno $x_n < -M$.

Mostriamo ora che non ha nemmeno un limite finito (cioè $L \in \mathbb{R}$). Se fosse $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n = L$ allora, posto $\varepsilon = 1$ nella definizione di limite, avremmo che esiste N tale che:

$$|(-1)^n - L| < 1 \qquad \forall n > N$$

$$\implies |1 - L| < 1 \qquad \text{e} \qquad |-1 - L| < 1$$

$$\implies |1 - (-1)| \leq |1 - L| + |(-1) - L| < 2$$

$$\implies |2| < 2$$

che è palesemente assurdo.

Definizione 4.8. Una successione $\{x_n\}$ è *limitata* se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $|x_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esempio 4.9. Mostriamo due successioni limitate:

$$\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{è limitata: } M = 1 \quad |(-1)^n| = 1$$

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{è limitata: } M = 1 \quad \left|\frac{1}{n}\right| \leq 1$$

Enunciamo e dimostriamo ora un importante teorema sulla relazione che sussiste tra le definizioni precedenti.

Teorema 4.10. *Ogni successione convergente è limitata. Nessuna successione divergente è limitata.*

Dimostriamo la prima affermazione del teorema.

Dimostrazione. Sia:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = L \qquad L \in \mathbb{R}$$

Per definizione di limite esiste un N tale che $L - 1 < x_n < L + 1$ per ogni $n > N$ (ovvero $|x_n| < |L| + 1$). Scegliamo M:

$$M = \max\{|L| + 1, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$$

Allora:

- per $n = 1, \ldots, N$ vale $|x_n| \leq M$ perché appartiene all'insieme

- per $n > N$ vale $|x_n| \leq M$ perché abbiamo detto che $|x_n| < |L| + 1$.

Abbiamo quindi dimostrato che la successione $\{x_n\}$ è limitata. □

Dimostriamo ora la seconda affermazione del teorema.

Dimostrazione. Per assurdo, sia $\{x_n\}$ una successione divergente limitata. Allora deve valere:

$$|x_n| < M \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se il limite della successione è $+\infty$ allora esiste un N tale che per $n > N$ vale $x_n > M$. Questo è assurdo (avevamo detto che $x_n < M$).

Non è neppure possibile che il limite sia $-\infty$: in quel caso dovrebbe essere $x_n < -M$ che è assurdo per $n > N$. □

Consideriamo con attenzione questi due esempi:

Esempio 4.11. $\{(-1)^n\}$ è limitata ma non è convergente.

Esempio 4.12.

$$x_n = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ n & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Quindi $\{x_n\} = \{1, 0, 3, 0, 5, \ldots\}$. Essa non è limitata ma non è divergente.

È necessario prestare quindi attenzione al fatto che il teorema precedente non indica "se e solo se".

Teorema 4.13. *Sia*

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \quad e \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = x$$

$$\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \quad e \quad \lim_{n\to+\infty} y_n = y$$

Allora valgono le seguenti:

1. $\{x_n + y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* $x + y$
2. $\{x_n \cdot y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* $x \cdot y$
3. *se* $x_n = k$ *allora* $x = k$
4. *se* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{\alpha \cdot x_n\}$ *converge a* $\alpha \cdot x$
5. $\frac{x_n}{y_n}$ *converge a* $\frac{x}{y}$ *se* $y_n \neq 0 \; \forall n$ *e* $y \neq 0$
6. *se* $x_n \leq y_n$ *per ogni* n, *allora* $x \leq y$
7. $\{|x_n|\}$ *converge a* $|x|$

Dimostriamo a scopo didattico i punti uno e sei.

Dimostrazione. Per dimostrare il punto uno, devo far vedere che $\forall \varepsilon$ esiste N tale che $\forall n > N$ vale:

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| < \varepsilon$$

Scelgo N tale che $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n > N$.
Scelgo N' tale che $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n > N'$.
Sia $N'' = max\{N, N'\}$. Quindi se $n > N''$ allora varranno anche $n > N'$ e $n > N$.

$$\implies |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\implies |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\implies |(x_n + y_n) - (x + y)| < \varepsilon \qquad \forall n > N''$$

Abbiamo quindi dimostrato che $\lim(x_n + y_n) = (\lim x_n) + (\lim y_n)$. □

Dimostriamo ora il punto sei:

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$ per $n > N''$ vale $|x_n - x| < \varepsilon$ e $|y_n - y| < \varepsilon$. Quindi, preso $x < \varepsilon + x_n$:

$$x \leq \varepsilon + y_n < \varepsilon + (y + \varepsilon) = y + 2\varepsilon$$

$$\implies x < y + 2\varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

$$\implies x - y < 2\varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

$$\implies x - y \leq 0 \implies x \leq y$$

□

Prestiamo attenzione al fatto che non vale lo strettamente minore! Formalmente, non è vero che se $x_n < y_n$ per ogni n allora $\lim x_n < \lim y_n$. Ad esempio $x_n = \frac{1}{n+1}$ e $y_n = \frac{1}{n}$ hanno entrambi limite 0, quindi possiamo scrivere $\lim x_n \leq \lim y_n$ (con il minore uguale!).

Con quanto abbiamo appreso sopra possiamo già calcolare alcuni limiti interessanti, ad esempio:

$$\lim \frac{1}{n^2} = \lim \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\right) = \left(\lim \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\lim \frac{1}{n}\right) = 0 \cdot 0 = 0$$

Enunciamo ora un teorema sulle successioni che richiederebbe la nozione di funzione continua, non fornita per ora in questo corso. Facciamo solo alcuni esempi di funzioni continue: $f(x) = \sin x$, $f(x) = x^a$, $f(x) = a^x$, $f(x) = \log_a x$.

Teorema 4.14. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $\{x_n\}$ una successione in $[a, b]$ il cui limite $\lim x_n = x$; allora*

$$\lim_{n \to +\infty} F(x_n) = F(x)$$

Supponiamo di voler calcolare $\lim \sqrt{\frac{2n+1}{n}}$ tramite il teorema esposto. Calcoliamo il limite senza radice:

$$\lim \frac{2n + 1}{n} = \lim \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \lim 2 + \lim \frac{1}{n} = 2 + 0 = 2$$

Grazie al teorema possiamo affermare che $\lim \sqrt{\frac{2n+1}{n}} = \sqrt{2}$.

Teorema 4.15. *Sia* $\{x_n\}$ *una successione il cui limite vale* $+\infty$ *e* $\{y_n\}$ *una generica successione. Allora:*

1. *se* $\lim y_n = y$ *oppure* $\lim y_n = +\infty$ *allora* $\lim x_n + y_n = +\infty$
2. *se* $\lim y_n = y > 0$ *oppure* $\lim y_n = +\infty$ *allora* $\lim x_n \cdot y_n = +\infty$
3. *se* $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *allora* $\lim \alpha \cdot x_n = +\infty$
4. *se* $x_n \neq 0$ *per ogni* n *allora* $\lim \frac{1}{x_n} = 0$
5. *se* $x_n \leq y_n$ *per ogni* n *allora* $\lim y_n = +\infty$
6. $\lim |x_n| = +\infty$

Queste proprietà possono essere scritte anche in forma sintetica:

$$\begin{aligned}
+\infty + y &= +\infty \\
+\infty + (+\infty) &= +\infty \\
+\infty \cdot y &= +\infty \qquad (y > 0) \\
+\infty \cdot \alpha &= +\infty \qquad (\alpha > 0) \\
\frac{1}{+\infty} &= 0
\end{aligned}$$

Capitolo 5

Quinta lezione (20/10/2015)

5.1 Forme di indeterminazione

In alcuni casi non possiamo stabilire univocamente quanto vale un limite. Chiamiamo tali casi particolari *forme di indeterminazione*.

$\frac{\infty}{\infty}$ è una forma di indeterminazione, in quanto ho che

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} y_n + \infty$$

Quindi non posso dire nulla su

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n}$$

Mostriamo ora tre esempi di limiti che presentano questa forma di indeterminazione.

Esempio 5.1. Un limite con la forma di indeterminazione $\frac{\infty}{\infty}$ è $\lim \frac{n+1}{n}$, perché $\lim(n+1) = +\infty$ e $\lim n = +\infty$.

In questo caso il calcolo del limite è banale:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim 1 + \lim \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1$$

Esempio 5.2.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n^2} \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim \frac{1}{n} + \lim \frac{1}{n^2} = 0$$

Esempio 5.3.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n}} \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim \sqrt{n} + \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty + 0 = +\infty$$

Un'altra forma di indeterminazione è $\infty - \infty$. Anche per questa mostriamo tre esempi.

Esempio 5.4.

$$\lim(n+1) - n \quad [\infty - \infty] = \lim 1 = 1$$

Esempio 5.5.

$$\lim(n+1) - n^2 \quad [\infty - \infty] = \lim n^2 \left(-1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = -\infty$$

Esempio 5.6.

$$\lim(n + (-1)^n) - n \quad [\infty - \infty] = \lim(-1)^n \text{ che non esiste}$$

Anche $\infty \cdot 0$ è una forma di indeterminazione. Come per le precedenti, mostriamo tre esempi.

