SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Marco Hrlić

SAŽETO UZORKOVANJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Damir Bakić

Zagreb, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ______________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Albini

Sadržaj

Uvod

...

Poglavlje 1

Rijetka rješenja

1.1 Rijetsko i sažetost vektora

Uvedimo potrebnu notaciju. Neka je $[N]$ oznaka za skup $\{1, 2, ..., N\}$ gdje je $N \in \mathbb{N}$. Sa $\mathrm{card}(S)$ označujemo kardinalitet skupa S. Nadalje, $\bar{S}$ je komplement od S u $[N]$, tj. $\bar{S} = [N] \backslash S$.

Definicija 1.1.1. *Nosač vektora* $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ *je skup indeksa njegovih ne-nul elemenata, tj.*

$$\mathrm{supp}(\mathbf{x}) := \{j \in [N] : x_j \neq 0\}$$

Za vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ kažemo da je s-rijedak ako vrijedi

$$\|\mathbf{x}\|_0 := \mathrm{card}(\mathrm{supp}(\mathbf{x})) \leq s$$

Primjetimo,

$$\|\mathbf{x}\|_p^p := \sum_{j=1}^{N} |x_j|^p \xrightarrow{p \to 0} \sum_{j=1}^{N} \mathbf{1}_{\{x_j \neq 0\}} = \mathrm{card}(\{j \in [N] : x_j \neq 0\}) = \|\mathbf{x}\|_0$$

Gdje smo koristili da je $\mathbf{1}_{\{x_j \neq 0\}} = 1$ ako je $x_j \neq 0$ te $\mathbf{1}_{\{x_j \neq 0\}} = 0$ ako je $x_j = 0$. Drugim riječima, $\|\mathbf{x}\|_0$ je limes p-te potencije ℓ_p-kvazinorme vektora $\mathbf{x}$ kada p teži k nuli. Kvazinorma definira se jednako kao standardna ℓ_p-norma, jedino što nejednakost trokuta oslabimo, tj.

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq C(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)$$

za neku konstantu $C \geq 1$. Funkciju $\| \cdot \|_0$ često nazivamo ℓ_0-norma vektora x, iako ona nije niti norma niti kvazinorma. U samoj praksi, teško je tražiti rijetkost vektora, pa je stoga prirodno zahtjevati slabiji uvjet *kompresibilnosti.*

Definicija 1.1.2. *ℓ_p-grešku najbolje s-rijetke aproksimacije vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ definiramo sa*

$$\sigma_s(\mathbf{x})_p := \inf \left\{ \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_p, \ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N \text{ je } s\text{-rijedak} \right\}$$

Primjetimo da se infimum postiže za svaki s-rijedak vektor $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ koji ima nenul elemente koji su jednaki sa s najvećih komponenti vektora $\mathbf{x}$. Iako takav $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ nije jedinstven, on postiže infimum za svaki $p > 0$. Neformalno, mogli bi reći da je vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ *kompresibilan* ako greška njegove najbolje s-rijetke aproksimacije brzo konvergira u s. Da bi to formalno iskazali, od koristi će biti ocjena na $\sigma_s(\cdot)_p$. Pošto nam za to neće biti važan poredak elemenata vektora $\mathbf{x}$, uvodimo sljedeću definiciju koja će nam olaksati račun.

Definicija 1.1.3. *Nerastući poredak vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ je vektor $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ takav da*

$$x_1^* \geq x_2^* \geq x_3^* \geq \cdots \geq 0$$

te postoji permutacije $\pi : [N] \to [N]$ takva da $x_j^* = |x_{\pi(j)}|$ za sve $j \in [N]$.

Propozicija 1.1.4. *Za svaki $q > p > 0$ i za svaki $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ vrijedi*

$$\sigma_s(\mathbf{x})_q \leq \frac{1}{s^{1/p-1/q}} \|\mathbf{x}\|_p.$$

Dokaz. Neka je $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^N$ nerastući poredak vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$. Tada slijedi,

$$\begin{aligned}
\sigma_s(\mathbf{x})_q^q &= \sum_{j=s+1}^{N} (x_j^*)^q = \sum_{j=s+1}^{N} (x_j^*)^p (x_j^*)^{q-p} \leq (x_s^*)^{q-p} \sum_{j=s+1}^{N} (x_j^*)^p \\
&\leq \left(\frac{1}{s} \sum_{j=1}^{s} (x_j^*)^p \right)^{\frac{q-p}{p}} \left(\sum_{j=s+1}^{N} (x_j^*)^p \right) \leq \left(\frac{1}{s} \|\mathbf{x}\|_p^p \right)^{\frac{q-p}{p}} \|\mathbf{x}\|_p^p \\
&= \frac{1}{s^{q/p-1}} \|\mathbf{x}\|_p^q
\end{aligned}$$

