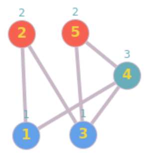
Conferencia 5 - Coloración

11 de mayo de 2025

Definición (Coloración)**.** *Sea G un grafo y k, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, una k-coloración se define como una función $f : V(G) \to \{0, 1, 2, \dots, k\}$*

Definición (Coloración Propia)**.** *Una k-coloración se dice propia si $\forall \{v, w\} \in E(G)$ se tiene que $f(v) \neq f(w)$. Si G tiene una k-coloración propia se dice que G es k-coloreable.*

Definición (Número Cromático)**.** *Se llama número cromático de G, $\chi(G)$, al menor k tal que G es k-coloreable*



(a) G 3-coloreable

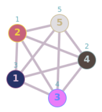
Figura 1: En la figura se colorea G mediante la función $f = \begin{cases} 1, & v \in \{1, 3\} \\ 2, & v \in \{2, 5\} \\ 3, & v \in \{4\} \end{cases}$

Observaciones:

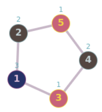
- $\chi(G) \leq |V(G)|$
- $\chi(K_n) = n$
- $\chi(C_{2k}) = 2$
- $\chi(C_{2k+1}) = 3$
- Si un grafo es bipartito es 2-coloreable
- El número cromático es la menor cantidad de conjuntos independientes que se pueden formar en G
- Si H es subgrafo de G entonces $\chi(H) \leq \chi(G)$
- $w(G) \leq \chi(G)$, donde w es el número de clique de G

Definición (Grafo $k-$crítico)**.** *Un grafo G es k-crítico si su número cromático es k y $\forall v \in V(G)$ se tiene que $\chi(G - v) < \chi(G)$*

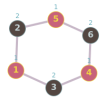
Nota: $\chi(G - v) = k - 1$



(a) K_n es n-crítico



(b) C_{2p+1} es 3-crítico



(c) C_{2p} nunca es k-crítico

Teorema. *Si G es un grafo k-crítico con* $k \geq 2$ *entonces G es conexo y* $\delta(G) \geq k-1$

Demostración (Reducción al Absurdo)**.**

Demostremos que G es conexo
Suponga que G es k-crítico y no es conexo, entonces se descompone en t componentes conexas $c_1, c_2, \ldots, c_t$, luego $k = max(\chi(c_1), \chi(c_2), \ldots, \chi(c_t))$ por lo que existe un i tal que $1 \leq i \leq t$ y $\chi(c_i) = k$ entonces es posible quitar cualquier vértice de cualquier componente conexa que no sea c_i y se mantendría entonces $k = \chi(c_i) = max(\chi(c_1), \chi(c_2), \ldots, \chi(c_t))$, por tanto G no sería k-crítico, lo que es una contradicción. Por tanto G es conexo.

Demostremos la segunda parte.
Supongamos que $\delta(G) < k-1$, entonces sea $v \in V(G)$ tal que
$deg(v) = \delta(G)$, por tanto tomemos G'=G-v. Como G es k-crítico entonces $\chi(G') = \chi(G) - 1$ o sea, se puede colorear a G' con k-1 colores
Si se pone de vuelta a v como $deg(v) < k-1$ entonces v tiene a lo sumo $k-2$ vértices adyacentes a él, que potencialmente tienen todos colores diferentes, como se dispone de k-1 colores, se puede colorear a v con un color que no tenga ninguno de sus adyacentes, luego es posible colorear a G con $k-1$ colores lo que es una contradicción.
Por tanto, queda demostrado que si G es un grafo k-crítico con $k \geq 2$ entonces G es conexo y $\delta(G) \geq k-1$ ■

Teorema. *Sea G un grafo tal que* $\chi(G) = k$ *entonces al menos k vértices de G tienen grado mayor o igual que* $k-1$

Demostración.

Primeramente demostremos el siguiente Lema:

Lema. *Si G es k-coloreable* $\Rightarrow$ *tiene un subgrafo* $k-$*crítico.*

Demostración.

