SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Marco Hrlić

# SAŽETO UZORKOVANJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Damir Bakić

Zagreb, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

*Albini*

# Sadržaj

# Uvod

...

# Poglavlje 1

# Rijetka rješenja

## 1.1 Rijetsko i sažetost vektora

Uvedimo potrebnu notaciju. Neka je $[N]$ oznaka za skup $\{1, 2, ..., N\}$ gdje je $N \in \mathbb{N}$. Sa $\text{card}(S)$ označujemo kardinalitet skupa $S$. Nadalje, $\bar{S}$ je komplement od $S$ u $[N]$, tj. $\bar{S} = [N] \backslash S$.

**Definicija 1.1.1.** *Nosač vektora* $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ *je skup indeksa njegovih ne-nul elemenata, tj.*

$$\text{supp}(\mathbf{x}) := \{j \in [N] : x_j \neq 0\}$$

Za vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ kažemo da je $s$-rijedak ako vrijedi

$$\|\mathbf{x}\|_0 := \text{card}(\text{supp}(\mathbf{x})) \leq s$$

Primjetimo,

$$\|\mathbf{x}\|_p^p := \sum_{j=1}^{N} |x_j|^p \xrightarrow{p \to 0} \sum_{j=1}^{N} \mathbf{1}_{\{x_j \neq 0\}} = \text{card}(\{j \in [N] : x_j \neq 0\}) = \|\mathbf{x}\|_0$$

Gdje smo koristili da je $\mathbf{1}_{\{x_j \neq 0\}} = 1$ ako je $x_j \neq 0$ te $\mathbf{1}_{\{x_j \neq 0\}} = 0$ ako je $x_j = 0$. Drugim riječima, $\|\mathbf{x}\|_0$ je limes $p$-te potencije $\ell_p$-kvazinorme vektora $\mathbf{x}$ kada $p$ teži k nuli. Kvazinorma definira se jednako kao standardna $\ell_p$-norma, jedino što nejednakost trokuta oslabimo, tj.

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq C(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)$$

za neku konstantu $C \geq 1$. Funkciju $\| \cdot \|_0$ često nazivamo $\ell_0$-norma vektora $x$, iako ona nije niti norma niti kvazinorma. U samoj praksi, teško je tražiti rijetkost vektora, pa je stoga prirodno zahtjevati slabiji uvjet *kompresibilnosti.*

**Definicija 1.1.2.** *$\ell_p$-grešku najbolje $s$-rijetke aproksimacije vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ definiramo sa*

$$\sigma_s(\mathbf{x})_p := \inf\left\{\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|_p,\ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N \text{ je } s\text{-rijedak}\right\}$$

Primjetimo da se infimum postiže za svaki $s$-rijedak vektor $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ koji ima ne-nul elemente koji su jednaki sa $s$ najvećih komponenti vektora $\mathbf{x}$. Iako takav $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ nije jedinstven, on postiže infimum za svaki $p > 0$. Neformalno, mogli bi reći da je vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ *kompresibilan* ako greška njegove najbolje $s$-rijetke aproksimacije brzo konvergira u $s$. Da bi to formalno iskazali, od koristi će biti ocjena na $\sigma_s(\cdot)_p$. Pošto nam za to neće biti važan poredak elemenata vektora $\mathbf{x}$, uvodimo sljedeću definiciju koja će nam olaksati račun.

**Definicija 1.1.3.** *Nerastući poredak vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ je vektor $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ takav da*

$$x_1^* \geq x_2^* \geq x_3^* \geq \cdots \geq 0$$

*te postoji permutacije $\pi : [N] \to [N]$ takva da $x_j^* = |x_{\pi(j)}|$ za sve $j \in [N]$.*

**Propozicija 1.1.4.** *Za svaki $q > p > 0$ i za svaki $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ vrijedi*

$$\sigma_s(\mathbf{x})_q \leq \frac{1}{s^{1/p-1/q}}\|\mathbf{x}\|_p.$$

*Dokaz.* Neka je $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^N$ nerastući poredak vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$. Tada slijedi,

$$\begin{aligned}
\sigma_s(\mathbf{x})_q^q &= \sum_{j=s+1}^{N}(x_j^*)^q = \sum_{j=s+1}^{N}(x_j^*)^p(x_j^*)^{q-p} \leq (x_s^*)^{q-p}\sum_{j=s+1}^{N}(x_j^*)^p \\
&\leq \left(\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}(x_j^*)^p\right)^{\frac{q-p}{p}}\left(\sum_{j=s+1}^{N}(x_j^*)^p\right) \leq \left(\frac{1}{s}\|\mathbf{x}\|_p^p\right)^{\frac{q-p}{p}}\|\mathbf{x}\|_p^p \\
&= \frac{1}{s^{q/p-1}}\|\mathbf{x}\|_p^q
\end{aligned}$$

Prva nejednakost slijedi iz činjenice da je $x_j^* \leq x_s^*$ za svaki $j \geq s+1$. Druga nejednakost je također posljedica nerasta komponenti od $\mathbf{x}^*$. Potenciranjem obje strane s $1/q$ slijedi tvrdnja. □

Primjetimo da ako je $\mathbf{x}$ iz jedinične $\ell_p$-kugle za neki mali $p > 0$, onda prethodna propozicija garantira kovergenciju od $\sigma_s(\mathbf{x})_q$ u $s$, gdje $\ell_p$-kuglu definiramo kao

$$B_p^N := \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \|\mathbf{z}\|_p \leq 1\right\}$$

Vratimo se sada ocjeni iz propozicije 1.1.4. Sljedeći teorem daje najmanju konstantu $c_{p,q}$ takvu da vrijedi $\sigma_s(\mathbf{x})_q \leq c_{p,q} s^{-1/p+1/q} \|\mathbf{x}\|_p$ te zapravo predstavlja jaču tvrdnju.

**Teorem 1.1.5.** *Za svaki $q > p > 0$ i za svaki $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ vrijedi*

$$\sigma_s(\mathbf{x})_q \leq \frac{c_{p,q}}{s^{1/p-1/q}} \|\mathbf{x}\|_p$$

*gdje je*

$$c_{p,q} := \left[ \left(\frac{p}{q}\right)^{p/q} \left(1 - \frac{p}{q}^{1-p/q}\right)\right]^{1/p} \leq 1.$$

Istaknimo za česti odabir $p = 1$ i $q = 2$

$$\sigma_s(\mathbf{x})_2 \leq \frac{1}{2\sqrt{s}} \|\mathbf{x}\|_1$$

*Dokaz.* Neka je $\mathbf{x}^*$ nerastući poredak vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ i $\alpha_j := (x_j^*)^p$. Dokazati ćemo ekvivaltenu tvrdnju

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_N \geq 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N \leq 1 \end{array}\right\} \implies \alpha_{s+1}^{q/p} + \alpha_{s+2}^{q/p} + \cdots + \alpha_{s+N}^{q/p} \leq \frac{c_q^q}{s^{q/p-1}} \tag{1.1}$$

Stoga, za $r := q/p > 1$, problem se svodi na maksimizaciju konveksne funkcije

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N) := \alpha_{s+1}^r + \alpha_{s+2}^r + \cdots + \alpha_N^r$$

na konveksnom mnogokutu

$$\mathcal{C} := \left\{(\alpha_1, \cdots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N : \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_N \geq 0 i \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N \leq 1\right\}$$

Prema teoremu (todo) $f$ postiže maksimum na nekom od vrhova mnogokuta $\mathcal{C}$, a vrhovi od $\mathcal{C}$ su dani kao sjecišta $N$ hiperplohi koje dobijemo tako da u (1.1) $N$ nejednakosti pretvorimo u jednakosti. Mogućnosti su:

1. $\alpha_1 = \cdots = \alpha_N \implies f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N) = 0.$

2. $\alpha_1 + \cdots + \alpha_N = 1$ i $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k > \alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_N = 0$ za neki $1 \leq k \leq s \implies f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N) = 0$

3. $\alpha_1 + \cdots + \alpha_N = 1$ i $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k > \alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_N = 0$ za neki $s + 1 \leq k \leq N \implies \alpha_1 = \cdots \alpha_k = 1/k$ te $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N) = (k - s)/k^r$

Dakle, slijedi da

$$\max_{(\alpha_1,\dots,\alpha_N)\in\mathcal{C}} f(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_N) = \max_{s+1\le k\le N} \frac{k-s}{k^r}$$

Shvatimo sada $k$ kao realnu varijablu i zamjetimo da $g(k) := (k-s)/k^r$ raste do kritične točke $k^* = (r/(r-1))s$ nakon koje opada.

$$\max_{(\alpha_1,\dots,\alpha_N)\in\mathcal{C}} f(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_N) \le g(k^*) = \frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{r}\right)^{r-1}\frac{1}{s^r-1} = c_{p,q}^q \frac{1}{s^{q/p}-1}$$

□

Alternativni način na koji bi mogli definirati pojam *kompresibilnosti* za vektor $\mathbf{x}\in\mathbb{C}^N$ je da zahtjevamo da je broj

$$\operatorname{card}(\{j\in[N] : |x_j|\ge t\})$$

tj. broj njegovih značajnih ne-nul komponenti dovoljno mali. Ovaj pristup vodi na definiciju slabih $\ell_p$-prostora.

**Definicija 1.1.6.** *Za $p>0$, slabi $\ell_p$-prostor s oznakom $w\ell_p^N$ definiramo kao prostor $\mathbb{C}^N$ sa kvazinormom*

$$\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} := \inf\left\{M\ge 0 : \operatorname{card}(\{j\in[N] : |x_j|\ge t\}) \le \frac{M^P}{t^p},\ \forall t>0\right\} \tag{1.2}$$

Da bi pokazali da je (1.2) zapravo kvazinorma, potreban nam je sljedeći rezultat.

**Propozicija 1.1.7.** *Neka su $\mathbf{x}^1,\dots\mathbf{x}^k\in\mathbb{C}^N$. Tada za svaki $p>0$ vrijedi*

$$\|\mathbf{x}^1+\cdots+\mathbf{x}^k\|_{p,\infty} \le k^{\max\{1,1/p\}}(\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty}+\cdots+\|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty})$$

*Dokaz.* Neka je $t>0$. Ako je $|x_j^1+\cdots+x_j^k|\ge t$ za neki $j\in[N]$, tada imamo da je $|x_j^i|\ge t/k$ za neki $i\in[k]$. Dakle, vrijedi

$$\left\{j\in[N] : |x_j^1+\cdots+x_j^k|\ge t\right\} \subset \bigcup_{i\in[k]}\left\{j\in[N] : |x_j^i|\ge t/k\right\}$$

pa je stoga

$$\begin{aligned}\operatorname{card}\Big(\Big\{j \in [N] : |x_j^1 + \cdots + k_j^k| \geq t\Big\}\Big) &\leq \sum_{i \in [k]} \frac{\|\mathbf{x}^i\|_{p,\infty}^p}{(t/k)^p} \\ &= \frac{k^p(\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty}^p + \cdots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}^p)}{t^p}\end{aligned}$$

Prema definiciji slabe $\ell_p$-kvazinorme (1.2) vektora $\mathbf{x}^1 + \cdots + \mathbf{x}^k$ dobivamo

$$\|\mathbf{x}^1 + \cdots + \mathbf{x}^k\|_{p,\infty} \leq k\Big(\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty}^p + \cdots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}^p\Big)$$

Ako je $p \leq 1$, uspoređujući $\ell_p$ i $\ell_1$ norme na $\mathbb{R}^k$ slijedi

$$\Big(\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty}^p + \cdots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}^p\Big)^{1/p} \leq k^{1/p-1}\Big(\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty} + \cdots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}\Big)$$

te ako je $p \geq 1$ slijedi

$$\Big(\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty}^p + \cdots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}^p\Big)^{1/p} \leq \|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty} + \cdots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}.$$

Tvrdnja slijedi kombiniranjem dobivenih ocjena. □

Uzmimo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$ i neka je $\lambda \in \mathbb{C}$ proizvoljan.

