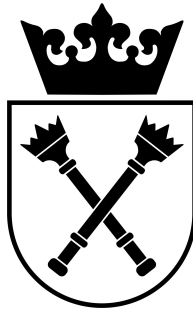


UNIWERYSTET JAGIELLOŃSKI

PYTANIA DO EGZAMINU LICENCJACKIEGO NA KIERUNKU INFORMATYKA

Małgorzata DYMEK



Rok akademicki 2019/2020

Spis treści

1	Zasada indukcji matematycznej.	8
2	Porządki częściowe i liniowe. Elementy największe, najmniejsze, maksymalne i minimalne.	9
3	Relacja równoważności i zbiór ilorazowy.	10
4	Metody dowodzenia twierdzeń: wprost, nie wprost, przez kontrapozycję.	11
5	Metody numeryczne rozwiązywania równań nieliniowych: bisekcji, siecznych, Newtona.	12
6	Rozwiązywanie układów równań liniowych: metoda eliminacji Gaussa, metody iteracyjne Jacobiego i Gaussa-Seidla.	13
6.1	Metoda eliminacji Gaussa	13
6.2	Metoda iteracyjna Jacobiego	14
6.2.1	Algebraicznie	14
6.2.2	Macierzowo	14
6.3	Metoda iteracyjna Gaussa-Seidla	14
6.3.1	Algebraicznie	14
6.3.2	Macierzowo	14
7	Wartości i wektory własne macierzy: numeryczne algorytmy ich wyznaczania.	15
8	Interpolacja wielomianowa: metody Lagrange’a i Hermite’a. Efekt Rungego.	16
8.1	Wzór interpolacyjny Lagrange’a	16
8.2	Interpolacja Hermite’a	16
9	Zmienne losowe dyskretne. Definicje i najważniejsze rozkłady.	19
9.1	Rozkład dwumianowy	19
9.2	Rozkład geometryczny	19
9.3	Rozkład Poissona	19
10	Zmienne losowe ciągłe. Definicje i najważniejsze rozkłady.	21
10.1	Rozkład jednostajny	21

10.2 Rozkład wykładniczy	21
10.3 Rozkład normalny	22
10.4 Rozkład Gamma, Wzór Gamma-Poisona	23
11 Łącuchy Markowa. Rozkład stacjonarny.	24
12 Testy statystyczne: test z, test t-Studenta, test chi-kwadrat.	26
12.1 Z-test	26
12.2 T-testy	27
12.3 Testy Chi-kwadrat	29
13 Wzór Bayesa i jego interpretacja.	31
14 Istnienie elementów odwrotnych względem mnożenia w strukturze $(Zm, +, *)$ w zależności od liczby naturalnej m. Rozszerzony algorytm Euklidesa.	32
15 Ortogonalność wektorów w przestrzeni R_n; związki z liniową niezależnością. Metoda ortonormalizacji Grama-Schmidta.	32
16 Liczby Stirlinga I i II rodzaju i ich interpretacja.	33
17 Twierdzenia Eulera i Fermata; funkcja Eulera.	34
18 Konfiguracje i t-konfiguracje kombinatoryczne.	35
19 Cykl Hamiltona, obwód Eulera, liczba chromatyczna - definicje i twierdzenia.	36
20 Algorytm Forda-Fulkersona wyznaczania maksymalnego przepływu.	37
21 Rozwiązywanie równan rekurencyjnych przy użyciu funkcji tworzących (generujących) oraz przy użyciu równania charakterystycznego.	42
22 Ciąg i granica ciągu liczbowego, granica funkcji.	43
23 Ciągłość i pochodna funkcji. Definicja i podstawowe twierdzenia.	44
24 Ekstrema funkcji jednej zmiennej. Definicje i twierdzenia.	45

25 Całka Riemanna funkcji jednej zmiennej.	46
26 Pochodne cząstkowe funkcji wielu zmiennych; różniczkowalność i różniczka funkcji.	47
27 Ekstrema funkcji wielu zmiennych. Definicje i twierdzenia.	48
28 Twierdzenie o zmianie zmiennych w rachunku całkowym; współrzędne walcowe i sferyczne.	49
29 Metody dowodzenia poprawności pętli.	50
30 Odwrotna Notacja Polska: definicja, własności, zalety i wady, algorytmy.	50
31 Modele obliczeń: maszyna Turinga.	50
32 Modele obliczeń: automat skończony, automat ze stosem.	50
33 Złożoność obliczeniowa - definicja notacji: O , Ω , Θ .	51
34 Złożoność obliczeniowa - pesymistyczna i średnia.	52
35 Metoda "dziel i zwyciężaj"; zalety i wady.	53
36 Lista: ujęcie abstrakcyjne, możliwe implementacje i ich złożoności.	53
37 Kolejka i kolejka priorytetowa: ujęcie abstrakcyjne, możliwe implementacje i ich złożoności.	53
38 Algorytmy sortowania QuickSort i MergeSort: metody wyboru pivota w QS; złożoności.	54
39 Algorytm sortowania bez porównań (sortowanie przez zliczanie, sortowanie kubełkowe oraz sortowanie pozycyjne).	55
40 Reprezentacja drzewa binarnego za pomocą porządków (preorder, inorder, postorder).	56
41 Algorytmy wyszukiwania następnika i poprzednika w drzewach BST; usuwanie węzła.	57

42 B-drzewa: operacje i ich złożoność.	57
43 Drzewa AVL: rotacje, operacje z wykorzystaniem rotacji i ich złożoność.	57
44 Algorytmy przeszukiwania wszerz i w głąb w grafach.	57
45 Algorytmy wyszukiwania najkrótszej ścieżki (Dijkstry oraz Bellmana-Forda).	57
46 Programowanie dynamiczne: podział na podproblemy, porównanie z metodą "dziel i zwyciężaj".	57
47 Algorytm zachłanny: przykład optymalnego i nieoptymalnego wykorzystania.	57
48 Kolorowania wierzchołkowe (grafów planarnych) i krawędziowe grafów, algorytmy i ich złożoności.	57
49 Algorytmy wyszukiwania minimalnego drzewa rozpinającego: Boruvki, Prima i Kruskala.	57
50 Najważniejsze algorytmy wyznaczania otoczki wypukłej zbioru punktów w układzie współrzędnych (Grahama, Jarvisa, algorytm przyrostowy (quickhull)).	57
51 Problemy P, NP, NP-zupełne i zależności między nimi. Hipoteza P vs. NP.	57
52 Automat minimalny, wybrany algorytm minimalizacji.	57
53 Lemat o pompowaniu dla języków regularnych.	57
54 Warunki równoważne definicji języka regularnego: automat, prawa kongruencja syntaktyczna, wyrażenia regularne.	57
55 Automaty niedeterministyczne i deterministyczne (w tym ze stosem); determinizacja.	57
56 Problemy rozstrzygalne i nierozstrzygalne w teorii języków.	57

