

Stage de recherche

# COÉVOLUTION DU RÉSEAU VIAIRE ET DU BÂTI

*Auteur :*

Merwan ACHIBET

*Encadrants :*

Stefan BALEV

Antoine DUTOT

Damien OLIVIER

ILLUSTRATION



Mars - Juin 2012

## KEYWORDS

Urban system, city morphogenesis, Voronoi diagram, cellular automaton.

## EXTENDED ABSTRACT

Gathering issues of human, economic, geographic and political nature, the city truly is a complex system. The increasing growth in population produces urban systems like the world has never seen before, of increasing size, increasing heterogeneity and increasing complexity. Studying the relationships between its internal elements is fundamental to the understanding of its mechanics and to better predict their development. This work focuses on the relationship between the pattern of human installations within the city – characterized at the atomic level by a basic subdivision, the land lot – and its road network.

Systematic definitions of the city are many. Through the anthropologist's eye it can be seen as a concentration of persons, the economist will prefer to view it as a support for the exchange of financial and physical assets and the urbanist as a functional entity composed of flows and services. We choose to consider that the evolution of a city is driven by its population, translated as a measure of its density. This goes in hand with our focus as land lots are inhabited by the same people that uses the surrounding roads to go from one place to another and urbanistic decisions are motivated by a need to optimize the city, streamlining transport means and avoiding high contrasts in the urban fabric.

Study of the domain of urban simulations shows that available scientific works can be classified in two different categories. For visual rendering purposes, special effects in movies or video games, methods have been proposed that generate visually satisfying cities without regarding realism as an obligation. These are often based on empirical observations and the main idea is to emulate the street patterns found in any urban system. Scientific modeling, on the other hand, prefers to focus on the inner qualities of a city, often by studying a subset of those, to analyze its current state and extrapolate its future. We orient our research with the latter in mind but the former represents a non-negligible source of inspiration.

A reader browsing through the field literature will often encounter cellular automata. These structures, which applicability and potential complexity has been proven over times, are fit for describing any kind of space-related

problem. Nevertheless, their rigorous formalism may sometimes restrain realism and negatively impact the validity of the model. For example, a cellular automaton topology is, by definition, perfectly regular and representing a city with a set of identical and aligned cells seems like a coarse simplification. In the same way, the fact that each cell has an identical neighborhood structure, the temporal synchronism and the state discretization may be questioned. We take a drastic step towards realism and embrace the spatial aspect of the city by replacing the classic cellular automaton with a Voronoï diagram following the same basic concepts. Each of its cell represents a land lot and neighborhood relationships that are ruled by adjacency determine its future state; the regularity constraint is thus relaxed. Voronoi edges delineate the Voronoi space of land lots and, as such, are perfect supports for roads.

The different elements represented in our model (*i. e.* land lots and roads) are declined in two flavors. *Potential* elements have a ethereal status; their spatial characteristics are known but until they are definitely built, they have no direct effect on the overall city and only represent an idea, a possible outcome. *Built* elements were potential elements that have been constructed. They form the physical city. Concisely, the gist of the model is to add potential elements to the city and, only later, chose which ones will be built and which ones will be forgotten. The road network expands to accomodate the growth in density and to support anticipated land lots. This process has been divided into three separate mechanisms.

The cellular part of the model lets the inner variables of the city vary based on the Voronoi tessellation and a set of simple rules. Here, only population density is considered and, as a result, the characteristic gradual patterns found in most of the towns of the world is reproduced.

Whereas the previous part of the model is ensuring vertical growth, the horizontal component of the evolution of the city is handled by an extensible method based on the use of vector fields. Each piece of information that we want to consider is represented by a vector field that will guide the placement of new lots. For example, a field escaping from high density areas is used to ensure urban sprawl. Another makes new lots move towards closest road such that they remain snapped to the main transport axes. All vector fields are then summed up with varying coefficient. This general approach can model any kind of guidance or constraint; in particular obstacle avoidance so that the city does not extends itself on forbidden areas like lakes, beaches or protected forests.

The third and last mechanism chooses which of the potential elements

are to be permanently built. Potential roads are chosen with respect to their contribution to the global network, by means of a network flow evaluation. Potential land lots are chosen depending on their position relative to the built roads and the date of their addition into the potential domain.

RESULTATS/MESURES

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>État de l’art</b>	<b>6</b>
2.1	Automates cellulaires et simulation urbaine . . . . .	6
2.2	Approches alternatives . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Le modèle</b>	<b>14</b>
3.1	Structure . . . . .	14
3.2	Potentialité . . . . .	16
3.3	Mécanismes . . . . .	18
3.3.1	Automate cellulaire graphe . . . . .	18
3.3.2	Placement des éléments potentiels . . . . .	23
3.3.3	Construction des éléments potentiels . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Construction</b>	<b>27</b>
4.1	Le graphe parcellaire . . . . .	27
4.2	Le graphe viaire . . . . .	30
4.3	Aspect dynamique . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Mesures</b>	<b>32</b>
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>32</b>

## REMERCIEMENTS

# 1 Introduction

## LES VILLES GRANDISSENT STATISTIQUES

Le système complexe que forme la ville est donc soumis à une forte croissance et un réel besoin de contrôler et de prévoir son évolution se fait ressentir suite à l'explosion démographique que subissent les zones urbaines. C'est dans ce cadre de contrôle et de prévision qu'il est nécessaire d'étudier les mécanismes sous-jacents à une ville pour pouvoir les reproduire sous forme de simulations et étudier différents scénarios possibles.

On se concentre ici sur deux domaines majeurs du tissu urbain, le viaire et le bâti, afin d'étudier leur relation de coévolution. Ces deux aspects de la ville semblent aller de paire puisque le bâti abrite les populations tandis que le viaire leur permet de se déplacer d'un point à un autre. C'est la répartition des parcelles et la structure du réseau routier existant qui guide l'expansion d'une ville. Il est ainsi naturel d'utiliser la densité de population comme force de guidage à son évolution.

## ETOFFER

La première partie présente un état de l'art de la modélisation de systèmes urbains et se concentre particulièrement sur les méthodes à base d'automates cellulaires tout en adoptant un point de vue historique pour justifier l'adoption de cette structure. Le modèle conçu dans le cadre de ce stage de recherche est ensuite présenté en seconde partie. La troisième section aborde des problématiques d'ordre pratique rencontrées lors de l'implémentation du dit modèle. Enfin, des mesures diverses sont employées pour tester et valider ce travail dans la quatrième partie.

# 2 État de l'art

## 2.1 Automates cellulaires et simulation urbaine

La modélisation de systèmes complexes est longtemps uniquement passée par l'usage de méthodes mathématiques ; typiquement, des systèmes d'équations différentielles. Ces techniques permettent de décrire des lois d'évolution et d'observer, ainsi que de prédire par extrapolation, le comportement de phénomènes du réel. Dans le cas de modèles prenant en compte un vaste jeu de paramètres, cette approche peut néanmoins se révéler délicate à employer. Plus

intrinsèquement, même si une telle modélisation est basée sur des observations ancrées dans la réalité, il s'agit d'une représentation conceptuelle d'un problème et aucune mimique des mécaniques sous-jacentes ne s'opère.

Historiquement, les prémices de l'informatique moderne et d'un tout autre paradigme de modélisation sont à attribuer aux esprits du milieu du vingtième siècle. Alan Turing introduit en 1936 la machine éponyme qui, bien que purement théorique, possède un module de contrôle ainsi qu'une mémoire et peut donc exécuter une infinité d'algorithmes. Cette démarche se démarque de l'approche mathématique et semble plus humaine ; on ne résout pas un problème en utilisant des fonctions associant une quantité à un résultat mais on agit véritablement sur ses données. L'idée de base de Turing était d'ailleurs d'assimiler le fonctionnement de sa machine au travail d'une personne remplissant les cases d'un tableau infini.

Entraîné par cette mouvance procédurale et en réaction aux réseaux de neurones de McCulloch et Pitts, John von Neumann et Stanislaw Ulam joignent leurs travaux durant les années 40 pour concevoir l'automate cellulaire : un système comprenant un ensemble d'automates à états spatialement localisés (typiquement sous forme de grille) et interconnectés en fonction de leur proximité. Les entrées de chaque automate correspondent alors aux états des automates voisins et de cette organisation se dégagent de fortes relations d'interdépendance. Le jeu de la vie de Conway en est un exemple classique. La simplicité de ses règles, mise en contraste avec la variété des configurations engendrées, témoigne de la richesse des automates cellulaires [1].

