Uniwersytet Jagielloński

Pytania do egzaminu licencjackiego

na kierunku Informatyka

Małgorzata Dymek

Rok akademicki 2019/2020

Spis treści

Matematyczne podstawy informatyki

1 Zasada indukcji matematycznej.

Przykład: $2^1+2^2+\cdots+2^n = 2^{n+1}-2$, Nierówność Bernoulliego *dla* $h \geqslant -1 \ \ (1+h)^2 \geqslant 1+n*h, \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$, $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \forall n \in \mathbb{N}$

2 Porządki częściowe i liniowe. Elementy największe, najmniejsze, maksymalne i minimalne.

Przykłady - sprawdź czy porządek: $xRy \Leftrightarrow x|y$

3 Relacja równoważności i zbiór ilorazowy.

Przykład: $xRy \Leftrightarrow x \equiv_3 y$.

4 Metody dowodzenia twierdzeń: wprost, nie wprost, przez kontrapozycję.

5 Metody numeryczne rozwiązywania równań nieliniowych: bisekcji, siecznych, Newtona.

6 Rozwiązywanie układów równań liniowych: metoda eliminacji Gaussa, metody iteracyjne Jacobiego i Gaussa-Seidla.

6.1 Metoda eliminacji Gaussa

Obliczając rząd macierzy metodą Gaussa należy za pomocą operacji elementarnych na wierszach sprowadzić macierz do macierzy schodkowej. Wtedy wszystkie niezerowe wiersze są liniowo niezależne i można łatwo odczytać rząd macierzy.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{w_2-2w_1, w_3+w_1, w_4-2w_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \underset{\sim}{w_2 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \sim$$

$$\underset{\sim}{w4-w_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \underset{\sim}{w4-w_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Metody iteracyjne

Ogólna postać metody iteracyjnej:

$$Ax = b$$

$$Qx^{n+1} = (Q - A)x^n + b = \tilde{b}$$

$$x^0 = (0, 0, 0)$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + (-2)x_2 + 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + (-1)x_2 + (-4)x_3 = 0 \end{cases}$$

6.2 Metoda iteracyjna Jacobiego

6.2.1 Algebraicznie

$$\begin{cases} x_1^{N+1} = \frac{1}{5}(10 + 2x_2^N - 3x_3^N) \\ x_2^{N+1} = \frac{1}{4}(-2x_1^N - 2x_3^N) \\ x_3^{N+1} = -\frac{1}{4}(x_2^N - 2x_1^N) \end{cases}$$

6.2.2 Macierzowo

$$Q = D \quad \text{(diagonalna)}$$

6.3 Metoda iteracyjna Gaussa-Seidla

6.3.1 Algebraicznie

$$\begin{cases} x_1^{N+1} = \frac{1}{5}(10 + 2x_2^N - 3x_3^N) \\ x_2^{N+1} = \frac{1}{4}(-2x_1^N - 2x_3^{N+1}) \\ x_3^{N+1} = -\frac{1}{4}(x_2^{N+1} - 2x_1^{N+1}) \end{cases}$$

6.3.2 Macierzowo

$$Q = L + D \quad \text{(diagonalna i dolnotrójkątna)}$$

7 Wartości i wektory własne macierzy: numeryczne algorytmy ich wyznaczania.

8 Interpolacja wielomianowa: metody Lagrange'a i Hermite'a. Efekt Rungego.

8.1 Wzór interpolacyjny Lagrange'a

Zadanie 8.1 *Znaleźć wielomiany l_i i wzór Lagrange'a dla $n = 3$ i punktów*

x	*5*	*-7*	*-6*	*0*
y	*1*	*-23*	*-54*	*-954*

Rozwiązanie: Wielomiany l_i wyrażają się przez węzły tak:

1.

$$l_0(x) = \frac{(x+7)(x+6)x}{(5+7)(5+6)\cdot 5} = \frac{1}{660}(x+7)(x+6)x,$$

$$l_1(x) = \frac{(x-5)(x+6)x}{(-7-5)(-7+6)(-7)} = -\frac{1}{84}(x-5)(x+6)x,$$

$$l_2(x) = \frac{(x-5)(x+7)x}{(-6-5)(-6+7)(-6)} = \frac{1}{66}(x-5)(x+7)x,$$

$$l_3(x) = \frac{(x-5)(x+7)(x+6)}{(0-5)(0+7)(0+6)} = -\frac{1}{210}(x-5)(x+7)(x+6).$$

2. Stąd wynika, że

$$p(x) = l_0(x) - 23l_1(x) - 54l_2(x) - 954l_3(x).$$

8.2 Interpolacja Hermite'a

Zadanie 8.2 *Należy znaleźć wielomian interpolacyjny, przybliżający funkcję o zadanych węzłach dwukrotnych:*

$$\begin{array}{lcl} x_1 = 1 & , & x_2 = 3 \\ f(x_1) = 3 & , & f(x_2) = 5 \\ f'(x_1) = 2 & , & f'(x_2) = 6 \end{array}$$

Rozwiązanie: Zapisuje się wartości w tabeli:

x_i	$f(x_i)$
1	3
1	3
3	5
3	5

Następnie w miejsce powtarzającego się węzła wstawia się wartości pochodnej, a w pozostałe miejsca (w tym przypadku jedno) wstawia się odpowiednią różnicę dzieloną:

x_i	$f(x_i)$	$R_2(x_i)$
1	3	$-$
1	3	2
3	5	1
3	5	6

Następnie uzupełnia się do końca tabelę:

x_i	$f(x_i)$	$R_2(x_i)$	$R_3(x_i)$	$R_4(x_i)$
1	3	$-$	$-$	$-$
1	3	2	$-$	$-$
3	5	1	$-\frac{1}{2}$	$-$
3	5	6	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$

Zatem otrzymuje się wielomian:

$$w(x) = 3 + 2(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{3}{2}(x-1)^2(x-3) = \frac{3}{2}x^3 - 8x^2 + \frac{27}{2}x - 4.$$

Łatwo sprawdzić, że interpoluje on dane punkty:

$$w(1) = \frac{3}{2} - 8 + \frac{27}{2} - 4 = 3$$

$$w'(1) = \frac{9}{2} - 16 + \frac{27}{2} = 2$$

$$w(3) = \frac{3}{2} \cdot 27 - 8 \cdot 9 + \frac{27}{2} \cdot 3 - 4 = 5$$

$$w'(3) = \frac{9}{2} \cdot 9 - 16 \cdot 3 + \frac{27}{2} = 6.$$

9 Zmienne losowe dyskretne. Definicje i najważniejsze rozkłady.

9.1 Rozkład dwumianowy

Zadanie 9.1 *Zmienna losowa* X *ma rozkład dwumianowy* ($X \sim Bin(n, p)$) *gdzie* n *- ilość prób,* p *- prawdopodobieństwo sukcesu. Ponadto wiemy, że* $E(X) = np$ *oraz* $Var(X) = np(1 - p)$

Rozwiązanie: Mamy $X \sim Bin(n = 4, p = \frac{1}{2})$ oraz $k = 2$, więc

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8},$$

$$E(X) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2, \quad Var(X) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

9.2 Rozkład geometryczny

Zadanie 9.2 *Zmienna losowa* X *ma rozkład geometryczny z* $p = \frac{1}{2}$*. Wzór na prawdopodobieństwo* $P(X = k) = (1-p)^{(k-1)}$ *oraz mamy* $E(X) = \frac{1}{p}, Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$*. Prawdopodobieństwo że pierwszy orzeł wypadnie w 4 rzucie:*

$$P(X = 4) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{(4-1)} \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$E(X) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2, \quad Var(X) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2.$$

9.3 Rozkład Poissona

Zadanie 9.3 *Zmienna losowa* X *ma rozkład Posissona z parametrem* $\lambda = 2,4$*. Prawdopodobieństwo, że student będzie nieobecny w ciągu semestru:*

1. mniej niż 2 razy:

$$P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)=$$

$$=e^{-2,4}\cdot\frac{2,4^0}{0!}+e^{-2,4}\cdot\frac{2,4^1}{1!}=e^{-2,4}+2,4\cdot e^{-2,4}.$$

2. więcej niż 5 razy (jedenminus prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego):

$$P(X>5)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)-P(X=3)-P(X=4)-P(X=5)=$$

$$=1-e^{-2,4}-e^{-2,4}\cdot 2,4-\frac{e^{-2,4}\cdot 2,4^2}{2}-\frac{e^{-2,4}\cdot 2,4^3}{6}-\frac{e^{-2,4}\cdot 2,4^4}{24}-\frac{e^{-2,4}\cdot 2,4^5}{120}.$$

10 Zmienne losowe ciągłe. Definicje i najważniejsze rozkłady.

10.1 Rozkład jednostajny

Zadanie 10.1 *Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku [2, 6]. Wykonaj polecenia:*

1. *zapisz wzór na gęstość zmiennej losowej X*
2. *oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia że* $X \in [3, 3.5]$
3. *oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia że* $X \in (3, 3.5)$

Rozwiązanie:

1. wzór na gęstość zmiennej losowej X to

$$\chi_{[2,6]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{gdy } x \in [2,6] \\ 0 & \text{gdy } x \notin [2,6] \end{cases}$$

