Uniwerystet Jagielloński

Pytania do egzaminu licencjackiego

na kierunku Informatyka

Małgorzata Dymek

Rok akademicki 2019/2020

Spis treści

Matematyczne podstawy informatyki

1 Zasada indukcji matematycznej.

Twierdzenie 1.1 ***Zasada indukcji matematycznej.*** *Niech T(n) - funkcja/forma zdaniowana zmiennej $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli:*

1. *zachodzi* $T(0)$
2. $\forall n \in \mathbb{N} \ \ T(n) \Rightarrow T(n+1)$

to wtedy $T(n)$ *jest prawdziwa dla każdego* $n \in \mathbb{N}$.

Schemat dowodu:

Niech $M = \{n \in \mathbb{N} : \ T(n) \ zachodzi\}$, $M \subset \mathbb{N}$. Wtedy wg twierdzenia:

1. $\Rightarrow 0 \in M$
2. $\Rightarrow n \in M \Rightarrow n+1 \in M$

Zatem z **aksjomatu 5** wnioskujemy M = N.

Twierdzenie 1.2 ***Aksjomat 5 liczb naturalnych (Peano)***. *Niech będzie dany zbiór, którego elementami są liczby naturalne, o następujących właściwościach:*

1. *J jest elementem tego zbioru.*
2. *Wraz z liczbą naturalną należącą do tego zbioru, należy do niego również jej następnik.*

Wtedy zbiór ten zawiera wszystkie liczby naturalne. $(Z \subset \mathbb{N}) \wedge (J \in Z) \wedge (\forall k \in \mathbb{N} k* \in Z) \Rightarrow Z = \mathbb{N}$.

Przykład: $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$, Nierówność Bernoulliego *dla* $h \geqslant -1 \ \ (1+h)^2 \geqslant 1 + n * h, \ \ \forall n \in \mathbb{N}^+$, $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \forall n \in \mathbb{N}$

2 Porządki częściowe i liniowe. Elementy największe, najmniejsze, maksymalne i minimalne.

Definicja 2.1 ***Częściowy porządek***. *Niech X zbiór, $R \subset X \times X$ relacja. Wtedy R nazywamy* ***relacją częściowego porządku*** *w $X \Leftrightarrow$*

1. *R* ***zwrotna*** *($\forall x \in X \; xRx$),*
2. *R* ***przechodnia*** *($\forall x, y, z \in X \; xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$),*
3. *R* ***antysymetryczna*** *($\forall x, y \in X \; xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$).*

Piszemy: $\leqslant, \preceq, \prec$ gdy $\neq$. Przykład: $(\mathbb{R}, \leqslant)$, gdzie $x \preceq y \Leftrightarrow x \leqslant y \; \forall x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy $(\mathbb{R}, \preceq)$ jest cześciowym porządkiem.

Jeżeli $(X, \mathbb{R})$ jest częściowym porządkiem, to elementy $x, y \in X$ nazywamy ***porównywalnymi*** *$\Leftrightarrow \; xRy \vee yRx$.*

Diagram Hassego *- graf skierowany przedstawiający częściowy porządek w zbiorze, w odpowiedni sposób przedstawiony graficznie.*

Definicja 2.2 ***Liniowy porządek***. *Niech X zbiór, $R \subset X \times X$ relacja. Wtedy R nazywamy* ***relacją częściowego porządku*** *w $X \Leftrightarrow$*

1. *R* ***zwrotna*** *($\forall x \in X \; xRx$),*
2. *R* ***przechodnia*** *($\forall x, y, z \in X \; xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$),*
3. *R* ***antysymetryczna*** *($\forall x, y \in X \; xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$),*
4. *R* ***spójna*** *($\forall x, y \in X \; xRy \vee yRx \vee x = y$).*

Definicja 2.3 *Niech $\preceq$ jest relacją częściowego porządku wówczas element m jest to:*

1. ***Element maksymalny**, jeśli* $\forall a \in A \;\; m \preceq a \;\Rightarrow\; a = m$,
2. ***Element minimalny**, jeśli* $\forall a \in A \;\; a \preceq m \;\Rightarrow\; a = m$,
3. ***Element największy**, jeśli* $\forall a \in A \;\; a \preceq m$,
4. ***Element najmniejszy**, jeśli* $\forall a \in A \;\; m \preceq a$.

Przykłady - sprawdź czy porządek: $xRy \Leftrightarrow x|y$

3 Relacja równoważności i zbiór ilorazowy.

Definicja 3.1 *Relację $R \subset X \times X$ nazywamy* ***relacją równoważości*** $\Leftrightarrow$ *relacja R jest:*

1. ***zwrotna*** *($\forall x \in X \ xRx$),*
2. ***symetryczna*** *($\forall x, y \in X \ xRy \Rightarrow yRx$),*
3. ***przechodnia*** *($\forall x, y, z \in X \ xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$).*

Definicja 3.2 *Niech $R \subset X \times X$ będzie relacją równoważności, $X \neq \varnothing$, $x \in X$.* ***Klasą abstrakcji*** *elementu x (wzgledem relacji R) nazywamy:*
$[x]_R = y \in X : xRy$
Element x nazywamy reprezentantem klasy abstrakcji $[x]_R$.

Definicja 3.3 ***Zbiorem ilorazowym*** *zbioru X przez relację R nazywamy zbiór wszystkich klas abstrakcji.*
$X/R = [y]_R : x \in X \quad \subset X$

Przykład: $xRy \ \Leftrightarrow x \equiv_3 y$.

4 Metody dowodzenia twierdzeń: wprost, nie wprost, przez kontrapozycję.

Dla prawdziwości zdania:

$$p \Rightarrow q$$

Definicja 4.1 ***Dowód wprost***. *Metoda dowodu wprost polega na założeniu, że p jest prawdą i pokazaniu, że wówczas q jest prawdą.*

Definicja 4.2 ***Dowód nie wprost***. *Metoda dowodu nie wprost opiera się na następującej tautologii rachunku zdań, zwanej prawem kontrapozycji:*

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p).$$

Zatem stosując tę metodę zakładamy, że q jest zdaniem fałszywym i pokazujemy, że p jest również zdaniem fałszywym.

Definicja 4.3 ***Dowód przez zaprzeczenie*** *Metoda dowodu przez zaprzeczenie opiera się na następującej tautologii rachunku zdań:*

$$(p \Rightarrow q) \;\; \Leftrightarrow \;\; (\neg p \vee q) \;\; \Leftrightarrow \;\; \neg(p \wedge \neg q)$$

Stosując to podejście zakładamy, że p jest prawdą a q fałszem i pokazujemy, że prowadzi to do sprzeczności, to znaczy, pokazujemy że $(p \wedge \neg q)$ jest fałszem.

5 Metody numeryczne rozwiązywania równań nieliniowych: bisekcji, siecznych, Newtona.

5.1 Metoda połowienia (bisekcji)

Założenia:

- f jest funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$,
- $f(a)f(b) < 0$.

Z własności Darboux funkcji ciągłych, funkcja f ma miejsce zerowe w przedziale $[a, b]$.

