Lista 3 - Processos Estocásticos

Davi de Alencar Mendes (16/0026415) dmendes@aluno.unb.br

Professor: Dr. Cristiano Jacques Miosso

I Problema 1

Considere que $X : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade f_X. Considera ainda a variável aleatória definida pela aplicação da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aos resultados de X, com $g(x) = \alpha x + \beta$, sendo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq 0$. Assim, $Y = \alpha X + \beta$. A este respeito, responda os seguintes itens.

A PDF de Y.

$$g(x) = \alpha x + \beta \qquad g'(x) = \alpha$$

$$g^{-1} = \frac{y - \beta}{\alpha} = x \qquad f_Y(y) = \frac{f_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)}{\alpha}$$

B Valor esperado de Y usando valor esperado de X (LOTUS)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}[g(x)] \\ \mathbb{E}[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha x + \beta) f_X dx = \alpha \mathbb{E}[X] + \beta \end{aligned}$$

C Variância de Y usando Variância de X

$$\begin{aligned} Var[X] &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \\ Var[Y] &= \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2 \\ \mathbb{E}[Y^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha x + \beta)^2 \cdot f_X dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha^2 x^2 + +2\alpha\beta x + \beta^2) \cdot f_X dx \\ \mathbb{E}[Y^2] &= \alpha \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X dx + 2\alpha\beta \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x f_X dx + \beta^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_X dx \\ \mathbb{E}[Y^2] &= \alpha^2 \mathbb{E}[X^2] + 2\alpha\beta \mathbb{E}[X] + \beta^2 \\ Var[Y] &= \alpha^2 \mathbb{E}[X^2] + 2\alpha\beta \mathbb{E}[X] + \beta^2 - (\alpha^2 (\mathbb{E}[X])^2 + \beta^2) \\ Var[Y] &= \alpha^2 Var[X] \end{aligned}$$

II Problema 2

Considere que $X : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $[-1, 4)$. Seja ainda $Y = 3X + 8$.

A PDF de Y

$$X \sim U[-1, 4) \qquad\qquad Y = 3X + 8, \alpha = 3,\ \beta = 8$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5},\ \text{se } -1 \leq x < 4, \\ 0 \text{ c.c.} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \frac{f_X\left(\frac{y-8}{3}\right)}{3} = \begin{cases} \frac{1}{15},\ \text{se } 5 \leq y < 20 \\ 0 \text{ c.c.} \end{cases}$$

B Valor Esperado de Y

$$\mathbb{E}[Y] = \int_5^{20} y f_Y(y) dy = \int_{-1}^{4} (3x+8) f_X(x) dx = 3\mathbb{E}[X] + 8 = 12.5$$

C Variância de Y

$$\begin{aligned} Var[Y] &= \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2 \\ &\dots \\ Var[Y] &= \alpha^2 Var[X] = 9 \cdot Var[X] = 18.75 \end{aligned}$$

III Problema 3

...Uma variável X do tipo gaussiano com média 3 e variância 4. Considere $Y = 2X - 6$, e respoda os itens seguintes.

A PDF de Y

$$X \sim \mathcal{N} \begin{cases} \mu = 3 \\ \sigma^2 = 4 \end{cases} \qquad\qquad Y = 2X - 6$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(\frac{y-\beta}{\alpha} - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

B Média e Variância de Y

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= \alpha\mathbb{E}[X] + \beta = 2 \cdot 3 - 6 = 0 \\ Var[Y] &= \alpha^2 Var[X] = 2^2 \cdot 4 = 16 \end{aligned}$$

C Calcule o momento central de ordem 3 normalizado. O valor era esperado?

