Conferencia 9 - Combinatoria

January 27, 2025

Principio de Inclusión - Exclusión. *Permite calcular la cardinalidad de la unión de varios conjuntos*

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \underset{\substack{i\in I\subseteq\{1,2,\ldots,n\}\\ |I|=k}}{|\cap A_i|}$$

Ejemplo

De 200 estudiantes 50 toman el curso de matemáticas discretas, 140 el curso de economía y 24 ambos. Como ambos cursos programaron exámenes para el día siguiente, sólo los estudiantes que no estén en ninguno de estos curso podrán ir a la fiesta de la noche. Se quiere ver cuántos estudiantes iran a la fiesta.

Si A_1 es el conjunto que estudia discreta y A_2 el de los que estudian economía entonces $|A_1 \cup A_2| = 50 + 140 - 24 = 166$ por lo que irán a la fiesta $200 - 166 = 34$

Demostración

Sea un elemento x del universo

Si x no cumple ninguna propiedad entre $A_1, A_2, \ldots, A_n$ entonces no se cuenta nunca en la suma.

Ahora, verifiquemos que si aparece entonces solamente se cuenta una vez.

Si x cumple exactamente una propiedad, o sea, $\exists\, i$ tal que $x \in A_i$ pero $\forall\, j,\ j \neq i$ implica que $x \notin A_j$, x se cuenta solo una vez

Si x cumple k propiedades al mismo tiempo entonces:

se cuenta k en $\sum_{1\leq i\leq n} |A_i|$

se cuenta $\binom{k}{2}$ en $\sum_{1\leq i<j\leq n} |A_i \cap A_j|$

...

...

se cuenta $\binom{k}{k}$ en la intersección de k propiedades

No tiene sentido verificar cuántas veces se cuenta x en la intersección de más de k propiedades porque solo aparece en k conjuntos

Entonces x se cuenta:

k - $\binom{k}{2}$ + $\binom{k}{3}$ - ... + $(-1)^{k+1}\binom{k}{k}$

$=\binom{k}{0}$ + [-$\binom{k}{0}$ + $\binom{k}{1}$ - $\binom{k}{2}$ + $\binom{k}{3}$ - ... + $(-1)^{k+1}\binom{k}{k}$]

$=\binom{k}{0}$= 1

Definición. *Sea un universo tal que existen m posibles propiedades $P_1, P_2, \ldots, P_m$. Si $\{P_{i_i}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_k}\}$ es un subconjunto de las m posibles propiedades se denota $N_{i_i,i_2,\ldots,i_k}$ a la cantidad de elementos que cumplen las propiedades $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_k}$.*

s_k es la cantidad de veces que se cumplen k propiedades

Entonces se define $S_0 = n$ *donde* $n = |U|$ *y* $S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots i_k \leq m} N_{i_i, i_2, \ldots, i_k}$ *con* $1 \leq k \leq m$

(Esto último sería todas las maneras en las que pueden cumplirse k propiedades de m)

Entonces el Principio de **Inclusión - Exclusión** puede escribirse:
$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| = S_1 - S_2 + S_3 - \ldots (-1)^{m-1} S_m$
$|A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_m^c| = S_0 - S_1 + S_2 - \ldots (-1)^m S_m$

Teorema. ***Generalización del Principio de Exclusión***. *Sea U un conjunto finito de elementos y P un conjunto arbitrario de m propiedades, el número de elementos de U que poseen exactamente R propiedades y* $0 \leq R < m$ *es* $N(R) = \sum_{k=0}^{m-R} (-1)^k \binom{k+R}{k} S_{k+R}$

Demostración

Sea k un elemento del universo que cumple t propiedades

Si $t < R$ se cuenta 0 veces

Se puede notar que la fórmula comienza por S_R lo que implica que x no aparece en la interesección de más de t elementos

Si $t = R$ se cuenta 1 vez, solo se cuenta en S_R

Si $t > R$ entonces $N(R) = \sum_{k=0}^{t-R} (-1)^k \binom{k+R}{k} S_{k+R}$ porque no se va a contar en interesecciones de más de t

Ahora $k + R \leq t$ por tanto el elemento se cuenta $\binom{t}{k+R}$ veces en S_{k+R}
por tanto x se cuenta en $N(R)$
$\sum_{k=0}^{t-R} (-1)^k \binom{k+R}{k} \binom{t}{k+R}$
ahora $\binom{k+R}{k} \binom{t}{k+R} = \binom{t}{R} \binom{t-R}{k}$ esto se obtiene luego de desarrollar las combinaciones y multiplicar y dividir por $(t - R)!$
luego $\sum_{k=0}^{t-R} (-1)^k \binom{k+R}{k} \binom{t}{k+R} = \sum_{k=0}^{t-R} (-1)^k \binom{t}{R} \binom{t-R}{k}$
$= \binom{t}{R} \sum_{k=0}^{t-R} (-1)^k \binom{t-R}{k} = 0$

