1 Teorema de Wiener-Kinchin-Einstein no Caso Discreto

Processo estocástico X, WSS. Com função de autocorrelação (dada pelo intervalo): $r[n]$ e função de covariância: $c[n]$.

Definição de densidade espectral de potência do processo:
Considere o processo $X_{[-N_1,N_1]}$ dado pelo janelamento de X:

$$X_{[-N_1,N_1]}(s) = X(s) \cdot rect(-N_1, N_1)$$

Considere ainda a DTFT do processo:

$$\widehat{X}_{[-N_1,N_1]}(s) = DTFT(X_{[-N_1,N_1]}(s))$$
$$PSD_X(f) = \lim_{N_1 \to \infty} \frac{1}{2N_1+1} \mathbb{E}(|\widehat{X}^{(f)}_{[-N_1,N_1]}|^2)$$

Teorema:

$$\widehat{r}(f) = PSD_X(f) = \lim_{N_1 \to \infty} \frac{1}{2N_1+1} \mathbb{E}(|\widehat{X}^{(f)}_{[-N_1,N_1]}|^2)$$

2 Filtragem de Processos Estocásticos

Ideia geral: Processo $X[n] \to X^{(n)}$ é entrada de um sistema LTI com resposta impulsional $h[n]$. *Generalização de uma função de sinais* $g : E_S \to E_S$ definida por $g(x) = h * x$ para processos $g(X(s)) = Y(s) = h * X(s)$.
Considere R_{XX} que é a função de autocorrelação de X. $R_{XX}[n_1, n_2] = \mathbb{E}[X_{n_1} \cdot X^*_{n_2}]$. Queremos a partir de R_{XX} calcular R_{YY}:

$$\begin{aligned}
&R_{YY}[n_1,n_2] = \mathbb{E}[X_{n_1} \cdot X^*_{n_2}] \\
\text{Considerando: } &R_{XY}[n_1,n_2] = \mathbb{E}[X_{n_1} \cdot Y^*_{n_2}] \text{ (Correlação Cruzada)} \\
&R_{YX}[n_1,n_2] = \mathbb{E}[Y_{n_1} \cdot X^*_{n_2}] \\
&R_{XY}[n_1,n_2] = \mathbb{E}[X_{n_1} \cdot Y^*_{n_2}] = \mathbb{E}\left[X_{n_1} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} h^*[m] X^*_{n_2-m}\right] \\
&R_{XY}[n_1,n_2] = \sum_{m=0}^{\infty} h^*[m] \mathbb{E}\left[X_{n_1} \cdot X_{n_2-m}\right] \\
&R_{XY}[n_1,n_2] = \sum_{m=0}^{\infty} h^*[m] R_{XX}[n_1, n_2-m]
\end{aligned}$$

2.1 Caso WSS

Se X é estacionário no sentido amplo (WSS), então $R_{XX}[n_1, n_2-m]$ depende apenas de $n_2 - m - n_1$, e não de n_1 e n_2.

$$R_{XY}[n_1, n_2] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h^*[m] R_{XX}[n_1, n_2 - m]$$
$$R_{XY}[n_1, n_2] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h^*[m] r_{XX}[n_2 - n_1 - m]$$
$$r_{XY}[n_1, n_2] = (h^* * r_{XX})_{[n_2 - n_1 - m]}$$

R_{XY} também só depende da diferença entre os instantes considerados para o caso WSS.

Buscamos agora a autocorrelação da saída $R_{YY}[n_1, n_2]$:

$$R_{XY}[n_1, n_2] = \sum_{m=0}^{\infty} h^*[m] R_{XX}[n_1, n_2 - m]$$
$$R_{YY}[n_1, n_2] = \mathbb{E}[Y_{n_1} \cdot Y_{n_2} \hat{} *]$$
$$R_{YY}[n_1, n_2] = \mathbb{E}\left[Y_{n_1} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h^*[m] X^*_{n_2 - m}\right]$$
$$R_{YY}[n_1, n_2] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h^*[m] \cdot \mathbb{E}\left[Y_{n_1} \cdot X^*_{n_2 - m}\right]$$
$$R_{YX}[n_1, n_2] = \mathbb{E}[Y_{n_1} \cdot X^*_{n_2}] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] \cdot \mathbb{E}[X_{n_1 - m} \cdot X^*_{n_2}]$$
$$R_{YX}[n_1, n_2] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] \cdot R_{XX}[n_1 - m, n_2]$$
$$R_{YX}[n_1, n_2] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] \cdot r_{XX}[-[(n_1 - n_2) - m]]$$
$$R_{YX}[n_1, n_2] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] \cdot \overline{r_{XX}}[(n_1 - n_2) - m], \overline{r_{XX}} \text{ é uma reversão no tempo}$$
$$R_{YX}[n_1, n_2] = (h * \overline{r_{XX}})_{[n_1 - n_2]}$$
$$r_{YX}[n] = (h * \overline{r_{XX}})_{[n]}$$
$$R_{YY}[n_1, n_2] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h^*[m] \cdot \mathbb{E}\left[Y_{n_1} \cdot X^*_{n_2 - m}\right]$$
$$R_{YY}[n_1, n_2] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h^*[m] \cdot R_{YX}[n_1, n_2 - m]$$

Para sinal real (WSS): $r_{YX} = h * r_{XX}$
Note que se o sinal é real e o filtro for real (WSS): $r_{XY} = h^* * r_{XX} = r_{YX} = h * r_{XX}$!

Supondo que X é real e WSS:

$$r_{YX} = h * r_{XX}$$
$$r_{YY} = h^* * r_{YX}$$
$$r_{YY} = h^* * (h * r_{XX})$$