1 Transformadas Lineares de Vetores Aleatórios

Considere o seguinte problema: temos um vetor X com matriz de covariâncias C_{XX} e queremos definir uma função g tal que $Y = g(X)$ tenha uma matriz de covariâncias diagonal. *Isso significa componentes não-correlatos mas não garante independência.*

Dois aspectos:

- Este problema tem solução em forma fechada;
- A solução é uma transformação linear;

Questiona-se o que acontece com uma matriz de covariâncias se aplicarmos uma transformada linear a X. Temos um vetor aleatório $X \in S \to \mathbb{C}^N$. Temos uma matriz determinística A e definimos:

$Y = AX$
Note que Y é um vetor aleatório:
$Y(s) = AX(s)$
Qual a matrix de covariâncias C_{YY}?

Obs: Se X é variável aleatória com variância σ_X^2. Se $Y = aX$, $\sigma_Y^2 = a^2 \cdot \sigma_X^2$

Solução:

$$
\begin{aligned}
C_{YY} &= \mathbb{E}[(Y-\mu_Y)(Y-\mu_Y)^H] \\
C_{YY} &= \mathbb{E}[(AX-\mu_Y)(AX-\mu_Y)^H] \\
\mu_Y &= \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[AX] = A\mu_X \\
C_{YY} &= \mathbb{E}[(AX-A\mu_X)(AX-A\mu_X)^H] \\
C_{YY} &= \mathbb{E}[(A(X-\mu_X))(A(X-\mu_X))^H] \\
\text{lembrando que: } (AB)^T &= B^T A^T \text{ e que também } (AB)^H = B^H A^H \\
C_{YY} &= \mathbb{E}[A(X-\mu_X)(X-\mu_X)^H A^H] \\
C_{YY} &= A\mathbb{E}[(X-\mu_X)(X-\mu_X)^H]A^H \\
C_{YY} &= AC_{XX}A^H \\
\text{no caso real: } C_{YY} &= AC_{XX}A^T \\
\text{no caso 1D: } \sigma_Y^2 &= a \cdot \sigma_X^2 \cdot a^* = |a|^2\sigma_X^2
\end{aligned}
$$

1.1 Desafio - Diagonalizando C_{XX}

Calcule A para que C_{XX} seja matriz diagonal.

2 Funções de Vetores Aleatórios

Considere um vetor aleatório $X \in S \to \mathbb{R}^N$. Seja uma função $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ e defina o vetor aleatório $Y \in S \to \mathbb{R}^N$ a partir de $Y(s) = g(X(s))$.

Qual a PDF de Y dada a PDF de X?

Lembrando o caso de variáveis aleatórias: $Y = g(X)$, para cada $y \in \mathbb{R}$ consideramos x_i tais que $g(x_i) = y$ e obtivemos:

$$f_Y(y) = \sum_i \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

No caso de vetores aleatórios: Para um dado $y \in \mathbb{R}^N$, considerar todos os $x_i \in \mathbb{R}^N$ com $g(x_i) = y$. *A função g recebe um vetor de entrada e retorna um vetor de g_N componentes.*

A derivada será substituida pelo Jacobiano de g:

$$\mathrm{J}_g(f) = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}\right|_x$$

$$f_Y(y) = \sum_i \frac{f_X(x_i)}{|det\ J_g(x_i)|}$$

2.1 Exercício

Seja $X \in S \to \mathbb{C}^N$ um vetor aleatório com PDF conjunta f_X. Seja ainda A uma matriz $N \times N$. Determine a PDF conjunta de $Y = AX$. Considere que A é não singular ($det\ A \neq 0$).

3 Exemplo de PDF multivariada

PDF Gaussiana no caso monovariado:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

No caso multivariado:

$$f_X(\underline{\mathrm{x}}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N det(C_{\underline{\mathrm{X}}})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{\mathrm{x}} - \mu_{\underline{\mathrm{X}}})^T C_{XX}^{-1} (\underline{\mathrm{x}} - \mu_{\underline{\mathrm{X}}})\right)$$

Exemplo $N = 2$,

$$C_{XX} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & c \\ c & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \qquad C_{XX}^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^1 \cdot \sigma_2^2 - c^2} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -c \\ -c & \sigma_1^2 \end{bmatrix}$$

$$f_X(\underline{\mathrm{x}}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \cdot (\sigma_1^1 \cdot \sigma_2^2 - c^2)}} exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{\mathrm{x}} - \mu_{\underline{\mathrm{X}}})^T \frac{1}{\sigma_1^1 \cdot \sigma_2^2 - c^2} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -c \\ -c & \sigma_1^2 \end{bmatrix} (\underline{\mathrm{x}} - \mu_{\underline{\mathrm{X}}})\right)$$