Conferencia 2 - Árboles y Secuencia Gráfica

March 31, 2025

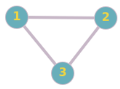
Definición (P_n)**.** *Se denomina* P_n *al grafo con* n *vértices* $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *y con aristas* $E(G) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, ..., \{v_{n-1}, v_n\}\}$

(a) P_2

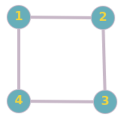
(b) P_3

(c) P_4

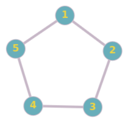
Definición (C_n)**.** *Se denomina* C_n *(*$n \geq 3$*) al grafo cíclico con* n *vértices* $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *y con aristas* $E(G) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, ..., \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}$



(a) C_3



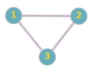
(b) C_4



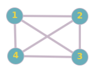
(c) C_5

Definición (K_n)**.** *Se denomina* K_n *al grafo completo con* n *vértices* $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *donde* $\forall v_i, v_j \in V(G), i \neq j$ *la arista* $\{v_i, v_j\} \in E(G)$*, es decir es el grafo con* $\binom{n}{2}$ *aristas.*

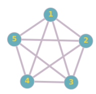
(a) K_2



(b) K_3



(c) K_4



(d) K_5

Definición (Grafo de Petersen)**.** *Es el grafo de* 10 *vértices, regular de grado* 3 *cuyos vértices adyacentes no tienen vértices comunes y los vértices no adyacentes tienen exactamente un vértice común.*

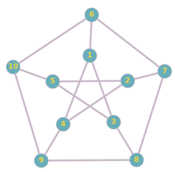
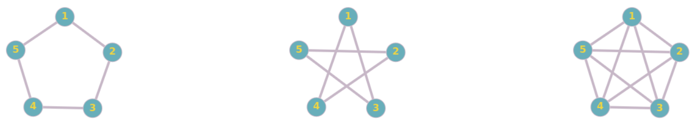


Figure 4: Grafo de Petersen

Definición (Grafo Complemento)**.** *Se define como grafo complemento de* G*, al grafo* G^c*, tal que* $V(G) = V(G^c)$ *y* $E(G^c) = [V(G)]^2 / E(G)$*, es decir es el grafo que tiene los mismos vértices que* G*, pero que tiene las aristas que no están en* G*.*

Corolario. *Sea* $|V(G)| = n$*,* $G \cup G^c = K_n$



(a) G (b) G^c (c) $G \cup G^c = K_5$

Figure 5: Ejemplo de grafo y su complemento

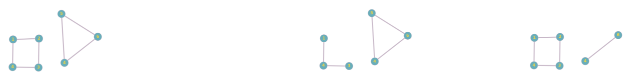
Definición (Grafo conexo)**.** *Un grafo es conexo si para todo par de vértices existe un camino que los conecta.*

Definición (Componente Conexa)**.** *Subgrafo maximal conexo de un grafo*

Nota: Si un grafo no es conexo entonces tiene 2 o más componentes conexas.

Definición. *Un vértice o una arista se denomina de corte si su eliminación aumenta la cantidad de componentes conexas. A las aristas de corte también se les denomina **Arista puente** y a los vértices de corte **punto de articulación**.*

(a) La arista $\{2, 5\}$ es de corte. (b) Los vértices 2 y 5 son de corte



(a) $G - \{2, 5\}$ (b) $G - 2$ (c) $G - 5$

Figure 7: Al quitar una arista o un vértice de corte el grafo se desconecta

Definición (Grafo k-conexo)**.** *Un grafo G es k-conexo si es $(k-1)$-conexo y para todo $A \subseteq V(G)$ tal que $|A| = k - 1$ el grafo $G' = G - A$ es conexo.*

Nota: Un grafo 2-conexo (biconexo) es un grafo conexo que no tiene vértices de corte.

Definición (Bosque)**.** *Grafo que no tiene ciclos (acíclico).*

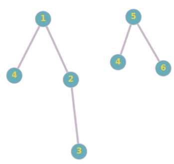


Figure 8: Ejemplo de bosque

Teorema. *Si G es un bosque con al menos una arista, entonces en G hay al menos dos vértices con grado 1.*

Demostración (Vía 1: PBO)**.**

Se hace un proceso iterativo por los vértices. Como en el grafo hay al menos una arista, sea esta $\{v_1, v_2\}$, se toma el vértice v_1.

