

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Marco Hrlić

**SAŽETO UZORKOVANJE**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
Prof. dr. sc. Damir Bakić

Zagreb, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Albini*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Rijetka rješenja</b>	<b>3</b>
1.1 Rijetko i sažetost vektora . . . . .	3
1.2 Minimalni broj mjerenja . . . . .	10
1.3 NP-složenost $\ell_0$ -minimizacije . . . . .	14
<b>2 Osnovni algoritmi sažetog uzorkovanja</b>	<b>17</b>
2.1 Optimizacijske metode . . . . .	17
2.2 Greedy metode . . . . .	21
2.3 Granične metode . . . . .	24
<b>3 <math>\ell_1</math>-minimizacija</b>	<b>27</b>
3.1 Svojstvo nul-prostora . . . . .	27
3.2 Stabilnost . . . . .	31
3.3 Robusnost . . . . .	34
3.4 Rekonstrukcija predodređenog vektora . . . . .	37
<b>4 Koherencija</b>	<b>41</b>
4.1 Definicija i svojstva . . . . .	41
4.2 Matrice male koherencije . . . . .	43
4.3 Analiza OMP algoritma . . . . .	52
4.4 Analiza $\ell_1$ -minimizacije . . . . .	52
4.5 Analiza graničnih metoda . . . . .	54
<b>5 Svojstvo ograničene izometrije</b>	<b>57</b>
5.1 Definicija i osnovna svojstva . . . . .	57

*SADRŽAJ*

v

**Bibliografija**

**63**

# Uvod

...



# Poglavlje 1

## Rijetka rješenja

### 1.1 Rijetsko i sažetost vektora

Uvedimo potrebnu notaciju. Neka je  $[N]$  oznaka za skup  $\{1, 2, \dots, N\}$  gdje je  $N \in \mathbb{N}$ . Sa  $\text{card}(S)$  označujemo kardinalitet skupa  $S$ . Nadalje,  $\bar{S}$  je komplement od  $S$  u  $[N]$ , tj.  $\bar{S} = [N] \setminus S$ .

**Definicija 1.1.1.** *Nosač vektora  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  je skup indeksa njegovih ne-nul elemenata, tj.*

$$\text{supp}(\mathbf{x}) := \{j \in [N] : x_j \neq 0\}$$

Za vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  kažemo da je  $s$ -rijedak ako vrijedi

$$\|\mathbf{x}\|_0 := \text{card}(\text{supp}(\mathbf{x})) \leq s$$

Primjetimo,

$$\|\mathbf{x}\|_p^p := \sum_{j=1}^N |x_j|^p \xrightarrow{p \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{x_j \neq 0\}} = \text{card}(\{j \in [N] : x_j \neq 0\}) = \|\mathbf{x}\|_0$$

Gdje smo koristili da je  $\mathbf{1}_{\{x_j \neq 0\}} = 1$  ako je  $x_j \neq 0$  te  $\mathbf{1}_{\{x_j \neq 0\}} = 0$  ako je  $x_j = 0$ . Drugim riječima,  $\|\mathbf{x}\|_0$  je limes  $p$ -te potencije  $\ell_p$ -kvazinorme vektora  $\mathbf{x}$  kada  $p$  teži k nuli. Kvazinorma definira se jednako kao standardna  $\ell_p$ -norma, jedino što nejednakost trokuta oslabimo, tj.

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq C(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)$$

za neku konstantu  $C \geq 1$ . Funkciju  $\|\cdot\|_0$  često nazivamo  $\ell_0$ -norma vektora  $x$ , iako ona nije niti norma niti kvazinorma. U samoj praksi, teško je tražiti rijetkost vektora,



pa je stoga prirodno zahtijevati slabiji uvjet *kompresibilnosti*.

**Definicija 1.1.2.**  $\ell_p$ -grešku najbolje  $s$ -rijetke aproksimacije vektora  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  definiramo sa

$$\sigma_s(\mathbf{x})_p := \inf \left\{ \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_p, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N \text{ je } s\text{-rijedak} \right\}$$

Primjetimo da se infimum postiže za svaki  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$  koji ima nenul elemente koji su jednaki sa  $s$  najvećih komponenti vektora  $\mathbf{x}$ . Iako takav  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$  nije jedinstven, on postiže infimum za svaki  $p > 0$ . Neformalno, mogli bi reći da je vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  *kompresibilan* ako greška njegove najbolje  $s$ -rijetke aproksimacije brzo konvergira u  $s$ . Da bi to formalno iskazali, od koristi će biti ocjena na  $\sigma_s(\cdot)_p$ . Pošto nam za to neće biti važan poredak elemenata vektora  $\mathbf{x}$ , uvodimo sljedeću definiciju koja će nam olaksati račun.

**Definicija 1.1.3.** Nerastući poredak vektora  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  je vektor  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^N$  takav da

$$x_1^* \geq x_2^* \geq x_3^* \geq \dots \geq 0$$

te postoji permutacije  $\pi : [N] \rightarrow [N]$  takva da  $x_j^* = |x_{\pi(j)}|$  za sve  $j \in [N]$ .

**Propozicija 1.1.4.** Za svaki  $q > p > 0$  i za svaki  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  vrijedi

$$\sigma_s(\mathbf{x})_q \leq \frac{1}{s^{1/p-1/q}} \|\mathbf{x}\|_p.$$

*Dokaz.* Neka je  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^N$  nerastući poredak vektora  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ . Tada slijedi,

$$\begin{aligned} \sigma_s(\mathbf{x})_q^q &= \sum_{j=s+1}^N (x_j^*)^q = \sum_{j=s+1}^N (x_j^*)^p (x_j^*)^{q-p} \leq (x_s^*)^{q-p} \sum_{j=s+1}^N (x_j^*)^p \\ &\leq \left( \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s (x_j^*)^p \right)^{\frac{q-p}{p}} \left( \sum_{j=s+1}^N (x_j^*)^p \right) \leq \left( \frac{1}{s} \|\mathbf{x}\|_p^p \right)^{\frac{q-p}{p}} \|\mathbf{x}\|_p^p \\ &= \frac{1}{s^{q/p-1}} \|\mathbf{x}\|_p^q \end{aligned}$$

Prva nejednakost slijedi iz činjenice da je  $x_j^* \leq x_s^*$  za svaki  $j \geq s+1$ . Druga nejednakost je također posljedica nerasta komponenti od  $\mathbf{x}^*$ . Potenciranjem obje strane s  $1/q$  slijedi tvrdnja.  $\square$

Primjetimo da ako je  $\mathbf{x}$  iz jedinične  $\ell_p$ -kugle za neki mali  $p > 0$ , onda prethodna propozicija garantira konvergenciju od  $\sigma_s(\mathbf{x})_q$  u  $s$ , gdje  $\ell_p$ -kuglu definiramo kao

$$B_p^N := \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \|\mathbf{z}\|_p \leq 1 \right\}$$

Vratimo se sada ocjeni iz propozicije 1.1.4. Sljedeći teorem daje najmanju konstantu  $c_{p,q}$  takvu da vrijedi  $\sigma_s(\mathbf{x})_q \leq c_{p,q} s^{-1/p+1/q} \|\mathbf{x}\|_p$  te zapravo predstavlja jaču tvrdnju.

**Teorem 1.1.5.** *Za svaki  $q > p > 0$  i za svaki  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  vrijedi*

$$\sigma_s(\mathbf{x})_q \leq \frac{c_{p,q}}{s^{1/p-1/q}} \|\mathbf{x}\|_p$$

gdje je

$$c_{p,q} := \left[ \left( \frac{p}{q} \right)^{p/q} \left( 1 - \frac{p^{1-p/q}}{q} \right) \right]^{1/p} \leq 1.$$

Istaknimo za česti odabir  $p = 1$  i  $q = 2$

$$\sigma_s(\mathbf{x})_2 \leq \frac{1}{2\sqrt{s}} \|\mathbf{x}\|_1$$

*Dokaz.* Neka je  $\mathbf{x}^*$  nerastući poredak vektora  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  i  $\alpha_j := (x_j^*)^p$ . Dokazati ćemo ekvivalentnu tvrdnju

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_N \geq 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N \leq 1 \end{array} \right\} \implies \alpha_{s+1}^{q/p} + \alpha_{s+2}^{q/p} + \dots + \alpha_{s+N}^{q/p} \leq \frac{c_q^q}{s^{q/p-1}} \quad (1.1)$$

Stoga, za  $r := q/p > 1$ , problem se svodi na maksimizaciju konveksne funkcije

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) := \alpha_{s+1}^r + \alpha_{s+2}^r + \dots + \alpha_N^r$$

na konveksnom mnogokutu

$$\mathcal{C} := \{(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N : \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_N \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N \leq 1\}$$

Prema teoremu (todo)  $f$  postiže maksimum na nekom od vrhova mnogokuta  $\mathcal{C}$ , a vrhovi od  $\mathcal{C}$  su dani kao sjecišta  $N$  hiperplohi koje dobijemo tako da u (1.1)  $N$  nejednakosti pretvorimo u jednakosti. Mogućnosti su:

1.  $\alpha_1 = \dots = \alpha_N \implies f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) = 0.$
2.  $\alpha_1 + \dots + \alpha_N = 1$  i  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k > \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_N = 0$  za neki  $1 \leq k \leq s \implies f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) = 0$
3.  $\alpha_1 + \dots + \alpha_N = 1$  i  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k > \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_N = 0$  za neki  $s+1 \leq k \leq N \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 1/k$  te  $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) = (k-s)/k^r$

Dakle, slijedi da

$$\max_{(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathcal{C}} f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) = \max_{s+1 \leq k \leq N} \frac{k-s}{k^r}$$

Shvatimo sada  $k$  kao realnu varijablu i zamjetimo da  $g(k) := (k-s)/k^r$  raste do kritične točke  $k^* = (r/(r-1))s$  nakon koje opada.

$$\max_{(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathcal{C}} f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \leq g(k^*) = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{r-1} \frac{1}{s^r - 1} = c_{p,q}^q \frac{1}{s^{q/p} - 1}$$

□

Alternativni način na koji bi mogli definirati pojam *kompresibilnosti* za vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  je da zahtjevamo da je broj

$$\text{card}(\{j \in [N] : |x_j| \geq t\})$$

tj. broj njegovih značajnih ne-nul komponenti dovoljno mali. Ovaj pristup vodi na definiciju slabih  $\ell_p$ -prostora.

**Definicija 1.1.6.** Za  $p > 0$ , slabi  $\ell_p$ -prostor s oznakom  $w\ell_p^N$  definiramo kao prostor  $\mathbb{C}^N$  sa kvazinormom

$$\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} := \inf \left\{ M \geq 0 : \text{card}(\{j \in [N] : |x_j| \geq t\}) \leq \frac{M^p}{t^p}, \forall t > 0 \right\} \quad (1.2)$$

Da bi pokazali da je (1.2) zapravo kvazinorma, potreban nam je sljedeći rezultat.

**Propozicija 1.1.7.** Neka su  $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k \in \mathbb{C}^N$ . Tada za svaki  $p > 0$  vrijedi

$$\|\mathbf{x}^1 + \dots + \mathbf{x}^k\|_{p,\infty} \leq k^{\max\{1, 1/p\}} (\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty} + \dots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty})$$

*Dokaz.* Neka je  $t > 0$ . Ako je  $|x_j^1 + \dots + x_j^k| \geq t$  za neki  $j \in [N]$ , tada imamo da je  $|x_j^i| \geq t/k$  za neki  $i \in [k]$ . Dakle, vrijedi

$$\{j \in [N] : |x_j^1 + \dots + x_j^k| \geq t\} \subset \bigcup_{i \in [k]} \{j \in [N] : |x_j^i| \geq t/k\}$$

pa je stoga

$$\begin{aligned} \text{card}(\{j \in [N] : |x_j^1 + \dots + k_j^k| \geq t\}) &\leq \sum_{i \in [k]} \frac{\|\mathbf{x}^i\|_{p,\infty}^p}{(t/k)^p} \\ &= \frac{k^p(\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty}^p + \dots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}^p)}{t^p} \end{aligned}$$

Prema definiciji slabe  $\ell_p$ -kvazinorme (1.2) vektora  $\mathbf{x}^1 + \dots + \mathbf{x}^k$  dobivamo

$$\|\mathbf{x}^1 + \dots + \mathbf{x}^k\|_{p,\infty} \leq k(\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty}^p + \dots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}^p)^{1/p}$$

Ako je  $p \leq 1$ , uspoređujući  $\ell_p$  i  $\ell_1$  norme na  $\mathbb{R}^k$  slijedi

$$\left(\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty}^p + \dots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}^p\right)^{1/p} \leq k^{1/p-1}(\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty} + \dots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty})$$

te ako je  $p \geq 1$  slijedi

$$\left(\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty}^p + \dots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}^p\right)^{1/p} \leq \|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty} + \dots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}.$$

Tvrđnja slijedi kombiniranjem dobivenih ocjena. □

Uzmimo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$  i neka je  $\lambda \in \mathbb{C}$  proizvoljan.

1. Neka je  $\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} = 0$ . Iz (1.2) slijedi  $\text{card}(\{j \in [N] : |x_j| \geq t\}) = 0$  za svaki  $t > 0$  pa je stoga broj ne-nul komponenti on  $\mathbf{x}$  jednak nuli, tj.  $\mathbf{x} = 0$
2. Ako je  $\lambda$  nula,  $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$  vrijedi trivijalno. Za  $\lambda \neq 0$ , imamo  $\text{card}(\{j \in [N] : |\alpha x_j| \geq t\}) = \text{card}(\{j \in [N] : |x_j| \geq t/|\alpha|\}) \leq (\alpha M)^p/t^p$  za svaki  $t > 0$ . Dakle, opet  $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$ .
3.  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq C(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)$  je sada direktna posljedica prethodne propozicije.

sljedeća propozicija daje alternativni izraz za slabu  $\ell_p$ -kvazinormu.

**Propozicija 1.1.8.** *Za  $p > 0$ , vrijedi*

$$\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} = \max_{k \in [N]} k^{1/p} x_k^*$$

gdje je  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^N$  nerastući poredak vektora  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ .

*Dokaz.* Primjetimo prvo da iz (1.2) slijedi da je  $\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} = \|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty}$ , pa zapravo pokazujemo da je  $\|\mathbf{x}\| := \max_{k \in [N]} k^{1/p} x_k^* = \|\mathbf{x}^*\|$ . Nadalje, za  $t > 0$  vrijedi da je  $\{j \in [N] : x_j^* \geq t\} = [k]$  za neki  $k \in [N]$  ili je  $\{j \in [N] : x_j^* \geq t\} = \emptyset$ . U prvom

slučaju  $t \leq x_k^* \leq \|\mathbf{x}\|/k^{1/p}$  pa je  $\text{card}(\{j \in [N] : x_j^* \geq t\}) = k \leq \|\mathbf{x}\|/k^{1/p}$ . U drugom slučaju ista nejednakost vrijedi trivijalno. Iz definicije slabe  $\ell_p$ -kvazinorme (1.2) sada dobivamo  $\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty} \leq \|\mathbf{x}\|$ . Pretpostavimo da je  $\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty} < \|\mathbf{x}\|$ . Tada postoji  $\varepsilon > 0$  takav da  $(1 + \varepsilon)\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty} \leq \|\mathbf{x}\|$ . Slijedi da je  $(1 + \varepsilon)\|\mathbf{x}^*\| \leq k^{1/p}x_k^*$  za neki  $k \in [N]$  pa stoga

$$[k] \subseteq \{j \in [N] : (1 + \varepsilon)\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty}/k^{1/p} \leq x_j^*\}$$

Ponovo iz (1.2) imamo

$$k \leq \frac{\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty}^p}{\left((1 + \varepsilon)\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty}k^{1/p}\right)^p} = \frac{k}{(1 + \varepsilon)^p}$$

Kontradikcija, dakle mora vrijediti  $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty}$ . □

Sada lagano možemo usporediti slabi i jaku  $\ell_p$  normu,

**Propozicija 1.1.9.** *Za svaki  $p > 0$  i za svaki  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ ,*

$$\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} \leq \|\mathbf{x}\|_p$$

*Dokaz.* Neka je  $k \in [N]$ ,

$$\|\mathbf{x}\|_p^p = \sum_{j=1}^N (x_j^*)^p \geq \sum_{j=1}^k (x_j^*)^p \geq k(x_k^*)^p$$

Tvrđnja slijedi potenciranjem na  $1/p$  i uzimajući maksimum po  $k$  i primjenom prethodne propozicije. □

Koristeći propoziciju (1.1.8) možemo dobiti verziju ocjene iz propozicije (1.1.4) sa slabom  $\ell_p$  normom.

**Propozicija 1.1.10.** *Za svaki  $q > p > 0$  i  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ , vrijedi*

$$\sigma_s(\mathbf{x})_q \leq \frac{d_{p,q}}{s^{1/p-1/q}} \|\mathbf{x}\|_{p,\infty}$$

gdje je

$$d_{p,q} := \left(\frac{p}{q-p}\right)^{1/q}.$$

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je  $\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} \leq 1$ , pa je  $x_k^* \leq 1/k^{1/p}$  za svaki  $k \in [N]$ . Tada vrijedi,

$$\sigma_s(\mathbf{x})_q^q = \sum_{k=s+1}^N (x_k^*)^q \leq \sum_{k=s+1}^N \frac{1}{k^{q/p}} \leq \int_s^N \frac{1}{t^{q/p}} dt = -\frac{1}{q/p-1} \frac{1}{t^{q/p-1}} \Big|_{t=s}^{t=N} \leq \frac{p}{q-p} \frac{1}{s^{q/p-1}}.$$

Potenciranjem sa  $1/q$  slijedi tvrdnja.  $\square$

Prethodna propozicija daje da su vektori  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  koji su kompresibilni u smislu  $\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} \leq 1$  za mali  $p > 0$ , također kompresibilni u smislu da greška njihove najbolje  $s$ -rijetke aproksimacije brzo konvergira sa  $s$ . Iskažimo još jedan tehnički rezultat,

**Lema 1.1.11.** *Neka su  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$ . Tada vrijedi,*

$$\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}^*\|_\infty \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty \quad (1.3)$$

*Nadalje, za  $s \in [N]$ ,*

$$|\sigma_s(\mathbf{x})_1 - \sigma_s(\mathbf{y})_1| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 \quad (1.4)$$

*i za  $k > s$ ,*

$$(k-s)x_k^* \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 + \sigma_s(\mathbf{y})_1 \quad (1.5)$$

*Dokaz.* Za  $j \in [N]$ , skup indeksa  $j$  najvećih komponenti vektora  $\mathbf{x}$  ima ne-trivijalni presjek sa skupom od  $N-j+1$  najmanjih komponenti vektora  $\mathbf{y}$ . Izaberimo indeks  $l$  iz tog presjeka. Tada vrijedi,

$$x_j^* \leq |x_l| \leq |y_l| + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty \leq z_j^* + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty$$

Zamjenom uloga od  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{y}$  slijedi (1.3). Neka je  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^N$  najbolja  $s$ -rijetka aproksimacija vektora  $\mathbf{y}$ . Tada

$$\sigma_s(\mathbf{x})_1 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|_1 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 + \|\mathbf{y} - \mathbf{v}\|_1 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 + \sigma_s(\mathbf{y})_1$$

Ponovno, zbog simetrije slijedi (1.4). Napokon, ocjena (1.5) slijedi iz (1.4) te iz činjenice

$$(k-s)x_k^* \leq \sum_{j=s+1}^k x_j^* \leq \sum_{j \geq s+1} x_j^* = \sigma_s(\mathbf{x})_1.$$

$\square$

## 1.2 Minimalni broj mjerenja

Problem sažetog uzorkovanja sastoji se od rekonstrukcije  $s$ -rijetkog vektora  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  iz sustava

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Matricu  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  nazivamo *matrica mjerenja*. Ako je  $m < N$ , za ovakav sustav linearnih jednadžbi kažemo da je *neodređen*. Iako iz klasične teorije linearne algebre ovakvi sustavi imaju beskonačno mnogo rješenja, pokazati će se da je dodatna pretpostavka rijetkosti vektora  $\mathbf{x}$  dovoljno za jedinstvenost rješenja. U ovom poglavlju istražiti ćemo koji je minimalni broj mjerenja, tj.  $m$  broj redaka matrice  $\mathbf{A}$ , koji garantira rekonstrukciju  $s$ -rijetkog vektora  $\mathbf{x}$ . Zapravo, postoje dva pristupa ovom problemu. Možemo zahtijevati da problem mjerenja rekonstruira sve  $s$ -rijetke vektore  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  istodobno ili možemo tražiti rekonstrukciju specifičnog, tj. predodređenog vektora  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ . Taj pristup čini se neprirodan, no pokazuje se da je on važan u proučavanju problema gdje matricu  $\mathbf{A}$  biramo nasumično.

Pokažimo da su za danu rijetkost  $s$ , matricu  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  i  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ , naredne tvrdnje ekvivalentne:

1. Vektor  $\mathbf{x}$  je jedinstveno  $s$ -rijetko rješenje sustava  $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y}$  gdje je  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , tj.  $\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \|\mathbf{z}\|_0 \leq s\} = \{\mathbf{x}\}$
2. Vektor  $\mathbf{x}$  je jedinstveno rješenje problema minimizacije

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N} \|\mathbf{z}\|_0 \quad \text{uz uvjet } \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y} \quad (P_0)$$

Ako je  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  jedinstveno  $s$ -rijetko rješenje od  $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y}$  takvo da je  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , onda rješenje  $\mathbf{x}^\#$  od  $(P_0)$  je  $s$ -rijetko i zadovoljava  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$  pa je  $\mathbf{x}^\# = \mathbf{x}$ . Drugi smjer slijedi trivijalno.

### Rekonstrukcija svih rijetkih vektora

Neka je  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  i  $S \subset [N]$ , sa  $\mathbf{A}_S$  označujemo matricu formiranu od stupaca od  $\mathbf{A}$  indeksiranih sa  $S$ . Slično, sa  $\mathbf{x}_S$  označujemo ili vektor iz  $\mathbb{C}^S$  koji se sastoji od komponenti vektora  $\mathbf{x}$  indeksiranih po  $S$ , tj.  $(\mathbf{x}_S)_l = x_l$  za sve  $l \in S$ , ili vektor iz  $\mathbb{C}^N$  koji se podudara s  $\mathbf{x}$  na komponentama indeksiranim u  $S$  i jednak je nula na indeksima koji nisu u  $S$ , tj.  $(\mathbf{x}_S)_l = x_l$  za  $l \in S$  i  $(\mathbf{x}_S)_l = 0$  za  $l \notin S$ . Iz konteksta će uvijek biti jasno na koju definiciju se misli.

