

Conferencia 8 - Grafos Dirigidos

25 de mayo de 2025

Definición. Un **grafo dirigido** (digrafo) consiste en dos conjuntos V , el conjunto de los nodos, y E , el conjunto de los arcos, formado ahora por pares ordenados del conjunto V .

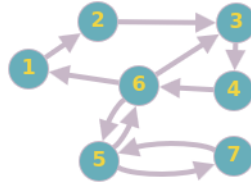
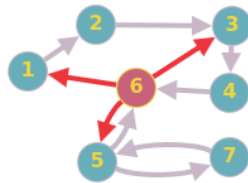


Figura 1: Ejemplo de Digrafo

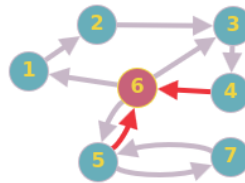
Definición. Sean $v, w \in V(G)$ donde G es un digrafo, v, w son *adyacentes* si el arco $\langle v, w \rangle \in E(G)$ o si el arco $\langle w, v \rangle \in E(G)$. Si $\langle v, w \rangle \in E(G)$ se dice que el arco $\langle v, w \rangle$ es *incidente desde v* y que es *incidente a w* .

Definición. Sea G un digrafo y $v \in V(G)$:

- El *grado exterior* de v es el número de arcos incidentes desde v ($exdeg(v)$ o $outdeg(x)$).
- El *grado interior* de v es el número de arcos incidentes sobre v ($indeg(v)$).



(a) $outdeg(6) = 3$



(b) $indeg(6) = 2$

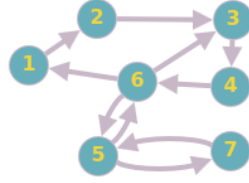
Teorema. En todo digrafo se cumple que:

- $\sum_{v \in V(G)} exdeg(v) + indeg(v) = 2|E|$
- $\sum_{v \in V(G)} exdeg(v) = \sum_{v \in V(G)} indeg(v) = |E|$

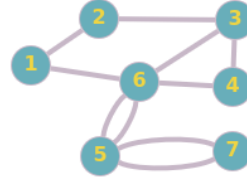
Definición. Un *camino* en un digrafo G es una secuencia de nodos de G , $c = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ tal que $k > 1$ y $\forall i, 1 \leq i \leq k-1$ el arco $\langle v_i, v_{i+1} \rangle \in E(G)$. Luego:

- El camino es *simple* si no se repiten nodos.
- Si $v_1 = v_k$ el camino es *cerrado*
- Un *ciclo* es un camino cerrado donde solo se repiten el primer y último nodo

Definición. El **grafo subyacente** es el multigrafo que resulta de quitar la orientación de los arcos de un digrafo



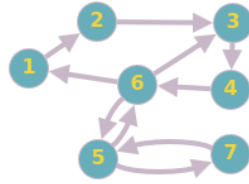
(a) G



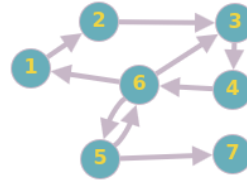
(b) Grafo subyacente de G

Definición. Un digrafo D es **conexo** si el multigrafo subyacente de D es conexo

Definición. Un digrafo es **fuertemente conexo** si todo par de nodos del digrafo son mutuamente accesible, o sea si hay camino de uno al otro, y viceversa



(a) G fuertemente conexo



(b) G no fuertemente conexo

Figura 4: En el ejemplo, en a), para todo par de nodos hay un camino por lo que es fuertemente conexo, mientras que en b), desde el nodo $v = 7$, no es posible alcanzar ningún otro nodo.

Definición. Un grafo es **orientable** si es posible orientar sus aristas de modo que el digrafo resultante sea fuertemente conexo

Teorema. Sea G un grafo, entonces G es orientable si y solo si G es conexo y no tiene puentes.

Demostración (\Rightarrow).

La demostración de que G tiene que ser conexo es trivial, porque orientar las aristas no va a crear caminos entre las componentes conexas de G .

Demostraremos que si G tiene puentes entonces G es no orientable.

Sea e una arista puente tal que $e = \{u, v\}$.

Como e es un puente al removerla u y v quedan en componentes conexas distintas, lo que explica que no exista camino que los conecte. Por lo que si tratamos de orientar las aristas de $G - e$ no es posible llegar de u a v (y viceversa). Finalmente la arista $\{u, v\}$ se tiene que orientar, si se agrega como $\langle u, v \rangle$ no habría camino de v a u en el grafo, análogo para cuando se orienta como $\langle v, u \rangle$. Por tanto G no es fuertemente conexo luego G no es orientable.

Demostración (\Leftarrow).

Vamos a utilizar el siguiente lema.

Lema. *Una arista es puente (arista de corte) si y solo si no participa en ningún ciclo*

Demostración. *Demostración del lema*

Demostremos que si participa en algún ciclo no es puente.

Sea $e = \{u, v\} \in E(G)$ tal que e participa en el ciclo $c = \langle u, v, v_1, v_2, \dots, v_k, u \rangle$ entonces $c_1 = \langle v, v_1, v_2, \dots, v_k, u \rangle$ es un camino que contiene a los vértices u, v . Entre todo par de vértices de G , si el camino que los une contiene a la arista $\{u, v\}$, esta puede ser reemplazada por el camino c_1 , en caso de que no lo contuviera se mantiene igual, por tanto el grafo resultante de eliminar $\{u, v\}$ no varió en la cantidad de componentes conexas, entonces e no es una arista puente.

