

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA

PROJETO FINAL
TRELIÇAS TRIDIMENSIONAIS E ESTUDO DE CASO

DISCIPLINA: MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS
PROF. DR. MURILO SARTORATO

ARNALDO P. STECCA FILHO - RA: 162491001
MARCY W. S. BORGES - RA: 162490917
RENATO MATOS DE OLIVEIRA - RA: 162490861
SÉRVIO TÚLIO S. H. BASTOS - RA: 162491018

MARÇO/2021

Resumo

A análise estrutural é de suma importância para o desenvolvimento de novas técnicas de construção e de aplicação de geometrias cada vez mais complexas. Dentre as estruturas clássicas empregadas na engenharia pode-se destacar as treliças. Em especial, quando se fala em estruturas mais robustas como é o caso de guindastes, torres telefônicas e até mesmo elementos estruturais de aeronaves e helicópteros pode-se utilizar treliças tridimensionais. Devido à sua ampla utilização no mundo da engenharia, no presente intento é proposto a análise de alguns estudos de casos envolvendo treliças 3D. Para isso, foi implementado e validado um código para a análise estrutural utilizando a metodologia de elementos finitos (MEF) para a obtenção dos deslocamentos, das tensões e das reações provocadas em algumas estruturas. Ademais, foi implementado um código para o cálculo dos modos vibracionais e suas respectivas frequências naturais. Dessa forma, analisou-se um caso simplificado de um guindaste bem como a análise de uma cauda de helicóptero simplificada. Em ambos os casos os resultados obtidos foram satisfatórios e condizentes com a realidade.

Palavras-chave: MEF; análise estrutural; modos de vibrar; treliças 3D

Sumário

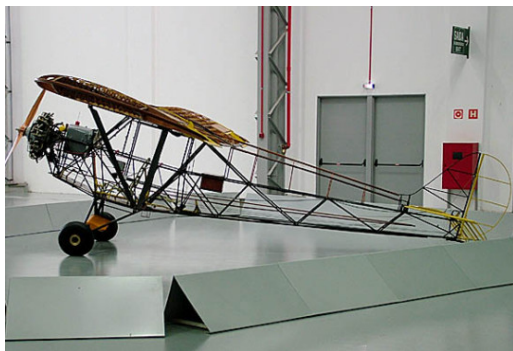
| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução e objetivos | 4 |
| 2 | Metodologia de análise e fundamentação teórica | 5 |
| 2.1 | Modelamento 2D | 5 |
| 2.2 | Modelagem 3D de treliças | 7 |
| 2.3 | Análise Modal | 9 |
| 3 | Implementação numérica | 10 |
| 4 | Resultados | 10 |
| 4.1 | Validação do programa | 10 |
| 4.2 | Estudo de caso: suporte fixo na parede | 13 |
| 5 | Aplicação em aeronáutica | 16 |
| 6 | Considerações finais | 19 |
| | Referências | 21 |

1 Introdução e objetivos

A análise estrutural é de suma importância para o desenvolvimento de novas técnicas de construção e de aplicação de geometrias cada vez mais complexas. Dentre as estruturas clássicas empregadas na engenharia destacam-se as treliças. Conforme apresentado por Hibbeler (2011), treliças são estruturas de membros esbeltos conectados entre si em suas extremidades, ou nós, sendo geralmente fabricadas de madeira ou metais. Essas estruturas dividem-se em dois grandes grupos, as treliças planas e as treliças espaciais.

As treliças planas se situam em um único plano e costumam ser utilizadas para sustentar telhados e pontes. Dessa forma, as forças atuantes nesses elementos estruturais são bidimensionais e, concentram-se nos nós das treliça (HIBBELER, 2011).

No caso das treliças espaciais os membros são conectados em suas extremidades para formar uma estrutura tridimensional estável, onde a forma mais simples de treliça espacial consiste em um tetraedro (HIBBELER, 2011). Estruturas mais robustas podem ser feitas através da adição de três membros em cada nó, de modo a formar um sistema de tetraedros multiconectados. São diversos os usos desse tipo de estrutura como é o exemplo de guindastes, torres telefônicas e até mesmo elementos estruturais de aeronaves e helicópteros, como apresentado na Fig. 1.



(a) CAP-4 [1].



(b) Bell 47G-2 [2].

Figura 1: Exemplos de estruturas treliçadas. Disponível em: [1] <<https://www.autoentusiastas.com.br/2014/11/paulistinha-o-maior-treinador-de-pilotos-do-brasil/>> [2] <<https://www.jetphotos.com/photo/9096578>>

Dessa forma, objetiva-se a implementação de um modelo teórico baseado no método dos elementos finitos, MEF, para que se possa calcular os deslocamentos e tensões, bem como os modos de vibrar e as suas respectivas frequências para estruturas treliçadas tridimensionais.

2 Metodologia de análise e fundamentação teórica

2.1 Modelamento 2D

Para o modelamento de treliças 2D o presente intento baseou-se na abordagem descrita por Ferreira (2009). Sejam definidos os sistemas de coordenadas global xy e local denotado por $x'y'$, bem como os deslocamentos nos sistemas global u_1, u_2, u_3 e u_4 e local de u'_1 e u'_2 de uma treliça 2D posicionada como mostrado na Fig. 2. Como pode-se notar o elemento acaba por possuir dois graus de liberdade no sistema local e quatro no sistema global.

