1 Autovalores e Autovetores

Dada uma matriz $M_{N\times N}$ um autovetor de $M_{N\times N}$ é um vetor **não-nulo** v tal que:

$$Mv = \lambda v, \text{ com } \lambda \in \mathbb{C}$$

Se v é um autovetor, então αv é um autovetor $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, com $\alpha \neq 0$.

$$\begin{aligned} M(\alpha v) &= \alpha(Mv), \text{ se } \alpha \text{ é escalar} \\ \text{Se v é autovetor, } Mv &= \lambda v \\ M(\alpha v) &= \alpha(Mv) = \lambda(\alpha v), \text{ logo} \end{aligned}$$

Se λ é autovalor, $\alpha\lambda$ não necessariamente é autovalor.

Dada a matriz M, como calcular os autovalores e autovetores?

$$\begin{aligned} Mv &= \lambda v, \text{ com } v \neq 0 \\ Mv &= I(\lambda v) = \lambda(Iv) \\ (M - \lambda I)v = 0 \end{aligned}$$

Concluímos que $\det(M - \lambda I) = 0$. Caso não fosse nulo seria possível obter uma inversa Q para $M - \lambda I$, o que conduziria a $v = Q = 0$, isso não pode ocorrer já que v é autovetor e não nulo.

$\det(M - \lambda I) = 0$ é polinômio de N-ésimo grau em N. Há N raízes, podendo haver raízes com multiplicidade maior que 1. *Existem N autovalores, podendo alguns serem repetidos.*

Para acharmos os autovetores correspondentes a λ_i:

$$\begin{aligned} Mv &= \lambda_i v \\ (M - \lambda_i I)v &= 0 \end{aligned}$$

Sistema de N equações, linear e homogêneo. *Dica: Colocar valor (unitário) em uma posição e solucionar.*

2 Decomposição Espectral

Teorema: Seja $M_{N\times N}$, com autovetores $v_1, v_2, \ldots, v_N$ linearmente independentes (a garantia de existência de N autovetores pode ser demonstrada). Sejam λ_1, λ_2 os autovalores correspondentes. Finalmente, defina V:

$$\begin{aligned} V_{N\times N} &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \ldots & v_N \end{bmatrix} \\ L_{N\times N} &= \begin{bmatrix} \lambda_k \end{bmatrix} \text{ se i=j, c.c 0 (autovalores na diagonal)} \end{aligned}$$

Então:

$$M = VLV^{-1}$$

Note que V é inversível já que tem colunas independentes.

Observação: Se M é hermitiana e positiva definida, V será matriz unitária ("ortonormal"). Isso é bastante cômodo! Logo: $V^H = V^{-1}$, se M é hermitiana e positiva definida.

3 Transformada de Karhunen-Loève

Acrônimo de KLT e também conhecida como Análise de componentes principais (PCA) para o campo da estatística.

Temos um vetor aleatório X (sinal estocástico em tempo discreto), com matriz de autocov. C_{XX}. Queremos encontrar uma transformada T tal que $Y = TX$, é um vetor aleatório (transformada de X) tal que: C_{YY} é matriz diagonal. Depois, fazer $W = AX$ tal que C_{WW} seja a matriz identidade.

$$Y = TX \rightarrow C_{YY} = TC_{XX}T^H$$

Sabemos que $C_{XX} = VLV^{-1}$, **positiva definida**

$$V_{N\times N} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_N \end{bmatrix} \quad L_{N\times N} = \begin{bmatrix} \lambda_k \end{bmatrix} \text{ se i=j, c.c 0 (autovalores na diagonal)}$$

$$C_{YY} = TVLV^{-1}T^H = TVLV^HT^H, \text{ fazendo } T = V^H$$

$$C_{YY} = V^HVLV^HV, \text{ mas } V^H = V^{-1}$$

$$C_{YY} = (V^{-1}V)L(V^{-1}V) = ILI = L$$

Fazendo $W = AX$, tal que $C_{WW} = I$.

$$\begin{aligned}
C_{WW} &= AC_{XX}A^H \\
C_{XX} &= VLV^{-1} = VLV^H \\
C_{WW} &= AVLV^HA^H \\
A &= (V\sqrt{L})^{-1} \\
C_{WW} &= (V\sqrt{L})^{-1}VLV^H((V\sqrt{L})^{-1})^H \\
C_{WW} &= (\sqrt{L})^{-1}V^{-1}VLV^H((\sqrt{L})^{-1}V^{-1})^H \\
C_{WW} &= (\sqrt{L})^{-1}V^{-1}VLV^H(V^{-1})^H((\sqrt{L})^{-1})^H \\
C_{WW} &= (\sqrt{L})^{-1}V^{-1}VLV^{-1}V((\sqrt{L})^{-1})^H \\
C_{WW} &= (\sqrt{L})^{-1}L(\sqrt{L})^{-1} \\
C_{WW} &= (\sqrt{L})^{-1}\sqrt{L}\sqrt{L}(\sqrt{L})^{-1} \\
C_{WW} &= I
\end{aligned}$$