**Teorem 1.2.1.** *Neka je  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$ . Ekvivalentno je:*

- (a) Svaki  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  je jedinstveno rješenje od  $\mathbf{Ax} = \mathbf{Az}$ , tj. ako je  $\mathbf{Ax} = \mathbf{Az}$  i ako su  $\mathbf{x}, \mathbf{z}$  oboje  $s$ -rijetki tada  $\mathbf{x} = \mathbf{z}$ .
- (b) Jezgra od  $\mathbf{A}$  ne sadrži niti jedan  $2s$ -rijedak vektor osim nul-vektora, tj.  $\ker \mathbf{A} \cap \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \|\mathbf{z}\|_0 \leq 2s\} = \{\mathbf{0}\}$
- (c) Za svaki  $S \subset [N]$  takav da  $\text{card}(S) \leq 2s$ , podmatrica  $\mathbf{A}_S$  je injektivna kao preslikavanje sa  $\mathbb{C}^S$  u  $\mathbb{C}^m$ .
- (d) Svaki skup od  $2s$  stupaca matrice  $\mathbf{A}$  je linearno nezavisan skup.

*Dokaz.* (b)  $\implies$  (a). Neka su  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{z}$   $s$ -rijetki vektori takvi da  $\mathbf{Ax} = \mathbf{Az}$ . Tada je  $\mathbf{x} - \mathbf{z}$   $2s$ -rijedak i  $\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) = \mathbf{0}$ . Pošto  $\ker \mathbf{A}$  ne sadrži  $2s$ -rijetke vektore osim nul-vektora, mora vrijediti  $\mathbf{x} = \mathbf{z}$ .

(a)  $\implies$  (b). Obratno, pretpostavimo da za svaki  $s$ -rijetki vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  vrijedi  $\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \mathbf{Az} = \mathbf{Ax}, \|\mathbf{z}\|_0 \leq s\} = \{\mathbf{x}\}$ . Neka je  $\mathbf{v} \in \ker \mathbf{A}$ ,  $2s$ -rijedak. Tada  $\mathbf{v}$  možemo rastaviti kao  $\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{z}$  gdje su  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{z}$   $s$ -rijetki takvi da  $\text{supp}(\mathbf{x}) \cap \text{supp}(\mathbf{z}) = \emptyset$ . Imamo da je  $\mathbf{Ax} = \mathbf{Az}$  pa prema pretpostavci vrijedi  $\mathbf{x} = \mathbf{z}$ . Pošto su nosači od  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{z}$  disjunktni, mora vrijediti  $\mathbf{x} = \mathbf{z} = \mathbf{0}$  pa je stoga i  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

(b)  $\implies$  (c). Pretpostavimo suprotno,  $\ker \mathbf{A} \cap \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \|\mathbf{z}\|_0 \leq 2s\} = \{\mathbf{0}\}$  i da postoji  $S \in [N]$  takav da je  $\text{card}(S) \leq 2s$  te da  $\mathbf{A}_S$  nije injektivna. To znači da postoji vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{\text{card}(S)} \setminus \{\mathbf{0}\}$  takav da je  $\mathbf{A}_S \mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Definiramo vektor  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^N$  sa

$$\tilde{x}_j = \begin{cases} x_j & \text{za } j \in S \\ 0 & \text{za } j \in \bar{S} \end{cases}$$

Dakle, imamo  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ,  $\|\mathbf{x}\|_0 \leq 2s$  i vrijedi  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ , tj.  $\mathbf{x} \in \ker \mathbf{A}$ . Kontradikcija s (b).

(c)  $\implies$  (d). Odaberimo  $2s$  stupaca od  $\mathbf{A}$ . Skup indeksa tih stupaca označimo sa  $S$ . Prema (c), matrica  $\mathbf{A}_S$  je injektivna, a to znači da su njeni stupci linearno nezavisni, pa su stoga i  $2s$  odabranih stupaca matrice  $\mathbf{A}$  linearno nezavisni.

(d)  $\implies$  (b). Pretpostavimo da jezgra od  $\mathbf{A}$  sadrži  $2s$ -rijedak ne-nul vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ . Neka je  $S$  skup indeksa ne-nul elemenata vektora  $\mathbf{x}$ . To znači da je  $\mathbf{A}_S \mathbf{x}_S = \mathbf{0}$ , i  $\mathbf{x}_S \neq \mathbf{0}$ . Dakle  $\mathbf{A}_S$  nije injektivna, pa stoga i skup stupaca od  $\mathbf{A}$  indeksiranih sa  $S$  nije linearno nezavisan, što je kontradikcija sa (d).

□



Uočimo da ako je moguće rekonstruirati svaki  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  iz vektora mjerenja  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$ , tada vrijedi (a). Prema prošlom teoremu tada vrijedi i tvrdnja (d) pa je stoga  $\text{rank}(\mathbf{A}) \geq 2s$ . Također vrijedi da je  $\text{rank}(\mathbf{A}) \leq m$  pa imamo

$$m \geq 2s.$$

To znači da je potrebno barem  $2s$  mjerenja da bi rekonstruirali svaki  $s$ -rijedak vektor. Pokazati ćemo da je, makar u teoriji, dovoljno točno  $2s$  mjerenja.

**Teorem 1.2.2.** *Za svaki  $N \geq 2s$ , postoji matrica mjerenja  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2s \times N}$  takva da se svaki  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  može rekonstruirati iz vektora mjerenja  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$  kao rješenje problema minimizacije ( $P_0$ ).*

*Dokaz.* Fiksirajmo  $t_N > \dots t_2 > t_1 > 0$  i neka je  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2s \times N}$  dana sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_N \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ t_1^{2s-1} & t_2^{2s-1} & \dots & t_N^{2s-1} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Nadalje, neka je  $S = \{j_1 < \dots < j_{2s}\}$  skup indeksa. Matrica  $\mathbf{A}_S \in \mathbb{C}^{2s \times 2s}$  je transponirana *Vandermonтова matrica*. Prema (TODO) slijedi

$$\det(\mathbf{A}_S) = \prod_{k < l} (t_{j_l} - t_{j_k}) > 0.$$

To znači da je matrica  $\mathbf{A}$  invertibilna, pa posebno i injektivna. Tada je zadovoljena tvrdnja (c) teorema (1.2.1), pa je po istom teoremu zadovoljena i tvrdnja (a), tj. svaki  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  zadovoljava  $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ . Stoga je taj vektor moguće jedinstveno rekonstruirati putem minimizacije ( $P_0$ ).  $\square$

Zapravo, mnogo matrica zadovoljava uvjet (c) iz teorema (1.2.1). Na primjer, potencije od  $t_1, \dots, t_N$  u (1.6) ne moraju biti uzastopne. Nadalje, brojevi  $t_1, \dots, t_N$  ne moraju biti pozitivni, niti realni sve dok vrijedi  $\det(\mathbf{A}_S) \neq 0$ . Posebno, možemo uzeti  $t_l = e^{2\pi i(l-1)/N}$  za  $l \in [N]$ , teorem (TODO) garantira da parcijalna Fourierova matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{2\pi i/N} & e^{2\pi i 2/N} & \dots & e^{2\pi i(N-1)/N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{2\pi i(2s-1)/N} & e^{2\pi i(2s-1)2/N} & \dots & e^{2\pi i(2s-1)(N-1)/N} \end{bmatrix}$$

rekonstruira svaki  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  iz  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{2s}$ . Zapravo može se pokazati da skup  $(2s) \times N$  matrica takvih da  $\det(\mathbf{A}_S) = 0$  za neki  $S \subset [N]$  i  $\text{card}(S) \leq 2s$  ima Lebesgueovu mjeru nula, pa stoga gotovo sve  $(2s) \times N$  matrice rekonstruiraju svaki  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  iz  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{2s}$ . Međutim u praksi nije isplativo rješavati problem minimizacije ( $P_0$ ), što ćemo kasnije i pokazati.

## Rekonstrukcija zadanog rijetkog vektora

Promatramo problem gdje je  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  unaprijed zadan i poznat, a matricu  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  želimo odabrati tako da ona garantira rekonstrukciju vektora  $\mathbf{x}$  iz mjerenja  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$ . Isprva, ovakva pristup izgleda neprirodan zbog činjenice da je vektor  $\mathbf{x}$  apriorno poznat. Ideja je da će uvjeti rekonstrukcije vrijediti za gotovo sve  $(s+1) \times N$  matrice, što podupire činjenicu da se u praksi matrice mjerenja često odabiru na nasumičan način.

**Teorem 1.2.3.** *Za svaki  $N \geq s+1$  i za dani  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ , postoji matrica mjerenja  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{(s+1) \times N}$ , takva da se vektor  $\mathbf{x}$  može rekonstruirati iz mjerenja  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$  kao rješenje minimizacije ( $P_0$ ).*

*Dokaz.* Neka je  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{(s+1) \times N}$  matrica za koju se  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x}$  ne može rekonstruirati iz  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  putem minimizacije ( $P_0$ ). To znači da postoji vektor  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$  različit od  $\mathbf{x}$ , takav da  $S = \text{supp}(\mathbf{z}) = \{j_1, \dots, j_s\}$ ,  $\text{card}(S) \leq s$  (ako je  $\|\mathbf{z}\|_0 < s$ , u  $S$  dodamo proizvoljne elemente  $j_l \in [N]$ ) i  $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ . Ako je  $\text{supp}(\mathbf{x}) \subset S$ , tada iz  $(\mathbf{A}(\mathbf{z} - \mathbf{x}))_{[s]} = 0$  slijedi da  $\mathbf{A}_{[s],S}$  nije invertibilna, tj.

$$f(a_{1,1}, \dots, a_{1,N}, \dots, a_{m,1}, \dots, a_{m,N}) := \det(\mathbf{A}_{[s],S}) = 0.$$

Ako  $\text{supp}(\mathbf{x}) \not\subset S$  tada je dimenzija prostora  $V := \{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^N : \text{supp}(\mathbf{u}) \subset S\} + \mathbb{C}\mathbf{x}$  jednaka  $s+1$ , i linearno preslikavanje  $G : V \rightarrow \mathbb{C}^{s+1}$ ,  $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{v}$  nije invertibilno, pošto je  $G(\mathbf{z} - \mathbf{x}) = 0$ . Matrica linearnog preslikavanja  $G$  u bazi  $(\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_s}, \mathbf{x})$  prostora  $V$ , je oblika

$$B_{\mathbf{x},S} := \begin{bmatrix} a_{1,j_1} & \cdots & a_{1,j_s} & \sum_{j \in \text{supp}(\mathbf{x})} x_j a_{1,j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{s+1,j_1} & \cdots & a_{s+1,j_s} & \sum_{j \in \text{supp}(\mathbf{x})} x_j a_{s+1,j} \end{bmatrix}$$

i imamo

$$g_S(a_{1,1}, \dots, a_{1,N}, \dots, a_{m,1}, \dots, a_{m,N}) := \det(B_{\mathbf{x},S}) = 0.$$

Dakle, vrijedi

$$(a_{1,1}, \dots, a_{1,N}, \dots, a_{m,1}, \dots, a_{m,N}) \in f^{-1}(\{0\}) \cup \bigcup_{\text{card}(S)=s} g_S^{-1}(\{0\}).$$

Primjetimo da su skupovi  $f^{-1}(\{0\})$  i  $g_S^{-1}(\{0\})$  Lebesgueove mjere nula iz razloga što su  $f$  i  $g_S$  polinomi u varijablama  $(a_{1,1}, \dots, a_{1,N}, \dots, a_{m,1}, \dots, a_{m,N})$ . Dakle, elemente matrice  $\mathbf{A}$  moramo izabrati izvan skupa mjere nula, da bi osigurali rekonstrukciju vektora  $\mathbf{x}$  iz  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ .  $\square$

### 1.3 NP-složenost $\ell_0$ -minimizacije

Kao što smo najavili, pokazati ćemo da je u praksi neisplativo rješavati problem  $\ell_0$ -minimizacije u svrhu rekonstrukcije vektora  $\mathbf{x}$  iz mjerenja  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ . Prisjetimo se, problem koji rješavamo je oblika,

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N} \|\mathbf{z}\|_0 \quad \text{uz uvjet } \mathbf{Az} = \mathbf{y}.$$

Pošto je minimizator najviše  $s$ -rijedak, najjednostavniji algoritam za rješavanje ovog problema je riješiti sve pravokutne sustave  $\mathbf{A}_S \mathbf{u} = \mathbf{y}$  ili sve kvadratne sustave oblika  $\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S \mathbf{u} = \mathbf{A}_S^* \mathbf{y}$  za svaki  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^S$  gdje  $S$  ide po svim poskupovima od  $[N]$ , veličine  $s$ . No ispada da broj podskupova  $\binom{N}{s}$ , što za male probleme sa  $N = 1000$  i  $s = 10$ , iznosi  $\binom{1000}{10} \geq \left(\frac{1000}{10}\right)^{10} = 10^{20}$ . Kada bi jedan  $10 \times 10$  sustav mogli riješiti u  $10^{-10}$  sekundi, trebalo bi nam više od 300 godina da sve riješimo. Sada ćemo pokazati zašto je zapravo općenitiji problem

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N} \|\mathbf{z}\|_0 \quad \text{uz uvjet } \|\mathbf{Az} - \mathbf{y}\|_2 \leq \eta \quad (P_{0,\eta})$$

NP-težak.

Uvedimo prvo potrebne pojmove iz kompleksnosti algoritama. Za algoritam kažemo da je *polinomijalnog-vremena* ako je broj koraka do rješenja ograničen polinomom u varijabli veličine ulaza. Nadalje, uvedimo neformalne definicije klasa problema odlučivanja:

- $\mathfrak{P}$ : Svi problemi odlučivanja za koje postoji algoritam polinomijalnog vremena koji daje rješenje.
- $\mathfrak{NP}$ : Svi problemi odlučivanja za koje postoji algoritam polinomijalnog vremena koji provjerava točnost rješenja.

- **NP-teški:** Svi problemi (ne nužno problemi određivanja) za koje se algoritam za rješenje može u polinomijalnom vremenu transformirati u algoritam rješenja za bilo koji NP problem.
- **NP-potpuni:** Svi problemi koji su istovremeno NP i NP-teški.

Pitanje je li P strogo sadržano u NP do dan danas nije odgovoreno. No, vjeruje se da postoje problemi za koje ne postoji algoritam rješenja polinomijalnog vremena, ali postoji algoritam koji će provjeriti točnost rješenja u polinomijalnom vremenu. Najpoznatiji NP-potpun problem je problem putujućeg prodavača. No, iskoristiti ćemo problem egzaktnog pokrivača tročlanim skupovima da bi pokazali da je problem  $(P_{0,\eta})$  NP-težak.

### Egzaktni pokrivač tročlanim skupovima

Za danu kolekciju  $\{\mathcal{C}_i; i \in [N]\}$  tročlanih podskupova od  $[m]$ , postoji li egzaktni pokrivač skupa  $[m]$ , tj. postoji li  $J \subset [N]$  takav da  $\cup_{j \in J} \mathcal{C}_j = [m]$ , gdje je  $\mathcal{C}_j \cap \mathcal{C}_k = \emptyset$  za svaki  $j, k \in J$  različiti? Poznato je da je taj problem NP-potpun (vidi TODO).

**Teorem 1.3.1.** *Za svaki  $\eta \geq 0$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  i  $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$ , problem minimizacije  $(P_{0,\eta})$  je NP-potpun.*

*Dokaz.* Zbog linearnosti problema  $(P_{0,\eta})$ , možemo uzeti da je  $\eta < 1$ . Pokazati ćemo da se problem egzaktnog pokrivača može u polinomijalnom vremenu reducirati na problem  $\ell_0$ -minimizacije. Neka je  $\{\mathcal{C}_i; i \in [N]\}$  kolekcija tročlanih podskupova  $[m]$ . Definirajmo vektora  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N \in \mathbb{C}^m$

$$(\mathbf{a}_i)_j = \begin{cases} 1 & \text{za } j \in \mathcal{C}_i, \\ 0 & \text{za } j \notin \mathcal{C}_i \end{cases}$$

Definiramo matricu  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  i vektor  $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$  sa

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_N], \quad \mathbf{y} = [1, 1, \dots, 1]^T.$$

Pošto je  $N \leq \binom{m}{3}$ , to možemo napraviti u polinomijalnom vremenu. Ako  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$  zadovoljava  $\|\mathbf{Az} - \mathbf{y}\|_2 \leq \eta$ , tada su svih  $m$  komponenti od  $\mathbf{Az}$  udaljene od 1 za najviše  $\eta$ , pa su te komponente različite od nula, jer smo  $\eta$  uzeli manji od 1. Dakle, vrijedi  $\|\mathbf{Az}\|_0 = m$ . Ali pošto svaki od vektora  $\mathbf{a}_i$  imam točno tri ne-nul komponente, vektor  $\mathbf{Az} = \sum_{j=1}^N z_j \mathbf{a}_j$  ima najviše  $r\|\mathbf{z}\|_0$  ne-nul elemenata, tj.  $\|\mathbf{Az}\|_0 \leq 3\|\mathbf{z}\|_0$ . Dakle, za svaki vektor  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$  koji zadovoljava  $\|\mathbf{Az} - \mathbf{y}\|_2 \leq \eta$  vrijedi  $\|\mathbf{z}\|_0 \geq m/3$ . Neka je sada  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  rješenje  $\ell_0$ -minimizacije  $(P_{0,\eta})$ . Imamo dva slučaja za normu vektora  $\mathbf{x}$ :

1. Ako je  $\|\mathbf{x}\|_0 = m/3$  tada je  $\{\mathcal{C}_j; j \in \text{supp}(\mathbf{x})\}$  egzakti pokrivač skupa  $[m]$  jer inače bi neke od  $m$  komponenti od  $\mathbf{Ax}$  bile jednake od nula.
2. Ako je  $\|\mathbf{x}\|_0 > m/3$  tada ne može postojati egzakti pokrivač  $\{\mathcal{C}_j; j \in J\}$  jer bi u suprotnom vektor  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$  definiran tako da je  $z_j = 1$  ako je  $j \in J$  i  $z_j = 0$  ako je  $j \notin J$ , zadovoljavao  $\mathbf{Az} = \mathbf{y}$  i  $\|\mathbf{z}\|_0 = m/3$ , što je kontradikcija s minimalnosti vektora  $\mathbf{x}$ .

Dakle, rješavanjem problem  $\ell_0$ -minimizacije, možemo riješiti problem egzaktnog pokrivača tročlanim skupovima, pa je stoga i sam problem  $\ell_0$ -minimizacije  $\mathfrak{NP}$ -potpun.  $\square$

Čini se da prethodni teorem predstavlja ozbiljnu zapreku u praktičnom rješavanju problema sažetog uzorkovanja. No primjetimo, teorem tvrdi da je algoritam koji rješava problem  $\ell_0$ -minimizacije, za sve moguće matrice  $\mathbf{A}$  i vektore  $\mathbf{y}$  barem klase  $\mathfrak{NP}$ . Naravno, u samoj praksi nije nužno zahtijevati rekonstrukciju za sve takve matrice i vektore. Naime, pokazat ćemo da postoje algoritmi koji uspješno rekonstruiraju  $\mathbf{x}$  iz  $\mathbf{y}$  za posebno dizajnirane matrice  $\mathbf{A}$ .

## Poglavlje 2

# Osnovni algoritmi sažetog uzorkovanja

Algoritmi za rješavanje problema sažetog uzorkovanja, koje ćemo predstaviti, podijeljeni su u tri kategorije: optimizacije, greedy metode i granične metode. U ovom poglavlju dati ćemo samo pregled najpopularnijih algoritama, dok ćemo formalnu analizu nekih od njih ostaviti za kasnije, nakon što razvijemo potrebne teorijske alate.

### 2.1 Optimizacijske metode

Općeniti problem optimizacije je oblika

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N} F_0(\mathbf{x}) \quad \text{uz uvjet } F_i(\mathbf{x}) \leq b_i, \quad i \in [n]$$

gdje  $F_0 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  zovemo *funkcija cilja*, a funkcije  $F_1, \dots, F_n : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  zovemo *funkcije ograničenja*. Ako su  $F_0, F_1, \dots, F_n$  konveksne funkcije, tada ovaj problem zovem *problem konveksne optimizacije*. Ako su te funkcije linearne, tada je to *problem linearnog programiranja*. Primjetimo da je problem rekonstrukcije rijetkog vektora ( $P_0$ ), zapravo problem minimizacije. No, nažalost taj problem nije konveksan i kao što smo u prethodnom poglavlju pokazali, općenito je  $\mathfrak{NP}$ -težak. Prisjetimo se da  $\|\mathbf{z}\|_q^q$  konvergira k  $\|\mathbf{z}\|_0$  za  $q \rightarrow 0^+$ , pa je prirodno ( $P_0$ ) aproksimirati problemom

$$\min \|\mathbf{z}\|_q \quad \text{uz uvjet } \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y} \quad (P_q)$$

Pokaže se da za  $q > 1$ , čak 1-rijetki vektori nisu rješenja od ( $P_q$ ). Dok za  $0 < q < 1$ , ( $P_q$ ) ponovno nije konveksan i dalje je općenito  $\mathfrak{NP}$ -težak. Za  $q = 1$ , problem postaje

konveksan

$$\min \|\mathbf{z}\|_1 \quad \text{uz uvjet } \mathbf{Az} = \mathbf{y}. \quad (P_1)$$

To je zapravo konveksna relaksacija problema ( $P_0$ ) i zovemo ga  $\ell_1$ -minimizacija ili BP algoritam (eng. *basis pursuit*).

### $\ell_1$ -minimizacija (BP)

*Ulaz:* Matrica mjerenja  $\mathbf{A}$ , vektor mjerenja  $\mathbf{y}$ .

*Problem:*

$$\mathbf{x}^\# = \arg \min \|\mathbf{z}\|_1 \quad \text{uz uvjet } \mathbf{Az} = \mathbf{y} \quad (\ell_1 - \min)$$

*Izlaz:* vektor  $\mathbf{x}^\#$

Pokažimo sada da su  $\ell_1$ -minimizatori rijetki vektori u realnom slučaju.