1. Neka je $\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} = 0$. Iz (1.2) slijedi $\operatorname{card}(\{j \in [N] : |x_j| \geq t\}) = 0$ za svaki $t > 0$ pa je stoga broj ne-nul komponenti on $\mathbf{x}$ jednak nuli, tj. $\mathbf{x} = 0$

2. Ako je $\lambda$ nula, $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$ vrijedi trivijalno. Za $\lambda \neq 0$, imamo $\operatorname{card}(\{j \in [N] : |\alpha x_j| \geq t\}) = \operatorname{card}(\{j \in [N] : |x_j| \geq t/|\alpha|\}) \leq (\alpha M)^p/t^p$ za svaki $t > 0$. Dakle, opet $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$.

3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq C(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)$ je sada direktna posljedica prethodne propozicije.

sljedeća propozicija daje alternativni izraz za slabu $\ell_p$-kvazinormu.

**Propozicija 1.1.8.** *Za $p > 0$, vrijedi*

$$\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} = \max_{k \in [N]} k^{1/p} x_k^*$$

*gdje je $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^N$ nerastući poredak vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$.*

*Dokaz.* Primjetimo prvo da iz (1.2) slijedi da je $\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} = \|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty}$, pa zapravo pokazujemo da je $\|\mathbf{x}\| := \max_{k \in [N]} k^{1/p} x_k^* = \|\mathbf{x}^*\|$. Nadalje, za $t > 0$ vrijedi da je $\{j \in [N] : x_j^* \geq t\} = [k]$ za neki $k \in [N]$ ili je $\{j \in [N] : x_j^* \geq t\} = \emptyset$. U prvom slučaju $t \leq x_k^* \leq \|\mathbf{x}\|/k^{1/p}$ pa je $\mathrm{card}(\{j \in [N] : x_j^* \geq t\}) = k \leq \|\mathbf{x}\|/k^{1/p}$. U drugom slučaju ista nejednakost vrijedi trivijalno. Iz definicije slabe $\ell_p$-kvazinorme (1.2) sada dobivamo $\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty} \leq \|\mathbf{x}\|$. Pretpostavimo da je $\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty} < \|\mathbf{x}\|$. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da $(1+\varepsilon)\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty} \leq \|\mathbf{x}\|$. Slijedi da je $(1+\varepsilon)\|\mathbf{x}^*\| \leq k^{1/p}x_k^*$ za neki $k \in [N]$ pa stoga

$$[k] \subseteq \left\{j \in [N] : (1+\varepsilon)\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty}/k^{1/p} \leq x_j^*\right\}$$

Ponovo iz (1.2) imamo

$$k \leq \frac{\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty}^p}{\left((1+\varepsilon)\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty}k^{1/p}\right)^p} = \frac{k}{(1+\varepsilon)^p}$$

Kontradikcija, dakle mora vrijediti $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty}$. □

Sada lagano možemo usporediti slabi i jaku $\ell_p$ normu,

**Propozicija 1.1.9.** *Za svaki $p > 0$ i za svaki $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$,*

$$\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} \leq \|\mathbf{x}\|_p$$

*Dokaz.* Neka je $k \in [N]$,

$$\|\mathbf{x}\|_p^p = \sum_{j=1}^{N}(x_j^*)^p \geq \sum_{j=1}^{k}(x_j^*)^p \geq k(x_k^*)^p$$

Tvrdnja slijedi potenciranjem na $1/p$ i uzimajući maksimum po $k$ i primjenom prethodne propozicije. □

Koristeći propoziciju (1.1.8) možemo dobiti verziju ocjene iz propozicije (1.1.4) sa slabom $\ell_p$ normom.

**Propozicija 1.1.10.** *Za svaki $q > p > 0$ i $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$, vrijedi*

$$\sigma_s(\mathbf{x})_q \leq \frac{d_{p,q}}{s^{1/p-1/q}}\|\mathbf{x}\|_{p,\infty}$$

*gdje je*

$$d_{p,q} := \left(\frac{p}{q-p}\right)^{1/q}.$$

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} \leq 1$, pa je $x_k^* \leq 1/k^{1/p}$ za svaki $k \in [N]$. Tada vrijedi,

$$\sigma_s(\mathbf{x})_q^q = \sum_{k=s+1}^{N} (x_k^*)^q \leq \sum_{k=s+1}^{N} \frac{1}{k^{q/p}} \leq \int_s^N \frac{1}{t^{q/p}} dt = -\frac{1}{q/p-1} \frac{1}{t^{q/p-1}} \Big|_{t=s}^{t=N} \leq \frac{p}{q-p} \frac{1}{s^{q/p-1}}.$$

Potenciranjem sa $1/q$ slijedi tvrdnja. □

Prethodna propozicija daje da su vektori $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ koji su kompresibilni u smislu $\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} \leq 1$ za mali $p > 0$, također kompresibilni u smislu da greška njihove najbolje $s$-rijetke aproksimacije brzo konvergira sa $s$. Iskažimo još jedan tehnički rezultat,

**Lema 1.1.11.** *Neka su* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$. *Tada vrijedi,*

$$\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}^*\|_\infty \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty \tag{1.3}$$

*Nadalje, za* $s \in [N]$,

$$|\sigma_s(\mathbf{x})_1 - \sigma(\mathbf{y})_1| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 \tag{1.4}$$

*i za* $k > s$,

$$(k-s)x_k^* \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 + \sigma_s(\mathbf{y})_1 \tag{1.5}$$

*Dokaz.* Za $j \in [N]$, skup indeksa $j$ najvećih komponenti vektora $\mathbf{x}$ ima ne-trivijalni presjek sa skupom od $N-j+1$ najmanjih komponenti vektora $\mathbf{y}$. Izaberimo indeks $l$ iz tog presjeka. Tada vrijedi,

$$x_j^* \leq |x_l| \leq |y_l| + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty \leq z_j^* + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty$$

Zamjenom uloga od $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ slijedi (1.3). Neka je $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^N$ najbolja $s$-rijetka aproksimacija vektora $\mathbf{y}$. Tada

$$\sigma_s(\mathbf{x})_1 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|_1 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 + \|\mathbf{y} - \mathbf{v}\|_1 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 + \sigma_s(\mathbf{y})_1$$

Ponovno, zbog simetrije slijedi (1.4). Napokon, ocjena (1.5) slijedi iz (1.4) te iz činjenice

$$(k-s)x_k^* \leq \sum_{j=s+1}^{k} x_j^* \leq \sum_{j \geq s+1} x_j^* = \sigma_s(\mathbf{x})_1.$$

□

## 1.2 Minimalni broj mjerenja

Problem sažetog uzorkovanja sastoji se od rekonstrukcije $s$-rijetkog vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ iz sustava

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Matricu $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times N}$ nazivamo *matrica mjerenja*. Ako je $m < N$, za ovakav sustav linearnih jednadžbi kažemo da je *neodređen*. Iako iz klasične teorije linearne algebre ovakvi sustavi imaju beskonačno mnogo riješenja, pokazati će se da je dodatna pretpostavka rijetkosti vektora $x$ dovoljno za jedinstvenost rješenja. U ovom poglavlju istražiti ćemo koji je minimalni broj mjerenja, tj. $m$ broj redaka matrice $\mathbf{A}$, koji garantira rekonstrukciju $s$-rijetkog vektora $\mathbf{x}$. Zapravo, postoje dva pristupa ovom problemu. Možemo zahtjevati da problem mjerenja rekonstruira sve $s$-rijetke vektore $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ istodobno ili možemo tražiti rekonstrukciju specifičnog, tj. predodređenog vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$. Taj pristup čini se neprirodan, no pokazuje se da je on važan u proučavanju problema gdje matricu $\mathbf{A}$ biramo nasumično.

Pokažimo da su za danu rijetkost $s$, matricu $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times N}$ i $s$-rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$, naredne tvrdnje ekvivaltentne:

1. Vektor $\mathbf{x}$ je jedinstveno $s$-rijetko rješenje sustava $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y}$ gdje je $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, tj. $\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x},\ \|\mathbf{z}\|_0 \leq s\} = \{\mathbf{x}\}$

2. Vektor $\mathbf{x}$ je jedinstveno rješenje problema minimizacije

$$\min_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N} \|\mathbf{z}\|_0 \quad \text{uz uvjet } \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y} \tag{$P_0$}$$

Ako je $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ jedinstveno $s$-rijetko rješenje od $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y}$ takvo da je $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, onda rješenje $x^\sharp$ od ($P_0$) je $s$-rijetko i zadovoljava $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ pa je $\mathbf{x}^\sharp = \mathbf{x}$. Drugi smjer slijedi trivijalno.

### Rekonstrukcija svih rijetkih vektora

Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times N}$ i $S \subset [N]$, sa $\mathbf{A}_S$ označujemo matricu formiranu od stupaca od $\mathbf{A}$ indeksiranih sa $S$. Slično, sa $\mathbf{x}_S$ označujemo ili vektor iz $\mathbb{C}^S$ koji se sastoji od komponenti vektora $\mathbf{x}$ indeksiranih po $S$, tj. $(\mathbf{x}_S)_l = x_l$ za sve $l \in S$, ili vektor iz $\mathbb{C}^N$ koji se podudara s $\mathbf{x}$ na komponentama indeksiranim u $S$ i jednak je nula na indeksima koji nisu u $S$, tj. $(\mathbf{x}_S)_l = x_l$ za $l \in S$ i $(\mathbf{x}_S)_l = 0$ za $l \notin S$. Iz konteksta će uvijek biti jasno na koju definiciju se misli.

**Teorem 1.2.1.** *Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times N}$. Ekvivalentno je:*

(a) *Svaki $s$-rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ je jedinstveno rješenje od $\mathbf{Ax} = \mathbf{Az}$, tj. ako je $\mathbf{Ax} = \mathbf{Az}$ i ako su $\mathbf{x}$, $\mathbf{z}$ oboje $s$-rijetki tada $\mathbf{x} = \mathbf{z}$.*

(b) *Jezgra od $\mathbf{A}$ ne sadrži niti jedan $2s$-rijedak vektor osim nul-vektora, tj.* $\ker \mathbf{A} \cap \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \|\mathbf{z}\|_0 \leq 2s\} = \{\mathbf{0}\}$

(c) *Za svaki $S \subset [N]$ takav da* $\mathrm{card}(S) \leq 2s$, *podmatrica $\mathbf{A}_S$ je injektivna kao preslikavanje sa $\mathbb{C}^S$ u $\mathbb{C}^m$.*

(d) *Svaki skup od $2s$ stupaca matrice $\mathbf{A}$ je linearno nezavisan skup.*

*Dokaz.* $(b) \implies (a)$. Neka su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{z}$ $s$-rijetki vektori takvi da $\mathbf{Ax} = \mathbf{Az}$. Tada je $\mathbf{x} - \mathbf{z}$ $2s$-rijedak i $\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) = \mathbf{0}$. Pošto $\ker \mathbf{A}$ ne sadrži $2s$-rijetke vektore osim nul-vektora, mora vrijediti $\mathbf{x} = \mathbf{z}$.