Pela definição (para uma variável aleatória X):

$$Skew[X] = \widetilde{\mu}_3 = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right] = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$
$$Skew[X] = \frac{\mathbb{E}[X^3] - 3\mu\mathbb{E}[X^2] + 3\mu^2\mathbb{E}[X] - \mu^3}{\sigma^3}$$
$$Skew[X] = \frac{\mathbb{E}[X^3] - 3\mu(\mathbb{E}[X^2] - \mu\mathbb{E}[X]) - \mu^3}{\sigma^3}$$
$$Skew[X] = \frac{\mathbb{E}[X^3] - 3\mu\sigma^2 - \mu^3}{\sigma^3}$$

Buscando $\mathbb{E}[Y^3]$:

$$\mathbb{E}[Y^3] = \int_{-\infty}^{\infty} y^3 f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} (2x-6)^3 f_X(x)dx$$
$$\mathbb{E}[Y^3] = \int_{-\infty}^{\infty} (8x^3 - 72x^2 + 216x - 216) f_X(x)dx$$
$$\mathbb{E}[Y^3] = \int_{-\infty}^{\infty} (8x^3) f_X(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} (-72x^2) f_X(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} (216x) f_X(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} (-216) f_X(x)dx$$
$$\mathbb{E}[Y^3] = \int_{-\infty}^{\infty} (8x^3) f_X(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} (-72x^2) f_X(x)dx + 216 \cdot \mathbb{E}[X] + 216$$

As integrais restantes são integrais de Laplace com solução para:

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^n \cdot e^{-\alpha \cdot z^n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (n+1)\pi^{1/2}}{2^{n/2}\alpha^{(n+1)/2}}$$

Aplicando para as integrais anteriores a mudança: $z = x - \mu, dx = dz$ é possível obter (*omitindo boa parte do desenvolvimento*)

$$\mathbb{E}[Y^3] = 8 \cdot (\mu \cdot \sigma^2 + \mu^3) - 72 \cdot (\mu^2 + \sigma^2) + 216 \cdot \mu + 216$$
$$\mathbb{E}[Y^3] = 8 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 4 + 3^3) - 72 \cdot (3^3 + 4) + 216 \cdot 3 + 216 = 0$$
$$Skew[Y] = 0$$

O valor era esperado já que VAs do tipo gaussiano são totalmente descritas em termos de média e variância (2 momentos somente).

D Trace o gráfico da PDF de Y e compare com o de X. O que muda?

IV Problema 4

Seja X um vetor aleatório de 2 componentes com distribuição uniforme em $[-1, 4] \times [-2, 8]$. Responda os seguintes itens.

A PDF Conjunta de X

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad X \sim \mathcal{U}[-1, 4] \times [-2, 8]$$

$$\int_{-1}^{4}\int_{-2}^{8} c \cdot dx_1\, dx_2 = 1, \quad c = \frac{1}{50} \qquad f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{50}$$

B PDF Marginal da 1a componente

$$f_{x_1}(x_1) = \int_{-2}^{8} \frac{1}{50} dx_2 = \frac{1}{5}$$

C PDF Marginal da 2a componente

$$f_{x_2}(x_2) = \int_{-1}^{4} \frac{1}{50} dx_1 = \frac{1}{10}$$

D Vetor de valores esperados

$$\mathbb{E}[X] = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

E Vetor de variâncias

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[x_1^2] &= \int_{-1}^{4} x_1^2 \frac{1}{5} dx_1 = \frac{x^3}{15}\Big|_{-1}^{4} = \frac{13}{3} \\
Var[x_1] &= \frac{13}{3} - (1.5)^2 = \frac{25}{12} \\
\mathbb{E}[x_2^2] &= \int_{-2}^{8} x_2^2 \frac{1}{10} dx_2 = \frac{x^3}{10}\Big|_{-2}^{8} = \frac{52}{3} \\
Var[x_2] &= \frac{52}{3} - (3)^2 = \frac{25}{3} \\
Var[X] &= \begin{bmatrix} \frac{25}{12} & \frac{25}{3} \end{bmatrix}^T
\end{aligned}$$