**Teorem 2.1.1.** *Neka je  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times N}$  matrica mjerenja sa stupcima  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N$ . Ako je  $\mathbf{x}^\#$  minimizator od*

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N} \|\mathbf{z}\|_1 \quad \text{uz uvjet } \mathbf{Az} = \mathbf{y},$$

*tada je skup  $\{\mathbf{a}_j, j \in \text{supp}(\mathbf{x}^\#)\}$  linearno nezavisan i vrijedi*

$$\|\mathbf{x}^\#\|_0 = \text{card}(\text{supp}(\mathbf{x}^\#)) \leq m.$$

*Dokaz.* Pretpostavimo suprotno, tj. da je skup  $\{\mathbf{a}_j, j \in \text{supp}(\mathbf{x}^\#)\}$  linearno zavisn. Neka je  $S = \text{supp}(\mathbf{x}^\#)$ . To znači da postoji ne-nul vektor  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$  sa nosačem na  $S$  takav da  $\mathbf{Av} = \mathbf{0}$ . Tada za svaki  $t \neq 0$

$$\|\mathbf{x}^\#\|_1 < \|\mathbf{x}^\# + t\mathbf{v}\|_1 = \sum_{j \in S} |x_j^\# + tv_j| = \sum_{j \in S} \text{sgn}(x_j^\# + tv_j)(x_j^\# + tv_j)$$

Ako je  $|t|$  dovoljno mali, tj.  $|t| < \min_{j \in S} |x_j^\#| / \|\mathbf{v}\|_\infty$  onda vrijedi

$$\text{sgn}(x_j^\# + tv_j) = \text{sgn}(x_j^\#) \quad \text{za svaki } j \in S.$$

Dakle, za  $0 < |t| < \min_{j \in S} |x_j^\#| / \|\mathbf{v}\|_\infty$  slijedi

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^\#\|_1 &< \sum_{j \in S} \operatorname{sgn}(x_j^\#)(x_j^\# + tv_j) = \sum_{j \in S} \operatorname{sgn}(x_j^\#)(x_j^\#) + t \sum_{j \in S} \operatorname{sgn}(x_j^\#)v_j \\ &= \|\mathbf{x}^\#\|_1 + t \sum_{j \in S} \operatorname{sgn}(x_j^\#)v_j. \end{aligned}$$

No, to je kontradikcija jer  $t \neq 0$  možemo odabrati dovoljno mali tako da je  $t \sum_{j \in S} \operatorname{sgn}(x_j^\#)v_j \leq 0$ .  $\square$

U realnom slučaju,  $(P_1)$  možemo reinterpretirati kao problem linearnog programiranja, tako da uvedemo pomoćne varijable  $\mathbf{z}^+$ ,  $\mathbf{z}^- \in \mathbb{R}^N$  definirane sa

$$z_j^+ = \begin{cases} z_j & \text{za } z_j > 0, \\ 0 & \text{za } z_j \leq 0 \end{cases} \quad z_j^- = \begin{cases} 0 & \text{za } z_j > 0, \\ -z_j & \text{za } z_j \leq 0 \end{cases}$$

za svaki  $j \in [N]$ . Tada je problem  $(P_1)$  ekvivalentan problemu

$$\min_{\mathbf{z}^+, \mathbf{z}^- \in \mathbb{R}^N} \sum_{j=1}^N (z_j^+ + z_j^-) \quad \text{uz uvjet} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}^+ \\ \mathbf{z}^- \end{bmatrix} = \mathbf{y}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{z}^+ \\ \mathbf{z}^- \end{bmatrix} \geq 0. \quad (P'_1)$$

Isto ne vrijedi za kompleksni slučaj. Tu činjenicu pokazati ćemo na općenitijim problemu,

$$\min \|\mathbf{z}\|_1 \quad \text{uz uvjet} \quad \|\mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{y}\|_2 \leq \eta. \quad (P_{1,\eta})$$

Taj problem je zapravo pogodniji za praksu, pošto vektor  $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$  ne možemo izmjeriti s beskonačnom točnošću, već uz neku grešku  $\mathbf{e} \in \mathbb{C}^m$  pa je stoga

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{e}.$$

Takvoj greški često možemo ocjeniti  $\ell_2$ -normu, pošto ona ima interpretaciju energije,

$$\|\mathbf{e}\|_2 \leq \eta, \quad \text{za neki } \eta > 0.$$

Za dani vektor  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ , neka su  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$  njegovi realni i imaginarni dijelovi te neka je  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^N$  takav da je  $c_j \geq |z_j| = \sqrt{u_j^2 + v_j^2}$  za sve  $j \in [N]$ . Problem  $(P_{1,\eta})$  je tada ekvivalentan problemu

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{c}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N} \sum_{j=1}^N c_j \quad \text{uz uvjete} \quad & \left\| \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\mathbf{A}) & -\operatorname{Im}(\mathbf{A}) \\ \operatorname{Im}(\mathbf{A}) & \operatorname{Re}(\mathbf{A}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\mathbf{y}) \\ \operatorname{Im}(\mathbf{y}) \end{bmatrix} \right\|_2 \leq \eta \\ & \sqrt{u_j^2 + v_j^2} \leq c_j, \quad \forall j \in [N]. \end{aligned} \quad (P'_{1,\eta})$$



Ovo je *problem konike drugog reda*. Primjetimo da za  $\eta = 0$  dobivamo formulaciju problema  $(P_1)$  za kompleksni slučaj u takvom obliku.

Princip rješavanja  $(P_{1,\eta})$  zove se *kvadratično ograničena  $\ell_1$ -minimizacija* ili  *$\ell$ -minimizacija osjetljiva na šum* (eng. *quadratically constrained basis pursuit*).

### Kvadratično ograničena $\ell_1$ -minimizacija

*Ulaz:* Matrica mjerenja  $\mathbf{A}$ , vektor mjerenja  $\mathbf{y}$ , razina šuma  $\eta$ .

*Problem:*

$$\mathbf{x}^\sharp = \arg \min \|\mathbf{z}\|_1 \quad \text{uz uvjet } \|\mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{y}\|_2 \leq \eta \quad (\ell_1 - \min_\eta)$$

*Izlaz:* vektor  $\mathbf{x}^\sharp$

Rješenje  $\mathbf{x}^\sharp$  povezano je s rješenjem problema  $\ell_1$ -minimizacije sa ugrađenim uklanjanjem šuma

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N} \lambda \|\mathbf{z}\|_1 + \|\mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{y}\|_2^2 \quad (2.1)$$

za neki  $\lambda \geq 0$ . Također povezano je s rješenjem *LASSO* problema, za neki  $\tau \geq 0$ ,

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N} \|\mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{y}\|_2 \quad \text{uz uvjet } \|\mathbf{z}\|_1 \leq \tau \quad (2.2)$$

To upravo tvrdi naredna propozicija.

**Propozicija 2.1.2.** (a) *Ako je  $\mathbf{x}$  minimizator problema (2.1) sa  $\lambda > 0$ , onda postoji  $\eta = \eta_{\mathbf{x}} \geq 0$  takva da je  $\mathbf{x}$  minimizator kvadratično ograničene  $\ell_1$ -minimizacije  $(P_{1,\eta})$ .*

(b) *Ako je  $\mathbf{x}$  jedinstveni minimizator problema  $(P_{1,\eta})$  sa  $\eta \geq 0$ , onda postoji  $\tau = \tau_{\mathbf{x}} \geq 0$  takav da je  $\mathbf{x}$  minimizator *LASSO* problema (2.2).*

(c) *Ako je  $\mathbf{x}$  minimizator *LASSO* problema (2.2), onda postoji  $\lambda = \lambda_{\mathbf{x}} \geq 0$  takva da je  $\mathbf{x}$  minimizator problema (2.1).*

*Dokaz.* (a) Neka je  $\eta := \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$  i  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$  takav da je  $\|\mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{y}\|_2 \leq \eta$ . Pošto je prema pretpostavci  $\mathbf{x}$  minimizator od (2.1) slijedi,

$$\lambda \|\mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 \leq \lambda \|\mathbf{z}\|_1 + \|\mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{y}\|_2^2 \leq \lambda \|\mathbf{z}\|_1 + \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2.$$

Dakle slijedi da je  $\|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{y}\|_1$ , pa je  $\mathbf{x}$  minimizator problema  $(P_{1,\eta})$

(b) Neka je  $\eta := \|\mathbf{x}\|_1$  i neka je  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N \setminus \{\mathbf{x}\}$  takav da je  $\|\mathbf{z}\|_1 \leq \tau$ . Pošto je  $\mathbf{x}$  jedinstveni minimizator od  $(P_{1,\eta})$  to znači da  $\mathbf{z}$  ne može zadovoljavati uvjet iz  $(P_{1,\eta})$ , pa stoga  $\|\mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{y}\|_2 > \eta \geq \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$ . Dakle,  $\mathbf{x}$  je jedinstveni minimizator *LASSO* problema.

(c) Za dokaz ove tvrdnje potrebni su alati konveksne analize, vidi (TODO).

□

## 2.2 Greedy metode

Upoznati ćemo se sa dva iterativna greedy algoritma koji se često koriste u kontekstu sažetog uzorkovanja. Prvo algoritam koji ćemo proučiti zove se *OMP* (skraćenica od eng. *orthogonal matching pursuit*).

### OMP

*Ulaz:* Matrica mjerenja  $\mathbf{A}$ , vektor mjerenja  $\mathbf{y}$ .

*Inicijalizacija:*  $S^0 = \emptyset$ ,  $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$

*Iteracija:* Zaustavi kada  $n = \bar{n}$ :

$$S^{n+1} = S^n \cup \{j_{n+1}\}, \quad j_{n+1} := \arg \max_{j \in [N]} \{ |(\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}^n))_j| \}, \quad (OMP_1)$$

$$\mathbf{x}^{n+1} = \arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N} \{ \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{z}\|_2, \text{ supp}(\mathbf{z}) \subset S^{n+1} \}. \quad (OMP_2)$$

*Izlaz:*  $\bar{n}$ -rijedak vektor  $\mathbf{x}^\sharp = \mathbf{x}^{\bar{n}}$ .

Numerički najskuplja operacija ovog algoritma je  $(OMP_2)$ . Situacije se može popraviti korištenjem *QR* dekompozicije matrice  $\mathbf{A}_{S_n}$ . Tada se mogu iskoristiti efikasni algoritmi za ažuriranje *QR* dekompozicije kada se u matricu doda novi stupac. Nadalje, za dodatna ubrzanja mogu se iskoristiti i algoritmi za brzo matrica-vektor množenje bazirani na brzom Fourierovoj transformaciji (vidi TODO).

Indeks  $j_{n+1}$  bira se tako da se reducira  $\ell_2$ -norma reziduala  $\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}^n$  što je više moguće. Sljedeća lema opravdava zašto je smisleno  $j$  odabrati takav da maksimizira vrijednost  $|(\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}^n))_j|$ .

**Lema 2.2.1.** *Neka je  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  sa  $\ell_2$ -normaliziranim stupcima. Ako su  $S \subset [N]$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^N$  sa nosačem na  $S$ ,  $j \in [N]$ , te ako vrijedi*

$$\mathbf{w} := \arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N} \{\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{z}\|_2, \text{ supp}(\mathbf{z}) \subset S \cup \{j\}\},$$

tada

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{w}\|_2^2 \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v}\|_2^2 - |(\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v}))_j|^2.$$

*Dokaz.* Pošto svaki vektor oblika  $\mathbf{v} + t\mathbf{e}_j$ ,  $t \in \mathbb{C}$  ima nosač u  $S \cup \{j\}$  vrijedi,

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{w}\|_2^2 \leq \min_{t \in \mathbb{C}} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}(\mathbf{v} + t\mathbf{e}_j)\|_2^2$$

Stavimo da je  $t = \rho e^{i\theta}$ , gdje je  $\rho \geq 0$  i  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Imamo,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}(\mathbf{v} + t\mathbf{e}_j)\|_2^2 &= \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v} - t\mathbf{A}\mathbf{e}_j\|_2^2 \\ &= \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v}\|_2^2 + |t|^2 \|\mathbf{A}\mathbf{e}_j\|_2^2 - 2\text{Re}(\bar{t}\langle \mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{e}_j \rangle) \\ &= \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v}\|_2^2 + \rho^2 - 2\text{Re}(\rho e^{-i\theta} (\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v}))_j) \\ &\geq \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v}\|_2^2 + \rho^2 - 2\rho |(\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v}))_j|^2 \end{aligned}$$

gdje jednakost vrijedi za pogodno odabrani  $\theta$ . Kao kvadratni polinom u varijabli  $\rho$ , zadnji izraz poprima minimum za  $\rho = |(\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v}))_j|$ .  $\square$

Korak ([OMP<sub>2</sub>](#)) može se prikazati u obliku

$$\mathbf{x}_{S^{n+1}}^{n+1} = \mathbf{A}_{S^{n+1}}^\dagger \mathbf{y},$$

gdje je  $\mathbf{x}_{S^{n+1}}^{n+1}$  restrikcija od  $\mathbf{x}^{n+1}$  na svoj nosač  $S^{n+1}$  i gdje je  $\mathbf{A}_{S^{n+1}}^\dagger$  pseudo-inverz od  $\mathbf{A}_{S^{n+1}}$  (vidi TODO). Drugim rječima to znači da je  $\mathbf{z} = \mathbf{x}_{S^{n+1}}^{n+1}$  rješenje sustava  $\mathbf{A}_{S^{n+1}}^* \mathbf{A}_{S^{n+1}} \mathbf{z} = \mathbf{A}_{S^{n+1}}^* \mathbf{y}$ . Ta činjenica je korisna i u drugim algoritmima koji imaju korak sličan ([OMP<sub>2</sub>](#)).

**Lema 2.2.2.** *Neka je  $S \subset [N]$  i*

$$\mathbf{v} := \arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N} \{\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{z}\|_2, \text{ supp}(\mathbf{z}) \subset S\},$$

tada je

$$(\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{v}))_S = \mathbf{0}. \tag{2.3}$$

*Dokaz.* Prema definiciji vektora  $\mathbf{v}$ , vektor  $\mathbf{A}\mathbf{v}$  je orthogonalna projekcija vektora  $\mathbf{y}$

na prostor  $\{\mathbf{Az}, \text{supp}(\mathbf{z} \subset S)\}$ , pa je karakteriziran relacijom ortogonalnosti

$$\langle \mathbf{y} - \mathbf{Av}, \mathbf{Az} \rangle = 0 \quad \text{za sve } \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N \text{ takve da } \text{supp}(\mathbf{z}) \subset S.$$

Dakle, imamo da vrijedi  $\langle \mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{Av}), \mathbf{z} \rangle = 0$  za sve  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ ,  $\text{supp}(\mathbf{z}) \subset S$ , što vrijedi ako i samo ako vrijedi (2.3).  $\square$

Prirodan uvjet zaustavljanja OMP-a je kada se postigne  $\|\mathbf{y} - \mathbf{Ax}^{\bar{n}}\| \leq \varepsilon$  ili  $\|\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{Ax}^{\bar{n}})\|_\infty \leq \varepsilon$  za neku toleranciju  $\varepsilon > 0$ . Ako nam je dostupna estimacija rijetkosti  $s$  rješenja  $\mathbf{x}$ , tada je razumno stati kada je  $\bar{n} = s$ . Sljedeći rezultat govori o uvjetim za uspješnu rekonstrukciju  $s$ -rijetkog vektora u  $s$  iteracija OMP algoritma.

**Propozicija 2.2.3.** *Neka je  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$ , svaki ne-nul vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  sa nosačem na skupu  $S$ , kardinaliteta  $s$  može se rekonstruirati iz  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$  u najviše  $s$  iteracija OMP algoritma ako i samo ako je matrica  $\mathbf{A}_S$  injektivna i*

$$\max_{j \in S} |(\mathbf{A}^* \mathbf{r})_j| > \max_{l \in \bar{S}} |(\mathbf{A}^* \mathbf{r})_l| \quad (2.4)$$

za sve ne-nul  $\mathbf{r} \in \{\mathbf{Az}, \text{supp}(\mathbf{z}) \subset S\}$ .

*Dokaz.* Pretpostavimo da OMP algoritam rekonstruira sve vektore sa nosačem na skupu  $S$  u najviše  $s = \text{card}(S)$  iteracija. Neka su  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  sa nosačem na  $S$ , takvi da je  $\mathbf{Av} = \mathbf{Aw}$ . Zbog pretpostavke,  $\mathbf{v}$  i  $\mathbf{w}$  moraju biti jednaki, a to znači da je matrica  $\mathbf{A}_S$  injektivna. Nadalje, ako je  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$  za neki  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  sa  $\text{supp}(\mathbf{x}) = S$ , indeks  $l \in \bar{S}$  ne može biti izabran u prvoj iteraciji, pošto indeks izabran u prvoj iteraciji ostaje uvijek u nosaču, a po pretpostavci OMP rekonstruira  $\mathbf{x}$  iz  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$  u točno  $s$  iteracija. Dakle za  $n = 0$  iz (OMP<sub>1</sub>) imamo da je  $\max_{j \in S} |(\mathbf{A}^* \mathbf{y})_j| > |(\mathbf{A}^* \mathbf{y})_l|$  za svaki  $l \in \bar{S}$ , pa stoga vrijedi  $\max_{j \in S} |(\mathbf{A}^* \mathbf{y})_j| > \max_{l \in \bar{S}} |(\mathbf{A}^* \mathbf{y})_l|$  za sve ne-nul  $\mathbf{y} \in \{\mathbf{Az}, \text{supp}(\mathbf{z}) \subset S\}$ .

Obratno, pretpostavimo da je  $\mathbf{Ax}^1 \neq \mathbf{y}, \dots, \mathbf{Ax}^{s-1} \neq \mathbf{y}$  jer u suprotnom nemamo što dokazivati. Pokazati ćemo da  $S^n \subset S$ ,  $\text{card}(S^n) = n$  za  $0 \leq n \leq s$ . To će implicirati  $S^s = S$ . Nadalje, (OMP<sub>2</sub>) daje  $\mathbf{Ax}^s = \mathbf{y}$  a iz injektivnosti od  $\mathbf{A}_S$  slijedi  $\mathbf{x}_s = \mathbf{x}$ . Dakle, neka je  $0 \leq n \leq s-1$ . Ako je  $S^n \subset S$ , to povlači da je  $\mathbf{r}^n := \mathbf{y} - \mathbf{Ax}^n \in \{\mathbf{Az}, \text{supp}(\mathbf{z}) \subset S\}$ , pa prema (2.4) indeks  $j_{n+1}$  leži u  $S$ , pa  $S^{n+1} = S \cup \{j_{n+1}\} \subset S$ . Ovo induktivno pokazuje da je  $S^n$  podskup od  $S$  za svaki  $0 \leq n \leq s$ . Nadalje, neka je  $1 \leq n \leq s-1$ . Lema (2.2.2) daje  $(\mathbf{A}^* \mathbf{r}^n)_{S^n} = \mathbf{0}$ . Stoga, iz (OMP<sub>1</sub>) vidimo da indeks  $j_{n+1}$  ne leži u  $S^n$ , jer bi u protivnom  $\mathbf{A}^* \mathbf{r}^n = \mathbf{0}$ , a po (2.4)  $\mathbf{r}^n = \mathbf{0}$ . Dakle,  $\text{card}(S^n) = n$ .  $\square$

Slabost OMP algoritma leži u činjenici da ako krivi indeks uđe u nosač, on ostaje u nosaču u svim sljedećim iteracijama. Stoga  $s$  iteracija algoritma nije dovoljno za rekonstrukciju vektora koji je  $s$ -rijedak. Moguće rješenje je povećati broj iteracija. Naredni algoritam, CoSaMP (eng. *compressive sampling matching pursuit*

*algorithm*), koristi drugačiju strategiju kada nam je dostupna estimacija rijetkosti  $s$ . Uvedimo oznake  $H_s(\mathbf{z})$  za najbolju  $s$ -rijetku aproksimaciju vektora  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$  i  $L_s(\mathbf{z})$  za nosač od  $H_s(\mathbf{z})$ , tj.

$$L_s(\mathbf{z}) := \text{skup indeksa } s \text{ najvećih komponenti vektora } \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N \quad (2.5)$$

$$H_s(\mathbf{z}) := \mathbf{z}_{L_s(\mathbf{z})}. \quad (2.6)$$

Nelinearni operator  $H_s$  zovemo *hard thresholding* operator reda  $s$ . Za dani vektor  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$  on pušta  $s$  apsolutno najvećih komponenti a ostale postavi na nulu. Primjetimo da to nije nužno jedinstveno definiramo. Da bi zaobišli taj problem, skup indeksa  $L_s(\mathbf{z})$  biramo iz svih mogućih kandidata leksikografskim poredkom.

### CoSaMP

*Ulaz:* Matrica mjerenja  $\mathbf{A}$ , vektor mjerenja  $\mathbf{y}$ , rijetkost  $s$

*Inicijalizacija:*  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x}^0$  (npr.  $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ ).

*Iteracija:* Zaustavi kada  $n = \bar{n}$ :

$$U^{n+1} = \text{supp}(\mathbf{x}^n) \cup L_{2s}(\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}^n)) \quad (CoSaMP_1)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N} \{\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{z}\|_2, \text{supp}(\mathbf{z}) \subset U^{n+1}\} \quad (CoSaMP_2)$$

$$\mathbf{x}^{n+1} = H_s(\mathbf{u}^{n+1}) \quad (CoSaMP_3)$$

*Izlaz:*  $\bar{n}$ -rijedak vektor  $\mathbf{x}^\sharp = \mathbf{x}^{\bar{n}}$ .

## 2.3 Granične metode

Algoritmi predstavljeni u ovom poglavlju također koriste *hard thresholding* operator  $H_s$ . Prvi algoritam, BT (eng. *basic thresholding*), sastoji se od određivanja nosača  $s$ -rijetkog vektora  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ , koji se rekonstruira iz  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$ , kao indeksi  $s$  najvećih komponenti vektora  $\mathbf{A}^*\mathbf{y}$ , te traženja vektora koji najbolje aproksimira mjerenje  $\mathbf{y}$

## BT

*Ulaz:* Matrica mjerenja  $\mathbf{A}$ , vektor mjerenja  $\mathbf{y}$ , rijetkost  $s$

*Problem:*

$$S^\sharp = L_s(\mathbf{A}^* \mathbf{y}), \quad (BT_1)$$

$$\mathbf{x}^\sharp = \arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N} \{\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{z}\|_2, \text{ supp}(\mathbf{z}) \subset S^\sharp\}. \quad (BT_2)$$

*Izlaz:*  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x}^\sharp$ .

Dovoljni i nuži uvjeti rekonstrukcije jednostavnim BT algoritmom, slični su uvjetu (2.4).