2. prawdopodobieństwo zdarzenia, że $X \in [3, 3.5]$ to

$$P(X \in [3, 3.5]) = \int_3^{3.5} \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4}(3.5 - 4) = \frac{1}{8}$$

3. prawdopodobieństwo zdarzenia że $X \in 3, 3.5$ to

$$P(X \in (3, 3.5)) = P(X \in [3, 3.5]) = \frac{1}{8}$$

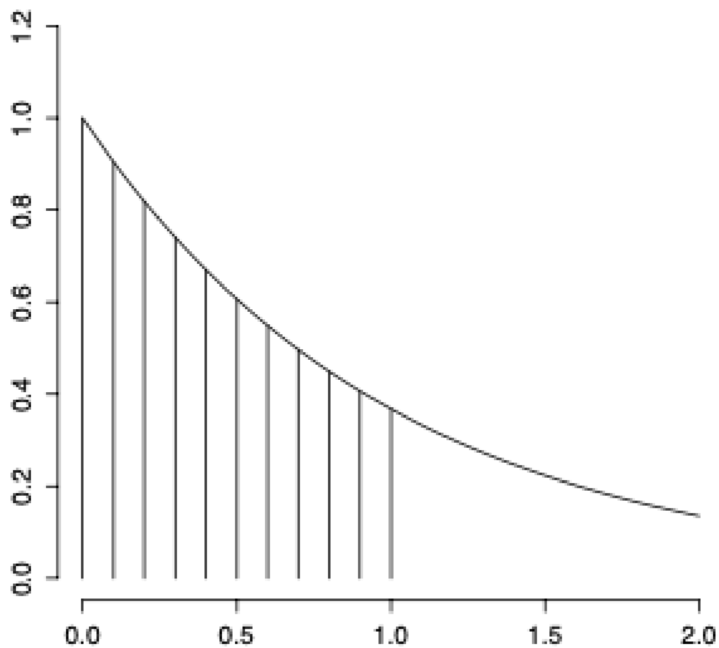
10.2 Rozkład wykładniczy

Zadanie 10.2 *Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem* $\lambda = 1$*. Wykonaj polecenia:*

1. *narysuj gęstość/ zapisz wzór na gęstość zmiennej losowej X*
2. *na powyższym rysunku przedstaw prawdopodobieństwo zdarzenia że* $X \in [0, 1]$
3. *oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia że* $X \in [0, 1]$

Rozwiązanie:

Punkty 1 i 2:



Punkt 3 - prawdopodobieństwo zdarzenia że $X \in [0, 1]$ wynosi

$$P(X \in [0,1]) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 e^{-x}dx = [-e^{-x}]_{x=0}^{x=1} = 1 - e^{-1}$$

10.3 Rozkład normalny

Zadanie 10.3 *Zmienna losowa X ma rozkład normalny o parametrach $\mu = 0$ oraz $\sigma = 1$. Podaj prawdopodobieństwo, że X osiąga wartości dodatnie.*

Rozwiązanie:

Wykres tej funkcji jest parzysty, a pole calego wykresu wynosi 1 więc z połowy jest $\frac{1}{2}$.

$$P(X > 0) = \int_o^\infty f(x)dx = \frac{1}{2}$$

10.4 Rozkład Gamma, Wzór Gamma-Poisona

Zadanie 10.4 *Kompilacja programu składa się z 3 części przetwarzanych przez kompilator sekwencyjnie,jedna po drugiej. Czas przetwarzania każdej z części ma rozkład wykładniczy ze średnim czasem 5 minut, niezależnym od czasu przetwarzania pozostałych części.*

1. *oblicz wartość oczekiwaną i wariancję całkowitego czasu kompilacji*
2. *oblicz prawdopodobieństwo, że cały proces kompilacji zostanie przeprowadzony w czasie mniejszym niż 12 minut.*

Rozwiązanie:

Całkowity czas kompilacji opisuje zmienna losowa o rozkładzie $Gamma(T \sim \Gamma(\alpha = 3, \lambda = \frac{1}{5}))$. Wartość oczekiwana i wariancja całkowitego czasu kompilacji to

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{3}{\frac{1}{5}} = 15$$

$$Var(x) = \frac{\alpha}{\lambda^2} = \frac{3}{\frac{1}{25}} = 75$$

Prawdopodobieństwo, że cały proces kompilacji zostanie przeprowadzony w czasie mniejszym niż 12 minut liczymy korzystając z formuły Gamma-Poisona.

$$P(T < t) = P(X \geqslant \alpha),$$

gdzie $X \sim Poisson(\lambda * t = \frac{1}{5} * 12 = 2.4)$ oraz $\alpha = 3$, $t = 12$. Mamy więc:

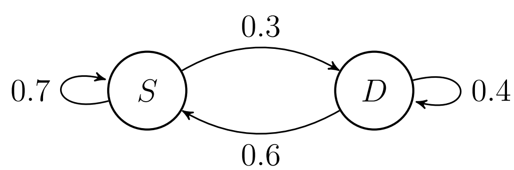
$$P(T < 12) = P(X \geqslant 3) = 1 - P(0) - P(1) - P(2) = 1 - F_X(2) = 1 - 0.5697 = 0.43$$

11 Łancuchy Markowa. Rozkład stacjonarny.

Zadanie 11.1 *W pewnym mieście każdy dzień jest słoneczny albo deszczowy. Po dniu słonecznym dzień słoneczny następuje z prawdopodobieństwem 0.7, a po dniu deszczowym z prawdopodobieństwem 0.4.*

1. *Narysuj łańcuch markowa oraz wyznacz macierz przejścia dla niego.*
2. *W poniedziałek padało. Stwórz prognozę na wtorek, środę i czwartek.*
3. *Meteorolodzy przewidują 80% szans na deszcz w poniedziałek. Stwórz prognozę na wtorek, środę i czwartek.*
4. *Znajdź rozkład stacjonarny.*

1. Łańcuch Markowa:



Macierz przejść:

$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

2.

Wtorek:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Środa:

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.52 & 0.48 \end{bmatrix}$$

Czwartek:

$$\begin{bmatrix} 0.52 & 0.48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.556 & 0.444 \end{bmatrix}$$

3.

Wtorek:

$$\begin{bmatrix}0.2 & 0.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.4 & 0.6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.46 & 0.54\end{bmatrix}$$

Środa:

$$\begin{bmatrix}0.46 & 0.54\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.4 & 0.6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.538 & 0.462\end{bmatrix}$$

Czwartek:

$$\begin{bmatrix}0.538 & 0.462\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.4 & 0.6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.5614 & 0.4386\end{bmatrix}$$

4. Macierz przejść:

$$\begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.4 & 0.6\end{bmatrix}$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases}\pi P = \pi\\ \pi_1 + \pi_2 = 1\end{cases}$$

$$\pi P = \begin{bmatrix}\pi_1 & \pi_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.4 & 0.6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.7\pi_1 + 0.4\pi_2 & 0.3\pi_1 + 0.6\pi_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}0.7\pi_1 + 0.4\pi_2 = \pi_1\\ 0.3\pi_1 + 0.6\pi_2 = \pi_2\\ \pi_1 + \pi_2 = 1\end{cases}$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{bmatrix}\pi_1 & \pi_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{4}{7} & \frac{3}{7}\end{bmatrix}$$

12 Testy statystyczne: test z, test t-Studenta, test chi-kwadrat.

Generalnie:

- Z-testów używamy do sprawdzenia czy testowana próba pasuje do zadanej populacji lub do porównywania dwóch **dużych** (n > 30) prób
- T-testów używamy do porównywania dwóch **małych** (n < 30) prób testowych ze sobą
  - Próby mogą być niezależne - np. wyniki sprawdzianów w dwóch grupach
  - Mogą być również zależne (dotyczyć jednej i tej samej grupy) - np. waga przed zastosowaniem diety i po
  - Może również służyć do porównywania próby do zadanej wartości (np. średniej) - podobnie jak Z-testy
- Chi-kwadrat używamy do ustalania `goodness of fit` dla próbki względem populacji lub do zbadania niezależności

12.1 Z-test

Zadanie 12.1 *Inżynier jakości znajduje 10 wadliwych produktów w próbie 500 egzemplarzy pewnego komponentu od wytwórcy A. Wśród 400 egzemplarzy od wytwórcy B znajduje 12 wadliwych. Firma komputerowa, korzystająca z tych komponentów twierdzi, że jakość wyrobów od obu producentów jest taka sama. Sprawdź, czy na 5% poziomie istotności istnieją wystarczające dowody do odrzucenia tego twierdzenia.*

H_0: Jakość wyrobów obu producentów jest taka sama

H_a: Jakość wyrobów obu producentów jest różna

Obliczamy proporcje dla obu prób:

$$p_1 = \frac{10}{500} = \frac{1}{50}$$

$$p_2 = \frac{12}{400} = \frac{3}{100}$$

oraz proporcję dla `próby połączonej`:

$$\bar{p} = \frac{10+12}{500+400} = \frac{11}{450}$$

Następnie używamy wzoru:

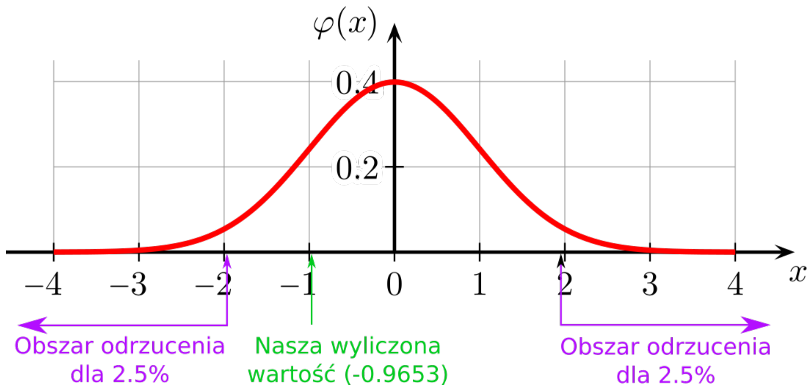
$$Z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

$$Z = \frac{\frac{1}{50} - \frac{3}{100}}{\sqrt{\frac{11}{450}(1 - \frac{11}{450})(\frac{1}{500} + \frac{1}{400})}} = \frac{-\frac{1}{100}}{\sqrt{\frac{4829}{45000000}}} \approx \mathbf{-0.9653}$$

W naszej hipotezie mamy pytanie o równość, więc bierzemy pod uwagę obie końcówki przedziału. Mamy sprawdzić prawdziwość naszej hipotezy na 5% poziomie istotności, więc na każdą końcówkę mamy po 2.5%.

Odczytujemy z tablic dla Z-testów (tablica rozkładu normalnego) wartość dla `1 - 0.025 = 0.975` i jest to **1.959964**

Następnie odczytujemy z tablic (lub wyliczamy, jeżeli nie mamy tablic z wartościami dla x < 0.5) wartość dla `0.025` i jest to **-1.959964** (po prostu wartość przeciwna do poprzedniej, ponieważ funkcja gęstości rozkładu normalnego jest symetryczna względem środka)



Ponieważ nasza wartość nie mieści się w obszarze odrzucenia, nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

12.2 T-testy

Zadanie 12.2 *Posiadacz konta internetowego, w długim okresie czasu, w trakcie logowania pisze swój login i hasło z przerwami pomiędzy kolejnymi wciśnięciami klawiszy wynoszącymi 0.2s. Pewnego dnia zarejestrowane logowanie na to konto z prawidłowym hasłem, przy czym czasy odstępów pomiędzy wciśnięciami kolejnych klawiszy wynosiły:*

.24, .22, .26, .34, .35, .32, .33, .29, .19, .36, .30, .15, .17, .20, .28, .40, .37, .27 sekund

Na 5% poziomie ufności zweryfikuj, czy dane te mogą być dowodem na nieautoryzowany dostęp do konta?

H_0: Dostęp do konta jest autoryzowany

H_a: Dostęp do konta jest nieautoryzowany

Korzystamy ze wzoru:

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$$

gdzie:

- $\bar{x}$ - średnia z badanej próby
- μ_0 - zakładana średnia
- σ - odchylenie standardowe z próby
- n - wielkość próby

W naszym przypadku:

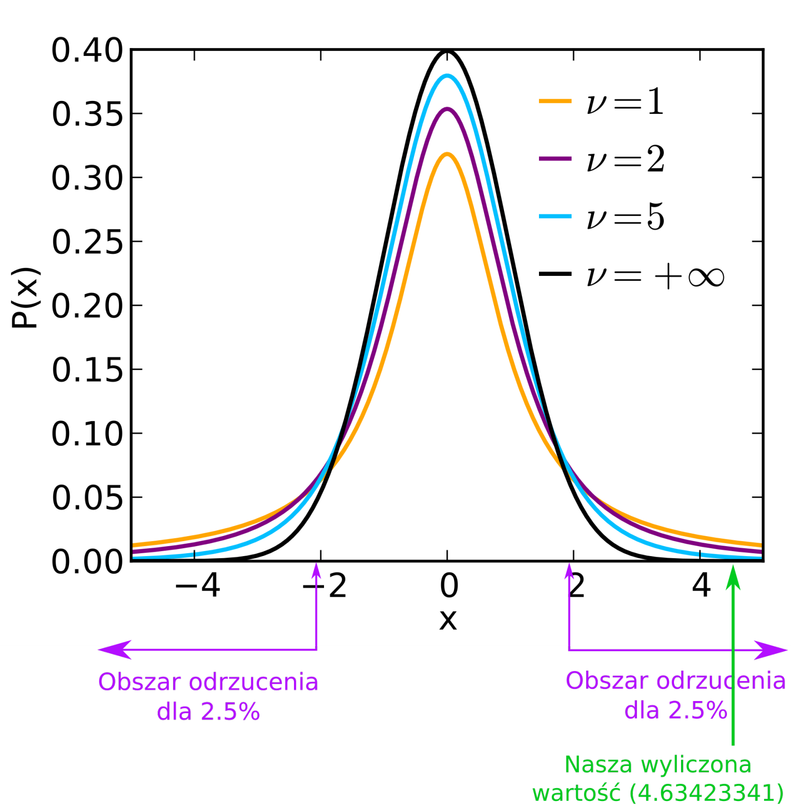
$$\bar{x} \approx 0.28 \tag{1}$$
$$\mu_0 = 0.2 \tag{2}$$
$$\sigma \approx 0.07324 \tag{3}$$
$$n = 18 \tag{4}$$

Podstawiając do wzoru mamy:

$$T = \frac{0.28 - 0.2}{0.07324}\sqrt{18} \approx \mathbf{4.63423341}$$

Ilość naszych stopni swobody to n-1 więc w naszym przypadku 17

Odczytujemy z tablic rozkładu t-studenta wartość odpowiadającą 2.5% poziomowi ufności (5%/2) oraz 17 stopniom swobody i jest to **2.11** oraz wyliczamy tę wartość dla drugiego krańca przedziału (podobnie jak w poprzednim przypadku rozkład t-studenta ma symetryczny wykres względem środka), która jest równa **-2.11**



Ponieważ 4.63423341 > 2.11 mamy podstawy, aby odrzucić hipotezę zerową i przyjąć hipotezę alternatywną

12.3 Testy Chi-kwadrat

Zadanie 12.3 *Producent kostki do gry deklaruje, że oczka na jego* ***`niesprawiedliwej`*** *kostce wypadają z następującym prawdopodobieństwem:*

- *1 oczko -* $\frac{1}{2}$
- *2 oczka -* $\frac{1}{4}$
- *3 oczka -* $\frac{1}{25}$
- *4 oczka -* $\frac{1}{50}$
- *5 oczek -* $\frac{1}{25}$
- *6 oczek -* $\frac{3}{20}$

Dla 100 rzutów zaobserwowano natomiast nastepujące wyniki:

- *1 oczko - 55 razy*
- *2 oczka - 20 razy*
- *3 oczka - 6 razy*
- *4 oczka - 3 razy*
- *5 oczek - 2 razy*
- *6 oczek - 14 razy*

Przeprowadź test zgodności (`goodness of fit`) χ^2 *i rozstrzygnij na poziomie 5% istotności, czy producent ma rację*

Wyliczamy wartości oczekiwane dla każdego przedziału i zgodnie z `rule of thumb` w razie potrzeby je łączymy tak, aby dla każdego z nich wartość była $\geqslant 5$

<table>
<tr><th>n</th><th>Obs_n</th><th>Exp_n</th><th>x</th><th>Obs_x</th><th>Exp_x</th></tr>
<tr><td>1</td><td>55</td><td>50</td><td>1</td><td>55</td><td>50</td></tr>
<tr><td>2</td><td>20</td><td>25</td><td>2</td><td>20</td><td>25</td></tr>
<tr><td>3</td><td>6</td><td>4</td><td rowspan="3">3</td><td rowspan="3">11</td><td rowspan="3">10</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>5</td><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>6</td><td>14</td><td>15</td><td>4</td><td>14</td><td>15</td></tr>
</table>

Następnie, aby obliczyć χ^2 stosujemy następujący wzór (N to liczba naszych x):

$$\chi^2 = \sum_{x=1}^{N} \frac{(Obs_x - Exp_x)^2}{Exp_x}$$

W naszym przypadku $\chi^2 \approx 1.6666$

Stopnie swobody obliczamy ze wzoru **N - 1**, gdzie N to liczba naszych x-ów. W naszym przypadku liczba stopni swobody jest więc równa **3**.

Następnie odczytujemy z tablicy χ^2 wartość dla 5% istotności przy 3 stopniach swobody. Jest ona równa **7.82**

$1.6666 < 7.82$ stąd nie mamy więc podstawy do odrzucenia hipotezy zerowej

13 Wzór Bayesa i jego interpretacja.

Zadanie 13.1 *W firmie IT 20% wytwarzanych modułów przechodzi specjalny proces inspekcji. Z danych historycznych wiadomo, że każdy moduł poddany inspekcji nie ma defektów z prawdopodobieństwem 0.95. Dla modułu nie poddanego procesowi inspekcji prawdopodobieństwo to wynosi jedynie 0.7. Klient znalazł defekt w module. Jakie jest prawdopodobieństwo, że moduł ten przeszedł przez proces inspekcji?*

Korzystamy oczywiście ze wzoru Bayesa:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad \text{przy } P(B) > 0$$

I - moduł przeszedł przez inspekcję
D - moduł ma defekt

$P(I) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} \quad P(\bar{I}) = \frac{4}{5}$

$P(\bar{D}|I) = \frac{95}{100} = \frac{19}{20} \quad P(D|I) = \frac{1}{20}$

$P(\bar{D}|\bar{I}) = \frac{70}{100} = \frac{7}{10} \quad P(D|\bar{I}) = \frac{3}{10}$

$$P(I|D) = \frac{P(D|I) \cdot P(I)}{P(D)} = \frac{P(D|I) \cdot P(I)}{P(D|I) \cdot P(I) + P(D|\bar{I}) \cdot P(\bar{I})} = \frac{\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{1}{25}$$

Prawdopodobieństwo, że moduł, w którym znalazł się defekt przeszedł proces inspekcji wynosi $\frac{1}{25}$.

