

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Marco Hrlić

**SAŽETO UZORKOVANJE**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
Prof. dr. sc. Damir Bakić

Zagreb, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Albini*

# Sadržaj

Sadržaj	iv
Uvod	1
1 Rijetka rješenja	3
1.1 Rijetsko i sažetost vektora . . . . .	3
1.2 Minimalni broj mjerenja . . . . .	10
1.3 NP-složenost $\ell_0$ -minimizacije . . . . .	14
Bibliografija	17

# Uvod

...



# Poglavlje 1

## Rijetka rješenja

### 1.1 Rijetsko i sažetost vektora

Uvedimo potrebnu notaciju. Neka je  $[N]$  oznaka za skup  $\{1, 2, \dots, N\}$  gdje je  $N \in \mathbb{N}$ . Sa  $\text{card}(S)$  označujemo kardinalitet skupa  $S$ . Nadalje,  $\bar{S}$  je komplement od  $S$  u  $[N]$ , tj.  $\bar{S} = [N] \setminus S$ .

**Definicija 1.1.1.** *Nosač vektora  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  je skup indeksa njegovih ne-nul elemenata, tj.*

$$\text{supp}(\mathbf{x}) := \{j \in [N] : x_j \neq 0\}$$

Za vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  kažemo da je  $s$ -rijedak ako vrijedi

$$\|\mathbf{x}\|_0 := \text{card}(\text{supp}(\mathbf{x})) \leq s$$

Primjetimo,

$$\|\mathbf{x}\|_p^p := \sum_{j=1}^N |x_j|^p \xrightarrow{p \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{x_j \neq 0\}} = \text{card}(\{j \in [N] : x_j \neq 0\}) = \|\mathbf{x}\|_0$$

Gdje smo koristili da je  $\mathbf{1}_{\{x_j \neq 0\}} = 1$  ako je  $x_j \neq 0$  te  $\mathbf{1}_{\{x_j \neq 0\}} = 0$  ako je  $x_j = 0$ . Drugim riječima,  $\|\mathbf{x}\|_0$  je limes  $p$ -te potencije  $\ell_p$ -kvazinorme vektora  $\mathbf{x}$  kada  $p$  teži k nuli. Kvazinorma definira se jednako kao standardna  $\ell_p$ -norma, jedino što nejednakost trokuta oslabimo, tj.

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq C(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)$$

za neku konstantu  $C \geq 1$ . Funkciju  $\|\cdot\|_0$  često nazivamo  $\ell_0$ -norma vektora  $x$ , iako ona nije niti norma niti kvazinorma. U samoj praksi, teško je tražiti rijetkost vektora,

pa je stoga prirodno zahtijevati slabiji uvjet *kompresibilnosti*.

**Definicija 1.1.2.**  $\ell_p$ -grešku najbolje  $s$ -rijetke aproksimacije vektora  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  definiramo sa

$$\sigma_s(\mathbf{x})_p := \inf \left\{ \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_p, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N \text{ je } s\text{-rijedak} \right\}$$

Primjetimo da se infimum postiže za svaki  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$  koji ima nenul elemente koji su jednaki sa  $s$  najvećih komponenti vektora  $\mathbf{x}$ . Iako takav  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$  nije jedinstven, on postiže infimum za svaki  $p > 0$ . Neformalno, mogli bi reći da je vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  *kompresibilan* ako greška njegove najbolje  $s$ -rijetke aproksimacije brzo konvergira u  $s$ . Da bi to formalno iskazali, od koristi će biti ocjena na  $\sigma_s(\cdot)_p$ . Pošto nam za to neće biti važan poredak elemenata vektora  $\mathbf{x}$ , uvodimo sljedeću definiciju koja će nam olaksati račun.

**Definicija 1.1.3.** Nerastući poredak vektora  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  je vektor  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^N$  takav da

$$x_1^* \geq x_2^* \geq x_3^* \geq \dots \geq 0$$

te postoji permutacije  $\pi : [N] \rightarrow [N]$  takva da  $x_j^* = |x_{\pi(j)}|$  za sve  $j \in [N]$ .

**Propozicija 1.1.4.** Za svaki  $q > p > 0$  i za svaki  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  vrijedi

$$\sigma_s(\mathbf{x})_q \leq \frac{1}{s^{1/p-1/q}} \|\mathbf{x}\|_p.$$

*Dokaz.* Neka je  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^N$  nerastući poredak vektora  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ . Tada slijedi,

$$\begin{aligned} \sigma_s(\mathbf{x})_q^q &= \sum_{j=s+1}^N (x_j^*)^q = \sum_{j=s+1}^N (x_j^*)^p (x_j^*)^{q-p} \leq (x_s^*)^{q-p} \sum_{j=s+1}^N (x_j^*)^p \\ &\leq \left( \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s (x_j^*)^p \right)^{\frac{q-p}{p}} \left( \sum_{j=s+1}^N (x_j^*)^p \right) \leq \left( \frac{1}{s} \|\mathbf{x}\|_p^p \right)^{\frac{q-p}{p}} \|\mathbf{x}\|_p^p \\ &= \frac{1}{s^{q/p-1}} \|\mathbf{x}\|_p^q \end{aligned}$$

