

1

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

2

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

3

MATEMATIČKI ODSJEK

4

Marco Hrlić

5

SAŽETO UZORKOVANJE

6

Diplomski rad

7

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Damir Bakić

8

Zagreb, 2019.

9 Ova­j diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povje-
10 renstvom u sastavu:

- 11
1. _____, predsjednik
 2. _____, član
 3. _____, član

12 Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

13 Potpisi članova povjerenstva:

- 14
1. _____
 2. _____
 3. _____

Sadržaj

17	Sadržaj	iv
18	Uvod	1
19	1 Rijetka rješenja	3
20	1.1 Rijetsko i sažetost vektora	3
21	1.2 Minimalni broj mjerenja	9
22	Bibliografija	15

23 **Uvod**

24 ...

25 Poglavlje 1

26 Rijetka rješenja

27 1.1 Rijetsko i sažetost vektora

28 Uvedimo potrebnu notaciju. Neka je $[N]$ oznaka za skup $\{1, 2, \dots, N\}$ gdje je $N \in \mathbb{N}$.
29 Sa $\text{card}(S)$ označujemo kardinalitet skupa S . Nadalje, \bar{S} je komplement od S u $[N]$,
30 tj. $\bar{S} = [N] \setminus S$.

Definicija 1.1.1. *Nosač vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ je skup indeksa njegovih ne-nul elemenata, tj.*

$$\text{supp}(\mathbf{x}) := \{j \in [N] : x_j \neq 0\}$$

Za vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ kažemo da je s -rijedak ako vrijedi

$$\|\mathbf{x}\|_0 := \text{card}(\text{supp}(\mathbf{x})) \leq s$$

Primjetimo,

$$\|\mathbf{x}\|_p^p := \sum_{j=1}^N |x_j|^p \xrightarrow{p \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{x_j \neq 0\}} = \text{card}(\{j \in [N] : x_j \neq 0\}) = \|\mathbf{x}\|_0$$

Gdje smo koristili da je $\mathbf{1}_{\{x_j \neq 0\}} = 1$ ako je $x_j \neq 0$ te $\mathbf{1}_{\{x_j \neq 0\}} = 0$ ako je $x_j = 0$. Drugim riječima, $\|\mathbf{x}\|_0$ je limes p -te potencije ℓ_p -kvazinorme vektora \mathbf{x} kada p teži k nuli. Kvazinorma definira se jednako kao standardna ℓ_p -norma, jedino što nejednakost trokuta oslabimo, tj.

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq C(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)$$

31 za neku konstantu $C \geq 1$. Funkciju $\|\cdot\|_0$ često nazivamo ℓ_0 -norma vektora x , iako
32 ona nije niti norma niti kvazinorma. U samoj praksi, teško je tražiti rijetkost vektora,

33 pa je stoga prirodno zahtijevati slabiji uvjet *kompresibilnosti*.

Definicija 1.1.2. ℓ_p -grešku najbolje s -rijetke aproksimacije vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ definiramo sa

$$\sigma_s(\mathbf{x})_p := \inf \left\{ \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_p, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N \text{ je } s\text{-rijedak} \right\}$$

34 Primjetimo da se infimum postiže za svaki s -rijedak vektor $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ koji ima ne-
 35 nul elemente koji su jednaki sa s najvećih komponenti vektora \mathbf{x} . Iako takav $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$
 36 nije jedinstven, on postiže infimum za svaki $p > 0$. Neformalno, mogli bi reći da je
 37 vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ *kompresibilan* ako greška njegove najbolje s -rijetke aproksimacije brzo
 38 konvergira u s . Da bi to formalno iskazali, od koristi će biti ocjena na $\sigma_s(\cdot)_p$. Pošto
 39 nam za to neće biti važan poredak elemenata vektora \mathbf{x} , uvodimo sljedeću definiciju
 40 koja će nam olaksati račun.

Definicija 1.1.3. Nerastući poredak vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ je vektor $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^N$ takav da

$$x_1^* \geq x_2^* \geq x_3^* \geq \dots \geq 0$$

41 te postoji permutacije $\pi : [N] \rightarrow [N]$ takva da $x_j^* = |x_{\pi(j)}|$ za sve $j \in [N]$.

