Conferencia 3 - Grafo Euleriano

7 de abril de 2025

Definición (Cadena). *Un camino* $C =< v_1, v_1, ...v_k >$, $k \geq 1$, *es una cadena en el grafo* G *si todas las aristas* $\{v_i, v_{i+1}\} \in C$ *son diferentes. es decir, es un camino que no repite aristas.*

Definición (Cadena cerrada). *Una cadena es cerrada si su primer y último vértice coinciden.*

Definición (Cadena de Euler). *Una cadena es de Euler si contiene todas las aristas del grafo.*

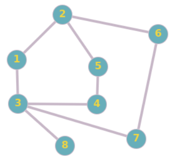
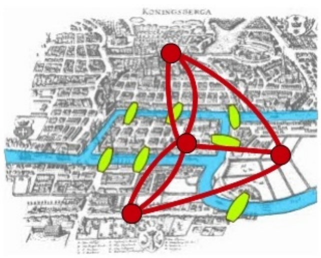


Figura 1: En el grafo:
$C =< 1, 2, 6, 7, 3 >$ es un ejemplo de cadena.
$C =< 1, 2, 5, 4, 3, 1 >$ es un ejemplo de cadena cerrada.
$C =< 8, 3, 7, 6, 2, 5, 4, 3, 1, 2 >$ es un ejemplo de Cadena de Euler.

Definición (Cadena Cerrada de Euler). *Una cadena cerrada es de Euler si es una cadena de Euler cuyo primer y último vértice coinciden.*

Problema de los Siete Puentes: En *Königsberg*, ciudad de Prusia Oriental y actual ciudad rusa de Kaliningrado, el río *Pregolia* dividía la ciudad en cuatro regiones distintas, que entonces estaban unidas mediante siete puentes.



Los habitantes de la ciudad, que utilizaban los puentes como parte de su rutina diaria de transporte y ocio, inventaron un “juego” que consistía en encontrar un recorrido para cruzar a pie toda la ciudad pasando solo una vez por cada uno de los puentes y regresando al mismo punto de inicio. El problema formulado en el siglo XVIII, fue resuelto por Leonhard Euler en 1736 y su resolución dió origen a la Teoría de Grafos.

Definición (Grafo de Euler). *G es un grafo de Euler (euleriano) si tiene una cadena cerrada de Euler*

Teorema. *Sea G un multigrafo conexo, se cumple que:*

1. *G es euleriano $\Leftrightarrow$ todos los vértices de G tienen grado par.*
2. *G tiene una cadena de Euler $\Leftrightarrow$ contie exactamente 2 vértices de grado impar.*

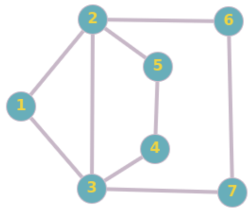


Figura 2: Este grafo es Euleriano puesto que:
$C =< 1, 2, 3, 4, 5, 2, 6, 7, 3, 1 >$
es una cadena cerrada de Euler.

Demostración (Demostración propiedad 1 $\Rightarrow$)**.** *Si un Grafo es euleriano entonces todos los vértices tienen grado par.*

Como G es euleriano, sea C la cadena cerrada de Euler que posee. En el recorrido de C se tiene que entrar y salir de cada vértice v_i, y cada vez que esto pasa sabemos que se están analizando aristas diferentes que inciden sobre v_i porque en una cadena no se repiten aristas. Luego para cada vértice le sumamos 2 a su grado cada vez que aparezca en la cadena, como además sabemos que todas las aristas del grafo están en la cadena, al recorrer la cadena entera todos los vértices tienen asignado su grado correctamente (no hay ningún vertice para el cual no se haya tenido en cuenta la incidencia de alguna arista) que es par $\blacksquare$.

