Conferencia 8 - Combinatoria

November 10, 2025

Teorema. *El número de palabras de tamaño k en un alfabeto de n letras es n^k.*

Demostración. *Por principio de la multiplicación tenemos n opciones para cada posición de la palabra, y son k posiciones por tanto n^k.*

Teorema. *Repartir n objetos distintos en k categorías diferentes es k^n.*

Demostración. *Para cada uno de los objetos se decide en cual de las n categorías va a estar, como para cada uno hay n opciones, por principio de multiplicación es k^n.*

Teorema. *Binomio de Newton.*

Sean n un entero no negativo, a, b números cualesquiera.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$\binom{n}{k}$ se conocen como coeficientes binomiales

Demostración. *Considere el producto $(a+b) * ... * (a+b)$, cada sumando que resulta se puede ver como una palabra de tamaño n que solo tiene a y b. Nótese que todas las cadenas posibles son creadas (2^n), porque en cada $(a+b)$ se usa la a o la b. Luego de tener todos estos sumandos se pueden agrupar por la misma cantidad de a (de esta forma también se fija la misma cantidad de b), entonces tendremos una cantidad de sumandos con $n-k$ a y k b igual a $\binom{n}{k}$*

Propiedades de los Coeficientes

1. $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

   Demostración

   $\binom{n}{k}$ representa la cantidad de formas en que se pueden seleccionar k elementos de un conjunto que posee n elementos, esto pudiera verse como de cuántas formas puede particionarse el conjunto de n elementos en dos categorías A y B de modo que la categoría A tenga k elementos y B los $n-k$ elementos restantes, de donde el número de particiones en los conjuntos A y B también se pudieran contar a partir de conocer de cúantas formas podemos poner $n-k$ elementos en el conjunto B y dejar los k restantes en el conjunto A, valor que se obtiene mediante la expresión $\binom{n}{n-k}$.

   Luego $\binom{n}{k}$=$\binom{n}{n-k}$

2.
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Demostración

$\binom{n}{k}$ es la cantidad de subconjuntos de tamaño k que pueden obtenerse de un conjunto con cardinalidad n.

Esta cantidad es también igual a la cantidad de subconjuntos de tamaño k en la que no aparece un elemento a_i más la cantidad de conjuntos del mismo tamaño en los que sí aparece.

La cantidad de conjuntos en los que no aparece a_i es igual a $\binom{n-1}{k}$

La cantidad de conjuntos en los que sí aparece a_i es igual a $\binom{n-1}{k-1}$

Luego $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$

3.
$$k\binom{n}{k} = (n-k+1)\binom{n}{k-1} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Demostración

Las tres expresiones cuentan el número de formas de seleccionar un subgrupo de k personas de un grupo de n personas y asignar a uno como líder.

La primera expresiín cuenta de cuántas formas se puede seleccionar k de n y de los k seleccionados escoger uno de ellos para ser el líder, lo cual por principio de multiplicación queda $k\binom{n}{k}$.

La segunda expresión cuenta de cuántas formas se puede seleccionar $k-1$ personas del grupo y de las restantes seleccionar a una como líder y agregarla a la selección anterior, teniendose finalmente cuantos subgrupos hay de k personas y una de ellas líder $(n-k+1)\binom{n}{k-1}$.

La tercera expresión cuanta de cuantas formas se puede selccionar al líder entre las n personas del grupo y luego seleccionar a $k-1$ miembros de las $n-1$ personas restantes, contando de igual modo los subgrupos de k personas donde una de ellas es líder.

4.
$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

o lo que es lo mismo $\sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k}=\binom{n+1}{k+1}$

Demostración

El miembro derecho de la igualdad represnta el número de formas en que se pueden seleccionar $k+1$ elementos de un conjunto de $n+1$ elementos. De igual modo cada sumando de la parte izquierda de la igualdad representa de cuantas formas seleccionar $k+1$ elementos de un conjunto de n elementos, pero en cada uno fijando que el $k+1$-ésimo elemento es el que ocupa la posicion $k+i+1$ y que los restantes k elementos se toman de la posicion 1 a la $k+i$. Es decir:

$\binom{k}{k}$ cuenta los casos donde el se toman k elementos desde el 1 al k y el elemento $k+1$ es el que toma la posicion $k+1$.

$\binom{k+1}{k}$ cuenta los casos donde el se toman k elemantos desde el 1 al $k+1$ y el elemento $k+1$ es el que toma la posicion $k+2$.

$\binom{k+2}{k}$ cuenta los casos donde el se toman k elementos desde el 1 al $k+2$ y el elemento $k+1$ es el que toma la posicion $k+3$.

y así sucesivamente hasta que $\binom{n}{k}$ cuenta los casos donde el se toman k elementos desde el 1 al n y el elemento $k+1$ es el que toma la posicion $n+1$.

Al sumar todos estos términos se obtiene en general el número de formas de escoger $k+1$ elementos de un conjunto de $n+1$ elementos.

