

Conferencia 5 - Planaridad

27 de abril de 2025

Definición. Sea G un grafo, la secuencia de los grados de los vértices de G es la lista de los grados de sus vértices. Entonces, un grafo con secuencia D se dice que realiza D .

Definición. Una secuencia S de números no negativos se dice gráfica si existe un grafo que realiza S .

Teorema. Una secuencia no creciente de números no negativos d_1, d_2, \dots, d_n es la secuencia de los grados de un pseudografo si y solo $\sum_{i=1}^n d_i$ es par

Demostración.

Demostremos en el sentido directo.

Cada arista aumenta la suma total de los grados en 2, por tanto la la paridad de la suma no varía con cada arista. Como se comienza sin aristas, en 0, al ir incorporando aristas la suma final es par.

En el sentido contrario.

Como tiene una cantidad par de números impares (para que la suma sea par), tomaremos parejas de vértices y los conectaremos con una arista, de esta forma el grado de cada uno sería 1 y ahora la cantidad de números que faltan por ubicar serían todos pares. Por cada vértices se hacen tantos lazos como indiquen los números tal que se forma un pseudografo.

Teorema. La secuencia no creciente de enteros no negativos d_1, d_2, \dots, d_n es gráfica si y solo si lo es la secuencia $d_2-1, d_3-1, \dots, d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2}, d_{d_1+3}, \dots, d_n$

Demostración.

En sentido contrario.

Si $d_2-1, d_3-1, \dots, d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2}, d_{d_1+3}, \dots, d_n$ es gráfica entonces existe un gráfico con $n-1$ vértices con dichos grados. Por tanto, se puede añadir un vértices v_1 que se pondrá adyacente a los vértices con los grados $d_2-1, d_3-1, \dots, d_{d_1+1}-1$, entonces v_1 tendría grado d_1 y estos vértices tendrían grados $d_2, d_3, \dots, d_{d_1+1}$, luego la nueva lista de grados sería d_1, d_2, \dots, d_n que es gráfica.

En sentido directo.

Denotemos por v_i al vértice cuyo grado es d_i . De todos los grafos que se pueden formar a partir de la secuencia d_1, d_2, \dots, d_n tomemos aquel tal que la suma de los grados de los vértices adyacentes a v_1 es máxima. Sea este G , suponga que no todos los vértices adyacentes a v_1 son los de mayor grado después de él, por tanto existe v_p y v_k tal que v_i es adyacente a v_p , no adyacente a v_k y $\deg(v_k) \geq \deg(v_p)$.

Como el $\deg(v_k) \geq \deg(v_p)$ entonces existe v_j tal que v_j es adyacente a v_k y no lo es a v_p . Por tanto, si se suprimen las aristas $\{v_1, v_p\}$ y $\{v_k, v_j\}$ y se añaden las aristas $\{v_1, v_k\}$ y $\{v_p, v_j\}$ se tiene un grafo nuevo donde los grados de los vértices no fueron alterados y la suma de los grados de los vértices adyacente a v_1 es mayor que en G . Lo que es una contradicción porque en G esto era maximal.

Entonces se puede asegurar que existe un grafo donde v_1 es el vértice de mayor grado y los d_1 vértices adyacentes son los de mayor grado después de él, o sea $v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}$.

Si a este grafo se le suprime el vértice v_1 y las aristas que inciden sobre él entonces se obtendría un grafo cuya secuencia de grados sería $d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, d_{d_1+3}, \dots, d_n$

Definición. Un grafo G es planar si existe un dibujo en el plano de G donde nunca dos de sus aristas se crucen.

Teorema. Si G es planar entonces hay un dibujo de G que se puede hacer solo con líneas rectas

Definición. Una cara de un dibujo planar de un grafo planar es una región maximal del plano que no contiene ningún vértice o arista.

- Toda cara interior está bordeada por un ciclo.
- Solo hay una cara externa.

Teorema (Teorema de Euler). Sea G un grafo conexo con $|E(G)| = m$ y $|V(G)| = n$, para todo dibujo planar de G se cumple que $n - m + f = 2$ donde f es la cantidad de caras del dibujo.

Para la demostración del **Teorema de Euler** utilizaremos el siguiente lema:

Lema. Si $m \geq n$ entonces G tiene al menos un ciclo.

Demostración. Demostremos el lema por el contrarrecíproco.

Sea G acíclico, entonces G se divide en componentes conexas C_1, C_2, \dots, C_k donde para cada C_i se tiene que esta es conexa y acíclica, luego cada C_i es un árbol por lo que $|E(C_i)| = |V(C_i)| - 1$.

Luego $m = |E(G)| = \sum_{i=1}^k |E(C_i)| = \sum_{i=1}^k |V(C_i)| - k = n - k$ y para $k = 1$ se tiene entonces que $m \leq n - 1 < n$

Ahora vamos a la demostración del Teorema.

