Conferencia 7 - Combinatoria

January 13, 2025

Definición. *Sea N_n el conjunto $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, se dice que A tiene n elementos o que $|A| = n$ si existe $f : N_n \to A$ biyectiva. Si A es vacío o tiene n elementos se dice que es un conjunto finito*

Definición. *Dos conjuntos A y B se dice coordinables y se denota $A \sim B$ si existe $f : A \to B$ biyectiva*

Si A es un conjunto no vacío y tiene cardinalidad n entonces A es coordinable con N_n

Nota
Consideremos funciones totales, en caso de no serlo se especificará

Teorema. *Si A es coordinable con B entonces $|A| = |B|$*

Demostración
Si $|A| = n$
como A finito entonces existe $f : N_n \to A$ biyectiva
y como es A es coordinable con B existe $g : A \to B$ biyectiva
luego si se tiene la compuesta $g \circ f : N_n \to B$ esta es biyectiva pues f y g son biyectvas por lo que B es coordinable con N_n y tiene cardinalidad n con lo que $|B| = n$

Ejemplo
En un torneo con ganador único donde comienzan n jugadores ¿cuántos partidos se realizan si se descalifica al que pierde un partido?
Se tiene A como el conjunto de los juegos que se efectúan
y se tiene B como el conjunto de los jugadores descalificados
Se tiene $f : A \to B$ donde $< x, y >\in f$ si y pierde en el partido x
Es fácil ver que f es biyectiva y, por tanto, A es coordinable con B:
f es inyectiva porque para dos partidos diferentes son descalificados judadores diferentes
f es sobrectiva porque todos los jugadores descalificados fue producto de un partido
Como son n jugadores y hay un solo ganador entonces hay $n-1$ jugadores descalificados
Luego $|B| = n - 1$ y por tanto como $|A| = |B|$ entonces$|A| = n - 1$

Teorema. *Sean A y B conjuntos finitos, si $A \cap B = \varnothing$ entonces*
$|A \cup B| = |A| + |B|$

Principio de la Suma. *Si un suceso A puede ocurrir de n maneras y un suceso B puede ocurrir de m maneras y, A y B no pueden ocurrir simultáneamente, entonces el suceso $A \vee B$ sucede de $n+m$ maneras diferentes.*

Teorema. *Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos finitos disjuntos por pares entonces $| \cup_{i=1}^{n} A_i| = |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} A_i$*

Generalización del Principio de la Suma. *Si se tienen k posibles sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_k$, donde ningún par de ellos ocurre simultáneamente, y cada suceso puede ocurrir de n_i maneras respectivamente $(1 \leq i \leq k)$, entonces el suceso $A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_k$ sucede de $\sum_{i=1}^{k} n_i$ maneras diferentes.*

Teorema. *Si A y B son conjuntos finitos entonces la cardinalidad del conjunto producto es $|A \times B| = |A| * |B|$*

Principio del Producto. *Si un primer objeto puede escogerse entre n posibles, y después un segundo objeto puede escogerse entre m posibles, entonces simultáneamente ambos objetos pueden escogerse de nm maneras distintas.*

Teorema. *Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos finitos entonces la cardinalidad del conjunto producto de todos ellos es*

$| \prod_{i=1}^{n} A_i| = |A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$

Genralizacion del Principio del Producto. *Si se quieren escoger k posibles objetos y el primero se puede escoger de entre n_1 posibles objetos, el segundo entre n_2 posibles objetos y así sucesivamente hasta que el k-ésimo se puede escoger de n_k posibles objetos, entonces simultáneamente los k objetos pueden de $\prod_{i=1}^{k} n_i$ maneras distintas.*

Ejemplo

- ¿Cuántos elementos tiene el conjunto potencia de $|A|$?
  Cómo hay $|A|$ elementos entonces cada uno de estos puede aparecer o no en cada subconjunto de A, que son los elementos de 2^A, luego la cantidad de subconjuntos sería $2 * 2 * ... * 2$ donde se múltiplican $|A|$ veces, por tanto $|2^A| = 2^{|A|}$