Prva nejednakost slijedi iz činjenice da je $x_j^* \leq x_s^*$ za svaki $j \geq s+1$. Druga nejednakost je također posljedica nerasta komponenti od $\mathbf{x}^*$. Potenciranjem obje strane s $1/q$ slijedi tvrdnja. □

Primjetimo da ako je $\mathbf{x}$ iz jedinične ℓ_p-kugle za neki mali $p > 0$, onda prethodna propozicija garantira kovergenciju od $\sigma_s(\mathbf{x})_q$ u s, gdje ℓ_p-kuglu definiramo kao

$$B_p^N := \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \|\mathbf{z}\|_p \leq 1 \right\}$$

Vratimo se sada ocjeni iz propozicije 1.1.4. Sljedeći teorem daje najmanju konstantu $c_{p,q}$ takvu da vrijedi $\sigma_s(\mathbf{x})_q \leq c_{p,q} s^{-1/p+1/q} \|\mathbf{x}\|_p$ te zapravo predstavlja jaču tvrdnju.

Teorem 1.1.5. *Za svaki $q > p > 0$ i za svaki $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ vrijedi*

$$\sigma_s(\mathbf{x})_q \leq \frac{c_{p,q}}{s^{1/p-1/q}} \|\mathbf{x}\|_p$$

gdje je

$$c_{p,q} := \left[\left(\frac{p}{q} \right)^{p/q} \left(1 - \frac{p}{q}^{1-p/q} \right) \right]^{1/p} \leq 1.$$

Istaknimo za česti odabir $p = 1$ i $q = 2$

$$\sigma_s(\mathbf{x})_2 \leq \frac{1}{2\sqrt{s}} \|\mathbf{x}\|_1$$

Dokaz. Neka je $\mathbf{x}^*$ nerastući poredak vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ i $\alpha_j := (x_j^*)^p$. Dokazati ćemo ekvivaltenu tvrdnju

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_N \geq 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N \leq 1 \end{array}\right\} \implies \alpha_{s+1}^{q/p} + \alpha_{s+2}^{q/p} + \cdots + \alpha_{s+N}^{q/p} \leq \frac{c_q^q}{s^{q/p-1}} \tag{1.1}$$

Stoga, za $r := q/p > 1$, problem se svodi na maksimizaciju konveksne funkcije

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N) := \alpha_{s+1}^r + \alpha_{s+2}^r + \cdots + \alpha_N^r$$

na konveksnom mnogokutu

$$\mathcal{C} := \left\{ (\alpha_1, \cdots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N : \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_N \geq 0 i \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N \leq 1 \right\}$$

Prema teoremu (todo) f postiže maksimum na nekom od vrhova mnogokuta $\mathcal{C}$, a vrhovi od $\mathcal{C}$ su dani kao sjecišta N hiperplohi koje dobijemo tako da u (1.1) N nejednakosti pretvorimo u jednakosti. Mogućnosti su:

1. $\alpha_1 = \cdots = \alpha_N \implies f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N) = 0.$

2. $\alpha_1 + \cdots + \alpha_N = 1$ i $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k > \alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_N = 0$ za neki $1 \leq k \leq s \implies f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N) = 0$

3. $\alpha_1 + \cdots + \alpha_N = 1$ i $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k > \alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_N = 0$ za neki $s + 1 \leq k \leq N \implies \alpha_1 = \cdots \alpha_k = 1/k$ te $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N) = (k - s)/k^r$

Dakle, slijedi da

$$\max_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_N)\in\mathcal{C}} f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N) = \max_{s+1\le k\le N} \frac{k-s}{k^r}$$

Shvatimo sada k kao realnu varijablu i zamjetimo da $g(k) := (k-s)/k^r$ raste do kritične točke $k^* = (r/(r-1))s$ nakon koje opada.

$$\max_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_N)\in\mathcal{C}} f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N) \le g(k^*) = \frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{r}\right)^{r-1}\frac{1}{s^r-1} = c_{p,q}^q \frac{1}{s^{q/p}-1}$$

$\square$

Alternativni način na koji bi mogli definirati pojam *kompresibilnosti* za vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ je da zahtjevamo da je broj

$$\operatorname{card}(\{j \in [N] : |x_j| \ge t\})$$

tj. broj njegovih značajnih ne-nul komponenti dovoljno mali. Ovaj pristup vodi na definiciju slabih ℓ_p-prostora.

Definicija 1.1.6. *Za $p > 0$, slabi ℓ_p-prostor s oznakom $w\ell_p^N$ definiramo kao prostor $\mathbb{C}^N$ sa kvazinormom*

$$\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} := \inf\left\{M \ge 0 : \operatorname{card}(\{j \in [N] : |x_j| \ge t\}) \le \frac{M^P}{t^p},\ \forall t > 0\right\} \tag{1.2}$$

Da bi pokazali da je (1.2) zapravo kvazinorma, potreban nam je sljedeći rezultat.