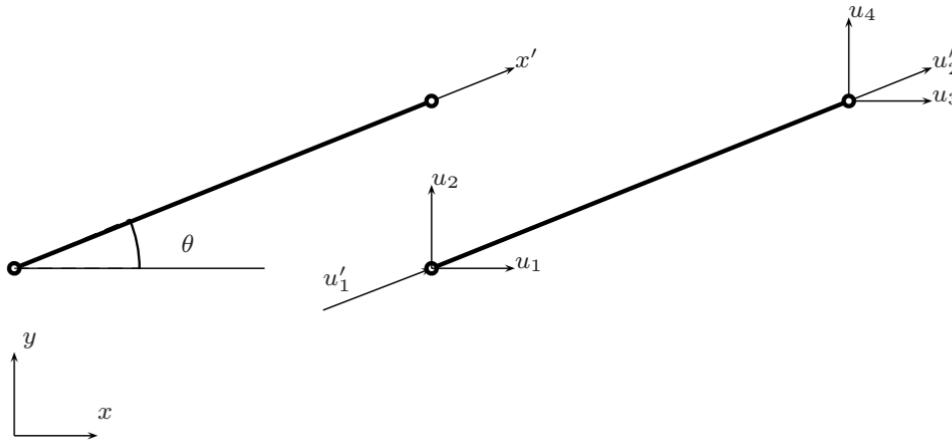


Figura 2: Esquema para uma treliça 2d. Retirado de Ferreira (2009)

Dessa forma, a partir do exposto da Fig.2 pode-se escrever os deslocamentos locais e globais, respectivamente, como os vetores:

$$\mathbf{u}'^T = \begin{bmatrix} u'_1 & u'_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Além disso, escrevendo os deslocamentos locais em função dos deslocamentos globais, pode-se obter:

$$u'_1 = u_1 \cos(\theta) + u_2 \sin(\theta) \quad (3)$$

$$u'_2 = u_3 \cos(\theta) + u_4 \sin(\theta) \quad (4)$$

com θ sendo o ângulo formado entre o eixo x' e o eixo do sistema global x .

Dessa forma, matricialmente pode-se escrever que:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (5)$$

onde a matriz \mathbf{L} é a matriz de transformação para o elemento de treliça e essa é definida como:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{x_2-x_1}{L_e} & \frac{y_2-y_1}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x_2-x_1}{L_e} & \frac{y_2-y_1}{L_e} \end{bmatrix} \quad (6)$$

com L_e sendo o comprimento do elemento analisado e dado por:

$$L_e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (7)$$

Definindo agora no sistema de coordenadas locais a matriz de rigidez 2D, percebe-se que essa é a mesma utilizada em elementos de barra, de forma que pode ser escrita como:

$$\mathbf{K}' = \frac{EA}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

com E sendo o módulo de Young e A a área da seção transversal do elemento analisado.

Escrevendo a energia de deformação do elemento, ainda no sistema local, possui-se:

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{u}'^T \mathbf{K}' \mathbf{u}' \quad (9)$$

Substituindo u' pela expressão apresentada pela eq.(5) pode-se obter:

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T [\mathbf{L}^T \mathbf{K}' \mathbf{L}] \mathbf{u} \quad (10)$$

Dessa forma, a matriz de rigidez global pode ser escrita como:

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}^T \mathbf{K}' \mathbf{L} \quad (11)$$

Ou ainda:

$$\mathbf{K}' = \frac{EA}{L_e} \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

onde os parâmetros são descritos como:

$$l = \frac{x_2 - x_1}{L_e} \quad (13)$$

e

$$m = \frac{y_2 - y_1}{L_e} \quad (14)$$

Por fim, pode-se definir ainda as tensões sobre o elemento analisado. Dessa forma, sejam as tensões no sistema local de coordenadas definidas como $\sigma = E\epsilon$. Pela definição de deformação de uma barra, pode-se escrever:

$$\sigma = E \frac{u'_2 - u'_1}{L_e} = \frac{E}{L_e} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{Bmatrix} = \frac{E}{L_e} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}' \quad (15)$$

Realizando uma transformação de coordenadas do sistema local para o global possui-se:

$$\sigma = \frac{E}{L_e} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{L} \mathbf{u} = \frac{E}{L_e} \begin{bmatrix} -l & -m & l & m \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (16)$$

2.2 Modelagem 3D de treliças

Agora considerando treliças tridimensionais deve-se atentar que essas acabam por diferenciar das apresentadas na seção anterior no que se diz respeito a quantidade de graus de liberdade de cada nó, visto que as que serão apresentadas na presente seção possuem, no sistema de coordenadas local, três graus de liberdade por nó. Abaixo, na Fig. 3, é exibido um esquemático para a representação de um elemento de treliça tridimensional.