Propozicija 1.1.4. Za svaki $q > p > 0$ i za svaki $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ vrijedi

$$\sigma_s(\mathbf{x})_q \leq \frac{1}{s^{1/p-1/q}} \|\mathbf{x}\|_p.$$

Dokaz. Neka je $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^N$ nerastući poredak vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$. Tada slijedi,

$$\begin{aligned} \sigma_s(\mathbf{x})_q^q &= \sum_{j=s+1}^N (x_j^*)^q = \sum_{j=s+1}^N (x_j^*)^p (x_j^*)^{q-p} \leq (x_s^*)^{q-p} \sum_{j=s+1}^N (x_j^*)^p \leq \left(\frac{1}{s} \sum_{j=1}^s (x_j^*)^p \right)^{\frac{q-p}{p}} \left(\sum_{j=s+1}^N (x_j^*)^p \right) \\ &\leq \left(\frac{1}{s} \|\mathbf{x}\|_p^p \right)^{\frac{q-p}{p}} \|\mathbf{x}\|_p^p = \frac{1}{s^{q/p-1}} \|\mathbf{x}\|_p^q \end{aligned}$$

42 Prva nejednakost slijedi iz činjenice da je $x_j^* \leq x_s^*$ za svaki $j \geq s+1$. Druga nejed-
 43 nakost je također posljedica nerasta komponenti od \mathbf{x}^* . Potenciranjem obje strane s
 44 $1/q$ slijedi tvrdnja. \square

Primjetimo da ako je \mathbf{x} iz jedinične ℓ_p -kugle za neki mali $p > 0$, onda prethodna propozicija garantira konvergenciju od $\sigma_s(\mathbf{x})_q$ u s , gdje ℓ_p -kuglu definiramo kao

$$B_p^N := \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \|\mathbf{z}\|_p \leq 1 \right\}$$

45 Vratimo se sada ocjeni iz propozicije 1.1.4. Sljedeći teorem daje najmanju konstantu
 46 $c_{p,q}$ takvu da vrijedi $\sigma_s(\mathbf{x})_q \leq c_{p,q} s^{-1/p+1/q} \|\mathbf{x}\|_p$ te zapravo predstavlja jaču tvrdnju.

Teorem 1.1.5. Za svaki $q > p > 0$ i za svaki $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ vrijedi

$$\sigma_s(\mathbf{x})_q \leq \frac{c_{p,q}}{s^{1/p-1/q}} \|\mathbf{x}\|_p$$

gdje je

$$c_{p,q} := \left[\left(\frac{p}{q} \right)^{p/q} \left(1 - \frac{p^{1-p/q}}{q} \right) \right]^{1/p} \leq 1.$$

Istaknimo za česti odabir $p = 1$ i $q = 2$

$$\sigma_s(\mathbf{x})_2 \leq \frac{1}{2\sqrt{s}} \|\mathbf{x}\|_1$$

47 *Dokaz.* Neka je \mathbf{x}^* nerastući poredak vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ i $\alpha_j := (x_j^*)^p$. Dokazati ćemo
48 ekvivalentnu tvrdnju

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_N \geq 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N \leq 1 \end{array} \right\} \implies \alpha_{s+1}^{q/p} + \alpha_{s+2}^{q/p} + \dots + \alpha_{s+N}^{q/p} \leq \frac{c_q^q}{s^{q/p-1}} \quad (1.1)$$

Stoga, za $r := q/p > 1$, problem se svodi na maksimizaciju konveksne funkcije

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) := \alpha_{s+1}^r + \alpha_{s+2}^r + \dots + \alpha_N^r$$

na konveksnom mnogokutu

$$\mathcal{C} := \{(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N : \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_N \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N \leq 1\}$$

49 Prema teoremu (todo) f postiže maksimum na nekom od vrhova mnogokuta \mathcal{C} , a
50 vrhovi od \mathcal{C} su dani kao sjecišta N hiperplohi koje dobijemo tako da u (1.1) N
51 nejednakosti pretvorimo u jednakosti. Mogućnosti su:

- 52 1. $\alpha_1 = \dots = \alpha_N \implies f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) = 0.$
- 53 2. $\alpha_1 + \dots + \alpha_N = 1$ i $\alpha_1 = \dots = \alpha_k > \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_N = 0$ za neki
54 $1 \leq k \leq s \implies f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) = 0$
- 55 3. $\alpha_1 + \dots + \alpha_N = 1$ i $\alpha_1 = \dots = \alpha_k > \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_N = 0$ za neki
56 $s+1 \leq k \leq N \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 1/k$ te $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) = (k-s)/k^r$

