

## Lista 3 - Processos Estocásticos

Davi de Alencar Mendes (16/0026415) [dmendes@aluno.unb.br](mailto:dmendes@aluno.unb.br)

Professor: Dr. Cristiano Jacques Miosso

### I Problema 1

Considere que  $X : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade  $f_X$ . Considere ainda a variável aleatória definida pela aplicação da função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  aos resultados de  $X$ , com  $g(x) = \alpha x + \beta$ , sendo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $\alpha \neq 0$ . Assim,  $Y = \alpha X + \beta$ . A este respeito, responda os seguintes itens.

#### A PDF de Y.

$$\begin{aligned} g(x) &= \alpha x + \beta & g'(x) &= \alpha \\ g^{-1} &= \frac{y - \beta}{\alpha} = x & f_Y(y) &= \frac{f_X\left(\frac{y - \beta}{\alpha}\right)}{\alpha} \end{aligned}$$

#### B Valor esperado de Y usando valor esperado de X (LOTUS)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}[g(x)] \\ \mathbb{E}[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha x + \beta) f_X dx = \alpha \mathbb{E}[X] + \beta \end{aligned}$$

#### C Variância de Y usando Variância de X

$$\begin{aligned} Var[X] &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \\ Var[Y] &= \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2 \\ \mathbb{E}[Y^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha x + \beta)^2 \cdot f_X dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2) \cdot f_X dx \\ \mathbb{E}[Y^2] &= \alpha^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X dx + 2\alpha\beta \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x f_X dx + \beta^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_X dx \\ \mathbb{E}[Y^2] &= \alpha^2 \mathbb{E}[X^2] + 2\alpha\beta \mathbb{E}[X] + \beta^2 \\ Var[Y] &= \alpha^2 \mathbb{E}[X^2] + 2\alpha\beta \mathbb{E}[X] + \beta^2 - (\alpha^2 (\mathbb{E}[X])^2 + \beta^2) \\ Var[Y] &= \alpha^2 Var[X] \end{aligned}$$

### II Problema 2

Considere que  $X : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo  $[-1, 4)$ . Seja ainda  $Y = 3X + 8$ .

### A PDF de Y

$$\begin{aligned} X &\sim U[-1, 4) & Y &= 3X + 8, \alpha = 3, \beta = 8 \\ f_X(x) &= \begin{cases} \frac{1}{5}, & \text{se } -1 \leq x < 4, \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} & f_Y(y) &= \frac{f_X\left(\frac{y-8}{3}\right)}{3} = \begin{cases} \frac{1}{15}, & \text{se } 5 \leq y < 20 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \end{aligned}$$

### B Valor Esperado de Y

$$\mathbb{E}[Y] = \int_5^{20} y f_Y(y) dy = \int_{-1}^4 (3x + 8) f_X(x) dx = 3\mathbb{E}[X] + 8 = 12.5$$

### C Variância de Y

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y] &= \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2 \\ &\dots \\ \text{Var}[Y] &= \alpha^2 \text{Var}[X] = 9 \cdot \text{Var}[X] = 18.75 \end{aligned}$$

## III Problema 3

... Uma variável X do tipo gaussiano com média 3 e variância 4. Considere  $Y = 2X - 6$ , e responda os itens seguintes.

### A PDF de Y

$$\begin{aligned} X &\sim \mathcal{N} \begin{cases} \mu = 3 \\ \sigma^2 = 4 \end{cases} & Y &= 2X - 6 \\ f_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) & f_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{\left(\frac{y-\beta}{\alpha} - \mu\right)^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

### B Média e Variância de Y

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= \alpha\mathbb{E}[X] + \beta = 2 \cdot 3 - 6 = 0 \\ \text{Var}[Y] &= \alpha^2 \text{Var}[X] = 2^2 \cdot 4 = 16 \end{aligned}$$

