Conferencia 4 - Congruencia

December 4, 2024

Definición. *Sea $n \in \mathbb{Z}_+$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, se dice que a es congruente con b módulo n si a y b tienen el mismo resto al ser divididos por n y esto se denota $a \equiv b \ (mod\ n)$ o $a \equiv b\,(n)$*

Teorema. *Sea $n \in \mathbb{Z}_+$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, se dice que $a \equiv b\,(n)$ si y solo si $n|a - b$*

Demostración
Demostremos que si $a \equiv b\,(n)$ entonces $n|a - b$
Como $a \equiv b\,(n)$, por definición, $a = kn + r$ y $b = qn + r$ luego
$a - kn = b - qn$
$a - b = kn - qn$
$a - b = (k - q)n$
por lo que $n|a - b$

Demostremos ahora que si $n|a - b$ entonces $a \equiv b\,(n)$
Tenemos que
$a = nq_1 + r_1$ y $b = nq_2 + r_2$
luego $a - b = n(q_1 - q_2) + r_1 - r_2$
Ahora, como $n|a - b$ y $n|n(q_1 - q_2)$
entonces $n|r_1 - r_2$ y $n||r_1 - r_2|$
pero $|r_1 - r_2| < n$ por lo que $r_1 - r_2 = 0$
entonces $r_1 = r_2$ y, por tanto, $a \equiv b\,(n)$

Teorema. *La relación de congruencia módulo n es una relación de equivalencia*

Propiedades básicas de la congruencia

1. Para todo a, $a \equiv a\,(n)$

   Demostración

   Como $a - a = 0 = n * 0$ entonces $n|a - a$

2. Si $a \equiv b\,(n)$ si y solo si $b \equiv a\,(n)$

   Demostración

   Si $a - b = kn$ para algún k luego $b - a = -kn$

3. Si $a \equiv b\,(n)$ y $b \equiv c\,(n)$ entonces $a \equiv c\,(n)$

   Demostración

   Si $a - b = kn$ y $b - c = ln$ para k, l enteros entonces $a - c = (k + l)n$

4. Si $a \equiv b\,(n)$ y $c \equiv d\,(n)$ entonces $a \pm c \equiv b \pm d\,(n)$

   Demostración

   Si $a - b = kn$ y $c - d = ln$ para k, l enteros entonces

   $(a + c) - (b + d) = (k + l)n$ y $(a - c) - (b - d) = (k - l)n$

5. Si $a \equiv b\,(n)$ y $k \in \mathbb{Z}_+$ entonces $ak \equiv bk\,(n)$

   Demostración

   Se suma k veces $a \equiv b\,(n)$

6. Si $a \equiv b\,(n)$ y $c \equiv d\,(n)$ entonces $ac \equiv bd\,(n)$

   Demostración

   Para ello se debe demostrar que $ac - bd$ es múltiplo de n. Entonces

   $ac - bd = ac - bc + bc - bd = c(a - b) + b(c - d)$

   y como $a - b$ y $c - d$ son múltiplos de n entonces $ac - bd$ también lo es

7. Si $a \equiv b\,(n)$ y $k \in \mathbb{Z}_+$ entonces $a^k \equiv b^k\,(n)$

   Demostración

   Se multiplica k veces $a \equiv b\,(n)$

8. Si $a \equiv b\,(n)$ entonces $a + c \equiv b + c\,(n)$

   Demostración

   Se tiene que $a \equiv b\,(n)$ y también que $c \equiv c\,(n)$ luego $a + c \equiv b + c\,(n)$

9. Si c es divisor común de a, b, n luego, si $a \equiv b\,(n)$ entonces $\frac{a}{c} \equiv \frac{b}{c}\,(\frac{n}{c})$

   Demostración

   Como c es divisor común de a, b, n entonces para a_1, b_1, n_1 enteros se tiene que $a = ca_1$, $b = cb_1$ y $n = cn_1$ y, entonces, $ca_1 \equiv cb_1\,(cn_1)$ luego $ca_1 - cb_1 = kcn_1$ para k entero, lo que es lo mismo que $a_1 - b_1 = kn_1$, por lo que $a_1 \equiv b_1\,(n_1)$ por tanto $\frac{a}{c} \equiv \frac{b}{c}\,(\frac{n}{c})$

10. Si $c|n$ y $a \equiv b\,(n)$ entonces $a \equiv b\,(c)$

    Demostración

    Como $c|n$ entonces $n = qc$ con q entero y como $a \equiv b\,(n)$ entonces $a - b = kn$ con k entero, luego $a - b = kqc$ y como kq es un entero entonces $a \equiv b\,(c)$

Teorema. *Si $ca \equiv cb\,(n)$ entonces $a \equiv b\,(\frac{n}{d})$ donde $d = mcd(c, n)$*

Demostración

Como $ca \equiv cb\,(n)$ entonces $ca - cb = c(a-b) = kn$, ahora si se tiene que $d = mcd(c,n)$ entonces existen s y r, $(r,s) = 1$ tales que $c = dr$ y $n = ds$, si se sustituye en la igualdad previa se tiene que $dr(a-b) = kds$ y si se simplifica queda que $r(a-b) = ks$.