**Propozicija 2.3.1.** *BT algoritam rekonstruira vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  sa nosačem na  $S$ , iz  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  ako i samo ako*

$$\min_{j \in S} |(\mathbf{A}^* \mathbf{y})_j| > \max_{l \in \bar{S}} |(\mathbf{A}^* \mathbf{y})_l|. \quad (2.7)$$

*Dokaz.* Vektor  $\mathbf{x}$  može se rekonstruirati ako i samo ako skup indeksa  $S^\sharp$  u  $(BT_1)$  jednak skupu  $S$ . A to vrijedi ako i samo ako je element vektora  $\mathbf{A}^* \mathbf{y}$  s indeksom iz  $S$ , veći od svakog elementa vektora  $\mathbf{A}^* \mathbf{y}$  s indeksom u  $\bar{S}$ .  $\square$

IHT (eng. *iterative hard thresholding*) algoritam rješava kvadratni sustav  $\mathbf{A}^* \mathbf{A} \mathbf{z} = \mathbf{A}^* \mathbf{y}$  umjesto  $\mathbf{A} \mathbf{z} = \mathbf{y}$ . To možemo interpretirati kao rješavanje problema fiksne točke  $\mathbf{z} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^* \mathbf{A}) \mathbf{z} + \mathbf{A}^* \mathbf{y}$ . Prirodno je gledati iteracije oblika  $\mathbf{x}^{n+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^* \mathbf{A}) \mathbf{x}^n + \mathbf{A}^* \mathbf{y}$ . Pošto tražimo  $s$ -rijetko rješenje u svakoj iteraciji uzimamo samo  $s$  apsolutno najvećih komponenti od  $(\mathbf{I} - \mathbf{A}^* \mathbf{A}) \mathbf{x}^n + \mathbf{A}^* \mathbf{y}$ .

### IHT

---

*Ulaz:* Matrica mjerenja  $\mathbf{A}$ , vektor mjerenja  $\mathbf{y}$ , rijetkost  $s$

*Inicijalizacija:*  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x}^0$  (npr.  $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ ).

*Iteracija:* Zaustavi kada  $n = \bar{n}$ :

$$\mathbf{x}^{n+1} = H_s(\mathbf{x}^n + \mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}^n). \quad (IHT)$$

*Izlaz:*  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x}^\# = \mathbf{x}^{\bar{n}}$ .

Primjetimo da IHT algoritam ne koristi orthogonalne projekcije, što je njegova prednost. No, ako smo spremi platiti cijenu projekcija, ima smisla gledati vektor koji ima isti nosač kao  $\mathbf{x}^{n+1}$  koji najbolje aproksimira mjerenje. Upravo je to strategija HTP (eng. *hard thresholding pursuit*) algoritma.

### HTP

---

*Ulaz:* Matrica mjerenja  $\mathbf{A}$ , vektor mjerenja  $\mathbf{y}$ , rijetkost  $s$

*Inicijalizacija:*  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x}^0$  (npr.  $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ ).

*Iteracija:* Zaustavi kada  $n = \bar{n}$ :

$$S^{n+1} = L_s(\mathbf{x}^n + \mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}^n), \quad (HTP_1)$$

$$\mathbf{x}^{n+1} = \arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N} \{\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{z}\|_2, \text{ supp}(\mathbf{z}) \subset S^{n+1}\}. \quad (HTP_2)$$

*Izlaz:*  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x}^\# = \mathbf{x}^{\bar{n}}$ .

## Poglavlje 3

### $\ell_1$ -minimizacija

Prisjetimo se, problem sažetog uzorkovanja sastoji se od rekonstrukcije  $s$ -rijetkog vektora  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  iz mjerenja  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$ , gdje je  $m < N$ . Prirodno se nameće problem  $\ell_0$ -minimizacije,

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N} \|\mathbf{z}\|_0 \quad \text{uz uvjet } \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y} \quad (P_0)$$

U poglavlju (1) vidjeli smo da je taj problem općenito  $\mathfrak{NP}$ -težak. U poglavlju (2) pokazali smo nekoliko učinkovitih strategija za rješavanje problema sažetog uzorkovanja. U ovom poglavlju fokusirati ćemo se na strategiju  $\ell_1$ -minimizacije

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N} \|\mathbf{z}\|_1 \quad \text{uz uvjet } \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y}. \quad (P_1)$$

Proučiti ćemo uvjete na matricu  $\mathbf{A}$  koji osiguravaju egzaktnu ili aproksimativnu rekonstrukciju vektora  $\mathbf{x}$ .

### 3.1 Svojstvo nul-prostora

Argumenti u ovom potpoglavlju vrijede u oba kontekstu realnih i u kontekstu kompleksnih prostora. Stoga ćemo rezultate prvo iznijeti za polje  $\mathbb{K}$ , koje može  $\mathbb{R}$  ili  $\mathbb{C}$ . Nakon toga uspostaviti ćemo ekvivalentnost realnog i kompleksnog svojstva nul-prostora.

**Definicija 3.1.1.** *Za matricu  $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times N}$  kažemo da zadovoljava svojstvo nul-prostora za skup  $S \subset [N]$  ako*

$$\|\mathbf{v}_S\|_1 < \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 \quad \text{za svaki } \mathbf{v} \in \ker \mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\}. \quad (3.1)$$

*Nadalje, kažemo da  $\mathbf{A}$  zadovoljava svojstvo nul-prostora reda  $s$  ako zadovoljava gornju nejednakost za svaki  $S \subset [N]$  takav da  $\text{card}(S) \leq s$ .*



Primjetimo da za vektor  $\mathbf{v} \in \ker \mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\}$  svojstvo nul-prostora vrijedi za svaki  $S \subset [N]$  takav da  $\text{card}(S) \leq s$ , čim vrijedi za skup indeksa  $s$  apsolutno najvećih komponenti vektora  $\mathbf{v}$ .

Postoje dvije dodatne formulacije svojstva nul-prostora. Prvu dobijemo tako da gornjoj nejednakosti dodamo  $\|\mathbf{v}_S\|_1$  s obje strane. Tada imamo

$$2\|\mathbf{v}_S\|_1 < \|\mathbf{v}\|_1 \quad \text{za svaki } \mathbf{v} \in \ker \mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\}. \quad (3.2)$$

Drugu dobijemo tako da u skup  $S$  stavimo  $s$  apsolutno najvećih komponenti vektora  $\mathbf{v}$  i ovaj put nejednakosti dodamo  $\|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1$  s obje strane. Tada imamo

$$\|\mathbf{v}\|_1 < 2\sigma_s(\mathbf{v})_1 \quad \text{za sve } \mathbf{v} \in \ker \mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\}. \quad (3.3)$$

Prisjetimo se definicije 1.1.2  $\ell_p$ -greške najbolje  $s$ -rijetke aproksimacija vektora  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^N$ ,

$$\sigma_s(\mathbf{x})_p = \inf_{\|\mathbf{z}\| \leq s} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_p.$$

Sljedeći teorem govori o veci svojstva nul-prostora i egzaktne rekonstrukcije rijetkog vektora putem  $\ell_1$ -minimizacije.

**Teorem 3.1.2.** *Za  $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times N}$ , svaki vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^N$  sa nosačem na  $S$  je jedinstveno rješenje od  $(P_1)$  sa  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$  ako i samo ako  $\mathbf{A}$  zadovoljava svojstvo nul-prostora za skup  $S$ .*

*Dokaz.* Neka je skup indeksa  $S$  fiksiran. Pretpostavimo da je svaki vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^N$  sa nosačem na  $S$  jedinstveni minimizator od  $\|\mathbf{z}\|_1$  takav da  $\mathbf{Az} = \mathbf{Ax}$ . Stoga za svaki  $\mathbf{v} \in \ker \mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\}$ , vektor  $\mathbf{v}_S$  je jedinstveni minimizator od  $\|\mathbf{z}\|_1$  takav da  $\mathbf{Az} = \mathbf{Av}_S$ . Ali imamo  $\mathbf{A}(-\mathbf{v}_{\bar{S}}) = \mathbf{Av}_S$  i  $-\mathbf{v}_{\bar{S}} \neq \mathbf{v}_S$  jer je  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  i  $\mathbf{0} = \mathbf{Av} = \mathbf{A}(\mathbf{v}_S + \mathbf{v}_{\bar{S}})$ . Dakle, mora vrijediti  $\|\mathbf{v}_S\|_1 < \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1$ . Obratno, pretpostavimo da  $\mathbf{A}$  zadovoljava svojstvo nul-prostora za skup  $S$ . Tada za vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^N$  sa nosačem na  $S$  i za  $\mathbf{z} \in \mathbb{K}^N$ ,  $\mathbf{z} \neq \mathbf{x}$  takvi da  $\mathbf{Az} = \mathbf{Ax}$ , označimo vektor  $\mathbf{v} := \mathbf{x} - \mathbf{z} \in \ker \mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\}$ . Imamo,

$$\|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}_S\|_1 + \|\mathbf{z}_S\|_1 = \|\mathbf{v}_S\|_1 + \|\mathbf{z}_S\|_1 < \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 + \|\mathbf{z}_S\|_1 = \|-\mathbf{z}_{\bar{S}}\|_1 + \|\mathbf{z}_S\|_1 = \|\mathbf{z}\|_1$$

Dakle, vektor  $\mathbf{x}$  je minimizator od  $(P_1)$ .  $\square$

Variranjem skupa  $S$ , sljedeći rezultat sljedi direktno iz prethodnog teorema.

**Teorem 3.1.3.** *Za matricu  $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times N}$ , svaki  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^N$  je jedinstveno rješenje problema  $(P_1)$  uz  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$  ako i samo ako  $\mathbf{A}$  zadovoljava svojstvo nul-prostora reda  $s$ .*

Primjetimo da prethodni teorem tvrdi da za svaki  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ , gdje je  $\mathbf{x}$   $s$ -rijedak,  $\ell_1$ -minimizacija  $(P_1)$  zapravo rješava problem  $\ell_0$ -minimizacije  $(P_0)$  kada vrijedi svojstvo nul-prostora reda  $s$ . Zaista, pretpostavimo da se svaki  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x}$  može rekonstruirati  $\ell_1$ -minimizacijom iz  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ . Neka je  $\mathbf{z}$  minimizator  $\ell_0$  problema  $(P_0)$  sa  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ , tada je  $\|\mathbf{z}\|_0 \leq \|\mathbf{x}\|_0$  pa je  $\mathbf{z}$  također  $s$ -rijedak. No, svaki  $s$ -rijedak vektor je jedinstveni  $\ell_1$ -minimizator, slijedi da je  $\mathbf{x} = \mathbf{z}$ .

Za algoritam rekonstrukcije poželjno je da zadrži mogućnost rekonstrukcije ako su neka od mjerenja reskaliraju, ispermutiraju ili dodaju nova.  $\ell_1$ -minimizacija ima takvo svojstvo. Formalno, gore opisane promijene zapravo predstavljaju zamjenu matrice  $\mathbf{A}$  matricama  $\hat{\mathbf{A}}$  i  $\tilde{\mathbf{A}}$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}} &:= \mathbf{GA}, \quad \text{gdje je } \mathbf{G} \text{ neka invertibilna } m \times m \text{ matrica,} \\ \tilde{\mathbf{A}} &:= \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad \text{gdje je } \mathbf{B} \text{ neka } m' \times N \text{ matrica.}\end{aligned}$$

Primjetimo da je  $\ker \hat{\mathbf{A}} = \ker \mathbf{A}$  i  $\ker \tilde{\mathbf{A}} \subset \ker \mathbf{A}$ , pa svojstvo nul-prostora vrijedi i za matrice  $\hat{\mathbf{A}}$  i  $\tilde{\mathbf{A}}$ .

Za kraj proučiti ćemo utjecaj polja  $\mathbb{K}$ . Razlika između  $\ker_{\mathbb{R}} \mathbf{A}$  i  $\ker_{\mathbb{C}} \mathbf{A} = \ker_{\mathbb{R}} \mathbf{A} + i \ker_{\mathbb{R}} \mathbf{A}$  vodi u slučaju da je  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  na realno svojstvo nul-prostora,

$$\sum_{j \in S} |v_j| < \sum_{l \in \bar{S}} |v_l| \quad \text{za svaki } \mathbf{v} \in \ker_{\mathbb{R}} \mathbf{A}, \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \quad (3.4)$$

a u slučaju da je  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , na kompleksno svojstvo nul-prostora,

$$\sum_{j \in S} \sqrt{v_j^2 + w_j^2} < \sum_{l \in \bar{S}} \sqrt{v_l^2 + w_l^2} \quad \text{za svaki } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \ker_{\mathbb{R}} \mathbf{A}, \quad (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0}). \quad (3.5)$$

Zapravo, pokazati ćemo da su svojstva nul-prostora međusobno ekvivalentna u realnom i kompleksnom slučaju. Zato možemo reći da realna matrica mjerenja egzaktno rekonstruira sve rijetke vektore  $\ell_1$ -minimizacijom.

**Teorem 3.1.4.** *Neka je  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times N}$ , tada je realno svojstvo nul-prostora (3.4) za skup  $S$  ekvivalentno je kompleksnom svojstvu nul-prostora (3.5) za isti skup  $S$ .*

*Dokaz.* Primjetimo (3.4) slijedi direktno iz (3.5) za  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ . Uzmimo sada  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \ker_{\mathbb{R}} \mathbf{A}$ , takvi da  $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ . Ako su  $\mathbf{v}$  i  $\mathbf{w}$  linearno zavisni. tj.  $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{w}$  za neki

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  onda je

$$\begin{aligned} \sum_{j \in S} \sqrt{v_j^2 + w_j^2} &= \sum_{j \in S} \sqrt{(1 + \alpha^2)w_j^2} = \sqrt{1 + \alpha^2} \sum_{j \in S} \sqrt{w_j^2} \\ &< \sqrt{1 + \alpha^2} \sum_{j \in \bar{S}} \sqrt{w_j^2} = \sum_{j \in \bar{S}} \sqrt{(1 + \alpha^2)w_j^2} = \sum_{j \in \bar{S}} \sqrt{v_j^2 + w_j^2} \end{aligned}$$

Pretpostavimo sada da su  $\mathbf{v}$  i  $\mathbf{w}$  linearno nezavisni i definirajmo  $\mathbf{u} := \cos \theta \mathbf{v} + \sin \theta \mathbf{w} \in \ker_{\mathbb{R}} \mathbf{A} \setminus \{0\}$ . Tada za svaki  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\sum_{j \in S} |\cos \theta v_j + \sin \theta w_j| < \sum_{l \in \bar{S}} |\cos \theta v_l + \sin \theta w_l|. \quad (3.6)$$

Za svaki  $k \in [N]$ , neka je  $\theta_k \in [-\pi, \pi]$  takav da

$$v_k = \sqrt{v_k^2 + w_k^2} \cos \theta_k, \quad w_k = \sqrt{v_k^2 + w_k^2} \sin \theta_k$$

Iz (3.6) slijedi,

$$\sum_{j \in S} \sqrt{v_j^2 + w_j^2} |\cos(\theta - \theta_j)| < \sum_{l \in \bar{S}} \sqrt{v_l^2 + w_l^2} |\cos(\theta - \theta_l)|$$

Integriranjem po  $\theta \in [-\pi, \pi]$  dobijemo

$$\sum_{j \in S} \sqrt{v_j^2 + w_j^2} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos(\theta - \theta_j)| d\theta < \sum_{l \in \bar{S}} \sqrt{v_l^2 + w_l^2} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos(\theta - \theta_l)| d\theta$$

No lako se provjeri da je

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\cos(\theta - \theta_j)| d\theta = 4$$

tj. da je pozitivan i neovisan o  $\theta' \in [-\pi, \pi]$ . □

## Nekonveksna minimizacija

Prisjetimo se,  $\ell_0$  norma vektora  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$  aproksimirana je  $q$ -tom potencijom svoje  $\ell_q$ -kvazinorme,

$$\|\mathbf{z}\|_p^p := \sum_{j=1}^N |x_j|^p \xrightarrow{p \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{z_j \neq 0\}} = \|\mathbf{z}\|_0$$

To sugestira da  $\ell_0$ -minimizaciju ( $P_0$ ) zamjenimo sa

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N} \|\mathbf{z}\|_q \quad \text{uz uvjet } \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y}. \quad (P_q)$$

Za  $0 < q < 1$  taj je problem nekonveksan i  $\mathfrak{NP}$ -težak. No, želimo teoretski potvrditi ideju da ( $P_q$ ) dobro aproksimira ( $P_0$ ) za male  $q$ . Sljedeći teorem daje analogon svojstva nul-prostora za  $0 < q < 1$ . Dokaz je također analogan dokazu teorema 3.1.3 te se koristi činjenica da za  $\ell_q$ -kvazinorma zadovoljava nejednakost trokuta.

**Teorem 3.1.5.** *Za matricu  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  i  $0 < q < 1$ , svaki  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  je jedinstveno rješenje problema ( $P_q$ ) uz  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  ako i samo ako*

$$\|\mathbf{v}_S\|_q < \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_q \quad \text{za svaki } \mathbf{v} \in \ker \mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Sada možemo dokazivati da rekonstrukcija  $\ell_q$ -minimizacijom implicira rekonstrukciju  $\ell_p$ -minimizacijom za  $0 < p < q < 1$ .

**Teorem 3.1.6.** *Za matricu  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  i  $0 < p < q < 1$ , ako je svaki  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  jedinstveno rješenje problema ( $P_q$ ) uz  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  onda je  $\mathbf{x}$  također i rješenje problema ( $P_p$ ) za  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ .*

*Dokaz.* Prema teoremu 3.1.5 dovoljno je pokazati da vrijedi

$$\sum_{j \in S} |v_j|^p < \sum_{l \in \bar{S}} |v_l|^p, \quad (3.7)$$

ako je  $\mathbf{v} \in \ker \mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\}$ ,  $S$  skup indeksa od  $s$  apsolutno najvećih komponenti od  $\mathbf{v}$  i ako ista nejednakost vrijedi za  $q$ . Dakle, pretpostavimo da (3.7) vrijedi za  $q$ . Tada je nužno  $\mathbf{v}_{\bar{S}} \neq \mathbf{0}$  pošto je  $S$  skup indeksa od  $s$  apsolutno najvećih komponenti ne-nul vektora  $\mathbf{v}$ . Stoga (3.7) možemo napisati u obliku

$$\sum_{j \in S} \frac{1}{\sum_{l \in \bar{S}} (|v_l|/|v_j|)^p} < 1. \quad (3.8)$$

Primjetimo da  $|v_l|/|v_j| \leq 1$  za  $l \in \bar{S}$  i  $j \in S$ . Stoga je lijeva strana (3.8) nepadajuća funkcija u varijabli  $0 < p \leq 1$ . Pa stoga njena vrijednost u  $p < q$  ne prelazi njezinu vrijednost u  $q$ , koji je manji od 1 po pretpostavci.  $\square$

## 3.2 Stabilnost

Signali u praksi gotovo nikad nisu idealno rijetki. U najboljem slučaju blizu su rijetkim vektorima. Stoga, želimo da metode sažetog uzorkovanja rekonstruiraju

vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  sa greškom koja je kontrolirana udaljenosti vektora  $\mathbf{x}$  do  $s$ -rijetkih vektora. Za algoritme koji imaju to svojstvo kažemo da su *stabilni* s obzirom na defekte rijetkosti. Pokazati ćemo da je  $\ell_1$ -minimizacija ( $P_1$ ) stabilna pod jačim svojstvom nul-prostora.

**Definicija 3.2.1.** Matrica  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  zadovoljava stabilno svojstvo nul-prostora sa konstantom  $0 < \rho < 1$  za skup  $S \subset [N]$  ako

$$\|\mathbf{v}_S\|_1 \leq \rho \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 \quad \text{za svaki } \mathbf{v} \in \ker \mathbf{A}.$$

Nadalje, kažemo da  $\mathbf{A}$  zadovoljava stabilno svojstvo nul-prostora reda  $s$  sa konstantom  $0 < \rho < 1$  ako zadovoljava zadovoljava gornju nejednakost za svaki  $S \subset [N]$  takav da  $\text{card}(S) = s$ .

**Teorem 3.2.2.** Ako matrica  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  zadovoljava stabilno svojstvo nul-prostora reda  $s$  sa konstantom  $0 < \rho < 1$ , tada za svaki  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ , rješenje  $\mathbf{x}^\sharp$  problema ( $P_1$ ) sa  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$  aproksimira vektor  $\mathbf{x}$  s  $\ell_1$ -greškom

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\sharp\|_1 \leq \frac{2(1+\rho)}{(1-\rho)} \sigma_s(\mathbf{x})_1. \quad (3.9)$$

Sada više nemamo jedinstvenost  $\ell_1$ -minimizatora. Prethodni teorem biti će direktna posljedica jače tvrdnje,

**Teorem 3.2.3.** Ako matrica  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  zadovoljava stabilno svojstvo nul-prostora sa konstantom  $0 < \rho < 1$  za skup  $S$  ako i samo ako

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|_1 \leq \frac{1+\rho}{1-\rho} (\|\mathbf{z}\|_1 - \|\mathbf{x}\|_1 + 2\|\mathbf{x}_{\bar{S}}\|_1) \quad (3.10)$$

za sve vektore  $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$  za  $\mathbf{Az} = \mathbf{Ax}$ .

Pokažimo kako teorem 3.2.2 slijedi iz 3.2.3: Neka je  $S$  skup  $s$  apsolutno najvećih komponenti vektora  $\mathbf{x}$ , tako da  $\|\mathbf{x}_{\bar{S}}\|_1 = \sigma_s(\mathbf{x})_1$ . Ako je  $\mathbf{x}^\sharp$  minimizator problema ( $P_1$ ), tada vrijedi  $\|\mathbf{x}^\sharp\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_1$  i  $\mathbf{Ax}^\sharp = \mathbf{Ax}$ . Dakle, desnu strana (3.10) za  $\mathbf{z} = \mathbf{x}^\sharp$  možemo ocjeniti desnom stranom (3.9).

Prije dokaza teorema 3.2.3 pokažimo još jedan koristan rezultat.

