

Stage de recherche

COÉVOLUTION DU RÉSEAU VIAIRE ET DU BÂTI

Auteur :

Merwan ACHIBET

Encadrants :

Stefan BALEV

Antoine DUTOT

Damien OLIVIER

ILLUSTRATION



Mars - Juin 2012

KEYWORDS

Urban system, city morphogenesis, Voronoi diagram, cellular automaton.

EXTENDED ABSTRACT

Gathering issues of human, economic, geographic and political nature, the city truly is a complex system. The increasing growth in population produces urban systems like the world has never seen before, of increasing size, increasing heterogeneity and increasing complexity. Studying the relationships between its internal elements is fundamental to the understanding of its mechanics and to better predict their development. This work focuses on the relationship between the pattern of human installations within the city – characterized at the atomic level by a basic subdivision, the land lot – and its road network.

Systematic definitions of the city are many. Through the anthropologist's eye it can be seen as a concentration of persons, the economist will prefer to view it as a support for the exchange of financial and physical assets and the urbanist as a functional entity composed of flows and services. We choose to consider that the evolution of a city is driven by its population, translated as a measure of its density. This goes in hand with our focus, as land lots are inhabited by the same people that uses the surrounding roads to go from one place to another, and because urbanistic decisions are motivated by a need to optimize the city, to streamline transport means and to avoid high contrasts in the urban fabric.

A survey of the domain of urban simulations shows that available scientific works can be classified into two categories. Methods have been proposed for visual rendering purposes ; they generate visually satisfying cities without regarding realism as an obligation. These are often based on empirical observations and their main idea is to emulate the street patterns found in any urban system. Scientific modeling, on the other hand, prefers to focus on the inner qualities of a city, often by studying a subset of those, to analyze its current state and extrapolate its future. We orient our research with the latter in mind but the former represents a non-negligible source of inspiration.

A reader browsing through the literature of the field will often encounter cellular automata. The applicability and potential complexity of these structures has been proven many times over and they are fit for describing any kind of space-related problem. Nevertheless, their rigorous formalism may

sometimes restrain realism and negatively impact the validity of the model. For example, a cellular automaton topology is, by definition, perfectly regular. Representing a city with a set of identical and aligned cells seems like a coarse simplification. In the same way, we may question the fact that each cell has an identical neighborhood structure, the temporal synchronism and the state discretization. We take a drastic step towards realism and embrace the spatial aspect of the city by replacing the classic cellular automaton with a Voronoi diagram following the same basic principle. Each of its cell represents a land lot, and neighborhood relationships that are ruled by adjacency determine its future state ; the regularity constraint is thus relaxed. Voronoi edges delineate the Voronoi space of land lots and, as such, are ideal supports for roads.

The different elements represented in our model (*i.e.* land lots and roads) are declined in two flavors. *Potential* elements have an ethereal status ; their spatial characteristics are known but until they are effectively built, they have no direct effect on the overall city and only represent an idea, a possible outcome. *Built* elements were potential elements that have been constructed ; they form the physical city. The gist of the model is to add potential elements to the city and, only later, choose which ones will be built and which ones will be forgotten. The road network expands to accomodate the growth in density and to support anticipated land lots. This process is divided into three separate mechanisms.

The cellular part of the model lets the inner variables of the city vary based on the Voronoi tessellation and a set of simple rules. Here, only population density is considered and, as a result, the characteristic gradual patterns found in most towns are reproduced.

Whereas the previous part of the model is ensuring vertical growth, the horizontal evolution of the city is handled by an extensible method based on vector fields. Each piece of information that we want to consider is represented by a vector field that will guide the placement of new lots. For example, a field pointing away from high density areas is used to ensure urban sprawl. Another field makes new lots move towards the closest road such that they remain snapped to the main transport axes. All vector fields are then summed up with distinct factors. This general approach can model any kind of guidance or constraint ; in particular obstacle avoidance, so that the city does not extends itself on forbidden areas like lakes, beaches or protected forests.

The third and last mechanism chooses which of the potential elements are to be permanently built. Potential roads are chosen with respect to their

contribution to the global network, by means of a network flow evaluation. Potential land lots are chosen depending on their position relative to the built roads and the date of their addition into the potential domain.

RESULTATS/MESURES

Table des matières

1	Introduction	6
2	État de l’art	6
2.1	Automates cellulaires et simulation urbaine	6
2.2	Approches alternatives	11
3	Le modèle	13
3.1	Structure	13
3.2	Potentialité	17
3.3	Mécanismes	19
3.3.1	Automate cellulaire graphe	19
3.3.2	Placement des éléments potentiels	26
3.3.3	Construction des éléments potentiels	30
4	Mesures	31
4.1	Démonstration	31
4.2	Mesures sur le bâti	31
4.3	Mesures sur le viaire	31
5	Conclusion	31

REMERCIEMENTS

1 Introduction

LES VILLES GRANDISSENT / STATISTIQUES

Le système complexe que forme la ville est donc soumis à une forte croissance et un réel besoin de contrôler et de prévoir son évolution se fait ressentir en conséquence de l'explosion démographique que subissent les zones urbaines. C'est dans ce cadre de contrôle et de prévision qu'il est nécessaire d'étudier les mécanismes sous-jacents à une ville pour pouvoir les reproduire sous forme de simulations et étudier différents scénarios possibles.

On se concentre ici sur deux domaines majeurs du tissu urbain, le viaire et le bâti, afin d'étudier leur relation de coévolution. Ces deux aspects de la ville semblent aller de paire puisque le bâti abrite les populations tandis que le viaire leur permet de se déplacer d'un point à un autre. Il est ainsi naturel d'utiliser la densité de population comme force de guidage de l'évolution de la ville.

EN DIRE PLUS

La première partie présente un état de l'art de la modélisation de systèmes urbains et se concentre particulièrement sur les méthodes à base d'automates cellulaires afin de mettre en évidence leurs qualités mais aussi les limitations qu'ils imposent. La structure de données et les mécanismes régissant le modèle conçu dans le cadre de ce stage de recherche sont ensuite présentés en seconde partie. Enfin, des mesures diverses sont employées pour tester et valider ce travail dans la troisième partie.

2 État de l'art

2.1 Automates cellulaires et simulation urbaine

La modélisation de systèmes complexes est longtemps uniquement passée par l'usage de méthodes mathématiques ; typiquement, des systèmes d'équations différentielles. Ces techniques permettent de décrire des lois d'évolution et d'observer, ainsi que de prédire par extrapolation, le comportement de phénomènes du réel. Dans le cas de modèles prenant en compte un vaste jeu de paramètres, cette approche peut néanmoins se révéler délicate à employer. Plus intrinsèquement, même si une telle modélisation est basée sur des observations ancrées dans la réalité, il s'agit d'une représentation conceptuelle d'un problème et aucune mimique des mécanismes sous-jacents ne s'opère.

Historiquement, les prémices de l'informatique moderne et d'un tout autre paradigme de modélisation sont à attribuer aux esprits du milieu du vingtième siècle. Alan Turing introduit en 1936 la machine éponyme qui, bien que purement théorique, possède un module de contrôle ainsi qu'une mémoire et peut donc exécuter une infinité d'algorithmes. Cette démarche se démarque de l'approche mathématique et semble plus humaine ; on ne résout pas un problème en utilisant des fonctions associant une quantité à un résultat mais on agit véritablement sur ses données. L'idée de base de Turing était d'ailleurs d'assimiler le fonctionnement de sa machine au travail d'une personne remplissant les cases d'un tableau infini.

Entraîné par cette mouvance procédurale et en réaction aux réseaux de neurones de McCulloch et Pitts, John von Neumann et Stanislaw Ulam joignent leurs travaux durant les années 40 pour concevoir l'automate cellulaire : un système comprenant un ensemble d'automates à états spatialement localisés (typiquement sous forme de grille) et interconnectés en fonction de leur proximité. Les entrées de chaque automate correspondent alors aux états des automates voisins et de cette organisation se dégagent de fortes relations d'interdépendance. Le jeu de la vie de Conway en est un exemple classique. La simplicité de ses règles, mise en contraste avec la variété des configurations engendrées, témoigne de la richesse des automates cellulaires [1].

Les automates cellulaires ont depuis été extensivement étudiés et sont appliqués à l'étude de nombreux phénomènes biologiques, physiques et sociaux [2]. La motivation d'Ulam lors de leur conception était d'ailleurs de modéliser la croissance de cristaux. On peut aussi citer en exemple la simulation de la dynamique de fluides [3] et de la croissance de tumeurs [4]. Leur caractère spatial laisse supposer qu'ils sont particulièrement adaptés aux applications géographiques et, dans le cadre de notre problématique, urbaines. Ils ne furent paradoxalement pas immédiatement exploités à cet effet et c'est seulement suite à un article de Waldo Tobler, en 1975, que le rapprochement entre les automates cellulaires et le domaine de la géographie apparaît clairement [5]. Sont ensuite publiés des travaux majeurs appliquant l'automate cellulaire à des problématiques géographiques multi-échelles telles que l'évolution d'épidémies [6] et la ségrégation de population [7] (voir le modèle de Schelling sur la figure 1) et bien sûr la croissance urbaine []. CITATIONS



FIGURE 1 – Configuration produite par le modèle de Schelling. Chacune des deux couleurs représente une population différente. La conclusion de ces travaux est qu’un faible degré d’intolérance entre deux populations suffit à les séparer de manière évidente.