57 Klasy języków w hierarchii Chomsky’ego oraz ich zamkniętość ze względu na operacje boolowskie, homomorfizmy, itp.	57
58 Reprezentacja liczb całkowitych; arytmetyka.	58
59 Reprezentacja liczb rzeczywistych; arytmetyka zmiennopozycyjna.	58
60 Różnice w wywołaniu funkcji statycznych, niestatycznych i wirtualnych w C++.	58
61 Sposoby przekazywania parametrów do funkcji (przez wartość, przez referencję). Zalety i wady.	58
62 Wskaźniki, arytmetyka wskaźników, różnica między wskaźnikiem a referencją w C++.	58
63 Podstawowe założenia paradygmatu obiektowego: dziedziczenie, abstrakcja, enkapsulacja, polimorfizm.	58
64 Funkcje zaprzyjaźnione i ich związek z przeładowaniem operatorów w C++.	58
65 Programowanie generyczne na podstawie szablonów w języku C++.	58
66 Podstawowe kontenery w STL z szerszym omówieniem jednego z nich.	58
67 Obsługa sytuacji wyjątkowych w C++.	58
68 Obsługa plików w języku C.	58
69 Model wodospadu a model spiralny wytwarzania oprogramowania.	58
70 Diagram sekwencji i diagram przypadków użycia w języku UML.	58
71 Klasyfikacja testów.	58
72 Model Scrum: struktura zespołu, proces wytwarzania oprogramowania, korzyści modelu.	58

73 Wymagania w projekcie informatycznym: klasyfikacja, źródła, specyfikacja, analiza.	58
74 Analiza obiektowa: modele obiektowe i dynamiczne, obiekty encyjne, brzegowe i sterujące.	58
75 Wzorce architektury systemów.	58
76 Relacyjny model danych, normalizacja relacji (w szczególności algorytm doprowadzenia relacji do postaci Boyce’a-Codda), przykłady.	59
77 Indeksowanie w bazach danych: drzewa B+, tablice o organizacji indeksowej, indeksy haszowe, mapy binarne.	59
78 Podstawowe cechy transakcji (ACID). Metody sterowania współbieżnością transakcji, poziomy izolacji transakcji, przykłady.	59
79 Złączenia, grupowanie, podzapytania w języku SQL.	59
80 Szeregowalność harmonogramów w bazach danych.	59
81 Definicja cyfrowego układu kombinacyjnego - przykłady układów kombinacyjnych i ich implementacje.	59
82 Definicja cyfrowego układu sekwencyjnego - przykłady układów sekwencyjnych i ich implementacje.	59
83 Minimalizacja funkcji logicznych.	59
84 Programowalne układy logiczne PLD (ROM, PAL, PLA).	59
85 Schemat blokowy komputera (maszyna von Neumanna).	59
86 Zarządzanie procesami: stany procesu, algorytmy szeregowania z wywłaszczaniem.	59
87 Muteks, semafor, monitor jako narzędzia synchronizacji procesów.	59
88 Pamięć wirtualna i mechanizm stronicowania.	59

89 Systemy plikowe - organizacja fizyczna i logiczna (na przykładzie wybranego systemu uniksopodobnego).	59
90 Model ISO OSI. Przykłady protokołów w poszczególnych warstwach.	59
91 Adresowanie w protokołach IPv4 i IPv6.	59
92 Najważniejsze procesy zachodzące w sieci komputerowej od momentu wpisania adresu strony WWW do wyświetlenia strony w przeglądarce (komunikat HTTP, segment TCP, system DNS, pakiet IP, ARP, ramka).	59
93 Działanie przełączników Ethernet, sieci VLAN, protokół STP.	59
94 Rola routerów i podstawowe protokoły routingu (RIP, OSPF).	59
95 Szyfrowanie z kluczem publicznym, podpis cyfrowy, certyfikaty.	59
96 Wirtualne sieci prywatne, protokół IPsec.	59

Matematyczne podstawy informatyki

1 Zasada indukcji matematycznej.

Przykład: $2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$, Nierówność Bernoulliego dla $h \geq -1$ $(1+h)^2 \geq 1 + n * h$, $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \forall n \in \mathbb{N}$

2 Porządki częściowe i liniowe. Elementy największe, najmniejsze, maksymalne i minimalne.

Przykłady - sprawdź czy porządek: $xRy \Leftrightarrow x|y$

3 Relacja równoważności i zbiór ilorazowy.

Przykład: $xRy \Leftrightarrow x \equiv_3 y$.

4 Metody dowodzenia twierdzeń: wprost, nie wprost, przez kontrapozycję.

5 Metody numeryczne rozwiązywania równań nieliniowych: bisekcji, siecznych, Newtona.

6 Rozwiązywanie układów równań liniowych: metoda eliminacji Gaussa, metody iteracyjne Jacobiiego i Gaussa-Seidla.

6.1 Metoda eliminacji Gaussa

Obliczając rząd macierzy metodą Gaussa należy za pomocą operacji elementarnych na wierszach sprowadzić macierz do macierzy schodkowej. Wtedy wszystkie niezerowe wiersze są liniowo niezależne i można łatwo odczytać rząd macierzy.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2-2w_1, w_3+w_1, w_4-2w_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \sim \\
 & \xrightarrow{w_4-w_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4-w_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Metody iteracyjne

Ogólna postać metody iteracyjnej:

$$Ax = b$$

$$Qx^{n+1} = (Q - A)x^n + b = \tilde{b}$$

$$x^0 = (0, 0, 0)$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + (-2)x_2 + 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + (-1)x_2 + (-4)x_3 = 0 \end{cases}$$

6.2 Metoda iteracyjna Jacobiego

6.2.1 Algebraicznie

$$\begin{cases} x_1^{N+1} = \frac{1}{5}(10 + 2x_2^N - 3x_3^N) \\ x_2^{N+1} = \frac{1}{4}(-2x_1^N - 2x_3^N) \\ x_3^{N+1} = -\frac{1}{4}(x_2^N - 2x_1^N) \end{cases}$$

6.2.2 Macierzowo

$$Q = D \quad (\text{diagonalna})$$

6.3 Metoda iteracyjna Gaussa-Seidla

6.3.1 Algebraicznie

$$\begin{cases} x_1^{N+1} = \frac{1}{5}(10 + 2x_2^N - 3x_3^N) \\ x_2^{N+1} = \frac{1}{4}(-2x_1^N - 2x_3^{N+1}) \\ x_3^{N+1} = -\frac{1}{4}(x_2^{N+1} - 2x_1^{N+1}) \end{cases}$$

