

Conferencia 9 - Combinatoria

January 28, 2025

Principio de Inclusión - Exclusión. *Permite calcular la cardinalidad de la unión de varios conjuntos*

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} |\cap A_i|_{i \in I \subseteq \{1,2,\dots,n\}, |I|=k}$$

Ejemplo

De 200 estudiantes 50 toman el curso de matemáticas discretas, 140 el curso de economía y 24 ambos. Como ambos cursos programaron exámenes para el día siguiente, sólo los estudiantes que no esten en ninguno de estos curso podrán ir a la fiesta de la noche. Se quiere ver cuántos estudiantes iran a la fiesta.

Si A_1 es el conjunto que estudia discreta y A_2 el de los que estudian economía entonces $|A_1 \cup A_2| = 50 + 140 - 24 = 166$ por lo que irán a la fiesta $200 - 166 = 34$

Demostración

Sea un elemento x del universo

Si x no cumple ninguna propiedad entre A_1, A_2, \dots, A_n entonces no se cuenta nunca en la suma.

Ahora, verifiquemos que si aparece entonces solamente se cuenta una vez.

Si x cumple exactamente una propiedad, o sea, $\exists i$ tal que $x \in A_i$ pero $\forall j, j \neq i$ implica que $x \notin A_j$, x se cuenta solo una vez

Si x cumple k propiedades al mismo tiempo entonces:

se cuenta k en $\sum_{1 \leq i \leq m} |A_i|$

se cuenta $\binom{k}{2}$ en $\sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j|$

...

...

se cuenta $\binom{k}{k}$ en la intersección de k propiedades

No tiene sentido verificar cuántas veces se cuenta x en la intersección de más de k propiedades porque solo aparece en k conjuntos

Entonces x se cuenta:

$$\begin{aligned} & k - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \dots + (-1)^{k+1} \binom{k}{k} \\ &= \binom{k}{0} + [-\binom{k}{0} + \binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \dots + (-1)^{k+1} \binom{k}{k}] \\ &= \binom{k}{0} = 1 \end{aligned}$$

Definición. *Sea un universo tal que existen m posibles propiedades P_1, P_2, \dots, P_m .*

Si $\{P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_k}\}$ es un subconjunto de las m posibles propiedades se de-

nota N_{i_1, i_2, \dots, i_k} a la cantidad de elementos que cumplen las propiedades $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m}$.

s_k es la cantidad de veces que se cumplen k propiedades

Entonces se define $S_0 = n$ donde $n = |U|$ y $S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m} N_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ con $1 \leq k \leq m$

(Esto último sería todas las maneras en las que pueden cumplirse k propiedades de m)

Entonces el Principio de **Inclusión - Exclusión** puede escribirse:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m| &= S_1 - S_2 + S_3 - \dots (-1)^{m-1} S_m \\ |A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_m^c| &= S_0 - S_1 + S_2 - \dots (-1)^m S_m \end{aligned}$$

Teorema. Generalización del Principio de Exclusión. Sea U un conjunto finito de elementos y P un conjunto arbitrario de m propiedades, el número de elementos de U que poseen exactamente R propiedades y $0 \leq R < m$ es $N(R) = \sum_{k=0}^{m-R} (-1)^k \binom{k+R}{k} S_{k+R}$

Demostración

Sea x un elemento del universo que cumple t propiedades

Si $t < R$ se cuenta 0 veces

Se puede notar que la fórmula comienza por S_R lo que implica que x no aparece en la intersección de más de t elementos

Si $t = R$ se cuenta 1 vez, solo se cuenta en S_R

Si $t > R$ entonces $N(R) = \sum_{k=0}^{t-R} (-1)^k \binom{k+R}{k} S_{k+R}$ porque no se va a contar en intersecciones de más de t

Ahora $k + R \leq t$ por tanto el elemento se cuenta $\binom{t}{k+R}$ veces en S_{k+R} por tanto x se cuenta en $N(R)$

$\sum_{k=0}^{t-R} (-1)^k \binom{k+R}{k} \binom{t}{k+R}$
ahora $\binom{k+R}{k} \binom{t}{k+R} = \binom{t}{R} \binom{t-R}{k}$ esto se obtiene luego de desarrollar las combinaciones y multiplicar y dividir por $(t-R)!$

$$\begin{aligned} \text{luego } \sum_{k=0}^{t-R} (-1)^k \binom{k+R}{k} \binom{t}{k+R} &= \sum_{k=0}^{t-R} (-1)^k \binom{t}{R} \binom{t-R}{k} \\ &= \binom{t}{R} \sum_{k=0}^{t-R} (-1)^k \binom{t-R}{k} = 0 \end{aligned}$$

