Conferencia 4 - Grafo Hamiltoniano

19 de abril de 2025

Definición (Camino Hamiltoniano o Cadena Hamiltoniana). *Un camino $P =< v_1, v_2, ..., v_k >$ es Hamiltoniano si P es simple y contiene a todos los vértices del grafo.*

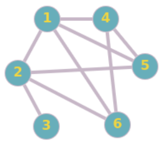


Figura 1: En el Grafo, el camino $< 3, 2, 1, 6, 4, 5 >$ es Hamiltoniano.

Definición (Ciclo de Hamilton). *Un ciclo $C =< v_1, v_2, ...v_k, v_1 >$ en un grafo G se dice de Hamilton (Hamiltoniano) si contiene a todos los vértices del grafo.*

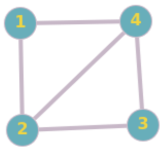
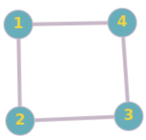


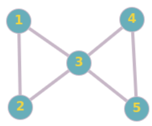
Figura 2: En el Grafo, el ciclo $< 1, 2, 3, 4, 1 >$ es Hamiltoniano.

Definición (Grafo Hamiltoniano). *Un grafo conexo es Hamiltoniano si tiene un ciclo de Hamilton.*

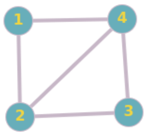
Nota: Aunque las definiciones de *Grafo Euleriano* y *Grafo Hamiltoniano* son similares (el primero busca recorrer todas las aristas del grafo sin repetirlas y el segundo recorrer todos los vértices sin repetición) no existe ninguna relación entre estas clasificaciones en un grafo. Es decir un grafo G puede ser Hamiltoniano y no ser Euleriano y viceversa.



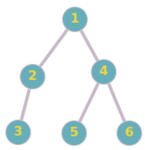
(a) Grafo Hamiltoniano y Euleriano



(b) Grafo Euleriano y no Hamiltoniano



(c) Grafo Hamiltoniano y no Euleriano



(d) Grafo ni Hamiltoniano ni Euleriano

Lema. *Todo grafo completo G, $|V(G)| \geq 3$, es Hamiltoniano.*

Demostración (Demostración por Inducción en $n = |V(G)|$)**.**

Caso base: Para $n = 3$, K_3 tiene el ciclo $< v_1, v_2, v_3, v_1 >$ que es Hamiltoniano.

Hipótesis: Supongamos que el grafo completo de n vértices (K_n) posee un ciclo de Hamilton.

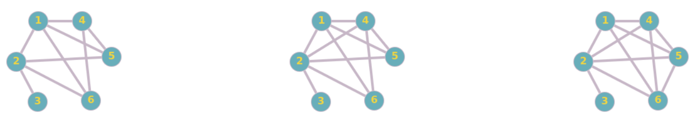
Paso inductivo: Sea G un grafo completo de $n+1$ vértices (K_{n+1}), si construimos $G' = G - v$ (le quitamos un vértice a G), el grafo G' es K_n, es decir es un grafo completo de n vértices. En G' se cumple la hipótesis de inducción, luego en G' hay un ciclo de Hamilton. Sea el ciclo Hamiltoniano $C =< v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1 >$ de G', entonces si se añade nuevamente el vértice v y todas sus aristas se vuleve a obtener K_{n+1} y como v está enlazado a todos los demás vértices, sabemos que las aristas $\{v, v_n\}$ y $\{v, v_1\} \in E(G)$, entonces se puede tener el ciclo $C' =< v_1, v_2, \ldots, v_n, v, v_1 >$ que es un ciclo Hamiltoniano en K_{n+1} $\blacksquare$.

Teorema. *Si un grafo G es Hamiltoniano entonces para cualquier subconjunto no vacío de vértices S de G, el número de componentes conexas del subgrafo $G - S$ es menor o igual que $|S|$.*

Demostración (Demostración del Teorema)**.**

Como G es Hamiltoniano, tiene un ciclo que es de Hamilton. Cuando se remueven los vértices del conjunto S de G, el ciclo Hamiltoniano se divide en a lo sumo $|S|$ segmentos (cadenas de vértices consecutivos del ciclo que no contienen vértices de S). Cada segmento corresponde a una componente conexa de $G - S$ si no existen aristas adicionales en G que estén fuera del ciclo y que conecten a estos segmentos. Si existieran estas aristas, entonces conectarían segmentos y, con ello, se reduciría el número de componentes conexas. Luego, el número de componente conexas del subgrafo $G - S$ es menor o igual que $|S|$ $\blacksquare$.