Propozicija 1.1.7. *Neka su $\mathbf{x}^1, \ldots \mathbf{x}^k \in \mathbb{C}^N$. Tada za svaki $p > 0$ vrijedi*

$$\|\mathbf{x}^1 + \cdots + \mathbf{x}^k\|_{p,\infty} \le k^{\max\{1,1/p\}}(\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty} + \cdots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty})$$

Dokaz. Neka je $t > 0$. Ako je $|x_j^1 + \cdots + x_j^k| \ge t$ za neki $j \in [N]$, tada imamo da je $|x_j^i| \ge t/k$ za neki $i \in [k]$. Dakle, vrijedi

$$\left\{j \in [N] : |x_j^1 + \cdots + x_j^k| \ge t\right\} \subset \bigcup_{i\in[k]} \left\{j \in [N] : |x_j^i| \ge t/k\right\}$$

pa je stoga

$$\begin{aligned}\operatorname{card}\Big(\Big\{j \in [N] : |x_j^1 + \cdots + k_j^k| \geq t\Big\}\Big) &\leq \sum_{i \in [k]} \frac{\|\mathbf{x}^i\|_{p,\infty}^p}{(t/k)^p} \\ &= \frac{k^p(\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty}^p + \cdots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}^p)}{t^p}\end{aligned}$$

Prema definiciji slabe ℓ_p-kvazinorme (1.2) vektora $\mathbf{x}^1 + \cdots + \mathbf{x}^k$ dobivamo

$$\|\mathbf{x}^1 + \cdots + \mathbf{x}^k\|_{p,\infty} \leq k\Big(\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty}^p + \cdots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}^p\Big)$$

Ako je $p \leq 1$, uspoređujući ℓ_p i ℓ_1 norme na $\mathbb{R}^k$ slijedi

$$\Big(\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty}^p + \cdots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}^p\Big)^{1/p} \leq k^{1/p-1}\Big(\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty} + \cdots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}\Big)$$

te ako je $p \geq 1$ slijedi

$$\Big(\|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty}^p + \cdots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}^p\Big)^{1/p} \leq \|\mathbf{x}^1\|_{p,\infty} + \cdots + \|\mathbf{x}^k\|_{p,\infty}.$$

Tvrdnja slijedi kombiniranjem dobivenih ocjena. $\square$

Uzmimo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$ i neka je $\lambda \in \mathbb{C}$ proizvoljan.

1. Neka je $\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} = 0$. Iz (1.2) slijedi $\operatorname{card}(\{j \in [N] : |x_j| \geq t\}) = 0$ za svaki $t > 0$ pa je stoga broj ne-nul komponenti on $\mathbf{x}$ jednak nuli, tj. $\mathbf{x} = 0$

2. Ako je λ nula, $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$ vrijedi trivijalno. Za $\lambda \neq 0$, imamo $\operatorname{card}(\{j \in [N] : |\alpha x_j| \geq t\}) = \operatorname{card}(\{j \in [N] : |x_j| \geq t/|\alpha|\}) \leq (\alpha M)^p/t^p$ za svaki $t > 0$. Dakle, opet $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$.

3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq C(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)$ je sada direktna posljedica prethodne propozicije.

sljedeća propozicija daje alternativni izraz za slabu ℓ_p-kvazinormu.

Propozicija 1.1.8. *Za $p > 0$, vrijedi*

$$\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} = \max_{k \in [N]} k^{1/p} x_k^*$$

gdje je $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^N$ nerastući poredak vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$.

Dokaz. Primjetimo prvo da iz (1.2) slijedi da je $\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} = \|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty}$, pa zapravo pokazujemo da je $\|\mathbf{x}\| := \max_{k \in [N]} k^{1/p} x_k^* = \|\mathbf{x}^*\|$. Nadalje, za $t > 0$ vrijedi da je $\{j \in [N] : x_j^* \geq t\} = [k]$ za neki $k \in [N]$ ili je $\{j \in [N] : x_j^* \geq t\} = \emptyset$. U prvom slučaju $t \leq x_k^* \leq \|\mathbf{x}\|/k^{1/p}$ pa je $\mathrm{card}(\{j \in [N] : x_j^* \geq t\}) = k \leq \|\mathbf{x}\|/k^{1/p}$. U drugom slučaju ista nejednakost vrijedi trivijalno. Iz definicije slabe ℓ_p-kvazinorme (1.2) sada dobivamo $\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty} \leq \|\mathbf{x}\|$. Pretpostavimo da je $\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty} < \|\mathbf{x}\|$. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da $(1+\varepsilon)\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty} \leq \|\mathbf{x}\|$. Slijedi da je $(1+\varepsilon)\|\mathbf{x}^*\| \leq k^{1/p} x_k^*$ za neki $k \in [N]$ pa stoga

$$[k] \subseteq \Big\{ j \in [N] : (1+\varepsilon)\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty}/k^{1/p} \leq x_j^* \Big\}$$

