05.08.2020г / Задача 6

Вярно ли е, че за всеки регулярен език $L \subseteq \{0,1\}^*$, езикът

$$L' = \{ w^{|w|} \mid w \in L \}$$

е регулярен?

$L' = \{ w^{|w|} \mid w \in L \}$ - т.е L' регулярен ли е за всеки L?

Ще покажем, че L' не е регулярен за всяко L, като покажем, че за избран L, L' не е регулярен

Нека $L = \{ 0^n 1 \mid n = 0, 1, \dots \}$

Ще приложим лемата за разрастването:

$\exists\, p \geq 1$, ~~где~~ и $w \in L'$, $w = (0^p 1)^{|p+1)}$. От лемата

получаваме $w = xyz$, и:

- $|y| \geq 1$
- $|xy| \leq p$
- $(\forall n \geq 0)(xy^n z \in L')$

~~Нека $n = 0 \Rightarrow xz \in L'$~~

Нека $n = 0$, $w' = xz$, $w' \in L'$

от $|xy| \leq p \Rightarrow xy$ е съставена само от 0-ли. $|y| \geq 1 \Rightarrow$

y съд. поне една $0 \Rightarrow w'$ е от вида: $\underbrace{0 \dots 0}_{m<p} 1 \dots$

L – регулярен език

$L' = \{w^{|w|} \mid w \in L\}$. L' регулярен ли е ?

Нека $L = \{0^n 1 \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$

Ако L' не е регулярен за конкретен L, то L' не е регулярен за всеки $L = \{(0,1)^*\}$

Чрез използването на лемата за разрастването :

$\exists p \geq 1$, т.че $\forall$ дума $w \in L$, с дължина $> p$, може да се разбие на думи $w = xyz$, които отговарят на следните изисквания :

- $|y| \geq 1$
- $|xy| \leq p$
- $(\forall n \geq 0)(xy^n z \in w)$

~~Нека $w = 0^n 1$~~ Нека $w = (0^p 1)^{p+1}$

Нека $n = 0 \Rightarrow w' = xy^0 z \in L'$. От $|xy| \leq p \Rightarrow xy$ е съставена от 0-лите преди първата 1-ца ($\underbrace{00\dots0}_{xy}\underbrace{1 10\dots0\dots}_{z}$). От $|y| \geq 1$, $\Rightarrow y$ съдържа поне една 1-ца.

Тогава $w' = xy^0 z$ има вида $\underbrace{\underbrace{0\dots0}_{m} 1 \underbrace{0\dots0}_{p} 1 \dots \underbrace{0\dots0}_{p} 1}_{p+1}$

От $|y| \geq 1 \Rightarrow m < p \Rightarrow w' \notin L'$