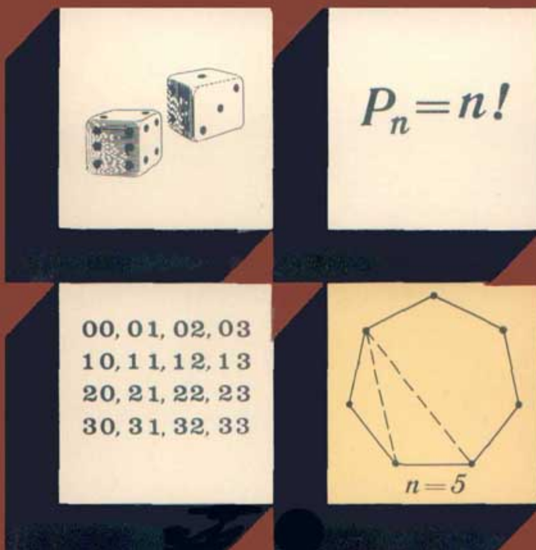
N. VILENKIN

¿ DE CUANTAS FORMAS ?

COMBINATORIA



EDITORIAL MIR · MOSCU

ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

Н. Я. ВИЛЕНКИН

КОМБИНАТОРИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«НАУКА»
МОСКВА

N. VILENKIN

¿DE CUANTAS FORMAS?

COMBINATORIA

TRADUCIDO DEL RUSO POR
JUAN JOSE TOLOSA

EDITORIAL MIR

MOSCU

CDU 519.1=60

Presentación de
M. O. Bišofs

INDICE

PREFACIO

A los representantes de las más diferentes especialidades les toca resolver problemas en que se consideran unas u otras combinaciones, formadas por letras, cifras u otros objetos. El jefe del taller debe distribuir varios tipos de trabajo entre los tornos de que dispone; el agrónomo, distribuir la siembra de los cultivos agrícolas en varios campos; el director de la parte docente de una escuela, confeccionar el horario de las clases; el químico, estudiar las posibles uniones entre los átomos y las moléculas; el lingüista, considerar las distintas variantes del significado de las letras en un idioma desconocido, etc. La parte de la matemática que estudia los problemas sobre cuántas combinaciones diferentes—sometidas a unas u otras condiciones—se pueden formar con objetos dados, se denomina *combinatoria.*

La combinatoria surgió en el siglo XVI. En la vida de las capas privilegiadas de la sociedad de entonces, ocupaban un gran lugar los juegos de azar. Jugando a las cartas y a los dados[1] se ganaban y se perdían oro y brillantes, palacios y estancias, caballos de raza y adornos costosos. Estaban muy difundidas las loterías más variadas. Es comprensible, pues, que al principio los problemas combinatorios tratasen fundamentalmente sobre los juegos de azar, tratando de averiguar de cuántas maneras se puede obtener un número dado de tantos al arrojar dos o tres dados, o de cuántas formas se pueden obtener dos reyes en un juego de cartas. Estos y otros problemas de los juegos de azar fueron la fuerza motriz del progreso de la combinatoria y de la teoría de las probabilidades, que se desarrolló paralelamente a ésta.

Uno de los primeros en ocuparse del recuento del número de combinaciones diferentes en el juego de los dados fue el matemático italiano Tartaglia. Este confeccionó una tabla que mostraba de cuántas maneras pueden caer r dados. Sin embargo, no se tenía en cuenta que una misma suma de puntos puede ser obtenida de diferentes maneras (por ejemplo, $1+3+4=4+2+2$).

El estudio teórico de los problemas combinatorios fue abordado en el siglo XVII por los científicos franceses Pascal y Fermat. El punto de partida de sus investigaciones también lo constituyeron problemas de los juegos de azar. Un papel particularmente grande lo jugó aquí el problema sobre la división de la apuesta, que fue propuesto a Pascal por su amigo, el caballero de Meré, un jugador apasionado. El problema consistía en lo siguiente: el «campeonato» de cara y cruz continuaría hasta que se ganasen seis partidos. Pero se interrumpiría cuando un jugador ganase 5 partidos, y el otro, 4; ¿cómo dividir la apuesta? Era evidente que la división en la razón 5 : 4 no era justa. Aplicando los métodos de la combinatoria, Pascal resolvió el problema para el caso general, cuando a un jugador le quedan r partidos hasta que gane, y al otro, s. Otra resolución del problema fue dada por Fermat.

[1] En el juego de los dados se arrojaban varios cubitos, en cuyas caras se representaban los números del 1 al 6. Ganaba el que obtenía mayor número de tantos. Existían también otras variantes del juego.

El desarrollo ulterior de la combinatoria está ligado a los nombres de Jacobo Bernoulli, Leibnitz y Euler. Sin embargo, para éstos también el papel fundamental lo jugaban las aplicaciones a diferentes juegos (lotería, solitarios y otros). En los últimos años, la combinatoria entró en un período de intenso desarrollo, relacionado con el crecimiento general del interés hacia los problemas de la matemática discreta. Los métodos combinatorios son aplicados para resolver problemas de transporte, en particular, problemas sobre la confección de horarios; para la confección de planes de producción y de realización de ésta. Fueron establecidos nexos entre la combinatoria y problemas de la programación lineal, la estadística, etc. La combinatoria es utilizada para confeccionar y descifrar claves y para resolver otros problemas de la teoría de la información.

Los métodos combinatorios juegan un gran papel también en problemas puramente matemáticos: en la teoría de los grupos y de sus representaciones, en el estudio de los fundamentos de la geometría, en las álgebras no asociativas, etc.

En el libro que proponemos al lector, se relata sobre los problemas combinatorios en forma entretenida, de divulgación. No obstante, en ésto se analizan algunos problemas combinatorios bastante complejos, se da un concepto sobre los métodos de las relaciones de recurrencia y las funciones generatrices.

El primer capítulo del libro está dedicado a las reglas generales de la combinatoria: a las reglas de suma y de producto. En el segundo capítulo se estudian los arreglos, permutaciones y combinaciones. Este material escolar tradicional va acompañado del análisis de algunos ejemplos entretenidos. En el capítulo III estudiamos los problemas combinatorios en los que se imponen unas u otras limitaciones a las combinaciones en cuestión. En el capítulo IV se consideran los problemas sobre la partición de números y se relata sobre los métodos geométricos en la combinatoria. El capítulo V está dedicado a problemas sobre los desplazamientos aleatorios y a distintas modificaciones del triángulo aritmético. En el capítulo VI se relata sobre las relaciones de recurrencia, y en el VII, sobre las funciones generatrices y, en particular, sobre la fórmula binómica.

En el libro hay un apéndice que contiene más de 400 problemas combinatorios, tomados por el autor de varias fuentes. Muchos problemas han sido tomados del libro de W. Whitworth «Choice and Chance» («Elección y oportunidad»), Londres, 1901, del libro de J. Riordan «An Introduction to Combinatorial Analysis», New York 1958, del libro de A. M. Yaglom e I.M. Yaglom «Problemas no elementales expuestos en forma elemental», ed. Gostejizdat, 1954 (en ruso), de diferentes colecciones de problemas propuestos en olimpíadas matemáticas, etc.

CAPITULO I

REGLAS GENERALES DE LA COMBINATORIA

LOS CICLISTAS SUPERSTICIOSOS

«¡Otra vez un ocho!» exclamó amargamente el presidente del club de ciclistas, observando la rueda torcida de su bicicleta. «¿Y todo por qué?» Porque al ingresar al club me dieron el carné número 008. Y ahora no pasa un mes sin que en una u otra rueda aparezca un ocho. Hay que cambiar el número del carné. Y, para que no me acusen de superstición, haré un nuevo registro de todos los miembros del club, otorgando solamente billetes con números en los que no figure ni un ocho».

Dicho y hecho: al día siguiente cambió todos los carnés. *¿Cuántos miembros había en el club, si se sabe que fueron utilizados todos los números de tres cifras que no contienen ningún ocho?* (Por ejemplo, el 000 fue utilizado, y el 836, no.)

Para resolver este problema determinemos primeramente cuántos números de una cifra no contienen ochos. Está claro que hay nueve números así: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 (el número 8 se omite). Hallemos ahora todos los números de dos cifras que no contengan ochos. Los podemos formar así: se toma cualquiera de los números de una cifra hallados y se escribe después de éste cualquiera de las nueve cifras admisibles. Como resultado, de cada número de una cifra obtendremos nueve de dos cifras. Y como los números de una cifra son también 9, se obtendrán $9 \cdot 9 = 81$ números de dos cifras sin ochos. Helos aquí:

00,	01,	02,	03,	04,	05,	06,	07,	09
10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	19
20,	21,	22,	23,	24,	25,	26,	27,	29
30,	31,	32,	33,	34,	35,	36,	37,	39
40,	41,	42,	43,	44,	45,	46,	47,	49
50,	51,	52,	53,	54,	55,	56,	57,	59
60,	61,	62,	63,	64,	65,	66,	67,	69
70,	71,	72,	73,	74,	75,	76,	77,	79
90,	91,	92,	93,	94,	95,	96,	97,	99

Existen, pues $9^2 = 81$ números de dos cifras en los que no figura el 8. Pero a continuación de cada uno de ellos se puede escribir nuevamente cualquiera de las nueve cifras admisibles. Como resultado, obtenemos $9^2 \cdot 9 = 9^3 = 729$ números de tres cifras. Esto significa que en el club había 729 ciclistas. Si tomamos no los números de tres cifras, sino los de cuatro, habrá $9^4 = 6561$ números que no contengan ochos.

En otro club, los ciclistas eran aún más supersticiosos. Como el número 0 se parece a una rueda estirada, eliminaron también esta cifra, y se las arreglaban con ocho: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9. *¿Cuántos miembros tenía este club, si los números de los carnés eran de tres cifras?*

Este problema es semejante al que acabamos de resolver; sólo que ahora tenemos nada más que 8 cifras, en lugar de 9. Por esto, en la respuesta debemos también sustituir el 9 por el 8. En otras palabras, en el club había $8^3 = 512$ miembros.

ARREGLOS CON REPETICION

El problema sobre los ciclistas pertenece al siguiente tipo. Se dan objetos que pertenecen a n formas distintas. A partir de éstos se forman todas las posibles distribuciones con k objetos en cada una o, como diremos en lo sucesivo, para abreviar, las *k-distribuciones*. Además, en cada distribución pueden figurar objetos de un mismo tipo, y dos distribuciones se consideran distintas, si se diferencian entre sí por el tipo de objetos que figuran en éstas, o por su orden. *Hay que hallar el número total de estas distribuciones.*

Las distribuciones del tipo descrito se denominan *k-arreglos con repetición de elementos de n tipos*[1]; el número total de estos arreglos se denota mediante $\overline{A}_k^n$ [2]. En el primer problema sobre los ciclistas, el número de tipos de elementos era igual a 9 (tomábamos todas las cifras, a excepción del 8), y en cada arreglo (en cada número) figuraban tres elementos. Como fue demostrado, en este caso el número de arreglos era igual a $\overline{A}_3^9 = 9^3$. Es natural suponer que, si el número de tipos es igual a n, y en cada arreglo figuran k elementos, se pueden formar n^k arreglos con repetición.

Queremos, pues, demostrar, que el número de k-arreglos con repetición de elementos de n tipos es igual a

$$\overline{A}_k^n = n^k. \tag{1}$$

La demostración se efectúa mediante inducción completa con respecto a k: el número de elementos en el arreglo, para un valor fijo de n. Para $k = 1$, la respuesta es evidente: cada arreglo (con repetición) está formado por un solo elemento, y distintos arreglos se obtienen si se toman elementos de tipos diferentes. Pero, como el número de tipos es igual a n, también el de arreglos será igual a n. Así, pues, $\overline{A}_1^n = n$, en correspondencia con la fórmula (1).

Supongamos ahora que ya fue demostrada la igualdad $\overline{A}_{k-1}^n = n^{k-1}$, y consideremos los k-arreglos con repetición. Todos estos pueden ser obtenidos de la siguiente manera. Tomemos cualquier $(k-1)$-arreglo (con repetición) $(a_1, \ldots, a_{k-1})$ y agreguémosle el elemento a_k de uno de los n tipos dados. Obtenemos cierto k-arreglo $(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k)$. Entonces queda claro que de cada $(k-1)$-arreglo se obtienen tantos k-arreglos cuantos tipos distintos de elementos hay, es decir, n arreglos. Es evidente que, actuando de la forma indicada, no omitiremos ningún k-arreglo y que tampoco obtendremos ninguno repetido (si $(a_1, \ldots, a_{k-1}) \neq (b_1, \ldots, b_{k-1})$, o si $a_k \neq b_k$, será $(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k) \neq (b_1, \ldots, b_{k-1}, b_k)$). Por esto, el número de k-arreglos con repetición formados por elementos de n tipos es n veces mayor que el de $(k-1)$-arreglos con repetición de elementos de los mismos tipos. De este modo, $\overline{A}_k^n = n\overline{A}_{k-1}^n$. Pero partimos de la hipótesis de que $\overline{A}_{k-1}^n = n^{k-1}$. Por esto,

$$\overline{A}_k^n = n \cdot n^{k-1} = n^k.$$

Con esto queda demostrada la igualdad (1) para todos los valores de k.

La fórmula (1) se encuentra en toda una serie de problemas. Ahora nos referiremos a algunos de ellos.

SISTEMAS DE NUMERACION

Además del sistema decimal de numeración, se utilizan otros: de base dos, tres, ocho, etc. (véase el libro de S. V. Fomín «Sistemas de Numeración», ed. «Naúka», 1963, en ruso). En el sistema n-ario de numeración se utilizan n cifras. Calculemos cuántos números naturales que se escriben exactamente con k cifras hay en el sistema n-ario[1]. Si admitimos números que comiencen con cero, cada número de k cifras, en el sistema n-ario de numeración, se puede considerar como un arreglo con repetición, formado

[1] Se utiliza también la expresión «arreglos con repetición de n elementos, tomados de k en k». Con frecuencia, en vez de «arreglos» se utiliza el término «variaciones» (N. del T.).

[2] En ruso, la posición de los índices n y k es inversa, $\overline{A}_n^k$ (N. del T.).

[1] Para mayor comodidad, aquí incluiremos al 0 entre los números naturales.

por k cifras, las cuales pueden ser de n tipos. Según la fórmula (1), se obtiene que la cantidad de números de este tipo es igual a n^k.

Pero para los números naturales no se utilizan escrituras que comiencen con cero. Por esto, del valor obtenido n^k hay que restar la cantidad de números cuya escritura n-aria comience con cero. Si eliminamos la primera cifra de estos números (el cero), obtendremos un número de $k-1$ cifras (el cual también puede comenzar con cero). Según la fórmula (1), habrá n^{k-1} números de este tipo. Esto significa que la cantidad total de números de k cifras en el sistema n-ario de numeración es igual a

$$n^k - n^{k-1} = n^{k-1}(n-1).$$

Por ejemplo, en el sistema decimal de numeración tendremos $10^3 \cdot 9 = 9000$ números de cuatro cifras: de los 10 000 números desde el 0 hasta el 9999 hay que restar mil números, precisamente, desde el 0 hasta el 999.

La fórmula obtenida se puede deducir también de otra forma. Resulta que en el número de k cifras, escrito en el sistema n-ario de numeración, la primera cifra será cualquiera de las cifras $1, 2, \ldots, n-1$. La segunda, en cambio, así como todas las demás, cualquiera de las cifras $0, 1, 2, \ldots, n-1$. De esta manera, tenemos $n-1$ candidatos al primer puesto, y n candidatos a cada uno de los $k-1$ puestos restantes. De aquí se deduce fácilmente que debe haber $(n-1)\,n^{k-1}$ números buscados.

EL CANDADO SECRETO

Para cerrar cajas fuertes y cámaras automáticas para equipaje, se utilizan candados secretos, que se abren sólo empleando cierta «palabra secreta». Esta palabra se forma mediante uno o varios discos, en los cuales se han escrito letras (o cifras). *Supongamos que en el disco se han escrito 12 letras, y la palabra secreta está formada por 5 letras. ¿Cuántas pruebas infructuosas pueden ser efectuadas por una persona que desconozca la palabra secreta?*

Según la fórmula (1), el número total de combinaciones es igual a

$$12^5 = 248\,832.$$

Esto significa que puede haber 248 831 pruebas infructuosas. A propósito, por lo común las cajas fuertes se hacen de forma que después de la primera prueba infructuosa de abrirlas suene la alarma.

EL CODIGO MORSE

Al transmitir informaciones por el telégrafo, se utiliza el código Morse. En éste, las letras, las cifras y los signos de puntuación se denotan con puntos y rayas. Para algunas letras se utiliza un solo signo, por ejemplo, *E* ·[1], y para otras hay que utilizar cinco símbolos, por ejemplo Э · · — · ·.

¿De dónde sale el número 5? ¿No se podría tomar un número menor de símbolos, por ejemplo, transmitir todas las informaciones mediante combinaciones que contengan no más de cuatro signos? Resulta ser que no se puede, y la respuesta la da precisamente la fórmula para el número de arreglos con repetición. De la fórmula (1) se deduce que $\overline{A}_1^2 = 2$. En otras palabras, con un solo signo se pueden transmitir solamente dos letras (E · y T-). Mediante dos símbolos se pueden transmitir $2^2 = 4$ letras; con tres, $2^3 = 8$ letras, y con cuatro, $2^4 = 16$. Por esto, el número total de letras que se pueden transmitir con cuatro signos es igual a

$$2+4+8+16=30.$$

Pero el alfabeto ruso contiene 32 letras, y debemos transmitir además cifras y signos de puntuación.

[1] Aquí se utiliza el alfabeto ruso, cosa que no influye en absoluto sobre la comprensión del problema analizado. Para el alfabeto español, que posee 27 letras, tampoco bastarían cuatro signos (N. del T.).

Está claro que no bastan los símbolos de cuatro signos. En cambio, si tomamos también los símbolos de 5 signos, a los 30 obtenidos se agregarán 32 más. Los 62 símbolos obtenidos son totalmente suficientes para telegrafiar.

En el telégrafo se utiliza también un código de cinco signos en el cual cada letra se representa exactamente mediante cinco símbolos. Aquí se utilizan, en lugar de puntos y rayas, cambios de sentido de la corriente, o el envío de una señal con y sin corriente. Cuando se utiliza este código, se tienen exactamente $2^5 = 32$ combinaciones. Estas son suficientes, para transmitir las letras. Para la transmisión de las cifras, los signos de puntuación, etc., se utilizan las mismas combinaciones que para las letras. Por esto, los aparatos telegráficos de código de cinco signos tienen un dispositivo especial para hacer pasar el aparato de las letras a las cifras y viceversa[1].

EL SEMAFORO MARINO

En la marina se utiliza a veces un semáforo de banderines. A cada letra le corresponde aquí una posición determinada de los banderines. Por regla general, éstos se hallan en lados opuestos con respecto al cuerpo del que señala. Sin embargo, en la transmisión de ciertas letras (б, д, к, х, ю, я)[2] ambos banderines están situados a un mismo lado. ¿Por qué hubo que hacer esta excepción? La respuesta la da la misma fórmula de arreglos con repetición. Sucede que hay cinco posiciones distintas de cada banderín: hacia abajo verticalmente, hacia abajo e inclinado, horizontal, hacia arriba e inclinado y hacia arriba en forma vertical. Como se tienen dos banderines, el número total de combinaciones

de las posiciones fundamentales es igual a $\overline{A}_2^5 = 5^2 = 25$. Debe además eliminarse la posición en que ambos banderines están dirigidos hacia abajo, que sirve para separar las palabras. En total se obtienen 24 combinaciones, lo que es insuficiente para transmitir todas las letras del alfabeto ruso. Por esto, para algunas letras hubo que dirigir ambos banderines hacia un mismo lado.

[1] Este paso se efectúa en forma similar a como en la máquina de escribir se pasa de la posición «mayúsculas» a la «minúsculas», y viceversa (N. del T.).

[2] Véase la nota al pie de la pág. 11. Aquí tampoco es de importancia especial que se considere el código para el alfabeto ruso. Para el español tampoco bastarían las posiciones con los banderines en lados distintos (N. del T.).

LA MAQUINA COMPUTADORA ELECTRONICA DIGITAL

Las máquinas computadoras electrónicas pueden resolver los problemas más diferentes. En una misma máquina se pueden descifrar las escrituras en idiomas desconocidos, efectuar el cálculo de una represa y elaborar los datos sobre el movimiento de un cohete. ¿Cómo se explica esta diversidad de aplicaciones de la máquina? Fundamentalmente esto se debe a que todos estos problemas se reducen a cálculos, a operaciones con números. Pero ¿por qué la máquina puede resolver tantos problemas, y para los datos numéricos más variados? ¿Cuántas combinaciones diferentes de números se pueden situar en la máquina?

Para responder a esta pregunta, tomemos, por ejemplo, la computadora «Strelá». La memoria operativa de esta máquina está formada por 2048 células, cada una de las cuales contiene 43 cifras binarias[1]. Cada cifra puede contener 0 ó 1. En total, tenemos $43 \cdot 2048 > 87\,000$ lugares diferentes, siendo el número de tipos de llenado de las celdas igual a dos (0 ó 1). Según la fórmula (1), obtenemos que la máquina «Strelá» puede hallarse en más de 2^{87000} estados diferentes. Es difícil hacerse una idea de la magnitud de este número. Es suficiente decir que el número de neutrones que se pueden empaquetar densamente en una esfera de radio igual a la distancia hasta la nebulosa más alejada que conocemos, no es mayor que 2^{500}.

Si tomásemos una sola célula de la memoria, se necesitaría el trabajo de nueve años de un ejército de cien mil mecanógrafas, para imprimir todos los números que pueden surgir en esta célula (considerando que las mecanógrafas trabajan siete horas por día y que invierten 10 segundos en escribir un número de 43 cifras).

[1] Para este ejemplo se ha tomado una de las computadoras más pequeñas de la URSS. La memoria operativa de una computadora media es de 4 a 8 veces mayor (N. del T.).

EL CODIGO GENETICO

Un descubrimiento trascendente de la biología del siglo XX fue el descifrado del código genético. Se pudo esclarecer de qué forma se transmite la información hereditaria a los descendientes.

Resultó ser que esta información está escrita en las moléculas gigantes del ácido desoxirribonucleínico (ADN). Las distintas moléculas de ADN se diferencian entre sí en el orden de distribución de 4 bases de nitrógeno: adenina, timina, guanina y citosina. Estas bases determinan el orden de formación de las albúminas del organismo, a partir de dos decenas de aminoácidos, estando cada aminoácido cifrado en un código de tres bases de nitrógeno.

Es fácil comprender de dónde salió el número 3. Mediante combinaciones de dos bases se pueden cifrar sólo $4^2 = 16$ aminoácidos, lo cual es insuficiente. Si, en cambio, se toman de a 3 bases, se obtienen $4^3 = 64$ combinaciones. Esto ya bastará, con exceso, para cifrar las dos decenas. Sería muy interesante saber cómo utiliza la naturaleza el exceso de información: el número de combinaciones es igual a 64, y el de aminoácidos es tres veces menor.

En un cromosoma hay varias decenas de millones de bases de nitrógeno. El número de combinaciones diferentes en que estas bases pueden ir una detrás de la otra es inimaginablemente grande[1].

Sería suficiente una parte pequeñísima de estas combinaciones para asegurar toda la variedad de la naturaleza viva durante el tiempo de existencia de la vida en la Tierra. Se sobreentiende que hay que tener en cuenta que sólo una parte muy pequeña de las combinaciones teóricamente posibles conduce a organismos aptos para la vida.

[1] Este es igual a 4^N, siendo N el número de bases en el cromosoma; véase la fórmula (1).

REGLAS GENERALES DE LA COMBINATORIA

Como veremos más adelante, los problemas combinatorios son de los tipos más variados. Pero la mayoría de éstos se resuelven mediante dos reglas fundamentales: la regla de la suma y la del producto.

A menudo se pueden dividir todas las combinaciones estudiadas en varias clases, figurando cada combinación en una clase, y sólo en una. Está claro que en este caso *el número total de combinaciones es igual a la suma de los números de combinaciones de todas las clases*. Este enunciado se llama, precisamente, *regla de la suma*. A veces se formula en forma un tanto diferente:

Si cierto objeto A puede ser escogido de m maneras, y otro objeto B, de n maneras, la elección «o A o B» se puede efectuar de $m + n$ modos.

En la aplicación de la regla de la suma en su última forma, hay que cuidar de que ninguna de las maneras de elección del objeto A coincida con alguna forma de elección del B (o, como expresamos antes, de que ninguna combinación se halle a la vez en dos clases). Si existen tales coincidencias, la regla de la suma pierde su validez, y obtenemos sólo $m + n - k$ modos de elección, donde k es el número de coincidencias.

La segunda regla, denominada *regla del producto*, es algo más compleja. Con frecuencia, al formar las combinaciones de dos elementos se sabe de cuántas maneras se puede escoger el primer elemento y de cuántas el segundo, no dependiendo el número de formas de elección del segundo elemento de cómo fue elegido el primero. Supongamos que el primer elemento se puede escoger de m maneras, y el segundo, de n. Entonces el par de estos elementos se puede elegir de mn modos. En otras palabras:

Si el objeto A se puede escoger de m maneras y si, después de cada una de estas elecciones, el objeto B se puede escoger de n modos, la elección del par (A, B) en el orden indicado se puede efectuar de mn formas.

Para demostrar la regla del producto, obsérvese que cada una de las m formas de elección del objeto A se puede combinar con las n maneras de escoger el B. Esto, precisamente, conduce a las mn formas de elegir el par (A, B).

La regla del producto puede ser representada ilustrativamente mediante la tabla siguiente:

Tabla 1

$$\begin{array}{l}
(A_1, B_{11}), \quad \ldots, (A_1, B_{1n}) \\
(A_2, B_{21}), \quad \ldots, (A_2, B_{2n}) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(A_i, B_{i1}), \quad \ldots, (A_i, B_{in}) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(A_m, B_{m1}). \quad \ldots, (A_m, B_{mn}).
\end{array}$$

Aquí mediante $A_1, \ldots, A_m$ se denotan las m maneras de elección del objeto A, y mediante $B_{i1}, \ldots, B_{in}$, las n formas de escoger el B, si el objeto A fue elegido de la i-ésima manera. Está claro que esta tabla contiene todas las formas de elección del par (A, B) y consta de mn elementos.

Si las formas de elección del objeto B no dependen de cómo fue elegido el A, en lugar de la tabla 1 se obtiene otra más sencilla:

Tabla 2

$$\begin{array}{l}
(A_1, B_1), (A_1, B_2), \quad \ldots, (A_1, B_n) \\
(A_2, B_1), (A_2, B_2), \quad \ldots, (A_2, B_n) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(A_m, B_1), (A_m, B_2), \quad \ldots, (A_m, B_n).
\end{array}$$

Puede suceder que debamos formar no pares, sino agrupaciones de un mayor número de elementos. Se llega entonces al siguiente problema:

¿Cuántas k-distribuciones se pueden formar, si el primer elemento puede ser de uno de los n_1 tipos diferentes, el segundo, de n_2 tipos diferentes, ..., el k-ésimo, de n_k tipos distintos? Dos distribuciones se consideran distintas, si por lo menos en un lugar de éstas se hallan elementos diferentes.

Este problema se resuelve igual que el de los ciclistas. El primer elemento se puede escoger de n_1 formas. Cada uno de los elementos elegidos se puede unir a cualquiera de los n_2 tipos de segundos elementos, lo que nos da $n_1 n_2$ pares. Cada par se puede unir a cualquiera de los n_3 tipos de terceros elementos, obteniéndose así $n_1 n_2 n_3$ ternas. Continuando el proceso, obtenemos en fin de cuentas $n_1 n_2 \ldots n_k$ distribuciones del tipo buscado.

En el problema de los ciclistas había que escoger tres elementos (la cifra de las centenas,

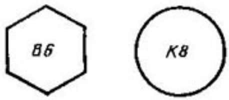


Fig. 1.

la de las decenas y la de las unidades). En cada paso podíamos escoger una de las nueve cifras admisibles. Por esto obtuvimos, precisamente, $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ números. El problema que insertamos a continuación es más difícil.

Se forman signos que consisten en una figura geométrica (circunferencia, cuadrado, triángulo o hexágono), una letra y una cifra. ¿Cuántos signos de este tipo pueden formarse?

Aquí se puede elegir, en primer término, una figura geométrica. Esta elección se puede hacer de cuatro maneras (disponemos en total de cuatro figuras). Luego hay que escoger una de las 32[1] letras y, por último, una de las 10 cifras. En total, se obtienen $4 \cdot 32 \cdot 10 = 1280$ combinaciones.

PROBLEMA DEL DOMINO

Son más difíciles de resolver los problemas combinatorios en los cuales el número de elecciones después de cada paso depende de qué elementos fueron escogidos en los pasos anteriores. He aquí un ejemplo de estos problemas.

¿De cuántas formas se pueden escoger dos fichas de dominó, de las 28 que hay, de forma que se puedan aplicar una a la otra (es decir, de modo que se encuentre el mismo número de tantos en ambas fichas)*?*

Escojamos primeramente una ficha. Esto se puede hacer de 28 maneras. Aquí, en 7 casos la ficha elegida será un «doble», es decir, tendrá la forma 00, 11, 22, 33, 44, 55, 66, y en 21 casos será una ficha con distinto número de tantos (por ejemplo, 05, 13, etc.). En el primer caso, la segunda ficha se puede elegir de 6 maneras (por ejemplo, si en el primer paso fue elegida la ficha 11, en el segundo se puede tomar una de las fichas 01, 12, 13, 14, 15, 16). En el segundo caso, la segunda ficha se puede escoger de 12 maneras (para la ficha 35 servirán las 03, 13, 23, 33, 34, 36, 05, 15, 25, 45, 55, 56). Según la regla del producto, en el primer caso obtenemos $7 \cdot 6 = 42$ elecciones, y en el segundo, $21 \cdot 12 = 252$. Esto significa, según la regla de la suma, que tendremos $42 + 252 = 294$ formas de elegir el par.

En el razonamiento efectuado se consideró también el orden en que se elegían las fichas. Por esto, cada par de fichas figuraba dos veces (por ejemplo, la primera vez 01 y 16, la segunda, 16 y 01). Si no se tiene en cuenta el orden de elección de las fichas, obtendremos una cantidad dos veces menor de las formas de elección, es decir, 147.

LA TRIPULACION DE LA NAVE COSMICA

En el caso en que el número de elecciones posibles en cada paso depende de qué elementos fueron elegidos antes, resulta cómodo representar el proceso de confección de las combinaciones en forma de «árbol». Primeramente se trazan, a par-

[1] En el alfabeto español disponemos de 27 letras solamente, lo cual nos da un resultado total de $4 \cdot 27 \cdot 10 = 1080$ combinaciones (N. del T.).

tir de un punto, tantos segmentos como elecciones diferentes se pueden hacer en el primer paso (de este modo, cada segmento corresponde a un elemento). A partir del extremo de cada segmento, se trazan tantos segmentos como elecciones se pueden hacer en el segundo paso, si la primera vez fue escogido el elemento dado, etc.

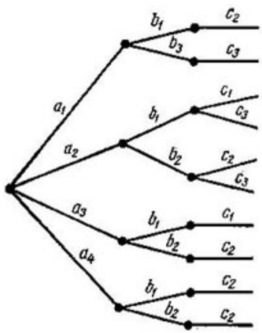


Fig. 2.

Como resultado de esta construcción se obtiene un «árbol», cuyo análisis nos da fácilmente el número de soluciones de nuestro problema.

Estudiemos el ejemplo siguiente. Se sabe que al formar la tripulación de las naves cósmicas de más de una persona surge el problema sobre la compatibilidad sicológica de los participantes de la travesía cósmica. Puede ocurrir que incluso las personas más indicadas, si se consideran aisladamente, no se adapten entre sí durante un viaje cósmico prolongado. Supongamos que es necesario formar la tripulación de una nave cósmica de tres personas: el comandante, el ingeniero y el médico. Para el lugar del comandante hay cuatro candidatos: a_1, a_2, a_3, a_4, para el de ingeniero, 3: b_1, b_2, b_3, y para el de médico, 3: c_1, c_2, c_3. El análisis efectuado demostró que el comandante a_1 es psicológicamente compatible con los ingenieros b_1 y b_3 y con los médicos c_2, c_3; el comandante a_2, con los ingenieros b_1 y b_2 y con todos los médicos; el a_3 lo es con los ingenieros b_1 y b_2 y los médicos c_1, c_3; el a_4, con todos los ingenieros y con el médico c_2. Además, el ingeniero b_1 es sicológicamente incompatible con el médico c_3; el ingeniero b_2, con el médico c_1, y el b_3, con el médico c_2. *¿De cuántas maneras se puede formar la tripulación de la nave, bajo estas condiciones?*

El árbol correspondiente está representado en la fig. 2. Este muestra que existen sólo 10 combinaciones admisibles (si no existiera la limitación de la compatibilidad, el número de combinaciones sería, según la regla del producto, igual a $36 = 4 \cdot 3 \cdot 3$).

PROBLEMAS DE LAS DAMAS

Resolvamos el siguiente problema:

¿De cuántas maneras se pueden poner en el tablero de damas dos fichas, una blanca y una negra, de forma que la blanca pueda comer a la negra?

Según las reglas del juego de damas[1], éstas se ubican en las casillas negras, y una ficha come a la otra saltando sobre ésta y situándose en la casilla siguiente (fig. 3). Si la ficha alcanzó la última horizontal, se transforma en dama y puede comer a todas las fichas que se hallen en una misma diagonal con ella, a excepción de las que se hallen en los extremos de las diagonales.

La complejidad de este problema consiste en que para distintas posiciones de la ficha blanca hay un número diferente de posiciones de la negra, en las cuales se la puede comer. Por ejemplo, si la ficha blanca se halla en la casilla $a1$, existe

[1] En la Unión Soviética el tablero de damas coincide con el de ajedrez (forma un cuadrado de ocho casillas de lado, y no de diez). Además, una ficha puede comer a la otra moviéndose no solamente hacia adelante, sino también hacia atrás. Todo esto debe ser tenido en cuenta en la resolución del problema considerado (N. del T.).

sólo una posición de la negra, en la cual ésta se hallará en peligro. Si, en cambio, la ficha blanca está en la casilla *c*3, el número de posiciones buscadas de la ficha negra es igual a 4. Por

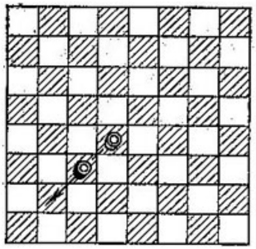


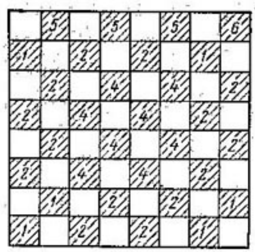
Fig. 3.

último, si la ficha blanca llegó a dama, en la casilla *h*8, hay 6 posiciones de la negra en la que esta dama se la puede comer.

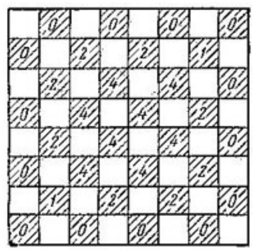
Por esto, aquí lo más sencillo es indicar, para cada posición de la ficha blanca, el número de posiciones posibles de la negra y sumar los resultados obtenidos. En la fig. 4, *a* está representado el tablero con la indicación de los números correspondientes. Sumándolos, obtenemos 87. Esto significa que la distribución buscada es posible de 87 maneras.

Está claro que existe exactamente la misma cantidad de posiciones en las que la ficha negra puede comerse a la blanca. Pero la cantidad de posiciones en las que ambas fichas pueden comer una a la otra es menor. Por ejemplo, si la ficha blanca se halla en el extremo del tablero, no se la puede comer, esté donde esté la ficha negra. Por esto, a todas las casillas del borde del tablero les corresponde el número 0. De igual forma se hallan los números que corresponden a las otras casillas negras. Estos se representan en la fig. 4, *b*. Sumando estos números, obtenemos que la distribución buscada es posible de 50 modos.

Hallemos, por último, el número de posiciones de las fichas blanca y negra, en las cuales ni una de ellas puede comerse a la otra. Podríamos resolver este problema al igual que los anteriores,



a)



b)

Fig. 4.

ubicando la ficha blanca en cada casilla negra y calculando de cuántas formas se puede colocar la ficha negra de modo que ninguna de estas fichas pueda comerse a la otra. Pero aquí resulta más sencillo aplicar el «principio de la tetera»[1]

[1] Cuentan que una vez un matemático preguntó a un físico: «Ante usted hay una tetera vacía y un hornillo de gas apagado; ¿qué hacer para hervir el agua»? «Hay que llenar la tetera con agua, prender el gas y poner la tetera

y reducir este problema a otro ya resuelto. Para esto, hallemos primeramente la suma total de posiciones en que se puede poner en el tablero una ficha blanca y una negra. La ficha blanca se puede colocar en cualquiera de las 32 casillas negras. Después de esto, para la ficha negra quedarán 31 casillas. Por esto, en virtud de la regla del producto, la distribución es posible de $32 \cdot 31 = 992$ maneras. Pero de éstas, hay 87 en las que la ficha blanca puede comerse a la negra, y 87 en los que la negra puede comerse a la blanca. Por esto, hay que restar $2 \cdot 87 = 174$ maneras. Sin embargo, hay que tener en cuenta que algunas formas fueron eliminadas dos veces, a causa de que la ficha blanca podía comerse a la negra, y a causa de que la negra podía comerse a la blanca. Hemos visto que existen 50 posiciones en las cuales ambas fichas pueden comerse una a la otra. Por esto, el número de posiciones en que ninguna ficha puede comer a la otra es igual a

$$992 - 174 + 50 = 868.$$

sobre el hornillo», contestó el físico. «Correcto», dijo el matemático. «Ahora resuelva un segundo problema: ante un hornillo encendido se halla una tetera llena. ¿Cómo hervir el agua?» «Esto es aún más sencillo: hay que poner la tetera sobre el hornillo». «¡De ningún modo!» exclamó el matemático. «Hay que apagar el hornillo, verter el agua de la tetera, y llegamos así al primer problema, que ya sabemos resolver».
Por esto, cuando se reduce un problema nuevo a otros ya resueltos, se dice en broma que se aplica el «principio de la tetera».

¿CUANTAS PERSONAS DESCONOCEN LAS LENGUAS EXTRANJERAS?

El método con que resolvimos el último de los problemas sobre las damas se aplica con frecuencia a la resolución de problemas combinatorios. Consideremos el siguiente ejemplo:

En un instituto de investigación científica trabajan 67 personas. De éstas, 47 conocen el inglés, 35, el alemán y 23, ambos idiomas. ¿Cuántas personas en el instituto no conocen el inglés ni el alemán?

Para resolver este problema, es necesario dividir todo el colectivo de colaboradores del instituto en partes sin elementos comunes. La

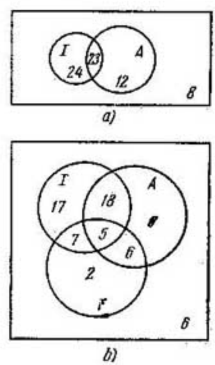


Fig. 5.

primera la formarán los que saben sólo el inglés; la segunda, los que saben sólo el alemán; la tercera, los que conocen todos los idiomas, y la cuarta, los que no saben ni uno ni otro idioma (fig. 5). Se conoce que la tercera parte consta de 23 personas. Pero, como el inglés lo saben 47 personas, sólo este idioma lo conocerán $47 - 23 = 24$ personas. De la misma manera, solamente el alemán lo dominarán $35 - 23 = 12$ personas. De aquí se deduce que el número total de personas que conocen uno de estos idiomas (por lo menos) es igual a $23 + 24 + 12 = 59$. Y como en el instituto trabajan en total 67 personas, para la última parte quedarán $67 - 59 = 8$ personas. Así, pues, 8 personas desconocen el inglés y el alemán.

La última respuesta se puede escribir en la forma

$$8 = 67 - (23 + 24 + 12).$$

Pero 24 lo obtuvimos restando 23 de 47, y 12, restando 23 de 35. Por esto,

$$8 = 67 - 23 - (47 - 23) - (35 - 23) = \\ = 67 - 47 - 35 + 23.$$

Ahora se aprecia la regla: del número total de colaboradores se resta el número de los que saben inglés y el de los que saben alemán. Aquí algunos colaboradores se incluyen en ambas listas, y resultan «sustraídos» dos veces. Estos son justamente los políglotas, que conocen ambos idiomas. Agregando el número de éstos, obtenemos la cantidad de personas que no dominan ninguno de estos idiomas.

Compliquemos el problema analizado, agregando un idioma más. Supongamos que 20 personas saben francés; 12, el inglés y el francés; 11, el alemán y el francés, y 5, los tres idiomas. Está claro que entonces sólo inglés y francés (sin alemán) sabrán $12 - 5 = 7$ personas, y sólo alemán y francés, $11 - 5 = 6$ personas. Por ende, sólo el francés lo sabrán $20 - 7 - 6 - 5 = 2$ personas. Estas figuran entre las 8 personas que no saben ni el inglés ni el alemán. Por lo tanto, el número de personas que desconocen los tres idiomas es igual a $8 - 2 = 6$.

La respuesta obtenida se puede escribir como sigue:

$$6 = 8 - 2 = 67 - 47 - 37 + 23 - (20 - 7 - 6 - 5) = \\ = 67 - 47 - 37 + 23 - 20 + (12 - 5) + (11 - 5) + 5 = \\ = 67 - 47 - 37 - 20 + 23 + 12 + 11 - 5.$$

Ahora la regla queda totalmente clara. Primeramente, del número total de colaboradores se resta el de los que saben uno de los idiomas (y, puede ser, los otros también). Entonces algunos son «sustraídos» dos veces, pues saben dos idiomas. Por esto, se suman los números 23, 12, 11, que indican cuántas personas dominan dos idiomas (y, puede ser, también el tercero). Pero las personas que conocen los tres idiomas son al principio «sustraídas» tres veces y después «sumadas» tres veces. Como hay que sustraerlas, de todos modos, debemos restar además el número 5.

FORMULA DE INCLUSIONES Y EXCLUSIONES

Los ejemplos analizados permiten formular una ley general. Supongamos que se tienen N objetos, algunos de los cuales poseen las propiedades $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Cada objeto puede o bien no poseer ninguna de estas propiedades, o bien tener una o varias de ellas. Denotemos mediante $N(\alpha_i \alpha_j \ldots \alpha_k)$ la cantidad de objetos que poseen las propiedades $\alpha_i, \alpha_j, \ldots, \alpha_k$ (y, puede ser, también algunas de las otras propiedades). Si nos hace falta subrayar que se toman sólo los objetos que no poseen cierta propiedad, ésta se escribirá con tilde. Por ejemplo, $N(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4')$ denota el número de objetos que poseen las propiedades α_1 y α_2, pero no poseen la α_4 (la cuestión sobre las demás propiedades queda sin resolver).

El número de objetos que no poseen ninguna de las propiedades indicadas se designa, según esta regla, mediante

$N(\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_n')$. La ley general consiste en que

$$N(\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_n') = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - \ldots$$
$$\ldots - N(\alpha_n) + N(\alpha_1\alpha_2) + N(\alpha_1\alpha_3) + \ldots$$
$$\ldots + N(\alpha_1\alpha_n) + \ldots + N(\alpha_{n-1}\alpha_n) -$$
$$- N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) - \ldots - N(\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n N(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n). \qquad (2)$$

Aquí la suma algebraica se generaliza a todas las combinaciones de las propiedades $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_n$ (sin tener en cuenta su orden); el signo $+$ se pone cuando el número de propiedades que figuran es par, y el $-$, cuando este número es impar. Por ejemplo, $N(\alpha_1\alpha_3\alpha_6\alpha_8)$ figura con signo $+$, y $N(\alpha_3\alpha_4\alpha_{10})$, con signo $-$. La fórmula (2) se llama *fórmula de inclusiones y exclusiones*: primeramente se excluyen todos los objetos que poseen por lo menos una de las propiedades $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, luego se incluyen los que poseen por lo menos dos de estas propiedades, se excluyen los que tienen por lo menos tres, etc.

Demostremos la fórmula (2). La demostración se efectúa mediante inducción con respecto al número de propiedades. Para una propiedad, la fórmula es evidente. Cada objeto o bien posee esta propiedad, o no la posee. Por esto,

$$N(\alpha') = N - N(\alpha).$$

Supongamos ahora que la fórmula (2) ya fue demostrada para el caso en que el número de propiedades es igual a $n-1$:

$$N(\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}') = N - N(\alpha_1) - \ldots - N(\alpha_{n-1}) +$$
$$+ N(\alpha_1\alpha_2) + \ldots + N(\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}) -$$
$$- N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) - \ldots - N(\alpha_{n-3}\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1} N(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}). \qquad (3)$$

Esta fórmula, por hipótesis, es válida para cualquier conjunto. En particular, es válida para el conjunto de $N(\alpha_n)$ elementos que poseen la propiedad α_n. Para éste, la fórmula (3) adquiere la forma

$$N(\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}'\alpha_n) = N(\alpha_n) - N(\alpha_1\alpha_n) - \ldots$$
$$\ldots - N(\alpha_{n-1}\alpha_n) + N(\alpha_1\alpha_2\alpha_n) + \ldots$$
$$\ldots + N(\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n) - N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_n) - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1} N(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}\alpha_n) \qquad (4)$$

(se agrega la indicación de que en cada caso se toman sólo los objetos que poseen la propiedad α_n).

Restemos la igualdad (4) de la (3). En el segundo miembro obtenemos lo que necesitábamos: el segundo miembro de la fórmula (2). Y en el primero, obtenemos la diferencia

$$N(\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}') - N(\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}'\alpha_n). \qquad (5)$$

Pero $N(\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}')$ es el número de objetos que no poseen las propiedades $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ pero que pueden poseer la α_n. Y $N(\alpha_1'\alpha_2' \ldots$ $\ldots \alpha_{n-1}'\alpha_n)$ es el número de objetos que no tienen las propiedades $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ pero con seguridad poseen la α_n. Por ende, la diferencia (5) es precisamente igual al número de objetos que no poseen ninguna de las propiedades $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$. En otras palabras,

$$N(\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}') - N(\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}'\alpha_n) =$$
$$= N(\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}'\alpha_n').$$

De este modo, después de restar obtenemos, también en el primer miembro, el primer miembro de la fórmula (2). Queda así demostrada dicha fórmula para el caso en que el número de propiedades es igual a n.

Así, pues, la relación (2) es justa para n propiedades, siempre y cuando lo sea para $n-1$. Y para $n=1$ ya ha sido demostrada; por esto, queda demostrada la validez de dicha relación para cualquier cantidad de propiedades.

