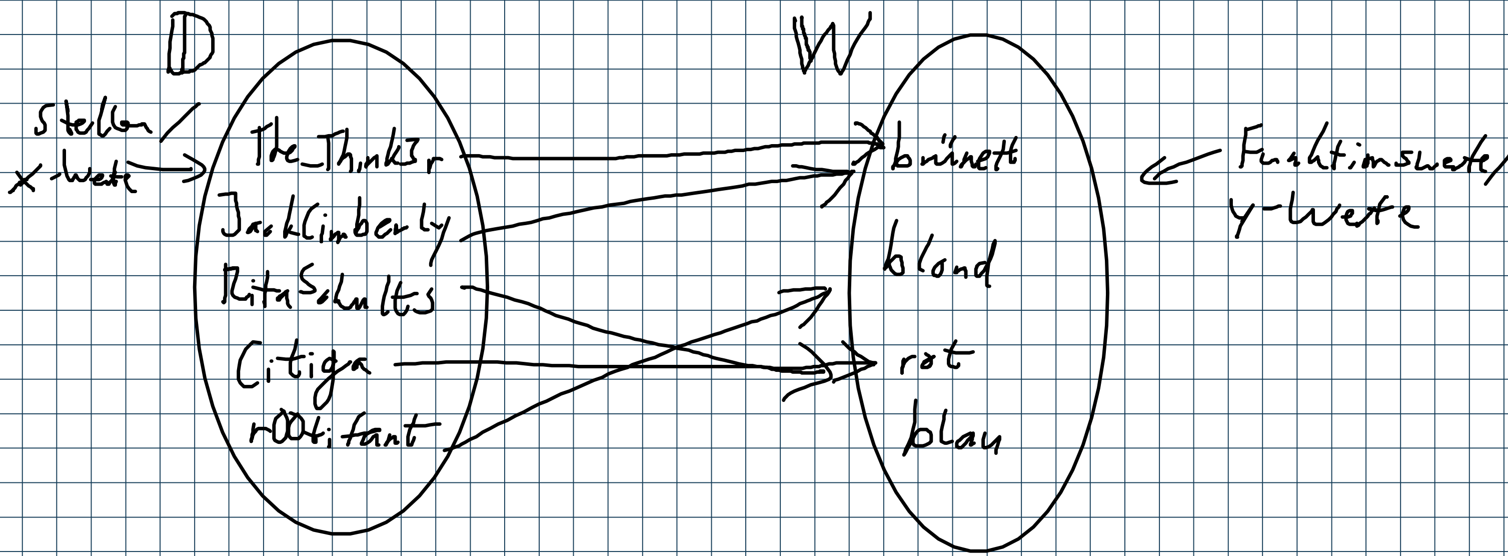
Eine Funktion ist eine Zuordnung, die jedem Element aus der Definitionsmenge (Definitionsbereich) genau ein Element aus der Wertemenge (Wertebereich) zuordnet.



$\underbrace{f(\text{JackCimberly})} = \text{brünett}$

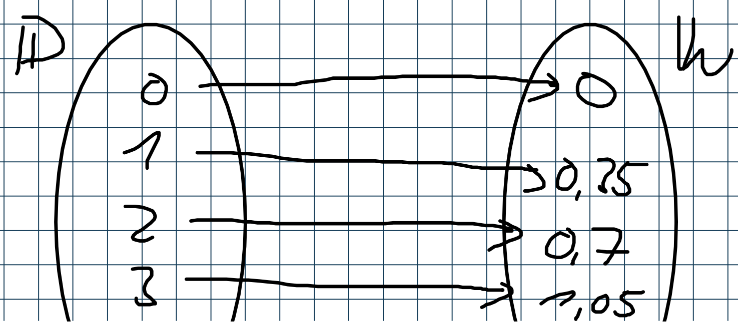
„f von JackCimberly"

$\hat{=}$ der Funktionswert, der zur Stelle JackCimberly gehört

x-Wert (= Element aus $\mathbb{D}$)

y-Wert (= Element aus $\mathbb{W}$)

