SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Marco Hrlić

SAŽETO UZORKOVANJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Damir Bakić

Zagreb, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Albini

Sadržaj

Uvod

...

Poglavlje 1

Rijetka rješenja

1.1 Rijetsko i sažetost vektora

Uvedimo potrebnu notaciju. Neka je $[N]$ oznaka za skup $\{1, 2, ..., N\}$ gdje je $N \in \mathbb{N}$. Sa $\text{card}(S)$ označujemo kardinalitet skupa S. Nadalje, $\bar{S}$ je komplement od S u $[N]$, tj. $\bar{S} = [N] \backslash S$.

Definicija 1.1.1. *Nosač vektora* $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ *je skup indeksa njegovih ne-nul elemenata, tj.*

$$\text{supp}(\mathbf{x}) := \{j \in [N] : x_j \neq 0\}$$

Za vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ kažemo da je s-rijedak ako vrijedi

$$\|\mathbf{x}\|_0 := \text{card}(\text{supp}(\mathbf{x})) \leq s$$

Primjetimo,

$$\|\mathbf{x}\|_p^p := \sum_{j=1}^{N} |x_j|^p \xrightarrow{p \to 0} \sum_{j=1}^{N} \mathbf{1}_{\{x_j \neq 0\}} = \text{card}(\{j \in [N] : x_j \neq 0\}) = \|\mathbf{x}\|_0$$

Gdje smo koristili da je $\mathbf{1}_{\{x_j \neq 0\}} = 1$ ako je $x_j \neq 0$ te $\mathbf{1}_{\{x_j \neq 0\}} = 0$ ako je $x_j = 0$. Drugim riječima, $\|\mathbf{x}\|_0$ je limes p-te potencije ℓ_p-kvazinorme vektora $\mathbf{x}$ kada p teži k nuli. Kvazinorma definira se jednako kao standardna ℓ_p-norma, jedino što nejednakost trokuta oslabimo, tj.

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq C(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)$$

za neku konstantu $C \geq 1$. Funkciju $\| \cdot \|_0$ često nazivamo ℓ_0-norma vektora x, iako ona nije niti norma niti kvazinorma. U samoj praksi, teško je tražiti rijetkost vektora, pa je stoga prirodno zahtjevati slabiji uvjet *kompresibilnosti.*

Definicija 1.1.2. *ℓ_p-grešku najbolje s-rijetke aproksimacije vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ definiramo sa*

$$\sigma_s(\mathbf{x})_p := \inf \left\{ \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_p, \ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N \text{ je } s\text{-rijedak} \right\}$$

Primjetimo da se infimum postiže za svaki s-rijedak vektor $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ koji ima nenul elemente koji su jednaki sa s najvećih komponenti vektora $\mathbf{x}$. Iako takav $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ nije jedinstven, on postiže infimum za svaki $p > 0$. Neformalno, mogli bi reći da je vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ *kompresibilan* ako greška njegove najbolje s-rijetke aproksimacije brzo konvergira u s. Da bi to formalno iskazali, od koristi će biti ocjena na $\sigma_s(\cdot)_p$. Pošto nam za to neće biti važan poredak elemenata vektora $\mathbf{x}$, uvodimo sljedeću definiciju koja će nam olaksati račun.

Definicija 1.1.3. *Nerastući poredak vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ je vektor $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ takav da*

$$x_1^* \geq x_2^* \geq x_3^* \geq \cdots \geq 0$$

te postoji permutacije $\pi : [N] \to [N]$ takva da $x_j^* = |x_{\pi(j)}|$ za sve $j \in [N]$.

Propozicija 1.1.4. *Za svaki $q > p > 0$ i za svaki $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ vrijedi*

$$\sigma_s(\mathbf{x})_q \leq \frac{1}{s^{1/p-1/q}} \|\mathbf{x}\|_p.$$

Dokaz. Neka je $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^N$ nerastući poredak vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$. Tada slijedi,

$$\sigma_s(\mathbf{x})_q^q = \sum_{j=s+1}^{N} (x_j^*)^q = \sum_{j=s+1}^{N} (x_j^*)^p (x_j^*)^{q-p} \leq (x_s^*)^{q-p} \sum_{j=s+1}^{N} (x_j^*)^p \leq \left(\frac{1}{s} \sum_{j=1}^{s} (x_j^*)^p \right)^{\frac{q-p}{p}} \left(\sum_{j=s+1}^{N} (x_j^*)^p \right)$$
$$\leq \left(\frac{1}{s} \|\mathbf{x}\|_p^p \right)^{\frac{q-p}{p}} \|\mathbf{x}\|_p^p = \frac{1}{s^{q/p-1}} \|\mathbf{x}\|_p^q$$

