1 Função Densidade de Probabilidade - PDF

Intuitivamente, a função densidade de probabilidade (PDF) é uma função que, ao ser integrada em um conjunto numérico, fornece a probabilidade desse conjunto.

1.1 Definição formal (pré-requisito: CDF)

Seja $X : S \to \mathbb{R}$ uma variável aleatória. A função de distribuição acumulada de probabilidade (CDF) de X é a função $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definida por:

$$F_X(x) = P_X([-\infty, x]) = P(s \in S/X(s) \leq x)$$

Objetivo & Definição:

Como queremos $\int_a^b f_X(x)dx = P_X((a, b]) = F_X(b) - F_X(a)$.

Para que isso aconteça, vamos definir $f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)$

Definição: Dada uma variável aleatória com função de distribuição acumulada F_x, a função densidade de probabilidade (PDF) é definida como:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x),$$

e fica valendo a propriedade:

$$\int_a^b f_X(x)dx = P_X((a, b]) = F_X(b) - F_X(a)$$

2 Relação entre PDF e Função Massa de Probabilidade (PMF)

Considere uma variável discreta $\mathbf{x}$, ou seja, dado o espaço amostral S, a imagem de $X : S \to C\mathbb{D}_X$ é um conjunto discreto (finito ou infinito contável).
Exemplo de uma v.a. discreta: jogar um dado de 6 faces $I_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (conjunto discreto)
Exemplo de uma v.a. contínua: Aferir a pressão sistólica de um indivíduo $I_X = \{0, 200mHg\}$ (conjunto contínuo)
Para a PMF, em cada conjunto podemos estabelecer a probabilidade de cada subconjunto unitário:

- $P_x(\{1\}) = 1/6$
- $P_x(\{2\}) = 1/6$
- $P_x(\{3\}) = 1/6$
- $P_x(\{4\}) = 1/6$
- $P_x(\{5\}) = 1/6$
- $P_x(\{6\}) = 1/6$

Para uma v.a. discreta podemos definir a PMF: função em domínio discreto que atribui a cada ponto discreto de I_X o valor de probabilidade do conjunto unitário com aquele ponto.
Mas podemos calcular também PDF: função em domínio contínuo que, neste caso, vale 0 em todos os pontos do domínio com exceção dos pontos que fazem parte da imagem de $\mathbf{x}$. Nesses pontos a PDF é um impulso cuja magnitude é a probabilidade do conjunto em cada ponto apenas.

3 Propriedades da Função de Densidade Probabilidade - PDF

Essencialmente,

$$f_X(x) \geq 0, \; \forall \, x \in \mathbb{R}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$

Dada qualquer função g que satisfaça as duas propriedades acima uma existe variável aleatória cuja PDF é g.
Na prática, na definição de PDFs desconsideramos descontinuidades em pontos discretos, a favor de versões contínuas naqueles pontos. *vide Teorema da Inversão*

3.1 Algumas Propriedades . . .

Dada uma v.a. X com PDF $f_X(x)$, alguns números descrevem as estatística básica de X. Em ordem de importância:

$E(x) \rightarrow$ valor esperado, média, expectância, esperança matemática

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)dx \rightarrow \text{média dos valores, ponderada pela PDF de cada valor.}$$

Variância: Média de todos os desvios quadráticos, ponderados pela PDF dos valores.

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f_X(x)dx$$

Desvio padrão σ: $\sigma - \sqrt{Var(X)} \rightarrow$ envolve uma ideia de variação mas mantém as unidades da v.a.