Conferencia 8 - Combinatoria

January 22, 2025

Binomio de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$\binom{n}{k}$ se conocen como coeficientes binomiales

Propiedades de los Coeficientes

1.
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Demostración

$\binom{n}{k}$ representa la cantidad de formas en que se pueden seleccionar k elementos de un conjunto que posee n elementos, esto pudiera verse como de cuántas formas puede particionarse el conjunto de n elementos en dos categorías A y B de modo que la categoría A tenga k elementos y B los $n-k$ elementos restantes, de donde el número de particiones en los conjuntos A y B también se pudieran contar a partir de conocer de cúantas formas podemos poner $n-k$ elementos en el conjunto B y dejar los k restantes en el conjunto A, valor que se obtiene mediante la expresión $\binom{n}{n-k}$.

Luego $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

2.
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Demostración

$\binom{n}{k}$ es la cantidad de subconjuntos de tamaño k que pueden obtenerse de un conjunto con cardinalidad n.

Esta cantidad es también igual a la cantidad de subconjuntos de tamaño k en la que no aparece un elemento a_i más la cantidad de conjuntos del mismo tamaño en los que sí aparece.

La cantidad de conjuntos en los que no aparece a_i es igual a $\binom{n-1}{k}$

La cantidad de conjuntos en los que sí aparece a_i es igual a $\binom{n-1}{k-1}$

Luego $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$

3.
$$k\binom{n}{k} = (n-k+1)\binom{n}{k-1} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Demostración

Las tres expresiones cuentan el número de formas de seleccionar un subgrupo de k personas de un grupo de n personas y asignar a uno como líder.

La primera expresiín cuenta de cuántas formas se puede seleccionar k de n y de los k seleccionados escoger uno de ellos para ser el líder, lo cual por principio de multiplicación queda $k\binom{n}{k}$.

La segunda expresión cuenta de cuántas formas se puede seleccionar $k-1$ personas del grupo y de las restantes seleccionar a una como líder y agregarla a la selección anterior, teniendose finalmente cuantos subgrupos hay de k personas y una de ellas líder $(n-k+1)\binom{n}{k-1}$.

La tercera expresión cuanta de cuantas formas se puede selccionar al líder entre las n personas del grupo y luego seleccionar a $k-1$ miembros de las $n-1$ personas restantes, contando de igual modo los subgrupos de k personas donde una de ellas es líder.

4.
$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

o lo que es lo mismo $\sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k}=\binom{n+1}{k+1}$

Demostración

El miembro derecho de la igualdad represnta el número de formas en que se pueden seleccionar $k+1$ elementos de un conjunto de $n+1$ elementos. De igual modo cada sumando de la parte izquierda de la igualdad representa de cuantas formas seleccionar $k+1$ elementos de un conjunto de n elementos, pero en cada uno fijando que el $k+1$-ésimo elemento es el que ocupa la posicion $k+i+1$ y que los restantes k elementos se toman de la posicion 1 a la $k+i$. Es decir:

$\binom{k}{k}$ cuenta los casos donde el se toman k elementos desde el 1 al k y el elemento $k+1$ es el que toma la posicion $k+1$.

$\binom{k+1}{k}$ cuenta los casos donde el se toman k elemantos desde el 1 al $k+1$ y el elemento $k+1$ es el que toma la posicion $k+2$.

$\binom{k+2}{k}$ cuenta los casos donde el se toman k elementos desde el 1 al $k+2$ y el elemento $k+1$ es el que toma la posicion $k+3$.

y así sucesivamente hasta que $\binom{n}{k}$ cuenta los casos donde el se toman k elementos desde el 1 al n y el elemento $k+1$ es el que toma la posicion $n+1$.

Al sumar todos estos términos se obtiene en general el número de formas de escoger $k+1$ elementos de un conjunto de $n+1$ elementos.

Ejemplo
Si se desea computar el valor de la suma $\sum_{i=1}^{n} i$, tenemos que:

$$1 = \binom{1}{1}\ 2 = \binom{2}{1}\ 3 = \binom{3}{1} \ldots n = \binom{n}{1}$$

Luego $\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} \binom{i}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = \frac{n(n+1)}{2}$

Definición. *Un multiconjunto es el par $< A, m >$ donde A es un conjunto y m es una función $m : A \to \mathbb{N}$.*

Se dice que para cada a de A la multiplicidad de a es el número $m(a)$.