Teorema. *Sea U un conjunto finito de elementos y P un conjunto arbitrario de m propiedades, el número de elementos de U que satisfacen al menos R propiedades y* $0 \leq R < m$ *es* $\bar{N}(R) = \sum_{k=0}^{m-R} (-1)^k \binom{k+R-1}{R-1} S_{k+R}$

Principio Inyectivo. *Sean A y B conjuntos tal que B es finito. Entonces A es finito y* $|A| \leq |B|$ *si y solo si existe una función inyectiva de A en B.*

Demostración

En el sentido directo, se tiene que si $|A| = m$ y $|B| = n$ entonces se tiene se tiene que existen las funciones $f : A \to \mathbb{N}_m$ y $g : B \to \mathbb{N}_n$ biyectivas. Ahora, como $m \leq n$ se tiene que $\mathbb{N}_m \subseteq \mathbb{N}_n$, luego $g^{-1} \circ f : A \to B$ es inyectiva.

Se deja propuesta la demostración en el otro sentido.

Principio Sobreyectivo. *Sean A y B conjuntos tal que B es finito. Entonces A es finito y $|A| \leq |B|$ si y solo si existe una función sobreyectiva de B en A.*

Demostración

En el sentido directo, se tiene que si $|A| = m$ y $|B| = n$ entonces se tiene se tiene que existen las funciones $f : A \to \mathbb{N}_m$ y $g : B \to \mathbb{N}_n$ biyectivas, con $m \leq n$. Se puede definir la función $f' : \mathbb{N}_m \to A$ ahora $f'(x) = f^{-1}(min(x, n))$ y como f es biyectiva f^{-1} lo es también, luego también es sobreyectiva y, por tanto, f' es también sobreyectiva. Entonces $f' \circ g : B \to A$ es sobreyectiva (la composición de funciones sobreyectivas es sobreyectiva).

En el otro sentido, se puede definir $B = b_1, b_2, \ldots, b_m$ y $f : B \to A$ sobreyectiva, entonces está bien definida la función $h : A \to B$ definida como $h(a) = b_i$, donde i es el mínimo índice tal que $f(b_i) = a$. Es fácil ver que h es inyectiva, Luego, por la proposición anterior A es finito y $|A| \leq |B|$.

Principio del Palomar. *Si se tiene un palomar con n agujeros o casillas y m, $m > n$, palomas, entonces existe una casilla que contiene más de una paloma. De manera general, existe una casilla que tiene al menos $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ palomas.*

Ejemplo 1

En todo conjunto de n números enteros es posible encontrar un subconjunto tal que la suma de los elementos del subconjunto es divisible por n.

Tomando los subconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tal que $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n$:
$A_1 = \{a_1\}$
$A_2 = \{a_1, a_2\}$
$A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$
$\ldots$
$\ldots$
$A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

Si hay algún A_i tal que la suma de sus elementos $(S(A_i))$ cumple que $S(A_i) \equiv 0\,(n)$ entonces ya queda demostrado.

Si esto no ocurre entonces para estos conjuntos en sus sumas hay $n-1$ posibles restos entonces, por el **Principio del Palomar**, hay dos que dejan el mismo resto, o sea, existen i, j $i \neq j$ tal que $S(A_i) \equiv S(A_j)\,(n)$ luego $S(A_i) - S(A_j) \equiv 0\,(n)$

Entonces se toma el conjunto $A_i - A_j = A_{i-j}$ asumiendo, sin perdida de generalidad, que $|A_i| > |A_j|$, luego $S(A_{i-j}) \equiv 0\,(n)$

Ejemplo 2

Sea la relación de conocerse una relación mutua, entonces en un grupo de 6 personas hay al menos 3 personas que se conocen entre ellos o al menos 3 que no se conocen entre ellos.

Si se toman n casillas, entendiendo que si alguien está en la misma casilla se conocen entre ellos y si están en casillas diferentes no se conoce entre si. Para $n > 2$ cualquier distribución significa que hay al menos tres que no se conocen entre si. Ahora si $1 \leq n \leq 2$ entonces, por el **Prinicipio del Palomar**, en una casilla como mínimo habrá 3 personas y entonces habría al menos 3 personas que se conocen entre si.