14 Istnienie elementów odwrotnych względem mnożenia w strukturze $(Zm, +, *)$ w zależności od liczby naturalnej m. Rozszerzony algorytm Euklidesa.

Zadanie 14.1 *Oblicz element odwrotny do* 7 *w* Z_{19}.

$NWD(7, 19) = 1$, zatem element odwrotny istnieje

$$19/7 = 2\ r\ 5$$

$$7/5 = 1\ r\ 2$$

$$5/2 = 2\ r\ 1$$

Zatem:

$$5 = 19 - 2 * 7$$

$$2 = 7 - 5 = 7 - (19 - 2 * 7) = -19 + 3 * 7$$

$$1 = 5 - 2 * 2 = 19 - 2 * 7 - 2 * (-19 + 3 * 7) = \mathbf{3} * 19 - \mathbf{8} * 7$$

Współczynnik przy 7: -8. $-8\ mod\ 19 = 11$
Liczbą odwrotną do 7 w Z_{19} jest 11

Zadanie 14.2 *Oblicz współczynniki Bézouta dla* 240 *i* 46.

$$240/46 = 5\ r\ 10$$

$$46/10 = 4\ r\ 6$$

$$10/6 = 1\ r\ 4$$

$$6/4 = 1\ r\ 2$$

$$4/2 = 2\ r\ 0$$

i	r_i	d_i	x_i	y_i
0	240	-	1	0
1	46	5	0	1
2	10	4	1 - 5 * 0 = 1	0 - 5 * 1 = -5
3	6	1	0 - 4 * 1 = -4	1 - 4 * -5 = 21
4	4	1	1 - 1 * -4 = 5	-5 - 1 * 21 = -26
5	2	2	-4 - 1 * 5 = -9	21 - 1 * -26 = 47

$$-9 * 240 + 47 * 46 = 2 = NWD(240, 46)$$

Współczynniki Bézouta wynoszą -9 i 47.

Zadanie 14.3 *Pokaż, że jeśli* $a, b \in \mathbb{N}$ *i* $d = NWD(a, b)$ *to* $\exists m, n : d = ma + nb$.

Mamy zbiór $S = \{ma + nb \mid m, n \in \mathbb{Z}, ma + nb > 0\}$. S nie jest puste, zatem (z zasady dobrego uporządkowania) istnieje jego najmniejszy element d.

Pokażmy, że d jest dzielnikiem a.

$$a = dq + r$$

$$r = a - dq$$

$$r = a - q(ma + nb)$$

$$r = (1 - qm)a - qnb$$

$$r = am' + bn'$$

Zatem $r = 0$ lub $r \in S$. Skoro r jest resztą z dzielenia a przez d, to $r < d$. d jest najmniejszym elementem S, zatem $r = 0$, zatem $d|a$. Analogiczne rozumowanie możemy przeprowadzić dla b.

Pokażmy, że $d = NWD(a, b)$. Niech c będzie wspólnym dzielnikiem a i b. Zatem $a = cq_1$ i $b = cq_2$.

$$d = ma + nb$$

$$d = cq_1a + cq_2b$$

$$d = c(q_1a + q_2b)$$

Zatem $c|d$, zatem $c \leqslant d$, zatem $d = NWD(a, b)$

15 Ortogonalność wektorów w przestrzeni R_n; związki z liniową niezależnością. Metoda ortonormalizacji Grama-Schmidta.

Zadanie 15.1 *Udowodnij, że każdy ortogonalny układ wektorów jest liniowo niezależny.*

Mamy układ wektorów ortogonalnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Zatem

$$\forall i, j : i \neq j \; x_i \cdot x_j = 0$$

oraz

$$\forall i \; x_i \cdot x_i > 0$$

Istnieją skalary $a_1, a_2, \ldots, a_n$, takie, że:

$$a_1 * x_1 + a_2 * x_2 + \ldots + a_n * x_n = 0$$

Powyższe równanie pomnóżmy skalarnie przez x_1.

$$a_1 * x_1 \cdot x_1 + a_2 * x_2 \cdot x_1 + \ldots + a_n * x_n \cdot x_1 = 0$$

$$a_1 * x_1 \cdot x_1 + 0 + \ldots + 0 = 0$$

$$a_1 * x_1 \cdot x_1 = 0$$

Skoro $x_1 \cdot x_1 > 0$, to $a_1 = 0$. Powyższe działania powtórzmy dla pozostałych wektorów.

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$$

Zatem układ wektorów jest liniowo niezależny.

Zadanie 15.2 *Dokonaj ortonomilizacji wektorów w $\mathbb{R}_3$:*
$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathrm{proj}_{\mathbf{u_1}} \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \mathrm{proj}_{\mathbf{u_1}}\mathbf{v}_3 - \mathrm{proj}_{\mathbf{u_2}}\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Otrzymane wektory podzielmy przez ich długość:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}{1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

16 Liczby Stirlinga I i II rodzaju i ich interpretacja.

16.1 Liczby Stirlinga I rodzaju

Uzasadnij, że C(4,2)=11
Mamy następujące permutacje dwucyklowe zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$

$$\begin{gathered}(1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 3)(2\ 4),\ (1\ 4)(2\ 3)\\(1)(2\ 3\ 4),\ (1)(2\ 4\ 3),\ (2)(1\ 3\ 4)\\(2)(1\ 4\ 3),\ (3)(1\ 2\ 4),\ (3)(1\ 4\ 2)\\(4)(1\ 2\ 3),\ (4)(1\ 3\ 2)\end{gathered}$$

16.2 Liczby Stirlinga II rodzaju

Uzasadnij, że S(4,2) = 7
Zbiór $\{1, 2, 3, 4\}$ możemy podzielić na dwa bloki w następujący sposób

$$\begin{gathered}\{1\},\ \{2,\ 3,\ 4\}\ ;\ \{2\},\ \{1,\ 3,\ 4\}\ ;\ \{3\},\ \{1,\ 2,\ 4\}\\\{4\},\ \{1,\ 2,\ 3\}\ ;\ \{1,\ 2\},\ \{3,\ 4\}\ ;\ \{1,\ 3\},\ \{2,\ 4\}\\\{1,\ 4\},\ \{2,\ 3\}\end{gathered}$$

17 Twierdzenia Eulera i Fermata; funkcja Eulera.

17.1 Funkcja Eulera

- $\varphi(2025) = \varphi(3^4 \cdot 5^2) = \varphi(3^4) \cdot \varphi(5^2) = 3^3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 = 1080$
- $\varphi(1001) = \varphi(7 \cdot 11 \cdot 13) = \varphi(7) \cdot \varphi(11) \cdot \varphi(13) = 6 \cdot 10 \cdot 12 = 660$
- $\varphi(1980) = \varphi(2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11) = \varphi(2^2) \cdot \varphi(3^2) \cdot \varphi(5) \cdot \varphi(11) = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 10 = 480$

17.2 Twierdzenie Fermata

17.3 Twierdzenie Eulera

- Oblicz $2^{64} \pmod{99}$
  NWD(2,99)=1 zatem możemy stosować Twierdzenie Eulera

  $\varphi(99) = \varphi(11 \cdot 3^2) = \varphi(11) \cdot \varphi(3^2) = 10 \cdot 3 \cdot 2 = 60$

  Zatem z Twierdzenia Eulera
  $2^{60} \equiv 1 \pmod{99}$
  $2^{64} = 2^{60} \cdot 2^4 \equiv 2^4 \pmod{99} = 16$

- Oblicz $99^{400} \pmod{10^3}$
  NWD(99,1000)=1 zatem możemy stosować Twierdzenie Eulera

  $\varphi(10^3) = \varphi(2^3 \cdot 5^3) = \varphi(2^3) \cdot \varphi(5^3) = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 4 = 400$

  Zatem z Twierdzenia Eulera
  $99^{400} \equiv 1 \pmod{10^3}$

18 Konfiguracje i t-konfiguracje kombinatoryczne.

Zadanie 18.1 *Mamy dziewięć różnych 8-elementowych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}_{12}$. Każdy element ze zbioru $\mathbb{N}_{12}$ należy do tej samej liczby r podzbiorów zbioru $\mathbb{N}_{12}$.*

1. *Ile wynosi r?*
2. *Czy jest to możliwe dla dziewięciu 7-elementowych podzbiorów?*

Rozwiązanie:

1. $k = 8 \quad n = 12$
   b - liczba k-elementowych podzbiorów X $b = 9$
   Szukamy ile wynosi liczba takich podzbiorów korzystając ze wzoru $b = \frac{n \cdot r}{k}$
   $$r = \frac{9 \cdot 8}{12} = 6$$
2. $k = 7 \quad b = 9 \quad n = 12$

   Czy zachodzi $k | n \cdot r$?
   $$r = \frac{b \cdot k}{n} = \frac{9 \cdot 7}{12} = \frac{21}{4} \notin \mathbb{N}$$
   Zatem nie jest to możliwe.

