Conferencia 8 - Grafos Dirigidos

18 de mayo de 2025

Definición. *Un **grafo dirigido** (digrafo) consiste en dos conjuntos V, el conjunto de los vértices, y E, el conjunto de aristas, formado ahora por pares ordenados del conjunto V.*

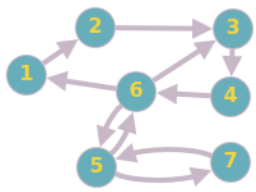
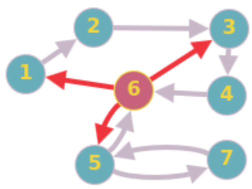


Figura 1: Ejemplo de Digrafo

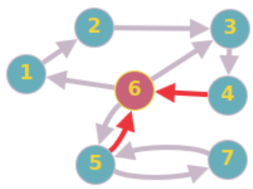
Definición. *Sean $v, w \in V(G)$ donde G es un digrafo, v,w son adayacentes si la arista $< v, w > \in E(G)$ o si la arista $< w, v > \in E(G)$. Si $< v, w > \in E(G)$ se dice que la arista $< v, w >$ es incidente desde v y que es incidente a w.*

Definición. *Sea G un digrafo y $v \in V(G)$:*

- *El grado exterior de v es el número de aristas incidentes desde v (exdeg(v) o outdeg(x))*
- *El grado interior de v es el número de aristas incidentes sobre v (indeg(v))*



(a) $outdeg(6) = 3$



(b) $intdeg(6) = 2$

Teorema. *En todo digrafo se cumple que:*

- $\sum_{v \in V(G)} exdeg(v) + indeg(v) = 2|E|$
- $\sum_{v \in V(G)} exdeg(v) = \sum_{v \in V(G)} indeg(v) = |E|$

Definición. *Un camino en un digrafo G es una secuencia de vértices de G $c =< v_1, v_2, \ldots, v_k >$ tal que $k > 1$ y $\forall i,\ 1 \leq i \leq k-1$ la arista $< v_i, v_{i+1} > \in E(G)$.*
Luego:

- *El camino es simple si no se repiten vértices*
- *Si $v_1 = v_k$ el camino es cerrado*

- *Un ciclo es un camino cerrado donde solo se repiten el primer y últino vértice*

Definición. *El **grafo subyacente** es el multigrafo que resulta de quitar la orientación de las aristas de un digrafo*

(a) G (b) Grafo subyacente de G

Definición. *Un digrafo D es conexo si el grafo subyacente de D es conexo*

Definición. *Un digrafo es **fuertemente conexo** si todo par de vértices del digrafo es mutuamente accesible, o sea si hay camino de uno al otro, y viceversa*

(a) G fuertemente conexo (b) G no fuertemente conexo

Figura 4: En el ejemplo, en a), para todo par de vértices hay un camino por lo que es fuertemente conexo, mientras que en b), desde el vertice $v = 7$, no es posible alcamnzar ningún otro.

Definición. *Un grafo es **orientable** si es posible orientar sus aristas de modo que el digrafo resultante sea fuertemente conexo*

Teorema. *Sea G un grafo conexo, entonces G es orientable si y solo si G es conexo y no tiene puentes*

Demostración ($\Rightarrow$).

La demostración de que G tiene que ser conexo es trival, porque orientar las aristas no va a crear caminos entre las componentes conexas de G.

Demostraremos que si G tiene puentes entonces G es no orientable.

Sea e una arista puente tal que $e = \{u, v\}$.

Como e es un puente al removerla u y v quedan en componentes conexas distintas, lo que explica que no exista camino que los conecte. Por lo que si tratamos de orientar las aristas de $G - e$ no es posible llegar de u a v (y viceversa).

Finalmente la ariasta $\{u, v\}$ se tiene que orientar, si se agrega como $< u, v >$ no habría camino de v a u en el grafo, análogo para cuando se orienta como $< v, u >$. Por tanto G no es fuertemente conexo luego G no es orientable.

Demostración $(\Leftarrow)$**.**

Vamos a utilizar el siguiente lema.

Lema. *Una arista es puente (arista de corte) si y solo si no participa en ningún ciclo*

Demostración. *Demostración del lema*

Demostremos que si participa en algún ciclo no es puente.

Sea $e = \{u, v\} \in E(G)$ tal que e participa en el ciclo $c =< u, v, v_1, v_2, \ldots, v_k, u >$ entonces $c_1 =< v, v_1, v_2, \ldots, v_k, u >$ es un camino que contiene a los vértices u,v. Entre todo par de vértices de G, si el camino que los une contiene a la arista $\{u, v\}$, esta puede ser reemplazada por el camino c_1, por tanto el grafo resultante de eliminar $\{u, v\}$ no varió en la cantidad de componentes conexas, entonces E no es una arista puente.

En el otro sentido, si no es una arista puente entonces participa en algún ciclo.

Sea $e = \{m, v\} \in E(G)$ tal que no es arista puente, en $G-e$ existe un camino que conecta a m con v que no contiene a e.

Sea este $< m, v_1, v_2, \ldots, v_k, v >$ luego $c =< m, v_1, v_2, \ldots, v_k, v, m >$ es un ciclo al que pertenece e.

