Conferencia 11 - Funciones Primitivo Recursivas

10 de junio de 2025

Definición. *Sean*

$K_0 = \{0_1, 0_2, \dots\}$ *la familia de funciones nulas donde* $0_n(X) = 0$ *y* $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
$K_1 = \{U_1^1, U_1^2, U_2^2, U_1^3, U_2^3, U_3^3, \dots\}$ *donde* $U_k^n(x_1, x_2, ;x_n) = x_k$ *con* $n \geq k$ *es la familia de funciones proyectivas*
$K_2 = \{suc\}$, $suc : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $suc(x) = x + 1$, *función sucesor*

entonces $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ *se conoce como la familia de funciones iniciales.*

Nota: Las funciones primitivas recursivas son funciones de $\mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$ *y se obtienen a partir de un conjunto de reglas o pasos bien definidos como la composición o la recursión.*

Esquemas de Obtención de Funciones Primitivas Recursivas

Definición (Esquema de Composición)**.** *Sean las funciones primitivas recursivas:*
$a_i : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}\ 1 \leq i \leq r$
$b : \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}$
entonces $f(X) = b(a_1(X), a_2(X), \dots, a_r(X))$ *donde* $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *es primitiva recursiva.*

Definición (Esquema de Recursión)**.** *Existen dos variantes:*

1. *Sean:*
   a: constante
   $b : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, *función primitiva recursiva*

   Entonces la función $h(X) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *definida como:*
   $h(0) = a$
   $h(y + 1) = b(y, h(y))$
   es primitiva recursiva.

2. *Sean:*
   $a : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$
   $b : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$

   funciones primitivas recursivas con $n \geq 1$.

   Entonces la función $h : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ *definida como:*
   $h(x, 0) = a(X)$
   $h(x, y + 1) = b(x, y, h(x, y))$ *donde* $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
   es primitiva recursiva.

Definición. *Una función se llama primitivo-recursiva si es una función inicial o si es posible definirla en términos de funciones iniciales por un número finito de aplicaciones de los esquemas composición o recursión*

Ejemplos

1. **Suma**

   $suma(x, y)$, $suma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

   Se define entonces:

   $suma(x, 0) = a(x) = U_1^1(x)$ *(*$x + 0 = x$*)*
   $suma(x, y + 1) = b(x, y, suma(x, y)) = suc(U_3^3(x, y, suma(x, y)))$

   se tiene que, $x + (y + 1) = sucesor(x + y)$*, se deja que el esquema recursivo en cada iteración disminuya el valor de* y *hasta que llegue a* 0 *y caiga el el caso base, luego en cada retorno de la recursividad se realizan tantas operaciones sucesor como sea el vaor de* y *calculándose el resultado esperado*

   Finalmente la suma es el resultado de aplicar un esquema recursivo sobre las funciones primitivas recursivas a, b tales que $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $b : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, de donde $suma(x, y)$ es primitiva recursiva.

2. **Producto**

   $prod(x, y)$, $prod : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$
   Se define entonces:

   $prod(x, 0) = a(x) = O_1(x)$ *(x * 0 = 0)*
   $prod(x, y{+}1) = b(x, y, prod(x, y)) = suma(U_1^3(x, y, prod(x, y)), U_3^3(x, y, prod(x, y)))$

   se tiene que $x * (y + 1) = x + (x * y)$ *de igual modo se deja que sea la propia recursividad la que en cada paso decremente* y*, por cada vez que decremente* y *se suma* x *al cálculo realizado*

   Finalmente el producto es el resultado de aplicar un esquema recursivo sobre las funciones primitivas recursivas a, b tales que $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $b : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, de donde $prod(x, y)$ es primitiva recursiva.

3. **Potencia**

   $pot(x, y)$, $pot : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$
   Se define entonces:

   $pot(x, 0) = a(x) = suc(O_1(x))$ *(*$x^0 = 1$*)*
   $pot(x, y{+}1) = b(x, y, pot(x, y)) = prod(U_1^3(x, y, pot(x, y)), U_3^3(x, y, pot(x, y)))$

   Finalmente la potencia es el resultado de aplicar un esquema recursivo sobre las funciones primitivas recursivas a, b tales que $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $b : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, de donde $pot(x, y)$ es primitiva recursiva.