Les automates cellulaires ont depuis été extensivement étudiés et sont appliqués à l'étude de nombreux phénomènes biologiques, physiques et sociaux [2]. La motivation d'Ulam lors de leur conception était d'ailleurs de modéliser la croissance de cristaux. On peut aussi citer en exemple la simulation de la dynamique de fluides [3] et de la croissance de tumeurs [4]. Leur caractère spatial laisse supposer qu'ils sont particulièrement adaptés aux applications géographiques, et dans le cadre de notre problématique, urbaines. Ils ne furent paradoxalement pas immédiatement exploités à cet effet et c'est seulement suite à un article de Waldo Tobler, en 1975, que le rapprochement entre les automates cellulaires et le domaine de la géographie apparaît clairement [5]. Sont ensuite publiés des travaux majeurs appliquant l'automate cellulaire à des problématiques géographiques multi-échelles telles que l'évolution d'épidémies [6] et la ségrégation de population [7] (voir figure 1).

Une idée très exploitée dans ce domaine est d'associer un potentiel de transition à chaque cellule et ce, vers tous les états qu'elles peuvent adopter.





FIGURE 1 – Configuration produite par le modèle de Schelling. Chacune des deux couleurs représente une population différente. La conclusion de ces travaux est qu'un faible degré d'animosité entre deux populations suffit à les séparer de manière évidente.

Dans les modèles déterministes, la transition vers l'état à plus haut potentiel est appliquée tandis que dans les modèles stochastiques, un tirage aléatoire biaisé est préféré. Le potentiel d'une cellule à passer à un nouvel état est déterminé en fonction de paramètres propres au modèle. Peuvent être pris en compte l'élévation du terrain, la densité de population, la proximité d'axes routiers, la proximité de centres urbains, l'âge des parcelles, leur valeur ; en fait, toute combinaison d'attributs relatifs à un réseau urbain. Par exemple, dans une simulation représentant les différents types d'usage, le passage d'une cellule à l'état *résidentiel* pourrait dépendre de la proximité des commerces et des routes et de l'éloignement des zones industrielles. Bien sûr, un nombre élevé de paramètres à prendre en compte requiert un couplage fin et l'impact de chaque variable peut être pondéré. Puisque les variations individuelles de paramètres n'émergent pas de manière transparente à la surface de la simulation, les modèles urbains basés sur des automates cellulaires doivent être finement calibrés et leur réalisme est un défi en soi. Pour contourner ce problème, Yeh et Li prônent l'usage d'un réseau de neurones pour pondérer chaque paramètre à partir de l'analyse de données cartographiques historiques [8].

Il est important de noter que la simplicité du formalisme enveloppant un automate cellulaire strict s'oppose à la qualité de la simulation, notamment dans le cadre de modèles spécifiques [9]. Dans ce cas, une prise de liberté quant aux formalismes originels est autorisée, voire nécessaire, pour obtenir des résultats satisfaisants [10].

La première limite que le formalisme cellulaire de base impose est la discrétisation des états que chaque cellule peut adopter. Même si cette caractéristique fait partie intégrante des particularités qui confèrent aux automates cellulaires leur simplicité d'usage et d'analyse, la description de quantités pouvant arborer un éventail infini de valeurs est alors impossible. Plus concrètement, il est aisé de catégoriser les cellules d'un espace selon le fait, par exemple, qu'elles contiennent des installations humaines ou non (état booléen) [11, 12] ou de façon plus sophistiquée, en fonction de leur type d'usage (*résidentiel*, *commercial* et *industriel* [13] et plus [14]). Représenter des quantités réelles et des variations continues est moins aisé. Pour symboliser plus finement la densité au cœur d'un ensemble urbain, Semboloni utilise par exemple un automate cellulaire de dimension trois dans lequel plus une pile de cellules actives est haute et plus la zone représentée est peuplée [15]. Plus généralement, il est accepté de représenter l'état d'une cellule par un vecteur contenant des valeurs réelles ; des règles de transitions adaptées et

mesurées sont alors à mettre en place.

L'homogénéité d'un automate cellulaire fait partie intégrante de sa définition originelle : en mettant de côté l'état qu'elles adoptent, toutes les cellules sont identiques en forme et en structure de voisinage. Dans le cadre de notre problématique, cette approche est limitante car, dans une ville, les parcelles ne sont que rarement identiques et alignées. Similairement, la notion de voisinage est clairement à redéfinir. Pour des problèmes classiques, les voisinages de von Neumann et de Moore sont régulièrement utilisés mais la relation par contiguité qu'ils décrivent ne convient pas à la représentation des liens de dépendance à plus grande échelle se développant dans un système urbain. Le positionnement d'un bâtiment résidentiel dans une ville se base évidemment sur le voisinage direct des zones envisagées (on préfère construire une maison dans un quartier résidentiel) mais il faut aussi prendre en compte les alentours plus distants (la centrale thermique se trouvant à 500 mètres du site peut poser problème). Une solution possible est d'étendre les aires des voisinages de von Neumann et de Moore tout en conservant leur forme caractéristique. La symétrie évidente se dégageant de telles simplifications va à l'encontre des relations prenant place au sein d'une ville dont les zones ne sont que très rarement parfaitement disposées. O'Sullivan a choisi de relaxer cette contrainte de partitionnement spatial régulier pour faire un pas dans la direction du réalisme [16, 17] : conventionnellement, une cellule d'automate correspond à un sous-espace urbain ou bien une parcelle cadastrale mais dans chacun de ces cas le modèle se base évidemment sur une simplification grossière de l'espace étudié. Il décide donc de donner à chaque cellule les mêmes qualités topologiques que les parcelles qu'elles représentent : même formes, même dimensions, mêmes coordonnées. Une variété de relations de voisinage sont alors envisageables (par voisinage au sens urbain, par distance dans un rayon d'influence, par critère de visibilité). L'éloignement du formalisme cellulaire est drastique car la structure perd de son homogénéité (chaque cellule est différente), la couverture de l'espace n'est plus complète (des vides entre les cellules apparaissent) et le voisinage diffère lui aussi mais chacun de ces changements ???.

Une prise de liberté quant à l'aspect temporel est aussi envisageable. Un automate cellulaire strict est synchrone, *i. e.* les changements d'état de toutes les cellules s'effectuent simultanément. Si le choix était fait de mettre à jour chaque état de façon asynchrone, le comportement de l'automate en serait lourdement modifié. Par exemple, les qualités auto-réplicatives de certaines entités du jeu de la vie ne seraient pas garanties. Il est pourtant légitime

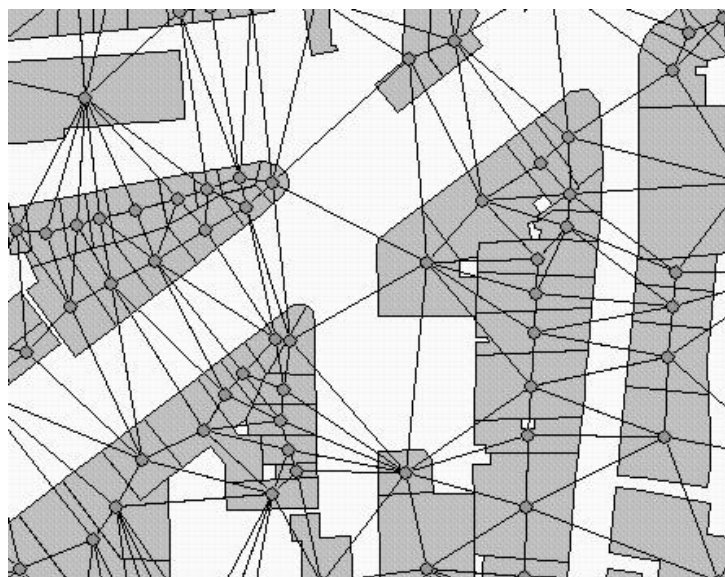
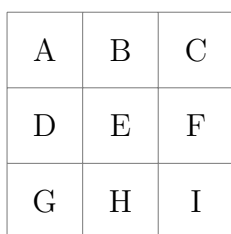
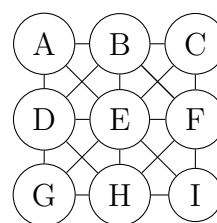


FIGURE 2 – Hoxton, un quartier de Londres, modélisé par l’automate cellulaire graphe de David O’Sullivan [16].