**C Calcule o momento central de ordem 3 normalizado. O valor era esperado?**

Pela definição (para uma variável aleatória  $X$ ):

$$\begin{aligned} \text{Skew}[X] &= \tilde{\mu}_3 = \mathbb{E} \left[ \left( \frac{X - \mu}{\sigma} \right)^3 \right] = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \\ \text{Skew}[X] &= \frac{\mathbb{E}[X^3] - 3\mu\mathbb{E}[X^2] + 3\mu^2\mathbb{E}[X] - \mu^3}{\sigma^3} \\ \text{Skew}[X] &= \frac{\mathbb{E}[X^3] - 3\mu(\mathbb{E}[X^2] - \mu\mathbb{E}[X]) - \mu^3}{\sigma^3} \\ \text{Skew}[X] &= \frac{\mathbb{E}[X^3] - 3\mu\sigma^2 - \mu^3}{\sigma^3} \end{aligned}$$

Buscando  $\mathbb{E}[Y^3]$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y^3] &= \int_{-\infty}^{\infty} y^3 f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} (2x - 6)^3 f_X(x) dx \\ \mathbb{E}[Y^3] &= \int_{-\infty}^{\infty} (8x^3 - 72x^2 + 216x - 216) f_X(x) dx \\ \mathbb{E}[Y^3] &= \int_{-\infty}^{\infty} (8x^3) f_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} (-72x^2) f_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} (216x) f_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} (-216) f_X(x) dx \\ \mathbb{E}[Y^3] &= \int_{-\infty}^{\infty} (8x^3) f_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} (-72x^2) f_X(x) dx + 216 \cdot \mathbb{E}[X] + 216 \end{aligned}$$

As integrais restantes são integrais de Laplace com solução para:

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^n \cdot e^{-\alpha \cdot z^n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n+1) \pi^{1/2}}{2^{n/2} \alpha^{(n+1)/2}}$$

Aplicando para as integrais anteriores a mudança:  $z = x - \mu$ ,  $dx = dz$  é possível obter (*omitindo boa parte do desenvolvimento*)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y^3] &= 8 \cdot (\mu \cdot \sigma^2 + \mu^3) - 72 \cdot (\mu^2 + \sigma^2) + 216 \cdot \mu + 216 \\ \mathbb{E}[Y^3] &= 8 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 4 + 3^3) - 72 \cdot (3^2 + 4) + 216 \cdot 3 + 216 = 0 \\ \text{Skew}[Y] &= 0 \end{aligned}$$

O valor era esperado já que VAs do tipo gaussiano são totalmente descritas em termos de média e variância (2 momentos somente).

**D Trace o gráfico da PDF de  $Y$  e compare com o de  $X$ . O que muda?**

## IV Problema 4

Seja  $X$  um vetor aleatório de 2 componentes com distribuição uniforme em  $[-1, 4] \times [-2, 8]$ . Responda os seguintes itens.

**A PDF Conjunta de  $X$**

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad X \sim \mathcal{U}[-1, 4] \times [-2, 8]$$

$$\int_{-1}^4 \int_{-2}^8 c \cdot dx_1 dx_2 = 1, \quad c = \frac{1}{50} \quad f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{50}$$

## B PDF Marginal da 1a componente

$$f_{x_1}(x_1) = \int_{-2}^8 \frac{1}{50} dx_2 = \frac{1}{5}$$

## C PDF Marginal da 2a componente

$$f_{x_2}(x_2) = \int_{-1}^4 \frac{1}{50} dx_1 = \frac{1}{10}$$

## D Vetor de valores esperados

$$\mathbb{E}[X] = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

## E Vetor de variâncias

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[x_1^2] &= \int_{-1}^4 x_1^2 \frac{1}{5} dx_1 = \frac{x^3}{15} \Big|_{-1}^4 = \frac{13}{3} \\ \text{Var}[x_1] &= \frac{13}{3} - (1.5)^2 = \frac{25}{12} \\ \mathbb{E}[x_2^2] &= \int_{-2}^8 x_2^2 \frac{1}{10} dx_2 = \frac{x^3}{10} \Big|_{-2}^8 = \frac{52}{3} \\ \text{Var}[x_2] &= \frac{52}{3} - (3)^2 = \frac{25}{3} \\ \text{Var}[X] &= \begin{bmatrix} \frac{25}{12} & \frac{25}{3} \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

