Sažeto uzorkovanje

Diplomski rad

Marco Hrlić

Prirodoslovno matematički fakultet
Sveučilište u Zagrebu

Rujan 2019.

Uvod

- **Osnovni zadatak**: Efikasno prikupljanje i rekonstrukcija korisnih informacija iz mjerenja.
- **Uzorkovanje**: Proces prikupljanja informacija.
- Radio valovi u kontekstu telekomunikacijskih tehnologija.

- Prvi toranj šalje informaciju $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$.
- Radio signal koji prenosi $\mathbf{x}$ putuje kanalom.
- Drugi toranj uzima uzorke, tj. vrši (uglavnom) periodička mjerenje nad elektromagnetnim poljem, te formira mjerenje $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$.

Uzorkovanje druge antene možemo opisati na linearan način, tj.

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

za neku $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times N}$ (*matrica mjerenja*).

- Za rekonstrukciju informacije $\mathbf{x}$ moramo rješiti linearni sustav.
- **Prirodan uvjet**: $m \geq N$.
- **Dovoljan uvjet**:

Teorem (Nyquist–Shannon)

*Ako funkcija $x(t)$ ne sadrži frekvencije veće od B Hertza, onda je za rekonstrukciju (*sinc *interpolacijom) dovoljno je uzimati uzorke svakih $1/(2B)$ sekundi.*

- Empirijski znamo da su mnogi signali u primjeni makar približno **rijetki**.

Definicija

Nosač vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ *je skup indeksa njegovih ne-nul elemenata, tj.*

$$\mathrm{supp}(\mathbf{x}) := \{j \in [N] : x_j \neq 0\}.$$

- Za vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ kažemo da je s-rijedak ako vrijedi

$$\|\mathbf{x}\|_0 := \mathrm{card}(\mathrm{supp}(\mathbf{x})) \leq s.$$

- **Kompresibilni/sažeti vektori** $\leftarrow$ približno rijetki.

$$\sigma_s(\mathbf{x})_p := \inf \{\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|_p,\ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N \text{ je } s\text{-rijedak}\}.$$

$$\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} := \inf \Big\{ M \geq 0 : \mathsf{card}(\{j \in [N] : |x_j| \geq t\}) \leq \frac{M^P}{t^p},\ \forall t > 0 \Big\}.$$

$$\sigma_s(\mathbf{x})_q \leq \frac{d_{p,q}}{s^{1/p-1/q}} \|\mathbf{x}\|_{p,\infty}$$

- Uz dodatnu pretpostavku o rijetkosti vektora $\mathbf{x}$, uspješna rekonstrukcija je moguća za $m << N$, te postoje efikasni algoritmi za rješenje.

Minimalni broj mjerenja

Za danu rijetkost s, matricu $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$ i s-rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ ekvivalentno je:

1. Vektor $\mathbf{x}$ je jedinstveno s-rijetko rješenje sustava $\mathbf{Az} = \mathbf{y}$ gdje je $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$, tj. $\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \mathbf{Az} = \mathbf{Ax},\ \|\mathbf{z}\|_0 \leq s\} = \{\mathbf{x}\}$.

2. Vektor $\mathbf{x}$ je jedinstveno rješenje problema minimizacije

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N} \|\mathbf{z}\|_0 \quad \text{uz uvjet } \mathbf{Az} = \mathbf{y}. \tag{P_0}$$

Teorem

Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$*. Ekvivalentno je:*

1. *Postoji samo jedan* s*-rijedak vektor* $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ *koji zadovoljava* $\mathbf{Ax} = \mathbf{Az}$*, tj. ako je* $\mathbf{Ax} = \mathbf{Az}$ *i ako su* $\mathbf{x}$*,* $\mathbf{z}$ *oba* s*-rijetki tada je* $\mathbf{x} = \mathbf{z}$*.*
2. *Jezgra od* $\mathbf{A}$ *ne sadrži niti jedan* $2s$*-rijedak vektor osim nul-vektora, tj.* $\ker \mathbf{A} \cap \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \|\mathbf{z}\|_0 \leq 2s\} = \{\mathbf{0}\}$*.*
3. *Za svaki* $S \subseteq [N]$ *takav da je* card$(S) \leq 2s$*, podmatrica* $\mathbf{A}_S$ *je injektivna kao preslikavanje s* $\mathbb{C}^S$ *u* $\mathbb{C}^m$*.*
4. *Svaki skup od* $2s$ *stupaca matrice* $\mathbf{A}$ *je linearno nezavisan skup.*

