1 Exercício: Soma de duas variáveis aleatórias

Seja $X \in S \to \mathbb{R}$ um vetor aleatório. Considere que as componentes X_1 e X_2 são independentes, e que têm PDFs marginais dadas por f_{X_1}, f_{X_2}. Calcule a PDF da variável aleatória dada por $Y = X_1 + X_2$. Note que temos $Y = g(X)$ com $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $g(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

Solução: Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por:

$$h(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Seja ainda $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$, podemos calcular a PDF de W no ponto $\mathbf{w}$, usando o teorema da PDF de uma função de vetor aleatório.

$$f_W(\mathbf{w}) = \sum_i \frac{f_X(x^{(i)})}{|\det J_h(x^{(i)})|}, \text{ com } \{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots\}$$
$$\text{o conjunto de todos os vetores } x^{(i)} \text{ tais que } h(x^{(i)}) = \mathbf{w}$$

Calculando a matriz jacobiana:

$$\det J_h = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$|\det J_h(x)| = 1$$

Logo:

$$f_W(\mathbf{w}) = f_X(w_2, y - w_2)$$
$$\text{Note que Y é a primeira componente de W. Logo:}$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(w_2, y - w_2), \text{ resposta geral para qualquer vetor X}$$
$$\text{Como o vetor X é independente:}$$
$$f_X(w_2, y - w_2) = f_{X_1}(w_2) \cdot f_{X_2}(y - w_2)$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(w_2) \cdot f_{X_2}(y - w_2) dw_2$$
$$\text{Concluindo que a soma de duas VAs independentes é a convolução das PDFs originais!}$$

2 Aplicação Prática - Vetores Gaussianos

Construímos um vetor aleatório $X \in S \to \mathbb{R}^N$ com distribuição normal. Considerando que X é não-correlato, a matriz C_{XX} será diagonal.

$$f_X(\underline{\mathrm{x}}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \cdot (\sigma_1^1 \cdot \sigma_2^2)}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{\mathrm{x}} - \mu_{\underline{\mathrm{x}}})^T \frac{1}{\sigma_1^1 \cdot \sigma_2^2} \begin{bmatrix} \sigma_2^1 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 \end{bmatrix} (\underline{\mathrm{x}} - \mu_{\underline{\mathrm{x}}})\right)$$

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma_2^2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^1 \cdot \sigma_2^2} \begin{bmatrix} \sigma_2^1 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \mu_1 & x_2 - \mu_2 \end{bmatrix}\right)$$

adiante: $f_X(x_1, x_2) = f_X(x_1) \cdot f_X(x_2)$

Algumas conclusões que podem ser obtidas:
Note que se um vetor aleatório gaussiano com 2 componentes é não-correlato então é independente. *Vimos que a PDF é separável para a Gaussiana.* **Isso não vale, em geral, para outras distribuições!**

Ademais, podemos notar outras propriedades como:

- Se um vetor aleatório é gaussiano, as componentes são gaussianas.
- Se um vetor aleatório $X \in S \to \mathbb{R}^N$ é gaussiano não-correlato, ele é independente.
- Se um vetor aleatório é gaussiano, a PDF é completamente determinada por pelo vetor média e matriz de covariâncias.
- A transformada de Fourier de uma PDF gaussiana é um gaussiana. No caso monovariado, variâncias maiores na PDF original em variâncias menores na transformada de Fourier.

2.1 Exemplo Computacional

Construir vetores aleatório com covariâncias não diagonal a princípio e obter as estimativas para mostrar a transformada KLT para obter uma matriz de covariâncias diagonal.

```
clear all; close all; clc;

% Para caso bidimensional,
N = 2;
Cxx = [1 0; 0 1];
mu = [0; 0];

x1 = linspace(-3*sqrt(Cxx(1,1)), 3*sqrt(Cxx(1,1)), 100);
x2 = linspace(-3*sqrt(Cxx(2,2)), 3*sqrt(Cxx(2,2)), 100);
[X1, X2] = meshgrid(x1, x2);
tpdf = zeros(size(X1));

for i = 1:size(X1, 1)
    for j = 1:size(X1, 2)
        x = [X1(i,j); X2(i,j)];
```

```
        tpdf(i, j) = 1/sqrt((2*pi)^N * det(Cxx)) * exp(-0.5 * (x-mu).' *
        inv(Cxx) * (x-mu));
    end
end

surf(X1, X2, tpdf)

% Em dimensão superior,
N = 5; % dimensão
M = 10000; % numero de realizações
x = randn(N, M); % cada coluna é uma realização
A = [1 2 3 4 5; 2 3 4 5 6; 3 4 5 6 7; 4 5 6 7 8; 5 6 7 8 9];

% Aplicando uma transformação AX R^N -> R^N
for k = 1:M
    x(1:N, k) = A * x(1:N, k);
end
[C, mu] = estimador_matriz_covariancias(x);

% Aplicando uma outra transformação TX R^N -> R^N
% seguindo KLT
y = zeros(size(x));

% Calculando autovalores e autovetores
[v, L] = eig(C);
% Sorteando autovetores e autovalores
[L, i] = sort(L, 'descend');
v = v(:, i);
T = v.'; % matriz de transformação KLT
for k = 1:M
    y(1:N, k) = T * x(1:N, k);
end
[CYY, muY] = estimador_matriz_covariancias(y);

function [C, mu] = estimador_matriz_covariancias(matriz_dados)
    M = size(matriz_dados, 2);
    mu = estimador_vetor_medias(matriz_dados);
    matriz_dados = matriz_dados - repmat(mu, 1, M);
    C = matriz_dados * matriz_dados.';
    C = 1 / (M -1) * C;
end

function mu - estimador_vetor_medias(matriz_dados)
    mu = sum(matriz_dados.').';
    mu = mu / size(matriz_dados, 2);
end
```