

## Segundo Trabajo de Control

### Matemática Discreta

1. Sea  $n$  tal que se conoce su descomposición en primos,  $n = p_1^{e_1} * p_2^{e_2} * \dots * p_k^{e_k}$ . Calcule la cantidad de pares de números enteros positivos  $(a, b)$  tales que  $\text{mcm}(a, b) = n$
2. Demuestre utilizando razonamientos combinatorios que  $2^n * 3^n$  divide a  $(3n)!$  para  $n \geq 1$ .
3. Sean  $A, B$  enteros positivos. Dada una lista con  $A * B + 1$  enteros distintos, demuestre que se puede extraer una sublista (no necesariamente consecutiva) que cumple que: es creciente con más de  $A$  elementos o es decreciente con más  $B$  elementos.



1. Sea

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \dots \cdot p_k^{e_k}$$

la descomposición en primos de  $n$ . Queremos contar la cantidad de pares  $(a, b)$  de enteros positivos tales que  $\text{mcm}(a, b) = n$ .

Si escribimos

$$a = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}, \quad b = p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdot \dots \cdot p_k^{b_k},$$

entonces

$$\text{mcm}(a, b) = p_1^{\max(a_1, b_1)} \cdot p_2^{\max(a_2, b_2)} \cdot \dots \cdot p_k^{\max(a_k, b_k)}.$$

Para que  $\text{mcm}(a, b) = n$ , es necesario que

$$\max(a_i, b_i) = e_i \quad \text{para cada } i = 1, 2, \dots, k,$$

con la restricción  $0 \leq a_i, b_i \leq e_i$ .

Para un exponente fijo  $e_i$ , los posibles pares  $(a_i, b_i)$  que cumplen  $\max(a_i, b_i) = e_i$  se cuentan así:

- $a_i = e_i$  y  $b_i$  puede variar desde 0 hasta  $e_i$  (eso da  $e_i + 1$  opciones).
- $b_i = e_i$  y  $a_i$  puede variar desde 0 hasta  $e_i$  (otras  $e_i + 1$  opciones).
- Sin embargo, el caso  $(a_i, b_i) = (e_i, e_i)$  se ha contado dos veces, por lo que se resta 1.

De este modo, para cada  $i$  hay en total:

$$(e_i + 1) + (e_i + 1) - 1 = 2e_i + 1$$

posibilidades. Como estos conteos son independientes para cada  $p_i$ , el número total de pares  $(a, b)$  con  $\text{mcm}(a, b) = n$  es el producto de las posibilidades para cada  $p_i$ :

$$\prod_{i=1}^k (2e_i + 1).$$

Por lo tanto, la cantidad de pares  $(a, b)$  es:

$$\text{Cantidad de pares} = \prod_{i=1}^k (2e_i + 1).$$

2. Se quiere demostrar que

$$2^n \cdot 3^n \mid (3n)!, \quad \text{para } n \geq 1.$$

Nótese que

$$2^n \cdot 3^n = (2 \cdot 3)^n = 6^n.$$

Por lo tanto, basta probar que  $6^n$  divide a  $(3n)!$ .

**Razonamiento combinatorio:** Supongamos que tenemos  $n$  tipos de letras diferentes, y de cada letra hay 3 copias. El número de palabras

distintas que se pueden formar utilizando *todas* esas  $3n$  letras (es decir, permutaciones con repetición) es:

$$\frac{(3n)!}{3! \cdot 3! \cdot \dots \cdot 3!} = \frac{(3n)!}{6^n}.$$

Puesto que esta cantidad es un entero, se deduce inmediatamente que  $6^n \mid (3n)!$ , lo que equivale a

$$\begin{array}{c} 2^n \cdot 3^n \mid (3n)! \\ \boxed{2^n \cdot 3^n \mid (3n)!} \end{array}$$

### 3. Solución al problema 3.

Sea una lista de  $A \cdot B + 1$  números enteros distintos. Se desea probar que se puede extraer de ella una sublista (no necesariamente de elementos consecutivos) con más de  $A$  elementos que sea monótonamente creciente, o con más de  $B$  elementos que sea monótonamente decreciente.

**Supongamos que no** (buscando una contradicción). Definamos dos listas  $a$  y  $b$ , donde:

$a_i$  = longitud de la mayor sublista creciente que termina en la posición  $i$ ,

$b_i$  = longitud de la mayor sublista decreciente que termina en la posición  $i$ .

Por la suposición de que ninguna sublista creciente tiene más de  $A$  elementos y ninguna sublista decreciente tiene más de  $B$  elementos, tenemos:

$$1 \leq a_i \leq A, \quad 1 \leq b_i \leq B \quad \text{para todo } i.$$

Construyamos entonces una lista  $c$  definida por  $c_i = (a_i, b_i)$  (tupla). - Como  $a_i$  puede tomar a lo sumo  $A$  valores diferentes y  $b_i$  a lo sumo  $B$  valores diferentes, hay únicamente  $A \times B$  posibles pares  $(a_i, b_i)$ . - Sin embargo, la lista original tiene  $A \cdot B + 1$  elementos, por lo que, *por el principio del palomar*, existen dos índices  $i < j$  tales que  $c_i = c_j$ . En otras palabras,  $(a_i, b_i) = (a_j, b_j)$ .

Ahora, observemos los valores correspondientes en la lista original (llamémosla  $L$ ): - Si  $L_i < L_j$ , entonces se puede prolongar la sublista creciente que termina en  $i$  para abarcar también el elemento  $j$ ; por ende  $a_j$  debería ser al menos  $a_i + 1$ , lo cual contradice la igualdad  $a_i = a_j$ . - Si  $L_i > L_j$ , se puede prolongar la sublista decreciente que termina en  $i$  con el elemento  $j$ ; por ende  $b_j$  debería ser al menos  $b_i + 1$ , contradiciendo la igualdad  $b_i = b_j$ .

De una u otra forma, se llega a la contradicción. Por tanto, la suposición inicial es falsa, y sí *existe* una sublista con más de  $A$  elementos creciente o con más de  $B$  elementos decreciente. Esto completa la demostración:

Existe una sublista creciente de longitud  $A + 1$  o decreciente de longitud  $B + 1$ .