Si $deg(v_1) = 1$ ya tendríamos uno de los vértices buscados, si no, v_1 tiene al menos 2 vecinos, tomando a cualquier otro adyacente a v_1 distinto de v_2, sea este v_3, si $deg(v_3) = 1$, entonces v_3 es uno de los vértices de grado 1, si no se toma una de los adyecentes a v_3 distinto de v_1, se repite el mismo proceso que con v_1, y así sucesivamente, nótese que nunca se vuelven a visitar vértices anteriormente analizados puesto que esto implicaría la existencia de un ciclo en G, luego el procedimiento eventualmente termina, ya que la cantidad de vértices de grafo es finita y por PBO no es posible un crecimiento infinito en un conjunto acotado superiormente.

Luego este proceso se vuelve a realizar partiendo de v_2 para asi obtener el segundo vértice con estas características $\blacksquare$.

Demostración (Vía 2: Directa)**.**

Tomando $C =< v_1, v_2, ..., v_k >$ el camino más largo de G, los vértices de los extremos v_1 y v_k tienen grado 1 ya que en caso contrario sería posible extender más el camino o volverían a pasar por algún nodo que ya esté en el camino lo cual crearía un ciclo $\blacksquare$.

Definición (Hoja)**.** *A los vértices con $deg(v) = 1$ de un bosque se le denomina hojas.*

Definición (Árbol)**.** *Grafo acíclico y conexo.*

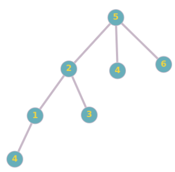


Figure 9: Ejemplo de árbol

Nota: Cada una de las componentes conexas de un Bosque es un Árbol.
Nota: Un árbol es a la vez un bosque.

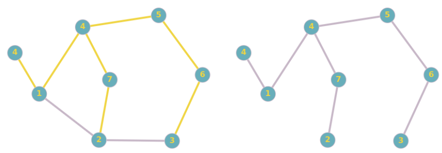
Definición (Árbol Abarcador)**.** *Sea G un grafo, se define T como árbol abarcador de G a un subgrafo en expansión de G que sea acíclico y conexo.*

Teorema. *Todo grafo conexo tiene un árbol abarcador.*

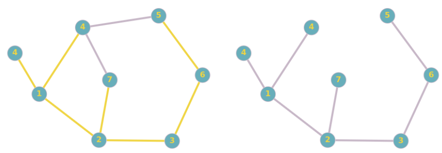
Demostración (Vía Constructiva)**.**

Sea G un grafo conexo, si es acíclico, listo, $T = G$, si no, G tiene ciclos, si se toma un ciclo de G y se quita una asita esto no rompe la conexidad, y este proceso se puede realizar reiteradamente hasta que no queden más ciclos, obteniéndose así un árbol abarcador de G.

Nota: Nótese que el árbol abarcador no es único para G, que además $|E(G)| \geq |E(T)|$ puesto que en el propio proceso de obtención de T se quitan aristas de G en cada paso y que para un grafo no conexo se puede obtener un árbol abarcador por cada componente conexa, generándose así un bosque.



(a) G y posible T árbol abarcador



(b) G y otro posible T árbol abarcador

Teorema (Teorema de las 6 equivalencias)**.** *Sea G tal que $n = |V(G)| \geq 2$, son equivalentes las siguientes proposiciones:*

1. *G es un árbol.*
2. *G no tiene ciclos y $|E(G)| = n - 1$.*
3. *G es conexo y $|E(G)| = n - 1$.*
4. *G es conexo pero si le quitas una arista deja de serlo.*
5. *G es acíclico, pero si le agregas una arista se forma exactamente un ciclo.*
6. *Todo par de vértices en G está conectado exactamente por un camino simple.*

Demostración ($P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_3 \Rightarrow P_4 \Rightarrow P_5 \Rightarrow P_6 \Rightarrow P_1$)**.** *Para demostrar la equivalencia entre las proposiciones, la foma más rápida es hacer un ciclo de implicaciones y demostrar cada una de ellas, así para cualquier par de propiedades se puede demostrar que se llega de una a la otra a través de una cadena de transitividad.*

Demostración ($P_1 \Rightarrow P_2$ Vía: Inducción en $|V(G)| = n$)**.** *G es un árbol $\Rightarrow$ G no tiene ciclos y $|E(G)| = n - 1$.*

Caso base $n = 2$ Como G es arbol, entonces es conexo, luego los dos vértives tienen que estar unidos por una arista de donde $|E(G)| = 1 = n - 1$.