Definicja 5.1 ***Algorytm bisekcji*** *polega na obliczeniu* $f(c_k)$, *gdzie* $c_k = \frac{a_k+b_k}{2}$ *i zastąpieniu przez* c_k *tej z liczb* a_k, b_k *dla której funkcja* f *ma taki sam znak.*

$$(a_{k+1}, b_{k+1}) = (c_k, b_k) \text{ jeżeli } f(a_k)f(c_k) > 0$$
$$(a_{k+1}, b_{k+1}) = (a_k, c_k) \text{ jeżeli } f(b_k)f(c_k) > 0$$

Jeżeli $f(c_k) = 0$ *to kończymy obliczenia.*

- Metoda bisekcji jest **niezawodna**, ale **wolno zbieżna**.
- W każdym kroku szerokość przedziału jest dzielona przez dwa.
- Kryteria zakończednia obliczeń:
  - osiągnięto dokładność $\delta : |e_n| < \delta$
  - wartość funkcji jest bliska 0: $f(c_n) < \epsilon$
  - wykonano M iteracji
- Algorytm bisekcji w k-tej iteracji przybliża rozwiązanie α z **dokładnością:** $|x_k - \alpha| \leqslant \frac{|b-a|}{2^k}$.

5.2 Metoda siecznych

Założenia:

- f jest funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$,

- $f(a)f(b) < 0$.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

gdzie $x_0 = a$, $x_1 = b$.

- W metodzie siecznych rezygnujemy z założenia, że funkcja na końcach przedziału ma rózne znaki.
- Należy kontrolować zachowanie otrzymanego ciągu. **Może się zdarzyć, że metoda wyprodukuje ciąg rozbieżny!**
- korzyćci płynące ze stosowania tej metody to zdecydowanie **szybsza zbieżność** ciągu iteracji, jeśli x_n, x_{n+1} juz są dobrymi **przybliżeniami pierwiastka**.

5.3 Metoda Newtona (stycznych)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Zmodyfikowana metoda Newtona:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n) \pm \sqrt{(f'(x_n))^2 - 2f(x_n)f''(x_n)}}{f''(x_n)}$$

- Metoda Newtona w wielu sytuacjach daje **bardzo szybką zbieżność**.
- Podstawową wadą tej metody jest konieczność obliczenia pochodnej funkcji.
- Zmodyfikowana metoda Newtona daje bardzo szybką zbieżność, jeśli x_n jest już dobrym przybliżeniem pierwiastka.
- Koszt wyznaczenia kolejnego przybliżenia w zmodyfikowanej metodzie może przerastać korzyści płynące z szybszej zbieżności.

Wielowymiarowa metoda Newtona.

Jeśli $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest różniczkowalną funkcją wielu zmiennych możemy przybliżyć ją lokalnie:

$$f(x) \approx f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$$

gdzie

$$Df(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1}(x_0) & \frac{\delta f_1}{\delta x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n}(x_0) \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1}(x_0) & \frac{\delta f_2}{\delta x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\delta f_2}{\delta x_n}(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\delta f_n}{\delta x_1}(x_0) & \frac{\delta f_n}{\delta x 2}(x_0) & \ldots & \frac{\delta f_n}{\delta x_n}(x_0) \end{bmatrix}$$

Rozwiązując równanie $f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) = 0$ otrzymujemy:

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - [Df(x^{(i)})]^{-1} f(x^{(i)})$$

$$[Df(x^{(i)})](x^{(i+1)} - x^{(i)}) = -f(x^{(i)})$$

6 Rozwiązywanie układów równań liniowych: metoda eliminacji Gaussa, metody iteracyjne Jacobiego i Gaussa-Seidla.

6.1 Metoda eliminacji Gaussa

Obliczając rząd macierzy metodą Gaussa należy za pomocą operacji elementarnych na wierszach sprowadzić macierz do macierzy schodkowej. Wtedy wszystkie niezerowe wiersze są liniowo niezależne i można łatwo odczytać rząd macierzy.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \underset{w_2-2w_1, w_3+w_1, w_4-2w_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \underset{w_2 \leftrightarrow w_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \sim$$

$$\underset{w4-w_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \underset{w4-w_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Metody iteracyjne

Ogólna postać metody iteracyjnej:

$$Ax = b$$

$$Qx^{n+1} = (Q - A)x^n + b = \tilde{b}$$

$$x^0 = (0, 0, 0)$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + (-2)x_2 + 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + (-1)x_2 + (-4)x_3 = 0 \end{cases}$$

6.2 Metoda iteracyjna Jacobiego

6.2.1 Algebraicznie

$$\begin{cases} x_1^{N+1} = \frac{1}{5}(10 + 2x_2^N - 3x_3^N) \\ x_2^{N+1} = \frac{1}{4}(-2x_1^N - 2x_3^N) \\ x_3^{N+1} = -\frac{1}{4}(x_2^N - 2x_1^N) \end{cases}$$

6.2.2 Macierzowo

$$Q = D \quad \text{(diagonalna)}$$

6.3 Metoda iteracyjna Gaussa-Seidla

6.3.1 Algebraicznie

$$\begin{cases} x_1^{N+1} = \frac{1}{5}(10 + 2x_2^N - 3x_3^N) \\ x_2^{N+1} = \frac{1}{4}(-2x_1^N - 2x_3^{N+1}) \\ x_3^{N+1} = -\frac{1}{4}(x_2^{N+1} - 2x_1^{N+1}) \end{cases}$$

6.3.2 Macierzowo

$$Q = L + D \quad \text{(diagonalna i dolnotrójkątna)}$$

7 Wartości i wektory własne macierzy: numeryczne algorytmy ich wyznaczania.

$$A \in \mathbb{C}^{n\times n} \quad \text{szukamy} \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

Definicja 7.1 *Jeżeli*

$$Ax = \lambda x$$

dla $x \neq 0$ to λ jest ***wartością własną*** *A, a x -* ***wektorem własnym*** *A odpowiadającym λ.*

7.1 Metoda potęgowa

$$Ax = \lambda x$$
$$x^{N+1} = A^{N+1}x^0$$

8 Interpolacja wielomianowa: metody Lagrange'a i Hermite'a. Efekt Rungego.

9 Zmienne losowe dyskretne. Definicje i najważniejsze rozkłady.

Definicja 9.1 ***Zmienne dyskretne.***

$$P(x) = P(X = x)$$

Obliczanie prawdopodobieństwa: $P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(x)$.
Skumulowana funkcja rozkładu: $F(x) = P(X \leqslant x) = \sum_{y \leqslant x} P(y)$
Całkowite prawdopodobieństwo: $\sum_x P(x) = 1$.
Wartość oczekiwana: $EX = \sum_x xP(x)$.
Wariancja: $VarX = \sigma^2 = E[(X - \mu)^2]$.

Rozkład	P(x)	EX	VarX	
Bernoulli(p)	$P(x) = \begin{cases} p, & \text{for } x = 1 \\ q = (1-p), & \text{for } x = 0 \end{cases}$	p	pq	próba
Binomial(n, p)	$P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ for $x = 0, 1, \dots$	np	npq	liczba sukcesów z n prób
Geometric(p)	$P(x) = (1-p)^{x-1} p$ for $x = 1, 2, \dots$ $P(X > k) = (1-p)^k$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	liczba prób do sukcesu
Poiss(λ)	$P(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$ for $x = 0, 1, \dots$	λ	λ	rozkład zdarzeń rzadkich

10 Zmienne losowe ciągłe. Definicje i najważniejsze rozkłady.

Definicja 10.1 ***Zmienne ciągłe.***

$$f(x) = F'(x)$$

Obliczanie prawdopodobieństwa: $P(X \in A) = \int_A f(x)dx$.
Skumulowana funkcja rozkładu: $F(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$.
Całkowite prawdopodobieństwo: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.
Wartość oczekiwana: $EX = \int xf(x)dx$.
Wariancja: $VarX = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx$.

