1 Casos Particulares para PDF de uma função de v.a.

Considere uma variável aleatória X e uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A função g permite definir uma nova v.a. e esta v.a. induz uma nova função de probabilidade.

$$Y(s) = g(X(s)),\ \forall\ s \in S$$
$$P_Y(A) = P_X(\{x \in \mathbb{R}/g(x) \in A\}), A \subseteq \mathbb{R}$$
$$\text{CDF de } Y : F_Y(y) = P_Y((-\infty, y]) = P_X(\{x \in \mathbb{R}/g(x) \leq y\})$$

Ex.: Com $g(x) = x^2$, $P_Y([4,16]) = P_X([2,4] \cup [-4,2])$. Ademais, $X \sim \mathscr{N}(0,1)$ [X é v.a. Gaussiana Padrão]

Caso Particular: Considerando g uma função derivável, inversível, estritamente crescente. O termo $g(x) \leq y$ se traduz em $x \leq g^{-1}(y)$. Finalmente,

$$f_Y(y) = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))}$$

Caso Particular (estritamente decrescente):

$$f_Y(y) = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{-g'(g^{-1}(y))}$$

2 PDF de uma função de variável aleatória

E se a função não for inversível nem estritamente crescente nem estritamente decrescente?

Considere uma $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não inversível. Isso significa que para um $y \in \mathbb{R}, \nexists\ x_i/g(x_i) = y$ (*e então não gera contribuição:* $f_Y(y) = 0$) ou então, existe mais de um $x_i/g(x_i) = y$ (*é possível:* $\sum_i \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$).

Teorema:

Seja $X : S \to \mathbb{R}$ uma variável aleatória com PDF $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Seja $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Dado um $y \in \mathbb{R}$, considere um conjunto de todos $x_i \in \mathbb{R}$ tais que $g(x_i) = y$. Suponha que esse conjunto é enumerável e que a função g é derivável em todos esses pontos desse conjunto com valor não nulo $g'(x_i) \neq 0$. Neste caso,

$$f_Y(y) = \sum_{x_i} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

Obs: note que se o conjunto dos pontos x_i é vazio, $f_Y(y) = 0$

2.1 Exercício

Considere uma variável aleatória X com distribuição uniforme no intervalo $[0,1)$. Considere ainda $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $g(x) = x^2\ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Calcule a PDF de $Y = g(X)$. Verifique o resultado com um experimento de Monte Carlo.

Solução:

Queremos calcular $f_Y(y)\ \forall\ y \in \mathbb{R}$.

Observe que $f_Y(y) = 0\ \forall\ y < 0$ e $f_Y(y) = 0\ \forall\ y > 1$

Para $0 < y < 1$: $x_i = \sqrt{y}$ *(lembrando que $x_i > 0$.)*. E aplicando o teorema:

$$f_Y(y) = \sum_{x_i} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$
$$f_Y(y) = \sum_{x_i} \frac{1}{|2 \cdot x_i|}$$
$$f_Y(y) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{y}}, \text{ se } 0 < \text{y} \leq 1$$

```
clear all; close all; clc;
% example_pdf_of_function

N = 10000;
x = rand(N, 1); % N realizações entre 0 e 1.
y = x.^2;

nbins = 1e3;
[epdfy, bins_centers] = pdf_empirical_evaluation(y, nbins); % empirical PDF
yt = linspace(-0.5, 1.5, 10000);
tpdfy = zeros(size(yt));
k = find(yt > 0 & yt < 1);
tpdfy(k) = 1./(2*sqrt(yt(k)));

plot(bins_centers, epdfy);
hold on;
plot(yt, tpdfy, 'r--');
xlabel('y');
ylabel('f_Y(y)');
grid on; grid minor;
 legend('Empirical PDF of function', 'Theoretical PDF of function');

function [epdf, bins_centers] = pdf_empirical_evaluation(x, nbins)
    if ~exist('nbins', 'var') || isempty(nbins)
        nbins = 1000;
    end
    [h, bins_centers] = hist(x, nbins);
    bin_width = (bins_centers(2:end) - bins_centers(1:end-1));
    bin_width = mean(bin_width);
    epdf = (h/length(x))/bin_width;
end
```

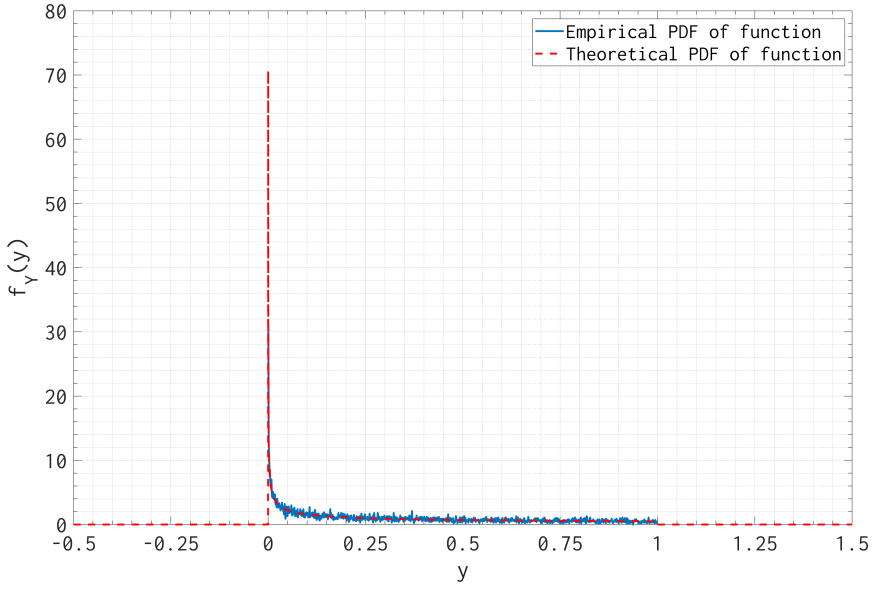

Figura 1: PDF Teórica e Empírica para o Exercício considerado.

3 Cálculo de momentos de variáveis aleatórias

Temos uma variável $X : S \to \mathbb{R}$ e uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que permite definir a variável aleatória $Y = g(X)$.

Para calcularmos o valor esperado de Y podemos usar a definição por meio do teorema do *estatístico inconsciente* ["*inconscious statistician*"]

$$E(Y) = E(g(X))$$
$$E(y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)dx$$

Comentário: Note que apesar da definição mostrar uma dependência pela PDF da função o teorema mostra que não é preciso! Esse teorema pode ser generalizado e, em particular, no caso da variância que ele gera uma notação importante (**que não é um caso óbvio como a notação pode sugerir, mas como consequência desse teorema**)