Retornemos a la demostración del teorema.

Sea G' el mayor subgrafo orientable de G, suponga que hay vértices de G que no pertenecen a G'.

Sea entonces $v \in G$ y $v \notin G'$, note que existe $u \in G'$ tal que que $\{u, v\} \in V(G)$ pues G es conexo.

Como G no tiene puentes, por el lema anterior entonces $\{u, v\}$ pertenece a algún ciclo. Sea este $c =< u, v, v_1, v_2, \ldots, v_k, u >$, y sea w el primer vértice de c desde v tal que pertenece a $w \in V(G')$ (Este existe debido a que u pertenece a G' y es el último vértice de c).

Entonces se tomará el camino no dirigido de u hacia w y se orientará de la siguiente forma c'=$< u, v, \ldots, w >$ tal que las aristas se dirijan en ese sentido.

Note que para todo vértice que pertenece a G' se puede acceder a todo vértice de c' (puesto que G' es orientable y todo vértice tiene un camino en G' hasta u, luego de ahi moviéndose por c' se alcanzan todos los vértices del camino) y cada vértice de c' puede acceder a w, lo que implica que puede acceder a todo vértice de G' y por tanto $G' + c'$ es un subgrafo de G que es orientable y es mayor que G' lo que es una contradicción, luego el mayor subgrafo de G que es orientable es el propio G .

Definición. *Un* ***torneo*** *es un digrafo que tiene como grafo subyacente un grafo completo, o sea, un grafo completo orientado*

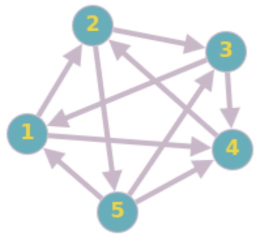


Figura 5: Ejemplo de Torneo

Teorema. *En todo torneo hay un camino de Hamilton.*

Demostración. *Demostración por inducción el número de vértices*

Caso base: Si n=2 se cumple.

Paso inductivo
Demostremos que si se cumple para n se cumple para n+1
Sea T'=T-v
Note que T' es un torneo, pues tiene n vértices (hipótesis de inducción), y por tanto existe un camino de Hamilton en T'. Sea este $c =< v_1, v_2, \ldots, v_n >$.
Ahora:

- Si $outdeg(v) = 0$ entonces $indeg(v) = n$ luego el camino $< v_1, v_2, \ldots, v_n, v >$ es de Hamilton

Sea $outdeg(v) = k$ tal que $1 \leq k < n$, entonces se pone v delante del primer vértice v_i tal que $< v, v_i >\in G$ (que sabemos existe porque $k > 0$). Si $v_i = v_1$ entonces se forma el camni de Hamilton $c =< v, v_1, v_1, ..., v_n >$, en cualquier otro caso, como v_i es el primero tal que $< v, v_i >\in G$, entonces para v_{i-1} se tiene que $< v_{i-1}, v >\in G$, de donde se forma el camino de Hamilton $c =< v_1, ...v_{i-1}, v, v_i, ..., v_n >$

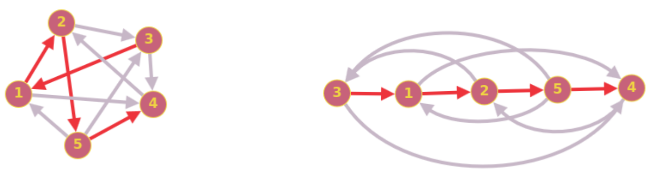


Figura 6: Ejemplo de un camino de Hamilton en un Torneo

Teorema. *En un digrafo D se cumple que existe un camino de longitud* $\chi(D)-1$

Demostración.

Sea A un conjunto minimal de arcos tal que cuando se elimine el grafo resultante $D - A$ sea acíclico.
Sea k la longitud del camino simple más largo de $D - A$.

Aplíquese la siguiente función de coloración para los vértices de $D - A$, $f(v) = p$ si $p - 1$ es la longitud del camino más largo desde v.

Note que para todo vértice v de $D - A$ si $< v, w > \in E(D - A)$ entonces $f(v) \neq f(w)$

Probemos esto, sea $< w, \ldots, x >$ de longitud $p - 1$, el camino de mayor longitud desde w, nótese que ese camino no contiene a v puesto que $D - A$ acíclico. Luego el camino $< v, w, \ldots, x >$ es de longitud p, por lo que para $v,\ f(v) \geq p + 1 \neq p = f(w)$

Igualmente, se demuestra que para todo vértice v que pertenece a un camino simple se tienen colores distintos.

Como el camino de longitud máxima es de tamaño k entonces para colorear a $D - A$ bastan $k + 1$ colores.

Note que añadir una arista de A necesariamente crea un ciclo, puesto que A era minimal, por tanto si $e =< x, y > \in A$ entonces en $D - A$ existía un camino desde x hasta y, y por tanto sus colores son distintos.

Al añadir todas las aristas de A el grafo continúa pudiendose colorear con $k + 1$ colores, entonces $\chi(D) \leq k + 1$ luego $k \geq X(D) - 1$