

# UNIWERYSTET JAGIELLOŃSKI

---

## PYTANIA DO EGZAMINU LICENCJACKIEGO NA KIERUNKU INFORMATYKA

---

Małgorzata DYMEK



Rok akademicki 2019/2020

# Spis treści

# Matematyczne podstawy informatyki

## 1 Zasada indukcji matematycznej.

Przykład:  $2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$ , Nierówność Bernoulliego dla  $h \geq -1$   $(1+h)^2 \geq 1 + n * h$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^+$ ,  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \forall n \in \mathbb{N}$

## 2 Porządki częściowe i liniowe. Elementy największe, najmniejsze, maksymalne i minimalne.

Przykłady - sprawdź czy porządek:  $xRy \Leftrightarrow x|y$

### 3 Relacja równoważności i zbiór ilorazowy.

Przykład:  $xRy \Leftrightarrow x \equiv_3 y$ .

#### 4 Metody dowodzenia twierdzeń: wprost, nie wprost, przez kontrapozycję.

## 5 Metody numeryczne rozwiązywania równań nieliniowych: bisekcji, siecznych, Newtona.

## 6 Rozwiązywanie układów równań liniowych: metoda eliminacji Gaussa, metody iteracyjne Jacobiiego i Gaussa-Seidla.

### 6.1 Metoda eliminacji Gaussa

Obliczając rząd macierzy metodą Gaussa należy za pomocą operacji elementarnych na wierszach sprowadzić macierz do macierzy schodkowej. Wtedy wszystkie niezerowe wiersze są liniowo niezależne i można łatwo odczytać rząd macierzy.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2-2w_1, w_3+w_1, w_4-2w_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \sim \\
 & \xrightarrow{w_4-w_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4-w_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

### Metody iteracyjne

Ogólna postać metody iteracyjnej:

$$Ax = b$$

$$Qx^{n+1} = (Q - A)x^n + b = \tilde{b}$$

$$x^0 = (0, 0, 0)$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + (-2)x_2 + 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + (-1)x_2 + (-4)x_3 = 0 \end{cases}$$



## 6.2 Metoda iteracyjna Jacobiego

### 6.2.1 Algebraicznie

$$\begin{cases} x_1^{N+1} = \frac{1}{5}(10 + 2x_2^N - 3x_3^N) \\ x_2^{N+1} = \frac{1}{4}(-2x_1^N - 2x_3^N) \\ x_3^{N+1} = -\frac{1}{4}(x_2^N - 2x_1^N) \end{cases}$$

### 6.2.2 Macierzowo

$$Q = D \quad (\text{diagonalna})$$

## 6.3 Metoda iteracyjna Gaussa-Seidla

### 6.3.1 Algebraicznie

$$\begin{cases} x_1^{N+1} = \frac{1}{5}(10 + 2x_2^N - 3x_3^N) \\ x_2^{N+1} = \frac{1}{4}(-2x_1^N - 2x_3^{N+1}) \\ x_3^{N+1} = -\frac{1}{4}(x_2^{N+1} - 2x_1^{N+1}) \end{cases}$$

### 6.3.2 Macierzowo

$$Q = L + D \quad (\text{diagonalna i dolnotrójkątna})$$

## 7 Wartości i wektory własne macierzy: numeryczne algorytmy ich wyznaczania.

## 8 Interpolacja wielomianowa: metody Lagrange'a i Hermite'a. Efekt Rungego.

### 8.1 Wzór interpolacyjny Lagrange'a

**Zadanie 8.1** Znaleźć wielomiany  $l_i$  i wzór Lagrange'a dla  $n = 3$  i punktów

$x$	5	-7	-6	0
$y$	1	-23	-54	-954

Rozwiązanie: Wielomiany  $l_i$  wyrażają się przez węzły tak:

1.

$$l_0(x) = \frac{(x+7)(x+6)x}{(5+7)(5+6) \cdot 5} = \frac{1}{660}(x+7)(x+6)x,$$

$$l_1(x) = \frac{(x-5)(x+6)x}{(-7-5)(-7+6)(-7)} = -\frac{1}{84}(x-5)(x+6)x,$$

$$l_2(x) = \frac{(x-5)(x+7)x}{(-6-5)(-6+7)(-6)} = \frac{1}{66}(x-5)(x+7)x,$$

$$l_3(x) = \frac{(x-5)(x+7)(x+6)}{(0-5)(0+7)(0+6)} = -\frac{1}{210}(x-5)(x+7)(x+6).$$

2. Stąd wynika, że

$$p(x) = l_0(x) - 23l_1(x) - 54l_2(x) - 954l_3(x).$$

### 8.2 Interpolacja Hermite'a

**Zadanie 8.2** Należy znaleźć wielomian interpolacyjny, przybliżający funkcję o

zadanych węzłach dwukrotnych:  $x_1 = 1$  ,  $x_2 = 3$   
 $f(x_1) = 3$  ,  $f(x_2) = 5$   
 $f'(x_1) = 2$  ,  $f'(x_2) = 6$

Rozwiązanie: Zapisuje się wartości w tabeli:

$x_i$	$f(x_i)$
1	3
1	3
3	5
3	5

Następnie w miejsce powtarzającego się wężła wstawia się wartości pochodnej, a w pozostałe miejsca (w tym przypadku jedno) wstawia się odpowiednią różnicę dzieloną:

$x_i$	$f(x_i)$	$R_2(x_i)$
1	3	—
1	3	2
3	5	1
3	5	6

Następnie uzupełnia się do końca tabelę:

$x_i$	$f(x_i)$	$R_2(x_i)$	$R_3(x_i)$	$R_4(x_i)$
1	3	—	—	—
1	3	2	—	—
3	5	1	$-\frac{1}{2}$	—
3	5	6	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$

Zatem otrzymuje się wielomian:

$$w(x) = 3 + 2(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{3}{2}(x-1)^2(x-3) = \frac{3}{2}x^3 - 8x^2 + \frac{27}{2}x - 4.$$

Łatwo sprawdzić, że interpoluje on dane punkty:

$$w(1) = \frac{3}{2} - 8 + \frac{27}{2} - 4 = 3$$

$$w'(1) = \frac{9}{2} - 16 + \frac{27}{2} = 2$$

$$w(3) = \frac{3}{2} \cdot 27 - 8 \cdot 9 + \frac{27}{2} \cdot 3 - 4 = 5$$

$$w'(3) = \frac{9}{2} \cdot 9 - 16 \cdot 3 + \frac{27}{2} = 6.$$

## 9 Zmienne losowe dyskretne. Definicje i najważniejsze rozkłady.

### 9.1 Rozkład dwumianowy

**Zadanie 9.1** Zmienna losowa  $X$  ma rozkład dwumianowy ( $X \sim \text{Bin}(n, p)$ ) gdzie  $n$  - ilość prób,  $p$  - prawdopodobieństwo sukcesu. Ponadto wiemy, że  $E(X) = np$  oraz  $\text{Var}(X) = np(1 - p)$

Rozwiązanie: Mamy  $X \sim \text{Bin}(n = 4, p = \frac{1}{2})$  oraz  $k = 2$ , więc

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8},$$

$$E(X) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2, \quad \text{Var}(X) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

### 9.2 Rozkład geometryczny

**Zadanie 9.2** Zmienna losowa  $X$  ma rozkład geometryczny z  $p = \frac{1}{2}$ . Wzór na prawdopodobieństwo  $P(X = k) = (1-p)^{(k-1)} p$  oraz mamy  $E(X) = \frac{1}{p}$ ,  $\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$ . Prawdopodobieństwo że pierwszy orzeł wypadnie w 4 rzucie:

$$P(X = 4) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{(4-1)} \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

$$E(X) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2, \quad \text{Var}(X) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2.$$

### 9.3 Rozkład Poissona

**Zadanie 9.3** Zmienna losowa  $X$  ma rozkład Poissona z parametrem  $\lambda = 2, 4$ . Prawdopodobieństwo, że student będzie nieobecny w ciągu semestru:

1. mniej niż 2 razy:

$$\begin{aligned} P(X < 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) = \\ &= e^{-2,4} \cdot \frac{2,4^0}{0!} + e^{-2,4} \cdot \frac{2,4^1}{1!} = e^{-2,4} + 2,4 \cdot e^{-2,4}. \end{aligned}$$

2. więcej niż 5 razy (jedenminus prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego):

$$\begin{aligned} P(X > 5) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) - P(X = 4) - P(X = 5) = \\ &= 1 - e^{-2,4} - e^{-2,4} \cdot 2,4 - \frac{e^{-2,4} \cdot 2,4^2}{2} - \frac{e^{-2,4} \cdot 2,4^3}{6} - \frac{e^{-2,4} \cdot 2,4^4}{24} - \frac{e^{-2,4} \cdot 2,4^5}{120}. \end{aligned}$$

## 10 Zmienne losowe ciągłe. Definicje i najważniejsze rozkłady.

### 10.1 Rozkład jednostajny

**Zadanie 10.1** Zmienna losowa  $X$  ma rozkład jednostajny na odcinku  $[2, 6]$ . Wykonaj polecenia:

1. zapisz wzór na gęstość zmiennej losowej  $X$
2. oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia że  $X \in [3, 3.5]$
3. oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia że  $X \in (3, 3.5)$

Rozwiązanie:

1. wzór na gęstość zmiennej losowej  $X$  to

$$\chi_{[2,6]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{gdy } x \in [2, 6] \\ 0 & \text{gdy } x \notin [2, 6] \end{cases}$$

2. prawdopodobieństwo zdarzenia, że  $X \in [3, 3.5]$  to

$$P(X \in [3, 3.5]) = \int_3^{3.5} \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4}(3.5 - 3) = \frac{1}{8}$$

3. prawdopodobieństwo zdarzenia że  $X \in (3, 3.5)$  to

$$P(X \in (3, 3.5)) = P(X \in [3, 3.5]) = \frac{1}{8}$$

### 10.2 Rozkład wykładniczy

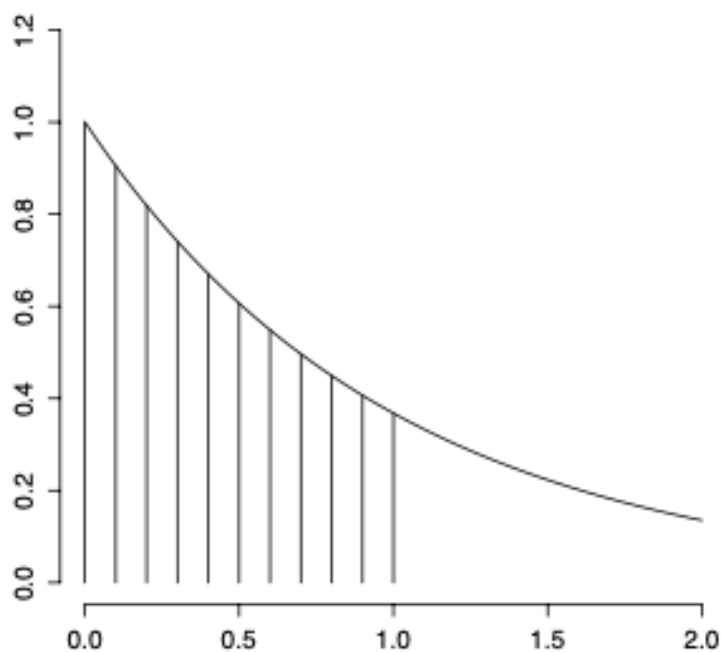
**Zadanie 10.2** Zmienna losowa  $X$  ma rozkład wykładniczy z parametrem  $\lambda = 1$ . Wykonaj polecenia:

1. narysuj gęstość/ zapisz wzór na gęstość zmiennej losowej  $X$
2. na powyższym rysunku przedstaw prawdopodobieństwo zdarzenia że  $X \in [0, 1]$
3. oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia że  $X \in [0, 1]$



Rozwiązanie:

Punkty 1 i 2:



Punkt 3 - prawdopodobieństwo zdarzenia że  $X \in [0, 1]$  wynosi

$$P(X \in [0, 1]) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_{x=0}^{x=1} = 1 - e^{-1}$$

### 10.3 Rozkład normalny

**Zadanie 10.3** Zmienna losowa  $X$  ma rozkład normalny o parametrach  $\mu = 0$  oraz  $\sigma = 1$ . Podaj prawdopodobieństwo, że  $X$  osiąga wartości dodatnie.

Rozwiązanie:

Wykres tej funkcji jest parzysty, a pole całego wykresu wynosi 1 więc z połowy jest  $\frac{1}{2}$ .

$$P(X > 0) = \int_0^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}$$

## 10.4 Rozkład Gamma, Wzór Gamma-Poisona

**Zadanie 10.4** *Kompilacja programu składa się z 3 części przetwarzanych przez kompilator sekwencyjnie, jedna po drugiej. Czas przetwarzania każdej z części ma rozkład wykładniczy ze średnim czasem 5 minut, niezależnym od czasu przetwarzania pozostałych części.*

1. oblicz wartość oczekiwaną i wariancję całkowitego czasu kompilacji
2. oblicz prawdopodobieństwo, że cały proces kompilacji zostanie przeprowadzony w czasie mniejszym niż 12 minut.

Rozwiązanie:

Całkowity czas kompilacji opisuje zmienna losowa o rozkładzie  $Gamma(T \sim \Gamma(\alpha = 3, \lambda = \frac{1}{5}))$ . Wartość oczekiwana i wariancja całkowitego czasu kompilacji to

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{3}{\frac{1}{5}} = 15$$

$$Var(x) = \frac{\alpha}{\lambda^2} = \frac{3}{\frac{1}{25}} = 75$$

Prawdopodobieństwo, że cały proces kompilacji zostanie przeprowadzony w czasie mniejszym niż 12 minut liczymy korzystając z formuły Gamma-Poisona.

$$P(T < t) = P(X \geq \alpha),$$

gdzie  $X \sim Poisson(\lambda * t = \frac{1}{5} * 12 = 2.4)$  oraz  $\alpha = 3$ ,  $t = 12$ . Mamy więc:

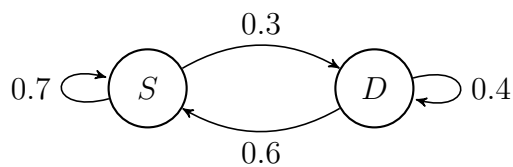
$$P(T < 12) = P(X \geq 3) = 1 - P(0) - P(1) - P(2) = 1 - F_X(2) = 1 - 0.5697 = 0.43$$

## 11 Łącuchy Markowa. Rozkład stacjonarny.

**Zadanie 11.1** W pewnym mieście każdy dzień jest słoneczny albo deszczowy. Po dniu słonecznym dzień słoneczny następuje z prawdopodobieństwem 0.7, a po dniu deszczowym z prawdopodobieństwem 0.4.

1. Narysuj łańcuch markowa oraz wyznacz macierz przejścia dla niego.
2. W poniedziałek padało. Stwórz prognozę na wtorek, środę i czwartek.
3. Meteorolodzy przewidują 80% szans na deszcz w poniedziałek. Stwórz prognozę na wtorek, środę i czwartek.
4. Znajdź rozkład stacjonarny.

1. Łańcuch Markowa:



Macierz przejść:

$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

2.

Wtorek:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Środa:

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.52 & 0.48 \end{bmatrix}$$

Czwartek:

$$\begin{bmatrix} 0.52 & 0.48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.556 & 0.444 \end{bmatrix}$$

3.

Wtorek:

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.46 & 0.54 \end{bmatrix}$$

Środa:

$$\begin{bmatrix} 0.46 & 0.54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.538 & 0.462 \end{bmatrix}$$

Czwartek:

$$\begin{bmatrix} 0.538 & 0.462 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5614 & 0.4386 \end{bmatrix}$$

4. Macierz przejść:

$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} \pi P = \pi \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

$$\pi P = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7\pi_1 + 0.4\pi_2 & 0.3\pi_1 + 0.6\pi_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0.7\pi_1 + 0.4\pi_2 = \pi_1 \\ 0.3\pi_1 + 0.6\pi_2 = \pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

## 12 Testy statystyczne: test z, test t-Studenta, test chi-kwadrat.

Generalnie:

- Z-testów używamy do sprawdzenia czy testowana próba pasuje do zadanej populacji lub do porównywania dwóch **dużych** ( $n > 30$ ) prób
- T-testów używamy do porównywania dwóch **małych** ( $n < 30$ ) prób testowych ze sobą
  - Próby mogą być niezależne - np. wyniki sprawdzianów w dwóch grupach
  - Mogą być również zależne (dotyczyć jednej i tej samej grupy) - np. waga przed zastosowaniem diety i po
  - Może również służyć do porównywania próby do zadanej wartości (np. średniej) - podobnie jak Z-testy
- Chi-kwadrat używamy do ustalania **goodness of fit** dla próbki względem populacji lub do zbadania niezależności

### 12.1 Z-test

**Zadanie 12.1** Inżynier jakości znajduje 10 wadliwych produktów w próbie 500 egzemplarzy pewnego komponentu od wytwórcy A. Wśród 400 egzemplarzy od wytwórcy B znajduje 12 wadliwych. Firma komputerowa, korzystająca z tych komponentów twierdzi, że jakość wyrobów od obu producentów jest taka sama. Sprawdź, czy na 5% poziomie istotności istnieją wystarczające dowody do odrzucenia tego twierdzenia.

$H_0$ : Jakość wyrobów obu producentów jest taka sama

$H_a$ : Jakość wyrobów obu producentów jest różna

Obliczamy proporcje dla obu prób:

$$p_1 = \frac{10}{500} = \frac{1}{50}$$

$$p_2 = \frac{12}{400} = \frac{3}{100}$$

oraz proporcję dla próby połączonej:

$$\bar{p} = \frac{10 + 12}{500 + 400} = \frac{11}{450}$$

Następnie używamy wzoru:

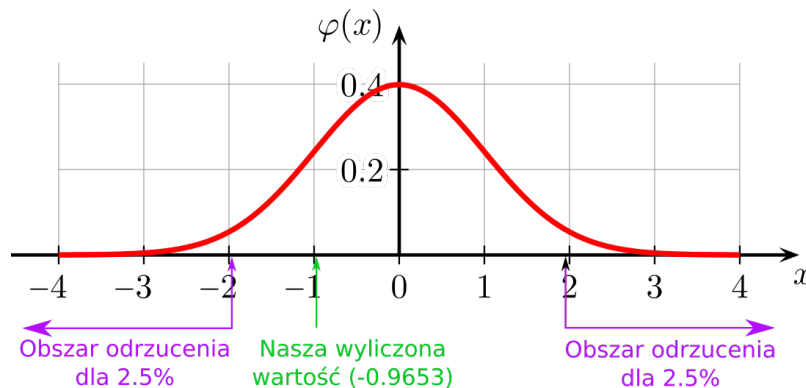
$$Z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\bar{p}(1 - \bar{p})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

$$Z = \frac{\frac{1}{50} - \frac{3}{100}}{\sqrt{\frac{11}{450}(1 - \frac{11}{450})(\frac{1}{500} + \frac{1}{400})}} = \frac{-\frac{1}{100}}{\sqrt{\frac{4829}{45000000}}} \approx \textcolor{green}{-0.9653}$$

W naszej hipotezie mamy pytanie o równość, więc bierzemy pod uwagę obie końcówki przedziału. Mamy sprawdzić prawdziwość naszej hipotezy na 5% poziomie istotności, więc na każdą końcówkę mamy po 2.5%.

Odczytujemy z tablic dla Z-testów (tablica rozkładu normalnego) wartość dla  $1 - 0.025 = 0.975$  i jest to **1.959964**

Następnie odczytujemy z tablic (lub wyliczamy, jeżeli nie mamy tablic z wartościami dla  $x < 0.5$ ) wartość dla 0.025 i jest to **-1.959964** (po prostu wartość przeciwna do poprzedniej, ponieważ funkcja gęstości rozkładu normalnego jest symetryczna względem środka)



Ponieważ nasza wartość nie mieści się w obszarze odrzucenia, nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

## 12.2 T-testy

**Zadanie 12.2** Posiadacz konta internetowego, w długim okresie czasu, w trakcie logowania pisze swój login i hasło z przerwami pomiędzy kolejnymi wciśnięciami klawiszy wynoszącymi 0.2s. Pewnego dnia zarejestrowane logowanie na to konto z prawidłowym hasłem, przy czym czasy odstępów pomiędzy wciśnięciami kolejnych klawiszy wynosiły:

.24, .22, .26, .34, .35, .32, .33, .29, .19, .36, .30, .15, .17, .20, .28, .40, .37, .27 sekund

Na 5% poziomie ufności zweryfikuj, czy dane te mogą być dowodem na nieautoryzowany dostęp do konta?

