Lista 2 - Processos Estocásticos

Davi de Alencar Mendes (16/0026415) dmendes@aluno.unb.br

Problema 1

(Adaptado de [2]) Num sistema de comunicação digital, um bit 0 ou 1 é transmitido com probabilidade respectivamente igual a P_0 ou P_1. Devido à presença de ruído no canal, um 0 transmitido pode ser recebido como 1 com probabilidade β e um 1 transmitido pode ser recebido como 0 também com probabilidade β. Considere agora que foi recebido um bit interpretado como 1. Qual a probabilidade de que o bit transmitido tenha de fato sido 1?
A probabilidade procurada é $P(T_1|R_1)$ para resolução. Sabendo que:

$$P(T_0) = P_0 \qquad P(R_1|T_0) = \beta$$
$$P(T_1) = P_1 \qquad P(R_1|T_1) = \beta$$

$$\begin{aligned}
P(T_1|R_1) &= \frac{P(R_1|T_1)P(T_1)}{P(R_1)} \\
P(R_1) &= \frac{P(R_1|T_1)P(T_0)}{\beta P_0} + \frac{P(R_1|T_1)P(T_1)}{(1-\beta)P_1} \\
P(T_1|R_1) &= \frac{(1-\beta)P_1}{\beta P_0 + (1-\beta)P_1}
\end{aligned}$$

.

Problema 2

Considere que, em um sistema de comunicação digital, N bits são transmitidos em sequência, sendo cada bit independente dos demais. A probabilidade de que um bit seja recebido corretamente no receptor é p. Acerca desta situação, responda os itens seguintes.

A.Deduza a expresão para a probabilidade de que exatamente $(1 \leq k \leq N)$ bits sejam recebidos corretamente. *Trata-se da fórmula da probabilidade em uma distribuição binomial.*

Espaço Amostral: $S = \{(0,0,\dots,0),(0,0,\dots,1),\dots,(0,0,\dots,1,1),\dots,(1,1,\dots,1),\dots\}$

Cada subconjunto contém N_P elementos. Temos que a cardinalidade de S é: $|S| = 2^{N_P}$

$$\begin{aligned}
P(I_C^n) &= p \qquad I_C^n \rightarrow \text{bit } n \text{ é uma transmissão correta} \\
I_0^n &= \{(0,0_n,\dots,0),(0,0_n,\dots,1),\dots,(0,0_n,\dots,1,1),\dots,(1,0_n,\dots,1),\dots\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(E_0^{1,2,\dots,k}) &= \text{? bits } 1,2,3,\dots,k \text{ com transmissão correta} \\
E_0^{1,2,\dots,k} &= \{0_1,0_2,\dots,0_k,1_1,1_2,\dots,1_{N-k}\} \\
E_0^{1,2,\dots,k} &= I_0^1 \cap I_0^2 \cap I_0^3 \dots \cap I_0^k \cap \overline{I_0^{k+1}} \cap \overline{I_0^{k+2}} \cap \overline{I_0^N} \\
P(E_0^{1,2,\dots,k}) &= P(I_0^1)\cdot P(I_0^2)\cdot P(I_0^k)\cdot P(\overline{I_0^{k+1}})\cdot P(\overline{I_0^{k+2}})\cdot P(\overline{I_0^N}) \\
P(E_0^{1,2,\dots,k}) &= \underbrace{p\cdot p\dots\cdot p}_{k}\cdot\underbrace{(1-p)\cdot(1-p)\dots(1-p)}_{N-k} \\
P(E_0^{1,2,\dots,k}) &= p^k\cdot(1-p)^{N-k}
\end{aligned}$$

Agora, precisamos generalizar o resultado para o caso de k indivíduos quaisquer, não só os k primeiros. Como existem $\binom{N}{k}$ possibilidades de extrair k pessoas a partir do grupo de N_P pessoas, e como os conjuntos $E^{\cdots}$ são disjuntos:

$P(\{k\}) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$, sendo k a união de todos os $E_C^{(\dots)}$.

B.Calcule o valor esperado do número de recepções corretas, dentre as N transmissões.