## F Matriz de Autocovariâncias

$$\begin{aligned} R_X &= \mathbb{E}[XX^T] \\ C_X &= \mathbb{E}[(X - \mu_X)(X - \mu_X)^T] \\ C_X &= R_X - \mu_X \mu_X^T \\ R_X &= \begin{bmatrix} \mathbb{E}[x_1^2] & \mathbb{E}[x_1 x_2] \\ \mathbb{E}[x_2 x_1] & \mathbb{E}[x_2^2] \end{bmatrix} \\ \mathbb{E}[x_2 x_1] &= \mathbb{E}[x_1 x_2] = \int_{-1}^4 \int_{-2}^8 x_1 x_2 \cdot \frac{1}{50} dx_1 dx_2 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$R_X = \begin{bmatrix} \frac{13}{2} & \frac{9}{3} \\ \frac{9}{2} & \frac{52}{3} \end{bmatrix} \quad \mu_X \mu_X^T = \begin{bmatrix} 2.25 & 4.5 \\ 4.5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$C_X = \begin{bmatrix} \frac{25}{12} & 0 \\ 0 & \frac{26}{3} \end{bmatrix}$$

### G As componentes são correlatas ou não?

Não são!  $C_X$  é matrix diagonal.

### H As componentes são dependentes ou não?

São independentes visto que a PDF pode ser fatorada.

## V Problema 5

Sobre o Problema 4, determine:

### A $P(X_2 > X_1)$ ?

$$P(X_2 > X_1) = \int_{-1}^4 \int_{x_1}^8 \frac{1}{50} dx_2 dx_1 = 0.65$$

$$P(X_1 > X_2) = \int_{-1}^4 \int_{-2}^{x_1} \frac{1}{50} dx_2 dx_1 = 0.35$$

### B $P(X_2 > 2X_1)$ ?

$$P(X_2 > 2X_1) = \int_{-1}^4 \int_{2x_1}^8 \frac{1}{50} dx_2 dx_1 = 0.5$$

## VI Problema 6

$$f_X(x_1, x_2, x_3) = \frac{3}{4\pi a^3}, \text{ se } \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} < a$$

$$P[A] = \int \int \int_S f_X(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3, \text{ com } S = \{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} < 2a/3\}$$

$$\text{Em coordenadas esféricas} \begin{cases} r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ x_1 = r \sin \phi \cos \theta \\ x_2 = r \sin \phi \sin \theta \\ x_3 = r \cos \phi \end{cases} \quad dx_1 dx_2 dx_3 = r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta$$

$$P[A] = \frac{3}{4\pi a^3} \int_0^{2a/3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \phi d\theta d\phi dr$$

A integral é bastante simples e corresponde a uma fração do volume total já que  $f_X$  é uniforme ao longo do raio. Por esse motivo  $P[A]$  pode ser obtido como uma razão dos volumes:  $(2a/3)^3/a^3 = 8/27 \approx 0.3$ .

## VII Problema 7

Considere que  $X$  é um vetor aleatório de 2 componentes com:

$$C_{XX} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \mu_X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$Y = AX + b, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

### A Matriz de Autocovariâncias de $Y$ ?

$$\begin{aligned} \mu_Y &= \mathbb{E}[AX + b] = A\mu_X + b \\ Y - \mu_Y &= A(X - \mu_X) \\ C_{YY} &= \mathbb{E}[(Y - \mu_Y)(Y - \mu_Y)^H] \\ C_{YY} &= \mathbb{E}[(A(X - \mu_X))(A(X - \mu_X))^H] \\ \text{com } (AB)^T &= B^T A^T \text{ e também } (AB)^H = B^H A^H \\ (A(X - \mu_X))^H &= (X - \mu_X)^H A^H \\ C_{YY} &= \mathbb{E}[A(X - \mu_X)(X - \mu_X)^H A^H] \\ C_{YY} &= A \mathbb{E}[(X - \mu_X)(X - \mu_X)^H] A^H \\ C_{YY} &= AC_{XX}A^H \end{aligned}$$