$H_0$ : Dostęp do konta jest autoryzowany

$H_a$ : Dostęp do konta jest nieautoryzowany

Korzystamy ze wzoru:

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$$

gdzie:

- $\bar{x}$  - średnia z badanej próby
- $\mu_0$  - zakładana średnia
- $\sigma$  - odchylenie standardowe z próby
- $n$  - wielkość próby

W naszym przypadku:

$$\bar{x} \approx 0.28 \tag{1}$$

$$\mu_0 = 0.2 \tag{2}$$

$$\sigma \approx 0.07324 \tag{3}$$

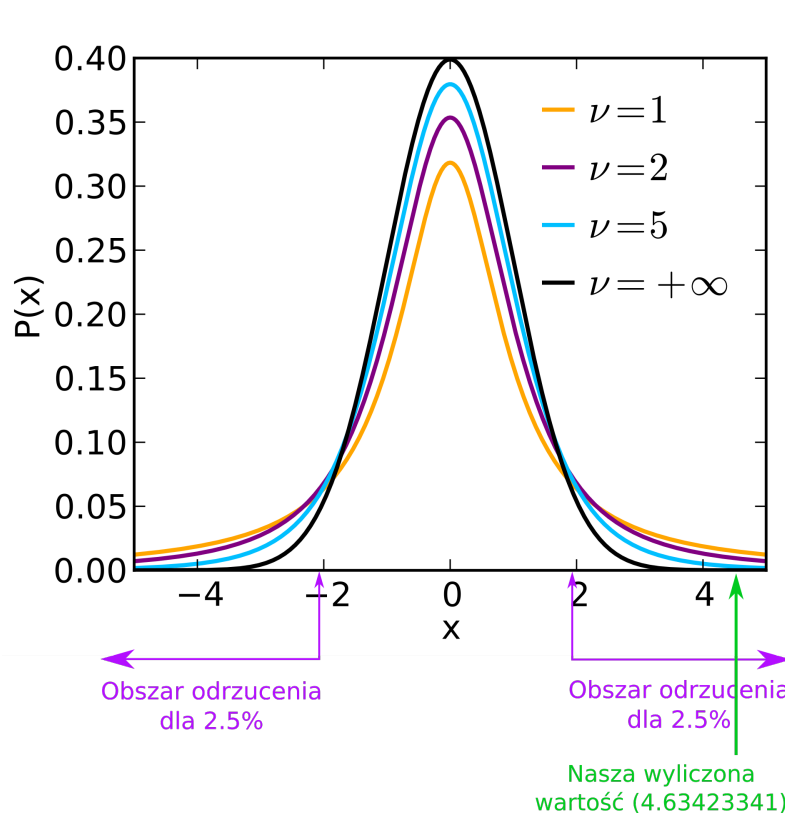
$$n = 18 \tag{4}$$

Podstawiając do wzoru mamy:

$$T = \frac{0.28 - 0.2}{0.07324} \sqrt{18} \approx \mathbf{4.63423341}$$

Ilość naszych stopni swobody to  $n-1$  więc w naszym przypadku 17

Odczytujemy z tablic rozkładu t-studenta wartość odpowiadającą 2.5% poziomu ufności ( $5\%/2$ ) oraz 17 stopniom swobody i jest to **2.11** oraz wyliczamy tę wartość dla drugiego krańca przedziału (podobnie jak w poprzednim przypadku rozkład t-studenta ma symetryczny wykres względem środka), która jest równa **-2.11**



Ponieważ  $4.63423341 > 2.11$  mamy podstawy, aby odrzucić hipotezę zerową i przyjąć hipotezę alternatywną



## 12.3 Testy Chi-kwadrat

**Zadanie 12.3** *Producent kostki do gry deklaruje, że oczka na jego niesprawiedliwej kostce wypadają z następującym prawdopodobieństwem:*

- 1 oczko -  $\frac{1}{2}$
- 2 oczka -  $\frac{1}{4}$
- 3 oczka -  $\frac{1}{25}$
- 4 oczka -  $\frac{1}{50}$
- 5 oczek -  $\frac{1}{25}$
- 6 oczek -  $\frac{3}{20}$

*Dla 100 rzutów zaobserwowano natomiast następujące wyniki:*

- 1 oczko - 55 razy
- 2 oczka - 20 razy
- 3 oczka - 6 razy
- 4 oczka - 3 razy
- 5 oczek - 2 razy
- 6 oczek - 14 razy

*Przeprowadź test zgodności (*goodness of fit*)  $\chi^2$  i rozstrzygnij na poziomie 5% istotności, czy producent ma rację*

Wyliczamy wartości oczekiwane dla każdego przedziału i zgodnie z **rule of thumb** w razie potrzeby je łączymy tak, aby dla każdego z nich wartość była  $\geq 5$

n	$Obs_n$	$Exp_n$	x	$Obs_x$	$Exp_x$
1	55	50	1	55	50
2	20	25	2	20	25
3	6	4	3	11	10
4	3	2			
5	2	4			
6	14	15	4	14	15

Następnie, aby obliczyć  $\chi^2$  stosujemy następujący wzór (N to liczba naszych x):

$$\chi^2 = \sum_{x=1}^N \frac{(Obs_x - Exp_x)^2}{Exp_x}$$

W naszym przypadku  $\chi^2 \approx 1.6666$

Stopnie swobody obliczamy ze wzoru **N - 1**, gdzie N to liczba naszych x-ów. W naszym przypadku liczba stopni swobody jest więc równa **3**.

Następnie odczytujemy z tablicy  $\chi^2$  wartość dla 5% istotności przy 3 stopniach swobody. Jest ona równa **7.82**

$1.6666 < 7.82$  stąd nie mamy więc podstawy do odrzucenia hipotezy zerowej

## 13 Wzór Bayesa i jego interpretacja.

**Zadanie 13.1** W firmie IT 20% wytwarzanych modułów przechodzi specjalny proces inspekcji. Z danych historycznych wiadomo, że każdy moduł poddany inspekcji nie ma defektów z prawdopodobieństwem 0.95. Dla modułu nie poddanego procesowi inspekcji prawdopodobieństwo to wynosi jedynie 0.7. Klient znalazł defekt w module. Jakie jest prawdopodobieństwo, że moduł ten przeszedł przez proces inspekcji?

Korzystamy oczywiście ze wzoru Bayesa:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad \text{przy } P(B) > 0$$

I - moduł przeszedł przez inspekcję

D - moduł ma defekt

$$P(I) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} \quad P(\bar{I}) = \frac{4}{5}$$

$$P(\bar{D}|I) = \frac{95}{100} = \frac{19}{20} \quad P(D|I) = \frac{1}{20}$$

$$P(\bar{D}|\bar{I}) = \frac{70}{100} = \frac{7}{10} \quad P(D|\bar{I}) = \frac{3}{10}$$

$$P(I|D) = \frac{P(D|I) \cdot P(I)}{P(D)} = \frac{P(D|I) \cdot P(I)}{P(D|I) \cdot P(I) + P(D|\bar{I}) \cdot P(\bar{I})} = \frac{\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{1}{25}$$

Prawdopodobieństwo, że moduł, w którym znalazł się defekt przeszedł proces inspekcji wynosi  $\frac{1}{25}$ .

**14 Istnienie elementów odwrotnych względem mnożenia w strukturze  $(Z_m, +, *)$  w zależności od liczby naturalnej  $m$ . Rozszerzony algorytm Euklidesa.**

**Zadanie 14.1** *Oblicz element odwrotny do 7 w  $Z_{19}$ .*

$NWD(7, 19) = 1$ , zatem element odwrotny istnieje

$$19/7 = 2 \text{ r } 5$$

$$7/5 = 1 \text{ r } 2$$

$$5/2 = 2 \text{ r } 1$$

Zatem:

$$5 = 19 - 2 * 7$$

$$2 = 7 - 5 = 7 - (19 - 2 * 7) = -19 + 3 * 7$$

$$1 = 5 - 2 * 2 = 19 - 2 * 7 - 2 * (-19 + 3 * 7) = \mathbf{3 * 19 - 8 * 7}$$

Współczynnik przy 7:  $-8$ .  $-8 \bmod 19 = 11$

Liczbą odwrotną do 7 w  $Z_{19}$  jest 11

**Zadanie 14.2** *Oblicz współczynniki Bézouta dla 240 i 46.*

$$240/46 = 5 \text{ r } 10$$

$$46/10 = 4 \text{ r } 6$$

$$10/6 = 1 \text{ r } 4$$

$$6/4 = 1 \text{ r } 2$$

$$4/2 = 2 \text{ r } 0$$

$i$	$r_i$	$d_i$	$x_i$	$y_i$
0	240	-	1	0
1	46	5	0	1
2	10	4	$1 - 5 * 0 = 1$	$0 - 5 * 1 = -5$
3	6	1	$0 - 4 * 1 = -4$	$1 - 4 * -5 = 21$
4	4	1	$1 - 1 * -4 = 5$	$-5 - 1 * 21 = -26$
5	2	2	$-4 - 1 * 5 = -9$	$21 - 1 * -26 = 47$

$$-9 * 240 + 47 * 46 = 2 = NWD(240, 46)$$

Współczynniki Bézouta wynoszą -9 i 47.

**Zadanie 14.3** Pokaż, że jeśli  $a, b \in \mathbb{N}$  i  $d = NWD(a, b)$  to  $\exists m, n : d = ma + nb$ .

Mamy zbiór  $S = \{ma + nb \mid m, n \in \mathbb{Z}, ma + nb > 0\}$ .  $S$  nie jest puste, zatem (z zasady dobrego uporządkowania) istnieje jego najmniejszy element  $d$ .

Pokażmy, że  $d$  jest dzielnikiem  $a$ .

$$a = dq + r$$

$$r = a - dq$$

$$r = a - q(ma + nb)$$

$$r = (1 - qm)a - qnb$$

$$r = am' + bn'$$

Zatem  $r = 0$  lub  $r \in S$ . Skoro  $r$  jest resztą z dzielenia  $a$  przez  $d$ , to  $r < d$ .  $d$  jest najmniejszym elementem  $S$ , zatem  $r = 0$ , zatem  $d|a$ . Analogiczne rozumowanie możemy przeprowadzić dla  $b$ .

Pokażmy, że  $d = NWD(a, b)$ . Niech  $c$  będzie wspólnym dzielnikiem  $a$  i  $b$ . Zatem  $a = cq_1$  i  $b = cq_2$ .

$$d = ma + nb$$

$$d = cq_1a + cq_2b$$

$$d = c(q_1a + q_2b)$$

Zatem  $c|d$ , zatem  $c \leq d$ , zatem  $d = NWD(a, b)$

## 15 Ortogonalność wektorów w przestrzeni $R_n$ ; związki z liniową niezależnością. Metoda ortonormalizacji Grama-Schmidta.

**Zadanie 15.1** *Udowodnij, że każdy ortogonalny układ wektorów jest liniowo niezależny.*

Mamy układ wektorów ortogonalnych  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Zatem

$$\forall i, j : i \neq j \quad x_i \cdot x_j = 0$$

oraz

$$\forall i \quad x_i \cdot x_i > 0$$

Istnieją skalary  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , takie, że:

$$a_1 * x_1 + a_2 * x_2 + \dots + a_n * x_n = 0$$

Powyższe równanie pomnożmy skalarnie przez  $x_1$ .

$$a_1 * x_1 \cdot x_1 + a_2 * x_2 \cdot x_1 + \dots + a_n * x_n \cdot x_1 = 0$$

$$a_1 * x_1 \cdot x_1 + 0 + \dots + 0 = 0$$

$$a_1 * x_1 \cdot x_1 = 0$$

Skoro  $x_1 \cdot x_1 > 0$ , to  $a_1 = 0$ . Powyższe działania powtórzmy dla pozostałych wektorów.