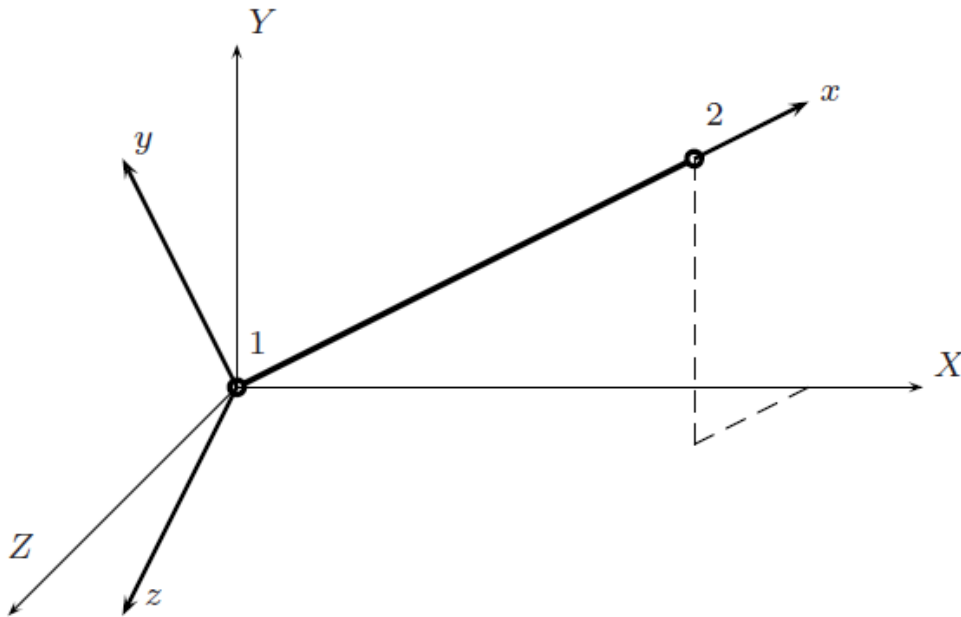


Figura 3: Esquema para uma treliça 3D. Retirado de Ferreira (2009)

Para o elemento de treliça, a matriz de transformação de coordenadas fornece a relação entre os vetores e matrizes nos sistemas local e global, de tal forma que pode ser definida como:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & n \end{bmatrix} \quad (17)$$

Onde os cossenos são obtidos por:

$$l = \frac{x_j - x_i}{L_e} \quad (18)$$

$$m = \frac{y_j - y_i}{L_e} \quad (19)$$

$$n = \frac{z_j - z_i}{L_e} \quad (20)$$

Sendo L_e dado por:

$$L_e = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (21)$$

Se for aplicada a matriz de transformação ao vetor de forças nos sistemas local, F' , e global, F , pode-se relacionar tais vetores como:

$$F' = LF \quad (22)$$

onde

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{3i-2} \\ F_{3i-1} \\ F_{3i} \\ F_{3j-2} \\ F_{3j-1} \\ F_{3j} \end{bmatrix} \quad (23)$$

no qual F_{3i-2} , F_{3i-1} , F_{3i} são as três componentes do vetor de força no nó i baseado no sistema de coordenadas global.

Dessa forma é possível escrever a equação para o elemento baseado no sistema de coordenadas global:

$$\mathbf{K}'\mathbf{L}\mathbf{D}_e + \mathbf{M}'\mathbf{L}\ddot{\mathbf{D}}_e = \mathbf{F}' \quad (24)$$

sendo D_e o deslocamento do elemento no sistema global. Pré-multiplicando ambos os lados por L^T , obtêm-se:

$$(\mathbf{L}^T\mathbf{K}'\mathbf{L})\mathbf{D}_e + (\mathbf{L}^T\mathbf{M}'\mathbf{L})\ddot{\mathbf{D}}_e = \mathbf{L}^T\mathbf{F}' \quad (25)$$

Reescrevendo, a equação anterior em termos da matriz de rigidez, \mathbf{K} , da

matriz de massa, \mathbf{M} , e do vetor de forças, \mathbf{F} , no sistema global, possui-se:

$$\mathbf{K}\mathbf{D}_e + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{D}}_e = \mathbf{F} \quad (26)$$

onde a matriz \mathbf{K} é descrita como:

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}^T \mathbf{K}' \mathbf{L} = \frac{AE}{L_e} \begin{bmatrix} l^2 & lm & ln & -l^2 & -lm & -ln \\ lm & m^2 & mn & -lm & -m^2 & -mn \\ ln & mn & n^2 & -ln & -mn & -n^2 \\ -l^2 & -lm & -ln & l^2 & lm & ln \\ -lm & -m^2 & -mn & lm & m^2 & mn \\ -ln & -mn & -n^2 & ln & mn & n^2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

e a matriz de massa, \mathbf{M} , é dada por:

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}^T \mathbf{M}' \mathbf{L} = \frac{A\rho L_E}{6} \begin{bmatrix} 2l^2 & 2lm & 2ln & l^2 & lm & ln \\ 2lm & 2m^2 & 2mn & lm & m^2 & mn \\ 2ln & 2mn & 2n^2 & ln & mn & n^2 \\ l^2 & lm & ln & 2l^2 & 2lm & 2ln \\ lm & m^2 & mn & 2lm & 2m^2 & 2mn \\ ln & mn & n^2 & 2ln & 2mn & 2n^2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

É possível perceber que a transformação de coordenadas mantém as propriedades simétricas das matrizes de massa e de rigidez.

Assim, o vetor de forças gerais é dado por:

$$\mathbf{F} = \mathbf{L}^T \mathbf{F}' = \begin{bmatrix} (\frac{f_x L_e}{2} + f_s)l \\ (\frac{f_x L_e}{2} + f_s)m \\ (\frac{f_x L_e}{2} + f_s)n \\ (\frac{f_y L_e}{2} + f_s)l \\ (\frac{f_y L_e}{2} + f_s)m \\ (\frac{f_y L_e}{2} + f_s)n \end{bmatrix} \quad (29)$$

onde as forças f_s representam as forças concentradas e f_x , f_y e f_z as forças distribuídas.