Si G no es k-crítico entonces se puede suprimir un vértice de G tal que $G' = G - v$ siga cumpliendo que $\chi(G') = k$. Este procedimiento se repite, es decir si G' no es $k-$crítico se suprime otro vértice que no modifique el número cromático. Eventualmente se detiene este proceso pues no se puede hacer una eliminación infinita en los vértices del grafo por **PBO**. Por tanto el grafo que se obtiene al terminar el procedimiento es un subgrafo $k-$critico de G ■

(a) G 3-coloreable (b) Subgrafo 3-crítico de G

Figura 3: Ejemplo de subgrafo $k-$crítico

Sea Q el subgrafo $k-$crítico de G, que sabemos existe por **Lema**. Q cumple que $\delta(Q) \geq k-1$ y tiene al menos k vértices. Luego el grado de cualquier vértices es igual o mayor que $k-1$ Como todos los vértices de Q tienen en G un grado mayor o igual al que presentan en Q, se cumple que en G hay al menos k vétices con grado mayor o igual a $k-1$ ■

Teorema. *Sea G un grafo, entonces $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$*

Demostración. *Demostración por inducción en el número de vértices n.*

Caso base: Para $n = 1$ se tiene que $\chi(G) = 1$ y $\Delta(G) = 0$, luego $1 \leq 1 + 0$

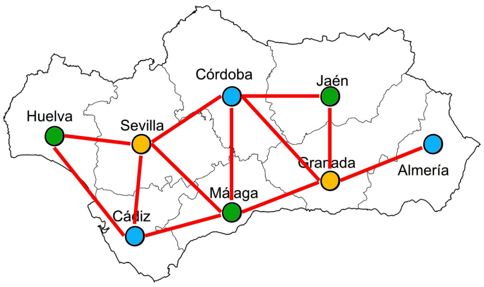
Paso inductivo: Probemos que si se cumple que para un grafo G con n vértices que $\chi(G) \leq 1+\Delta(G)$, entonces se cumple para un grafo de $n+1$ vértices

Sea G con $n+1$ vértices, si se tiene $G' = G - v$ entonces G' tiene n vértices luego $\chi(G\acute{}) \leq 1 + \Delta(G\acute{})$ pero $\Delta(G\text{'}) \leq \Delta(G)$
por tanto
$\chi(G\acute{}) \leq 1 + \Delta(G\acute{}) \leq 1 + \Delta(G)$

Luego es posible colorear a G' con $\Delta(G) + 1$ colores distintos. Note que v a lo sumo tiene $\Delta(G)$ vértices adyacentes, como hay $\Delta(G) + 1$ colores siempre puede colorearse v de modo que no tenga el mismo color que ninguno de sus adyacentes, por tanto es posible colorear a G con $\Delta(G) + 1$ colores distintos, luego $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$ ■

Problema: Cuál es la menor cantidad de colores para representar un mapa, de modo que los territorios adyacentes tengan diferentes colores asignados.

Dado un mapa, el grafo resultante de tomar un vértice en el centro de cada región y poner aristas entre los vértices de regiones que se tocan entre sí, es planar. Por tanto el problema se resume en encontrar el número cromático de un grafo planar.



Teorema. *Sea G un grafo planar entonces $\chi(G) \leq 6$*

Demostración. *Demostración por inducción en el número de vértices.*

Caso base: Para $n = 1$ es trivial que se necesita solo un color.

Paso inductivo: Probemos que si se cumple para n se cumple para n+1

Como G, con $n + 1$ vértices, es planar tiene al menos un vértice cuyo grados es menor o igual a 5, digamos que este vértice es v.

Tomemos el grafo G'=G-v, como G es planar entonces al quitar un vértice a este y dando G', G' continúa siendo planar.

Como el número de vértices de G' es n y es planar, por hipótesis de inducción, se tiene que $\chi(G') \leq 6$. Al reinsertar v, como $deg(v) \leq 5$, se tiene que v tiene a lo sumo 5 vértices adyacentes cuyos colores pueden ser todos potencialmente distintos, basta con colorear v con un color que no tengan sus vecinos, luego es posible colorear a G con 6 colores distintos ■.