F Matriz de Autocovariâncias

$$\begin{aligned}
R_X &= \mathbb{E}[XX^T] \\
C_X &= \mathbb{E}[(X - \mu_X)(X - \mu_X)^T] \\
C_X &= R_X - \mu_X \mu_X^T \\
R_X &= \begin{bmatrix} \mathbb{E}[x_1^2] & \mathbb{E}[x_1 x_2] \\ \mathbb{E}[x_2 x_1] & \mathbb{E}[x_2^2] \end{bmatrix} \\
\mathbb{E}[x_2 x_1] = \mathbb{E}[x_1 x_2] &= \int_{-1}^{4}\int_{-2}^{8} x_1 x_2 \cdot \frac{1}{50} dx_1 dx_2 = \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

$$R_X = \begin{bmatrix} \frac{13}{3} & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & \frac{52}{3} \end{bmatrix} \qquad \mu_X \mu_X^T = \begin{bmatrix} 2.25 & 4.5 \\ 4.5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$C_X = \begin{bmatrix} \frac{25}{12} & 0 \\ 0 & \frac{26}{3} \end{bmatrix}$$

G As componentes são correlatas ou não?

Não são! C_X é matrix diagonal.

H As componentes são dependentes ou não?

São independentes visto que a PDF pode ser fatorada.

V Problema 5

Sobre o Problema 4, determine:

A $P(X_2 > X_1)$?

$$P(X_2 > X_1) = \int_{-1}^{4} \int_{x_1}^{8} \frac{1}{50} dx_2 dx_1 = 0.65$$
$$P(X_1 > X_2) = \int_{-1}^{4} \int_{-2}^{x_1} \frac{1}{50} dx_2 dx_1 = 0.35$$

B $P(X_2 > 2X_1)$?

$$P(X_2 > 2X_1) = \int_{-1}^{4} \int_{2x_1}^{8} \frac{1}{50} dx_2 dx_1 = 0.5$$

VI Problema 6

$$f_X(x_1, x_2, x_3) = \frac{3}{4\pi a^3}, \text{ se } \sqrt{x_1 + x_2 + x_3} < a$$
$$P[A] = \int\int\int_S f_X(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3, \text{ com } S = \{\sqrt{x_1 + x_2 + x_3} < 2a/3\}$$
$$\text{Em coordenadas esféricas} \begin{cases} r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ x_1 = r \sin\phi \cos\theta \\ x_2 = r \sin\phi \sin\theta \\ x_3 = r \cos\phi \end{cases} \qquad dx_1 dx_2 dx_3 = r^2 \sin\phi dr d\phi d\theta$$
$$P[A] = \frac{3}{4\pi a^3} \int_0^{2a/3} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \sin\phi \; d\theta d\phi dr$$

A integral é bastante simples e corresponde a uma fração do volume total já que f_X é uniforme ao longo do raio. Por esse motivo $P[A]$ pode ser obtido como uma razão dos volumes: $(2a/3)/a^3 = 8/27 \approx 0.3$.

VII Problema 7

Considere que X é um vetor aleatório de 2 componentes com:

$$C_{XX} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mu_X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$Y = AX + b, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

A Matriz de Autocovariâncias de Y?

$$\begin{aligned}
\mu_Y &= \mathbb{E}[AX + b] = A\mu_X + b \\
Y - \mu_Y &= A(X - \mu_X) \\
C_{YY} &= \mathbb{E}[(Y - \mu_Y)(Y - \mu_Y)^H] \\
C_{YY} &= \mathbb{E}[(A(X - \mu_X))(A(X - \mu_X))^H] \\
\text{com } (AB)^T &= B^T A^T \text{ e também } (AB)^H = B^H A^H \\
(A(X - \mu_X))^H &= (X - \mu_X)^H A^H \\
C_{YY} &= \mathbb{E}[A(X - \mu_X)(X - \mu_X)^H A^H] \\
C_{YY} &= A\mathbb{E}[(X - \mu_X)(X - \mu_X)^H] A^H \\
C_{YY} &= AC_{XX}A^H
\end{aligned}$$

