# Conferencia 9 - Combinatoria

January 25, 2025

**Principio de Inclusión - Exclusión.** *Permite calcular la cardinalidad de la unión de varios conjuntos*
$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}|\cap A_i|_{i\in I\subseteq\{1,2,\ldots,n\},|I|=k}$

**Ejemplo**

De 200 estudiantes 50 toman el curso de matemáticas discretas, 140 el curso de economía y 24 ambos. Como ambos cursos programaron exámenes para el día siguiente, sólo los estudiantes que no esten en ninguno de estos curso podrán ir a la fiesta de la noche. Se quiere ver cuántos estudiantes iran a la fiesta.

Si $A_1$ es el conjunto que estudia discreta y $A_2$ el de los que estudian economía entonces $|A_1 \cup A_2| = 50 + 140 - 24 = 166$ por lo que irán a la fiesta $200 - 166 = 34$

**Demostración**

Sea un elemento $x$ del universo

Si $x$ no cumple ninguna propiedad entre $A_1, A_2, \ldots, A_n$ entonces no se cuenta nunca en la suma.

Ahora, verifiquemos que si aparece entonces solamente se cuenta una vez.

Si $x$ cumple exactamente una propiedad, o sea, $\exists\, i$ tal que $x \in A_i$ pero $\forall\, j$, $j \neq i$ implica que $x \notin A_j$, $x$ se cuenta solo una vez

Si $x$ cumple $k$ propiedades al mismo tiempo entonces:

se cuenta $k$ en $\sum_{1\leq i\leq m}|A_i|$

se cuenta $\binom{k}{2}$ en $\sum_{1\leq i<j\leq m}|A_i \cap A_j|$

...

...

se cuenta $\binom{k}{k}$ en la intersección de $k$ propiedades

No tiene sentido verificar cuántas veces se cuenta $x$ en la intersección de más de $k$ propiedades porque solo aparece en $k$ conjuntos

Entonces $x$ se cuenta:

$k$ - $\binom{k}{2}$ + $\binom{k}{3}$ - ... + $(-1)^{k+1}\binom{k}{k}$

$=\binom{k}{0}$ + [-$\binom{k}{0}$ + $\binom{k}{1}$ - $\binom{k}{2}$ + $\binom{k}{3}$ - ... + $(-1)^{k+1}\binom{k}{k}$]

$=\binom{k}{0}= 1$

**Definición.** *Sea un universo tal que existen m posibles propiedades $P_1, P_2, \ldots, P_m$. Si $\{P_{i_i}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_k}\}$ es un subconjunto de las $m$ posibles propiedades se denota $N_{i_i,i_2,\ldots,i_k}$ a la cantidad de elementos que cumplen las propiedades $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_m}$.*

*$s_k$ es la cantidad de veces que se cumplen $k$ propiedades*

*Entonces se define $S_0 = n$ donde $n = |U|$ y $S_k = \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots i_k\leq m} N_{i_i,i_2,\ldots,i_k}$ con $1 \leq k \leq m$*

*(Esto último sería todas las maneras en las que pueden cumplirse k propiedades de m)*

Entonces el Principio de **Inclusión - Exclusión** puede escribirse:
$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = S_1 - S_2 + S_3 - \ldots (-1)^{m-1} S_m$
$|A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_m^c| = S_0 - S_1 + S_2 - \ldots (-1)^m S_m$

**Teorema.** ***Generalización del Principio de Exclusión***. *Sea $U$ un conjunto finito de elementos y $P$ un conjunto arbitrario de $m$ propiedades, el número de elementos de $U$ que poseen exactamente $R$ propiedades y $0 \leq R < m$ es $N(R) = \sum_{k=0}^{m-R} (-1)^k \binom{k+R}{k} S_{k+R}$*

**Demostración**
Sea $k$ un elemento del universo que cumple $t$ propiedades
Si $t < R$ se cuenta 0 veces
Se puede notar que la fórmula comienza por $S_R$ lo que implica que $x$ no aparece en la interesección de más de $t$ elementos
Si $t = R$ se cuenta 1 vez, solo se cuenta en $S_R$
Si $t > R$ entonces $N(R) = \sum_{k=0}^{m-R} (-1)^k \binom{k+R}{k} S_{k+R}$ porque no se va a contar en interesecciones de más de $t$
Ahora $k + R \leq t$ por tanto el elemento se cuenta $\binom{t}{k+R}$ veces en $S_{k+R}$ por tanto $x$ se cuenta en $N(R)$
$\sum_{k=0}^{t-R} (-1)^k \binom{k+R}{k} \binom{t}{k+R}$
ahora $\binom{k+R}{k}\binom{t}{k+R} = \binom{t}{R}\binom{t-R}{k}$ esto se obtiene luego de desarrollar las combinaciones y multiplicar y dividir por $(t - R)!$
luego $\sum_{k=0}^{t-R} (-1)^k \binom{k+R}{k} \binom{t}{k+R} = \sum_{k=0}^{t-R} (-1)^k \binom{t}{R}\binom{t-R}{k}$
$= \binom{t}{R} \sum_{k=0}^{t-R} (-1)^k \binom{t-R}{k} = 0$