Esempio 5.7.

$$\lim n \cdot \frac{1}{n+1} \quad [\infty \cdot 0] = 1$$

Esempio 5.8.

$$\lim n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \quad [\infty \cdot 0] = +\infty$$

Esempio 5.9.

$$\lim n \cdot \frac{1}{n^2} \quad [\infty \cdot 0] = 0$$

5.2 Teoremi su limiti di successioni

Teorema 5.10 (Permanenza del segno). *Sia:*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x > 0 \qquad \textit{oppure} \qquad \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$$

Allora $x_n > 0$ definitivamente*, ovvero esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $x_n > 0 \ \forall n > N$.*

Il concetto che abbiamo espresso di *definitivamente* è importante e verrà usato anche in seguito. Dimostriamo ora il teorema.

Dimostrazione.

I. se $\lim x_n = x > 0$ allora per definizione di limite $\forall \varepsilon > 0$ esiste N tale che $x_n \in B_\varepsilon(x)$. Scegliamo $\varepsilon = x$; segue che $x_n \in (x - x, x + x)$. Quindi $x_n > 0$ per ogni $n > N$.

II. se invece $\lim x_n = +\infty$ allora possiamo dire che $\forall M$ esiste N tale che $x_n > M$ per ogni $n > M$. Scegliamo $M = 0$ e troviamo che $x_n > 0 \ \forall n > N$.

□

Teorema 5.11. *Ogni successione monotona e limitata converge. Ogni successione monotona non limitata diverge.*

Dimostriamo separatamente le due parti del teorema.

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}$ una successione limitata (ricordiamo che questo significa che $\exists M$ tale che $|x_n| \leq M \ \forall n$) non decrescente. Imporre la non decrescenza non fa perdere di generalità la dimostrazione, sarebbe sufficiente considerare l'opposto. Non decrescente significa che $x_{n+1} \geq x_n \ \forall n$.

Consideriamo ora $\sup\{\, x_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$. Questo sup esiste e lo chiamiamo λ. L'insieme $\{\, x_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ è limitato (ovvero $\forall y \in \{\, x_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} \ \ |y_n| \leq M$). Quindi il sup non è infinito e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Vogliamo far vedere, come è prevedibile, che $\lambda = \lim x_n$. Preso $\varepsilon > 0$ dev'essere $x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ definitivamente. Per definizione di sup, $\lambda - \varepsilon < x_n$ per qualche $N \in \mathbb{N}$. Se $n > N$ allora, visto che la successione è non decrescente, vale $x_n \geq x_N > \lambda - \varepsilon$.

Quindi $\forall \varepsilon > 0$ esiste N tale che $x_n \in (\lambda - \varepsilon, \lambda]$ per ogni $n > N$. □

Dimostrazione. Se $\{x_n\}$ è non limitata e non decrescente, allora dobbiamo dimostrare che $\lim x_n = +\infty$.

Per definizione di insieme limitato $\forall M\ \exists N$ tale che $|x_N| > M$. Possiamo supporre che $x_N > M$ (a patto che $M > x_0$). Poiché $\{x_n\}$ è non decrescente, $x_n > x_N\ \forall n > N$.

Quindi $x_n > M\ \forall n > N$ e $\lim x_n = +\infty$. □

Osservazione 5.12. Le successioni che non hanno limite non sono monotone.

Ad esempio, la successione $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ non ha limite (oscilla tra -1 e 1) e non è monotona. La successione $\{1, -1, 2, 3, 4, \ldots\}$ invece ha limite $+\infty$ ma non è monotona.

Teorema 5.13 (Confronto tra successioni). *Siano $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ successioni tali che $x_n \leq y_n \leq z_n$ per ogni n. Supponiamo che $\lim x_n = L = \lim z_n$. Allora anche $\lim y_n = L$.*

Dimostrazione. Per $\varepsilon > 0$ deve esistere $N \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)\ \forall n > N$.

Sia N' tale che $x_n > L - \varepsilon\ \forall n > N'$. Sia N'' tale che $z_n < L + \varepsilon\ \forall n > N''$. Sia inoltre $N = \max\{N', N''\}$. Allora per ogni $n > N$ vale la seguente disuguaglianza:

$$L - \varepsilon < \underbrace{x_n \leq y_n \leq z_n}_{\text{per ipotesi}} < L + \varepsilon$$

Quindi $y_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)\ \forall n > N$. □

Osservazione 5.14. Osserviamo che tale teorema vale anche per limiti infiniti. Se $\lim x_n = +\infty$, $\lim z_n = +\infty$, $x_n \leq y_n \leq z_n$, allora $\lim y_n = +\infty$.

5.3 Coefficienti binomiali e disuguaglianza di Bernoulli

Per poter affrontare la *disuguaglianza di Bernoulli*, dobbiamo prima conoscere alcuni cenni sul coefficiente binomiale.

Vale la seguente equazione (detta binomio di Newton):

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

che esplicitata per i primi esponenti vale:

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a + b \\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{aligned}$$

Considerando solo i coefficienti, essi possono essere anche rappresentati in un triangolo di questo tipo, dove ogni numero è somma dei due numeri sopra di esso (a sinistra e a destra):

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}
$$

Definizione 5.15.
$\binom{n}{k}$ tale che $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n}b^n$

Il coefficiente binomiale deve essere tale in modo che valga la seguente proprietà:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Per far ciò poniamo:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Valgono anche le seguenti proprietà, tutte immediatamente e facilmente verificabili a partire dalla definizione:

$$\binom{1}{0} = 1$$

$$\binom{1}{1} = 1$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{1} = n$$

Siamo ora pronti a enunciare e dimostrare la disuguaglianza.

Teorema 5.16 (Disuguaglianza di Bernoulli). *Sia $h \geq 0$, allora:*

$$(1+h)^n \geq 1 + nh \quad \forall n$$

Dimostrazione.

$$
\begin{aligned}
(1+h)^n &= \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}h + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^k \\
&= 1 + nh + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^k
\end{aligned}
$$

Osseriviamo che ogni termine $\binom{n}{k}h^k$ è non negativo. Quindi $(1+h)^n \geq 1 + nh$. □

5.4 $\lim a^n$ e criterio del rapporto

Teorema 5.17. *Sia $a \neq 0$, allora:*

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} 1 & \textit{se } a = 1 \\ +\infty & \textit{se } a > 1 \\ 0 & \textit{se} -1 < a < 1 \\ \nexists & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Dimostrazione. Discutiamo ciascun caso separatamente.

- se $a = 1$ il limite è ovvio
- se $a > 1$, sia $h = a - 1 > 0$. Quindi possiamo scrivere $\lim a^n = \lim(1+h)^n$. Dalla disuguaglianza di Bernoulli sappiamo che $(1+h)^n \geq 1+hn \;\; \forall n$. Quindi la successione diverge, poiché $\lim(1+nh) = +\infty$ (considerato ovviamente $h > 0$). In definitiva $\lim a^n = +\infty$.
- se $-1 < x < 1$ vale che:
$$\frac{1}{|a|} = 1 + h$$
$$\left(\frac{1}{|a|}\right)^n = (1+h)^n \geq 1 + nh$$
Consideriamo il reciproco e abbiamo che:
$$0 < |a|^n \leq 1 + nh$$
Per il teorema del confronto $\lim |a^n| = 0$, cioè $\forall\varepsilon \;\; |a|^n \in B_\varepsilon(0)$ definitivamente. Quindi $-\varepsilon < |a^n| < \varepsilon \implies -\varepsilon < a^n < \varepsilon$. Quindi $a^n \in B_\varepsilon(0)$ definitivamente.
- se $a \leq -1$ procediamo a una dimostrazione per assurdo. Sia L il limite:
  - se $L > 0$ per il teorema della permanenza del segno a^n è definitivamente positivo; assurdo.
  - se $L = +\infty$ vale lo stesso ragionamento del caso precedente.
  - se $L < 0$ per il teorema della permanenza del segno a^n è definitivamente negativo; assurdo.
  - se $L = 0$ allora $\lim |a|^n = 0$. Essendo $|a| \geq 1$, assurdo.

  Quindi la successione non ha limite.

□

Osservazione 5.18. Alcuni testi scrivono $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$ (senza segno) se $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty$. Ad esempio potrebbe esserci scritto che $\lim(-2)^n = \infty$ visto che $\lim |(-2)^n| = +\infty$.

Teorema 5.19 (Criterio del rapporto). *Sia* $\{x_n\}$ *una successione a termini positivi e sia*

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Allora:

- *se* $L > 1$ *la successione è definitivamente crescente e* $\lim x_n = +\infty$.
- *se* $0 \le L < 1$ *la successione è definitivamente decrescente e* $\lim x_n = 0$.

Dimostrazione.

- se $L > 1$ allora possiamo imporre $L = 1 + 2\varepsilon$. Per definizione di limite $\exists N$ tale che

  $$\frac{x_{n+1}}{x_n} > L - \varepsilon \qquad \forall n > N$$

  $$\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 + \varepsilon \qquad \forall n > N$$

  Quindi $x_{n+1} > x_n \cdot (1+\varepsilon) > x_n$ per $n > N$. Quindi la successione è definitivamente crescente.