$(a) \implies (b)$. Obratno, pretpostavimo da za svaki $s$-rijetki vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ vrijedi $\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \mathbf{Az} = \mathbf{Ax}, \|\mathbf{z}\|_0 \leq s\} = \{\mathbf{x}\}$. Neka je $\mathbf{v} \in \ker \mathbf{A}$, $2s$-rijedak. Tada $\mathbf{v}$ možemo rastaviti kao $\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{z}$ gdje su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{z}$ $s$-rijetki takvi da $\mathrm{supp}(\mathbf{x}) \cap \mathrm{supp}(\mathbf{z}) = \emptyset$. Imamo da je $\mathbf{Ax} = \mathbf{Az}$ pa prema pretpostavci vrijedi $\mathbf{x} = \mathbf{z}$. Pošto su nosači od $\mathbf{x}$ i $\mathbf{z}$ disjunktni, mora vrijediti $\mathbf{x} = \mathbf{z} = \mathbf{0}$ pa je stoga i $\mathbf{v} = 0$.

$(b) \implies (c)$. Pretpostavimo suprotno, $\ker \mathbf{A} \cap \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \|\mathbf{z}\|_0 \leq 2s\} = \{\mathbf{0}\}$ i da postoji $S \in [N]$ takav da je $\mathrm{card}(S) \leq 2s$ te da $\mathbf{A}_s$ nije injektivna. To znači da postoji vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{\mathrm{card}(S)} \backslash \{\mathbf{0}\}$ takav da je $\mathbf{A}_S\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Definiramo vektor $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^N$ sa

$$\tilde{x}_j = \begin{cases} x_j & \text{za } j \in S \\ 0 & \text{za } j \in \bar{S} \end{cases}$$

Dakle, imamo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\|\mathbf{x}\|_0 \leq 2s$ i vrijedi $\mathbf{Ax} = 0$, tj. $\mathbf{x} \in \ker \mathbf{A}$. Kontradikcija s $(b)$.

$(c) \implies (d)$. Odaberimo $2s$ stupaca od $\mathbf{A}$. Skup indeksa tih stupaca označimo sa $S$. Prema $(c)$, matrica $\mathbf{A}_S$ je injektivna, a to znači da su njeni stupci linearno nezavisni, pa su stoga i $2s$ odabranih stupaca matrice $\mathbf{A}$ linearno nezavisni.

$(d) \implies (b)$. Pretpostavimo da jezgra od $\mathbf{A}$ sadrži $2s$-rijedak ne-nul vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$. Neka je $S$ skup indeksa ne-nul elemenata vektora $\mathbf{x}$. To znači da je $\mathbf{A}_S\mathbf{x}_S = 0$, i $\mathbf{x}_S \neq \mathbf{0}$. Dakle $\mathbf{A}_S$ nije injektivna, pa stoga i skup stupaca od $\mathbf{A}$ indeksiranih sa $S$ nije linearno nezavisan, što je kontradikcija sa $(d)$.

□

Uočimo da ako je moguče rekonstruirati svaki $s$-rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ iz vektora mjerenja $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$, tada vrijedi $(a)$. Prema prošlom teoremu tada vrijedi i tvrdnja $(d)$ pa je stoga $rank(\mathbf{A}) \geq 2s$. Također vrijedi da je $rank(\mathbf{A}) \leq m$ pa imamo

$$m \geq 2s.$$

To znači da je potrebno barem $2s$ mjerenja da bi rekonstruirali svaki $s$-rijedak vektor. Pokazati ćemo da je, makar u teoriji, dovoljno točno $2s$ mjerenja.

**Teorem 1.2.2.** *Za svaki $N \geq 2s$, postoji matrica mjerenja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2s \times N}$ takva da se svaki $s$-rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ može rekonstruirati iz vektora mjerenja $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$ kao rješenje problema minimizacije $(P_0)$.*

*Dokaz.* Fiksirajmo $t_N > \cdots t_2 > t_1 > 0$ i neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2s \times N}$ dana sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_N \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ t_1^{2s-1} & t_2^{2s-1} & \cdots & t_N^{2s-1} \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

Nadalje, neka je $S = \{j_1 < \cdots < j_{2s}\}$ skup indeksa. Matrica $\mathbf{A}_S \in \mathbb{C}^{2s \times 2s}$ je transponirana *Vandermontova matrica.* Prema (TODO) slijedi

$$\det(\mathbf{A}_S) = \prod_{k<l} (t_{j_l} - t_{j_k}) > 0.$$

To znači da je matrica $\mathbf{A}$ invertibilna, pa posebno i injektivna. Tada je zadovoljena tvrdnja $(c)$ teorema (1.2.1), pa je po istom teoremu zadovoljena i tvrdnja $(a)$, tj. svaki $s$-rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ zadovoljava $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Stoga je taj vektor moguće jedinstveno rekonstruirati putem minimizacije $(P_0)$. $\square$

Zapravo, mnogo matrica zadovoljava uvjet $(c)$ iz teorema (1.2.1). Na primjer, potencije od $t_1, \ldots, t_N$ u (1.6) ne moraju biti uzastopne. Nadalje, brojevi $t_1, \ldots, t_N$ ne moraju biti pozitivni, niti realni sve dok vrijedi $\det(\mathbf{A}_S) \neq 0$. Posebno, možemo uzeti $t_l = e^{2\pi i(l-1)/N}$ za $l \in [N]$, teorem (TODO) garantira da parcijalna Fourierova matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{2\pi i/N} & e^{2\pi i 2/N} & \cdots & e^{2\pi i(N-1)/N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{2\pi i(2s-1)/N} & e^{2\pi i(2s-1)2/N} & \cdots & e^{2\pi i(2s-1)(N-1)/N} \end{bmatrix}$$

rekonstruira svaki $s$-rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ iz $\mathbf{y} = \mathbf{Ax} \in \mathbb{C}^{2s}$. Zapravo može se pokazati da skup $(2s) \times N$ matrica takvih da $\det(\mathbf{A}_S) = 0$ za neki $S \subset [N]$ i $\mathrm{card}(S) \leq 2s$ ima Lebesgueovu mjeru nula, pa stoga gotovo sve $(2s) \times N$ matrice rekonstruiraju svaki $s$-rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ iz $\mathbf{y} = \mathbf{Ax} \in \mathbb{C}^{2s}$. Međutim u praksi nije isplativo rješavati problem minimizacije $(P_0)$, što ćemo kasnije i pokazati.

## Rekonstrukcija zadanog rijetkog vektora

Promatramo problem gdje je $s$-rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ unaprijed zadan i poznat, a matricu $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$ želimo odabrati tako da ona garantira rekonstrukciju vektora $\mathbf{x}$ iz mjerenja $\mathbf{y} = \mathbf{Ax} \in \mathbb{C}^m$. Isprva, ovaka pristup izgleda neprirodan zbog činjenice da je vektor $\mathbf{x}$ apriorno poznat. Ideja je da će uvjeti rekonstrukcije vrijediti za gotovo sve $(s+1) \times N$ matrice, što podupire činjenicu da se u praksi matrice mjerenja često odabiru na nasumičan način.

**Teorem 1.2.3.** *Za svaki $N \geq s+1$ i za dani $s$-rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$, postoji matrica mjerenja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{(s+1) \times N}$, takva da se vektor $\mathbf{x}$ može rekonstruirati iz mjerenja $\mathbf{y} = \mathbf{Ax} \in \mathbb{C}^m$ kao rješenje minimizacije $(P_0)$.*

*Dokaz.* Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{(s+1) \times N}$ matrica za koju se $s$-rijedak vektor $\mathbf{x}$ ne može rekonstruirati iz $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ putem minimizacije $(P_0)$. To znači da postoji vektor $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ različit od $\mathbf{x}$, takav da $S = \mathrm{supp}(\mathbf{z}) = \{j_1, \dots, j_s\}$, $\mathrm{card}(S) \leq s$ (ako je $\|\mathbf{z}\|_0 < s$, u $S$ dodamo proizvoljne elemente $j_l \in [N]$) i $\mathbf{Az} = \mathbf{Ax}$. Ako je $\mathrm{supp}(\mathbf{x}) \subset S$, tada iz $\big(\mathbf{A}(\mathbf{z} - \mathbf{x})\big)_{[s]} = 0$ slijedi da $\mathbf{A}_{[s],S}$ nije invertibilna, tj.

$$f(a_{1,1}, \dots a_{1,N}, \dots, a_{m,1}, \dots, a_{m,N}) := \det(\mathbf{A}_{[s],S}) = 0.$$

Ako $\mathrm{supp}(\mathbf{x}) \not\subset S$ tada je dimenzija prostora $V := \{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^N : \mathrm{supp}(\mathbf{u}) \subset S\} + \mathbb{C}\mathbf{x}$ jednaka $s+1$, i linearno preslikavanje $G : V \to \mathbb{C}^{s+1}$, $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{Av}$ nije invertibilno, pošto je $G(\mathbf{z} - \mathbf{x}) = 0$. Matrica linearnog preslikavanja $G$ u bazi $(\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_s}, \mathbf{x})$ prostora V, je oblika

$$B_{\mathbf{x},S} := \begin{bmatrix} a_{1,j_1} & \cdots & a_{1,j_s} & \sum_{j \in \mathrm{supp}(\mathbf{x})} x_j a_{1,j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{s+1,j_1} & \cdots & a_{s+1,j_s} & \sum_{j \in \mathrm{supp}(\mathbf{x})} x_j a_{s+1,j} \end{bmatrix}$$

i imamo

$$g_S(a_{1,1}, \dots a_{1,N}, \dots, a_{m,1}, \dots, a_{m,N}) := \det(B_{\mathbf{x},S}) = 0.$$

Dakle, vrijedi

$$(a_{1,1}, \ldots a_{1,N}, \ldots, a_{m,1}, \ldots, a_{m,N}) \in f^{-1}(\{0\}) \cup \bigcup_{\mathrm{card}(S)=s} g_S^{-1}(\{0\}).$$

Primjetimo da su skupovi $f^{-1}(\{0\})$ i $g_S^{-1}(\{0\})$ Lebesgueove mjere nula iz razloga što su $f$ i $g_S$ polinomi u varijablama $(a_{1,1}, \ldots a_{1,N}, \ldots, a_{m,1}, \ldots, a_{m,N})$. Dakle, elemente matrice $\mathbf{A}$ moramo izabrati izvan skupa mjere nula, da bi osigurali rekonstrukciju vekotora $\mathbf{x}$ iz $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. $\square$

## 1.3 NP-složenost $\ell_0$-minimizacije

Kao što smo najavili, pokazati ćemo da je u praksi neisplativno rješavati problem $\ell_0$-minimizacije u svrhu rekonstrukcije vektora $\mathbf{x}$ iz mjerenja $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Prisjetimo se, problem koji rješavamo je oblika,

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N} \|\mathbf{z}\|_0 \quad \text{uz uvjet } \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y}.$$

Pošto je minimizator najvise $s$-rijedak, najjednostavniji algoritam za rješavanje ovog problema je rješiti sve pravokutne sustave $\mathbf{A}_S\mathbf{u} = \mathbf{y}$ ili sve kvadratne sustave oblika $\mathbf{A}_S^*\mathbf{A}_S\mathbf{u} = \mathbf{A}_S^*\mathbf{y}$ za svaki $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^S$ gdje S ide po svim poskupovima od [N], veličine $s$. No ispada da broj podskupova $\binom{N}{s}$, što za male probleme sa $N = 1000$ i $s = 10$, iznosi $\binom{1000}{10} \geq (\frac{1000}{10})^{10} = 10^{20}$. Kada bi jedan $10 \times 10$ sustav mogli rješiti u $10^{-10}$ sekundi, trebalo bi nam više od 300 godina da sve riješimo. Sada ćemo pokazati zašto je zapravo općenitiji problem

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N} \|\mathbf{z}\|_0 \quad \text{uz uvjet } \|\mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{y}\|_2 \leq \eta \tag{$P_{0,\eta}$}$$

NP-težak.

