

1 Непрерывные функции одной переменной и их свойства.

Равномерная непрерывность. Равностепенная непрерывность семейства функций. Теорема Арцела.

1. Функция f **непрерывна** в точке x_0 , предельной для множества D , если f имеет предел в точке x_0 , и этот предел совпадает со значением функции $f(x_0)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

2. Числовая функция вещественного переменного f **равномерно** непрерывна на множестве M , если:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x_1, x_2 \in M : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

3. Семейство функций D называется **равностепенно непрерывным** на данном отрезке $[a, b]$, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall f \in D, \forall x_1, x_2 \in [a, b] : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

4. Теорема Арцела-Асколи

Множество D в семействе непрерывных функций $D \subset C[a, b]$ компактно (подмножество множества сходится к элементу данного множества) \Leftrightarrow

1. D замкнуто
2. D равномерно ограничено (все элементы этого множества ограничены)
3. D равностепенно непрерывно

2 Функции многих переменных. Полный дифференциал, и его геометрический смысл.

Достаточные условия дифференцируемости. Градиент.

1. Полный дифференциал

Полным приращением dz функции $z = f(x, y)$, называется

$$dz = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

где α и β – бесконечно малые функции при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$

Полным дифференциалом dz функции $z = f(x, y)$, дифференцируемой в точке (x, y) , называется главная часть ее полного приращения в этой точке, линейная относительно приращений аргументов x и y , то есть $dz = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$

2. Достаточное условие дифференцируемости

Для того, чтобы функция $f(x)$ была дифференцируема в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы у нее существовала производная в этой точке. При этом

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x$$

3. Градиент

Для случая трёхмерного пространства градиентом дифференцируемой в некоторой области скалярной функции $\varphi = \varphi(x, y, z)$ называется векторная функция с компонентами

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

3 Определенный интеграл. Интегрируемость непрерывной функции.

Первообразная непрерывной функции.

Приближенное вычисление определенных интегралов.

Формулы трапеций и Симпсона, оценки погрешностей.

Понятие о методе Гаусса.

1. Определенный интеграл

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$. Разобьём $[a; b]$ на части несколькими произвольными точками: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Тогда говорят, что произведено разбиение R отрезка $[a; b]$. Далее, для каждого i от 0 до $n - 1$ выберем произвольную точку $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$.

Определённым интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется предел интегральных сумм при стремлении ранга разбиения к нулю $\lambda_R \rightarrow 0$, если он существует независимо от разбиения R и выбора точек ξ_i , то есть

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

Если существует указанный предел, то функция $f(x)$ называется **интегрируемой** на $[a; b]$ по Риману.

2. Первообразная

Первообразной для данной функции $f(x)$ называют такую функцию $F(x)$, производная которой равна f (на всей области определения f), то есть $F'(x) = f(x)$.

3. Приближенное вычисление интеграла

1. Формула трапеций
$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} (x_{i+1} - x_i).$$

Погрешность $|E(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|, \frac{(b-a)^3}{12n^2} = \frac{nh^3}{12}.$

2. Формула Симпсона
$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

Погрешность $E(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\zeta), \quad \zeta \in [a, b].$

3. метод Гаусса: узлы интегрирования на отрезке располагаются не равномерно, а выбираются таким образом, чтобы при наименьшем возможном числе узлов точно интегрировать многочлены наивысшей возможной степени.

4 Числовые ряды. Сходимость рядов. Критерий Коши.

Достаточные признаки сходимости (Коши, Даламбера, интегральный, Лейбница).

1. Числовой ряд - бесконечная сумма $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$. Частичная сумма $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$.

2. Если последовательность частичных сумм имеет предел S (конечный или бесконечный), то говорят, что сумма ряда равна S . При этом, если предел конечен, то говорят, что ряд сходится. Если предел не существует или бесконечен, то говорят, что ряд расходится.

3. Критерий Коши

Последовательность x_n называется последовательностью Коши или **фундаментальной**, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), \forall n, m > N(\varepsilon) : |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Теорема (Критерий Коши). Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно чтобы она была фундаментальной.

4. Признак Д'Аламбера

- Ряд абсолютно сходится, если начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q, 0 < q < 1$
- Ряд расходится, если $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$
- Если же, начиная с некоторого номера, $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, при этом не существует такого $q, 0 < q < 1$, что $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q$ для всех n , начиная с некоторого номера, то в этом случае ряд может как сходиться, так и расходиться.