  Proseguendo otteniamo:

  $$\begin{aligned} &x_{N+2} > x_{N+1} \cdot (1+\varepsilon) \\ &x_{N+3} > x_{N+2} \cdot (1+\varepsilon) > x_{N+1} \cdot (1+\varepsilon)^2 \quad \text{e così via...} \end{aligned}$$

  Generalizzando:

  $$x_n > (1+\varepsilon)^{n-(N+1)} \cdot x_{N+1}$$

  Poiché $(1+\varepsilon)^{n-(N+1)}$ diverge a $+\infty$, per il teorema del confronto anche $\lim x_n = +\infty$.

- se $0 < L < 1$ procediamo in modo analogo al caso precedente. Imponiamo $L = 1+2\varepsilon$. Per definizione di limite $\exists N$ tale che

  $$\frac{x_{n+1}}{x_n} < L + \varepsilon \qquad \forall n > N$$

  $$\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1 - \varepsilon \qquad \forall n > N$$

  Come prima vale:

  $$0 < x_n < (1+\varepsilon)^{n-(N+1)} \cdot x_{N+1} \qquad \forall n > N$$

  Per il criterio del confronto, essendo $\lim (1+\varepsilon)^{n-(N+1)} \cdot x_{N+1} = 0$, allora $\lim x_n = 0$. Inoltre, $x_{n+1} < x_n \cdot (1-\varepsilon) < x_n$; quindi la successione è definitivamente decrescente.

$\square$

Capitolo 6

Sesta lezione (23/10/2015)

6.1 Criterio del rapporto (cont.)

Abbiamo già enunciato e dimostrato il criterio del rapporto; ora ne vogliamo mostrare un'applicazione calcolando un limite particolare.

Esempio 6.1. Dati $\alpha, h > 1$ vogliamo calcolare

$$\lim \frac{n^\alpha}{h^n}$$

Conoscendo la gerarchia degli infiniti potremmo subito dire che tale limite vale 0. Mostriamo formalmente che ciò è vero, usando il criterio del rapporto.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{(n+1)^\alpha}{h^{n+1}}}{\frac{n^\alpha}{h^n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{h} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha}_{1} \cdot \frac{1}{h} = \frac{1}{h}$$

Quindi

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{h} = \frac{1}{h}$$

Possiamo dire ciò perché

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$

e quindi anche

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha = 1^\alpha = 1$$

Quindi ora poiché il limite è $L = \frac{1}{h}$, che è sicuramente minore di 1, per il criterio del rapporto possiamo dire che $\lim x_n = 0$.

Abbiamo quindi dimostrato che $n^\alpha \ll h^n$. In altre notazioni tale fatto viene espresso come $n^\alpha = o(h^n)$.

6.2 Successioni definite per ricorrenza

Definizione 6.2. Una successione è *definita per ricorrenza* se è data nella forma

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = F(n, x_n) \quad \text{con } n > 0 \end{cases}$$

La successione sarà quindi del tipo $\{a, F(1,a), F(2, F(1,a)), \ldots\}$.

Mostriamo ora tre esempi di semplici successioni definite per ricorrenza. Nelle prossime tre successioni osserviamo che è semplice calcolare il termine generale x_n.

Esempio 6.3.

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = (n+1) \cdot x_n \quad n > 0 \end{cases}$$

La successione è del tipo $\{1, 2 \cdot 1, 3 \cdot 2 \cdot 1, \ldots\}$ e si vede chiaramente che $x_n = n!$.

Esempio 6.4. Siano fissati a e c numeri reali.

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = x_n + c \quad n > 0 \end{cases}$$

La successione è del tipo $\{a, a+c, a+2c, \ldots\}$ e si vede chiaramente che $x_n = a + (n-1) \cdot c$.

Esempio 6.5.

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = b \cdot x_n \quad n > 0 \end{cases}$$

La successione è del tipo $\{a, a \cdot b, a \cdot b^2, \ldots\}$ e si vede chiaramente che $x_n = a \cdot b^{n-1}$.

Consideriamo ora invece un esempio dove calcolare il termine generale è difficile.

Esempio 6.6.

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{2n+1}{n+3} \cdot x_n \quad n > 0 \end{cases}$$

Anche senza trovare il termine generale vogliamo però riuscire a calcolare il limite della successione. Osserviamo che tutti gli $x_n > 0$ sono positivi, perché $x_1 > 0$ e ogni $\frac{2n+1}{n+3}$ è un termine positivo. La successione è quindi a termini positivi e possiamo quindi applicare il criterio del rapporto.

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \frac{\frac{2n+1}{n+3} \cdot x_n}{x_n} = \lim \frac{2n+1}{n+3} = \lim \frac{2n+6-5}{n+3} = \lim 2 - \frac{5}{n+3} = 2$$

Poiché 2 è maggiore di 1, per il criterio del rapporto la successione diverge a $+\infty$ (ovvero $\lim x_n = +\infty$).

Esempio 6.7. Prendiamo la stessa successione di prima invertendo numeratore e denominatore in x_{n+1}.

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{n+3}{2n+1} \cdot x_n \quad n > 0 \end{cases}$$

Valgono tutte le osservazioni fatte nell'esempio precedente. Inoltre, con gli stessi passaggi si può trovare che

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}$$

Poiché $\frac{1}{2} < 1$, per il criterio del rapporto $\lim x_n = 0$.

Esempio 6.8. Consideriamo quest'altro esempio in cui vogliamo calcolare il limite della successione.

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Si arriva a far vedere che

$$x_n = 2 - \frac{1}{2^n}$$

utilizzando la seguente uguaglianza:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

e

$$(1 + a + \ldots + a^n) \cdot (1 - a) = 1 - a^{n+1}$$

Sostituendo ovviamente $a = \frac{1}{2}$ resta

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - \frac{1}{2}^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}^{n+1}\right) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

In definitiva scriviamo

$$\lim x_n = \lim 2 - \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{0} = 2$$

Osservazione 6.9. Per ogni $n \geq 1$ vale $n! \geq 2^{n-1}$. Possiamo mostrare che è vero per induzione.

Per $n = 1$ ho che $1! \geq 2^{1-1}$, ovvero $1 \geq 1$ che è vero. Devo ora far vedere che se vale per n allora vale anche per $n + 1$. Quindi:

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \geq (n+1) \cdot 2^{n-1} \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

6.3 Numero di Nepero e

Teorema 6.10. *Il limite della successione $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ esiste ed è finito. In particolare la successione converge a un numero che chiamiamo e.*

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e < \sum_{h=0}^{k} \frac{1}{h!} + \frac{1}{2^{k-1}}$$

Dimostrazione. Avevamo già visto l'espressione del binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

Possiamo applicarla a questo caso. Quindi:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n! \cdot n^k}
\end{aligned}$$

Per l'ultimo passaggio abbiamo usato l'uguaglianza $n! = (n-k)! \cdot (n-k+1) \cdot \ldots \cdot n$. Possiamo procedere ulteriormente:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Il nostro scopo è mostrare che la successione è monotona. Sviluppiamo ora la successione per $n+1$ in modo analogo:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

Confrontando con quello di prima (che era la somma fino a n, quindi con un termine in meno), ho sicuramente che questo (lo "sviluppo" per $n+1$) è maggiore.

$$\begin{aligned}
&> \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) \\
&> \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Avendo tolto un termine positivo dalla successione, sicuramente ho ottenuto qualcosa di più piccolo. Quindi la successione è crescente.

Osserviamo anche che:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{2^{n-1}}$$

L'ultima disuguaglianza è giustificata dal fatto che $n! > 2^{n-1}$ (dimostrata in precedenza). $\square$

Considerando i casi particolari $n = 1$ e $n = 2$ possiamo scrivere:

$$(1+1)^1 < e < \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2}$$

ovvero $2 < e < 3$.

6.4 Limiti che si deducono da e

Osservazione 6.11. Data una successione $\{a_n\}$ (con $a_n \in \mathbb{N}$) divergente (ovvero $\lim a_n = +\infty$) allora:

$$\lim \left(1+\frac{1}{a^n}\right)^{a_n} = e$$

Infatti, fissato un intorno di e sappiamo che $(1+\frac{1}{n})^n \in B_r(e)$ definitivamente. Poiché per definizione di limite $a_n > N$ definitivamente, allora $(1+\frac{1}{a^n})^{a_n} \in B_r(e)$ definitivamente.

Esempio 6.12. Mostriamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Applichiamo il criterio del rapporto. Osserviamo innanzitutto che la successione è a termini positivi ($\frac{n!}{n^n} > 0$). Calcoliamo il rapporto:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = (n+1) \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Quindi

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

Essendo $e > 1$, $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Quindi, per il criterio del rapporto, $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$.

Esempio 6.13. Mostriamo che (fissato $x > 0$)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

Applichiamo il criterio del rapporto. Osserviamo ancora una volta che la successione è a termini positivi ($\frac{x^n}{n!} > 0$ per $x > 0$ fissato). Calcoliamo il rapporto:

$$\lim \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \lim \frac{x}{n+1} = 0$$

Quindi, per il criterio del rapporto, $\lim \frac{x^n}{n!} = 0$.