Hipótesis n: Supongamos que para cualquier árbol de n vértices se cumple que este tiene $|E(V)| = n - 1$.

Demostración $n+1$: Sea G un grafo de $n+1$ vértice, como por el teorema anteriormente demostrado sabemos que existen en G al menos dos hojas, sea v una hoja, $G' = G - v$ sigue siendo un árbol ya que quitar vértices no produce ciclos y además como este vértice tiene grado 1 quitarlo no desconecta el grafo. Luego G' es un árbol de n vértices, por lo que cumple con la hipótesis de inducción y $|E(G')| = n-1$. Como $|E(G)| = |E(G')|+1$, ya que junto al vértice v se quita la arista que lo conectaba a G, entonces $|E(G)| = n - 1 + 1 = n$■.

Demostración ($P_2 \Rightarrow P_3$ Vía: Directa)**.** *G no tiene ciclos y $|E(G)| = n-1 \Rightarrow$ G es conexo y $|E(G)| = n - 1$. .*

Sean $Cc_1, Cc_2..., Cc_k$ las componentes conexas de G, con $n_1, n_2, .., n_k$ vértices cada una, como G es acíclico, entonces cada una de sus componentes conexas es un árbol luego

$$|E(G)| = \sum_{i=1}^{k} |E(Cc_i)| = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} n_i - k = n - k$$

Luego $k = 1$ siendo G conexo ■.

Demostración ($P_3 \Rightarrow P_4$ Vía: Árbol Abarcador)**.** *G conexo y $|E(G)| = n - 1 \Rightarrow G$ es conexo pero si se le quita una arista se desconecta.*

Esto es equivalente a demostrar que para que un grafo sea conexo tiene que tener una cantidad de aristas mayor o igual a $n-1$. Ya que si esto se cumple, al G ser conexo y tener $n-1$ arista si le quitamos una perdería su conexidad.

Sea G conexo, entonces se puede obtener T árbol abarcador de G, donde $|E(G)| \geq |E(T)| = n - 1$ luego si G conexo $|E(G)| \geq n - 1$■.

Definición. *Sea G un grafo, la secuencia de grados de G es una lista con los grados de los vértices de G. Un grafo con secuencia d se dice que* ***realiza*** *d.*

Definición (Secuencia gráfica)**.** *Una secuencia $d_1, d_2, ..., d_n$ se dice gráfica si hay un grafo que la realiza.*

Teorema. *Una secuencia de n números no negativos $d_1, d_2, ..., d_n$ es la secuencia de grados de un pseudografo $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} d_i$ es par.*

Demostración ($\Rightarrow$)**.** *Si $d_1, d_2, ..., d_n$ es la secuencia de grados de un pseudografo $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} d_i$ es par*

La demostración es análoga a la de la suma de los grados de un grafo es el doble del número de aristas, lo que en este caso se admiten aritsas múltiples que de igual modo incrementan en 1 el grado de cada vértice en el que inciden y lazos que incrementan en 2 el grado del vértice en el que inciden.

Demostración ($\Leftarrow$)**.** *$\sum_{i=1}^{n} d_i$ es par $\Rightarrow d_1, d_2, ..., d_n$ es la secuencia de grados de un pseudografo*

Para demostrarlo basta con construir un pseudografo con n vértices tal que los grados de estos coincidan con la secuencia. Para ello, creamos n vértices y para aquellos d_i que sean pares, al vértice i le ponemos $\frac{d_i}{2}$ lazos, y a para d_i que son impares al vértice i le ponemos $\frac{d_i-1}{2}$ lazos, como $\sum_{i=1}^{n} d_i$ es par, entonces hay una cantidad par de vértices con grado impar, a cada uno le falta agregarle una arista más para que su grado coincida con su d_i asignado, por lo que se unen en parejas mediante una arista.