Conferencia 5 - Coloración

3 de mayo de 2025

Definición. *Sea G un grafo y k, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, una k-coloración se define como una función $f : V(G) \to \{0, 1, 2, \ldots, k\}$*

Definición. *Una k-coloración se dice propia si $\forall \{v, w\} \in E(G)$ se tiene que $f(v) \neq f(w)$. Si G tiene una k-coloración propia se dice que G es k-coloreable.*

Definición. *Se llama número cromático de G, $\chi(G)$, al menor k tal que G es k-coloreable*

Observaciones:

- $\chi(K_n) = n$
- $\chi(C_{2k}) = 2$
- $\chi(C_{2k+1}) = 3$
- Si un grafo es bipartito es 2-coloreable
- El número cromático es la menor cantidad de conjuntos independientes que se pueden formar en G
- Si H es subgrafo de G entonces $\chi(H) \leq \chi(G)$
- $w(G) \leq \chi(G)$, donde w es el número de clique de G

Definición. *Un grafo G es k-crítico si $\forall v \in V(G)$ se tiene que $\chi(G-v) < \chi(G)$*

Nota: $\chi(G - v) = \chi(G) - 1$

Teorema. *Si G es un grafo k-crítico con $k \geq 2$ entonces G es conexo y $\delta(G) \geq k - 1$*

Demostración.

Demostremos que G es conexo

Suponga que G es k-crítico y no es conexo, entonces se descompone en t componentes conexas $c_1, c_2, \ldots, c_t$, luego $k = max(\chi(c_1), \chi(c_2), \ldots, \chi(c_t))$ por lo que existe un i tal que $1 \leq i \leq t$ y $\chi(c_i) = k$ entonces es posible quitar cualquier vértice de cualquier componente conexa que no sea c_i y se mantendría entonces $k = \chi(c_i) = max(\chi(c_1), \chi(c_2), \ldots, \chi(c_t))$, por tanto G no sería k-crítico, lo que es una contradicción. Por tanto G es conexo.

Demostremos la segunda parte.

Supongamos que $\delta(G) < k - 1$, entonces sea $v \in V(G)$ tal que

$deg(v) = \delta(G)$, por tanto tomemos G'=G-v. Como G es k-crítico entonces $\chi(G') = \chi(G) - 1$ o sea, se puede colorear a G' con k-1 colores

Si se pone de vuelta a v como $deg(v) < k - 1$ entonces v tiene a lo sumo $k-2$ vértices adyacentes a él, que potencialmente tienen todos colores diferentes, como se dispone de k-1 colores, se puede colorear a v con un color que no tenga ninguno de sus adyacentes, luego es posible colorear a G con $k - 1$ colores lo que es una contradicción.

Teorema. *Sea G un grafo tal que $\chi(G) = k$ entonces al menos k vértices de G tienen grado mayor o igual que $k - 1$*

Demostración.

Si G no es k-crítico entonces se pueden suprimir aristas hasta que lo sea. El grafo resultante, Q, al ser k-crítico cumple que $\delta(Q) \geq k-1$ y tiene al menos k vértices. Luego el grado de cualquier vértices es igual o mayor que $k-1$

Note que al regresar al grafo original, como se añaden aristas lo único que puede pasar es que el grado de eso k vértices aumente de modo que seguirán teniendo un grado mayor o igual que $k-1$

Teorema. *Sea G un grafo, entonces* $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$

Demostración. *Demostración por inducción en el número de vértices n.*

Caso base: Para n=1 se tiene que $\chi(G) = 1$ y $\Delta(G) = 0$, luego $1 \leq 1 + 0$

Paso inductivo: Probemos que si se cumple para n se cumple para n+1

Sea G con n+1 vértices, si se tiene G'=G-v entonces G' tiene n vértices luego
$\chi(G') \leq 1 + \Delta(G')$ pero $\Delta(G') \leq \Delta(G)$
por tanto
$\chi(G') \leq 1 + \Delta(G') \leq 1 + \Delta(G)$

