

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Marco Hrlić

SAŽETO UZORKOVANJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Damir Bakić

Zagreb, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Albini

Sadržaj

Sadržaj	iv
Uvod	1
1 Rijetka rješenja	3
1.1 Rijetsko i sažetost vektora	3
Bibliografija	7

Uvod

...

Poglavlje 1

Rijetka rješenja

1.1 Rijetsko i sažetost vektora

Uvedimo potrebnu notaciju. Neka je $[N]$ oznaka za skup $\{1, 2, \dots, N\}$ gdje je $N \in \mathbb{N}$. Sa $\text{card}(S)$ označujemo kardinalitet skupa S . Nadalje, \bar{S} je komplement od S u $[N]$, tj. $\bar{S} = [N] \setminus S$.

Definicija 1.1.1. *Nosač vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ je skup indeksa njegovih ne-nul elemenata, tj.*

$$\text{supp}(\mathbf{x}) := \{j \in [N] : x_j \neq 0\}$$

Za vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ kažemo da je s -rijedak ako vrijedi

$$\|\mathbf{x}\|_0 := \text{card}(\text{supp}(\mathbf{x})) \leq s$$

Primjetimo,

$$\|\mathbf{x}\|_p^p := \sum_{j=1}^N |x_j|^p \xrightarrow{p \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{x_j \neq 0\}} = \text{card}(\{j \in [N] : x_j \neq 0\}) = \|\mathbf{x}\|_0$$

Gdje smo koristili da je $\mathbf{1}_{\{x_j \neq 0\}} = 1$ ako je $x_j \neq 0$ te $\mathbf{1}_{\{x_j \neq 0\}} = 0$ ako je $x_j = 0$. Drugim riječima, $\|\mathbf{x}\|_0$ je limes p -te potencije ℓ_p -kvazinorme vektora \mathbf{x} kada p teži k nuli. Kvazinorma definira se jednako kao standardna ℓ_p -norma, jedino što nejednakost trokuta oslabimo, tj.

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq C(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)$$

za neku konstantu $C \geq 1$. Funkciju $\|\cdot\|_0$ često nazivamo ℓ_0 -norma vektora x , iako ona nije niti norma niti kvazinorma. U samoj praksi, teško je tražiti rijetkost vektora, pa je stoga prirodno zahtijevati slabiji uvjet *kompresibilnosti*.

Definicija 1.1.2. ℓ_p -grešku najbolje s -rijetke aproksimacije vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ definiramo sa

$$\sigma_s(\mathbf{x})_p := \inf \{ \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_p, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N \text{ je } s\text{-rijedak} \}$$

Primjetimo da se infimum postiže za svaki s -rijedak vektor $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ koji ima nenul elemente koji su jednaki sa s najvećih komponenti vektora \mathbf{x} . Iako takav $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ nije jedinstven, on postiže infimum za svaki $p > 0$. Neformalno, mogli bi reći da je vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ *kompresibilan* ako greška njegove najbolje s -rijetke aproksimacije brzo konvergira u s . Da bi to formalno iskazali, od koristi će biti ocjena na $\sigma_s(\cdot)_p$. Pošto nam za to neće biti važan poredak elemenata vektora \mathbf{x} , uvodimo sljedeću definiciju koja će nam olaksati račun.

Definicija 1.1.3. *Nerastući poredak vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ je vektor $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^N$ takav da*

$$x_1^* \geq x_2^* \geq x_3^* \geq \dots \geq 0$$

te postoji permutacije $\pi : [N] \rightarrow [N]$ takva da $x_j^ = |x_{\pi(j)}|$ za sve $j \in [N]$.*

Propozicija 1.1.4. *Za svaki $q > p > 0$ i za svaki $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ vrijedi*

$$\sigma_s(\mathbf{x})_q \leq \frac{1}{s^{1/p-1/q}} \|\mathbf{x}\|_p.$$

Dokaz. Neka je $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^N$ nerastući poredak vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$. Tada slijedi,

$$\begin{aligned} \sigma_s(\mathbf{x})_q^q &= \sum_{j=s+1}^N (x_j^*)^q = \sum_{j=s+1}^N (x_j^*)^p (x_j^*)^{q-p} \leq (x_s^*)^{q-p} \sum_{j=s+1}^N (x_j^*)^p \leq \left(\frac{1}{s} \sum_{j=1}^s (x_j^*)^p \right)^{\frac{q-p}{p}} \left(\sum_{j=s+1}^N (x_j^*)^p \right) \\ &\leq \left(\frac{1}{s} \|\mathbf{x}\|_p^p \right)^{\frac{q-p}{p}} \|\mathbf{x}\|_p^p = \frac{1}{s^{q/p-1}} \|\mathbf{x}\|_p^q \end{aligned}$$

Prva nejednakost slijedi iz činjenice da je $x_j^* \leq x_s^*$ za svaki $j \geq s+1$. Druga nejednakost je također posljedica nerasta komponenti od \mathbf{x}^* . Potenciranjem obje strane s $1/q$ slijedi tvrdnja. \square

