1 Conceito de Função de Variáveis Aleatórias & *Notação*

Ideia Intuitiva: Conhecemos a variável aleatória X e realizações de X. Aplicar uma função aos resultados de uma v.a. gera novos resultados que correspondem a uma v.a. diferente. A pergunta central é: se sabemos propriedades da v.a. original (e.g PDF, $\mathbb{E}, Var$), quais as propriedades respectivas no segundo caso?

1.1 Definição

Seja $X : S \to \mathbb{R}$. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função conhecida. Define-se a variável aleatória $Y : S \to \mathbb{R}$ como sendo uma função de X a partir da seguinte relação:

$$Y(s) = g(X(s)),\ \forall\ s \in S$$

Observe que esta definição permite determinar uma função de probabilidade induzida:

$$P_Y(A) = P_X(\{x \in \mathbb{R}/g(x) \in A\}), A \subseteq \mathbb{R}$$

P_Y: satisfaz os axiomas de Kolmogorov.

1.2 Notação

A partir dessa definição, adota-se a notação: $Y = g(X)$. Observe que esta notação generaliza o conceito de uma função numética, aplicando-a a uma variável aleatória. Generalizamos também o conceito de número.

Um número, por exemplo 3, é uma variável aleatória com uma PDF que é um impulso: $f_X = \delta(x-3)$, $\mathbb{E}(X) = 3$, $Var(X) = 0$.

$\mathbb{E}(X+5)$ denota o valor esperado de X adicionado ao valor esperado de 5 de tal forma que $\mathbb{E}(X+5) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(5)$

1.3 Breve questionamento sobre PDF de uma função de v.a.

Como determinar a PDF de uma função de uma variável aleatória, se conhecemos a PDf da v.a. original?

Um caminho para resolvermos esse problema é antes calcularmos a CDF de Y. Depois derivamos para obter a PDF.

$$\begin{aligned}
\text{CDF de } Y : F_Y(y) &= P_Y((-\infty, y]) \\
F_Y(y) &= P_X(\{x \in \mathbb{R}/g(x) \in (-\infty, y]\}) \\
F_Y(y) &= P_X(\{x \in \mathbb{R}/g(x) \leq y\}) \\
f_Y(y) &= \frac{d}{dy}F_Y(y)
\end{aligned}$$

E como $f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y)$ se relaciona com $f_X(x)$?

Consideremos uma caso particular mais simples:
Considere uma v.a. X de PDF conhecida f_X. Suponha que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é estritamente crescente e

inversível. Nesse caso:

$$F_Y(y) = P_X(\{x \in \mathbb{R}/g(x) \leq y\}) = P_X((-\infty, g^{-1}(y)])$$

Temos: $P_X((-\infty, x]) = F_X(x)$ e $P_X((-\infty, g^{-1}(y)]) = P_X(g^{-1}(y))$ paro caso inversível e estritamente crescente.

Calculando a derivada e fazendo $h(y) = g^{-1}(y)$:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$$
$$F_Y(y) = F_X(h(y))$$
$$f_Y(y) = F'_X(h(y)) \cdot h'(y)$$
$$f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot h'(y)$$
$$\text{lembrando que: } h'(y) = \frac{1}{g'(h(y))}$$
$$g(h(y)) = y$$
$$g'(h(y)) \cdot h'(y) = 1$$
$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \frac{1}{g'(g^{-1}(y))}$$

$$f_Y(y) = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))}$$

Sendo válida para g inversível e que $g^{-1}(y) > 0 \; \forall \; y \in \mathbb{R}$

Exercício:

Repita o problema considerando que g é inversível e estritamente decrescente.