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

Zatem układ wektorów jest liniowo niezależny.

**Zadanie 15.2** *Dokonaj ortonormalizacji wektorów w  $\mathbb{R}_3$ :*

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \text{proj}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \text{proj}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{v}_3 - \text{proj}_{\mathbf{u}_2} \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Otrzymane wektory podzielmy przez ich długość:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}{1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

## 16 Liczby Stirlinga I i II rodzaju i ich interpretacja.

### 16.1 Liczby Stirlinga I rodzaju

Uzasadnij, że  $C(4,2)=11$

Mamy następujące permutacje dwucykłowe zbioru  $\{1, 2, 3, 4\}$

$$\begin{aligned} & (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3) \\ & (1)(2\ 3\ 4), (1)(2\ 4\ 3), (2)(1\ 3\ 4) \\ & (2)(1\ 4\ 3), (3)(1\ 2\ 4), (3)(1\ 4\ 2) \\ & (4)(1\ 2\ 3), (4)(1\ 3\ 2) \end{aligned}$$

### 16.2 Liczby Stirlinga II rodzaju

Uzasadnij, że  $S(4,2) = 7$

Zbiór  $\{1, 2, 3, 4\}$  możemy podzielić na dwa bloki w następujący sposób

$$\begin{aligned} & \{1\}, \{2, 3, 4\} ; \{2\}, \{1, 3, 4\} ; \{3\}, \{1, 2, 4\} \\ & \{4\}, \{1, 2, 3\} ; \{1, 2\}, \{3, 4\} ; \{1, 3\}, \{2, 4\} \\ & \{1, 4\}, \{2, 3\} \end{aligned}$$



## 17 Twierdzenia Eulera i Fermata; funkcja Eulera.

### 17.1 Funkcja Eulera

- $\varphi(2025) = \varphi(3^4 \cdot 5^2) = \varphi(3^4) \cdot \varphi(5^2) = 3^3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 = 1080$
- $\varphi(1001) = \varphi(7 \cdot 11 \cdot 13) = \varphi(7) \cdot \varphi(11) \cdot \varphi(13) = 6 \cdot 10 \cdot 12 = 660$
- $\varphi(1980) = \varphi(2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11) = \varphi(2^2) \cdot \varphi(3^2) \cdot \varphi(5) \cdot \varphi(11) = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 10 = 480$

### 17.2 Twierdzenie Fermata

### 17.3 Twierdzenie Eulera

- Oblicz  $2^{64} \pmod{99}$   
NWD(2,99)=1 zatem możemy stosować Twierdzenie Eulera  
 $\varphi(99) = \varphi(11 \cdot 3^2) = \varphi(11) \cdot \varphi(3^2) = 10 \cdot 3 \cdot 2 = 60$   
Zatem z Twierdzenia Eulera  
 $2^{60} \equiv 1 \pmod{99}$   
 $2^{64} = 2^{60} \cdot 2^4 \equiv 2^4 \pmod{99} = 16$
- Oblicz  $99^{400} \pmod{10^3}$   
NWD(99,1000)=1 zatem możemy stosować Twierdzenie Eulera  
 $\varphi(10^3) = \varphi(2^3 \cdot 5^3) = \varphi(2^3) \cdot \varphi(5^3) = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 4 = 400$   
Zatem z Twierdzenia Eulera  
 $99^{400} \equiv 1 \pmod{10^3}$

## 18 Konfiguracje i t-konfiguracje kombinatoryczne.

**Zadanie 18.1** Mamy dziewięć różnych 8-elementowych podzbiorów zbioru  $\mathbb{N}_{12}$ . Każdy element ze zbioru  $\mathbb{N}_{12}$  należy do tej samej liczby  $r$  podzbiorów zbioru  $\mathbb{N}_{12}$ .

1. Ile wynosi  $r$ ?
2. Czy jest to możliwe dla dziewięciu 7-elementowych podzbiorów?

Rozwiązanie:

1.  $k = 8 \quad n = 12$

$b$  - liczba  $k$ -elementowych podzbiorów  $X \quad b = 9$

Szukamy ile wynosi liczba takich podzbiorów korzystając ze wzoru  $b = \frac{n \cdot r}{k}$

$$r = \frac{9 \cdot 8}{12} = 6$$

2.  $k = 7 \quad b = 9 \quad n = 12$

Czy zachodzi  $k | n \cdot r$ ?

$$r = \frac{b \cdot k}{n} = \frac{9 \cdot 7}{12} = \frac{21}{4} \notin \mathbb{N}$$

Zatem nie jest to możliwe.

**Zadanie 18.2** Dana jest 5-konfiguracja z parametrami  $n=12$ ,  $k=6$ ,  $r_5 = 1$ . Wyznacz wartości  $r_i$ , dla  $i$ -konfiguracji o tym samym  $n$  i  $k$  oraz  $i=1,2,3,4$ .

Rozwiązanie: Korzystamy ze wzoru:  $r_{t-1} = r_t \cdot \frac{n-t+1}{k-t+1}$

$$r_4 = r_5 \cdot \frac{12-5+1}{6-5+1} = \frac{8}{2} = 4$$

$$r_3 = r_4 \cdot \frac{12-4+1}{6-4+1} = 4 \cdot \frac{9}{3} = 12$$

$$r_2 = r_3 \cdot \frac{12-3+1}{6-3+1} = 12 \cdot \frac{10}{4} = 30$$

$$r_1 = r_2 \cdot \frac{12-2+1}{6-2+1} = 30 \cdot \frac{11}{5} = 66$$

$$r_1 : (12, 6, 66)$$

$$r_2 : (12, 6, 30)$$

$$r_3 : (12, 6, 12)$$

$$r_4 : (12, 6, 4)$$

**Zadanie 18.3** *Czy może istnieć 3-konfiguracja o parametrach  $n=15$ ,  $k=6$  i  $r_3=2$ ?*

$$r_2 = r_3 \cdot \frac{n-3+1}{k-3+1} = 2 \cdot \frac{15-3+1}{6-3+1} = 2 \cdot \frac{13}{4} = \frac{13}{2} \notin \mathbb{Z}$$

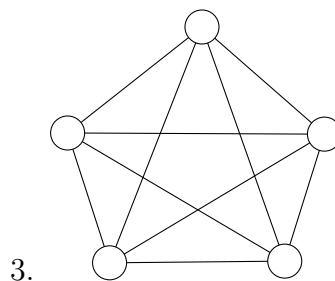
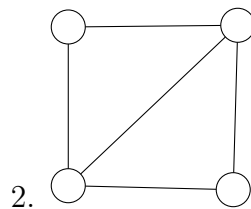
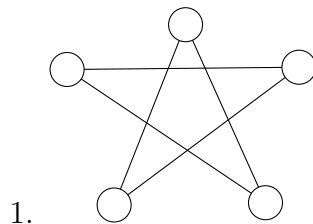
Zatem nie może istnieć taka konfiguracja.

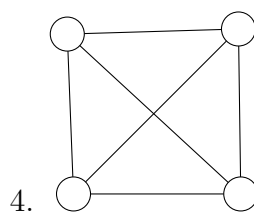
## 19 Cykl Hamiltona, obwód Eulera, liczba chromatyczna - definicje i twierdzenia.

**Zadanie 19.1** Podaj przykład grafu, który:

1. Ma obwód eulera i cykl Hamiltona
2. ma cykl Hamiltona, ale nie ma obwodu Eulera
3. ma obwód Eulera, ale nie ma cyklu Hamiltona
4. nie ma ani cyklu Hamiltona, ani obwodu Eulera

Rozwiązanie:



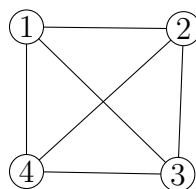


**Zadanie 19.2** Określ liczbę chromatyczną:

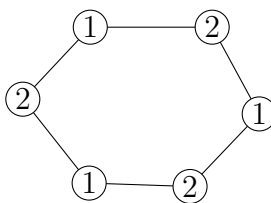
1. grafu zupełnego  $K_n$
2. grafu cyklicznego  $C_{2r}$
3. grafu cyklicznego  $C_{2kr+1}$
4. drzewa

Rozwiązanie:

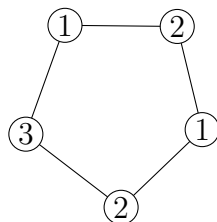
1.  $\chi(X) = n$



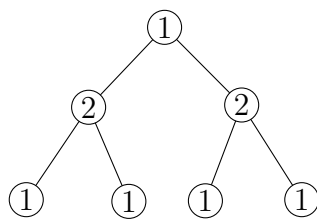
2.  $\chi(X) = 2$



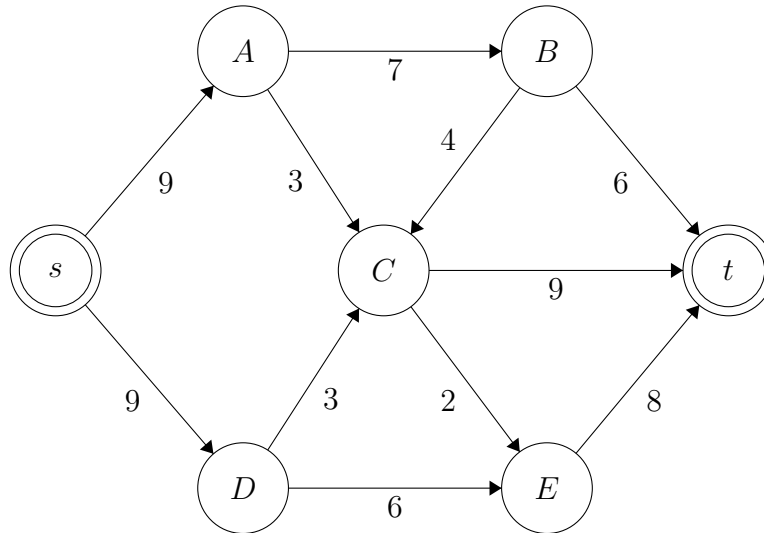
3.  $\chi(X) = 3$



4.  $\chi(X) = 2$



## 20 Algorytm Forda-Fulkersona wyznaczania maksymalnego przepływu.



Weźmy sobie taką sieć przepływową. Chcemy wyznaczyć jej maksymalny przepływ. Musimy zacząć od jakiegoś (dowolnego) przepływu. Szukamy ścieżki roszerszającej, która połączy źródło  $s$  z ujściem  $t$ .

Na przykład może to być ścieżka:  $P = \{s \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow t\}$ .

