1 Probabilidade Condicional

Seja S um espaço amostral e seja $\mathbb{E}$ um conjunto de eventos - $\mathbb{E} \subseteq P(S), \varnothing \in \mathbb{E}, S \in \mathbb{E}$. Seja $P : \mathbb{E} \to [0,1]$ uma função de probabilidade. Neste caso, se $A \in \mathbb{E}$ tal que $P(A) > 0$, então a probabilidade de $B \in \mathbb{E}$ condicionada por a A é definida por:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

OBS: Na probabilidade condicional, reescalonamos as probabilidades (dividindo por $P(A)$) de forma que $P(A|A)$ seja 1. **É como se A fosse o novo espaço amostral.**
$f(B) = P(B|A)$: esta função satisfaz os axiomas de Kolmogorov se considerarmos um novo $S = A$ e se substituirmos B por $B \cap A$. **Isso significa que a probabilidade condicional** é também uma função de probabilidade, porém com o espaço amostral mais restrito que o original.

Exemplo:

Jogamos um dado equilibrado de 6 faces e sabendo que o resultado é ímpar e maior que 3.

$$\begin{aligned}
S &= \{1,2,3,4,5,6\} \\
A &= \{4,5,6\} \\
B &= \{5\} \\
P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(\{5\})}{P(\{4,5,6\})} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

2 Análise Bayesiana (de *Bayes*)

Ex: Jogador de basquete com alta probabilidade de acerto em lance livre: $P(A|J_1) = 0.9$. Jogador amador com probabilidade de acerto baixa: $P(A|J_2) = 0.1$. Um dos jogadores é sorteado, com probabilidades diferentes: $P(J_1) = 0.05$ e $P(J_2) = 0.95$.
Pergunta: se um jogador foi sorteado e acertou, qual a probabilidade de que tenha sido J_1? *[Probabilidade a posteriori]*

$$P(J_1|A) = \frac{P(J_1 \cap A)}{P(A)} =?$$

$$P(A|J_1) = \frac{P(A \cap J_1)}{P(J_1)} \qquad P(A|J_2) = \frac{P(A \cap J_2)}{P(J_2)}$$

$$P(A \cap J_1) = P(A|J_1)P(J_1) \qquad P(A \cap J_2) = P(A|J_2)P(J_2)$$

$$P(A) = P((A \cap J_1) \cup (A \cap J_2)) \qquad \text{pois } (A \cap J_1) \cup (A \cap J_2) = A$$

Usando o axioma 3:

$$P(A) = P(A \cap J_1)P(A \cap J_2)$$
$$P(A) = P(A|J_1)P(J_1) + P(A|J_2)P(J_2)$$

Teorema de Bayes:

$$P(J_1|A) = \frac{P(A|J_1)P(J_1)}{P(A)}$$

Podemos realizar a substituição para obter:

$$\underbrace{P(J_1|A) = \frac{P(A|J_1)P(J_1)}{P(A|J_1)P(J_1) + P(A|J_2)P(J_2)}}_{\substack{\text{Caso em que } J_1 \cap J_2 = \varnothing \text{ e } J_1 \cup J_2 = S \\ (J_1 \text{ e } J_2 \text{ são partição de } S)}}$$

Isso leva a generalização do Teorema de Bayes:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) + \ldots + P(A|C_N)P(C_N)}$$

Resultado para o exemplo:

$$P(J_1|A) = \frac{0.9 \cdot 0.05}{0.9 \cdot 0.05 + 0.1 \cdot 0.95} = 0.32143$$
$$P(J_2|A) = 0.67857$$

3 Distribuições Condicionais

Seja uma variável $X : S \to \mathbb{R}$. Seja ainda $A \in \mathbb{P}(S)$ para o qual é definida a probabilidade $P(A)$, com A_X a imagem de A por X: $A_X = \{x \in \mathbb{R} / \exists\ s \in A \text{ com } X(s) = x\}$

Definição PDF Condicionada:

$f_{X|A_X}(x|A_x) = \frac{f_X(x)}{P_X(A_X)} = \frac{f_X(x)}{P(A)}$, se $x \in A_X$.

$f_{X|A_X}(x|A_x) = 0$, caso contário

Obs: $\frac{f_X(x)}{P_X(A_X)} = \frac{f_X(x)}{\int_{A_X} f_X(x)dx}$

Teorema: A integral da PDF condicionada revela a probabilidade condicional.

$$\int_{B_X} f_{X|A_X}(x|A_X)dx = P_X(B_X|A_X)$$