Une idée très exploitée dans ce domaine est d’associer un potentiel de transition à chaque cellule et ce, vers tous les états qu’elles peuvent adopter [8]. Dans les modèles déterministes, la transition vers l’état à plus haut potentiel est appliquée tandis que dans les modèles stochastiques, un tirage aléatoire biaisé est préféré. Le potentiel d’une cellule à passer à un nouvel état est déterminé en fonction de paramètres propres au modèle. Peuvent être pris en compte l’élévation du terrain, la densité de population, la proximité d’axes routiers, la proximité de centres urbains, l’âge des parcelles, leur valeur ; en fait, toute combinaison d’attributs relatifs à un réseau urbain. Par exemple, dans une simulation représentant les différents types d’usage, le passage d’une cellule à l’état *résidentiel* pourrait dépendre de la proximité des commerces et des routes et de l’éloignement des zones industrielles. Bien sûr, un nombre élevé de paramètres à prendre en compte requiert un couplage fin et l’impact de chaque variable peut être pondéré. Puisque les variations individuelles de paramètres n’émergent pas de manière transparente à la surface de la simulation, les modèles urbains basés sur des automates cel-

lulaires doivent être finement calibrés et leur réalisme est un défi en soi. Pour contourner ce problème, Yeh et Li prônent l’usage d’un réseau de neurones pour pondérer chaque paramètre à partir de l’analyse de données cartographiques historiques [9].

Il est important de noter que la simplicité du formalisme enveloppant un automate cellulaire strict s’oppose à la fidélité de la simulation, notamment dans le cadre de modèles spécifiques [10, 11]. Dans ce cas, une prise de liberté quant aux formalisme originel est autorisée, voire nécessaire, pour obtenir des résultats satisfaisants [12].

La première limite que le formalisme cellulaire de base impose est la discrétisation des états que chaque cellule peut adopter. Même si cette caractéristique fait partie intégrante des particularités qui confèrent aux automates cellulaires leur simplicité d’usage et d’analyse, la description de quantités pouvant arborer un éventail infini de valeurs est alors impossible. Plus concrètement, il est aisé de catégoriser les cellules d’un espace selon le fait, par exemple, qu’elles contiennent des installations humaines ou non (état booléen) [13, 14] ou de façon plus sophistiquée, en fonction de leur type d’usage (*résidentiel*, *commercial*, *industriel* [15] et plus [16]). Représenter des quantités réelles et des variations continues l’est moins. Pour symboliser plus finement la densité au cœur d’un ensemble urbain, Semboloni utilise par exemple un automate cellulaire de dimension trois dans lequel plus une pile de cellules actives est haute et plus la zone représentée est peuplée [17]. Plus généralement, il est accepté de représenter l’état d’une cellule par un vecteur contenant des valeurs réelles ; des règles de transitions adaptées et mesurées sont alors à mettre en place.

L’homogénéité d’un automate cellulaire fait partie intégrante de sa définition originelle : en mettant de côté l’état qu’elles adoptent, toutes les cellules sont identiques en forme et en structure de voisinage. Dans le cadre de notre problématique, cette approche est limitante car, dans une ville, les parcelles ne sont qu’occasionnellement identiques et alignées. Similairement, la notion de voisinage est clairement à redéfinir. Classiquement, les voisinages de von Neumann et de Moore sont utilisés mais la relation par contiguïté qu’ils décrivent ne convient pas à la représentation des liens de dépendance à plus grande échelle se développant dans un système urbain. Le positionnement d’un bâtiment résidentiel dans une ville se base évidemment sur le voisinage direct des zones envisagées (on préfère construire une maison dans un quartier résidentiel) mais il faut aussi prendre en compte les alentours plus distants (la centrale thermique se trouvant à 500 mètres du site peut

poser problème). Une solution possible est d'étendre les aires des voisinages de von Neumann et de Moore tout en conservant leur forme caractéristique. La symétrie évidente se dégageant de telles simplifications va à l'encontre des relations prenant place au sein d'une ville. O'Sullivan a choisi de relaxer cette contrainte de partitionnement spatial régulier pour faire un pas dans la direction du réalisme en proposant l'automate cellulaire graphe [18, 19]. Conventionnellement, une cellule d'automate correspond à un sous-espace urbain ou bien une parcelle cadastrale mais dans chacun de ces cas le modèle se base évidemment sur une simplification grossière de l'espace étudié. Il décide donc de donner à chaque cellule les mêmes qualités topologiques que les parcelles qu'elles représentent : même formes, même dimensions, mêmes coordonnées. Une variété de relations de voisinage sont alors envisageables (par voisinage au sens urbain, par distance dans un rayon d'influence, par critère de visibilité). L'éloignement du formalisme cellulaire est drastique car la structure perd de son homogénéité puisque chaque cellule est différente et chaque voisinage est unique. Il faut aussi noter que la couverture de l'espace n'est plus complète car des vides entre les cellules apparaissent. Chacune des ces concessions est mise au service du réalisme de la simulation. Un exemple de sous-espace urbain représenté par ce modèle est visible sur la figure 2.

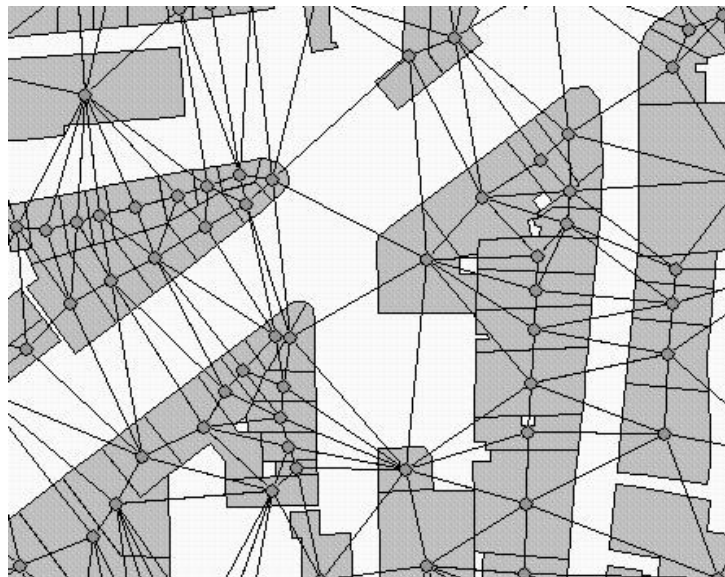


FIGURE 2 – Hoxton, un quartier de Londres, modélisé par l'automate cellulaire graphe de David O'Sullivan [18].

Une prise de liberté quant à l’aspect temporel est aussi envisageable. Un automate cellulaire strict est synchrone, *i.e.* les changements d’état de toutes les cellules s’effectuent simultanément. Si le choix était fait de mettre à jour chaque état de façon asynchrone, le comportement de l’automate en serait lourdement modifié. Par exemple, les qualités auto-réplicatives de certaines entités du jeu de la vie ne seraient pas garanties. Il est pourtant légitime de se questionner sur la validité d’un tel choix dans une simulation urbaine ; premièrement parce qu’une ville est un système complexe et désordonné, ensuite parce les processus qui s’y déroulent sont réglés sur différentes échelles temporelles.

Bien que les automates cellulaires soient couramment utilisés pour simuler le trafic routier (dans leur version 1D ou 2D [20]), ils s’accordent peu avec la construction même d’un réseau viaire. Dans les simulations cellulaires urbaines, le positionnement des routes a un impact sur le développement des cellules puisque le viaire *attire* le bâti mais le réseau est souvent fourni en entrée et reste statique. Nous sommes amenés à nous interroger sur la capacité des automates cellulaires à modéliser le développement routier car la cellule n’est pas une représentation adéquate d’une structure linéaire dont l’échelle est plus large que celle de la parcelle.

2.2 Approches alternatives

Les automates cellulaires ne sont pas l’unique moyen de modéliser la croissance urbaine. Plusieurs simulations existantes sont des systèmes multi-agent [21, 22]. Dans ces cas, un agent est assimilé à un promoteur immobilier et peut acheter des terres, les vendre, les développer ou changer leur type. Les actions qu’il entreprend sont évaluées en fonction de l’impact sur la ville (changement de la valeur immobilière, avis de la population) et des réglementations locales afin d’éviter toute configuration illégale. Pour la construction du réseau routier, une solution est de mettre en place, en plus des agents promoteurs, deux types d’agents traceurs. Les *extenders* parcourent toute la surface du terrain à la recherche de bâtiments isolés et éloignés puis tracent une nouvelle route jusqu’au réseau urbain. Les *connectors* se déplacent uniquement sur le réseau viaire et y raccordent les bâtiments non connectés se trouvant dans leur rayon de détection [21]. Cette approche introduit un défaut conceptuel : le réseau viaire est construit à partir du bâti et non l’inverse. Ainsi, des bâtiments peuvent rester isolés pendant plusieurs itérations de la simulation et, même si le résultat final apparaît comme satisfaisant, arrêter la simulation en cours

de l'évolution du système produit une configuration erronée. Autrement dit, l'évolution n'est pas historiquement cohérente et seule la ville finale est correcte.