Rozkład	f(x), F(x)	EX	VarX	
Unif(a,b)	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ for $a \leqslant x \leqslant b$ $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{for } a \leqslant x < b \\ 1, & \text{for } x \geqslant b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	
Exp(λ)	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ for $x \geqslant 0$ $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	modelowanie czasu, brak pamięci
Gamma(α, λ)	$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$ $F(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	łączny czas α niezależnych zdarzeń $\sim Exp(\lambda)$
N(μ, σ)	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $F(x) = \Phi(x)$ dla N(0,1)	μ	σ^2	

$$Bin(n,p) \approx Poiss(\lambda) \tag{1}$$

$$P(T \leqslant t) = P(X \geqslant \alpha) \tag{2}$$

$$T \sim Gamma(\alpha, \lambda), X \sim Poiss(\lambda t)$$

$$Binomial(n, p) = N(np, \sqrt{np(1-p)}) \tag{3}$$

$$X_i \sim Bernoulli(p), S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, 0.05 \leqslant p \leqslant -0.95$$

11 Łancuchy Markowa. Rozkład stacjonarny.

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Rozkład w czasie h: $P_h = P_0 * P^h$
Rozkład stacjonarny: $\pi P = \pi$, $\sum \pi_i = 1$

12 Testy statystyczne: test z, test t-Studenta, test chi-kwadrat.

Rozkład t-studenta

$t = \frac{\hat{\theta}=\theta}{s(\hat{\theta})}$ ← zastępujemy $Std(\hat{\theta})$ przez $s(\hat{\theta})$, n-1 stopni swobody

$$\bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \frac{s(\hat{\theta})}{\sqrt{n}}$$

Z-testy

Hipoteza zerowa	Parametr, estymator	jeśli H_0 jest prawdziwa:		Statystyka
H_0	$\theta, \hat{\theta}$	$E(\hat{\theta})$	$Var(\hat{\theta})$	$Z = \frac{\hat{\theta}-\theta_0}{\sqrt{Var(\hat{\theta})}}$
$\mu = \mu_0$	μ, $\bar{X}$	μ_0	$\frac{\sigma^2}{n}$	$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
$p = p_0$	p, $\hat{p}$	p_0	$\frac{p_0(1-p_0)}{n}$	$Z = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$
$\mu_X - \mu_Y = D$	$\mu_X - \mu_Y$, $\bar{X} - \bar{Y}$	D	$\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{n}$	$Z = \frac{\bar{X}+\bar{Y}-D}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}+\frac{\sigma_Y^2}{m}}}$
$p_1 - p_2 = D$	$p_1 - p_2$, $\hat{p_1} - \hat{p_2}$	D	$\frac{p_1(1-p_1)}{n} + \frac{p_2(1-p_2)}{m}$	$Z = \frac{\hat{p_1}-\hat{p_2}-D}{\sqrt{\frac{\hat{p_1}(1-\hat{p_1})}{n}+\frac{\hat{p_2}(1-\hat{p_2})}{m}}}$
$p_1 = p_2$	$p_1 - p_2$, $\hat{p_1} - \hat{p_2}$	0	$p(1-p)(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})$ gdzie $p = p_1 = p_2$	$Z = \frac{\hat{p_1}-\hat{p_2}}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})}}$ gdzie $\hat{p} = \frac{n\hat{p_1}+m\hat{p_2}}{n+m}$

T-testy

Hipoteza zerowa	Warunki	Statystyka	Stopnie swobody
$\mu = \mu_0$	Rozmiar próby n; nieznana σ	$t = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$	$n-1$
$\mu_X - \mu_Y = D$	Rozmiary prób n, m nieznane, równe $\sigma_X = \sigma_Y$	$t = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-D}{s_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}$	$n+m-2$
$\mu_X - \mu_Y = D$	Rozmiary prób n, m; nieznane, różne $\sigma_X \neq \sigma_Y$	$t = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-D}{\sqrt{\frac{s_X^2}{n}+\frac{s_Y^2}{m}}}$	aproksymacja Satterthwaite

Rozkład obserwacji o rozkładzie normalnym i wspólnej wariancji σ^2

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 \sim Chi - square(n-1) \sim Gamma\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Zatem przedział ufności:

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right]$$

Testy Chi kwadrat

H_0	H_A	Test statistic	Rejection region	P-value
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$ $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2_{obs} > \chi^2_\alpha$ $\chi^2_{obs} < \chi^2_\alpha$ $\chi^2_{obs} \geqslant \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$ or $\chi^2_{obs} \leqslant \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$	$P\chi^2 \geqslant \chi^2_{obs}$ $P\chi^2 \leqslant \chi^2_{obs}$ $2min(P\chi^2 \geqslant \chi^2_{obs}, P\chi^2 \leqslant \chi^2_{obs})$

Statystyka Chi-kwadrat

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{N}\frac{(Obs(k) - Exp(k))^2}{Exp(k)}, R = [\chi^2_\alpha, +\infty], P = P\chi^2 \geqslant \chi^2_{obs}$$

Rule of thumb: $Exp(k) \geqslant 5$ for all $k = 1, \ldots, N$.

Test Chi-kwadrat niezależności A i B

$$\chi^2_{obs} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\frac{(Obs(i,j) - E\hat{x}p(i,j))^2}{E\hat{x}p(i,j)}, E\hat{x}p(i,j) = \frac{(n_{i.})(n_{.j})}{n}$$

13 Wzór Bayesa i jego interpretacja.

Prawdopodobieństwo warunkowe

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \tag{4}$$

$$P(E_1 \cap \cdots \cap E_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i|X_1, \ldots, X_{i-1}) \tag{5}$$

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)P(F_i) \text{ dla } \bigcap_{i=1}^{n} F_i = \Omega \tag{6}$$

Wzór Bayesa:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad \text{przy } P(B) > 0$$

dowód:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \;\rightarrow\; P(A \cap B) = P(B|A) * P(A)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \;\rightarrow\; P(A|B) * P(B) = P(A \cap B) = P(B|A) * P(A) \quad / : P(B)$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

14 Istnienie elementów odwrotnych względem mnożenia w strukturze $(Zm, +, *)$ w zależności od liczby naturalnej m. Rozszerzony algorytm Euklidesa.

15 Ortogonalność wektorów w przestrzeni R_n; związki z liniową niezależnością. Metoda ortonormalizacji Grama-Schmidta.

16 Liczby Stirlinga I i II rodzaju i ich interpretacja.

Definicja 16.1 ***Liczby Stirling I rodzaju***.
Dla dowolnego $n \geqslant 1$ *mamy:*

1. $c(0,0) = 1$
2. $c(n,0) = c(0,n) = 0$
3. $c(n,k) = c(n-1,k-1) + (n-1) * c(n-1,k)$

W szczególności:

1. $c(n,n) = 1, c(n,1) = (n-1)!$
2. $\sum_{k=0}^{n} c(n,k) = n!$

Interpretacja*: Przez* $c(n,k)$ $\left(\left[{n \atop k}\right]\right)$ *oznaczamy liczbę permutacji zbioru n-elementowego, które mają rozkład na dokładnie k cykli rozłącznych.*

Definicja 16.2 ***Liczby Stirlinga II rodzaju***.
Dla dowolnego $n \geqslant 1$ *mamy:*