Dakle, slijedi da

$$\max_{(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathcal{C}} f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) = \max_{s+1 \leq k \leq N} \frac{k-s}{k^r}$$

Shvatimo sada k kao realnu varijablu i zamjetimo da $g(k) := (k - s)/k^r$ raste do kritične točke $k^* = (r/(r - 1))s$ nakon koje opada.

$$\max_{(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{C}} f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \leq g(k^*) = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{r-1} \frac{1}{s^r - 1} = c_{p,q}^q \frac{1}{s^{q/p} - 1}$$

57

□

Alternativni način na koji bi mogli definirati pojam *kompresibilnosti* za vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ je da zahtjevamo da je broj

$$\text{card}(\{j \in [N] : |x_j| \geq t\})$$

58 tj. broj njegovih značajnih ne-nul komponenti dovoljno mali. Ovaj pristup vodi na
59 definiciju slabih ℓ_p -prostora.

60 **Definicija 1.1.6.** Za $p > 0$, slabi ℓ_p -prostor s oznakom $w\ell_p^N$ definiramo kao prostor
61 \mathbb{C}^N sa kvazinormom

$$\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} := \inf \left\{ M \geq 0 : \text{card}(\{j \in [N] : |x_j| \geq t\}) \leq \frac{M^p}{t^p}, \forall t > 0 \right\} \quad (1.2)$$

62 Da bi pokazali da je (1.2) zapravo kvazinorma, potreban nam je sljedeći rezultat.

Propozicija 1.1.7. Neka su $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k \in \mathbb{C}^N$. Tada za svaki $p > 0$ vrijedi

$$\|\mathbf{x}^1 + \dots + \mathbf{x}^k\|_{p,\infty} \leq k^{\max\{1, 1/p\}} (\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty} + \dots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty})$$

Dokaz. Neka je $t > 0$. Ako je $|x_j^1 + \dots + x_j^k| \geq t$ za neki $j \in [N]$, tada imamo da je $|x_j^i| \geq t/k$ za neki $i \in [k]$. Dakle, vrijedi

$$\{j \in [N] : |x_j^1 + \dots + x_j^k| \geq t\} \subset \bigcup_{i \in [k]} \{j \in [N] : |x_j^i| \geq t/k\}$$

pa je stoga

$$\begin{aligned} \text{card}(\{j \in [N] : |x_j^1 + \dots + x_j^k| \geq t\}) &\leq \sum_{i \in [k]} \frac{\|\mathbf{x}^i\|_{p,\infty}^p}{(t/k)^p} \\ &= \frac{k^p (\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty}^p + \dots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}^p)}{t^p} \end{aligned}$$

Prema definiciji slabe ℓ_p -kvazinorme (1.2) vektora $\mathbf{x}^1 + \dots + \mathbf{x}^k$ dobivamo

$$\|\mathbf{x}^1 + \dots + \mathbf{x}^k\|_{p,\infty} \leq k \left(\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty}^p + \dots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}^p \right)^{1/p}$$

Ako je $p \leq 1$, uspoređujući ℓ_p i ℓ_1 norme na \mathbb{R}^k slijedi

$$\left(\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty}^p + \cdots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}^p \right)^{1/p} \leq k^{1/p-1} \left(\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty} + \cdots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty} \right)$$

te ako je $p \geq 1$ slijedi

$$\left(\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty}^p + \cdots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}^p \right)^{1/p} \leq \|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty} + \cdots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}.$$

63 Tvrdnja slijedi kombiniranjem dobivenih ocjena. □

64 Uzmimo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$ i neka je $\lambda \in \mathbb{C}$ proizvoljan.

65 1. Neka je $\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} = 0$. Iz (1.2) slijedi $\text{card}(\{j \in [N] : |x_j| \geq t\}) = 0$ za svaki $t > 0$
 66 pa je stoga broj ne-nul komponenti on \mathbf{x} jednak nuli, tj. $\mathbf{x} = 0$

67 2. Ako je λ nula, $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$ vrijedi trivijalno. Za $\lambda \neq 0$, imamo
 68 $\text{card}(\{j \in [N] : |\alpha x_j| \geq t\}) = \text{card}(\{j \in [N] : |x_j| \geq t/|\alpha|\}) \leq (\alpha M)^p/t^p$ za
 69 svaki $t > 0$. Dakle, opet $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$.