Luego es posible colorear a G' con $\Delta(G) + 1$ colores distintos. Note que v a lo sumo tiene $\Delta(G)$ vértices adyacentes, como hay $\Delta(G) + 1$ colores siempre puede colorearse v de modo que no tenga el mismo color que ninguno dde sus adyacentes, por tanto es posible colorear a G con $\Delta(G) + 1$ colores distintos, luego $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$

Teorema. *Sea G un grafo planar entonces* $\chi(G) \leq 6$

Demostración. *Demostración por inducción en el número de aristas.*

Caso base: Para n=1 es obvio.

Paso inductivo: Probemos que si se cumple para n se cumple para n+1

Como G, con n+1 vértices, es planar tiene al menos un vértice cuyo grados es menor o igual a 5, digamoes que este vértice es v.

Tomemos el grafo G'=G-v, como G es planar entonces al quitar un vértice a este y dando G', G'continúa siendo planar.

Como el número de vértices de G' es n y es planar, por hipótesis de inducción, se tiene que $\chi(G') \leq 6$. Al reinsertar v, como $deg(v) \leq 5$, se tiene que v tiene a lo sumo 5 vértices adyacentes cuyos colores pueden ser todos potencialmente distintos, basta con colorear v con un color que no tengan sus vecinos, luego es posible colorear a G con 6 colores distintos.-

Teorema (Teorema de los 5 colores)**.** *El número cromático de un grafo planar es menor o igual que 5*

Demostración. *Demostración por inducción en el número de vértices.*

Si este es menor que 5 entonces es obvio.

Ahora, como el grafo G es planar, tiene n+1 vertices, siempre hay un vértice con 5 o menos vértices adyacente, digamos que ese vértice es v. Entonces se tiene G'= G-v, con n vértices, que es 5-coloreable (por hipótesis de inducción)

Ahora, si $deg(v) \leq 4$ ya estaría demostrado. Si el $deg(v) = 5$ pero sus vértices adyacentes solo usan, entre ellos, 4 colores también estaría demostrado.

Tendríamos que ver el caso con $deg(v) = 5$ y sus adyacentes usan 5 colores.

Para ello llamaremos a,b,c,d y e a los vértices adayacentes y los tendremos en ese mismo oreden en el sentido del giro de las agujas del reloj.

Entonces consideremos el conjunto V_{ad} como los vértices de G' que tienen el mismo color de a o de d. Es obvio que a y d pertenecen a V_{ad}.

Entonces puede suceder que o existe un camino de a hasta d utilizando solo los vértices de V_{ad} o no existe.

En el caso de que no exista se buscan todos los caminos de a hasta los distintos vértices que están en V_{ad} y se invierten los colores (si tiene el color de a toma el de d y viceversa). Al final del proceso, a tendrá el mismo color de d y cuando unamos de nuevo v este tomaría el color de a.

Ahora, en el caso se que si existe una camino entre a y d, también se formaría un ciclo con las aristas $\{a, v\}$ y $\{v, d\}$. Tendríamos también el conjunto V_{be} construido de manera similar a V_{ad}, estos conjuntos son disjuntos pues a,b,d y e tienen colores diferentes. Como se forma el ciclo mencionado una de las aristas b o e quedaría dentro del ciclo. De esta manera no podría haber camino entre b y e pues para que hubiera camino tendrían que pasar por un nodo que esté en V_{ad} y eso no puede ocurrir pues V_{ad} y V_{be} son disjuntos.

Entonces b y e estarían en caso en que no hay un camino entre ellos pasando solo por los vértices de V_{be}. Luego estaríamos en el primer caso analizado y se haría entonces el remapeo de colores.

Teorema (Teorema de los 4 colores)**.** *El número cromático de un grafo planar es menor o igual que 4*

La demostración del **Teorema de los 4 colores** se ha realizado con verficiación computacional combinando varias ideas teóricas.