1. $S(0,0) = 1,$
2. $S(n,0) = S(0,n) = 0,$
3. $S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \times S(n-1,k).$

w szczególności $S(n,n) = S(n,1) = 1.$

Interpretacja*: Przez* $S(n,k)$ $\left(\left\{{n \atop k}\right\}\right)$ *oznaczamy liczbę rozmieszczeń n rozróżnialnych kul na k nierozróżnialnych stosach w taki sposób, aby żaden stos nie był pusty.*

17 Twierdzenia Eulera i Fermata; funkcja Eulera.

18 Konfiguracje i t-konfiguracje kombinatoryczne.

Definicja 18.1 *Rodzinę podzbiorów $B_1, dots, B_b \subset X$ nazywamy **konfiguracją kombinatoryczną o parametrach (n, k, λ)** (gdzie $\lambda \geqslant 1$) na zbiorze X, jeśli spełnia następujące warunki:*

1. $n = |X|$,
2. $k = |B_i| \forall i = 1, dots, b$,
3. *Każde dwa elementy $x, y \in X$ występują jednocześnie w dokładnie λ spośród zbiorów B_i.*

Twierdzenie 18.2 *Dla dowolnej konfiguracji o parametrach (n, k, λ) zachodzą związki:*

1. $n * r = k * b$
2. $\lambda * (n-1) = r * (k-1)$

gdzie b - liczba bloków, r - łączna liczba wystąpieeń dowolnego pojedynczego $x \in X$ we wszystkich blokach.

$$r = \lambda * \frac{n-1}{k-1} \quad \text{oraz} \quad b = \lambda * \frac{n(n-1)}{k(k-1)}$$

Definicja 18.3 *Niech $t \geqslant 2$. Rodzinę podzbiorów $B_1, dots, B_b \subset X$ nazywamy **t-konfiguracją kombinatoryczną o parametrach (n, k, λ_t)** (gdzie $\lambda_t \geqslant 1$) na zbiorze X, jeśli spełnia następujące warunki:*

1. $n = |X|$,
2. $k = |B_i| \quad \forall i = 1, dots, b$,
3. *Każdy t-elementowy podzbiór $\{x_1, \ldots, x_t\} \subset X$ występuje jednocześnie w dokładnie λ_t spośród zbiorów B_i.*

Twierdzenie 18.4 *Każda t-konfiguracja kombinatoryczna jest również s-konfiguracją dla* $2 \leqslant s < t$*, przy czym zachodzi związek:*

$$\lambda_s = \lambda_t * \frac{(n-t+1)(n-t+2)*\cdots*(n-s)}{(k-t+1)(k-t+2)*\cdots*(k-s)}$$

19 Cykl Hamiltona, obwód Eulera, liczba chromatyczna - definicje i twierdzenia.

19.1 Cykl Hamiltona

Definicja 19.1 ***Ścieżka Hamiltona***. *Ścieżką Hamiltona w grafie G nazywamy ścieżkę, która przechodzi przez wszystkie wierzchołki G.*

Definicja 19.2 ***Cykl Hamiltona***. *Powiemy, że graf G ma cykl Hamiltona, jeśli istnieje w nim cykl przechodzący przez wszystkie wierzchołki. Taki graf nazwyamy hamiltonowskim.*

Twierdzenie 19.3 *Niech $G = (V, E)$ będzie grafem o $n \geqslant 3$ wierzchołkach. Jeśli dla dwolonych różnych, niesąsiednich wierzchołków $u, v \in V$ zachodzi warunek $d(u) + d(v) \geqslant n$, to G jest hamiltonowski.*

Twierdzenie 19.4 *Jeśli G jest grafem o $n \geqslant 3$ wierzchołkach w którym minimalny stopień wierzchołka wynosi co najmniej $\frac{n}{2}$, to G jest hamiltonowski.*

Twierdzenie 19.5 *Niech $G = (V, E)$ będzie grafem o $n \geqslant 2$ wierzchołkach i takim, że $d(u) + d(v) \geqslant n - 1$ dla dwóch dowolnych różnych, niesąsiednich wierzchołków $u, v \in V$. Wtedy G ma ścieżkę hamiltona.*

19.2 Obwód Eulera

Definicja 19.6 ***Droga Eulera***. *Drogą Eulera w grafie G nazywamy drogę $v_1, v_2, \ldots, v_m$, w której każda krawędź grafu G użyta jest dokładnie raz.*

Definicja 19.7 ***Obwód Eulera***. *Jeśli w grafie G istnieje droga Eulera, w której pierwszy i ostatni wierzchołek są identyczne, to nazywamy ją obwodem Eulera. Graf ten nazywamy wtedy eulerowskim.*

Twierdzenie 19.8 *Niech G będzie grafem spójnym. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

1. *G jest grafem eurelowskim,*
2. *stopień każdego wierzchołka w G jest parzysty.*

Twierdzenie 19.9 *Niech G będzie grafem spójnym. Wówczas G ma drogę Eulera $\Leftrightarrow$ w G są dokładnie zero lub dwa wierzchołki stopnia nieparzystego.*

19.3 Liczba chromatyczna

Definicja 19.10 ***Kolorowanie wierchołkowe***. *Kolorowaniem wierzchołkowym grafu $G = (V, E)$ przy użyciu (co najwyżej) k kolorów nazywamy funkcję $c : V \to \{1, \dots, k\}$ spełniającą warunek $c(u) \neq c(v) \quad \forall u, v \in V : uv \in E$.*

Definicja 19.11 ***Liczba chromatyczna***. *Liczbą chromatyczną grafu G nazywamy najmniejszą liczbę $k \in \mathbb{N}$, dla której istnieje kolorwanie wierzchołkowe G przy użyciu k kolorów. Oznaczamy $\chi(G)$.*

1. $\chi(G) = 1 \Leftrightarrow |E(G)| = 0$
2. $\chi(T) = 2$ *dla każdego drzewa T o przynajmniej dwóch wierzchołkach*
3. $\chi(C_{2k}) = 2, \chi(C_{2k+1}) = 3$
4. $\chi(K_n) = n$

Twierdzenie 19.12 *Niech G będzie dowolnym grafem. Wtedy $\chi(G) \leqslant d_{max}(G) + 1$.*

Twierdzenie 19.13 *Niech G będzie grafem spójnym. Wówczas $\chi(G) \leqslant d_{max}(G)$, o ile G nie jest grafem pełnym ani cyklem o nieparzystej liczbie wierzchołków.*

20 Algorytm Forda-Fulkersona wyznaczania maksymalnego przepływu.

21 Rozwiązywanie równan rekurencyjnych przy użyciu funkcji tworzących (generujących) oraz przy użyciu równania charakterystycznego.

22 Ciąg i granica ciągu liczbowego, granica funkcji.

22.1 Ciągi.

Definicja 22.1 ***Ciąg liczbowy***. *Ciągiem liczbowym nazywamy funkcję* $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. *Wartość tej funkcji dla liczby naturalnej* n *nazywamy* n*-tym wyrazem ciągu i oznaczamy przez* a_n, b_n *itp. Ciągi o takich wyrazachoznaczamy odpowiednio przez* (a_n), (b_n) *itp. Zbiór wyrazów ciągu* (a_n), *tj.* $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *oznaczamy krótko przez* $\{a_n\}$.