- ¿Cuántos números de 7 dígitos hay que comienzan con 428 y terminan en 3 o 6?
  Se tiene $428D_4D_3D_2D_1$ y para D_4, D_3 y D_2 hay 10 posibilidades (10 dígitos) mientras que para D_1 solo hay 2 posibilidades, luego hay
  $10 * 10 * 10 * 2 = 2000$ números posibles

- ¿Cuántos divisores tiene n?
  $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$ luego tiene $(e_1+1)(e_2+1)\dots(e_k+1)$ divisores
  y si fueran divisores propios serían $(e_1+1)(e_2+1)\dots(e_k+1)-2$

Definición. *Una **permutación** de n objetos es una ordenación de estos en fila. Se denota por $P(n)$ o por P_n*

Teorema. *Si se tienen n objetos diferentes entonces $P_n = n!$*

Demostración

Una permutación de n objetos se puede ver como las diferentes maneras de escoger n objetos. El primer objeto a seleccionar se puede escoger de n posibles objetos. El segundo objeto se escoge de los $n-1$ restantes, el tercero de los $n-2$ y así sucesivamente hasta que quede el último objeto. Entonces, por el Principio del Producto, las distintas maneras de escoger estos n objetos sería $n*(n-1)*(n-2)*\dots*2*1$ que es $n!$.

Ejemplo Si se va a formar un comité que involucra presidente, tesorero y secretario, habiendo 3 candidatos a, b, c ; cuando se elige por sorteo los cargos sucesivamente, hay $3! = 6$ posibilidades u ordenaciones: abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Definición. *Una k-**permutación** (conocido como variaciones) de un conjunto S es una secuencia de k elementos distintos de S. Se denota $P(n,k)$, o por V_k^n*

Teorema. $V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$

Demostración

Similar a la demostración anterior, hay que escoger k objetos de n posibles $(k \leq n)$, entonces el primer objeto se puede escoger de n posibles objetos, el segundo de $n-1$ posibles, el tercero de $n-2$ posibles y así sucesivamente hasta que el k-ésimo se puede escoger de entre $n-(k-1)$ posibles objetos. Entonces, por el Principio del Producto serían $n*(n-1)*(n-2)*\dots*(n-(k-1))$.

Por tanto $V_k^n = n*(n-1)*(n-2)*\dots*(n-(k-1))$

Ahora, si se multiplica y se divide por $(n-k)!$ se tiene

$V_k^n = \frac{n*(n-1)*(n-2)*\dots*(n-(k-1))*(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$

Ejemplo Si se va a formar un comité que involucra presidente, tesorero y secretario, habiendo 10 candidatos; cuando se elige por sorteo los cargos sucesivamente, hay $\frac{10!}{(10-3)!=\frac{10!}{7!}} = 10*9*8 = 720$ posibilidades u ordenaciones

Definición. *Sean n objetos, una combinación de n en k es un subconjunto de k objetos tomados de los n. Se denota por $C(n,k)$ o C_k^n o $\binom{n}{k}$*

Teorema. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Demostración

Con las variaciones de n en k se tendrían todas las formas ordenadas de elegir k objetos, lo que sería $\frac{n!}{(n-k)!}$. Pero aquí se están contando varias veces las variaciones donde aparecen los mismos objetos pero que están ordenados de distinta forma. Entonces habría que dividir por la cantidad de ordenamientos diferentes de k objetos. Pero todos los posibles ordenamientos de k objetos no es más que sus posibles permutaciones que es $k!$. Entonces se tiene $\binom{n}{k} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Ejemplo

¿Cuántos rectángulos hay en un tablero de $m \times n$?

Son $n+1$ líneas verticales y $m+1$ líneas horizontales

Entonces hay que escojer dos líneas verticales y dos líneas horizontales por cada posible rectángulo. En estos casos no importa el orden, por tanto son combinaciones de 2.

Entonces sería $\binom{n+1}{2}\binom{m+1}{2}$