Bsp.: Sei f die Funktion, die der Anzahl der gekauften Brötchen ihren Gesamtpreis zuordnet (1 Brötchen $\hat{=}$ 0,35 €, keine Rabatte)



2 → 0,7

3 → 1,05

⋮ ⋮

n → 0,35 · n

$f(x) = 0{,}35x$ ← Funktionsgleichung

x: Anzahl Brötchen

$f(x)$: Preis

$0{,}35x$ ← Funktionsterm

ges.: Preis (y) Anzahl (x)

Bsp. Wie teuer sind 10 Brötchen?

$$f(10) = 0{,}35 \cdot 10 = \underline{\underline{3{,}50\ €}}$$

ges.: Anzahl (x)

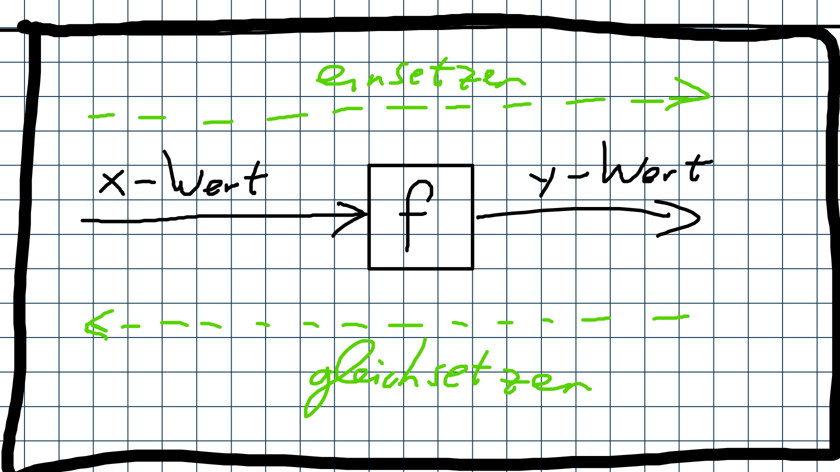
Bsp. Wie viele Brötchen bekommt man für $\underbrace{7\ €}_{\text{Preis (y)}}$?