Uvedimo prvo potrebne pojmove iz kompleksnosti algoritama. Za algoritam kažemo da je *polinomijalnog-vremena* ako je broj koraka do rješenja ograničen polinomom u varijabli veličine ulaza. Nadalje, uvedimo neformalne definicije klasa problema odlučivanja:

- $\mathfrak{P}$: Svi problemi odlučivanja za koje postoji algoritam polinomijalnog vremena koji daje rješenje.

- $\mathfrak{NP}$: Svi problemi odlučivanja za koje postoji algoritam polinomijalnog vremena koji provjerava točnost rješenja.

- $\mathfrak{NP}$-teški: Svi problemi (ne nužno problemi određivanja) za koje se algoritam za rješenje može u polinomijalnom vremenu transformirati u algoritam rješenja za bilo koji $\mathfrak{NP}$ problem.

- $\mathfrak{NP}$-potpuni: Svi problemi koji su istovremeno $\mathfrak{NP}$ i $\mathfrak{NP}$-teški.

Pitanje je li $\mathfrak{P}$ strogo sadržano u $\mathfrak{NP}$ do dan danas nije odgovoreno. No, vjeruje se da postoje problemi za koje ne postoji algoritam rješenja polinomijalnog vremena, ali postoji algoritam koji će provjeriti točnost rješenja u polinomijalnom vremenu. Najpoznatiji $\mathfrak{NP}$-potpun problem je problem putujućeg prodavača. No, iskoristiti ćemo problem egzaktnog pokrivača tročlanim skupovima da bi pokazali da je problem ($P_{0,\eta}$) $\mathfrak{NP}$-težak.

## Egzaktni pokrivač tročlanim skupovima

Za danu kolekciju $\{\mathcal{C}_i;\ i \in [N]\}$ tročlanih podskupova od $[m]$, postoji li egzaktni pokrivač skupa $[m]$, tj. postoji li $J \subset [N]$ takav da $\cup_{j\in J}\mathcal{C}_j = [m]$, gdje je $\mathcal{C}_j \cap \mathcal{C}_k = \emptyset$ za svaki $j, k \in J$ različiti? Poznato je da je taj problem $\mathfrak{NP}$-potpun (vidi TODO).

**Teorem 1.3.1.** *Za svaki $\eta \geq 0$, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times N}$ i $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$, problem minimizacije ($P_{0,\eta}$) je $\mathfrak{NP}$-potpun.*

*Dokaz.* Zbog linearnosti problema ($P_{0,\eta}$), možemo uzeti da je $\eta < 1$. Pokazati ćemo da se problem egzaktnog pokrivač može u polinomijalnom vremenu reducirati na problem $\ell_0$-minimizacije. Neka je $\{\mathcal{C}_i;\ i \in [N]\}$ kolekcija tročanih podskupova $[m]$. Definirajmo vektora $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots \mathbf{a}_N \in \mathbb{C}^m$

$$(\mathbf{a}_i)_j = \begin{cases} 1 \text{ za } j \in \mathcal{C}_i, \\ 0 \text{ za } j \notin \mathcal{C}_i \end{cases}$$

Definiramo matricu $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times N}$ i vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$ sa

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_N], \qquad \mathbf{y} = [1, 1, \dots, 1]^T.$$

Pošto je $N \leq \binom{m}{3}$, to možemo napraviti u polinomijalnom vremenu. Ako $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ zadovoljava $\|\mathbf{Az} - y\|_2 \leq \eta$, tada su svih $m$ komponenti od $\mathbf{Az}$ udaljeljene od 1 za najviše $\eta$, pa su te komponente različite od nula, jer smo $\eta$ uzeli manji od 1. Dakle, vrijedi $\|\mathbf{Az}\|_0 = m$. Ali pošto svaki od vektora $\mathbf{a}_i$ imam točno tri ne-nul komponente, vektor $\mathbf{Az} = \sum_{j=1}^N z_j \mathbf{a}_j$ ima najviše $r\|\mathbf{z}\|_0$ ne-nul elemenata, tj. $\|\mathbf{Az}\|_0 \leq 3\|\mathbf{z}\|_0$. Dakle, za svaki vektor $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ koji zadovoljava $\|\mathbf{Az} - \mathbf{y}\|_2 \leq \eta$ vrijedi $\|\mathbf{z}\|_0 \geq m/3$. Neka je sada $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ rješenje $\ell_0$-minimizacije ($P_{0,\eta}$). Imamo dva slučaj za normu vektora $\mathbf{x}$:

1. Ako je $\|\mathbf{x}\|_0 = m/3$ tada je $\{\mathcal{C}_j;\ j \in \operatorname{supp}(\mathbf{x})\}$ egzaktni pokrivač skupa $[m]$ jer inače bi neke od $m$ komponenti od $\mathbf{Ax}$ bile jednake od nula.

2. Ako je $\|\mathbf{x}\|_0 > m/3$ tada ne može postojati egzaktni pokrivač $\{\mathcal{C}_j;\ j \in J\}$ jer bi u suprotnom vektor $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ definiran tako da je $z_j = 1$ ako je $j \in J$i $z_j = 0$ ako je $j \notin J$, zadovoljavao $\mathbf{Az} = \mathbf{y}$ i $\|\mathbf{z}\|_0 = m/3$, što je kontradikcija s minimalnosti vektora $\mathbf{x}$.

Dakle, rješavanjem problem $\ell_0$-minimizacije, možemo rješiti problem egzaktnog pokrivača tročlanim skupovima, pa je stoga i sam problem $\ell_0$-minimizacije $\mathfrak{NP}$-potpun. $\square$

Čini se da prethodni teorem predstavlja ozbiljnu zapreku u praktičnom rješavanju problema sažetog uzorkovanja. No primjetimo, teorem tvrdi da je algoritam koji rješava problem $\ell_0$-minimizacije, za sve moguće matrie $\mathbf{A}$ i vektore $\mathbf{y}$ barem klase $\mathfrak{NP}$. Naravno, u samoj praksi nije nužno zahtjevati rekonstrukciju za sve takve matrice i vektore. Naime, pokazat ćemo da postoje algoritmi koji uspješno rekonstruiraju $\mathbf{x}$ iz $\mathbf{y}$ za posebno dizajnirane matrice $\mathbf{A}$.

# Poglavlje 2

# Osnovni algoritmi sažetog uzorkovanja

Algoritmi za rješavanje problema sažetog uzorkovanja, koje ćemo predstaviti, podijeljeni su u tri kategorije: optimizacije, greedy metode i granične metode. U ovom poglavlju dati ćemo samo pregled najpopularnijih algoritama, dok ćemo formalnu analizu nekih od njih ostaviti za kasnije, nakon što razvijemo potrebne teorijske alate.

## 2.1 Optimizacijske metode

Općeniti problem optimizacije je oblika

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N} F_0(\mathbf{x}) \quad \text{uz uvjet } F_i(\mathbf{x}) \leq b_i, \ i \in [n]$$

gdje $F_0 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ zovemo *funkcija cilja*, a funkcije $F_1, \ldots, F_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ zovemo *funkcije ograničenja*. Ako su $F_0, F_1, \ldots, F_n$ konveksne funkcije, tada ovaj problem zovem *problem konveksne optimizacije*. Ako su te funkcije linearne, tada je to *problem linearnog programiranja*. Primjetimo da je problem rekonstrukcije rijetkog vektora ($P_0$), zapravo problem minimizacije. No, nažalost taj problem nije konveksan i kao što smo u prethodnom poglavlju pokazali, općenito je $\mathfrak{NP}$-težak. Prisjetimo se da $\|\mathbf{z}\|_q^q$ konvergira k $\|\mathbf{z}\|_0$ za $q \to 0^+$, pa je prirodno ($P_0$) aproksimirati problemom

$$\min \|\mathbf{z}\|_q \quad \text{uz uvjet } \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y} \tag{$P_q$}$$

Pokaže se da za $q > 1$, čak 1-rijetki vektori nisu rješenja od ($P_q$). Dok za $0 < q < 1$, ($P_q$) ponovno nije konveksan i dalje je općenito $\mathfrak{NP}$-težak. Za $q = 1$, problem postaje konveksan

$$\min \|\mathbf{z}\|_1 \quad \text{uz uvjet } \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y}. \tag{$P_1$}$$

To je zapravo konveksna relaksacija problema ($P_0$) i zovemo ga $\ell_1$-*minimizacija* ili *BP* algoritam (eng. *basis pursuit*).

**$\ell_1$-minimizacija (BP)**

---

*Ulaz:* Matrica mjerenja $\mathbf{A}$, vektor mjerenja $\mathbf{y}$.
*Problem:*

$$\mathbf{x}^\sharp = \arg\min \|\mathbf{z}\|_1 \quad \text{uz uvjet } \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y} \tag{$\ell_1 - min$}$$

*Izlaz:* vektor $\mathbf{x}^\sharp$

Pokažimo sada da su $\ell_1$-minimizatori rijetki vektori u realnom slučaju.

**Teorem 2.1.1.** *Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times N}$ matrica mjerenja sa stupcima $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N$. Ako je $\mathbf{x}^\sharp$ minimizator od*

$$\min_{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^N} \|\mathbf{z}\|_1 \quad \textit{uz uvjet } \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y},$$

*tada je skup $\{\mathbf{a}_j,\ j \in \operatorname{supp}(\mathbf{x}^\sharp)\}$ linearno nezavisan i vrijedi*

$$\|\mathbf{x}^\sharp\|_0 = \operatorname{card}(\operatorname{supp}(\mathbf{x}^\sharp)) \leq m.$$

*Dokaz.* Pretpostavimo suprotno, tj. da je skup $\{\mathbf{a}_j,\ j \in \operatorname{supp}(\mathbf{x}^\sharp)\}$ linearno zavisan. Neka je $S = \operatorname{supp}(\mathbf{x}^\sharp)$. To znači da postoji ne-nul vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ sa nosačem na $S$ takav da $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Tada za svaki $t \neq 0$

$$\|\mathbf{x}^\sharp\|_1 < \|\mathbf{x}^\sharp + t\mathbf{v}\|_1 = \sum_{j\in S} |x_j^\sharp + tv_j| = \sum_{j\in S} \operatorname{sgn}(x_j^\sharp + tv_j)(x_j^\sharp + tv_j)$$

Ako je $|t|$ dovoljno mali, tj. $|t| < \min_{j\in S} |x_j^\sharp|/\|\mathbf{v}\|_\infty$ onda vrijedi

$$\operatorname{sgn}(x_j^\sharp + tv_j) = \operatorname{sgn}(x_j^\sharp) \quad \text{za svaki } j \in S.$$

Dakle, za $0 < |t| < \min_{j\in S} |x_j^\sharp|/\|\mathbf{v}\|_\infty$ slijedi

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}^\sharp\|_1 &< \sum_{j\in S} \operatorname{sgn}(x_j^\sharp)(x_j^\sharp + tv_j) = \sum_{j\in S} \operatorname{sgn}(x_j^\sharp)(x_j^\sharp) + t\sum_{j\in S} \operatorname{sgn}(x_j^\sharp)v_j \\ &= \|\mathbf{x}^\sharp\|_1 + t\sum_{j\in S} \operatorname{sgn}(x_j^\sharp)v_j.\end{aligned}$$

No, to je kontradikcija jer $t \neq 0$ možemo odabrati dovoljno mali tako da je $t\sum_{j\in S} \operatorname{sgn}(x_j^\sharp)v_j \leq 0$. □