**Teorema.** *Sea $U$ un conjunto finito de elementos y $P$ un conjunto arbitrario de $m$ propiedades, el número de elementos de $U$ que poseen satisfacen al menos $R$ propiedades y $0 \leq R < m$ es $\bar{N}(R) = \sum_{k=0}^{m-R} (-1)^k \binom{k+R-1}{R-1} S_{k+R}$*

**Principio Inyectivo.** *Sean $A$ y $B$ comjuntos tal que $B$ es finito. Entonces $A$ es finitos y $|A| \leq |B|$ si y solo si existe una función inyectiva de $A$ en $B$.*

**Demostración**
En el sentido directo, se tiene que si $|A| = m$ y $|B| = n$ entonces se tiene se tiene que existen las funciones $f : A \to \mathbb{N}_m$ y $f : B \to \mathbb{N}_n$ biyectivas. Ahora, como $m \leq n$ se tiene que $\mathbb{N}_m \subseteq \mathbb{N}_n$, luego $f \circ g^{-1} : A \to B$ es inyectiva.
Se deja propuesta la demostración en el otro sentido.

**Principio Sobreyectivo.** *Sean $A$ y $B$ comjuntos tal que $B$ es finito. Entonces $A$ es finitos y $|A| \leq |B|$ si y solo si existe una función sobreyectiva de $B$ en $A$.*

**Demostración**

En el sentido directo, se tiene que si $|A| = m$ y $|B| = n$ entonces se tiene se tiene que existen las funciones $f : A \to \mathbb{N}_m$ y $f : B \to \mathbb{N}_n$ biyectivas, con $m \leq n$. Se puede definir la función $f' : \mathbb{N}_m \to A$ ahora $f'(x) = f^{-1}(min(x, n))$ y como $f$ es biyectiva $f^{-1}$ lo es también, luego también es sobreyectiva y, por tanto, $f'$ es también sobreyectiva. Entonces $f' \circ g : B \to A$ es sobreyectiva (la composición de funciones sobreyectivas es sobreyectiva).

En el otro sentido, se puede definir $B = b_1, b_2, \ldots, b_m$ y $f : B \to A$ sobreyectiva, entonces está bien definida la función $h : A \to B$ definida como $h(a) = b_i$, donde $i$ es el mínimo índice tal que $f(b_i) = a$. Es fácil ver que $h$ es inyectiva, Luego, por la proposición anterior $A$ es finitos y $|A| \leq |B|$.

**Principio del Palomar.** *Si se tiene un palomar con $n$ agujeros o casillas y $m$, $m > n$, palomas, entonces existe una casilla que contiene más de una paloma. De manera general, existe una casilla que tiene más de $\lfloor \frac{m}{n} \rfloor$ palomas.*

**Ejemplo 1**

En todo conjunto de $n$ números enteros es posible encontrar un subconjunto tal que la suma de los elementos del subconjunto es divisible por $n$.

Tomando los subconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tal que $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n$:
$A_1 = \{a_1\}$
$A_2 = \{a_1, a_2\}$
$A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$
$\ldots$
$\ldots$
$A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

Si hay algún $A_i$ tal que la suma de sus elementos $(S(A_i))$ cumple que $S(A_i) \equiv 0\,(n)$ entonces ya queda demostrado.

Si esto no ocurre entonces para estos conjuntos en sus sumas hay $n - 1$ posibles restos entonces, por el **Principio del Palomar**, hay dos que dejan el mismo resto, o sea, existen $i, j$ $i \neq j$ tal que $S(A_i) \equiv S(A_j)\,(n)$ luego $S(A_i) - S(A_j) \equiv 0\,(n)$

Entonces se toma el conjunto $A_i - A_j = A_{i-j}$ asumiendo, sin perdida de generalidad, que $|A_i| > |A_j|$, luego $S(A_{i-j}) \equiv 0\,(n)$

**Ejemplo 2**

Sea la relación de conocerse una relación mutua, entonces en un grupo de 6 personas hay al menos 3 personas que se conocen entre ellos o al menos 3 que no se conocen entre ellos.

Si se toman n casillas, entendiendo que si alguien está en la misma casilla se conocen entre ellos y si están en casillas diferentes no se conoce entre si. Para $n > 2$ cualquier distribución significa que hay al menos tres que no conocen entre si. Ahora si $1 \leq n \leq 2$ entonces, por el **Prinicipio del Palomar**, en una casilla como mínimo habrá 3 personas y entonces habría al menos 3 personas que se conocen entre si.