1 Interpretação de Expressões que Descrevem Probabilidades

Obs: Sempre que descrevermos textualmente uma probabilidade, devemos ser capazes de traduzir o evento descrito como conjunto de um S, que tenha todos os possíveis resultados.

Exemplo: $P(X^2 + X < 5Y)$, interprete como um conjunto de elementos $s \in S$ tais que $[X(s)]^2 + [X(s)] < 5Y(s)$.

2 Caso particular: Espaços Amostrais Finitos

Considere S um conjunto finito (de N elementos). Podemos denotar a cardinalidade de S como $|S| = N$.

Com frequência, cálculos de probabilidade de $A \subseteq S$ envolvem determinal o número de elementos de A. Ademais, o problema se reduz a um problema de **análise combinatorial**.

2.1 Número binomial $\binom{N}{k}$

Número de *subconjuntos* de k elementos tirados de um *conjunto* de N elementos. Refere-se ao número de combinações de k elementos proveniente de um conjunto de N elementos. Computacionalmente, `nchoosek(N,k)`.

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}, \text{num. de combinações}$$

$$m!, \text{número de permutações de m elementos}$$

As permutações são sequências usando todos os m elementos uma única vez.

Esses dois valores - $\binom{N}{k}$ e $m!$ - são comumente usado em análises de probabilidade referentes a conjuntos finitos em que os subconjuntos têm igual probabilidade.

Exemplo: Seja $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ iid.

Nesse cenário, a probabilidade de qualquer $A \subseteq S$ é $P(A) = \frac{|A|}{|S|}$. Lembrando que só vale para espaços amostrais finitos com todos os subconjuntos unitários equiprováveis.

3 Um experimento populacional...

Conside N_P indivíduos sem contato entre si, selecionados aleatoriamente de uma população. Considere que cada indivíduo tem uma probabilidade p de ter contraído COVID-19. Qual a probabilidade de exatamente k pessoas dessas N $(0 \leq k \leq N_P)$ tenha contraído COVID-19?

Definição para Eventos Independentes: Dado S e dados $A, B \subseteq S$ $(A, B \in S)$, A e B são independentes se e somente se: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ (definição de independência)

Solução:

Usando C para denotar indivíduos com COVID; H indivíduos sem COVID.
Espaço Amostral: $S = \{(C, C, \ldots, C), (C, C, \ldots, H), \ldots, (C, C, \ldots, H, H), \ldots, (H, H, \ldots, H), \ldots\}$

Cada subconjunto contém N_P elementos. Temos que a cardinalidade de S é: $|S| = 2^{N_P}$

$$P(I_C^n) = p \qquad I_C^n \rightarrow \text{ind. } n \text{ contraiu COVID-19}$$
$$I_C^n = \{(C, C_n, \ldots, C), (C, C_n, \ldots, H), \ldots, (C, C_n, \ldots, H, H), \ldots, (H, C_n, \ldots, H), \ldots\}$$

$$P(E_C^{1,2,\ldots,k}) = ? \text{ indivíduos } 1, 2, 3, \ldots, k \text{ contraíram COVID-19, os demais não}$$
$$E_C^{1,2,\ldots,k} = \{C_1, C_2, \ldots, C_k, H_1, H_2, \ldots, H_{N-k}\}$$
$$E_C^{1,2,\ldots,k} = I_C^1 \cap I_C^2 \cap I_C^3 \ldots \cap I_C^k \cap \overline{I_C^{k+1}} \cap \overline{I_C^{k+2}} \cap \overline{I_C^N}$$
$$P(E_C^{1,2,\ldots,k}) = P(I_C^1) \cdot P(I_C^2) \cdot P(I_C^k) \cdot P(\overline{I_C^{k+1}}) \cdot P(\overline{I_C^{k+2}}) \cdot P(\overline{I_C^N})$$
$$P(E_C^{1,2,\ldots,k}) = \underbrace{p \cdot p \ldots \cdot p}_{k} \cdot \underbrace{(1-p) \cdot (1-p) \ldots (1-p)}_{N-k}$$
$$P(E_C^{1,2,\ldots,k}) = p^k \cdot (1-p)^{N-k}$$

Agora, precisamos generalizar o resultado para o caso de k indivíduos quaisquer, não só os k primeitos. Como existem $\binom{N}{k}$ possibilidades de extrair k pessoas a partir do grupo de N_P pessoas, e como os conjuntos $E^{\cdots}$ são disjuntos:

$P(k \text{ contamidados}) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$, sendo k contamidados a união de todos os $E_C^{(\ldots)}$.