Esempio 6.14. Mostriamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}} = 0$$

Dobbiamo cioè far vedere che, per ε fissato, $\frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}} < \varepsilon$ definitivamente.

$$\frac{1}{n!} < \varepsilon^n \implies \frac{(\frac{1}{\varepsilon})^n}{n!} < 1$$

Per quest'ultimo passaggio abbiamo usato il limite mostrato nell'esempio precedente. Posto $x = \frac{1}{\varepsilon}$ troviamo che, definitivamente,

$$\frac{(\frac{1}{\varepsilon})^n}{n!} < 1$$

Esempio 6.15. Mostriamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

Consideriamo le due successioni

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{e} \qquad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Sappiamo che $\lim y_n = e$. Quindi ci è sufficiente, per dimostrare l'esempio, far vedere che $\lim x_n y_n = 1$. Procediamo:

$$x_n y_n = \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]^n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

Per Bernoulli sappiamo che $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Sia $x = -\frac{1}{n^2}$, allora:

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}$$

Questo implica

$$1 - \frac{1}{n} \leq x_n y_n \leq 1$$

Essendo $\lim 1 - \frac{1}{n} = 1$, per il teorema del confronto si ha $\lim x_n y_n = 1$. Quindi:

$$\lim x_n = \frac{1}{\lim y_n} = \frac{1}{e}$$

6.5 Asintotico

Definizione 6.16. Due successioni x_n, y_n sono *asintotiche* se $y_n \neq 0$ definitivamente e

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = 1$$

Si scrive $x_n \sim y_n$.

Osservazione 6.17. $x_n \sim y_n \iff y_n \sim x_n$

Proposizione 6.18. *Se $x_n \sim \overline{x_n}$ e $y_n \sim \overline{y_n}$ allora*

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{\overline{x_n}}{\overline{y_n}}$$

Cioè il limite di destra esiste se e solo se esiste il limite di sinistra; in tal caso i limiti coincidono.

Inoltre si ha anche che

$$\lim x_n \cdot y_n = \lim \overline{x_n} \cdot \overline{y_n}$$

Dimostriamo didatticamente la seconda parte della proposizione (quella relativa al prodotto).

Dimostrazione.

$$\overline{x_n} \cdot \overline{y_n} = \frac{\overline{x_n}}{x_n} \cdot \frac{\overline{y_n}}{y_n} \cdot x_n \cdot y_n$$

Poiché

$$\lim \frac{\overline{x_n}}{x_n} \cdot \frac{\overline{y_n}}{y_n} = 1$$

allora segue direttamente

$$\lim \overline{x_n} \cdot \overline{y_n} = \lim x_n \cdot y_n$$

□

Mostriamo ora la risoluzione di un limite grazie alla stima asintotica.

Esempio 6.19.

$$\lim \frac{n + \sqrt{n}}{n + \sqrt{n-1}}$$

Sia il numeratore che il denominatore sono asintotici a n. Infatti:

$$\frac{n + \sqrt{n}}{n} = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \sim 1$$

$$\frac{n + \sqrt{n-1}}{n} = 1 + \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} \sim 1$$

Quindi:

$$\lim \frac{n + \sqrt{n}}{n + \sqrt{n-1}} = \lim \frac{n}{n} = 1$$

Osservazione 6.20. Attenzione al fatto che tale proprietà *non* vale con la somma. Infatti, se $x_n \sim y_n$ *non* posso dire che

$$\lim x_n + z_n = \lim y_n + z_n$$

Facciamolo vedere su un esempio. Consideriamo $x_n = n + 1$, $z_n = -n$ e $y_n = n$. Calcoliamo il limite: $\lim x_n + z_n = \lim(n+1) - n = \lim 1 = 1$. Considerato che $x_n \sim y_n$, si potrebbe essere tentati dal dire che tale limite è uguale a $\lim y_n + z_n = \lim n - n = \lim 0 = 0$. Come è evidente $(0 \neq 1)$ staremmo commettendo un grave errore!

Capitolo 7

Settima lezione (27/10/2015)

7.1 Infinitesimi e limiti notevoli

Definizione 7.1. Una successione $\{x_n\}$ si dice *infinitesima* se $\lim x_n = 0$.

Proposizione 7.2. *Sia ε_n una successione infinitesima a termini positivi. Allora:*

1. $\sin \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$
2. $1 - \cos \varepsilon_n \sim \frac{1}{2}(\varepsilon_n)^2$
3. $\lim (1 + \varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} = e$
4. $\log(1 + \varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$
5. $e^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n$
6. $(1 + \varepsilon_n)^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot \varepsilon_n$

Dimostriamo singolarmente ciascuna implicazione.

Dimostrazione. Dimostrare il primo punto equivale a far vedere che

$$\lim \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1$$

Dalla circonferenza goniometrica, con qualche passaggio, possiamo ricavare che

$$\sin \varepsilon_n < \varepsilon_n < \tan \varepsilon_n$$
$$\frac{1}{\sin \varepsilon_n} > \frac{1}{\varepsilon_n} > \frac{1}{\tan \varepsilon_n}$$

Moltiplichiamo per $\sin \varepsilon_n$:

$$1 > \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} > \underbrace{\frac{\sin \varepsilon_n}{\tan \varepsilon_n}}_{\cos \varepsilon_n}$$

Sappiamo che $\lim \cos \varepsilon_n = \cos 0 = 1$. Quindi:

$$1 > \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} > 1$$

Per il teorema del confronto $\lim \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1$. □

Dimostrazione. Riscriviamo la seconda proprietà enunciata sfruttando l'uguaglianza $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ e ponendo $\varepsilon_n = 2x$:

$$\frac{1-\cos\varepsilon_n}{\frac{1}{2}(\varepsilon_n)^2} = \frac{1-(1-2\sin^2\frac{\varepsilon_n}{2})}{\frac{1}{2}(\varepsilon_n)^2} = \frac{2\sin^2\frac{\varepsilon_n}{2}}{\frac{1}{2}(\varepsilon_n)^2} \sim \frac{2(\frac{\varepsilon_n}{2})^2}{\frac{1}{2}(\varepsilon_n)^2} = 1$$

□

Dimostrazione. Il terzo punto ci chiede di mostrare che

$$\lim(1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} = e$$

Osserviamo che qualora $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, allora tale limite può essere riscritto come $(1+\frac{1}{n})^n$ e vale e per definizione di e stesso.

Dimostriamo ora il caso generale. Poniamo x_n uguale alla parte intera di $\frac{1}{\varepsilon_n}$ (si scrive $x_n = [\frac{1}{\varepsilon_n}]$). Quindi $x_n \in \mathbb{Z}$ e $x_n \leq \frac{1}{\varepsilon_n} < x_n + 1$. Quindi

$$\left(1+\frac{1}{x_n+1}\right)^{x_n} \leq (1+\varepsilon_n)^{x_n} \leq (1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} \leq \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} \leq \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n+1}$$

Proviamo ad applicare il criterio del confronto. Consideriamo

$$\lim\left(1+\frac{1}{x_n+1}\right)^{x_n+1} = e$$

poiché $\lim x_n + 1 = +\infty$. Quindi:

$$\lim\left(1+\frac{1}{x_n+1}\right)^{x_n} = \frac{\lim\left(1+\frac{1}{x_n+1}\right)^{x_n+1}}{\lim 1+\frac{1}{x_n+1}} = \frac{e}{1} = e$$

$$\lim\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n+1} = \lim\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \cdot \lim\left(1+\frac{1}{x_n}\right) = e \cdot 1 = e$$

Quindi per il criterio del confronto anche $\lim(1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} = e$. □

Dimostrazione. Dire che $\log(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$ significa dire che

$$\lim\frac{\log(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 1$$

Procediamo con semplici passaggi:

$$\lim\frac{\log(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = \lim\log(1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} = \log(\lim(1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}}) = \log e = 1$$

□

Dimostrazione. Il quinto punto ci chiede di far vedere che $e^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n$. Chiamiamo $\delta_n = e^{\varepsilon_n} - 1$; tale δ_n è una successione infinitesima a termini positivi. Quindi possiamo scrivere:

$$\lim\frac{e^{\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n} = \lim\frac{\delta_n}{\log(1+\delta_n)} = \frac{1}{\lim\frac{\log(1+\delta_n)}{\delta_n}} = \frac{1}{1} = 1$$

□

Dimostrazione. In ultimo dobbiamo dimostrare che $(1+\varepsilon_n)^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot \varepsilon_n$. Procediamo:

$$e^{\alpha \log(1+\varepsilon_n)} - 1 = \frac{e^{\alpha \log(1+\varepsilon_n)} - 1}{\alpha \log(1+\varepsilon_n)} \cdot \alpha \log(1+\varepsilon_n)$$

La frazione è del tipo $\frac{e^{\delta_n}-1}{\delta_n}$ ed è quindi asintotica a 1. Quindi il tutto è asintotico a $\alpha \log(1+\varepsilon_n)$ che è a sua volta asintotico a $\alpha \cdot \varepsilon_n$. □

Mostriamo ora un limite che si può calcolare con quanto abbiamo visto finora.