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \sum_{k=0}^{N} k \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

Expandindo o primeiro termo vemos que iguala-se a zero e é obtido:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{N} \frac{N!}{(k-1)!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k}$$

$$\text{Fazendo } j = k-1, \quad M = N-1$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{j=0}^{M} \frac{(M+1)!}{j!(M-j)!} p^{j+1} (1-p)^{M-j}$$

$$\mathbb{E}[X] = (M+1)p \cdot \sum_{j=0}^{M} \frac{M!}{j!(M-j)!} p^j (1-p)^{M-j}$$

$$\mathbb{E}[X] = Np \cdot 1$$

C. $\sum_{i=4}^{10} P(\{i\}) = 848 \cdot \sum_{i=4}^{10} p^i (1-p)^{10-i}$

D. $p^4(1-p)^6 = I_4^{10}$

Problema 3

[Adaptado de uma entrevista de Nick Bostrom] Considere que há duas urnas contendo diferentes quantidades de bolas. A urna A tem 10 bolas apenas, enquanto que a urna B tem 1 milhão de bolas. Nos dois casos, as bolas estão numeradas de 1 a N , com N o número de bolas da urna em questão.

Suponha que uma das urnas, selecionada ao acaso, é apresentada a você, e que você não sabe se é a urna A ou B, já que não enxerga o conteúdo. Você então é orientado(a) a remover aleatoriamente uma das bolas da urna, ainda sem enxergar o conteúdo. Suponha que, ao fazê-lo, você se depara com a bola de número 7. Qual a probabilidade de que a urna que lhe foi apresentada seja a A? Qual a probabilidade de que seja a B?

Podemos descrever A, B como sendo:

$$A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\} \qquad B = \{1, 2, 3, \ldots, 10^6\}$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(7) = \frac{1}{2}\frac{1}{10} + \frac{1}{2}\frac{1}{10^6}$$

$$P(7|A) = \frac{1}{10} \qquad P(7|B) = \frac{1}{10^6}$$

$$P(A|7) = \frac{P(7|A)P(A)}{P(7)} \qquad P(B|7) = \frac{P(7|B)P(B)}{P(7)}$$

$$P(A|7) = \frac{\frac{1}{10}\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^6})} \approx 0.99999 \qquad P(B|7) = \frac{\frac{1}{10^6}\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^6})} = 0.000001$$

Problema 4

Seja X uma variável aleatória com valor esperado $\mu = E(X)$ e desvio padrão (suposto não nulo) $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

A desigualdade de Chebyshev estabelece que

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}, \ \forall\ k > 0$$

$$|X - \mu| \geq k\sigma = \begin{cases} X \geq \mu + k\sigma \\ X \leq \mu - k\sigma \end{cases}$$

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) = P_X((-\infty, \mu - k\sigma] \cup (\mu + k\sigma, \infty])$$

A. $P(|X - \mu| \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{2^2}$

B. $P(|X - \mu| \geq 3\sigma) \leq \frac{1}{3^2}$

C. $P(|X - \mu| \geq 5\sigma) \leq \frac{1}{5^2}$

D. $P(|X - \mu| \leq 2\sigma) \geq 1 - \frac{1}{4}$ (tomamos complementar do item A)

Problema 5

Com base no valor esperado de X e na desigualdade de Chebyshev, forneça uma interpretação do conceito de probabilidade em termos de frequência relativa.
Sabendo que $\mathbb{E}[X] = Np = \sum_{k=0}^{N} k\binom{N}{k}p^k(1-p)^{N-k}$. Para encontrar $\sigma_X^2 = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$.

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{N} k^2 \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$
$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=1}^{N} k^2 \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$
$$\text{Sabendo que } k \cdot k \binom{N}{k} = k \cdot N \binom{N-1}{k-1}$$
$$\mathbb{E}[X^2] = Np \sum_{k=1}^{N} k \binom{N-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(N-1)-(k-1)}$$
$$\text{Fazendo } N-1 = M \qquad j = k-1$$
$$\mathbb{E}[X^2] = Np \sum_{j=0}^{M} (j+1) \binom{M}{j} p^j (1-p)^{M-j}$$
$$\mathbb{E}[X^2] = Np \left[\sum_{j=0}^{M} \binom{M}{j} p^j (1-p)^{M-j} + \sum_{j=0}^{M} j \binom{M}{j} p^j (1-p)^{M-j} \right]$$
$$\mathbb{E}[X^2] = Np[1 + Mp]$$
$$\mathbb{E}[X^2] = Np[1 + (N-1)p]$$
$$\mathbb{E}[X^2] = Np(1-p)$$
$$\text{Finalmente } \sigma_X^2 = Np(1-p)$$