Zadanie 18.2 *Dana jest 5-konfiguracja z parametrami n=12, k=6, $r_5 = 1$. Wyznacz wartości r_i, dla i-konfiguracji o tym samym n i k oraz i=1,2,3,4.*

Rozwiązanie: Korzystamy ze wzoru: $r_{t-1} = r_t \cdot \frac{n-t+1}{k-t+1}$

$$r_4 = r_5 \cdot \frac{12-5+1}{6-5+1} = \frac{8}{2} = 4$$
$$r_3 = r_4 \cdot \frac{12-4+1}{6-4+1} = 4 \cdot \frac{9}{3} = 12$$
$$r_2 = r_3 \cdot \frac{12-3+1}{6-3+1} = 12 \cdot \frac{10}{4} = 30$$
$$r_1 = r_2 \cdot \frac{12-2+1}{6-2+1} = 30 \cdot \frac{11}{5} = 66$$

$$
\begin{aligned}
r_1 &: (12, 6, 66) \\
r_2 &: (12, 6, 30) \\
r_3 &: (12, 6, 12) \\
r_4 &: (12, 6, 4)
\end{aligned}
$$

Zadanie 18.3 *Czy może istnieć 3-konfiguracja o parametrach n=15, k=6 i r_3=2?*

$$r_2 = r_3 \cdot \frac{n-3+1}{k-3+1} = 2 \cdot \frac{15-3+1}{6-3+1} = 2 \cdot \frac{13}{4} = \frac{13}{2} \notin \mathbb{Z}$$

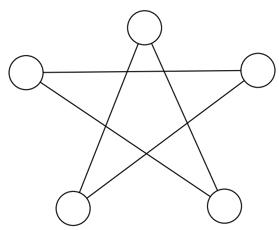
Zatem nie może istnieć taka konfiguracja.

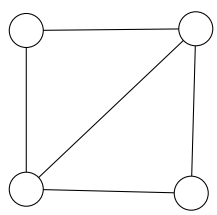
19 Cykl Hamiltona, obwód Eulera, liczba chromatyczna - definicje i twierdzenia.

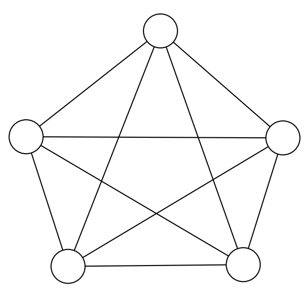
Zadanie 19.1 *Podaj przykład grafu, który:*

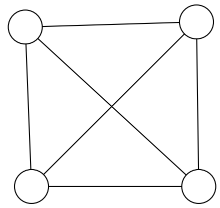
1. *Ma obwód eulera i cykl Hamiltona*
2. *ma cykl Hamiltona, ale nie ma obwodu Eulera*
3. *ma obwód Eulera, ale nie ma cyklu Hamiltona*
4. *nie ma ani cyklu Hamiltona, ani obwodu Eulera*

Rozwiązanie:

1. 

2. 

3. 

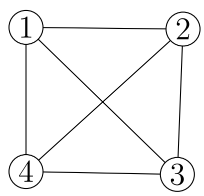
4. 

Zadanie 19.2 *Określ liczbę chromatyczną:*

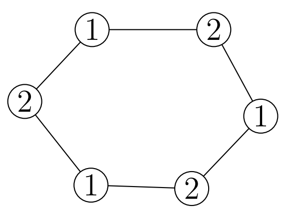
1. *grafu zupełnego* K_n
2. *grafu cyklicznego* C_{2r}
3. *grafu cyklicznego* C_{2kr+1}
4. *drzewa*

Rozwiązanie:

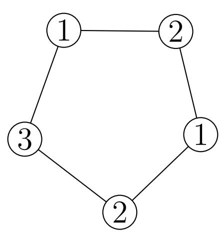
1. $\chi(X) = n$



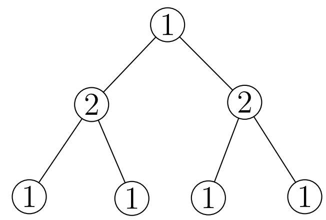
2. $\chi(X) = 2$



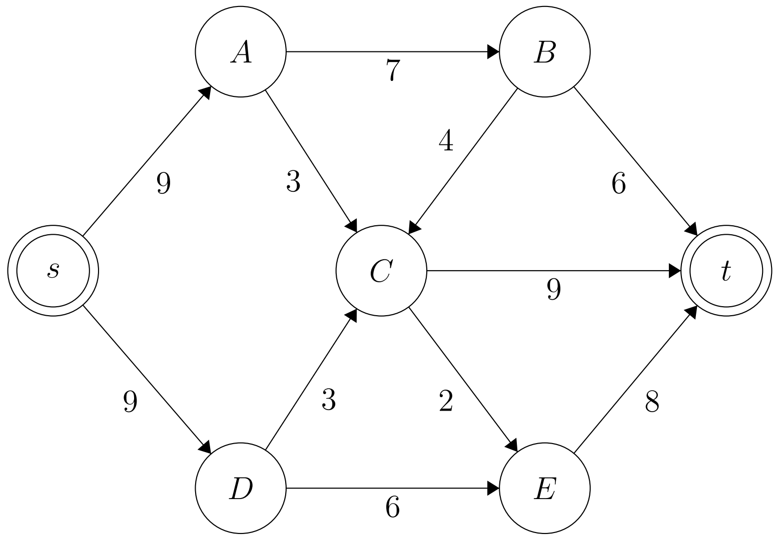
3. $\chi(X) = 3$



4. $\chi(X) = 2$



20 Algorytm Forda-Fulkersona wyznaczania maksymalnego przepływu.



Weźmy sobie taką sieć przepływową. Chcemy wyznaczyć jej maksymalny przepływ. Musimy zacząć od jakiegoś (dowolnego) przepływu. Szukamy ścieżki rozszerzającej, która połączy źródło s z ujściem t.

Na przykład może to być ścieżka: $P = \{s \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow t\}$.

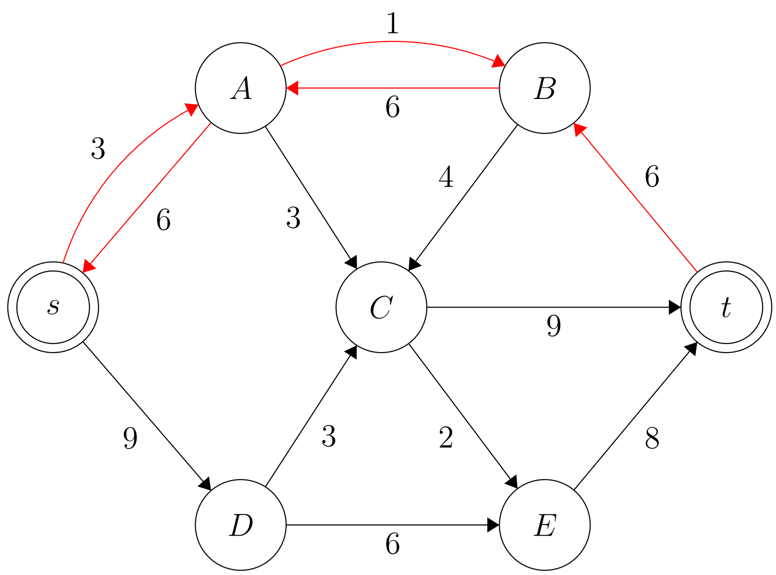
Na ścieżce p znajdują się trzy kanały sieci rezydualnej: $(s, A), (A, B) i (B, t)$. Przepustowość rezydualna $c_f(p)$ ścieżki jest równa najmniejszej przepustowości rezydualnej jej kanałów, czyli przepustowości kanału $(B \rightarrow t)$, dla którego $c_f(B, t) = 6$. Zatem wzdłuż krawędzi ścieżki przepływ można zwiększyć o 6 jednostek, o tyle rośnie również przepływ sieciowy, czyli $|f_{nowy}| = |f_{stary}| + c_f(p) = 0 + 6 = 6$.

Budujemy sieć rezydualną. Zwiększenie przepływu w kanale sieci pierwotnej o $c_f(p)$ odpowiada zmniejszeniu przepustowości rezydualnej tego kanału. Jednocześnie wraz z pojawieniem się przepływu w kanale sieci pierwotnej powstaje kanał przeciwny w sieci rezydualnej o przepustowości rezydualnej równej przepływowi.

Przepustowość rezydualna kanału (s, A) wynosi 3 – oznacza to, iż kanałem tym można wciąż jeszcze przesłać trzy dodatkowe jednostki przepływu. W sieci rezydualnej pojawia się kanał przeciwny (A, s) o przepustowości rezydualnej $c_f(A, s) = 6$.