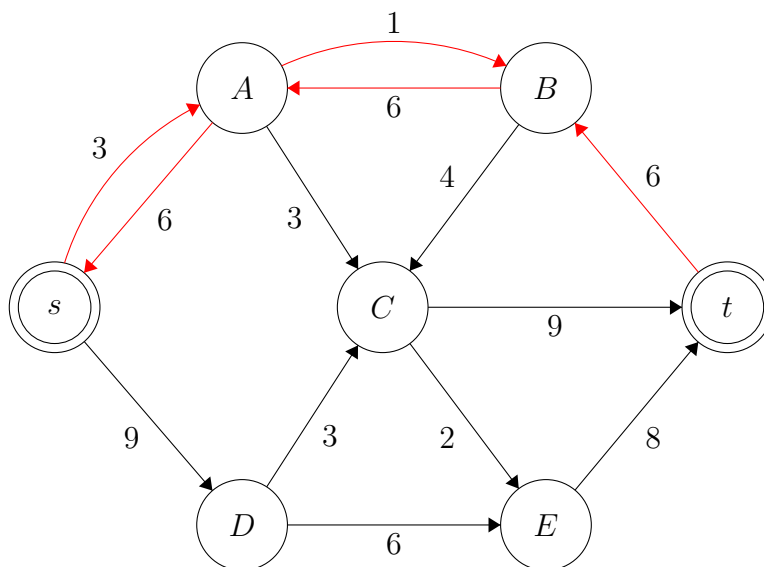
Na ścieżce  $p$  znajdują się trzy kanały sieci rezydualnej:  $(s, A)$ ,  $(A, B)$  i  $(B, t)$ . Przepustowość rezydualna  $c_f(p)$  ścieżki jest równa najmniejszej przepustowości rezydualnej jej kanałów, czyli przepustowości kanału  $(B \rightarrow t)$ , dla którego  $c_f(B, t) = 6$ . Zatem wzdłuż krawędzi ścieżki przepływ można zwiększyć o 6 jednostek, o tyle rośnie również przepływ sieciowy, czyli  $|f_{nowy}| = |f_{stary}| + c_f(p) = 0 + 6 = 6$ .

**Budujemy sieć rezydualną.** Zwiększenie przepływu w kanale sieci pierwotnej o  $c_f(p)$  odpowiada zmniejszeniu przepustowości rezydualnej tego kanału. Jednocześnie wraz z pojawieniem się przepływu w kanale sieci pierwotnej powstaje kanał przeciwny w sieci rezydualnej o przepustowości rezydualnej równej przepływowi.

Przepustowość rezydualna kanału  $(s, A)$  wynosi 3 – oznacza to, iż kanałem tym można wciąż jeszcze przesłać trzy dodatkowe jednostki przepływu. W sieci rezydualnej pojawia się kanał przeciwny  $(A, s)$  o przepustowości rezydualnej  $c_f(A, s) = 6$ .

Kanał  $(A, B)$  może jeszcze przesłać 1 dodatkową jednostkę przepływu. Również tutaj pojawił się kanał przeciwny o przepustowości rezydualnej równej 6.

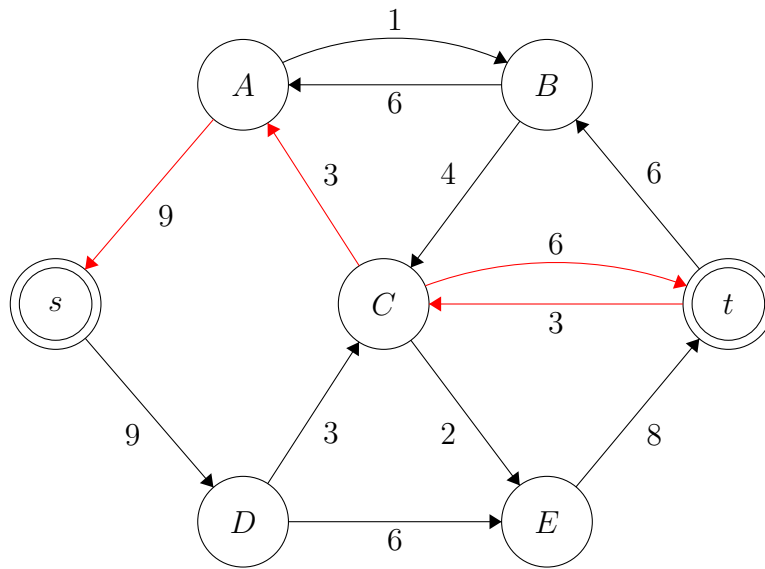
Kanał  $(B, t)$  przestał istnieć w sieci rezydualnej, ponieważ osiągnął już swoją maksymalną przepustowość – 6 jednostek przepływu. Nie może on być dalej wykorzystywany do powiększania przepływu. Na jego miejscu mamy jednak kanał przeciwny z przepustowością rezydualną równą 6.



W nowej sieci rezydualnej szukamy kolejnej ścieżki rozszerzającej:

$$P = \{s \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow t\}, \quad c_f(p) = 3.$$





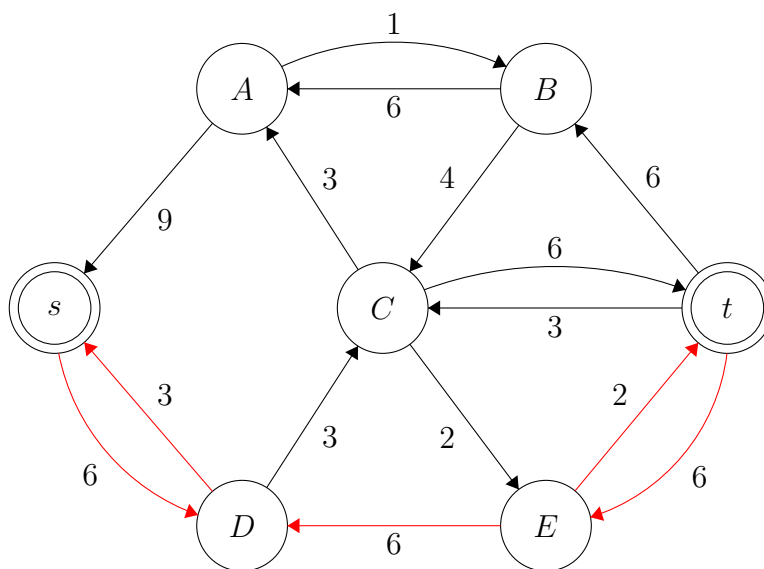
Przepływ zwiększamy:

$$|f| = 6 + 3 = 9$$

i modyfikujemy przepustowości rezydualne krawędzi ścieżki rozszerzającej otrzymując nową sieć rezydualną. Znikają z niej kanały  $(s, A)$  i  $(A, C)$  – wykorzystały już swój potencjał zwiększania przepływu.

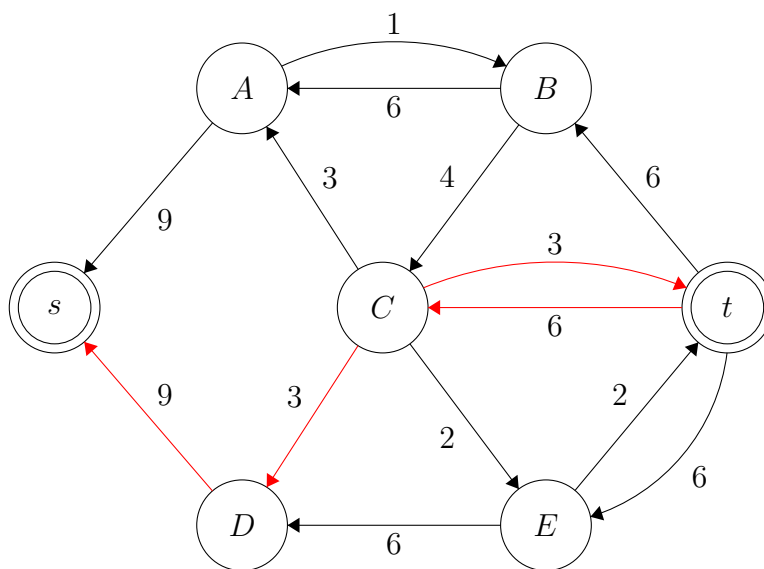
Szukamy kolejnej ścieżki rozszerzającej:

$$P = \{s \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow t\}, \quad c_f(p) = 6$$



W nowej sieci rezydualnej zniknął kanał  $(D, E)$ .  
 Wciąż jednakże możemy znaleźć nową ścieżkę rozszerzającą:

$$P = \{s \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow t\}, \quad c_f(p) = 3$$

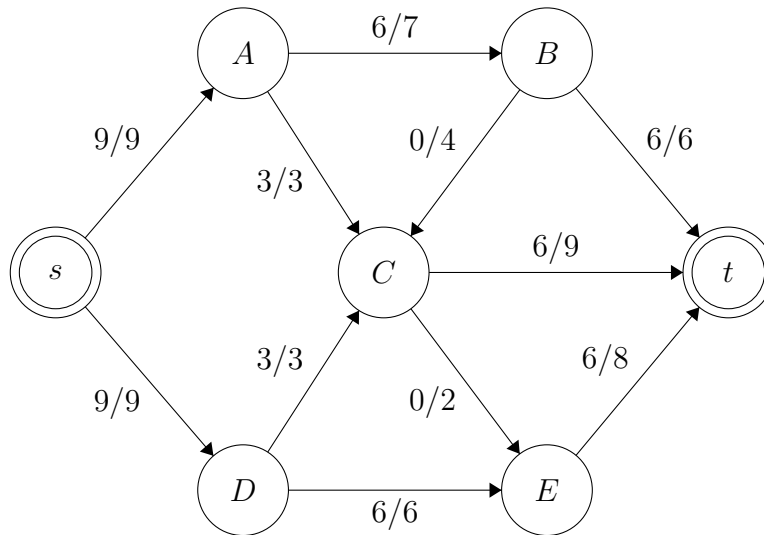


Przepływ zwiększamy:

$$|f| = 15 + 3 = 18.$$

Po zmodyfikowaniu sieci rezydualnej otrzymujemy nową sieć rezydualną. W tej sieci rezydualnej **nie znajdziemy już żadnej nowej ścieżki rozszerzającej** – ze źródła  $s$  nie wychodzi żaden kanał. Oznacza to zakończenie algorytmu, zatem znaleźliśmy przepływ maksymalny. Aby otrzymać sieć przepływową wystarczy od przepustowości kanałów odjąć otrzymane przepustowości rezydualne – dla nieistniejących kanałów ich przepustowość rezydualna wynosi 0.