Prossegue-se para aplicação no teorema de Chebyshev. Usando a resposta do **Problema 2** para o valor esperado de uma V.A. binomial é $\mathbb{E}(X) = Np$ e $\text{Var}(X) = Np(1-p)$, $\sigma_X = \sqrt{Np(1-p)}$

$$P(|X - \mu| \geq j\sigma) \leq \frac{1}{j^2},\ \forall\ j > 0$$
$$P(|X - Np| \geq j\sqrt{Np(1-p)}) \leq \frac{1}{j^2}$$

Definindo $Y = \frac{X}{N}$ (uma v.a.) como uma medida de frequência relativa para uma proporção de ocorrências do evento desejado. Avaliando o valor esperado $\mathbb{E}(Y) = \frac{Np}{N} = p$ e $\text{Var}(Y) = \frac{Var(X)}{N^2} = \frac{p(1-p)}{N}$, $\sigma_Y = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}$.

Finalmente, aplicando esse valores a desigualdade de Chebyshev.

$$P(|Y - p| \geq j\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}) \leq \frac{1}{j^2}$$
$$tol = j\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}$$
$$j^2 = tol^2 \frac{N}{p(1-p)}$$

$$P(|Y - p| \geq tol) \leq \frac{p(1-p)}{N tol^2}$$

A probabilidade de que a freq. relativa desvie acima de uma tol. em relação à probabilidade teórica de acerto tem um limite superior que cai linearmente com o número de realizações N.

Problema 6

Seja X uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $[0, 1)$. Seja ainda $Y = e^X$, com e o número de Euler.

A. Calcule a função de densidade de probabilidade (PDF) de Y.

$$X \sim U[0,1) \qquad f_X \begin{cases} 1, \text{ se } 0 \leq x < 1 \\ 0, c.c \end{cases}$$

$$g(x) = Y = e^X \qquad x = \ln(y), \text{ se } x > 0$$

$$f_Y = \sum_i \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|} \qquad f_Y = \frac{f_X(\ln(y))}{|e^{\ln(y)}|} = \frac{1}{y}, \text{ se } 1 \leq y < e$$

B. Calcule o valor esperado de X

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 x \cdot 1 \, dx = \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}$$

C. Calcule a variância de X

$$Var[X] = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 \cdot 1 \, dx = \frac{(2x-1)^3}{24}\bigg|_0^1 = \frac{1}{12}$$

D. Calcule o valor esperado de Y

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 e^x \cdot 1 \, dx = e^x\big|_0^1 = e - 1$$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_1^e y \cdot \frac{1}{y} \, dy = y\big|_1^e = e - 1$$

E. Calcule a variância de Y

$$Var[Y] = \int_1^e (y - (e-1))^2 \cdot \frac{1}{y} \, dy = -\frac{e^2}{2} + 2e - \frac{3}{2}$$

