

## Conferencia 4 - Grafo Hamiltoniano

18 de abril de 2025

**Definición** (Cadena Hamiltoniana). *Una cadena en un grafo  $G$  se dice Hamiltoniana si contiene a todos los vértices del grafo.*

**Definición** (Ciclo Hamiltoniano). *Un ciclo  $c$  en un grafo  $G$  se dice Hamiltoniano si contiene a todos los vértices del grafo.*

**Definición** (Grafo Hamiltoniano). *Un grafo  $G$  es un grafo Hamiltoniano si tiene un ciclo de Hamilton*

**Lema.** *Todo grafo completo  $G$ ,  $|V(G)| > 2$ , es Hamiltoniano.*

**Demostración** (Demostración por Inducción del Lema).

**Caso base:** para  $n = 3$  se tiene el ciclo  $\langle v_1, v_2, v_3, v_1 \rangle$  que es Hamiltoniano.

**Hipótesis:** Si se cumple que  $K_n$  es Hamiltoniano entonces  $K_{n+1}$  es Hamiltoniano.

**Paso inductivo:** Como se cumple para  $K_n$  existe un ciclo Hamiltoniano  $\langle v_1, v_2, \dots, v_n, v_1 \rangle$ , entonces si añade el vértice  $v_{n+1}$  a  $K_n$  de modo que como grafo resultante se tenga  $K_{n+1}$  ( $v_{n+1}$  enlazado a todos los vértices de  $K_n$ ) entonces se puede tener el ciclo  $\langle v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}, v_1 \rangle$  que es un ciclo Hamiltoniano ■.

**Teorema.** *Si un grafo  $G$  es Hamiltoniano entonces para cualquier subconjunto no vacío de vértices  $S$  de  $G$ , el número de componentes conexas del subgrafo  $G - S$  es menor o igual que  $|S|$ .*

**Demostración** (Demostración del Teorema).

Cuando se remueven los vértices de  $S$  de  $G$ , el ciclo Hamiltoniano se divide en  $|S|$  segmentos (cadenas de vértices consecutivos del ciclo que no contienen vértices de  $S$ ). Cada segmento corresponde a una componente conexa de  $G - S$  si no existen aristas adicionales en  $G$  que estén fuera del ciclo y que conecten a estos segmentos. Si existieran estas aristas, entonces conectarían segmentos y, con ello, se reduciría el número de componentes conexas. Luego, el número de componentes conexas del subgrafo  $G - S$  es menor o igual que  $|S|$  ■.

**Teorema** (Teorema de Dirac). *Sea  $G$  un grafo con  $|V(G)| = n$ ,  $n \geq 3$ , si para todo  $v$ ,  $v \in V(G)$  se tiene que  $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$  entonces  $G$  es Hamiltoniano.*

**Teorema** (Teorema de Ore). *Sea  $G$  un grafo con  $|V(G)| = n$ ,  $n \geq 3$ , si para todo par  $v, w$  de vértices no adyacentes se cumple que  $\deg(v) + \deg(w) \geq n$  entonces  $G$  es Hamiltoniano.*

**Demostración** (Demostración del Teorema de Dirac).

Vea que si  $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$  para todo  $v$  de  $G$ , entonces

$$\deg(v) + \deg(w) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$$

y si se cumpliera el **Teorema de Ore**, como ya se tiene su condición, entonces sería Hamiltoniano. Luego, solo habría que demostrar el **Teorema de Ore**.

Para demostrar el **Teorema de Ore** se utilizarán la definición de clausura y el **Teorema de Bondy-Chvátal**:

**Definición.** Dado  $G$ ,  $|V(G)| = n$  se define inductivamente la secuencia  $G_0, G_1, \dots, G_k$  de grafos donde  $G_0 = G$  y  $G_{i+1} = G_i + \{x, y\}$  donde  $x, y$  son vértices no adyacentes en  $G_i$  tal  $\deg(x) + \deg(y) \geq n$ , entonces  $G_k$  es la clausura de  $G$

O escrita de otra forma:

**Definición.** Dado un grafo  $G$  con  $n$  vértices, la clausura de  $G$  es el grafo que tiene los mismos vértices que  $G$  y que aparece al agregar todas las aristas de la forma  $\{u, v\}$  para cualquier par de vértices  $u$  y  $v$  que no sean adyacentes y cumplan que  $\deg(v) + \deg(u) \geq n$ .