Poniżej nasza sieć przepływowa z uzyskanym maksymalnym przepływem:



$$|f| = 18$$

## 21 Rozwiązywanie równan rekurencyjnych przy użyciu funkcji tworzących (generujących) oraz przy użyciu równania charakterystycznego.

### 21.1 Funkcja tworząca.

Przykład

$$u_0 = 1, u_1 = 1, u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 0$$

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$$

$$u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n &= 1 + 1 * x + \sum_{n=2}^{\infty} (4u_{n-1} - 4u_{n-2}) x^n = \\ &= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} 4u_{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} 4u_{n-2} x^n = \\ &= 1 + x + 4x \sum_{n=2}^{\infty} u_{n-1} x^{n-1} - 4x^2 \sum_{n=2}^{\infty} u_{n-2} x^{n-2} = \\ &= 1 + x + 4x \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n - 4x^2 \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \\ &= 1 + x + 4x \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n - u_0 \right) - 4x^2 \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \\ &= 1 + x - (4x) * 1 + 4x \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n - 4x^2 \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = 1 - 3x + (4x - 4x^2) \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n (1 - 4x + 4x^2) = 1 - 3x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n (1 - 4x + 4x^2) = 1 - 3x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \frac{1 - 3x}{1 - 4x + 4x^2} = \frac{1 - 3x}{(1 - 2x)^2}$$

Rozkład na ułamki proste:

$$1 - 3x = A(1 - 2x) + B, \quad 1 = A + B, \quad -3 = -2A, \quad A = \frac{3}{2}, \quad B = \frac{-1}{2}$$

Stąd:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n &= \frac{3}{2} * \frac{1}{1 - 2x} - \frac{1}{2} * \frac{1}{(1 - 2x)^2} = \\ &= \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1-1}{n} (2x)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2-1}{n} (2x)^n = \\ &= \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) 2^n x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(n+1) \right) 2^n x^n \end{aligned}$$

Więc

$$u_n = \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(n+1) \right) 2^n$$

## 21.2 Równanie charakterystyczne.

Przykład 1:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n = 0$$

Założmy, że istnieje rozwiązanie takie, że  $a_n = t^n$ .

$$t^{n+2} + t^{n+1} - 2t^n = 0$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$r_1 = \frac{-1+3}{2} = 1, \quad r_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$$

Nie jest to pierwiastek podwójny ( $r_1 \neq r_2$ ), zatem wiemy, że:

$$\exists C, D : \quad a_n = Cr_1^n + Dr_2^n$$

Podstawiając:

$$a_n = C + D(-2)^n$$

Wyliczamy C i D na podstawie znanych pierwszych wyrazów ciągu:

$$a_0 = C + (-2)^0 D = C + D = 0$$

$$a_1 = C + (-2)^1 D = C - 2 * D = 1$$

$$C = \frac{1}{3}, \quad D = \frac{-1}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{3} - \frac{(-2)^n}{3} = \frac{1 - (-2)^n}{3}$$

Przykład 2.

$$a_0 = -2, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$(t - 1)^2 = 0$$

$$r = r_1 = r_2 = 1$$

$$a_n = (C + Dn)r^n$$

$$a_0 = (C + D * 0) * 1^0 = C = -2$$

$$a_1 = (C + D * 1) * 1^1 = C + D = D - 2 = 1$$

$$C = -2, \quad D = 3$$

$$a_n = -2 + 3n$$

## 22 Ciąg i granica ciągu liczbowego, granica funkcji.

### 22.1 Obliczanie granicy ciągu

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2^{-\sqrt{n}} = \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$  - mianownik dąży do  $\infty$  więc całość dąży do 0

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt[n]{10}$  - pierwiastek o coraz wyższym stopniu z jakiejś stałej dąży do 1

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{n^2+2n-5}{2n^2-n}$  - w przypadku takich ułamków dzielimy licznik i mianownik przez  $n$  w największej potęgze, który znajduje się w mianowniku  $\frac{\frac{n^2}{n^2} + \frac{2n}{n^2} - \frac{5}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2} - \frac{n}{n^2}}$  co po skróceniu daje nam  $\frac{1 + \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2}}{2 - \frac{1}{n}}$ . Teraz widzimy, że  $\frac{2}{n}$ ,  $\frac{5}{n^2}$  oraz  $\frac{1}{n}$  zmierzają do 0, więc ostatecznie otrzymujemy  $\frac{1}{2}$ .

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{n^2-2n}{13n+1}$  - na początku robimy tak jak w poprzednim przykładzie, czyli dzielimy licznik i mianownik przez  $n$  w największej potęgze z mianownika  $\frac{\frac{n^2}{n} - \frac{2n}{n}}{\frac{13n}{n} + \frac{1}{n}}$  co po skróceniu daje  $\frac{n-2}{13+\frac{1}{n}}$ . Widzimy, że  $\frac{1}{n}$  dąży do 0, więc całość możemy zapisać już jako  $\frac{n-2}{13}$ . Ponieważ licznik cały czas rośnie, a mianownik pozostaje stały to całość dąży do  $+\infty$

### 22.2 Twierdzenie o dwóch ciągach

Używane aby wykazać rozbieżność pewnego ciągu wykorzystując inny (prostszy) ciąg

Oblicz granicę  $\lim_{n \rightarrow \infty} (3 \sin n - 5) \cdot n^3$

Korzystamy z faktu, że  $\sin n \leq 1$  wtedy

$$(3 \sin n - 5) \cdot n^3 \leq (3 \cdot 1 - 5) \cdot n^3 \leq -2n^3 \leq -n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$$

Więc zgodnie z twierdzeniem o 2 ciągach również  $(3 \sin n - 5) \cdot n^3 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$

### 22.3 Twierdzenie o trzech ciągach

Używane aby wyznaczyć granicę właściwą pewnego ciągu korzystając z dwóch innych ciągów

Oblicz granicę  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n-\cos n^2}{2+n \sin \sqrt{n+3n^2}}$

Podobnie jak poprzednio korzystamy z faktu, że  $-1 \leq \sin x \leq 1$  oraz  $-1 \leq \cos x \leq 1$  dla każdego naturalnego  $x$

Wtedy  $\frac{n^2+n-1}{2+n+3n^2} \leq \frac{n^2+n-\cos n^2}{2+n \sin \sqrt{n+3n^2}} \leq \frac{n^2+n+1}{2-n+3n^2}$

Ponieważ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n-1}{2+n+3n^2} = \frac{1}{3}$  oraz  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n+1}{2-n+3n^2} = \frac{1}{3}$  więc z twierdzenia o trzech ciągach wiemy również, że i  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n-\cos n^2}{2+n \sin \sqrt{n+3n^2}} = \frac{1}{3}$

## 22.4 Funkcje

Oblicz granice funkcji

$$f(x) = \begin{cases} |\frac{1}{x+2}| & \text{dla } x \text{ mniejszego od } 0 \\ \sin x & \text{dla } x \text{ większego bądź równego } 0 \end{cases}$$

w punktach  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = \pi$  oraz w  $+\infty$  i  $-\infty$

Liczymy granice prawo i lewo stronne dla punktów, w których funkcja jest nie ciągła:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} |\frac{1}{x+2}| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} |\frac{1}{x+2}| = +\infty$$

Ponieważ granice prawo i lewo stronne są sobie równe to granica w punkcie -2 istnieje i jest równa  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} |\frac{1}{x+2}| = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 0$$

Ponieważ granice prawo i lewo stronne nie są sobie równe to granica w punkcie 0 nie istnieje

W punkcie  $\pi$  nasza funkcja jest ciągła, więc jej granicę możemy obliczyć podstawiając  $\pi$  bezpośrednio do wzoru:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = f(\pi) = 0$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} |\frac{1}{x+2}| = 0$  - mianownik jest coraz większy (biorąc pod uwagę jego wartość bezwzględną) więc funkcja dąży do 0



$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$  - nie istnieje, ponieważ  $\sin x$  jest funkcją okresową i nie dąży do żadnej konkretnej wartości

## Granice specjalne

Oblicz granicę funkcji  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sin(x+5) + \ln(x+6)}{x+5}$

Skorzystamy z granic specjalnych  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  oraz  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sin(x+5) + \ln(x+6)}{x+5} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sin(x+5)}{x+5} + \frac{\ln((x+5)+1)}{x+5}$$

Ponieważ granica dąży do -5 to wyrażenia w nawiasach dążą do 0 więc możemy zastosować wspomniane granice specjalne. Możemy to zapisać również jako:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + \frac{\ln(x+1)}{x} \text{ z granic specjalnych } = 1 + 1 = 2$$

## Reguła de L'Hospitala

Oblicz granicę funkcji  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2 + 5x}$

Spróbujemy zastosować regułę de L'Hospitala. Aby to zrobić musimy sprawdzić czy granice funkcji z licznika i mianownika z osobna są równe 0 oraz czy funkcja z mianownika w otoczeniu  $x_0$  nie jest równa 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 5x = 0$$

Możemy do tego zauważyć, że  $x^2 + 5x$  w okolicach  $x_0 \neq 0$  więc możemy zastosować regułę de L'Hospitala:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2 + 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x^2 + 5x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2x + 5} = \frac{1}{5}$$

## 23 Ciągłość i pochodna funkcji. Definicja i podstawowe twierdzenia.

### 23.1 Ciągłość funkcji

#### Zad 1

Zbadaj ciągłość funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Interesuje nas oczywiście punkt 0 i to dla niego musimy policzyć granicę (funkcja w pozostałych punktach jest ciągła, jako że składa się z funkcji elementarnych):

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin(\frac{1}{x}) - \text{możemy to zrobić z twierdzenia o 3 funkcjach:}$$

Korzystając tradycyjnie z warunku  $-1 \leq \sin x \leq 1$  możemy zauważyć, że:

$$-x \leq x \sin(\frac{1}{x}) \leq x \text{ a z kolei } \lim_{x \rightarrow 0} x = \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0 \text{ więc i } \lim_{x \rightarrow 0} x \sin(\frac{1}{x}) = 0$$

Mamy więc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$  więc ta funkcja jest ciągła

#### Zad 2

Zbadaj ciągłość funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla } x < 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ -x + 2 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

Oczywiście tak jak i poprzednio interesuje nas punkt 0. Musimy policzyć granice lewo i prawo stronne:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -x + 2 = 2 \end{aligned}$$

Granice prawo i lewo stronne są sobie więc równe, ale nie są one równe wartości funkcji w badanym punkcie. Stąd też ta funkcja nie jest ciągła w punkcie 0.

