May 31, 2024 - Esercizi

I Argomenti.

Esercizio 1
Siano date $\mu = \mathcal{L}^1\lfloor_{[0,1]}$, $\nu = 2x \cdot \mathcal{L}^1\lfloor_{[0,1]}$. Trovare la mappa di trasporto monotona $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $T_\sharp \mu = \nu$.

Esercizio 2
Siano dati X, Y spazi Polacchi, $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ spazio di misure,

$$S : \Omega \to X, \qquad T : \Omega \to Y$$

funzioni misurabili. Dimostrare che

$$(S,T)_\sharp \mu \in \Gamma(S_\sharp \mu,\ T_\sharp \mu).$$

Esercizio 3
Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ una funzione T-periodica e $g \in C^0(\mathbb{R})$. Dimostrare che

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(nx) g(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\, \mathrm{d}x \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x.$$

Esercizio 4
Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ una funzione T-periodica, e $f_n(x) = f(nx)$. Dimostrare che

$$f_n \rightharpoonup \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\, \mathrm{d}x$$

debolmente, in $L^2(a,b)$.

Last update: May 31, 2024