2.3 Análise Modal

Para que se possa realizar a análise dos modos de vibrar de uma estrutura deve-se analisar a resposta livre do sistema. Isso pode ser realizado a partir da eq. 24 tornando o termo forçante ou o vetor de forças global, \mathbf{F} , como nulo. Dessa forma, o sistema pode ser descrito como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{D}}_e + \mathbf{K}\mathbf{D}_e = \mathbf{0} \quad (30)$$

Com o intuito de se calcular a frequência natural e os modos de vibrar da estrutura, pode-se assumir um movimento harmônico para o deslocamento (KWON, 1997). De forma que a equação resultante torna-se um problema de alto valor descrito por:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{D}_e = 0 \quad (31)$$

onde ω é a frequência natural para um determinado modo de vibração natural da estrutura.

3 Implementação numérica

A implementação do método de elementos finitos para treliça foi realizado usando a linguagem de programação Python e o paradigma orientado a objeto (POO). O pacote desenvolvido foi dividido em módulos, um principal, destinado obtenção dos deslocamentos, tensões e modos de vibrar da estrutura e outro destinado ao pós-processamento dos dados para a realização da plotagem dos resultados.

A implementação realizada possibilita o cálculo do deslocamento, reações, tensões, frequência natural e modos de vibrar da estrutura podendo ser considerado nessa análise elementos de treliças com área e propriedade de materiais diferentes.

4 Resultados

4.1 Validação do programa

Inicialmente, com o objetivo de validar os resultados obtidos com o programa numérico implementou-se o sétimo exercício exemplo do capítulo 5 de Ferreira (2009). Sendo assim, o esquema do modelo implementado é apresentado na Fig. 4.

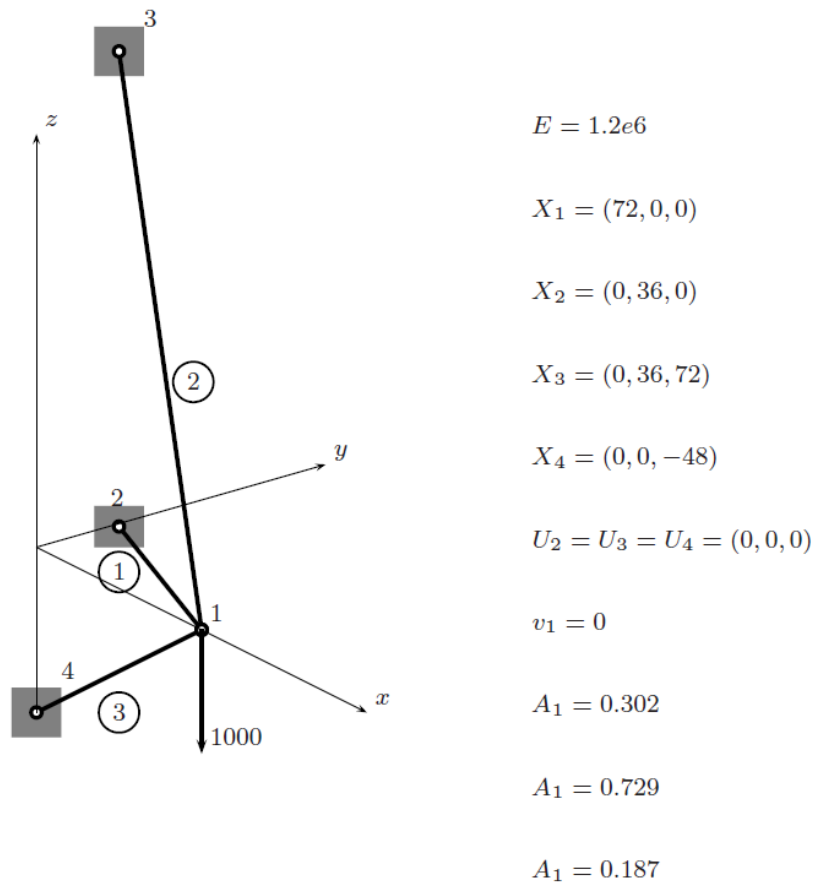


Figura 4: Representação esquemática do modelo implementado, com detalhes da geometria, da malha, carregamentos e condições de contorno. Retirado de Ferreira (2009).

Dessa forma, utilizando os valores propostos obteve-se o resultado para os deslocamentos dos graus de liberdade dos nós em *mm*. Comparando o resultado obtido com os dados de Ferreira (2009), nota-se que houve boa conformidade entre o modelo implementado e os resultados apresentados na literatura, de tal forma que foram obtidos resultados praticamente idênticos, validando, portanto, o modelo teórico para a obtenção dos deslocamentos.

Tabela 1: Deslocamento obtido pelo método implementado e pela literatura.

| Nó | Grau de liberdade | Resposta obtida | Resposta Ferreira (2009) |
|----|-------------------|-----------------|--------------------------|
| 1 | 1 | -0.07111432 | -0.0711 |
| | 2 | 0 | 0 |
| | 3 | -0.26623909 | -0.2662 |
| 2 | 4 | 0 | 0 |
| | 5 | 0 | 0 |
| | 6 | 0 | 0 |
| 3 | 7 | 0 | 0 |
| | 8 | 0 | 0 |
| | 9 | 0 | 0 |
| 4 | 10 | 0 | 0 |
| | 11 | 0 | 0 |
| | 12 | 0 | 0 |

