

Conferencia 8 - Combinatoria

January 21, 2025

Binomio de Newton

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$\binom{n}{k}$ se conocen como coeficientes binomiales

Propiedades de los Coeficientes

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Demostración

$\binom{n}{k}$ representa la cantidad de formas en que se pueden seleccionar k elementos de un conjunto que posee n elementos, esto pudiera verse como de cuantas formas puede partitionarse el conjunto de n elementos en dos categorías A y B de modo que la categoría A tenga k elementos y B los $n - k$ elementos restantes, de donde el número de particiones en los conjuntos A y B también se pudieran contar a partir de conocer de cuántas formas podemos poner $n - k$ elementos en el conjunto B y dejar los k restantes en el conjunto A , valor que se obtiene mediante la expresión $\binom{n}{n-k}$.

Luego $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Demostración

$\binom{n}{k}$ es la cantidad de subconjuntos de tamaño k que pueden obtenerse de un conjunto con cardinalidad n .

Esta cantidad es también igual a la cantidad de subconjuntos de tamaño k en la que no aparece un elemento a_i más la cantidad de conjuntos del mismo tamaño en los que sí aparece.

La cantidad de conjuntos en los que no aparece a_i es igual a $\binom{n-1}{k}$

La cantidad de conjuntos en los que sí aparece a_i es igual a $\binom{n-1}{k-1}$

Luego $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

3. $k \binom{n}{k} = (n - k + 1) \binom{n}{k-1} = n \binom{n-1}{k-1}$

Demostración

Las tres expresiones cuentan el número de formas de seleccionar un subgrupo de k personas de un grupo de n personas y asignar a uno como líder.

La primera expresión cuenta de cuantas formas se puede seleccionar k de n y de los k seleccionados escoger uno de ellos para ser el líder, lo cual por principio de multiplicación queda $k \binom{n}{k}$.

La segunda expresión cuenta de cuantas formas se puede seleccionar $k - 1$ personas del grupo y de las restantes seleccionar a una como líder y agregarla a la selección anterior, teniéndose finalmente cuantos subgrupos hay de k personas y una de ellas líder $(n - k + 1) \binom{n}{k-1}$.

La tercera expresión cuenta de cuantas formas se puede seleccionar al líder entre las n personas del grupo y luego seleccionar a $k - 1$ miembros de las $n - 1$ personas restantes, contando de igual modo los subgrupo de k personas donde una de ellas es líder.

$$4. \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \dots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

o lo que es lo mismo $\sum_{j=k}^n \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

Demostración

El miembro derecho de la igualdad representa el número de formas en que se pueden seleccionar $k + 1$ elementos de un conjunto de $n + 1$ elementos. De igual modo cada sumando de la parte izquierda de la igualdad representa de cuantas formas seleccionar $k + 1$ elementos de un conjunto de n elementos, pero en cada uno fijando que el $k + 1$ -ésimo elemento es el que ocupa la posición $k + i + 1$ y que los restantes k elementos se toman de la posición 1 a la $k + i$. Es decir:

$\binom{k}{k}$ cuenta los casos donde se toman k elementos desde el 1 al k y el elemento $k + 1$ es el que toma la posición $k + 1$.

$\binom{k+1}{k}$ cuenta los casos donde se toman k elementos desde el 1 al $k + 1$ y el elemento $k + 1$ es el que toma la posición $k + 2$.

$\binom{k+2}{k}$ cuenta los casos donde se toman k elementos desde el 1 al $k + 2$ y el elemento $k + 1$ es el que toma la posición $k + 3$.

y así sucesivamente hasta que $\binom{n}{k}$ cuenta los casos donde se toman k elementos desde el 1 al n y el elemento $k + 1$ es el que toma la posición $n + 1$.

Al sumar todos estos términos se obtiene en general el número de formas de escoger $k + 1$ elementos de un conjunto de $n + 1$ elementos.

Ejemplo

Si se desea computar el valor de la suma $\sum_{i=1}^n i$, tenemos que:

$$1 = \binom{1}{1}$$

$$2 = \binom{2}{1}$$

$$2 = \binom{3}{1}$$

...

$$n = \binom{n}{1}$$

$$\text{Luego } \sum_{i=1}^n i = \sum_{i=1}^n \binom{i}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Definición. Un multiconjunto es el par $\langle A, m \rangle$ donde A es un conjunto y m es una función $m : A \rightarrow \mathbb{N}$.

Se dice que para cada a de A la multiplicidad de a es el número $m(a)$.