Un autre modèle gérant à la fois l'évolution du réseau viaire et du bâti est présenté par Weber [23]. Le principe est le suivant : à chaque agrandissement du réseau urbain, on crée plusieurs routes éphémères en suivant des règles géométriques précises (allongement des voies existantes, limitation du degré des carrefours à 4, l'angle entre chaque rue tend vers 90 degrés). Parmi les n routes générées, une seule sera construite. Pour la choisir, le trafic sur ces nouvelles routes est simulé par des agents piétons et véhicules et l'on identifie celle qui sera la plus globalement bénéfique au réseau.

Barthelemy et Flammini [24] proposent aussi un modèle dans lequel le viaire et le bâti évoluent simultanément. Le bâti, représenté par une mesure de densité sur des points disposés régulièrement dans l'espace, croît linéairement en fonction du temps. Le réseau routier s'agrandit en suivant des règles empiriques [25] associées à un critère de proximité tel qu'une voie passant entre deux points de densité s'en trouvent à distances égales. Il est intéressant de noter que, sans le mentionner, les auteurs construisent ainsi un diagramme de Voronoï partiel comme celui qui est à la base de notre modèle.

D'autres solutions s'éloignant des systèmes complexes et penchant du côté de la génération procédurale de contenu existent [26]. Souvent, le domaine d'application de telles méthodes est l'infographie, le cinéma et le jeu vidéo. L'objectif est alors de construire de manière automatique une ville visuellement réaliste sans se soucier de son caractère fonctionnel. Usuellement, l'organisation parcellaire dépend entièrement du réseau routier car la première étape est souvent de générer un réseau viaire complet puis de placer le bâti en subdivisant récursivement les niches vides formées par les voies. Dans Citygen [27], un point p de l'espace est aléatoirement choisi puis on calcule un ensemble de plusieurs routes raccordant p au réseau routier existant en faisant varier leur déviation angulaire et un paramètre de bruit ; la route finale est celle pour laquelle la variation d'altitude est la plus faible. CityEngine [28] utilise un L-System dont les règles permettent de reproduire les différents motifs quadrillés, radiaux et organiques que l'on retrouve dans une ville. La nature récursive des L-Systems permet à ces motifs de se combiner et d'apparaître à différents niveaux de profondeur (voir figure 3). Dans une autre simulation, le tracé des routes suit les *hyperstreamlines* [29] formées par un champ de vecteurs. Ce champ est calculé par combinaison de plusieurs autres champs de vecteurs, chacun représentant des contraintes direction-

nelles particulières telles que les zones interdites, l'altitude et le directives données par l'utilisateur. Ces techniques sont intrinsèquement géométriques, et comme précisé plus haut, le résultat est purement visuel ; elles représentent néanmoins une source d'inspiration à ne pas négliger.

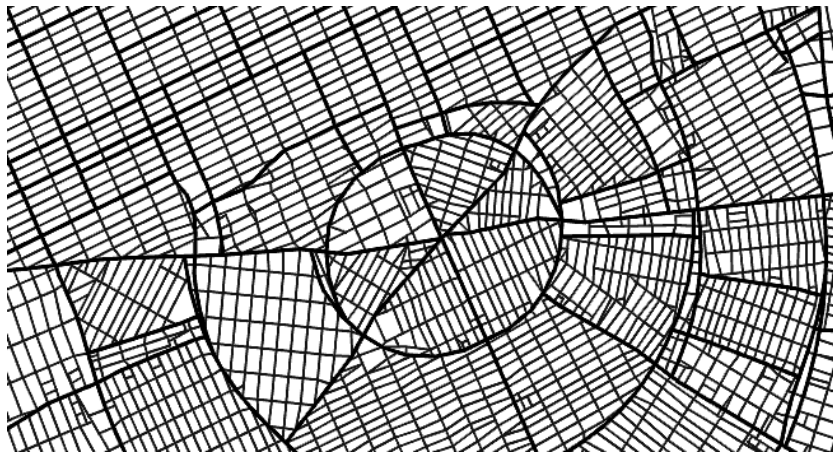


FIGURE 3 – CityEngine mélange des motifs urbains extraits de cartes de Paris et de New York [28].

3 Le modèle

3.1 Structure

Les automates cellulaires sont des structures versatiles et puissantes dont le formalisme originel impose néanmoins quelques limitations ; l'une des principales étant, à nos yeux, un maillage régulier et statique. Pour répondre à notre problématique, il est nécessaire d'employer une structure respectant les critères suivants :

1. Elle doit partitionner l'espace, possiblement de façon irrégulière ;
2. Des relations de voisinages pourront être déduites de sa topologie ;
3. Elle doit pouvoir représenter à la fois la parcellisation du territoire et le réseau routier.

Le diagramme de Voronoï est un candidat idéal. Sa constitution est intrinsèquement spatiale puisqu'il s'agit d'un partitionnement axé autour de points spéciaux, les générateurs, chacun possédant une cellule contenant tous

les points plus proches de ce générateur que de tout autre. Autrement dit, la distance séparant un point p placé dans une cellule de Voronoï et le générateur de cette même cellule est inférieure à la distance séparant p de tous les autres générateurs [30]. La figure 4 fournit un exemple de diagramme de Voronoï. On remarque visuellement quelques propriétés notables ; notamment le fait que deux générateurs voisins sont équidistants de l'arête les séparant et que le segment les reliant y est perpendiculaire.

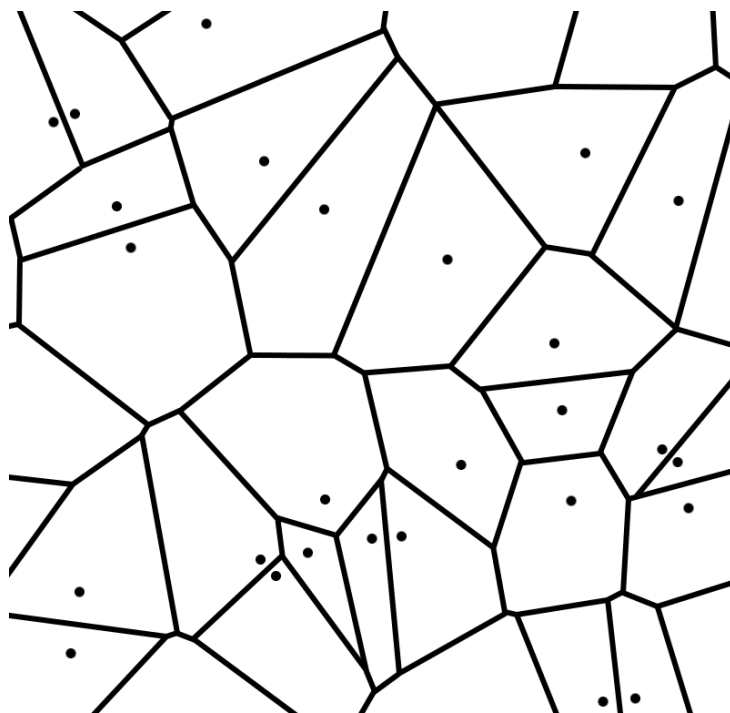


FIGURE 4 – Un diagramme de Voronoï. Chaque point noir est un générateur.

Les diagrammes de Voronoï trouvent de nombreuses applications en science. En robotique, les obstacles présents dans un environnement peuvent être assimilés à des générateurs et un robot cherchant à maximiser leur évitement préférera longer les frontières des cellules (les arêtes de Voronoï) [31]. En sociologie géographique, ils permettent d'opposer les zones d'influence de différents éléments urbains et répondent à des questions telles que : quel magasin un piéton sera-t-il plus susceptible de visiter selon la zone dans laquelle il se trouve ? Leur utilisation pour l'étude de l'épidémie de choléra londonienne en 1854 à permis de vérifier le lien entre fontaines publiques infectées

(les générateurs) et zones souffrant d'un fort taux de mortalité (les cellules) [32].

Comme son homonymie le laisse présager, la cellule de Voronoï remplace dans notre modèle la cellule de l'automate cellulaire. Une grille régulière, comme celles présentes dans les automates cellulaires classiques, correspond d'ailleurs à un diagramme de Voronoï dans lequel les générateurs sont régulièrement disposés. Une tessellation de Voronoï peut être considérée comme une généralisation de la structure grillagée ; notre première contrainte est donc satisfaite.

À l'échelle de ce modèle, chaque cellule représente une parcelle cadastrale et on utilise comme générateur le centre de l'empreinte de la parcelle. Le diagramme permet d'identifier les parcelles voisines comme étant celles partageant une arête de Voronoï. Un graphe de voisinage est ainsi construit et adopte la forme duale du diagramme de Voronoï : la triangulation de Delaunay (voir figure 5). Les structures de voisinage de chaque cellule sont déterminées à partir de la topologie du diagramme et la seconde contrainte est satisfaite.

