Clase práctica 1

September 11, 2025

1. Sea $k \in \mathbf{Z}^+$. Demuestre que k divide a todo producto de k enteros consecutivos.

   (a) Demuestre que $k!$ divide al producto de k enteros consecutivos.

2. Un entero $n > 1$ es especial si para todo $k \in \mathbf{Z}^+$, con $k \leq n$ se puede escribir como suma de divisores distintos de n. Demuestre que si p y q son especiales entonces pq es especial.

3. Determine el número de formas de descomponer a n en sumandos donde el orden no es relevante y la diferencia modular de cualquier par de sumandos es a lo sumo 1.

4. Sea $n \in \mathbf{Z}^+$. Demuestre que existen infinitos múltiplos de n que contienen a todos los dígitos decimales.

5. Demuestre que con los valores 4 y 5 se puede obtener cualquier valor n, $n \geq 12$ como sumas de esos números, $(n = 4p + 5q)$

6. Todo polígono simple con n lados, $n \geq 3$ puede ser triangulado en $n - 2$ triángulos.

   - Nota 1: Un polígono es simple si cualquiera de sus lados no consecutivos no se intersectan.
   - Nota 2: El proceso de triangulación de un polígono se obtiene al dividirlo en triángulos agregando diagonales que no se intersectan.
   - Nota 3: Se cumple que en cualquier polígono simple con al menos 4 lados, existe una diagonal interior.

7. Se tiene una matriz de $128 * 128$, demuestre que, si se quita una cuadrícula aleatoria entonces se puede completar la matriz utilizando cuadrículas en forma de L de tamaño 3.

8. Se tiene el polinomio $p(x) = (x-a)(x-b)(x-c)...(x-y)(x-z)$, se cumple que $a + b + c + ... + y + z = 100$. Calcule $p(1024)$.