Si el conjunto A es finito entonces el tamaño o longitud del multiconjunto $\langle A, m \rangle$ es la suma de todas las multiplicidades de los elementos de A , o sea, $\sum_{a \in A} m(a)$

Un submulticonjunto $\langle B, n \rangle$ del multiconjunto $\langle A, m \rangle$ cumple que $B \subseteq A$ y $n : B \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $n(x) \leq m(x)$ para todo $x \in B$

Teorema. Sea un multiconjunto N con n objetos donde hay n_1 objetos de tipo 1, n_2 objetos de tipo 2 y así hasta n_k objetos de tipo k donde $n = \sum_{i=1}^k a_i$. Entonces el número de permutaciones distintas de N es $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$

Demostración. Sea P el número total de permutaciones de un conjunto de n elementos, sabemos que $P = n!$, luego sea X el número total de permutaciones sin repeticiones, por cada permutación que se haya contado en X , si en dicha permutación intercambiamos los n_1 objetos de tipo 1 seguimos obteniendo permutaciones iguales, pero que en P se cuentan como diferentes, lo mismo con los n_2 objetos de tipo 2 y en general con los n_i objetos de tipo i ; esto por principio de la multiplicación sería $Xn_1!n_2!\dots n_k!$ y aquí como por cada permutación diferente estamos contando todas sus réplicas que se generan al permutar los objetos iguales entre sí, en general estamos contando todas las permutaciones del conjunto de n elementos, luego $P = Xn_1!n_2!\dots n_k!$ de donde $X = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$

Ejemplo

Pruebe que $k!(k-1)!|(k!)!$

Si se tiene un conjunto de $k!$ elementos donde hay $(k-1)!$ tipos diferentes y de cada tipo hay k elementos entonces la cantidad de permutaciones distintas de este conjunto es

$$\frac{(k!)!}{k!k!\dots k!} = \frac{(k!)!}{k!(k-1)!}$$

luego como el número de permutaciones es un número entero entonces $k!(k-1)! \mid (k!)!$

Teorema. *El número de formas de particionar un conjunto de n elementos distintos en k categorías diferentes de forma que haya n_1 objetos en la categoría 1, n_2 objetos en la categoría 2 y así hasta llegar a n_k objetos en la categoría k , donde $n = \sum_{i=1}^k n_i$ es $\binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \dots \binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}}{n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$*

Demostración

$\binom{n}{n_1}$ cantidad de formas de asignar n_1 objetos a las categoría 1
luego $\binom{n-n_1}{n_2}$ es la cantidad de formas de dar n_2 objetos a las categoría 2
por tanto $\binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \dots \binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}}{n_k}$ sería el total de formas

De igual modo este problema se pudiera resolver mediante un enfoque de permutaciones sin repetición, puesto que si ponemos los n elementos dispuestos uno al lado del otro en una permutación, y designamis los n_1 primeros a la categoría 1, los n_2 siguientes a la categoría 2, y así sucesivamente hasta asignar los n_k finales a la categoría k , al analizar todas las posibles permutaciones tendríamos todas las posibles clasificaciones de los elementos en las k categorías. Sin embargo hay que tener el cuenta que en las permutaciones, se generan casos en los que para unos mismos n_1 elementos ellos se intercambien entre sí, lo mismo para los n_2 siguientes y en general para todos los n_i elementos que formen parte de cada categoría, por lo que es necesario eliminar las repeticiones, de donde se tiene que la expresión $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$ también representa el número de formas de asignar los objetos a las categorías.

Teorema. *El número de k -permutaciones con repeticiones en un conjunto de n elementos es n^k .*

Demostración

Se tienen k espacios disponibles y cada uno se puede rellenar con cualquiera de los n elementos, por principio de multiplicación eso es n^k .

Teorema. *Repartir n objetos distintos en k categorías diferentes es k^n .*

Demostración

Para cada uno de los objetos se decide en cual de las n categorías va a estar, como para cada uno hay n opciones, por principio de multiplicación es k^n .

Teorema. *El número de formas de particionar n objetos iguales en k categorías diferentes es $\binom{n+k-1}{k-1}$*

Demostración Este problema es equivalente a tener una secuencia de $n+k-1$ elementos iguales y convertir a $k-1$ de estos elementos en separadores. Luego, la solución tenemos el conjuntos de todas las posibles combinaciones de $k-1$ posiciones que pueden ser seleccionadas como separadores y esto es $\binom{n+k-1}{k-1}$

Teorema. *El número de formas de particionar n objetos iguales en k categorías diferentes de modo que ninguna categoría quede vacía es $\binom{n-1}{k-1}$*

Demostración La idea de solución es igual que la anterior de tomar $n+k-1$ y de ellos seleccionar $k-1$ como de ellos como separadores, pero es necesario garantizar que ninguna categoría quede vacía, entonces de mis n elementos iniciales tomo k , para garantizar que puedo asignar uno de ellos a cada categoría y luego proceso a agregar la $k-1$ barras teniendo $\binom{n-k+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$

Teorema. *La cantidad de k -combinaciones con repeticiones es $\binom{k+n-1}{n-1}$ (repartir k objetos entre n personas)*

Demostración Utilizando la idea de los separadores, se posicionan los k elementos y se agregan $n-1$ separadores, luego es se cacula de cuantas formas se pueden tomar $n-1$ de las posiciones para q