

# Conferencia 9 - Combinatoria

November 18, 2025

**Principio de Inclusión - Exclusión.** Permite calcular la cardinalidad de la unión de varios conjuntos

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{i \in I \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \\ |I|=k}} |\cap A_i|$$

### Ejemplo

De 200 estudiantes 50 toman el curso de matemáticas discretas, 140 el curso de economía y 24 ambos. Como ambos cursos programaron exámenes para el día siguiente, sólo los estudiantes que no estén en ninguno de estos cursos podrán ir a la fiesta de la noche. Se quiere ver cuántos estudiantes irán a la fiesta.

Si  $A_1$  es el conjunto que estudia discreta y  $A_2$  el de los que estudian economía entonces  $|A_1 \cup A_2| = 50 + 140 - 24 = 166$  por lo que irán a la fiesta  $200 - 166 = 34$

### Demostración

Sea un elemento  $x$  del universo

Si  $x$  no cumple ninguna propiedad entre  $A_1, A_2, \dots, A_n$  entonces no se cuenta nunca en la suma.

Ahora, verifiquemos que si aparece entonces solamente se cuenta una vez.

Si  $x$  cumple exactamente una propiedad, o sea,  $\exists i$  tal que  $x \in A_i$  pero  $\forall j, j \neq i$  implica que  $x \notin A_j$ ,  $x$  se cuenta solo una vez

Si  $x$  cumple  $k$  propiedades al mismo tiempo entonces:

se cuenta  $k$  en  $\sum_{1 \leq i \leq n} |A_i|$

se cuenta  $\binom{k}{2}$  en  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j|$

...

...

se cuenta  $\binom{k}{k}$  en la intersección de  $k$  propiedades

No tiene sentido verificar cuántas veces se cuenta  $x$  en la intersección de más de  $k$  propiedades porque solo aparece en  $k$  conjuntos

Entonces  $x$  se cuenta:

$$\begin{aligned} k - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \dots + (-1)^{k+1} \binom{k}{k} \\ = \binom{k}{0} + [-\binom{k}{0} + \binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \dots + (-1)^{k+1} \binom{k}{k}] \\ = \binom{k}{0} = 1 \end{aligned}$$

**Definición.** Sea un universo tal que existen  $m$  posibles propiedades  $P_1, P_2, \dots, P_m$ .

Si  $\{P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_k}\}$  es un subconjunto de las  $m$  posibles propiedades se denota  $N_{i_1, i_2, \dots, i_k}$  a la cantidad de elementos que cumplen las propiedades  $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_k}$ .  $s_k$  es la cantidad de veces que se cumplen  $k$  propiedades

Entonces se define  $S_0 = n$  donde  $n = |U|$  y  $S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m} N_{i_1, i_2, \dots, i_k}$  con  $1 \leq k \leq m$

Entonces el Principio de **Inclusión - Exclusión** puede escribirse:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m| = S_1 - S_2 + S_3 - \dots + (-1)^{m+1} S_m$$

$$|A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_m^c| = S_0 - S_1 + S_2 - \dots + (-1)^m S_m$$

**Teorema. Generalización del Principio de Inclusión - Exclusión.**

Sea  $U$  un conjunto finito y  $P$  un conjunto arbitrario de  $m$  propiedades, el número de elementos de  $U$  que poseen exactamente  $R$  propiedades y  $0 \leq R \leq m$  es  $N(R) = \sum_{k=0}^{m-R} (-1)^k \binom{k+R}{k} S_{k+R}$

### Demostración

Sea  $x$  un elemento del universo que cumple  $t$  propiedades

Si  $t < R$  se cuenta 0 veces

Se puede notar que la fórmula comienza por  $S_R$  lo que implica que  $x$  no aparece en la intersección de más de  $t$  elementos

Si  $t = R$  se cuenta 1 vez, solo se cuenta en  $S_R$

Si  $t > R$  entonces  $N(R) = \sum_{k=0}^{t-R} (-1)^k \binom{k+R}{k} S_{k+R}$  porque no se va a contar en intersecciones de más de  $t$

