1 Непрерывные функции одной переменной и их свойства. Равномерная непрерывность. Равностепенная непрерывность семейства функций. Теорема Арцела.

1. Функция f **непрерывна** в точке x_0, предельной для множества D, если f имеет предел в точке x_0, и этот предел совпадает со значением функции $f(x_0)$:

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

2. Числовая функция вещественного переменного f **равномерно** непрерывна на множестве M, если:

$$\forall \varepsilon > 0 : \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x_1, x_2 \in M : \ |x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

3. Семейство функций D называется **равностепенно непрерывным** на данном отрезке $[a, b]$, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall f \in D, \forall x_1, x_2 \in [a, b] : \ |x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

4. **Теорема Арцела-Асколи**

Множество D в семействе непрерывных функций $D \subset C[a, \ b]$ компактно (подмножество множества сходится к элементу данного множества)$\Longleftrightarrow$

1. D замкнуто
2. D равномерно ограничено (все элементы этого множества ограничены)
3. D равностепенно непрерывно

2 Функции многих переменных. Полный дифференциал, и его геометрический смысл. Достаточные условия дифференцируемости. Градиент.

1. Полный дифференциал

Полным приращением dz функции $z = f(x,\ y)$, называется

$$dz = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

где α и β – бесконечно малые функции при $\Delta x \longrightarrow 0,\ \Delta y \longrightarrow 0$

Полным дифференциалом dz функции $z = f(x,\ y)$, дифференцируемой в точке $(x,\ y)$, называется главная часть ее полного приращения в этой точке, линейная относительно приращений аргументов x и y, то есть $dz = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$

2. Достаточное условие дифференцируемости

Для того, чтобы функция $f(x)$ была дифференцируема в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы у нее существовала производная в этой точке. При этом

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x$$

3. Градиент

Для случая трёхмерного пространства градиентом дифференцируемой в некоторой области скалярной функции $\varphi = \varphi(x, y, z)$ называется векторная функция с компонентами

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

3 Определенный интеграл. Интегрируемость непрерывной функции. Первообразная непрерывной функции. Приближенное вычисление определенных интегралов. Формулы трапеций и Симпсона, оценки погрешностей. Понятие о методе Гаусса.

1. Определенный интеграл

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$. Разобьём $[a;b]$ на части несколькими произвольными точками: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Тогда говорят, что произведено разбиение R отрезка $[a;b]$. Далее, для каждого i от 0 до $n-1$ выберем произвольную точку $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$.

Определённым интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел интегральных сумм при стремлении ранга разбиения к нулю $\lambda_R \longrightarrow 0$, если он существует независимо от разбиения R и выбора точек ξ_i, то есть

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Если существует указанный предел, то функция $f(x)$ называется **интегрируемой** на $[a;b]$ по Риману.

2. Первообразная

Первообразной для данной функции $f(x)$ называют такую функцию $F(x)$, производная которой равна f (на всей области определения f), то есть $F'(x) = f(x)$.

3. Приближенное вычисление интеграла

1. Формула трапеций $\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum\limits_{i=0}^{n-1} \dfrac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i)$.

   Погрешность $|E(f)| \leqslant \dfrac{(b-a)^3}{12n^2} \max\limits_{x\in[a,b]} \left|f''(x)\right|, \dfrac{(b-a)^3}{12n^2} = \dfrac{nh^3}{12}$.

2. Формула Симпсона $\int\limits_a^b f(x)dx \approx \dfrac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$

   Погрешность $E(f) = -\dfrac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\zeta), \quad \zeta \in [a,b]$.

3. метод Гаусса: узлы интегрирования на отрезке располагаются не равномерно, а выбираются таким образом, чтобы при наименьшем возможном числе узлов точно интегрировать многочлены наивысшей возможной степени.

4 Числовые ряды. Сходимость рядов. Критерий Коши. Достаточные признаки сходимости (Коши, Деламбера, интегральный, Лейбница).

1. Числовой ряд - беконечная сумма $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$. Частичная сумма $S_n \sum_{i=1}^{n} a_i$.

