Lista 1 - Processos Estocásticos

Davi de Alencar Mendes (16/0026415) dmendes@aluno.unb.br

Problema 1

Apresente a definição formal de probabilidade, enunciando os axiomas de Kolmogorov. Especifique claramente o tipo de conjunto que constitui o domínio da função probabilidade $P[\cdot]$, em termos de um espaço amostral S.

Uma medida de probabilidade $P[\cdot]$ é uma função que mapeia eventos no espaço amostral a números reais tais que:

1. Para qualquer evento $\mathbb{E}$, $P[\mathbb{E}] \geq 0$
2. $P[S] = 1$
3. Para qualquer coleção contável $A_1, A_2, \ldots$ de eventos mutuamente exclusivos: $P[A_1 \cup A_2 \cup \ldots] = P[A_1] + P[A_2] + \ldots$

Problema 2

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \; \forall \; A, B \in \mathbb{E}$

Notamos que $A \cap \overline{B}$ e B são disjuntos e tem união $A \cup B$. Então:

$$P(A \cup B) = P(B) + P(A \cap \overline{B}) \tag{1}$$

Em seguida, notamos que $A \cap \overline{B}$ e $A \cap B$ são disjuntos e tem união A. Então:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) \tag{2}$$

Subtraindo 2 de 1, obtemos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

b) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Utilizando os Axiomas 3 e 2 fazemos:

$$\begin{aligned} S &= A \cup \overline{A} \\ 1 &= P(A) + P(\overline{A}) \\ P(\overline{A}) &= 1 - P(A) \end{aligned}$$

Problema 3

Seja S um espaço amostral, e seja A_i um subconjunto de S pertencente ao domínio da função de probabilidade P, $\forall \; \in \{1, 2, 3, \ldots, N\}$ com N um valor inteiro positivo. Demonstre que $P(\bigcup_{i=1}^{N} A_i) \leq \sum_{i=1}^{N} P(A_i)$.

Sabemos que a união de dois eventos é dada por: $P\{A\} = P\{A_1\} + P\{A_2\} - P\{A_1A_2\}$.

De maneira similar, a união de três eventos é dada por: $P\{A\} = P\{A_1\} + P\{A_2\} + P\{A_3\} - P\{A_1A_2\} - P\{A_1A_3\} - P\{A_2A_3\}$

Tomando $p_i = P\{A_i\}, p_{i,j} = P\{A_iA_j\}, p_{i,j,k} = P\{A_iA_jA_k\} \ldots$

Nota-se que a união de 2 eventos é: $P\{A\} = \sum p_i - \sum p_{i,j}$, 3 eventos: $P\{A\} = \sum p_i - \sum p_{i,j} + \sum p_{i,j,k}$

Para a soma de cada probabilidade p, fazemos: $S_1 = \sum p_i, S_2 = \sum p_{i,j}, S_3 = \sum p_{i,j,k}, \ldots$ com $i < j < k \leq N$, de maneira que a soma de cada combinação ocorra uma única vez e S_k contenha $\binom{N}{k}$ termos e S_N (último termo) é a realização simultânea de todos os N eventos.

Finalmente, para a união de N eventos: $P(\bigcup_{i=1}^{N} A_i) = S_1 - S_2 + S_3 \ldots \pm S_N$.

Se a união dos eventos for mutuamente exclusiva fica valendo o axioma 3 e a união dos N eventos é a soma das probabilidades (ou seja $S_i = 0 \; \forall \; i > 1$).

Não sendo mutuamente exclusivos, $P(\bigcup_{i=1}^{N} A_i) < \sum_{i=1}^{N} P(A_i)$.

Problema 4

Qual a noção intuitiva que se busca incorporar na definição formal de probabilidade obtida com os axiomas de Kolmogorov?

A probabilidade deve ser uma medida que mapeia um conjunto de eventos a um número real entre 0 e 1.

Problema 5

a)Qual a noção intuitiva que se busca capturar com os conceitos de variáveis aleatórias e de processos estocásticos?

As variáveis aleatórias mapeiam eventos em um conjunto numéricos e provêm uma abstração simplificada para denotar probabilidade de conjuntos. Processos estocásticos extendem essa ideia para sequências aleatórias e complementam as ferramentas matemáticas de variáveis aleatórias.

b)Por que um processo aleatório não é simplesmente uma coletânea de variáveis aleatórias?

A abstração de processos aleatório como uma coletânea de variáveis não nos permite estudar as propriedades inerentes a ideia de um processo como um todo e limitaria o escopo do estudo.

c)Por que o conceito de probabilidade é essencial para o entendimento de processos estocásticos?

Toda a teoria de probabilidade é fundamentada na definição axiomática da probabilidade.

Problema 6

Uma urna contém três bolas numeradas de 1 a 3. Um experimento consiste em remover aleatoriamente uma bola, registrar o número retirado, e recolocar a bola na urna antes que uma próxima retirada(amostragem com reposição). Calcule a probabilidade de que seja obtida a mesma bola em duas retiradas.

O espaço amostral contém 3^2 resultados. A combinação de 2 resultados iguais ocorre em 3 casos. A probabilidade de retirar 2 bolas iguais é 1/9.

Problema 7

Uma urna contém três bolas numeradas de 1 a 5. Um experimento consiste em remover aleatoriamente uma bola, registrar o número retirado, e recolocar a bola na urna antes que uma próxima retirada(amostragem com reposição). Calcule a probabilidade de que a soma dos números obtidos nas duas bolas seja 5.

O espaço amostral contêm 5^2 resultados. A soma é 5 quando são retiradas as bolas 4 e 1 ou vice-versa, ou quando são retiradas as bolas 3 e 2 ou vice-versa. Em 4 dos 25 casos a soma é 5 com uma probabilidade de 4/25.

Problema 8

Um experimento consiste em retirar aleatoriamente duas bolas numeradas de 1 a 5, sem reposição. Calcule a probabilidade de que a soma seja 5.

O espaço amostral consiste em $\binom{5}{2} \cdot 2! = 20$ amostras. Novamente, existem 4 casos em que a soma é 5 (mesmo sem reposição os casos previamente citados são permitidos). A probabilidade de que a soma seja 5 é $4/20 = 1/5$

That's all folks