1 Aplicando a Teoria dos Conjuntos em Probabilidade

A probabilidade é baseada em um experimento repetitivo que consiste em um procedimento e observações. Um *resultado* é uma observação. Um *evento* é um conjunto de resultados.

Resultado: Um **resultado** de um *experimento* é qualquer observação possível desse experimento. Segundo a noção de que os experimentos são distinguíveis entre si definimos um conjunto universal de todos os resultados possíveis.

Espaço Amostral S: O **espaço amostral** S de um *experimento* é o conjunto mais minucioso, mutuamente exclusivo, coletivamente completo de todos os resultados possíveis.

Evento: Um **evento** é um conjunto dos resultados de um *experimento*.

Conjunto das partes de S: $\mathbb{P}(S)$ conjunto de todos os subconjuntos de S. Ex: $S = \{1, 2, 3\}$

- $\{1, 2\}$ é um subconjunto de S
- $\{1\}$ é um subconjunto de S
- $\{3\}$ é um subconjunto de S
- $\{\varnothing\}$ é um subconjunto de S
- $\ldots$

Obs: Note $\varnothing = \{\cdot\}$ **entretanto** $\{\varnothing\} \neq \varnothing$

2 Axiomas de Probabilidade

Uma medida de probabilidade $P[\cdot]$ é uma função que mapeia eventos no espaço amostral a números reais tais que:

1. Para qualquer evento $\mathbb{E}$, $P[\mathbb{E}] \geq 0$
2. $P[S] = 1$
3. Para qualquer coleção contável $A_1, A_2, \ldots$ de eventos mutuamente exclusivos: $P[A_1 \cup A_2 \cup \ldots] = P[A_1] + P[A_2] + \ldots$

Toda a teoria de probabilidade é baseada nesses três axiomas. Os axiomas 1 e 2 estabelecem a probabilidade como um número entre 0 e 1. O axioma 3 mostra que **para conjuntos disjuntos** a união de conjuntos corresponde a soma das probabilidades.

2.1 Teoremas e Consequências dos Axiomas

2.1.1 $P(\varnothing) = 0$

Usando o axioma 3 note que:

$$P(\varnothing \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\varnothing), \text{ pois } \varnothing \cap \varnothing = \varnothing$$

$$P(\varnothing) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\varnothing) \text{ só converge se } P(\varnothing) = 0$$

2.1.2 $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)\ \forall\ A, B \in \mathbb{E}$

Manuseando a equação para mostrar que $P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) = P(A)$. Primeiramente:

$$\begin{aligned}
&(A \cap \overline{B}) \cap (A \cap B) = \varnothing, \text{ da álgebra Booleana: } A(\overline{B} + B) = (A\overline{B} + AB) \\
&(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) = A \cap (\overline{B} \cup B) = A \cap S = A \\
&\qquad P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)
\end{aligned}$$

2.1.3 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Utilizando os Axiomas 3 e 2 fazemos:

$$\begin{aligned}
S &= A \cup \overline{A} \\
1 &= P(A) + P(\overline{A}) \\
P(\overline{A}) &= 1 - P(A)
\end{aligned}$$

2.1.4 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)\ \forall\ A, B \in \mathbb{E}$

Notamos que $A \cap \overline{B}$ e B são disjuntos e tem união $A \cup B$. Então:

$$P(A \cup B) = P(B) + P(A \cap \overline{B}) \tag{1}$$

Em seguida, notamos que $A \cap \overline{B}$ e $A \cap B$ são disjuntos e tem união A. Então:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) \tag{2}$$

Subtraindo 2 de 1, obtemos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

2.1.5 $0 \leq P(A) \leq 1,\ \forall\ A \in \mathbb{E}$

Como qualquer evento $A \subseteq S$, $P(A) \leq P(S)$ então $P(A) \leq 1$. O limite inferior deve ser zero fazendo com que: $0 \leq P(A) \leq 1$.