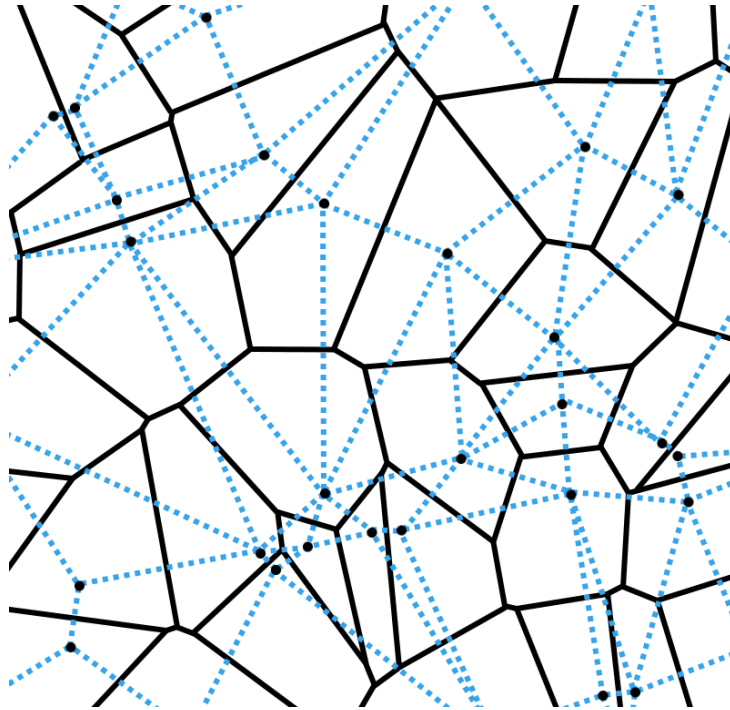


FIGURE 5 – le réseau de voisinage du diagramme de Voronoï (en noir) correspond à sa forme duale, la triangulation de Delaunay (en bleu).

Le diagramme de Voronoï permet de décrire un canevas urbain de base dans lequel l'espace d'influence de chaque parcelle est décrit mais la composante routière reste encore absente du modèle. Chaque arête de Voronoï indique un espace entre deux parcelles et est donc susceptible d'accueillir une route. Bien sûr, dans une véritable ville, chaque parcelle n'est pas encerclée de voies ; l'un des objectifs du modèle est de déterminer quelles arêtes accueilleront des routes et quelles arêtes resteront vides. Cette structure suffit donc à représenter à la fois les éléments du viaire et du bâti. Notre dernière contrainte est comblée.

En pratique, dans notre modèle un système urbain est représenté par deux graphes : le graphe viaire et la graphe de voisinage du bâti. Le graphe du bâti a pour nœud les centres des parcelles et ses arêtes symbolisent les relations de voisinage. Le graphe viaire a des arêtes représentant les routes et des nœuds représentant les carrefours. Les structures de ces graphes sont basées sur la topologie du diagramme de Voronoï puisqu'il s'agit pour le graphe viaire de l'ensemble des arêtes et sommets de Voronoï et pour le graphe du bâti, de sa triangulation de Delaunay.

Il est essentiel de dissocier le polygone convexe qu'est la cellule de Voronoï et la véritable empreinte cadastrale de la parcelle qu'elle représente. Une cellule représente l'influence d'une parcelle dans l'espace urbain et possède comme seul point commun avec l'empreinte son centre puisqu'il s'agit du générateur de la cellule. Similairement, une arête peut indiquer qu'une voie passe entre deux parcelles sans pour autant fournir ses coordonnées ou sa courbure. Si l'on souhaite, dans un but infographique, générer une image de notre ville à partir de ce modèle, un travail d'interprétation est nécessaire et n'a pas été traité à l'occasion de ce projet. Un exemple est visible sur la figure 6.

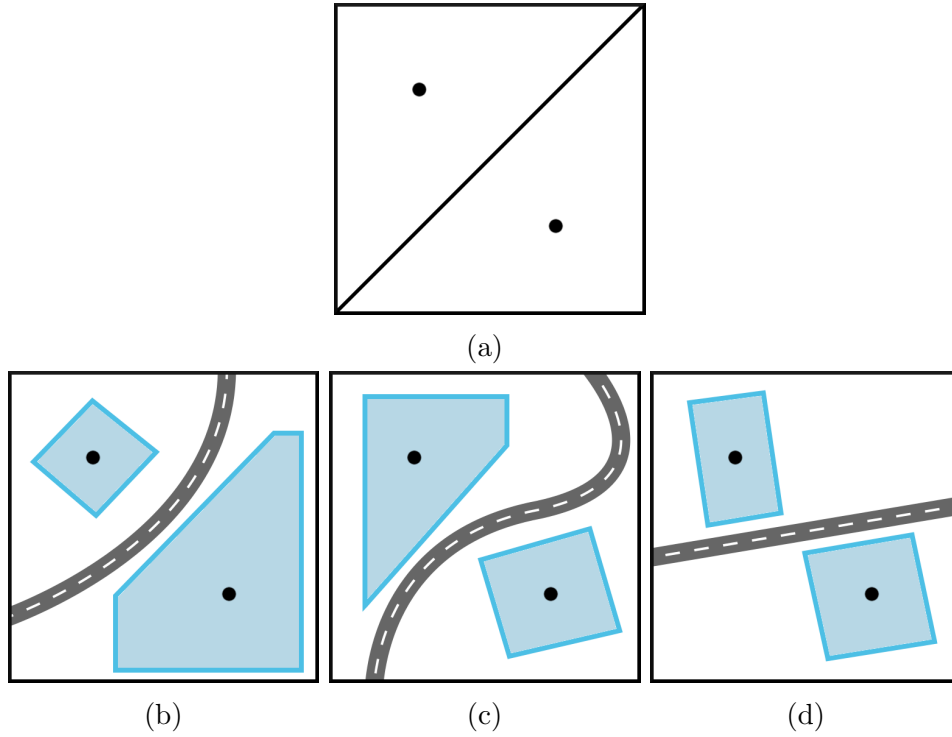


FIGURE 6 – Un diagramme de Voronoï trivial et trois interprétations possibles.

3.2 Potentialité

Via le terme *potentialité*, on souhaite exprimer l'opposition entre deux types d'éléments : les *potentiels* et les *construits*.

Un élément *construit* est une parcelle ou une voie dont l'existence physique est avérée et qui affecte ses alentours. L'ensemble des éléments construits forme la ville.

Un élément *potentiel* peut être assimilé à une idée germant dans l'esprit de l'urbaniste ; à une possibilité envisagée et représentée de manière intangible mais néanmoins précise. Les parcelles potentielles, particulièrement, n'ont pas d'effet sur le bâti construit. Par contre, elles attirent la construction des routes.

Cette dualité et cette unidirectionnalité sont justifiées par un désir de fournir un modèle historiquement cohérent. On ne se contente pas de générer itérativement un système urbain complet et de considérer la configuration

finale comme l'unique résultat. Chaque itération fournit un résultat en soi et assembler chaque instantané de la ville doit décrire sa croissance naturelle.

Si l'on souhaite reproduire le cycle d'urbanisation prenant place dans une vraie ville, la question de l'ordonnancement des étapes se pose. L'implantation de nouveaux bâtiments est lourdement dépendante du réseau routier existant puisqu'on ne construit pas d'infrastructures isolées des axes de transport. À l'inverse, le développement du réseau viaire est dépendant du bâti puisque la fonction des routes est avant tout de le desservir. En partant de ce constat, nous sommes face à un problème dans lequel chaque domaine traité est dépendant de l'autre. Donc, faut-il construire la bâti puis le relier au réseau viaire? Faut-il installer les routes puis les peupler par du bâti? L'œuf ou la poule? La figure 7 résume cette situation d'interdépendance.

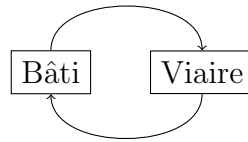


FIGURE 7

Lors de la croissance des villes, le cycle d'urbanisation se déroulant est le suivant :

1. Une nouvelle installation est prévue en bordure de la ville, dans une zone possiblement isolée du réseau routier ;
2. Une route est construite pour permettre l'installation de la nouvelle parcelle ;
3. Une fois la route contruite, la parcelle peut être à son tour construite ;
4. D'autres parcelles vont se construire sur la nouvelle route.

IMAGE

Dans notre modèle, ces quelques étapes se traduisent comme suit :

1. Une parcelle potentielle est placée dans une zone vide ;
2. On construit les routes potentielles menant à la parcelle potentielle ;
3. Une fois la route contruite, la parcelle peut être à son tour construite ;
4. La nouvelle route attire d'autres parcelles potentielles.