Ponovo iz (1.2) imamo

$$k \leq \frac{\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty}^p}{\Big((1+\varepsilon)\|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty} k^{1/p}\Big)^p} = \frac{k}{(1+\varepsilon)^p}$$

Kontradikcija, dakle mora vrijediti $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}^*\|_{p,\infty}$. □

Sada lagano možemo usporediti slabi i jaku ℓ_p normu,

Propozicija 1.1.9. *Za svaki $p > 0$ i za svaki $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$,*

$$\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} \leq \|\mathbf{x}\|_p$$

Dokaz. Neka je $k \in [N]$,

$$\|\mathbf{x}\|_p^p = \sum_{j=1}^{N} (x_j^*)^p \geq \sum_{j=1}^{k} (x_j^*)^p \geq k (x_k^*)^p$$

Tvrdnja slijedi potenciranjem na $1/p$ i uzimajući maksimum po k i primjenom prethodne propozicije. □

Koristeći propoziciju (1.1.8) možemo dobiti verziju ocjene iz propozicije (1.1.4) sa slabom ℓ_p normom.

Propozicija 1.1.10. *Za svaki $q > p > 0$ i $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$, vrijedi*

$$\sigma_s(\mathbf{x})_q \leq \frac{d_{p,q}}{s^{1/p-1/q}} \|\mathbf{x}\|_{p,\infty}$$

gdje je

$$d_{p,q} := \Big(\frac{p}{q-p}\Big)^{1/q}.$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} \leq 1$, pa je $x_k^* \leq 1/k^{1/p}$ za svaki $k \in [N]$. Tada vrijedi,

$$\sigma_s(\mathbf{x})_q^q = \sum_{k=s+1}^{N} (x_k^*)^q \leq \sum_{k=s+1}^{N} \frac{1}{k^{q/p}} \leq \int_s^N \frac{1}{t^{q/p}} dt = -\frac{1}{q/p-1} \frac{1}{t^{q/p-1}}\Big|_{t=s}^{t=N} \leq \frac{p}{q-p} \frac{1}{s^{q/p-1}}.$$

Potenciranjem sa $1/q$ slijedi tvrdnja. □

Prethodna propozicija daje da su vektori $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ koji su kompresibilni u smislu $\|\mathbf{x}\|_{p,\infty} \leq 1$ za mali $p > 0$, također kompresibilni u smislu da greška njihove najbolje s-rijetke aproksimacije brzo konvergira sa s. Iskažimo još jedan tehnički rezultat,

Lema 1.1.11. *Neka su* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$. *Tada vrijedi,*

$$\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}^*\|_\infty \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty \tag{1.3}$$

Nadalje, za $s \in [N]$,

$$|\sigma_s(\mathbf{x})_1 - \sigma(\mathbf{y})_1| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 \tag{1.4}$$

i za $k > s$,

$$(k-s)x_k^* \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 + \sigma_s(\mathbf{y})_1 \tag{1.5}$$

Dokaz. Za $j \in [N]$, skup indeksa j najvećih komponenti vektora $\mathbf{x}$ ima ne-trivijalni presjek sa skupom od $N - j + 1$ najmanjih komponenti vektora $\mathbf{y}$. Izaberimo indeks l iz tog presjeka. Tada vrijedi,

$$x_j^* \leq |x_l| \leq |y_l| + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty \leq z_j^* + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty$$

Zamjenom uloga od $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ slijedi (1.3). Neka je $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^N$ najbolja s-rijetka aproksimacija vektora $\mathbf{y}$. Tada

$$\sigma_s(\mathbf{x})_1 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|_1 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 + \|\mathbf{y} - \mathbf{v}\|_1 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 + \sigma_s(\mathbf{y})_1$$

Ponovno, zbog simetrije slijedi (1.4). Napokon, ocjena (1.5) slijedi iz (1.4) te iz činjenice

$$(k-s)x_k^* \leq \sum_{j=s+1}^{k} x_j^* \leq \sum_{j \geq s+1} x_j^* = \sigma_s(\mathbf{x})_1.$$

□

1.2 Minimalni broj mjerenja

Problem sažetog uzorkovanja sastoji se od rekonstrukcije s-rijetkog vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ iz sustava

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Matricu $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$ nazivamo *matrica mjerenja*. Ako je $m < N$, za ovakav sustav linearnih jednadžbi kažemo da je *neodređen*. Iako iz klasične teorije linearne algebre ovakvi sustavi imaju beskonačno mnogo riješenja, pokazati će se da je dodatna pretpostavka rijetkosti vektora x dovoljno za jedinstvenost rješenja. U ovom poglavlju istražiti ćemo koji je minimalni broj mjerenja, tj. m broj redaka matrice $\mathbf{A}$, koji garantira rekonstrukciju s-rijetkog vektora $\mathbf{x}$. Zapravo, postoje dva pristupa ovom problemu. Možemo zahtjevati da problem mjerenja rekonstruira sve s-rijetke vektore $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ istodobno ili možemo tražiti rekonstrukciju specifičnog, tj. predodređenog vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$. Taj pristup čini se neprirodan, no pokazuje se da je on važan u proučavanju problema gdje matricu $\mathbf{A}$ biramo nasumično.