Teorema (Teorema de los 5 colores)**.** *El número cromático de un grafo planar es menor o igual que 5*

Demostración. *Demostración por inducción en el número de vértices.*

Caso Base: $n < 5$ es trivial que se puede colorear con 5 colores.

Hipótesis Demostremos que si se cumple para un grafo de n vértices, entonces se cumple para uno de $n + 1$

Ahora, como el grafo G es planar, tiene n+1 vertices, siempre hay un vértice con 5 o menos vértices adyacente, digamos que ese vértice es v. Entonces se tiene $G' = G - v$, con n vértices, que es 5-coloreable (por hipótesis de inducción)

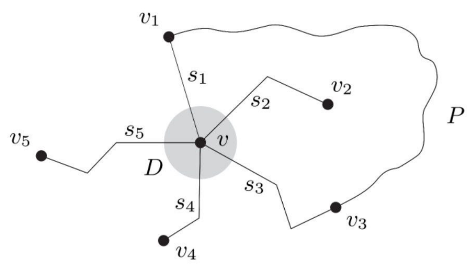
Si $deg(v) \leq 4$ ya estaría demostrado. Si el $deg(v) = 5$ pero sus vértices adyacentes solo usan, entre ellos, 4 colores también estaría demostrado.

Tendríamos que ver el caso con $deg(v) = 5$ y sus adyacentes usan 5 colores.

Para ello llamaremos v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5 a los vértices adayacentes a v y los tendremos en ese mismo oreden en el sentido del giro de las agujas del reloj

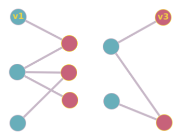
Como sabemos que cada vértice tiene un color diferente de los 5 colores que se utilizan en el grafo, sin pérdida de la generaldidad digamos que $c(v_i) = i$ (el color del vértice $i-$ésimo es i).

Cualquier camino P que exista entre v_1 y v_3, conforma el ciclo $C =< v, v_1, P, v_3, v >$ que separa a los vértices v_2 y v_4, los cuales caen en dos caras diferentes de C.

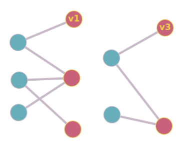


Consideremos entonces el subgrafo $H_{1,3}$, grafo inducido por aquellos vértices de G' tales que su color es 1 o 3, nótese que $v_1, v_3 \in H_{1,3}$. De este subgrafo analicemos todos los caminos que inician en v_1 y alternan entre los dos colores. Estos caminos forman una Componente Conexa dentro del grafo $H_{1,3}$ que por construcción es bipartito. Si ninguno de los caminos que inician en v_1 alcanza a v_3, entonces, es posible invertir el color de todos los vértices involucrados en estos caminos, esto generaría una bipartición válida en la cual a v_1 se le asigna el color 3, donde quedaría el color 1 disponible para colorear al vértice v.

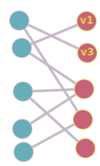
(a) $H_{1,3}$



(b) Caminos que inician en v_1



(c) Alternando color



(d) Reconstruyendo $H_{1,3}$

Si por otra parte, alguno de los caminos alternantes que inicien en v_1 llega a v_3, tomamos entonces el subgrafo $H_{2,4}$ de G', que se conforma análogo al anterior pero esta vez tomando los vértices con color 2 y 4, en este caso, $v_2, v_4 \in H_{2,4}$.

Si tomamos los caminos alternantes que inician en v_2 sabemos que ninguno puede terminar en v_4, porque sabemos que existe un camino P alternante de vértices de colores 1, 3 que separa a los vértices v_2 y v_4 en dos regiones diferentes, por lo que cualquier camino de v_2 a v_4 tiene que pasar por algún vértice de color 1 o 3.

Entonces alternando los colores de los caminos que empiezan en v_2 de $H_{2,4}$, se tiene que ahora v_2 tiene color 4, y el color 2 queda disponible para pintar a v, de donde se puede pintar G con 5 colores $\blacksquare$.

Teorema (Teorema de los 4 colores)**.** *El número cromático de un grafo planar es menor o igual que 4*

La demostración del **Teorema de los 4 colores** se ha realizado con verficiación computacional combinando varias ideas teóricas.