Deslocamento da estrutura - fator de escala 37.560223984371675

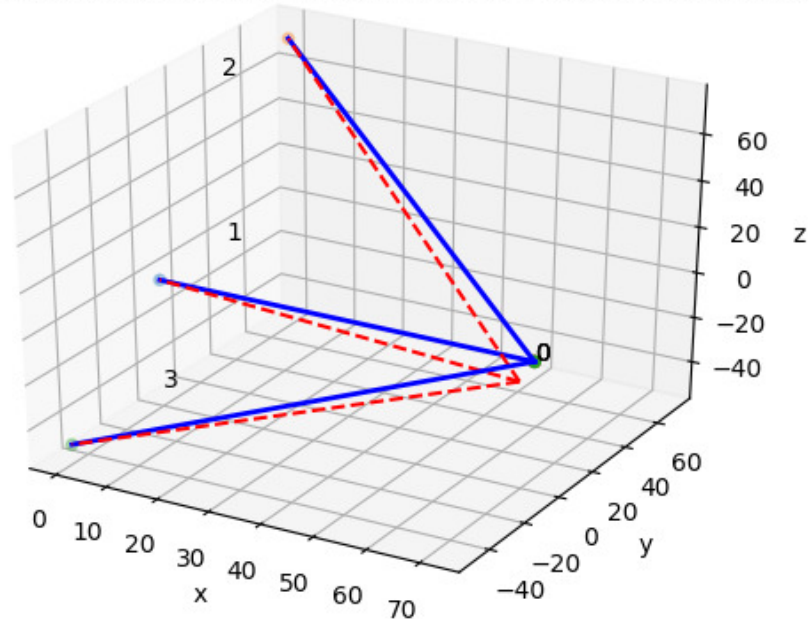


Figura 5: Forma deformada da estrutura

Ademais, comparou-se os resultados para as forças de reação, dadas em N , nos graus de liberdade dos nós. Da mesma forma que para o deslocamento, os resultados obtidos novamente foram satisfatórios e comprovaram a validade do modelo teórico no que se diz respeito a obtenção das reações.

Tabela 2: Reações obtidas pelo método implementado e pela literatura.

| Nó | Grau de liberdade | Resposta obtida | Resposta Ferreira (2009) |
|----|-------------------|-----------------|--------------------------|
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| | 2 | -223.16320982 | -223.1632 |
| | 3 | 0 | 0 |
| 2 | 4 | 256.12263392 | 256.1226 |
| | 5 | -128.06131696 | -128.0613 |
| | 6 | 0 | 0 |
| 3 | 7 | -702.44905357 | -702.4491 |
| | 8 | 351.22452678 | 351.2245 |
| | 9 | 702.44905357 | 702.4491 |
| 4 | 10 | 446.32641965 | 446.3264 |
| | 11 | 0 | 0 |
| | 12 | 297.55094643 | 297.5509 |

Por fim, comparou-se os resultados obtidos para as tensões nos elementos em Pa . Da mesma forma que para os casos anteriores, o resultado obtido pelo método implementado foi equivalente ao da literatura, validando novamente os valores disponibilizados pelo modelo teórico.

Tabela 3: Tensões obtidas pelo método implementado e pela literatura.

| Elementos | Resposta obtida | Resposta Ferreira (2009) |
|-----------|-----------------|--------------------------|
| 1 | -948.19142387 | -948.19142387 |
| 2 | 1445.36842297 | 1445.36842298 |
| 3 | -2868.54330060 | -2868.54330060 |

Além disso, o modelo implementado permite encontrar as frequências naturais da estrutura e seus modos de vibrar. Entretanto, como a literatura não apresenta tais dados para a validação do método eles apenas serão apresentados para as estruturas empregadas para análise de caso nas seções a seguir.

4.2 Estudo de caso: suporte fixo na parede

A fim de se aplicar o método proposto a um caso prático hipotético, escolheu-se um exercício proposto por Hibbeler (2011) para o caso de um suporte fixo na parede para a elevação de cargas, esse modelo é apresentado na Fig. 6.

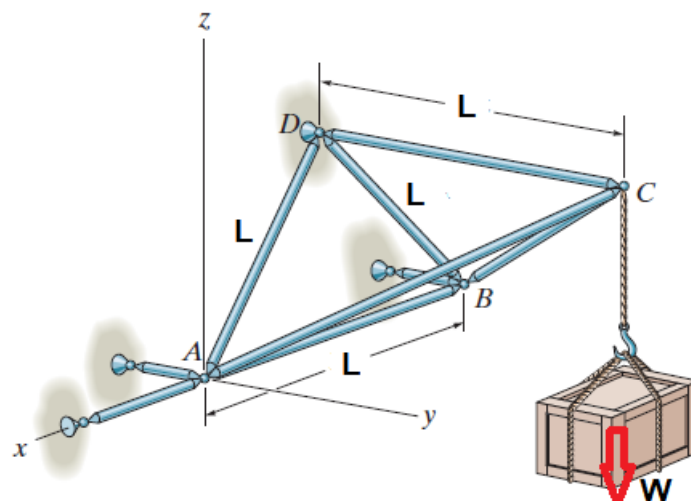


Figura 6: Caso prático hipotético de um suporte fixo na parede para a elevação de cargas. Adaptado de Hibbeler (2011).

Para esta análise empregou-se $L = 1000\text{mm}$, $W = 1000\text{N}$ e área da seção dos elementos de treliça variáveis. Considerou-se os nós A, B e D engastados em todos os seus graus de liberdade. Dessa forma, obteve-se os resultados para deslocamento e tensão nos graus de liberdade dos nós da estrutura, apresentados na Tab. 4, e Figs. 7 e 8, respectivamente.