$$f(x) \overset{!}{=} 7$$

$$0{,}35x = 7 \quad | : 0{,}35$$

$$0{,}35x : 0{,}35 = 7 : 0{,}35$$

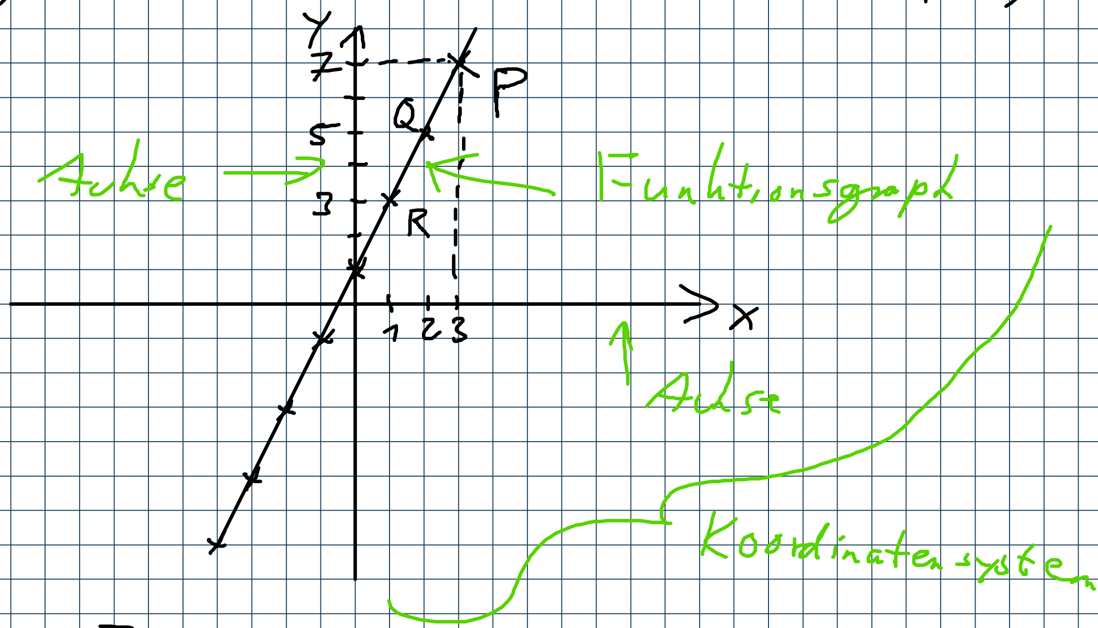
$$\underline{\underline{x = 20}}$$



Bsp.: $f(x) = 2x + 1$

Welcher $\underset{y}{\text{Funktionswert}}$ gehört zur $\underset{x}{\text{Stelle}}$ $x = 3$?

$f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ $\qquad P(3|7)$



$f(3) = 7$

$f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5 \Rightarrow Q(2|5)$

$f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \Rightarrow R(1|3)$

$f(-1) = \underbrace{2 \cdot (-1)}_{-2} + 1 = -1$

Name	Formel	Bsp..
Lineare Funktion	$f(x) = mx + b$	$f(x) = 2x + 1$ m b $f(x) = x - 3$ $m = 1$ $b = -3$
Quadratische Fkt	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f(x) = 2x^2 + x - 5$ Koeffizienten (Vorfaktoren)
Polynomfunktion/ ganzrationale Fkt	$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + .. + a_1 x + a_0$	

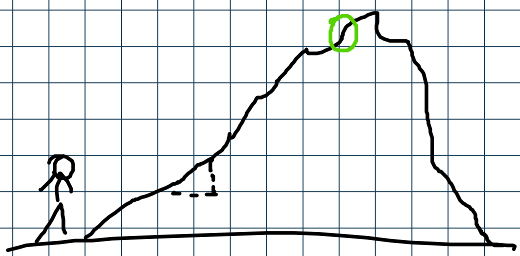
Bsp.. $f(x) = 2x^7 - 3x^2 + x$

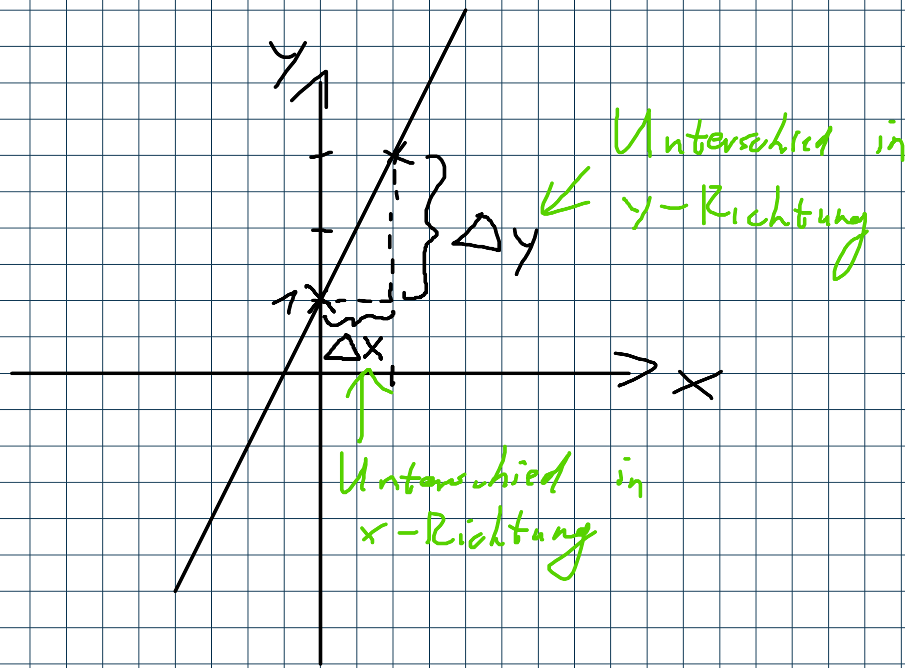
ganzrationale Funktion
7 Grades

Was bedeutet Steigung?

