Neural network notes

Marco Marini

February 20, 2016

Contents

Abstract

Studio del gioco wall

1 Generale

Wall è un gioco dove una pallina si muove in un campo rettangolare con traiettorie rettilinee diagonali. I limiti superiore e laterali sono costituiti da muri che fanno rimbalzare la pallina. La parte inferiore invece è aperta e una racchetta controllata da giocatore si muove orizzontalmente permettendo allo stesso di far rimbalzare la pallina all'interno del campo da gioco.

```
=  =  =  =  =  =  =  =  =  =  =  =  =  =  =
|                                         |
|                                         |
|                                         |
|                                         |
|                                         |
|                 O                       |
|                                         |
|                                         |
|                                         |
         =  =  =
```

Definiamo

$$n = 10$$

il numero di righe del campo

$$m = 13$$

il numero di colonne

$$w = 3$$

la larghezza della racchetta

2 Spazio degli stati

In un qualsiasi momento lo stato del gioco è rappresentato dalla posizione della pallina, la direzione di spostamento della pallina e la posizione della racchetta. Calcoliamo il numero di stati possibili:

La racchetta può trovarsi in uno degli

$$m - w + 1 = 11$$

possibili posizioni.

Quando la pallina non si trova in prossimtà dei muri o della racchetta può muoversi in 4 diverse direzioni: NE, SE, SO, NO. Quindi abbiamo

$$4(n-2)(m-2)(m-w+1) = 3872$$

possibili stati della pallina.

Negli angoli superiori la pallina può avere solo una direzione quindi si aggiungono altri

$$2(m - w + 1) = 22$$

stati.

Quando si trova in prossimità invece del muro superiore o di quelli laterali, la pallina può assumere solo due possibili velocità quindi avremo:

$$(m - w + 1)2[2(n - 2) + m - 2] = 594$$

ulteriori stati.

Vediamo ora alcuni particolari quando la pallina si trova su nell'angolo inferiore sx nel qual caso è possibile una sola traiettoria verso l'alto se la racchetta si trova in prima o seconda posizione (rimbalzo) o verso l'uscita del campo negli altri casi, quindi avremo

$$m - w + 1 = 11$$

possibili casi.

Altrettanti se consideriamo quando la pallina si trova nell'angolo inferiore dx.

Nel caso invece la pallina si trovi sulla riga inferiore del campo avremo due possibili traiettorie: NE o NO se la pallina si trova esattamente sotto la racchetta (rimbalzo) o SE o SO negli altri casi.

Quindi avremo

$$2 * (m - 2) = 22$$

stati.

Poi avremo lo stato finale di pallina fuori campo.

In totale quindi possiamo contare

$$3872 + 22 + 594 + 11 + 11 + 22 + 1 = 4533$$

possibili stati.

3 Miglior policy

La policy migliore è quella di far rimbalzare la pallina una volta che raggiunge la parte inferiore del campo

La pallina rimbalza ogni

$$2(n - 1)$$

passi.

Il ritorno aspettato allo stato dopo $i = (1 \dots 2(n-1)$ passi dal rimbalzo sarà quindi

$$R_i = \gamma^{2(n-1)-i} \sum_{j=0}^{\infty} R^+ \gamma^{2(n-1)j} = R^+ \frac{\gamma^{2(n-1)-i}}{1 - \gamma^{2(n-1)}}$$

4 Rimbalzi certi

Contiamo ora quanti stati che generano premi positivi indipendentemente dalla strategia.

La racchetta si trova completamente a sx, la pallina può trovarsi completamente a sx con solo la direzione NE possibile, oppure si può trovare nelle due colonne successive con direzioni NO o NE, oppure in quarta colonna con direzione NO

$$1 + 2(w - 1) + 1 = 2w = 6$$

possibili stati.

Simmetricamente abbiamo altri 6 stati quando la racchetta si trova completamente a dx.

La racchetta si trova tra la seconda colonna e la quartultima colonna, la pallina può trovarsi nelle tre colonne successive con direzioni NO o NE

$$2w(m - w - 2) = 48$$

possibili stati.

In tutto possiamo contare

$$4w + 2w(m - w - 2) = 2w(m - w) = 60$$

possibili stati di rimbalzo certo.