2. Если последовательность частичных сумм имеет предел S (конечный или бесконечный), то говорят, что сумма ряда равна S. При этом, если предел конечен, то говорят, что ряд сходится. Если предел не существует или бесконечен, то говорят, что ряд расходится.

3. Критерий Коши

Последовательность x_n называется последовательностью Коши или **фундаментальной**, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), \forall n, m > N(\varepsilon) \, : | \, x_n - x_m \, | < \varepsilon$$

Теорема (Критерий Коши). Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно чтобы она была фундаментальной.

4. **Признак Д'Аламбера**

- Ряд абсолютно сходится, если начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant q, \ 0 < q < 1$
- Ряд расходится, если $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geqslant 1$
- Если же, начиная с некоторого номера, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, при этом не существует такого q , $0 < q < 1$, что $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant q$ для всех n, начиная с некоторого номера, то в этом случае ряд может как сходиться, так и расходиться.

5. **Признак Коши**

- Ряд сходится, если начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $\sqrt[n]{a_n} \leq q, \ 0 < q < 1$
- Ряд расходится, если $\sqrt[n]{a_n} > 1$
- Если $\sqrt[n]{a_n} = 1$, то это сомнительный случай и необходимы дополнительные исследования.
- Если же, начиная с некоторого номера, $\sqrt[n]{a_n} < 1$, при этом не существует такого q , $0 < q < 1$, что $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$ для всех n, начиная с некоторого номера, то в этом случае ряд может как сходиться, так и расходиться.

6. **Признак Лейбница**

Пусть дан знакочередующийся ряд $S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} b_n, \ b_n \geq 0$, для которого выполняются следующие условия:

1. $b_n \geq b_{n+1}$, начиная с некоторого номера $n \geq N$,
2. $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$.

Тогда такой ряд сходится.

5 Абсолютная и условная сходимость ряда. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Перестановка членов ряда. Теорема Римана. Умножение рядов.

1. **Абсолютная сходимость**

Сходящийся ряд $\sum a_n$ называется сходящимся абсолютно, если сходится ряд из модулей $\sum |a_n|$, иначе — сходящимся условно.

2. **Условная сходимость**

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ называется условно сходящимся, если $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{m} a_n$ существует (и не бесконечен), но $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| = \infty$

3. Свойства

   1. Если ряд условно сходится, то ряды, составленные из его положительных и отрицательных членов, расходятся.
   2. Путём изменения порядка членов условно сходящегося ряда можно получить ряд, сходящийся к любой наперёд заданной сумме или же расходящийся (**теорема Римана**).
   3. При почленном умножении двух условно сходящихся рядов может получиться расходящийся ряд.

6 Ряды и последовательности функций. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование).

1. **Функциональные ряды и последовательности**

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ - функциональный ряд, каждый элемент явяется функцией

$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$— n-ная частичная сумма.

2. **Поточечная сходимость**

Функциональная последовательность $u_k(x)$ сходится поточечно к функции $u(x)$, если $\forall x \in E \quad \exists \lim_{k\longrightarrow\infty} u_k(x) = u(x)$

3. **Равномерная сходимость**

Существует функция $u(x) : E \mapsto \mathbb{C}$ такая, что: $\sup \mid u_k(x) - u(x) \mid \xrightarrow{k\longrightarrow\infty} 0, \quad x \in E$

Факт равномерной сходимости последовательности $u_k(x)$ к функции $u(x)$ записывается: $u_k(x) \rightrightarrows u(x)$

4. **Признак Вейерштрасса**

Пусть $\exists a_n : \forall x \in X : |u_n(x)| < a_n$, кроме того, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на множестве X абсолютно и равномерно.