Esempio 7.3.

$$\lim \frac{\left(\cos \frac{1}{n} - 1\right) \cdot \sin \frac{1}{n}}{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

Studiamo separatamente i tre termini. Il primo è $1 - \cos \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$, il secondo $\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$, il terzo $\log(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$. Riscriviamo il limite iniziale:

$$\lim \frac{-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} = 0$$

Dai limiti studiati se ne possono dedurre facilmente altri:

- Sulla tangente:

  $$\lim \frac{\tan \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = \lim \frac{\sin \varepsilon_n}{\cos \varepsilon_n} \cdot \frac{1}{\varepsilon_n} = \lim \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \cdot \frac{1}{\cos \varepsilon_n} = 1 \cdot 1 = 1$$

  Quindi $\tan \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$.

- Sull'arcsin: $\arcsin \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$. Infatti, sia $\delta_n = \arcsin \varepsilon_n$; δ_n è infinitesima perché arcsin è continua. Quindi

  $$\lim \frac{\delta_n}{\sin \delta_n} = 1 = \lim \frac{\arcsin \varepsilon_n}{\varepsilon_n}$$

Osservazione 7.4.

$$\lim (1 + h\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} = e^h$$

Sappiamo infatti che, considerando $h\varepsilon_n$ come δ_n,

$$\lim (1 + h\varepsilon_n)^{\frac{1}{h \cdot \varepsilon_n}} = e$$

Elevando alla h entrambi i membri si verifica l'uguaglianza iniziale.

7.2 Scala degli infiniti

Scriviamo $a \ll b$ se $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$; vale la seguente *scala di infiniti*:

$$(\log n)^\beta \ll n^\alpha \ll A^n \ll n! \ll n^n$$

Si può scrivere anche $a_n = o(b_n)$. È necessario comunque prestare attenzione al fatto che se $a_n = o(b_n)$ e $c_n = o(b_n)$, non è comunque detto che $a_n = c_n$.

Ad esempio consideriamo le due successioni $\frac{1}{n^2}$ e $\frac{1}{n^3}$ che sono entrambe $= o(\frac{1}{n})$. Infatti il limite del rapporto di entrambe per $\frac{1}{n}$ vale 0, ma questo non implica in alcun modo che $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^3}$.

Proposizione 7.5. *Sia $\{a_n\}$ una successione a termini positivi divergente (quindi a $+\infty$), allora:*

1. *se $a_n \in \mathbb{N}\ \forall n$ e $A > 1$, $A^{a_n} \ll a_n!$*
2. *se $A > 1$, ${a_n}^{\alpha} \ll A^{\alpha_n}$ con α reale*
3. *se $\alpha > 0$, $(\log a_n)^{\beta} \ll {a_n}^{\alpha}$*

Dimostriamo la prima implicazione.

Dimostrazione. Sappiamo che

$$\lim_{j \to +\infty} \frac{A^j}{j!} = 0$$

Per definizione di limite $\forall \varepsilon\ \exists N$ tale che $\frac{A^j}{j!} < \varepsilon$ per $j > N$. Essendo $\lim a_n = +\infty$, esiste M tale che $a_n > N$ per ogni $n > M$.

Quindi $n > M \implies a_n > N \implies \frac{A^{a_n}}{a_n!} < \varepsilon$. Quindi il limite $\lim \frac{A^{a_n}}{a_n!} = 0$. □

Esempio 7.6. Esistono dei limiti che non possiamo calcolare con la sostituzione asintotica. Ad esempio

$$\lim_{n \to +\infty} n^2 \cdot \left(\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right)$$

pur essendo $\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$, il limite non è calcolabile con i metodi visti finora.

7.3 Serie

Proviamo a formalizzare l'idea di "somma infinita". Abbiamo già visto la notazione

$$\sum_{j=1}^{k} x_j = x_1 + \ldots + x_k$$

con cui intendiamo la somma dei primi k termini.

Definizione 7.7. Data una successione x_j si definisce *serie* l'espressione simbolica

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j$$

Data una serie $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$, si definisce la *successione delle somme parziali* $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\{s_n\} = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

Si dice che la serie *converge* se $\{s_n\}$ converge. In tal caso $\lim s_n$ è detto *somma della serie*. In modo analogo si dice che la serie *diverge* se $\{s_n\}$ diverge.

Il *carattere* di una serie è la sua proprietà di essere convergente, divergente o indeterminata.

Osservazione 7.8. Se due serie differiscono per un numero finito di termini; allora hanno lo stesso carattere.

Date
$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{\infty} b_j$$
supponiamo $a_n = b_n$ per ogni $n > N$. Chiamiamo:
$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \quad \text{e} \quad t_n = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Se $n > N$, la differenza $s_n - t_n$ non dipende da n. Considerando l'elemento successivo vedo che $s_{n+1} - t_{n+1} = s_n + a_{n+1} - (t_n + b_{n+1}) = s_n - t_n$.

Quindi $\{s_n\}$ converge se e solo se $\{t_n\}$ converge. Allo stesso modo $\{s_n\}$ diverge se e solo se $\{t_n\}$ diverge.

Osservazione 7.9. Se $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ converge a L e $\sum_{j=1}^{\infty} y_j$ converge a M, allora $\sum_{j=1}^{\infty}(x_j+y_j)$ converge a $L + M$.

Sia $\{s_n\}$ la successione delle somme parziali di $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ e $\{t_n\}$ la successione delle somme parziali di $\sum_{j=1}^{\infty} y_j$. La successione delle somme parziali di $\sum_{j=1}^{\infty}(x_j + y_j)$ sia $\{z_j\}$.

Per definizione
$$z_n = \sum_{j=1}^{n}(x_j + y_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j + \sum_{j=1}^{n} y_j = s_n + t_n$$
Poiché $\lim s_n = L$ e $\lim t_n = M$, allora $\lim(s_n + t_n) = L + M$.

Osservazione 7.10. Se $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ converge a L, allora $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha x_j$ converge a αL. Questo perché $\lim(\alpha s_n) = \alpha \lim s_n$.

Esempio 7.11 (Serie di Mengoli). Consideriamo la serie di Mengoli:
$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)}$$
Con qualche passaggio si mostra che $\frac{1}{j(j+1)}$ è uguale a $\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}$. Esplicitiamo s_n e traiamo vantagggio da quanto abbiamo appena scritto:
$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$
$$s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
Semplificando i termini opposti restano solo il primo e l'ultimo. Quindi $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Quindi $\lim s_n = \lim(1 - \frac{1}{n+1}) = 1$. Possiamo quindi dire che la serie converge e ha somma 1.

Esempio 7.12 (Serie geometrica). Fissato un x reale, consideriamo la serie geometrica di ragione x, che per convenzione facciamo partire da 0:

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^j$$

In questo caso

$$s_n = \sum_{j=0}^{n} x^j = \frac{1 - x^{n+1}}{1 + x}$$

L'ultima uguaglianza è giustificata dalla formula, già vista, $(1 + x + \ldots + x^n)(1 - x) = 1 + x + \ldots + x^n - x - \ldots - x^n - x^{n+1}$ in cui si semplificano a due a due tutti i termini tranne 1 e x^{n+1}.

Possiamo quindi scrivere

$$\lim s_n = \lim \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Osserviamo che (ricordando $\lim x^n$ già studiato in precedenza):

$$\lim_{n\to+\infty} x^{n+1} = \lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ +\infty & \text{se } x > 1 \\ \nexists & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

In definitiva:

- se $|x| < 1$ allora $\lim s_n = \frac{1}{1-x}$ e quindi la serie converge.
- se $x > 1$ allora $\lim s_n = \frac{x^{n-1}-1}{x-1} = +\infty$ e quindi la serie diverge
- se $x = 1$ allora $\sum_{j=0}^{n} 1^j = \sum_{j=0}^{n} 1 = 1 + 1 + \ldots = +\infty$. In altre parole $s_n = n + 1$ e quindi $\lim s_n = +\infty$ e la serie diverge.

Proposizione 7.13. *Una serie a termini non negativi*

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j \qquad x_j \geq 0$$

o converge o diverge a $+\infty$.

Dimostrazione. La dimostrazione è semplice. Consideriamo $s_n = x_1 + \ldots + x_n$ e $s_{n+1} = x_1 + \ldots + x_{n+1} = s_n + x_{n+1}$. Possiamo dire con certezza che $s_{n+1} \geq s_n$ (perché $x_{n+1} \geq 0$). Quindi $\{s_n\}$ è non decrescente. Quindi o converge o diverge a $+\infty$. □

Proposizione 7.14 (Criterio del confronto per le serie). *Siano $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ e $\sum_{j=1}^{\infty} y_j$ serie a termini non negativi e sia $x_j \leq y_j$ per ogni j. Allora:*

1. *se $\sum_{j=1}^{\infty} y_j$ converge $\Longrightarrow$ $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ converge*

2. se $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ *diverge* $\implies$ $\sum_{j=1}^{\infty} y_j$ *diverge*

Dimostrazione. Sia $\{s_n\}$ la successione delle somme parziali di $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ e $\{t_n\}$ la successione delle somme parziali di $\sum_{j=1}^{\infty} y_j$. Allora vale $s_n \leq t_n$, inoltre $0 \leq s_n \leq t_n$.

Nel primo caso $\{t_n\}$ converge e quindi è limitata. Allora anche $\{s_n\}$ è limitata. Essendo monotona, converge.