70 3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq C(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)$ je sada direktna posljedica prethodne propozicije.

71 Sljedeća propozicija daje alternativni izraz za slabu ℓ_p -kvazinormu.

Propozicija 1.1.8. *Za $p > 0$, vrijedi*

$$\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} = \max_{k \in [N]} k^{1/p} x_k^*$$

72 gdje je $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^N$ nerastući poredak vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$.

Dokaz. Primjetimo prvo da iz (1.2) slijedi da je $\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} = \|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty}$, pa zapravo pokazujemo da je $\|\mathbf{x}\| := \max_{k \in [N]} k^{1/p} x_k^* = \|\mathbf{x}^*\|$. Nadalje, za $t > 0$ vrijedi da je $\{j \in [N] : x_j^* \geq t\} = [k]$ za neki $k \in [N]$ ili je $\{j \in [N] : x_j^* \geq t\} = \emptyset$. U prvom slučaju $t \leq x_k^* \leq \|\mathbf{x}\|/k^{1/p}$ pa je $\text{card}(\{j \in [N] : x_j^* \geq t\}) = k \leq \|\mathbf{x}\|/k^{1/p}$. U drugom slučaju ista nejednakost vrijedi trivijalno. Iz definicije slabe ℓ_p -kvazinorme (1.2) sada dobivamo $\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty} \leq \|\mathbf{x}\|$. Pretpostavimo da je $\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty} < \|\mathbf{x}\|$. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da $(1 + \varepsilon)\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty} \leq \|\mathbf{x}\|$. Slijedi da je $(1 + \varepsilon)\|\mathbf{x}^*\| \leq k^{1/p} x_k^*$ za neki $k \in [N]$ pa stoga

$$[k] \subseteq \{j \in [N] : (1 + \varepsilon)\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty}/k^{1/p} \leq x_j^*\}$$

Ponovo iz (1.2) imamo

$$k \leq \frac{\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty}^p}{\left((1 + \varepsilon)\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty} k^{1/p} \right)^p} = \frac{k}{(1 + \varepsilon)^p}$$

73 Kontradikcija, dakle mora vrijediti $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty}$. □

74 Sada lagano možemo usporediti slabi i jaku ℓ_p normu,

Propozicija 1.1.9. *Za svaki $p > 0$ i za svaki $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$,*

$$\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} \leq \|\mathbf{x}\|_p$$

Dokaz. Neka je $k \in [N]$,

$$\|\mathbf{x}\|_p^p = \sum_{j=1}^N (x_j^*)^p \geq \sum_{j=1}^k (x_j^*)^p \geq k(x_k^*)^p$$

75 Tvrdnja slijedi potenciranjem na $1/p$ i uzimajući maksimum po k i primjenom pret-
76 hodne propozicije. □

77 Koristeći propoziciju (1.1.8) možemo dobiti verziju ocjene iz propozicije (1.1.4) sa
78 slabom ℓ_p normom.

Propozicija 1.1.10. *Za svaki $q > p > 0$ i $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$, vrijedi*

$$\sigma_s(\mathbf{x})_q \leq \frac{d_{p,q}}{s^{1/p-1/q}} \|\mathbf{x}\|_{p,\infty}$$

gdje je

$$d_{p,q} := \left(\frac{p}{q-p} \right)^{1/q}.$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} \leq 1$, pa je $x_k^* \leq 1/k^{1/p}$ za svaki $k \in [N]$. Tada vrijedi,

$$\sigma_s(\mathbf{x})_q^q = \sum_{k=s+1}^N (x_k^*)^q \leq \sum_{k=s+1}^N \frac{1}{k^{q/p}} \leq \int_s^N \frac{1}{t^{q/p}} dt = -\frac{1}{q/p-1} \frac{1}{t^{q/p-1}} \Big|_{t=s}^{t=N} \leq \frac{p}{q-p} \frac{1}{s^{q/p-1}}.$$

79 Potenciranjem sa $1/q$ slijedi tvrdnja. □

80 Prethodna propozicija daje da su vektori $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ koji su kompresibilni u smislu
81 $\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} \leq 1$ za mali $p > 0$, također kompresibilni u smislu da greška njihove najbolje
82 s -rijetke aproksimacije brzo konvergira sa s . Iskažimo još jedan tehnički rezultat,