Prva nejednakost slijedi iz činjenice da je  $x_j^* \leq x_s^*$  za svaki  $j \geq s+1$ . Druga nejednakost je također posljedica nerasta komponenti od  $\mathbf{x}^*$ . Potenciranjem obje strane s  $1/q$  slijedi tvrdnja.  $\square$

Primjetimo da ako je  $\mathbf{x}$  iz jedinične  $\ell_p$ -kugle za neki mali  $p > 0$ , onda prethodna propozicija garantira kovergenciju od  $\sigma_s(\mathbf{x})_q$  u  $s$ , gdje  $\ell_p$ -kuglu definiramo kao

$$B_p^N := \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \|\mathbf{z}\|_p \leq 1 \right\}$$



Vratimo se sada ocjeni iz propozicije 1.1.4. Sljedeći teorem daje najmanju konstantu  $c_{p,q}$  takvu da vrijedi  $\sigma_s(\mathbf{x})_q \leq c_{p,q} s^{-1/p+1/q} \|\mathbf{x}\|_p$  te zapravo predstavlja jaču tvrdnju.

**Teorem 1.1.5.** *Za svaki  $q > p > 0$  i za svaki  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  vrijedi*

$$\sigma_s(\mathbf{x})_q \leq \frac{c_{p,q}}{s^{1/p-1/q}} \|\mathbf{x}\|_p$$

gdje je

$$c_{p,q} := \left[ \left( \frac{p}{q} \right)^{p/q} \left( 1 - \frac{p^{1-p/q}}{q} \right) \right]^{1/p} \leq 1.$$

Istaknimo za česti odabir  $p = 1$  i  $q = 2$

$$\sigma_s(\mathbf{x})_2 \leq \frac{1}{2\sqrt{s}} \|\mathbf{x}\|_1$$

*Dokaz.* Neka je  $\mathbf{x}^*$  nerastući poredak vektora  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  i  $\alpha_j := (x_j^*)^p$ . Dokazati ćemo ekvivalentnu tvrdnju

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_N \geq 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N \leq 1 \end{array} \right\} \implies \alpha_{s+1}^{q/p} + \alpha_{s+2}^{q/p} + \dots + \alpha_{s+N}^{q/p} \leq \frac{c_q^q}{s^{q/p-1}} \quad (1.1)$$

Stoga, za  $r := q/p > 1$ , problem se svodi na maksimizaciju konveksne funkcije

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) := \alpha_{s+1}^r + \alpha_{s+2}^r + \dots + \alpha_N^r$$

na konveksnom mnogokutu

$$\mathcal{C} := \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N : \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_N \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N \leq 1 \right\}$$

Prema teoremu (todo)  $f$  postiže maksimum na nekom od vrhova mnogokuta  $\mathcal{C}$ , a vrhovi od  $\mathcal{C}$  su dani kao sjecišta  $N$  hiperplohi koje dobijemo tako da u (1.1)  $N$  nejednakosti pretvorimo u jednakosti. Mogućnosti su:

1.  $\alpha_1 = \dots = \alpha_N \implies f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) = 0.$
2.  $\alpha_1 + \dots + \alpha_N = 1$  i  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k > \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_N = 0$  za neki  $1 \leq k \leq s \implies f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) = 0$
3.  $\alpha_1 + \dots + \alpha_N = 1$  i  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k > \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_N = 0$  za neki  $s+1 \leq k \leq N \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 1/k$  te  $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) = (k-s)/k^r$

Dakle, slijedi da

$$\max_{(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathcal{C}} f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) = \max_{s+1 \leq k \leq N} \frac{k-s}{k^r}$$

Shvatimo sada  $k$  kao realnu varijablu i zamjetimo da  $g(k) := (k-s)/k^r$  raste do kritične točke  $k^* = (r/(r-1))s$  nakon koje opada.

$$\max_{(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathcal{C}} f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \leq g(k^*) = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{r-1} \frac{1}{s^r - 1} = c_{p,q}^q \frac{1}{s^{q/p} - 1}$$

□

Alternativni način na koji bi mogli definirati pojam *kompresibilnosti* za vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  je da zahtjevamo da je broj

$$\text{card}(\{j \in [N] : |x_j| \geq t\})$$

tj. broj njegovih značajnih ne-nul komponenti dovoljno mali. Ovaj pristup vodi na definiciju slabih  $\ell_p$ -prostora.

**Definicija 1.1.6.** Za  $p > 0$ , slabi  $\ell_p$ -prostor s oznakom  $w\ell_p^N$  definiramo kao prostor  $\mathbb{C}^N$  sa kvazinormom

$$\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} := \inf \left\{ M \geq 0 : \text{card}(\{j \in [N] : |x_j| \geq t\}) \leq \frac{M^p}{t^p}, \forall t > 0 \right\} \quad (1.2)$$

Da bi pokazali da je (1.2) zapravo kvazinorma, potreban nam je sljedeći rezultat.