**Teorema** (Teorema de Bondy-Chvátal).  $G$  es Hamiltoniano si y solo si su clausura es Hamiltoniana.

**Demostración** (Demostración del Teorema de Bondy-Chvátal).

En el sentido directo,  $G$  es Hamiltoniano  $\Rightarrow$  su clausura es Hamiltoniana, la demostración es obvia. Si  $G$  es Hamiltoniano entonces cualquier ciclo Hamiltoniano sigue existiendo en la clausura de  $G$  porque las aristas que se añaden al grafo original no afectan el ciclo (solo conectan vértices no adyacentes).

En el otro sentido, si la clausura de  $G$  es Hamiltoniana  $\Rightarrow G$  es Hamiltoniano, si se parte de  $G = G_0$  hasta llegar a  $G_k$ , clausura de  $G$ , bastaría con demostrar que  $G_i$  es Hamiltoniano ssi  $G_{i+1}$  también lo es.

Luego, si  $G_i$  es Hamiltoniano es obvio que  $G_{i+1}$  también lo es.

Ahora, veamos que pasa si  $G_{i+1}$  es Hamiltoniano.

Si en  $G_{i+1}$  hay un ciclo de Hamilton que no contiene a la arista  $\{x, y\}$  (la agregada que no estaba en  $G_i$ ), entonces este ciclo también aparecía en  $G_i$ .

Suponga que  $\{x, y\}$  si aparece en el ciclo, por tanto en el grafo  $G_i$ , como no está  $\{x, y\}$  habrá un ciclo Hamiltoniano:

$c = \langle v_0, v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$  donde  $v_0 = x$  y  $v_{n-1} = y$

obviamente todos los vértices que son adyacentes a  $x$  o a  $y$  aparecen en el camino puesto que este contiene a todos los vértices del grafo.

Suponga que no existe un vértice  $v_i$  de camino que sea adyacente a  $y$ , y que  $v_{i+1}$  sea adyacente a  $x$ .

Luego, se conoce que  $\deg(y) \leq n - 1$  y, además, sabemos que  $y$  al menos no tiene de vértices adyacentes la misma cantidad de vértices que son adyacentes a  $x$  (por cada vértice en el camino a  $x$  se sabe que el anterior no es adyacente a  $y$ ) por tanto  $\deg(y) \leq n - 1 - \deg(x)$  luego  $\deg(y) + \deg(x) \leq n - 1$ . Y esto es una contradicción!!

(como se añadió  $\{x, y\}$  a  $G_{i+1}$  entonces  $\deg(x) + \deg(y) \geq n$ )

Entonces lo supuesto es falso, por tanto existe  $v_i$  en  $c$  tal que  $v_i$  es adyacente a  $y$ , y  $v_{i+1}$  es adyacente a  $x$ .

Por tanto se puede tomar el ciclo  $\langle v_0 = x, v_{i+1}, \dots, v_{n-1} = y, v_i, v_{i-1}, \dots, v_1, v_0 = x \rangle$  que es un ciclo Hamiltoniano.

Luego  $G$  es Hamiltoniano si y solo si su clausura lo es ■.

**Demostración** (Demostración del Teorema de Ore).

Note que si  $G$  cumple las condiciones de Ore entonces la clausura es  $K_n$  y todo grafo completo es claramente Hamiltoniano, luego por el lema  $G$  es Hamiltoniano ■.

**Corolario** (Corolario del **Teorema de Ore**). *Si  $G$  es un grafo conexo, simple y sin lazos con  $n$  vértices, con  $n \geq 3$ , en el cual  $\deg(u) + \deg(v) \geq n - 1$  para todo par de vértices no adyacentes  $u, v$ , entonces  $G$  posee un camino Hamiltoniano.*

**Demostración** (Demostración del Corolario del **Teorema de Ore**).

Como  $G$  es conexo, sin lazos, y con  $n$  vértices, entonces no contiene un ciclo Hamiltoniano. Ahora, si creamos el grafo  $G'$  a partir de añadir el vértice  $w$  y conectarlo con todos los vértices existentes se cumpliría ahora que  $\deg(u) + \deg(v) \geq n - 1 + 2 = n + 1$  para todo par de vértices  $u, v$  no adyacentes, luego  $G'$  es Hamiltoniano por el **Teorema de Ore**.

Entonces existe un ciclo Hamiltoniano en  $G'$  y este tiene que pasar por el vértice  $w$ , porque si no pasara por  $w$  significaría que existían un ciclo en  $G$  y este, por definición, no lo tenía. Entonces como hay un ciclo Hamiltoniano en  $G'$  que pasa por  $w$ , basta con eliminar este vértice y se tendría para  $G$  un camino Hamiltoniano ■.