Aplicando em  $C_{XX}$ :

$$C_{YY} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 15 \\ 15 & 40 \end{bmatrix}$$

### B Matriz de autocorrelações de $Y$ ?

$$\begin{aligned} R_{YY} &= \mathbb{E}[YY^H] \\ R_{YY} &= \mathbb{E}[(AX + b)(AX + b)^H] \\ R_{YY} &= \mathbb{E}[(AX + b)((AX)^H + b^H)] \\ R_{YY} &= \mathbb{E}[AXX^H A^H + AXb^H + bX^H A^H + bb^H] \\ R_{YY} &= AR_{XX}A^H + (A\mu_X)b^H + b(A\mu_X)^H + bb^H \end{aligned}$$

Buscando  $R_{XX}$ :

$$\begin{aligned} C_{XX} &= R_{XX} - \mu_X \mu_X^T \\ R_{XX} &= \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 13 \end{bmatrix} \\ R_{YY} &= \begin{bmatrix} 105 & 96 \\ 96 & 121 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## C Valor Médio de $Y$

$$\mu_Y = A \cdot \mu_X + b = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}$$

## D O vetor $Y$ é correlato?

Sim, o vetor é correlato.  $C_{YY}$  não é matriz diagonal.

## E O vetor $Y$ é independente?

Não é independente.

## F Qual a PDF de $Y$ , supondo distribuição gaussiana?

$$f_Y(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det C_{YY}}} \cdot \exp \left( -\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mu_Y)^T C_{YY}^{-1} (\mathbf{y} - \mu_Y) \right)$$
$$C_{YY}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{8}{147} & \frac{-1}{49} \\ \frac{-1}{49} & \frac{8}{245} \end{bmatrix}, \quad \det C_{YY} = 735,$$
$$f_Y(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \cdot 735}} \cdot \exp \left( -\frac{4y_1^2}{147} + y_1 \frac{(y_2 + 15)}{49} - \frac{4y_2^2}{245} + \frac{27y_2}{245} - \frac{459}{245} \right)$$

## G Matriz de Transformação $M$ e vetor $v$ tal que $Z = MY + v$ seja não correlato e possua média nula

Para obter o vetor  $v$  basta:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z] &= \mathbb{E}[MY + v] = M\mu_Y + v = 0 \\ v &= -M\mu_Y \end{aligned}$$

### G.1 EVD - Decomposição Espectral (*Eigenvalue Decomposition*)

Em uma matriz  $A_{N \times N}$ , Solucionando  $(A - \lambda I)k = 0$  é possível encontrar os autovetores associados aos autovalores  $k$ . O polinômio característico  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  possui  $N$  raízes, algumas com possível multiplicidade maior que 1.

Pelas características dos autovetores é possível decompor:

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v \\ AQ &= Q\Lambda \\ A &= Q\Lambda Q^{-1} \end{aligned}$$

- $A_{N \times N}$  - matriz com  $n$  autovetores  $q_i$  linearmente independentes
- $\Lambda$  - matriz diagonal com autovalores ao longo da diagonal principal ( $\Lambda_{ii} = \lambda_i$ )
- $Q$  - matriz com  $i$ -ésima coluna sendo autovetor  $q_i$  de  $A$ .

Algumas propriedades:

1. Se  $A$  é simétrica,  $Q$  (matriz formada pelos autovetores de  $A$ ) é ortogonal com  $Q^{-1} = Q^T$
2.  $[\Lambda^{-1}]_{ii} = 1/\lambda_i$ , pois  $\Lambda$  é diagonal
3. Se  $A$  é hermitiana e positiva definida,  $Q$  será unitária com  $Q^{-1} = Q^H$