Montag, 13. September 2021 18:29

$$f(x) = 2x + 1$$





Steigung: $\boxed{m = \frac{\text{Höhenunterschied}}{\text{Längenunterschied}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$

Also: $f(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Steigung}}}{2}x + 1$

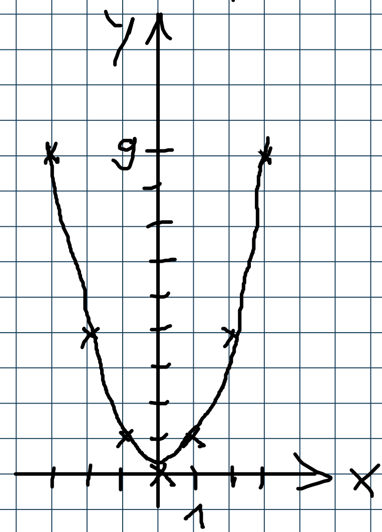
Wie groß ist die Steigung einer Kurve an einer bestimmten Stelle?

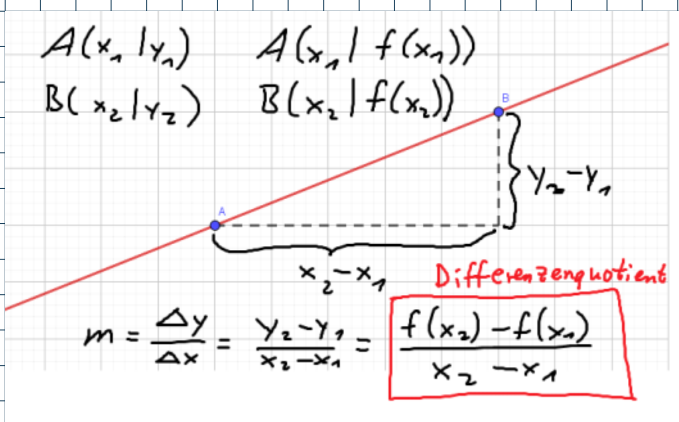
Montag, 13. September 2021 19:02

<u>Bsp.</u> $f(x) = x^2$ (Normalparabel)

Wertetabelle:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9





$x_1 = 1$

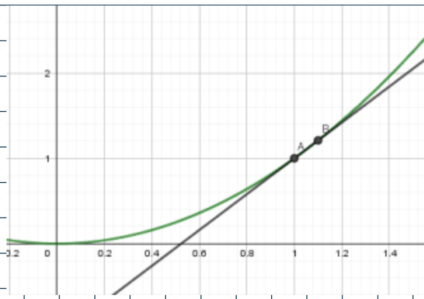
$x_2 = 1$

$$m = \frac{f(1) - f(1)}{1 - 1} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

Geht nicht!
(nicht definiert)

$x_1 = 1$

$x_2 = 1{,}1$



$f(x) = x^2$

$$m_s = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(1{,}1) - f(1)}{1{,}1 - 1}$$

$$= \frac{1{,}21 - 1}{1{,}1 - 1} = \frac{0{,}21}{0{,}1} = \underline{\underline{2{,}1}}$$

$$m_t = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Grenzwert

$f(x) = x^2$

$x_1 = 1$

$$m_t = \lim_{x_2 \to 1} \frac{f(x_2) - f(1)}{x_2 - 1}$$

$$= \lim_{x_2 \to 1} \frac{x_2^2 - 1}{x_2 - 1} \quad a^2 - b^2$$

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$= \lim_{x_2 \to 1} \frac{\overbrace{(x_2 + 1)}^{(a+b)} \overbrace{\cancel{(x_2 - 1)}}^{(a-b)}}{\cancel{x_2 - 1}}$$

$$= \lim_{x_2 \to 1} (\underbrace{x_2}_{\to 1} + 1)$$

$$= 2$$

Wie groß ist die Steigung von $f(x) = x^2$ an der Stelle $x = x_1$?

$$m_t = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \lim_{x_2 \to x_1} \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} \quad a^2 - b^2$$

$$= \lim_{x_2 \to x_1} \frac{(x_2 + x_1)\cancel{(x_2 - x_1)}}{\cancel{x_2 - x_1}}$$

$$= \lim_{x_2 \to x_1} (x_2 + x_1)$$

$$= \underbrace{\lim_{x_2 \to x_1} x_2}_{\to x_1} + \underbrace{\lim_{x_2 \to x_1} x_1}_{= x_1}$$

$$= x_1 + x_1$$

$$= 2x_1 \implies \boxed{m_t = 2x_1}$$

Wie steil ist der Graph von f an den Stellen ..