Definicja 22.2 ***Granica właściwa ciągu***. *Ciąg* (a_n) *jest zbieżny do granicy właściwej* $a \in \mathbb{R}$, *co zapisujemy:*

$$lim_{n\to\infty}\ a_n = a$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N} \quad [(n > n_0) \Rightarrow (|a_n - a| < \varepsilon)]$$

Definicja 22.3 ***Granice niewłaściwe ciągu***.
Ciąg (a_n) *jest zbieżny do granicy niewłaściwej* ∞, *co zapisujemy:*

$$lim_{n\to\infty}\ a_n = \infty$$

wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N} \quad [(n > n_0) \Rightarrow (a_n > \varepsilon)]$$

Ciąg (a_n) *jest zbieżny do granicy niewłaściwej* $-\infty$, *co zapisujemy:*

$$lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall \varepsilon < 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N} \quad [(n > n_0) \Rightarrow (a_n < \varepsilon)]$$

Twierdzenie 22.4 ***O ograniczoności ciągu zbieżnego***. *Jeśli ciąg jest zbieżny do granicy właściwej, to jest ograniczony.*

Twierdzenie 22.5 ***O równoważności granic.***

$$lim_{n\to\infty}\, a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad lim_{n\to\infty}\, |a_n| = 0.$$

Twierdzenie 22.6 ***O dwóch ciągach***. *Jeśli ciągi (a_n), (b_n) spełniają warunki:*

1. $a_n \leqslant b_n \quad \forall n \geqslant n_0$
2. $lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

to

$$lim_{n\to\infty}\, b_n = \infty.$$

Prawdziwe jest także analogiczne twierdzenie dla ciągów zbieżnych do granicy niewłaściwej $-\infty$.

Twierdzenie 22.7 ***O trzech ciągach***. *Jeśli ciągi (a_n), (b_n), (c_n) spełniają warunki:*

1. $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \quad \forall n \geqslant n_0$
2. $lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty} c_n = b$

to

$$lim_{n\to\infty}\, b_n = b.$$

Twierdzenie 22.8 ***O ciągu monotonicznym i ograniczonym***. *Jeżeli ciąg (a_n) jest niemalejący dla $n \geqslant n_0$ oraz ograniczony z góry, to jest zbieżny do granicy właściwej $sup\{a_n : n \geqslant n_0\}$.*
Prawdziwe jest także analogiczne twierdzenie dla ciągu nierosnącego i ograniczonego z dołu.

22.2 Funkcje.

Definicja 22.9 ***Heinego granicy właściwej funkcji w punkcie***. *Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(x_0)$. Liczba g jest granicą właściwą funkcji f w punkcie x_0, co zapisujemy*

$$lim_{x \to x_0}\ f(x) = g$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{(x_n):\ \{x_n\} \subset S(x_0)}\ \ [(lim_{n\to\infty} x_n = x_0) \Rightarrow (lim_{n\to\infty} f(x_n) = g)].$$

Definicja 22.10 ***Cauchy'ego granicy właściwej funkcji w punkcie***. *Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(x_0)$. Liczba g jest granicą właściwą funkcji f w punkcie x_0, co zapisujemy*

$$lim_{x \to x_0}\ f(x) = g$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall x \in S(x_0) \quad [(|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - g| < \varepsilon)].$$

Funkcja f ma granicę niewłaściwą ∞ w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall x \in S(x_0) \quad [(|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (f(x) > \varepsilon)].$$

Twierdzenie 22.11 ***O nieistnieniu granicy funkcji w punkcie***. *Jeśli istnieją ciągi (x'_n), (x''_n) spełniające warunki:*

1. $lim_{n\to\infty} x'_n = x_0$, *przy czym* $x'_n \neq x_0\ \ \forall n \in \mathbb{N}$ *oraz* $lim_{n\to\infty}\ f(x'_n) = g'$,
2. $lim_{n\to\infty} x''_n = x_0$, *przy czym* $x''_n \neq x_0\ \ \forall n \in \mathbb{N}$ *oraz* $lim_{n\to\infty}\ f(x''_n) = g''$,
3. $g' \neq g''$,

to granica $lim_{x\to x_0}\ f(x)$ nie istnieje (właściwa ani niewłaściwa).

Twierdzenie 22.12 ***Warunek konieczny i wystarczajacy istnienia granicy***. *Funckja f ma w punkcie x_0 granicę właściwą (niewłaściwą) wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$lim_{x \to x_0^-} f(x) = lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Wspólna wartość granic jednostronnych jest wtedy granicą funkcji.

Twierdzenie 22.13 ***O niesitnieniu granicy funkcji w nieskończoności***. *Jeżeli istnieją ciągi (x'_n), (x''_n) spełniające warunki:*

1. $lim_{n \to \infty} x'_n = \infty$ *oraz* $lim_{n \to \infty} f(x'_n) = g'$,
2. $lim_{n \to \infty} x''_n = \infty$ *oraz* $lim_{n \to \infty} f(x''_n) = g''$,
3. $g' \neq g''$,

to nie istnieeje granica $lim_{x \to x_0} f(x)$ *(właściwa ani niewłaściwa).*

Twierdzenie 22.14 ***O dwóch funkcjach***. *Jeśli funkcje f i g spełniają warunki:*

1. $f(x) \leqslant g(x) \quad \forall x \in S(x_0)$,
2. $lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$,

to

$$lim_{x \infty x_0} g(x) = \infty.$$

Twierdzenie 22.15 ***Reguła de L'Hostpiala***. *Jeżeli funkcja f i g spełniają warunki:*

1. $lim_{x \to x_0} f(x) = lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \ (\infty)$, *przy czym* $g(x) \neq 0$ *dla* $x \in S(x_0)$
2. *istnieje granica* $lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *(właściwa lub niewłaściwa),*

to

$$lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

23 Ciągłość i pochodna funkcji. Definicja i podstawowe twierdzenia.

23.1 Ciągłość.

Definicja 23.1 ***Funkcja ciągła w punkcie***. *Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0)$. Funkcja f jest ciągła w ounkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Funkcja jest ciągła na zbiorze, *jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.*

Twierdzenie 23.2 ***Warunek konieczny i wystarczający ciągłości funkcji***. *Funckja jest ciągła w punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy jest w tym punkcie ciągła lewostronnie i prawostronnie.*

Definicja 23.3 ***Nieciągłość funkcji.*** *Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0)$. Funkcja f jest nieciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje granica $lim_{x\to x_0} f(x)$ albo gdy $lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.*

Nieciągłość pierwszego rodzaju. *Jeżeli istnieją granice skończone $lim_{x\to x_0^-} {}_{f(x)}$, $lim_{x\to x_0^+} f(x)$ oraz*

$$lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq f(x_0) \quad lub \quad lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq f(x_0).$$

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 nieciągłość pierwszego rodzaju typu "skok", jeżeli spełnia warunek

$$lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

Mówi, że funkcja f ma w punkcie x_0 nieciągłość pierwszego rodzaju typu "luka", jeżeli spełnia warunek

$$lim_{x\to x_0^-} f(x) = lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq f(x_0).$$

Nieciągłość drugiego rodzaju. *Jeżeli co najmniej jedna z granic*

$$lim_{x\to x_0^-} f(x), \quad lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

nie istnieje lub jest niewłaściwa.