83 **Lema 1.1.11.** *Neka su $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$. Tada vrijedi,*

$$\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}^*\|_\infty \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty \tag{1.3}$$

84 Nadalje, za $s \in [N]$,

$$|\sigma_s(\mathbf{x})_1 - \sigma(\mathbf{y})_1| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 \quad (1.4)$$

85 i za $k > s$,

$$(k - s)x_k^* \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 + \sigma_s(\mathbf{y})_1 \quad (1.5)$$

Dokaz. Za $j \in [N]$, skup indeksa j najvećih komponenti vektora \mathbf{x} ima ne-trivijalni presjek sa skupom od $N - j + 1$ najmanjih komponenti vektora \mathbf{y} . Izaberimo indeks l iz tog presjeka. Tada vrijedi,

$$x_j^* \leq |x_l| \leq |y_l| + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty \leq z_j^* + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty$$

Zamjenom uloga od \mathbf{x} i \mathbf{y} slijedi (1.3). Neka je $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^N$ najbolja s -rijetka aproksimacija vektora \mathbf{y} . Tada

$$\sigma_s(\mathbf{x})_1 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|_1 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 + \|\mathbf{y} - \mathbf{v}\|_1 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 + \sigma_s(\mathbf{y})_1$$

Ponovno, zbog simetrije slijedi (1.4). Napokon, ocjena (1.5) slijedi iz (1.4) te iz činjenice

$$(k - s)x_k^* \leq \sum_{j=s+1}^k x_j^* \leq \sum_{j \geq s+1} x_j^* = \sigma_s(\mathbf{x})_1.$$

86

□

87 1.2 Minimalni broj mjerenja

Problem sažetog uzorkovanja sastoji se od rekonstrukcije s -rijetkog vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ iz sustava

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

88 Matricu $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$ nazivamo *matrica mjerenja*. Ako je $m < N$, za ovakav sustav
 89 linearnih jednadžbi kažemo da je *neodređen*. Iako iz klasične teorije linearne algebre
 90 ovakvi sustavi imaju beskonačno mnogo rješenja, pokazati će se da je dodatna pret-
 91 postavka rijetkosti vektora \mathbf{x} dovoljno za jedinstvenost rješenja. U ovom poglavlju
 92 istražiti ćemo koji je minimalni broj mjerenja, tj. m broj redaka matrice \mathbf{A} , koji
 93 garantira rekonstrukciju s -rijetkog vektora \mathbf{x} . Zapravo, postoje dva pristupa ovom
 94 problemu. Možemo zahtijevati da problem mjerenja rekonstruira sve s -rijetke vektore
 95 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ istodobno ili možemo tražiti rekonstrukciju specifičnog, tj. predodređenog

vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$. Taj pristup čini se neprirodan, no pokazuje se da je on važan u proučavanju problema gdje matricu \mathbf{A} biramo nasumično.

Pokažimo da su za danu rijetkost s , matricu $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$ i s -rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$, naredne tvrdnje ekvivalentne:

1. Vektor \mathbf{x} je jedinstveno s -rijetko rješenje sustava $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y}$ gdje je $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, tj.
 $\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \|\mathbf{z}\|_0 \leq s\} = \{\mathbf{x}\}$
2. Vektor \mathbf{x} je jedinstveno rješenje problema minimizacije

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N} \|\mathbf{z}\|_0 \quad \text{uz uvjet } \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y} \quad (1.6)$$

Ako je $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ jedinstveno s -rijetko rješenje od $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{y}$ takvo da je $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, onda rješenje $\mathbf{x}^\#$ od (1.6) je s -rijetko i zadovoljava $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ pa je $\mathbf{x}^\# = \mathbf{x}$. Drugi smjer slijedi trivijalno.

Rekonstrukcija svih rijetkih vektora

Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$ i $S \subset [N]$, sa \mathbf{A}_S označujemo matricu formiranu od stupaca od \mathbf{A} indeksiranih sa S . Slično, sa \mathbf{x}_S označujemo ili vektor iz \mathbb{C}^S koji se sastoji od komponenti vektora \mathbf{x} indeksiranih po S , tj. $(\mathbf{x}_S)_l = x_l$ za sve $l \in S$, ili vektor iz \mathbb{C}^N koji se podudara s \mathbf{x} na komponentama indeksiranim u S i jednak je nula na indeksima koji nisu u S , tj. $(\mathbf{x}_S)_l = x_l$ za $l \in S$ i $(\mathbf{x}_S)_l = 0$ za $l \notin S$. Iz konteksta će uvijek biti jasno na koju definiciju se misli.