Tabela 4: Dados de deslocamento em mm e reações em N para os graus de liberdades dos nós do modelo avaliado.

| Nó | Grau de liberdade | Deslocamento [mm] | Reações [N] |
|----|-------------------|-------------------|-------------|
| 1 | 1 | 0.0000 | -288.6751 |
| | 2 | 0.0000 | 577.3503 |
| | 3 | 0.0000 | 500.0000 |
| 2 | 4 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 5 | 0.0000 | -1154.7005 |
| | 6 | 0.0000 | 0.0000 |
| 3 | 7 | 0.0000 | 288.6751 |
| | 8 | 0.0000 | 577.3503 |
| | 9 | 0.0000 | 500.0000 |
| 4 | 10 | -2.7711 | 0.0000 |
| | 11 | 1.3200 | 0.0000 |
| | 12 | -8.3272 | 0.0000 |

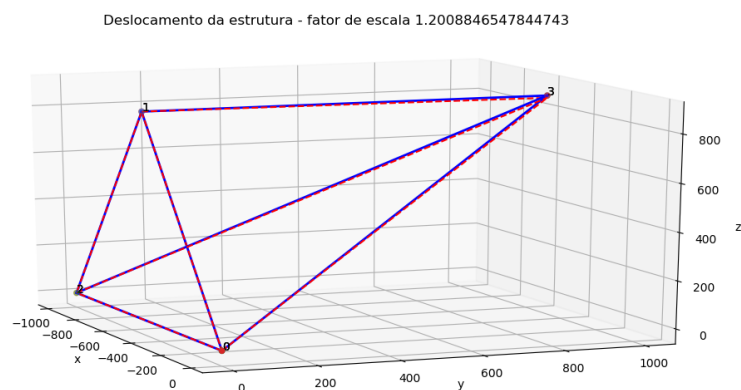


Figura 7: Deslocamento da estrutura.

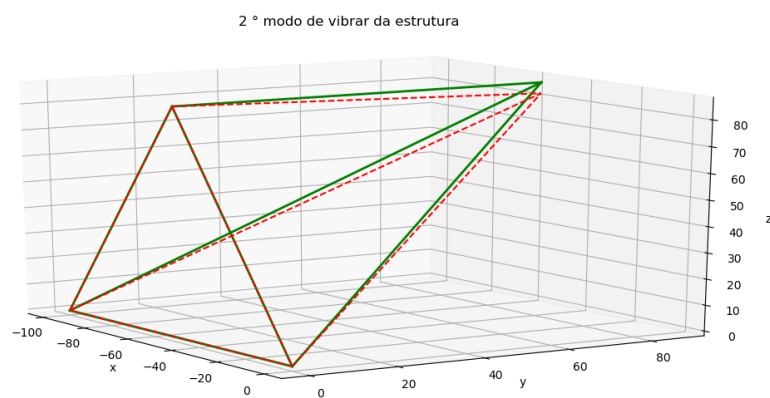


Figura 8: Modos de vibrar da estrutura.

Além disso, encontrou-se os valores das tensões nos elementos em Pa (Tab. 5) e frequências naturais para os três modos de vibrar, em Hz (Tab. 6).

Tabela 5: Dados de tensão em Pa para os elementos do modelo avaliado.

| Elemento | Tensão [Pa] |
|----------|-------------|
| 1 | 0.0000 |
| 2 | 0.0000 |
| 3 | 0.0000 |
| 4 | -2703.6311 |
| 5 | 1583.9514 |
| 6 | -4366.2919 |

Tabela 6: Dados de frequência naturais em Hz para o modelo avaliado.

| Modos | Frequência natural [Hz] |
|-------|-------------------------|
| 1 | 4.1401 |
| 2 | 4.3052 |
| 3 | 5.9683 |

5 Aplicação em aeronáutica

Para que se pudesse trazer a aplicação de elementos treliçados para questões mais práticas voltadas ao ramo aeronáutico foi escolhido realizar a análise estática e modal, de forma simplificada, da cauda do helicóptero BELL 47G-2, como apresentado na Fig. 9.