(a) Automate cellulaire classique.



(b) Automate cellulaire graphe.

de se questionner sur la validité d'un tel choix dans une simulation urbaine, premièrement parce qu'une ville est un système complexe et désordonné, deuxièmement parce les processus qui s'y déroulent sont réglés sur différentes échelles temporelles.

Bien que les automates cellulaires soient couramment utilisés pour simuler le trafic routier (dans leur version 1D CITATION ou 2D [18]), ils s'accordent peu avec la construction même d'un réseau viaire. Dans les simulations cellulaires urbaines, le positionnement des routes a un impact sur le développement des cellules puisque le viaire *attire* le bâti mais le réseau est souvent fourni en entrée et reste fixe. Nous sommes amenés à nous interroger sur la capacité des automates cellulaires à modéliser le développement routier. Les relations de proximité les caractérisant sont-elles adaptées à la construction de structures dont l'échelle est celle de la ville et non plus celle de la parcelle ? REPONSE

## 2.2 Approches alternatives

Les automates cellulaires ne sont pas l'unique moyen de modéliser la croissance urbaine. Plusieurs simulations existantes sont des systèmes multi-agent [19, 20]. Dans ces cas, un agent est assimilé à un promoteur immobilier et peut acheter des terres, les vendre, les développer ou changer leur type. Les actions qu'il entreprend sont évaluées en fonction de l'impact sur la ville (changement de la valeur immobilière, avis de la population) et des réglementations locales afin d'éviter toute configuration illégale. Pour la construction du réseau routier, une solution est de mettre en place, en plus des agents promoteurs, deux types d'agents traceurs. Les *extenders* parcourent toute la surface du terrain à la recherche de bâtiments isolés puis tracent une route jusqu'au réseau urbain. Les *connectors* se déplacent uniquement sur le réseau viaire et y raccordent les bâtiments non connectés se trouvant dans leur rayon de détection [19]. Ce genre d'approche quant à la coévolution entre routes et bâti introduit un défaut : le réseau viaire est construit à partir du bâti et des bâtiments peuvent rester isolés. PLUS ?

D'autres solutions s'éloignant des systèmes complexes et penchant du côté de la génération procédurale de contenu existent. Souvent, le domaine d'application de telles méthodes est l'infographie, le cinéma et le jeu vidéo et l'objectif est alors de construire de manière automatique une ville visuellement réaliste sans se soucier de son caractère fonctionnel. Usuellement, l'organisation parcellaire dépend entièrement du réseau routier car la première étape

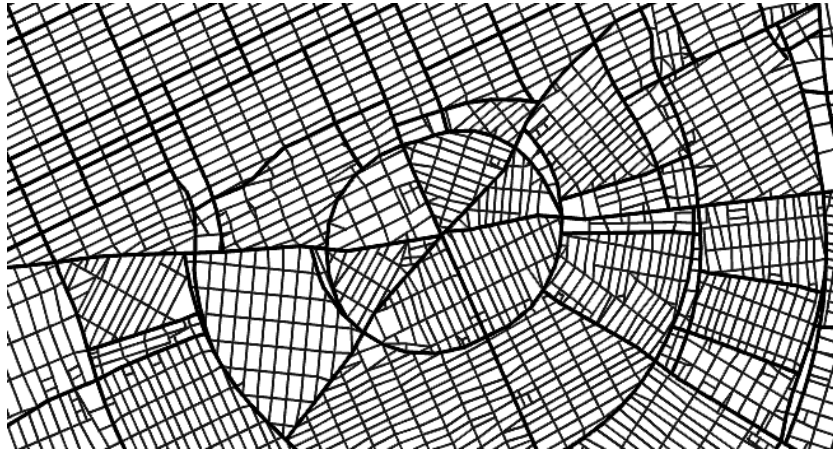


FIGURE 3 – CityEngine mélange des motifs urbains extraits de cartes de Paris et de New York [22].

est souvent de générer un réseau viaire complet puis de placer le bâti en subdivisant récursivement les niches vides formées par les voies. Dans Citygen [21], un point  $p$  de l'espace est aléatoirement choisi puis on calcule un ensemble de plusieurs routes raccordant  $p$  au réseau routier existant en faisant varier leur déviation angulaire et un paramètre de bruit ; la route finale est celle pour laquelle la variation d'altitude est la plus faible. CityEngine [22] utilise un L-System dont les règles permettent de reproduire les différents motifs quadrillés, radiaux et organiques que l'on retrouve dans une ville. La nature récursive des L-Systems permet à ces motifs de se combiner et d'apparaître à différents niveaux de profondeur (voir figure 3). Dans une autre simulation, le tracé des routes suit les *hyperstreamlines* [23] formées par un champ de vecteurs. Ce champ est calculé par combinaison de plusieurs autres champs de vecteurs, chacun représentant des contraintes directionnelles particulières telles que les zones interdites (eau, espaces verts), l'altitude et la densité de population. Ces techniques sont intrinsèquement géométriques, et comme précisé plus haut, le résultat est purement visuel, mais elles représentent une source d'inspiration à ne pas négliger.

L'un des rares modèles gérant à la fois l'évolution du réseau viaire et du bâti est présenté par Weber [24] et n'emploie pas d'automate cellulaire. Le principe est le suivant : à chaque agrandissement du réseau urbain, on crée plusieurs routes virtuelles en suivant des règles géométriques précises (allongement des voies existantes, limitation du degré des carrefours à 4,

l'angle entre chaque rue tend vers 90 degrés). Parmi les  $n$  routes générées, une seule sera construite. Pour la choisir, le trafic sur ces nouvelles routes est simulé par des agents piétons et véhicules et l'on identifie celle qui sera la plus bénéfique au réseau.

## 3 Le modèle

### 3.1 Structure

Les automates cellulaires sont des structures versatiles et puissantes dont le formalisme originel impose néanmoins quelques limitations ; l'une des principales étant, à nos yeux, un maillage régulier et statique. Pour répondre à notre problématique, il est nécessaire d'employer une structure respectant les critères suivants :

1. Elle doit partitionner l'espace, possiblement de façon irrégulière ;
2. Des relations de voisinages pourront être déduites de sa topologie ;
3. Elle doit pouvoir représenter à la fois la parcellisation du territoire et le réseau routier.

Le diagramme de Voronoï est un candidat idéal. Sa constitution est intrinsèquement spatiale puisqu'il s'agit d'un partitionnement axé autour de points spéciaux, les générateurs, chacun possédant une cellule contenant tous les points plus proches de ce générateur que de tout autre. Autrement dit, la distance séparant un point  $p$  placé dans une cellule de Voronoï et le générateur de cette même cellule est inférieure à la distance séparant  $p$  de tous les autres générateurs [25]. La figure 4 fournit un exemple de diagramme de Voronoï et on remarque que, naturellement, deux générateurs voisins sont équidistants de l'arête les séparant et le segment les reliant y est perpendiculaire. DEFINITION PLUS FORMELLE ?

Les diagrammes de Voronoï trouvent de nombreuses applications en science. En robotique, les obstacles présents dans un environnement peuvent être assimilés à des générateurs et un robot cherchant à maximiser leur évitement préférera longer les frontières des cellules (les arêtes de Voronoï) [26]. En sociologie géographique, ils permettent d'opposer les zones d'influence de différents éléments urbains et répondent à des questions telles que : quel magasin un piéton sera-t-il plus susceptible de visiter selon la zone dans laquelle

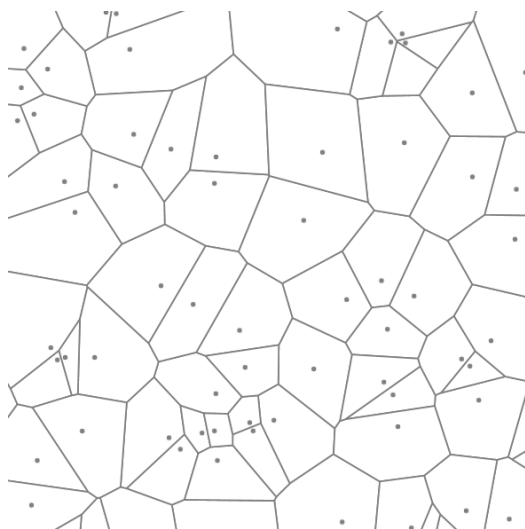


FIGURE 4 – Un diagramme de Voronoï. Chaque point noir est un générateur.

il se trouve? Leur utilisation pour l'étude de l'épidémie de choléra londonienne en 1854 à permis de vérifier le lien entre fontaines publiques infectées (les générateurs) et zones souffrant d'un fort taux de mortalité (les cellules) [27].

