Matemática discreta II - Examen Final
Curso 2024

Nombre y apellidos: ______________________________ Grupo: ________

1. Sea G un grafo conexo con al menos 3 vértices. Demuestre que G tiene 2 vértices x, y tales que:
   - $G - \{x, y\}$ es conexo.
   - x y y son adyacentes o tienen un vecino en común.
2. Un grafo planar G es bipartito si y solo si cada cara tiene longitud par.
3. Una lista de pares de enteros no negativos es realizable como la secuencia de grados de un digrafo si y solo si la suma de las primeras coordenadas es igual a la suma de las segundas coordenadas (se permiten múltiples aristas).
4. Sea A una matriz cuadrada de enteros no negativos de $n \times n$ tal que los números de cada fila y columna suman m. Definimos como matriz permutación a una matriz de 0 y 1 que cumple que cada fila y cada columna suman 1. Pruebe que A puede ser expresada como la suma de m matrices permutaciones.
5. Construya una Máquina de Turing (MT) que reconozca el lenguaje de los números ternarios divisibles por 5.
   a) Si se construyen MT que reconozcan el lenguaje de los números ternarios divisibles por N, con N arbitrario, ¿es posible construir una sola MT que pueda ejecutar cualquiera de las MT que reconocen la divisibilidad de los números ternarios? Fundamente su respuesta.
6. Demuestre que $f(n) = \sum_{i=0}^{n} i^3$ es primitiva recursiva.

Matemática discreta II - Examen Final
Curso 2024

Nombre y apellidos: ______________________________ Grupo: ________


Eh, ¿Y dónde está el meme?

1. Sea G un grafo conexo con al menos 3 vértices. Demuestre que G tiene 2 vértices x, y tales que:
   - $G - \{x, y\}$ es conexo.
   - x y y son adyacentes o tienen un vecino en común.
2. Un grafo planar G es bipartito si y solo si cada cara tiene longitud par.
3. Una lista de pares de enteros no negativos es realizable como la secuencia de grados de un digrafo si y solo si la suma de las primeras coordenadas es igual a la suma de las segundas coordenadas (se permiten múltiples aristas).
4. Sea A una matriz cuadrada de enteros no negativos de $n \times n$ tal que los números de cada fila y columna suman m. Definimos como matriz permutación a una matriz de 0 y 1 que cumple que cada fila y cada columna suman 1. Pruebe que A puede ser expresada como la suma de m matrices permutaciones.
5. Construya una Máquina de Turing (MT) que reconozca el lenguaje de los números ternarios divisibles por 5.
   a) Si se construyen MT que reconozcan el lenguaje de los números ternarios divisibles por N, con N arbitrario, ¿es posible construir una sola MT que pueda ejecutar cualquiera de las MT que reconocen la divisibilidad de los números ternarios? Fundamente su respuesta.
6. Demuestre que $f(n) = \sum_{i=0}^{n} i^3$ es primitiva recursiva.