Neural network notes

Marco Marini

January 6, 2016

Contents

Abstract

This document contains notes about neural network regarding the Temporal Differential reinforcement alghorithms.

1 Generale

Siano data una rete neurale formata da N strati di neuroni. Ogni strato $i = 1 \dots N$ è composto da s_i neuroni.

Il primo strato

$$H_{1i} = x_i$$

rappresenta i valori d'ingresso della rete. Per utilità indicheremo i segnali fissi di polarizzazione con

$$H_{i0} = 1$$

Ogni neurone elabora segnali afferenti dal proprio livello e produrrà un segnale uscita verso i livelli sucessivi. Prendiamo in esame una rete NLR (Non Linear regression)

La funzione di trasferimento di ogni neurone nascosto $i < N$ è

$$\begin{aligned} H_{(i+1)j} &= \frac{1}{1+e^{-Z_{ij}}} \\ Z_{ij} &= \sum_{k=0}^{s_i} w_{ijk} H_{ik} \end{aligned} \tag{1}$$

la funzione di trasferimento dello strato di uscita N è

$$H_{Nj} = \sum_{k=0}^{s_{N-1}} w_{(N-1)jk} H_{(N-1)k} \tag{2}$$

2 Funzione di costo

Sia y_j l'uscita attesa per il neurone j, definiamo l'errore del neurone con

$$\delta_{(N-1)j} = y_j - H_{Nj} \tag{3}$$

La funzione costo della rete è definita come

$$J = \left| \begin{array}{l} \frac{1-\alpha}{2} \sum_{i=1}^{s_N} \delta^2_{(N-1)i} + \frac{\alpha}{2} \sum_{i,j,k} w^2_{ijk},\ k \geq 1 \\ \frac{1-\alpha}{2} \sum_{i=1}^{s_N} \delta^2_{(N-1)i},\ k = 0 \end{array} \right.$$

dove α è il fattore di regolarizzazione della rete.

Calcoliamo ∇J

$$\frac{\partial}{\partial w_{ijk}} J = \left| \begin{array}{l} (1-\alpha) \sum_{r=1}^{s_N} \delta_{(N-1)r} \frac{\partial}{\partial w_{ijk}} \delta_{(N-1)r} + \alpha w_{ijk},\ k \geq 1 \\ (1-\alpha) \sum_{r=1}^{s_N} \delta_{(N-1)r} \frac{\partial}{\partial w_{ijk}} \delta_{(N-1)r},\ k = 0 \end{array} \right.$$

Per la (3) abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial w_{ijk}} \delta_{(N-1)r} = -\frac{\partial}{\partial w_{ijk}} H_{Nr}$$

quindi

$$\frac{\partial}{\partial w_{ijk}} J = \left| \begin{array}{l} -(1-\alpha) \sum_{r=1}^{s_N} \delta_{(N-1)r} \frac{\partial}{\partial w_{ijk}} H_{Nr} + \alpha w_{ijk},\ k \geq 1 \\ -(1-\alpha) \sum_{r=1}^{s_N} \delta_{(N-1)r} \frac{\partial}{\partial w_{ijk}} H_{Nr},\ k = 0 \end{array} \right.$$

Per ora trascuriamo gli effetti di regolarizzazione della rete

Per la (2) abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial w_{(N-1)jk}} H_{Nj} = H_{(N-1)k}$$

$$\frac{\partial}{\partial w_{(N-1)jk}} H_{Nr} = 0,\ r \neq j$$

quindi

$$\frac{\partial}{\partial w_{(N-1)jk}} J = -\delta_{(N-1)j} H_{(N-1)k}$$

Per la (2) e $i \leq N-2$ abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial w_{ijk}} &= -\sum_r \delta_{(N-1)r} \frac{\partial}{\partial w_{ijk}} \left[\sum_s w_{(N-1)rs} H_{(N-1)s} \right] = \\ &= -\sum_{r,s} \delta_{(N-1)r} w_{(N-1)rs} \frac{\partial}{\partial w_{ijk}} H_{(N-1)s} \end{aligned}$$

Dalla (1) abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial w_{ijk}} H_{(i+1)j} = \frac{\partial}{\partial Z_{ij}} H_{(i+1)j} \frac{\partial}{\partial w_{ijk}} Z_{ij} = H_{(i+1)j}(1 - H_{(i+1)j}) Hik$$

Quindi

$$\frac{\partial}{\partial w_{(N-2)jk}} J = -\sum_r \delta_{(N-1)r} w_{(N-1)rj} H_{(N-1)j} (1 - H_{(N-1)j}) H_{(N-2)k}$$

3 Back-propagation

Definiamo ora

$$\delta_{(N-2)j} = \sum_r \delta_{(N-1)r} w_{(N-1)rj} H_{(N-1)j}(1 - H_{(N-1)j})$$

Avremo allora

$$\frac{\partial}{\partial w_{(N-2)jk}} J = -\delta_{(N-2)j} H_{(N-2)k}$$

Induttivamente ricaviamo per $i \leq N-2$

$$\delta_{ij} = \sum_k \delta_{(i+1)k} w_{(i+1)kj} H_{(i+1)j}(1 - H_{(i+1)j})$$

mentre in generale

$$\frac{\partial}{\partial w_{ijk}} J = -\delta_{ij} H_{ik}$$

Definiamo ora il tensore di back-propagation come

$$B_{ijk} = w_{(i+1)kj} H_{(i+1)j}(1 - H_{(i+1)j}), \; i \leq N-2$$

L'errore sui livelli intermedi è dato da

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{s_i} \delta_{(i+1)k} B_{ijk}, \; i = 1 \dots N-2$$

Reintroducendo la regolarizzazione otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial w_{ijk}} J = \left| \begin{array}{l} -(1-\alpha)\delta_{ij} H_{ik} + \alpha\, w_{ijk}, \; k \geq 1 \\ -(1-\alpha)\delta_{ij} H_{ik}, \; k = 0 \end{array} \right.$$

La correzione dei pesi della rete per ridurre l'errore (gradient descent) sarà quindi

$$\Delta w_{ijk} = -\eta \frac{\partial}{\partial w_{ijk}} J = \left| \begin{array}{l} \eta \left[(1-\alpha)\delta_{ij} H_{ik} - \alpha w_{ijk}\right], \; k \geq 1 \\ \eta(1-\alpha)\delta_{ij} H_{ik}, \; k = 0 \end{array} \right.$$

con η fattore di apprendimento.

4 Ritorni

Prendiamo un processo dove la strategia migliore genera un episodio di lunghezza infinita e con premio $r_+ > 0$ ogni n passi mentre una scelta diversa al passo n produce la fine dell'episodio con premio $r_- < 0$.

Al passo n il ritorno sarà quindi

$$R_+ = \frac{r_+}{1 - \lambda^{2(n-1)}}$$

se si segue la strategia migliore o nel caso opposto

$$R_- = r_-$$

Poniamo poi che $R_+ \gg -R_-$ avremo quindi che

$$\frac{r_+}{1 - \lambda^{2(n-1)}} \gg -r_-$$

$$r_+ \gg -(1 - \lambda^{2(n-1)})r_-$$

Ad esempio posto $\lambda^{2(n-1)} = \frac{1}{2}, r_- = -1$ avremo

$$r_+ \gg \frac{1}{2}$$

come ad esempio $r_+ = 5$