1 Vetores Aleatórios - PDF Conjunta

Lembrando do caso de uma variável aleatória no qual:

$$\int_a^b f_X(x)dx = P_X((a,b])$$

Para 3 variáveis:
$$\int\int\int_V f_X(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3 = P_X(V),$$
no qual V é um conjunto de pontos em $\mathbb{R}^3$.

Para definirmos formalmente a PDF precisamos do conceito de CDF.

1.1 CDF de um Vetor Aleatório

Podemos fazer:

$$F_X(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_N) = P_X((-\infty,x_1]\times(-\infty,x_2]\times\ldots(-\infty,x_N])$$
$$\text{com a expansão para: } \{1,2\}\times\{3,4\} = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$$
$$\text{o operador } \times \text{ é o produto cartesiano}$$

1.2 Definição da PDF Conjunta

É a função obtida pela derivação parcial da CDF com respeito a todas as componentes do vetor. No exemplo em que $F_X(x_1,x_2) = P_X(A)$, temos $f_X(x_1,x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 x_2}F_X(x_1,x_2)$.

$$f_X(x_1,x_2,\ldots,x_N) = \frac{\partial^N}{\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_N}F_X(x_1,x_2,\ldots,x_N).$$

2 PDF Marginal de um Vetor Aleatório

Considere um vetor aleatório X de N componentes. Considere ainda uma função $g:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$, tal que $g(x)$ é i-ésima componente de X, com $1\le i\le N$ com i inteiro.

Temos uma variável aleatória $Y = g(X)$, definido por $Y(s) = g(X(s))$. A PDF de X com respeito a i-ésima componente é definida como a PDF de Y. Denominada PDF Marginal de X na i-ésima componente.

Pergunta: se temos a PDF conjunta de X, como calcularmos a PDF marginal com respeito à i-ésima componente?

$$f_{X_i}(x_i) = \underbrace{\int\int}_{N-1\text{ integrais}} f_X(x_1,x_2,\ldots,x_N)\underbrace{dx_2dx_{i-1}dx_{i+1}dx_{i+2}dx_N}_{dx_j\ \forall j\in\{1,\ldots,N\}-\{i\}}.$$

Extensão do conceito da PDF Marginal para m componentes do vetor X difere em definirmos a seguinte função de vetor aleatório:

$$g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m, m \leq N, .$$

com g(x) o vetor formado pelas m componentes escolhidas de $Y = g(X)$ é um vetor aleatório de m componentes.

A PDF conjunta de Y é uma PDF Marginal de X:

$$f_{X_1, X_2, \ldots, X_M}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m) = \underbrace{\int \int}_{N-m \text{ integrais}} f_X(x_1, x_2, \ldots, x_N) \underbrace{dx_2 dx_{i-1} dx_{i+1} dx_{i+2} dx_N}_{\text{N-m componentes de integração}} .$$

Observação: Sabendo a PDF conjunta de um vetor, conseguimos calcular a PDF marginal com respeito a quaisquer grupo de componentes (integrando com respeito a todos os outros componentes). O contrário nem sempre é possível (calcular a conjunta a partir de marginais).

Breve Exemplo

Considere X um vetor aleatório $X : S \to \mathbb{R}^2$ e $f_x(x_1, x_2) = x_1 + x_1 x_2, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ tais que $0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2}, 0 \leq x_2 \leq K$, com $K \in \mathbb{R}$ e $f_X(x_1, x_2) = 0$, caso contrário.

Ponto Inicial: Determinar o valor de K para definir a PDF Conjunta.

A Qual a PDF Marginal de X_1?
Integrar X_2 de $0 \to K$

B Qual a PDF Marginal de X_2?
Integrar X_1 de $0 \to 0.5$

C Qual a probabilidade de $X_1 > X_2$?
Considerar a região total em que $X_1 > X_2$ (região abaixo da reta $y = x$) e integrar para obter probabilidade.

D Qual a probabilidade de X_2 estar entre $\frac{K}{2}$ e K?
É possível usar a PDF marginal nesse caso.

E X_1 e X_2 são dependentes ou independentes?
Essa é *spoiler* de aulas posteriores.