**Propozicija 1.1.7.** Neka su  $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k \in \mathbb{C}^N$ . Tada za svaki  $p > 0$  vrijedi

$$\|\mathbf{x}^1 + \dots + \mathbf{x}^k\|_{p,\infty} \leq k^{\max\{1, 1/p\}} (\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty} + \dots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty})$$

*Dokaz.* Neka je  $t > 0$ . Ako je  $|x_j^1 + \dots + x_j^k| \geq t$  za neki  $j \in [N]$ , tada imamo da je  $|x_j^i| \geq t/k$  za neki  $i \in [k]$ . Dakle, vrijedi

$$\{j \in [N] : |x_j^1 + \dots + x_j^k| \geq t\} \subset \bigcup_{i \in [k]} \{j \in [N] : |x_j^i| \geq t/k\}$$

pa je stoga

$$\begin{aligned} \text{card}(\{j \in [N] : |x_j^1 + \dots + k_j^k| \geq t\}) &\leq \sum_{i \in [k]} \frac{\|\mathbf{x}^i\|_{p,\infty}^p}{(t/k)^p} \\ &= \frac{k^p(\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty}^p + \dots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}^p)}{t^p} \end{aligned}$$

Prema definiciji slabe  $\ell_p$ -kvazinorme (1.2) vektora  $\mathbf{x}^1 + \dots + \mathbf{x}^k$  dobivamo

$$\|\mathbf{x}^1 + \dots + \mathbf{x}^k\|_{p,\infty} \leq k(\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty}^p + \dots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}^p)^{1/p}$$

Ako je  $p \leq 1$ , uspoređujući  $\ell_p$  i  $\ell_1$  norme na  $\mathbb{R}^k$  slijedi

$$\left(\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty}^p + \dots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}^p\right)^{1/p} \leq k^{1/p-1}(\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty} + \dots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty})$$

te ako je  $p \geq 1$  slijedi

$$\left(\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty}^p + \dots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}^p\right)^{1/p} \leq \|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty} + \dots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}.$$

Tvrđnja slijedi kombiniranjem dobivenih ocjena. □

Uzmimo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$  i neka je  $\lambda \in \mathbb{C}$  proizvoljan.

1. Neka je  $\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} = 0$ . Iz (1.2) slijedi  $\text{card}(\{j \in [N] : |x_j| \geq t\}) = 0$  za svaki  $t > 0$  pa je stoga broj ne-nul komponenti on  $\mathbf{x}$  jednak nuli, tj.  $\mathbf{x} = 0$
2. Ako je  $\lambda$  nula,  $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$  vrijedi trivijalno. Za  $\lambda \neq 0$ , imamo  $\text{card}(\{j \in [N] : |\alpha x_j| \geq t\}) = \text{card}(\{j \in [N] : |x_j| \geq t/|\alpha|\}) \leq (\alpha M)^p/t^p$  za svaki  $t > 0$ . Dakle, opet  $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$ .
3.  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq C(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)$  je sada direktna posljedica prethodne propozicije.

sljedeća propozicija daje alternativni izraz za slabu  $\ell_p$ -kvazinormu.

**Propozicija 1.1.8.** *Za  $p > 0$ , vrijedi*

$$\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} = \max_{k \in [N]} k^{1/p} x_k^*$$

gdje je  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^N$  nerastući poredak vektora  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ .

*Dokaz.* Primjetimo prvo da iz (1.2) slijedi da je  $\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} = \|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty}$ , pa zapravo pokazujemo da je  $\|\mathbf{x}\| := \max_{k \in [N]} k^{1/p} x_k^* = \|\mathbf{x}^*\|$ . Nadalje, za  $t > 0$  vrijedi da je  $\{j \in [N] : x_j^* \geq t\} = [k]$  za neki  $k \in [N]$  ili je  $\{j \in [N] : x_j^* \geq t\} = \emptyset$ . U prvom

slučaju  $t \leq x_k^* \leq \|\mathbf{x}\|/k^{1/p}$  pa je  $\text{card}(\{j \in [N] : x_j^* \geq t\}) = k \leq \|\mathbf{x}\|/k^{1/p}$ . U drugom slučaju ista nejednakost vrijedi trivijalno. Iz definicije slabe  $\ell_p$ -kvazinorme (1.2) sada dobivamo  $\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty} \leq \|\mathbf{x}\|$ . Pretpostavimo da je  $\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty} < \|\mathbf{x}\|$ . Tada postoji  $\varepsilon > 0$  takav da  $(1 + \varepsilon)\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty} \leq \|\mathbf{x}\|$ . Slijedi da je  $(1 + \varepsilon)\|\mathbf{x}^*\| \leq k^{1/p}x_k^*$  za neki  $k \in [N]$  pa stoga

$$[k] \subseteq \{j \in [N] : (1 + \varepsilon)\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty}/k^{1/p} \leq x_j^*\}$$

Ponovo iz (1.2) imamo

$$k \leq \frac{\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty}^p}{\left((1 + \varepsilon)\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty}k^{1/p}\right)^p} = \frac{k}{(1 + \varepsilon)^p}$$

Kontradikcija, dakle mora vrijediti  $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty}$ . □

Sada lagano možemo usporediti slabi i jaku  $\ell_p$  normu,

**Propozicija 1.1.9.** *Za svaki  $p > 0$  i za svaki  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ ,*

$$\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} \leq \|\mathbf{x}\|_p$$

*Dokaz.* Neka je  $k \in [N]$ ,

$$\|\mathbf{x}\|_p^p = \sum_{j=1}^N (x_j^*)^p \geq \sum_{j=1}^k (x_j^*)^p \geq k(x_k^*)^p$$

Tvrđnja slijedi potenciranjem na  $1/p$  i uzimajući maksimum po  $k$  i primjenom prethodne propozicije. □

Koristeći propoziciju (1.1.8) možemo dobiti verziju ocjene iz propozicije (1.1.4) sa slabom  $\ell_p$  normom.