Pretpostavimo da je rekonstrukcija moguća

$\Longrightarrow$ vrijedi (1) iz prethodnog teorema
$\Longrightarrow$ vrijedi (4), tj.

$$r(\mathbf{A}) \geq 2s.$$

Dakle, imamo

$$m \geq 2s.$$

Teorem

Za svaki $N \geq 2s$, postoji matrica mjerenja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2s \times N}$ takva da se svaki s-rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ može rekonstruirati iz vektora mjerenja $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$ kao rješenje problema minimizacije (P_0).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_N \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ t_1^{2s-1} & t_2^{2s-1} & \cdots & t_N^{2s-1} \end{bmatrix}, \text{ za } t_N > \cdots > t_2 > t_1 > 0.$$

NP-složenost ℓ_0-minimizacije

- **Općenitiji problem**:

$$\min_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N} \|\mathbf{z}\|_0 \quad \text{uz uvjet } \|\mathbf{A}\mathbf{z}-\mathbf{y}\|_2 \le \eta \qquad (P_{0,\eta})$$

- **Klase problema odlučivanja**:
  1. $\mathfrak{P}$: Svi problemi odlučivanja za koje postoji algoritam polinomijalnog vremena koji daje rješenje.
  2. $\mathfrak{NP}$: Svi problemi odlučivanja za koje postoji algoritam polinomijalnog vremena koji provjerava točnost rješenja.
  3. $\mathfrak{NP}$-teški: Svi problemi (ne nužno problemi odlučivanja) za koje se algoritam za rješenje može u polinomijalnom vremenu transformirati u algoritam rješenja za bilo koji $\mathfrak{NP}$ problem.
  4. $\mathfrak{NP}$-potpuni: Svi problemi koji su istovremeno $\mathfrak{NP}$ i $\mathfrak{NP}$-teški.

Egzaktni pokrivač tročlanim skupovima

Za danu kolekciju $\{\mathcal{C}_i;\ i \in [N]\}$ tročlanih podskupova od $[m]$, postoji li egzaktni pokrivač skupa $[m]$, tj. postoji li $J \subseteq [N]$ takav da je $\cup_{j \in J} \mathcal{C}_j = [m]$, gdje je $\mathcal{C}_j \cap \mathcal{C}_k = \emptyset$ za sve međusobno različite $j, k \in J$?

- Poznato je da je taj problem $\mathfrak{NP}$-potpun.

Teorem

Za svaki $\eta \geq 0$, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$ i $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$, problem minimizacije $(P_{0,\eta})$ je $\mathfrak{NP}$-potpun.

Osnovni algoritmi sažetog uzorkovanja

Gruba podijela na:

- Optimizacijske metode
- Greedy metode
- Granične metode

Optimizacijske metode

Općeniti problem optimizacije je oblika

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^N} F_0(\mathbf{x}) \quad \text{uz uvjet } F_i(\mathbf{x}) \leq b_i,\ i \in [n]$$

gdje $F_0 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ zovemo *funkcija cilja*, a funkcije $F_1, \dots, F_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ zovu se *funkcije ograničenja*.

- **Konveksna relaksacija problema** (P_0):

$$\min \|\mathbf{z}\|_1 \quad \text{uz uvjet } \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y}. \tag{P_1}$$

ℓ_1-**minimizacija (*Basis Pursuit*)**

Ulaz: Matrica mjerenja $\mathbf{A}$, vektor mjerenja $\mathbf{y}$.
Problem:

$$\mathbf{x}^\sharp = \arg\min \|\mathbf{z}\|_1 \quad \text{uz uvjet } \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y} \qquad (\ell_1 - min)$$

Izlaz: vektor $\mathbf{x}^\sharp$

Teorem

Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times N}$ *matrica mjerenja sa stupcima* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_N$. *Ako je* $\mathbf{x}^\sharp$ *minimizator od*

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N} \|\mathbf{z}\|_1 \quad \textit{uz uvjet } \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y},$$

tada je skup $\{\mathbf{a}_j,\ j \in \mathrm{supp}(\mathbf{x}^\sharp)\}$ *linearno nezavisan i vrijedi*

$$\|\mathbf{x}^\sharp\|_0 = \mathrm{card}(\mathrm{supp}(\mathbf{x}^\sharp)) \leq m.$$

Greedy metode

OMP (*Orthogonal matching pursuit*)