La fórmula (2) se puede representar también en forma simbólica de la siguiente manera:

$$N(\alpha'\beta' \ldots \omega') = N(1-\alpha)(1-\beta) \ldots (1-\omega). \qquad (6)$$

Aquí, luego de abrir paréntesis, hay que escribir los productos $N\alpha\beta \ldots \lambda$ en la forma $N(\alpha\beta \ldots \ldots \lambda)$. Por ejemplo, en lugar de $N\alpha\beta\delta\omega$ escribiremos $N(\alpha\beta\delta\omega)$.

¿DONDE ESTA EL ERROR?

El responsable de una clase dio los siguientes datos sobre los alumnos: «En la clase estudian 45 escolares, de los cuales 25 son niños. 30 escolares tienen notas de «bueno» y «sobresaliente», entre ellos, 16 niños. 28 alumnos practican el deporte, habiendo entre ellos 18 niños y 17 escolares que tienen notas de «bueno» y «sobresaliente». 15 niños tienen notas de «bueno» y «sobresaliente» y al mismo tiempo practican el deporte»[1].

Al cabo de varios días el alumno fue llamado por el director de la clase (el cual, para colmo, dictaba matemáticas) quien le dijo que había un error en los datos. Tratemos de descubrir cómo lo supo. Para esto, calculemos cuántas niñas no practican el deporte y obtienen a veces «tres» (y, puede ser, «dos»). Denotemos mediante α_1 la pertenencia al sexo masculino, mediante α_2 las buenas calificaciones y mediante α_3 la afición al deporte. Hallemos a qué es igual $N(\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3')$. Las condiciones del problema nos dan que

$$N(\alpha_1)=25,\ N(\alpha_2)=30,\ N(\alpha_3)=28,$$
$$N(\alpha_1\alpha_2)=16,$$
$$N(\alpha_1\alpha_3)=18,\ N(\alpha_2\alpha_3)=17,\ N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=15.$$

Esto significa, de acuerdo con la fórmula de inclusiones y exclusiones, que

$$N(\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3')=45-25-30-28+16+18+$$
$$+17-15=-2.$$

¡Pero la respuesta no puede ser negativa! Por esto, los datos suministrados contienen una contradicción interna, son incorrectos.

LA CRIBA DE ERATOSTENES

Uno de los problemas más grandes de las matemáticas es la distribución de los números primos entre todos los naturales. A veces, entre dos números primos hay tan sólo uno compuesto (por ejemplo, 17 y 19, 29 y 31); a veces, van uno tras otro un millón de números compuestos. Ahora ya los científicos conocen bastante bien cuántos números primos hay entre los N primeros números naturales. En estos cálculos resultó de suma utilidad un método que se remonta a Eratóstenes, sabio de la Grecia antigua (vivió en el siglo III a.n.e. en Alejandría).

Eratóstenes estudió los problemas más variados: realizó investigaciones interesantes en las matemáticas, la astronomía y otras ciencias. A propósito, esta diversidad le condujo a ser un tanto superficial. Los contemporáneos llamaban a Eratóstenes, no sin ironía, «el segundo en todo» (el segundo matemático después de Euclides, el segundo astrónomo después de Hiparco, etc.).

En las matemáticas, a Eratóstenes le interesaba precisamente el problema sobre cómo hallar todos los números primos entre los naturales de 1 a N[1]. Para resolverlo, ideó el siguiente medio. Primeramente, se tachan todos los números que se dividen por 2 (excluyendo el propio 2). Luego se toma el primero de los números que quedan (precisamente, el 3). Está que este número es primo. Se tachan todos los números que lo siguen y se dividen por 3. El primero de los números

[1] En las escuelas de la URSS existen cinco calificaciones: 5 (sobresaliente), 4 (bueno), 3 (regular), 2 (insuficiente) y 1 (deficiente). La nota «1» se utiliza raramente; en los institutos de enseñanza superior no se utiliza, siendo «2» la nota más baja (en los exámenes significa «aplazado» o «eliminado») (N. del T.).

[1] Eratóstenes consideraba a 1 número primo. Ahora los matemáticos consideran a 1 un número de tipo especial, que no pertenece ni a los números primos ni a los compuestos.

cunferencia, y se consideran iguales las distribuciones que se transforman una en la otra mediante un giro, el número de permutaciones diferentes es igual a $(n - 1)!$

Calculemos ahora cuántos collares se pueden confeccionar con 7 cuentas diferentes. Por analogía con el problema que acabamos de resolver, se podría pensar que el número de collares diferentes es igual a 720. Pero el collar no solamente se puede girar en redondo, sino también rebatir (fig. 7). Por esto, la respuesta de este problema es $720 : 2 = 360$.

PERMUTACIONES CON REPETICION

Hasta ahora hemos permutado objetos que eran diferentes por pares entre sí. Si, en cambio, algunos de los objetos permutados son iguales, se obtendrán menos permutaciones: algunas de ellas serán iguales entre sí. Por ejemplo, permutando las letras de la palabra «mano», obtenemos 24 permutaciones diferentes:

mano	namo	mona	noma
maon	moan	naom	noam
mnao	nmao	nmoa	mnoa
onam	oman	amon	anom
oanm	aonm	aomn	oamn
amno	anmo	onma	omna

Y si en lugar de la palabra «mano» tomamos la palabra «mama», en todas las permutaciones escritas habrá que sustituir la «n» por la «m» y la «o» por la «a». En este caso, algunas de nuestras 24 permutaciones resultarán iguales. Por ejemplo, las permutaciones mano, namo, mona, noma de la primera fila nos darán, al efectuar dicha sustitución, la misma palabra «mama». Análogamente, las cuatro permutaciones de la segunda fila darán la palabra «maam». En general, todas las 24 permutaciones se dividen en cuaternas, las que, al sustituir la «n» por la «m» y la «o» por la «a» nos darán el mismo resultado. En la tabla, estas permutaciones se hallan en una misma fila. Por esto, el número de permutaciones distintas que se pueden escribir de la palabra «mama» es igual a $24 : 4 = 6$. Helas aquí:

mama, maam, mmaa, amam, aamm, amma.

El problema general se enuncia como sigue: *Se tienen objetos de k tipos diferentes. ¿Cuántas permutaciones se pueden hacer tomando n_1 elementos del primer tipo, n_2 del segundo, ..., n_k del k-ésimo tipo?*

El número de elementos en cada permutación es igual a $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$. Por esto, si todos los elementos fuesen diferentes, el número de permutaciones sería igual a $n!$. Pero, a causa de que algunos elementos coinciden, se obtendrá un número menor. En efecto, tomemos, por ejemplo, la permutación

$$\underbrace{aa \ldots a}_{n_1} \underbrace{bb \ldots b}_{n_2} \ldots \underbrace{xx \ldots x}_{n_k}, \tag{4}$$

en la cual se han escrito primeramente todos los elementos del primer tipo, después, todos los del segundo, ..., por último, todos los del k-ésimo. Los elementos del primer tipo pueden ser permutados entre sí de $n_1!$ formas. Pero, como todos estos elementos son iguales, estas permutaciones no cambiarán nada. De forma totalmente análoga, no cambian nada las $n_2!$ permutaciones de los elementos del segundo tipo, ..., las $n_k!$ permutaciones de los del k-ésimo tipo. Por ejemplo, en la permutación «mmaa» no cambiará nada si permutamos el primer elemento con el segundo, o el tercero con el cuarto.

Las permutaciones de los elementos del primer tipo, del segundo, etc. se pueden efectuar en forma independiente entre sí. Por esto (en virtud de la regla del producto), los elementos de la permutación (4) se pueden intercambiar entre sí de $n_1!n_2! \ldots n_k!$ maneras de modo que esta permutación permanezca invariable. Esto mismo es válido para cualquier otra distriburestantes será el 5. Tachamos todos los siguientes que se dividen por 5, etc. Los números que sobrevivan a todas las tachaduras serán precisamente los primos. Como en los tiempos de Eratóstenes escribían en tablas de cera, y no tachaban las cifras, sino que las perforaban, la tabla, después de efectuar el proceso descrito, se asemejaba a una criba. Por esto, el método de Eratóstenes para determinar los números-primos fue denominado «criba de Eratóstenes».

Calculemos cuántos números quedarán en la primera centena si tachamos, por el método de Eratóstenes, los que se dividen por 2, 3 y 5. En otras palabras, planteémosnos el siguiente problema ¿cuántos números de la primera centena no se dividen por ninguno de los números 2, 3, 5? Este problema se resuelve mediante la fórmula de inclusiones y exclusiones.

Designemos por α_1 la propiedad de un número de ser divisible por 2, mediante α_2, la de divisibilidad por 3 y mediante α_3, la de ser divisible por 5. Entonces $\alpha_1\alpha_2$ significará que el número se divide por 6; $\alpha_1\alpha_3$, que éste se divide por 10, y $\alpha_2\alpha_3$, que se divide por 15. Por último, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ significa que el número se divide por 30. Debemos hallar cuántos números, del 1 al 100, no se dividen ni por 2, ni por 3, ni por 5, es decir, no poseen ninguna de las propiedades α_1, α_2, α_3. Según la fórmula (2), se tiene que

$$N(\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3') = 100 - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - N(\alpha_3) + $$
$$+ N(\alpha_1\alpha_2) + N(\alpha_1\alpha_3) + N(\alpha_2\alpha_3) -$$
$$- N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3).$$

Pero, para hallar cuántos números, del 1 al N, se dividen por n, hay que dividir N por n y tomar la parte entera del cociente obtenido. Por esto

$$N(\alpha_1) = 50,\ N(\alpha_2) = 33,\ N(\alpha_3) = 20,$$
$$N(\alpha_1\alpha_2) = 16,\ N(\alpha_1\alpha_3) = 10,\ N(\alpha_2\alpha_3) = 6,$$
$$N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 3,$$

de donde

$$N(\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3') = 32.$$

De esta manera, 32 números del 1 al 100 no se dividen ni por 2, ni por 3, ni por 5. Estos, precisamente, serán los números que sobrevivirán a las tres primeras etapas del proceso de Eratóstenes. Además, quedarán los propios números 2, 3 y 5. En total, quedarán 35 números.

Del primer millar, después de las tres primeras etapas del proceso indicado, quedarán 335 números. Esto es consecuencia de que en este caso será:

$$N(\alpha_1) = 500,\ N(\alpha_2) = 333,\ N(\alpha_3) = 200,$$
$$N(\alpha_1\alpha_2) = 166,$$
$$N(\alpha_1\alpha_3) = 100,\ N(\alpha_2\alpha_3) = 66,\ N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 33.$$

CAPITULO II

ARREGLOS, PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

Hemos analizado algunas reglas generales de resolución de problemas combinatorios. Con su concurso se pueden resolver problemas de los tipos más variados. Sin embargo, al igual que en la geometría resulta engorroso reducir siempre la resolución de un problema a los axiomas, resultando más cómodo aplicar los teoremas. Así, en la combinatoria resulta más cómodo utilizar fórmulas ya listas, en lugar de resolver el problema por las reglas generales, puesto que algunos tipos de problemas se encuentran con mucha mayor frecuencia que otros. A las disposiciones que se encuentran en estos problemas se les han otorgado denominaciones especiales: arreglos, permutaciones y combinaciones.

Para el número de estas disposiciones han sido deducidas fórmulas especiales, las cuales son aplicadas a la resolución de distintos problemas combinatorios. Una de estas fórmulas ya nos es conocida: al principio del capítulo I fue demostrado que el número de k-arreglos con repetición de elementos de n tipos es igual a n^k. Ahora analizaremos cuántos arreglos se pueden formar si no se admiten repeticiones, es decir, si todos los elementos que figuran en el arreglo son diferentes. Abordemos, ante todo, el problema que sigue.

EL CAMPEONATO DE FUTBOL

En el primer grupo de la clase «A» del campeonato de la URSS de fútbol participan 17 equipos. Los premios son medallas de oro, de plata y de bronce. ¿De cuántas formas éstas pueden ser distribuidas?

Este problema se resuelve a base de la regla del producto. La medalla de oro puede ser obtenida por cualquiera de los 17 equipos. En otras palabras, aquí tenemos 17 posibilidades. Pero si ya fue otorgada la medalla de oro a algún equipo, quedan sólo 16 pretendientes a la medalla de plata. Aquí no puede haber repeticiones: un mismo equipo no puede obtener las medallas de oro y de plata.

Esto significa que después de que un equipo obtenga las medallas de oro, quedarán 16 posibilidades de obtener las de plata. Análogamente, si ya fueron otorgadas las medallas de oro y las de plata, las de bronce pueden ser obtenidas sólo por uno de los 15 equipos restantes. Esto significa, en virtud de la regla del producto, que las medallas pueden ser distribuidas de $17 \cdot 16 \cdot 15 = 4080$ formas.

ARREGLOS SIN REPETICION

El problema resuelto pertecene a la clase de problemas combinatorios sobre arreglos sin repetición. El enunciado general de dichos problemas es como sigue:

Se tienen n objetos diferentes. ¿Cuántas k-distribuciones se pueden formar a partir de ellos? Aquí dos k-distribuciones se consideran diferentes, si se diferencian entre sí por lo menos en un elemento, o están formadas por los mismos elementos pero dispuestos en orden distinto.

Estas distribuciones se denominan *arreglos sin repetición*, y el número de ellas se denota mediante $A_k^{(n)}$. Al formar los k-arreglos sin repetición de n objetos, debemos efectuar k elecciones. En la primera etapa podemos escoger cualquiera de los n objetos disponibles. Si ya fue hecha esta elección, en la segunda etapa habrá que escoger entre los $n - 1$ objetos restantes, pues no se puede repetir la elección efectuada[1]. De forma totalmente análoga, en la tercera etapa quedarán sólo $n - 2$ objetos libres para elegir, en la cuarta, $n - 3$ objetos . . ., en la k-ésima, $n - k + 1$ objetos. Por esto, en virtud de la regla del pro-

[1] También se utiliza la notación $A_{n,k}$. La notación rusa es A_n^k; véase la nota al pie de la pág. 10. En algunos textos se emplea el término «variaciones» en lugar de «arreglos». Entonces se utiliza la letra «V» en lugar de la «A» para denotar el número de éstos (N. del T.).

[1] Recordemos que a diferencia del caso de arreglos con repetición ahora tenemos tan sólo un elemento de cada tipo.

ducto, se obtiene que el número de k-arreglos sin repetición de n elementos se expresa como sigue:

$$A_k^n = n(n-1)\dots(n-k+1). \qquad (1)$$

LA SOCIEDAD CIENTIFICA

Apliquemos la fórmula deducida a la resolución del problema siguiente: *Una sociedad científica está formada por 25 personas. Es necesario elegir al presidente de la sociedad, al vice-presidente, al secretario científico y al tesorero. ¿De cuántas formas se puede efectuar esta elección, si cada miembro de la sociedad puede ocupar sólo un cargo?*

En este caso, hay que hallar el número de arreglos (sin repetición) de 25 elementos tomados de a 4, puesto que aquí tiene importancia quién será elegido de dirigente de la sociedad y qué puestos ocuparán los escogidos (la elección «presidente Ivanov, vice Tatárinov, secretario Timoshenko, tesorero Alexéiev» se diferencia de la elección «presidente Timoshenko, vice presidente Ivanov, secretario Tatárinov y tesorero Alexéiev»). Por eso, la respuesta se expresa mediante la fórmula

$$A_4^{25} = 25\cdot 24\cdot 23\cdot 22 = 303\,600.$$

PERMUTACIONES

Al formar arreglos sin repetición de n elementos tomados de a k, obtuvimos distribuciones que se diferenciaban entre sí tanto en la composición como en el orden de los elementos. Pero si tomamos distribuciones en las que figuren todos los n elementos, éstas podrán diferenciarse entre sí solamente en el orden de los elementos que figuren en ellas. Tales distribuciones son llamadas *permutaciones de n elementos* o, más brevemente, *n-permutaciones*[1].

[1] El término «n-permutaciones», así como el «n-distribuciones», que se encuentra más abajo, no se utiliza en español, pero los hemos conservado en la traducción por ser más concisos que los términos españoles respectivos (N. del T.).

En otras palabras, se llaman n-permutaciones a los arreglos sin repetición de n elementos, en los cuales figuran todos los elementos. Se puede decir también que se llaman permutaciones de n elementos todas las n-distribuciones posibles, cada una de las cuales contiene todos estos elementos tomados una sola vez y que se diferencian entre sí sólo en el orden de los elementos. El número de n-permutaciones se denota mediante P_n. La fórmula para P_n se obtiene directamente de la fórmula que da el número de arreglos sin repetición. Más precisamente,

$$P_n = A_n^n = n(n-1)\dots 2\cdot 1. \qquad (2)$$

De este modo, para saber cuántas permutaciones se pueden formar de n elementos, hay que multiplicar todos los números naturales del 1 al n. Este producto se denomina $n!$ (se lee «factorial de n»). Así, pues,

$$P_n = n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n.$$

Aquí se conviene que $1! = 1$.

En lo sucesivo encontraremos la notación 0! Parecería que 0! debe ser igual a cero. Sin embargo, se ha convenido considerar que $0! = 1$.

El hecho reside en que la factorial posee, evidentemente, la siguiente propiedad:

$$n! = n(n-1)!$$

Esta igualdad es válida para $n > 1$. Es natural definir 0! de forma que esta igualdad permanezca válida también para $n = 1$, es decir, de forma que sea $1! = 1.0!$ Pero entonces hay que hacer $0! = 1$.

Obsérvese, además, que la fórmula (1) para el número de arreglos sin repetición se puede escribir de la siguiente manera:

$$A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (3)$$

En efecto, en el quebrado (3) todos los factores $1, 2, 3, \dots, n-k$ figuran tanto en el numerador como en el denominador. Después de simplificar, obtenemos que $A_k^n = n(n-1)\ldots$ $\ldots(n-k+1)$, lo que corresponde a la fórmula (1).

PROBLEMA DE LAS TORRES

¿De cuántas formas se pueden colocar en el tablero de ajedrez 8 torres de modo que no se puedan comer una a la otra?

Está claro que en tal distribución en cada línea horizontal y en cada vertical habrá solamente una torre. Tomemos una de estas distribuciones y denotemos mediante a_1 el número de la casilla

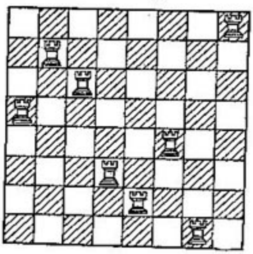


Fig. 6.

ocupada en la primera fila horizontal, mediante a_2, en la segunda, ..., mediante a_8, en la octava. Entonces $(a_1, a_2, \ldots, a_8)$ será cierta permutación de los números 1, 2, ..., 8 (está claro que entre los números $a_1, a_2, \ldots, a_8$ no hay dos iguales, puesto que de ser así dos torres quedarían en una misma vertical). Recíprocamente, si $a_1, a_2, \ldots, a_8$ es alguna permutación de los números 1, 2, ..., 8, a ésta le corresponderá cierta distribución de las torres, en la cual no se podrán comer una a la otra. Por ejemplo, en la fig. 6 se representa la distribución de las torres que corresponde a la permutación 7 5 4 6 1 3 2 8. De esta manera, el número de distribuciones buscadas de las torres es igual al número de permutaciones de los números 1, 2, ..., 8, es decir, a P_8. Pero

$$P_8 = 8! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8 = 40\,320.$$

Esto significa que las torres se pueden ubicar de la forma requerida de 40 320 modos diferentes.

De manera totalmente análoga se demuestra que *en un tablero de n hileras horizontales y n verticales se pueden ubicar de $n!$ formas n torres de modo que no se puedan comer una a la otra.*

Obtendríamos una respuesta totalmente diferente si las torres se diferenciasen en algo entre sí: si tuviesen distinto color, o si estuviesen numeradas. En este caso, de cada distribución de las torres sin numerar se obtendrían $n!$ distribuciones de las numeradas: éstas se obtienen si, para las mismas casillas ocupadas, se cambian entre sí las n torres de todas las formas posibles. Por esto, obtendríamos $(n!)^2$ maneras de distribuciones en las que las torres no se podrían comer entre sí.

Se puede llegar a la misma deducción, aplicando directamente la regla del producto. La primera torre se puede ubicar en cualquiera de las n^2 casillas. Si se tacha la fila horizontal y la vertical, en las que quedó esta torre, quedará un tablero con $n-1$ hileras horizontales y $n-1$ verticales, con $(n-1)^2$ casillas. Esto significa que la segunda torre se puede ubicar de $(n-1)^2$ maneras. Análogamente la tercera torre se puede colocar de $(n-2)^2$ modos, etc. En total, obtenemos

$$n^2(n-1)^2\ldots1^2 = (n!)^2$$

formas de distribución de las torres.

PROBLEMAS LINGÜISTICOS

Los lingüistas, especialistas en idiomas vivos y muertos, deben adivinar con frecuencia escrituras hechas en idiomas desconocidos. Supongamos que en sus manos cayó un texto escrito mediante 26 signos desconocidos. Estos símbolos son letras que representan uno de los 26 sonidos del idioma. *¿De cuántas maneras se pueden hacer corresponder los sonidos a los signos del idioma?*

Dispongamos los signos de la escritura en cierto orden. Entonces, cada modo de correspondencia nos dará cierta permutación de los sonidos. Pero de 26 sonidos se pueden formar $P_{26} = 26!$ permutaciones. Este número es aproximadamente igual a $4 \cdot 10^{26}$. Se sobreentiende que comprobar todas estas posibilidades es un trabajo no sólo superior a las fuerzas del hombre, sino a las de una computadora electrónica. Por esto, se trata de disminuir el número de posibilidades. Con frecuencia se logra separar los símbolos que denotan vocales de los que denotan consonantes (las vocales con mayor frecuencia se hallan al lado de las consonantes que las últimas entre sí, o las vocales una junto a la otra; observando qué combinaciones de símbolos se encuentran con mayor frecuencia, se pueden separar los signos de las vocales de los que corresponden a las consonantes). Supongamos que se pudo hallar 7 signos para las vocales y 19 para las consonantes. Calculemos *en cuántas veces disminuyó el número de posibilidades.* Los 7 signos para las vocales se pueden permutar entre sí de $7!$ formas, y los 19 para las consonantes, de $19!$ maneras. El número total de combinaciones es igual a $7! \cdot 19!$ Esto significa que el trabajo disminuyó en $26!/7! \cdot 19! \approx$ $\approx 650\,000$ veces. Está claro que ahora es más fácil, pero también $7! \cdot 19!$ es un número gigantesco.

Después de esto, se calcula la frecuencia de aparición de cada signo por separado. Comparando esta frecuencia con la frecuencia de aparición de letras en idiomas próximos al analizado, se puede acertar aproximadamente el significado de algunos signos. Otros signos se pueden hallar comparando el texto en cuestión con el mismo texto en otro idioma (los monarcas antiguos solían informar sobre sus «hazañas» en varios idiomas).

Supongamos que, como resultado de este trabajo, se han identificado 4 vocales y 13 consonantes. ¿Cuántas posibilidades quedan aún? Está claro que $3! \cdot 6! = 4320$. Este número de combinaciones ya puede ser verificado, utilizando las computadoras electrónicas.

Con dificultades análogas se encuentran los criptólogos, o especialistas en el descifrado de códigos.

LA RONDA

Siete muchachas forman una ronda. De cuántas maneras distintas se pueden colocar en círculo?

Si estuviesen paradas sin moverse, se obtendrían $7! = 5040$ permutaciones. Pero, como las niñas giran, su posición con respecto a los

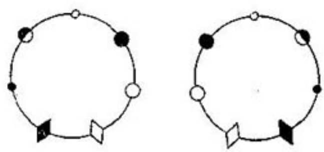


Fig. 7.

objetos que las rodean no interesa, e influye sólo su disposición relativa. Por esto, las permutaciones que se transforman una en la otra al girar las personas deben considerarse iguales. Pero de cada permutación se pueden obtener otras seis mediante el giro. Por lo tanto, el número 5040 debe dividirse entre 7. Obtenemos $5040 : 7 = 720$ permutaciones diferentes de niñas en la ronda.

En general, si se examinan las permutaciones de n objetos, ubicados no en fila, sino en circión de los elementos. Por esto, el conjunto de todas las $n!$ permutaciones se separa en partes formadas por $n_1!n_2! \ldots n_k!$ permutaciones iguales cada una. Por consiguiente, el número de permutaciones con repetición diferentes que se pueden escribir a partir de los elementos dados es igual a

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\ldots\,n_k!}, \qquad (5)$$

siendo, recordemos una vez más, $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Aplicando la fórmula (5) resulta fácil responder a la pregunta: *¿cuántas permutaciones se pueden hacer de las letras de la palabra «Missisipi»?* Tenemos aquí una letra «m», cuatro «i», tres «s» y una «p», habiendo en total 9 letras. Esto significa, de acuerdo con la fórmula (5), que el número de permutaciones es igual a

$$P(4, 3, 1, 1) = \frac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 1!} = 2\,520.$$

LOS ANAGRAMAS

Hasta el siglo XVII no existían casi revistas científicas. Los hombres de ciencia se enteraban de los trabajos de sus colegas o bien de los libros, o bien de las cartas particulares. Esto creaba grandes dificultades en la publicación de los resultados originales: la impresión de los libros llevaba años enteros, y escribir en una carta privada sobre un descubrimiento era arriesgado: de pronto alguien se apropia del trabajo y luego ¡cómo demostrar que no lo hizo él, sino que se enteró por medio de la carta recibida! También pudo suceder que el que recibió la carta pensó mucho tiempo sobre el mismo problema, halló su solución y la carta no le dio nada nuevo, y él a su vez quería escribirle a su colega una información análoga.

A causa de esto, con frecuencia surgían disputas sobre la prioridad de los descubrimientos. Aún a fines del siglo XVII había largas discusiones sobre la prioridad entre Newton y Leibnitz (sobre quién descubrió primero los cálculos diferencial e integral), entre Newton y Hooke (quién enunció primero la ley de gravitación universal), etc.

En la antigüedad, Arquímedes inclusive tuvo que recurrir a una artimaña. Cuando algunos científicos de Alejandría se apropiaron de sus resultados, de los que se enteraron por cartas que recibieron de éste, él les escribió otra carta. En ella había fórmulas de extraordinaria importancia para las superficies y volúmenes de algunas figuras. Los alejandrinos expresaron nuevamente que estas fórmulas ya las conocían hace mucho, y que Arquímedes no les informó de nada nuevo. Pero aquí se aclaró que Arquímedes los agarró en la trampa: las fórmulas que contenía la carta eran incorrectas! Para asegurarse la prioridad y no admitir la difusión prematura de los resultados obtenidos, los científicos enunciaban en una frase corta la esencia del descubrimiento, después permutaban las letras de ésta y enviaban la carta con las letras intercambiadas a sus colegas. Estos textos se denominan *anagramas*. Por ejemplo, las palabras «luna» y «nula» son anagramas. Cuando se imprimía el libro con la exposición detallada del resultado, en éste se daba el descifrado del anagrama. Estos eran utilizados también en las discusiones políticas. Por ejemplo, después del asesinato del rey francés Henri III, del nombre de su asesino, frère Jacques Clément (el hermano Jacques Clément), confeccionaron el anagrama «C'est l'enfer qui m'a créé» (me ha creado el infierno). Los enemigos del rey no se quedaron atrás, y de su nombre Henri de Valois crearon el anagrama Vilain Herodés (el villano Herodes). Cuando Christian Huygens (1629—1695) descubrió el anillo de Saturno, formó el anagrama *aaaaaaa*, *ccccc*, *d*, *eeeee*, *g*, *h*, *iiiiiii*, *lll*, *mm*, *nnnnnnnnn*, *oooo*, *pp*, *q*, *rr*, *s*, *ttttt*, *uuuuu*.
Si se colocan aquí las letras en el orden necesario, se obtiene el texto

«Annulo cingitur tenui, plano, nusquam cohaerente, ad eclipticam inclinato».

(«Está rodeado por un anillo tenue, plano, no adherido en ninguna parte, inclinado hacia la eclíptica».)

Sin embargo, no siempre los anagramas permitían conservar el misterio. Cuando el mismo Huygens descubrió el primer satélite de Saturno (Titano) y halló que el período de su rotación alrededor del planeta era igual a 15 días, formó a raíz de esto un anagrama y lo envió a sus colegas. Sin embargo, uno de ellos, Wallis, experto maestro en el descifrado de escrituras secretas, adivinó este anagrama y formó a su vez el suyo, que envió a Huygens. Cuando los científicos se intercambiaron los descifrados de los anagramas, resultó ser como si Wallis hubiese hecho el mismo descubrimiento antes que Huygens. Luego Wallis reconoció que había hecho una broma, con el fin de demostrar la inutilidad de los anagramas en lo que se refiere a la escritura secreta. Sin embargo, Huygens no supo interpretar la broma y se enojó...

Calculemos cuántas permutaciones habría que hacer para hallar el verdadero significado del primer anagrama de Huygens. En éste figuran 7 letras a, $5c$, $1d$, $5e$, $1g$, $1h$, $7i$, $3l$, $2m$, $9n$, $4o$, $2p$, $1q$, $2r$, $1s$, $5t$ y 5 letras u, habiendo en total 61 letras. En virtud de la fórmula (5) obtenemos entonces

$$\frac{61!}{7!\,5!\,1!\,5!\,1!\,1!\,7!\,3!\,2!\,9!\,4!\,2!\,1!\,2!\,1!\,5!\,5!}$$

permutaciones. Este enorme número es aproximadamente igual a 10^{60}.

El problema de escribir todas estas permutaciones le llevaría a una computadora electrónica, que efectúe un millón de operaciones por segundo, más tiempo que todo el que lleva de existencia el Sistema Solar.

En cierto sentido al hombre le es más fácil resolver este problema que a la máquina, puesto que el hombre tomará no todas las permutaciones, sino sólo aquellas en que se obtengan palabras con sentido, tomará en consideración las reglas morfológicas, etc. Esto reduce mucho el número de pruebas necesarias. Y, lo que es más importante, éste sabe aproximadamente qué problemas ocupaban a su corresponsal. Pero, de todas formas, resulta un trabajo muy engorroso.

COMBINACIONES

No siempre nos interesa el orden en que se distribuyen los elementos. Por ejemplo, si en la semifinal del campeonato de la URSS de ajedrez participan 20 personas, y a la final llegan sólo tres, el orden dentro del trío no interesa: ¡aunque sea tercero, con tal de quedar para la final! Se han dado casos en que el campeón de la URSS resultaba ser un ajedrecista que no ocupaba en la semifinal el lugar más alto.

De igual manera, en el campeonato de la URSS de fútbol la liga superior, formada por 17 equipos, debe ser abandonada por los equipos que ocuparon los últimos cuatro lugares. Y es un débil consuelo el saber que el equipo ocupó el lugar 14, y no el 17: de todas formas deberá pasar al segundo plano.

En los casos en que no nos interesa el orden de los elementos en la distribución, sino solamente su composición, se dice que se trata de una combinación. De este modo, se llaman *k-combinaciones de n elementos*[1] las k-distribuciones posibles, formadas a partir de estos elementos y que se diferencian entre sí por la composición de los elementos, pero no por su orden. El número de k-combinaciones que se pueden formar a partir de n elementos se denota mediante C_k^n[2].

La fórmula del número de combinaciones se obtiene fácilmente de la que dedujimos antes para el número de arreglos. En efecto, formemos

[1] En español se utiliza la expresión «combinaciones de n elementos tomados de a k», véase la nota de la pág. 10 (N. del T.).

[2] Se utiliza también el símbolo $\binom{n}{k}$. La notación rusa es C_n^k (véase la nota de la pág. 10) (N. del T.).

primeramente todas las k-combinaciones de n elementos, e intercambiemos luego los elementos que figuran en cada combinación de todas las maneras posibles. Obtendremos entonces todos los k-arreglos de n elementos, tomado cada uno una sola vez. Pero de cada k-combinación se pueden efectuar $k!$ permutaciones, y el número de estas combinaciones es igual a C_k^n. Por consiguiente, tiene lugar la fórmula

$$k!\,C_k^n = A_k^n.$$

De esta fórmula se halla que

$$C_k^n = \frac{A_k^n}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}. \qquad (6)$$

Es interesante observar que la fórmula que acabamos de deducir coincide con la que da el número de permutaciones de k elementos de un tipo y $n-k$ de otro:

$$P(k,\ n-k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

En otras palabras,

$$C_k^n = P(k,\ n-k). \qquad (7)$$

Esta igualdad se puede demostrar también directamente, sin recurrir a la fórmula del número de arreglos. Para esto, escribamos en orden todos los n elementos, a partir de los cuales se forman las combinaciones, y cifremos cada combinación mediante un n-arreglo de ceros y unidades. Más precisamente, si algún elemento figura en la combinación, en su lugar escribiremos 1; si éste no figura, escribiremos 0. Por ejemplo, si se forman las combinaciones de las letras a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, a la combinación a, c, f, h, i le corresponderá la distribución 1010010110, a y la distribución 0111001001, la combinación b, c, d, g, j. Está claro que a cada k-combinación le corresponderá una distribución de k unidades y $n-k$ ceros, y a cada distribución de este tipo le corresponderá cierta k-combinación; además, a distintas distribuciones corresponderán distintas k-combinaciones. De aquí, precisamente, se deduce que el número de k-combinaciones de n elementos coincide con el de permutaciones de k elementos de un tipo (unidades) y $n-k$ de otro (ceros).

Aplicando la fórmula (6), es fácil resolver los problemas a que hicimos referencia al principio de este apartado. El número de resultados diferentes de la semifinal del campeonato de ajedrez se expresa por la fórmula

$$C_3^{20} = \frac{20!}{3!\,17!} = 1\,140.$$

El número de distintas posibilidades "tristes" del campeonato de fútbol es igual a

$$C_4^{17} = \frac{17!}{4!\,13!} = 2\,380.$$

Aquí tenemos otro problema sobre combinaciones:

¿De cuántas formas se pueden colocar en el tablero de ajedrez 8 torres? A diferencia del problema estudiado en la pág. 25, aquí no se impone la condición de que las torres no puedan comerse unas a otras. Por esto, simplemente debemos escoger 8 casillas cualesquiera de las 64 del

tablero de ajedrez. Esto se puede hacer de

$$C_8^{64}=\frac{64!}{8!\,56!}=4\,328\,284\,968$$

formas distintas.

En forma totalmente análoga se demuestra que en un tablero con m líneas horizontales y n verticales se pueden colocar k torres de

$$C_k^{mn}=\frac{(mn)!}{k!\,(mn-k)!}$$

maneras.

Si colocamos, en cambio, no k torres iguales sino k figuras diferentes, tendrá también importancia qué figura ha sido colocada en cuál casilla. Por esto, aquí no obtenemos combinaciones, sino arreglos, y la respuesta se expresa por la fórmula

$$A_k^{mn}=\frac{(mn)!}{(mn-k)!}.$$

LA LOTERIA GENOVESA

En los siglos pasados gozaba de gran popularidad la llamada *lotería genovesa*, que se conservó hasta ahora en algunos países. Su esencia consistía en lo siguiente. Los participantes de la lotería compraban billetes, en los que había números del 1 al 90. Se podían comprar también billetes en los que había directamente dos, tres, cuatro o cinco cifras. En el día del sorteo de la lotería, de una bolsa que contenía fichas con los números del 1 al 90 se extraían cinco fichas. Ganaban aquellos en cuyos billetes todos los números se hallaban entre los que habían sido extraídos[1]. Por ejemplo, si en el billete había los números 8, 21, 49, y habían sido extraídos los números 3, 8, 21, 37, 49, el billete ganaba; si, en cambio, habían sido extraídos, por ejemplo, los números 3, 7, 21, 49, 63, el billete perdía, puesto que el 8 no se hallaba entre los números extraídos.

Si el participante de la lotería compraba un billete con un solo número, obtenía, si ganaba, una suma 15 veces mayor que el costo del billete; si éste tenía dos números (ambo), la suma era 270 veces mayor; si tenía tres (terna), 5500 veces; si tenía cuatro (cuaterna), 75 000 veces, y si tenía cinco números (quina), 1 000 000 de veces mayor que el costo del billete.

Muchos probaban enriquecerse participando en esta lotería y apostando, en cada sorteo, a una terna o un ambo. Pero casi nadie logró conseguirlo: la lotería estaba calculada de forma que ganasen sus organizadores[1].

Para comprender las causas de esto, tratemos de calcular la razón entre el número de casos «afortunados» de la lotería y el número total de casos en las distintas formas de juego. El número

[1] Una variante de esta lotería es la lotería de salón, con cartones: aquí hay también bolillas con los números del 1 al 90. En los cartones de los jugadores hay 3 filas de 5 números cada una. Cuando se completan 4 números se dice, precisamente, que se tiene una «cuaterna».

[1] Las emociones de los participantes de esta lotería han sido descritas con gran brillantez por la escritora italiana Matilde Serao en la novela «El sorteo de la lotería».

total de casos de la lotería se halla directamente mediante la fórmula (6). De la bolsa con 90 fichas se extraen 5, sin que el orden tenga importancia alguna. Se obtienen combinaciones de 90 elementos tomados de a 5, el número de las cuales es igual a

$$C_5^{90}=\frac{90!}{5!\,85!}=\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}.$$

Supongamos ahora que el participante de la lotería compró un billete con un solo número. ¿En cuántos casos ganará? Para ganar es necesario que uno de los números extraídos coincida con el que se halla en el billete. Los otros 4 pueden ser arbitrarios. Pero estos cuatro números se escogen entre los 89 restantes. Por esto, el número de combinaciones propicias se expresa por la fórmula

$$C_4^{89}=\frac{89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}.$$

De aquí se desprende que el cociente entre el número de combinaciones propicias y el número total de éstas es igual a

$$\frac{C_4^{89}}{C_5^{90}}=\frac{5}{90}=\frac{1}{18}.$$

Esto significa, aproximadamente, que el jugador ganará una vez cada dieciocho. En otras palabras, pagara por 18 billetes y ganará sólo 15 veces más que el costo de uno de ellos: el costo de tres billetes quedará en el bolsillo de los organizadores de la lotería.

Se sobreentiende que no se debe considerar que de cada 18 veces el jugador ganará exactamente una vez. A veces, entre dos casos de ganancia pasan 20 ó 30 sorteos; a veces se logra ganar en dos y en tres sorteos consecutivos. Aquí se trata del número medio de ganancias en un intervalo grande de tiempo, o para un gran número de participantes. De otro modo, se puede incurrir en el error que se adjudica a cierto médico. Este dijo a su paciente: «Tiene Ud. una enfermedad de la cual sana 1 entre 10. Pero los 9 enfermos precedentes que he tratado de esta enfermedad se han muerto. ¡Ud. se curará sin falta!».

Calculemos ahora las probabilidades de ganar en un ambo. Aquí ya es necesario que los dos números apostados figuren entre los que se han extraído de la bolsa; los tres números restantes pueden ser cualesquiera. Como se los puede escoger entre los 88 que quedan, el número de casos «afortunados» en el juego del ambo se expresa mediante la fórmula

$$C_3^{88}=\frac{88\cdot 87\cdot 86}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

La razón entre el número de dichos casos y el número total de éstos es de

$$\frac{C_3^{88}}{C_5^{90}}=\frac{4\cdot 5}{90\cdot 89}=\frac{2}{801}.$$

Aquí ya de 801 casos sólo dos conducen al éxito. Pero como la ganancia es sólo 270 veces mayor que el costo del billete, de cada 801 de billetes de «ambo» el precio de 261 quedará en los bolsillos de los organizadores de la lotería. Está claro que el juego al ambo es aún menos ventajoso a los participantes que el juego a un número simple.

Resultan totalmente desventajosos los juegos a la terna, cuaterna y quinta, En el juego a la terna la razón entre el número de casos propicios y el número total de éstos es igual a

$$\frac{C_2^{87}}{C_5^{90}}=\frac{3\cdot 4\cdot 5}{90\cdot 89\cdot 88}=\frac{1}{11\,748};$$

en el juego a la cuaterna es de

$$\frac{C_1^{86}}{C_5^{90}}=\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87}=\frac{1}{511\,038},$$

y en el juego a la quinta, de

$$\frac{1}{C_5^{90}}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}=\frac{1}{43\,949\,268}.$$

En cambio, a los que ganan pagan solamente 5500, 75 000 y 1 000 000 de veces más. El lector puede calcular por sí mismo cuáles son las pérdidas de los participantes de la lotería bajo estas condiciones.

LA COMPRA DE LOS PASTELES

En una confitería se vendían 4 tipos de pasteles: de crema, cañones, polvorones y hojaldradas. ¿De cuántas maneras se pueden comprar 7 masas?

Este problema tiene otra forma que los ya resueltos. No es un problema sobre arreglos con repetición, ya que el orden en que se colocan los pasteles en la caja es indiferente. Por esto, se halla más próximo a los problemas de combinaciones. Pero se diferencia a su vez de éstos en que en las disposiciones pueden figurar elementos repetidos (por ejemplo, se pueden comprar 7 cañones). Estos problemas se llaman problemas sobre *combinaciones con repetición*.

Para resolver nuestro problema procederemos del siguiente modo. Cifremos cada compra mediante ceros y unidades. Más precisamente, escribamos primeramente tantas unidades cuantos pasteles de crema han sido comprados. Después, para separar los pasteles de crema de los cañones, escribamos un cero, y después tantas unidades cuantos cañones se han adquirido. Luego escribimos nuevamente un cero (si no se ha comprado ningún cañón, en la escritura habrá dos ceros seguidos). Escribamos ahora tantas unidades cuantos polvorones fueron comprados, después nuevamente un cero y, por último, tantas unidades cuantos pasteles de hojaldre se compraron. Por ejemplo, si se han adquirido 3 pasteles de crema, 1 cañón, 2 polvorones y 1 pastel de hojaldre, obtenemos la siguiente escritura: 1110101101. Si, en cambio, fueron comprados 2 pasteles de crema y 5 polvorones, se obtiene la escritura 1100111110. Está claro que a distintas compras les corresponden diferentes disposiciones de 7 unidades y 3 ceros. Recíprocamente, a cada disposición de 7 unidades y 3 ceros le corresponde alguna compra. Por ejemplo, a la disposición 0111011110 le corresponde la compra de 3 cañones y 4 polvorones.

Así, pues, el número de compras diferentes es igual al de permutaciones con repetición que pueden ser formadas de 7 unidades y 3 ceros. Este número, como fue demostrado en la pág. 28, es igual a

$$P(7, 3) = \frac{10!}{7!\,3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 4} = 120.$$

Podríamos haber llegado al mismo resultado también por otro camino, a saber: dispongamos en cada compra los pasteles en el orden siguiente: pasteles de crema, cañones, polvorones y de hojaldre, y después numerémoslos. Pero al efectuar esto, agregaremos 1 a los números de los cañones, 2 a los de los polvorones, y 3 a los de los pasteles hojaldrados (a los números de los de crema no agregaremos nada). Por ejemplo, supongamos que se han comprado 2 pasteles de crema, 3 cañones, 1 polvorón y 1 pastel de hojaldre. Entonces estos pasteles se numerarán así: 1, 2, 4, 5, 6, 8, 10. Está claro que el mayor número será aquí igual a 10 (el último pastel hojaldrado obtiene el número $7 + 3 = 10$), y el menor, a 1 (éste es el que obtiene el primer pastel de crema). Aquí no se repite ningún número. Recíprocamente, a cada sucesión creciente de 7 números del 1 al 10 le corresponde cierta compra. Por ejemplo, a la sucesión 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 le corresponde la compra de 4 cañones y 3 polvorones. Para convencerse de esto, hay que restar de los números dados los 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Obtendremos los números 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, es decir, 4 unidades y 3 «doses». Pero 1 era el número que sumábamos a los de los cañones, y 2, a los de los polvorones. Por consiguiente, tenemos 4 cañones y 3 polvorones.

Obtenemos, en nuestro caso, sólo sucesiones crecientes de números y, por lo tanto, cada sucesión queda totalmente determinada por sus integrantes. Por esto, el número de estas sucesiones de 7 términos es igual al de 7-combinaciones de 10 números (del 1 al 10). Dicho número se expresa por la fórmula

$$C_7^{10} = \frac{10!}{7!\,3!} = 120.$$

Hemos obtenido el mismo resultado.

COMBINACIONES CON REPETICION

Ya hemos expresado que el problema analizado pertenece al tipo de problemas sobre combinaciones con repetición. El enunciado general de estos problemas es como sigue: se tienen objetos de n tipos diferentes. ¿Cuántas k-disposiciones se pueden formar a partir de éstos, si no se tiene en cuenta el orden de los elementos en la disposición (en otras palabras, distintas disposiciones deben diferenciarse por lo menos en un objeto)?

Este problema se resuelve, en caso general, de forma exactamente igual a la que lo hicimos para el problema de los pasteles. Es decir, hay que cifrar cada disposición mediante ceros y unidades: escribir para cada tipo tantas unidades como objetos de este tipo figuren en la disposición, y separar los distintos tipos unos de otros mediante ceros (aquí, si los objetos de algún tipo no figuran en la disposición, hay que escribir dos o más ceros seguidos). Obtendremos así tantas unidades cuantos objetos figuren en la disposición, es decir k. El número de ceros será una unidad menor que el de tipos de objetos, es decir, $n-1$. De esta forma, obtenemos permutaciones con repetición de k unidades y $n-1$ ceros. A distintas disposiciones les corresponderán distintas permutaciones con repetición, y a cada una de estas últimas le corresponderá su disposición. Así, pues, el número $\overline{C}_k^n$ de k-combinaciones con repetición de elementos de n tipos[1] es igual al número $P(k,\ n-1)$ de permutaciones con repetición de $n-1$ ceros y k unidades. Pero

$$P(k,\ n-1)=\frac{(k+n-1)!}{k!\,(n-1)!}.$$

Por esto,

$$\overline{C}_k^n=\frac{(k+n-1)!}{k!\,(n-1)!}=C_k^{n+k-1}.$$

[1] Se utilizan también las notaciones $(CR)_k^n$ y $C_{n,k}$. En español se dice «combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k», o bien «tomados de a k». Véase la nota al pie de la pág. 10 (N. del T.).