6.3.2 Macierzowo

$$Q = L + D \quad (\text{diagonalna i dolnotrójkątna})$$

7 Wartości i wektory własne macierzy: numeryczne algorytmy ich wyznaczania.

8 Interpolacja wielomianowa: metody Lagrange'a i Hermite'a. Efekt Rungego.

8.1 Wzór interpolacyjny Lagrange'a

Zadanie 8.1 Znaleźć wielomiany l_i i wzór Lagrange'a dla $n = 3$ i punktów

x	5	-7	-6	0
y	1	-23	-54	-954

Rozwiązanie: Wielomiany l_i wyrażają się przez węzły tak:

1.

$$l_0(x) = \frac{(x+7)(x+6)x}{(5+7)(5+6) \cdot 5} = \frac{1}{660}(x+7)(x+6)x,$$

$$l_1(x) = \frac{(x-5)(x+6)x}{(-7-5)(-7+6)(-7)} = -\frac{1}{84}(x-5)(x+6)x,$$

$$l_2(x) = \frac{(x-5)(x+7)x}{(-6-5)(-6+7)(-6)} = \frac{1}{66}(x-5)(x+7)x,$$

$$l_3(x) = \frac{(x-5)(x+7)(x+6)}{(0-5)(0+7)(0+6)} = -\frac{1}{210}(x-5)(x+7)(x+6).$$

2. Stąd wynika, że

$$p(x) = l_0(x) - 23l_1(x) - 54l_2(x) - 954l_3(x).$$

8.2 Interpolacja Hermite'a

Zadanie 8.2 Należy znaleźć wielomian interpolacyjny, przybliżający funkcję o

zadanych węzłach dwukrotnych: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$
 $f(x_1) = 3$, $f(x_2) = 5$
 $f'(x_1) = 2$, $f'(x_2) = 6$

Rozwiązanie: Zapisuje się wartości w tabeli:

x_i	$f(x_i)$
1	3
1	3
3	5
3	5

Następnie w miejsce powtarzającego się wężła wstawia się wartości pochodnej, a w pozostałe miejsca (w tym przypadku jedno) wstawia się odpowiednią różnicę dzieloną:

x_i	$f(x_i)$	$R_2(x_i)$
1	3	—
1	3	2
3	5	1
3	5	6

Następnie uzupełnia się do końca tabelę:

x_i	$f(x_i)$	$R_2(x_i)$	$R_3(x_i)$	$R_4(x_i)$
1	3	—	—	—
1	3	2	—	—
3	5	1	$-\frac{1}{2}$	—
3	5	6	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$

Zatem otrzymuje się wielomian:

$$w(x) = 3 + 2(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{3}{2}(x-1)^2(x-3) = \frac{3}{2}x^3 - 8x^2 + \frac{27}{2}x - 4.$$

Łatwo sprawdzić, że interpoluje on dane punkty:

$$w(1) = \frac{3}{2} - 8 + \frac{27}{2} - 4 = 3$$

$$w'(1) = \frac{9}{2} - 16 + \frac{27}{2} = 2$$

$$w(3) = \frac{3}{2} \cdot 27 - 8 \cdot 9 + \frac{27}{2} \cdot 3 - 4 = 5$$

$$w'(3) = \frac{9}{2} \cdot 9 - 16 \cdot 3 + \frac{27}{2} = 6.$$

9 Zmienne losowe dyskretne. Definicje i najważniejsze rozkłady.

9.1 Rozkład dwumianowy

Zadanie 9.1 Zmienna losowa X ma rozkład dwumianowy ($X \sim \text{Bin}(n, p)$) gdzie n - ilość prób, p - prawdopodobieństwo sukcesu. Ponadto wiemy, że $E(X) = np$ oraz $\text{Var}(X) = np(1 - p)$

Rozwiązanie: Mamy $X \sim \text{Bin}(n = 4, p = \frac{1}{2})$ oraz $k = 2$, więc

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8},$$

$$E(X) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2, \quad \text{Var}(X) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

9.2 Rozkład geometryczny

Zadanie 9.2 Zmienna losowa X ma rozkład geometryczny z $p = \frac{1}{2}$. Wzór na prawdopodobieństwo $P(X = k) = (1-p)^{(k-1)} p$ oraz mamy $E(X) = \frac{1}{p}$, $\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$. Prawdopodobieństwo że pierwszy orzeł wypadnie w 4 rzucie:

$$P(X = 4) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{(4-1)} \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

$$E(X) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2, \quad \text{Var}(X) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2.$$

9.3 Rozkład Poissona

Zadanie 9.3 Zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda = 2, 4$. Prawdopodobieństwo, że student będzie nieobecny w ciągu semestru:

1. mniej niż 2 razy:

$$\begin{aligned} P(X < 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) = \\ &= e^{-2,4} \cdot \frac{2,4^0}{0!} + e^{-2,4} \cdot \frac{2,4^1}{1!} = e^{-2,4} + 2,4 \cdot e^{-2,4}. \end{aligned}$$

2. więcej niż 5 razy (jedenminus prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego):

$$\begin{aligned} P(X > 5) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) - P(X = 4) - P(X = 5) = \\ &= 1 - e^{-2,4} - e^{-2,4} \cdot 2,4 - \frac{e^{-2,4} \cdot 2,4^2}{2} - \frac{e^{-2,4} \cdot 2,4^3}{6} - \frac{e^{-2,4} \cdot 2,4^4}{24} - \frac{e^{-2,4} \cdot 2,4^5}{120}. \end{aligned}$$

10 Zmienne losowe ciągłe. Definicje i najważniejsze rozkłady.

10.1 Rozkład jednostajny

Zadanie 10.1 Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $[2, 6]$. Wykonaj polecenia:

1. zapisz wzór na gęstość zmiennej losowej X
2. oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia że $X \in [3, 3.5]$
3. oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia że $X \in (3, 3.5)$

Rozwiązanie:

1. wzór na gęstość zmiennej losowej X to

$$\chi_{[2,6]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{gdy } x \in [2, 6] \\ 0 & \text{gdy } x \notin [2, 6] \end{cases}$$

2. prawdopodobieństwo zdarzenia, że $X \in [3, 3.5]$ to

$$P(X \in [3, 3.5]) = \int_3^{3.5} \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4}(3.5 - 3) = \frac{1}{8}$$

