

## Conferencia 4 - Grafo Hamiltoniano

7 de mayo de 2025

**Definición** (Camino Hamiltoniano o Cadena Hamiltoniana). *Un camino  $P = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$  es Hamiltoniano si  $P$  es simple y contiene a todos los vértices del grafo.*

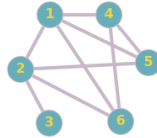


Figura 1: En el Grafo, el camino  $\langle 3, 2, 1, 6, 4, 5 \rangle$  es Hamiltoniano.

**Definición** (Ciclo de Hamilton). *Un ciclo  $C = \langle v_1, v_2, \dots, v_k, v_1 \rangle$  en un grafo  $G$  se dice de Hamilton (Hamiltoniano) si contiene a todos los vértices del grafo.*

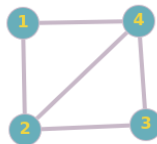
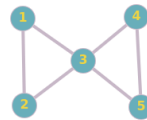
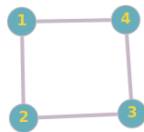


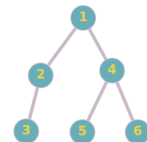
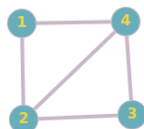
Figura 2: En el Grafo, el ciclo  $\langle 1, 2, 3, 4, 1 \rangle$  es Hamiltoniano.

**Definición** (Grafo Hamiltoniano). *Un grafo conexo es Hamiltoniano si tiene un ciclo de Hamilton.*

**Nota:** Aunque las definiciones de *Grafo Euleriano* y *Grafo Hamiltoniano* son similares (el primero busca recorrer todas las aristas del grafo sin repetirlas y el segundo recorrer todos los vértices sin repetición) no existe ninguna relación entre estas clasificaciones en un grafo. Es decir un grafo  $G$  puede ser Hamiltoniano y no ser Euleriano y viceversa.



(a) Grafo Hamiltoniano y Euleriano (b) Grafo Euleriano y no Hamiltoniano



(c) Grafo Hamiltoniano y no Euleriano (d) Grafo ni Hamiltoniano ni Euleriano

**Lema.** *Todo grafo completo  $G$ ,  $|V(G)| \geq 3$ , es Hamiltoniano.*

**Demostración** (Demostración por Inducción en  $n = |V(G)|$ ).

**Caso base:** Para  $n = 3$ ,  $K_3$  tiene el ciclo  $\langle v_1, v_2, v_3, v_1 \rangle$  que es Hamiltoniano.

**Hipótesis:** Supongamos que el grafo completo de  $n$  vértices ( $K_n$ ) posee un ciclo de Hamilton.

**Paso inductivo:** Sea  $G$  un grafo completo de  $n + 1$  vértices ( $K_{n+1}$ ), si construimos  $G' = G - v$  (le quitamos un vértice a  $G$ ), el grafo  $G'$  es  $K_n$ , es decir es un grafo completo de  $n$  vértices. En  $G'$  se cumple la hipótesis de inducción, luego en  $G'$  hay un ciclo de Hamilton. Sea el ciclo Hamiltoniano  $C = \langle v_1, v_2, \dots, v_n, v_1 \rangle$  de  $G'$ , entonces si se añade nuevamente el vértice  $v$  y todas sus aristas se vuelve a obtener  $K_{n+1}$  y como  $v$  está enlazado a todos los demás vértices, sabemos que las aristas  $\{v, v_n\}$  y  $\{v, v_1\} \in E(G)$ , entonces se puede tener el ciclo  $C' = \langle v_1, v_2, \dots, v_n, v, v_1 \rangle$  que es un ciclo Hamiltoniano en  $K_{n+1}$  ■.

