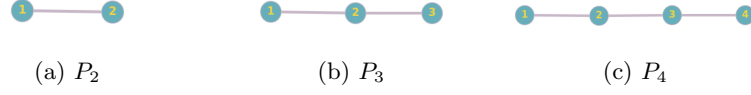


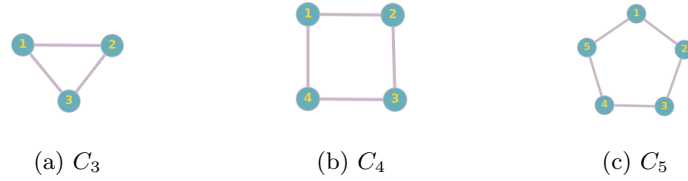
Conferencia 2 - Árboles y Secuencia Gráfica

April 1, 2025

Definición (P_n). Se denomina P_n al grafo con n vértices $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y con aristas $E(G) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}\}$



Definición (C_n). Se denomina C_n ($n \geq 3$) al grafo cíclico con n vértices $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y con aristas $E(G) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}$



Definición (K_n). Se denomina K_n al grafo completo con n vértices $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ donde $\forall v_i, v_j \in V(G), i \neq j$ la arista $\{v_i, v_j\} \in E(G)$, es decir es el grafo con $\binom{n}{2}$ aristas.



Definición (Grafo de Petersen). Es el grafo de 10 vértices, regular de grado 3 cuyos vértices adyacentes no tienen vértices comunes y los vértices no adyacentes tienen exactamente un vértice común.

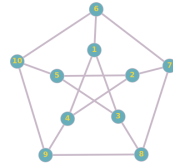


Figure 4: Grafo de Petersen

Definición (Grafo Complemento). Se define como grafo complemento de G , al grafo G^c , tal que $V(G) = V(G^c)$ y $E(G^c) = [V(G)]^2 / E(G)$, es decir es el grafo que tiene los mismos vértices que G , pero que tiene las aristas que no están en G .

Corolario. Sea $|V(G)| = n$, $G \cup G^c = K_n$

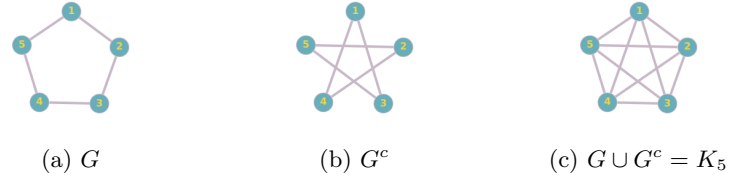


Figure 5: Ejemplo de grafo y su complemento

Definición (Grafo conexo). *Un grafo es conexo si para todo par de vértices existe un camino que los conecta.*

Definición (Componente Conexa). *Subgrafo maximal conexo de un grafo*

Nota: Si un grafo no es conexo entonces tiene 2 o más componentes conexas.

Definición. *Un vértice o una arista se denomina de corte si su eliminación aumenta la cantidad de componentes conexas. A las aristas de corte también se les denomina **Arista puente** y a los vértices de corte **punto de articulación**.*

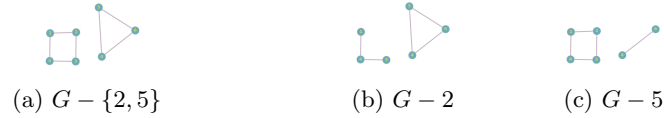
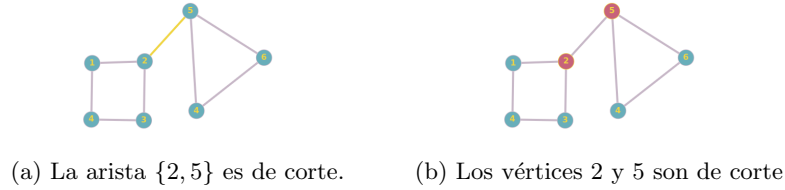


Figure 7: Al quitar una arista o un vértice de corte el grafo se desconecta

Definición (Grafo k -conexo). *Un grafo G es k -conexo si es $(k - 1)$ -conexo y para todo $A \subseteq V(G)$ tal que $|A| = k - 1$ el grafo $G' = G - A$ es conexo.*

Nota: Un grafo 2-conexo (biconexo) es un grafo conexo que no tiene vértices de corte.