Aplicando em C_{XX}:

$$C_{YY} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 15 \\ 15 & 40 \end{bmatrix}$$

B Matriz de autocorrelações de Y?

$$\begin{aligned}
R_{YY} &= \mathbb{E}[YY^H] \\
R_{YY} &= \mathbb{E}[(AX + b)(AX + b)^H] \\
R_{YY} &= \mathbb{E}[(AX + b)((AX)^H + b^H)] \\
R_{YY} &= \mathbb{E}[AXX^H A^H + AXb^H + bX^H A^H + bb^H] \\
R_{YY} &= AR_{XX}A^H + (A\mu_X)b^H + b(A\mu_X)^H + bb^H
\end{aligned}$$

Buscando R_{XX}:

$$\begin{aligned}
C_{XX} &= R_{XX} - \mu_X \mu_X^T \\
R_{XX} &= \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 13 \end{bmatrix} \\
R_{YY} &= \begin{bmatrix} 105 & 96 \\ 96 & 121 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

C Valor Médio de Y

$$\mu_Y = A \cdot \mu_X + b = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}$$

D O vetor Y é correlato?

Sim, o vetor é correlato. C_{YY} não é matriz diagonal.

E O vetor Y é independente?

Não é independente.

F Qual a PDF de Y, supondo distribuição gaussiana?

$$f_Y(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det C_{YY}}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(y-\mu_Y)^T C_{YY}^{-1}(y-\mu_Y)\right)$$

$$C_{YY}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{8}{147} & \frac{-1}{49} \\ \frac{-1}{49} & \frac{8}{245} \end{bmatrix}, \qquad \det C_{YY} = 735,$$

$$f_Y(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \cdot 735}} \cdot \exp\left(-\frac{4y_1^2}{147} + y_1\frac{(y_2+15)}{49} - \frac{4y_2^2}{245} + \frac{27y_2}{245} - \frac{459}{245}\right)$$

G Matriz de Transformação M e vetor v tal que $Z = MY + v$ seja não correlato e possua média nula

Para obter o vetor v basta:

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[MY + v] = M\mu_Y + v = 0$$
$$v = M\mu_Y$$

G.1 EVD - Decomposição Espectral (*Eigenvalue Decomposition*)

Em uma matriz $A_{N\times N}$, Solucionando $(A - \lambda I)k = 0$ é possível encontrar os autovetores associados aos autovalores k. O polinômio característico $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$ possui N raízes, algumas com possível multiplicidade maior que 1.

Pelas características dos autovetores é possível decompor:

$$Av = \lambda v$$
$$AQ = Q\Lambda$$
$$A = Q\Lambda Q^{-1}$$

- $A_{N\times N}$ - matriz com n autovetores q_i linearmente independentes
- Λ - matriz diagonal com autovalores ao longo da diagonal principal ($\Lambda_{ii} = \lambda_i$)
- Q - matriz com i-ésima coluna sendo autovetor q_i de A.

Algumas propriedades:

1. Se A é simétrica, Q (matriz formada pelos autovetores de A) é ortogonal com $Q^{-1} = Q^T$
2. $[\Lambda^{-1}]_{ii} = 1/\lambda_i$, pois Λ é diagonal
3. Se A é hermitiana e positiva definida, Q será unitária com $Q^{-1} = Q^H$

G.2 Buscando a Matriz de Transformação M

$$\begin{aligned}
&C_{ZZ} = MC_{YY}M^H, \text{ fazendo } C_{YY} = Q\Lambda Q^{-1} \\
&C_{ZZ} = MQ\Lambda Q^{-1}M^H = MQ\Lambda Q^H M^H, \text{ fazendo } M = Q^H = Q^{-1} \\
&C_{ZZ} = Q^{-1}Q\Lambda Q^{-1}Q = I\Lambda I = \Lambda \\
&C_{ZZ} = \Lambda, \text{ para } M = Q^H
\end{aligned}$$