Esta misma fórmula se puede demostrar también de otro modo. En cada combinación debemos distribuir los elementos según los tipos (primero todos los del primer tipo, después los del segundo, etc.). Luego, hay que numerar todos los elementos de la combinación, pero a los números de los del segundo tipo debe agregarse 1, a los del tercero, 2, etc. Entonces, de cada combinación con repetición se obtiene otra, sin repetición, formada por los números $1, 2, \ldots, n+k-1$, habiendo k elementos en cada combinación. De aquí se deduce, nuevamente, que

$$\overline{C}_k^n=C_k^{n+k-1}=\frac{(n+k-1)}{k!\,(n-1)!}. \tag{8}$$

Hay problemas en los cuales a las combinaciones con repetición se impone una condición complementaria: en éstas deben forzosamente figurar elementos de r tipos prefijados, siendo $r\leqslant n$. Estos problemas se reducen fácilmente al que acabamos de resolver. Para asegurar la presencia de elementos de los r tipos dados, tomemos desde el primer momento un elemento de cada uno de estos tipos. Así quedarán ocupados r lugares en la k-combinación. Los $k-r$ lugares restantes pueden ser llenados por elementos cualesquiera, pertenecientes, por hipótesis, a n tipos. Por esto, habrá tantas disposiciones del tipo buscado como combinaciones con repetición de elementos de n tipos, con $k-r$ elementos cada una,

$$\overline{C}_{k-r}^n=C_{k-r}^{n+k-r-1}.$$

En particular, si $n\leqslant k$ y se exige que en la k-combinación con repetición figure por lo menos un elemento de cada uno de los n tipos, se obtienen C_{k-n}^{k-1} disposiciones.

DE NUEVO EL CAMPEONATO DE FUTBOL

Hemos analizado problemas sobre arreglos, permutaciones y combinaciones. En muchos casos hay que vérselas con disposiciones de diferentes tipos. Consideremos el siguiente problema:

Llamemos a dos variantes del resultado del campeonato de la URSS de fútbol *coincidentes en lo fundamental*, si en estos resultados coinciden los poseedores de las medallas de oro, de plata y de bronce, así como también los cuatro equipos que abandonan la liga superior. *Hallar el número de resultados, no coincidentes en lo fundamental, del campeonato* (igual que antes, consideramos que en el campeonato participan 17 equipos).

Ya sabemos que las medallas se pueden distribuir de $A_3^{17} = 17 \cdot 16 \cdot 15$ formas (véase la pág. 23). Después de esto, quedan 14 equipos, de los cuales 4 deben abandonar la liga superior. Como aquí ya no tiene importancia el orden de los equipos que abandonan, esto puede tener lugar de $C_4^{14} = \frac{14!}{4!\,10!}$ maneras. Según la regla del producto, obtenemos que el número de resultados, coincidentes en lo fundamental, del campeonato, es igual a

$$A_3^{17} \cdot C_4^{14} = 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot \frac{14!}{4!\,10!} = \frac{17!}{4!\,10!} = 4\,084\,080.$$

A este mismo resultado se puede llegar por otro camino. El número total de distintos resultados del campeonato (sin tener en cuenta los casos en que tiene lugar el reparto de unos u otros lugares) es igual a $P_{17} = 17!$. Pero las permutaciones de los equipos que ocuparon los lugares desde el 4° al 13°, así como también las de los que ocuparon los lugares desde el 14° hasta el 17°, conducen a resultados del campeonato que coinciden en lo fundamental. El número de estas permutaciones es igual a $10! \cdot 4!$. Por lo tanto, el número de resultados diferentes se expresa por la fórmula $\frac{17!}{10!\,4!}$.

Supongamos que se quiere transmitir el resultado del campeonato mediante un telegrama formado por k puntos y rayas. *¿Cuál es el menor número de símbolos necesarios para hacerlo?* Ya sabemos que de k puntos y rayas se pueden formar 2^k distribuciones diferentes. Por esto, el menor número de símbolos que hacen posible la transmisión de la información requerida debe ser tal que se cumpla la desigualdad

$$2^k \geqslant 4\,084\,080.$$

Resolviéndola, obtenemos que $k \geqslant 22$. Así, pues, para transmitir los resultados del campeonato mediante puntos y rayas, es necesario utilizar no menos de 22 símbolos.

Se sobreentiende que estos cálculos no se utilizan para transmitir los resultados de los campeonatos. Pero es fácil imaginarse un caso en que la transmisión de la información esté acompañada de grandes dificultades técnicas (por ejemplo, al transmitir una fotografía desde una nave cósmica) y en que cada signo valga «su peso en oro». Entonces hay que considerar las diferentes posibilidades de esta transmisión y escoger las más económicas. Estos problemas son estudiados en la disciplina matemática denominada *teoría de la información*.

PROPIEDADES DE LAS COMBINACIONES [1]

Los números C_k^n poseen toda una serie de propiedades notables. Estas pueden ser demostradas de diferentes maneras. En algunos casos lo más cómodo es aplicar directamente la fórmula

$$C_k^n = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \tag{9}$$

Sin embargo, con frecuencia se logra obtener la demostración a partir de consideraciones combinatorias: se calcula el número de distribuciones de un tipo dado y se dividen éstas en clases que no posean elementos comunes. Después, se halla cuántas distribuciones figuran en cada clase. Sumando los números obtenidos, obtenemos nuevamente el número de todas las distribuciones

[1] El resto del capítulo puede ser omitido en una primera lectura. Sin embargo, las igualdades $C_k^n = C_{n-k}^n$ y $C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1}$ se encontrarán con frecuencia en lo sucesivo.

del tipo estudiado. Esto nos da, precisamente, la relación buscada.

Comencemos por la fórmula más sencilla:

$$C_k^n = C_{n-k}^n. \qquad (10)$$

Esta se desprende directamente de la (9). Si sustituímos en esta última k por $n - k$, a su vez $n - k$ se sustituirá por $n - (n - k) = k$; como resultado, los factores del denominador se intercambian de lugar. Pero la igualdad (10) es fácil de demostrar también sin recurrir a la expresión explícita del número de combinaciones. Si se escoge alguna k-combinación de n elementos diferentes, nos quedará una combinación complementaria de $n - k$ elementos, siendo a su vez la k-combinación inicial complementaria de la $(n - k)$-combinación obtenida. De esta manera, las k-combinaciones y las $(n - k)$-combinaciones forman pares mutuamente complementarios y, por ello, el número de estas combinaciones es el mismo. Esto significa que $C_k^n = C_{n-k}^n$.

Casi con la misma sencillez se demuestra la relación

$$C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1}. \qquad (11)$$

Para esto, formemos k-combinaciones de los n elementos $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ y dividámoslas en dos clases. En la primera figurarán las combinaciones que contengan al elemento a_n; en la segunda, las que no lo contengan. Si eliminamos el elemento a_n de cualquiera de las combinaciones de la primera clase, nos quedará una $(k - 1)$-combinación, formada por los elementos $a_1, \ldots, a_{n-1}$. El número de éstas es igual a C_{k-1}^{n-1}. Por esto, en la primera clase habrá C_{k-1}^{n-1} distribuciones. Las combinaciones de la segunda clase son k-combinaciones formadas por los $(n - 1)$ elementos $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Por esto, su número es igual a C_k^{n-1}. Por cuanto cualquier k-combinación formada a partir de los elementos $a_1, \ldots, a_n$ pertenece a una clase, y sólo a una, y el número total de estas combinaciones es igual a C_k^n, obtenemos la igualdad (11).

En forma similar se demuestra la relación

$$C_0^n + C_1^n + C_2^n + \ldots + C_n^n = 2^n. \qquad (12)$$

Para esto, recordemos que 2^n es el número de todos los n-arreglos con repetición formados por elementos de dos tipos. Dividamos estos arreglos en clases, haciendo pertenecer a la clase k-ésima aquellos en los que figuran k elementos del primer tipo y $n - k$ del segundo. Los arreglos de la k-ésima clase son ni más ni menos que las permutaciones posibles formadas por k elementos del primer tipo y $n - k$ del segundo. Ya sabemos que el número de tales permutaciones es igual a $P(k, n - k)$, siendo, además, $P(k, n - k) = C_k^n$ (véanse las págs. 28 y 30). Por consiguiente, el número total de arreglos de todas las clases es igual a $C_0^n + C_1^n + \ldots + C_n^n$. Por otro lado, este mismo número es igual a 2^n. Con esto queda demostrada la relación (12).

En forma totalmente análoga se demuestra que

$$\sum_{n_1+n_2+n_3=n} P(n_1, n_2, n_3) = 3^n, \qquad (13)$$

donde la suma se toma por todas las particiones del número n en tres sumandos {(teniéndose en cuenta también el orden de los sumandos, es decir, en la suma figuran, por ejemplo, los términos $P(n_1, n_2, n_3)$ y $P(n_2, n_3, n_1)$}. Para demostrarlo, debemos considerar todos los n-arreglos formados por elementos de tres tipos y separarlos en clases de una misma composición (es decir, tomar arreglos con un mismo número de elementos del primer tipo, del segundo y del tercero).

En general, tiene lugar la igualdad

$$\sum_{n_1+\ldots+n_k=n} P(n_1, \ldots, n_k) = k^n, \qquad (14)$$

donde la suma se toma por todas las particiones del número n en k sumandos (teniendo en cuenta el orden de éstos).

Consideremos ahora las m-combinaciones con repetición formadas por elementos de $n+1$ tipos, por ejemplo, por las $n+1$ letras $a, b, c, \ldots, x$. El número de estas combinaciones es igual a $\overline{C}_m^{n+1} = C_m^{n+m}$. Dividamos todas estas combinaciones en clases, haciendo pertenecer a la clase k-ésima las combinaciones en las que la letra a figura k veces. Los $m-k$ lugares restantes estarán ocupados por las letras que quedan: $b, c, \ldots, x$, cuyo número es igual a n. Por esto, en la clase k-ésima habrá tantas combinaciones cuantas $(m-k)$-combinaciones con repetición se pueden formar a partir de elementos de n tipos, es decir, $C_{m-k}^{n+m-k-1}$. En consecuencia, el número total de todas las combinaciones es igual a

$$C_m^{n+m-1} + C_{m-1}^{n+m-2} + \ldots + C_1^n + C_0^{n-1}.$$

Por otro lado, hemos visto que este número es igual a C_m^{n+m}. De esta forma queda demostrada la igualdad

$$C_0^{n-1} + C_1^n + C_2^{n+1} + \ldots + C_m^{n+m-1} = C_m^{n+m}. \quad (15)$$

Sustituyendo aquí n por $n+1$ y m por $m-1$ y aplicando la igualdad (10), se obtiene que

$$C_n^n + C_n^{n+1} + C_n^{n+2} + \ldots + C_n^{n+m-1} = C_{n+1}^{n+m}. \quad (16)$$

Para $n=1, 2, 3$, obtenemos los siguientes casos particulares de la fórmula (16):

$$1+2+\ldots+m = \frac{m(m+1)}{2}, \quad (17)$$

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + m(m+1) = \frac{m(m+1)(m+2)}{3}, \quad (18)$$

$$1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \ldots + m(m+1)(m+2) = \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4}. \quad (19)$$

Mediante las fórmulas (17)—(19) es fácil hallar la suma de los cuadrados y la de los cubos de los números naturales del 1 al m. La fórmula (18) se puede escribir como sigue:

$$1^2+2^2+\ldots+m^2+1+2+\ldots+m = \frac{m(m+1)(m+2)}{3}.$$

Pero, en virtud de la (17), se cumple que $1+2+\ldots+m = \frac{m(m+1)}{2}$, por lo cual

$$1^2+2^2+\ldots+m^2 = \frac{m(m+1)(m+2)}{3} - \frac{m(m+1)}{2} = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}. \quad (20)$$

En forma totalmente análoga se deduce, de la fórmula (9), que

$$1^3+2^3+\ldots+m^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}. \quad (21)$$

Dejamos que el lector obtenga, por este método, las fórmulas para las sumas de potencias más elevadas de los números naturales.

Las m-combinaciones con repeticiones formadas por elementos de n tipos pueden ser clasificadas tomando como base el número de elementos de diferente tipo que figuran en la combinación dada. En otras palabras, en la primera clase se hallarán las combinaciones que están formadas por elementos iguales; en la segunda, las que lo están por elementos de dos tipos, ..., en la n-ésima, por elementos de todos los n tipos (se sobreentiende que si es $m < n$, se obtendrán solamente m clases).

Calculemos cuántas combinaciones figuran en cada clase. La elección de una combinación perteneciente a la k-ésima clase se puede efectuar en dos etapas. Primeramente escogemos qué k tipos de elementos figuran en la combinación. Como el número total de tipos es igual a n, esta elección se puede hacer de C_k^n maneras. Después de que los tipos estén elegidos, debemos establecer las m-combinaciones con repetición formadas por los elementos de estos k tipos, en las cuales estén representados todos ellos. Pero hemos demostrado (véase la pág. 35) que el número de estas combinaciones con repetición es igual a $C_{m-k}^{m-1}=C_{k-1}^{m-1}$.

Según la regla del producto, de aquí se deduce que en la k-ésima clase figuran $C_k^n C_{k-1}^{m-1}$ combinaciones. Sumando los números de combinaciones de cada clase, obtenemos la cantidad total de m-combinaciones con repetición, formadas por elementos de n tipos, es decir, C_m^{m+n-1}. Queda así demostrada la igualdad

$$C_1^n C_0^{m-1}+C_2^n C_2^{m-1}+\ldots$$
$$\ldots+C_n^n C_{n-1}^{m-1}=C_m^{m+n-1}. \quad (22)$$

Si es $m<n$, el último término de la suma será $C_m^n C_{m-1}^{m-1}$. La igualdad obtenida adquiere una expresión más cómoda si se sustituye en cada sumando C_k^n por C_{n-k}^n. Nos quedará entonces:

$$C_{n-1}^n C_0^{m-1}+C_{n-2}^n C_1^{m-1}+\ldots$$
$$\ldots+C_0^n C_{n-1}^{m-1}=C_{n-1}^{m+n-1}. \quad (23)$$

Aquí, en cada sumando del primer término, la suma de los índices superiores es igual a $n+m-1$, y la de los inferiores, a $n-1$. Los índices superiores son constantes, y los inferiores varían. De otra forma, esta igualdad se puede escribir así:

$$C_0^p C_m^{n-p}+C_1^p C_{m-1}^{n-p}+\ldots+C_m^p C_0^{n-p}=C_m^n. \quad (23')$$

Ahora deduciremos una fórmula análoga, en la cual al sumar varían también los índices superiores. Para esto, tomemos p vocales distintas y $n-p$ consonantes diferentes y formemos, a partir de éstas, todas las m-combinaciones con repetición posibles. Dividamos estas combinaciones en clases, incluyendo en la k-ésima clase las combinaciones que contienen k vocales y $m-k$ consonantes. Calculemos el número de combinaciones que figuran en la k-ésima clase. Cada elemento de ésta se divide en una k-combinación (con repetición), formada por p vocales, y una $(m-k)$-combinación (con repetición), formada por $n-p$ consonantes. Por esto, en la k-ésima clase habrá $C_k^{k+p-1}C_{k-m}^{m+n-p-k-1}$ combinaciones. Por lo tanto, la cantidad total de combinaciones analizadas es igual a

$$C_0^{p-1}C_m^{m+n-p-1}+C_1^p C_{m-1}^{m+n-p-2}+\ldots$$
$$\ldots+C_m^{m+p-1}C_0^{n-p-1}.$$

Por otro lado, estas combinaciones nos dan todas las m-combinaciones con repetición que se pueden formar de elementos de n tipos diferentes, por lo cual su número es igual a C_m^{m+n-1}. Obtenemos así la identidad

$$C_0^{p-1}C_m^{m+n-p-1}+C_1^p C_{m-1}^{m+n-p-2}+\ldots$$
$$\ldots+C_m^{m+p-1}C_0^{n-p-1}=C_m^{m+n-1}. \quad (24)$$

Escribamos esta igualdad de forma que al sumar varíen solamente los índices superiores. Para esto, hay que aplicar la identidad $C_q^r=C_{r-q}^r$ a todos los términos. Obtenemos entonces:

$$C_{p-1}^{p-1}=C_{n-p-1}^{m+n-p-1}+C_{p-1}^p C_{n-p-1}^{m+n-p-2}+\ldots$$
$$\ldots+C_{p-1}^{m+p-1}C_{n-p-1}^{n-p-1}=C_{n-1}^{m+n-1}.$$

Esta fórmula puede ser escrita de otro modo como sigue[1]:

$$C_p^p C_{n-p}^{m-p}+C_p^{p+1}C_{n-1}^{m-p-1}+\ldots$$
$$\ldots+C_p^{m-n+p}C_{n-p}^{n-p}=C_{n+1}^{m+1}. \quad (24')$$

Podemos apreciar que aquí, en la suma, los índices inferiores permanecen constantes, mientras que los superiores varían, siendo la suma de los primeros igual a n, y la de los últimos, a m.

Destaquemos un caso particular de la fórmula (23), que obtuvimos antes. Si hacemos en ella $n-p=m$, obtendremos

$$C_0^p C_0^m+C_1^p C_1^m+\ldots+C_m^p C_m^m=C_m^{p+m}. \quad (25)$$

En particular, para $p=m$ nos da la igualdad

$$(C_0^p)^2+(C_1^p)^2+\ldots+(C_p^p)^2=C_p^{2p}. \quad (26)$$

[1] Sustituimos p por $p+1$, n por $n+2$ y m por $m-n$.

Las identidades obtenidas pueden ser generalizadas. Para esto, tomemos un conjunto formado por elementos de q tipos: n_1 elementos del primer tipo, n_2 del segundo, . . ., n_k del k-ésimo, siendo los elementos de un tipo diferentes entre sí (por ejemplo, el tipo se determina por el color del objeto, y los elementos de un mismo color tienen distinta forma).

Formaremos, partiendo de los elementos de este conjunto, todas las m-combinaciones posibles, y las clasificaremos por su composición, es decir, según el número de elementos del primero, segundo, . . ., q-ésimo tipo. Entonces cada clase se caracteriza por los números naturales $(m_1, m_2, \ldots, m_q)$, que satisfacen a las desigualdades $0 \leqslant m_i \leqslant n_i$. Esta clase está constituida por m_1 elementos del primer tipo, m_2 del segundo, . . ., m_q del q-ésimo, siendo, además, $m_1 + m_2 + \ldots + m_q = m$. Denotaremos esta clase mediante $A(m_1, \ldots, m_q)$.

De la regla del producto se desprende que la clase $A(m_1, \ldots, m_q)$ está formada por $C_{m_1}^{n_1} C_{m_2}^{n_2} \ldots C_{m_q}^{n_q}$ combinaciones. Sumando el número de combinaciones de todas las clases, obtenemos la identidad

$$\sum C_{m_1}^{n_1} C_{m_2}^{n_2} \ldots C_{m_q}^{n_q} = C_m^n, \tag{27}$$

donde $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_q$, y la suma se toma por todas las distribuciones posibles de los números naturales $(m_1, m_2, \ldots, m_q)$, siendo $m_1 + m_2 + \ldots + m_q = m$.

Si se toman combinaciones con repetición, se obtiene una identidad análoga:

$$\sum C_{m_1}^{n_1+m_1-1} C_{m_2}^{n_2+m_2-1} \ldots \\ \ldots C_{m_q}^{n_q+m_q-1} = C_m^{n+m-1}, \tag{28}$$

donde también es $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_q$, y la suma se toma por las mismas agrupaciones de los números $(m_1, m_2, \ldots, m_q)$.

Otra propiedad de las combinaciones se establece de la siguiente manera. Partimos de la identidad

$$C_k^n C_{m-k}^{n-k} = C_k^m C_m^n, \tag{29}$$

la cual se comprueba fácilmente por razonamientos combinatorios. Para esto, hay que tomar n elementos diferentes, escoger k de éstos, y de los $n - k$ restantes escoger aún $m - k$. Se obtiene así una m-combinación de n elementos. Para un k fijo, este proceso se puede efectuar de $C_k^n C_{k-m}^{n-k}$ maneras. No es difícil comprobar que en nuestro caso cada una de las C_m^n combinaciones se obtiene de C_k^m maneras. De aquí se desprende, precisamente, la igualdad (29).

Escribamos la identidad (29) para $k = 0, \ldots$ . . ., m y sumemos las igualdades obtenidas. Como, por la fórmula (12), se comprueba

$$C_0^m + C_1^m + \ldots + C_m^m = 2^m,$$

se obtiene que

$$C_0^n C_m^n + C_1^n C_{m-1}^{n-1} + \ldots + C_m^n C_0^{n-m} = 2^m C_m^n,$$

o bien

$$C_0^n C_{n-m}^n + C_1^n C_{m-1}^{n-1} + \ldots \\ \ldots + C_m^n C_{n-m}^{n-m} = 2^m C_m^n. \tag{30}$$

CASO PARTICULAR DE LA FORMULA DE INCLUSIONES Y EXCLUSIONES

Muchas propiedades de las combinaciones se deducen a base de la fórmula de inclusiones y exclusiones (véase la pág. 19). Nos será de utilidad un caso particular de ésta. Supongamos que el número $N(\alpha_1, \ldots, \alpha_h)$ de elementos que poseen las propiedades $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ depende no de estas propiedades, sino solamente de su cantidad, es decir, supongamos que

$$N(\alpha_1) = \ldots = N(\alpha_n),$$
$$N(\alpha_1\alpha_2) = N(\alpha_1\alpha_3) = \ldots = N(\alpha_{n-1}\alpha_n),$$
$$N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = N(\alpha_1\alpha_2\alpha_4) = \ldots = N(\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n),$$

etc. Entonces, en la suma $N(\alpha_1) + \ldots + N(\alpha_n)$ todos los términos son iguales a un mismo núme ro, que denotaremos por $N^{(1)}$. Como hay n sumandos aquí, esta suma será igual a $nN^{(1)} = C_1^n N^{(1)}$. De forma totalmente igual se demuestra que

$$N(\alpha_1\alpha_2)+N(\alpha_1\alpha_3)+\ldots+N(\alpha_{n-1}\alpha_n)=C_2^n N^{(2)},$$

donde $N^{(2)}=N(\alpha_1\alpha_2)$, y, en general, que

$$N(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k)+\ldots+N(\alpha_{n-k+1}\ldots\alpha_n)= = C_k^n N^{(k)} \qquad (31)$$

(se sobreentiende que la suma (31) se toma por todas las combinaciones posibles de n propiedades, tomadas de a k).

Por esto, en el caso considerado la fórmula de inclusiones y exclusiones adquiere la forma

$$N^{(0)}=N-C_1^n N^{(1)}+C_2^n N^{(2)}-\ldots \ldots+(-1)^n C_n^n N^{(n)}. \qquad (32)$$

SUMAS ALTERNADAS DE COMBINACIONES

Ahora pasaremos a la deducción de las propiedades ulteriores de las combinaciones. Estas son similares a las que demostramos antes, pero se diferencian de las últimas en que los signos de los sumandos varían: después de un «más» va un «menos», luego nuevamente un «más», etc.

La más sencilla de estas fórmulas es

$$C_0^n-C_1^n+C_2^n-\ldots+(-1)^n C_n^n=0. \qquad (33)$$

Esta identidad se deduce de la igualdad (11). Para demostrarla, hay que tener en cuenta que $C_0^n = C_0^{n-1} = 1$. Sustituyamos el primer sumando por C_0^{n-1} y observemos que, en virtud de la fórmula (11), es $C_0^{n-1} - C_1^n = -C_1^{n-1}$. Tenemos ahora que $-C_1^{n-1} + C_2^n = C_2^{n-1}$, etc. En fin de cuentas todos los sumandos se simplifican entre sí.

Esta fórmula se puede demostrar también mediante razonamientos combinatorios. Escribamos todas las combinaciones de n elementos $a_1, \ldots, a_n$ y efectuemos la siguiente transformación: a la combinación que no contiene la letra a_1 se la agregaremos, y la eliminaremos de las combinaciones que la contienen. Es fácil comprobar que entonces obtendremos nuevamente todas las combinaciones, tomadas una sola vez cada una. Pero en esta transformación todas las combinaciones que tienen un número par de elementos se transforman en otras con número impar de éstos, y viceversa. Por consiguiente, hay tantas combinaciones con número par de elementos como con número impar de éstos (aquí incluímos también la combinación vacía, que no contiene ningún elemento). Esto se expresa, precisamente, por la fórmula (33).

Demostremos ahora la fórmula más compleja

$$C_0^n C_m^n - C_1^n C_{m-1}^{n-1} + C_2^n C_{m-2}^{n-2} - \ldots \ldots+(-1)^m C_m^n C_0^{n-m}=0. \qquad (34)$$

Para esto, consideremos las m-combinaciones formadas a partir de los n elementos $a_1, \ldots, a_n$. Designemos por $(a_1, \ldots, a_k)$ la propiedad de la combinación consistente en que en ésta figuran forzosamente los elementos $a_1, \ldots, a_k$. El número $N(a_1, \ldots, a_k)$ de tales combinaciones es igual a C_{m-k}^{n-k} (en éstas hay k lugares ocupados por los elementos $a_1, \ldots, a_k$, habiendo $n-k$ pretendientes a los $m-k$ lugares restantes). El número total de combinaciones es igual a C_m^n, y no existen combinaciones que no posean ninguna de las propiedades $(a_1), \ldots, (a_n)$ (en cada m-combinación figuran algunos elementos). Por esto, en nuestro caso será $N = C_m^n$, $N^{(0)} = 0$, $N^{(k)} = C_{m-k}^{n-k}$. Sustituyendo estos valores en la fórmula (32), obtenemos la identidad (34).

De forma totalmente análoga se demuestra la relación

$$C_0^n C_m^{n+m-1} - C_1^n C_{m-1}^{n+m-2} + C_2^n C_{m-2}^{n+m-3} - \ldots \ldots+(-1)^n C_n^n C_{m-n}^{m-1}=0, \text{ si } m \geqslant n,$$

$$C_0^n C_m^{n+m-1} - C_1^n C_{m-1}^{n+m-2} + \ldots \ldots+(-1)^m C_m^n C_0^{n-1}=0, \qquad (35)$$

si $m < n$.

Precisamente, consideremos las m-combinaciones con repetición, formadas por elementos de n tipos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y denotemos mediante (a_k), $1 \leqslant k \leqslant n$, la propiedad que consiste en que entre los elementos de la combinación hay elementos del tipo a_k (y también, puede ser, elementos de otros tipos). Entonces $N(a_1, \ldots$ $\ldots, a_k)$ es el número de combinaciones en las cuales figuran, con seguridad, los elementos de las clases $a_1, \ldots, a_k$. De cada una de estas combinaciones se puede quitar un elemento de cada una de las clases $a_1, \ldots, a_k$. Como resultado, se obtiene cierta $(m-k)$-combinación con repetición, formada por los elementos de n tipos $a_1, \ldots, a_n$. Recíprocamente, agregando a una $(m-k)$-combinación con repetición, formada a partir de los elementos de los tipos $a_1, \ldots$ $\ldots, a_n$, un elemento de cada una de las clases $a_1, \ldots, a_k$, obtenemos una m-combinación en la cual están representados obligatoriamente estas últimas clases. De aquí se desprende que el número $N(a_1, \ldots, a_k)$ es igual al de $(m-k)$-combinaciones con repetición que se pueden formar a partir de los elementos de n tipos, es decir, que $N(a_1, \ldots, a_k) = C_{m-k}^{n+m-k-1}$. Ahora bien, el número total de m-combinaciones con repetición es igual a C_m^{n+m-1}, y no existe ninguna que no posea ninguna de las propiedades (a_k), $1 \leqslant k \leqslant n$. Sustituyendo los valores hallados $N^{(0)} = 0$, $N = C_m^{n+m-1}$, $N^{(k)} = C_{m-k}^{n+m-k-1}$ en la fórmula (32), obtenemos la identidad (35).

Demostremos, por último, la identidad

$$n^m - C_1^n (n-1)^m + C_2^n (n-2)^m - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1} C_{n-1}^n \cdot 1^m = 0, \qquad (36)$$

que es válida cuando $m < n$.

Con este fin, consideremos los m-arreglos con repetición de elementos de n tipos, y designemos mediante (a_k) la propiedad de un arreglo consistente en que en éste no figuran los elementos del tipo a_k.

Entonces $N(a_1, \ldots, a_k)$ es el número de m-arreglos con repetición que no contienen los elementos de las clases $a_1, \ldots, a_k$, es decir, que están formados por elementos de los $n-k$ tipos $a_{k+1}, \ldots, a_n$. El número de estos arreglos es igual a $(n-k)^m$. De este modo, tenemos que

$$N^{(k)} = N(a_1, \ldots, a_k) = (n-k)^m.$$

El número total de arreglos es igual a n^m.

Por último, no existen arreglos que no posean ninguna de las propiedades $(a_1), \ldots, (a_n)$. En efecto, si un arreglo no posee ninguna propiedad (a_k), contendrá elementos de todos los n tipos.

Pero esto es imposible, puesto que el número m de elementos de los arreglos es menor que n. Por esto, $N^{(0)} = 0$, y obtenemos la identidad (36).

Hemos demostrado aquí varias relaciones que satisfacen los números C_k^n. Se las puede demostrar también por otros métodos. En el capítulo V nos referiremos al método geométrico de demostración de estas relaciones, y en el VII expondremos el método más poderoso de demostración: el de las funciones generatrices. Mediante este método se pueden demostrar no sólo todas las relaciones expuestas en este capítulo, sino también toda una serie de otras, de gran interés.

CAPITULO III

PROBLEMAS COMBINATORIOS CON LIMITACIONES

Hasta ahora hemos estudiado problemas en los que no se imponía ninguna condición complementaria sobre el orden de los elementos en las distribuciones. O bien (como en los arreglos y en las permutaciones) se admitía cualquier orden de los elementos, o bien (como en las combinaciones) el orden no se tomaba en cuenta. Ahora analizaremos problemas en los que se imponen algunas limitaciones sobre el orden de los elementos.

LOS LEONES Y LOS TIGRES

Un domador de fieras quiere sacar a la arena del circo 5 leones y 4 tigres. Un tigre no puede ir detrás de otro. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir las fieras?

Ubiquemos primeramente todos los leones de forma que entre dos de ellos haya un intervalo. Esto se puede hacer de $5! = 120$ formas. El número de intervalos es igual a 4. Si agregamos a éstos dos lugares más: delante de todos los leones y detrás de ellos, se obtienen 6 lugares, en los cuales se pueden colocar los tigres, no estando ningún par de tigres juntos. Como el orden de los tigres tiene importancia, el número de formas de distribuirlos es igual al de arreglos de 6 elementos tomados de a 4, es decir, a $A_4^6 = 360$.

Combinando cada manera de distribución de los leones con uno de los modos de ubicar los tigres, obtenemos $120 \cdot 360 = 43\,200$ formas de sacar las fieras a la arena.

Si el domador tuviese n leones y k tigres, podría resolver su problema de

$$P_n A_k^{n+1} = \frac{n!\,(n+1)!}{(n-k+1)!}$$

formas. Esto es posible solamente bajo la condición de que $k \leqslant n+1$, de otro modo dos tigres quedarán forzosamente uno al lado del otro.

LA CONSTRUCCION DE LA ESCALERA

Se construye una escalera que conduce del punto A al B (fig. 8). *La distancia AC es igual a 4,5 m, y la CB, a 1,5 m. La altura de cada escalón es igual a 30 cm, y su ancho, a un múltiplo entero de 50 cm. ¿De cuántas maneras se puede construir la escalera?*

De las condiciones dadas se aprecia que la escalera debe tener 5 escalones. Además, como $4{,}5 : 0{,}5 = 9$, tenemos 10 lugares en donde se puede hacer un escalón. De esta manera, hay que escoger 5 lugares entre 10. Esto se puede hacer de

$$C_5^{10} = \frac{10!}{5!\;5!} = 252$$

formas.

En general, si debe haber k escalones, y en el segmento AC caben n escalones, la escalera se puede construir de C_k^{n+1} modos.

Este problema es similar al del domador: éste no quería colocar dos tigres uno al lado del otro, y el constructor de la escalera no puede hacer escalones de altura doble. Pero entre ambos problemas hay una diferencia fundamental. Al domador le era importante el orden en el que iban los tigres: una cosa es poner delante de

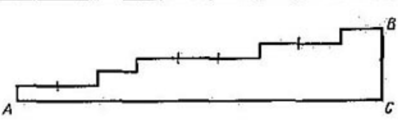


Fig. 8.

todos al tigre Shaj, y otra, al tigre Akbar. Y para el constructor de la escalera todos los lugares donde hay una elevación son iguales. Además, el domador debía tener en cuenta también el orden de distribución de los leones, mientras que al constructor de la escalera le eran iguales todos los lugares en los que se puede hacer una elevación. Por esto, el constructor tiene menores posibilidades de elección que el domador. Si la escalera tuviese una altura de 1,2 m y una longitud de 2,5 m, habría 4 escalones y 6 lugares en donde éstos se pueden construir. La respuesta sería entonces de $C_4^6 = 15$. Por su parte el domador, en el mismo caso, obtendría 43 200 variantes. Esto es comprensible, puesto que podría cambiar de lugar entre sí a 5 leones de $5! = 120$ formas, y a 4 tigres de $4! = 24$ maneras, habiendo en total $120 \cdot 24 = 2880$ formas. Y $15 \cdot 2880 = 43\,200$.

El problema de la escalera se puede enunciar como sigue:

¿De cuántas formas se pueden distribuir n ceros y k unidades de modo que no haya dos unidades juntas?

En efecto, cada escalera se puede cifrar mediante una sucesión de ceros y unidades: el cero indica el lugar en que la quebrada va hacia la derecha, y el 1, el lugar en que va hacia arriba. Por ejemplo, para la escalera representada en la fig. 8, obtenemos la sucesión 100101001010010. Además, como no hay escalones de altura doble en la escalera, en la sucesión no puede haber dos unidades seguidas. Así, pues, el número de sucesiones de n ceros y k unidades, en las cuales no hay ningún par de unidades juntas, es igual al de escaleras, es decir, a C_k^{n+1}.

EL ESTANTE DE LIBROS

En un estante hay 12 libros. ¿De cuántas formas se pueden escoger 5 de éstos de modo que no haya dos juntos?

Este problema se reduce al que acabamos de resolver. Cifremos cada elección de los libros mediante una sucesión de ceros y unidades. Precisamente, a cada libro dejado le pondremos en correspondencia un 0, y a cada uno tomado, un 1. Como resultado, se obtiene una sucesión de 5 unidades y 7 ceros. Además, como no se pueden tomar libros que estaban juntos, en la sucesión obtenida no habrá dos unidades seguidas. Pero el número de sucesiones formadas por 5 unidades y 7 ceros, en los que no hay dos unidades juntas, es igual a $C_5^8 = 56$.

En general, si hay n libros en el estante y se escogen k de ellos de forma que no haya dos juntos, esto se puede efectuar de C_k^{n-k+1} maneras. De aquí se aprecia que el problema se puede resolver sólo si $2k - 1 \leqslant n$.

LOS CABALLEROS DEL REY ARTURO

A la mesa redonda del rey Arturo hay sentados 12 caballeros. Entre ellos, cada uno está enemistado con sus vecinos. Hay que escoger 5 caballeros para liberar a una princesa encantada. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto, procediendo de modo que entre los caballeros elegidos no haya enemigos?

Este problema es similar al del estante de libros, pero se diferencia del último en que los caballeros no están en fila, sino en círculo. Pero es fácil reducirlo al caso en que los caballeros estén sentados en fila. Para esto tomemos a alguno de ellos, digamos, a sir Lancelot. Todas las distribuciones escogidas de caballeros se dividen en dos clases: en algunas de ellas participa sir Lancelot, y en otras, no. Calculemos cuántas distribuciones hay en cada clase.

En caso de que sir Lancelot vaya a liberar a la princesa encantada, ni su vecino de la derecha ni el de la izquierda tomarán parte en la expedición. Quedan 9 caballeros, de los cuales hay que escoger a 4 acompañantes para sir Lancelot. Como los vecinos de éste no participan en la expedición, hay que cuidar solamente de que entre los 4 caballeros elegidos no haya enemigos, es decir, de que no haya dos que estén sentados juntos. Pero la eliminación de sir Lancelot y de sus dos vecinos rompe la cadena de caballeros, y se puede considerar que éstos no

están sentados a una mesa redonda, sino en una fila. Pero en este caso se pueden elegir 4 caballeros de entre 9, en la forma exigida, de $C_4^6 = 15$ formas. Así, pues, en la primera clase figuran 15 disposiciones.

Calculemos ahora cuántas disposiciones hay en la segunda clase. Como sir Lancelot no participa en la expedición, se lo puede eliminar de inmediato del número de caballeros de la mesa redonda. Entonces la cadena de caballeros y de sus interrelaciones se rompe nuevamente, quedando 11 caballeros dispuestos en fila. De ellos hay que escoger 5 participantes de la expedición de manera que entre los elegidos no haya dos que estuviesen sentados juntos. Esto se puede efectuar de $C_5^7 = 21$ modos. De esta forma, el número total de maneras es igual a $15 + 21 = 36$.

En general, *si a la mesa redonda hay sentados n caballeros y hay que escoger k de ellos de modo que entre ellos no haya ningún par de vecinos, esto se puede efectuar de* $C_{k-1}^{n-k-1} + C_k^{n-k}$ maneras.

Esta afirmación se demuestra análogamente a como lo hicimos más arriba. Todas las disposiciones de caballeros se dividen en dos clases, según participe o no en ellas el caballero Lancelot. Las disposiciones en que éste participa sumarán C_{k-1}^{n-k-1}, y habrá C_k^{n-k} en las cuales no participe. Se verifica fácilmente que

$$C_{k-1}^{n-k-1} + C_k^{n-k} = \frac{n}{n-k} C_k^{n-k}.$$

Por ejemplo, para $n = 12$, y $k = 5$, se obtiene $\frac{12}{7} \cdot C_5^7 = \frac{12}{7} \cdot 21 = 36$.

LA CHICA ESTA APURADA: TIENE UNA CITA

Hace un tiempo, en las pantallas de la URSS se exponía una comedia cinematográfica con este nombre. En ella se narraban las tribulaciones de dos veraneantes que se olvidaron los pasaportes en sus casas. Decidieron enviarles los pasaportes por correo. Pero la chica que trabajaba en el correo tenía una cita, y en su apuro confundió los sobres: el pasaporte de uno quedó en el sobre con la dirección del otro, y el de este último, en el sobre con la dirección del primero. Por suerte no le tocó trabajar a la vez con 5 cartas, pues entonces no a dos, sino a cinco infelices les habría tocado dormir en los duros bancos del parque del balneario...

A propósito, esto no es del todo cierto, ya que podría haber puesto, casualmente, algunos pasaportes en los sobres necesarios. Calculemos *en cuántos casos ella habría hecho una confusión total, es decir, que ninguno hubiese recibido su pasaporte.*

Este problema se puede enunciar de la siguiente manera. *Se toman todas las permutaciones posibles de los 5 números 1, 2, 3, 4, 5. ¿En cuántas de todas no hay ningún número en su lugar?* La resolución se efectúa por el método de las inclusiones y exclusiones (véase la pág. 19). Denotemos mediante (α) la propiedad de la permutación que consiste en que el número α se halla en su lugar, y mediante N_α denotemos la cantidad de permutaciones que poseen dicha propiedad. Análogamente, $N_{\alpha\beta}$ indicará la cantidad de permutaciones que poseen a la vez las propiedades (α) y (β), es decir, tales que tanto α como β se hallan en sus lugares. Un significado análogo tienen las notaciones $N_{\alpha\beta\gamma}$, etc. Por último, denotemos mediante $N^{(0)}$ el número de permutaciones que no poseen ninguna de las propiedades (1), (2), (3), (4), (5), es decir, de las permutaciones en las que ningún número se halla en su lugar. En virtud de la fórmula de inclusiones y exclusiones, tendremos que

$$N^{(0)} = N - N_1 - N_2 - N_3 - N_4 - N_5 + N_{12} + \ldots$$
$$\ldots + N_{45} - N_{123} - \ldots - N_{345} +$$
$$+ N_{1234} + \ldots + N_{2345} - N_{12345}, \qquad (1)$$

donde $N = P_5$ es el número total de todas las permutaciones de 5 elementos (véase la pág. 20).

En nuestro caso, el problema se simplifica porque las propiedades (1), (2), (3), (4), (5) son totalmente similares. Por esto queda claro que $N_1 = N_2 = \ldots = N_5$. Análogamente, tendremos que $N_{12} = N_{23} = \ldots = N_{45}$, pues da lo mismo que se queden en su lugar los números 1 y 2, o los 3 y 4. Pero el número de pares que se pueden escoger de los números 1, 2, 3, 4, 5, es igual a C_2^5 (las propiedades (1, 2) y (2, 1) coinciden, por lo cual el orden de los números tomados en el par no nos interesa).

Análogamente tendremos C_3^5 ternas, C_4^5 cuaternas y C_5^5 grupos de cinco. Por esto, la fórmula (1) se puede escribir como sigue:

$$N^{(0)} = N - C_1^5 N^{(1)} + C_2^5 N^{(2)} - C_3^5 N^{(3)} +$$
$$+ C_4^5 N^{(4)} - C_5^5 N^{(5)}. \qquad (2)$$

Aquí, para simplificar, se ha designado por $N^{(k)}$ la cantidad de permutaciones en las que k cifras dadas quedan en sus lugares. Para concluir la resolución del problema, nos queda hallar los valores de $N^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

$N^{(1)}$ designa la cantidad de permutaciones en las que quedó en su lugar un número prefijado, por ejemplo, el 1. Pero si el 1 queda en su lugar,

los restantes se pueden permutar entre sí de $P_4 = 24$ maneras. Por ende, $N^{(1)} = P_4$. Análogamente, si los números 1 y 2 se quedan en sus lugares, los tres números restantes se pueden intercambiar de $P_3 = 6$ formas. Por esto, $N^{(2)} = P_3 = 6$. Análogamente se obtiene que

$$N^{(3)} = P_2 = 2, \quad N^{(4)} = P_1 = 1 \text{ y } N^{(5)} = P_0 = 1.$$

Sustituyendo los valores hallados de $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, $N^{(4)}$, $N^{(5)}$ en la fórmula (2), resulta

$$N^{(0)} = P_5 - C_1^5 P_4 + C_2^5 P_3 - C_3^5 P_2 + C_4^5 P_1 - C_5^5 P_0 =$$
$$= 120 - 5 \cdot 24 + 10 \cdot 6 - 10 \cdot 2 + 5 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 44.$$

Así, pues, en 44 casos de 120 ningún destinatario recibiría su pasaporte.

En forma totalmente análoga se puede hallar en cuántos casos recibirá su pasaporte exactamente un destinatario. Si el afortunado fuese el primer destinatario, los otros 4 recibirían pasaportes ajenos. Esto puede suceder de

$$P_4 - C_1^4 P_3 + C_2^4 P_2 - C_3^4 P_1 + C_4^4 P_0 = 9$$

maneras. Pero como el afortunado puede ser cualquier destinatario, el número total de formas en que una persona exactamente recibirá la carta dirigida a él es igual a $5 \cdot 9 = 45$.

Proponemos que el lector verifique por sí mismo que exactamente dos personas recibirán su carta en 20 casos, tres, en 10, cuatro, en 0, y cinco, en 1 caso. El resultado para cuatro se explica porque si cuatro recibiesen la carta dirigida a ellos, la restante estaría también dirigida a la dirección correcta.

De modo que las 120 permutaciones distintas de 5 elementos se dividen en 44 permutaciones en las cuales ningún elemento queda en su lugar, 45 en las que exactamente uno no cambia su lugar, 20 en las que no cambian de lugar dos elementos, 10 que dejan fijas a tres elementos, y 1 en la que todos quedan en sus lugares.

LA SESION DE TELEPATIA

Algunos afirman que pueden leer los pensamientos a distancia. Para verificar esto, se hacían los siguientes experimentos. En una pieza levantaban, en cierto orden, las llamadas figuras de Zener (fig. 9). El telépata debía adivinar en qué orden eran levantadas dichas figuras.

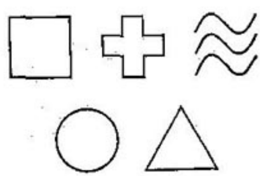
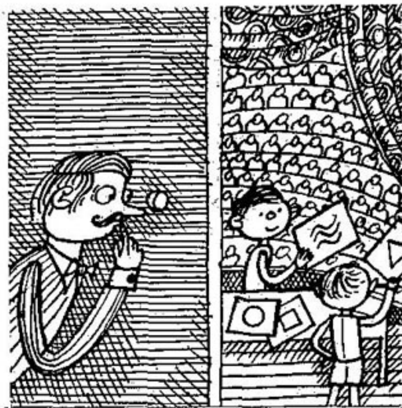


Fig. 9.

Supongamos que las figuras se levantan sin repetición. Entonces, el número total de permutaciones posibles de estas figuras es igual a $5! = 120$. Al efectuar la sesión, se escoge una de estas permutaciones. El telépata nombra otra



permutación de estas figuras, y su éxito es tanto mayor cuantas más figuras adivine. De los cálculos, efectuados en las págs. 45—46, se deduce que si se adivina al azar los resultados serían aproximadamente los siguientes: en 44 casos de 120 no se adivinaría ninguna figura, en 45, una, en 20, dos, en 10, tres, y en un caso, las cinco figuras. El promedio, al adivinar al azar, de las figuras denominadas correctamente, es igual a

$$\frac{45+20\cdot 2+10\cdot 3+5}{120}=1,$$

es decir, se nombra una figura de entre cinco. Para n figuras distintas, en promedio se adivinará una figura de entre n. Si se adivina sistemáticamente un mayor número de éstas, hay que investigar meticulosamente la causa: si tiene lugar (como sucede con frecuencia) un engaño, o si en efecto la persona estudiada posee aptitudes especiales.

Analicemos si varía el número promedio de figuras adivinadas, cuando se admiten repeticiones. En este caso, en lugar de permutaciones tendremos arreglos con repetición. Pero el número de tales arreglos de n elementos, de los cuales ni uno se halla en su lugar «legítimo», es igual a $(n-1)^n$. Efectivamente, en el primer lugar puede estar cualquier elemento, a excepción del primero, en el segundo, cualquier elemento, a excepción del segundo, etc. En otras palabras, para cada lugar hay $n-1$ candidatos. Según la regla del producto, de aquí se deduce que el número de combinaciones posibles es igual a $(n-1)^n$.

Hallemos en cuántos casos quedará en su lugar exactamente un elemento. Si ocupa su lugar, digamos, el primer elemento, quedarán aún $n-1$ lugares que deben ser ocupados. Además, hay que tener en cuenta que cada lugar es pretendido por $n-1$ candidatos (todos los elementos, a excepción del «propietario legítimo» de este lugar). Por consiguiente, el número de arreglos en los que el primer elemento, y sólo éste, se halla en su lugar, es igual a $(n-1)^{n-1}$. Pero como en su lugar puede estar cualesquiera de los n elementos, el número de arreglos en que no se ha movido exactamente un elemento es igual a $n(n-1)^{n-1}$. En forma totalmente igual se demuestra que el número de arreglos en los que no se han movido exactamente k elementos es igual a $C_k^n(n-1)^{n-k}$.