Comme son homonymie le laisse présager, la cellule de Voronoï remplace la cellule carrée de l'automate cellulaire. On remarque qu'une grille régulière, comme celles présentes dans les automates cellulaires classiques correspond à un diagramme de Voronoï dans laquelle les générateurs sont alignés et régulièrement disposés. Une tessellation de Voronoï peut être considérée comme une généralisation de la structure grillagée ; notre première contrainte est satisfaite.

À l'échelle de ce modèle, chaque cellule représente une parcelle cadastrale et on utilise comme générateur le centre de son empreinte. Le diagramme permet d'identifier les parcelles voisines comme étant celles partageant une arête de Voronoï. Un graphe de voisinage est ainsi construit, et adopte la forme duale du diagramme de Voronoï : la triangulation de Delaunay. Ce premier graphe décrit le réseau de voisinage mettant en relation les parcelles en contact à partir du diagramme et satisfait donc la seconde contrainte.

Cette structure permet de décrire un canevas urbain de base dans lequel l'espace d'influence de chaque parcelle est décrit mais la composante routière reste encore absente du modèle. Chaque arête de Voronoï indique un espace



entre deux parcelles et est donc susceptible d'accueillir une route. Dans une véritable ville, chaque parcelle n'est pas encerclée de voies et l'un des objectifs de la simulation est de déterminer quelles arêtes accueilleront des routes et lesquelles resteront vides. Le diagramme de Voronoï suffit bien à représenter à la fois les éléments du viaire et du bâti et notre dernière contrainte est comblée.

En réalité, dans ce modèle la ville est représentée par deux graphes et le diagramme de Voronoï est uniquement employé en tant que point de départ. Le premier, le graphe du bâti, a pour nœud les centres des parcelles alors que ses arêtes symbolisent les relations de voisinage. Le second, le graphe viaire, a des arêtes représentant les routes et des nœuds carrefour joignant plusieurs voies. Les structures des graphes viaire et bâti sont donc entièrement fondées sur le diagramme de Voronoï puisqu'il s'agit, respectivement, de l'ensemble des arêtes et sommets de Voronoï et de sa triangulation de Delaunay.

REFORMULER

Il est essentiel de dissocier le polygone convexe qu'est la cellule de Voronoï associée à une parcelle et la véritable empreinte cadastrale de cette dernière. Une cellule représente l'influence d'une parcelle dans l'espace urbain et possède comme seul point commun avec l'empreinte son centre puisqu'il s'agit du générateur de la cellule. Similairement, une arête peut indiquer qu'une voie passe entre deux parcelles sans pour autant fournir ses coordonnées ou sa courbure. Si l'on souhaite, dans un but infographique, générer une image de notre ville à partir de ce modèle, un travail d'interprétation est nécessaire et n'a pas été traité à l'occasion de ce projet. Un exemple est visible sur la figure 5.

## 3.2 Potentialité

Via le terme *potentialité*, on souhaite exprimer l'opposition entre deux types d'éléments : les *potentiels* et les *construits*.

Un élément *construit* est une parcelle ou une voie dont l'existence physique est avérée. Il existe *en dur* et affecte ses alentours. L'ensemble des éléments construits forme la ville (voir figure 6).

Un élément *potentiel* peut être assimilé à une idée germant dans l'esprit de l'urbaniste ; à une possibilité envisagée et représentée de manière intangible. Un élément potentiel est par la suite soit construit, soit ignoré et oublié. Il sert de prévision à court-terme quant à l'avenir de la ville et guide sa morphogénèse. La figure 7 reprend la micro-ville de la figure 6 et laisse apparaître

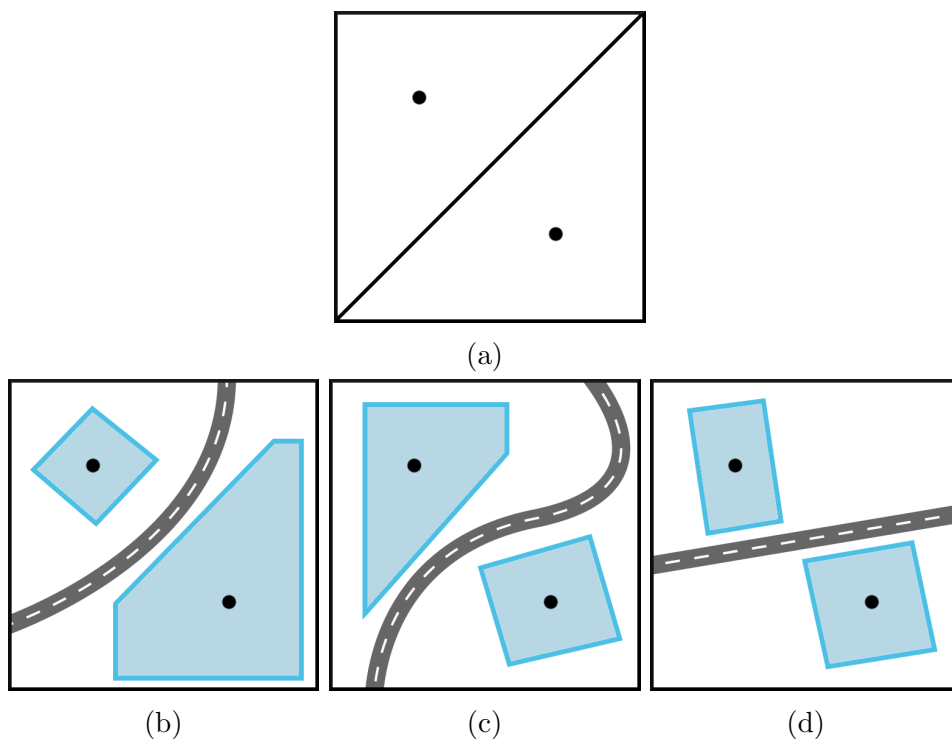


FIGURE 5 – Un diagramme de Voronoï trivial et trois interprétations possibles.

IMAGE

FIGURE 6 – Les éléments construits forment la ville.

voies et parcelles potentielles.

Un élément potentiel, n'étant pas actif au sein de la ville et appartenant uniquement au domaine du prévisionnel, n'a pas d'influence sur les éléments construits. Par contre, la construction de nouveaux éléments peut en dépendre *e.g.* une route peut être construite en conséquence à cette prévision, comme attirée par cette potentielle future installation. Cette dualité dont les relations d'influence sont clairement unidirectionnelles est inspirée du cycle réel d'urbanisation que l'on pourrait grossièrement décomposer en ces

IMAGE A FAIRE

FIGURE 7 – Les éléments potentiels guident la croissance de la ville.

quelques étapes :

1. Un urbaniste prévoit une nouvelle installation en bordure de ville ;
2. Cette prévision attire la route ;
3. La nouvelle route et l'installation potentielle attirent d'autres installations potentielles.

#### REFORMULER

L'essence du modèle est de placer des éléments potentiels en fonctions de qualités internes au système puis de choisir lesquels véritablement construire. Ce travail a été décomposé en trois mécanismes distincts. ETOFFER

### 3.3 Mécanismes

#### 3.3.1 Automate cellulaire graphe

La dynamique de croissance urbaine est décomposable sur deux axes. La croissance horizontale décrit l'expansion spatiale de la ville dont l'enveloppe grandit pour occuper plus de territoire tandis que la croissance verticale correspond à l'augmentation des densités au sein de la ville, souvent à partir d'un ou de plusieurs centres. Le mécanisme cellulaire présenté ci-après émule la croissance verticale et les variations de densité internes au système.

La densité de population est la quantité principale guidant l'évolution de ce modèle. Même si le mécanisme proposé reste trivialement simple, il guide les autres mécanismes du modèle : le placement de nouvelles parcelles et le choix des routes à construire. La ville évolue, de nouveaux bâtiments apparaissent, d'autres sont rasés, les quartiers changent et le modèle doit être capable de simuler ces changements. C'est bien sûr avec le principe des automates cellulaires en tête que nous allons gérer cette dynamique.