Os dados do problema são:

$$\begin{aligned}
C_{YY} &= \begin{bmatrix} 24 & 15 \\ 15 & 40 \end{bmatrix} \qquad p(\lambda) = \lambda^2 - 64\lambda + 735 \begin{cases} \lambda_1 = 15 \\ \lambda_2 = 49 \end{cases} \\
C_{YY} - 15I &= \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 15 & 25 \end{bmatrix} \qquad \text{(RREF)} \begin{bmatrix} 1 & 5/3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = m_1 + \frac{5}{3}m_2 = 0 \\
v_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 5/3 \end{bmatrix}, \qquad \widehat{v_1} = \frac{\sqrt{34}}{34} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} \\
C_{YY} - 49I &= \begin{bmatrix} -25 & 15 \\ 15 & -9 \end{bmatrix} \qquad \text{(RREF)} \begin{bmatrix} 1 & -3/5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = m_1 - \frac{3}{5}m_2 = 0 \\
v_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ -3/5 \end{bmatrix}, \qquad \widehat{v_2} = \frac{\sqrt{34}}{34} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Finalmente, obtemos Q, Λ, v:

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{\sqrt{34}}{34} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \\
\Lambda &= \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 49 \end{bmatrix} \\
M = Q^{-1} &= \frac{\sqrt{34}}{34} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \\
v = M\mu_Y &= \frac{\sqrt{34}}{17} \begin{bmatrix} 9 \\ 36 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

VIII Problema 8

Considere que X é um vetor aleatório com função de densidade de probabilidade dada por

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{2}}{16\pi} \exp\left(-\frac{9}{64}x_1^2 + \frac{1}{16}x_1x_2 - \frac{1}{16}x_2^2\right)$$

A Calcule M tal que $Y = MX$ seja um vetor não correlato

É possível usar uma PDF gaussiana multivariada como protótipo para $f_X(\mathbf{x})$ de maneira que

$$f_X(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det C_{XX}}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T C_{XX}^{-1}\mathbf{x}\right)$$

$$C_{XX}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad C_{XX} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad \det C_{XX} = (4\cdot\sqrt{2})^2$$

$$\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T C_{XX}^{-1}\mathbf{x}\right) = \left(-\frac{9}{64}x_1^2 + \frac{1}{16}x_1x_2 - \frac{1}{16}x_2^2\right)$$

Buscando C_{XX}^{-1}

$$\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T C_{XX}^{-1}\mathbf{x}\right) = \left(-\frac{9}{64}x_1^2 + \frac{1}{16}x_1x_2 - \frac{1}{16}x_2^2\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(ax_1^2 + (b+c)x_1x_2 + dx_2^2\right) = \left(-\frac{9}{64}x_1^2 + \frac{1}{16}x_1x_2 - \frac{1}{16}x_2^2\right)$$

$$a = 9/32 \quad b = c = -1/16 \quad d = 1/8, \text{ b é igual a c por simetria de } C_{XX}$$

Montando C_{XX}:

$$C_{XX}^{-1} = \begin{bmatrix} 9/32 & -1/16 \\ -1/16 & 1/8 \end{bmatrix} \quad C_{XX} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Aplicando a KLT com a matriz M e realizando EVD de C_{XX}

$$C_{YY} = MC_{XX}M^H$$
$$C_{XX} = Q\Lambda Q^{-1}$$
$$\text{com } M = Q^{-1},\ C_{YY} = \Lambda$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{(\sqrt{41}-5)}{4} & \frac{\sqrt{41}+5}{4} \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} -\frac{(\sqrt{41}-13)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(\sqrt{41}+13)}{2} \end{bmatrix} \qquad M = Q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5\sqrt{41}}{82} + \frac{1}{2} & -\frac{2\sqrt{41}}{41} \\ \frac{1}{2}\frac{-5\sqrt{41}}{82} & \frac{2\sqrt{41}}{41} \end{bmatrix}$$

B O vetor Y é independente ou dependente?