Teorema. Sea U un conjunto finito de elementos y P un conjunto arbitrario de m propiedades, el número de elementos de U que poseen satisfacen al menos R propiedades y $0 \leq R < m$ es $\tilde{N}(R) = \sum_{k=0}^{m-R} (-1)^k \binom{k+R-1}{R-1} S_{k+R}$

Principio Inyectivo. Sean A y B conjuntos tal que B es finito. Entonces A es finitos y $|A| \leq |B|$ si y solo si existe una función inyectiva de A en B .

Demostración

En el sentido directo, se tiene que si $|A| = m$ y $|B| = n$ entonces existen las funciones $f : A \rightarrow \mathbb{N}_m$ y $g : B \rightarrow \mathbb{N}_n$ biyectivas. Ahora, como $m \leq n$ se tiene que $\mathbb{N}_m \subseteq \mathbb{N}_n$, luego $g^{-1} \circ f : A \rightarrow B$ es inyectiva.

Se deja propuesta la demostración en el otro sentido.

Principio Sobreyectivo. Sean A y B conjuntos tal que B es finito. Entonces A es finitos y $|A| \leq |B|$ si y solo si existe una función sobreyectiva de B en A .

Demostración

En el sentido directo, se tiene que si $|A| = m$ y $|B| = n$ entonces se tiene se tiene que existen las funciones $f : A \rightarrow \mathbb{N}_m$ y $g : B \rightarrow \mathbb{N}_n$ biyectivas, con $m \leq n$. Se puede definir la función $f' : \mathbb{N}_m \rightarrow A$ ahora $f'(x) = f^{-1}(\min(x, n))$ y como f es biyectiva f^{-1} lo es también, luego también es sobreyectiva y, por tanto, f' es también sobreyectiva. Entonces $f' \circ g : B \rightarrow A$ es sobreyectiva (la composición de funciones sobreyectivas es sobreyectiva).

En el otro sentido, se puede definir $B = b_1, b_2, \dots, b_m$ y $f : B \rightarrow A$ sobreyectiva, entonces está bien definida la función $h : A \rightarrow B$ definida como $h(a) = b_i$, donde i es el mínimo índice tal que $f(b_i) = a$. Es fácil ver que h es inyectiva, Luego, por la proposición anterior A es finito y $|A| \leq |B|$.

Principio del Palomar. *Si se tiene un palomar con n agujeros o casillas y m , $m > n$, palomas, entonces existe una casilla que contiene más de una paloma. De manera general, existe una casilla que tiene más de $\lfloor \frac{m}{n} \rfloor$ palomas.*

Ejemplo 1

En todo conjunto de n números enteros es posible encontrar un subconjunto tal que la suma de los elementos del subconjunto es divisible por n .

Tomando los subconjuntos A_1, A_2, \dots, A_n tal que $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n$:

$$A_1 = \{a_1\}$$

$$A_2 = \{a_1, a_2\}$$

$$A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$$

...

...

$$A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

Si hay algún A_i tal que la suma de sus elementos ($S(A_i)$) cumple que $S(A_i) \equiv 0 (n)$ entonces ya queda demostrado.

Si esto no ocurre entonces para estos conjuntos en sus sumas hay $n - 1$ posibles restos entonces, por el **Principio del Palomar**, hay dos que dejan el mismo resto, o sea, existen i, j $i \neq j$ tal que $S(A_i) \equiv S(A_j) (n)$ luego $S(A_i) - S(A_j) \equiv 0 (n)$

Entonces se toma el conjunto $A_i - A_j = A_{i-j}$ asumiendo, sin pérdida de generalidad, que $|A_i| > |A_j|$, luego $S(A_{i-j}) \equiv 0 (n)$

Ejemplo 2

Sea la relación de conocerse una relación mutua, entonces en un grupo de 6 personas hay al menos 3 personas que se conocen entre ellos o al menos 3 que no se conocen entre ellos.

Si se toman n casillas, entendiendo que si alguien está en la misma casilla se conocen entre ellos y si están en casillas diferentes no se conoce entre

si. Para $n > 2$ cualquier distribución significa que hay al menos tres que no conocen entre si. Ahora si $1 \leq n \leq 2$ entonces, por el **Principio del Palomar**, en una casilla como mínimo habrá 3 personas y entonces habría al menos 3 personas que se conocen entre si.