U realnom slučaju, ($P_1$) možemo reinterpretirati kao problem linearnog programiranja, tako da uvedemo pomoćne varijable $\mathbf{z}^+,\ \mathbf{z}^- \in \mathbb{R}^N$ definirane sa

$$z_j^+ = \begin{cases} z_j & \text{za } z_j > 0, \\ 0 & \text{za } z_j \leq 0 \end{cases} \qquad\qquad z_j^- = \begin{cases} 0 & \text{za } z_j > 0, \\ -z_j & \text{za } z_j \leq 0 \end{cases}$$

za svaki $j \in [N]$. Tada je problem ($P_1$) ekvivaltan problemu

$$\min_{\mathbf{z}^+,\mathbf{z}^-\in\mathbb{R}^N} \sum_{j=1}^N (z_j^+ + z_j^-) \quad \text{uz uvjet } \begin{bmatrix}\mathbf{A} & -\mathbf{A}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{z}^+\\ \mathbf{z}^-\end{bmatrix} = \mathbf{y}, \quad \begin{bmatrix}\mathbf{z}^+\\ \mathbf{z}^-\end{bmatrix} \geq 0. \tag{$P_1'$}$$

Isto ne vrijedi za kompleksni slučaj. Tu činjenicu pokazati ćemo na općenitijim problemu,

$$\min \|\mathbf{z}\|_1 \quad \text{uz uvjet } \|\mathbf{A}\mathbf{z} - y\|_2 \leq \eta. \tag{$P_{1,\eta}$}$$

Taj problem je zapravo pogodniji za praksu, pošto vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$ ne možemo izmjeriti s beskonačnom točnošću, već uz neku grešku $\mathbf{e} \in \mathbb{C}^m$ pa je stoga

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{e}.$$

Takvoj greški često možemo ocjeniti $\ell_2$-normu, pošto ona ima interpretaciju energije,

$$\|\mathbf{e}\|_2 \leq \eta, \quad \text{za neki } \eta > 0.$$

Za dani vektor $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$, neka su $\mathbf{u},\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ njegovi realni i imaginarni djelovi te neka je $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^N$ takav d je $c_j \geq |z_j| = \sqrt{u_j^2 + v_j^2}$ za sve $j \in [N]$. Problem ($P_{1,\eta}$) je tada ekvivaltan problemu

$$\begin{aligned}\min_{\mathbf{c},\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^N} \sum_{j=1}^N c_j \quad \text{uz uvjete } &\left\| \begin{bmatrix}\operatorname{Re}(\mathbf{A}) & -\operatorname{Im}(\mathbf{A})\\ \operatorname{Im}(\mathbf{A}) & \operatorname{Re}(\mathbf{A})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\operatorname{Re}(\mathbf{y})\\ \operatorname{Im}(\mathbf{y})\end{bmatrix}\right\|_2 \leq \eta \\ &\sqrt{u_j^2 + v_j^2} \leq c_j, \quad \forall j \in [N].\end{aligned} \tag{$P_{1,\eta}'$}$$

Ovo je *problem konike drugog reda*. Primjetimo da za $\eta = 0$ dobivamo formulaciju problema ($P_1$) za kompleksni slučaj u takvom obliku.

Princip rješavanja ($P_{1,\eta}$) zove se *kvadratično ograničena $\ell_1$-minimizacija* ili *$\ell$-minimizacija osjetljiva na šum* (eng. *quadratically constrainted basis pursuit*).

**Kvadratično ograničena $\ell_1$-minimizacija**

*Ulaz:* Matrica mjerenja $\mathbf{A}$, vektor mjerenja $\mathbf{y}$, razina šuma $\eta$.
*Problem:*

$$\mathbf{x}^\sharp = \arg\min \|\mathbf{z}\|_1 \quad \text{uz uvjet } \|\mathbf{Az} - y\|_2 \leq \eta \qquad (\ell_1 - min_\eta)$$

*Izlaz:* vektor $\mathbf{x}^\sharp$

Rješenje $\mathbf{x}^\sharp$ povezano je s rješenjem problema $\ell_1$-minimizacije sa ugrađenim uklanjanjem šuma

$$\min_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N} \lambda\|\mathbf{z}\|_1 + \|\mathbf{Az} - \mathbf{y}\|_2^2 \tag{2.1}$$

za neki $\lambda \geq 0$. Također povezano je s rješenjem *LASSO* problema, za neki $\tau \geq 0$,

$$\min_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N} \|\mathbf{Az} - \mathbf{y}\|_2 \quad \text{uz uvjet } \|\mathbf{z}\|_1 \leq \tau \tag{2.2}$$

To upravo tvrdi naredna propozicija.

**Propozicija 2.1.2.** *(a) Ako je $\mathbf{x}$ minimizator problema (2.1) sa $\lambda > 0$, onda postoji $\eta = \eta_\mathbf{x} \geq 0$ takva da je $\mathbf{x}$ minizator kvadratično ograničene $\ell_1$-minimizacije ($P_{1,\eta}$).*

*(b) Ako je $\mathbf{x}$ jedinstveni minimizator problema ($P_{1,\eta}$) sa $\eta \geq 0$, onda postoji $\tau = \tau_\mathbf{x} \geq 0$ takav da je $\mathbf{x}$ minimizator LASSO problema (2.2).*

*(c) Ako je $\mathbf{x}$ minimizator LASSO problema (2.2), onda postoji $\lambda = \lambda_\mathbf{x} \geq 0$ takva da je $\mathbf{x}$ minimizator problema (2.1).*

*Dokaz.* (a) Neka je $\eta := \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|_2$ i $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ takav da je $\|\mathbf{Az} - \mathbf{y}\|_2 \leq \eta$. Pošto je prema pretpostavci $\mathbf{x}$ minimizator od (2.1) slijedi,

$$\lambda\|\mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|_2^2 \leq \lambda\|\mathbf{z}\|_1 + \|\mathbf{Az} - \mathbf{y}\|_2^2 \leq \lambda\|\mathbf{z}\|_1 + \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|_2^2.$$

Dakle slijedi da je $\|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{y}\|_1$, pa je $\mathbf{x}$ minimizator problema $(P_{1,\eta})$

(b) Neka je $\eta := \|\mathbf{x}\|_1$ i neka je $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N \setminus \{\mathbf{x}\}$ takav da je $\|\mathbf{z}\|_1 \leq \tau$. Pošto je $\mathbf{x}$ jedinstveni minimizator od $(P_{1,\eta})$ to znači da $\mathbf{z}$ ne može zadovoljavati uvjet iz $(P_{1,\eta})$, pa stoga $\|\mathbf{Az} - \mathbf{y}\|_2 > \eta \geq \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|_2$. Dakle, $\mathbf{x}$ je jedinstveni minimizator *LASSO* problema.

(c) Za dokaz ove tvrdnje potrebni su alati konveksne analize, vidi (TODO).

□

## 2.2 Greedy metode

Upoznati ćemo se sa dva iterativna greedy algoritma koji se često koriste u kontekstu sažetog uzorkovanja. Prvo algoritam koji ćemo proučiti zove se *OMP* (skraćenica od eng. *orthogonal matching pursuit*).

**OMP**

---

*Ulaz:* Matrica mjerenja $\mathbf{A}$, vektor mjerenja $\mathbf{y}$.
*Inicijalizacija:* $S^0 = \emptyset$, $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$
*Iteracija:* Zaustavi kada $n = \bar{n}$:

$$S^{n+1} = S^n \cup \{j_{n+1}\}, \quad j_{n+1} := \arg\max_{j \in [N]} \{|(\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}^n))_j|\}, \tag{$OMP_1$}$$

$$\mathbf{x}^{n+1} = \arg\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N} \{\|\mathbf{y} - \mathbf{Az}\|_2, \ \operatorname{supp}(\mathbf{z}) \subset S^{n+1}\}. \tag{$OMP_2$}$$

*Izlaz:* $\bar{n}$-rijedak vektor $\mathbf{x}^\sharp = \mathbf{x}^{\bar{n}}$.

Numerički najskuplja operacija ovog algoritma je $(OMP_2)$. Situacije se može popraviti korištenjem $QR$ dekompozicije matrice $\mathbf{A}_{S_n}$. Tada se mogu iskoristiti efikasni algoritmi za ažuriranje $QR$ dekompozicije kada se u matricu doda novi stupac. Nadalje, za dodatna ubrzanja mogu se iskoristiti i algoritmi za brzo matrica-vektor množenje bazirani na brzoj Fourierovoj transformaciji (vidi TODO).

Indeks $j_{n+1}$ bira se tako da se reducira $\ell_2$-norma reziduala $\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}^n$ što je više moguće. Sljedeća lema opravdava zašto je smisleno $j$ odabrati takav da maksimizira vrijednost $|(\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}^n))_j|$.

**Lema 2.2.1.** *Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times N}$ sa $\ell_2$-normaliziranim stupcima. Ako su $S \subset [N]$, $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^N$ sa nosačem na $S$, $j \in [N]$, te ako vrijedi*

$$\mathbf{w} := \arg\min_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N}\{\|\mathbf{y} - \mathbf{Az}\|_2,\ \mathrm{supp}(\mathbf{z}) \subset S \cup \{j\}\},$$

*tada*

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{Aw}\|_2^2 \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{Av}\|_2^2 - |(\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{Av}))_j|^2.$$

*Dokaz.* Pošto svaki vektor oblika $\mathbf{v} + t\mathbf{e}_j,\ t \in \mathbb{C}$ ima nosač u $S \cup \{j\}$ vrijedi,

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{Aw}\|_2^2 \leq \min_{t\in\mathbb{C}} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}(\mathbf{v} + t\mathbf{e}_j)\|_2^2$$

Stavimo da je $t = \rho e^{i\theta}$, gdje je $\rho \geq 0$ i $\theta \in [0, 2\pi)$. Imamo,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{y} - \mathbf{A}(\mathbf{v} + t\mathbf{e}_j)\|_2^2 &= \|\mathbf{y} - \mathbf{Av} - t\mathbf{Ae}_j\|_2^2 \\ &= \|\mathbf{y} - \mathbf{Av}\|_2^2 + |t|^2\|\mathbf{Ae}_j\|_2^2 - 2\mathrm{Re}(\bar{t}\langle \mathbf{y} - \mathbf{Av}, \mathbf{Ae}_j\rangle) \\ &= \|\mathbf{y} - \mathbf{Av}\|_2^2 + \rho^2 - 2\mathrm{Re}(\rho e^{-i\theta}(\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{Av}))_j) \\ &\geq \|\mathbf{y} - \mathbf{Av}\|_2^2 + \rho^2 - 2\rho|(\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{Av}))_j|^2\end{aligned}$$

gdje jednakost vrijedi za pogodno odabrani $\theta$. Kao kvadratni polinom u varijabli $\rho$, zadnji izraz poprima minimum za $\rho = |(\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{Av}))_j|$. □

Korak ($OMP_2$) moše se prikazati u obliku

$$\mathbf{x}^{n+1}_{S^{n+1}} = \mathbf{A}^{\dagger}_{S^{n+1}}\mathbf{y},$$

gdje je $\mathbf{x}^{n+1}_{S^{n+1}}$ restrikcija od $\mathbf{x}^{n+1}$ na svoj nosač $S^{n+1}$ i gdje je $\mathbf{A}^{\dagger}_{S^{n+1}}$ pseudo-inverz od $\mathbf{A}_{S^{n+1}}$ (vidi TODO). Drugim rječima to znači da je $\mathbf{z} = \mathbf{x}^{n+1}_{S^{n+1}}$ rješenje sustava $\mathbf{A}^*_{S^{n+1}}\mathbf{A}_{S^{n+1}}\mathbf{z} = \mathbf{A}^*_{S^{n+1}}\mathbf{y}$. Ta činjenica je korisna i u drugim algoritmima koji imaju korak sličan ($OMP_2$).