**Propozicija 1.1.10.** *Za svaki  $q > p > 0$  i  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ , vrijedi*

$$\sigma_s(\mathbf{x})_q \leq \frac{d_{p,q}}{s^{1/p-1/q}} \|\mathbf{x}\|_{p,\infty}$$

gdje je

$$d_{p,q} := \left(\frac{p}{q-p}\right)^{1/q}.$$

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je  $\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} \leq 1$ , pa je  $x_k^* \leq 1/k^{1/p}$  za svaki  $k \in [N]$ . Tada vrijedi,

$$\sigma_s(\mathbf{x})_q^q = \sum_{k=s+1}^N (x_k^*)^q \leq \sum_{k=s+1}^N \frac{1}{k^{q/p}} \leq \int_s^N \frac{1}{t^{q/p}} dt = -\frac{1}{q/p-1} \frac{1}{t^{q/p-1}} \Big|_{t=s}^{t=N} \leq \frac{p}{q-p} \frac{1}{s^{q/p-1}}.$$

Potenciranjem sa  $1/q$  slijedi tvrdnja.  $\square$

Prethodna propozicija daje da su vektori  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  koji su kompresibilni u smislu  $\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} \leq 1$  za mali  $p > 0$ , također kompresibilni u smislu da greška njihove najbolje  $s$ -rijetke aproksimacije brzo konvergira sa  $s$ . Iskažimo još jedan tehnički rezultat,

**Lema 1.1.11.** *Neka su  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$ . Tada vrijedi,*

$$\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}^*\|_\infty \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty \quad (1.3)$$

*Nadalje, za  $s \in [N]$ ,*

$$|\sigma_s(\mathbf{x})_1 - \sigma_s(\mathbf{y})_1| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 \quad (1.4)$$

*i za  $k > s$ ,*

$$(k-s)x_k^* \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 + \sigma_s(\mathbf{y})_1 \quad (1.5)$$

*Dokaz.* Za  $j \in [N]$ , skup indeksa  $j$  najvećih komponenti vektora  $\mathbf{x}$  ima ne-trivijalni presjek sa skupom od  $N-j+1$  najmanjih komponenti vektora  $\mathbf{y}$ . Izaberimo indeks  $l$  iz tog presjeka. Tada vrijedi,

$$x_j^* \leq |x_l| \leq |y_l| + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty \leq z_j^* + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty$$

Zamjenom uloga od  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{y}$  slijedi (1.3). Neka je  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^N$  najbolja  $s$ -rijetka aproksimacija vektora  $\mathbf{y}$ . Tada

$$\sigma_s(\mathbf{x})_1 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|_1 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 + \|\mathbf{y} - \mathbf{v}\|_1 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 + \sigma_s(\mathbf{y})_1$$

Ponovno, zbog simetrije slijedi (1.4). Napokon, ocjena (1.5) slijedi iz (1.4) te iz činjenice

$$(k-s)x_k^* \leq \sum_{j=s+1}^k x_j^* \leq \sum_{j \geq s+1} x_j^* = \sigma_s(\mathbf{x})_1.$$

$\square$

## 1.2 Minimalni broj mjerenja

Problem sažetog uzorkovanja sastoji se od rekonstrukcije  $s$ -rijetkog vektora  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  iz sustava

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Matricu  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  nazivamo *matrica mjerenja*. Ako je  $m < N$ , za ovakav sustav linearnih jednadžbi kažemo da je *neodređen*. Iako iz klasične teorije linearne algebre ovakvi sustavi imaju beskonačno mnogo rješenja, pokazati će se da je dodatna pretpostavka rijetkosti vektora  $\mathbf{x}$  dovoljno za jedinstvenost rješenja. U ovom poglavlju istražiti ćemo koji je minimalni broj mjerenja, tj.  $m$  broj redaka matrice  $\mathbf{A}$ , koji garantira rekonstrukciju  $s$ -rijetkog vektora  $\mathbf{x}$ . Zapravo, postoje dva pristupa ovom problemu. Možemo zahtijevati da problem mjerenja rekonstruira sve  $s$ -rijetke vektore  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  istodobno ili možemo tražiti rekonstrukciju specifičnog, tj. predodređenog vektora  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ . Taj pristup čini se neprirodan, no pokazuje se da je on važan u proučavanju problema gdje matricu  $\mathbf{A}$  biramo nasumično.

Pokažimo da su za danu rijetkost  $s$ , matricu  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  i  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ , naredne tvrdnje ekvivalentne:

1. Vektor  $\mathbf{x}$  je jedinstveno  $s$ -rijetko rješenje sustava  $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y}$  gdje je  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , tj.  $\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \|\mathbf{z}\|_0 \leq s\} = \{\mathbf{x}\}$
2. Vektor  $\mathbf{x}$  je jedinstveno rješenje problema minimizacije

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N} \|\mathbf{z}\|_0 \quad \text{uz uvjet } \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y} \quad (P_0)$$

Ako je  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  jedinstveno  $s$ -rijetko rješenje od  $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y}$  takvo da je  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , onda rješenje  $\mathbf{x}^\#$  od  $(P_0)$  je  $s$ -rijetko i zadovoljava  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$  pa je  $\mathbf{x}^\# = \mathbf{x}$ . Drugi smjer slijedi trivijalno.