## G.2 Buscando a Matriz de Transformação $M$

$$C_{ZZ} = MC_{YY}M^H, \text{ fazendo } C_{YY} = Q\Lambda Q^{-1}$$

$$C_{ZZ} = MQ\Lambda Q^{-1}M^H = MQ\Lambda Q^H M^H, \text{ fazendo } M = Q^H = Q^{-1}$$

$$C_{ZZ} = Q^{-1}Q\Lambda Q^{-1}Q = I\Lambda I = \Lambda$$

$$C_{ZZ} = \Lambda, \text{ para } M = Q^H$$

Os dados do problema são:

$$\begin{aligned} C_{YY} &= \begin{bmatrix} 24 & 15 \\ 15 & 40 \end{bmatrix} & p(\lambda) &= \lambda^2 - 64\lambda + 735 \begin{cases} \lambda_1 = 15 \\ \lambda_2 = 49 \end{cases} \\ C_{YY} - 15I &= \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 15 & 25 \end{bmatrix} & (\text{RREF}) & \begin{bmatrix} 1 & 5/3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = m_1 + \frac{5}{3}m_2 = 0 \\ v_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 5/3 \end{bmatrix}, & \hat{v}_1 &= \frac{\sqrt{34}}{34} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} \\ C_{YY} - 49I &= \begin{bmatrix} -25 & 15 \\ 15 & -9 \end{bmatrix} & (\text{RREF}) & \begin{bmatrix} 1 & -3/5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = m_1 - \frac{3}{5}m_2 = 0 \\ v_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ -3/5 \end{bmatrix}, & \hat{v}_2 &= \frac{\sqrt{34}}{34} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente, obtemos  $Q, \Lambda, v$ :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\sqrt{34}}{34} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \\ \Lambda &= \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 49 \end{bmatrix} \\ M = Q^{-1} &= \frac{\sqrt{34}}{34} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \\ v = M\mu_Y &= \frac{\sqrt{34}}{17} \begin{bmatrix} 9 \\ 36 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## VIII Problema 8

Considere que  $X$  é um vetor aleatório com função de densidade de probabilidade dada por

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{2}}{16\pi} \exp\left(-\frac{9}{64}x_1^2 + \frac{1}{16}x_1x_2 - \frac{1}{16}x_2^2\right)$$



### A Calcule $M$ tal que $Y = MX$ seja um vetor não correlato

É possível usar uma PDF gaussiana multivariada como protótipo para  $f_X(\mathbf{x})$  de maneira que

$$f_X(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det C_{XX}}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T C_{XX}^{-1} \mathbf{x}\right)$$
$$C_{XX}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad C_{XX} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \det C_{XX} = (4 \cdot \sqrt{2})^2$$
$$\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T C_{XX}^{-1} \mathbf{x}\right) = \left(-\frac{9}{64} x_1^2 + \frac{1}{16} x_1 x_2 - \frac{1}{16} x_2^2\right)$$

Buscando  $C_{XX}^{-1}$

$$\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T C_{XX}^{-1} \mathbf{x}\right) = \left(-\frac{9}{64} x_1^2 + \frac{1}{16} x_1 x_2 - \frac{1}{16} x_2^2\right)$$
$$-\frac{1}{2} (ax_1^2 + (b+c)x_1 x_2 + dx_2^2) = \left(-\frac{9}{64} x_1^2 + \frac{1}{16} x_1 x_2 - \frac{1}{16} x_2^2\right)$$
$$a = 9/32 \quad b = c = -1/16 \quad d = 1/8, \text{ b é igual a c por simetria de } C_{XX}$$

Montando  $C_{XX}$ :

$$C_{XX}^{-1} = \begin{bmatrix} 9/32 & -1/16 \\ -1/16 & 1/8 \end{bmatrix} \quad C_{XX} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Aplicando a KLT com a matriz  $M$  e realizando EVD de  $C_{XX}$

$$C_{YY} = MC_{XX}M^H$$
$$C_{XX} = Q\Lambda Q^{-1}$$
$$\text{com } M = Q^{-1}, C_{YY} = \Lambda$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{(\sqrt{41}-5)}{4} & \frac{\sqrt{41}+5}{4} \end{bmatrix} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} -\frac{(\sqrt{41}-13)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(\sqrt{41}+13)}{2} \end{bmatrix} \quad M = Q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5\sqrt{41}}{82} + \frac{1}{2} & -\frac{2\sqrt{41}}{41} \\ \frac{1}{2} - \frac{5\sqrt{41}}{82} & \frac{2\sqrt{41}}{41} \end{bmatrix}$$

### B O vetor $Y$ é independente ou dependente?

$C_{YY} = \Lambda, \det C_{YY} \neq 0$ . É independente (pdf pode ser fatorada) em duas exponenciais.