**Lema 2.2.2.** *Neka je $S \subset [N]$ i*

$$\mathbf{v} := \arg\min_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N}\{\|\mathbf{y} - \mathbf{Az}\|_2,\ \mathrm{supp}(\mathbf{z}) \subset S\},$$

*tada je*

$$(\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{Av}))_S = \mathbf{0}. \tag{2.3}$$

*Dokaz.* Prema definiciji vektora $\mathbf{v}$, vektor $\mathbf{Av}$ je orthogonalna projekcija vektora $\mathbf{y}$

na prostor $\{\mathbf{Az},\ \mathrm{supp}(\mathbf{z} \subset S)\}$, pa je karakteriziran relacijom ortogonalnosti

$$\langle \mathbf{y} - \mathbf{Av}, \mathbf{Az} \rangle = 0 \quad \text{za sve } \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N \text{ takve da } \mathrm{supp}(\mathbf{z}) \subset S.$$

Dakle, imamo da vrijedi $\langle \mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{Av}), \mathbf{z} \rangle = 0$ za sve $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$, $\mathrm{supp}(\mathbf{z}) \subset S$, što vrijedi ako i samo ako vrijedi (2.3). □

Prirodan uvjet zaustavljanja OMP-a je kada se postigne $\|\mathbf{y} - \mathbf{Ax}^{\bar{n}}\| \leq \varepsilon$ ili $\|\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{Ax}^{\bar{n}})_\infty\| \leq \varepsilon$ za neku toleranciju $\varepsilon > 0$. Ako nam je dostupna estimacija rijetkosti $s$ rješenja $\mathbf{x}$, tada je razumno stati kada je $\bar{n} = s$. Sljedeći rezultat govori o uvjetim za uspješnu rekonstrukciju $s$-rijetkog vektora u $s$ iteracija OMP algoritma.

**Propozicija 2.2.3.** *Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times N}$, svaki ne-nul vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ sa nosačemo na skupu $S$, kardinaliteta $s$ može se rekonstruirati iz $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ u najviše $s$ iteracija OMP algoritma ako i samo ako je matrica $\mathbf{A}_S$ injektivna i*

$$\max_{j\in S} |(\mathbf{A}^*\mathbf{r})_j| > \max_{l\in \bar{S}} |(\mathbf{A}^*\mathbf{r})_l| \tag{2.4}$$

*za sve ne-nul* $\mathbf{r} \in \{\mathbf{Az},\ \mathrm{supp}(\mathbf{z}) \subset S\}$.

*Dokaz.* Pretpostavimo da OMP algoritam rekonstruira sve vektore sa nosačemo na skupu $S$ u najviše $s = \mathrm{card}(S)$ iteracija. Neka su $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ sa nosačem na $S$, takvi da je $\mathbf{Av} = \mathbf{Aw}$. Zbog pretpostavke, $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ moraju biti jednaki, a to znači da je matrica $\mathbf{A}_S$ injektivna. Nadalje, ako je $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ za neki $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ sa $\mathrm{supp}(\mathbf{x}) = S$, indeks $l \in \bar{S}$ ne može biti izabran u prvoj iteraciji, pošto indeks izabran u prvoj iteraciji ostaje uvijek u nosaču, a po pretpostavci OMP rekonstruira $\mathbf{x}$ iz $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ u točno $s$ iteracija. Dakle za $n = 0$ iz ($OMP_1$) imamo da je $\max_{j\in S} |(\mathbf{A}^*y)_j| > |(\mathbf{A}^*y)_l|$ za svaki $l \in \bar{S}$, pa stoga vrijedi $\max_{j\in S} |(\mathbf{A}^*y)_j| > \max_{l\in \bar{S}} |(\mathbf{A}^*y)_l|$ za sve ne-nul $\mathbf{y} \in \{\mathbf{Az},\ \mathrm{supp}(\mathbf{z}) \subset S\}$.

Obratno, pretpostavimo da je $\mathbf{Ax}^1 \neq y, \ldots, \mathbf{Ax}^{s-1} \neq y$ jer u suprotnom nemamo što dokazivati. Pokazati ćemo da $S^n \subset S$, $\mathrm{card}(S^n) = n$ za $0 \leq n \leq s$. To će implicirati $S^s = S$. Nadalje, ($OMP_2$) daje $\mathbf{Ax}^s = \mathbf{y}$ a iz injektivnosti od $\mathbf{A}_S$ slijedi $\mathbf{x}_s = \mathbf{x}$. Dakle, neka je $0 \leq n \leq s-1$. Ako je $S^n \subset S$, to povlači da je $\mathbf{r}^n := \mathbf{y} - \mathbf{Ax}^n \in \{\mathbf{Az},\ \mathrm{supp}(\mathbf{z}) \subset S\}$, pa prema (2.4) indeks $j_{n+1}$ leži u S, pa $S^{n+1} = S \cup \{j_{n+1}\} \subset S$. Ovo induktivno pokazuje da je $S^n$ podskup od $S$ za svaki $0 \leq n \leq s$. Nadalje, neka je $1 \leq n \leq s - 1$. Lema (2.2.2) daje $(\mathbf{A}^*\mathbf{r}^n)_{S^n} = \mathbf{0}$. Stoga, iz ($OMP_1$) vidimo da indeks $j_{n+1}$ ne leži u $S^n$, jer bi u protivnom $\mathbf{A}^*\mathbf{r}^n = \mathbf{0}$, a po (2.4) $\mathbf{r}^n = \mathbf{0}$. Dakle, $\mathrm{card}(S^n) = n$. □

Slabost OMP algoritma leži u činjenici da ako krivi indeks uđe u nosač, on ostaje u nosaču u svim sljedećim iteracijama. Stoga $s$ iteracija algoritma nije dovoljno za rekonstrukciju vektora koji je $s$-rijedak. Moguće rješenje je povećati broj iteracija. Naredni algoritam, CoSaMP (eng. *compressive sampling matching pursuit* *algorithm*), koristi drugačiju strategiju kada nam je dostupna estimacija rijetkosti $s$. Uvedimo oznake $H_s(\mathbf{z})$ za najbolju $s$-rijetku aproksimaciju vekotra $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ i $L_s(\mathbf{z})$ za nosač od $H_s(\mathbf{z})$, tj.

$$L_s(\mathbf{z}) := \text{skup indeksa } s \text{ najvećih komponeneti vekora } \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N \tag{2.5}$$

$$H_s(\mathbf{z}) := \mathbf{z}_{L_s(\mathbf{z})}. \tag{2.6}$$

Nelinearni operator $H_s$ zovemo *hard thresholding* operator reda $s$. Za dani vektor $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ on pušta $s$ apsolutno najvećih komponeneti a ostale postavi na nulu. Primjetimo da to nije nužno jedinstveno definiramo. Da bi zaobišli taj problem, skup indeksa $L_s(\mathbf{z})$ biramo iz svih mogućih kandidata leksikografskim poredkom.

**CoSaMP**

---

*Ulaz:* Matrica mjerenja $\mathbf{A}$, vektor mjerenja $\mathbf{y}$, rijetkost $s$
*Inicijalizacija:* $s$-rijedak vektor $\mathbf{x}^0$ (npr. $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$).
*Iteracija:* Zaustavi kada $n = \bar{n}$:

$$U^{n+1} = \operatorname{supp}(\mathbf{x}^n) \cup L_{2s}(\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}^n)) \tag{$CoSaMP_1$}$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \arg\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N} \{\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{z}\|_2,\ \operatorname{supp}(\mathbf{z}) \subset U^{n+1}\} \tag{$CoSaMP_2$}$$

$$\mathbf{x}^{n+1} = H_s(\mathbf{u}^{n+1}) \tag{$CoSaMP_3$}$$

*Izlaz:* $\bar{n}$-rijedak vektor $\mathbf{x}^\sharp = \mathbf{x}^{\bar{n}}$.

## 2.3 Granične metode

Algoritmi predstavljeni u ovom poglavlju također koriste *hard thresholding* operator $H_s$. Prvi algoritam, BT (eng. *basic thresholding*), sastoji se od određivanja nosača $s$-rijetkog vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$, koji se rekonstruira iz $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$, kao indeksi $s$ najvećih komponenti vektora $\mathbf{A}^*\mathbf{y}$, te traženja vektora koji najbolje aproksimira mjerenje $\mathbf{y}$

**BT**

---

*Ulaz:* Matrica mjerenja $\mathbf{A}$, vektor mjerenja $\mathbf{y}$, rijetkost $s$
*Problem:*

$$S^\sharp = L_s(\mathbf{A}^*\mathbf{y}), \tag{$BT_1$}$$

$$\mathbf{x}^\sharp = \arg\min_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N}\{\|\mathbf{y}-\mathbf{A}\mathbf{z}\|_2,\ \operatorname{supp}(\mathbf{z}) \subset S^\sharp\}. \tag{$BT_2$}$$

*Izlaz:* $s$-rijedak vektor $\mathbf{x}^\sharp$.

Dovoljni i nuži uvjeti rekonstrukcije jednostavnim BT algoritmom, slični su uvjetu (2.4).

**Propozicija 2.3.1.** *BT algoritam rekonstruira vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ sa nosačem na $S$, iz $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ako i samo ako*

$$\min_{j\in S} |(\mathbf{A}^*\mathbf{y})_j| > \max_{l\in \bar{S}} |(\mathbf{A}^*\mathbf{y})_l|. \tag{2.7}$$

*Dokaz.* Vektor $\mathbf{x}$ može se rekonstruirati ako i samo ako skup indeksa $S^\sharp$ u ($BT_1$) jednak skupu $S$. A to vrijedi ako i samo ako je element vektora $\mathbf{A}^*\mathbf{y}$ s indeksom iz $S$, veći od svakog elementa vektora $\mathbf{A}^*\mathbf{y}$ s indeksom u $\bar{S}$. □

IHT (eng. *iterative hard thresholding*) algoritam rješava kvadratni sustav $\mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}^*\mathbf{y}$ umjesto $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y}$. To možemo interpretirati kao rješavanje problema fiksne točke $\mathbf{z} = (\mathbf{I}-\mathbf{A}^*\mathbf{A})\mathbf{z}+\mathbf{A}^*\mathbf{y}$. Prirodno je gledati iteracije oblika $\mathbf{x}^{n+1} = (\mathbf{I}-\mathbf{A}^*\mathbf{A})\mathbf{x}^n+\mathbf{A}^*\mathbf{y}$. Pošto tražimo $s$-rijetko rješenje u svakoj iteraciji uzimamo samo $s$ apsolutno najvećih komponenti od $(\mathbf{I} - \mathbf{A}^*\mathbf{A})\mathbf{x}^n + \mathbf{A}^*\mathbf{y}$.

**IHT**

*Ulaz:* Matrica mjerenja $\mathbf{A}$, vektor mjerenja $\mathbf{y}$, rijetkost $s$
*Inicijalizacija:* $s$-rijedak vektor $\mathbf{x}^0$ (npr. $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$).
*Iteracija:* Zaustavi kada $n = \bar{n}$:

$$x^{n+1} = H_s(\mathbf{x}^n + \mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}^n)). \tag{$IHT$}$$

*Izlaz:* $s$-rijedak vektor $\mathbf{x}^\sharp = \mathbf{x}^{\bar{n}}$.

Primjetimo da IHT algoritam ne koristi orthogonalne projekcije, što je njegova prednost. No, ako smo spremi platiti cjenu projekcija, ima smisla gledati vektor koji ima isti nosač kao $\mathbf{x}^{n+1}$ koji najbolje aproksimira mjerenje. Upravo je to strategija HTP (eng. *hard thresholding pursuit*) algoritma.