Teorem 1.2.1. *Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$. Ekvivalentno je:*

- (a) *Svaki s -rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ je jedinstveno rješenje od $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{z}$, tj. ako je $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{z}$ i ako su \mathbf{x}, \mathbf{z} oboje s -rijetki tada $\mathbf{x} = \mathbf{z}$.*
- (b) *Jezgra od \mathbf{A} ne sadrži niti jedan $2s$ -rijedak vektor osim nul-vektora, tj. $\ker \mathbf{A} \cap \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \|\mathbf{z}\|_0 \leq 2s\} = \{\mathbf{0}\}$*
- (c) *Za svaki $S \subset [N]$ takav da $\text{card}(S) \leq 2s$, podmatrica \mathbf{A}_S je injektivna kao preslikavanje sa \mathbb{C}^S u \mathbb{C}^m .*
- (d) *Svaki skup od $2s$ stupaca matrice \mathbf{A} je linearno nezavisan skup.*

Dokaz. (b) \implies (a). Neka su \mathbf{x} i \mathbf{z} s -rijetki vektori takvi da $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{z}$. Tada je $\mathbf{x} - \mathbf{z}$ $2s$ -rijedak i $\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) = \mathbf{0}$. Pošto $\ker \mathbf{A}$ ne sadrži $2s$ -rijetke vektore osim nul-vektora, mora vrijediti $\mathbf{x} = \mathbf{z}$.

(a) \implies (b). Obratno, pretpostavimo da za svaki s -rijedki vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ vrijedi $\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \|\mathbf{z}\|_0 \leq s\} = \{\mathbf{x}\}$. Neka je $\mathbf{v} \in \ker \mathbf{A}$, $2s$ -rijedak. Tada \mathbf{v} možemo rastaviti kao $\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{z}$ gdje su \mathbf{x} i \mathbf{z} s -rijetki takvi da $\text{supp}(\mathbf{x}) \cap \text{supp}(\mathbf{z}) = \emptyset$. Imamo da je $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{z}$ pa prema pretpostavci vrijedi $\mathbf{x} = \mathbf{z}$. Pošto su nosači od \mathbf{x} i \mathbf{z} disjunktni, mora vrijediti $\mathbf{x} = \mathbf{z} = \mathbf{0}$ pa je stoga i $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

(b) \implies (c). Pretpostavimo suprotno, $\ker \mathbf{A} \cap \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \|\mathbf{z}\|_0 \leq 2s\} = \{\mathbf{0}\}$ i da postoji $S \in [N]$ takav da je $\text{card}(S) \leq 2s$ te da \mathbf{A}_S nije injektivna. To znači da postoji vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{\text{card}(S)} \setminus \{\mathbf{0}\}$ takav da je $\mathbf{A}_S \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Definiramo vektor $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^N$ sa

$$\tilde{x}_j = \begin{cases} x_j & \text{za } j \in S \\ 0 & \text{za } j \in \bar{S} \end{cases}$$

Dakle, imamo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\|\mathbf{x}\|_0 \leq 2s$ i vrijedi $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tj. $\mathbf{x} \in \ker \mathbf{A}$. Kontradikcija s (b).

(c) \implies (d). Odaberimo $2s$ stupaca od \mathbf{A} . Skup indeksa tih stupaca označimo sa S . Prema (c), matrica \mathbf{A}_S je injektivna, a to znači da su njeni stupci linearno nezavisni, pa su stoga i $2s$ odabranih stupaca matrice \mathbf{A} linearno nezavisni.

(d) \implies (b). Pretpostavimo da jezgra od \mathbf{A} sadrži $2s$ -rijedak ne-nul vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$. Neka je S skup indeksa ne-nul elemenata vektora \mathbf{x} . To znači da je $\mathbf{A}_S \mathbf{x}_S = \mathbf{0}$, i $\mathbf{x}_S \neq \mathbf{0}$. Dakle \mathbf{A}_S nije injektivna, pa stoga i skup stupaca od \mathbf{A} indeksiranih sa S nije linearno nezavisan, što je kontradikcija sa (d).