Prva nejednakost slijedi iz činjenice da je $x_j^* \leq x_s^*$ za svaki $j \geq s+1$. Druga nejednakost je također posljedica nerasta komponenti od $\mathbf{x}^*$. Potenciranjem obje strane s $1/q$ slijedi tvrdnja. □

Primjetimo da ako je $\mathbf{x}$ iz jedinične ℓ_p-kugle za neki mali $p > 0$, onda prethodna propozicija garantira kovergenciju od $\sigma_s(\mathbf{x})_q$ u s, gdje ℓ_p-kuglu definiramo kao

$$B_p^N := \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \|\mathbf{z}\|_p \leq 1 \right\}$$

Vratimo se sada ocjeni iz propozicije 1.1.4. Sljedeći teorem daje najmanju konstantu $c_{p,q}$ takvu da vrijedi $\sigma_s(\mathbf{x})_q \leq c_{p,q} s^{-1/p+1/q} \|\mathbf{x}\|_p$ te zapravo predstavlja jaču tvrdnju.

Teorem 1.1.5. *Za svaki $q > p > 0$ i za svaki $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ vrijedi*

$$\sigma_s(\mathbf{x})_q \leq \frac{c_{p,q}}{s^{1/p-1/q}} \|\mathbf{x}\|_p$$

gdje je

$$c_{p,q} := \left[\left(\frac{p}{q} \right)^{p/q} \left(1 - \frac{p}{q}^{1-p/q} \right) \right]^{1/p} \leq 1.$$

Istaknimo za česti odabir $p = 1$ i $q = 2$

$$\sigma_s(\mathbf{x})_2 \leq \frac{1}{2\sqrt{s}} \|\mathbf{x}\|_1$$

Dokaz. Neka je $\mathbf{x}^*$ nerastući poredak vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ i $\alpha_j := (x_j^*)^p$. Dokazati ćemo ekvivaltenu tvrdnju

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_N \geq 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N \leq 1 \end{array} \right\} \implies \alpha_{s+1}^{q/p} + \alpha_{s+2}^{q/p} + \cdots + \alpha_{s+N}^{q/p} \leq \frac{c_q^q}{s^{q/p-1}} \tag{1.1}$$

Stoga, za $r := q/p > 1$, problem se svodi na maksimizaciju konveksne funkcije

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N) := \alpha_{s+1}^r + \alpha_{s+2}^r + \cdots + \alpha_N^r$$

na konveksnom mnogokutu

$$\mathcal{C} := \left\{ (\alpha_1, \cdots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N : \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_N \geq 0 i \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N \leq 1 \right\}$$

Prema teoremu (todo) f postiže maksimum na nekom od vrhova mnogokuta $\mathcal{C}$, a vrhovi od $\mathcal{C}$ su dani kao sjecišta N hiperplohi koje dobijemo tako da u (1.1) N nejednakosti pretvorimo u jednakosti. Mogućnosti su:

- $\alpha_1 = \cdots = \alpha_N \quad \implies \quad f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N) = 0.$
- $\alpha_1 + \cdots + \alpha_N = 1$ i $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k > \alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_N = 0$ za neki $1 \leq k \leq s \quad \implies \quad f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N) = 0$
- $\alpha_1 + \cdots + \alpha_N = 1$ i $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k > \alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_N = 0$ za neki $s + 1 \leq k \leq N \quad \implies \quad \alpha_1 = \cdots \alpha_k = 1/k$ te $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N) = (k - s)/k^r$

Dakle, slijedi da

$$\max_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathcal{C}} f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N) = \max_{s+1 \leq k \leq N} \frac{k - s}{k^r}$$

Shvatimo sada k kao realnu varijablu i zamjetimo da $g(k) := (k-s)/k^r$ raste do kritične točke $k^* = (r/(r-1))s$ nakon koje opada.

$$\max_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_N)\in\mathcal{C}} f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N) \leq g(k^*) = \frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{r}\right)^{r-1}\frac{1}{s^r-1} = c_{p,q}^q\frac{1}{s^{q/p}-1}$$

□

Alternativni način na koji bi mogli definirati pojam *kompresibilnosti* za vektor $\mathbf{x}\in\mathbb{C}^N$ je da zahtjevamo da je broj

$$\operatorname{card}(\{j\in[N] : |x_j|\geq t\})$$

tj. broj njegovih značajnih ne-nul komponenti dovoljno mali. Ovaj pristup vodi na definiciju slabih ℓ_p-prostora.