ETOFFER

3.3 Mécanismes

3.3.1 Automate cellulaire graphe

La dynamique de croissance urbaine est décomposable sur deux axes. La croissance horizontale décrit l'expansion spatiale de la ville dont l'enveloppe grandit pour occuper plus de territoire tandis que la croissance verticale correspond à l'augmentation des densités au sein de la ville, souvent à partir d'un ou de plusieurs centres. Le mécanisme cellulaire présenté ci-après émule la croissance verticale et les variations de densité internes au système.

La densité de population est la quantité principale guidant l'évolution de ce modèle. La ville évolue, de nouveaux bâtiments apparaissent, d'autres sont rasés, les quartiers changent. Le modèle doit être capable de simuler ces évolutions. C'est bien sûr avec le principe des automates cellulaires en tête que nous allons gérer cette dynamique.

On discrétise la densité sur trois paliers : *faible* (f), *moyenne* (m) et *élevée* (e). La matrice A décrit des coefficients d'affinité mettant en relation les différentes densités.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} f & m & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} f \\ m \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0.01 & 0 \\ 0.001 & 1.5 & 0.01 \\ 0 & 0.01 & 1.6 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (1)$$

Une valeur haute en A_{ee} signifie par exemple que si une cellule a de nombreux voisins de densité *élevée* alors elle a une grande probabilité de devenir elle-même *élevée*. L'équation 2 permet de formaliser ce principe et fournit un score $T_i(C)$ quantifiant l'éventualité pour une cellule C de passer à l'état i . $V_k(C)$ correspond au nombre de voisins de C ayant l'état k . Les valeurs fortes présentes sur la diagonale de A permettent à des groupements de parcelles de la même densité de se former.

$$T_i(C) = \sum_{k \in \{f, m, e\}} V_k(C) A_{ik} \quad (2)$$

Pour obtenir la probabilité $P_i(C)$ de passage à l'état i , on normalise chaque score de transition (équation 3) et une roue de la fortune biaisée se charge du choix.

$$P_i(C) = \frac{T_i(C)}{\sum_{k \in \{f,m,e\}} T_k(C)} \quad (3)$$

Prenons un exemple trivial pour illustrer ce processus. On souhaite évaluer l'état que pourrait prendre la cellule C , au centre du quadrillage de la figure 8, à la prochaine mise à jour du système. Chacune des cellules en bordure de cette figure est voisine de C selon le voisinage de Moore. On commence par calculer les scores de transition.

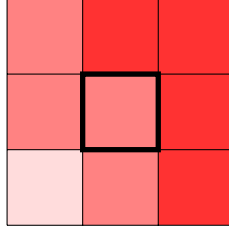


FIGURE 8 – On cherche à calculer les probabilités transitionnelles pour la cellule centrale, C .

$$\begin{aligned} T_f(C) &= V_f(C)A_{ff} + V_m(C)A_{fm} + V_e(C)A_{fe} \\ &= 1 \times 1 + 3 \times 0.01 + 4 \times 0 \\ &= 1.03 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_m(C) &= V_f(C)A_{mf} + V_m(C)A_{mm} + V_e(C)A_{me} \\ &= 1 \times 0.001 + 3 \times 1.5 + 4 \times 0.01 \\ &= 4.541 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_e(C) &= V_f(C)A_{ef} + V_m(C)A_{em} + V_e(C)A_{ee} \\ &= 1 \times 0 + 3 \times 0.01 + 4 \times 1.6 \\ &= 6.7 \end{aligned}$$

On normalise ensuite les scores afin de sélectionner aléatoirement – mais de façon biaisée – le prochain état de C . Ici, on observe que la cellule a de fortes chances de passer à la densité *élevée*.

$$P_f(C) = \frac{T_f(C)}{\sum_{k \in \{f, m, e\}} T_k(C)} = \frac{1.03}{1.03 + 4.541 + 6.7} = 0.084$$

$$P_f(C) = \frac{T_f(C)}{\sum_{k \in \{f, m, e\}} T_k(C)} = \frac{1.03}{1.03 + 4.541 + 6.7} = 0.37$$

$$P_f(C) = \frac{T_f(C)}{\sum_{k \in \{f, m, e\}} T_k(C)} = \frac{1.03}{1.03 + 4.541 + 6.7} = 0.546$$

Ce processus basé sur les affinités entre différentes classes évoque le modèle de ségrégation de Schelling à la différence qu'ici, trois *populations* interagissent et qu'il n'y a pas de contrainte de déménagement (dans son modèle, si une cellule passe de A à B alors une autre doit passer de B à A ailleurs afin de conserver les mêmes quantités de chaque classe). Exécuter ce processus pendant plusieurs itérations produit un dégradé discret de densité caractéristique des systèmes urbains.

Si l'on applique cette règle à un automate cellulaire classique plus large, on obtient les configurations visibles sur la figure 9. On remarque deux incohérences séparant le système urbain simulé et une vraie ville. Premièrement, l'état de l'automate change drastiquement en juste quelques itérations : au temps 25, la disposition de départ n'est déjà plus discernable. Hors, la granularité temporelle d'une telle simulation doit être fine afin de pouvoir prendre en compte chaque modification locale du système pour qu'elle puisse se répercuter sur le reste de l'automate. Deuxièmement, on observe d'itération en itération que chaque cellule voit son état changer en permanence – ce qui est normal pour un automate cellulaire auquel on n'a pas adjoint de règle supplémentaire. Il est donc important d'associer à chaque cellule un élan favorisant la persistance de son état selon son âge afin de ralentir la simulation et surtout d'éviter les transitions constantes qui ne sont absolument pas fidèles à la stabilité d'une ville réelle. Les fonctions sigmoïdes, fréquemment employées en modélisation de systèmes complexes, sont idéales pour exprimer en fonction du temps le passage d'un seuil à un autre. La sigmoïde classique (figure 10) varie de 0 à 1 par une courbe caractéristique. On l'altère comme il est visible sur la figure 11 pour obtenir une fonction associant une probabilité de changement d'état à l'âge de la cellule considérée. Le facteur 0.02 permet d'adoucir la pente de la sigmoïde tandis que 350 sert à décaler $f(x)$ de façon à pouvoir l'utiliser dans le domaine positif.

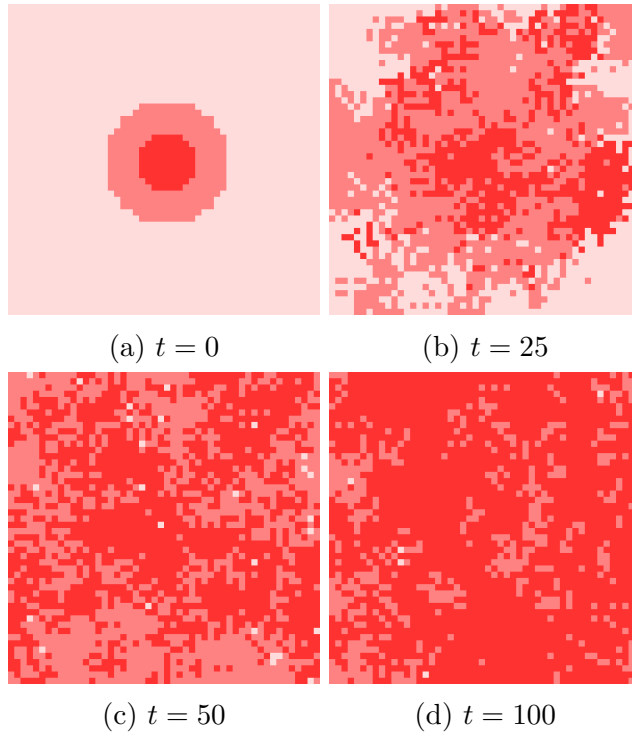


FIGURE 9 – Quatre configurations de l’automate cellulaire. On y retrouve peu de similarités et les variations d’état sont trop rapides.

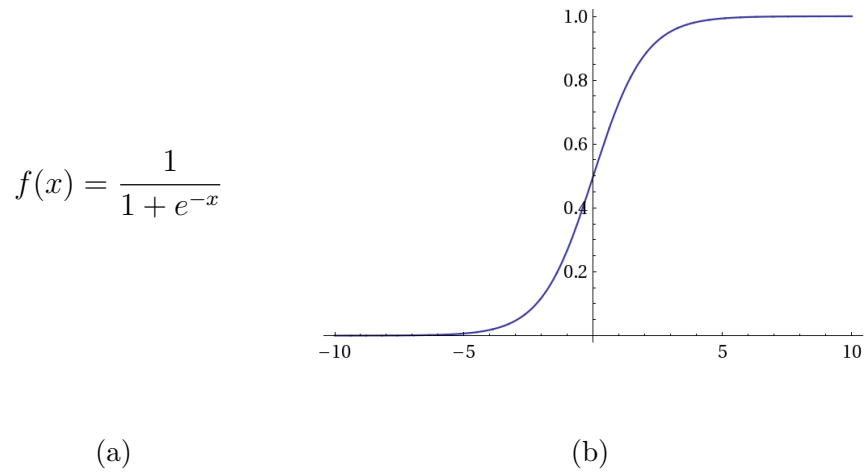


FIGURE 10 – Sigmoide classique.

