

1 Filtros de Wiener

Há um processo estocástico x contaminado por ruído η , tal que: $x_r = x + \eta$. Sendo que x é processo desejado e x_r é o processo obtido.

O filtro de Wiener objetiva minimizar o valor esperado do erro quadrático entre y (saída do filtro) e x .

$$e_n = y_n - x_n$$
$$\text{valor esperado do erro: } \mathbb{E} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |y_n - x_n|^2 \right]$$

O Filtro de Wiener é obtido minimizando esse erro médio quadrático esperado.

$$h^* = \underset{h}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |(h * x_n)_n - x_n|^2 \right]$$
$$h^* = \underset{h}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [h * (x + \eta)_{[n]} - x_{[n]}][h^* * (x^* + \eta^*)_{[n]} - x_{[n]}^*] \right]$$

O desenvolvimento das expressões envolverá os seguintes termos:

- $\mathbb{E}[x_{n_1} x_{n_2}^*] - R_{XX}[n_1, n_2]$, autocorrelação
- $\mathbb{E}[x_{n_1} \eta_{n_2}^*] - R_{x\eta}[n_1, n_2]$ correlação cruzada

Supondo que x é estacionário no sentido amplo:

$$r_x[n_2 - n_1] = R_{XX}[n_1, n_2]$$

Supondo que x e η são não-correlatos e que a média do ruído é nula e WSS também:

$$R_{X\eta}[n_1, n_2] = 0$$
$$r_\eta[n_2 - n_1] = R_{\eta\eta}[n_1, n_2]$$

Pontos de Interesse:

- Sinal e Ruído não correlatos para zerar a covariância cruzada entre sinal e ruído
- expectância do ruído é nula, para todos os instantes do tempo (lembrando que η é suposto WSS)

Solução:

$$H(f) = \frac{PSD_x(f)}{PSD_x(f) + PSD_\eta(f)}, \forall f \in \mathbb{R}$$

Supondo que η é branco (WSS e PSD cte.): $PSD_\eta(f) = k$, obtemos:

$$H(f) = \frac{PSD_x(f)}{PSD_x(f) + k}$$

2 Processos de Markov

Considere um processo $X : \mathbb{S} \rightarrow \mathcal{E}_S$. Considere instantes de tempo (ordenados) dados por $t_1, t_2, t_3, \dots, t_N$ que fazem parte do domínio de cada sinal em \mathcal{E}_S .

O processo X é um processo de Markov se e somente se:

$$f_X(t_N, x_N | t_{N-1}, x_{N-1}; t_{N-2}, x_{N-2}; \dots; t_1, x_1) = f_X(t_N, x_N | t_{N-1}, x_{N-1})$$

Em particular, as cadeias de Markov são processos de Markov correspondentes a sinais em tempo discreto em cada sinal pode assumir uma quantidade finita de valores, que passam a ser denominados *estados*.