$x \mid -2 \mid 0 \mid ,5 \mid 77 \mid$

... an den Stellen ..

x	-2	0	5	17	...
Steigung	-4	0	10	34	...

interpertiert als Funktion.

„$f(x) = 2x$"

Def Ableitung $f'(x) = \boxed{\lim_{x_2 \to x} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}}$

Differentialquotient

Alternativ: „h-Methode"

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Bsp.: Wie lautet die Ableitung von $f(x) = 2x^2 - 4x$?

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{2(x+h)^2 - 4(x+h)}^{f(x+h)} - (\overbrace{2x^2 - 4x}^{f(x)})}{\ldots}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)^2 - 4(x+h) - (2x^2 - 4x)}{h}$$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

fällt weg

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2(x^2 + 2xh + h^2) - 4x - 4h - 2x^2 + 4x}{h}$$

fällt weg

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - 4h - 2x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4xh + 2h^2 - 4h}{h}$$

überall mindestens ein h

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\cdot(4x + 2h - 4)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} (\underbrace{4x}_{4x} + \underbrace{2h}_{\to 0} \underbrace{-\,4}_{4})$$

$$= 4x + 2\,0 - 4$$

$$= \underline{\underline{4x - 4}}$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = 2x^2 - 4x$$

$$f'(x) = 4x - 4$$

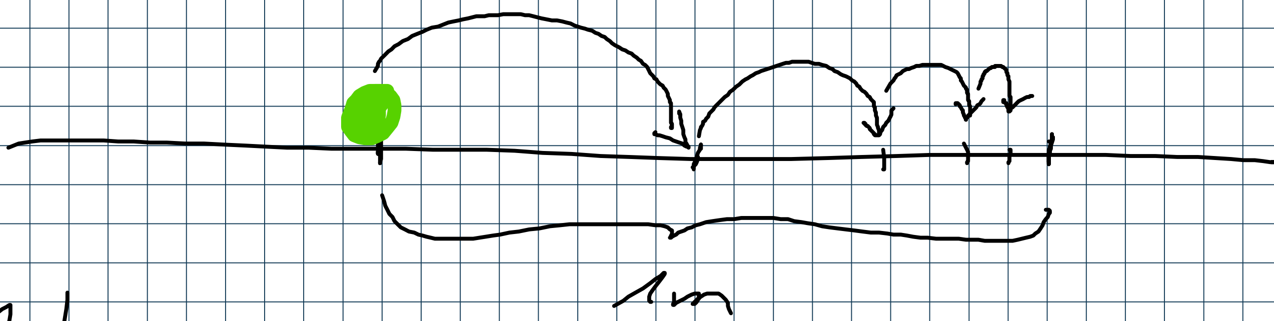
Wie groß ist die Steigung von f an der Stelle $x = 3$?

$$f'(3) = 4 \cdot 3 - 4 = \underline{\underline{8}}$$

Frosch-Gedanken-Experiment

Montag, 13. September 2021 19:43

$$\lim_{n \to \infty} d(n) = 1$$



Geht das nicht mit weniger Aufwand?

Montag, 13. September 2021 20:16

$$f(x) = x^2 \Longrightarrow f'(x) = 2x$$

$$f(x) = 4x^2 + 7x \Longrightarrow f'(x) = 8x + 7$$

$$f(x) = 5x^3 \Longrightarrow f'(x) = 15x^2$$

Wie ist die Ableitung von $f(x) = x^n$?