Primjetimo da ako je \mathbf{x} iz jedinične ℓ_p -kugle za neki mali $p > 0$, onda prethodna propozicija garantira konvergenciju od $\sigma_s(\mathbf{x})_q$ u s , gdje ℓ_p -kuglu definiramo kao

$$B_p^N := \{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \|\mathbf{z}\|_p \leq 1 \}$$

Vratimo se sada ocjeni iz propozicije 1.1.4. Sljedeći teorem daje najmanju konstantu $c_{p,q}$ takvu da vrijedi $\sigma_s(\mathbf{x})_q \leq c_{p,q} s^{-1/p+1/q} \|\mathbf{x}\|_p$ te zapravo predstavlja jaču tvrdnju.

Teorem 1.1.5. Za svaki $q > p > 0$ i za svaki $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ vrijedi

$$\sigma_s(\mathbf{x})_q \leq \frac{c_{p,q}}{s^{1/p-1/q}} \|\mathbf{x}\|_p$$

gdje je

$$c_{p,q} := \left[\left(\frac{p}{q} \right)^{p/q} \left(1 - \frac{p^{1-p/q}}{q} \right) \right]^{1/p} \leq 1.$$

Istaknimo za česti odabir $p = 1$ i $q = 2$

$$\sigma_s(\mathbf{x})_2 \leq \frac{1}{2\sqrt{s}} \|\mathbf{x}\|_1$$

Dokaz. Neka je \mathbf{x}^* nerastući poredak vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ i $\alpha_j := (x_j^*)^p$. Dokazati ćemo ekvivalentnu tvrdnju

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_N \geq 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N \leq 1 \end{array} \right\} \implies \alpha_{s+1}^{q/p} + \alpha_{s+2}^{q/p} + \dots + \alpha_{s+N}^{q/p} \leq \frac{c_q^q}{s^{q/p-1}} \quad (1.1)$$

Stoga, za $r := q/p > 1$, problem se svodi na maksimizaciju konveksne funkcije

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) := \alpha_{s+1}^r + \alpha_{s+2}^r + \dots + \alpha_N^r$$

na konveksnom mnogokutu

$$\mathcal{C} := \{(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N : \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_N \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N \leq 1\}$$

Prema teoremu (todo) f postiže maksimum na nekom od vrhova mnogokuta \mathcal{C} , a vrhovi od \mathcal{C} su dani kao sjecišta N hiperplohi koje dobijemo tako da u (1.1) N nejednakost pretvorimo u jednakost. Mogućnosti su:

- $\alpha_1 = \dots = \alpha_N \implies f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) = 0.$
- $\alpha_1 + \dots + \alpha_N = 1$ i $\alpha_1 = \dots = \alpha_k > \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_N = 0$ za neki $1 \leq k \leq s \implies f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) = 0$
- $\alpha_1 + \dots + \alpha_N = 1$ i $\alpha_1 = \dots = \alpha_k > \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_N = 0$ za neki $s+1 \leq k \leq N \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 1/k$ te $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) = (k-s)/k^r$

Dakle, slijedi da

$$\max_{(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathcal{C}} f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) = \max_{s+1 \leq k \leq N} \frac{k-s}{k^r}$$

Shvatimo sada k kao realnu varijablu i zamjetimo da $g(k) := (k - s)/k^r$ raste do kritične točke $k^* = (r/(r - 1))s$ nakon koje opada.

$$\max_{(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathcal{C}} f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \leq g(k^*) = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{r-1} \frac{1}{s^r - 1} = c_{p,q}^q \frac{1}{s^{q/p} - 1}$$

□

Alternativni način na koji je moguće opisati pojam *kompresibilnosti* za vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ je da zahtjevamo da je broj

$$\text{card}(\{j \in [N] : |x_j| \geq t\})$$

njegovih značajnih ne-nul komponenti dovoljno mali. Ovaj pristup vodi na definiciju slabih ℓ_p -prostora.

Definicija 1.1.6. Za $p > 0$, slabi ℓ_p -prostor s oznakom $w\ell_p^N$ definiramo kao prostor \mathbb{C}^N sa kvazinormom

$$\|x\|_{p,\infty} := \inf \left\{ M \geq 0 : \text{card}(\{j \in [N] : |x_j| \geq t\}) \leq \frac{M^p}{t^p}, \forall t > 0 \right\} \quad (1.2)$$

Da bi pokazali da je (1.2) zapravo kvazinorma, potreban nam je sljedeći rezultat

Propozicija 1.1.7. Neka su $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k \in \mathbb{C}^N$. Tada za svaki $p > 0$ vrijedi

$$\|\mathbf{x}^1 + \dots + \mathbf{x}^k\|_{p,\infty} \leq k^{\max 1, 1/p} (\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty} + \dots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty})$$

Dokaz. ...

□

Bibliografija

Sažetak

Ukratko ...

Summary

In this ...

Životopis

Dana ...