Twierdzenie 23.4 ***Weierstrassa o ograniczoności funkcji ciągłej.*** *Jeżeli funkcja jest ciągła na przedziale domkniętym i ograniczonym, to jest na nim ograniczona.*

Twierdzenie 23.5 ***Weierstrassa o osiąganiu kresów.*** *Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$,to*

$$\exists c \in [a, b] \quad f(c) = \ inf_{x\in[a,b]} f(x) \quad oraz \quad \exists d \in [a, b] \quad f(d) = \ sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

Twierdzenie 23.6 ***Darboux o przyjmowaniu wartości pośrednich***. *Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$ oraz spełnia warunek $f(a) < f(b)$, to*

$$\forall w \in (f(a, f(b))) \; \exists c \in (a, b) \quad f(c) = w.$$

23.2 Pochodna.

Definicja 23.7 ***Iloraz różnicowy***. *Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0, r)$, gdzie $r > 0$. Ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie x_0 odpowiadającym przyrostowi Δx, gdzie $0 < |\Delta x| < r$, zmiennej niezależnej nazywamy liczbę*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \stackrel{def}{=} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Definicja 23.8 ***Pochodna właściwa funkcji***. *Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0)$. Pochodną właściwą funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę właściwą*

$$f'(x_0) \stackrel{def}{=} lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Inaczej mówiąc pochodna funkcji f jest granicą ilorazu różnicowego gdy $\Delta x \to \infty$. Mamy zatem

$$f'(x_0) \stackrel{def}{=} lim_{\Delta x \to \infty} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Twierdzenie 23.9 ***Warunek konieczny istnienia pochodnej właściwej funkcji***. *Jeżeli funkcja ma pochodną właściwą w punkcie, to jest ciągła w tym punkcie. Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa.*

Definicja 23.10 ***Pochodne jednostronne właściwe funkcji***. *Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0^-)$. Pochodną lewostronną właściwą funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę właściwą*

$$f'_-(x_0) \stackrel{def}{=} lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Analogicznie definiujemy $f'_+(x_0)$.

Jeżeli funkcja ma w punkcie pochodną lewostronną (prawostronną) właściwą, to jest w nim ciągła lewostronnie (prawostronnie).

Definicja 23.11 ***Pochodna funkcji na zbiorze***. *Funkcja ma pochodną właściwą na zbiorze wtedy i tylko wtedy, gdy ma pochodną właściwą w każdym punkcie tego zbioru.*

Definicja 23.12 ***Pochodna niewłaściwa funkcji***. *Niech f będzie funkcją ciągłą w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$. Funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną niewłaściwą wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty \quad albo \quad lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$$

Podobnie definiujemy pochodne niewłaściwe jednostronne.

Twierdzenie 23.13 ***Zastosowanie różniczki do obliczeń przybliżonych***. *Jeżeli funkcja f ma pochodną właściwą w punkcie x_0, to*

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Przy czym błąd, jaki popełniamy zastępując przyrost funkcji

$$\Delta f = f(x_0 \Delta x) - f(x_0)$$

jej różniczką $df = f'(x_0)\Delta x$, dąży szybciej do zera niż przyrost zmiennej niezależnej Δx, tzn.

$$lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - df}{\Delta x} = 0.$$

Twierdzenie 23.14 ***Rolle'a***. *Jeśli funkcja f spełnia warunki:*

1. *jest ciągła na $[a, b]$*
2. *ma pochodną właściwą lub niewłaściwą na (a, b),*
3. *$f(a) = f(b)$,*

to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że:

$$f'(c) = 0.$$

Twierdzenie 23.15 ***Lagrange'a***. *Jeżeli funkcja f spełnia warunki:*

1. *jest ciągła na $[a, b]$,*
2. *ma pochodną właściwą lub niewłaściwą na (a, b),*

to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

24 Ekstrema funkcji jednej zmiennej. Definicje i twierdzenia.

Definicja 24.1 ***Minimum lokalne funkcji***. *Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ minimum lokalne, jeżeli:*

$$\exists \delta > 0 \ \forall x \in S(x_0, \delta) \quad f(x) \geqslant f(x_0).$$

Analogicznie definiujemy ***maksimum lokalne****.*

Minimum lokalne jest właściwe*, jeżeli:*

$$\exists \delta > 0 \ \forall x \in S(x_0, \delta) \quad f(x) > f(x_0).$$

Analogicznie definiujemy ***maksimum lokalne właściwe****.*

Twierdzenie 24.2 ***Fermata, wranuek konieczny istnienia ekstremum***. *Jeżeli funkcja f ma:*

1. *esktremum lokalne w punkcie x_0,*
2. *pochodną $f'(x_0)$,*

to

$$f'(x_0) = 0.$$

Twierdzenie 24.3 ***I warunek wystarczający istnienia ekstremum***. *Jeżeli funkcja f spełnia warunki:*

1. *$f'(x_0) = 0$,*
2. *$\exists \delta > 0 \begin{cases} f'x > 0 & \forall x \in S(x_0^-, \delta), \\ f'x < 0 & \forall x \in S(x_0^+, \delta), \end{cases}$*

to w punkcie x_0 ma maksimum lokalne właściwe. Analogicznie dla minimum.

Twierdzenie 24.4 ***II warunek wystarczający istnienia ekstremum***. *Jeżeli funkcja f spełnia warunki:*

1. $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,
2. $f^{(n)}(x_0) < 0$,
3. *n jest liczbą parzystą, gdzie* $n \geqslant 2$,

to w punkcie x_0 ma maksimum lokalne właściwe. Analogicznie dla minimum,

25 Całka Riemanna funkcji jednej zmiennej.

Definicja 25.1 ***Całka oznaczona Riemanna***. *Niech funkcja f będzie ograniczona na przedziale $[a,b]$. Całkę oznaczoną Riemanna z funkcji f na przedziale $[a,b]$ definiujemy wzorem*

$$\int_a^b f(x)\,dx \stackrel{def}{=} lim_{\delta(P)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k,$$

o ile po prawej stronie znaku równości granica jest właściwa oraz nie zależy od sposoby podziałów P przedziału $[a,b]$ ani od sposobów wyboru punktów pośrednich x_k^*, gdzie $1 \leqslant k \leqslant n$. Ponadto przyjmujemy

$$\int_a^a f(x)\,dx \stackrel{def}{=} 0 \quad \text{oraz} \quad \int_b^a f(x)\,dx \stackrel{def}{=} -\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{dla } a<b$$

Funkcję, dla której istnieje całka Riemanna, nazywamy całkowalną.

Twierdzenie 25.2 ***Warunek wystarczający całkowalności funkcji***. *Jeżeli funkcja f jest ograniczona na przedziale $[a,b]$ i ma na tym przedziale skończoną liczbę punktów nieciągłości I rodzaju, to jest na nim całkowalna.*

Twierdzenie 25.3 ***Obliczanie całek przy pomocy sumy całkowej podziału równomiernego***. *Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a,b]$, to*

$$\int_a^b f(x)\,dx = lim_{n\to\infty}[\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})]$$

Twierdzenie 25.4 ***Newtona - Leibniza, główne twierdzenie rachunku całkowego***. *Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$, to*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = [F(x)]_a^b,$$

gdzie F oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji f na tym przedziale.

26 Pochodne cząstkowe funkcji wielu zmiennych; różniczkowalność i różniczka funkcji.

Definicja 26.1 ***Pochodne cząstkowe***. *Niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu punktu (x_0, y_0). Pochodną cząstkową pierwszego rzędu funkcji f względem x w punkcie (x_0, y_0) określamy wzorem:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \stackrel{def}{=} lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Pochodną tą oznacza się także symbolami: $f_x(x_0, y_0)$, $D_1 f(x_0, y_0)$.

Jeżeli granica określające pochodną cząstkową jest właściwa (niewłaściwa), to mówimy że pochodna ta jest właściwa (niewłaściwa). Jeżeli granica nie istnieje to to samo mówimy o pochodnej cząstkowej.