On discrétise la densité sur trois paliers : *faible* ( $f$ ), *moyenne* ( $m$ ) et *élevée* ( $e$ ). L'état d'une parcelle dépend des états de ses voisines. La matrice  $A$  décrit des coefficients d'affinité mettant en relation les différentes densités.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} f & m & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} f \\ m \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0.01 & 0 \\ 0.001 & 1.5 & 0.01 \\ 0 & 0.01 & 1.6 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (1)$$

Une valeur haute en  $A_{ee}$  signifie par exemple que si une cellule a de nombreux voisins de densité *élevée* alors elle a une grande probabilité de

devenir elle-même *élevée*. L'équation 2 permet de formaliser ce principe et fournit un score  $T_i(C)$  quantifiant l'éventualité pour une cellule  $C$  de passer à l'état  $i$ .  $V_k(C)$  correspond au nombre de voisins de  $C$  ayant l'état  $k$ .

$$T_i(C) = \sum_{k \in \{f, m, e\}} V_k(C) E_{ik} \quad (2)$$

Finalement et pour obtenir la véritable probabilité de passage d'un état à un autre, on normalise chaque score de transition et une roue de la fortune biaisée se charge du choix.

$$P_i(C) = \frac{T_i(C)}{\sum_{k \in \{f, m, e\}} T_k(C)} \quad (3)$$

Imaginons un exemple trivial pour illustrer ce processus. On souhaite calculer l'état que prendra la cellule  $C$ , au centre du quadrillage de la figure 8. On commence par calculer les scores de transition en fonction du voisinage de  $C$ .

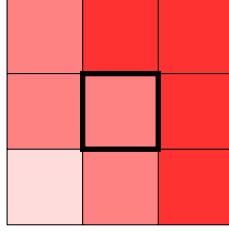


FIGURE 8 – On cherche à calculer les probabilités transitionnelles pour la cellule centrale,  $C$ .

$$\begin{aligned} T_f(C) &= V_f(C)A_{ff} + V_m(C)A_{fm} + V_e(C)A_{fe} \\ &= 1 \times 1 + 3 \times 0.01 + 4 \times 0 \\ &= 1.03 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_m(C) &= V_f(C)A_{mf} + V_m(C)A_{mm} + V_e(C)A_{me} \\ &= 1 \times 0.001 + 3 \times 1.5 + 4 \times 0.01 \\ &= 4.541 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_e(C) &= V_f(C)A_{ef} + V_m(C)A_{em} + V_e(C)A_{ee} \\
&= 1 \times 0 + 3 \times 0.01 + 4 \times 1.6 \\
&= 6.7
\end{aligned}$$

On normalise ensuite les scores afin de sélectionner aléatoirement – mais de façon biaisée – le prochain état de  $C$ . Ici, on observe que la cellule a de fortes chances de passer à la densité *élevée*.

$$\begin{aligned}
P_f(C) &= \frac{T_f(C)}{\sum_{k \in \{f,m,e\}} T_k(C)} = \frac{1.03}{1.03 + 4.541 + 6.7} = 0.084 \\
P_m(C) &= \frac{T_m(C)}{\sum_{k \in \{f,m,e\}} T_k(C)} = \frac{4.541}{1.03 + 4.541 + 6.7} = 0.37 \\
P_e(C) &= \frac{T_e(C)}{\sum_{k \in \{f,m,e\}} T_k(C)} = \frac{6.7}{1.03 + 4.541 + 6.7} = 0.546
\end{aligned}$$

Ce processus d'attraction évoque le modèle de ségrégation de Schelling à la différence qu'ici trois types de *population* interagissent et qu'il n'y a pas de contrainte de déménagement (dans son modèle, si une cellule passe de  $A$  à  $B$  alors une autre doit passer de  $B$  à  $A$  afin de conserver les mêmes quantités de chaque type). Ainsi un dégradé discret de densité apparaît comme dans une ville réelle.

On commence par appliquer cette règle à un automate cellulaire classique (voir figure 9). On remarque deux problèmes. Premièrement, l'état de l'automate change drastiquement en juste quelques itérations : au temps 25, la disposition de départ n'est déjà plus discernable. Hors, la granularité temporelle d'une telle simulation doit être fine afin de pouvoir prendre en compte chaque modification locale du système afin qu'elle puisse se répercuter sur le reste de l'automate. Deuxièmement, on observe d'itération en itération que chaque cellule voit son état changer en permanence – ce qui est normal pour un automate cellulaire auquel on n'a pas adjoint de règle supplémentaire. Il est donc important d'associer à chaque cellule un élan favorisant la persistance de son état selon son âge afin de ralentir la simulation et surtout d'éviter les transitions constantes qui ne sont absolument pas fidèles à la stabilité d'une ville réelle. Les fonctions sigmoïdes, fréquemment employées en modélisation de systèmes complexes, sont idéales pour exprimer en fonction du temps une variation subissant un élan de croissance en milieu de

parcours. La sigmoïde classique (figure 10) varie de 0 à 1 par une courbe caractéristique. On l'altère comme il est visible sur la figure 11 pour obtenir une fonction associant une probabilité de changement d'état en fonction de l'âge de la cellule considérée. Le facteur 0.02 permet d'adoucir la pente de la fonction autour de 0 tandis que 350 sert à la décaler  $f(x)$  de façon à pouvoir l'utiliser dans le domaine positif.

AJOUTER LEGENDE SUR FIG SIGMOIDES

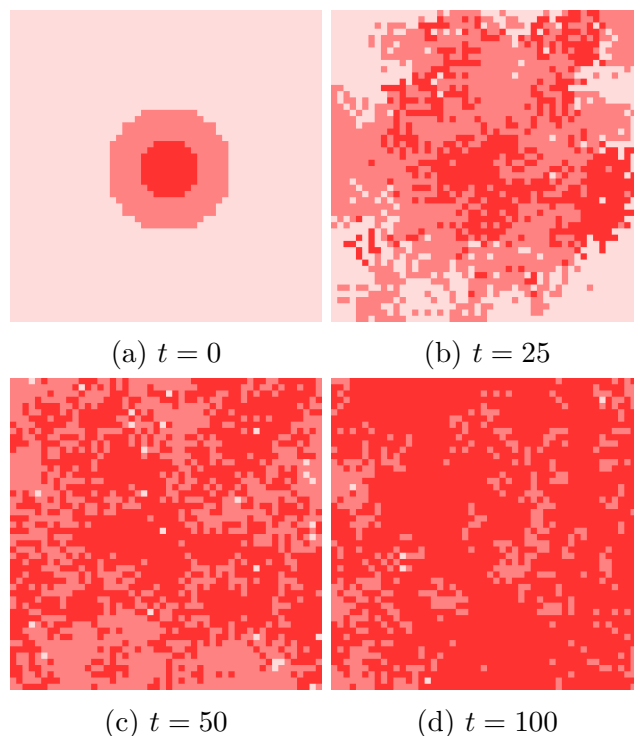
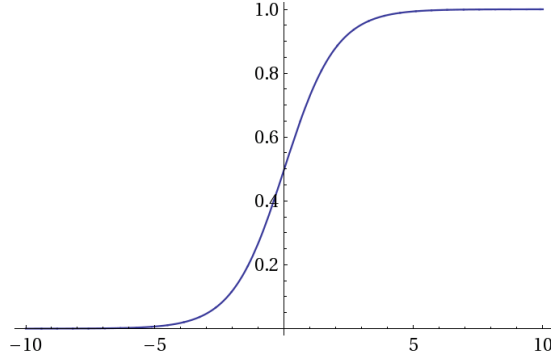


FIGURE 9 – Quatre configurations de l'automate cellulaire. On y retrouve peu de similarités et les changements sont trop rapides.

La figure 14 montre un automate cellulaire doté des mêmes règles de transition et de la même configuration de départ mais pour lequel l'âge des cellules est pris en compte.

Les exemples précédents permettent d'illustrer les règles de transition et met en évidence le problème de stabilité mais le principe même de cet exposé est de se détacher de la régularité spatiale contraignante des automates cellulaires et c'est à cet effet que l'on a présenté le diagramme de Voronoï.

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$



(a)

(b)

FIGURE 10 – Sigmoide classique.