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{x^n + nx^{n-1}h + \ldots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}^{\text{fällt weg}}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{nx^{n-1}h + \ldots + nxh^{n-1} + h^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}\left(nx^{n-1} + \ldots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\underbrace{nx^{n-1}}_{= nx^{n-1}} + \underbrace{\ldots}_{\to 0} + \underbrace{nxh^{n-2}}_{\to 0} + \underbrace{h^{n-1}}_{\to 0}\right)$$

$= \underline{\underline{n x^{n-1}}}$

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{\text{Potenzregel:}} \quad f(x) = x^n \\ &\qquad\qquad\qquad\quad f'(x) = n x^{n-1} \end{aligned}}$$

Bsp.

$$f(x) = x^{12}$$

$$f'(x) = 12 x^{11}$$

Exkurs: Pascalsche Dreieck

Montag, 13. September 2021 20:20

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \quad n = 2 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \quad n = 3 \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \quad n = 4
\end{array}
$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Potenzregel:

$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

Faktorregel:

$f(x) = a \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = a \cdot g'(x)$

$f(x) = ax^n$

$\Downarrow$

$f'(x) = anx^{n-1}$

Bsp.: $f(x) = 3x^7$

$f'(x) = 21x^6$

Konstantenregel:

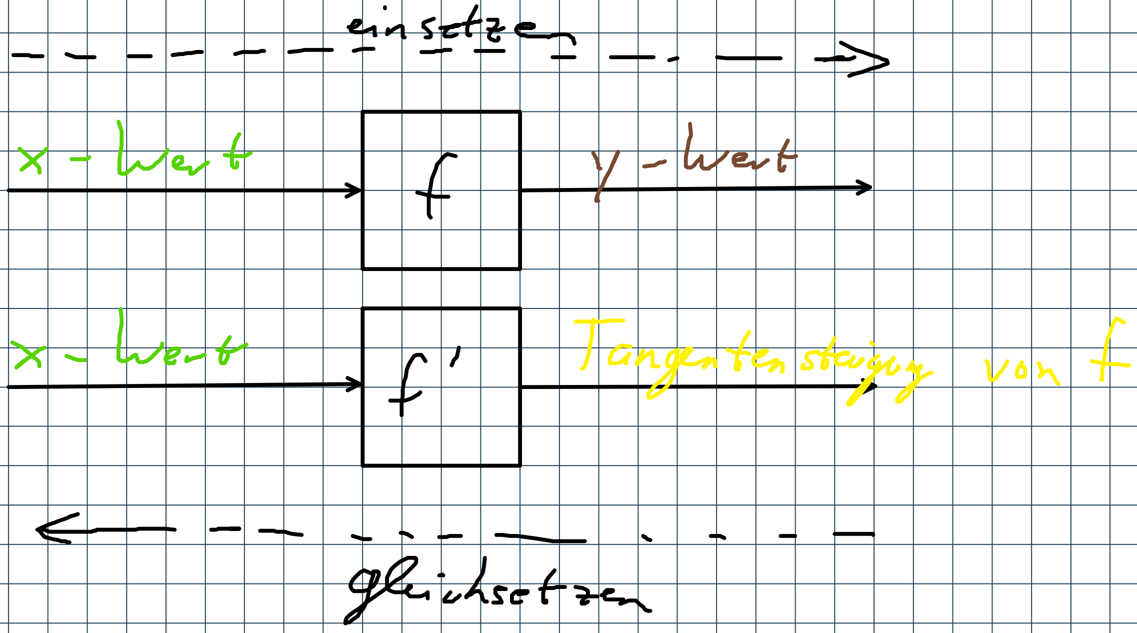
$f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$

Summenregel:

$f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$

Was ist das wichtigste, was wir heute gelernt haben sollten?

Montag, 13. September 2021 20:37



Bsp.: An welchen Stellen hat die Funktion f die Steigung m = 2?

Sei $f(x) = x^3 - 3x$

Lösung: $f'(x) = 3x^2 - 3$

Ansatz $f'(x) \overset{!}{=} 2$

$$3x^2 - 3 = 2 \quad | +3$$

$$3x^2 = 5 \quad | :3$$

$$x^2 = \frac{5}{3} \quad | \sqrt{}$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{5}{3}}$$