Pokažimo da su za danu rijetkost s, matricu $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$ i s-rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$, naredne tvrdnje ekvivaltentne:

1. Vektor $\mathbf{x}$ je jedinstveno s-rijetko rješenje sustava $\mathbf{Az} = \mathbf{y}$ gdje je $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$, tj. $\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \mathbf{Az} = \mathbf{Ax},\ \|\mathbf{z}\|_0 \leq s\} = \{\mathbf{x}\}$

2. Vektor $\mathbf{x}$ je jedinstveno rješenje problema minimizacije

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N} \|\mathbf{z}\|_0 \quad \text{uz uvjet } \mathbf{Az} = \mathbf{y} \tag{P_0}$$

Ako je $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ jedinstveno s-rijetko rješenje od $\mathbf{Az} = \mathbf{y}$ takvo da je $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$, onda rješenje $x^\sharp$ od (P_0) je s-rijetko i zadovoljava $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ pa je $\mathbf{x}^\sharp = \mathbf{x}$. Drugi smjer slijedi trivijalno.

Rekonstrukcija svih rijetkih vektora

Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$ i $S \subset [N]$, sa $\mathbf{A}_S$ označujemo matricu formiranu od stupaca od $\mathbf{A}$ indeksiranih sa S. Slično, sa $\mathbf{x}_S$ označujemo ili vektor iz $\mathbb{C}^S$ koji se sastoji od komponenti vektora $\mathbf{x}$ indeksiranih po S, tj. $(\mathbf{x}_S)_l = x_l$ za sve $l \in S$, ili vektor iz $\mathbb{C}^N$ koji se podudara s $\mathbf{x}$ na komponentama indeksiranim u S i jednak je nula na indeksima koji nisu u S, tj. $(\mathbf{x}_S)_l = x_l$ za $l \in S$ i $(\mathbf{x}_S)_l = 0$ za $l \notin S$. Iz konteksta će uvijek biti jasno na koju definiciju se misli.

Teorem 1.2.1. *Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$. Ekvivalentno je:*

(a) *Svaki s-rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ je jedinstveno rješenje od $\mathbf{Ax} = \mathbf{Az}$, tj. ako je $\mathbf{Ax} = \mathbf{Az}$ i ako su $\mathbf{x}$, $\mathbf{z}$ oboje s-rijetki tada $\mathbf{x} = \mathbf{z}$.*

(b) *Jezgra od $\mathbf{A}$ ne sadrži niti jedan $2s$-rijedak vektor osim nul-vektora, tj.* $\ker \mathbf{A} \cap \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \|\mathbf{z}\|_0 \leq 2s\} = \{\mathbf{0}\}$

(c) *Za svaki $S \subset [N]$ takav da* $\operatorname{card}(S) \leq 2s$, *podmatrica $\mathbf{A}_S$ je injektivna kao preslikavanje sa $\mathbb{C}^S$ u $\mathbb{C}^m$.*

(d) *Svaki skup od $2s$ stupaca matrice $\mathbf{A}$ je linearno nezavisan skup.*

Dokaz. $(b) \implies (a)$. Neka su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{z}$ s-rijetki vektori takvi da $\mathbf{Ax} = \mathbf{Az}$. Tada je $\mathbf{x} - \mathbf{z}$ $2s$-rijedak i $\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) = \mathbf{0}$. Pošto $\ker \mathbf{A}$ ne sadrži $2s$-rijetke vektore osim nul-vektora, mora vrijediti $\mathbf{x} = \mathbf{z}$.

$(a) \implies (b)$. Obratno, pretpostavimo da za svaki s-rijetki vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ vrijedi $\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \mathbf{Az} = \mathbf{Ax}, \|\mathbf{z}\|_0 \leq s\} = \{\mathbf{x}\}$. Neka je $\mathbf{v} \in \ker \mathbf{A}$, $2s$-rijedak. Tada $\mathbf{v}$ možemo rastaviti kao $\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{z}$ gdje su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{z}$ s-rijetki takvi da $\operatorname{supp}(\mathbf{x}) \cap \operatorname{supp}(\mathbf{z}) = \emptyset$. Imamo da je $\mathbf{Ax} = \mathbf{Az}$ pa prema pretpostavci vrijedi $\mathbf{x} = \mathbf{z}$. Pošto su nosači od $\mathbf{x}$ i $\mathbf{z}$ disjunktni, mora vrijediti $\mathbf{x} = \mathbf{z} = \mathbf{0}$ pa je stoga i $\mathbf{v} = 0$.