3. prawdopodobieństwo zdarzenia że $X \in (3, 3.5)$ to

$$P(X \in (3, 3.5)) = P(X \in [3, 3.5]) = \frac{1}{8}$$

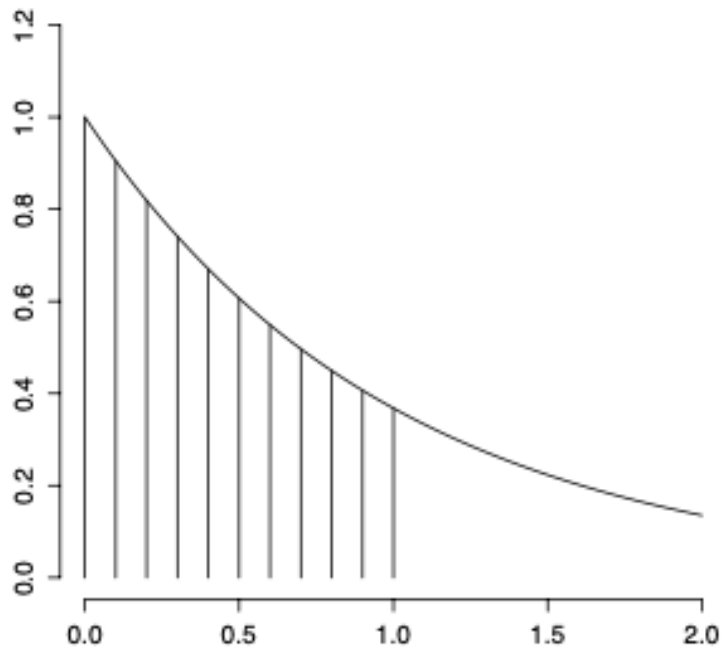
10.2 Rozkład wykładniczy

Zadanie 10.2 Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 1$. Wykonaj polecenia:

1. narysuj gęstość/ zapisz wzór na gęstość zmiennej losowej X
2. na powyższym rysunku przedstaw prawdopodobieństwo zdarzenia że $X \in [0, 1]$
3. oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia że $X \in [0, 1]$

Rozwiązanie:

Punkty 1 i 2:



Punkt 3 - prawdopodobieństwo zdarzenia że $X \in [0, 1]$ wynosi

$$P(X \in [0, 1]) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_{x=0}^{x=1} = 1 - e^{-1}$$

10.3 Rozkład normalny

Zadanie 10.3 Zmienna losowa X ma rozkład normalny o parametrach $\mu = 0$ oraz $\sigma = 1$. Podaj prawdopodobieństwo, że X osiąga wartości dodatnie.

Rozwiązanie:

Wykres tej funkcji jest parzysty, a pole całego wykresu wynosi 1 więc z połowy jest $\frac{1}{2}$.

$$P(X > 0) = \int_0^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}$$

10.4 Rozkład Gamma, Wzór Gamma-Poisona

Zadanie 10.4 *Kompilacja programu składa się z 3 części przetwarzanych przez kompilator sekwencyjnie, jedna po drugiej. Czas przetwarzania każdej z części ma rozkład wykładniczy ze średnim czasem 5 minut, niezależnym od czasu przetwarzania pozostałych części.*

1. oblicz wartość oczekiwaną i wariancję całkowitego czasu kompilacji
2. oblicz prawdopodobieństwo, że cały proces kompilacji zostanie przeprowadzony w czasie mniejszym niż 12 minut.

Rozwiązanie:

Całkowity czas kompilacji opisuje zmienna losowa o rozkładzie $Gamma(T \sim \Gamma(\alpha = 3, \lambda = \frac{1}{5}))$. Wartość oczekiwana i wariancja całkowitego czasu kompilacji to

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{3}{\frac{1}{5}} = 15$$

$$Var(x) = \frac{\alpha}{\lambda^2} = \frac{3}{\frac{1}{25}} = 75$$

Prawdopodobieństwo, że cały proces kompilacji zostanie przeprowadzony w czasie mniejszym niż 12 minut liczymy korzystając z formuły Gamma-Poisona.

$$P(T < t) = P(X \geq \alpha),$$

gdzie $X \sim Poisson(\lambda * t = \frac{1}{5} * 12 = 2.4)$ oraz $\alpha = 3$, $t = 12$. Mamy więc:

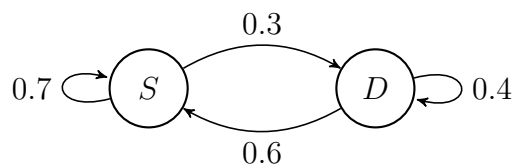
$$P(T < 12) = P(X \geq 3) = 1 - P(0) - P(1) - P(2) = 1 - F_X(2) = 1 - 0.5697 = 0.43$$

11 Łącuchy Markowa. Rozkład stacjonarny.

Zadanie 11.1 W pewnym mieście każdy dzień jest słoneczny albo deszczowy. Po dniu słonecznym dzień słoneczny następuje z prawdopodobieństwem 0.7, a po dniu deszczowym z prawdopodobieństwem 0.4.

1. Narysuj łańcuch markowa oraz wyznacz macierz przejścia dla niego.
2. W poniedziałek padało. Stwórz prognozę na wtorek, środę i czwartek.
3. Meteorolodzy przewidują 80% szans na deszcz w poniedziałek. Stwórz prognozę na wtorek, środę i czwartek.
4. Znajdź rozkład stacjonarny.

1. Łańcuch Markowa:



Macierz przejść:

$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

2.

Wtorek:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Środa:

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.52 & 0.48 \end{bmatrix}$$

Czwartek:

$$\begin{bmatrix} 0.52 & 0.48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.556 & 0.444 \end{bmatrix}$$

3.

Wtorek:

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.46 & 0.54 \end{bmatrix}$$

Środa:

$$\begin{bmatrix} 0.46 & 0.54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.538 & 0.462 \end{bmatrix}$$

Czwartek:

$$\begin{bmatrix} 0.538 & 0.462 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5614 & 0.4386 \end{bmatrix}$$

4. Macierz przejść:

$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} \pi P = \pi \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

$$\pi P = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7\pi_1 + 0.4\pi_2 & 0.3\pi_1 + 0.6\pi_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0.7\pi_1 + 0.4\pi_2 = \pi_1 \\ 0.3\pi_1 + 0.6\pi_2 = \pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

12 Testy statystyczne: test z, test t-Studenta, test chi-kwadrat.

Generalnie:

- Z-testów używamy do sprawdzenia czy testowana próba pasuje do zadanej populacji lub do porównywania dwóch **dużych** ($n \geq 30$) prób
- T-testów używamy do porównywania dwóch **małych** ($n < 30$) prób testowych ze sobą
 - Próby mogą być niezależne - np. wyniki sprawdzianów w dwóch grupach
 - Mogą być również zależne (dotyczyć jednej i tej samej grupy) - np. waga przed zastosowaniem diety i po
 - Może również służyć do porównywania próby do zadanej wartości (np. średniej) - podobnie jak Z-testy (?)
- Chi-kwadrat używamy do ustalania **goodness of fit** dla próbki względem populacji lub do zbadania niezależności

12.1 Z-test

Zadanie 12.1 Inżynier jakości znajduje 10 wadliwych produktów w próbie 500 egzemplarzy pewnego komponentu od wytwórcy A. Wśród 400 egzemplarzy od wytwórcy B znajduje 12 wadliwych. Firma komputerowa, korzystająca z tych komponentów twierdzi, że jakość wyrobów od obu producentów jest taka sama. Sprawdź, czy na 5% poziomie istotności istnieją wystarczające dowody do odrzucenia tego twierdzenia.

