Conferencia 8 - Grafos Dirigidos

16 de mayo de 2025

Definición. *Un **grafo dirigido** (digrafo) consiste en dos conjuntos V, el conjunto de los vértices, y E, el conjunto de aristas, formado ahora por pares ordenados del conjunto V.*

Definición. *Sean $v, w \in V(G)$ donde G es un digrafo, v,w son adayacentes si la arista $< v, w > \in E(G)$. Se dice que la arista $< v, w >$ es incidente desde v y que es incidente a w.*

Definición. *Sea G un digrafo y $v \in V(G)$:*

- *El grado exterior de v es el número de aristas incidentes desde v (exdeg(v) o outdeg(x))*
- *El grado interior de v es el número de aristas incidentes sobre v (indeg(v))*

Teorema. *En todo digrafo se cumple que:*

- $\sum_{v \in V(G)} exdeg(v) + indeg(v) = 2|E|$
- $\sum_{v \in V(G)} exdeg(v) = \sum_{v \in V(G)} indeg(v) = |E|$

Definición. *Un camino en un digrafo G es una secuencia de vértices de G $c =< v_1, v_2, \ldots, v_k >$ tal que:*

1. $k > 1$
2. $k > 1$ *implica que* $< v_i, v_{i+1} > \in E(G)\,(1 \leq i \leq k-1)$

Luego:

- *El camino es simple si no se repiten vértices*
- *Si $v_1 = v_k$ el camino es cerrado*
- *Un ciclo es un camino cerrado donde solo se repiten el primer y últino vértice*

Definición. *El **grafo subyacente** es el multigrafo que resulta de quitar la orientación de las aristas de un digrafo*

Definición. *Un digrafo D es conexo si el grafo subyacente de D es conexo*

Definición. *Un digrafo es **fuertemente conexo** si todo par de vértices del digrafo es mutuamente accesible, o sea si hay camino de uno al otro, y viceversa*

Definición. *Un grafo es **orientable** si es posible orientar sus aristas de modo que el digrafo resultanto sea fuertemente conexo*

Teorema. *Sea G un grafo conexo, entonces G es orientable si y solo si no tiene puentes*

Demostración.

En el sentido directo, demostraremos que si G tiene puentes entonces G es no orientable (contrarecíproco).

Sea e una arista puente tal que $e =< u, v >$.

Como e es un puente al removerla u y v quedan en componentes conexas distintas, lo que explica que no exista camino que los conecte, por tanto G no es fuertemente conexo luego G no es orientable.

En el otro sentido.
Vamos a utilizar el siguiente lema.

Lema. *Una arista es puente (arista de corte) si y solo si no participa en ningún ciclo*

Demostración. *Demostración del lema*

Demostremos que si participa en algún ciclo no es puente.
Sea $e = \{u, v\} \in E(G)$ tal que $e \in c$ de manera que c es el ciclo $c =< u, v, v_1, v_2, \dots, v_k, u >$ entonces $c_1 =< v, v_1, v_2, \dots, v_k, u >$ es un camino que contiene a los vértices u,v. Entre todo par de vértices de G, si el camino que los une contiene a la arista $\{u, v\}$, esta puede ser reemplazada por el camino c_1, por tanto el grafo resultante de eliminar $\{u, v\}$ no varió en la cantidad de componentes conexas, entonces E no es una arista puente.

En el otro sentido, si no es una arista puente entonces participa en algún ciclo.
Sea $e = \{m, v\} \in E(G)$ tal que no es arista puente, por tanto existe otro camino que conecta a m con v que no contiene a e,
Sea este $< m, v_1, v_2, \dots, v_k, v >$ luego $c =< m, v_1, v_2, \dots, v_k, v, m >$ es un ciclo al que pertenece e.

Retornemos a la demostración del teorema.