$(b) \implies (c)$. Pretpostavimo suprotno, $\ker \mathbf{A} \cap \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \|\mathbf{z}\|_0 \leq 2s\} = \{\mathbf{0}\}$ i da postoji $S \in [N]$ takav da je $\operatorname{card}(S) \leq 2s$ te da $\mathbf{A}_s$ nije injektivna. To znači da postoji vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{\operatorname{card}(S)} \setminus \{\mathbf{0}\}$ takav da je $\mathbf{A}_S \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Definiramo vektor $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^N$ sa

$$\tilde{x}_j = \begin{cases} x_j & \text{za } j \in S \\ 0 & \text{za } j \in \bar{S} \end{cases}$$

Dakle, imamo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\|\mathbf{x}\|_0 \leq 2s$ i vrijedi $\mathbf{Ax} = 0$, tj. $\mathbf{x} \in \ker \mathbf{A}$. Kontradikcija s (b).

$(c) \implies (d)$. Odaberimo $2s$ stupaca od $\mathbf{A}$. Skup indeksa tih stupaca označimo sa S. Prema (c), matrica $\mathbf{A}_S$ je injektivna, a to znači da su njeni stupci linearno nezavisni, pa su stoga i $2s$ odabranih stupaca matrice $\mathbf{A}$ linearno nezavisni.

$(d) \implies (b)$. Pretpostavimo da jezgra od $\mathbf{A}$ sadrži $2s$-rijedak ne-nul vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$. Neka je S skup indeksa ne-nul elemenata vektora $\mathbf{x}$. To znači da je $\mathbf{A}_S \mathbf{x}_S = 0$, i $\mathbf{x}_S \neq \mathbf{0}$. Dakle $\mathbf{A}_S$ nije injektivna, pa stoga i skup stupaca od $\mathbf{A}$ indeksiranih sa S nije linearno nezavisan, što je kontradikcija sa (d).

□

Uočimo da ako je moguče rekonstruirati svaki s-rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ iz vektora mjerenja $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$, tada vrijedi (a). Prema prošlom teoremu tada vrijedi i tvrdnja (d) pa je stoga $rank(\mathbf{A}) \geq 2s$. Također vrijedi da je $rank(\mathbf{A}) \leq m$ pa imamo

$$m \geq 2s.$$

To znači da je potrebno barem $2s$ mjerenja da bi rekonstruirali svaki s-rijedak vektor. Pokazati ćemo da je, makar u teoriji, dovoljno točno $2s$ mjerenja.

Teorem 1.2.2. *Za svaki $N \geq 2s$, postoji matrica mjerenja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2s\times N}$ takva da se svaki s-rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ može rekonstruirati iz vektora mjerenja $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$ kao rješenje problema minimizacije (P_0).*

Dokaz. Fiksirajmo $t_N > \cdots t_2 > t_1 > 0$ i neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2s\times N}$ dana sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_N \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ t_1^{2s-1} & t_2^{2s-1} & \cdots & t_N^{2s-1} \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

Nadalje, neka je $S = \{j_1 < \cdots < j_{2s}\}$ skup indeksa. Matrica $\mathbf{A}_S \in \mathbb{C}^{2s\times 2s}$ je transponirana *Vandermontova matrica.* Prema (TODO) slijedi

$$\det(\mathbf{A}_S) = \prod_{k<l}(t_{j_l} - t_{j_k}) > 0.$$

To znači da je matrica $\mathbf{A}$ invertibilna, pa posebno i injektivna. Tada je zadovoljena tvrdnja (c) teorema (1.2.1), pa je po istom teoremu zadovoljena i tvrdnja (a), tj. svaki s-rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ zadovoljava $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Stoga je taj vektor moguće jedinstveno rekonstruirati putem minimizacije (P_0). □

Zapravo, mnogo matrica zadovoljava uvjet (c) iz teorema (1.2.1). Na primjer, potencije od $t_1, \ldots, t_N$ u (1.6) ne moraju biti uzastopne. Nadalje, brojevi $t_1, \ldots, t_N$ ne moraju biti pozitivni, niti realni sve dok vrijedi $\det(\mathbf{A}_S) \neq 0$. Posebno, možemo uzeti $t_l = e^{2\pi i(l-1)/N}$ za $l \in [N]$, teorem (TODO) garantira da parcijalna Fourierova matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{2\pi i/N} & e^{2\pi i 2/N} & \cdots & e^{2\pi i(N-1)/N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{2\pi i(2s-1)/N} & e^{2\pi i(2s-1)2/N} & \cdots & e^{2\pi i(2s-1)(N-1)/N} \end{bmatrix}$$

rekonstruira svaki s-rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ iz $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{2s}$. Zapravo može se pokazati da skup $(2s) \times N$ matrica takvih da $\det(\mathbf{A}_S) = 0$ za neki $S \subset [N]$ i $\mathrm{card}(S) \leq 2s$ ima Lebesgueovu mjeru nula, pa stoga gotovo sve $(2s) \times N$ matrice rekonstruiraju svaki s-rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ iz $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{2s}$. Međutim u praksi nije isplativo rješavati problem minimizacije (P_0), što ćemo kasnije i pokazati.