Si el conjunto A es finito entonces el tamaño o longitud del multiconjunto $< A, m >$ es la suma de todas las multiplicidades de los elementos de A, o sea, $\sum_{a \in A} m(a)$

Un submulticonjunto $< B, n >$ del multiconjunto $< A, m >$ cumple que $B \subseteq A$ y $n : B \to \mathbb{N}$ tal que $n(x) \leq m(x)$ para todo $x \in B$

Teorema. *Sea un multiconjunto N con n objetos donde hay n_1 objetos de tipo 1, n_2 objetos de tipo 2 y así hasta n_k objetos de tipo k donde $n = \sum_{i=1}^{k} a_i$ Entonces el número de permutaciones distintas de N es*

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

Demostración. *Sea P el número total de permutaciones de un conjunto de n elementos, sabemos que $P = n!$, luego sea X el número total de permutaciones sin repeticiones, por cada permutación que se haya contado en X, si en dicha permutacion intercambiamos los n_1 objetos de tipo 1 seguimos obteniendo permutaciones iguales, pero que en P se cuentan como diferentes, lo mismo con los n_2 objetos de tipo 2 y en general con los n_i objetos de tipo i; esto por principio de la multiplicación sería $Xn_1!n_2!...n_k!$ y aquí como por cada permutación diferente estamos contando todas sus réplicas que se* *generan al permutar los objetos iguales entre sí, en general estamos contando todas las permutaciones del conjunto de n elementos, luego* $P = Xn_1!n_2!...n_k!$ *de donde* $X = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$

Ejemplo
Pruebe que $k!^{(k-1)!}|(k!)!$

Si se tiene un conjunto de $k!$ elementos donde hay $(k-1)!$ tipos diferentes y de cada tipo hay k elementos entonces la cantidad de permutaciones distintas de este conjunto es

$$\frac{(k!)!}{k!k!\dots k!} = \frac{(k!)!}{k!^{(k-1)!}}$$

luego como el número de permutaciones es un número entero entonces $k!^{(k-1)!}|(k!)!$

Teorema. *El número de formas de particionar un conjunto de n elementos distintos en k categorías diferentes de forma que haya* n_1 *objetos en la categoría 1,* n_2 *objetos en la categoría 2 y así hasta llegar a* n_k *objetos en la categoría k, donde* $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ *es*

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\dots\binom{n-n_1-n_2-...-n_{k-1}}{n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

Demostración

$\binom{n}{n_1}$ cantidad de formas de asignar n_1 objetos a las categoría 1
luego $\binom{n-n_1}{n_2}$ es la cantidad de formas de dar n_2 objetos a las categoría 2
por tanto $\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\dots\binom{n-n_1-n_2-\dots-n_k-1}{n_k}$ sería el total de formas

De igual modo este problema se pudiera resolver mediante un enfoque de permutaciones sin repetición, puesto que si ponemos los n elementos dispuestos uno al lado del otro en una permutación, y designamos los n_1 primeros a la categoría 1, los n_2 siguientes a la categoría 2, y así sucesivamente hasta asignar los n_k finales a la categoría k, al analizar todas las posibles permutaciones tendríamos todas las posibles clasificaciones de los elementos en las k categorías. Sin embargo hay que tener el cuenta que en las permutaciones, se generan casos en los que para unos mismos n_1 elementos ellos se intercambien entre sí, lo mismo para los n_2 siguientes y en general para todos los n_i elementos que formen parte de cada categoría, por lo que es necesario eliminar las repeticiones, de donde se tiene que la expresión $\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$ también representa el número de formas de asignar los objetos a las categorías. Por lo que se puede establecer una biyección con el conjunto de las palabras con n_1 letras del tipo 1, n_2 del tipo 2, ..., n_k del tipo k, dando la condición que la letra que está en la posición $i-$ésima es su categoria.

Teorema. *El número de k-permutaciones con repeticiones en un conjunto de n elementos es*

$$n^k$$

.

Demostración

Se tienen k espacios disponibles y cada uno se puede rellenar con cualquiera de los n elementos, por principio de multiplicación eso es n^k.

Teorema. *Repartir n objetos distintos en k categorías diferentes es*

$$k^n$$

.

Demostración

Para cada uno de los objetos se decide en cual de las n categorías va a estar, como para cada uno hay n opciones, por principio de multiplicación es k^n.

Teorema. *El número de formas de particionar n objetos iguales en k categorías diferentes es*

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

Demostración Este problema es equivalente a tener una secuencia de $n+k-1$ elementos iguales y convertir a $k-1$ de estos elementos en separadores. Luego, la solución tenemos el conjuntos de todas las posibles combinaciones de $k-1$ posiciones que pueden ser seleccionadas como separadores y esto es $\binom{n+k-1}{k-1}$

Teorema. *El número de formas de particionar n objetos iguales en k categorías diferentes de modo que ninguna categoría quede vacía es*

$$\binom{n-1}{k-1}$$

Demostración La idea de solución es igual que la anterior de tomar $n+k-1$ y de ellos seleccionar $k-1$ como de ellos como separadores, pero es necesario garantizar que ninguna categoría quede vacía, entonces de mis n elementos iniciales tomo k, para garantizar que puedo asignar uno de ellos a cada categoría y luego proceso a agregar la $k-1$ barritas teniendo $\binom{n-k+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$

Teorema. *La cantidad de k-combinaciones con repeticiones es*

$$\binom{k+n-1}{n-1}$$

(repartir k objetos entre n personas)

Demostración Utilizando la idea de los separadores, se posicionan los k elementos y se agregan $n-1$ separadores, luego se calcula de cuántas formas se pueden tomar $n-1$ de las posiciones.