Por ejemplo, en el caso de cinco elementos diferentes, se obtiene el siguiente resultado: el número de arreglos con repetición en los que se han desplazado todos los elementos es igual a $4^5=1024$; el de arreglos en que exactamente un elemento se halla en su lugar, a $5\cdot 4^4=1280$; el de aquellos en que exactamente dos elementos quedaron en sus lugares, a $10\cdot 4^3=640$; tres, a $10\cdot 4^2=160$; cuatro, a $5\cdot 4=20$, y cinco, a $1\cdot 4^0=1$. En total, tenemos

$$1024+1280+640+160+20+1=3125$$

arreglos, lo cual concuerda con la fórmula $\bar{A}_5^5=5^5=3125$.

En promedio se adivinará, si se adivina al azar,

$$\frac{1280+620\cdot 2+160\cdot 3+20\cdot 4+1\cdot 5}{3125}=1$$

elemento. La respuesta resultó ser la misma: al adivinar al azar se puede acertar una figura de entre cinco, sin que esto dependa de si se admite repetición de figuras o no. Sin embargo, la distribución del número de figuras adivinadas ya será otra. Esta se indica en la tabla siguiente:

Cantidad de figuras acertadas	Sin repeticiones	Con repeticiones
0	0,366	0,328
1	0,375	0,410
2	0,167	0,205
3	0,083	0,051
4	0	0,006
5	0,009	0,000

PROBLEMA GENERAL DEL DESPLAZAMIENTO[1]

En forma completamente análoga a lo efectuado con los problemas estudiados más arriba, se resuelve el problema general sobre el desplazamiento: *hallar el número D_n de permutaciones de n elementos, en las cuales ningún elemento se queda en la posición inicial.* La respuesta se expresa por la fórmula

$$D_n=P_n-C_1^nP_{n-1}+C_2^nP_{n-2}-\dots+(-1)^nC_n^n=$$
$$=n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\dots+\frac{(-1)^n}{n!}\right]. \qquad (3)$$

El lector que conoce la teoría de las series reconocerá en la expresión entre paréntesis a una suma parcial del desarrollo de e^{-1}.

Generalizando la fórmula (3) para el caso $n=0$, se obtiene que es natural convenir en que $D_0=1$.

El número de permutaciones en las cuales exactamente r elementos permanecen en sus

[1] Este apartado se puede omitir en caso de que no se quiera profundizar en la cuestión.

lugares iniciales y los $n - r$ restantes cambian su posición, se expresa por la fórmula

$$D_{n,r} = C_r^n D_{n-r}. \qquad (4)$$

En efecto, hay que elegir primeramente qué r elementos quedan en sus lugares. Esto se puede hacer de C_r^n maneras. Los $n - r$ elementos restantes pueden ser intercambiados, después de esto, de cualquier manera, siempre que ninguno de ellos ocupe su lugar inicial. Esto se puede hacer de D_{n-r} modos. Según la regla del producto, se obtiene que el número total de permutaciones requeridas es igual a $C_r^n D_{n-r}$.

Dividamos todas las permutaciones en clases, según la cantidad de elementos que permanecen fijos en la permutación dada. Como el número total de permutaciones es igual a $n!$, se obtiene la siguiente identidad:

$$n! = \sum_{r=0}^{n} D_{n,r} = \sum_{r=0}^{n} C_r^n D_{n-r}. \qquad (5)$$

Otra identidad que relaciona a $n!$ con los números $D_{n,r}$ se obtiene de la siguiente manera. Tomemos todas las $n!$ permutaciones de los elementos $a_1, \ldots, a_n$ y calculemos cuántos números en éstas quedaron en sus lugares. Este cálculo se puede efectuar de dos maneras. En primer lugar, obsérvese que si, por ejemplo, el elemento a_1 se halla en su lugar, los restantes se pueden permutar de $P_{n-1} = (n - 1)!$ modos. Por esto, en $(n - 1)!$ permutaciones el elemento a_1 se hallará en el primer lugar. De igual manera, en $(n - 1)!$ permutaciones el elemento a_2 se hallará en el segundo lugar, etc. En total, obtenemos $n(n - 1)! = n!$ elementos que se hallan en sus lugares. Pero el número de estos elementos puede ser calculado de otro modo. La cantidad de permutaciones de la r-ésima clase, es decir, tales que r elementos de éstas se hallan en sus lugares, es igual a $D_{n,r}$. Cada permutación de este tipo nos da r elementos fijos. Por esto, la cantidad total de elementos fijos en las permutaciones de la r-ésima clase es igual a $rD_{n,r}$, obteniéndose, en total $\sum_{r=0}^{n} rD_{n,r}$ elementos fijos. Queda con esto demostrada la identidad

$$n! = \sum_{r=0}^{n} rD_{n,r} = \sum_{r=0}^{n} rC_r^n D_{n-r}. \qquad (5')$$

La fórmula de inclusiones y exclusiones permite resolver también el siguiente problema: *hallar el número de permutaciones de n elementos, en las cuales r elementos prefijados se han desplazado* (y los restantes pueden estar tanto desplazados, como quedarse en sus lugares iniciales). La respuesta se expresa mediante la fórmula

$$n! - C_1^r (n-1)! + C_2^r (n-2)! - \ldots + (-1)^r (n-r)!. \qquad (6)$$

SUBFACTORIALES [1]

Algunos autores denominan los números D_n *subfactoriales*. Las subfactoriales poseen muchas propiedades comunes con las factoriales ordinarias. Por ejemplo, para las últimas se cumple la igualdad

$$n! = (n-1)[(n-1)! + (n-2)!]. \qquad (7)$$

En efecto,

$$(n-1)[(n-1)! + (n-2)!] = (n-1)(n-2)!\,n = n!.$$

Demostremos que la misma igualdad tiene lugar también para las subfactoriales D_n, es decir, que

$$D_n = (n-1)[D_{n-1} + D_{n-2}]. \qquad (8)$$

Para esto, sustituyamos D_{n-1} y D_{n-2} por sus desarrollos según la fórmula (3). Obtenemos, separando en la expresión de D_{n-1} el último sumando, que

$$(n-1)[D_{n-1} + D_{n-2}] = (n-1)[(n-1)! + (n-2)!] \times$$
$$\times \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}\right] +$$
$$+ (-1)^{n-1}(n-1).$$

[1] Este párrafo puede ser omitido en la primera lectura.

Pero, en virtud de la fórmula (7),

$(n-1)[(n-1)!+(n-2)!]=n!$.

Además,

$$(-1)^{n-1}(n-1)=n!\left[\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}\right].$$

Por esto,

$$(n-1)[D_{n-1}+D_{n-2}]=$$
$$=n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}+\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}\right]=D_n.$$

La relación (8) demostrada se puede, repitiendo los razonamientos de Euler, deducir mediante consideraciones puramente combinatorias. Tomemos todas las permutaciones en las que todos los elementos han sido desplazados. El primer lugar, en éstas, lo puede ocupar cualquier elemento, a excepción del primero. Como el número de elementos restantes es igual a $n-1$, las D_n permutaciones quedan divididas en $n-1$ grupos, según qué elemento ocupó el primer lugar. Está claro que en todos los grupos habrá igual cantidad de elementos.

Calculemos cuántos elementos hay en uno de estos grupos, por ejemplo, en aquél donde el primer lugar ha sido ocupado por el segundo elemento. Este grupo se divide en dos partes: las permutaciones en las que el primer elemento se halla en el segundo lugar, y todas las restantes. Si el primer elemento ocupó el segundo lugar (y el segundo, como se recordará, el primer lugar), los $n-2$ elementos restantes se pueden intercambiar de cualquier manera, siempre que ninguno de ellos ocupe su lugar. Esto se puede hacer de D_{n-2} maneras. Por lo tanto, la primera parte contiene D_{n-2} permutaciones.

Demostremos que la segunda parte está formada por D_{n-1} permutaciones. En efecto, en ésta figurarán todas las permutaciones en las que el primer elemento no se halle en el segundo lugar, y los demás no estén en sus lugares. Si se considera por un momento que el segundo lugar es «legítimo» para el primer elemento, se obtendrá que los elementos primero, tercero, cuarto, ..., n-ésimo no se hallan en sus lugares. Como el número de estos elementos es igual a $n-1$, en la segunda parte habrá D_{n-1} permutaciones. Pero entonces, todo el grupo está formado por $D_{n-2}+D_{n-1}$ permutaciones. Como todo el conjunto de permutaciones que desplazan a todos los elementos está formado por $n-1$ grupos, en aquél habrá $(n-1)[D_{n-2}+D_{n-1}]$ permutaciones. Con esto, queda demostrada la igualdad (8).

De la fórmula (8) se deduce que

$$D_n-nD_{n-1}=-[D_{n-1}-(n-1)D_{n-2}].$$

Por esto, al variar n, la expresión D_n-nD_{n-1} sólo cambia de signo. Aplicando esta relación varias veces, obtenemos que

$$D_n-nD_{n-1}=(-1)^{n-2}[D_2-2D_1].$$

Pero $D_2=1$, y $D_1=0$, por lo cual

$$D_n=nD_{n-1}+(-1)^n. \qquad (9)$$

Esta fórmula nos recuerda la relación $n!=n(n-1)!$ para las factoriales.

Escribamos los valores de las subfactoriales para los primeros 12 números naturales

n	D_n	n	D_n	n	D_n	n	D_n
1	0	4	9	7	1854	10	1 334 961
2	1	5	44	8	14 833	11	14 684 570
3	2	6	265	9	133 496	12	176 214 841

LA CARAVANA DEL DESIERTO

Por el desierto va una caravana formada por 9 camellos. La travesía dura muchos días y, al fin, a todos les aburre ver delante de sí al mismo camello. ¿De cuántas maneras se pueden intercambiar los camellos de forma que delante de cada uno vaya otro distinto del anterior?

Estas permutaciones existen con seguridad. Por ejemplo, se pueden disponer todos los camellos en orden inverso, de forma que el último resulte primero, etc. En general, como dice el proverbio árabe, «cuando la caravana vuelve hacia atrás, el camello rengo queda delante».

Para resolver el problema, numeremos los camellos en su orden inicial desde el final de la caravana hacia el principio con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. De este modo, el último camello obtiene el número uno, el penúltimo, el 2, etc. Debemos hallar todas las permutaciones de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, en las cuales no se encuentre ningún par (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 9). Para resolver el problema, apliquemos nuevamente la fórmula de inclusiones y exclusiones.

Calculemos, ante todo, en cuántas permutaciones figura el par (1, 2). Podemos considerar en estas permutaciones que este par es un solo elemento. Por esto, la cantidad total de elementos no será 9, sino 8, y el número de permutaciones que contiene a (1, 2) es igual a P_8. El mismo resultado se obtiene para todos los 8 pares.

Ahora tomemos las permutaciones que contienen dos pares prefijados. En este caso, unimos los elementos que figuran en cada uno de estos pares. Si ambos pares contienen un mismo elemento (por ejemplo, los pares (1, 2) y (2, 3)), uniremos los tres elementos. En caso contrario (por ejemplo, para los pares (1, 2) y (5, 6)) unimos los elementos de a dos. En ambos casos, después de unirlos obtenemos 7 elementos nuevos (una parte de ellos es un par, o bien una terna de los iniciales), los cuales pueden ser permutados entre sí de P_7 maneras. Y dos pares pueden ser elegidos de entre ocho de C_2^8 formas.

De igual modo se demuestra que la cantidad de permutaciones que contienen k pares dados es igual a P_{9-k}. Además, k pares pueden ser escogidos de C_k^8 maneras. Según la fórmula de inclusiones y exclusiones, se obtiene que la cantidad de permutaciones que no contienen ningún par dado es igual a

$$P_9-C_1^8P_8+C_2^8P_7-C_3^8P_6+C_4^8P_5-$$
$$-C_5^8P_4+C_6^8P_3-C_7^8P_2+C_8^8P_1=$$
$$=8!\left[9-\frac{8}{1!}+\frac{7}{2!}-\frac{6}{3!}+\frac{5}{4!}-\frac{4}{5!}+\frac{3}{6!}-\frac{2}{7!}+\frac{1}{8!}\right]=$$
$$=148\,329.$$

De forma totalmente análoga se demuestra que la cantidad de permutaciones de n números 1, 2, 3, ..., n que no contienen ningún par (1, 2), (2, 3), ..., $(n-1, n)$ se expresa mediante la fórmula

$$E_n=P_n-C_1^{n-1}P_{n-1}+C_2^{n-1}P_{n-2}-C_3^{n-1}P_{n-3}+\dots$$
$$\dots+(-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}P_1=$$
$$=(n-1)!\left[n-\frac{n-1}{1!}+\frac{n-2}{2!}-\frac{n-3}{3!}+\dots\right.$$
$$\left.\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right]. \quad (10)$$

Expresemos la respuesta obtenida mediante subfactoriales. Para esto, dividamos cada sumando del segundo miembro en dos:

$$\frac{(-1)^k(n-k)}{k!}=\frac{(-1)^k n}{k!}+\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Obtenemos entonces que

$$E_n=n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}\right]+$$
$$+(n-1)!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\dots+\frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right]$$

(en ambos paréntesis hemos agregado un término, el último; es evidente que estos términos se simplifican entre sí, puesto que después de abrir paréntesis se transforman respectivamente en $(-1)^n$ y $(-1)^{n-1}$). Pero el primer sumando no es otra cosa que D_n, y el segundo, D_{n-1}. Por esto,

$$E_n=D_n+C_{n-1}. \quad (11)$$

Así, pues, el número de permutaciones de 1, 2, 3, . . ., en las cuales no figura ningún par (1, 2), (2, 3), . . ., $(n-1, n)$ es igual a D_n+ $+D_{n-1}$.

En forma totalmente análoga se demuestra que la cantidad de permutaciones de n elementos, en las cuales no figuran $r\leqslant n-1$ pares prefijados, es igual a

$$P_n-C_1^rP_{n-1}+C_2^rP_{n-2}-\dots+(-1)^rC_r^rP_{n-r}. \quad (12)$$

Si el número de pares prohibidos es mayor que $n-1$, se obtiene otra respuesta. Supongamos, por ejemplo, que además de los pares $(1, 2)$, $(2, 3)$, ..., $(n-1, n)$, en la permutación no debe figurar el par $(n, 1)$. Razonando en forma análoga a como lo hicimos más arriba, se obtiene que la respuesta se expresa mediante la fórmula

$$E_n = P_n - C_1^n P_{n-1} + C_2^n P_{n-2} - \dots$$
$$\dots + (-1)^k C_k^n P_{n-k} + \dots + (-1)^{n-1} C_{n-1}^n P_1 =$$
$$= n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \right] = nD_{n-1}. \quad (13)$$

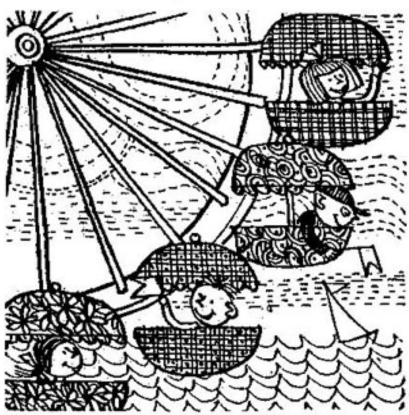
En efecto, en este caso el número de pares prohibidos es igual a n, y no puede haber un caso en que en la permutación figuren todos los n pares. En efecto, por ejemplo, si en ésta se hallan los pares $(1, 2)$, $(2, 3)$, ..., $(n-1, n)$, el primer elemento será el 1, y el último, el n, por lo cual el par $(n, 1)$ no figurará en la permutación. Por esto, el último término de la fórmula (13) es igual a $(-1)^{n-1} C_{n-1}^n P_1$, y no a $(-1)^n C_n^n P_0 = (-1)^n$.

Sería interesante dar a la última respuesta $F_n = nD_{n-1}$ una fundamentación puramente combinatoria.

UN PASEO EN CALESITA

En una calesita pasean n niños. Estos decidieron cambiar de lugar, de forma que delante de cada uno quede otro distinto del que había antes. ¿De cuántas maneras pueden efectuar esto?

Este problema es similar al que resolvimos más arriba, sobre la caravana. Pero ahora el número de pares prohibidos es igual a n: no deben figurar los pares $(1, 2)$, $(2, 3)$, ..., $(n-1, n)$ y $(n, 1)$. Además, las permutaciones que se obtienen una de otra cambiando a los niños en círculo no se considerarán diferentes: cuando comience a girar la calesita no se podrán distinguir entre sí. Por esto, de los k elementos se pueden obtener solamente $P_{k-1} = (k-1)!$ permutaciones esencialmente distintas. Por último,



en el nuevo problema puede haber permutaciones, en las cuales figuren todos los n pares. Tal será, por ejemplo, la permutación inicial. Teniendo en cuenta todo esto, se obtiene, según la fórmula de inclusiones y exclusiones, que el número de permutaciones buscado es igual a

$$Q_n = P_{n-1} - C_1^n P_{n-2} + C_2^n P_{n-3} - \dots$$
$$\dots + (-1)^{n-1} C_{n-1}^n P_0 + (-1)^n C_n^n. \quad (14)$$

Es fácil comprobar que esta expresión se puede escribir en la forma

$$Q_n = D_{n-1} - D_{n-2} + D_{n-3} - \dots + (-1)^{n-3} D_2. \quad (15)$$

En efecto, de la fórmula (14), en virtud de la igualdad $C_k^n - C_{k-1}^{n-1} = C_k^{n-1}$, se deduce que, para $n \geqslant 1$,

$$Q_n + Q_{n-1} = P_{n-1} - C_1^{n-1} P_{n-2} + C_2^{n-1} P_{n-3} - \dots$$
$$\dots + (-1)^n,$$

y esta expresión es igual a D_{n-1} (véase la pág. 49). De este modo, $Q_n + Q_{n-1} = D_{n-1}$. Además, de la fórmula (14) se deduce que $Q_2 = 0$. Tenemos, pues, que

$$Q_n + Q_{n-1} = D_{n-1},$$
$$-Q_{n-1} - Q_{n-2} = -D_{n-2},$$
$$Q_{n-2} + Q_{n-3} = D_{n-3},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$(-1)^{n-3} Q_3 = (-1)^{n-3} D_2.$$

Sumando estas igualdades, se obtiene la relación (15).

EN LA COLA DEL CINE

En la caja del cine hay una cola de $m+k$ personas; m de ellas tienen billetes de 1 rublo, y k, monedas de 50 kopeks[1]. *El billete cuesta 50 kopeks, y al comienzo de la venta la caja está vacía. ¿De cuántas maneras se pueden hallar en la cola las personas con rublos y con monedas de 50 k. de forma que la cola pase sin contratiempos, es decir, que nadie deba esperar su cambio?*

Por ejemplo, si $m = k = 2$, habrá solamente dos casos propicios: c r c r y c c r r, donde c indica una moneda de 50 k. (la mitad de un rublo) y r, un rublo. En cambio, en los cuatro casos r r c c, r c r c, r c c r y c r r c surgirá una detención: en los primeros tres casos ya el primer espectador no podrá recibir su cambio, y en el último, se detendrá en la caja el tercer espectador.

Para pequeños valores de m y k se puede resolver el problema analizando directamente todos los casos posibles. Pero si m y k son relativamente grandes, no nos ayudará este método. Es que el número de permutaciones diferentes que se pueden formar de m rublos y k monedas de 50 k. es igual, como se sabe, a

$$P(m, k) = \frac{(m+k)!}{m!\,k!}$$

Por ejemplo, para $m = k = 20$, tendríamos que

$$P(20, 20) = \frac{40!}{20!\,20!},$$

[1] El kopek es la centésima parte del rublo (N. del T.).

que es un número mayor que los cien mil millones.

Deduzcamos la fórmula que expresa el número de las distribuciones buscadas a partir de m y k. Debemos, pues, hallar el número de permutaciones de m letras «r» y k letras «c», que posean la siguiente propiedad: para todo r, $1 \leqslant r \leqslant m + k$, el número de letras «c» en los primeros r términos de la permutación no es menor que el de letras «r» (debe haber una cantidad no menor de monedas de 50 k. que de rublos, de otra forma la cola se detendrá).

Está claro que para que se pueda resolver el problema es necesario que se cumpla la condición $m \leqslant k$; de otro modo, la cola se detendrá obligatoriamente: no alcanzarán las monedas de 50 k. para dar el cambio a todos los poseedores de rublos. Por esto, partiremos de que $0 \leqslant m \leqslant k$. Al igual que en algunos otros problemas combinatorios, aquí es más cómodo buscar el número de casos «no propicios», es decir, de casos en que la cola se detenga. Si hallamos este número, restándolo de la cantidad $P(m, k) = C_m^{m+k}$ de todas las permutaciones de m letras «r» y k letras «c», se obtiene la respuesta de nuestro problema.

Ahora demostraremos el siguiente enunciado: el número de casos no propicios para las permutaciones de m letras «r» y k letras «c» es igual a $P(m-1, k+1) = C_{m-1}^{m+k}$, es decir, al número de todas las permutaciones de $m-1$ letras «r» y $k+1$ letras «c». Esto se demuestra como sigue. Tomemos cualquier permutación desfavorable de m letras «r» y k letras «c». Supongamos que la cola se retiene en algún lugar. Entonces, antes de este lugar habrá un número igual de letras «c» y «r» (todas las monedas de 50 k. se invertirán en el cambio a los poseedores de rublos), y en dicho lugar habrá una letra «r»; de otro modo, la cola pasaría sin problemas por éste.

De esta manera, el número del lugar en el cual se detiene la cola tiene la forma $2s+1$, habiendo antes que él s letras «r» y s letras «c». Pongamos ahora delante de nuestra permutación una letra «c» (si la cola entra a protestar, diremos que esto se efectúa con el fin de aliviar el cambio de las monedas). Obtendremos una permutación de m letras «r» y $k+1$ letras «c», siendo «c» la primera letra de esta permutación; entre las primeras $2s+2$ letras habrá igual número de letras «r» y «c» (había s letras «c» y $s+1$ letras «r»; al agregar una letra «c» quedaron iguales cantidades).

Ahora efectuaremos una operación que causará el disgusto de todos los poseedores de rublos y la alegría de los dueños de monedas de 50 k.: en los primeros $2s+2$ lugares cambiaremos el billete de cada poseedor de un rublo por una de 50 k., cambiando también cada una de 50 k. por un rublo. Por ejemplo, si la cola tuviera la forma

c c r c r c r r c ***r*** c c r c c r,

se detendría en el lugar indicado mediante la letra «*r*». Después de agregar delante una letra «c» y efectuar el cambio indicado, se obtiene una cola del tipo

r r r c r c r c c r c c c c r c c r.

Como en los primeros $2s+2$ lugares había igual cantidad de rublos y de monedas de 50 k., después del cambio la cantidad total de monedas de cada tipo no cambiará, y obtendremos una permutación de m letras «r» y $k+1$ letras «c», estando ahora «r» en el primer lugar. De este modo, hemos hecho corresponder a cada sucesión «desfavorable» de m letras «r» y k letras «c» una sucesión de m letras «r» y $k+1$ letras «c», que comienza a partir de una letra «r».

Demostremos que de esta forma se puede obtener cualquier sucesión de m letras «r» y $k+1$ letras «c», que comience a partir de una «r». En efecto, tomemos tal sucesión. Como se supone que $m \leqslant k$, en algún lugar el número de letras «c» y «r» se igualará. Si se sustituyen, desde el principio hasta dicho lugar inclusive, todas las letras «c» por «r», y todas las «r» por «c» y se elimina la primera letra «c», obtendremos justamente una distribución desfavorable de rublos y monedas de 50 k. en la cola. Esta se detendrá precisamente en el lugar en que, en la sucesión dada, por primera vez se igualó la cantidad de letras «c» y «r».

Hemos establecido así que *el número de distribuciones desfavorables de rublos y monedas de 50 k. en la cola es exactamente igual a la cantidad de todas las permutaciones de m letras* «r» y $k+1$ letras «c», que comienzan a partir de la letra «r». Si se elimina la primera letra, se obtienen todas las permutaciones posibles de $m-1$ letras «r» y $k+1$ letras «c». Y el número de estas permutaciones es igual a

$$P(m-1, k+1) = C_{m-1}^{m+k}.$$

Así, pues, el número de permutaciones desfavorables es igual a C_{m-1}^{m+k}. Como la cantidad de todas las permutaciones de m letras «r» y k letras «c» es igual a C_m^{m+k}, el número de las permutaciones favorables se expresa mediante la fórmula

$$C_m^{m+k} - C_{m-1}^{m+k} = \frac{k-m+1}{k+1} C_m^{m+k}. \qquad (16)$$

En particular, si $k = m$, es decir, si en la cola hay una cantidad igual de rublos y monedas de 50 k., esta cola pasará en $\frac{1}{k+1}C_k^{2k}$ casos y se detendrá en $\frac{k}{k+1}C_k^{2k}$ casos. De esta manera, cuanto mayor sea k, menor será el procentaje de casos favorables.

Nuestro problema queda totalmente resuelto. Ahora estudiaremos otro, muy próximo a éste. Precisamente, supongamos que el cajero era previsor y *al principio había q monedas de 50 k. en la caja. ¿En cuántos casos pasará la cola sin detenciones, si ésta contiene m poseedores de rublos y k poseedores de monedas de 50 k.*?

Está claro que si $m \leqslant q$, la cola pasará con seguridad sin detenciones: las monedas de 50 k. que había en la caja al principio alcanzarán para todos los poseedores de rublos. Si, en cambio, es $m > k + q$, la cola se detendrá seguramente: el número total de monedas de 50 k. en la caja y en la cola no bastará para dar el cambio a todos los poseedores de rublos. Por esto, nos podemos limitar a considerar el caso en que

$$q < m \leqslant k + q.$$

Se puede considerar, ahora, que q monedas de 50 k. surgieron en la caja a causa de que al principio de la cola se colocaron q personas nuevas, cada una con una moneda de 50 k. Por ésto, el problema se puede enunciar como sigue:

En la cola hay $k + q$ personas con monedas de 50 k. y m con rublos; los primeros q lugares están ocupados por poseedores de monedas de 50 k. ¿En cuántos casos nadie tendrá que esperar su cambio?

Este problema se resuelve en forma totalmente análoga al caso particular $q = 0$, analizado más arriba. Buscaremos el número de casos desfavorables. En cada uno de éstos, habrá una detención en la persona delante de la cual haya una cantidad igual s de rublos y monedas de 50 k., y que tenga en sus manos un rublo. Coloquemos delante de la cola una persona más con una moneda de 50 k. y cambiemos a las primeras, $2s + 2$ personas los rublos por monedas de 50 k.. y viceversa. Obtendremos una permutación de m rublos y $k + q + 1$ monedas de 50 k., estando los primeros $q + 1$ lugares ocupados por rublos. Además, cualquier permutación de este tipo se puede obtener de un solo modo de una distribución desfavorable de rublos y monedas de 50 k. Pero los primeros $q + 1$ rublos pueden ser eliminados, y entonces se obtienen todas las permutaciones posibles de $m - q - 1$ rublos y $k + q + 1$ monedas de 50 k. El número de estas permutaciones es igual a $P(m - q - 1, k + q + 1) = C_{m-q-1}^{m+k}$. Hemos demostrado que en nuestro problema hay C_{m-q-1}^{m+k} permutaciones no propicias. Como el número total de permutaciones es igual a C_k^{m+k}, la cantidad de las propicias se expresará mediante la fórmula

$$C_m^{m+k} - C_{m-q-1}^{m+k}. \tag{17}$$

El método utilizado más arriba permite resolver muchos otros problemas. Por ejemplo, aplicándolo es fácil obtener los siguientes resultados:

Si $m < k$, el número de permutaciones de m letras «r» y k letras «c» tales que delante de cada letra (excepto la primera) haya mayor cantidad de letras «c» que de «r», es igual a

$$C_m^{m+k-1} - C_{m-1}^{m+k-1} = \frac{k-m}{k} C_m^{m+k-1}. \tag{18}$$

El razonamiento se efectúa igual a como lo hicimos más arriba, sólo que sin agregar al comienzo la letra «c».

Esta fórmula es válida para $m < k$. Si fuese $m = k$, el número de permutaciones que poseen la propiedad indicada sería igual a $\frac{1}{k}C_{k-1}^{2k-2}$. Esto puede comprobarse de la siguiente manera. Cada permutación de este tipo debe comenzar a partir de la letra «c» y terminar con una «r». Si se eliminan dichas letras, se obtiene una permutación de $k - 1$ letras «r» y $k - 1$ «c». Es fácil apreciar que para esta permutación la cola pasará sin tropiezos. Recíprocamente, de cada permutación de $k - 1$ letras «c» y $k - 1$ «r», para la cual la cola pase sin retenciones, se obtiene otra que posea la propiedad necesaria, si se agrega al comienzo una letra «c» y al final una «r». Pero el número de permutaciones de $k-1$ letras «c» y $k-1$ «r», para las cuales la cola pasa sin problemas, es justamente igual a $\frac{1}{k} C_{k-1}^{2k-2}$.

PROBLEMA DE LAS DOS FILAS

En la combinatoria sucede a menudo que dos problemas, a primera vista muy distintos, se reducen uno al otro. Consideremos el siguiente problema:

¿De cuántas maneras se pueden formar 2n personas de distinta altura en dos filas de n personas cada una, de modo que en cada fila se hallen en orden de altura, y que cada persona de la primera fila sea mayor que la que se halla detrás de él en la segunda?

Demostremos que la resolución de este problema se reduce al que ya resolvimos, sobre la cola de la caja. Ubiquemos a las personas en dos filas de la forma requerida, démosle a cada uno de los que se hallan en la primera una moneda de 50 kopeks, y a cada uno de los de la segunda, un rublo, después de lo cual formémoslos en orden de altura en una sola fila. Se obtendrá una cola de n poseedores de monedas de 50 k. y n poseedores de rublos. De las condiciones del problema se deduce que esta cola pasará sin tropiezos. En efecto, supongamos que alguien ocupa el k-ésimo lugar de la segunda fila. Entonces, entre los poseedores de rublos habrá solamente $k-1$ mayores que él. Y entre los poseedores de monedas de 50 k., habrá por lo menos k personas más altas que él (el que se halla delante de él y todos los que se hallan al lado derecho). Por esto, cuando llegue a la caja, habrá allí por lo menos una moneda de 50 k., con lo cual su vuelto queda asegurado.

Recíprocamente, supongamos que se fija alguna distribución de n personas con monedas de 50 k. y n personas con rublos, en la cual la cola pasa sin detenciones. Sin perder generalidad, se puede suponer que todas las $2n$ personas están ordenadas de acuerdo con su altura. Escojamos ahora a todos los poseedores de monedas de 50 k. y pongámoslos en orden de altura en la primera fila, y a los poseedores de rublos, en la segunda. Dejamos que el lector compruebe que la formación obtenida satisface las condiciones del problema. De aquí se deduce que hay tantas formaciones posibles como permutaciones propicias de n letras «c» y n «r», es decir, $\frac{1}{n+1} C_n^{2n}$.

NUEVAS PROPIEDADES DE LAS COMBINACIONES [1]

Las fórmulas deducidas en los apartados anteriores permiten establecer las propiedades ulteriores del número de combinaciones C_k^m (véase la pág. 35). Para esto, dividamos en clases todas las permutaciones «no propicias» de m letras «r» y k letras «c». Hemos visto que para estas permutaciones la cola se detiene en el lugar con el número $2s+1$, habiendo delante de él s letras «r» y s letras «c»; en éste hay una letra «r», y la cola pasa, hasta este lugar, sin detenerse. Hagamos pertenecer a la s-ésima clase todas las permutaciones no propicias, para las que tiene lugar la detención en el lugar $2s+1$. Está claro que s puede adquirir los valores $0, 1, 2, \ldots, \ldots, m-1$.

Hallemos cuántas permutaciones figuran en la s-ésima clase. En los primeros $2s$ lugares puede haber permutaciones propicias cualesquiera de s letras «r» y s «c», puesto que hasta el lugar $2s+1$ la cola no se detuvo. Como vimos, el número de estas permutaciones es igual a $\frac{1}{s+1} C_s^{2s}$. Ahora bien, en el lugar $2s+1$ se

[1] Este apartado se puede omitir en la primera lectura.

halla la letra «r», y después de ésta, cualquier permutación de las $m-s-1$ letras «r» y $k-s$ letras «c» restantes. El número de estas permutaciones es igual a $P(m-s-1,\ k-s)=$ $=C_{m-s-1}^{m+k-2s-1}$. De este modo, en virtud de la regla del producto, el número de permutaciones despavorables de la s-ésima clase es igual a

$$\frac{1}{s+1}C_s^{2s}C_{m-s-1}^{m+k-2s-1}.$$

Como el número total de permutaciones desfavorables es igual a C_{m-1}^{m+k}, y el de clases, a $m-1$, se obtiene, para $m\leqslant k$, la relación $C_0^0C_{m-1}^{m+k-1}+$

$$+\frac{1}{2}C_1^2C_{m-2}^{m+k-3}+\frac{1}{3}C_2^4C_{m-3}^{m+k-5}+\dots$$
$$\dots+\frac{1}{m}C_{m-1}^{2m-2}C_0^{k-m+1}=C_{m-1}^{m+k}. \qquad (19)$$

Esta relación es un caso particular de la fórmula

$$\sum_{s=p}^{m-1}[C_s^{2s-p}-C_{s-p-1}^{2s-p}]\,C_{m-s-1}^{m+k+p-2s-1}=C_{m-p-1}^{m+k}, \qquad (20)$$

donde $p<m\leqslant p+k$ (en el primer sumando C_s^{-1} se considera igual a cero). La fórmula (20) se demuestra igual que la (19), dividiendo en clases las permutaciones desfavorables de m letras «r» y $k+p$ letras «c», para las cuales hay p letras «c» al comienzo (véase la pág. 53).

Pasemos ahora a las relaciones que se obtienen dividiendo en clases las permutaciones *propicias*, formadas por k letras «r» y k «c». El número de estas permutaciones es igual a $\frac{1}{k+1}C_k^{2k}$. Después de pasar toda la cola, en la caja nuevamente no habrá ni una moneda de 50 k.: todas se habrán gastado en el cambio. Sin embargo, para algunas permutaciones propicias surgirán también antes momentos en que en la caja no haya monedas de 50 k.; sólo el hecho que el siguiente espectador da una moneda de 50 k. salva la cola de una demora. Dividamos todas las permutaciones propicias en clases, haciendo pertenecer a la s-ésima todas las permutaciones en las que la caja por primera vez se queda sin monedas de 50 k. en el $2s$-ésimo lugar, $s=1,2,\dots,k$.

Hallemos el número de permutaciones de la s-ésima clase. Cada una de estas permutaciones se divide en dos partes. Las primeras $2s$ letras forman una permutación de s letras «c» y s «r», tal que delante de cada una de sus letras hay más «c» que «r» (de no ser así, el emparejamiento habría tenido lugar por primera vez no en el $2s$-ésimo lugar, sino antes). Hemos visto que el número de estas permutaciones es igual a $\frac{1}{s}C_{s-1}^{2s-2}$ (véase la pág. 55). Después de vender los primeros $2s$ billetes, no habrá monedas de 50 k. en la caja. Por esto, para que la cola se suceda sin detenciones, las últimas $k-s$ letras «r» y $k-s$ «c» deben formar una permutación propicia. Pero el número de tales permutaciones es igual a $\frac{1}{k-s+1}C_{k-s}^{2k-2s}$ (véase la pág. 53). En virtud de la regla del producto, obtenemos que en la clase habrá

$$\frac{1}{s(k-s+1)}C_{s-1}^{2s-2}C_{k-s}^{2k-2s}$$

permutaciones. Y como el número total de permutaciones propicias es igual a $\frac{1}{k+1}C_k^{2k}$, se obtiene la identidad

$$\sum_{s=1}^{k}\frac{k+1}{s(k+s-1)}C_{s-1}^{2s-2}C_{k-s}^{2k-2s}=C_k^{2k}. \qquad (21)$$

Si introducimos la notación

$$\frac{1}{s+1}C_s^{2s}=T_s,$$

la fórmula (21) adquiere la siguienta forma:

$$T_0T_{k-1}+T_1T_{k-2}+\dots+T_{k-1}T_0=T_k. \qquad (22)$$

Otra relación entre los números C_m^n se obtiene como sigue. Fijemos un número l, $1\leqslant l\leqslant m$, y dividamos el conjunto de todas las permutaciones propicias en clases, haciendo pertenecer a la s-ésima todas las permutaciones que contienen entre sus primeros l elementos exactamente s letras «r». Entonces, el número de letras «c» entre los primeros l elementos será igual a $l - s$. Como debe haber no menos letras «c» que letras «r», s satisfará las desigualdades $0 \leqslant 2s \leqslant l$.

Hallemos el número de permutaciones de la s-ésima clase. Cada permutación de este tipo se divide en dos partes: una la forman las primeras l letras, y la otra, las últimas $k + m - l$. En la primera parte figuran $l - s$ letras «c» y s letras «r». Además, como toda la permutación es propicia, también su parte formada por las primeras l letras será propicia. Y de $l - s$ letras «c» y s «r» se pueden formar $\frac{l-2s+1}{l-s+1} C_s^l$ permutaciones de este tipo.

Después de que pase la primera parte de la permutación, en la caja habrá $l - 2s$ monedas de 50 k. La segunda parte está formada por $k - l + s$ letras «c» y $m - s$ letras «r». El número de permutaciones en las cuales esta parte de la cola pasa sin detenciones se calcula mediante la fórmula (17) de la pág. 54, en la cual hay que sustituir q por $l - 2s$, m por $m - s$ y k por $k - l + s$. De esta fórmula se desprende que la segunda parte de la permutación se puede escoger de $C_{m-s}^{m+k-l} - C_{m+s-l-1}^{m+k-l}$-maneras. En virtud de la regla del producto, obtenemos que el número de permutaciones de la s-ésima clase es igual a

$$\frac{l-2s+1}{l-s+1} C_s^l [C_{m-s}^{m+k-l} - C_{m+s-l-1}^{m+k-l}].$$

Como el número total de permutaciones propicias de k letras «c» y m letras «r» es igual a $\frac{k-m+1}{k+1} C_m^{m+k}$, se llega a la identidad[1]

$$\sum_{s=0}^{E\left(\frac{l}{2}\right)} \frac{l-2s+1}{l-s+1} C_s^l [C_{m-s}^{m+k-l} - C_{m+s-l-1}^{m+k-l}] = \frac{k-m+1}{k+1} C_m^{m+k}. \quad (23)$$

(Aquí C_p^r se considera igual a cero para $p < 0$.) El lector puede deducir sin dificultad relaciones análogas, estableciendo unos u otros métodos de separación de las permutaciones en clases.

[1] $E\left(\frac{l}{2}\right)$ designa la parte entera del número $\frac{l}{2}$.

COMBINATORIA DE LAS PARTICIONES

En los problemas sobre arreglos, permutaciones y combinaciones de elementos dados, se formaban distintas disposiciones, y contábamos cuántas se obtenían bajo unas u otras limitaciones. El destino de los elementos que quedaban después de elegir las disposiciones casi no nos interesaba. Otra forma tienen los problemas que analizaremos ahora. En éstos, los elementos se dividen en dos o más grupos, y deben hallarse todas las formas de tal partición.

Aquí pueden encontrarse distintos casos. A veces, juega un papel fundamental el orden de los elementos en los grupos: por ejemplo, cuando el señalero cuelga banderines de señal en varios mástiles, a éste le interesa no sólo en qué mástil quede uno u otro banderín, sino también en qué orden se cuelgan éstos. En otros casos, el orden de los elementos en los grupos no tiene importancia alguna. Cuando el jugador de dominó escoge las fichas del montón, le es indiferente en qué orden le llegarán, y le importa sólo el resultado definitivo.

Los problemas se diferencian también en si tiene o no importancia el orden de los propios grupos. En el dominó, los jugadores están sentados en un orden determinado, e interesa no sólo cómo fueron divididas las fichas, sino también a quién le tocaron qué fichas. Si yo distribuyo fotografías en sobres iguales para mandárselas a mi amigo, es esencial cómo se distribuyen las fotos en los sobres, pero el orden de los propios sobres es totalmente indiferente: en el correo los mezclarán de todos modos.

También es de importancia el hecho de si diferenciamos o no entre sí a los propios elementos, así como también si diferenciamos o no entre sí a los grupos en que se dividen los elementos. Por último, en algunos problemas ciertos grupos pueden resultar vacíos, es decir, pueden no contener ningún elemento, y en otros problemas estos grupos no se admiten. En correspondencia con todo lo expuesto, surge toda una serie de diferentes *problemas combinatorios sobre particiones.*

EL JUEGO DEL DOMINO

En el dominó 4 jugadores dividen en partes iguales 28 fichas. ¿De cuántas formas pueden hacerlo?

La división de fichas se puede efectuar como sigue. Primero, dispongamos de alguna forma las 28 fichas en fila. Después, el primer jugador toma las primeras 7 fichas, el segundo las 7 siguientes, el tercero, las 7 que le siguen, y el cuarto se queda con el resto. Está claro que de este modo se pueden obtener todas las posibles divisiones de las fichas.

Como el número de todas las permutaciones posibles de 28 elementos es igual a 28!, podría parecer que el número total de todas las formas de reparto es igual a 28! Pero esto es incorrecto, ya que al primer jugador le es totalmente indiferente qué tomar primero: la ficha 6 : 6 o la 3 : 4; le interesa sólo el resultado definitivo. Por esto, cualquier permutación de las primeras 7 fichas no cambia la esencia de la cuestión. Tampoco la cambia cualquier permutación de las segundas 7, ni de las 7 siguientes, ni de las últimas 7. En virtud de la regla del producto, se obtienen $(7!)^4$ permutaciones de fichas que no cambian el resultado del reparto.

Así, pues, las 28! permutaciones se dividen en grupos que contienen $(7!)^4$ permutaciones cada uno, y las de cada grupo conducen a una misma distribución de fichas. De aquí se deduce que el número de formas de distribuir las fichas es igual a $\frac{28!}{(7!)^4}$. Este número es aproximadamente igual a $4{,}7 \cdot 10^{15}$.

El mismo resultado se puede obtener de otro modo. El primer jugador debe escoger 7 fichas de entre 28. Como el orden de estas fichas es indiferente, tiene C_7^{28} variantes de elección. Después de esto, el segundo jugador debe escoger 7 fichas de entre las 21 restantes. Esto se puede efectuar de C_7^{21} maneras. El tercer jugador escoge de entre 14 fichas, por lo cual dispone de C_7^{14}

posibilidades de elección. Por último, al cuarto jugador le quedan C_7^7, es decir, una sola elección.

Según la regla del producto, obtenemos que el número total de posibilidades es igual a

$$C_7^{28}C_7^{21}C_7^{14}C_7^7=\frac{28!}{21!\,7!}\cdot\frac{21!}{14!\,7!}\cdot\frac{14!}{7!\,7!}=\frac{28!}{(7!)^4}.$$

En forma totalmente análoga se demuestra que en el juego de la «préférence», en que 32 cartas se dividen entre tres jugadores, dando 10 a cada uno y dejando dos en el montón, el número de repartos diferentes es igual a

$$\frac{32!}{10!\,10!\,10!\,2!}=2\,753\,294\,408\,504\,640.$$

Es posible que el lector se pregunte si vale la pena gastar el tiempo en el estudio de los juegos de naipes. Aquí nos permitiremos recordar que precisamente el estudio de los juegos de azar sirvió de estímulo para el desarrollo inicial de la combinatoria y de la teoría de las probabilidades. Matemáticos eminentes, como Pascal, Bernoulli, Euler, Chébishev, pulían las ideas y los métodos de la combinatoria y la teoría de las probabilidades en los problemas sobre los juegos a cara o cruz, a los dados y a los naipes. Muchas ideas de la teoría de los juegos (disciplina matemática que se aplica ampliamente en la economía y la ciencia militar) cristalizaron por primera vez en el estudio de los modelos más sencillos de los juegos de naipes.

LA DISTRIBUCION EN CAJONES

Los problemas del dominó y de la «préférence» pertenecen a los problemas combinatorios sobre la distribución de objetos en cajones, cuyo planteamiento general es el siguiente:

Se dan n objetos diferentes y k cajones. Hay que colocar n_1 objetos en el primer cajón, n_2 en el segundo, ..., n_k en el *k*-ésimo, siendo $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$. *¿De cuántas maneras se puede efectuar dicha distribución?*

En el problema del dominó el papel de cajones lo desempeñaban los jugadores, siendo las fichas los objetos. Razonando análogamente a como lo hicimos en este problema, obtenemos la respuesta en el caso general: el número de distribuciones diferentes en cajones es igual a

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k)=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\ldots\,n_k!}. \qquad (1)$$

Esta fórmula la obtuvimos antes, al resolver el siguiente problema, a primera vista nada semejante:

Se dan objetos de k tipos diferentes. ¿Cuántas permutaciones distintas se pueden formar de n_1 objetos del primer tipo, n_2 del segundo, ..., n_k del k-ésimo?

Aquí también la respuesta se expresaba mediante la fórmula

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k)=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\ldots\,n_k!},$$

donde $n=n_1+n_2\ldots+n_k$ (véase la pág 28). Para establecer el nexo entre estos problemas, numeremos todos los n lugares que pueden ocupar nuestros objetos. A cada permutación le corresponde una distribución de los números de los lugares en k clases. En la primera clase quedan los números de los lugares en los que se hallan objetos del primer tipo; en la segunda, los de los lugares de los objetos del segundo tipo, etc. Con esto se establece una correspondencia entre las permutaciones con repetición y la distribución de números de lugares en «cajones». Queda ahora claro que las fórmulas de solución de ambos problemas deben coincidir.

EL RAMO DE FLORES

En el problema sobre la distribución de elementos en cajones suponíamos conocida la cantidad de objetos que quedaban en cada cajón (por ejemplo, el número de fichas que debía tomar cada jugador). En la mayoría de los problemas sobre distribuciones de objetos, estas cantidades no se indican.

Dos niños recogieron 10 margaritas, 15 claveles y 14 nomeolvides. ¿De cuántas maneras pueden dividir estas flores?

Está claro que las margaritas se pueden dividir de 11 maneras: el primero puede no tomar ninguna, tomar 1, 2, . . ., todas las 10. De igual forma, los claveles se pueden dividir de 16 maneras, y los nomeolvides, de 15. Como las flores de cada tipo pueden distribuirse independientemente de las de los otros tipos, en virtud de la regla del producto se obtienen $11 \cdot 16 \cdot 15 = 2640$ formas de distribuir las flores.