H_0 : Jakość wyrobów obu producentów jest taka sama

H_a : Jakość wyrobów obu producentów jest różna

Obliczamy proporcje dla obu prób:

$$p_1 = \frac{10}{500} = \frac{1}{50}$$

$$p_2 = \frac{12}{400} = \frac{3}{100}$$

oraz proporcję dla próby połączonej:

$$\bar{p} = \frac{10 + 12}{500 + 400} = \frac{11}{450}$$

Następnie używamy wzoru:

$$Z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\bar{p}(1 - \bar{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$
$$Z = \frac{\frac{1}{50} - \frac{3}{100}}{\sqrt{\frac{11}{450}\left(1 - \frac{11}{450}\right)\left(\frac{1}{500} + \frac{1}{400}\right)}} = \frac{-\frac{1}{100}}{\sqrt{\frac{4829}{45000000}}} \approx -0.9653$$

Odczytujemy z tablic dla Z-testów wartość dla -0.9653 i jest to **0.1685**

W naszej hipotezie mamy pytanie o równość więc bierzemy pod uwagę obie końcówki przedziału (?). Mamy sprawdzić prawdziwość naszej hipotezy na 5% poziomie istotności, więc na każdą końcówkę mamy po 2.5%.

$0.1685 < 2.5$ więc możemy odrzucić hipotezę zerową twierdząc, że jakość wyrobów obu producentów jest różna

12.2 T-testy

Zadanie 12.2 Posiadacz konta internetowego, w długim okresie czasu, w trakcie logowania pisze swój login i hasło z przerwami pomiędzy kolejnymi wciśnięciami klawiszy wynoszącymi 0.2s. Pewnego dnia zarejestrowane logowanie na to konto z prawidłowym hasłem, przy czym czasy odstępów pomiędzy wciśnięciami kolejnych klawiszy wynosiły:

.24, .22, .26, .34, .35, .32, .33, .29, .19, .36, .30, .15, .17, .20, .28, .40, .37, .27 sekund

Na 5% poziomie ufności zweryfikuj, czy dane te mogą być dowodem na nieautoryzowany dostęp do konta?

H_0 : Dostęp do konta jest autoryzowany

H_a : Dostęp do konta jest nieautoryzowany

Korzystamy ze wzoru:

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$$

gdzie:

- \bar{x} - średnia z badanej próby
- μ_0 - zakładana średnia
- σ - odchylenie standardowe z próby
- n - wielkość próby

W naszym przypadku:

$$\bar{x} \approx 0.28 \tag{1}$$

$$\mu_0 = 0.2 \tag{2}$$

$$\sigma \approx 0.07324 \tag{3}$$

$$n = 18 \tag{4}$$

Podstawiając do wzoru mamy:

$$T = \frac{0.28 - 0.2}{0.07324} \sqrt{18} \approx 4.63423341$$

Ilość naszych stopni swobody to $n-1$ więc w naszym przypadku 17

Odczytujemy z tablic rozkładu t-studenta wartość odpowiadającą 2.5% poziomu ufności ($5\%/2$) oraz 17 stopniom swobody i jest to **2.11**

Ponieważ $4.63423341 > 2.11$ nie mamy podstawy aby odrzucić hipotezę zerową

12.3 Testy Chi-kwadrat

Zadanie 12.3 *Producent kostki do gry deklaruje, że oczka na jego niesprawiedliwej kostce wypadają z następującym prawdopodobieństwem:*

- 1 oczko - $\frac{1}{2}$
- 2 oczka - $\frac{1}{4}$
- 3 oczka - $\frac{1}{25}$
- 4 oczka - $\frac{1}{50}$
- 5 oczek - $\frac{1}{25}$
- 6 oczek - $\frac{3}{20}$

Dla 100 rzutów zaobserwowano natomiast następujące wyniki:

- 1 oczko - 55 razy
- 2 oczka - 20 razy
- 3 oczka - 6 razy
- 4 oczka - 3 razy
- 5 oczek - 2 razy
- 6 oczek - 14 razy

*Przeprowadź test zgodności (*goodness of fit*) χ^2 i rozstrzygnij na poziomie 5% istotności czy producent ma rację*

Wyliczamy wartości oczekiwane dla każdego przedziału i zgodnie z **rule of thumb** w razie potrzeby je łączymy tak, aby dla każdego z nich wartość była ≥ 5

n	Obs_n	Exp_n	x	Obs_x	Exp_x
1	55	50	1	55	50
2	20	25	2	20	25
3	6	4	3	11	10
4	3	2			
5	2	4			
6	14	15	4	14	15

Następnie aby obliczyć χ^2 stosujemy następujący wzór (N to liczba naszych x):

$$\chi^2 = \sum_{x=1}^N \frac{(Obs_x - Exp_x)^2}{Exp_x}$$

W naszym przypadku $\chi^2 \approx 1.6666$

Stopnie swobody obliczamy ze wzoru **N -1**, gdzie N to liczba naszych x-ów. W naszym przypadku liczba stopni swobody jest więc równa **3**.

Następnie odczytujemy z tablicy χ^2 wartość dla 5% istotności przy 3 stopniach swobody. Jest ona równa **7.82**

$1.6666 < 7.82$ stąd nie mamy więc podstawy do odrzucenia hipotezy zerowej

13 Wzór Bayesa i jego interpretacja.

Zadanie 13.1 W firmie IT 20% wytwarzanych modułów przechodzi specjalny proces inspekcji. Z danych historycznych wiadomo, że każdy moduł poddany inspekcji nie ma defektów z prawdopodobieństwem 0.95. Dla modułu nie poddanego procesowi inspekcji prawdopodobieństwo to wynosi jedynie 0.7. Klient znalazł defekt w module. Jakie jest prawdopodobieństwo, że moduł ten przeszedł przez proces inspekcji?