Ulaz: Matrica mjerenja $\mathbf{A}$, vektor mjerenja $\mathbf{y}$.
Inicijalizacija: $S^0 = \emptyset$, $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$
Iteracija: Zaustavi kada $n = \bar{n}$:

$$S^{n+1} = S^n \cup \{j_{n+1}\}, \quad j_{n+1} := \underset{j\in[N]}{\arg\max}\{|(\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}^n))_j|\},$$

$$\mathbf{x}^{n+1} = \underset{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N}{\arg\min}\{\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{z}\|_2,\ \mathsf{supp}(\mathbf{z}) \subseteq S^{n+1}\}.$$

Izlaz: $\bar{n}$-rijedak vektor $\mathbf{x}^\sharp = \mathbf{x}^{\bar{n}}$.

Indeks j_{n+1} bira se tako da se reducira ℓ_2-norma reziduala $\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}^n$ što je više moguće. Sljedeća lema opravdava zašto je smisleno j odabrati takav da maksimizira vrijednost $|(\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}^n))_j|$.

Lema

Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$ s ℓ_2-normaliziranim stupcima. Ako su $S \subseteq [N]$, $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^N$ s nosačem na S, $j \in [N]$, te ako vrijedi

$$\mathbf{w} := \arg\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N} \{\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{z}\|_2,\ \mathsf{supp}(\mathbf{z}) \subseteq S \cup \{j\}\},$$

tada

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{w}\|_2^2 \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v}\|_2^2 - |(\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v}))_j|^2.$$

Nužni i dovoljni uvjeti za rekonstrukciju:

Propozicija

Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$*. Svaki ne-nul vektor* $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ *s nosačem na skupu* S*, kardinaliteta* s *može se rekonstruirati iz* $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ *u najviše* s *iteracija OMP algoritma ako i samo ako je matrica* $\mathbf{A}_S$ *injektivna i*

$$\max_{j \in S} |(\mathbf{A}^* \mathbf{r})_j| > \max_{l \in \bar{S}} |(\mathbf{A}^* \mathbf{r})_l| \tag{1}$$

za sve ne-nul $\mathbf{r} \in \{\mathbf{A}\mathbf{z},\ \mathrm{supp}(\mathbf{z}) \subseteq S\}$*.*

CoSaMP (*Compressive sensing matching pursuit*)

Ulaz: Matrica mjerenja $\mathbf{A}$, vektor mjerenja $\mathbf{y}$, rijetkost s
Inicijalizacija: s-rijedak vektor $\mathbf{x}^0$ (npr. $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$).
Iteracija: Zaustavi kada $n = \bar{n}$:

$$\begin{aligned}
U^{n+1} &= \mathsf{supp}(\mathbf{x}^n) \cup L_{2s}(\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}^n)) \\
\mathbf{u}^{n+1} &= \arg\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N} \{\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{z}\|_2,\ \mathsf{supp}(\mathbf{z}) \subseteq U^{n+1}\} \\
\mathbf{x}^{n+1} &= H_s(\mathbf{u}^{n+1})
\end{aligned}$$

Izlaz: $\bar{n}$-rijedak vektor $\mathbf{x}^\sharp = \mathbf{x}^{\bar{n}}$.

$L_s(\mathbf{z}) :=$ skup indeksa s najvećih komponenti vekora $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$
$H_s(\mathbf{z}) := \mathbf{z}_{L_s(\mathbf{z})}$.

Granične metode

BT (*Basic thresholding*)

Ulaz: Matrica mjerenja $\mathbf{A}$, vektor mjerenja $\mathbf{y}$, rijetkost s
Problem:

$$S^\sharp = L_s(\mathbf{A}^*\mathbf{y}), \tag{BT_1}$$

$$\mathbf{x}^\sharp = \underset{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N}{\arg\min}\{\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{z}\|_2,\ \mathsf{supp}(\mathbf{z}) \subseteq S^\sharp\}. \tag{BT_2}$$

Izlaz: s-rijedak vektor $\mathbf{x}^\sharp$.

Propozicija

BT algoritam rekonstruira vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ *s nosačem na* S, *iz* $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ *ako i samo ako*

$$\min_{j \in S} |(\mathbf{A}^*\mathbf{y})_j| > \max_{l \in \bar{S}} |(\mathbf{A}^*\mathbf{y})_l|.$$

IHT (*Iterative hard thresholding*)

Ulaz: Matrica mjerenja $\mathbf{A}$, vektor mjerenja $\mathbf{y}$, rijetkost s
Inicijalizacija: s-rijedak vektor $\mathbf{x}^0$ (npr. $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$).
Iteracija: Zaustavi kada $n = \bar{n}$:

$$x^{n+1} = H_s(\mathbf{x}^n + \mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}^n)). \qquad (IHT)$$

Izlaz: s-rijedak vektor $\mathbf{x}^\sharp = \mathbf{x}^{\bar{n}}$.

