1 Breve Revisão

Considere uma v.a. $X \sim \mathscr{U}([-2,2))$. Considere ainda $g(x) = x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Qual o valor esperado de $Y = g(X)$? Qual a PDF de $Y = g(X)$?

Temos:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4},\ \forall\ x \in [-2,2) \\ 0,\ \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0,\ \text{se } x < 0 \\ 0,\ \text{se } x > 4 \\ (?),\ \text{se } 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$E(y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)dx$$

$$E(y) = \int_{-2}^{2} x^2 \cdot \frac{1}{4}dx = \frac{4}{3}$$

Para todo $y \in (0,4)$:

$x_1 = -\sqrt{y}$ e $x_2 = \sqrt{y} \rightarrow x_1^2 = x_2^2 = y$

$$f_Y(y) = \sum_i \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|} = \frac{f_X(\sqrt{y})}{|2\sqrt{y}|} + \frac{f_X(-\sqrt{y})}{|-2\sqrt{y}|}$$

$$f_Y(y) = 2 \cdot \frac{0.25}{2\sqrt{y}} = \frac{0.25}{\sqrt{y}}\ \forall\ y \in (0,4)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0,\ \text{se } x < 0 \\ 0,\ \text{se } x > 4 \\ \frac{0.25}{\sqrt{y}},\ \text{se } 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

2 Um outro exercício para casa...

Considere X uma variável aleatória com PDF f_X e CDF $F_X(x)$. Considere ainda $U \sim \mathscr{U}([0,1))$. Defina $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(u) = F^{-1}(u)$ (F é suposta inversível). Qual a PDF de $Y = g(U)$?

3 Observação sobre notação de Momentos de V.A.

Definimos o momento central de uma variável aleatória X como sendo:

$$M_C^n = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^n f_X(x)dx$$

Se definirmos $Y = g(X),$ com $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dado por $g(x) = (x-\mu)^n$

$$E(y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)dx$$

Logo: $M_C^n = E((x-\mu)^n)$

Da mesma forma: $M^n = E(X^n)$

Ademais, para a variância:

$$\text{Var} = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)dx = E((x-\mu)^2)$$