Korzystamy oczywiście ze wzoru Bayesa:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad \text{przy } P(B) > 0$$

I - moduł przeszedł przez inspekcję

D - moduł ma defekt

$$P(I) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} \quad P(\bar{I}) = \frac{4}{5}$$

$$P(\bar{D}|I) = \frac{95}{100} = \frac{19}{20} \quad P(D|I) = \frac{1}{20}$$

$$P(\bar{D}|\bar{I}) = \frac{70}{100} = \frac{7}{10} \quad P(D|\bar{I}) = \frac{3}{10}$$

$$P(I|D) = \frac{P(D|I) \cdot P(I)}{P(D)} = \frac{P(D|I) \cdot P(I)}{P(D|I) \cdot P(I) + P(D|\bar{I}) \cdot P(\bar{I})} = \frac{\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{1}{25}$$

Prawdopodobieństwo że moduł, w którym znalazł się defekt przeszedł proces inspekcji wynosi $\frac{1}{25}$.

- 14 Istnienie elementów odwrotnych względem mnożenia w strukturze $(\mathbb{Z}_m, +, *)$ w zależności od liczby naturalnej m . Rozszerzony algorytm Euklidesa.
- 15 Ortogonalność wektorów w przestrzeni R_n ; związki z liniową niezależnością. Metoda ortonormalizacji Grama-Schmidta.

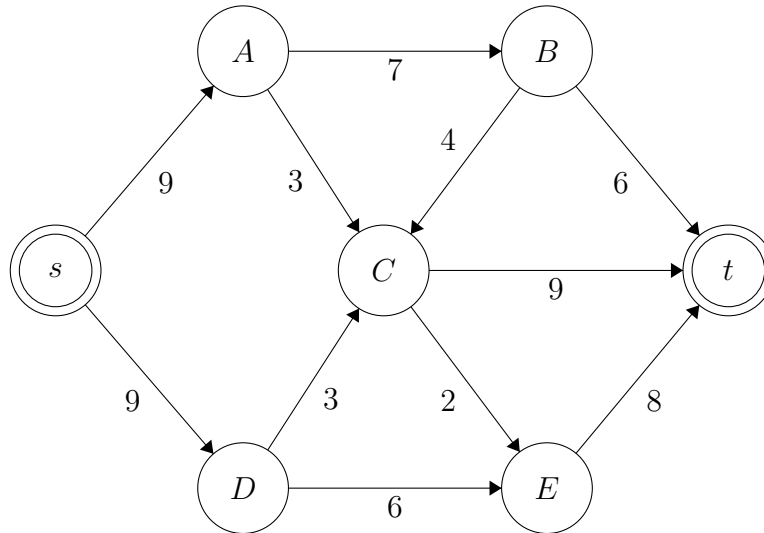
16 Liczby Stirlinga I i II rodzaju i ich interpretacja.

17 Twierdzenia Eulera i Fermata; funkcja Eulera.

18 Konfiguracje i t-konfiguracje kombinatoryczne.

**19 Cykl Hamiltona, obwód Eulera, liczba chroma-
tyczna - definicje i twierdzenia.**

20 Algorytm Forda-Fulkersona wyznaczania maksymalnego przepływu.



Weźmy sobie taką sieć przepływową. Chcemy wyznaczyć jej maksymalny przepływ. Musimy zacząć od jakiegoś (dowolnego) przepływu. Szukamy ścieżki roszerszającej, która połączy źródło s z ujściem t .

Na przykład może to być ścieżka: $P = \{s \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow t\}$.

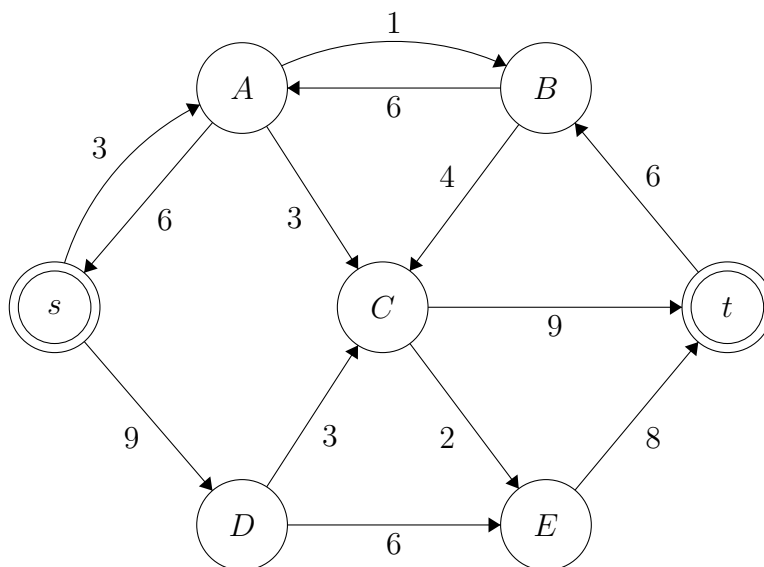
Na ścieżce p znajdują się trzy kanały sieci rezydualnej: (s, A) , (A, B) i (B, t) . Przepustowość rezydualna $c_f(p)$ ścieżki jest równa najmniejszej przepustowości rezydualnej jej kanałów, czyli przepustowości kanału $(B \rightarrow t)$, dla którego $c_f(B, t) = 6$. Zatem wzdłuż krawędzi ścieżki przepływ można zwiększyć o 6 jednostek, o tyle rośnie również przepływ sieciowy, czyli $|f_{nowy}| = |f_{stary}| + c_f(p) = 0 + 6 = 6$.

Budujemy sieć rezydualną. Zwiększenie przepływu w kanale sieci pierwotnej o $c_f(p)$ odpowiada zmniejszeniu przepustowości rezydualnej tego kanału. Jednocześnie wraz z pojawieniem się przepływu w kanale sieci pierwotnej powstaje kanał przeciwny w sieci rezydualnej o przepustowości rezydualnej równej przepływowi.

Przepustowość rezydualna kanału (s, A) wynosi 3 – oznacza to, iż kanałem tym można wciąż jeszcze przesłać trzy dodatkowe jednostki przepływu. W sieci rezydualnej pojawia się kanał przeciwny (A, s) o przepustowości rezydualnej $c_f(A, s) = 6$.