Se sobreentiende que entre estas formas las hay extremadamente injustas, en las cuales, por ejemplo, uno de los niños se queda sin flores. Introduzcamos, por esto, la limitación de que cada niño debe recibir no menos de 3 flores de cada tipo. Entonces las margaritas se pueden distribuir sólo de cinco formas: el primer niño puede quedarse con 3, 4, 5, 6 ó 7 flores. De igual forma, los claveles se pueden dividir de 10 maneras, y los nomeolvides, de 9. En este caso, el número total de modos de distribución es igual a $5 \cdot 10 \cdot 9 = 450$.

En general, si se dispone de n_1 objetos de un tipo, n_2 de otro, . . ., n_k del k-ésimo, se los puede distribuir entre dos personas de

$$(n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_k+1) \qquad (2)$$

maneras. En particular, si todos los objetos se diferencian entre sí y su número es igual a k, será $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = 1$, habiendo, por ende, 2^k formas de distribución.

Si se agrega la limitación complementaria de que cada participante de la distribución debe obtener no menos de s_1 objetos del primer tipo, s_2 del segundo, . . ., s_k del k-ésimo, el número de modos de división se expresa por la fórmula

$$(n_1-2s_1+1)(n_2-2s_2+1)\ldots(n_k-2s_k+1). \qquad (3)$$

Dejamos que el lector demuestre estas afirmaciones.

PROBLEMA SOBRE EL NUMERO DE DIVISORES

La fórmula (2) que dedujimos permite resolver el siguiente problema de la teoría de los números:

Hallar cuántos divisores tiene el número natural N. Para resolverlo, descompongamos N en factores primos: $N = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$, siendo $p_1, \ldots, p_k$ números primos diferentes. Por ejemplo, $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Al desarrollar al número N en dos factores, $N = N_1 N_2$, los factores simples se distribuyen entre N_1 y N_2. Si en N_1 el factor p_j figura m_j veces, $j = 1, \ldots, k$, el desarrollo tendrá la forma

$$N = (p_1^{m_1} \ldots p_k^{m_k})(p_1^{n_1-m_1} \ldots p_k^{n_k-m_k}).$$

De este modo, el desarrollo de N en dos factores se reduce a dividir n_1 elementos del primer tipo, n_2 del segundo, . . ., n_k del k-ésimo, en dos partes. Y la fórmula (2) demuestra que esto se puede efectuar de $(n_1+1)\ldots(n_k+1)$ maneras. Por consiguiente, el número de divisores del número natural $N = p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k}$ es igual a $(n_1+1)\ldots(n_k+1)$. Este número se designa mediante $\tau(N)$.

LA RECOLECCION DE MANZANAS

Tres niños juntaron 40 manzanas del árbol. ¿De cuántas maneras pueden dividirlas, si todas las manzanas se consideran iguales (es decir, si sólo nos interesa cuántas manzanas obtiene cada uno, y no cuáles manzanas le tocan)?

Para resolver este problema procedamos como sigue: agreguemos a las manzanas recolectadas 2 peras iguales, y después permutemos de todas las formas posibles 40 manzanas y 2 peras. Según la fórmula de las permutaciones con repetición, el número de estas permutaciones es igual a

$$P(40, 2) = C_{42}^{2} = \frac{42!}{40!\,2!} = 861.$$

Pero a cada permutación le corresponde su forma de distribución de las manzanas. Al primer niño le daremos todas las manzanas, desde la la primera hasta la primera pera; al segundo, todas las que quedan entre la primera y la segunda pera; al tercero, todas las que quedan después de la segunda pera. Está claro que en nuestro caso a diferentes permutaciones les corresponden distintas formas de reparto. Así, pues, el número total de maneras de reparto es igual a 861. Aquí puede suceder que a un participante (e inclusive a dos de ellos) del reparto no le toque nada. Por ejemplo, si una de las peras queda al principio en cierta permutación, se queda sin manzanas el primer niño; si queda al final, será el tercero el que no las obtenga. Si ambas peras resultan estar una al lado de la otra, el segundo no obtendrá nada. Dejamos que el lector analice lo que sucede si ambas peras quedan al principio o al final.

En forma totalmente análoga se demuestra que n objetos iguales se pueden distribuir entre k personas de

$$P(n,\ k-1)=C_n^{n+k-1}=C_{k-1}^{n+k-1} \qquad (4)$$

maneras.

Supongamos ahora que para mayor equitatividad en el reparto se convino que cada participante debe obtener por lo menos r objetos. En este caso, hay que comenzar por dar a cada uno r objetos. Después, quedarán $n-kr$ objetos que pueden ya ser distribuidos arbitrariamente. Esto se puede efectuar, como vimos, de $C_{k-1}^{n-kr+k-1}=C_{k-1}^{n-k(r-1)-1}$ formas.

En particular, *si cada uno de los k participantes debe obtener no menos de un objeto, el problema se resuelve de C_{k-1}^{n-1} modos.*

El último resultado se puede deducir también por otro método. Dispongamos los n objetos dados en fila. Entonces, entre ellos habrá $n-1$ intervalos. Si en cualesquiera $k-1$ de estos intervalos se ponen tabiques de separación, todos los objetos se dividirán en k partes no vacías. Después de esto, la primera parte se transmite a la primera persona, la segunda a la segunda, etc. Como $k-1$ tabiques se pueden colocar en $n-1$ intervalos de C_{k-1}^{n-1} maneras, el número de formas de distribución será igual a C_{k-1}^{n-1}.

LA RECOLECCION DE HONGOS

Si se reparten objetos de distintos tipos, hay que hallar el número de formas de reparto para cada tipo y multiplicar los números obtenidos. Resolvamos, por ejemplo, el siguiente problema:

¿De cuántas maneras se pueden repartir 10 hongos blancos, 15 setas y 8 trufas entre 4 niños?

Aplicando los resultados del apartado anterior, se obtiene la respuesta en la forma

$$C_3^{13}C_3^{18}C_3^{11}=41\,771\,040.$$

Si, en cambio, cada uno debe recibir por lo menos un hongo de cada tipo, la respuesta será

$$C_3^{9}C_3^{14}C_3^{7}=1\,070\,160.$$

En el caso en que se dividen n objetos diferentes entre k personas sin limitaciones, cada objeto puede ser entregado de k formas (dándoselo a uno de los participantes del reparto). Por esto, el número de soluciones será igual a k^n.

Por ejemplo, 8 pasteles distintos se pueden distribuir entre 5 personas de $5^8=390\ 625$ maneras.

EL ENVIO DE LAS FOTOGRAFIAS

Yo quiero enviar a mi amigo 8 fotos distintas. ¿De cuántas maneras puedo hacerlo, utilizando 5 sobres diferentes?

Este problema es similar al que resolvimos al final del apartado anterior. Por esto, parecería ser que la respuesta es $5^8=390\ 625$. Sin embargo, no tiene sentido enviar sobres vacíos, por lo cual se impone una nueva limitación: ningún sobre debe ser vacío. Para tener en cuenta esta limitación, utilicemos la fórmula de inclusiones y exclusiones (la respuesta C_{k-1}^{n-1} es incorrecta, ya que las fotografías son distintas).

Hallemos primeramente en cuántas formas de distribución r sobres dados resultan vacíos (y los demás pueden tanto ser vacíos como contener fotos). En este caso, las fotografías se colocan sin limitaciones en $5-r$ sobres y, en virtud de lo demostrado más arriba, el número de estas distribuciones es igual a $(5-r)^8$.

Pero r sobres se pueden escoger, de entre 5, de C_r^5 maneras. De aquí se deduce, aplicando la fórmula de inclusiones y exclusiones, que el número de distribuciones en las que ningún sobre queda vacío es igual a

$$5^8 - C_1^5\cdot 4^8 + C_2^5\cdot 3^8 - C_3^5\cdot 2^8 + C_4^5\cdot 1^8 = 126\,020.$$

En forma totalmente análoga se demuestra que si se envían n fotografías distintas en k sobres diferentes, sin que ningún sobre sea vacío, el número de formas de distribución se expresa mediante la fórmula

$$k^n - C_1^k(k-1)^n + C_2^k(k-2)^n - \ldots \\ \ldots + (-1)^{k-1}C_{k-1}^k\cdot 1^n. \quad (5)$$

Proponemos al lector resolver el siguiente problema:

Se dan n_1 objetos del primer tipo, n_2 del segundo, ..., n_s del s-ésimo. ¿De cuántas maneras se los puede repartir entre k personas de modo que cada una obtenga por lo menos un objeto?

La respuesta es la siguiente:

$$C_{k-1}^{n_1+k-1}C_{k-1}^{n_2+k-1}\ldots C_{k-1}^{n_s+k-1} - \\ - C_1^k C_{k-2}^{n_1+k-2}C_{k-2}^{n_2+k-2}\ldots C_{k-2}^{n_s+k-2} + \\ + C_2^k C_{k-3}^{n_1+k-3}C_{k-3}^{n_2+k-3}\ldots C_{k-3}^{n_s+k-3} - \ldots \\ \ldots + (-1)^{k-1}C_{k-1}^k. \quad (6)$$

Por ejemplo, si se reparten 8 manzanas, 10 peras y 7 naranjas entre 4 niños y cada uno debe recibir por lo menos una fruta, el reparto es posible de

$$C_3^{11}C_3^{13}C_3^{10} - C_1^4C_2^{10}C_2^{12}C_2^9 + C_2^4C_1^9C_1^{11}C_1^8 - C_3^4 = \\ = 5\,464\,800$$

maneras.

BANDERAS EN LOS MASTILES

Hasta ahora no teníamos en cuenta el orden en que están distribuidos los elementos de una parte dada. En algunos problemas este orden debe ser tomado en consideración.

Se tienen n banderines de señales distintos y k mástiles, en los cuales éstos se cuelgan. El sentido de la señal depende del orden en que están colgados los banderines. ¿De cuántas maneras se los puede colgar, si deben ser utilizados todos ellos, pero algunos mástiles pueden resultar vacíos?

Cada modo de colgar los banderines se puede efectuar en dos etapas. En la primera, intercambiamos de todas las formas posibles los n banderines dados. Esto se puede efectuar de $n!$ maneras. Después, tomamos una de las formas de distribución de n banderines iguales en k mástiles (recordemos que el número de estas formas es igual a C_{k-1}^{n-k-1}). Supongamos que esta forma consiste en que en el primer mástil deben colgarse n_1 banderines, en el segundo, n_2, ..., en el k-ésimo, n_k, siendo $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Entonces tomamos los primeros n_1 banderines de la permutación dada y los colgamos, en el orden obtenido, en el primer mástil; los siguientes n_2 banderines son colgados en el segundo, etc. Está claro que, utilizando todas las permutaciones de n banderines y todas las formas de distribución de n banderines iguales en k mástiles, obtenemos todas las maneras de resolver el problema planteado. En virtud de la regla del producto, se obtiene que el número de modos de colgar los banderines es igual a

$$n!\,C_{k-1}^{n+k-1} = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!} = A_n^{n+k-1}. \quad (7)$$

En general, *si se tienen n objetos distintos, el número de formas de distribuirlos en k cajones diferentes, teniendo en cuenta el orden de su disposición en los cajones, es igual a A_n^{n+k-1}.*

El mismo resultado puede ser obtenido por otro camino. Agreguemos a los n objetos distribuidos $k-1$ esferas iguales y consideremos todas las permutaciones posibles de los $n+k-1$ objetos obtenidos. Cada una de estas permutaciones determina una de las formas de distribución. Precisamente, en el primer cajón se colocan todos los objetos que van hasta la primera esfera agregada (si el primer objeto de la permutación es una de las esferas agregadas, el primer cajón quedará vacío). Después, en el segundo cajón se colocan todos los objetos que quedaron entre la primera y la segunda esfera, . . ., en el k-ésimo, todos los que van después de la $(k-1)$-ésima esfera. Está claro que entonces se obtienen todas las distribuciones de objetos que poseen las propiedades indicadas. Pero el número de permutaciones de n objetos distintos y $k-1$ esferas iguales es

$$P(\underbrace{1, 1, \ldots, 1,}_{n \text{ veces}}\ k-1)=\frac{(n+k-1)!}{1!\ \ldots\ 1!\,(k-1)!}=$$

$$=A_n^{n+k-1}.$$

Análogamente se resuelve el problema en el caso en que en cada mástil debe hallarse por lo menos un banderín (o, lo que es lo mismo, en cada cajón debe haber por lo menos un objeto). Mediante la fórmula deducida en la pág. 61, obtenemos que en este caso disponemos de $n!\,C_{k-1}^{n-1}$ formas de distribución. Este resultado también puede ser obtenido mediante la elección de los puntos de separación entre $n-1$ intervalos.

NUMERO TOTAL DE SEÑALES

Hasta ahora hemos considerado que todos los banderines debían ser utilizados para transmitir una señal. Pero puede haber señales para cuya transmisión se utiliza solamente una parte de los banderines, admitiéndose también mástiles vacíos. Hallemos *el número total de señales que pueden ser transmitidas mediante n banderines de señales, colgados en k mástiles.*

Dividamos estas señales en clases, según el número de banderines que participen en ellas.

En virtud de la fórmula (7), mediante s banderines dados se pueden transmitir A_s^{s+k-1} señales (el número de mástiles es igual a k). Pero s banderines pueden ser escogidos de entre n de C_s^n maneras. Por esto, el número de todas las señales de la s-ésima clase es igual a $C_s^n A_s^{s+k-1}$. En consecuencia, el número total de señales se expresa mediante la fórmula

$$C_0^n A_0^{k-1}+C_1^n A_1^k+C_2^n A_2^{k+1}+\ldots+C_n^n A_k^{n+k-1}. \quad (8)$$

Por ejemplo, mediante 6 banderines distintos en 3 mástiles se pueden transmitir

$$1+C_1^6A_1^3+C_2^6A_2^4+C_3^6A_3^5+C_4^6A_4^6+C_5^6A_5^7+$$
$$+C_6^6A_6^8=42\,079$$

señales.

Si no se admite que algunos mástiles estén vacíos, en lugar de la fórmula (8) obtenemos

$$C_k^nC_{k-1}^{k-1}k!+C_{k+1}^nC_{k-1}^k(k+1)!+$$
$$+C_{k+2}^nC_{k-1}^{k+1}(k+2)!+\ldots+C_n^nC_{k-1}^{n-1}n! \quad (9)$$

maneras.

DIFERENTES ESTADISTICAS

Los problemas sobre la distribución de elementos en cajones son de gran importancia para la física estadística. Esta ciencia estudia cómo se distribuyen, según sus propiedades, las partículas físicas; por ejemplo, qué parte de las moléculas de un gas dado tiene, a una temperatura dada, una u otra velocidad. En estos casos, el conjunto de todos los estados posibles se distribuye en un gran número k de pequeñas celdas (estados de fase), de forma que cada una de las n partículas queda en una de las celdas.

El problema sobre a qué estadística se someten unas u otras partículas depende del tipo de éstas.

En la física estadística clásica, creada por Maxwell y Boltzmann, las partículas se consideran diferenciables entre sí. A dicha estadística se someten, por ejemplo, las moléculas de un gas. Ya sabemos que n partículas diferentes se pueden distribuir en k celdas de k^n maneras. Si todas estas k^n maneras tienen igual probabilidad, para una energía dada, se habla de la *estadística de Maxwell-Boltzmann*.

Resultó ser que a esta estadística se someten no todos los objetos físicos. Los fotones, los núcleos atómicos y los átomos con número par de partículas elementales se someten a otra estadística, desarrollada por Einstein y por el científico indio Bose. En la *estadística de Bose-Einstein*, las partículas se consideran indistinguibles entre sí. Por esto, interesa sólo cuántas partículas quedaron en una u otra celda, y no qué partículas han quedado allí. Este problema es similar al del reparto de las manzanas (véase la pag. 61). Ya sabemos que con este planteamiento se obtienen $C_{k-1}^{n+k-1} = C_n^{n+k-1}$ distintas maneras de distribución. En la estadística de Bose-Einstein todas estas formas se consideran igualmente probables.

Sin embargo, para muchas partículas, por ejemplo, tales como los electrones, protones y neutrones, tampoco sirve la estadística de Bose-Einstein. Para éstas puede haber en cada celda no más de una partícula, y distintas distribuciones que satisfagan la condición indicada poseen igual probabilidad. En este caso, puede haber C_n^k distribuciones diferentes. Esta estadística se denomina *estadística de Dirac-Fermi*.

PARTICIONES DE NUMEROS

En la mayoría de los problemas considerados más arriba, los objetos que debían ser distribuidos eran diferentes. Pasemos ahora a problemas en que todos los objetos distribuidos son totalmente iguales. En este caso, se puede decir no que se dividen objetos, sino que se dividen los números naturales en sumandos (los cuales, claro está, también deben ser números naturales).

Aquí surgen muchos problemas distintos. En unos, se tiene en cuenta el orden de los sumandos, y en otros, no. Se pueden considerar sólo las particiones en un número par de sumandos, o nada más que en un número impar de éstos, en diferentes sumandos, o en una cantidad arbitraria de ellos, etc. El método fundamental de resolución de los problemas sobre la partición es la reducción a problemas sobre la partición de números menores, o sobre la partición en menor número de sumandos.

EL ENVIO DE LA ENCOMIENDA

Por el envio de una encomienda hay que pagar 18 kopeks. De cuántas formas se la puede pagar con estampillas de valor de 4, 6 y 10 k., si dos formas que se diferencien en el orden de las estampillas se consideran diferentes?[1].

Sea $f(N)$ el número de maneras con que se pueden pegar estampillas de 4, 6 y 10 k. de forma que el costo total de ellas sea igual a N. Entonces, para $f(N)$ es válida la siguiente relación:

$$f(N) = f(N-4) + f(N-6) + f(N-10). \tag{10}$$

En efecto, sea dada alguna forma de pegar las estampillas de costo total N y supongamos que la última estampilla pegada tenía un valor de 4 k. Entonces, todas las estampillas restantes cuestan N — 4k. Recíprocamente, agregando a cualquier agrupación de estampillas de costo total N — 4 k., una de 4 k., se obtiene una agrupación de estampillas, de costo N k. Además, de distintas agrupaciones de costo N — 4 k. se obtienen diferentes agrupaciones de costo N k. Así, pues, el número de agrupaciones buscadas en que la última estampilla pegada era de costo 4 k., igual a $f(N-4)$.

[1] La reserva de estampillas de distinto valor se considera ilimitada.

Análogamente se demuestra que el número de agrupaciones que terminan en una estampilla de seis kopeks es igual a $f(N-6)$, y las que lo hacen en una de diez, a $f(N-10)$. Como cualquier agrupación termina en una estampilla de uno de los tipos indicados, en virtud de la regla de la suma se obtiene la relación (10).

La fórmula (10) nos permite reducir el problema de pegar estampillas que sumen N k. a problemas de pegar estampillas que sumen menos. Pero para pequeños valores de N este problema se resuelve con facilidad directamente. Un cálculo sencillo demuestra que

$$f(0)=1,\ f(1)=f(2)=f(3)=0,\ f(4)=1,\ f(5)=0,$$
$$f(6)=1,\ f(7)=0,\ f(8)=1,\ f(9)=0.$$

La igualdad $f(0)=1$ significa que la suma de 0 k. se puede pagar sólo de una forma: no pegando ninguna estampilla. Las sumas de 1, 2, 3, 5, 7 y 9 k. no pueden ser obtenidas de ningún modo mediante estampillas de 4, 6 y 10 k. Utilizando los valores de $f(N)$ para $N=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, es fácil hallar $f(10)$:.

$$f(10)=f(6)+f(4)+f(0)=3.$$

Después de esto hallamos

$$f(11)=f(7)+f(5)+f(1)=0,$$
$$f(12)=f(7)+f(6)+f(2)=2,$$

etc. Por último, obtenemos el valor $f(18)=8$. De este modo, las estampillas pueden ser pegadas de ocho formas. Estas son las siguientes:

10, 4, 4; 4, 10, 4; 4, 4, 10; 6, 4, 4, 4; 4, 6, 4, 4; 4, 4, 6, 4; 4, 4, 4, 6; 6, 6, 6.

Obsérvese que los valores de $f(N)$ para $N=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ se podrían haber obtenido de otro modo, sin efectuar la verificación directa. Resulta que para $N<0$ se tiene $f(N)=0$, ya que es imposible pagar una suma negativa, pegando una cantidad no negativa de estampillas. Al mismo tiempo, como hemos visto, es $f(0)=1$. Por esto,

$$f(1)=f(-3)+f(-5)+f(-9)=0.$$

De igual forma obtenemos los valores $f(2)=0$, $f(3)=0$. Y para $N=4$, obtenemos

$$f(4)=f(0)+f(-2)+f(-6)=1.$$

PROBLEMA GENERAL SOBRE EL PEGADO DE LAS ESTAMPILLAS

El problema analizado es un caso particular del siguiente problema general:

Se dispone de estampillas de valores de $n_1, n_2, \ldots, n_k$ kopeks[1]. *De cuántas maneras se puede pagar con ellas una suma de N kopeks, si dos formas que se diferencien en el orden se consideran distintas?*

En este caso, el número $f(N)$ de formas satisface la relación

$$f(N)=f(N-n_1)+f(N-n_2)+\ldots+f(N-n_k). \qquad (11)$$

Aquí es $f(N)=0$ si $N<0$, y $f(0)=1$. Mediante la relación (11), se puede hallar $f(N)$ para todo N, calculando sucesivamente $f(1)$, $f(2), \ldots, f(N-1)$.

Consideremos un caso particular de este problema, cuando $n_1=1$, $n_2=2, \ldots, n_k=k$. Obtenemos todas las divisiones posibles del número N en los sumandos $1, 2, \ldots, k$, y las divisiones que se diferencian en el orden de los sumandos se consideran diferentes. Designemos el número de estas divisiones mediante $\varphi(k; N)$[2]. De la fórmula (11) se deduce que

$$\varphi(k; N)=\varphi(k; N-1)+\varphi(k; N-2)+\ldots+\varphi(k; N-k). \qquad (12)$$

Además, se tiene que

$$\varphi(k; 0)=1 \quad \text{y} \quad \varphi(k; N)=0 \quad \text{si} \quad N<0.$$

[1] Todos los números $n_1, n_2, \ldots, n_k$ son diferentes, y la reserva de estampillas es ilimitada.

[2] Aquí y en lo sucesivo indicaremos en el primer lugar el número de sumandos, en el segundo, el número que se divide, y en el último, limitaciones sobre la magnitud de los sumandos.

El cálculo de $\varphi(k; N)$ se puede simplificar, si se observa que

$$\varphi(k;\ N-1)=\varphi(k;\ N-2)+\ldots$$
$$\ldots+\varphi(k;\ N-k)+\varphi(k;\ N-k-1),$$

por lo cual

$$\varphi(k;\ N)=2\varphi(k;\ N-1)-\varphi(k;\ N-k-1). \qquad (13)$$

Está claro que los sumandos no pueden ser mayores que N. Por esto, $\varphi(N, N)$ es igual al número de todas las particiones de N en sumandos naturales (incluyendo también la «partición» $N=N$). Si el número de sumandos es igual a s, obtenemos C_{s-1}^{N-1} particiones (véase la pág. 61). Por esto,

$$\varphi(N,\ N)=C_0^{N-1}+C_1^{N-1}+\ldots+C_{N-1}^{N-1}=2^{N-1}.$$

Así pues, hemos demostrado que el número natural N puede ser dividido en sumandos de 2^{N-1} formas. Recuérdese que aquí se tiene en cuenta el orden de los sumandos.

Por ejemplo, el número 5 se puede dividir en sumandos de $2^{5-1}=16$ maneras:

$5=5$	$5=3+1+1$	$5=1+2+2$
$5=4+1$	$5=1+3+1$	$5=2+1+1+1$
$5=1+4$	$5=1+1+3$	$5=1+2+1+1$
$5=2+3$	$5=2+2+1$	$5=1+1+2+1$
$5=3+2$	$5=2+1+2$	$5=1+1+1+2$
		$5=1+1+1+1+1.$

PROBLEMAS COMBINATORIOS DE LA TEORIA DE LA INFORMACION

Un problema similar al que acabamos de resolver se encuentra en la teoría de la información. Supongamos que una información se transmite mediante señales de varios tipos. La duración de la transmisión de una señal del primer tipo es igual a t_1, del segundo, a t_2, . . ., del k-ésimo a t_k unidades de tiempo. *¿Cuántas informaciones distintas pueden transmitirse mediante estas señales en T unidades de tiempo?* Aquí se tienen en cuenta solamente las informaciones «máximas», es decir, aquellas en las cuales no se puede añadir ninguna señal sin salirse del tiempo designado para la transmisión.

Designemos el número de informaciones que se pueden transmitir durante un tiempo T mediante $f(T)$. Razonando en forma totalmente análoga al problema sobre las estampillas, se obtiene que $f(T)$ satisface a la relación

$$f(T)=f(T-t_1)+\ldots+f(T-t_k). \qquad (14)$$

Aquí nuevamente será $f(T)=0$, si $T<0$, y $f(0)=1$.

PROBLEMA DEL ASPIRANTE

Un aspirante a ingresar en un centro de enseñanza superior debe rendir 4 exámenes. Esto supone que para ingresar será suficiente reunir 17 puntos. ¿De cuántas maneras puede rendir los exámenes para ingresar con seguridad al centro?

Este problema es similar al de las estampillas, pero se diferencia de éste en que se indica la cantidad de «estampillas» con las que hay que «pagar la suma de 17 puntos». Por cada examen rendido exitosamente el aspirante obtiene 3, 4 ó 5 puntos[1]. Designemos mediante $F(k; N)$ el número de formas con que se pueden reunir N puntos después de k exámenes. Entonces, tiene lugar la relación

$$F(k;\ N)=F(k-1;\ N-3)+F(k-1;\ N-4)+$$
$$+F(k-1;\ N-5),$$

cuya deducción es totalmente análoga a la de la (11) de la pág. 65.

De aquí se obtiene que

$$F(4;\ 17)=F(3;\ 14)+F(3;\ 13)+F(3;\ 12)=$$
$$=F(2;\ 11)+2F(2;\ 10)+3F(2;\ 9)+2F(2;\ 8)+$$
$$+F(2;\ 7)=2+3F(2;\ 9)+2F(2;\ 8)+F(2;\ 7),$$

[1] Véase la nota al pie de la pág. 21 (N. del T.).

puesto que es imposible reunir 11 puntos después de 2 exámenes y reunir 10 se puede de una sola forma: obteniendo dos cincos.

Continuando el cálculo, se obtiene que

$$F(4;\ 17)=2+3F(1;\ 6)+5F(1;\ 5)+6F(1;\ 4)+\\ +3F(1;\ 3)+F(1;\ 2).$$

Pero $F(1;\ 6)=F(1;\ 2)=0$[1], y $F(1;\ 5)= =F(1;\ 4)=F(1;\ 3)=1$.

Por esto, $F(4;\ 17)=16$. En forma totalmente análoga deducimos que

$$F(4;\ 18)=10,\ F(4;\ 19)=4 \text{ y } F(4;\ 20)=1.$$

En total, se obtienen $16+10+4+1=31$ formas de rendir con éxito los exámenes.

El mismo resultado se podría haber obtenido de otra forma. Es fácil verificar que 17 puntos pueden ser obtenidos sólo de dos formas esencialmente diferentes: o bien obtener dos cincos, 1 cuatro y 1 tres, o bien obtener 1 cinco y 3 cuatros. Estas calificaciones pueden distribuirse de cualquier forma entre las disciplinas que se rinden. Como es

$$P(2,\ 1,\ 1)+P(1,\ 3)=\frac{4!}{2!\,1!\,1!}\ \frac{4!}{3!\,1!}=16,$$

17 puntos pueden ser obtenidos de 16 formas. Análogamente se calcula el número de formas de obtener 18, 19 y 20 puntos.

En general, sea $F(m;N)$ el número de formas de dividir N en m sumandos, cada uno de los cuales es igual a uno de los números $n_1, n_2, \ldots, \ldots, n_k$. Entonces, para $F(m;\ N)$ se cumple la relación

$$F(m;\ N)=F(m-1;\ N-n_1)+\ldots\\ \ldots+F(m-1;\ N-n_k), \quad (15)$$

la cual se deduce igual que la (11). Dejamos que el lector efectué esta demostración.

En particular, si $n_1=1,\ n_2=2,\ \ldots,\ n_k= =k$, obtenemos las particiones de N en m sumandos, cada uno de los cuales es igual a uno de los números $1,\ 2,\ \ldots,\ k$. Designemos el número de estas divisiones mediante $F(m;\ N;\ k)$. Entonces, para este último se cumple la relación

$$F(m;\ N;\ k)=F(m-1;\ N-1;\ k)+\\ +F(m-1;\ N-2;\ k)+\ldots\\ \ldots+F(m-1;\ N-k;\ k). \quad (16)$$

Al igual que en la pág. 64, de esta relación se deduce que

$$F(m;\ N;\ k)=F(m,\ N-1;\ k)+\\ +F(m-1;\ N-1;\ k)-\\ -F(m-1;\ N-k-1;\ k). \quad (17)$$

Pasemos ahora a los problemas sobre particiones, en los cuales las particiones que se diferencian sólo en el orden de los sumandos se consideran iguales.

EL PAGO DEL DINERO

En un portamonedas hay monedas de 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20 y 50 kopeks, habiendo una moneda de cada valor. De cuántas maneras se puede pagar, con estas monedas, una compra por valor de 73 kopeks?

En este problema el orden de las monedas no tiene importancia: sólo interesa qué monedas se toman para el pago. Introduzcamos la siguiente notación:

$$F(n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_m;\ N)$$

designará el número de formas con que se pueden pagar N k. mediante monedas de distintos valores $n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_m$ k., tomando no más de una moneda de cada valor. Dividamos todas las formas de pago en dos clases, según se haya utilizado o no la moneda por valor de n_m k. Si ésta ha sido utilizada, queda pagar la suma de $N - n_m$ k. con las monedas de $n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_{m-1}$ k. Y esto se puede efectuar de $F(n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_{m-1};\ N-n_m)$ maneras. Si, en cambio, la moneda de n_m k. no fue utilizada, hay que pa-

[1] Seis puntos no pueden ser obtenidos en un examen y al obtener un dos se excluye la posibilidad de admisión en el instituto.

gar toda la suma de N k. mediante monedas de n_1, n_2, ..., n_{m-1} k. Esto se puede efectuar de $F(n_1, n_2, \ldots, n_{m-1}; N)$ modos.

De aquí se desprende que tiene lugar la relación

$$F(n_1, n_2, \ldots, n_m; N) = F(n_1, n_2, \ldots, n_{m-1}; N-n_m) + F(n_1, n_2, \ldots, n_{m-1}; N). \quad (18)$$

Esta relación permite reducir el problema de la elección a partir de m monedas al problema de la elección de entre $m-1$ monedas. Repitiendo este razonamiento, lo reducimos al problema de la elección a partir de $m-2$ monedas, etc., hasta que lleguemos o bien al problema del pago de una suma nula, o bien hasta el problema de elegir de entre una moneda solamente. Ambos problemas se resuelven unívocamente. Aquí, durante los cálculos muchos sumandos se eliminan, puesto que si $n_1 + n_2 + \ldots + n_m < N$, emtonces $F(n_1, n_2, \ldots, n_m\ N) = 0$, ya que no bastan las monedas para el pago de la compra. Además, si $n_m > N$, la relación (18) se sustituye por la

$$F(n_1, n_2, \ldots, n_m; N) = F(n_1, n_2, \ldots, n_{m-1}; N),$$

puesto que la moneda n_m no puede participar en el pago.

Apliquemos el método descrito a la resolución de nuestro problema. De la relación (18) deducimos primeramente que

$$F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50; 73) = F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20; 23) + F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20; 73) = F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20; 23),$$

ya que $1+2+3+5+10+15+20 < 73$, por lo cual $F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20; 73) = 0$. Prosiguiendo, obtenemos que

$$F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20; 23) = F(1, 2, 3, 5, 10, 15; 3) + F(1, 2, 3, 5, 10, 15; 23).$$

Pero

$$F(1, 2, 3, 5, 10. 15; 3) = F(1, 2, 3; 3) = F(1, 2; 0) + F(1, 2: 3) = 1 + F(1; 3) + F(1; 1) = 2.$$

Calculemos el segundo sumando:

$$F(1, 2, 3, 5, 10, 15; 23) = F(1, 2, 3, 5, 10; 8) + F(1, 2, 3, 5, 10; 23) = F(1, 2, 3, 5, 10; 8),$$

puesto que $1+2+3+5+10 < 23$. Pero $F(1, 2, 3, 5; 8) = F(1, 2, 3; 3) = 2$.

Definitivamente, obtenemos que

$$F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50; 73) = 4.$$

Así, pues, el pago requerido se puede efectuar de 4 maneras, precisamente, 50, 20 y 3 k; 50, 20, 2 y 1 k.; 50, 15, 5 y 3 k. y, por último, 50, 15, 5, 2 y 1 k.

LA COMPRA DE LOS CARAMELOS

En una confitería se venden caramelos de varios tipos: 3 tipos con un costo de 2 k. cada uno, y 2 tipos que valen 3 k. cada unidad. ¿De cuántas maneras se pueden comprar caramelos por un valor de 8 k., si se toma no más de un caramelo de cada clase?

La solución del problema se obtiene de las siguientes relaciones:

$$F(2, 2, 2, 3, 3; 8) = F(2, 2, 2, 3; 5) + F(2, 2, 2, 3; 8) = F(2, 2, 2; 2) + 2F(2, 2, 2; 5) + F(2, 2, 2; 8) = F(2, 2, 2; 2) = F(2, 2; 0) + F(2, 2; 2) = 1 + F(2; 0) + F(2; 2) = 3.$$

De este modo, la compra se puede efectuar de 3 maneras: comprar un caramelo de cada una de las dos clases de 3 k. y agregar a éstos cualquiera de los de 2 k.

Parecería ser que otras tantas soluciones tiene el problema:

En un portamonedas hay 3 monedas de 2 k. y 2 de 3 k. ¿De cuántas maneras se puede pagar, mediante dichas monedas, una suma de 8 k.?

Esto depende, sin embargo, de qué monedas se hallan en el portamonedas. Si las de 2 k., al igual que las de 3 k., se consideran diferenciables, el problema coincide con el que analizamos, y el pago se puede efectuar de 3 maneras. Si, en cambio, todas las monedas de 2 k. son indiferenciables, queda una sola forma de pago: 2 monedas de 3 k. y 1 de 2 k.

De esta manera, los problemas sobre pago tienen un carácter distinto, según sean o no diferenciables las monedas de un mismo valor. El método de resolución analizado más arriba sirve sólo para el caso en que todas las monedas se consideran diferentes, independientemente de que tengan el mismo valor o valores distintos. Mostremos ahora cómo se resuelve el problema en el caso en que las monedas de un mismo valor se consideran indiferenciables.

En el portamonedas hay 10 monedas de 2 k. y 5 de 3 k. ¿De cuántas maneras se puede pagar, con dichas monedas, una suma de 22 k., si las monedas de un mismo valor no se diferencian entre sí?

Designemos el número de soluciones del problema mediante $\Phi(10\cdot 2,\ 5\cdot 3;\ 22)$ ($10\cdot 2$ indica que tenemos 10 monedas de 2 k., igualmente $5\cdot 3$ significa que hay 5 monedas de 3 k.). Dividamos todas las formas que son soluciones del problema en clases, según la cantidad utilizada de monedas de tres kopeks. Si, por ejemplo, se han utilizado dos monedas de este tipo, quedarán por pagar 16 k. mediante monedas de dos kopeks, y si fueron utilizadas las 5 monedas quedarán por pagar sólo 7 k. Si las monedas de tres kopeks no han sido utilizadas en absoluto para el pago, habrá que pagar todos los 22 k. con monedas de dos kopeks. Así, pues, tiene lugar la igualdad

$$\Phi(10\cdot 2,\ 5\cdot 3;\ 22)=\Phi(10\cdot 2;\ 22)+\Phi(10\cdot 2;\ 19)+$$
$$+\Phi(10\cdot 2;\ 16)+\Phi(10\cdot 2;\ 13)+\Phi(10\cdot 2;\ 10)+$$
$$+\Phi(10\cdot 2;\ 7). \qquad (19)$$

No hay necesidad de continuar el proceso, puesto que disponemos sólo de 5 monedas de tres kopeks. Está claro que con 10 monedas de dos kopeks es imposible pagar 22 k. Por esto, $\Phi(10.2;\ 22)=0$. Ahora bien, es evidente que una suma impar no puede pagarse con monedas de dos kopeks, y una par se puede pagar de una sola forma. Por esto, de la fórmula (19) se deduce que

$\Phi(10\cdot 2,\ 5\cdot 3;\ 22)=2.$

Existen sólo dos formas de pago:

$22=8\cdot 2+2\cdot 3=5\cdot 2+4\cdot 3.$

¿COMO CAMBIAR UNA MONEDA DE 10 KOPEKS?

El lector debe, probablemente, cambiar varias veces al día monedas de 10 k.: para viajar en metro hacen falta monedas de 5 k., para hablar por el teléfono público, de 2 k., y para tomar un vaso de gaseosa con jugo, de 3 k. En relación con esto, surge el problema:

¿De cuántas maneras se puede cambiar una moneda de 10 k. en monedas de 1, 2, 3 y 5 k.?

Este problema es similar al que resolvimos al final del apartado anterior. Sólo que ahora el número de monedas de distinto valor no se limita. Por esto, el número de soluciones lo designaremos así: $\Phi(1,\ 2,\ 3,\ 5;\ 10)$. Razonando igual a como lo hicimos en el apartado anterior, se obtiene la relación

$$\Phi(1,\ 2,\ 3,\ 5;\ 10)=\Phi(1,\ 2,\ 3;\ 10)+$$
$$+\Phi(1,\ 2,\ 3;\ 5)+\Phi(1,\ 2,\ 3;\ 0) \qquad (20)$$

(todas las formas de cambio se han dividido en clases según el número de monedas de 5 k. que figuran en éstas). Está claro que $\Phi(1,\ 2,\ 3;\ 0)=1$, ya que se pueden pagar 0 k. de una sola forma.

Para calcular $\Phi(1,\ 2,\ 3;\ 5)$, dividamos todas las formas de cambiar 5 k. mediante monedas de 1, 2, 3 k. en clases, según la cantidad de monedas de tres kopeks tomadas. Obtenemos así

$$\Phi(1,\ 2,\ 3;\ 5)=\Phi(1,\ 2;\ 5)+\Phi(1,\ 2;\ 2)$$

(el primer sumando corresponde al caso en que no se toma ninguna moneda de tres kopeks, y el segundo, al caso en que se toma una moneda de este tipo).

Continuando el cálculo, se obtiene que

$$\Phi(1, 2, 3; 5) = \Phi(1; 5) + \Phi(1; 3) + \Phi(1; 1) + \Phi(1; 2) + \Phi(1; 0).$$

Todos estos sumandos son iguales a 1, puesto que cualquier suma se paga de una sola forma con kopeks. Así, pues, $\Phi(1, 2, 3; 5) = 5$. En forma totalmente análoga se calcula que $\Phi(1, 2, 3; 10) = 14$. En total obtenemos $14 + 5 + 1 = 20$ formas de cambio.

En lugar de la relación (20), se podría haber tomado al principio la relación

$$\Phi(1, 2, 3, 5; 10) = \Phi(1, 2, 3; 10) + \Phi(1, 2, 3, 5; 5).$$

Esta indica que las formas de cambio se dividen en aquellas en que no se utiliza ninguna moneda de 5 k., y aquellas en que fue utilizada por lo menos una moneda de este tipo.

En general, si hay que pagar N k. con monedas de valores de $n_1, \ldots, n_k$ kopeks, tiene lugar la relación

$$\Phi(n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k; N) = \Phi(n_1, \ldots, n_{k-1}; N) + \Phi(n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k; N - n_k). \qquad (21)$$

Esta demuestra que o bien no utilizamos ninguna moneda de n_k kopeks, y entonces hay que pagar toda la suma N con las monedas restantes de $n_1, \ldots, n_{k-1}$ k., o bien fue utilizada por lo menos una moneda de n_k k., y entonces hay que pagar la suma restante $N - n_k$ k. con monedas de $n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k$ k. Si, como sucedió en la pág. 67, las monedas no deben repetirse, la relación (21) se sustituye por la que ya encontramos antes (véase la pág. 67):

$$F(n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k; N) = F(n_1, \ldots, n_{k-1}; N) + F(n_1, \ldots, n_{k-1}; N - n_k). \qquad (22)$$

PARTICION DE NUMEROS EN SUMANDOS

Consideremos un caso particular del problema sobre el cambio, cuando se admiten monedas cualesquiera de 1 a n kopeks. En otras palabras, resolvamos el siguiente problema:

¿De cuántas maneras se puede dividir un número N en sumandos, cada uno de los cuales es igual a uno de los números $1, 2, \ldots, n$ (el orden de los sumandos no interesa)?

Designemos el número de estas maneras de partición mediante Π_n^N[1]. Entonces tiene lugar la relación

$$\Pi_n^N = \Pi_{n-1}^N + \Pi_n^{N-n}. \qquad (23)$$

En efecto, si el número n no se utiliza como sumando, entonces N está dividido en los sumandos $1, 2, \ldots, n-1$, lo cual puede efectuarse de Π_{n-1}^N formas. Si, en cambio, se ha utilizado n como sumando, el número $N - n$ está dividido en los sumandos $1, 2, \ldots, n$, lo cual puede efectuarse de Π_n^{N-n} maneras.

Impongamos ahora la limitación de que todos los sumandos sean diferentes. El número de soluciones en este caso se designará mediante Φ_n^N (siendo aquí $\Phi_n^N = 1$). Dejamos al lector la demostración de que para Φ_n^N tiene lugar la relación

$$\Phi_n^N = \Phi_{n-1}^N + \Phi_{n-1}^{N-n} \qquad (24)$$

(el número n no puede ser utilizado por segunda vez como sumando).

Como es fácil ver, $\Phi_1^1 = 1$ y $\Phi_1^N = 0$ para $N > 1$, y mediante la fórmula (24) se puede calcular sucesivamente Φ_n^N para todo n y N. Para Π_n^N resulta más cómodo tomar, en lugar de la relación (23), la

$$\Pi_n^N = \Pi_{n-1}^N + \Pi_{n-1}^{N-n} + \Pi_{n-1}^{N-2n} + \ldots, \qquad (25)$$

la cual se obtiene aplicando sucesivamente la (23). Luego, es suficiente observar que $\Pi_1^N = 1$ (cualquier número natural puede ser desarrollado de una sola forma en sumandos iguales a 1). Utilizando la relación (25), se calcula sucesivamente Π_2^N para todo N, después Π_3^N, etc.

Obsérvese que el número de todas las formas de dividir N en sumandos es igual a Π_N^N, ya

[1] El valor de Π_n^0 lo supondremos igual a 1.

que en el desarrollo no pueden figurar sumandos mayores que N. De igual modo, el número de formas de descomponer N sumandos diferentes es igual a Φ_N^N.

METODO DE LOS DIAGRAMAS

Los primeros métodos de demostración de los teoremas sobre las particiones de números eran muy complejos. Al igual que en muchos problemas de la matemática, la aplicación de consideraciones geométricas simplificó e ilustró las demostraciones de los teoremas.

Cada partición del número N en sumandos se puede representar en forma de diagrama. Cada fila de éste está formada por tantos puntos cuantas unidades figuren en el sumando correspondiente.

Fig. 10.

Por ejemplo, a la partición $7 = 1 + 1 + 2 + 3$ le corresponde el diagrama mostrado en la fig. 10.

Como el orden de los sumandos en la partición no tiene importancia, las filas se pueden situar de forma que su longitud no disminuya de arriba

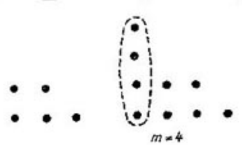


Fig. 11.

hacia abajo. Además, los primeros puntos de cada fila se representarán en una misma columna. Estos diagramas se llamarán *normales*.

Mediante los diagramas es fácil demostrar distintas propiedades de las particiones. Demostremos, por ejemplo, que *la cantidad de formas de dividir el número N en no más de m sumandos coincide con la de formas de dividir $N + m$ en m sumandos*. En efecto, el diagrama que representa la partición del número N en no más de m sumandos está formado por N puntos, situados en no más de m filas. Agreguemos a cada uno de estos diagramas una columna formada por m puntos (véase la fig. 11, donde se ha representado esta transformación para $N = 5$, $m = 4$). Se obtiene así un diagrama formado por $N + m$ puntos, situados en m filas. Recíprocamente, quitando la primera columna de cada diagrama, formada por $N + m$ puntos, situados en forma de m filas, obtenemos un diagrama de N puntos, en el cual la cantidad de filas no es mayor que m.

Hemos establecido una correspondencia biunívoca entre los diagramas de dos tipos, de donde se deduce que el número de estos diagramas es el mismo. Queda así demostrada nuestra afirmación.

Un tanto más compleja es la demostración del siguiente teorema (teorema de Euler):

El número de formas de partición N en no más de m sumandos es igual al número de formas de descomponer $N + \frac{m(m+1)}{2}$ en m partes distintas.

Cada partición del número N en no más de m sumandos se representa en forma de un diagrama de N puntos, que contiene no más de m filas. Agreguemos a cada uno de estos diagramas un triángulo rectángulo isósceles formado por m filas, después de lo cual reduzcamos el diagrama a la forma normal (fig. 12), donde se representa esta transformación para el caso $N = 6$, $m = 4$). Como el número de puntos en el triángulo es igual a $\frac{m(m+1)}{2}$, obtenemos un diagrama formado por $N + \frac{m(m+1)}{2}$ puntos, y que contiene m

filas. Además, todas las filas del diagrama serán de distinta longitud. En efecto, las longitudes de las filas del diagrama inicial no disminuyen, y las del triángulo crecen todo el tiempo. Esto significa que después de agregar el triángulo,

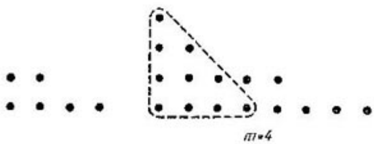


Fig. 12.

se obtendrá un diagrama en el cual las longitudes de las filas crecerán todo el tiempo. Por consiguiente, no puede haber filas de igual longitud.

Recíprocamente, de cada diagrama de la partición de $N + \frac{m(m+1)}{2}$ en m sumandos distintos se puede quitar un triángulo rectángulo isósceles, que contenga m filas, y obtener un diagrama para la división de N en no más de m sumandos. Esta correspondencia entre los diagramas de dos tipos demuestra que el número de éstos es el mismo. Con esto queda demostrada nuestra afirmación.