Ahora  $k+R \leq t$  por tanto el elemento se cuenta  $\binom{t}{k+R}$  veces en  $S_{k+R}$

por tanto  $x$  se cuenta en  $N(R)$

$$\sum_{k=0}^{t-R} (-1)^k \binom{k+R}{k} \binom{t}{k+R}$$

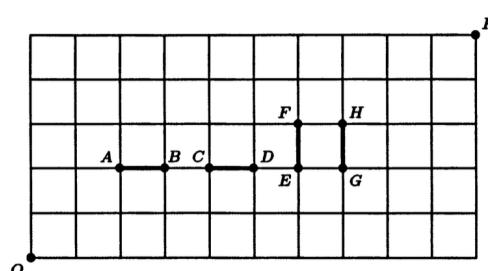
ahora  $\binom{k+R}{k} \binom{t}{k+R} = \binom{t}{R} \binom{t-R}{k}$  (razonamiento combinatorio)

$$\text{luego } \sum_{k=0}^{t-R} (-1)^k \binom{k+R}{k} \binom{t}{k+R} = \sum_{k=0}^{t-R} (-1)^k \binom{t}{R} \binom{t-R}{k}$$

$$= \binom{t}{R} \sum_{k=0}^{t-R} (-1)^k \binom{t-R}{k} = 0$$

**Teorema.** Sea  $U$  un conjunto finito de elementos y  $P$  un conjunto arbitrario de  $m$  propiedades, el número de elementos de  $U$  que satisfacen al menos  $R$  propiedades y  $0 \leq R \leq m$  es  $\bar{N}(R) = \sum_{k=0}^{m-R} (-1)^k \binom{k+R-1}{R-1} S_{k+R}$

### Ejemplo 1



Cuántos caminos hay desde O hasta P que sean mínimos y que pasen por exactamente dos segmentos sombreados?

**Principio del Palomar.** Si se tiene un palomar con  $n$  agujeros o casillas y  $m$ ,  $m > n$ , palomas, entonces existe una casilla que contiene más de una paloma. De manera general, existe una casilla que tiene al menos  $\lceil \frac{m}{n} \rceil$  palomas.

### Ejemplo 1

En todo conjunto de  $n$  números enteros es posible encontrar un subconjunto tal que la suma de los elementos del subconjunto es divisible por  $n$ .

Tomando los subconjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  tal que  $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n$ :

$$A_1 = \{a_1\}$$

$$A_2 = \{a_1, a_2\}$$

$$A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$$

...

...

$$A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

Si hay algún  $A_i$  tal que la suma de sus elementos ( $S(A_i)$ ) cumple que  $S(A_i) \equiv 0 \pmod{n}$  entonces ya queda demostrado.

Si esto no ocurre entonces para estos conjuntos en sus sumas hay  $n - 1$  posibles restos entonces, por el **Principio del Palomar**, hay dos que dejan el mismo resto, o sea, existen  $i, j$   $i \neq j$  tal que  $S(A_i) \equiv S(A_j) \pmod{n}$  luego  $S(A_i) - S(A_j) \equiv 0 \pmod{n}$

Entonces se toma el conjunto  $A_i - A_j = A_{i-j}$  asumiendo, sin perdida de generalidad, que  $|A_i| > |A_j|$ , luego  $S(A_{i-j}) \equiv 0 \pmod{n}$

### Ejemplo 2

Si tenemos  $n$  personas en una habitación, entonces al menos dos de ellas tienen el mismo número de conocidos dentro del grupo. (Se asume que nadie se conoce a sí mismo y que si A conoce a B entonces B conoce a A).

### Ejemplo 3

Sea la relación de conocerse una relación mutua, entonces en un grupo de 6 personas hay al menos 3 personas que se conocen entre ellos o al menos 3 que no se conocen entre ellos.