

Laboratorio Statistica e Analisi dei dati - Esercitazione 1

1 Elementi di probabilità

Risolvere i seguenti esercizi estratti dal libro di testo¹.

1.1 Esercizio 1

Si tira tre volte una moneta. Qual è lo spazio degli esiti di questo esperimento casuale? Scrivi esplicitamente l'evento “si ottengono più teste che croci”.

1.2 Esercizio 2

Si tirano due dadi. Sia E l'evento che la somma dei punteggi sia dispari, F che il primo dado realizzi un 1, e G che la somma sia 5. Si descrivano gli eventi

- (a) $E \cap F$
- (b) $E \cup F$
- (c) $F \cap G$
- (d) $E \cap F^c$
- (e) $E \cap F \cap G$

1.3 Esercizio 3

Un sistema è composto da 4 componenti, ciascuno dei quali funziona oppure è guasto. Si osserva lo stato dei componenti, ottenendo un vettore (x_1, x_2, x_3, x_4) , dove x_i è 1 oppure 0 a seconda che il componente i -esimo funzioni oppure no.

- (a) Da quanti elementi è formato lo spazio degli esiti?
- (b) Il sistema nel suo insieme funziona fintantoché entrambi i componenti 1 e 2 oppure quelli 3 e 4 funzionano. Specifica tutti gli esiti dell'evento “il sistema funziona”.
- (c) Sia E l'evento “i componenti 1 e 3 sono guasti”. Quanti esiti contiene?

1.4 Esercizio 4

Dimostra la *proprietà subadditiva* di P , ovvero che se E_1, E_2, \dots, E_n sono eventi qualsiasi,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(E_i)$$

1.5 Esercizio 5

Dimostra che se $P(E) = 0.9$ e $P(F) = 0.9$ allora $P(E \cap F) \geq 0.8$. Poi dimostra che in generale vale la disuguaglianza seguente

$$P(E \cap F) \geq P(E) + P(F) - 1$$

1.6 Esercizio 6

Un gruppo di 5 bambini e 10 bambine è in fila in ordine casuale, nel senso che tutte le 15! possibili permutazioni si suppongono equiprobabili.

- (a) Qual è la probabilità che il quarto della fila sia un bambino?
- (b) E il dodicesimo?
- (c) Qual è la probabilità che un determinato bambino occupi la terza posizione?

¹Esercizi da pagina 89 a 98

1.7 Esercizio 7

In comune vi sono 5 alberghi. Se 3 persone devono scegliere un albergo in cui pernottare, qual è la probabilità che finiscano tutte in alberghi differenti? Che cosa stiamo assumendo senza dirlo esplicitamente?

1.8 Esercizio 8

La media campionaria del salario annuale di un gruppo di 100 lavoratori impiegati nell'amministrazione di una grande azienda è di 130000 dollari con una deviazione standard campionaria di 20000 dollari. Se si prende una persona a caso da questo gruppo cosa possiamo dire sulla probabilità che il suo salario sia

- (a) tra i 90000 e i 170000 dollari.
- (b) superiore a 150000 dollari?

HINT: Usa la disuguaglianza di Chebyshev.

1.9 Esercizio 9

In una certa regione vi sono due ditte che producono forni a microonde. Quelli della fabbrica A sono difettosi con probabilità 0.05, mentre quelli della fabbrica B , con probabilità 0.01. Supponi di aver acquistato due apparecchi prodotti dalla stessa ditta, che può essere la A o la B con probabilità del 50%. Se il primo microonde è difettoso, qual è la probabilità condizionata che sia difettoso anche il secondo?

1.10 Esercizio 10

Hai chiesto ad un vicino di innaffiare una piantina delicata mentre sei in vacanza. Pensi che senza acqua la piantina muoia con probabilità 0.8, mentre se innaffiata questa probabilità si ridurrebbe a 0.15. La tua fiducia che il vicino si ricordi di innaffiarla è del 90%.

- (a) Qual è la probabilità che la pianta sia ancora viva al tuo ritorno?
- (b) Se fosse morta, quale sarebbe la probabilità che il vicino si sia dimenticato di innaffiarla?