Algoritam rješava kvadratni sustav $\mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}^*\mathbf{y}$ umjesto $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y}$.

HTP

Ulaz: Matrica mjerenja $\mathbf{A}$, vektor mjerenja $\mathbf{y}$, rijetkost s
Inicijalizacija: s-rijedak vektor $\mathbf{x}^0$ (npr. $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$).
Iteracija: Zaustavi kada $n = \bar{n}$:

$$S^{n+1} = L_s(\mathbf{x}^n + \mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}^n)), \tag{HTP_1}$$

$$\mathbf{x}^{n+1} = \arg\min_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N}\{\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{z}\|_2,\ \mathsf{supp}(\mathbf{z}) \subseteq S^{n+1}\}. \tag{HTP_2}$$

Izlaz: s-rijedak vektor $\mathbf{x}^\sharp = \mathbf{x}^{\bar{n}}$.

Svojstvo nul-prostora (ℓ_1-minimizacija)

Definicija

Za matricu $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m\times N}$ *kažemo da zadovoljava svojstvo nul-prostora za skup* $S \subseteq [N]$ *ako vrijedi*

$$\|\mathbf{v}_S\|_1 < \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 \quad \textit{za svaki } \mathbf{v} \in \ker \mathbf{A}\backslash\{\mathbf{0}\}. \tag{2}$$

Nadalje, kažemo da $\mathbf{A}$ *zadovoljava svojstvo nul-prostora reda* s *ako zadovoljava gornju nejednakost za svaki* $S \subseteq [N]$ *takav da je* card$(S) \leq s$.

Nužni i dovoljni uvjeti za rekonstrukciju ℓ_1-minimizacijom:

Teorem

Za matricu $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times N}$, svaki s-rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^N$ je jedinstveno rješenje problema (P_1) uz $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ako i samo ako $\mathbf{A}$ zadovoljava svojstvo nul-prostora reda s.

Greška mjerenja i defekti rijetkosti:

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N} \|\mathbf{z}\|_1 \quad \text{uz uvjet } \|\mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{y}\| \leq \eta \qquad (\mathsf{P}_{1,\eta})$$

Definicija

Za matricu $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$ *kažemo da zadovoljava robusno svojstvo nul-prostora s konstantama* $0 < \rho < 1$ *i* $\tau > 0$ *za skup* $S \subseteq [N]$ *ako*

$$\|\mathbf{v}_S\|_1 \leq \rho \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 + \tau \|\mathbf{A}\mathbf{v}\| \quad \text{za sve } \mathbf{v} \in \mathbb{C}^N.$$

Nadalje, kažemo da $\mathbf{A}$ *zadovoljava robusno svojstvo nul-prostora s konstantama* $0 < \rho < 1$ *i* $\tau > 0$ *reda* s *ako zadovoljava gornje svojstvo za svaki* $S \subseteq [N]$ *takav da* $\text{card}(S) \leq s$*.*

Teorem

Neka matrica $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$ *zadovoljava robusno svojstvo nul-prostora reda* s *sa konstantama* $0 < \rho < 1$ *i* $\tau > 0$. *Tada za svaki vektor* $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$, *rješenje problema* $(\mathsf{P}_{1,\eta})$ *za* $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{e}$ *i* $\|\mathbf{e}\| \leq \eta$ *aproksimira vektor* $\mathbf{x}$ *s greškom*

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\sharp\|_1 \leq \frac{2(1+\rho)}{(1-\rho)} \sigma_s(\mathbf{x})_1 + \frac{4\tau}{1-\rho}\eta$$

Koherencija

- Uspješnost rekonstrukcije ovisi o određenim kvalitetama matrice $\mathbf{A}$.

