1 Exercício - Teorema da Inversão

Considere X uma variável aleatória com PDF f_X e CDF $F_X(x)$. Considere ainda $U \sim \mathscr{U}([0,1))$. Defina $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(u) = F^{-1}(u)$ (F é suposta inversível). Qual a PDF de $Y = g(U)$?

Resolução: Para um dado $y \in ([a,b])$, $\exists!\ u \in \mathbb{R}/g(u_i) = y$ e $u = F_X(y)$

$$f_Y(y) = \sum_i \frac{f_U(u_i)}{|g'(u_i)|}$$

$$f_Y(y) = \sum_i \frac{f_U(F_X(y))}{|g'(u_i)|}, \text{ não nulo em } \forall\ y \in ([a,b])$$

$$F_X(g(u)) = u,\ g \text{ é inversa de } F_X$$

$$F'_X(g(u)) \cdot g'(u) = 1$$

$$g'(u) = \frac{1}{F'_X(g(u))}$$

$$f_U(y) = \begin{cases} 0, y \notin ([a,b]), \\ \frac{f_U(F_X(y))}{|F'_X(g(F_X(y)))|^{-1}}, y \in ([a,b]) \end{cases}$$

$$g(F_X(y)) = y,\ \text{pois } g = F_X^{-1}$$

Finalmente:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, y \notin ([a,b]), \\ \frac{f_U(F_X(y))}{|F'_X(y)|^{-1}}, y \in ([a,b]) \end{cases}$$

$f_U(F_X(y))$ é cte. e vale 1

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, y \notin ([a,b]), \\ |F'_X(y)|, y \in ([a,b]) \end{cases}$$

A derivada da CDF é a PDF e o valor abs. é indiferente, obtemos:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, y \notin ([a,b]), \\ f_X(y), y \in ([a,b]) \end{cases}$$

$([a,b])$ é a imagem da função g considerando o domínio [0,1)

$f_Y(y) = f_X(y),$ se considerarmos y válido (na imagem de g)

2 Aplicação do Teorema da Inversão

Considere uma variável aleatória X com PDF $f_X(x)$ "linear entre -2 e 4"

a)

Implemente um gerador pseudoaleatório que gere realizações dessa v.a.

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, x \leq 2, \\ \frac{x+2}{18}, -2 < x \leq 4 \\ 0, x > 4, \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0, x \leq 2, \\ \int_{-2}^{x} \frac{\lambda+2}{18} d\lambda = \frac{x^2+4x+4}{36}, -2 < x \leq 4 \\ 1, x > 4, \end{cases}$$

$$g(u) = F_X^{-1}(x) = \begin{cases} -2, \text{ se } u = 0 \\ 4, \text{ se } u = 1 \\ 6\sqrt{u} - 2, \text{ se } 0 < u < 1 \end{cases}$$

b)

```
clear all; close all; clc;

% x values to test theoretical model
xt = linspace(-2.5, 4.5, 1e4);
f_Xteo = pdf_g(xt);
% Test using our (pseudo) random number generator
N = 1e6;
[x, x_values, f_X] = exampleRandGen(N);

% Plots
plot(x_values, f_X);
hold on;
plot(xt, f_Xteo);
set(findall(gcf,'type','text'), 'FontSize', 30, 'fontWeight', 'bold');
ylabel('f_X');
xlabel('x');
set(gcf, 'Color', 'w');
set(gca, 'FontName', 'Inconsolata Nerd Font', 'FontSize', 20, 'FontWeight', 'bold');
set(gca, 'XMinorTick', 'on', 'YMinorTick', 'on')
set(gca, 'XGrid', 'on', 'YGrid', 'on');
set(gca, 'XMinorGrid', 'on', 'YMinorGrid', 'on');
legend({['Empirical N=' int2str(N)], 'Theoretical'}, 'Location', 'northwest');

%% Using function from exercise B to gen random values
function [x, x_values, f_X] = exampleRandGen(N)
    if ~exist('N', 'var') || isempty(N)
        N = 100;
    end
```

```
    u = rand(N, 1);
    x = g(u);
    [f_X, x_values] = pdf_empirical_evaluation(x, min(round(N/10), 1000));
end

function x = g(u)
    x = zeros(size(u));
    x(u == 0) = -2;
    x(u == 1) = 4;
    x(u ~= 0 & u ~= 1) = -2 +6 * sqrt(u(u ~= 0 & u ~= 1));
end

function [p] = pdf_g(x)
    p = zeros(size(x));
    k = find(x > -2 & x < 4);
    p(k) = (x(k)+2)/18;
end

function [epdf, bins_centers] = pdf_empirical_evaluation(x, nbins)
    if ~exist('nbins', 'var') || isempty(nbins)
        nbins = 1000;
    end
    [h, bins_centers] = hist(x, nbins);
    bin_width = (bins_centers(2:end) - bins_centers(1:end-1));
    bin_width = mean(bin_width);
    epdf = (h/length(x))/bin_width;
end
```

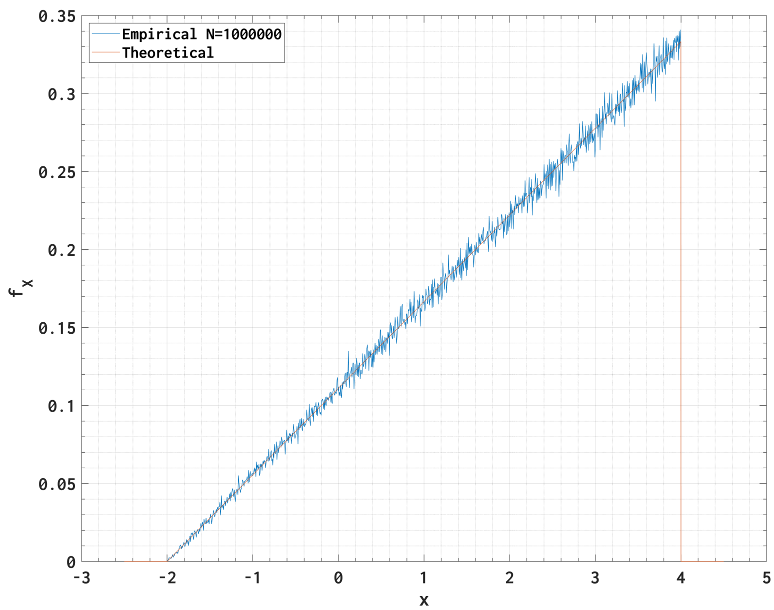

Figura 1: PDF para Modelo Teórico e Empírico do item b