Demostración (Demostración propiedad 1 $\Leftarrow$)**.** *Si todos los vértices de G tienen grado par entonces G es euleriano.*

Para demostrar esta implicación, nos apoyamos en el siguiente **lema:**

Lema. *Sea G conexo, tal que todos sus vértices tienen grado par, toda cadena maximal de G es cerrada.*

Demostración (Demostración del lema por Reducción al Absurdo)**.**

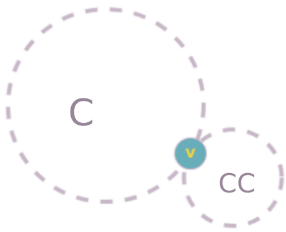
Supongamos que no se cumple esta propiedad en algun grafo G conexo cuyos vértices todos son de grado par. Sea $C =< v_1, v_2, ..., v_k >$ cadena maximal de G que no es cerrada, tomemos el vértice v_1 que es uno de los extremos de la cadena, para este vértice se cumple que por cada vez que aparece en medio de la cadena (sin contar la vez que aparece en el extremo), se cuentan 2 de sus aristas, por la que se llega a él y por la que se sale de él, luego si v_1 aparece p veces como vértice intermedio en C, se analizaron $2p$ de las aristas incidentes en v_1; además se tiene que en v_1 incide la arista que lo conecta al extremo de la cadena. Por este motivo, en C se analizan $2p + 1$ de las aristas que inciden en v_1. Como el grado de v_1 es par, y se han analizado una cantidad impar de sus aristas, entonces podemos decir que hay al menos una arista de v_1 que no pertenece a C, sea esa arista $\{v_0, v_1\}$, entonces $C' = \{v_0, v_1\} + C$ es una cadena que se puede construir a partir de C que tiene mayor tamaño, esto contradice el hecho de que C es maximal $\blacksquare$.

Luego, sea G conexo con todos sus vértices de grado par. Sea C la mayor cadena cerrada de G (Sabemos que existe una cadena cerrada por el lema anterior, entonces del conjunto de cadenas cerradas tomamos la mayor), C tiene que tener todas las aristas del grafo.

Supongamos lo contrario, entonces quedan aristas del grafo que no están contenidas en C.

Sea $G' = G - C$ el grafo resultante de quitar las aristas de la cadena C del grafo G. En G' todos los vértices tienen grado par, puesto que a cada vértice del ciclo se le quitaron solo las aristas pertenecientes al ciclo que es un número par (por cada aparición del vértice en el ciclo se quita la arista por la que se entra y por la que se sale del vértice).

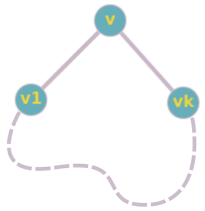
Como asumimos que C no contenía todas las aristas del grafo, entonces en G' hay al menos una componente conexa en la que hay aristas, en esa componente conexa como cumple que todos sus vértices son de grado par, por el lema anterior cualquier cadena maximal en esa CC es cerrada, y además alguno de los vértices de esta CC tiene que estar en la cadena C, puesto que G era inicialmente conexo.



Sea v_i uno de los vértices de la CC que está presente en C, entonces sea $C' =< x_1, x_2, ..., v_i, ..., x_k, x_1 >$ una cadena maximal de la CC que contiene a v_i, en el grafo G esta cadena C' existe y como $C =< v_1, v_2, ..., v_i, ..., v_t, v_1 >$, es posible unir estas dos cadenas cerradas a partir de v_i obteniéndose la cadena cerrada $C'' =< v_1, v_2, ..., v_i, x_{i+1}, ..., x_k, x_1, x_2, ..., v_i, v_{i+1}, ..., v_t, v_1 >$ la cual es mayor que C, lo cual es una contradicción puesto que C es la mayor cadena cerrada de G, de donde se concluye que la mayor cadena cerrada de G es euleriana $\blacksquare$.