Rekonstrukcija zadanog rijetkog vektora

Promatramo problem gdje je s-rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ unaprijed zadan i poznat, a matricu $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$ želimo odabrati tako da ona garantira rekonstrukciju vektora $\mathbf{x}$ iz mjerenja $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$. Isprva, ovaka pristup izgleda neprirodan zbog činjenice da je vektor $\mathbf{x}$ apriorno poznat. Ideja je da će uvjeti rekonstrukcije vrijediti za gotovo sve $(s+1) \times N$ matrice, što podupire činjenicu da se u praksi matrice mjerenja često odabiru na nasumičan način.

Teorem 1.2.3. *Za svaki $N \geq s+1$ i za dani s-rijedak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$, postoji matrica mjerenja $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{(s+1) \times N}$, takva da se vektor $\mathbf{x}$ može rekonstruirati iz mjerenja $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$ kao rješenje minimizacije (P_0).*

Dokaz. Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{(s+1) \times N}$ matrica za koju se s-rijedak vektor $\mathbf{x}$ ne može rekonstruirati iz $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ putem minimizacije (P_0). To znači da postoji vektor $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ različit od $\mathbf{x}$, takav da $S = \mathrm{supp}(\mathbf{z}) = \{j_1, \dots, j_s\}$, $\mathrm{card}(S) \leq s$ (ako je $\|\mathbf{z}\|_0 < s$, u S dodamo proizvoljne elemente $j_l \in [N]$) i $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Ako je $\mathrm{supp}(\mathbf{x}) \subset S$, tada iz $\big(\mathbf{A}(\mathbf{z} - \mathbf{x})\big)_{[s]} = 0$ slijedi da $\mathbf{A}_{[s],S}$ nije invertibilna, tj.

$$f(a_{1,1}, \dots a_{1,N}, \dots, a_{m,1}, \dots, a_{m,N}) := \det(\mathbf{A}_{[s],S}) = 0.$$

Ako $\mathrm{supp}(\mathbf{x}) \not\subset S$ tada je dimenzija prostora $V := \{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^N : \mathrm{supp}(\mathbf{u}) \subset S\} + \mathbb{C}\mathbf{x}$ jednaka $s+1$, i linearno preslikavanje $G : V \to \mathbb{C}^{s+1}$, $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{v}$ nije invertibilno, pošto je $G(\mathbf{z} - \mathbf{x}) = 0$. Matrica linearnog preslikavanja G u bazi $(\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_s}, \mathbf{x})$ prostora V, je oblika

$$B_{\mathbf{x},S} := \begin{bmatrix} a_{1,j_1} & \cdots & a_{1,j_s} & \sum_{j \in \mathrm{supp}(\mathbf{x})} x_j a_{1,j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{s+1,j_1} & \cdots & a_{s+1,j_s} & \sum_{j \in \mathrm{supp}(\mathbf{x})} x_j a_{s+1,j} \end{bmatrix}$$

i imamo

$$g_S(a_{1,1}, \dots a_{1,N}, \dots, a_{m,1}, \dots, a_{m,N}) := \det(B_{\mathbf{x},S}) = 0.$$

Dakle, vrijedi

$$(a_{1,1}, \dots a_{1,N}, \dots, a_{m,1}, \dots, a_{m,N}) \in f^{-1}(\{0\}) \cup \bigcup_{\mathrm{card}(S)=s} g_S^{-1}(\{0\}).$$

Primjetimo da su skupovi $f^{-1}(\{0\})$ i $g_S^{-1}(\{0\})$ Lebesgueove mjere nula iz razloga što su f i g_S polinomi u varijablama $(a_{1,1}, \dots a_{1,N}, \dots, a_{m,1}, \dots, a_{m,N})$. Dakle, elemente matrice $\mathbf{A}$ moramo izabrati izvan skupa mjere nula, da bi osigurali rekonstrukciju vekotora $\mathbf{x}$ iz $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$. □

1.3 NP-složenost ℓ_0-minimizacije

Kao što smo najavili, pokazati ćemo da je u praksi neisplativno rješavati problem ℓ_0-minimizacije u svrhu rekonstrukcije vektora $\mathbf{x}$ iz mjerenja $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$. Prisjetimo se, problem koji rješavamo je oblika,

$$\min_{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N} \|\mathbf{z}\|_0 \quad \text{uz uvjet } \mathbf{Az} = \mathbf{y}.$$