Definición (Bosque). *Grafo que no tiene ciclos (acíclico).*

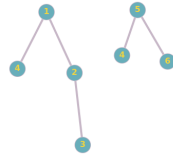


Figure 8: Ejemplo de bosque

Teorema. Si G es un bosque con al menos una arista, entonces en G hay al menos dos vértices con grado 1.

Demostración (Vía 1: PBO).

Se hace un proceso iterativo por los vértices. Como en el grafo hay al menos una arista, sea esta $\{v_1, v_2\}$, se toma el vértice v_1 .

Si $\deg(v_1) = 1$ ya tendríamos uno de los vértices buscados, si no, v_1 tiene al menos 2 vecinos, tomando a cualquier otro adyacente a v_1 distinto de v_2 , sea este v_3 , si $\deg(v_3) = 1$, entonces v_3 es uno de los vértices de grado 1, si no se toma una de los adyacentes a v_3 distinto de v_1 , se repite el mismo proceso que con v_1 , y así sucesivamente, nótese que nunca se vuelven a visitar vértices anteriormente analizados puesto que esto implicaría la existencia de un ciclo en G , luego el procedimiento eventualmente termina, ya que la cantidad de vértices del grafo es finita y por PBO no es posible un crecimiento infinito en un conjunto acotado superiormente.

Luego este proceso se vuelve a realizar partiendo de v_2 para así obtener el segundo vértice con estas características ■.

Demostración (Vía 2: Directa).

Tomando $C = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ el camino más largo de G , los vértices de los extremos v_1 y v_k tienen grado 1 ya que en caso contrario sería posible extender más el camino o volverían a pasar por algún nodo que ya esté en el camino lo cual crearía un ciclo ■.

Definición (Hoja). A los vértices con $\deg(v) = 1$ de un bosque se le denomina hojas.

Definición (Árbol). Grafo acíclico y conexo.

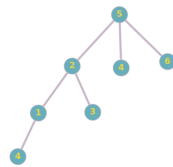


Figure 9: Ejemplo de árbol

Nota: Cada una de las componentes conexas de un Bosque es un Árbol.

Nota: Un árbol es a la vez un bosque.

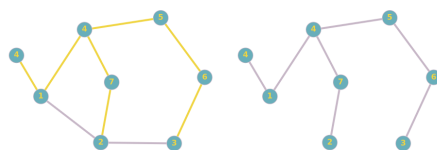
Definición (Árbol Abarcador). Sea G un grafo, se define T como árbol abarcador de G a un subgrafo en expansión de G que sea acíclico y conexo.

Teorema. Todo grafo conexo tiene un árbol abarcador.

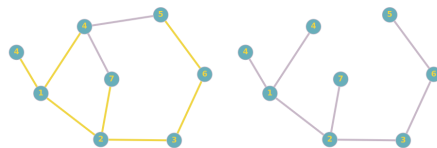
Demostración (Vía Constructiva).

Sea G un grafo conexo, si es acíclico, listo, $T = G$, si no, G tiene ciclos, si se toma un ciclo de G y se quita una arista esto no rompe la conexidad, y este proceso se puede realizar reiteradamente hasta que no queden más ciclos, obteniéndose así un árbol abarcador de G .

Nota: Nótese que el árbol abarcador no es único para G , que además $|E(G)| \geq |E(T)|$ puesto que en el propio proceso de obtención de T se quitan aristas de G en cada paso y que para un grafo no conexo se puede obtener un árbol abarcador por cada componente conexa, generándose así un bosque.



(a) G y posible T árbol abarcador



(b) G y otro posible T árbol abarcador

Teorema (Teorema de las 6 equivalencias). Sea G tal que $n = |V(G)| \geq 2$, son equivalentes las siguientes proposiciones:

1. G es un árbol.
2. G no tiene ciclos y $|E(G)| = n - 1$.
3. G es conexo y $|E(G)| = n - 1$.
4. G es conexo pero si le quitas una arista deja de serlo.
5. G es acíclico, pero si le agregas una arista se forma exactamente un ciclo.
6. Todo par de vértices en G están conectados exactamente por un camino simple.

Demostración ($P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_3 \Rightarrow P_4 \Rightarrow P_5 \Rightarrow P_6 \Rightarrow P_1$). Para demostrar la equivalencia entre las proposiciones, la forma más rápida es hacer un ciclo de implicaciones y demostrar cada una de ellas, así para cualquier par de propiedades se puede demostrar que se llega de una a la otra a través de una cadena de transitividad.