5 Fine gioco

Contiamo ora quanti stati dove, indipendentemente dalla strategia, si arriva a fine gioco.

Quando la racchetta si trova in prima colonna e la pallina si trova in quarta o quinta colonna con direzione SE o dalla sesta alla penultima colonna con due direzioni possibili o infine la pallina si trova in ultima colonna direzione SO

$$2(m - w - 3) + 3 = 2(m - w) - 3 = 17$$

stati possibili.

Quando la racchetta si trova in seconda colonna e la pallina si trova in quinta o sesta colonna con direzione SE oppure tra la settima e la penultima colonna con due direzioni possibili o infine la pallina si trova in ultima colonna con direzione SO

$$2(m - w - 4) + 3 = 2(m - w) - 5 = 15$$

stati possibili.

Quando la racchetta si trova in terza colonna e la pallina si trova in seconda colonna con direzione SO o in sesta o settima colonna con direzione SE oppure tra la ottava e la penultima colonna con due direzioni possibili o infine la pallina si trova in ultima colonna con direzione SO

$$2(m - w - 5) + 4 = 2(m - w) - 6 = 14$$

stati possibili.

Gli stessi stati li abbiamo per simmetria quando la racchetta si trova al lato opposto.

Quando la racchetta si trova tra la quarta colonna e sei colonne prima dell'ultima e la pallina si trova nei bordi con singole direzioni, o nelle due adiacenti la sx o la dx della racchetta con singole direzioni o nelle colonne intermedie tra i bordi e le precedenti colonne con due direzioni

$$2(m - w - 6) + 6 = 2(m - w) - 6 = 14$$

In tutto quindi ci sono

$$\begin{aligned} 2[2(m-w) - 3 + 2(m-w) - 5 + 2(m-w) - 6] + 2(m-w) - 6 = \\ = 12(m-w) - 28 + 2(m-w) - 6 = \\ = 14(m-w) - 34 = 106 \end{aligned}$$

stati di fine certa del gioco.

6 Rimbalzi condizionali

Contiamo ora gli stati di rimbalzo dipendenti dalla strategia.

Quando la racchetta si trova in prima colonna e la pallina in quinta colonna con direzione SO

$$1$$

stato possibile.

Quando la racchetta si trova in seconda colonna e la pallina in prima colonna con direzione SE o in quinta o sesta colonna con direzione SO

$$3$$

stati possibili.

Altrettanti stati per simmetria.

Quando la racchetta si trova tra la terza e cinque colonne prima dell'ultima, la pallina nelle due colonne antecedente la racchetta con direzione SE o nelle duce colonne sucessiva la fine della racchetta con direzione S0

$$4(m - w - 4) = 4(m - w) - 16 = 24$$

In totale abbiamo

$$(1 + 3)2 + 4(m - w) - 16 = 4(m - w) - 8 = 32$$

possibili stati.

7 Considerazioni

In tutto gli stati finali sono quindi

$$\begin{aligned} 2w(m-w) + 14(m-w) - 34 + 4(m-w) - 8 = \\ = 2w(m-w) + 18(m-w) - 42 = \\ = 2(w+9)(m-w) - 42 = 198 \end{aligned}$$

Supponiamo ora che la strategia per gli stati precedenti il rimbalzo porti ad una distribuzione uniforme degli stati precedenti i rimbalzo, abbiamo quindi tre situazioni:

- Rimbalzo certo con probabilità

$$P(rimbalzo) = \frac{2w(m-w)}{2(w+9)(m-w)-42} = \frac{w(m-w)}{(w+9)(m-w)-21} = \frac{10}{33} \approx 0.303$$

- Finale certo con probabilità

$$P(fine) = \frac{14(m-w)-34}{2(w+9)(m-w)-42} = \frac{7(m-w)-17}{(w+9)(m-w)-21} = \frac{53}{99} \approx 0.535$$

- Rimbalzo condizionato con probabilità

$$P(condizionale) = \frac{4(m-w)-8}{2(w+9)(m-w)-42} = 2\frac{(m-w)-2}{(w+9)(m-w)-21} = \frac{16}{99} \approx 0.162$$