#### Twierdzenie Barboux

## 23.2 Pochodna

### Istnienie pochodnej w punkcie z definicji

Zbadaj istnienie pochodnej funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

dla punktu  $x_0 = 0$

Aby stwierdzić czy funkcja ma pochodną w punkcie  $x_0$  musimy obliczyć jej prawo i lewo stronną pochodną z definicji:

$$f'_-(x_0) \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{(\Delta x)^2 \cdot \sin \frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \Delta x \cdot \sin \frac{1}{\Delta x} = 0$$

- można to pokazać z twierdzenia o 3 funkcjach

Analogiczny wywód możemy zrobić dla pochodnej prawostronnej - wynik również będzie 0

Ponieważ pochodne prawo i lewo stronne są równe to pochodna tej funkcji w punkcie  $x_0$  istnieje

### Obliczanie przybliżonej wartości funkcji za pomocą różniczki

Oblicz przybliżoną wartość liczby  $\sqrt[3]{8.2}$

Korzystamy ze wzoru  $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$

W naszym przypadku:

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$x_0 = 8$$

$$\Delta x = 0.2$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Obliczamy więc:

$$f(8) = 2$$

$$f'(8) = \frac{1}{12}$$

$$\text{Więc } \sqrt[3]{8.2} \approx 2 + \frac{1}{12} \cdot 0.2 = \frac{121}{60}$$

## 24 Ekstrema funkcji jednej zmiennej. Definicje i twierdzenia.

**Zadanie 24.1** Korzystając z definicji uzasadnij, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ma ekstremum lokalne w punkcie  $x_0 = 0$ .

$f(0) = 0$ . Dla każdego punktu  $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$   $f(x) > 0$ . Zatem  $x$  jest właściwym minimum lokalnym (sąsiedztwo  $S(0, 1)$ ).

**Zadanie 24.2** Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji  $f(x) = x^2 - 2x + 3$  na przedziale  $[-2, 5]$

$$f'(x) = 2x - 2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Wartość pochodnej jest ujemna na przedziale  $[-2, 1)$  i dodatnia na przedziale  $(1, 5]$ , zatem istnieje minimum lokalne w punkcie 1.

$x$	$-2$	$1$	$5$
$f(x)$	$3$	$2$	$18$

Wartość najmniejsza funkcji  $f(x)$  na przedziale  $[-2, 5]$  wynosi 2, wartość największa: 18.

**Zadanie 24.3** Znajdź wszystkie ekstrema lokalne funkcji  $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4 - x * 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{-x^2 + 4}{(x^2 + 4)^2}$$

$f'(x) = 0$  dla punktów w których  $-x^2 + 4 = 0$ , tzn. 2 i -2. Sprawdźmy znak pochodnej pomiędzy jej miejscami zerowymi:

$x$	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$

Widzimy, że pochodna zmienia znak zarówno w -2 jak i 2. Zatem funkcja  $f'(x)$  ma minimum lokalne (równe  $-\frac{1}{4}$ ) w punkcie -2, oraz maksimum lokalne (równe  $\frac{1}{4}$ ) w punkcie 2.

## 25 Całka Riemanna funkcji jednej zmiennej.

**Zadanie 25.1** Korzystając z wzoru Newtona - Leibniza oblicz wartość całki

$$\int_0^2 \frac{3x+1}{3x-1} dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-1}{3x+1} dx &= \left| u = 3x+1 \quad u' = 3 \right| = \frac{1}{3} \int \frac{u-2}{u} du = \frac{1}{3} \int du - \frac{2}{3} \int \frac{1}{u} du = \\ &= \frac{u-2\ln(u)}{3} + C = \frac{3x+1-2\ln(3x+1)}{3} + C = x - \frac{2\ln(3x+1)}{3} + C \end{aligned}$$

$$\int_0^2 \frac{3x-1}{3x+1} dx = \left[ x - \frac{2\ln(3x+1)}{3} \right]_0^2 = 2 - \frac{2}{3}(\ln(7) + \ln(1)) = 2 - \frac{2\ln(7)}{3}$$

**Zadanie 25.2** Korzystając z definicji całki Riemanna uzasadnij równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{n^2}{n^2+i^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}$$

Korzystamy z definicji całki Riemanna ( $[a, b] = [0, 1]$ ,  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} = \left[ \arctg x \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

**Zadanie 25.3** Korzystając z definicji oblicz całkę

$$\int_0^1 2^x dx$$

Korzystając ze wzoru

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(a + i \frac{b-a}{n})$$

uzyskujemy

$$\int_0^1 2^x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2^{\frac{i}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sqrt[n]{2})^i$$

Suma n wyrazów ciągu geometrycznego jest równa  $a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{2} \cdot \frac{(\sqrt[n]{2})^n - 1}{\sqrt[n]{2} - 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} \cdot \frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{2} - 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2}}{\frac{\sqrt[n]{2} - 1}{\frac{1}{n}}} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2}}{\lim_{k \rightarrow 0} \frac{2^k}{k}} = \frac{1}{\ln 2} = \log_2 e \end{aligned}$$

## 26 Pochodne cząstkowe funkcji wielu zmiennych; różniczkowalność i różniczka funkcji.

- Korzystając z definicji zbadać, czy istnieją pochodne cząstkowe rzędu pierwszego podanych funkcji

$$f(x, y) = x \cdot \sin xy, (x_0, y_0) = (\pi, 1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(\pi, 1) &\stackrel{def}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\pi + \Delta x, 1) - f(\pi, 1)}{\Delta x} = \\ &\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\pi + \Delta x) \sin((\pi + \Delta x)) - \pi \sin(\pi)}{\Delta x} = \\ &\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ (\pi + \Delta x) \frac{-\sin \Delta x}{\Delta x} \right] = -\pi \end{aligned} \quad (5)$$

- Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu podanych funkcji

$$f(x, y) = e^{x^2 \sin y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (e^{x^2 \sin y}) = (e^{x^2 \sin y}) \cdot 2x \sin y \quad (6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (e^{x^2 \sin y}) = (e^{x^2 \sin y}) \cdot x^2 \cos y \quad (7)$$

- Obliczyć pochodne cząstkowe drugiego rzędu podanych funkcji

$$f(x, y) = xy + \frac{x^2}{y^3}$$

Początkowo wyliczamy pochodne pierwszego rzędu

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( xy + \frac{x^2}{y^3} \right) = y + \frac{2x}{y^3} \quad (8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( xy + \frac{x^2}{y^3} \right) = x + \frac{3x^2}{y^4} \quad (9)$$

Następnie wyliczamy pochodne cząstkowe drugiego rzędu

$$\frac{\partial f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( y + \frac{2x}{y^3} \right) = \frac{2}{y^3} \quad (10)$$



$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( x - \frac{3x^2}{y^4} \right) = 1 - \frac{6x}{y^4} \quad (11)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( y + \frac{2x}{y^3} \right) = 1 - \frac{6x}{y^4} \quad (12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( x - \frac{3x^2}{y^4} \right) = \frac{12x^2}{y^5} \quad (13)$$

- Korzystając z definicji zbadać różniczkowalność podanych funkcji we wskazanych punktach

$$f(x, y) = x^2 - y^2 \text{ w punkcie } (x_0, y_0) = (1, -2)$$

Korzystając z definicji, wiemy, że funkcja jest różniczkowalna jeżeli zachodzi poniższa równość

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0 \quad (14)$$

Najpierw policzymy potrzebne pochodne cząstkowe we wskazanych punktach

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, -2) = 2x|_{(1,-2)} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2) = 2y \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, -2) = 2y|_{(1,-2)} = -4$$

Następnie sprawdzimy równość z definicji

$$\begin{aligned} & \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{(1 + \Delta x)^2 - (-2 + \Delta y)^2 - (1 - 4) - 2\Delta x - 4\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - (4 - 4\Delta y + (\Delta y)^2) - 2\Delta x - 4\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 - 2(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \left[ \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \right] - \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{2(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \end{aligned} \quad (15)$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \left[ \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \right] = 0$$

Oraz z twierdzenia o trzech ciągach

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{2(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

Zatem cała granica wynosi 0 oraz funkcja jest różniczkowalna w punkcie (1,-2).

## 27 Ekstrema funkcji wielu zmiennych. Definicje i twierdzenia.

- Zbadać czy podana funkcja ma ekstrema lokalne oraz jeśli tak to podać je

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 3(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 3(x^2 - 2x + 1) + 4(y^2 + 4y + 4) = \\ &= 3x^2 - 6x + 3 + 4y^2 + 16y + 4 \end{aligned}$$

Korzystamy z warunku wystarczającego na istnienie ekstremum lokalnego funkcji dwóch zmiennych

Najpierw liczymy pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2 - 6x + 3 + 4y^2 + 16y + 4) = 6x - 6 \quad (16)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 - 6x + 3 + 4y^2 + 16y + 4) = 8y + 16$$

Funkcja  $f$  może mieć ekstrema tylko w miejscu zerowania się pochodnych

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} 6x_0 - 6 = 0 \\ 8y_0 + 16 = 0 \end{cases}$$

Zatem punkt zerowania się pochodnych, w którym funkcja może mieć ekstrema to  $P(x_0, y_0) = P(1, -2)$

Wyliczamy pochodne cząstkowe drugiego rzędu oraz badamy znak macierzy Jacobi'ego

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (6x - 6) = 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (8y + 16) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (6x - 6) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (8y + 16) = 8$$

$$\det \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = 6 \cdot 8 = 48 > 0$$

Zatem funkcja  $f$  ma ekstremum lokalne w punkcie  $(1, -2)$  oraz  $\frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$  zatem jest to minimum lokalne właściwe.

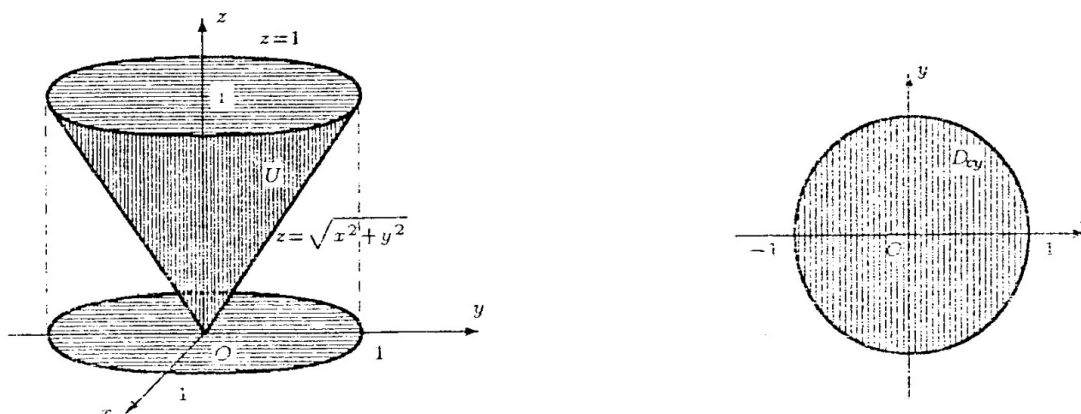
## 28 Twierdzenie o zmianie zmiennych w rachunku całkowym; współrzędne walcowe i sferyczne.