5. **Свойства равномерно сходящихся рядов**

- Если $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ равномерно сходятся на множестве, то и $\{f_n + g_n\}$, и $\{\alpha f_n\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ тоже равномерно сходятся на этом множестве
- Если **последовательность интегрируемых** по Риману (по Лебегу) функций $f_n \rightrightarrows f$ **равномерно сходится** на отрезке $[a, b]$, то эта функция f **также интегрируема** по Риману (по Лебегу), и $\forall x \in [a, b] : \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_a^x f_n(t)dt = \int_a^x f(t)dt$ и сходимость последовательности функций $\int_a^x f_n(t)dt \rightrightarrows \int_a^x f(t)dt$ на отрезке $[a, b]$.
- Если последовательность непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ **функций сходится** $\{f_n\} \longrightarrow x_0$, а последовательность их **производных равномерно сходится** на $[a, b]$, то последовательность $\{f_n\}$ **также равномерно сходится** на $[a, b]$, её предел является непрерывно дифференцируемой на этом отрезке функцией.

7 Собственные и несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость по параметрам и ее признаки. Непрерывность, интегрирование и дифференцирование интегралов по параметру.

1. **Собственный интеграл**

Определенный интеграл называется собственным, если область интегрирования и функция интегрирования являются ограниченными

2. **Несобственный интеграл**

Определённый интеграл называется **несобственным**, если выполняется по крайней мере одно из следующих условий:

- Область интегрирования является бесконечной $[a, +\infty)$.
- Функция $f(x)$ является неограниченной в окрестности некоторых точек области интегрирования.

Несобственный интеграл I рода $\exists \lim\limits_{A \to +\infty} \int\limits_a^A f(x)dx = I \in \mathbb{R}$

Несобственный интеграл II рода $\forall \delta > 0 \Longrightarrow \exists \int\limits_{a+\delta}^b f(x)dx = \mathcal{I}(\delta)$ или $\exists \int\limits_a^{b-\delta} f(x)dx = \mathcal{I}(\delta)$. При этом $\exists \lim\limits_{\delta \to 0+0} \mathcal{I}(\delta) = I \in \mathbb{R}$

3. **Интеграл, зависящий от параметра**

Пусть в двумерном евклидовом пространстве задана область $\overline{G} = \{(x, y) | a \le x \le b, c \le y \le d\}$ на которой определена функция $f(x, y)$ двух переменных.

Пусть далее, $\forall y \in [c; d]$ $\exists I(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\ dx$. Функция $I(y)$ и называется интегралом, зависящим от параметра.

4. Свойства

- **Непрерывность**

  Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в области $\overline{G}$ как функция двух переменных. Тогда функция $I(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\ dx$ непрерывна на отрезке $[c; d]$.

- **Дифференцирование под знаком интеграла** Пусть теперь на области $\overline{G}$ непрерывна не только функция $f(x, y)$, но и её частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Тогда $\frac{d}{dy} I(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\ dx$

- **Интегрирование под знаком интеграла**

  Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области $\overline{G}$, то $\int\limits_c^d I(y)\, dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)\, dy \right) dx$

8 Мера множества. Измеримые функции. Интеграл Лебега и его основные свойства.

1. **Мера множества**

Пусть задано множество X с некоторым выделенным классом подмножеств $\mathcal{F}$

Функция $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow [0, \infty]$ называется мерой (иногда объёмом), если она удовлетворяет следующим аксиомам:

1. $\mu(\varnothing) = 0$ — мера пустого множества равна нулю;
2. Для любых непересекающихся множеств $A, B \in \mathcal{F}$,$A \cap B = \varnothing$

   $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ - мера объединения непересекающихся множеств равна сумме мер этих множеств (аддитивность, конечная аддитивность).

2. **Измеримое множество**

Пусть $(X, \mathcal{F})$ и $(Y, \mathcal{G})$ — два множества с выделенными алгебрами подмножеств.

Тогда функция $f : X \longrightarrow Y$ называется измеримой, если прообраз любого множества из $\mathcal{G}$ принадлежит $\mathcal{F}$, то есть $\forall B \in \mathcal{G},\ f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$

3. **Интеграл Лебега**

Дано пространство с мерой $(X, \mathcal{F}, \mu)$, и на нём определена измеримая функция $f : (X, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Пусть f — произвольная измеримая функция, $A \in \mathcal{F}$ произвольное измеримое множество. Тогда по определению $\int\limits_A f(x)\, \mu(dx) = \int\limits_X f(x)\, \mathbf{1}_A(x)\, \mu(dx)$, где $\mathbf{1}_A(x)$ — индикатор-функция множества A.