

1 Transformadas Lineares de Vetores Aleatórios

Considere o seguinte problema: temos um vetor X com matriz de covariâncias C_{XX} e queremos definir uma função g tal que $Y = g(X)$ tenha uma matriz de covariâncias diagonal. *Isso significa componentes não-correlatos mas não garante independência.*

Dois aspectos:

- Este problema tem solução em forma fechada;
- A solução é uma transformação linear;

Questiona-se o que acontece com uma matriz de covariâncias se aplicarmos uma transformada linear a X . Temos um vetor aleatório $X \in S \rightarrow \mathbb{C}^N$. Temos uma matriz determinística A e definimos:

$$Y = AX$$

Note que Y é um vetor aleatório:

$$Y(s) = AX(s)$$

Qual a matrix de covariâncias C_{YY} ?

Obs: Se X é variável aleatória com variância σ_X^2 . Se $Y = aX$, $\sigma_Y^2 = a^2 \cdot \sigma_X^2$

Solução:

$$C_{YY} = \mathbb{E}[(Y - \mu_Y)(Y - \mu_Y)^H]$$

$$C_{YY} = \mathbb{E}[(AX - \mu_Y)(AX - \mu_Y)^H]$$

$$C_{YY} = \mathbb{E}[(AX - \mu_Y)(AX - \mu_Y)^H]$$

$$\mu_Y = \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[AX] = A\mu_X$$

$$C_{YY} = \mathbb{E}[(AX - A\mu_X)(AX - A\mu_X)^H]$$

$$C_{YY} = \mathbb{E}[(A(X - \mu_X))(A(X - \mu_X))^H]$$

lembrando que: $(AB)^T = A^T B$ e que também $(AB)^H = A^H B$

$$C_{YY} = \mathbb{E}[A(X - \mu_X)(X - \mu_X)^H A^H]$$

$$C_{YY} = A \mathbb{E}[(X - \mu_X)(X - \mu_X)^H] A^H$$

$$C_{YY} = AC_{XX}A^H$$

no caso real: $C_{YY} = AC_{XX}A^T$

no caso 1D: $\sigma_Y^2 = a \cdot \sigma_X^2 \cdot a^* = |a|^2 \sigma_X^2$

1.1 Desafio - Diagonalizando C_{XX}

Calcule A para que C_{XX} seja matriz diagonal.

2 Funções de Vetores Aleatórios

Considere um vetor aleatório $X \in S \rightarrow \mathbb{R}^N$. Seja uma função $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ e defina o vetor aleatório $Y \in S \rightarrow \mathbb{R}^N$ a partir de $Y(s) = g(X(s))$.

Qual a PDF de Y dada a PDF de X ?

Lembrando o caso de variáveis aleatórias: $Y = g(X)$, para cada $y \in \mathbb{R}$ consideramos x_i tais que $g(x_i) = y$ e obtivemos:

$$f_Y(y) = \sum_i \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

No caso de vetores aleatórios: Para um dado $y \in \mathbb{R}^N$, considerar todos os $x_i \in \mathbb{R}^N$ com $g(x_i) = y$. A função g recebe um vetor de entrada e retorna um vetor de g_N componentes.

A derivada será substituída pelo Jacobiano de g :

$$J_g(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_x$$

$$f_Y(y) = \sum_i \frac{f_X(x_i)}{|\det J_g(x_i)|}$$

2.1 Exercício

Seja $X \in S \rightarrow \mathbb{C}^N$ um vetor aleatório com PDF conjunta f_X . Seja ainda A uma matriz $N \times N$. Determine a PDF conjunta de $Y = AX$. Considere que A é não singular ($\det A \neq 0$).

3 Exemplo de PDF multivariada

PDF Gaussiana no caso monovariado:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

No caso multivariado:

$$f_X(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(C_{\underline{x}})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{x} - \mu_{\underline{x}})^T C_{\underline{x}\underline{x}}^{-1} (\underline{x} - \mu_{\underline{x}})\right)$$

Exemplo $N = 2$,

$$C_{XX} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & c \\ c & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad C_{XX}^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 - c^2} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -c \\ -c & \sigma_1^2 \end{bmatrix}$$

$$f_X(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \cdot (\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 - c^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{x} - \mu_{\underline{x}})^T \frac{1}{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 - c^2} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -c \\ -c & \sigma_1^2 \end{bmatrix} (\underline{x} - \mu_{\underline{x}})\right)$$