Definición. *Un multiconjunto es el par $< A, m >$ donde A es un conjunto y m es una función $m : A \to \mathbb{N}$.*

Se dice que para cada a de A la multiplicidad de a es el número $m(a)$.

Si el conjunto A es finito entonces el tamaño o longitud del multiconjunto $< A, m >$ es la suma de todas las multiplicidades de los elementos de A, o sea, $\sum_{a \in A} m(a)$

Un submulticonjunto $< B, n >$ del multiconjunto $< A, m >$ cumple que $B \subseteq A$ y $n : B \to \mathbb{N}$ tal que $n(x) \leq m(x)$ para todo $x \in B$

Teorema. *Sea un multiconjunto N con n objetos donde hay n_1 objetos de tipo 1, n_2 objetos de tipo 2 y así hasta n_k objetos de tipo k donde $n = \sum_{i=1}^{k} a_i$ Entonces el número de permutaciones distintas de N es*

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

Demostración. *Sea P el número total de permutaciones de un conjunto de n elementos, sabemos que $P = n!$, luego sea X el número total de permutaciones sin repeticiones, por cada permutación que se haya contado en X, si en dicha permutacion intercambiamos los n_1 objetos de tipo 1 seguimos obteniendo permutaciones iguales, pero que en P se cuentan como diferentes, lo mismo con los n_2 objetos de tipo 2 y en general con los n_i objetos de tipo i; esto por principio de la multiplicación sería $Xn_1!n_2!...n_k!$ y aquí como por cada permutación diferente estamos contando todas sus réplicas que se generan al permutar los objetos iguales entre sí, en general estamos contando todas las permutaciones del conjunto de n elementos, luego $P = Xn_1!n_2!...n_k!$ de donde $X = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$*

Ejemplo
Pruebe que $k!^{(k-1)!}|(k!)!$

Si se tiene un conjunto de $k!$ elementos donde hay $(k-1)!$ tipos diferentes y de cada tipo hay k elementos entonces la cantidad de permutaciones distintas de este conjunto es

$$\frac{(k!)!}{k!k!\dots k!} = \frac{(k!)!}{k!^{(k-1)!}}$$

luego como el número de permutaciones es un número entero entonces $k!^{(k-1)!}|(k!)!$

Teorema. *El número de formas de particionar un conjunto de n elementos distintos en k categorías diferentes de forma que haya n_1 objetos en la categoría 1, n_2 objetos en la categoría 2 y así hasta llegar a n_k objetos en la categoría k, donde $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ es $\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$*

Demostración Podemos contar las palabras de tamaño n donde hayan n_i letras del tipo i y que la suma de los n_i sea n. Y asociar cada palabra a una distribución de los n objetos asignando el objeto j a la letra que le corresponde y tratando dicha letra como una categoría.

Teorema. *El número de formas de particionar n objetos iguales en k categorías diferentes es*

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

Demostración Este problema es equivalente a tener una secuencia de $n+k-1$ elementos iguales y convertir a $k-1$ de estos elementos en separadores.

Luego, la solución tenemos el conjuntos de todas las posibles combinaciones de $k-1$ posiciones que pueden ser seleccionadas como separadores y esto es $\binom{n+k-1}{k-1}$

Teorema. *El número de formas de particionar n objetos iguales en k categorías diferentes de modo que ninguna categoría quede vacía es*

$$\binom{n-1}{k-1}$$

Demostración La idea de solución es igual que la anterior de tomar $n+k-1$ y de ellos seleccionar $k-1$ como de ellos como separadores, pero es necesario garantizar que ninguna categoría quede vacía, entonces de mis n elementos iniciales tomo k, para garantizar que puedo asignar uno de ellos a cada categoría y luego proceso a agregar la $k-1$ barritas teniendo $\binom{n-k+k-1}{k-1}=\binom{n-1}{k-1}$

Definición. *Estos dos últimos problemas también son conocidos como composición y composición débil de n. Formalmente:*

Una secuencia $(a_1, a_2, ..., a_k)$ de enteros tales que $a_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{k} a_i = n$ es llamada una composición débil de n, además si $a_i > 0$ entonces es llamada una composición de n.

Teorema. *El número de composiciones de n es 2^{n-1}.*

Demostración. *Notemos que se puede tomar la suma de las composiciones de n para todas las k. Pero una demostración menos algebráica consiste en una inducción, haciendo ver que existe una forma de construir las composiciones de n a partir de las de $n-1$.*

Definición. *una partición de N_n es una colección de conjuntos no vacíos tales que cada elemento de N_n pertenezca a exactamente un conjunto de la colección. El número de particiones de N_n en k conjuntos no vacíos se denota por $S(n,k)$, es llamado número de Stirling de segundo tipo.*

Definición. *El número de todas las particiones de N_n es denotado como $B(n)$ y conocido como n-ésimo número de Bell.*