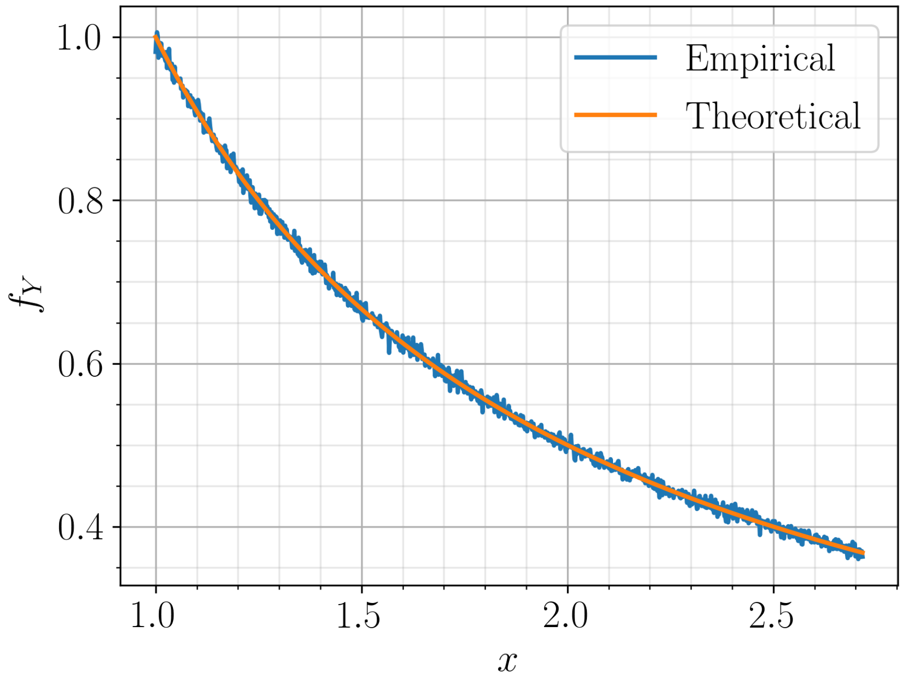
$$Var[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2$$

$$E[Y^2] = \int_0^1 e^{2x} \cdot 1 \, dx = -\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \qquad E[Y] = e - 1$$

$$Var[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = -\frac{e^2}{2} + 2e - \frac{3}{2}$$

F. Com base no histograma de diversas realizações empíricas de Y, obtenha uma PDF empírica de Y. Compare com a resposta do item **A**.

Figura 1: PDF com Observações Empíricas e Valor Teórico para 10^7 valores de teste



Problema 7

Seja X uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $[-1, 1)$. Seja ainda $Y = X^2$.

$$f_X(x) = \frac{1}{a},\ -1 \leq x < 1 \qquad \int_{-1}^{1} \frac{1}{a} dx = \frac{x}{a}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{a},\ a = 2$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2},\ \text{se } -1 \leq x < 1 \\ 0,\ \text{c.c} \end{cases}$$

A.Calcule a função densidade de probabilidade (PDF) de Y

$$g(x) = x^2 \qquad g^{-1}(x) = \pm\sqrt{y} \begin{cases} x_1 = \sqrt{y} \\ x_2 = -\sqrt{y} \end{cases} \qquad g'(x) = 2x$$

$$f_Y = \frac{f_X(\sqrt{y})}{|2\sqrt{y}|} + \frac{f_X(-\sqrt{y})}{|-2\sqrt{y}|} = 2\left[\frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{y}}\right] = \frac{1}{2\sqrt{y}},\ 0 \leq y < 1$$

B.Calcule o valor esperado de X

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{1}{2} dx = 0$$

C.Calcule a variância de X

$$Var[X] = \int_{-1}^{1} (x-0)^2 \cdot \frac{1}{2} dx = \left.\frac{x^3}{6}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$

D.Calcule o valor esperado de Y

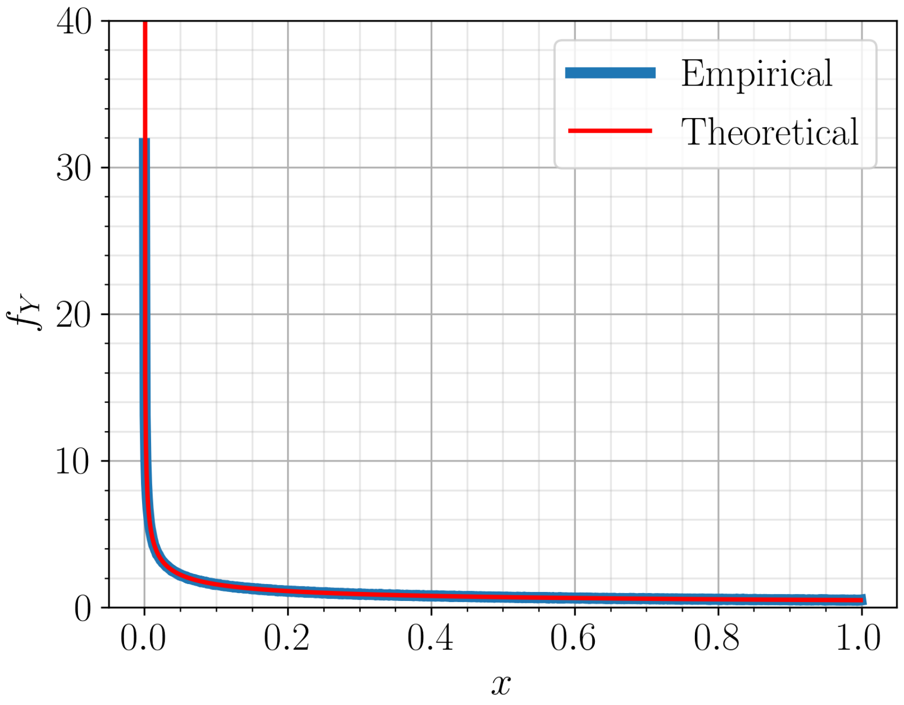
$$\mathbb{E}[Y] = \int_{0}^{1} y \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} dy = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{1}{3}$$