**Zadanie 28.1** Wprowadzając współrzędne walcowe obliczyć podaną całkę po wskazanych obszarach:

$$\iiint_U (x^2 + y^2) dx dy dz, \quad \text{gdzie } U : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$$

Rozwiązanie:

Obszar całkowania  $U$  jest stożkiem o wysokości 1 i promieniu podstawy 1. Stożek  $U$  i jego rzut na płaszczyznę  $xOy$  przedstawiony na rysunkach:

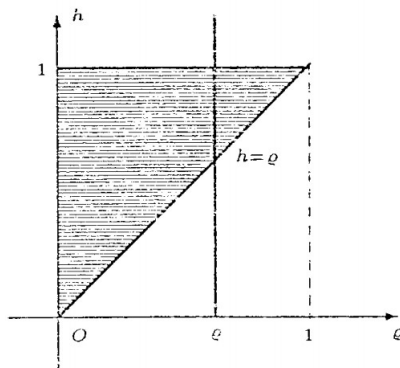


Obszar  $D_{xy}$  jest określony we współrzędnych biegunowych przez nierówności

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varrho \leq 1.$$

Dla ustalonego kąta  $\varphi$  rysujemy przekrój obszaru  $U$  półpłaszczyzną przechodzącą przez oś  $Oz$  i przez ramię kąta  $\varphi$  (na rysunku). Z rysunku odczytujemy zakres zmienności  $h$ . Mamy  $\varrho \leq h \leq 1$ . Ostatecznie obszar  $U$  we współrzędnych walcowych jest określony nierównościami:

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varrho \leq 1, \quad \varrho \leq h \leq 1.$$



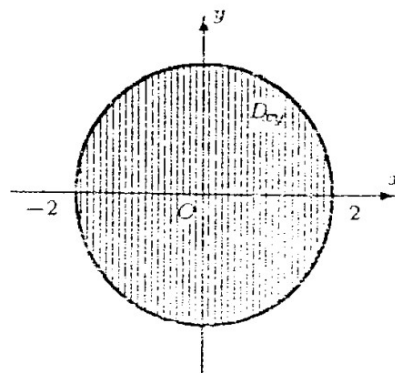
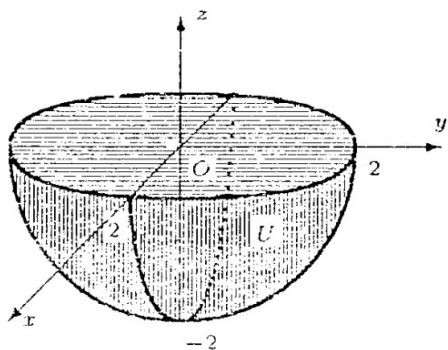
Dokonując teraz zamiany zmiennych w całce potrójnej na współrzędne walcowe otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 \iiint_U (x^2 + y^2) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_\rho^1 (\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi) dh \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_\rho^1 \rho^2 dh = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d \left[ \rho^2 h \right]_{h=\rho}^{h=1} d\rho \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho^2 - \rho^3) d\rho = \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \right) \left( \int_0^1 (\rho^2 - \rho^3) d\rho \right) \\
 &= [\varphi]_0^{2\pi} \cdot \left[ \frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = 2\pi \cdot \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

**Zadanie 28.2** Wprowadzając współrzędne sferyczne obliczyć podaną całkę po wskazanych obszarach:

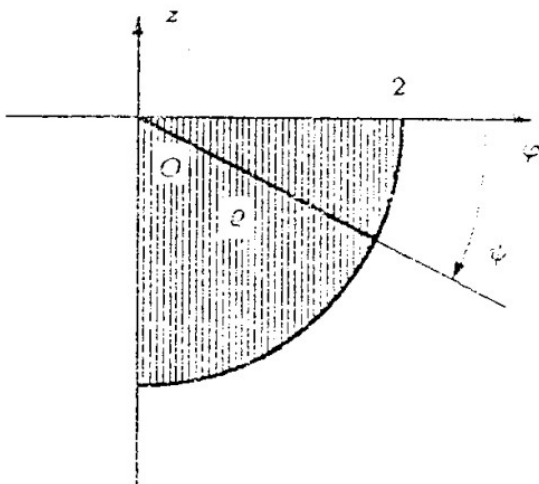
$$\iiint_U (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz, \quad \text{gdzie } U : -\sqrt{4 - x^2 - y^2} \leq z \leq 0$$

Rozwiązanie: Obszar całkowania  $U$  jest dolną półkulą o promieniu  $R = 2$ . Półkulę  $U$  i jej rzut  $D_{xy}$  na płaszczyznę  $xOy$  przedstawiony na rysunkach:



Na podstawie rzutu  $D$  obszaru  $U$  ustalamy zakres zmienności kąta  $\varphi$  we współrzędnych sferycznych  $(\varphi, \psi, \varrho)$ . Mamy  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Aby określić zakres zmienności kąta  $\psi$  i promienia wodzącego rysujemy (dla ustalonego kąta  $\varphi$ ) przekrój obszaru  $U$  półpłaszczyzną przechodzącą przez oś  $Oz$  i przez ramię kąta  $\varphi$ . Z rysunku odczytujemy te zakresy:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq 0, \quad 0 \leq \varrho \leq 2.$$



Ostatecznie obszar  $U$  we współrzędnych sferycznych opisany jest układem nierówności postaci:

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq 0, \quad 0 \leq \varrho \leq 2.$$

W rozważanej całce dokonujemy zamiany zmiennych na współrzędne sferyczne.  
Mamy:

$$\begin{aligned}
 \iiint_U \mu(x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\psi \int_0^2 (\varrho^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \psi + \varrho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \psi + \varrho^2 \sin^2 \psi) \varrho^2 \cos \psi \, d\varrho \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\psi \int_0^2 \varrho^4 \cos \psi \, d\varrho \\
 &= \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \right) \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos \psi \, d\psi \right) \cdot \left( \int_0^2 \varrho^4 \, d\varrho \right) \\
 &= [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [\sin \psi]_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cdot \left[ \frac{\varrho^5}{5} \right]_0^2 = 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{32}{5} = \frac{64}{5} \pi
 \end{aligned}$$



## Teoretyczne podstawy informatyki

- 29** Metody dowodzenia poprawności pętli.
- 30** Odwrotna Notacja Polska: definicja, własności, zalety i wady, algorytmy.
- 31** Modele obliczeń: maszyna Turinga.
- 32** Modele obliczeń: automat skończony, automat ze stosem.

### 33    Złożoność obliczeniowa - definicja notacji: $O$ , $\Omega$ , $\Theta$ .

34    Złożoność obliczeniowa - pesymistyczna i średnia.

- 35 Metoda "dziel i zwyciężaj"; zalety i wady.
- 36 Lista: ujęcie abstrakcyjne, możliwe implementacje i ich złożoności.
- 37 Kolejka i kolejka priorytetowa: ujęcie abstrakcyjne, możliwe implementacje i ich złożoności.

**38    Algorytmy sortowania QuickSort i MergeSort:  
metody wyboru pivota w QS; złożoności.**

- 39 Algorytm sortowania bez porównań (sortowanie przez zliczanie, sortowanie kubełkowe oraz sortowanie pozycyjne).

- 40    Reprezentacja drzewa binarnego za pomocą porządków (preorder, inorder, postorder).

- 41 Algorytmy wyszukiwania następnika i poprzednika w drzewach BST; usuwanie węzła.
- 42 B-drzewa: operacje i ich złożoność.
- 43 Drzewa AVL: rotacje, operacje z wykorzystaniem rotacji i ich złożoność.
- 44 Algorytmy przeszukiwania wszerz i w głąb w grafach.
- 45 Algorytmy wyszukiwania najkrótszej ścieżki (Dijkstry oraz Bellmana-Forda).
- 46 Programowanie dynamiczne: podział na podproblemy, porównanie z metodą "dziel i zwyciężaj".
- 47 Algorytm zachłanny: przykład optymalnego i nieoptymalnego wykorzystania.
- 48 Kolorowania wierzchołkowe (grafów planarnych) i krawędziowe grafów, algorytmy i ich złożoności.
- 49 Algorytmy wyszukiwania minimalnego drzewa rozpinającego: Boruvki, Prima i Kruskala.
- 50 Najważniejsze algorytmy wyznaczania otoczki wypukłej zbioru punktów w układzie współrzędnych (Grahama, Jarvisa, algorytm przyrostowy (quickhull)).
- 51 Problemy P, NP, NP-zupełne i zależności między nimi. Hipoteza P vs. NP.
- 52 Automat minimalny, wybrany algorytm mini-



- 58 Reprezentacja liczb całkowitych; arytmetyka.
- 59 Reprezentacja liczb rzeczywistych; arytmetyka zmiennopozycyjna.
- 60 Różnice w wywołaniu funkcji statycznych, niestatycznych i wirtualnych w C++.
- 61 Sposoby przekazywania parametrów do funkcji (przez wartość, przez referencję). Zalety i wady.
- 62 Wskaźniki, arytmetyka wskaźników, różnica między wskaźnikiem a referencją w C++.
- 63 Podstawowe założenia paradygmatu obiektowego: dziedziczenie, abstrakcja, enkapsulacja, polimorfizm.
- 64 Funkcje zaprzyjaźnione i ich związek z przeładowaniem operatorów w C++.
- 65 Programowanie generyczne na podstawie szablonów w języku C++.
- 66 Podstawowe kontenery w STL z szerszym omówieniem jednego z nich.
- 67 Obsługa sytuacji wyjątkowych w C++.
- 68 Obsługa plików w języku C.
- 69 Model wodospadu a model spiralny wytwarzania oprogramowania.
- 70 Diagram sekwencji i diagram przypadków użycia w języku UML.

- 76 Relacyjny model danych, normalizacja relacji (w szczególności algorytm doprowadzenia relacji do postaci Boyce'a-Codda), przykłady.
- 77 Indeksowanie w bazach danych: drzewa B+, tablice o organizacji indeksowej, indeksy haszowe, mapy binarne.
- 78 Podstawowe cechy transakcji (ACID). Metody sterowania współbieżnością transakcji, poziomy izolacji transakcji, przykłady.
- 79 Złączenia, grupowanie, podzapytania w języku SQL.
- 80 Szeregowalność harmonogramów w bazach danych.
- 81 Definicja cyfrowego układu kombinacyjnego - przykłady układów kombinacyjnych i ich implementacje.
- 82 Definicja cyfrowego układu sekwencyjnego - przykłady układów sekwencyjnych i ich implementacje.
- 83 Minimalizacja funkcji logicznych.
- 84 Programowalne układy logiczne PLD (ROM, PAL, PLA).
- 85 Schemat blokowy komputera (maszyna von Neumanna).
- 86 Zarządzanie procesami: stany procesu, algorytmy szeregowania z wywłaszczaniem.