Nel secondo caso $\{s_n\}$ diverge. Quindi anche $\{t_n\}$ diverge per il criterio del confronto. □

Esempio 7.15. Consideriamo la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$$

Possiamo confrontare questa serie a quella di Mengoli. Quindi possiamo dire, ad esempio, che:

$$\frac{1}{j^2} \leq \frac{2}{j(j+1)} \implies \frac{1}{j} \leq \frac{2}{j+1} \implies j+1 \leq 2j$$

Poiché sappiamo che $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{j(j+1)}$ converge, allora anche $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ converge.

Proposizione 7.16 (Condizione necessaria di Cauchy per la convergenza delle serie). *Se la serie* $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ *converge, allora* $\lim_{j \to +\infty} x_j = 0$.

Dimostrazione. Sia $\{s_n\}$ la successione delle somme parziali. Consideriamo $s_{n+1} = s_n + x_{n+1}$. A questo punto:

$$\lim_{n \to +\infty} x_n + 1 = \lim(s_{n+1} - s_n) = \lim s_{n+1} - \lim s_n = L - L = 0$$

Nel penultimo passaggio, posso fare ciò perché abbiamo supposto la convergenza. □

Esempio 7.17. Possiamo chiederci se la seguente serie converge.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{j}\right)$$

La risposta è no, perché $\lim 1 + \frac{1}{j} = 1$ che è diverso da 0. Inoltre, notando che la serie è a termini positivi, possiamo dire che diverge a $+\infty$.

Ricordiamo inoltre che la condizione necessaria di Cauchy non è sufficiente: ad esempio, la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ soddisfa tale condizione ma diverge.

Capitolo 8

Ottava lezione (30/10/2015)

8.1 Serie armonica generalizzata

Introduciamo una notazione comoda. Se $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ converge a s, cioè la successione delle somme parziali $\{s_n\}$ converge a s (ovvero $s_n = \sum_{j=0}^{n} x_j$), allora scriviamo:

$$\sum_{j=0}^{\infty} x_j = s$$

Al termine della lezione precedente avevamo visto la condizione di Cauchy. Ribadiamo ancora una volta che non vale il viceversa, mostrando un esempio.

Esempio 8.1 (Serie armonica). La serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$$

soddisfa $\lim \frac{1}{j} = 0$ ma non converge. Tale serie viene chiamata "serie armonica" e possiamo considerare anche quella generalizzata (con α reale):

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{\alpha}}$$

Teorema 8.2. *La serie armonica diverge; la serie armonica generalizzata converge per $\alpha > 1$ e diverge per $\alpha < 1$.*

Dimostrazione. La serie armonica è una serie a termini positivi, quindi o converge o diverge. Confrontiamo i primi termini una successione che chiamiamo $\{z_j\}$ costruita in modo che ogni termine sia maggiore di quello della serie armonica. Scriviamo nella prima riga i termini della serie armonica e nella seconda quelli di $\{z_j\}$:

$$x_1 = \frac{1}{1} \quad x_2 = \frac{1}{2} \quad x_3 = \frac{1}{3} \quad x_4 = \frac{1}{4} \quad x_5 = \frac{1}{5} \quad \dots$$

$$x_1 = \frac{1}{1} \quad x_2 = \frac{1}{2} \quad x_3 = \frac{1}{4} \quad x_4 = \frac{1}{4} \quad x_5 = \frac{1}{8} \quad \dots$$

Formalmente $z_j = \frac{1}{2^k}$ dove $2^{k-1} < j \leq 2^k$. Analizziamo ora $\{s_n\}$, che definiamo come la successione delle somme parziali di $\{z_j\}$.

$$\begin{aligned}
s_1 &= z_1 = 1 \\
s_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\
s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \\
s_8 &= 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)
\end{aligned}$$

Si vede abbastanza facilmente che

$$\begin{aligned}
s_{2^k} &= s_{2^{k-1}} + 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} \\
s_{2^k} &= s_{2^{k-1}} + \frac{1}{2} \\
s_{2^k} &= 1 + \frac{k}{2}
\end{aligned}$$

A questo punto possiamo calcolare

$$\lim_{k \to +\infty} s_{2^k} = +\infty$$

Quindi $\{s_n\}$ non è limitata e quindi non può convergere. Allora $\sum z_j$ non converge, quindi diverge (essendo a termini positivi).

Osservando che $z_j \leq \frac{1}{j}$ per ogni j e che $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ diverge; allora $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ diverge.

□

Per $\alpha < 1$ il teorema ci dice che $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^\alpha}$ diverge. Infatti se $\alpha < 1$ allora $j^\alpha < j$ e quindi $\frac{1}{j^\alpha} > \frac{1}{j}$. Quindi posso confrontare questa serie con $\frac{1}{j}$. Per il criterio del confronto diverge anch'essa.

Non dimostreremo il caso $\alpha > 1$, ma ci limitiamo ad osservare che se $\alpha = 2$ allora la serie è $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$; abbiamo già visto che converge per confronto con quella di Mengoli.

8.2 Criterio del rapporto per le serie

Teorema 8.3 (Criterio del rapporto per le serie). *Sia $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ una serie a termini positivi. Se esiste il limite*

$$L = \lim_{j \to +\infty} \frac{x_{j+1}}{x_j}$$

allora:

1. *se $L < 1$ la serie è convergente*
2. *se $L > 1$ la serie è divergente*

Mostriamo alcuni esempi di applicazione del teorema.

Esempio 8.4. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

converge per ogni x. Infatti, applicando il criterio del rapporto

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1}$$

e $\lim \frac{x}{n+1} = 0$. Poiché il limite è minore di 1, la serie è convergente.

È interessante inoltre notare che per $x = 1$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!}$ vale esattamente e.

Esempio 8.5. Studiamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n \qquad x \in (0, 1)$$

applicando il criterio del rapporto. Quindi:

$$\frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n} = x \cdot \frac{n+1}{n}$$

Il limite di $x \cdot \frac{n+1}{n}$ vale x e quindi per $0 < x < 1$ la serie converge.

Rimarchiamo il concetto che se $L = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ non possiamo concludere né che la serie converge né che diverge. Infatti:

Esempio 8.6. $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ diverge e il suo limite è 1:

$$\lim_{j \to +\infty} \frac{\frac{1}{j+1}}{\frac{1}{j}} = \frac{j}{j+1} = 1$$

Esempio 8.7. $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ converge e il suo limite è 1:

$$\lim_{j \to +\infty} \frac{\frac{1}{(j+1)^2}}{\frac{1}{j^2}} = \frac{j^2}{(j+1)^2} = 1$$

Dimostriamo il teorema.

Dimostrazione.

1. Se $L < 1$ scelgo h in modo che $L < h < 1$. Allora so che $\frac{x_{j+1}}{x_j}$ è definitivamente minore di h.

   Quindi esiste N tale che $\frac{x_{j+1}}{x_j} < h$ per ogni $j > N$. Sviluppando i termini successivi:

$$\begin{aligned} x_{N+2} &< hx_{N+1} \\ x_{N+3} &< hx_{N+2} < h^2 x_{N+1} \\ x_{N+K+1} &< h^k x_{N+1} \end{aligned}$$

   Quindi $\sum_{j=N+1}^{\infty} x_j$ converge perché $\sum h^k x_{N+1}$ converge (quest'ultima converge perché è una serie geometrica di ragione $h < 1$). Se converge a partire da $N + 1$ in poi, allora tutta la serie converge. Quindi $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ converge.

2. Se $L > 1$ procediamo in modo analogo al caso precedente. Prendiamo $1 < h < L$, quindi $\frac{x_{j+1}}{x_j} > h$ definitivamente. Come prima, osservando i passaggi, arriviamo a dire che $x_{N+k+1} > h^k x_{N+1}$.

   Osserviamo che $\sum_{k=0}^{\infty} h^k x_{N+1} = x_{N+1} \sum_{k=0}^{\infty} h^k$ che diverge perché è una serie geometrica di ragione maggiore di 1. Quindi per confronto anche $\sum_{j=N+1}^{\infty} x_j$ diverge e quindi diverge anche $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$.

□

8.3 Criterio della radice

Teorema 8.8 (Criterio della radice). *Sia $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ una serie a termini positivi tale che il limite*

$$L = \lim_{j \to +\infty} \sqrt[j]{x}$$

esiste ed è finito. Allora:

1. *se $L < 1$ la serie converge*
2. *se $L > 1$ la serie diverge*

Al solito mostriamo alcuni esempi prima della dimostrazione.

Esempio 8.9.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{j!}\right)^j = \sum x_j$$

Applicando il criterio della radice:

$$\sqrt[j]{x_j} = \sqrt[j]{\left(\frac{1}{j!}\right)^j} = \frac{1}{j!}$$

Quindi:

$$\lim \sqrt[j]{x_j} = \lim \frac{1}{j!} = 0$$

Poiché 0 è minore di 1, la serie converge.

Esempio 8.10.

$$\sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\log j}\right)^j = \sum x_j$$

Applicando il criterio della radice:

$$\sqrt[j]{x_j} = \sqrt[j]{\left(\frac{1}{\log j}\right)^j} = \frac{1}{\log j}$$

Quindi:

$$\lim \sqrt[j]{x_j} = \lim \frac{1}{\log j} = 0$$

Poiché 0 è minore di 1, la serie converge.