DIAGRAMAS DUALES

Los diagramas se pueden transformar de modo que las filas se transformen en columnas, y las columnas, en filas. Para esto, giremos el diagrama en 90° y reduzcámoslo a la forma normal. En la fig. 13 se representa esa transformación de los diagramas.

Está claro que si se repite esta transformación, se obtiene nuevamente el diagrama inicial. Por esto, todos los diagramas se dividen en pares mutuamente duales (a propósito, debe tenerse en cuenta que algunos diagramas son autoduales. como, por ejemplo, el de la fig. 14).

Aplicando la dualidad de los diagramas, se pueden comparar las particiones sometidas a ciertas limitaciones sobre la magnitud de los sumandos con las divisiones en las que se somete a limitaciones el número de sumandos. Por ejemplo, tiene lugar la siguiente afirmación:

El número de particiones de N en sumandos que no superen a n es igual al de divisiones de N en no más de n sumandos.

En efecto, los diagramas para la división de N en sumandos que no superen n están formados por N puntos, habiendo no más de n puntos en cada fila. Por lo tanto, en este diagrama no hay más de n columnas. Pero entonces el diagrama dual tiene no más de n filas, es decir, corresponde a la partición del número N en no más de n sumandos.

En forma totalmente análoga se demuestra que el número de particiones de N en n sumandos es igual al de particiones en sumandos que no superen n, por lo menos uno de los cuales es igual a n.

Consideremos ahora las particiones del número N en sumandos pares. Estas particiones se representan mediante diagramas cuyas filas con-

Fig. 13.

Fig. 14.

tienen un número par de puntos. Pero entonces en el diagrama dual habrá un número par de sumandos de cada tipo (fig. 15). De aquí se deduce la siguiente afirmación.

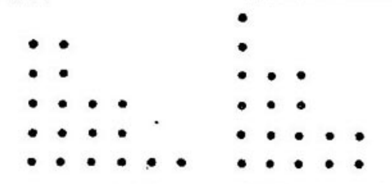


Fig. 15.

El número de particiones de N en sumandos pares es igual al de particiones en las cuales cada número figura un número par de veces (se sobreentiende que algunos sumandos pueden no figurar en absoluto, ya que cero es un número par).

Análogamente se demuestra que:

La cantidad de particiones de N en sumandos impares es igual al número de particiones en las cuales cada sumando, a excepción del mayor, figura un número par de veces, y el mayor, un número impar de ellas.

FORMULA DE EULER [1]

En relación con algunos problemas de las particiones, Euler estudió el producto infinito

$$A=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ \dots\ (1-x^n)\ \dots \qquad (26)$$

Abramos los primeros 22 paréntesis de este producto. Obtendremos así la expresión

$$A=[1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+\dots]\times$$
$$\times(1-x^{23})(1-x^{24})\ \dots\ (1-x^n)\ \dots$$

donde los puntos suspensivos designan sumandos que contienen x en potencias mayores que 22. No hemos escrito estos términos, puesto que después de multiplicar los corchetes por $1-x^{23}$, $1-x^{24}$, . . . x etc., cambiarán. En cambio, los términos escritos no variarán. Por esto, si abrimos todos los paréntesis, se obtiene una serie infinita cuyos primeros términos son de la forma

$$1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+\dots \qquad (27)$$

Podemos apreciar que después de dos términos negativos hay dos positivos, luego nuevamente dos negativos, etc. Sin embargo, resulta mucho más difícil descubrir la ley que rige los exponentes de estos términos. Mediante largos ensayos Euler estableció la siguiente regla:

Si se transforma el producto infinito

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ \dots\ (1-x^n)\ \dots$$

en una serie, en ésta serán diferentes de cero solamente los sumandos del tipo $(-1)^k x^{\frac{3k^2\pm k}{2}}$, *donde k es un número natural.*

El teorema de Euler tiene un gran significado no sólo en la teoría de las particiones en sumandos, sino también en la teoría de las funciones elípticas y en otros problemas del análisis matemático. Sin embargo, la mayoría de las demostraciones de este teorema son bastante complejas. Expondremos ahora una demostración geométrica muy sencilla del teorema de Euler. Previamente habrá que enunciar este teorema en el lenguaje de la teoría de las particiones.

Al abrir los paréntesis en la expresión (26), los sumandos $\pm x^N$ se encontrarán tantas veces cuantas maneras existan de dividir el número N en sumandos diferentes. Aquí tendremos x^N si el número de sumandos es par, y $-x^N$ si éste es impar. Por ejemplo, a la descomposición $12 = 5+4+2+1$ le corresponde el sumando

$$(-x^5)(-x^4)(-x^2)(-x)=x^{12},$$

y a la división $12=5+4+3$, el sumando

$$(-x^5)(-x^4)(-x^3)=-x^{12}.$$

De este modo, el coeficiente de x^N en el desarrollo (27) es igual a la diferencia entre la can-

[1] Este apartado se puede omitir en una primera lectura.

tidad de divisiones en un número par de sumandos distintos y la de particiones en un número impar de sumandos diferentes. El teorema de Euler afirma que:

Si el número N no puede ser representado en la forma $N = \frac{3k^2 \pm k}{2}$, éste tiene una cantidad igual de particiones en un número par y en uno impar de sumandos diferentes. Y para los números del tipo $N = \frac{3k^2 \pm k}{2}$, la diferencia entre estas cantidades es igual a $(-1)^k$ (es decir, si k es par, las particiones en un número par de sumandos superan en 1 a las de número impar, y si k impar, al revés).

Para demostrar el teorema de Euler, expongamos un método de transformar un diagrama con número par de filas en otro con el mismo número de puntos y un número impar de filas, y viceversa. Como consideramos solamente las particiones en sumandos diferentes, los diagramas de estas divisiones estarán formados por varios trapecios, ubicados uno sobre el otro. Designemos el número de puntos en la fila superior del diagrama mediante m, y el de filas del trapecio inferior mediante n. En la fig. 16 se representa un diagrama para el cual es $m = 2$, $n = 3$.

Supongamos que el diagrama contiene no menos de dos trapecios, siendo, además, $m \leqslant n$. En este caso, eliminemos la primera fila y prolonguemos las últimas m filas del trapecio inferior en un punto. Hecho esto, el número total de puntos no variará, todas las filas resultan

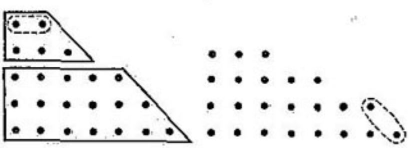


Fig. 16.

ser de distinta longitud y variará la paridad del número de las filas. Se puede efectuar exactamente la misma transformación si el diagrama está formado por un solo trapecio, siendo $m \leqslant n - 1$. En la fig. 17a se expone el resultado de semejante transformación de un diagrama.

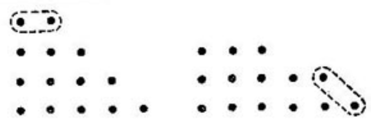


Рис. 17a.

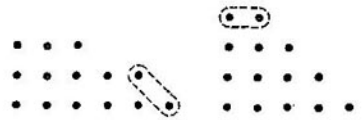


Fig. 17в.

Supongamos ahora que el diagrama contiene no menos de dos trapecios y que $m > n$. Entonces tomemos un punto de cada fila del último trapecio y formemos con éstos la primera fila de un nuevo diagrama. Esto se puede efectuar, puesto que $m > n$ y, por ello, la fila formada es más corta que la primera del diagrama original. Además, como hemos tomado todas las filas del trapecio inferior, en el diagrama obtenido todas las filas tendrán diferente longitud. Por último, el nuevo diagrama contiene tantos puntos como el original, pero la paridad de la cantidad de filas ha variado: el nuevo diagrama contiene una fila más. Un transformación análoga la admiten los diagramas formados por un solo trapecio, si es $n \geqslant m - 2$. En la fig. 17b se representa el resultado de la transformación descrita de un diagrama. Comparando las figuras 17a y 17b, nos podemos convencer de que *las transformaciones descritas son inversas entre sí: si se efectúa primeramente una de ellas, y después la otra, obtenemos nuevamente el diagrama original.*

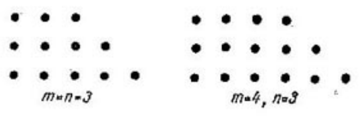


Fig. 18.

Así, pues, *los diagramas de las particiones del número N que admiten una de estas transformaciones, se dividen en un número igual de diagramas con número par e impar de filas.* Queda por esclarecer cuáles diagramas no admiten la transformación descrita. Está claro que éstos están formados por un sólo trapecio, y que para ellos se cumple que $m = n$, o bien que $m = n + 1$. En el primer caso, el diagrama contiene $\frac{3n^2-n}{2}$ puntos, y en el segundo, $\frac{3n^2+n}{2}$ puntos (fig. 18).

Los razonamientos expuestos demuestran que si N no es un número del tipo $\frac{3n^2\pm n}{2}$, éste tiene igual cantidad de particiones en un número par y en uno impar de sumandos diferentes. Si es $N = \frac{3n^2\pm n}{2}$ y n es un número par, quedará un diagrama que no admite la transformación, y que tiene un número par de filas. Por esto quedará una partición más en número par de sumandos que en número impar de éstos. Si, en cambio, es $N = \frac{3n^2\pm n}{2}$ y n es impar, habrá una división más en un número impar de sumandos. El teorema queda demostrado.

CAPITULO V

UN HOMBRE DEAMBULA POR LA CIUDAD

En la fig. 19 se representa el plano de una ciudad (aproximadamente éste es el tipo del plano de Canberra, la capital de Australia). *En esta ciudad hay* $n \times k$ *manzanas rectangulares, divididas por* $n-1$ *calles «horizontales» y por* $k-1$ *«verticales». El caminante quiere ir desde el punto A hasta el B por el camino más corto, es decir, desplazándose todo el tiempo o bien «de izquierda a*

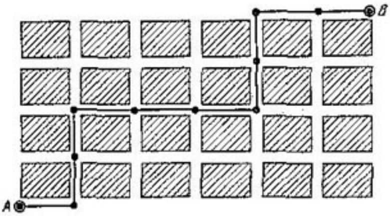


Fig. 19.

derecha», o bien «de abajo hacia arriba». ¿Por cuántos caminos puede llegar desde A hasta B?

Está claro que, por cualquier camino que tome el caminante, pasará por $k+n$ cruces (considerando el punto A, pero no el B). En cada cruce puede ir o bien hacia la derecha, o bien hacia arriba. En correspondencia con esto, todos los cruces se dividen en dos clases. Pongamos en correspondencia a los cruces en que él escoge el camino hacia la derecha, el número 0, y en los que va hacia arriba, la cifra 1. Como el número de cruces de la primera clase debe ser igual a k, y el de la segunda, a n (de otra forma el caminante no llegará al punto B), obtenemos una permutación formada por k ceros y n unidades. A cada una de estas permutaciones le corresponde, a su vez, algún camino. En la figura 19 se representa el camino que corresponde a la permutación 0110001100.

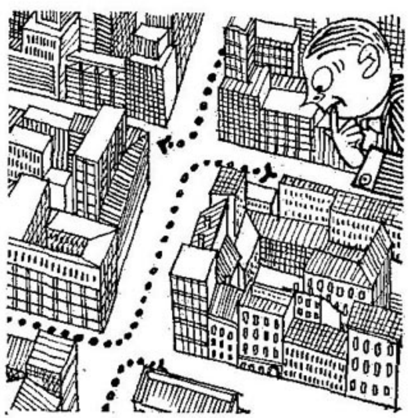
Pero el número de permutaciones de k ceros y n unidades es igual a

$$P(k, n) = C_n^{n+k} = \frac{(n+k)!}{n!\,k!}. \qquad (1)$$

A lo mismo es igual también el número de caminos más cortos desde A hasta B.

EL CUADRADO ARITMETICO

Los desplazamientos del caminante por la ciudad se asemejan a los movimientos de una torre en el ajedrez. Tomemos un tablero de ajedrez infinito, limitado por dos lados por semirrectas perpendiculares, y coloquemos en el ángulo de este tablero una torre. Supongamos que ésta se mueve en el tablero o bien desde arriba hacia abajo, o bien de izquierda a derecha. Combinando estos movimientos entre sí, se pueden obtener caminos diferentes, que conducen desde la ca-



silla angular a una dada del tablero. Escribamos en cada casilla del tablero el número de estos caminos. Está claro que el número escrito depende de las coordenadas de la casilla, de en qué vertical y horizontal se encuentre.

Nos resultará cómodo numerar las verticales y las horizontales mediante los números 0, 1, 2, ..., n, ... En esta numeración la casilla angular obtiene las coordenadas (0, 0). Aplicando el resultado obtenido al resolver el problema anterior, nos convencemos de que en la intersección de la k-ésima vertical y la n-ésima horizontal se halla el número C_k^{n+k} (para llegar a esta casilla hay que efectuar k movimientos hacia la derecha y n hacia abajo). Escribamos en lugar de C_k^{n+k} sus valores numéricos. Obtendremos entonces la tabla 3. Esta tabla se denomina *cuadrado aritmético*. Analicemos con más detalle sus propiedades. Un estudio atento del cuadrado aritmético demuestra que cada número escrito en éste se obtiene según la siguiente regla: *este número es igual a la suma del número escrito sobre él y del que se halla a su izquierda*. Por ejemplo, sobre el número $10 = 4 + 6$ está escrito el 4, y a su izquierda, el 6.

Tabla 3

1	1	1	1	1	1	. . . . .
1	2	3	4	5	6	. . . . .
1	3	6	10	15	21	. . . . .
1	4	10	20	35	56	. . . . .
1	5	15	35	70	126	. . . . .
1	6	21	56	126	252	. . . . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . . . .

La regla obtenida se desprende fácilmente de la igualdad $C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1}$, demostrada antes (véase la pág. 36). Pero lo podemos demostrar también directamente. En efecto, la torre puede llegar a la casilla (k, n) desde una de las casillas $(k-1, n)$ ó $(k, n-1)$. Por esto, en virtud de la regla de la suma, el número de formas de llegar a la casilla (k, n) es igual a la suma del número de maneras de alcanzar la $(k-1, n)$ y del de formas de alcanzar la $(k, n-1)$. Y ésta es, precisamente, nuestra afirmación.

De la relación $C_k^{n+k} = C_n^{n+k}$ se deduce que el cuadrado aritmético es simétrico con respecto a la diagonal que pasa por su ángulo (la denominaremos *diagonal principal*). A propósito, esta propiedad también se demuestra fácilmente en forma geométrica: se puede llegar al cruce de la n-ésima vertical con la k-ésima horizontal y al de la k-ésima vertical con la n-ésima horizontal de un número igual de maneras.

NUMEROS FIGURADOS

Al calcular los elementos de la tabla 3 utilizamos tanto los elementos de la fila anterior, como los de la columna anterior. Pero habría sido suficiente utilizar los de la fila anterior. En efecto, hemos demostrado en la pág. 37 la fórmula (15):

$$C_k^{n+k} = C_k^{n+k-1} + C_{k-1}^{n+k-2} + \ldots + C_0^{n-1}.$$

Esta fórmula demuestra que cada elemento de nuestra tabla es igual a la suma de los elementos de la fila anterior, a partir del primero y hasta el elemento que se halla directamente por encima del calculado. De este modo, sumando sucesivamente los elementos de la $(n-1)$-ésima fila, calculamos, uno tras otro, los de la n-ésima.

Este método de cálculo de la tabla 3 está relacionado con la teoría de los números figurados, que se remonta a los matemáticos de la Grecia Antigua Pitágoras y Nicómaco. El hecho reside en que los números 1, 2, 3, ... se pueden representar mediante filas de uno, dos, tres, etc. puntos, y estas filas, unir en triángulos (fig. 20). Entonces el número de puntos de cada triángulo será igual al número correspondiente en la segunda fila de la tabla[1]. Por esto, los números, 1,

[1] Recuérdese que las filas se numeran con los números 0, 1, 2, ..., por lo cual la fila superior es la cero, la que le sigue, la primera, etc.

3, 6, 10, 15, 21, etc. son llamados *números triangulares*. El k-ésimo número triangular es igual a

$$C_2^{k+1}=\frac{(k+1)\,k}{2}.$$

Análogamente, los triángulos representados en la fig. 20 pueden ser unidos en pirámides. El

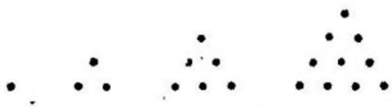


Fig. 20.

número de puntos en cada pirámide es igual al número correspondiente de la tercera fila de nuestra tabla. Por eso los números 1, 4, 10, 20, 35, etc. se llaman *piramidales*. Su fórmula general es la siguiente:

$$C_3^{k+2}=\frac{(k+2)\,(k+1)\,k}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

Para dar una interpretación análoga de los números de las filas siguientes, habría que considerar pirámides en espacios de un número mayor de dimensiones.

El estudio de los números figurados atrajo a los matemáticos en el transcurso de muchos siglos, y era entonces una sección importante de la teoría de los números.

EL TRIANGULO ARITMETICO

Tomemos ahora un tablero delimitado solamente por un lado y coloquemos en la casilla A de la horizontal nula una ficha (fig. 21). Moviéndose según las reglas del juego de damas, esta ficha puede llegar a cualquier casilla que se halla en la zona limitada por las rectas AB y AC. Escribamos nuevamente, para cada casilla, el número de formas de las cuales puede llegar nuestra ficha hasta ella. Podemos apreciar que los números escritos coinciden, en esencia, con los del cuadrado aritmético, estando sólo distribuidos de otra forma. Esto no debe extrañarnos: si se gira el tablero en 45°, la ficha se moverá según líneas horizontales y verticales, y el problema se transforma en el de los movimientos

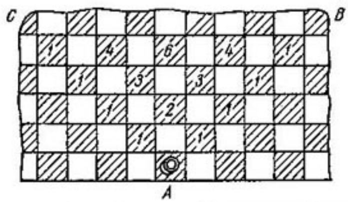


Fig. 21.

de una torre. Los números de la fig. 21 se representan comúnmente en forma de triángulo (tabla 4). Aquí cada número es igual a la suma de los

Tabla 4

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

dos números de la fila anterior, entre los cuale éste se encuentra. Este triángulo es llamado cor frecuencia triángulo de Pascal. Sin embargo aún antes que Pascal (1623—1662) lo conocí el matemático italiano Tartaglia[1] (1500—1557)

[1] Tartaglia era un matemático notable. Además de triángulo aritmético, descubrió la fórmula de resolució de las ecuaciones cúbicas. Esta fórmula la comunicó otro matemático italiano, D. Cardano, haciendo que ést jurase no descubrir a nadie el secreto confiado. Pero Car dano, poco tiempo después, publicó esta solución en s texto de álgebra, por lo cual la fórmula de resolució de las ecuaciones cúbicas es llamada, con total injusticia «fórmula de Cardano».

Y muchos años antes que Tartaglia este triángulo se podía ver en los trabajos de los matemáticos árabes Giyaseddin y Omar Hayyam. Por esto, lo llamaremos simplemente triángulo aritmético.

El triángulo aritmético se puede escribir también como sigue:

Tabla 5

1	0	0	0	0	0	. . .
1	1	0	0	0	0	. . .
1	2	1	0	0	0	. . .
1	3	3	1	0	0	. . .
1	4	6	4	1	0	. . .
1	5	10	10	5	1	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Aquí en el cruce de la k-ésima vertical y la n-ésima horizontal se halla el número C_k^n (recuérdese que las líneas extremas tienen número cero). Cada número del triángulo es igual a la suma del que se halla encima de él y del que se encuentra en la fila anterior, sesgado hacia la izquierda. Por ejemplo, encima del número 4 en la cuarta fila se halla el 1, y sesgado hacia la izquierda del 4 se halla el 3, siendo $4 = 1 + 3$.

Destaquemos, además, las siguientes particularidades del triángulo aritmético: *todos los elementos situados por encima de la diagonal principal son iguales a cero, y la columna cero está formada por unidades.* Los números que se hallan en la n-ésima fila del triángulo aritmético, es decir, los números C_k^n para un n fijo, son los coeficientes del desarrollo del binomio $(1 + x)^n$ en potencias de x. Por esto, se los llama también *coeficientes binómicos.* En el capítulo VII nos detendremos en esto con más detalle.

TRIANGULO ARITMÉTICO AMPLIADO

El triángulo aritmético ocupa sólo una parte del plano. Extendámoslo a todo el plano, conservando la regla enunciada más arriba: *cada elemento es igual a la suma del que se halla sobre éste y del de la fila anterior, que se halla sesgado hacia la izquierda.* Además, como la columna nula del triángulo aritmético está formada por unidades, en el triángulo ampliado también llenaremos esta columna de unidades.

Aplicando la regla indicada a los elementos de la columna nula, apreciamos que delante de ésta debe haber una columna formada por ceros. Pero entonces también todas las demás columnas de la izquierda están formadas por ceros. Por esto, sólo hay que ver qué hay por encima de la fila cero del triángulo. En forma sesgada con respecto al primer elemento de la fila nula se halla el número 1, siendo dicho elemento igual a cero. Por esto, sobre él hay que escribir -1 $(1 + (-1) = 0)$. Pero entonces, para obtener cero también en el segundo lugar de la fila cero, hay que escribir, sobre éste, el número 1. Continuando nuestro razonamiento, apreciamos que sobre la fila cero surgió una fila nueva, formada alternadamente por los números 1 y -1. De igual forma se obtienen las demás filas hacia arriba.

Como resultado, obtenemos una tabla, parte de la cual se expone más abajo:

Analizando la parte de esta tabla situada por encima de la fila nula, podemos convencernos

Tabla 6

. . .	0	1	−5	15	−35	70	−126	. . .
. . .	0	1	−4	10	−20	35	−56	. . .
. . .	0	1	−3	6	−10	15	−21	. . .
. . .	0	1	−2	3	−4	5	−6	. . .
. . .	0	1	−1	1	−1	1	−1	. . .
. . .	0	1	0	0	0	0	0	. . .
. . .	0	1	1	0	0	0	0	. . .
. . .	0	1	2	1	0	0	0	. . .
. . .	0	1	3	3	1	0	0	. . .
. . .	0	1	4	6	4	1	0	. . .
. . .	0	1	5	10	10	5	1	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

de que se diferencia del cuadrado aritmético de la pág. 77 solamente en los signos de los términos. Más precisamente, en la intersección de la $(-n)$-ésima horizontal y la k-ésima vertical se halla el número $(-1)^{k-1}C_k^{n+k-1}$. Se sobreentiende que el estudio de una parte de la tabla no puede servir de demostración de que esto es válido para todas las filas y todas las columnas. Para convencerse de su justeza, obsérvese que

$$(-1)^{k-1}C_k^{n+k-1}+(-1)^{k-2}C_{k-1}^{n+k-2}=$$
$$=(-1)^{k-1}[C_k^{n+k-1}-C_{k-1}^{n+k-2}]=$$
$$=(-1)^{k-1}C_k^{n+k-2}$$

(véase la fórmula (11) de la pág. 36). La igualdad obtenida demuestra que en una tabla formada por los números $(-1)^{k-1}C_k^{n+k-1}$, el k-ésimo elemento de la fila $n+1$ es igual a la suma de los elementos de la $(-n)$-ésima fila con números k y $k-1$. En otras palabras, la regla de escritura de la tabla que forman los números $(-1)^{k-1}C_k^{n+k-1}$ coincide con la de escritura de la tabla del triángulo aritmético ampliado. Como, además, estas tablas poseen filas iguales con número -1 y la columna cero, todos sus elementos coinciden.

En el triángulo aritmético inicial, en la intersección de la n-ésima horizontal y la k-ésima vertical se hallaba el número C_k^n. En el triángulo ampliado, en la intersección de la $(-n)$-ésima aorizontal y la k-ésima vertical se halla el número $(-1)^{k-1}C_k^{n+k-1}$. Por esto, se puede generalizar el símbolo C_k^n para los valores negativos de n, haciendo

$$C_k^{-n}=(-1)^{k-1}C_k^{n+k-1}. \tag{2}$$

Como lo muestra la tabla 6, la generalización del símbolo C_k^n para los valores negativos de k es trivial: para $k<0$, se tiene $C_k^n=0$ (véase también la pág. 124). Además, es $C_k^n=0$ si $0\leqslant n<k$.

EL REY DEL AJEDREZ

El triángulo aritmético se puede obtener como sigue. Coloquemos en el ángulo izquierdo superior de la tabla un «rey del ajedrez unilateral», es decir, una figura que pueda desplazarse solamente en una casilla hacia adelante y en una casilla en forma sesgada hacia la derecha. Escribiendo en cada casilla el número de maneras de

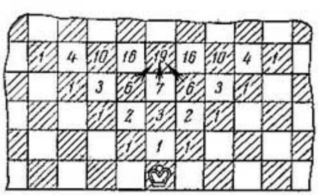


Fig. 22.

las cuales esta figura puede llegar hasta ella, obtenemos el triángulo aritmético.

Sustituyamos ahora al «rey unilateral» por un rey común del ejedrez, limitando su libertad de movimiento con una sola condición: el rey debe ir siempre hacia adelante, hacia la línea horizontal siguiente. Para que el rey pueda utilizar sus nuevas posibilidades, hay que ampliar el tablero, tomando uno limitado sólo por un lado por una línea recta. En la fig. 22 se representa tal tablero, en cada casilla del cual se indica el número de formas de las cuales puede llegar hasta ella el rey, si éste se encontraba al principio en la casilla A.

Veamos cómo está formada la nueva tabla. Supongamos que para cada casilla de la horizontal $n-1$ ya fue hallado de cuántas maneras puede llegar hasta ella el errabundo monarca. Hallemos de cuántas formas se alcanzan las casillas de la n-ésima horizontal. A cada una de estas casillas el rey puede llegar desde una de las vecinas de la horizontal $n-1$ (desde la que se halla directamente debajo de ella, o en forma sesgada hacia la derecha, o hacia la izquierda, véase la fig. 22). En virtud de la regla de la suma, se obtiene el siguiente resultado:

El número de formas de las cuales el rey del ajedrez puede alcanzar alguna casilla de la n-ésima horizontal es igual a la suma de los números de modos de los que se alcanzan las tres casillas vecinas de la horizontal $n-1$.

Aquí se considera que para la casilla en la que el rey se halla al principio hay una sola forma (no moverse del lugar), y para las demás casillas de la horizontal cero no hay ninguna manera.

TRIANGULO ARITMETICO GENERALIZADO

El triángulo de la fig. 22 se puede representar de otra forma, desplazando todos los números hacia la derecha de modo que la tabla quede en la parte del tablero delimitada por dos semirrectas perpendiculares. En este caso, la regla de obtención de cada número de la tabla se enuncia así:

Cada número es igual a la suma de tres de la fila precedente: del que se halla directamente sobre él y de los dos vecinos de la izquierda. Además, en el vértice se halla el número 1, y todos los demás elementos de la fila cero son iguales a cero.

Por ejemplo, el número 16 de la cuarta fila es la suma de los números 3, 6 y 7 de la tercera.

Queda totalmente claro cómo generalizar ahora el triángulo aritmético. Tomemos algún número natural m y llenaremos la tabla según la regla siguiente: en el ángulo superior izquierdo escribiremos el número 1, y en todas las demás casillas de la fila cero, ceros. Después, en cada casilla de la primera fila escribiremos la suma de m elementos de la fila cero: del que se halla directamente sobre el buscado y de $m-1$ elementos a la izquierda de éste. Está claro que entonces los primeros m elementos de la primera fila serán iguales a la unidad, y los demás, a cero (si al formar la suma faltan sumandos, los que faltan se consideran iguales a cero; en otras palabras, la tabla se completa a la izquierda por una tabla formada de ceros (véase la tabla 7).

En forma totalmente análoga se escriben las filas restantes de la tabla: cada elemento de ésta es igual a la suma de m elementos de la fila anterior: del que se halla directamente sobre él y de $m-1$ a su izquierda. En particular, el triángulo aritmético se obtiene para $m=2$; el de la tabla, 7, para $m=3$.

Tabla 7

0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	2	3	2	1	0	0	0	0
0	0	1	3	6	7	6	3	1	0	0
0	0	1	4	10	16	19	16	10	4	1
. . .		. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Para distinguir entre sí los triángulos aritméticos con distintos valores de m, los llamaremos *m-triángulos aritméticos.* El elemento del m-triángulo aritmético que se halla en la intersección de la n-ésima horizontal y la k-ésima vertical será designado por $C_m(k, n)$. De la definición del m-triángulo aritmético se desprende que los números $C_m(k, n)$ satisfacen a la relación

$$C_m(k, n)=C_m(k, n-1)+C_m(k-1, n-1)+\ldots \\ \ldots+C_m(k-m+1, n-1) \quad (3)$$

Además, se cumplen las condiciones

$$C_m(k, 1)=\begin{cases}1, \text{ si } 0\leqslant k\leqslant m-1;\\ 0, \text{ si } k\geqslant m.\end{cases}$$

TRIANGULOS ARITMETICOS GENERALIZADOS Y SISTEMA DE NUMERACION m-ESIMAL

Los números $C_m(k, n)$ están relacionados con el sistema de numeración m-esimal. Precisamente, $C_m(k, n)$ *es igual a la cantidad de nú-*

meros de n cifras en el sistema de numeración m-esimal, para los cuales la suma de sus cifras es igual a k. Aquí el término «de n cifras» lo entendemos en el sentido amplio, admitiendo también números que comienzan con uno o varios ceros. Así, 001 215 se considera un número de seis cifras y la suma de sus cifras es igual a 9.

Para demostrar la afirmación enunciada, designemos la cantidad de números de n cifras en el sistema de numeración m-ésimal, para los cuales la suma de sus cifras es igual a k, mediante $B_m(k, n)$. Demostraremos que los números $B_m(k, n)$ satisfacen a la misma relación (3) que los $C_m(k, n)$. En efecto, la última cifra de un número en el sistema de numeración m-esimal puede tomar uno de los valores $0, 1, \ldots, m-1$. En correspondencia con esto, la suma de las cifras del número de $n-1$ cifras que se obtiene del de n cifras eliminando la última, puede adquirir uno de los valores $k, k-1, \ldots, k-m+1$. En virtud de la regla de la suma, de aquí se obtiene que

$$B_m(k, n)=B_m(k, n-1)+\ldots$$
$$\ldots+B_m(k-m+1, n-1). \qquad (4)$$

Además, está claro que $B_m(k, 1)$ es igual a 1 si $0 \leqslant k \leqslant m-1$, y a 0 en caso contrario (en el sistema de numeración m-esimal hay solamente un número de una cifra cuya suma de cifras sea igual a k, si $0 \leqslant k \leqslant m-1$, y no hay ninguno, si $k \geqslant m$). De este modo, la primera fila de la tabla de números $B_m(k, n)$ coincide con la primera de la tabla de números $C_m(k, n)$. Como las leyes (3) y (4) de formación de estas tablas también coinciden, para todo k y n tendremos que $B_m(k, n)=C_m(k, n)$.

ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS NUMEROS $C_m(k, n)$

Los números $C_m(k, n)$ poseen toda una serie de propiedades que se asemejan a la de los C_n^k. Esto no es de extrañar, ya que, en virtud de la composición del triángulo aritmético, se tiene que $C_2(k, n)=C_n^k$. Obsérvese, en primer lugar, que *$C_m(k, n)$ es diferente de cero solamente para* $0 \leqslant k \leqslant n(m-1)$. Esto se deduce directamente de que cada fila siguiente del m-triángulo aritmético es más larga que la precedente en $m-1$.

Demostremos ahora que los números $C_m(k, n)$ poseen la siguiente propiedad de simetría:

$$C_m(k, n)=C_m(n(m-1)-k, n). \qquad (5)$$

Para esto, pongamos en correspondencia a cada número de n cifras en el sistema de numeración m-esimal un «número complementario», que se obtiene sustituyendo cada cifra por su complemento hasta $m-1$. Por ejemplo, en el sistema 7-esimal de numeración el complemento de 3 140 216 será el número 3 526 450. Está claro que si la suma de las cifras del número dado era igual a k, la de las del complementario será igual a $n(m-1)-k$. Por esto, hay tantos números de n cifras cuya suma de cifras es igual a k, como con suma de cifras igual a $n(m-1)-$ $-k$. Pero esto, precisamente, se expresa mediante la igualdad (5).

Como la cantidad general de números de n cifras en el sistema de numeración m-esimal es igual a m^n (véase la pág. 11), tiene lugar la relación

$$C_m(0, n)+C_m(1, n)+\ldots$$
$$\ldots+C_m(n(m-1), n)=m^n. \qquad (6)$$

Demostremos ahora la relación

$$C_m(0, l)\,C_m(k, n-l)+$$
$$+C_m(1, l)\,C_m(k-1, n-l)+\ldots$$
$$\ldots+C_m(k, l)\,C_m(0, n-l)=C_m(k, n), \qquad (7)$$

donde $0 \leqslant l \leqslant n$. Para esto, dividamos todos los números de n cifras cuya suma de cifras es igual a k, en clases. Hagamos pertenecer a la s-ésima clase los números cuya suma de las primeras l cifras es igual a s. Entonces la suma de las $n-l$ restantes será igual a $k-s$. En virtud de la regla del producto, obtenemos que en la s-ésima clase figuran $C_m(s, l)\, C_m(k-s, n-l)$ números. Como la cantidad total de números de n cifras con suma de éstas igual a k es igual a $C_m(k, n)$, obtenemos, según la regla de la suma, la relación (7).

En particular, para $l = 1$ la relación (7) nos conduce a la igualdad (3) (puesto que $C_m(k, 1) = 1$ para $0 \leqslant k \leqslant m-1$ y $C_m(k, 1) = 0$ si $k \geqslant m$).

Demostremos, por último, que tiene lugar la igualdad

$$C_0^n C_{m-1}(k-n, n) + C_1^n C_{m-1}(k-n+1, n-1) + \ldots$$
$$\ldots + C_s^n C_{m-1}(k-n+s, n-s) + \ldots +$$
$$= C_n^n C_{m-1}(k, 0) = C_m(k, n). \qquad (8)$$

Para esto, dividamos todos los números de n cifras en el sistema de numeración m-esimal, cuya suma de cifras es igual a k, en clases. Haremos pertenecer a la clase s-ésima, $0 \leqslant s \leqslant n$, los números en cuya escritura m-esimal hay exactamente s ceros.

Hallemos cuántos números figuran en la clase s-ésima. Cada número de dicha clase se puede escoger en dos etapas. Primeramente se eligen los lugares en los cuales se hallan los ceros. Como se consideran los números de n cifras, y la cantidad de ceros es igual a s, esto se puede efectuar de C_s^n maneras. Efectuado esto, tachemos todos los ceros y restemos 1 de cada cifra restante. Obtenemos entonces un número de $n-s$ cifras, en el cual figuran las cifras $0, 1, \ldots, m-2$ (es decir, un número del sistema $(m-1)$-esimal de numeración). La suma de las cifras de este número es igual a $k-(n-s) = k-n+s$. La cantidad de tales números es igual a $C_{m-1}(k-n+s, n-s)$. De los razonamientos expuestos se aprecia que en la clase s-ésima figuran $C_s^n C_{m-1}(k-n+s, n-s)$ números. Como la cantidad total de números de n cifras, cuya suma de cifras es k, es igual a $C_m(k, n)$, obtenemos, en virtud de la regla de la suma, la relación (8).

Como $C_2(k, n) = C_n^k$, de la relación (8) se deduce que

$$C_3(k, n) = C_0^n C_n^{k-n} + C_1^n C_{n-1}^{k-n+1} + \ldots + C_n^n C_0^k.$$

Aplicando varias veces la fórmula (8), se obtiene la expresión de $C_m(k, n)$ mediante los coeficientes binómicos.

LA FICHA EN LA ESQUINA DEL TABLERO

Tomemos nuevamente un tablero de ajedrez infinito, delimitado por dos semirrectas perpendiculares, y coloquemos una ficha en la esquina de este tablero (fig. 23)[1]. Escribamos en

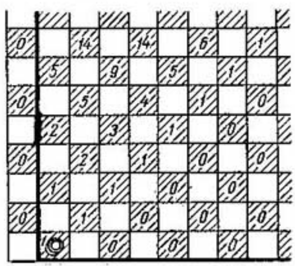


Fig. 23.

cada casilla de este tablero el número de formas de las cuales la ficha puede llegar hasta ella. El resultado se diferenciará del obtenido antes, cuando el tablero estaba limitado solamente por una línea recta (véase la pág. 78), puesto que ahora la ficha no puede pasar la frontera vertical. Por esto, el número de posibilidades de llegar hasta alguna casilla es menor: al ir a esta casilla, la ficha no puede desviarse demasiado hacia la izquierda. Por ejemplo, a las casillas que se

[1] En la figura se representa una columna suplementaria, que nos será necesaria después.

encuentran a lo largo de la frontera, la ficha puede llegar solamente desde una casilla, y no desde dos, como tenía lugar en la pág. 78. En dicha pág. se expresaba que el número escrito en cada casilla negra era igual a la suma de los dos escritos en las casillas negras vecinas de la horizontal precedente. Para que esta ley conserve su validez también ahora, hay que trazar una vertical más a la izquierda de la frontera, y escribir un cero en cada una de sus casillas negras (es imposible llegar a esta casilla).

Calculemos de cuántas maneras se puede llegar hasta cierta casilla, teniendo en cuenta la limitación efectuada. Cada camino puede ser escrito en forma de sucesión de ceros y unidades: el cero indica un movimiento hacia la izquierda, y la unidad, hacia la derecha. En este caso, la cantidad de ceros y unidades se determina solamente por la casilla a la cual debe llegar la ficha. Por ejemplo, cualquier camino de 4 ceros y 6 unidades conduce a la casilla que se halla en la intersección de la segunda vertical y la décima horizontal (igual que antes, consideramos que las líneas extremas tienen número cero).

Sin embargo, no cualquier sucesión de ceros y unidades es admisible. Por ejemplo, no se puede comenzar a partir de cero: este movimiento saca directamente a la ficha fuera de los límites del tablero. Las sucesiones admisibles poseen la siguiente propiedad característica: delante de cada lugar hay no menos unidades que ceros; en cada momento del movimiento la cantidad de desplazamientos hacia la derecha debe ser no menor que la de desplazamientos hacia la izquierda. De otro modo, la ficha resultará fuera de los límites del tablero.

Así, pues, debemos hallar *cuántas sucesiones de k ceros y m unidades tienen* la siguiente propiedad: delante de cada lugar de la sucesión, la cantidad de unidades no es menor que la de ceros. Pero este problema ya fue resuelto en la pág. 53 (sólo que entonces tomábamos la letras «r» y «c» en lugar de ceros y unidades). Allí fue demostrado que el número de tales sucesiones es igual a $\frac{m-k+1}{m+1} C_k^{m+k}$. Este número, precisamente, debe ser escrito en la intersección de la horizontal $m+k$ y la vertical $m-k$.

Ubiquemos ahora a la ficha no en la esquina, sino en la q-ésima casilla de la horizontal cero (en contra de las reglas del juego de damas, esta casilla puede ser también blanca). Ahora la ficha tiene q movimientos de reserva hacia la izquierda. Este caso corresponde al problema estudiado en la pág. 54, en el cual el cajero se había abastecido de antemano de q monedas de 50 kopeks.

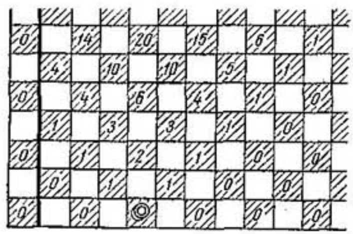


Fig. 24.

Utilizando la respuesta allí obtenida, llegamos a la siguiente conclusión: la ficha llega a cierta casilla después de hacer k movimientos hacia la izquierda y m hacia la derecha, $0 \leqslant k \leqslant m+q$, el número de formas diferentes de llegar hasta dicha casilla es igual a $C_k^{m+k} - C_{k-q+1}^{m+k}$. En la fig. 24 se representa la tabla que aparece para el caso $q=3$.

EL PENTAGONO ARITMETICO

Giremos el tablero 45°. Entonces la ficha se desplazará por rectas verticales y horizontales, estando la frontera inclinada con respecto a estas rectas un ángulo de 45°. Por esto, el problema sobre la ficha en la esquina adquiere la forma siguiente:

En la esquina de un tablero de ajedrez se halla una torre. ¿De cuántas formas puede ésta llegar hasta la casilla (m, k), *desplazándose de la manera más corta y sin atravesar en su desplazamiento la diagonal del tablero* (la torre no puede entrar en las casillas de esta diagonal)?

De lo demostrado más arriba se deduce que para $k \leqslant m$ el número de dichas formas es igual

1	1	1	1	0	0	0
1	2	3	4	4	0	0
1	3	6	10	14	14	0
1	4	10	20	34	48	48

Fig. 25.

a $\frac{m-k+1}{m+1} C_k^{m+k}$, y para $k > m$, a cero. Si se desplaza la diagonal en q casillas hacia la derecha, la respuesta toma la forma siguiente: para $0 \leqslant k \leqslant m+q$ el número de formas es

1	1	1	1	1	0	0
1	2	3	4	5	5	0
1	3	6	10	15	20	20
1	4	10	20	35	55	75
0	4	14	34	69	124	199
0	0	14	48	117	241	340

Fig. 26.

igual a $C_k^{m+k} - C_{k-q-1}^{m+k}$, y para $k > m+q$, a cero.

Si el tablero de ajedrez es finito, los números de esta tabla diferentes de cero forman un pentágono (fig. 25). Este se llama *pentágono aritmético*. La misma denominación se conserva también para la tabla que se obtiene en el tablero infinito delimitado por dos semirrectas perpendiculares.

La propiedad fundamental del pentágono aritmético coincide con la propiedad fundamental del cuadrado aritmético: cada número del primero es igual a la suma de dos: del que se halla encima de éste y del que está a su izquierda. La diferencia entre el pentágono y el cuadrado aritméticos consiste en que la diagonal del pentágono, que se halla q líneas por encima de la diagonal principal, está formada por ceros (este pentágono se asemeja al triángulo aritmético considerado en la pág. 79).

Tomemos ahora un tablero delimitado por dos semirrectas perpendiculares y tracemos en él no una, sino dos líneas, paralelas a la diagonal principal: q líneas por encima de ella y s líneas por debajo. Consideraremos que ambas líneas están «prohibidas» para la torre, y escribamos en cada casilla del tablero el número de formas de las cuales la torre puede llegar hasta dicha casilla. La tabla obtenida lleva el nombre de *hexágono aritmético*. En la fig. 26 se representa dicha tabla para el caso $q = 4$, $s = 3$.

El hexágono aritmético puede ser interpretado también como sigue. Tomemos un tablero de ajedrez delimitado por un segmento de $s+q$ casillas de longitud y por dos semirrectas perpendiculares a éste, y ubiquemos una ficha en la casilla que se halla a s casillas de distancia de una esquina y a q de la otra. Escribamos en cada casilla el número de formas de las cuales puede ser alcanzada ésta por nuestra ficha. Girando esta tabla en 45°, obtenemos el hexágono aritmético.

METODO GEOMETRICO DE DEMOSTRACION DE LAS PROPIEDADES DE LAS COMBINACIONES

En el capítulo II fueron demostradas algunas propiedades de las combinaciones. Mostremos cómo se deducen estas propiedades en forma más gráfica, utilizando razonamientos geométricos.

Mostremos primeramente cómo se deduce la relación

$$C_0^n + C_1^n + C_2^n + \ldots + C_n^n = 2^n. \qquad (9)$$

Para esto, consideremos todos los caminos que conducen desde el punto $A(0, 0)$ hasta los puntos del tipo $B_k(k, n-k)$, $0 \leqslant k \leqslant n$ (fig. 27).

Estos caminos se dividen en clases, según en qué punto B_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, éstos culminan. Al punto B_k conducen $P(k, n-k) = C_k^n$ caminos. Nos queda por calcular el número total de caminos considerados. Cada uno de éstos tiene longitud n. Se lo puede cifrar mediante una n-sucesión de ceros y unidades, poniendo en correspondencia ceros a los segmentos horizontales y unidades a los verticales. Pero el número de todas las n-sucesiones es igual a 2^n. Con esto queda demostrada la relación (9).

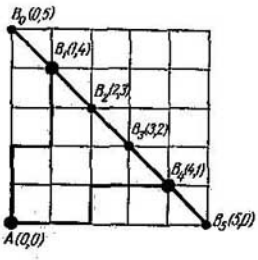


Fig. 27.

En la pág. 77 ya hemos demostrado geométricamente las relaciones

$$C_k^n = C_k^{n-1} + C_{k-1}^{n-1} \quad \text{y} \quad C_k^n = C_{n-k}^n.$$

De esta manera se pueden demostrar también igualdades más complejas. Tracemos una recta vertical de abscisa m, $0 \leqslant m \leqslant k$ (fig. 28). Cada camino que conduce desde el punto $A(0, 0)$ hasta el $B(k, n)$ corta a esta recta y pasa además, posiblemente, parcialmente por esta recta. Dividamos el conjunto de todos los caminos desde A hasta B en clases, haciendo pertenecer a la s-ésima los caminos para los cuales el *último* punto común con la recta $x = m$ es el $D_s(m, s)$.

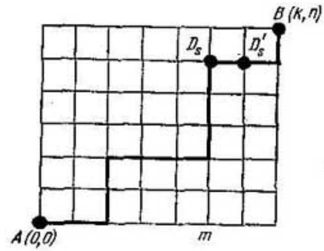


Fig. 28.

Calculemos ahora cuántos caminos que unen los puntos A y B pertenecen a la s-ésima clase. Cada uno de éstos está formado por el camino que va desde A hasta D_s, por el segmento desde $D_s(m, s)$ hasta $D_s'(m+1, s)$ (ya que D_s es el último punto de la recta $x = m$ en este camino) y por el camino desde $D_s'(m+1, s)$ hasta el punto $B(k, n)$. Según la fórmula (1), desde el punto $A(0, 0)$ hasta el $D_s(m, s)$ conducen $P(m, s)$ caminos. Desde el punto $D_s'(m+1, s)$ hasta el $B(k, n)$ conducen $P(k-m-1, n-s)$ caminos (para llegar desde D_s' hasta B hay que pasar $k-m-1$ segmentos unitarios hacia la derecha y $n-s$ hacia arriba). En virtud de la regla del producto, el número total de caminos de la clase s-ésima es igual a

$$P(m, s)\, P(k-m-1, n-s).$$

El número de todos los caminos desde A hasta B es igual a $P(k, n)$. Por esto, en virtud de la regla de la suma, se obtiene que

$$P(k, n)=P(m, 0)\,P(k-m-1, n)+$$
$$+P(m, 1)\,P(k-m-1, n-1)+\ldots$$
$$\ldots+P(m, n)\,P(k-m-1, 0).$$

Esta igualdad se puede escribir como sigue:

$$C_h^{n+h}=C_m^m C_{k-m-1}^{n+k-m-1}+C_m^{m+1}C_{k-m-1}^{n+k-m-2}+\ldots$$
$$\ldots+C_m^{m+n}C_{k-m-1}^{k-m-1} \qquad (10)$$

(véase la fórmula (24) de la pág. 38).