À la manière des automates cellulaires graphes de O’Sullivan [16], chaque parcelle verra son état varier en fonction de son voisinage. Voisinage établi à partir de la topologie du diagramme de Voronoï, lui-même issu des positions des centres des parcelles. Il est à noter qu’à la différence de O’Sullivan, la couverture de l’espace est totale puisque l’on ne représente pas les parcelles exactes mais leur cellule de Voronoï et il est donc impossible que des zones vides apparaissent entre les cellules.

Le *graphe du bâti* prend ici la forme duale du diagramme de Voronoï : la triangulation de Delaunay et décrit les relations de voisinage. Un nœud correspond au centre d’une parcelle et une arête lie deux parcelles en tant que voisins.

Plus la simulation avance et plus le système est chargé de parcelles à haute densité. Un lecteur averti pourrait argumenter que ce comportement est bien différent d’une situation réelle : quel que soit le taux de croissance d’une ville, elle ne finit jamais entièrement remplie de grands immeubles (pour simplifier). Mais il faut garder à l’esprit que le mécanisme présenté dans cette section ne gère que la croissance verticale. Par la suite, la croissance horizontale de la ville modifiera et étendra sa structure de façon à ce que les parcelles en bordures soient plus modestes.

La problématique étant d’étudier la coévolution de deux aspects urbains, le viaire et le bâti, et non seulement l’évolution des densités (qui ne sert que de support à l’essor de la ville), on a préféré choisir une règle basique. il est

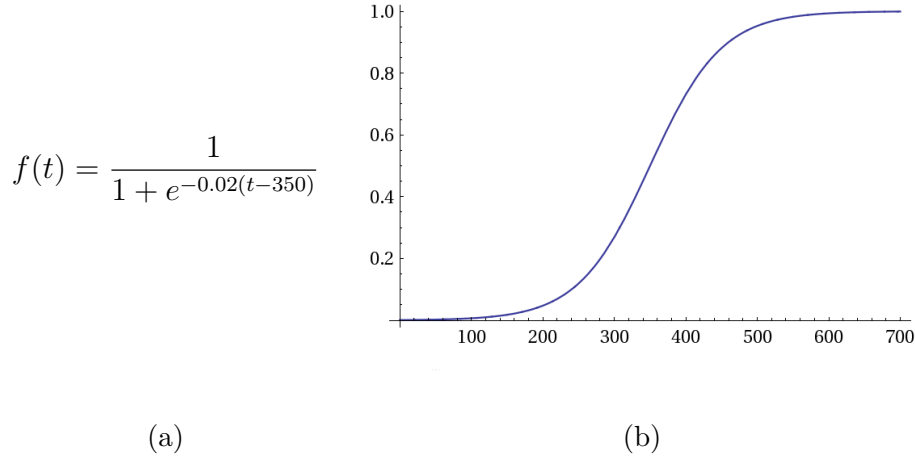


FIGURE 11 – Probabilité de changement d'état en fonction du temps.

néanmoins tout à fait possible d'utiliser par la suite un automate cellulaire plus sophistiqué pour améliorer le réalisme de la simulation. On pourrait, par exemple, prendre en compte les valeurs financières des parcelles ou les classes sociales des habitants.

### 3.3.2 Placement des éléments potentiels

Le second mécanisme place de nouvelles parcelles en bordure de la ville et est ainsi responsable de sa croissance horizontale.

Les nouvelles parcelles placées bénéficient néanmoins d'un statut spécial car elles sont considérées comme *potentielles* et se démarquent des parcelles *construites* par leur impact sur l'évolution du système :

- L'état d'une parcelle potentielle dépend de toutes ses voisines ;
- Une parcelle potentielle n'influence pas l'état des parcelles voisines construites ;
- Une parcelle potentielle peut accueillir des routes sur ses arêtes.

Cette influence unidirectionnelle dans le mécanisme cellulaire permet à la parcelle potentielle d'être prête et accordée à son environnement proche si elle est construite par la suite sans pour autant que les parcelles déjà construites ne soient influencées par une parcelle n'existant pas encore et étant en réalité intangible.

En quelques mots, le placement se déroule comme suit :



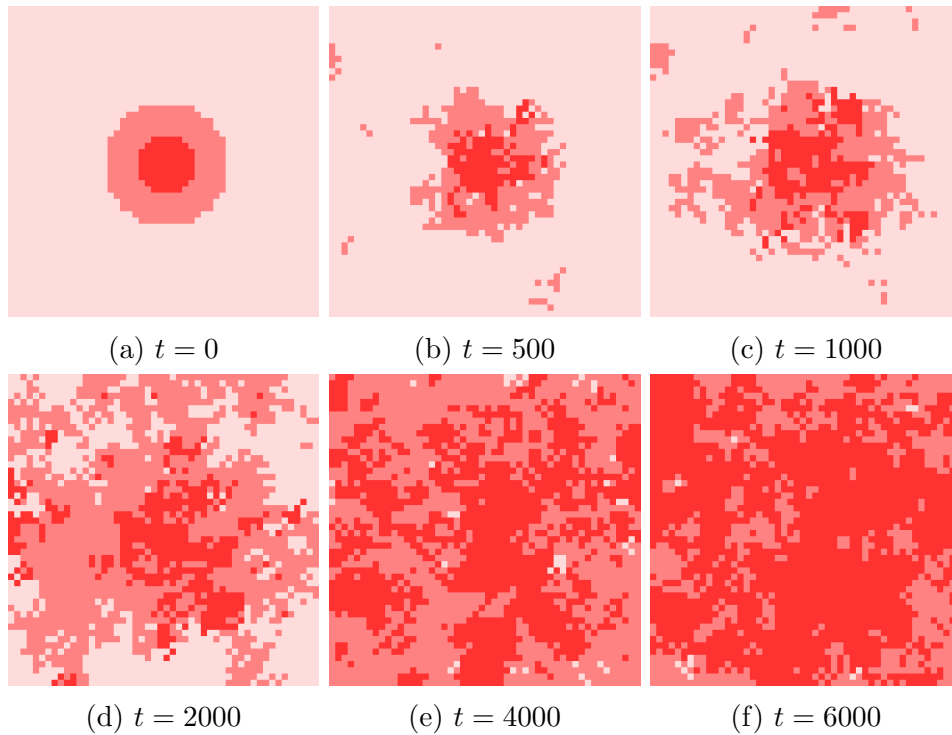


FIGURE 12 – Six configurations de l’automate cellulaire stabilisé.

1. On détermine les centres de la ville en fonction de la densité
2. On dépose sur un des centres une *graine* mobile qui servira de centre à la nouvelle parcelle ;
3. La graine se déplace sous l’influence des variables inhérentes à la ville ;
4. Quand la graine stoppe son mouvement, on y crée la parcelle.

#### CENTRES ?

Le déplacement de la graine est un processus pouvant potentiellement prendre en compte de nombreuses variables. Dans la simulation d’exemple que l’on décrit, seules la densité et le placement des routes peuvent guider la graine, car ce sont les seules données considérées. Cependant, on souhaite que le modèle soit extensible et qu’il soit capable de supporter d’autres variables et contraintes : la valeur des sols par exemple, ou bien la pente des zones envisagées ou l’impossibilité de s’installer sur certains types de terrain (forêts, plans d’eau). De cette idée de graine se déplaçant en fonction d’influences diverses transpire un véritable aspect physique.