Non ha a che fare con il criterio della radice, ma osserviamo che l'esempio appena fatto privo dell'elevamento a j (quindi $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\log j}$) diverge perché $\frac{1}{\log j}$ lo posso confrontare con $\frac{1}{j}$.

Poiché $\log j = o(j)$, allora $\frac{1}{\log j} > \frac{1}{j}$ definitivamente. Poiché $\sum \frac{1}{j}$ diverge, allora anche $\frac{1}{\log j}$ diverge.

Dimostrazione. Studiamo le due affermazioni:

1. Se $L < 1$, sia $L < h < 1$. Allora so che $\sqrt[j]{x_j} < h$ definitivamente. Elevando alla j entrambi i membri si trova che $x_j < h^j$ definitivamente.

   Essendo $h < 1$ allora $\sum_{j=0}^{\infty}$ converge. Allora per confronto converge anche $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$.

2. Se $L > 1$ allora posso dire direttamente che $\sqrt[j]{x_j} > 1$ definitivamente. Elevando alla j entrambi i membri si trova che $x_j < 1$ definitivamente.

   Osserviamo che $\sum x_j > \sum 1$. Poiché $\sum 1$ diverge ($\lim 1 \neq 0$ e $1 + 1 + \ldots = +\infty$), allora anche $\sum x_j$ diverge.

   Alternativamente possiamo dire che $\lim x_j$ non può essere 0 perché x_j da un certo punto in poi è 1. Non è quindi soddisfatta la condizione di Cauchy e quindi la serie diverge.

□

8.4 Confronto asintotico tra serie

Definizione 8.11. Date due serie a termini positivi $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ e $\sum_{j=0}^{\infty} y_j$, diciamo che sono *asintoticamente equivalenti* se $x_j \sim y_j$, cioè $\lim \frac{x_j}{y_j} = 1$.

Teorema 8.12 (Criterio del confronto asintotico). *Due serie a termini positivi asintoticamente equivalenti posso essere o entrambe convergenti o entrambe divergenti.*

Esempio 8.13. Studiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3\sqrt{n} - 4}{2n^3\sqrt{n+1}}$$

Osserviamo che il numeratore è asintotico a n^2 e il denominatore a $2n^3\sqrt{n}$. Il termine generale della serie è quindi:

$$\frac{n^2 + 3\sqrt{n} - 4}{2n^3\sqrt{n+1}} \sim \frac{n^2}{2n^3\sqrt{n}} = \frac{1}{2n\sqrt{n}} = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

La serie di partenza è quindi asintoticamente equivalente a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$. Siccome questa è una serie armonica generalizzata con $\alpha = \frac{3}{2}$, che è maggiore di 1, essa converge. Quindi, per il teorema del confronto asintotico, anche la serie di partenza converge.

Esempio 8.14. Studiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^2 + \sqrt{n}}{n}$$

Osserviamo che $-1 \leq \cos n^2 \leq 1$, quindi $\cos n^2 + \sqrt{n} \sim \sqrt{n}$.

La serie di partenza è quindi asintoticamente equivalente a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$. Poiché $\frac{1}{2}$ è minore di 1, la serie diverge.

Dimostrazione. Siano $\sum x_j$ e $\sum y_j$ due serie a termini positivi asintoticamente equivalenti. Sappiamo quindi che $\lim \frac{x_j}{y_j} = 1$.

Possiamo considerare un intorno di 1, ad esempio $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Dev'essere $\frac{1}{2} < \frac{x_j}{y_j} < \frac{3}{2}$ definitivamente. Moltiplicando tutti i termini per y_j otteniamo:

$$\frac{1}{2} \cdot y_j < x_j < \frac{3}{2} \cdot y_j$$

Ora:

1. se $\sum y_j$ diverge, allora $\sum \frac{1}{2} y_j$ diverge. Quindi $\sum x_j$ diverge per confronto.
2. se $\sum y_j$ converge, allora $\sum \frac{3}{2} y_j$ converge. Quindi $\sum x_j$ converge per confronto.

□

8.5 Serie assolutamente convergenti

Definizione 8.15. Una serie $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ si dice *assolutamente convergente* se converge $\sum_{j=0}^{\infty} |x_j|$.

Teorema 8.16. *Se una serie è assolutamente convergente allora è anche convergente.*

Esempio 8.17. Consideriamo la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin j}{j^2}$$

e notiamo che *non* è a termini positivi. Tuttavia possiamo studiare

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{\sin j}{j^2} \right| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\sin j|}{j^2}$$

che è una serie a termini positivi. Osserviamo che $|\sin j| \leq 1$, quindi

$$\frac{|\sin j|}{j^2} \leq \frac{1}{j^2}$$

Sappiamo che $\frac{1}{j^2}$ converge (è una serie armonica generalizzata con $\alpha = 2$). Quindi per confronto anche $\sum \frac{|\sin j|}{j^2}$ converge.

Quindi $\sum \frac{\sin j}{j^2}$ è assolutamente convergente. Applicando il teorema, possiamo dire che è anche convergente.

Prestiamo attenzione: non vale il viceversa.

Capitolo 9

Nona lezione (03/11/2015)

9.1 Serie assolutamente convergenti

Definizione 9.1. Una serie $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ si dice *assolutamente convergente* se converge $\sum_{j=0}^{\infty} |x_j|$.

Teorema 9.2. *Se una serie è assolutamente convergente allora è anche convergente.*

Esempio 9.3. Consideriamo la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin j}{j^2}$$

e notiamo che *non* è a termini positivi. Tuttavia possiamo studiare

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{\sin j}{j^2} \right| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\sin j|}{j^2}$$

che è una serie a termini positivi. Osserviamo che $|\sin j| \leq 1$, quindi

$$\frac{|\sin j|}{j^2} \leq \frac{1}{j^2}$$

Sappiamo che $\frac{1}{j^2}$ converge (è una serie armonica generalizzata con $\alpha = 2$). Quindi per confronto anche $\sum \frac{|\sin j|}{j^2}$ converge.

Quindi $\sum \frac{\sin j}{j^2}$ è assolutamente convergente. Applicando il teorema, possiamo dire che è anche convergente.

Prestiamo attenzione: non vale il viceversa.

Dimostrazione. Supponiamo che $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ sia assolutamente convergente. Scriviamo $x_j = a_j - b_j$ dove:

- se $x \geq 0$, $a_j = x_j$ e $b_j = 0$;
- se $x < 0$, $a_j = 0$ e $b_j = -x_j$.

In questo modo a_j e b_j sono sempre non negativi. A questo punto $\sum x_j = \sum a_j - \sum b_j$ è una serie differenza di serie a termini non negativi.

Osserviamo anche che:

- $0 \leq a_j \leq |x_j|$. Siccome $\sum |x_j|$ converge per ipotesi, per il criterio del confronto converge anche $\sum a_j$.

- $0 \leq b_j \leq |x_j|$. Siccome $\sum |x_j|$ converge per ipotesi, per il criterio del confronto converge anche $\sum b_j$.

Quindi $\sum(a_j - b_j) = \sum x_j$ converge. Infatti se $\sum a_j$ converge ad A e $\sum b_j$ converge a B, allora $\sum(a_j - b_j)$ converge ad $A - B$. $\square$

Esempio 9.4. Studiamo questa serie (che chiameremo $\sum y_j$):

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \cdot \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Vogliamo stabilire se è convergente. Verifichiamo prima se è assolutamente convergente, studiando $\sum y_j$ che è

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|x|^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\lim \frac{|y_{j+1}|}{|y_j|} = \lim \frac{\frac{|x|^{2(j+1)+1}}{(2(j+1)+1)!}}{\frac{|x|^{2j+1}}{(2j+1)!}} = \lim \frac{|x|^2}{(2j+3)!} \cdot (2j+1)! = \lim_{j \to +\infty} \frac{|x|^2}{(2j+3)(2j+2)} = 0$$

Per il criterio del rapporto abbiamo che $\sum_{j=0}^{\infty} |y_j|$ converge, quindi $\sum_{j=0}^{\infty} y_j$ è assolutamente convergente e quindi converge.

Esempio 9.5. Dato $0 < x < 1$, vogliamo studiare la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} y_j = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \cdot \frac{x^j}{j}$$

Essa converge assolutamente quando converge $\sum |y_j|$ che è $\sum \frac{x^j}{j}$. Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\lim \frac{|y_{j+1}|}{|y_j|} = \lim \frac{x^{j+1}}{j+1} \cdot \frac{j}{x^j} = \lim_{j \to +\infty} x \cdot \frac{j}{j+1} = x$$

Avendo posto $0 < x < 1$, per il criterio del rapporto la serie $\sum |y_j|$ converge. Quindi $\sum y_j$ è assolutamente convergente e quindi converge.

9.2 Criterio di Leibniz

Teorema 9.6 (Criterio di Leibniz). *Sia* $\{x_j\}$ *una successione a termini positivi, infinitesima e non crescente. Allora la serie*

$$\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}x_j$$

converge.

Esempio 9.7. La serie

$$\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{1}{j}$$

soddisfa le ipotesi del criterio con $x_j = \frac{1}{j}$ e quindi converge. Infatti $\frac{1}{j}$ è sempre positivo; $\frac{1}{j+1} < \frac{1}{j}$ quindi la successione è non crescente; $\lim \frac{1}{j} = 0$ quindi la successione è infinitesima.