**HTP**

*Ulaz:* Matrica mjerenja $\mathbf{A}$, vektor mjerenja $\mathbf{y}$, rijetkost $s$
*Inicijalizacija:* $s$-rijedak vektor $\mathbf{x}^0$ (npr. $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$).
*Iteracija:* Zaustavi kada $n = \bar{n}$:

$$S^{n+1} = L_s(\mathbf{x}^n + \mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}^n)), \tag{$HTP_1$}$$
$$\mathbf{x}^{n+1} = \arg\min_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N}\{\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{z}\|_2,\ \mathrm{supp}(\mathbf{z}) \subset S^{n+1}\}. \tag{$HTP_2$}$$

*Izlaz:* $s$-rijedak vektor $\mathbf{x}^\sharp = \mathbf{x}^{\bar{n}}$.

# Poglavlje 3

# $\ell_1$-minimizacija

Prisjetimo se, problem sažetog uzorkovanja sastoji se od rekonstrukcije $s$-rijetkog vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ iz mjerenja $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$, gdje je $m < N$. Prirodno se nameće problem $\ell_0$-minimizacije,

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N} \|\mathbf{z}\|_0 \quad \text{uz uvjet } \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y} \tag{$P_0$}$$

U poglavlju (1) vidjeli smo da je taj problem općenito $\mathfrak{NP}$-težak. U poglavlju (2) pokazali smo nekoliko učinkovitih strategija za rješavanje problema sažetog uzorkovanja. U ovom poglavlju fokusirati ćemo se na strategiju $\ell_1$-minimizacije

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N} \|\mathbf{z}\|_1 \quad \text{uz uvjet } \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y}. \tag{$P_1$}$$

Proučiti ćemo uvjete na matricu $\mathbf{A}$ koji osiguravaju egzaktnu ili aproksimativnu rekonstrukciju vektora $\mathbf{x}$.

## 3.1 Svojstvo nul-prostora

Argumenti u ovom potpoglavlje vrijede u oba kontekstu realnih i u konteksu kompleksnih prostora. Stoga ćemo rezultate prvo iznjeti za polje $\mathbb{K}$, koje može $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Nakon toga uspostaviti ćemo ekvivalentnost realnog i kompleksnog svojstva nul-prostora.

**Definicija 3.1.1.** *Za matricu $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times N}$ kažemo da zadovoljava svojstvo nul-prostora za skup $S \subset [N]$ ako*

$$\|\mathbf{v}_S\|_1 < \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 \quad \text{za svaki } \mathbf{v} \in \ker \mathbf{A} \backslash \{\mathbf{0}\}. \tag{3.1}$$

*Nadalje, kažemo da $\mathbf{A}$ zadovoljava svojstvo nul-prostora reda $s$ ako zadovoljava gornju nejednakost za svaki $S \subset [N]$ takav da $\operatorname{card}(S) \leq s$.*

Primjetimo da za vektor $\mathbf{v} \in \ker \mathbf{A} \backslash \{\mathbf{0}\}$ svojstvo nul-prostora vrijedi za svaki $S \subset [N]$ takav da $\operatorname{card}(S) \leq s$, čim vrijedi za skup indeksa $s$ apsolutno najvećih komponenti vektora $\mathbf{v}$.

Postoje dvije dodatne formulaciju svojsta nul-prostora. Prvu dobijemo tako da gornjoj nejednakosti dodamo $\|\mathbf{v}_s\|_1$ s obje strane. Tada imamo

$$2\|\mathbf{v}_S\|_1 < \|\mathbf{v}\|_1 \quad \text{za svaki } \mathbf{v} \in \ker \mathbf{A} \backslash \{\mathbf{0}\}. \tag{3.2}$$

Drugu dobijemo tako da u skup $S$ stavimo $s$ apsolutno najvećih komponenti vektora $\mathbf{v}$ i ovaj put nejednakosti dodamo $\|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1$ s obje strane. Tada imamo

$$\|\mathbf{v}\|_1 < 2\sigma_s(\mathbf{v})_1 \quad \text{za sve } \mathbf{v} \in \ker \mathbf{A} \backslash \{\mathbf{0}\}. \tag{3.3}$$

Prisjetimo se definicije 1.1.2 $\ell_p$-greške najbolje $s$-rijetke aproksimacija vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^N$,

$$\sigma_s(\mathbf{x})_p = \inf_{\|\mathbf{z}\| \leq s} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_p.$$

Sljedeći teorem govori o veci svojstva nul-prostora i egzaktne rekonstrukcije rijetkog vektora putem $\ell_1$-minimizacije.

**Teorem 3.1.2.** *Za $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times N}$, svaki vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^N$ sa nosačem na $S$ je jedinstveno rješenje od $(P_1)$ sa $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ako i samo ako $\mathbf{A}$ zadovoljava svojstvo nul-prostora za skup $S$.*

*Dokaz.* Neka je skup indeksa $S$ fiksan. Pretpostavimo da je svaki vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^N$ s nosačem na $S$ jedinstveni minimizator od $\|\mathbf{z}\|_1$ takav da $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Stoga za svaki $\mathbf{v} \in \ker \mathbf{A} \backslash \{\mathbf{0}\}$, vektor $\mathbf{v}_S$ je jedinstveni minimizator od $\|\mathbf{z}\|_1$ takav da $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{v}_S$. Ali imamo $\mathbf{A}(-\mathbf{v}_{\bar{S}}) = \mathbf{A}\mathbf{v}_S$ i $-\mathbf{v}_{\bar{S}} \neq \mathbf{v}_S$ jer je $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ i $\mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{A}(\mathbf{v}_S + \mathbf{v}_{\bar{S}})$. Dakle, mora vrijediti $\|\mathbf{v}_S\|_1 < \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1$. Obratno, pretpostavimo da $\mathbf{A}$ zadovoljava svojstvo nul-prostora za skup $S$. Tada za vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^N$ sa nosačem na $S$ i za $\mathbf{z} \in \mathbb{K}^N$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{x}$ takvi da $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, označimo vektor $\mathbf{v} := \mathbf{x} - \mathbf{z} \in \ker \mathbf{A} \backslash \{\mathbf{0}\}$. Imamo,

$$\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}_S\|_1 + \|\mathbf{z}_S\|_1 = \|\mathbf{v}_S\|_1 + \|\mathbf{z}_S\|_1 < \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 + \|\mathbf{z}_S\|_1 = \|-\mathbf{z}_{\bar{S}}\|_1 + \|\mathbf{z}_S\|_1 = \|\mathbf{z}\|_1$$

Dakle, vektor $\mathbf{x}$ je minimizator od $(P_1)$. □

Variranjem skupa $S$, sljedeći rezultat sljedi direktno iz prethodnog teorema.

**Teorem 3.1.3.** *Za matricu $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times N}$, svaki $s$-rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^N$ je jedinstveno rješenje problema $(P_1)$ uz $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ako i samo ako $\mathbf{A}$ zadovoljava svojstvo nul-prostora reda $s$.*

Primjetimo da prethodni teorem tvrdi da za svaki $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, gdje je $\mathbf{x}$ $s$-rijedak, $\ell_1$-minimizacija $(P_1)$ zapravo rješava problem $\ell_0$-minimizacije $(P_0)$ kada vrijedi svojstvo nul-prostora reda $s$. Zaista, pretpostavimo da se svaki $s$-rijedak vektor $\mathbf{x}$ može rekonstruirati $\ell_1$-minimizacijom iz $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Neka je $\mathbf{z}$ minimizator $\ell_0$ problema $(P_0)$ sa $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, tada je $\|\mathbf{z}\|_0 \leq \|\mathbf{x}\|_0$ pa je $\mathbf{z}$ također $s$-rijedak. No, svaki $s$-rijedak vektor je jedinstveni $\ell_1$-minimizator, slijedi da je $\mathbf{x} = \mathbf{z}$.

Za algoritam rekonstrukcije poželjno je da zadrži mogućnost rekonstrukcije ako su neka od mjerenja reskaliraju, ispermutiraju ili dodaju nova. $\ell_1$-minimizacija ima takvo svojstvo. Formalno, gore opisane promijene zapravo predstavljaju zamjenu matrice $\mathbf{A}$ matricama $\hat{\mathbf{A}}$ i $\tilde{\mathbf{A}}$

$$\hat{\mathbf{A}} := \mathbf{G}\mathbf{A}, \quad \text{gdje je } \mathbf{G} \text{ neka invertibilna } m \times m \text{ matrica,}$$
$$\tilde{\mathbf{A}} := \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad \text{gdje je } \mathbf{B} \text{ neka } m' \times N \text{ matrica.}$$

Primjetimo da je $\ker \hat{\mathbf{A}} = \ker \mathbf{A}$ i $\ker \tilde{A} \subset \ker \mathbf{A}$, pa svojstvo nul-prostora vrijedi i za matrice $\hat{\mathbf{A}}$ i $\tilde{\mathbf{A}}$.

Za kraj proučiti ćemo utjecaj polja $\mathbb{K}$. Razlika između $\ker_{\mathbb{R}} \mathbf{A}$ i
$\ker_{\mathbb{C}} \mathbf{A} = \ker_{\mathbb{R}} \mathbf{A} + i \ker_{\mathbb{R}} \mathbf{A}$ vodi u slučaju da je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ na realno svojstvo nul-prostora,

$$\sum_{j \in S} |v_j| < \sum_{l \in \bar{S}} |v_l| \quad \text{za svaki } \mathbf{v} \in \ker_{\mathbb{R}} \mathbf{A},\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \tag{3.4}$$

a u slučaju da je $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, na kompleksno svojsto nul-prostora,

$$\sum_{jinS} \sqrt{v_j^2 + w_j^2} < \sum_{l \in \bar{S}} \sqrt{v_j^2 + w_j^2} \quad \text{za svaki } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \ker_{\mathbb{R}} \mathbf{A}, \quad (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0}). \tag{3.5}$$

Zapravo, pokazati ćemo da su svojstva nul-prostora međusobno ekvivalentna u realnom i kompleksnom slučaju. Zato možemo reći da realna matrica mjerenja egzaktno rekonstruira sve rijetke vektore $\ell_1$-minimizacijom.