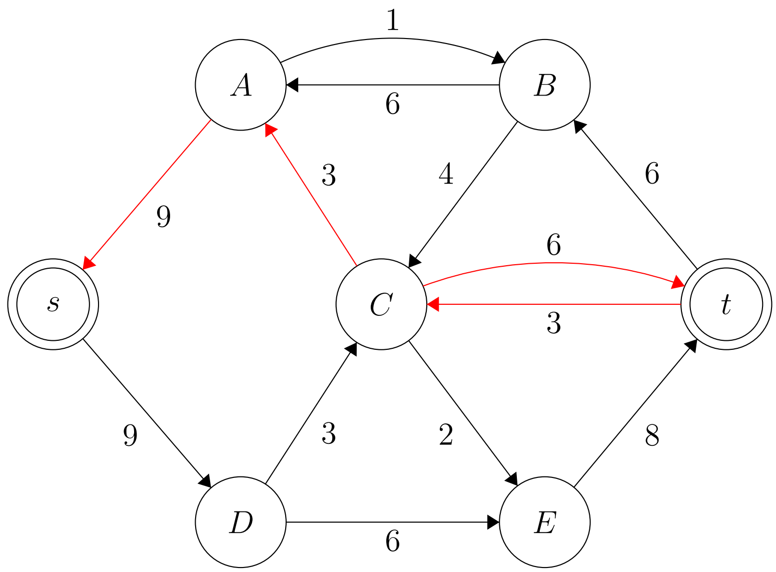
Kanał (A, B) może jeszcze przesłać 1 dodatkową jednostkę przepływu. Również tutaj pojawił się kanał przeciwny o przepustowości rezydualnej równej 6.

Kanał (B, t) przestał istnieć w sieci rezydualnej, ponieważ osiągnął już swoją maksymalną przepustowość – 6 jednostek przepływu. Nie może on być dalej wykorzystywany do powiększania przepływu. Na jego miejscu mamy jednak kanał przeciwny z przepustowością rezydualną równą 6.



W nowej sieci rezydualnej szukamy kolejnej ścieżki rozszerzającej:

$$P = \{s \to A \to C \to t\}, \quad c_f(p) = 3.$$



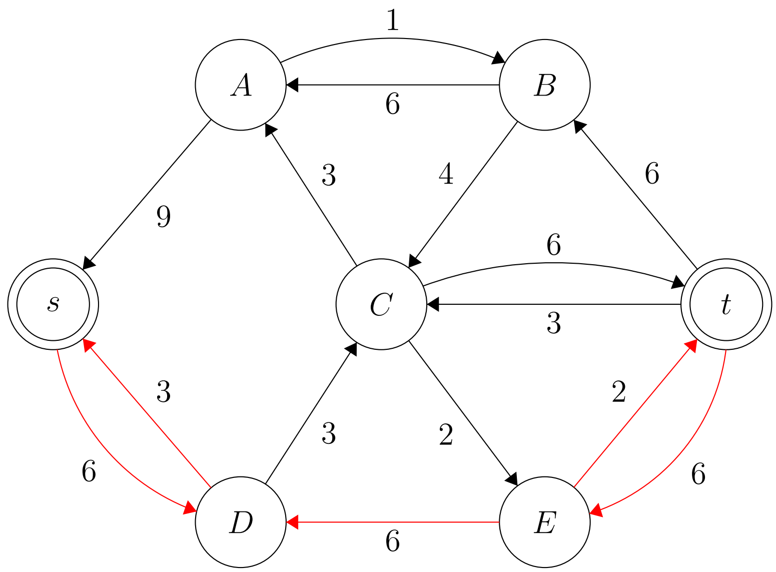
Przepływ zwiększamy:

$$|f| = 6 + 3 = 9$$

i modyfikujemy przepustowości rezydualne krawędzi ścieżki rozszerzającej otrzymując nową sieć rezydualną. Znikają z niej kanały (s, A) i (A, C) – wykorzystały już swój potencjał zwiększania przepływu.

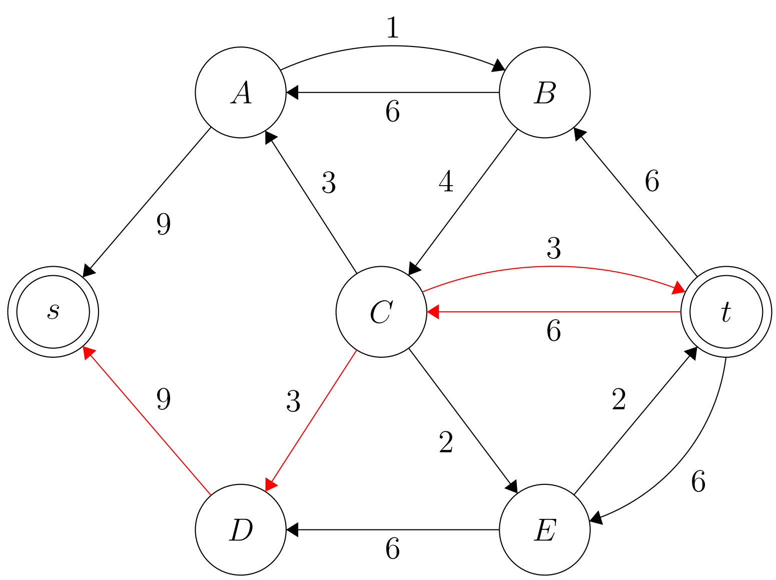
Szukamy kolejnej ścieżki rozszerzającej:

$$P = \{s \to D \to E \to t\}, \quad c_f(p) = 6$$



W nowej sieci rezydualnej zniknął kanał (D, E).
Wciąż jednakże możemy znaleźć nową ścieżkę rozszerzającą:

$$P = \{s \to D \to C \to t\}, \quad c_f(p) = 3$$

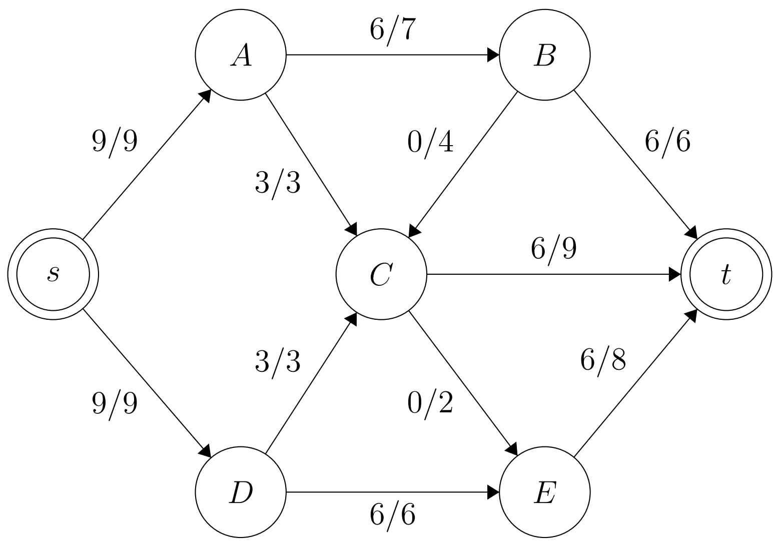


Przepływ zwiększamy:

$$|f| = 15 + 3 = 18.$$

Po zmodyfikowaniu sieci rezydualnej otrzymujemy nową sieć rezydualną. W tej sieci rezydualnej **nie znajdziemy już żadnej nowej ścieżki rozszerzającej** – ze źródła s nie wychodzi żaden kanał. Oznacza to zakończenie algorytmu, zatem znaleźliśmy przepływ maksymalny. Aby otrzymać sieć przepływową wystarczy od przepustowości kanałów odjąć otrzymane przepustowości rezydualne – dla nieistniejących kanałów ich przepustowość rezydualna wynosi 0.

Poniżej nasza sieć przepływowa z uzyskanym maksymalnym przepływem:



$$|f| = 18$$

21 Rozwiązywanie równan rekurencyjnych przy użyciu funkcji tworzących (generujących) oraz przy użyciu równania charakterystycznego.