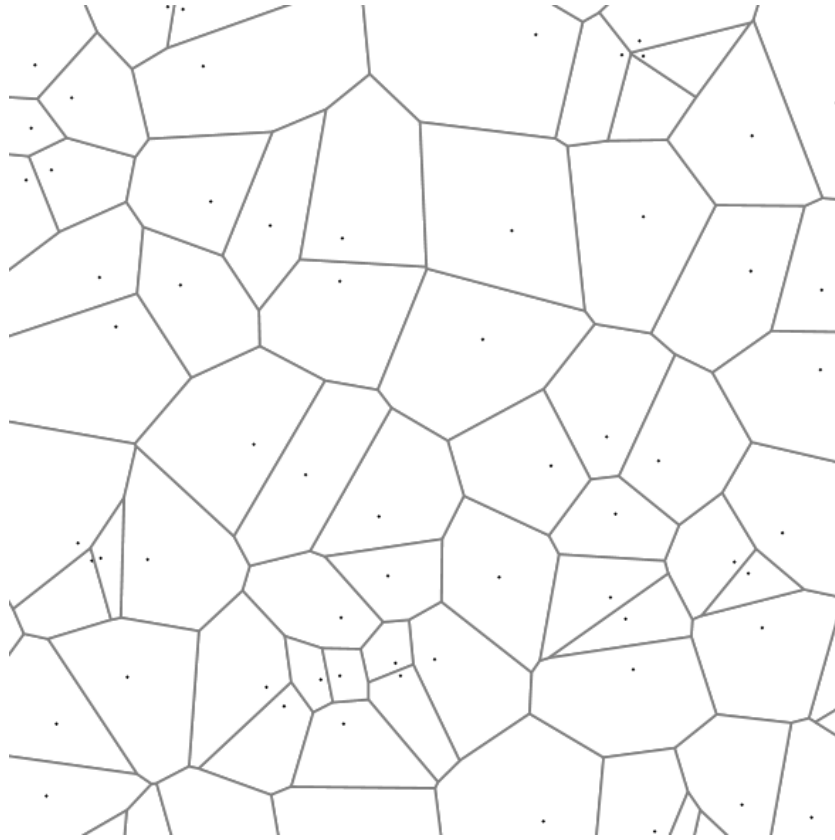


FIGURE 13

Pour rester en accord avec cet aspect physique on emploie un champ de vecteurs généré à partir de l'état du système urbain pour guider la graine vers sa destination. Puisque de nombreux paramètres sont à prendre en compte, on utilise un champ de vecteurs par paramètre que l'on souhaite exprimer puis on les combine, ce qui permet de pondérer l'impact de chaque donnée.

On veut évidemment que la densité soit prise en compte dans ce placement. Dans une ville, les nouvelles installations ont principalement tendance à se répartir sur les frontières de l'enveloppe urbaine et à s'éloigner des centres, non pas par animosité envers l'activité du centre-ville mais simplement par manque d'espace. Pour traduire ce phénomène dans le modèle, un premier champ fait donc pointer chacun de ses vecteurs vers la parcelle disposant de la plus faible densité parmi les voisines de la parcelle sur laquelle il est posé.

Il est naturel que les parcelles potentielles soient placées près des installa-

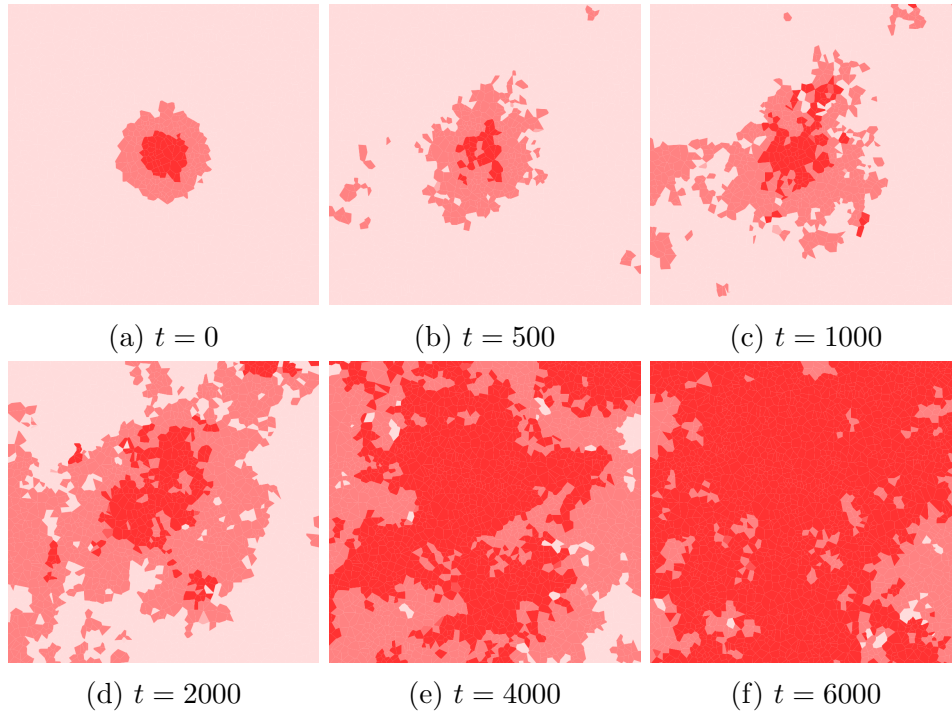


FIGURE 14 – Six configurations du diagramme du diagramme de Voronoï cellulaire.

tions routières existantes. À cet effet, on ajoute un champ pour lequel chaque vecteur pointe vers la route construite la plus proche.

Les nouvelles parcelles ne sont pas uniquement disposés en fonction de variables internes à la ville car, souvent, l'environnement impose des restrictions quand à la direction que l'expansion d'une ville va prendre. Parmi ces contraintes, on pense aux zones non constructibles comme les plans d'eau, les forêts mais aussi aux fortes pentes. Le champ de vecteur étant dédié à l'évitement de telles zones guident vers leur bordure mais, hors de leur aire, l'influence est nulle.

PATTERN ?

$$I(x, y) = \alpha I_d(x, y) + \beta I_r(x, y) + \gamma I_o(x, y) + \dots$$

Les champs de vecteurs décrit ci-dessus servent uniquement d'illustrations et la généralité du concept de ce mécanisme permet à l'utilisateur du modèle d'employer les données qu'il juge nécessaires afin de mettre en avant certaines

(a) (b)

FIGURE 15 – Le champ de vecteurs densitaire guide les nouvelles parcelles vers l’extérieur de la ville.

(a) (b)

FIGURE 16 – Le champ de vecteurs viaire guide les nouvelles parcelles vers les routes construites.

caractéristiques d’un système urbain.

DEPLACEMENT. VITESSE. ARRET.

### 3.3.3 Construction des éléments potentiels

ROUTES

PARCELLES

## 4 Construction

Notre système urbain est décrit sur deux niveaux ; plus précisément, par deux graphes. On distingue le graphe parcellaire du graphe viaire car, bien qu’ils soient étroitement liés, ils représentent des couches différentes du réseau urbain. Leur topologie est directement issue du diagramme de Voronoï et l’on décrit dans cette section les problématiques pratiques rencontrées lors de la transition de cette structure spatiale de base aux structures relationnelles que sont les graphes.

### 4.1 Le graphe parcellaire

REFORMULER TOUT, PAS CLAIR.

Le graphe parcellaire correspond à la couche bâti. Ses nœuds sont les centres des parcelles et chacune de ses arêtes représente une relation de voisinage entre deux parcelles. Un diagramme de Voronoï est nécessaire à la construction de ce graphe. Les seules données dont l’on a besoin en entrée sont donc les positions centrales des parcelles. Ces coordonnées peuvent être extraites de fichiers d’informations géographiques mais dans un premier temps,

(a) (b)

FIGURE 17 – Le champ de vecteurs des obstacles évite que de nouvelles parcelles soient placées sur des zones interdites.

(a) (b)

FIGURE 18 – Le champ de vecteurs final est la somme pondérée de tous les autres champs d'influences.

et dans un but illustratif, on se cantonne à utiliser des positions aléatoirement choisies.

La librairie Java JTS [28] est spécialisée dans les traitements géométriques et permet notamment de générer un diagramme de Voronoï à partir d'une liste de points. Le résultat d'un tel traitement prend la forme d'un ensemble de polygones, chacun représentant une cellule de Voronoï, mais aucune autre information, notamment d'adjacence, n'est fournie. Une fois le graphe parcellaire peuplé par des nœuds positionnés aux coordonnées des centres fournies plus tôt, il reste donc à calculer les relations de voisinage et à ajouter les arêtes.

Puisque l'on ne dispose que des polygones formant le diagramme de Voronoï et des positions de leur centroïdes, on procède par l'utilisation de tests géométriques. Naturellement, si deux cellules sont en contact – si elle partagent une arête – alors on relie les deux nœuds du graphe leur étant associés.



FIGURE 19



FIGURE 20



FIGURE 21



FIGURE 22

## 4.2 Le graphe viaire

Le graphe viaire correspond à la couche routière. Ses nœuds sont des carrefours, aux croisements des parcelles, et ses arête des voies. En pratique, pour différencier les routes potentielles des routes construites, on attribue une étiquette spéciale à ces dernières.

Dans un premier temps, il nous faut déterminer les positions des croisements qui feront office de nœuds dans le graphe viaire. Cette phase est basée sur l'analyse du graphe parcellaire construit plus tôt. Puisqu'une route entre deux bâtiments peut être définie par une arête de Voronoï partagée entre deux parcelles, il est logique d'admettre qu'un croisement corresponde à un sommet de Voronoï partagée par deux cellules ou plus. Le but de l'étape décrite est donc de déterminer des groupes de cellules axées autour d'un même sommet pivot.