5. Признак Коши

- Ряд сходится, если начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $\sqrt[n]{a_n} \leq q, 0 < q < 1$
- Ряд расходится, если $\sqrt[n]{a_n} > 1$
- Если $\sqrt[n]{a_n} = 1$, то это сомнительный случай и необходимы дополнительные исследования.
- Если же, начиная с некоторого номера, $\sqrt[n]{a_n} < 1$, при этом не существует такого $q, 0 < q < 1$, что $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ для всех n , начиная с некоторого номера, то в этом случае ряд может как сходиться, так и расходиться.

6. Признак Лейбница

Пусть дан знакочередующийся ряд $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n, b_n \geq 0$, для которого выполняются следующие условия:

1. $b_n \geq b_{n+1}$, начиная с некоторого номера $n \geq N$,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Тогда такой ряд сходится.

5 Абсолютная и условная сходимость ряда.

Свойства абсолютно сходящихся рядов.

Перестановка членов ряда. Теорема Римана. Умножение рядов.

1. Абсолютная сходимость

Сходящийся ряд $\sum a_n$ называется сходящимся абсолютно, если сходится ряд из модулей $\sum |a_n|$, иначе — сходящимся условно.

2. Условная сходимость

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ называется условно сходящимся, если $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m a_n$ существует (и не бесконечен), но $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \infty$.

3. Свойства

1. Если ряд условно сходится, то ряды, составленные из его положительных и отрицательных членов, расходятся.
2. Путём изменения порядка членов условно сходящегося ряда можно получить ряд, сходящийся к любой наперёд заданной сумме или же расходящийся (**теорема Римана**).
3. При почленном умножении двух условно сходящихся рядов может получиться расходящийся ряд.

6 Ряды и последовательности функций. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование).

1. Функциональные ряды и последовательности

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ - функциональный ряд, каждый элемент является функцией

$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ - n -ная частичная сумма.

2. Поточечная сходимость

Функциональная последовательность $u_k(x)$ сходится поточечно к функции $u(x)$, если $\forall x \in E \quad \exists \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x) = u(x)$

3. Равномерная сходимость

Существует функция $u(x) : E \mapsto \mathbb{C}$ такая, что: $\sup |u_k(x) - u(x)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad x \in E$

Факт равномерной сходимости последовательности $u_k(x)$ к функции $u(x)$ записывается: $u_k(x) \rightrightarrows u(x)$

4. Признак Вейерштрасса

Пусть $\exists a_n : \forall x \in X : |u_n(x)| < a_n$, кроме того, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на множестве X абсолютно и равномерно.

5. Свойства равномерно сходящихся рядов

- Если $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ равномерно сходятся на множестве, то и $\{f_n + g_n\}$, и $\{\alpha f_n\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ тоже равномерно сходятся на этом множестве
- Если **последовательность интегрируемых** по Риману (по Лебегу) функций $f_n \rightrightarrows f$ **равномерно сходится** на отрезке $[a, b]$, то эта функция f **также интегрируема** по Риману (по Лебегу), и $\forall x \in [a, b] : \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f_n(t) dt = \int_a^x f(t) dt$ и сходимость последовательности функций $\int_a^x f_n(t) dt \rightrightarrows \int_a^x f(t) dt$ на отрезке $[a, b]$.
- Если последовательность непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций **сходится** $\{f_n\} \rightarrow x_0$, а последовательность их **производных равномерно сходится** на $[a, b]$, то последовательность $\{f_n\}$ **также равномерно сходится** на $[a, b]$, её предел является непрерывно дифференцируемой на этом отрезке функцией.

- 7 Собственные и несобственные интегралы, зависящие от параметра.
 Равномерная сходимость по параметрам и ее признаки.
 Непрерывность, интегрирование и дифференцирование интегралов по параметру.

1. Собственный интеграл

Определенный интеграл называется собственным, если область интегрирования и функция интегрирования являются ограниченными

2. Несобственный интеграл

Определённый интеграл называется **несобственным**, если выполняется по крайней мере одно из следующих условий:

- Область интегрирования является бесконечной $[a, +\infty)$.
- Функция $f(x)$ является неограниченной в окрестности некоторых точек области интегрирования.