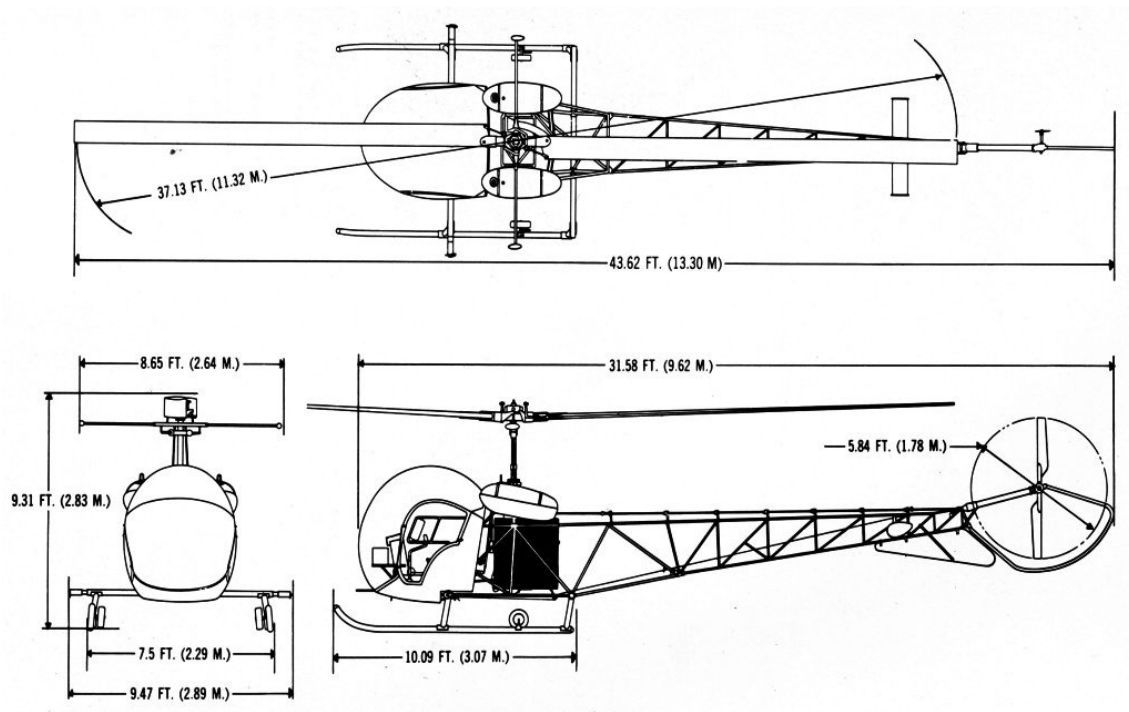


Figura 9: Helicóptero BELL 47G-2. Retirado de <<https://drawingdatabase.com/bell-47g/>>

A partir da Fig. 9 pode-se realizar estimativas, simplificações e aproximações acerca da estrutura da cauda real de tal helicóptero. Os valores estimados e adotados são apresentados na Tab 7.

Tabela 7: Características da cauda simulada

| | |
|--|---------------|
| Comprimento da cauda | 9m |
| Base do triangulo da raiz (próximo a cabine) | 1.2 m |
| Altura do triângulo da raiz (próximo a cabine) | 1.2 m |
| Base do triangulo da ponta | 0.3 m |
| Altura do triângulo da ponta | 0.3 m |
| Material utilizado | Alumínio 2024 |

Com tais valores aproximou-se as dimensões utilizando a própria escala do desenho apresentado anteriormente para que se pudesse aproximar os demais elementos de treliça.

Assim, com a utilização do código implementado obteve-se o modelamento da cauda do helicóptero, Fig.10, a sua forma deformada, Fig.11 e os quatro primeiros modos de vibrar, Figs.12, 13, 14 e 15. Para isso, considerou-se os nós próximos a cabine como engastados em seus três graus de liberdade. Além disso, aplicou-se uma carga concentrada no sentido negativo do eixo x no nó da extremidade da estrutura, com valor de 1kN, a fim de simular, de forma simplificada e aproximada, a tração gerada pelo rotor da cauda.