Demostración (Demostración propiedad 2 $\Rightarrow$)**.** *Si G contiene una cadena de Euler entonces tiene exactamente 2 vértices de grado impar.*

Sea $C =< v_1, v_2, ..., v_k >$ la cadena de Euler del grafo G, agreguemos un vértice ficticio v y lo conectamos a v_1 y a v_k, así se forma una cadena cerrada de Euler. Como en esa cadena están presentes todas las aristas, y a cada vértice se entra y de cada vértice se sale, se cuentan dos aristas por cada aparición de un vértice, de donde todos los vértices tienen grado par. Luego al remover el vértice ficticio v y las aristas $\{v, v_1\}$ y $\{v, v_k\}$ los únicos vértices a los cuales se les modifica el grado son v_1 y v_k, que disminuye en 1 y pasan a tener grado impar, siendo estos dos vértices los únicos con grado impar en G y los restantes tienen grado par $\blacksquare$.



Demostración (Demostración propiedad 2 $\Leftarrow$)**.** *Si G tiene exactamente 2 vértices de grado impar entonces contiene una cadena de Euler.*

Sean v_i y v_j los dos vértices de grado impar, le agregamos a G el vértice ficticio v y las aristas $\{v, v_i\}$ y $\{v, v_j\}$, luego en el grafo tras esta modificación todos los vértices tienen grado par, puesto que v tiene grado 2, a v_i y v_j se les agregó una arista a cada uno cambiando su paridad y los restantes vértices no se modificaron; por el teorema anteriormente demostrado, este grafo es euleriano, es decir que existe una cadena cerrada de Euler. Tomando esa cadena y removiendo el vértice v con sus dos aristas, nos queda una cadena de Euler donde sus extremos son v_i y v_j $\blacksquare$.

Teorema. *Sea G un grafo con exactamente $2k$ vértices de grado impar $\Rightarrow$ las aristas de G se pueden particionar en k cadenas disjuntas y este es el mínimo (siempre se puede descomponer en k).*

Demostración (Demostración de que se necesitan al menos k cadenas para particionar las aristas del grafo)**.**

Sea $v \in V(G)$, tal que $deg(v)$ impar, entonces v debe ser vértice extremo de alguna cadena. Nótese que v no puede siempre estar en el medio porque cada vez que aparece en el medio de alguna cadena se cuentan dos de sus aristas y como tiene grado impar faltaría una de sus aristas por estar en alguna cadena. Luego como cada cadena abierta tiene a lo sumo 2 vértices de grado impar, uno por cada extremo, y el grafo tiene $2k$ vértices de grado impar, entonces, siempre se requieren k o más cadenas para particionar las aristas del grafo.

Demostración (Demostración de que k cadenas es el mínimo)**.**

Para demostrar que el mínimo de cadenas es k (esto quiere decir que siempre hay una forma de descomponerlo en k cadenas) vamos a hacer una inducción en el número de parejas de vértices de grado impar.

Caso base $k = 1$: Si un grafo conexo tiene exactamente una pareja de vértices de grado impar, por el teorema anterior sabemos que en este grafo hay una cadena de Euler, por tanto, se puede obtener una cadena.

Hipótesis k: Supongamos que para todo grafo conexo donde existen exactamente $2k$ vértices de grado impar es posible particionar sus aristas en k cadenas.

Demostración $k+1$: Sea G un grafo conexo de $2k+2$ vértices de grado impar, si le agregamos al grafo un vértice ficticio v y lo conectamos a dos de los vértices de grado impar, tendríamos un grafo $G' = G + \{v\} + \{e_1, e_2\}$ donde e_1, e_2 son las aristas agregadas, en G' existen exactamente $2k$ vértices de grado impar, luego se le aplica la hipótesis de inducción, G' se puede descomponer en k cadenas. Nótese que en estas k cadenas cada uno de los extremos tiene que ser uno de los vértices de grado impar, puesto que ellos obligatoriamente tienen que aparecer alguna vez como extremo de una cadena y hay exactamente $2k$ vertices impares para $2k$ extremos de cadena. Luego el vértice v tiene que estar en el medio de alguna cadena, al quitarlo a él junto a las aristas e_1 y e_2 se incrementa en 1 el número de cadenas, obteniéndose las $k+1$ cadenas resultantes del grafo $G\blacksquare$.