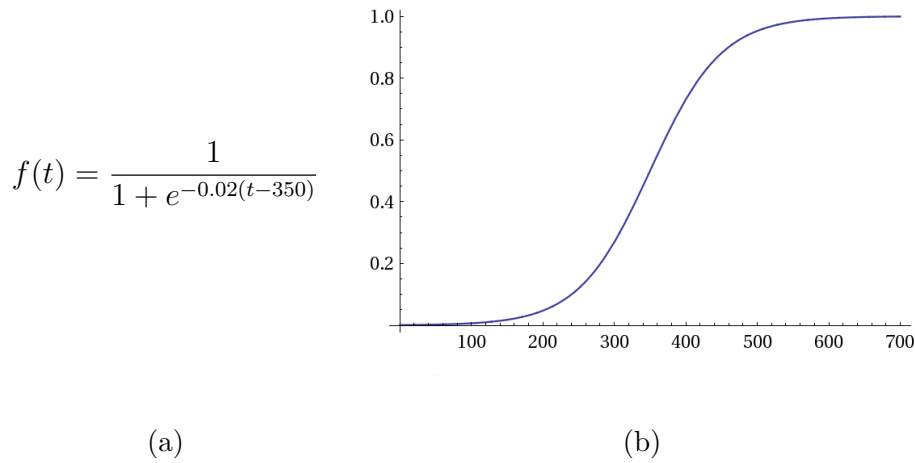


FIGURE 11 – Probabilité de changement d'état en fonction du temps.

On voit sur la figure 12 un automate cellulaire doté des mêmes règles de transition et de la même configuration initiale que lors de notre première tentative mais pour lequel l'âge des cellules est pris en compte lors de l'évaluation de la probabilité de transition vers un autre état. En conséquence, l'évolution de la ville est clairement ralentie et les modifications d'état locales ont le temps de s'exprimer.

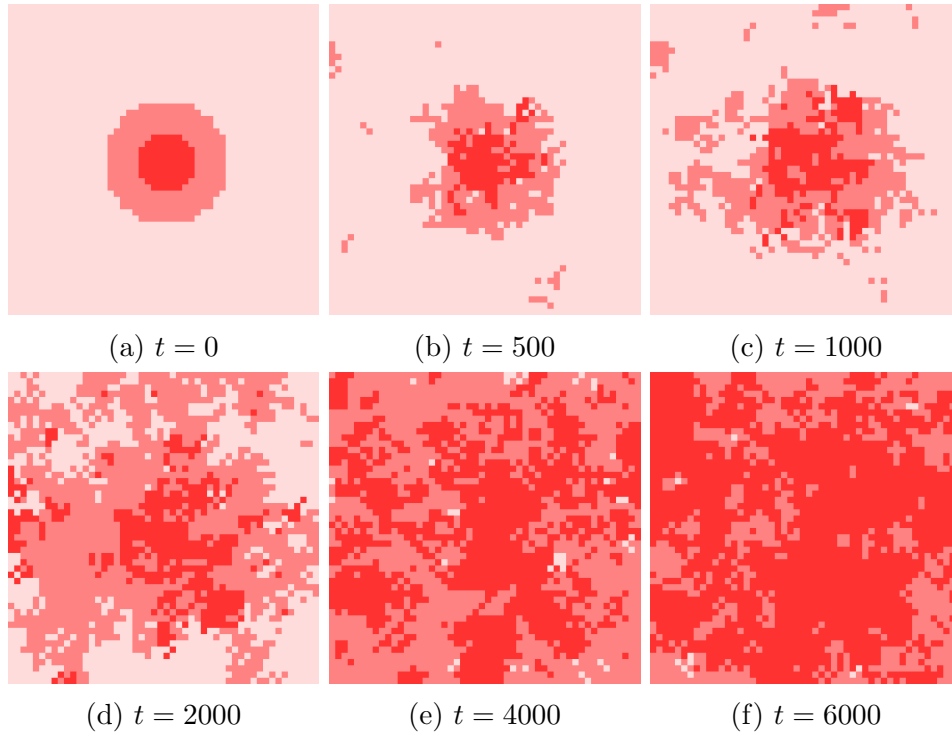


FIGURE 12 – Six configurations de l’automate cellulaire stabilisé.

Les exemples précédents permettent d’illustrer les règles de transition et mettent en évidence un problème de stabilité et de rythme à prendre en compte. Cependant, le but de cet exposé est de se détacher de la régularité spatiale contraignante des automates cellulaires et c’est à cet effet que l’on a présenté plus tôt le diagramme de Voronoï. À la manière des automates cellulaires graphes de O’Sullivan [18], chaque cellule de Voronoï voit son état varier en fonction de son voisinage ; voisinage établi à partir de la topologie du diagramme ; lui-même issu des positions des centres des parcelles. On applique le même mécanisme cellulaire au diagramme. La configuration initiale contient autant de parcelles que l’automate cellulaire classique mais leur positionnement est aléatoire (bien que que homogène). La progression de l’évolution des densités est visible sur la figure 13 et dévoile un comportement similaire à celui observé sur l’automate cellulaire classique.

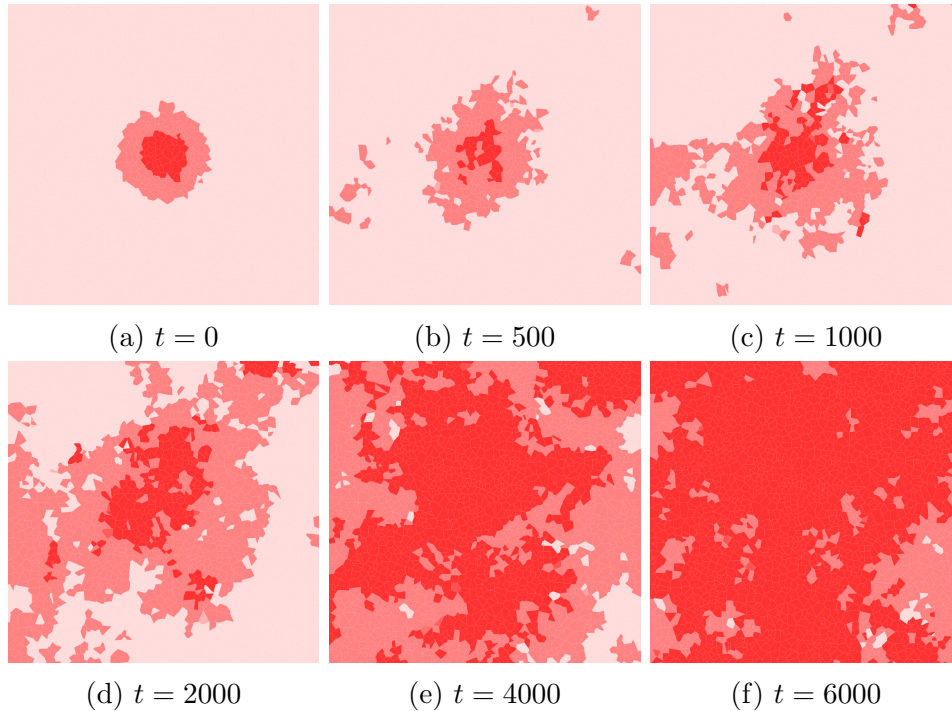


FIGURE 13 – Six configurations du diagramme de Voronoï cellulaire.

Plus la simulation avance et plus le système est chargé de parcelles à haute densité. Un lecteur averti pourrait argumenter que ce comportement est bien différent de ce que l'on peut constater en situation réelle : quel que soit le taux de croissance d'une ville, elle ne finit jamais entièrement remplie de grands immeubles et de centres commerciaux. Mais il faut garder à l'esprit que le mécanisme présenté dans cette section ne gère que la croissance verticale. Par la suite, la croissance horizontale de la ville étendra ses frontières de façon à ce que les nouvelles parcelles à sa bordure soient moins denses.

La problématique étant d'étudier la coévolution de deux aspects urbains, le viaire et le bâti, et non seulement l'évolution des densités (qui ne sert que de support à l'essor de la ville), on a préféré choisir une règle basique. Il est néanmoins tout à fait possible d'utiliser par la suite des règles cellulaires plus sophistiquées pour améliorer le réalisme de la simulation. On pourrait, par exemple, prendre en compte les valeurs financières des parcelles ou les classes sociales des habitants.

3.3.2 Placement des éléments potentiels

Le second mécanisme place de nouveaux éléments urbains en bordure de la ville et est ainsi responsable de sa croissance horizontale. Ces éléments sont les routes et les parcelles mais il est seulement nécessaire de considérer le placement de ces dernières. En effet, les voies sont représentées par les arêtes de la cellule de Voronoï associé à une parcelle.

En quelques mots, le placement se déroule comme suit :

1. On détermine les centres de la ville en fonction de la densité
2. On dépose sur un des centres une *graine* mobile qui servira de générateur à la nouvelle parcelle ;
3. La graine se déplace sous l'influence des variables immanentes à la ville ;
4. Quand la graine stoppe son mouvement, on y crée la parcelle.