1.11 Esercizio 11

Una compagnia di assicurazioni classifica i suoi clienti in tre fasce - basso rischio, medio rischio, alto rischio. Le sue statistiche indicano che le probabilità che un cliente delle tre fasce abbia un incidente entro un periodo di un anno sono rispettivamente 0.05, 0.15, e 0.30. Se il 20% dei clienti sono a basso rischio, il 50% a medio rischio e il 30% ad alto rischio, che percentuale dei clienti avrà mediamente incidenti in un lasso di un anno? Se un cliente non ha avuto incidenti nel 1987, qual è la probabilità che appartenga a ciascuna delle tre fasce?

2 Variabili Aleatorie

Risolvere i seguenti esercizi estratti dal libro di testo².

2.1 Esercizio 1

Consideriamo una variabile aleatoria X che può assumere i valori 1, 2 o 3. Se sappiamo che

$$p(1) = \frac{1}{2} \quad e \quad p(2) = \frac{1}{3}$$

- (a) quanto vale $p(3)$?
- (b) Disegnare (a mano..) il grafico di questa funzione di massa.
- (c) Disegnare (a mano..) il grafico della relativa funzione di ripartizione.

2.2 Esercizio 2

La funzione di ripartizione di X è definita come segue.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{2}{3} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{11}{12} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x \end{cases}$$

²Esercizi da pagina 142 a 151

- (a) Se ne tracci il grafico.
- (b) Quanto vale $P(X > 1/2)$?
- (c) Quanto vale $P(2 < X \leq 4)$?
- (d) Quanto vale $P(X < 3)$?
- (e) Quanto vale $P(X = 1)$?

2.3 Esercizio 3

Un tipo di prodotti vengono classificati a seconda dei loro difetti e della fabbrica che li ha prodotti. Sia X_1 il numero (1 o 2) della fabbrica, e sia X_2 il numero di difetti per pezzo (che possono essere da 0 a 3), di un prodotto scelto a caso tra la totalità di quelli esistenti. La tabella seguente riporta la funzione di massa di probabilità congiunta per queste due variabili aleatorie discrete.

	0	1	2	3
1	1/8	1/16	3/16	1/8
2	1/16	1/16	1/8	1/4

Tabella 1: Tabella che riporta la funzione di massa congiunta. Le righe si riferiscono alla variabile X_1 , mentre le colonne alla variabile X_2 .

- (a) Trova le distribuzioni marginali di X_1 e X_2 .
- (b) Calcola media e varianza di entrambe le X_i .
- (c) Calcola la covarianza delle due variabili aleatorie.

2.4 Esercizio 4

Dimostra che se X_1 e X_2 hanno la stessa distribuzione, allora

$$\text{Cov}(X_1 + X_2, X_1 - X_2) = 0$$

Nota che non è necessario supporre che siano indipendenti.

3 Modelli di variabili aleatorie

Risolvere i seguenti esercizi estratti dal libro di testo³.

3.1 Esercizio 1

Uno dei sistemi installati su un satellite è costruito da 4 componenti, e riesce a funzionare correttamente se almeno 2 di essi sono efficienti. Se ciascuno dei componenti, indipendentemente dagli altri, funziona bene con una probabilità di 0.6, qual è la probabilità che l'intero sistema funzioni?

3.2 Esercizio 2

Un canale di comunicazione trasmette dei *bit*, ovvero cifre binarie che possono essere 0 oppure 1. A causa del rumore elettrostatico, vi è una probabilità di 0.2 che il bit ricevuto sia tanto disturbato da essere decodificato erroneamente. Supponiamo in queste condizioni di volere trasmettere un messaggio importante, costituito da una sola cifra. Per ridurre la probabilità di errore potremmo trasmettere 00000 al posto di 0 e 11111 al posto di 1. Introducendo questa ridondanza, e decodificando il messaggio “a maggioranza” (si decodifica 1 se si ricevono più cifre 1 che cifre 0, e viceversa), qual è la probabilità di decodificare erroneamente il messaggio? Quali ipotesi di indipendenza stai implicitamente assumendo?

3.3 Esercizio 3

Se un votante scelto a caso è favorevole ad una certa riforma con probabilità di 0.7, qual è la probabilità che su 10 votanti, esattamente 7 siano favorevoli?

3.4 Esercizio 4

Sia X una variabile aleatoria binomiale con media 7 e varianza 2.1. Quanto valgono

- (a) $P(X = 4)$?
- (b) $P(X > 12)$?

³Esercizi da pagina 208 a 216