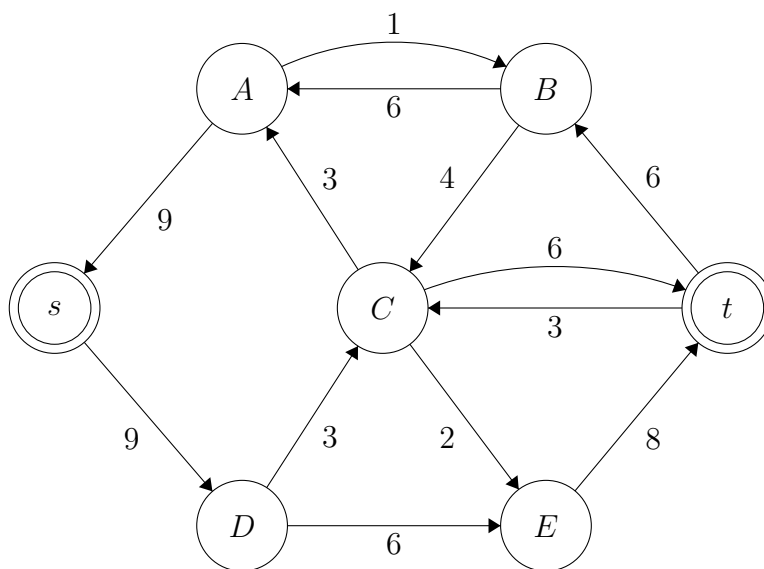
Kanał (A, B) może jeszcze przesłać 1 dodatkową jednostkę przepływu. Również tutaj pojawił się kanał przeciwny o przepustowości rezydualnej równej 6.

Kanał (B, t) przestał istnieć w sieci rezydualnej, ponieważ osiągnął już swoją maksymalną przepustowość – 6 jednostek przepływu. Nie może on być dalej wykorzystywany do powiększania przepływu. Na jego miejscu mamy jednak kanał przeciwny z przepustowością rezydualną równą 6.



W nowej sieci rezydualnej szukamy kolejnej ścieżki rozszerzającej:

$$P = \{s \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow t\}, \quad c_f(p) = 3.$$



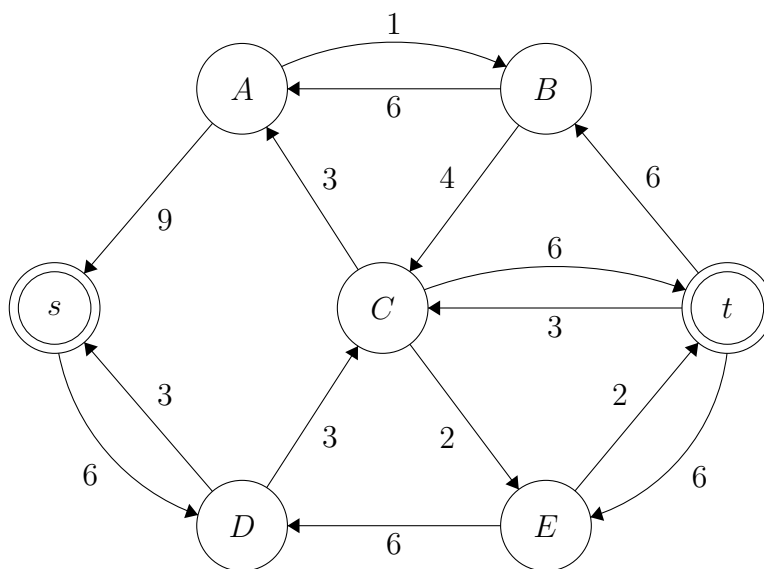
Przepływ zwiększamy:

$$|f| = 6 + 3 = 9$$

i modyfikujemy przepustowości rezydualne krawędzi ścieżki rozszerzającej otrzymując nową sieć rezydualną. Znikają z niej kanały (s, A) i (A, C) – wykorzystały już swój potencjał zwiększania przepływu.

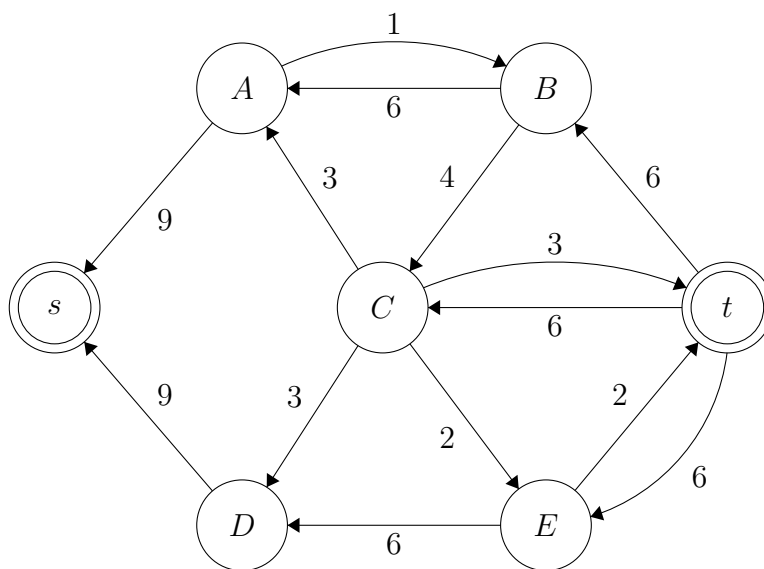
Szukamy kolejnej ścieżki rozszerzającej:

$$P = \{s \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow t\}, \quad c_f(p) = 6$$



W nowej sieci rezydualnej zniknął kanał (D, E) .
 Wciąż jednakże możemy znaleźć nową ścieżkę rozszerzającą:

$$P = \{s \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow t\}, \quad c_f(p) = 3$$

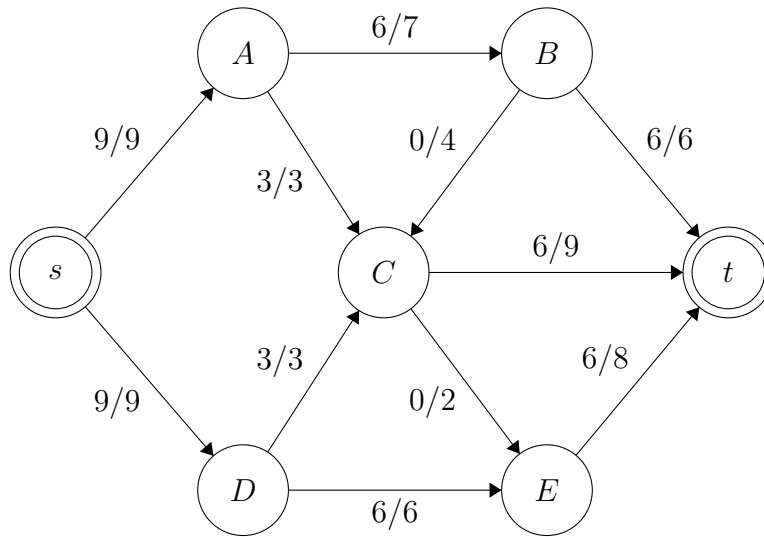


Przepływ zwiększamy:

$$|f| = 15 + 3 = 18.$$

Po zmodyfikowaniu sieci rezydualnej otrzymujemy nową sieć rezydualną. W tej sieci rezydualnej **nie znajdziemy już żadnej nowej ścieżki rozszerzającej** – ze źródła s nie wychodzi żaden kanał. Oznacza to zakończenie algorytmu, zatem znaleźliśmy przepływ maksymalny. Aby otrzymać sieć przepływową wystarczy od przepustowości kanałów odjąć otrzymane przepustowości rezydualne – dla nieistniejących kanałów ich przepustowość rezydualna wynosi 0.