Definicja 26.2 ***Funkcja różniczkowalna w punkcie***. *Niech istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie (x_0, y_0) wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek:*

$$lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Definicja 26.3 ***Różniczka funkcji***. *Niech funkcja f ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie (x_0, y_0). Różniczką funkcji f w punkcie (x_0, y_0) nazywamy funkcję $df(x_0, y_0)$ zmiennych $\Delta x, \Delta y$ określoną wzorem:*

$$df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y) \stackrel{def}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y$$

Twierdzenie 26.4 ***Zastosowanie różniczki funkcji do obliczeń przybliżonych***. *Niech funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie (x_0, y_0). Wtedy*

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y)$$

Przy czym błąd $\delta(\Delta x, \Delta y)$ powyższego przybliżenia, tj. różnica $\Delta f - df$, dąży szybciej do 0 niż wyrażenie $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Oznacza to, że spełnia równość:

$$lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\delta(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y$$

27 Ekstrema funkcji wielu zmiennych. Definicje i twierdzenia.

Definicja 27.1 ***Minimum lokalne funkcji dwóch zmiennych***.

1. *Funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) minimum lokalne, jeżeli istnieje otoczenie tego punktu takie, że dla dowolnego (x, y) z tego otoczenia zachodzi nierówność*

$$f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$$

*Przy ostrej nierówności mówimy o minimum lokalnym **właściwym**.*

Definicja 27.2 ***Maksimum lokalne funkcji dwóch zmiennych***.

1. *Funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) maksimum lokalne, jeżeli istnieje otoczenie tego punktu takie, że dla dowolnego (x, y) z tego otoczenia zachodzi nierówność*

$$f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$$

*Przy ostrej nierówności mówimy o maksimum lokalnym **właściwym**.*

Twierdzenie 27.3 ***Warunek konieczny istnienia ekstremum***. *Jeżeli funkcja f spełnia warunki:*

1. *ma ekstremum lokalne w punkcie (x_0, y_0)*
2. *istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$*

to

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Funkcja może mieć ekstrema tylko w punktach, w których wszystkie jej pochodne cząstkowe pierwszego rzędu się zerują albo w punktach, w których choć jedna z nich nie istnieje.

Twierdzenie 27.4 ***Warunek wystarczający istnienia ekstremum***. *Niech funcka f ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu drugiego na otoczeniu punktu (x_0, y_0) oraz niech*

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$
2. *det* $\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x_0, y_0) \end{bmatrix} > 0$

Wtedy w punkcie (x_0, y_0) funkcja f ma ekstremum lokalne i jest to:

1. *minimum, gdy* $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, y_0) > 0$,
2. *maksimum, gdy* $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, y_0) < 0$.

28 Twierdzenie o zmianie zmiennych w rachunku całkowym; współrzędne walcowe i sferyczne.

Definicja 28.1 ***Twierdzenie o zmianie zmiennych w rachunku całkowym***. *Niech*

1. *odwzorowanie* $T: \begin{cases} x = \phi(u,v,w) \\ y = \psi(u,v,w) \\ z = \chi(u,v,w) \end{cases}$ *przekształca różnowartościowo wnętrze obszaru regularnego* Δ *na wnętrze obszaru regularnego* V,
2. *funkcje* ϕ, ψ, χ *mają ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego na pewnym zbiorze otwartym zawierającym obszar* Δ,
3. *funkcja* f *jest ciągła na obszarze* V,
4. *jakobian* J_T *jest różny od zera wewnątrz obszaru* Ω.

Wtedy

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega f(\phi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w))$$

$$|J_T(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

gdzie

$$J_T(u,v) \overset{def}{=} det \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial\phi}{\partial w}(u,v,w) \\ \frac{\partial\psi}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial\psi}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial\psi}{\partial w}(u,v,w) \\ \frac{\partial\chi}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial\chi}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial\chi}{\partial w}(u,v,w) \end{bmatrix}$$

Definicja 28.2 ***Współrzędne walcowe.*** *Położenie punktu P w przestrzeni można opisać trójką liczb (φ, ϱ, h), gdzie:*

φ - oznacza miarę kąta między rzutem promienia wodzącego punktu P na płaszczyznę xOy, a dodatnią częścią osi Ox, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ albo $-\pi < \varphi \leqslant \pi$

ϱ - oznacza odległość rzutu punktu P na płaszczyznę xOy od początku układu współrzędnych, $0 \leqslant \varrho < \infty$

h - oznacza odległość (dodatnią dla $z > 0$ i ujemną dla $z < 0$) punktu P od płaszczyzny xOy, $-\infty < h < \infty$

Zależność między współrzędnymi walcowymi i kartezajńskimi.

$$W : \begin{cases} x = \varrho cos\varphi \\ y = \varrho sin\varphi \\ z = h \end{cases}$$

Współrzędne walcowe w całce potrójnej. *Niech:*

1. *obszar Ω we współrzędnych walcowych będzie obszarem normalnym*
2. *funkcja f będzie ciągła na obszarze U, które jest obrazem obszaru Ω przy przekształceniu walcowym; $U = W(\Omega)$.*

Wtedy

$$\iiint_f (x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega f(\varrho cos\varphi, \varrho sin\varphi, h)\varrho\,dh\,d\varrho\,d\varphi$$

Definicja 28.3 ***Współrzędne sferyczne***. *Położenie punktu P przestrzeni można opisać trójką liczb (φ, ψ, ϱ), gdzie*

φ *- oznacza miarę kąta między rzutem promienia wodzącego punktu P na płaszczyznę xOy, a dodatnią częścią osi Ox, $0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$ albo $-\pi < \phi \leqslant \pi$*

ψ *- oznacza miarę kąta między promieniem wodzącym punktu P, a płaszczyzną xOy, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$*

ϱ *- oznacza odległość punktu P od początku układu współrzędnych, $0 \leqslant \varrho < \infty$*

Zależność między współrzędnymi sferycznymi i kartezjańskimi.

$$S : \begin{cases} x = \varrho cos\varphi cos\psi \\ y = \varrho sin\varphi cos\psi \\ z = \varrho sin\psi \end{cases}$$

Współrzędne sferyczne w całce potrójnej. *Niech:*

1. *obszar Ω we współrzędnych sferycznych będzie obszarem normalnym*
2. *funkcja f będzie ciągła na obszarze U, które jest obrazem obszaru Ω przy przekształceniu walcowym; $U = S(\Omega)$.*

Wtedy

$$\iiint_U f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega f(\varrho cos\varphi cos\psi, \varrho sin\varphi cos\psi, \varrho sin\psi)\varrho^3\,d\varrho\,d\psi\,d\varphi$$

Teoretyczne podstawy informatyki

29 Metody dowodzenia poprawności pętli.

30 Odwrotna Notacja Polska: definicja, własności, zalety i wady, algorytmy.

31 Modele obliczen: maszyna Turinga.

32 Modele obliczen: automat skończony, automat ze stosem.

33 Złożoność obliczeniowa - definicja notacji: O, Ω, Θ.

Definicja 33.1 *Niech* $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$*, wtedy:*