□

Uočimo da ako je moguće rekonstruirati svaki s -rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ iz vektora mjerenja $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$, tada vrijedi (a). Prema prošlom teoremu tada vrijedi i tvrdnja (d) pa je stoga $\text{rank}(\mathbf{A}) \geq 2s$. Također vrijedi da je $\text{rank}(\mathbf{A}) \leq m$ pa imamo

$$m \geq 2s.$$

To znači da je potrebno barem $2s$ mjerenja da bi rekonstruirali svaki s -rijedak vektor. Pokazati ćemo da je, makar u teoriji, dovoljno točno $2s$ mjerenja.

Teorem 1.2.2. *Za svaki $N \geq 2s$, postoji matrica mjerenja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2s \times N}$ takva da se svaki s -rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ može rekonstruirati iz vektora mjerenja $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$ kao rješenje problema minimizacije (1.6).*

147 *Dokaz.* Fiksirajmo $t_N > \dots t_2 > t_1 > 0$ i neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2s \times N}$ dana sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_N \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ t_1^{2s-1} & t_2^{2s-1} & \dots & t_N^{2s-1} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Nadalje, neka je $S = \{j_1 < \dots < j_{2s}\}$ skup indeksa. Matrica $\mathbf{A}_S \in \mathbb{C}^{2s \times 2s}$ je transponirana *Vandermonтова matrica*. Prema (TODO) slijedi

$$\det(\mathbf{A}_S) = \prod_{k < l} (t_{j_l} - t_{j_k}) > 0.$$

148 To znači da je matrica \mathbf{A} invertibilna, pa posebno i injektivna. Tada je zadovoljena
 149 tvrdnja (c) teorema (1.2.1), pa je po istom teoremu zadovoljena i tvrdnja (a), tj.
 150 svaki s -rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ zadovoljava $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Stoga je taj vektor moguće
 151 jedinstveno rekonstruirati putem minimizacije (1.6). \square

Zapravo, mnogo matrica zadovoljava uvjet (c) iz teorema (1.2.1). Na primjer, potencije od t_1, \dots, t_N u (1.7) ne moraju biti uzastopne. Nadalje, brojevi t_1, \dots, t_N ne moraju biti pozitivni, niti realni sve dok vrijedi $\det(\mathbf{A}_S) \neq 0$. Posebno, možemo uzeti $t_l = e^{2\pi i(l-1)/N}$ za $l \in [N]$, teorem (TODO) garantira da parcijalna Fourierova matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{2\pi i/N} & e^{2\pi i 2/N} & \dots & e^{2\pi i(N-1)/N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{2\pi i(2s-1)/N} & e^{2\pi i(2s-1)2/N} & \dots & e^{2\pi i(2s-1)(N-1)/N} \end{bmatrix}$$

152 rekonstruira svaki s -rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ iz $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{2s}$. Zapravo može se
 153 pokazati da skup $(2s) \times N$ matrica takvih da $\det(\mathbf{A}_S) = 0$ za neki $S \subset [N]$ i $\text{card}(S) \leq$
 154 $2s$ ima Lebesgueovu mjeru nula, pa stoga gotovo sve $(2s) \times N$ matrice rekonstruiraju
 155 svaki s -rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ iz $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{2s}$. Međutim u praksi nije isplativo
 156 rješavati problem minimizacije (1.6), što ćemo kasnije i pokazati.

157 Rekonstrukcija zadanog rijetkog vektora

158 Promatramo problem gdje je s -rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ unaprijed zadan i poznat, a
 159 matricu $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$ želimo odabrati tako da ona garantira rekonstrukciju vektora \mathbf{x}
 160 iz mjerenja $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$. Isprva, ovaka pristup izgleda neprirodan zbog činjenice
 161 da je vektor \mathbf{x} apriorno poznat. Ideja je da će uvjeti rekonstrukcije vrijediti za gotovo

162 sve $(s + 1) \times N$ matrice, što podupire činjenicu da se u praksi matrice mjerenja često
163 odabiru na nasumičan način.

164 **Teorem 1.2.3.** *Za svaki $N \geq s + 1$ i za dani s -rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$, postoji*
165 *matrica mjerenja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{(s+1) \times N}$, takva da se vektor \mathbf{x} može rekonstruirati iz mjerenja*
166 *$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$ kao rješenje minimizacije (1.6).*

167 *Dokaz.*

□

¹⁶⁸ Bibliografija

169 **Sažetak**

170 Ukratko ...

171 Summary

172 In this ...

173 Životopis

174 Dana ...