Poniżej nasza sieć przepływowa z uzyskanym maksymalnym przepływem:



$$|f| = 18$$

- 21 Rozwiązywanie równan rekurencyjnych przy użyciu funkcji tworzących (generujących) oraz przy użyciu równania charakterystycznego.

22 Ciąg i granica ciągu liczbowego, granica funkcji.

23 Ciągłość i pochodna funkcji. Definicja i podstawowe twierdzenia.

24 Ekstrema funkcji jednej zmiennej. Definicje i twierdzenia.

25 Całka Riemanna funkcji jednej zmiennej.

**26 Pochodne cząstkowe funkcji wielu zmiennych;
różniczkowalność i różniczka funkcji.**

27 Ekstrema funkcji wielu zmiennych. Definicje i twierdzenia.

28 Twierdzenie o zmianie zmiennych w rachunku całkowym; współrzędne walcowe i sferyczne.

Teoretyczne podstawy informatyki

- 29** Metody dowodzenia poprawności pętli.
- 30** Odwrotna Notacja Polska: definicja, własności, zalety i wady, algorytmy.
- 31** Modele obliczeń: maszyna Turinga.
- 32** Modele obliczeń: automat skończony, automat ze stosem.

33 Złożoność obliczeniowa - definicja notacji: O , Ω , Θ .

34 Złożoność obliczeniowa - pesymistyczna i średnia.

- 35 Metoda "dziel i zwyciężaj"; zalety i wady.
- 36 Lista: ujęcie abstrakcyjne, możliwe implementacje i ich złożoności.
- 37 Kolejka i kolejka priorytetowa: ujęcie abstrakcyjne, możliwe implementacje i ich złożoności.

**38 Algorytmy sortowania QuickSort i MergeSort:
metody wyboru pivota w QS; złożoności.**

- 39 Algorytm sortowania bez porównań (sortowanie przez zliczanie, sortowanie kubełkowe oraz sortowanie pozycyjne).

- 40 Reprezentacja drzewa binarnego za pomocą porządków (preorder, inorder, postorder).

- 41 Algorytmy wyszukiwania następnika i poprzednika w drzewach BST; usuwanie węzła.
- 42 B-drzewa: operacje i ich złożoność.
- 43 Drzewa AVL: rotacje, operacje z wykorzystaniem rotacji i ich złożoność.
- 44 Algorytmy przeszukiwania wszerz i w głąb w grafach.
- 45 Algorytmy wyszukiwania najkrótszej ścieżki (Dijkstry oraz Bellmana-Forda).
- 46 Programowanie dynamiczne: podział na podproblemy, porównanie z metodą "dziel i zwyciężaj".
- 47 Algorytm zachłanny: przykład optymalnego i nieoptymalnego wykorzystania.
- 48 Kolorowania wierzchołkowe (grafów planarnych) i krawędziowe grafów, algorytmy i ich złożoności.
- 49 Algorytmy wyszukiwania minimalnego drzewa rozpinającego: Boruvki, Prima i Kruskala.
- 50 Najważniejsze algorytmy wyznaczania otoczki wypukłej zbioru punktów w układzie współrzędnych (Grahama₃₇, Jarvisa, algorytm przyrostowy (quickhull)).
- 51 Problemy P, NP, NP-zupełne i zależności między nimi. Hipoteza P vs. NP.
- 52 Automat minimalny, wybrany algorytm mini-

- 58 Reprezentacja liczb całkowitych; arytmetyka.
- 59 Reprezentacja liczb rzeczywistych; arytmetyka zmiennopozycyjna.
- 60 Różnice w wywołaniu funkcji statycznych, niestatycznych i wirtualnych w C++.
- 61 Sposoby przekazywania parametrów do funkcji (przez wartość, przez referencję). Zalety i wady.
- 62 Wskaźniki, arytmetyka wskaźników, różnica między wskaźnikiem a referencją w C++.
- 63 Podstawowe założenia paradygmatu obiektowego: dziedziczenie, abstrakcja, enkapsulacja, polimorfizm.
- 64 Funkcje zaprzyjaźnione i ich związek z przeładowaniem operatorów w C++.
- 65 Programowanie generyczne na podstawie szablonów w języku C++.
- 66 Podstawowe kontenery w STL z szerszym omówieniem jednego z nich.
- 67 Obsługa sytuacji wyjątkowych w C++.
- 68 Obsługa plików w języku C.
- 69 Model wodospadu a model spiralny wytwarzania oprogramowania.
- 70 Diagram sekwencji i diagram przypadków użycia w języku UML.

- 76 Relacyjny model danych, normalizacja relacji (w szczególności algorytm doprowadzenia relacji do postaci Boyce'a-Codda), przykłady.
- 77 Indeksowanie w bazach danych: drzewa B+, tablice o organizacji indeksowej, indeksy haszowe, mapy binarne.
- 78 Podstawowe cechy transakcji (ACID). Metody sterowania współbieżnością transakcji, poziomy izolacji transakcji, przykłady.
- 79 Złączenia, grupowanie, podzapytania w języku SQL.
- 80 Szeregowalność harmonogramów w bazach danych.
- 81 Definicja cyfrowego układu kombinacyjnego - przykłady układów kombinacyjnych i ich implementacje.
- 82 Definicja cyfrowego układu sekwencyjnego - przykłady układów sekwencyjnych i ich implementacje.
- 83 Minimalizacja funkcji logicznych.
- 84 Programowalne układy logiczne PLD (ROM, PAL, PLA).
- 85 Schemat blokowy komputera (maszyna von Neumanna).
- 86 Zarządzanie procesami: stany procesu, algorytmy szeregowania z wywłaszczaniem.