**Teorema.** *Si un grafo  $G$  es Hamiltoniano entonces para cualquier subconjunto no vacío de vértices  $S$  de  $G$ , el número de componentes conexas del subgrafo  $G - S$  es menor o igual que  $|S|$ .*

**Demostración** (Demostración del Teorema).

Como  $G$  es Hamiltoniano, tiene un ciclo que es de Hamilton. Cuando se remueven los vértices del conjunto  $S$  de  $G$ , el ciclo Hamiltoniano se divide en a lo sumo  $|S|$  segmentos (cadenas de vértices consecutivos del ciclo que no contienen vértices de  $S$ ). Cada segmento corresponde a una componente conexa de  $G - S$  si no existen aristas adicionales en  $G$  que estén fuera del ciclo y que conecten a estos segmentos. Si existieran estas aristas, entonces conectarían segmentos y, con ello, se reduciría el número de componentes conexas. Luego, el número de componente conexas del subgrafo  $G - S$  es menor o igual que  $|S|$  ■.

**Definición** (Clausura de un Grafo). *Dado un grafo  $G$  con  $|V(G)| = n$ , se define inductivamente la secuencia de grafos  $G_0, G_1, \dots, G_k$ , donde  $G_0 = G$  y  $G_{i+1} = G_i + \{u, v\}$ , donde  $u, v$  son vértices no adyacentes de  $G_i$  tales que  $\deg_{G_i}(v) + \deg_{G_i}(u) \geq n$ . Tras aplicar este procedimiento, el último grafo que se obtiene es la clausura de  $G$  y se denota  $\text{clausura}(G)$*

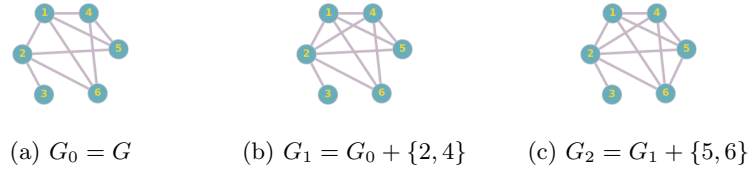


Figura 4: Ejemplo del proceso de obtención de la clausura, en el ejemplo en grafo  $G_2$  es la  $\text{clausura}(G)$

**Teorema.** *La operación de clausura de un grafo, es una operación bien definida. (Sin importar el orden en que se adicionen las aristas durante la construcción de los  $G_i$  intermedios, el grafo final, que es la clausura de  $G$  es siempre el mismo)*

**Demostración** (Reducción al absurdo).

Sean  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$  y  $F = \{f_1, f_2, \dots, f_r\}$ , dos formas de construir la clausura de un grafo  $G$ . Es decir, la primera es  $G_0 = G$ ,  $G_1 = G + e_1$ ,  $G_2 = G_1 + e_2, \dots$ ,  $clausura_E(G) = G_{p-1} + e_p$ ; y la otra forma sería  $G_0 = G$ ,  $G_1 = G_0 + f_1$ ,  $G_2 = G_1 + f_2, \dots$ ,  $clausura_F(G) = G_{r-1} + f_r$ . Para demostrar que  $clausura_E(G) = clausura_F(G)$ , basta con demostrar que  $E = F$ , para esto demostraremos que  $E \subseteq F$  y  $F \subseteq E$ .

Para demostrar que  $E \subseteq F$  hagamos una reducción al absurdo, supongamos que esto no se cumple, entonces existen aristas en  $E$  que no pertenecen al conjunto  $F$ . Tomemos del conjunto  $E/F$  (que asumimos no vacío) la arista con menor índice, sea esta  $e_i$ . Como  $e_i$  se agrega a la clausura uniendo los vértices no adyacentes  $u, v$  donde  $deg_{G_{i-1}}(v) + deg_{G_{i-1}}(u) \geq n$ . De donde

$$deg_{G_{i-1}}(v) = deg_G(v) + X_v$$

con  $X_v \geq 0$  siendo la cantidad de aristas en el conjunto  $\{e_1, \dots, e_{i-1}\}$  que inciden en  $v$ , análogamente

$$deg_{G_{i-1}}(u) = deg_G(u) + X_u$$

Como todos los  $e_j, 1 \leq j \leq i-1$  pertenecen a  $F$  entonces el conjunto  $F = \{e_1, \dots, e_{i-1}\} \cup \{f_1, f_2, \dots, f_r\} / \{e_1, \dots, e_{i-1}\}$ , de donde en la clausura construida por las aristas de conjunto  $F$  se tiene que:

