

## Matemática discreta I - Examen extraordinario Curso 2025

1. Enuncie y demuestre el pequeño teorema de Fermat utilizando inducción matemática.
2. Sea  $d$  un divisor del número  $a$ , que no sea divisible por el cuadrado de un número entero superior a 1 y tampoco por los números primos menores que  $n$  y sea  $x$  el número de divisores primos distintos del número  $d$ .
  - a) Demuestre que, los múltiplos de  $d$  que a su vez se pueden expresar como el productos de  $n$  números consecutivos, se puede clasificar en  $n^x$  clases.
  - b) Demuestre que para cada descomposición de  $d$  en  $n$  factores ( $d = d_1 \times d_2 \times \dots \times d_n$ ) existe sólo una forma en la que el factor  $i$ -ésimo de  $d$  divide al dividir al  $i$ -ésimo término en el producto de  $n$  términos consecutivos.
  - c) Apoyándose en las demostraciones anteriores, demuestre que en la sucesión :

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n, 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+1), \dots, a \cdot (a+1) \cdot \dots \cdot (a+n+1)$$

hay  $n^x \cdot \frac{a}{d}$  números que son múltiplos de  $d$ .

3. Demuestre utilizando razonamientos combinatorios (encuentre un problema tal que ambos miembros son su solución) que:

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k}^2 k^2 = \binom{2n-2}{n-1} n^2$$

4. De una relación de recurrencia para calcular el número de listas ternarias de tamaño  $n$  que no tienen una sublista consecutiva 012.
5. Se conoce que la cantidad de personas que asisten a cada parque de una ciudad a partir del 3 de enero es, por cada día, igual al doble de la cantidad que había dos días atrás menos la cantidad que había el día anterior. Se conoce también que en la ciudad hay 500 parques, numerados del 1 al 500 sin repetición, y que cada uno de ellos recibió el 1ro de enero de 2024 un número de visitantes que coincide con la numeración de dicho parque y que al día siguiente recibieron un visitante más. Cuántos visitantes en total visitaron los parques el 31 de diciembre de 2024.

Pista para el tercer ejercicio en el reverso de la hoja