Demostración ($P_1 \Rightarrow P_2$ Vía: Inducción en $|V(G)| = n$). G es un árbol $\Rightarrow G$ no tiene ciclos y $|E(G)| = n - 1$.

Caso base $n = 2$ Como G es árbol, entonces es conexo, luego los dos vértices tienen que estar unidos por una arista de donde $|E(G)| = 1 = n - 1$.

Hipótesis n : Supongamos que para cualquier árbol de n vértices se cumple que este tiene $|E(V)| = n - 1$.

Demostración $n + 1$: Sea G un grafo de $n + 1$ vértices, como por el teorema anteriormente demostrado sabemos que existen en G al menos dos hojas, sea v una hoja, $G' = G - v$ sigue siendo un árbol ya que quitar vértices no produce ciclos y además como este vértice tiene grado 1 quitarlo no desconecta el grafo. Luego G' es un árbol de n vértices, por lo que cumple con la hipótesis de inducción y $|E(G')| = n - 1$. Como $|E(G)| = |E(G')| + 1$, ya que junto al vértice v se quita la arista que lo conectaba a G , entonces $|E(G)| = n - 1 + 1 = n$ ■.

Demostración ($P_2 \Rightarrow P_3$ Vía: Directa). G no tiene ciclos y $|E(G)| = n - 1 \Rightarrow G$ es conexo y $|E(G)| = n - 1$.

Sean $C_{c_1}, C_{c_2}, \dots, C_{c_k}$ las componentes conexas de G , con n_1, n_2, \dots, n_k vértices cada una, como G es acíclico, entonces cada una de sus componentes conexas es un árbol luego

$$|E(G)| = \sum_{i=1}^k |E(C_{c_i})| = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) = \sum_{i=1}^k n_i - k = n - k$$

Luego $k = 1$ siendo G conexo ■.

Demostración ($P_3 \Rightarrow P_4$ Vía: Árbol Abarcador). G conexo y $|E(G)| = n - 1 \Rightarrow G$ es conexo pero si se le quita una arista se desconecta.

Esto es equivalente a demostrar que para que un grafo sea conexo tiene que tener una cantidad de aristas mayor o igual a $n - 1$. Ya que si esto se cumple, al G ser conexo y tener $n - 1$ aristas si le quitamos una perdería su conexidad.

Sea G conexo, entonces se puede obtener T árbol abarcador de G , donde $|E(G)| \geq |E(T)| = n - 1$ luego si G conexo $|E(G)| \geq n - 1$ ■.

Definición. Sea G un grafo, la secuencia de grados de G es una lista con los grados de los vértices de G . Un grafo con secuencia d se dice que **realiza** d .

Definición (Secuencia gráfica). Una secuencia d_1, d_2, \dots, d_n se dice gráfica si hay un grafo que la realiza.

Teorema. Una secuencia de n números no negativos d_1, d_2, \dots, d_n es la secuencia de grados de un pseudografo $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n d_i$ es par.

Demostración (\Rightarrow). Si d_1, d_2, \dots, d_n es la secuencia de grados de un pseudografo $\Rightarrow \sum_{i=1}^n d_i$ es par

La demostración es análoga a la de la suma de los grados de un grafo es el doble del número de aristas, lo que en este caso se admiten aristas múltiples que de igual modo incrementan en 1 el grado de cada vértice en el que inciden y lazos que incrementan en 2 el grado del vértice en el que inciden.

Demostración (\Leftarrow). $\sum_{i=1}^n d_i$ es par $\Rightarrow d_1, d_2, \dots, d_n$ es la secuencia de grados de un pseudografo

Para demostrarlo basta con construir un pseudografo con n vértices tal que los grados de estos coincidan con la secuencia. Para ello, creamos n vértices y para aquellos d_i que sean pares, al vértice i le ponemos $\frac{d_i}{2}$ lazos, y para los

d_i que son impares al vértice i le ponemos $\frac{d_i-1}{2}$ lazos, como $\sum_{i=1}^n d_i$ es par, entonces hay una cantidad par de vértices con grado impar, a cada uno le falta agregarle una arista más para que su grado coincida con su d_i asignado, por lo que se unen en parejas mediante una arista.