$$deg_{clausura_F}(v) = deg_G(v) + X_v + Y_v$$

con  $Y_v \geq 0$  cantidad de aristas del conjunto  $\{f_1, f_2, \dots, f_r\} / \{e_1, \dots, e_{i-1}\}$  que inciden en  $v$ , análogamente para  $u$ :

$$deg_{clausura_F}(u) = deg_G(u) + X_u + Y_u$$

con  $Y_u \geq 0$  cantidad de aristas del conjunto  $\{f_1, f_2, \dots, f_r\} / \{e_1, \dots, e_{i-1}\}$  que inciden en  $u$ , de donde:

$$\begin{aligned} deg_{clausura_F}(v) + deg_{clausura_F}(u) &= deg_G(v) + X_v + Y_v + deg_G(u) + X_u + Y_u \geq \\ &\geq deg_{G_{i-1}}(v) + deg_{G_{i-1}}(u) \geq n \end{aligned}$$

Por tanto la arista  $\{u, v\}$  se puede agregar a la  $clausura_F$ , resultando en una iteración más en el algoritmo de obtención de la clausura, pero esto es una contradicción ya que el grafo  $clausura_F(G)$  tiene que ser el último que se obtenga, de donde lo supuesto es falso y todas las aristas de  $E$  pertenecen a  $F$ , es decir  $E \subseteq F$ .

La demostración de  $F \subseteq E$  es análoga a esta, por tanto  $E = F$  y  $clausura_E(G) = clausura_F(G)$ .

La clausura es una operación bien definida ■.

**Teorema** (Bondy-Chvátal). Sea  $G$  un grafo donde  $|V(G)| \geq 3$ ,  $G$  es Hamiltoniano  $\Leftrightarrow clausura(G)$  es Hamiltoniano.

Demostrar este teorema es equivalente a demostrar que:  $G_i$  es Hamiltoniano  $\Leftrightarrow G_{i+1}$  es Hamiltoniano. Si se demuestra esto, entonces siguiendo la cadena de transitividad queda demostrado que:  $G$  es Hamiltoniano  $\Leftrightarrow \text{clausura}(G)$  es Hamiltoniano.

**Demostración ( $\Rightarrow$ ).** Si  $G_i$  es Hamiltoniano entonces  $G_{i+1}$  es Hamiltoniano

Como  $G_i$  es Hamiltoniano, entonces posee un ciclo de Hamilton. Sea  $C = \langle v_1, v_2, \dots, v_k, v_1 \rangle$  el ciclo de Hamilton de  $G_i$ , este ciclo también está presente en  $G_{i+1}$ , porque  $G_{i+1}$  no es más que  $G_i$  con una arista agregada. Luego  $G_{i+1}$  es Hamiltoniano.

**Demostración ( $\Leftarrow$ ).** Si  $G_{i+1}$  es Hamiltoniano  $\Rightarrow G_i$  es Hamiltoniano

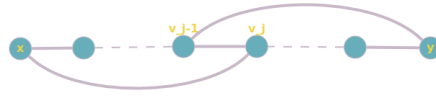
Sabemos que  $G_{i+1} = G_i + \{x, y\}$  donde  $x, y$  son vértices no adyacentes en  $G_i$  tales que  $\deg_{G_i}(x) + \deg_{G_i}(y) \geq n$ .

Como  $G_{i+1}$  es Hamiltoniano, si el ciclo Hamiltoniano de  $G_{i+1}$  no contiene a la arista  $\{x, y\}$  (la agregada que no estaba en  $G_i$ ), entonces este ciclo también aparecía en  $G_i$ , de donde  $G_i$  es Hamiltoniano.

Si  $\{x, y\}$  sí aparece en el ciclo, en el grafo  $G_i$ , como no está  $\{x, y\}$ , pero si las restantes aristas, habrá un camino Hamiltoniano:

$C = \langle v_0, v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$  donde  $v_0 = x$  y  $v_{n-1} = y$ .

Construyamos entonces un ciclo Hamiltoniano que no utilice la arista  $\{x, y\}$ , nótese que en la cadena  $C$ , tiene que existir algún vértice  $v_j$  tal que  $v_j$  sea adyacente a  $x$  y  $v_{j-1}$  sea adyacente a  $y$ .