E.Calcule a variância de Y

$$Var[Y] = \int_{0}^{1} (y - \frac{1}{3})^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \left.\frac{\sqrt{y}(9y^2 - 10y + 5)}{45}\right|_{0}^{1} = \frac{4}{45}$$
$$Var[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2$$
$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_{-1}^{1} x^4 \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{1}{5}$$
$$Var[Y] = \frac{9}{45} - \frac{5}{45} = \frac{4}{45}$$

F.Com base no histograma de diversas realizações empíricas de Y, obtenha uma PDF empírica e compare com o resultado do item **A**

Figura 2: PDF com Observações Empíricas e Valor Teórico para 10^7 valores de teste



Problema 8

Seja X uma variável aleatória com PDF dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3, \text{ se } 0 < x \leq 1 \\ 0, \text{ c.c.} \end{cases}$$

A.Calcule a função densidade de probabilidade (PDF) de Y

$$g(x) = \sin(\pi x) \qquad g^{-1}(x) = \begin{cases} x_1 = \frac{\sin^{-1}(y)}{\pi} \\ x_2 = \frac{\pi - \sin^{-1}(y)}{\pi} \end{cases} \qquad g'(x) = \pi\cos(\pi x)$$

$$f_Y(y) = \frac{f_X(\frac{\sin^{-1}(y)}{\pi})}{\pi|\cos(\frac{\pi \sin^{-1}(y)}{\pi})|} + \frac{f_X(\frac{\pi - \sin^{-1}(y)}{\pi})}{\pi|\cos(\frac{\pi - \sin^{-1}(y)}{\pi})|} \qquad \text{Note que: } \begin{cases} \cos(\sin^{-1}(\alpha)) = \pm\sqrt{1-\alpha^2} \\ \cos(\pi - \beta) = -\cos(\beta) \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{f_X(\frac{\sin^{-1}(y)}{\pi}) + f_X(\frac{\pi - \sin^{-1}(y)}{\pi})}{\pi\sqrt{1-y^2}} = \frac{4\sin^{-1}(y)^3}{\pi^4\sqrt{1-y^2}} + \frac{4\left(\frac{\pi - \sin^{-1}(y)}{\pi}\right)^3}{\pi^4\sqrt{1-y^2}}$$

$$f_Y(y) = \frac{4}{\pi\sqrt{1-y^2}}\left[\frac{\sin^{-1}(y)}{\pi^3} + \left(\frac{\pi - \sin^{-1}(y)}{\pi}\right)^3\right], \text{ se } 0 \leq y < 1, \quad 0 \text{ c.c}$$

$$\begin{aligned} 1 &= \cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 \\ 1 &= \cos(\sin^{-1}(\alpha))^2 + \sin(\sin^{-1}(\alpha))^2 \\ 1 &= \cos(\sin^{-1}(\alpha))^2 + \alpha^2 \\ \cos(\sin^{-1}(\alpha)) &= \pm\sqrt{1-\alpha^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha) sen(\beta) \\ &\quad \text{se } \alpha = \pi, \ \cos(\pi) = -1 \ \sin(\pi) = 0 \\ &\cos(\pi - \beta) = -1\cos(\beta) + 0 \cdot 0 \\ &\cos(\pi - \beta) = -\cos(\beta) \end{aligned}$$