**Lema 3.2.4.** Za  $S \subset [N]$  i vektore  $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$  vrijedi,

$$\|(\mathbf{x} - \mathbf{z})_{\bar{S}}\|_1 \leq \|\mathbf{z}\|_1 - \|\mathbf{x}\|_1 + \|(\mathbf{x} - \mathbf{z})_S\|_1 + 2\|\mathbf{x}_{\bar{S}}\|_1$$

*Dokaz.* Imamo,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\|_1 &= \|\mathbf{x}_{\bar{S}}\|_1 + \|\mathbf{x}_S\|_1 \leq \|\mathbf{x}_{\bar{S}}\|_1 + \|(\mathbf{x} - \mathbf{z})_S\|_1 + \|\mathbf{z}_S\|_1 \\ \|(\mathbf{x} - \mathbf{z})_{\bar{S}}\|_1 &\leq \|\mathbf{x}_{\bar{S}}\|_1 + \|\mathbf{z}_{\bar{S}}\|_1.\end{aligned}$$

Sumiranjem ove dvije nejednakosti, slijedi

$$\|\mathbf{x}\|_1 + \|(\mathbf{x} - \mathbf{z})_{\bar{S}}\|_1 \leq 2\|\mathbf{x}_{\bar{S}}\|_1 + \|(\mathbf{x} - \mathbf{z})_S\|_1 + \|\mathbf{z}\|_1.$$

□

*Dokaz (Teorem 3.2.3).* Pretpostavimo da matrica  $\mathbf{A}$  zadovoljava (3.10) za sve vektore  $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$  uz  $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ . Za dani vektor  $\mathbf{v} \in \ker \mathbf{A}$ , pošto je  $\mathbf{A}\mathbf{v}_{\bar{S}} = \mathbf{A}(-\mathbf{v}_S)$  možemo primjeniti (3.10) sa  $\mathbf{x} = -\mathbf{v}_S$  i  $\mathbf{z} = \mathbf{v}_{\bar{S}}$ . Slijedi,

$$\|\mathbf{v}\|_1 \leq \frac{1+\rho}{1-\rho}(\|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 - \|\mathbf{v}_S\|_1).$$

To možemo zapisati kao

$$(1-\rho)(\|\mathbf{v}_S\|_1 + \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1) \leq (1+\rho)(\|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 - \|\mathbf{v}_S\|_1).$$

Jednostavnom manipulacijom slijedi

$$\|\mathbf{v}_S\|_1 \leq \rho\|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1$$

Obratno, neka matrica  $\mathbf{A}$  zadovoljava stabilno svojstvo nul-prostora s konstantom  $0 < \rho < 1$  za skup  $S$ . Neka su  $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$  takvi da  $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , pošto je  $\mathbf{v} := \mathbf{z} - \mathbf{x} \in \ker \mathbf{A}$ , stabilno svojstvo nul-prostora daje

$$\|\mathbf{v}_S\|_1 \leq \rho\|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1. \quad (3.11)$$

Nadalje, iz lema 3.2.4 slijedi

$$\|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 \leq \|\mathbf{z}\|_1 - \|\mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{v}_S\|_1 + 2\|\mathbf{x}_{\bar{S}}\|_1. \quad (3.12)$$

Substituiramo (3.11) u (3.12),

$$\|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 \leq \|\mathbf{z}\|_1 - \|\mathbf{x}\|_1 + \rho\|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 + 2\|\mathbf{x}_{\bar{S}}\|_1.$$

Pošto je  $\rho < 1$ ,

$$\|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 \leq \frac{1}{1-\rho}(\|\mathbf{z}\|_1 - \|\mathbf{x}\|_1 + 2\|\mathbf{x}_{\bar{S}}\|_1).$$

Ponovno iskoristimo (3.11),

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 + \|\mathbf{v}_S\|_1 \leq (1 + \rho)\|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 \leq \frac{1 + \rho}{1 - \rho}(\|\mathbf{z}\|_1 - \|\mathbf{x}\|_1 + 2\|\mathbf{x}_{\bar{S}}\|_1).$$

□

### 3.3 Robusnost

Jasno je da u realnosti signal nikad ne možemo mjeriti sa beskonačnom točnošću. U našem kontekstu to znači da je vektor mjerenja  $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$  aproksimacija vektora  $\mathbf{Ax} \in \mathbb{C}^m$ , tj. formalno

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\| \leq \eta$$

za neki  $\eta \geq 0$  i neku normu na  $\mathbb{C}^m$ . Od metode rekonstrukcije tražimo da udaljenost rekonstruiranog vektora  $\mathbf{x}^\#$  i originalnog vektora  $\mathbf{x}$  bude kontrolirana preciznosti mjerenja  $\eta$ . Ako metoda zadovoljava to svojstvo kažemo da je *robustna* ili *otporna* na greške mjerenja. Pokazati ćemo da BP algoritam ( $\ell_1$ -minimizacija) robustna ako ( $P_1$ ) zamjenimo konveksni problemom

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N} \|\mathbf{z}\|_1 \quad \text{uz uvjet } \|\mathbf{Az} - \mathbf{y}\| \leq \eta \quad (P_{1,\eta})$$

te ako vrijedi sljedeća jača varijanta svojstva nul-prostora.

**Definicija 3.3.1.** Za matricu  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  kažemo da zadovoljava robustno svojstvo nul-prostora s konstantama  $0 < \rho < 1$  i  $\tau > 0$  za skup  $S \subset [N]$  ako

$$\|\mathbf{v}_S\|_1 \leq \rho\|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 + \tau\|\mathbf{Av}\| \quad \text{za sve } \mathbf{v} \in \mathbb{C}^N. \quad (3.13)$$

Nadalje, kažemo da  $\mathbf{A}$  zadovoljava robustno svojstvo nul-prostora s konstantama  $0 < \rho < 1$  i  $\tau > 0$  reda  $s$  ako zadovoljava gornje svojstvo za svaki  $S \subset [N]$  takav da  $\text{card}(S) \leq s$ .

Primjetimo da definicija ne traži da je  $\mathbf{v} \in \ker \mathbf{A}$ . Kada bi to vrijedilo propao bi član  $\|\mathbf{Ax}\|$  i time bi dobili stabilno svojstvo nul-prostora.

**Teorem 3.3.2.** Neka matrica  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  zadovoljava robustno svojstvo nul-prostora reda  $s$  sa konstantama  $0 < \rho < 1$  i  $\tau > 0$ . Tada za svaki vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ , rješenje problema ( $P_{1,\eta}$ ) za  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax} + \mathbf{e}$  i  $\|\mathbf{e}\| \leq \eta$  aproksimira vektor  $\mathbf{x}$  sa greškom

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\#\|_1 \leq \frac{2(1 + \rho)}{(1 - \rho)}\sigma_s(\mathbf{x})_1 + \frac{4\tau}{1 - \rho}\eta$$

Dokazati ćemo jač tu tvrdnju,

**Teorem 3.3.3.** *Matrica  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  zadovoljava robusno svojstvo nul-prostora sa konstantama  $0 < \rho < 1$  i  $\tau > 0$  za skup  $S$  ako i samo ako*

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|_1 \leq \frac{1 + \rho}{1 - \rho}(\|\mathbf{z}\|_1 - \|\mathbf{x}\|_1 + 2\|\mathbf{x}_{\bar{S}}\|_1) + \frac{2\tau}{1 - \rho}\|\mathbf{A}(\mathbf{z} - \mathbf{x})\| \quad (3.14)$$

za sve vektore  $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ .

*Dokaz.* Pretpostavimo da  $\mathbf{A}$  zadovoljava (3.14). Za  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^N$ , uzmimo  $\mathbf{x} = -\mathbf{v}_S$  i  $\mathbf{z} = \mathbf{v}_{\bar{S}}$ . Slijedi,

$$\|\mathbf{v}\|_1 \leq \frac{1 + \rho}{1 - \rho}(\|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 - \|\mathbf{v}_S\|_1) + \frac{2\tau}{1 - \rho}\|\mathbf{A}\mathbf{v}\|.$$

Preslagivanjem članova dobivamo,

$$(1 - \rho)(\|\mathbf{v}_S\|_1 + \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1) \leq (1 + \rho)(\|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 - \|\mathbf{v}_S\|_1) + 2\tau\|\mathbf{A}\mathbf{v}\|$$

tj. imamo

$$\|\mathbf{v}_S\|_1 \leq \rho\|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 + \tau\|\mathbf{A}\mathbf{v}\|.$$

Obratno, neka  $\mathbf{A}$  zadovoljava robusno svojstvo nul-prostora sa konstantama  $0 < \rho < 1$  i  $\tau > 0$  za skup  $S$ . Za  $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ , neka je  $\mathbf{v} := \mathbf{z} - \mathbf{x}$ . Iz robusnog svojstva nul-prostora i leme 3.2.4 slijedi,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_S\|_1 &\leq \rho\|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 + \tau\|\mathbf{A}\mathbf{v}\|, \\ \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 &\leq \|\mathbf{z}\|_1 - \|\mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{v}_S\|_1 + 2\|\mathbf{x}_{\bar{S}}\|_1. \end{aligned}$$

Kombiniranjem te dvije nejednakosti slijedi,

$$\|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 \leq \frac{1}{1 - \rho}(\|\mathbf{z}\|_1 - \|\mathbf{x}\|_1 + 2\|\mathbf{x}_{\bar{S}}\|_1 + \tau\|\mathbf{A}\mathbf{v}\|).$$

Ponovno iskoristimo robusno svojstvo nul-prostoram

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_1 &= \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 + \|\mathbf{v}_S\|_1 \leq (1 + \rho)\|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 + \tau\|\mathbf{A}\mathbf{v}\| \\ &\leq \frac{1 + \rho}{1 - \rho}(\|\mathbf{z}\|_1 - \|\mathbf{x}\|_1 + 2\|\mathbf{x}_{\bar{S}}\|_1) + \frac{2\tau}{1 - \rho}\|\mathbf{A}\mathbf{v}\| \end{aligned}$$

□

Sada ćemo poboljšati prethodni rezultat robusnosti, dati ćemo  $\ell_p$  ocjenu greške za  $p \geq 1$ . Za to potrebna nam je još jedna varijantna svojstva nul-prostora,



**Definicija 3.3.4.** Za  $q \geq 1$ , matrica  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  zadovoljava  $\ell_q$ -robustno svojstvo nul-prostora reda  $s$  sa konstantama  $0 < \rho < 1$  i  $\tau > 0$ , ako za svaki  $S \subset [N]$ , takav da  $\text{card}(S) \leq s$ ,

$$\|\mathbf{v}_S\|_q \leq \frac{\rho}{s^{1-1/q}} \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 + \tau \|\mathbf{A}\mathbf{v}\| \quad \text{za svaki } \mathbf{v} \in \mathbb{C}^N.$$

Iz  $\|\mathbf{v}_S\|_p \leq s^{1/p-1/q} \|\mathbf{v}_S\|_q$  za  $1 \leq p \leq q$ ,  $\ell_1$ -robustno svojstvo nul-prostora implicira

$$\|\mathbf{v}_S\|_p \leq \frac{\rho}{s^{1-1/p}} \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 + \tau s^{1/p-1/q} \|\mathbf{A}\mathbf{v}\| \quad \text{za sve } \mathbf{v} \in \mathbb{C}^N.$$

Stoga, za  $1 \leq p \leq q$ ,  $\ell_q$ -robustno svojstvo nul-prostora implicira  $\ell_p$ -robustno svojstvo nul-prostora s jednakim konstantama, do na promjenu norme. Sljedeći teorem daje robustnost kvadratično ograničene  $\ell_1$ -minimizacije.

**Teorem 3.3.5.** Neka matrica  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  zadovoljava  $\ell_2$ -robustno svojstvo nul-prostora reda  $s$  sa konstantama  $0 < \rho < 1$  i  $\tau > 0$ . Tada za svaki  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ , rješenje  $\mathbf{x}^\#$  problema  $(P_{1,\eta})$  aproksimira  $\mathbf{x}$  s  $\ell_p$ -greškom

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\#\|_p \leq \frac{C}{s^{1-1/p}} \sigma_s(\mathbf{x})_1 + D s^{1/p-1/2} \eta, \quad 1 \leq p \leq 2, \quad (3.15)$$

za neke konstante  $C, D > 0$  koje ovise samo o  $\rho$  i  $\tau$ .

Ovaj teorem je direktna posljedica narednog općenitijeg teorema za  $q = 2$  i  $\mathbf{z} = \mathbf{x}^\#$ .

**Teorem 3.3.6.** Neka je  $1 \leq p \leq q$  i neka matrica  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  zadovoljava  $\ell_q$ -robustno svojstvo nul-prostora reda  $s$  sa konstantama  $0 < \rho < 1$  i  $\tau > 0$ . Tada za svaki  $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ ,

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|_p \leq \frac{C}{s^{1-1/p}} (\|\mathbf{z}\|_1 - \|\mathbf{x}\|_1 + 2\sigma_s(\mathbf{x})_1) + D s^{1/p-1/q} \|\mathbf{A}(\mathbf{z} - \mathbf{x})\|,$$

gdje su  $C := (1 + \rho)^2 / (1 - \rho)$  i  $D := (3 + \rho)\tau / (1 - \rho)$ .

*Dokaz.* Iskoristimo prvo da  $\ell_q$ -robustno svojstvo nul-prostora implicira  $\ell_1$ -robustno i  $\ell_p$ -robustno svojstvo nul-prostora, tj.

$$\|\mathbf{v}_S\|_1 \leq \rho \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 + \tau s^{1-1/q} \|\mathbf{A}\mathbf{v}\|, \quad (3.16)$$

$$\|\mathbf{v}_S\|_1 \leq \frac{\rho}{s^{1-1/p}} \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 + \tau s^{1/p-1/q} \|\mathbf{A}\mathbf{v}\|, \quad (3.17)$$

za svaki  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^N$  i za sve  $S \subset [N]$ , takve da  $\text{card}(S) \leq s$ . Uvažavajući (3.17) i primjenom teorema 3.3.3 s skupom  $S$  koji je jednak skupu  $s$  apsolutno najvećih

komponenti vektora  $\mathbf{x}$ , imamo

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|_1 \leq \frac{1 + \rho}{1 - \rho} (\|\mathbf{z}\|_1 - \|\mathbf{x}\|_1 + 2\sigma_s(\mathbf{x})_1) + \frac{2\tau}{1 - \rho} s^{1-1/q} \|\mathbf{A}(\mathbf{z} - \mathbf{x})\|. \quad (3.18)$$

Nadalje, odabirom skupa  $S$  kao skupa  $s$  apsolutno najvećih komponenti vektora  $\mathbf{z} - \mathbf{x}$ , iz teorema 1.1.5 slijedi

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|_p \leq \|(\mathbf{z} - \mathbf{x})_{\bar{S}}\|_p + \|(\mathbf{z} - \mathbf{x})_S\|_p \leq \frac{1}{s^{1-1/p}} \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|_1 + \|(\mathbf{z} - \mathbf{x})_S\|_p.$$

Iz (3.17) imamo,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|_p &\leq \frac{1}{s^{1-1/p}} \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|_1 + \frac{2}{s^{1-1/p}} \|(\mathbf{z} - \mathbf{x})_{\bar{S}}\|_1 + \tau s^{1/p-1/q} \|\mathbf{A}(\mathbf{z} - \mathbf{x})\| \\ &\leq \frac{1 + \rho}{s^{1-1/p}} \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|_1 + \tau s^{1/p-1/q} \|\mathbf{A}(\mathbf{z} - \mathbf{x})\|. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Preostaje (3.18) u (3.19).  $\square$

### 3.4 Rekonstrukcija predodređenog vektora

Ukoliko želimo rekonstruirati predodređeni rijetki vektor  $\mathbf{x}$  umjesto sve rijetke vektore  $s$  nosačemo u nekom skupu  $S$ , potrebno nam je finije svojstvo rekonstrukcije od svojstva nul-prostora. Naglasimo da se će ovdje biti sitna razlika između realnog i kompleksnog slučaja, što je posljedica definija predznaka broja  $z$ ,

$$\text{sgn}(z) := \begin{cases} \frac{z}{|z|} & \text{ako } z \neq 0, \\ 0 & \text{ako } z = 0 \end{cases}$$

i činjenice da je u realnom slučaju to diskretna vrijednost, dok u kompleksnom nije. Za vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ ,  $\text{sgn}(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}^N$  definiramo kao vektor s komponentama  $\text{sgn}(x_j)$ ,  $j \in [N]$ .

**Teorem 3.4.1.** *Za danu matricu  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$ , vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  sa nosačem  $S$  je jedinstveni minimizator od  $\|\mathbf{z}\|_1$  uz uvjet  $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  ako je jedna od narednih, ekvivalentnih tvrdnji zadovoljena:*

$$(a) \quad |\sum_{j \in S} \overline{\text{sgn}(x_j)} v_j| < \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\| \text{ za sve } \mathbf{v} \in \ker \mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\},$$

(b)  $\mathbf{A}_S$  je injektivna i postoji vektor  $\mathbf{h} \in \mathbb{C}^m$  takav da

$$(\mathbf{A}^*\mathbf{h})_j = \text{sgn}(x_j), \quad j \in S, \quad |(\mathbf{A}^*\mathbf{h})_l| < 1, \quad l \in \bar{S}.$$

*Dokaz.* Dokažimo prvo da (a) implicira da je  $\mathbf{x}$  jedinstveni minimizator od  $\|\mathbf{z}\|_1$  takav da  $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ . Za  $\mathbf{z} \neq \mathbf{x}$  takav da  $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  uzmimo  $\mathbf{v} := \mathbf{x} - \mathbf{z} \in \ker \mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\}$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}\|_1 &= \|\mathbf{z}_S\|_1 + \|\mathbf{z}_{\bar{S}}\|_1 = \|(\mathbf{x} - \mathbf{z})_S\|_1 + \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 \\ &> |\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \text{sgn}(\mathbf{x})_S \rangle| + |\langle \mathbf{v}, \text{sgn}(\mathbf{x})_S \rangle| \geq |\langle \mathbf{x}, \text{sgn}(\mathbf{x})_S \rangle| = \|\mathbf{x}\|_1. \end{aligned}$$

Pokažimo sada (b)  $\implies$  (a). Koristeći činjenicu da  $\mathbf{A}\mathbf{v}_S = -\mathbf{A}\mathbf{v}_{\bar{S}}$  za  $\mathbf{v} \in \ker \mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\}$  slijedi,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j \in S} \overline{\text{sgn}(x_j)} v_j \right| &= |\langle \mathbf{v}_S, \mathbf{A}^*\mathbf{h} \rangle| = |\langle \mathbf{A}\mathbf{v}_S, \mathbf{h} \rangle| = |\langle \mathbf{A}\mathbf{v}_{\bar{S}}, \mathbf{h} \rangle| \\ &= |\langle \mathbf{v}_{\bar{S}}, \mathbf{A}^*\mathbf{h} \rangle| \leq \max_{l \in \bar{S}} |(\mathbf{A}^*\mathbf{h})_l| \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 < \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1. \end{aligned}$$

Striktne nejednakosti vrijedi jer  $\|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 > 0$ . U suprotnom bi ne-nul vektor  $\mathbf{v} \in \ker \mathbf{A}$  imao nosač u  $S$ , što je kontradikcija s injektivnošću od  $\mathbf{A}_S$ .

Preostaje pokazati (a)  $\implies$  (b). Primjetimo da (a) povlači  $\|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 > 0$  za sve  $\mathbf{v} \in \ker \mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\}$ . Pokažimo da je  $\mathbf{A}_S$  injektivna. Pretpostavimo  $\mathbf{A}_S \mathbf{v}_S = \mathbf{0}$  za neki  $\mathbf{v}_S \neq \mathbf{0}$ . Nadopunimo  $\mathbf{v}_S$  do vektora  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^N$  tako da stavimo  $\mathbf{v}_{\bar{S}} = \mathbf{0}$ . Tada je  $\mathbf{v} \in \ker \mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\}$ , što je kontradikcija s  $\|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 > 0$  za svaki  $\mathbf{v} \in \ker \mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\}$ . Nadalje, primjetimo da je funkcija  $\mathbf{v} \mapsto |\langle \mathbf{v}, \text{sgn}(\mathbf{x})_S \rangle| / \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1$  neprekidna i da poprima vrijednosti manje od jedan na jediničnoj kugli u  $\ker \mathbf{A}$ , koja je kompaktan skup. Dakle maksimum  $\eta$  zadovoljava  $\eta < 1$  i vrijedi

$$|\langle \mathbf{v}, \text{sgn}(\mathbf{x})_S \rangle| \leq \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 \quad \text{za sve } \mathbf{v} \in \ker \mathbf{A}.$$

Za  $\eta < \nu < 1$  definiramo konveksni skup  $\mathcal{C}$  i afin skup  $\mathcal{D}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &:= \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \|\mathbf{z}_S\|_1 + \nu \|\mathbf{z}_{\bar{S}}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_1\}, \\ \mathcal{D} &:= \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x}\}. \end{aligned}$$

Pokažimo da je  $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \{\mathbf{x}\}$ . Uzmimo  $\mathbf{x} \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ . Za  $\mathbf{z} \neq \mathbf{x} \in \ker \mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\}$  kontradikcija slijedi iz

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_1 &\geq \|\mathbf{z}_S\|_1 + \nu \|\mathbf{z}_{\bar{S}}\|_1 = \|(\mathbf{x} - \mathbf{z})_S\|_1 + \nu \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 \\ &> \|(\mathbf{x} - \mathbf{v})_S\|_1 + \mu \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 \geq |\langle \mathbf{x} - \mathbf{v}, \text{sgn}(\mathbf{x})_S \rangle| + |\langle \mathbf{v}, \text{sgn}(\mathbf{x})_S \rangle| \\ &\geq |\langle \mathbf{x}, \text{sgn}(\mathbf{x})_S \rangle| = \|\mathbf{x}\|_1. \end{aligned}$$

Dakle, prema teoremu o separaciji konveksnih skupova hiperplohama (vidi TODO), postoji vektor  $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^N$  takav da

$$\mathcal{C} \subset \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \operatorname{Re}\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle \leq \|\mathbf{x}\|_1\}, \quad (3.20)$$

$$\mathcal{D} \subset \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \operatorname{Re}\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{x}\|_1\}. \quad (3.21)$$

Iz (3.20) slijedi,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_1 &\geq \max_{\|\mathbf{z}_S + \nu \mathbf{z}_{\bar{S}}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_1} \operatorname{Re}\langle \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \\ &= \max_{\|\mathbf{z}_S + \nu \mathbf{z}_{\bar{S}}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_1} \operatorname{Re}\left(\sum_{j \in S} z_j \bar{w}_j + \sum_{j \in \bar{S}} \nu z_j \bar{w}_j / \nu\right) \\ &= \max_{\|\mathbf{z}_S + \nu \mathbf{z}_{\bar{S}}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_1} \operatorname{Re}\langle \mathbf{z}_S + \nu \mathbf{z}_{\bar{S}}, \mathbf{w}_{\bar{S}} + (1/\nu) \mathbf{w}_{\bar{S}} \rangle \\ &= \|\mathbf{x}\|_1 \|\mathbf{w}_S + (1/\nu) \mathbf{w}_{\bar{S}}\|_\infty = \|\mathbf{x}\|_1 \max\{\|\mathbf{w}_S\|_\infty, (1/\nu) \|\mathbf{w}_{\bar{S}}\|_\infty\}. \end{aligned}$$

U slučaju  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , dovoljno je uzeti vektor  $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ , stoga neka je  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ . Gornja nejednakost daje  $\|\mathbf{w}_S\|_\infty \leq 1$  i  $\|\mathbf{w}_{\bar{S}}\|_{\text{infy}} \leq \nu < 1$ . Iz (3.21) slijedi  $\operatorname{Re}\langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{x}\|_1$ , tj.  $w_j = \operatorname{sgn}(x_j)$  za sve  $j \in S$ , te  $\operatorname{Re}\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$  za sve  $\mathbf{v} \in \ker \mathbf{A}$ , tj.  $\mathbf{w} \in (\ker \mathbf{A})^\perp$ . Pošto je  $(\ker \mathbf{A})^\perp = \operatorname{im} \mathbf{A}^*$ , imamo  $\mathbf{w} = \mathbf{A}^* \mathbf{h}$  za neki  $\mathbf{h} \in \mathbb{C}^m$ .  $\square$

U realnom slučaju obratna tvrdnja također vrijedi, dok općenito to nije istina. Dati ćemo još jednu karakterizaciju egzaktne rekonstrukcije  $\ell_1$ -minimizacijom u realnom slučaju. Za vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ , *konveksni konus* definiramo kao

$$T(\mathbf{x}) = \operatorname{cone}\{\mathbf{z} - \mathbf{x} : \mathbf{z} \in \mathbb{R}^N, \|\mathbf{z}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|\} \quad (3.22)$$

gdje cone predstavlja konusnu ljusku (vidi TODO).