Supongamos que esto no ocurra, entonces por cada adyacente a  $x$  en la cadena, el vértice anterior a este no puede ser adyacente a  $y$ , como la cadena es Hamiltoniana, contiene a todos los adyacentes de  $x$ , de donde  $\deg(y) \leq n - 1 - \deg(x)$ , de donde  $\deg(y) + \deg(x) \leq n - 1$ , pero sabemos que esto no es posible, puesto que la arista  $\{x, y\}$  se agrega a la clausura en el grafo  $G_{i+1}$  y esto solo se hace si los vértices no adyacentes  $x, y$  cumplen que  $\deg(x) + \deg(y) \geq n$ .

Entonces lo supuesto es falso, por tanto existe  $v_j$  en  $C$  tal que  $v_j$  es adyacente a  $x$ , y  $v_{j-1}$  es adyacente a  $y$ .

Por tanto se puede tomar el ciclo  $\langle v_0 = x, v_j, \dots, v_{n-1} = y, v_{j-1}, v_{j-2}, \dots, v_1, v_0 = x \rangle$  que es un ciclo Hamiltoniano.

Luego  $G$  es Hamiltoniano si y solo si su clausura lo es ■.

**Teorema (Dirac).** Sea  $G$  un grafo donde  $|V(G)| = n \geq 3$ , si  $\forall v \deg(v) \geq \frac{n}{2} \Rightarrow G$  es Hamiltoniano

**Teorema (Ore).** Sea  $G$  un grafo donde  $|V(G)| = n \geq 3$ , si  $\forall u, v$  no adyacentes  $\deg(u) + \deg(v) \geq n \Rightarrow G$  es Hamiltoniano

**Demostración (Directa).**

Nótese que el cumplimiento del *Teorema de Ore* implica el cumplimiento del *Teorema de Dirac*. Si en un grafo todos los vértices tienen grado mayor o igual a  $\frac{n}{2}$ , entonces para cualquier pareja de vértices no adyacentes  $u, v$ ,  $\deg(u) + \deg(v) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$ , donde el grafo cumple la hipótesis de *Ore*.

Luego basta con demostrar el *Teorema de Ore*. Como en  $G$  todos los vértices  $u, v$  no adyacentes cumplen que  $\deg(u) + \deg(v) \geq n$  entonces la *clausura*( $G$ ) =  $K_n$ , que sabemos tiene un ciclo de Hamilton, luego por el **Teorema de Bondy-Chvátal**,  $G$  es Hamiltoniano.

**Nota:** Ambos teoremas son condiciones suficientes pero no necesarias, un grafo puede ser Hamiltoniano sin que sus vértices cumplan esta condición, por ejemplo:

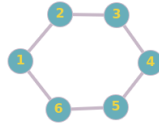


Figura 5:  $C_6$  es Hamiltoniano y sin embargo todos sus vértices son de grado 2, por lo que la suma de los no adyacentes es  $4 < 6$ .

**Corolario** (Corolario del **Teorema de Ore**). Si  $G$  es un grafo conexo,  $n$  vértices, con  $n \geq 3$ , en el cual  $\deg(u) + \deg(v) \geq n - 1$  para todo par de vértices no adyacentes  $u, v$ , entonces  $G$  posee un camino Hamiltoniano.

**Demostración** (Demostración del Corolario del **Teorema de Ore**).

Sabemos que  $G$  es conexo, y con  $n$  vértices. Creamos el grafo  $G' = G + w$ , a partir de añadir el vértice  $w$  y este lo conectamos con todos los vértices existentes. En  $G'$  se cumpliría que

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n - 1 + 2 = n + 1$$

para todo par de vértices  $u, v$  no adyacentes, luego  $G'$  es Hamiltoniano por el **Teorema de Ore**.

Entonces existe un ciclo Hamiltoniano en  $G'$  y este tiene que pasar por el vértice  $w$ . Entonces basta con eliminar este vértice y se tendría para  $G$  un camino Hamiltoniano ■.