Definición (Clausura de un Grafo)**.** *Dado un grafo G con $|V(G)| = n$, se define inductivamente la secuencia de grafos $G_0, G_1, ..., G_k$, donde $G_0 = G$ y $G_{i+1} = G_i + \{u, v\}$, donde u, v son vértices no adyacentes de G_i tales que $deg_{G_i}(v) + deg_{G_i}(u) \geq n$. Tras aplicar este procedimiento, el último grafo que se ontiene es la clausura de G y se denota $clausura(G)$*



(a) $G_0 = G$ (b) $G_1 = G_0 + \{2, 4\}$ (c) $G_2 = G_1 + \{5, 6\}$

Figura 4: Ejemplo del proceso de obtención de la clausura, en el ejemplo en grafo G_2 es la $clausura(G)$

Teorema. *La operación de clausura de un grafo, es una operación bien definida. (Sin importar el orden en que se adicionen las aristas durante la construcción de los G_i intermedios, el grafo final, que es la clausura de G es siempre el mismo)*

Demostración (Reducción al absurdo)**.**

Sean $E = \{e_1, e_2, ...e_p\}$ y $F = \{f_1, f_2, ..., f_r\}$, dos formas de construir la clausura de un grafo G. Es decir, la primera es $G_0 = G$, $G_1 = G + e_1$, $G_2 = G_1 + e_2$,..., $clausura_E(G) = G_{p-1} + e_p$; y la otra forma sería $G_0 = G$, $G_1 = G_0 + f_1$, $G_2 = G_1 + f_2$,..., $clausura_F(G) = G_{r-1} + f_r$. Para demostrar que $clausura_E(G) = clausura_F(G)$, basta con demostrar que $E = F$, para esto demostremos que $E \subseteq F$ y $F \subseteq E$.

Para demostrar que $E \subseteq F$ hagamos una reducción al absurdo, supongamos que esto no se cumple, entonces existen aristas en E que no pertenecen al conjunto F. Tomemos del conjunto E/F (que asumimos no vacío) la arista con menor índice, sea esta e_i. Como e_i se agrega a la clausura uniendo los vértices no adyacentes u, v donde $deg_{G_{i-1}}(v) + deg_{G_{i-1}}(u) \geq n$. De donde

$$deg_{G_{i-1}}(v) = deg_G(v) + X_v$$

con $X_v \geq 0$ siendo la cantidad de aristas en el conjunto $\{e_1, ...e_{i-1}\}$ que inciden en v, análogamente

$$deg_{G_{i-1}}(u) = deg_G(u) + X_u$$

Como todos los $e_j, 1 \leq j \leq i-1$ pertenecen a F entonces el conjunto $F = \{e_1, ..., e_{i-1}\} \cup \{f_1, f_2, ..., f_r\}/\{e_1, ..., e_{i-1}\}$, de donde en la clausura construida por las aristas de conjunto F se tiene que:

$$deg_{clausura_F}(v) = deg_G(v) + X_v + Y_v$$

con $Y_v \geq 0$ cantidad de aristas del conjunto $\{f_1, f_2, ..., f_r\}/\{e_1, ..., e_{i-1}\}$ que inciden en v, analogamente para u:

$$deg_{clausura_F}(u) = deg_G(u) + X_u + Y_u$$

con $Y_u \geq 0$ cantidad de aristas del conjunto $\{f_1, f_2, ..., f_r\}/\{e_1, ..., e_{i-1}\}$ que inciden en u, de donde:

$$deg_{clausura_F}(v) + deg_{clausura_F}(u) = deg_G(v) + X_v + Y_v + deg_G(u) + X_u + Y_u \geq$$

$$\geq deg_{G_{i-1}}(v) + deg_{G_{i-1}}(u) \geq n$$

Por tanto la arista $\{u, v\}$ se puede agregar a la $clausura_F$, resultando en una iteración más en el algoritmo de obtención de la clausura, pero esto es una contradicción ya que el grafo $clausura_F(G)$ tiene que ser el último que se obtenga, de donde lo supuesto es falso y todas las aristas de E pertenecen a F, es decir $E \subseteq F$.

La demostración de $F \subseteq E$ es análoga a esta, por tanto $E = F$ y $clausura_E(G) = clausura_F(G)$.

La clausura es una operación bien definida $\blacksquare$.

Teorema (Bondy-Chvátal)**.** *Sea G un grafo donde $|V(G)| \geq 3$, G es Hamiltoniano $\Leftrightarrow$ $clausura(G)$ es Hamiltoniano.*

Demostrar este teorema es equivalente a demostrar que: G_i es Hamiltoniano $\Leftrightarrow$ G_{i+1} es Hamiltoniano. Si se demuestra esto, entonces siguiendo la cadena de transitividad queda demostrado que: G es Hamiltoniano $\Leftrightarrow$ $clausura(G)$ es Hamiltoniano.

Demostración ($\Rightarrow$)**.** *Si G_i es Hamiltoniano entonces G_{i+1} es Hamiltoniano*

Como G_i es Hamiltoniano, entonces posee un ciclo de Hamilton. Sea $C =< v_1, v_2, ..., v_k, v_1 >$ el ciclo de Hamilton de G_i, este ciclo también está presente en G_{i+1}, porque G_{i+1} no es más que G_i con una arista agregada. Luego G_{i+1} es Hamiltoniano.