On remarque que ces clusters de parcelles semblent être des sous-graphes complets maximaux. Dans un premier temps, l'utilisation de l'algorithme de Bron-Kerbosch a été envisagé (et appliqué, inutilement !) mais certains cas particuliers nous laisse entrevoir le fait qu'une contrainte supplémentaire est manquante. En effet, la recherche d'une clique maximale par l'algorithme cité ne prend pas en compte la nécessité que les cellules du cluster partagent un sommet. Sur l'exemple de la figure ???, quatres cellules forment une clique sans pour autant avoir un sommet de Voronoï en commun.

Puisque que l'algorithme de Bron-Kerbosch se révèle inadapté à l'usage que l'on souhaitait en faire, il a été nécessaire de réfléchir à une autre méthode pour déterminer la position des carrefours et, surtout, les parcelles à y associer. Une procédure a donc été mise en place pour détecter ces clusters de parcelles pivotant autout d'un même croisement. L'idée de base est de



FIGURE 23



FIGURE 24

construire tous les groupes de parcelles tels que :

- Toutes les parcelles d'un groupe soient voisines entre elles ;
- Les groupes soient maximaux ;
- Les parcelles d'un groupe aient tous un sommet en commun.

Le dernier critère est la contrainte manquante à la définition des cliques maximales. Concrètement, la construction de toutes ces listes se résume à la construction de tous les cycles BLABLA. Ensuite, ROUTES.

Un désavantage de cette méthode, outre sa complexité algorithmique, est que seules les arêtes partagées par au moins deux parcelles deviennent des routes. Ainsi, on remarque que les arêtes délimitant la bordure de la ville (celles à l'extérieur du diagramme de Voronoï) sont absentes. Il semble pourtant nécessaire que toutes les arêtes du diagramme deviennent de potentielles voies car, dans notre modèle, la route est le support du bâti. Et si aucune route ne peut se construire à la bordure de la ville, aucun bâtiment ne s'y installera et la ville ne grandira jamais.

Une solution MAIS

Finalement, nous nous sommes tournés vers une solution plus claire, plus



simple et permettant de transformer en routes potentielles toutes les arêtes sans exception : la construction puis la fusion de sous-réseaux routiers. Dans le cadre de la tentative précédente, chaque carrefour était identifié et placé dans le graphe viaire sous la forme d'un nœud mais la phase de placement des routes (la liaison des nœuds par des arêtes) se faisaient une fois tous les croisements placés. Il est clairement plus simple de créer pour chaque parcelle un sous-réseau routier composé de ses propres sommets et de les relier immédiatement. Une fois tous ces petits graphes créés on les fusionnent tous en prenant comme critère d'identification des sommets leur position. On obtient au final un réseau routier complet duquel aucune arête ne manque.

IMAGE

### 4.3 Aspect dynamique

La finalité de cet exercice n'est pas seulement de faire évoluer l'automate cellulaire irrégulier que forme cette structure mais aussi de lui permettre de se transformer au cours du temps, de s'étendre par morphogenèse. INSERTION, DELETION

## 5 Mesures

HEUUUUUUUU...  
 DEGRE DES CARREFOURS  
 ELOIGNEMENT DE LA DENSITE PAR RAPPORT AU CENTRE GEOMETRIQUE  
 ELOIGNEMENT DE LA DENSITE PAR RAPPORT AUX CENTRES DENSITAIRES  
 TAILLE DES PARCELLES ? (BIAIS AU BORD)  
 ACCESSIBILITE ?  
 DIAMETRE ?  
 CENTRALITE ?

## 6 Conclusion

RESUME  
 CONSTAT

## Références

- [1] Martin GARDNER. “The fantastic combinations of John Conway’s new solitaire game ”life””. Dans : *Scientific American* 223 (1970).
- [2] Niloy GANGULY et al. *A Survey on Cellular Automata*. Rap. tech. 2003.
- [3] U. FRISCH, B. HASSLACHER et Y. POMEAU. “Lattice-gas Automata for the Navier-Stokes equation”. Dans : *Physical Review Letters* 56 (1986).
- [4] A.R. KANSAL et al. “Cellular automaton of idealized brain tumor growth dynamics”. Dans : *BioSystems* 55 (2000).
- [5] Waldo TOBLER. *Cellular Geography*. Rap. tech. International Institute for Applied Systems Analysis, 1975.
- [6] S.C. FU et George MILNE. “Epidemic modelling using cellular automata”. Dans : *Proc. of the Australian Conference on Artificial Life*. 2003.
- [7] Thomas C. SCHELLING. “Models of segregation”. Dans : *The American Economic Review* 59 (1969).
- [8] Anthony Gar-On YEH et Xia LI. “Urban simulation using neural networks and cellular automata for land use planning”. Dans : *Symposium on Geospatial Theory, Processing and Applications*. 2002.
- [9] Paul M. TORRENS et David O’SULLIVAN. “Cellular automata and urban simulation : where do we go from here?” Dans : *Environment and Planning B : Planning and Design* 28 (2001).
- [10] Roger WHITE. “Cities and cellular automata”. Dans : *Discrete Dynamics in Nature and Society* 2 (1997).
- [11] Lucien BENGUIGUI, Daniel CZALANSKI et Rafael ROTH. “Modeling cities in 3D : a cellular automaton approach”. Dans : *Environment and Planning B : Planning and Design* 3 (2004).
- [12] Jeremy CORNU et Adrien DELCOURT. *Simulation de la dynamique spatiale urbaine par automate cellulaires*. 2008.

- [13] Tom LECHNER, Seth TISUE et Andy MODDRELL. *Procedural Modeling of Urban Land Use*. Rap. tech. Department of Computer Science, North Carolina State University, 2007.
- [14] Edwige DUBOS-PAILLARD, Yves GUERMOND et Patrice LANGLOIS. “Analyse de l’évolution urbaine par automate cellulaire : le modèle SpaCelle”. Dans : *L’Espace géographique* 32 (2003).
- [15] Ferdinando SEMBOLONI. “The dynamic of an urban cellular automata in a 3-D spatial pattern”. Dans : *XXI National Conference Aisre, Regional and Urban Growth in a Global Market*. 2000.
- [16] David O’SULLIVAN. “Graph-based Cellular Automaton Models of Urban Spatial Processes”. Thèse de doct. Bartlett School of Architecture et Planning, University College London, 2000.
- [17] David O’SULLIVAN. “Exploring Spatial Process Dynamics Using Irregular Cellular Automaton Models”. Dans : 33.1 (2001).
- [18] P. QUELOZ, B. CHOPARD et Luthi P. O. “Cellular automata model of car traffic in a two-dimensional street network”. Dans : *Journal of Physics A : Mathematical and General* 29 (1996).
- [19] Thomas LECHNER et al. “Procedural City Modeling”. Dans : *1st Mid-western Graphics Conference*. 2003.
- [20] Thomas LECHNER et al. *Procedural Modeling of Land Use in Cities*. Rap. tech. Computer Science Department, Northwestern University, 2004.
- [21] George KELLY et Hugh MCCABE. “Citygen : An Interactive System for Procedural City Generation”. Dans : *Game Design & Technology Workshop*. 2006.
- [22] Yoav I. H. PARISH et Pascal MÜLLER. “Procedural Modeling of Cities”. Dans : *SIGGRAPH ’01*. 2001.
- [23] Guoning CHEN et al. “Interactive Procedural Street Modeling”. Dans : *SIGGRAPH ’08*. 2008.
- [24] Basil WEBER et al. “Interactive Geometric Simulation of 4D Cities”. Dans : *Eurographics*. 2009.
- [25] Geoffrey EDWARDS. “The Voronoi Model and Cultural Space : Applications to the Social Sciences and Humanities”. Dans : *COSIT*. 1993.

- [26] Santiago GARRIDO et al. “Path Planning for Mobile Robot Navigation using Voronoi Diagram and Fast Marching”. Dans : *IROS*. 2006.
- [27] Rachel THOMAS. *Uncovering the cause of cholera*. <http://plus.maths.org/content/uncovering-cause-cholera>. 2010.
- [28] *JTS Topolgy Suite*. <http://www.vividsolutions.com/jts>. par Vivid Solutions.