1 Experimento de Bernoulli

O experimento é bastante simples e apresenta um espaço amostral S com $|S| = 2$. Podemos denotar $S = \{s_1, s_2\}$. Ademais,

- $P(\{s_1\}) = p$, $p \in [0, 1]$
- $P(\{s_2\}) = 1 - p$
- $P(\varnothing) = 0$
- $P(S) = 1$

Satisfaz os axiomas de Kolmogorov independente doo valor de p.

2 Experimento Binomial

$S \rightarrow$ conjunto de ênuplas ordenadas, em cada elemento de cada ênupla assume 1 de 2 valores, com os **eventos associados ao caso 1 ou caso 2 em cada posição** sendo *independentes* de uma posição para outra (o evento associado ao i-ésimo termo de ser s_1 independe do j-ésimo termo ser s_1, $\forall\, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ com $i \neq j$).

Nesta situação, nós provamos na última aula [vide notas da aula 2] que as probabilidades de eventos associados a k posições assumirem um dos dois valores (digamos s_1) seguem a chamada distribuição binomial:

$$P(k \text{ elementos } 1) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}, \text{todas as ênuplas com k elementos iguais a 1}$$

3 Variáveis Aleatórias

Conceito Formal: Uma variável aleatória X é uma função que associa o resultado de um experimento a um número, que pode ser real, complexo, inteiro, fracionário etc;

Uma variável $X : S \rightarrow \mathbb{D}$ é dita contínua se $C\mathbb{D}$ é um conjunto numérico incontável; é dita discreta se $C\mathbb{D}$ é um conjunto contável.

Dado um experimento com espaço amostral S:

$$X : S \rightarrow \mathbb{R} \text{ ou } X : S \rightarrow \mathbb{C} \text{ ou } X : S \rightarrow \mathbb{Z} \text{ etc}$$

3.1 Probabilidade Induzida - $P : \varepsilon \rightarrow [0, 1]$

Considere um conjunto amostral S vinculado a um espaço de probabilidades (S, ε, P). Considere ainda um v.a. $X : S \rightarrow \mathbb{R}$. Podemos definir a probabilidade induzida por X como sendo:

$$P_X(\mathbb{A}) = P(\{s \in S / X(s) \in \mathbb{A}\}), \text{onde } \mathbb{A} \in \varepsilon_{\mathbb{R}}, \text{ com } \varepsilon_{\mathbb{R}} \subseteq P(\mathbb{R})$$

Podemos provar que P_X satisfaz os axiomas de Kolmogorov.

Exemplo:
S : conjunto de ênuplas ordenadas em um experimento binomial.
$X(s)$: número de elementos na ênupla s iguais ao valor 1.
$P(\{k\}) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$

Notação:

$$\cancel{P_X(2), P_X(3)} \to P_X(\{2\}), P_X(\{3\})$$
$$\cancel{P_X(2,3)} \to P_X(\{2,3\}) = \binom{n}{2} p^2(1-p)^{n-2} + \binom{n}{3} p^3(1-p)^{n-3}$$
$$P(X \in [2,4]) = P(\{s \in S/X(s) \in [2,4]\}) = P_X([2,4])$$
$$P(X^2 + X^3 > 2eX^2 + X^3 < 3) = P(\{s \in S/X(s) \in (2,3)\})$$
$$P(|X - \mu_X| > k\sigma) = P(\{s \in S/|X(s) - \mu_X| > k\sigma\}) = P_X(\mathbb{A})$$

4 Função Densidade de Probabilidade - PDF

Intuitivamente, a função densidade de probabilidade (PDF) é uma função que, ao ser integrada em um conjunto numérico, fornece a probabilidade desse conjunto.

4.1 Definição formal (pré-requisito: CDF)

Seja $X : S \to \mathbb{R}$ uma variável aleatória. A função de distribuição acumulada de probabilidade (CDF) de X é a função $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ definida por:

$$F_X(x) = P_X([-\infty, x]) = P(s \in S/X(s) \le x)$$

Exemplo: Experimento de lançar um dado de seis faces. Dado equilibrado (iid). $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ $S \to \mathbb{R}$ $X(a) = 1;\ X(b) = 2;\ X(c) = 3;\ \ldots X(f) = 6$

$$\begin{array}{rrrr} F_X(0) = 0 & F_X(0.9) = 0 & F_X(1) = 1/6 & F_X(1.5) = 1/6 \\ F_X(1.98) = 1/6 & F_X(2) = 2/6 & F_X(2.9) = 2/6 & F_X(3) = 3/6 \\ \ldots & & & \end{array}$$

Finalmente: $P_X((2,5]) = F_X(5) - F_X(2) = F_X((-\infty,5]) - F_X((-\infty,2])$