Le déplacement de la graine est un processus pouvant potentiellement prendre en compte de nombreuses variables. Dans la simulation d'exemple que l'on décrit, seules la densité et le placement des routes peuvent guider la graine, car ce sont les uniques données considérées. Cependant, on souhaite que le modèle soit extensible et qu'il soit capable de supporter d'autres variables et contraintes : la valeur des sols par exemple, ou bien la pente des zones envisagées ou l'impossibilité de s'installer sur certains types de terrain (forêts, plans d'eau). De cette idée de graine se déplaçant en fonction d'influences diverses transpire un véritable aspect physique.

On emploie donc une approche mécanique qui se base sur un champ de vecteurs généré à partir de l'état du système urbain pour guider la graine vers sa destination. Puisque de nombreux paramètres sont à prendre en compte, on utilise un champ de vecteurs par donnée que l'on souhaite exprimer puis on les combine ; ce qui permet de pondérer différemment l'impact de chaque donnée.

On veut évidemment que la densité soit prise en compte dans ce placement. Dans une ville, les nouvelles installations ont principalement tendance à se répartir sur les frontières de l'enveloppe urbaine et à s'éloigner des centres, non pas par animosité envers l'activité du centre-ville mais simplement par manque d'espace. Pour traduire ce phénomène dans le modèle, un premier champ I_d fait donc pointer chacun de ses vecteurs vers la parcelle disposant de la plus faible densité parmi les voisines de la parcelle sur laquelle il est posé. Ainsi des chemins de vecteurs se forment et mènent vers les zones à densité réduite.

Il est aussi naturel que les nouvelles parcelles soient placées près des installations routières existantes de façon à pouvoir communiquer aisément avec les grands axes routiers. À cet effet, on ajoute un champ I_r pour lequel chaque vecteur pointe vers la voie construite la plus proche. Dans notre modèle, les voies ne sont pas hiérarchisées et on ne fait de distinction entre les routes primaires, secondaires et tertiaires. Si c'était le cas, on pourrait cependant imaginer adjoindre à chaque route des coefficients différents selon leur classe afin que les grands axes attirent le bâti et que les ruelles aient un impact moindre.

Les nouvelles parcelles ne sont pas uniquement disposées en fonction de variables internes à la ville car, souvent, l'environnement impose des restrictions quant à la direction que son expansion va prendre. Parmi ces contraintes, on pense aux zones non constructibles comme les plans d'eau, les forêts mais aussi aux fortes pentes. Un champ de vecteurs I_o est dédié à l'évitement de telles zones et repousse la graine des obstacles.

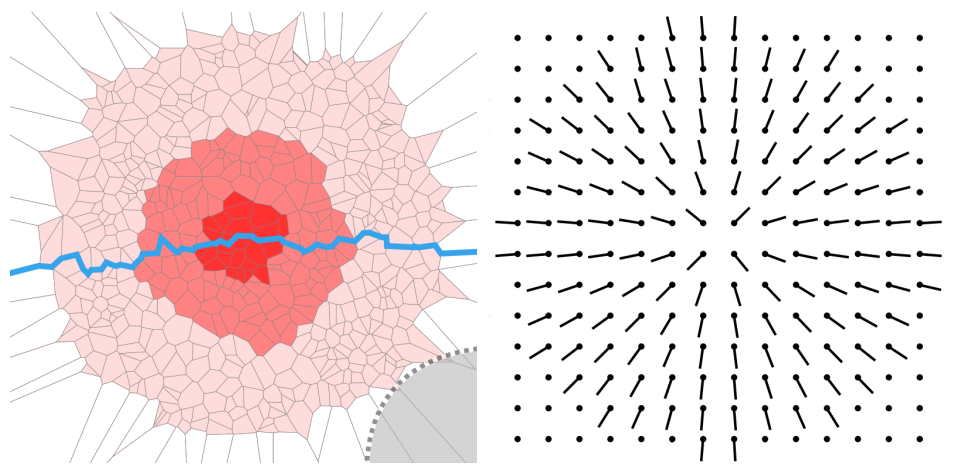
L'influence générale qu'a le champ de vecteurs final I , somme pondérée de tous les autres, à la position (x, y) est donnée par l'équation 4. Les facteurs α , β et γ sont à définir en fonction de l'importance que l'on souhaite donner à chaque champ et donc à l'information qu'ils expriment.

$$I(x, y) = \alpha I_d(x, y) + \beta I_r(x, y) + \gamma I_o(x, y) \quad (4)$$

Pour calculer $I_k(x, y)$ avec $k \in \{d, r, o\}$, on identifie les quatres vecteurs entourant le point (x, y) puis on effectue une interpolation bilinéaire pour obtenir la valeur qu'aurait un vecteur en (x, y) .

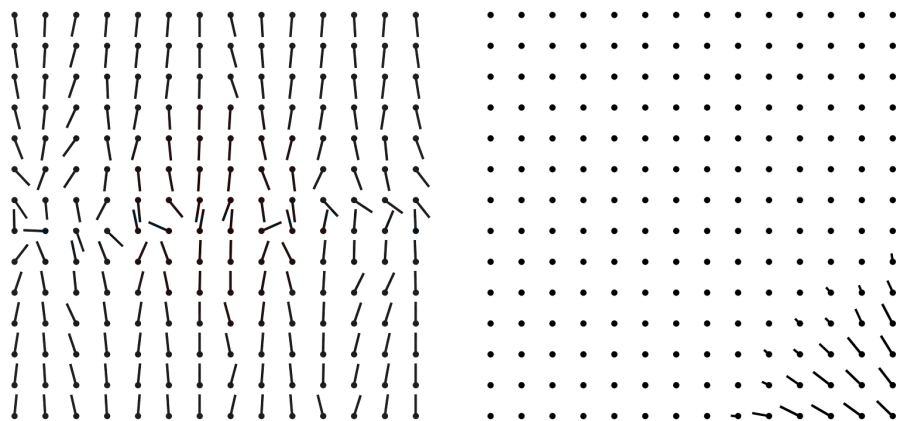
Afin d'illustrer ce mécanisme, une ville virtuelle et les champs de vecteurs associés sont visibles sur la figure 14. Plus les parcelles arborent une couleur vive et plus leur densité est élevée. Le quart de cercle gris correspond à un obstacle. Les arêtes bleues forment un axe viaire. La combinaison des trois champs de vecteurs fournit le champs final de la figure 15. Les chemins qui s'y forment guident vers les bords ouest et est de la ville par attirance de l'axe routier mais aussi dans une moindre mesure vers le nord et le sud. La croissance vers le sud-est est stoppé par l'influence de l'obstacle.

On remarque que cette ville ne contient qu'une unique route passant horizontalement par son centre. En conséquence, la majeure partie des parcelles n'est pas reliée au réseau routier. Cette configuration jouet n'est donc aucunement réaliste mais permet d'illustrer la formation des champs de vecteurs.



(a) Ville virtuelle.

(b) I_d , le champ d'évasion de la densité.



(c) I_r , Le champ d'attraction des routes

(d) I_o , le champ de répulsion des obstacles

FIGURE 14 – Une ville virtuelle et les différentes influences y guidant le positionnement des nouvelles parcelles.

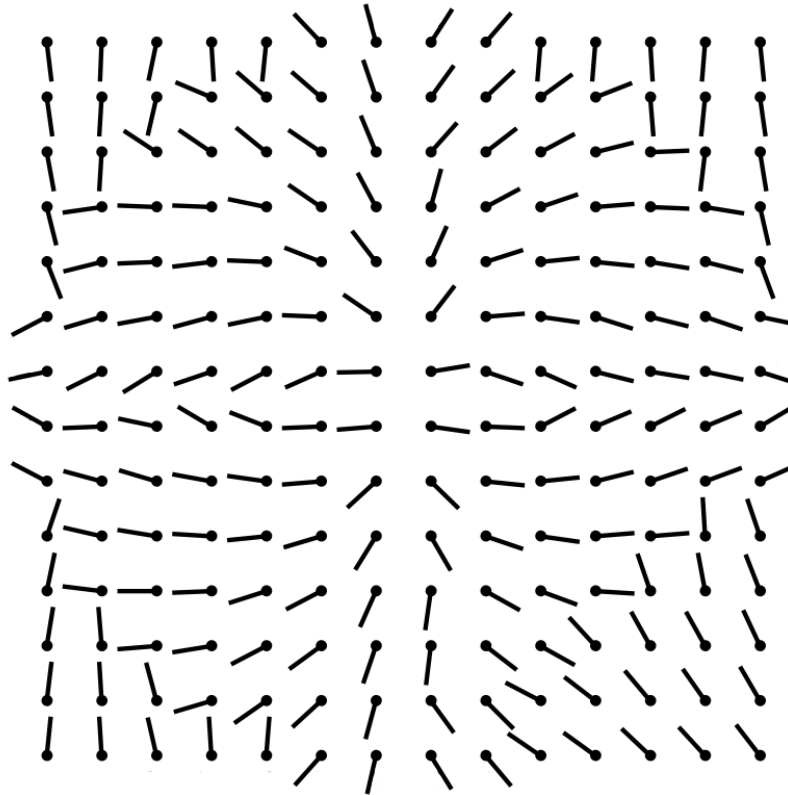


FIGURE 15

VITESSE DE LA GRAINE
 ARRET DE LA GRAINE
 TRACER CHEMIN GRAINE

Les quelques champs de vecteurs décrit ci-dessus servent un but illustratif. La généralité de ce mécanisme permet à l'utilisateur du modèle d'employer les données qu'il juge nécessaires afin de mettre en avant certaines caractéristiques d'un système urbain. Utiliser ces trois champs permet de guider la croissance de la ville en fonction des quantités qui la représentent et de contraintes de l'environnement. Il serait aussi utile de bénéficier de moyens de contrôle sur cette évolution urbaine. Dans les villes, des motifs réguliers se dessinent et sont issus d'un besoin d'organisation de l'espace. On pense notamment à l'organisation en grille typique de Manhattan ou à l'organisation radiale de certains quartiers. Afin d'imposer ce type de placement, il serait envisageable d'employer un nouveau champ de vecteurs guidant vers

des points fixes. TOujours dans une optique de contrôle, on peut utiliser un champ guidant les nouvelles parcelles vers des zones d'attraction dont une municipalité souhaiterait évaluer le potentiel.