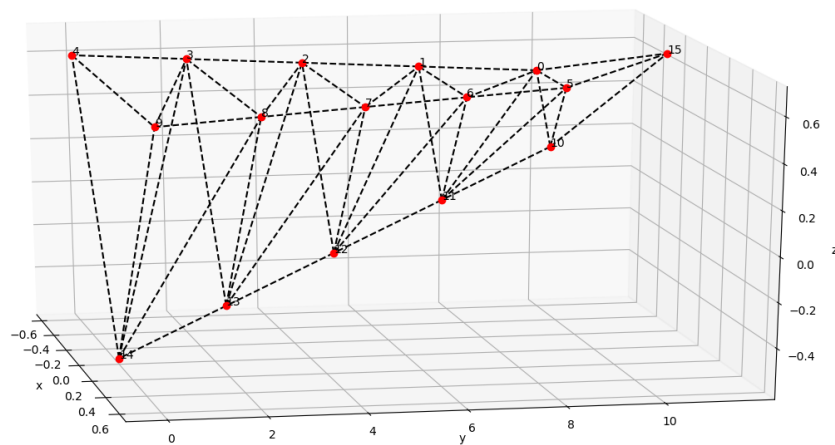


Figura 10: Modelando a cauda do helicóptero

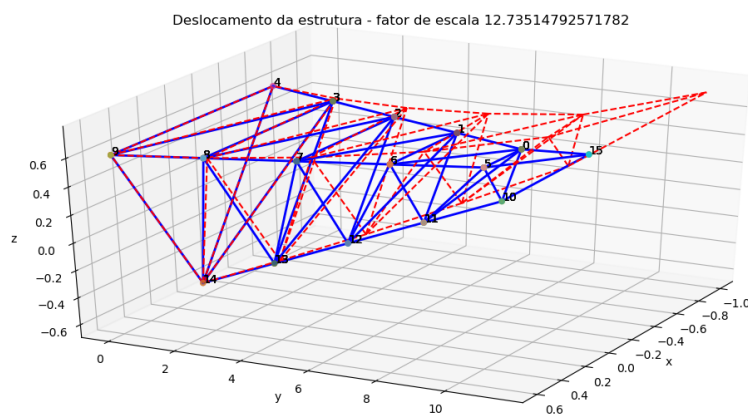


Figura 11: Forma deformada da estrutura

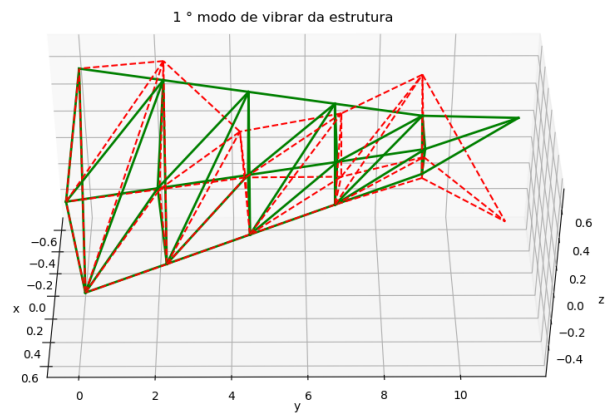


Figura 12: Primeiro modo de vibrar - $W_n = 32.40$ Hz

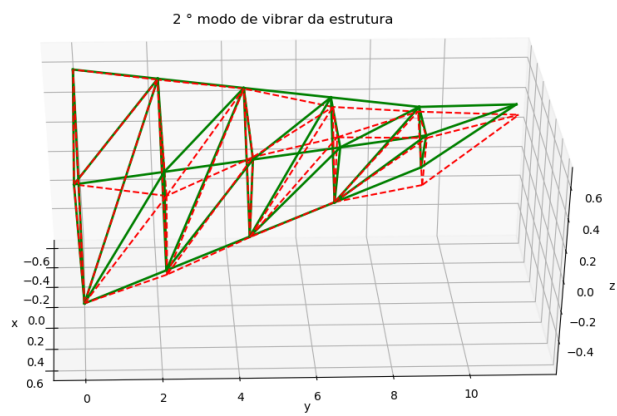


Figura 13: Segundo modo de vibrar - $W_n = 34.94$ Hz

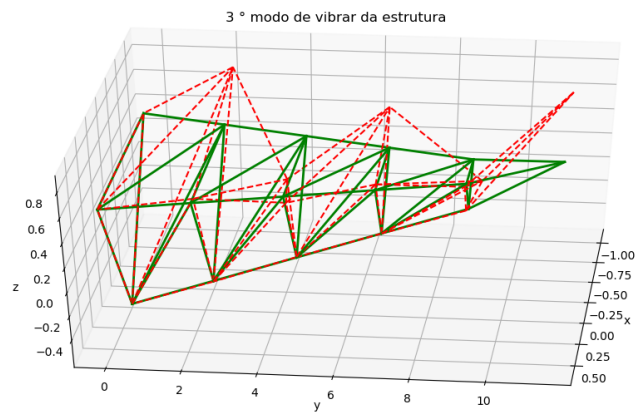


Figura 14: Terceiro modo de vibrar - $W_n = 87.26$ Hz

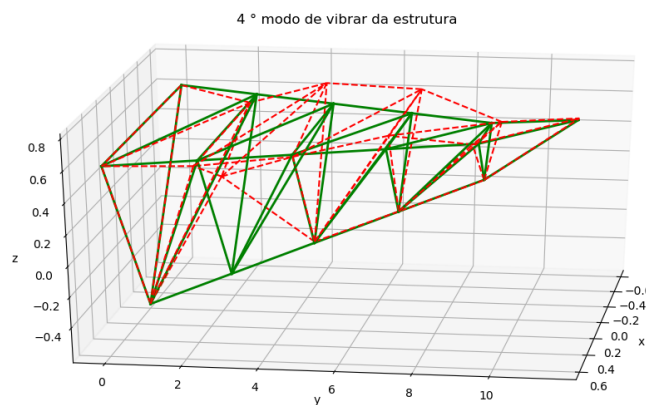


Figura 15: Quarto modo de vibrar - $W_n = 105.98$ Hz

6 Considerações finais

Com a realização do presente projeto pode-se realizar a implementação, a simulação e a análise de algumas estruturas treliçadas tridimensionais a partir do método de elementos finitos.

Em princípio foram realizados a implementação e validação do código para um caso estático para treliças 3D apresentado na literatura. De forma que o código ora implementado conseguiu engendrar resultados satisfatórios e condizentes apresentados na referência, no que se diz respeito a questão da obtenção dos deslocamentos, reações nos nós e tensões nos elementos estruturais. Contudo, não foi possível realizar a validação da parte do código que realizava os

cálculos dos modos de vibrar e das frequências naturais.

Em seguida com a validação parcial do código, foram realizados estudos de caso. O primeiro deles foi o caso de um guindaste composto por treliças 3D. A partir dos dados da simulação pode-se observar que o código ora implementado conseguiu engendrar resultados satisfatórios e condizentes com os apresentados na referência.

Em seguida, partiu-se para um segundo caso, mais próximo do ramo aeronáutico. De forma que foram realizadas análises para a cauda estimada e adaptada do helicóptero BELL 47G-2. Com as simulações foi possível obter possíveis deslocamento que a estrutura sofreria, bem como os modos de vibrar e suas respectivas frequências. Os resultados obtidos, embora não se tenha sido encontrado dados comparativos, possuem valores factíveis de ocorrer na realidade.

Dessa forma, acredita-se que os resultados obtidos com o modelo implementado foram satisfatórios para os fins propostos para o presente relatório.

Referências

FERREIRA, A. J. M. *MATLAB Codes for Finite Element Analysis*. [S.l.]: Springer, 2009.

HIBBELER, R. C. *Estática*. 12. ed. [S.l.]: Pearson, 2011.

KWON, H. B. Y. W. *The finite element method using MATLAB*. 1. ed. [S.l.]: CRC Press, 1997.