Conferencia 11 - Funciones Primitivo Recursivas

9 de junio de 2025

Definición. *Sean*

$K_0 = \{0_1, 0_2, dots\}$ *la familia de funciones nulas donde* $o_n(X) = 0$ *y* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
$K_1 = \{U_1^1, U_1^2, U_2^2, U_1^3, U_3^3, U_3^3, \ldots\}$ *(proyección) donde* $U_k^n(x_1, x_2, \dot{;} x_n) = x_k$ *es la familia de funciones proyectivas*
$K_2 - \{suc\}$, $suc : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $suc(x) = x + 1$, *función sucesor*

entonces $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ *se conoce como la familia de funciones iniciales*

Esquemas de Recursión

Definición (Esquema de Composición)**.** *Sean*
$a_i : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ $1 \leq i \leq R$
$b : \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}$
$f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$

entonces $f(x) = (a_1(X), a_2(x)), \ldots, a_R(X)$ *donde* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Definición (Esquema de Recursión)**.** *Existen dos esquemas:*

1. *Sea a constante y* $b : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *es posible definir entonces* $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tal que*

   $h(0) = a$ *y* $h(y + 1) = b(y, h(y))$

2. *Sea* $n \geq 1$, $a : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *y* $b : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ *es posible definir entonces* $b : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ *tal que*

   $h(x, 0) = a(X)$ *y* $h(x, y + 1) = b(x, y, h(x, y))$ *donde* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Definición. *Una función se llama primitivo-recursiva si es una función inicial o si es posible definirla en términos de funciones iniciales por un número finito de aplicaciones de los esquemas composición o recursión*

Ejemplos

1. **Suma**

   $suma(x, y)$, $suma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

   se tienen a, b tales que $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $b : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$

   se define entonces $suma(x, 0) = a(x) = U_1^1(x)$

   y $suma(x, y + 1) = b(x, y, suma(x, y)) = suc(U_3^3(x, y, suma(x, y)))$

2. **Producto**

   $prod(x, y)$, $prod : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

   se tienen a, b tales que $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $b : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$

   se define entonces $prod(x, 0) = a(x) = O_1(x)$

   y $prod(x, y + 1) = b(x, y, prod(x, y)) = suma(U_1^3(x, y, z), U_3^3(x, y, z))$ donde $z = prod(x, y)$

3. **Potencia**

   $pot(x,y)$, $pot : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$

   se tienen a, b tales que $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ y $b : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$

   se define entonces $pot(x,0) = a(x) = suc(O_1(x))$

   y $pot(x, y+1) = b(x, y, pot(x,y)) = prod(U_1^3(x,y,z), U_3^3(x,y,z))$ donde $z = pot(x,y)$

Teorema. *La función constante $C_k^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k$ es primitivo-recursiva*

Demostración. *Demostremos por inducción en k.*
Caso base: *k=0*
$C_0^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = O_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$

Paso inductivo *Si se cumple para C_k^n entonces se cumple para $\ddot{}C_{k+1}^n$*
$C_{k+1}^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = suc(C_k^n(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = k + 1$

Teorema. *Sean las funciones $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ y $h : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ y $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})$ donde $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ es un secuencia de variables con posible repetición tomada de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, entonces si f es primitivo recursiva tam bién lo es h*

Demostración.

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(U_{i_1}^n(x_1, \ldots, x_n), U_{i_2}^n(x_1, \ldots, x_n), \ldots, U_{i_k}^n(x_1, \ldots, x_n))$$

Corolario. *Si $f(x,y)$ es primitivo-recursiva entonces lo es h tal que:*

- $h(x,y) = f(y,x)$
- $h(x) = f(x,x)$
- $h(x,y,z) = f(y,z)$

Definición. *Sea P un predicado numérico k-ario ($x \in \mathbb{N}^k$) ,*
la función

$$C_P(x) = \begin{cases} 1 & si\ P(x) se\ cumple \\ 0 & si\ P(x) no\ se\ cumple \end{cases} \tag{1}$$

se llama función característica de P

Definición. *Se dice que P es un predicado primitivo-recursivo si su función característica es primitivo-recursiva*

Teorema. *Si los predicados P_1 y P_2 son primitivo recursivos, entonces también lo son:*

- $\neg P_1$
- $P_1 \vee P_2$
- $P_1 \wedge P_2$
- $P_1 \Rightarrow P_2$

- $P_1 \Leftrightarrow P_2$

Teorema. *Sea $P_1, P_2, \ldots, P_k$ predicados n-arios, considere la función*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) & si\ P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) & si\ P_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) & si\ P_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases} \tag{2}$$

si para todo i $1 \leq i \leq k$ g_i es una función primitivo-recursiva y para cada $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se cumple exactamente uno de los predicados, entonces f es primitivo recursiva.

Definición (Suma acotada)**.** *Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$, se llama suma acotada a la función $h : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ tal que*
$h(x, y) = \sum_{z<y} f(x, z)$ *o sea*

$$h(z, y) = \begin{cases} 0 & y = 0 \\ f(x, 0) + f(x, 1) + \cdots + f(x, y-1) & y > 0 \end{cases} \tag{3}$$

Definición (Producto acotado)**.** *Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$, se llama producto acotado a la función $h : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ tal que*
$h(x, y) = \prod_{z<y} f(x, z)$ *o sea*

$$h(z, y) = \begin{cases} 1 & y = 0 \\ f(x, 0) f(x, 1) \ldots f(x, y-1) & y > 0 \end{cases} \tag{4}$$

Teorema. *Si $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ es primitivo recursiva entonces la suma acotada de f y el producto acotado de f son primitivo recursivos*

Teorema. *Sean $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ y $k : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ funciones primitivo recursivas entonces son primitivo recursivas las funciones*
$\sum_{z<k(x,y)} f(x, z)$ *y* $\prod_{z<k(x,y)} f(x, z)$

Teorema. *Sean $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ una función primitivo recursiva y $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$, entonces*

$$g(x, y) = \mu_{z<y}(f(x, z) = 0) \begin{cases} \textit{el menor } z < y \textit{ tal que } f(x, z) = 0 \\ y \end{cases} \tag{5}$$

es primitivo recursiva

Corolario. *Si $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ y $k : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ son primitivo-recursivas entonces también lo es $\mu_{z<k(x,y)}(f(x, z) = 0)$*

Teorema. *Sea $P(x, y)$ un predicado primitivo-recursivo, entonces la función*

1. *$f(x, y) = \mu_{z<y}(P(x, z))$*
2. *$\forall(z) z < y, P(x, z)$ y $\exists(z) z < y, P(x, z)$ son predicados primitivo-recursivos*