**Teorem 3.4.2.** *Za matricu  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times N}$ , vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  je jedinstveni minimizator od  $\|\mathbf{z}\|_1$  takav da  $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  ako i samo ako  $\ker \mathbf{A} \cap T(\mathbf{x}) = \{\mathbf{0}\}$ .*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je  $\ker \mathbf{A} \cap T(\mathbf{x}) = \{\mathbf{0}\}$ . Neka je  $\mathbf{x}^\sharp$   $\ell_1$ -minimizator. Imamo,  $\|\mathbf{x}^\sharp\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_1$  i  $\mathbf{A}\mathbf{x}^\sharp = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , pa je  $\mathbf{v} := \mathbf{x}^\sharp - \mathbf{x} \in T(\mathbf{x}) \cap \ker \mathbf{A} = \{\mathbf{0}\}$ . Stoga je  $\mathbf{x}^\sharp = \mathbf{x}$ . Dakle,  $\mathbf{x}$  je jedinstveni  $\ell_1$ -minimizator.

Obratno, neka je  $\mathbf{x}$  jedinstveni  $\ell_1$ -minimizator. Vektor  $\mathbf{v} \in T(\mathbf{x}) \setminus \{\mathbf{0}\}$  možemo zapisati kao  $\mathbf{v} = \sum t_j (\mathbf{z}_j - \mathbf{x})$  gdje je  $t_j \geq 0$  i  $\|\mathbf{z}_j\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_1$ . Da je  $\mathbf{v} \in \ker \mathbf{A}$ , vrijedilo bi  $\mathbf{A}(\sum t_j' \mathbf{z}_j) = \mathbf{A}\mathbf{x}$  i  $\|\sum t_j' \mathbf{z}_j\|_1 \leq \sum t_j' \|\mathbf{z}_j\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_1$ . Zbog jedinstvenosti, to bi značilo da  $\sum t_j' \mathbf{z}_j = \mathbf{x}$  pa bi  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , što je kontradikcija. Dakle, vrijedi  $(T(\mathbf{x}) \setminus \{\mathbf{0}\}) \cap \ker \mathbf{A} = \emptyset$ .  $\square$

Ovaj rezultat možemo proširiti i na robusnu rekonstrukciju,

**Teorem 3.4.3.** Za  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times N}$ , neka je  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  i  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax} + \mathbf{e} \in \mathbb{R}^m$  i  $\|\mathbf{e}\|_2 \leq \eta$ . Ako je

$$\inf_{\mathbf{v} \in T(x), \|\mathbf{v}\|_2=1} \|\mathbf{Av}\|_2 \geq \tau$$

za neki  $\tau > 0$ , tada minimizator  $\mathbf{x}^\sharp$  od  $\|\mathbf{z}\|_1$  takav da  $\|\mathbf{Az} - \mathbf{y}\|_2 \leq \eta$  zadovoljava

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\sharp\|_2 \leq \frac{2\eta}{\tau}. \quad (3.23)$$

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da je  $\mathbf{x}^\sharp = \mathbf{x}$ . Iz  $\|\mathbf{x}^\sharp\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_1$  slijedi da je  $\mathbf{v} := (\mathbf{x}^\sharp - \mathbf{x})/\|\mathbf{x}^\sharp - \mathbf{x}\|_2 \in T(x)$ . Pošto je  $\|\mathbf{v}\|_2 = 1$  imamo da je  $\|\mathbf{Av}\|_2 \geq \tau$ , tj.  $\|\mathbf{A}(\mathbf{x}^\sharp - \mathbf{x})\|_2 \geq \tau\|\mathbf{x}^\sharp - \mathbf{x}\|_2$ . Nadalje, vrijedi

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{x}^\sharp - \mathbf{x})\|_2 \leq \|\mathbf{Ax}^\sharp - \mathbf{y}\|_2 + \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|_2 \leq 2\eta$$

Tvrđnja slijedi kombiniranjem prethodne dvije nejednakosti. □

## Poglavlje 4

# Koherencija

Kao što smo vidjeli, uspješnost rekonstrukcije rijetkog vektora u kontekstu sažetog uzorkovanja ovisi o određenim kvalitetama matrice mjerenja. Jedna od takvih mjera kvalitete je koherencija. Neformalno, što je koherencija matrice mjerenja manja, to je rekonstrukcija uspješnija.

### 4.1 Definicija i svojstva

U cjelom poglavlju podrazumjevamo da su stupci matrice mjerenje  $\ell_2$ -normalizirani.

**Definicija 4.1.1.** *Neka je  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  matrica sa  $\ell_2$ -normaliziranim stupcima  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N$ , tj.  $\|\mathbf{a}_i\|_2 = 1$  za sve  $i \in [N]$ . Koherencija  $\mu = \mu(\mathbf{A})$  matrice  $\mathbf{A}$  definiramo kao*

$$\mu := \max_{1 \leq i \neq j \leq N} |\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle|. \quad (4.1)$$

Nadalje, uvodimo općenitiji pojam funkcije  $\ell_1$ -koherencije. Gornja definicija je poseban slučaj za  $s = 1$ .

**Definicija 4.1.2.** *Neka je matrica  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  sa  $\ell_2$ -normaliziranim stupcima  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N$ . Za  $s \in [N - 1]$ , funkcija  $\ell_1$ -koherencije  $\mu_1$  matrice  $\mathbf{A}$  je definirana kao*

$$\mu_1(s) := \max_{i \in [N]} \max \left\{ \sum_{j \in S} |\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle|, S \subset [N], \text{card}(S) = s, i \notin S \right\}.$$

Jasno je da za  $1 \leq s \leq N - 1$  vrijedi

$$\mu \leq \mu_1(s) \leq s\mu \quad (4.2)$$

i općenitije za  $1 \leq s, t \leq N-1$  takve da  $s+t \leq N-1$

$$\max\{\mu_1(s), \mu_1(t)\} \leq \mu_1(s+t) \leq \mu_1(s) + \mu_1(t). \quad (4.3)$$

Primjetimo da je  $\ell_1$ -koherencija pa stoga i koherencija invarijanta na množenje s lijeva unitarnom matricom  $\mathbf{U}$ . Zaista, stupci od  $\mathbf{U}\mathbf{A}$  su  $\ell_2$ -normalizirani vektori  $\mathbf{U}\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{U}\mathbf{a}_N$  te zadovoljavaju  $\langle \mathbf{U}\mathbf{a}_i, \mathbf{U}\mathbf{a}_j \rangle = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle$ . Nadalje zbog Cauchy-Schwarzove nejednakosti imamo da vrijedi

$$\mu \leq 1.$$

Neka je na matrica  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  takva da  $m \geq N$ . Tada je  $\mu = 0$  ako i samo ako stupci matrice  $\mathbf{A}$  formiraju ortonormirani sustav. U slučaju da je matrica kvadratna,  $\mu = 0$  ako i samo ako je  $\mathbf{A}$  unitarna. U nastavu ćemo proučavati samo matrice kojima je  $m < N$ . U tom slučaju vrijednost koherencije je odozdo ograničena, što ćemo kasnije i pokazati.

**Teorem 4.1.3.** *Neka je  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  matrica sa  $\ell_2$ -normaliziranim stupcima i neka je  $s \in [N]$ . Za sve  $s$ -rijetke vektore  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  vrijedi,*

$$(1 - \mu_1(s-1))\|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \leq (1 + \mu_1(s-1))\|\mathbf{x}\|_2^2$$

*ili ekvivalentno, za svaki skup  $S \subset [N]$  takav da  $\text{card}(S) \leq s$ , svojstvene vrijednosti matrice  $\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S$  leže u segmentu  $[1 - \mu_1(s-1), 1 + \mu_1(s-1)]$ . Posebno, ako je  $\mu_1(s-1) < 1$  tada je  $\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S$  invertibilna.*

*Dokaz.* Neka je  $S \subset [N]$ . Pošto je matrica  $\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S$  pozitivno semidefinitna, svojstveni vektori koji odgovaraju realnim pozitivnim svojstvenim vrijednostima čine ortonormiranu bazu. Označimo s  $\lambda_{\min}$  najmanju i s  $\lambda_{\max}$  najveću svojstvenu vrijednost. Pošto je  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}_S \mathbf{x}_S$  za svaki  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  sa nosačem na skupu  $S$ , slijedi da je maksimum od

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 = \langle \mathbf{A}_S \mathbf{x}_S, \mathbf{A}_S \mathbf{x}_S \rangle = \langle \mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S \mathbf{x}_S, \mathbf{x}_S \rangle$$

po skupu  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ ,  $\text{supp } \mathbf{x} \subset S$ ,  $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$ , jednak  $\lambda_{\max}$  i minimum jednak  $\lambda_{\min}$ . Ovo pokazuje ekvivalenciju dvije tvrdnje u teoremu. Nadalje, pošto imamo da je  $\|a_j\|_2 = 1$  za sve  $j \in [N]$ , svi dijagonalni elementi matrice  $\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S$  jednaki su jedan. Prema Gershgorinom teoremu (vidi TODO), svojstvene vrijednosti od  $\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S$  sadržane su u uniji diskova s centrom u 1 radijusa

$$r_j := \sum_{l \in S, l \neq j} |(\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S)_{j,l}| = \sum_{l \in S, l \neq j} |\langle \mathbf{a}_l, \mathbf{a}_j \rangle| \leq \mu_1(s-1), \quad j \in S.$$

Pošto su svojstvene vrijednosti realne, moraju ležati u segmentu  $[1 - \mu_1(s - 1), 1 + \mu_1(s - 1)]$ .  $\square$

**Korolar 4.1.4.** *Neka je  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  s  $\ell_2$ -normaliziranim stupcima i neka je  $s \geq 1$ . Ako*

$$\mu_1(s) + \mu_1(s - 1) < 1,$$

*onda je, za svaki  $S \subset [N]$  takav da  $\text{card}(S) \leq 2s$ , matrica  $\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S$  invertibilna i matrica  $\mathbf{A}_S$  injektivna. Posebno, isti zaključak vrijedi ako*

$$\mu < \frac{1}{2s - 1}$$

*Dokaz.* Iz (4.3),  $\mu_1(s) + \mu_1(s - 1) < 1$  povlači  $\mu_1(2s - 1) < 1$ . Prema prethodnom teoremu, za  $S \subset [N]$  takav da  $\text{card}(S) = 2s$ , najmanja svojstvena vrijednost matrice  $\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S$  zadovoljava  $\lambda_{\min} \geq 1 - \mu_1(2s - 1) > 0$ . Dakle,  $\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S$  je invertibilna. Ako je  $\mathbf{A}_S \mathbf{z} = \mathbf{0}$  tada je i  $\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S \mathbf{z} = \mathbf{0}$  no to implicira  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ . Dakle,  $\mathbf{A}_S$  je injektivna. Isti zaključci slijedi iz  $\mu_1(s) + \mu_1(s - 1) \leq (2s - 1)\mu < 1$  ako je  $\mu < 1/(2s - 1)$   $\square$

## 4.2 Matrice male koherencije

Sada ćemo proučiti ocjene odozdo na koherenciju i na  $\ell_1$ -koherenciju matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times N}$  takve da  $m < N$  i gdje je  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ili  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

**Definicija 4.2.1.** *Sustav  $\ell_2$ -normaliziranih vektora  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N)$  iz  $\mathbb{K}^m$  nazivamo ekviansularan ako postoji konstanta  $c \leq 0$  takva da*

$$|\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle| = c \quad \text{za sve } i, j \in [N], \quad i \neq j.$$

**Definicija 4.2.2.** *Sustav vektora  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N)$  iz  $\mathbb{K}^m$  zovemo napeti bazni okvir ako postoji konstanta  $\lambda > 0$  takva da vrijedi jedan od ekvivalentnih uvjeta:*

$$(a) \quad \|\mathbf{x}\|_2^2 = \lambda \sum_{j=1}^N |\langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_j \rangle|^2 \quad \text{za sve } \mathbf{x} \in \mathbb{K}^m,$$

$$(b) \quad \mathbf{x} = \lambda \sum_{j=1}^N \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_j \rangle \mathbf{a}_j \quad \text{za sve } \mathbf{x} \in \mathbb{K}^m,$$

$$(c) \quad \mathbf{A} \mathbf{A}^* = (1/\lambda) \mathbf{I}_m, \quad \text{gdje je } \mathbf{A} \text{ matrica sa stupcima } \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N.$$

Sustav  $\ell_2$ -normaliziranih vektora zove se ekviansularni napeti bazni okvir ako je bazni okvir ujedno ekviansularni sustav vektora i napeti bazni okvir. Takve sustavi vektora postižu takozvanu *Welchovu ocjenu*.



**Teorem 4.2.3.** *Koherencija matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times N}$  s  $\ell_2$ -normaliziranim stupcima zadovoljava*

$$\mu \geq \sqrt{\frac{N-m}{m(N-1)}}. \quad (4.4)$$

*Jednakost vrijedi ako i samo ako stupci  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N$  matrice  $\mathbf{A}$  čine ekviangularni napeti bazni okvir.*

*Dokaz.*  $\mathbf{G} := \mathbf{A}^* \mathbf{A} \in \mathbb{K}^{N \times N}$  zovemo *Gramova matrica* sustava vektora  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N)$ . Elementi od  $G$  su obika

$$G_{i,j} = \overline{\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle} = \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_i \rangle, \quad i, j \in [N].$$

Nadalje, definirajmo matricu  $\mathbf{H} := \mathbf{A} \mathbf{A}^* \in \mathbb{K}^{m \times m}$ . Pošto su stupci od  $\mathbf{A}$   $\ell_2$ -normalizirani, imamo

$$\text{tr}(\mathbf{G}) = \sum_{i=1}^N \|\mathbf{a}_i\|_2^2 = N. \quad (4.5)$$

Pošto skalarni produkt

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_F := \text{tr}(\mathbf{U} \mathbf{V}^*) = \sum_{i,j=1}^n U_{i,j} \overline{V_{i,j}}$$

inducira *Froebeniusovu normu*  $\|\cdot\|_F$  na  $\mathbb{K}^{n \times n}$  (vidi TODO), Cauchy-Schwarzova nejednakost daje

$$\text{tr}(\mathbf{H}) = \langle \mathbf{H}, \mathbf{I}_m \rangle_F \leq \|\mathbf{H}\|_F \|\mathbf{I}_m\|_F = \sqrt{m} \sqrt{\text{tr}(\mathbf{H} \mathbf{H}^*)}. \quad (4.6)$$

Nadalje,

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{H} \mathbf{H}^*) &= \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{A}^* \mathbf{A} \mathbf{A}^*) = \text{tr}(\mathbf{A}^* \mathbf{A} \mathbf{A}^* \mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{G} \mathbf{G}^*) = \sum_{i,j=1}^N |\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle|^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \|\mathbf{a}_i\|_2^2 + \sum_{i,j=1, i \neq j}^N |\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle|^2 = N + \sum_{i,j=1, i \neq j}^N |\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle|^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Iz činjenice da  $\text{tr}(\mathbf{G}) = \text{tr}(\mathbf{H})$ , te kombiniranjem (4.5), (4.6) i (4.7) imamo

$$N^2 \leq m \left( N + \sum_{i,j=1, i \neq j}^N |\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle|^2 \right) \quad (4.8)$$

Napokon, uvažimo da

$$|\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle| \leq \mu \quad \text{za sve } i, j \in [N], i \neq j, \quad (4.9)$$

pa slijedi,

$$N^2 \leq m(N + (N^2 - N)\mu^2),$$

od kuda lako slijedi ocjena iz tvrdnje teorema. Nadalje, jednakost u (4.4) ako vrijede jednakosti u (4.6) i (4.9). Jednakost u (4.6) daje  $\mathbf{H} = \lambda \mathbf{I}_m$  za neku nenegativnu konstantu  $\lambda$ , tj. sustav  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N)$  je napeti bazni okvir. Iz jednakost u (4.9) slijedi da je taj sustav ekviangularan.  $\square$

Welchovu ocjenu možemo proširiti i na funkciju  $\ell_1$ -koherencije.

**Teorem 4.2.4.** *Funkcija  $\ell_1$ -koherencije matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times N}$  s  $\ell_2$ -normaliziranim stupcima zadovoljava*

$$\mu_1(s) \geq s \sqrt{\frac{N-m}{m(N-1)}} \quad \text{za } s < \sqrt{N-1}. \quad (4.10)$$

*Jednakost se postiže ako i samo stupci matrice  $\mathbf{A}$  formiraju ekviangularni napeti bazni okvir.*

Za dokaz biti će nam potrebna sljedeća lema,

**Lema 4.2.5.** *Za  $k < \sqrt{n}$ , ako konačni niz brojeva  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  zadovoljava*

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n \geq 0 \quad \text{i} \quad \alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_n^2 \geq \frac{n}{k^2}$$

*tada*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \geq 1,$$

*gdje se jednakost postiže ako i samo ako  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1/k$ .*

Ideja dokaza je analogna dokazu teorema 1.1.5, tj. problem se svodi na maksimizaciju konveksne funkcije (vidi TODO).

*Dokaz (Teorem 4.2.4).* Iz (4.8) imamo

$$\sum_{i,j=1, i \neq j}^N |\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle|^2 \geq \frac{N^2}{m} - N = \frac{N(N-m)}{m},$$

odakle slijedi

$$\max_{i \in [N]} \sum_{j=1, j \neq i}^N |\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle|^2 \geq \frac{1}{N} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N |\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle|^2 \geq \frac{N-m}{m}.$$

Neka je  $i^* \in [N]$  indeks za koji se postiže maksimum. Sortirajmo niz  $(|\langle \mathbf{a}_{i^*}, \mathbf{a}_j \rangle|)_{j=1}^N$  kao  $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \beta_{N-1} \geq 0$ , tako da

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_{N-1}^2 \geq \frac{N-m}{m}.$$

Primjenom prethodne lemu s  $n = N - 1$ ,  $k = s$ , i  $\alpha_l := (\sqrt{m(N-1)/(N-m)}/s)\beta_l$  dobivamo  $\alpha_1 + \dots + \alpha_s \geq 1$ . Dakle,

$$\mu_1(s) \geq \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_s \geq s \sqrt{\frac{N-m}{m(N-1)}}.$$

Pretpostavimo sada da u (4.10) vrijedi jednakost, pa su sve nejednakosti zapravo jednakosti. Jednakost u (4.8) implicira da su stupci matrice  $\mathbf{A}$  napeti bazni okvir. Jednakost u prethodnoj lemi implicira da  $|\langle \mathbf{a}_{i^*}, \mathbf{a}_j \rangle| = \sqrt{(N-m)/(m(N-1))}$  za sve  $j \in [N]$ , takve da  $j \neq i^*$ . Pošto indeks  $i^*$  možemo proizvoljno odabrati iz  $[N]$ , slijedi da je sustav stupaca matrice  $\mathbf{A}$  ekviangularan. Obrat lako slijedi iz teorema 4.2.3 i (4.2).  $\square$

U kontekstu sažetog uzorkovanja zanimaju  $m \times N$  matrice gdje je  $N$  puno veći od  $m$ . No, pokazati ćemo da u tom slučaju ne možemo postići Welchovu ocjenu.

**Teorem 4.2.6.** *Kardinalitet  $N$  ekviangularnog sustava  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N)$   $\ell_2$ -normaliziranih vektora u  $\mathbb{K}^m$  zadovoljava*

$$N \leq \frac{m(m+1)}{2} \quad \text{za } \mathbb{K} = \mathbb{R},$$

$$N \leq m^2 \quad \text{za } \mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

*Ako vrijedi jednakost onda je sustav  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N)$  također i napeti bazni okvir.*

Za dokaz teorema potrebna nam je sljedeća tvrdnja,

**Lema 4.2.7.** *Neka je  $z \in \mathbb{C}$ , matrica*

$$\begin{bmatrix} 1 & z & z & \cdots & z \\ z & 1 & z & \cdots & z \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ z & \cdots & z & 1 & z \\ z & \cdots & z & z & 1 \end{bmatrix}$$

*ima jednostruku svojstvenu vrijednost  $1 + (n - 1)z$  te svojstvenu vrijednost  $1 - z$  algebarske kratnosti  $n - 1$ .*

Za dokaz leme vidi TODO.