B.Calcule o valor esperado de X

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 x \cdot 4x^3 dx = \left.\frac{4x^5}{5}\right|_0^1 = \frac{4}{5}$$

C.Calcule a variância de X

$$\begin{aligned} Var[X] &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \\ \mathbb{E}[X^2] &= \int_0^1 x^2 \cdot 4x^3 dx = \left.\frac{2x^6}{3}\right|_0^1 = \frac{2}{3} \\ Var[X] &= \frac{2}{3} - \frac{16}{25} = \frac{2}{75} \end{aligned}$$

D.Calcule o valor esperado de Y

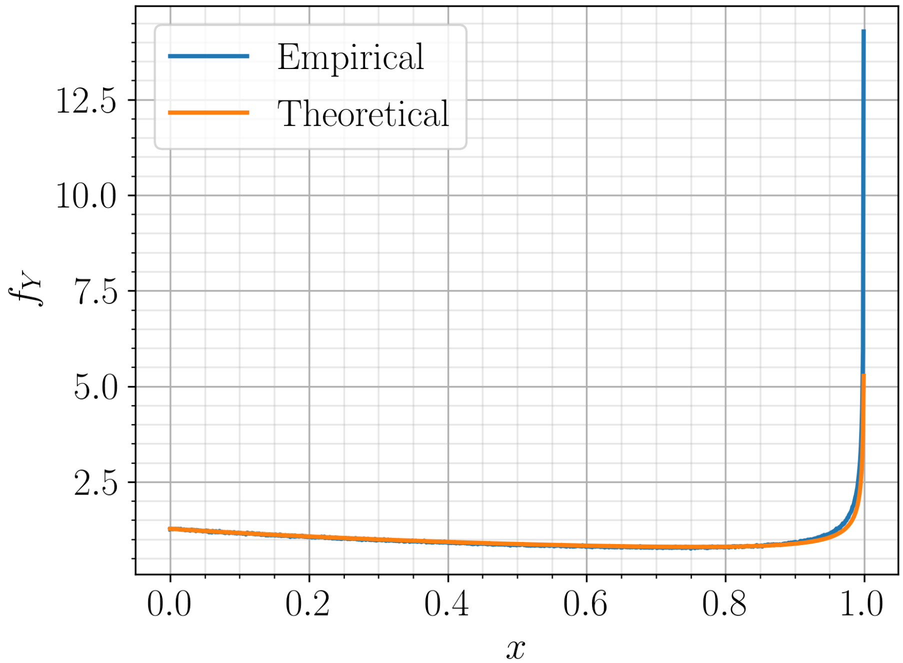
$$\mathbb{E}[Y] = 4\int_0^1 x^3 \sin(\pi x)dx \qquad \int udv = u\cdot v - \int vdu$$
$$\mathbb{E}[Y] = 4\left[-\frac{x^3\cos(\pi x)}{\pi} + \frac{3}{\pi}\int_0^1 x^2\cos(\pi x)dx\right]$$
$$\mathbb{E}[Y] = -\frac{4x^3\cos(\pi x)}{\pi} + \frac{12}{\pi}\left[\frac{x^2\sin(\pi x)}{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^1 x\sin(\pi x)dx\right]$$
$$\mathbb{E}[Y] = -\frac{4x^3\cos(\pi x)}{\pi} + \frac{12x^2\sin(\pi x)}{\pi^2} - \frac{24\sin(pix)}{\pi^4} + \frac{24\pi x\cos(pix)}{\pi^4}\Bigg|_0^1$$
$$\mathbb{E}[Y] = \frac{-4\pi x(\pi^2x^2-6)\cos(\pi x)}{\pi^4} + \frac{12(\pi^2x^2-2)\sin(\pi x)}{\pi^4}\Bigg|_0^1$$
$$\mathbb{E}[Y] = \frac{4}{\pi} - \frac{24}{\pi^3} = 0.4992$$

