Clase práctica 7

May 19, 2025

1. Un *vertex cover* de un grafo, es un conjunto de vértices U tal que para toda arista del grafo se tiene que U tiene al menos uno de sus extremos. Sea G un grafo bipartito, demuestre que el tamaño del *matching* máximo es igual al tamaño del *vertex cover* mínimo. **Teorema de Köning**.

2. Sea $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito, con particiones A y B. Demuestre que existe un *matching* que satura a A si y solo si se cumple *marriage condition*, $\forall S \subseteq A : |S| \leq |N(S)|$ siendo $N(S)$ la vecindad (*neighborhood*) de S. **Teorema de Hall**.

   (a) Demuestrelo utilizando inducción.

   (b) Demuestrelo utilizando el **Teorema de Köning**.

3. Sea $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito, con particiones A y B. Demuestre que existe un *matching* de cardinalidad $|A| - d$ si se cumple que, $\forall S \subseteq A :$ $|S| - d \leq |N(S)|$.

4. Si G es un grafo bipartito regular de grado $k > 0$, entonces en G hay k emparejamientos perfectos disjuntos.

5. Sean M un emparejamiento máximo y M' un emparejamiento maximal de un grafo G. Demuestre que $\frac{|M|}{2} \leq |M'|$.

6. Demuestre que para todo grafo G con una cantidad par de vértices n, donde se cumple que $\forall u, v \in V(G)$ no adyacentes $deg(v) + deg(u) \geq n - 1$ entonces en G existe un emparejamiento perfecto.