Несобственный интеграл I рода $\exists \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx = I \in \mathbb{R}$

Несобственный интеграл II рода $\forall \delta > 0 \Rightarrow \exists \int_{a+\delta}^b f(x) dx = I(\delta)$ или $\exists \int_a^{b-\delta} f(x) dx = I(\delta)$. При этом $\exists \lim_{\delta \rightarrow 0+0} I(\delta) = I \in \mathbb{R}$

3. Интеграл, зависящий от параметра

Пусть в двумерном евклидовом пространстве задана область $\overline{G} = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ на которой определена функция $f(x, y)$ двух переменных.

Пусть далее, $\forall y \in [c; d] \exists I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$. Функция $I(y)$ и называется интегралом, зависящим от параметра.

4. Свойства

• Непрерывность

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в области \overline{G} как функция двух переменных. Тогда функция $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ непрерывна на отрезке $[c; d]$.

- **Дифференцирование под знаком интеграла** Пусть теперь на области \overline{G} непрерывна не только функция $f(x, y)$, но и её частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Тогда $\frac{d}{dy} I(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$

• Интегрирование под знаком интеграла

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области \overline{G} , то $\int_c^d I(y) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$

8 Мера множества. Измеримые функции. Интеграл Лебега и его основные свойства.

1. Мера множества

Пусть задано множество X с некоторым выделенным классом подмножеств \mathcal{F}

Функция $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ называется мерой (иногда объёмом), если она удовлетворяет следующим аксиомам:

1. $\mu(\emptyset) = 0$ — мера пустого множества равна нулю;
2. Для любых непересекающихся множеств $A, B \in \mathcal{F}, A \cap B = \emptyset$
 $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ - мера объединения непересекающихся множеств равна сумме мер этих множеств (аддитивность, конечная аддитивность).

2. Измеримое множество

Пусть (X, \mathcal{F}) и (Y, \mathcal{G}) — два множества с выделенными алгебрами подмножеств.

Тогда функция $f : X \rightarrow Y$ называется измеримой, если прообраз любого множества из \mathcal{G} принадлежит \mathcal{F} , то есть $\forall B \in \mathcal{G}, f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$

3. Интеграл Лебега

Дано пространство с мерой (X, \mathcal{F}, μ) , и на нём определена измеримая функция $f : (X, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Пусть f — произвольная измеримая функция, $A \in \mathcal{F}$ произвольное измеримое множество. Тогда по определению $\int_A f(x) \mu(dx) = \int_X f(x) \mathbf{1}_A(x) \mu(dx)$, где $\mathbf{1}_A(x)$ — индикатор-функция множества A .

9 Степенные ряды в действительной и комплексной области.

Радиус сходимости. Теорема Коши-Адамара. Теорема Абеля.

Свойства степенных рядов (почленное интегрирование и дифференцирование).

Разложение элементарных функций.

1. Степенной ряд

$F(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, в котором коэффициенты a_n берутся из некоторого кольца R .

2. Радиус сходимости

$R = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ в круге которого $|x - x_0| < R$ ряд абсолютно сходится, а вне него расходится

3. Теорема Абеля

Пусть ряд $\sum a_n x^n$ сходится в точке x_0 . Тогда этот ряд сходится абсолютно в круге $|x| < |x_0|$ и равномерно по x на любом компактном подмножестве этого круга.

4. Теорема Коши-Адамара

Пусть $\sum_{v=0}^{+\infty} a_v (z - z_0)^v$ — степенной ряд с радиусом сходимости R . Тогда:

1. если верхний предел $\overline{\lim}_{v \rightarrow +\infty} \sqrt[v]{|a_v|}$ существует и положителен, то $R = \frac{1}{\overline{\lim}_{v \rightarrow +\infty} \sqrt[v]{|a_v|}}$
2. если $\overline{\lim}_{v \rightarrow +\infty} \sqrt[v]{|a_v|} = 0$, то $R = +\infty$
3. если верхнего предела $\overline{\lim}_{v \rightarrow +\infty} \sqrt[v]{|a_v|}$ не существует, то $R = 0$.

5. Свойства

1. **Дифференцирование** Пусть дан ряд f с радиусом сходимости $R > 0$, функция f непрерывна внутри круга: $f'(x) = \frac{d}{dx} a_0 + \frac{d}{dx} a_1 x + \frac{d}{dx} a_2 x^2 + \dots = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

2. **Интегрирование** $\int_b^x f(t) dt = \int_b^x a_0 dt + \int_b^x a_1 t dt + \int_b^x a_2 t^2 dt + \dots + \int_b^x a_n t^n dt + \dots$