Conferencia 7 - Combinatoria

January 13, 2025

Nota

Consideremos funciones totales, en caso de no serlo se especificará

Definición. *Sea N_n el conjunto $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, se dice que A tiene n elementos o que $|A| = n$ si existe $f : N_n \to A$ biyectiva. Si A es vacío o tiene n elementos se dice que es un conjunto finito*

Definición. *Dos conjuntos A y B se dice coordinables y se denota $A \sim B$ si existe $f : A \to B$ biyectiva*

Nota

Si A es un conjunto no vacío y tiene cardinalidad n entonces A es coordinable con N_n

Teorema. *Si A es coordinable con B entonces $|A| = |B|$*

Demostración

Si $|A| = n$

como A finito entonces existe $f : N_n \to A$ biyectiva

y como es A es coordinable con B existe $g : A \to B$ biyectiva

luego si se tiene la compuesta $g \circ f : N_n \to B$ esta es biyectiva pues f y g son biyectvas por lo que B es coordinable con N_n y tiene cardinalidad n con lo que $|B| = n$

Ejemplo

En un torneo con ganador único donde comienzan n jugadores ¿cuántos partidos se realizan si se descalifica al que pierde un partido?

Se tiene A como el conjunto de los juegos que se efectúan

y se tiene B como el conjunto de los jugadores descalificados

Se tiene $f : A \to B$ donde $< x, y > \in f$ si y pierde en el partido x

Es fácil ver que f es biyectiva y, por tanto, A es coordinable con B:

f es inyectiva porque para dos partidos diferentes son descalificados judadores diferentes

f es sobrectiva porque todos los jugadores descalificados fue producto de un partido

Como son n jugadores y hay un solo ganador entonces hay $n-1$ jugadores descalificados

Luego $|B| = n - 1$ y por tanto como $|A| = |B|$ entonces$|A| = n - 1$

Teorema. *Sean A y B conjuntos finitos, si $A \cap B = \varnothing$ entonces*
$|A \cup B| = |A| + |B|$

Principio de la Suma. *Si un suceso A puede ocurrir de n maneras y un suceso B puede ocurrir de m maneras y, A y B no pueden ocurrir simultáneamente, entonces el suceso $A \vee B$ sucede de $n+m$ maneras diferentes.*

Teorema. *Si A_1, A_2, ..., A_n son conjuntos finitos disjuntos por pares entonces $|\cup_{i=1}^{n} A_i| = |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} A_i$*

Generalización del Principio de la Suma. *Si se tienen k posibles sucesos A_1, A_2, ..., A_k, donde ningún par de ellos ocurre simultáneamente, y cada suceso puede ocurrir de n_i maneras respectivamente ($1 \leq i \leq k$), entonces el suceso $A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_k$ sucede de $\sum_{i=1}^{k} n_i$ maneras diferentes.*

Teorema. *Si A y B son conjuntos finitos entonces la cardinalidad del conjunto producto es $|A \times B| = |A| * |B|$*

Principio del Producto. *Si un primer objeto puede escogerse entre n posibles, y después un segundo objeto puede escogerse entre m posibles, entonces simultáneamente ambos objetos pueden escogerse de nm maneras distintas.*

Teorema. *Si A_1, A_2, ..., A_n son conjuntos finitos entonces la cardinalidad del conjunto producto de todos ellos es*
$|\prod_{i=1}^{n} A_i| = |A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$

Genralizacion del Principio del Producto. *Si se quieren escoger k posibles objetos y el primero se puede escoger de entre n_1 posibles objetos, el segundo entre n_2 posibles objetos y así sucesivamente hasta que el k-ésimo se puede escoger de n_k posibles objetos, entonces simultáneamente los k objetos pueden de $\prod_{i=1}^{k} n_i$ maneras distintas.*

Ejemplo

- ¿Cuántos elementos tiene el conjunto potencia de $|A|$?
  Cómo hay $|A|$ elementos entonces cada uno de estos puede aparecer o no en cada subconjunto de A, que son los elementos de 2^A, luego la cantidad de subconjuntos sería $2 * 2 * ... * 2$ donde se múltiplican $|A|$ veces, por tanto $|2^A| = 2^{|A|}$

- ¿Cuántos números de 7 dígitos hay que comienzan con 428 y terminan en 3 o 6?
  Se tiene $428D_4D_3D_2D_1$ y para D_4, D_3 y D_2 hay 10 posibilidades (10 dígitos) mientras que para D_1 solo hay 2 posibilidades, luego hay
  $10 * 10 * 10 * 2 = 2000$ números posibles

- ¿Cuántos divisores tiene n?
  $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$ luego tiene $(e_1+1)(e_2+1)\dots(e_k+1)$ divisores
  y si fueran divisores propios serían $(e_1+1)(e_2+1)\dots(e_k+1)-2$

Definición. *Una* ***permutación*** *de n objetos es una ordenación de estos en fila. Se denota por $P(n)$ o por P_n*

Teorema. *Si se tienen n objetos diferentes entonces $P_n = n!$*

Ejemplo Si se va a formar un comité que involucra presidente, tesorero y secretario, habiendo 3 candidatos a, b, c ; cuando se elige por sorteo los cargos sucesivamente, hay $3! = 6$ posibilidades u ordenaciones: abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Definición. *Una* ***k-permutación*** *(conocido como variaciones) de un conjunto S es una secuencia de k elementos distintos de S. Se denota $P(n,k)$, o por V_k^n*

Teorema. $V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$

Ejemplo Si se va a formar un comité que involucra presidente, tesorero y secretario, habiendo 10 candidatos; cuando se elige por sorteo los cargos sucesivamente, hay $\frac{10!}{(10-3)! = \frac{10!}{7!}} = 10*9*8 = 720$ posibilidades u ordenaciones

Definición. *Sean n objetos, una combinación de n en k es un subconjunto de k objetos tomados de los n. Se denota por $C(n,k)$ o C_k^n o $\binom{n}{k}$*

Teorema. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Ejemplo
¿Cuántos rectángulos hay en un tablero de $m \times n$?
Son $n+1$ líneas verticales y $m+1$ líneas horizontales
Entonces hay que escojer dos líneas verticales y dos líneas horizontales por cada posible rectángulo. En estos casos no importa el orden, por tanto son combinaciones de 2.
Entonces sería $\binom{n+1}{2}\binom{m+1}{2}$