A partir de esto se tiene que $s|r(a-b)$ y, como r y s son primos relativos, entonces por el Lema de Euclides $s|a-b$ y, por tanto $a \equiv b\,(s)$ lo que es lo mismo que $a \equiv b\,(\frac{n}{d})$

Corolario. *Si* $ca \equiv cb\,(n)$ *y* $mcd(c,n) = 1$ *entonces* $a \equiv b\,(n)$

Demostración

Para $d = 1$ se tiene entonces, a partir del teorema anterior que $a \equiv b\,(\frac{n}{1})$

Corolario. *Si* $ca \equiv cb\,(p)$ *y* $p \nmid c$ *donde* p *es primo, entonces* $a \equiv b\,(p)$

Demostración

Como $p \nmid c$ y p es primo, entonces $mcd(c,p) = 1$, y entonces se tienen el corolario anterior

Propiedades fuertes de la congruencia

1. Si $a \equiv b\,(m)$ y $a \equiv b\,(n)$ entonces $a \equiv b\,(mcm(m,n))$

   Demostración

   Por el **Teorema Fundamental de la Aritmética**

   $m = \prod_p p^{m_p}$, $n = \prod_p p^{n_p}$ y $mcm(m,n) = \prod_p p^{max(m_p,n_p)}$

   donde p son números primos, $m_p \geq 0$ y $n_p \geq 0$.

   Entonces, si $a \equiv b\,(m)$ y $a \equiv b\,(n)$ esto significa que $p^{m_p}|a-b$ y que $p^{n_p}|a-b$ y, por tanto, $p^{max(m_p,n_p)}|a-b$.

   Ahora como $a - b = \prod_p p^{c_p}$ donde $c_p \geq max(m_p, n_p)$ entonces

   $mcm(m,n)|a-b$ y, por tanto, $a \equiv b\,(mcm(m,n))$

2. Si $a \equiv b\,(n)$ entonces $mcd(a,n) = mcd(b,n)$

   Demostración

   Si $a \equiv b\,(n)$ entonces $a - b = kn$ para k entero, luego $a = k * n + b$ y por tanto $mcd(a,n) = mcd(n,b)$

3. Si $ac \equiv bd\,(n)$, $c \equiv d\,(n)$ y $mcd(c,n) = 1$ entonces $a \equiv b\,(n)$

   Demostración

   Como $c \equiv d\,(n)$ entonces $mcd(d,n) = mcd(c,n) = 1$ y $c - d = qn$, lo que es lo mismo que $c = qn + d$

Ahora, como $ac \equiv bd\,(n)$ entonces $ac - bd = kn$ y sustituyendo c se tiene que

$a(qn + d) - bd = kn$

$aqn + ad - bd = kn$

$ad - bd = kn - aqn$

$ad - bd = (k - aq)n$

entonces $da \equiv db\,(n)$ y como $mcd(d, n) = 1$ entonces $a \equiv b\,(n)$

4. Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes enteros $a \equiv b\,(n)$ entonces $f(a) \equiv f(b)\,(n)$

   Demostración

   $f(x)$ de manera general se puede definir como $f(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k x^k$

   Como $a \equiv b\,(n)$ entonces se puede tener $a^k \equiv b^k\,(n)$ luego se pueden multiplicar por un entero tal que $c_k a^k \equiv c_k b^k\,(n)$ y estas se pueden sumar varias veces de modo que $\sum_{k=0}^{m} c_k a^k \equiv \sum_{k=0}^{m} c_k b^k\,(n)$ y como $f(a) = \sum_{k=0}^{m} c_k a^k$ y $f(b) = \sum_{k=0}^{m} c_k b^k$ entonces $f(a) \equiv f(b)\,(n)$

Definición. *Si $f(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros se dice que a es solución de $f(x) \equiv 0\,(n)$ si $f(a) \equiv 0\,(n)$*

Teorema. *Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes enteros tal que a es solución de $f(x) \equiv 0\,(n)$ y $a \equiv b\,(n)$, entonces b también es solución*

Demostración

Por el teorema anterior se tiene que $f(a) \equiv f(b)\,(n)$ entonces se tiene que $f(b) \equiv f(a) \equiv 0\,(n)$ y, por tanto, b es solución

Teorema. ***Pequeño Teorema de Fermat***. *Sea p primo y $a \in \mathbb{Z}$, luego si $p \nmid a$ entonces $a^{p-1} \equiv 1\,(p)$*

Demostración

Si se tienen los primeros $p-1$ múltiplos positivos de a, que serían $a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a$, ninguno de ellos es congruente con otro módulo p pues si eso pasara entonces se tendría $ra \equiv sa\,(n)$, $1 \leq r < s \leq p-1$, lo que resultaría en que $r \equiv s\,(n)$ lo que es falso.

Entonces el conjunto de múltiplos debe ser cogruente módulo p con $1, 2, 3, \ldots, p-1$, en algún orden. Luego, si múltiplicamos todas estas congruencias se tiene:

$a * 2a * 3a * \ldots * (p-1)a \equiv 1 * 2 * 3 * \ldots * (p-1)\,(p)$

Lo que es lo mismo que:

$(p-1)!a^{p-1} \equiv (p-1)!\,(p)$

luego $a^{p-1} \equiv 1\,(p)$