Sea G' el mayor subgrafo orientable de G, suponga que hay vértices de G que no pertenecen a G'.
Sea entonces v tal que pertenece a G y no pertenece a G', note que existe u que pertenece a G' tal que que $\{u, v\} \in V(G)$ pues G es conexo.
Como G no tiene puentes, por el lema anterior entonces $\{u, v\}$ pertenece a algún ciclo. Sea este $c =< u, v, v_1, v_2, \dots, v_k, u >$, sea w el primer vértice de c luego de v tal que pertenece a V(G'). Este existe debido a que u pertenece a G' y es el último vértice de c.
Entonces se tomará el camino no dirigido de u hacia w de la siguiente forma c'=$< u, v, \dots, w >$ tal que las aristas se dirijan en ese sentido.
Note que para todo vértice que pertenece a G' se puede acceder a todo vértice de c' (puesto que G' es orientable) y cada vértice de c' puede acceder a w, lo que implica que puede acceder a todo vértice de G' y por tanto G'+c' es un subgrafo de G que es orientable y es mayor que G' lo que es una contradicción, luego el mayor subgrafo de G que es orientable es el propio G.

Definición. *Un **torneo** es un digrafo que tiene como grafo subyacente un grafo completo, o sea, un grafo completo orientado*

Teorema. *En todo torneo hay un camino de Hamilton.*

Demostración. *Demostración por inducción el número de vértices*

Caso base: Si n=2 se cumple.

Paso inductivo
Demostremos que si se cumple para n se cumple para n+1
Sea T'=T-v
Note que T' es un torneo, pues tiene n vértices (hipótesis de inducción), y por tanto existe un camino de Hamilton en T'. Sea este $c =< v_1, v_2, \ldots, v_n >$.
Ahora:

- Si $exdeg(v) = 0$ entonces $indeg(v) = n$ luego el camino $< v_1, v_2, \ldots, v_n, v >$ es de Hamilton
- Si $exdeg(v) = n$ entonces $indeg(v) = 0$ luego el camino $< v, v_1, v_2, \ldots, v_n >$ es de Hamilton

Sea $exdeg(v) = k$ tal que $i \leq k < n$, entonces existe v_i tal que
$< v, v_i >\in E(T)$ y $< v_{i-1}, v >\in E(T)$, luego $< v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v, v_i, \ldots, v_n >$ es un camino de Hamilton. Este i debe existir pues todas las aristas consecutivas dentro del camino tendrán el mismo sentido, en algún momento deben cambiar pues el grado exterior es k, y por tanto el interior es n-k.

Teorema. *En un digrafo D se cumple que existe un camino de longitud* $X(D)-1$

Demostración.

Sea A un conjunto minimal de arcos tal que cuando se elimine el grafo resultante D-A sea acíclico.
Sea k la longitud del camino simple más lardo de D-A.
aplíquese la siguiente función de coloración para los vértices de D-A, $f(v) = p$ si $p - 1$ es la longitud del camino más largo desde v.
Note que para todo vértice v de D-A si $< v, w >\in E(D - A)$ entonces $f(v) \neq f(w)$
Probemos esto, supongamos lo contrario que el camino más largo desde v es igual al camino más largo desde w, ambos igual a p.
Como existe $< v, w >$ entonces en el camino desde w no aparece v, pues D-A es acíclico. Luego, el camino $< v, w, \ldots, x >$ donde $< w, \ldots, x >$ es camino de mayor longitud desde w, tiene longitud p, y es más largo que desde v que era de longitud p-1, lo que es una contradicción.
Ahora volvamos, igualmente, se demuestra que para todo vértice v que pertenece a un camino simple se tiene colores distintos.
Como el camino de longitud máxima es de tamño k entonces para colorear a a D-A bastan k+1 colores.
Note que añadir una de A necesariamente crea un ciclo, puesto que A era minimal, por tanto si $e =< e, y >$ entonces en D-A existía un camino desde x hasta a y, y por tanto sus colores son distintos.
Al añadir todas las aristas de A el grafo continúa siendo k+1 coloreable, entonces $X(D) \leq k + 1$ luego $k \geq X(D) - 1$