Demostración ($\Leftarrow$)**.** *Si G_{i+1} Hamiltoniano $\Rightarrow$ G_i Hamiltoniano*

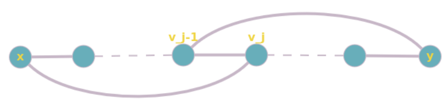
Sabemos que $G_{i+1} = G_i + \{x, y\}$ donde x, y son vértices no adyacentes en G_i tales que $deg_{G_i}(x) + deg_{G_i}(y) \geq n$.

Como G_{i+1} es Hamiltomiano, si el ciclo Hamiltoniano de G_{i+1} no contiene a la arista $\{x, y\}$ (la agregada que no estaba en G_i), entonces este ciclo también aparecía en G_i, de donde G_i Hamiltoniano.

Si $\{x, y\}$ sí aparece en el ciclo, en el grafo G_i, como no está $\{x, y\}$, pero si las restantes aristas, habrá un camino Hamiltoniano:

$C =< v_0, v_1, \ldots, v_{n-1} >$ donde $v_0 = x$ y $v_{n-1} = y$.

Construyamos entonces un ciclo Hamiltoniano que no utilice la arista $\{x, y\}$, nótese que en la cadena C, tiene que existir algún vértice v_j tal que v_j sea adyacente a x y v_{j-1} sea adyacente a y.



Supongamos que esto no ocurra, entonces por cada adyacente a x en la cadena, el vértice anterior a este no puede ser adyacente a y, como la cadena es Hamiltoniana, contiene a todos los adyacentes de x, de donde $deg(y) \leq n - 1 - deg(x)$, de donde $deg(y) + deg(x) \leq n - 1$, pero sabemos que esto no es posible, puesto que la arista $\{x, y\}$ se agrega a la clausura en el grafo G_{i+1} y esto solo se hace si los vértices no adyacentes x, y cumplen que $deg(x) + deg(y) \geq n$.

Entonces lo supuesto es falso, por tanto existe v_j en C tal que v_j es adyacente a x, y v_{j-1} es adyacente a y.

Por tanto se puede tomar el ciclo $< v_0 = x, v_j, \ldots, v_{n-1} = y, v_{j-1}, v_{j-2}, \ldots, v_1, v_0 = x >$ que es un ciclo Hamiltoniano.

Luego G es Hamiltoniano si y solo si su clausura lo es $\blacksquare$.

Teorema (Dirac)**.** *Sea G un grafo donde $|V(G)| = n \geq 3$, si $\forall v$ $deg(v) \geq \frac{n}{2}$ $\Rightarrow$ G es Hamiltoniano*

Teorema (Ore)**.** *Sea G un grafo donde $|V(G)| = n \geq 3$, si $\forall u, v$ $deg(u) + deg(v) \geq n$ $\Rightarrow G$ es Hamiltoniano*

Demostración (Directa)**.**

Nótese que el cumplimiento del *Teorema de Ore* implica el cumplimiento del *Teorema de Dirac*. Si en un grafo todos los vértices tienen grado mayor o igual a $\frac{n}{2}$, entonces para cualquier pareja de vértices no adyacentes u, v, $deg(u) + deg(v) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$, donde el grafo cumple la hipótesis de *Ore*.

Luego basta con demostrar el *Teorema de Ore*. Como en G todos los vértices u, v no adyacentes cumplen que $deg(u) + deg(v) \geq n$ entonces la $clausura(G) = K_n$, que sabemos tiene un ciclo de Hamilton, luego por el **Teorema de Bondy-Chvátal**, G es Hamiltoniano.

Nota: Ambos teoremas son condiciones suficientes pero no necesarias, un grafo puede ser Hamiltoniano sin que sus vértices cumplan esta condición, por ejemplo:

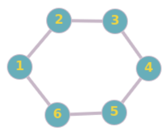


Figura 5: C_6 es Hamiltoniano y sin embargo todos sus vértices son de grado 2, por lo que la suma de los no adyacentes es $4 < 6$.

Corolario (Corolario del **Teorema de Ore**). *Si G es un grafo conexo, n vértices, con $n \geq 3$, en el cual $deg(u) + deg(v) \geq n - 1$ para todo par de vértices no adyacentes u, v, entonces G posee un camino Hamiltoniano.*

Demostración (Demostración del Corolario del **Teorema de Ore**).

Sabemos que G es conexo, y con n vértices. Creamos el grafo $G' = G + w$, a partir de añadir el vértice w y este lo conectamos con todos los vértices existentes. En G' se cumpliría que

$$deg(u) + deg(v) \geq n - 1 + 2 = n + 1$$

para todo par de vértices u, v no adyacentes, luego G' es Hamiltoniano por el **Teorema de Ore**.

Entonces existe un ciclo Hamiltoniano en G' y este tiene que pasar por el vértice w. Entonces basta con eliminar este vértice y se tendría para G un camino Hamiltoniano $\blacksquare$.