$C_{YY} = \Lambda, \det C_{YY} \neq 0$. É independente (pdf pode ser fatorada) em duas exponenciais.

C Forneça gráfico da PDF de X

D Forneça gráfico da PDF de Y e compare como o item anterior

IX Problema 9

Seja $X : \mathbb{S} \to \mathbb{R}^N$ um vetor aleatório, com N sendo inteiro positivo. Seja ainda X_i a variável aleatória correspondente à i-ésima componente de X, com $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Responda os itens.

A Determine a PDF de $X_1 + X_2$. Qual a operação entre as PDFs de X_1 e X_2 que gera essa PDF?

Iniciamos com $g(X) = Y = X_1 + X_2$. Para tal

$$h(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \qquad J_h = \det\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Com $w \in \mathbb{R}^2$, temos a PDF de W no ponto w:

$$f_W(w) = \sum_i \frac{f_X(x^{(i)})}{|\det J_h(x^{(i)})}, \text{ com } \{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots\}$$

Conjunto de todos os vetores $x^{(i)}$ tais que $g(x^{(i)}) = w \; \forall \; w \in \mathbb{R}^2, x^{(i)} = \begin{bmatrix} w_2 \\ w_1 - w_2 \end{bmatrix}$

Fazemos:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(w_2, y - w_2) dw_2 \text{ (caso geral)}$$

Para o caso em que as componentes de X são independentes:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(w_2) \cdot f_X(y - w_2) dw_2 \text{ (note que trata-se de uma convolução!)}$$

B Determine PDF de $X_1^2 + X_2^2$ para X_1, X_2 gaussianas e independentes entre si

C As variáveis X_1, X_2 são independentes?

Considere que a correlação entre X_1 e X_2 vale 400, que as médias de X_1 e X_2 são, respectivamente, 10 e 20, que as variância sejam 4 e 16 respectivamente.

Pelos dados da questão:

$$\mathbb{E}[X_2 X_1] = \mathbb{E}[X_1 X_2] = 400 \quad \mu_X = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} \quad Var[X] = \begin{bmatrix} 4 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Buscando a matriz de correlação

$$Var[X_i] = \mathbb{E}[X_i^2] - (\mathbb{E}[X_i])^2$$
$$\begin{bmatrix} 4 \\ 16 \end{bmatrix} = \mathbb{E}[X^2] - \left(\begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}\right)^2$$
$$\mathbb{E}[X^2] = \begin{bmatrix} 104 \\ 416 \end{bmatrix}$$
$$R_{XX} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[X_1^2] & \mathbb{E}[X_1 X_2] \\ \mathbb{E}[X_2 X_1] & \mathbb{E}[X_2^2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 104 & 400 \\ 400 & 416 \end{bmatrix}$$
$$C_{XX} = R_{XX} - \mu_X \mu_X^T = \begin{bmatrix} 4 & 200 \\ 200 & 16 \end{bmatrix}$$

SOS: Algo deu errado aqui! C_{XX} possui autovalores negativos. Determinante igualmente negtivo!

D Igual ao anterior (?)

O problema D está igual ao item C. Possível *typo*.

X Problema 10

Seja $X : \mathbb{S} \to \mathbb{R}^N$ um vetor aleatório, com distribuição gaussiana.

Repetindo parte do procedimento do exercício anterior:

$$Var[X] = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mu_X = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbb{E}[X^2] = \begin{bmatrix} 2 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$R_{XX} = \begin{bmatrix} 2 & 100 \\ 100 & 20 \end{bmatrix} \quad C_{XX} = \begin{bmatrix} 1 & 96 \\ 96 & 4 \end{bmatrix}$$

Algo está errado (???) C_{XX} possui autovalores negativos. Determinante igualmente negtivo!

That's all Folks