E.Calcule a variância de Y

$$Var[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2$$
$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_0^1 4x^3\cos(\pi x)^2dx = 2\int_0^1 x^3 - x^3\cos(2\pi x)dx$$
$$\int_0^1 x^3\cos(2\pi x)dx = \frac{x^3\sin(2\pi x)}{2\pi} - \frac{3}{2\pi}\int_0^1 x^2\sin(2\pi x)dx$$
$$\int x^2\sin(ax)dx = \frac{1}{a^3}\big(2ax\sin(ax) + 2\cos(ax) - a^2x^2\cos(ax)\big)$$
$$\int_0^1 x^2\sin(2\pi x)dx = \frac{1}{(2\pi)^3}\big[4\pi x\sin(2\pi x) + 2\cos(2\pi x) - 4\pi^2x^2\cos(2\pi x)\big] = \frac{-4\pi^2-2}{8\pi^3}$$
$$\mathbb{E}[Y^2] = \frac{1}{2} - 2[0 - \frac{3}{2\pi}\cdot -\frac{1}{2\pi}] = \frac{\pi^2-3}{2\pi^2}$$
$$Var[Y] = \frac{\pi^2-3}{2\pi^2} - \left(\frac{4}{\pi} - \frac{24}{\pi^3}\right)^2 = 0.0988$$

F.Com base no histograma de diversas realizações empíricas de Y, obtenha uma PDF empírica e compare com o resultado do item **A**

Figura 3: PDF com Observações Empíricas e Valor Teórico para 10^7 valores de teste



Problema 9

O gráfico a seguir, no qual M é uma constante real, descreve a função densidade de probabilidade f_X de uma variável aleatória X. Acerca de X, responda os itens que se seguem.

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 0 \\ Mx, \text{ se } 0 \leq x < 1 \\ -\frac{M}{4}x + \frac{5M}{4}, \text{ se } 1 \leq x < 5 \\ 0, \text{ se } x \geq 5 \end{cases}$$

$$1 = \int_0^1 Mxdx + \int_1^5 -\frac{M}{4}x + \frac{5M}{4}dx, \qquad M = \frac{2}{5}$$

A.Qual o valor esperado de X?

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^5 xf_X(x)dx = 2$$

B.Qual o momento central de ordem 2 de X?

$$M_C^2[X] = \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = Var[X]$$
$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^5 x^2 f_X(x)dx = \frac{31}{6}$$
$$M_C^2[X] = \frac{31}{6} - 2^2 = \frac{7}{6}$$

C.Qual o momento central de ordem 3 normalizado de X?

$$Skew[X] = \widetilde{\mu}_3 = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right] = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$
$$Skew[X] = \frac{\mathbb{E}[X^3] - 3\mu\mathbb{E}[X^2] + 3\mu^2\mathbb{E}[X] - \mu^3}{\sigma^3}$$
$$Skew[X] = \frac{\mathbb{E}[X^3] - 3\mu(\mathbb{E}[X^2] - \mu\mathbb{E}[X]) - \mu^3}{\sigma^3}$$
$$Skew[X] = \frac{\mathbb{E}[X^3] - 3\mu\sigma^2 - \mu^3}{\sigma^3}$$
$$\mathbb{E}[X^3] = \int_0^5 x^3 f_X(x)dx = \frac{78}{5} \qquad \mu = 2 \qquad \sigma = \sqrt{\frac{7}{6}}$$
$$Skew[X] = \frac{18\sqrt{42}}{245} = 0.4761$$

D.Qual o momento central de ordem 4 normalizado de X?

$$Kurt[X] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4\right] = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{E[(X-\mu)^4]}{(E[(X-\mu)^2])^2}$$
$$Kurt[X] = \frac{\frac{49}{15}}{(\frac{7}{6})^2} = \frac{12}{5} = 2.4$$

E.Qual a probabilidade de que X seja 3? 0.

F.Qual a probabilidade de X esteja no intervalo $[2,4]$?

$$P_X([2,4]) = F_X(4) - F_X(2) = \int_2^4 f_X(x)dx = \frac{2}{5} = 0.4$$

G.Qual a probabilidade de X esteja no intervalo $[2,5]$?

$$P_X([2,5]) = F_X(5) - F_X(2) = \int_2^5 f_X(x)dx = \frac{9}{20} = 0.45$$

H.Qual a probabilidade de que X esteja no intervalo $[2,6]$? Igual a do item anterior.
That's all Folks