21.1 Funkcja tworząca.

Przykład

$$u_0 = 1,\ u_1 = 1,\quad u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 0$$

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$$

$$u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n =& 1 + 1 * x + \sum_{n=2}^{\infty}(4u_{n-1} - 4u_{n-2})x^n = \\ & 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} 4u_{n-1}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} 4u_{n-2}x^n = \\ & 1 + x + 4x\sum_{n=2}^{\infty} u_{n-1}x^{n-1} - 4x^2\sum_{n=2}^{\infty} u_{n-2}x^{n-2} = \\ & 1 + x + 4x\sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n - 4x^2\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \\ & 1 + x + 4x(\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n - u_0) - 4x^2\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \\ & 1 + x - (4x) * 1 + 4x\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n - 4x^2\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n\end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = 1 - 3x + (4x - 4x^2)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n (1 - 4x + 4x^2) = 1 - 3x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n (1-4x+4x^2) = 1-3x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \frac{1-3x}{1-4x+4x^2} = \frac{1-3x}{(1-2x)^2}$$

Rozkład na ułamki proste:

$$1-3x = A(1-2x)+B,\ 1 = A+B,\ \ -3 = -2A,\ \ A = \frac{3}{2}, B = \frac{-1}{2}$$

Stąd:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n =& \frac{3}{2} * \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{2} * \frac{1}{(1-2x)^2} = \\ & \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1-1}{n}(2x)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2-1}{n}(2x)^n = \\ & \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)2^n x^n = \\ & \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(n+1))2^n x^n\end{aligned}$$

Więc

$$u_n = (\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(n+1))2^n$$

21.2 Równanie charakterystyczne.

Przykład 1:

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ \ a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n = 0$$

Załóżmy, że istnieje rozwiązanie takie, że $a_n = t^n$.

$$t^{n+2} + t^{n+1} - 2t^n = 0$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$r_1 = \frac{-1+3}{2} = 1, \quad r_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$$

Nie jest to pierwiastek podwójny ($r_1 \neq r_2$), zatem wiemy, że:

$$\exists C, D : \quad a_n = Cr_1^n + Dr_2^n$$

Podstawiając:

$$a_n = C + D(-2)^n$$

Wyliczamy C i D na podstawie znanych pierwszych wyrazów ciągu:

$$a_0 = C + (-2)^0 D = C + D = 0$$

$$a_1 = C + (-2)^1 D = C - 2 * D = 1$$

$$C = \frac{1}{3}, \quad D = \frac{-1}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{3} - \frac{(-2)^n}{3} \ = \ \frac{1 - (-2)^n}{3}$$

Przykład 2.

$$a_0 = -2,\ a_1 = 1, \quad a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$(t-1)^2 = 0$$

$$r = r_1 = r_2 = 1$$

$$a_n = (C + Dn)r^n$$

$$a_0 = (C + D * 0) * 1^0 = C = -2$$

$$a_1 = (C + D * 1) * 1^1 = C + D = D - 2 = 1$$

$$C = -2, \quad D = 3$$

$$a_n = -2 + 3n$$

22 Ciąg i granica ciągu liczbowego, granica funkcji.

23 Ciągłość i pochodna funkcji. Definicja i podstawowe twierdzenia.

24 Ekstrema funkcji jednej zmiennej. Definicje i twierdzenia.

Zadanie 24.1 *Korzystając z definicji uzasadnij, że funkcja*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ma ekstremum lokalne w punkcie $x_0 = 0$.

$f(0) = 0$. Dla każdego punktu $x \in (-1,1) \backslash \{0\}$ $f(x) > 0$. Zatem x jest właściwym minimum lokalnym (sąsiedztwo $S(0,1)$).

Zadanie 24.2 *Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji* $f(x) = x^2 - 2x + 3$ *na przedziale* $[-2,5]$

$$f'(x) = 2x - 2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Wartość pochodnej jest ujemna na przedziale $[-2,1)$ i dodatnia na przedziale $(1,5]$, zatem istnieje minimum lokalne w punkcie 1.

x	-2	1	5
$f(x)$	3	2	18

Wartość najmniejsza funkcji $f(x)$ na przedziale $[-2,5]$ wynosi 2, wartość największa: 18.

Zadanie 24.3 *Znajdź wszystkie ekstrema lokalne funkcji* $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4 - x * 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}$$

$f'(x) = 0$ dla punktów w których $-x^2+4 = 0$, tzn. 2 i -2. Sprawdźmy znak pochodnej pomiędzy jej miejscami zerowymi:

x	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,\infty)$
$f'x)$	-	+	-

Widzimy, że pochodna zmienia znak zarówno w -2 jak i 2. Zatem funkcja $f'(x)$ ma minimum lokalne (równe $-\frac{1}{4}$) w punkcie -2, oraz maksimum lokalne (równe $\frac{1}{4}$) w punkcie 2.

25 Całka Riemanna funkcji jednej zmiennej.

Zadanie 25.1 *Korzystając z wzoru Newtona - Leibniza oblicz wartość całki*

$$\int_0^2 \frac{3x+1}{3x-1}dx$$

$$\int \frac{3x-1}{3x+1}dx = \Big| u = 3x+1 \quad u' = 3 \Big| = \frac{1}{3}\int \frac{u-2}{u}du = \frac{1}{3}\int du - \frac{2}{3}\int \frac{1}{u}du =$$

$$= \frac{u - 2ln(u)}{3} + C = \frac{3x+1-2ln(3x+1)}{3} + C = x - \frac{2ln(3x+1)}{3} + C$$

$$\int_0^2 \frac{3x-1}{3x+1}dx = \Big[x - \frac{2ln(3x+1)}{3}\Big]_0^2 = 2 - \frac{2}{3}(ln(7) + ln(1)) = 2 - \frac{2ln(7)}{3}$$

Zadanie 25.2 *Korzystając z definicji całki Riemanna uzasadnij równość*

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{n^2}{n^2+i^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}$$

Korzystamy z definicji całki Riemanna ($[a,b] = [0,1]$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$)

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} = \Big[arctg\ x\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Zadanie 25.3 *Korzystając z definicji oblicz całkę*

$$\int_0^1 2^x\,dx$$

Korzystając ze wzoru

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a + i\frac{b-a}{n})$$

uzyskujemy

$$\int_0^1 2^x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 2^{\frac{i}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\sqrt[n]{2})^i$$

Suma n wyrazów ciągu geometrycznego jest równa $a_1 \frac{q^n-1}{q-1}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{2} \cdot \frac{(\sqrt[n]{2})^n - 1}{\sqrt[n]{2} - 1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \cdot \frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{2} - 1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2}}{\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\frac{1}{n}}} =$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}}{\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}} = \frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}}{\lim_{k\to 0} \frac{2^k}{k}} = \frac{1}{ln\ 2} = log_2 e$$

26 Pochodne cząstkowe funkcji wielu zmiennych; różniczkowalność i różniczka funkcji.

- Korzystając z definicji zbadać, czy istnieją pochodne cząstkowe rzędu pierwszego podanych funkcji

  $f(x, y) = x \cdot \sin xy, (x_0, y_0) = (\pi, 1)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(\pi,1) \overset{def}{=} lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\pi+\Delta x,1)-f(\pi,1)}{\Delta x} = \\ lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\pi+\Delta x)\sin\left((\pi+\Delta x)\right)-\pi\sin\left(\pi\right)}{\Delta x} = \\ lim_{\Delta x\to 0}\left[(\pi+\Delta x)\frac{-sin\Delta x}{\Delta x}\right] = -\pi\end{aligned} \tag{5}$$

- Obliczyć pochodne cząskowe pierwszego rzędu podanych funkcji

  $f(x, y) = e^{x^2 \sin y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x^2\sin y}\right) = \left(e^{x^2\sin y}\right)\cdot 2x\sin y \tag{6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x^2\sin y}\right) = \left(e^{x^2\sin y}\right)\cdot x^2\cos y \tag{7}$$

- Obliczyć pochodne cząstkowe drugiego rzędu podanych funkcji

  $f(x, y) = xy + \frac{x^2}{y^3}$

  Początkowo wyliczamy pochodne pierwszego rzędu

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(xy+\frac{x^2}{y^3}\right) = y+\frac{2x}{y^3} \tag{8}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(xy+\frac{x^2}{y^3}\right) = x+\frac{3x^2}{y^4} \tag{9}$$

  Następnie wyliczamy pochodne cząstkowe drugiego rzędu

$$\frac{\partial f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y+\frac{2x}{y^3}\right) = \frac{2}{y^3} \tag{10}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x - \frac{3x^2}{y^4}\right) = 1 - \frac{6x}{y^4} \tag{11}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y + \frac{2x}{y^3}\right) = 1 - \frac{6x}{y^4} \tag{12}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x - \frac{3x^2}{y^4}\right) = \frac{12x^2}{y^5} \tag{13}$$

- Korzystajc z definicji zbadać różniczkowalnośc podanych funkcji we wskazanych punktach
  $f(x, y) = x^2 - y^2$ w punkcie $(x_0, y_0) = (1, -2)$
  Korzystając z definicji, wiemy, żę funkcja jest różniczkowalna jeżeli zachodzi poniższa równość

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0 \tag{14}$$

Najpierw policzymy potrzebne pochodne cząstkowe we wskazanych punktach

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1, -2) = 2x|_{(1,-2)} = 2$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2) = 2y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1, -2) = 2y|_{(1,-2)} = 4$

Następnie sprawdzimy równość z definicji

$$\begin{aligned}
&\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{(1 + \Delta x)^2 - (-2 + \Delta y)^2 - (1 - 4) - 2\Delta x - 4\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \\
&= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - (4 - 4\Delta y + (\Delta y)^2) - 2\Delta x - 4\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \\
&= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 - 2(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \\
&= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \left[\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right] - \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{2(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}
\end{aligned} \tag{15}$$

$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\left[\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right]=0$

Oraz z twierdzenia o trzech ciągach

$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{2(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$

Zatem cała granica wynosi 0 oraz funkcja jest różniczkowalna w punkcie (1,-2).

