Clase práctica 9

November 19, 2025

1. Sea $S(n,m)$ (número de Stirling de 2^{do} tipo) la cantidad de formas de repartir n objetos distintos en m cajas idénticas tal que ninguna caja quede vacía.
   (a) De una expresión para calcular $S(n,m)$.
   (b) Demuestre que si $n < m$ se cumple que $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^n = 0$
   (c) Demuestre que $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^n = n!$.

2. Sea $A = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ y S un subconjunto de A de tamaño $n+1$. Prueba que existen dos elementos $a, b \in S$ tal que a divide a b.

3. Se dice que una permutación $a_1, a_2, ..., a_n$ tiene un punto fijo i si $a_i = i$. Sea $D(n,r,k)$ la cantidad de r-permutaciones del conjunto N_n tales que tienen k puntos fijos.
   (a) De una expresión para calcular $D(n,r,k)$.
   (b) Demuestre que $D(n,r,k) = \binom{r}{k}D(n-k, r-k, 0)$.
   (c) Si $D(n,n,0)$ es la cantidad de desarreglos de tamaño n, demuestre que $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$.

4. Determine el número de soluciones enteras de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 21$ con:
   - $2 \leq x_1 \leq 5$
   - $3 \leq x_2 \leq 7$
   - $0 \leq x_3 \leq 6$
   - $2 \leq x_4 \leq 10$

5. Sea $X \subset \{1, 2, ..., 99\}$ tal que $|X| = 10$. Demuestre que siempre se puede seleccionar dos subconjuntos propios, disjuntos, no vacíos (Y, Z) de X tales que $\sum_{y_i \in Y} y_i = \sum_{z_i \in Z} z_i$

6. Sea A una lista de tamaño $n^2 + 1$ sin elementos repetidos. Demuestre que siempre se puede seleccionar una sublista de A creciente o decreciente de tamaño $n + 1$.

7. El señor y la señora Smith invitan a 4 parejas a una fiesta en su casa. Algunos de los invitados son amigos del señor Smith y algunos son amigos de la señora Smith. A medida que van llegando los invitados se saludan entre sí, si se conocian se dan un beso, sino se dan la mano. Después de que todos llegan el señor Smith se da cuenta que entre las demás personas (sin contarse a el mismo) no hay dos personas que dieron la misma cantidad de besos. Cuántos besos dió la señora Smith?.