Teorema. *La función constante* $C_k^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k$ *es primitivo-recursiva*

Demostración. *Demostremos por inducción en* k*.*
Caso base: *k=0*
$C_0^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = O_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$

Paso inductivo *Si se cumple que* C^n_k *entonces se cumple para* C^n_{k+1}
$C^n_{k+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = suc(C^n_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = k + 1$

Entones se tiene que C^n_k *es primitivo recursiva* $\blacksquare$.

Teorema. *Sean las funciones* $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *y* $h : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *y* $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})$ *donde* $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ *es un secuencia de variables con posible repetición tomada de* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*, entonces si* f *es primitivo recursiva tam bién lo es* h

Demostración.

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(U^n_{i_1}(x_1, \ldots, x_n), U^n_{i_2}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, U^n_{i_k}(x_1, \ldots, x_n))$$

Corolario. *Si* $f(x, y)$ *es primitivo-recursiva entonces lo es* h *tal que:*

- $h(x, y) = f(y, x)$
- $h(x) = f(x, x)$
- $h(x, y, z) = f(y, z)$

Definición. *Sea* P *un predicado numérico k-ario (*$x \in \mathbb{N}^k$*) ,*
la función

$$C_P(x) = \begin{cases} 1 & si\ P(x) se\ cumple \\ 0 & si\ P(x) no\ se\ cumple \end{cases} \tag{1}$$

se llama función característica de P

Definición. *Se dice que* P *es un predicado primitivo-recursivo si su función característica es primitivo-recursiva*

Teorema. *Si los predicados* P_1 *y* P_2 *son primitivo recursivos, entonces también lo son:*

- $\neg P_1$
- $P_1 \vee P_2$
- $P_1 \wedge P_2$
- $P_1 \Rightarrow P_2$
- $P_1 \Leftrightarrow P_2$

Teorema. *Sea* $P_1, P_2, \ldots, P_k$ *predicados n-arios, considere la función*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) & si\ P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) & si\ P_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots & \\ g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) & si\ P_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases} \tag{2}$$

si para todo i*,* $1 \leq i \leq k$*,* g_i *es una función primitivo-recursiva y para toda* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *se cumple exactamente uno de los predicados, entonces* f *es primitivo recursiva.*

Definición (Suma acotada). *Sea* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *y* $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$, *se llama suma acotada a la función* $h : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ *tal que*

$h(x, y) = \sum_{z<y} f(x, z)$ *o sea*

$$h(x,y) = \begin{cases} 0 & y = 0 \\ f(x,0) + f(x,1) + \cdots + f(x,y-1) & y > 0 \end{cases} \tag{3}$$

Definición (Producto acotado). *Sea* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *y* $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$, *se llama producto acotado a la función* $h : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ *tal que*

$h(x, y) = \prod_{z<y} f(x, z)$ *o sea*

$$h(x,y) = \begin{cases} 1 & y = 0 \\ f(x,0)f(x,1)\ldots f(x,y-1) & y > 0 \end{cases} \tag{4}$$

Teorema. *Si* $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ *es primitivo recursiva entonces la suma acotada de* f *y el producto acotado de* f *son primitivo recursivos*

Teorema. *Sean* $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ *y* $k : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ *funciones primitivo recursivas entonces son primitivo recursivas las funciones*

$h(x, y) = \sum_{z<k(x,y)} f(x, z)$ *y* $g(x, y) = \prod_{z<k(x,y)} f(x, z)$

Teorema. *Sean* $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ *una función primitivo recursiva y* $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$, *entonces*

$$g(x,y) = \mu_{z<y}(f(x,z) = 0) \begin{cases} \textit{el menor } z < y \textit{ tal que } f(x,z) = 0 \\ y \end{cases} \tag{5}$$

es primitivo recursiva

Corolario. *Si* $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ *y* $k : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ *son primitivo-recursivas entonces también lo es* $\mu_{z<k(x,y)}(f(x, z) = 0)$

Teorema. *Sea* $P(x, y)$ *un predicado primitivo-recursivo, entonces la función*

1. $f(x, y) = \mu_{z<y}(P(x, z))$
2. $\forall(z)z < y, P(x, z)$ *y* $\exists(z)z < y, P(x, z)$ *son predicados primitivo-recursivos*