En particular, para $m=k-1$ se obtiene la relación

$$C_h^{n+h}=C_{k-1}^{k-1}+C_{k-1}^{k}+\ldots+C_{k-1}^{k+s-1}+\ldots$$
$$\ldots+C_{k-1}^{k+n-1}. \qquad (11)$$

Obsérvese que las relaciones (10) y (11) pueden ser deducidas aplicando reiteradas veces la relación $C_k^n=C_k^{n-1}+C_{k-1}^{n-1}$.

Proponemos que el lector demuestre por su cuenta, geométricamente, la fórmula (23) de la pág. 38:

$$C_n^{n+h}=C_n^{n+k-s}C_0^s+C_{n-1}^{n+k-s}C_1^s+\ldots$$
$$\ldots+C_{n-m}^{n+k-s}C_m^s+\ldots+C_{n-s}^{n+k-s}C_s^s, \qquad (12)$$

donde $0 \leqslant s \leqslant k$, $0 \leqslant s \leqslant n$.

Con este fin, es necesario trazar una recta que pase por los puntos $D\,(k-s, n)$ y $E\,(k, n-s)$ y dividir el conjunto de todos los caminos desde $A\,(0, 0)$ hasta $B\,(k, n)$ en clases, según por qué punto de dicha recta pasen éstos. La fórmula (12) se diferencia solamente en las notaciones de la (23) de la pág. 38.

Por este método geométrico se puede demostrar además toda una serie de relaciones para los números C_h^{n+k}, dividiendo de diferentes formas en clases los caminos que conducen desde $A\,(0, 0)$ hasta $B\,(k, n)$.

Para demostrar análogamente las relaciones entre los números $P\,(n_1, \ldots, n_k)$ (véanse las fórmulas (27), (28) de la pág. 39), habría que aplicar la geometría multidimensional. No nos dedicaremos a efectuarlo.

Obsérvese que también las relaciones entre los números C_k^n, deducidas en las págs. 55—57, también admiten una interpretación geométrica. Para esto, hay que tomar un tablero con una línea paralela a la diagonal principal trazada en éste y considerar solamente los caminos que no cortan a esta línea (pero que pueden tener con ésta puntos comunes). Dividiendo el conjunto de estos caminos en clases de diferentes maneras, se obtienen las fórmulas establecidas en el capítulo III.

La propia resolución del problema sobre la cola de la caja puede ser interpretada geométricamente de un modo muy sencillo. El proceso del paso de la cola puede ser representado geométricamente, poniendo en correspondencia a cada moneda de 50 kopeks un segmento horizontal, y a cada rublo, uno vertical. De la hipótesis del problema queda claro que esta gráfica no debe intersecar la diagonal principal. Las transformaciones efectuadas en la resolución (la adición de una persona con una moneda de 50 kopeks a la cola y la sustitución de estas monedas por rublos, y viceversa) adquieren un significado geométrico sencillo: éstas se reducen a un rebatimiento de la gráfica del paso de la cola con respecto a la recta paralela a la diagonal principal y que se halla a una unidad de longitud de distancia a ésta. Dejamos que el lector traduzca al «lenguaje geométrico» los razonamientos que fueron utilizados en la resolución de este problema.

MOVIMIENTOS ALEATORIOS

Los problemas analizados más arriba sobre el movimiento de las figuras del ajedrez están estrechamente ligados a los problemas de los movimientos aleatorios, de gran importancia en la física. Consideremos el siguiente problema, propuesto en 1945 en la VIII olimpíada matemática de Moscú.

Se tiene una red de caminos (fig. 29). *Desde el punto A salen 2^N personas. La mitad de ellas va* *en la dirección l, y la otra mitad, en la dirección m. Al llegar al primer cruce, cada grupo se divide: la mitad va en la dirección l, y la otra, en la m. Igual división tiene lugar en cada cruce. ¿Dónde estarán estas personas después de pasar N segmentos y cuántas personas habrá después de esto en cada cruce?*

Como el número total de segmentos que pasa cada persona es igual a N, es evidente que todos ellos quedarán en los puntos B_k con coordenadas del tipo $(k, N-k)$, donde k adquiere los valores $0, 1, \ldots, N$. Todos estos puntos están situados en la recta que pasa por los puntos $B_0(0, N)$ y $B_N(N, 0)$ (véase la fig. 29).

Ahora debemos averiguar cuántas personas llegarán al punto $B_k(k, N-k)$. Para esto, cifremos todos los caminos que conducen desde $A(0, 0)$ hasta los puntos $B_k(k, N-k)$, $k = 0, 1, \ldots, N$, mediante ceros y unidades. Obtendremos todas las N-sucesiones posibles, formadas por ceros y unidades. Y, como sabemos, hay 2^N sucesiones de este tipo, es decir, tantas como personas salieron desde el punto A. De aquí se deduce fácilmente que cada camino lo pasará exactamente una persona. Por esto, a cada punto $B_k(k, N-k)$ llegarán exactamente tantas personas como caminos más cortos conduzcan hasta ésto desde el punto A. Pero la cantidad de estos caminos más cortos ya la hemos calculado. Esta es igual a

$$P(k, N-k) = C_k^N = \frac{N!}{k!\,(N-k)!}.$$

Así, pues, al punto $B_k(k, N-k)$ llegarán $\frac{N!}{k!\,(N-k)!}$ personas. Esta cantidad es igual al k-ésimo número de la N-ésima fila del triángulo aritmético.

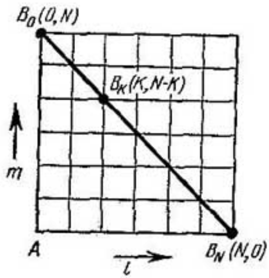


Fig. 29.

MOVIMIENTO BROWNIANO

Al problema que acabamos de resolver se le puede dar la siguiente forma, en esencia equivalente:

Desde el punto O de la recta Ox parten 2^N personas. La mitad de éstas va hacia la derecha, y la otra mitad, hacia la izquierda. Al cabo de 1 hora cada grupo se divide nuevamente en dos mitades, partiendo la primera hacia la derecha y la segunda hacia la izquierda. Tal división tiene lugar cada hora. ¿Cuántas personas llegarán a cada punto al cabo de N horas de la partida?

Consideraremos que durante una hora éstas recorren la mitad de la unidad de trayectoria. Razonando en forma exactamente igual a como lo hicimos en la resolución del problema precedente, obenemos el siguiente resultado: al cabo de N horas los participantes del paseo se hallarán en los puntos $B_k\left(k - \frac{N}{2}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, N$ (el punto O es el origen de coordenadas). Además, al punto B_k llegarán $C_k^N = \frac{N!}{k!\,(N-k)!}$ personas.

Es poco probable que las personas caminen de la forma descrita más arriba (a propósito, en una variedad folklórica de este problema en el punto O se halla un despacho de bebidas...). Sin embargo, en algunos problemas de la física tales paseos surgen de una manera natural.

Precisamente, cada paseo es el modelo elemental del llamado movimiento browniano, efectuado por las partículas debido a los choques de las moléculas.

Consideremos partículas que se pueden desplazar solamente en una línea recta. Como los choques de las moléculas tienen un carácter aleatorio, en una primera aproximación se puede considerar que durante una unidad de tiempo la mitad de las partículas se desplazará en 1/2 de la unidad de longitud hacia la derecha, y la otra mitad, en 1/2 de esta unidad hacia la izquierda (en realidad el proceso es mucho más complejo y son posibles movimientos en segmentos diferentes). Por esto, si se toman 2^N partículas, que se hallen al principio en el punto O, éstas se desplazarán aproximadamente como fue descrito en nuestro problema. Este desplazamiento de las partículas se denomina en la física *difusión*. El problema que hemos resuelto sobre el movimiento aleatorio de una muchedumbre nos permite hallar cómo se distribuyen las partículas que se difunden al cabo de cierto tiempo del comienzo de dicho proceso. Precisamente, al cabo de N unidades de tiempo las partículas se distribuirán según la siguiente ley: en el punto $B_k\left(k-\frac{N}{2}\right)$ habrá $C_k^N=\frac{N!}{k!\,(N-k)!}$ partículas.

Como ya hemos destacado, los números C_k^N son los elementos de la N-ésima fila del triángulo aritmético. En una difusión de otro carácter, se obtendrán los números de la N-ésima fila del m-triángulo aritmético. Precisamente, supongamos que al principio en el punto O había m^N partículas. Estas fueron divididas en m partes iguales y situadas en m puntos de la recta Ox, siendo la distancia entre los puntos vecinos igual a 1 y estos puntos simétricos con respecto al punto O. Después, cada parte se divide de la misma manera (se sobreentiende que si se divide una parte que se halla en algún punto B, las partículas son situadas en m puntos simétricos con respecto al B). Después de N pasos las partículas se encontrarán en los puntos B_k de coordenadas $k-\frac{m-1}{2}N$, donde $k=0,\ 1,\ \ldots,\ (m-1)\,N$. En este caso, en el punto B_k habrá $C_m(N,\,k)$ partículas.

Para grandes valores de N el cálculo del número de partículas en cada punto se vuelve demasiado complejo. Pero, como sucede con frecuencia en las matemáticas, al crecer la complejidad la ley de distribución comienza a aproximarse a una ley límite sencilla, y dicha ley describe la distribución de partículas con tanta mayor exactitud cuanto mayor sea el número de éstas y cuanto más compleja sea la ley exacta.

En la teoría de probabilidades se demuestra que para grandes valores de N en el segmento $\left[x-\frac{a}{2},\,x+\frac{a}{2}\right]$, donde a es pequeño con respecto a N, habrá aproximadamente

$$\frac{12am^N}{\sqrt{2\pi}\,N\,(m^2-1)}\exp\left[-\frac{72x^2}{N^2\,(m^2-1)^2}\right]^1$$

partículas. Esta afirmación se puede interpretar como sigue. Tracemos una línea escalonada, cuya altura en el punto $B_k\left(k-\frac{m-1}{2}N\right)$ sea igual a $C_m(N,\,k)$. Disminuyamos todas las abscisas de la línea obtenida en $\frac{N\,(m^2-1)}{12}$ veces, y todas las ordenadas en $\frac{12am^N}{N\,(m^2-1)}$ veces. Entonces, si N es grande, se obtendrá una línea escalonada que se diferencie muy poco de la gráfica de la función

$$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Esta función fue introducida en la teoría de probabilidades por el gran matemático alemán K. Gauss. Por esto, se denomina *función de Gauss*. Esta juega un papel muy importante no sólo en los problemas de la difusión de los gases, sino también en la teoría de la conducción del calor, en la teoría de los errores, etc.

[1] Mediante exp x hemos designado e^x.

EN EL REINO DE LA ZARINA DE SHEMAJAN

Volvamos a las deambulaciones de una muchedumbre sobre el eje Ox. Sólo que ahora supondremos que a la izquierda del punto O, desde el cual ésta partió, se extienden... las posesiones de la emperatriz de Shemaján, que jugó un papel tan triste en el destino del infortunado zar Dodón y de sus hijos[1]. Como el lector, probablemente, recordará, los que entraban en las tierras de ella ya no regresaban. Nosotros también consideraremos que los que caen en la mitad izquierda del eje quedan allí. Se pide hallar cuántas personas quedarán en el reino de la zarina de Shemaján y dónde quedarán las restantes al cabo de N horas de la partida desde el punto O.

Resulta ser que este problema se reduce al que estudiáramos más arriba, sobre la cola de la caja del cine. En efecto, analicemos los desplazamientos de cierta persona que haya partido del punto O. Estos desplazamientos pueden fijarse mediante una sucesión de números 1 y -1: a cada movimiento hacia la derecha le corresponde el número 1, y a cada uno hacia la izquierda, el -1. Si en esta sucesión hay k unidades, la persona se desplazará k veces hacia la derecha y $N-k$ hacia la izquierda. Como resultado, ésta debería quedar en el punto $B_k\left(k-\frac{N}{2}\right)$[2]. Sin embargo, esto tendrá lugar sólo en el caso en que nuestro caminante no caiga por el camino en el reino de Shemaján. Pero llegará a este reino si en algún instante el número de desplazamientos hacia la izquierda resulta ser mayor que hacia la derecha.

Si en lugar de desplazamientos hacia la derecha y hacia la izquierda se consideran personas que tengan monedas de 50 kopeks y rublos, se puede decir que la llegada al reino de la zarina de Shemaján corresponde a una detención en la cola de la caja. Esto significa que el número de personas que llegan al punto $B_k\left(k-\frac{N}{2}\right)$ es igual al número de casos en que la cola, en la que hay k poseedores de monedas de 50 kopeks y $N-k$ poseedores de rublos, pasa sin tropiezos. Y nosotros sabemos que este número es diferente de cero sólo si $k \geqslant N-k$. En dicho caso éste es igual a (véase la pág. 53)

$$A(N-k,\ k)=C_{N-k}^{N}-C_{N-k-1}^{N}=\frac{N!\,(2k-N+1)}{(N-k)!\,(k+1)!}.$$

De esta forma, al cabo de N horas después de la partida de 2^N personas desde el punto O, al $B_k\left(k-\frac{N}{2}\right)$, donde $2k \geqslant N$, llegarán $C_{N-k}^{N}-C_{N-k-1}^{N}$ personas. Ahora ya no es difícil calcular cuántas personas quedarán en el reino de Shemaján. Para esto, sumemos primeramente los números $C_{N-k}^{N}-C_{N-k-1}^{N}$ desde $k=E\left(\frac{N}{2}\right)+1$[1] hasta N. Obtenemos así que $C_{N-E\left(\frac{N}{2}\right)-1}^{N}$ no llegaron al reino de Shemaján. Y como en total salieron 2^N personas del punto O, en las posesiones de la zarina de Shemaján habrá quedado $2^N-C_{N-E\left(\frac{N}{2}\right)-1}^{N}$ personas.

Si el reino de Shemaján comenzase no a la izquierda del punto O, sino a la izquierda del O_1 $\left(\text{de abscisa } -\frac{q}{2}\right)$, el resultado sería un tanto diferente. Precisamente, resultaría que en los puntos $B_k\left(k-\frac{N}{2}\right)$, $k \geqslant \frac{N-q}{2}$, se hallan $C_{N-k}^{N}-C_{N-k-q-1}^{N}$ personas; los restantes se hallan en las posesiones de la zarina de Shemaján. Esto se desprende directamente de los resultados del problema de la pág. 54.

[1] Alusión al cuento en verso de A. Pushkin «Cuento sobre el gallo dorado» (N. de la Ed.).
[2] Recuérdese que cada vez esta persona se desplaza en 1/2 de la unidad de longitud.

[1] Véase la nota al pie de la pag. 57.

LA PARED ABSORBENTE

Ya hemos expresado que los problemas sobre los movimientos aleatorios son de gran importancia para la física: son modelos elementales de la difusión de partículas. El problema sobre la zarina de Shemaján también tiene una interpretación física sencilla: simplemente a la izquierda del punto O se halla una pared de un material que absorbe las partículas. Si la pared pasa por el punto O, surge el caso considerado al principio. Si, en cambio, ésta se halla a una distancia de $q/2$ unidades de longitud del punto O, se obtiene el problema examinado al final del apartado anterior.

En los tiempos en que la aplicación práctica fundamental del análisis combinatorio y del cálculo de probabilidades era la teoría de los juegos de azar, el problema sobre los movimientos aleatorios con absorción se enunciaba de otro modo. Se trataba de «juegos hasta la ruina». Supongamos que dos personas juegan, por ejemplo, a cara o cruz. Después de cada partida, el que pierde le paga un rublo al ganador. El participante que pierde todo el dinero cesa de jugar. Había que aclarar la probabilidad de distintos desenlaces del juego, si al principio un jugador tenía p rublos y el otro, q rublos. Es evidente la relación que existe entre este problema y el de la difusión de partículas en una región delimitada por dos lados por paredes absorbentes.

PASEOS EN EL PLANO INFINITO

Hasta ahora hemos estudiado o bien deambulaciones de una torre de ajedrez, que tenía derecho a desplazarse solamente hacia arriba o hacia la derecha, o bien, lo que es en esencia lo mismo, deambulaciones sobre la recta infinita. Estudiemos ahora el caso en que la torre se desplaza en cualquier dirección sobre un tablero infinito. En otras palabras, resolvamos el siguiente problema:

Una torre de ajedrez se halla al principio en la casilla O (0, 0) de un tablero de ajedrez infinito en todas direcciones. ¿De cuántas maneras ésta puede llegar hasta la casilla A (p, q) haciendo N movimientos (suponemos que en un movimiento la torre se desplaza a una casilla vecina)?

En virtud de consideraciones de simetría, es suficiente estudiar el caso en que $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$. Si la torre se moviese por el camino más corto, ésta alcanzaría las casillas A (p, q) al cabo de $p+q$ movimientos. Por esto, debe cumplirse la desigualdad $N \geqslant p+q$. La diferencia entre el camino de N movimientos y el más corto consiste en que la torre efectúa algunos movimientos que se excluyen el uno al otro; es evidente que el número de estos movimientos es par. Por esto, $N-p-q$ es un número par. Hagamos $N-p-q=2k$.

Supongamos que fueron efectuados s movimientos hacia la izquierda. Entonces el número de movimientos hacia la derecha es igual a $p+s$ y para los desplazamientos por líneas verticales quedan $N-p-2s=q+2(k-s)$ movimientos. De éstos hay que efectuar $k-s$ movimientos hacia abajo y $q+k-s$ hacia arriba. Por esto, s debe satisfacer a la desigualdad $0 \leqslant s \leqslant k$.

Para cada valor de s que satisfaga a esta desigualdad obtenemos varios caminos, formados por s movimientos hacia la izquierda, $p+s$ hacia la derecha, $k-s$ hacia abajo y $q+k-s$ hacia arriba. Estos movimientos pueden efectuarse en cualquier orden, por lo cual el número de disposiciones es igual a $P(s, p+s, k-s, q+k-s)$. De aquí se deduce que el número total T de caminos que conducen hasta la casilla A (p, q) al cabo de N movimientos es igual a

$$T=\sum_{s=0}^{k} P(s,\ p+s,\ k-s,\ q+k-s)=$$

$$=\sum_{s=0}^{k} \frac{(p+q+2k)!}{s!\,(p+s)!\,(k-s)!\,(q+k-s)!}.$$

Transformemos la expresión obtenida. Para esto, obsérvese que

$$C_{p+k}^{p+q+2k}=\frac{(p+q+2k)!}{(p+k)!\,(q+k)!},$$

$$C_{k-s}^{p+k}=\frac{(p+k)!}{(k-s)!\,(p+s)!},$$

$$C_{s}^{q+k}=\frac{(q+k)!}{s!\,(q+k-s)!},$$

por lo cual

$$T=C_{p+k}^{p+q+2k}\sum_{s=0}^{k}C_{k-s}^{p+k}C_{s}^{q+k}.$$

Pero en el segundo miembro de esta igualdad se halla la suma de los productos de pares $C_l^r C_m^n$, cuyos índices superiores son constantes, siendo la suma de los inferiores igual a k. Aplicando la fórmula (23) de la pág. 38, se obtiene que

$$T=C_{p+k}^{p+q+2k}C_{k}^{p+q+2k},$$

o bien, ya que $p+q+2k=N$,

$$T=C_{p+k}^{N}C_{k}^{N}.$$

PROBLEMA GENERAL DE LAS TORRES

Pasemos a un nuevo ciclo de problemas combinatorios en el tablero de ajedrez. Estos problemas están relacionados con el cálculo del número de distribuciones de dos figuras del ajedrez (reyes, reinas, etc.), en las cuales una puede comer a la otra. Está claro que con esto se calcula también el número de disposiciones en las cuales estas figuras no se pueden comer una a la otra: es que el número total de disposiciones de dos figuras se calcula directamente según la fórmula de los arreglos.

Algunos problemas de este tipo ya han sido resueltos: en la pág. 25 fue analizado el problema sobre 8 torres en un tablero común de ajedrez. Generalicemos este problema y tomemos un tablero de $m \times n$, es decir, un tablero formado por m líneas horizontales y n verticales. Queremos saber de cuántas maneras se pueden colocar en este tablero k torres de forma que éstas no puedan comer una a la otra.

Está claro que para que el problema tenga solución es necesario que se cumplan las condiciones $k \leqslant m$ y $k \leqslant n$, pues de otro modo algunas dos torres quedarán en la misma horizontal o vertical. Supongamos que estas condiciones se cumplen. Entonces la distribución de las torres puede efectuarse en dos etapas. Primeramente es escogen las horizontales, sobre las cuales se hallarán las torres. Como el número total de horizontales es igual a m y hay que escoger k de ellas, la elección puede efectuarse de C_k^m maneras. Análogamente las verticales sobre las que estarán las torres se pueden escoger de C_k^n formas. Como la elección de las verticales no depende de la de las horizontales, se obtienen, en virtud de la regla del producto, $C_k^m C_k^n$ modos de elección de las líneas en que se hallarán las torres.

Sin embargo, aquí no termina aún el problema. Es que k horizontales y k verticales se intersecan en k^2 casillas. Desplazando, de ser necesario, estas casillas, obtenemos un nuevo tablero de k horizontales y k verticales. Y ya sabemos que en tal tablero k torres se pueden disponer de $k!$ formas (de modo que no puedan comer una a la otra). Por esto, el número total de disposiciones requeridas es igual a

$$C_k^m C_k^n k! = \frac{n!\,m!}{k!\,(n-k)!\,(m-k)!}. \tag{13}$$

Por ejemplo, 3 torres, en un tablero común de ajedrez, se pueden disponer de

$$\frac{8!\,8!}{3!\,5!\,5!}=17\,696$$

maneras.

Para $k=m=n$, la fórmula (13) nos da la respuesta $n!$, en concordancia con lo expuesto en la pág. 25.

Si se quitase la limitación de que las torres no puedan comer una a la otra, se obtendría otra respuesta. Precisamente, habría que escoger k

casillas cualesquiera de entre $m \times n$. Y esto puede efectuarse de

$$C_k^{mn} = \frac{(mn)!}{k!\,(mn-k)!}$$

formas. Si, además, las k torres se diferenciasen entre sí, habría que multiplicar las respuestas obtenidas por $k!$.

DISTRIBUCIONES SIMETRICAS

Compliquemos ahora el problema sobre las torres, exigiendo no solamente que éstas no se pueden comer una a la otra, sino que también se dispongan en forma simétrica sobre el tablero. Aquí se obtienen muchos problemas según qué condición de simetría se imponga.

El caso mas sencillo es aquel en que las torres se disponen simétricamente con respecto al centro del tablero. Designemos mediante G_n el número de soluciones del problema en el caso en que n torres se hallan en un tablero formado por n horizontales y n verticales. Ahora demostraremos que

$$G_{2n} = 2nG_{2n-n}. \qquad (14)$$

Supongamos que el tablero está formado por $2n$ horizontales y $2n$ verticales. La torre que se halla en la primera vertical puede ocupar cualquiera de las $2n$ casillas de ésta. Por hipótesis, esto determina la posición de la torre que se halla en la última vertical: ésta debe estar dispuesta simétricamente con la primera con respecto al centro del tablero. Tachemos la primera y la última verticales y las horizontales que ocupan estas torres (como el número de horizontales es par, las torres eliminadas no pueden estar en una misma horizontal). Obtenemos así un tablero formado por $2n-2$ verticales y $2n-2$ horizontales. Está claro que a cada disposición simétrica de las torres en el nuevo tablero le corresponde una disposición simétrica de éstas en el tablero original. De aquí se deduce, precisamente, que $G_{2n} = 2nG_{2n-2}$ (recordemos nuevamente que la primera torre podía ocupar cualquiera de las $2n$ casillas de la primera vertical).

Aplicando la fórmula (14), se halla que $G_{2n} = 2^n n!$

Consideremos ahora un tablero formado por $2n+1$ verticales y $2n+1$ horizontales. En este caso hay una casilla que no posee simétricas: la casilla central del tablero. En ésta debe hallarse forzosamente una torre. Tachando la vertical y la horizontal centrales, obtenemos una disposición simétrica de $2n$ torres en un tablero de $2n \times 2n$. Esto significa que tiene lugar la igualdad

$$G_{2n+1} = G_{2n} = 2^n n!. \qquad (15)$$

Analicemos ahora un problema un tanto más complejo: el de las disposiciones que no varían en un giro del tablero en 90° (en la fig. 30 se representa una de estas disposiciones en un tablero de 8×8). Supongamos que el tablero tiene $4n$

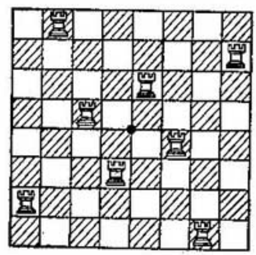


Fig. 30.

verticales y $4n$ horizontales, siendo el número de torres también $4n$. En este caso, la torre que se halla en la primera vertical puede ocupar cualquier casilla, a excepción de las que ocupan las esquinas, es decir, cualquiera de las $4n-2$ casillas (en una esquina no se puede colocar una torre, puesto que después del giro de 90° se obtendrían dos torres que pueden comer una a la otra).

A esta torre le corresponden otras tres, que se hallan respectivamente en la última horizontal, en la última vertical y en la primera horizontal (éstas se obtienen a partir de la escogida mediante giros de 90°, 180° y 270°). Tachando las horizontales y las verticales en las que se hallan estas torres, obtenemos una distribución de torres en un tablero de $(4n-4) \times (4n-4)$, que tiene la misma simetría. Por esto, tiene lugar la igualdad

$$R_{4n} = (4n-2)\, R_{4n-4},$$

siendo R_n el número de soluciones del problema para el tablero de $n \times n$. De aquí queda claro que

$$R_{4n} = 2^n (2n-1)(2n-3) \ldots 1. \tag{16}$$

El número de soluciones del problema para un tablero de $(4n+1) \times (4n+1)$ es el mismo que para uno de $4n \times 4n$, ya que en el primero una torre debe hallarse forzosamente en el centro y podemos tachar la horizontal y la vertical centrales. Por esto,

$$R_{4n+1} = R_{4n}. \tag{17}$$

Y para los tableros de $(4n+2) \times (4n+2)$ y $(4n+3) \times (4n+3)$ el número de soluciones es igual a cero. En efecto, para cada torre son posibles dos casos: o bien ésta se halla en el centro del tablero, o bien no se halla en el centro. En el segundo caso, ésta pertenece a una cuaterna de torres que se transforman una en la otra en los giros del tablero en 90°. Por esto, el número total de torres debe tener la forma $4n$ (cuando no hay casilla central en el tablero), o bien $4n+1$. Con esto hemos demostrado que $R_{4n+2} = R_{4n+3} = 0$.

Hallemos, por último, el número de disposiciones de n torres simétricas con respecto a la diagonal[1]. Designemos el número de soluciones del problema sobre un tablero de $n \times n$ mediante Q_n. Entonces tiene lugar la relación

$$Q_n = Q_{n-1} + (n-1)\, Q_{n-2}. \tag{18}$$

[1] Tomamos la diagonal que pasa por la casilla angular inferior izquierda.

En efecto, la torre de la primera vertical o bien se halla en el ángulo izquierdo inferior, o bien no se halla. En el primer caso se tachan la primera vertical y la primera horizontal y se obtiene una disposición simétrica de $n-1$ torres sobre un tablero de $(n-1) \times (n-1)$. El número de dichas disposiciones es igual a Q_{n-1}. En el segundo caso, para esta torre existirá otra, simétrica a ella con respecto a la diagonal escogida. Tachemos las verticales y las horizontales sobre las que se hallan estas torres. Obtenemos entonces una disposición simétrica de $n-2$ torres en un tablero de $(n-2) \times (n-2)$. Como el número de estas disposiciones es igual a Q_{n-2} y la torre se puede colocar en $n-1$ casillas de la primera vertical, obtenemos $(n-1)\, Q_{n-2}$ maneras. De aquí se obtiene, precisamente, la relación (18).

Tiene lugar la igualdad

$$Q_n = 1 + C_2^n + \frac{1}{1 \cdot 2} C_2^n C_2^{n-2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} C_2^n C_2^{n-2} C_2^{n-4} + \ldots \tag{19}$$

Esta se deduce dividiendo todas las disposiciones de torres en clases: a la s-ésima clase referimos las disposiciones en las que s pares de torres no se encuentran en la diagonal.

En forma totalmente análoga se demuestra que el número B_n de disposiciones de n torres en un tablero de $n \times n$, distribuidas de forma que no se puedan comer una a la otra y se hallen simétricamente con respecto a ambas diagonales, satisface las relaciones

$$B_{2n} = 2B_{2n-2} + (2n-2)\, B_{2n-4}, \quad B_{2n+1} = B_{2n}.$$

DOS CABALLOS

¿De cuántas maneras se pueden disponer en un tablero de $m \times n$ un caballo negro y uno blanco de forma que no puedan comer uno al otro?

La resolución de este problema se complica por el hecho de que en distintas casillas el caballo posee distinto número de jugadas: si es $m \geqslant 5$ y $n \geqslant 5$, en la esquina del tablero hay sólo dos movimientos, en unas casillas del borde, tres, en otras, cuatro, y en el centro, ocho. Esto está relacionado con que el caballo tiene movimientos de distintos tipos: éste puede desplazarse una casilla hacia adelante y dos hacia arriba, o dos hacia atrás y una hacia abajo, etc. En total el caballo tiene 8 tipos de movimiento, los que se pueden fijar indicando cuántas casillas pasa éste en dirección horizontal y cuántas en dirección vertical. Estos movimientos tienen, de este modo, la siguiente forma: $(2, 1)$, $(1, 2)$, $(-1, 2)$, $(-2, 1)$, $(-2, -1)$ $(-1, -2)$, $(1, -2)$, $(2, -1)$.

Para superar la complicación que surgió, supongamos que el caballo es la unión de 8 figuras, cada una de las cuales tiene movimientos de un solo tipo. Veamos de cuántas maneras se pueden colocar en el tablero un caballo $(2, 1)$ de modo que esté atacando alguna casilla de éste. Está claro que se puede hallar en cualquier vertical, a excepción de las últimas dos, y en cualquier horizontal, excepto la última. Por lo tanto, la vertical se puede escoger de $n - 2$ maneras, y la horizontal, de $m - 1$, obteniéndose en total $(m - 1)(n - 2)$ formas de colocar el caballo blanco $(2, 1)$. En virtud de la simetría está claro que existen otras tantas formas de colocar cualquiera de los caballos blancos $(\pm 2, \pm 1)$ de modo que pueda comer al negro.

Para los caballos blancos $(\pm 1, \pm 2)$, el número de maneras es igual a $(m - 2)$ $(n - 1)$. De aquí se deduce que el número total de formas de distribución de dos caballos en las que se pueden comer el uno al otro, se expresa mediante la fórmula

$$4[(m-1(n-2)+(m-2)(n-1)] =$$
$$= 2[(2m-3)(2n-3)-1].$$

Si pusiésemos los caballos de un mismo color de forma que se puedan defender uno al otro, habríamos obtenido dos veces menos maneras (a causa de la posibilidad de intercambiar los caballos).

Y el número de modos de disponer dos caballos de distinto color de forma que no puedan comer uno al otro, es igual a

$$m^2n^2 - 9mn + 12m + 12n - 16.$$

(Dos caballos pueden colocarse en un tablero de $m \times n$ de $mn\,(mn - 1)$ maneras.)

Los autores de problemas del ajedrez introducen a veces figuras imaginarias, que no se mueven como las comunes. Introduzcamos nosotros también una nueva figura, que llamaremos caballo (p, q), $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$. El movimiento de esta figura consiste en el desplazamiento en p casillas en dirección horizontal y q en dirección vertical. Por ejemplo, el caballo común es la unión de los caballos $(1, 2)$ y $(2, 1)$. Razonando en forma totalmente análoga a como lo hicimos antes, deducimos que si $0 < p \leqslant n$, $0 < q \leqslant m$, en un tablero de $m \times n$ se pueden colocar de $4\,(n - p)(m - q)$ maneras dos caballos (p, q) de distinto color, de modo que no puedan comer el uno al otro. Si p ó q son iguales a cero, se obtiene una cantidad dos veces menor de maneras. El número de formas se reduce al doble también en el caso en que ambos caballos son de igual color.

Cualquier figura del ajedrez se puede considerar la unión de varios caballos (p, q) para distintos valores de p y q. Por ejemplo, el rey es la unión de los caballos $(0, 1)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$. Por esto, dos reyes de distinto color se pueden disponer en un tablero de $m \times n$ de

$$2[n(m-1)+(n-1)m+2(n-1)(m-1)] =$$
$$= 8nm - 6m - 6n + 4$$

maneras, de forma que puedan comer uno al otro. En consecuencia, se pueden poner de $m^2n^2 - 9mn + 6m + 6n - 4$ modos, de forma que no puedan comer el uno al otro.

El alfil es la unión de caballos $(1, 1)$, $(2, 2)$, ..., (p, p), siendo p el menor de los números $m - 1$, $n - 1$. Supongamos, para fijar ideas, que es $m \leqslant n$. Entonces, $p = m - 1$, y dos alfiles de distinto color se pueden disponer de

$$4[(n-1)(m-1)+(n-2)(m-2)+\dots$$
$$\dots+(n-m+1)\cdot 1]$$

maneras, de forma que puedan comer uno al otro. Abriendo paréntesis y aplicando las fórmulas de la suma de los números naturales del 1 al $m-1$ y de la suma de los cuadrados de estos números, se obtiene que el número de modos se puede escribir así:

$$\frac{2m(m-1)(3n-m-1)}{3}.$$

Para $m \geqslant n$, hay que cambiar de lugar m y n. En particular, si $m=n$, se obtienen

$$\frac{2m(m-1)(2m-1)}{3}$$

maneras.

Para las torres es más fácil calcular el número de disposiciones de otro modo. La torre blanca se puede colocar en cualquiera de las mn casillas. Después, ella amenaza $m+n-2$ casillas, en cualquiera de las cuales se puede poner la torre negra. Por esto, obtenemos en total $mn(m+n-2)$ medios de disposición, en los cuales cada torre puede comer a la otra.

Como la reina se puede considerar la unión de un alfil y una torre, en un tablero de $m \times n$, para $m \leqslant n$, se pueden colocar dos reinas de

$$\frac{2}{3}m(m-1)(3n-m-1)+mn(m+n-2)$$

maneras, de forma que puedan comer una a la otra. Para $m=n$, esta expresión adquiere la forma $\frac{2}{3}m(m-1)(5m-1)$. Dejamos que el lector calcule de cuántas maneras se pueden disponer estas figuras, de forma que no tengan posibilidad de comerse una a la otra.

RELACIONES DE RECURRENCIA

En la resolución de muchos problemas combinatorios, ya hemos aplicado el método de reducción del problema dado a otro, con un número menor de objetos. Así fue deducida, por ejemplo, la fórmula que expresa el número de arreglos con repetición (pág. 10); por este método fueron resueltos casi todos los problemas sobre la partición, del capítulo IV. El método de reducción a un problema análogo para un número menor de objetos se denomina *método de las relaciones de recurrencia* (del latín recurrere-regresar). Utilizando las relaciones de recurrencia, se puede reducir el problema para n objetos al problema para $n-1$, después, para $n-2$, etc. Disminuyendo sucesivamente el número de objetos, llegamos a un problema que ya es de fácil resolución. En muchos casos se logra obtener una fórmula explícita para la solución del problema combinatorio, a partir de la relación de recurrencia.

Por ejemplo, en el capítulo II (véase la pág. 24) dedujimos la fórmula $P_n = n!$ del número de permutaciones de n elementos, mediante la fórmula que expresa el número de arreglos sin repetición. Pero la misma fórmula puede ser deducida de otro modo, hallando primeramente la relación de recurrencia a la que satisface P_n.

Supongamos que se tienen n objetos $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$. Cualquier permutación de éstos se puede obtener así: se toma alguna permutación de los objetos $a_1, \ldots, a_{n-1}$ y se le agrega el elemento a_n. Está claro que este elemento puede ocupar distintos lugares. Se puede colocar al principio, entre el primer elemento y el segundo de la permutación, entre el segundo y el tercero, y se puede colocar también al final. El número de distintos lugares que puede ocupar el elemento a_n es igual a n, por lo cual de cada permutación de los elementos $a_1, \ldots, a_{n-1}$ se obtienen n permutaciones de los elementos $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$. Pero esto significa que hay n veces más permutaciones de n elementos que de $n-1$ elementos. Con esto queda establecida la relación de recurrencia

$$P_n = nP_{n-1}.$$

Aplicando esta relación, se deduce sucesivamente que

$$P_n = nP_{n-1} = n(n-1)P_{n-2} = n(n-1)\ldots 2P_1.$$

Pero $P_1 = 1$, puesto que de un elemento se puede formar sólo una permutación. Por esto,

$$P_n = n(n-1)\ldots 2\cdot 1 = n!.$$

Hemos obtenido así nuevamente la fórmula $P_n = n!$

Hemos encontrado muchas relaciones de recurrencia en la resolución de problemas sobre la partición, sobre figuras en el tablero de ajedrez, etc. Ahora estudiaremos varios otros problemas más de este tipo, y al final del capítulo nos detendremos en la teoría general de las relaciones de recurrencia.

NUMEROS DE FIBONACCI

En el libro «Liber Abaci», que apareció en 1202, el matemático italiano Fibonacci, entre varios otros problemas, propuso el siguiente:

Un par de conejos da una vez por mes una cría de dos conejillos (un macho y una hembra); al cabo de dos meses del nacimiento los conejos recién nacidos ya dan cría. ¿Cuántos conejos habrá al cabo de un año, si al comienzo de éste había un par de conejos?

De la hipótesis del problema se deduce que al cabo de un mes habrá dos pares de conejos. Al cabo de dos meses, sólo el primer par dará cría, obteniéndose 3 pares. Después de un mes más, darán cría tanto el par inicial de conejos, como el que nació dos meses atrás. Por esto, habrá en total 5 pares de conejos.

Designemos mediante $F(n)$ el número de pares de conejos al cabo de n meses desde el comienzo del año. Podemos apreciar que al cabo de $n+1$ meses habrá estos $F(n)$ pares y aún tantos pares de conejos recién nacidos como había al final del mes $n-1$, es decir, $F(n-1)$ pares más de cone-

jos. En otras palabras, tiene lugar la relación de recurrencia

$$F(n+1)=F(n)+F(n-1). \qquad (1)$$

Como, por hipótesis, es $F(0)=1$ y $F(1)=2$, hallamos sucesivamente que

$F(2)=3$, $F(3)=5$, $F(4)=8$, etc.

En particular, será $F(12) = 377$.

Los números $F(n)$ se llaman *números de Fibonacci*. Éstos poseen toda una serie de propiedades notables. Ahora deduciremos la expresión de estos números mediante C_k^m. Para esto, establezcamos una relación entre los números de Fibonacci y el siguiente problema combinatorio.

Hallar el número de n-sucesiones, formadas por ceros y unidades, en las cuales no hay dos unidades seguidas.

Para establecer esta relación, tomemos cualquier sucesión de este tipo y pongámosle en correspondencia un par de conejos según la regla siguiente: a las unidades les corresponden los meses en que llega al mundo uno de los pares de «antecesores» del par dado (incluyendo el inicial), y a los ceros, todos los meses restantes. Por ejemplo, la sucesión 010010100010 establece la siguiente «genealogía»: el propio par surgió al final del undécimo mes, sus padres, a fines del 7-mo, sus «abuelos» al fin del 5-to y sus «bisabuelos» al final del segundo mes. El par inicial de conejos se cifra entonces mediante la sucesión 000000000000.

Está claro que entonces no pueden haber dos unidades seguidas, ya que un par que acaba de ver la luz no puede, por hipótesis, dar cría al cabo de un mes. Además, en la regla indicada, a distintas sucesiones les corresponden distintos pares de conejos y viceversa, dos pares distintos de conejos tienen siempre una «genealogía» diferente, puesto que, por hipótesis, la coneja da una cría formada por un solo par de conejos.

La relación establecida demuestra que el número de n-sucesiones que posean la propiedad indicada es igual a $F(n)$.

Demostremos ahora que

$$F(n)=C_0^{n+1}+C_1^n+C_2^{n-1}+\ldots+C_p^{n-p+1}, \qquad (2)$$

donde $p=\frac{n+1}{2}$, si n es impar, y $p=\frac{n}{2}$, si n es par. En otras palabras, p es la parte entera del número $\frac{n+1}{2}$ (en lo sucesivo designemos la parte entera del número α mediante $E(\alpha)$; así, será, $p=E\left(\frac{n+1}{2}\right)$).

En efecto, $F(n)$ es el número de todas las n-sucesiones formadas por 0 y 1, en las cuales no hay dos unidades seguidas. El número de tales sucesiones, en las cuales hay exactamente k unidades y $n-k$ ceros, es igual a C_k^{n-k+1} (véase la pág. 43). Como además debe cumplirse la desigualdad $k \leqslant n-k+1$, el número k variará desde 0 hasta $E\left(\frac{n+1}{2}\right)$. Aplicando la regla de la suma, se obtiene la relación (2).

La igualdad (2) puede ser demostrada también de otra forma. Hagamos

$$G(n)=C_0^{n+1}+C_1^n+C_2^{n-1}+\ldots+C_p^{n-p+1},$$

siendo $p=E\,\frac{n+1}{2}$. De la igualdad $C_k^n=C_k^{n-1}+$ $+C_{k-1}^{n-1}$ se deduce fácilmente que

$$G(n)=G(n-1)+G(n-2). \qquad (3)$$

Además, está claro que $G(1)=2=F(1)$ y $G(2)=$ $=3=F(2)$. Como ambas sucesiones $F(n)$ y $G(n)$ satisfacen a la relación de recurrencia $X(n)=$ $=X(n-1)+X(n-2)$, tendremos que

$$G(3)=G(2)+G(1)=F(2)+F(1)=F(3)$$

y, en general, que $G(n)=F(n)$.

OTRO METODO DE DEMOSTRACION

En el apartado anterior hemos establecido directamente la relación entre el problema de Fibonacci y un problema combinatorio. Esta relación se habría podido establecer también de otro modo, demostrando directamente que el número $T(n)$ de soluciones del problema combinatorio satisfacía la misma relación de recurrencia

$$T(n+1)=T(n)+T(n-1) \qquad (4)$$

que los números de Fibonacci.

En efecto, tomemos cualquier $(n+1)$-sucesión de ceros y unidades que satisfaga a la condición requerida de que no haya dos unidades seguidas. Esta puede terminar en 0 o en 1. Si termina en 0, eliminándolo, se obtiene una n-sucesión que satisface a nuestro problema. Recíprocamente, si se toma cualquier n-sucesión de ceros y unidades, en la cual no hay dos unidades seguidas, y se le agrega un cero, se obtiene una $(n+1)$-sucesión con la misma propiedad. Hemos demostrado que el número de sucesiones «buenas» que terminan en cero es igual a $T(n)$.

Supongamos ahora que la sucesión termina en 1. Como no puede haber dos unidades seguidas, delante de esta unidad habrá un cero. En otras palabras, la sucesión termina en 01. La $(n-1)$-sucesión que queda después de eliminar el 0 y el 1 puede ser ya cualquiera, con tal de que no haya en ella dos unidades seguidas. Por esto, el número de sucesiones «buenas» que terminan en una unidad es igual a $T(n-1)$. Pero cada sucesión termina en 0 o en 1. En virtud de la regla de la suma, obtenemos que $T(n+1)=T(n)+$ $+T(n-1)$.

Hemos obtenido así la misma relación de recurrencia. Esto aún no implica que los números $T(n)$ y $F(n)$ coinciden. Por ejemplo, para las factoriales y las subfactoriales (véase la pag. 48) se cumplía la misma relación de recurrencia:

$$X(n+1)=n\,[X(n)+X(n-1)]. \qquad (5)$$

Pero para las factoriales los dos primeros términos de la sucesión son iguales a $0!=1$, $1!=1$, mientras que para las subfactoriales lo son a $D(0)=1$, $D(1)=0$. Por esto, también resultaron diferentes los terceros, y los cuartos, y todos los términos restantes de la sucesión.

Para demostrar la coincidencia de los números $T(n)$ y $F(n)$, hay que demostrar además que $T(1)=F(1)$ y $T(2)=F(2)$. Entonces ya tendremos, en virtud de la relación de recurrencia, que también $T(3)=F(3)$, $T(4)=F(4)$, etc. Existen dos 1-sucesiones que satisfacen a la condición establecida: 0 y 1, y tres 2-sucesiones: 00, 01 y 10. Por esto, $T(1)=2=F(1)$ y $T(2)=$ $=3=F(2)$. Queda así demostrada nuestra afirmación.

PROCESO DE PARTICIONES SUCESIVAS

Para la resolución de problemas combinatorios con frecuencia se aplica el método utilizado en el apartado precedente. Para el problema dado se establece una relación de recurrencia y se demuestra que ésta coincide con la relación de recurrencia de otro problema, cuya solución ya conocemos. Si coinciden además también los términos iniciales de ambas sucesiones en cantidad suficiente (más adelante nos detendremos con más detalle en cuántos términos deben coincidir,) ambos problemas tienen iguales soluciones.

Apliquemos el método descrito a la resolución del siguiente problema. Sea dado cierto conjunto de n objetos, dispuestos en un orden determinado. Dividamos este conjunto en dos partes no vacías de forma que una de ellas se halle a la izquierda de la segunda (o sea, digamos, que una parte esté formada por los elementos desde el primero hasta el m-ésimo, y la segunda, desde el $(m+1)$-ésimo hasta el n-ésimo). Después, dividamos cada una de las partes, de la misma forma, en dos partes no vacías (si una de las partes ya consta de un solo elemento, ésta no se somete a particiones ulteriores). Este proceso se continúa hasta obtenerse partes formadas por un solo elemento cada una. *¿Cuántos procesos de partición* de este tipo existen (dos procesos se consideran diferentes si por lo menos en un paso conducen a resultados distintos)?