### Rekonstrukcija svih rijetkih vektora

Neka je  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  i  $S \subset [N]$ , sa  $\mathbf{A}_S$  označujemo matricu formiranu od stupaca od  $\mathbf{A}$  indeksiranih sa  $S$ . Slično, sa  $\mathbf{x}_S$  označujemo ili vektor iz  $\mathbb{C}^S$  koji se sastoji od komponenti vektora  $\mathbf{x}$  indeksiranih po  $S$ , tj.  $(\mathbf{x}_S)_l = x_l$  za sve  $l \in S$ , ili vektor iz  $\mathbb{C}^N$  koji se podudara s  $\mathbf{x}$  na komponentama indeksiranim u  $S$  i jednak je nula na indeksima koji nisu u  $S$ , tj.  $(\mathbf{x}_S)_l = x_l$  za  $l \in S$  i  $(\mathbf{x}_S)_l = 0$  za  $l \notin S$ . Iz konteksta će uvijek biti jasno na koju definiciju se misli.

**Teorem 1.2.1.** *Neka je  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$ . Ekvivalentno je:*

- (a) Svaki  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  je jedinstveno rješenje od  $\mathbf{Ax} = \mathbf{Az}$ , tj. ako je  $\mathbf{Ax} = \mathbf{Az}$  i ako su  $\mathbf{x}, \mathbf{z}$  oboje  $s$ -rijetki tada  $\mathbf{x} = \mathbf{z}$ .
- (b) Jezgra od  $\mathbf{A}$  ne sadrži niti jedan  $2s$ -rijedak vektor osim nul-vektora, tj.  $\ker \mathbf{A} \cap \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \|\mathbf{z}\|_0 \leq 2s\} = \{\mathbf{0}\}$
- (c) Za svaki  $S \subset [N]$  takav da  $\text{card}(S) \leq 2s$ , podmatrica  $\mathbf{A}_S$  je injektivna kao preslikavanje sa  $\mathbb{C}^S$  u  $\mathbb{C}^m$ .
- (d) Svaki skup od  $2s$  stupaca matrice  $\mathbf{A}$  je linearno nezavisan skup.

*Dokaz.* (b)  $\implies$  (a). Neka su  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{z}$   $s$ -rijetki vektori takvi da  $\mathbf{Ax} = \mathbf{Az}$ . Tada je  $\mathbf{x} - \mathbf{z}$   $2s$ -rijedak i  $\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) = \mathbf{0}$ . Pošto  $\ker \mathbf{A}$  ne sadrži  $2s$ -rijetke vektore osim nul-vektora, mora vrijediti  $\mathbf{x} = \mathbf{z}$ .

(a)  $\implies$  (b). Obratno, pretpostavimo da za svaki  $s$ -rijetki vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  vrijedi  $\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \mathbf{Az} = \mathbf{Ax}, \|\mathbf{z}\|_0 \leq s\} = \{\mathbf{x}\}$ . Neka je  $\mathbf{v} \in \ker \mathbf{A}$ ,  $2s$ -rijedak. Tada  $\mathbf{v}$  možemo rastaviti kao  $\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{z}$  gdje su  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{z}$   $s$ -rijetki takvi da  $\text{supp}(\mathbf{x}) \cap \text{supp}(\mathbf{z}) = \emptyset$ . Imamo da je  $\mathbf{Ax} = \mathbf{Az}$  pa prema pretpostavci vrijedi  $\mathbf{x} = \mathbf{z}$ . Pošto su nosači od  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{z}$  disjunktni, mora vrijediti  $\mathbf{x} = \mathbf{z} = \mathbf{0}$  pa je stoga i  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

(b)  $\implies$  (c). Pretpostavimo suprotno,  $\ker \mathbf{A} \cap \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \|\mathbf{z}\|_0 \leq 2s\} = \{\mathbf{0}\}$  i da postoji  $S \in [N]$  takav da je  $\text{card}(S) \leq 2s$  te da  $\mathbf{A}_S$  nije injektivna. To znači da postoji vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{\text{card}(S)} \setminus \{\mathbf{0}\}$  takav da je  $\mathbf{A}_S \mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Definiramo vektor  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^N$  sa

$$\tilde{x}_j = \begin{cases} x_j & \text{za } j \in S \\ 0 & \text{za } j \in \bar{S} \end{cases}$$

Dakle, imamo  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ,  $\|\mathbf{x}\|_0 \leq 2s$  i vrijedi  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ , tj.  $\mathbf{x} \in \ker \mathbf{A}$ . Kontradikcija s (b).

(c)  $\implies$  (d). Odaberimo  $2s$  stupaca od  $\mathbf{A}$ . Skup indeksa tih stupaca označimo sa  $S$ . Prema (c), matrica  $\mathbf{A}_S$  je injektivna, a to znači da su njeni stupci linearno nezavisni, pa su stoga i  $2s$  odabranih stupaca matrice  $\mathbf{A}$  linearno nezavisni.

