Conferencia 8 - Combinatoria

January 11, 2025

Binomio de Newton
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$

$\binom{n}{k}$ se conocen como coeficientes binomiales

Propiedades de los Coeficientes

1. $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

   Demostración

   $\binom{n}{k}= \frac{n!}{k!(n-k)!}$

   $\binom{n}{n-k}= \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k))!} = \frac{n!}{(n-k)!(k))!}$

2. $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$

   Demostración - 1

   $\binom{n}{k}$ es la cantidad de subconjuntos de tamaño k que pueden obtenerse de un conjunto con cardinalidad n.

   Esta cantidad es también igual a la cantidad de subconjuntos de tamaño k en la que no aparece un elemento a_i más la cantidad de conjuntos del mismo tamaño en los que sí aparece.

   La cantidad de conjuntos en los que no aparece a_i es igual a $\binom{n-1}{k}$

   La cantidad de conjuntos en los que sí aparece a_i es igual a $\binom{n-1}{k-1}$

   Luego $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$

   Demostración - 2

   Desarrollando tanto $\binom{n-1}{k}$ como $\binom{n-1}{k-1}$ y luego se suman y se tiene $\binom{n}{k}$

3. $\binom{n}{k}/\binom{n}{k-1}= \frac{n-k+}{k}$ para $1 \leq k \leq n$

   o lo que es lo mismo $k\binom{n}{k}= (n-k+1)\binom{n}{k-1}$

   Demostración

   Se desarrolla $\binom{n}{k}$ y se desarrolla $\binom{n}{k-1}$ y se divide el primero entre el segundo y el resultado es $\frac{n-k+1}{k}$

4. $\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\ldots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$
   o lo que es lo mismo $\sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k}=\binom{n+1}{k+1}$

Demostración

Se desarrolla $\binom{n+1}{k+1}$ como $\binom{n}{k}$+$\binom{n}{k+1}$

luego se desarrolla $\binom{n}{k+1}$ como $\binom{n-1}{k}$+$\binom{n-1}{k+1}$

y así sucesivamente hasta llegar al término $\binom{k+2}{k+1}$ que se desarrolla como $\binom{k+1}{k}$+$\binom{k+1}{k+1}$ y $\binom{k+1}{k+1}$ es igual a $\binom{k}{k}$

Ejemplo

¿De cuántas formas diferentes se puede escoger un grupo de 5 personas de un total de 10 donde una de las 5 es líder?

Vía 1:

Hay $\binom{10}{5}$ personas posibles conjuntos de 5 personas, y como en cada conjunto cada una de las personas puede ser líder, entonces se tiene $5\binom{10}{5}$

Vía 2:

Tomemos todos los subconjuntos posibles en los que no hay líderes aún $\binom{10}{4}$, entonces cada uno de ellos puede ser liderado por una de las personas que no está en el conjunto, que son $10 - 4$ por lo que se tiene $6\binom{10}{4}$

Noten que si se generaliza el problema a un grupo de tamaño k de un total de n posibles dónde cada uno de los miembros puede liderar, entonces se tiene $k\binom{n}{k}$= $(n-k+1)\binom{n}{k-1}$

Definición. *Un multiconjunto es el par* $< A, m >$ *donde* A *es un conjunto y* m *es una función* $m : A \to \mathbb{N}$.

Se dice que para cada a de A la multiplicidad de a es el número $m(a)$.

Si el conjunto A es finito entonces el tamaño o longitud del multiconjunto $< A, m >$ es la suma de todas las multiplicidades de los elementos de A, o sea, $\sum_{a\in A} m(a)$

Un submulticonjunto $< B, n >$ del multiconjunto $< A, m >$ cumple que $B \subseteq A$ y $n : B \to \mathbb{N}$ tal que $n(x) \leq m(x)$ para todo $x \in B$

Teorema. *Sea un multiconjunto* N *con* n *objetos donde hay* n_1 *objetos de tipo 1,* n_2 *objetos de tipo 2 y así hasta* n_k *objetos de tipo* k *donde* $n = \sum_{i=1}^{k} a_i$ *Entonces el número de permutaciones distintas de* N *es* $\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$

Ejemplo
Pruebe que $k!^{(k-1)!}|(k!)!$

Si se tiene un conjunto de $k!$ elementos donde hay $(k-1)!$ tipos diferentes y de cada tipo hay k elementos entonces la cantidad de permutaciones distintas de este conjunto es

$\frac{(k!)!}{k!k!...k!} = \frac{(k!)!}{k!^{(k-1}!}$

luego como el número de permutaciones es un número entero entonces $k!^{(k-1)!}|(k!)!$

Teorema. *El número de formas de particionar un conjunto de n elementos distintos en k categorías diferentes de forma que haya n_1 objetos en la categoría 1, n_2 objetos en la categoría 2 y así hasta llegar a n_k objetos en la categoría k, donde $\sum_{i=1}^{k} n_i$ es $\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$*

Demostración

$\binom{n}{n_1}$ cantidad de formas de asignar n_1 objetos a las categoría 1
luego $\binom{n-n_1}{n_2}$ es la cantidad de formas de dar n_2 objetos a las categoría 2
por tanto $\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\ldots\binom{n-n_1-n_2-...-n_k-1}{n_k}$ sería el total de formas

Cuando se desarrolla esta expresión se llega a $\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$

Teorema. *El número de formas de particionar n objetos iguales en k categorías diferentes es $\binom{n+k-1}{k-1}$*

Demostración
Este problema es equivalemte a tener una secuencia de $n+k-1$ elementos iguales y convertir a $k-1$ de estos elementos en separadores. Luego, la solución tenemos el conjuntos de todas las posiciones que tiene tamaño $n+k-1$ habría que obtener todas las posibles combinaciones de $k-1$ posiciones y esto es $\binom{n+k-1}{k-1}$