Designemos el número de formas de partición para un conjunto con $n+1$ elementos mediante B_n. En el primer paso, este conjunto puede ser dividido de n maneras (la primera parte puede contener un objeto, dos, ..., n). En correspondencia con esto, el conjunto de todos los procesos de partición se divide en n clases: en la s-ésima de ellas se hallan los procesos en los que la primera parte está formada por s objetos.

Calculemos el número de procesos en la s-ésima clase. En la primera parte hay s elementos. Por esto, se la puede seguir dividiendo por B_{s-1} procesos. La segunda parte contiene $n-s+1$ elementos, y se la puede seguir fraccionando por B_{n-s} procesos. En virtud de la regla del producto, obtenemos que la s-ésima clase está formada por $B_{s-1}B_{n-s}$ procesos diferentes. Por la regla de la suma, ahora se deduce que

$$B_n = B_0B_{n-1} + B_1B_{n-2} + \ldots + B_{n-1}B_0. \tag{6}$$

Hemos obtenido una relación de recurrencia para B_n. Esta ya fue encontrada en la resolución del problema sobre la cola de la caja del cine (véase la pág. 57). Allí fue demostrado que dicha relación se satisface con los números

$$T_n = \frac{1}{n+1} C_n^{2n}.$$

Para demostrar la igualdad

$$B_n = T_n = \frac{1}{n+1} C_n^{2n}, \tag{7}$$

nos queda mostrar que los términos iniciales T_0 y B_0 de las sucesiones $T_0, T_1, \ldots, T_n, \ldots$ y $B_0, B_1, \ldots, B_n, \ldots$ coinciden.

Tenemos que $T_0 = C_0^0 = 1$. Por otro lado, $B_0 = 1$, puesto que el conjunto formado por un elemento se puede fraccionar de un modo único. Así, pues, $B_0 = T_0$. Pero, en virtud de la fórmula de recurrencia, se tiene que $B_1 = B_0^2 = 1$. Como T_1 satisface a la misma fórmula de recurrencia, tendremos que $T_1 = T_0^2 = 1$. Luego establecemos que

$$B_2 = B_0B_1 + B_1B_0 = 2 \text{ y } T_2 = T_0T_1 + T_1T_0 = 2,$$

etc. De este modo, todos los términos de ambas sucesiones coinciden. Queda así demostrado el siguiente resultado:

El número de procesos de división sucesiva de un conjunto formado por $n+1$ elementos, distribuidos en cierto orden, es igual a

$$T_n = \frac{1}{n+1} C_n^{2n}.$$

MULTIPLICACION Y DIVISION DE NUMEROS

Sean dados n números $a_1, \ldots, a_n$, dispuestos en un orden determinado. En virtud de la propiedad asociativa de la multiplicación, el producto de estos números se puede calcular de diferentes maneras (conservando el orden de los factores). Por ejemplo, tres números se pueden multiplicar de dos maneras: $(ab)\,c = a\,(bc)$; cuatro números, de cinco maneras, etc. Se pide *hallar el número de todas las formas de multiplicar n números, dados en un orden determinado.*

Está claro que cada forma de multiplicación se reduce a un proceso de fraccionamiento de los n números dados en partes, formadas por un elemento cada una. Por ejemplo, la multiplicación de cuatro números por la fórmula $(ab)\ (cd)$ se reduce al siguiente proceso de partición: $a \mid b \Big| c \mid d$, y la multiplicación de estos mismos números según la fórmula $((ab)c)d$, al proceso de partición $a \mid b \mid c \Big| d$. Por esto, el número de distintos procesos de multiplicación es igual al de diferentes procesos de partición de un conjunto de n elementos, es decir, a $T_{n-1} = \frac{1}{n}\ C_{n-1}^{2n-2}$.

Pero, además de la propiedad asociativa, la multiplicación posee la propiedad conmutativa. Si se la tiene en cuenta, el número de procesos de multiplicación aumenta $n!$ veces, ya que n números se pueden permutar entre sí de $n!$ maneras, y después someter los números permutados a unas u otras particiones. De aquí se deduce que el número total de formas de multiplicar n números dados es igual a $(n-1)!\ C_{n-1}$.

Este mismo resultado se puede obtener directamente, sin aplicar la fórmula del número de procesos de particiones. Esta deducción da un nuevo método para la obtención de la fórmula que expresa el número de procesos de partición y, al mismo tiempo, para resolver el problema sobre la cola de la caja (con la condición de que el número de rublos sea igual al de monedas de 50 k).

La deducción directa consiste en lo siguiente. Supongamos que ya hemos hallado el número $\Phi(n)$ de métodos de multiplicar n números. Agreguémosles un factor más, el a_{n+1}. Analicemos de cuántas maneras se puede agregar este factor a uno de los productos de los números $a_1, \ldots, a_n$.

El número a_{n+1} se puede multiplicar por todo el producto, tomándolo como multiplicando, o como multiplicador. Esto nos da dos formas de agregación. Pero a_{n+1} se puede agregar también en alguna de las etapas intermedias. La multiplicación de n números se reduce a $n-1$ multiplicaciones sucesivas, en cada una de las cuales se multiplican dos números. A cada uno de éstos se puede agregar el número a_{n+1} de 4 maneras: multiplicándolo por el primer factor en calidad de multiplicando, o de multiplicador, así como también multiplicándolo por el segundo factor, en calidad de multiplicando o de multiplicador. Pero como hay $n-1$ multiplicaciones, a las cuales se puede agregar a_{n+1}, se obtienen en total $4n-4$ modos. Agregando a éstos las dos formas a que nos referimos más arriba, se obtienen $4n-2$ maneras de agregar a_{n+1} a cada una de las $\Phi(n)$ formas de multiplicar los números $a_1, \ldots, a_n$. De aquí se deduce que

$$\Phi(n+1) = (4n-2)\ \Phi(n).$$

Pero $\Phi(1) = 1$. Por esto,

$$\Phi(n) = 2 \cdot 6 \ldots (4n-6) = 2^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \ldots (2n-3).$$

Esta respuesta coincide con la obtenida más arriba, puesto que

$$\Phi(n) = 2^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \ldots (2n-3) = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} = (n-1)!\ C_{n-1}^{2n-2}.$$

Consideremos ahora la operación de división. Escribamos la expresión

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{a_1}{a_2}}{a_3}}{\cfrac{\vdots}{a_n}} \qquad (8)$$

Esta escritura no tiene sentido, si no se indica el orden en el que se debe efectuar la división. Aclaremos de cuántas maneras se puede dar un sentido a dicha expresión. Para esto, obsérvese que cada forma de indicar el orden de la división se puede considerar también como el proceso, descrito más arriba, de partición de n elementos en partes que consistan de un elemento cada una. Y hemos visto que el número de estos procesos es igual a $\frac{1}{n}\ C_{n-1}^{2n-2}$.

Esto significa que a la expresión (8) se le puede dar un sentido de $\frac{1}{n}\ C_{n-1}^{2n-2}$ modos.

PROBLEMAS CON POLIGONOS

En algunos problemas de la química cuántica surge el siguiente problema:

En una circunferencia se ha inscrito un polígono regular de 2n lados. ¿De cuántas maneras se pueden unir sus vértices dos a dos de forma que los segmentos obtenidos no se intersequen?

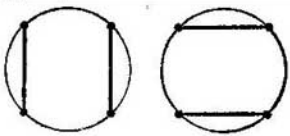


Fig. 31.

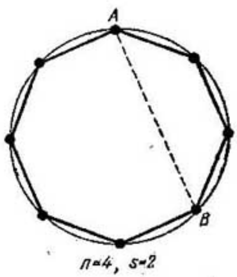


Fig. 32.

Para $n = 1$ hay una sola forma de unión de este tipo[1]. Para $n = 2$, se obtienen dos formas, representadas en la fig. 31. Para hallar el número $F(n)$ de maneras para todo n, deduzcamos una relación de recurrencia a la que satisfará $F(n)$. Escojamos uno de los vértices A del polígono. Se lo puede unir con cualquiera de los vértices B tal que entre A y B haya un número par de vértices (fig. 32). En correspondencia con esto, todas las formas de unir los vértices se dividen en clases, según cuántos vértices queden a la izquierda del segmento trazado desde el punto A.

[1] Aquí consideramos que el diámetro es un «polígono regular de dos lados».

Si quedan $2s$ vértices, al otro lado de éste quedarán $2(n - s - 1)$ vértices. Con esto el polígono de $2n$ lados se divide en uno de $2s$ lados y en otro de $2(n - s - 1)$ lados. Pero en el polígono de $2s$ lados se pueden trazar de $F(s)$ maneras segmentos de forma que no se intersequen. En el polígono de $2(n - s - 1)$ lados, esto mismo puede efectuarse de $F(n - s - 1)$ modos. En virtud de la regla del producto, obtenemos que en la s-ésima clase figuran $F(s) F(n - s - 1)$ maneras de trazar los segmentos.

Por consiguiente, el número total de todas las formas es igual a $F(0) F(n - 1) + F(1) F(n - 2) + \ldots + F(n - 1) F(0)$. Hemos obtenido la relación de recurrencia

$$F(n) = F(0) F(n - 1) + F(1) F(n - 2 + \ldots$$
$$\ldots + F(n - 1) F(0).$$

Esta es la misma relación que satisfacen los números $T_n = \frac{1}{n+1} C_n^{2n}$. Como $F_0 = T_0 = 1$, para todo n tendremos que $F(n) = T_n$. Así, pues, en un polígono de $2n$ lados se pueden trazar diagonales de $T_n = \frac{1}{n+1} C_n^{2n}$ maneras, de forma que no se intersequen de dos a dos.

La misma respuesta tiene el problema siguiente:

¿De cuántas maneras se puede dividir un polígono convexo de $n + 2$ lados en triángulos mediante diagonales que no se intersequen dentro de este polígono?

Designemos el número de formas mediante $\Phi(n)$. Escojamos uno de los lados del polígono y clasifiquemos todas las divisiones según con qué vértice del polígono coincida el vértice del triángulo cuya base es el lado escogido (fig. 33). Si se elimina este triángulo, el polígono se divide en uno de $s + 2$ lados y otro de $n - s + 1$ lados.

Dividiendo estos polígonos en triángulos y combinando estas divisiones entre sí, obtenemos todas las particiones del polígono inicial, en las cuales figura el triángulo eliminado. Aplicando después

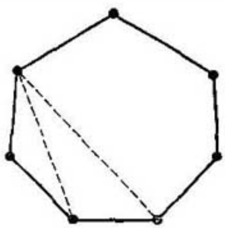


Fig. 33.

las reglas del producto y de la suma, se obtiene la relación de recurrencia

$$\Phi(n)=\Phi(0)\,\Phi(n-1)+\Phi(1)\,\Phi(n-2)+\ldots$$
$$\ldots+\Phi(n-1)\,\Phi(0),$$

donde hicimos $\Phi(0)=1$. Dejamos que el lector demuestre, a partir de esta relación, que

$$\Phi(n)=T_n=\frac{1}{n+1}C_n^{2n}.$$

LA DIFICULTAD CON QUE TROPIEZA EL MAYORDOMO

Existen problemas combinatorios, en los que hace falta formar no una relación de recurrencia, sino un sistema de éstas, que vinculan varias sucesiones. Estas relaciones las expresan los $(n+1)$-ésimos términos de las sucesiones mediante los anteriores no solamente de la sucesión dada, sino de las restantes.

Una vez el mayordomo del rey Arturo notó que habían sido invitados a almorzar a la mesa redonda 6 pares de caballeros enemistados. ¿De cuántas maneras se los puede sentar de forma que no haya dos enemigos sentados juntos?

Si hallamos alguna forma de sentar a los caballeros, haciéndolos cambiar de lugar en círculo obtenemos 11 modos más. Ahora no consideraremos diferentes las maneras que se obtienen una de la otra por esta permutación cíclica.

Introduzcamos las siguientes notaciones. Supongamos que el número de caballeros es igual a $2n$. Sea A_n el número de formas de colocación en las que no hay dos enemigos juntos; B_n, el número de maneras en las cuales hay sentado junto exactamente un par de enemigos, y C_n, el de modos en los que hay exactamente dos pares de vecinos enemistados.

Deduzcamos primeramente la fórmula que expresa A_{n+1} mediante A_n, B_n y C_n. Supongamos que $n+1$ pares de caballeros han sido sentados de modo que no haya dos enemigos juntos. Consideraremos que todos los pares enemistados de caballeros están numerados. Pidamos al par número $n+1$ de caballeros que se levanten de la mesa. Entonces son posibles tres casos: que entre los que quedan a la mesa no haya ningún par de vecinos enemigos, que haya un par de este tipo, y que haya dos pares (los caballeros que se fueron podían haber separado estos pares)[1].

Aclaremos ahora de cuántas formas se pueden sentar nuevamente a la mesa a los caballeros que se fueron, de forma que después de esto no haya ningún par de vecinos enemigos.

Lo más sencillo es sentarlos cuando a la mesa hay dos pares de vecinos enemigos. En este caso, uno de los que volvieron se sienta entre los caballeros del primer par, y el otro, entre los del segundo par. Esto se puede efectuar de dos maneras. Pero como el número de formas de sentar $2n$ caballeros, en las cuales dos pares de vecinos resultaron enemigos, es igual a C_n, en total se obtienen $2C_n$ formas.

Supongamos ahora que hay sentado junto sólo un par de enemigos. Uno de los que regresaron

[1] Aquí y en lo sucesivo suponemos que $n>1$. Para $n=1$, los razonamientos ulteriores pierden su sentido.

se debe sentar entre ellos. Entonces habrá sentados a la mesa $2n+1$ caballeros, entre los cuales existen $2n+1$ lugares. Entre ellos hay dos prohibidos para el segundo caballero —al lado del huésped que se acabó de sentar—, quedándole así $2n-1$ lugares. Como puede entrar primero cualquiera de los dos caballeros que salieron, se obtienen $2(2n-1)$ formas de ubicación. Pero el número de casos en que $2n$ caballeros se sentaron de forma que exactamente un par de enemigos quedaron vecinos, es igual a B_n. Por esto, obtenemos $2(2n-1)B_n$ modos de sentar a los huéspedes de la forma requerida.

Por último, supongamos que no había dos enemigos juntos. En este caso, el primer caballero se sienta entre dos huéspedes cualesquiera, cosa que puede efectuar de $2n$ maneras. Después de esto, para su enemigo quedarán $2n-1$ lugares: puede ocupar cualquiera, a excepción de los dos que lindan con el caballero que se acabó de sentar. De este modo, si ya había $2n$ caballeros sentados en la forma necesaria, se puede sentar a los huéspedes que regresaron de $2n(2n-1)$ formas. En total obtenemos, en este caso, $2n(2n-1)A_n$ maneras.

Como ya indicamos, los casos analizados agotan todas las posibilidades. Por esto, tiene lugar la relación de recurrencia

$$A_{n+1}=2n(2n-1)A_n+2(2n-1)B_n+2C_n. \qquad (9)$$

Esta relación es aún insuficiente para hallar A_n para todo valor de n. Hay que averiguar además cómo se expresan B_{n+1} y C_{n+1} mediante A_n, B_n, C_n.

Supongamos que entre los $2n+2$, $n>1$, caballeros resultó haber exactamente un par de vecinos enemigos. Sabemos que esto puede ocurrir en B_{n+1} casos. Para evitar una disputa, pidamos que se retiren de la mesa. Entonces quedarán $2n$ caballeros, existiendo dos posibilidades: o bien entre los que quedaron no hay vecinos enemigos, o bien hay exactamente un par de tales enemigos, los cuales estaban sentados a ambos lados de los que abandonaron la sala, antes de su retirada, y ahora quedaron juntos. En el segundo caso se puede sentar nuevamente a los que se fueron sólo en su antiguo lugar, pues de otra forma surgirá un segundo par de vecinos enemigos. Pero como $2n$ caballeros se pueden sentar de B_n maneras de forma que haya sólo un par de vecinos enemigos, obtenemos $2B_n$ variantes (los caballeros que volvieron se pueden cambiar de lugar). En el primer caso, en cambio, se puede sentar a los que volvieron entre dos caballeros cualesquiera, es decir, de $2n$ modos; y como además se pueden cambiar de lugar, se obtienen $4n$ formas. Combinándolas con todos los modos de sentar a n caballeros, en los cuales no haya vecinos enemigos, se obtienen $4nA_n$ maneras. Por último, el número del par de caballeros que se fue y volvió podía ser cualquiera, desde 1 hasta $n+1$. De aquí se desprende que la relación de recurrencia para B_{n+1} tiene la forma.

$$B_{n+1}=4n(n+1)A_n+2(n+1)B_n. \qquad (10)$$

Analicemos, por último, el caso en que entre los $2n+2$ caballeros había dos pares de vecinos enemigos. Los números de estos pares se pueden escoger de $C_2^{n+1}=\dfrac{n(n+1)}{2}$ maneras. Sustituyamos cada par por un nuevo caballero, y consideraremos que los dos nuevos caballeros son enemigos. Entonces habrá sentados a la mesa $2n$ caballeros, sin que haya entre ellos ningún par de vecinos enemigos (si los nuevos caballeros no están sentados juntos), o bien existiendo sólo un par de este tipo.

La primera variante puede tener lugar en A_n casos. Podemos volver a la agrupación inicial de 4 formas, en virtud de la posibilidad de cambiar el orden de los caballeros en cada par. Por esto, la primera variante conduce a $4C_2^{n+1}A_n=2n(n+1)A_n$ maneras.

La segunda variante, en cambio, puede tener lugar en $\frac{1}{n}B_n$ casos[1]. Aquí también se puede volver

[1] Existen B_n casos en los que algunos dos enemigos se hallen juntos. Si se indica precisamente qué par debe estar junto, se obtienen n veces menos casos.

a la agrupación inicial de 4 maneras, obteniéndose en total $2(n+1)B_n$ formas. De aquí se deduce que para $n \geqslant 1$

$$C_{n+1} = 2n(n+1)A_n + 2(n+1)B_n. \qquad (11)$$

Hemos obtenido el sistema de relaciones de recurrencia

$$A_{n+1} = 2(2n-1)(nA_n + B_n) + 2C_n, \qquad (9)$$

$$B_{n+1} = 2(n+1)(2nA_n + B_n), \qquad (10)$$

$$C_{n+1} = 2(n+1)(nA_n + B_n), \qquad (11)$$

que son válidas para $n \geqslant 2$. Pero un cálculo sencillo demuestra que $A_2 = 2$, $B_2 = 0$, $C_2 = 4$. Por esto, de las relaciones (9) — (11) se desprende que $A_3 = 32$, $B_3 = 48$, $C_3 = 24$. Continuando así sucesivamente, se halla que los huéspedes se pueden sentar a la mesa de la forma requerida de $A_6 = 12\ 771\ 840$ maneras.

El problema analizado se asemeja al que damos a continuación denominado simplemente «problema sobre los invitados».

¿De cuántas maneras se pueden sentar a una mesa redonda n parejas de casados de forma que se alternen hombres y mujeres y de que no haya dos cónyuges vecinos?

Este problema se resuelve en forma aproximadamente igual al del mayordomo. Primero se distribuyen las mujeres. Si se numeran los lugares, entonces o bien todas las mujeres quedarán en lugares pares, o bien ocuparán lugares impares. Pero el número de lugares pares es igual a n, y las mujeres se pueden sentar en éstos de $n!$ modos.

De la misma cantidad de maneras pueden ocupar los lugares impares. Por consiguiente, las mujeres se pueden sentar de $2\cdot(n!)$ formas. Después se analizan los casos en que ninguno de los maridos se halle junto a su mujer, cuando hay una pareja de casados junta y, por último, cuando hay dos parejas juntas. Proponemos al lector que escriba el sistema correspondiente de relaciones de recurrencia.

NUMEROS «DE LA SUERTE» DE LOS BILLETES DEL TROLEBUS

Algunos consideran que los números de seis cifras de los billetes del trolebús «traen suerte» si la suma de las cifras de los lugares pares es igual a la de las de los lugares impares. Por ejemplo, el billete 631 752 se considera «de la suerte», ya que $6 + 1 + 5 = 3 + 7 + 2 = 12$. Se pide hallar el número de estos billetes desde 000000 hasta 999999.

Para esto, hallemos primeramente cuántos números de tres cifras tienen una suma dada N de cifras (aquí hacemos pertenecer a los números de tres cifras también los del tipo 075, e inclusive el 000). Este problema es análogo al resuelto en la pág. 67: el número de sumandos es 3, la suma es igual a N, y los sumandos varían desde 0 hasta 9. Designemos el número de sus soluciones mediante $F(3, 9; N)$. Entonces tiene lugar la siguiente relación de recurrencia:

$$F(3, 9; N) = F(2, 9; N) + F(2, 9; N-1) + \\ + F(2, 9; N-2) + F(2, 9; N-3) + \\ + F(2, 9; N-4) + F(2, 9; N-5) + \\ + F(2, 9; N-6) + F(2, 9; N-7) + \\ + F(2, 9; N-8) + F(2, 9; N-9).$$

Análogamente

$$F(2, 9; N) = F(1, 9; N) + F(1, 9; N-1) + \ldots \\ \ldots + F(1, 9; N-9).$$

Está claro que $F(1, 9; N) = 1$, si $0 \leqslant N \leqslant 9$, y que $F(1, 9; N) = 0$ en caso contrario. Aplicando estas relaciones, no cuesta trabajo llenar la tabla 8.

Para hallar ahora al número de billetes «de la suerte», hay que elevar al cuadrado los números de la tercera fila y sumar los resultados obtenidos. En efecto, cada billete «de la suerte» tiene la misma suma de cifras que se hallan en los lugares pares y en los impares. Sea esta suma igual a N. El número que se encuentra en el N-ésimo lugar de la tercera fila de nuestra tabla in-

Tabla 8

k \ N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	9	8	7	6	5
3	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	63	69	73	75	75

k \ N	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	73	69	63	55	45	36	28	21	15	10	6	3	1

dica cuántos números de tres cifras tienen una suma de cifras igual a N. En otras palabras, éste indica de cuántas maneras se pueden escoger las cifras que se hallan en los lugares pares (es decir, la segunda, la cuarta y la sexta). De la misma cantidad de formas se pueden escoger las cifras de los lugares impares (el primero, el tercero y el quinto). Como estas elecciones no dependen una de la otra, en virtud de la regla del producto tendremos que hay $[F(N)]^2$ números «de la suerte» cuya suma de las cifras en los lugares pares es igual a N. Entonces, según la regla de la suma, el número total de billetes «de la suerte» es igual a

$$2\,[1^2+3^2+6^2+10^2+15^2+21^2+28^2+36^2+ \\ +45^2+55^2+63^2+69^2+73^2+75^2].$$

Calculando esta suma, se obtiene la respuesta 55 252.

TABLAS DE RECURRENCIA

En la combinatoria a menudo se encuentran magnitudes que dependen no de uno, sino de varios números. Por ejemplo, el número C_k^n depende tanto de n como de k. Si la magnitud considerada $F(n, k)$ depende de los dos números naturales n y k, sus valores se pueden disponer en forma de tabla, situando a $F(n, k)$ en la intersección de la n-ésima fila y la k-ésima columna. Ya hemos encontrado estas magnitudes más de una vez en el capítulo V: el cuadrado aritmético, los triángulos aritméticos y los triángulos aritméticos generalizados tenían precisamente la forma de tales tablas.

Además, en todos los ejemplos estudiados en el capítulo V existían dependencias entre los elementos de la tabla. Estas dependencias permitían calcular los elementos de la n-ésima fila de la tabla a partir de los de la fila precedente y, posiblemente, de algunos primeros elementos de la n-ésima. Por esto, si se daba la primera fila de la tabla y los primeros elementos de las demás, todas las filas restantes se podían calcular una tras la otra. Estas tablas se asemejan a las sucesiones de recurrencia, y las llamaremos en lo sucesivo *recurrentes*.

Para el cuadrado aritmético, la relación de recurrencia era de la forma

$$F(n, k) = F(n-1, k) + F(n, k-1), \qquad (12)$$

y las condiciones de frontera se daban así: $F(n, 0) = 1$, $F(0, k) = 0$ para $k > 0$ (recuérdese que para el cuadrado aritmético no nos referimos a la primera fila o columna, sino a la fila o columna cero).

Para el pentágono y hexágono aritméticos, la relación de recurrencia tiene también la forma (12), puesto que estas figuras aparecieron cuando calculamos de cuántas maneras podía llegar una torre hasta cierta casilla, moviéndose en un tablero delimitado por dos semirrectas perpendiculares y por una o dos líneas paralelas a la diagonal principal. Pero la torre puede llegar hasta la casilla (n, k) desde la $(n-1, k)$ o desde la $(k-1, n)$. Por esto, cualesquiera que sean las limitaciones que impongamos a sus desplazamientos, siempre se cumplirá la relación (12). A su vez las limitaciones conducen a que algunos elementos de la tabla deben ser obligatoriamente iguales a cero. Para el pentágono aritmético éstos eran los elementos que se hallaban por encima de cierta recta, paralela a la diagonal principal, y para el hexágono aritmético, los elementos que se hallaban fuera de la región determinada por dos rectas paralelas a la diagonal principal.

La relación de recurrencia para el triángulo aritmético, así como para el m-triángulo aritmético tiene otra forma. Precisamente, para el m-triángulo aritmético se cumple

$$F(n, k)=F(n-1, k-m+1)+ \\ +F(n-1, k-m+2)+\ldots+F(n-1, k). \qquad (13)$$

Además $F(0, 0)=1$ y $F(0, k)=0$, si $k>0$.

OTRA RESOLUCION DEL PROBLEMA DEL MAYORDOMO

Como un ejemplo más sobre la aplicación de las tablas de recurrencia, expondremos otra resolución del problema del mayordomo (véase la pág. 103). Como el lector recordará, se trataba de hallar el número de maneras de sentar a $2n$ caballeros a una mesa redonda de forma que no haya dos enemigos juntos (habiendo n pares de enemigos entre los $2n$ caballeros).

Designemos mediante $F(m, n)$ el número de formas de ubicarlos, en las que hay juntos exactamente m pares de enemigos. Deduciremos ahora una fórmula de recurrencia que expresa a $F(m, n+1)$ mediante $F(k, n)$, $k=m-1, m, m+1, m+2$.

Consideraremos que primeramente había n pares de caballeros sentados a la mesa, y que después llegó el par $n+1$ y se sentó también. Calculemos en cuántos casos habrá sentados a la mesa m pares de vecinos enemigos. Esto puede tener lugar en los siguientes casos:

a) A la mesa había $m-1$ pares de enemigos sentados juntos. Esto pudo tener lugar de $F(m-1, n)$ maneras. Para que queden a la mesa m pares de vecinos enemistados, el nuevo par debe sentarse junto, sin separar ninguno de los pares de vecinos enemigos existentes. Pero entre $2n$ caballeros existen $2n$ intervalos, y no es posible sentarse en $m-1$ de ellos. Quedan $2n-m+1$ intervalos, donde pueden sentarse los caballeros recién llegados. Como en cada uno de estos intervalos se puede sentar de dos maneras (los caballeros que llegaron pueden cambiarse de lugar), obtenemos en total

$$2(2n-m+1)F(m-1, n) \qquad (14)$$

modos.

b) A la mesa había m pares de enemigos sentados juntos. En este caso, los recién llegados pueden escoger una de dos posibilidades: o sentarse separados, sin dividir ningún par de vecinos enemigos, o sentarse juntos entre dos vecinos enemistados. Es fácil calcular que la primera solución se puede efectuar de $(2n-m)(2n-m-1)$, y la segunda, de $2m$ maneras, habiendo en total $(2n-m)^2-2n+3m$ formas. Como los n pares de caballeros se pueden sentar de $F(m, n)$ modos de forma que haya juntos m pares de enemigos, obtenemos en total

$$[(2n-m)^2-2n+3m]F(m, n) \qquad (15)$$

modos.

c) Ahora bien, analicemos el caso en que entre los $2n$ caballeros había $m+1$ pares de enemigos sentados juntos (lo cual puede ocurrir de $F(m+1, n)$ maneras). En este caso, uno de los recién llegados debe sentarse entre uno de los pares de vecinos enemigos, y el segundo debe hacerlo de forma que no divida ninguno de estos pares. Lo primero se puede llevar a cabo de $m+1$ formas, y lo segundo, de $2n-m-1$. En total obtenemos $2(m+1)(2n-m-1)$ posibilidades (el factor 2 apareció o causa de que cualquiera de los recién llegados puede sentarse entre los enemigos). Por esto, el caso considerado genera en total

$$2(m+1)(2n-m-1)F(m+1, n) \tag{16}$$

posibilidades.

d) Por último, supongamos que había $m+2$ pares de vecinos enemigos. Esto pudo tener lugar de $F(m+2, n)$ maneras. Para que queden solamente m pares de vecinos enemigos, cada uno de los recién llegados debe separar un par de éstos. El primer caballero puede sentarse de $m+2$ formas, después de lo cual al segundo le quedan solamente $m+1$ lugares. En total obtenemos

$$(m+1)(m+2)F(m+2, n) \tag{17}$$

posibilidades.

Es fácil advertir que hemos agotado todas las posibilidades en las que entre los $2n+2$ caballeros haya m pares de vecinos enemigos sentados a la mesa redonda. Por esto, $F(m, n)$ satisface a la siguiente relación de recurrencia:

$$\begin{aligned} F(m, n+1) = {} & 2(2n-m+1)F(m-1, n) + \\ & + [(2n-m)^2-2n+3m]F(m, n) + \\ & + 2(m+1)(2n-m-1)F(m+1, n) + \\ & + (m+1)(m+2)F(m+2, n). \end{aligned} \tag{18}$$

Un cálculo directo demuestra que

$$F(0, 2)=2, \ F(1, 2)=0, \ F(2, 2)=4$$

(no consideramos diferentes las formas de ubicación que se obtienen una de otra mediante una permutación cíclica).

Aplicando la fórmula (18), se halla que $F(0, 12) = 12\ 771\ 840$.

RESOLUCION DE LAS RELACIONES DE RECURRENCIA

Diremos que una relación de recurrencia es de orden k, si ésta permite expresar $f(n+k)$ mediante $f(n), f(n+1), \ldots, f(n+k-1)$. Por ejemplo,

$$f(n+2)=f(n)f(n+1)-3f^2(n+1)+1$$

es una relación de recurrencia de segundo orden, y

$$f(n+3)=6f(n)f(n+2)+f(n+1)$$

lo es de tercer orden.

Si se da una relación de recurrencia de k-ésimo orden, ésta se satisface por infinitas sucesiones. El hecho reside en que los primeros k elementos de ésta pueden fijarse en forma totalmente arbitraria, ya que entre ellos no existe ninguna dependencia. Pero si están dados los primeros k elementos, todos los restantes se determinan de manera unívoca: el elemento $f(k+1)$ se expresa, en virtud de la relación de recurrencia, a partir de los $f(1), \ldots, f(k)$, el $f(k+2)$, mediante los $f(2), \ldots, f(k+1)$, etc.

Utilizando la relación de recurrencia y los términos iniciales, se pueden escribir, uno tras otro, los términos de la sucesión, obteniéndose en fin de cuentas cualesquiera de sus términos. Sin embargo, aquí habrá que escribir todos los términos anteriores, ya que sin conocerlos, no conoceremos tampoco los siguientes. Pero en muchos casos queremos conocer solamente un término determinado de la sucesión, y los demás son innecesarios. En estos casos es más cómodo disponer de la fórmula explícita del n-ésimo término de la sucesión. Diremos que una sucesión es *solución* de la relación de recurrencia dada, si al sustituir esta sucesión en la relación, esta última se satisface idénticamente. Por ejemplo, la sucesión

$$2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots$$

es una de las soluciones de la relación de recurrencia

$$f(n+2)=3f(n+1)-2f(n).$$

En efecto, el término general de esta sucesión tiene la forma $f(n)=2^n$. Esto significa que $f(n+2)=2^{n+2}$, $f(n+1)=2^{n+1}$. Pero para todo n tiene lugar la identidad $2^{n+2}=3\cdot 2^{n+1}-2\cdot 2^n$. Por esto, 2^n es solución de la relación indicada.

Una solución de una relación de recurrencia de k-ésimo orden se denomina general, si ésta depende de k constantes arbitrarias $C_1, \ldots, C_k$, y escogiendo estas constantes se puede obtener cualquier solución de la relación dada. Por ejemplo, la solución general de la relación

$$f(n+2)=5f(n+1)-6f(n) \tag{19}$$

será

$$f(n)=C_1 2^n+C_2 3^n. \tag{20}$$

En efecto, es fácil comprobar que la sucesión (20) reduce la (19) a una identidad. Por esto, sólo hay que demostrar que cualquier solución de nuestra relación se puede representar en la forma (20). Pero cualquier solución de la relación (19) se determina unívocamente por los valores de $f(1)$ y $f(2)$. Por esto, hay que demostrar que para dos números a y b cualesquiera existen valores de C_1 y C_2 tales que

$$2C_1+3C_2=a$$

y

$$2^2C_1+3^2C_2=b.$$

Pero es fácil apreciar que para valores a y b cualesquiera, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2C_1+3C_2=a, \\ 4C_1+9C_2=b \end{cases} \tag{21}$$

tiene solución. Por esto, (20) es efectivamente la solución general de la relación (19).

RELACIONES DE RECURRENCIA LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

Para resolver las relaciones de recurrencia, hablando con propiedad, no existen reglas generales. Sin embargo, existe una clase de relaciones que se encuentra con mucha frecuencia y que se resuelve por un método único. Esta clase consta de relaciones de recurrencia que tienen la forma

$$f(n+k)=a_1f(n+k-1)+a_2f(n+k-2)+\ldots+a_kf(n), \tag{22}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_k$ son ciertos números. Estas se denominan *relaciones de recurrencia lineales con coeficientes constantes.*

Analicemos primeramente cómo se resuelven estas relaciones para $k=2$, es decir, estudiemos las relaciones del tipo

$$f(n+2)=a_1f(n+1)+a_2f(n). \tag{23}$$

Su resolución está basada en las dos afirmaciones siguientes:

1) Si $f_1(n)$ y $f_2(n)$ son soluciones de la relación de recurrencia (23), para números A y B cualesquiera la sucesión $f(n)=Af_1(n)+Bf_2(n)$ también es solución de esta relación.

En efecto, por hipótesis tendremos que

$$f_1(n+2)=a_1f_1(n+1)+a_2f_1(n)$$

y

$$f_2(n+2)=a_1f_2(n+1)+a_2f_2(n).$$

Multipliquemos estas igualdades por A y B respectivamente y sumemos las identidades obtenidas. Se obtiene así que

$$Af_1(n+2)+Bf_2(n+2)=$$
$$=a_1[Af_1(n+1)+Bf_2(n+1)]+$$
$$+a_2[Af_1(n)+Bf_2(n)].$$

Esto significa, precisamente, que $Af_1(n)+Bf_2(n)$ es solución de la relación (23).

2) Si el número r_1 es raíz de la ecuación cuadrática

$$r^2=a_1r+a_2,$$

la sucesión

$$1,\ r_1,\ r_1^2,\ \ldots,\ r_1^{n-1},\ \ldots$$

es solución de la relación de recurrencia

$$f(n+2)=a_1f(n+1)+a_2f(n).$$

Efectivamente, si $f(n)=r_1^{n-1}$, entonces será $f(n+1)=r_1^n$ y $f(n+2)=r_1^{n+1}$. Sustituyendo estos valores en la relación (23), se obtiene la igualdad

$$r_1^{n+1}=a_1r_1^n+a_2r_1^{n-1}.$$

Esta igualdad es válida, puesto que, por hipótesis, se tiene que $r_1^2=a_1r_1+a_2$.

Obsérvese que, juntamente con la sucesión $\{r_1^{n-1}\}$, cualquier sucesión del tipo

$$f(n)=r_1^{n+m},\ n=1,\ 2,\ \ldots$$

es también solución de la relación (23). Para demostrarlo, es suficiente aplicar la afirmación (23), haciendo en ésta $A=r_1^{m+1}, B=0$.

De las afirmaciones 1) y 2) se deduce la siguiente regla de resolución de las relaciones de recurrencia lineales de segundo orden con coeficientes constantes:

Sea dada la relación de recurrencia

$$f(n+2)=a_1f(n+1)+a_2f(n). \tag{23}$$

Formemos la ecuación cuadrática

$$r^2=a_1r+a_2, \tag{24}$$

la cual se denomina característica para la relación dada. Si esta ecuación tiene dos raíces diferentes r_1 y r_2, la solución general de la relación (23) *tendrá la forma*

$$f(n)=C_1r_1^{n-1}+C_2r_2^{n-1}.$$

Para demostrar esta regla, obsérvese ante todo que, en virtud de la afirmación 2), $f_1(n)=r_1^{n-1}$ y $f_2(n)=r_2^{n-1}$ son soluciones de nuestra relación. Entonces, según la afirmación (1), también $C_1r_1^n+C_2r_2^n$ será solución de ésta. Queda solamente por demostrar que cualquier solución de la relación (23) se puede escribir en esta forma. Pero cualquier solución de la relación de segundo orden se determina por los valores de $f(1)$ y $f(2)$. Por esto, es suficiente demostrar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} C_1+C_2=a, \\ C_1r_1+C_2r_2=b \end{cases}$$

tiene solución para a y b cualesquiera. Dejamos que el lector compruebe que estas soluciones son

$$C_1=\frac{b-ar_2}{r_1-r_2},\quad C_2=\frac{ar_1-b}{r_1-r_2}.$$

El caso en que ambas raíces de la ecuación (24) coinciden, será analizado algo más tarde. Ahora expondremos un ejemplo de aplicación de la regla demostrada.

Al estudiar los números de Fibonacci, llegamos a la relación de recurrencia

$$f(n)=f(n-1)+f(n-2). \tag{25}$$

La ecuación característica de ésta tiene la forma

$$r^2=r+1.$$

Las raíces de esta ecuación cuadrática son los números

$$r_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad r_-=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Por esto, la solución general de la relación de Fibonacci tiene la forma

$$f(n)=C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{26}$$

(hemos utilizado la observación hecha más arriba y tomado el exponente n en lugar del $n-1$).

Hemos denominado números de Fibonacci a la solución de la relación (25) que satisface las condiciones iniciales $f(0)=1$ y $f(1)=2$, es decir, a la sucesión 1, 2, 3, 5, 8, 13, . . . A menudo resulta más cómodo agregar a esta sucesión, al principio, los números 0 y 1, es decir, considerar la sucesión 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, . . . Está claro que ésta satisface la misma relación de recurrencia (25) y a las condiciones iniciales $f(0)=0$, $f(1)=1$. Haciendo en la fórmula (26) $n=0$ y $n=1$, obtenemos para C_1 y C_2 el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} C_1+C_2=0, \\ \dfrac{\sqrt{5}}{2}(C_1-C_2)=1. \end{cases}$$

De aquí se halla que $C_1=-C_2=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, por lo cual

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]. \quad (27)$$

A primera vista parece asombroso que esta expresión adquiera valores enteros para todo número natural n.

CASO DE RAICES IGUALES DE LA ECUACION CARACTERISTICA

Detengámonos ahora en el caso en que ambas raíces de la ecuación característica coinciden: $r_1=r_2$. En este caso, la expresión $C_1r_1^{n-1}+C_2r_2^{n-1}$ ya no será solución general. En efecto, a causa de ser $r_1=r_2$, esta expresión se puede escribir como

$$f(n)=(C_1+C_2)\,r_1^{n-1}=Cr_1^{n-1}.$$

Nos queda solamente una constante arbitraria C, y, en genaral, es imposible escogerla de modo que se satisfagan las dos condiciones iniciales $f(1)=a$, $f(2)=b$.

Por esto, debemos hallar una segunda solución, que se diferencie de la $f_1(n)=r_1^{n-1}$. Resulta ser que tal solución es $f_2(n)=nr_1^{n-1}$. En efecto, si la ecuación cuadrática $r^2=a_1r+a_2$ tiene dos raíces coincidentes, $r_1=r_2$, en virtud del teorema de Vietta será $a_1=2r_1$, $a_2=-r_1^2$. Por esto, nuestra ecuación se escribe así:

$$r^2=2r_1r-r_1^2.$$

Entonces la relación de recurrencia tiene la siguiente forma:

$$f(n+2)=2r_1f(n+1)-r_1^2f(n). \quad (28)$$

Comprobemos que $f_2(n)=nr_1^{n-1}$ es efectivamente solución de ésta. Tenemos que $f_2(n+2)=(n+2)\,r_1^{n+1}$, y $f_2(n+1)=(n+1)\,r_1^n$. Sustituyendo estos valores en la relación (28), se obtiene la identidad evidente

$$(n+2)\,r_1^{n+1}=2(n+1)\,r_1^{n+1}-nr_1^{n+1}.$$

Esto significa que nr_1^{n-1} es la solución de nuestra relación.

Ahora ya conocemos dos soluciones, $f_1(n)=r_1^{n-1}$ y $f_2(n)=nr_1^{n-1}$, de nuestra relación. Su solución general se escribe como sigue:

$$f(n)=C_1r_1^{n-1}+C_2nr_1^{n-1}=r_1^{n-1}(C_1+C_2n).$$

Ahora ya se pueden satisfacer, escogiendo C_1 y C_2, las condiciones iniciales cualesquiera.

Las relaciones de recurrencia lineales con coeficientes constantes de orden mayor que dos se resuelven de la misma manera. Supongamos que la relación tiene la forma

$$f(n+k)=a_1f(n+k-1)+\ldots+a_kf(n). \quad (29)$$

Escribamos la ecuación característica

$$r^k=a_1r^{k-1}+\ldots+a_k.$$

Si todas las raíces $r_1, \ldots, r_k$ de esta ecuación algebraica de k-ésimo grado son diferentes, la solución general de la relación (29) tiene la forma

$$f(n)=C_1r_1^{n-1}+C_2r_2^{n-1}+\ldots+C_kr_k^{n-1}.$$

Si, en cambio, es, por ejemplo, $r_1=r_2=\ldots=r_s$, a esta raíz le corresponden las soluciones

$$f_1(n)=r_1^{n-1},\ f_2(n)=nr_1^{n-1},\ f_3(n)=n^2r_1^{n-1},\ \ldots,\ \ldots,\ f_s(n)=n^{s-1}r_1^{n-1}$$

de la relación de recurrencia (29). En la solución general, a esta raíz le corresponde la parte

$$r_1^{n-1}[C_1+C_2n+C_3n^2+\ldots+C_sn^{s-1}].$$

Escribiendo estas expresiones para todas las raíces y sumándolas, obtenemos la solución general de la relación (29).

Resolvamos, por ejemplo, la relación de recurrencia $f(n+4)=5f(n+3)-6f(n+2)-4f(n+1)+8f(n)$. La ecuación característica tiene aquí la forma

$$r^4-5r^3+6r^2+4r-8=0.$$

Resolviéndola, obtenemos las raíces

$$r_1=2,\ r_2=2,\ r_3=2,\ r_4=-1.$$

Por consiguiente, la solución general de nuestra relación tiene la siguiente forma:

$$f(n)=2^{n-1}[C_1+C_2n+C_3n^2]+C_4(-1)^{n-1}.$$

Aplicación de la teoría de las relaciones de recurrencia a los problemas de la transmisión de información.

Ya hemos considerado (véase la pág. 66) el problema sobre la cantidad de noticias diferentes que se pueden transmitir durante un tiempo T, si se conoce el tiempo de transmisión de señales aisladas. Llegamos entonces a la relación de recurrencia

$$f(T)=f(T-t_1)+f(T-t_2)+\ldots+f(T-t_n), \quad (30)$$

siendo $f(0)=1$ y $f(T)=0$, si $T<0$.

Consideraremos que los números $T, t_1, \ldots, t_n$ son enteros, y designaremos mediante $\lambda_1, \ldots, \ldots, \lambda_k$ las raíces de la ecuación característica de la relación (30). Entonces, la solución general de la ecuación adquiere la forma

$$f(T)=C_1\lambda_1^T+\ldots+C_k\lambda_k^T.$$

Sea λ_1 la mayor raíz de la ecuación característica, en valor absoluto. Entonces, para grandes valores de T todos los sumandos serán despreciablemente pequeños en comparación con el primero, y obtenemos que

$$f(T)\sim C_1\lambda_1^T.$$

Esta igualdad permite apreciar aproximadamente la cantidad de información que se puede transmitir durante un tiempo T mediante el sistema dado de señales.

TERCERA RESOLUCION DEL PROBLEMA DEL MAYORDOMO

Las dos resoluciones del problema del mayordomo, que hemos visto más arriba, conducían a relaciones de recurrencia. Ahora deduciremos una fórmula que da la solución de estas relaciones, una fórmula que permite calcular directamente el número de maneras de ubicar a los caballeros enemigos alrededor de la mesa. Para esto, apliquemos la fórmula de inclusiones y exclusiones. Sea α_k el suceso que consiste en que el k-ésimo par de caballeros enemistados está sentado junto. Calculemos a qué es igual $N(\alpha_1 \ldots \alpha_k)$, es decir, en cuántos casos hay sentados juntos k pares de enemigos. El primer par se puede ubicar a la mesa de $4n$ formas (escoger de $2n$ modos el lugar para uno, sentar al otro en el lugar siguiente en el sentido de las agujas del reloj, y tener en cuenta que los caballeros pueden cambiar de lugar). Para los demás caballeros quedarán $2n-2$ lugares, los que deben ocuparse de forma que el segundo, tercero, ..., k-ésimo pares de enemigos queden juntos. Unamos estos pares de caballeros en un solo «objeto». Estos $k-1$ pares y los $2n-2k$ caballeros restantes se pueden intercambiar entre sí de $(2n-k-1)!$ formas. Si se toma una de estas permutaciones y se sienta a los caballeros en orden en los lugares libres, los $k-1$ pares de enemigos escogidos quedarán juntos. Esta condición tampoco se violará en el caso en que cambiemos de lugar a algunos enemigos que se hallen juntos. Como estas permutaciones de lugar se pueden efectuar de 2^{k-1} maneras, obtenemos en total $4n2^{k-1}(2n-k-1)!$ modos de ubicación. Así, pues,

$$N(\alpha_1 \ldots \alpha_k)=2^{k+1}n(2n-k-1)!$$

Queremos hallar en cuántos casos ningún par de enemigos quede junto, es decir, calcular $N(\alpha_1' \ldots \ldots \alpha_n')$. Teniendo en cuenta que k pares se pueden escoger de C_k^n modos, obtenemos, en virtud de la fórmula de inclusiones y exclusiones, que

$$A_n=N(\alpha_1' \ldots \alpha_n')=(2n)!-C_1^n2^2n(2n-2)!+$$
$$+C_2^n2^3n(2n-3)!-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^kC_k^n2^{k+1}n(2n-k-1)!+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^n2^{n+1}n!.$$