(d)  $\implies$  (b). Pretpostavimo da jezgra od  $\mathbf{A}$  sadrži  $2s$ -rijedak ne-nul vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ . Neka je  $S$  skup indeksa ne-nul elemenata vektora  $\mathbf{x}$ . To znači da je  $\mathbf{A}_S \mathbf{x}_S = \mathbf{0}$ , i  $\mathbf{x}_S \neq \mathbf{0}$ . Dakle  $\mathbf{A}_S$  nije injektivna, pa stoga i skup stupaca od  $\mathbf{A}$  indeksiranih sa  $S$  nije linearno nezavisan, što je kontradikcija sa (d).

□

Uočimo da ako je moguće rekonstruirati svaki  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  iz vektora mjerenja  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$ , tada vrijedi (a). Prema prošlom teoremu tada vrijedi i tvrdnja (d) pa je stoga  $\text{rank}(\mathbf{A}) \geq 2s$ . Također vrijedi da je  $\text{rank}(\mathbf{A}) \leq m$  pa imamo

$$m \geq 2s.$$

To znači da je potrebno barem  $2s$  mjerenja da bi rekonstruirali svaki  $s$ -rijedak vektor. Pokazati ćemo da je, makar u teoriji, dovoljno točno  $2s$  mjerenja.

**Teorem 1.2.2.** *Za svaki  $N \geq 2s$ , postoji matrica mjerenja  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2s \times N}$  takva da se svaki  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  može rekonstruirati iz vektora mjerenja  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$  kao rješenje problema minimizacije ( $P_0$ ).*

*Dokaz.* Fiksirajmo  $t_N > \dots t_2 > t_1 > 0$  i neka je  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2s \times N}$  dana sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_N \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ t_1^{2s-1} & t_2^{2s-1} & \dots & t_N^{2s-1} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Nadalje, neka je  $S = \{j_1 < \dots < j_{2s}\}$  skup indeksa. Matrica  $\mathbf{A}_S \in \mathbb{C}^{2s \times 2s}$  je transponirana *Vandermonтова matrica*. Prema (TODO) slijedi

$$\det(\mathbf{A}_S) = \prod_{k < l} (t_{j_l} - t_{j_k}) > 0.$$

To znači da je matrica  $\mathbf{A}$  invertibilna, pa posebno i injektivna. Tada je zadovoljena tvrdnja (c) teorema (1.2.1), pa je po istom teoremu zadovoljena i tvrdnja (a), tj. svaki  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  zadovoljava  $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ . Stoga je taj vektor moguće jedinstveno rekonstruirati putem minimizacije ( $P_0$ ).  $\square$

Zapravo, mnogo matrica zadovoljava uvjet (c) iz teorema (1.2.1). Na primjer, potencije od  $t_1, \dots, t_N$  u (1.6) ne moraju biti uzastopne. Nadalje, brojevi  $t_1, \dots, t_N$  ne moraju biti pozitivni, niti realni sve dok vrijedi  $\det(\mathbf{A}_S) \neq 0$ . Posebno, možemo uzeti  $t_l = e^{2\pi i(l-1)/N}$  za  $l \in [N]$ , teorem (TODO) garantira da parcijalna Fourierova matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{2\pi i/N} & e^{2\pi i 2/N} & \dots & e^{2\pi i(N-1)/N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{2\pi i(2s-1)/N} & e^{2\pi i(2s-1)2/N} & \dots & e^{2\pi i(2s-1)(N-1)/N} \end{bmatrix}$$



rekonstruira svaki  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  iz  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{2s}$ . Zapravo može se pokazati da skup  $(2s) \times N$  matrica takvih da  $\det(\mathbf{A}_S) = 0$  za neki  $S \subset [N]$  i  $\text{card}(S) \leq 2s$  ima Lebesgueovu mjeru nula, pa stoga gotovo sve  $(2s) \times N$  matrice rekonstruiraju svaki  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  iz  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{2s}$ . Međutim u praksi nije isplativo rješavati problem minimizacije  $(P_0)$ , što ćemo kasnije i pokazati.

## Rekonstrukcija zadanog rijetkog vektora

Promatramo problem gdje je  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  unaprijed zadan i poznat, a matricu  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  želimo odabrati tako da ona garantira rekonstrukciju vektora  $\mathbf{x}$  iz mjerenja  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$ . Isprva, ovakva pristup izgleda neprirodan zbog činjenice da je vektor  $\mathbf{x}$  apriorno poznat. Ideja je da će uvjeti rekonstrukcije vrijediti za gotovo sve  $(s+1) \times N$  matrice, što podupire činjenicu da se u praksi matrice mjerenja često odabiru na nasumičan način.