- $\mathbf{f(n) = O(g(n))}$ - *f jest **co najwyżej rzędu** g, gdy istnieje $c > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$, takie że $f(n) \leqslant cg(n)$ dla każdego $n \geqslant n_0$.*
- $\mathbf{f(n) = \Omega(g(n))}$ - *f jest **co najmniej rzędu** g, gdy $g(n) = O(f(n))$*
- $\mathbf{f(n) = \Theta(g(n))}$ - *f jest **dokładnie rzędu** g, gdy $f(n) = O(g(n))$ i $f(n) = \Omega(g(n))$.*

34 Złożoność obliczeniowa - pesymistyczna i średnia.

Definicja 34.1 *Niech:*

- D_n *- zbiór danych rozmiaru* n*,*
- $t(d)$ *- liczba operacji dominujących,*
- X_n *- zmienna losowa dla* $t(d) \in D_n$*,*
- p_{kn} *- rozkład prawdopodbieńdstwa zmiennej* X_n*.*

Optymistyczna złożoność czasowa*:*

$$Opt(n) = inf\{t(d) : d \in D_n\}$$

Średnia złożoność czasowa*:*

$$A(n) = ave(X_n) = \sum_{k \geqslant 0} kp_{nk}$$

Pesymistyczna złożoność czasowa*:*

$$W(n) = sup\{t(d) : d \in D_n\}$$

35 Metoda "dziel i zwyciężaj"; zalety i wady.

36 Lista: ujęcie abstrakcyjne, możliwe implementacje i ich złożoności.

37 Kolejka i kolejka priorytetowa: ujęcie abstrakcyjne, możliwe implementacje i ich złożoności.

38 Algorytmy sortowania QuickSort i MergeSort: metody wyboru pivota w QS; złożoności.

38.1 QuickSort.

```
def quickSort(arr, start, end):
if (start < end)
pivot = partition(arr, start, end)

quickSort(arr, start, pivot - 1)
quickSort(arr, pivot + 1, end)


def partition (arr, start, end):
pivot = arr[end]
i = (start - 1)

for j in range [start,end- 1]:
if (arr[j] < pivot):
i++;
swap arr[i] and arr[j]

swap arr[i + 1] and arr[end])
return (i + 1)
```

Złożoność: pesymistyczna - $O(n^2)$, średnia i optymistyczna - $O(nlog_2n)$.

Sposoby wybrania pivota

1. Pierwszy element
2. Ostatni element
3. Mediana z pierwszego, środkowego i ostatniego
4. Losowy element

38.1.1 MergeSort.

```
def mergeSort (arr, start, end):
if end > start:
middle = (start+end)/2

mergeSort (arr, start, middle)
mergeSort (arr, middle+1, end)

merge (arr, start, middle, right)
```

Złożoność: pesymistyczna, średnia, optymistyczna - $O(nlogn)$.

39 Algorytm sortowania bez porównań (sortowanie przez zliczanie, sortowanie kubełkowe oraz sortowanie pozycyjne).

39.1 CountSort.

```
def countSort (arr):
count = []
for a in arr:
count[a] += 1

i = 0;
for j in range [0, arr.len]:
while (count[i] == 0):
i++
arr[j] = i
count[i]--
```

Złożoność: $O(n + k)$.

39.2 BucketSort.

```
bucketSort (arr):
n = arr.len
buckets = [{} for i in range [1,n]]

for a in arr:
buckets[n*arr[i]].add(arr[i])

for b in buckets:
sort(b)

i = 0
for b in buckets:
for a in b:
arr[i++] = a
```

Złożoność: pesymistyczna - $O(n^2)$, średnia - $O(n + \frac{n^2}{k} + k)$.

39.3 RadixSort.

```
def radixSort (arr):
for all digits ascending:
countSort(arr, digit)
```

Złożoność: $O(d(n+k))$, gdzie d jest liczbą cyfr.

40 Reprezentacja drzewa binarnego za pomocą porządków (preorder, inorder, postorder).

```
def preorder (v):
func(v)
preorder(v.left)
preorder(v.right)

def inorder (v):
inorder(v.left)
func(v)
inorder(v.right)

def postorder (v):
postorder(v.left)
postorder(v.right)
func(v)
```

Możemy odtworzyć wyjściowe drzewo, jeśli mamy inorder i post- lub pre-order.

41 Algorytmy wyszukiwania następnika i poprzednika w drzewach BST; usuwanie węzła.

42 B-drzewa: operacje i ich złożoność.

43 Drzewa AVL: rotacje, operacje z wykorzystaniem rotacji i ich złożoność.

44 Algorytmy przeszukiwania wszerz i w głąb w grafach.

45 Algorytmy wyszukiwania najkrótszej ścieżki (Dijkstry oraz Bellmana-Forda).

46 Programowanie dynamiczne: podział na podproblemy, porównanie z metodą ”dziel i zwyciężaj”.

47 Algorytm zachłanny: przykład optymalnego i nieoptymalnego wykorzystania.

48 Kolorowania wierzchołkowe (grafów planarnych) i krawędziowe grafów, algorytmy i ich złożoności.

49 Algorytmy wyszukiwania minimalnego drzewa rozpinającego: Boruvki, Prima i Kruskala.

50 Najważniejsze algorytmy wyznaczania otoczki wypukłej zbioru punktów w układzie współrzędnych (Grahama, Jarvisa, algorytm przyrostowy (quickhull)).

51 Problemy P, NP, NP-zupełne i zależności między nimi. Hipoteza P vs. NP.

52 Automat minimalny, wybrany algorytm mini-

58 Reprezentacja liczb całkowitych; arytmetyka.

59 Reprezentacja liczb rzeczywistych; arytmetyka zmiennopozycyjna.

60 Różnice w wywołaniu funkcji statycznych, niestatycznych i wirtualnych w C++.

61 Sposoby przekazywania parametrów do funkcji (przez wartość, przez referencję). Zalety i wady.

62 Wskaźniki, arytmetyka wskaźników, różnica między wskaźnikiem a referencją w C++.

63 Podstawowe założenia paradygmatu obiektowego: dziedziczenie, abstrakcja, enkapsulacja, polimorfizm.

64 Funkcje zaprzyjaźnione i ich związek z przeładowaniem operatorów w C++.

65 Programowanie generyczne na podstawie szablonów w języku C++.

66 Podstawowe kontenery w STL z szerszym omówieniem jednego z nich.

67 Obsługa sytuacji wyjątkowych w C++.

68 Obsługa plików w języku C.

69 Model wodospadu a model spiralny wytwarzania oprogramowania.

70 Diagram sekwencji i diagram przypadków użycia w języku UML.

76 Relacyjny model danych, normalizacja relacji (w szczególności algorytm doprowadzenia relacji do postaci Boyce'a-Codda), przykłady.

77 Indeksowanie w bazach danych: drzewa B+, tablice o organizacji indeksowej, indeksy haszowe, mapy binarne.

78 Podstawowe cechy transakcji (ACID). Metody sterowania współbieżnością transakcji, poziomy izolacji transakcji, przykłady.

79 Złączenia, grupowanie, podzapytania w języku SQL.

80 Szeregowalność harmonogramów w bazach danych.

81 Definicja cyfrowego układu kombinacyjnego - przykłady układów kombinacyjnych i ich implementacje.

82 Definicja cyfrowego układu sekwencyjnego - przykłady układów sekwencyjnych i ich implementacje.

83 Minimalizacja funkcji logicznych.

84 Programowalne układy logiczne PLD (ROM, PAL, PLA).

85 Schemat blokowy komputera (maszyna von Neumanna).

86 Zarządzanie procesami: stany procesu, algorytmy szeregowania z wywłaszczaniem.