27 Ekstrema funkcji wielu zmiennych. Definicje i twierdzenia.

- Zbadać czy podana funkcja ma ekstrema lokalne oraz jeśli tak to podać je

$f(x,y) = 3(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 3(x^2-2x+1) + 4(y^2+4y+4) =$
$= 3x^2 - 6x + 3 + 4y^2 + 16y + 4$

Korzystamy z warunku wystarczającego na istnienie ekstremum lokalnego funkcji dwóch zmiennych

Najpierw liczymy pochodne cząstkowe

$$\begin{gathered} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(3x^2 - 6x + 3 + 4y^2 + 16y + 4\Big) = 6x - 6 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(3x^2 - 6x + 3 + 4y^2 + 16y + 4\Big) = 8y + 16 \end{gathered} \tag{16}$$

Funkcja f może mieć ekstrema tylko w miejscu zerowania się pochodnych

$$\begin{gathered} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 6x_0 - 6 = 0 \\ \\ 8y_0 + 16 = 0 \end{cases} \end{gathered} \tag{17}$$

Zatem punkt zerowania się pochodnych, w którym funkcja może mieć ekstrema to $P(x_0,y_0) = P(1,-2)$

Wyliczamy pochodne cząstkowe drugiego rzędu oraz badamy znak macierzy Jacobi'ego

$$det\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x_0,y_0) \end{bmatrix} \tag{18}$$

$\frac{\partial f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(6x-6) = 6$

$\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(8y+16) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(6x-6) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(8y+16) = 8$

$$det \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = 6 \cdot 8 = 48 > 0$$

Zatem funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie (1,-2) oraz $\frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ zatem jest to minimum lokalne właściwe.

28 Twierdzenie o zmianie zmiennych w rachunku całkowym; współrzędne walcowe i sferyczne.

Teoretyczne podstawy informatyki

29 Metody dowodzenia poprawności pętli.

30 Odwrotna Notacja Polska: definicja, własności, zalety i wady, algorytmy.

31 Modele obliczen: maszyna Turinga.

32 Modele obliczen: automat skończony, automat ze stosem.

33 Złożoność obliczeniowa - definicja notacji: O, Ω, Θ.

34 Złożoność obliczeniowa - pesymistyczna i średnia.

Zadanie 34.1 *Oblicz pesymistyczną i średnią złożoność obliczeniową algorytmu sortowania przez wstawianie.*

Złożoność pesymistyczna

Przypadek pesymistyczny polega na otrzymaniu na wejściu odwrotnie posortowanej tablicy. Wówczas każdy element (oprócz pierwszego) z zostanie porównany i zamieniony ze wszystkimi elementami uprzednio posortowanego fragmentu tablicy. Obliczmy złożoność zakładając, że zamiana elementów zajmuje czas równy stałej c.

$$W(c) = \sum_{i=2}^{n} ic$$

$$W(c) = \frac{n^2 + n - 2}{2}c$$

$$W(c) = \theta(n^2)$$

Złożoność średnia

Zauważmy, że ilość zamian elementów jest zależna od liczby inwersji w tablicy wejściowej. Aby obliczyć średnią złożoność algorytmu musimy obliczyć średnią liczbę inwersji.

Niech X_ij będzie zmienną losową oznaczającą, czy w tablicy wejściowej $A[i]$ jest w inwersji z $A[j]$. Ilość par i, j jest równa $\frac{n(n-1)}{2}$.

$$A(n) = E(\sum X_{ij}) = \sum E(X_ij) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$$

Zadanie 34.2 *Oblicz średnią złożoność obliczeniową algorytmu quicksort.*

Zakładamy, że tablica wejściowa nie posiada duplikatów, zaś operacją dominującą jest porównywanie. Przy każdym wyborze elementu rozdzielającego, ilość elementów od niego mniejsza jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym od 0 do $n-1$. Zatem po podziale otrzymujemy dwie tablice: o długości i oraz o długości $n - i - 1$ gdzie i jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym od 0 do $n - 1$. Zatem zakładając, że ilość porównań przy każdym podziale wynosi $n-1$, średnia ilość porównań dla wszystkich permutacji otrzymanej tablicy jest równa:

$$A(n) = n-1+\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(A(i)+A(n-i-1)) = n-1+\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}A(i)$$

$$nA(n) = n(n-1)+2\sum_{i=0}^{n-1}A(i)$$

$$nA(n)-(n-1)A(n-1) = n(n-1)-(n-1)(n-2)+2\sum_{i=0}^{n-1}A(i)-2\sum_{i=0}^{n-2}A(i) =$$

$$= 2(n-1)+2A(n-1)$$

$$nA(n) = (n+1)A(n-1)+2n-2$$

$$A(n) = \frac{(n+1)A(n-1)}{n}+2-\frac{2}{n}$$

$$\frac{A(n)}{n+1} = \frac{A(n-1)}{n}+\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{A(n-2)}{n-1}+\frac{2}{n}-\frac{2}{(n-1)n}-\frac{2}{n(n+1)}+\frac{2}{n+1} =$$

$$= \cdots = \frac{A(1)}{2}+\sum_{i=2}^{n}\frac{2}{i+1}-\sum_{i=2}^{n}\frac{2}{i(i+1)} = 2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}-\frac{n-1}{n+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i} \approx \int_1^{n-1}\frac{dx}{x} = ln(n-1)$$

$$A(n) = 2(n+1)\ ln(n-1)-n+1 = 2n\ ln(n-1)+2ln(n-1)-n+1 \leqslant$$

$$\leqslant 2\ ln(n) \approx 1.39n\ log_2 n = \theta(n\ ln(n))$$

35 Metoda ”dziel i zwyciężaj”; zalety i wady.

36 Lista: ujęcie abstrakcyjne, możliwe implementacje i ich złożoności.

37 Kolejka i kolejka priorytetowa: ujęcie abstrakcyjne, możliwe implementacje i ich złożoności.

38 Algorytmy sortowania QuickSort i MergeSort: metody wyboru pivota w QS; złożoności.

39 Algorytm sortowania bez porównań (sortowanie przez zliczanie, sortowanie kubełkowe oraz sortowanie pozycyjne).

40 Reprezentacja drzewa binarnego za pomocą porządków (preorder, inorder, postorder).

41 Algorytmy wyszukiwania następnika i poprzednika w drzewach BST; usuwanie węzła.

42 B-drzewa: operacje i ich złożoność.

43 Drzewa AVL: rotacje, operacje z wykorzystaniem rotacji i ich złożoność.

44 Algorytmy przeszukiwania wszerz i w głąb w grafach.

45 Algorytmy wyszukiwania najkrótszej ścieżki (Dijkstry oraz Bellmana-Forda).

46 Programowanie dynamiczne: podział na podproblemy, porównanie z metodą ”dziel i zwyciężaj”.

47 Algorytm zachłanny: przykład optymalnego i nieoptymalnego wykorzystania.

48 Kolorowania wierzchołkowe (grafów planarnych) i krawędziowe grafów, algorytmy i ich złożoności.

49 Algorytmy wyszukiwania minimalnego drzewa rozpinającego: Boruvki, Prima i Kruskala.

50 Najważniejsze algorytmy wyznaczania otoczki wypukłej zbioru punktów w układzie współrzędnych (Grahama, Jarvisa, algorytm przyrostowy (quickhull)).

51 Problemy P, NP, NP-zupełne i zależności między nimi. Hipoteza P vs. NP.

52 Automat minimalny, wybrany algorytm mini-

58 Reprezentacja liczb całkowitych; arytmetyka.

59 Reprezentacja liczb rzeczywistych; arytmetyka zmiennopozycyjna.

60 Różnice w wywołaniu funkcji statycznych, niestatycznych i wirtualnych w C++.

61 Sposoby przekazywania parametrów do funkcji (przez wartość, przez referencję). Zalety i wady.

62 Wskaźniki, arytmetyka wskaźników, różnica między wskaźnikiem a referencją w C++.

63 Podstawowe założenia paradygmatu obiektowego: dziedziczenie, abstrakcja, enkapsulacja, polimorfizm.

64 Funkcje zaprzyjaźnione i ich związek z przeładowaniem operatorów w C++.

65 Programowanie generyczne na podstawie szablonów w języku C++.

66 Podstawowe kontenery w STL z szerszym omówieniem jednego z nich.

67 Obsługa sytuacji wyjątkowych w C++.

68 Obsługa plików w języku C.

69 Model wodospadu a model spiralny wytwarzania oprogramowania.

70 Diagram sekwencji i diagram przypadków użycia w języku UML.

76 Relacyjny model danych, normalizacja relacji (w szczególności algorytm doprowadzenia relacji do postaci Boyce'a-Codda), przykłady.

77 Indeksowanie w bazach danych: drzewa B+, tablice o organizacji indeksowej, indeksy haszowe, mapy binarne.

78 Podstawowe cechy transakcji (ACID). Metody sterowania współbieżnością transakcji, poziomy izolacji transakcji, przykłady.

79 Złączenia, grupowanie, podzapytania w języku SQL.

80 Szeregowalność harmonogramów w bazach danych.

81 Definicja cyfrowego układu kombinacyjnego - przykłady układów kombinacyjnych i ich implementacje.

82 Definicja cyfrowego układu sekwencyjnego - przykłady układów sekwencyjnych i ich implementacje.

83 Minimalizacja funkcji logicznych.

84 Programowalne układy logiczne PLD (ROM, PAL, PLA).

85 Schemat blokowy komputera (maszyna von Neumanna).

86 Zarządzanie procesami: stany procesu, algorytmy szeregowania z wywłaszczaniem.