En el otro sentido, si no es una arista puente entonces participa en algún ciclo.

Sea $e = \{m, v\} \in E(G)$ tal que no es arista puente, en $G - e$ existe un camino que conecta a m con v que no contiene a e .

Sea este $\langle m, v_1, v_2, \dots, v_k, v \rangle$ luego $c = \langle m, v_1, v_2, \dots, v_k, v, m \rangle$ es un ciclo al que pertenece e .

Retornemos a la demostración del teorema.

Sea G' el mayor subgrafo orientable de G , suponga que hay vértices de G que no pertenecen a G' .

Sea entonces $v \in G$ y $v \notin G'$, note que existe $u \in G'$ tal que $\{u, v\} \in V(G)$ pues G es conexo.

Como G no tiene puentes, por el lema anterior entonces $\{u, v\}$ pertenece a algún ciclo. Sea este $c = \langle u, v, v_1, v_2, \dots, v_k, u \rangle$, y sea w el primer vértice de c desde v tal que $w \in V(G')$ (Este existe debido a que u pertenece a G' y es el último vértice de c).

Entonces se tomará el camino no dirigido de u hacia w y se orientará de la siguiente forma $c' = \langle u, v, \dots, w \rangle$ tal que los arcos se dirijan en ese sentido.

Note que para todo nodo que pertenece a G' se puede acceder a todo nodo de c' (puesto que G' es orientable y todo nodo tiene un camino en G' hasta u , luego de ahí moviéndose por c' se alcanzan todos los nodo del camino) y cada nodo de c' puede acceder a w , lo que implica que puede acceder a todo nodo de G' y por tanto $G' + c'$ es un subgrafo de G que es orientable y es mayor que G' lo que es una contradicción, luego el mayor subgrafo de G que es orientable es el propio G .

Definición. Un **torneo** es un digrafo que tiene como grafo subyacente un grafo completo, o sea, un grafo completo orientado

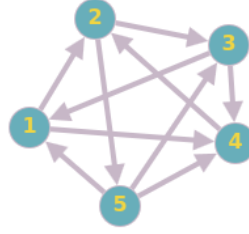


Figura 5: Ejemplo de Torneo

Teorema. *En todo torneo hay un camino de Hamilton.*

Demostración. *Demostración por inducción el número de nodos*

Caso base: Si $n = 1, 2$ se cumple.

Paso inductivo

Demostremos que si se cumple para n se cumple para $n + 1$

Sea $T' = T - v$

Note que T' es un torneo, pues tiene n nodos (hipótesis de inducción), y por tanto existe un camino de Hamilton en T' . Sea este $c = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$.

Ahora:

- Si $\text{outdeg}(v) = 0$ entonces $\text{indeg}(v) = n$ luego el camino $\langle v_1, v_2, \dots, v_n, v \rangle$ es de Hamilton

Sea $\text{outdeg}(v) = k$ tal que $1 \leq k \leq n$, entonces se pone v delante del primer nodo v_i tal que $\langle v, v_i \rangle \in T$ (que sabemos existe porque $k > 0$). Si $v_i = v_1$ entonces se forma el camino de Hamilton $c = \langle v, v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$, en cualquier otro caso, como v_i es el primero tal que $\langle v, v_i \rangle \in T$, entonces para v_{i-1} se tiene que $\langle v_{i-1}, v \rangle \in T$, de donde se forma el camino de Hamilton $c = \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_i, \dots, v_n \rangle$

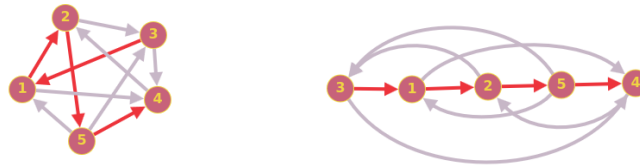


Figura 6: Ejemplo de un camino de Hamilton en un Torneo

Teorema. *En un digrafo D se cumple que existe un camino de longitud $\chi(D) - 1$*

Demostración.

Sea A un conjunto minimal de arcos tal que cuando se elimine el grafo resultante $D - A$ sea acíclico.

Sea k la longitud del camino simple más largo de $D - A$.

Aplicátese la siguiente función de coloración para los vértices de $D - A$, $f(v) = p$ si $p - 1$ es la longitud del camino más largo desde v .

Note que para todo vértice v de $D - A$ si $\langle v, w \rangle \in E(D - A)$ entonces $f(v) \neq f(w)$

Probemos esto, sea $\langle w, \dots, x \rangle$ de longitud $p - 1$, el camino de mayor longitud desde w , nótese que ese camino no contiene a v puesto que $D - A$ acíclico. Luego el camino $\langle v, w, \dots, x \rangle$ es de longitud p , por lo que para v , $f(v) \geq p + 1 \neq p = f(w)$

Igualmente, se demuestra que para todo nodo v que pertenece a un camino simple se tienen colores distintos.

Como el camino de longitud máxima es de tamaño k entonces para colorear a $D - A$ bastan $k + 1$ colores.

Note que añadir un arco de A necesariamente crea un ciclo, puesto que A era minimal, por tanto si $e = \langle x, y \rangle \in A$ entonces en $D - A$ existía un camino desde x hasta y , y por tanto sus colores son distintos.

Al añadir todas las aristas de A el grafo continúa pudiéndose colorear con $k + 1$ colores, entonces $\chi(D) \leq k + 1$ luego $k \geq X(D) - 1$