Pošto je minimizator najvise s-rijedak, najjednostavniji algoritam za rješavanje ovog problema je rješiti sve pravokutne sustave $\mathbf{A}_S\mathbf{u} = \mathbf{y}$ ili sve kvadratne sustave oblika $\mathbf{A}_S^*\mathbf{A}_S\mathbf{u} = \mathbf{A}_S^*\mathbf{y}$ za svaki $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^S$ gdje S ide po svim poskupovima od [N], veličine s. No ispada da broj podskupova $\binom{N}{s}$, što za male probleme sa $N = 1000$ i $s = 10$, iznosi $\binom{1000}{10} \geq (\frac{1000}{10})^{10} = 10^{20}$. Kada bi jedan 10×10 sustav mogli rješiti u 10^{-10} sekundi, trebalo bi nam više od 300 godina da sve riješimo. Sada ćemo pokazati zašto je zapravo općenitiji problem

$$\min_{\mathbf{z} in \mathbb{C}^N} \|\mathbf{z}\|_0 \quad \text{uz uvjet } \|\mathbf{Az} - \mathbf{y}\|_2 \leq \eta \tag{$P_{0,\eta}$}$$

NP-težak.

Uvedimo prvo potrebne pojmove iz kompleksnosti algoritama. Za algoritam kažemo da je *polinomijalnog-vremena* ako je broj koraka do rješenja ograničen polinomom u varijabli veličine ulaza. Nadalje, uvedimo neformalne definicije klasa problema odlučivanja:

- $\mathfrak{P}$: Svi problemi odlučivanja za koje postoji algoritam polinomijalnog vremena koji daje rješenje.

- $\mathfrak{NP}$: Svi problemi odlučivanja za koje postoji algoritam polinomijalnog vremena koji provjerava točnost rješenja.

- $\mathfrak{NP}$-teški: Svi problemi (ne nužno problemi određivanja) za koje se algoritam za rješenje može u polinomijalnom vremenu transformirati u algoritam rješenja za bilo koji $\mathfrak{NP}$ problem.
- $\mathfrak{NP}$-potpuni: Svi problemi koji su istovremeno $\mathfrak{NP}$ i $\mathfrak{NP}$-teški.

Pitanje je li $\mathfrak{P}$ strogo sadržano u $\mathfrak{NP}$ do dan danas nije odgovoreno. No, vjeruje se da postoje problemi za koje ne postoji algoritam rješenja polinomijalnog vremena, ali postoji algoritam koji će provjeriti točnost rješenja u polinomijalnom vremenu. Najpoznatiji $\mathfrak{NP}$-potpun problem je problem putujućeg prodavača. No, iskoristiti ćemo problem egzaktnog pokrivača tročlanim skupovima da bi pokazali da je problem $(P_{0,\eta})$ $\mathfrak{NP}$-težak.

Egazktni pokrivač tročlanim skupovima

Za danu kolekciju $\{\mathcal{C}_i;\ i \in [N]\}$ tročlanih podskupova od $[m]$, postoji li egzaktni pokrivač skupa $[m]$, tj. postoji li $J \subset [N]$ takav da $\cup_{j\in J}\mathcal{C}_j = [m]$, gdje je $\mathcal{C}_j \cap \mathcal{C}_k = \emptyset$ za svaki $j, k \in J$ različiti? Poznato je da je taj problem $\mathfrak{NP}$-potpun (vidi TODO).

Teorem 1.3.1. *Za svaki $\eta \geq 0$, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times N}$ i $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$, problem minimizacije $(P_{0,\eta})$ je $\mathfrak{NP}$-potpun.*

Dokaz. Zbog linearnosti problema $(P_{0,\eta})$, možemo uzeti da je $\eta < 1$. Pokazati ćemo da se problem egzaktnog pokrivač može u polinomijalnom vremenu reducirati na problem ℓ_0-minimizacije. Neka je $\{\mathcal{C}_i;\ i \in [N]\}$ kolekcija tročanih podskupova $[m]$. Definirajmo vektora $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots \mathbf{a}_N \in \mathbb{C}^m$

$$(\mathbf{a}_i)_j = \begin{cases} 1 \text{ za } j \in \mathcal{C}_i, \\ 0 \text{ za } j \notin \mathcal{C}_i \end{cases}$$

Definiramo matricu $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times N}$ i vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$ sa

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_N], \qquad \mathbf{y} = [1, 1, \dots, 1]^T.$$

Pošto je $N \leq \binom{m}{3}$, to možemo napraviti u polinomijalnom vremenu. Ako $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ zadovoljava $\|\mathbf{Az} - y\|_2 \leq \eta$, tada su svih m komponenti od $\mathbf{Az}$ udaljeljene od 1 za najviše η, pa su različito od nula, zbog $\square$

Bibliografija

Sažetak

Summary

Životopis