**Teorem 1.2.3.** *Za svaki  $N \geq s+1$  i za dani  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ , postoji matrica mjerenja  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{(s+1) \times N}$ , takva da se vektor  $\mathbf{x}$  može rekonstruirati iz mjerenja  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$  kao rješenje minimizacije  $(P_0)$ .*

*Dokaz.* Neka je  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{(s+1) \times N}$  matrica za koju se  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x}$  ne može rekonstruirati iz  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  putem minimizacije  $(P_0)$ . To znači da postoji vektor  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$  različit od  $\mathbf{x}$ , takav da  $S = \text{supp}(\mathbf{z}) = \{j_1, \dots, j_s\}$ ,  $\text{card}(S) \leq s$  (ako je  $\|\mathbf{z}\|_0 < s$ , u  $S$  dodamo proizvoljne elemente  $j_l \in [N]$ ) i  $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ . Ako je  $\text{supp}(\mathbf{x}) \subset S$ , tada iz  $(\mathbf{A}(\mathbf{z} - \mathbf{x}))_{[s]} = 0$  slijedi da  $\mathbf{A}_{[s],S}$  nije invertibilna, tj.

$$f(a_{1,1}, \dots, a_{1,N}, \dots, a_{m,1}, \dots, a_{m,N}) := \det(\mathbf{A}_{[s],S}) = 0.$$

Ako  $\text{supp}(\mathbf{x}) \not\subset S$  tada je dimenzija prostora  $V := \{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^N : \text{supp}(\mathbf{u}) \subset S\} + \mathbb{C}\mathbf{x}$  jednaka  $s+1$ , i linearno preslikavanje  $G : V \rightarrow \mathbb{C}^{s+1}$ ,  $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{v}$  nije invertibilno, pošto je  $G(\mathbf{z} - \mathbf{x}) = 0$ . Matrica linearnog preslikavanja  $G$  u bazi  $(\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_s}, \mathbf{x})$  prostora  $V$ , je oblika

$$B_{\mathbf{x},S} := \begin{bmatrix} a_{1,j_1} & \cdots & a_{1,j_s} & \sum_{j \in \text{supp}(\mathbf{x})} x_j a_{1,j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{s+1,j_1} & \cdots & a_{s+1,j_s} & \sum_{j \in \text{supp}(\mathbf{x})} x_j a_{s+1,j} \end{bmatrix}$$

i imamo

$$g_S(a_{1,1}, \dots, a_{1,N}, \dots, a_{m,1}, \dots, a_{m,N}) := \det(B_{\mathbf{x},S}) = 0.$$

Dakle, vrijedi

$$(a_{1,1}, \dots, a_{1,N}, \dots, a_{m,1}, \dots, a_{m,N}) \in f^{-1}(\{0\}) \cup \bigcup_{\text{card}(S)=s} g_S^{-1}(\{0\}).$$

Primjetimo da su skupovi  $f^{-1}(\{0\})$  i  $g_S^{-1}(\{0\})$  Lebesgueove mjere nula iz razloga što su  $f$  i  $g_S$  polinomi u varijablama  $(a_{1,1}, \dots, a_{1,N}, \dots, a_{m,1}, \dots, a_{m,N})$ . Dakle, elemente matrice  $\mathbf{A}$  moramo izabrati izvan skupa mjere nula, da bi osigurali rekonstrukciju vektora  $\mathbf{x}$  iz  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ .  $\square$

### 1.3 NP-složenost $\ell_0$ -minimizacije

Kao što smo najavili, pokazati ćemo da je u praksi neisplativo rješavati problem  $\ell_0$ -minimizacije u svrhu rekonstrukcije vektora  $\mathbf{x}$  iz mjerenja  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ . Prisjetimo se, problem koji rješavamo je oblika,

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N} \|\mathbf{z}\|_0 \quad \text{uz uvjet } \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y}.$$

Pošto je minimizator najviše  $s$ -rijedak, najjednostavniji algoritam za rješavanje ovog problema je riješiti sve pravokutne sustave  $\mathbf{A}_S \mathbf{u} = \mathbf{y}$  ili sve kvadratne sustave oblika  $\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S \mathbf{u} = \mathbf{A}_S^* \mathbf{y}$  za svaki  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^S$  gdje  $S$  ide po svim poskupovima od  $[N]$ , veličine  $s$ . No ispada da broj podskupova  $\binom{N}{s}$ , što za male probleme sa  $N = 1000$  i  $s = 10$ , iznosi  $\binom{1000}{10} \geq \left(\frac{1000}{10}\right)^{10} = 10^{20}$ . Kada bi jedan  $10 \times 10$  sustav mogli riješiti u  $10^{-10}$  sekundi, trebalo bi nam više od 300 godina da sve riješimo. Sada ćemo pokazati zašto je zapravo općenitiji problem

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N} \|\mathbf{z}\|_0 \quad \text{uz uvjet } \|\mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{y}\|_2 \leq \eta \quad (P_{0,\eta})$$

NP-težak.

Uvedimo prvo potrebne pojmove iz kompleksnosti algoritama. Za algoritam kažemo da je *polinomijalnog-vremena* ako je broj koraka do rješenja ograničen polinomom u varijabli veličine ulaza. Nadalje, uvedimo neformalne definicije klasa problema odlučivanja:

- $\mathfrak{P}$ : Svi problemi odlučivanja za koje postoji algoritam polinomijalnog vremena koji daje rješenje.
- $\mathfrak{NP}$ : Svi problemi odlučivanja za koje postoji algoritam polinomijalnog vremena koji provjerava točnost rješenja.

- **NP-teški:** Svi problemi (ne nužno problemi određivanja) za koje se algoritam za rješenje može u polinomijalnom vremenu transformirati u algoritam rješenja za bilo koji NP problem.
- **NP-potpuni:** Svi problemi koji su istovremeno NP i NP-teški.