*Dokaz (Teorem 4.2.6).* Ideja je razmatranja sa prostora  $\mathbb{K}^m$  prebaciti na potprostor  $\mathcal{S}_m$  operatora na  $\mathbb{K}^m$ . U slučaju  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{S}_m$  je prostor simetričnih operatora na  $\mathbb{R}^m$ , a u slučaju  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $\mathcal{S}_m$  je cjeli prostor operatora na  $\mathbb{C}^m$ . Ti su prostori opremljeni Froebeniusovim skalarnim produktom

$$\langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle_F = \text{tr}(\mathbf{P}\mathbf{Q}^*) \quad (4.11)$$

za  $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathcal{S}_m$ . Označimo sa  $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N \in \mathcal{S}_m$  orthogonalne projektore na potprostore razapete sa  $\{\mathbf{a}_i\}$  za  $i = 1, 2, \dots, N$ , definirane sa

$$\mathbf{P}_i(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{a}_i \rangle \mathbf{a}_i$$

za  $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^m$ . Nadalje, neka je  $c := |\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle|$  za  $i \neq j$  te neka je  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N)$  kanonska baza za  $\mathbb{K}^m$ . Koristeći činjenicu da je  $\mathbf{P}_i^2 = \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i^*$ , za  $i, j \in [N]$ ,  $i \neq j$  računamo

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P}_i, \mathbf{P}_i \rangle_F &= \text{tr}(\mathbf{P}_i \mathbf{P}_i^*) = \text{tr}(\mathbf{P}_i) = \sum_{k=1}^m \langle \mathbf{P}_i(\mathbf{e}_k), \mathbf{e}_k \rangle_F = \sum_{k=1}^m \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{a}_i \rangle \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{e}_k \rangle \\ &= \sum_{k=1}^m |\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{e}_k \rangle|^2 = \|\mathbf{a}_i\|_2^2 = 1, \\ \langle \mathbf{P}_i, \mathbf{P}_j \rangle_F &= \text{tr}(\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j^*) = \text{tr}(\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j) = \sum_{k=1}^m \langle \mathbf{P}_i \mathbf{P}_j(\mathbf{e}_k), \mathbf{e}_k \rangle = \sum_{k=1}^m \langle \mathbf{P}_j(\mathbf{e}_k), \mathbf{P}_i(\mathbf{e}_k) \rangle \\ &= \sum_{k=1}^m \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{a}_j \rangle \overline{\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{a}_i \rangle} \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_i \rangle = \overline{\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle} \left\langle \sum_{k=1}^m \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{e}_k \rangle \mathbf{e}_k, \mathbf{a}_j \right\rangle \\ &= \overline{\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle} \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle = |\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle|^2 = c^2. \end{aligned}$$

Dakle, Gramova matrica sustava  $(\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N)$  je  $N \times N$  matrica oblika

$$\begin{bmatrix} 1 & c^2 & c^2 & \dots & c^2 \\ c^2 & 1 & c^2 & \dots & c^2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c^2 & \dots & c^2 & 1 & c^2 \\ c^2 & \dots & c^2 & c^2 & 1 \end{bmatrix}$$

Iz činjenice  $0 \leq c^2 < 1$  i leme 4.2.7 slijedi da je ova Gramova matrica invertibilna, što znači da je sustav  $(\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N)$  linearno nezavisan. Taj sustav leži u prostoru  $\mathcal{S}_m$  koji je dimenzije  $m(m+1)/2$  za  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  te dimenzije  $m^2$  za  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Stoga vrijedi,

$$N \leq \frac{m(m+1)}{2} \quad \text{za } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad N \leq m^2 \quad \text{za } \mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

Pretpostavimo sada da vrijedi jednakost. Tada je sustav  $(\mathbf{I}_m, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N)$  linearno zavisn, pa je stoga

$$\begin{vmatrix} 1 & b & b & \dots & b \\ b & 1 & b & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & \dots & b & 1 & b \\ b & \dots & b & b & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{gdje je } b := \frac{mc^2 - 1}{m - 1}.$$

Pošto  $1 - b = m(1 - c^2)/(m - 1) \neq 0$ , lema 4.2.7 implicira da je  $1 + (N - 1)b = 0$ . Slijedi,

$$c^2 = \frac{N - m}{m(N - 1)}.$$

Dakle, pokazali smo da  $\ell_2$ -normalizirani sustav  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N)$  postiže Welchovu ocjenu a teorem 4.2.3 implicira da je taj sustav onda ekviangularan napeti okvir.  $\square$

Zanimljivo je da u kontekstu prostora  $\mathbb{C}^m$  postoje sustavi od  $m^2$  ekviangularnih vektora za sve  $m$ , dok u  $\mathbb{R}^m$  sustavi od  $m(m+1)/2$  ekviangularnih vektora ne postoje za sve  $m$ . Poznato je da postoje u slučajevima gdje je  $m$  jednak 2, 3, 7 i 23. Pitanje ostalih slučajeva je i dalje otvoreno.

**Teorem 4.2.8.** *Za  $m \geq 3$ , ako postoji ekviangularni sustav od  $m(m+1)/2$  vektora u  $\mathbb{R}^m$ , tada je  $m+2$  nužno kvadrat nekog neparnog prirodnog broja.*

*Dokaz.* Neka je  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N)$  sustav od  $N = m(m+1)/2$  ekviangularnih  $\ell_2$ -normaliziranih vektora. Prema teoremu 4.2.6 taj je sustav napeti bazni okvir, pa stoga matrica  $\mathbf{A}$  sa

stupcima  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N$  zadovoljava  $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \lambda \mathbf{I}_m$  za neki  $\lambda > 0$ . Matrica  $\mathbf{G} := \mathbf{A}^*\mathbf{A}$  ima iste ne-nul svojstvene vrijednosti kao i  $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ , tj. svojstvenu vrijednost  $\lambda$  algebarske kratnosti  $m$ . i svojstvenu vrijednost nula kratnosti  $N - m$ . Nadalje, pošto je  $\mathbf{G}$  Gramova matrica sustava  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N)$ , njezini dijagonalni elementi jednaki su jedinici, dok su svi vandijagonalni elementi jednaki po apsolutnoj vrijednosti nekom broju  $c$ . Dakle, matrica  $\mathbf{B} := (\mathbf{G} - \mathbf{I}_N)/c$  je oblika

$$\begin{bmatrix} 0 & b_{1,2} & b_{1,3} & \cdots & b_{1,N} \\ b_{2,1} & 0 & b_{2,2} & \cdots & b_{2,N} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{N-1,1} & \cdots & b_{N-1,N-2} & 0 & b_{N-1,N} \\ b_{N,1} & \cdots & b_{N,N-2} & b_{N,N-1} & 0 \end{bmatrix} = 0, \quad \text{gdje je } b_{i,j} := \pm 1,$$

i ima  $-1/c$  kao svojstvenu kratnosti  $N - m$ . Stoga je njezin karakteristični polinom  $p_{\mathbf{B}}(x) := \sum_{k=0}^N \beta_k (-x)^k$ ,  $\beta_N = 1$ , s cjelobrojnim koeficijentima  $\beta_k$  i poništava se za  $-1/c$ . Uvažeci da je

$$c = \sqrt{\frac{N-m}{m(N-1)}} = \sqrt{\frac{(m+1)/2-1}{m(m+1)/2-1}} = \sqrt{\frac{m-1}{m^2+m-2}} = \frac{1}{\sqrt{m+2}}$$

imamo  $p_{\mathbf{B}}(-\sqrt{m+2}) = 0$ , tj.

$$\left( \sum_{0 \leq k \leq N/2} b_{2k} (m+2)^k \right) + \sqrt{m+2} \left( \sum_{0 \leq k \leq (N-1)/2} b_{2k+1} (m+2)^k \right) = 0.$$

Označimo gornje cjelobrojne sume sa  $\Sigma_1$  i  $\Sigma_2$ . Dakle, imamo  $\Sigma_1^2 = (m+2)\Sigma_2^2$ , što implicira da je  $(m+2)$  kvadrat. Preostaje pokazati da je  $n := \sqrt{m+2}$  neparan. Definiramo  $N \times N$  matricu  $\mathbf{J}_N$  kojoj su svi elementi jednaki jedinici. Dimenzija njezine jezgre je  $N - 1$  pa je stoga u presjeku s  $N - m$  dimenzijonalnim svojstvenim potprostorom od  $\mathbf{B}$  koji odgovara svojstvenoj vrijednosti  $-1/c = -n$ , pošto  $N - 1 + N - m > N$  za  $m \geq 3$ , tj.  $N = m(m+1)/2 > m+1$ . Matrica  $\mathbf{C} := (\mathbf{B} - \mathbf{I}_n + \mathbf{J}_N)/2$  ima  $-(n+1)/2$  kao svojstvenu vrijednost. Dijagonalni elementi su joj nula, a vandijagonalni jednaki su ili nuli ili jedinici. Stoga je  $p_{\mathbf{C}}(x) := \sum_{k=0}^N \gamma_k (-x)^k$ ,  $\gamma_N = 1$  s cjelobrojnim koeficijentima i  $p_{\mathbf{C}}(x)$  poništava se za  $x = -(n+1)/2$ . Tu zadnju činjenicu možemo zapisati u obliku

$$(n+1)^N = - \sum_{k=0}^{N-1} 2^{N-k} \gamma_k (n+1)^k.$$

Slijedi da je  $(n+1)^N$  paran pa je stoga i  $n+1$ . Konačno imamo da je  $n = \sqrt{m+2}$  neparan.  $\square$

Naredni teorem daje eksplicitnu konstrukciju  $m \times m^2$  kompleksnih matrica s koherencijom  $1/\sqrt{m}$ , što je ujedno i limes Welchove ocjene kada  $N$  ide u beskonačnost.

**Teorem 4.2.9.** *Za svaki prosti broj  $m \geq 5$ , postoji eksplicitna  $m \times m^2$  kompleksna matrica s koherencijom  $\mu = 1/\sqrt{m}$ .*

*Dokaz.* Kroz dokaz [m] identificiramo sa skupom  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} =: \mathbb{Z}_m$ . Za  $k, l \in \mathbb{Z}_m$  uvodimo operator *translacije*  $\mathbf{T}_k$  i operator *modulacije*  $\mathbf{M}_l$  definirane sa

$$(\mathbf{T}_k \mathbf{z})_j = z_{j-k}, \quad (\mathbf{M}_l \mathbf{z})_j = e^{2\pi i l j / m} z_j$$

za  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_m}$  i  $j \in \mathbb{Z}_m$ . Ti operatori su izometrije prostora  $\ell_2(\mathbb{Z}_m)$ . Uvedimo takovani *Alltop*  $\ell_2$ -normalizirani vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_m}$  definiran sa

$$x_j := \frac{1}{\sqrt{m}} e^{2\pi i j^3 / m}, \quad j \in \mathbb{Z}_m.$$

Eksplicitna  $m \times m^2$  matrica iz tvrdnje teorema dana je kao matrica sa stupcima  $\mathbf{M}_l \mathbf{T}_k \mathbf{x}$  za  $k, l \in \mathbb{Z}_m$ , tj. matrica oblika

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 \mathbf{T}_1 \mathbf{x} & \cdots & \mathbf{M}_1 \mathbf{T}_m \mathbf{x} & \mathbf{M}_2 \mathbf{T}_1 \mathbf{x} & \cdots & \mathbf{M}_m \mathbf{T}_m \mathbf{x} \end{bmatrix}$$

Računamo skalarni produkt dva stupca indeksirana sa  $(k, l)$  i  $(k', l')$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{M}_l \mathbf{T}_k \mathbf{x}, \mathbf{M}_{l'} \mathbf{T}_{k'} \mathbf{x} \rangle &= \sum_{j \in \mathbb{Z}_m} (\mathbf{M}_l \mathbf{T}_k \mathbf{x})_j \overline{(\mathbf{M}_{l'} \mathbf{T}_{k'} \mathbf{x})_j} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}_m} e^{2\pi i l j / m} x_{j-k} e^{-2\pi i l' j / m} \overline{x_{j-k'}} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{j \in \mathbb{Z}_m} e^{2\pi i (l-l') j / m} e^{2\pi i ((j-k)^3 - (j-k')^3) / m}. \end{aligned}$$

Označimo  $a := l - l'$  i  $b := k - k'$ ,  $(a, b) \neq (0, 0)$  i promijenimo indeks sumacije za  $h = j - k'$

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{M}_l \mathbf{T}_k \mathbf{x}, \mathbf{M}_{l'} \mathbf{T}_{k'} \mathbf{x} \rangle| &= \frac{1}{m} \left| e^{2\pi i a k' / m} \sum_{h \in \mathbb{Z}_m} e^{2\pi i a h / m} e^{2\pi i ((h-b)^3 - h^3) / m} \right| \\ &= \frac{1}{m} \left| \sum_{h \in \mathbb{Z}_m} e^{2\pi i a h / m} e^{2\pi i (-3bh^2 + 3b^2 h - b^3) / m} \right| \\ &= \frac{1}{m} \left| \sum_{h \in \mathbb{Z}_m} e^{2\pi i (-3bh^2 + (a+3b^2)h) / m} \right| \end{aligned}$$

Neka je  $c := -3b$  i  $d := a + 3b^2$ ,

$$\begin{aligned}
 |\langle \mathbf{M}_l \mathbf{T}_k \mathbf{x}, \mathbf{M}_{l'} \mathbf{T}_{k'} \mathbf{x} \rangle|^2 &= \frac{1}{m^2} \sum_{h \in \mathbb{Z}_m} e^{2\pi i(ch^2 + dh)/m} \sum_{h' \in \mathbb{Z}_m} e^{-2\pi i(ch'^2 + dh')/m} \\
 &= \frac{1}{m^2} \sum_{h, h'} e^{2\pi i(h-h')(c(h+h') + d)/m} \\
 &= \frac{1}{m^2} \sum_{h', h'' \in \mathbb{Z}_m} e^{2\pi i h''(c(h'' + 2h') + d)/m} \\
 &= \frac{1}{m^2} \sum_{h'' \in \mathbb{Z}_m} e^{2\pi i h''(ch'' + d)/m} \left( \sum_{h' \in \mathbb{Z}_m} e^{4\pi i ch'' h'/m} \right).
 \end{aligned}$$

Primjetimo, za svaki  $h'' \in \mathbb{Z}_m$  imamo

$$\sum_{h' \in \mathbb{Z}_m} e^{4\pi i ch'' h'/m} = \begin{cases} m & \text{ako } 2ch'' = 0 \pmod{m}, \\ 0 & \text{ako } 2ch'' \neq 0 \pmod{m}. \end{cases}$$

Pogledajmo dva slučaja:

1.  $c = 0 \pmod{m}$ :

Pošto je  $c = -3b$  i  $3 \neq 0 \pmod{m}$ , imamo  $b = 0$ , pa stoga  $d = a + 3b^2 \neq 0 \pmod{m}$  i

$$|\langle \mathbf{M}_l \mathbf{T}_k \mathbf{x}, \mathbf{M}_{l'} \mathbf{T}_{k'} \mathbf{x} \rangle|^2 = \frac{1}{m} \sum_{h'' \in \mathbb{Z}_m} e^{2\pi i d h''/m} = 0.$$

2.  $c \neq 0 \pmod{m}$ :

Pošto  $2 \neq 0 \pmod{m}$ , jednakost  $2ch'' = 0$  vrijedi samo kada je  $h'' = 0 \pmod{m}$ , pa stoga

$$|\langle \mathbf{M}_l \mathbf{T}_k \mathbf{x}, \mathbf{M}_{l'} \mathbf{T}_{k'} \mathbf{x} \rangle|^2 = \frac{1}{m}$$

Dakle, koherencija matrice je  $1/\sqrt{m}$ . □



### 4.3 Analiza OMP algoritma

Pokazati ćemo da mala koherencija osigurava rekonstrukciju rijetkih vektora OMP algortmom.

**Teorem 4.3.1.** *Neka je  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  matrica sa  $\ell_2$ -normaliziranim stupcima. Ako je*

$$\mu_1(s) + \mu_1(s-1) < 1, \quad (4.12)$$

*onda se svaki  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  može rekonstruirati iz vektora mjerenja  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  u najviše  $s$  iteracija OMP algoritma.*

*Dokaz.* Neka su  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N$   $\ell_2$ -normalizirani stupci matrice  $\mathbf{A}$ . Prema propoziciji 2.2.3 dovoljno je dokazati da je za svaki  $S \subset [N]$  takav da  $\text{card}(S) = s$  matrica  $\mathbf{A}_S$  injektivna te da vrijedi

$$\max_{j \in S} |\langle \mathbf{r}, \mathbf{a}_j \rangle| > \max_{l \in \bar{S}} |\langle \mathbf{r}, \mathbf{a}_l \rangle| \quad (4.13)$$

za sve ne-nul vektore  $\mathbf{r} \in \{\mathbf{A}\mathbf{z}, \text{supp}(\mathbf{z}) \subset S\}$ . Neka je  $\mathbf{r} := \sum_{i \in S} r_i \mathbf{a}_i$  i neka je  $k \in S$  takav da  $|r_k| = \max_{i \in S} |r_i| > 0$ . Za  $l \in \bar{S}$  imamo,

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{r}, \mathbf{a}_l \rangle| &= \left| \sum_{i \in S} r_i \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_l \rangle \right| \leq \sum_{i \in S} |r_i| |\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_l \rangle| \leq |r_k| \mu_1(s) \\ |\langle \mathbf{r}, \mathbf{a}_k \rangle| &= \left| \sum_{i \in S} r_i \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_k \rangle \right| \geq |r_k| |\langle \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k \rangle| - \sum_{i \in S, i \neq k} |r_i| |\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_k \rangle| \\ &\geq |r_k| - |r_k| \mu_1(s-1). \end{aligned}$$

Dakle, (4.13) vrijedi jer (4.12) implicira  $1 - \mu_1(s-1) > \mu_1(s)$ . Injektivnost od  $\mathbf{A}_S$  slijedi iz korolara 4.1.4.  $\square$

### 4.4 Analiza $\ell_1$ -minimizacije

Pokazati ćemo da mala koherencija matrice mjerenja također garantira i rekonstrukciju vektora  $\ell_1$ -minimizacijom tj, BT algortmom.

**Teorem 4.4.1.** *Neka je  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  sa  $\ell_2$ -normaliziranim stupcima. Ako je*

$$\mu_1(s) + \mu_1(s-1) < 1, \quad (4.14)$$

*onda se svaki  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  može rekonstruirati iz vektora mjerenja  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  putem  $\ell_1$ -minimizacije.*

*Dokaz.* Prema teoremu 3.1.3 dovoljno i nužno je dokazati da matrica  $\mathbf{A}$  zadovoljava svojstvo nul-prostora te da vrijedi

$$\|\mathbf{v}_S\|_1 < \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 \quad (4.15)$$

za svaki ne-nul vektor  $\mathbf{v} \in \ker \mathbf{A}$  i za svaki skup indeksa  $S \subset [N]$  takav da  $\text{card}(S) = s$ . Neka su  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N$  stupci od  $\mathbf{A}$ . Uvjet  $\mathbf{v} \in \ker \mathbf{A}$  interpretiramo kao  $\sum_{j=1}^N v_j \mathbf{a}_j = 0$ . Dakle, imamo

$$v_i = v_i \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i \rangle = - \sum_{j=1, j \neq i}^N v_j \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_i \rangle = - \sum_{l \in \bar{S}} v_l \langle \mathbf{a}_l, \mathbf{a}_i \rangle - \sum_{j \in S, j \neq i} v_j \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_i \rangle.$$

Slijedi,

$$|v_i| \leq \sum_{l \in \bar{S}} |v_l| |\langle \mathbf{a}_l, \mathbf{a}_i \rangle| + \sum_{j \in S, j \neq i} |v_j| |\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_i \rangle|.$$

Sumiranjem po  $i \in S$  i poretkom reda sumacije imamo,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_S\|_1 &= \sum_{l \in \bar{S}} |v_l| \sum_{i \in S} |\langle \mathbf{a}_l, \mathbf{a}_i \rangle| + \sum_{j \in S} |v_j| \sum_{i \in S, i \neq j} |\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_i \rangle| \\ &\leq \sum_{l \in \bar{S}} |v_l| \mu_1(s) + \sum_{j \in S} |v_j| \mu_1(s-1) = \mu_1(s) \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 + \mu_1(s-1) \|\mathbf{v}_S\|_1. \end{aligned}$$

Od tuda lako slijedi tvrdnja. □

Prema teoremu 4.2.9 možemo odabrati matricu  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  s koherencijom  $\mu \leq c/\sqrt{m}$ . Vidimo da je uvjet  $(2s-1)\mu < 1$ , koji garantira rekonstrukciju OMP algoritmom i  $\ell_1$ -minimizacijom, zadovoljen ako

$$m \geq Cs^2. \quad (4.16)$$

Dakle imamo ocjenu na minimalni broj mjerenja za specifičnu matricu  $\mathbf{A}$  i rijetkost  $s$ . No, primjetimo da ova ocjena nije praktična za  $s$  razumne veličine pošto ulazi u ocjenu s kvadratom. Uvjerimo se da nije moguće poboljšati ovu ocjenu u kontekstu teorema 4.3.1 i 4.4.1. Pretpostavimo da vrijedi dovoljan uvjet  $\mu_1(s) + \mu_1(s-1) < 1$  sa  $m \leq (2s-1)^2/2$  i  $s < \sqrt{N-1}$  na primjer. Nadalje za  $N \geq m$  iz teorema 4.2.4 slijedi

$$1 > \mu_1(s) + \mu_1(s-1) \geq (2s-1) \sqrt{\frac{N-m}{m(N-1)}} \geq \sqrt{\frac{2(N-m)}{N-1}} \geq \sqrt{\frac{N}{N-1}}.$$

što je kontradikcija.

## 4.5 Analiza graničnih metoda

Uz slične uvjete kao u prethodna dva teorema čak i BT algoritam garantira rekonstrukciju.

**Teorem 4.5.1.** *Neka je  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  sa  $\ell_2$ -normaliziranim stupcima i neka je  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  sa nosačem  $S$ ,  $\text{card}(S) = s$ . Ako je*

$$\mu_1(s) + \mu_1(s-1) < \frac{\min_{i \in S} |x_i|}{\max_{i \in S} |x_i|}, \quad (4.17)$$

*onda se vektor  $\mathbf{x}$  može rekonstruirati iz vektora mjerenja  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  putem BT algoritma.*

*Dokaz.* Neka su  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N$   $\ell_2$ -normalizirani stupci matrice  $\mathbf{A}$ . Prema propoziciji 2.3.1 dovoljno je dokazati da za svaki  $j \in S$  i  $l \in \bar{S}$ ,

$$|\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{a}_j \rangle| > |\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{a}_l \rangle|. \quad (4.18)$$

Primjetimo,

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{a}_l \rangle| &= \left| \sum_{i \in S} x_i \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_l \rangle \right| \leq \sum_{i \in S} |x_i| |\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_l \rangle| \leq \mu_1(s) \max_{i \in S} |x_i|, \\ |\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{a}_j \rangle| &= \left| \sum_{i \in S} x_i \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle \right| \geq |x_j| - \sum_{i \in S, i \neq j} |x_i| |\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle| \\ &\geq \min_{i \in S} |x_i| - \mu_1(s-1) \max_{i \in S} |x_i|. \end{aligned}$$

Iz (4.17) slijedi,

$$|\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{a}_j \rangle| - |\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{a}_l \rangle| \geq \min_{i \in S} |x_i| - (\mu_1(s) - \mu_1(s-1)) \max_{i \in S} |x_i| > 0.$$

□

Uz iste uvjete, analogno se pokaže da IHT algoritam garantira rekonstrukciju. Sada ćemo pokazati da HTP algoritam uz određene uvjete, isto kao u OMP u  $s$  iteracija rekonstruira  $s$ -rijedak vektor.