Definicija 1.1.6. *Za $p>0$, slabi ℓ_p-prostor s oznakom $w\ell_p^N$ definiramo kao prostor $\mathbb{C}^N$ sa kvazinormom*

$$\|x\|_{p,\infty} := \inf\left\{M\geq 0 : \operatorname{card}(\{j\in[N] : |x_j|\geq t\}) \leq \frac{M^P}{t^p},\ \forall t>0\right\} \tag{1.2}$$

Da bi pokazali da je (1.2) zapravo kvazinorma, potreban nam je sljedeći rezultat.

Propozicija 1.1.7. *Neka su $\mathbf{x}^1,\ldots\mathbf{x}^k\in\mathbb{C}^N$. Tada za svaki $p>0$ vrijedi*

$$\|\mathbf{x}^1+\cdots+\mathbf{x}^k\|_{p,\infty} \leq k^{\max\{1,1/p\}}(\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty}+\cdots+\|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty})$$

Dokaz. Neka je $t>0$. Ako je $|x_j^1+\cdots+x_j^k|\geq t$ za neki $j\in[N]$, tada imamo da je $|x_j^i|\geq t/k$ za neki $i\in[k]$. Dakle, vrijedi

$$\left\{j\in[N] : |x_j^1+\cdots+x_j^k|\geq t\right\} \subset \bigcup_{i\in[k]}\left\{j\in[N] : |x_j^i|\geq t/k\right\}$$

pa je stoga

$$\begin{aligned}\operatorname{card}\left(\left\{j\in[N] : |x_j^1+\cdots+k_j^k|\geq t\right\}\right) &\leq \sum_{i\in[k]}\frac{\|\mathbf{x}^i\|_{p,\infty}^p}{(t/k)^p}\\ &= \frac{k^p(\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty}^p+\cdots+\|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}^p)}{t^p}\end{aligned}$$

Prema definiciji slabe ℓ_p-kvazinorme (1.2) vektora $\mathbf{x}^1+\cdots+\mathbf{x}^k$ dobivamo

$$\|\mathbf{x}^1+\cdots+\mathbf{x}^k\|_{p,\infty} \leq k\left(\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty}^p+\cdots+\|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}^p\right)$$

Ako je $p \leq 1$, uspoređujući ℓ_p i ℓ_1 norme na $\mathbb{R}^k$ slijedi

$$\Big(\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty}^p + \cdots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}^p\Big)^{1/p} \leq k^{1/p-1}\Big(\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty} + \cdots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}\Big)$$

te ako je $p \geq 1$ slijedi

$$\Big(\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty}^p + \cdots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}^p\Big)^{1/p} \leq \|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty} + \cdots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}.$$

Tvrdnja slijedi iz dobivenih ocjena. □

Sljedeća propozicija daje alternativni izraz za slabu ℓ_p-kvazinormu.

Propozicija 1.1.8. *Za $p > 0$, vrijedi*

$$\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} = \max_{k \in [N]} k^{1/p} x_k^*$$

gdje je $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^N$ nerastući poredak vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$.

Dokaz. Primjetimo prvo da iz (1.2) slijedi da je $\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} = \|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty}$, pa zapravo pokazujemo da je $\|\mathbf{x}\| := \max_{k\in[N]} k^{1/p} x_k^* = \|\mathbf{x}^*\|$. Nadalje, za $t > 0$ vrijedi da je $\{j \in [N] : x_j^* \geq t\} = [k]$ za neki $k \in [N]$ ili je $\{j \in [N] : x_j^* \geq t\} = \emptyset$. U prvom slučaju $t \leq x_k^* \leq \|\mathbf{x}\|/k^{1/p}$ pa je $\mathrm{card}(\{j \in [N] : x_j^* \geq t\}) = k \leq \|\mathbf{x}\|/k^{1/p}$. U drugom slučaju ista nejednakost vrijedi trivijalno. Iz definicije slabe ℓ_p-kvazinorme (1.2) sada dobivamo $\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty} \leq \|\mathbf{x}\|$. Pretpostavimo da je $\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty} < \|\mathbf{x}\|$. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da $(1+\varepsilon)\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty} \leq \|\mathbf{x}\|$. Slijedi da je $(1+\varepsilon)\|\mathbf{x}^*\| \leq k^{1/p} x_k^*$ za neki $k \in [N]$ pa stoga

$$[k] \subseteq \Big\{ j \in [N] : (1+\varepsilon)\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty}/k^{1/p} \leq x_j^* \Big\}$$

Ponovo iz (1.2) imamo

$$k \leq \frac{\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty}^p}{\Big((1+\varepsilon)\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty} k^{1/p}\Big)^p} = \frac{k}{(1+\varepsilon)^p}$$

Kontradikcija, dakle mora vrijediti $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty}$.

□

Bibliografija

Sažetak

Ukratko ...

Summary

In this ...

Životopis

Dana ...