Definicija

Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$ *matrica s* ℓ_2*-normaliziranim stupcima* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_N$*, tj.* $\|\mathbf{a}_i\|_2 = 1$ *za sve* $i \in [N]$*. Koherenciju* $\mu = \mu(\mathbf{A})$ *matrice* $\mathbf{A}$ *definiramo kao*

$$\mu := \max_{1 \leq i \neq j \leq N} |\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle|.$$

Za $s \in [N-1]$*, funkcija* ℓ_1*-koherencije* μ_1 *matrice* $\mathbf{A}$ *je definirana kao*

$$\mu_1(s) := \max_{i \in [N]} \max \Big\{ \sum_{j \in S} |\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle|,\ S \subseteq [N],\ \mathrm{card}(S) = s,\ i \notin S \Big\}.$$

Dovoljni uvjeti na koherencije za uspješnu rekonstrukciju:

- ℓ_1-minimizacija: $\mu_1(s) + \mu_1(s-1) < 1$.
- OMP algoritam: $\mu_1(s) + \mu_1(s-1) < 1$.
- BT algoritam: $\mu_1(s) + \mu_1(s-1) < \frac{\min_{i \in S} |x_i|}{\max_{i \in S} |x_i|}$.
- IHT algoritam: $\mu_1(s) + \mu_1(s-1) < \frac{\min_{i \in S} |x_i|}{\max_{i \in S} |x_i|}$.
- HTP algoritam: $2\mu_1(s) + \mu_1(s-1) < 1$

Vrijedi ocjena: $m \geq Cs^2$.

Svojstvo restriktivne izometričnosti

Definicija

s-ta konstanta restriktivne izometričnosti $\delta_s = \delta_s(\mathbf{A})$ matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$ je najmanji $\delta \geq 0$ takva da

$$(1-\delta)\|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \leq (1+\delta)\|\mathbf{x}\|_2^2$$

za sve s-rijetke vektore $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$. Ili ekvivalentno

$$\delta_s = \max_{S \subseteq [N], \mathrm{card}(S) \leq s} \|\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S - \mathbf{I}\|_2.$$

Neformalno, kažemo da matrica $\mathbf{A}$ zadovoljava svojstvo restriktivne izometričnosti ako je δ_s dovoljno mali za s dovoljno velik.

Moguće je usporediti konstantu restriktivne izometričnosti s koherencijom μ.

Propozicija

Neka je $\mathbf{A}$ *s* ℓ_2*-normaliziranim stupcima* $\mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_N$*. Tada za svaki* $j \in [N]$ *vrijedi*

$$\delta_1 = 0, \quad \delta_2 = \mu \quad \delta_s \leq \mu_1(s-1) \leq (s-1)\mu, \quad s \geq 2.$$

Teorem

Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$ *i* $2 \leq s \leq N$*. Tada je*

$$m \geq c\frac{s}{\delta_s^2}, \tag{3}$$

za $N \geq Cm$ *i* $\delta_s \leq \delta_*$*, gdje konstante* c, C *i* δ_* *ovise samo o sebi međusobno. Na primjer, možemo uzeti* $c = 1/162$*,* $C = 30$ *i* $\delta_* = 2/3$*.*

Dovoljni uvjeti na konstantu restriktivne izometričnosti za uspješnu rekonstrukciju:

- ℓ_1-minimizacija: $\delta_{2s} < \frac{4}{\sqrt{41}}$.
- OMP algoritam: $\delta_{13s} < \frac{1}{6}$.
- CoSaMP algoritam: $\delta_{8s} < 0.4782$.
- IHT algoritam: $\delta_{3s} < \frac{1}{\sqrt{3}}$.
- HTP algoritam: $\delta_{3s} < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Konstrukcija matrica male konstante restriktivne izometričnosti:

- **Deterministička konstrukcija** $\leftarrow$ otvoren problem.
  Gotovo sve aproksimacije za δ_s koriste ocjene za koherenciju.

- **Stohastička konstrukcija** (prirodan nastavak teorije):
  Određene klase slučajnih matrica zadovoljavaju svojstvo restriktivne izometričnosti s velikom vjerojatnošću i vrijedi ocjena $m \geq C\delta^{-2} s \ln(eN/S)$.

Sažetak

- Proces uzorkovanja u primjeni.
- Rekonstrukcija informacije (vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$) iz mjerenja $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$.
- Ukoliko je vektor $\mathbf{x}$ kompresibilan, nije nužno uzeti $m \geq N$ uzoraka.
- Općenito rekonstrukcija je moguća za $m \geq 2s$, ako je $\mathbf{x}$ s-rijedak.
- Prirodna strategija rekonstrukcije ℓ_0-minimizacijom (NP-težak problem).
- Efikasni algoritmi za rekonstrukciju, čija analiza ovisi o mjerama kvalitete matrice $\mathbf{A}$. (Koherencija i svojstvo restriktivne izometričnosti)
- Stohastička teorija.