**Teorem 3.1.4.** *Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times N}$, tada je realno svojstvo nul-prostora (3.4) za skup $S$ ekvivalentno je kompleksnom svojstvu nul-prostora (3.5) za isti skup $S$.*

*Dokaz.* Primjetimo (3.4) slijedi direktno iz (3.5) za $\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Uzmimo sada $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \ker_{\mathbb{R}} \mathbf{A}$, takvi da $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Ako su $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ linearno zavisni. tj. $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{w}$ za neki

$\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{\mathbf{0}\}$ onda je

$$\begin{aligned}\sum_{j\in S}\sqrt{v_j^2+w_j^2} &= \sum_{j\in S}\sqrt{(1+\alpha^2)w_j^2} = \sqrt{1+\alpha^2}\sum_{j\in S}\sqrt{w_j^2} \\ &< \sqrt{1+\alpha^2}\sum_{j\in\bar{S}}\sqrt{w_j^2} = \sum_{j\in\bar{S}}\sqrt{(1+\alpha^2)w_j^2} = \sum_{j\in\bar{S}}\sqrt{v_j^2+w_j^2}\end{aligned}$$

Pretpostavimo sada da su $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ linearno nezavisni i definirajmo $\mathbf{u} := \cos\theta\mathbf{v}+\cos\theta\mathbf{v} \in \ker_{\mathbb{R}}\mathbf{A}\backslash\{\mathbf{0}\}$. Tada za svaki $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{j\in S}|\cos\theta v_j + \sin\theta w_j| < \sum_{l\in\bar{S}}|\cos\theta v_l + \sin\theta w_l|. \tag{3.6}$$

Za svaki $k \in [N]$, neka je $\theta_k \in [-\pi,\pi]$ takav da

$$v_k = \sqrt{v_k^2+w_k^2}\cos\theta_k, \quad w_k = \sqrt{v_k^2+w_k^2}\sin\theta_k$$

Iz (3.6) slijedi,

$$\sum_{j\in S}\sqrt{v_j^2+w_j^2}|\cos(\theta-\theta_j)| < \sum_{l\in\bar{S}}\sqrt{v_l^2+w_l^2}|\cos(\theta-\theta_l)|$$

Integriranjem po $\theta \in [-\pi,\pi]$ dobijemo

$$\sum_{j\in S}\sqrt{v_j^2+w_j^2}\int_{-\pi}^{\pi}|\cos(\theta-\theta_j)|d\theta < \sum_{l\in\bar{S}}\sqrt{v_l^2+w_l^2}\int_{-\pi}^{\pi}|\cos(\theta-\theta_l)|$$

No lako se provjeri da je

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\cos(\theta-\theta_j)|d\theta = 4$$

tj. da je pozitivan i neovisan o $\theta' \in [-\pi,\pi]$. $\square$

## Nekonveksna minimizacija

Prisjetimo se, $\ell_0$ norma vektora $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ aproksimirana je $q$-tom potencijom svoje $\ell_q$-kvazinorme,

$$\|\mathbf{z}\|_p^p := \sum_{j=1}^{N}|x_j|^p \xrightarrow{p\to 0} \sum_{j=1}^{N}\mathbf{1}_{\{z_j\neq 0\}} = \|\mathbf{z}\|_0$$

To sugestira da $\ell_0$-minimizaciju $(P_0)$ zamjenimo sa

$$\min_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N} \|\mathbf{z}\|_q \quad \text{uz uvjet } \mathbf{Az} = \mathbf{y}. \tag{$P_q$}$$

Za $0 < q < 1$ taj je problem nekonveksan i $\mathfrak{NP}$-težak. No, želimo teoretski potvrditi ideju da $(P_q)$ dobro aproksimira $(P_0)$ za male $q$. Sljedeći teorem daje analogon svojstva nul-prostora za $0 < q < 1$. Dokaz je također analogan dokazu teorema 3.1.3 te se koristi činjenica da za $\ell_q$-kvazinorma zadovoljava nejednakost trokuta.

**Teorem 3.1.5.** *Za matricu $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times N}$ i $0 < q < 1$, svaki $s$-rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ je jedinstveno rješenje problema $(P_q)$ uz $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ ako i samo ako*

$$\|\mathbf{v}_S\|_q < \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_q \quad \textit{za svaki } \mathbf{v} \in \ker \mathbf{A}\backslash\{\mathbf{0}\}.$$

Sada možemo dokazivati da rekonstrukcija $\ell_q$-minimizacijom implicira rekonstrukciju $\ell_p$-minimizacijom za $o < p < q < 1$.

**Teorem 3.1.6.** *Za matricu $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times N}$ i $0 < p < q < 1$, ako je svaki $s$-rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ jedinstveno rješenje problema $(P_q)$ uz $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ onda je $\mathbf{x}$ također i rješenje problema $(P_p)$ za $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$.*

*Dokaz.* Prema teoremu 3.1.5 dovoljno je pokazati da vrijedi

$$\sum_{j\in S} |v_j|^p < \sum_{l\in\bar{S}} |v_l|^p, \tag{3.7}$$

ako je $\mathbf{v} \in \ker \mathbf{A}\backslash\{\mathbf{0}\}$, $S$ skup indeksa od $s$ apsolutno najvećih komponeneti od $\mathbf{v}$ i ako ista nejednakost vrijedi za $q$. Dakle, pretpostavimo da (3.7) vrijedi za q. Tada je nužno $\mathbf{v}_{\bar{S}} \neq \mathbf{0}$ pošto je $S$ skup indeksa od $s$ apsolutno najvećih komponeneti ne-nul vektora $\mathbf{v}$. Stoga (3.7) možemo napisati u obliku

$$\sum_{j\in S} \frac{1}{\sum_{l\in\bar{S}}(|v_l|/|v_j|)^p} < 1. \tag{3.8}$$

Primjetimo da $|v_l|/|v_j| \leq 1$ za $l \in \bar{S}$ i $j \in S$. Stoga je lijeva strana (3.8) nepadajuća funkcija u varijabli $0 < p \leq 1$. Pa stoga njena vrijednost u $p < q$ ne prelazi njezinu vrijednost u $q$, koji je manji od 1 po pretpostavci. □

## 3.2 Stabilnost

Signali u praksi gotovo nikad nisu idealno rijetki. U najboljem slućaju blizu su rijetkim vektorima. Stoga, želimo da metode sažetog uzorkovanja rekonstruiraju vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ sa greškom koja je kontrolirana udaljenosti vektora $\mathbf{x}$ do $s$-rijetkih vektora. Za algoritme koji imaju to svojsto kažemo da su *stabilni* s obzirom na defekte rijetkosti. Pokazati ćemo da je $\ell_1$-minimizacija ($P_1$) stabilna pod jačim svojstvom nul-prostora.

**Definicija 3.2.1.** *Matrica $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times N}$ zadovoljava svojstvo stabilnog nul-prostora sa konstantom $0 < \rho < 1$ za skup $S \subset [N]$ ako*

$$\|\mathbf{v}_S\|_1 \leq \rho \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 \quad \textit{za svaki } \mathbf{v} \in \ker \mathbf{A}.$$

*Nadalje, kažemo da $\mathbf{A}$ zadovoljava svojstvo stabilnog nul-prostora reda $s$ sa konstantom $0 < \rho < 1$ ako zadovoljava zadovoljava gornju nejednakost za svaki $S \subset [N]$ takav da $\operatorname{card}(S) = s$.*

**Teorem 3.2.2.** *Ako matrica $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times N}$ zadovoljava svojstvo stabilnog nul-prostora reda $s$ sa konstantom $0 < \rho < 1$, tada za svaki $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$, rješenje $\mathbf{x}^\sharp$ problema ($P_1$) sa $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ aproksimira vektor $\mathbf{x}$ s $\ell_1$-greškom*

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\sharp\| \leq \frac{2(1+\rho)}{(1-\rho)} \sigma_s(\mathbf{x})_1. \tag{3.9}$$

Sada više nemamo jedinstvenost $\ell_1$-minimizatora. Prethodni teorem biti će direktna posljedica jače tvrdnje,

**Teorem 3.2.3.** *Ako matrica $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times N}$ zadovoljava svojstvo stabilnog nul-prostora sa konstantom $0 < \rho < 1$ za skup $S$ ako i samo ako*

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|_1 \leq \frac{1+\rho}{1-\rho} (\|\mathbf{z}\|_1 - \|\mathbf{x}\|_1 + 2\|\mathbf{x}_{\bar{S}}\|_1) \tag{3.10}$$

*za sve vektore $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ za $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.*

Pokažimo kako teorem 3.2.2 slijedi iz 3.2.3: Neka je $S$ skup $s$ apsolutno najvećih komponeneti vekotora $\mathbf{x}$, tako da $\|\mathbf{x}_{\bar{S}}\| = \sigma_s(\mathbf{x})_1$. Ako je $\mathbf{x}^\sharp$ minimizator problema ($P_1$), tada vrijedi $\|\mathbf{x}^\sharp\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_1$ i $\mathbf{A}\mathbf{x}^\sharp = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Dakle, desnu strana (3.10) za $\mathbf{z} = \mathbf{x}^\sharp$ možemo ocjeniti desnom stranom (3.9).

Prije dokaza teorema 3.2.3 pokažimo još jedan koristan rezultat.

**Lema 3.2.4.** *Za $S \subset [N]$ i vektore $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ vrijedi,*

$$\|(\mathbf{x} - \mathbf{z})_{\bar{S}}\|_1 \leq \|\mathbf{z}\|_1 - \|\mathbf{x}\|_1 + \|(\mathbf{x} - \mathbf{z})_S\|_1 + 2\|\mathbf{x}_{\bar{S}}\|_1$$

*Dokaz.* Imamo,

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \|\mathbf{x}_{\bar{S}}\|_1 + \|\mathbf{x}_S\|_1 \leq \|\mathbf{x}_{\bar{S}}\|_1 + \|(\mathbf{x}-\mathbf{z})_S\|_1 + \|\mathbf{z}_S\|_1$$
$$\|(\mathbf{x}-\mathbf{z})_{\bar{S}}\|_1 \leq \|\mathbf{x}_{\bar{S}}\|_1 + \|\mathbf{z}_{\bar{S}}\|_1.$$

Sumiranjem ove dvije nejednakosti, slijedi

$$\|\mathbf{x}\|_1 + \|(\mathbf{x}-\mathbf{z})_{\bar{S}}\|_1 \leq 2\|\mathbf{x}_{\bar{S}}\|_1 + \|(\mathbf{x}-\mathbf{z})_S\|_1 + \|\mathbf{z}\|_1.$$

□

*Dokaz (Teorem 3.2.3).* Pretpostavimo da matrica $\mathbf{A}$ zadovoljava (3.10) za sve vektore $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ uz $\mathbf{Az} = \mathbf{Ax}$. Za dani vektor $\mathbf{v} \in \ker \mathbf{A}$, pošto je $\mathbf{Av}_{\bar{S}} = \mathbf{A}(-\mathbf{v}_S)$ možemo primjeniti (3.10) sa $\mathbf{x} = -\mathbf{v}_S$ i $\mathbf{z} = \mathbf{v}_{\bar{S}}$. Slijedi,

$$\|\mathbf{v}\|_1 \leq \frac{1+\rho}{1-\rho}(\|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 - \|\mathbf{v}_S\|_1).$$

To možemo zapisati kao

$$(1-\rho)(\|\mathbf{v}_S\|_1 + \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1) \leq (1+\rho)(\|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 + \|\mathbf{v}_S\|_1).$$

Jednostavnom manipulacijom slijedi

$$\|\mathbf{v}_S\|_1 \leq \rho\|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1$$

Obratno, neka matrica $\mathbf{A}$ zadovoljava svojstvo stabilnog nul-prostora s konstantom $0 < \rho < 1$ za skup $S$. Neka su $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ takvi da $\mathbf{Az} = \mathbf{Ax}$, pošto je $\mathbf{v} := \mathbf{z} - \mathbf{x} \in \ker \mathbf{A}$, svojstvo stabilnog nul-prostora daje

$$\|\mathbf{v}_S\|_1 \leq \rho\|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1. \tag{3.11}$$

Nadalje, iz lema 3.2.4 slijedi

$$\|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 \leq \|\mathbf{z}\|_1 - \|\mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{v}_S\|_1 + 2\|\mathbf{x}_{\bar{S}}\|_1. \tag{3.12}$$

Substituiramo (3.11) u (3.12),

$$\|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 \leq \|\mathbf{z}\|_1 - \|\mathbf{x}\|_1 + \rho\|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 + 2\|\mathbf{x}_{\bar{S}}\|_1.$$

Pošto je $\rho < 1$,

$$\|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 \leq \frac{1}{1-\rho}(\|\mathbf{z}\|_1 - \|\mathbf{x}\|_1 + 2\|\mathbf{x}_{\bar{S}}\|_1).$$

Ponovno iskoristimo (3.11),

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 + \|\mathbf{v}_S\|_1 \leq (1+\rho)\|\mathbf{v}_{\bar{S}}\|_1 \leq \frac{1+\rho}{1-\rho}(\|\mathbf{z}\|_1 - \|\mathbf{x}\|_1 + 2\|\mathbf{x}_{\bar{S}}\|_1).$$

$\square$

# Bibliografija

# Sažetak

# Summary

# Životopis