Neural network notes

Marco Marini

February 19, 2016

Contents

Abstract

Studio del gioco wall

1 Generale

Wall è un gioco dove una pallina si muove in un campo rettangolare con traiettorie rettilinee diagonali. I limiti superiore e laterali sono costituiti da muri che fanno rimbalzare la pallina. La parte inferiore invece è aperta e una racchetta controllata da giocatore si muove orizzontalmente permettendo allo stesso di far rimbalzare la pallina all'interno del campo da gioco.

```
= = = = = = = = = = = = = = =
|                           |
|                           |
|                           |
|                           |
|                           |
|           O               |
|                           |
|                           |
|                           |
      = = =
```

Definiamo

$$n = 10$$

il numero di righe del campo

$$m = 13$$

il numero di colonne

$$w = 3$$

la larghezza della racchetta

2 Spazio degli stati

In un qualsiasi momento lo stato del gioco è rappresentato dalla posizione della pallina, la direzione di spostamento della pallina e la posizione della racchetta. Calcoliamo il numero di stati possibili:

La racchetta può trovarsi in uno degli

$$m - w + 1 = 11$$

possibili posizioni.

Quando la pallina non si trova in prossimtà dei muri o della racchetta può muoversi in 4 diverse direzioni: NE, SE, SO, NO. Quindi abbiamo

$$4(n - 2)(m - 2)(m - w + 1) = 3872$$

possibili stati della pallina.

Negli angoli superiori la pallina può avere solo una direzione quindi si aggiungono altri

$$2(m - w + 1) = 22$$

stati.

Quando si trova in prossimità invece del muro superiore o di quelli laterali, la pallina può assumere solo due possibili velocità quindi avremo:

$$(m - w + 1)2[2(n - 2) + m - 2] = 594$$

ulteriori stati.

Vediamo ora alcuni particolari quando la pallina si trova su nell'angolo inferiore sx nel qual caso è possibile una sola traiettoria verso l'alto se la racchetta si trova in prima o seconda posizione (rimbalzo) o verso l'uscita del campo negli altri casi, quindi avremo

$$m - w + 1 = 11$$

possibili casi.

Altrettanti se consideriamo quando la pallina si trova nell'angolo inferiore dx.

Nel caso invece la pallina si trovi sulla riga inferiore del campo avremo due possibili traiettorie: NE o NO se la pallina si trova esattamente sotto la racchetta (rimbalzo) o SE o SO negli altri casi.

Quindi avremo

$$2 * (m - 2) = 22$$

stati.

Poi avremo lo stato finale di pallina fuori campo.

In totale quindi possiamo contare

$$3872 + 22 + 594 + 11 + 11 + 22 + 1 = 4533$$

possibili stati.

3 Miglior policy

La policy migliore è quella di far rimbalzare la pallina una volta che raggiunge la parte inferiore del campo

La pallina rimbalza ogni

$$2(n - 1)$$

passi.

Il ritorno aspettato allo stato dopo $i = (1 \dots 2(n-1)$ passi dal rimbalzo sarà quindi

$$R_i = \gamma^{2(n-1)-i} \sum_{j=0}^{\infty} R^+ \gamma^{2(n-1)j} = R^+ \frac{\gamma^{2(n-1)-i}}{1 - \gamma^{2(n-1)}}$$

4 Rimbalzi certi

Contiamo ora quanti stati che generano premi positivi indipendentemente dalla strategia.

La racchetta si trova completamente a sx, la pallina può trovarsi completamente a sx con solo la direzione NE possibile, oppure si può trovare nelle

due colonne successive con direzioni NO o NE, oppure in quarta colonna con direzione NO
$$1 + 2(w - 1) + 1 = 2w = 6$$
possibili stati.

Simmetricamente abbiamo altri 6 stati quando la racchetta si trova completamente a dx.

La racchetta si trova tra la seconda colonna e la quartultima colonna, la pallina può trovarsi nelle tre colonne successive con direzioni NO o NE
$$2w(m - w - 2) = 48$$
possibili stati.

In tutto possiamo contare
$$2w + 2w(m - w - 2) = 2w(m - w - 1) = 54$$
possibili stati di rimbalzo certo.

5 Fine gioco

Contiamo ora quanti stati dove, indipendentemente dalla strategia, si arriva a fine gioco.

Quando la racchetta si trova in prima colonna e la pallina si trova in quarta o quinta colonna con direzione SE o dalla sesta alla penultima colonna con due direzioni possibili o infine la pallina si trova in ultima colonna direzione SO
$$2 + 2(m - w - 2) + 1] = 2(m - w) - 1 = 19$$
stati possibili.

Quando la racchetta si trova in seconda colonna e la pallina si trova in quinta o sesta colonna con direzione SE oppure tra la settima e la penultima colonna con due direzioni possibili o infine la pallina si trova in ultima colonna con direzione SO
$$2 + 2(m - w - 3) + 1 = 2(m - w) - 3 = 17$$
stati possibili.

Gli stessi stati li abbiamo per simmetria quando la racchetta si trova al lato opposto.

Quando la racchetta si trova tra terza colonna e la sei colonne prima dell'ultima e la pallina si trova nei bordi con singole direzioni, o nelle due adiacenti la sx o la dx della racchetta con singole direzioni o nelle colonne intermedie tra i bordi e le precedenti colonne
$$(m-w-6)[6+2(m-w-6)] = (m-w-6)[2(m-w)-6] = 2(m-w-6)(m-w-3) = 56$$

stati possibili.

In tutto quindi ci sono

$$\begin{gathered}2[2(m-w)-1+2(m-w)-3]+2(m-w-6)(m-w-3)= \\ 8(m-w)-8+2(m-w-6)(m-w-3)= \\ 8(m-w-3+3)-8+2(m-w-6)(m-w-3)= \\ 8(m-w-3)+2(m-w-6)(m-w-3)+16= \\ 2(m-w-3)(m-w-2)+16=128\end{gathered}$$

stati di fine certa del gioco.

6 Rimbalzi condizionali

Contiamo ora gli stati di rimbalzo dipendenti dalla strategia.

Quando la racchetta si trova tra la prima colonna e cinque colonne prima del bordo dx e la pallina in 4 colonne dopo con direzione SO

$$2(m-w-2)=2(m-w)-4=16$$

possibili stati e simmetricamente nel verso opposto per un totale di

$$4(m-w)-8=32$$

stati possibili.

7 Considerazioni

In tutto gli stati finali sono quindi

$$\begin{gathered}2w(m-w-1)+2(m-w-3)(m-w-2)+16+4(m-w)-8= \\ 2w(m-w-1)+2(m-w-3)(m-w-2)+16+4(m-w)-8=\end{gathered}$$

Supponiamo ora che la strategia per gli stati precedenti il rimbalzo porti ad una distribuzione uniforme degli stati precedenti i rimbalzo, abbiamo quindi tre situazioni:

- Rimbalzo certo con probabilità $P(rimbalzo)=$
- Finale certo con probabilità $P(fine)=$