1 A desigualdade de Chebyshev

Problema 4 - Lista 2: Seja X uma variável aleatória com valor esperado $\mu = E(X)$ e desvio padrão (suposto não nulo) $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

A desigualdade de Chebyshev estabelece que

$$P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2},\ \forall\ k > 0$$

$$|X-\mu| \geq k\sigma = \begin{cases} X \geq \mu + k\sigma \\ X \leq \mu - k\sigma \end{cases}$$
$$P(|X-\mu| \geq k\sigma) = P_X((-\infty, \mu - k\sigma] \cup (\mu + k\sigma, \infty])$$

A

$P(|X-\mu| \geq 2k\sigma) = \frac{1}{4}$

2 Probabilidade & Frequência Relativa

Em um experimento de Bernoulli

$$S = \{(C, C, \ldots, C), \ldots\} \text{ com } |S| = 2^n$$

Uma variável aleatória $X(k)$ indica k elementos iguais a C em um resultado possível. Com probabilidade $P(\{k\}) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$

Com base no valor esperado de X e na desigualdade de Chebyshev, forneça uma interpretação do conceito de probabilidade em termos de frequência relativa.

Usando a resposta do **Problema 2** para o valor esperado de uma V.A. binomial é $\mathbb{E}(X) = Np$ e $\mathrm{Var}(X) = Np(1-p)$, $\mu = \sqrt{Np(1-p)}$

$$P(|X-\mu| \geq j\sigma) \leq \frac{1}{j^2},\ \forall\ j > 0$$
$$P(|X - Np| \geq j\sqrt{Np(1-p)}) \leq \frac{1}{j^2}$$

Definindo $Y = \frac{X}{N}$ (uma v.a.) como uma medida de frequência relativa para uma proporção de ocorrências do evento desejado.

Avaliando o valor esperado $\mathbb{E}(Y) = \frac{Np}{N} = p$ e $\mathrm{Var}(Y) = \frac{Var(X)}{N^2} = \frac{p(1-p)}{N}$, $\sigma_Y = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}$.

Finalmente, aplicando esse valores a desigualdade de Chebyshev.

$$P(|Y-p| \geq j\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}) \leq \frac{1}{j^2}$$
$$tol = j\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}$$
$$j^2 = tol^2\frac{N}{p(1-p)}$$

$$P(|Y-p| \geq tol) \leq \frac{p(1-p)}{Ntol^2}$$

A probabilidade de que a freq. relativa desvie acima de uma tol. em relação à probabilidade teórica de acerto tem um limite superior que cai linearmente com o número de realizações N.

3 Vetores Aleatórios - Introdução

Vetor que representa várias medidas (eg. amostras de um sinal) de um sistema. **Não definir vetor aleatório como:** uma lista de variáveis aleatórias.

Definição: Uma função $X : S \to \mathbb{R}^n$, portanto função que associa um resultado de um experimento a um vetor numérico. Um vetor aleatório é um tipo de processo estocástico em tempo discreto e duração finita. [tempo é o índice que define a posição em um vetor de $\mathbb{R}^n$]

Em função disso, podemos definir:

- A PDF conjunta de um vetor
- A CDF conjunta de um vetor
- A dependência ou independência entre amostras do vetor
- A covariância entre componentes
- A correlação entre componentes
- A matriz de covariâncias
- A matriz de dependências