Pitanje je li P strogo sadržano u NP do dan danas nije odgovoreno. No, vjeruje se da postoje problemi za koje ne postoji algoritam rješenja polinomijalnog vremena, ali postoji algoritam koji će provjeriti točnost rješenja u polinomijalnom vremenu. Najpoznatiji NP-potpun problem je problem putujućeg prodavača. No, iskoristiti ćemo problem egzaktnog pokrivača tročlanim skupovima da bi pokazali da je problem  $(P_{0,\eta})$  NP-težak.

### Egzaktni pokrivač tročlanim skupovima

Za danu kolekciju  $\{\mathcal{C}_i; i \in [N]\}$  tročlanih podskupova od  $[m]$ , postoji li egzaktni pokrivač skupa  $[m]$ , tj. postoji li  $J \subset [N]$  takav da  $\cup_{j \in J} \mathcal{C}_j = [m]$ , gdje je  $\mathcal{C}_j \cap \mathcal{C}_k = \emptyset$  za svaki  $j, k \in J$  različiti? Poznato je da je taj problem NP-potpun (vidi TODO).

**Teorem 1.3.1.** *Za svaki  $\eta \geq 0$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  i  $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$ , problem minimizacije  $(P_{0,\eta})$  je NP-potpun.*

*Dokaz.* Zbog linearnosti problema  $(P_{0,\eta})$ , možemo uzeti da je  $\eta < 1$ . Pokazati ćemo da se problem egzaktnog pokrivača može u polinomijalnom vremenu reducirati na problem  $\ell_0$ -minimizacije. Neka je  $\{\mathcal{C}_i; i \in [N]\}$  kolekcija tročlanih podskupova  $[m]$ . Definirajmo vektora  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N \in \mathbb{C}^m$

$$(\mathbf{a}_i)_j = \begin{cases} 1 & \text{za } j \in \mathcal{C}_i, \\ 0 & \text{za } j \notin \mathcal{C}_i \end{cases}$$

Definiramo matricu  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  i vektor  $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$  sa

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_N], \quad \mathbf{y} = [1, 1, \dots, 1]^T.$$

Pošto je  $N \leq \binom{m}{3}$ , to možemo napraviti u polinomijalnom vremenu. Ako  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$  zadovoljava  $\|\mathbf{Az} - \mathbf{y}\|_2 \leq \eta$ , tada su svih  $m$  komponenti od  $\mathbf{Az}$  udaljene od 1 za najviše  $\eta$ , pa su te komponente različite od nula, jer smo  $\eta$  uzeli manji od 1. Dakle, vrijedi  $\|\mathbf{Az}\|_0 = m$ . Ali pošto svaki od vektora  $\mathbf{a}_i$  imam točno tri ne-nul komponente, vektor  $\mathbf{Az} = \sum_{j=1}^N z_j \mathbf{a}_j$  ima najviše  $3\|\mathbf{z}\|_0$  ne-nul elemenata, tj.  $\|\mathbf{Az}\|_0 \leq 3\|\mathbf{z}\|_0$ . Dakle, za svaki vektor  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$  koji zadovoljava  $\|\mathbf{Az} - \mathbf{y}\|_2 \leq \eta$  vrijedi  $\|\mathbf{z}\|_0 \geq m/3$ . Neka je sada  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  rješenje  $\ell_0$ -minimizacije  $(P_{0,\eta})$ . Imamo dva slučaja za normu vektora  $\mathbf{x}$ :

1. Ako je  $\|\mathbf{x}\|_0 = m/3$  tada je  $\{\mathcal{C}_j; j \in \text{supp}(\mathbf{x})\}$  egzakti pokrivač skupa  $[m]$  jer inače bi neke od  $m$  komponenti od  $\mathbf{Ax}$  bile jednake od nula.
2. Ako je  $\|\mathbf{x}\|_0 > m/3$  tada ne može postojati egzakti pokrivač  $\{\mathcal{C}_j; j \in J\}$  jer bi u suprotnom vektor  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$  definiran tako da je  $z_j = 1$  ako je  $j \in J$  i  $z_j = 0$  ako je  $j \notin J$ , zadovoljavao  $\mathbf{Az} = \mathbf{y}$  i  $\|\mathbf{z}\|_0 = m/3$ , što je kontradikcija s minimalnosti vektora  $\mathbf{x}$ .

Dakle, rješavanjem problem  $\ell_0$ -minimizacije, možemo riješiti problem egzaktnog pokrivača tročlanim skupovima, pa je stoga i sam problem  $\ell_0$ -minimizacije  $\mathfrak{NP}$ -potpun.  $\square$

Čini se da prethodni teorem predstavlja ozbiljnu zapreku u praktičnom rješavanju problema sažetog uzorkovanja. No primjetimo da teorem tvrdi da je algoritam koji rješava problem  $\ell_0$ -minimizacije, za sve moguće matrice  $\mathbf{A}$  i vektore  $\mathbf{y}$  barem klase  $\mathfrak{NP}$ . Naravno, u samoj praksi nije nužno zahtijevati rekonstrukciju za sve takve matrice i vektore. Naime, pokazat ćemo da postoje algoritmi koji uspješno rekonstruiraju  $\mathbf{x}$  iz  $\mathbf{y}$  za posebno dizajnirane matrice  $\mathbf{A}$ .

## Bibliografija



## Sažetak





# Summary



Životopis