3.3.3 Construction des éléments potentiels

Le mécanisme de placement des élément potentiels présenté précédemment se base sur les variables internes au système urbain ; variables dont l'évolution est régie par le mécanisme cellulaire. Seulement, les nouvelles parcelles et routes placées sont potentielles. Le troisième mécanisme choisit parmi ces éléments potentiels lesquels sont construits. On traite différemment le choix des parcelles à construire et le choix des routes à construire.

Choix des parcelles

Afin de contrôler l'expansion effective de la ville, un taux de croissance c_p est défini pour régler la vitesse de construction des parcelles potentielles. c_p parcelles sont construites par itération du modèle.

Toujours dans un soucis de cohérence historique, on refuse qu'une parcelle potentielle soit construite alors qu'elle n'est pas encore reliée au réseau routier existant. On considère donc uniquement celles dont la cellule de Voronoï a au moins une arête construite.

Une fois ces parcelles candidates listées, on leur adjoint un score fonction de l'âge de leur prévision (le temps auquel elles ont été placées). Le but de cette quantification est de donner la priorité de construction aux parcelles prévues depuis plus longtemps. La ville étant néanmoins une structure imparfaite et parfois désordonnée, le choix des parcelles est fait par un tirage aléatoire biaisé en fonction de ce score et la priorité par l'âge n'est pas garantie.

ETOFFER

Choix des routes

La construction des routes potentielles est un problème plus complexe. Le diagramme de Voronoï, et plus précisément ses arêtes et sommets, forment un réseau routier global dans lequel chaque parcelle est encerclée de routes potentielles. Dans une ville réelle, toutes les parcelles ne sont bien sûr pas entourées de voies mais sont regroupées en blocs ou en bandes elles-mêmes encerclées. La tâche à accomplir est donc de sélectionner des arêtes du réseau routier global pour les construire.

NETWORK SIMPLEX
UN PUIT + PLUSIEURS SOURCES
EVALUATION

4 Mesures

4.1 Démonstration

DEMO LH

4.2 Mesures sur le bâti

AIRES
AIRES DENSITES

4.3 Mesures sur le viaire

DIAMETRE
CENTRALITE
DEGRE DES CARREFOURS
DEGRE / DISTANCE

5 Conclusion

RESUME
CONSTAT
PERSPECTIVES (DYNAMIQUES INTERNES, REALISME, INTER-
PRETATION, VRAIE VILLE)

Références

- [1] Martin GARDNER. “The fantastic combinations of John Conway’s new solitaire game ”life””. Dans : *Scientific American* 223 (1970).
- [2] Niloy GANGULY et al. *A Survey on Cellular Automata*. Rap. tech. 2003.

- [3] U. FRISCH, B. HASSLACHER et Y. POMEAU. “Lattice-gas Automata for the Navier-Stokes equation”. Dans : *Physical Review Letters* 56 (1986).
- [4] A.R. KANSAL et al. “Cellular automaton of idealized brain tumor growth dynamics”. Dans : *BioSystems* 55 (2000).
- [5] Waldo TOBLER. *Cellular Geography*. Rap. tech. International Institute for Applied Systems Analysis, 1975.
- [6] Shih Ching FU et George MILNE. “Epidemic Modelling Using Cellular Automata”. Dans : *Proceedings of the Australian Conference on Artificial Life*. 2003.
- [7] Thomas C. SCHELLING. “Models of segregation”. Dans : *The American Economic Review* 59 (1969).
- [8] Itzhak BENENSON et Paul M. TORRENS. *Geosimulation : Automata-based modelling of urban phenomena*. Wiley.
- [9] Anthony Gar-On YEH et Xia LI. “Urban simulation using neural networks and cellular automata for land use planning”. Dans : *Symposium on Geospatial Theory, Processing and Applications*. 2002.
- [10] Paul M. TORRENS. *How Cellular Models of Urban Systems Work*. Rap. tech. Centre for Advanced Spatial Analysis, University College London, 2000.
- [11] Paul M. TORRENS et David O’SULLIVAN. “Cellular automata and urban simulation : where do we go from here?” Dans : *Environment and Planning B : Planning and Design* 28 (2001).
- [12] Roger WHITE. “Cities and cellular automata”. Dans : *Discrete Dynamics in Nature and Society* 2 (1997).
- [13] Lucien BENGUIGUI, Daniel CZALANSKI et Rafael ROTH. “Modeling cities in 3D : a cellular automaton approach”. Dans : *Environment and Planning B : Planning and Design* 3 (2004).
- [14] Jeremy CORNU et Adrien DELCOURT. *Simulation de la dynamique spatiale urbaine par automate cellulaires*. 2008.
- [15] Tom LECHNER, Seth TISUE et Andy MODDRELL. *Procedural Modeling of Urban Land Use*. Rap. tech. Department of Computer Science, North Carolina State University, 2007.

- [16] Edwige DUBOS-PAILLARD, Yves GUERMOND et Patrice LANGLOIS. “Analyse de l’évolution urbaine par automate cellulaire : le modèle SpaCelle”. Dans : *L’Espace géographique* 32 (2003).
- [17] Ferdinando SEMBOLONI. “The dynamic of an urban cellular automata in a 3-D spatial pattern”. Dans : *XXI National Conference Aisre, Regional and Urban Growth in a Global Market*. 2000.
- [18] David O’SULLIVAN. “Graph-based Cellular Automaton Models of Urban Spatial Processes”. Thèse de doct. Bartlett School of Architecture et Planning, University College London, 2000.
- [19] David O’SULLIVAN. “Exploring Spatial Process Dynamics Using Irregular Cellular Automaton Models”. Dans : *Geographical Analysis* 33 (2001).
- [20] P. QUELOZ, B. CHOPARD et Luthi P. O. “Cellular automata model of car traffic in a two-dimensional street network”. Dans : *Journal of Physics A : Mathematical and General* 29 (1996).
- [21] Thomas LECHNER et al. “Procedural City Modeling”. Dans : *1st Mid-western Graphics Conference*. 2003.
- [22] Thomas LECHNER et al. *Procedural Modeling of Land Use in Cities*. Rap. tech. Computer Science Department, Northwestern University, 2004.
- [23] Basil WEBER et al. “Interactive Geometric Simulation of 4D Cities”. Dans : *Eurographics*. 2009.
- [24] Marc BARTHELEMY et Alessandro FLAMMINI. “Co-evolution of density and topology in a simple model of city formation”. Dans : *Networks and Spatial Economics* 9 (2009).
- [25] Marc BARTHELEMY et Alessandro FLAMMINI. “Modeling urban street patterns”. Dans : *Physical Review Letters* 100 (2008).
- [26] George KELLY et Hugh MCCABE. “A Survey of Procedural Techniques for City Generation”. Dans : *ITB Journal* 14 (2006).
- [27] George KELLY et Hugh MCCABE. “Citygen : An Interactive System for Procedural City Generation”. Dans : *Game Design & Technology Workshop*. 2006.
- [28] Yoav I. H. PARISH et Pascal MÜLLER. “Procedural Modeling of Cities”. Dans : *SIGGRAPH ’01*. 2001.

- [29] Guoning CHEN et al. “Interactive Procedural Street Modeling”. Dans : *SIGGRAPH '08*. 2008.
- [30] Geoffrey EDWARDS. “The Voronoi Model and Cultural Space : Applications to the Social Sciences and Humanities”. Dans : *COSIT*. 1993.
- [31] Santiago GARRIDO et al. “Path Planning for Mobile Robot Navigation using Voronoi Diagram and Fast Marching”. Dans : *IROS*. 2006.
- [32] Rachel THOMAS. *Uncovering the cause of cholera*. <http://plus.maths.org/content/uncovering-cause-cholera>. 2010.