### C Forneça gráfico da PDF de $X$

### D Forneça gráfico da PDF de $Y$ e compare como o item anterior

## IX Problema 9

Seja  $X : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}^N$  um vetor aleatório, com  $N$  sendo inteiro positivo. Seja ainda  $X_i$  a variável aleatória correspondente à  $i$ -ésima componente de  $X$ , com  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Responda os itens.

**A Determine a PDF de  $X_1 + X_2$ . Qual a operação entre as PDFs de  $X_1$  e  $X_2$  que gera essa PDF?**

Iniciamos com  $g(X) = Y = X_1 + X_2$ . Para tal

$$h(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad J_h = \det \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Com  $w \in \mathbb{R}^2$ , temos a PDF de  $W$  no ponto  $w$ :

$$f_W(w) = \sum_i \frac{f_X(x^{(i)})}{|\det J_h(x^{(i)})|}, \text{ com } \{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots\}$$

Conjunto de todos os vetores  $x^{(i)}$  tais que  $g(x^{(i)}) = w \quad \forall w \in \mathbb{R}^2, x^{(i)} = \begin{bmatrix} w_2 \\ w_1 - w_2 \end{bmatrix}$

Fazemos:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(w_2, y - w_2) dw_2 \text{ (caso geral)}$$

Para o caso em que as componentes de  $X$  são independentes:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(w_2) \cdot f_X(y - w_2) dw_2 \text{ (note que trata-se de uma convolução!)}$$

**B Determine PDF de  $X_1^2 + X_2^2$  para  $X_1, X_2$  gaussianas e independentes entre si**

**C As variáveis  $X_1, X_2$  são independentes?**

Considere que a correlação entre  $X_1$  e  $X_2$  vale 400, que as médias de  $X_1$  e  $X_2$  são, respectivamente, 10 e 20, que as variâncias sejam 4 e 16 respectivamente.

Pelos dados da questão:

$$\mathbb{E}[X_2 X_1] = \mathbb{E}[X_1 X_2] = 400 \quad \mu_X = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} \quad Var[X] = \begin{bmatrix} 4 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Buscando a matriz de correlação

$$Var[X_i] = \mathbb{E}[X_i^2] - (\mathbb{E}[X_i])^2$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 16 \end{bmatrix} = \mathbb{E}[X^2] - \left( \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} \right)^2$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \begin{bmatrix} 104 \\ 416 \end{bmatrix}$$

$$R_{XX} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[X_1^2] & \mathbb{E}[X_1 X_2] \\ \mathbb{E}[X_2 X_1] & \mathbb{E}[X_2^2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 104 & 400 \\ 400 & 416 \end{bmatrix}$$

$$C_{XX} = R_{XX} - \mu_X \mu_X^T = \begin{bmatrix} 4 & 200 \\ 200 & 16 \end{bmatrix}$$

SOS: Algo deu errado aqui!  $C_{XX}$  possui autovalores negativos. Determinante igualmente negativo!

## D Igual ao anterior (?)

O problema D está igual ao item C. Possível *typo*.

## X Problema 10

Seja  $X : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}^N$  um vetor aleatório, com distribuição gaussiana.

Repetindo parte do procedimento do exercício anterior:

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} & \mu_X &= \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} & \mathbb{E}[X^2] &= \begin{bmatrix} 2 \\ 20 \end{bmatrix} \\ R_{XX} &= \begin{bmatrix} 2 & 100 \\ 100 & 20 \end{bmatrix} & C_{XX} &= \begin{bmatrix} 1 & 96 \\ 96 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Algo está errado (???)  $C_{XX}$  possui autovalores negativos. Determinante igualmente negativo!

*That's all Folks*