Primer Trabajo de Control Parcial.
Matemática Discreta 1

January 15, 2025

1. Demuestre que nungún triángulo rectángulo (de lados enteros) tiene una hipotenusa sutal que el cuadrado de su longitud sea 10083.

R/ Por Teorema de Pitágoras sabemos que en un triángulo ractángulo se cumple que $h^2 = a^2 + b^2$. Por tanto si demostramos que no existen valores $a, b \in \mathbf{N}$ para los cuales $10083 = a^2 + b^2$ quedaría demostrado el ejercicio.

Analicemos la representación de los números según su divisibilidad por 4. Para todo $n \in \mathbf{Z}$, $n = 4q$, $n = 4q + 1$, $n = 4q + 2$ o $n = 4q + 3$ según el algoritmo de la divisibilidad.

Analicemos como queda, para cada posible representación, el cuadrado de un número:

- Si $n = 4q \Rightarrow n^2 = 4q'$.
- Si $n = 4q + 1 \Rightarrow n^2 = (4q)^2 + 2(4q) + 1 = 4(4q^2 + 2q) + 1 = 4q' + 1$.
- Si $n = 4q + 2 \Rightarrow n^2 = (4q)^2 + 2(2 * 4q) + 4 = 4(4q^2 + 2 * 2q + 1) = 4q'$.
- Si $n = 4q + 3 \Rightarrow n^2 = (4q)^2 + 2(3 * 4q) + 9 = 4(4q^2 + 2 * 3q + 2) + 1 = 4q' + 1$.

Luego todos los cuadrados son de la forma $4q$ o $4q + 1$, de donde para la expresión $a^2 + b^2$ quedan las siguientes posibles combinaciones:

- Si a^2, b^2 son ambos de la forma $4q \Rightarrow a^2 + b^2 = 4q'$.
- Si a^2, b^2 son ambos de la forma $4q + 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 4q' + 2$.
- Si a^2 es de la forma $4q$ y b^2 de la forma $4q+1$ (o vieversa) $\Rightarrow a^2 + b^2 = 4q' + 1$.

Si analizamos como se representa el número 10083 según su divisibilidad por 4, tenemos que es de la forma $4q + 3$ [$10083 = 4 * 2520 + 3$]. Luego no tiene ninguna de las formas posibles para las sumas de $a^2 + b^2$, por tanto no es posible obtener el valor 10083 como cuadrado de la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de lados enteros.

2. Determine el $mcd(n!+1,(n+1)!)$ con $n \in \mathbf{Z}, n > 1$.

R/ Sea $d = mcd(n!+1,(n+1)!)$

$$\begin{aligned}
&d|n!+1\\
&d|(n+1)!\\
\Rightarrow &d|(n+1)!-n!-1 = n!(n+1)-n!-1\\
\Rightarrow &d|n!(n+1-1)-1 = n!n-1
\end{aligned} \tag{1}$$

Luego tenemos que si $d|n!$ entonces $d|n!n$ y como $d|n!n-1 \Rightarrow d|1 \Rightarrow d=1$. Por otra parte si $d \nmid n!$ como $d|(n+1)! \Rightarrow d|n+1$ (propiedad vista en Cp), además sabemos que para todo $n \neq 0$ sus divisores son menores o iguales que él, luego $d \leq n+1$ y como $d \nmid n! \Rightarrow d = n+1$.

Entonces $d=1$ o $d=n+1$, analicemos en que caso es cada uno.

Caso I: Sea $n+1$ un número compuesto:
Para $n+1=4 \Rightarrow n=3$ de donde $mcd(n!+1,(n+1)!) = mcd(7,24) = 1$.

Por teorema visto en Cp sabemos que para $k>4$ compuesto, $k|(k-1)!$, luego para $n+1>4 \Rightarrow n+1|(n+1-1)! = n!$, entonces como $n+1|n!$ si dividiera a $n!+1$ entonces $n+1|1$ lo cual es una contradicción, por tanto $mcd(n!+1,(n+1)!) = 1$.

Caso II: Sea $n+1$ un número primo:
Por Fermat sabemos que $n+1|(n+1-1)!+1 = n!+1$ y como $n+1|(n+1)!$ entonces $mcd(n!+1,(n+1)!) = n+1$.

3. Encuentre todos los n tales que para cualquier múltiplo de n, cualquier permutación de sus dígitos es también múltiplo de n.

R/ Sea x múltiplo de n, entonces podemos representar a x según su descomposición decimal como:

$$x = x_m 10^m + x_{m-1}10^{m-1} + ... + x_1 10 + x_0$$

Luego como toda x' permutación de x tiene que ser divisible entre n (para los n que se desean encontrar), analicemos aquellas permutaciones en las que se intercambian las dos últimas cifras de x, estos x' tienen la forma:

$$x' = x_m 10^m + x_{m-1}10^{m-1} + ... + x_0 10 + x_1$$

o lo que equivalente:

$$x' = x - x_1 10 - x_0 + x_0 10 + x_1$$

luego se cumpplen las sigueintes relaciones:

$$
\begin{aligned}
&x' \equiv 0(n)\\
&x - x_1 10 - x_0 + x_0 10 + x_1 \equiv 0(n)\\
&x \equiv -(-x_1 10 - x_0 + x_0 10 + x_1)(n)\\
\mathit{como}\ &x \equiv 0(n) \qquad (2)\\
\Rightarrow &x_1 10 + x_0 - x_0 10 - x_1 \equiv 0(n)\\
\Rightarrow &x_1(10-1) + x_0(1-10) \equiv 0(n)\\
\Rightarrow &(x_1 - x_0) * 9 \equiv 0(n)
\end{aligned}
$$

obtenemos tras analizar la congruencia que $n|(x_1 - x_0) * 9$, si $n|9 \Rightarrow n = 1, 3, 9$, son caso que $n \nmid 9 \Rightarrow n|(x_1 - x_0)$, en este caso tenemos que por un ejercicio demostrado en Cp, para todo $n \in Z$ existen infinitos múltiplos que inician con cualquier secuencia de dígitos, por lo que mediante permutaciones tendríamos números que pueden terminar en cualquier secuencia de dígitos, de donde $(x_1 - x_0)$ puede tomar cualquier valor entre 0 y 9, y para que $n|(x_1 - x_0) \Rightarrow n = 1$.

Queda de este modo que los únicos 3 posibles valores admisibles para n son 1,3,y 9, falta demostrar para cuáles de ellos se cumple realmente la propiedad, lo cual en este caso resulta trivial puesto que el 1 divide a todos los números y para el 3 y 9 quedó visto en Cp que dividen a un número si y solo si dividen a la suma de sus dígitos, y dicha suma es invariante en cualquier permutación de sus múltiplos.