Demostración. Demostración del **Teorema de Euler** por inducción en el número de aristas

Caso base Tomamos $m = n - 1$ (mínima cantidad de aristas para que G sea conexo)

Como G es conexo y $m = n - 1$ entonces G es un árbol, luego es acíclico. Como G es acíclico entonces no tiene caras interiores, por tanto $f = 1$ (tiene la cara exterior que es la única).

Por tanto, $n - m + f = n - (n - 1) + 1 = 2$

Paso inductivo Sea $m \geq n$.

Por el lema demostrado, en G existe al menos un ciclo, si se suprime una arista de dicho ciclo G no pierde conexidad y se obtiene G' tal que $|E(G')| = m - 1$ y $|V(G')| = n$, además, como se pierde 1 ciclo también se pierde una cara, luego $n - (m - 1) + (f - 1) = 2$ y eso es $n - m + f = 2$

Definición. El grado de una cara es la cantidad de aristas que participan en ella.

Nota: las aristas de corte se cuentan doble.

Lema. Faceshaking Lemma Si un grafo planar G tiene k caras (f_1, f_2, \dots, f_k) , entonces $\sum_{i=1}^k \deg(f_i) = 2|E(G)|$

Demostración.

- El grado de una cara es el número de aristas que la bordean. En un grafo planar, cada arista limita dos caras exactamente.
- Luego, cada arista contribuye con 1 al grado de dos caras distintas.
- Por tanto, al sumar los grados de todas las caras, cada arista se cuenta exactamente dos veces. Entonces $\sum_{i=1}^k \deg(f_i) = 2|E(G)|$ ■.

Definición. Un grafo G es maximal planar si es planar y la adición de cualquier otra arista lo hace no planar

Nota: Todo grafo maximal planar es conexo

Teorema. Sea G un grafo conexo con $|V(G)| \geq 3$, G es maximal planar si y solo si toda cara de un dibujo planar es un triángulo, o sea, dicha cara tiene grado 3

Demostración.

En el sentido directo.

Suponga que existe c_i tal que $\deg(c_i) \geq 4$. Luego, en c_i hay al menos dos vértices que no son adyacentes, por tanto se puede trazar una arista entre ellos y no dejará de ser un dibujo planar. Y esto es una contradicción pues G es maximal planar.

En sentido contrario es bastante claro.

Teorema. Si G un grafo maximal planar donde $|E(G)| = m$ y $|V(G)| = n$ entonces $m = 3n - 6$

Demostración.

Si f es la cantidad de caras entonces $2m = 3f$, por el Faceshaking Lemma, luego $f = \frac{2m}{3}$ y, por tanto, como $n - m + f = 2$ entonces $n - m + \frac{2m}{3} = 2$ y despejando se tiene que $m = 3n - 6$

Corolario. Si G es planar entonces se cumple que $m \leq 3n - 6$

Demostración

Si G no es maximal planar entonces se pueden añadir aristas hasta que lo sea, por tanto, $|E(G)| = m \leq 3n - 6$

Lema. Si G es un grafo planar entonces G tiene al menos un vértice cuyo grado es menor o igual a 5

Demostración

Suponga que no hay ningún vértice con grado menor que 5, luego para todo vértice v de G se tiene que $\deg(v) \geq 5$

luego se tiene entonces que $2m = \sum_{i=1}^n \deg(v_i) \geq 5n$ y esto es contradicción pues $m \leq 3n - 6$

De manera similar se puede demostrar que tiene al menos 2 vértices con grado menor o igual a 5.

Similarmente, para al menos 4 vértices con grado menor o igual a 5.

Definición. Sea G un grafo y $e = \{x, y\}$ una arista de G . Una subdivisión de e consiste en suprimir a esta y añadir un nuevo vértice z con las aristas $\{x, z\}$ y $\{z, y\}$. Si el grafo G se obtiene de un grafo H a través de una secuencia de subdivisiones de aristas de H , se dice que G es una subdivisión de H o que es homeomorfo con H .

Teorema (Teorema de Kuratowski). *Un grafo G es planar si y solo si no contiene un subgrafo que sea una subdivisión de K_5 o de $K_{3,3}$*

Definición. Si un grafo G contiene una subdivisión de un grafo H como subgrafo, entonces decimos que H es un menor topológico de G .

La operación contraria a la subdivisión es una contracción. Sin embargo, al contraer podemos eliminar cualquier vértice, no solo un vértice de grado 2. Si hacemos eso, obtenemos lo que se llama un menor en el sentido más general.

Teorema (Teorema de Wagner). *Un grafo G es planar si y solo si no contiene a K_5 o $K_{3,3}$ como menor (no necesariamente topológico).*

Dado que un menor topológico es un menor en el sentido general, solo sería necesario probar que si un grafo contiene un menor de K_5 o $K_{3,3}$, debe contener también un menor topológico de alguno de estos (no necesariamente el mismo).