Dimostrazione. Sia $\{s_n\}$ la successione delle somme parziali di $\sum(-1)^{j-1}x_j$. Sia $y_j = x_{2j-1} - x_{2j}$, quindi $y_1 = x1 - x2$, $y_2 = x3 - x4$ e così via.

Essendo $\{x_j\}$ non crescente per ipotesi, per tutti i termini $y_j \geq 0$. Inoltre, le somme parziali di questa serie $\sum_{j=1}^{\infty} y_j$ sono $y_1 = s_2$, $y_2 = (x_1 - x_2) + (x_3 - x_4) = s_4$ e così via.

Scriviamo s_{2n} e raggruppiamo opportunamente:

$$\begin{aligned} s_{2n} &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - \ldots - x_{2n} \\ &= x_1 - (x_2 - x_3) - (x_4 - x_5) - \ldots - x_{2n} \end{aligned}$$

Osserviamo che tutte le parentesi sono positive ($x_2 > x_3$ e così via). Quindi $s_{2n} \leq x_1$ per ogni n. In conclusione la successione s_{2n} è monotona e limitata, quindi converge. Quindi $\sum_{j=1}^{\infty} y_j$ converge a S.

Per definizione di limite, dato $\varepsilon > 0$ esiste N tale che, per $n > N$,

$$S - \varepsilon < s_{2n} < S + \varepsilon$$

Sappiamo che s_{2n} è non decrescente, quindi può tendere al limite solo arrivando da sinistra. Possiamo allora scrivere

$$S - \varepsilon < s_{2n} \leq S$$

Definitivamente vale $x_j < \varepsilon$ che implica

$$s_{2n+1} = s_{2n} + x_{2n+1} \leq S + x_{2n+1} < S + \varepsilon$$

definitivamente. Quindi definitivamente

$$S - \varepsilon < s_{2n} \leq s_{2n+1} < S + \varepsilon$$

Quindi $\lim s_j = S$. Allora $\sum(-1)^{j-1}x_j$ converge, perché converge la successione delle somme parziali. □

9.3 Serie con termini riordinati

Teorema 9.8 (Teorema di Dirichlet). *Se $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ è una serie assolutamente convergente, ogni serie ottenuta riordinando i termini di $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ è convergente alla stessa somma.*

Diamo solo un'idea della dimostrazione. Chiariamo in termini rigorosi cosa si intende per riordinare: si definisce una funzione $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biunivoca (quindi suriettiva e iniettiva). Si considera $y_j = x_{\sigma(j)}$, allora deve essere $\sum y_j = \sum x_j$.

Nella dimostrazione si usa il fatto che

$$s_n = x_{\sigma(1)} + x_{\sigma(2)} + \ldots + x_{\sigma(n)} \leq \sum_{j=1}^{N} x_j \leq \sum_{j=1}^{\infty} x_j$$

dove $N = \max\{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}$. Si fa quindi vedere che $\sum x_j \leq \sum y_j$.

In ogni caso, lasciamo il teorema senza dimostrazione completa.

Osservazione 9.9. Data una serie convergente ma non assolutamente convergente e dato $S \in \mathbb{R}$, esiste una serie ottenuta riordinando i termini che converge a S.

Esempio 9.10. Consideriamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \qquad [= \log 2]$$

Sappiamo che non è assolutamente convergente perché $\sum \frac{1}{n}$ diverge (è la serie armonica). Consideriamo ora questa serie:

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{2} a_{\frac{n}{2}} & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Esplcitiamo le due serie:

$$\sum a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$
$$\sum b_n = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \ldots$$

Si vede che $\sum b_n = \frac{1}{2} \sum a_n$.

La serie somma è $\sum (a_n + b_n) = \frac{3}{2} \sum a_n = \frac{3}{2} \log 2$. Esplicitiamola:

$$a_n + b_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \text{ dispari} \\ -\frac{1}{n} - (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{n} & n \text{ pari} \end{cases}$$

Quindi:

$$\sum (a_n + b_n) = \underbrace{1}_{a_1+b_1} \underbrace{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{a_2+b_2} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{a_3+b_3} + \ldots$$
$$= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Questa è una serie ottenuta riordinando $\sum a_n$ ma ha somma $\frac{3}{2} \log 2$.

9.4 $\lim \sqrt[n]{n}$

Esempio 9.11. Mostriamo in due modi diversi che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Procediamo con il primo modo. Possiamo scrivere $\sqrt[n]{n} = 1 + x_n$ con $x_n > 0$. Dallo sviluppo di Newton sappiamo che

$$(1+x_n)^n = 1 + \binom{n}{1} x_n + \binom{n}{2} {x_n}^2 + \dots$$

I termini sono tutti positivi, quindi sicuramente:

$$\begin{aligned}(1+x_n)^n &\geq 1 + \binom{n}{1} x_n + \binom{n}{2} {x_n}^2 \\ &\geq 1 + n x_n + \frac{n(n-1)}{2} {x_n}^2\end{aligned}$$

Elevando entrambi i membri della relazione iniziale alla n possiamo scrivere:

$$n = (1+x_n)^n \geq 1 + n x_n + \frac{n(n-1)}{2} {x_n}^2 \geq \frac{n(n-1)}{2} {x_n}^2$$

Quindi:

$$\begin{aligned}1 &\geq \frac{n(n-1)}{2} {x_n}^2 \\ {x_n}^2 &\leq \frac{2}{n-1}\end{aligned}$$

Poiché $\lim \frac{2}{n-1} = 0$, per confronto allora anche $\lim x_n = 0$.

Nel secondo modo, procediamo semplicemente come segue:

$$\sqrt[n]{n} = e^{\log n^{\frac{1}{n}}} = e^{\frac{1}{n}\cdot \log n}$$

Sappiamo che $\lim \frac{\log n}{n} = 0$ per la gerarchia degli infiniti. Per continuità della funzione esponenziale, $\lim e^{\frac{\log n}{n}} = e^0 = 1$.

9.5 Ancora sulle successioni

Osservazione 9.12. Se $a_n \sim b_n$ sono successioni che tendono a $+\infty$, allora $\log a_n \sim \log b_n$.

Attenzione che questa proprietà non vale per tutte le funzioni! Ad esempio, non vale $e^{a_n} \sim e^{b_n}$ in generale. Infatti e^{n+1} non è asintotico a e^n poiché $\lim \frac{e^{n+1}}{e^n} = e$, che è diverso da 1.

Mostriamo che questo è vero per quanto riguarda la funzione logaritmo. Se $a_n \sim b_n$, allora il loro rapporto deve stare in un intorno di uno.

Quindi definitivamente vale:

$$\frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}$$
$$\frac{1}{2}a_n < b_n < \frac{3}{2}a_n$$
$$\log \frac{1}{2}a_n < \log b_n < \log \frac{3}{2}a_n$$
$$\log \frac{1}{2} + \log a_n < \log b_n < \log \frac{3}{2} + \log a_n$$
$$\frac{\log \frac{1}{2}}{\log a_n} + 1 < \frac{\log b_n}{\log a_n} < \frac{\log \frac{3}{2}}{\log a_n} + 1$$

Poiché il primo e il terzo termine valgono entrambi 1, per il teorema del confronto anche $\lim \frac{\log b_n}{\log a_n} = 1$.

Osservazione 9.13. Se $a_n \sim b_n$ e $\lim a_n$ è finito, non è vero in generale che $\lim \frac{\log a_n}{\log b_n} = 1$.

Esempio 9.14. Consideriamo ad esempio $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ e $b_n = 1 + \frac{1}{n^2}$, che sono due successioni tra loro asintotiche. Effettivamente il limite del loro rapporto vale 1:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 1$$

Ma ad esempio:

$$\lim \frac{\log(1 + \frac{1}{n})}{\log(1 + \frac{1}{n^2})} = \lim \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim n = +\infty$$

Per risolvere il limite abbiamo sfruttato il fatto che $\log(1 + \varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$.

Esempio 9.15. Consideriamo la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_{n+1} = \frac{2+\cos n}{\sqrt{n}} \cdot x_n \end{cases}$$

Vogliamo calcolarne il limite e determinare se è definitivamente monotona. Distinguiamo due casi:

- se $\alpha = 0$ allora $x_n = 0$ per ogni n
- se $\alpha > 0$ osserviamo innanzitutto che la successione è a termini positivi perchè $\frac{2+\cos n}{\sqrt{n}} > 0 \ \forall n$. Possiamo quindi applicare il criterio del rapporto:

  $$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \frac{\frac{2+\cos n}{\sqrt{n}} \cdot x_n}{x_n} = \lim \frac{2 + \cos n}{\sqrt{n}}$$

  Sappiamo che $1 \leq 2 + \cos n \leq 3$, quindi

  $$\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{2 + \cos n}{\sqrt{n}} < \frac{3}{\sqrt{n}}$$

  Poiché il primo e il terzo termine tendono a 0, per confronto anche $\lim \frac{2+\cos n}{\sqrt{n}} = 0$. Essendo il limite minore di 1, la successione è definitivamente decrescente e tende a 0.