**Teorem 4.5.2.** *Neka je  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  sa  $\ell_2$ -normaliziranim stupcima. Ako je*

$$2\mu_1(s) + \mu_1(s-1) < 1,$$

*tada se svaki  $s$ -rijedak vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  može rekonstruirati iz vektora mjerenja  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  u najviše  $s$  iteracija HTP algoritma.*

*Dokaz.* Neka su  $j_1, j_2, \dots, j_N$  takvi da

$$|x_{j_1}| \geq |x_{j_2}| \geq \dots \geq |x_{j_s}| > |x_{j_{s+1}}| = \dots = |x_{j_N}| = 0.$$

Pokazati ćemo da je za  $0 \leq n \leq s-1$ , skup  $\{j_1, \dots, j_{n+1}\}$  sadržan u  $S^{n+1}$  iz ([HTP<sub>1</sub>](#)), koji je definiran kao skup  $s$  apsolutno najvećih komponenti od

$$\mathbf{z}^{n+1} := \mathbf{x}^n + \mathbf{A}^* \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^n). \quad (4.19)$$

To će implicirati  $S^s = S = \text{supp}(\mathbf{x})$  pa prema ([HTP<sub>2</sub>](#))  $\mathbf{x}^s = \mathbf{x}$ . Primjetimo dovoljno je dokazati

$$\min_{1 \leq k \leq n+1} |z_k^{n+1}| > \max_{l \in \bar{S}} |z_l^{n+1}|. \quad (4.20)$$

Dokazujemo indukcijom. Vrijedi

$$z_j^{n+1} = x_j^n + \sum_{i=1}^N (x_i - x_i^n) \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle = x_j + \sum_{i \neq j} (x_i - x_i^n) \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle.$$

Stoga,

$$|z_j^{n+1} - x_j| \leq \sum_{i \in S^n, i \neq j} |x_i - x_i^n| |\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle| + \sum_{i \in S \setminus S^n, i \neq j} |x_i| |\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle|. \quad (4.21)$$

Za  $1 \leq k \leq n+1$  i  $l \in \bar{S}$  imamo

$$|z_k^{n+1}| \geq |x_k| - \mu_1(s) \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^n\|_{S^n} - \mu_1(s) \|\mathbf{x}_{S \setminus S^n}\|_{\infty} \quad (4.22)$$

$$|z_l^{n+1}| \leq \mu_1(s) \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^n\|_{S^n} - \mu_1(s) \|\mathbf{x}_{S \setminus S^n}\|_{\infty}. \quad (4.23)$$

Posebno, za  $n=0$  je  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^n\|_{S^n} = 0$  pa iz ([4.22](#)), ([4.23](#)) i činjenice da  $2\mu_1(s) < 1$  slijedi

$$|z_{j_1}^1| \geq (1 - \mu_1(s)) \|\mathbf{x}\|_{\infty} > \mu_1(s) \|\mathbf{x}\|_{\infty} \geq |z_l^1| \quad \text{za sve } l \in \bar{S}.$$

Dakle tvrnja ([4.20](#)) vrijedi za  $n=0$ . Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za  $n-1$  za  $n \geq 1$ . To implicira  $\{j_1, \dots, j_n\} \subset S^n$ . Iz ([HTP<sub>2</sub>](#)) i leme [2.2.2](#) slijedi

$$(\mathbf{A}^* \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^n))_{S^n} = 0.$$

Stoga za svaki  $j \in S^n$ , definicija ([4.19](#)) implicira  $z_j^{n+1} = x_j^n$ , te iz ([4.21](#)) slijedi

$$|x_j^n - x_j| \leq \mu_1(s-1) \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^n\|_{S^n} + \mu_1(s-1) \|\mathbf{x}_{S \setminus S^n}\|_{\infty}.$$

Uzimajući maksimum po  $j \in S^n$  dobivamo

$$\|(\mathbf{x} - \mathbf{x}^n)_{S^n}\|_\infty \leq \frac{\mu_1(s-1)}{1 - \mu_1(s-1)} \|\mathbf{x}_{S \setminus S^n}\|_\infty.$$

Dobiveno vratimo nazad u (4.22) i (4.23),

$$\begin{aligned} |z_{j_k}^{n+1}| &\geq \left(1 - \frac{\mu_1(s)}{1 - \mu_1(s-1)}\right) |x_{j_{n+1}}|, \\ |z_l^{n+1}| &\leq \frac{\mu_1(s)}{1 - \mu_1(s-1)} |x_{j_{n+1}}|, \end{aligned}$$

za  $1 \leq k \leq n+1$  i  $l \in \bar{S}$  Pošto je  $\mu_1(s)/(1 - \mu_1(s-1)) < 1/2$ , (4.20) vrijedi i za  $n$ . Po principu matematičke indukcije slijedi tvrdnja.  $\square$

## Poglavlje 5

# Svojstvo ograničene izometrije

U prošlom poglavlju vidjeli smo da je pojam koherencije vrlo koristan kao mjera kvaliteta matrice mjerenja. Pomoću njega lako smo postavili i dokazali uvjete koji garantiraju rekonstrukciju rijetkih vektora raznim algoritmima. No, ocjena na koherenciju iz teorema (4.2.3) ograničava analizu algoritama na male vrijednosti rijetkosti  $s$ . U ovom poglavlju uvesti ćemo novu mjeru kvalitete matrice, *svojstvo ograničene izometrije* (eng. *restricted isometry property*) koje se ponekad zove i *princip uniformne neodređenosti* (eng. *uniform uncertainty principle*).

### 5.1 Definicija i osnovna svojstva

Za razliku od koherencije koja uzima u obzir parove stupaca matrice, svojstvo ograničene izometrije uzima u obzir sve  $s$ -torke stupaca matrice pa je stoga prikladnija mjera kvalitete.

**Definicija 5.1.1.**  $s$ -ta konstanta ograničene izometrije  $\delta_s = \delta_s(\mathbf{A})$  matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  je najmanja  $\delta \geq 0$  takva da

$$(1 - \delta)\|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \leq (1 + \delta)\|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (5.1)$$

za sve  $s$ -rijetke vektore  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ . Ili ekvivalentno

$$\delta_s = \max_{S \subset [N], \text{card}(S) \leq s} \|\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S - \mathbf{I}\|_2. \quad (5.2)$$

Neformlano, kažemo da matrica  $\mathbf{A}$  zadovoljava svojstvo ograničene izometrije ako je  $\delta_s$  dovoljno mali za dovoljno  $s$  (kasnije ćemo točno precizirati).

Uvjerimo se da su (5.1) i (5.2) ekvivalente tvrdnje. Iz (5.1) direktno slijedi

$$|\|\mathbf{A}_S \mathbf{x}\|_2^2 - \|\mathbf{x}\|_2^2| \leq \delta \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad \text{za sve } S \subset [N], \text{ card}(S) \leq s, \text{ i za sve } \mathbf{x} \in \mathbb{C}^s.$$

Primjetimo, za svaki  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^s$

$$\|\mathbf{A}_S \mathbf{x}\|_2^2 - \|\mathbf{x}\|_2^2 = \langle \mathbf{A}_S \mathbf{x}, \mathbf{A}_S \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle (\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S - \mathbf{I}) \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle.$$

Pošto je  $\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S - \mathbf{I}$  hermitska, imamo

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^s \setminus \{0\}} \frac{\langle (\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S - \mathbf{I}) \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|_2^2} = \|\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S - \mathbf{I}\|_2.$$

Dakle, (5.1) je ekvivalentno sa

$$\max_{S \subset [N], \text{card}(S) \leq s} \|\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S - \mathbf{I}\|_2 \leq \delta.$$

Moguće je usporediti konstantu ograničene izometrije s koherencijom  $\mu$ .

**Propozicija 5.1.2.** *Neka je  $\mathbf{A}$  sa  $\ell_2$ -normaliziranim stupcima  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N$ . Tada za svaki  $j \in [N]$  vrijedi*

$$\delta_1 = 0, \quad \delta_2 = \mu \quad \delta_s \leq \mu_1(s-1) \leq (s-1)\mu, \quad s \geq 2.$$

*Dokaz.* Pošto su stupci od  $\mathbf{A}$   $\ell_2$ -normalizirani vrijedi  $\|\mathbf{A} \mathbf{e}_j\|_2^2 = \|\mathbf{e}\|_2^2$  za sve  $j \in [N]$ . Dakle,  $\delta_1 = 0$ . Neka su  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N$  stupci od  $\mathbf{A}$ . Imamo,

$$\delta_2 = \max_{1 \leq i \neq j \leq N} \|\mathbf{A}_{\{i,j\}}^* \mathbf{A}_{\{i,j\}} - \mathbf{I}\|_2, \quad \mathbf{A}_{\{i,j\}}^* \mathbf{A}_{\{i,j\}} = \begin{bmatrix} 1 & \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_i \rangle \\ \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_i \rangle & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Svojstvene vrijednosti od  $\mathbf{A}_{\{i,j\}}^* \mathbf{A}_{\{i,j\}} - \mathbf{I}$  su  $|\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle|$  i  $-|\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle|$ . Pa je stoga njezina operatorska norma jednaka  $|\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle|$ . Uzimajući maksimum po  $1 \leq i \neq j \leq N$  dobivamo  $\delta_2 = \mu$ . Nejednakost  $\delta_s \leq \mu_1(s-1) \leq (s-1)\mu$  posljedica je teorema 4.1.3.  $\square$

U prošlom poglavlju pokazali smo egzistenciju  $m \times m^2$  matrica s koherencijom  $1/\sqrt{m}$  to direktno implicira egzistenciju matrica istih dimenzije s konstantom ograničene izometrije  $\delta_s < 1$  za  $s \leq \sqrt{m}$ .

**Propozicija 5.1.3.** *Neka su  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^N$  takvi da  $\|\mathbf{u}\|_0 \leq s$  i  $\|\mathbf{v}\|_0 \leq t$ . Ako je  $\text{supp}(\mathbf{u}) \cap \text{supp}(\mathbf{v}) = \emptyset$  tada*

$$|\langle \mathbf{A} \mathbf{u}, \mathbf{A} \mathbf{v} \rangle| \leq \delta_{s+t} \|\mathbf{u}\|_2 \|\mathbf{v}\|_2. \quad (5.4)$$

*Dokaz.* Neka je  $S := \text{supp}(\mathbf{u}) \cup \text{supp}(\mathbf{v})$ . Pošto su nosači od  $\mathbf{v}$  i  $\mathbf{u}$  disjunktni, imamo  $\langle \mathbf{u}_S, \mathbf{v}_S \rangle = 0$ . Slijedi,

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v} \rangle| &= |\langle \mathbf{A}_S \mathbf{u}_S, \mathbf{A}_S \mathbf{v}_S \rangle - \langle \mathbf{u}_S, \mathbf{v}_S \rangle| = |\langle (\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S - \mathbf{I}) \mathbf{u}_S, \mathbf{v}_S \rangle| \\ &\leq \|(\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S - \mathbf{I}) \mathbf{u}_S\|_2 \|\mathbf{v}_S\|_2 \leq \|\mathbf{A}_S^* \mathbf{A}_S - \mathbf{I}\|_2 \|\mathbf{u}_S\|_2 \|\mathbf{v}_S\|_2. \end{aligned}$$

Tvrđnja slijedi iz (5.2),  $\|\mathbf{u}_S\|_2 = \|\mathbf{u}\|_2$  i  $\|\mathbf{v}_S\|_2 = \|\mathbf{v}\|_2$ .  $\square$

**Definicija 5.1.4.**  $(s, t)$ -ograničena konstanta orthogonalnosti  $\theta_{s,t} = \theta_{s,t}(\mathbf{A})$  matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  je najmanji  $\theta \geq 0$  takva da

$$|\langle \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v} \rangle| \leq \theta \|\mathbf{u}\|_2 \|\mathbf{v}\|_2 \quad (5.5)$$

za sve  $s$ -rijetke vektore  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^N$  i  $t$ -rijetke vektore  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^N$  s disjunktним nosačem ili ekvivalentno,

$$\theta_{s,t} = \max \left\{ \|\mathbf{A}_T^* \mathbf{A}_S\|_2, \ S \cap T = \emptyset, \ \text{card}(S) \leq s, \ \text{card}(T) \leq t \right\}. \quad (5.6)$$

**Propozicija 5.1.5.** Vrijedi,

$$\theta_{s,t} \leq \delta_{s+t} \leq \frac{1}{s+t} (s\delta_s + t\delta_t + 2\sqrt{st}\theta_{s,t}).$$

Posebno, za  $t = s$  imamo,

$$\theta_{s,s} \leq \delta_{2s} \quad i \quad \delta_{2s} \leq \delta_s + \theta_{s,s}.$$

*Dokaz.* Prva nejednakost slijedi direktno iz propozicije 5.1.3. Pokažimo i drugu nejednakost. Neka je  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$   $(s+t)$ -rijedak vektor takav da  $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$ . Moramo pokazati da

$$\left| \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 - \|\mathbf{x}\|_2^2 \right| \leq \frac{1}{s+t} (s\delta_s + t\delta_t + s\sqrt{st}\theta_{s,t}).$$

Neka su  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^N$  takvi da  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{x}$ , gdje je  $\mathbf{u}$   $s$ -rijedak,  $\mathbf{v}$   $t$ -rijedak i imaju disjunktne nosače. Vrijedi,

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 = \langle \mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}), \mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \rangle = \|\mathbf{A}\mathbf{u}\|_2^2 + \|\mathbf{A}\mathbf{v}\|_2^2 + 2\text{Re}\langle \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v} \rangle.$$

Uvrstimo  $\|\mathbf{x}\|_2^2 = \|\mathbf{u}\|_2^2 + \|\mathbf{v}\|_2^2$ ,

$$\begin{aligned} \left| \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 - \|\mathbf{x}\|_2^2 \right| &\leq \left| \|\mathbf{A}\mathbf{u}\|_2^2 - \|\mathbf{u}\|_2^2 \right| + \left| \|\mathbf{A}\mathbf{v}\|_2^2 - \|\mathbf{v}\|_2^2 \right| + 2|\langle \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v} \rangle| \\ &\leq \delta_s \|\mathbf{u}\|_2^2 + \delta_t \|\mathbf{v}\|_2^2 + 2\theta \|\mathbf{u}\|_2^2 \|\mathbf{v}\|_2^2 =: f(\|\mathbf{u}\|_2^2), \end{aligned}$$



gdje je za  $\alpha \in [0, 1]$

$$f(\alpha) := \delta_s \alpha + \delta_t (1 - \alpha) + 2\theta_{s,t} \sqrt{\alpha(1 - \alpha)}. \quad (5.7)$$

Lako se pokaže da postoji  $\alpha^* \in [0, 1]$  tako da je  $f$  nepadajuća na  $[0, \alpha^*]$  i nerastuća na  $[\alpha^*, 1]$ . Ovisno o poziciji od  $\alpha^*$  s obzirom na  $s/(s+t)$  funkcija  $f$  je ili nepadajuća na  $[0, s/(s+t)]$  ili nerastuća na  $[s/(s+t), 1]$ . Dobrim odabirom vektora  $\mathbf{u}$ , uvijek možemo pretpostaviti da je  $\|\mathbf{u}\|_2^2$  u jednom od ta dva intervala. Zaista, ako se  $\mathbf{u}$  sastoji od  $s$  apsolutno najmanjih komponenti od  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{v}$  od  $t$  apsolutno najvećih komponenti od  $\mathbf{x}$  onda imamo

$$\frac{\|\mathbf{u}\|_2^2}{s} \leq \frac{\|\mathbf{v}\|_2^2}{t} = \frac{1 - \|\mathbf{u}\|_2^2}{t}, \quad \text{tako da } \|\mathbf{u}\|_2^2 \leq \frac{s}{s+t}.$$

U slučaju da je  $\mathbf{u}$  sačinjen od  $s$  apsolutno najvećih komponenti od  $\mathbf{x}$ , tada bi vrijedilo  $\|\mathbf{u}\|_2^2 \geq s/(s+t)$ . Dakle,

$$\left| \|\mathbf{Ax}\|_2^2 - \|\mathbf{x}\|_2^2 \right| \leq f\left(\frac{s}{s+t}\right) = \delta_s \frac{s}{s+t} + \delta_t \frac{t}{s+t} + 2\theta_{s,t} \frac{\sqrt{st}}{s+t}.$$

□

Kao kod koherencije, zanima nas koja je donja granica za  $s$ -tu konstantu ograničene izometrije matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$ .

**Teorem 5.1.6.** *Neka je  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{mN}$  i  $2 \leq s \leq N$ . Tada je*

$$m \geq c \frac{s}{\delta_s^2}, \quad (5.8)$$

za  $N \geq Cm$  i  $\delta_s \leq \delta_*$ , gdje konstante  $c, C$  i  $\delta_*$  ovise samo o sebi međusobno. Na primjer, možemo uzeti  $c = 1/162$ ,  $C = 30$  i  $\delta_* = 2/3$ .

*Dokaz.* Primjetimo da tvrdnja ne vrijedi za  $s = 1$  jer je  $\delta_1 = 0$  ako su svi stupci od  $\mathbf{A}$  imaju  $\ell_2$ -normu jednaku jedan. Neka je  $t := \lfloor s/2 \rfloor \geq 1$  i rastavimo  $\mathbf{A}$  na blokove od  $m \times t$ , osim možda zadnjeg koji može imati manje stupaca,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \dots & \mathbf{A}_n \end{bmatrix}, \quad N \leq nt.$$

Iz (5.2) i (5.6) za  $i, j \in [n]$ ,  $i \neq j$  imamo

$$\|\mathbf{A}_i^* \mathbf{A}_i - \mathbf{I}\|_2 \leq \delta_t \leq \delta_s, \quad \|\mathbf{A}_i^* \mathbf{A}_j\|_2 \leq \theta_{t,t} \leq \delta_{2t} \leq \delta_s,$$

pa svojstvene vrijednosti od  $\mathbf{A}_i^* \mathbf{A}_i$  i singularne vrijednosti od  $\mathbf{A}_i^* \mathbf{A}_j$  zadovoljavaju

$$1 - \delta_s \leq \lambda_k(\mathbf{A}_i^* \mathbf{A}_i) \leq 1 + \delta_s, \quad \sigma_k(\mathbf{A}_i^* \mathbf{A}_j) \leq \delta_s.$$

Uvedimo oznake za matrice

$$\mathbf{H} := \mathbf{A}\mathbf{A}^* \in \mathbb{C}^{m \times m}, \quad \mathbf{G} := \mathbf{A}^* \mathbf{A} = [\mathbf{A}_i^* \mathbf{A}_j]_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{C}^{N \times N}.$$

Imamo

$$\mathrm{tr}(\mathbf{H}) = \mathrm{tr}(\mathbf{G}) = \sum_{i=1}^n \mathrm{tr}(\mathbf{A}_i^* \mathbf{A}_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^t \lambda_k(\mathbf{A}_i^* \mathbf{A}_i) \geq nt(1 - \delta_s). \quad (5.9)$$

Nadalje,

$$\mathrm{tr}(\mathbf{H})^2 = \langle \mathbf{I}_m, \mathbf{H} \rangle_F^2 \leq \|\mathbf{I}_m\|_F^2 \|\mathbf{H}\|_F^2 = m \mathrm{tr}(\mathbf{H}^* \mathbf{H}).$$

Zbog svojstva cikličnosti traga vrijedi,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\mathbf{H}^* \mathbf{H}) &= \mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^* \mathbf{A}\mathbf{A}^*) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}^* \mathbf{A}\mathbf{A}^* \mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{G}\mathbf{G}^*) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathrm{tr} \left( \sum_{j=1}^m \mathbf{A}_i^* \mathbf{A}_j \mathbf{A}_j^* \mathbf{A}_i \right) \\ &= \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \sum_{k=1}^t \sigma_k(\mathbf{A}_i^* \mathbf{A}_j)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^t \lambda_k(\mathbf{A}_i^* \mathbf{A}_i)^2 \\ &\leq n(n-1)t\delta_s^2 + nt(1 + \delta_s)^2. \end{aligned}$$

Dobivamo ocjenu,

$$\mathrm{tr}(\mathbf{H})^2 \leq mnt \left( (n-1)\delta_s^2 + (1 + \delta_s)^2 \right). \quad (5.10)$$

Kombiniranjem (5.9) i (5.10) imamo

$$m \geq \frac{nt(1 - \delta_s)^2}{(n-1)\delta_s^2 + (1 + \delta_s)^2}.$$

Pretpostavimo da je  $(n-1)\delta_s^2 < (1 + \delta_s)^2/5$ . Za  $\delta_s \leq 2/3$ , slijedi

$$m > \frac{nt(1 - \delta_s)^2}{6(1 + \delta_s)^2/5} \geq \frac{5(1 - \delta_s)^2}{6(1 + \delta_s)^2} N \geq \frac{1}{30} N,$$

što je kontradikcija. Dakle, mora vrijediti  $(n-1)\delta_s^2 \geq (1 + \delta_s)^2/5$ , što uz  $\delta_s \leq 2/3$  i

$s \leq 3t$  implicira

$$m \geq \frac{nt(1 - \delta_s)^2}{6(n-1)\delta_s^2} \geq \frac{1}{54} \frac{t}{\delta_s^2} \geq \frac{1}{162} \frac{s}{\delta_s^2}.$$

□

Usporedimo ocjene dobivene do sada. Imamo ocjenu odozdo

$$\delta_s \geq \sqrt{cs/m}. \quad (5.11)$$

Za  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  s optimalnom koherencijom  $\mu \leq c/\sqrt{m}$ , propozicija 5.1.2 implicira

$$\delta_s \leq (s-1)\mu \leq cs/\sqrt{m}. \quad (5.12)$$

Primjetimo da je razmak između (5.11) i (5.12) značajan. Iz (5.12) imamo

$$m \geq c's^2 \quad (5.13)$$

što dozvoljava da  $\delta_s$  bude malen, dok to drugo zahtjeva iz (5.11) da je  $m \geq c's$ . Nije poznato je li takav uvjet dovoljan. Pokaže se da određene nasumične matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times N}$  zadovoljavaju  $\delta_s \leq \delta$  s velikom vjerojatnošću za neki  $\delta > 0$  ako je

$$m \geq C\delta^{-2}s \ln(eN/S). \quad (5.14)$$

## Bibliografija



## Sažetak



# Summary





Životopis